МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА:
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 151 “Автоматизація та комп’ютерно – інтегровані технології”,
спеціалізаціями: “Автоматизація хіміко – технологічних процесів і виробництв”,
“Комп’ютерно – інтегровані технології хімічних та нафтопереробних виробництв”

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Теоретична механіка: Конспект лекцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності: 151 “Автоматизація та комп’ютерно – інтегровані технології”, спеціалізацій “Автоматизація хіміко – технологічних процесів і виробництв”, “Комп’ютерно – інтегровані технології хімічних та нафтопереробних виробництв“ / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Н.І. Штефан, Н.В. Гнатейко, В.М. Федоров. – Електронні текстові дані (1 файл: 6,98 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 143 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №7 від 15.02.2019) за поданням Вченої ради механіко-машинобудівного інституту (протокол №7від 22.02.2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА: КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Укладачі: *Штефан Наталія Іллівна*, канд. техн. наук, доц.
Гнатейко Нонна Валентинівна,, канд. техн. наук, доц.
Федоров Володимир Миколайович, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний редактор *Трубачев С.І.,* канд.техн. наук, доц.

Рецензент *Степанюк А.Р.*, канд. техн. наук, доцент кафедри МАХНВ ІХФ КПІ ім. Ігоря Сікорського

Запропонований конспект лекцій створено для вивчення дисципліни «Теоретична механіка» в одному семестрі згідно навчальної програми та робочої програми кредитного модуля. В ньому систематизовано викладені основні поняття та закони механіки; методи вивчення умов рівноваги і руху реальних фізичних об’єктів, які моделюють у вигляді матеріальної точки, твердого тіла і механічної системи; методи перетворення систем сил у інші, їм еквівалентні. Також розглянуті способи визначення кінематичних характеристик тіл та окремих його точок (аналітичні та графічні); методи вивчення руху реальних фізичних об’єктів при знаходженні кінематичних законів руху шляхом інтегрування диференціальних рівнянь за відомих початкових умов. Поряд з цим продемонстровано багато прикладів розв’язування задач. Цей конспект лекцій буде корисним не тільки студентам, які вивчають теоретичну механіку в одному семестрі, а й молодим викладачам.

Лекція 1

Предмет теоретичної механіки

В механіці особливого значення набуває форма існування об’єктивної реальності (матерії) у вигляді *речовини*, з якої складаються всі фізичні тіла, і *поля*, яке вони можуть створювати, в якому можуть рухатися і з яким взаємодіяти. Основними поняттями теоретичної механіки є поняття *простору, часу, руху матерії*.

Під *рухом матерії* розуміють будь-які її зміни, які відбуваються при хімічних, теплових та інших процесах. *Механічним рухом* називається найпростіша форма руху матерії, яка зводиться до простих переміщень у просторі (з одного положення в інше) і часі. Система наук про найпростіші форми руху матерії утворює *загальну механіку*.

Теоретична механіка – це наука про найбільш загальні закони механічного руху матерії, головною задачею якої є пізнання кількісних закономірностей реальних рухів фізичних тіл.

В теоретичній механіці використовуються наступні моделі фізичних тіл: матеріальна точка, система матеріальних точок, абсолютно тверде тіло та система абсолютно твердих тіл.

Матеріальною точкою називається найпростіша модель фізичного тіла довільної форми, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати, і яка, в свою чергу, має властивість інертності і здібність взаємодіяти з іншими тілами.

Системою матеріальних точок називають сукупність матеріальних точок, положення і рух яких взаємозв’язані.

Незмінною називається така система матеріальних точок, в якій взаємне розташування точок, що їй належать, залишається незмінним. Якщо незмінна система матеріальних точок неперервно заповнює деяку частину простору, тоді така система називається *абсолютно твердим тілом*. Із властивостей незмінної системи випливає, що відстань між двома довільно вибраними точками абсолютно твердого тіла не змінюється при його русі.

В основі теоретичної механіки лежать *три закони Ньютона*. Для їх формулювання введемо поняття *інерціальної системи відліку* (ІСВ), під якою розуміємо таку систему відліку, по відношенню до якої ізольована матеріальна точка знаходиться в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху. Система, яка не має цих властивостей, називається *неінерціальною*.

І-й закон Ньютона: **будь-яке тіло знаходиться в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху доки і оскільки воно не змушується прикладеними силами змінити свій стан.**

Для формулювання ІІ-го закону Ньютона треба ввести поняття кількості руху матеріальної точки. *Кількістю руху матеріальної точки* називається добуток маси точки на її швидкість:

$$\vec{q} = m\vec{\mathrm{v}}.$$

ІІ-й закон Ньютона: *зміна кількості руху матеріальної точки пропорційна прикладеній силі і відбувається вздовж тієї ж прямої, по якій діє сила:*

$$\frac{d\left(m\vec{\mathrm{v}}\right)}{dt} = \vec{F}.$$

ІІІ-й закон Ньютона: *дії завжди відповідає рівна їй за величиною і протилежна за напрямком протидія, тобто дії двох тіл одного на інше завжди рівні і напрямлені вздовж однієї прямої в різні боки.*

Механіка складається з <u>трьох основних розділів</u>:

1) *статики* – розділу механіки, в якому вивчається рівновага матеріальних тіл, та зведення систем сил до найпростішого (еквівалентного) вигляду;
2) *кінематики*, яка вивчає рух тіл з геометричної точки зору, тобто без урахування причин, які викликали цей рух;
3) *динаміки*, яка вивчає рух тіл з урахуванням причин (зовнішніх сил), які викликали цей рух.

Розділ 1. *С т а т и к а*

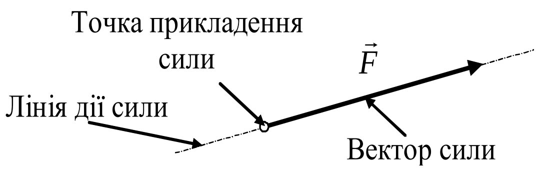
1. Предмет статики

Статика – розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються методи перетворення однієї системи сил в інші, їй еквівалентні, а також умови рівноваги різних систем сил, що діють на тіло.

Величина, що є мірою механічної дії одного тіла (або поля) на інше, називається *силою*.
Зазвичай використовується математична модель сили у вигляді зв'язаного вектора, тому що вказана дія характеризується:

- напрямком;
- точкою прикладення (тією матеріальною часткою, на яку діє сила);
- чисельним значенням, що називається *модулем сили* ($\left|\vec{F}\right| \equiv F$).

Дія сили на матеріальну точку залежить від напрямку сили і її величини.



Напрямком сили є той напрямок, в якому матеріальна точка, що рухається вільно або знаходиться у стані спокою, буде рухатися під дією сили.

Пряма, по якій напрямлена сила називається *лінією дії сили*.

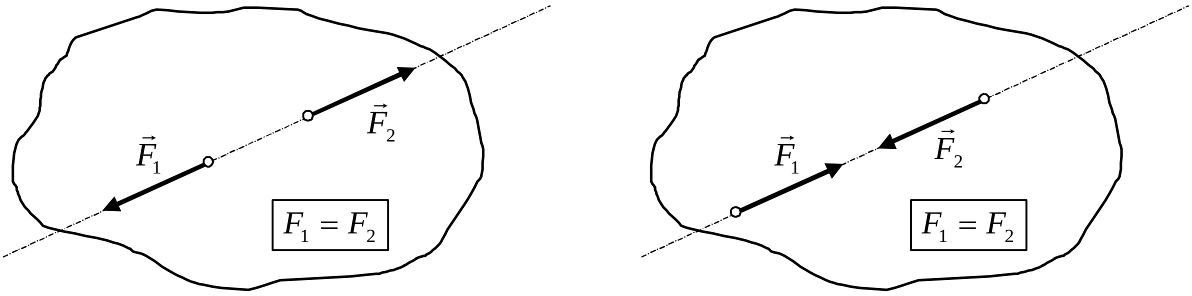
1.1. Основні означення та поняття

Введемо **деякі означення**.

1) Дві системи сил $\left\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n\right\} \equiv \left\{\vec{F}_i\right\}_{i=1}^n$ та $\left\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m\right\} \equiv \left\{\vec{P}_i\right\}_{i=1}^m$ є *еквівалентними*, якщо не порушуючи стан твердого тіла, одну систему сил можна замінити іншою: $\left\{\vec{F}_i\right\}_{i=1}^n \sim \left\{\vec{P}_i\right\}_{i=1}^m$.
2) Якщо систему сил $\left\{\vec{F}_i\right\}_{i=1}^n$ можна замінити еквівалентною силою $\vec{F}$, тоді така сила називається *рівнодійною* даної системи сил. В цьому разі $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots$ називаються *складовими* даної сили.
3) Матеріальна точка знаходиться *в рівновазі* по відношенню до ІСВ, якщо вона знаходиться в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху.
4) Система матеріальних точок знаходиться *в рівновазі* по відношенню до ІСВ, якщо всі точки цієї системи знаходяться в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху з рівними за величиною і однаковими за напрямком швидкостями.
5) Якщо тіло під дією системи сил $\left\{\vec{F}_i\right\}_{i=1}^n$ знаходиться в рівновазі, то така система сил називається *зрівноваженою* (*еквівалентною нулю*), тобто $\left\{\vec{F}_i\right\}_{i=1}^n \sim \vec{0}$.
6) Сила, прикладена до тіла в одній точці, називається *зосередженою*.
7) Сили, прикладені до всіх точок даної поверхні тіла або його об'єму, називаються *розподіленими*.

1.2. Аксіоми про дві сили

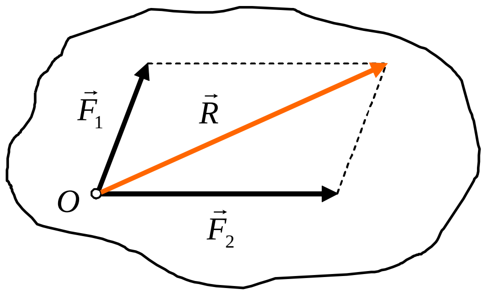
<u>Аксіома 1</u> (про дві сили): *дві сили, прикладені до твердого тіла є зрівноваженими, якщо вони рівні за величиною і діють вздовж однієї лінії в протилежних напрямках*.



Ця аксіома справедлива для твердих тіл (для деформовних тіл вона не виконується).

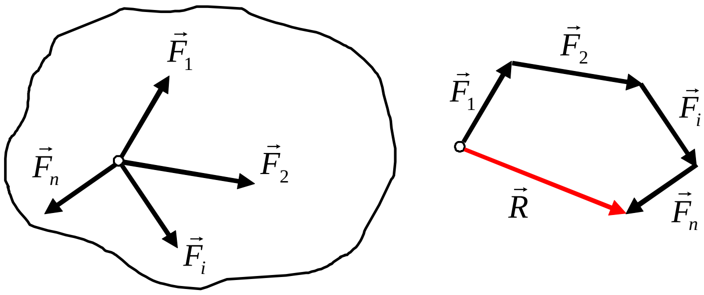
<u>Аксіома 2</u> (про паралелограм сил): *дві сили, прикладені до твердого тіла <u>в одній точці</u> під кутом одна до одної, мають рівнодійну, яка визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах цих сил як на сторонах*:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \qquad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\left(\vec{F}_1 \hat{;} \vec{F}_2\right)}\,.$$



Таким чином, аксіома 2 повністю визначає рівнодійну, а саме: точку прикладання, величину рівнодійної та її напрямок.

Із цієї аксіоми випливає правило векторного додавання n-сил, прикладених до однієї точки твердого тіла. Для цього необхідно побудувати многокутник наступним чином: до вектора $\vec{F}_1$ додати (добудувати) вектор, який геометрично дорівнює $\vec{F}_2$, потім до нього добудувати вектор, який геометрично дорівнює $\vec{F}_3$, і т. д.

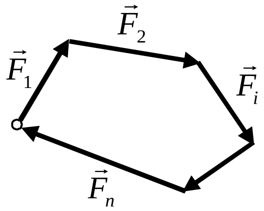


Вектор, проведений із точки прикладення всіх сил в останню вершину многокутника є *рівнодійною*:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \;,$$

а побудований таким чином многокутник називається *силовим*, або *многокутником сил*[1].

Якщо кінець останнього з векторів, що додаються, збігається з початком першого, то многокутник сил є замкненим, а відповідна система сил – *зрівноваженою* ($\{\vec{F}_i\}_{i=1}^{n} \sim \vec{0}$). Тоді



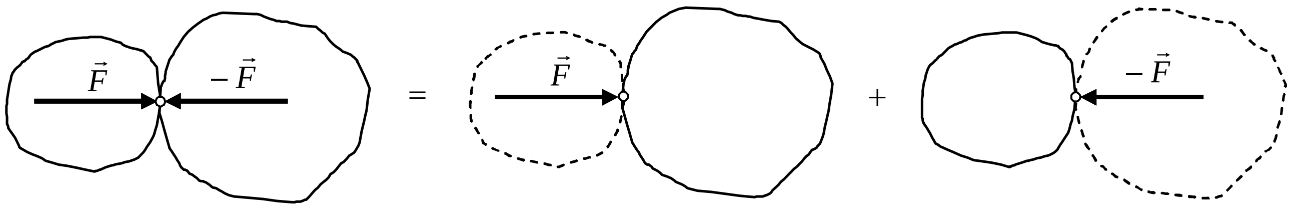
$$\boxed{\{\vec{F}_i\}_{i=1}^{n} \sim \vec{0}}$$

$$\vec{R} = \vec{0},$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}.$$

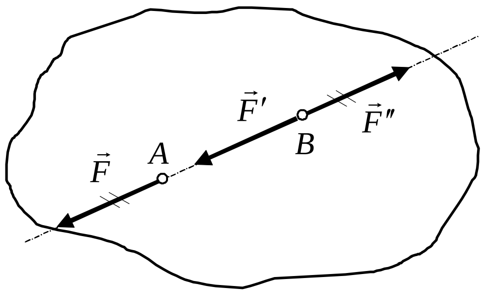
Умова замкненості силового многокутника виражає умову рівноваги системи сил, прикладених до однієї точки твердого тіла, у *графічній формі*.

<u>Аксіома 3</u>: *сили, з якими два тіла діють одне на друге, рівні за величиною і протилежні за напрямком, не є зрівноваженими, оскільки вони прикладені до різних тіл*.



1.3. Найпростіші теореми статики

<u>Теорема 1</u> (про силу як ковзний вектор): *дія сили на тверде тіло не зміниться, якщо цю силу перенести вздовж лінії її дії в будь-яку точку.*



$$\boxed{F' = F'' = F}$$

Д о в е д е н н я

Нехай до точки A тіла прикладена сила $\vec{F}$.

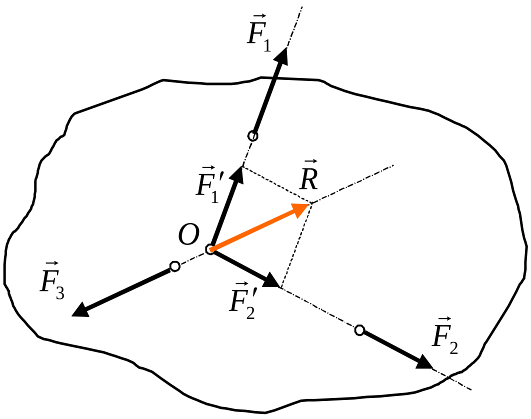
За аксіомою про дві сили прикладаємо до т. B на лінії дії сили $\vec{F}$ систему зрівноважених сил $\{\vec{F}', \vec{F}''\} \sim \vec{0}$. Тоді сила $\vec{F}$, прикладена в т. A, і сила $\vec{F}''$, прикладена в т. B, утворюють зрівноважену систему сил, яку можна відкинути. Таким чином, залишилася лише сила $\vec{F}'$ в т. B, що і вимагалося довести (оскільки $F' = F$, і сили $\vec{F}$ та $\vec{F}'$ мають однакові напрямки).

---

[1] Тут і надалі символ $\sum$ або $\sum\limits_i$ означає $\sum\limits_{i=1}^{n}$, якщо не говориться про інше.

<u>Теорема 2</u> (про три сили): *якщо тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, лінії дії двох з яких перетинаються, тоді всі три сили лежать в одній площині і їх лінії дії перетинаються в одній точці.*

Д о в е д е н н я

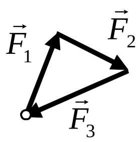


Оскільки тіло знаходиться в рівновазі, то система сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$ зрівноважена, тобто $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\} \sim \vec{0}$.

Використовуючи теорему 1, переносимо сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ вздовж ліній їх дії в т. O. Далі, скориставшись аксіомою 2, знаходимо рівнодійну $\vec{R}$ сил $\vec{F}_1'$ і $\vec{F}_2'$, тоді $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\} \sim \{\vec{R}, \vec{F}_3\}$.

Оскільки тіло знаходиться в рівновазі під дією системи сил $\{\vec{R}, \vec{F}_3\}$, то, скориставшись аксіомою про дві сили, робимо висновок, що сили $\vec{F}_3$ і $\vec{R}$ діють вздовж однієї лінії і мають однакову величину.

Наслідок: *при виконанні умов теореми про три сили відповідний силовий трикутник буде замкненим.*



Для рівноваги твердого тіла під дією трьох непаралельних сил необхідно (але недостатньо), щоб всі три сили лежали в одній площині, а їх лінії дії перетиналися в одній точці.

Зауважимо, що сукупність двох сил, рівних за величиною і протилежних за напрямком, можна розглядати як *векторний нуль* (або нуль-вектор $\vec{0}$), додавання або відкидання якого до системи сил, прикладених до твердого тіла, не змінює початкового стану останнього.

Правила побудови еквівалентних систем сил

- Силу як ковзний вектор можна переносити в будь-яку точку твердого тіла вздовж лінії її дії.
- До будь-якої системи сил можна додавати або відкидати зрівноважену систему сил (векторний нуль).
- Сили, прикладені до однієї точки твердого тіла, можна замінити еквівалентною силою – рівнодійною.
- Будь-яку силу можна розкладати на декілька складових.

1.4. Активні і пасивні сили. Аксіоми про в'язі

Тверде тіло називається *вільним*, якщо в довільний момент часу довільним чином можна задати його рух, підібравши визначеним чином активні сили – сили взаємодії.

Якщо рух тіла обмежений деякими в'язями, то воно називається *невільним*. *В'язями* називаються обмеження, що накладені на рух твердого тіла.

Між тілом і в'яззю існує механічна взаємодія. Вплив тіла на в'язь називається *дією*, а зворотна дія в'язі на тіло називається *протидією*.

Протидія в'язі, прикладена до даного тіла, називається *реакцією в'язі*. Іншими словами, реакція в'язі – це сила, яка виражає тільки протидію в'язі. В задачах механіки реакції в'язей завжди потребують визначення на відміну від активних сил, величини та напрямки яких завжди задані. Модуль і напрямок реакції в'язі залежить від сил, прикладених до тіла. У разі відсутності активних сил і руху тіла реакція в'язі завжди дорівнює нулю.

Активні сили можуть змусити рухатись тіла, що знаходяться в спокої, реакції ж в'язей ніколи не можуть надати тілу рух. Тому реакції в'язей називають *пасивними силами*.

Розглянемо дві аксіоми про в'язі.

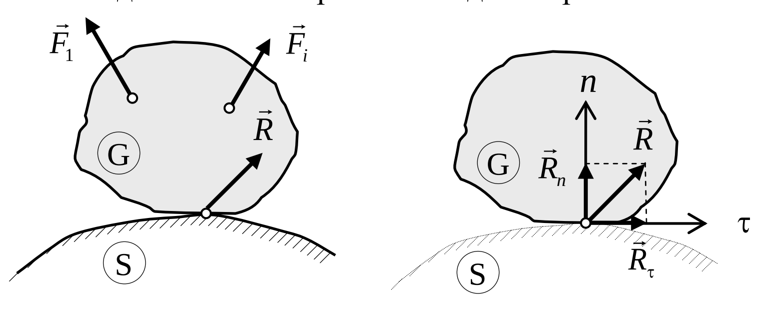
Аксіома 1 (про звільнення від в'язей): *не змінюючи механічного стану тіла, в'язі, які накладені на це тіло, можна уявно відкинути, якщо замінити їх дію відповідними реакціями.*

Наслідок: *будь-яке невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо скористатися аксіомою 1 і замінити в'язі відповідними реакціями, прикладеними до даного тіла.*

Аксіома 2 (про накладання нових в'язей): *рівновага твердого тіла не порушиться при накладанні нових в'язей.*

1.5. Види в'язей та їх реакції

Нехай тіло G знаходиться на поверхні S. Тоді поверхня S є в'яззю для тіла G.



Реакція в'язі ($\vec{R}$) відповідає тому напрямку, вздовж якого в'язь S заважає переміщенню тіла G. На рисунку n - є спільною нормаллю до поверхонь G і S, а τ відповідає напрямку спільної дотичної до поверхонь G і S.

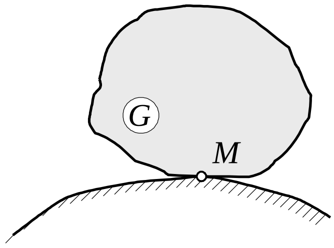
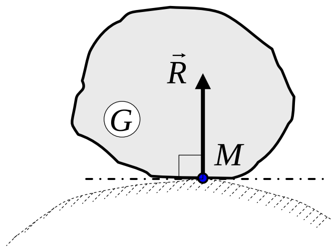
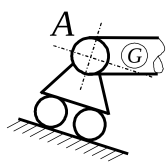
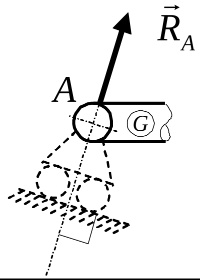
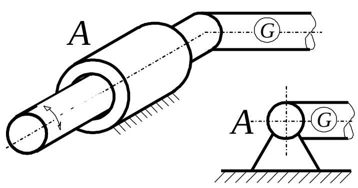
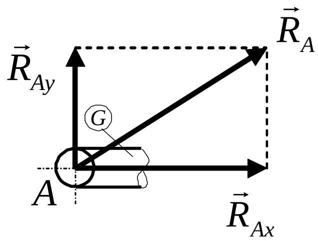
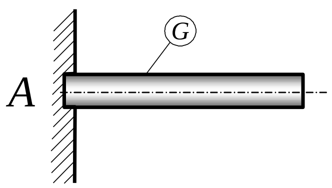
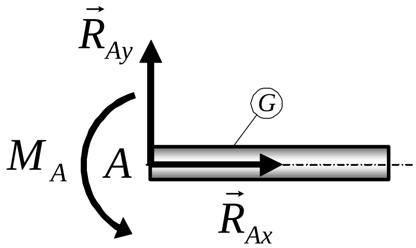
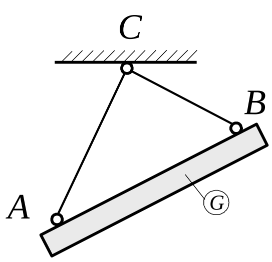
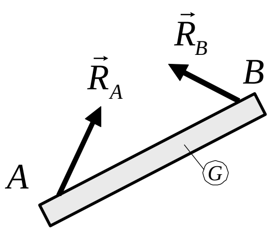
Дослідним шляхом встановлено, що дотична складова реакції в'язі ($\vec{R}_\tau$) виникає в результаті обмежень, пов'язаних із ковзанням тіла G по поверхні S. До цих обмежень належать: обробка поверхні, вид матеріалу, і таке інше, - тобто все, що пов'язане з явищем *тертя*. Тому силу $\vec{R}_\tau$ називають *силою тертя*. В тих випадках, коли $\vec{R}_\tau$ можна знехтувати, поверхні тіл називають *ідеально гладенькими*.

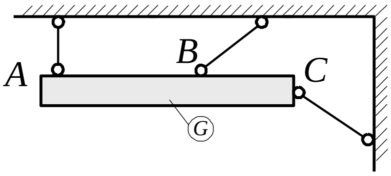
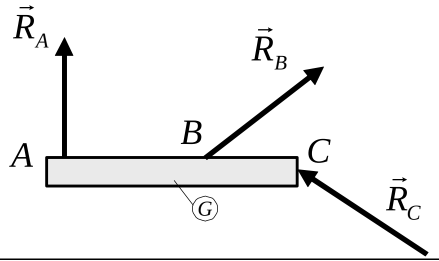
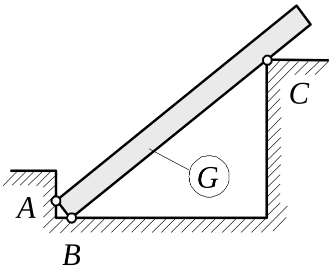
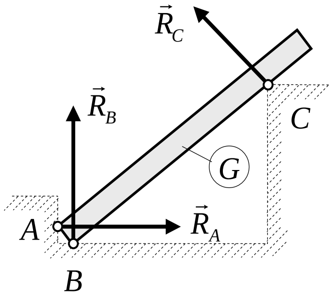
Реакція $\vec{R}$ в таких випадках зводиться тільки до нормальної складової $\vec{R}_n$.

Висновок: *для ідеально гладенької поверхні реакція в'язі завжди напрямлена за нормаллю до поверхні.*

Види в'язей, що найчастіше зустрічаються в механіці, наведені у наступній таблиці.

Таблиця. ***Види в'язей та їх реакції***

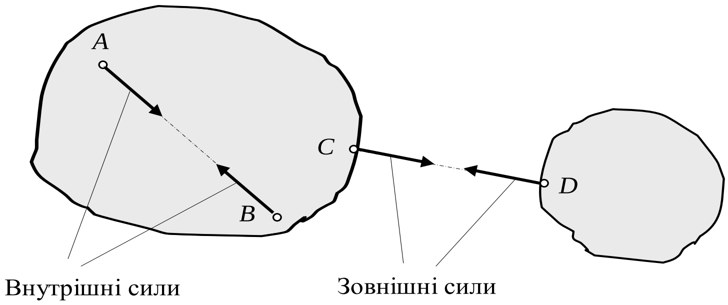
1.	Гладенька опорна поверхня		
2.	Рухомий шарнір (коток)		
3.	Нерухомий шарнір		
4.	Консольне (жорстке) защемлення		
5.	Гнучка в'язь (трос, нитка, ланцюг)		

6.	Жорсткий (ідеальний) стрижень, на кінцях якого точкові шарніри		
7.	Опора тіла на гладеньке ребро, або тіло ребром спирається на гладеньку поверхню		

1.6. Зовнішні та внутрішні сили. Метод перерізів

Зовнішніми називаються сили, які викликані взаємодією тіл, що не входять до однієї системи.

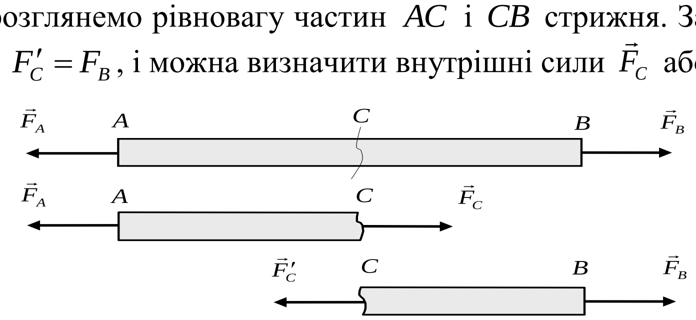
Внутрішніми називаються сили взаємодії між матеріальними точками однієї й тієї ж системи.



Внутрішні сили можна розглядати як систему дії або протидії між точками однієї системи (або твердого тіла). Внутрішні сили являють собою систему сил, еквівалентну нулю.

Висновок: *на стан твердого тіла внутрішні сили не впливають.*

Розглянемо приклад визначення сили взаємодії в перерізі C тіла (стрижня) AB, що знаходиться в рівновазі під дією двох зовнішніх сил $\vec{F}_A$ і $\vec{F}_B$. Для цього проведемо переріз у точці C і окремо розглянемо рівновагу частин AC і CB стрижня. За аксіомою про дві сили маємо: $F_A = F_C$, $F'_C = F_B$, і можна визначити внутрішні сили $\vec{F}_C$ або $\vec{F}'_C$.



Наведений вище *метод перерізів* дозволяє перевести внутрішні сили до категорії зовнішніх сил, після чого їх можна визначити відомими методами.

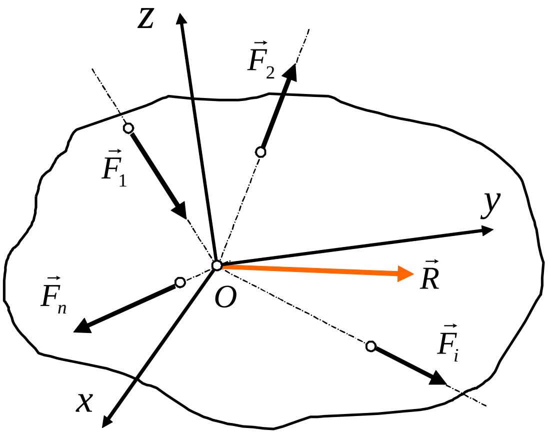
Лекція 2

2. Момент сили відносно точки і осі. Пара сил

2.1. Система збіжних сил (збіжна система сил)

Система сил називається *збіжною*, якщо лінії дії всіх сил, прикладених до твердого тіла, перетинаються в одній точці.

Нехай на тверде тіло діє система збіжних сил $\left\{\vec{F}_i\right\}_{i=1}^{n}$. Введемо праву систему координат $Oxyz$. За аксіомами 1 і 2 маємо



$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i , \tag{1}$$

Або

$$R_x = \sum_i F_{ix}, \quad R_y = \sum_i F_{iy} \quad R_z = \sum_i F_{iz} . \tag{2}$$

Тоді модуль вектора $\vec{R}$ визначається за формулою

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} , \tag{3}$$

а його напрямні косинуси мають вигляд

$$\cos\left(\vec{R}\hat{;}Ox\right) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos\left(\vec{R}\hat{;}Oy\right) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos\left(\vec{R}\hat{;}Oz\right) = \frac{R_z}{R} . \tag{4}$$

Формули (1) - (4) повністю визначають рівнодійну системи збіжних сил.

Умовою рівноваги системи збіжних сил є рівність нуль-вектору рівнодійної, тобто

$$\vec{R} = \vec{0} , \tag{5}$$

звідки матимемо

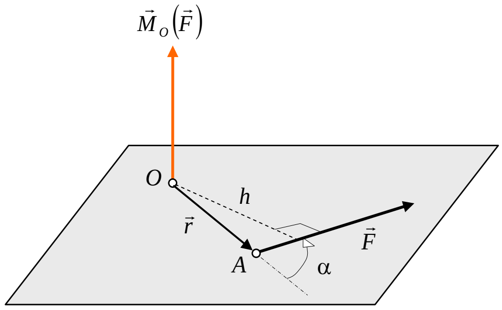
$$R_x = \sum_i F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_i F_{iy} = 0, \quad R_z = \sum_i F_{iz} = 0 . \tag{6}$$

Для рівноваги системи збіжних сил необхідно, щоб алгебричні суми проекцій всіх сил на осі Ox, Oy і Oz дорівнювали нулю.

В графічній формі умова рівноваги системи збіжних сил зображується у вигляді замкненого многокутника сил.

2.2. Момент сили відносно точки

Моментом сили $\vec{F}$ *відносно точки (центра)* O називається величина, що дорівнює векторному добутку радіус-вектора $\vec{r}$, проведеного з т. O в т. A прикладення сили, на цю силу, тобто



$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} ,$$

модуль цього вектора є

$$M_O = r \cdot F \cdot \sin\left(\vec{r}\hat{;}\vec{F}\right), \tag{7}$$

звідки, якщо взяти до уваги, що

$$\sin(180^o - \alpha) = \sin\alpha ,$$

а також те, що найкоротша відстань від центру O

до лінії дії сили $\vec{F}$ (*плече сили*) дорівнює

$$h = r \cdot \sin\left(\vec{r}\,\hat{;}\,\vec{F}\right), \tag{8}$$

отримаємо

$$M_O = F \cdot h. \tag{9}$$

Висновок: *величина момента сили відносно центра O дорівнює добутку сили на плече дії сили.*

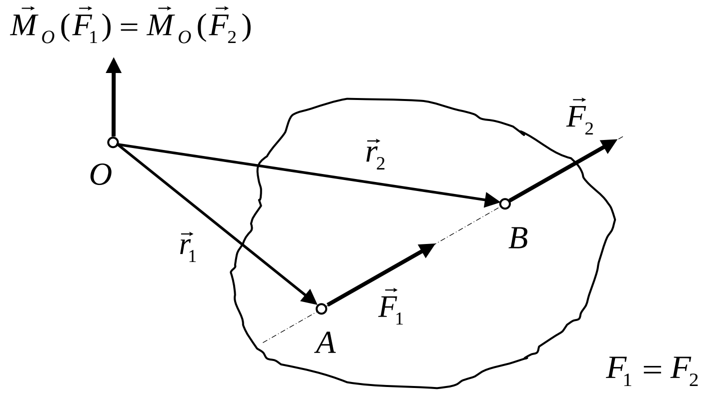
Вектор момента сили відносно центра O є перпендикулярним до площини, що проходить через т. O та лінію дії сили $\vec{F}$, і напрямлений в той бік, звідки можливе обертання тіла під дією сили $\vec{F}$ відбувається проти ходу годинникової стрілки.

Визначимо проекції вектора момента сили відносно точки на осі системи координат:

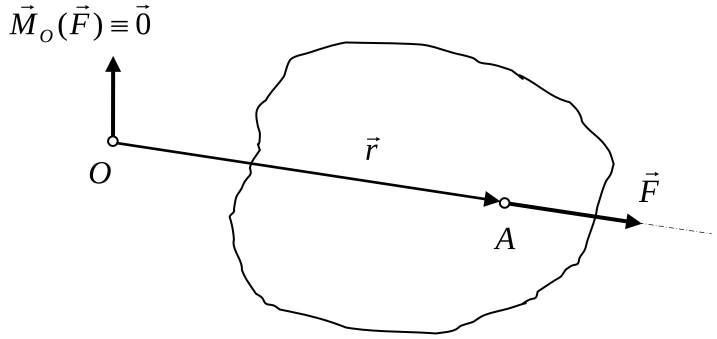
$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(yF_z - zF_y\right)\vec{i} + \left(zF_x - xF_z\right)\vec{j} + \left(xF_y - yF_x\right)\vec{k}, \tag{10}$$

де $\{x, y, z\}$ - проекції радіус-вектора $\vec{r}$, а $\{F_x, F_y, F_z\}$ - проекції сили $\vec{F}$ на відповідні координатні осі. З іншого боку Запишемо **властивості момента сили відносно точки**.

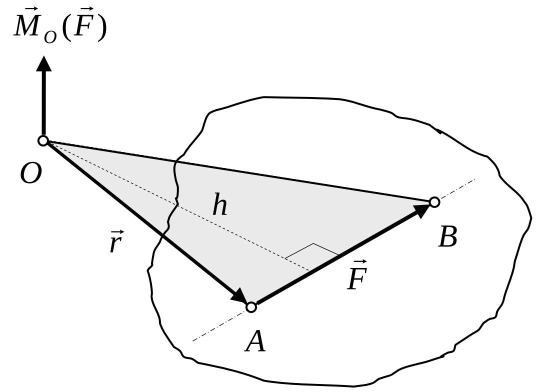
1) Якщо перемістити силу вздовж її лінії дії в будь-яку точку, момент цієї сили відносно точки не зміниться.



2) Якщо лінія дії сили $\vec{F}$ проходить через центр O, то момент цієї сили відносно т. O *завжди дорівнює нулю*.



3) Величина момента сили відносно центра O дорівнює подвоєній площі трикутника OAB: $M_O(\vec{F}) = 2S_{\Delta OAB}$.

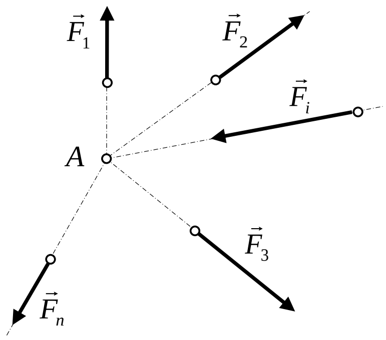


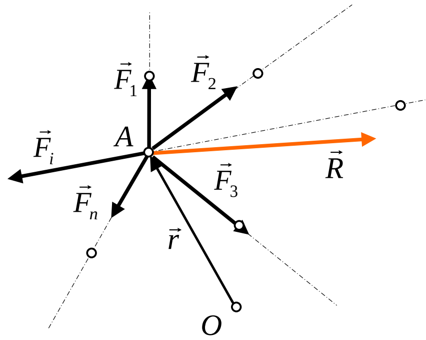
2.3. Теорема про момент рівнодійної системи збіжних сил

<u>**Теорема Варіньона**</u>: *момент рівнодійної системи збіжних сил відносно деякого центру O дорівнює векторній сумі моментів всіх сил, що входять в систему, відносно того ж самого центру O.*

Д о в е д е н н я

Розглянемо збіжну систему сил $\left\{\vec{F}_i\right\}_{i=1}^{n}$. Замінимо її рівнодійною $\vec{R}$. Виберемо довільний центр O, тоді





$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{r}\times\vec{R} = \vec{r}\times\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\right) = \vec{r}\times\vec{F}_1 + \vec{r}\times\vec{F}_2 + \ldots + \vec{r}\times\vec{F}_n =$$

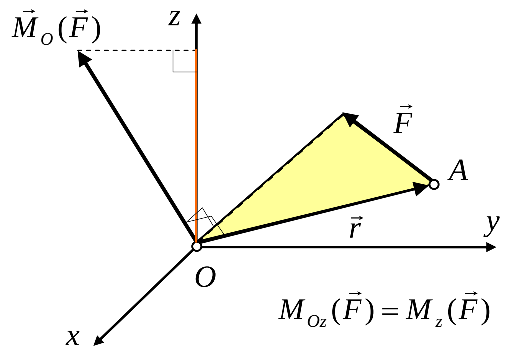
$$= \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \ldots \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_O(\vec{F}_i).$$

2.4. Момент сили відносно осі

Моментом сили відносно осі називається скалярна величина, що дорівнює проекції на цю вісь момента даної сили відносно довільної точки цієї осі.

Проекції вектора момента сили $\vec{F}$ відносно центра O визначені формулами (10) в 2.2. Ці ж самі співвідношення визначають величини моментів сили $\vec{F}$ відносно осей Ox, Oy і Oz (за означенням), і оскільки моменти сил відносно координатних осей не залежать від вибору т. O, то

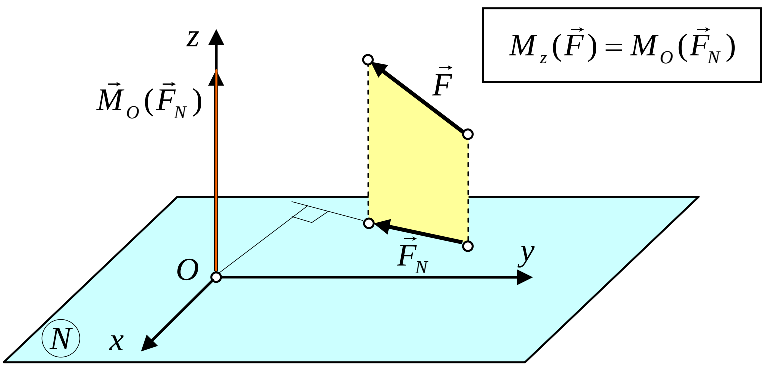
$$M_{Ox} = M_x, \quad M_{Oy} = M_y, \quad M_{Oz} = M_z.$$



Цими позначеннями будемо користуватися і надалі.

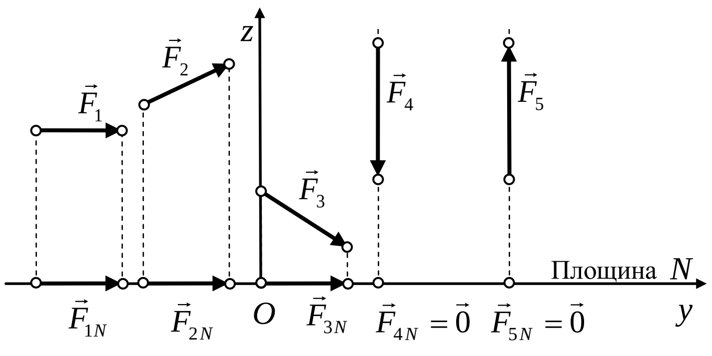
Робоче правило для обчислення момента сили відносно осі (див. наступний рисунок)

- Будуємо площину N, яка перпендикулярна до осі z, відносно якої необхідно знайти момент сили. Визначаємо точку перетину площини N з вказаною віссю (т. O).
- Визначаємо допоміжний вектор $\vec{F}_N$ у площині N, що є проекцією на площину N сили $\vec{F}$.
- Визначаємо момент вектора $\vec{F}_N$ відносно точки O. Модуль знайденої величини і буде шуканим моментом сили відносно осі.



Момент сили відносно осі вважається *додатним*, якщо спостерігачеві, що дивиться з додатного напрямку вказаної осі, обертання тіла під дією сили $\vec{F}$ бачиться таким, що відбувається проти руху стрілки годинника, в супротивному випадку момент сили відносно осі вважається *від'ємним*.

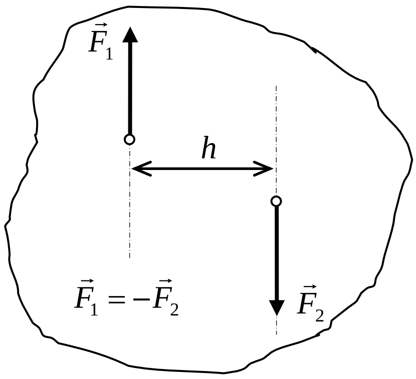
Якщо сила і вісь лежать в одній площині, тоді момент сили відносно цієї осі завжди дорівнює нулю.



Наприклад, моменти всіх вказаних на рисунку сил відносно осі z дорівнюють нулю, тому що всі ці сили і вісь z лежать у площині рисунку (див. робоче правило).

2.5. Момент пари сил

Парою сил, прикладених до твердого тіла, називають сукупність двох рівних за величиною і паралельних сил, що діють у протилежних напрямках вздовж незбіжних ліній дії.



Площина, в якій лежать ці дві сили, називається *площиною дії* пари сил.

Плечем пари (h) називається найкоротша відстань між паралельними лініями дії цих двох сил.

Пара сил ніколи не зводиться до рівнодійної.

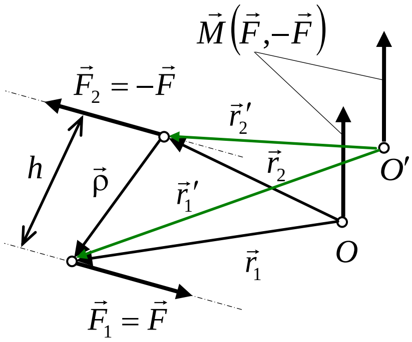
Припустимо, що пара сил зводиться до рівнодійної. Тоді система сил $\{\vec{F}, -\vec{F}, -\vec{R}\} \sim \vec{0}$, звідки $\{\vec{F}, -\vec{F}\} \neg \sim \vec{0}$.

Дослідним шляхом встановлено, що пара сил $\{\vec{F}, -\vec{F}\}$ надає тілу обертання.

Для визначення величини, яка описує обертальний ефект, знайдемо векторну суму моментів сил, що утворюють пару, відносно довільної точки O простору. Послідовно знаходимо вектори $\vec{M}_O(\vec{F}_1) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}$, $\vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_2 \times (-\vec{F})$, та їх суму:

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{\rho} \times \vec{F},$$

де $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{\rho}$.



Ця сума моментів називається *моментом пари сил* і позначається $\vec{M}(\vec{F}, -\vec{F})$, тобто

$$\vec{M}(\vec{F}, -\vec{F}) = \vec{\rho} \times \vec{F}.$$

Зауважимо, що момент пари сил не змінюється при зміні центру O на інший (наприклад, O'), оскільки $\vec{r}_1' - \vec{r}_2' = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{\rho}$.

Величина моменту пари сил визначається так:

$$M(\vec{F}, -\vec{F}) = \rho\, F \sin(\vec{\rho}\hat{;} \vec{F}) = hF,$$

де плече пари $h = \rho \sin(\vec{\rho}\hat{;} \vec{F})$. Таким чином, момент пари сил за величиною дорівнює добутку плеча пари на модуль сили, що утворює пару. Момент пари сил є *вільним* вектором.

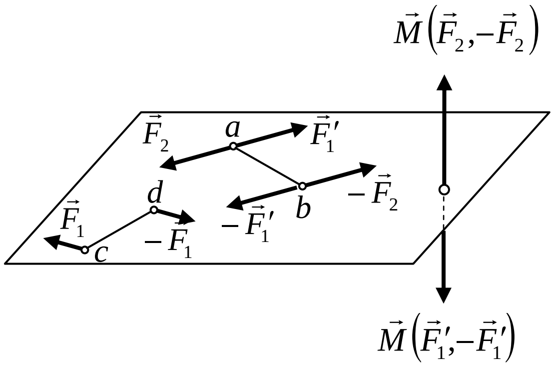
Момент пари сил є перпендикулярним до площині пари і напрямлений в ту частину простору, звідки обертання тіла під дією пари сил бачиться таким, що відбувається проти ходу годинникової стрілки.

2.6. Теореми про пари сил

<u>Теорема 1</u>: *не змінюючи дії пари на тверде тіло, пару можна переносити і повертати у площині її дії, змінюючи при цьому плече і силу так, щоб момент пари залишався незмінним* (без доведення).

<u>Теорема 2</u>: *пара сил* $\{\vec{F}_1, -\vec{F}_1\}$ *є зрівноважувальною для пари сил* $\{\vec{F}_2, -\vec{F}_2\}$*, що лежить в тій же площині, якщо моменти цих пар рівні за величиною і протилежно напрямлені.*

Д о в е д е н н я



За теоремою 1 перенесемо пару сил $\left\{\vec{F}_1,-\vec{F}_1\right\}$ у площині дії пари, змінюючи плече cd на ab, а силу $\vec{F}_1$ на $\vec{F}_1'$. Зауважимо, що

$$\vec{M}\left(\vec{F}_2,-\vec{F}_2\right)=\overrightarrow{ba}\times\vec{F}_2,$$

$$\vec{M}\left(\vec{F}_1',-\vec{F}_1'\right)=\overrightarrow{ba}\times\vec{F}_1'.$$

Тоді

$$\vec{M}\left(\vec{F}_2,-\vec{F}_2\right)+\vec{M}\left(\vec{F}_1',-\vec{F}_1'\right)=\vec{0},$$

або

$$\overrightarrow{ba}\times\vec{F}_2+\overrightarrow{ba}\times\vec{F}_1'=\vec{0}.$$

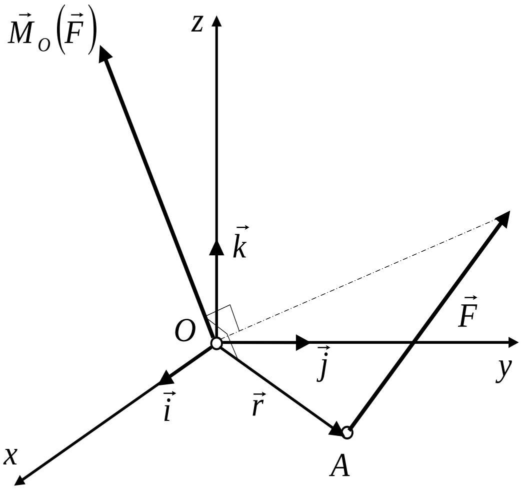
Звідси випливає, що

$$\overrightarrow{ba}\times\left(\vec{F}_2+\vec{F}_1'\right)=\vec{0}.$$

Тоді матимемо

$$\left\{\vec{F}_2,\vec{F}_1'\right\}\sim\vec{0}, \qquad \left\{-\vec{F}_2,-\vec{F}_1'\right\}\sim\vec{0}.$$

Отже пара сил $\left\{\vec{F}_1,-\vec{F}_1\right\}$ є зрівноважувальною для пари сил $\left\{\vec{F}_2,-\vec{F}_2\right\}$, що і треба було довести.



$$\vec{M}_O=M_{Ox}\,\vec{i}+M_{Oy}\,\vec{j}+M_{Oz}\,\vec{k}. \tag{11}$$

Порівнюючи вирази (10) і (11), отримаємо

$$\begin{cases} M_{Ox}=yF_z-zF_y, \\ M_{Oy}=zF_x-xF_z, \\ M_{Oz}=xF_y-yF_x. \end{cases} \tag{12}$$

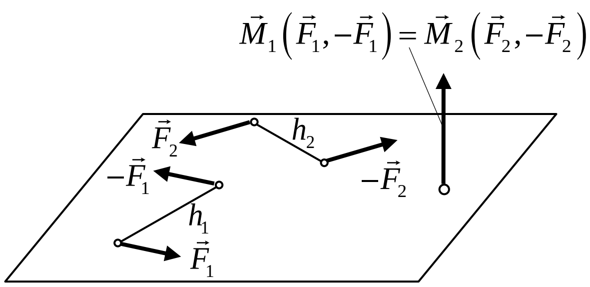
Модуль момента сили відносно точки визначиться за формулою

$$M_O=\sqrt{M_{Ox}^2+M_{Oy}^2+M_{Oz}^2} \tag{13}$$

а напрямок – напрямними косинусами

$$\begin{cases} \cos\left(\vec{M}_O\,\hat{;}\,\vec{i}\right)=M_{Ox}/M_O, \\ \cos\left(\vec{M}_O\,\hat{;}\,\vec{j}\right)=M_{Oy}/M_O, \\ \cos\left(\vec{M}_O\,\hat{;}\,\vec{k}\right)=M_{Oz}/M_O. \end{cases} \tag{14}$$

Теорема 3: *якщо дві пари сил мають геометрично рівні моменти, тоді вони називаються статично еквівалентними.*



$$M_1\left(\vec{F}_1,-\vec{F}_1\right)=F_1h_1,\quad M_2\left(\vec{F}_2,-\vec{F}_2\right)=F_2h_2.$$

Тоді

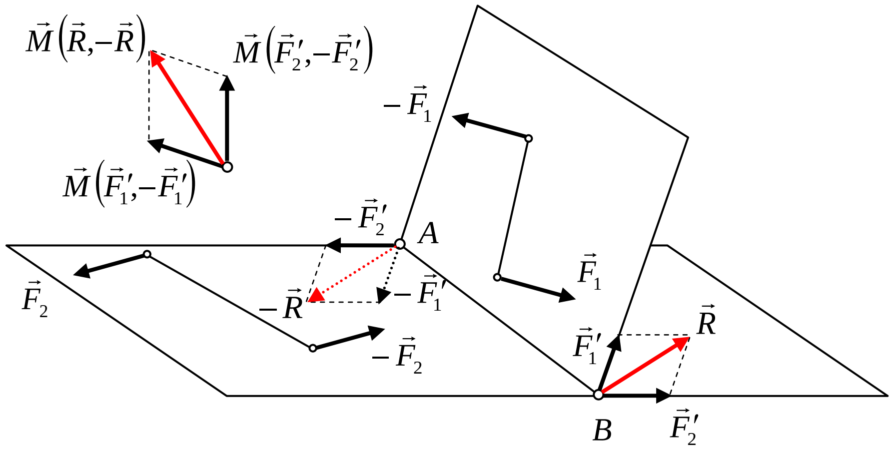
$$M_1=M_2\ \Rightarrow\ \vec{M}_1=\vec{M}_2.$$

<u>Теорема 4</u>: *якщо дві пари сил* $\{\vec{F}_1,-\vec{F}_1\}$ *і* $\{\vec{F}_2,-\vec{F}_2\}$ *знаходяться в перетинних площинах, тоді вони еквівалентні одній парі, момент якої дорівнює векторній сумі моментів цих пар.*

Д о в е д е н н я

Використовуючи теорему 1, приводимо розглядувані пари до нових пар із загальним плечем AB, що лежить на лінії перетину обох площин. Тоді

$$\{\vec{F}_1,-\vec{F}_1\}\sim\{\vec{F}_1',-\vec{F}_1'\},\ \ \{\vec{F}_2,-\vec{F}_2\}\sim\{\vec{F}_2',-\vec{F}_2'\}.$$



Далі помічаємо, що $\{\vec{F}_1',\vec{F}_2'\}\sim\vec{R}$, $\{-\vec{F}_1',-\vec{F}_2'\}\sim-\vec{R}$. Сили $\vec{R}$ і $-\vec{R}$ утворюють пару. Визначимо її момент:

$$\vec{M}(\vec{R},-\vec{R})=\overrightarrow{AB}\times\vec{R}=\overrightarrow{AB}\times(\vec{F}_1'+\vec{F}_2')=\overrightarrow{AB}\times\vec{F}_1'+\overrightarrow{AB}\times\vec{F}_2'=\vec{M}(\vec{F}_1',-\vec{F}_1')+\vec{M}(\vec{F}_2',-\vec{F}_2')=$$
$$=\vec{M}(\vec{F}_1,-\vec{F}_1)+\vec{M}(\vec{F}_2,-\vec{F}_2),$$

що і треба було довести.

Узагальнимо те, про що йшла мова вище.

Якщо розглядається система пар сил $\{\vec{F}_i,-\vec{F}_i\}_{i=1}^{n}$, тоді така система пар завжди зводиться до однієї пари, яка називається *вислідною парою*, момент якої дорівнює геометричній сумі моментів розглядуваних пар:

$$\vec{M}(\vec{R},-\vec{R})=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}(\vec{F}_i,-\vec{F}_i). \tag{15}$$

Якщо всі пари $\{\vec{F}_i,-\vec{F}_i\}$ лежать в одній площині, тоді формула (15) перетворюється в алгебричний вираз

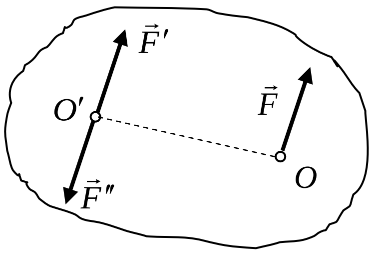
$$M(\vec{R},-\vec{R})=\sum_{i=1}^{n}M(\vec{F}_i,-\vec{F}_i). \tag{16}$$

Лекція 3

3. Довільна просторова система сил та умови її рівноваги

3.1. Лема про паралельний переніс сил

Не змінюючи статичного стану твердого тіла, силу, що прикладена до нього, можна перенести в будь-яку точку тіла паралельно до самої себе, прикладаючи при цьому *приєднану* пару сил.



Доведення

Нехай сила $\vec{F}$ прикладена в т. O, і її треба перенести в т. O'.

Додаючи в т. O' зрівноважену систему сил $\{\vec{F}', \vec{F}''\}$ ~0, тобто $F' = F'' = F$, отримаємо еквівалентну початковій силі $\vec{F}$ систему сил $\{\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}''\}$, а саме $\{\vec{F}\}$~ $\{\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}''\}$.

Остання система сил складається з сили $\vec{F}' = \vec{F}$ і приєднаної пари сил $\{\vec{F}, \vec{F}''\}$, що і треба було довести.

3.2. Головний вектор і головний момент довільної системи сил. Основна теорема статики твердого тіла (теорема Пуансо)

Нагадаємо, що основною задачею статики є визначення умов зведення довільної системи сил до найпростішого вигляду. Метод Пуансо дозволяє звести довільну систему сил до однієї пари сил і однієї сили.

Введемо спочатку поняття *головного вектора* і *головного моменту.*

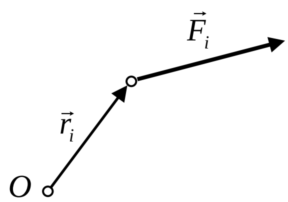
Припустимо, що задається довільна система сил $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^{n}$.

Головним вектором даної системи сил є векторна сума всіх сил, що входять до системи.

Головним моментом даної системи сил відносно т. O (центра зведення) називається векторна сума моментів всіх сил, що входять в дану систему, відносно того ж центра O.

$$\vec{F}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \quad (1) \qquad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{F}_i), \quad (2)$$

де $\vec{r}_i$ - радіус-вектор, проведений з центру зведення O у точку прикладення сили $\vec{F}_i$ (див. рисунок).



