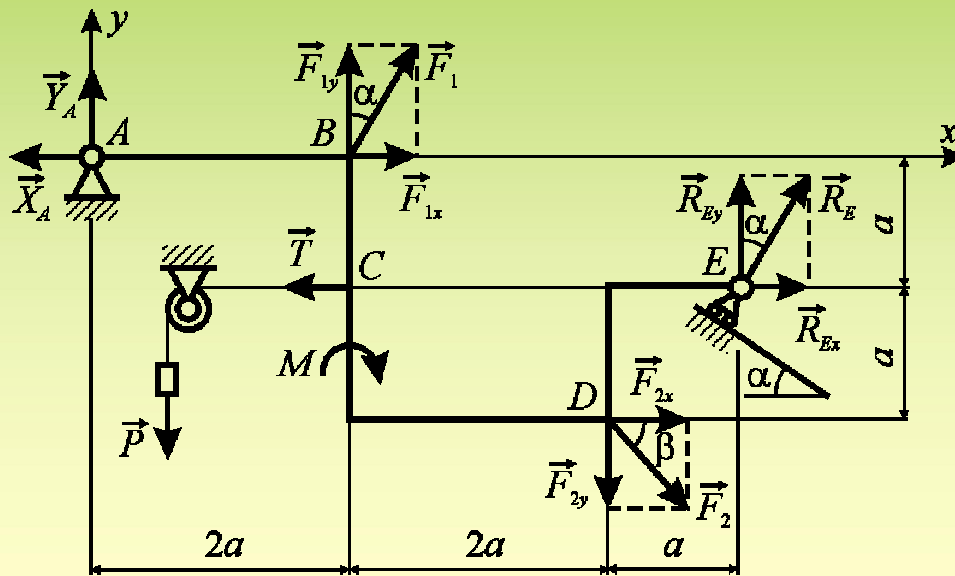
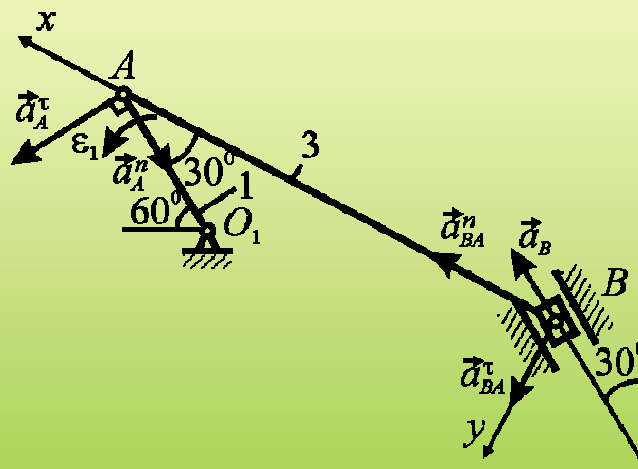


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ



В. В. Пирогов

**ПРАКТИКУМ
З ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ.
ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА**



Кропивницький – 2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра деталей машин та прикладної механіки

В. В. Пирогов

ПРАКТИКУМ З ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ. ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

навчальний посібник

Рекомендовано кафедрою деталей машин та прикладної механіки Центральноукраїнського національного технічного університету як навчальний посібник для студентів електротехнічних спеціальностей.

Протокол № 11 від 25.06.2018 р.

Кропивницький – 2018

Пирогов В. В. Технічна механіка. Теоретична механіка: Навч. посібник [електроний ресурс]. – Кропивницький: ЦНТУ, 2018. – 68 с.: іл.

Табл. 11. Іл. 100. Бібліогр.: 10 назв.

Укладач к.ф.-м.н., доц. **Пирогов Володимир Васильович.**

Рецензент **д.т.н., проф. Філімоніхін Геннадій Борисович,**
професор кафедри деталей машин та прикладної
механіки Центральноукраїнського національного
технічного університету.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	5
Задача К1 – кінематика точки	6
1.1. Умова задачі, розрахункові дані	6
1.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі	8
1.3. Приклад розв’язання задачі К1	8
1.4. Документ MathCad для розв’язання задачі К1	13
Задача К2 – плоскопаралельний рух абсолютно	
 твердого тіла	15
2.1. Умова задачі, розрахункові дані	15
2.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі	16
2.3. Приклад розв’язання задачі К2	18
Задача К3 – складний рух матеріальної точки	22
3.1. Умова задачі, розрахункові дані	22
3.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі	24
3.3. Приклад розв’язання задачі К3а (складний рух	
точки у просторі)	24
3.4. Приклад розв’язання задачі К3б (складний рух	
точки у площині)	28
Задача С1 – рівновага збіжної просторової системи сил.....	32
4.1. Умова задачі, розрахункові дані	32
4.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі	32
4.3. Приклад розв’язання задачі С1	34
4.4. Документ MathCad для розв’язання задачі С1	37
Задача С2 – рівновага довільної плоскої системи сил	
 прикладених до декількох зв’язаних між собою тіл	38
5.1. Умова задачі, розрахункові дані	38
5.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі	40
5.3. Приклад розв’язання задачі С2	41
5.4. Документ MathCad для розв’язання задачі С2	44
Задача Д1 – коливання матеріальної точки при	
 відносному русі	45
6.1. Умова задачі, розрахункові дані	45
6.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі	47
6.3. Приклад розв’язання задачі Д2	49
6.4. Документ MathCad для розв’язання задачі Д1	53

Задача Д2 – теорема про зміну кінетичної енергії	
матеріальної системи	55
7.1. Умова задачі, розрахункові дані	55
7.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі	57
7.3. Приклад розв'язання задачі Д2	57
Задача Д3 – принцип можливих переміщень	62
8.1. Умова задачі, розрахункові дані	62
8.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі	62
8.3. Приклад розв'язання задачі Д3	65
ЛІТЕРАТУРА.....	68

Передмова

Технічна (теоретична) механіка – загальнонаукова дисципліна, яка займає важливе місце в вузівській програмі фундаментальної підготовки спеціалістів. Її розділи “Статика”, ”Кінематика” і ”Динаміка” – відносно самостійні частини курсу, які використовуються для вивчення багатьох предметів.

Необхідною умовою успішного оволодіння курсом є виконання індивідуальних домашніх завдань. Задачі треба розв’язувати на протязі семестру відразу після розгляду відповідної теми на лекціях, чи практичних заняттях.

Поточний контроль відбувається шляхом розв’язання типових задач курсу на контрольних і самостійних роботах, які проводяться після закінчення відповідних розділів. У посібнику сформульовані типові багатоваріантні задачі та приведені приклади їх розв’язання.

Посібник відповідає діючій робочій програмі з теоретичної механіки, призначений для студентів електротехнічних спеціальностей і може бути використаний як в навчальному процесі, так і в інженерній практиці.

Дані для розрахунків брати до кожної задачі згідно номеру варіанту, який видає викладач. Наприклад:

37

Останній цифрі 7 відповідає номер рисунка, а передостанній 5 – номер рядку в таблиці вихідних розрахункових даних.

Зауваження:

- роботи, виконані не за варіантом, або несамоостійно не зараховуються;
- допускається видача інших варіантів лектором, або викладачем, що проводить практичні заняття – на першій лекції, або на першому практичному занятті.

В основу навчального посібника покладені багатоваріантні задачі K1, K3, K4, C2, C3, D2, D6, D9 з методичних вказівок Тарга С.М. [6]. Умови задач перекладені українською мовою, рисунки поліпшені комп’ютерним набором. Докорінним чином змінено методику розв’язання задач – створено типову методику, як правило складену із 5 пунктів, що полегшує процес розв’язання задач і запам’ятовування методик. Задачі K1, C1, C2, D1 обов’язково повинні підтверджуватись розрахунками в середовищі Mathcad.

Задача K1 – кінематика точки

1.1. Умова задачі, розрахункові дані

Умова задачі. Точка M рухається у площині Oxy (рис. K1.0 – K1.9, табл. K1; траєкторія точки на рисунках показана умовно). Закон руху точки заданий рівняннями: $x=f_1(t)$ та $y=f_2(t)$, де x та y виражені в сантиметрах, t – в секундах. Залежність $x=f_1(t)$ вказана на рис. K1.0 – K1.9, а залежність $y=f_2(t)$ – в табл. K1 (для рис. 0–2 – в стовпці 2, для рис. 3–6 – в стовпці 3, рис. 7–9 – в стовпці 4).

Знайти рівняння траєкторії руху точки. Для моменту часу $t_1=1$ с визначити:

- 1) положення точки на траєкторії;
- 2) швидкість точки та зобразити її графічно;
- 3) пришвидшення точки координатним способом та зобразити його графічно;
- 4) пришвидшення точки натуральним способом та зобразити його графічно;
- 5) радіус кривини траєкторії та зобразити його графічно.

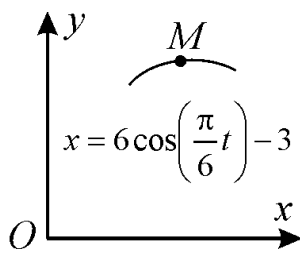


Рис. K1.0

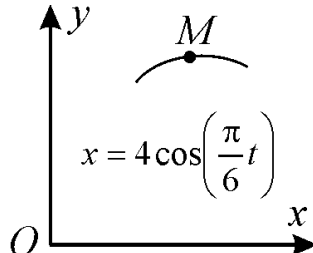


Рис. K1.1

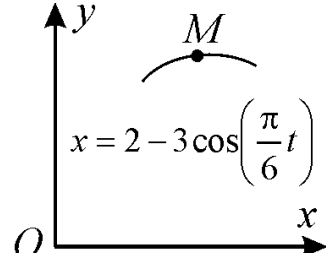


Рис. K1.2

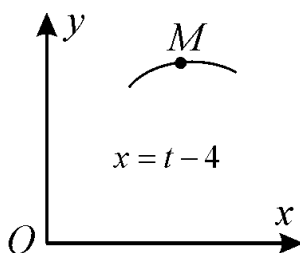


Рис. K1.3

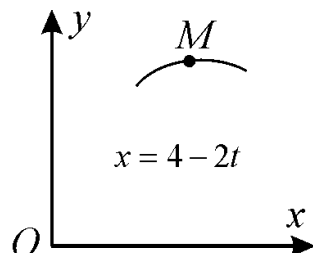


Рис. K1.4

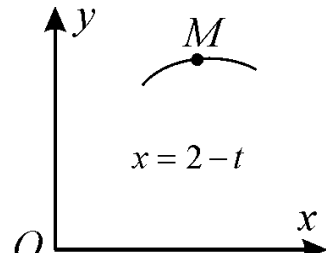


Рис. K1.5

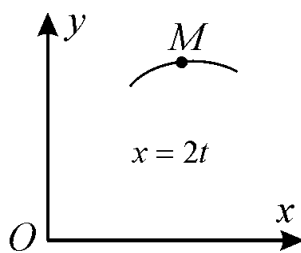


Рис. K1.6

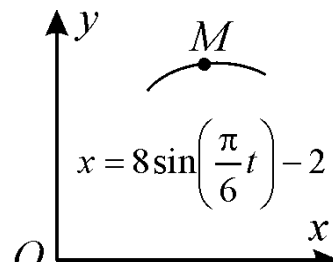


Рис. K1.7

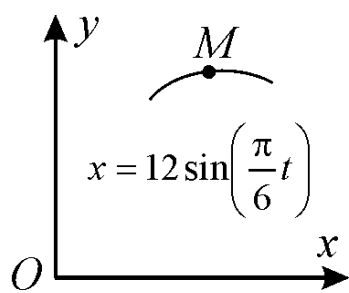


Рис. К1.8

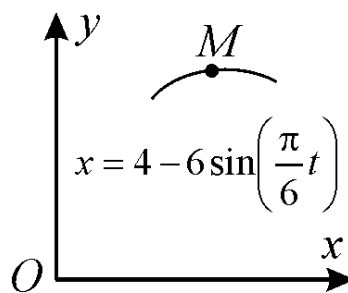


Рис. К1.9

Таблиця К1

Номер умови	$y=f_2(t)$		
	Рис. 0–2	Рис. 3–6	Рис. 7–9
1	2	3	4
0	$12 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$2t^2 + 2$	$4 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
1	$-6 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$8 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$	$6 \cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
2	$-3 \sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$(2+t)^2$	$4 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$
3	$9 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$2t^3$	$10 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
4	$3 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$2 \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$	$-4 \cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
5	$10 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$2 - 3t^2$	$12 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$
6	$6 \sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$2 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$	$-3 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
7	$-2 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$(t+1)^3$	$-8 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$
8	$9 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$2 - t^3$	$9 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
9	$-8 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$4 \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$	$-6 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$

1.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача К1 відноситься до кінематики точки. При розв'язанні задачі скористатися координатним та натуральним способом визначення швидкості та пришвидшення точки. В задачі всі шукані величини необхідно визначати тільки для моменту часу $t_1=1$ с. В деяких варіантах задачі К1 при визначенні рівняння траєкторії руху точки або при подальших розрахунках (для їх спрощення) слід врахувати відомі із тригонометрії формули:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

1.3. Приклад розв'язання задачі К1

Умова задачі. Рівняння руху точки M мають вигляд:

$$x = 10 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 5, \quad y = 20 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 10,$$

де x, y – в сантиметрах, t – в секундах.

Знайти рівняння траєкторії руху точки. Для моменту часу $t_1=1$ с визначити:

- 1) положення точки на траєкторії;
- 2) швидкість точки та зобразити її графічно;
- 3) пришвидшення точки координатним способом та зобразити його графічно;
- 4) пришвидшення точки натуральним способом та зобразити його графічно;
- 5) радіус кривини траєкторії та зобразити його графічно.

Розв'язок

1. Знаходимо рівняння траєкторії руху точки та будуємо графік траєкторії її руху. Визначаємо та показуємо положення точки на траєкторії в момент часу t_1 .

Закон руху точки у координатній формі має вигляд:

$$x = 10 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 5, \quad y = 20 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 10.$$

Одночасно це рівняння її траєкторії руху у параметричному вигляді, де параметром є час $t \in [0, +\infty)$.

Для визначення рівняння траєкторії руху точки у явному вигляді, виключимо з рівнянь руху час t . Скористаємося тригонометричною тотожністю

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \quad \text{де } \alpha = \pi t / 6. \quad (1)$$

З рівнянь руху знаходимо вирази відповідних функцій:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \sin\alpha = \frac{x-5}{10}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \cos\alpha = \frac{y+10}{20}. \quad (2)$$

Підставляючи (2) в (1), отримаємо рівняння траєкторії руху точки:

$$\left(\frac{x-5}{10}\right)^2 + \left(\frac{y+10}{20}\right)^2 = 1. \quad (3)$$

Рівняння (3) – це рівняння еліпса з півосями вздовж осі x – 10 см, вздовж осі y – 20 см. Центр еліпса має координати $C(5; -10)$. Використовуючи рівняння траєкторії (3) виконуємо її побудову (рис. К1а). При побудові обираємо такий масштаб відстаней, щоб на схемі було все добре видно.

Знайдемо координати точки на траєкторії. Для цього, підставимо в рівняння руху час t_1 , матимемо:

$$x = 10 \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) + 5 = 10 \cdot 0,5 + 5 = 10 \text{ см};$$

$$y = 20 \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) - 10 = 20 \cdot 0,866 - 10 = 7,32 \text{ см}.$$

Отже, маємо точку M з координатами $M(10; 7,32)$.

Перевірка 1: підставимо в рівняння (3) координату точки $x=10$ см та визначимо з нього координату y :

$$\left(\frac{10-5}{10}\right)^2 + \left(\frac{y+10}{20}\right)^2 = 1,$$

звідки отримуємо, що $y=7,32$ см.

2. Визначаємо швидкість точки (координатний спосіб) та зображаємо її графічно.

Швидкість точки знайдемо по її проекціям на координатні осі. Проекції швидкості мають вигляд:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[10 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 5 \right] = \frac{5\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right); \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left[20 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 10 \right] = -\frac{10\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Підставляючи час t_1 у вирази (4), матимемо:

$$v_{1x} = \frac{5 \cdot 3,14}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) = 5,236 \cdot 0,866 = 4,53 \text{ см/с};$$

$$v_{1y} = -\frac{10 \cdot 3,14}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) = (-10,47) \cdot 0,5 = -5,236 \text{ см/с}.$$

Модуль швидкості

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{(4,53)^2 + (-5,236)^2} = 6,92 \text{ см/с}. \quad (5)$$

Обираємо масштаб для швидкостей $\mu_v = 2:1$, і зображаємо їх графічно (рис. К1а), причому так, щоб на схемі було все добре видно. Проекції швидкості v_{1x} та v_{1y} відкладаємо у обраному масштабі відповідно вздовж осі x та y , враховуючи при цьому їх напрямок з вказаними осями. Якщо проекції швидкості v_{1x} та v_{1y} мають знак „+”, то їх направляємо в додатній бік осей, якщо знак „-” – в протилежний бік.

Перевірка 2: вектор швидкості $\vec{v}$ спрямований по дотичній τ до траєкторії точки.

3. Визначаємо пришвидшення точки (координатний спосіб) та зображаємо його графічно.

Пришвидшення точки знайдемо по його проекціям на координатні осі. Проекції пришвидшення мають вигляд:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{5\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \right] = -\frac{5\pi^2}{18} \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right); \\ a_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left[-\frac{10\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \right] = -\frac{5\pi^2}{9} \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Підставляючи час t_1 у вирази (6), матимемо:

$$\begin{aligned} a_{1x} &= -\frac{5 \cdot (3,14)^2}{18} \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) = (-2,74) \cdot 0,5 = -1,37 \text{ см/с}^2; \\ a_{1y} &= -\frac{5 \cdot (3,14)^2}{9} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) = (-5,48) \cdot 0,866 = -4,75 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Модуль пришвидшення

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \sqrt{(-1,37)^2 + (-4,75)^2} = 4,94 \text{ см/с}^2. \quad (7)$$

Обираємо масштаб для пришвидшень $\mu_a = 4:1$, і зображаємо їх графічно (рис. К1а), причому так, щоб на схемі було все добре видно. Проекції пришвидшень a_{1x} та a_{1y} відкладаємо у обраному масштабі відповідно вздовж осі x та y , враховуючи при цьому їх напрямок з вказаними осями. Якщо проекції пришвидшень a_{1x} та a_{1y} мають знак „+”, то їх направляємо в додатній бік осей, якщо знак „-” – в протилежний бік.

Перевірка 3: вектор пришвидшення $\vec{a}_1$ знаходиться з того ж боку, що і крива відносно дотичної τ .

4. Визначаємо пришвидшення точки (натуральний спосіб) та зображаємо їх графічно.

Дотичне пришвидшення знайдемо за формулою:

$$a_\tau = \vec{\tau} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{v}}{v_\tau} \cdot \vec{a} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v_\tau} . \quad (8)$$

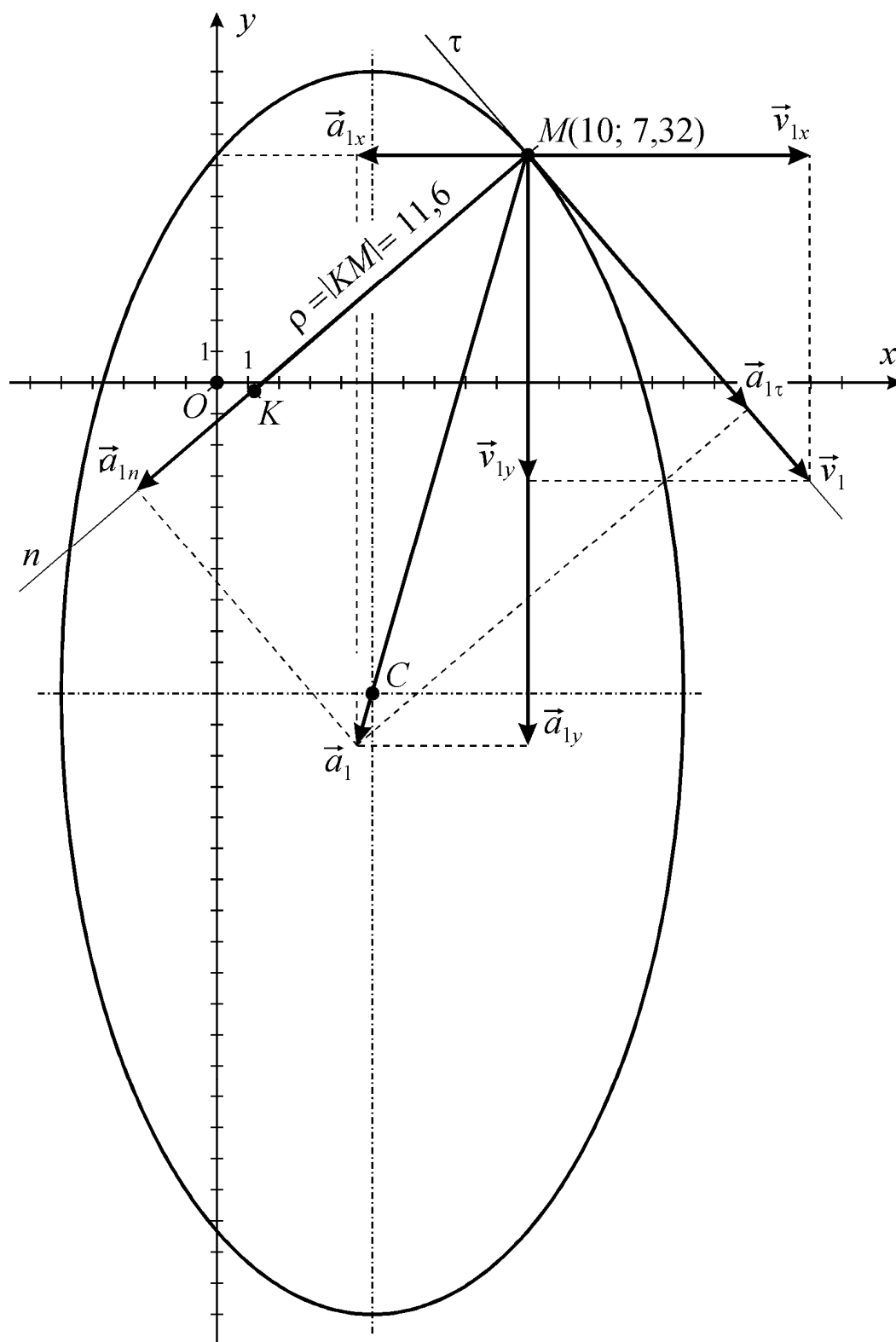


Рис. К1а

Враховуючи, що $v=v_1=v_\tau$, матимемо при t_1 :

$$a_{1\tau} = [4,53 \cdot (-1,37) + (-5,236) \cdot (-4,75)] / 6,92 = 2,7 \text{ см/с}^2.$$

Так як дотичне пришвидшення додатне, то його спрямовуємо в той же бік, що і вектор швидкості (якщо $a_{1\tau} < 0$, то в протилежний бік).

Нормальне пришвидшення знайдемо з формули:

$$a_{1n} = \sqrt{a_1^2 - a_{1\tau}^2} = \sqrt{(4,94)^2 - (2,7)^2} = 4,13 \text{ см/с}^2.$$

Нормальне пришвидшення розташовується з того ж боку, що і крива відносно дотичної τ , на перпендикулярі (нормалі n) опущеному на дотичну в точці M . Обираємо масштаб для пришвидшень $\mu_a = 4:1$, і зображаємо їх графічно (рис. К1а), причому так, щоб на схемі було все добре видно.

Перевірка 4: пришвидшення точки M , яке є діагоналлю прямокутника побудованого на сторонах a_{1x} та a_{1y} , співпадає з діагоналлю прямокутника побудованого на сторонах $a_{1\tau}$ та a_{1n} .

5. Визначаємо радіус кривини траєкторії та зображаємо його графічно. При t_1 :

$$\rho_1 = \frac{v_1^2}{a_{1n}} = \frac{(6,92)^2}{4,13} = 11,6 \text{ см.}$$

У масштабі відстаней, у напрямку нормального пришвидшення, вздовж нормалі n , відкладаємо радіус кривини.

Відповідь: $v_1=6,92 \text{ см/с}$, $a_1=4,94 \text{ см/с}^2$, $a_{1\tau}=2,7 \text{ см/с}^2$, $a_{1n}=4,13 \text{ см/с}^2$, $\rho_1=11,6 \text{ см}$.

