

В.І. ШВАБ'ЮК

**ЛУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ**

ОПР МАТЕРІАЛІВ

ПІДРУЧНИК

для студентів
інженерних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Київ
«ЗНАННЯ»
2016

УДК 620.17 (075.8)

ББК 30.121 я 73

Ш 33

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

(лист № 1А/18Г 2767 від 19 грудня 2008 р.)

Рекомендовано до друку Вченою радою Луцького національного технічного університету

Рецензенти:

Г.Т. Сулим — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри Львівського національного університету імені Івана Франка;

В.В. Книш — доктор технічних наук, професор, завідувач відділу Інституту електрозварювання ім. Є.О. Патона НАН України;

В.О. Кривень, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя

Шваб'юк В.І.

Ш33 Опір матеріалів: Підручник. – К.: Знання, 2016. — 400 с.

ISBN 978-617-07-0360-4

У підручнику викладено основи курсу “Опір матеріалів”. Описано основні положення та методики сучасної механіки деформівного твердого тіла, класичні задачі визначення зусиль та переміщень у елементах конструкцій, а також методи їх розрахунків. Наведено приклади розрахунку конструкцій із композитних матеріалів.

Для студентів будівельних та механічних спеціальностей вищих навчальних закладів, які вивчають курси опору матеріалів, технічної та прикладної механіки, механічні властивості та конструкційну міцність матеріалів, а також для студентів заочної форми навчання.

© Шваб'юк В.І.

ПЕРЕДМОВА

Підручник написано на основі викладання дисциплін “Конструкційна міцність та механічні властивості матеріалів”, “Опір матеріалів” та “Технічна механіка” в Луцькому національному технічному університеті для студентів будівельних, механічних та матеріалознавчих спеціальностей. Матеріал посібника розбитий за темами, які, для зручності, поділені на лекції. Тому для кожної спеціальності цей матеріал легко підібрати у відповідності до програм та кількості годин. І якщо для механічних спеціальностей підручників та посібників з “Опору матеріалів” є достатній вибір, то для спеціальностей “Прикладне матеріалознавство”, “Автомобілі та автомобільне господарство”, “Технологія машинобудування”, у більшості випадків, ці дисципліни читаються у вищих технічних навчальних закладах, як скорочені курси дисципліни “Опір матеріалів” для механічних спеціальностей. Це веде до неповності та незавершеності курсів, їх невідповідності до вимог спеціальностей, за якими ведеться підготовка студентів. Тому у підручнику такі теми як “Експериментальне вивчення механічних властивостей матеріалів”, “Механіка руйнування”, “Композитні матеріали” та ін. для згаданих спеціальностей даються більш розширено і детальніше у порівнянні з матеріалами, що подаються для студентів механічних спеціальностей.

Багато уваги приділено механічним властивостям та міцності матеріалів як із ізотропними, так і з анізотропними властивостями. Це особливо актуально для елементів конструкцій із композитних матеріалів, а також таких, що мають значні пошкодження та тріщини. У зв'язку з цим одна із тем присвячена вивченню міцності тіл з тріщинами, з урахуванням впливу на їх розвиток різних факторів (характеру навантажування, виду напруженого стану, середовища тощо), а також розробці критеріїв тримальної здатності. Це має велике практичне значення при вивченні крихкого руйнування елементів конструкцій, що відбувається від швидкого поширення тріщин при середніх напруженнях, які здаються безпечними. Досить детально розглянуті також випадки

концентрації напружень для елементів конструкцій, що мають різного роду отвори, вирізи або різкі зміни перерізів.

Разом з тим, у підручнику конспективно подано майже всі теми, що присутні в існуючих підручниках з опору матеріалів. Ними можуть користуватися також і студенти інших спеціальностей, оскільки ці матеріали (передбачені будь-якою навчальною програмою) стисло викладено у відповідних темах та параграфах посібника. Для більшої зручності та кращого сприйняття, навчальний матеріал підручника подано у вигляді 41-ї лекції за 18-ма темами таким чином, щоби теоретичні викладки у попередніх лекціях мали свій розвиток у наступних.

При написанні підручника автором було використано матеріали попереднього посібника "Опір матеріалів", багатий досвід читання лекцій світлої пам'яті професора кафедри опору матеріалів Львівського політехнічного інституту С.Л. Посацького, а також викладачів цієї кафедри. Включено деякі матеріали підручників та монографій, перелік яких наведено у кінці посібника.

Велику допомогу в підготовці підручника та його вичитці надавали: доктори фіз.-мат. наук, професори В.М. Максимович та Г.Т. Сулим, кандидати технічних наук, доценти Д.М. Коновалюк та М.І. Морозов, а також д.ф.-м.н., проф. Я.М. Пастернак та к.т.н., доц. С.В. Ротко, за що автор їм щиро вдячний.

ТЕМА 1 (лекції 1, 2)

ВСТУП. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ

1.1. Мета й завдання опору матеріалів

Опір матеріалів – це наука про інженерні розрахунки на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин та конструкцій.

Під *конструкціями* розуміємо споруди, трубопроводи, машини, греблі, літаки і т.п., тобто усі матеріальні об'єкти техніки, а також їх частини й деталі.

Міцність – це здатність матеріалу чи конструкції не руйнуватися під дією механічного навантаження або температури.

Жорсткість – це здатність конструкції та її елементів опиратися деформуванню (зміні форми і розмірів) під дією зовнішніх навантажень. Деформації не повинні перевищувати допустимих для даної конструкції. Кожна конструкція має бути досить міцна й досить жорстка. Опір матеріалів якраз і виробляє формули й методи, за допомогою яких можна перевірити міцність і жорсткість елемента конструкції, якщо відомо його розміри та матеріал або навпаки – визначити мінімально потрібні розміри. Нарешті, бувають випадки, коли необхідно забезпечити *стійкість* елементів конструкції в цілому або її окремих частин. Під *стійкістю* розуміють здатність цих елементів зберігати під дією заданих сил певну початкову форму пружної рівноваги.

Міцність, жорсткість і стійкість конструкцій в цілому, в тому числі складних конструкцій, розглядає також суміжна наука – *будівельна механіка*.

1.2. Розрахункові схеми. Гіпотези

В опорі матеріалів розрахунок реальних конструкцій на дію зовнішніх навантажень проводиться за допомогою так званих *роз-рахункових схем*. Під ними будемо розуміти

спрощені (шляхом від-кидання другорядних властивостей) моделі реальних конструкцій, які ми собі уявляємо, рисуємо й розраховуємо. Необхідність цього диктується тим, що для реальних об'єктів врахувати усі їх властивості неможливо. З іншого боку, для уніфікації розрахунків ми зацікавлені, щоб за однією й тією самою розрахунковою схемою стояла велика кількість, зовні різних, реальних конструкцій. Спрощення можуть бути геометричними, статичними та фізичними

Геометричні спрощення полягають у тому, що під час розрахунків ми вдаємося до певної ідеалізації, нехтуючи деякими відхиленнями реального об'єкту від званої геометрично правильної форми і класифікуємо такий об'єкт як стрижень (брус), пластинку чи оболонку.

Статичні спрощення стосуються стандартних видів навантаження, відомих з теоретичної механіки, як то зосереджена в точці сила (чого в дійсності бути не може), рівномірно розподілене навантаження, зосереджена пара сил тощо; застосування стандартних видів закріплень конструкції (шарнірно-нерухома опора, шарнірно-рухома опора, жорстке защемлення, також відомі з теоретичної механіки), які приводять до стандартизованих різновидів опорних реакцій.

Фізичні спрощення зазвичай формулюються у вигляді гіпотез, які спрощують механічні властивості матеріалу, а саме:

гіпотеза суцільності – вважаємо, що будь-який як завгодно малий об'єм матеріалу вщерть заповнений речовиною; ця гіпотеза дозволяє не розглядати молекулярну будову речовини, а також усереднювати пористість матеріалів;

гіпотеза ізотропності – механічні властивості матеріалу беремо у кожній точці однаковими в усіх напрямках;

гіпотеза однорідності – властивості матеріалу вважаємо однаковими в усіх точках твердого тіла.

Опір матеріалів займається розрахунками найпростіших елементів конструкцій, якими є *стрижні, пластинки та оболонки* (рис. 1.1).

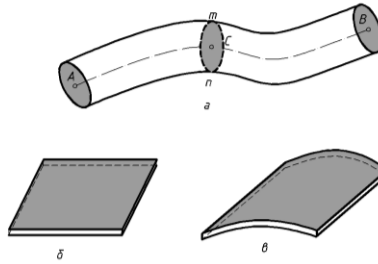


Рис. 1.1

У більшій частині опору матеріалів розглядається міцність та жорсткість стрижнів. *Стрижень* – це тверде тіло, один розмір (довжина) якого значно (хоча б у кілька разів) перевищує два інших виміри (рис.1.1,а). У стрижні ми відзначаємо *поперечні перерізи* $m-n$ та *поздовжню вісь* AB , яка проходить через центри ваги C поперечних перерізів (поперечні перерізи перпендикулярні до поздовжньої осі). Якщо вісь стрижня – пряма лінія, стрижень зветься *прямим*; якщо крива лінія – *кривим*.

Елементи конструкцій, у яких один розмір (товщина) значно менший від двох інших, називають (залежно від форми серединної поверхні) *пластинками* (рис.1.1,б) або *облонками* (рис.1.1,в). *Серединною поверхнею* пластини є площина, що проходить через середину її товщини, а в оболонках – будь-яка криволінійна поверхня.

Під *розрахункову модель* стрижня, пластинки чи оболонки підпадають численні елементи різноманітних конструкцій. Вони можуть бути піддані *деформаціям розтягу, стиску, згину або кручення*. Можуть також одночасно відбуватися дві (або більше) з перелічених найпростіших видів деформації. В цьому випадку ми будемо використовувати *принцип незалежності дії сил* (принцип суперпозиції), у відповідності з яким *ефект від дії декількох чинників (сил, деформацій чи температури) одночасно дорівнює сумі ефектів від дії кожного чинника окремо*.

1.3. Деформації та напруження

Деформацією називається зміна форми й розмірів твердого тіла. Вона може бути спричинена дією сил, зміною температури тощо. Деформації, викликані дією сил, супроводжуються появою напружень у тілі (див. далі) та поділяються на *пружні* (зникаючі, зворотні) й *пластичні* (залишкові). *Пружними* називаються такі деформації, які зникають з усуненням сил, що їх викликають; *пластичними* – ті, що після усунення сил залишаються. Деформації тіла можуть бути *малими* або *великими* порівняно з розмірами тіла. В опорі матеріалів будуть розглядатися тільки *малі деформації*, які можна розкласти на *елементарні*: *лінійні* та *кутові*.

Ми визначали деформацію як явище взагалі. Далі вживатимемо термін “деформація” також у розумінні вимірюваної (або обчислюваної) величини (*лінійні, кутові* деформації). Ще одне значення цього слова – сукупність явищ у стрижні при розтягу (деформація розтягу), при згині (деформація згину), при крученні (кутова деформація) тощо.

Уявімо, що на тверде тіло діють зовнішні сили $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ (рис. 1.2), які намагаються зруйнувати тіло.

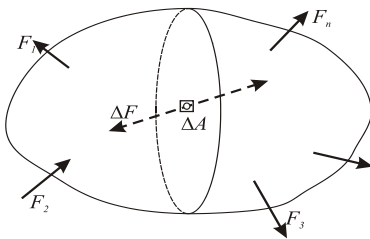


Рис.1.2

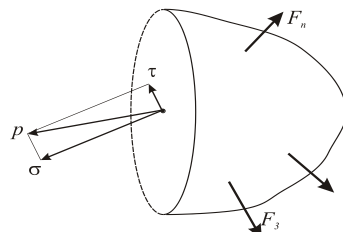


Рис. 1.3

Але відомо, що молекули твердого тіла перебувають на стійких відстанях одна від одної і спроби змінити ці відстані шляхом деформування тіла приводять до появи додаткових сил взаємодії між молекулами. Ці додаткові сили протидіють прагнунню

відновити первісні відстані між молекулами. Вони зуться внутрішніми зусиллями або (це більш поширено) просто зусиллями.

Механічне напруження або просто **напруження** – це зусилля, яке припадає на одиницю площі перерізу, проведеного подумки (методом перерізів) через дану точку тіла. Іншими словами, **напруження – це інтенсивність внутрішніх зусиль**.

Нехай через деяку площинку всередині тіла площею ΔA передається зусилля ΔF . Тоді, згідно з означенням, на цій площинці виникає середнє напруження

$$p_m = \frac{\Delta F}{\Delta A} . \quad (1.1)$$

Зауважимо, що формула (1.1) строго правильна лише за умови, що зусилля ΔF розподілено по елементарній площині ΔA рівномірно. В інших випадках вона дає лише усереднене значення напруження в межах площинки. Але чим площинка менша, тим середні напруження ближчі до дійсного напруження в точці матеріалу. Отже, строго математично напруження визначається за формулою

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} . \quad (1.2)$$

Напруження вимірюється в одиницях сили, поділених на одиницю площі. Наприклад, в міжнародній системі одиниць це H/m^2 (називається “паскаль” і записується Pa), або MPa (мегапаскаль). В технічній системі одиниць напруження вимірюється в кілограмах на 1 квадратний сантиметр ($\hat{e}\tilde{A}/\tilde{m}^2$). Між одиницями вимірювань напружень в технічній та міжнародній системах одиниць існує зв’язок

$$1k\Gamma / cm^2 = 9,81n / cm^2 \approx 0,1MPa .$$

Напруження залежить не тільки від положення точки у твердому тілі, але й від напрямку проведеного перерізу (на відміну від рідини, де тиск у кожній точці за законом Паскаля в

усіх напрямках однаковий). У загальному випадку напруження p спрямоване під деяким кутом до площини перерізу. Ми можемо розкласти його на нормальну й дотичну складові (рис. 1.3). Тоді замість одного “повного” напруження p матимемо два напруження: *нормальне* σ , яке діє у напрямі нормалі до перерізу, й *дотичне* τ , яке діє у площині самого перерізу. Таке розкладання вигідне тим, що в багатьох практично важливих випадках у розглядуваному перерізі матимемо тільки *нормальне* або тільки *дотичне* напруження.

Очевидна формула

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} . \quad (1.3)$$

Із дослідів також відомо, що руйнування тіла внаслідок *відриву* однієї частини тіла від іншої викликане *нормальними* напруженнями, а руйнування *зсувом* відбувається внаслідок дії *дотичних* напружень.

Разом з тим, необхідно знати, що повне напруження і його скла-дові: нормальне та дотичне напруження залежать від розміщення самого перерізу (або напрямку нормалі). Тому для того аби говори- ти про *напружений стан* у певній точці тіла, треба знати множину напружень в усіх перерізах, які можна провести через дану точку.

1.4. Розтяг і стиск

Чистим *розтягом* (або чистим *стиском*) називається такий вид деформації, при якому в поперечному перерізі бруса виникає тільки *повздожжня сила* (*розтягувальна* або *стискувальна*), а всі інші *внутрішні зусилля* (що можуть виникати від дії деформацій згину, зсуву чи кручення) дорівнюють нулю.

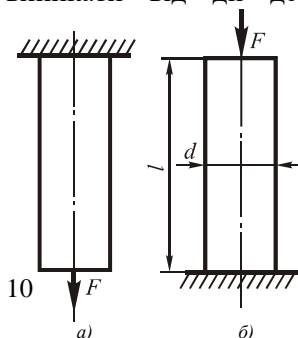


Рис. 1.4

При дії розтягувальної сили (рис. 1.4) довжина стрижня може бути довільною (у межах допустимої жорсткості). Дія стискувальної сили на стрижень великої довжини і

порівняно невеликого поперечного перерізу може викликати явище поздовжнього згину.

У даній лекції розглядаються лише стиснуті стрижні великої жорсткості (відношення довжини стрижня l до найменшого розміру d його поперечного перерізу в межах $l \leq (4 \div 5)d$), для яких небезпеки вигину поздовжньої осі немає

Дія стискувальної сили на стрижень великої довжини і порівняно невеликого поперечного перерізу може викликати

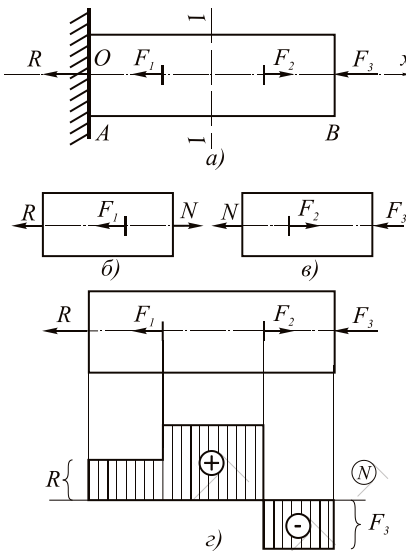


Рис. 1.5

явище поздовжнього згину. У даній лекції розглядаються лише стиснуті стрижні великої жорсткості (відношення довжини стрижня l до найменшого розміру d його поперечного перерізу в межах $l \leq (4 \div 5)d$), для яких небезпеки вигину поздовжньої осі немає.

Для визначення внутрішніх сил при розтягу або стиску використовують

метод перерізів (рис. 1.5). Вісь стрижня суміщаємо з координатною віссю Ox . Задавшись напрямом реакції R , знаходимо її з умови рівноваги сил, прикладених до стрижня:

$$\sum X = 0; \quad -R - F_1 + F_2 - F_3 = 0,$$

звідки $R = -F_1 + F_2 - F_3$.

Для визначення внутрішніх сил у довільному поперечному перерізі 1–1 стрижня розрізаємо його уявно у цьому ж перерізі і відкидаємо одну з частин стрижня. Власною вагою стрижня нехтуємо. Дію відкинутої частини стрижня заміняємо внутрішньою силою, яка називається *поздовжньою* і являє собою рівнодіючу системи сил, що замінює в даному поперечному перерізі вплив відкинутої частини стрижня на ту, що залишилась. При визначенні поздовжньої сили останню зручно вважати розтягувальною і згідно з цим направити вздовж осі стрижня від розглядуваного перерізу. Відкинувши праву частину стрижня (рис. 1.5), з умови рівноваги сил, прикладених до лівої частини, знаходимо

$$N - F_3 - R = 0,$$

і звідси

$$N = F_3 + R = F_2 - F_1.$$

Можна було б відкинути і ліву частину стрижня і розглянути рівновагу правої:

$$-N + F_2 - F_1 = 0,$$

звідки

$$N = F_2 - F_1.$$

З одержаних виразів випливає, що поздовжня сила у довільному перерізі стрижня дорівнює алгебричній сумі зовнішніх сил (в тому числі і реакцій), розташованих з одного боку перерізу. Сили, напрямлені від перерізу – *розтягувальні* (додатні), а сили напрямлені до перерізу – *стискувальні* (від’ємні).

Для наочного зображення розподілу поздовжніх сил будують їх *епюри*, тобто графіки, на яких величина обчислених поздовжніх сил відкладається в масштабі у вигляді відрізків, перпендикулярних до осі стрижня (рис. 1.5, з). Якщо на стрижень діють тільки зосереджені сили, то лінії епюри паралельні її осі.

Аналогічно можна визначити поздовжні сили у стрижні і побудувати їх епюру при дії осьових сил, розподілених вздовж осі стрижня, наприклад сили його власної ваги.

1.5. Напруження в поперечних та нахилених перерізах стрижня

Поздовжня сила являє собою рівнодійну внутрішніх нормальних сил, розподілених по площі поперечного перерізу і зв'язана з нормальними напруженнями, що виникають в цьому перерізі, залежністю:

$$N = \int_A \sigma dA, \quad (1.4)$$

де A – площа поперечного перерізу.

Закон розподілу нормальних напружень в поперечному перерізі стрижня зображається графіком, який показує зміну цих напружень по висоті або ширині поперечного перерізу. Такий графік називається *епюрою нормальних напружень*. Розтягувальні нормальні напруження вважаються додатними, а стискувальні – від'ємними.

Рівність (1.4) задовольняється при будь-якому симетричному відносно осі стрижня розподілі нормальних напружень на площі його поперечного перерізу (рис. 1.6). Проте дослідями встановлено, що у довгих стрижнях нормальні деформації, а отже і напруження σ будуть також розподілятися рівномірно по площі поперечного перерізу стрижня і їх епюра буде мати вигляд прямокутника, показаного на рис. 1.6 а.

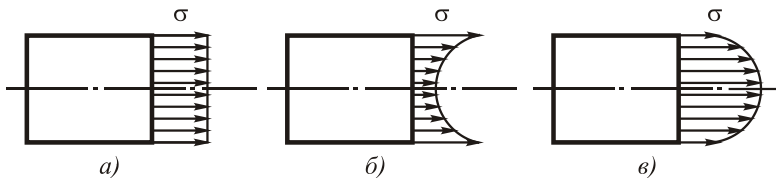


Рис. 1.6

Тоді з рівності (1.4) одержимо

$$N = \sigma \int_A dA = \sigma A.$$

Звідси $\sigma = N/A.$ (1.5)

Отже, виходячи з цього припущення, *поперечні перерізи стрижня, плоскі перед прикладенням навантаження, залишаються плоскими також після нього*. Останнє положення в літературі ще називають *гіпотезою плоских перерізів* або *гіпотезою Бернуллі*.

Проте, як теоретичні, так і експериментальні дослідження показують, що гіпотеза плоских перерізів порушується у безпосередній близькості від місця прикладення навантаження. Точніше дослідження деформацій розтягу-стиску показує, що у місцях, близьких прикладенням до стрижня зовнішніх навантажень, епюри нормальних напружень можуть мати вигляд, представлений рис. 1.6 б, 1.6 в, або будь-який інший вигляд. Тобто, формула (1.5) стає неправильною, а для визначення нормального напруження σ необхідно розв'язувати досить складну задачу математичної теорії пружності. Щоби мати уяву, коли можна використовувати формулу (1.5), французький вчений Б. Сен-Венан у 1855 р. сформулював принцип, який і сьогодні носить його ім'я. Згідно цього принципу

у поперечних перерізах стрижнів, досить віддалених від точок прикладання навантаження, розподіл напружень практично не залежить від детального способу його прикладання, якщо при цьому рівнодійна сила і рівнодійний момент навантаження залишаються незмінними.

Досліди показують, що такими, “достатньо віддаленими”, будуть перерізи на відстані одного-двох поперечних розмірів стрижня. Принцип Сен-Венана справедливий і для інших видів деформацій: згину, кручення, зсуву.

Для одержання повної картини напружень, які виникають в усіх перерізах, що можуть бути проведені через довільну точку стрижня, визначимо напруження у його довільно нахиленому перерізі (рис.1.7).

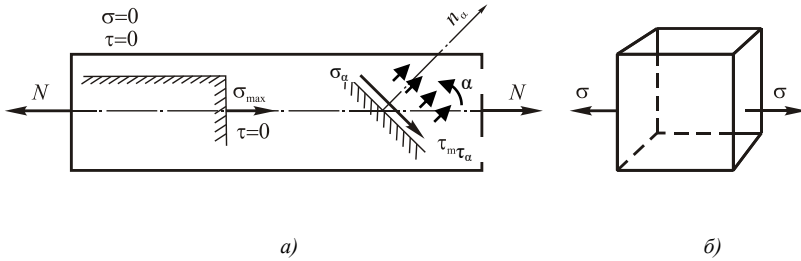


Рис.1.7

Нехай зовнішня нормаль n_α до перерізу утворює з віссю стрижня кут α , який відкладаємо проти ходу стрілки годинника. Площа A_α нахиленого перерізу виражається через площу A_0 поперечного перерізу стрижня

$$A_\alpha = A_0 / \cos \alpha. \quad (1.6)$$

Нормальна складова поздовжньої сили $N_\alpha = N \cos \alpha$ викликає в нахиленому перерізі нормальні напруження, дотична складова $T_\alpha = N \cdot \sin \alpha$ – дотичні напруження:

$$\sigma_\alpha = N_\alpha / A_\alpha, \quad \tau_\alpha = T_\alpha / A_\alpha. \quad (1.7)$$

Беручи до уваги вираз (1.6), знаходимо з останніх формул:

$$\sigma_\alpha = \frac{N}{A_0} \cos^2 \alpha, \quad (1.8)$$

$$\tau_\alpha = \frac{N}{A_0} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (1.9)$$

Знайдемо значення нормальних і дотичних напружень для деяких характерних положень нахиленої площини.

$$\text{Для } \alpha = 0, \quad \sigma_\alpha = \frac{N}{A_0} = \sigma = \sigma_{\max}, \quad \tau_\alpha = 0;$$

$$\text{для } \alpha = 90^\circ, \quad \sigma_\alpha = 0 = \sigma_{\min}, \quad \tau_\alpha = 0.$$

Отже, у перерізах, перпендикулярних до осі стрижня і паралельних його осі (рис. 1.7), немає дотичних напружень, а нормальні напруження набувають екстремальних значень. Площинки, на яких немає дотичних напружень, називаються **головними**, а нормальні напруження, що на них виникають – **головними напруженнями**.

Якщо навколо будь-якої точки стрижня виділити елементарний кубик з ребрами, перпендикулярними та паралельними осі стрижня, то усі грані такого кубика будуть головними площинками. На гранях кубика, перпендикулярних до напрямку дії сили, головні напруження не дорівнюють нулеві, а на всіх інших гранях головні напруження дорівнюють нулеві. Напружений стан матеріалу, при якому головні напруження виникають лише на двох паралельних гранях елементарного кубика, виділеного навколо довільної точки тіла, називається **лінійним**. Таким чином, можна сказати, що при розтягу або стиску матеріал стрижня знаходиться в лінійному напруженому стані (рис.1.8).

Як видно з формули (1.9), у перерізі, що утворює з віссю стрижня кут 45° , виникає максимальне дотичне напруження.

Знайдемо зв'язок між дотичними напруженнями на двох взаємно-перпендикулярних площинках.

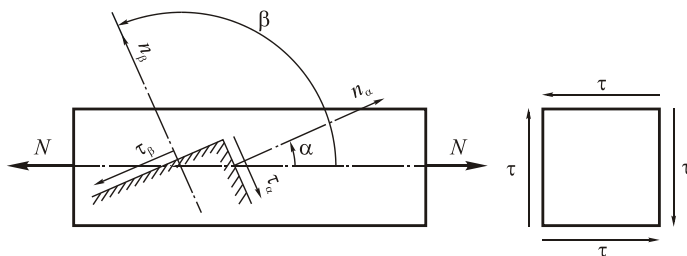


Рис.1.8

Нехай зовнішні нормалі до двох взаємно-перпендикулярних площинок утворюють з віссю стрижня кути α і β , причому $\beta = \alpha + 90^\circ$ (рис.1.8).

На першій з цих площинок дотичне напруження визначається за формулою (1.6). Застосовуючи цю формулу для визначення напруження на площині з зовнішньою нормаллю, одержимо

$$\tau_{\beta} = \sigma \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta = -\sigma \sin \alpha \cos \alpha, \text{ тобто } \tau_{\beta} = -\tau_{\alpha}. \quad (1.10)$$

Остання формула виражає закон парності дотичних напружень: *дотичні напруження на двох взаємно-перпендикулярних площинках перпендикулярні до лінії їх перетину, рівні за абсолютною величиною і протилежні за знаком.*

Це означає, що дотичні напруження напрямлені завжди попарно до ребра перетину двох взаємно-перпендикулярних площинок або від нього (рис. 1.8, б).

1.6. Поздовжні та поперечні деформації. Закон Гука

У 1678 році англійський вчений Р. Гук вперше експериментально встановив, що до певної величини сили *деформації пружного тіла пропорційні силі*. Цей висновок називається *законом Гука* і в застосуванні до розтягу або стиску виражає лінійну залежність між подовженням стержня і подовжньою силою:

$$\Delta l = Nl / (EA), \quad (1.11)$$

де Δl – абсолютна деформація стрижня; l – довжина стрижня;

A – площа його поперечного перерізу; N – подовжня сила;

E – стала матеріалу, що встановлюється експериментально, має розмірність *Па (паскаль)* і називається *модулем нормальної пружності (модулем пружності)* або *модулем Юнга*.

Використовуючи поняття відносної лінійної деформації $\varepsilon = \Delta l/l$, можна формулі закону Гука надати іншого вигляду:

$$\varepsilon = \sigma/E \quad \text{або} \quad \sigma = E\varepsilon. \quad (1.12)$$

Закон Гука справедливий лише до певної величини нормального напруження, яка називається **границею пропорційності** даного матеріалу. В системі координат σ, ε закон Гука зображається прямою лінією, нахиленою до осі під кутом α , причому $\operatorname{tg}\alpha = E$ (рис. 1.9).

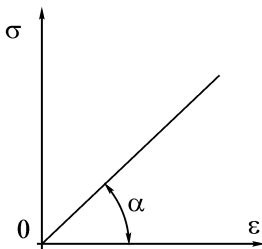


Рис. 1.8

З дослідів відомо, що при осьовій дії сили на стрижень одночасно з поздовжніми деформаціями виникають також поперечні деформації: при розтягу поперечний переріз стрижня зменшується, а при стиску — збільшується.

В межах справедливості закону Гука відносно поперечне вкорочення стрижня ε' пов'язане з його відносним видовженням ε лінійною залежністю:

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \quad (1.13)$$

де μ — коефіцієнт пропорційності, що називається **коефіцієнтом Пуассона**.

Останній є абсолютною величиною відношення поперечного вкорочення до поздовжнього видовження за простого розтягу прямого стрижня у границях справедливості закону Гука:

$$\mu = |\varepsilon'|/|\varepsilon|. \quad (1.14)$$

Коефіцієнт Пуассона для реальних ізотропних матеріалів набуває значення $0 \leq \mu < 0,5$. Він не може бути меншим за нуль, бо інакше в разі розтягу тіла воно б розширювалося у напрямі, перпендикулярному до прикладеної сили. Якщо $\mu = 0$, то

матеріал називають *ідеально стисливим* (пробкове дерево). Коефіцієнт Пуассона не може бути більшим за 0,5, тому що у разі стиснення тіла збільшувався б його об'єм. При досягненні коефіцієнтом Пуассона величини 0,5 відносна зміна об'єму тіла дорівнює нулю, тобто матеріал веде себе як *нестискувальний* (каучук, гума).

Для сталей різних марок він коливається в межах 0,25...0,33, а для анізотропних матеріалів умова для коефіцієнта Пуассона може і не виконуватись. Наприклад, для такого композитного матеріалу як піролітичний графіт коефіцієнт Пуассона в одній із площин анізотропії дорівнює $\mu = -0,21$, а в іншій $\mu = 1,97$.

Запитання для самоаналізу

1. Що вивчає наука „Опір матеріалів”?
2. В чому суть геометричних спрощень в опорі матеріалів?
3. Яким деформаціям може піддаватися об'єкт опору матеріалів?
4. Назвіть гіпотези, які приймаються в опорі матеріалів.
5. Що таке деформація тіла і якою вона буває?
6. Якими можуть бути напруження, що діють на елементарну площинку в тілі?
7. Що таке поздовжня сила?
8. Що називають епюрою поздовжніх сил?
9. Сформуйте гіпотезу плоских перерізів.
10. Сформуйте принцип Сен-Венана.
11. Які напруження називаються головними?
12. Що таке лінійний напружений стан?
13. Сформуйте закон парності дотичних напружень.
14. Як читається і записується закон Гука?
15. Як визначається коефіцієнт Пуассона?
16. Які межі значень коефіцієнта Пуассона?

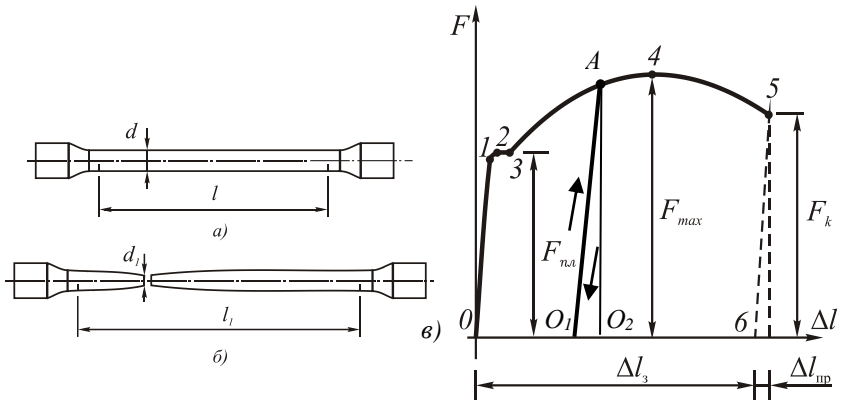
ТЕМА 2 (лекції 3-6)

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ТА АНАЛІТИЧНЕ ВИВЧЕННЯ ДЕФОРМАЦІЙ РОЗТЯГУ Й СТИСКУ

2.1. Діаграми розтягу і стиску

Основна мета курсу опору матеріалів – розробка методів і вивід простих інженерних формул для розрахунку елементів конструкцій на міцність і жорсткість. Оскільки реальні конструкції створюють із конкретних матеріалів, властивості яких можуть змінюватись у доволі широких межах, то експериментальне вивчення цих матеріалів неминуче. Тільки за допомогою експерименту можна з'ясувати величини, необхідні для теоретичних розрахунків, такі як модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, руйнівне напруження та багато інших.

З іншого боку, більшість формул опору матеріалів є наближеними, тому що виводяться на основі певних гіпотез, на підставі яких ми нехтуємо величинами, які вважаємо несуттєвими, малими. Тільки експериментальна перевірка може вирішити, чи придатна остаточна формула для практичних розрахунків, а допущені при її вивченні спрощення не є надто



грубими.

Рис. 2.1

У лабораторних дослідженнях з опору матеріалів провідне місце займають випробування матеріалів на розтяг і стиск (з доведенням до руйнування). Вони дають нам важливі характеристики матеріалів, які застосовують, і не тільки при вивченні розтягу-стиску.

Для випробування металів на розтяг виготовляються зразки стандартної форми й розмірів (один з них показано на рис. 2.1, *а*, *б*– у початковому стані та після руйнування, відповідно). Зразок закріплюють у спеціальній випробувальній машині й розтягують поступово зростаючою від нуля силою, поки він не розірветься на дві частини (рис. 2.1, *б*). У досліді фіксують значення абсолютного видовження Δl його робочої частини l і відповідної сили F . Цю залежність між Δl і F звичайно зображують графічно у вигляді “діаграми розтягу” (рис. 2.1, *в*).

Різні типи матеріалів мають свої характерні форми діаграм. Діаграму $F \sim \Delta l$ м’якої пластичної сталі зображено на рис. 2.1, *в*. Практично майже кожний матеріал має таку початкову стадію деформування, за якою залежність між деформацією та силою можна вважати пропорційною (тобто брати графік за пряму лінію 0–1). Це так звана ділянка пропорційності, на якій справджується закон Гука. Після деякого переходу 1–2, де зусилля вже змінюються нелінійно по відношенню до видовжень (хоча залишкові видовження ще практично відсутні), маємо “**площинку плинності**” 2–3. **Плинність** – це явище, коли деформація зростає

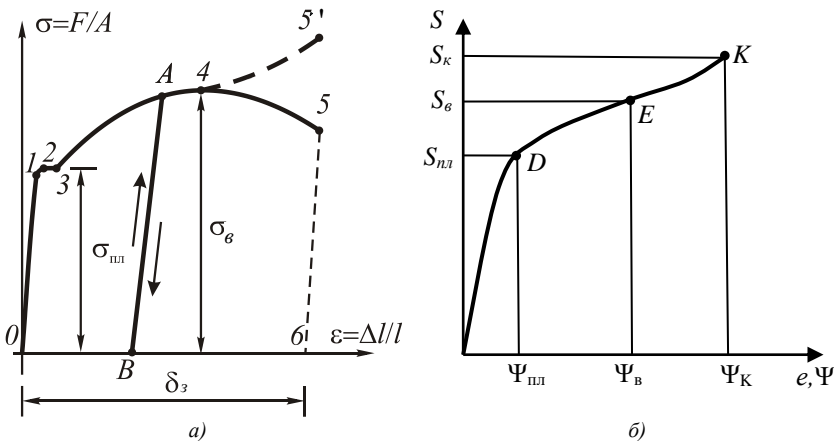


Рис. 2.2

при майже незмінній силі. Далі йдуть ділянка “зміцнення” 3–4 та ділянка руйнування 4–5. Дивна, на перший погляд, обставина, що на останній ділянці до моменту розриву сила зменшується, пояснюється так: до досягнення найбільшої сили F_{\max} стрижень подовжується рівномірно по всій довжині; після досягнення F_{\max} у деякому місці стрижня утворюється так звана “шийка” – місцеве звуження (рис. 2.1, б), чим намічається місце розриву. Тепер остаточно розірвати зразок легше, ніж коли довести його до утворення шийки. Утворення шийки перед розривом – це одна з проявів властивості пластичності матеріалу.

Якщо припинити випробування до розриву зразка й зняти навантаження, то можливі два випадки:

а) у межах ділянок пропорційності $\overline{01}$ та нелінійності $\overline{12}$ подовження Δl (як пружне) практично зникне, тобто зразок відновить первісну довжину;

б) за ділянкою плинності (точка А) зникне лише деяка частина повного видовження OO_2 – його пружна частина O_1O_2 , а залишкове видовження OO_1 збережеться. Тобто, повна

деформація завжди буде сумою пружної та пластичної (залишкової) деформацій:

$$\Delta l = \Delta l_{\text{пр}} + \Delta l_{\text{пл}}.$$

Ця особливість зберігається до самого розриву зразка. Детальніші експерименти показують, що лінія розвантаження AO_1 , як і повторна лінія навантаження O_1A , не є, по суті абсолютно прямими, паралельними лінії $\overline{O1}$. Особливо це стосується полімерних та композитних матеріалів, діаграма розвантаження яких значно відрізняється від закону Гука.

Діаграми розтягу **високоміцних крихких сталей** характеризуються відносно високими значеннями сили, малими деформаціями та відсутністю ознак пластичності.

Результатами випробувань мають бути **механічні характеристики матеріалу**. Проте числа, які поки що є на діаграмі *в*) рис.2.1, характеризують лише даний зразок, а не даний матеріал. Вони стануть зовсім іншими, якщо зробити зразок інших розмірів. Характеристики матеріалу дістанемо, якщо поділимо всі подовження на первісну довжину l_0 , а силу F – на первісну площу перерізу A :

$$\varepsilon = \Delta l / l_0; \sigma = F / A. \quad (2.1)$$

Залежність між відносним подовженням ε і напруженням σ також можна подати у вигляді графіка (рис. 2.2, *а*), який називається *діаграмою напружень при розтягу*. На цій діаграмі вже відобразяться *механічні характеристики* матеріалу:

а) границя пропорційності $\sigma_{\text{пр}}$ (ордината точки 1). Це напруження, за якого зберігається пропорційна залежність між силою та деформацією

$$\sigma_{\text{пр}} = F_{\text{пр}} / A; \quad (2.2)$$

б) ще одна характеристика матеріалу – *границя пружності* (ордината точки 2)

$$\sigma_{np} = F_{np} / A. \quad (2.3)$$

Це напруження, до якого деформації є пружними (відтворюваними, бо залишкові деформації не перевищують 0,001–0,05%). Названа величина для сталі та багатьох інших матеріалів близька до границі пропорційності й дуже часто ототожнюється з нею, але, в принципі, це різні поняття;

в) **границя плинності** σ_{nl} . Це напруження, за якого відбувається явище плинності

$$\sigma_{nl} = F_{nl} / A. \quad (2.4)$$

У багатьох матеріалах точно виявленої площинки плинності немає, тому використовують термін “**границя плинності умовна**” – $\sigma_{0,2}$, яка являє собою напруження при відносному залишковому видовженні, що дорівнює 0,2% початкової довжини зразка;

г) **границя міцності** (тимчасовий опір). Це напруження за максимальної сили

$$\sigma_{mц} = F_{max} / A. \quad (2.5)$$

Пластичні властивості матеріалу розтягу оцінюють його залишковою деформацією після розриву. Такими характеристиками є:

а) **відносне залишкове видовження** δ_3 . Це частка від поділу абсолютного залишкового подовження на первісну довжину

$$\delta_3 = \Delta l_3 / l_0. \quad (2.6)$$

Після перемноження величини δ_3 на 100% її ще називають **характеристикою пластичності матеріалу**. Якщо $\delta_3 < 5\%$, то такий матеріал вважають крихким, а при $\delta_3 > 5\%$ –

пластичним. Маловуглецеві сталі (Ст2, Ст3) мають величину $\delta_s \geq 25\%$;

б) нерідко визначають так званий *коефіцієнт пластичності матеріалу*:

$$\psi_k = \frac{A - A_k}{A} \cdot 100\% , \quad (2.7)$$

який ще називають *відносним залишковим звуженням*. A_k – площа перерізу зразка після випробування (площа шийки перерізу). Для маловуглецевих сталей $\psi_k \geq 50\%$.

Розвантаження зразка на діаграмі розтягу (рис. 2.1, в) з точки A до точки O_1 та повторне його навантаження до точки A відобразиться і на діаграмі напружень (рис. 2.2, а) – від точки A до точки B та повторним навантаженням з точки B до точки A . З цієї діаграми видно, що відбувається деяке збільшення границь σ_{m1} та σ_{n1} у порівнянні із значеннями в точках 1-3 початкової стадії навантаження. Явище збільшення границь пропорційності, пружності і плинності попередньо пластично деформованого матеріалу називається *наклепом*. При *наклепі*, одночасно зі збільшенням механічних характеристик матеріалу, відбувається зниження його пластичності. *Наклеп* з'являється на поверхні деталей при холодній обробці їх і веде до небажаного зниження якості матеріалу. Для усунення наслідків цього явища використовують технології відпалювання матеріалу деталей, тощо.