Знайдемо проекції лівої і правої частин (1) і (2) на відповідні осі Ox, Oy і Oz

$$
\begin{cases}
F_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \\
F_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \\
F_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz};
\end{cases} \qquad (3) \qquad
\begin{cases}
M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i F_{iz} - z_i F_{iy} \right), \\
M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} \left(z_i F_{ix} - x_i F_{iz} \right), \\
M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix} \right).
\end{cases} \qquad (4)
$$

Тут F_{Ox}, F_{oy}, F_{Oz}; M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} - відповідні проекції головного вектора і головного моменту довільної системи сил на осі Ox, Oy і Oz.

Модулі і напрямки головного вектора і головного момента знайдемо таким чином

$$
F_O = \sqrt{F_{Ox}^2 + F_{Oy}^2 + F_{Oz}^2}, \qquad M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2},
$$

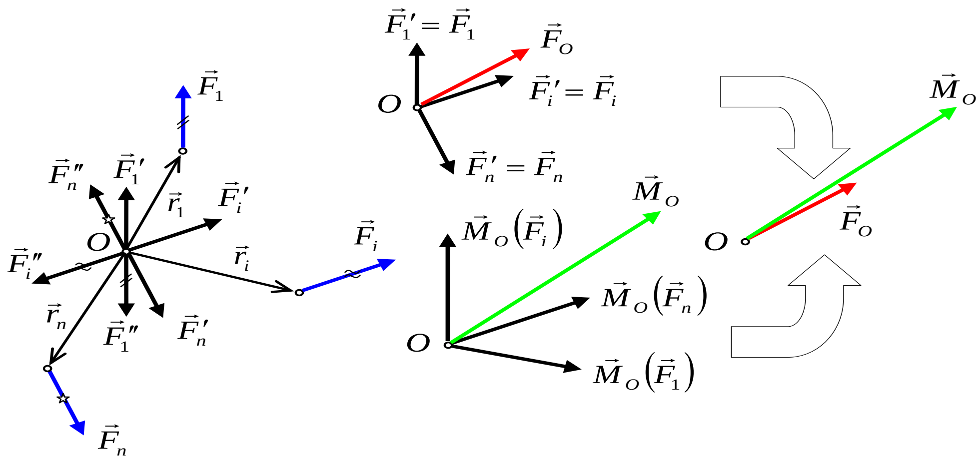
$$
\begin{cases}
\cos\left(\vec{F}_O \hat{;} \vec{i} \right) = \dfrac{F_{Ox}}{F_O}, \\
\cos\left(\vec{F}_O \hat{;} \vec{j} \right) = \dfrac{F_{Oy}}{F_O}, \\
\cos\left(\vec{F}_O \hat{;} \vec{k} \right) = \dfrac{F_{Oz}}{F_O};
\end{cases} \qquad (5) \qquad
\begin{cases}
\cos\left(\vec{M}_O \hat{;} \vec{i} \right) = \dfrac{M_{Ox}}{M_O}, \\
\cos\left(\vec{M}_O \hat{;} \vec{j} \right) = \dfrac{M_{Oy}}{M_O}, \\
\cos\left(\vec{M}_O \hat{;} \vec{k} \right) = \dfrac{M_{Oz}}{M_O}.
\end{cases} \qquad (6)
$$

Скориставшись наведеною вище лемою, доведемо основну теорему статики – теорему Пуансо.

Теорема Пуансо: *довільна система сил, що діють на тверде тіло, замінюється еквівалентною системою, що складається з однієї сили, яка прикладена в довільній точці – центрі зведення і дорівнює головному вектору даної системи сил, і приєднаної пари сил, момент якої дорівнює головному моменту всіх сил відносно вибраного центру зведення.*

Д о в е д е н н я

Нехай маємо довільну систему сил $\left\{ \vec{F}_i \right\}_{i=1}^{n}$, прикладених до твердого тіла.



Для кожної сили $\vec{F}_i$ $(i = \overline{1,n})$ в довільному центрі O прикладемо зрівноважену систему двох сил $\left\{ \vec{F}_i', \vec{F}_i'' \right\}$, таких, що $F_i' = F_i'' = F_i$, а $\vec{F}_i = \vec{F}_i' = -\vec{F}_i''$. Тоді сили $\vec{F}_i$ і $\vec{F}_i''$

утворюють приєднану пару сил і маємо $\{\vec{F}_i, \vec{F}_i', \vec{F}_i''\} \sim \{\vec{F}_i', \{\vec{F}_i, \vec{F}_i''\}\}$. Приєднану пару сил $\{\vec{F}_i, \vec{F}_i''\}$ можна характеризувати її моментом $\vec{M}(\vec{F}_i, \vec{F}_i'')$, тому $\{\vec{F}_i, \vec{F}_i', \vec{F}_i''\} \sim \{\vec{F}_i', \vec{M}(\vec{F}_i, \vec{F}_i'')\}$. Зауважимо також, що $\vec{M}(\vec{F}_i, \vec{F}_i'') = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_O(\vec{F}_i)$, тому остаточно матимемо $\{\vec{F}_i, \vec{F}_i', \vec{F}_i''\} \sim$ $\{\vec{F}_i', \vec{M}_O(\vec{F}_i)\}$, де силу $\vec{F}_i'$ можна вважати перенесеною в центр O силою $\vec{F}_i$.

Таким чином, у точці O отримано сукупність перенесених в неї сил $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^n$ і сукупність моментів $\{\vec{M}_O(\vec{F}_i)\}_{i=1}^n$. Склавши відповідно ці вектори отримаємо головний вектор

$$\vec{F}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n \tag{7}$$

і головний момент

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \ldots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) \tag{8}$$

вихідної довільної просторової системи сил.

Якщо дві системи сил мають геометрично рівні головні вектори і головні моменти, тоді такі системи називають *статично еквівалентними*.

3.3. Умови рівноваги довільної просторової системи сил

Теорема: *для того, щоб довільна просторова система сил знаходилась в рівновазі, необхідно і достатньо, щоб $\vec{F}_O$ і $\vec{M}_O$ дорівнювали нулю.*

Д о в е д е н н я

Користуючись теоремою Пуансо, зводимо вказану систему сил, що діє на тверде тіло, до $\vec{F}_O$ *і* $\vec{M}_O$, тобто

$$\{\vec{F}_i\}_{i=1}^n \sim \{\vec{F}_O, \vec{M}_O\}.$$

Застосувавши далі теорему Сомова, замінюємо $\vec{F}_O$ *і* $\vec{M}_O$ двома перехресними силами

$$\{\vec{F}_O, \vec{M}_O\} \sim \{\vec{Q},\ \vec{P}\}.$$

Оскільки система сил знаходиться в рівновазі, то за аксіомою про дві сили, сили $\vec{Q}$ і $\vec{P}$ повинні бути рівними за величиною, протилежними за напрямком і діяти вздовж однієї прямої. Але для такої системи сил $\vec{F}_O$ *і* $\vec{M}_O$ дорівнюють нулю, тобто

$$\vec{F}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}, \tag{9}$$

а також

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0}, \tag{10}$$

що і треба було довести.

Умови (9) і (10) є умовами рівноваги довільної просторової системи сил у векторній формі. При проеціюванні виразів (9) і (10) на осі $Ox,\ Oy,\ Oz$, отримаємо відповідно

$$
\begin{cases}
F_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0, \\
F_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0, \\
F_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = 0;
\end{cases} \tag{11}
$$

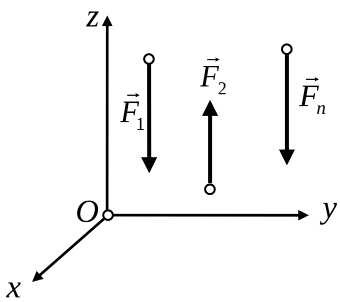
$$
\begin{cases}
M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} M_{Ox}\left(\vec{F}_i\right) = M_{Ox}\left(\vec{F}_1\right) + M_{Ox}\left(\vec{F}_2\right) + \ldots + M_{Ox}\left(\vec{F}_n\right) = 0, \\
M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} M_{Oy}\left(\vec{F}_i\right) = M_{Oy}\left(\vec{F}_1\right) + M_{Oy}\left(\vec{F}_2\right) + \ldots + M_{Oy}\left(\vec{F}_n\right) = 0, \\
M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} M_{Oz}\left(\vec{F}_i\right) = M_{Oz}\left(\vec{F}_1\right) + M_{Oz}\left(\vec{F}_2\right) + \ldots + M_{Oz}\left(\vec{F}_n\right) = 0.
\end{cases} \tag{12}
$$

Умови (11) і (12) є умовами рівноваги довільної просторової системи сил в аналітичній формі: суми проекцій всіх сил, що входять у систему, на осі Ox, Oy, Oz дорівнюють нулю, і суми проекцій моментів всіх сил відносно центру O на ті ж самі осі також дорівнюють нулю.

3.4. Умови рівноваги системи сил в частинних випадках

1) Умови рівноваги просторової системи паралельних сил

Розглянемо просторову систему паралельних сил. Для неї перші два рівняння системи (11) і третє рівняння системи (12) – тотожні нулі. Залишаються, таким чином, лише рівняння



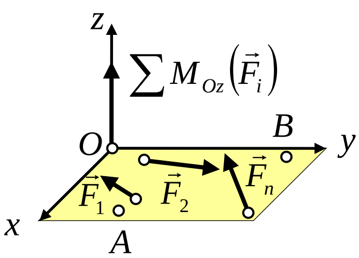
$$
\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{Ox}(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{Oy}(\vec{F}_i) = 0.
$$

Для рівноваги системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебрична сума проекцій всіх сил на вісь, що їм паралельна, дорівнювала нулю, а також дорівнювали нулю алгебричні суми моментів всіх сил відносно двох інших координатних осей.

2) Умови рівноваги довільної системи сил на площині

Для такої системи сил можна записати умови рівноваги у **трьох формах**.

а) З виразів (11) і (12) маємо:



$$
\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{Oz}(\vec{F}_i) = 0.
$$

Для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб дорівнювали нулю алгебричні суми проекцій всіх сил на координатні осі, що лежать у площині дії сил, а також алгебрична сума моментів тих же сил відносно довільної точки O площини.

б) $$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_B\left(\vec{F}_i\right) = 0.$$

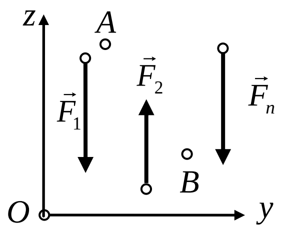
Для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб дорівнювали нулю алгебричні суми моментів всіх сил відносно двох довільних точок площини, а також алгебрична сума проекцій всіх сил на координатну вісь x (або y).

в) $$\sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\vec{F}_i) = 0.$$

Для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб дорівнювали нулю алгебричні суми моментів всіх сил відносно трьох довільних точок площини, що не лежать на одній прямій.

3) Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил

а) Із виразів (11) і (12) попередньої лекції маємо:



$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F}_i) = 0.$$

Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебрична сума проекцій всіх сил на вісь, паралельну їм, дорівнювала нулю, і алгебрична сума моментів всіх сил відносно довільної точки (центра) теж дорівнювала б нулю.

б) $$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\vec{F}_i) = 0.$$

Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебрична сума моментів всіх сил відносно двох довільних точок площини, які не лежать на одній прямій, перпендикулярній до ліній дії сил, дорівнювала нулю.

4) Умови рівноваги довільної системи пар сил

Для рівноваги довільної системи пар сил необхідно і достатньо, щоб дорівнювала нулю геометрична сума моментів всіх пар, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}(\vec{F}_i, -\vec{F}_i) = \vec{0}.$$

У разі розміщення всіх пар в одній площині умовою рівноваги є рівність нулю алгебричної суми моментів всіх пар відносно осі (наприклад, Ox), перпендикулярної до площини дії пар, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} M_x(\vec{F}_i, -\vec{F}_i) = 0.$$

3.5. Умови і рівняння рівноваги невільного твердого тіла

У випадку невільного твердого тіла, що знаходиться в рівновазі, необхідно, користуючись аксіомою про звільнення від в’язей, відкинути в’язі, замінюючи їх дію відповідними реакціями (які прикладені до точок контакту тіла із в'яззю), роблячи тим самим невільне тверде тіло вільним. Тепер рівновагу даного тіла будемо розглядати при дії на нього активних сил і реакцій в'язей.

Якщо кількість невідомих реакцій в'язей дорівнює, або меньша за кількість рівнянь рівноваги, тоді задача про їх визначення називається *статично визначеною*; якщо ж число невідомих реакцій в'язей більше за число рівнянь, тоді така задача називається *статично невизначеною*.

Нехай на тверде тіло діють n - активних сил $\left\{\vec{F}_i\right\}_{i=1}^{n}$ і m - реакцій в'язей $\left\{\vec{R}_j\right\}_{j=1}^{m}$.

Тоді для рівноваги невільного твердого тіла необхідно і достатньо, щоб геометрична сума всіх активних сил і реакцій в'язей дорівнювала нулю, а також геометрична сума моментів всіх активних сил і реакцій в'язей відносно одного й того ж центра O дорівнювала нулю, тобто

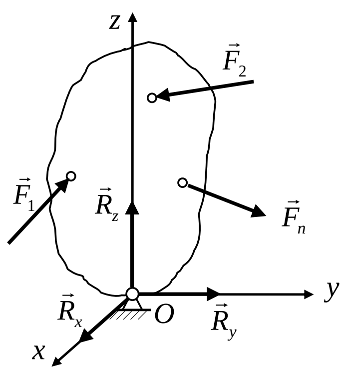
$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}\vec{F}_i + \sum\limits_{j=1}^{m}\vec{R}_j = \vec{0}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) + \sum\limits_{j=1}^{m}\vec{M}_O\left(\vec{R}_j\right) = \vec{0}. \end{cases} \tag{13}$$

Якщо спроектувати формули (13) на осі Ox, Oy і Oz, отримаємо

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}F_{ix} + \sum\limits_{j=1}^{m}R_{jx} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n}F_{iy} + \sum\limits_{j=1}^{m}R_{jy} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n}F_{iz} + \sum\limits_{j=1}^{m}R_{jz} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}M_x\left(\vec{F}_i\right) + \sum\limits_{j=1}^{m}M_x\left(\vec{R}_j\right) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n}M_y\left(\vec{F}_i\right) + \sum\limits_{j=1}^{m}M_y\left(\vec{R}_j\right) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n}M_z\left(\vec{F}_i\right) + \sum\limits_{j=1}^{m}M_z\left(\vec{R}_j\right) = 0. \end{cases}$$

Якщо невідомі реакції в'язей не входять до деяких із останніх співвідношень , тоді ці співвідношення називаються *умовами рівноваги* невільного твердого тіла. Якщо ж у деякі співвідношення входять невідомі реакції в'язей, тоді вони називаються *рівняннями рівноваги* невільного твердого тіла.

1) Умови рівноваги твердого тіла з однією нерухомою точкою



Введемо систему координат, сумістивши її початок з нерухомою точкою O. Тоді, представляючи реакцію в нерухомій точці O сумою трьох складових по осям координат, тобто у вигляді

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z,$$

отримаємо наступні шість рівнянь:

$$\sum F_{ix} + R_x = 0,$$
$$\sum F_{iy} + R_y = 0,$$
$$\sum F_{iz} + R_z = 0;$$
$$\sum M_x\left(\vec{F}_i\right) = 0,$$
$$\sum M_y\left(\vec{F}_i\right) = 0,$$
$$\sum M_z\left(\vec{F}_i\right) = 0.$$

Останні три співвідношення не містять реакцій в'язей, отже вони є умовами рівноваги.

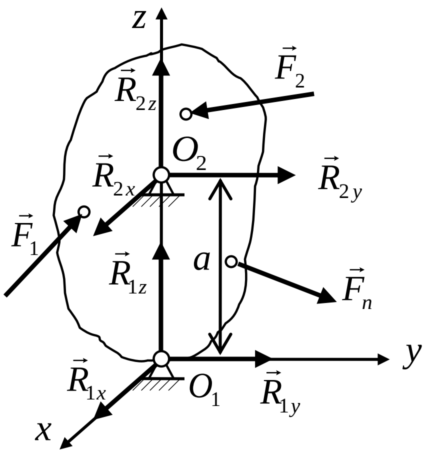
Таким чином, умовами рівноваги твердого тіла з однією нерухомою точкою є наступні: алгебричні суми моментів активних сил відносно осей Ox, Oy і Oz (з початком в нерухомій точці) повинні дорівнювати нулю.

2) Умови рівноваги твердого тіла з двома нерухомими точками

Вісь, що проходить через дві нерухомі точки O_1 і O_2, називається нерухомою.

Введемо систему координат з початком в одній з нерухомих точок (наприклад, O_1), а вісь Oz проведемо через іншу нерухому точку (O_2). Тоді, подаючи реакції в цих точках у вигляді

$$\vec{R}_1 = \vec{R}_{1x} + \vec{R}_{1y} + \vec{R}_{1z}, \quad \vec{R}_2 = \vec{R}_{2x} + \vec{R}_{2y} + \vec{R}_{2z},$$



отримаємо наступні шість рівнянь:

- $\sum F_{ix} + R_{1x} + R_{2x} = 0,$
- $\sum F_{iy} + R_{1y} + R_{2y} = 0,$
- $\sum F_{iz} + R_{1z} + R_{2z} = 0;$
- $\sum M_x\left(\vec{F}_i\right) - R_{2y}a = 0,$
- $\sum M_y\left(\vec{F}_i\right) + R_{2x}a = 0,$
- $\sum M_z\left(\vec{F}_i\right) = 0.$

Останнє співвідношення є умовою рівноваги, оскільки воно не містить реакцій в'язей.

Для рівноваги твердого тіла з двома нерухомими точками необхідно, щоб алгебрична сума моментів активних сил відносно осі, що проходить через ці дві точки, дорівнювала нулю.

Лекція 4

4.1. Залежність головного вектора і головного моменту від вибору центра зведення

Нехай маємо довільну систему сил $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^{n}$, що прикладені до твердого тіла. Ця система сил зводиться до головного вектора

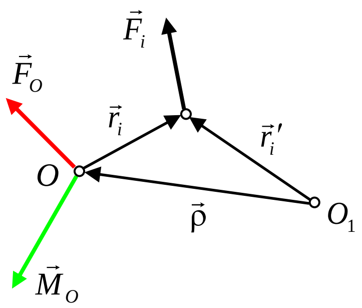
$$\vec{F}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{1}$$

і головного моменту

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right), \tag{2}$$

прикладених у центрі зведення O.

Тепер перенесемо центр зведення у т. O_1. Головний вектор системи сил для нового центру за побудовою залишиться тим же самим, тобто *головний вектор не залежить від вибору центра зведення.*



Вираз (2) для головного моменту при зміні центра зведення на O_1 набуде вигляду

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i' \times \vec{F}_i\right), \tag{3}$$

або, якщо врахувати, що

$$\vec{r}_i' = \overrightarrow{O_1O} + \vec{r}_i = \vec{\rho} + \vec{r}_i, \tag{4}$$

отримаємо

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i' \times \vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{\rho} + \vec{r}_i\right) \times \vec{F}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho} \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{\rho} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{M}_O + \vec{\rho} \times \vec{F}_O,$$

звідки маємо

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + \vec{\rho} \times \vec{F}_O. \tag{5}$$

Таким чином доведено, що *при зміні центру зведення головний момент системи сил змінюється на величину, що дорівнює моменту головного вектора, прикладеного у старому центрі зведення, відносно нового центру зведення.*

4.2. Статичні інваріанти (незмінні)

Із наведеного вище випливає, що головний вектор довільної системи сил є інваріантним (незмінним) стосовно вибору центра зведення. Тому головний вектор називають *першим статичним інваріантом* ($\mathbf{I_1}$), тобто $\mathbf{I_1} = \vec{F}_O$.

Домножимо скалярно ліву і праву частини формули (5) на головний вектор цієї системи:

$$\vec{F}_O \cdot \vec{M}_{O_1} = \vec{F}_O \cdot \vec{M}_O + \vec{F}_O \cdot \left(\vec{\rho} \times \vec{F}_O\right),$$

звідки випливає, що

$$\vec{F}_O \cdot \vec{M}_{O_1} = \vec{F}_O \cdot \vec{M}_O,$$

оскільки $\vec{F}_O \cdot \left(\vec{\rho} \times \vec{F}_O\right) = 0$ через те, що $\vec{F}_O \perp \vec{\rho} \times \vec{F}_O$.

Таким чином, скалярний добуток головного вектора і головного моменту даної системи сил ($\vec{F}_O \cdot \vec{M}_O$) не залежить від вибору центра зведення і називається *другим статичним інваріантом* ($\mathbf{I}_2$):

$$\mathbf{I}_2 = \vec{F}_O \cdot \vec{M}_O . \tag{6}$$

Тут мова йде про те, що для будь-якої просторової системи сил величина $\mathbf{I}_2$ є сталою. Також сталою і не залежною від вибору центра зведення буде проекція головного моменту на напрямок головного вектора

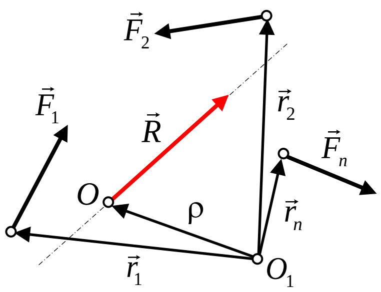
$$\mathbf{I}_2' = M_O \cos\left(\vec{F}_O \hat{;} \vec{M}_O\right),$$

що випливає з виразу (6), взявши до уваги, що модуль головного вектора є постійним для даної системи сил.

4.3. Теорема про момент рівнодійної довільної системи сил (теорема Варіньона у загальному випадку)

<u>Теорема</u>: *якщо довільна просторова система сил зводиться до рівнодійної, тоді момент рівнодійної відносно центра O дорівнюватиме сумі моментів всіх сил відносно того ж центра.*

Д о в е д е н н я



Нехай довільна просторова система сил $\left\{\vec{F}_i\right\}_{i=1}^{n}$ зводиться до рівнодійної, тобто

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_O .$$

Всі сили даної системи сил зведемо до вказаного центру O. Тоді

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O\left(\vec{R}\right) = \sum \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) = \vec{0},$$

але

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + \vec{\rho} \times \vec{R} .$$

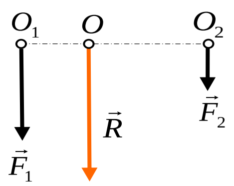
Тоді матимемо, беручи до уваги, що $\vec{M}_O = \vec{0}$, -

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_{O_1}\left(\vec{R}\right) = \vec{\rho} \times \vec{R} = \vec{\rho} \times \left(\sum \vec{F}_i\right) = \sum \vec{M}_{O_1}\left(\vec{F}_i\right).$$

Теорема доведена.

Застосуємо теорему Варіньона до системи двох паралельних сил (одного і протилежних напрямків), які не утворюють пару. Виберемо точку O на лінії дії рівнодійної цих сил, тоді:

а)

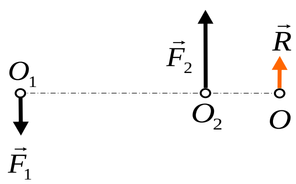


$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad R = F_1 + F_2;$$

$$M_O(\vec{R}) = 0: \; F_1 \cdot OO_1 - F_2 \cdot OO_2 = 0,$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{OO_2}{OO_1}.$$

б)



$$\vec{R} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2, \quad R = F_2 - F_1;$$

$$M_O(\vec{R}) = 0: \; F_1 \cdot OO_1 - F_2 \cdot OO_2 = 0,$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{OO_2}{OO_1}.$$

Система двох паралельних сил, які не утворюють пару, має рівнодійну, яка паралельна цим силам, а її модуль дорівнює сумі модулів сил, якщо сили напрямлені в одну сторону, і різниці модулів у разі протилежного напрямку сил.

Лінія дії рівнодійної ділить відрізок O_1O_2 на частини, обернено пропорційні модулям сил, внутрішнім чином для сил одного напрямку, і зовнішнім чином для сил протилежних напрямків.

4.4. Маса системи, центр ваги.

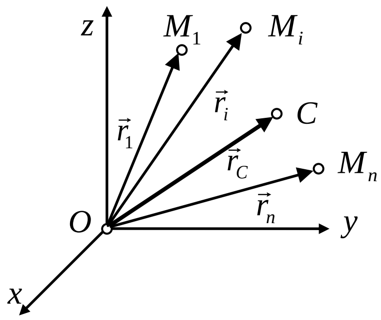
Масою системи називається сума мас всіх точок, що входять до системи:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \ , \qquad (7)$$

Центром мас або центром інерції називається <u>геометрична</u> точка, радіус-вектор якої визначається за формулою:

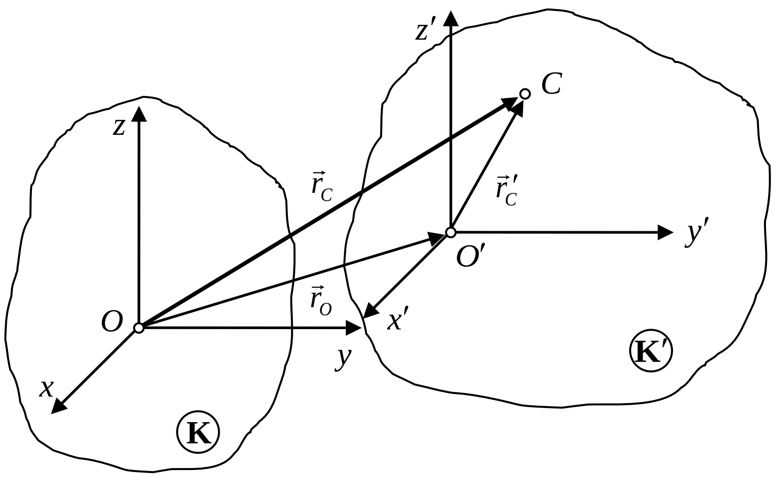
$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \ , \qquad (8)$$

де $\vec{r}_i$ - радіус-вектор i-тої точки.



Положення центру мас є інваріантним (незмінним), тобто не залежить від вибору системи відліку. Доведемо це твердження.

Введемо дві системи відліку: інерціальну ($\mathbf{K}$) і неінерціальну ($\mathbf{K}'$).



Тут $\vec{r}_O$ - радіус-вектор, який визначає положення системи $O'x'y'z'$ по відношенню до $Oxyz$.

Припустимо, що точка C є центром мас. Тоді матимемо

$$\vec{r}'_C = \frac{\sum m_i \vec{r}'_i}{m} = \frac{\sum m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O)}{m} = \\ = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} - \vec{r}_O \frac{\sum m_i}{m} = \vec{r}_C - \vec{r}_O ,$$

або остаточно $\boxed{\vec{r}'_C = \vec{r}_C - \vec{r}_O}$,

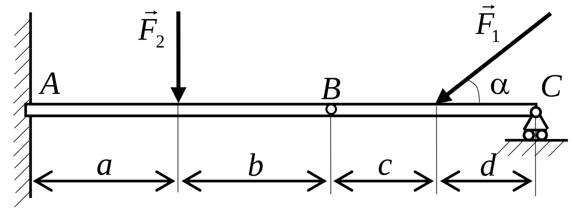
тобто кінці векторів $\vec{r}'_C$ та $\vec{r}_C$ вказують на одну й ту ж саму точку простору, що й доводить твердження про інваріантність положення центру мас.

4.5. Приклад розв’язання задачі статики *(система двох тіл на прикладі складеної балки).*

Два стрижня AB і BC з’єднані шарніром B (проміжний шарнір). Визначити реакції в закладанні A, якщо відомі $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ і α. Геометричні розміри наведені на рисунку.

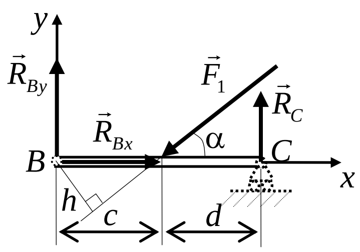
Дано: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$; a, b, c, d ; α.

Знайти: R_{Ax}, R_{Ay}, M_A.



Р о з в ’ я з а н н я

За методом перерізів розітнемо складену балку на дві частини по проміжному шарніру B і запишемо аналітичні умови рівноваги для кожної частини окремо. Спочатку розглянемо праву частину BC, для якої ліва частина AB є в’яззю. В’язь відкидаємо, замінюючи її дію відповідною реакцією (поданою двома складовими).



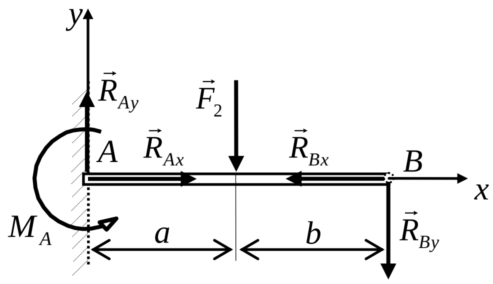
1) $$\begin{cases} \sum F_{ix} = -F_1\cos\alpha + R_{Bx} = 0, \\ \sum F_{iy} = R_C - F_1\sin\alpha + R_{By} = 0, \\ \sum M_B\left(\vec{F}_i\right) = R_C(c+d) - F_1 h = 0. \end{cases}$$

Звідси, беручи до уваги, що $h = c\sin\alpha$, отримаємо

$$R_{Bx} = F_1\cos\alpha,\; R_C = \frac{F_1 h}{c+d} = \frac{F_1 c}{c+d}\sin\alpha,$$

тоді

$$R_{By} = F_1\sin\alpha - R_C = \frac{F_1 d}{c+d}\sin\alpha.$$



2) $$\begin{cases} \sum F_{ix} = R_{Ax} - R_{Bx} = 0, \\ \sum F_{iy} = R_{Ay} - R_{By} - F_2 = 0, \\ \sum M_A\left(\vec{F}_i\right) = M_A - R_{By}(a+b) - F_2 a = 0. \end{cases}$$

З цієї системи рівнянь, враховуючи 1), матимемо

$$R_{Ax} = R_{Bx} = F_1\cos\alpha,$$

$$R_{Ay} = F_2 + R_{By} = F_2 + \frac{F_1 d}{c+d}\sin\alpha,$$

$$M_A = F_2 a + R_{By}(a+b) = F_2 a + \frac{F_1 d(a+b)}{c+d}\sin\alpha.$$

Таким чином, знайдені всі шукані величини.

Зауважимо, що проміжний шарнір знижує невизначеність задачі на одиницю. В подібних задачах завжди застосовуємо метод перерізів, тобто розтинаємо балку по проміжному шарніру.

Лекція 5
Розділ 2. *К і н е м а т и к а*

Кінематика – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних тіл з геометричної точки зору, без урахування їхніх мас і причин, що викликали їх рух.

Рух твердого тіла розглядається у просторі і в часі.

За Ньютоном *простір* є неперервним, однорідним і ізотропним, тобто абсолютним. Властивість ізотропії полягає в тому, що властивості простору в усіх його точках, а в кожній точці – в усіх напрямках, однакові.

За Ньютоном вводиться і абсолютний *час*, який є неперервним і однорідним. Час, що спливає між двома явищами, називається *проміжком часу*. Момент часу, з якого починається відлік часу, називається *початковим*.

В теоретичній механіці положення тіла у просторі визначається відносно іншого довільно вибраного незмінного тіла, яке називається *тілом відліку*.

Сукупність тіла відліку, зв'язаної з ним системи координат, та годинника утворює *систему відліку*.

В класичній механіці постулюється наявність системи відліку, по відношенню до якої простір і час є абсолютними. У такій системі відліку ізольована матеріальна точка може знаходитися у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху як завгодно довго.
В такому разі система відліку називається *інерціальною*.

Системи відліку, які не мають вказану властивість, називаються *неінерціальними*.

Рух тіла по відношенню до вибраної системи відліку вважається відомим, якщо можна визначити його положення в розглядуваній системі в довільний момент часу.

Встановлення способів, за допомогою яких може бути заданий рух тіла по відношенню до вибраної системи відліку – є однією із задач кінематики.

Основна задача кінематики полягає в тому, щоб за рівняннями, які визначають закон руху даного тіла, визначити всі кінематичні характеристики цього руху (траєкторії будь-яких точок тіла, їх швидкості та прискорення). Очевидно, що рух твердого тіла по відношенню до вибраної системи відліку буде відомим, якщо є відомим рух кожної точки цього тіла, тому кінематику поділимо на:

- **кінематику точки**,
- **кінематику твердого тіла**.

Кінематика точки

Кінематика точки в нерухомій системі координат

5.1. Способи задання руху точки

Рух точки будемо розглядати в нерухомій системі координат.

Переміщення матеріальної точки являє собою її перехід із одного положення у просторі в інше довільним чином, тобто переміщення характеризується початковим і кінцевим положенням точки, а також відповідним проміжком часу (Δt).

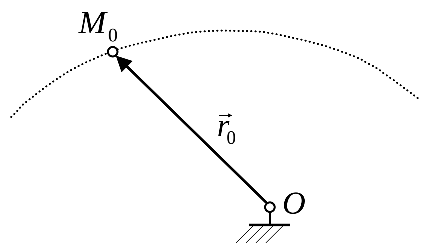
Під *рухом* матеріальної точки розуміють її перехід із одного положення у просторі в інше (із початкового в кінцеве) визначеним чином, у визначеній залежності від часу.

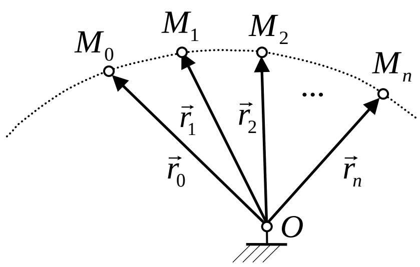
Залежність між положенням точки, що рухається у просторі, і часом визначає *закон* її руху.

Основною задачею кінематики точки є встановлення способів задання руху точки по відношенню до вибраної системи відліку і, виходячи з них, встановлення методів визначення кінематичних характеристик (траєкторії, швидкості і прискорення).

Розглянемо способи опису руху точки M у просторі.

а) Векторний спосіб





Вибираємо у просторі нерухому точку O і проводимо з неї радіус-вектор $\vec{r}_0$ в розглядувану точку M в її початковому положенні M_0. Під час руху цієї точки її радіус-вектор змінюється за величиною і напрямком, визначаючи однозначно положення точки у просторі і часі:

$$t_0 \to \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$$
$$t_1 \to \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1,$$
$$t_2 \to \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2,$$
$$\ldots$$
$$t_n \to \vec{r}(t_n) = \vec{r}_n.$$

Таким чином маємо

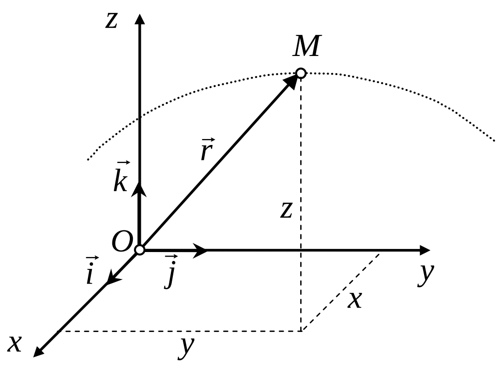
$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1)$$

\- кінематичне рівняння руху точки у векторній формі.

Функція $\vec{r}(t)$ повинна бути однозначною, неперервною і щонайменше двічи диференційовною.

Геометричне місце кінців радіус-вектора точки, що рухається, називається її *траєкторією*. Оскільки рух точки неперервний, то траєкторією є неперервна крива, до якої у кожній її точці можна провести одну дотичну.

б) Координатний спосіб



Оскільки радіус-вектор $\vec{r}$, що однозначно визначає положення точки M і має проекції $\{x, y, z\}$, є функцією часу, тоді й ці проекції мають бути функціями часу, тобто

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \qquad (2)$$

З іншого боку x, y і z є координатами т. M, тому ці залежності є кінематичними рівняннями руху точки у координатній формі.

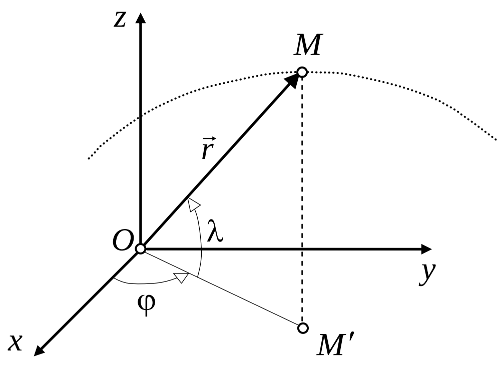
Зв'язок між векторним і координатним способами визначається формулою

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}. \qquad (3)$$

Функції (2) повинні бути однозначними, неперервними і двічи диференційовними.

Рух точки можна розглядати в довільній системі координат: сферичній, полярній, циліндричній, і т.п.

Розглянемо рух точки у сферичній системі координат. Її сферичними координатами будуть: полярний радіус $r = OM$, і кути φ і λ.

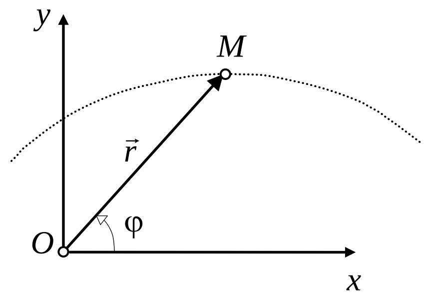


Тоді декартові координати точки можна виразити через її сферичні координати так

$$\begin{cases} x = r\cos\lambda\cos\varphi, \\ y = r\cos\lambda\sin\varphi, \\ z = r\sin\lambda. \end{cases} \qquad (4)$$

Рівняння (4) характеризують зв'язок векторного і координатного способів у разі використання сферичної системи координат.

Розглянемо полярну систему координат у разі руху точки M у площині Oxy (полярними координатами точки будуть: радіус $r = OM$ і кут φ).

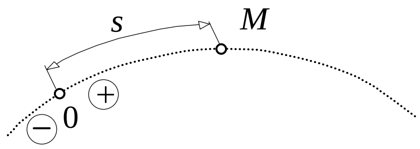


Тоді декартові координати точки можна виразити через її полярні координати так

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad (5)$$

в) Натуральний спосіб

Цей спосіб доречно використовувати, якщо відома траєкторія точки.
При цьому способі необхідно задати чотири елементи:



- траєкторію,
- початок відліку (нуль),
- додатний напрямок відліку,
- дугову координату (дугу s).

При русі точки дугова координата змінюється з часом, тобто

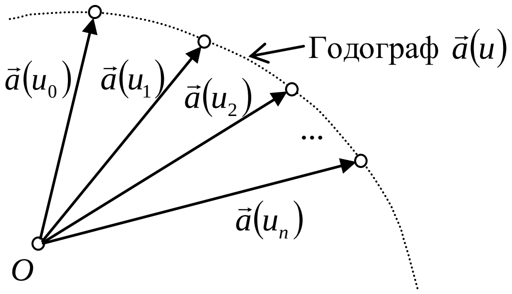
$$s = s(t). \qquad (6)$$

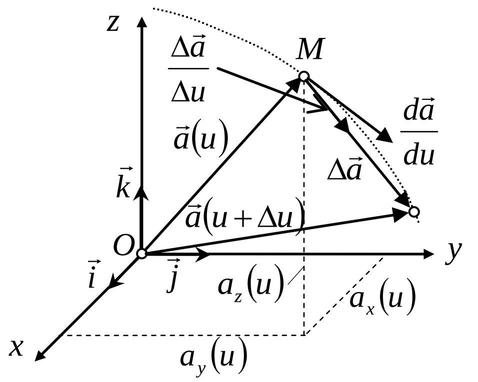
Вираз (6) є кінематичним рівнянням руху точки у натуральній формі.

5.2. Поняття про годограф векторної функції. Похідна від векторної функції, яка задана у нерухомій системі координат, за скалярним аргументом

Розглянемо векторну функцію $\vec{a}$ скалярного аргумента u. При зміні аргумента u векторна функція $\vec{a}(u)$ змінюється за величиною і напрямком.

Крива, що креслиться кінцем вектора $\vec{a}(u)$ при неперервній зміні аргумента u, якщо початок вектора $\vec{a}(u)$ зафіксований в точці O, називається *годографом векторної функції* $\vec{a}(u)$.





Якщо дати приріст Δu аргументу, тоді отримаємо відповідний приріст функції $\vec{a}(u)$:

$$\Delta\vec{a} = \vec{a}(u+\Delta u) - \vec{a}(u).$$

Далі знаходимо при $\Delta u \to 0$

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\vec{a}}{\Delta u} = \frac{d\vec{a}}{du}.$$

Похідна від векторної функції $\vec{a}(u)$ за скалярним аргументом u являє собою вектор $\frac{d\vec{a}}{du}$, напрямлений по дотичній до годографа функції $\vec{a}(u)$ в точці M в бік, що відповідає зростанню аргумента. Цей вектор $\left(\frac{d\vec{a}}{du}\right)$ характеризує швидкість зміни вектора $\vec{a}(u)$ за модулем і напрямком при зміні u.

Залежності

$$\begin{cases} x = a_x(u) = f_1(u), \\ y = a_y(u) = f_2(u), \\ z = a_z(u) = f_3(u) \end{cases}$$

- є рівняннями годографа векторної функції $\vec{a}(u)$.

Величини $a_x(u), a_y(u)$ і $a_z(u)$ є одночасно і координатами точки M.

Запишемо вираз вектора $\vec{a}(u)$ через його проекції на осі системи координат:

$$\vec{a}(u) = a_x(u)\vec{i} + a_y(u)\vec{j} + a_z(u)\vec{k}. \tag{7}$$

Тоді

$$\frac{d\vec{a}}{du} = \frac{d}{du}\left[a_x(u)\vec{i} + a_y(u)\vec{j} + a_z(u)\vec{k}\right] = \frac{da_x(u)}{du}\vec{i} + \frac{da_y(u)}{du}\vec{j} + \frac{da_z(u)}{du}\vec{k}, \tag{8}$$

де орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ є векторними константами.

Похідною від вектора за скалярним аргументом є вектор, проекції якого на нерухомі осі дорівнюють похідним за тим же аргументом від проекцій диференційовного вектора на ті ж самі осі.

5.3. Швидкість руху точки

Швидкістю точки називається кінематична міра руху точки, що дорівнює першій похідній за часом від радіус-вектора цієї точки в розглядуваній системі відліку.

Якщо

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \tag{9}$$

тоді

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{10}$$

або в координатній формі

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\,,$$

де x, y, z - проекції вектора $\vec{r}$ на осі системи координат $Oxyz$. В цьому разі матимемо

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy}{dt}\,\vec{j} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k}\,.$$

Якщо ввести позначення

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}\,,$$

де крапка над літерою означає диференціювання за часом, тоді вектор швидкості $\vec{\mathrm{v}}$ можна записати у вигляді

$$\vec{\mathrm{v}} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}\,. \tag{11}$$

Тут $\mathrm{v}_x = \dot{x}$, $\mathrm{v}_y = \dot{y}$, $\mathrm{v}_z = \dot{z}$ - проекції вектора швидкості на осі системи координат $Oxyz$.

Величину вектора швидкості визначимо за наступною формулою:

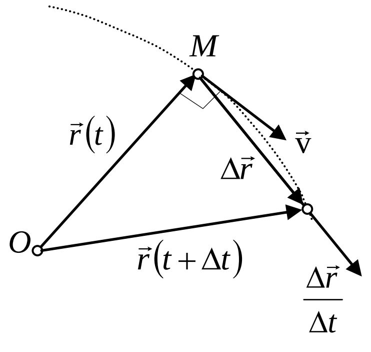
$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,, \tag{12}$$

а напрямок визначиться відповідними напрямними косинусами

$$\cos\left(\vec{\mathrm{v}};\hat{\ } Ox\right) = \frac{\mathrm{v}_x}{\mathrm{v}}, \quad \cos\left(\vec{\mathrm{v}};\hat{\ } Oy\right) = \frac{\mathrm{v}_y}{\mathrm{v}}, \quad \cos\left(\vec{\mathrm{v}};\hat{\ } Oz\right) = \frac{\mathrm{v}_z}{\mathrm{v}}. \tag{13}$$

Формула (10) дає можливість визначити швидкість точки при векторному способі задання її руху. Формули (11), (12) і (13) є формулами для визначення вектору швидкості за величиною і напрямком у просторі при координатному способі задання її руху.

Проекції вектора швидкості на осі $Ox,\ Oy,\ Oz$ є першими похідними за часом від відповідних координат ($x,\ y,\ z$).

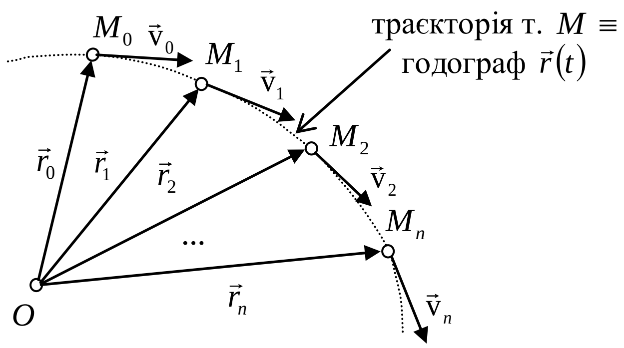


Виходячи з поняття похідної векторної функції робимо висновок, що вектор швидкості визначає швидкість зміни просторового положення точки з плином часу і напрямлений вздовж дотичної до годографа вектора $\vec{r}$ у бік зростання часу t, тобто по дотичній до траєкторії точки в сторону її руху.

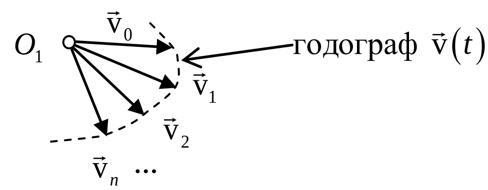
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t),$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\mathrm{v}}\,.$$

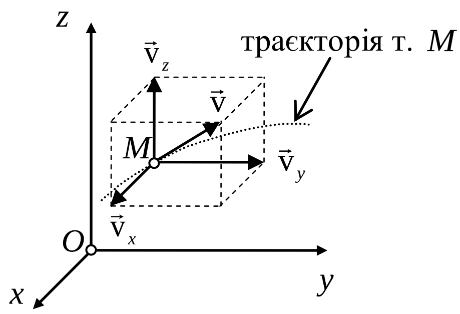
Перенесемо в довільну нерухому точку O_1 паралельно до самих себе вектори швидкостей $\vec{\mathrm{v}}_1, \vec{\mathrm{v}}_2, \ \ldots\ , \vec{\mathrm{v}}_n$ точки M, з'єднаємо їх кінці, отримуючи таким чином годограф вектора швидкості.



$$
\begin{aligned}
t_0 &\to \vec r(t_0) = \vec r_0\\
t_1 &\to \vec r(t_1) = \vec r_1,\\
t_2 &\to \vec r(t_2) = \vec r_2,\\
&\dots\\
t_n &\to \vec r(t_n) = \vec r_n.
\end{aligned}
$$



Покажемо, як розкласти по осям вектор швидкості т. M при координатному способі задання її руху.



5.4. Визначення швидкості точки при натуральному способі задання її руху

Нехай відома дугова координата $s = s(t)$ точки, тоді її радіус-вектор буде складною функцією часу, а саме: $\vec r = \vec r[s(t)]$. Оскільки швидкість визначається формулою $\vec v = \frac{d\vec r}{dt}$, тому матимемо

$$\vec v = \frac{d\vec r}{ds}\,\frac{ds}{dt}. \tag{14}$$

Беручи до уваги першу формулу Френе, перший множник у формулі (6) можна замінити на $\vec\tau$, тому отримаємо

$$\vec v = \vec\tau\,\frac{ds}{dt}. \tag{15}$$

Домножимо цю формулу скалярно на $\vec\tau$: $\quad \vec v \cdot \vec\tau = \vec\tau \cdot \vec\tau\,\frac{ds}{dt}$.

В цьому виразі зліва маємо проекцію вектора $\vec v$ на напрям дотичної (тобто v_τ), а справа $\vec\tau \cdot \vec\tau = 1$, тому отримаємо $v_\tau = \frac{ds}{dt}$, тоді формула (15) набуде вигляду

$$\vec v = v_\tau \vec\tau \tag{16}$$

Таким чином, швидкість точки при натуральному способі задання її руху дорівнює добутку проекції швидкості на напрям дотичної (v_τ) і орта $\vec\tau$.

Лекція 6

6.1. Прискорення руху точки

Другою основною кінематичною характеристикою руху точки є її прискорення.

Прискорення точки є кінематичною мірою швидкості зміни вектора швидкості точки і дорівнює першій похідній за часом від швидкості точки у розглядуваній системі відліку, тобто

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}, \tag{1}$$

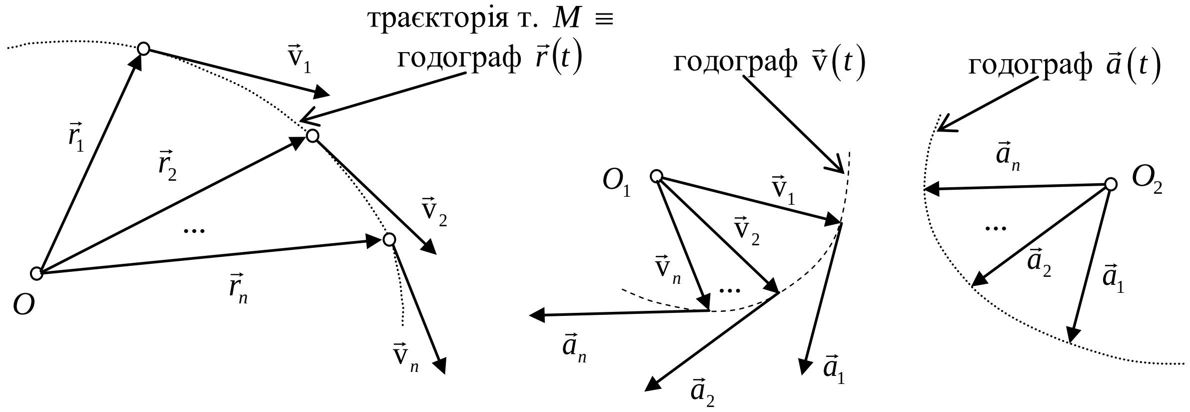
Розглянемо визначення прискорення точки при різних способах задання її руху.

а) Векторний спосіб задання руху точки

В цьому разі за відомим радіус-вектором точки $\vec{r} = \vec{r}(t)$ і швидкістю точки, що визначається за формулою $\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, можна знайти шукане прискорення:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \tag{2}$$

- вираз для визначення прискорення точки при векторному способі задання її руху.



З виразу (1) випливає, що вектор прискорення точки завжди напрямлений по дотичній до годографа вектора швидкості в даній точці в бік зростання аргумента (t). Прискорення характеризує швидкість зміни вектора швидкості у часі.

б) Координатний спосіб задання руху точки

Відомим є радіус-вектор $\vec{r}$ точки, який залежить від часу і може бути записаним через координати точки

$$\vec{r} = r_x\,\vec{i} + r_y\,\vec{j} + r_z\,\vec{k} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}, \tag{3}$$

де $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$.

Знаходимо прискорення точки

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\vec{k} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k},$$

таким чином маємо

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}, \tag{4}$$

звідки (беручи до уваги, що $\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$) отримаємо

$$a_x = \ddot{x} = \dot{v}_x, \quad a_y = \ddot{y} = \dot{v}_y, \quad a_z = \ddot{z} = \dot{v}_z. \tag{5}$$

Формула (4) визначає прискорення точки при координатному способі задання її руху, з неї випливає, що проекції прискорення точки на осі прямокутної декартової системи координат дорівнюють першим похідним за часом від відповідних проекцій швидкості точки або другим похідним за часом від відповідних координат точки.

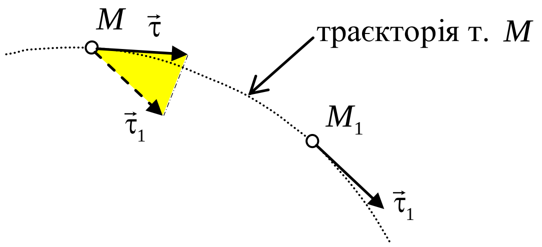
Модуль і напрямок вектора $\vec{a}$ визначимо так:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2},$$

$$\cos(\vec{a}\hat{;}Ox) = \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}}{a}, \quad \cos(\vec{a}\hat{;}Oy) = \frac{a_y}{a} = \frac{\ddot{y}}{a}, \quad \cos(\vec{a}\hat{;}Oz) = \frac{a_z}{a} = \frac{\ddot{z}}{a}.$$

Натуральні осі і формули Френе

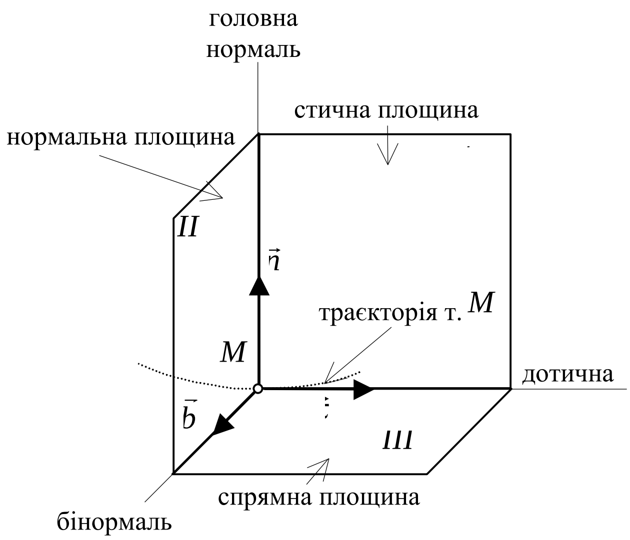
Розглянемо на траєкторії руху точки два суміжних її положення: M і M_1.



В точках M і M_1 проводимо дотичні до траєкторії з ортами $\vec{\tau}$ і $\vec{\tau}_1$. Потім переносимо уявно орт $\vec{\tau}_1$ в т. M і проводимо площину через $\vec{\tau}$ і $\vec{\tau}_1$.

Граничне положення вказаної площини при наближенні т. M_1 до т. M утворює *стичну площину*, що містить дотичну з ортом $\vec{\tau}$.

Проведемо площину, перпендикулярну до орта $\vec{\tau}$ в т. M, яку назвемо *нормальною площиною*. Лінія перетину стичної площини з нормальною визначає *головну нормаль* (з ортом $\vec{n}$). Потім проведемо площину перпендикулярно до $\vec{n}$ в т. M, яку назвемо *спрямною площиною*. Лінія перетину спрямної і нормальної площин утворюють бінормаль траєкторії (з ортом $\vec{b}$). Очевидно, що $\vec{b} \perp \vec{\tau}$ і $\vec{b} \perp \vec{n}$.



Таким чином, в кожній точці траєкторії можна вказати сукупність трьох взаємно перпендикулярних напрямків, що приймаються за координатні осі:

- дотичної, що характеризується ортом $\vec{\tau}$, напрямленої в бік зростання дугової координати;
- головної нормалі, напрямленої в бік угнутості кривої, з ортом $\vec{n}$;
- бінормалі (з ортом $\vec{b}$), яка перпендикулярна одночасно до дотичної і головної нормалі, тобто $\vec{b} \perp \vec{\tau}$ і $\vec{b} \perp \vec{n}$.

Наведемо *формули Френе* для визначення ортів $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad \vec{n} = \rho\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$$ (ρ - радіус кривини траєкторії),

в) Прискорення точки при натуральному способі задання її руху

За відомою дуговою координатою $s(t)$ визначаємо швидкість точки

$$\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}_\tau \vec{\tau}, \tag{6}$$

і підставляємо цей вираз у формулу (1), звідки знаходимо прискорення

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathrm{v}_\tau \vec{\tau}\right) = \frac{d\mathrm{v}_\tau}{dt}\vec{\tau} + \mathrm{v}_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}, \tag{7}$$

Введемо позначення

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\mathrm{v}_\tau}{dt}\vec{\tau} \quad \text{і} \quad \vec{a}_n = \mathrm{v}_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \tag{8}$$

Розглянемо $\vec{a}_\tau$. Воно називається *дотичним* або *тангенціальним* прискоренням точки, або дотичною складовою повного прискорення точки. Цей вектор завжди напрямлений по дотичній до траєкторії у даній точці. Його модуль a_τ характеризує зміну швидкості точки за величиною.