1.4. Документ MathCad для розв'язання задачі K1

Документ

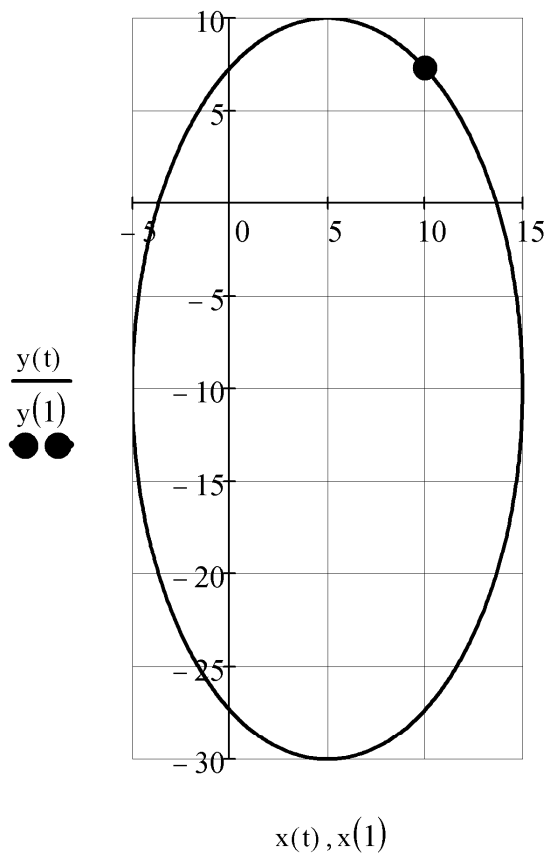
Mathcad для розв'язання
задачі K1 - з кінематики точки

1. Будуємо траєкторію руху точки і показуємо на ній положення точки у момент часу $t=1$ с.

Закон руху точки у координатному вигляді - це рівняння її траєкторії у параметричному вигляді (час t - параметр):

$$x(t) := 10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) + 5 \quad y(t) := 20 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) - 10$$

Координати точки M при $t=1$ с: $x(1) = 10$ $y(1) = 7.321$



На графіку зображено траєкторію руху точки і положення точки на траєкторії у момент часу $t=1$ с.

2. Проекції швидкості точки на осі x , y в довільний момент часу t :

$$v_x(t) := \frac{d}{dt} x(t) \quad v_x(t) \rightarrow \frac{5 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)}{3}$$

$$v_y(t) := \frac{d}{dt}y(t) \qquad v_y(t) \rightarrow -\frac{10 \cdot \pi \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)}{3}$$

Проекції швидкості точки на осі x, y в момент часу $t=1$ с:

$$v_x(1) = 4.534 \qquad v_y(1) = -5.236$$

Модуль швидкості точки в момент часу $t=1$ с:

$$v := \sqrt{v_x(1)^2 + v_y(1)^2} \qquad v = 6.927$$

3. Проекції пришвидження точки на осі x, y в довільний момент часу t :

$$a_x(t) := \frac{d}{dt}v_x(t) \qquad a_x(t) \rightarrow -\frac{5 \cdot \pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)}{18}$$

$$a_y(t) := \frac{d}{dt}v_y(t) \qquad a_y(t) \rightarrow -\frac{5 \cdot \pi^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)}{9}$$

Проекції пришвидження точки на осі x, y в момент часу $t=1$ с:

$$a_x(1) = -1.371 \qquad a_y(1) = -4.749$$

Модуль пришвидження точки в момент часу $t=1$ с:

$$a := \sqrt{a_x(1)^2 + a_y(1)^2} \qquad a = 4.942$$

4. Дотичне пришвидження в момент часу $t=1$ с:

$$a_\tau := \frac{a_x(1) \cdot v_x(1) + a_y(1) \cdot v_y(1)}{v} \qquad a_\tau = 2.692$$

Нормальне пришвидження в момент часу $t=1$ с:

$$a_n := \sqrt{a^2 - a_\tau^2} \qquad a_n = 4.145$$

5. Радіус кривини траєкторії в момент часу $t=1$ с:

$$\rho := \frac{v^2}{a_n} \qquad \rho = 11.575$$

Задача K2 – плоскопаралельний рух абсолютно твердого тіла

2.1. Умова задачі, розрахункові дані

Умова задачі. Плоский механізм складається із ланок 1, 2, 3, 4 і повзуна B або E (рис. K2.0 – K2.7), або із ланок 1, 2, 3 і повзунів B і E (рис. K2.8, K2.9), з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами O_1 , O_2 шарнірами; точка D знаходиться посередині ланки AB . Довжини ланок рівні відповідно $l_1=0,4$ м, $l_2=1,2$ м, $l_3=1,4$ м, $l_4=0,6$ м. Положення механізму визначається кутами α , β , γ , φ , θ . Значення цих кутів та інших заданих величин вказані в табл. K2a (для рис. K2.0 – K2.4), або в табл. K2б (для рис. K2.5 – K2.9); при цьому в табл. K2a ω_1 і ω_4 – величини сталі.

Дугові стрілки на рисунках показують те, як повинні відкладатися відповідні кути при побудові креслення механізму (за ходом чи проти ходу стрілки годинника). Побудову креслення слід розпочинати із ланки, напрямком якої визначається кутом α ; повзун з направляючими (рис. K2.10а) для наочності показати так, як показано на рис. K2.10б.

Задані кутову швидкість і кутове пришвидження вважати направленими проти годинникової стрілки, а задані швидкість v_B і пришвидження a_B – від точки B до b (на рис. K2.5 – K2.9).

Знайти: величини вказані в стовпчику “Знайти”.

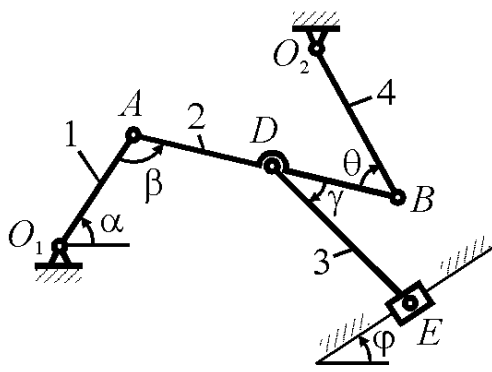


Рис. K2.0

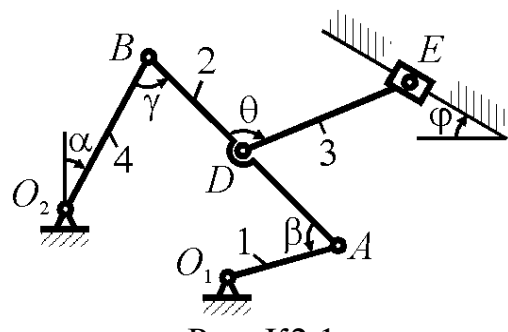


Рис. K2.1

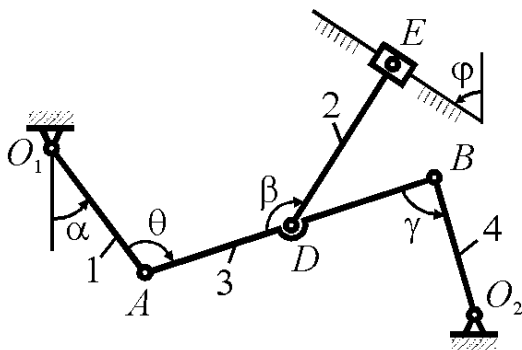


Рис. K2.2

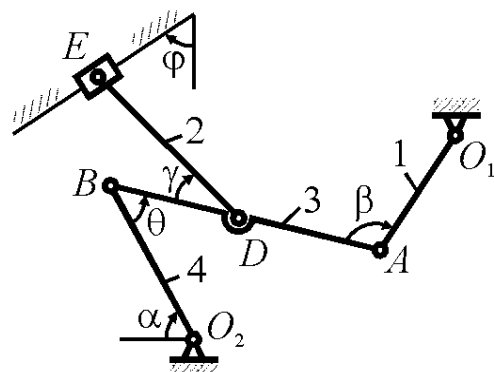


Рис. K2.3

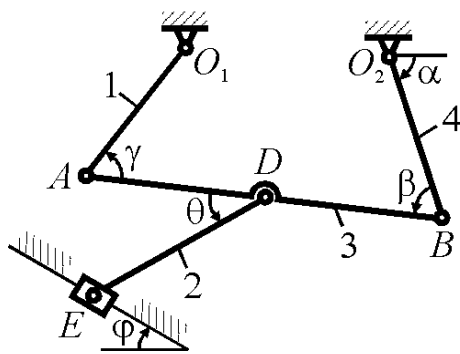


Рис. К2.4

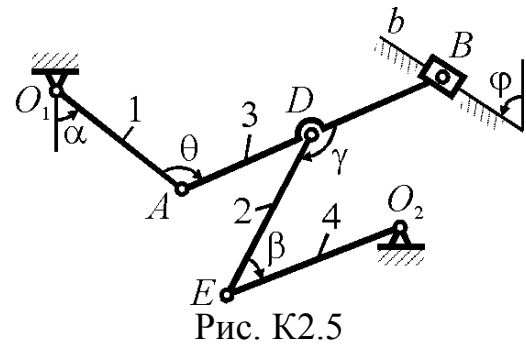


Рис. К2.5

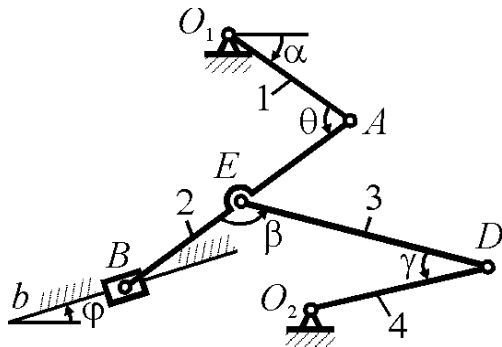


Рис. К2.6

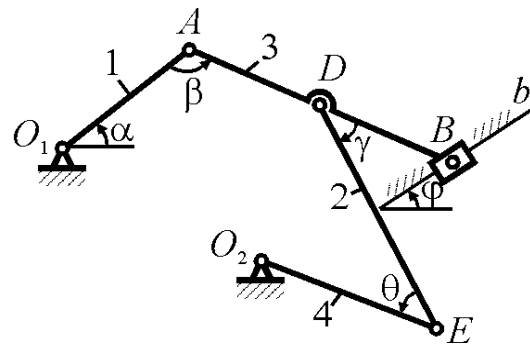


Рис. К2.7

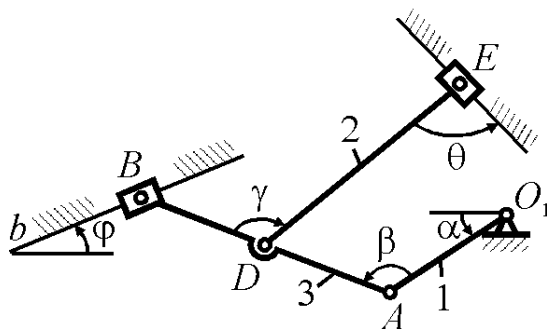


Рис. К2.8

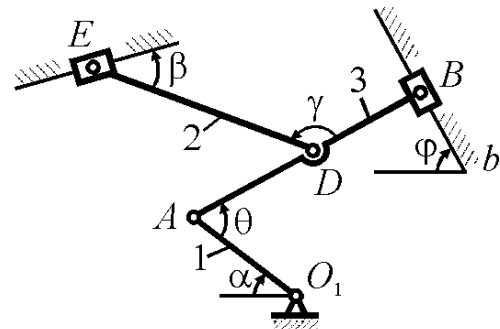


Рис. К2.9



Рис. К2.10а

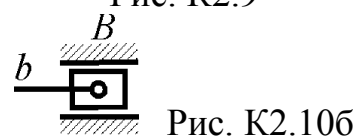


Рис. К2.10б

2.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача К2 – на дослідження плоскопаралельного руху твердого тіла. При її розв'язанні для визначення швидкостей точок механізму і кутових швидкостей його ланок необхідно скористатися теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла і поняттям про миттєвий центр швидкостей, застосовуючи дану теорему **до кожної ланки механізму окремо**. Побудову схеми швидкостей розпочинаємо з ланки механізму для якої задана швидкість (наприклад, або кутова швидкість однієї з ланок, або лінійна швидкість повзуна).

При визначенні пришвидження точок механізму необхідно використовувати векторну рівність $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n$, де A – точка, пришвидження $\vec{a}_A$ якої або задано, або безпосередньо визначається по умові задачі (якщо точка A рухається по дузі кола, то $\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^n$); B – точка, пришвидження $\vec{a}_B$ якої потрібно визначити (у випадку, коли точка B теж рухається по дузі кола, необхідно дивитися примітку в кінці розглянутого нижче прикладу К2).

Таблиця К2а (до рис. К2.0 – К2.4)

Номер умови	Кути, град					Дано		Знайти			
	α	β	γ	φ	θ	$\omega_1, 1/c$	$\omega_4, 1/c$	v , точок	ω , ланки	a , точки	ε , ланки
0	0	60	30	0	120	6	--	B, E	DE	B	AB
1	90	120	150	0	30	--	4	A, E	AB	A	
2	30	60	30	0	120	5	--	B, E	AB	B	
3	60	150	150	90	30	--	5	A, E	DE	A	
4	30	30	60	0	150	4	--	D, E	AB	B	
5	90	120	120	90	60	--	6	A, E	AB	A	
6	90	150	120	90	30	3	--	B, E	DE	B	
7	0	60	60	0	120	--	2	A, E	DE	A	
8	60	150	120	90	30	2	--	D, E	AB	B	
9	30	120	150	0	60	--	8	A, E	DE	A	

Таблиця К2б (до рис. К2.5 – К2.9)

Номер умови	Кути, град					Дано				Знайти			
	α	β	γ	φ	θ	$\omega_1, 1/c$	$\varepsilon_1, 1/c^2$	$v_B, m/c$	$a_B, m/c^2$	v , точок	ω , ланки	a , точки	ε , ланки
0	120	30	30	90	150	2	4	--	--	B, E	DE	B	AB
1	0	60	90	0	120	--	--	4	6	A, E	AB	A	
2	60	150	30	90	30	3	5	--	--	B, E	AB	B	
3	0	150	30	0	60	--	--	6	8	A, E	DE	A	
4	30	120	120	0	60	4	6	--	--	D, E	AB	B	
5	90	120	90	90	60	--	--	8	3	A, E	AB	A	
6	0	150	90	0	120	5	8	--	--	B, E	DE	B	
7	30	120	30	0	60	--	--	2	5	A, E	DE	A	
8	90	120	120	90	150	6	10	--	--	D, E	AB	B	
9	60	60	60	90	30	--	--	5	4	A, E	DE	A	

2.3. Приклад розв'язання задачі K2

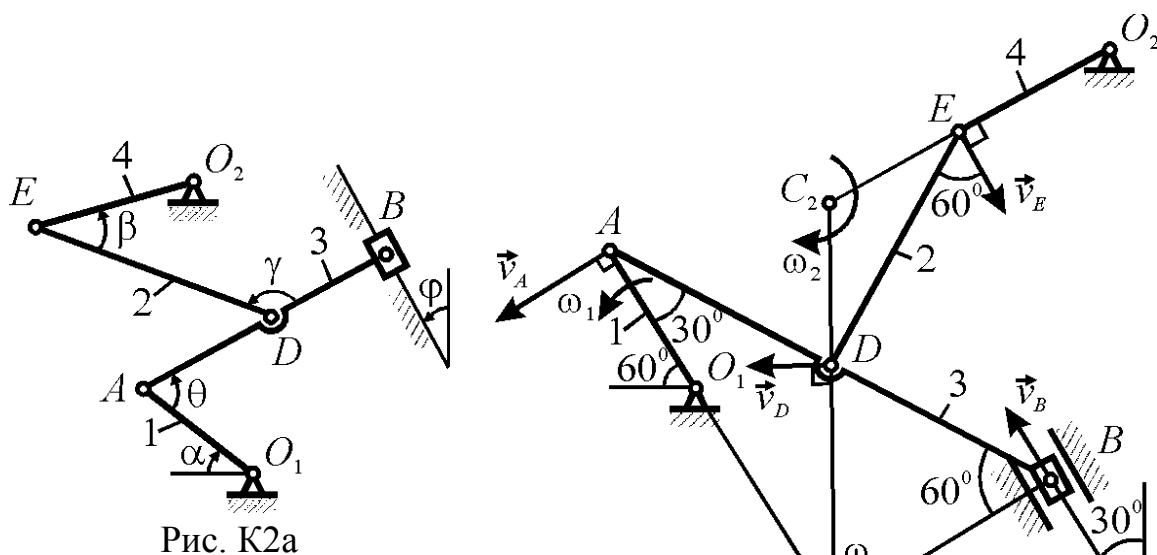
Умова задачі. Плоский механізм (рис. K2a) складається із ланок 1, 2, 3, 4 і повзуна B , з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами O_1 і O_2 шарнірами.

Дано: $\alpha=60^\circ$, $\beta=150^\circ$, $\gamma=90^\circ$, $\varphi=30^\circ$, $\theta=30^\circ$, $AD=DB$, $l_1=0,4$ м, $l_2=1,2$ м, $l_3=1,4$ м, $l_4=0,6$ м, $\omega_1=2$ рад/с, $\varepsilon_1=7$ рад/с².

Знайти: швидкості v_B , v_E і ω_2 ; пришвидження ε_3 і a_B .

Розв'язок

1. Будуємо схему для швидкостей (рис. K2б). Будуємо положення механізму у відповідності із заданими кутами розпочинаючи з ланки, напрямком якої визначається кут α .



Побудову схеми швидкостей розпочнемо з першої ланки механізму (для якої задана кутова швидкість ω_1). Швидкість $\vec{v}_A$ направлена в сторону повороту і так, що $\vec{v}_A \perp O_1A$. Розглядаючи сусідню ланку 3, знайдемо спочатку напрямок швидкості точки B (вектор швидкості $\vec{v}_B$ паралельний напрямляючим по яким рухається повзун. Для цього будемо миттєвий центр швидкостей (МЦШ) ланки AB – це точка C_3 , що лежить на перетині перпендикулярів до швидкості $\vec{v}_A$ і напрямній вздовж якої рухається повзун, проведених із точок A і B . Враховуючи напрямок швидкості $\vec{v}_A$, кутова швидкість обертання ланки 3 ω_3 , буде направлена проти ходу стрілки годинника. Вектори $\vec{v}_B$ і $\vec{v}_D$ направлені в сторону повороту ланки AB , причому $\vec{v}_D \perp C_3D$.

Розглянемо ланку 2. Так як точка E належить одночасно ланці 4, що обертається навколо O_2 , то $\vec{v}_E \perp O_2E$. Тоді, провівши перпендикуляри з точок E і D до швидкостей $\vec{v}_E$ і $\vec{v}_D$, побудуємо МЦШ C_2 ланки 2. По напрямку вектора $\vec{v}_D$ визначаємо напрямок повороту ланки 2 навколо центра C_2 . Вектор $\vec{v}_E$ направлений в сторону поворота цієї ланки.

2. Знаходимо швидкості. З рис. К2б отримуємо, що:

$$v_A = \omega_1 l_1 = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ м/с.}$$

Для знаходження швидкості точки B використаємо теорему про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що з'єднує ці точки (пряма AB), тоді

$$v_A \cos 60^\circ = v_B \cos 30^\circ,$$

звідки

$$v_B = \frac{v_A \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{0,8 \cdot 0,5}{0,866} = 0,462 \text{ м/с.}$$

Величину v_D знайдемо з пропорції:

$$\frac{v_D}{C_3D} = \frac{v_B}{C_3B}. \quad (1)$$

Знайдемо C_3D і C_3B . Розглядаючи ΔAC_3B знайдемо, що

$$C_3B = AB \sin 30^\circ = 0,5AB = BD = 0,7 \text{ м,}$$

$$C_3A = AB \cos 30^\circ = 1,4 \cdot 0,866 \approx 1,21 \text{ м.}$$

Тоді ΔBC_3D є рівностороннім трикутником і $C_3B = C_3D$. З рівності (1) отримуємо, що $v_D = v_B = 0,462 \text{ м/с.}$

Знайдемо кутову швидкість ω_3 :

$$\omega_3 = \frac{v_A}{C_3A} = \frac{0,8}{1,21} \approx 0,66 \text{ рад/с.}$$

Величину v_E знайдемо з пропорції:

$$\frac{v_E}{C_2E} = \frac{v_D}{C_2D}. \quad (2)$$

Знайдемо C_2D і C_2E . З рис. К2б видно, що $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30^\circ$ і

$$C_2E = C_2D = 0,5l_2 / \cos 30^\circ \approx 0,693 \text{ м.}$$

З рівності (2) отримуємо, що $v_E = v_D = 0,462 \text{ м/с.}$

З рис. К2б знайдемо, що

$$\omega_2 = \frac{v_D}{C_2D} = \frac{0,462}{0,693} \approx 0,667 \text{ рад/с.}$$

3. Будуємо схему для пришвидшень (рис. К2в). Так як ланки 2 і 4 не використовуються при проведенні розрахунків, то їх на рис. К2в не показано.

Пришвидшення точки B ланки 3, яка здійснює плоскопаралельний рух, має вигляд:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}. \quad (3)$$

Враховуючи, що точка B одночасно належить повзуну, який рухається поступально, вектор $\vec{a}_B$ паралельний направляючим повзуна. Тоді рівність (3) можна подати так:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n. \quad (4)$$

Вектор $\vec{a}_A^n$ направлений вздовж AO_1 , $\vec{a}_A^\tau$ - перпендикулярно AO_1 . Зображаємо на кресленні вектори $\vec{a}_{BA}^n$ (вздовж BA від B до A) і $\vec{a}_{BA}^\tau$ (в будь-яку сторону перпендикулярно BA).

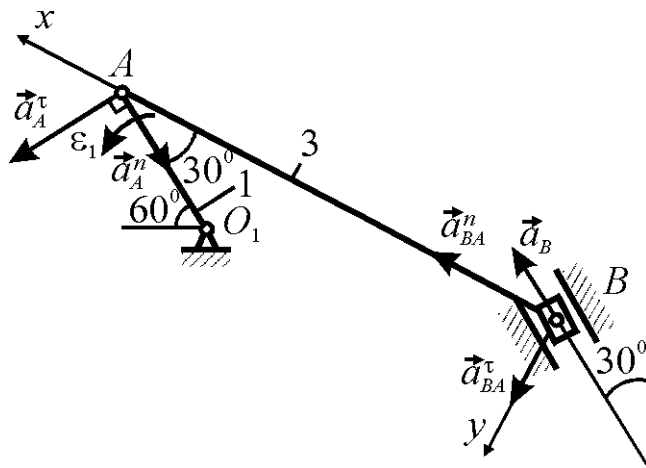


Рис. К2в

4. Визначаємо пришвидшення точки B . Знайдемо пришвидшення $\vec{a}_A^\tau$, $\vec{a}_A^n$, $\vec{a}_{BA}^n$:

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 7 \cdot 0,4 = 2,8 \text{ м/с}^2; \quad a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 2^2 \cdot 0,4 = 1,6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^n = \omega_3^2 l_3 = 0,66^2 \cdot 1,4 \approx 0,61 \text{ м/с}^2.$$

Для знаходження невідомих пришвидшень $\vec{a}_B$, $\vec{a}_{BA}^\tau$ скористаємося методом проекцій. Для цього введемо координатні осі x та y і спроекуємо на них векторне рівняння (4) (рис. К2в), матимемо:

$$\begin{aligned} x: a_B \cos 30^\circ &= a_A^\tau \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n; \\ y: -a_B \sin 30^\circ &= a_A^\tau \sin 60^\circ + a_A^n \sin 30^\circ + a_{BA}^\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Розв'язуємо отриману систему рівнянь (5) відносно невідомих $\vec{a}_B$, $\vec{a}_{BA}^\tau$. З першого рівняння системи (5), знайдемо:

$$a_B = \frac{a_A^\tau \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n}{\cos 30^\circ} = \frac{2,8 \cdot 0,5 - 1,6 \cdot 0,866 + 0,61}{0,866} \approx 0,72 \text{ м/с}^2.$$

Так як $a_B > 0$, то вектор $\vec{a}_B$ направлений так як показано на рис. К2в. Розв'яжемо друге рівняння системи (5), отримаємо:

$$\begin{aligned} a_{BA}^\tau &= -a_B \sin 30^\circ - a_A^\tau \sin 60^\circ - a_A^n \sin 30^\circ = \\ &= -0,72 \cdot 0,5 - 2,8 \cdot 0,866 - 1,6 \cdot 0,5 \approx -3,585 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Знак “–” вказує, що напрямок $\vec{a}_{BA}^\tau$ протилежний показаному на рис.

