

Бесплатно.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОРНЫЙ ИНСТИТУТ им. АРТЕМА



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ПРИМЕНЕНИЮ МЕТОДОВ
И ЗАКОНОВ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКИ К РЕШЕНИЮ
ЗАДАЧ ГОРНОЙ МЕХАНИКИ

Днепропетровск
1980

Министерство высшего и среднего специального
образования УССР

Днепропетровский ордена Трудового Красного Знамени
горный институт им. Артема

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ПРИМЕНЕНИЮ МЕТОДОВ И ЗАКОНОВ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ К РЕШЕНИЮ
ЗАДАЧ ГОРНОЙ МЕХАНИКИ

(Кафедра теоретической и
строительной механики)

Днепропетровск
1980

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика является научной основой современной техники и, в частности, техники для горной промышленности. Горные и транспортные машины обычно работают в тяжелых условиях, обусловленных спецификой горного предприятия, причем, габаритные размеры и вес машины играют немаловажную роль в ее эксплуатационных показателях. Кроме того, нормальным режимом работы горной машины является режим с переменными нагрузками на рабочий орган, что является одной из причин возникновения динамических нагрузок на элементы конструкции машины.

Конструктивной особенностью многих горнодобывающих и горнотранспортных машин является наличие гибких тяговых или несущих элементов большой длины (канаты, ванты, конвейерные ленты). При этом надежность и безопасность работы горнотранспортной машины определяется долговечностью гибких элементов, натяжение которых в процессе эксплуатации может изменяться и, в частном случае, по периодическому закону.

Ниже приводятся методические указания по применению законов и методов теоретической механики к исследованию колебательных процессов в элементах горных машин и определению действительных нагрузок в упругих связях.

Знание действительных нагрузок позволит правильно определить напряжения в элементах машин и выполнить достоверный расчет их на усталостную прочность. Это особенно важно при интенсификации работы машин, что приводит к увеличению их скоростей, ускорений и, следовательно, влечет за собой увеличение дополнительных динамических нагрузок.

Исследование переходных процессов реальных машин обычно выполняется двумя путями: расчетным и экспериментальным. Расчетный метод выполняется в следующей последовательности.

1. Рассмотрение механической системы (конструкции) целиком и отbrasыванием деталей, которые не могут существенно повлиять на количественную сторону изучаемой закономерности, т.е. исследование реальной машины заменяют исследованием динамически эквивалентной, идеализированной схемы. Например, многомассовые упругие системы, представленные на рис. 2а, 2б, 2в могут быть приведены к упрощенным расчетным схемам 2е, 2г, 2д, система "вагон-путь" (рис. 3а) при определении силы удара колеса, по рельсу может быть сведена к двухмассовой упругой системе и т.д.

2. Составление дифференциальных уравнений движения системы, представленной в виде упрощенной расчетной схемы. Для составления дифференциальных уравнений наиболее часто используется принцип Даламбера (I.I) и уравнения Лагранжа II рода (I.II). Если система имеет k степеней свободы, то дифференциальные уравнения движения представляют собой систему k дифференциальных уравнений второго порядка с k неизвестными функциями.

3. Анализ дифференциальных уравнений движения, заключающийся в решении системы уравнений (уравнения), определения закона колебательного движения и максимальных динамических нагрузок в упругих связях машины.

Исследование колебаний упругих тел сводится к решению дифференциальных уравнений в частных производных. Для определения напряжений канатов, вант, лент достаточно знать их частоту собственных колебаний или скорость распространения упругих волн деформации (см. главу II).

Ниже приводится тематика и порядок выполнения курсовых работ с элементами исследований.

1. Изучение динамики шахтной подъемной установки.

В соответствии с [1] расчетная схема на рис. 2в в зависимости от условий задачи приводится к одной из четырех упрощенных эквивалентных схем, представленных на рис. 2д, 2е, 10, которым соответствуют дифференциальные уравнения движения (I.17), (I.20), (2.44). Анализ этих уравнений выполняется с учетом заданных законов изменения внешних моментов M_1, M_2, M_3 . Затем выполняется выбор параметров подъемной установки с учетом критерия в (3.16).

2. Изучение колебательных процессов в приводе горной машины.

Расчетная схема (рис. 2б) приводится к двухмассовой или трехмассовой системам (рис. 2д, 2е). Анализ дифференциальных уравнений движения (I.17) и (I.20) выполняется с учетом заданных законов изменения внешних моментов.

3. Анализ колебаний двухмассовой системы с учетом сил внутреннего трения (I.19).

По заданной величине коэффициента динамичности и выполняется выбор коэффициента рассеивания энергии и закона изменения внешнего момента $M_1(t)$.

4. Изучение явления удара колеса по рельсу и разработка конструктивных мероприятий по уменьшению силы удара.

I. МЕТОДИКА СОСТАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГОРНЫХ МАШИН

I. I. Методы и принципы теоретической механики.

Метод Даламбера

Любая задача динамики может быть сведена к задаче статики, если к активным силам, действующим на систему, и к реакциям связей добавить силы инерции, равные произведениям масс точек системы на соответствующие ускорения, взятые с обратным знаком. Иначе говоря, при движении системы в каждый момент времени силы инерции масс системы, активные силы и силы реакции связей находятся как бы в равновесии.

Этот принцип, в частности, применим к жестким системам. В этом случае необходимым и достаточным условием равновесия является равенство нулю геометрической суммы сил и суммы моментов этих сил относительно произвольной точки O , т.е.

$$\sum_{k=1}^n (-m_k \bar{W}_k + \bar{F}_k + \bar{R}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n m_k (-m_k \bar{W}_k + \bar{F}_k + \bar{R}_k) = 0, \quad (I.1)$$

где $(-m_k \bar{W}_k)$ — сила инерции;

\bar{F}_k, \bar{R}_k — соответственно равнодействующие активных сил и сил реакций связи, действующие на K -ую массу системы.

Для произвольной деформируемой системы принцип Даламбера применяют совместно с принципом возможных перемещений. Полученное таким образом уравнение, известное под названием принципа Даламбера — Лагранжа, имеет вид

$$\sum_{k=1}^n [(m_k \ddot{x}_k - X_k) \delta x_k + (m_k \ddot{y}_k - Y_k) \delta y_k + (m_k \ddot{z}_k - Z_k) \delta z_k] = 0, \quad (I.2)$$

где $\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k$ — проекции вектора ускорения K -ой массы на оси декартовой системы координат;

X_k, Y_k, Z_k — проекции равнодействующей активных сил и сил реакций связи, приложенных к K -ой массе;

$\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ - проекции на оси произвольного перемещения К-ой массы, совместимого со связями, наложенными на систему.

Таким образом, сумма работ всех активных сил, сил реакций связей и сил инерции на произвольном возможном (совместимом со связями) перемещении равна нулю.

Для применения принципа Даламбера необходимо знать направление и величину всех сил, действующих на систему, а также направление ускорений всех масс системы. Однако, во многих задачах динамики определить направление ускорений бывает затруднительно, кроме того, обычно неизвестны реакции связей. Эти обстоятельства ограничивают применение принципа Даламбера для решения задач динамики.

Метод Лагранжа

Наиболее общей формой уравнений движения являются уравнения Лагранжа П-рода. Метод Лагранжа основан на понятии обобщенных координат и сил.

Под обобщенными координатами $q_i(t)$ понимают независимые друг от друга однозначные функции времени, при помощи которых полностью описывается движение системы. Первые производные от обобщенных координат по времени носят название обобщенных скоростей и обозначаются $\dot{q}_i(t)$. В качестве обобщенных координат могут быть использованы любые независимые параметры: расстояния между точками, углы поворота, разности углов поворота и т.п.

Уравнение Лагранжа П-рода для системы с одной степенью свободы (для обобщенной координаты q) имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \quad (I.3)$$

где T - кинетическая энергия системы;

Q - обобщенная сила (или сумма сил $\sum Q_i$), соответствующая координате q . Обобщенная сила представляет собой отношение работы δA , производимой всеми силами (как внутренними, так и внешними), действующими на систему, при бесконечно малом изменении координаты q на величину δq , к этому бесконечно малому изменению δq , т.е.

$$Q = \frac{\delta A}{\delta q}. \quad (I.4)$$

Для консервативных обобщенных сил (силы тяжести, упругости) -

$$Q = - \frac{\partial \Pi}{\partial q}, \quad (I.5)$$

где Π - потенциальная энергия системы, имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q}. \quad (I.6)$$

Во многих прикладных задачах потенциальная энергия системы равна энергии деформации упругих элементов, например, пружины. В этом случае энергия растяжения (сжатия) пружины

$$\Pi = \frac{c q^2}{2},$$

где C - коэффициент жесткости (или жесткость) пружины,

q - удлинение пружины,

Сила, действующая со стороны пружины на массу m , определяется из соотношения (I.4). При линейной характеристике упругого элемента

$$Q = -Cq.$$

Знак минус показывает, что эта сила всегда направлена в сторону, противоположную смещению тела от положения равновесия.

Так как потенциальная энергия системы зависит только от обобщенной координаты q , то, введя функцию Лагранжа

$$L = T - \Pi,$$

из уравнения (I.6), получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (I.7)$$

Если среди сил, действующих на систему, имеется сила сопротивления вида $\alpha \dot{q}$, то вводится диссипативная функция Релея

$$R = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2. \quad (I.8)$$

Частная производная от этой функции по \dot{q} (со знаком минус) дает обобщенную силу сопротивления

$$Q_r = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = - \alpha \dot{q}. \quad (I.9)$$

Знак минус показывает, что эта сила направлена в сторону, противоположную скорости тела. С учетом диссипативной силы (I.9) уравнение Лагранжа (I.6) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}}. \quad (I.10)$$

Для материальной системы, имеющей k степеней свободы (число обобщенных координат равно k), имеем k дифференциальных уравнений движения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 - \frac{\partial \Pi}{\partial q_1}; \quad (I.II)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 - \frac{\partial \Pi}{\partial q_2};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k}.$$

Эти k уравнений представляют собой дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах. Уравнения Лагранжа представляют собой систему k дифференциальных уравнений второго порядка с k неизвестными функциями $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \dots \dot{q}_k$. Если проинтегрируем эти уравнения, то найдем координаты механической системы $q_1, q_2 \dots q_k$ как функции времени t , а поэтому будем знать положение системы в любой момент времени.

Определение кинетической или потенциальной энергии обычно не представляет затруднений. Несколько сложнее дело обстоит с определением обобщенной силы Q_k . В общем случае для этого необходимо вычислить величину работы всех сил на бесконечно малом приращении соответствующей координаты.