Оскільки

$$\mathrm{v}_\tau = \dot{s}, \tag{9}$$

тому підставляючи цей вираз (9) в формулу (8), отримаємо

$$\vec{a}_\tau = \ddot{s}\vec{\tau}, \tag{10}$$

звідки

$$a_\tau = \ddot{s}. \tag{11}$$

Розглянемо другий доданок у формулі (7), а саме $\mathrm{v}_\tau \dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$. Оскільки орт $\vec{\tau}$ залежить від дугової координати s і є, таким чином, складною функцією часу, тобто $\vec{\tau} = \vec{\tau}\left[s\left(t\right)\right]$, тому перша похідна від нього за часом набуде вигляду

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathrm{v}_\tau \frac{d\vec{\tau}}{ds}.$$

Скориставшись першою формулою Френе

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \tag{12}$$

знайдемо похідну від орта $\vec{\tau}$ за дуговою координатою s:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \tag{13}$$

а з другої формули Френе за цієї умови

$$\vec{n} = \rho\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \rho\frac{d\vec{\tau}}{ds}, \tag{14}$$

випливає, що

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n}. \tag{15}$$

Тоді $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = \dfrac{\mathrm{v}_\tau}{\rho}\vec{n}$, а другий доданок у формулі (7) дорівнює

$$\vec{a}_n = \mathrm{v}_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{\mathrm{v}_\tau^2}{\rho}\vec{n} \tag{16}$$

і називається *нормальним* прискоренням точки або нормальною складовою повного прискорення точки. Вектор $\vec{a}_n$ завжди напрямлений в бік увігнутості кривої до центру кривизни вздовж орта $\vec{n}$. Цей вектор ($\vec{a}_n$) характеризує зміну швидкості за напрямом.

Вектори $\vec{a}_\tau$ і $\vec{a}_n$ знаходяться у стичній площині, отже вектор повного прискорення $\vec{a}$ також знаходиться у цій площині. Тоді матимемо

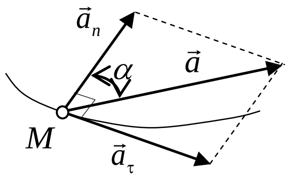
$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} + 0 \cdot \vec{b},$$

а рівняння (7) можна переписати у такому вигляді

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \tag{17}$$

Зауважимо, що вектори $\vec{a}_\tau$ і $\vec{a}_n$ взаємно перпендикулярні.

Таким чином, повне прискорення точки при натуральному способі задання її руху дорівнює векторній сумі дотичного і нормального прискорень точки, причому $\vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n$.



Вектор повного прискорення точки $\vec{a}$ утворює з нормальною його складовою $\vec{a}_n$ кут α, напрямний тангенс якого дорівнює

$$tg\alpha = \frac{a_\tau}{a_n}. \tag{18}$$

Модуль повного прискорення визначається за формулою

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \tag{19}$$

де $a_\tau = \ddot{s}$, а $a_n = \dfrac{\mathrm{v}_\tau^2}{\rho}$.

Радіус кривини ρ траєкторії точки визначається так:

$$\rho = \frac{\mathrm{v}_\tau^2}{a_n}.$$

<u>**Задача**</u>

Точка рухається по гвинтовій лінії у відповідності до рівнянь:

$$x = 2\cos 4t,\ y = 2\sin 4t,\ z = 2t \quad (x, y, z \text{ - в м, } t \text{ - в с}).$$

Визначити радіус кривини ρ траєкторії точки.

Р о з в ’ я з а н н я

Оскільки в умові задачі задані координати точки, тому запишемо у відповідному вигляді вирази для швидкості точки і її прискорення:

$$\mathrm{v}_\tau = \mathrm{v} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},\ a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2},\ a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2},\ a_\tau = \dot{\mathrm{v}}_\tau = \dot{\mathrm{v}}.$$

Тоді шуканий радіус кривини ρ траєкторії точки визначиться за формулою

$$\rho = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{\sqrt{a^2 - \dot{\mathrm{v}}^2}} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 - \dot{v}^2}}.$$

Подальше розв’язання полягає в знаходженні необхідних похідних і підстановці їх в наведену формулу.

6.2. Кінематика твердого тіла

Вільним тілом називається таке тверде тіло, яке може здійснити довільний рух з початкового положення в задане, для чого треба лише задатися визначеними механічними взаємодіями даного тіла з оточуючими його тілами (полями).

Невільним твердим тілом називається таке тверде тіло, для якого є додаткові умови, що обмежують його рух.

Існує <u>п’ять видів руху</u> твердого тіла:

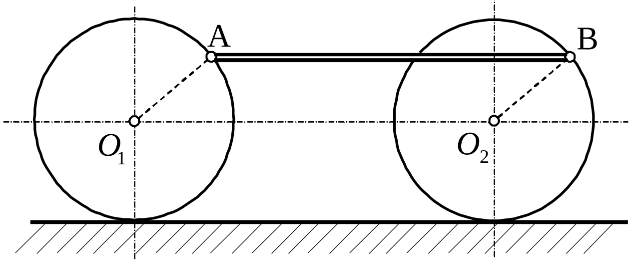
- поступальний,
- обертальний навколо нерухомої осі,

- плоскопаралельний,
- обертальний рух навколо нерухомої точки (сферичний рух),
- вільний.

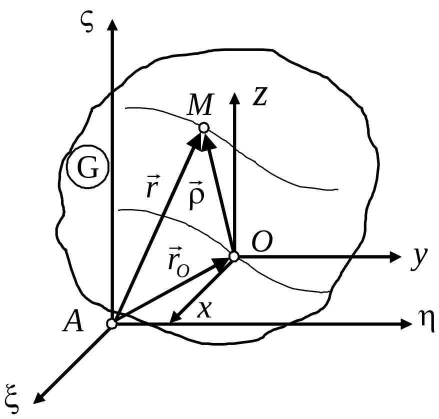
6.2.1. Поступальний рух твердого тіла

Рух твердого тіла називається *поступальним*, якщо відрізок прямої, проведеної через дві довільні точки даного тіла, залишається паралельним своєму початковому положенню під час руху тіла.

Приклад. *Поступальний рух спарника AB*



Розглянемо тіло G, яке здійснює поступальний рух у нерухомій системі координат $A\xi\eta\varsigma$.



Радіус-вектори $\vec{r}(t)$ та $\vec{r}_O(t)$ описують криві, які є відповідно траєкторіями точок M та O. Вони зв'язані очевидним співвідношенням

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho}, \tag{20}$$

де вектор $\vec{\rho} = \overrightarrow{const}$ (відповідно до означення поступального руху).

Перехід від траєкторії т. M до траєкторії т. O можна здійснити шляхом паралельного переносу на постійний вектор $\vec{\rho}$, тобто траєкторії тт. M і O є конгруентними фігурами, тобто такими, які при накладанні збігаються.

Узагальнюючи, робимо висновок: всі точки тіла, що рухається поступально, рухаються по конгруентним траєкторіям.

Далі:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt}, \qquad \text{або} \qquad \vec{v} = \vec{v}_O. \tag{21}$$

Для тіла, що здійснює поступальний рух, всі його точки мають однакові за величиною та напрямком швидкості. Якщо продиференціювати вираз (21) ще раз за часом, то отримаємо

$$\vec{a} = \vec{a}_O . \tag{22}$$

Для даного тіла всі його точки мають однакові за величиною та напрямком прискорення.

Таким чином доведена наступна теорема.

<u>Теорема</u>. *При поступальному русі твердого тіла всі його точки рухаються по конгруентним траєкторіям з однаковими за величиною та напрямком швидкостями та прискореннями*.

Поступальний рух твердого тіла можна описати за допомогою вивчення руху будь-якої однієї його точки, наприклад, т. O, тоді співвідношення

$$\begin{cases} \xi_O = \xi_O(t), \\ \eta_O = \eta_O(t), \\ \zeta_O = \zeta_O(t) \end{cases} \tag{23}$$

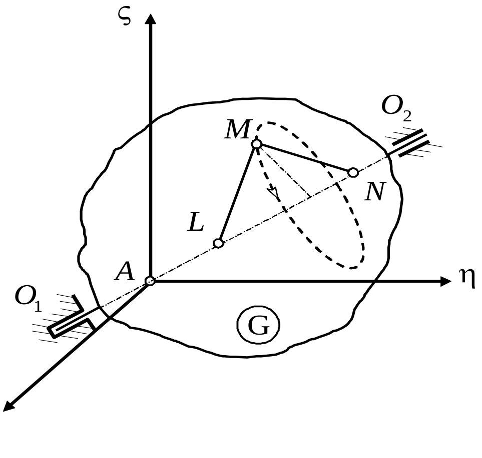
є *кінематичними рівняннями поступального руху* тіла. З рівнянь (23) випливає, що тверде тіло при поступальному русі має три степеня вільності.

6.2.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

2.1. Кінематичне рівняння руху

Рух твердого тіла, яке має дві нерухомі точки, називається *обертальним навколо нерухомої осі*, яка проходить через обидві вказані точки.

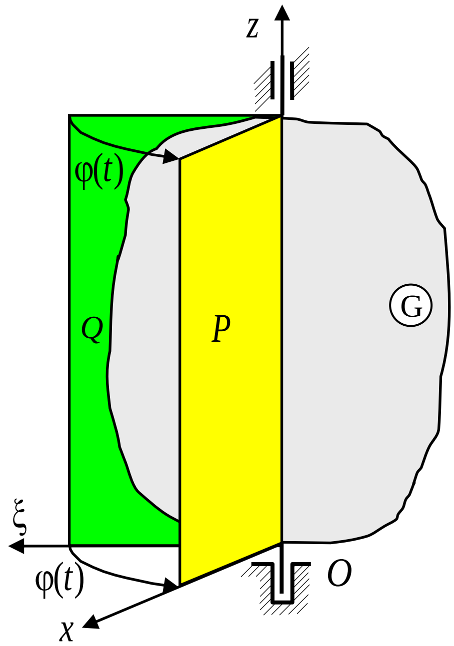
Розглянемо тіло G, яке здійснює обертальний рух відносно нерухомої осі. Пряма LN, що проходить через дві нерухомі точки, називається *віссю обертання*.



Координати точок L та N задовольняють рівнянням:

$$\begin{aligned} \left(\xi_L - \xi_M\right)^2 + \left(\eta_L - \eta_M\right)^2 + \left(\zeta_L - \zeta_M\right)^2 = LM^2 = \text{const}, \\ \left(\xi_N - \xi_M\right)^2 + \left(\eta_N - \eta_M\right)^2 + \left(\zeta_N - \zeta_M\right)^2 = NM^2 = \text{const}. \end{aligned} \tag{24}$$

З трьох координат т. M лише одна є незалежною, тому що дві інші автоматично задовольняють (5), тобто тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі, має один степінь вільності. В якості змінної, за допомогою якої описується обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі, візьмемо функцію $\varphi(t)$, яка відображає зміну орієнтації твердого тіла в просторі з часом.



Координатну вісь Oz спрямуємо вздовж осі обертання.

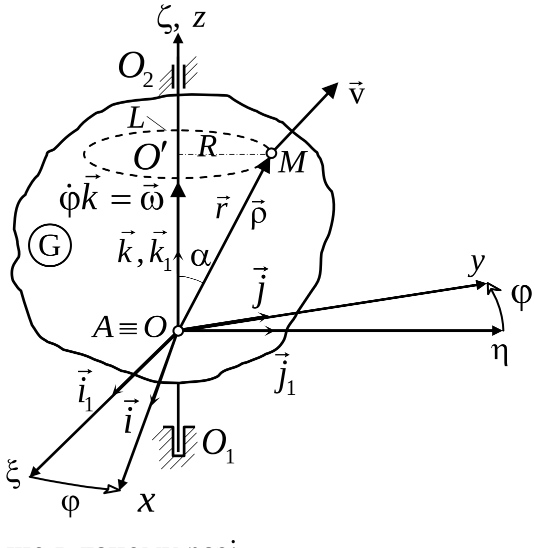
Якщо з додатного напрямку осі Oz перехід від Q до P спостерігається проти ходу стрілки годинника, тоді $\varphi > 0$, інакше $\varphi < 0$. Таким чином, маємо

$$\varphi = \varphi(t). \tag{25}$$

Вважаємо, що функція $\varphi(t)$ - неперервна, однозначна та її можна двічи продиференціювати. Вираз (25) називають *кінематичним рівнянням обертального руху* тіла навколо нерухомої осі (або *законом обертального руху* тіла навколо нерухомої осі).

2.2. Лінійна швидкість точки та кутова швидкість тіла

Знайдемо розподіл швидкостей точок твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, якщо розглядати цей рух як окремий випадок вільного руху твердого тіла.



З рисунка випливає, що в даному разі

$$\vec{r} = \vec{\rho}, \tag{26}$$

оскільки $\vec{r}_O = \vec{0}$ за умовою задачі. Тоді маємо

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d'\vec{\rho}}{dt} + \vec{\Omega}\times\vec{\rho}, \qquad (27)$$

але з іншого боку $\frac{d'\vec{\rho}}{dt} = \vec{0}$, тому (беручи до уваги, що $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$), матимемо

$$\vec{v} = \vec{\Omega}\times\vec{\rho}. \qquad (28)$$

Розглянемо більш детально вектор $\vec{\Omega}$. Цей вектор у рухомій системі координат має вираз

$\vec{\Omega} = \Omega_x\vec{i} + \Omega_y\vec{j} + \Omega_z\vec{k}$, де, як відомо, $\Omega_x = \frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{k}$, $\Omega_y = \frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i}$, $\Omega_z = \frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j}$. Але у даному разі, оскільки $\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$, матимемо

$$\Omega_x = \frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{k} = -\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{j} = 0,\ \Omega_y = \frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i} = 0,\ \Omega_z = \frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j},$$

тобто

$$\vec{\Omega} = \Omega_z\vec{k}. \qquad (29)$$

Встановимо механічний зміст вектора $\vec{\Omega}$, та його зв'язок з функцією $\varphi(t)$. З попереднього рисунка випливає, що

$$\vec{i} = \vec{i}_1\cos\varphi + \vec{j}_1\sin\varphi,\quad \vec{j} = -\vec{i}_1\sin\varphi + \vec{j}_1\cos\varphi.$$

Тоді $\frac{d\vec{i}}{dt} = \dot{\varphi}\left(-\vec{i}_1\sin\varphi + \vec{j}_1\cos\varphi\right) = \dot{\varphi}\,\vec{j}$, а $\Omega_z = \dot{\varphi}\,\vec{j}\cdot\vec{j} = \dot{\varphi}$.

Остаточно маємо

$$\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\,\vec{k}. \qquad (30)$$

Введемо наступне позначення: $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{k}$. Вектор $\vec{\omega}$ визначає: вісь обертання, швидкість зміни кута повороту тіла з часом, напрямок обертання тіла. Цей вектор $\vec{\omega}$ називають *кутовою швидкістю обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.*

Тоді вираз (27), враховуючи (25), набуває вигляду

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}, \qquad (31)$$

і називається *формулою Ейлера*. Зауважимо, що $\vec{\omega}$ є ковзним вектором (напрямленим вздовж осі обертання).

Модуль швидкості точки M визначиться формулою

$$v = \omega r\sin\left(\vec{\omega};\hat{\vec{r}}\right) = \omega R, \qquad (32)$$

де $R = r\sin\left(\vec{\omega};\hat{\vec{r}}\right) = r\sin\alpha$ - найкоротша відстань від точки M до осі обертання, яка називається *радіусом обертання даної точки.*

Вектор швидкості $\vec{v}$ довільної точки M тіла G напрямлений по дотичній до кола L, по якому рухається т. M, тобто напрямок вектора $\vec{v}$ повністю визначається векторним добутком (31), а його модуль v - звичайним добутком (32) модуля кутової швидкості тіла (ω) на радіус обертання точки (R).

Формулу (28) можна записати також за допомогою визначника:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega\,y\vec{i} + \omega\,x\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}. \qquad (33)$$

Тоді $\mathrm{v}=\sqrt{\mathrm{v}_x^2+\mathrm{v}_y^2+\mathrm{v}_z^2}=\omega\sqrt{x^2+y^2}=\omega R$, а напрямок, як завжди, визначається напрямними косинусами.

2.3. Лінійне прискорення точки та кутове прискорення тіла

Знайдемо розподіл прискорень точок твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі. Для цього згадаємо формулу (31)

$$\vec{\mathrm{v}}=\vec{\omega}\times\vec{r}\,, \tag{34}$$

та знайдемо похідну від цього виразу за часом, тобто прискорення точки M :

$$\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\,. \tag{35}$$

Введемо позначення: $\vec{\varepsilon}=\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

$$\vec{\varepsilon}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\omega_z\vec{k}\right)=\frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}\,\vec{k}\right)=\ddot{\varphi}\,\vec{k}\,, \tag{36}$$

оскільки, як і раніше, $\dfrac{d\vec{k}}{dt}=\vec{0}$. Зазначимо, що $\varepsilon_z=\ddot{\varphi}$.

Механічний зміст вектора $\vec{\varepsilon}$ полягає в тому, що це є *кутове прискорення* твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі. Проекція вектора $\vec{\varepsilon}$ на нерухому вісь обертання (ε_z) дорівнює другій похідній від кута повороту тіла за часом ($\ddot{\varphi}$). Вектор $\vec{\varepsilon}$ характеризує швидкість зміни з часом кутової швидкості тіла. Цей вектор напрямлений по дотичній до годографа вектора $\vec{\omega}$, тобто по осі обертання в той же бік, що й $\vec{\omega}$, якщо вони мають однакові знаки, або в протилежний, якщо ці знаки різні. В першому випадку обертання називається *прискореним*, а в другому – *сповільненим*.

Повернемося до формули (35), яку можна переписати таким чином:

$$\vec{a}=\vec{a}^{об}+\vec{a}^{до}\,,$$

де складова

$$\vec{a}^{об}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r} \tag{37}$$

з модулем

$$a^{об}=\varepsilon\, r\,\sin\left(\vec{\varepsilon};\hat{}\,\vec{r}\right)=\varepsilon\, R \tag{38}$$

називається *обертальним прискоренням* точки, а складова

$$\vec{a}^{до}=\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{\mathrm{v}}=\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) \tag{39}$$

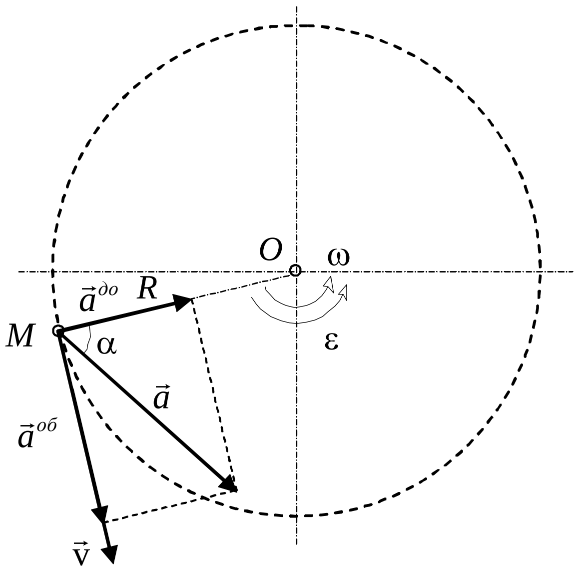
з модулем

$$a^{до}=\omega\,\mathrm{v}\,\sin\left(\vec{\omega};\hat{}\,\vec{\mathrm{v}}\right)=\omega^2 R \tag{40}$$

називається *доосьовим прискоренням* точки.

Векторні добутки (37) і (39) дозволяють зробити наступні висновки.

1) Вектор $\vec{a}^{об}$ напрямлений по дотичній до траєкторії т. M, тобто по вектору швидкості $\vec{\mathrm{v}}$ в тому разі, коли $\varepsilon>0$, і в протилежний бік, якщо $\varepsilon<0$. Таким чином, обертальне прискорення $\vec{a}^{об}$ є *дотичним*.
2) Вектор $\vec{a}^{до}$ завжди напрямлений по радіусу обертання до осі обертання, тобто по головній нормалі до траєкторії, і таким чином являє собою *нормальне* прискорення.
3) Величина обертального прискорення визначається за формулою (38), а доосьового – за (40)



$$a = \sqrt{\left(a^{об}\right)^2 + \left(a^{до}\right)^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,, \qquad (41)$$

$$tg\alpha = \frac{a^{об}}{a^{до}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}\,.$$

Таким чином, доведена наступна теорема.

<u>Теорема</u>. *Прискорення довільної точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторній сумі обертального та доосьового прискорень цієї точки*:

$$\vec{a} = \vec{a}^{об} + \vec{a}^{до}\,.$$

Для визначення проекцій повного прискорення точки на осі, наприклад, рухомої системи координат, необхідно скласти вираз, який містить суму двох визначників третього порядку:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix}.$$

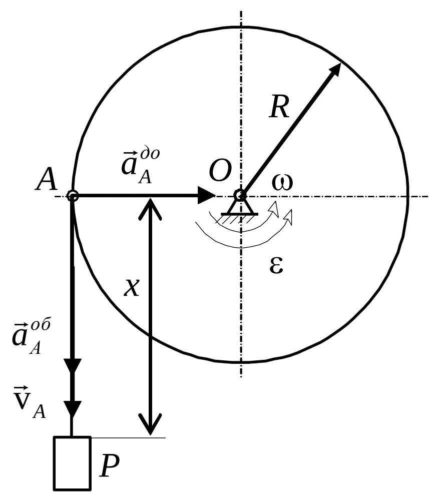
<u>Задача:</u>

Вал $R = 10\,см$ приводиться в рух гирею P, підвішеною до нього за допомогою нитки. Рух гирі описується рівнянням $x = 100t^2$, см (t - в секундах), де x - відстань від гирі до місця сходу нитки з поверхні валу. Визначити ω, ε, $\vec{a}_A$.

Дано: $R = 10\,см$, $x = 100t^2$, см (t - в секундах).

Знайти: ω, ε, $\vec{a}_A$.

Р о з в ’ я з а н н я



Визначимо швидкість точки A, оскільки вона є спільною для нитки та валу.

$v_A = \dfrac{dx}{dt} = 200t$, см/с. Але $v_A = \omega R$, тому

$$\omega = \frac{v_A}{R} = \frac{200\;t\;\text{см/с}}{10\;\text{см}} = 20t,\;\text{рад/с}.$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 20\,,\;\text{рад/с}^2.$$

$$a_A = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 200\sqrt{1 + 400t^4}\,,\;\text{см/с}^2.$$

Лекція 7

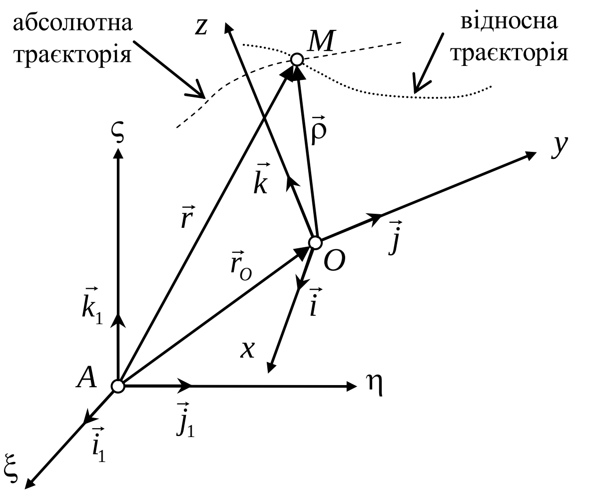
Складний рух точки

7.1. Кінематичні характеристики складного руху точки

Якщо точка M рухається в рухомій системі координат $Oxyz$, яка, в свою чергу, рухається відносно нерухомої системи координат, тоді мова йде про *складний рух* точки M.

Зауважимо, що рухому систему координат завжди незмінно зв'язують з тілом, що рухається.

Рух т. M в рухомій системі координат називається *відносним* рухом точки M. Відповідно в цьому русі відносними будуть траєкторія, швидкість та прискорення точки. Характеристики цього руху будемо позначати нижнім індексом „r” (relative - відносний), тобто $\vec{\mathrm{v}}_r$ і $\vec{a}_r$ відповідно відносна швидкість і відносне прискорення точки.



Рух точки в нерухомій системі координат називається *абсолютним*, відповідно абсолютними будуть називатися траєкторія, швидкість та прискорення точки в цьому русі, останні будуть позначатися з нижнім індексом „a” (absolute - абсолютний).

Відносний рух точки буде задаватися наступними кінематичними рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \tag{1}$$

а абсолютний такими кінематичними рівняннями:

$$\begin{cases} \xi = \xi(t), \\ \eta = \eta(t), \\ \varsigma = \varsigma(t). \end{cases} \tag{2}$$

Покажемо, як визначити швидкість і прискорення точки як в одному, так і в іншому русі, використовуючи кінематичні рівняння (1) і (2).

Так, відносна швидкість у рухомій системі координат визначиться за формулою

$$\vec{\mathrm{v}}_r = \mathrm{v}_{rx}\vec{i} + \mathrm{v}_{ry}\vec{j} + \mathrm{v}_{rz}\vec{k}\,, \tag{3}$$

де

$$\mathrm{v}_{rx} = \dot{x}, \quad \mathrm{v}_{ry} = \dot{y}, \quad \mathrm{v}_{rz} = \dot{z}\,. \tag{4}$$

Тоді модуль відносної швидкості знайдемо за формулою

$$\mathrm{v}_r = \sqrt{\mathrm{v}_{rx}^2 + \mathrm{v}_{ry}^2 + \mathrm{v}_{rz}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,, \tag{5}$$

а відповідні напрямні косинуси – із виразів:

$$
\begin{cases}
\cos\left(\vec{v}_r\,\hat{;}\,Ox\right) = \dfrac{v_{rx}}{v_r} = \dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}, \\
\cos\left(\vec{v}_r\,\hat{;}\,Oy\right) = \dfrac{v_{ry}}{v_r} = \dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}, \\
\cos\left(\vec{v}_r\,\hat{;}\,Oz\right) = \dfrac{v_{rz}}{v_r} = \dfrac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}.
\end{cases}
\tag{6}
$$

Таким чином, вирази (13) - (15). повністю визначають вектор відносної швидкості $\vec{v}_r$ за величиною та напрямом.

Абсолютна швидкість $\vec{v}_a$ точки в нерухомій системі координат визначиться за формулою

$$
\vec{v}_a = v_{a\xi}\vec{i}_1 + v_{a\eta}\vec{j}_1 + v_{a\varsigma}\vec{k}_1, \tag{7}
$$

Використовуючи вирази (7) знаходимо проекції вектора абсолютної швидкості $\vec{v}_a$ на осі нерухомої системи координат

$$
v_{a\xi} = \dot{\xi}, \quad v_{a\eta} = \dot{\eta}, \quad v_{a\varsigma} = \dot{\varsigma}. \tag{8}
$$

Модуль абсолютної швидкості знайдемо за формулою

$$
v_a = \sqrt{v_{a\xi}^2 + v_{a\eta}^2 + v_{a\varsigma}^2} = \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\varsigma}^2}, \tag{9}
$$

а відповідні напрямні косинуси – із виразів:

$$
\begin{cases}
\cos\left(\vec{v}_a\,\hat{;}\,A\xi\right) = \dfrac{v_{a\xi}}{v_a} = \dfrac{\dot{\xi}}{\sqrt{\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\varsigma}^2}}, \\
\cos\left(\vec{v}_a\,\hat{;}\,A\eta\right) = \dfrac{v_{a\eta}}{v_a} = \dfrac{\dot{\eta}}{\sqrt{\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\varsigma}^2}}, \\
\cos\left(\vec{v}_a\,\hat{;}\,A\varsigma\right) = \dfrac{v_{a\varsigma}}{v_a} = \dfrac{\dot{\varsigma}}{\sqrt{\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\varsigma}^2}}.
\end{cases}
\tag{10}
$$

Таким чином, вирази (8)-(10) повністю визначають вектор абсолютної швидкості $\vec{v}_a$ за величиною та напрямом.

Для визначення відповідних прискорень можна використовувати формули, подібні до (3)-(6) і (8)-(10), в яких треба замінити перші похідні за часом на другі.

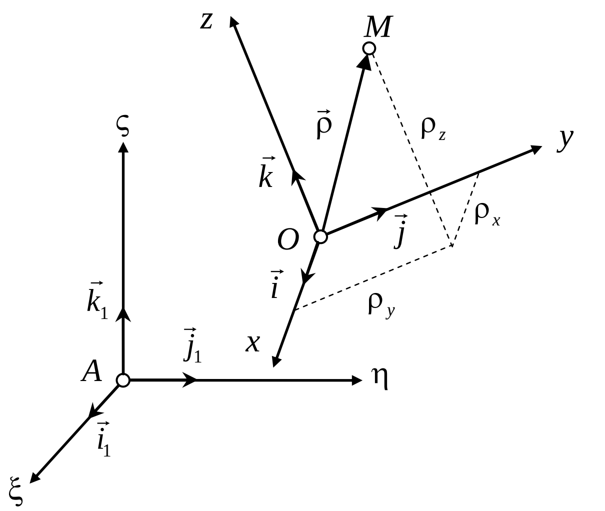
7.2. Формула Бура

Розглянемо вираз вектора $\vec{\rho}$ через його проекції в рухомій системі координат:

$$
\vec{\rho} = \rho_x\vec{i} + \rho_y\vec{j} + \rho_z\vec{k},
$$

і знайдемо абсолютну похідну від нього

$$
\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho_x\vec{i} + \rho_y\vec{j} + \rho_z\vec{k}\right)
$$



Оскільки система координат $Oxyz$ рухається довільним чином відносно $A\xi\eta\varsigma$, тому її одиничні вектори (орти) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ не є сталими, і вираз абсолютної похідної набуде вигляду

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\rho_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\rho_y}{dt}\vec{j} + \frac{d\rho_z}{dt}\vec{k} + \rho_x\frac{d\vec{i}}{dt} + \rho_y\frac{d\vec{j}}{dt} + \rho_z\frac{d\vec{k}}{dt}. \tag{11}$$

У формулі (11) перші три доданки характеризують зміну вектора $\vec{\rho}$ в рухомій системі координат, тобто їх сума є відносною похідною

$$\frac{d'\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\rho_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\rho_y}{dt}\vec{j} + \frac{d\rho_z}{dt}\vec{k}. \tag{12}$$

Останні три доданки у формулі (11) позначимо $\vec{\rho}'$, тобто

$$\vec{\rho}' = \rho_x\frac{d\vec{i}}{dt} + \rho_y\frac{d\vec{j}}{dt} + \rho_z\frac{d\vec{k}}{dt}. \tag{13}$$

Домножимо скалярно обидві частини виразу (13) послідовно на орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\begin{cases} \rho'_x = \vec{\rho}'\cdot\vec{i} = \rho_x\dfrac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{i} + \rho_y\dfrac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{i} + \rho_z\dfrac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i}, \\ \rho'_y = \vec{\rho}'\cdot\vec{j} = \rho_x\dfrac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j} + \rho_y\dfrac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{j} + \rho_z\dfrac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{j}, \\ \rho'_z = \vec{\rho}'\cdot\vec{k} = \rho_x\dfrac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{k} + \rho_y\dfrac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{k} + \rho_z\dfrac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{k}. \end{cases} \tag{14}$$

Отримаємо деякі допоміжні співвідношення

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\vec{i}\cdot\vec{i}\right) = \frac{d}{dt}(1) \;\Rightarrow\; \frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{i} + \vec{i}\cdot\frac{d\vec{i}}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{i} = 0};$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j} + \vec{i}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j} = -\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{i}}.$$

Введемо наступні позначення:

$$\Omega_x = \frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{k}, \quad \Omega_y = \frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i}, \quad \Omega_z = \frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j}, \tag{15}$$

тоді формули (14) набудуть вигляду

$$\begin{cases} \rho'_x = 0 - \rho_y\Omega_z + \rho_z\Omega_y = \rho_z\Omega_y - \rho_y\Omega_z, \\ \rho'_y = \rho_x\Omega_z + 0 - \rho_z\Omega_x = \rho_x\Omega_z - \rho_z\Omega_x, \\ \rho'_z = -\rho_x\Omega_y + \rho_y\Omega_x + 0 = \rho_y\Omega_x - \rho_x\Omega_y. \end{cases} \tag{16}$$

Ці вирази повністю співпадають з проекціями векторного добутку $\vec{\Omega}\times\vec{\rho}$ на осі системи координат $Oxyz$. Дійсно

$$\vec{\Omega}\times\vec{\rho}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z\\ \rho_x & \rho_y & \rho_z\end{vmatrix}=\left(\rho_z\Omega_y-\rho_y\Omega_z\right)\vec{i}+\left(\rho_x\Omega_z-\rho_z\Omega_x\right)\vec{j}+\left(\rho_y\Omega_x-\rho_x\Omega_y\right)\vec{k}.$$

Тому має місце вираз

$$\vec{\rho}'=\vec{\Omega}\times\vec{\rho},\tag{17}$$

з урахуванням якого формула (11) набуває остаточного вигляду

$$\boxed{\frac{d\vec{\rho}}{dt}=\frac{d'\vec{\rho}}{dt}+\vec{\Omega}\times\vec{\rho}}\tag{18}$$

і називається *формулою Бура*.

Таким чином, абсолютна похідна від векторної функції $\vec{\rho}$ за скалярним аргументом t дорівнює сумі відносної похідної тієї ж функції та векторного добутку вектора $\vec{\Omega}$ на $\vec{\rho}$.

Наведемо деякі **окремі випадки** формули Бура.

1) Припустимо, що система координат $Oxyz$ є нерухомою відносно $A\xi\eta\varsigma$, або рухається поступально.

В цьому випадку, оскільки орти є сталими, за формулами (15) маємо $\Omega_x=\Omega_y=\Omega_z=0$, $\Rightarrow$ $\vec{\Omega}=\vec{0}$, і тоді формула Бура набуває вигляду $\boxed{\frac{d\vec{\rho}}{dt}=\frac{d'\vec{\rho}}{dt}}$.

2) Припустимо, що вектор $\vec{\rho}$ не змінюється в рухомій системі координат $Oxyz$, тоді $\frac{d'\vec{\rho}}{dt}=\vec{0}$ і отримуємо $\boxed{\frac{d\vec{\rho}}{dt}=\vec{\Omega}\times\vec{\rho}}$.

3) Припустимо, що вектор $\vec{\rho}$ не змінюється в нерухомій системі координат $A\xi\eta\varsigma$, тобто $\frac{d\vec{\rho}}{dt}=\vec{0}$. Тоді маємо $\boxed{\frac{d'\vec{\rho}}{dt}=-\vec{\Omega}\times\vec{\rho}}$.

7.3. Основна задача складного руху точки. Формули перетворення швидкостей точки при її складному русі

Основна задача кінематики складного руху точки полягає у визначенні залежностей між кінематичними характеристиками точки в її відносному і абсолютному рухах, а також руху рухомої системи координат в нерухомій.

Нехай т. M одночасно рухається як в системі координат $Oxyz$, так і в $A\xi\eta\varsigma$.

Радіус-вектор $\vec{\rho}$ т. M однозначно визначає її положення в рухомій системі координат $Oxyz$.

Радіус-вектор $\vec{r}_O$ визначає положення початку рухомої системи координат $Oxyz$ по відношенню до нерухомої $A\xi\eta\varsigma$.

Нарешті радіус-вектор $\vec{r}$ т. M визначає її положення в нерухомій системі координат $A\xi\eta\varsigma$.

Ці радіус-вектори зв'язані очевидним співвідношенням:

$$\vec{r}=\vec{r}_O+\vec{\rho}.\tag{19}$$

Продиференціюємо вираз (1), використовуючи формулу Бура

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_O+\vec{\rho}\right)=\frac{d\vec{r}_O}{dt}+\frac{d'\vec{\rho}}{dt}+\vec{\Omega}\times\vec{\rho}=\vec{v}_O+\vec{v}_r+\vec{\Omega}\times\vec{\rho},\tag{20}$$

де $\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}=\vec{v}_a$ - абсолютна швидкість точки, $\frac{d'\vec{\rho}}{dt}=\vec{v}_r$ - її відносна швидкість, $\frac{d\vec{r}_O}{dt}=\vec{v}_O$ - швидкість початку рухомої системи координат (т. O).

Таким чином, маємо

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_O + \vec{\Omega}\times\vec{\rho} . \tag{21}$$

В цьому виразі (21) член $\vec{v}_O + \vec{\Omega}\times\vec{\rho}$ являє собою складову швидкості т. M, яка обумовлена лише рухом рухомої системи координат по відношенню до нерухомої з кінематичними характеристиками $\vec{v}_O$, $\vec{\Omega}$.

Нагадаємо, що

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k} ,$$

де

$$\Omega_x = \frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{k}, \quad \Omega_y = \frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i}, \quad \Omega_z = \frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j} .$$

Вектор $\vec{\Omega}$ характеризує швидкість зміни орієнтації рухомої системи координат по відношенню до нерухомої.

7.4. Формули перетворення прискорень при складному русі точки

Скористаємось визначенням прискорення при векторному способі задання руху точки і формулою для абсолютної швидкості точки, тобто виразами

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \text{і} \qquad \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_O + \vec{\Omega}\times\vec{\rho} .$$

Тоді матимемо

$$\vec{a} = \vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_r + \vec{v}_O + \vec{\Omega}\times\vec{\rho}\right) = \frac{d'\vec{v}_r}{dt} + \vec{\Omega}\times\vec{v}_r + \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}\times\vec{\rho}\right) =$$

$$= \frac{d'\vec{v}_r}{dt} + \vec{\Omega}\times\vec{v}_r + \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d'}{dt}\left(\vec{\Omega}\times\vec{\rho}\right) + \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{\rho}\right) =$$

$$= \frac{d'\vec{v}_r}{dt} + \vec{\Omega}\times\vec{v}_r + \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d'\vec{\Omega}}{dt}\times\vec{\rho} + \vec{\Omega}\times\frac{d'\vec{\rho}}{dt} + \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{\rho}\right). \tag{22}$$

Тут з означень маємо

$$\frac{d'\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r , \quad \frac{d\vec{v}_O}{dt} = \vec{a}_O , \quad \frac{d'\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_r ,$$

і тоді вираз (22) можна записати у вигляді

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_O + 2\vec{\Omega}\times\vec{v}_r + \frac{d'\vec{\Omega}}{dt}\times\vec{\rho} + \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{\rho}\right). \tag{23}$$

У виразі (23) доданок $2\vec{\Omega}\times\vec{v}_r$ називається *прискоренням Коріоліса* і позначається $\vec{a}_c$. Це прискорення виникає в результаті відносного руху точки і руху рухомої системи координат.

У формулі (23) доданок $\vec{a}_O + \dfrac{d'\vec{\Omega}}{dt}\times\vec{\rho} + \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{\rho}\right)$ являє собою складову повного прискорення точки, яка обумовлена рухом рухомої системи координат з кінематичними характеристиками: $\vec{a}_O$, $\vec{\Omega}$, $\dfrac{d'\vec{\Omega}}{dt}$. Таким чином, маємо

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_O + \frac{d'\vec{\Omega}}{dt}\times\vec{\rho} + \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{\rho}\right) \tag{24}$$

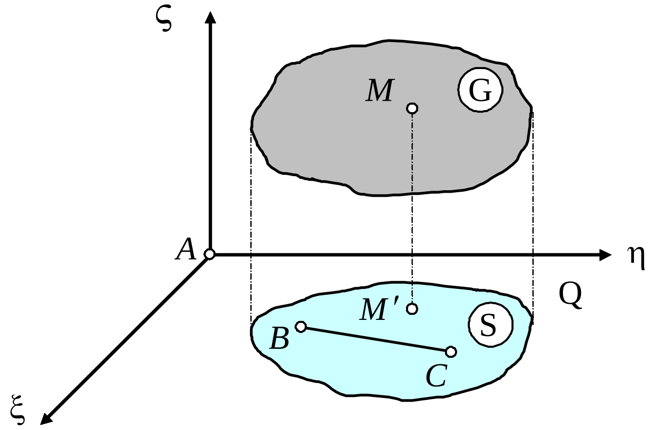
формулу для перетворень прискорень точки при її складному русі.

Лекція 8

Плоскопаралельний рух твердого тіла

Плоскопаралельним рухом твердого тіла називається такий його рух, під час якого всі точки даного тіла рухаються в площинах, паралельних деякій вибраній площині, яка зветься *основною*.

Користуючись таким означенням, а також властивістю твердого тіла зберігати незмінною відстань між двома довільними його точками, зведемо вивчення руху тіла в тривимірному просторі до дослідження руху деякої плоскої фігури в основній площині.

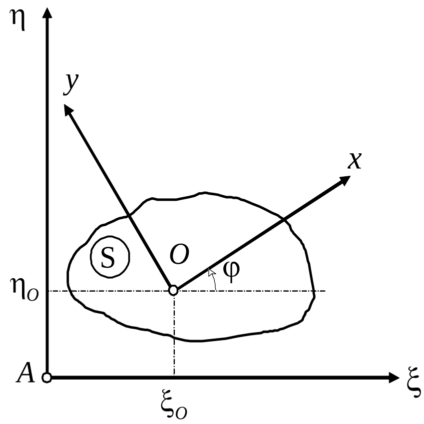


Розглянемо тт. B і C плоскої фігури S. З чотирьох координат цих точок лише три є незалежними, тобто для описання руху плоскої фігури необхідні три незалежні координати у функції часу, отже тверде тіло, що виконує плоскопаралельний рух має три степені вільності.

Положення плоскої фігури S в основній площині Q буде визначатись залежностями

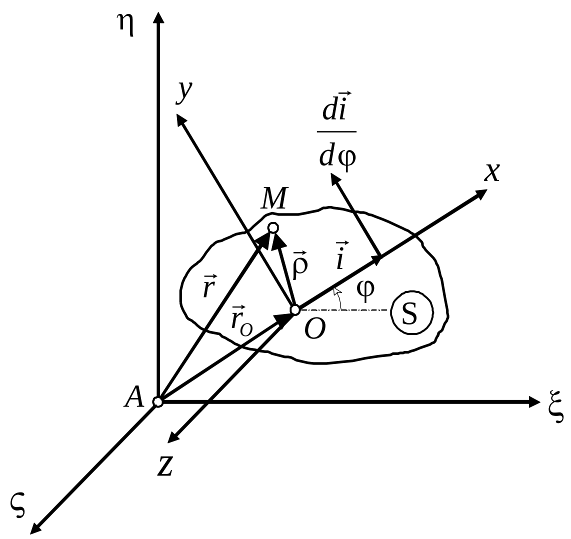
$$\begin{cases} \xi_O = \xi_O(t), \\ \eta_O = \eta_O(t), \\ \varphi = \varphi(t), \end{cases} \tag{1}$$

які є *кінематичними рівняннями плоскопаралельного руху твердого тіла*.



8.1. Лінійна швидкість точки та кутова швидкість тіла

Розглянемо рух точки M плоскої фігури, та знайдемо її швидкість.



З рисунку випливає, що

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho}\,. \tag{2}$$

Знайдемо швидкість т. M шляхом диференціювання виразу (2)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d'\vec{\rho}}{dt} + \vec{\Omega}\times\vec{\rho}\,.$$

Оскільки $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, $\frac{d\vec{r}_O}{dt} = \vec{v}_O$, $\frac{d'\vec{\rho}}{dt} = \vec{0}$, тому отримаємо

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\Omega}\times\vec{\rho}\,, \tag{3}$$

де $\vec{v}_{OM} = \vec{\Omega}\times\vec{\rho}$ називають *обертальною швидкістю* т. M відносно т. O і записують

$$\vec{v}_{OM} = \vec{\Omega}\times\overline{OM}\,.$$

Визначимо зміст вектора $\vec{\Omega}$, який в рухомій системі координат можна записати таким чином: $\vec{\Omega} = \Omega_x\vec{i} + \Omega_y\vec{j} + \Omega_z\vec{k}$.

Як і раніше (оскільки $\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$), матимемо

$$\Omega_x = \frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{k} = -\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{j} = 0, \qquad \Omega_y = \frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i} = 0, \qquad \Omega_z = \frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j}\,.$$

Для того, щоб визначити похідну $\frac{d\vec{i}}{dt}$, згадаємо, що орт $\vec{i}$ є складною функцією часу, а саме $\vec{i} = \vec{i}\left[\varphi(t)\right]$, тому

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{i}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\,. \tag{4}$$

Вектор $\frac{d\vec{i}}{d\varphi}$ напрямлений по дотичній до годографу вектора $\vec{i}$ в бік зростання φ і його величина дорівнює одиниці, тобто

$$\frac{d\vec{i}}{d\varphi} = \vec{j}\,. \tag{5}$$

Якщо підставити формулу (5) у вираз (4), то отримаємо $\frac{d\vec{i}}{dt} = \dot{\varphi}\,\vec{j}$.

В такому разі

$$\Omega_z = \frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j} = \dot{\varphi}\,\vec{j}\cdot\vec{j} = \dot{\varphi}\,. \tag{6}$$

При плоскопаралельному русі вектор $\vec{\Omega}$ являє собою вектор, який визначає швидкість зміни кута повороту тіла з часом. Цей вектор завжди напрямлений по осі z (по орту $\vec{k}$). Нагадаємо, що вісь z перпендикулярна до основної площини. Вектори $\vec{\Omega}$ і $\vec{k}$ мають однаковий напрямок, якщо $\dot{\varphi} > 0$, і протилежний, якщо $\dot{\varphi} < 0$. Величина проекції Ω_z вектора $\vec{\Omega}$ на вісь z дорівнює першій похідній від кута повороту φ за часом.

Введемо позначення:

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} = \dot{\varphi}\,\vec{k}\,, \tag{7}$$

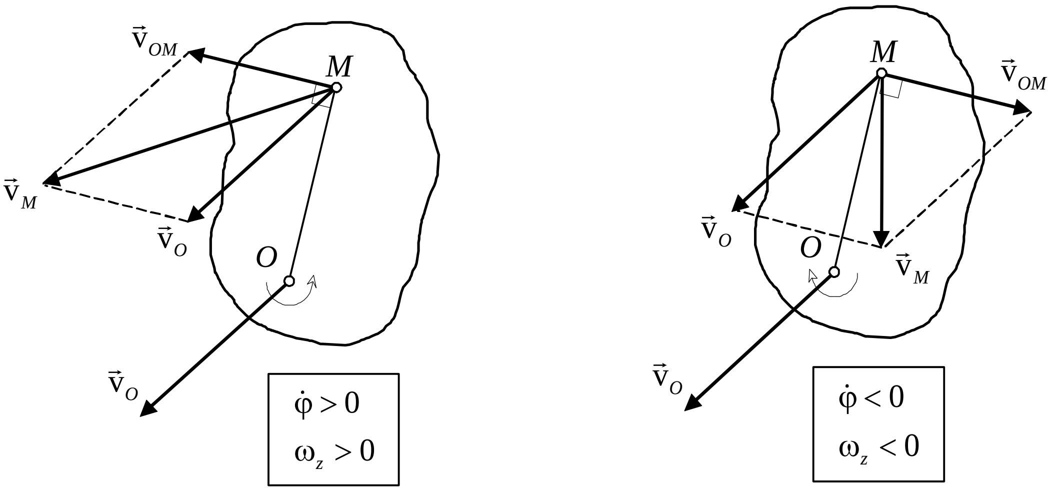
де $\vec{\omega}$ - кутова швидкість при плоскопаралельному русі.

Тоді лінійна швидкість точки M запишеться у вигляді

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{OM}, \tag{8}$$

що є математичним записом наступної теореми.

<u>Теорема</u>: *при плоскопаралельному русі швидкість довільної точки M дорівнює векторній сумі швидкості полюса (т. O) і обертальної швидкості т. M в її русі відносно т. O.*



Модуль вектора швидкості т. M визначається за теоремою косинусів:

$$v_M = \sqrt{v_O^2 + v_{OM}^2 + 2v_O v_{OM} \cos\left(\vec{v}_O \hat{;} \vec{v}_{OM}\right)}.$$

Якщо спроектувати вираз (7) на пряму OM, то отримаємо

$$\left(\vec{v}_M\right)_{OM} = \left(\vec{v}_O\right)_{OM} + \left(\vec{v}_{OM}\right)_{OM},$$

але, оскільки $\left(\vec{v}_{OM}\right)_{OM} = 0$, то матимемо

$$\left(\vec{v}_M\right)_{OM} = \left(\vec{v}_O\right)_{OM},$$

що є виразом **<u>теореми Грасгофа</u>**: *проекції швидкостей двох точок твердого тіла на пряму, що їх з'єднує, є рівними.*

Це твердження є кінематичним означенням абсолютно твердого тіла.

8.2. Миттєвий центр швидкостей (МЦШ)

Розглянемо плоску фігуру S, що рухається в нескінченній площині Q. Такий рух S будемо вважати плоскопаралельним.

Миттєвим центром швидкостей називається така точка основної площини, незмінно зв'язана з плоскою фігурою, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

При русі плоскої фігури МЦШ змінює своє положення.

Геометричне місце МЦШ в нерухомій площині утворює *нерухому центроїду*, а геометричне місце МЦШ в рухомій площині утворює *рухому центроїду*. В кожний момент часу t рухома та нерухома центроїди мають загальну точку, якою є МЦШ.

Покажемо, що для кожного моменту часу t існує єдина точка, швидкість якої дорівнює нулю.

Доведення

Будемо вважати, що розглядувана точка A даного тіла має $\vec{v}_A \neq \vec{0}$, а також припустимо, що для даного тіла $\omega \neq 0$, тоді

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{AM} ,$$

але з іншого боку

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \tag{9}$$

де $\vec{\rho} = \overrightarrow{AM}$ - це вектор, який визначає положення т. M відносно т. A. Тоді

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM} . \tag{10}$$

Розглянемо т. P, для якої $\vec{v}_P = \vec{0}$:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP} = \vec{0}. \tag{11}$$

Тоді

$$-\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP} . \tag{12}$$

Домножуючи векторно цей вираз зліва на $\vec{\omega}$, отримаємо

$$-\left(\vec{\omega} \times \vec{v}_A\right) = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}\right).$$

Згадуючи далі формулу для подвійного векторного добутку ($\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$), можна записати

$$\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}\right) = \vec{\omega}\left(\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AP}\right) - \overrightarrow{AP}\left(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}\right), \tag{13}$$

а помітивши, що $\vec{\omega}\left(\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AP}\right) = \vec{0}$, оскільки $\vec{\omega} \perp \overrightarrow{AP}$ і $\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$, можна отримати

$$-\left(\vec{\omega} \times \vec{v}_A\right) = -\overrightarrow{AP}\omega^2, \tag{14}$$

або

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2}. \tag{15}$$

Таким чином, МЦШ розташований на перпендикулярі в т. A до вектору $\vec{v}_A$ на відстані

$$AP = \frac{\omega \, v_A \sin 90^o}{\omega^2} = \frac{v_A}{\omega} \tag{16}$$

від неї. Ця формула дає змогу *аналітично* визначити положення МЦШ.

З формул (15) і (16) випливає, що:

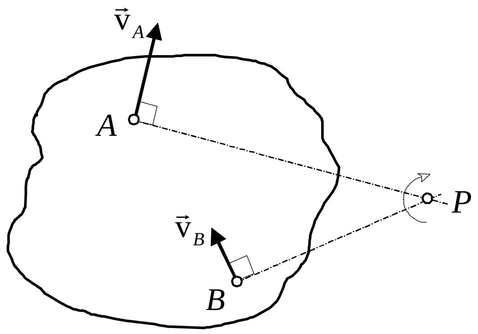
1) МЦШ знаходиться на перпендикулярі до вектора швидкості заданої точки;
2) співвідношення швидкостей двох точок даного тіла дорівнює співвідношенню відстаней від цих точок до МЦШ;

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}; \tag{17}$$

3) кутова швидкість тіла, що виконує плоскопаралельний рух дорівнює відношенню швидкості довільної точки до відстані цієї точки до МЦШ:

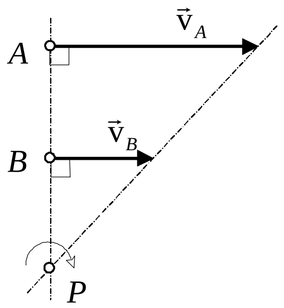
$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \ldots . \tag{18}$$

Положення МЦШ може бути визначено *графічно*, якщо відомі напрямки векторів швидкостей двох точок плоскої фігури. З формули (15) випливає, що швидкість будь-якої точки плоскої фігури перпендикулярна до прямої, що проходить через дану точку, та МЦШ. Тому якщо, наприклад, в точках A і B поставити перпендикуляри до швидкостей цих точок, то їх перетин і буде МЦШ.



Частинні випадки визначення МЦШ (P)

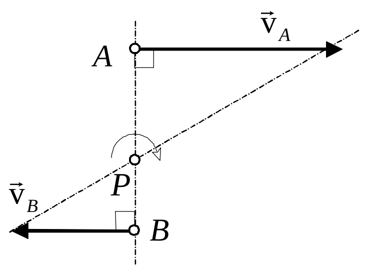
1)



Якщо через дві точки твердого тіла можна провести пряму, яка перпендикулярна до векторів швидкостей цих точок, тоді МЦШ знаходиться на перетині вказаної прямої та прямої, що проходить через кінці векторів швидкостей даних точок. Крім того,

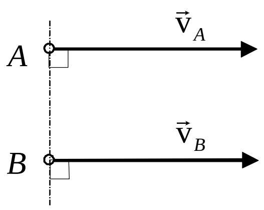
$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \ldots \; . \tag{19}$$

2)



Якщо швидкості двох точок перпендикулярні до відрізку (AB), що їх з'єднує, і напрямлені в різні боки, тоді МЦШ знаходиться на перетині цього відрізку та прямої, що проходить через кінці векторів швидкостей.

3)



Якщо швидкості двох точок перпендикулярні до відрізку, що їх з'єднує, напрямлені в один бік та мають однакові модулі, тоді МЦШ прямує у нескінченність, кутова швидкість дорівнює нулю, що відповідає *миттєво-поступальному рухові*. Тоді маємо:

$$AP = \frac{v_A}{\omega}, \quad \omega \to 0, \quad AP \to \infty \; .$$

З (16), (17), (18) випливає, що в кожний момент часу тіло, яке виконує плоскопаралельний рух, можна розглядати як тіло, що виконує обертальний рух навколо осі, яка проходить через МЦШ (P) перпендикулярно до площини фігури (миттєва вісь обертання).

Лекція 9

9.1. Лінійне прискорення точки та кутове прискорення тіла

Знайдемо прискорення довільної точки твердого тіла, яке виконує плоскопаралельний рух.

$$\vec{a}_M = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \left(\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{OM} = \vec{v}_O + \vec{\omega}\times\overrightarrow{OM} = \vec{v}_O + \vec{\omega}\times\vec{\rho}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_O + \vec{\omega}\times\vec{\rho}\right) = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{\rho}}{dt}. \tag{1}$$

Враховуючи, що $\frac{d\vec{v}_O}{dt} = \vec{a}_O$, а $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$, матимемо

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\vec{v}_{OM}. \tag{2}$$

Введемо наступні позначення для складових прискорення $\vec{a}_M$:

$$\vec{a}_{OM}^{об} = \vec{\varepsilon}\times\vec{\rho} = \vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{OM} \tag{3}$$

- є *обертальною* складовою прискорення, а

$$\vec{a}_{OM}^{до} = \vec{\omega}\times\vec{v}_{OM} = \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{\rho}\right) = \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{OM}\right) \tag{4}$$

- є його *доосьовою* складовою.