Явище наклепу часто використовують у техніці: наприклад, для зменшення провисання проводів, їх попередньо витягують для досягнення *наклепу*.

Крім цього, якщо зменшення сили F при наближенні до розриву зразка на діаграмі розтягу (рис. 2.1, в) – є реальністю, то зменшення напруження на діаграмі $\sigma \sim \varepsilon$ (рис. 2.2, а) – є фікцією, яка виникає тільки внаслідок ділення кожного разу на первісну площу, тоді як у дійсності площа незадовго до розриву

значно зменшується. Коли це врахувати, то діаграма “підє” по швидко наростаючій кривій 4–5’ (рис. 2.2, а). Така діаграма вже буде називатися **істинною діаграмою напружень**, а напруження S з цієї діаграми **істинними (дійсними) напруженнями**. Їх можна отримати діленням діючої сили F на реальну площу поперечного перерізу – A_p . Тобто, таку площу, яку має зразок у момент дії прикладеної сили –

$$S = F / A_p .$$

Крім цього, по осі абсцис у фіктивній діаграмі напружень відкладаються відносні деформації $\varepsilon = \Delta l / l_0$, які не враховують зміни довжини стрижня. Легко показати, що між істинною відносною лінійною деформацією e та фіктивною ε існує залежність

$$e = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon),$$

яку ще називають *логарифмічною* або *істинною* деформацією.

Різниця між ними не перевищує 10%, якщо деформування відбувається до досягнення границі текучості, де $\varepsilon < 20\%$. Тому до утворення “шийки” перерізу можна вважати, що $e \approx \varepsilon$.

Аналогічно, для істинного звуження поперечного перерізу зразка можна записати

$$\Psi = - \int_A^{A_p} \frac{dA}{A} = \ln \frac{A}{A_p} = \ln \frac{A}{A - \Delta A} = \ln \frac{1}{1 - \psi},$$

де $\psi = \frac{\Delta A}{A}$ – фіктивне відносне звуження шийки стрижня.

Умовну діаграму напружень отримують безпосередньо з експерименту, шляхом перерахунку за формулами (2.1). Для побудови діаграми істинних напружень необхідно ширше вивчити властивості матеріалу. Відмінність між умовними та

істинними напруженнями невелика при невеликих залишкових напруженнях (наприклад $\sigma_{nl} \approx S_{nl}$) і росте із збільшенням деформації. Між напруженнями $\sigma = F/A$ та $S = F/A_p$ існує кількісний зв'язок через використання параметра відносного звуження ψ у вигляді залежностей

$$\sigma = SA_p / A = S(1 - \psi) \text{ або } S = \sigma / (1 - \psi). \quad (2.8)$$

Параметр ψ можна виразити через параметр ε , якщо вважати, що до моменту утворення “шийки” деформація стрижня є однорідною, а матеріал нестисливим. Тобто, за умов збереження об'єму;

$$A_0 l_0 = Al, \text{ або } (A/A_0)^{-1} = l/l_0.$$

Із означення ψ та ε остання рівність тотожна таким співвідношенням:

$$\frac{1}{1 - \psi} = 1 + \varepsilon; \quad \psi = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}; \quad \varepsilon = \frac{\psi}{1 - \psi}.$$

Прологарифмувавши перше співвідношення (2.9), та врахувавши формули (2.7) і (2.7,a), можна одержати наступні рівності:

$$\ln \frac{1}{1 - \psi} = \ln(1 + \varepsilon) \text{ або } \Psi = e. \quad (2.9 a)$$

Отже, при однорідній деформації стрижня, *істинне відносне звуження* та *істинне відносне видовження* між собою рівні.

Міцність на кінцевій стадії деформації оцінюється тільки дійсним напруженням матеріалу $S_k = F_k/A_k$. Діаграма дійсних (істинних) напружень у координатах $S \sim e, \Psi$ наведена на рис.2.2, б. Разом з тим, більш точні дослідження М.М. Давиденкова та Н.І. Спиридонової показують, що

напруження S_k необхідно підраховувати за точнішою формулою:

$$S_\varepsilon = \frac{F_k}{A_k (1 + a/(4R))} \left(1 + \frac{a}{2R} - \frac{r^2}{2aR} \right), \quad (2.10)$$

де a – радіус найменшого поперечного перерізу шийки; R – радіус кривини перерізу шийки в точці найменшого поперечного перерізу; $A_k = \pi a^2$.

Таким чином, аналіз формули (2.10) показує, що осьові напруження змінюються по товщині нерівномірно: найбільше напруження виникає в центрі перерізу стрижня, а найменше – на його зовнішній поверхні:

$$S_\varepsilon^{\max/\min} = \frac{F_k}{A_k} (1 \pm a/(4R)). \quad (2.11)$$

Формули (2.10), (2.11) добре підтверджуються експериментально при $R \geq 1,3a$. Разом з тим, необхідно враховувати і той важливий факт, що в момент розриву в перерізі шийки вже є тріщина.

В літературі часто для маловуглецевих та низьколегованих пластичних сталей опір руйнуванню знаходять за формулою:

$$S_k = \sigma_{mi} (1 + 1,4\psi_k). \quad (2.12)$$

Для випробування матеріалів на стиск зразкам надається форма кубиків, призм або циліндрів (рис. 2.3). Ці випробування мають більше невизначеності та умовності, ніж при розтягу. Недоліком випробування на стиск є трудність одержання однорідних деформацій по висоті зразка. Причиною цього є сили тертя, що виникають між плитами преса та торцевими поверхнями зразків. Сили тертя утруднюють рівномірність поперечного розширення по висоті: посередині висоти воно найбільше, а біля кінців – найменше. У перших дослідах із стиску цими силами нехтували, тому пластичні чи крихкі

циліндри набирали бочкуватої форми, а кубики з крихкого матеріалу починали руйнуватися, викришуючись у середніх перерізах (рис.2.3). Зразки з пластичного матеріалу поступово перетворюються на корж, тому чіткого моменту руйнування немає (2.3, а). Проте границі пропорційності, текучості виявляються за значенням й за величиною приблизно такими самими, як на розтяг. Крихкі матеріали – камінь, чавун протистоять стиску значно краще, ніж розтягу. Руйнування відбувається у формі розтріскування, викришування матеріалу тощо (рис. 2.3, б, в).

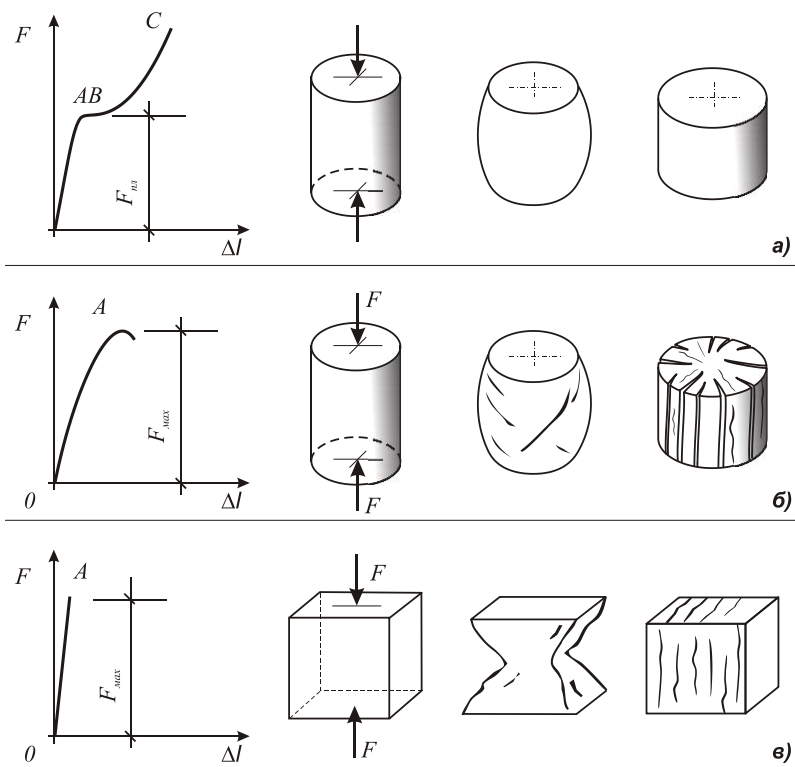


Рис.2.3

Тільки значно пізніше (1900 р.) німецький механік А.Фепль запропонував для ліквідації сил тертя змащувати поверхні преса парафіном. В результаті: циліндричні зразки за стиску втратили бочкоподібну форму, а в кубиках з каменю (як і у чавунних циліндриках) виникали тріщини, переважно паралельні напрямові стиску, тобто вздовж площин на яких напруження дорівнюють нулю (рис. 2.3). В даний час, для зменшення сил тертя, на торцях зразків можуть встановлювати прокладки із пластичних матеріалів (наприклад, олив'яні) або шар графітового чи парафінового мастила.

Аналіз діаграм розтягу та стиску показав, що вони приблизно однакові до моменту виникнення у матеріалі плинності. Відповідно однакові і границі пропорційності, пружності та плинності. Після початку пластичних деформацій криві діаграм стиску піднімаються дещо вище діаграм розтягу, оскільки при стиску площі поперечних перерізів не зменшуються, а збільшуються. У зв'язку із останнім в умовних діаграмах стиску відсутні спадні вітки, а діаграми істинних напружень проходять дещо нижче і приблизно співпадають із діаграмами істинних напружень розтягу (рис. 2.4 а). Тут діаграма 1 відповідає сталі Ст 3, а діаграма 2 – чавуну.

Разом з тим, при одночасному комплексному випробуванні зразків на розтяг і стиск проявляються властивості матеріалу, які отримали назву **ефекту Баушінгера**. Тобто, якщо при деякому ступені навантаження зразка на розтяг (вище границі плинності) почати його розвантаження з наступним стиском, то виявляється, що границя плинності при такому стиску буде меншою від границі плинності попереднього розтягу (рис. 2.4,

б): $\sigma'_{0,2} < \sigma_{0,2}$. Якщо ж після цього знову почати розтяг зразка до досягнення ним границі плинності $\sigma''_{0,2}$, то виявиться, що $\sigma''_{0,2} < \sigma'_{0,2}$. Узагальнюючи сказане, можна прийти до висновку, **що дія осьового зусилля одного знаку (наприклад, розтягу) у зоні пластичної деформації знижує опір цього матеріалу пластичному деформуванню за дії зусиль протилежного знаку (у даному випадку – стиску):**

$$\sigma''_{0,2} < \sigma'_{0,2} < \sigma_{0,2}.$$

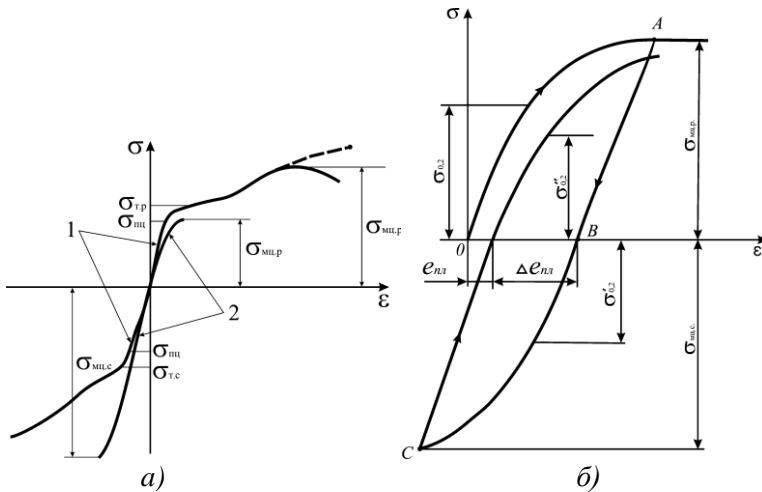


Рис. 2.4

Описане явище називають ще **деформаційною анізотропією**, тобто появу анізотропії механічних властивостей там, де її не було. Унаслідок цього ефекту деякі метали після значних пластичних деформацій, викликаних технологічними операціями вальцювання, пресування тощо, можуть набути істотної анізотропії.

Крім того, деякі матеріали (наприклад деревина), що мають волокнисту структуру, є анізотропними за природою і мають неоднакову міцність вздовж і поперек волокон (табл. 2.1).

Таблиця 2.1. Механічні властивості деревини

Матеріал	$\sigma_{мц}^p$, МПа	$\sigma_{мц,с}^{взд}$, МПа	$\sigma_{мц,с}^{попер.}$, МПа
Сосна	80	40	5
Ялина	65	35	4
Дуб	95	50	15

В таблиці у першій колонці наведені значення границі міцності деревини на розтяг вздовж волокон. Друга і третя колонки відповідають границям міцності на стиск вздовж і поперек волокон. Границя міцності деревини вздовж волокон значно вища границі міцності поперек волокон. Границю

міцності деревини нестандартної вологості знаходять за відомою формулою:

$$\sigma_{i\delta} = \sigma_{i\delta}^{\text{н0}} (1 + \alpha(w - 15)), \quad (2.13)$$

де w – вологість зразка у %; α – якісний коефіцієнт (для сосни, бука, берези і ясеня $\alpha = 0,5$, а для дуба і ялини $\alpha = 0,04$).

При деформуванні вздовж волокон, як правило, проходить зсув однієї частини зразка відносно другої, а при стиску поперек поперек волокон, зразок може взагалі не зруйнуватись (рис. 2.5, б).

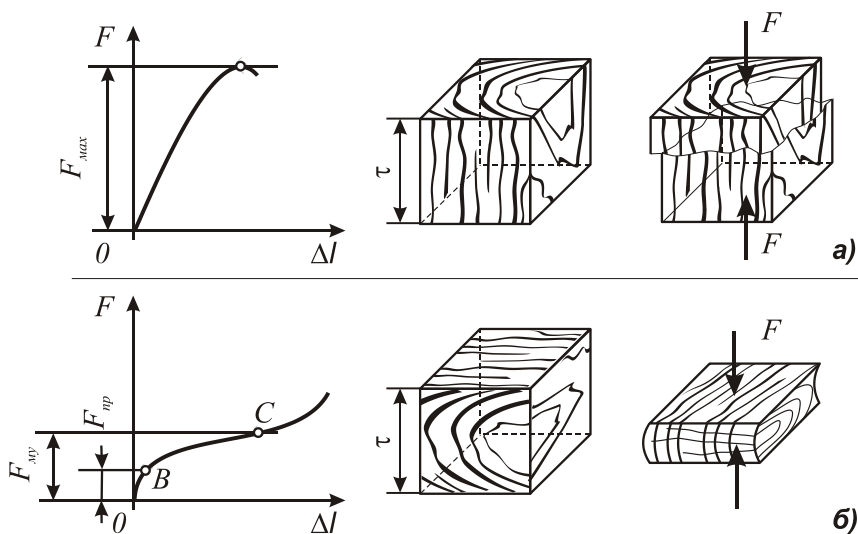


Рис. 2.5

Тому в цьому випадку за руйнівне навантаження приймають навантаження, що відповідає вкороченню зразка на $1/3$ початкової висоти. Діаграми стиску деревини зображена на рис. 2.5.

Замкнутий контур $ABCDE$ (рис. 2.4, б) має назву **петлі пластичного гістерезису**. Буває, що петля замикається за першим циклом, але може бути і так, що замикання не відбувається, хоча послідовні нитки розміщуються одна за

одною. Якщо деформування відбувається у пружній області, то подібний випадок називають *петлею пружного гістерезису*. В обох випадках площа петлі гістерезису, утвореної вітками діаграми навантаження у процесі навантаження та розвантаження, дорівнює різниці між енергією деформації, поглинутої під час навантаження, та енергією, що повертається у момент розвантаження. Її площа становить залишкову (не повернуту під час розвантаження) енергію деформування. Чисельно вона дорівнює питомій енергії, що розсіюється за один цикл зміни навантаження внаслідок внутрішнього тертя.

Явище гістерезису використовується в інженерній практиці для вивчення циклічної втоми матеріалу. В умовах навантаження, які є близькими до границі плинності або перевищують її, появляється явище *пластичної післядії*, де основним чинником гістерезисних втрат є попередня пластична деформація матеріалу у межах кожного циклу.

Питаннями аналітичного опису закономірностей зміни діаграм циклічного деформування матеріалів займалися І.Дж. Морроу, В.В. Московітін, Г.С. Писаренко, В.Т. Трощенко та інші, якими були сформульовані так звані узагальнені енергетичні підходи.

2.2 Аналітичний опис діаграм деформування. Моделі деформування матеріалу

Результати експериментальних досліджень матеріалів відображають складну нелінійну залежність між напруженнями та деформаціями. Разом з тим, необхідність розрахунку елементів конструкцій за границею пружності (у пластичних зонах), вимагає апроксимації таких діаграм у вигляді аналітичних залежностей між напруженнями та деформаціями. Тому, для практичних розрахунків будують більш спрощені, ідеалізовані моделі деформування, які забезпечують можливість розв'язання практично важливих проблем з потрібною точністю. Одновимірною моделлю пружного матеріалу подана на рис. 2.6. Їй властиве те, що процес навантаження та розвантаження матеріалу відбувається однією і тією самою лінією.

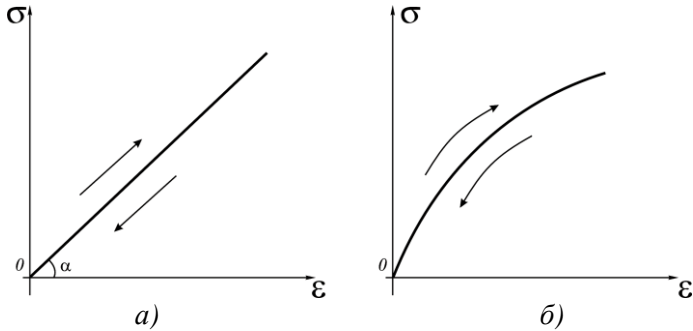


Рис. 2.6

Для *лінійно-пружної моделі* це може бути лінійна залежність, що описується законом Гука – $\sigma = E\epsilon$ (рис. 2.6, а) або *нелінійно-пружна модель* $\sigma = f(\epsilon)$ (рис. 2.6, б), коли вважається, що матеріал однаково реагує на розтягання чи стискання. Для різномодульних матеріалів замість модуля пружності E використовується величина E_i ($i=1$ для $\sigma > 0$ (розтяг), $i=2$ для $\sigma < 0$ (стиск)).

Основною моделлю пластичного матеріалу є модель ідеального пружно-пластичного матеріалу (рис. 2.7, а). Визначальні співвідношення цієї моделі можна записати у такому вигляді:

$$\sigma = \begin{cases} E\epsilon & \text{при } \epsilon < \epsilon_{пл}, \\ \sigma_{пл} & \text{при } \epsilon \geq \epsilon_{пл}, \\ \sigma_{пл} - E(\epsilon_1 - \epsilon) & \text{при розвантаженні,} \end{cases} \quad (2.14)$$

де ϵ_1 – відносна лінійна деформація, що відповідає точці 1 на діаграмі (рис. 2.7, а).

Повторне навантаження йде в режимі пружного деформування до моменту досягнення границі плинності. Після цього знову починається плинність матеріалу. Дана модель може застосовуватись для матеріалів з невеликим зміцненням.

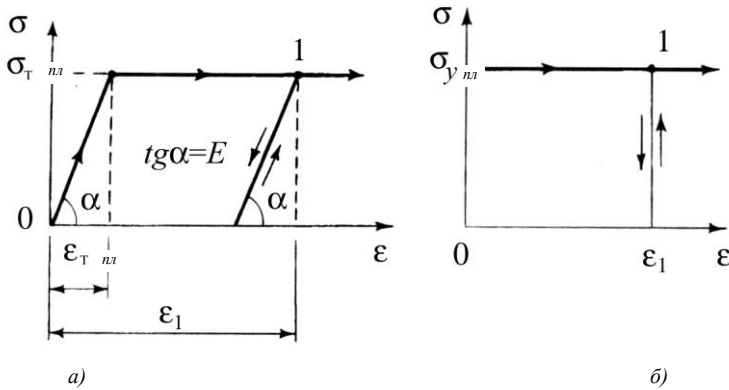


Рис. 2.7

Спрощеною моделлю пружно-пластичного матеріалу є *модель ідеально жорстко-пластичного матеріалу* (рис. 2.7, б). Це спрощення полягає в тому, що поки напруження не досягнуть границі плинності, деформації в тілі вважають відсутніми (або такими, якими можна нехтувати). При $\sigma = \sigma_{nl}$ у тілі відбувається пластична плинність. Цю модель можна застосовувати, коли пластичні деформації набагато перевищують пружні, а зміцненням матеріалу можна знехтувати.

Складнішою є *модель пружно-пластичного матеріалу з лінійним зміцненням* (рис. 2.8, а). Так само як і для ідеально пружно-пластичного матеріалу, до моменту досягнення границі плинності матеріал деформується пружно з модулем пружності $E = \tan \alpha$. Після досягнення цієї границі в умовах навантаження зв'язок між напруженнями і деформаціями залишається лінійним, але змінюється коефіцієнт пропорційності $E' = \tan \beta$. При розвантаженні матеріал залишається лінійно-пружним з модулем E .

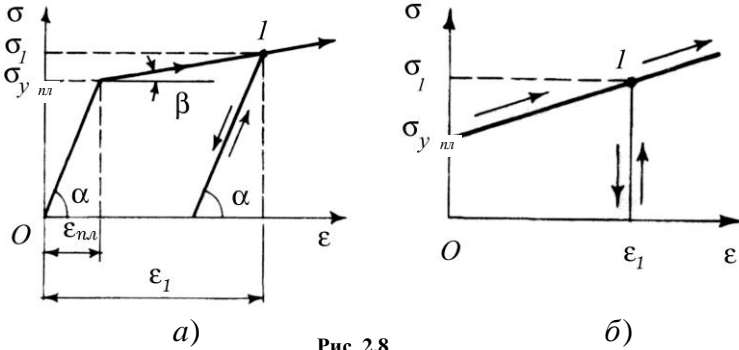


Рис. 2.8

Визначальними співвідношеннями цієї моделі є:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \text{при } \varepsilon < \varepsilon_{пл}, \sigma < \sigma_{пл}; \\ \sigma_{пл} + E'(\varepsilon - \varepsilon_{пл}) & \text{при } \varepsilon > \varepsilon_{пл}, \sigma \geq \sigma_{пл}; \\ \sigma_{пл} - E(\varepsilon_1 - \varepsilon) & \text{при розвантаженні.} \end{cases} \quad (2.15)$$

Повторне навантаження такого матеріалу відбувається лінійно-пружно до моменту досягнення напруження σ_1 , за якого почалось розвантаження. Це напруження відіграє роль нової границі плинності, що перевищує первісну $\sigma_1 > \sigma_{пл}$. Дальше підвищення напружень відбувається за лінійним законом, але модуль E знову змінюється на E' .

Спрощеною моделлю лінійно-пружного матеріалу з лінійним зміцнення є **модель жорстко-пластичного матеріалу з лінійним зміцненням** (рис. 2.8, б).

Її відмінність від попередньої тільки у відсутності першої рівності в умовах (2.15), тобто

$$\sigma = \sigma_{пл} + E'\varepsilon. \quad (2.16)$$

Попередні лінійні схематизації кривої деформування є простими, але вони не достатньо точно відображають початкову ділянку пружних деформацій. Тому використовують також і нелінійні апроксимації. Експериментально доведено, що лінійний зв'язок між напруженнями і деформаціями є умовною залежністю для досить обмеженої категорії конструкційних металів, що мають площинку або зуб плинності (маловуглецеві

сталі, конструкційні сплави на основі тугоплавких металів і алюмінію, а також деякі метали у крихкому стані). Більшості сучасних високоміцних металів характерна сильно виражена нелінійність навіть в області робочих деформацій. Це і чавун, і високолеговані та литі сталі, мідь і деякі сплави на її основі, більшість пористих металів, одержаних методом порошкової металургії. Вони не мають лінійної залежності між напруженнями та деформаціями від самого початку деформування, а їх діаграма $\sigma - \varepsilon$ описується співвідношеннями:

$$\sigma = A\varepsilon - B\varepsilon^2, \quad \sigma^n = \varepsilon E,$$

де A, B, n – сталі, що визначаються з експериментів.

Перша залежність була рекомендована для інженерів Британською Королівською комісією ще в 1849 р. для заліза при дослідженнях розтягу, стиску та згину. Другу залежність називають ще *законом Баха-Шюле* (1905). Цю залежність К. Бах використовував для опису стиску матеріалів: чавуну, каменю (граніт $n=1,13$), цементу ($n=1,09$). При $n < 1$ даний закон добре описує деформацію шкіри, прядива коноплі, тощо. Значення $n = 3 \div 5$ мають матеріали з великою мірою зміцнення.

В 2003 р. українським вченим В.А. Стрижалом перша залежність була підтверджена при випробуваннях зразків з армо-заліза в області макропружних деформацій. Була доведена необхідність враховувати нелінійність деформування для багатьох сучасних конструкційних матеріалів.

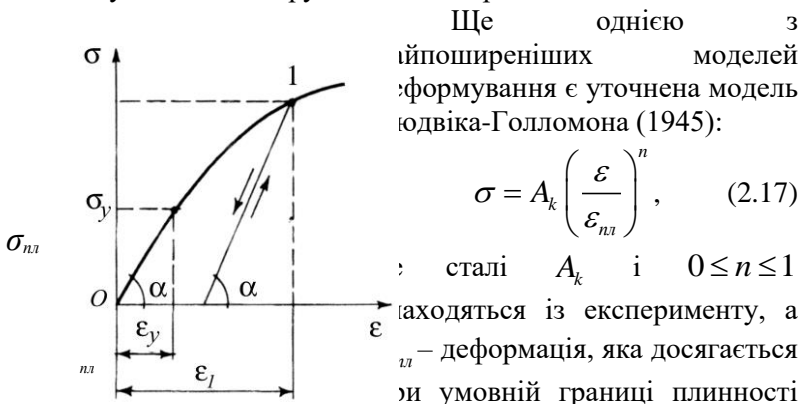


Рис. 2.9

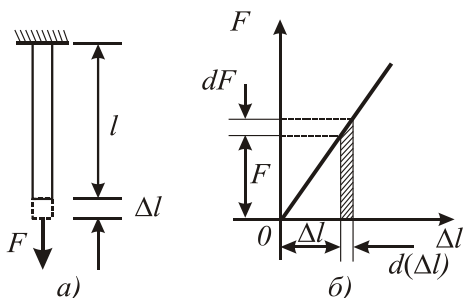
$\sigma_{nl} = \sigma_{0,2}$ (рис. 2.9). При значеннях $A_k = \sigma_{nl}$, а $n=1$ або $n=0$, отримаємо варіанти лінійно-пружної або жорстко-пластичної моделі матеріалу відповідно.

Дана модель називається **моделлю нелінійно пружно-пластичного матеріалу**. На відміну від попередніх моделей, у даній моделі пластичні деформації виникають відразу після навантаження тіла. За повного розвантаження з будь-якої точки 1 лінії діаграми виникають залишкові деформації. У разі повторного навантаження деформування відбувається за лінійним законом (з певним модулем пружності) до точки 1, а далі за законом (2.17). Основним недоліком цієї моделі є те, що вона справедлива тільки для великих деформацій.

Існують і складніші моделі пластичних тіл, що враховують різноманітність, нелінійність розвантаження тощо. Їх застосування до розв'язування конкретних практичних задач необхідно перевіряти експериментом та іншими підходами. Нехтування цими застереженнями може призвести до хибних результатів.

2.3. Робота та енергія деформації розтягу

Здатність матеріалу стрижня чинити опір його розтягу силою F , що зростає від 0 до F_{\max} , характеризується роботою, яку потрібно затратити на його деформування – **роботою деформації розтягу**. Для її визначення будемо вважати, що стрижень довжиною l видовжується статичною силою F на величину Δl (рис. 2.10, а). Нехай тепер сила F отримає приріст dF . Під впливом приросту сили стрижень отримає додаткове переміщення $d(\Delta l)$, якому буде виконуватись елементарна робота –



$$dA_F \approx F \cdot d(\Delta l). \quad (2.18)$$

Знак наближеної рівності “ \approx ” поставлено тому, що у формулі (2.18) ми знехтували величиною вищого

Рис. 2.10

порядку малості $\left(\frac{1}{2} dF \cdot d(\Delta l)\right)$.

Повна робота від початку розтягу до деякого моменту, коли стрижень отримає видовження $\Delta l = \Delta l_1$, дорівнює:

$$A_F = \int_0^{\Delta l_1} F d(\Delta l). \quad (2.19)$$

Якщо деформування стрижня відбувається у межах закону Гука, то $\Delta l = \frac{Fl}{EA}$, $d(\Delta l) = \frac{l}{EA} dF$.

Підставивши у формулу (2.19) для роботи значення $d(\Delta l)$ та, замінивши в ньому верхню границю інтегрування Δl_1 на відповідне цьому переміщенню значення сили F_1 , отримаємо:

$$A_F = \int_0^{F_1} \frac{l}{EA} F dF = \frac{F_1^2 l}{2EA} = \frac{1}{2} F_1 \Delta l_1,$$

або, опускаючи індекси при A, F і Δl ,

$$A = \frac{1}{2} F \Delta l. \quad (2.20)$$

Графічно ця робота відображена площею трикутника OAB на діаграмі розтягу $\Delta l - F$ (рис. 2.10, б).

Робота, що знаходиться за формулою (2.20), є *мірою потенціальної енергії деформації* U , накопиченої у пружному стрижні при його деформуванні силою F . Тому, нехтуючи деякими затратами роботи зовнішніх сил на подолання сил внутрішнього тертя, зміни температури і магнітних властивостей матеріалу, можна записати, що:

$$U = A_F = \frac{1}{2} F \Delta l. \quad (2.21)$$

Величину *питомої потенціальної деформації* легко знайти, поділивши величину U на об'єм розрахункової частини зразка:

$$u = U / V = \frac{F \cdot \Delta l}{2 \cdot A \cdot l} = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon. \quad (2.22)$$

Величина u характеризує міру накопичення в одиниці об'єму матеріалу потенціальної енергії пружної деформації.

Після вираження у формулі (2.22) відносного видовження ε через напруження σ і навпаки, вираз для питомої потенціальної деформації може бути записаний наступним чином:

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2. \quad (2.23)$$

Як видно з формул (2.22), (2.23), розмірність питомої потенціальної деформації така сама, як і напруження.

Для знаходження повної роботи, яка затрачується на розрив зразка, необхідно знайти площу всієї діаграми розтягу $\overline{O1-57}$ (рис. 2.2, а). Величина цієї площі може бути записана так:

$$A_n = \varphi F_{\max} \cdot \Delta l_{\max}, \quad (2.24)$$

де φ – коефіцієнт повноти діаграми.

Коефіцієнт φ є сталою матеріалу і знаходиться на основі експериментальних даних. Для маловуглецевих сталей $\varphi = 0,85$.

2.4. Розрахунок на міцність за розтягу та стиску методом допустимих напружень

Для забезпечення надійної роботи елементів конструкції необхідно, щоб рівень максимальних напружень в них не перевищував певної величини (граничних значень), за якою починаються пластичні деформації або крихке руйнування. В цих випадках говорять, що елемент конструкції знаходиться у *граничному стані*. В зв'язку з тим, що напружений стан в перерізах елементів конструкції у більшості випадків буває неоднорідним, то оцінка небезпечного стану конструкції *за граничним станом* в окремих її точках веде до розрахунку *за методом допустимих напружень*. Якщо ж напруження

досягають *граничних значень* у всьому перерізі конструкції, що веде до втрати її *тримальної здатності*, то такий метод розрахунку називається *методом руйнівних навантажень*.

Допустимі напруження обчислюються як певна частина граничних напружень, визначених експериментально в умовах, аналогічних до тих, в яких елемент конструкції має працювати. Методика визначення граничних напружень розглядається в лабораторних роботах курсу.

Для крихкого матеріалу допустиме нормальне напруження визначають як частину границі міцності матеріалу при розтягу або стиску, яка в цьому випадку буде граничним напруженням

$$[\sigma] = \sigma_{мц} / n_{мц}, \quad (2.25)$$

де $\sigma_{мц}$ – границя міцності матеріалу; $n_{мц}$ – коефіцієнт запасу відносно границі міцності, величина якого залежить від ряду факторів і становить 3...9.

Оскільки границі міцності крихких матеріалів при розтягу і стиску різні, за формулою (2.25) обчислюють два значення допустимого напруження: одне для розтягу, а друге для стиску.

Для пластичних матеріалів за граничне напруження приймають границю плинності матеріалу і допустиме напруження вираховують (як при розтягу так і при стиску) за формулою

$$[\sigma] = \sigma_{пл} / n_{пл}, \quad (2.26)$$

де $\sigma_{пл}$ – границя плинності матеріалу (фізична або умовна); $n_{пл}$ – коефіцієнт запасу відносно границі плинності, який приймається в межах від 1,2 до 2,5.

Знаючи допустиме напруження, можна записати умову міцності методу допустимих напружень у загальному випадку

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (2.27)$$

При розтягові або стиску ця умова має вигляд

$$\frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (2.28)$$

Її використовують для перевірки умови міцності. З умови (2.28) випливають формули для підбору поперечного перерізу стрижня при дії поздовжньої сили:

$$A \leq \frac{N}{[\sigma]}, \quad (2.29)$$

і для визначення допустимої поздовжньої сили при заданій площі поперечного перерізу і заданому допустимому напруженню

$$[N] = [\sigma] \cdot A. \quad (2.30)$$

У звичайних інженерних розрахунках дозволяється перевищення допустимого напруження (допустимої сили) не більше як на 5 % порівняно з його заданою величиною.

2.5. Врахування власної ваги стрижня. Розрахунок його на міцність

Нерідко власна вага матеріалу значно впливає на напруження та деформації стрижня, тому її впливом не можна ігнорувати. Це особливо важливо для високих колон.

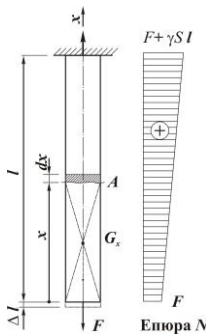


Рис. 2.11

Визначимо переміщення та напруження у стрижні, підвішеному за верхній кінець, враховуючи його власну вагу (рис. 2.11).

Кожний його елемент,

довжиною dx , деформується під впливом ваги, розташованої нижче частинки стрижня – $G_x = A\gamma \cdot x$, на величину

$$\Delta dx = \frac{G_x dx}{EA} = \frac{Ax\gamma dx}{EA}.$$

Інтегруючи по всій довжині стрижня, знайдемо

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dx = \frac{A\gamma}{EA} \int_0^l x dx = \frac{A\gamma l^2}{2EA},$$

звідки

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E}. \quad (2.31)$$

Формула (2.31) отримає інший вигляд, якщо приймемо до уваги, що $A\gamma = G$ – це вага всього стрижня. Тоді

$$\Delta l = \frac{Gl}{2EA}, \quad (2.32)$$

тобто подовження стрижня від власної ваги вдвічі менше, ніж від сили, що дорівнює вазі стрижня, яку винесено у кінцевий переріз.

Якщо, крім власної ваги, діє ще й зовнішня сила F , то подовження дорівнюватиме сумі:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \frac{Gl}{2EA}. \quad (2.33)$$

У перерізі, на відстані x від нижнього кінця, подовжня сила дорівнює

$$N(x) = F + G_x. \quad (2.34)$$

Максимальна подовжня сила виникає у верхньому перерізі стрижня $x = l$ і дорівнює

$$N_{\max} = F + G. \quad (2.35)$$

Епюра поздовжніх сил у стрижні зображена на рис. 2.7. Після підстановки значення поздовжньої сили N_{\max} у формулу (2.28) одержимо умову міцності при сумісній дії зовнішньої сили P і власної ваги стрижня

$$\frac{F}{A} + \gamma l \leq [\sigma]. \quad (2.36)$$

З останньої формули випливає формула підбору поперечного перерізу стрижня.

$$A \geq \frac{F}{[\sigma] - \gamma l}. \quad (2.37)$$

З одержаної формули видно, що врахування власної ваги стрижня рівнозначне зменшенню допустимого напруження для даного матеріалу на величину γl .

Приклад. Для ступінчатого сталевого стрижня з площами поперечного перерізу його двох ділянок A і $2A$, навантаженого зосередженими силами F_1 і F_2 (рис. 2.12, а), треба побудувати епюру поздовжніх сил та нормальних напружень з врахуванням власної ваги стрижня, якщо $a = 2$ м, $b = 6$ м, $A = 10$ см², $F_1 = 16$ кН, $F_2 = 6$ кН. Питома вага матеріалу $\gamma = 9,81 \cdot 7,85 = 77$ кН/м³.

Поздовжня сила $N(x)$ у довільному поперечному перерізі 1–1 нижньої ділянки стрижня становить

$$N^{(1)}(x) = F_2 + A \cdot \gamma \cdot x = 6,0 + 0,077x.$$

Значення поздовжніх сил на кінцях ділянки ($x = 0$; $x = b$):

$$N^{(1)}(0) = 6,0 \text{ кН}, \quad N^{(1)}(b) = 6,0 + 0,077 \cdot 6 = 6,46 \text{ кН}.$$

У довільному перерізі II-II верхньої ділянки стрижня маємо:

$$N^{(2)}(x) = N^{(1)}(b) - F_1 + 2A\gamma(x-b) =$$

$$= 6,46 - 16,0 + 0,154(x-b) = -9,54 + 0,154(x-b).$$

Значення поздовжніх сил на кінцях ділянки:

$$N^{(2)}(b) = -9,54 \text{ кН},$$

$$N^{(2)}(a+b) = -9,54 + 0,154 \cdot 2 = -9,23 \text{ кН}.$$

За одержаними даними побудована еюра (рис. 2.12, б) поздовжніх сил $N(x)$.

У поперечних перерізах стрижня виникають нормальні напруження $\sigma(x)$, що визначаються за формулою:

$$\sigma^{(i)}(x) = N^{(i)}(x) / A_i.$$

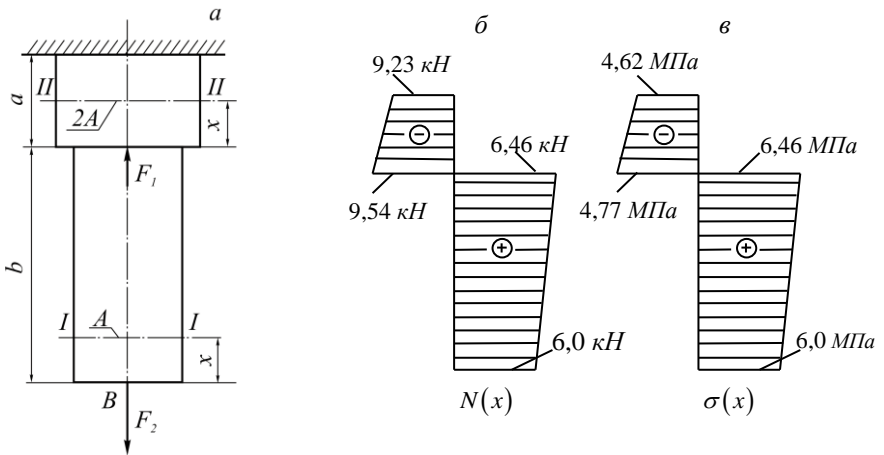


Рис.2.12

Значення нормальних напружень на кінцях нижньої ділянки дорівнюють:

$$\sigma^{(1)}(0) = \frac{N^{(1)}(0)}{A} = \frac{6,0}{10 \cdot 10^{-4}} = 6 \cdot 10^3 \text{ кН} / \text{м}^2 = 6 \text{ МПа};$$

$$\sigma^{(1)}(\epsilon) = \frac{N^{(1)}(\epsilon)}{A} = \frac{6,46}{10 \cdot 10^{-4}} = 6,46 \text{ МПа}.$$

Значення нормальних напружень на кінцях верхньої ділянки дорівнюють:

$$\sigma^{(2)}(\epsilon) = \frac{N^{(2)}(\epsilon)}{2A} = -\frac{9,54}{20 \cdot 10^{-4}} = -4,77 \text{ МПа};$$

$$\sigma^{(2)}(\epsilon + a) = \frac{N^{(2)}(\epsilon + a)}{2A} = -\frac{9,23}{20 \cdot 10^{-4}} = -4,62 \text{ МПа}.$$

За одержаними даними побудована епюра (рис. 2.12, в) нормальних напружень $\sigma(x)$.

2.6. Розрахунок гнучких ниток

Гнучкими нитками називають тонкі елементи конструкцій, котрі можуть чинити опір тільки розтягувальним зусиллям. До таких елементів відносять повітряні лінії електричних проводів, ланцюги підвісних мостів, троси підвісних канатних доріг тощо. Гнучкі нитки можуть бути навантажені як розподіленим, так зосередженим навантаженнями. В розрахунках гнучких ниток, крім інших навантажень, значна увага надається питанням впливу на міцність розподіленого навантаження q , н/м, яким може бути власна вага $q_{\text{в}}^{\text{в}}$, а також вага ожеледі $q_{\text{в}}^{\text{о}}$ на одиницю довжини проводу при їх обмерзанні:

$$q = q_{\text{в}}^{\text{в}} + q_{\text{в}}^{\text{о}}, \quad (2.38)$$

де $q_{\text{в}}^{\text{в}} = \gamma A$, γ – питома вага матеріалу нитки, A – площа поперечного перерізу нитки; $q_{\text{в}}^{\text{о}} = 9 \cdot 10^3 \pi \delta (d + \delta)$ – вага

ожеледі на одиницю довжини нитки (проводу), d і δ - діаметр проводу і товщина ожеледі, m .