К3в. З рівності $a_{BA}^\tau = \varepsilon_3 l_3$ отримаємо:

$$\varepsilon_3 = \frac{|a_{BA}^\tau|}{l_3} = \frac{3,585}{1,4} \approx 2,56 \text{ рад/с}^2.$$

Відповідь: $v_B = 0,462 \text{ м/с}$; $v_E = 0,462 \text{ м/с}$; $\omega_2 = 0,667 \text{ рад/с}$;
 $a_B = 0,72 \text{ м/с}^2$; $\varepsilon_3 = 2,56 \text{ рад/с}^2$.

Примітка. Якщо точка B , пришвидшення якої визначається, рухається не прямолінійно (наприклад, як на рис. К2.0 – К2.4, де точка B рухається по колу радіуса O_2B), то напрямок $\vec{a}_B$ наперед невідомий. В цьому випадку $\vec{a}_B$ також слід подати двома складовими ($\vec{a}_B = \vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n$) і вихідне рівняння (8) набуде вигляду:

$$\vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n. \quad (6)$$

При цьому вектор $\vec{a}_B^n$ буде направлений вздовж BO_2 , а вектор $\vec{a}_B^\tau$ – перпендикулярно BO_2 в будь-яку сторону. Числові значення a_A^τ , a_A^n і a_{BA}^n визначаються так, як в розглядуваному прикладі (причому по умові задачі може бути, що $a_A^\tau = 0$ або $a_A^n = 0$, якщо точка A рухається прямолінійно).

Значення a_B^n також обчислюється по формулі: $a_B^n = v_B^2 / \rho = v_B^2 / l$, де l – радіус кола O_2B . Після цього в рівності (6) залишаються невідомими тільки значення a_B^τ і a_{BA}^τ і вони, як і в розглядуваному прикладі, знаходяться проектуванням обох частин рівності (6) на дві осі. Знайшовши a_B^τ , можемо обчислити шукане пришвидшення

$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2}.$$

Величина a_{BA}^τ використовується для знаходження ε_{AB} .

Задача К3 – складний рух матеріальної точки

3.1. Умова задачі, розрахункові дані

Умова задачі. Прямокутна пластина (рис. К3.0 – К3.4) або кругла пластина радіуса $R=60$ см (рис. К3.5 – К3.9) обертається навколо нерухомої осі по закону $\varphi=f_1(t)$, заданному в табл. К3. Додатній напрямок відліку кута φ показано на рисунках дуговою стрілкою. На рис. К3.0 – К3.2, К3.5, К3.6 вісь обертання перпендикулярна площині пластини і проходить через точку O (пластинка обертається в своїй площині); на рис. К3.3, К3.4, К3.7 – К3.9 вісь обертання OO_1 лежить в площині пластини (пластина обертається у просторі).

По пластині вздовж прямої BD (рис. К3.0 – К3.4) або по колу радіуса R (рис. К3.5 – К3.9) рухається точка M ; закон її відносного руху, тобто залежність $s=f_2(t)$ (s виражено в сантиметрах, t – в секундах), заданий в таблиці К3 окремо для рис. К3.0 – К3.4 і для рис. К3.5 – К3.9. На рисунках точка M показана в положенні, при якому $s>0$ (при $s<0$ точка M знаходиться по іншу сторону від точки A).

Знайти: абсолютну швидкість та абсолютне пришвидження точки M в момент часу $t_1=1$ с.

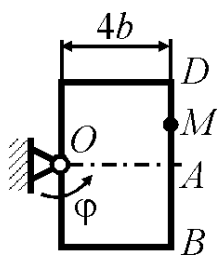


Рис. К3.0

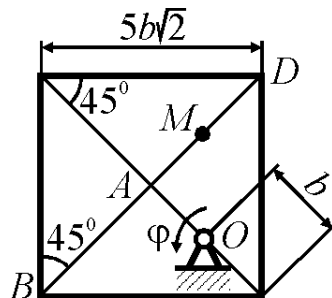


Рис. К3.1

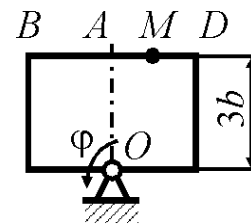


Рис. К3.2

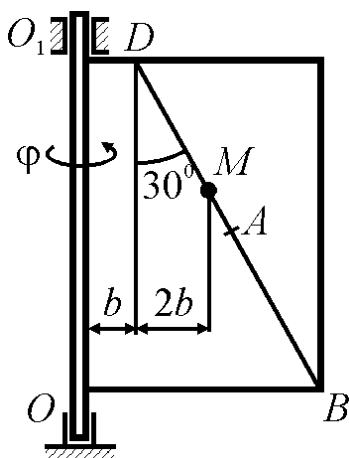


Рис. К3.3

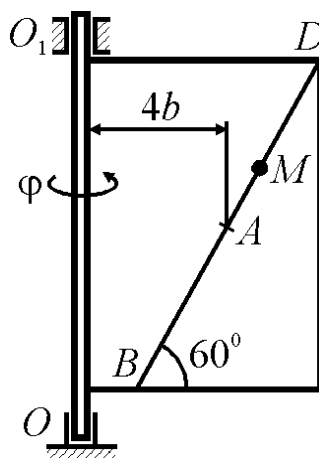


Рис. К3.4

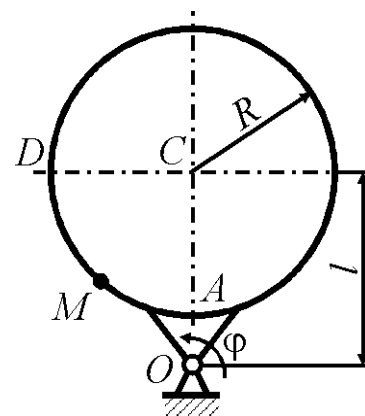


Рис. К3.5

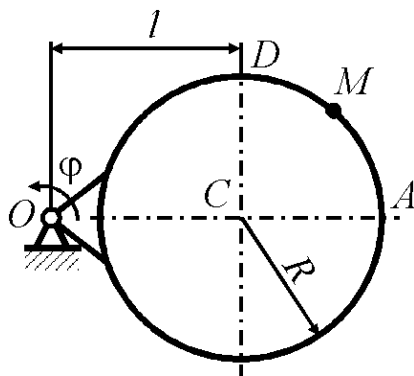


Рис. К3.6

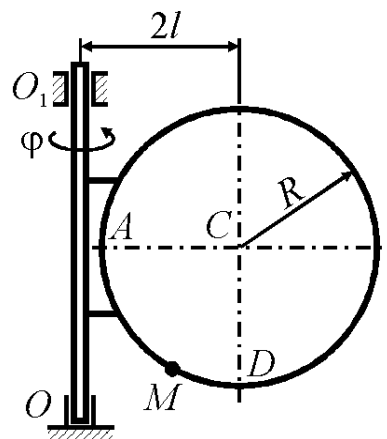


Рис. К3.7

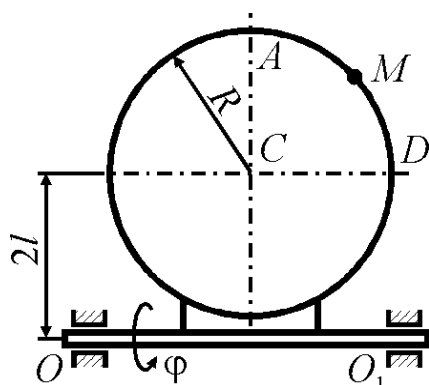


Рис. К3.8

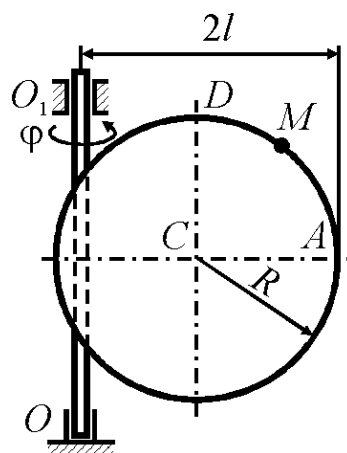


Рис. К3.9

Таблица К3

Номер умови	$\varphi=f_1(t)$, рад	Рис. К3.0 – К3.4		Рис. К3.5 – К3.9	
		b , см	$s = AM =$ $= f_2(t)$, см	l , см	$s = \overset{\smile}{AM} =$ $= f_2(t)$, см
0	$4(t^2-t)$	12	$50(3t-t^2)-64$	R	$\pi R(4t^2-2t^3)/3$
1	$3t^2-8t$	16	$40(3t^2-t^4)-32$	$4R/3$	$\pi R(2t^2-t^3)/2$
2	$6t^3-12t^2$	10	$80(t^2-t)+40$	R	$\pi R(2t^2-1)/3$
3	t^2-2t^3	16	$60(t^4-3t^2)+56$	R	$\pi R(3t-t^2)/6$
4	$10t^2-5t^3$	8	$80(2t^2-t^3)-48$	R	$\pi R(t^3-2t)/3$
5	$2(t^2-t)$	20	$60(t^3-2t^2)$	R	$\pi R(t^3-2t)/6$
6	$5t-4t^2$	12	$40(t^2-3t)+32$	$3R/4$	$\pi R(t^3-2t^2)/2$
7	$15t-3t^3$	8	$60(t-t^3)+24$	R	$\pi R(t-5t^2)/6$
8	$2t^3-11t$	10	$50(t^3-t)-30$	R	$\pi R(3t^2-t)/3$
9	$6t^2-3t^3$	20	$40(t-2t^3)-40$	$4R/3$	$\pi R(t-2t^2)/2$

3.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача КЗ – на складний рух точки. Для її розв'язання скористаємося теоремами про складання швидкостей і про складання пришвидшень. Перед тим, як виконувати всі розрахунки, слід по умові задачі визначити, де знаходиться точка M на пластині в момент часу $t_1=1$ с, і показати точку саме в цьому положенні (а не в довільному, яке показано на рисунках до задачі).

У випадках, що відносяться до рис. КЗ.5 – КЗ.9, при розв'язанні задачі не підставляти числового значення R , поки не буде визначене положення точки M в момент часу $t_1=1$ с і кут між радіусами CM і CA в цей момент.

3.3. Приклад розв'язання задачі КЗа (складний рух точки у просторі)

Умова задачі. Пластинка $KDABE$ обертається у просторі навколо нерухомої осі OO_1 , яка лежить у площині пластинки, за законом $\varphi=f_1(t)$ (додатній напрямок відліку кута φ показано на рис. КЗа дуговою стрілкою). Відносно пластинки по колу радіуса R рухається точка M за законом $s=f_2(t)$ (додатній напрямок відліку s – від A до M).

Дано: $R=0,7$ м; $\varphi=2t^2-5t$; $s = \overset{\curvearrowright}{AM} = \frac{\pi R}{3} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ (φ – в радіанах, s –

в метрах, t – в секундах).

Знайти: абсолютну швидкість та абсолютне пришвидшення точки M в момент часу $t_1=1$ с.

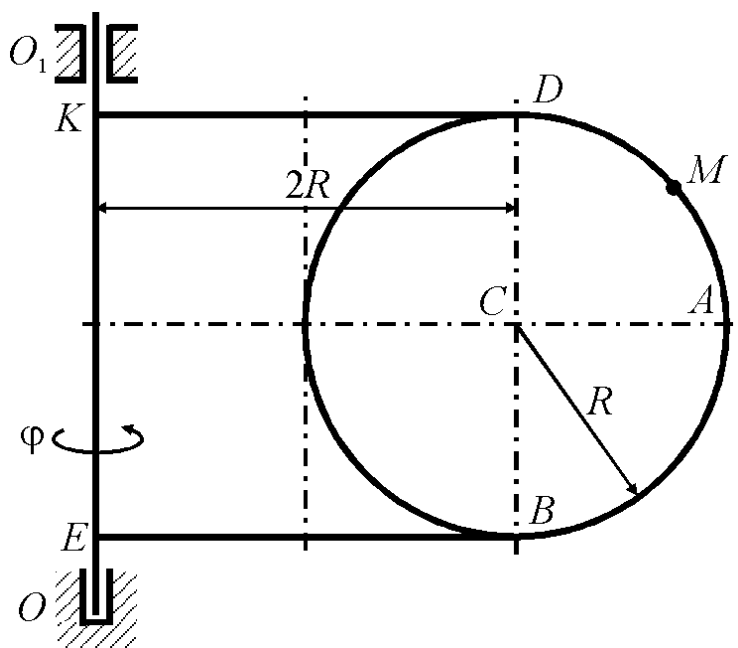


Рис. КЗа

Розв'язок

1. Визначимо швидкості при відносному і переносному русі точки M (рис. К3б).

Будемо розглядати рух точки M , як складний. Тоді рух точки по колу будемо називати відносним рухом (пластинка при цьому умовно нерухома), а рух точки разом з пластинкою – переносним рухом (при цьому точка і пластинка обертаються, як одне жорстке ціле).

Спочатку визначаємо положення точки M на траєкторії. При t_1 матимемо:

$$s = \frac{\pi R}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi R}{6} > 0 \text{ м.}$$

Кут $\alpha = \angle ACM = s/R = \pi/6$ (рис. К3б). Так як $s > 0$, то відлік AM співпадає із вказаним на рисунку. Покажемо положення точки M на траєкторії при $\alpha = \pi/6$ (рис. К3б).

Швидкість точки M при її відносному русі має вигляд:

$$v_r = \dot{s} = \left[\frac{\pi R}{3} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \right]' = -\frac{\pi^2 R}{9} \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При t_1 , матимемо

$$v_r = -\frac{(3,14)^2 \cdot 0,7}{9} \cdot 0,866 = -0,664 \text{ м/с.}$$

Знак “–” вказує на те, що вектор $\vec{v}_r$ направлений в протилежну сторону зміни дугової координати s по дотичній до траєкторії точки при її відносному русі.

Швидкість точки M при її переносному русі має вигляд:

$$v_e = \omega r,$$

де

$$\omega = \dot{\varphi} = (2t^2 - 5t)' = 4t - 5; \quad r = NM = 2R + R \cos \alpha.$$

При t_1

$$\omega = 4 \cdot 1 - 5 = -1 \text{ рад/с}; \quad r = 2 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,866 = 2 \text{ м};$$

$$v_e = |\omega| \cdot r = |-1| \cdot 2 = 2 \text{ м/с.}$$

Знак “–” вказує на те, що напрямок кутової швидкості ω буде протилежний напрямку додатнього відліку кута повороту пластинки φ . Вектор $\vec{v}_e$ перпендикулярний площині пластинки і направлений в сторону кутової швидкості.

2. Знайдемо абсолютну швидкість точки M . Абсолютна швидкість точки M має вигляд:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

Так як вектори $\vec{v}_e$ і $\vec{v}_r$ взаємно перпендикулярні, то тоді

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{2^2 + (-0,664)^2} = 2,1 \text{ м/с}.$$

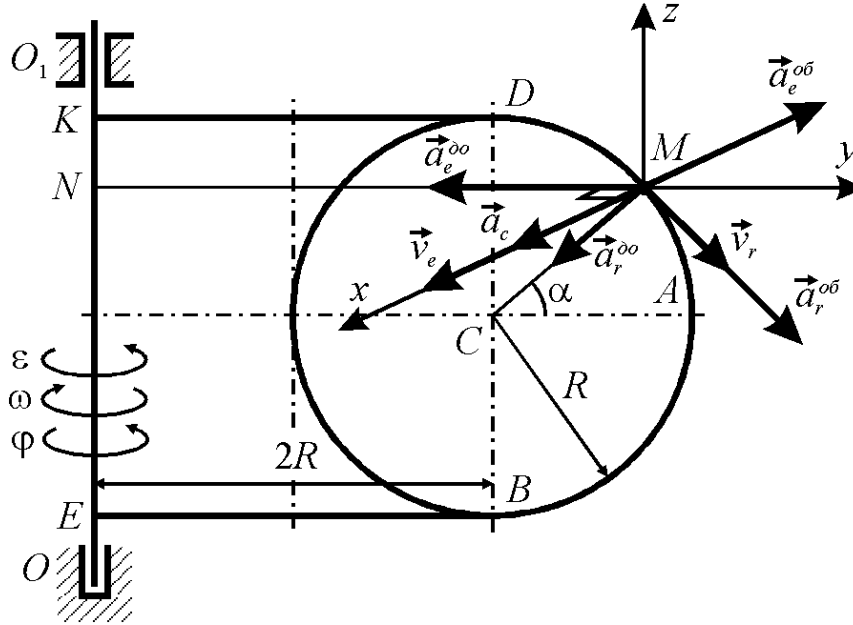


Рис. К3б

3. Визначимо пришвидшення переносного і відносного руху точки M та пришвидження Кориоліса. Так як у відносному русі точка M здійснює рух по колу (рис. К3б), то її пришвидження при відносному русі має вигляд:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^{ob} + \vec{a}_r^{do},$$

де

$$a_r^{ob} = \dot{v}_r = \left[-\frac{\pi^2 R}{9} \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) \right]' = -\frac{\pi^3 R}{27} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right), \quad a_r^{do} = \frac{v_r^2}{R} = \frac{\pi^4 R}{81} \sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При t_1 , матимемо

$$a_r^{ob} = -\frac{(3,14)^3 \cdot 0,7}{27} \cdot 0,5 = -0,4 \text{ м/с}^2; \quad a_r^{do} = \frac{(3,14)^4 \cdot 0,7}{81} \cdot 0,866^2 = 0,63 \text{ м/с}^2.$$

Знак “–” вказує на те, що вектор $\vec{a}_r^{ob}$ направлений в протилежну сторону зміни дугової координати s по дотичній до траєкторії точки при її відносному русі; вектор $\vec{a}_r^{do}$ направлений до центра C кола.

Пришвидження точки M при її переносному русі має вигляд:

$$\vec{a}_e = a_e^{do} + a_e^{ob},$$

де

$$a_e^{do} = \omega^2 r; \quad a_e^{ob} = \varepsilon r; \quad \varepsilon = \dot{\omega} = (4t - 5)' = 4 \text{ рад/с}.$$

Напрямок кутового пришвидження ε співпадає з напрямком додатнього відліку кута φ . При t_1

$$a_e^{\partial o} = (-1)^2 \cdot 2 = 2 \text{ м/с}^2; \quad a_e^{o\partial} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ м/с}^2.$$

Вектор пришвидження $\vec{a}_e^{\partial o}$ направлений по прямій MN до осі обертання, а вектор $\vec{a}_e^{o\partial}$ – перпендикулярно площині пластинки і в сторону кутового пришвидження.

Знайдемо пришвидження Коріоліса. Так як кут між вектором $\vec{v}_r$ і віссю обертання (вектором $\vec{\omega}$) рівний 30° , то пришвидження Коріоліса в момент часу t_1 дорівнюватиме:

$$a_c = 2 \cdot |\vec{v}_r| \cdot |\vec{\omega}| \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot |-0,664| \cdot |-1| \cdot 0,5 = 0,664 \text{ м/с}^2.$$

Напрямок вектора $\vec{a}_c$ знайдемо використовуючи правило Жуковського. Для цього вектор $\vec{v}_r$ спроектуємо на площину перпендикулярну осі обертання (проекція буде направлена протилежно вектору $\vec{a}_e^{\partial o}$) і потім цю проекцію повертаємо на кут 90° в сторону $\vec{\omega}$, тобто за ходом стрілки годинника; в результаті отримаємо напрямок вектора пришвидження Коріоліса. Вектор $\vec{a}_c$ направлений так само, як і вектор $\vec{v}_e$.

4. Знайдемо абсолютне пришвидження точки M при її складному русі. За теоремою Коріоліса абсолютне пришвидження точки M має вигляд:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^{o\partial} + \vec{a}_e^{\partial o} + \vec{a}_r^{o\partial} + \vec{a}_r^{\partial o} + \vec{a}_c.$$

Для визначення абсолютного пришвидження проведемо координатні осі $Mxyz$ і обчислимо його проекції на ці осі:

$$a_{ax} = a_c - a_e^{o\partial} = 0,664 - 8 = -7,336 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{ay} = |a_r^{o\partial}| \sin 30^\circ - a_r^{\partial o} \cos 30^\circ - a_e^{\partial o} = |-0,4| \cdot 0,5 - 0,63 \cdot 0,866 - 2 = -2,34 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{az} = -|a_r^{o\partial}| \cdot \cos 30^\circ - a_r^{\partial o} = -|-0,4| \cdot 0,866 - 0,63 = -0,976 \text{ м/с}^2.$$

Остаточню

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{(-7,336)^2 + (-2,34)^2 + (-0,976)^2} = 7,76 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $v_a = 2,1 \text{ м/с}$, $a_a = 7,76 \text{ м/с}^2$.

3.4. Приклад розв'язання задачі КЗб (складний рух точки у площині)

Умова задачі. Пластинка $ODAB$ обертається навколо осі, що проходить через точку O перпендикулярно площині пластинки, за законом $\varphi=f_1(t)$ (додатній напрямок відліку кута φ показано на рис. КЗв дуговою стрілкою). Відносно пластинки по колу радіуса R рухається точка M за законом $s=f_2(t)$ (додатній напрямок відліку s – від A до M).

Дано: $R=0,5$ м; $\varphi=t^2-0,5t^3$; $s = \overset{\circ}{AM} = \pi R \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ (φ – в радіанах, s

– в метрах, t – в секундах).

Знайти: абсолютну швидкість та абсолютне пришвидження точки M в момент часу $t_1=2$ с.

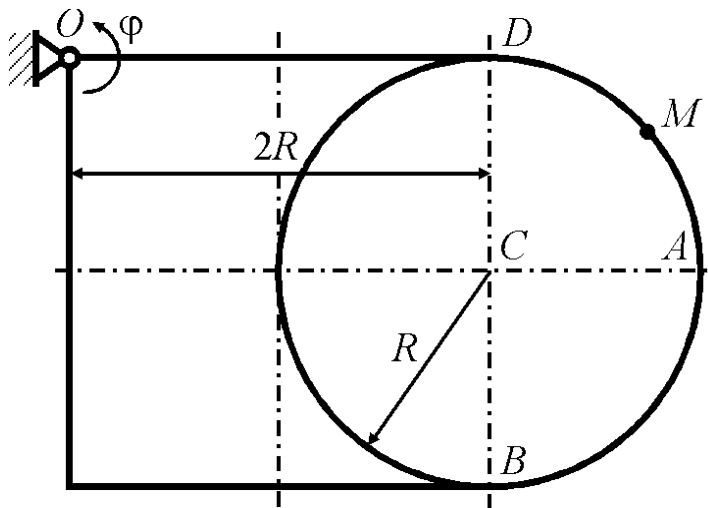


Рис. КЗв

Розв'язок

1. Визначимо швидкості при відносному і переносному русі точки M (рис. КЗг).

Будемо розглядати рух точки M , як складний. Тоді рух точки по колу будемо називати відносним рухом (пластинка при цьому умовно нерухома), а рух точки разом з пластинкою – переносним рухом (при цьому точка і пластинка обертаються, як одне жорстке ціле).

Спочатку визначаємо положення точки M на траєкторії. При t_1 матимемо:

$$s = \pi R \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\pi R}{2} < 0 \text{ м.}$$

Кут $\alpha = \angle ACM = s/R = -\pi/2$ (рис. КЗг). Так як $s < 0$, то точка M буде розташована по інший бік від точки A (рис. КЗг). Покажемо положення точки M на траєкторії при $\alpha = -\pi/2$ (рис. КЗг).

Швидкість точки M при її відносному русі має вигляд:

$$v_r = \dot{s} = \left[\pi R \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \right]' = -\frac{\pi^2 R}{3} \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При t_1 , матимемо

$$v_r = -\frac{(3,14)^2 \cdot 0,5}{3} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \approx -1,42 \text{ м/с}.$$

Знак “–” вказує на те, що вектор $\vec{v}_r$ направлений в протилежну сторону зміни дугової координати s по дотичній до траєкторії точки при її відносному русі.

Швидкість точки M при її переносному русі має вигляд:

$$v_e = \omega r,$$

де

$$\omega = \dot{\phi} = (t^2 - 0,5t^3)' = 2t - 1,5t^2; \quad r = OM = 2R\sqrt{2}.$$

При t_1

$$\omega = 2 \cdot 2 - 1,5 \cdot 2^2 = -2 \text{ рад/с}; \quad r = 2 \cdot 0,5\sqrt{2} \approx 1,414 \text{ м};$$

$$v_e = |\omega| \cdot r = |-2| \cdot 1,414 \approx 2,83 \text{ м/с}.$$

Знак “–” вказує на те, що напрямку кутової швидкості ω буде протилежний напрямку додатнього відліку кута повороту пластинки ϕ . Вектор $\vec{v}_e$ направлений в сторону кутової швидкості і так, що $\vec{v}_e \perp OM_1$.