Крім цього, $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}\,\vec{k}\right) = \ddot{\varphi}\,\vec{k}$, звідки

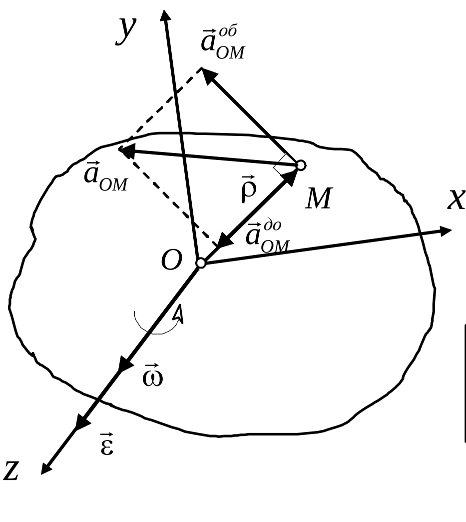
$$\vec{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\,\vec{k}, \tag{5}$$

$$\varepsilon_z = \ddot{\varphi}. \tag{6}$$

Із виразів (5) і (6) випливає, що $\vec{\varepsilon}$ являє собою вектор, який характеризує швидкість зміни кутової швидкості тіла. Вектор $\vec{\varepsilon}$ напрямлений по дотичній до годографа вектора $\vec{\omega}$, тобто вздовж осі Oz (по орту $\vec{k}$), що вказано в формулі (5). Проекція вектора $\vec{\varepsilon}$ на вісь Oz дорівнює другій похідній від кута φ повороту тіла за часом.

Вектори $\vec{\varepsilon}$ та $\vec{k}$ напрямлені в один бік, якщо $\varepsilon_z = \ddot{\varphi} > 0$, і в протилежні боки, якщо $\varepsilon_z = \ddot{\varphi} < 0$.

Таким чином, вектор $\vec{\varepsilon}$ називається вектором *кутового прискорення* тіла, що виконує плоскопаралельний рух.



$\vec{\varepsilon}\perp\vec{\rho}$
$\vec{a}_{OM}^{об}\perp\vec{\rho}\perp\vec{\varepsilon}$

При $\varepsilon > 0$ $\vec{v}_{OM}$ та $\vec{a}_{OM}^{об}$ напрямлені в один бік, а якщо $\varepsilon < 0$, тоді $\vec{v}_{OM}$ та $\vec{a}_{OM}^{об}$ напрямлені в протилежні боки.

З виразу (3) випливає, що обертальне прискорення т. M відносно т. O напрямлене перпендикулярно до радіус-вектора $\vec{\rho}$, тобто завжди вектор $\vec{a}_{OM}^{об}$ є колінеарним до вектора обертальної швидкості тієї ж точки відносно того ж центра, а його модуль дорівнює:

$$a_{OM}^{об} = \varepsilon\,\rho\,\sin\left(\vec{\varepsilon}\hat{;}\vec{\rho}\right) = \varepsilon\,\rho = \varepsilon\,OM\,. \quad (7)$$

Розглянемо вираз (4):

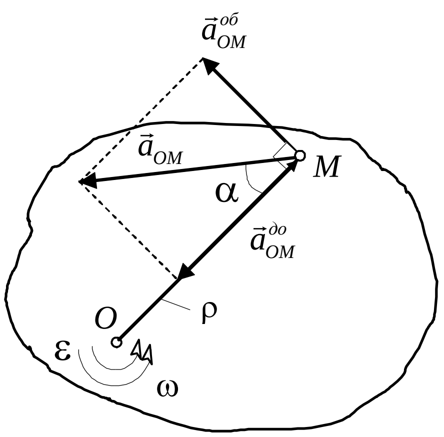
$$\vec{a}_{OM}^{до} = \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{OM}\right) = \vec{\omega}\left(\vec{\omega}\cdot\overrightarrow{OM}\right) - \overrightarrow{OM}\left(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}\right) = -\overrightarrow{OM}\omega^2$$

(оскільки $\vec{\omega}\cdot\overrightarrow{OM} = 0$, тому що $\vec{\omega}\perp\overrightarrow{OM}$). Таким чином маємо

$$\vec{a}_{OM}^{до} = -\overrightarrow{OM}\omega^2 = \omega^2\,\overrightarrow{MO}\,. \quad (8)$$

Із виразу (8) випливає, що доосьова складова обертального прискорення т. M відносно т. O завжди напрямлена від т. M до т. O, а її величина визначається формулою:

$$a_{OM}^{до} = \omega^2 OM = \omega^2\rho\,. \quad (9)$$



Зауважимо, що $\vec{a}_{OM}^{до}$ називається ще й *доцентровим прискоренням* т. M ($\vec{a}_{OM}^{дц}$) в її русі навколо т. O, тобто

$$\vec{a}_{OM}^{до} \equiv \vec{a}_{OM}^{дц}\,.$$

Сума $\vec{a}_{OM}^{до} + \vec{a}_{OM}^{об}$ називається *повним обертальним прискоренням* т. M відносно т. O:

$$\vec{a}_{OM} = \vec{a}_{OM}^{до} + \vec{a}_{OM}^{об}\,. \quad (10)$$

Перепишемо вираз (2), беручи до уваги наведені вище позначення:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}_{OM}^{об} + \vec{a}_{OM}^{до}\,, \quad (11)$$

який, в свою чергу, запишемо у вигляді:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}_{OM}\,. \quad (12)$$

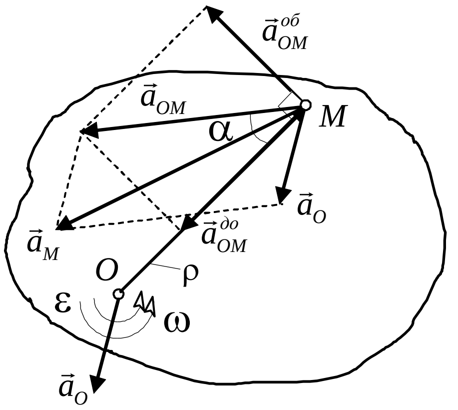
Наведені вирази (11) і (12) є математичним записом наступної теореми.

<u>Теорема</u>: *прискорення довільної точки M тіла, що виконує плоскопаралельний рух, дорівнює векторній сумі прискорення полюса (т. O) і обертального та доосьового прискорень т. M в її русі відносно полюса.*

Надамо графічне пояснення цій теоремі.

Кут α, який утворюється повним обертальним прискоренням т. M відносно т. O і вектором $\overrightarrow{MO}$, має такий *напрямний тангенс*:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a_{OM}^{об}}{a_{OM}^{до}} = \frac{\varepsilon\,OM}{\omega^2\,OM} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}\,. \quad (13)$$



Оскільки $\vec{a}_{OM}^{об}$ завжди перпендикулярний до вектора $\vec{a}_{OM}^{до}$, тому можна визначити величину повного обертального прискорення т. M відносно т. O за теоремою Піфагора:

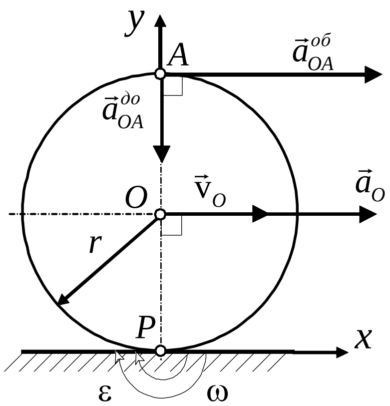
$$a_{OM} = \sqrt{\left(a_{OM}^{об}\right)^2 + \left(a_{OM}^{до}\right)^2} = \sqrt{\varepsilon^2 OM^2 + \omega^4 OM^2} = OM\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \qquad (14)$$

<u>*Задача*</u>

Дано: r, v_O, a_O.

Знайти: $\vec{a}_A$.

Р о з в ' я з а н н я



Повне прискорення т. A визначимо за формулою (11):

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{OA}^{об} + \vec{a}_{OA}^{до},$$

де $a_{OA}^{об} = \varepsilon\, OA,\quad a_{OA}^{до} = \omega^2 OA.$

Точка P - миттєвий центр швидкостей, тому

$$\omega = \frac{v_O}{r},\quad \varepsilon = \frac{a_O}{r}.$$

Далі отримаємо:

$$a_{OA}^{об} = \varepsilon\, OA = \varepsilon\, OP = \varepsilon\, r = \frac{a_O}{r} r = a_O\,;$$

$$a_{OA}^{до} = \omega^2 OA = \frac{v_O^2}{r^2} r = \frac{v_O^2}{r}.$$

Прискорення $\vec{a}_A$ знайдемо за методом проекцій: зпроектуємо ліву та праву частини рівняння (11) на осі x та y:

$$\begin{cases} a_{Ax} = (\vec{a}_A)_x = (\vec{a}_O)_x + (\vec{a}_{OA}^{об})_x + (\vec{a}_{OA}^{до})_x = a_O + a_{OA}^{об} = a_O + a_O = 2a_O; \\ a_{Ay} = (\vec{a}_A)_y = (\vec{a}_O)_y + (\vec{a}_{OA}^{об})_y + (\vec{a}_{OA}^{до})_y = -a_{OA}^{до} = -\dfrac{v_O^2}{r}. \end{cases}$$

Далі знаходимо модуль вектора $\vec{a}_A$ та відповідні напрямні косинуси:

$$a_A = \sqrt{(a_{Ax})^2 + (a_{Ay})^2} = \sqrt{4a_O^2 + \frac{v_O^4}{r^2}}\,;$$

$$\cos\left(\vec{a}_A;\hat{}\,Px\right)=\frac{a_{Ax}}{a_A}=\frac{2a_O}{\sqrt{4a_O^2+\dfrac{\mathrm{v}_O^4}{r^2}}}=\frac{2a_O r}{\sqrt{4a_O^2r^2+\mathrm{v}_O^4}},$$

$$\cos\left(\vec{a}_A;\hat{}\,Py\right)=\frac{a_{Ay}}{a_A}=\frac{-\mathrm{v}_O^2/r}{\sqrt{4a_O^2+\dfrac{\mathrm{v}_O^4}{r^2}}}=-\frac{\mathrm{v}_O^2}{\sqrt{4a_O^2r^2+\mathrm{v}_O^4}}.$$

9.2. Миттєвий центр прискорень (МЦП)

Задача про розподіл прискорень точок твердого тіла, яке виконує плоскопаралельний рух, спрощується, якщо в якості полюса вибрати точку, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Миттєвим центром прискорень (МЦП) називається точка плоскої фігури, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю.

МЦШ і МЦП для даного тіла взагалі є різними точками, вони співпадають лише для тіла, яке виконує обертальний рух навколо нерухомої осі.

Розглянемо деякі **способи визначення МЦП** (т. Q).

а) Аналітичний спосіб

Припустимо, що прискорення тт. M і A відомі, також відомі ω і ε даного тіла.

Якщо вибрати полюс в т. A, тоді матимемо:

$$\vec{a}_M=\vec{a}_A+\vec{a}_{AM}\,. \tag{15}$$

Тепер виберемо за полюс т. Q, прискорення якої дорівнює нулю. Тоді з виразу

$$\vec{a}_M=\vec{a}_Q+\vec{a}_{QM} \tag{16}$$

матимемо:

$$\vec{a}_M=\vec{a}_{QM}\,. \tag{17}$$

В свою чергу

$$\vec{a}_{QM}=\vec{a}_{QM}^{\,об}+\vec{a}_{QM}^{\,до}, \tag{18}$$

де

$$a_{QM}=QM\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}\,. \tag{19}$$

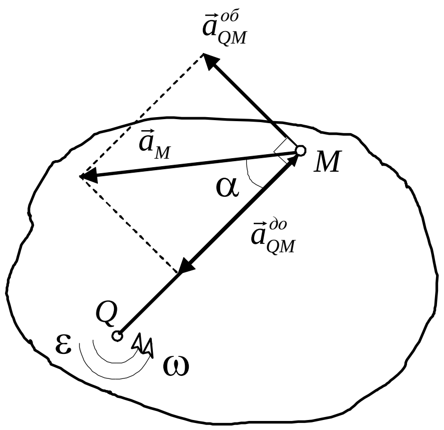
Із виразів (15) і (17) випливає, що за величиною прискорення т. M дорівнює

$$a_M=a_{QM}=QM\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4},$$

і крім цього

$$\frac{a_M}{QM}=\frac{a_B}{QB}=\ldots=\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}\,. \tag{20}$$

На підставі виразів (15) – (17) можна зробити висновок, що якщо полюс сумістити з миттєвим центром прискорень, тоді розподіл прискорень точок даного тіла буде таким же, як і у разі обертального руху цього ж тіла навколо осі, що проходить через МЦП перпендикулярно до основної площини.



Тоді напрямний тангенс визначиться формулою

$$\text{tg}\alpha = \frac{a_{QM}^{об}}{a_{QM}^{до}} = \frac{\varepsilon\, QM}{\omega^2 QM} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \qquad (21)$$

Відрізок QM визначає відстань від т. M до МЦП:

$$QM = \frac{a_M}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \qquad (22)$$

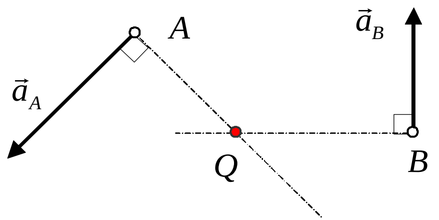
Далі, для того, щоб визначити положення т. Q (МЦП), треба повернути на кут α в напрямку ε вектор прискорення т. M, провести з цієї точки промінь в напрямку прискорення та відкласти на ньому відстань QM, обчислену за формулою (22).

Частинні випадки визначення МЦП

1) Нехай $\omega = 0, \quad \varepsilon \neq 0$, тоді

   $\text{tg}\alpha = \infty \;\Rightarrow\; \alpha = 90^o$, а з виразу (20) отримаємо:

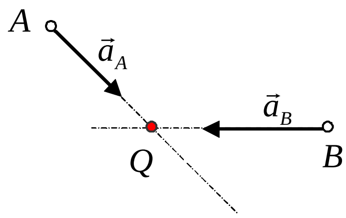
$$\frac{a_A}{QA} = \frac{a_B}{QB} = \ldots = \varepsilon.$$



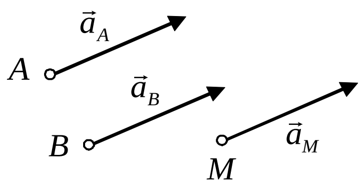
2) Нехай $\omega \neq 0, \quad \varepsilon = 0$, тоді

   $\text{tg}\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0$, а з виразу (20) отримаємо:

$$\frac{a_A}{QA} = \frac{a_B}{QB} = \ldots = \omega^2.$$



3) Нехай $\omega = 0, \quad \varepsilon = 0$, тоді вектори прискорень всіх точок рівні за величиною і однакові за напрямком.

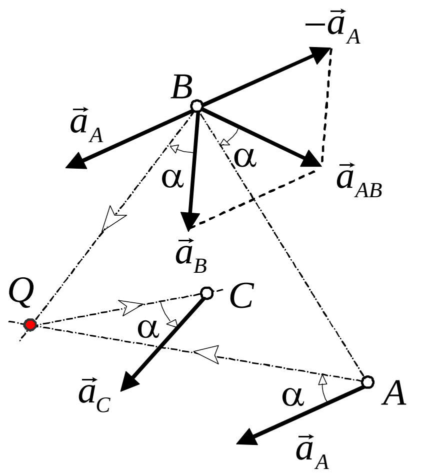


Таким чином, у першому випадку вектори прискорень всіх точок фігури будуть перпендикулярні до відрізків, які з’єднують ці точки з МЦП. В другому випадку для визначення МЦП необхідно провести промені від точок в напрямках прискорень до їх перетину.

б) Геометричний спосіб визначення МЦП

Геометричний спосіб визначення МЦП базується на тій властивості, що прискорення будь-яких точок плоскої фігури утворюють в кожний момент часу один і той же кут з відрізками, які з’єднують ці точки з МЦП.

Покажемо, яким чином можна знайти МЦП, якщо відомі прискорення двох точок даної фігури (A і B).



Вибираючи т. A за полюс, отримаємо

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}, \tag{23}$$

звідки

$$\vec{a}_{AB} = \vec{a}_B - \vec{a}_A. \tag{24}$$

Побудувавши вектор повного обертального прискорення ($\vec{a}_{AB}$) т. B відносно т. A, визначимо кут α між ним та вектором $\overrightarrow{BA}$ за найкоротшим шляхом. Далі той же кут α відкладаємо в тому ж напрямку від векторів $\vec{a}_A$ та $\vec{a}_B$ і проводимо промені від тт. A і B. Точка перетину отриманих променів і буде шуканим МЦП.

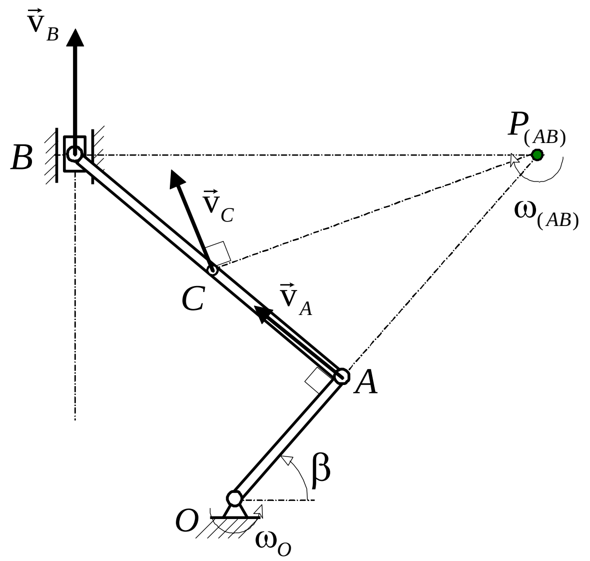
Напрямок, в якому треба відкладати кут α від $\vec{a}_A$ і $\vec{a}_B$ відповідає напрямку повороту вектора $\vec{a}_{AB}$ відносно т. B до його суміщення із вектором $\overrightarrow{BA}$ за найкоротшим шляхом (або напрямку кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ тіла). Якщо відоме положення МЦП, тоді, діючи в зворотній послідовності, можна знайти прискорення будь-якої іншої точки тіла (наприклад, т. C). $\vec{a}_C$ визначиться з формули (20): $a_C = \frac{QC}{QA} a_A = \frac{QC}{QB} a_B$.

Задача

Дано: $OA, AB, \omega_O, \beta, \angle OAB = 90^o$.

Знайти: $\omega, \varepsilon, \mathrm{v}_A, \mathrm{v}_B, \vec{a}_A, \vec{a}_B$, МЦШ і МЦП.

Р о з в ' я з а н н я



Зауважимо, що тіло OA виконує обертальний рух навколо нерухомої осі O, а тіло AB - плоскопаралельний рух.

1) Визначимо спочатку швидкості тт. A і B та кутову швидкість тіла AB:

$$\mathrm{v}_A = \omega_O \cdot OA,$$

$$\frac{\mathrm{v}_B}{\mathrm{v}_A} = \frac{BP}{AP} \Rightarrow \mathrm{v}_B = \frac{BP}{AP}\mathrm{v}_A,$$

але, оскільки $AP = BP\cos\beta$, $BP = AB/\sin\beta$, тому

$$\mathrm{v}_B = \frac{BP}{BP\cos\beta}\mathrm{v}_A = \frac{OA}{\cos\beta}\omega_O.$$

Напрямок обертання ланки AB визначаємо за напрямком вектора швидкості відомої точки відносно МЦШ, знайденого для даної ланки. Тоді напрямок векторів швидкостей всіх точок даного тіла буде відповідати знайденому напрямку обертання тіла.

2) Кутова швидкість ланки AB визначається формулою:

$$\omega = \frac{\mathrm{v}_A}{AP} = \frac{OA\sin\beta}{AB\cos\beta}\omega_O = \frac{OA}{AB}\mathrm{tg}\beta \cdot \omega_O.$$

3) Визначимо прискорення тт. A і B, а також кутове прискорення ланки AB.

Оскільки тіло OA виконує обертальний рух навколо нерухомої осі, тому $\vec{a}_A = \vec{a}_A^{об} + \vec{a}_A^{до}$, але $a_A^{об} = \varepsilon_O OA = 0$ (тому що $\omega_O = const \;\; \Rightarrow \;\; \varepsilon_O = \dfrac{d\omega_O}{dt} = 0$), а $a_A^{до} = \omega_O^2 OA$, тому матимемо

$$a_A = a_A^{до} = \omega_O^2 OA.$$

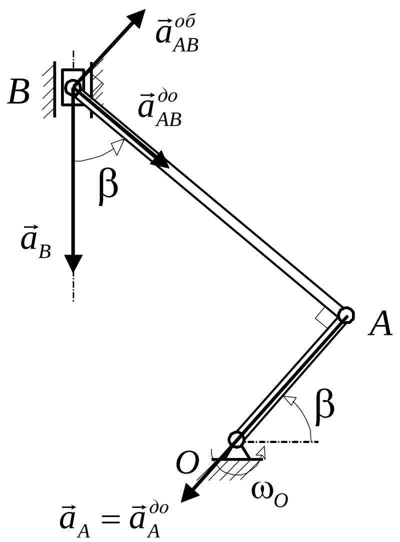
Приймаючи т. A за полюс, визначимо прискорення т. B:

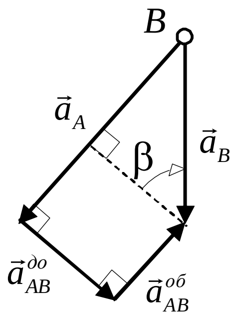
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^{об} + \vec{a}_{AB}^{до},$$

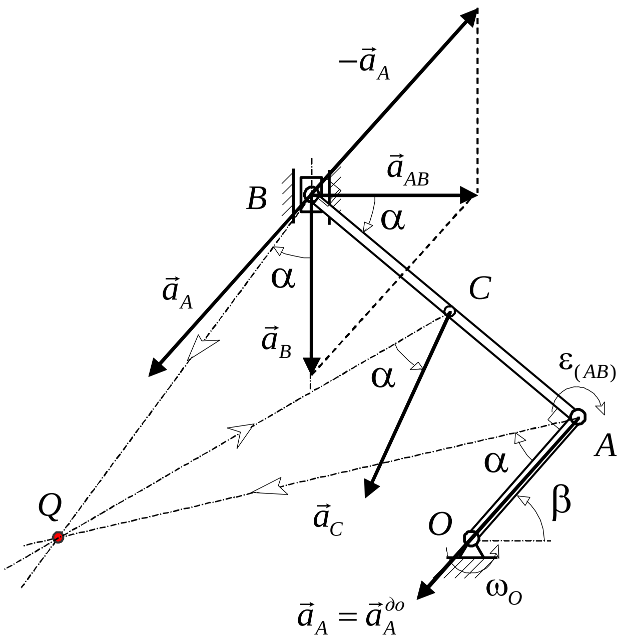
де $a_{AB}^{об} = \varepsilon\, AB$, а $a_{AB}^{до} = \omega^2 AB$ (ω - визначено вище). Проектуючи це рівняння на напрямок AB та на перпендикуляр до AB, отримаємо (див. наведений нижче рисунок):

- на AB: $a_B \cos\beta = a_{AB}^{до} = \omega^2 AB$, звідки знаходимо шукане $a_B = \dfrac{\omega^2 AB}{\cos\beta}$;
- на перпендикуляр до AB: $a_B \sin\beta = a_A - a_{AB}^{об}$, або $\dfrac{\omega^2 AB}{\cos\beta}\sin\beta = \omega_O^2 OA - \varepsilon\, AB$,

звідки отримаємо шукане кутове прискорення ланки AB: $\varepsilon = \dfrac{1}{AB}\left(\omega_O^2 OA - \omega^2 AB \operatorname{tg}\beta\right)$.







4) Визначення МЦП ланки AB здійснюється наступним чином.

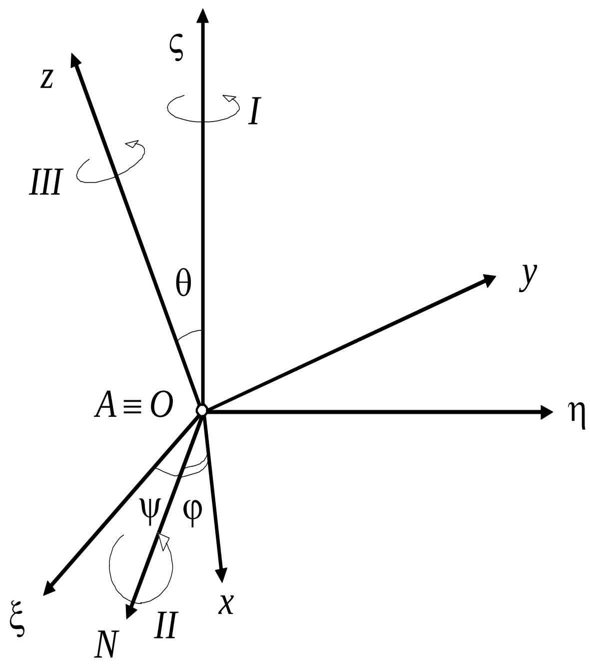
Скористаємося геометричним способом, знайшовши за формулою (18) $\vec{a}_{AB}$, та визначивши кут α. Необхідні побудови для визначення МЦП наведені на рисунку. Якщо потім треба визначити прискорення будь-якої іншої точки (наприклад, т. C) ланки AB, тоді необхідно провести побудови в зворотньому напрямку, йдучи від МЦП (див. рисунок), та застосувати формулу (20).

Лекція 10

Кути Ейлера

10.1. Кути прецесії, нутації та власного обертання

Введемо дві системи координат: $Oxyz$ і $A\xi\eta\varsigma$, сумістивши їх початок в одній точці і не порушуючи при цьому їх загальності.



В довільний момент часу координатна площина Oxz перетинається з площиною $A\xi\eta$ вздовж лінії, яка називається *лінією вузлів*.

Кут, що утворюється нерухомою віссю $A\xi$ і лінією вузлів, називається *кутом прецесії* (ψ).

Кут, що утворюється нерухомою віссю $A\varsigma$ і рухомою віссю Oz, називається *кутом нутації* (θ).

Нарешті, кут, що утворюється лінією вузлів і рухомою віссю Ox, називається *кутом власного обертання* (φ).

Всі разом кути $\psi,\ \theta,\ \varphi$ називаються *кутами Ейлера*, а залежності

$$\begin{cases} \psi = \psi(t), \\ \theta = \theta(t), \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases} \tag{1}$$

є *кінематичними рівняннями руху* рухомої системи координат відносно нерухомої.

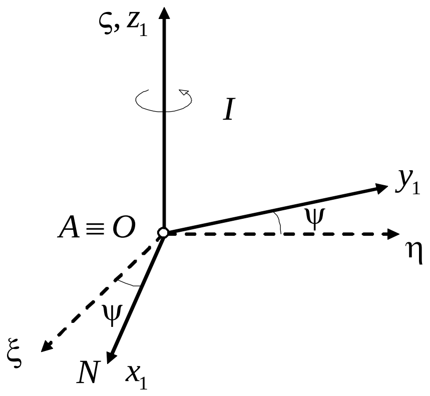
Сформулюємо **теорему Ейлера**:

перехід від нерухомої системи координат $A\xi\eta\varsigma$ до рухомої $Oxyz$ можна здійснити за допомогою трьох послідовних поворотів у визначеній послідовності навколо вибраних належним чином осей.

Д о в е д е н н я

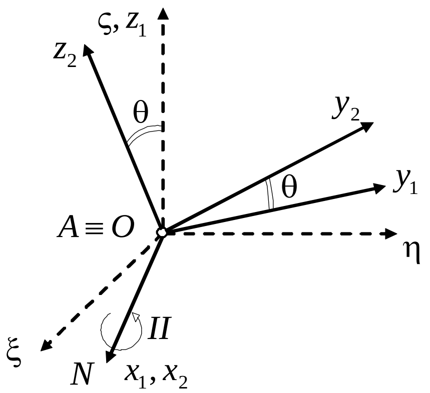
Оскільки мова йде про геометричну інтерпретацію поворота системи координат $Oxyz$, тому будемо використовувати сферу одиничного радіуса.

В початковий момент часу системи координат $Oxyz$ і $A\xi\eta\varsigma$ співпадають.

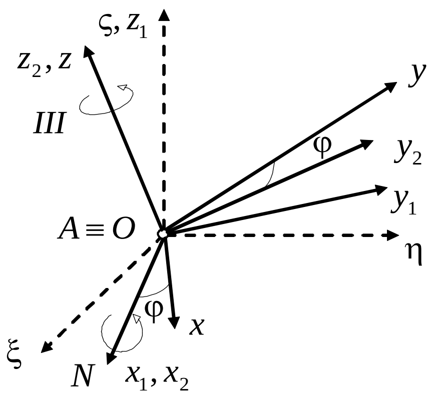


I. **Перший поворот** системи координат $Oxyz$, яка співпадає з $A\xi\eta\varsigma$, здійснюється навколо осі $A\varsigma$ на кут прецесії ψ. Тоді рухома система координат займе своє проміжне положення $Ox_1y_1z_1$.

В результаті першого повороту вісь Ox займе положення Ox_1, яке буде співпадати з лінією вузлів, тобто в результаті першого повороту визначається лінія вузлів.



II. **Другий поворот** здійснимо навколо лінії вузлів на кут нутації θ. Рухома система координат $Oxyz$ займе в результаті другого повороту положення $Ox_2y_2z_2$. Після цього повороту вісь Oz_1 займе своє остаточне положення $Oz_2 \equiv Oz$.



III. **Третій поворот** здійснимо навколо осі $Oz_2 \equiv Oz$ на кут власного обертання φ.

В результаті третього повороту система координат $Oxyz$ займе своє кінцеве положення.

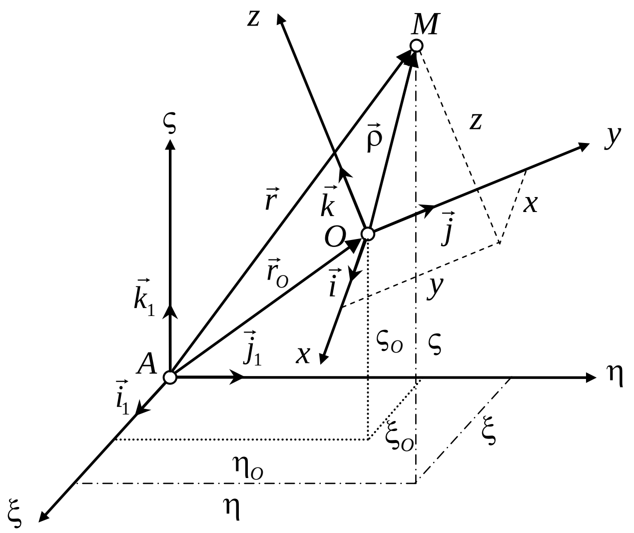
Матриці напрямних косинусів прямого і зворотного переходу від рухомої до нерухомої системи координат

10.2. Таблиця напрямних косинусів

Положення точки M в нерухомій системі координат $A\xi\eta\varsigma$ (з ортами $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$) задається радіус-вектором $\vec{r}$ цієї точки, або її відповідними абсолютними координатами ξ, η, ς, причому $\vec{r} = \xi\,\vec{i}_1 + \eta\,\vec{j}_1 + \varsigma\,\vec{k}_1$.

Положення цієї точки в рухомій системі координат $Oxyz$ (з ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) визначається радіус-вектором $\vec{\rho}$, або координатами x, y, z, причому $\vec{\rho} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Зауважимо, що проекції вектора $\vec{\rho}$ на осі $Oxyz$ співпадають з відповідними координатами т. M, тобто $\rho_x = x,\ \rho_y = y,\ \rho_z = z$.

Нарешті, положення початку O рухомої системи координат $Oxyz$ по відношенню до нерухомої $A\xi\eta\varsigma$ може задаватися координатами т. O в $A\xi\eta\varsigma$, або радіус-вектором $\vec{r}_O = \xi_O\vec{i}_1 + \eta_O\vec{j}_1 + \varsigma_O\vec{k}_1$. Покажемо ці вектори на рисунку.



З огляду на рисунок можна записати очевидне векторне рівняння

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho} = \vec{r}_O + x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\,. \tag{2}$$

Запишемо рівняння (2) в скалярній формі через проекції на осі нерухомої системи координат $A\xi\eta\varsigma$

$$\begin{cases} \left(\vec{r}\right)_\xi = \left(\vec{r}_O\right)_\xi + x\left(\vec{i}\right)_\xi + y\left(\vec{j}\right)_\xi + z\left(\vec{k}\right)_\xi, \\ \left(\vec{r}\right)_\eta = \left(\vec{r}_O\right)_\eta + x\left(\vec{i}\right)_\eta + y\left(\vec{j}\right)_\eta + z\left(\vec{k}\right)_\eta, \\ \left(\vec{r}\right)_\varsigma = \left(\vec{r}_O\right)_\varsigma + x\left(\vec{i}\right)_\varsigma + y\left(\vec{j}\right)_\varsigma + z\left(\vec{k}\right)_\varsigma. \end{cases} \tag{3}$$

В формулах (3) є вирази проекцій ортів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ на осі $\xi,\ \eta,\ \varsigma$. Відомо, що вони дорівнюють косинусам кутів між осями систем координат $Oxyz$ і $A\xi\eta\varsigma$. Вказані косинуси кутів є *напрямними косинусами*. Їх означення і позначення наведемо у вигляді наступної таблиці.

Таблиця напрямних косинусів

$A\xi\eta\varsigma$ \ $Oxyz$	$Ox, \vec{i}$	$Oy, \vec{j}$	$Oz, \vec{k}$
$A\xi,\ \vec{i}_1$	$a_{11} = \cos\left(Ox\hat{;}\,A\xi\right) = \vec{i}\cdot\vec{i}_1 = i_\xi$	$a_{12} = \cos\left(Oy\hat{;}\,A\xi\right) = \vec{j}\cdot\vec{i}_1 = j_\xi$	$a_{13} = \cos\left(Oz\hat{;}\,A\xi\right) = \vec{k}\cdot\vec{i}_1 = k_\xi$
$A\eta,\ \vec{j}_1$	$a_{21} = \cos\left(Ox\hat{;}\,A\eta\right) = \vec{i}\cdot\vec{j}_1 = i_\eta$	$a_{22} = \cos\left(Oy\hat{;}\,A\eta\right) = \vec{j}\cdot\vec{j}_1 = j_\eta$	$a_{23} = \cos\left(Oz\hat{;}\,A\eta\right) = \vec{k}\cdot\vec{j}_1 = k_\eta$
$A\varsigma,\ \vec{k}_1$	$a_{31} = \cos\left(Ox\hat{;}\,A\varsigma\right) = \vec{i}\cdot\vec{k}_1 = i_\varsigma$	$a_{32} = \cos\left(Oy\hat{;}\,A\varsigma\right) = \vec{j}\cdot\vec{k}_1 = j_\varsigma$	$a_{33} = \cos\left(Oz\hat{;}\,A\varsigma\right) = \vec{k}\cdot\vec{k}_1 = k_\varsigma$

Матриця напрямних косинусів є матрицею переходу від рухомої системи координат до нерухомої і має вигляд

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Перехід від нерухомої системи координат до рухомої здійснюється за допомогою матриці

$$\mathbf{A_2} = \mathbf{A_1^T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

10.3. Формули перетворення координат точки при переході від рухомої системи координат до нерухомої

За допомогою матриці переходу $\mathbf{A_1}$ співвідношення (10) з попередньої лекції можна подати у вигляді

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \varsigma_O \end{bmatrix} + \mathbf{A_1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \tag{4}$$

або

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \varsigma_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \tag{5}$$

Формулу (5) подамо в проекціях на осі нерухомої системи координат

$$\begin{cases} \xi = \xi_O + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \eta = \eta_O + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \varsigma = \varsigma_O + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases} \tag{6}$$

Це є формули перетворення координат точки M при переході від рухомої системи координат до нерухомої. Скалярні співвідношення (6) виражають координати т. M як функції часу в $A\xi\eta\varsigma$ при відомих 15 функціях часу: $\xi_O,\ \eta_O,\ \varsigma_O;\ x,\ y,\ z;\ a_{ij}$.

Серед напрямних косинусів незалежними є лише три, оскільки через ортогональність координатної системи $Oxyz$ виконуються наступні співвідношення:

$$\begin{cases} \vec{i}^{\,2} = \vec{i}\cdot\vec{i} = i_\xi i_\xi + i_\eta i_\eta + i_\varsigma i_\varsigma = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1, \\ \vec{j}^{\,2} = \vec{j}\cdot\vec{j} = j_\xi j_\xi + j_\eta j_\eta + j_\varsigma j_\varsigma = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, \\ \vec{k}^{\,2} = \vec{k}\cdot\vec{k} = k_\xi k_\xi + k_\eta k_\eta + k_\varsigma k_\varsigma = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1, \\ \vec{i}\cdot\vec{j} = i_\xi j_\xi + i_\eta j_\eta + i_\varsigma j_\varsigma = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0, \\ \vec{j}\cdot\vec{k} = j_\xi k_\xi + j_\eta k_\eta + j_\varsigma k_\varsigma = a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0, \\ \vec{i}\cdot\vec{k} = i_\xi k_\xi + i_\eta k_\eta + i_\varsigma k_\varsigma = a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Покажемо, яким чином здійснюється перехід від нерухомої до рухомої системи координат. Виходячи з формули (4), знайдемо спочатку

$$\mathbf{A}_1\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi-\xi_O \\ \eta-\eta_O \\ \varsigma-\varsigma_O \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1^{\mathbf{T}}\begin{bmatrix} \xi-\xi_O \\ \eta-\eta_O \\ \varsigma-\varsigma_O \end{bmatrix},$$

або

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi-\xi_O \\ \eta-\eta_O \\ \varsigma-\varsigma_O \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Запишемо вираз (8) у проекціях на осі $Oxyz$ таким чином:

$$\begin{cases} x = a_{11}\left(\xi-\xi_O\right)+a_{21}\left(\eta-\eta_O\right)+a_{31}\left(\varsigma-\varsigma_O\right), \\ y = a_{12}\left(\xi-\xi_O\right)+a_{22}\left(\eta-\eta_O\right)+a_{32}\left(\varsigma-\varsigma_O\right),. \\ z = a_{13}\left(\xi-\xi_O\right)+a_{23}\left(\eta-\eta_O\right)+a_{33}\left(\varsigma-\varsigma_O\right). \end{cases} \tag{9}$$

Це є формули перетворення координат т. M при переході від нерухомої системи координат до рухомої. Зауважимо, що в виразі (9) матриця напрямних косинусів – транспонована.

10.4. Матриці переходу, які визначають положення рухомої системи координат відносно нерухомої

Покажемо три матриці поворотів, що відповідають поворотам на кути Ейлера.

І-й поворот

	ξ	η	ς
x_1	$\cos\left(\xi;\hat{}\, x_1\right) = \cos\psi$	$\cos\left(\eta;\hat{}\, x_1\right) = \cos\ \left(90^o-\psi\right) = \sin\psi$	$\cos\left(\varsigma;\hat{}\, x_1\right) = \cos\ 90^o = 0$
y_1	$\cos\left(\xi;\hat{}\, y_1\right) = \cos\ \left(90^o+\psi\right) = -\sin\psi$	$\cos\left(\eta;\hat{}\, y_1\right) = \cos\psi$	$\cos\left(\varsigma;\hat{}\, y_1\right) = \cos\ 90^o = 0$
z_1	$\cos\left(\xi;\hat{}\, z_1\right) = \cos\ 90^o = 0$	$\cos\left(\eta;\hat{}\, z_1\right) = \cos\ 90^o = 0$	$\cos\left(\varsigma;\hat{}\, z_1\right) = \cos\ 0^0 = 1$

Таким чином, матриця переходу від $A\xi\eta\varsigma$ до $Ox_1y_1z_1$ має вигляд

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матричне співвідношення для перетворення координат при цьому переході записується наступним чином

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_\psi \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{bmatrix}, \tag{10}$$

або так

$$\left[x_1 \quad y_1 \quad z_1\right]^{\mathbf{T}} = A_\psi \left[\xi \quad \eta \quad \varsigma\right]^{\mathbf{T}}.$$

Аналогічним чином отримуються матриці другого ($\mathbf{A}_\theta$) і третього ($\mathbf{A}_\varphi$) поворотів.

ІІ-й поворот (перехід від $Ox_1y_1z_1$ до $Ox_2y_2z_2$)

$$\mathbf{A}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}_\theta \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}.$$

ІІІ-й поворот (перехід від $Ox_2y_2z_2$ до $Oxyz$)

$$\mathbf{A}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}_\varphi \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}.$$

Таким чином, вислідний перехід від координат точки в нерухомій системі координат до її координат в рухомій системі можна отримати так

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}_\varphi \left\{ \mathbf{A}_\theta \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \right\} = \mathbf{A}_\varphi \mathbf{A}_\theta \left\{ \mathbf{A}_\psi \begin{bmatrix} \xi & \eta & \varsigma \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \right\} = \mathbf{A}_\varphi \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\psi \begin{bmatrix} \xi & \eta & \varsigma \end{bmatrix}^{\mathbf{T}},$$

або

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}_\varphi \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\psi \begin{bmatrix} \xi & \eta & \varsigma \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}. \tag{11}$$

Це є формула для перетворення координат при переході від нерухомої до рухомої системи координат, який здійснюється за допомогою трьох поворотів на кути Ейлера, тому вислідна матриця $\mathbf{A_2}$ цього переходу матиме вигляд

$$\mathbf{A_2} = \mathbf{A}_\varphi \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\psi. \tag{12}$$

Тоді формула (11) набуде вигляду

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A_2} \begin{bmatrix} \xi & \eta & \varsigma \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}.$$

Якщо підставити в формулу (10) отримані вище вирази матриць $\mathbf{A}_\varphi$, $\mathbf{A}_\theta$, $\mathbf{A}_\psi$, тоді після громіздких перетворень отримаємо

$$\mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta & \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\psi\sin\theta & -\cos\psi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Для переходу від нерухомої до рухомої системи координат треба за відомими кутами Ейлера обчислити $\mathbf{A_2}$ за формулою (12), потім підставити її в формулу (11) і отримати координати точки в рухомій системі координат.

У разі переходу від рухомої до нерухомої системи координат, слід скористуватися формулою

$$\begin{bmatrix} \xi & \eta & \varsigma \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A_1} \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}, \tag{13}$$

де матрицю $\mathbf{A_1}$ можна отримати шляхом транспонування матриці $\mathbf{A_2}$ у вигляді (12).

Зауважимо, що перехід від рухомої до нерухомої системи координат здійснюється шляхом поворотів на кути Ейлера в зворотньому порядку: $I \to \varphi,\ \ II \to \theta,\ \ III \to \psi$, і в протилежному напрямку.

10.5. Зв'язок між проекціями вектора $\vec{\Omega}$, кутами Ейлера і їх похідними. Кінематичні рівняння Ейлера

Запишемо вираз вектора $\vec{\Omega}$ через проекції на осі рухомої системи координат $Oxyz$:

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}, \tag{14}$$

і нерухомої системи координат $A\xi\eta\varsigma$ -

$$\vec{\Omega} = \Omega_\xi \vec{i}_1 + \Omega_\eta \vec{j}_1 + \Omega_\varsigma \vec{k}_1. \tag{15}$$

Згадавши, що

$$\Omega_x = \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{k}, \quad \Omega_y = \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{i}, \quad \Omega_z = \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j}\,, \tag{16}$$

подамо всі вектори, що входять у ці формули, через їх проекції на осі нерухомої системи координат. Наприклад, множники першої з формул (16) запишемо у вигляді:

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{dj_\xi}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dj_\eta}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dj_\varsigma}{dt}\vec{k}_1, \text{ та } \vec{k} = k_\xi \vec{i}_1 + k_\eta \vec{j}_1 + k_\varsigma \vec{k}_1,$$

тоді знайдемо за виразом скалярного добутку через проекції векторів, що перемножуються ($\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$):

$$\Omega_x = \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{k} = \frac{dj_\xi}{dt} k_\xi + \frac{dj_\eta}{dt} k_\eta + \frac{dj_\varsigma}{dt} k_\varsigma .$$

Аналогічно можна отримати і вирази для Ω_y та Ω_z. Тоді матимемо

$$\begin{cases} \Omega_x = \dfrac{dj_\xi}{dt} k_\xi + \dfrac{dj_\eta}{dt} k_\eta + \dfrac{dj_\varsigma}{dt} k_\varsigma, \\ \Omega_y = \dfrac{dk_\xi}{dt} i_\xi + \dfrac{dk_\eta}{dt} i_\eta + \dfrac{dk_\varsigma}{dt} i_\varsigma, \\ \Omega_z = \dfrac{di_\xi}{dt} j_\xi + \dfrac{di_\eta}{dt} j_\eta + \dfrac{di_\varsigma}{dt} j_\varsigma. \end{cases} \tag{17}$$

Якщо згадати, що елементи матриці $\mathbf{A_1}$ можна виразити через проекції ортів, а саме

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_\xi & j_\xi & k_\xi \\ i_\eta & j_\eta & k_\eta \\ i_\varsigma & j_\varsigma & k_\varsigma \end{bmatrix},$$

тоді формули (17) набувають вигляду

$$\begin{cases} \Omega_x = \dfrac{da_{12}}{dt} a_{13} + \dfrac{da_{22}}{dt} a_{23} + \dfrac{da_{32}}{dt} a_{33}, \\ \Omega_y = \dfrac{da_{13}}{dt} a_{11} + \dfrac{da_{23}}{dt} a_{21} + \dfrac{da_{33}}{dt} a_{31}, \\ \Omega_z = \dfrac{da_{11}}{dt} a_{12} + \dfrac{da_{21}}{dt} a_{22} + \dfrac{da_{31}}{dt} a_{32}. \end{cases} \tag{18}$$

Далі підставимо у формули (18) вирази елементів матриці $\mathbf{A_1}$ через кути Ейлера. Ці вирази можна отримати, якщо згадати, що матриця $\mathbf{A_1}$ є транспонованою від $\mathbf{A_2}$ (тобто $\mathbf{A_1} = \mathbf{A_2^T}$), а вираз матриці $\mathbf{A_2}$ через кути Ейлера наведений у формулі (14) попереднього розділу. Після необхідних перетворень отримаємо

$$\begin{cases} \Omega_x = \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ \Omega_y = \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ \quad \Omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}. \end{cases} \tag{19}$$

Це є *кінематичні рівняння Ейлера*, які дозволяють визначити проекції вектора $\vec{\Omega}$ на осі рухомої системи координат через кути Ейлера.

Якщо далі скористатися формулою для переходу від рухомої системи координат до нерухомої

$$\begin{bmatrix} \Omega_\xi \\ \Omega_\eta \\ \Omega_\varsigma \end{bmatrix} = \mathbf{A_1} \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}, \tag{20}$$

тоді матимемо

$$
\begin{cases}
\Omega_{\xi} = \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi, \\
\Omega_{\eta} = -\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\psi, \\
\Omega_{\varsigma} = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}.
\end{cases} \tag{21}
$$

Це *кінематичні рівняння Ейлера*, які дозволяють визначити проекції вектора $\vec{\Omega}$ на осі нерухомої системи координат за відомими кутами Ейлера.

Частинні випадки визначення вектора $\vec{\Omega}$

а) Припустимо, що рухома система координат при русі не змінює своєї орієнтації відносно нерухомої системи координат (наприклад, рухається поступально). При цьому осі $Oxyz$ переміщуються паралельно до свого початкового положення. Тоді кути Ейлера будуть сталими і дорівнюватимуть своїм початковим значенням: $\psi(t)=\psi_0,\ \theta(t)=\theta_0,\ \varphi(t)=\varphi_0$, тому $\dot{\psi}=0,\ \dot{\theta}=0,\ \dot{\varphi}=0$, і за формулами (19) матимемо: $\Omega_x=\Omega_y=\Omega_z=0$, звідки випливає, що $\vec{\Omega}=\vec{0}$.

б) Припустимо, що рухома система координат здійснює поворот навколо осі, яка зберігає свою орієнтацію по відношенню до нерухомої системи координат. За таку вісь виберемо, наприклад, вісь Oz (з ортом $\vec{k}$), тоді

$$
\begin{cases}
\psi(t) = \psi_0, \\
\theta(t) = \theta_0, \\
\varphi(t) = \mathrm{var}.
\end{cases} \tag{22}
$$

В цьому разі $\dot{\psi}=0,\ \dot{\theta}=0,\ \dot{\varphi}=\mathrm{var}$, і з формул (6) отримаємо $\Omega_x=\Omega_y=0,\ \Omega_z=\dot{\varphi}$. Тоді

$\Omega=\Omega_z=\dot{\varphi}$, а $\vec{\Omega}=\Omega_z\vec{k}=\dot{\varphi}\,\vec{k}$.

Отже вектор $\vec{\Omega}$ в даному разі напрямлений вздовж осі Oz (з ортом $\vec{k}$), в той бік, звідки поворот на кут φ спостерігаємо проти ходу годинникової стрілки, а величина вектора $\vec{\Omega}$ дорівнює $\dot{\varphi}$.

10.6. Сферичний рух твердого тіла

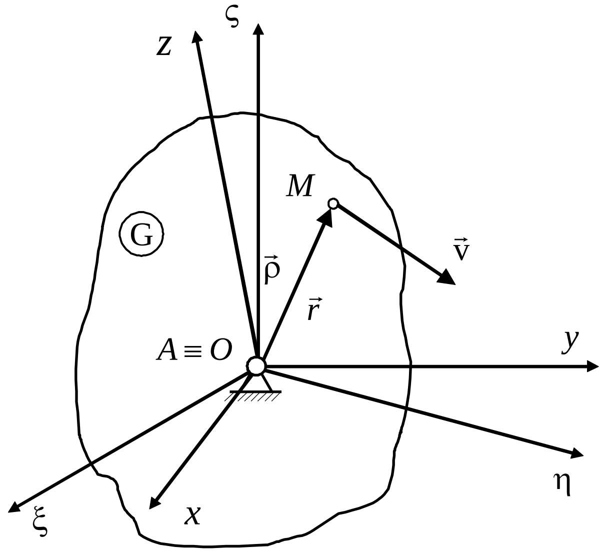
Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої точки називається такий його рух, при якому одна точка твердого тіла залишається нерухомою. Він також називається *сферичним*, оскільки траєкторії всіх точок тіла розташовуються на поверхнях концентричних сфер з центром в нерухомій точці.

1. Кінематичні рівняння руху

Нехай тіло G здійснює (сферичний) рух у нерухомій системі координат ($A\xi\eta\varsigma$).

Положення т. M в нерухомій системі координат визначає радіус-вектор $\vec{r}$, а в рухомій ($Oxyz$) – вектор $\vec{\rho}$

$$
\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{23}
$$



Перетворення координат точки від рухомої системи координат до нерухомої може бути подано таким чином:

$$\begin{cases} \xi = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \eta = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \zeta = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases} \tag{24}$$

або

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Рівняння (24) або (25) є *кінематичними рівняннями руху тіла з однією нерухомою точкою*. В них коефіцієнти a_{ij} є функціями трьох незалежних величин – кутів Ейлера:

- прецесії ψ,
- нутації θ, та
- власного обертання φ.

За допомогою рівнянь (24) або (25) можна визначити положення точки тіла в нерухомій системі координат $A\xi\eta\varsigma$.

Теорема 1 (Ейлера): *довільне переміщення твердого тіла можна здійснити за допомогою трьох послідовних поворотів навколо відповідних осей. Оскільки кожному моменту часу відповідає означене положення тіла і означені кути Ейлера, тому залежності* $\psi = \psi(t),\ \theta = \theta(t),\ \varphi = \varphi(t)$ *можуть бути прийняті в якості кінематичних рівнянь руху тіла, що обертається навколо нерухомої точки. Одночасно вони визначають закон руху тіла.*

2. Лінійна швидкість точки тіла

Скористаємось визначенням швидкості при векторному способі опису руху точки (формулою Бура) за умови, що $\dfrac{d'\vec{\rho}}{dt} = \vec{0}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{\rho}, \tag{26}$$

де вектор $\vec{\Omega}$ визначається проекціями на осі рухомої системи координат $Oxyz$

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}. \tag{27}$$

Цей вектор $\vec{\Omega}$ може визначатися за допомогою рівнянь Ейлера

$$\begin{cases} \Omega_x = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ \Omega_y = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ \Omega_z = \dot{\psi}\cos\varphi + \dot{\varphi}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \Omega_\xi = \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi, \\ \Omega_\eta = -\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\psi, \\ \Omega_\zeta = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \end{cases} \tag{28}$$

Модуль і напрямок вектора $\vec{\Omega}$ визначається з використанням кінематичних рівнянь Ейлера (28). Модуль обчислюється за формулою

$$\Omega = \left|\vec{\Omega}\right| = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta},$$

а напрямок задається трьома напрямними косинусами:

$$\cos\left(\vec{\Omega};\vec{i}\right)=\frac{\Omega_x}{\Omega},\quad \cos\left(\vec{\Omega};\vec{j}\right)=\frac{\Omega_y}{\Omega},\quad \cos\left(\vec{\Omega};\vec{k}\right)=\frac{\Omega_z}{\Omega}.$$

Запишемо рівняння (26) у вигляді визначника і знайдемо проекції вектора швидкості на осі рухомої системи координат $Oxyz$

$$\vec{\mathrm{v}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}, \qquad (29) \qquad \begin{aligned}\mathrm{v}_x &= z\Omega_y - y\Omega_z,\\ \mathrm{v}_y &= x\Omega_z - z\Omega_x,\\ \mathrm{v}_z &= y\Omega_x - x\Omega_y,\end{aligned} \qquad (30)$$

де $\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z$ визначаються за формулами (28).

Аналогічно знаходять проекції $\vec{\mathrm{v}}$ на осі нерухомої системи координат $A\xi\eta\varsigma$, використовуючи визначник

$$\vec{\mathrm{v}}=\begin{vmatrix}\vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1\\ \Omega_\xi & \Omega_\eta & \Omega_\zeta\\ \xi & \eta & \zeta\end{vmatrix}. \qquad (31)$$

Нагадаємо без доведення наступну теорему про два малих послідовних повороти навколо перетинних осей.

<u>Теорема 2</u>: *два послідовних малих повороти тіла навколо осей, що перетинаються, можуть бути замінені одним малим вислідним поворотом, що дорівнює геометричній сумі доданків – векторів поворотів.*

Зауважимо, що зміна послідовності малих поворотів не має впливу на вислідний поворот.

3. Миттєво-обертальний рух твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки. Миттєва кутова швидкість тіла

а) <u>*Миттєва кутова швидкість*</u>

Кутовою швидкістю малого повороту називається величина, яка визначається наступним співвідношенням:

$$\vec{\omega}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\theta}}{\Delta t}. \qquad (32)$$

Напрямок вектора $\vec{\omega}$ співпадає з напрямком осі того повороту, який здійснює тіло за час Δt.

На підставі **теорем 1** і **2** можна розкласти вектор малого повороту тіла на три складові:

$$\vec{\theta}=\vec{\theta}_1+\vec{\theta}_2+\vec{\theta}_3, \qquad (33)$$

де $\vec{\theta}_1$, $\vec{\theta}_2$, $\vec{\theta}_3$ - три послідовних малих повороти відносно трьох різних осей, які перетинаються в одній точці.

Поділивши обидві частини рівняння (33) на Δt, отримаємо

$$\frac{\vec{\theta}}{\Delta t}=\frac{\vec{\theta}_1}{\Delta t}+\frac{\vec{\theta}_2}{\Delta t}+\frac{\vec{\theta}_3}{\Delta t},$$

а якщо взяти границю від цього виразу при $\Delta t\to 0$, тоді матимемо

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\theta}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\theta}_1}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\theta}_2}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\theta}_3}{\Delta t}. \qquad (34)$$

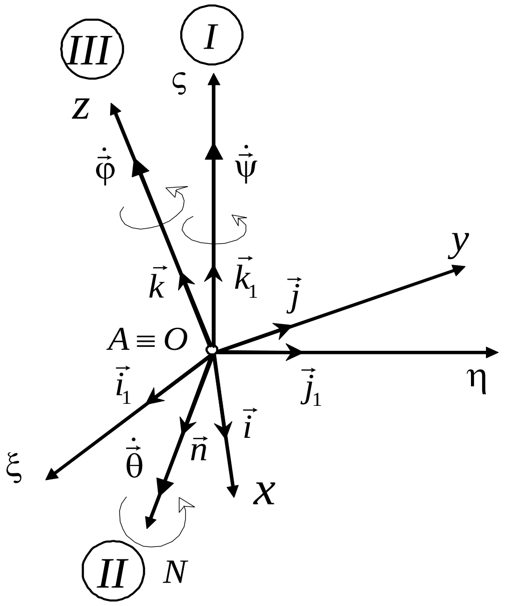
Беручи до уваги рівняння (33), отримаємо

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3, \qquad (35)$$

де $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, ω_3 - кутові швидкості малих поворотів навколо осі ς, лінії вузлів та осі z відповідно.