Крім наведеного, вертикального розподіленого навантаження q на провід може діяти ще і вітрове навантаження q_a , n/m , що переважно напрямлене горизонтально. У цьому випадку сумарне навантаження на провід записують у вигляді

$$q_{\Sigma} = \sqrt{q^2 + q_a^2}.$$

Для визначення вітрового навантаження користуються емпіричною формулою

$$q_a = 0,636V^2(d + 2\delta), n/m,$$

де V - швидкість вітру, m/c .

Розглянемо рівновагу нитки (проводу), що підвішена в двох точках A та B на різних рівнях (рис. 2.13,а). Нитка знаходиться під дією розподіленого навантаження p , n/m . Горизонтальна проекція l дуги AB називається *прогоном*, а q , n/m - інтенсивність навантаження на одиницю довжини горизонтальної проекції. Тоді, якщо ds - елемент дуги нитки (рис. 2.13,б), а dx - його горизонтальна проекція, то навантаження, що припадає на цей елемент, може бути представлене або як pds , або як qdx , тому

$$pds = qdx, \quad p = q \frac{dx}{ds} = q \cos \alpha,$$

де α - кут нахилу дотичної до дуги нитки.

Будемо вважати, що провисання нитки невелике у порівнянні із її прогоном (довжина нитки s не перевищує довжини прогону l більше ніж на 10%, а $\cos \alpha \approx 1$), тому вагу

нитки можна рівномірно розподілити по довжині прогону l .

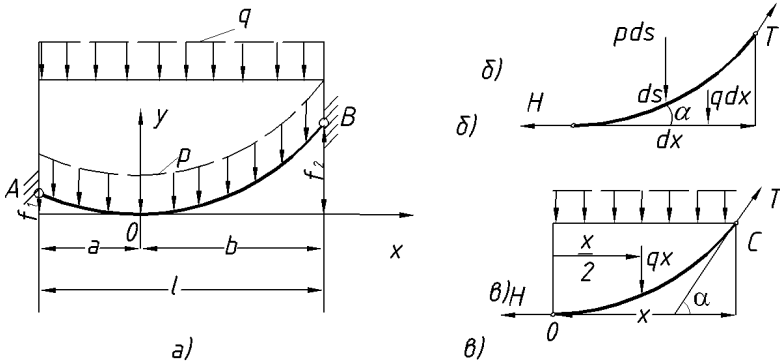


Рис. 2.13

Розмістимо початок систему координат у найнижчій точці провисання гнучкої нитки, та розглянемо рівновагу її частини (рис.2.13, в). Оскільки нитка чинить опір тільки розтягу, то сили H і T на кінцях виділеної частини діють тільки в напрямку дотичної, а згинальний момент в усіх її перерізах дорівнює нулю. Тому

$$\Sigma(M)_C = Hy - qx \cdot \frac{x}{2} = 0. \quad (2.39)$$

Із записаного рівняння рівноваги держимо рівняння кривої провисання нитки, що є параболою

$$y = \frac{qx^2}{2H}. \quad (2.40)$$

а) Розглянемо детальніше випадок, коли точки підвісу A і B знаходяться на одному рівні ($f_1 = f_2 = f$). Величина $f = y_{\max}$ називається *стрілою провисання* нитки і знаходиться з формули (2.40), для $x = l/2$:

$$f = \frac{ql^2}{8H}. \quad (2.41)$$

Звідси виразимо натяг нитки H через стрілу провисання f :

$$H = \frac{ql^2}{8f}. \quad (2.42)$$

Якщо записати рівняння рівноваги виділеної частини нитки на вісь x - ів (рис.2.13, в), то з нього отримаємо залежність між горизонтальним натягом нитки H та натягом T у довільній точці:

$$\Sigma X = -H + T \cos \alpha = 0; \quad T = \frac{H}{\cos \alpha}. \quad (2.43)$$

З аналізу формули (2.43) видно, що найбільша сила натягу виникає у точках підвішування нитки. Разом з тим, для підвішеної на одному рівні нитки, коли $f \ll l$, а $\cos \alpha \approx 1$, приймають $H \approx T$.

Для визначення залежності довжини нитки s від стріли провисання f та довжини прогону l можна скористатися відомою формулою з диференціальної геометрії для довжини елемента кривої

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Інтегрування цієї залежності у межах дуги AB приводить до наступного наближеного результату –

$$s \approx l + \frac{8f^2}{3l}. \quad (2.44)$$

За допущення, що кут α є малим, можна вважати, що зусилля натягу нитки є сталим і дорівнює величині H . Тоді умова міцності для гнучкої нитки може бути записана у вигляді:

$$\frac{H}{A} \leq [\sigma]. \quad (2.45)$$

Враховуючи формулу (2.42) для H , отримаємо

$$\frac{ql^2}{8fA} \leq [\sigma]. \quad (2.46)$$

За допустимим (максимальним) натягом з формули (2.46) легко знайти мінімальну стрілу провисання:

$$f_{\min} = \frac{ql^2}{8A[\sigma]} . \quad (2.47)$$

Для випадку, коли враховується тільки власна вага провoda $q_{\text{в}} = \gamma \dot{A}$, формула (2.47) спрощується до вигляду

$$f_{\min} = \frac{l^2}{8[\sigma]_{i\delta\delta}} , \quad (2.48)$$

де $[\sigma]_{i\delta\delta} = [\sigma]/\gamma$ – допустима *питома міцність матеріалу*, м.

Аналіз формули (2.48) показує, що на розрахункову величину стріли провисання провoda не впливає площа його перерізу, а міцність ліній електропровoda з алюмінійового матеріалу ($\sigma_{i\delta\delta}^{\dot{a}} = 21 \cdot 10^3 \text{ і}$) є навіть дещо вища, ніж міцність аналогічних ліній із сталевих сплавів ($\sigma_{i\delta\delta}^{\ddot{n}} = 19 \cdot 10^3 \text{ і}$).

б) Розглянемо випадок, коли точки підвісу знаходяться на різних рівнях. Підставивши у рівняння (2.40) значення $\delta = -\dot{a}$ і $\delta = b$, знайдемо величини f_1 і f_2 :

$$f_1 = \frac{qa^2}{2H} ; f_2 = \frac{qb^2}{2H} . \quad (2.49)$$

Враховуючи, що $a+b=l$ та формули (2.49), виразимо сталі a і b через величини l , f_1 і f_2 . Для цього розділимо першу і другу рівності (2.49) і одержимо

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{a^2}{b^2} \text{ або } a = \pm b \sqrt{\frac{f_1}{f_2}} .$$

$$\text{В результаті } l = b \pm b \sqrt{\frac{f_1}{f_2}} , \text{ або } b = \frac{l\sqrt{f_2}}{\sqrt{f_2} \pm \sqrt{f_1}} .$$

Використавши одержані залежності, визначимо з другого рівняння (2.49) величину натягу гнучкої нитки

$$H = \frac{qb^2}{2f_2} = \frac{ql^2}{(\sqrt{2f_2} \pm \sqrt{2f_1})^2} . \quad (2.50)$$

Знак "мінус" у формулі (2.50) відповідає окремому випадку, коли найнижча точка провисання нитки лежить за

межами прогону. З аналізу формули (2.50) видно також, що для випадку $f_1 = f_2 = f$ отримуємо попередній результат (2.41).

Розглянемо зміну довжини проводу в залежності від зміни розтягального зусилля H за підвищення температури від t до t_1 градусів. За такої зміни появиться новий натяг H_1 , нова довжина проводу s_1 та нова стріла провисання f_1 . Різниця між новою довжиною проводу та прогоном $s_1 - l$ буде складатися: із початкової різниці $s - l$; видовження від температури $\Delta l_t = \alpha(t_1 - t)l$ та вкорочення Δ_{H-H_1} , викликаного тим, що натяг проводу зменшиться на величину $H - H_1$ внаслідок збільшення його стріли провисання. В результаті, отримаємо наступне геометричне рівняння деформації:

$$s_1 - l = s - l + \Delta l_t - \Delta_{H-H_1}. \quad (2.50)$$

Піставивши в одержане рівняння відповідні значення різниць $s_1 - l$ та $s - l$ (формула(2.44)), а значення видовжень, одержимо нове рівняння деформації у фізичній формі:

$$\frac{8f_1^2}{3l} = \frac{8f^2}{3l} + \alpha(t_1 - t)l - \frac{(H - H_1)l}{EA}, \quad (2.51)$$

де α - коефіцієнт лінійного розширення матеріалу.

Враховуючи, що $H_1 = \frac{ql^2}{8f_1}$, після деяких алгебричних перетворень, отримаємо кубічне рівняння для визначення нової стріли провисання f_1 :

$$f_1^3 - rf_1 - \kappa = 0. \quad (2.52)$$

Тут $r = f^2 + \frac{3}{8} \left(\alpha(t - t_{\min})l^2 - \frac{Hl^2}{EA} \right)$; $\kappa = \frac{3}{64} \frac{ql^4}{EA}$.

Розв'язок кубічного рівняння (2.52) можна шукати методом послідовних наближень, графічним методом або

аналітичним, через розв'язок Кардано. Разом з тим, контроль за зміною величини стріли провисання необхідний для забезпечення міцності проводу з умови визначення допустимої величини f_{\min} , а також для встановлення необхідної висоти точок підвішування проводу за умовою $h \geq f_{\max} + [h]$, де $[h]$ - допустима висота проводу над землею, яка допускається нормами безпеки.

Приклад. Багатожильний мідний електропровід перерізом $A = 120 \text{ мм}^2$ ($d = 14,2 \text{ мм}$) при температурі $t = 20^\circ \text{C}$ підвішений до опор, що розташовані на одному рівні. Відстань між опорами (прогін) $l = 80 \text{ м}$. Допустиме напруження на розтяг для проводу $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$; коефіцієнт лінійного розширення $\alpha = 17 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$; модуль пружності матеріалу проводу $E = 1,3 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; питома вага міді $\gamma_i = 91 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}$. Електропровід працює при температурі $t_{\min} = -20^\circ \text{C}$.

Потрібно визначити мінімальну стрілу провисання f_{\min} проводу за умови забезпечення його міцності, а також стрілу провисання f_1 в умовах підвішування проводу.

Розв'язування. Знаходимо навантаження проводу від ожеледі

$$q_{\text{ож}} = 9 \cdot 10^3 \pi d (d + \delta) = 9 \cdot 10^3 \cdot 3,14 \cdot 10 (14,2 + 10) 10^{-6} = 6,84 \text{ Н / м.}$$

Навантаження від власної ваги проводу

$$q_{\text{вл}} = \gamma_m A = 91 \cdot 10^3 \cdot 120 \cdot 10^{-6} = 11,3 \text{ Н / м.}$$

Повне навантаження на 1м довжини обмерзлого проводу

$$q = q_{\text{вл}} + q_{\text{ож}} = 11,3 + 6,84 = 18,14 \text{ Н / м.}$$

Знаходимо мінімальну стрілу провисання проводу f_{\min} з умови міцності його на розтяг (2.47)

$$f_{\min} = \frac{ql^2}{8A[\sigma]} = \frac{18,14 \cdot (80)^2}{8 \cdot 120 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 10^6} = 1,51 \text{ м.}$$

Знайдемо стрілу провисання, яку потрібно надати проводу при підвішуванні. При цьому, в рівняння (2.52) підставляємо початкові дані задачі. Зокрема, беремо, що провід навантажений власною вагою $q = q_{вл} = 11,3H / м$, а

$$H = [\sigma] A = 80 \cdot 10^6 \cdot 120 \cdot 10^{-6} = 9,6 \cdot 10^3 H ;$$

$f = f_{\min} = 1,51i$. В результаті, одержимо:

$$f_1^3 - \left[1,51^2 + \frac{3}{8} \left(17 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 8^2 - \frac{9,6 \cdot 10^5 \cdot 8^2}{1,3 \cdot 12 \cdot 10^6} \right) \right] f_1 - \frac{3}{64} \frac{11,3 \cdot 80^4}{1,3 \cdot 12 \cdot 10^6} = 0$$

або

$$f_1^3 - 2,125 f_1 - 1,39 = 0. \quad (2.53)$$

Для знаходження дійсного кореня кубічного рівняння (2.53) скористаємося формулою Кордано $f_1 = u + v$,

$$\text{де } u = \sqrt[3]{\kappa/2 + \sqrt{D}}; v = \sqrt[3]{\kappa/2 - \sqrt{D}}; D = -(r/3)^3 + (\kappa/2)^2.$$

У випадку, коли параметр $D = -(2,125/3)^3 + (1,39/2)^2 = 0,1276 > 0$, дане кубічне рівняння має тільки один дійсний корінь:

$$f_1 = \sqrt[3]{1,39/2 + \sqrt{0,1276}} + \sqrt[3]{1,39/2 - \sqrt{0,1276}} = 1,017 + 0,696 = 1,713 м.$$

Таким чином, стріла провисання проводу в пору її монтажу має дорівнювати $f_m = f_1 = 1,713 м$.

2.7. Вплив концентрації напружень на розподіл напружень у поперечних перерізах

Розрахункові формули опору матеріалів в практичному застосуванні можуть бути використані тільки для деталей машин та елементів конструкцій, що мають постійний та плавно змінюваний переріз. У тих випадках, коли елементи конструкцій мають різного роду отвори, вирізи, включення або різкі переходи в товщинах (рис. 2.14), то у безпосередній близькості від них виникають додаткові локальні напруження, що можуть перевищувати основні у багато разів.

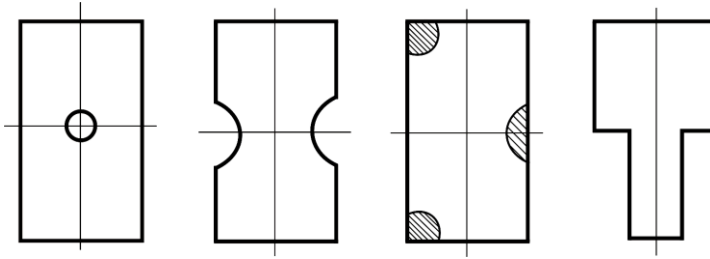


Рис. 2.14

Явище локального підвищення напружень в місцях різкої зміни форми конструкції, її суцільності чи однорідності, називається **концентрацією напружень**. Концентрація напружень дуже швидко згасає при віддаленні від концентратора напружень, але істотно впливає на міцність тої частини деталі конструкції, де вона виникає. Тому прогнозування міцності конструкції при наявності концентраторів напружень є необхідним не тільки при проектуванні та експлуатації, але і при аналізі причин її руйнування.

Мірою концентрації напружень є *теоретичний коефіцієнт концентрації напружень* k , що дорівнює відношенню напруження σ_{\max} , що виникає в конструкції з концентратором напружень, до напруження σ_H у тій самій точці, але без концентратора напружень:

$$k = \sigma_{\max} / \sigma_H, \quad (2.38)$$

де $\sigma_H = N/A_H$; A_H – ослаблена площа перерізу (площа нетто).

Таким чином, замість визначення реального напруження в конструкції з концентратором напружень методами інтегрування рівнянь теорії пружності, визначається методами опору матеріалів номінальне напруження σ_H , яке помножується на величину відповідного коефіцієнта концентрації напружень (ККН), що значно полегшує проектування, розрахунок та експлуатацію реальних конструкцій. У більшості випадків значення ККН підбирають із таблиць або діаграм, побудованих у залежності від певних параметрів.

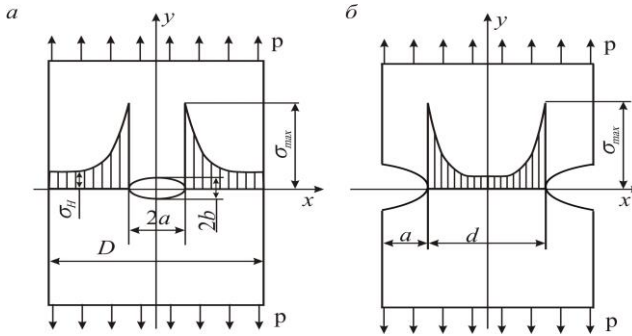


Рис. 2.15

Але у деяких випадках ККН визначається за допомогою елементарних формул. Наприклад, у випадку розтягу пластинок з еліптичним отвором (рис. 2.15,а) максимальний коефіцієнт концентрації

$$k = 1 + 2a/b, \quad (2.39)$$

де a і b – більша і менша півосі еліпса. Якщо $a = b = r$, то отримаємо пластинку з круглим отвором, для якої $k = 3$ (результат Кірша).

Формулу (2.39) можна використати і для випадку трансформації еліпса в тріщину, використавши підстановку $b = \sqrt{ar}$, де r – радіус кривини кінчика тріщини. Тоді отримаємо

$$k = 1 + 2\sqrt{a/r}. \quad (2.40)$$

При спрямуванні радіуса кривини до нуля, коефіцієнт концентрації може нескінченно зростати. Особливо це небезпечно для деталей, що виготовлені з високоміцних сталей та піддаються гартуванню, або працюють при динамічних навантаженнях. Формула (2.40) справедлива і для неглибокого надрізу (глибиною a , рис. 2.15, б), коли $a/r < 0,1$. Для глибоких симетричних надрізів ($a/r \geq 4$), що мають гіперболічний контур, можна скористатися емпіричною формулою Нойбера:

$$k = \sqrt{1,2 + 0,8 \cdot d/r} - 0,1. \quad (2.41)$$

Необхідно також зауважити, що формули (2.39) і (2.40) справедливі для нескінченних (у напрямках x і y) пластинок. Для смуги скінченної ширини D , що має круглий отвір, теоретичний ККН визначають за уточненою емпіричною формулою Гейвуда:

$$k = 2 + (1 - 2r/D)^3. \quad (2.42)$$

Наприклад, для $D = 4a$ значення $k = 2,125$, а у випадку, коли $D \rightarrow \infty$, $k \rightarrow 3$. Отже, якщо величина r набагато менша від D , то можна скористатися розв'язком Кірша, знехтувавши шириною смуги. Подібні формули існують і для інших видів деформацій (навантажень) та інших форм надрізів.

Менш небезпечною є концентрація напружень для пластичних матеріалів за статичних навантажень. Пояснюється це тим, що у місцях концентрації напружень з'являються обмежені області пластичних деформацій, які не дуже впливають на міцність конструкції в цілому. Разом з тим, із збільшенням навантаження розмір пластичної зони поширюється на весь переріз деталі, що веде до повного вичерпування її тримальної здатності. Розрив такої смуги відбувається за, приблизно, рівномірного розподілу граничних напружень, які є *більшими* від напружень, що виникають у суцільній смузі. С.П. Тимошенко пояснює цей факт тим, що різка зміна поперечного перерізу біля отвору веде до утворення об'ємного напруженого стану, який стає на перешкоді появи шийки.

Для випадку крихких матеріалів такої аномалії не спостерігається. Тут поява концентраторів напружень різко понижує тимчасовий опір послабленої смуги. Результати експериментальних досліджень показують, що серед крихких матеріалів особливе місце займає чавун, який *не реагує* на концентрацію напружень. Така властивість пояснюється його неоднорідною будовою, що зумовлює постійну наявність концентраторів напружень в матеріалі, розподілених по всьому об'єму деталі.

Найбільш повні розв'язки задач про концентрацію напружень в околі отворів та гострих надрізів отримані

Г. Нойбером, який застосовував у розрахунках криволінійні координати та поняття умовного радіусу заокруглення надрізу, що залежить від механічних характеристик матеріалу.

Практичне врахування впливу концентрації напружень зводиться до збільшення коефіцієнту запасу на міцність чи втому. Крім того, для зменшення шкідливого впливу концентрації напружень існує ціла система технологічних та конструкційних заходів, виконання яких є обов'язковим у проектуванні елементів конструкцій.

Запитання для самоконтролю

1. Для чого потрібна експериментальна перевірка міцності матеріалів?
2. Як отримується діаграма розтягу матеріалу?
3. Як будується діаграма напружень за розтягу?
4. Які Ви знаєте механічні характеристики матеріалу?
5. Які існують характеристики пластичності матеріалу?
6. Що називається істинною діаграмою напружень?
7. Що таке істинне напруження?
8. Запишіть співвідношення між істинними деформаціями і фіктивними.
9. Що таке ефект Баушінгера?
10. Що таке петля гістерезису?
11. Які існують моделі деформування матеріалу?
12. Як відбувається деформування матеріалу з пружно-пластичним зміцненням?
13. Як записується робота і енергія деформації розтягу?
14. Що таке коефіцієнт повноти діаграми розтягу?
15. В чому полягає метод допустимих напружень?
16. Для чого потрібний коефіцієнт запасу міцності та пластичності матеріалу?
17. Запишіть умову міцності.
18. Які елементи конструкцій називаються гнучкими нитками?
19. Що таке стріла провисання гнучкої нитки?
20. Яке рівняння кривої провисання нитки?
21. Якому рівнянню задовольняє стріла провисання нитки
22. Що таке концентрація напружень?
23. Запишіть формулу для коефіцієнта концентрації еліптичного отвору.

ТЕМА 3 (лекція 7)

ЗСУВ

3.1. Явище зсуву. Чистий зсув

Якщо на брус чи стрижень діють дві однакові, розташовані близько одна до одної сили, що напрямлені у протилежні боки перпендикулярно до вісі бруса (стрижня), то ми будемо вважати, що такий елемент знаходиться у стані зсуву (рис. 3.1)

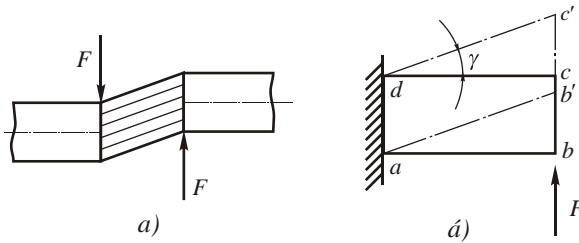


Рис. 3.1

Деформація, яка характеризується зміною попередньо прямих кутів елементарного прямокутника і перетворенню його в паралелограм, називається *зсувом*. Характеристикою ступеня деформації зсуву може служити відношення *абсолютного зсуву* cc' до віддалі між перерізами dc :

$$\frac{cc'}{dc} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma, \quad (3.1)$$

яке, внаслідок малості деформації, можна прирівняти до самого кута γ . Цей кут називається *кутом зсуву* або *відносним зсувом*. При таких кутах діють тільки дотичні напруження τ , а напружений стан, що виникає в ньому, називається чистим зсувом (рис. 3.2).

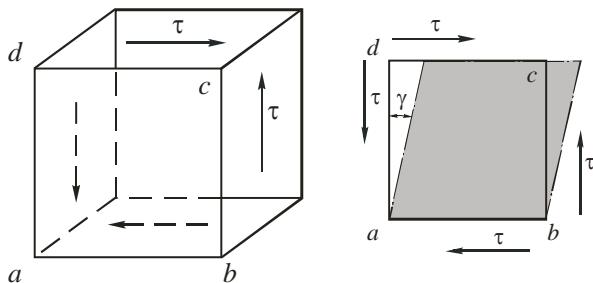


Рис. 3.2

Випробовуючи матеріал за чистого зсуву і, заміряючи деформацію зсуву як функцію дотичного напруження, можна отримати діаграму залежності дотичного напруження від деформації зсуву для цього матеріалу. Така діаграма дуже подібна за формою на діаграму, отриману випробуванням на розтяг цього ж матеріалу (рис.2.2). Зокрема, якщо матеріал має лінійно-пружну зону, то дотичне напруження на цій ділянці буде пропорційне деформації зсуву –

$$\tau = G\gamma, \quad (3.2)$$

де G – модуль пружності матеріалу за зсуву; γ - кут зсуву.

Цю залежність ще називають *законом Гука при зсуві*. Між модулем пружності матеріалу за розтягу E та модулем зсуву G для одного і того ж матеріалу існує приблизна залежність

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

де μ – коефіцієнт Пуассона.

З рис.3.1 видно, що сили F намагаються зсунути суміжні перерізи стрижня один відносно одного. Дійсний закон розподілу дотичних напружень, що виникають у поперечних перерізах нам невідомий. Але, в більшості випадків, приймається, що ці напруження розподілені по поперечному перерізі рівномірно. Тому їх можна визначати за формулою

$$\tau = F / A, \quad (3.3)$$

де A - площа перерізу зсуву.

Необхідно зауважити, що чистий зсув еквівалентний напруженому стану в елементі, що розтягується напруженням $\sigma = \tau$ в одному напрямку і стискується, рівним йому напруженням σ , у перпендикулярному напрямку. Ці напруження називають головними напруженнями і позначають наступним чином:

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_3 = -\tau. \quad (3.4)$$

Між напруженнями σ_1 і σ_3 існує залежність $\sigma_1 > \sigma_3$. Елементарна площинка зі згаданими головними напруженнями є площинкою, повернутою на кут 45° відносно площинки зсуву (рис.3.2). Такий напружений стан, де діє два головних напруження називається *плоским напруженим станом*.

3.2. Розрахунки на зріз і зім'яття. Розрахунок клепаних з'єднань

Продовжимо розгляд випадків, коли напруження (нормальне й дотичне) можна усереднювати по площі, на якій воно виникає. Сюди входять обчислення на міцність різноманітних деталей конструкцій, клепаних, болтових, зварних та клейових з'єднань.

Нюти використовують для з'єднання металевих елементів. У залежності від виду конструкції застосовуються з'єднання: внапусток (рис. 3.3);

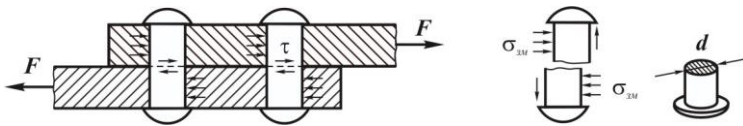


Рис. 3.3

з двома накладками (рис. 3.4); з однією накладкою тощо. Але у всіх випадках товщина пакету має бути не більшою від $7d$.

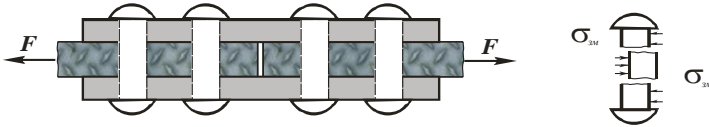


Рис. 3.4

Нюти розраховують на зсув і зім'яття або на розрив. Вважається, що ці три види руйнування відбуваються начебто незалежно.

Зрізатись нюти можуть так, як показано на рис. 3.3. і 3.4. Щоб цього не сталося, має дотримуватися умова міцності нют на зріз

$$\tau_{зр} = \frac{F}{A_{зр}} \leq [\tau]_{зр} , \quad (3.5)$$

де $\tau_{зр}$ – усереднене фактичне дотичне напруження в поперечному перерізі нют; $[\tau]_{зр}$ – допустиме дотичне напруження на зріз заклепок; F – сила, яку передає з'єднання; $A_{зр} = ni\pi d^2 / 4$ – зрізана площа всіх нют, d – діаметр нют; n – кількість нют; i – число зрізів однієї нюті (на рис. 3.3 – $i = 1$; на рис. 3.4 – $i = 2$).

Крім того, експерименти показують, що для пластичних матеріалів границя плинності при зсуві τ_{nl} складає від $0,5\sigma_{i\bar{\epsilon}}$ до $0,58\sigma_{i\bar{\epsilon}}$. Приблизно такі ж самі співвідношення між границями міцності на зріз та на розтяг.

Підставимо (3.5) до умови міцності (3.4):

$$\tau_{зр} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} ni} \leq [\tau]_{зр} . \quad (3.6)$$

За допомогою умови міцності нют на зріз (3.6) можна перевірити з'єднання, коли відомо всі його параметри. Також можна знайти потрібну кількість нют, знаючи їхній діаметр.

Зім'яття – це місцевий стиск. Зім'яття відбувається по поверхні контакту нюти й листа, причому, матеріал нюти повинен зминатися скоріше. Дійсний закон розподілу тиску на нюту складний (рис. 3.5). З метою спрощення розрахунку вважають, що зминається не бокова циліндрична поверхня стрижня нюти, а діаметральна площина (рис. 3.5). Тиск приймають рівномірно розподіленим по всьому діаметральному перерізу і нормальним до нього. Тоді загальна площа зминання у з'єднанні становитиме

$$A_{зм} = d\delta_{min}n, \quad (3.7)$$

де δ_{min} – найменша сумарна товщина листів, які зминаються в одному напрямку (праворуч чи ліворуч).

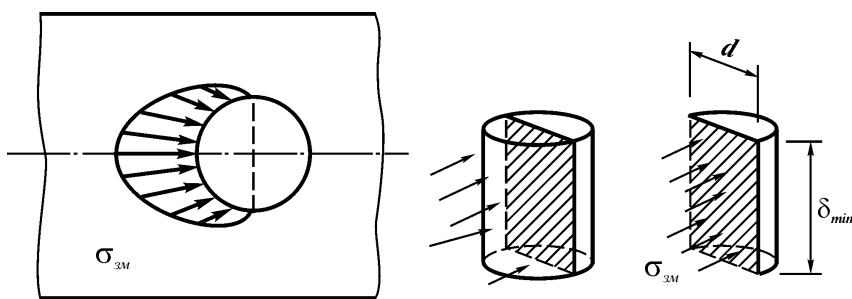


Рис. 3.5

Підставимо (3.6) в умову міцності нют на зім'яття

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{A_{зм}} \leq [\sigma]_{зм}, \quad (3.8)$$

(де $[\sigma]_{зм}$ – допустиме напруження на зім'яття нют) і дістанемо умову міцності на зім'яття у розгорнутому вигляді:

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{d\delta_{min}n} \leq [\sigma]_{зм}. \quad (3.9)$$

За допомогою здобутої залежності можна перевірити з'єднання на зім'яття, коли відомі всі його параметри. Можна також знайти необхідну кількість нют, якщо знати їх діаметр, тощо.

Визначаючи необхідну кількість нют у з'єднанні, їх діаметр зазвичай беруть (з числа стандартних) відповідно до товщини з'єднувальних листів, а потім обчислюють необхідну кількість окремо з умови зрізу й окремо з умови зім'яття. Остаточну беруть більшу з цих кількостей (округлюючи до цілого у більший бік). Разом з тим, приймається, що мінімальна відстань від центра крайньої нюти до краю листа не повинна бути меншою від $1,5 \div 2$ діаметрів нюти, а відстань між нютами в одному ряду – трьом діаметрам.

В машинобудуванні для нютових, шпилькових та шпонкових з'єднань приймають:

для деталей з маловуглецевої сталі
 $[\sigma]_{зм} = 100 \dots 120 \text{ МПа} ;$

для деталей з середньовуглецевої сталі
 $[\sigma]_{зм} = 140 \dots 170 \text{ МПа} ;$

для деталей із чавунного литва $[\sigma]_{зм} = 60 \dots 80 \text{ МПа} .$

В деяких випадках беруть залежність
 $[\sigma]_{сі} = (1,7 \div 2)[\sigma]_p .$

Якщо деталі, що контактують, виготовлені із різних матеріалів, то в цих випадках при виборі допустимого напруження орієнтують-ся на матеріал тієї деталі, міцність якого менша.

Крім розрахунку самих нют, шпильок, болтів належить також забезпечити міцність листів (за ослабленим перерізом). Якщо t – товщина листа; b – ширина листа; n – кількість отворів, то умовою міцності листа буде

$$\frac{F}{t(\epsilon - nd)} \leq [\sigma]. \quad (3.10)$$

3.3. Розрахунок кутових зварних швів

З'єднання, показане на рис. 3.6, зветься з'єднанням двох листів в накладку за допомогою флангових кутових зварних швів. Там же зображено кутовий шов окремо та його поперечний переріз, який беруть до розрахунку. Розглянемо розрахунок кутових швів на цьому прикладі.

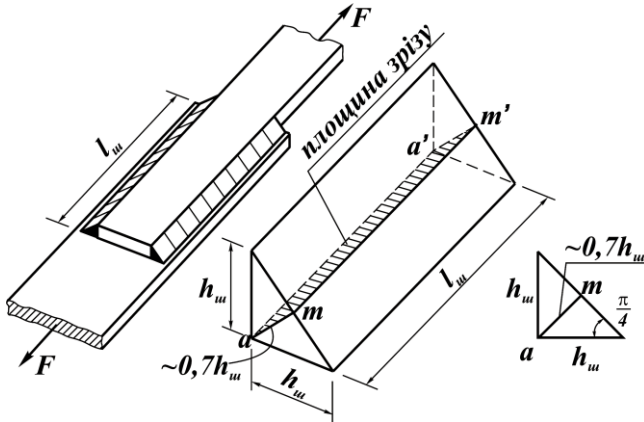


Рис. 3.6

Неважко уявити, що при досягненні силами F граничних значень з'єднання може зруйнуватися внаслідок того, що шви “зріжуться”. У найгіршому випадку площа їх зрізу дорівнюватиме

$$A_{зр} = 2 \cdot 0,7h_w l_w, \quad (3.11)$$

(подвоєна площа прямокутника $amm'a'$ на рис. 3.6).

Розмір h_w зветься висотою (або товщиною) шва, а відстань am (по бісектрисі прямого кута), яку вважаємо рівною $0,7h_w$, – робочою висотою (товщиною шва). Але міцність швів забезпечуватиметься за виконання умови їх міцності на зріз

$$\tau_{зр} = \frac{F}{A_{зр}} \leq [\tau]_{зр} , \quad (3.12)$$

де $\tau_{\zeta\delta}$ – фактичне усереднене дотичне напруження в шві; $[\tau]_{\zeta\delta}$ – допустиме усереднене дотичне напруження на зріз шва, яке приймається рівним

$$[\tau]_{\zeta\delta} = (0,5...0,8)[\sigma]_p . \quad (3.13)$$

Для сталей рекомендують приймати –

$$[\tau]_{\zeta\delta} = (0,7...0,8)[\sigma]_p .$$

Підстановка (3.10) до (3.11) дає умову міцності кутових швів у розгорнутому вигляді:

$$\tau_{зр} = \frac{F}{2 \cdot 0,7 h_{ш} l_{ш}} \leq [\tau]_{зр} . \quad (3.14)$$

За допомогою (3.14) можна перевірити міцність швів, коли відомі всі параметри з'єднання. Можна, навпаки, знайти один із розмірів $h_{ш}$, $l_{ш}$, коли відомий інший. Зазвичай, беруть $h_{ш}$, що дорівнює товщині листа чи трохи менший, після чого знаходять $l_{ш}$.

Щоб врахувати знижену якість кінців шва (непровару), фактична довжина шва має бути на 10 мм більше за розрахункову. При повному розрахунку з'єднання треба, природно, цікавитись міцністю не тільки самих швів, але ще й з'єднувальних листів.

Приклад. Необхідно розрахувати на сколювання (зріз) та зминання врубку кров'яної ноги в затяжку (рис.3.7).

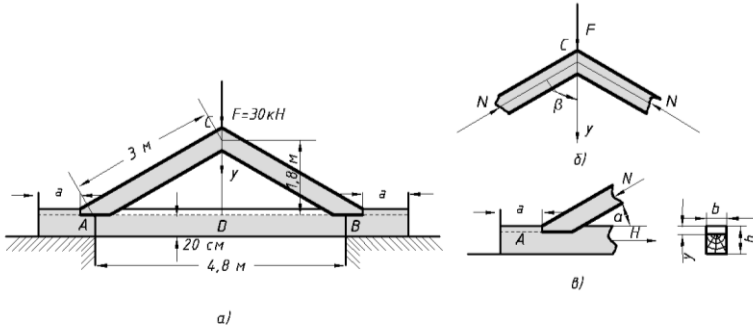


Рис. 3.7

Сумарне навантаження на крокву $F = 30$ кН. Матеріал – сосна, допустиме напруження на зминання вздовж волокон $[\sigma]_{зм} = 8$ МПа, допустиме напруження на сколювання $[\tau]_{зм} = 0,8$ МПа, допустиме напруження на стиск $[\sigma]_{зм} = 12$ МПа. Висота крокви - $\overline{CD} = 1,8$ м, довжини ноги крокви - $\overline{AC} = 3$ м. Переріз ноги крокви - $h \times b = 20 \times 10$ см. При розрахунках можна вважати, що напруження зминання та сколювання розподілені рівномірно по відповідних площах зминання та сколювання .

Розв'язання. Для визначення зусиль, що виникають у крокві розглянемо рівновагу вузлів C та A . З умови рівноваги всіх сил, прикладених до вузла C на вісь y -ів (рис.3.7,б) знаходимо:

$$F - 2N \cos \beta = 0; \quad N = \frac{F}{2 \cos \beta},$$

$$\text{де } \cos \beta = \frac{1,8}{3} = 0,6.$$

$$\text{В результаті, знаходимо: } N = \frac{30}{1,2} = 25 \text{ кН.}$$

Кінець затяжки зазнає сколювання вздовж волокон матеріалу основи арки під дією горизонтальної сили (рис.3.7, в)

$$H = N \cos \alpha = 25 \frac{2,4}{3} = 20 \text{ кН.}$$

Довжину затяжки перед врубкою визначимо з умови

$$\tau_{\max} = \frac{H}{S_{\text{ск}}} = \frac{H}{a \cdot b} \leq [\tau]_{\text{зр}} .$$

Підставивши в записану формулу дані матеріалу та крокви, знаходимо необхідну площу сколювання

$$S_{\text{ск}} = \frac{H}{[\tau]_{\text{зр}}} = \frac{16 \cdot 10^{-3}}{0,8} = 2 \cdot 10^{-2} = 200 \text{ см}^2 .$$

$$\text{Тоді } a = \frac{S_{\text{ск}}}{b} = \frac{200}{10} = 20 \text{ см.}$$

За умови міцності на зминання знаходимо безпечну площу зминання врубки

$$S_{\text{зм}} = \frac{H}{[\sigma]_{\text{зм}}} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{8} \text{ м}^2 = 20 \text{ см}^2 .$$

$$\text{Звідси глибина врубки } y = \frac{S_{\text{зм}}}{b} = \frac{25}{10} = 2,5 \text{ см} .$$

За нормами дозволяється доводити глибину врубки до 1/3 висоти затяжки.

Запитання для самоконтролю

1. Який напружений стан називають чистим зсувом?
2. Запишіть закон Гука для чистого зсуву.
3. Запишіть залежність між модулем зсуву G та модулем пружності за розтягу E .
4. Як визначаються дотичні напруження в стрижнях за деформації чистого зсуву?
5. Запишіть умови міцності на зріз та зім'яття.
6. Як розраховуються кутові зварні шви?
7. Чому дорівнюють головні напруження за чистого зсуву?
8. До якого виду напруженого стану відноситься чистий зсув?
9. Яку умову міцності використовують для визначення глибини врубки в дерев'яних з'єднаннях?

ТЕМА 4 (лекції 8,9)
ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

4.1. Статичні моменти та моменти інерції плоских фігур

У попередніх розділах, при вивченні деформацій розтягу або стиску стрижнів, важливу роль відігравала величина площі їх поперечного перерізу A . При розгляді інших видів деформацій таких як кручення, чи поперечний або поздовжній згин, виникає необхідність у введенні інших геометричних величин: *статичних моментів* та *моментів інерції* плоскої фігури.

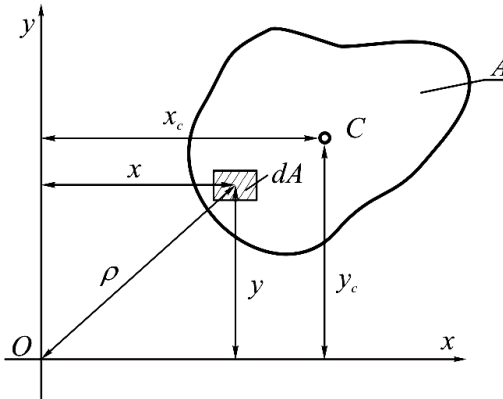


Рис. 4.1

Розглянемо плоску фігуру площею A (рис. 4.1). Виріжемо з неї елементарну площинку dA з координатами x , y . Тоді *статичними моментами* S_x і S_y фігури відносно осей Ox і Oy називаються величини:

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA. \quad (4.1)$$

Виходячи з теореми про момент рівнодійної, ці величини можна подати у такому вигляді:

$$S_x = A \cdot y_c, \quad S_y = A \cdot x_c, \quad (4.2)$$

де x_c , y_c – координати центра ваги фігури.

Формули (4.2) можуть служити також і для визначення координат центра ваги фігури. Їх аналіз показує, що статичні моменти відносно осей, які проходять через центр ваги фігури, дорівнюють нулю, а осі, що проходять через центр ваги плоскої фігури, називаються **центральною осями**. Розмірністю статичного моменту плоскої фігури є одиниця довжини у третьому степені.

Осьовими моментами інерції плоскої фігури відносно будь-якої осі, що лежить у площині фігури, називаються величини, які чисельно рівні одному з інтегралів:

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA. \quad (4.3)$$

Подібно, як і у випадку статичних моментів, вирази (4.3) можна записати і в іншому вигляді:

$$I_x = i_x^2 \cdot A, \quad I_y = i_y^2 \cdot A, \quad (4.4)$$

де i_x , i_y – середні значення ординат до відповідних осей, які ще називають радіусами інерції перерізу.

Сума осьових моментів інерції називається **полярним моментом інерції** і записується у вигляді

$$I_p = I_x + I_y = \int_A \rho^2 dA. \quad (4.5)$$

Як полярний, так і осьові моменти інерції мають розмірність одиниці довжини у четвертому степені і можуть набувати тільки додатніх значень.

Відцентровим моментом інерції плоскої фігури відносно двох взаємно перпендикулярних осей Ox і Oy , називається геометрична характеристика, яка чисельно дорівнює інтегралові

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (4.6)$$

Як видно із записаного виразу, відцентрові моменти інерції можуть бути додатніми, від'ємними і рівними нулю.