2. Знайдемо абсолютну швидкість точки M . Абсолютна швидкість точки M має вигляд:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

Для визначення абсолютної швидкості $\vec{v}_a$ проведемо координатні осі Mx і обчислимо його проекції на ці осі:

$$v_{ax} = -|v_e| \cos 45^\circ = -2,83 \cdot 0,707 = -2 \text{ м/с};$$

$$v_{ay} = |v_r| + |v_e| \cos 45^\circ = 1,42 + 2,83 \cdot 0,707 = 3,42 \text{ м/с}^2.$$

Остаточно

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3,42^2} = 3,96 \text{ м/с}^2.$$

3. Визначимо пришвидшення переносного і відносного руху точки M та пришвидшення Кориоліса.

Так як у відносному русі точка M здійснює рух по колу (рис. К3г), то її пришвидшення у відносному русі має вигляд:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^{ob} + \vec{a}_r^{do},$$

де

$$a_r^{o\delta} = \dot{v}_r = \left[-\frac{\pi^2 R}{3} \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) \right]' = -\frac{\pi^3 R}{9} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right), \quad a_r^{\partial o} = \frac{v_r^2}{R} = \frac{\pi^4 R}{9} \sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При t_1 , матимемо

$$a_r^{o\delta} = -\frac{(3,14)^3 \cdot 0,5}{9} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \approx 0,86 \text{ м/с}^2;$$

$$a_r^{\partial o} = \frac{(3,14)^4 \cdot 0,5}{9} \cdot 0,866^2 \approx 4,06 \text{ м/с}^2.$$

Знак “+” вказує на те, що вектор $\vec{a}_r^{o\delta}$ направлений в сторону зміни дугової координати s по дотичній до траєкторії точки при її відносному русі; вектор $\vec{a}_r^{\partial o}$ направлений до центра C кола.

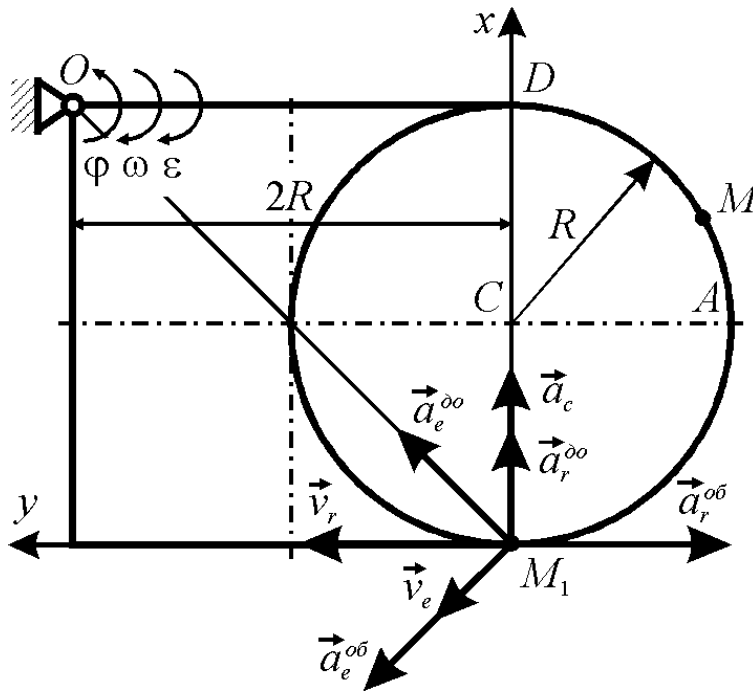


Рис. КЗГ

Пришвидшення точки M при її переносному русі має вигляд:

$$\vec{a}_e = a_e^{\partial o} + a_e^{o\delta},$$

де

$$a_e^{\partial o} = \omega^2 r; \quad a_e^{o\delta} = |\varepsilon| r; \quad \varepsilon = \dot{\omega} = (2t - 1,5t^2)' = 2 - 3t.$$

При t_1

$$\varepsilon = 2 - 3 \cdot 2 = -4 \text{ рад/с}^2; \quad a_e^{\partial o} = (-2)^2 \cdot 1,414 = 5,656 \text{ м/с}^2;$$

$$a_e^{o\delta} = 4 \cdot 1,414 = 5,656 \text{ м/с}^2.$$

Знак “-” вказує на те, що напрямок кутового пришвидшення ε буде протилежний напрямку додатнього відліку кута повороту пластинки φ .

Вектор пришвидшення $\vec{a}_e^{\partial o}$ направлений по прямій OM_1 до центра обертання – точки O , а вектор $\vec{a}_e^{o\partial}$ направлений в сторону кутового пришвидження і так, що $\vec{a}_e^{o\partial} \perp OM_1$.

Знайдемо пришвидження Коріоліса. Так як кут між вектором $\vec{v}_r$ і віссю обертання (вектором $\vec{\omega}$) рівний 90° , то пришвидження Коріоліса в момент часу t_1 дорівнюватиме:

$$a_c = 2 \cdot |v_r| \cdot |\omega| \cdot \sin 90^\circ = 2 \cdot |-1,42| \cdot |-2| = 5,68 \text{ м/с}^2.$$

Напрямок вектора $\vec{a}_c$ знайдемо використовуючи правило Жуковського. Так як вектор $\vec{v}_r$ знаходиться в площині перпендикулярній осі обертання, то повернемо його на кут 90° в сторону ω , тобто за ходом стрілки годинника; в результаті отримаємо напрямок вектора пришвидження Коріоліса. Вектор $\vec{a}_c$ направлений так само, як і вектор $\vec{a}_r^{\partial o}$.

4. Знайдемо абсолютне пришвидження точки M при її складному русі. За теоремою Коріоліса абсолютне пришвидження точки M має вигляд:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^{o\partial} + \vec{a}_e^{\partial o} + \vec{a}_r^{o\partial} + \vec{a}_r^{\partial o} + \vec{a}_c.$$

Для визначення абсолютного пришвидження $\vec{a}_a$ проведемо координатні осі $Mxyz$ і визначимо його проекції на ці осі:

$$\begin{aligned} a_{ax} &= a_r^{\partial o} + a_c + a_e^{\partial o} \cos 45^\circ - a_e^{o\partial} \cos 45^\circ = \\ &= 4,06 + 5,68 + 5,656 \cdot 0,707 - 5,656 \cdot 0,707 = 9,74 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{ay} &= a_e^{\partial o} \cos 45^\circ + a_e^{o\partial} \cos 45^\circ - a_r^{o\partial} = \\ &= 5,656 \cdot 0,707 + 5,656 \cdot 0,707 - 0,86 \approx 7,14 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Остаточно

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = \sqrt{9,74^2 + 7,14^2} \approx 12,08 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $v_a = 3,96 \text{ м/с}$, $a_a = 12,08 \text{ м/с}^2$.

Задача С1 – рівновага збіжної просторової системи сил

4.1. Умова задачі, розрахункові дані

Умова задачі. Шість невагомих стрижнів з'єднані своїми кінцями шарнірно один з одним в двох вузлах і прикріплені іншими кінцями (теж шарнірно) до нерухомих опор A, B, C, D (рис. С1.0 – С1.9, табл. С1). Стрижні і вузли (вузли розташовані в вершинах H, K, L або M прямокутного паралелепіпеда) на рисунках не показані і повинні бути зображені по вихідним даним таблиці. У вузлі, який в кожній колонці таблиці вказаний першим, прикладена сила $P=200$ Н; у другому вузлі прикладена сила $Q=100$ Н. Сила $\vec{P}$ утворює з додатніми напрямками координатних осей x, y, z кути, які рівні відповідно $\alpha_1=45^\circ, \beta_1=60^\circ, \gamma_1=60^\circ$, а сила $\vec{Q}$ – кути $\alpha_2=60^\circ, \beta_2=45^\circ, \gamma_2=60^\circ$; напрямки осей x, y, z для всіх рисунків показані на рис. С1.0.

Грані паралелепіпеда, паралельні площині xy – квадрати. Діагоналі інших бічних граней утворюють з площиною xy кут $\varphi=60^\circ$, а діагональ паралелепіпеда утворює з цією площиною кут $\theta=51^\circ$.

На рис. С1.10 в якості приклада показано, як повинно виглядати креслення С1.1, якщо по умові задачі вузли знаходяться в точках L і M , а стрижнями є LM, LA, LB, MA, MC, MD . Також на рис. С1.10 показані кути φ і θ .

Знайти: зусилля в стрижнях.

Таблиця С1

Номер умови	0	1	2	3	4
Вузли	H, M	L, M	K, M	L, H	K, H
Стрижні	HM, HA, HB, MA, MC, MD	LM, LA, LD, MA, MB, MC	KM, KA, KB, MA, MC, MD	LH, LC, LD, HA, HB, HC	KH, KB, KC, HA, HC, HD
Номер умови	5	6	7	8	9
Вузли	M, H	L, H	K, H	L, M	K, M
Стрижні	MH, MB, MC, HA, HC, HD	LH, LB, LD, HA, HB, HC	KH, KC, KD, HA, HB, HC	LM, LB, LD, MA, MB, MC	KM, KA, KD, MA, MB, MC

4.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача С1 – на рівновагу просторової системи збіжних сил. При її розв'язанні слід розглянути окремо рівновагу кожного вузла, де сходяться стрижні та прикладені задані сили, і врахувати закон про

рівність дії і протидії. Для знаходження невідомих зусиль в стрижнях необхідно застосувати метод вирізання вузлів. Розпочинати необхідно з того вузла, де з'єднується не більше ніж три стрижня з невідомим зусиллями.

Зображати креслення можна без дотримання масштабу так, щоб добре було видно всі шість стрижнів. Стрижні необхідно пронумерувати в тому порядку, в якому вони вказані в таблиці; реакції стрижнів позначати буквою з індексом, відповідно до номера стрижня (наприклад, S_1 , S_2 і т.д.).

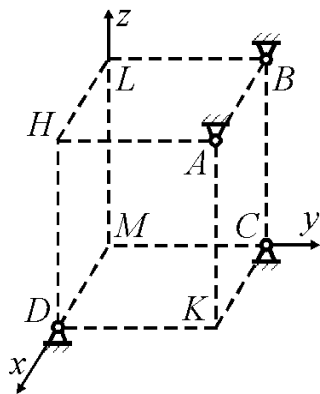


Рис. C1.0

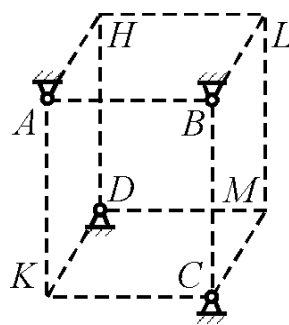


Рис. C1.1

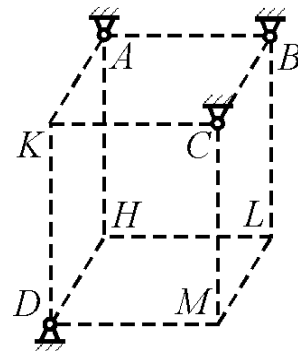


Рис. C1.2

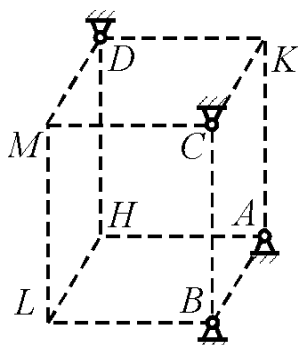


Рис. C1.3

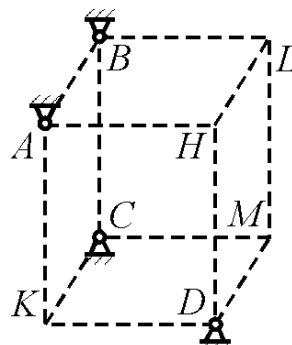


Рис. C1.4

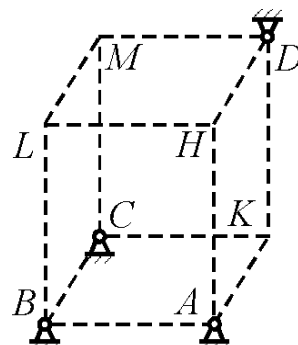


Рис. C1.5

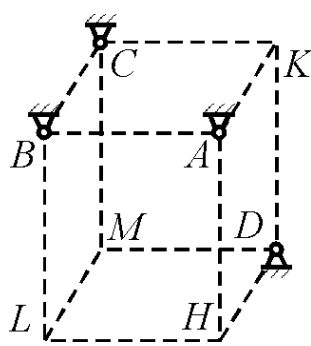


Рис. C1.6

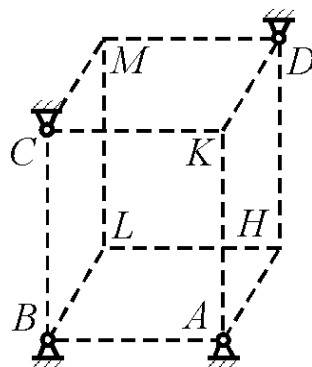


Рис. C1.7

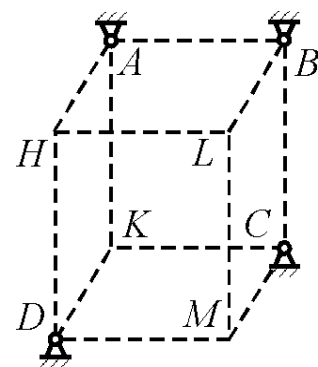


Рис. C1.8

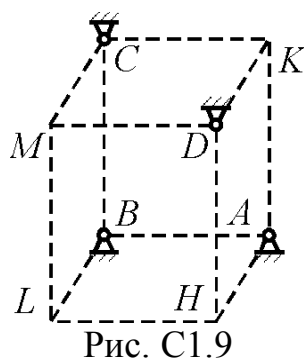


Рис. С1.9

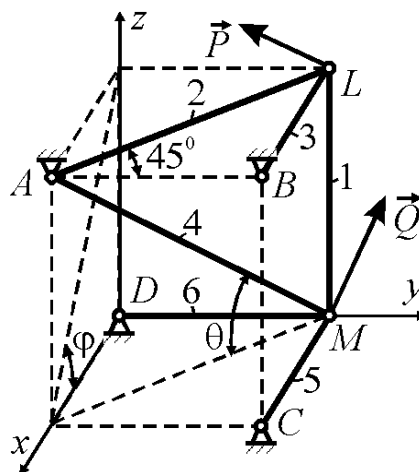


Рис. С1.10

4.3. Приклад розв'язання задачі С1

Умова задачі. Конструкція складається з невагомих стрижнів 1, 2, ..., 6 з'єднаних своїми кінцями шарнірно один з одним в двох вузлах (вузол L і M) і прикріплені іншими кінцями (теж шарнірно) до нерухомих опор A, C, D, K, H . Стрижні і вузли (вузли розташовані в вершинах прямокутного паралелепіпеда) на рисунку С1а не показані і повинні бути зображені по вихідним даним. У вузлах L і M прикладені сили $\vec{P}$ і $\vec{Q}$, які утворюють з додатними напрямками координатних осей x, y, z кути $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ та $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ відповідно (рис. С1б та С1в).

Грані паралелепіпеда, паралельні площині xu – квадрати. Діагоналі інших бічних граней утворюють з площиною xu кут φ , а діагональ паралелепіпеда утворює з цією площиною кут θ .

Дано: $P=35$ кН, $Q=15$ кН, $\varphi=60^\circ$, $\theta=51^\circ$, $\mu=45^\circ$, $\alpha_1=45^\circ$, $\beta_1=60^\circ$, $\gamma_1=60^\circ$, $\alpha_2=60^\circ$, $\beta_2=45^\circ$, $\gamma_2=60^\circ$; вузли – L, M ; стрижні – LH, LM, LC, MA, MK, MD .

Знайти: зусилля в стрижнях.

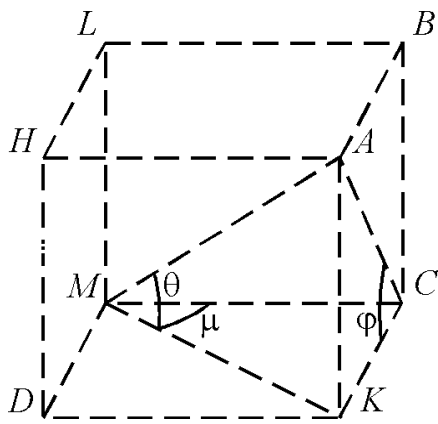


Рис. С1а

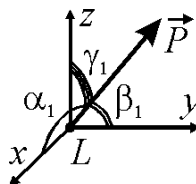


Рис. С1б

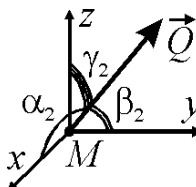


Рис. С1в

Розв'язок

1. Будуємо розрахункову схему. Згідно з вихідними даними з'єднуємо відповідні вершини паралелепіпеда і отримуємо просторову конструкцію представлену на рис. С1г. У вузлах A, C, D, K, H розташовуємо нерухомі опори, а у вузлах L і M сили $\vec{P}$ і $\vec{Q}$ відповідно.

1.1. Визначимо проекції сил $\vec{P}$ і $\vec{Q}$ на координатні осі:

$$P_x = P \cos \alpha_1, \quad P_y = P \cos \beta_1, \quad P_z = P \cos \gamma_1;$$

$$Q_x = Q \cos \alpha_2, \quad Q_y = Q \cos \beta_2, \quad Q_z = Q \cos \gamma_2.$$

1.2. Визначаємо порядок розгляду вузлів L і M .

Розглядаючи рівновагу вузлів застосуємо метод вирізання вузлів. Вважаємо, що стрижні розтягнуті, тобто зусилля в розрізаних стрижнях ферми будуть направлені від відповідного вузла (рис. С1г).

Першим по порядку будемо розглядати той вузол у якому з'єднано не більше трьох стрижнів з невідомими зусиллями, тобто спочатку розглядатимемо рівновагу вузла L , а потім – вузла M .

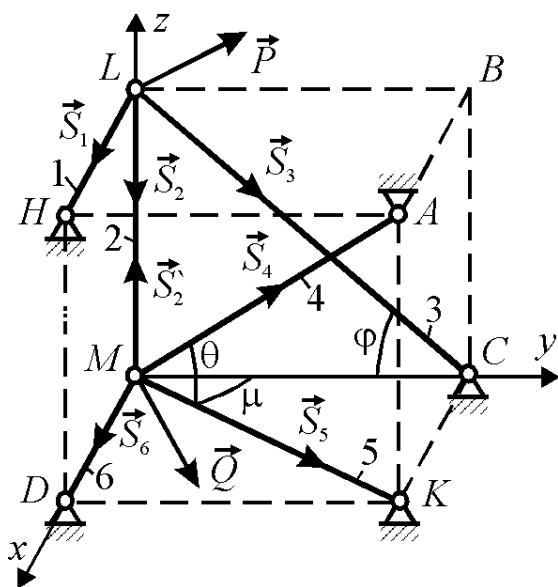


Рис. С1г

2. Розглянемо рівновагу вузла L (рис. С1г).

2.1. Складаємо векторне рівняння рівноваги вузла L :

$$\vec{P} + \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 = 0.$$

2.2. Складаємо рівняння рівноваги у координатній формі. Введемо координатні осі x, y та z і спроектуємо на них векторне рівняння рівноваги вузла L , отримаємо:

$$\sum F_{ix} = 0 : \quad P_x + S_1 = 0 ;$$

$$\sum F_{iy} = 0 : \quad P_y + S_3 \cos \varphi = 0 ;$$

$$\sum F_{iz} = 0 : \quad P_z - S_2 - S_3 \sin \varphi = 0 .$$

3. Розглянемо рівновагу вузла M (рис. С1г).

3.1. Складаємо векторне рівняння рівноваги вузла M :

$$\vec{Q} + \vec{S}'_2 + \vec{S}_4 + \vec{S}_5 + \vec{S}_6 = 0, \text{ тут } \vec{S}'_2 = \vec{S}_2.$$

3.2. Складаємо рівняння рівноваги у координатній формі. Спроектуємо на введені координатні осі векторне рівняння рівноваги вузла M , отримаємо:

$$\sum F_{ix} = 0: Q_x + S_4 \cos \theta \cos \mu + S_5 \cos \mu + S_6 = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0: Q_y + S_4 \cos \theta \cos \mu + S_5 \cos \mu = 0;$$

$$\sum F_{iz} = 0: Q_z + S'_2 + S_4 \sin \theta = 0.$$

4. Розв'язуємо отриману систему рівнянь в загальному вигляді. Визначатимемо невідомі сили в тому порядку в якому вони приведені нижче:

$$S_1 = -P_x; \quad S_3 = -P_y / \cos \varphi; \quad S_2 = P_z - S_3 \sin \varphi; \quad S_4 = -(Q_z + S'_2) / \sin \theta;$$

$$S_5 = -(Q_y + S_4 \cos \theta \cos \mu) / \cos \mu; \quad S_6 = -Q_x - S_4 \cos \theta \cos \mu - S_5 \cos \mu.$$

5. Проводимо обчислення.

5.1. Визначаємо модулі проекцій сил:

$$P_x = 35 \cdot 0,707 = 24,745 \text{ кН}; \quad P_y = 35 \cdot 0,5 = 17,5 \text{ кН};$$

$$P_z = 35 \cdot 0,5 = 17,5 \text{ кН}; \quad Q_x = 15 \cdot 0,5 = 7,5 \text{ кН};$$

$$Q_y = 15 \cdot 0,707 = 10,6 \text{ кН}; \quad Q_z = 15 \cdot 0,5 = 7,5 \text{ кН}.$$

5.2. Визначаємо невідомі зусилля в стрижнях просторової ферми:

$$S_1 = -24,745 \text{ кН (стиск)}; \quad S_3 = -17,5 / 0,5 = -35 \text{ кН (стиск)};$$

$$S_2 = 17,5 - (-35) \cdot 0,866 = 47,81 \text{ кН (розтяг)};$$

$$S_4 = -(7,5 + 47,81) / 0,777 = -71,18 \text{ кН (стиск)};$$

$$S_5 = -(10,6 - 71,18 \cdot 0,63 \cdot 0,707) / 0,707 = 29,85 \text{ кН (розтяг)};$$

$$S_6 = -7,5 - (-71,18) \cdot 0,63 \cdot 0,707 - 29,85 \cdot 0,707 = 3,1 \text{ кН (розтяг)}.$$

Відповідь: $S_1 = -24,745 \text{ кН}; \quad S_2 = 47,81 \text{ кН}; \quad S_3 = -35 \text{ кН};$

$$S_4 = -71,18 \text{ кН}; \quad S_5 = 29,85 \text{ кН}; \quad S_6 = 3,1 \text{ кН}.$$

Знак “—” вказує на те, що сили в дійсності спрямовані у протилежну сторону на відміну від напрямків показаних на рис. С1г.