Кожний з цих поворотів відповідає лише одному з кутів Ейлера, тому $\vec{\omega}_1$ відображає швидкість зміни у часі кута ψ ($\vec{\omega}_1 = \dot{\vec{\psi}}$), $\vec{\omega}_2$ - кута θ ($\vec{\omega}_2 = \dot{\vec{\theta}}$), а $\vec{\omega}_3$ - кута φ ($\vec{\omega}_3 = \dot{\vec{\varphi}}$).

Розглянемо ці повороти на рисунку.



Перший поворот (I) відбувається навколо осі $A\varsigma$ на кут прецесії ψ, його кутова швидкість $\dot{\vec{\psi}}$.

Другий поворот (II) тіла відбувається навколо лінії вузлів AN на кут нутації θ. Цей поворот характеризується кутовою швидкістю $\dot{\vec{\theta}}$.

Третій поворот (III) тіла відбувається навколо осі Az на кут власного обертання φ, цей поворот характеризується кутовою швидкістю $\dot{\vec{\varphi}}$.

Таким чином, кутова швидкість обертання тіла навколо нерухомої точки визначиться формулою

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\psi}} + \dot{\vec{\theta}} + \dot{\vec{\varphi}} = \dot{\psi}\vec{k}_1 + \dot{\theta}\vec{n} + \dot{\varphi}\vec{k}\,. \qquad (36)$$

Із цієї формули випливає, що вектор $\vec{\omega}$, визначений як векторна сума $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$, повністю характеризує швидкість зміни орієнтації рухомої системи координат відносно нерухомої, тобто

$$\vec{\omega} \equiv \vec{\Omega}\,. \qquad (37)$$

Із виразів (19) і (21) випливає, що $\vec{\omega} \equiv \vec{\Omega}$ лише умовно можна назвати вектором кутової швидкості твердого тіла, оскільки не знайдеться жодного такого кута повороту, похідна за часом від якого дорівнювала б $\vec{\omega}$.

Для сферичного руху тіла кути Ейлера можуть бути будь-якими і необов'язково малими, вектор $\vec{\omega}$ в кожний момент часу співпадає з вектором $\vec{\Omega}$, тому вектор $\vec{\omega}$ називається *миттєвою кутовою швидкістю тіла*, і згідно з правилом, він напрямлений вздовж миттєвої осі обертання

.

б) ***Миттєва вісь обертання***

Миттєвою віссю обертання називається пряма, що проходить через нерухому точку і яка характеризується тим, що всі точки цієї прямої мають нульові швидкості.

Отримаємо рівняння миттєвої осі обертання тіла, яке здійснює сферичний рух.

Оскільки

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{\rho}\,, \qquad (38)$$

тоді для точок, що мають нульову швидкість, матимемо

$$\vec{\Omega} \times \vec{\rho} = \vec{0}\,. \qquad (39)$$

Векторне рівняння (39) описує пряму, яка являє собою геометричне місце точок, швидкості яких дорівнюють нулю, тобто миттєву вісь обертання, тоді

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{0} \qquad (40)$$

або

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\omega_y z - \omega_z y\right)\,\vec{i} + \left(\omega_z x - \omega_x z\right)\,\vec{j} + \left(\omega_x y - \omega_y x\right)\,\vec{k} = \vec{0},$$

звідки

$$\begin{cases} \omega_y z - \omega_z y = 0, \\ \omega_z x - \omega_x z = 0, \\ \omega_x y - \omega_y x = 0. \end{cases}$$

Остаточно маємо

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \tag{41}$$

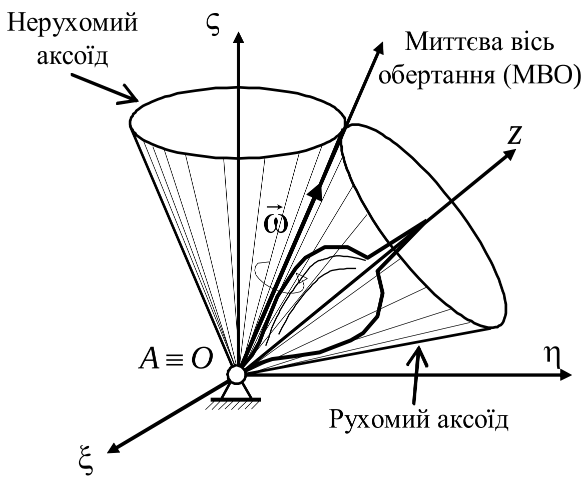
- рівняння миттєвої осі обертання в рухомій системі координат.

Аналогічним чином із виразу (41) можна отримати рівняння миттєвої осі обертання в нерухомій системі координат, яке має вигляд

$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta}. \tag{42}$$

в) ***Аксоїди***

Із виразів (41) і (42) видно, що миттєва вісь обертання змінює своє положення з часом. При сферичному русі твердого тіла миттєва вісь обертання, переміщуючись у просторі, описує дві конічні поверхні, одну з них, у рухомому просторі, назвемо *рухомим аксоїдом*, а іншу, в нерухомому просторі, - *нерухомим аксоїдом*. Рухомий і нерухомий аксоїди в кожний момент часу мають спільну твірну, яка є миттєвою віссю обертання.



Геометричне місце миттєвих осей обертання в рухомому просторі є рухомим аксоїдом, а в нерухомому просторі – нерухомим аксоїдом.

Характер руху рухомого аксоїда відносно нерухомого визначається на основі теореми Пуансо.

<u>Теорема Пуансо</u>: *при русі тіла навколо нерухомої точки рухомий аксоїд котиться по нерухомому без ковзання.*

Зауважимо, що коченням без ковзання називається взаємний рух двох тіл, який задовольняє наступним умовам:

- поверхні тіл геометрично доторкуються в спільних точках (вздовж миттєвої осі обертання);
- швидкості спільних точок обох тіл відносно нерухомої системи відліку однакові і дорівнюють нулю.

Введемо *поняття миттєво обертального руху тіла*, розуміючи під цим такий рух тіла, при якому в даний момент часу розподіл швидкостей точок тіла співпадає з їх розподілом для тіла, яке здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі.

<u>Теорема</u>: *в кожний момент часу сферичний рух твердого тіла є миттєво обертальним навколо миттєвої осі обертання з миттєвою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, до того ж миттєва вісь обертання проходить через нерухому точку тіла і збігається з лінією дії вектора $\vec{\omega}$.*

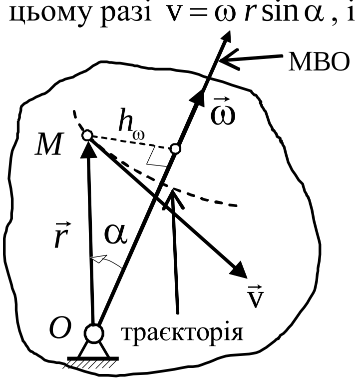
Оскільки $\vec{\omega} = \dot{\psi}\,\vec{k}_1 + \dot{\theta}\,\vec{n} + \dot{\varphi}\,\vec{k}$, тому швидкість будь-якої точки M тіла можна визначити за формулою Ейлера

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{43}$$

або

$$\vec{v} = (\dot{\psi}\,\vec{k}_1 + \dot{\theta}\,\vec{n} + \dot{\varphi}\,\vec{k}) \times \vec{r}\,. \tag{44}$$

В цьому разі $v = \omega\, r \sin\alpha$, і остаточно матимемо



$$v = \omega\, h_\omega, \tag{45}$$

де $h_\omega = r\sin\alpha$ - найкоротша відстань від точки до МВО. Зауважимо, що $\vec{v} \perp \vec{\omega}$, та $\vec{v} \perp \vec{r}$.

У конкретних задачах МВО можна знайти із умов теореми Пуансо. Якщо тіло торкається своєю точкою нерухомої поверхні іншого тіла, тоді МВО проходить через цю точку дотику і нерухому точку в розглядуваний момент часу t.

МВО можна визначити, якщо відома ще одна точка тіла, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. З'єднуючи цю точку з нерухомою точкою тіла, отримуємо миттєву вісь обертання. Нарешті, якщо відомі напрямки швидкостей двох точок тіла, тоді положення МВО визначається як результат перетину площин, перпендикулярних до векторів швидкостей розглядуваних точок.

4. Розподіл лінійних прискорень точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки

Знайдемо лінійне прискорення довільної т. M твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки, взявши похідну від швидкості $\vec{v}$ цієї точки за часом:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \vec{a}_{OM}^{\,об} + \vec{a}_{OM}^{\,до}\,. \tag{46}$$

Це співвідношення виражає теорему про розподіл прискорень точок тіла, що здійснює сферичний рух.

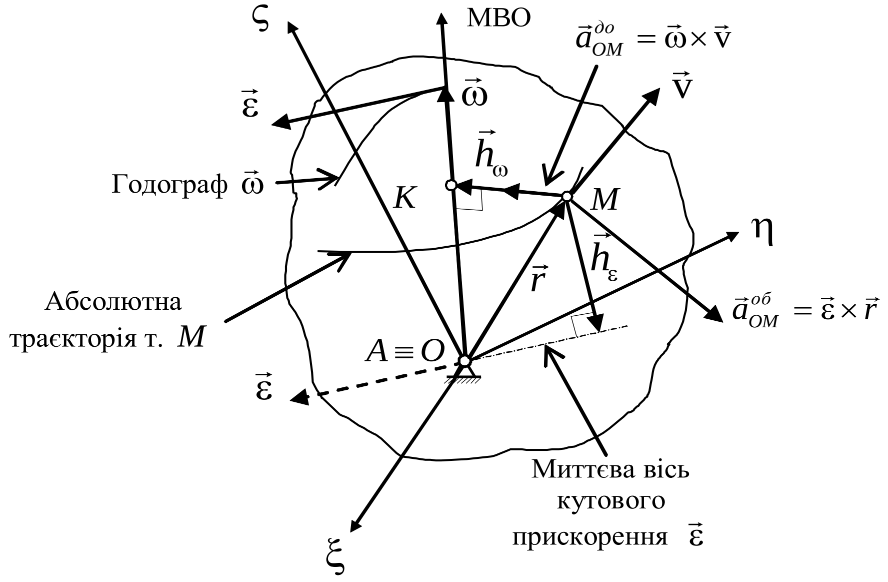
<u>Теорема</u>: *прискорення довільної точки тіла, яке виконує сферичний рух, дорівнює векторній сумі обертальної та доосьової його складових.*

$$\vec{a} = \vec{a}_{OM}^{\,об} + \vec{a}_{OM}^{\,до}\,. \tag{47}$$

Розглянемо більш детально вектори $\vec{a}_{OM}^{\,об}$ та $\vec{a}_{OM}^{\,до}$ у виразі (47).

Для цього вектор $\vec{\varepsilon}$, який напрямлений по дотичній до $\vec{\omega}$, перенесемо паралельно самому собі в нерухому точку. Потім через нього проведемо пряму, яка буде називатися *миттєвою віссю кутового прискорення.*

Обертальна складова прискорення $\vec{a}_{OM}^{\,об}$ являє собою вектор, перпендикулярний до площини, що проходить через вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ і радіус-вектор $\vec{r}$ точки M.



Модуль обертальної складової $\vec{a}^{об}_{OM}$ прискорення т. M можна визначити у вигляді

$$a^{об}_{OM} = \varepsilon\, h_\varepsilon = \varepsilon\, r \sin\left(\vec{\varepsilon}\,\hat{;}\,\vec{r}\right), \tag{48}$$

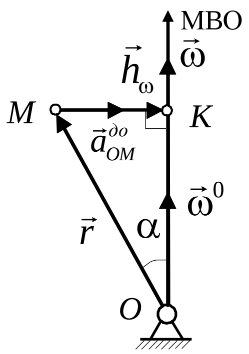
де h_ε - найкоротша відстань від точки M до миттєвої осі кутового прискорення.

Знайдемо вираз для проекцій вектора $\vec{a}^{об}_{OM}$, наприклад, на осі рухомої системи координат $Oxyz$. Для цього представимо векторний добуток $\vec{\varepsilon}\times\vec{r}$ у вигляді визначника третього порядку і розкриємо його за елементами першого рядка; отримаємо

$$\vec{a}^{об}_{OM} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(a^{об}_{OM}\right)_x \vec{i} + \left(a^{об}_{OM}\right)_y \vec{j} + \left(a^{об}_{OM}\right)_z \vec{k}\,, \tag{49}$$

де

$$\left(a^{об}_{OM}\right)_x = z\varepsilon_y - y\varepsilon_z; \quad \left(a^{об}_{OM}\right)_y = x\varepsilon_z - z\varepsilon_x; \quad \left(a^{об}_{OM}\right)_z = y\varepsilon_x - x\varepsilon_y\,. \tag{50}$$



Розглянемо доосьову складову $\vec{a}^{до}_{OM}$ прискорення точки тіла, що здійснює сферичний рух

$$\vec{a}^{до}_{OM} = \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \vec{\omega}\left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\right) - \omega^2\vec{r} = \omega\vec{\omega}^0\left(\omega\vec{\omega}^0\cdot\vec{r}\right) - \omega^2\vec{r} =$$

$$= \omega^2\left[\vec{\omega}^0\left(\vec{\omega}^0\cdot\vec{r}\right) - \vec{r}\right] = \omega^2\left(\overrightarrow{OK} - \vec{r}\right) = \omega^2\overrightarrow{MK} = \omega^2\vec{h}_\omega,$$

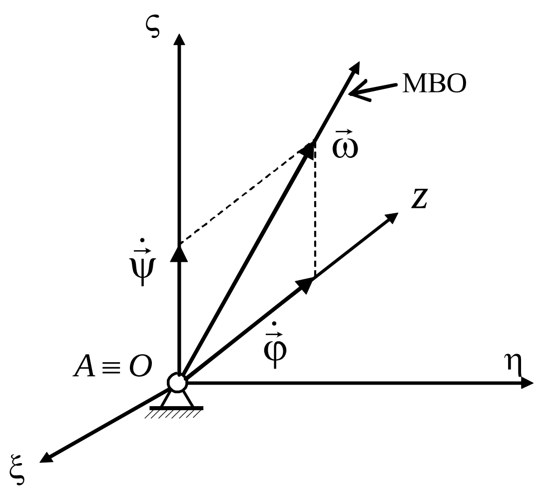
($\vec{\omega}^0$ - одиничний вектор напрямку вектора $\vec{\omega}$), тобто

$$\vec{a}^{до}_{OM} = \omega^2\overrightarrow{MK} = \omega^2\vec{h}_\omega\,.$$

Цей вираз вказує на те, що вектор $\vec{a}^{до}_{OM}$ завжди напрямлений від т. M найкоротшим шляхом до миттєвої осі обертання (МВО).

Прикладом сферичного руху тіла, який можна розглядати як миттєво обертальний, є *регулярна прецесія*, при якій кути $\psi(t)$ та $\varphi(t)$ є лінійними функціями часу, а кут $\theta(t) = const$.

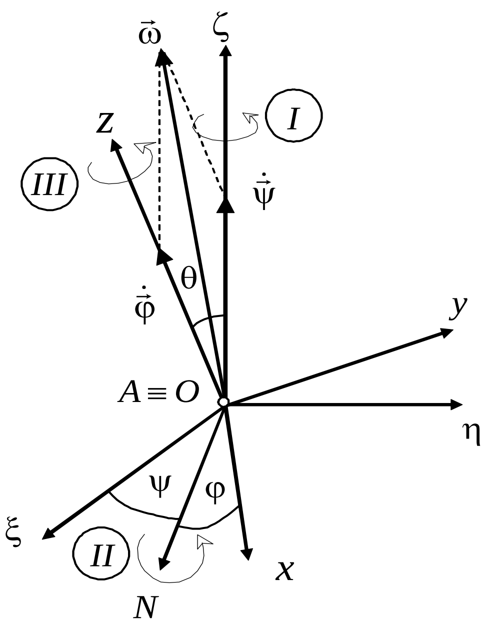
Тоді $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 = \dot{\psi}\,\vec{k}_1 + \dot{\theta}\,\vec{n} + \dot{\varphi}\,\vec{k} = \dot{\psi}\,\vec{k}_1 + \dot{\varphi}\,\vec{k}$.



У випадку регулярної прецесії вектор миттєвої кутової швидкості $\vec{\omega}$ визначається як діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\dot{\vec{\psi}}$ і $\dot{\vec{\varphi}}$ як на сторонах. Лінія дії отриманого вектора $\vec{\omega}$ визначає МВО.

в) Визначення $\vec{\varepsilon}$ у разі регулярної прецесії

Регулярна прецесія характеризується тим, що кут нутації θ під час руху залишається постійним, тобто $\theta = \angle\left(\dot{\vec{\psi}}, \dot{\vec{\varphi}}\right) = const$, а кути ψ і φ є лінійними функціями часу (тоді $\ddot{\vec{\psi}} = \vec{0}$ в нерухомій системі координат, а $\ddot{\vec{\varphi}} = \vec{0}$ - в рухомій). Нагадаємо, що:



I-й поворот здійснюється на кут ψ, $\vec{\omega}_1 = \dot{\vec{\psi}}$.

II-й поворот - на кут θ, $\vec{\omega}_2 = \dot{\vec{\theta}} = \vec{0}$.

III-й поворот - на кут φ, $\vec{\omega}_3 = \dot{\vec{\varphi}}$.

Тоді миттєва кутова швидкість визначиться формулою

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_3 = \dot{\vec{\psi}} + \dot{\vec{\varphi}}, \quad (51)$$

а відповідне кутове прискорення буде складати

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\psi}}{dt} + \frac{d\vec{\varphi}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\psi}}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\varphi}}{dt}\right).$$

Але $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\vec{\psi}}{dt}\right) = \vec{0}$, оскільки $\vec{\psi}$ - лінійна функція часу і вона розглядається в нерухомій системі координат.

Тоді, згадуючи формулу Бура, матимемо (беручи до уваги, що похідні за часом від вектора $\dot{\vec{\varphi}}$ у рухомій системі координат і від вектора $\dot{\vec{\psi}}$ - у нерухомій дорівнюють нулю)

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\varphi}}{dt}\right) = \frac{d'}{dt}\left(\frac{d\vec{\varphi}}{dt}\right) + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\omega}_3,$$

або, враховуючи співвідношення (51), матимемо

$$\vec{\varepsilon} = \left(\frac{d\vec{\psi}}{dt} + \frac{d\vec{\varphi}}{dt}\right) \times \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{d\vec{\psi}}{dt} \times \frac{d\vec{\varphi}}{dt} + \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{d\vec{\psi}}{dt} \times \vec{\omega} = \dot{\vec{\psi}} \times \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega},$$

таким чином

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega} \times \dot{\vec{\varphi}} = \vec{\omega} \times \vec{\omega}_3 \text{, або } \vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\psi}} \times \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega} \; . \tag{52}$$

Рівняння (52) визначають кутове прискорення твердого тіла у разі регулярної прецесії; тут $\dot{\vec{\psi}}$ - кутова швидкість обертання вектора $\vec{\omega}$.

5. *Кутове прискорення тіла, що обертається навколо нерухомої точки*

За означенням

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \tag{53}$$

але вектор $\vec{\varepsilon}$ можна лише умовно назвати кутовим прискоренням твердого тіла, оскільки й вектор $\vec{\omega}$ є лише умовною кутовою швидкістю.

Розглянемо **декілька способів визначення** $\vec{\varepsilon}$.

а) *I-й спосіб визначення* $\vec{\varepsilon}$

Використовуються кінематичні рівняння Ейлера, які дозволяють визначити проекції вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ на осі рухомої та нерухомої систем координат.

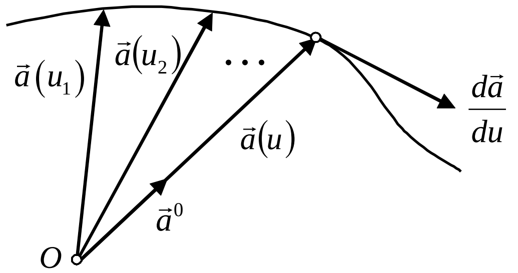
В рухомій системі координат:	В нерухомій системі координат:
$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ \omega_y = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \qquad (11) \\ \omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}; \end{cases}$	$\begin{cases} \omega_\xi = \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi, \\ \omega_\eta = -\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\psi, \\ \omega_\zeta = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}; \end{cases}$
$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{d\omega_x}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi\right), \\ \varepsilon_y = \dfrac{d\omega_y}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi\right), \\ \varepsilon_z = \dfrac{d\omega_z}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\right); \end{cases}$	$\begin{cases} \varepsilon_\xi = \dfrac{d\omega_\xi}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi\right), \\ \varepsilon_\eta = \dfrac{d\omega_\eta}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(-\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\psi\right), \\ \varepsilon_\zeta = \dfrac{d\omega_\zeta}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right); \end{cases}$
$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{\varepsilon_\xi^2 + \varepsilon_\eta^2 + \varepsilon_\zeta^2} \; . \qquad (54)$	

Із наведених співвідношень видно, що проекції вектора кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ на осі рухомої та нерухомої систем координат дорівнюють першим похідним за часом від відповідних проекцій $\vec{\omega}$ на ті ж осі.

б) *II-й спосіб визначення* $\vec{\varepsilon}$

Цей спосіб побудований на використанні складових кутового прискорення.

Для цього згадаємо, що будь-яка векторна функція $\vec{a}(u)$ скалярного аргумента u може бути представлена у вигляді $\vec{a} = a\vec{a}^0$, де a - модуль цієї функції, а $\vec{a}^0$ - одиничний вектор її напрямку. Тоді похідна $\frac{d\vec{a}}{du}$ від цієї функції за скалярним аргументом u буде напрямлена по дотичній до її годографа (траєкторії кінця вектора $\vec{a}$ при неперервній



траєкторії кінця вектора $\vec{a}$ при неперервній зміні скалярного аргумента u) і може бути записана у вигляді:

$$\frac{d\vec{a}}{du} = \frac{d\left(a\vec{a}^0\right)}{du} = \frac{da}{du}\vec{a}^0 + a\frac{d\vec{a}^0}{du}.$$

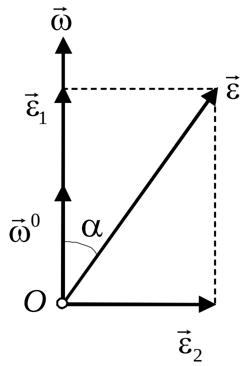
Надамо вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ у вигляді

$$\vec{\omega} = \omega\vec{\omega}^0, \tag{55}$$

де $\vec{\omega}^0$ - одиничний вектор (орт), який визначає напрямок вектора $\vec{\omega}$. Тоді для похідної за часом від векторної функції $\vec{\omega}(t)$ скалярного аргумента (часу t) матимемо такий вираз

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\left(\omega\vec{\omega}^0\right)}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega}^0 + \omega\frac{d\vec{\omega}^0}{dt} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2, \tag{56}$$

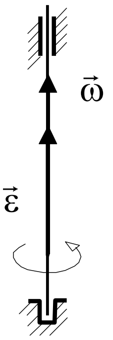
де складова $\vec{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega}^0$ вказує на зміну $\vec{\omega}$ за величиною, а складова $\vec{\varepsilon}_2 = \omega\frac{d\vec{\omega}^0}{dt}$ вказує на зміну вектора $\vec{\omega}$ за напрямком. Зауважимо, що завжди $\vec{\varepsilon}_1 \perp \vec{\varepsilon}_2$ (довести самостійно).



Далі за відомими формулами визначаються модуль вектора $\vec{\varepsilon}$ та його напрямний тангенс:

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\vec{\omega}\hat{;}\,\vec{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

В частинному випадку, коли $\vec{\omega} = \overrightarrow{const}$ (наприклад, при рівномірному обертанні навколо нерухомої осі), матимемо $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{\varepsilon}$, а $\vec{\varepsilon}_2 = \vec{0}$.



Зазначимо, що при сферичному русі твердого тіла вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ орієнтовані довільним чином по відношенню один до одного, в той час, коли при обертальному русі твердого тіла навколо нерухомої осі ці вектори колінеарні.

Лекція 11

Розділ 3. *Д и н а м і к а*

Динаміка – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних об'єктів з урахуванням сил, що діють на ці об'єкти.

В основі теоретичної механіки лежить невелика кількість гіпотез, пов'язаних з введенням ньютоновських уявлень про простір і час, поняття ІСВ, сили, маси, а також самі закони Ньютона, отримані в результаті узагальнень спостережень уповільнено плинучих рухів макроскопічних тіл.

В механіці постулюється наявність такої системи відліку, в якій ізольована матеріальна точка знаходиться у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху як завгодно довго. Така система відліку називається *інерціальною* (ІСВ) або *галілеєвою*.

Системи відліку, в яких вказані властивості не зберігаються, називаються *неінерціальними*.

Припущення про існування ІСВ складає зміст першого закону Ньютона (закону інерції)

<u>І-й закон Ньютона</u>: *будь-яке тіло продовжує утримуватись в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху доки і оскільки воно не примушується прикладеними силами змінити свій стан.*

Цей закон віддзеркалює одну з найважливіших властивостей об'єктивної реальності – властивість *інертності*, яка полягає в тому, що ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху як завгодно довго.

Таким чином самочинна зміна руху (спокою) матеріальної точки неможлива. Рух точки може змінитися тільки в результаті її взаємодії з іншими тілами. Наявність такої взаємодії викликає відхилення руху матеріальної точки від рівномірного і прямолінійного, тобто виникає деяке прискорення відносно ІСВ.

Наявність абсолютного прискорення точки (відмінного від нуля) свідчить про те, що на цю точку діють інші тіла.

Інтенсивність і напрямленість цієї дії характеризується силою.

Сила – це векторна міра механічного прояву фізичної дії на матеріальну точку інших тіл. Поняття сили дає можливість вводити кількісні співвідношення, які виражають характер механічної взаємодії тіл.

Перед тим як сформулювати ІІ-й закон Ньютона, слідуючи Ньютону введемо ще два фундаментальних поняття механіки – масу точки та її кількість руху.

Масою (m) матеріальної точки називається фізична величина, яка є мірою її інертних і гравітаційних властивостей. Під інертними розуміють властивості об'єкту чинити опір при спробах змусити його рухатися, або змінити величину чи напрямок його швидкості. Під гравітаційними розуміють властивості взаємного тяжіння часток об'єктивної реальності.

Кількістю руху матеріальної точки називається векторна величина, що дорівнює добутку маси точки на її швидкість

$$\vec{q} = m\vec{\mathrm{v}}. \tag{1}$$

<u>ІІ-й закон Ньютона</u>: *зміна кількості руху матеріальної точки пропорційна силі, що до неї прикладена, і напрямлена вздовж тієї ж прямої, по якій ця сила діє.*

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{F}\left(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}\right). \tag{2}$$

Враховуючи вираз (1), останню формулу можна переписати у вигляді

$$\frac{d\left(m\vec{\mathrm{v}}\right)}{dt}=\vec{F}\left(t,\vec{r},\dot{\vec{r}}\right), \tag{3}$$

звідки за умови $m=const$ матимемо

$$m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}=\vec{F}\left(t,\vec{r},\dot{\vec{r}}\right) \quad \Rightarrow m\vec{a}=\vec{F}\,. \tag{4}$$

У разі, якщо одна з величин у виразі (4) відома, тоді ІІ-й закон Ньютона у формі (4) стає визначальним співвідношенням, тобто таким, в результаті розгляду якого можна знайти іншу невідому величину. На цьому базуються *дві основні задачі динаміки*.

11.1. Динаміка вільної матеріальної точки

Матеріальна точка називається *вільною*, якщо в довільний момент часу можна довільним чином задати її радіус-вектор $\vec{r}$ і швидкість $\vec{\mathrm{v}}$.

Покажемо диференціальні рівняння руху матеріальної точки при трьох способах задання руху (векторному, координатному та натуральному).

1.1. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

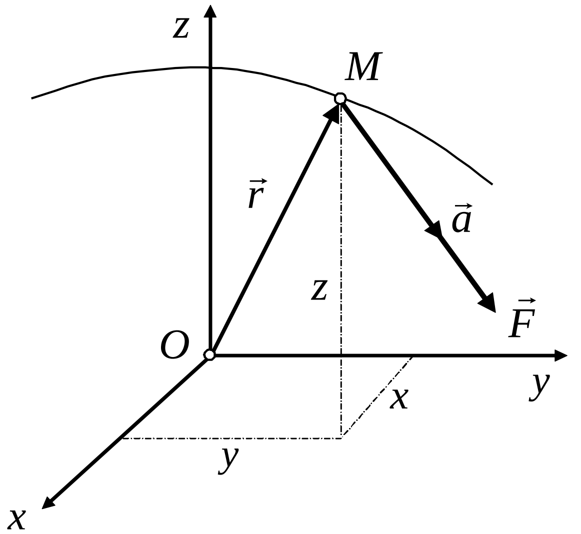
Якщо рух точки задано **векторним способом**, тобто відомий радіус-вектор $\vec{r}$ як функція часу, а саме $\vec{r}=\vec{r}(t)$, тоді прискорення $\vec{a}=\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, а з виразу (4) матимемо

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}\left(t,\vec{r},\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \tag{5}$$

динамічне рівняння руху матеріальної точки у векторній формі.

Розглянемо матеріальну точку, рух якої задано у **координатній формі**.

Для цього введемо нерухому систему координат $Oxyz$. Відомі координати точки у функції часу, тобто



$$x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ z=z(t)\,,$$

звідки

$$a_x=\ddot{x},\ a_y=\ddot{y},\ a_z=\ddot{z}\,.$$

Якщо спроектувати вираз (5) на осі цієї системи координат, то отримаємо наступні співвідношення:

$$\begin{cases} m\ddot{x}=F_x\left(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}\right),\\ m\ddot{y}=F_y\left(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}\right),\\ m\ddot{z}=F_z\left(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}\right). \end{cases} \tag{6}$$

Це є *динамічні рівняння руху вільної матеріальної точки в координатній формі*.

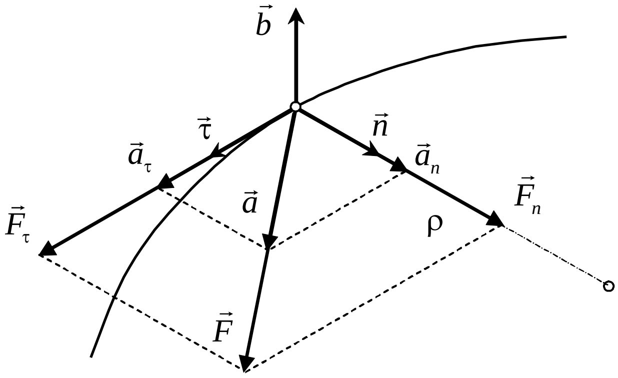
У разі якщо точка рухається в площині (наприклад, Oxy), тоді динамічними рівняннями її руху будуть наступні вирази:

$$\begin{cases} m\ddot{x}=F_x\left(t,x,y,\dot{x},\dot{y}\right),\\ m\ddot{y}=F_y\left(t,x,y,\dot{x},\dot{y}\right). \end{cases} \tag{7}$$

Якщо точка рухається вздовж однієї прямої, з якою сумістимо вісь Ox, тоді динамічним рівнянням прямолінійного руху буде наступне:

$$m\ddot{x} = F_x\left(t, x, \dot{x}\right). \tag{8}$$

Якщо описувати рух матеріальної точки **натуральним способом**, тобто відома її дугова координата як функція часу: $s = s(t)$, тоді, проектуючи вирази (4) або (5) на осі натурального тригранника (його ортами є $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$), отримаємо (згадуючи, що a_b завжди дорівнює нулю)



$$\begin{cases} ma_\tau = F_\tau\left(t, s, \dot{s}\right), \\ ma_n = F_n\left(t, s, \dot{s}\right), \\ ma_b = F_b\left(t, s, \dot{s}\right). \end{cases} \tag{9}$$

Згадуючи, що

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \ddot{s}, \quad a_n = \frac{v_\tau^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_b = 0,$$

отримаємо

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_\tau\left(t, s, \dot{s}\right), \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = F_n\left(t, s, \dot{s}\right), \\ 0 = F_b\left(t, s, \dot{s}\right), \end{cases} \tag{10}$$

(тут ρ - радіус кривизни траєкторії точки).

1.2. Дві задачі динаміки вільної матеріальної точки

В динаміці руху вільної матеріальної точки розрізняють *дві задачі*:

- пряму (першу);
- обернену (другу).

Обернена задача динаміки називається *основною*. Розглянемо більш детально, в чому полягають ці задачі.

1. ***Пряма задача динаміки***: за відомої маси точки, закону її руху, треба знайти силу, яка діє на цю матеріальну точку (або рівнодійну сил, що викликають даний рух). В залежності від того, в якій формі заданий закон руху, для визначення сили можна застосувати рівняння руху у векторній, координатній або натуральній формі. В цьому разі перша задача динаміки зводиться до визначення прискорення точки за відомими кінематичними рівняннями її руху.

Так, наприклад, при координатному способі задання руху відомі координати точки як функції часу, тобто $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$. Знайшовши другі похідні за часом від цих залежностей і підставивши вирази $a_x = \ddot{x},\ a_y = \ddot{y},\ a_z = \ddot{z}$ в рівняння (6), знайдемо проекції сили на координатні осі:

$$\begin{cases} F_x = m\ddot{x}, \\ F_y = m\ddot{y}, \\ F_z = m\ddot{z}. \end{cases} \tag{11}$$

Після цього можна визначити модуль шуканої сили $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$, та її напрямок за напрямними косинусами:

$$\cos\left(\vec{F}\,\hat{;}\,Ox\right) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos\left(\vec{F}\,\hat{;}\,Oy\right) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos\left(\vec{F}\,\hat{;}\,Oz\right) = \frac{F_z}{F}.$$

2. ***Обернена задача динаміки*** полягає в тому, що визначається закон руху матеріальної точки за відомою її масою та прикладеною до неї силою. Крім цього для розв'язання цієї задачі необхідно знати початкове положення даної точки та її початкову швидкість.

Основний алгоритм розв'язання оберненої (другої) задачі динаміки

Використаємо рівняння руху матеріальної точки у формі (6) та припустимо, що праві частини рівнянь є однозначними та скінченними функціями вказаних аргументів. Тоді визначення закону руху точки в даному випадку зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь (6) другого порядку. Результатом інтегрування є наступні функції:

$$\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y = y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z = z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \end{cases} \tag{12}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_6$ - сталі інтегрування.

Рівняння (12) являють собою загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (6).

З цих рівнянь випливає, що матеріальна точка маси m під дією заданої сили $\vec{F}$ може здійснювати сукупність рухів, що визначаються різними наборами C_i. Для того, щоб виділити конкретний вид руху, необхідно скористатися додатковими умовами, в якості яких виступають початкові умови:

$$\vec{r}\big|_{t=0} = \vec{r}_0, \quad \vec{v}\big|_{t=0} = \vec{v}_0,$$

або більш детально

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0; \tag{13}$$

$$\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \quad \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0. \tag{14}$$

Для того, щоб використати умови (13) і (14), треба здиференціювати функції (12):

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{y} = \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{z} = \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{cases} \tag{15}$$

Підставимо (13) в (12), а (14) в (15), і визначимо сталі інтегрування

$$C_i = C_i(t, x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \qquad i = \overline{1,6} \tag{16}$$

Якщо тепер підставити знайдені сталі інтегрування у вирази (12), то отримаємо остаточний розв'язок системи рівнянь (6):

11.2. Динаміка невільної матеріальної точки

2.1. В'язі. Звільнення від в'язей

Матеріальна точка називається *вільною*, якщо в будь-який момент часу можна довільним чином задати її радіус-вектор $\vec{r}$ і швидкість $\vec{\mathrm{v}}$.

Для вільної матеріальної точки можна здійснити рух вздовж заздалегідь вибраної траєкторії, якщо визначеним чином підібрати механічні взаємодії між цією точкою і іншими тілами.

Ці взаємодії, які підтримуються вподовж всього часу руху, називаються *активними силами*, або силами, що задаються.

Механічні взаємодії, що відбулися в початковий момент часу і закінчилися до даного моменту, називаються *початковими умовами руху*.

Умови, що створюють обмеження вільного руху матеріальної точки, називаються *в'язями.* Механічні взаємодії в'язей, на відміну від вказаних (активних), обмежують область зміни радіус-вектора і швидкості матеріальної точки. Ці взаємодії виникають за рахунок *накладення в'язей* і називаються *дією в'язей*. Міра цих взаємодій визначається також силами (*реакціями в'язей*), які в рівняннях динаміки завжди є невідомими.

Для характеристики в'язей використовують рівняння[2] в'язей.

Обмежимось розглядом стаціонарних геометричних в'язей.

Геометричні в'язі – це такі в'язі, в рівняння яких входять лише координати точки і, можливо, час.

Якщо рівняння в'язі не залежить від часу, тоді така в'язь називається *стаціонарною*.

Накладені на точку геометричні в'язі змушують її рухатись в деякій області простору (по поверхні або кривій).

Рівняння в'язі – це рівняння лінії або поверхні, по якій може рухатись дана точка при наявності активних сил і початкових умов.

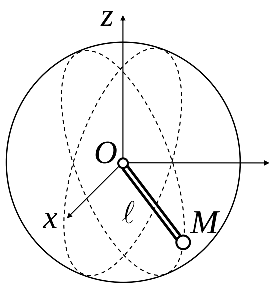
У випадку руху точки по незмінній поверхні (стаціонарна геометрична в'язь) її координати повинні задовольняти відповідному рівнянню поверхні

$$\varphi(x, y, z) = 0 . \tag{17}$$

Якщо ж точка рухатиметься по деякій незмінній кривій (стаціонарна геометрична в'язь), то її координати повинні задовольняти рівнянням поверхонь

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0, \\ \varphi_2(x, y, z) = 0, \end{cases} \tag{18}$$

які при перетині утворюють розглядувану криву.



Розглянемо сферичний маятник, кінець якого (матеріальна точка M), з'єднаний невагомим ідеальним стрижнем довжини ℓ з сферичним шарніром O, рухається по поверхні сфери, рівняння якої має вигляд

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0 . \tag{19}$$

Рівняння (19) є рівнянням в'язі для точки M.

Дія в'язі на матеріальну точку характеризується деякою силою, прикладеною до цієї точки, яка називається *реакцією в'язі*.

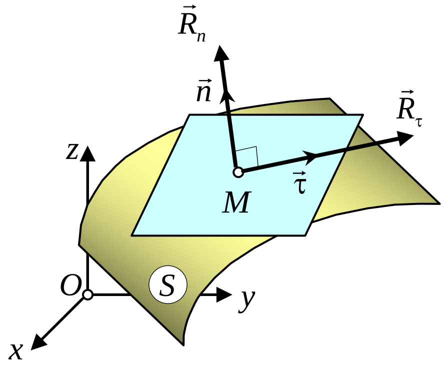
[2] У разі утримуючих (двосторонніх) в'язей. Неутримуючі (односторонні) в'язі описуються нерівностями.

На відміну від сил, що задаються, в рівняннях динаміки реакції в'язей завжди є невідомими величинами, що підлягають визначенню. Розробка методів їх визначення є однією із задач динаміки невільної матеріальної точки.

Невільну матеріальну точку можна розглядати як вільну, якщо скористатися аксіомою про звільнення від в'язей і думкою відкинути в'язі, замінивши їх дію відповідними реакціями в'язей. При цьому вважають, що розглядувана точка рухається під дією активних сил і реакцій в'язей. Тоді рівняння її руху набуває вигляду

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}. \tag{20}$$

Розглянемо матеріальну точку M, що рухається по поверхні S.



Проведемо в цій точці дотичну площину до поверхні. Відкидаючи думкою поверхню (в'язь), подамо невідому її реакцію $\vec{R}$ у вигляді двох складових: однієї ($\vec{R}_\tau$), що належить площині, дотичній до поверхні S у точці M, та іншої ($\vec{R}_n$), що напрямлена по нормалі до поверхні S у точці M ($\vec{n}$ - орт нормалі). Таким чином, в загальному випадку

$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_\tau,$$

де $\vec{R}_\tau$ - сила тертя (дотична складова реакції в'язі).

Нормальна складова реакції ($\vec{R}_n$) може бути подана у вигляді

$$\vec{R}_n = \lambda\, \overrightarrow{grad}(\varphi), \tag{21}$$

де λ - множник Лагранжа, φ - функція, що описує поверхню, або безпосередньо через орт:

$$\vec{R}_n = R_n \vec{n}.$$

Тоді множник λ визначиться за формулою

$$\lambda = \frac{R_n}{\left|\overrightarrow{grad}(\varphi)\right|} = \frac{R_n}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}, \tag{22}$$

оскільки $\overrightarrow{grad}(\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$.

Розглянемо два типи поверхонь, що найчастіше зустрічаються на практиці.

а) Ідеально гладенька поверхня

Це така поверхня, реакція якої *завжди* напрямлена перпендикулярно (тобто по нормалі) до цієї поверхні. У цьому випадку $\vec{R}_\tau = \vec{0}$. Зауважимо, що в'язь, для якої повна її реакція напрямлена вздовж нормалі до поверхні і невідомим є лише її модуль, називається *ідеальною в'яззю*.

б) Негладенька поверхня

Це така поверхня, реакція якої напрямлена не по нормалі до неї, тобто присутня і дотична складова $\vec{R}_\tau$.

При цьому можна вважати, що матеріальна точка рухається по ідеально гладенькій поверхні, але тоді складову $\vec{R}_\tau$ слід віднести до категорії активних сил.

2.2. Динамічні рівняння руху невільної матеріальної точки. Дві задачі динаміки невільної матеріальної точки. Рівняння руху матеріальної точки по нерухомій поверхні (рівняння Лагранжа І-го роду)

У векторній формі динамічне рівняння руху невільної матеріальної точки має вигляд

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}, \tag{23}$$

де $\vec{F}$ - рівнодійна активних сил, прикладених до матеріальної точки, а $\vec{R}$ - рівнодійна реакцій в'язей.

В координатній формі рівняння (23) набуває вигляду

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + R_x, \\ m\ddot{y} = F_y + R_y, \\ m\ddot{z} = F_z + R_z. \end{cases} \tag{24}$$

Таким чином, рівняння (23) і (24) є динамічними рівняннями руху невільної матеріальної точки.

Пряма задача динаміки для невільної матеріальної точки полягає у визначенні невідомих реакцій в'язей за відомою масою m точки, кінематичними рівняннями руху і активними силами (силами, що задаються) з рівнодійною $\vec{F}$.

Для розв'язання цієї задачі достатньо розв'язати систему (24), оскільки вона містить у трьох рівняннях три невідомі величини: R_x, R_y, R_z.

Обернена задача динаміки полягає у визначенні R_x, R_y, R_z і x, y, z (реакцій в'язей і кінематичних рівнянь руху) за відомими: масою m, активними силами ($\vec{F}$), початковими умовами, а також за відомим рівнянням в'язі, -

$$\varphi(x, y, z) = 0. \tag{25}$$

Розглянемо систему (24) і (25), що складається з чотирьох рівнянь з шістьма невідомими.

Припустимо, що в'язь є ідеальною, тобто

$$\vec{R} = \vec{R}_n = \lambda\,\overrightarrow{grad}(\varphi), \tag{26}$$

а з іншого боку $\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$. Порівнюючи ці вирази маємо

$$R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k} = \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right),$$

звідки отримаємо

$$R_x = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad R_y = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad R_z = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{27}$$

Якщо підставити ці вирази в рівняння (24), тоді отримаємо *рівняння Лагранжа І-го роду*

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + \lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ m\ddot{y} = F_y + \lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ m\ddot{z} = F_z + \lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{cases} \tag{28}$$

Рівняння (28) разом з (25) утворюють систему з чотирьох рівнянь з чотирма невідомими: $x,\ y,\ z,\ \lambda$. Розв'язання цієї системи дає можливість визначити множник λ, а потім з рівнянь (27) знайти невідомі R_x, R_y, R_z.

Лекція 12

12.1 Метод кінетостатики

Для розв’язання першої задачі динаміки невільної матеріальної точки, коли заданий її рух і треба визначити силу, дуже ефективним є метод кінетостатики. Цей метод особливо зручний, коли треба визначити $\vec{R}$ при заданих активних силах та законі руху точки.

Як відомо, закони, що встановлені Ньютоном, стосуються руху вільної матеріальної точки. Якщо додати до них аксіому про звільнення від в’язей, то питання про дослідження руху невільної матеріальної точки зведеться до питання про рух вільної матеріальної точки, на яку діють активні сили і $\vec{R}$.

Принцип, про який буде йти мова, еквівалентний ІІ-му закону Ньютона та аксіомі про звільнення від в’язей. Цей принцип називається *принципом Д’Аламбера*, хоча правільніше було б його назвати принципом Германа-Ейлера-Д’Аламбера. Петербурзькі академіки Герман і Ейлер встановили цей принцип раніше від Д’Аламбера: Герман – у 1716 р., Ейлер – у 1737 р., а Д’Аламбер – у 1743 р.

12.2. Принцип Д’Аламбера для матеріальної точки

Нехай на матеріальну точку діє активна сила $\vec{F}$ і реакція в’язі $\vec{R}$. Тоді, згідно з рівнянням динаміки для невільної матеріальної точки, маємо

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R},$$

звідки

$$\vec{F} + \vec{R} + \left(-m\vec{a}\right) = \vec{0}. \tag{1}$$

Доданок ($-m\vec{a}$) називається *даламберовою силою інерції* і позначається через $\vec{\Phi}$. Тоді з виразу (1) отримаємо

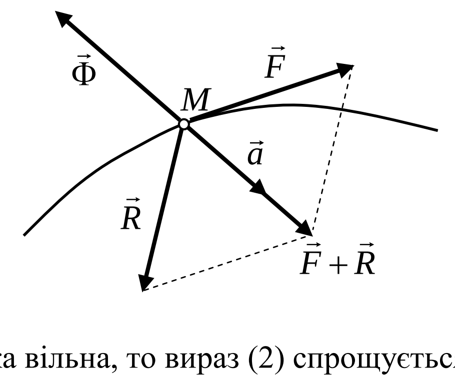
$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = \vec{0}. \tag{2}$$

Рівняння (2) виражає принцип Д’Аламбера: *для невільної матеріальної точки в кожний момент часу сума активних сил, реакцій в’язей і сил інерції дорівнює нулю*.

Зазначимо, що поняття „сила інерції” є формальним, не пов’язаним з реальними силами, якими є лише активні сили, реакції в’язей і сили протидії. Реальні фізичні сили виражають міру взаємодії тіл у природі й можуть бути різними за своїм характером.

Метод кінетостатики є лише формальним способом зведення рівнянь динаміки до рівнянь статики, проте для розв’язання ряду практичних задач такий спосіб зручний.

Зазначимо також, що сила інерції завжди напрямлена в бік, протилежний прискоренню, тобто $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$, а не руху (див. рисунок).



Якщо матеріальна точка вільна, то вираз (2) спрощується і набуває вигляду:

$$\vec{F} + \vec{\Phi} = \vec{0}\,. \tag{3}$$

12.3 Динаміка відносного руху матеріальної точки

1. Основне рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки

До цих пір вивчався рух матеріальної точки в інерціальній системі відліку. Якщо рух будь-якої системи відліку по відношенню до інерціальної не є поступальним і прямолінійним, тоді така система відліку називається *неінерціальною системою відліку*.

Спостерігач, що знаходиться в неінерціальній системі відліку і який вважає, що на точку маси m діє сила $\vec{F}$, виявляє, що добуток маси на прискорення, виміряний в неінерціальній системі відліку, не дорівнює силі, що діє на дану точку.

Знайдемо рівняння руху матеріальної точки в неінерціальній системі відліку. Ця задача може бути зведена до встановлення законів перетворення прискорень і сил при переході від інерціальної системи відліку до неінерціальної.

Збережемо прийняті в класичній механіці постулати про абсолютність простору і часу.

Абсолютність простору – незмінність відстані між двома будь-якими точками як в інерціальній, так і в неінерціальній системі відліку.

Абсолютність часу – однаковість проміжків часу між двома подіями в різних системах відліку.

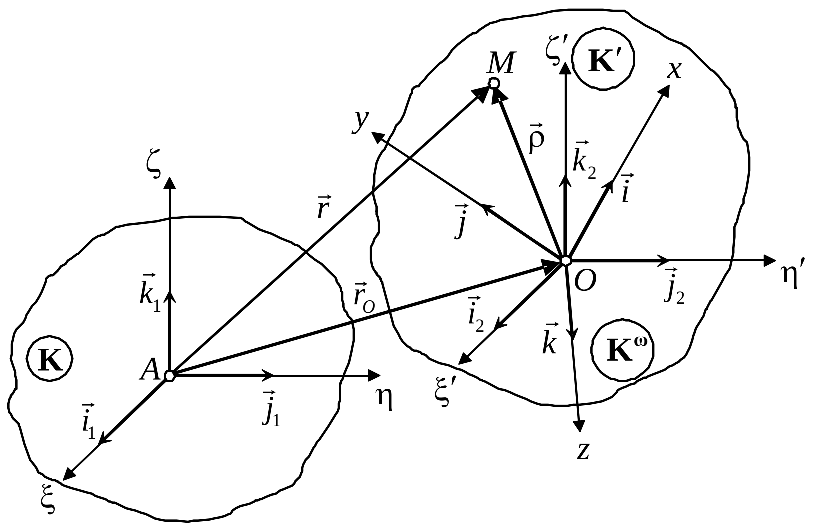
Назвемо *нерухомою* будь-яку інерціальну систему відліку.

Рух матеріальної точки по відношенню до цієї системи відліку назвемо *абсолютним*.

Рух неінерціальної системи відліку (або, що те ж саме, твердого тіла, яке незмінно зв'язане з неінерціальною системою відліку) відносно інерціальної системи відліку назвемо *переносним*.

Відносний рух матеріальної точки – це її рух в неінерціальній системі відліку.

Розглянемо дві системи відліку: інерціальну $\mathbf{K} \to A\xi\eta\zeta$ (нерухому) і неінерціальну $\mathbf{K}^{\omega} \to Oxyz$ (рухому). Проміжна система відліку $\mathbf{K}' \to O\xi'\eta'\zeta'$ є рухомою і інерціальною.



Тоді має місце таке співвідношення між радіус-векторами (див. рисунок):

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho}\,, \tag{4}$$

а оскільки $\vec{\rho} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, матимемо

$$\vec{r} = \vec{r}_O + x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\ . \tag{5}$$

Якщо ввести матрицю напрямних косинусів між осями систем координат $O\xi'\eta'\zeta'$ та $Oxyz$

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

тоді координати т. M у нерухомій системі координат набудуть вигляду

$$\begin{cases} \xi = \xi_O + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \eta = \eta_O + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \zeta = \zeta_O + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases} \tag{6}$$

Звідси можна знайти координати т. M в рухомій системі координат:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{A_1^T} \begin{bmatrix} \xi - \xi_O \\ \eta - \eta_O \\ \zeta - \zeta_O \end{bmatrix},$$

або

$$\begin{cases} x = a_{11}\left(\xi - \xi_O\right) + a_{21}\left(\eta - \eta_O\right) + a_{31}\left(\zeta - \zeta_O\right), \\ y = a_{12}\left(\xi - \xi_O\right) + a_{22}\left(\eta - \eta_O\right) + a_{32}\left(\zeta - \zeta_O\right), \\ z = a_{13}\left(\xi - \xi_O\right) + a_{23}\left(\eta - \eta_O\right) + a_{33}\left(\zeta - \zeta_O\right). \end{cases} \tag{7}$$

Співвідношення (6) і (7) є формулами перетворення координат т. M при переході від рухомої системи координат до нерухомої і навпаки. Коефіцієнти a_{ij} в цих формулах є *напрямними косинусами*, тобто косинусами кутів між осями рухомої і нерухомої систем координат. Відмітимо, що при переході від однієї інерціальної системи відліку ($\mathbf{K}$) до іншої ($\mathbf{K}'$) ці коефіцієнти є сталими, тобто $a_{ij} = const$.

Оскільки одиничні вектори (орти) $\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2$ не змінюють своєї величини і напрямку по відношенню до ортів $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$, тому це відбивається на перетворенні прискорень при переході від однієї інерціальної системи до іншої: існує незмінність прискорень для однієї і тієї ж точки, розглядуваних в різних інерціальних системах відліку, тобто $\vec{a} = \vec{a}'$.

За теоремою про прискорення точки при її складному русі (теоремою Коріоліса) для абсолютного прискорення матимемо такий вираз

$$\vec{a}_a = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c\,,$$

складові якого мають наступний вигляд:

- прискорення переносного руху $\vec{a}_e = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times \left(\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}\right)$;
- прискорення відносного руху $\vec{a}_r = \dfrac{d'\vec{v}_r}{dt} = \dfrac{d'}{dt}\left(\dfrac{d'\vec{\rho}}{dt}\right)$;
- прискорення Коріоліса $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$.

В свою чергу кутова швидкість і кутове прискорення переносного руху можуть бути записані у вигляді

$$\vec{\omega}_e = \omega_{ex}\vec{i} + \omega_{ey}\vec{j} + \omega_{ez}\vec{k}\ ,$$

$$\vec{\varepsilon}_e = \varepsilon_{ex}\vec{i} + \varepsilon_{ey}\vec{j} + \varepsilon_{ez}\vec{k} = \frac{d\omega_{ex}}{dt}\vec{i} + \frac{d\omega_{ey}}{dt}\vec{j} + \frac{d\omega_{ez}}{dt}\vec{k}\,.$$

Абсолютний рух точки в інерціальній системі координат підкоряється рівнянню

$$m\vec{a}_a = \vec{F}\,, \tag{8}$$

тоді, зважаючи на теорему Коріоліса, матимемо

$$m\left(\vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c\right) = \vec{F}\,, \tag{9}$$

звідки, розкриваючи дужки і залишаючи зліва $m\vec{a}_r$, отримаємо

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \left(-m\vec{a}_e\right) + \left(-m\vec{a}_c\right). \tag{10}$$

Якщо ввести наступні позначення:

$$\begin{cases} -m\vec{a}_e = \vec{\Phi}_e, \\ -m\vec{a}_c = \vec{\Phi}_c, \end{cases} \tag{11}$$

перше з них ($\vec{\Phi}_e$) називається *переносною силою інерції*, а друге ($\vec{\Phi}_c$) – *коріолісовою силою інерції*. Обидві ці сили разом називаються *ейлеровими силами інерції*.

З позначеннями (11) рівняння (10) набуває вигляду

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c\,. \tag{12}$$

Це є *основне рівняння динаміки відносного руху* вільної матеріальної точки.

Порівняємо зараз вирази (8) і (12). Їхні ліві частини являють собою добутки маси точки на прискорення, яке вимірюється в різних системах відліку: неінерціальній для (5) і в інерціальній для (12). Права частина в (5) – сила $\vec{F}$, що діє на точку; в (12) – деяка вислідна сила ($\vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c$), яка діє на точку в неінерціальній системі відліку. Сила $\vec{F}$ є результатом механічної взаємодії точки з тілами, що її оточують, вона постійна і не змінюється при переході до інших систем відліку.

Ейлерові сили інерції не є результатом взаємодії даної точки з іншими тілами, вони виникають в результаті *руху* неінерціальної системи відліку $\mathbf{K}^{\boldsymbol{\omega}}$. Сили $\vec{\Phi}_e$ і $\vec{\Phi}_c$ змінюються при переході від однієї неінерціальної системи відліку до іншої такої ж системи. Вони зникають при переході до інерціальної системи відліку (ІСВ).