Відношення осьових моментів інерції до величин, що виражають найбільшу відстань граничної точки перерізу до

відповідної осі називаються *осьовими моментами опору* плоскої фігури:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}; W_y = \frac{I_y}{x_{max}}. \quad (4.7)$$

Тут W_x, W_y – відповідно моменти опору фігури відносно осей Ox і Oy ; x_{max}, y_{max} – відстань від осей до найвіддаленіших точок фігури.

Полярним моментом опору плоскої фігури називається величина

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}}, \quad (4.8)$$

де ρ_{max} – відстань від початку координат до найвіддаленішої точки фігури.

4.2. Моменти інерції та моменти опору деяких простих фігур

Прямокутник, квадрат. Знайдемо момент інерції прямокутника з основою b і висотою h відносно осей Ox і Oy , що проходять через центр прямокутника (рис. 4.2).

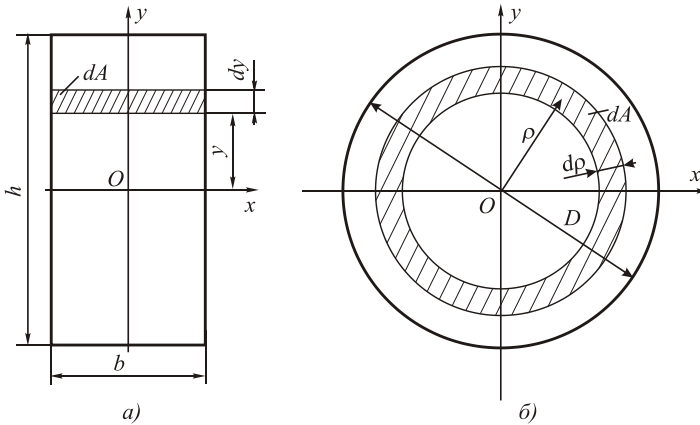


Рис. 4.2

Для визначення величини I_x скористаємося формулами (4.3). Двома нескінченно близькими одна до одної прямими виріжемо елементарну смужку з основою b і висотою dy , що знаходиться на відстані y від осі x . Її площа dA рівна

$$dA = b \cdot dy$$

і, очевидно,

$$I_x = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = bh^3/12. \quad (4.9)$$

Так само отримаємо

$$I_y = bh^3/12. \quad (4.10)$$

Моменти опору будуть, відповідно:

$$W_x = \frac{I_x}{h/2} = bh^2/6;$$

$$W_y = \frac{I_y}{b/2} = bh^2/6. \quad (4.11)$$

Для квадрата із стороною a отримаємо:

$$I_x = I_y = a^4/12;$$

$$W_x = W_y = a^4/6. \quad (4.12)$$

Круг. Кругове кільце. Розглянемо круг діаметром D (рис. 4.2, б). Двома концентричними колами з радіусами ρ і $\rho + d\rho$, виріжемо елементарну площинку з площею

$$dA = 2\pi\rho d\rho.$$

Полярний момент інерції круга

$$I_p = \int_0^{D/2} \rho^2 \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho = \pi D^4/32 \approx 0,1D^4. \quad (4.13)$$

Для визначення осьових моментів круга скористаємось рівнозначністю осей Ox і Oy , а також формулою (4.6):

$$I_x = I_y = 0.5I_p = \pi D^4/64 \approx 0,05D^4.$$

Для визначення моментів опору круга скористаємось формулою

$$W_p = \frac{I_p}{d/2} = \pi D^3/16 \approx 0,2D^3.$$

Тоді $W_x = W_y = \pi D^3/32 \approx 0,1D^3.$

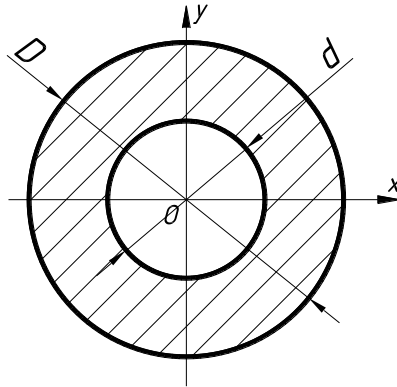


Рис. 4.3

Для визначення полярного моменту інерції кругового кільця (рис. 4.3) із зовнішнім діаметром D та внутрішнім d використаємо формулу (4.13) з інтегруванням у межах від $d/2$ до $D/2$, тобто

$$I_p = 2\pi \int_{d/2}^{D/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \approx 0,1(D^4 - d^4). \quad (4.14)$$

Формули для осевих моментів інерції кільця наступні:

$$I_x = I_y = 0,5I_p = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) \approx 0,05(D^4 - d^4). \quad (4.15)$$

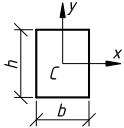
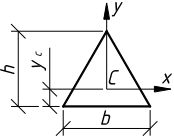
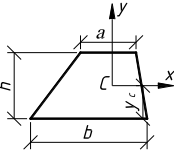
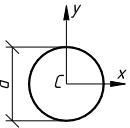
Відповідні формули для моментів опору кільця знайдемо на основі формул (4.13) – (4.15):

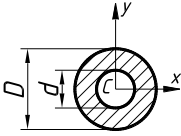
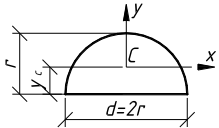
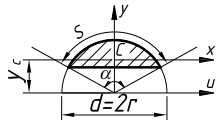
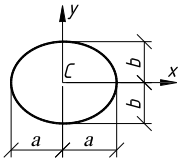
$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx 0,2D^3 (1 - \alpha^4), \quad \alpha = D/d;$$

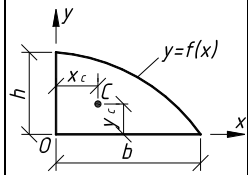
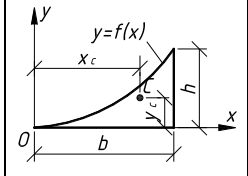
$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1 D^3 (1 - \alpha^4).$$

Визначення статичних моментів та осевих моментів інерції складних перерізів, що складаються із простих (коло, прямокутник, трикутник) вимагає більш складніших розрахунків та використання формул паралельного переносу та повороту осей координат фігури. Геометричні характеристики типових перерізів зведені в табл. 4.1.

Таблиця 4.1. Значення геометричних характеристик деяких типових перерізів

Форма перерізу	Площа перерізу, м ²	Момент інерції, м ⁴	Момент опору, м ³
	$A = bh.$	$I_x = \frac{bh^3}{12};$ $I_y = \frac{hb^3}{12}.$	$W_x = \frac{bh^2}{6};$ $W_y = \frac{hb^2}{6}.$
	$A = \frac{1}{2}bh;$ $y_c = \frac{h}{3}.$	$I_x = \frac{bh^3}{36};$ $I_y = \frac{hb^3}{48}.$	$W_x = \frac{bh^2}{24};$ $W_y = \frac{hb^2}{24}.$
	$A = \frac{h(a+b)}{2};$ $y_c = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}.$	$I_x = \frac{Bh^3}{36(a+b)};$ $B = a^2 + 4ab + b^2.$	$W_x =$ $= \frac{Bh^2}{12(a+2b)}.$
	$A = \frac{\pi d^2}{4}.$	$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64};$ $I_p = \frac{\pi d^4}{32}.$	$W_x = W_y =$ $= \frac{\pi d^3}{32};$ $W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$

	$A = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} =$ $= \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha);$ $\alpha = d / D.$	$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} \cdot$ $\cdot (1 - \alpha^4);$ $I_p = \frac{\pi D^4}{32} \cdot$ $\cdot (1 - \alpha^4).$	$W_x = W_y =$ $= \frac{\pi D^3}{32} \cdot$ $\cdot (1 - \alpha^4);$ $W_p = \frac{\pi D^3}{16} \cdot$ $\cdot (1 - \alpha^4).$
	$A = \frac{\pi r^2}{2};$ $y_c = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}.$	$I_x = 0,11 \cdot r^4;$ $I_y = \frac{\pi d^4}{128}.$	$W_x = \frac{I_x}{r - y_c};$ $W_y = \frac{\pi d^3}{64}.$
<p style="text-align: center;">1</p>	<p style="text-align: center;">2</p>	<p style="text-align: center;">3</p>	<p style="text-align: center;">4</p>
	$A = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\alpha}{180} \cdot \pi - \sin \alpha \right);$ $y_c = \frac{4}{3} \frac{r \cdot \sin^3 \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha \cdot \pi}{180} - \sin \alpha}$	$I_u = \frac{S \cdot r^3}{8} - \frac{r^4}{8} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha;$ $I_x = I_u - A \cdot y_c^2;$ $S = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180};$ $I_y = \frac{r^4}{8} \left[\frac{\alpha \cdot \pi}{180} - \sin \alpha - \frac{2}{3} \sin \alpha \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right].$	$W_x = \frac{I_x}{r - y_c}.$
	$A = \pi ab.$	$I_x = \frac{\pi ab^3}{4};$ $I_y = \frac{\pi a^3 b}{4};$ $I_p = \frac{\pi ab}{4} (b^2 + a^2).$	$W_x = \frac{\pi ab^2}{4};$ $W_y = \frac{\pi a^2 b}{4}.$

	$A = \frac{2bh}{3}.$	$y = f(x) = h \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right);$ $y_c = \frac{2h}{5}; x_c = \frac{3b}{8};$ $I_y = \frac{2}{15} hb^3;$ $I_x = \frac{16}{105} bh^3.$	
	$A = \frac{bh}{3}.$	$y = f(x) = \frac{hx^2}{b^2};$ $x_c = \frac{3b}{4}; y_c = \frac{3h}{10};$ $I_x = \frac{bh^3}{21}; I_y = \frac{hb^3}{5}.$	

4.3. Моменти інерції за паралельного переносу осей координат

Розглянемо плоску фігуру з площею A , віднесену до довільної прямокутної системи координат Ox_1y_1 (рис. 4.3). Нехай точка C є центром ваги цього перерізу, а осі x і y , що проходять через точку C , паралельні осям Ox_1 і Oy_1 . Тоді, за означенням (4.3), момент інерції I_{x_1} відносно осі Ox_1 буде

$$I_{x_1} = \int_A (y+a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA. \quad (4.16)$$

Враховуючи, що перший інтеграл рівності (4.16) дорівнює моменту інерції I_x відносно осі x , а другий перетворюється в нуль (як статичний момент плоскої фігури відносно центральної осі x), вираз (4.16) набуває наступного вигляду

$$I_{x_1} = I_x + a^2 A. \quad (4.17)$$

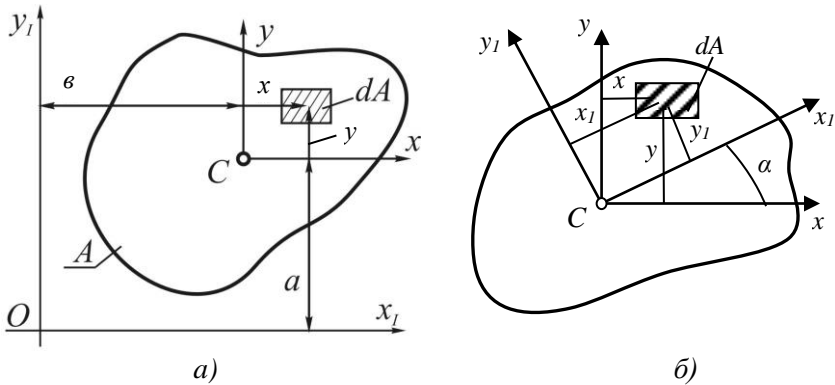


Рис. 4.4

Так само можна показати, що

$$I_{y_1} = I_y + b^2 A, \quad (4.18)$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + abA.$$

Аналізуючи виведені формули, можна прийти до висновку, що момент інерції плоскої фігури відносно довільної осі завжди буде більшим від момента інерції відносно центральної осі, що паралельна першій.

4.4. Моменти інерції за повороту осей. Головні осі та головні моменти інерції

Візьмемо довільну плоску фігуру, моменти інерції якої відносно осей координат Oxy відомі і записуються у вигляді:

$$I_x = \int_A y^2 dS, \quad I_y = \int_A x^2 dA, \quad I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (4.19)$$

Необхідно знайти величини I_{x_1} , I_{y_1} , $I_{x_1 y_1}$ відносно повернутих осей x_1 , y_1 (рис. 4.3, б). Після повороту осей нові координати елементів площі dA можна записати:

$$x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha, \quad (4.20)$$

де α – кут повороту.

Тоді основний момент I_{x_1} буде

$$I_{x_1} = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = y^2 \cos^2 \alpha \int_A dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A xy dA.$$

Після відповідних перетворень:

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha = \\ &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos^2 \alpha - I_{xy} \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (4.21)$$

Аналогічно, для інших моментів інерції будемо мати:

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha = \\ &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha; \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} \cos 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha. \quad (4.23)$$

Із формул (4.21), (4.22) неважко зауважити, що сума $I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y$ є величиною сталою і дорівнює полярному моменту інерції фігури відносно початку координат.

Аналіз формули (4.23) показує, що зміна відцентрового моменту $I_{x_1 y_1}$ відбувається в межах від I_{xy} до $-I_{xy}$. Тобто, при певному повороті координатних осей α^* відцентровий момент інерції $I_{xy}(\alpha^*)$ перетворюється на кут в нуль.

Такі осі координат називаються **головними осями інерції**. А якщо початок координат співпадає з центром ваги фігури, то такі осі будуть називатися **головними центральними осями**.

Шляхом диференціювання за змінною α виразів (4.21), (4.22) неважко показати, що умовою екстремальності моментів інерції I_{x_1} , I_{y_1} є рівність нулю відцентрового моменту інерції $I_{x_1 y_1}$. Тобто, для знаходження кута α^* прирівняємо вираз (4.23) до нуля. В результаті, отримаємо

$$tg 2\alpha^* = 2I_{xy} / (I_y - I_x). \quad (4.24)$$

Аналізуючи попередній абзац, можна зробити висновок, що *головними*, являються ті осі, для яких *осьові моменти інерції* приймають *найбільші* чи *найменші значення*.

Формули для знаходження головних моментів інерції будуть наступними:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_x \cos^2 \alpha^* + I_y \sin^2 \alpha^* - I_{xy} \sin 2\alpha^* ; \\ I_2 &= I_y \cos^2 \alpha^* + I_x \sin^2 \alpha^* + I_{xy} \sin 2\alpha^* . \end{aligned} \quad (4.25)$$

Виключивши з цих формул величини $\cos^2 \alpha^*$, $\sin^2 \alpha^*$, та $\sin 2\alpha^*$, після низки перетворень, отримаємо значення максимального і мінімального моментів інерції:

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} . \quad (4.26)$$

Тут величиною I_1 позначається більший з двох головних моментів інерції, а величиною I_2 – менший. Ураховуючи, що сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей перерізу є величиною сталою, можна дійти висновку, що в цьому випадку момент інерції I_1 відносно першої головної осі має максимальне значення, а відносно іншої – мінімальне.

Заяпитання для самоконтролю

1. Які Ви знаєте геометричні характеристики плоских перерізів?
2. Що таке статичний момент плоскої фігури?
3. Яка розмірність осьових моментів інерції?
4. Дайте визначення осьового моменту опору плоскої фігури.
5. Дайте визначення полярного моменту інерції.
6. Які значення може приймати відцентровий момент інерції плоскої фігури?
7. Що таке полярний момент опору плоскої фігури?
8. Запишіть моменти інерції та опору прямокутника.

9. Запишіть полярний момент інерції та полярний момент опору круга.
10. Як знаходиться полярний момент інерції кільця
11. Визначення осьових моментів інерції за паралельного переносу осей.
12. Що є інваріантом в залежностях між осьовими моментами інерції?
13. Які осі координат називаються головними центральними осями?
14. Які осьові моменти інерції називаються головними?

ТЕМА 5 (лекції 10.11) КРУЧЕННЯ ВАЛІВ ТА СТРИЖНІВ

5.1. Крутний момент. Епюри крутних моментів

Деформація кручення виникає у валах машин, пружинах, болтах при закручуванні крутними моментами їх поздовжніх осей. Якщо у площині вільного торця вала прикласти пару сил з моментом M , а другий кінець жорстко затиснути (рис. 5.1), то в поперечних перерізах вздовж осі вала виникнуть внутрішні сили. Рівнодійний момент цих внутрішніх сил називається

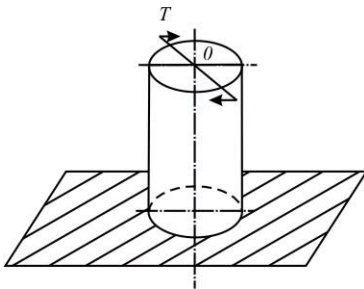


Рис. 5.1

моментом кручення, або **крутним моментом**. Якщо до вала прикладено декілька пар сил з моментами M_i , то крутний момент в довільному перерізі вала чисельно дорівнює алгебричній сумі моментів відносно осі вала всіх пар зовнішніх сил, розміщених з одного боку від

розглядуваного перерізу.

Крутний момент $T_{кр}$ вважається додатнім, якщо він обертає переріз за ходом стрілки годинника, коли дивитися на переріз вздовж зовнішньої нормалі (рис. 5.2).

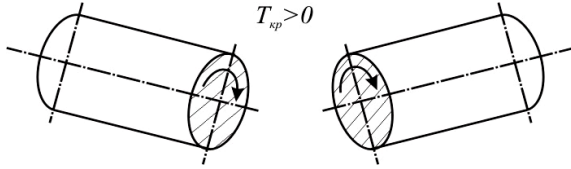


Рис. 5.2

5.2. Напруження і деформації при крученні

Розглядаючи кручення вала круглого перерізу (рис. 5.3), легко встановити, що під дією крутного моменту, який прикладений до вільного кінця, будь-який переріз на відстані x від затиснення повертається відносно нерухомого перерізу на деякий кут φ – кут закручування. Між приростом кута закручування $d\varphi$ і

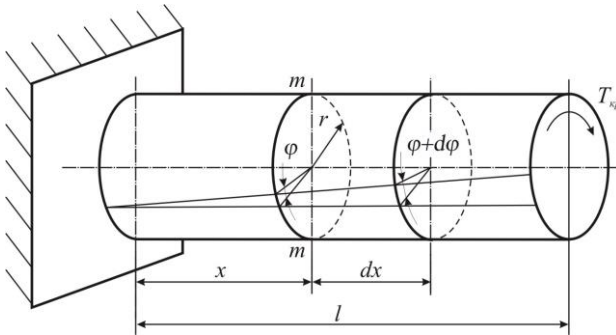


Рис. 5.3

крутним моментом $T_{кр}$ існує залежність, яка має вигляд аналогії закону Гука для розтягу і стиску:

$$d\varphi = \frac{T_{кр}}{GI_p} dx. \quad (5.1)$$

Тут G – модуль зсуву матеріалу вала, $I_p = \int_A \rho^2 dA$,
 $I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$ – полярний момент інерції вала круглого поперечного перерізу. Добуток GI_p називається жорсткістю поперечного перерізу вала при крученні.

У випадку, коли жорсткість вала і крутний момент $T_{кр}$ сталі, інтегруванням виразу (5.1) по довжині знаходимо повний кут закручування вала

$$\varphi = \frac{T_{кр} \cdot l}{G \cdot I_p}. \quad (5.2)$$

Для визначення кута закручування в градусах формулу (5.2) необхідно помножити на величину $180^\circ/\pi$.

Крутний момент, який можна визначити із рівнянь статки через зовнішні моменти, являє собою сумарний момент елементарних пар внутрішніх зусиль, дотичних до площин перерізу:

$$T_{кр} = \int_A \rho \tau_\rho dA, \quad (5.3)$$

де τ_ρ – дотичне напруження, що виникає в площині на віддалі ρ від осі стрижня (рис. 5.4).

Розв’язок інтегрального рівняння (5.3) відносно дотичного напруження τ_ρ є складною математичною задачею в теорії пружності. Його розв’язання простими методами опору матеріалів можливе, якщо прийняти ряд гіпотез, які підтверджуються даними експериментів і результатами точного розв’язку:

1. Плоскі поперечні перерізи циліндричного вала до деформації залишаються плоскими і після деформації (*гіпотеза плоских перерізів*).

2. Радіуси поперечних перерізів не викривлюються.

3. У процесі деформації вала відстані між різними поперечними перерізами залишаються незмінними.

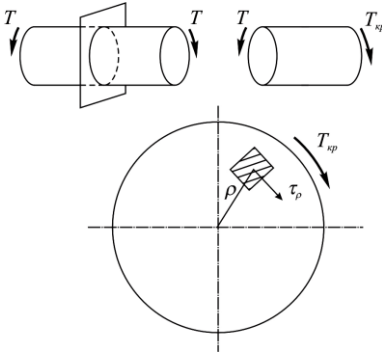


Рис. 5.4

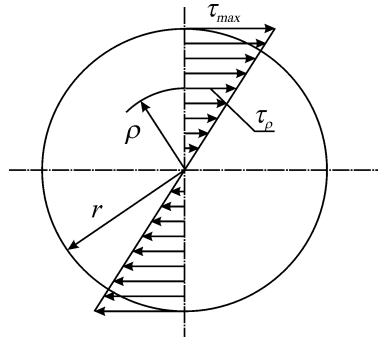


Рис. 5.5

Прийняті гіпотези еквівалентні припущенню, що деформація чистого зсуву при крученні, а, значить, і дотичне напруження τ_ρ , будуть **прямо пропорційні** відстані точок від центра перерізу. Якщо у формулі (5.3) підінтегральний вираз помножити і поділити на ρ , то відношення τ_ρ/ρ буде сталою величиною і його можна винести за знак інтеграла

$$T_{kp} = \int_A \rho^2 \cdot \frac{\tau_\rho}{\rho} dA = \frac{\tau_\rho}{\rho} \int_A \rho^2 dA = \frac{\tau_\rho}{\rho} I_p .$$

Звідси

$$\tau_\rho = \frac{T_{kp}}{I_p} \rho . \quad (5.4)$$

Епюра дотичних напружень τ_ρ показана на рис. 5.5. Максимальне напруження виникає біля контуру перерізу, для якого $\rho_{max} = r$:

$$\tau_{max} = \frac{T_{kp}}{I_p} r . \quad (5.5)$$

Змінивши відношення I_p/r **полярним моментом опору** W_p , дістанемо

$$\tau_{max} = \frac{T_{кр}}{W_p}, \quad (5.6)$$

де
$$W_p = \frac{1}{2} \pi r^3 \approx 0.2d^3.$$

5.3. Розрахунок валів на кручення

Розрахунок валів на кручення полягає в їх розрахунку на міцність і жорсткість. Умову міцності записують у вигляді

$$\tau_{max} = \frac{T_{кр}}{W_p} \leq [\tau], \quad (5.7)$$

де $[\tau] = \frac{\tau_{i\ddot{e}}}{n_{i\ddot{e}}}$; $[\tau] = \frac{\tau_{i\dot{o}}}{n_{i\dot{o}}}$ – допустиме дотичне напруження для

пластичних або крихких матеріалів.

На основі умови (5.7), можна розв'язувати задачі трьох типів:

а) визначення необхідного діаметра вала, якщо відомі крутний момент та допустиме напруження;

б) перевірка напружень, якщо відомі діаметр вала і крутний момент;

в) визначення допустимого моменту, яким можна навантажувати вал певного діаметра з відомого матеріалу.

При визначенні діаметра вала знаходять спочатку необхідний момент опору:

$$W_p = \frac{T_{кр}}{[\tau]}. \quad (5.8)$$

Звідки

$$d = \sqrt[3]{\frac{T_{кр}}{0.2 \cdot [\tau]}}.$$

Для трубчатого вала $W_p = 0.2D^3(1 - \alpha^4)$.

Тоді
$$D = \sqrt[3]{\frac{T_{кр}}{0.2 \cdot [\tau] (1 - \alpha^4)}}, \alpha = d/D.$$

Допустимий крутний момент шукається за формулою

$$[M]_{кр} = W_p \cdot [\tau]. \quad (5.10)$$

Може статись, що вал, задовольняючи умову міцності, буде недостатньо жорстким. Це може привести до виникнення небезпечних коливань. Тому дуже часто ставиться умова, щоб крім міцності вал мав достатню жорсткість, тобто виконувалась умова:

$$\theta = \frac{T_{кр}}{G I_p} \leq [\theta], \quad (5.11)$$

де $[\theta] = \varphi/l$ – допустимий відносний кут закручування, унормований технічними умовами. Залежно від призначення вала його величина може прийматись в границях:

$$[\theta] = (0,26 \div 3,5) \cdot 10^{-2} \text{ рад/м},$$

а в градусах на метр – $[\theta] = (0,15 \div 2) \text{ град/м}$.

З виразу (5.11) знаходимо

$$I_p = \frac{T_{кр}}{G \cdot [\theta]}.$$

У випадку суцільного вала, підставивши $I_p = \pi d^4/32$, знаходимо

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot T_{кр}}{G \cdot \pi \cdot [\theta]}}. \quad (5.12)$$

Для трубчатого вала

$$I_p = \frac{\pi D^2}{32} (1 - \alpha^4).$$

Отже,

$$D = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot T_{кр}}{G \cdot \pi \cdot [\theta] \cdot (1 - \alpha^4)}}. \quad (5.13)$$

Таким чином, визначивши діаметри вала із умови міцності та умови жорсткості, вибираємо більший і заокруглюємо до ближчого стандартного, який би дорівнював: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм.

Для визначення величини крутних моментів потрібно знати величину моментів зовнішніх пар сил, що передаються на вал. Останні знаходяться, якщо відома потужність P , що передається на вал при відомій кутовій швидкості ω його обертового руху.

Якщо потужність задана в кіловатах, а швидкість обертання – в радіанах на секунду, то між цими величинами існує залежність

$$T = 1000 \frac{P}{\omega}, \text{ Н} \cdot \text{м}. \quad (5.14)$$

В більшості випадків при розрахунку вала відома потужність P і швидкість обертання – n , обертів за хвилину, тоді, виходячи з формули $\omega = n\pi/30$ та формули (5.14), дістаємо

$$T = 9,549 \frac{P}{n}, \text{ кН} \cdot \text{м}. \quad (5.15)$$

5.4. Кручення стрижнів некруглих перерізів

При крученні стрижнів чи валів круглих перерізів визначення напружень та кутів закручування було обумовлене прийняттям низки гіпотез. Однією із основних гіпотез була гіпотеза плоских перерізів. У випадку стрижня некруглого перерізу (наприклад, прямокутного) ця гіпотеза не може бути справедливою, бо навіть при візуальному спостереженні видно (рис. 5.6) як сітка прямих ліній, що перед цим була нанесена на брус (стрижень) прямокутного перерізу, викривлюється, а перерізи, які були до деформації плоскими, набувають хвилястої форми. Явище викривлення поперечних перерізів називається

депланацією і є наслідком появи при крученні поздовжніх переміщень.

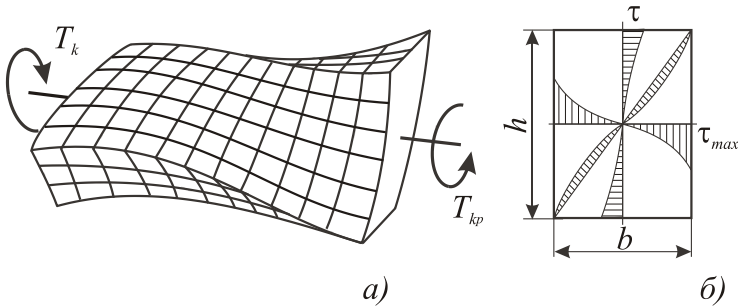


Рис. 5.6

Тому, в опорі матеріалів, для визначення напружень та кутів закручування некруглих перерізів стрижня, використовуються *емпіричні* формули. Тобто такі формули, які за допомогою певних коефіцієнтів погоджуються із відповідними формулами теорії пружності. Так, максимальні дотичні напруження, що діють посередині довшої сторони прямокутного перерізу (рис. 5.6, б) визначаються за формулою:

$$\tau_{max} = \frac{T_{kp}}{W_{kp}}, \quad (5.16)$$

де $W_{kp} = \beta hb^2$ – полярний момент опору прямокутного перерізу при крученні.

Кут закручування перерізів стрижня також знаходиться за формулою, яка аналогічна відповідній формулі опору матеріалів (5.2) для стрижнів круглого перерізу:

$$\varphi = \frac{T_{kp} l}{GI_{kp}}, \quad (5.17)$$

де $I_{kp} = \alpha hb^3$ – геометрична характеристика прямокутного перерізу, що за розмірністю відповідає полярному моменту інерції перерізу. Коефіцієнти α і β знаходяться емпірично і залежать від відношення сторін прямокутника. Напруження

посередині коротшої сторони прямокутника визначається за формулою

$$\tau = \gamma \tau_{max} \quad (5.18)$$

Коефіцієнти α , β , γ для різних відношень сторін прямокутника беруть із таблиці 5.1:

Таблиця 5.1. Коефіцієнти α , β , γ

h/b	α	β	γ	h/b	α	β	γ
1,0	0,141	0,208	1,000	5,0	0,291	0,291	0,744
1,5	0,196	0,231	0,859	6,0	0,299	0,299	0,743
2,0	0,229	0,246	0,795	8,0	0,307	0,307	0,742
3,0	0,263	0,267	0,753	10,0	0,313	0,313	0,742
4,0	0,281	0,282	0,745	∞	0,333	0,333	0,742

Аналіз формул (5.16), (5.17) та коефіцієнтів, наведених у таблиці, дозволяє зробити висновок, що при чистому крученні стрижнів, що мають поперечні перерізи у вигляді вузьких прямокутників ($h/b \geq 10$), коефіцієнти α і β рівні між собою і дорівнюють $1/3$. Тому для таких перерізів геометричні характеристики можна шукати за спрощеними формулами:

$$I_{kp} = \frac{1}{3} hb^3, \quad W_{kp} = \frac{1}{3} hb^2. \quad (5.19)$$

Такі стрижні ще називають тонкостінними стрижнями відкритого профілю. Їх перерізи можуть складатися з однієї або кількох вузьких смужок (рис. 5.7).

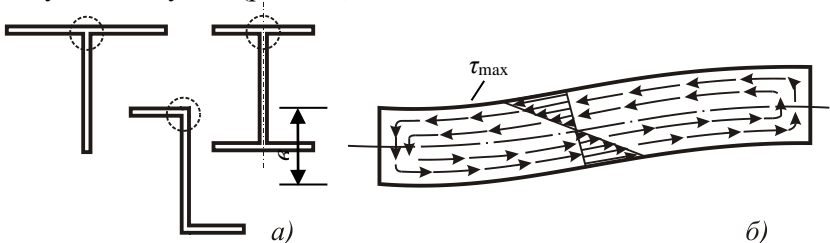


Рис. 5.7

Момент інерції такого перерізу обчислюється як сума моментів інерції кожної смужки окремо:

$$I_k = \frac{1}{3} \eta \sum_{i=1}^n h_i b_i^3, \quad (5.20)$$

де η – поправочний коефіцієнт, що залежить від форми (обрису) перерізу: для кутника $\eta = 1,0$; для швелера $\eta = 1,12$; для тавра $\eta = 1,15$; для двотавра $\eta = 1,2$.

Вважається, що по товщині стінки (смужки перерізу) дотичні напруження розподіляються за лінійним законом і “обтікають” контур поперечного перерізу, як показано на рис. 5.7, б. Найбільші дотичні напруження виникають посередині довжини прямокутної смужки з найбільшою товщиною і визначаються за формулою:

$$\tau_{max} = \frac{T_{kp}}{I_{kp}} b_{max}, \quad (5.21)$$

де b_{max} – найбільша ширина смужки у складному перерізі.

У випадку, коли смужки утворюють замкнутий профіль, то його жорсткість збільшується у десятки разів, тому що у цьому випадку плече пари внутрішніх сил має величину порядку “діаметра” d перерізу, що обмежується середньою лінією стінки профілю (рис. 5.8 а, б). Дотичні напруження, що виникають у стінках замкнутого перерізу ($\tau_{з.}$), вважаються приблизно однаковими по всій товщині стінки.

$$\tau_{з.} = \frac{T_{kp}}{W_{kp}^{з.}}, \quad (5.22)$$

де для замкнутого профілю (сталого товщини b) геометричні характеристики дорівнюють: $I_{kp}^{з.} = 4bS_{cp}^2/l_{cp}$; $W_{kp}^{з.} = 2A_{cp}b$; $l_{cp} = \sum h_i$ – сумарна довжина контуру; A_{cp} – площа контуру, що обмежена середньою лінією.

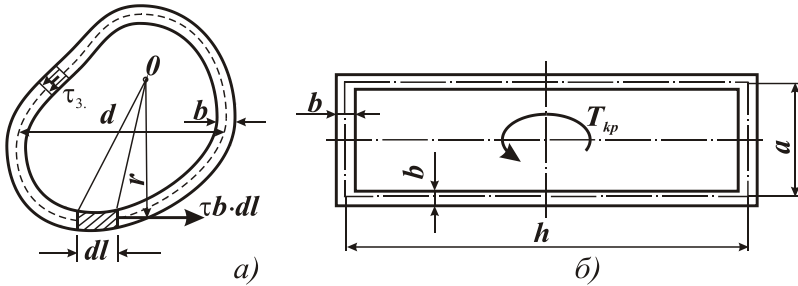


Рис. 5.8

Для кругового тонкостінного кільця (з середнім діаметром d та товщиною b) площа контуру $A_{cp} = \pi d^2$, а геометричні характеристики I_k^3 , W_k^3 будуть наступними:

$$I_k^3 = \frac{1}{4} \pi b d^3, \quad W_k^3 = 2I_k^3 / d = \frac{1}{2} \pi b d^2. \quad (5.23)$$

Порівняємо кут закручування та дотичного напруження стрижня відкритого профілю ($\varphi_{\epsilon.}, \tau_{\epsilon.}$) з відповідними характеристиками стрижня замкнутого профілю – φ_3, τ_3 .

$$\frac{\varphi_{\epsilon.}}{\varphi_3} = \frac{T_{kp} l}{GI_{kp}^{\epsilon.}} \cdot \frac{GI_k^3}{T_{kp} l} = \frac{3\pi b d^3}{4\pi d b^3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{d^2}{b^2} = \frac{3d^2}{4b^2};$$

$$\frac{\tau_{\epsilon.}}{\tau_3} = \frac{M_k}{W_k^{\epsilon.}} \cdot \frac{W_k^3}{M_k} = \frac{3}{2} \cdot \frac{d}{b} = \frac{3d}{2b}.$$

Отже, при однакових крутних моментах стрижень замкнутого профілю у d^2/b^2 жорсткіший від стрижня відкритого профілю, а максимальні напруження в ньому у d/b раз менші від напружень, що виникають у стрижні відкритого профілю.

Прийнявши, наприклад, $b = 0,1d$, одержимо значення відношень $\varphi_{\epsilon.}/\varphi_3 = 75$, а $\tau_{\epsilon.}/\tau_3 = 15$. При збільшенні відношення d/b у два рази – відношення між напруженнями збільшується у стільки ж, а відношення між кутами закруту збільшується вже у

чотири рази.

Приклад 1.

Для заданого вала (рис. 5.9) визначити діаметри окремих його ділянок (з умови міцності на кручення за заданим запасом міцності $n_{ми} = 2.7$) і величину кутів закруту на окремих ділянках, порівнявши їх з величиною допустимого кута закруту, якщо $[\theta] = 2 \text{ град/м}$, $a = 0.4 \text{ м}$.

На валі є один ведучий і чотири ведені шківів, потужності яких на шківках:

$$P_1 = 4 \text{ кВт}; P_2 = 1 \text{ кВт}; P_3 = 2 \text{ кВт}; K_4 = 3 \text{ кВт},$$

при кутовій швидкості $\omega = 150 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Матеріал вала – алюмінієвий сплав АМГ, для якого модуль зсуву

$$G = 2,7 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 2,7 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Розв'язок.

1. Визначаємо потужність P_0 на ведучому шківі вала

$$P_0 = -P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = -4 + 1 + 2 + 3 = 2 \text{ кВт}.$$

Напрямок T_0 буде співпадати з моментом T_1 .

2. Знаходимо крутні моменти, що передаються на вал за формулою

$$T = 100 \frac{P}{\omega} [\text{кН} \cdot \text{см}]; T_1 = 100 \frac{4}{150} = 2,67 \text{ кН} \cdot \text{см};$$

$$T_2 = 100 \frac{1}{150} = 0,67 \text{ кН} \cdot \text{см}; T_3 = 100 \frac{2}{150} = 1,33 \text{ кН} \cdot \text{см};$$

$$T_4 = 100 \frac{2}{150} = 2 \text{ кН} \cdot \text{см}.$$

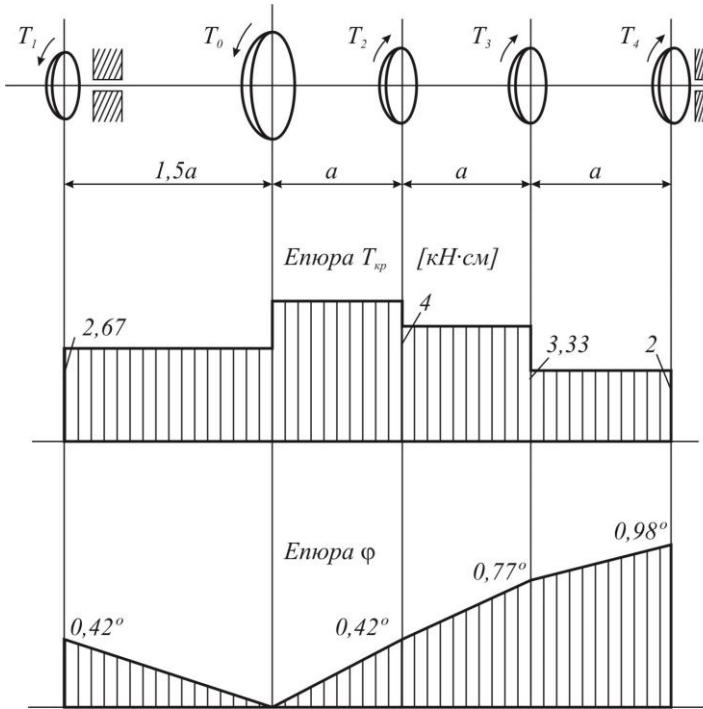


Рис. 5.9

Момент T_0 на ведучому валі знаходимо з умови рівноваги

$$\sum (T)_{кр} = 0; -T_1 - T_0 + T_2 + T_3 + T_4 = 0;$$

$$T_0 = T_2 + T_3 + T_4 - T_1 = 1,33 \text{ кН} \cdot \text{см}.$$

3. Знаходимо крутні моменти на окремих проміжках:

на проміжку 1-0:

$$T_{кр} = T_1 = 2,67 \text{ кН} \cdot \text{см};$$

на проміжку 0-2:

$$T_{кр} = T_1 + T_0 = 2,67 + 1,33 = 4 \text{ кН} \cdot \text{см};$$

на проміжку 2-3:

$$T_{кр} = T_1 + T_0 - T_2 = 2,67 + 1,33 - 0,67 = 3,33 \text{ кН} \cdot \text{см};$$

на проміжку 3-4:

$$t_{кр} = T_1 + T_0 - T_2 - T_3 = 2,67 + 1,33 - 0,67 - 1,33 = 2 \text{ кН} \cdot \text{см}.$$

За одержаними даними будуюмо епюру крутних моментів (рис. 5.9, б).

4. Допустиме дотичне напруження для сплаву АМГ при коефіцієнті запасу $n_{мц} = 2,7$ дорівнює

$$[\tau] = 0,5[\sigma] = 0,5 \frac{\sigma_{мц}}{n_{мц}} = 0,5 \cdot \frac{210}{2,7} = 38,9 \text{ МПа} = 3,89 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

5. З умови міцності знаходимо необхідні діаметри вала і заокруглюємо їх до стандартних значень

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{T_{кр}}{0,2[\tau]}}; d_1 = \sqrt[3]{\frac{2,67}{0,2 \cdot 3,89}} = 1,5 \text{ см}.$$

Приймаємо $d_1 = 30 \text{ мм}$.

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{4}{0,2 \cdot 3,89}} = 1,7 \text{ см}; \text{ приймаємо } d_2 = 30 \text{ мм}.$$

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{3,33}{0,2 \cdot 3,89}} = 1,6 \text{ см}; \text{ приймаємо } d_3 = 30 \text{ мм}.$$

$$d_4 = \sqrt[3]{\frac{2}{0,2 \cdot 3,89}} = 1,4 \text{ см}; \text{ приймаємо } d_4 = 30 \text{ мм}.$$

Отже, для всіх ділянок вала діаметр буде один $d = 30 \text{ мм}$.

6. Кути закруту на окремих ділянках вала знаходимо за формулою (5.2), де полярний момент інерції вала дорівнює

$$I_p = 0,1d^4 = 0,1 \cdot 3^4 = 8,1 \text{ см}^4.$$

Відрізок 1-0:

$$\varphi_{1-0} = \frac{2,67 \cdot 1,5 \cdot 40 \cdot 180^\circ}{2,7 \cdot 10^3 \cdot 8,1 \cdot 3,14} = 0,42^\circ.$$

Відрізок 0-2:

$$\varphi_{0-2} = \frac{4 \cdot 40 \cdot 180^\circ}{2,7 \cdot 10^3 \cdot 8,1 \cdot 3,14} = 0,42^\circ.$$

Відрізок 2-3:

$$\varphi_{3-2} = \frac{3,33 \cdot 40 \cdot 180^\circ}{2,7 \cdot 10^3 \cdot 8,1 \cdot 3,14} = 0,35^\circ.$$

Відрізок 3-4:

$$\varphi_{3-4} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 180^\circ}{2,7 \cdot 10^3 \cdot 8,1 \cdot 3,14} = 0,21^\circ.$$

За одержаними даними будуємо епюру кутів закручування (рис. 5.9, б).