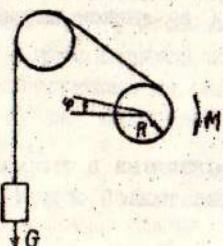
Например, необходимо найти обобщенную силу для барабана шахтной лебедки (рис. I.) при равномерном движении сосуда. За обобщенную коор-

динату примем угол поворота барабана φ . Элементарная работа при повороте барабана на угол $d\varphi$ будет равна (вес каната для простоты не учитываем)

$$dA = M d\varphi - G R d\varphi = (M - GR) d\varphi,$$

где M — внешний момент, приложенный к барабану;

Рис. 1.



G — вес концевого груза;

R — радиус барабана.

Таким образом, обобщенная сила будет равна

$$Q_\varphi = M - GR.$$

1.2. Расчетные эквивалентные схемы

Горные машины в общем случае представляют собой сложные электромеханические системы, состоящие из инерционных тел (электродвигатель, редуктор, рабочий орган и др.), связанных между собой упругими звенями (канаты, валы).

От изменения внешних сил (например, при внезапном их снятии или приложении) в элементах машин возникают колебательные переходные процессы, вызывающие появление в упругих звеньях дополнительных динамических нагрузок.

Знание действительных нагрузок позволит правильно определить напряжения и произвести достоверный расчет их на усталостную прочность.

Исследование переходных процессов реальных машин обычно заменяют исследованием их динамически эквивалентных, идеализированных схем.

Введем некоторые понятия. Упругой связью называется связь, имеющая податливость и обладающая упругой восстанавливающей силой, стремящейся вернуть тело в положение равновесия. Дискретной сосредоточенной массой называется тело, обладающее свойствами инерции, податливостью которого можно пренебречь. Силы трения в упругих звеньях, приводящие к рассеянию (диссипации) механической энергии, называются диссипативными силами. В дальнейшем будем рассматривать диссипативные силы, пропорциональные разности скоростей перемещения соседних дискретных масс.

Будем полагать, что любую горную машину можно заменить идеальной механической моделью, составленной из дискретных масс, соединенных упругими связями, обладающими диссипативными силами.

Упругая связь характеризуется ее жесткостью. Способность сопротивляться деформации называется жесткостью упругой связи, которая характеризуется коэффициентом жесткости. Он представляет собой силу (момент), вызываемую перемещение, равное единице.

При этом линейная жесткость $C = \frac{P}{x}$, а крутильная жесткость $C = \frac{M}{\varphi}$.

x_{i-1} x_i x_{i+1}

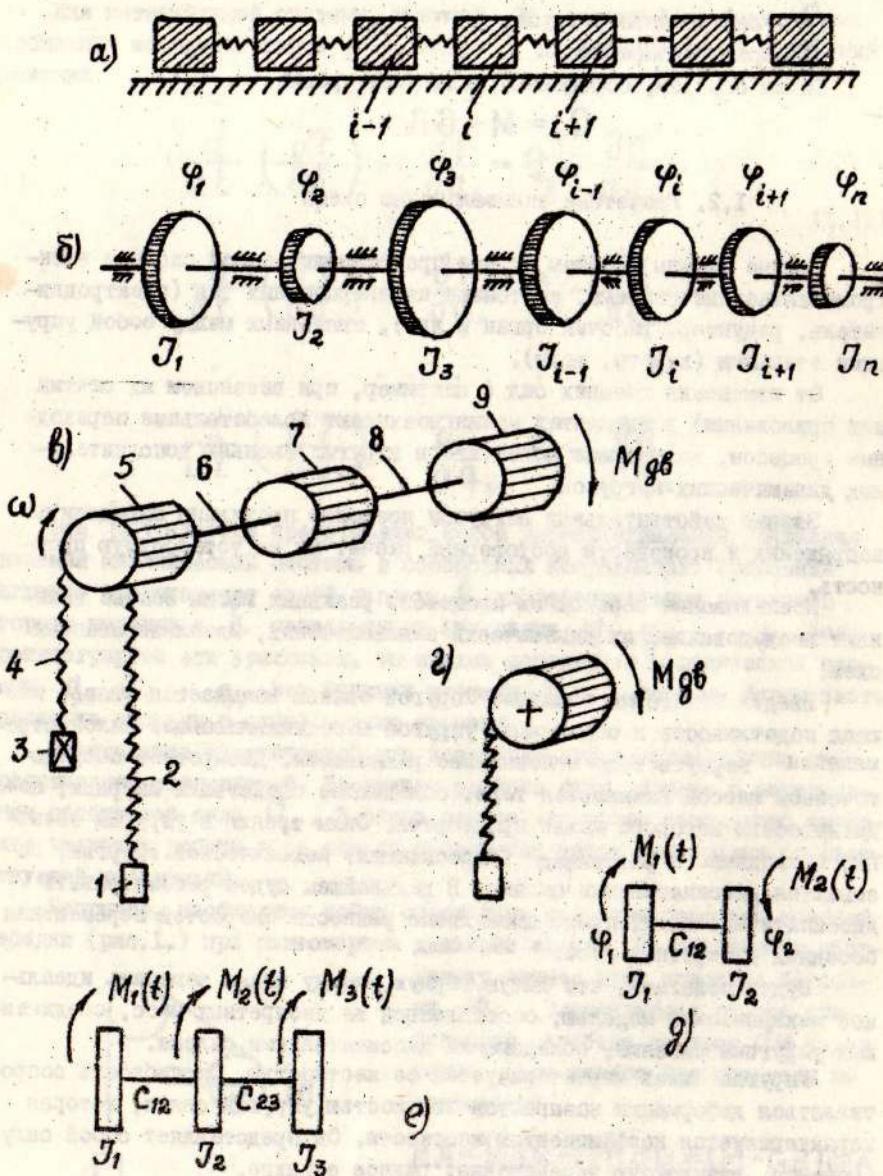


Рис. 2.

- II -

В расчетной практике часто удобно пользоваться величиной обратной жесткости, называемой податливостью

$$\ell = 1/C.$$

На рис. 2а приведена механическая система, состоящая из нескольких дискретных масс, соединенных упругими связями. Такая расчетная схема обычно используется при исследовании динамики подвижного состава. Сосредоточенные массы здесь моделируют вагонетки, а упругие связи - буферные связи между вагонетками. Если число сосредоточенных масс равно трем, то такая расчетная схема моделирует шахтную подъемную установку (лебедку), где сосредоточенные крайние массы - это подъемные сосуды, а средняя масса - это приведенная к органу навивки масса вращающихся частей подъемной установки (барабан, редуктор, электродвигатель). Упругие связи здесь моделируют податливость подъемных канатов.

На рис. 2б представлена многомассовая упругая механическая система, состоящая из нескольких сосредоточенных масс, которые могут совершать крутильные (угловые) перемещения, соединенных между собой упругими связями (валами) жесткостью C_i (крутильная жесткость). Такая расчетная схема используется для исследования динамики привода многих горных машин (подъемная установка, врубовые машины, проходческие комбайны, привод конвейера, экскаватора и пр.).

На рис. 2в представлена эквивалентная схема шахтного подъемника.

Здесь обозначено: 1- порожний подъемный сосуд; 2- канат правый; 3 - груженый подъемный сосуд; 4 - канат левый; 5- орган навивки; 6- выходной вал редуктора; 7- редуктор; 8- входной вал редуктора; 9- электродвигатель.

Исследование динамики таких систем весьма затруднительно и не всегда рационально, так как динамические свойства машин, как правило, определяются низшими частотами колебаний линий передач. Поэтому возникает возможность упростить расчетную эквивалентную схему за счет уменьшения числа дискретных масс.

В работе [1] предложен метод, позволяющий динамическую систему с n дискретными массами привести к системе с m ($m < n$) дискретными массами, у которой собственные частоты и формы колебаний в заданном частотном диапазоне будут с достаточной точностью совпадать с соответствующими характеристиками исходной системы.

Например, при исследовании динамических процессов в канате (подъемный сосуд находится в наимизшем положении) эквивалентную схему шахтного подъемника можно представить в виде схемы, представ-

ленной на рис. 2г или в виде крутильной схемы рис. 2д.

Эквивалентную схему привода многих горных машин можно представить в виде схем, изображенных на рис. 2д и 2е.

Наиболее простая и употребительная в расчетной практике - это двухмассовая упругая система (рис. 2д), состоящая из двух масс с моментами инерции J_1 (двигатель, часть приведенных масс редуктора) и J_2 (исполнительный орган, часть приведенных масс редуктора), соединенных упругой связью с крутильной жесткостью C_{12} .

Здесь $M_1(t)$ - момент, развиваемый двигателем;

$M_2(t)$ - момент, воспринимаемый исполнительным органом (момент сопротивления).

Внешние силы, действующие на элементы горных машин, имеют сложный характер и, как правило, не описываются простыми аналитическими выражениями. Они зависят от типа электродвигателя, привода тормозов, системы автоматического управления и пр. Теоретические и экспериментальные исследования шахтных подъемников, других горных машин показали, что с достаточной степенью точности (5-10% в сторону увеличения) можно принять моменты от электродвигателя, тормозных систем внезапно приложенными, и затем постоянно действующими величинами. Такое допущение возможно, когда ставится задача определения максимальных динамических нагрузок в линии передач.

В общем случае составление эквивалентной расчетной схемы машины представляет значительные трудности, требует определенных навыков и квалификации исполнителя.

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу удара колеса шахтного экипажа о рельс.

Взаимодействие колес с рельсами во время движения при наличии неровностей на поверхности катания носит характер удара. Силы, развивающиеся при этом, являются основной причиной разрушения неподрессоренных частей экипажа, а также элементов конструкции пути и, в первую очередь, рельсов.

Изучение сил ударного взаимодействия колес и рельсов ведется двумя путями: расчетным и экспериментальным. Расчетный метод заключается в составлении расчетной системы уравнений, т.е. математической модели изучаемой конструкции, и в извлечении из нее интересующих закономерностей. Математическая модель не может точно отразить действительную работу конструкции. Для ее составления рекомендуется определенная последовательность операций. Первый шаг заключается в рассмотрении механической системы (конструкции) целиком, а затем отбрасываются детали, которые не могут существенно влиять на количественную сторону изучаемой закономерности.

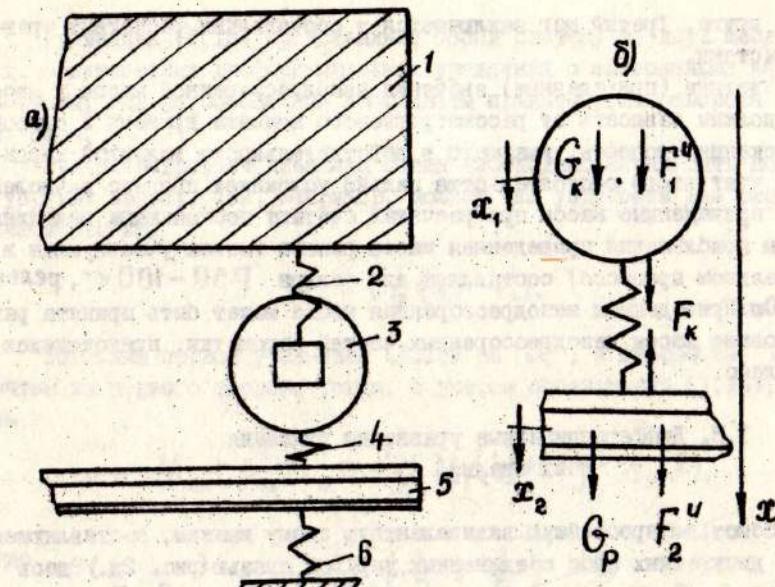


Рис. 3.