4.4. Документ MathCad для розв'язання задачі С1

Документ Mathcad для розв'язання задачі С1

Переозначення і введення одиниць вимірювання фізичних величин:

$$кг \equiv kg \quad м \equiv m \quad с \equiv s \quad H \equiv кг \cdot \frac{м}{с^2} \quad кН \equiv 1000 \cdot H$$

Введення розрахункових даних із збереженням розмірностей:

$$\mu := 45 \cdot deg \quad \varphi := 60 \cdot deg \quad \theta := 51 \cdot deg$$

$$P := 35 \cdot кН \quad \alpha_1 := 45 \cdot deg \quad \beta_1 := 60 \cdot deg \quad \gamma_1 := 60 \cdot deg$$

$$Q := 15 \cdot кН \quad \alpha_2 := 60 \cdot deg \quad \beta_2 := 45 \cdot deg \quad \gamma_2 := 60 \cdot deg$$

1. Визначення проекцій сил Q, P на координатні осі x, y, z:

$$P_x := P \cdot \cos(\alpha_1) \quad P_y := P \cdot \cos(\beta_1) \quad P_z := P \cdot \cos(\gamma_1)$$

$$P_x = 24.75 \times 10^3 \text{ м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \quad P_y = 17.5 \times 10^3 \text{ м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \quad P_z = 17.5 \times 10^3 \text{ м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$$

$$Q_x := Q \cdot \cos(\alpha_2) \quad Q_y := Q \cdot \cos(\beta_2) \quad Q_z := Q \cdot \cos(\gamma_2)$$

$$Q_x = 7.5 \times 10^3 \text{ м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \quad Q_y = 10.61 \times 10^3 \text{ м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \quad Q_z = 7.5 \times 10^3 \text{ м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$$

2. Розрахунок зусиль в стержнях

Вузол I: $S_1 := 0 \cdot H \quad S_2 := 0 \cdot H \quad S_3 := 0 \cdot H$ - присвоєння початкових значень невідомим

Визначення невідомих за допомогою конструкції *Given - Find*:

$$\text{Given} \quad S_1 + P_x = 0 \quad S_3 \cdot \cos(\varphi) + P_y = 0 \\ -S_3 \cdot \sin(\varphi) - S_2 + P_z = 0$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} := \text{Find}(S_1, S_2, S_3) \quad S_1 = -24.75 \times 10^3 \text{ м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \quad S_2 = 47.81 \times 10^3 \text{ м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \\ S_3 = -35 \times 10^3 \text{ м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$$

Вузол II: $S_4 := 0 \cdot H \quad S_5 := 0 \cdot H \quad S_6 := 0 \cdot H$

$$\text{Given} \quad S_4 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\mu) + S_5 \cdot \cos(\mu) + S_6 + Q_x = 0$$

$$S_4 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\mu) + S_5 \cdot \cos(\mu) + Q_y = 0$$

$$S_2 + S_4 \cdot \sin(\theta) + Q_z = 0$$

$$\begin{pmatrix} S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} := \text{Find}(S_4, S_5, S_6) \quad S_4 = -71.17 \times 10^3 \text{ м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \\ S_5 = 29.79 \times 10^3 \text{ м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \quad S_6 = 3.11 \times 10^3 \text{ м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$$

Задача С2 – рівновага довільної плоскої системи сил прикладених до декількох зв'язаних між собою тіл

5.1. Умова задачі, розрахункові дані

Умова задачі. Конструкція складається з жорсткого кутика і стрижня, які в точці C або з'єднані одне з одним шарніром (рис. С2.0 – С2.5), або вільно торкаються одне одного (рис. С2.6 – С2.9). Зовнішніми в'язями, накладеними на конструкцію, є в точці A або шарнір, або жорстке кріплення; в точці B або гладенька площина (рис. С2.0 та С2.1), або невагомий стрижень BB' (рис. С2.2 та С2.3), або шарнір (рис. С2.4 – С2.9); в точці D або невагомий стрижень DD' (рис. С2.0, С2.3 та С2.8), або шарнірна опора на катках (рис. С2.7).

На кожену конструкцію діють: пара сил с моментом $M=60$ кН·м, рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $q=20$ кН/м і дві сили. Ці сили, їх напрямки і точки прикладання вказані в табл. С2; в колонці «Навантажена ділянка» вказано, на якій ділянці діє розподілене навантаження. При розрахунках прийняти $a=0,2$ м. Напрямок розподіленого навантаження на різних ділянках вказано в табл. С2а.

Знайти: реакції в'язей в точках A , B , C (а для рис. С2.0, С2.3, С2.7, С2.8 ще й в точці D), викликані заданими навантаженнями.

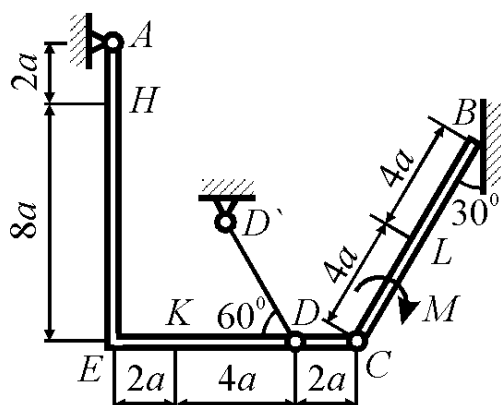


Рис. С2.0

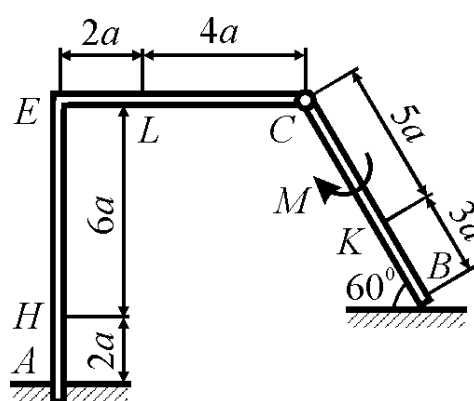


Рис. С2.1

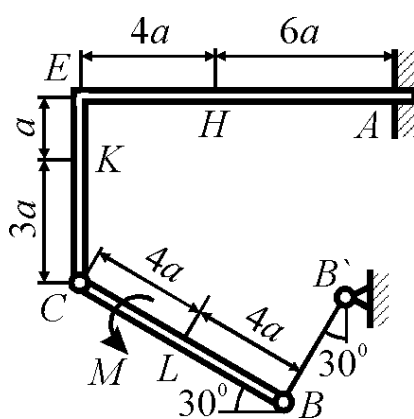


Рис. С2.2

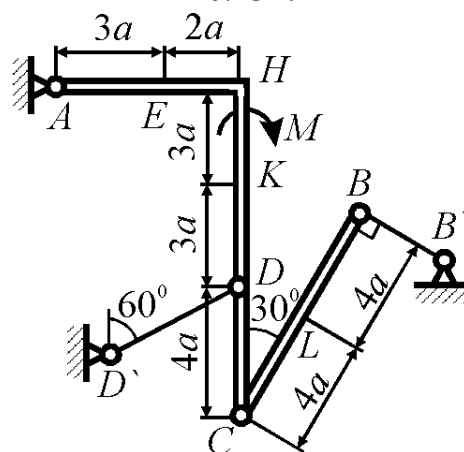


Рис. С2.3

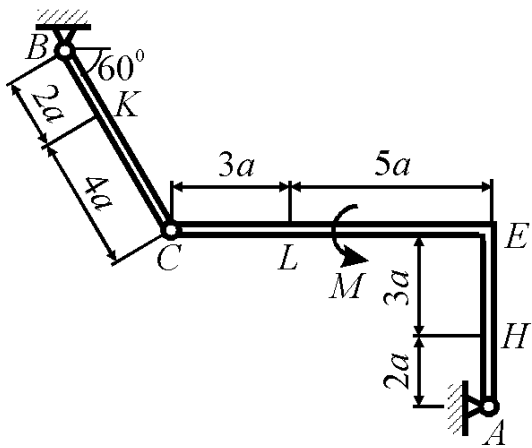


Рис. C2.4

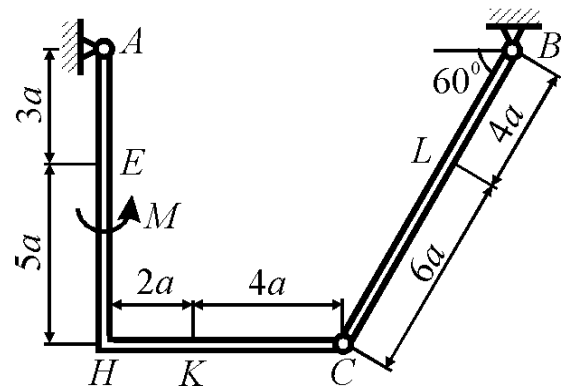


Рис. C2.5

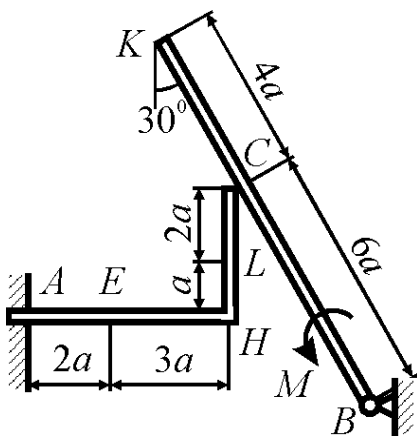


Рис. C2.6

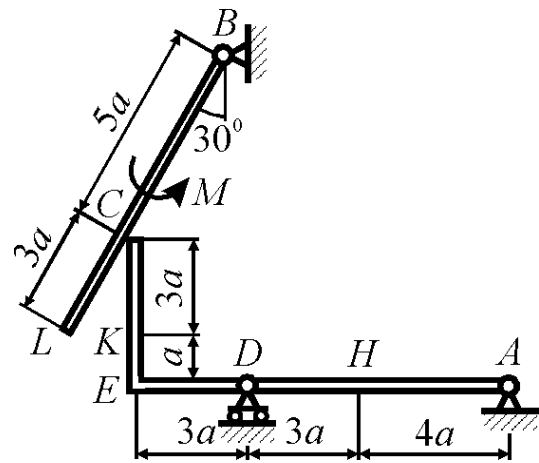


Рис. C2.7

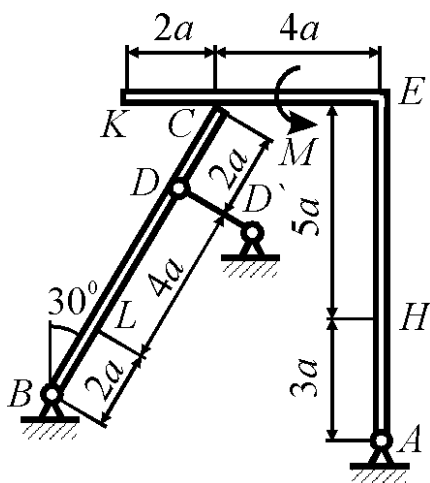


Рис. C2.8

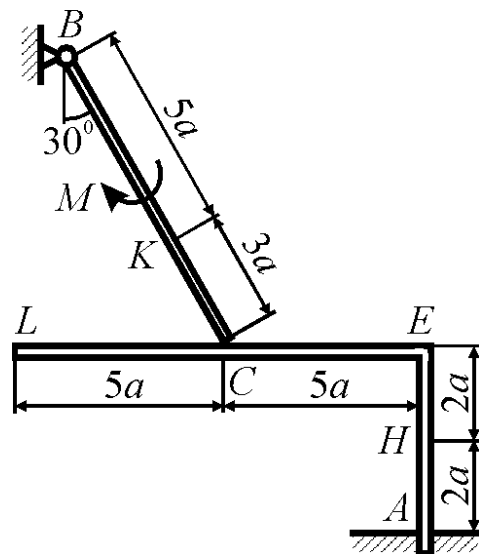
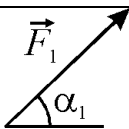
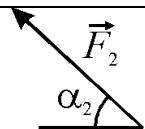
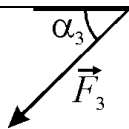
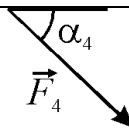
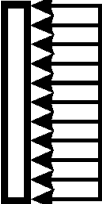
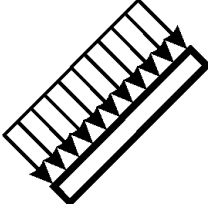
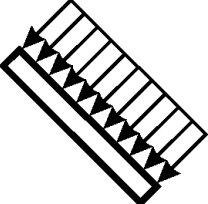


Рис. C2.9

Таблиця С2

Сила									Навантажена ділянка
	$F_1=10 \text{ кН}$		$F_2=20 \text{ кН}$		$F_3=30 \text{ кН}$		$F_4=40 \text{ кН}$		
Номер умови	Точка прикладання	α_1 , град	Точка прикладання	α_2 , град	Точка прикладання	α_3 , град	Точка прикладання	α_4 , град	
0	<i>K</i>	60	--	--	<i>H</i>	30	--	--	<i>CL</i>
1	--	--	<i>L</i>	60	--	--	<i>E</i>	30	<i>CK</i>
2	<i>L</i>	15	--	--	<i>K</i>	60	--	--	<i>AE</i>
3	--	--	<i>K</i>	30	--	--	<i>H</i>	60	<i>CL</i>
4	<i>L</i>	30	--	--	<i>E</i>	60	--	--	<i>CK</i>
5	--	--	<i>L</i>	75	--	--	<i>K</i>	30	<i>AE</i>
6	<i>E</i>	60	--	--	<i>K</i>	75	--	--	<i>CL</i>
7	--	--	<i>H</i>	60	<i>L</i>	30	--	--	<i>CK</i>
8	--	--	<i>K</i>	30	--	--	<i>E</i>	15	<i>CL</i>
9	<i>H</i>	30	--	--	--	--	<i>L</i>	60	<i>CK</i>

Таблиця С2а

Ділянка на кутику		Ділянка на стрижні	
горизонтальна	вертикальна	рис. С2.0, С2.3, С2.5, С2.7, С2.8	рис. С2.1, С2.2, С2.4, С2.6, С2.9
			

5.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача С2 – на рівновагу системи тіл, які знаходяться під дією плоскої системи сил. При її розв'язанні можна або розглянути спочатку рівновагу всієї системи в цілому, а потім рівновагу одного з тіл системи, зобразивши його окремо, або ж відразу розкласти систему і розглянути рівновагу кожного з тіл окремо, врахувавши закон про рівність дії і протидії. В задачах, де є жорстке кріплення, врахувати, що в ньому виникає реакція, яка складається із сили, модуль і напрямок якої невідомий, та пари сил, момент якої теж невідомий.

5.3. Приклад розв'язання задачі С2

Умова задачі. На кутик ACD ($\angle ACD=90^\circ$), кінець A якого жорстко закріплений, в точці E опирається стрижень DE (рис. С2а). Стрижень має в точці B нерухому шарнірну опору і до нього прикладене рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q . На кутик діють сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, а також пара сил з моментом M .

Дано: $F_1=50$ кН, $F_2=35$ кН, $M=100$ кН·м, $q=20$ кН/м, $\alpha_1=30^\circ$, $\alpha_2=45^\circ$, $\beta=60^\circ$, $a=0,5$ м, $l=1,5$ м.

Знайти: реакції в'язей в точках A , B , E .

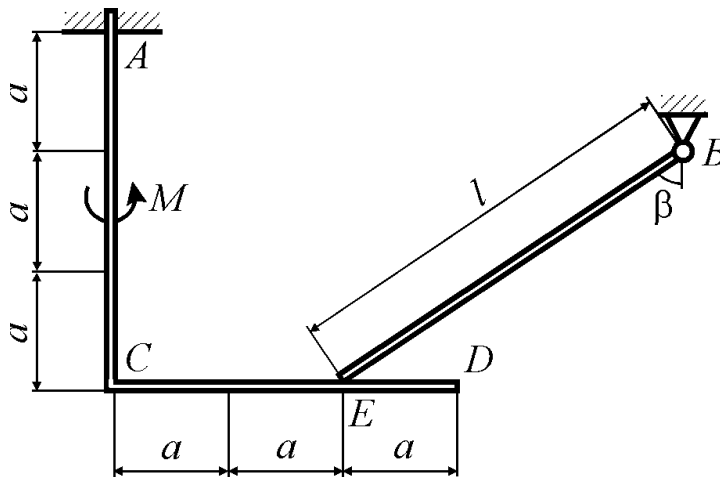


Рис. С2а

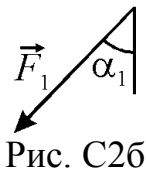


Рис. С2б

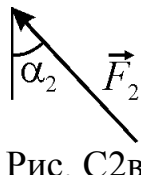


Рис. С2в

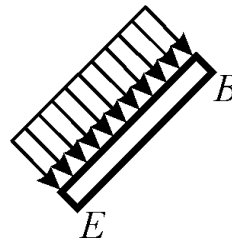


Рис. С2г

Розв'язок

1. Будуємо розрахункову схему (рис. С2д). Для визначення невідомих реакцій розкладемо систему і розглянемо окремо рівновагу кутика та стрижня.

1.1. Зображаємо координатні осі x, y .

1.2. Показуємо діючі на кутик та стрижень сили. На кутик діють сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, момент M , реакції $\vec{N}_E$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ та M_A . На стрижень діє розподілене навантаження інтенсивністю q , реакції $\vec{N}'_E$, $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_E$. Зазначимо, що $N_E = N'_E$.

1.3. Визначаємо зосереджену силу від розподіленого навантаження: $Q=ql=20 \cdot 1,5=30$ кН.

1.4. Розкладаємо сили на складові спрямовані по координатним осям та визначаємо їх модуль:

$$F_{1x} = F_1 \sin \alpha_1 = 50 \cdot 0,5 = 25 \text{ кН}; \quad F_{1y} = F_1 \cos \alpha_1 = 50 \cdot 0,866 = 43,3 \text{ кН};$$

$$F_{2x} = F_2 \sin \alpha_2 = 35 \cdot 0,707 = 24,75 \text{ кН}; \quad F_{2y} = F_2 \cos \alpha_2 = 35 \cdot 0,707 = 24,75 \text{ кН};$$

$$Q_x = Q \cos \beta = 30 \cdot 0,5 = 15 \text{ кН}; \quad Q_y = Q \sin \beta = 30 \cdot 0,866 = 26 \text{ кН}.$$

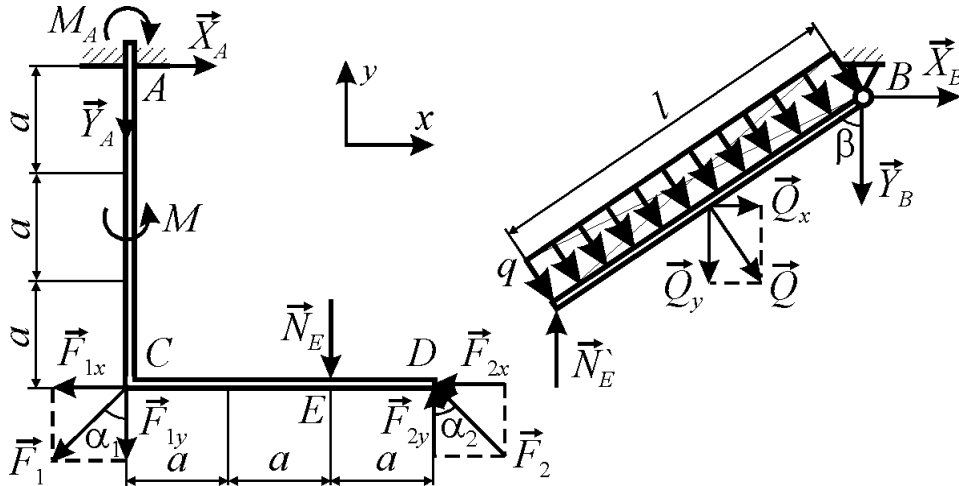


Рис. С2д

2. Складаємо рівняння рівноваги. Так як системи сил, які діють на кутик і стрижень, плоскі довільні, то можна скористатися відповідною формою рівнянь рівноваги (першою, другою або третьою).

2.1. Рівняння рівноваги кутика:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad X_A - F_{1x} - F_{2x} = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad -Y_A - N_E - F_{1y} + F_{2y} = 0,$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0: \quad M - M_A - F_{1x} 3a - N_E 2a - F_{2x} 3a + F_{2y} 3a = 0.$$

2.2. Рівняння рівноваги стрижня:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad X_B + Q_x = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad -Y_B - Q_y + N'_E = 0,$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0: \quad 0,5Ql - N'_E l \sin \beta = 0.$$

3. Розв'язуємо отриману систему рівнянь в загальному вигляді:

$$X_A = F_{1x} + F_{2x}; \quad X_B = -Q_x; \quad N'_E = 0,5Q / \sin \beta; \quad Y_B = N'_E - Q_y;$$

$$Y_A = F_{2y} - N_E - F_{1y}; \quad M_A = M - F_{1x} 3a - N_E 2a - F_{2x} 3a + F_{2y} 3a.$$

4. Виконуємо розрахунки:

$$X_A = F_{1x} + F_{2x} = 25 + 24,75 = 49,75 \text{ кН}; \quad X_B = -Q_x = -15 \text{ кН};$$

$$N'_E = 0,5 \cdot 30 / 0,866 \approx 17,32 \text{ кН}; \quad Y_B = 17,32 - 26 = -8,68 \text{ кН};$$

$$Y_A = 24,75 - 17,32 - 43,3 = -35,87 \text{ кН}; \quad M_A = 100 - 25 \cdot 3 \cdot 0,5 - 17,32 \cdot 2 \cdot 0,5 - 24,75 \cdot 3 \cdot 0,5 + 24,75 \cdot 3 \cdot 0,5 = 45,18 \text{ кН}.$$

5. Перевірка. Складемо рівняння моментів (проекцій сил) так, щоб до них входили всі невідомі, які діють тільки на кутик або стрижень.

5.1. Для кутика складемо рівняння моментів відносно точки D , отримаємо:

$$\sum M_D(\vec{F}_k) = 0 : M - M_A - X_A 3a + Y_A 3a + F_{1y} 3a + N_E a = 0.$$

При обчисленні групуємо окремо всі складові, що із знаком "+" та "-", отримаємо:

$$100 - 45,18 - 49,75 \cdot 3 \cdot 0,5 + (-35,87) \cdot 3 \cdot 0,5 + 43,3 \cdot 3 \cdot 0,5 + 17,32 \cdot 0,5 = 0 ; \\ 173,61 - 173,61 = 0 .$$

Перевірка виконується, тому реакції опор знайдені вірно.

5.2. Для стрижня складемо рівняння проекцій сил на напрямок стрижня, отримаємо:

$$\sum F_{il} = 0 : X_B \sin \beta - Y_B \cos \beta + N'_E \cos \beta = 0 .$$

При обчисленні групуємо окремо всі складові, що із знаком "+" та "-", отримаємо:

$$-15 \cdot 0,866 - (-8,68) \cdot 0,5 + 17,32 \cdot 0,5 = 0 ; \\ -12,99 + 13 = 0,01 \approx 0 .$$

Перевірка виконується, тому реакції опор знайдені вірно. Відносна похибка становить:

$$\eta = \frac{13 - 12,99}{13} \cdot 100 \% \approx -0,077 \% < [\eta] = 5 \% .$$

Відповідь: $X_A = 49,75 \text{ кН}$; $X_B = -15 \text{ кН}$; $Y_B = -8,68 \text{ кН}$;
 $N_E = N'_E = 17,32 \text{ кН}$; $Y_A = -35,87 \text{ кН}$; $M_A = 45,18 \text{ кН}$.

Знак "—" вказує на те, що сили в дійсності спрямовані у протилежну сторону на відміну від напрямків показаних на рис. С2д.

5.4. Документ MathCad для розв'язання задачі С2

Документ Mathcad для розв'язання задачі С2

Введення розрахункових даних із збереженням розмірностей:

$$a := 0.5 \cdot m \quad l := 1.5 \cdot m \quad q := 20 \cdot \frac{kN}{m} \quad \alpha_1 := 30 \cdot deg \quad \alpha_2 := 45 \cdot deg$$

$$M := 100 \cdot kN \cdot m \quad F_1 := 50 \cdot kN \quad F_2 := 35 \cdot kN \quad \beta := 60 \cdot deg$$

Для розмірностей: *kg* - кілограм; *m* - метр; *s* - секунда; *N* - Ньютон;
kN - кілоньютон; *deg* - градус.