Ейлерові сили інерції не підлягають вимірюванню, вони не мають джерел свого виникнення, тому вони є *фіктивними силами.*

Формула (10) може бути прочитана наступним чином: добуток маси точки на прискорення її відносного руху дорівнює векторній сумі ньютонових сил та ейлерових сил інерції.

Для **невільної** матеріальної точки маємо

$$m\vec{a}_a = \vec{F} + \vec{R}\,, \tag{13}$$

а оскільки $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$, - отримаємо

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c + \vec{R}\,, \tag{14}$$

що в проекціях на осі рухомої системи координат $Oxyz$ записується наступним чином:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + \Phi_{ex} + \Phi_{cx} + R_x, \\ m\ddot{y} = F_y + \Phi_{ey} + \Phi_{cy} + R_y, \\ m\ddot{z} = F_z + \Phi_{ez} + \Phi_{cz} + R_z. \end{cases} \tag{15}$$

2. ***Частинні випадки руху вільної матеріальної точки***

1) Точка рухається рівномірно і прямолінійно в системі координат $Oxyz$, тоді

$$\vec{a}_r = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c = \vec{0}}. \tag{16}$$

2) Точка знаходиться в спокої в системі координат $Oxyz$, тоді

$$\vec{\mathrm{v}}_r = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_r = \vec{0},\ \vec{a}_c = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} + \vec{\Phi}_e = \vec{0}}. \tag{17}$$

3) Нехай система координат $Oxyz$ здійснює поступальний рух по відношенню до $A\xi\eta\zeta$, тоді матимемо

$$\omega_e = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_c = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e}. \tag{18}$$

4) Припустимо, що система $\mathbf{K}^{\omega}$ є інерціальною, тоді отримаємо

$$\begin{cases} \omega_e = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_c = \vec{0}; \\ \vec{\mathrm{v}}_e = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_e = \vec{0}; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\vec{a}_r = \vec{F}}. \tag{19}$$

Якщо матеріальна точка є **невільною**, тоді наведені вище рівняння зміняться наступним чином:

- з (16) матимемо $\boxed{\vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c + \vec{R} = \vec{0}}$, (20)
- з (17) випливає $\boxed{\vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{R} = \vec{0}}$, (21)
- з (18) отримаємо $\boxed{m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{R}}$, (22)
- з (16) матимемо $\boxed{m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{R}}$. (23)

Звернемо увагу на рівняння (21). Воно виражає *умову відносного спокою*: при відносному спокої точки векторна сума всіх активних сил, що діють на точку, реакцій в'язей і переносної сили інерції дорівнює нулю.

З аналізу рівнянь (18) і (23) приходимо до **висновку**, що механічні прояви у всіх інерціальних системах однакові. Це складає зміст *принципа відносності* класичної механіки Галілея.

Зауважимо, що для інерціальних систем відліку умова $\vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$ означає, що точка знаходиться в спокої, або в рівномірному і прямолінійному русі. В неінерціальній системі відліку умова (21) є умовою спокою точки, а умова (23) – її рівномірного і прямолінійного руху.

Завдання для самостійної роботи:
порівняти математичні вирази, що характеризують:

- *стан спокою точки в інерціальній та неінерціальній системах відліку;*
- *умови прямолінійного та рівномірного руху точки в тих самих системах відліку.*

Зробити висновки.

Лекція 13

13.1. Кінетична енергія **(**T**)**

1) Кінетична енергія матеріальної точки і системи матеріальних точок

Як відомо, кінетична енергія матеріальної точки маси m дорівнює

$$T=\frac{1}{2}m\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\mathrm{v}}=\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2.$$

Розглянемо вирази кінетичної енергії точки для трьох способів задання руху точки.

а) *Векторний спосіб*

Рух задається радіус-вектором $\vec{r}=\vec{r}(t)$, тоді швидкість точки дорівнюватиме $\vec{\mathrm{v}}=\frac{d\vec{r}}{dt}$, звідки отримуємо вираз кінетичної енергії

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}\right)=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2}=\frac{1}{2}m\dot{r}^2.$$

б) *Координатний спосіб*

Рух задається виразами: $\xi=\xi(t),\ \eta=\eta(t),\ \zeta=\zeta(t)$, тому $v=\sqrt{\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2}$, а вираз кінетичної енергії набуде вигляду

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2\right).$$

в) *Натуральний спосіб*

Рух задається дуговою координатою точки як функції часу: $s=s(t)$, тоді $\vec{\mathrm{v}}=\mathrm{v}_\tau\vec{\tau}$, де $\mathrm{v}_\tau=\dot{s}$, а для кінетичної енергії матимемо такий вираз:

$$T=\frac{1}{2}m\left(\mathrm{v}_\tau\vec{\tau}\cdot\mathrm{v}_\tau\vec{\tau}\right)=\frac{1}{2}m\mathrm{v}_\tau^2=\frac{1}{2}m\dot{s}^2,$$

тому що $\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}=1$.

Розглянемо тепер систему матеріальних точок M_i з масами m_i ($i=\overline{1,n}$).
Припустимо, що кожна точка має швидкість $\vec{\mathrm{v}}_i$, тоді

$$T=\sum T_i=\frac{1}{2}\sum m_i\mathrm{v}_i^2. \qquad (1)$$

Кінетична енергія механічної системи дорівнює сумі кінетичних енергій всіх тіл, що входять до даної системи.

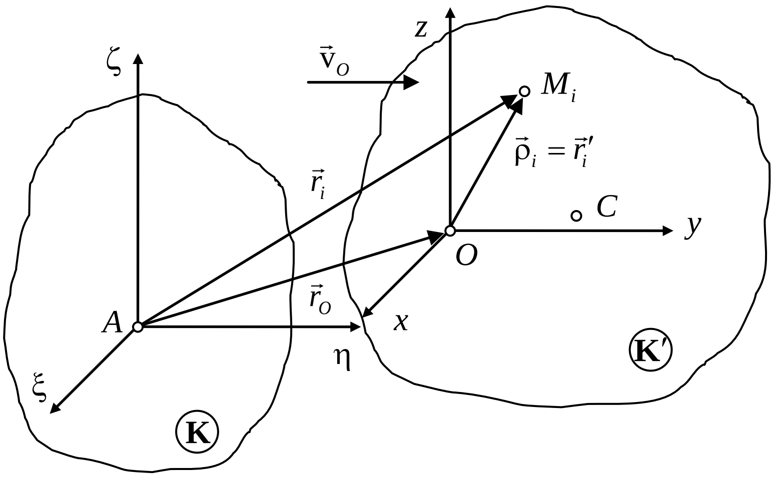
2) Перетворення кінетичної енергії механічної системи при переході від неінерціальної системи відліку, що рухається поступально, до нерухомої. Теорема Кеніга

Розглянемо механічну систему, що складається з n матеріальних точок з масами m_i, які рухаються в неінерціальній системі відліку, яка, в свою чергу, рухається поступально відносно нерухомої (інерціальної) системи відліку (**K**).

Тут $\vec{\mathrm{v}}_O$ - швидкість поступального руху неінерціальної системи відліку.

З рисунку випливає, що $\vec{r}_i=\vec{r}_O+\vec{r}_i\,'$. Звідси шляхом диференціювання отримуємо

$$\vec{\mathrm{v}}_i=\vec{\mathrm{v}}_O+\vec{\mathrm{v}}_i',$$



де $\vec{v}_i'$ - швидкість i-тої точки в рухомій системі координат $Oxyz$.

Тоді кінетична енергія механічної системи визначиться за формулою:

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i}{2}\left(\vec{v}_O + \vec{v}_i'\right)^2 = \sum \frac{m_i}{2} v_O^2 + \sum m_i \vec{v}_O \cdot \vec{v}_i' + \sum \frac{m_i}{2}\left(\vec{v}_i'\right)^2 = \frac{m v_O^2}{2} + T' + m\vec{v}_O \cdot \vec{v}_C' ,$$

де $T' = \sum \frac{m_i}{2}\left(\vec{v}_i'\right)^2$ - кінетична енергія механічної системи в її русі відносно рухомої системи координат. Останній доданок у цій формулі утворився так:

$$\sum m_i \vec{v}_O \cdot \vec{v}_i' = \vec{v}_O \cdot \sum m_i \vec{v}_i' = \vec{v}_O \cdot m\vec{v}_C' = m\vec{v}_O \cdot \vec{v}_C' .$$

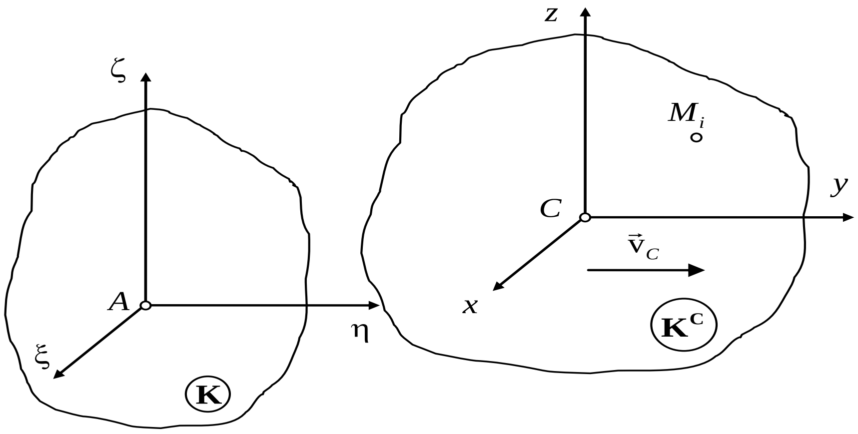
Таким чином, маємо

$$T = \frac{m v_O^2}{2} + T' + m\vec{v}_O \cdot \vec{v}_C' . \qquad (2)$$

Вираз (2) являє собою формулу перетворення кінетичної енергії механічної системи при переході від неінерціальної системи відліку, що рухається поступально, до нерухомої (інерціальної).

Введемо поняття *кенігової* системи відліку.

Якщо початок рухомої системи координат помістити в центр мас механічної системи і при цьому вказану систему змусити рухатись поступально, так, щоб осі Cx, Cy, Cz *весь час руху були паралельні осям* $A\xi, A\eta, A\zeta$ *відповідно, тоді така система відліку називається кеніговою і позначається* $\mathbf{K^C}$.



За неінерціальну систему відліку приймемо *кенігову* систему відліку. Для цієї системи відліку маємо: $\vec{v}_O = \vec{v}_C$, а $\vec{v}_C' = \vec{0}$, оскільки швидкість початку рухомої системи координат (центру мас C) по відношенню до неї самої дорівнює нулю.

Тоді вираз (2) набуває вигляду

$$\boxed{T = \frac{m\mathrm{v}_C^2}{2} + T'}. \tag{3}$$

Це і є математичний вираз теореми Кеніга.

13.2.Теорема Кеніга

Кінетична енергія механічної системи відносно нерухомої системи відліку дорівнює сумі двох доданків: кінетичній енергії поступального руху механічної системи, що визначається рухом центру мас за умови, що маса всієї системи зосереджена в центрі мас, і кінетичній енергії механічної системи в її відносному русі в кеніговій системі відліку.

Тепер розглянемо рух механічної системи як складний, приймаючи за переносний рух поступальний рух рухомої системи відліку, а за відносний рух – рух механічної системи в кеніговій системі відліку.

Тоді теорема про додавання швидкостей при складному русі точки для кожної i-тої точки набуває вигляду

$$\vec{\mathrm{v}}_{ia} = \vec{\mathrm{v}}_{ie} + \vec{\mathrm{v}}_{ir}, \tag{4}$$

де $\vec{\mathrm{v}}_{ia} = \vec{\mathrm{v}}_i$ - абсолютна швидкість точки, $\vec{\mathrm{v}}_{ie} = \vec{\mathrm{v}}_C$ - переносна швидкість, а відносна швидкість $\vec{\mathrm{v}}_{ir} = \vec{\mathrm{v}}_i'$.

В такому разі знайдемо вираз кінетичної енергії механічної системи з урахуванням наведених вище залежностей:

$$T = \sum \frac{m_i \mathrm{v}_i^2}{2} = \sum \frac{m_i}{2}\left(\vec{\mathrm{v}}_C + \vec{\mathrm{v}}_i'\right)^2 = \sum \frac{m_i}{2}\mathrm{v}_C^2 + \sum m_i \vec{\mathrm{v}}_C \cdot \vec{\mathrm{v}}_i' + \sum \frac{m_i}{2}\left(\mathrm{v}_i'\right)^2 = \frac{m\mathrm{v}_C^2}{2} + T' = T_e + T_r .$$

Тут враховано, що $\sum m_i \vec{\mathrm{v}}_C \cdot \vec{\mathrm{v}}_i' = \vec{\mathrm{v}}_C \sum m_i \vec{\mathrm{v}}_i' = \vec{\mathrm{v}}_C \cdot m\vec{\mathrm{v}}_C' = 0$, оскільки $\vec{\mathrm{v}}_C' = \vec{0}$.

Таким чином, остаточно отримуємо

$$\boxed{T = T_e + T_r}, \tag{5}$$

тобто *кінетична енергія механічної системи в її абсолютному русі дорівнює сумі кінетичних енергій в її переносному і відносному рухах.*

Проаналізуємо окремі випадки, що випливають з виразу $T = \dfrac{m\mathrm{v}_C^2}{2} + T'$.

а) Для <u>поступального руху</u> твердого тіла маємо:

$$\boxed{T = \frac{m\mathrm{v}_C^2}{2}}.$$

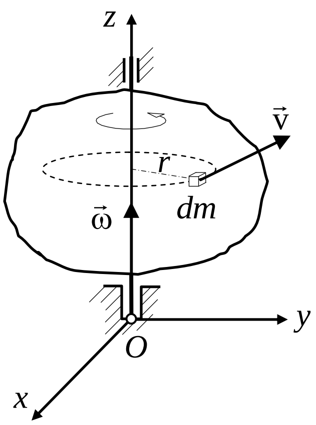
б) Визначимо кінетичну енергію тіла, яке <u>обертається навколо нерухомої осі</u> Oz.

Для цього виділимо елементарний об’єм тіла з масою dm і знайдемо елементарну кінетичну енергію цього об’єму:

$$\frac{dm\mathrm{v}^2}{2} = \frac{dm}{2}\left(\omega\, r\right)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 dm,$$

інтегрування якого за масою дає

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\int\limits_{(m)} \omega^2 r^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int\limits_{(m)} r^2 dm = \frac{1}{2} I_z \omega^2}. \tag{6}$$



Таким чином,

кінетична енергія твердого тіла в його обертальному русі навколо осі Oz дорівнює половині добутку моменту інерції цього тіла відносно осі, навколо якої воно обертається, на квадрат кутової швидкості обертання.

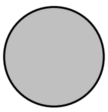
в) Якщо тіло здійснює <u>плоскопаралельний рух</u>, тоді його кінетична енергія визначиться за теоремою Кеніга:

$$\boxed{T = \frac{m v_C^2}{2} + \frac{1}{2} I_{zC}\omega^2}. \tag{7}$$

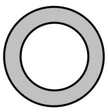
<u>Теорема Кеніга</u> (для плоскопаралельного руху):

кінетична енергія тіла в його плоскопаралельному русі дорівнює сумі двох доданків: кінетичній енергії поступального руху твердого тіла, яка визначається рухом центру мас, і кінетичній енергії цього тіла в обертальному русі відносно осі Oz, що проходить через центр мас тіла.

Зауважимо, що осьовий момент інерції диска залежить від розподілу його маси:



- для суцільного однорідного диску він дорівнює $I_z = \frac{1}{2} m r^2$;



- якщо маса диску рівномірно розподілена по його ободу, тоді матимемо $I_z = m r^2$.

<u>Задача</u>

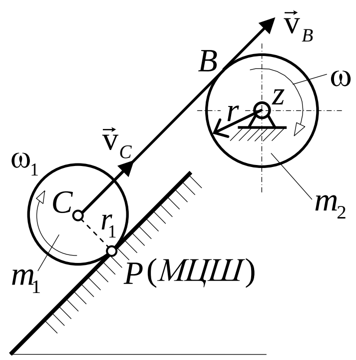
Визначити кінетичну енергію механічної системи, що складається з суцільного однорідного шківа маси m_2 та радіуса r і тягаря маси m_1, який являє собою суцільний однорідний диск, з'єднаних ідеальним тросом. Шків обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω, а тягар рухається вздовж похилої площини без ковзання.

***Дано*:** m_1, m_2; ω, r.

***Знайти*:** T.

Р о з в ' я з а н н я

Кінетична енергія T даної механічної системи складається з двох складових: кінетичної енергії тягаря T_1 та кінетичної енергії шкиву T_2, тобто $T = T_1 + T_2$.



Кінетична енергія шківу, що обертається навколо нерухомої осі, визначиться за формулою (див. формулу (7)):

$$T_2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{4} m_2 r^2 \omega^2 .$$

Тягар знаходиться у плоскопаралельному русі, тому його кінетична енергія за теоремою Кеніга матиме вираз

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \mathrm{v}_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC} \omega_1^2 ,$$

а оскільки $\mathrm{v}_C = \mathrm{v}_B = \omega\, r$ та $\omega_1 = \frac{\mathrm{v}_C}{r_1} = \frac{r}{r_1}\omega$, тому

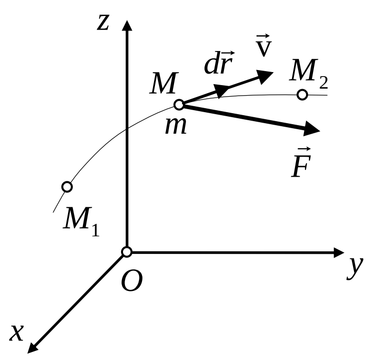
$$T = \frac{1}{2} m_1 r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 r_1^2}{2} \frac{r^2}{r_1^2} \omega^2 + \frac{1}{4} m_2 r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m_1 r^2 \omega^2 + \frac{1}{4} m_1 r^2 \omega^2 + \frac{1}{4} m_2 r^2 \omega^2 ,$$

і остаточно

$$\boxed{T = \frac{1}{4}\left(3m_1 + m_2\right) r^2 \omega^2}.$$

13.3. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

1) Розглянемо <u>вільну матеріальну точку</u>



На підставі ІІ-го закону Ньютона маємо

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(m\vec{\mathrm{v}}\right) = \vec{F}}. \tag{8}$$

Домножимо цей вираз (8) скалярно на вектор $\vec{\mathrm{v}}$ ($\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$):

$$\vec{\mathrm{v}} \cdot \frac{d}{dt}\left(m\vec{\mathrm{v}}\right) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} .$$

Внесемо $\vec{\mathrm{v}}$ під знак диференціала:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathrm{v}^2}{2}\right) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} , \text{ або } d\left(\frac{m\mathrm{v}^2}{2}\right) = \vec{F} \cdot d\vec{r} .$$

Величина $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ є *елементарною роботою* сили $\vec{F}$ на елементарному дійсному переміщенні $d\vec{r}$, і позначається $\vec{F} \cdot d\vec{r} = d'A$. Тоді останній вираз можна перетворити таким чином:

$$\boxed{dT = d'A}. \tag{9}$$

Це є математичний запис *теореми про зміну кінетичної енергії вільної матеріальної точки в диференціальній формі*.

<u>Теорема</u>

Елементарний приріст кінетичної енергії вільної матеріальної точки дорівнює елементарній роботі сил, що діють на матеріальну точку.

Штрих в позначенні елементарної роботи $d'A$ означає, що вираз $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ не є повним диференціалом деякої функції координат точки і, можливо, часу.

Далі, проінтегрувавши вираз $d'A = \vec{F}\cdot d\vec{r}$, матимемо

$$\boxed{T - T_0 = A}. \tag{10}$$

В цій формулі $A = \int\limits_{\overset{\smile}{M_1M_2}} d'A = \int\limits_{\overset{\smile}{M_1M_2}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, де $d\vec{r} = \vec{\mathrm{v}}dt$.

Формула (10) є математичним записом *теореми про зміну кінетичної енергії вільної матеріальної точки в інтегральній формі*.

<u>Теорема</u>

Зміна кінетичної енергії вільної матеріальної точки на деякому відрізку дуги її траєкторії дорівнює роботі сили, прикладеної до точки, на тому ж відрізку дуги траєкторії ($\overset{\smile}{M_1M_2}$).

Скалярний добуток $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ є елементарною роботою по переміщенню точки прикладання сили. T_0, T - вирази кінетичної енергії матеріальної точки, які відповідають її положенням M_1 і M_2 на дузі траєкторії.

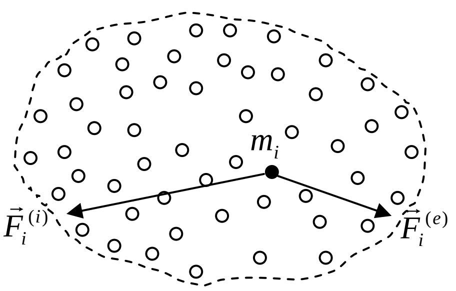
Таким чином, можна записати такий вираз цієї теореми:

$$\boxed{\frac{m\mathrm{v}^2}{2} - \frac{m\mathrm{v}_0^2}{2} = A}. \tag{11}$$

Із виразів (10) і (11) випливає, що зміна другої міри механічного руху матеріальної точки за деякий проміжок часу визначається роботою сили, яка діє на цю точку на відповідному цьому проміжку часу скінченному відрізку дуги траєкторії.

13.4. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи

Розглянемо систему n-точок, на кожну з яких діють внутрішні і зовнішні сили.



Для кожної точки запишемо вираз теореми про зміну кінетичної енергії

$$\frac{m_i\mathrm{v}_{2i}^2}{2} - \frac{m_i\mathrm{v}_{1i}^2}{2} = A_i^{(e)} + A_i^{(i)}. \tag{12}$$

Додаючи такі рівняння, записані для всіх точок системи, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\mathrm{v}_{2i}^2}{2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\mathrm{v}_{1i}^2}{2} = \sum_{i=1}^{n}A_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{n}A_i^{(i)},$$

або

$$\boxed{T_2 - T_1 = A^{(e)} + A^{(i)}}. \tag{13}$$

Таким чином, доведена **<u>теорема</u>** (про зміну кінетичної енергії механічної системи): *приріст кінетичної енергії системи за деякий проміжок часу дорівнює повній роботі, виконаній зовнішніми і внутрішніми силами, прикладеними до системи, за той же проміжок часу.*

13.5. Робота сили

Елементарною роботою сили $\vec{F}$ на елементарному переміщенні $d\vec{r}$ називається скалярна міра дії сили, що дорівнює скалярному добутку сили $\vec{F}$ на елементарне переміщення $d\vec{r}$ точки прикладення сили, тобто

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} \, . \tag{14}$$

Криволінійний інтеграл від виразу (14), якщо його взяти вздовж дуги $M_1 \overset{\cup}{} M_2$ кривої, яку описує точка прикладення сили, являє собою *повну роботу сили*.

$$\boxed{A = \int\limits_{M_1 \overset{\cup}{} M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}} \, . \tag{15}$$

Ця величина ще називається *роботою сили на скінченному переміщенні.*

Записи (14) і (15) відповідають випадку, коли рух точки заданий векторним способом.

Для координатного способу задання руху точки маємо:

$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

і відповідно

$$\boxed{A = \int\limits_{M_1 \overset{\cup}{} M_2} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right)} \, . \tag{16}$$

Так як $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}, \; \dot{y} = \dfrac{dy}{dt}, \; \dot{z} = \dfrac{dz}{dt}$, то $dx = \dot{x} dt, \; dy = \dot{y} dt, \; dz = \dot{z} dt$, і тоді отримаємо такий вираз для повної роботи сили:

$$\boxed{A = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z} \right) dt} \, .$$

Для натурального способу задання руху матеріальної точки, для якого $d\vec{r} = \vec{\tau} \, ds$ ($\vec{\tau}$ - одиничний вектор дотичної, $\tau = 1$) вираз повної роботи має вигляд

$$\boxed{A = \int\limits_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot \vec{\tau} \, ds = \int\limits_{s_1}^{s_2} F \, ds \cos\left(\vec{F} \, \hat{;} \, \vec{\tau} \right)} \, .$$

Тут s_1, s_2 - дугові координати, які відповідають положенням M_1 і M_2 матеріальної точки.

Зауважимо, що робота сили на елементарному переміщенні є інваріантом (незмінною) по відношенню до вибору системи координат, що випливає з властивостей скалярного добутку.

Якщо на матеріальну точку *діє система сил*, які зводяться до рівнодійної, тоді елементарна робота рівнодійної дорівнюватиме сумі елементарних робіт всіх сил, що діють на точку, тобто

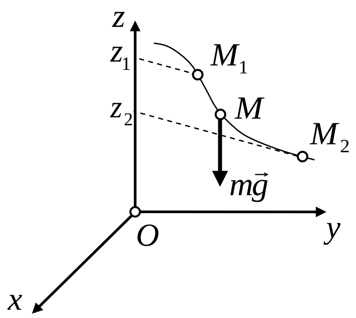
$$\boxed{d'A = \sum_{i=1}^{n} d'A_i} \, . \tag{17}$$

Дійсно,

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{r} = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \ldots + \vec{F}_n \cdot d\vec{r} = d'A_1 + d'A_2 + \ldots + d'A_n = \sum_{i=1}^{n} d'A_i \, .$$

13.6. Робота сили ваги

Нехай матеріальна точка M рухається у просторі по дузі траєкторії під дією лише сили ваги ($m\vec{g}$) цієї точки.



Обчислимо повну роботу сили $m\vec{g}$ за формулою (16), для цього спочатку знайдемо проекції сили $\vec{F}$ $(=m\vec{g})$ на осі системи координат $Oxyz$: $F_x = 0,\ F_y = 0,\ F_z = -mg$. Тоді за формулою (16) матимемо:

$$A = -\int_{z_1}^{z_2} mg\, dz = -mg(z_2 - z_1) = -mgh.$$

Таким чином, маємо

$$\boxed{A = -mgh}, \tag{18}$$

де $h = z_2 - z_1$.

Зауважимо, що коли точка наближається до поверхні Землі ($z_2 < z_1$ і $h < 0$), тоді $A > 0$, і навпаки, коли точка віддаляється від поверхні Землі, тоді $z_2 > z_1,\ h > 0$, а $A < 0$.

Робота сили ваги матеріальної точки:

- дорівнює добутку модуля цієї сили на різницю висот початкового і кінцевого положень точки;
- ніколи не залежить від форми траєкторії, по якій точка перейшла з початкового положення в кінцеве;
- є додатньою, якщо кінцеве положення точки нижче за початкове;
- дорівнює нулю на разі, якщо точка повертається на ту ж саму висоту над горизонтальною площиною, на якій вона знаходилася спочатку.

13.7. Робота сил, що діють на механічну систему

Елементарною роботою сил, що діють на механічну систему, називається сума елементарних робіт всіх сил (зовнішніх і внутрішніх), що діють на систему.

$$d'A_i = d'A_i^E + d'A_i^I,$$

$$A = \int d'A^E + \int d'A^I,$$

$$d'A = \sum_{i=1}^{n} d'A_i,$$

$$A^I = 0.$$

Без доведення приймемо, що сума елементарних робіт всіх сил, що діють на тверде тіло (незмінювану систему матеріальних точок), є сумою елементарних робіт лише зовнішніх сил:

$$d'A = \sum_{i=1}^{n} d'A_i^E, \quad \text{або} \quad \boxed{d'A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^E \cdot d\vec{r}_i}.$$

13.8. Елементарна робота сил, що прикладені до твердого тіла

Розглянемо тверде тіло, яке здійснює вільний рух. На точки M_i цього тіла діють зовнішні сили $\vec{F}_i^E$. Тоді матимемо наступний вираз елементарної роботи цих сил:

$$d'A = \sum \vec{F}_i^E \cdot d\vec{r}_i = \sum \vec{F}_i^E \cdot \vec{v}_i dt. \tag{19}$$

З курсу кінематики відомо, що швидкість будь-якої точки вільного тіла визначається формулою

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i, \tag{20}$$

де $\vec{v}_O$ - швидкість точки, яку приймають за полюс;

$\vec{\omega}$ - кутова швидкість тіла,

$\vec{\rho}_i$ - радіус-вектор точки M_i відносно полюса.

Тепер підставимо формулу (20) в вираз (19):

$$d'A = \sum \vec{F}_i^E \cdot \left(\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i \right) dt = \sum \vec{F}_i^E \cdot \vec{v}_O dt + \sum \vec{F}_i^E \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i \right) dt .$$

Розглянемо кожний доданок окремо:

$$\sum \vec{F}_i^E \cdot \vec{v}_O dt = \vec{v}_O \cdot \underbrace{\sum \vec{F}_i^E}_{\substack{\text{головний вектор} \\ \text{зовнішніх сил}}} dt = \vec{F}^E \cdot \vec{v}_O dt ,$$

$$\sum \vec{F}_i^E \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i \right) dt = \vec{\omega} \cdot \underbrace{\sum \left(\vec{\rho}_i \times \vec{F}_i^E \right)}_{\substack{\text{головний момент} \\ \text{зовнішніх сил}}} dt = \vec{M}_O^E \cdot \vec{\omega} dt .$$

Тут використана можливість циклічної перестановки множників у змішаному скалярно-векторному добутку.

Таким чином, маємо

$$\boxed{d'A = \vec{F}^E \cdot \vec{v}_O dt + \vec{M}_O^E \cdot \vec{\omega}\, dt}. \tag{21}$$

Це є вираз для елементарної роботи зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, яке здійснює вільний рух. Ця робота визначається через головний вектор ($\vec{F}^E$) і головний момент ($\vec{M}_O^E$) зовнішніх сил відносно точки O, яку приймаємо за полюс. При цьому окрім вказаних характеристик дії зовнішніх сил необхідно знати ще й швидкість $\vec{v}_O$ полюса і кутову швидкість ω тіла.

Надамо виразу (21) більш простої форми.

Для цього введемо вектор елементарного переміщення полюса, тобто т. O:
$d\vec{r}_O = \vec{v}_O dt$, а також елементарний поворот тіла відносно полюса: $d\vec{\varphi} = \vec{\omega}\, dt$, тоді вираз (21) набуде такого вигляду:

$$\boxed{d'A = \vec{F}^E \cdot d\vec{r}_O + \vec{M}_O^E \cdot d\vec{\varphi}}, \tag{22}$$

тобто

елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, яке здійснює вільний рух, дорівнює сумі елементарної роботи головного вектора зовнішніх сил на елементарному переміщенні полюса і елементарної роботи головного моменту зовнішніх сил, обчисленого відносно полюса, на елементарному повороті тіла навколо полюса.

13.9. Частинні випадки обчислення елементарних робіт для різних видів руху тіла

1) Поступальний рух твердого тіла

За такої умови маємо $\omega = 0$, і з виразу (22) випливає, що $d'A = \vec{F}^E \cdot d\vec{r}_O$.

2) Обертальний рух тіла відносно нерухомої осі

Якщо вибрати полюс O на осі обертання (Oz), тоді $v_O = 0$ і матимемо:

$$d'A = \vec{M}_O^E \cdot d\vec{\varphi}_z , \text{ де } d\vec{\varphi}_z = d\varphi_z \vec{k} \ \ (\vec{k} \text{ - орт осі } z).$$

3) Плоскопаралельний рух твердого тіла

Вважаємо, що вісь Oz перпендикулярна основній площині, тоді з виразу (22) маємо:

$$d'A = \vec{F}^E \cdot d\vec{r}_O + M_{Oz}^E \cdot d\varphi .$$

Вирази повних робіт отримаємо шляхом інтегрування відповідних виразів для елементарних робіт.

Лекція 14

Загальні теореми динаміки для системи матеріальних точок

14.1. Міри механічного руху

Покажемо методи складання перших інтегралів динамічних рівнянь руху, які називаються *законами збереження* механічного руху і зв'язані з введенням спеціальних функцій.

Прикладами таких функцій є міри механічного руху.

Першою мірою механічного руху є векторна функція

$$\vec{q} = m\vec{\mathrm{v}}, \tag{1}$$

що називається *кількістю руху матеріальної точки.*

Кількість руху механічної системи дорівнює векторній сумі кількостей руху всіх точок, що входять до системи, тобто

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} \vec{q}_i \ .$$

Вектор $\vec{Q}$ - головний вектор кількостей руху. Таким чином

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathrm{v}}_i \ .$$

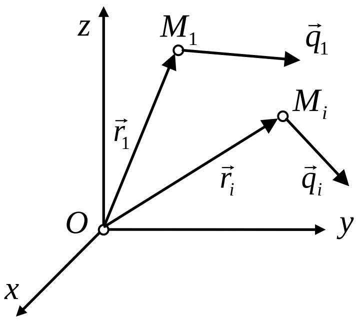
Другою мірою механічного руху називається скалярна функція вигляду

$$T = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}, \tag{2}$$

яка називається *кінетичною енергією матеріальної точки.*

Кінетичною енергією матеріальної системи називається сума кінетичних енергій всіх точок, що входять до системи, тобто

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \mathrm{v}_i^2}{2} \ .$$



Допоміжною мірою механічного руху є величина

$$\vec{k}_O = \vec{r} \times \vec{q} \ ,$$

яка називається *моментом кількості руху* матеріальної точки відносно центру O. Тут $\vec{r}$ - радіус-вектор точки, кількість руху якої дорівнює $\vec{q}$.

Головний момент кількостей руху (*кінетичний момент*) механічної системи дорівнює векторній сумі моментів кількостей руху всіх точок, що входять до системи.

$$\vec{K}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{k}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i \right).$$

14.2. Кількість руху механічної системи

За означенням центру мас маємо

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}, \tag{3}$$

звідки отримаємо

$$\sum m_i \vec{r}_i = m\vec{r}_C .$$

В такому разі запишемо вираз головного вектора кількостей руху

$$\vec{Q} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt}\left(m\vec{r}_C\right) = m\frac{d\vec{r}_C}{dt} = m\vec{\mathrm{v}}_C ,$$

тобто

$$\vec{Q} = m\vec{\mathrm{v}}_C . \tag{4}$$

Кількість руху механічної системи дорівнює добутку маси системи на швидкість центру мас.

З виразу (4) випливає, що

$$Q_x = m\mathrm{v}_{Cx}, \quad Q_y = m\mathrm{v}_{Cy}, \quad Q_z = m\mathrm{v}_{Cz} . \tag{5}$$

Проекції головного вектора кількостей руху механічної системи на осі нерухомої системи координат дорівнюють добуткам маси механічної системи на проекції швидкості центра мас на ті ж самі осі.

14.3. Теорема про зміну кількості руху механічної системи. Теорема про рух центра мас

Припустимо, що механічна система рухається під дією сил, які поділяються на зовнішні і внутрішні: $\vec{F}_i^E$ і $\vec{F}_i^I$ відповідно. Тоді для кожної точки системи можна записати

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I .$$

Знайдемо суму всіх таких рівнянь для всіх матеріальних точок, що складають систему

$$\sum m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum \vec{F}_i^E + \sum \vec{F}_i^I .$$

Якщо далі взяти до уваги, що $\sum \vec{F}_i^I = \vec{0}$ і $\mathrm{v}_i = \dfrac{d\vec{r}_i}{dt}$, а сума $\sum \vec{F}_i^E$ дорівнює головному вектору зовнішніх сил $\vec{F}^E$, тоді отримаємо

$$\sum m_i \frac{d\vec{\mathrm{v}}_i}{dt} = \vec{F}^E , \text{ або } \frac{d}{dt}\left(\sum m_i \vec{\mathrm{v}}_i\right) = \vec{F}^E .$$

Оскільки $\vec{Q} = \sum m_i \vec{\mathrm{v}}_i$, то остаточно матимемо

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^E . \tag{6}$$

Таким чином, доведена **<u>теорема I про зміну кількості руху</u>** механічної системи (в диференціальній формі):

перша похідна за часом від головного вектора $\vec{Q}$ кількостей руху механічної системи, обчислена в будь-якій інерціальній системі відліку, дорівнює головному вектору всіх зовнішніх сил, що діють на механічну систему.

В проекціях на осі нерухомої системи координат $A\xi\eta\zeta$ ($\mathbf{K}$) матимемо

$$\frac{dQ_\xi}{dt} = F_\xi^E, \quad \frac{dQ_\eta}{dt} = F_\eta^E, \quad \frac{dQ_\zeta}{dt} = F_\zeta^E . \tag{7}$$

Перші похідні за часом від проекцій головного вектора кількостей руху на координатні осі дорівнюють відповідним проекціям головного вектора зовнішніх сил на ті ж самі осі.

Припустимо, що $\vec{F}^E = \vec{F}^E(t)$, тоді беручи інтеграл від обох частин рівності (6), пісдя домноження на *dt,* в границях від t_0 до t, отримаємо вираз

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}^E dt, \tag{8}$$

який являє собою запис теореми I в інтегральній формі. Тут $\vec{Q}$ і $\vec{Q}_0$ - головний вектор кількостей руху механічної системи в моменти часу t і t_0 відповідно.

Розкриємо запис (8), беручи до уваги, що $\vec{F}^E = \sum \vec{F}_i^E$,

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}^E dt = \int_{t_0}^{t} \sum \vec{F}_i^E dt = \sum \int_{t_0}^{t} \vec{F}_i^E dt = \sum \int_{t_0}^{t} d\vec{S}_i^E = \sum \vec{S}_i^E = \vec{S}^E .$$

Тут $d\vec{S}_i^E = \vec{F}_i^E dt$ - елементарний імпульс сили $\vec{F}_i^E$,

$\vec{S}_i^E = \int_{t_0}^{t} d\vec{S}_i^E = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_i^E dt$ - повний імпульс сили $\vec{F}_i^E$,

$\vec{S}^E = \sum \vec{S}_i^E$ - головний вектор імпульсів всіх зовнішніх сил за проміжок часу $t - t_0$.

Таким чином маємо

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \vec{S}^E . \tag{9}$$

Це є так звана **<u>теорема імпульсів</u>** (теорема I в інтегральній формі):

> *зміна кількості руху механічної системи $\vec{Q} - \vec{Q}_0$ за деякий проміжок часу дорівнює головному вектору імпульсів зовнішніх сил за той же проміжок часу.*

Проеціювання виразу (9) на координатні осі нерухомої системи координат ($A\xi\eta\zeta$) дає

$$Q_\xi - Q_{0\xi} = S_\xi^E, \quad Q_\eta - Q_{0\eta} = S_\eta^E, \quad Q_\zeta - Q_{0\zeta} = S_\zeta^E . \tag{10}$$

Із виразів (10) випливає, що зміна проекцій головного вектора кількостей руху механічної системи на координатні осі за деякий проміжок часу дорівнює проекціям на ті ж самі осі головного вектора імпульсів зовнішніх сил.

Далі, з виразу (6), беручи до уваги, що $\vec{Q} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$, а також формулу (3), матимемо

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \sum m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2}(m\vec{r}_C) = m\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = m\vec{a}_C ,$$

або остаточно запишемо вираз (6) у вигляді

$$m\vec{a}_C = \vec{F}^E , \tag{11}$$

де $\vec{a}_C$ є прискоренням центра мас.

Формула (11) є математичним виразом **<u>теореми про рух центра мас</u>**, яка формулюється наступним чином:

центр мас механічної системи рухається як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи, і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил, прикладених до системи.

В проекціях на осі нерухомої системи координат з виразу (11) отримаємо

$$m\ddot{\xi}_C = F_\xi^E, \quad m\ddot{\eta}_C = F_\eta^E, \quad m\ddot{\zeta}_C = F_\zeta^E, \tag{12}$$

де ξ_C, η_C, ζ_C - координати центру мас у даній системі координат.

Рівняння (12) є диференціальними рівняннями руху центру мас механічної системи.

14.4. Закони збереження кількості руху механічної системи

1) Розглянемо <u>замкнену механічну систему</u>, на точки якої не діють ніякі зовнішні сили (тобто $\vec{F}^E = \vec{0}$). Тоді з рівняння (6) випливає, що

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{Q} = \overrightarrow{const}\,. \tag{13}$$

В цьому рівнянні векторна стала $\overrightarrow{const}$ визначається із початкових умов.

Нехай у початковий момент часу t_0 точки M_i механічної системи з масами m_i мали початкові швидкості $\vec{\mathrm{v}}_{i0}$. Тоді головний вектор кількостей руху у початковий момент часу дорівнюватиме $\vec{Q}_0 = \sum m_i \vec{\mathrm{v}}_{i0}$, а оскільки має місце рівність (13), то матимемо

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0\,. \tag{14}$$

Це є *перший інтеграл* рівнянь руху механічної системи.

Оскільки $\vec{Q}_0 = \sum m_i \vec{v}_{i0} = m\vec{\mathrm{v}}_{C0}$, тому враховуючи вираз (4), отримаємо з (14)

$$m\vec{\mathrm{v}}_C = m\vec{\mathrm{v}}_{C0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathrm{v}}_C = \vec{\mathrm{v}}_{C0}\,, \tag{15}$$

інший вираз першого інтегралу рівнянь руху механічної системи.

Із виразу (15) випливає, що для замкненої механічної системи, яка рухається в інерціальній системі відліку, центр мас рухається з однією й тією ж постійною швидкістю, яка визначається із початкових умов.

Якщо проінтегрувати вираз (15), отримаємо

$$\vec{r}_C = \vec{r}_{C0} + \vec{\mathrm{v}}_{C0} t\,. \tag{16}$$

Із цієї формули (16) випливає, що для замкненої механічної системи, яка рухається в інерціальній системі відліку, центр мас рухається прямолінійно і рівномірно.

2) Розглянемо випадок, коли <u>механічна система незамкнена</u>. Тут є два окремих випадки.

а) $\vec{F}^E = \vec{0}$. Тоді справедливі всі закони збереження кількості руху.

б) $\vec{F}^E \neq \vec{0}$, причому $F_\xi^E = 0,\; F_\eta^E \neq 0,\; F_\zeta^E \neq 0$. Тоді з першої з формул (7) отримаємо

$$\frac{dQ_\xi}{dt} = F_\xi^E \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ_\xi}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_\xi = const\,,$$

яка визначається з початкових умов, і тоді матимемо

$$Q_\xi = Q_{\xi 0} \tag{17}$$

перший інтеграл у скалярній формі.

Співвідношення (17) виражає закон збереження проекції головного моменту кількостей руху на вісь ξ.

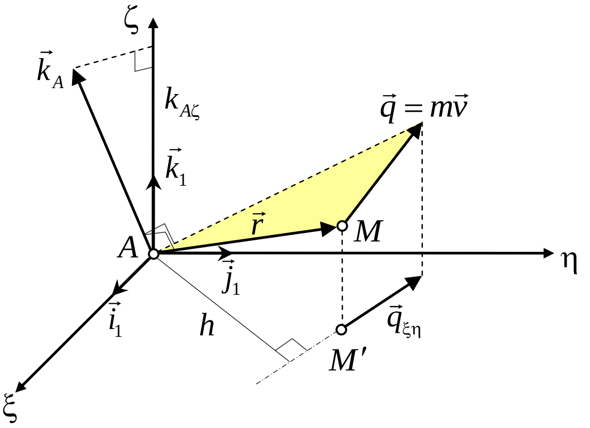
Лекція 15

15.1. Момент кількості руху матеріальної точки. Кінетичний момент механічної системи

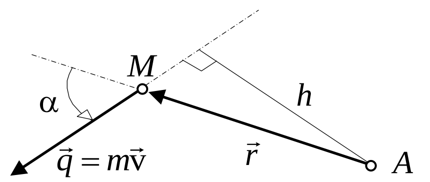
Розглянемо спочатку одну матеріальну точку M маси m. Момент кількості руху цієї матеріальної точки відносно т. A ($\vec{k}_A$) визначається таким векторним добутком (див. рисунок)

$$\vec{k}_A = \vec{r} \times \vec{q} = \vec{r} \times m\vec{\text{v}},$$

де $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$, а $\vec{q} = m\vec{\text{v}}$ - кількість руху матеріальної точки.



Зауважимо, що вектор $\vec{k}_A$ завжди перпендикулярний до площини, яка утворюється вектором $\vec{q}$ і точкою A. Тут $k_{A\zeta}$ є проекцією вектора моменту кількості руху точки M відносно точки A на вісь ζ. З іншого боку ця величина являє собою момент кількості руху точки M відносно осі ζ, тобто $k_{A\zeta} = q_{\xi\eta}h$. Знак моменту $k_{A\zeta}$ визначається наступним чином: *момент $k_{A\zeta}$ вважається додатним, якщо спостерігач з додатного напрямку осі ζ бачить обертання точки M' під дією вектора $\vec{q}_{\xi\eta}$ проти руху годинникової стрілки.*



З того, що $\vec{k}_A = \vec{r} \times \vec{q}$, випливає, що модуль k_A цього вектора дорівнюватиме $k_A = rq\sin\left(\vec{r}\,\hat{;}\,\vec{q}\right) = rq\sin\alpha$, а оскільки $r\sin\alpha = h$, матимемо

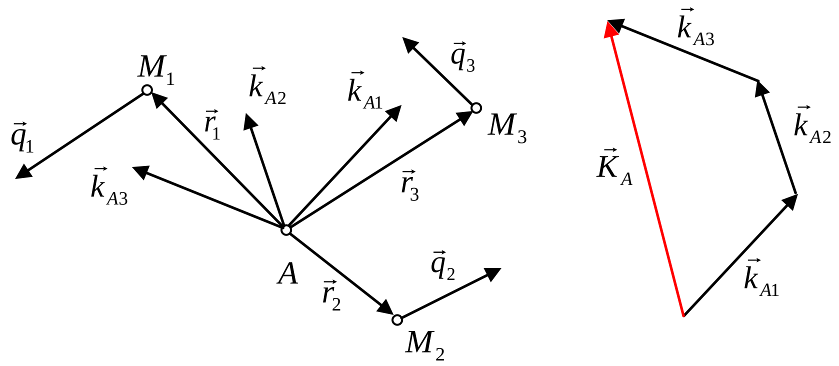
$$k_A = qh = m\text{v}h. \tag{1}$$

Нехай тепер маємо систему n- матеріальних точок M_i з масами m_i ($i = \overline{1,n}$).

Момент кількості руху механічної системи $\vec{K}_A$ (або кінетичний момент механічної системи) відносно деякого центру A дорівнює векторній сумі моментів кількостей руху всіх точок, що входять до системи, відносно того ж центру A.

Таким чином маємо

$$\vec{K}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{k}_{Ai} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times \vec{q}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times m_i\vec{\text{v}}_i\right). \tag{2}$$



Кінетичний момент системи можна визначити за допомогою суми визначників, а саме:

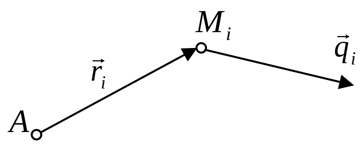
$$\vec{K}_A = \sum_i \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ m_i\dot{\xi}_i & m_i\dot{\eta}_i & m_i\dot{\zeta}_i \end{vmatrix},$$

а оскільки цей же вектор можна подати у вигляді $\vec{K}_A = K_{A\xi}\vec{i}_1 + K_{A\eta}\vec{j}_1 + K_{A\zeta}\vec{k}_1$, тому з порівняння цих виразів випливає, що

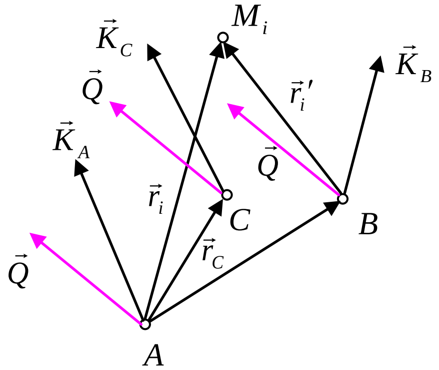
$$\begin{cases} K_{A\xi} = n\sum m_i\left(\eta_i\dot{\zeta}_i - \zeta_i\dot{\eta}_i\right), \\ K_{A\eta} = n\sum m_i\left(\zeta_i\dot{\xi}_i - \xi_i\dot{\zeta}_i\right), \\ K_{A\zeta} = n\sum m_i\left(\xi_i\dot{\eta}_i - \eta_i\dot{\xi}_i\right). \end{cases}$$

15.2. Перетворення кінетичного моменту механічної системи при зміні центра зведення

Кінетичний момент механічної системи відносно центру A має вигляд (2). Тут вектор $\vec{r}_i$ являє собою радіус-вектор, проведений з точки A (центру зведення) до i-тої точки M_i.



Подивимось тепер, як зміниться кінетичний момент $\vec{K}_A$ механічної системи при зміні центра зведення (з A на B).



Зауважимо, що за аналогією із статикою, головний вектор кількостей руху $\vec{Q}$, як і головний вектор системи сил $\vec{F}_O$, є незмінним вектором, який не залежить від вибору центра зведення.

Розглянемо в якості центра зведення іншу точку (т. B). Тоді матимемо

$$\vec{K}_B = \sum_{i=1}^{n}\vec{k}_{Bi} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i' \times m_i\vec{\text{v}}_i\right). \qquad (3)$$

З рисунку випливає, що $\vec{r}_i = \overrightarrow{AB} + \vec{r}_i'$, тоді

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \overrightarrow{AB}\,. \tag{4}$$

Підставимо вираз (7) в формулу (6):

$$\vec{K}_B = \sum_i \left(\vec{r}_i - \overrightarrow{AB}\right) \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i - \overrightarrow{AB} \times \sum_i m_i \vec{\mathrm{v}}_i\,.$$

Зменшуване у правій частині цього виразу за формулою (5) дорівнює $\vec{K}_A$, а остання сума у від'ємнику складає $\vec{Q}$, тому остаточно можна записати:

$$\vec{K}_B = \vec{K}_A - \overrightarrow{AB} \times \vec{Q}\,, \tag{5}$$

це формула, що визначає зміну кінетичного моменту механічної системи при зміні центру зведення. Тут від'ємник $\overrightarrow{AB} \times \vec{Q}$ є моментом вектора $\vec{Q}$, прикладеного в новому центрі B, відносно старого центра A.

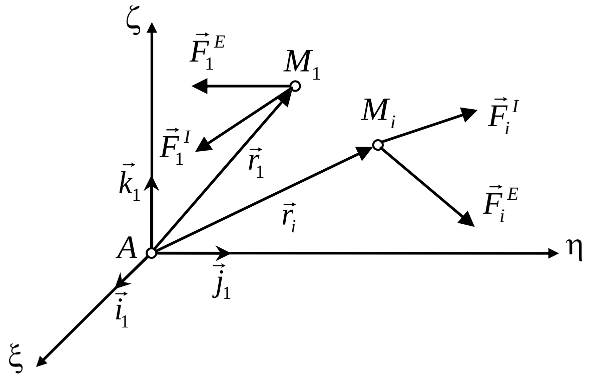
Кінетичний момент механічної системи при зміні центру зведення змінюється на величину, яка дорівнює моменту головного вектора кількостей руху механічної системи ($\vec{Q}$), прикладеного в новому центрі, відносно старого центра зведення.

Для центра зведення в т. C матимемо

$$\vec{K}_C = \vec{K}_A - \overrightarrow{AC} \times \vec{Q} = \vec{K}_A - \vec{r}_C \times \vec{Q}\,.$$

15.3. Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи

Розглянемо механічну систему, що складається з n матеріальних точок M_i з масами m_i і рухається відносно інерціальної системи відліку. Сили, що діють на точки даної системи, можна розділити на зовнішні і внутрішні.



Тут $\vec{F}_i^E$ - рівнодійна всіх зовнішніх сил, що діють на i-ту точку; $\vec{F}_i^I$ - рівнодійна всіх внутрішніх сил, що діють на i-ту точку.

Запишемо динамічні рівняння руху механічної системи

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I\,. \quad i = \overline{1,n} \tag{6}$$

Домножимо векторно ліву і праву частини цих рівнянь (6) на $\vec{r}_i$ зліва

$$\vec{r}_i \times m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^I\,. \qquad i = \overline{1,n} \tag{7}$$

Почленно підсумуємо ці рівняння

$$\sum \vec{r}_i \times m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E + \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^I\,. \tag{8}$$

Оскільки головний момент всіх внутрішніх сил, що діють на точки системи, відносно т. A дорівнює нулю, тобто $\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^I = \vec{0}$, а головний момент всіх зовнішніх сил відносно тієї ж точки є $\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E = \vec{M}_A^E$, то з рівняння (8), змінюючи зліва порядок підсумовування і диференціювання, отримаємо

$$\frac{d}{dt}\sum \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{M}_A^{\,E},$$

звідки, враховуючи, що $\dfrac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{\mathrm{v}}_i$, матимемо

$$\frac{d\vec{K}_A}{dt} = \vec{M}_A^{\,E}. \tag{9}$$

Запис (9) є математичним виразом **теореми про зміну кінетичного моменту механічної системи в диференціальній формі**, яка формулюється наступним чином.

Перша похідна за часом від кінетичного моменту механічної системи, який обчислюється відносно центра зведення A, дорівнює головному моменту ($\vec{M}_A^{\,E}$) всіх зовнішніх сил, що діють на дану механічну систему, відносно того ж центра A.

Розглянемо вираз (9) в проекціях на осі нерухомої системи координат $A\xi\eta\zeta$

$$\frac{dK_{A\xi}}{dt} = M_{A\xi}^{E}, \qquad \frac{dK_{A\eta}}{dt} = M_{A\eta}^{E}, \qquad \frac{dK_{A\zeta}}{dt} = M_{A\zeta}^{E}, \tag{10}$$

де $M_{A\xi}^{E},\ M_{A\eta}^{E},\ M_{A\zeta}^{E}$ - проекції головного моменту зовнішніх сил ($\vec{M}_A^{\,E}$) на осі $\xi,\ \eta,\ \zeta$.

Наслідок з теореми: *перша похідна за часом від проекції кінетичного моменту механічної системи на деяку вісь дорівнює проекції головного моменту зовнішніх сил на ту ж саму вісь.*

Якщо праву частину рівності (9) можна подати у вигляді функції, яка явно залежить від часу, тоді, домножуючи ліву і праву частини (9) на dt і інтегруючи їх за часом t в межах від t_0 до t, отримаємо

$$\vec{K}_A - \vec{K}_{A0} = \int_{t_0}^{t} \vec{M}_A^{\,E} dt, \tag{14}$$

де $\vec{K}_A$ і $\vec{K}_{A0}$ - кінетичні моменти механічної системи в моменти часу t і t_0 відповідно. Права частина виразу (14) являє собою *головний момент імпульсів зовнішніх сил*, а сам вираз – **теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи в інтегральній формі**.

Зміна кінетичного моменту механічної системи за деякий проміжок часу дорівнює головному моменту імпульсів зовнішніх сил, що діють на дану систему, за той же проміжок часу.

15.4. Закони збереження кінетичного моменту механічної системи

1) Розглянемо замкнену механічну систему (на неї не діють зовнішні сили). Тоді головний вектор і головний момент зовнішніх сил дорівнюватимуть нулю, тобто

$$\vec{F}_O^{\,E} = \vec{0}, \quad \vec{M}_A^{\,E} = \vec{0}. \tag{15}$$

Якщо умова (15) виконується, тоді рівняння $\dfrac{d\vec{K}_A}{dt} = \vec{M}_A^{\,E}$ набуває вигляду $\dfrac{d\vec{K}_A}{dt} = \vec{0}$, звідки випливає, що кінетичний момент системи $\vec{K}_A$ є векторною сталою, яка визначається початковими умовами, тобто $\vec{K}_A = \overrightarrow{const}$.

Припустимо, що в початковий момент часу $t = t_0$: $\vec{r}_i = \vec{r}_{i0}$, а $\vec{\mathrm{v}}_i = \vec{\mathrm{v}}_{i0}$, тоді кінетичний момент у початковий момент часу визначиться так:

$$\vec{K}_{A0} = \sum\left(\vec{r}_{i0} \times m_i \vec{v}_{i0}\right),$$

а тому $\boxed{\vec{K}_A = \vec{K}_{A0}}$. (16)

Це співвідношення являє собою перший інтеграл рівнянь руху механічної системи (в векторній формі) і виражає *закон збереження кінетичного моменту для замкненої механічної системи*.