Например, силы ударного взаимодействия колес 3 и рельсов 5 возникают в результате их упругого соударения, но развивающиеся при этом деформации малы, так как жесткость в месте контакта колеса и рельса велика. Поскольку она много больше, чем жесткость рессор 2 и жесткость рельсового основания 6, то в расчет могут не приниматься ни колебания кузова 1 на рессорах, ни прогибы рельсов, т.е.

отбрасывается и кузов, и рельсовое основание. Упругие колебания колеса и рельса учесть точно трудно, поэтому вносятся в задачу упрощения: колесо и рельс считаются жесткими, а между ними помещается условная (фиктивная) пружина 4, представляющая контактную жесткость - контактную пружину.

Схема, показанная на рис. 3а называется геометрической расчетной схемой.

Второй шаг состоит в том, что отбрасываются фиктивные пружины, а их влияние на колесо и рельс заменяется реакциями этих пружин. К колесу и рельсу прикладываются также силы веса и силы инерции, которые могут в них возникать. В результате получается силовая расчетная схема (рис. 3б). Каждое тело рассчитываемой системы (колесо, рельс) теперь раздельно. Их движение можно рассматривать независимо

друг от друга. Третий шаг заключается в составлении расчетных уравнений системы.

Расчетные (приведенные) значения неподдроссоренной массы и массы рельса должны зависеть от рассматриваемого момента времени и скорости протекания процесса, имеющего в действительности волновой характер. Но учет этого обстоятельства сильно усложняет процесс вычислений, поэтому приведенные массы при расчетах считают постоянными величинами. В первом приближении приведенная масса рельса (масса участковая в колебательном процессе) составляет для рельса Р 50 - 100 кг, рельса Р 75 - 200 кг. Приведенная неподдроссоренная масса может быть принята равной половине массы неподдроссоренных частей вагонетки, приходящихся на одно колесо.

I.3. Дифференциальные уравнения движения и их анализ

Рассмотрим простейшую эквивалентную схему машины, состоящей из двух дискретных масс соединенных упругой связью (рис. 2д.). Здесь обозначено: φ_1, φ_2 - углы поворота дискретных масс; J_1, J_2 - моменты инерции; C_{12} - крутильная жесткость упругой связи.

Кинетическая энергия двухмассовой системы

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2. \quad (I.12)$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{1}{2} C_{12} (\varphi_1 - \varphi_2)^2. \quad (I.13)$$

Моменты внешних сил

$$Q_1(t) = M_1(t); \quad Q_2(t) = -M_2(t). \quad (I.14)$$

Подставляя (I.12), (I.13), (I.14) в уравнения (I.11), после дифференцирования, получим уравнения движения двухмассовой системы

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + C_{12} (\varphi_1 - \varphi_2) = M_1(t); \quad (I.15)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 - C_{12} (\varphi_1 - \varphi_2) = -M_2(t).$$

Уравнения (I.15) представляют собой систему из двух неоднородных, обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, где за обобщенные координаты приняты углы поворота дискретных масс.

При исследовании динамики машин необходимо определять моменты в упругих связях. Так, например, момент сил упругости для рассматриваемой системы

$$M_{12} = C_{12} (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (I.16)$$

Разделим первое уравнение (I.15) на J_1 , а второе на J_2 и вычтем из первого второе. Тогда, с учетом обозначений (I.16), получим

$$\ddot{M}_{12} + \beta_{12}^2 M_{12} = \frac{C_{12}}{J_1} M_1(t) + \frac{C_{12}}{J_2} M_2(t), \quad (I.17)$$

$$\text{где } \beta_{12} = \sqrt{C_{12} \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)} \quad (I.18)$$

частота свободных колебаний двухмассовой упругой системы.

Таким образом, мы получим неоднородное, обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, где за обобщенную независимую координату принят момент сил в упругой связи M_{12} (I.16).

При необходимости учета внутреннего трения в системе вводим в соответствии с (I.8) диссипативную функцию Релея в виде

$$R = \frac{1}{2} \alpha_{12} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)^2. \quad (I.19)$$

Здесь α_{12} - коэффициент, характеризующий рассеивание энергии в упругой связи.

Составляя уравнения движения системы аналогично предыдущему, получим

$$\ddot{M}_{12} + \alpha_{12} \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) \dot{M}_{12} + \beta_{12}^2 M_{12} = \frac{C_{12}}{J_1} M_1(t) + \frac{C_{12}}{J_2} M_2(t),$$

где β_{12} определяется выражением (I.18).

При выводе дифференциальных уравнений для механических систем, состоящих из трех и более дискретных масс, соединенных упругими ся-

зами, используется изложенный выше метод. Так, например, для 3-х массовой механической системы (рис. 2e) имеем

$$\ddot{M}_{12} + \beta_{12}^2 M_{12} - \frac{C_{12}}{J_2} M_{23} = \frac{C_{12}}{J_1} M_1(t) - \frac{C_{12}}{J_2} M_2(t); \quad (I.20)$$

$$\ddot{M}_{23} + \beta_{23}^2 M_{23} - \frac{C_{23}}{J_2} M_{12} = -\frac{C_{23}}{J_2} M_2(t) - \frac{C_{23}}{J_3} M_3(t),$$

где

$$\beta_{12} = \sqrt{C_{12} \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)}; \quad \beta_{23} = \sqrt{C_{23} \left(\frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_3} \right)} \quad (I.21)$$

- частоты свободных колебаний парциальных двухмассовых систем.

При определении максимальных динамических нагрузок в механических системах обычно силы трения не учитывают, так как они мало влияют на максимальную амплитуду колебаний. Метод определения динамических нагрузок рассмотрим на примере двухмассовой системы при внезапном приложении постоянных внешних моментов

$$M_1(t) = M_1; \quad M_2(t) = M_2.$$

Общее решение этого уравнения (I.17) в этом случае при ненулевых начальных условиях $M_{12(0)}$ и $\dot{M}_{12(0)}$ имеет вид

$$M_{12} = \sqrt{M_{12(0)}^2 + \frac{\dot{M}_{12(0)}^2}{\beta_{12}^2}} \cdot \sin \left(\beta_{12} t + \arctg \frac{B_{12} M_{12(0)}}{\dot{M}_{12(0)}} \right) + \\ + \frac{J_2 M_1 + J_1 M_2}{J_1 + J_2} (1 - \cos \beta_{12} t). \quad (I.22)$$

Решение задачи при нулевых начальных условиях (вынужденные колебания), найдем, положив в уравнениях $M_{12(0)} = \dot{M}_{12(0)} = 0$.

Внешние силы вызывают колебательный процесс в линии передачи, который затухает из-за наличия сил трения. После прекращения колебательного процесса система находится в движении, при котором моменты, развивающиеся в упругих связях, имеют постоянное значение. Такое напряженное состояние линии передач называется стационарным. При этом

$$\ddot{M}_{i,i+1} = 0; \quad \dot{M}_{i,i+1} = 0. \quad (I.23)$$

Для двухмассовой системы

$$M_{12}^{\text{стаци}} = \frac{J_2 M_1 + J_1 M_2}{J_1 + J_2}. \quad (I.24)$$

Под коэффициентом динамичности колебательного процесса упругой связи будем понимать отношение максимального момента, развиваемого в упругой связи, к моменту в ней при стационарном напряженном состоянии

$$M_{i,i+1}^{\max} = \frac{M_{i,i+1}}{M_{12}^{\text{стаци}}}. \quad (I.25)$$

Например, для двухмассовой системы (рис. 2д) стационарное напряженное состояние описывается уравнением (I.24). При нулевых начальных условиях в соответствии с (I.22)

$$M_{12} = \frac{J_2 M_1 + J_1 M_2}{J_1 + J_2} (1 - \cos \beta_{12} t). \quad (I.26)$$

Тогда при $\cos \beta_{12} = -1$

$$M_{12}^{\max} = 2 \frac{J_2 M_1 + J_1 M_2}{J_1 + J_2}. \quad (I.27)$$

Подставляя в формулу (I.25) выражения (I.27) и (I.24) найдем $M_{12} = 2$.

Коэффициент динамичности подъемников зависит от сил трения в механизме, типа электродвигателя, системы управления приводами, типа механических тормозов, вида внешних сил. Величина коэффициента динамичности в упругих связях подъемника может изменяться в пределах ($M = 1,2 \div 2,0$).

Рассмотрим общий случай рядной упругой системы (рис. 2б), состоящей из сосредоточенных масс с моментами инерции $J_1, J_2 \dots J_n$, соединенных упругими связями (валами) жесткостью $C_{12}, C_{23} \dots C_{n-1,n}$.

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \dot{\varphi}_1^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2 + \dots + J_n \dot{\varphi}_n^2).$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \frac{1}{2} [C_{12} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + C_{23} (\varphi_2 - \varphi_3)^2 + \dots + C_{n-1,n} (\varphi_{n-1} - \varphi_n)^2].$$

Подставляя найденные значения T и Π в уравнения Лагранжа, после дифференцирования и преобразований, получим уравнения свободных крутильных колебаний системы в виде

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + C_{12} \dot{\varphi}_1 - C_{12} \varphi_1 &= 0; \\ -C_{12} \dot{\varphi}_1 + J_2 \ddot{\varphi}_2 + (C_{12} + C_{23}) \dot{\varphi}_2 - C_{23} \varphi_3 &= 0; \\ \dots & \\ -C_{n-1,n} \dot{\varphi}_{n-1} + J_n \ddot{\varphi}_n + C_{n-1,n} \varphi_n &= 0. \end{aligned} \quad (I.28)$$

Такая система уравнений удобна для определения форм свободных колебаний.

Решение дифференциальных уравнений (I.28) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \cos \beta t; \\ \varphi_2 &= A_2 \cos \beta t; \\ \dots & \\ \varphi_n &= A_n \cos \beta t. \end{aligned} \quad (I.29)$$

Подставляя (I.29) в (I.28) и сокращая на $\cos \beta t$, получим уравнения для определения $\beta, A_1, A_2, \dots, A_n$

$$\begin{aligned} (C_{12} - \beta^2 J_1) A_1 - C_{12} A_2 &= 0; \\ -C_{12} A_1 + (C_{12} + C_{23} - \beta^2 J_2) A_2 - C_{23} A_3 &= 0; \\ \dots & \\ -C_{n-1,n} A_{n-1} + (C_{n-1,n} - \beta^2 J_n) A_n &= 0. \end{aligned} \quad (I.30)$$

Эти уравнения допускают решения относительно $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, отличные от нуля в том случае, если определитель системы уравнений (I.30) $\Delta(\beta^2)$ равен нулю.