Знаходимо відносні кути закручування $\theta = \varphi/l$:

$$\theta_{1-0} = \frac{\varphi_{1-0}}{1,5 \cdot a} = \frac{0,42}{1,5 \cdot 0,4} = 0,7 \left(\frac{\text{град}}{\text{м}} \right) < [\theta];$$

$$\theta_{0-2} = \frac{\varphi_{0-2}}{a} = \frac{0,42}{0,4} = 1,05 \left(\frac{\text{град}}{\text{м}} \right) < [\theta];$$

$$\theta_{2-3} = \frac{\varphi_{2-3}}{a} = \frac{0,35}{0,4} = 0,87 \left(\frac{\text{град}}{\text{м}} \right) < [\theta];$$

$$\theta_{3-4} = \frac{\varphi_{3-4}}{a} = \frac{0,21}{0,4} = 0,52 \left(\frac{\text{град}}{\text{м}} \right) < [\theta].$$

Всі відносні кути закручування менші від допустимого. Отже, жорсткість вала на всіх його ділянках забезпечена.

Приклад 2.

До сталевого вала (рис. 5.10, а) прикладені три відомих крутні моменти:

$$T_1 = 1,1 \text{ кН} \cdot \text{м}; T_2 = 1,5 \text{ кН} \cdot \text{м}; T_3 = 1,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

і один невідомий – X , який прикладений до правого кінцевого перерізу.

Необхідно:

1) установити, при якому значенні X кут повороту правого кінцевого перерізу вала дорівнює нулю;

2) для знайденого X побудувати епюру крутних моментів;

- 3) підібрати діаметр вала сталого поперечного перерізу з умови міцності, поклавши $[\tau] = 40 \text{ МПа}$ і заокруглити його до найближчого стандартного розміру;
 4) побудувати епюру кутів закруту.

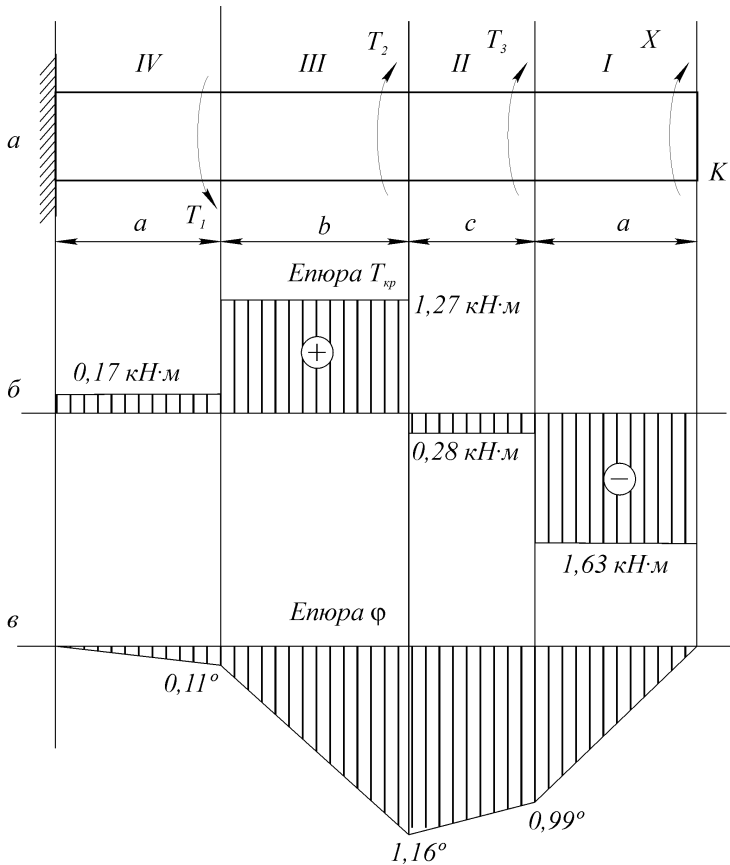


Рис. 5.10

Розміри ділянок вала дорівнюють: $a = 1,1 \text{ м}$, $b = 1,5 \text{ м}$; $c = 1,4 \text{ м}$. Приймаємо для сталі $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Вказівка.

При розв'язанні цієї задачі необхідно скористатись принципом суперпозиції. Згідно з цим принципом, кут повороту

кінцевого перерізу вала від дії системи крутних моментів можна одержати як суму результатів дії кожного з цих моментів, прикладених до вала послідовно або у довільному порядку.

Розв'язок.

Невідомий момент X знайдемо із рівняння переміщень $\varphi_K = 0$, тобто

$$-\varphi(T_1) + \varphi(T_2) + \varphi(T_3) + \varphi(X) = 0;$$

$$-\frac{T_1 a}{GI_p} + \frac{T_2(a+b)}{GI_p} + \frac{T_3(a+b+c)}{GI_p} + \frac{X(2a+b+c)}{GI_p} = 0.$$

Помноживши праву і ліву частину рівняння на величину GI_p , і, підставивши числові значення, одержимо

$$-1,1 \cdot 1,1 + 1,5 \cdot (1,1 + 1,5) + 1,4 \cdot (1,1 + 1,5 + 1,4) +$$

$$+ X \cdot (2 \cdot 1,1 + 1,5 + 1,4) = 0.$$

Звідки:

$$X = -\frac{8,29}{5,1} = -1,63 (\text{кН} \cdot \text{м}).$$

Для побудови епюри $T_{кр}$ знаходимо значення крутних моментів на кожному відрізку вала.

$$T_I = X = -1,63 (\text{кН} \cdot \text{м});$$

$$T_{II} = X + T_3 = -1,63 + 1,4 = -0,23 (\text{кН} \cdot \text{м});$$

$$T_{III} = X + T_3 + T_2 = -1,63 + 1,4 + 1,5 = 1,27 (\text{кН} \cdot \text{м});$$

$$T_{IV} = T_{III} - T_1 = 1,27 - 1,1 = 0,17 (\text{кН} \cdot \text{м}).$$

Епюра $T_{кр}$ побудована на рис. 5.10, б.

Діаметр вала визначимо з умови міцності на кручення

$$\tau_{max} = \frac{T_{кр}^{max}}{W_p} \leq [\tau].$$

Знаходимо значення полярного моменту опору

$$W_p = \frac{T_{кр}^{max}}{[\tau]} = \frac{1.63}{40 \cdot 10^3} = 0.407 \cdot 10^{-4} (\text{м}^3) = 40.7 (\text{см}^3).$$

Скориставшись наближеною формулою $W_p \approx 0.2d^3$, знайдемо необхідний діаметр перерізу вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{W_p}{0.2}} = \sqrt[3]{\frac{40.7}{0.2}} = 5.88 (\text{см}).$$

Приймаємо $\nu = 60 \text{ мм} = 6 \text{ см}$.

Полярний момент інерції дорівнює

$$I_p = 0,1d^4 = 0,1 \cdot 6^4 = 130 (\text{см}^4).$$

Жорсткість при крученні дорівнює

$$GI_p = 8 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \cdot 130 \cdot 10^{-8} = 104 (\text{кН} \cdot \text{м}^2).$$

Епюру кутів закруту будуємо, починаючи від лівого, замкненого перерізу вала за формулою (5.2).

Для кожної ділянки одержимо

$$\varphi_I = -\frac{1.63 \cdot 1.1 \cdot 180^\circ}{104 \cdot 3.14} = -0.99^\circ;$$

$$\varphi_{II} = -\frac{0.23 \cdot 1.4 \cdot 180^\circ}{104 \cdot 3.14} = -0.17^\circ;$$

$$\varphi_{III} = \frac{1.27 \cdot 1.5 \cdot 180^\circ}{104 \cdot 3.14} = 1.05^\circ; \quad \varphi_{IV} = \frac{0.17 \cdot 1.1 \cdot 180^\circ}{104 \cdot 3.14} = 0.11^\circ;$$

$$\varphi_{IV} + \varphi_{III} + \varphi_{II} + \varphi_I = 0.$$

Отже, момент X знайдено правильно. Епюра φ побудована на рис. 5.10, в.

Знаходимо найбільший відносний кут закручування:

$$\theta_I = \left| \frac{\varphi_I}{l_I} \right| = \frac{0.99}{1.1} = 0.9 \frac{\text{град}}{\text{м}}; \quad \theta_{III} = \left| \frac{\varphi_{III}}{l_{III}} \right| = \frac{1.05}{1.5} = 0.7 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

Найбільший відносний кут закручування на 1 м довжини вала виникає на першій ділянці і дорівнює

$$\theta_{max} = \theta_I = 0.9 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Коли виникає деформація кручення стрижня?
2. Яка величина називається крутним моментом?
3. Яке правило знаків для крутних моментів?
4. Як можна записати закон Гука для кручення?
5. Запишіть вираз для крутного моменту в інтегральному вигляді.
6. Сформулюйте гіпотези, які використовуються при виводі формул для дотичних напружень у валах, що закручуються.
7. Запишіть умову міцності вала, що закручується.
8. Запишіть умову жорсткості вала, що закручується.
9. Як записується крутний момент через потужність, що передається на вал, та швидкість обертання?
10. Запишіть формули для напружень та кутів закруту для стрижнів некруглих перерізів.
11. У яких місцях перерізів відкритого профілю виникають найбільші дотичні напруження?
12. Як записуються геометричні характеристики для перерізів у вигляді вузьких прямокутників?
13. Як будуються епюри кутів закруту вала?
14. Запишіть формулу для визначення діаметра вала, виходячи з умови жорсткості.

ТЕМА 6 (лекція 12) РОЗРАХУНОК ЦИЛІНДРИЧНИХ ПРУЖИН З МАЛИМ КРОКОМ

6.1. Визначення напружень в циліндричній пружині

Гвинтові циліндричні пружини є одними із найпоширеніших елементів механізмів у техніці та машинобудуванні. Точний розрахунок таких пружин досить складний, оскільки дріт пружини може одночасно зазнавати деформацій кручення, зсуву та згину. Разом з тим, якщо кут нахилу витків невеликий, то впливом згину можна знехтувати. А при великих відношеннях діаметрів пружини і дроту можна буде знехтувати також і зсувом.

Для розрахунку пружин з малим кутом нахилу витків ($\varphi \leq 10 \div 15^\circ$) можна використати формули для напружень і переміщень, які виникають у стрижнях при їх крученні та зсуві.

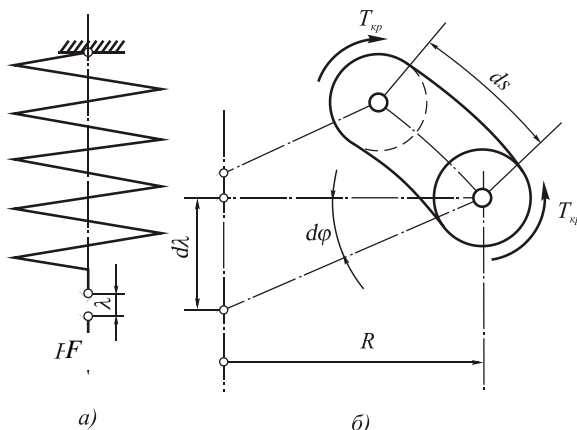


Рис. 6.1

Визначимо напруження у поперечному перерізі витка пружини, що навантажена розтягувальною силою F (рис. 6.1 а). Цей виток перебуває під дією навантаження, що зводиться до пари сил з крутним моментом T_{sp} та перерізуючої сили F у площині перерізу. Від обох цих навантажень у поперечному перерізі витка пружини виникають дотичні напруження

(рис. 6.2, а, б). Сумарне дотичне напруження досягає максимального значення біля крайньої внутрішньої точки перерізу (рис. 6.2, в)

$$\tau_{\max} = \tau_{\text{кр}} + \tau_F = \frac{T_{\text{кр}}}{W_p} + \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2} \left(\frac{2R}{r} + 1 \right), \quad (6.1)$$

де R – радіус витка пружини, r – радіус круглого дроту пружини.

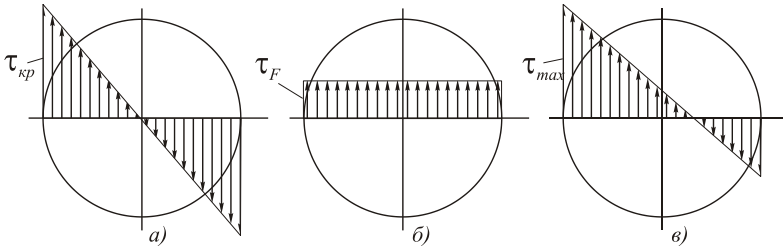


Рис. 6.2

Якщо у формулі (6.1) відношення $\frac{2R}{r}$ значно більші від одиниці, то цією одиницею в дужках можна знехтувати, а напруження обчислювати наближено

$$\tau_{\max} \approx \frac{2FR}{\pi r^3}. \quad (6.2)$$

При точніших розрахунках максимальні дотичні напруження τ_{\max} , що виникають у поперечних перерізах витків пружини з середнім діаметром витків $D=2R$, виготовленої з круглого дроту діаметром $d=2r$ і навантаженої розтягувальним або стискувальним зусиллям P , визначаються за формулою

$$\tau_{\max} = k \frac{T_{\text{кр}}}{W_p}, \quad (6.3)$$

де $T_{\text{кр}}$ – крутний момент, що виникає у поперечному перетині витка пружини від дії зусилля P ,

$$T_{\text{кр}} = F \cdot R = F \cdot \frac{D}{2};$$

W_p – полярний момент опору поперечного перерізу витка пружини,

$$W_p = \pi \cdot d^3 / 16 ;$$

k – поправочний коефіцієнт, що враховує вплив поперечної сили, згину, осьової сили, що виникають у витках пружини.

Коефіцієнт k залежить від відношення d/D і визначається за емпіричною залежністю

$$k = \frac{1 - 0.25 d/D}{1 - d/D} + 0.615 d/D .$$

Легко бачити, що коефіцієнт k збільшується із збільшенням відношення d/D . Так, для $\frac{d}{D} = \frac{1}{20}$ цей коефіцієнт дорівнює 1,07, а у випадку $\frac{d}{D} = \frac{1}{5}$ він приблизно дорівнює 1,31.

6.2. Визначення переміщень циліндричної пружини та систем пружин. Потенціальна енергія деформації пружини

Для визначення загального переміщення пружини знайдемо елементарне переміщення елемента пружини, який можна умовно вирізати двома січними площинами, що проходять через вісь пружини (рис. 6.1, б). Цей елемент, довжиною ds , знаходиться під дією крутних моментів $T_{кр}$, що прикладені до його кінців.

Поворот кінцевих перерізів один відносно одного на кут закручування $d\varphi$ викликає переміщення $d\lambda$, причому

$$d\lambda = R d\varphi = R \cdot \frac{FR ds}{G \cdot I_p} , \quad (6.4)$$

де G – модуль зсуву матеріалу пружини, $I_p = \pi r^4 / 2$ – полярний момент інерції перерізу дроту пружини, $s \approx 2\pi R n$, n – число витків пружини.

Інтегрування рівності (6.4) по довжині витків пружини s приводить до формули для сумарного переміщення λ

$$\lambda = \frac{\pi n F D^3}{4 G I_p} = \frac{8 F D^3 n}{G d^4} , \quad (6.5)$$

Формулу (6.5) можна записати і в іншому вигляді

$$\lambda = \frac{F}{C}, \quad (6.6)$$

де $C = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n} \cdot \left[\frac{H}{M} \right]$ – жорсткість пружини.

При розрахунках системи пружин різних жорсткостей C_1, C_2, \dots, C_n , що з'єднані між собою послідовно, сумарна їх жорсткість C визначається в залежності

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}.$$

Якщо пружини з'єднані паралельно, то $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$.

Крім поздовжнього навантаження, на циліндричну пружину може діяти і поперечне навантаження. При згині пружини, закріпленої одним кінцем та навантаженої поперечною силою P на іншому, переміщення вільного кінця буде дорівнювати

$$\lambda = \frac{\pi n P R l^2}{3EI} \left(1 + \frac{E}{2G} + \frac{3R^2}{l^2} \right), \quad (6.7)$$

де n, R, l – кількість витків, радіус та довжина пружини; I – момент інерції перерізу дроту; E, G – модулі пружності та зсуву матеріалу дроту пружини.

У багатьох випадках пружина оцінюється її здатністю поглинати певну частину кінетичної енергії, що появляється в конструкції чи машині від несподіваних динамічних ударів та поштовхів, яких вона може зазнати. Згадана енергія не повинна перевищувати ту потенціальну енергію деформації пружини, яку вона може накопичити в собі. Для знаходження цієї енергії, за умови лінійної залежності між зміщенням пружини λ та силою F , що діє на неї, використовують формулу

$$U = \frac{1}{2} F \lambda = \frac{4nF^2 D^3}{Gd^4}. \quad (6.8)$$

Виразивши крутний момент $T_{\text{ед}} = F \cdot D/2$, що скручує витки пружини, через відповідне максимальне дотичне

напруження τ_{\max} та інші геометричні характеристики пружини, формула (6.8)

може бути зведена до вигляду

$$U = \frac{\tau_{\max}^2}{4G} V_0, \quad (6.9)$$

де $\tau_{\max} = \frac{16FR}{\pi d^3}$; $V_0 = 2\pi Rn \frac{\pi d^2}{4}$ – початковий об'єм пружини.

Потенціальна енергія деформації пружини досягне свого граничного значення при набутті максимальним дотичним напруженням відповідного граничного значення $\tau_{\max} = \tau_{\text{до}}$. Тоді допустима потенціальна енергія пружини, що може поглинути певну частину кінетичної енергії T буде дорівнювати

$$[U] = \frac{[\tau]^2}{4G} V_0 = T. \quad (6.10)$$

З формули (6.10) легко вивести формулу для розрахункового початкового об'єму V_0 пружини (через параметри R, d, n), що може поглинути задану величину кінетичної енергії T –

$$V_0 = \frac{4GT}{[\tau]^2}. \quad (6.11)$$

Методи розрахунку нециліндричних пружин є значно складнішими і їх можна знайти в спеціальній літературі.

6.3. Практичний розрахунок статично невизначних систем циліндричних пружин

Для заданої статично невизначної системи пружин (рис. 6.3) визначити переміщення точки A , найбільше напружену пружину і величину напруження в ній, якщо середній діаметр більшої пружини $D_o = 30 \text{ см}$, меншої $D_m = 10 \text{ см}$, діаметр дроту більшої пружини $d_o = 3 \text{ см}$, меншої $d_m = 2 \text{ см}$, матеріал їх – сталь ($G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$). Число витків кожної пружини $n_1 = 100$, $n_2 = 80$, $n_3 = 60$.

Навантаження F , прикладене до системи пружин в точці B , рівне $F = 2 \hat{e}l$.

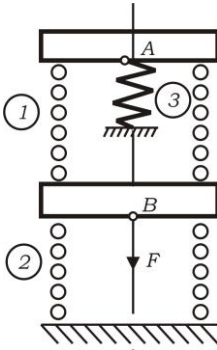


Рис. 6.3

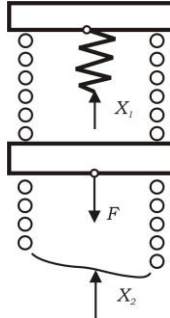


Рис. 6.4

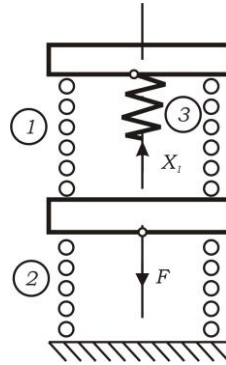


Рис. 6.5

Розв'язок.

Реакції, що виникають в системі під дією сили F , позначуємо відповідно через X_1 і X_2 (рис. 6.4).

Рівняння статки набуває вигляду

$$X_1 + X_2 - F = 0, \quad (a)$$

Оскільки більше рівнянь статки скласти неможливо, то задача один раз статично невизначна, і для її розв'язання треба записати ще одне рівняння переміщень. Умовно відкинемо верхню опору пружини і запишемо умову відсутності переміщення опорного перерізу пружини 3 (рис. 6.5).

$$X_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) - \frac{F}{C_2} = 0, \quad (б)$$

звідки

$$X_1 = \frac{F}{1 + \frac{C_2}{C_1} + \frac{C_2}{C_3}}.$$

Враховуючи (a), знаходимо

$$X_2 = F - X_1. \quad (в)$$

Обчислюємо відношення жорсткостей пружин

$$\frac{C_2}{C_1} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3 \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 \left(\frac{n_1}{n_2}\right) = 1,25;$$

$$\frac{C_2}{C_3} = \left(\frac{D_3}{D_2}\right)^3 \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^4 \left(\frac{n_3}{n_2}\right) = 0,14.$$

Отже, шукані реакції, які є одночасно зусиллями F_i у відповідних пружинах, дорівнюють

$$X_1 = F_1 = -F_3 = \frac{2000}{1 + 1,25 + 0,14} = 840 \text{ Н},$$

$$X_2 = -F_2 = 2000 - 840 = 1160 \text{ Н}.$$

Полярні моменти опору поперечних перерізів пружин

$$W_2 = W_1 = \frac{\pi d_b^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 3^3}{16} = 5,3 \text{ см}^3 = 5,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$W_3 = \frac{\pi d_m^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 2^3}{16} = 1,57 \text{ см}^3 = 1,57 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Поправочні коефіцієнти

$$k_1 = k_2 = \frac{1 - 0,25 \frac{3}{30}}{1 - \frac{3}{30}} + 0,615 \frac{3}{30} = 1,142,$$

$$k_3 = \frac{1 - 0,25 \frac{2}{10}}{1 - \frac{2}{10}} + 0,615 \frac{2}{10} = 1,308.$$

Максимальні дотичні напруження у пружинах дорівнюють:
у пружині 1:

$$\tau_{\max_1} = 1,142 \frac{840 \cdot 0,15}{5,3 \cdot 10^{-6}} = 272 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2};$$

у пружині 2:

$$\tau_{\max_2} = 1,142 \frac{1160 \cdot 0,15}{5,3 \cdot 10^{-6}} = 373 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2};$$

у пружині 3:

$$\tau_{\max_3} = 1,308 \frac{840 \cdot 0,15}{1,5 \cdot 10^{-6}} = 350 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2}.$$

Отже пружина 3 є найбільш напруженою пружиною.

Переміщення точки А можна обчислити як осадку пружини 3, тобто

$$\lambda_3 = \frac{X_1}{C_3} = \frac{840 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 60}{8 \cdot 10^{10} \cdot 2^4 \cdot 10^{-8}} = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,2 \text{ см}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Які деформації враховуються за розрахунку циліндричної пружини?
2. Запишіть вираз дотичного напруження в циліндричній пружині.
3. Які фактори враховує поправочний у формулі для напружень?
4. Запишіть вираз для сумарного переміщення витків пружини.
5. Як записується сумарна жорсткість системи пружин за різних способів їх з'єднання?
6. Розкажіть про порядок розрахунку статично невизначної системи пружин.
7. Як записується переміщення пружини, защемленої одним кінцем і навантаженої поперечною силою на іншому?
8. Запишіть формулу для потенціальної енергії деформації пружини.
9. Запишіть вираз для розрахункового початкового об'єму пружини.

ТЕМА 7 (лекції 13,14) НАПРУЖЕНИЙ ТА ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН У ТОЧЦІ ТІЛА

7.1. Поняття про просторовий напружений стан

Розглянемо пружне тіло, яке навантажене зрівноваженою системою сил (рис. 7.1). Навколо довільної точки M всередині цього тіла виділимо елементарний (нескінченно малий) паралелепіпед, що має грані, паралельні відповідним координатним осям Ox , Oy , Oz .

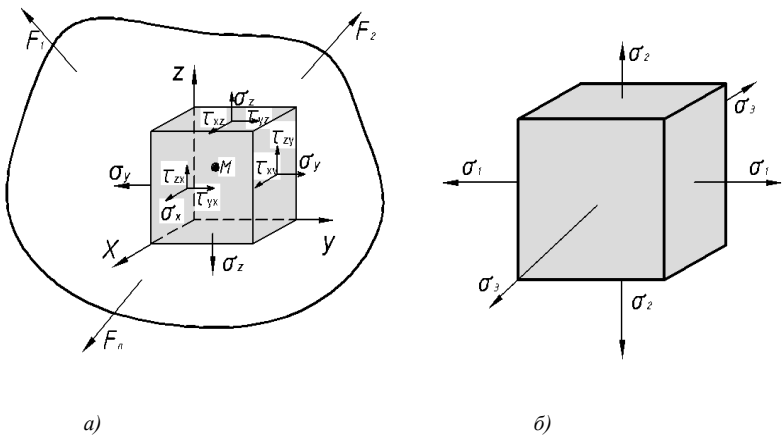


Рис. 7.1

На гранях цього паралелепіпеда виникають три нормальні - $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ і шість дотичних - $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ напружень. Ці напруження можна записати у вигляді таблиці (матриці), де на головній діагоналі будуть записані нормальні напруження, а відповідні дотичні напруження, що діють на даній грані, будуть розташовані вище, або нижче нормальних напружень в стовпчику цієї квадратної матриці:

$$\{T_{\sigma}\} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Така матриця буде симетричною, бо за *законом парності дотичних напружень* (1.10) між дотичними напруженнями, що діють на двох взаємно перпендикулярних площинках справедливі рівності:

$$|\tau_{yx}| = |\tau_{xy}|; |\tau_{zx}| = |\tau_{xz}|; |\tau_{zy}| = |\tau_{yz}|. \quad (7.1)$$

Побудовану таким чином симетричну квадратну матрицю $\{T_\sigma\}$ називають ще *тензором напружень*. Напруження, які є складовими тензора напружень, називають *компонентами тензора напружень*. Наявність тензора напружень означає, що нам відомі всі напруження, які діють на будь-яких площинках, проведених в околі точки, тобто напружений стан в точці тіла повністю відомий.

Якщо одночасно на трьох взаємно перпендикулярних гранях паралелепіпеда будуть діяти нормальні напруження (незалежно від величини дотичних), то такий напружений стан у даній точці тіла буде називатися *просторовим* або *тривимірним*. Разом з тим, легко показати, що завжди можна знайти таких три взаємно перпендикулярні напрямки, які служать нормальними до площинок, де діють тільки нормальні напруження, а дотичні повністю відсутні. Такі площинки називають *головними*, а нормальні напруження, що діють на них – *головними напруженнями* (рис. 7.1, б). Доведено, що головні напруження є екстремальними у даній точці тіла. Позначають їх індексами 1, 2, 3 таким чином, щоби

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

Головні напруження не залежать від вибраної системи координат, тому вони є *інваріантами* (величинами, що не змінюються) перетворення координат. Для об'ємного напруженого стану значення головних напружень знаходять із кубічного рівняння

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0. \quad (7.2)$$

де сталі величини – I_1 , I_2 , I_3 є *інваріантами напруженого стану* в даній точці і записуються певним чином через

компоненти тензора напружень, або головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = const ; \quad (7.3)$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = const$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = const .$$

Величини (7.3) є інваріантними відносно вибору системи координат.

7.2. Плоский напружений стан

Плоским називають такий напружений стан, за якого одна з граней елементарного паралелепіпеда вільна від напружень, або одне з головних напружень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ рівне нулеві (рис. 7.2).

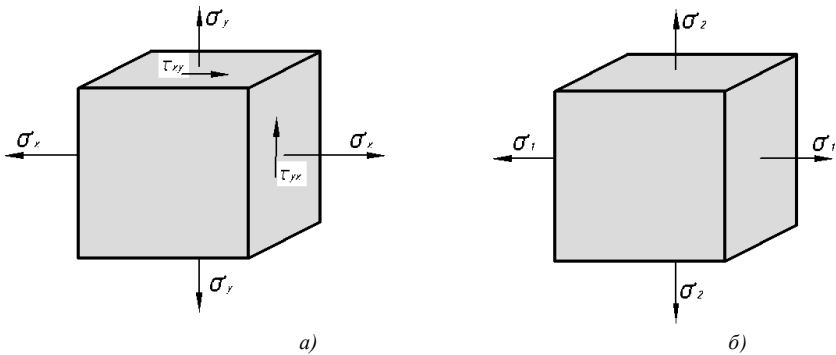


Рис. 7.2

Напруження $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, що діють на гранях елементарного паралелепіпеда (рис. 7.2,а) можна визначити через головні напруження σ_1, σ_2 із виразів (1.8)-(1.10) для екстремальних нормальних і дотичного напружень на двох взаємно перпендикулярних площинках за лінійного

напруженого стану, використовуючи принцип *суперпозиції*, коли напрямки α, β співпадають з напрямками x, y :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \end{array} \right\} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \quad (7.4, a)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (7.4, б)$$

Коли $\sigma_x > \sigma_y$, то кут α буде кутом нахилу алгебрично більшого з головних напружень до напрямку напруження σ_x .

На основі першого інваріанта тензора напружень (7.3) легко показати, що $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$. Тобто, сума нормальних напружень, що виникають на двох взаємно перпендикулярних площинках, є завжди величиною сталою.

Максимальні дотичні напруження діють у площинах під кутом $\pi/4$ до напрямку головних напружень σ_1 та σ_2 і рівні

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (7.5)$$

Головні напруження, положення головних площинок відносно заданих та максимальні дотичні напруження можна знаходити графічно за допомогою побудови, яка називається кругом Мора. Координати кожної точки на крузі Мора визначають собою величини σ і τ на одній з площинок, проведеної через точку тіла, напружений стан якої ми вивчаємо.

Пояснимо побудову круга Мора на прикладі (рис. 7.3).

В системі координат $\sigma - \tau$ знаходимо координати точок D_x і D_y , які відповідно у масштабі відображають напружений стан в площинах з нормаллями n_x і n_y . При знаходженні точок D_x і D_y треба пам'ятати правила знаків для напружень σ і τ . Напруження σ вважають додатнім, якщо воно викликає деформацію розтягу в елементі; напруження τ вважають додатнім, якщо воно повертає виділений елемент тіла за годинниковою стрілкою; $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$.

Точка C , в якій лінія $D_x D_y$ (діаметр кола) перетинає вісь σ , є центром кола. Радіусом CD_x будуємо круг Мора.

Дві точки кола, що лежать на осі σ (т. 1 і т. 2), відображують напружений стан у головних площинках елемента: значення τ для

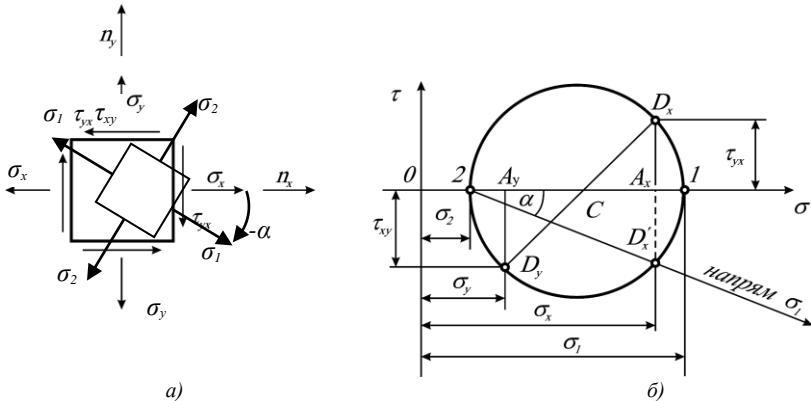


Рис. 7.3

цих точок рівні нулю. Відрізки 01 і 02 , що відсікаються колом на осі σ , і будуть значеннями головних напружень σ_1 і σ_2 (у прийнятому масштабі):

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \overline{OC} \pm \overline{C1} = \overline{OC} \pm \sqrt{CA_x^2 + A_x D_x^2},$$

або

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2}, \quad (7.6)$$

що тотожна із формулою (7.3, а).

Для знаходження напрямку головних напружень відносно напруження σ_x шукаємо точку D'_x – дзеркальне відображення т. D_x . Напрямок алгебрично більшого головного напруження (в даному випадку σ_1) відносно напрямку напруження σ_x визначає пряма, що проходить через крайню ліву точку побудови (в даному випадку точку 2) і точку D'_x :

$$\begin{aligned} \text{або} \quad \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{\overline{A_x D'_x}}{2A_x} = -\frac{\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_2}, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{A_x D_x}{CA_x} = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Що стосується знаку кута α , то він повинен бути від'ємним, бо вимірюється відносно осі x за годинниковою стрілкою. Правильність визначення напрямку більшого головного напруження підтверджується ще і тим, що воно завжди напрямлене в сторону того кута елемента (рис. 7.3, а), до якого напрямлені дотичні напруження τ_{yx} та τ_{xy} .

Отже, на основі формул (7.6) максимальне дотичне напруження (7.5) буде дорівнювати

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2}. \quad (7.8)$$

Результати одержані для плоского напруженого стану, можна поширити на випадок об'ємного напруженого стану для нахиленої площинки, паралельної до одного з головних напружень (наприклад, σ_3). Тоді нормальні, дотичні напруження $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$, що будуть виникати на цій площинці, не будуть залежати від нього і будуть лежати на крузі Мора, побудованому на головних напруженнях σ_1, σ_2 (рис.7.4).

Радіус такого круга Мора буде дорівнювати- $R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$, а центр

буде знаходитися в точці $C_3 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right)$. В результаті

реалізації цього методу можна одержати формули для напружень σ_α і τ_α на площинці з нормаллю n_α , аналогічні формулам (7.4) для площинки з нормаллю n_x .

Так само, як для площинки, паралельних до головного напруження σ_3 , можна побудувати круги Мора і для

площинок, паралельних до головних напружень σ_1 і σ_2 з відповідними радіусами та центрами $C_1 \left(\frac{\sigma_3 + \sigma_2}{2}, 0 \right)$ та $C_2 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0 \right)$. Систему кругів Мора, побудованих для площинки, паралельних відповідно до кожного з трьох головних напружень показано на рис.7.4.

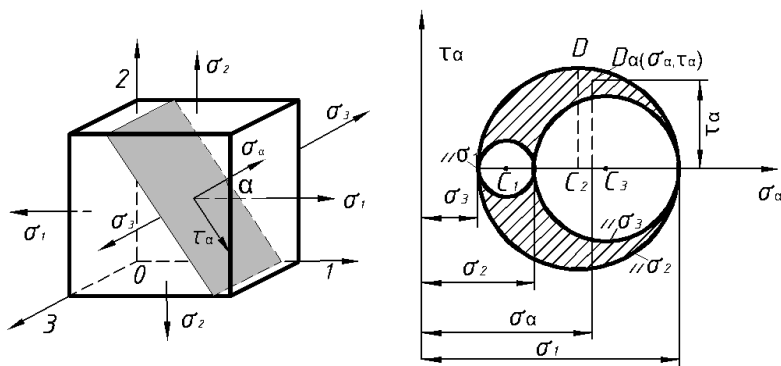


Рис. 7.4

Легко доказати, що всі можливі пари напружень $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$, що діють на площинках, які перетинають усі три головних напрямки, знаходяться у заштрихованій області між кругами Мора ($\sigma_\alpha \in D_\alpha$). З аналізу рис.7.4 видно, що у випадку об'ємного напруженого стану екстремальними нормальними напруженнями є головні напруження σ_1, σ_3 :

$$\sigma_{\max} = \sigma_1; \quad \sigma_{\min} = \sigma_3. \quad (7.9)$$

З рис.7.4 також видно, що максимальне дотичне напруження, яке може виникнути на нахилених площинках, дорівнює радіусові найбільшого круга Мора $\overline{C_2 D} = R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, побудованого на головних напруженнях σ_1, σ_3 , тобто

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

(7.10)

Кут нахилу такої площинки до головного напруження σ_1 дорівнює $\alpha = 45^\circ$.

7.3. Узагальнений та об'ємний закони Гука

Якщо ізотропний матеріал працює в межах закону Гука, то відносні лінійні деформації ε_1 , ε_2 , ε_3 у напрямках дії напружень σ_1 , σ_2 , σ_3 (рис. 7.5) визначаються з формул **узагальненого закону Гука**, записаних на основі принципу суперпозиції - $\varepsilon_i = \varepsilon_i' + \varepsilon_i'' + \varepsilon_i'''$,

де $i=1,2,3$; штрихи біля складових відносних деформацій ε_i означають належність до відповідних головних напружень: σ_1 , σ_2 , σ_3 . За співпадання кількості штрихів з номером деформації записується результат закону Гука для поздовжньої деформації (1.12), а в іншому випадку - для поперечної (1.13).

Наприклад, $\varepsilon_1' = \sigma_1 / E$, а $\varepsilon_1'' = -\mu\sigma_2 / E$ і $\varepsilon_1''' = -\mu\sigma_3 / E$. Підсумовуючи ці результати для кожного з трьох напрямків, одержимо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Форма запису закону Гука у вигляді (7.11) є основною.

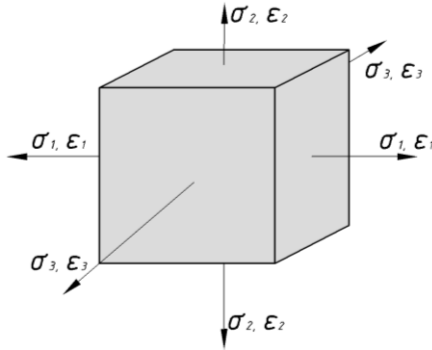


Рис. 7.5

Проте у деяких випадках розв'язування задач опору матеріалів (теорії пружності) потрібно мати іншу форму запису, коли напруження виражені через деформації:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1+\mu} \left(\varepsilon_1 + \frac{\mu}{1-2\mu} \theta \right); \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1+\mu} \left(\varepsilon_2 + \frac{\mu}{1-2\mu} \theta \right), \\ \sigma_3 &= \frac{E}{1+\mu} \left(\varepsilon_3 + \frac{\mu}{1-2\mu} \theta \right),\end{aligned}\tag{7.12}$$

де $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ – об'ємна деформація. Рівняння (7.12) французький математик Г. Ляме запропонував записувати в дещо іншому вигляді:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 2G\varepsilon_1 + \lambda\theta; \\ \sigma_2 &= 2G\varepsilon_2 + \lambda\theta; \\ \sigma_3 &= 2G\varepsilon_3 + \lambda\theta,\end{aligned}\tag{7.13}$$

де $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$; $\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$ – параметри (сталі) Ляме.

Формули (7.11) – (7.13) справедливі не тільки для головних деформацій та головних напружень, а й для відносних деформацій $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ за будь-якими трьома взаємно

перпендикулярними напрямками дії напружень $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Це пов'язано з тим, що за малих деформацій ізотропного тіла вплив зсуву на лінійні деформації є величиною другого порядку мализни. При цьому, до трьох залежностей для лінійних деформацій додаються ще три, які визначають кутові деформації через відповідні дотичні напруження:

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G; \quad \gamma_{xz} = \tau_{xz} / G; \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz} / G. \quad (7.14)$$

В окремому випадку, коли одне з головних напружень в (7.11) дорівнює нулеві ($\sigma_3 = 0$), одержимо закон Гука для *плоского напруженого стану*. Обернена форма запису закону Гука у цьому випадку має вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2); \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Відносна зміна об'єму визначається з *об'ємного закону Гука*

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_0 / K, \quad (7.16)$$

де $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ – модуль об'ємної деформації елемента; μ –

коефіцієнт Пуассона; $\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ – середнє (гідростатичне) напруження.

Аналіз формули (7.16) показує, що у випадку, коли коефіцієнт Пуассона матеріалу дорівнює нулю ($\mu = 0$), стисливість матеріалу буде найбільшою, а такий матеріал називають *ідеально стисливим*. У випадку, коли $\mu = 0,5$, відносна зміна об'єму $\theta = 0$, матеріал називають *нестисливим*.

Експериментальні дослідження показують, що об'ємна деформація θ залишається пружною та пропорційною до

середнього напруження σ_0 при досить великих значеннях цього напруження. Наприклад, для маловуглецевої сталі ($\sigma_{np} = 200 \text{ МПа}$) вона залишається пружною навіть за гідростатичного напруження $\sigma_0 = 2000 \text{ МПа}$, яке в 4÷5 раз перевищує границю міцності сталі ($\sigma_g = 400 \div 500 \text{ МПа}$).

7.4. Потенціальна енергія пружного деформування

Енергія, яку навантажене тіло накопичує при пружному деформуванні, називається *потенціальною енергією пружної деформації*. Названа енергія чисельно дорівнює роботі зовнішніх сил, затраченій на пружне деформування тіла: $U = A_F$. При вивченні теми лінійного розтягу (стиску) було показано, що за пружного деформування стрижня силою F ця рівність має вигляд (2.20) -

$$U = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l.$$

Поділивши величину U на об'єм зразка V було знайдено величину питомої потенціальної енергії деформації (2.22) -

$$u = U/V = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon.$$

У випадку об'ємного напруженого стану, з напруженнями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ та відповідними деформаціями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, деформування елементарного об'єму буде відбуватися у трьох напрямках. Тому питома потенціальна енергія деформації буде дорівнювати (згідно принципу суперпозиції) сумі трьох складових u_1, u_2, u_3 :

$$u = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3. \quad (7.17)$$

Виразивши у формулі (7.17) величини відносних лінійних деформацій співвідношеннями з узагальненого закону Гука (7.11), отримаємо наступний вираз для питомої потенціальної енергії деформації:

$$u = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right]. \quad (7.18)$$

Разом з тим, деформація елементарного об'єму відбувається за рахунок зміни його об'єму та форми. Тому повну питому потенціальну енергію деформації можна розділити на дві складові:

$$u = u_v + u_\phi, \quad (7.19)$$

де u_v – питома потенціальна енергія, що пов'язана зі зміною об'єму; u_ϕ – питома потенціальна енергія, що пов'язана зі зміною форми (без зміни об'єму). Використовуючи залежності (7.16) для об'ємного закону Гука, знаходимо

$$u_v = \frac{1}{2} \sigma_0 \theta = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (7.20)$$

Цю ж саму формулу для u можна одержати, якщо у формулу (7.20) підставити значення $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$.