2) <u>Розглянемо незамкнену механічну систему</u> (на неї діють зовнішні сили).

а) Розглянемо випадок, коли головний вектор і головний момент зовнішніх сил дорівнюють нулю, тобто

$$\vec{F}_O^E = \vec{0}, \quad \vec{M}_A^E = \vec{0}. \tag{17}$$

Для цього випадку є справедливим співвідношення (16), тобто для незамкненої системи, у разі виконання умов (17), кінетичний момент є сталим.

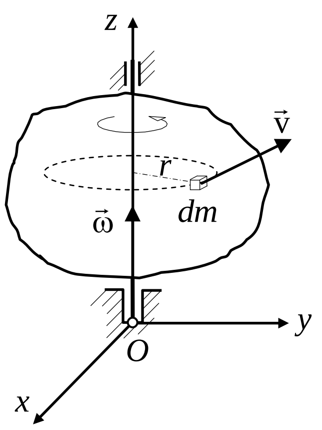
б) Нехай тепер $\vec{M}_A^E \neq \vec{0}$, але $M_{A\xi}^E = 0$. Скористаємося тоді виразами по $\frac{dK_{A\xi}}{dt} = M_{A\xi}^E$, $\frac{dK_{A\eta}}{dt} = M_{A\eta}^E$, $\frac{dK_{A\zeta}}{dt} = M_{A\zeta}^E$, з першого з яких отримаємо: $\frac{dK_{A\xi}}{dt} = 0$, звідки маємо $K_{A\xi} = const$ (ця скалярна стала, як і раніше, визначається з початкових умов), тому матимемо

$$\boxed{K_{A\xi} = K_{A\xi 0}}. \tag{18}$$

Це співвідношення являє собою перший скалярний інтеграл рівнянь руху механічної системи і виражає *закон збереження проекції кінетичного моменту незамкненої механічної системи на вісь $A\xi$*.

15.5. Кінетичний момент твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі

В тілі, що обертається навколо нерухомої осі, виділимо елементарний об'єм з масою dm. Тоді швидкість цього об'єму становитиме $\vec{v}$ ($v = \omega\, r$), кількість руху



$$dQ = v dm = \omega\, r\; dm.$$

Елементарний кінетичний момент відносно осі Oz дорівнюватиме

$$dK_z = r dQ = r v dm = \omega\, r^2 dm.$$

Для всього тіла матимемо (інтегруємо за масою)

$$K_z = \omega \int\limits_{(m)} r^2 dm.$$

Оскільки інтеграл у правій частині цього виразу є осьовим моментом інерції тіла відносно осі обертання Oz, тобто,

$$I_z = \int\limits_{(m)} r^2 dm, \tag{19}$$

тому отримаємо

$$K_z = I_z \omega. \tag{20}$$

Кінетичний момент твердого тіла (K_z) відносно осі обертання Oz дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно цієї ж осі і кутової швидкості обертання тіла.

Лекція 16
Аналітична механіка та її елементи

Класифікація в'язей, дійсні та можливі переміщення, ідеальні в'язі, число степенів вільності механічної системи

16.1. Класифікація в'язей та їх означення

Нехай на рух системи n матеріальних точок накладено k обмежень (в'язей), які описуються наступними нерівностями, що залежать від координат точок системи, їх швидкостей та, можливо, часу:

$$f_\nu\left(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t\right) \geq 0. \qquad \nu = \overline{1,k} \tag{1}$$

Можливими переміщеннями точок системи називаються будь які <u>нескінченно малі уявні</u> переміщення точок, що дозволені в'язями, накладеними на ці точки в <u>фіксований</u> момент часу. Ці можливі переміщення позначаються префіксним символом δ, який є одночасно і символом операції варіювання, наприклад $\delta\,\vec{r}_O$.

Поняття можливого переміщення є суто геометричним, не пов'язаним з істинним рухом точок системи.

Координати точки M_i, отримані в результаті можливого переміщення

$$\delta\vec{r}_i = \delta x_i \vec{i} + \delta y_i \vec{j} + \delta z_i \vec{k},$$

тобто

$$M_i\left(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i\right),$$

задовольняють рівнянням в'язей, але не рівнянням руху.

Навпаки, координати точки M_i, отримані в результаті дійсного переміщення $d\vec{r}_i$ в істинному русі за час dt

$$d\vec{r}_i = dx_i \vec{i} + dy_i \vec{j} + dz_i \vec{k},$$

тобто

$$M_i\left(x_i + dx_i, y_i + dy_i, z_i + dz_i\right),$$

задовольняють як рівнянням в'язей, так і рівнянням руху.

Подамо нижче деякі **види в'язей**.

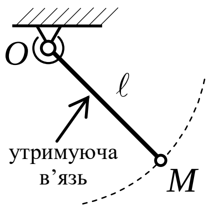
Утримуючою в'яззю називається в'язь, яка припускає переміщення в одному напрямку і не припускає в протилежному, тоді

$$f_\nu\left(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t\right) = 0.$$

Неутримуючою в'яззю називається в'язь, яка припускає переміщення в даному напрямку і в протилежному, тоді

$$f_\nu\left(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t\right) \leq 0.$$

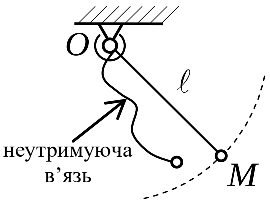
<u>Прикладом утримуючої в'яз</u>і є однорідний стрижень довжиною ℓ, до якого прикріплена точка M.



Рівняння цієї в'язі матиме вигляд

$$x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0.$$

Це є рівняння поверхні сфери з радіусом ℓ і центром у початку координат.



Прикладом неутримуючої в'язі є нитка, до якої прикріплена матеріальна точка M. Вона припускає переміщення всередину сфери, але не припускає переміщення назовні в радіальному напрямку (по зовнішній нормалі до поверхні сфери).

Така неутримуюча в'язь описується нерівністю вигляду

$$x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 \leq 0.$$

В'язі, в рівняння [3] яких час явно не входить, називаються *стаціонарними* в'язями. В'язі, в рівняння яких явно входить час, називаються *нестаціонарними*.

В'язі, рівняння яких містять тільки координати точок механічної системи, і, можливо, час, називаються *геометричними*. Рівняння цих в'язей мають вигляд

$$f_\nu\left(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t\right) = 0. \qquad \nu = \overline{1,k} \tag{2}$$

Якщо рівняння в'язей містять координати точок системи, перші похідні від цих координат за часом (швидкості) і, можливо, час, тоді відповідна в'язь називається *кінематичною* або *диференціальною*. Рівняння такої в'язі мають вигляд

$$f_\nu\left(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t\right) = 0. \qquad \nu = \overline{1,k} \tag{3}$$

Інколи рівняння (3) можуть бути проінтегровані і зведені до вигляду геометричної в'язі.

Відповідно до класифікації Г. Герца, в'язі, які накладені на механічну систему, поділяються на голономні та неголономні.

Голономні в'язі – це геометричні в'язі і ті кінематичні, які в результаті інтегрування можуть бути приведені до вигляду геометричних.

Неголономні в'язі – це кінематичні в'язі, рівняння яких не можуть бути приведені до вигляду геометричних.

16.2. Дійсні та можливі переміщення

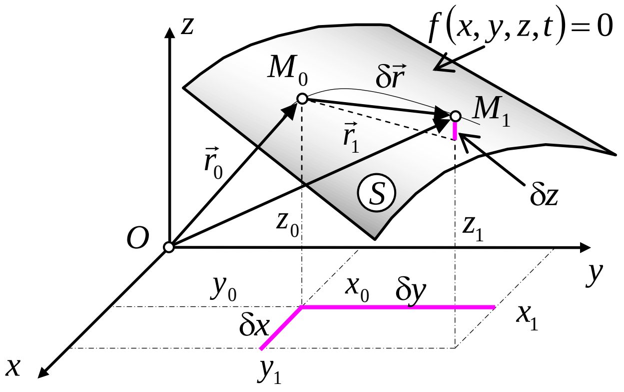
Поняття можливого переміщення слід відрізняти від поняття дійсного переміщення.

Дійсним переміщенням точки механічної системи називається нескінченно мале переміщення, яке здійснюється цією точкою в істинному русі під дією прикладених сил за малий проміжок часу Δt.

Розглянемо поняття можливого та дійсного переміщень на прикладі однієї матеріальної точки, рух якої обмежений голономною утримуючою нестаціонарною в'яззю S:

$$f\left(x, y, z, t\right) = 0. \tag{4}$$

[3] або нерівності



Нехай в момент часу t точка M займає положення $M_0(x_0,y_0,z_0)$, яке визначається радіус-вектором $\vec{r}_0$:

$$\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}\,.$$

<u>Зафіксуємо час</u> і уявно надамо точці M мале переміщення $\delta\vec{r} = \delta x\,\vec{i} + \delta y\,\vec{j} + \delta z\,\vec{k}$ із її положення M_0 таким чином, щоб це переміщення не порушувало в'язь S.

Тоді т. M переміститься в положення $M_1(\underbrace{x_0+\delta x}_{x_1},\underbrace{y_0+\delta y}_{y_1},\underbrace{z_0+\delta z}_{z_1})$ і при цьому $\vec{r}_1=\vec{r}_0+\delta\vec{r}$. Рівняння в'язі в т. M_0 матиме вигляд

$$f(x_0,y_0,z_0,t)=0, \tag{5}$$

а для т. M_1 отримаємо

$$f\left(x_0+\delta x, y_0+\delta y, z_0+\delta z, t\right)=0\,. \tag{6}$$

Розкладемо вираз (6) в ряд за степенями $\delta x,\ \delta y,\ \delta z$ в околі точки M_0

$$f\left(x_0+\delta x, y_0+\delta y, z_0+\delta z, t\right)= f\left(x_0,y_0,z_0,t\right)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\delta x+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\delta y+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}\delta z+ \tag{7}$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0}(\delta x)^2+\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0}(\delta y)^2+\left.\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right|_{M_0}(\delta z)^2+\right.$$

$$\left.+2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{M_0}\delta x\delta y+2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right|_{M_0}\delta y\delta z+2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right|_{M_0}\delta x\delta z\right]+\ldots$$

$\ldots+$ члени вищого порядку мализни.

Зауважимо, що ліва частина в формулі (7) через вираз (6) дорівнює нулю, перший доданок зправа за виразом (5) теж дорівнює нулю.

Перепишемо розвинення (7) з точністю до членів другого порядку мализни:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\delta x+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\delta y+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}\delta z=0\,. \tag{8}$$

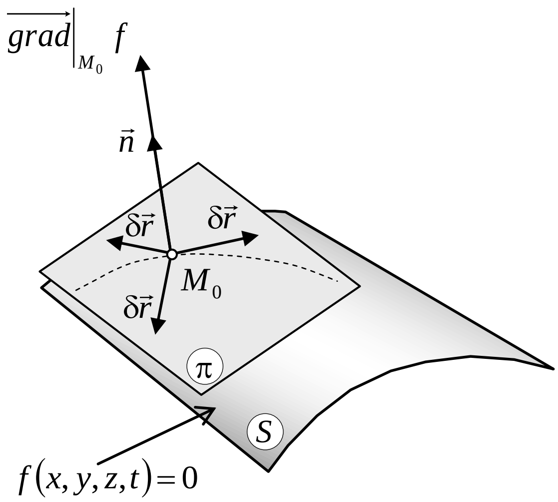
Оскільки

$$\left.\overrightarrow{grad}\right|_{M_0} f\left(x,y,z,t\right)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\vec{i}+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\vec{j}+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}\vec{k}\,,$$

запишемо вираз (8) у вигляді

$$\left.\overrightarrow{grad}\right|_{M_0} f\left(x,y,z,t\right)\cdot\delta\vec{r}=0\,. \tag{9}$$

Відомо, що вектор $\left.\overrightarrow{grad}\right|_{M_0} f$ від деякої функції f завжди напрямлений за нормаллю до поверхні в'язі в точці M_0.



Для виконання умови (9) необхідно, щоб вектор можливого переміщення $\delta\vec{r}$ був розташований у площині π яка є дотичною до поверхні S в точці M_0.

Таким чином, вектор $\delta\vec{r}$ належить дотичній площині π.

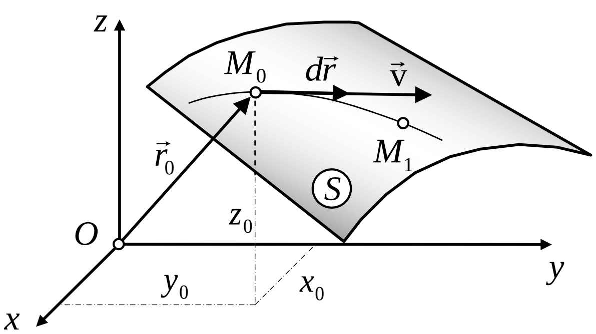
Розглянемо дійсне переміщення тієї ж точки у випадку стаціонарної і нестаціонарної в'язі:

1) Стаціонарна в'язь (поверхня в'язі не змінюється з часом за положенням і формою)

Тоді рівняння такої в'язі набуває вигляду

$$f(x,y,z)=0.$$

У цьому разі поверхня в'язі S повністю містить траєкторію точки.



Як відомо, швидкість $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$, звідки випливає, що $d\vec{r}=\vec{v}dt$. Через проміжок часу dt точка M займе положення $M_1(x_0+dx,\, y_0+dy,\, z_0+dz)$. Очевидно, що проекції dx, dy, dz задовольняють співвідношенню (повний диференціал):

$$df(x,y,z)\big|_{M_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}dx+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}dy+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}dz=0, \tag{10}$$

оскільки у правій частині $f(x,y,z)$ дорівнює нулю.

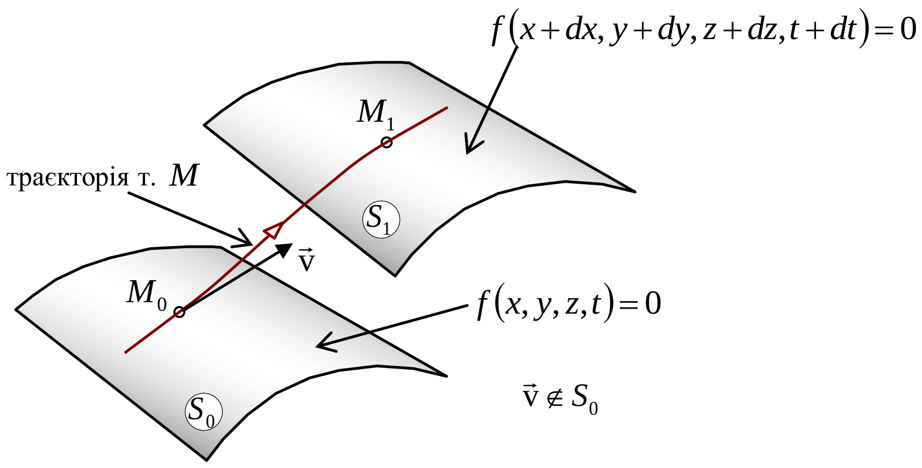
Зауважимо, що за умови $dx=\delta x,\ dy=\delta y,\ dz=\delta z$ вираз (10) збігається з виразом (8).

Висновок: *у разі стаціонарної в'язі дійсне переміщення деякої точки завжди збігається хоча б з одним із можливих переміщень цієї ж точки.*

2) Нестаціонарна в'язь (поверхня в'язі змінюється з часом)

В момент часу t т. M_0 знаходиться на поверхні S_0, яка не містить траєкторію точки, що рухається, оскільки за час dt точка M перейде на нову поверхню S_1, рівняння якої

$$f(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)=0.$$



При цьому проекції дійсного переміщення точки задовольняють умові:

$$f\left(x, y, z, t\right)=0. \tag{11}$$

Візьмемо повний диференціал від обох частин цього виразу:

$$df\left(x, y, z, t\right)\Big|_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{M_0} dx + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{M_0} dy + \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{M_0} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0. \tag{12}$$

Якщо у виразі (12) покласти $dx=\delta x,\ dy=\delta y,\ dz=\delta z$, тоді він не буде збігатися з виразом (8), оскільки $\frac{\partial f}{\partial t} dt \neq 0$.

Висновок: *у разі нестаціонарної в'язі дійсне переміщення $d\vec{r}$ деякої точки не співпадає з жодним із можливих переміщень $\delta\vec{r}$ цієї точки, що допускаються в'яззю, накладеною на т. M.*

Узагальнимо викладене на випадок k в'язей, накладених на точки механічної системи.

Можливим переміщенням механічної системи називається будь-яка сукупність можливих переміщень її точок, що допускаються в'язями.

Іншими словами, можливі переміщення механічної системи – це такі нескінченно малі уявні переміщення $\delta\vec{r}_1,\ \delta\vec{r}_2,\ \ldots,\ \delta\vec{r}_n$ із даного положення при фіксованому часі, за яких задовольняються рівності:

$$\delta f_\nu = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_\nu}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_\nu}{\partial z_i}\delta z_i\right). \qquad \nu = \overline{1, k} \tag{13}$$

16.3. Можлива робота

Елементарна робота сил $\vec{F}_i$, що прикладені до точок механічної системи, на дійсних переміщеннях $d\vec{r}_i$ обчислюється за формулою

$$\boxed{d'A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i}.$$

Надамо всім n точкам системи можливі переміщення $\delta\vec{r}_i$ ($i = \overline{1,n}$) при фіксованому часі. Складемо вираз

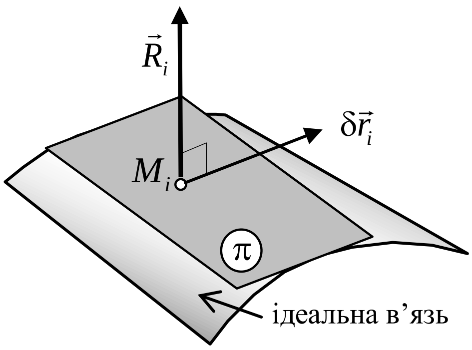
$$\delta A = \sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i \,, \tag{14}$$

який є можливою роботою сил, прикладених до точок даної механічної системи, на можливих переміщеннях $\delta\vec{r}_i$ цих точок. Цей вираз можна переписати через проекції:

$$\delta A = \sum \left(F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i \right). \tag{15}$$

16.4. Ідеальні в'язі. Можлива робота реакцій ідеальних в'язей

В'язі називаються *ідеальними*, якщо сума можливих робіт реакцій цих в'язей на будь-яких можливих переміщеннях точок системи дорівнює нулю:



$$\delta A^R = \sum \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{16}$$

Вираз (7) називають *постулатом ідеальних в'язей*.

16.5. Число степенів вільності механічної системи

Знайдемо аналітичний вираз обмежень, що накладаються на можливі переміщення точок системи голономними, стаціонарними, утримуючими в'язями виду

$$f_\nu\left(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n\right) = 0\,. \tag{17}$$

Нехай маємо вільну механічну систему з n матеріальних точок, кожній з яких надамо можливе переміщення $\delta\vec{r}_i$ ($i = \overline{1,n}$); проекції цих переміщень на осі координат складають набір

$$\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \ldots, \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n\,. \tag{18}$$

Їх число $3n$. Вони є незалежними між собою.

У випадку невільної механічної системи, на яку накладені в'язі вигляду (17), між можливими переміщеннями з набору (18) існують залежності в силу існування (17).

Таким чином, число незалежних можливих переміщень складатиме

$$s = 3n - k\,. \tag{19}$$

<u>Означення</u>: *число незалежних параметрів (можливих переміщень), які однозначно визначають положення даної механічної системи, називається <u>числом степенів вільності</u> цієї системи.*

16.6. Принцип можливих переміщень

1.Загальне рівняння статики

Для <u>рівноваги</u> механічної системи, що підкорена ідеальним утримуючим стаціонарним в'язям, необхідно і достатньо, щоб дорівнювала нулю можлива робота активних сил на будь-яких можливих переміщеннях точок системи із розглядуваного положення рівноваги.[4]

Д о в е д е н н я

<u>Необхідність</u>

Нехай механічна система, що складається з n матеріальних точок, знаходиться в рівновазі і підкоряється утримуючим стаціонарним ідеальним в'язям. Застосувавши аксіому про звільнення від в'язей, замінимо дію в'язей відповідними реакціями. Тоді на систему будуть діяти активні сили $\vec{F}_i^a$ і реакції в'язей $\vec{R}_i$. Як відомо (із курсу статики), механічна система знаходиться в рівновазі, якщо кожна точка цієї системи знаходиться в рівновазі. Із цього випливає, що для кожної точки механічної системи виконується умова:

$$\vec{F}_i^a + \vec{R}_i = \vec{0}, \qquad i = \overline{1,n} \tag{20}$$

де $\vec{F}_i^a$ - рівнодійна всіх активних сил, що діють на i-ту точку;

$\vec{R}_i$ - рівнодійна всіх реакцій в'язей, що діють на i-ту точку.

Надамо всім точкам даної механічної системи можливі переміщення $\delta\vec{r}_i$, тоді домножуючи скалярно вирази (20) на $\delta\vec{r}_i$ і додаючи отримані рівняння, матимемо

$$\sum \vec{F}_i^a \cdot \delta\vec{r}_i + \sum \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \tag{21}$$

Беручи до уваги постулат ідеальних в'язей ($\sum \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$), отримаємо

$$\boxed{\sum \vec{F}_i^a \cdot \delta\vec{r}_i = 0}, \tag{22}$$

або

$$\delta A = \sum \left(F_{ix}^a \delta x_i + F_{iy}^a \delta y_i + F_{iz}^a \delta z_i \right) = 0, \tag{23}$$

що і треба було довести.

Вирази (22) і (23) називаються *загальним рівнянням статики*, вони є також математичним виразом *принципа можливих переміщень* у разі утримуючих в'язей.[5]

<u>Достатність</u>

Припустимо, що виконується умова (22). Покажемо, що при цьому механічна система, яка підкорена утримуючим ідеальним в'язям, знаходиться в рівновазі.

Припустимо, що механічна система починає рухатися з деякого моменту часу. Обмежимось випадком стаціонарних в'язей (тоді дійсні переміщення входять у число

---

[4] Нагадаємо, що *положенням статичної рівноваги* називається таке положення механічної системи, в якому вона буде знаходитися весь час, якщо в початковий момент часу вона знаходилась в цьому положенні і швидкості всіх її точок дорівнювали нулю.

[5] Зауважимо, що неутримуючу в'язь називають ще *односторонньою*, а утримуючу – *двосторонньою*.

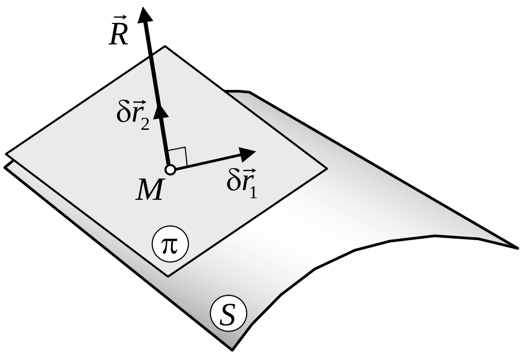
можливих). Застосовуючи теорему про зміну кінетичної енергії системи, враховуючи, що $\delta T > 0$, і беручи до уваги те, що $\sum \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$, отримаємо

$$\delta T = \delta A = \sum \left(\vec{F}_i^a + \vec{R}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i > 0,$$

де $\delta \vec{r}_i$ - ті можливі переміщення точок системи, з якими співпадають дійсні переміщення $d\vec{r}_i$. Однак остання нерівність суперечить умові (21).

Таким чином теорема доведена.

Розглянемо випадок ідеальної неутримуючої в'язі. Нагадаємо, що у разі ідеальної утримуючої в'язі можливе переміщення $\delta \vec{r}_1$ знаходиться у дотичній площині π.



В нашому випадку (неутримуючої в'язі), якщо в'язь є стаціонарною, можливими переміщеннями будуть: переміщення $\delta \vec{r}_1$, розташоване у дотичній площині π, і переміщення $\delta \vec{r}_2$, напрямлене вздовж реакції в'язі.

Розглянемо роботу реакції в'язі на можливих переміщеннях $\delta \vec{r}_1$ і $\delta \vec{r}_2$:

$$\delta A = \vec{R} \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{R} \cdot \delta \vec{r}_2 \ge 0,$$

де $\vec{R} \cdot \delta \vec{r}_1 = 0$ через постулат ідеальних в'язей.

Таким чином, з виразу (21) у разі неутримуючих в'язей матимемо

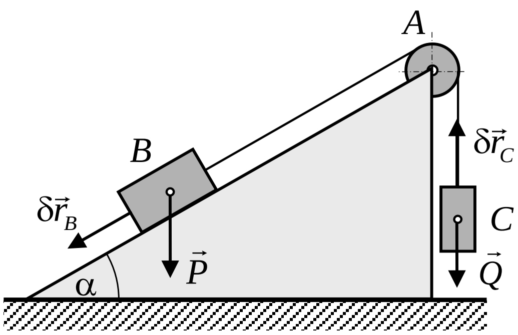
$$\sum \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i \le 0. \qquad (24)$$

Співвідношення (24) є математичним виразом принципа можливих переміщень для <u>неутримуючих</u> в'язей.

<u>Задача 1</u>

На гладенькій похилій площині лежить тягар B вагою P (див. рисунок). Тягар B утримується ниткою, перекинутою через блок A, до іншого кінця якої прикріплено тягар C вагою Q.

При якому куті α нахилу площини до горизонту тягарі будуть знаходитися в рівновазі?



Р о з в ' я з а н н я

Дана механічна система, що складається з двох тіл B і C, є невільною. В'язями є похила площина і нитка, які розглядаються як ідеальні. Застосуємо для розв'язання задачі загальне рівняння статики (22).

Активними силами є $\vec{P}$ і $\vec{Q}$.

Встановимо можливі переміщення тіл B і C, розглядаючи їх як матеріальні точки, які співпадають з центрами мас тіл.

Перша в'язь – похила площина – допускає переміщення тягаря B вздовж неї. Позначимо це можливе переміщення $\delta\vec{r}_B$.

Друга в'язь – нитка – допускає вертикальне переміщення тягаря C. Введемо можливе переміщення тягаря C - $\delta\vec{r}_C$ (нитка перекинута через нерухомий блок, який лише змінює напрямок можливого переміщення, тобто, якщо тягар B рухається вздовж площини вниз, то тягар C піднімається вверх).

Вираз можливої роботи сил $\vec{P}$ і $\vec{Q}$ на відповідних можливих переміщеннях $\delta\vec{r}_B$ і $\delta\vec{r}_C$ має вигляд

$$\delta A = \vec{P}\cdot\delta\vec{r}_B + \vec{Q}\cdot\delta\vec{r}_C = 0,$$

звідки, помітивши, що $\delta r_C = \delta r_B$ (адже нитка є ідеальною, тобто нерозтяжною), отримаємо

$$\delta A = \left(P\sin\alpha - Q\right)\delta r_B = 0. \qquad (25)$$

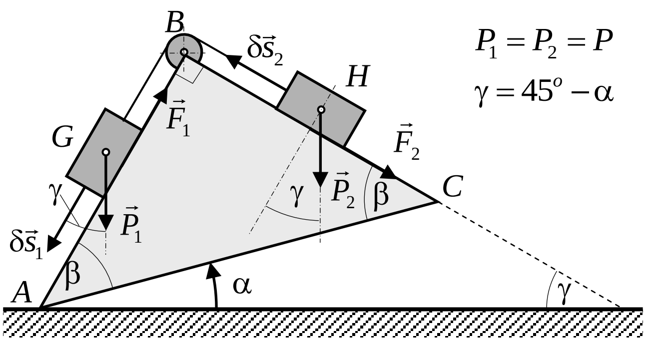
Оскільки рівняння (25) повинно виконуватися на всіх можливих переміщеннях $\delta\vec{r}_B$, тому

$$P\sin\alpha - Q = 0 \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha = \frac{Q}{P} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\alpha = \arcsin\left(\frac{Q}{P}\right)}.$$

Задача 2

Два тягаря G і H мають вагу P кожний і зв'язані нерозтяжною мотузкою, перекинутою через невагомий блок B (див. рисунок). Коефіцієнт тертя ковзання між тягарями та гранями AB і BC призми дорівнює k. Кути призми дорівнюють: $\angle BAC = \angle BCA = \beta = 45^o$; $\angle ABC = 90^o$.

Нехтуючи тертям мотузки по блоку, знайти кут α, при якому тягар G починає спускатися.



Р о з в ' я з а н н я

Використаємо для розв'язання задачі загальне рівняння статики (22) із попередньої лекції.

Активними силами є сили ваги $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$, а також сили тертя ковзання $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Нормальні складові реакцій граней призми не показані, оскільки їх робота на можливих переміщеннях тіл даної системи дорівнює нулю.

Накладені на систему в'язі (мотузка та грані призми) допускають тільки переміщення тягарів по гранях. Отже можливим переміщенням тягаря G вздовж AB

буде $\delta\vec{s}_1$. Таке ж за величиною можливе переміщення $\delta\vec{s}_2$ буде мати і інший тягар H, оскільки нерозтяжна мотузка, що з'єднує обидва тягаря, перекинута через невагомий блок з нерухомою віссю обертання [6], тобто $\delta s_1 = \delta s_2 = \delta s$.

Сили тертя ковзання можна визначити через сили нормального тиску:

$$F_1 = kN_1 = kP_1\cos\left(90^o - \gamma\right) = kP\cos\left(45^o + \alpha\right),$$
$$F_2 = kN_2 = kP_2\cos\gamma = kP\cos\left(45^o - \alpha\right) = kP\sin\left(45^o + \alpha\right).$$

Тоді, застосовуючи загальне рівняння статики, отримаємо:

$$\begin{aligned}\delta A &= \vec{P}_1\cdot\delta\vec{s}_1 + \vec{F}_1\cdot\delta\vec{s}_1 + \vec{P}_2\cdot\delta\vec{s}_2 + \vec{F}_2\cdot\delta\vec{s}_2 = P\delta s\cos\gamma - F_1\delta s + P\delta s\cos\left(90^o + \gamma\right) - F_2\delta s = \\ &= P\delta s\sin\left(45^o + \alpha\right) - kP\delta s\cos\left(45^o + \alpha\right) - P\delta s\cos\left(45^o + \alpha\right) - kP\delta s\sin\left(45^o + \alpha\right) = 0\end{aligned}$$

звідки матимемо

$$\mathrm{tg}\left(45^o + \alpha\right) - 1 = k\left[1 + \mathrm{tg}\left(45^o + \alpha\right)\right] \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\mathrm{tg}\left(45^o + \alpha\right) - 1}{1 + \mathrm{tg}\left(45^o + \alpha\right)} = \mathrm{tg}\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha = \mathrm{arctg}\,k}.$$

2. Умови рівноваги вільного і невільного твердого тіла

Розглянемо вільне тіло, до якого прикладена система сил $\left\{\vec{F}_i\right\}_{i=1}^{n}$ (див. п.13.9, присвячений обчисленню елементарної роботи сил, що прикладені до твердого тіла, яке здійснює вільний рух).

Надамо можливе переміщення $\delta\vec{r}_O$ точці, що називається *полюсом* (т. O), і можливе кутове переміщення $\delta\vec{\varphi}_O$, яке відповідає повороту тіла навколо полюса.

Складемо вираз можливої роботи сил, що прикладені до даного тіла, на вказаних можливих переміщеннях:

$$\delta A = \vec{F}_O\cdot\delta\vec{r}_O + \vec{M}_O\cdot\delta\vec{\varphi}_O. \tag{26}$$

Із принципа можливих переміщень випливає, що $\delta A = 0$, тобто

$$\vec{F}_O\cdot\delta\vec{r}_O + \vec{M}_O\cdot\delta\vec{\varphi}_O = 0. \tag{27}$$

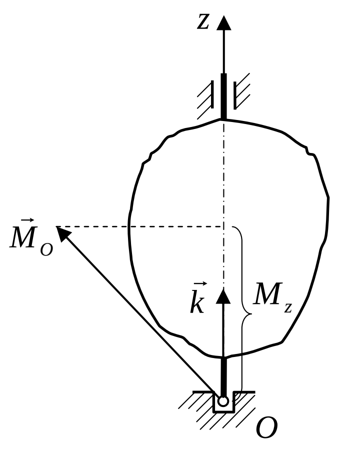
Оскільки $\delta\vec{r}_O$ і $\delta\vec{\varphi}_O$ незалежні, для виконання умови (27) необхідно і достатньо, щоб виконувалися такі умови:

$$\vec{F}_O = \vec{0}, \quad \vec{M}_O = \vec{0}. \tag{28}$$

Це є умови рівноваги вільного тіла у векторній формі. У скалярній формі вирази (28) набудуть вигляду

$$\begin{cases}\sum F_{ix} = 0,\\ \sum F_{iy} = 0,\\ \sum F_{iz} = 0;\end{cases} \qquad \begin{cases}\sum M_x\left(\vec{F}_i\right) = 0,\\ \sum M_y\left(\vec{F}_i\right) = 0,\\ \sum M_z\left(\vec{F}_i\right) = 0.\end{cases} \tag{29}$$

[6] Таким чином, цей блок змінює лише напрямок можливого переміщення, а величина його залишається сталою.



Для тіла, що обертається навколо нерухомої осі, якщо вибрати полюс O на осі обертання, матимемо: $\delta\vec{r}_O = \vec{0}$, а вираз (2) перетвориться на $\delta A = \vec{M}_O \cdot \delta\vec{\varphi}_O = 0$, або $\delta A = \vec{M}_O \cdot \delta\varphi_O \vec{k} = \vec{M}_O \cdot \vec{k}\delta\varphi_O = M_z \delta\varphi_O = 0$, звідки випливає, що $M_z = 0$, або

$$\boxed{\sum M_z\left(\vec{F}_i\right) = 0}. \tag{30}$$

Вираз (30) є умовою рівноваги тіла з нерухомою віссю обертання.

16.7. Принцип Д'Аламбера-Лагранжа (загальне рівняння динаміки)

Розглянемо механічну систему, що складається з n матеріальних точок (і знаходиться в русі).

Застосуємо ІІ-й закон Ньютона, доповнений аксіомою про звільнення від в'язей:

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i. \tag{31}$$

Якщо застосувати принцип Д'Аламбера для кожної точки системи, то отримаємо

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = \vec{0}, \tag{32}$$

де $\vec{\Phi}_i = -m_i\vec{a}_i$ - даламберова сила інерції.

Надамо кожній точці можливе переміщення $\delta\vec{r}_i$ і домножимо на нього скалярно кожне рівняння (32), після чого знайдемо суму цих рівнянь за всіма точками системи:

$$\sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \sum \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \sum \vec{\Phi}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \tag{33}$$

Через те, що система підкорена ідеальним утримуючим (двостороннім) в'язям, другий доданок у формулі (33) дорівнює нулю, і тоді маємо

$$\boxed{\sum\left(\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i = 0} \tag{34}$$

загальне рівняння динаміки, яке є також математичним записом принципу Д'Аламбера-Лагранжа у разі утримуючих в'язей.

Принцип Д'Аламбера-Лагранжа:

при русі механічної системи, яка підкорена ідеальним утримуючим в'язям, необхідно щоб сума можливих робіт активних сил і сил інерції на будь-яких можливих переміщеннях точок механічної системи дорівнювала нулю:

$$\delta A^a + \delta A^\Phi = 0. \tag{35}$$

У разі неутримуючих ідеальних в'язей запис принципу Д'Аламбера-Лагранжа має вигляд:

$$\boxed{\sum\left(\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i \le 0}. \tag{36}$$

Лекція 17

Рівняння Лагранжа ІІ-го роду

17.1. Узагальнені координати

У якості незалежних координат, які однозначно визначають положення механічної системи, виберемо s-координат з числа $3n$-декартових координат і позначимо їх $q_1, q_2, \ldots, q_s$, або q_j $(j = \overline{1,s})$. Тоді декартові координати є функціями незалежних координат і, можливо, часу. Виразимо через q_j координати всіх точок даної системи наступним чином:

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t), \\ y_i = y_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t), \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t). \end{cases} \tag{1}$$

Візьмемо варіації лівої і правої частин виразу (1), беручи до уваги, що при варіюванні час t вважається сталим:

$$\begin{cases} \delta x_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \dfrac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s = \sum\limits_{j=1}^{s} \dfrac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j, \\ \delta y_i = \dfrac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial y_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \dfrac{\partial y_i}{\partial q_s}\delta q_s = \sum\limits_{j=1}^{s} \dfrac{\partial y_i}{\partial q_j}\delta q_j, \\ \delta z_i = \dfrac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial z_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \dfrac{\partial z_i}{\partial q_s}\delta q_s = \sum\limits_{j=1}^{s} \dfrac{\partial z_i}{\partial q_j}\delta q_j. \end{cases} \tag{2}$$

Із рівнянь (2) випливає, що всі $3n$ можливих переміщень в декартових координатах виражаються через s незалежних координат, число яких співпадає з числом степенів вільності.

Незалежні змінні q_j $(j = \overline{1,s})$, які однозначно визначають положення точок даної системи, називаються *узагальненими координатами.*

Висновок: *число степенів вільності механічної системи дорівнює числу узагальнених координат і дорівнює числу незалежних можливих переміщень, які можна надати точкам механічної системи з даного положення у фіксований момент часу.*

Рівняння (1) показують зв'язок декартових координат з узагальненими.

Таким чином введення незалежних змінних - узагальнених координат - дозволяє не розглядати рівняння голономних в'язей.

Узагальнені швидкості – перші похідні за часом від відповідних узагальнених координат: $\dot{q}_j = \dfrac{dq_j}{dt}$.

Знайдемо зв'язок між узагальненими і звичайними швидкостями $\mathrm{v}_i = \dfrac{d\vec{r}_i}{dt}$. Оскільки $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t)$, тому матимемо:

$$\mathrm{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \ldots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\frac{dt}{dt} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t},$$

або остаточно

$$\boxed{\vec{v}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}}. \qquad (3)$$

Цей вираз показує зв’язок між лінійними і узагальненими швидкістями точок механічної системи.

17.2. Узагальнені сили і способи їх обчислення

Розглянемо механічну систему, на точки якої діють сили $\{\vec{F}_i\}$. Дамо можливі переміщення $\delta\vec{r}_i$ цим точкам. Запишемо вираз можливої роботи сил на вказаних можливих переміщеннях:

$$\delta A = \sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i \,. \qquad (4)$$

Варіація $\delta\vec{r}_i$ вектора $\vec{r}_i$ має вигляд

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \,. \qquad (5)$$

Якщо підставити вираз (5) в (4), матимемо

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j \,.$$

Позначимо через Q_j коефіцієнт, що стоїть біля варіації узагальненої координати, тобто

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \qquad (6)$$

Він називається *узагальненою силою*.

Тоді вираз для можливої роботи запишеться наступним чином:

$$\boxed{\delta A = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j}, \qquad (7)$$

або $\delta A = \sum_{j=1}^{s} \delta A_j$, де, в свою чергу, $\delta A_j = Q_j \delta q_j$.

Зауважимо, що розмірність узагальненої сили не завжди співпадає з розмірністю сили, оскільки $[Q_j] = [F][r][q]^{-1}$. У разі, коли розмірність узагальненої координати є розмірність довжини, розмірність узагальненої сили співпадає з розмірністю звичайної сили; якщо ж розмірність узагальненої координати являє собою розмірність кута повороту, тоді розмірність узагальненої сили є розмірністю моменту сили.

<u>*Способи обчислення узагальненої сили*</u>

1) $Q_j = \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right).$

2) Для обчислення узагальненої сили за другим способом необхідно надати механічній системі таке можливе переміщення, для якого варіація відповідної узагальненої координати $\delta q_j \neq 0$, в той же час всі інші варіації узагальнених координат дорівнюють нулю ($\delta q_\nu = 0$, $\nu \neq j$, $\nu = \overline{1, s}$). Далі треба обчислити роботу всіх активних сил на відповідних можливих переміщеннях

$$\delta A = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \,,$$

тоді узагальнену силу Q_j можна знайти як

$$\boxed{Q_j = \frac{\delta A}{\delta q_j}}. \tag{8}$$

3) $Q_j = \dfrac{\partial A}{\partial q_j}$, що часто використовується при розв'язанні задач.

17.3. Тотожності Лагранжа

Розглянемо механічну систему, що складається з n матеріальних точок, рух якої обмежений k голономними, ідеальними, утримуючими, стаціонарними в'язями вигляду

$$f_\nu \left(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n\right) = 0 \,. \qquad (\nu = \overline{1,k}\,)$$

Нехай стан такої системи визначається s узагальненими координатами q_j ($j = \overline{1,s}$, s - число степенів вільності).

Доведемо справедливість наступних допоміжних співвідношень, необхідних при виведенні рівнянь Лагранжа II-го роду:

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}{\partial \dot{q}_j}\,, \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}{\partial q_j}\,. \tag{10}$$

Ці співвідношення називаються *тотожностями Лагранжа*.

Для доведення першої тотожності Лагранжа візьмемо повну похідну за часом t від радіус-вектора $\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1, \ldots, q_s, t\right)$:

$$\vec{\mathrm{v}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\,. \tag{11}$$

Візьмемо частинну похідну за узагальненою швидкістю $\dot{q}_j$ від обох частин цього співвідношення, враховуючи, що $\dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ і $\dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$ не залежать від $\dot{q}_j$. Отримуємо першу тотожність:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\,. \tag{12}$$

Для доведення другої тотожності (12) візьмемо частинну похідну за узагальненою координатою від виразу $\dfrac{d\vec{r}_i}{dt}$. На підставі (12) маємо

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_1 \partial q_j}\dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_s \partial q_j}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j}\,. \tag{13}$$

У загальному випадку $\dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ залежить від всіх узагальнених координат q_j ($j = \overline{1,s}$) і часу t.

Отже, -

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_1}\dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t}\,. \tag{14}$$

Оскільки праві частини виразів (13) і (14) дорівнюють одна одній, то відповідно є рівними і їх ліві частини. В результаті отримуємо шукану тотожність:

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)=\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right). \tag{15}$$

17.4. Виведення рівнянь Лагранжа II-го роду

Скористаємось загальним рівнянням динаміки

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i-m_i\vec{a}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i=0,$$

переписавши його у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{a}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0. \tag{16}$$

Перейдемо в останньому рівнянні до узагальнених координат, беручи до уваги вираз

$$\delta A=\sum_{j=1}^{s}Q_j\delta q_j,$$

або

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{j=1}^{s}Q_j\delta q_j. \tag{17}$$

Перейдемо до узагальнених координат у тих членах рівняння (16), що залишилися. Спочатку перетворимо їх наступним чином:

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{a}_i\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{n}m_i\underbrace{\frac{d\vec{\mathrm{v}}_i}{dt}}_{=\vec{w}_i}\cdot\underbrace{\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j}_{=\delta\vec{r}_i}=\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\vec{\mathrm{v}}_i}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j. \tag{18}$$

Перетворимо потім вираз, який стоїть у дужках, з урахуванням тотожностей Лагранжа за формулою диференціювання скалярного добутку двох векторів

$(\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}_{1}=\underbrace{\frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b}}_{2}+\underbrace{\vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}}_{3})$:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\vec{\mathrm{v}}_i}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}}_{2}=\underbrace{\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\mathrm{v}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}}_{1}-\underbrace{\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\mathrm{v}}_i\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)}_{3}=$$

(тут $\vec{a}=m_i\vec{\mathrm{v}}_i$, $\vec{b}=\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$; далі використаємо у члені 1 першу тотожність Лагранжа, змінюючи також у всіх доданках порядок виконання операцій додавання і взяття похідних)

$$=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\mathrm{v}}_i\cdot\frac{\partial\vec{\mathrm{v}}_i}{\partial\dot{q}_j}-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\mathrm{v}}_i\cdot\frac{\partial\vec{\mathrm{v}}_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\mathrm{v}_i^2}{2}-\frac{\partial}{\partial q_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\mathrm{v}_i^2}{2}.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\mathrm{v}_i^2}{2}$ являє собою кінетичну енергію T механічної системи, остаточно отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\vec{\mathrm{v}}_i}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

Таким чином,

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{a}_i\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j. \tag{19}$$

На підставі (17) і (19) загальне рівняння динаміки (16) набуває вигляду

$$\sum_{j=1}^{s}\left(Q_j-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}+\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j=0. \qquad (20)$$

Оскільки варіації узагальнених координат δq_j є довільними і незалежними між собою, то, щоб співвідношення (20) виконувалось при будь-яких δq_j необхідно, щоб одночасно обертались в нуль всі коефіцієнти біля них:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j}. \qquad \left(j=\overline{1,s}\right) \qquad (21)$$

Рівняння (21) називаються *рівняннями Лагранжа ІІ-го роду*.

17.5. Рівняння Лагранжа ІІ-го роду для консервативних систем

Якщо всі сили, що діють на механічну систему, є *потенціальними*, то така система називається *консервативною*. Встановимо вид рівнянь Лагранжа ІІ-го роду для таких систем.

В цьому разі узагальнені сили визначаються через потенціальну енергію Π механічної системи, тобто

$$Q_j=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}. \qquad \left(j=\overline{1,s}\right) \qquad (22)$$

Підставляючи цей вираз в рівняння Лагранжа ІІ-го роду (21), отримуємо

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}. \qquad \left(j=\overline{1,s}\right) \qquad (23)$$

Оскільки потенціальна енергія механічної системи є функцією тільки узагальнених координат, тобто $\Pi=\Pi(q_1,\ldots,q_s)$, то частинна похідна від цієї функції за узагальненими швидкостями $\dot q_j$ дорівнює нулю. Тому вираз (23) можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial \dot q_j}-\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial q_j}=0. \qquad \left(j=\overline{1,s}\right) \qquad (24)$$

Введемо позначення

$$T-\Pi=\mathcal{L}. \qquad (25)$$

Функція $\mathcal{L}=T-\Pi$ називається *функцією Лагранжа* або *кінетичним потенціалом механічної системи*.

За допомогою функції Лагранжа рівняння (9) набувають наступної форми запису

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_j}-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}=0. \qquad \left(j=\overline{1,s}\right) \qquad (26)$$

Ці рівняння називаються *рівняннями Лагранжа ІІ-го роду для консервативних систем*.

Якщо на механічну систему окрім потенціальних сил діють які небудь інші (непотенціальні) сили, то рівняння руху такої системи набувають вигляду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_j}-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}=Q'_j, \qquad \left(j=\overline{1,s}\right) \qquad (27)$$

де Q'_j - непотенціальні узагальнені сили.

17.6. Узагальнений інтеграл енергії

Розглянемо механічну систему, для якої функція Лагранжа $\mathscr{L}$ залежить у загальному випадку від часу t, узагальнених координат q_j і узагальнених швидкостей $\dot{q}_j$, тобто

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\left(t,\ q_j,\ \dot{q}_j\right). \tag{28}$$

Візьмемо повну похідну за часом від цієї функції:

$$\frac{d\mathscr{L}}{dt} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j . \tag{29}$$

Припустимо, що на механічну систему діють тільки потенціальні сили. Тоді рівняння Лагранжа II-го роду мають вигляд

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j} = 0. \qquad \left(j = \overline{1,s}\right)$$

З урахуванням цих рівнянь вираз (14) набуде вигляду

$$\frac{d\mathscr{L}}{dt} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right).$$

Якщо перенести члени, які містять суму, в ліву частину рівняння, та змінити порядок додавання та диференціювання, то знаходимо

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathscr{L}\right) = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}. \tag{30}$$

Якщо функція $\mathscr{L}$ явно від часу t не залежить, то $\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} = 0$ і з виразу (30) отримаємо

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathscr{L}\right) = 0.$$

Звідси після інтегрування матимемо

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathscr{L} = C. \qquad (C = const) \tag{31}$$

Отриманий інтеграл називається *узагальненим інтегралом енергії*. Зауважимо, що у загальному випадку він не співпадає з повною механічною енергією системи $E = const = T + \Pi$.

17.7. Порівняльне розв'язання задачі моделювання руху різними методами динаміки та аналітичної механіки на прикладі механічної системи з одним степенем вільності[7]

Задача

Механічна система починає рух із стану спокою під дією сил ваги; початкове положення системи вказано на рис. 1. Враховуючи тертя ковзання тіла 1 і опір коченню тіла 3, що котиться без ковзання, нехтуючи іншими силами опору і масами ниток, що припускаються нерозтяжними, визначити швидкість і прискорення тіла 1 в той момент, коли пройдений ним шлях дорівнюватиме S. Необхідні розміри і дані наведені нижче.

Дано:

$m_1 = m_2 = m,\ m_3 = 2m;\ \ S = 1{,}2$ м; $R_2 = R_3 = 20$ см, $r_2 = \frac{3}{4}R_2,\ i_{2z} = 16$ см;

$\alpha = 30^o,\ \beta = 45^o;\ f = 0{,}2;\ \sigma = 0{,}32$ см.

[7] Нумерація формул в цьому розділі є автономною.

Знайти: $\mathrm{v}\big|_{S=1{,}2\text{ м}}$, $a\big|_{S=1{,}2\text{ м}}$.

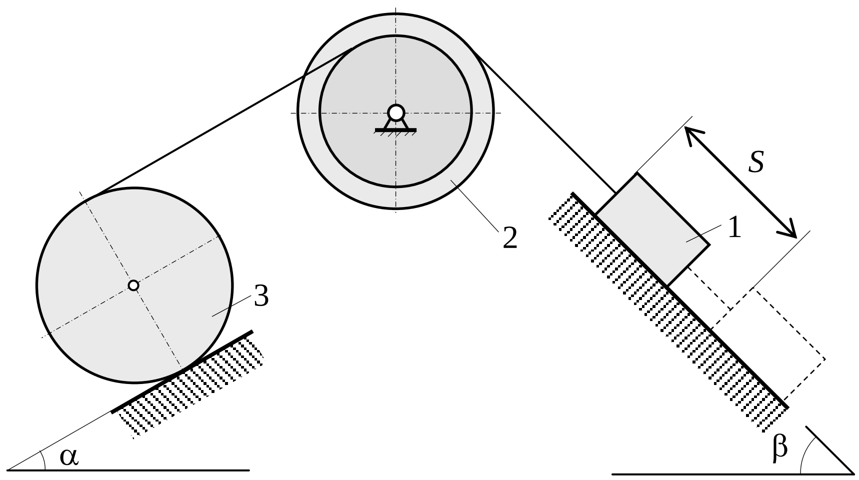


Рис. 1. Вихідна схема.

Р о з в ’ я з а н н я

1. Застосування теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи

Для розв’язання задачі застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи в інтегральній формі

$$T_{\text{к}} - T_{\text{п}} = A^{(e)} + A^{(i)}. \tag{32}$$

З умови задачі випливає, що початкова швидкість тіла 1 дорівнює нулю, тобто $\mathrm{v}_0 = 0$, тому $T_{\text{п}} = 0$. Оскільки система складається з абсолютно твердих тіл, а в’язі, накладені на систему є ідеальними (сили тертя віднесемо до категорії активних сил), тому сума робіт внутрішніх сил, прикладених до точок системи, дорівнюватиме нулю, тобто $A^{(i)} = 0$.

Таким чином рівняння (32) спроститься до

$$T_{\text{к}} = A^{(e)}. \tag{33}$$

Вихідна задача тепер розділяється на дві окремі:

- визначення кінетичної енергії системи у кінцевий момент часу ($T_{\text{к}}$);
- визначення роботи $A^{(e)}$ зовнішніх сил, прикладених до точок системи.

а) Визначення $T_{\text{к}}$

Оскільки система складається з трьох абсолютно твердих тіл, що рухаються, то її кінетична енергія дорівнюватиме:

$$T_{\text{к}} = T_1 + T_2 + T_3, \tag{34}$$

де T_1, T_2, T_3 - кінетична енергія тіл 1, 2 і 3 відповідно.

Тіло 1 рухається поступально, тому (див. рис. 2):

$$T_1 = \tfrac{1}{2} m_1 \mathrm{v}^2 = \tfrac{1}{2} m \mathrm{v}^2.$$

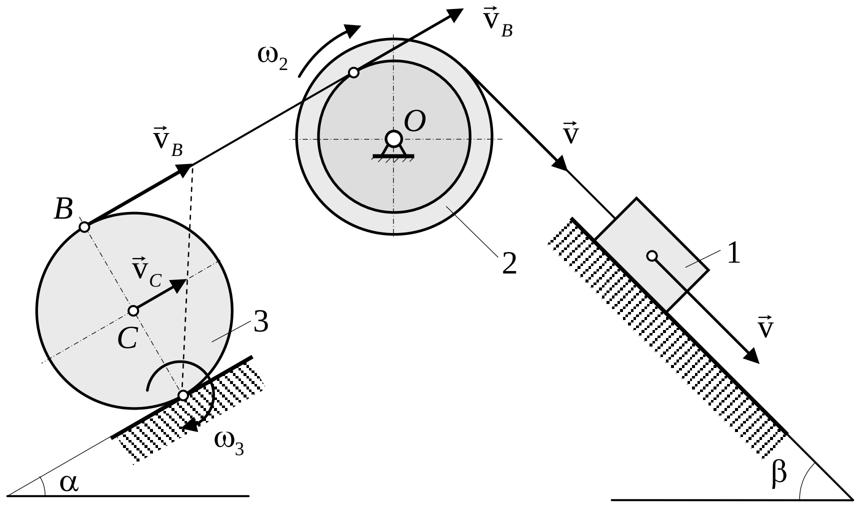


Рис. 2. До визначення кінетичної енергії досліджуваної механічної системи.

Тіло 2 здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі:

$$T_2 = \tfrac{1}{2} I_0 \omega_2^2,$$

де I_0 - момент інерції тіла 2 відносно нерухомої осі Oz:

$$I_0 = m_2 i_{2z}^2,$$

а i_{2z} - радіус інерції тіла 2.

За формулою Ейлера кутова швидкість тіла 2 дорівнюватиме $\omega_2 = \mathrm{v}/R_2$. Тому остаточно матимемо

$$T_2 = \tfrac{1}{2} m_2 i_{2z}^2 \left(\frac{\mathrm{v}}{R_2}\right)^2 = \tfrac{1}{2} m i_{2z}^2 \frac{\mathrm{v}^2}{R_2^2} = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}\left(\frac{0{,}16}{0{,}20}\right)^2 = \frac{8}{25} m\mathrm{v}^2, \text{ Дж.}$$

Тіло 3 здійснює плоскопаралельний рух, тому

$$T_3 = \tfrac{1}{2} m_3 \mathrm{v}_C^2 + \tfrac{1}{2} I_C \omega_3^2,$$

де $\mathrm{v}_C = \tfrac{1}{2}\mathrm{v}_B$ - швидкість центра мас тіла 3. У свою чергу

$$\mathrm{v}_B = \omega_2 r_2 = \frac{\mathrm{v}}{R_2} r_2 = \frac{\mathrm{v}}{R_2}\frac{3}{4} R_2 = \frac{3}{4}\mathrm{v}, \text{ тому } \mathrm{v}_C = \frac{3}{8}\mathrm{v}.$$

Момент інерції I_C тіла 3 (суцільний однорідний циліндр) відносно його центральної осі складає $I_C = \tfrac{1}{2} m_3 R_3^2 = \tfrac{1}{2} 2m \cdot 0{,}2^2 = 0{,}04m,\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$. Кутова швидкість обертального руху тіла 3 навколо МЦШ (т. P):

$$\omega_3 = \frac{\mathrm{v}_C}{CP} = \frac{\tfrac{3}{8}\mathrm{v}}{R_3} = \frac{3}{1{,}6}\mathrm{v}, \text{ рад/с}.$$

Тоді для T_3 отримаємо такий вираз:

$$T_3 = \tfrac{1}{2} 2m\left(\tfrac{3}{8}\mathrm{v}\right)^2 + \tfrac{1}{2} 0{,}04m\left(\tfrac{3}{1{,}6}\mathrm{v}\right)^2 = m\mathrm{v}^2\left(\tfrac{9}{64} + \tfrac{9}{128}\right) = \tfrac{27}{128} m\mathrm{v}^2, \text{ Дж.}$$

Далі за формулою (3) обчислюємо кінетичну енергію системи в кінцевий момент часу:

$$T_\text{к} = m\mathrm{v}^2\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{8}{25} + \tfrac{27}{128}\right) = \frac{m\mathrm{v}^2}{25\cdot 128}\left(25\cdot 64 + 8\cdot 128 + 27\cdot 25\right) = \frac{3299}{3200} m\mathrm{v}^2 = 1{,}031 m\mathrm{v}^2, \text{ Дж.}$$

б) <u>Обчислення роботи зовнішніх сил</u> $A^{(e)}$

Робота зовнішніх сил, прикладених до точок механічної системи на переміщенні S, дорівнюватиме (див. рис. 3):

$$A^{(e)} = P_1 S\sin\beta - F_{\text{тр}1}S - P_3 S_C \sin\alpha - \sigma N_3 \varphi_3, \qquad (35)$$

де $P_1 = m_1 g = mg;\ \ P_3 = m_3 g = 2mg;\ \ F_{\text{тр}1} = fN_1,\ \ N_1 = P_1\cos\beta = mg\cos\beta$, тоді $F_{\text{тр}1} = fmg\cos\beta$;

$N_3 = P_3\cos\alpha = 2mg\cos\alpha,\ \ S_C = \frac{3}{8}S,\ \ \varphi_3 = \frac{3}{1,6}S = 1,875S$, рад.