Розкладемо всі сили на складові і визначимо їх модулі:

$$F_{1x} := F_1 \cdot \sin(\alpha_1) \quad F_{1y} := F_1 \cdot \cos(\alpha_1) \quad Q := q \cdot l$$

$$F_{2x} := F_2 \cdot \sin(\alpha_2) \quad F_{2y} := F_2 \cdot \sin(\alpha_2) \quad Q_x := Q \cdot \cos(\beta) \quad Q_y := Q \cdot \sin(\beta)$$

$$F_{1x} = 25 \cdot kN \quad F_{1y} = 43.3 \cdot kN \quad F_{2x} = 24.75 \cdot kN \quad F_{2y} = 24.75 \cdot kN$$

$$Q = 30 \cdot kN \quad Q_x = 15 \cdot kN \quad Q_y = 25.981 \cdot kN$$

Визначаємо опорні реакції:

$$X_A := 0 \cdot N \quad Y_A := 0 \cdot N \quad M_A := 0 \cdot N \cdot m \quad N_E := 0 \cdot N \quad X_B := 0 \cdot N \quad Y_B := 0 \cdot N$$

Given Рівняння рівноваги кутика:

$$X_A - F_{1x} - F_{2x} = 0 \quad -Y_A - N_E - F_{1y} + F_{2y} = 0$$

$$M - M_A - F_{1x} \cdot 3 \cdot a - N_E \cdot 2 \cdot a - F_{2x} \cdot 3 \cdot a + F_{2y} \cdot 3 \cdot a = 0$$

Рівняння рівноваги стрижня:

$$X_B + Q_x = 0 \quad -Y_B - Q_y + N_E = 0 \quad 0.5 \cdot Q \cdot l - N_E \cdot l \cdot \sin(\beta) = 0$$

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ M_A \\ N_E \\ X_B \\ Y_B \end{pmatrix} := \text{Find}(X_A, Y_A, M_A, N_E, X_B, Y_B) \quad X_A = 49.75 \cdot kN \quad Y_A = -35.87 \cdot kN$$

$$M_A = 45.18 \cdot kN \cdot m$$

$$N_E = 17.321 \cdot kN \quad X_B = -15 \cdot kN$$

$$Y_B = -8.66 \cdot kN$$

Перевірка. Рівняння перевірки для кутика:

$$M - M_A - X_A \cdot 3 \cdot a + Y_A \cdot 3 \cdot a + F_{1y} \cdot 3 \cdot a + N_E \cdot a = 7.276 \times 10^{-12} \cdot N \cdot m$$

Рівняння перевірки для стрижня:

$$X_B \cdot \sin(\beta) - Y_B \cdot \cos(\beta) + N_E \cdot \cos(\beta) = -1.819 \times 10^{-12} \cdot N$$

Задача Д1 – коливання матеріальної точки при відносному русі

6.1. Умова задачі, розрахункові дані

Умова задачі. Вантаж (в подальшому несе тіло) масою m прикріплений за допомогою трьох пружин, жорсткістю c_1, c_2, c_3 , до підйомника (в подальшому тіло-носії), і здійснює вертикальні коливання (рис. Д1.0 – Д1.9, табл. Д1). Тіло-носіє рухається вертикально за законом

$$z=0,5\alpha_1 t^2+\alpha_2 \sin(pt)+\alpha_3 \cos(pt),$$

де z – в метрах, t – в секундах.

Таблиця Д1

Номер умови	$m,$ кг	$c_1,$ $\frac{H}{м}$	$c_2,$ $\frac{H}{м}$	$c_3,$ $\frac{H}{м}$	$\alpha_1,$ $\frac{м}{с^2}$	$\alpha_2,$ м	$\alpha_3,$ м	$p,$ 1/с	$\mu,$ $\frac{H \cdot c}{м}$	$\lambda_0,$ м	$v_0,$ $\frac{м}{с}$
0	1	300	150	--	0	0,1	0	15	0	0	0
1	0,8	--	240	120	1,5g	0	0	--	8	0,1	0
2	0,5	--	100	150	0	0,8	0	5	0	0	4
3	1	240	--	160	0	0	0,5	6	0	0	0
4	0,5	80	120	--	-g	0	0	--	6	0,2	0
5	2	--	400	400	0	0	0,1	16	0	0	0
6	0,4	60	--	120	-g	0	0	--	4	0	2
7	0,5	120	--	180	0	0,1	0	20	0	0	0
8	0,4	50	200	--	0	0	0,2	20	0	0,2	0
9	1	200	--	300	1.5g	0	0	--	5	0	3

На несе тіло крім сили ваги і пружної сили, діє сила в'язкого опору середовища $R_{on}=\mu v$, де μ – коефіцієнт опору середовища, v – модуль швидкості несомого тіла відносно тіла-носія. Умова $\mu=0$ означає, що сила опору R_{on} відсутня. Несе тіло здійснює рух відносно тіла-носія за законом $x=f(t)$.

Для запобігання помилок в знаках направити вісь x в сторону видовження пружини, а несе тіло показати в положенні, при якому $x>0$, тобто пружина розтягнута.

При розрахунках масою пружин і з'єднувальної планки нехтуємо.

В таблиці позначено: λ_0 – деформація (видовження) еквівалентної пружини в початковий момент часу $t_0=0$; v_0 – початкова швидкість несомого тіла відносно тіла-носія. Прочерк в стовпчиках c_1 , c_2 , c_3 означає, що відповідна пружина відсутня і на схемі не зображується. Якщо при цьому кінець однієї з пружин, яка залишилась, виявиться вільним, його слід прикріпити у відповідному місці або до тіла-носія, або до несомого тіла; те ж саме слід зробити, якщо вільними виявляться з'єднані планкою кінці пружин, які залишились.

Знайти: закон вертикальних коливань несомого тіла $x=f(t)$ та побудувати графік коливань в середовищі Mathcad.

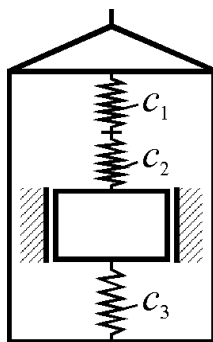


Рис. Д1.0

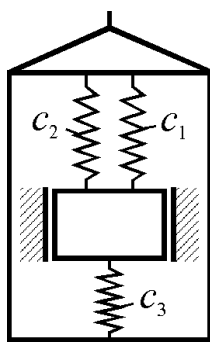


Рис. Д1.1

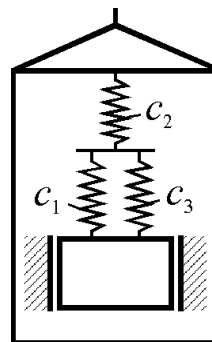


Рис. Д1.2

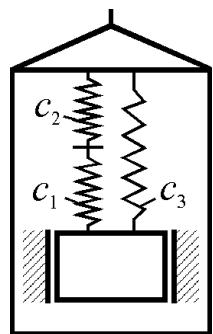


Рис. Д1.3

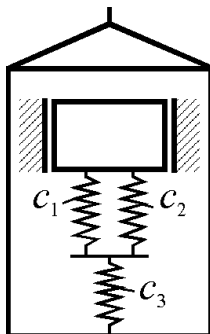


Рис. Д1.4

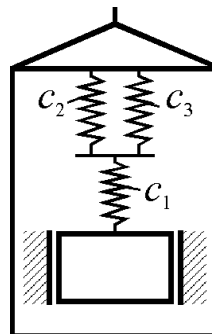


Рис. Д1.5

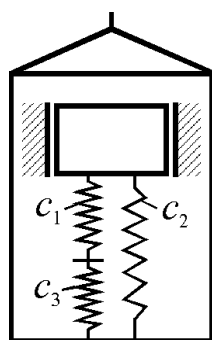


Рис. Д1.6

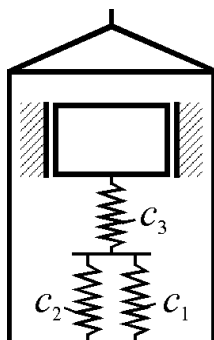


Рис. Д1.7

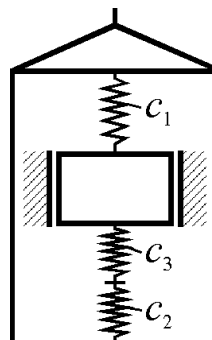


Рис. Д1.8

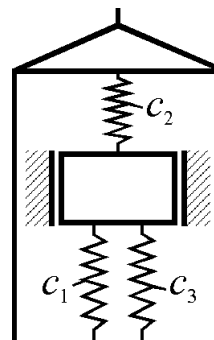


Рис. Д1.9

6.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача Д1 охоплює одночасно відносний рух і коливання матеріальної точки (МТ).

1. Спочатку прикріплені до несомого тіла пружини (по умові задачі їх буде дві) замінити еквівалентною пружиною з коефіцієнтом жорсткості c виконавши відповідний розрахунок.

а) Якщо пружини з'єднані одна з одною послідовно (як пружини жорсткості c_1, c_2 на рис. Д1.0), то при рівновазі під дією деякої сили $\vec{Q}$, прикладеної до вільного кінця пружини, зусилля в будь-якому поперечному перерізі пружини однакові і рівні $\vec{Q}$. Видовження пружин $\lambda_1 = Q/c_1, \lambda_2 = Q/c_2$, видовження еквівалентної пружини $\lambda = Q/c$ і $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Звідки $Q/c = (Q/c_1) + (Q/c_2) \Rightarrow 1/c = (c_1 + c_2)/c_1 c_2$, або після перетворень остаточно отримаємо

$$c = c_1 c_2 / (c_1 + c_2).$$

б) Якщо несоме тіло прикріплене до двох паралельних пружин (як до пружин жорсткістю c_1, c_2 на рис. Д1.1) або знаходиться між двома пружинами, то при рівновазі під дією деякої сили $\vec{Q}$ кожна з пружин і еквівалентна пружина мали б одне і те ж видовження λ . Тоді для двох пружин $Q = c_1 \lambda + c_2 \lambda$, а для еквівалентної пружини $Q = c \lambda$, звідки

$$c = c_1 + c_2.$$

Після визначення жорсткості еквівалентної пружини далі необхідно скласти диференціальне рівняння відносного руху (по відношенню до тіла-носія) розглядуваного в задачі несомого тіла, для чого приєднати до діючих сил переносну силу інерції. Після того як рівняння буде складене (це буде лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку), його необхідно проінтегрувати, врахувавши початкові умови руху.

2. Еквівалентну пружину розташовуємо угорі над вантажем, внаслідок чого отримуємо основну задачу з теорії прямолінійних коливань.

3. При побудові схеми сил та складанні диференціальних рівнянь руху замість несомого тіла розглядатимемо рух МТ.

4. При знаходженні загального інтегралу диференціального рівняння руху та сталих інтегрування, що входять до нього, використовуватимемо такі закони коливань:

- у випадку вільних затухаючих коливань

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0,$$

закон коливального руху має вигляд

$$x = e^{-ht} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega} \sin \omega t \right);$$

- у випадку вимушених коливань, коли збурна сила змінюється за лінійним законом

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = H, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0,$$

закон коливального руху має вигляд

$$x = x_1 + x_2,$$

де

$$x_1 = e^{-ht} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega} \sin \omega t \right), \quad x_2 = \frac{H}{\omega_0^2};$$

- у випадку вимушених коливань, коли збурна сила змінюється за синусоїдальним законом

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = H \sin pt, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0,$$

закон коливального руху має вигляд

$$x = x_1 + x_2 + x_3,$$

де

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-ht} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega} \sin \omega t \right), \\ x_2 &= \frac{pHe^{-ht}}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} \left[2h \cos \omega t + \frac{2h^2 - (\omega_0^2 - p^2)}{\omega} \sin \omega t \right], \\ x_3 &= \frac{H}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} [(\omega_0^2 - p^2) \sin pt - 2hp \cos pt]; \end{aligned}$$

- у випадку вимушених коливань, коли збурна сила змінюється за косинусоїдальним законом

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = H \cos pt, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0,$$

закон коливального руху має вигляд

$$x = x_1 + x_2 + x_3,$$

де

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-ht} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega} \sin \omega t \right), \\ x_2 &= \frac{He^{-ht}}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} [(\omega_0^2 - p^2) \cos \omega t + \frac{h(\omega_0^2 + p^2)}{\omega} \sin \omega t], \\ x_3 &= \frac{H}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} [(\omega_0^2 - p^2) \cos pt + 2hp \sin pt]. \end{aligned}$$

В приведених розв'язках приймаємо, що:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}.$$

6.3. Приклад розв'язання задачі Д2

Умова задачі. Несоме тіло масою m прикріплене за допомогою трьох пружин, жорсткістю c_1, c_2, c_3 , до тіла-носія, і здійснює вертикальні коливання (рис. Д1а). Тіло-носіє рухається вертикально за законом $z=0,5\alpha_1 t^2 + \alpha_2 \sin(pt) + \alpha_3 \cos(pt)$, де z – в метрах, t – в секундах.

На несоме тіло крім сили ваги і пружної сили, діє сила в'язкого опору середовища $R_{on} = \mu v$, де μ – коефіцієнт опору середовища, v – модуль швидкості несомого тіла відносно тіла-носія. Несоме тіло здійснює рух відносно тіла-носія за законом $x=f(t)$. При розрахунках масою пружин і з'єднувальної планки нехтуємо. Деформація еквівалентної пружини в початковий момент часу рівна λ_0 , а початкова швидкість несомого тіла відносно тіла-носія – v_0 .

Дано: $m=0,5$ кг; $g=9,81$ м/с²; $R_{on}=\mu v$ Н; $\mu=0,2$ кг/с; $v_0=1,5$ м/с; $\lambda_0=0,05$ м; $c_1=c_2=100$ Н/м; $c_3=200$ Н/м; $\alpha_1=0$; $\alpha_2=10$ м; $\alpha_3=0$; $p=5$ рад/с.

Знайти: закон вертикальних коливань несомого тіла $x=f(t)$ та побудувати графік коливань в середовищі Mathcad.

Розв'язок

1. Побудова розрахункової схеми.

1.1. Замінюємо три пружини однією еквівалентною (рис. Д1б). Визначимо жорсткість еквівалентної пружини. Для цього спочатку замінюємо першу і другу пружину на еквівалентну пружину жорсткістю

$$c_{12} = c_1 + c_2 = 100 + 100 = 200 \text{ Н/м};$$

пружину жорсткістю c_{12} і третю пружину замінюємо на еквівалентну пружину жорсткістю

$$c_{екв} = c = \frac{c_{12} \cdot c_3}{c_{12} + c_3} = \frac{200 \cdot 200}{200 + 200} = 100 \text{ Н/м}.$$

В зв'язку з тим, що несоме тіло здійснює поступальний рух, то замість нього розглянемо рух матеріальної точки (МТ).

1.2. Будуємо схему деформацій пружини та схему сил, які діють на несоме тіло (рис. Д1в, г). На схемі l_0 – початкова довжина пружини, Δl_{cm} – статична деформація пружини, x – поточна деформація пружини, Δl – повна деформація пружини, l – повна довжина пружини з урахуванням деформацій. В подальшому замість руху несомого тіла розглядатимемо рух МТ.

2. Складання диференціального рівняння коливального руху МТ. Так як МТ здійснює складний рух, то за теоремою Коріоліса

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c, \quad (1)$$

де $\vec{a}_r$, $\vec{a}_e$, $\vec{a}_c$ – відповідно відносне, переносне і коріолісове пришвидшення.

2.1. Векторна форма диференціального рівняння руху має вигляд:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{np} + \vec{R}_{on},$$

або з урахуванням (1)

$$m(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c) = m\vec{g} + \vec{F}_{np} + \vec{R}_{on}. \quad (2)$$

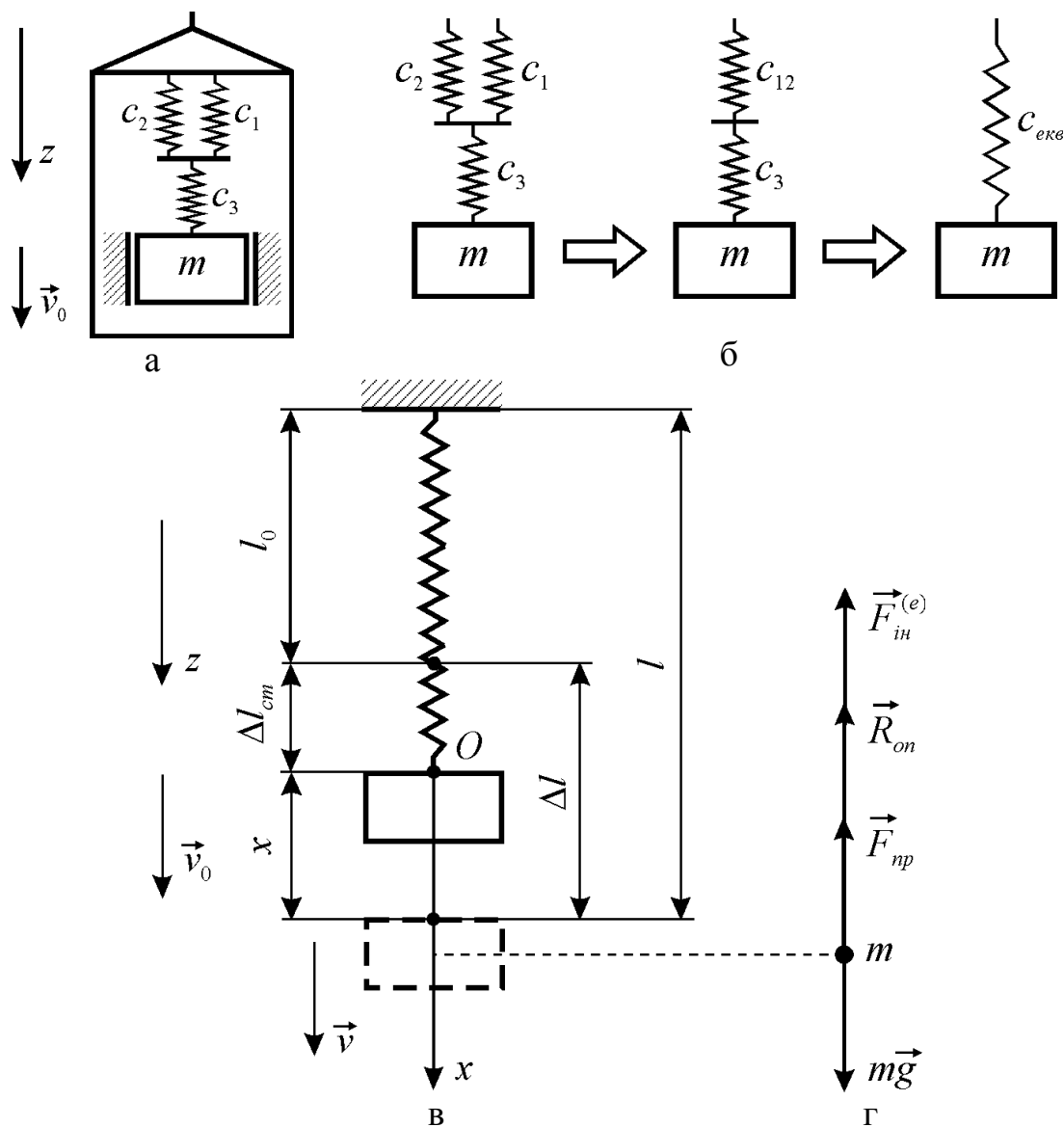


Рис. Д1 Етапи побудови розрахункової схеми коливального руху МТ:
а – вихідна схема; б – схема перетворення пружинного блоку;
в – схема деформації пружини; г – схема сил діючих на МТ

Перепишемо рівняння (2) у наступному вигляді:

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_{np} + \vec{R}_{on} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c,$$

або

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_{np} + \vec{R}_{on} + \vec{F}_{in}^{(e)} + \vec{F}_{in}^{(c)}, \quad (3)$$

де в (3) $\vec{F}_{in}^{(e)}$ – сила інерції переносного руху, $\vec{F}_{in}^{(c)}$ – сила інерції пришвидшення Коріоліса. Тут

$$\vec{F}_{in}^{(e)} = -m\vec{a}_e, \quad \vec{F}_{in}^{(c)} = -m\vec{a}_c = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r). \quad (4)$$

Враховуючи, що $\vec{\omega} = 0$, з (4) отримуємо що $\vec{F}_{in}^{(c)} = 0$. Остаточнo, диференціальне рівняння (3) матиме вигляд:

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_{np} + \vec{R}_{on} + \vec{F}_{in}^{(e)}. \quad (5)$$

2.2. Координатна форма диференціального рівняння руху.

Проведемо вертикальну вісь x направлену вниз і з початком у положенні статичної рівноваги – в точці O . Спроектуємо на вісь x векторне рівняння руху (5), отримаємо:

$$x: m\ddot{x} = mg + F_{np\,x} + R_{on\,x} + F_{in\,x}^{(e)}, \quad (6)$$

де

$$F_{np\,x} = -c\Delta l = -c(\Delta l_{cm} + x) = -c\Delta l_{cm} - cx; \quad R_{on\,x} = -\mu v = -\mu\dot{x};$$

$$F_{in\,x}^{(e)} = -m\ddot{z} = -m[\alpha_2 \sin(pt)]'' = m\alpha_2 p^2 \sin(pt). \quad (7)$$

Диференціальне рівняння руху (6) з урахуванням (7) матиме наступний вигляд:

$$m\ddot{x} = mg - cx - c\Delta l_{cm} - \mu\dot{x} + m\alpha_2 p^2 \sin(pt). \quad (8)$$

Враховуючи, що у положенні статичної рівноваги $mg = c\Delta l_{cm}$, рівняння (8) матиме вигляд:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + F_0 \sin(pt), \quad (9)$$

де в (9) $F_0 = m\alpha_2 p^2$. Перенісши в ліву частину рівняння змінну x та $\dot{x}$, і поділивши праву і ліву частину диференціального рівняння руху на m , матимемо:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = H \sin(pt), \quad (10)$$

де

$$h = \frac{\mu}{2m}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad H = \frac{F_0}{m} = \frac{m\alpha_2 p^2}{m} = \alpha_2 p^2.$$

Рівняння (10) – це диференціальне рівняння вимушених коливань МТ за наявності сил опору.

3. Визначення початкових умов руху. Визначимо x_0 . Враховуючи, що $\Delta l_{cm} = mg/c$, отримаємо:

$$x_0 + \Delta l_{cm} = \lambda_0, \text{ звідки } x_0 = \lambda_0 - \Delta l_{cm} = \lambda_0 - mg/c.$$

Остаточнo, початкові умови руху МТ мають вигляд:

$$x_0 = 0,05 - 0,5 \cdot 9,81/100 \approx 0,001 \text{ м}; \quad v_0 = \dot{x}_0 = 1,5 \text{ м/с}. \quad (11)$$

4. Знаходження загального інтегралу рівняння (10). Розв'язок рівняння (10), при початкових умовах руху (11), має вигляд:

$$x = x_1 + x_2 + x_3, \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-ht} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega} \sin \omega t \right), \\ x_2 &= \frac{pHe^{-ht}}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} \left[2h \cos \omega t + \frac{2h^2 - (\omega_0^2 - p^2)}{\omega} \sin \omega t \right], \\ x_3 &= \frac{H}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} [(\omega_0^2 - p^2) \sin pt - 2hp \cos pt], \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}. \end{aligned}$$

5. Проведення розрахунків. Знайдемо значення параметрів h , H , ω_0 , ω , отримаємо:

$$h = \frac{0,2}{2 \cdot 0,5} = 0,2 \text{ рад/с}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{100}{0,5}} = 14,1 \text{ рад/с};$$

$$H = 10 \cdot 5^2 = 250 \text{ м/с}; \quad \omega = \sqrt{14,1^2 - 0,2^2} \approx 14,098 \text{ рад/с}.$$

Після підстановки вихідних даних та відповідних параметрів отримаємо:

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-0,2t} (0,001 \cos 14,098t + 0,106 \sin 14,098t), \\ x_2 &= e^{-0,2t} (0,0164 \cos 14,098t - 0,501 \sin 14,098t), \\ x_3 &= 1,44 \sin 5t - 0,0166 \cos 5t. \end{aligned} \quad (13)$$

Остаточню, закон коливального руху МТ (12) з урахуванням (13) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} x &= e^{-0,2t} (0,0174 \cos 14,098t - 0,395 \sin 14,098t) + \\ &\quad + 1,44 \sin 5t - 0,0166 \cos 5t \text{ [м]}. \end{aligned}$$

Відповідь: $x = e^{-0,2t} (0,0174 \cos 14,098t - 0,395 \sin 14,098t) + 1,44 \sin 5t - 0,0166 \cos 5t \text{ [м]}.$

6.4. Документ MathCad для розв'язання задачі Д1

Документ Mathcad для розв'язання задачі Д1

1. Введемо розрахункові дані:

$$m := 0.5 \quad g := 9.81 \quad \mu := 0.2 \quad c := 100 \quad p := 5 \quad \alpha_2 := 10$$

Початкові умови руху точки:

$$x_0 := 0.001 \quad v_0 := 1.5$$

Нові позначення:

$$h := \frac{\mu}{2 \cdot m} \quad h = 0.2 \quad \omega_0 := \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \omega_0 = 14.142$$

$$H := \alpha_2 \cdot p^2 \quad H = 250$$

$$\omega := \sqrt{\omega_0^2 - h^2} \quad \omega = 14.141$$

2. Введення закону коливального руху матеріальної точки:

Частинні розв'язки мають вигляд:

$$x_1(t) := e^{-ht} \cdot \left(x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{v_0 + h \cdot x_0}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) \right)$$

$$x_2(t) := \frac{p \cdot H \cdot e^{-ht}}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4 \cdot h^2 \cdot p^2} \cdot \left[\frac{2 \cdot h \cdot \cos(\omega \cdot t) \dots}{2 \cdot h^2 - (\omega_0^2 - p^2)} + \frac{\sin(\omega \cdot t)}{\omega} \right]$$

$$x_3(t) := \frac{H}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4 \cdot h^2 \cdot p^2} \cdot \left[\frac{(\omega_0^2 - p^2) \cdot \sin(p \cdot t) \dots}{+ -2 \cdot h \cdot p \cdot \cos(p \cdot t)} \right]$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$x(t) := x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