Величину складової потенціальної енергії деформації u_ϕ , що накопичується в тілі при зміні його форми, знаходимо як різницю:

$$\begin{aligned} u_\phi &= u - u_v = \frac{1+\mu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = \\ &= \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Це і є формула для визначення *питомої потенціальної енергії формозміни*.

Приклад.

Для заданого елемента (рис.7.6) визначити графічним і аналітичним шляхом величину і напрямки головних напружень, вказати положення площинок, де діють максимальні дотичні напруження і знайти їх величину; визначити відносні лінійні деформації в напрямку всіх головних напружень і відносну зміну об'єму; знайти величину потенціальної енергії деформації u , а також її складові u_ϕ, u_v ; перевірити елемент на міцність за відповідною для даного матеріалу теорією міцності; $\sigma_x = -20 \text{ МПа}$; $\sigma_y = 60 \text{ МПа}$; $\tau_{yx} = -20 \text{ МПа}$, матеріал – сталь Ст 3, $n_{nl} = 1,5$.

Графічна побудова круга Мора для знаходження величини і напрямку головних напружень виконується наступним чином (рис. 7.5, б):

– в системі координат $\sigma - \tau$ знаходимо точки $D_x(\sigma_x, \tau_{yx})$, $D_y(\sigma_y, \tau_{xy})$;

– на діаметрі $D_x D_y$ будуємо круг Мора (центр круга – т. C);

– відрізки 01 і 03 , що відсікаються колом на осі σ будуть значеннями головних напружень і після вимірювання будуть дорівнювати $\sigma_1 \approx 65 \text{ МПа}$, $\sigma_3 \approx -25 \text{ МПа}$, ($\sigma_2 = 0$);

– знаходимо точку D'_x як дзеркальне відображення точки D_x і проводимо пряму $3D'_x$ – напрям головного напруження σ_1 під кутом α до осі σ .

Елемент, обмежений головними площинками, показаний на рис. 7.6, в. З рисунка 7.6, б знаходимо максимальне дотичне напруження τ_{\max} , яке дорівнює радіусу побудованого кола – $\tau_{\max} = C1 \approx 45 \text{ МПа}$.

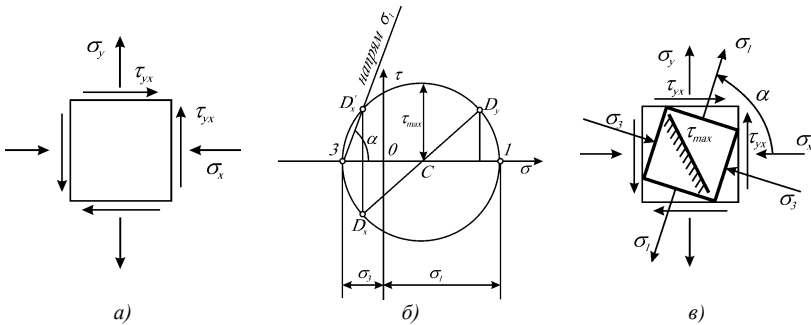


Рис. 7.6

Площини, в яких діють τ_{\max} , нахилені під кутом $\pi/4$ до головних площинок з напруженнями σ_1 і σ_3 ; τ_{\max} діють завжди в напрямках від меншого головного напруження до більшого, як показано на рисунку.

Перевіряємо одержані результати аналітично за формулами (7.4) - (7.7):

$$\sigma_1 = \frac{-20 + 60}{2} + \sqrt{\left(\frac{-20 - 60}{2}\right)^2 + (-20)^2} = 64,8 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_3 = \frac{-20 + 60}{2} - \sqrt{\left(\frac{-20 - 60}{2}\right)^2 + (-20)^2} = -24,8 \text{ МПа} ;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \cdot (-20)}{-20 - 60} = -0.5 ; \quad \alpha = -13^\circ 15' .$$

Оскільки в нашому випадку $\sigma_x < \sigma_y$, то одержаний кут ϵ кутом нахилу алгебрично меншого головного напруження σ_3 до напрямку напруження σ_x . Кут нахилу алгебрично більшого головного напруження $\alpha_1 = -13^\circ 15' + 90^\circ = 76^\circ 45'$, що збігається з результатом графічної побудови. Максимальне дотичне напруження дорівнює -

$$\tau_{\max} = \frac{64,8 - (-24,8)}{2} = 44,8 \text{ МПа} .$$

Таким чином величини головних напружень σ_1 , σ_3 , а також максимального дотичного напруження τ_{\max} , що знайдені графічним і аналітичним методом, між собою співпадають. Останнє підтверджує правильність розрахунків.

Знаходимо відносні подовження в напрямку всіх трьох головних напружень для елемента зі сталі ($E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\mu = 0,3$):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [64,8 - 0,3(0 - 24,8)] = 361,2 \cdot 10^{-6} ;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [0 - 0,3(64,8 - 24,8)] = -60 \cdot 10^{-6} ;$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-24,8 - 0,3(64,8 + 0)] = -221,2 \cdot 10^{-6} .$$

Знаходимо відносну зміну об'єму

$$\theta = 361,2 \cdot 10^{-6} - 60 \cdot 10^{-6} - 221,2 \cdot 10^{-6} = 80 \cdot 10^{-6} .$$

Знаходимо величини питомої потенціальної енергії u та її складові u_v, u_δ :

$$u = \frac{1}{4 \cdot 10^5} \left[(64,8)^2 + (24,8)^2 + 0,6 \cdot 64,8 \cdot 24,8 \right] = 1,444 \cdot 10^{-2} \text{ МПа};$$

$$u_v = \frac{1-0,6}{12 \cdot 10^5} (64,8 - 24,8)^2 = 0,053 \cdot 10^{-2} \text{ МПа};$$

$$u_\delta = \frac{1+0,3}{6 \cdot 10^5} \left[(64,8)^2 + (24,8)^2 + 64,8 \cdot 24,8 \right] = 1,391 \cdot 10^{-2} \text{ МПа}.$$

Співвідношення між складовими u_v, u_δ питомої потенціальної енергії буде наступним –

$$u_v : u_\delta = 3,7 : 96,3.$$

Визначення складової питомої потенціальної енергії деформації – величини u_δ дозволяє використати її для перевірки міцності виділеного елемента тіла за енергетичною теорією міцності (теорії граничного значення величини питомої потенціальної енергії деформації формозміни). Умова міцності за цією теорією для плоского напруженого стану має вигляд:

$$\sigma_{\text{деф}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_3 \sigma_1} \leq [\sigma],$$

де $[\sigma] = \sigma_{nl} / n_{nl}$.

Для сталі Ст 3 границя плинності $\sigma_{nl} = 240 \text{ МПа}$, тому

$$[\sigma] = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа} .$$

Підставивши величини головних та допустимого напружень у наведену умову міцності, одержимо:

$$\sqrt{64,8^2 + (-24,8)^2 + 64,8 \cdot 24,8} < 160 ; \quad 80,1 < 160 .$$

Бачимо, що нерівність задовольняється, а тому міцність елемента забезпечена.

Запитання для самоконтролю

1. Який напружений стан називається тривимірним?
2. Які напруження називаються головними?
3. Що таке інваріанти напруженого стану?
4. Який напружений стан називається плоским?
5. Запишіть вираз для головних напружень за плоского напруженого стану.
6. Для чого будуються круги Мора?
7. Запишіть вираз для максимальних дотичних напружень.
8. Які залежності називають узагальненим законом Гука?
9. Запишіть узагальнений закон Гука через сталі Ляме.
10. Запишіть обернену форму закону Гука для плоского напруженого стану.
11. Запишіть об'ємний закон Гука.
12. Як записується вираз для питомої потенціальної енергії деформації за просторового напруженого стану?
13. Як записується складова питомої потенціальної енергії деформації, що пов'язана зі зміною об'єму?
14. Як записується складова питомої потенціальної енергії деформації, що пов'язана зі зміною форми ?

ТЕМА 8 (лекції 15,16) ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ ДЛЯ КРИХКИХ ТА ПЛАСТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ

8.1. Завдання теорій міцності. Крихке та пластичне руйнування

Міцність та надійність будь-якої конструкції та її елементів однаковим чином залежить від того, з якого матеріалу виготовлена ця конструкція і якого виду навантаження вона повинна витримувати. Під самою *міцністю матеріалу* розуміють безпосередню здатність конкретного виду матеріалу протидіяти руйнуванню. Цьому послуговує кількісна оцінка, що виникає на основі визначення напружено-деформованого стану в елементах конструкції. Недостатня міцність матеріалу конструкції веде до втрати цим матеріалом здатності чинити опір навантаженням – аж до руйнування.

Якщо елемент конструкції працює в стані простого розтягу або стиску, то визначення граничного стану цього елемента є нескладним. Максимальне напруження, яке буде відповідати за виникнення цього небезпечного стану має, бути рівним:

- границі плинності ($\sigma_{пл}$) – при досягненні стану плинності в пластичному матеріалі;
- границі міцності ($\sigma_{мі}$), що відповідає за руйнування крихкого матеріалу;
- границі втоми (σ_r) – при повторнозмінних навантаженнях.

Експериментальне визначення цих механічних характеристик можливе на основі безпосередніх випробувань зразків матеріалу на спеціальних випробувальних машинах. Експериментальне ж визначення небезпечних (граничних) станів при складних напружених станах, коли виникає декілька видів деформацій, практично неможливе. Тому у цих випадках доводиться користуватись низкою гіпотез про поведінку матеріалу в граничному напруженому стані, які в сукупності називають тою чи іншою “теорією міцності”. Таким чином,

завданням теорії міцності є вираження умов виникнення в елементах конструкцій граничних напружених станів при будь-якому складному напруженому стані, коли відомі механічні характеристики матеріалу, одержані при його випробуванні в умовах лінійного напруженого стану.

У математичному вираженні умова досягнення матеріалом граничного стану може мати вигляд:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = F_{zp}, \quad (8.1)$$

де F – деяка функція від головних напружень, а F_{zp} – граничне значення цієї функції при певному одновісному напруженому стані.

Тоді умова міцності, з деяким коефіцієнтом запасу ($n > 1$) буде мати вигляд:

$$F \leq F_{zp} / n = [F] \quad (8.2)$$

Тут n – коефіцієнт запасу, $[F]$ – допустиме значення вибраної функції.

У багатьох випадках, для більшої зрозумілості та конкретності, функцію $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ називають еквівалентним напруженням ($\sigma_{екв.}$), що відповідає напруженню у розтягнутому (стиснутому) зразку і рівнонебезпечно заданому об'ємному напруженому стану. За допустиме значення функції $[F]$ беруть допустиме напруження $[\sigma]$ при одновісному напруженому стані. Тобто, умова міцності вже записується у вигляді:

$$\sigma_{екв. i} \leq [\sigma], \quad (8.3.)$$

де i – індекс, яким позначається умовний номер теорії міцності.

Введення величини еквівалентного напруження полегшує (формалізує) визначення коефіцієнта запасу міцності n елемента конструкції за формулою

$$n = \sigma_{zp.} / \sigma_{екв. i}$$

Результати експериментальних та теоретичних досліджень показують, що успішне застосування тої, чи іншої теорії

міцності залежить від того, міцність яких матеріалів розглядається – крихких чи пластичних, а звідси – яке руйнування може відбутись – крихке чи пластичне. За головний критерій таких досліджень вибирають величину залишкової деформації при руйнуванні.

Крихким називають таке руйнування твердих тіл, коли пластичні деформації після руйнування не перевищують пружних, а граничний опір матеріалу пов'язаний з досягненням границі міцності. Руйнування у цьому випадку відбувається шляхом відриву однієї частини тіла від іншої.

Пластичним вважається таке руйнування, яке пов'язане з великими пластичними деформаціями, що в десятки разів перевищують пружні деформації. При такому руйнуванні граничний стан пов'язують з границею плинності, а саме руйнування відбувається шляхом зсуву (зрізу). Тому граничним дотичним напруженням слід вважати напруження $\tau_{пл}$, що відповідає границі плинності матеріалу.

При таких дослідженнях необхідно також зважати і на режим випробувань: швидкість навантаження, температуру середовища і саме середовище, а також вид напруженого стану. Наприклад, для пластичного матеріалу характерні великі стискувальні напруження.

Разом з тим, у деяких випадках реальне руйнування тіла може мати ознаки крихкого і пластичного руйнувань. Тоді таке руйнування називають **квзікрихким** або **квзіпластичним**.

8.2. Класичні теорії міцності для крихкого руйнування

Одними із найбільш давніх і простих теорій міцності є теорії міцності, які з певним наближенням можна застосувати при крихкому руйнуванні. *Першою теорією міцності або теорією міцності найбільших нормальних напружень* є критерій, який ґрунтується на гіпотезі, що *граничний стан матеріалу в околі розглядуваної точки настає тоді, коли найбільше нормальне напруження σ_{max} досягло б свого граничного значення σ_{cr}* . Ця теорія пов'язується з іменами класиків науки Галілео Галілея та Ляйбніца.

Згідно цієї теорії, якщо відомі головні напруження $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, що діють у даній точці, то критерій граничного стану та умова міцності відповідно мають вигляд:

$$\sigma_{екв.1} = \sigma_1 = \sigma_{зр.р}, \quad \sigma_1 \leq [\sigma_p], \quad (8.4)$$

або
$$\sigma_{екв.1} = |\sigma_3| = \sigma_{зр.с}; \quad |\sigma_3| < [\sigma_c].$$

Тут $[\sigma_p] = \frac{\sigma_{зр.р}}{n_p}$; $[\sigma_c] = \frac{\sigma_{зр.с}}{n_c}$ – допустимі напруження

при розтягу та стиску відповідно.

Причиною руйнування крихких матеріалів (скло, гіпс, кераміка) є виникнення і поширення тріщин, де головну роль відіграють найбільші розтягувальні напруження. Разом з тим, формули (8.4) не враховують впливу інших головних напружень на міцність матеріалу, що є її основним недоліком. Ця теорія не зовсім відповідає даним випробувань більшості реальних матеріалів (крім названих вище). Не може вона пояснити і надзвичайно велику міцність матеріалів за високого гідростатичного тиску.

Друга теорія міцності, або **теорія найбільших лінійних деформацій**, ґрунтується на гіпотезі, що *граничний стан матеріалу в околі розглядуваної точки настає тоді, коли в ній найбільша відносна лінійна деформація ε_{\max} досягне граничного значення $\varepsilon_{зр}$.*

Тобто, якщо відомі головні деформації $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$, де $\varepsilon_1 = \varepsilon_{\max}$, то критерієм граничного стану буде:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{зр}, \quad (8.5)$$

а умова міцності записується у вигляді:

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_p / n = [\varepsilon]. \quad (8.6)$$

Вважаючи, що на ліву і праву частини нерівності (8.6) поширюється закон Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \quad [\varepsilon] = [\sigma] / E,$$

умову міцності, за другою теорією міцності, можна записати у вигляді:

$$\sigma_{екв. II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma], \quad (8.7)$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження при осьовому розтягу (стиску).

Основним недоліком другої теорії міцності, яка була запропонована ще Е. Маріоттом (1662р.), є те, що вона не враховує взаємодії трьох головних деформацій. Для таких крихких матеріалів як фосфор друга теорія міцності підтверджується і експериментально. У випадку ж пластичних матеріалів, дана теорія не використовується, бо теоретичні результати не підтверджуються дослідними даними.

8.3. Класичні теорії міцності для пластичного руйнування

Пластичне руйнування матеріалів відбувається в результаті необмеженої зміни форми тіла (зсуву частин тіла між собою), тобто принципово інших механізмів, ніж при крихкому руйнуванні. У зв'язку з цим і не підтверджуються теоретичні розрахунки за першою і другою теорією міцності експериментальними даними. Тому Ш. Кулоном (1773р.), а пізніше А. Треска (1868р.) була викладена і обґрунтована *третья теорія міцності*, яка дістала назву *теорії міцності найбільших дотичних напружень*. Ця теорія ґрунтується на гіпотезі, що граничний стан в околі розглядуваної точки тіла наступить тоді, коли найбільше дотичне напруження τ_{\max} досягне граничного значення $\tau_{i\ddot{e}}$:

$$\tau_{\max} = \tau_{i\ddot{e}}. \quad (8.8)$$

Для об'ємного напруженого стану

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

а у випадку лінійного стану – розтягу (стиску) – $\tau_{i\ddot{e}} = 0,5\sigma_{i\ddot{e}}$.

Відповідно до цих виразів, умова (8.8) має вигляд

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{i\bar{z}}, \quad (8.9)$$

а умова міцності

$$\sigma_{екв.III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (8.10)$$

Умова (8.9) розглядається ще й як умова початку виникнення пластичних деформацій в матеріалі. Б. Сен-Венан у 1881р. запропонував вважати її *умовою пластичності*. Згідно із нею *пластична деформація у даній точці тіла виникає тоді, коли найбільше дотичне напруження досягає певної (характерної для даного матеріалу) величини, що дорівнює границі плинності при чистому зсуві*.

Недоліком третьої теорії міцності є те, що вона не враховує проміжного головного напруження σ_2 , яке також впливає на міцність матеріалу. У зв'язку з цим, розходження між результатами теоретичних розрахунків та дослідних даних досягає 10-15%. Якщо матеріал має різні граничні значення напружень за розтягу і стиску, то Ш.Кулон вивів умову, яка ідентична умові, одержаній пізніше Мором, допустивши, що гранична крива, яка огинає кола напружень, є прямою .

У випадку рівномірного тривісного розтягу, що супроводжується крихким руйнуванням, дану теорію міцності застосовувати не можна.

Ще однією теорією міцності для пластичних матеріалів, яка досить задовільно описує процеси руйнування, є так звана *енергетична теорія міцності* або *четверта (IV) теорія міцності*. Вперше цю теорію у 1904 р. запропонував професор Львівської політехніки М. Губер. Ним була уточнена гіпотеза італійського математика Е. Бельтрамі (1885 р.), який помилково стверджував, що *руйнування будь-якого матеріалу відбувається тоді, коли повна питома потенціальна енергія деформацій u в розглядуваній точці досягне свого критичного значення $u = u_{сп.}$, де $u_{сп.} = \sigma_{сп.}^2 / 2E$ – для випадку лінійного розтягу*. Помилковість його полягала в тому, що із цього твердження випливала можливість руйнування матеріалу при всесторонньому рівномірному стиску $p_{сп} = \frac{\sigma_{сп}}{\sqrt{3(1-2\mu)}}$, що

абсолютно не відповідало результатам експериментальних досліджень. Тому Губер запропонував відкинути у критерії Бельтрамі енергію, яка тратилась на зміну об'єму, залишивши енергію формозміни

$$u_{\phi} = u_{\phi.зр.} \quad (8.11).$$

$$\text{Тут} \quad u_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1),$$

$$\text{а} \quad u_{\phi.зр.} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_{зр.}^2 \equiv \frac{1+\mu}{3E} \sigma_{пл.}^2.$$

Підставивши ці в умову (8.11), критерій Губера можна записати у вигляді

$$\sigma_{екв.IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} = \sigma_{пл} \quad (8.12)$$

Звідси умова міцності запишеться наступним чином

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma]. \quad (8.13)$$

Умову (8.13) можна представити в іншому вигляді, більш зручному для практичних розрахунків:

$$\sqrt{0,5 \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right]} \leq [\sigma]. \quad (8.14)$$

Необхідно зауважити, що ліві сторони нерівностей (8.13), (8.14) є не що інше, як інтенсивність напружень σ_i . Тобто, еквівалентне напруження четвертої теорії міцності тотожне інтенсивності напружень – $\sigma_{екв.IV} = \sigma_i$. Четверта теорія міцності дещо краще узгоджується з експериментами для пластичних матеріалів, ніж третя. Але вона не враховує випадку, коли матеріали мають різні характеристики опору при розтягу та стиску.

8.4. Узагальнені теорії міцності

Розглянуті класичні теорії не є універсальними, бо одні можна застосовувати тільки для крихких матеріалів, а інші добре відображають пластичне руйнування. Крім того, необхідно враховувати неоднаковість опору розтягу та стиску, а також анізотропію матеріалу у різних напрямках.

Однією з таких узагальнених теорій міцності є *теорія міцності Мора*, яка побудована на дещо інших припущеннях, ніж класичні. О.Мором в 1900 р. було висловлено ідею, що *руйнування матеріалу залежить від певної взаємодії нормальних і дотичних напружень: руйнування матеріалу від дотичних напружень відбувається швидше там, де переважає розтяг і навпаки – матеріал має більший опір в зоні стискувальних напружень*.

Ця ідея дуже легко ілюструється за допомогою системи кругів Мора, отриманих за різних комбінацій значень головних напружень у розглядуваній точці тіла.

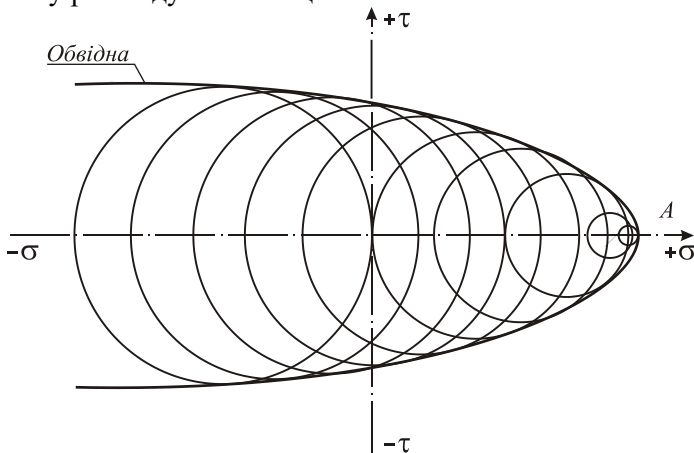


Рис. 8.1

Нехай із ряду простих дослідів (на стиск, розтяг, зсув) одержані граничні значення головних напружень, при яких матеріал переходить у пластичний стан або руйнується. Коли на цих граничних напруженнях побудувати круги Мора (рис. 8.1), то виявиться, що обвідна до них є граничною кривою, у

середині якої значення нормальних і дотичних напружень, що є координатами площини σ, τ , будуть безпечними для одного матеріалу. Для спрощення обвідну цих кругів з достатньою точністю можна замінити прямими MN та $M'N'$, що є дотичними до двох кругів: для осьового розтягу з граничним напруженням $\sigma_{сп.p}$ (центр O_1) і для осьового стиску з граничним напруженням $\sigma_{сп.c}$ (центр O_2). Рівняння прямої $MN - \tau = a \cdot \sigma + b$ легко побудувати, виразивши напруження σ, τ через головні напруження σ_1, σ_3 , а постійні a, b через граничні напруження $\sigma_{сп.p}, \sigma_{сп.c}$.

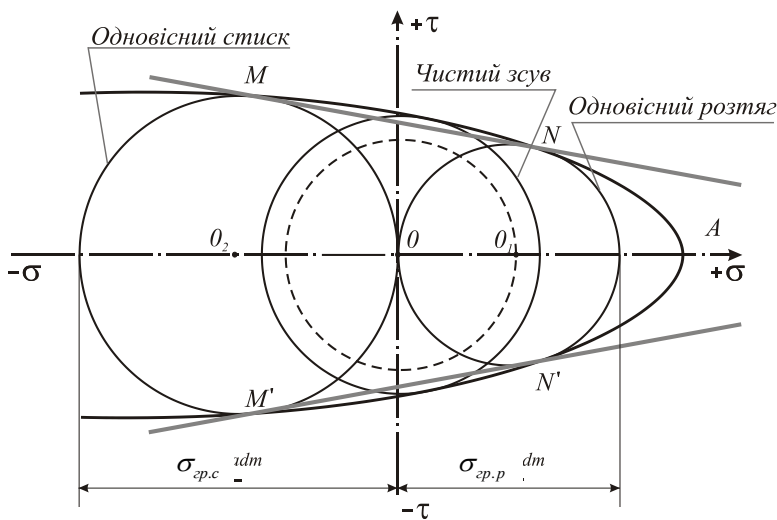


Рис. 8.2

Для спрощення обвідну цих кругів з достатньою точністю можна замінити прямими MN та $M'N'$, що є дотичними до двох кругів: для осьового розтягу з граничним напруженням $\sigma_{сп.p}$ (центр O_1) і для осьового стиску з граничним напруженням $\sigma_{сп.c}$ (центр O_2). Рівняння прямої $MN - \tau = a \cdot \sigma + b$ легко побудувати, виразивши напруження σ, τ через головні напруження $\sigma_1,$

σ_3 , а постійні a , b через граничні напруження $\sigma_{ep.p}$, $\sigma_{ep.c}$. У даному випадку воно запишеться таким чином:

$$\sigma_1 - \psi\sigma_3 = \sigma_{ep.p}, \quad (8.15)$$

де $\psi = \sigma_{ep.p} / \sigma_{ep.c}$.

Критерій міцності Мора буде мати вигляд:

$$\sigma_{екв.М} = \sigma_1 - \psi\sigma_3 \leq [\sigma]_p. \quad (8.16)$$

Середні значення параметра ψ наведені в табл. 8.1 за даними [5].

Таблиця 8.1 – Значення параметра ψ для деяких матеріалів

Матеріал	ψ
Сірі чавуни	0,2 ...0,4
Ковкі чавуни	0,7 ...0,95
Високоміцні чавуни	0,2 ...0,3
Скло, ситали	0,07 ...0,2
Вуглеграфітові композиції, графіти	0,2 ...0,6
Металокерамічні композиції на основі карбіду вольфраму, карбіду кремнію	0,1 ...0,4
Вуглецеві сталі	0,9 ...1,0
Термореактивні пластмаси	0,2 ...0,5

Для того, щоб виявити, чи задовольняється умова міцності в деякій точці тіла при виникненні у ній головних напружень σ_1 і σ_3 , необхідно побудувати на цих напруженнях відповідний круг Мора (штрихова крива). Якщо круг буде розміщений між прямими MN і MN' , то матеріал в околі розглядуваної точки має певний запас міцності, а у випадку їх

перетинання – міцність матеріалу є недостатньою. Дотикання круга Мора до прямих MN і $M'N'$ свідчить, що напружений стан є граничним або допустимим.

Теорія міцності Мора набула широкого поширення в інженерній практиці, особливо в розрахунках гірничих порід. До недоліків теорії відносять відсутність теоретичного обґрунтування заміни огинаючої кругів Мора прямою та неврахування середнього головного напруження.

Якщо теорія міцності Мора об'єднує першу і третю теорії міцності, то *узагальнена теорія Писаренка-Лебедева* об'єднала першу та четверту теорії міцності. Згідно цієї теорії міцності *настання граничного стану, зумовлене здатністю матеріалу чинити опір як дотичним, так і нормальним напруженням*. Вплив дотичних напружень у цій теорії визначається граничним значенням питомої потенціальної енергії деформації (величиною інтенсивності напружень σ_i).

У найпростішому вигляді критерій граничного стану за теорією Писаренка-Лебедева можна записати:

$$\psi\sigma_i + (1-\psi)\sigma_1 = \sigma_{sp.p} \quad (8.17)$$

$$\text{де} \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \quad ;$$

$$0 < \psi \leq 1.$$

За цією теорією умова міцності має вигляд:

$$\sigma_{екв.П-Л} = \psi\sigma_i + (1-\psi)\sigma_1 \leq [\sigma]_p \quad (8.18)$$

Цю теорію вважають універсальною, бо її можна застосувати як для ідеально пластичних ($\psi=1$), так і для ідеально крихких ($\psi=0$) матеріалів, а також для матеріалів з проміжними властивостями. Залежно від значення параметра $\psi = \sigma_{sp.p} / \sigma_{sp.c}$ умова (8.18) може трансформуватися у першу та четверту теорії міцності. Водночас, експериментально вона досить добре підтверджується для широкого класу матеріалів.

Ще одною із поширених узагальнених теорій вважають теорію міцності Бужинського – Ягна. У 1929р. Бужинський допустив, що граничний стан матеріалу наступає, коли енергія формозміни, яка записується у вигляді квадратичної функції кульового тензора, досягає критичного значення:

$$\sigma_i^2 = A + B\sigma_0 + C\sigma_0^2, \quad (8.19)$$

де коефіцієнти A , B , C визначають із дослідів на розтяг, стиск та кручення.

Задовольнивши умову (8.19) заданим граничним станам на розтяг, стиск та кручення, та виразивши її через головні напруження, умова міцності, відповідно Бужинському, буде мати вигляд

$$\begin{aligned} & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\left(\frac{\sigma_p\sigma_c}{2\tau_k^2} - 1\right)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + \\ & + (\sigma_c - \sigma_p)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_p\sigma_c. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Залежно від форми представлення граничного напруження τ_k через відповідні напруження σ_p, σ_c гранична поверхня може перетворюватись в поверхні обертанья другого порядку, які раніше були запропоновані іншими енергетичними теоріями.

Виходячи з дещо інших міркувань, Ю.Ягн у 1931р. запропо-нував шукати рівняння поверхні, що інтерпретує теорію міцності, у вигляді симетричного рівняння другого порядку стосовно головних напружень -

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + a(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + b(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = c, \quad (8.21)$$

яке при певних значеннях сталих a , b , c легко зводиться до рівняння (8.20).

Крім згаданих теорій міцності, існує ще цілий ряд інших теорій міцності, що об'єднують класичні та узагальнені теорії міцності як для ізотропних, так і для анізотропних матеріалів. У зв'язку із їх більшою складністю та можливістю для практичного використання, вони не приводились, але їх можна застосовувати для наукових досліджень.

Приклад. Визначити еквівалентні напруження за першою – четвертою теоріями міцності, а також за узагальненими теоріями Мора та Писаренка-Лебедева, коли в околі точки тіла діють головні напруження: $\sigma_1 = 16 \text{ МПа}$; $\sigma_2 = -12 \text{ МПа}$; $\sigma_3 = -72 \text{ МПа}$.

Матеріал тіла – сірий чавун, для якого $[\sigma]_p = 26 \text{ МПа}$, $[\sigma]_c = 140 \text{ МПа}$, коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,25$; $\psi = 0,2$.

Розв'язок. Згідно з першою теорією міцності – теорією найбільших нормальних напружень, маємо:

$$\sigma_{екв.I}^p = \sigma_1 = 16 \text{ МПа}; \sigma_{екв.I}^c = |\sigma_3| = 72 \text{ МПа}.$$

За теорією найбільших лінійних деформацій – другою теорією міцності:

$$\sigma_{екв.II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = 16 - 0,25(-12 - 72) = 37 \text{ МПа}.$$

Відповідно до третьої теорії міцності – теорії найбільших дотичних напружень:

$$\sigma_{екв.III} = \sigma_1 - \sigma_3 = 16 - (-72) = 88 \text{ МПа}.$$

Еквівалентні напруження за енергетичною теорією – четвертою теорією міцності, визначаються за формулою:

$$\begin{aligned} \sigma_{екв.IV} = \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(16 + 12)^2 + (-12 + 72)^2 + (-72 - 16)^2} = 77,9 \text{ МПа} \end{aligned}$$

Відповідно до теорії Мора:

$$\sigma_{екв.M} = \sigma_1 - \psi\sigma_3,$$

$$\sigma_{екв.M} = 16 - 0,2(-72) = 30,4 \text{ МПа}.$$

За теорією Писаренка-Лебедева:

$$\begin{aligned} \sigma_{екв.П-Л} &= \psi\sigma_i + (1 - \psi)\sigma_1 = 0,2 \cdot 77,9 + (1 - 0,2)16 = \\ &= 15,6 + 12,8 = 28,4 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Проаналізувавши величини еквівалентних напружень за різними теоріями міцності, бачимо їхні істотні розходження:

$$\text{від } \sigma_{екв.I}^c = 72 \text{ МПа} \quad \text{до } \sigma_{екв.П-Л} = 28,4 \text{ МПа}.$$

Вважаючи на те, що сірий чавун – крихкий матеріал, виключимо застосування третьої та четвертої теорії міцності, які придатні для пластичних матеріалів, а також другої теорії, що не рекомендується до застосування як малоймовірна.

Застосуємо першу теорію:

$$\sigma_{екв.І}^p = 16 \text{ МПа} < [\sigma]_p = 26 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{екв.І}^c = 72 \text{ МПа} < [\sigma]_c = 140 \text{ МПа};$$

За узагальненими теоріями:

$$\sigma_{екв.М} = 30,4 \text{ МПа} > [\sigma]_p = 26 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{екв.ІІ-ІІІ} = 28,4 \text{ МПа} > [\sigma]_p = 26 \text{ МПа}.$$

Застосування першої теорії приводить до неправильного висновку про забезпечення міцності ($\sigma_{екв.І}^p, \sigma_{екв.І}^c < [\sigma]_p, [\sigma]_c$), оскільки ця теорія не враховує різницю в опорі матеріалу за розтягу та стиску. Цю різницю враховують узагальнені теорії, які свідчать, що міцність матеріалу в околі розглядуваної точки тіла не забезпечена.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке міцність матеріалу?
2. Які завдання теорій міцності?
3. Що таке граничний стан матеріалу?
4. Що таке еквівалентне напруження?
5. Як визначається коефіцієнт запасу міцності елемента конструкції?
6. Дайте визначення поняття „ крихкого руйнування”.
7. Дайте визначення поняття „ пластичного руйнування”.
8. Дайте визначення першої теорії міцності.
9. Дайте визначення другої теорії міцності .
10. Які недоліки класичних теорій міцності для крихкого руйнування?
11. На якій гіпотезі ґрунтується ІІІ теорія міцності?
12. Що таке енергетична теорія міцності?

13. Які недоліки класичних теорій міцності для пластичного руйнування?
14. На яких гіпотезах побудована теорія міцності Мора і які її основні недоліки?
15. Дайте визначення узагальненої теорії міцності Писаренка -Лебедева.
16. Які принципи побудови узагальненої теорії Бужинського – Ягна?
17. Які основні сталі матеріалу використовуються при побудові теорій міцності?
18. Яким коефіцієнтом описується різні значення опору матеріалу за розтягу та стиску?

ТЕМА 9 (лекції 17-19) МЕХАНІКА РУЙНУВАННЯ МАТЕРІАЛІВ З ТРІЩИНАМИ

9.1. Крихке руйнування. Критерій Гріффітса

Надзвичайно інтенсивне використання металів в XIX –XX століттях призвело до того, що число аварій та нещасних випадків, пов'язаних з появою тріщин в колесах, конструкціях, кораблях, літаках та машинах, досягло катастрофічних розмірів. Це привело до зростання кількості жертв та великих економічних втрат. Наприклад, загальні втрати, пов'язані з руйнуванням конструкцій, у 1982 році в США становили 119 млрд. дол. (приблизно 5% валового національного продукту). На сьогоднішній день вони ще збільшились (аварії “Шатлів”, літаків та кораблів).

При цьому, у багатьох випадках такі руйнування відбувалися за напружень, які були значно меншими від розрахункових і у більшості випадків були подібні на крихкі руйнування зварних конструкцій з маломіцних сталей. Випадки руйнування при малих напруженнях у високоміцних матеріалах стимулювали розвиток окремого напрямку в науці - *механіки руйнування*. Поява цього напрямку ґрунтується на тому, що міцність твердого деформівного тіла з *крихкого матеріалу* значною мірою залежить від наявності в ньому великої кількості

дефектів типу мікротріщин, що є впливом як самої мікроструктури матеріалу, так і технології його обробки. Це і наявність включень з іншого матеріалу, дефектів, спричинених відпускнуою крихкістю або неправильно проведеного цементування. Дефекти можуть виникати також внаслідок неправильної механічної обробки, або в процесі експлуатації через надмірне тертя та зношування. Руйнування твердих тіл відбувається внаслідок розвитку цих тріщиноподібних дефектів, в околі яких деформації відбуваються за межею пружності.

Згідно постулатів англійського вченого-механіка К.Міллера: “...всі полікристалічні матеріали мають природні тріщини, рівні за довжиною розміру зерна; що стадії зародження тріщини не існує і конструкцію слід оцінювати виходячи з того, чи тріщина в ній поширюватиметься, чи ні, чи зупиниться, чи пришвидшить свій ріст”. Наявність дефектів і, зокрема, тріщин у конструкціях, створює загрозу раптового руйнування або значно зменшує їх міцність та ресурс.

У зв'язку із названими факторами виникає необхідність поряд із **критеріями міцності**, що не передбачають наявності тріщин, формувати і користуватись **критеріями руйнування**, що враховують наявність, характер та вплив мікро- і макротріщин на руйнування матеріалів за напружень, які можуть бути нижчими за границю міцності (або навіть за границю плинності).

Вперше такий критерій був сформульований англійським інженером А. Гріффітсом (1920), згідно якого **тріщина починає рости в деформованому крихкому тілі за такого напруженого стану $\sigma_{\partial\partial}$, за якого швидкість вивільнення енергії пружної деформації тіла W , під час її поширення, перевищує приріст поверхневої енергії тіла U на нових поверхнях тріщини**, тобто настане рівність

$$\frac{\partial}{\partial l}(U(l, \gamma) - W(\sigma_{\partial\partial}, l)) = 0. \quad (9.1)$$

При цьому, вважається, що величина $U(l, \gamma)$ пропорційна приросту поверхні утвореної тріщини та величини питомої густини поверхневої енергії γ , яка чисельно дорівнює енергії,

необхідної для утворення одиниці площі нової вільної поверхні

$$U(l, \gamma) = 4\gamma l, \quad (9.2)$$

де $2l$ – довжина тріщини.

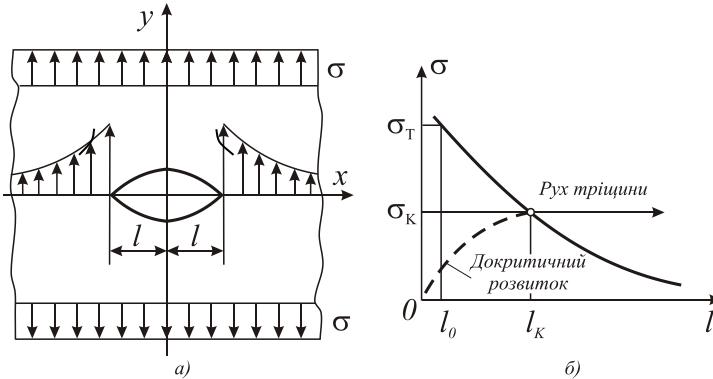


Рис. 9.1. а – розподіл напружень в пластині з еліптичною тріщиною;
б – графічна залежність між граничним напруженням та критичною довжиною тріщиною

Для доведення цього припущення була розглянута нескінченна пластинка одиничної товщини, що розтягувалась рівномірним навантаженням σ перпендикулярно до тріщини довжиною $2l$ (рис. 9.1). Необхідно було знайти напруження $\sigma = \sigma_{кр}$, при досягненні якого тріщина почне рухатися. Таке напруження називають *граничним* або *критичним*. Довжина тріщини, при якій досягається таке напруження, називається *критичною довжиною* $2l_{кр}$.

Вважаючи, що пластинка знаходиться в лінійному напруженому стані, вираз для питомої потенціальної деформації має вигляд:

$$w = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (9.3)$$

Будемо вважати, виходячи з принципу Сен-Венана, що та частина потенціальної енергії, котра припадає на зону зменшення напружень в пластинці з тріщиною (величину цієї

зони приймаємо рівною площі круга з радіусом $\sqrt{2} \cdot l$) і на яку зменшується повна енергія пластинки, буде дорівнювати:

$$W(\sigma, l) = W_{\text{безтріщини}} - W_{\text{зтріщиною}} = w \cdot 2\pi l^2 = \pi \frac{\sigma^2 l^2}{E}. \quad (9.4)$$

Результат (9.4) відповідає точному розв'язку Інґліса (1912) для площини з еліптичним отвором.

За **енергетичним критерієм** граничної рівноваги тріщини (9.1) **зменшення потенціальної енергії деформації повинно дорівнювати витраті питомої поверхневої енергії γ на прирості довжини тріщини $\delta l > 0$** , тобто воно еквівалентне виразу

$$\delta W = \delta U, \quad (9.5)$$

де

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial l} \delta l = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\pi \sigma^2 l^2}{E} \right) \cdot \delta l = \frac{2\pi \sigma^2 l}{E} \cdot \delta l,$$

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial l} \delta l = \frac{\partial}{\partial l} (4\gamma l) \cdot \delta l = 4\gamma \cdot \delta l.$$

Тоді, з умови (9.5) отримуємо

$$2 \frac{\pi \sigma^2 l}{E} = 4\gamma. \quad (9.6)$$

З формули (9.6) визначимо **граничне напруження $\sigma = \sigma_{кр}$** :

$$\sigma_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi l}}. \quad (9.7)$$

За формулою (9.7) можна визначити критичне напруження $\sigma_{\text{кр}}$, прикладене до пластини, при якому відбувається самочинне, без додаткової роботи зовнішніх сил, поширення тріщини початкової довжини $2l$. Фактично, величина $\sigma_{кр}$ визначає міцність матеріалу за даної довжини тріщини, тому її ще називають **залишковою міцністю**. Очевидно, що $\sigma_{кр}$ відрізняється (у меншу сторону) від міцності на розрив однорідного матеріалу. Для випадку плоского деформованого

стану у формулі (9.7) модуль пружності E необхідно замінити величиною $E/(1-\nu^2)$.