Раскрывая определитель и приравнивая его нулю, получаем характеристическое уравнение n -ой степени относительно β^2 . Такое уравнение имеет один нулевой корень ($\beta = 0$). В этом случае уравнения (I.30) допускают относительно A_1, A_2, \dots, A_n отличные от нуля решения:

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_n,$$

которым соответствует равномерное вращение механизма без деформации упругих связей, а следовательно, и без крутильных колебаний. Осталь-

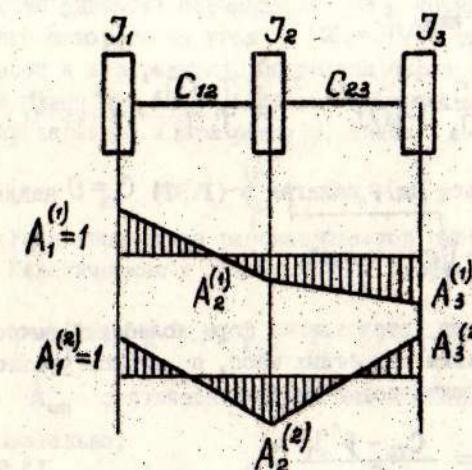


Рис. 4.

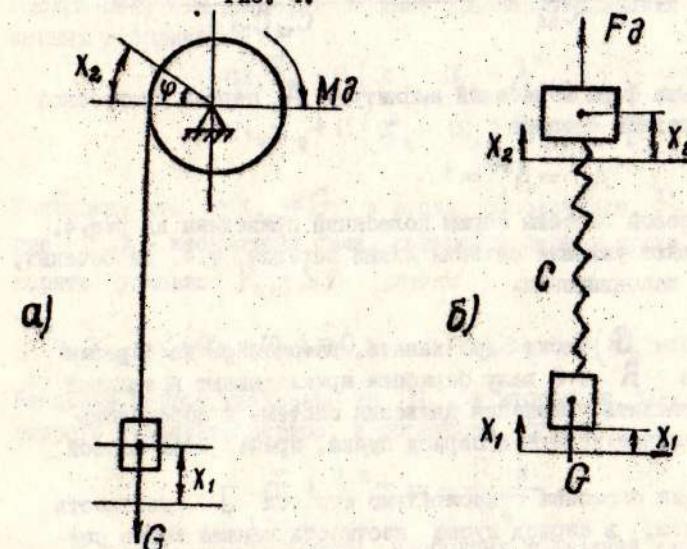


Рис. 5.

ные корни характеристического уравнения, не равные нулю, соответствуют $n-1$ частотам.

Например, для трехмассовой системы (рис. 2e) ($n = 3$) характеристическое уравнение имеет вид

$$\beta^4 - \left(\frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} C_{12} + \frac{J_2 + J_3}{J_2 J_3} C_{23} \right) \beta^2 + \frac{J_1 + J_2 + J_3}{J_1 J_2 J_3} C_{12} C_{23} = 0 \quad (I.31)$$

Для двухмассовой системы (рис. 2d), полагая в (I.31) $C_{23} = 0$, найдем

$$\beta = \sqrt{C_{12} \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}}.$$

После определения частот для установления форм колебаний вычисляем отношение амплитуд колебаний дискретных масс, пользуясь уравнениями (I.30). Например, для трехмассовой системы

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{C_{12} - \beta^2 J_1}{C_{12}}; \quad (I.32)$$

$$\frac{A_3}{A_1} = -\frac{C_{12}}{C_{23}} + \frac{(C_{12} + C_{23} - \beta^2 J_2)(C_{12} - \beta^2 J_1)}{C_{12} C_{23}}.$$

При построении форм колебаний амплитуду A_1 , первой дискретной массы принимаем равной единице

$$A_1^{(1)} = A_1^{(2)} = 1.$$

Для трехмассовой системы формы колебаний приведены на рис. 4. По ним устанавливают узловые сечения линий передач, т.е. те сечения, которые остаются неподвижными.

Пример. Груз весом G висит на канате, намотанном на барабан радиусом R . К валу барабана прикладывают врачающий момент M_q . Составить уравнения движения системы и определить максимальное натяжение каната в период пуска, пренебрегая массой каната.

Момент инерции барабана относительно его оси J , жесткость каната C , причем, в период пуска жесткость каната можно считать постоянной. В начальный момент система находится в покое.

Решение.— В качестве одной из обобщенных координат системы принимаем перемещение x , груза G . В качестве второй обобщенной координаты можно принять угол φ поворота барабана или (что удобнее) перемещение x_2 точки на поверхности барабана при его повороте на угол φ ($x_2 = R\varphi$). При этом массу барабана удобно привести к его радиусу. Обозначая через m_1 массу поднимаемого груза, а через m_2 и F_d — соответственно массу барабана и движущую силу, приведенные к его радиусу, имеем

$$m_1 = \frac{G}{g}; \quad m_2 = \frac{J}{R^2}; \quad F_d = \frac{M_q}{R}.$$

Расчетная схема рассматриваемой системы показана на рис. 5. Кинетическая и потенциальная энергии системы выражаются так

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}^2); \quad \Pi = Gx + \frac{c}{2} (x_2 - x_1 + \lambda_{cm})^2,$$

где λ_{cm} — статическое удлинение каната ($\lambda_{cm} = \frac{G}{c}$).

Следовательно,

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} [m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}^2 - c(x_2 - x_1 + \lambda_{cm})^2] - Gx.$$

Отсюда получаем дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах

$$m_1 \ddot{x}_1 - c(x_2 - x_1 + \lambda_{cm}) + G = 0;$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c(x_2 - x_1 + \lambda_{cm}) = F_d.$$

Учитывая, что $c \lambda_{cm} = G$ и вводя обозначения $F_d - G = F_{изб}$, где $F_{изб}$ — избыточная сила, которая в период пуска должна удовлетворять условию $F_{изб} > 0$, имеем

$$m_1 \ddot{x}_1 - c(x_2 - x_1) = 0; \quad m_2 \ddot{x}_2 + c(x_2 - x_1) = F_{изб}.$$

Разделив первое уравнение на m_1 , а второе на m_2 , вычитая из второго уравнения первое, и обозначая $\bar{x} = x_2 - x_1$, получим

$$\ddot{\bar{x}} + k^2 \bar{x} = -\frac{F_{изб}}{m_2}, \quad (I.33)$$

где $k^2 = \frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}$ — частота свободных колебаний системы.

Умножая уравнения (I.38) на C , получим дифференциальное уравнение относительно P (сила упругости в канате)

$$\ddot{P} + k^2 P = \frac{F_{\text{уд}} \cdot C}{m_2}. \quad (I.34)$$

Пусть $F_{\text{уд}} = F_i = \text{const}$, т.е. движущая сила прикладывается мгновенно и на протяжении всего периода разгона сохраняет постоянную величину. Тогда решение дифференциального уравнения (I.38) имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{F_i}{m_2 k^2}. \quad (I.35)$$

Учитывая, что $x_0 = 0$; $\dot{x}_0 = 0$, находим

$$C_1 = -\frac{F_i}{m_2 k^2}; \quad C_2 = 0.$$

Отсюда

$$x = \frac{F_i}{m_2 k^2} (1 - \cos kt) = \frac{m_1 F_i}{C(m_1 + m_2)} (1 - \cos kt). \quad (I.36)$$

Теперь найдем максимальное удлинение λ_{\max} и максимальное натяжение P_{\max} каната, которое получаем, очевидно, при $kt = \pi$ или при $t = \pi/k$.

$$\lambda_{\max} = x_{\max} + \lambda_{\text{ст}} = \frac{2m_1}{C(m_1 + m_2)} F_i + \frac{G}{C},$$

$$P_{\max} = C \lambda_{\max} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} F_i + G. \quad (I.37)$$

Если бы канат не деформировался и груз при подъеме не совершал дополнительных колебаний, то ускорение груза определялось бы так:

$$W = \frac{F_i}{m_1 + m_2},$$

и натяжение каната было бы равно

$$P = m_1 W + G = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F_i + G, \quad (I.38)$$

т.е. дополнительное динамическое натяжение было бы в два раза меньше, чем в рассмотренном нами случае.

В заключение выполним исследование расчетной схемы для определения силы удара колеса по рельсу (рис. 3б). Для составления уравнений используем принцип Даламбера.

Первая группа расчетных уравнений - уравнения движения: для колеса

$$F_i^u + G_k + F_k = 0 \quad (I.39)$$

или

$$-m_1 \ddot{x}_1 + F_k + G_k = 0,$$

для рельса

$$F_2^u - F_k + G_p = 0$$

или

$$-m_2 \ddot{x}_2 - F_k + G_p = 0, \quad (I.40)$$

где G_k и G_p - соответственно вес колеса и рельса;

F_i^u , F_2^u - силы инерции неподрессоренной массы и рельса;

F_k - реакция контактной пружины;

$m_1 = \frac{G_k}{g}$, m_2 - соответственно масса неподрессоренных частей и рельса;

\ddot{x}_1 , \ddot{x}_2 - соответственно ускорения масс m_1 и m_2 .

Вторая группа уравнений - уравнения связей. В рассматриваемом случае имеется только одно уравнение

$$F_k = C_k (x_2 - x_1), \quad (I.41)$$

где C_k - жесткость фиктивной контактной пружины.

Поискомъ решаемая система уравнений линейна, из нее можно исключить величины G_k и G_p . Это означает, что в процессе решения, все переменные величины будут оточитываться от положения равновесия, т.е. величина давления колеса на рельс будет вычисляться без учета статической составляющей.

Перепишем указанную систему уравнений (I.39), (I.40) в виде

$$\ddot{x} + C_k \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} x = 0, \quad (I.42)$$

где $x = x_1 - x_2$.

Умножая левую и правую часть уравнения (I.42) на C_k , найдем

$$\ddot{F}_k + C_k \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} F_k = 0. \quad (I.43)$$

Интеграл этого уравнения имеет вид

$$F_k = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt, \quad (I.44)$$

где $k = \sqrt{C_k \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}}$ — частота свободных колебаний системы.

Постоянные интегрирования находятся из начальных условий. За начальный момент удобно выбрать момент начала соударения. Тогда будем иметь, что при $t=0$; $F_k=0$; а $\dot{F}_k \neq 0$.