Після підстановки вихідних даних та відповідних параметрів отримаємо:

$$x_1(t) \rightarrow e^{-0.2t} \cdot (1 \times 10^{-3} \cdot \cos(14.1407 \cdot t) + 0.1061 \cdot \sin(14.1407 \cdot t))$$

$$x_2(t) \rightarrow -0.0408 \cdot e^{-0.2t} \cdot (-0.4 \cdot \cos(14.1407 \cdot t) + 12.3699 \cdot \sin(14.1407 \cdot t))$$

$$x_3(t) \rightarrow -0.0163 \cdot \cos(5 \cdot t) + 1.4284 \cdot \sin(5 \cdot t)$$

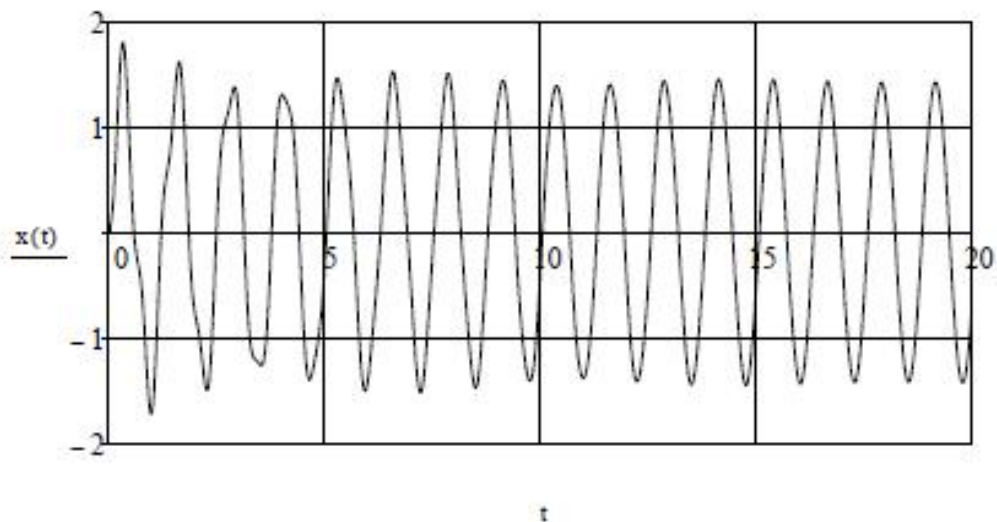
Остаточно, закон коливального руху матеріальної точки матиме вигляд:

$$x(t) \text{ simplify} \rightarrow 1.428 \cdot \sin(5 \cdot t) - 0.016 \cdot \cos(5 \cdot t) + 0.017 \cdot \cos(14.141 \cdot t) \cdot e^{-0.2t} - 0.$$

$$\begin{aligned} x(t) := & 1.428 \cdot \sin(5 \cdot t) - 0.016 \cdot \cos(5 \cdot t) \dots \\ & + 0.017 \cdot \cos(14.141 \cdot t) \cdot e^{-0.2t} - 0.399 \cdot \sin(14.141 \cdot t) \cdot e^{-0.2t} \end{aligned}$$

Нижче приведено графік вимушеного коливального руху матеріальної точки за наявності сил опору. На графіку t - час (с), $x(t)$ - переміщення матеріальної точки (м).

$$t := 0,0.0001 \dots 20$$



Задача Д2 – теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи

7.1. Умова задачі, розрахункові дані

Умова задачі. Механічна система складається з вантажів 1, 2, ступінчастого шківів 3 з радіусами ступеней $R_3=0,3$ м, $r_3=0,1$ м і радіусом інерції відносно осі обертання $\rho_3=0,2$ м, блока 4 радіуса $R_4=0,2$ м і катка (або рухомого блоку) 5 (рис. Д2.0 – Д2.9, табл. Д2); тіло 5 вважати суцільним однорідним циліндром, а масу блока 4 – рівномірно розподіленою по ободу. Коефіцієнт тертя вантажів об площину $f_{mp}=0,1$. Всі катки, враховуючи і катки обмотані нитками, котяться по площинам без ковзання. Тіла системи з'єднані одне з одним нитками, перекинутими через блоки і намотаними на шків 3 (або на шків і каток); ділянки ниток паралельні відповідним площинам. До одного з тіл прикріплена пружина з коефіцієнтом жорсткості c .

Під дією сили $F=f(s)$, що залежить від переміщення s , система розпочинає рух із стану спокою; деформація пружини в початковий момент часу дорівнює нулю. При русі на шків 3 діє постійний момент M сил опору (від тертя в підшипниках).

На всіх рисунках не зображати вантаж 2, якщо $m_2=0$; інші тіла повинні бути зображені і тоді, коли їх маса рівна нулю.

Знайти: значення шуканої величини в момент часу, коли переміщення s стане рівним $s_1=0,2$ м.

Шукана величина вказана в стовпчику “Знайти” таблиці, де позначено: v_1, v_2, v_{C5} – відповідно швидкості вантажів 1, 2 і центра мас тіла 5; ω_3, ω_4 – відповідно кутові швидкості тіл 3 і 4.

Таблиця Д2

Номер умови	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	m_4 , кг	m_5 , кг	c , Н/м	M , Н·м	$F=f(s)$, Н	Знайти
0	0	6	4	0	5	200	1,2	$80(4+5s)$	ω_3
1	8	0	0	4	6	320	0,8	$50(8+3s)$	v_1
2	0	4	6	0	5	240	1,4	$60(6+5s)$	v_2
3	0	6	0	5	4	300	1,8	$80(5+6s)$	ω_4
4	5	0	4	0	6	240	1,2	$40(9+4s)$	v_1
5	0	5	0	6	4	200	1,6	$50(7+8s)$	v_{C5}
6	8	0	5	0	6	280	0,8	$40(8+9s)$	ω_3
7	0	4	0	6	5	300	1,5	$60(8+5s)$	v_2
8	4	0	0	5	6	320	1,4	$50(9+2s)$	ω_4
9	0	5	6	0	4	280	1,6	$80(6+7s)$	v_{C5}

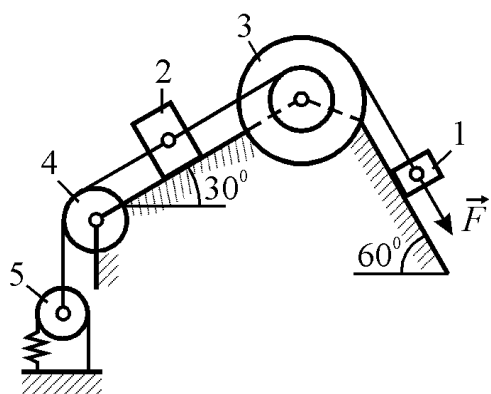


Рис. Д2.0

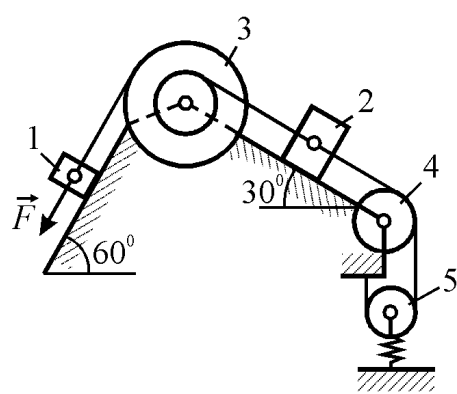


Рис. Д2.1

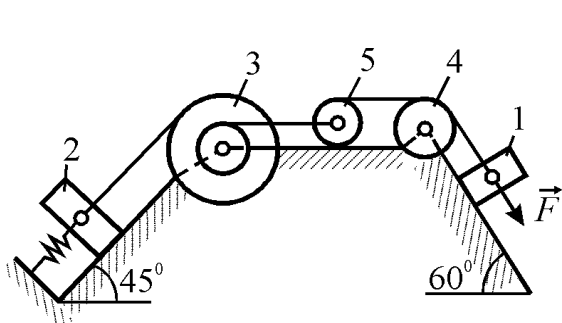


Рис. Д2.2

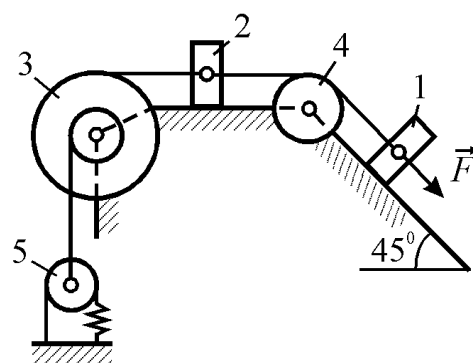


Рис. Д2.3

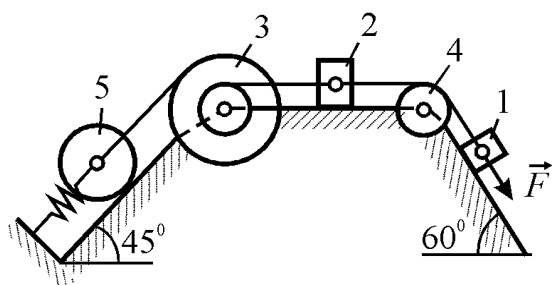


Рис. Д2.4

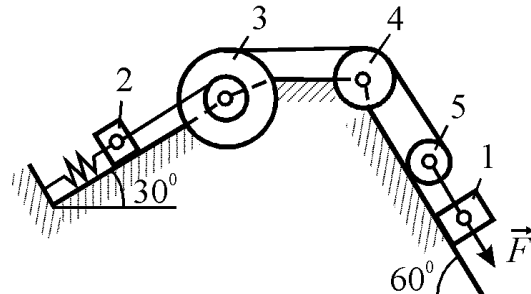


Рис. Д2.5

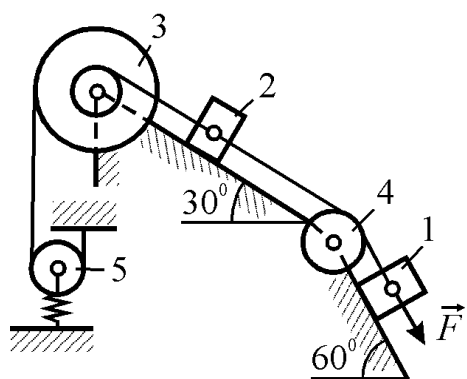


Рис. Д2.6

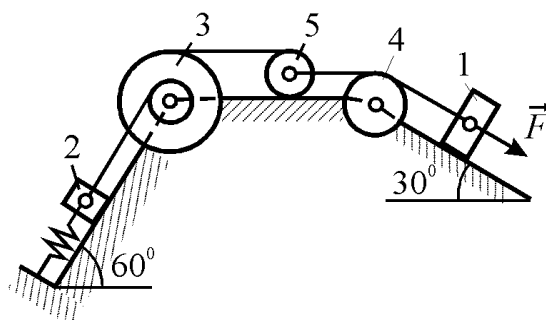


Рис. Д2.7

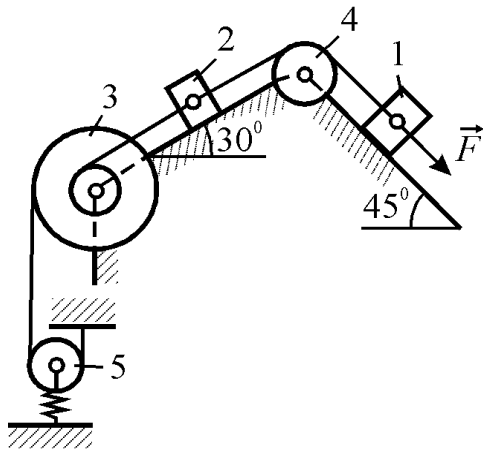


Рис. Д2.8

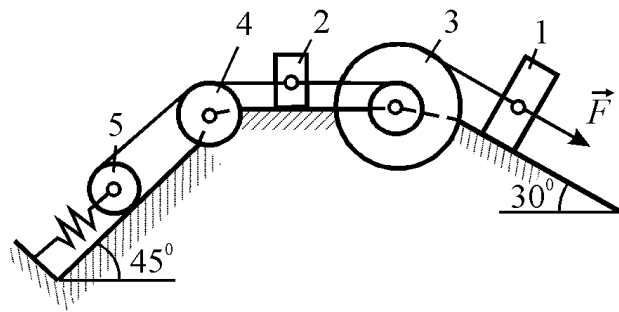


Рис. Д2.9

7.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача Д2 – на застосування теореми про зміну кінетичної енергії системи. При розв'язанні задачі необхідно врахувати, що кінетична енергія системи T дорівнює сумі кінетичних енергій усіх тіл, які входять до системи; цю енергію необхідно виразити через ту швидкість (лінійну чи кутову), яку у задачі необхідно визначити. Для встановлення залежності між швидкостями точок тіла, що рухається плоскопаралельно, або між його кутовою швидкістю і швидкістю центра інерції необхідно скористатися поняттям миттєвого центру швидкостей (кінематика). При обчисленні роботи треба всі переміщення виразити через задане переміщення s_1 , врахувавши, що залежність між переміщеннями буде такою ж, як і між відповідними швидкостями.

7.3. Приклад розв'язання задачі Д2

Умова задачі. Механічна система складається з вантажів 1, 2, ступінчастого шків 3 з радіусами ступеней R_3 , r_3 і радіусом інерції відносно осі обертання ρ_3 , блока 4 радіуса R_4 і катка 5 (рис. Д2а); тіло 5 вважати суцільним однорідним циліндром, а масу блока 4 – рівномірно розподіленою по ободу. Коефіцієнт тертя вантажів об площину f_{mp} . Всі катки, враховуючи і катки обмотані нитками, котяться по площинам без ковзання. Тіла системи з'єднані одне з одним нитками, перекинутими через блоки і намотаними на шків 3 (або на шків і каток); ділянки ниток паралельні відповідним площинам. До катка 5 прикріплена пружина з коефіцієнтом жорсткості c .

Під дією сили $F=f(s)$, що залежить від переміщення s , система розпочинає рух із стану спокою; деформація пружини в початковий момент часу дорівнює нулю. При русі на шків 3 діє постійний момент M сил опору (від тертя в підшипниках).

Дано: $f_{mp}=0,1$; $m_1=4$ кг; $m_2=8$ кг; $m_3=5$ кг; $m_4=6$ кг; $m_5=3$ кг; $R_3=0,3$ м; $r_3=0,1$ м; $\rho_3=0,2$ м; $R_4=0,2$ м; $c=350$ Н/м; $s_1=0,2$ м; $M=2$ Н·м; $F=50(5+10s_1)$ Н.

Знайти: ω_3 в момент часу, коли переміщення $s=s_1$.

Розв'язок

1. Побудова розрахункової схеми (рис. Д2б). Розглянемо рух незмінної механічної системи.

1.1. Запишемо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної системи у скінченній формі

$$T - T_0 = \sum A_i^{(e)},$$

де T , T_0 – відповідно кінетична енергія системи в поточний та початковий момент часу; $A_i^{(e)}$ – робота зовнішніх сил.

Приймаємо, що у початковий момент часу $T_0 = 0$, тоді

$$T = \sum A_i^{(e)}. \quad (1)$$

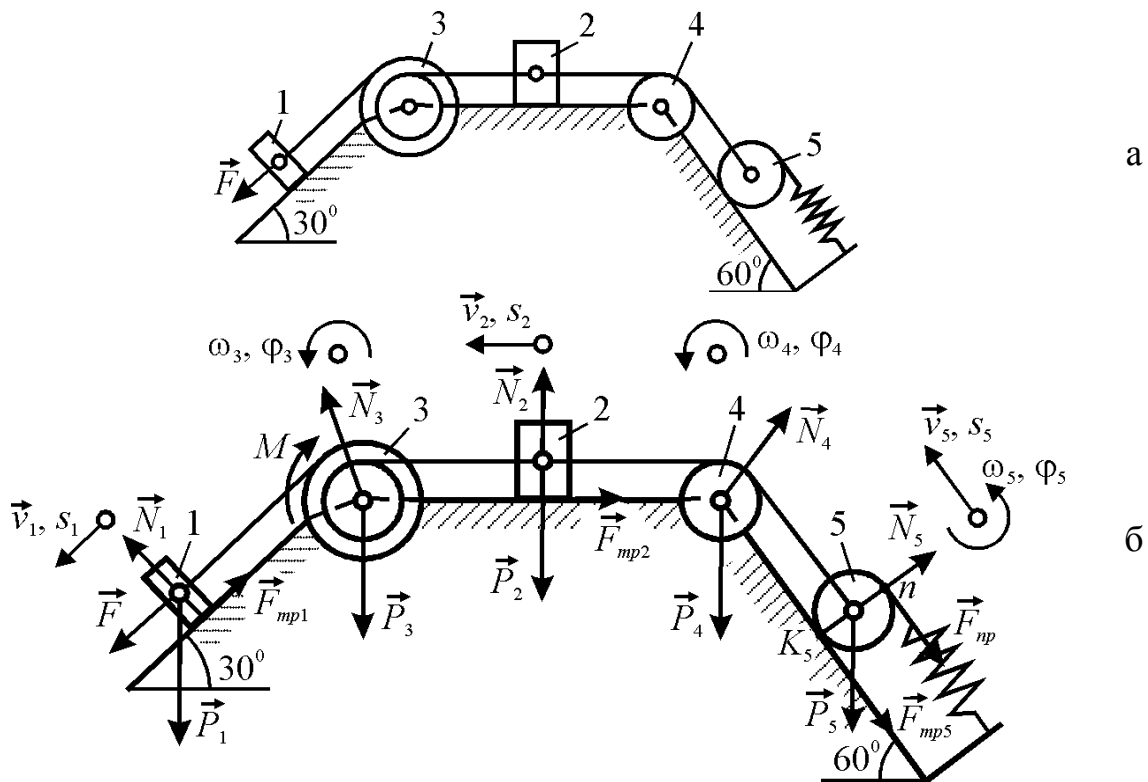


Рис. Д2 Схема механічної системи:
а – вихідна схема; б – розрахункова схема

1.2. Показуємо напрямки переміщень та швидкостей.

1.3. Прикладаємо зовнішні сили і моменти, що діють на тіла системи: активні $\vec{F}$, $\vec{F}_{np}$, $\vec{P}_i = m_i \vec{g}$, $/i = \overline{1,5}/$; реакції $\vec{N}_i$, $/i = \overline{1,5}/$; сили тертя ковзання $\vec{F}_{mp1}$, $\vec{F}_{mp2}$, силу тертя зчеплення $\vec{F}_{mp5}$ і момент M .

2. Визначення зв'язків між переміщеннями та швидкостями.

2.1. Визначаємо зв'язки між переміщеннями. Виразимо всі переміщення через незалежне лінійне переміщення s_1 :

$$\varphi_3 = \frac{s_1}{R_3}, \quad s_2 = s_5 = \varphi_3 r_3 = \frac{r_3 s_1}{R_3}, \quad \varphi_4 = \frac{s_2}{R_4} = \frac{r_3 s_1}{R_3 R_4},$$
$$\varphi_5 = \frac{s_5}{R_5} = \frac{r_3 s_1}{R_3 R_5}, \quad s_n = \varphi_5 2R_5 = \frac{2r_3 s_1}{R_3}. \quad (2)$$

2.2. Визначаємо зв'язки між швидкостями. Виразимо всі швидкості через незалежну кутову швидкість ω_3 :

$$v_1 = \omega_3 R_3, \quad v_2 = v_5 = \omega_3 r_3, \quad \omega_4 = \frac{v_2}{R_4} = \frac{\omega_3 r_3}{R_4}, \quad \omega_5 = \frac{v_5}{R_5} = \frac{r_3 \omega_3}{R_5}. \quad (3)$$

3. Визначення кінетичної енергії системи. Кінетична енергія системи має вигляд:

$$T = \sum_{i=1}^5 T_i = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5. \quad (4)$$

Тіло 1 рухається поступально, тому

$$T_1 = m_1 v_1^2 / 2. \quad (5)$$

Тіло 2 рухається поступально, тому

$$T_2 = m_2 v_2^2 / 2. \quad (6)$$

Тіло 3 – ступінчастий шків з радіусом інерції відносно осі обертання ρ_3 – обертається навколо нерухомої осі, тому

$$T_3 = J_3 \omega_3^2 / 2. \quad (7)$$

Тіло 4 – барабан, маса якого розподілена по ободу – обертається навколо нерухомої осі, тому

$$T_4 = J_4 \omega_4^2 / 2. \quad (8)$$

Тіло 5 – рухомий блок, який є суцільним однорідним циліндром – рухається плоскопаралельно, тому

$$T_5 = (m_5 v_5^2 + J_5 \omega_5^2) / 2. \quad (9)$$

В (7), (8) та (9) осьові моменти інерції відповідних тіл мають вигляд:

$$J_3 = m_3 \rho_3^2, \quad J_4 = m_4 R_4^2, \quad J_5 = m_5 R_5^2 / 2. \quad (10)$$

Підставляючи (5) – (9) в (4) та враховуючи вирази для осьових моментів інерції (10), кінетична енергія системи матиме вигляд:

$$T = \frac{1}{2} \left[m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 \rho_3^2 \omega_3^2 + m_4 R_4^2 \omega_4^2 + m_5 \left(v_5^2 + \frac{R_5^2 \omega_5^2}{2} \right) \right],$$

або з врахуванням зв'язків для швидкостей (3), отримаємо

$$T = \frac{1}{2} \left\{ m_1(\omega_3 R_3)^2 + m_2(\omega_3 r_3)^2 + m_3 \rho_3^2 \omega_3^2 + m_4 R_4^2 \left(\frac{\omega_3 r_3}{R_4} \right)^2 + m_5 [(\omega_3 r_3)^2 + \right. \\ \left. + \frac{R_5^2}{2} \left(\frac{r_3 \omega_3}{R_5} \right)^2 \right] \right\} = \frac{\omega_3^2}{2} \left(m_1 R_3^2 + m_2 r_3^2 + m_3 \rho_3^2 + m_4 r_3^2 + \frac{3}{2} m_5 r_3^2 \right) = \frac{1}{2} J_{3\theta} \omega_3^2, \quad (11)$$

де

$$J_{3\theta} = m_1 R_3^2 + m_3 \rho_3^2 + r_3^2 \left(m_2 + m_4 + \frac{3}{2} m_5 \right)$$

– зведений до третього тіла осьовий момент інерції системи.

4. Визначення роботи зовнішніх сил. Робота зовнішніх сил, які прикладені до тіл системи має вигляд:

$$\sum A_i^{(e)} = A_1^{(e)} + A_2^{(e)} + A_3^{(e)} + A_4^{(e)} + A_5^{(e)}. \quad (12)$$

Робота зовнішніх сил прикладених до 1-го тіла

$$A_1^{(e)} = A(\vec{F}) + A(\vec{P}_1) + A(\vec{N}_1) + A(\vec{F}_{mp1}) = \int_0^{x_1} 50(5 + 10s_1) ds_1 + \\ + m_1 g \sin 30^\circ s_1 - F_{mp1} s_1 = s_1 [250(1 + s_1) + m_1 g \sin 30^\circ - F_{mp}] . \quad (13)$$

Робота зовнішніх сил прикладених до 2-го тіла

$$A_2^{(e)} = A(\vec{F}_{mp2}) + A(\vec{P}_2) + A(\vec{N}_2) = -F_{mp2} s_2 . \quad (14)$$

Робота зовнішніх сил прикладених до 3-го тіла

$$A_3^{(e)} = A(M) + A(\vec{P}_3) + A(\vec{N}_3) = -M \varphi_3 . \quad (15)$$

Робота зовнішніх сил прикладених до 4-го тіла

$$A_4^{(e)} = A(\vec{P}_4) + A(\vec{N}_4) = 0 . \quad (16)$$

Робота зовнішніх сил прикладених до 5-го тіла

$$A_5^{(e)} = A(\vec{P}_5) + A(\vec{N}_5) + A(\vec{F}_{mp5}) + A(\vec{F}_{np}) = -m_5 g \sin 60^\circ s_5 - \frac{c}{2} s_{np}^2, \quad (17)$$

де в (17) було враховано, що

$$A(\vec{F}_{np}) = -\frac{c}{2} (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) = \{\Delta l = s_n, \Delta l_0 = 0\} = -c s_n^2 / 2 .$$

Зазначимо, що в (13) – (17) приймалось, що

$$A(\vec{N}_1) = 0, \quad A(\vec{P}_2) = 0, \quad A(\vec{N}_2) = 0, \quad A(\vec{P}_3) = 0, \quad A(\vec{N}_3) = 0, \\ A(\vec{P}_4) = 0, \quad A(\vec{N}_4) = 0, \quad A(\vec{N}_5) = 0, \quad A(\vec{F}_{mp5}) = 0,$$

так як реакції $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ та сила $\vec{P}_2$ перпендикулярні переміщенням відповідних тіл, реакції $\vec{N}_3$, $\vec{N}_4$ та сили $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ прикладені в нерухомих

точках, а сили $\vec{N}_5$ і $\vec{F}_{mp5}$ прикладені в миттєвому центрі швидкостей.