Формулу (9.7), яка перевірялась А. Гріффітсом експериментально, можна ще записати у вигляді залежності

$$\sigma_{кр} \cdot \sqrt{l} = const, \quad (9.8)$$

Для скляних колб та циліндричних трубок середнє значення цієї величини дорівнювало $-262 \text{ Па} \cdot \sqrt{\text{см}}$.

Одним з недоліків формули (9.7) вважається, що у відповідності до неї, наявність в тілі тріщини мікроскопічної довжини еквівалентна нескінченно великим граничним напруженням (рис. 9.1, б), які можуть перевищувати відповідні граничні напруження однорідного тіла, чого не спостерігається в реальних матеріалах. Детальніші математичні дослідження показують, що цього недоліку можна легко позбутися, якщо допустити наявність у матеріалах початкових мікротріщин з довжинами $2l_0$ котрі відповідають певним значенням $\sigma_{\epsilon\delta}^0$. Такі допущення дещо узагальнюють критерій А. Гріффітса, одночасно ускладнюючи його використання через відсутність (у більшості випадків) названих параметрів.

З формули (9.7) можна знайти також і **критичну довжину тріщини**:

$$l_{кр} = \frac{2\gamma E}{\pi \sigma_{кр}^2}. \quad (9.9)$$

Виходячи з цієї формули, можна зробити висновок, що поява тріщини в тілі може призвести до руйнування конструкції тільки у разі досягнення нею критичної довжини. Графічна залежність між ними подана на рис. 9.1, б. Аналіз цієї залежності та практичний досвід розрахунків показує, що тріщину з критичним напруженням, більшим від $0,8\sigma_{пл}$, можна не враховувати у розрахунках на міцність. Наприклад, для елементів конструкцій зі сталі 15Х2НМФА довжина l_0 дорівнює приблизно 10 мм, а для легваної сталі 1Х18Н8 вона зменшується більше як у 10 разів і дорівнює 0,8 мм. У випадках $l < l_0$ необхідно користуватись звичайними теоріями міцності.

Разом з тим, експерименти, проведені самим А. Гріффітсом для перевірки запропонованого ним критерію, отримали підтвердження тільки для такого ідеально крихкого матеріалу як скло. Експерименти, які були проведені для сталей, дали негативні результати. Пояснення цьому фактові дали тільки через 25 років англійські механіки Е.Орван та Дж.Ірвін, які допустили, що у *квасікрихких матеріалах* типу сталей у зоні вершини тріщини pojawiaються пластичні деформації, що чинять великий опір поширенню тріщини.

У зв'язку з цим, ними була додатково врахована питома енергія γ_{nl} , що затрачається на пластичне деформування:

$$\gamma_{ef} = \gamma + \gamma_{nl},$$

яка стала використовуватись у формулах (9.7), (9.8).

Експериментально встановлено, що $\gamma_{nl} \approx (10^3 \div 10^4) \gamma$.

Наприклад, для сталі $\gamma \approx 1 \text{ Дж} / \text{м}^2$, а $\gamma_{nl} \approx 2000 \text{ Дж} / \text{м}^2$. Отже, із достатньою точністю формулу (9.7) можна переписати у вигляді:

$$\sigma_{кр} = \sqrt{\frac{2\gamma_{nl} E}{\pi l}}. \quad (9.9a)$$

Значимо, що внаслідок істотної відмінності у кількості енергії, яка йде на руйнування *крихких* та *квасікрихких* матеріалів, можна стверджувати, що просування тріщин у *квасікрихких* (а також в'язких) матеріалах відбувається внаслідок роботи зовнішніх зусиль, прикладених до тіла. Тоді як для просування тріщин у крихких матеріалах цілком вистачає потенціальної енергії деформації, що є в конструкції.

Приклад. Якщо для корабля чи мостової конструкції з м'якої сталі $(\gamma_{nl} = 10^5 \text{ Дж} / \text{м}^2, E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \sigma_{nl} = 580 \text{ МПа})$

можна розраховувати на критичну довжину тріщини $2l_{кр} = 1 \text{ м}$, то при плоскому напруженому стані, згідно з формулою (9.9a), залишкова міцність конструкції буде дорівнювати – $\sigma_{кр} = \sqrt{2E\gamma_{nl}/\pi l_{кр}} \approx 163,5 \text{ МПа}$. Для критичної довжини

$2l_{кр} = 2m$ отримуємо $\sigma_{кр} = (163,5/\sqrt{2}) = 115,6 \text{ МПа}$. Саме на цей рівень напружень орієнтуються, коли проектують великі конструкції з коефіцієнтом запасу 5.

Як показали експерименти та додаткові теоретичні дослідження, енергетичний критерій А. Гріффітса не є достатнім для визначення початку просування тріщини, а також визначення напрямку її поширення. Але його, з достатнім успіхом, можна використовувати для підтвердження розрахунків, отриманих за допомогою інших критеріїв, коли названі вище фактори уже відомі.

9.2. Силовий критерій Ірвіна

Новим етапом (після А. Гріффітса) розвитку механіки руйнування стало виявлення асимптотики поля напружень і переміщень біля тріщини в деформівному твердому тілі. Вперше цю асимптотику побудував І. Снеддон (1946 р.), а потім узагальнив М. Вільямс (1952 р.). Ними було встановлено, що компоненти тензора напружень $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ (рис. 9.2) в околі вершини тріщини для випадку двовимірної задачі можна записати у вигляді:

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} f_1(\theta) \\ f_3(\theta) \\ f_5(\theta) \end{pmatrix} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} f_2(\theta) \\ f_4(\theta) \\ f_6(\theta) \end{pmatrix} + O(1), \quad (9.10, a)$$

де величини $K_I(\sigma, l), K_{II}(\sigma, l)$ названі **коефіцієнтами інтенсивності напружень** (КІН), які є ваговим параметром кореневої сингулярності напружень біля вершини тріщини; розмірність КІН: $[H] \cdot [M]^{-\frac{3}{2}}$.

Коефіцієнти K_I, K_{II} є функціями навантаження σ , довжини тріщини l і конфігурації тіла, але не залежать від координат r і θ (рис. 9.2); $O(1)$ – величина, обмежена при $r \rightarrow 0$. Функції $f_i(\theta)$ характеризують залежність сингулярної частини напружень від полярного кута θ :

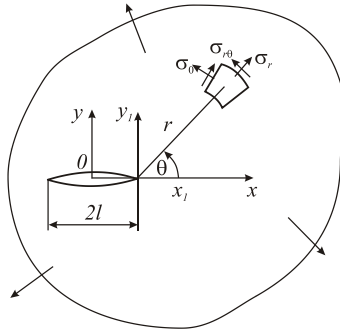


Рис. 9.2

$$\begin{aligned}
 f_1(\theta) &= \frac{1}{4} \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right); & f_2(\theta) &= -\frac{1}{4} \left(5 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right); \\
 f_3(\theta) &= \frac{1}{4} \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right); & f_4(\theta) &= -\frac{3}{4} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right); \\
 f_5(\theta) &= \frac{1}{4} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right); & f_6(\theta) &= \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Подібний розподіл має місце і в просторовій задачі, але у цьому випадку появляється ще один коефіцієнт K_{III} . На рис. 9.3 показано, з яким типом зміщення берегів тріщини пов'язані коефіцієнти K_I , K_{II} , K_{III} .

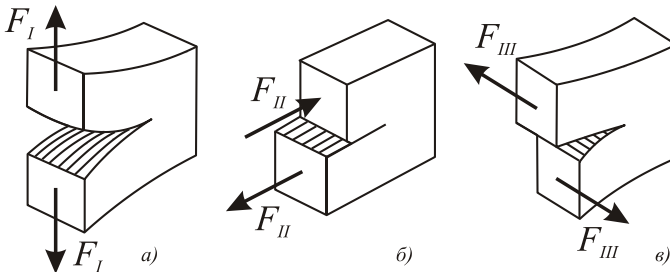


Рис. 9.3. Схема зміщення берегів тріщини: а – розкриття (відрив); б – поперечний зсув; в – поздовжній зсув.

Напруження поздовжнього зсуву (рис. 9.3, в) для просторової задачі знаходять за такими *наближеними* формулами:

$$\tau_{zx} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}; \quad \tau_{zy} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}. \quad (9.10, б)$$

Формули (9.10) з достатньою точністю можна застосовувати тільки у малому околі вістря тріщини, коли $r \leq 0,05l$.

На основі аналізу розподілу (9.10), англійський механік Дж. Ірвін у 1957 році запропонував новий критерій для визначення початку росту тріщини у деформованому твердому тілі. Названий критерій ґрунтується на концепції граничних значень коефіцієнтів інтенсивності напружень. Цей критерій прийнято називати **силовим**. Він полягає в тому, що зрушення тріщини розкриття починається в момент, коли коефіцієнт інтенсивності напружень K_i досягає критичного значення K_{ic} , тобто

$$K_i = K_{ic}, \quad (i = I, II, III), \quad (9.11)$$

де K_{ic} – характеристика здатності матеріалу чинити опір поширенню в ньому тріщини (його тріщиностійкість), яку називають **критичним коефіцієнтом інтенсивності матеріалів** і визначають з дослідів на спеціальних зразках з надрізом.

В основі критерію Дж. Ірвіна для тріщин відриву ($K_I \neq 0, K_{II} = 0, K_{III} = 0$) було твердження, що **навантаження σ буде гранично-рівноважним $\sigma = \sigma_{кр}$, якщо для деформованого тіла з тріщиною коефіцієнт інтенсивності напружень $K_I(\sigma_{кр}, l)$ дорівнює величині K_{ic} – деякій сталій для даного матеріалу.**

$$\text{Тобто,} \quad K_I^* = K_I(\sigma_{кр}, l) = K_{ic},$$

де $K_I(\sigma_{кр}, l) = \sigma_{кр} \sqrt{\pi l} \cdot Y_I(l/d)$; $Y_I(l/d)$ – функція, що враховує розміри пластини, форму тріщини та спосіб навантаження. Для нескінченної пластини $Y_I(l/d) \equiv 1$. Тоді

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l}; \quad K_{II} = K_{III} = \tau \sqrt{\pi l}.$$

Для пластини скінченої ширини d із центральною тріщиною користуються відомим емпіричним розв'язком К.Феддерсена –

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \cdot \sqrt{\sec \pi l / d}.$$

Для розтягнутої пластини з малою бічною тріщиною КІН $K_I = 1,12\sigma \sqrt{\pi l}$. За інших схем навантаження функції Y_I, Y_{II} та Y_{III} можна знайти із відомих довідників, або шляхом розв'язування відповідних задач теорії пружності (табл. 9.1).

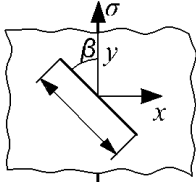
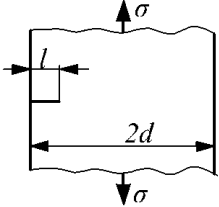
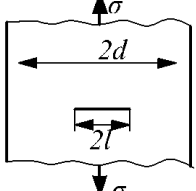
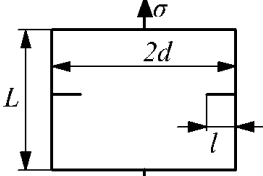
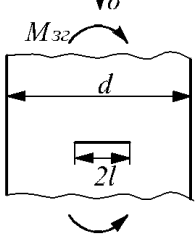
У випадку плоскої деформації критичні значення КІН позначають римськими цифрами K_{Ic}, K_{IIc} , а для плоского напруженого стану зберігається запис K_{Ic}, K_{2c} . В цьому випадку їх величини залежать ще і від товщини зразка t . При $t \rightarrow \infty K_{Ic} \rightarrow K_{Ic}$. Максимальне значення K_{Ic} відповідає деякому значенню $t = t^*$. Для металів відношення $K_{Ic}^{\max} / K_{Ic} = 1,5 \div 3$. Так, у випадку попередньої задачі, для сталі А588, коли товщина стінки конструкції $t = 3,8 \text{ см}$, значення КІН: $K_{Ic} = 123 \text{ МПа} \cdot \sqrt{\text{м}}$, а $K_{Ic} = 203 \text{ МПа} \cdot \sqrt{\text{м}}$, тобто $K_{Ic} = 1,65 K_{Ic}$. Граничне напруження для згаданої конструкції з тріщиною $2l = 1 \text{ м}$ знаходимо за

$$\text{формулою } \sigma_{кр}^1 = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi l}} = \frac{203}{\sqrt{\pi \cdot 0,5}} = 161,9 \text{ МПа},$$

$$\text{а для тріщини } - 2l = 2 \text{ м маємо } \sigma_{кр}^1 = 161,9 / \sqrt{2} = 114,5 \text{ МПа}.$$

Дані результати майже співпадають з попередніми результатами, знайденими за формулами енергетичного критерію А. Гріффітса.

Таблиця 9.1.

Вид навантаження	Схема	Функція форми об'єкта
Розтяг необмеженої пластини з похилою тріщиною в середині		$Y_I = \sin^2 \beta .$ $Y_{II} = \sin \beta \cdot \cos \beta .$
Розтяг, або згин в її площині, смуги з однобічною тріщиною		$Y_I^\sigma = 1,12 - 0,231\alpha + 10,55\alpha^2 - 21,72\alpha^3 + 30,39\alpha^4; \alpha = l/2d .$ $Y_I^M = 1,122 - 1,4\alpha + 7,33\alpha^2 - 13,08\alpha^3 + 14\alpha^4; \sigma = 1,5M/d^2 .$
Розтяг смуги з поперечною тріщиною посередині		$Y_I = 1/\sqrt{\cos \frac{\pi l}{2d}} .$
Розтяг смуги з двома боковими тріщинами		$Y_I = \sqrt{\frac{2d}{\pi l} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi l}{2d} + 0.1 \sin \frac{\pi l}{2d} \right)} .$
Згин в площині смуги з поперечною тріщиною посередині		$Y_I = \frac{\alpha \sqrt{1-\alpha}}{2(1-\alpha^3)} \left(1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2 - 0.69\alpha^3 + 0.46\alpha^4 \right); (0 \leq \alpha \leq 1),$ $Y_I = 0.5\alpha - \text{наближена формула}$ <p>Б.Л.Лозового та В.В.Панасюка для $\alpha = l/d \leq 05$, (похибка <3%).</p>

Разом з тим, використання КІН K_{Ic} (без урахування товщини стінки) в 1,65 раз їх занижує, тобто:

$$\sigma_{кр}^I (l=0,5) = \frac{123}{\sqrt{\pi \cdot 0,5}} = 98,1 \text{ МПа} \quad \text{і} \quad \sigma_{кр}^I (l=1) = \frac{123}{\sqrt{\pi}} = 69,4 \text{ МПа}, \text{ відповідно.}$$

В умовах крихкого руйнування матеріалу Дж. Ірвін довів, що критерій (9.11) еквівалентний енергетичній концепції А. Гріффітса, якщо у (9.7) покласти

$$K_{Ic} = \sqrt{2E^* \gamma}. \quad (9.12)$$

Тут $E^* \equiv E$ – для плоского напруженого стану; $E^* = E/(1-\nu^2)$ – для плоскої деформації. Термін “силовий” пов’язаний з аналізом напружень – внутрішніх зусиль.

Для металу структурна модель крихкого руйнування передбачає, що його руйнування відбувається в процесі навантаження, коли зона пластичної деформації сумірна із величиною структурного елемента (субзерна) $d = d_3 \cdot n_3$ (d_3 – діаметр зерна, n_3 – кількість зерен, що визначають розмір структурного елемента). Тоді величину K_{Ic} , яку ще називають *в’язкістю руйнування при плоскому деформованому стані*, можна записати у вигляді

$$K_{Ic} = \sigma_k \sqrt{2\pi d}, \quad (9.13)$$

де $\sigma_k = P_k/A_k$ – опір відриву, A_k – площа поперечного перерізу зразка після руйнування.

Л. Бережницьким та В. Панасюком критерій Дж. Ірвіна поширено на плоский напружений стан, коли

$$K_I(\sigma, l) \neq 0; K_{II}(\sigma, l) \neq 0, K_{III}(\sigma, l) = 0. \quad (9.14)$$

Його розвитком став так званий σ_θ – критерій, що встановлює напрям початкового просування тріщини: ***тріщина росте вздовж елементарних площинок, що проходять через фронт тріщини і на яких сингулярна частина розтягувальних напружень досягає максимуму:***

$$\sigma_\theta(\theta^*, \alpha) = \sigma_\theta^{\max}; \quad \left. \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta^*} = 0, \quad (9.16)$$

де $\theta = \theta^*$ – кут початкового напрямку росту тріщини, α – кут орієнтації тріщини відносно навантаження σ .

У межах плоскої задачі, для випадків змішаного характеру руйнування, К. Паланісвами та В. Кнауссом (1978) було запропоновано уточнений критерій руйнування

$$(K_I/K_{Ic})^2 + 1,5(K_{II}/K_{IIc})^2 = 1; \quad K_{IIc} = K_{Ic} \sqrt{2/3}, \quad (9.17)$$

який підтверджується (з певною точністю) σ_θ - критерієм.

О. Андрейківим критерій Дж. Ірвіна поширено на випадок просторової задачі –

$$K_I(\sigma, l) \neq 0; \quad K_{II}(\sigma, l) \neq 0; \quad K_{III}(\sigma, l) \neq 0. \quad (9.18)$$

Існують ще інші підходи, котрі враховують появу пластичних зон на кінчику тріщини, які називають *деформаційними критеріями міцності та руйнування*.

9.3. Деформаційні критерії руйнування. δ_k -критерій

У більшості випадків, руйнування металів супроводжується попереднім розвитком пластичних деформацій біля концентраторів напружень. М.Я. Леонов, В.В. Панасюк та Д.С. Дагдейл запропонували критерії, які дають змогу визначити розмір пластичної зони і розкриття вістря тріщини у пружно-пластичному тілі. Ці критерії дістали назву *деформаційно-енергетичних* або δ_k -критеріїв.

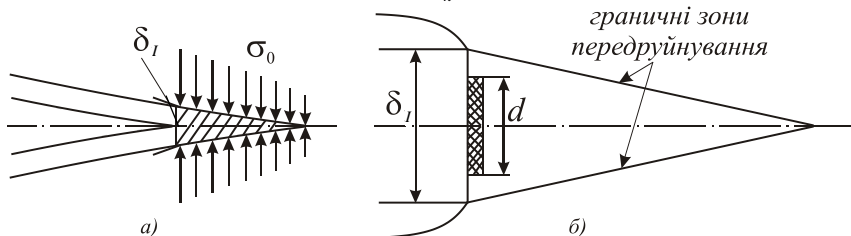


Рис. 9.4

Згідно з δ_k -критерієм вважають, що умовою руйнування матеріалу може бути досягнення величини розкриття тріщини δ_I (рис. 9.4, а) її критичного значення δ_{Ic} :

$$\delta_I = \delta_{Ic}, \quad (9.19)$$

де $\delta_{lc} = \varepsilon_c d$ – константа матеріалу, яка фіксується в момент початку руху тріщини; ε_c – граничне значення деформації, при якій відбувається розрив матеріалу; d – певна початкова довжина елемента матеріалу в зоні *передруйнування* (рис. 9.4, б).

Необхідно розв'язати пружно-пластичну задачу для тіла з тріщиною і отримати формулу для величини розкриття δ_l . Вважається, що в зоні *передруйнування* матеріал деформується за границею пружності, де відбувається його інтенсивне пластичне течіння та подальше локальне руйнування. Така уявна зона моделюється розрізом на продовженні тріщини, на берегах якого діють усереднені напруження σ_0 . Ці напруження, в залежності від моделі матеріалу, знаходяться в межах $\sigma_{nl} \leq \sigma_0 \leq 0,5(\sigma_{nl} + \sigma_{mc})$ і є інтегральною характеристикою

міцності матеріалу на відрив. Їх визначають з умови рівновеликості площ, що обмежуються істинною (крива 1) та модельною (ламана 2) діаграмами деформування (рис. 9.5). Фактично, ця умова є умовою рівності енергій руйнування реального тіла та моделі. До досягнення величини σ_0 зв'язок між напруженнями і деформаціями у матеріалі описується лінійним законом Гука. Напруги σ_0 вважаються нульовими, якщо розкриття тріщини перевищує величину δ_{lc} . У рамках прийнятої

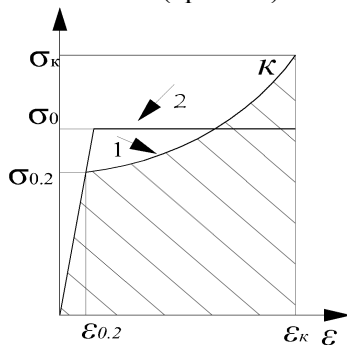


Рис. 9.5.

моделі для даного пружно-пластичного матеріалу та закону розподілу інтенсивності сил зчеплення між сусідніми атомами величини δ_{lc} , σ_0 зв'язані з густиною енергії руйнування γ залежністю

$$\sigma_0 \cdot \delta_{lc} = 2\gamma. \quad (9.20)$$

Умови (9.19), (9.20) є основними умовами δ_k -критерію, що зводять нелінійну задачу для крихкого тіла з тріщинами до

розв'язку задачі лінійної теорії пружності з додатковими характеристиками реального матеріалу.

Довжину самої *зони передруйнування* у вигляді *пластичної зони* нульової товщини, що знаходиться на продовженні осі тріщини, вперше визначив Д. Дагдейл (1960). Пізніше Б. Кудрявцевим та іншими авторами (1970) розміри цієї зони були уточнені для пластини необмежених розмірів за допомогою *теорії малих пружно-пластичних деформацій* у вигляді формули

$$r_{nl} = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_{nl}^2}. \quad (9.21)$$

Враховуючи вираз $K_I = \sigma\sqrt{\pi l}$ та формулу (9.21), одержимо

$$r_{\check{v}\check{v}} = 0.5(\sigma / \sigma_{\check{v}\check{v}})^2 \cdot l. \quad (9.21, a)$$

Тоді, з урахуванням пластичної зони, половину довжини тріщини можна записати у вигляді

$$l_{nl} = l + r_{nl} = l \left[1 + 0.5(\sigma / \sigma_{nl})^2 \right]. \quad (9.21, б)$$

Така поправка дає можливість застосувати критерій Ірвіна навіть у нелінійних задачах, підставивши у відповідні формули замість величини l величину $l + r_{nl}$. При цьому, необхідно пам'ятати, що розміри пластичної зони при плоскій деформації у п'ять-шість раз менші ніж при плоскому напруженому стані.

У найпростішому випадку навантаження нескінченної пластини розподіленим навантаженням σ (рис. 9.1, а) величина

$$\delta_I = \frac{8\sigma_0 l}{\pi E} \cdot \ln \left[\sec \frac{\pi\sigma}{2\sigma_0} \right]. \quad (9.22)$$

Розклавши приведену функцію в ряд та обмежившись першим членом (при умові, що $\sigma \leq 0,6\sigma_0$), отримуємо

$$\delta_I = \frac{\pi\sigma^2 l}{E \cdot \sigma_0}. \quad (9.23)$$

З критерію (9.19) та формули (9.23) легко отримати вираз для граничного напруження

$$\sigma_{кр} = \sqrt{\frac{\sigma_0 \delta_{Ic} \cdot E}{\pi l}}. \quad (9.24)$$

Підставивши у формулу (9.24) залежність (9.20), отримуємо відповідний критерій А. Гріффітса (9.7). Проте, останній дає при $l \rightarrow 0$ фізично нереальний результат $\sigma_{кр} \rightarrow \infty$ (тобто, міцність матеріалу є безмежно великою). Одночасно, для δ_k - критерію ця умова означає, що $\sigma_{кр} \rightarrow \sigma_0$ (тобто, тіло з тріщиною нульової довжини має міцність бездефектного середовища).

δ_k -критерій сприяв формулюванню, близького за ідеологією, критерію КРТ (*критичного розкриття тріщини*), одного з найбільш вживаних у *нелінійній механіці руйнування*. Останній був повністю сформульований А. Уеллсом у 1963 році.

При реалізації інших механізмів зміщення берегів тріщини (поперечний II та поздовжній III зсуви) критеріальні рівняння аналогічні попередньому:

$$\delta_{II} = \delta_{IIc}, \quad \delta_{III} = \delta_{IIIc}. \quad (9.25)$$

Між базовими характеристиками критеріїв K_{Ic} , K_{IIc} і K_{IIIc} , а також δ_{Ic} , δ_{IIc} і δ_{IIIc} існує взаємозв'язок, що впливає із відомих розв'язків В.Панасюка, О.Андрейківа, М.Саврука та ін. для відповідних ружних задач:

$$\delta_{Ic} = \frac{K_{Ic}^2}{\sigma_{0,2} E^*}; \quad \delta_{IIc} = \frac{K_{IIc}^2}{\tau_{0,2} G} \cdot (1 - \nu); \quad \delta_{IIIc} = \frac{2K_{IIIc}^2}{\pi \tau_{0,2} G}, \quad (9.26)$$

де приймається, що $\sigma_0 = \sigma_{0,2}$, а $\tau_0 = \tau_{0,2}$.

В рамках δ_k -критерію В. Панасюком, Я. Іваницьким та А. Андрейківим розроблено узагальнений критерій руйнування тіла (1985) у випадку можливої одночасної реалізації трьох макромеханізмів руйнування ($K_I \neq 0$, $K_{II} \neq 0$, $K_{III} \neq 0$). Отримано наближене критеріальне рівняння для визначення критичного розміру довжини тріщини

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}} \right)^{n_1} + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}} \right)^{n_2} + \left(\frac{K_{III}}{K_{IIIc}} \right)^{n_3} = 1, \quad (9.27)$$

який пізніше (2000) був уточнений (для ізотропних матеріалів) детермінізацією показників степенів n_i ($n_1 = n_2 = n_3 = 4$) для всіх трьох відношень КІН.

Головним недоліком δ_k -критерію є те, що він експериментально підтверджується тільки для ідеально пластичних ізотропних матеріалів при одному із напружених станів. Якщо матеріал не ізотропний і можлива реалізація всіх трьох макромеханізмів руйнування, то необхідно вводити інші параметри матеріалу, які визначаються експериментально. Крім того, безпосереднє експериментальне визначення параметра δ_{ic} можливе тільки при застосуванні *лінійної механіки руйнування*. Хоча *якісні* висновки δ_k -критерію можна поширити і на дуже в'язкі матеріали, російський механік Ю.М. Работнов піддав сумніву твердження, що величини δ_{ic} можна вважати універсальними сталими матеріалу.

9.4. Теоретична та реальна міцність твердих тіл

Міцність, жорсткість та пластичність твердих тіл є визначальними характеристиками, які необхідні конструктору при проектуванні деталей машин та елементів конструкцій. Міцність будь-якого твердого тіла забезпечується силами притягання (на відстанях x порядку 10^{-9} м.) між атомами у кристалічних ґратках (крива 2 на рис. 9.6).

Разом з тим, при силовому зближенні атомів до відстаней 10^{-10} м. між ними виникають сили відштовхування (крива 3). Тому при зміні механічної рівноваги атома його напружений стан буде визначатися рівнодійною цих сил (крива 1), яку наближено можна записати у вигляді формули

$$F = \frac{C}{x^2} \left(1 - \frac{R}{x^7} \right),$$

де C – стала бездефектного кристала; $R = a^7$; $a \approx 3 \cdot 10^{-10}$ м. – відстань між атомами кристала у рівноважному стані, x – абсолютне зміщення в кристалічній ґратці при деформації в'язей. Для ненавантаженого тіла рівнодійна F дорівнює нулю.

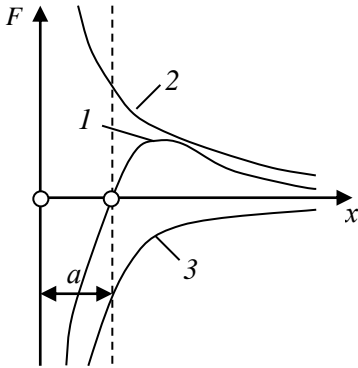


Рис. 9.6

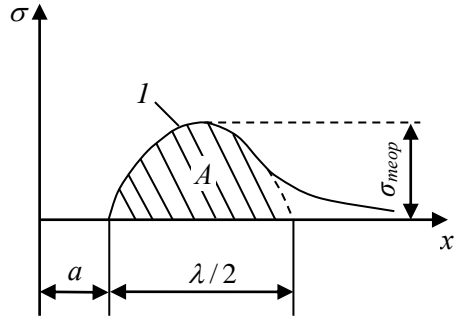


Рис. 9.7

Під **теоретичною міцністю** будемо вважати таке напруження $\sigma_{теор}$, яке необхідно прикласти, щоб зруйнувати ідеальний кристал, тобто перебороти сили в'язей між атомами у ґратці. Таке руйнування можна здійснювати двома способами: **відривом** (через нормальне напруження) та **зсувом** (під дією дотичного напруження).

Більшість науковців вважає, що сили взаємодії атомів мають синусоїдальну залежність від зміни відстані x між ними з певним періодом λ (рис.9.7). Тобто, величину нормального напруження в кристалічній ґратці можна апроксимувати синусоїдою:

$$\sigma(x) = \sigma_{теор} \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} = \sigma_{теор} \cdot \sin \left[2\pi \varepsilon(x) \frac{a}{\lambda} \right], \quad (9.28)$$

де $\sigma_{теор}$ – теоретична міцність матеріалу, $\varepsilon(x) = x/a$ – відносна лінійна деформація.

Разом з тим, у зоні пружних деформацій має виконуватися закон Гука

$$\sigma(x) = E \cdot \varepsilon(x). \quad (9.29)$$

Продиференціюємо рівності (9.28) і (9.29) за змінною ε та прирівняємо їх при $\varepsilon = 0$, вважаючи, що у цьому випадку величина $\cos\left(2\pi\varepsilon(x)\frac{a}{\lambda}\right) \approx 1$:

$$E = \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \approx \sigma_{теор} \cdot 2\pi \frac{a}{\lambda}. \quad (9.30)$$

Звідки отримаємо

$$\sigma_{теор} = E\lambda / (2\pi a). \quad (9.31)$$

З іншого боку, у відповідності до підходу Е.Орвана (1949), робота A , яку необхідно затратити на розрив міжатомних в'язей, дорівнює площі під кривою (рис. 9.7), що апроксимує зміну напруження $\sigma(x)$. Ця робота має дорівнювати питомій поверхневій енергії 2γ , що затрачується на утворення двох поверхонь тріщини в кристалі:

$$A = \int_0^{\lambda/2} \sigma_{теор} \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) dx = \sigma_{теор} \frac{\lambda}{\pi} = 2\gamma,$$

звідки

$$\sigma_{теор} = 2\gamma\pi / \lambda. \quad (9.32)$$

Перемноживши формули (9.31) і (9.32), отримаємо відому формулу Е.Орвана:

$$\sigma_{теор} = \sqrt{\frac{\gamma E}{a}}, \quad (9.33)$$

яка (за своєю ідеологією) ідентична формулі А. Гріффітса (9.7) і дозволяє розглядати характер руйнування матеріалів з позицій тріщиноутворення.

Застосуємо цю формулу до сталі, коли: $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$;
 $\gamma = 1 \text{ Н/м}$; $a = 3,4 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Тоді $\sigma_{теор} = 2,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2 = 0,125E \equiv E/8$.

Аналогічним способом можна отримати і величину теоретичного дотичного напруження, якщо прийняти $\lambda \approx a$.

$$\tau_{теор} = G/2\pi = 0,16G . \quad (9.34)$$

Детальніші дослідження інших науковців показують, що формула Е.Орована (9.33) дає дещо завищені значення (зберігаючи порядок) для теоретичного напруження, яке може знаходитись в межах:

$$\sigma_{теор} = 0,09 \div 0,2 \cdot E . \quad (9.35)$$

Останнє співвідношення підтверджує правильність попередніх міркувань. Разом з тим, *реальна міцність* матеріалів виявляється нижчою від *теоретичної* приблизно на 2 порядки (табл. 9.2.). Фізики припускають, що причиною розходжень *теоретичної* і *реальної* міцності є те, що в основі теоретичних розрахунків є ідеальний кристал, а в реальному кристалі завжди присутні дефекти кристалічної будови.

Таблиця 9.2.

Метал	Механічні властивості		
	$E, \text{ МПа}$	$\sigma_{теор}, \text{ МПа}$	$\sigma_{мц}, \text{ МПа}$
Fe_{α}	$211 \cdot 10^3$	$17 \cdot 10^3$	200
Cu	$112 \cdot 10^3$	$14 \cdot 10^3$	140
Al	$70 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^3$	80

Вперше ці припущення експериментально підтвердив А. Гріффітс (1920), який досліджував скляні волокна. Так, волокно діаметром 1 мм мало міцність віконного скла – 0,15...0,2 ГПа, а волокно діаметром 0,25 мкм – 6 ГПа, яка через кілька годин спадала до 3,5 ГПа. Екстраполюючи отримані результати, він встановив, що міцність найтонших кристалів скла має дорівнювати 11 ГПа, тобто близькою до теоретичної – 14 ГПа. Подібні результати, але вже на зразках монокристалів з кам'яної солі, були отримані А.Ф. Йоффе (1924). Якщо у повітрі ці монокристали мали границю міцності 4,4 МПа, то вже у гарячій воді їх міцність зростала до 160

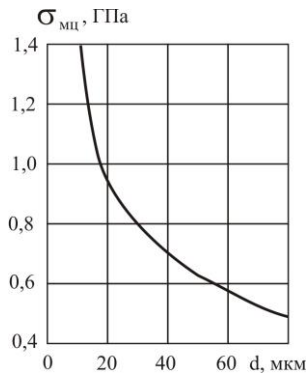


Рис. 9.8

МПа. Ці експерименти показали, що внаслідок розчинення поверхні зразка зникають дефекти, які були на ній, тому міцність зразка різко зростає. Крім того, *статистичні теорії міцності* теоретично підтвердили негативну роль дефектів у кристалах і встановили, що ймовірність появи у тілі небезпечного дефекту збільшується разом із збільшенням об'єму тіла (так званий *масштабний ефект*). На рис. 9.8. показана залежність міцності скляних волокон від їх діаметра d . Графік одержано експериментальним шляхом, але він узгоджується з результатами статистичних теорій міцності. Наприклад, волокно кристала заліза діаметром 1,6 мкм має міцність $\sigma_{мц} = 13,4 \cdot 10^3$ МПа, що майже у сто разів більше від міцності монокристалів заліза для зразків звичайних розмірів.

Крім дефектів, що є результатом взаємодії дислокацій на рівні кристалічної решітки, в матеріалі можуть бути також і тріщини, походження яких пов'язано з передісторією цього матеріалу. Тріщини можуть виникати і в процесі його навантаження при експлуатації. Кожний вид таких дефектів по-своєму впливає на міцність матеріалів і є предметом досліджень механіки руйнування.

Разом з тим, згаданий вище, *масштабний ефект* свідчить про те, що великі тіла, як правило, мають меншу міцність, ніж малі тіла тієї самої форми. Вперше вплив об'єму зразків на границю міцності матеріалу описав шведський математик і механік В. Вейбул (1939) за допомогою *статистичного* методу. Він показав, що для двох подібних зразків з одного матеріалу, але різного об'єму V_1 і V_2 , відношення середніх значень границь міцності $\sigma_{мц1}$, $\sigma_{мц2}$ будуть пов'язані залежністю

$$\frac{\sigma_{мц1}}{\sigma_{мц2}} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1/m}, \quad (9.36)$$

де m - постійна матеріалу, що характеризує його неоднорідність та знаходиться із експерименту.

Формула (9.36) була підтверджена експериментально українським вченим М. Давиденковим (1947) на циліндричних зразках із крихкої сталі. Так, для зразків з діаметрами $d_1 = 4\text{мм}$

та $d_2 = 10 \text{ мм}$, довжинами $l_1 = 20 \text{ мм}$ та $l_2 = 50 \text{ мм}$ було знайдено, відповідно, границі міцності $\sigma_{\text{мц}1} = 650 \text{ МПа}$ та $\sigma_{\text{мц}2} = 576 \text{ МПа}$. Параметр m , визначений з формули (9.36), дорівнював $m = 22,7$.

Для цього ж матеріалу ($m = 22,7$) границя міцності зразка з $d = 1 \text{ мм}$ та $l = 5 \text{ мм}$ за формулою (9.36) дорівнює $\sigma_{\text{мц}} = 780 \text{ МПа}$. Експерименти дали значення $\sigma_{\text{мц}} = 750 \text{ МПа}$. Похибка складає всього 4 %. Для інших матеріалів та видів навантаження параметра m може приймати інші значення. Наприклад, при визначенні границі втоми на згин двох зразків з діаметрами 10 мм і 100 мм виявилось, що для більшого зразка вона зменшилась на 40%, а стала $m = 5$. Для волокнистих композитних матеріалів параметр m знаходиться в межах $1 < m < 2$.

Застосування статистичних методів у механіці крихкого руйнування розглядалось у працях А.М. Фрейденталя, а для оцінки міцності волокнистих композитів - у працях Ю.М. Работнова.

Запитання для самоконтролю

1. Які характеристики матеріалу не враховують критерії міцності, але враховують критерії руйнування?
2. В чому суть критерію руйнування Гріффітса?
3. Що таке питома густина поверхневої енергії?
4. Запишіть формулу для визначення критичного напруження $\sigma_{\text{кр}}$.
5. Що таке критична довжина тріщини?
6. Які додаткові фактори до критерію руйнування Гріффітса врахували Дж.Ірвін та Е.Орован?
7. В чому суть силового критерію Ірвіна?
8. Що таке коефіцієнт інтенсивності напружень?
9. Яка розмірність коефіцієнта інтенсивності напружень?
10. Як позначаються коефіцієнти інтенсивності напружень

- у відповідності з типом зміщення берегів тріщини?
12. Як визначаються критичні значенні КІН?
 13. В чому полягає суть σ_θ - критерію?
 14. Запишіть уточнений критерій руйнування для плоскої задачі.
 15. Назвіть деформаційні критерії руйнування.
 16. Як визначається величина розкриття тріщини δ_1 ?
 17. Запишіть критеріальне рівняння Панасюка – Андрейківа для визначення критичного розміру довжини тріщини.
 18. Яка міцність матеріалу вважається теоретичною?
 19. В чому полягає явище масштабного ефекту?
 20. Яка причина розходжень між теоретичною та реальною міцністю?

ТЕМА 10 (лекції 20-23)

ЗГИН БАЛОК

10.1. Поперечна сила і згинальний момент

Вивчення деформації згину має велике значення у розрахунках елементів конструкцій. Ознакою деформації згину стрижня є зміна кривини його поздовжньої осі. Стрижні, що працюють на згин, називають *балками*. В інженерній практиці часто виникає необхідність визначення напружень та прогинів у балках. Це зв'язано з проектуванням різних конструкцій та споруд, де максимальні величини напружень і переміщень не повинні перевищувати допустимих. У випадку, коли всі навантаження (а отже і реакції опор), діють в одній площині, згин називають *плоским*. Якщо деформація осі балки відбувається у площині навантаження, то такий згин називається *прямим*. Коли ж викривлення осі балки не відбувається у площині навантаження, то такий згин називають *косим*.

Названі види згину можна одержати тільки за умови забезпечення нерухомості балки, що знаходиться під дією зовнішнього навантаження. Для цього її певним чином закріплюють. Існує три основних типи закріплення:

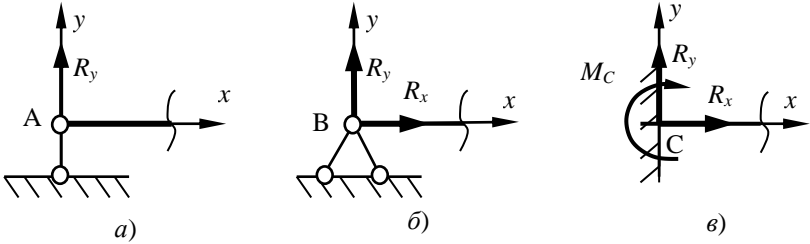


Рис. 10.1

а) шарнірно – рухома опора (рис. 10.1, а), у якій виникає тільки одна складова реакції - R_y , що направлена вздовж опорного стрижня;

б) шарнірно – нерухома опора (рис. 10.1, б), у якій можуть виникати дві складових реакції – вертикальна R_y та горизонтальна R_x .

в) жорстке защемлення (затиснення), де можуть виникати три складові - вертикальна R_y та горизонтальна R_x реакції, а також опорний момент M_c (рис. 10.1, в).

Існують і інші типи закріплень (наприклад, пружні закріплення), але вони в даній лекції розглядатися не будуть.

Розглядаючи балку, яка навантажена довільним навантаженням (рис. 10.2,а) дослідимо, які внутрішні сили виникають у її перерізах. Для цього використаємо *метод перерізів*. Розглядаючи рівновагу правої і лівої частини балки, можна зробити висновок, що для забезпечення їх рівноваги дію

відкинutoї частини потрібно замінити однією рівнодійною силою $Q(x)$ та однією парою з рівнодійним моментом $M(x)$. Силу $Q(x)$ назвемо **поперечною силою**, а момент $M(x)$ – **згинальним моментом** (рис. 10.2, б).