Выражение для \dot{F}_k найдем, проинтегрировав уравнение связи (I.41)

$$\dot{F}_k = C_k (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = C_k V_{yg},$$

так как выражение в скобках в момент $t=0$ есть скорость V_{yg} соударения колеса и рельса. Тогда постоянные интегрирования будут равны

$$C_2 = 0; \quad C_1 = \frac{C_k \cdot V_{yg}}{k},$$

и после несложных преобразований получим

$$F_k = V_{yg} \sqrt{C_k \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}} \sin kt. \quad (I.45)$$

Максимальной силы удара будет при $\sin kt = 1$

$$F_{k\max} = V_{yg} \sqrt{C_k \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}}. \quad (I.46)$$

Так как обычно $m_1 \gg m_2$, то из (I.46) получим

$$F_{k\max} = V_{yg} \sqrt{C_k m_2}. \quad (I.47)$$

Проанализируем выражение (I.47) для того, чтобы установить как можно уменьшить силу удара колеса по рельсу.

I. Скорость удара зависит от скорости поезда и от размеров тех неровностей, которые имеются на поверхностях катания. Поскольку скорости движения поездов повышаются, то для снижения скорости удара, а

вместе с этим и силы удара колеса по рельсу, необходимо повысить требования к содержанию пути и подвижного состава.

2. Величина контактной жесткости зависит от конструкции колеса и может быть уменьшена на значительную величину посредством введения в диск колеса упругих элементов. Одновременно это уменьшает приведенную массу колеса, так как в этом случае в ударе будет принимать участие только часть колеса — его обод.

3. Приведенная масса пути наиболее эффективно может быть снижена за счет применения достаточно упругих, (например, резиновых) прокладок между рельсами и шпалами.

2. КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

2.1. Общие сведения

Горные машины (особенно шахтные подъемники, экскаваторы) имеют валы и канаты, массы которых соизмеримы с массами двигателя, исполнительного органа. В этом случае упругая связь, помимо свойства податливости, обладает свойствами инерции. Этими свойствами в предшествующих исследованиях мы пренебрегали, полагая упругие связи невесомыми. Тела, обладающими свойствами упругости и инерции называют упругими телами.

Простейшие упругие тела:

1. стержень (канат) — упругое тело, работающее только на растяжение или сжатие;
2. струна, растянутая продольной силой — абсолютно гибкий объект, способный совершать поперечные колебания;
3. балка — упругий объект, способный воспринимать поперечную нагрузку.

В случае упругих тел вместо нескольких сосредоточенных масс (рис.2а, б) мы имеем систему, состоящую из бесконечно большого числа частиц, между которыми действуют силы упругости. Для определения положения такой системы требуется бесконечно большое число координат, и поэтому она имеет бесконечно большое число степеней свободы, так как за возможное или виртуальное перемещение можно принять любое малое перемещение, удовлетворяющее условию непрерывности, т.е. не вызывающее разрывов в теле. Поэтому, любое упругое тело имеет бесконечно большое число форм соответственных колебаний.

Таким образом, задача о колебаниях упругих тел (стержень, струна) является обобщением задачи о колебаниях системы с несколькими массами.

При большом числе масс (например, при большом числе вагонов в железнодорожном составе) задача становится практически неразрешимой в дискретной постановке. Поэтому, такую дискретную систему часто заменяют сплошным стержнем (рис. 7), наделяя этот стержень весовой (массовой) нагрузкой. При этом решение задачи, помимо уточнения, существенно упрощается.

Такие упругие тела как стальные канаты широко используются в горной технике на шахтных подъемных установках (подъемные канаты), подъемно-транспортных машинах, горнодобывающих машинах (вантовые канаты, тяговые канаты). При этом зачастую подъем груза или крепление элементов оборудования (конструкций экскаваторов, отвалообразователей и др.) осуществляется с помощью нескольких канатов. В таких системах возможно перенапряжение одних канатов за счет других. При этом долговечность и безопасность работы первых понижается. Для обеспечения равномерного натяжения канатов необходимо уметь контролировать натяжение каждого из них в процессе эксплуатации.

Натяжение канатов и вант большой длины удобно и эффективно контролировать путем замера скорости распространения поперечной волны деформаций. Вследствие этого ниже приводится методика исследования колебаний указанных выше простейших упругих тел, определение их частот и форм колебаний.

2.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

УПРУГИХ ТЕЛ.

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Рассмотрим струну с некоторыми массами, причем, саму струну будем предполагать невесомой, а массы считать сосредоточенными в нескольких отдельных точках. Если мы вообразим теперь, что число масс неограниченно возрастает, то от дискретного распределения масс придем к понятию струны с равномерно распределенной массой.

Деформированная ось струны во время колебаний изображается функцией $u(x, t)$, причем, ордината кривой изменяется как с перемещением вдоль струны, так и с течением времени, т.е. перемещение струны является функцией двух переменных x и t .

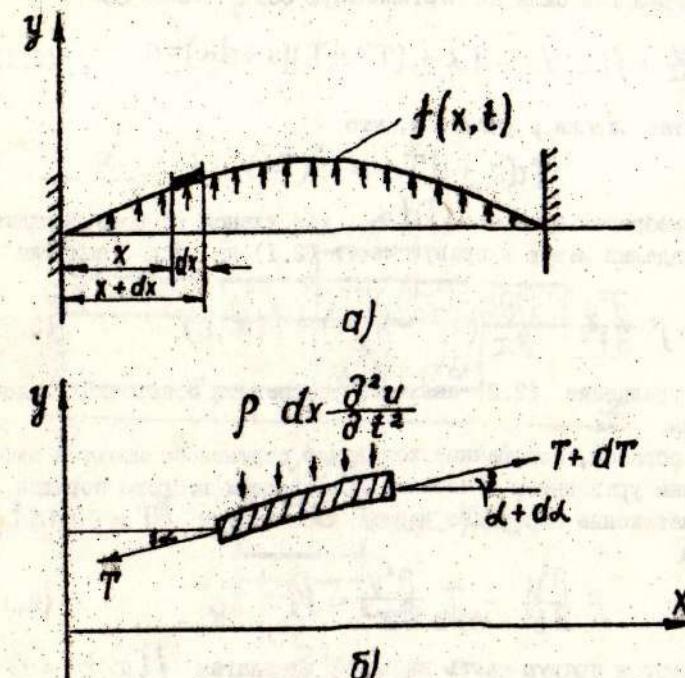


Рис. 6

Обозначим: T – продольное натяжение струны, направленное по касательной к нити, $f(x)dx$ – значение распределенной нагрузки на участке dx , ρ – плотность единицы длины струны.

Выделим участок струны длиной dx (рис. 6б) и рассмотрим его равновесие. При этом, прогибы струны будем полагать малыми, поэтому приближенно будет иметь место

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} \approx \alpha; \quad \cos \alpha \approx 1.$$

Применив принцип Даламбера, кроме внешних сил T и $T + dT$, приложим распределенную силу инерции $\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Производная берется здесь частная вследствие того, что рассматриваемый элемент находится от начала координат на фиксированном расстоянии x (см. рис. 6а).

Проектируя все силы на вертикальную ось y , получим

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x)dx - T\alpha + (T+dT)(\alpha+d\alpha)=0. \quad (2.1)$$

Раскрывая скобки и учитывая, что

$$Td\alpha + dT\alpha = d(T\alpha),$$

а также пренебрегая членом $dT\alpha$, как членом второго порядка малости, разделив левую и правую часть (2.1) на dx , получим

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x, t). \quad (2.2)$$

Полученное уравнение (2.2) является уравнением поперечных колебаний струны.

Таким образом, поперечные колебания струны описываются дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.

Если натяжение постоянно вдоль длины струны ($T = \text{const}$), тогда имеем

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t). \quad (2.3)$$

Разделив левую и правую часть на ρ , и полагая $f(x, t) = 0$, получим дифференциальное уравнение свободных колебаний струны в канонической форме (волновое уравнение)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (2.4)$$

где $\alpha^2 = \frac{T}{\rho}$ (2.5)

- скорость распространения поперечных волн деформаций в струне.

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ

Задача о продольных колебаниях стержня предстает собой обобщение задачи о колебаниях системы с несколькими массами. Теперь мы уже не будем обозначать массы номерами $1, 2, 3, \dots, n$, а будем характеризовать их положение абсолютной x вдоль стержня (рис.7).

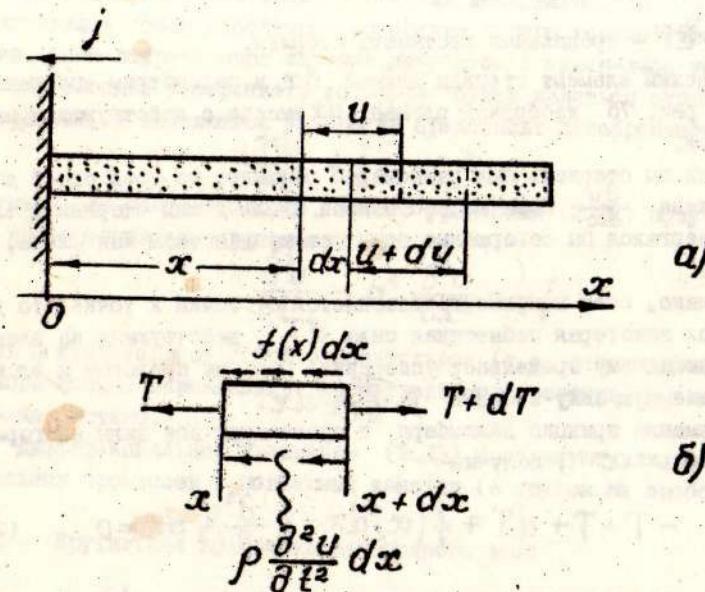


Рис. 7.

Продольное перемещение каждой точки x обозначим u . Тогда состояние движения стержня можно считать известным, если мы знаем величину $u(x, t)$ опять же как функцию двух переменных x и t . Поперечное сечение x переходит в $x+u$, а сечение $x+dx$ переходит в $(x+dx)+(u+du)$. В некоторый момент времени t длина dx делается равной

$dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx$,
где производная $\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon$ является удлинением единицы длины стержня (относительное удлинение). Это удлинение в соответствии с законом Гука вызывает появление растягивающего напряжения

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.6)$$

где E - модуль упругости стержня.

Соответственно продольное усилие в сечении стержня

$$T = EF = EF \cdot \varepsilon = EF \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.7)$$

Здесь EF - продольная жесткость стержня.

Выделим элемент стержня длиной dx и рассмотрим его равновесие. На рис. 7б изображен элемент dx вместе с действующими на него силами.

Если бы стержень был равномерно растянут по всей своей длине, то величина $\frac{\partial u}{\partial x}$ была бы постоянной вдоль длины стержня и элемент dx подвергался бы совершенно одинаковому действию как слева, так и справа.

Однако, если напряжение изменяется от точки к точке, то должна появиться некоторая избыточная сила dT , действующая на элемент и сообщающая ему продольное ускорение. Поэтому приложим к элементу распределенную силу инерции $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$.