Підставляючи (13) – (17) в (12) та враховуючи, що

$$F_{mp1} = f_{mp} N_1 = f_{mp} m_1 g \cos 30^0, \quad F_{mp2} = f_{mp} N_2 = f_{mp} m_2 g,$$

робота зовнішніх сил матиме вигляд

$$\sum A_i^{(e)} = s_1 [250(1 + s_1) + m_1 g (\sin 30^0 - f_{mp} \cos 30^0)] - f_{mp} m_2 g s_2 - \\ - M \varphi_3 - m_5 g \sin 60^0 s_5 - \frac{c}{2} s_{np}^2,$$

або з врахуванням зв'язків для переміщень (2), отримаємо

$$\sum A_i^{(e)} = s_1 [250(1 + s_1) + m_1 g (\sin 30^0 - f_{mp} \cos 30^0) - \\ - f_{mp} m_2 g \frac{r_3}{R_3} - \frac{M}{R_3} - m_5 g \sin 60^0 \frac{r_3}{R_3} - 2c \frac{r_3^2}{R_3^2} s_1] = s_1 F_{3\theta}, \quad (18)$$

де

$$F_{3\theta} = 250(1 + s_1) + m_1 g (\sin 30^0 - f_{mp} \cos 30^0) - \\ - f_{mp} m_2 g \frac{r_3}{R_3} - \frac{M}{R_3} - m_5 g \sin 60^0 \frac{r_3}{R_3} - 2c \frac{r_3^2}{R_3^2} s_1$$

– зведена до першого тіла сила.

5. Проведення розрахунків. Підставимо знайдені вирази для кінетичної енергії системи (11) та для роботи зовнішніх сил (18) в теорему про зміну кінетичної енергії системи (1), отримаємо:

$$J_{3\theta} \omega_3^2 = 2s_1 F_{3\theta},$$

звідки

$$\omega_3 = \sqrt{2s_1 F_{3\theta} / J_{3\theta}}.$$

Підставивши вихідні дані в вираз для зведеної сили і зведеного осьового моменту інерції отримаємо:

$$J_{3\theta} = 4 \cdot 0,3^2 + 5 \cdot 0,2^2 + 0,1^2 \cdot \left(8 + 6 + \frac{3}{2} \cdot 3 \right) = 0,745 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \\ F_{3\theta} = 250(1 + 0,2) + 4 \cdot 9,8 \cdot (0,5 - 0,1 \cdot 0,866) - \\ - 0,1 \cdot 8 \cdot 9,8 \frac{0,1}{0,3} - \frac{2}{0,3} - 3 \cdot 9,8 \cdot 0,866 \frac{0,1}{0,3} - 2 \cdot 350 \frac{0,1^2}{0,3^2} \cdot 0,2 \approx 283 \text{ Н}.$$

Остаточно отримуємо

$$\omega_3 = \sqrt{2 \cdot 0,2 \cdot 283 / 0,745} \approx 12,33 \text{ рад/с}.$$

Відповідь: $\omega_3 = 12,33 \text{ [рад/с]}$.

Задача ДЗ – принцип можливих переміщень

8.1. Умова задачі, розрахункові дані

Умова задачі. Механізм, розташований у горизонтальній площині, знаходиться під дією прикладених сил у рівновазі; положення рівноваги визначається кутами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$ (рис. ДЗ.0 – ДЗ.9, табл. ДЗа та табл. ДЗб). Довжини стрижнів механізму $l_1=0,4$ м, $l_4=0,6$ м, а l_2, l_3 – довільні; точка E знаходиться посередині відповідного стрижня.

На повзун B механізма діє сила пружності пружини $\vec{F}_{np}$; чисельно $F_{np}=c\lambda$, де c – коефіцієнт жорсткості пружини, λ – її деформація. Крім того, на рисунках ДЗ.0 і ДЗ.1 на повзун D діє сила $\vec{Q}$, а на кривошипі O_1A – пара сил з моментом M ; на рисунках ДЗ.2 – ДЗ.9 на кривошипах O_1A і O_2D діють пари сил з моментами M_1 і M_2 .

Значення всіх заданих величин приведені в табл. Д9а для рисунків ДЗ.0 – ДЗ.4 і в табл. ДЗб для рисунків ДЗ.5 – ДЗ.9, де Q – виражено в ньютонках, а M, M_1, M_2 – в ньютонметрах.

Побудову креслення необхідно розпочинати з стрижня, напрямком якого визначається кутом α . Якщо на кресленні прикріплений до повзуна стрижень буде суміщений з пружиною (рис. ДЗ.10а), то пружину слід вважати прикріпленою до повзуна з іншої сторони (рис. ДЗ.10б).

Знайти: чому рівна при рівновазі деформація λ пружини, і вказати, розтягнута вона чи стиснута.

8.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача ДЗ – на визначення умов рівноваги механічної системи за допомогою принципу можливих переміщень. Механізм у розглянутій задачі має один ступінь вільності, тобто одне незалежне можливе переміщення. Для розв'язання задачі необхідно надати механізму можливе переміщення, обчислити суму елементарних робіт всіх діючих активних сил і пар на цьому переміщенні і прирівняти її до нуля. Всі можливі переміщення, які ввійшли в отримане рівняння, необхідно виразити через незалежне (в якості незалежного можна обрати будь-яке можливе переміщення).

Щоб знайти λ , треба з отриманої умови рівноваги визначити силу пружності F . На кресленні цю силу можна направити в будь-яку сторону (тобто вважати пружину розтягнутою, чи стиснутою); чи вірно обраний напрямок сили, вкаже знак.

Таблиця Д3а (до рис. Д3.0 – Д3.4)

Номер умови	Кути, град					$c, H/cm$	рис. 0-1		рис. 2-4	
	α	β	γ	φ	θ		M	Q	M_1	M_2
0	90	120	90	60	60	180	100	400	120	460
1	60	150	30	0	120	160	120	380	140	440
2	30	120	120	30	60	150	140	360	160	420
3	0	60	90	30	120	140	160	340	180	400
4	30	120	30	0	60	130	180	320	200	380
5	0	150	30	0	60	120	200	300	220	360
6	0	150	60	90	120	110	220	280	240	340
7	90	120	120	60	150	100	240	260	260	320
8	60	60	60	90	30	90	260	240	280	300
9	120	30	30	90	150	80	280	220	300	280

Таблиця Д3б (до рис. Д3.5 – Д3.9)

Номер умови	Кути, град					$c, H/cm$	M_1	M_2
	α	β	γ	φ	θ			
0	30	30	60	0	150	80	200	340
1	0	60	60	0	120	90	220	320
2	60	150	120	90	30	100	240	300
3	30	60	30	90	120	110	260	280
4	90	120	150	90	30	120	280	260
5	30	120	150	0	60	130	300	240
6	60	150	150	90	30	140	320	220
7	0	60	30	0	120	150	340	200
8	90	120	120	90	60	160	360	180
9	90	150	120	90	30	180	380	160

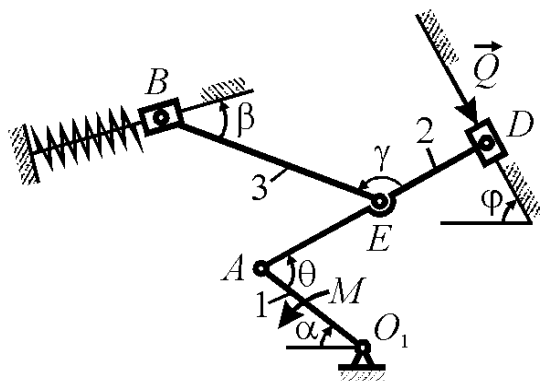


Рис. Д3.0

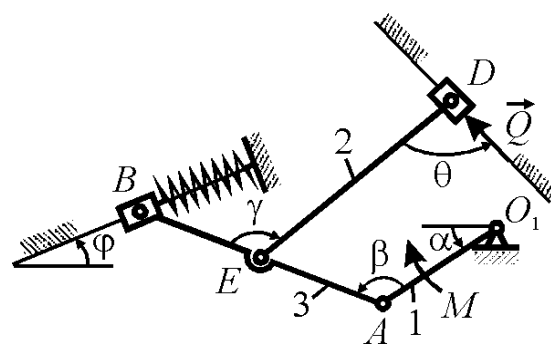


Рис. Д3.1

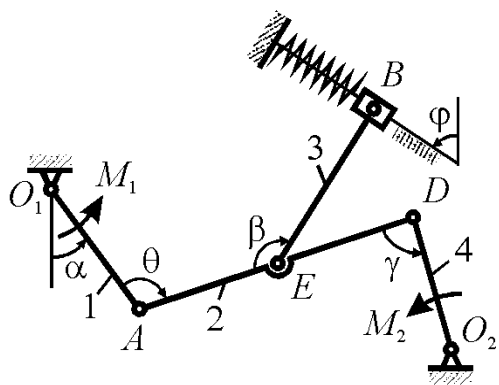


Рис. Д3.2

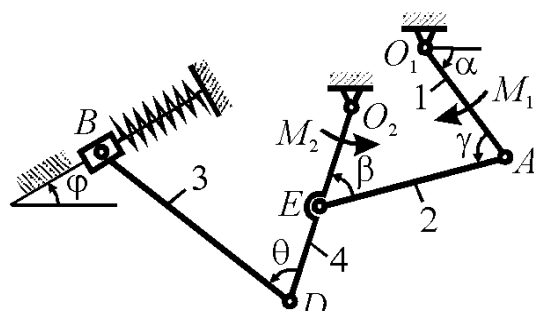


Рис. Д3.3

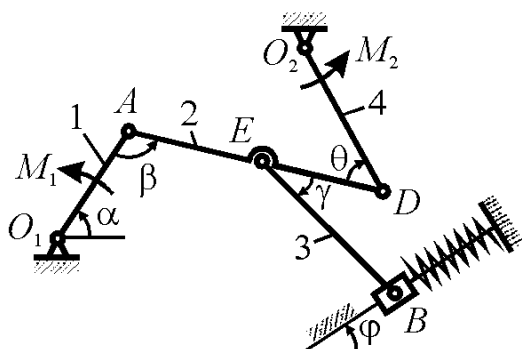


Рис. Д3.4

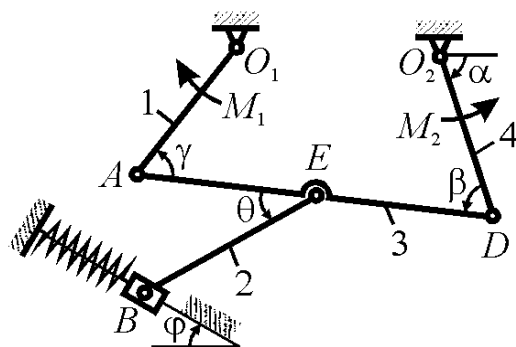


Рис. Д3.5

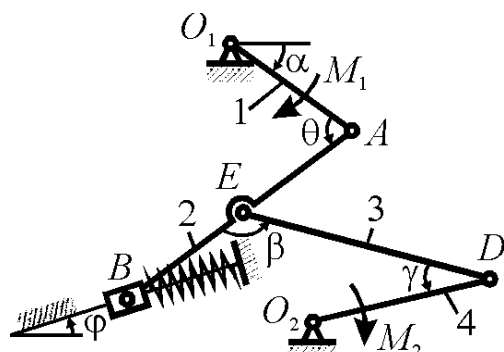


Рис. Д3.6

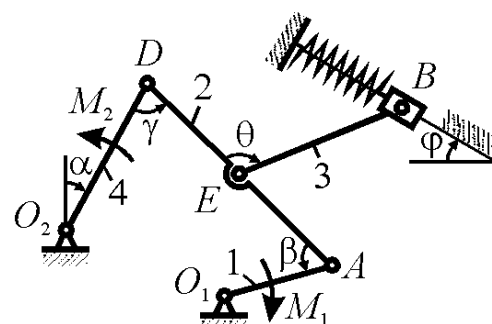


Рис. Д3.7

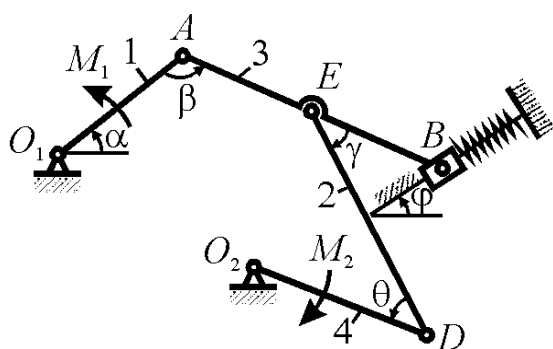


Рис. Д3.8

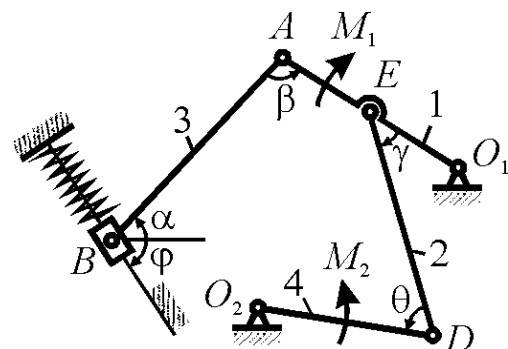


Рис. Д3.9



Рис. Д3.10а

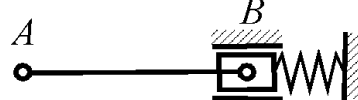


Рис. Д3.10б

8.3. Приклад розв'язання задачі Д3

Умова задачі. Механізм, розташований у горизонтальній площині, складається з стрижнів 1, 2, 3, 4 і повзуна D , з'єднаних між собою і з нерухомими опорами O_1 та O_2 шарнірами. До повзуна D прикріплена пружина з коефіцієнтом жорсткості c і прикладена сила $\vec{Q}$, а до стрижнів 1 та 4 відповідно прикладені моменти M_1 та M_2 . Точка C знаходиться посередині стрижня 2.

Дано: $\alpha=60^\circ$; $\beta=120^\circ$; $\gamma=120^\circ$; $\varphi=45^\circ$; $\theta=45^\circ$; $l_1=0,4$ м; $l_4=0,6$ м; $M_1=150$ Н·м; $M_2=200$ Н·м; $Q=450$ Н; $c=150$ Н·см.

Знайти: чому рівна при рівновазі деформація λ пружини, і вказати, розтягнута вона чи стиснута.

Розв'язок

1. Побудова розрахункової схеми (рис. Д3б).

1.1. Запишемо принцип можливих переміщень

$$\sum \delta A_i = 0, \quad (1)$$

де δA_i – елементарна робота активних сил на відповідних можливих переміщеннях

1.2. Показуємо положення механізму у відповідності з заданими кутами та будуємо схему можливих переміщень (рис. Д3б).

1.3. Зображаємо діючі на механізм активні сили: силу $\vec{Q}$, силу пружності $\vec{F}_{np}$ пружини (припускаючи, що пружина розтягнута) і моменти M_1 та M_2 , що прикладені до відповідних стрижнів.

2. Визначення зв'язків між можливими переміщеннями.

Знаходимо зв'язки між можливими переміщеннями, обравши за незалежне, наприклад, можливе переміщення 1-го тіла – $\delta\varphi_1$. Тоді матимемо

$$\delta x_A = \delta\varphi_1 l_1. \quad (2)$$

При подальших розрахунках будемо враховувати, що залежність між можливими переміщеннями буде така, як і між швидкостями. Тому для знаходження можливих переміщень точок стрижнів, що здійснюють плоскопаралельний рух можна скористатись положенням про рівність проекцій можливих переміщень двох точок тіла на пряму, що з'єднує ці точки.

Тоді використовуючи рис. Д9б отримаємо:

$$\delta x_C = \delta x_A \cos 30^\circ = \delta\varphi_1 l_1 \cos 30^\circ;$$

$$\delta x_A \cos 30^\circ = \delta x_B \cos 30^\circ \Rightarrow \delta x_A = \delta x_B = \delta \varphi_1 l_1;$$

$$\delta x_C \cos 45^\circ = \delta x_D \cos 45^\circ \Rightarrow \delta x_D = \delta x_C = \delta \varphi_1 l_1 \cos 30^\circ. \quad (3)$$

Для можливого переміщення стрижня 4 отримаємо:

$$\delta \varphi_4 = \delta x_B / l_4 = \delta \varphi_1 l_1 / l_4. \quad (4)$$

Той самий результат можна отримати для можливих переміщень, якщо їх шукати за допомогою миттєвих центрів обертань K_2 , K_4 , O_3 .

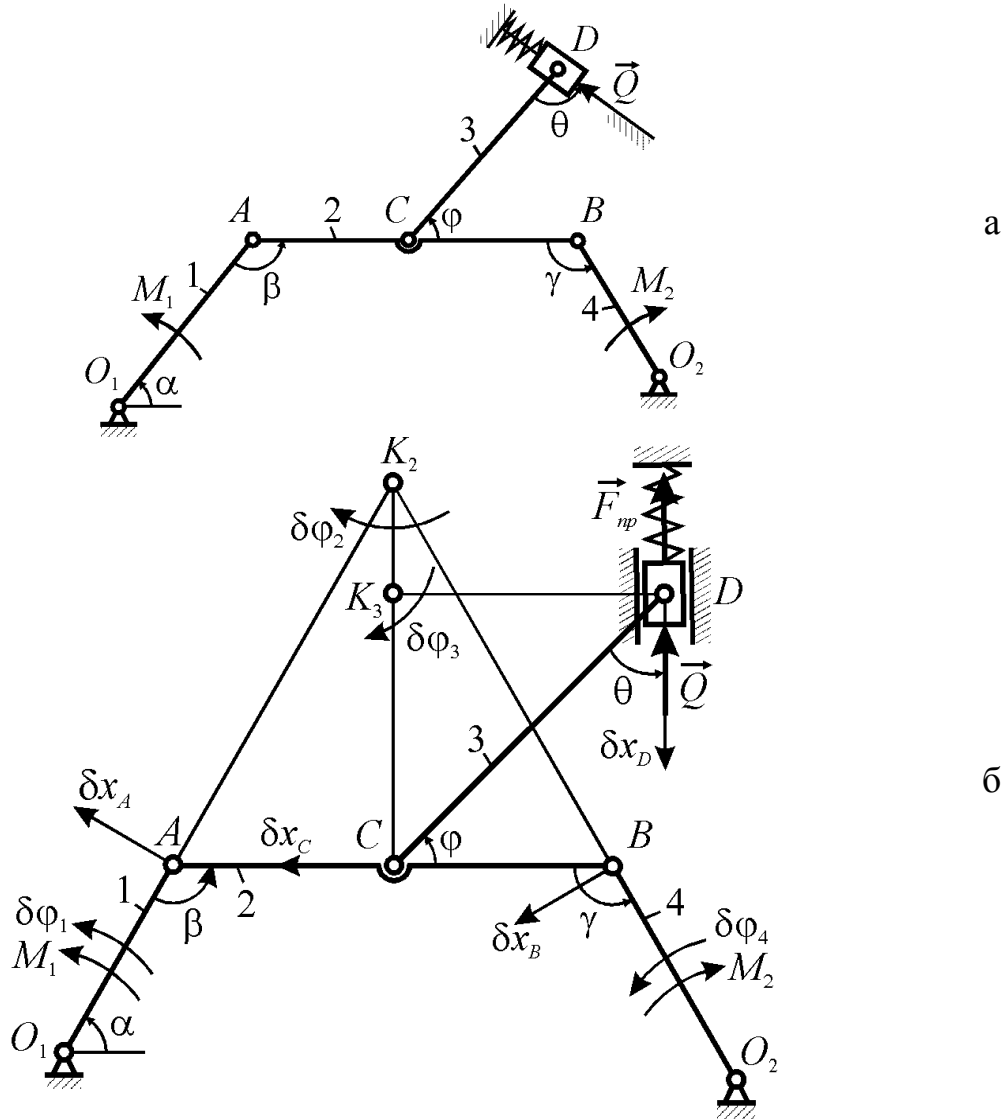


Рис. ДЗ Схема плоского механизма:
а – вихідна схема; б – розрахункова схема

3. Складання рівняння елементарних робіт. Рівняння (1) матиме вигляд (будемо враховувати, що знак “+” для роботи буде в тому випадку, коли напрямок сили або моменту співпадає з напрямком можливого переміщення, і знак “-” – якщо не співпадає):

$$M_1 \delta \varphi_1 - M_2 \delta \varphi_4 - (F_{np} + Q) \delta x_D = 0. \quad (5)$$

4. Визначення деформації пружини. Підставляючи зв'язки для можливих переміщень (2) – (4) у рівняння (5), та враховуючи, що $F_{np}=c\lambda$, отримаємо:

$$M_1 \delta \varphi_1 - M_2 \frac{\delta \varphi_1 l_1}{l_4} - (c\lambda + Q) \delta \varphi_1 l_1 \cos 30^0 = 0 \text{ або}$$

$$\delta \varphi_1 \left[M_1 - M_2 \frac{l_1}{l_4} - (c\lambda + Q) l_1 \cos 30^0 \right] = 0. \quad (6)$$

Так як $\delta \varphi_1 \neq 0$, то з рівняння (6) випливає, що

$$M_1 - M_2 \frac{l_1}{l_4} - (c\lambda + Q) l_1 \cos 30^0 = 0,$$

звідки отримуємо

$$\lambda = \frac{M_1 - M_2 \frac{l_1}{l_4} - Q l_1 \cos 30^0}{c l_1 \cos 30^0}. \quad (7)$$

5. Проведення розрахунків. Підставимо вихідні дані в вираз (7), отримаємо:

$$\lambda = \frac{150 - 200 \frac{0,4}{0,6} - 450 \cdot 0,4 \cdot 0,866}{150 \cdot 0,4 \cdot 0,866} = \frac{-139,28}{51,96} \approx -2,68 \text{ см (стиск)}.$$

Відповідь: $\lambda = -2,68$ [см].

Знак “–” вказує на те, що в дійсності пружина буде стиснута.

Література

1. *Кільчевський М. О.* Курс теоретичної механіки. – Т. 1–2. – К., 1955 – 1957.
2. *Павловський М.А.* Теоретична механіка: Підручник / М.А. Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
3. *Філімоніхін Г.Б.* Теоретична механіка. Статика. Навчальний посібник. – Кіровоград.: КНТУ, 2010. – 115 с.
4. *Філімоніхін Г.Б.* Теоретична механіка. Кінематика. Навчальний посібник. – Кіровоград.: КНТУ, 2011. – 68 с.
5. *Філімоніхін Г.Б.* Теоретична механіка. Динаміка. Навчальний посібник. – Кіровоград.: ПП "КОД", 2000. – 111 с.
6. Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников машиностроительных, строительных, транспортных, приборостроительных специальностей высших учебных заведений / Под ред. С.М.Тарга – 4-е изд. – М.: Высш. шк., 1989. – 111 с.
7. *Путята Т.В., Фрадлін Б.Н.* Методика розв'язування задач з теоретичної механіки. – К.: "Радянська школа", 1955. – 391 с.
8. *Мещерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. – М., 1986 (и пред. изд.)
9. *Г.Б.Філімоніхін* Методичні вказівки і завдання до курсової роботи з теоретичної механіки (розділ "Динаміка"). – К: "ВІПОЛ", 1993. – 31 с., іл.
10. *Бертяев В.Д.* Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум /В.Д. Бертяев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. –752 с.

Володимир Васильович Пирогов

**Практикум з технічної механіки.
Теоретична механіка
Навчальний посібник**

Комп'ютерний набір
кафедра ДМ та ПМ
т. (0522) 390-547

Підп. до друку 25.06.2018 Формат 60x84 1/16 (A5). Папір друк №3. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. Ум.фарбо-відб. 3,33 Облік.-вид.арк. . Тираж 100 прим.
Зам.№

Центральноукраїнський національний технічний університет
25030, м. Кропивницький. пр. Університетський, 8