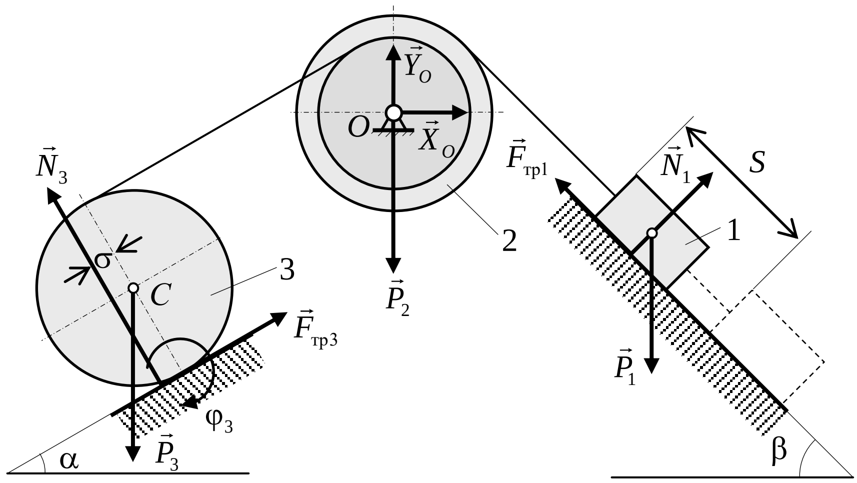


Рис. 3. До обчислення роботи зовнішніх сил, прикладених до тіл досліджуваної механічної системи.

Після підстановки знайдених значень у формулу (34) отримаємо:

$$A^{(e)} = mgS\left(\sin\beta - f\cos\beta - 2\cdot\frac{3}{8}\sin\alpha + \sigma\cdot 2\cos\alpha\cdot\frac{3}{1,6}\right) =$$

$$= mgS\left(\sin 45^o - 0,2\cos 45^o - \frac{3}{4}\sin 30^o + 0,32\cdot 2\cos 30^o\cdot\frac{3}{160}\right) =$$

$$= mgS\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0,8 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot 0,32\cdot\frac{\sqrt{3}}{320}\right) = 0,201mgS.$$

Повертаючись до виразу (33) теореми, матимемо

$$1,031\cancel{m}\text{v}^2 = 0,201\cancel{m}gS, \qquad (36)$$

звідки знаходимо шукану швидкість:

$$\boxed{\text{v} = \sqrt{0,195gS} = \sqrt{0,195\cdot 9,8\ \text{м/с}^2\cdot 1,2\ \text{м}} = 1,51\ \text{м/с}}.$$

Якщо продиференціювати вираз (36) за часом, то отримаємо

$$1,031\cdot 2\cancel{\text{v}}\cdot a = 0,201g\cancel{\text{v}},$$

звідки знаходимо шукане прискорення:

$$\boxed{a = 0,0975\cdot 9,8\ \text{м/с}^2 = 0,96\ \text{м/с}^2}.$$

2. Застосування загального рівняння динаміки

Для розглядуваної механічної системи з одним степенем вільності, що підкорена ідеальним двостороннім стаціонарним утримуючим в'язям („неідеальності” в'язей, наприклад, сили тертя, віднесемо до активних сил), загальне рівняння динаміки має вигляд

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 . \tag{37}$$

Для подальшого використання цього рівняння необхідно:

- проаналізувати активні сили, що діють на тіла системи (разом з доданими силами тертя), та сили інерції;
- надати тілам системи можливі переміщення, у відповідності до числа степенів вільності (у нашому випадку $s = 1$) вибрати незалежні можливі переміщення і знайти вирази інших можливих переміщень через незалежні.

а) Аналіз сил

До системи прикладені такі сили, які треба розглянути у відповідності до загального рівняння динаміки (див. рис. 4):

- активні сили: сили ваги тіл системи $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$;
- сили тертя ковзання $\vec{F}_{\text{тр}1}$, $\vec{F}_{\text{тр}3}$, та момент тертя кочення ($M_{\text{трк}} = \sigma N_3$);
- сили та моменти сил інерції: $\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_C, M_2^{\Phi}, M_3^{\Phi}$.

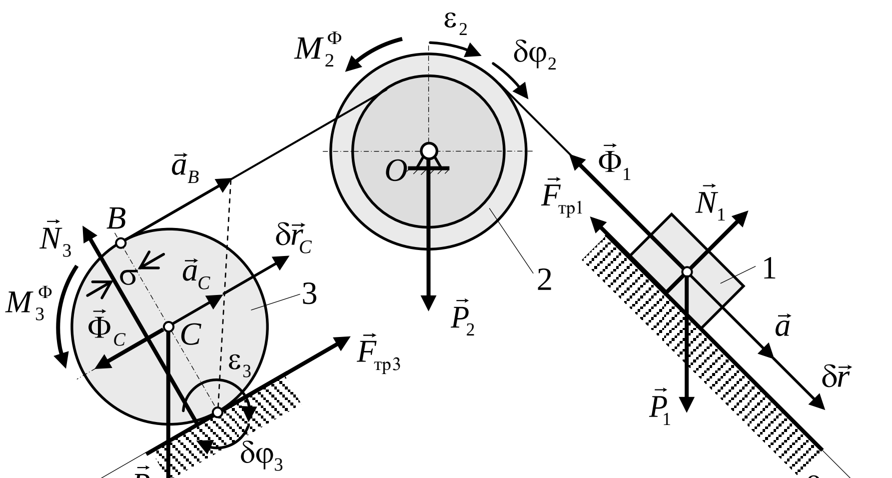


Рис. 4. До обчислення елементарної роботи активних сил та сил інерції.

Вказані сили мають такі величини:

$P_1 = mg, P_3 = 2mg$;

$F_{\text{тр}1} = fN_1 = fmg\cos\beta$ - сила тертя ковзання тіла 1 по похилій поверхні;

$N_3 = 2mg\cos\alpha$ - нормальна складова реакції нахиленої під кутом α площини;

$M_{\text{трк}} = \sigma N_3 = 2\sigma mg\cos\alpha$ - момент тертя кочення;

$\Phi_1 = m_1 a = ma$ - сила інерції тіла 1;

$\Phi_C = m_3 a_C = 2ma_C$, а $a_C = \frac{3}{8}a$; тоді $\Phi_C = \frac{3}{4}ma$ - сила інерції тіла 3;

$M_2^Ф = I_O\varepsilon_2$, а $I_O = m_2 i_{2z}^2 = m\cdot 0{,}16^2 = 0{,}0256m$, кг·м², $\varepsilon_2 = a/R_2 = a/0{,}2$, рад/с², тому матимемо

$M_2^Ф = 0{,}0256m\cdot 5a = 0{,}128ma$, Н·м – момент сил інерції обертального руху тіла 2;

$M_3^Ф = I_C\varepsilon_3$, а $I_C = 0{,}04m$, кг·м², $\varepsilon_3 = \frac{3}{1{,}6}a = 1{,}875a$, рад/с², тому матимемо

$M_3^Ф = 0{,}04m\cdot 1{,}875a = 0{,}075ma$, Н·м – момент сил інерції обертального руху тіла 3.

б) Аналіз можливих переміщень

Надамо незалежне можливе переміщення $\delta\vec{r}$ тілу 1. Тоді отримаємо відповідні залежні можливі переміщення $\delta\varphi_2$, $\delta\vec{r}_C$, $\delta\varphi_3$, які визначаються наступним чином:

$\delta\varphi_2 = \delta r/R_2 = 5\delta r$, рад – можливий кут повороту тіла 2;

$\delta r_C = \frac{3}{8}\delta r = 0{,}375\delta r$ - можливе переміщення точки C - центра мас тіла 3;

$\delta\varphi_3 = \frac{3}{1{,}6}\delta r = 1{,}875\delta r$, рад – можливий кут повороту тіла 3.

Після цього можна за формулою (6) скласти відповідне загальне рівняння динаміки:

$$\delta A = \vec{P}_1\cdot\delta\vec{r} + \vec{F}_{тр1}\cdot\delta\vec{r} + \vec{\Phi}_1\cdot\delta\vec{r} + \vec{P}_2\cdot\vec{0} + \vec{M}_2^Ф\cdot\delta\vec{\varphi}_2 + \vec{P}_3\cdot\delta\vec{r}_C + \vec{M}_{трк}\cdot\delta\vec{\varphi}_3 +$$
$$+\vec{F}_{тр3}\cdot\vec{0} + \vec{\Phi}_C\cdot\delta\vec{r}_C + \vec{M}_3^Ф\cdot\delta\vec{\varphi}_3 = 0, \qquad (38)$$

або, розкриваючи скалярні добутки, -

$$\delta A = P_1\delta r\sin\beta - F_{тр1}\delta r - \Phi_1\delta r - M_2^Ф\cdot\delta\varphi_2 - P_3\delta r_C\sin\alpha + \sigma N_3\delta\varphi_3 - \Phi_C\delta r_C - M_3^Ф\delta\varphi_3 = 0.$$

Далі підставляємо у цю формулу отримані вище величини сил та можливих переміщень:

$$\delta A = \delta r\big(mg\sin\beta - fmg\cos\beta - ma - 0{,}128ma\cdot 5 - 2mg\cdot 0{,}375\sin\alpha +$$
$$+\sigma 2mg\cos\alpha\cdot 1{,}875 - 0{,}75ma\cdot 0{,}375 - 0{,}075ma\cdot 1{,}875\big) = 0.$$

Оскільки $\delta r \neq 0$, то вираз у дужках дорівнює нулю; враховуючи, крім того, що $m\neq 0$, отримаємо:

$$\cancel{m}g\sin 45^o - 0{,}2\cancel{m}g\cos 45^o - \cancel{m}a - 0{,}64\cancel{m}a - 0{,}375\cancel{m}g + 0{,}01\cancel{m}g - 0{,}281\cancel{m}a - 0{,}141\cancel{m}a = 0,$$

звідки знаходимо

$$(1 + 0{,}64 + 0{,}281 + 0{,}141)a = (0{,}707 - 0{,}141 - 0{,}375 + 0{,}01)g,$$

або $2{,}062a = 0{,}201g$, тоді

$$\boxed{a = 0{,}0975\cdot 9{,}8\ \text{м/с}^2 = 0{,}96\ \text{м/с}^2}.$$

Інтегруючи цей вираз за умови, що $r(0) = 0,\ \mathrm{v}(0) = 0$, отримаємо

$$r(t) = r(0) + \mathrm{v}(0)t + \tfrac{1}{2}at^2 = \tfrac{1}{2}at^2,$$
$$\mathrm{v}(t) = \mathrm{v}(0) + at = at.$$

З першого рівняння знаходимо $t = \sqrt{2S/a}$ (оскільки $r(t) = S$), після підстановки якого в друге рівняння маємо:

$$\boxed{\mathrm{v} = a\sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{2Sa} = \sqrt{2\cdot 1{,}2\ \text{м}\cdot 0{,}96\ \text{м/с}^2} = 1{,}51\ \text{м/с}}.$$

3. Розв'язання задачі за допомогою рівнянь Лагранжа ІІ-го роду

Методика застосування рівнянь Лагранжа ІІ-го роду полягає в наступному.

1) Визначаємо число степенів вільності механічної системи (в нашому випадку дорівнює одиниці); вибираємо узагальнену координату ($q_1 = r$), та записуємо відповідне рівняння Лагранжа II-го роду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_1 .$$

2) Знаходимо вираз кінетичної енергії системи через узагальнені координату і швидкість: $T = 1,031 m\mathrm{v}^2 = 1,031 m\dot r^2$.

3) Визначаємо необхідні частинні похідні від T :

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot r} = 2,062 m\dot r,$$

$$\text{а також } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot r}\right) = 2,062 m\ddot r .$$

4) Знаходимо суму елементарних робіт активних сил та реакцій неідеальних в’язей:

$$\delta A^{(a)} = \vec P_1 \cdot \delta \vec r + \vec F_{\text{тр}1} \cdot \delta \vec r + \vec P_2 \cdot \vec 0 + \vec F_{\text{тр}3} \cdot \vec 0 + \vec P_3 \cdot \delta \vec r_C + \vec M_{\text{трк}} \cdot \delta \vec \varphi_3 , \tag{39}$$

яка після підстановки відповідних величин набуває вигляду

$$\delta A^{(a)} = P_1 \delta r \sin\beta - F_{\text{тр}1}\delta r - P_3 \delta r_C \sin\alpha + \sigma N_3 \delta\varphi_3 =$$

$$= \left(mg\sin\beta - fmg\cos\beta - 2mg\cdot 0,375\sin\alpha + \sigma 2mg\cos\alpha \cdot 1,875\right)\delta r =$$

$$= \left(\sin 45^o - 0,2\cos 45^o - 0,375 + 0,01\right) mg\delta r = 0,201 mg\delta r.$$

Оскільки $\delta A^{(a)} = Q_1 \delta r$, то маємо $Q_1 = 0,201 mg$.

5) Складаємо рівняння Лагранжа II-го роду:

$$2,062 m\ddot r = 0,201 mg .$$

5) Знаходимо шукане прискорення

$$\boxed{a = \ddot r = 0,0975\cdot 9,8 \text{ м/с}^2 = 0,96 \text{ м/с}^2}.$$

Шукана швидкість знаходиться так, як у попередньому пункті 2.

4. Метод складання диференціальних рівнянь руху твердих тіл

За цим методом система уявно розділяється на окремі тіла, для кожного з яких записуються диференціальні рівняння руху, розв’язки яких потім „зшиваються” для отримання шуканих величин.

а) Розглянемо тіло 1

Воно здійснює поступальний рух, який описується двома диференціальними рівняннями (див. рис. 5):

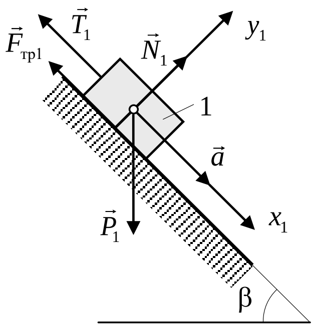


Рис. 5. До виводу рівнянь

$$x_1 : \quad m_1 a = P_1 \sin\beta - T_1 - F_{\text{тр}1}, \tag{40}$$

$$y_1 : \quad 0 = N_1 - P_1 \cos\beta . \tag{41}$$

З виразу (10) маємо

$$N_1 = P_1 \cos\beta = mg\cos 45^o = \tfrac{\sqrt2}{2} mg .$$

Відповідно до закона Кулона

$$F_{\text{тр}1} = fN_1 = 0,2\cdot \tfrac{\sqrt2}{2} mg = 0,1\sqrt2 mg .$$

З рівняння (40) знаходимо, що величина сили натягу нитки, через яку тіло 1 зв’язане з тілом 2, дорівнює

$$T_1 = P_1 \sin\beta - F_{\text{тр}1} - m_1 a = mg\sin 45^o - 0{,}1\sqrt{2}mg - ma =$$
$$= m\left(0{,}4\sqrt{2}g - a\right).$$

б) Розглянемо тіло 2

Це тіло здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі Oz, який описується одним диференціальним рівнянням (див. рис. 6):

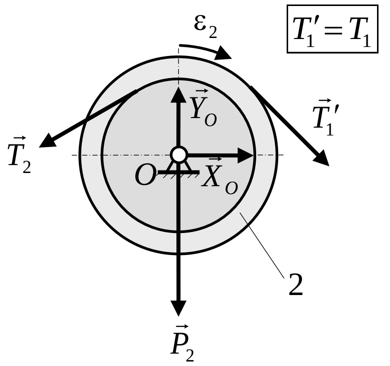


Рис. 6. Сили, прикладені до тіла 2

$$I_O\varepsilon_2 = T_1R_2 - T_2r_2, \tag{42}$$

де $I_O = m_2 i_{2z}^2 = 0{,}0256\,m$, кг $\cdot$ м^2;

$\varepsilon_2 = a / R_2 = 5a$, рад/с^2;

$r_2 = \frac{3}{4}R_2 = 0{,}75\cdot 0{,}2\,\text{м} = 0{,}15\,\text{м}$.

Тоді з рівняння (42) матимемо

$$0{,}0256m\cdot 5a = T_1\cdot 0{,}2 - T_2\cdot 0{,}15.$$

Звідси знаходимо натяг T_2 нитки, через яку тіло 2 зв'язано з тілом 3:

$$T_2 = \tfrac{0{,}2}{0{,}15}T_1 - \tfrac{2{,}56}{3}ma = \tfrac{4}{3}T_1 - \tfrac{2{,}56}{3}ma = \tfrac{4}{3}\left[m\left(0{,}4\sqrt{2}g - a\right) - \tfrac{2{,}56}{4}ma\right] =$$
$$= \tfrac{4}{3}m\left(0{,}4\sqrt{2}g - 1{,}64a\right).$$

в) Розглянемо тіло 3

Це тіло здійснює плоскопаралельний рух, який описується трьома диференціальними рівняннями (див. рис. 7):

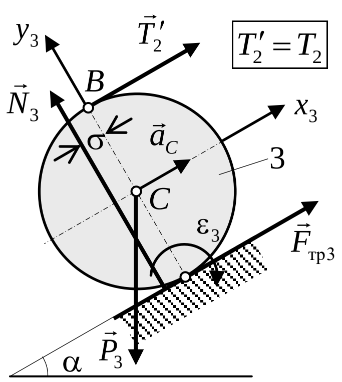


Рис. 7.

$$x_3:\quad m_3a_C = T_2 + F_{\text{тр}3} - P_3\sin\alpha, \tag{43}$$

$$y_3:\quad 0 = N_3 - P_3\cos\alpha, \tag{44}$$

$$z_3:\quad I_C\varepsilon_3 = T_2R_3 + \sigma N_3 - F_{\text{тр}3}R_3. \tag{45}$$

З виразу (13) маємо

$$N_3 = P_3\cos\alpha = 2mg\cos 30^o = \sqrt{3}mg.$$

З рівняння (43) знаходимо силу зчеплення циліндра 3 з похилою площиною

$$F_{\text{тр}3} = m_3a_C - T_2 + P_3\sin\alpha,$$

де $m_3 = 2m,\;\; a_C = \frac{3}{8}a$.

Далі маємо

$$F_{\text{тр}3} = 2m\cdot\tfrac{3}{8}a - \tfrac{4}{3}m\left(0{,}4\sqrt{2}g - 1{,}64a\right) + 2mg\sin 30^o = 0{,}75ma - 0{,}754mg + 2{,}187ma + mg =$$
$$= 2{,}937ma + 0{,}246mg.$$

В рівнянні (45) маємо: $I_C = \frac{1}{2}m_3R_3^2 = 0{,}04m$, кг·м²; $\varepsilon_3 = \frac{3}{1{,}6}a = 1{,}875a$, рад/с².

Тоді з (45) отримаємо

$$0,04m\cdot 1,875a=\tfrac{4}{3}m\left(0,4\sqrt{2}g-1,64a\right)\cdot 0,2+0,0032\cdot\sqrt{3}mg-m\left(2,937a+0,246g\right)\cdot 0,2\;;$$

або

$$0,075a=0,15085g-0,437a+0,00554g-0,5874a-0,0492g\;;$$

звідки

$$1,099a=0,1072g\;.$$

Остаточно шукане прискорення a:

$$\boxed{a=0,0975\cdot 9,8\ \text{м/с}^2=0,96\ \text{м/с}^2}.$$

5. Висновки

Як і очікувалось, розв’язки даної задачі за всіма методами співпали.

Зауважимо, що якщо за умовою задачі треба знаходити швидкість (кутову швидкість) тіла, або пройдений ним шлях (кут повороту), то тоді краще використовувати теорему про зміну кінетичної енергії. Застосування цієї теореми не вимагає складання диференціальних рівнянь руху системи, що значно спрощує розрахунки.

Використання загального рівняння динаміки або рівнянь Лагранжа ІІ-го роду виправдане за умови, якщо вимагається знайти математичну модель руху у вигляді диференціального рівняння, або прискорення (кутове прискорення) тіла, що входить до системи. Кількість рівнянь у даному разі найменша і визначається числом степенів вільності розглядуваної механічної системи.

Нарешті, перевагою останнього методу є те, що за рахунок аналізу системи і розбивання її на окремі тіла, отримуємо більш прості диференціальні та алгебричні рівняння (але кількість їх не є найменшою). Крім цього, він дозволяє визначити внутрішні сили в системі (наприклад, натяг нитки). Недоліком методу є те, що він є більш громіздким і вимагає більшої уваги при виконанні обчислень.

Лекція 18

Основи теорії коливань

18.1. Прямолінійні коливання матеріальної точки

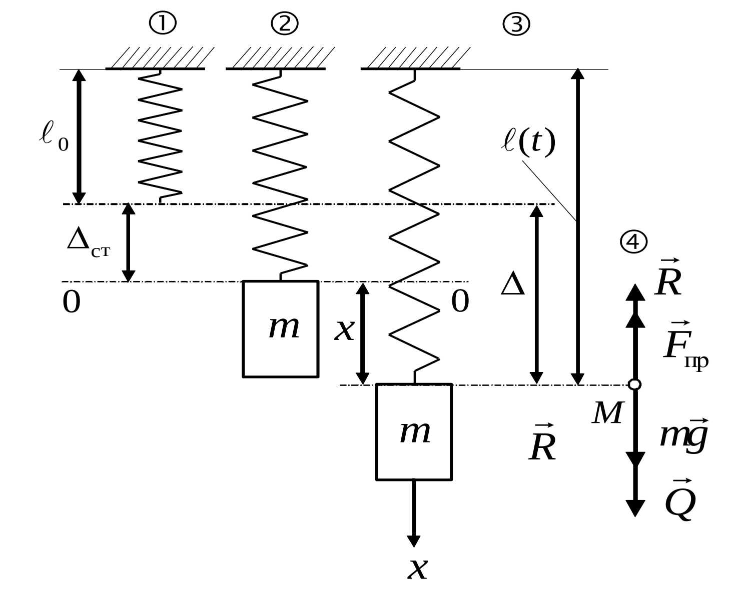
1) **Види коливальних рухів матеріальної точки. Диференціальні рівняння коливань**

Розглянемо прямолінійний рух матеріальної точки під дією різних поєднань наступних сил:

- сили $\vec{F}$, що намагається повернути матеріальну точку в положення її рівноваги (такі сили називають *відновлювальними*);
- сили $\vec{R}$ опору середовища, в якому рухається матеріальна точка (цю силу називають *силою в’язкого тертя*, *дисипативною (розсіюючою) силою*);
- *збурювальної сили* $\vec{Q}$, яка дає можливість підтримувати як завгодно довго рух матеріальної точки.

Розглянемо ці сили більш детально.

а) Джерелом **відновлювальної сили** можуть бути будь-які тіла. Найпростіший приклад – пружина, до якої прикріплене дане тіло, що рухається поступально вздовж осі Ox.



① - ненапружений стан пружини;
② - положення статичної рівноваги;
③ - довільне положення тіла на пружині;
④ - діаграма сил, прикладених до точки M.

Мірою механічної взаємодії пружини та розглядуваної точки (тіла) є відновлювальна сила, яка в даному випадку називається *силою пружності* ($\vec{F} = \vec{F}_{\text{пр}}$) і визначається за *законом Гука*:

$$\vec{F}_{\text{пр}} = -c\vec{\Delta},$$

де $\vec{\Delta}$ - вектор деформації пружини (його модуль Δ є зміщенням кінця пружини по відношенню до її ненапруженого стану); а коефіцієнт пропорційності

c - називається коефіцієнтом жорсткості (або коефіцієнтом пружності); він чисельно дорівнює тій силі, яку необхідно прикласти до кінця ненавантаженої пружини для того, щоб викликати її подовження на одиницю довжини.

б) Силу опору середовища $\vec{R}$ у разі малих швидкостей руху можна вважати прямо пропорційною до швидкості:

$$\vec{R} = -\alpha\,\vec{\mathrm{v}},$$

де коефіцієнт пропорційності α називається коефіцієнтом в'язкого тертя або в'язкого опору.

У разі великих швидкостей маємо $\vec{R} = -\beta\,\mathrm{v}^2\vec{\mathrm{v}}^0$ (β - коефіцієнт пропорційності, $\vec{\mathrm{v}}^0$ - одиничний вектор напрямку швидкості).

в) Збурювальна сила $\vec{Q}$, прикладена до даної точки, може бути подана у вигляді

$$\vec{Q} = Q\vec{Q}^0,$$

де Q - модуль сили $\vec{Q}$, а $\vec{Q}^0$ - одиничний вектор її напрямку.

У разі *гармонійної* збурювальної сили матимемо

$$Q = Q_m \sin(\omega t + \sigma),$$

де Q_m - максимальне значення (амплітуда) збурювальної сили,

$(\omega t + \sigma)$ - фаза зміни сили (σ - початкова фаза, ω - кругова частота).

В проекції на введену координатну вісь Ox вказані вище сили запишуться наступним чином:

$$F_{\text{пр}x} = c\Delta = c(\Delta_{\text{ст}} + x), \quad R_x = -\alpha\dot{x}, \quad Q_x = Q_m \sin(\omega t + \sigma). \tag{1}$$

Тоді на підставі рівняння (1) отримаємо

$$m\ddot{x} = mg - c(\Delta_{\text{ст}} + x) - \alpha\dot{x} + Q_m \sin(\omega t + \sigma), \tag{2}$$

звідки, беручи до уваги що $mg = c\Delta_{\text{ст}}$ (це співвідношення випливає з аналізу сил в положенні статичної рівноваги ②), матимемо

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x} + Q_m \sin(\omega t + \sigma)\,. \qquad (3)$$

диференціальне рівняння *змушених коливань* матеріальної точки за наявності сил опору середовища та відновлювальної сили. Знаки "-" в цьому рівнянні зберігаються при будь-якому напрямку руху матеріальної точки, а знак "+" має місце у разі збігу напрямку сили $\vec{Q}$ з віссю Ox.

Розглянемо диференціальні рівняння різних видів коливань, що є окремими випадками рівняння (4).

Якщо збурювальна сила відсутня і немає опору середовища, тоді отримаємо

$$m\ddot{x} = -cx \qquad (4)$$

диференціальне рівняння *вільних коливань*, що мають місце лише за наявності відновлювальної сили.

Якщо відсутня лише збурювальна сила, то будемо мати

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x} \qquad (5)$$

диференціальне рівняння *згасаючих коливань*, які відбуваються під дією відновлювальної сили та сили опору середовища.

Зауважимо також, що постійна сила (в нашому випадку вага $m\vec{g}$) не впливає на коливання матеріальної точки і вигляд відповідного диференціального рівняння руху, якщо вибрати початок відліку у положенні статичної рівноваги.

Розглянемо ці коливання та отримані рівняння більш детально.

2) Вільні (власні) коливання матеріальної точки

Вільні коливання матеріальної точки – це такі коливання, що відбуваються під дією лише відновлювальної сили і описуються наступним диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + cx = 0\,, \qquad (6)$$

яке є звичайним лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Розв'язуємо це рівняння за *методом Ейлера*, який полягає в складанні характеристичного рівняння, яке відповідає диференціальному. Для рівняння (6) матимемо

$$\lambda^2 + \frac{c}{m} = 0\,,$$

або, якщо ввести позначення $\frac{c}{m} = k^2$, тоді отримаємо: $\lambda^2 + k^2 = 0$, звідки $\lambda_{1,2} = \pm ik$ (корені характеристичного рівняння суто уявні і різні) і загальний розв'язок рівняння (6) матиме вигляд

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt\,. \qquad (7)$$

Для подальшого розв'язання задачі треба визначити сталі інтегрування C_1 і C_2, використовуючи початкові умови, тобто те, що при $t = 0$ $x(0) = x_0$, а $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Для того, щоб скористатися початковими умовами, знайдемо похідну від x за часом, тобто

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt\,. \qquad (8)$$

Підставляючи початкові умови в рівняння (7) і (8), знаходимо, що $x(0) = C_1 = x_0$, $\dot{x}(0) = C_2 k = \dot{x}_0$, звідки отримаємо $C_1 = x_0$ і $C_2 = \dot{x}_0 / k$, і остаточно матимемо

$$x(t) = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt \qquad (9)$$

- кінематичне рівняння руху точки маси m під дією лише відновлювальної сили $\vec{F}$. Тут $k = \sqrt{c/m}$ - кругова частота вільних коливань.

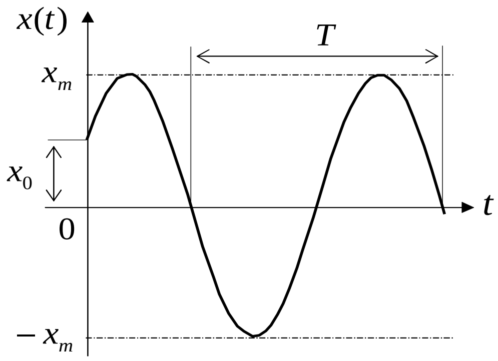
Вирази (7) або (9) можна переписати у вигляді

$$x(t) = x_m \sin\left(kt + \beta\right), \qquad (10)$$

де $x_m = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2}$ є *амплітудою* вільних коливань, тобто максимальним відхиленням точки від положення рівноваги, а *початкова фаза* коливань β визначається відповідним тангенсом: $\mathrm{tg}\beta = \frac{C_1}{C_2} = \frac{x_0 k}{\dot{x}_0}$. Геометрична точка, відносно якої відбуваються коливання, називається *центром коливань* (він співпадає з положенням статичної рівноваги матеріальної точки). Проміжок часу, протягом якого відбувається одне коливання, називається *періодом коливань* і позначається T. Величина обернена до періоду, називається *частотою* ($f = T^{-1}$) і визначає кількість коливань за одну секунду. Кількість коливань за 2π секунд називається *круговою (власною) частотою*. Таким чином, між вказаними параметрами коливань існують такі співвідношення:

$$f = T^{-1} = \frac{k}{2\pi}, \quad k = 2\pi f, \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \qquad (11)$$

Нижче поданий типовий графік залежності $x(t)$, на якому показані деякі з наведених вище величин.



3) Згасаючі коливання матеріальної точки

Згасаючі коливання матеріальної точки – це такі коливання, що відбуваються під дією двох сил: відновлювальної сили і сили опору середовища і описуються наступним диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = 0, \qquad (12)$$

яке теж є звичайним лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Позначимо $k^2 = c/m, \quad 2h = \alpha/m$, тоді поділивши рівняння (12) на масу m, матимемо

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = 0. \qquad (13)$$

Складаємо відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2h\lambda + k^2 = 0 \qquad (14)$$

і знаходимо його корені:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}\,. \tag{15}$$

В залежності від співвідношення величин h і k можливі три частинні випадки для коренів характеристичного рівняння:

- $h < k$ - комплексно спряжені корені;
- $h > k$ - дійсні різні корені;
- $h = k$ - дійсні кратні корені.

Розглянемо ці випадки більш детально.

а) Випадок малого опору ($h < k$)

У цьому випадку маємо $\lambda_{1,2} = -h \pm i\sqrt{k^2 - h^2} = -h \pm ik_*$, де $k_* = \sqrt{k^2 - h^2}$. Тоді отримаємо

$$x = e^{-ht}\left(C_1 \cos k_* t + C_2 \sin k_* t\right). \tag{16}$$

Якщо взяти від цього виразу першу похідну за часом, тоді матимемо

$$\dot{x} = -he^{-ht}\left(C_1 \cos k_* t + C_2 \sin k_* t\right) + k_* e^{-ht}\left(-C_1 \sin k_* t + C_2 \cos k_* t\right). \tag{17}$$

Враховуючи початкові умови (при $t = 0$ $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$) в рівняннях (16) і (17), отримаємо

$$\begin{cases} x_0 = C_1, \\ \dot{x}_0 = -hC_1 + k_* C_2; \end{cases} \quad \text{звідки маємо} \quad \begin{cases} C_1 = x_0, \\ C_2 = \dfrac{1}{k_*}\left(\dot{x}_0 + hx_0\right). \end{cases}$$

Тоді остаточно будемо мати

$$x(t) = e^{-ht}\left(x_0 \cos k_* t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{k_*} \sin k_* t \right). \tag{18}$$

Якщо ввести інші сталі інтегрування, а саме

$$x_m = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{\left(\dot{x}_0 + hx_0\right)^2}{k_*^2}}\,, \quad \mathrm{tg}\beta = C_1 / C_2 = \frac{x_0 k_*}{\dot{x}_0 + hx_0}\,,$$

тоді вираз (16) перетвориться на наступний

$$x(t) = x_m e^{-ht} \sin\left(k_* t + \beta\right). \tag{19}$$

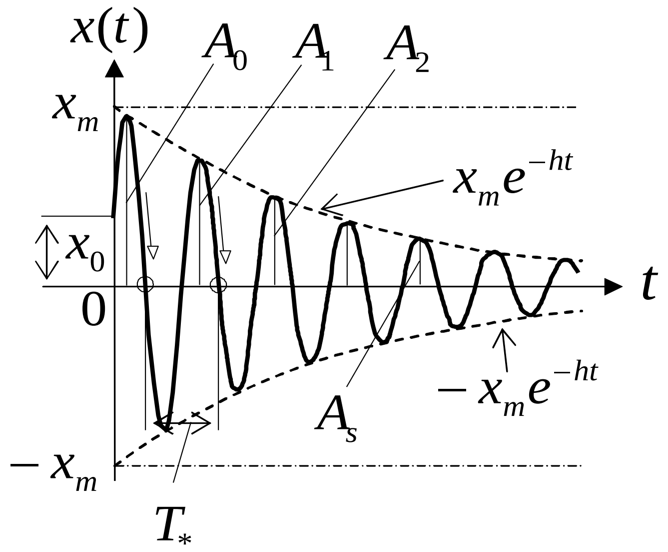
Аналіз виразу (19) вказує на те, що функція $x(t)$ періодично змінює свій знак і мають місце коливання (на це вказує наявність синусоїдальної функції), амплітуда коливань $x_m e^{-ht}$ зменьшується за експоненціальним законом, тому ці коливання і називають *згасаючими*. Але коливальний рух точки строго кажучи не є періодичним, тому що не існує такої сталої T_1, додаючи яку до аргументу t, отримаємо рівність $x(t + T_1) = x(t)$, правдиву для будь-яких t. Кругова частота k_* цих коливань визначається виразом $k_* = \sqrt{k^2 - h^2}$ і є меншою за кругову частоту відповідних вільних коливань k.

Коефіцієнт h називається *коефіцієнтом згасання*, він характеризує швидкість убування коливань і визначається за формулою $h = \dfrac{\alpha}{2m}$.

Оскільки $\left|\sin\left(k_* t + \beta\right)\right| \le 1$, тоді з виразу (19) випливає, що

$$|x| \le \left|x_m e^{-ht}\right|. \tag{20}$$

Це означає, що графік функції $x(t)$ буде розміщуватися між асимптотами $\pm x_m e^{-ht}$ (які називаються *амплітудними кривими*), розташованими симетрично відносно осі часу t.



Для згасаючих коливань мова може йти лише про умовний період коливань T_*, який є проміжком часу між двома послідовними проходженнями вільною матеріальною точкою положення статичної рівноваги у фіксованому напрямку.

Із рівняння (19) випливає, що визначення T_* зводиться до визначення відстані між двома суміжними нулями функції $\sin\left(k_* t + \beta\right)$, для яких функція $\cos\left(k_* t + \beta\right)$ має один знак. З цього випливає, що $T_* \sqrt{k^2 - h^2} = 2\pi$, а умовний період згасаючих коливань T_* визначається наступним чином:

$$T_* = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}} = \frac{2\pi}{k_*}. \tag{21}$$

Розглянемо послідовність максимальних відхилень точки від положення статичної рівноваги під час руху точки у фіксованому напрямку. Такі відхилення кожного разу відбуваються через рівні проміжки часу, що відповідають умовному періоду T_*, тобто в моменти часу $t', t' + T_*, t' + 2T_*, \dots$. Вони складають таку послідовність (тут $A = x_m e^{-ht}$):

$$A_0 = x_m e^{-ht'},\ A_1 = x_m e^{-h(t'+T_*)},\ A_2 = x_m e^{-h(t'+2T_*)}, \dots,\ A_{s-1} = x_m e^{-h[t'+(s-1)T_*]},\ A_s = x_m e^{-h(t'+sT_*)}, \dots .$$

Якщо взяти відношення двох послідовних амплітуд, тоді отримаємо такий вираз:

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{A_2}{A_1} = \dots = \frac{A_s}{A_{s-1}} = \dots = e^{-hT_*} = \eta. \tag{22}$$

З цього виразу випливає, що амплітуда згасаючих коливань убуває за законом геометричної прогресії із знаменником η, який називається *декрементом коливань*. Модуль натурального логарифму від цієї величини називається *логарифмічним декрементом коливань*:

$$\Lambda = \left|\ln \eta\right| = hT_*. \tag{23}$$

Він характеризує швидкість згасання коливань в залежності від числа коливань.

б) Випадок великого опору ($h > k$)

У цьому випадку маємо $\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}$, тобто корені є дійсними і різними (і до того ж завжди від'ємними). Тоді, відповідно до методу Ейлера, отримаємо

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{24}$$

і знайдемо відповідну першу похідну за часом

$$\dot{x} = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{25}$$

Врахуємо початкові умови, тобто те, що при $t=0$ $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$, і підставимо їх у вирази (24) і (25):

$$x(0)=C_1+C_2=x_0,\quad \dot{x}(0)=\lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2=\dot{x}_0 .$$

Далі з першого з цих виразів знайдемо $C_1=x_0-C_2$ і підставимо у другий:

$$\dot{x}_0=\lambda_1\left(x_0-C_2\right)+\lambda_2 C_2=\lambda_1 x_0+C_2\left(\lambda_2-\lambda_1\right),$$

звідки знаходимо $C_2=\dfrac{\dot{x}_0-\lambda_1 x_0}{\lambda_2-\lambda_1}$ і "повертаємо" його у перший вираз, отримуючи

$$C_1=x_0-\frac{\dot{x}_0-\lambda_1 x_0}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{\lambda_2 x_0-\lambda_1 x_0-\dot{x}_0+\lambda_1 x_0}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{\lambda_2 x_0-\dot{x}_0}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

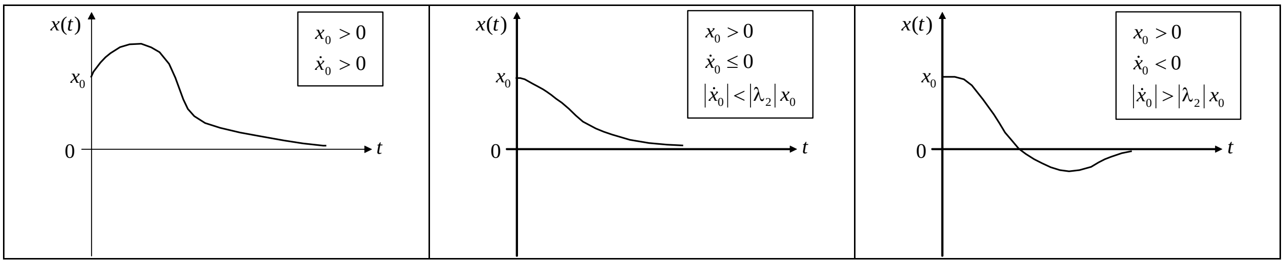
Тоді рівняння (24) набуває вигляду

$$x(t)=\frac{\lambda_2 x_0-\dot{x}_0}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_1 t}+\frac{\dot{x}_0-\lambda_1 x_0}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2 t},$$

звідки, беручи до уваги, що $\lambda_2-\lambda_1=-h-\sqrt{h^2-k^2}+h-\sqrt{h^2-k^2}=-2\sqrt{h^2-k^2}$, остаточно отримаємо

$$x(t)=\frac{1}{2\sqrt{h^2-k^2}}\left[\left(\dot{x}_0-\lambda_2 x_0\right)\,e^{\lambda_1 t}-\left(\dot{x}_0-\lambda_1 x_0\right)\,e^{\lambda_2 t}\right]. \tag{26}$$

Із отриманого виразу видно, що рух матеріальної точки не буде коливальним, а буде *аперіодичним*, при цьому конкретний графічний вигляд залежності $x(t)$ буде визначатися співвідношенням параметрів $\dot{x}_0$, $\lambda_1 x_0$, $\lambda_2 x_0$. Нижче наведені деякі приклади функції $x(t)$.



При $x_0<0$ аперіодичний характер руху матеріальної точки не змінюється.

в) Випадок "граничного" опору ($h=k$)

У цьому випадку маємо $\lambda_{1,2}=-h$, тобто корені характеристичного рівняння дійсні і кратні. Тоді матимемо

$$x=e^{-ht}\left(C_1+C_2 t\right). \tag{27}$$

Знайдемо першу похідну за часом від виразу (27)

$$\dot{x}=-he^{-ht}\left(C_1+C_2 t\right)+e^{-ht}C_2 . \tag{28}$$

Врахуємо початкові умови (при $t=0$ $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$) і підставимо їх у вирази (27) і (28):

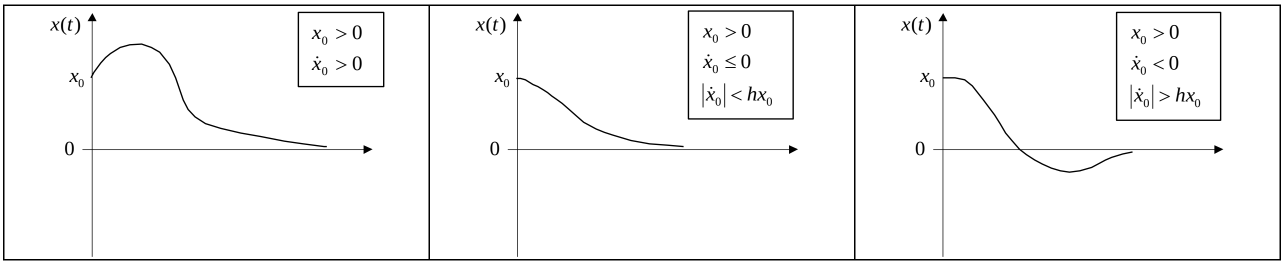
$$x(0)=C_1=x_0,\quad \dot{x}(0)=-hC_1+C_2=\dot{x}_0,$$

звідки $C_1=x_0$, $C_2=\dot{x}_0+hC_1=\dot{x}_0+hx_0$. Тоді рівняння (27) набуває вигляду

$$x(t)=e^{-ht}\left[x_0+\left(\dot{x}_0+hx_0\right)t\right]. \tag{29}$$

Із виразу (29) випливає, що точка здійснює аперіодичний рух, який є, як і у разі великого опору, згасаючим, оскільки при $t\to\infty$ $x\to 0$.

Графіки функції $x(t)$ при різних поєднаннях величин, що входять у вираз (29), наведені нижче.



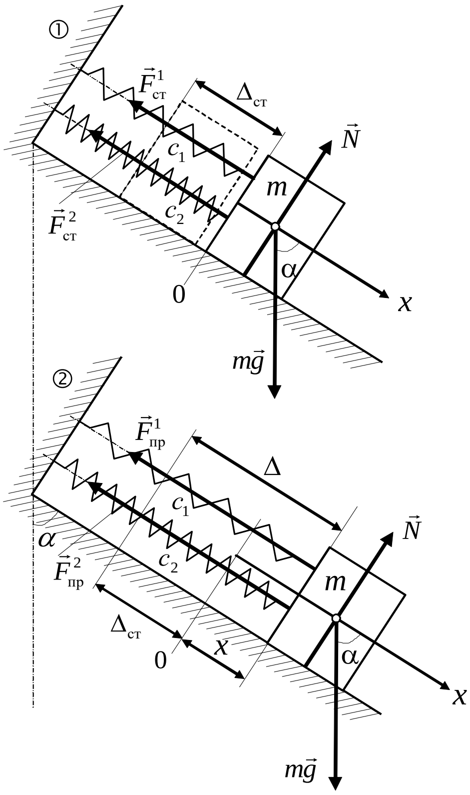
<u>*Задача 1*</u>

Тягар маси m виконує коливання вздовж похилої площини. Тягар приєднаний до кінців двох паралельних пружин з коефіцієнтами пружності c_1 і c_2. Знайти рівняння руху тягаря, якщо в початковий момент він був зміщений з положення статичної рівноваги на x_0, і йому в напрямку осі x була надана швидкість $\dot{x}_0$.

Дано: c_1, c_2; ***при*** $t = 0$ $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

Знайти: $x(t)$.

Р о з в ' я з а н н я



Приймаючи початок відліку в положенні статичної рівноваги ①, помітимо, що обидві пружини отримали однакове подовження $\Delta_{\text{ст}}$.

Тоді проекції статичних сил пружності на вісь Ox складатимуть

$$\left(\vec{F}^1_{\text{ст}}\right)_x = -c_1\Delta_{\text{ст}}; \qquad \left(\vec{F}^2_{\text{ст}}\right)_x = -c_2\Delta_{\text{ст}}.$$

В положенні статичної рівноваги векторна сума всіх сил повинна дорівнювати нулю, тобто

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}^1_{\text{ст}} + \vec{F}^2_{\text{ст}} = \vec{0},$$

або в проекції на вісь Ox:

$$\left(m\vec{g}\right)_x + \left(\vec{N}\right)_x + \left(\vec{F}^1_{\text{ст}}\right)_x + \left(\vec{F}^2_{\text{ст}}\right)_x = 0,$$

звідки маємо

$$mg\cos\alpha - c_1\Delta_{\text{ст}} - c_2\Delta_{\text{ст}} = 0. \qquad (30)$$

В довільному положенні ② загальне подовження пружин Δ складає $\Delta = x + \Delta_{\text{ст}}$, тому

$$\left(\vec{F}^1_{\text{пр}}\right)_x = -c_1\Delta; \qquad \left(\vec{F}^2_{\text{пр}}\right)_x = -c_2\Delta.$$

Тоді на підставі II-го закона Ньютона, доповненого аксіомою про звільнення від в'язей, в проекції на вісь Ox можна записати таке рівняння:

$$m\ddot{x} = mg\cos\alpha - c_1\Delta - c_2\Delta, \text{ або } m\ddot{x} = mg\cos\alpha - c_1\left(x + \Delta_{\text{ст}}\right) - c_2\left(x + \Delta_{\text{ст}}\right),$$

яке можна подати у такому вигляді:

$$m\ddot{x} = mg\cos\alpha - c_1\Delta_{\text{ст}} - c_2\Delta_{\text{ст}} - c_1x - c_2x. \qquad (31)$$

Якщо взяти до уваги співвідношення (30), тоді це рівняння можна переписати наступним чином:

$$m\ddot{x} = -(c_1 + c_2)x.$$

Позначаючи $\boxed{c = c_1 + c_2}$ жорсткість еквівалентної пружини, отримаємо рівняння

$$m\ddot{x} + cx = 0. \tag{32}$$

Таким чином, *при паралельному з'єднанні пружин жорсткість еквівалентної пружини дорівнює сумі жорсткостей даних пружин*.

Подальше розв'язання цієї задачі повністю збігається з формулами (6) - (10) цієї лекції.

Задача 2

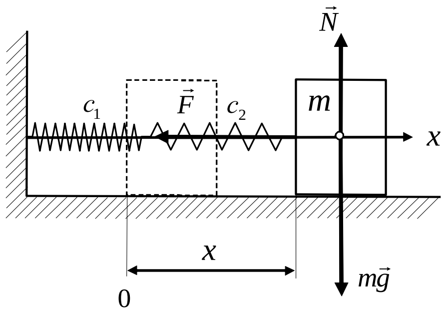
Тягар маси m виконує коливання вздовж горизонтальної площини. Тягар приєднаний до кінців двох послідовно з'єднаних пружин з коефіцієнтами пружності c_1 і c_2.

Знайти вираз жорсткості еквівалентної пружини при такому послідовному з'єднанні пружин.

Дано: c_1, c_2.

Знайти: c.

Р о з в ' я з а н н я



Повне переміщення x тягаря буде складатися з переміщень x_1 і x_2 пружин, тобто

$$x = x_1 + x_2. \tag{33}$$

Ці переміщення визначаються з виразів

$$x_1 = \frac{F}{c_1}, \quad x_2 = \frac{F}{c_2}.$$

В свою чергу $x = \frac{F}{c}$. Тоді з (33) отримаємо

$$\frac{F}{c} = \frac{F}{c_1} + \frac{F}{c_2}, \text{ або } \frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2},$$

що є виразом піддатливості еквівалентної пружини, тобто *при послідовному з'єднанні пружин піддатливість еквівалентної пружини дорівнює сумі піддатливостей розглядуваних пружин.*

В цьому разі жорсткість еквівалентної пружини становитиме

$$\boxed{c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}}.$$

Кінець

Шановним читачам, які вивчають теоретичну механіку в одному семестрі, пропонуємо ще додатково список літератури, який може суттєво допомогти при самостійній роботі. Зауважимо, що більшість вказаних літературних джерел є також результатом роботи укладачів представленого конспекту лекцій.

Рекомендована література

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Теоретична механіка: Збірник задач / О. С. Апостолюк, В. М. Воробйов, Д. І. Ільчишина та ін.; За ред. М.А. Павловського. - К.: Техніка, 2007. – 400 с.
3. Теоретична механіка. Статика. Кінематика: Конспект лекцій для студентів 6.050502 «Інженерна механіка», 6.050503 «Машинобудування» інженерно-хімічного факультету / Укладачі: Штефан Наталія Іллівна, Апостолюк Олександр Семенович. – 100 с.; *http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/514*.
4. 9-10-353.pdf : Теоретична механіка. Динаміка та аналітична механіка [Електронний ресурс] : конспект лекцій для студентів напрямів підготовки 6.050502 «Інженерна механіка», 6.050503 «Машинобудування» інженерно-хімічного факультету / НТУУ «КПІ» ; уклад. О. С. Апостолюк, Н. І. Штефан. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,30 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2010. - Назва з екрана.- Доступ: http://library.ntu-kpi.kiev.ua:8080/handle/123456789/413
5. 10-11-090.doc : Теоретична механіка. Кінематика. Динаміка та аналітична механіка [Електронний ресурс] : навчальний посібник / Г. Я. Міщук, Н. І. Стефан ; НТУУ «КПІ». – Електронні текстові дані (1 файл: 108.4 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2010. - Назва з екрана.- Доступ: http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/859
6. 10-11-174.doc :Теоретична механіка [Електронний ресурс] : методичні вказівки для самостійної роботи над тестами для студентів інженерних спеціальностей / НТУУ «КПІ» ; уклад. В. Г. Савін, Н. І. Штефан. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,40 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2010. - Назва з екрана.- Доступ: http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/769
7. 9-10-171.rtf: Теоретична механіка. Предмет теоретичної механіки [Електронний ресурс] : методичні вказівки до самостійної роботи студентів напрямів підготовки 6.050502 «Інженерна механіка», 6.050503 «Машинобудування» / НТУУ «КПІ» ; уклад. Н. І. Штефан, Н. В. Гнатейко − Електронні текстові дані (1 файл: 707 Кбайт). - Київ : НТУУ «КПІ», 2010. - Назва з екрана. - Доступ: http://library.ntu-kpi.kiev.ua:8080/handle/123456789/478
8. 9-10-148.docx : Теоретична механіка. Кінематика точки [Електронний ресурс] : методичні вказівки для самостійної роботи студентів напрямів підготовки 6.050502 «Інженерна механіка», 6.050503 «Машинобудування» / НТУУ «КПІ» ; уклад. Н. І. Штефан. – Електронні текстові дані (1 файл: 222 Кбайт). - Київ : НТУУ «КПІ», 2010. - Назва з екрана.- Доступ: http://library.ntu-kpi.kiev.ua:8080/handle/123456789/442
9. 11-12-190.doc : Теоретична механіка. Найпростіші рухи твердого тіла. Складний рух точки [Електронний ресурс] : методичні вказівки до проведення практичних занять та самостійної роботи студентів технічних напрямів підготовки / НТУУ «КПІ» ; уклад. В. Г. Савін, Н. І. Штефан, Н. В. Гнатейко. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,81 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2012. – Назва з екрана. - Доступ: http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/1886
10. Теоретична механіка. Статика. Кінематика [Електронний ресурс] : методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи для студентів технічних напрямів підготовки денної та заочної форм навчання / НТУУ «КПІ» ; уклад. В. Г. Савін, Н. І. Штефан, В. М. Федоров. – Електронні текстові дані (1 файл: 7,45 Мбайт). – Київ :

НТУУ «КПІ», 2012. – 57 с. – Назва з екрана. – Доступ: http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/2482

16. Теоретична механіка. Динаміка точки [Електронний ресурс] : методичні вказівки для самостійної роботи студентів / НТУУ «КПІ» ; уклад. Н. І. Штефан. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,98 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2010. - Назва з екрана. - Доступ: http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/830
17. 11-12-082 .docx : Теоретична механіка: Загальні теореми динаміки [Електронний ресурс] : напрямів підготовки / НТУУ «КПІ» ; уклад. В. Г. Савін, Н. І. Штефан. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,62 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2011. – Назва з екрана. - Доступ: http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/1604
18. 11-12-189.doc: Теоретична механіка. Розділ: Аналітична механіка [Електронний ресурс] : методичні вказівки до проведення практичних занять та самостійної роботи студентів технічних напрямів підготовки / НТУУ «КПІ» ; уклад. В. Г. Савін, Н. І. Штефан, Н. В. Гнатейко. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,54 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2012. – Назва з екрана.- Доступ: http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/1881
19. Теоретична механіка. Динаміка та аналітична механіка [Електронний ресурс] : методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи (РГР) для студентів технічних напрямів підготовки денної та заочної форм навчання / НТУУ «КПІ» ; уклад. В. Г. Савін, В. М. Федоров, Н. І. Штефан. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,90 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2013. – 35 с. – Назва з екрана. – Доступ: http://ela.kpi.ua/handle/123456789/3558
20. Дистанційний курс . Електронний курс лекцій: Статика. Кінематика / для студентів технічних напрямків підготовки / Уклад. Н. І. Штефан, . О. С. Апостолюк, Н. В. Гнатейко , В. Г. Савін - Доступ: http://moodle.udec.ntu-kpi.kiev.ua/moodle/course/view.php?id=345
21. Дистанційний курс . Електронний курс лекцій: Динаміка та аналітична механіка/ для студентів технічних напрямків підготовки / Уклад. Н. І. Штефан, . О. С. Апостолюк, Н. В. Гнатейко , В. Г. Савін - Доступ: http://moodle.udec.ntu-kpi.kiev.ua/moodle/course/view.php?id=591
22. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. - М.: Наука. Т.1-2, 1979.
23. Бать М.И., Джанелидзе М.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. - М.: Наука. Т.1-3, 1972.
24. Кильчевский Н. А., Ремизова Н. И., Кильчевская Е. Н. Основы теоретической механики. – К.: Вища школа, 1986. – 296 с.