Применяя принцип Даламбера, и проектируя все силы на горизонтальную ось x , получим

$$-T + T + dT + f(x)dx - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = 0. \quad (2.8)$$

Разделив левую и правую часть уравнения (2.8) на dx , получим

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{dT}{dx} = f(x). \quad (2.9)$$

Подставляя T (2.7) в (2.9), получим

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x). \quad (2.10)$$

Если стержень имеет постоянное сечение ($EF=const$, $\rho=const$) и совершает свободные колебания ($f(x)=0$), то из уравнения (2.10) получим

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.11)$$

-дифференциальное уравнение свободных колебаний стержня.

В канонической форме (волновое уравнение)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (2.12)$$

$$\text{где } a^2 = \frac{EF}{\rho} -$$

- скорость распространения продольной волны деформации в стержне.

Если закрепленное сечение стержня неподвижно, то $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ будет представлять собой абсолютное ускорение любого рассматриваемого сечения. Если закрепленное сечение движется с каким-либо ускорением j (переносное ускорение), то $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ будет являться относительным ускорением, а абсолютное ускорение представит алгебраическую сумму

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + j.$$

Учитывая это обстоятельство, вместо уравнения (2.12) получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -j. \quad (2.13)$$

Здесь U представляет собой относительное (т.е. относительно закрепленного конца) перемещение рассматриваемого сечения, вызванное колебаниями системы.

Дифференциальное уравнение (2.13) используют для описания колебательных процессов в подъемных канатах (с грузом на свободном конце).

Крутильные колебания однородного вала

Крутильные колебания с непрерывно распределенной массой описываются уравнениями, которые по структуре точно совпадают с уравнениями, приведенными выше. Крутящий момент M в сечении с абсциссой x связан с углом поворота φ следующей дифференциальной зависимостью, аналогичной зависимости (2.7)

$$M = G J_p \frac{d\varphi}{dx}. \quad (2.14)$$

Здесь G - модуль упругости при сдвиге, J_p - полярный момент инерции поперечного сечения, $G J_p$ жесткость вала на кручение.

Дифференциальное уравнение свободных крутильных колебаний вала, аналогично уравнению (2.12) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (2.15)$$

$$\text{где } a^2 = \frac{G J_p}{\rho} -$$

- скорость распространения крутильной волны деформации.

Поперечные колебания натянутого каната
(стержня)

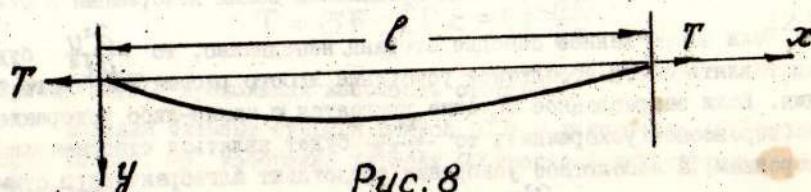


Рис. 8

Рис. 8.

Дифференциальное уравнение кривой изгиба стержня растянутого осевой силой T , имеет вид

$$EJ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -M + Tu, \quad (2.17)$$

где $u(x, t)$ - поперечное смещение сечений стержня, M - изгибающий момент, вызванный поперечной нагрузкой, EJ - изгибная жесткость стержня (каната), T - натяжение каната.

Дважды дифференцируя выражение (2.17), получим

$$\frac{d^2}{dx^2} (EJ \frac{d^2 u}{dt^2}) = W + T \frac{d^2 u}{dx^2}. \quad (2.18)$$

Здесь $W = -\frac{d^2 M}{dx^2}$ - внешняя распределенная нагрузка, действующая на стержень (интенсивность нагрузки).

Для получения дифференциального уравнения поперечных колебаний необходимо применить принцип Даламбера, представив себе, что колеблющийся стержень нагружен силами инерции интенсивностью W . При этом

$$W = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.19)$$

где ρ - масса единицы длины стержня (каната).

В выражении (2.19) и далее будем употреблять понятие частной производной $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial x}$ ввиду того, что поперечные смещения сечений стержня являются функцией двух переменных x и t , т.е.

$$u = u(x, t).$$

Подставляя (2.19) в (2.18), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EJ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.20)$$

При $EJ = \text{const}$ (изгибная жесткость постоянна по длине) получим

$$EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.21)$$

Уравнение (2.21) называется дифференциальным уравнением свободных поперечных колебаний призматического стержня, растянутого силой T . Это уравнение можно привести к каноническому виду, разделив левую и правую часть уравнения на ρ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (2.22)$$

где

$$a^2 = \frac{EJ}{\rho}.$$

Если натяжение $T = 0$, то из (2.22) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (2.22)$$

- дифференциальное уравнение поперечных колебаний однородного стержня или балки в канонической форме.

2.3. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Как видно, поперечные колебания струны, продольные колебания стержня, крутильные колебания вала описываются совершенно одинаковыми по структуре волновыми уравнениями (см. 2.4, 2.12, 2.15).

Рассмотрим решение указанных уравнений на примере поперечных колебаний струны. Приступая к решению уравнения (2.4), сделаем предположение, что струна колеблется гармонически с некоторой собственной частотой, обладая при этом некоторой определенной формой (назовем ее собственной формой). На математическом языке это значит, что мы принимаем

$$u(x, t) = \psi(x) \sin \omega t, \quad (2.23)$$

где $\psi(x)$ - форма конфигурации струны (собственная форма).

Подставляя (2.23) в уравнение (2.4), получим

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{\rho \omega^2}{T} \psi = 0, \quad (2.24)$$

а это есть обыкновенное дифференциальное уравнение.

Решение этого уравнения

$$y(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx, \quad (2.25)$$

где

$$k^2 = \frac{\rho \omega^2}{T}. \quad (2.26)$$

Отсюда следует, что амплитуда струны, как функция пространства, ведет себя совершенно таким же образом, как и амплитуда системы с одной степенью свободы, рассматриваемая как функция времени.

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий.

В отличие от колебаний дискретных систем для однозначности определения движения упругих тел необходимо задать граничные и начальные условия.

Границные условия описывают способы закрепления концов упругого тела, а начальные условия определяют смещения и скорости элементов стержня в начальный момент времени.

Например, для исследуемой задачи о поперечных колебаниях струны граничные условия формулируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0; \quad & y=0; \\ \text{при } x=l; \quad & y=0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Эти условия отражают тот факт, что на концах струны ее отклонения должны быть равны нулю.

Подставляя условия (2.27) в (2.25), найдем, что при $x=0$ $C_2=0$, а при $x=l$ получим

$$y(l) = 0 = C_1 \sin l \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{T}}. \quad (2.28)$$

Это равенство удовлетворяется при $C_1=0$, что является верным, но лишенным интереса решением, которое означает, что струна остается в покое. Однако, уравнению (2.28) можно удовлетворить также, если сделать аргумент синуса числом, кратным числу π , а именно, полагая

$$l \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{T}} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \dots \quad (2.29)$$

Отсюда мы определяем собственные частоты

$$\omega_i = \frac{i\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad (2.30)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots$$

Соответствующие формы колебаний могут быть найдены путем подстановки (2.30) в (2.25).

Результаты подобных расчетов проиллюстрированы на рис. 9., на котором показаны три первых главных типа поперечных колебаний однородной струны,

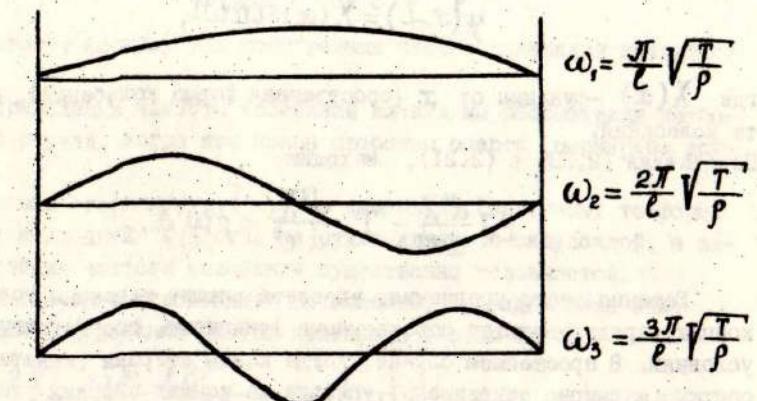


Рис. 9.

Формы колебаний приведенные на рис. 9. сохраняются также для продольных (и для крутильных) колебаний стержня с закрепленными концами.

Для продольных (или крутильных) колебаний стержня с одним закрепленным концом (рис. 7), общие выражения (2.25), определяющие форму колебаний, остаются в силе, однако, условия на концах, служащие для определения постоянных C_1 и C_2 , будут в этих случаях иными.

Для закрепленного конца стержня ($x=0$), мы опять имеем $y=0$. На свободном конце усилие равно нулю. Поэтому граничные условия оказываются такими

$$\begin{aligned} x=0; \quad & u=0; \\ x=l; \quad & \frac{\partial u}{\partial x}=0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Первое из этих условий дает $C_2=0$, тогда как второе удовлетворяется, если положить длину стержня равной $l/4, 3/4, 5/2$ и т.д. длины волн, т.е. частоты колебаний определяются выражениями -

$$\omega_1 = \frac{1/2\pi}{l} \sqrt{\frac{EF}{\rho}}; \quad \omega_2 = \frac{3/2\pi}{l} \sqrt{\frac{EF}{\rho}}; \quad \omega_3 = \frac{5/2\pi}{l} \sqrt{\frac{EF}{\rho}} \text{ и т.д.} \quad (2.32)$$

В заключение этого параграфа приступим к решению уравнения (2.21), считая, что растянутый канат колеблется гармонически с некоторой собственной частотой, обладая при этом некоторой определенной конфигурацией (собственной формой).

На математическом языке это означает, что

$$y(x,t) = X(x) \sin \omega t, \quad (2.33)$$

где $X(x)$ - функция от x (собственная форма колебаний), ω частота колебаний.

Подставляя (2.33) в (2.21), находим

$$EJ \frac{d^4 X}{dx^4} - T \frac{d^2 X}{dx^2} = \rho \omega^2 X. \quad (2.34)$$

Решения этого уравнения, удовлетворяющие заданным условиям на концах, представляются собственными функциями, соответствующими этим условиям. В простейшем случае, когда концы стержня (каната) свободно опорты (шарнирно закреплены), условия на концах стержня удовлетворяются, если взять

$$X_i = \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad (2.35)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots$ целое число

Подставляя (2.35) в (2.34), получим выражение для частоты поперечных колебаний стержня (каната) растянутого силой T

$$\omega_i = \frac{\alpha i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{1 + \frac{Tl^2}{i^2 EJ \pi^2}}, \quad (2.36)$$

где, как и выше, $\alpha^2 = \frac{EJ}{\rho}$.

Если стержень сжат продольной силой T , то в выражении (2.36) вместо T следует подставить $(-T)$.

В случае, если изгибной жесткостью стержня можно пренебречь (обычно это справедливо для длинных натянутых канатов), тогда полагая в (2.22) $EJ=0$, получим уравнение свободных колебаний струны (2.4).

Полагая, что весьма гибкий стержень (провод, трос) подвержен сильному натяжению, то второй член под корнем в выражении (2.36) становится весьма большим по сравнению с единицей и для небольших значений i^2 можно принять

$$\omega_i \approx \frac{\alpha i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{Tl^2}{i^2 EJ \pi^2}} = \frac{i\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad (2.37)$$

что представляет формулу для собственных частот колебаний натянутой струны.

При определении частоты колебаний каната мы рассмотрели наиболее простой случай, когда его концы свободно опорты (шарнирное закрепление).

Если концы стержня будут жестко защемлены (заделаны) то форма собственных колебаний $X(x)$ уже не будет являться синусоидой, а задача определения частоты колебаний существенно усложняется.

Не приводя здесь громоздких вычислений, приведем лишь ниже уравнение для определения частот колебаний в этом случае

$$\frac{\sinh 2\gamma l \sin 2\delta l}{1 - \cosh 2\gamma l \cos 2\delta l} + 2\omega \sqrt{\frac{EJ\rho}{T}} = 0. \quad (2.38)$$

Здесь обозначено

$$\gamma^2 = \frac{1}{4} [\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + \beta^4}]; \quad (2.39)$$

$$-\delta^2 = \frac{1}{4} [\alpha^2 - \sqrt{\alpha^4 + \beta^4}];$$

$$\alpha^2 = \frac{T}{2EJ}; \quad \beta^4 = \frac{\rho \omega^2}{EJ},$$

причем, γ^2 и δ^2 действительны и положительны.

Приближенно для первой (низшей) частоты колебаний можно записать

$$\omega_i^2 \approx \frac{\pi^2}{l^2} \frac{T}{\rho} + 500 \frac{(EJ_k)}{\rho l^4}. \quad (2.40)$$

Здесь первое слагаемое представляет частоту колебаний натянутой струны, а второй член характеризует влияние изгибной жесткости каната (EJ_k) на частоту колебаний.

2.4. ПРИМЕРЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ СВЕДЕНИЙ ИЗ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ

Измерение натяжений подъемных канатов

В процессе эксплуатации многоканатных подъемных установок необходимо периодически производить измерение и регулирование нагрузки на канаты.

Наиболее простой метод основан на том, что после кратковременного удара по канату, в нем возбуждаются поперечные волны деформаций, скорость распространения которых, если не учитывать собственного веса каната, определяются выражением (2.5).

Измеряя время распространения поперечных волн, при постоянной длине канатов при заданном положении сосудов в стволе, можно определить нагрузку на подъемный канат.

При этом методе измерения нагрузки подъемный сосуд устанавливается в стволе внизшее положение. После этого, по одному из канатов свободно висящей ветви наносится рукой легкий поперечный толчок, без снятия руки с каната. Одновременно другой рукой включается секундомер. Волна поперечных деформаций доходит до нижнего конца каната, отражается, и затем возвращается к источнику возмущения (руке оператора). Приход волны оператор воспринимает по толчку, после чего секундомер выключают.

Нагрузка, действующая на канат в соответствии с (2.5)

$$T = a^2 \rho, \quad (2.41)$$

где $a = \frac{2L}{t}$ — скорость распространения волны деформации в канате; L — длина каната; t — время распространения волны.

Таким образом натяжение каната

$$T = \rho \frac{4L^2}{t^2}. \quad (2.42)$$

Более точное решение, выполненное с учетом веса самого каната, приведет к выражению

$$T = \rho g \left(\frac{4L}{9t^2} + \frac{9t^2}{64} - \frac{L}{2} \right). \quad (2.43)$$

В формулах (2.42), (2.43) предполагается, что канат представляет собой абсолютно гибкую нить (струну). В действительности канат имеет изгибную жесткость, которая несколько изменяет скорость распространения поперечной волны. В этом случае поперечные колебания каната описываются дифференциальным уравнением (2.21). Анализ этого уравнения показывает, что учет влияния изгибной жесткости EJ каната приводит к изменению максимального значения нагрузки на канат на 3-5 %.

Указанный выше способ определения натяжения каната не является единственным. Например, другой способ заключается в следующем. С помощью специального устройства (шаблона) зафиксировать участок каната длиной $I = 1,5$ м, возбудить в нем поперечные колебания и измерить их частоту (высшие формы колебаний быстро затухают, поэтому по истечении небольшого промежутка времени будем измерять лишь первую низшую частоту). При этом, натяжение с достаточной точностью определяется по формуле (2.30) при $i=1$.

Полученные выше зависимости также позволяют определить натяжение ленты в ленточном конвейере. При этом исследуется участок ленты между двумя поддерживающими роликами, замеряется частота поперечных колебаний и по формуле (2.30) определяется натяжение ленты T (при $i=1$).

Определение изгибной жесткости каната по частоте поперечных колебаний

Как следует из выражения (2.40), с увеличением длины каната влияние изгибной жесткости на частоту колебаний резко уменьшается. Поэтому, при определении величины изгибной жесткости EJ по частоте поперечных колебаний необходимо рассматривать отрезки канатов малой длины ($0,7-1$ м).

Как следует из (2.36), (2.40) с увеличением натяжения T частота поперечных колебаний увеличивается, т.е. между частотой свободных поперечных колебаний ω и натяжением T существует однозначная зависимость и, зная параметры каната, можно по величине частоты определять натяжение и изгибную жесткость каната. Для этого отрезок каната длиной $0,7-1$ м следует закрепить в зажимах испытательной машины и при фиксированном натяжении T определить частоту поперечных колебаний. Частота поперечных колебаний определяется либо путем наклейки тензорезисторов на канат, либо с помощью акселерометров, закрепленных на канате.

Как следует из (2.36) существует бесконечное множество частот ω_i ($i = 1, 2, 3 \dots$). Однако, вследствие быстрого затухания высших форм колебаний, мы в опытах будем фиксировать лишь первую (низшую) частоту ω_1 . Существование высших форм колебаний можно обнаружить, возбуждая струну с частотой

$$\rho = \omega_2, \omega_3 \text{ и т.д.}$$

Описание колебаний в системах, имеющих дискретные и упругие тела

Полученные выше сведения позволяют описать переходные процессы в системах имеющих дискретные и упругие тела (подъемная установка, ленточный транспортер, буровая установка и др.)

Составим для примера уравнения динамики подъемной установки, эквивалентная схема которой представлена на рис. 2г.

Для этого разрежем канат в точке его набегания на барабан, и действие отброшенной связи на барабан представим усилием $P(0, t)$, как это показано на рис. 10, а действие отброшенного барабана-ускорением j , сообщаемым верхнему концу каната.

Тогда дифференциальные уравнения движения системы запишем в виде

$$M \ddot{\varphi} = M_{g6} - R[G + P(0, t)], \quad (a)$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - a^2 \frac{du}{dx^2} = -j. \quad (b)$$

Уравнение связи

$$P(0, t) = EF \frac{du(0, t)}{dx}. \quad (2.45)$$

Границные условия при которых надлежит интегрировать уравнение (2.44б) имеют вид:

для верхнего конца каната

$$1. \text{ при } x=0; u(0, t)=0.$$

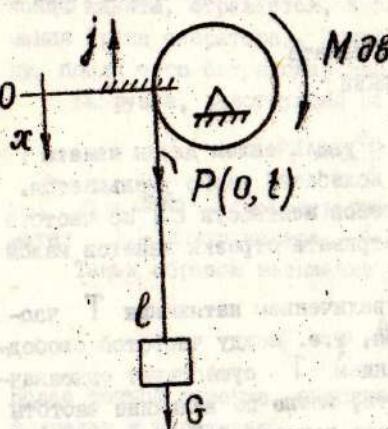


Рис. 10.

Для нижнего конца каната
2. при $x=l$

$$\frac{G}{q} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + j \right) = G - EF \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Второе граничное условие (при $x=l$) является уравнением равновесия груза на упругом канате.

3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ГОРНЫХ МАШИНАХ

В ряде случаев параметры механической системы (т.е. ее жесткость или масса) не остаются неизменными, а являются периодическими функциями времени.

Если нарушить состояние равновесия такой системы, то возникнут колебания, которые нельзя назвать ни свободными, поскольку система испытывает определенное внешнее воздействие в виде изменения жесткости, ни вынужденными, так как внешнее воздействие не проявляется в виде заданной силы. Эти колебания называются параметрическими.

Рассмотрим конкретные примеры.

На рис. II. изображен маятник, точка подвеса которого колеблется по закону $y = A \cos \nu t$.

Такой схемой моделируются колебания в подъемном канате проходческой лебедки.

Для составления дифференциальных уравнений поперечных колебаний груза Р используем принцип Даламбера.

Изобразим груз в произвольном положении, выбрав в точке O начало отсчета. Положение груза характеризуется дуговой координатой $S = OM$. Ось M_t проведем в сторону положительного отсчета дуговой координаты. Уравнение всех сил относительно т. O ,

$$F_t^u l + Pl \sin \varphi - F_{\text{пер}}^u l \sin \varphi = 0.$$

Здесь $|F_t^u| = m \frac{d^2 S}{dt^2}$ - касательная сила инерции;

$|F_{\text{пер}}^u| = m \frac{d^2 u}{dt^2} = m A \nu^2 \cos \nu t$ переносная сила инерции (обусловлена колебанием точки подвеса маятника),

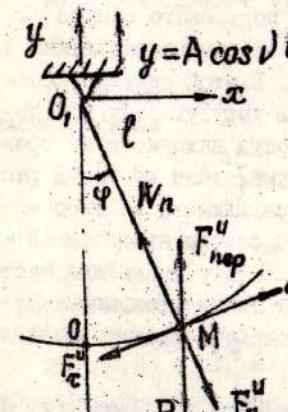


Рис. 11

F_n^u — нормальная сила инерции (момент ее относительно т. 0₁ равен нулю); $\mu = \frac{F_n^u}{F}$.

С учетом этих обозначений получим

$$m \frac{d^2s}{dt^2} \ell = -mg \ell \sin \varphi + m A \nu^2 \cos \nu t \cdot \ell \sin \varphi.$$

Учитывая, что $s = \ell \varphi$ и преобразуя последнее выражение, получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \left(1 - \frac{A\nu^2}{g} \cos \nu t \right) = 0. \quad (3.1)$$

Обозначая

$\omega^2 = g/\ell$ (частота собственных колебаний маятника), $h = \frac{A\nu^2}{g}$, уравнение (3.1) представим в канонической форме

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 (1 - h \cos \nu t) = 0. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) называется уравнением Матье.

В большинстве практически важных случаев дифференциальное уравнение параметрических колебаний можно привести к виду (3.2).

Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях подъемного сосуда 1, (рис. 12), который равномерно движется по вертикальным направляющим 2, (проводники), которые закреплены на растrelах 3. В этой системе поперечная жесткость, определяющая восстанавливающую упругую силу при поперечных колебаниях сосуда, переменна: если сосуд находится на уровне растrela, то эта жесткость достигает максимума, если же сосуд расположен против середины свободного пролета между двумя соседними растrelами, жесткость минимальна. График изменения жесткости по длине ствола представлен

на рис. 12. Частота изменения жесткости зависит от расстояния между растrelами ℓ и от скорости движения сосуда $\nu = \frac{2\pi V}{\ell}$,

где V — скорость движения сосуда.

При составлении дифференциального уравнения будем подъемный сосуд моделировать материальной точкой, совершающей колебания только в направлении поддерживающих упругих связей. Для общности будем полагать, что сосуд контактирует с вертикаль-

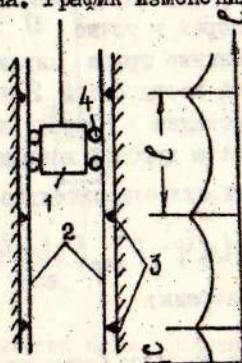


Рис. 12.

ными проводниками посредством упруго-подвешенных роликовых направляющих 4.

Приведенную жесткость проводников и упругих роликовых направляющих можно представить в виде

$$c(t) = C_0 [1 - h \cos \nu t], \quad (3.3)$$

где C_0 — жесткость роликовых направляющих; h — коэффициент модуляции жесткости проводников.

$$C_0 = \frac{C_p}{2} \left(\frac{2C_c + C_p}{C_c + C_p} \right); \quad h = \frac{C_p}{2C_c + C_p}. \quad (3.4)$$

В выражениях (3.4) C_p — приведенная жесткость роликовых направляющих сосуда с одной стороны; C_c — боковая жесткость проводника в средней части пролета между двумя соседними растrelами, определяется как для балки, опертой на абсолютно жесткие опоры, т.е.

$$C_c = \frac{92 E J}{\ell^3}, \quad (3.5)$$

где EJ — изгибная жесткость проводника.

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний сосуда

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c(t)x = 0. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.3) в (3.6), получим уравнение колебаний в канонической форме

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 (1 - h \cos \nu t) = 0, \quad (3.7)$$

где $\omega^2 = \frac{C_0}{m}$.

Одной из типичных задач, сводящихся к рассмотрению уравнения Матье, является задача о поперечных колебаниях каната (стержня), находящегося под воздействием продольных периодических сил.

Допустим, что на канат длиной ℓ (рис. 8) жесткостью EJ действует периодическая продольная сила

$$T = T(t) = T_0 \cos \nu t. \quad (3.8)$$

Тогда дифференциальное уравнение поперечных колебаний получим, подставляя (3.8) в уравнение (2.22)

$$EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + T(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (3.9)$$

уравнение (3.9) путем подстановки

$$q = q(t) \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (3.10)$$

может быть сведено к следующему

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 [1 - h \cos \nu t] q = 0, \quad (3.11)$$

где $\omega^2 = \frac{\pi^4 E J}{\rho \ell^4}$; $h = \frac{\ell^2 T_0}{\pi^2 E J}$. (3.12)

В заключении рассмотрим задачу о поперечных колебаниях струны, натяжение которой меняется по закону

$$T(t) = T_0 - \Delta T \cos \nu t. \quad (3.13)$$

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны (2.4), путем подстановки (3.10) с учетом (3.13) сводится к дифференциальному уравнению (3.11), где

$$\omega_i = \frac{i\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}; \quad h = \frac{\Delta T}{T_0}; \quad (3.14)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots$$

Во всех рассмотренных случаях коэффициент возбуждения $h < 1$.

Решения уравнений (3.2), (3.7), (3.11) носят колебательный характер и решающим образом зависят от конкретных значений параметров ω и h . В одних случаях данной комбинации ω и h соответствуют колебания ограниченные по амплитуде, в других случаях колебания с нарастающими амплитудами. В сущности, дальнейшие подробности колебаний малосущественны, так как основную важность представляет именно тенденция колебательного процесса: если амплитуды остаются ограниченными, то система устойчива, в противном случае система неустойчива.

Для практических целей наибольшее значение имеют границы между областями устойчивых и неустойчивых решений.

Если частота внешнего возбуждения ν находится в интервале

$$2\omega \left(1 - \frac{h}{4}\right) < \nu < 2\omega \left(1 + \frac{h}{4}\right), \quad (3.15)$$

то в системе возникает главный демультиликационный резонанс, при котором амплитуда колебаний возрастает по экспоненциальному закону.

Ввиду того, что этот резонанс возникает в результате периодического

изменения одного из параметров колебательной системы, его часто называют параметрическим резонансом.

Неравенство (3.15) определяет собой зону неустойчивости в первом приближении, внутри которой положение равновесия $q=0$ называется неустойчивым, и в системе самовозбуждаются колебания.

На рис. I3 приведена диаграмма устойчивости системы в плоскости параметров $(\frac{2\omega}{\nu})^2$ и h (диаграмма Айнса-Стретта) в первом приближении

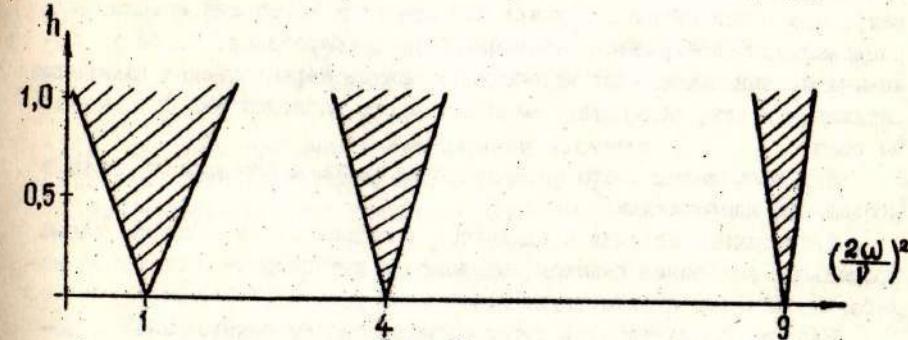


Рис. I3.

Каждой данной системе, характеризуемой параметрами ω , ν , h , соответствует на диаграмме точка с координатами h и $(\frac{2\omega}{\nu})^2$ (изображая точка). Если изображающая точка находится в пределах заштрихованных полей диаграммы, то система неустойчива, устойчивым системам соответствуют изображающие точки, расположенные на белых полях. Диаграмма Айнса-Стретта полностью освобождает от выполнения каких-либо операций по решению уравнения Маттье. Достаточно составить это уравнение, т.е. найти значения параметров ω , h , ν , после этого диаграмма сразу дает ответ на вопрос об устойчивости или неустойчивости системы.

С параметрическими колебаниями было связано несколько крупных катастроф и неудач в 60-х годах. В связи с интенсификацией работы подъема и повышением масс и скоростей движения сосудов, система "сосуд-проводники" на ряде шахт оказалось неустойчива, возникали интенсивные поперечные колебания сосуда, которые приводили к разрушению проводников и аварийной остановке шахт на длительное время. Естественно, что впоследствии армировка шахт была восстановлена, однако, таким образом, чтобы параметры системы находились в устойчивой зоне.

Умение составить уравнение типа (3.II) и выполнить его анализ имеет большое значение для горной механики, так как многие горные машины (подъемные установки, экскаваторы, отвальные мости, ленточные конвейеры и др.) содержат гибкие элементы (канаты, ванты).

При работе ленточных конвейеров с большой скоростью движения ленты часто наблюдаются поперечные колебания ленты с большой амплитудой. Исследования частотных характеристик этих колебаний показывает, что в большинстве случаев частота этих колебаний находится в рациональном соотношении с числом оборотов барабанов. Одной из основных причин поперечных колебаний является периодическое изменение натяжения ленты, вследствие эксцентричного расположения барабанов на осях.

При этом имеют место периодические перемещения концов ленты в продольном направлении.

Аналогичные явления наблюдаются в подъемных установках, когда продольные колебания канатов вызывают их интенсивные поперечные колебания, которые препятствуют нормальной работе установки.

Наблюдения за работой отвалообразователей, одноковшовых и роторных экскаваторов, конструкции которых содержат канаты и ванты, свидетельствуют, что в отдельных случаях в канатах и вантах возникают колебания большой амплитуды, если выполняются следующие соотношения

$$\omega = \nu \quad (\text{главный резонанс}); \quad (3.16)$$

$$2\omega \approx \nu \quad (\text{параметрический резонанс}).$$

При этом, даже при небольших сравнительно колебаниях конструкций в канатах происходит периодическое изменение натяжения или, точнее, изменения расстояния между концами канатов. Задача исследования колебаний канатов и ванты сводится к исследованию дифференциального уравнения типа (3.II) и проверке условий (3.16).

До настоящего времени такого рода расчетам при проектировании конструкций машин для открытых горных и земляных работ не уделялось должного внимания. Между тем может оказаться, что именно долговечность гибких элементов определяется надежность и долговечность конструкций машин. Естественно, что амплитуды поперечных колебаний гибких элементов будут тем большими, чем строже выполняются резонансные соотношения (3.16). Вследствие этого одной из задач расчета и проектирования конструкций, содержащих канаты и ванты большой длины, является выбор значений параметров конструкций и их элементов, исключающих условия возникновения резонансов.

Список литературы

I. Кожевников С.Н. Динамика машин с упругими звеньями. Киев, изд-во АН УССР, 1961.

ОГЛАВЛЕНИЕ	Стр.
ВВЕДЕНИЕ	3
I. МЕТОДИКА СОСТАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГОРНЫХ МАШИН	5
I.1. Методы и принципы теоретической механики.	5
I.2. Расчетные (эквивалентные) схемы.	9
I.3. Дифференциальные уравнения движения и их анализ	14
2. КОЛЕВАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ.	25
2.1. Общие сведения.	25
2.2. Дифференциальные уравнения колебаний упругих тел.	26
2.3. Решение дифференциальных уравнений.	33
2.4. Примеры практического применения сведений из теории колебаний упругих тел	38
3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕВАНИЯ В ГОРНЫХ МАШИНАХ	41

Составили доценты Колосов Л.В., Фельдиан М.Р.
Ответственный за выпуск доцент Новиков Л.В.,
Утверждено на заседании методической комиссии
по специальности 0506 (протокол № 5 от 10.01.80 г.)

Редакционно-издательский отдел ДГИ,
г. Днепропетровск, пр. К. Маркса, 19.

Подписано к печати 31.01.1980 г. Формат 60x90 I/16.
Бумага типографская № 1. Усл. печ. л. 2,73. Уч.-изд. л. 2,16.
Тираж 300 экз. Зак. № 2053. Бессертификация.
Ротапринт городской типографии № 3 Днепропетровского областного управления по делам издательства, полиграфии и книжной торговли.
320002, г. Днепропетровск, ул. Серова, 7.