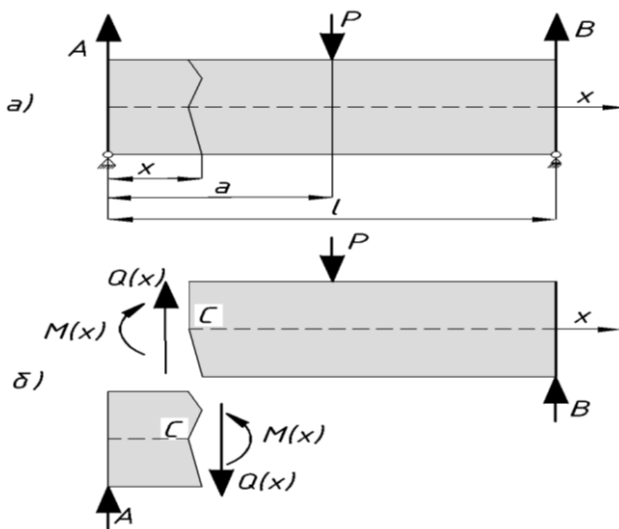


Рис. 10.2

Поперечна сила є рівнодійною внутрішніх сил, що діють у площині поперечного перерізу, а *згинальний момент* є моментом пари, утвореної внутрішніми силами, перпендикулярними до площини поперечного перерізу.

Отже, в загальному випадку прямого згину в поперечних перерізах балки виникають два внутрішніх силових фактори: поперечна сила $Q(x)$ і згинальний момент $M(x)$. Такий згин називається *поперечним*. В окремому випадку, коли зовнішні сили зводяться до пари сил, а поперечна сила дорівнює нулеві, у поперечному перерізі балки виникає лише один згинальний

момент M . Такий згин називається *чистим згином*.

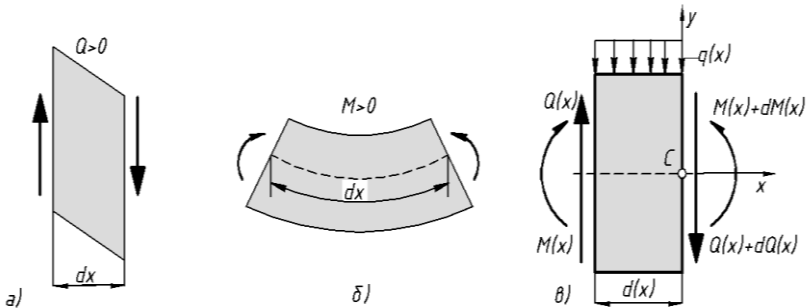


Рис. 10.3

Знак поперечної сили пов'язують з характером деформації зсуву: якщо ця сила намагається зсунути ліву частину балки відносно правої догори (рис. 10.3, а), то вона додатна, в протилежному випадку – від'ємна. Згинальний момент вважають додатним, якщо в балці розтягуються нижні волокна (рис. 10.3,б) і від'ємним – при вигині балки опуклістю догори (розтягуються верхні волокна).

Для визначення залежностей між згинальним моментом $M(x)$, поперечною силою $Q(x)$ та розподілим навантаженням $q(x)$ розглянемо статичну рівновагу, вирізаного з балки елемента довжиною dx , що навантажений цими зусиллями у вигляді, зображеному на рисунку 10.3, в. При цьому, і згинальні, і поперечні сили, що діють праворуч від елемента, відрізняються від значень ліворуч від нього приростами dM і dQ .

З умов рівноваги елемента від дії прикладених до нього усіх навантажень, а також допущення, що розподілене навантаження $q(x)$ на малому відрізку dx можна вважати рівномірним, одержуємо:

Звідки

$$\begin{aligned}\Sigma Y = 0: & -Q(x) + q(x)dx + Q(x) + dQ(x) = 0, \\ & \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x); \quad (10.1)\end{aligned}$$

$$\Sigma M_C = 0: M(x) + Q(x)dx - q(x)\frac{dx^2}{2} - M(x) - dM(x) = 0,$$

звідки, нехтуючи квадратом малої величини, одержимо

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x). \quad (10.2)$$

Продиференціювавши вираз (10.2) за змінною x , із врахуванням формули (10.1), одержимо

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x). \quad (10.3)$$

Аналіз диференціальних залежностей(10.1)- (10.3) веде до наступних висновків:

1. Якщо вирази для згинальних моментів записати поліномами, то степінь полінома для $M(x)$ буде на одиницю вищий від степеня полінома для $Q(x)$, а степінь полінома для $Q(x)$, у свою чергу, буде на одиницю вищий від степеня полінома для $q(x)$.

2. Якщо на певному відрізку балки відсутнє розподілене навантаження - $q = 0$, то на цьому ж відрізку поперечна сила є сталою - $Q = const$, а згинальний момент є лінійною функцією; у випадку, коли - $q = const$, то поперечна сила є лінійною функцією, а згинальний момент поліномом другого степеня.

3. Рівність нулю у певній точці x_0 поперечної сили $Q(x_0) = 0$ є умовою екстремальності згинального моменту -

$M(x_0) = M_{\min}^{\max}$. Якщо ж поперечна сила $Q = 0$ на певному відрізку балки, то тоді на цьому відрізку момент $M = const$ (випадок *чистого згину*).

10.2. Напруження і деформації при згині

Як було сказано вище, при *поперечному* згині в перерізах балки виникають поперечна сила Q і згинальний момент M , які є за своєю природою рівнодійними відповідних внутрішніх зусиль.

Поперечна сила Q , що виникає у площині поперечного перерізу балки, є рівнодійною елементарних дотичних зусиль τ_y (рис. 10.4, а)

$$Q(x) = \int_A \tau_y \cdot dA. \quad (10.4)$$

Згинальний момент M є рівнодійною моментів елементарних нормальних зусиль $\sigma_x \cdot dA$ (рис. 10.4, б) -

$$M(x) = \int_A y \sigma_x \cdot dA. \quad (10.5)$$

Визначення закону розподілу напружень τ_y і σ_x в перерізах балки із інтегральних рівнянь (10.4) і (10.5) є статично невизначною задачею теорії пружності. Тому в опорі матеріалів користуються наближеними методами, що базуються на певних гіпотезах щодо характеру розподілу напружень τ_y і σ_x у площинах перерізу.

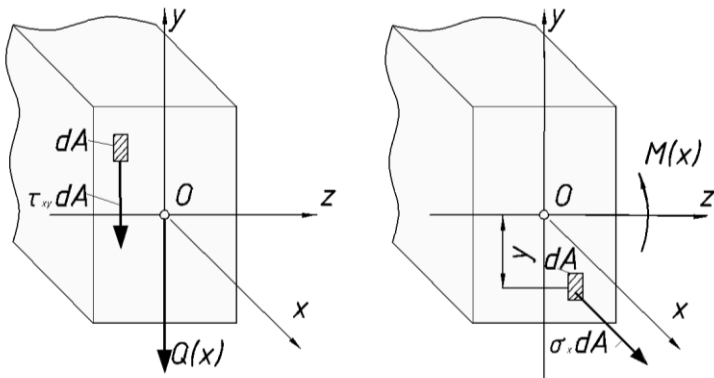


Рис. 10.4

Для визначення нормальних напружень σ_x розглянемо випадок **чистого згину**, за якого поперечна сила $Q \equiv 0$ і можуть бути справедливими наступні гіпотези:

- поперечні перерізи балки, плоскі і перпендикулярні до її осьової лінії до деформації, залишаються плоскими і перпендикулярними до цієї лінії і після деформації (*гіпотеза плоских перерізів*);
- поздовжні волокна балки при її деформації зазнають тільки простого розтягу або стиску, але не тиснуть одні на одних у вертикальному напрямку;
- деформації волокон по ширині перерізу *не змінюються*, а по висоті *змінюються неперервно*.

Виходячи із першої гіпотези, легко довести, що деформації поздовжніх волокон балки мають змінюватися пропорційно залежно від відстані y до нейтральної осі стрижня, тобто $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot y$, де ε_0 – величина, яка чисельно рівна кривині κ нейтральної осі стрижня:

$$\varepsilon = \kappa \cdot y. \quad (10.6)$$

де $\kappa = 1/\rho$; ρ – радіус кривини нейтральної осі стрижня.

Друга гіпотеза еквівалентна умові, що за чистого згину поперечні нормальні напруження σ_y дорівнюють нулю ($\sigma_y = 0$). Тобто, на основі закону Гука, нормальні напруження в балці будуть дорівнювати

$$\sigma_x = \kappa \cdot E y. \quad (10.7)$$

Підставивши вираз (10.7) у рівняння (10.5), отримаємо

$$M = \kappa E \int_A y^2 dA = \kappa \cdot EI_z, \quad (10.8)$$

де $I_z = \int_A y^2 dA$ – осьовий момент інерції поперечного перерізу відносно осі Oz

Співвідношення (10.8) можна переписати в іншому вигляді:

$$\kappa = \frac{M}{EI_z}, \quad (10.9)$$

яке ще називають *законом Гука за згину*.

Об'єднавши співвідношення (10.7) та (10.9), отримаємо вираз для визначення нормальних напружень у балці:

$$\sigma_x = \frac{M}{I_z} \cdot y. \quad (10.10)$$

З одержаної формули видно, що найбільші розтягувальні та стискувальні напруження виникають у найвіддаленіших від нейтральної осі балки точках. Якщо поперечний переріз симетричний відносно осі Oz , то між згаданими напруженнями існує залежність:

$$(\sigma_x)_{\max} = -(\sigma_x)_{\min} = \frac{M}{I_z} y_{\max} = \frac{M}{W_z}, \quad (10.11)$$

де $W_z = I_z / y_{\max}$ – осьовий момент опору перерізу балки.

Для балки прямокутного перерізу: $y_{\max} = \frac{h}{2}$, $I_z = \frac{bh^3}{12}$,
 $W_z = \frac{bh^2}{6}$. Для балки круглого перерізу (діаметром d)

$W = \pi d^3 / 32 \approx 0,1d^3$. Характеристики перерізів балок іншої форми (трикутник, швелер, двотавр тощо) подаються у вигляді таблиць в різних довідниках, а також у табл. 4.1.

Отримані вирази для нормальних напружень при чистому згині у випадку поперечного згину, коли $Q \neq 0$, вже не будуть точними. Це пов'язано із тим, що для поперечного згину гіпотеза плоских перерізів не виконується. Але, як показали точніші дослідження на основі рівнянь теорії пружності, формулою (10.10) можна користуватись і у випадках поперечного згину, підставивши в неї замість сталого згинального моменту змінний згинальний момент $M(x)$ –

$$\sigma = \frac{M(x)}{I_z} \cdot y. \quad (10.12)$$

Похибка, яка при цьому допускається, не перевищуватиме 2%, якщо відношення довжини прогону l до висоти перерізу h буде задовольняти нерівність $l/h \geq 4 \div 5$. Проте така оцінка справедлива тільки для ізотропних матеріалів. Для анізотропних матеріалів похибка формули (10.12) може бути значно більшою. Наприклад, для дерев'яної (соснової) балки вона може (при $l/h = 4$ і різних розподілених навантаженнях) перевищувати 15 ÷ 20%. У таких випадках необхідно використовувати розв'язки теорії пружності, або точніші рівняння згину балок.

За розрахунку балки на міцність з невисоким рівнем дотичних напружень можна вважати, що її міцність буде забезпечена, коли задовольняється умова міцності для максимальних нормальних напружень, які виникають у її небезпечному перерізі

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Підставивши значення σ_{\max} із формули (10.11), одержимо умову міцності для балки з симетричним перерізом:

$$\frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]. \quad (10.13)$$

З цієї умови випливає умова підбору поперечного перерізу балки:

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}. \quad (10.14)$$

За одержаним числовим значенням осьового моменту опору підбираємо відповідний стандартний профіль або геометричні параметри прямокутного чи круглого перерізів. Якщо ж переріз несиметричний, то визначається менший з двох моментів опору перерізу. У випадку матеріалу, що неоднаково працює на розтяг і стиск, перевірку на міцність необхідно робити окремо для кожного виду деформації за відповідними допустимими напруженнями.

10.3. Дотичні напруження за поперечного згину балки. Формула Журавського

Поперечний згин балки викликає у її поперечних перерізах дію *дотичних напружень* τ_y , рівнодійною яких є перерізуюча сила Q . Формули розподілу цих напружень знаходяться методами теорії пружності. Їх аналіз показує, що суттєвих значень *дотичні напруження* досягають у тонкостінних перерізах та у перерізах форми високих і вузьких прямокутників. Вперше елементарним методом, без застосування рівняння теорії пружності, формулу для дотичних напружень вивів учений Д.І. Журавський (1856 р.). Це стало можливим за справедливості гіпотези, що вони розподіляються рівномірно по ширині перерізу (рис.10.5, а) і для них залишається справедливою гіпотеза *парності дотичних*

напружень ($|\tau_x| = |\tau_y|$). Формула для дотичних напружень носить назву *формули Журавського*, що має вигляд:

$$\tau_y = \frac{QS_z^*}{bI_z}, \quad (10.15)$$

де Q – перерізуюча сила в даному перерізі; S_z^* – статичний момент відносно нейтральної осі відсіченої площі; I_z – осьовий момент інерції перерізу відносно нейтральної осі; b – ширина перерізу.

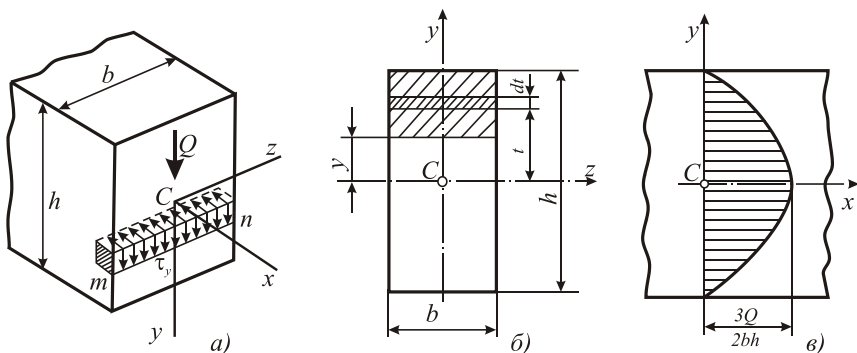


Рис. 10.5

У випадку прямокутника з висотою h та шириною b (рис.10.5, б) момент інерції та статичний момент частини перерізу відносно нейтральної осі z дорівнюють

$$I_z = \frac{bh^3}{12}; \quad S_z^* = \int_y^{h/2} btdt = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{(2y)^2}{h^2} \right). \quad (10.16)$$

Вираз (10.15) для дотичного напруження τ_y набуде вигляду

$$\tau_y = \frac{3Q}{2bh} \left(1 - \frac{(2y)^2}{h^2} \right). \quad (10.17)$$

Аналіз формули (10.17) показує, що максимальні дотичні напруження виникають на нейтральній осі балки і дорівнюють:

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3Q}{2A}. \quad (10.18)$$

Для круглого поперечного перерізу радіуса r (рис. 10.6) відповідні величини у формулі Журавського (10.15) будуть дорівнювати:

$$S_z^* = \int_y^r t dA = \int_y^r 2t\sqrt{r^2 - t^2} dt = \frac{2}{3}(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$dA = b(t)dt = 2\sqrt{r^2 - t^2} dt, \quad b(t) = 2\sqrt{r^2 - t^2}, \quad I_z = \frac{\pi r^4}{4},$$

а кінцевий вираз для дотичного напруження τ_y має вигляд:

$$\tau_y = \frac{Q}{3I_z}(r^2 - y^2). \quad (10.19)$$

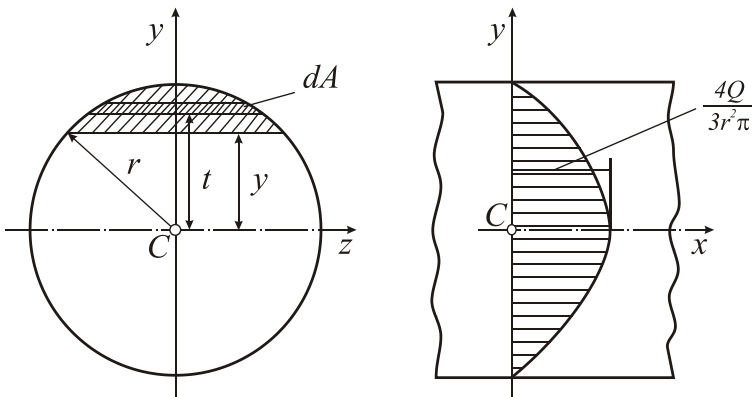


Рис. 10.6

З формули (10.16) легко отримати максимальне значення дотичного напруження в круглому перерізі, поклавши $y = 0$:

$$\tau_{\max} = \frac{4Q}{3\pi r^2} = \frac{4}{3} \frac{Q}{A}. \quad (10.20)$$

Порівняння формул (10.16)-(10.20) з відповідними результатами теорії пружності показує, що їх похибки не перевищують 5 %. Тому ці формули з достатньою точністю можуть бути застосовані у розрахунках балок на міцність.

10.4. Зігнута вісь балки та її диференціальне рівняння

Поперечні навантаження, що згинають балку, деформують її поздовжню вісь, перетворюючи її в деяку криву (рис. 10.7). При розрахунках балок на жорсткість необхідно знати прогин у різних точках на осі балки, а максимальний прогин не повинен перевищувати допустимого.

Для того, щоб вивести диференціальне рівняння *лінії прогинів* балки (або *пружної лінії*), скористаємось залежністю (10.6) між кривиною κ і згинальним моментом M . У цій рівності кривину пружної лінії можна наближено замінити другою похідною від прогинів балки

$$\kappa(x) \approx y''(x).$$

Похибка цього наближення еквівалентна величині $(y')^2$ у порівнянні з одиницею. В результаті, диференціальне рівняння зігнутої осі балки буде мати вигляд

$$EIy''(x) = M(x). \quad (10.21)$$

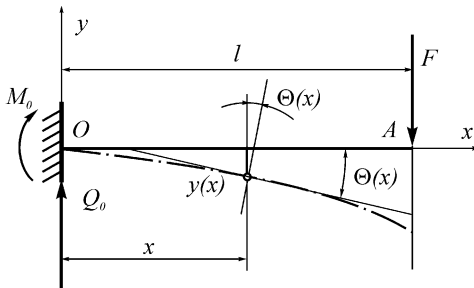


Рис. 10.7

Якщо вісь ординат Oy направлена вниз, то у рівнянні (10.21) перед величиною згинального моменту $M(x)$ необхідно

поставити знак “-”. У цьому випадку знаки згинального моменту $M(x)$ та другої похідної $y''(x)$ різні. Інтегруючи диференціальне рівняння (10.21), одержимо рівняння зігнутої осі балки у вигляді

$$EIy(x) = EIy(0) + EIy'(0) \cdot x + \Phi(x), \quad (10.22)$$

де $\Phi(x) = \int_0^x M(t)(x-t) dt$; $EI = const$.

Диференціюючи рівняння (10.22) за змінною x , одержуємо рівняння кутів повороту поперечних перерізів зігнутої осі балки

$$EIy'(x) = EIy'(0) + \Phi'(x). \quad (10.23)$$

Сталі інтегрування $y(0)$ та $y'(0)$ мають, відповідно фізичний зміст прогину балки та кута повороту її перерізу в початку координатної системи. Їх прийнято називати ще *початковими параметрами*.

Функція $\Phi(x)$ залежить від навантаження балки. У загальному випадку навантажень, які часто зустрічаються на практиці, її можна записати у вигляді

$$\Phi(x) = M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} + \sum \frac{M_i (x-a_i)^2}{2!} + \sum \frac{F_i (x-b_i)^3}{3!} + \sum \frac{q_i}{4!} [(x-c_i)^4 - (x-d_i)^4], \quad (10.24)$$

де a_i, b_i – відстані до точок прикладання зосереджених моментів M_i та сил F_i ; c_i, d_i – відстані до початку та кінця прикладання розподіленого навантаження q_i .

У рівнянні (10.24) сила Q_0 і момент M_0 діють у перерізі, який співпадає з початком координат. Знаки “+” чи “-” перед усіма величинами залежать від того, у якому напрямку буде переміщуватись від їх дії початок координат пружної лінії балки. Рівняння переміщень пружної лінії балки (10.22), куди входить функція навантажень у вигляді (10.24), називається

універсальним рівнянням прогинів. Початкові параметри $y(0)$, $y'(0)$, Q_0 та M_0 визначають з умов на опорах балки. Наприклад, для консолі (рис. 10.6) буде: $y(0)=0$; $y'(0)=0$; $Q_0 = F$; $M_0 = -Fl$. Тоді, виходячи із наведених даних, рівняння прогинів консолі матиме вигляд:

$$EIy(x) = -Flx^2/2 + Fx^3/6. \quad (10.25)$$

Диференціюючи цей вираз для прогинів, дістанемо рівняння кутів повороту поперечних перерізів консолі

$$EIy'(x) = -Flx + Fx^2/2. \quad (10.26)$$

На вільному кінці консолі, при $x = l$, маємо:

$$EIy(l) = EIf_A = -\frac{1}{3}Fl^3; \quad f_A = -\frac{Fl^3}{3EI};$$

$$EIy'(l) = EI\Theta_A = -\frac{1}{2}Fl^2; \quad \Theta_A = -\frac{Fl^2}{2EI}.$$

Знак “-” для переміщення f_A означає, що воно відбувається у напрямку протилежному до додатного напрямку осі Oy .

Від’ємний знак кута Θ_A вказує на те, що кінцевий переріз консолі повертається за ходом стрілки годинника.

Що стосується використання функції $\Phi(x)$ в універсальному рівнянні прогинів, то необхідно мати на увазі, що врахування кожного з членів у ньому відбувається за умов: $x \geq \{a_i, b_i, c_i, d_i\}$.

Приклад 1. Для заданої консольної балки побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів (рис. 10.8).

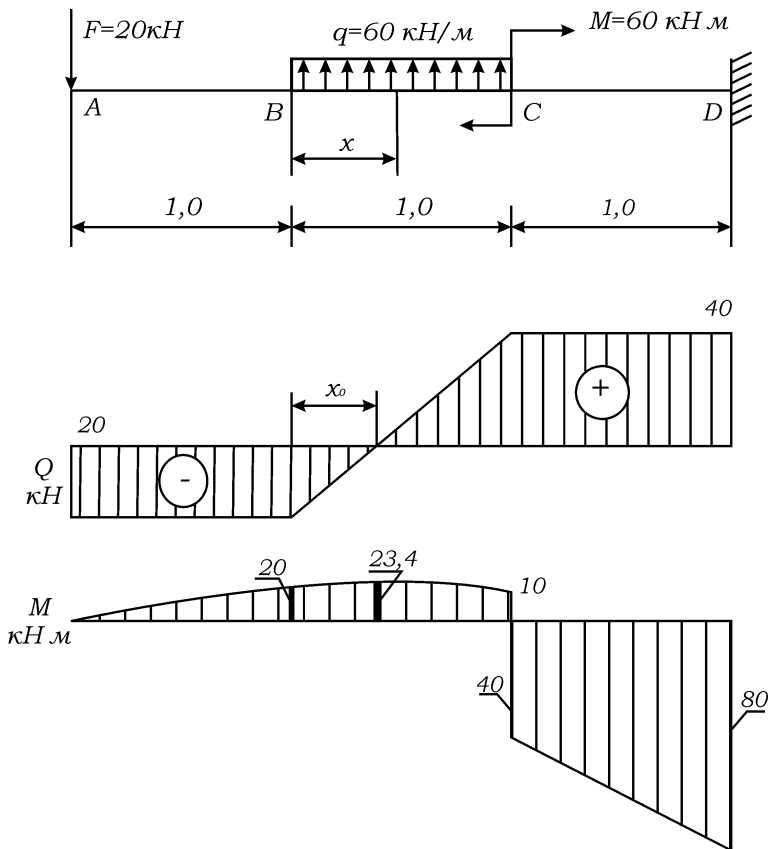


Рис. 10.8

Ділянка A – B: $0 \leq x \leq 1,0$. $Q_{A-B} = -F = -20 \text{ кН}$;

$$M_A = 0; \quad M_B = -F = -20 \text{ кНм} .$$

Ділянка B – C: $0 \leq x \leq 1,0$; $Q(x) = -F + qx = -20 + 60x$;

$$Q_B = -20 \text{ кН} ; \quad Q_C = 40 \text{ кН} ; \quad Q(x_0) = -20 + 60x_0 = 0, \\ x_0 = 0.33 \text{ м} .$$

$$M(x) = -F(1+x) + \frac{qx^2}{2} = -20(1+x) + 30x^2;$$

$$M_B = -20 \text{ кНм} , \quad M_C = 10 \text{ кНм} ,$$

$$M(x_0) = M_{\min} = -23.4 \text{ кНм} .$$

Ділянка C – D: $Q_{C-D} = -F + q \cdot 1.0 = -20 + 60 = 40 \text{êÍ}$.

$$M_C = -F \cdot 2.0 + \frac{ql^2}{2} + M = -40 + 90 + 50 = 80 \text{êÍ} \text{ì} ,$$

$$M_D = -F \cdot 3.0 + q \cdot 1.0 \cdot 1.5 + M = -60 + 30 + 50 = 20 \text{êÍ} \text{ì} .$$

На основі отриманих результатів будуємо епюри $Q(x), M(x)$ (рис. 10.8).

Приклад 2. Для заданої балки (рис. 10.9) підібрати двотавровий, круглий і прямокутний перерізи (приймаючи для прямокутного перерізу відношення висоти до ширини $h/b = 2$) і порівняти вагу одного метра довжини кожного профілю.

Виконати повну перевірку міцності двотаврової балки і, використовуючи метод початкових параметрів, зобразити пружну лінію.

Матеріал балки – сталь Ст3, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$,
 $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $M = 50 \text{ кНм}$, $q = 20 \text{ кН/м}$, $F = 40 \text{ кН}$.

Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів.

Визначимо опорні реакції. Приймаємо напрям двох реакцій А та В вгору і записуємо умови рівноваги:

$$\sum M_A = 0: B \cdot 4 + M - q \cdot 5 \cdot 4.5 - F \cdot 5 = 0 ,$$

звідки
$$B = \frac{-50 + 20 \cdot 5 \cdot 4.5 + 40 \cdot 5}{4} = 150 \text{ кН} .$$

Реакція В напрямлена вгору.

$$\sum M_B = 0: A_y \cdot 4 - M + q \cdot 5 \cdot 0.5 + F \cdot 1 = 0 ,$$

звідки
$$A_y = \frac{50 - 20 \cdot 5 \cdot 0.5 - 40}{4} = -10 \text{ кН} .$$

Реакція A_y напрямлена не вгору, як було прийнято, а вниз.

Перевірка:
$$\sum Y = 0: -10 - 20 \cdot 5 - 40 + 150 = 0 .$$

Знаходимо характерні значення ординат епюр Q і M на окремих ділянках балки.

Ділянка А – С: $0 \leq x_1 \leq 2$:

$$Q_{A-C} = A_y = -10 \text{ кН} ; M(x_1) = A_y \cdot x_1 ;$$

$$M_A = 0, M_C = A \cdot 2 = -20 \text{ кНм} ;$$

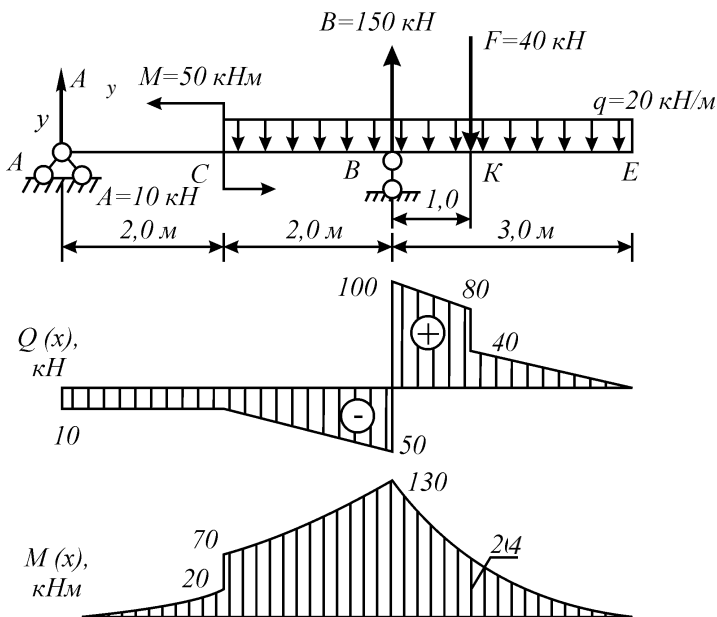


Рис. 10.9

Ділянка **С – В**: $0 \leq x_2 \leq 2$:

$$Q(x_2) = A_y - qx_2 = -10 - 20x_2;$$

$$Q_C = -10 \text{ кН}, \quad Q_B = -10 - 20 \cdot 2 = -50 \text{ кН};$$

$$M(x_2) = A_y(2 + x_2) - M - \frac{qx_2^2}{2} = -10(2 + x_2) - 50 - 10x_2^2;$$

$$M_C = -10 \cdot 2 - 50 = -70 \text{ кНм};$$

$$M_B = -10 \cdot 4 - 50 - 10 \cdot 2^2 = -130 \text{ кНм}.$$

Ділянка **К – Е**: $0 \leq x_3 \leq 2$:

$$Q(x_3) = qx_3 = 20x_3;$$

$$Q_E = 0, \quad Q_K = 20 \cdot 2 = 40 \text{ кН};$$

$$M(x_3) = -\frac{qx_3^2}{2} = -10x_3^2, \quad M_E = 0;$$

$$M_K = -10 \cdot 2^2 = -40 \text{ кНм} .$$

Ділянка **K – B** : $2 \leq x_4 \leq 3$:

$$Q(x_4) = q(x_4 + 2) + F = 20(x_4 + 2) + 40 ;$$

$$M(x_4) = \frac{q(x_4 + 2)^2}{2} - F(x_4 - 2) ;$$

$$Q_K = 20 \cdot 2 + 40 = 80 \text{ кН} ,$$

$$Q_B = 20 \cdot 3 + 40 = 100 \text{ кН} ;$$

$$M_K = -10 \cdot 2^2 = -40 \text{ кНм} ;$$

$$M_B = -10 \cdot 3^2 - 40 \cdot 1 = -130 \text{ кНм} .$$

За одержаними значеннями будуємо епюри $Q(x)$ і $M(x)$ (рис. 10.9). Епюри для згинальних моментів $M(x)$ відкладаємо зі сторони розтягнутих волокон.

Підбір перерізів з умови міцності за нормальними напруженнями

Для підбору перерізів скористаємось формулою (10.14)

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} .$$

Найбільший згинальний момент за абсолютною величиною $M_{\max} = 130 \text{ кНм}$ виникає в перерізі **B**. Тоді необхідний осьовий момент опору перерізу буде

$$W \geq \frac{130}{160 \cdot 10^3} = 812 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 812 \text{ см}^3 .$$

Підбираємо перерізи:

- а) двотавровий \perp №40 (ГОСТ 8239), для якого
 $W = 947 \text{ см}^3$, $A = 71.4 \text{ см}^2$, $I_z = 18930 \text{ см}^4$;
- б) круглий, діаметром d :

$$W^0 = 0.1d^3 = 812 \text{ см}^3 , \quad d = \sqrt[3]{\frac{812}{0.1}} = 20.1 \text{ см} ,$$

$$A = \frac{3.14 \cdot 20.1^2}{4} = 318 \text{ см}^2 ;$$

в) прямокутний, з відношенням висоти до ширини $\frac{h}{b} = 2$:

$$W^{\square} = \frac{bh^2}{6} = \frac{2b^3}{3} = 812 \text{ см}^3, \quad b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 812}{2}} = 10.7 \text{ см}, \quad h = 21.4 \text{ см},$$

$$A = 10.7 \cdot 21.4 = 228 \text{ см}^2.$$

Відношення площ поперечних перерізів буде:

$$A_1 : A_2 : A_3 = 71,4 : 228 : 318 = 1 : 3,2 : 4,45.$$

Тобто, вага одного метра прямокутного перерізу становить 320%, а вага одного метра круглого перерізу 445% від ваги перерізу двотаврового.

Перевірка зведених напружень за теорією міцності найбільших дотичних напружень

Небезпечним є переріз балки праворуч від опори В, у якому $M = 130 \text{ кНм}$ і $Q = 100 \text{ кН}$.

Умова міцності за теорією міцності максимальних дотичних напружень має вигляд

$$\sigma_{\text{дот.макс}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma],$$

де σ і τ – нормальне і дотичне напруження у небезпечному перерізі на переході від стінки до полочки двотавра.

Ці напруження дорівнюють:

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y_{cm.} = \frac{130 \cdot 10^3 \cdot 18.7 \cdot 10^{-2}}{18930 \cdot 10^{-8}} = 1280 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 128 \text{ МПа};$$

$$\tau = \frac{QS_{\text{пол}}^{\text{max}}}{d \cdot I_z}, \quad S_{\text{пол}}^{\text{max}} = \frac{bt}{2}(h-t).$$

Тут I_z – момент інерції двотавра; d – ширина стінки двотавра; h – висота двотавра; b , t – ширина і товщина полочки двотавра; $y_{\text{дот.}}$ – ордината точки переходу від стінки до полочки.

Спочатку знаходимо статичний момент полочки відносно нейтральної осі перерізу Ox (рис. 10.9):

$$S_{\text{пол}} = \frac{15.5 \cdot 1.3}{2} \cdot 38.7 = 390 \text{ см}^3.$$

Таким чином, дотичне напруження τ на переході від полицки до стінки двотавра буде дорівнювати

$$\tau = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 390 \cdot 10^{-6}}{0,8 \cdot 10^{-2} \cdot 18930 \cdot 10^{-8}} = 257 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2} = 25,7 \text{ МПа} .$$

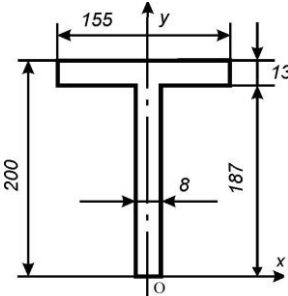


Рис. 10.10

Еквівалентне напруження за теорією міцності найбільших дотичних напружень

$$\sigma_{\text{дот.}} = 10^2 \sqrt{1,28^2 + 4 \cdot 0,257^2} = 137,5 \text{ МПа,}$$

отже $\sigma_{\text{екв. III}} < [\sigma]$.

Побудова пружної лінії

Вибираємо координатну систему з початком на лівій опорі балки, вісь прогинів y напрямляємо вниз.

Маємо $y(0) = 0$ і $y(4) = 0$.

Для $2 \leq x \leq 4$:

$$EI_z y(x) = EI_z y'(0)x + \frac{M}{2!}(x-2)^2 - \frac{A}{3!}x^3 + \frac{q}{4!}(x-2)^4 .$$

З умови рівності нулеві прогину в опорі В балки знаходимо величину $EI_z y'(0)$ з рівняння:

$$EI_z y(4) = EI_z y'(0) \cdot 4 + \frac{50}{2} \cdot 2^2 + \frac{10}{6} \cdot 4^3 + \frac{20}{24} \cdot 2^4 = 0,$$

звідки $-EI_z y'(0) = -55 \text{ кНм}^2$.

Для $2 \leq x \leq 4$ рівняння пружної лінії набуде вигляду:

$$EI_z y(x) = -55x + 25(x-2)^2 + 1,67x^3 + 0,83(x-2)^4 .$$

Для середини прогону ($x = 2$) одержимо:

$$EI_z y(2) = -55 \cdot 2 + 1,67 \cdot 2^3 = -96,7 \text{ кНм}^3 ,$$

$$y(2) = -\frac{96,7 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 18930 \cdot 10^{-8}} = -0,26 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -0,26 \text{ см} .$$

Цей прогин направлений вгору.

Для $5 \leq x \leq 7$ рівняння пружної лінії буде:

$$EI_z y(x) = -55x + 25(x-2)^2 + 1,67x^3 + 0,83(x-2)^4 - \frac{150}{6}(x-4)^3 + \frac{40}{6}(x-5)^3$$

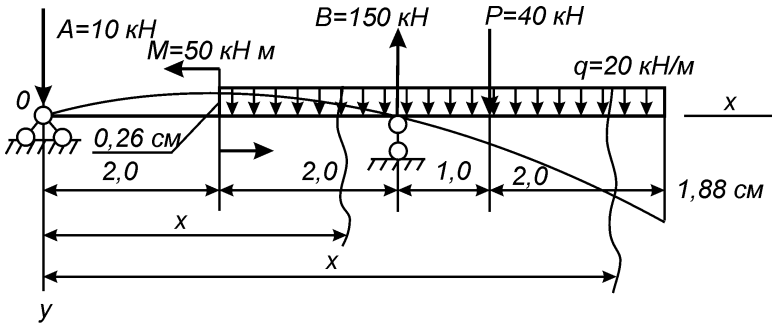


Рис. 10.11

Для кінця балки $x = 7$ одержимо:

$$EI_z y(7) = -55 \cdot 7 + 25 \cdot 5^2 + 1,67 \cdot 7^3 + 0,83 \cdot 5^4 - 25 \cdot 3^3 + 6,67 \cdot 2^3 = 710,3 \text{ кНМ}^3$$

$$y_{\max} = y(7) = \frac{710 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 18930 \cdot 10^{-8}} = 1,88 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 1,88 \text{ см} .$$

Прогин кінця балки напрямлений вниз (рис. 10.11).

10.5. Згин балки на пружній основі

Розрахунок стрічкових фундаментів будівельних конструкцій, покриття автомобільних доріг та аеродромів, рейок та шпал залізничних колій, що лежать на пружних основах, вимагає знання законів розподілу реактивного тиску цих основ. Під *пружними основами* розуміють такі основи, які під дією зовнішнього навантаження та власної ваги конструкції пружно протидіють їх прогинам (рис.10.12, а).

Існують різні моделі залежностей між згаданими прогинами та реакцією пружної основи. Однією із найпростіших моделей, а тому й найпоширеніших, є модель Фусса – Вінклера. Уперше цю модель запропонували М.Фусс (1801) та Е.Вінклер (1867). У відповідності з нею *реакція пружної основи на балку в*

кожній точці пропорційна до прогину балки, але протилежна за напрямом:

$$p(x) = k \cdot y(x), \quad (10.27)$$

де $y(x)$ - прогин балки; $k \left[\frac{\text{т}}{\text{м}^2} \right]$ - коефіцієнт пропорційності,

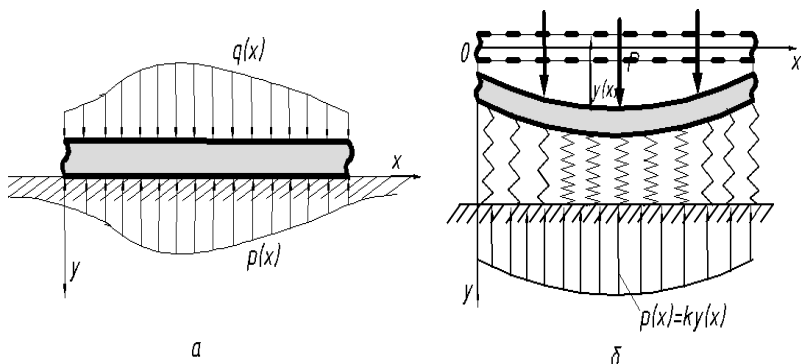


Рис. 10.12

віднесений до одиничної ширини підшви балки, який ще називають *погонним коефіцієнтом постелі*. Погонний коефіцієнт постелі визначають як добуток коефіцієнта податливості ґрунту (коефіцієнта постелі) $k_1 \left[\frac{\text{т}}{\text{м}^3} \right]$ на ширину підшви балки b [м] -

$$k = k_1 b .$$

Коефіцієнт постелі k_1 визначається експериментально. Значення коефіцієнта постелі k_1 для деяких ґрунтів наведені в табл.10.1.

Таблиця 10.1. Коефіцієнти k_1

Пружна основа	$k_1, \text{Мі} / \text{і}^3$
Пливун	1...5
Пісок, гравій	5...50
Щільний пісок	50...100
Утрамбована основа	100...200
М'яка скала	200...1000
Скала	1000...15000

Дана модель є тільки деяким наближенням до реальної роботи основи і може розглядатися як певна система окремих, не зв'язаних між собою, пружин з лінійними характеристиками k (10.12, б). Разом з тим, це і є основним недоліком даної моделі, бо вона не враховує розподільних властивостей основи і в результаті приводить до завищених значень максимальних напружень у балці. Єдиним випадком, де модель Фусса - Вінклера є точною, коли погонна реакція основи створюється гідравлічним тиском рідини, на якій лежить балка (тут $k_1 = \gamma$ – питома вага рідини), а повна реакція дорівнює підйомній силі Архімеда.

Точнішими за модель Фусса - Вінклера є моделі, що описуються двома або декількома узагальненими пружними характеристиками. Це моделі П.Л.Пастернака, В.З.Власова, М.М.Леонтьєва, М.М.Філоненка-Бородича та інші, але вони є значно складнішими, тому використовуються тільки в спеціальних розрахунках.

Розглядається задача про згин балки сталого поперечного перерізу, що лежить вінклеровій основі (рис.10.12, а). Балка навантажена розподіленим навантаженням $q(x)$ та реакцією основи $p(x)$. Диференціальне рівняння прогинів такої балки одержимо, підставивши у диференціальне рівняння (10.3) значення згинального моменту (10.21), за умови, що вісь Oy направлена вниз і знак другої похідної $y''(x)$ буде від'ємним за додатного згинального моменту $M(x)$. Тобто,

$$EIy'' = -M(x), \text{ а } EIy''' = -Q(x). \quad (10.28)$$

Продиференціювавши останню залежність (10.28) за змінною x , та враховуючи рівняння (10.1), отримаємо

$$EIy^{IV}(x) = q(x) - p(x). \quad (10.29)$$

Підставивши в рівняння (10.29) залежність (10.27), одержимо наступне диференціальне рівняння

$$y^{IV}(x) + 4a^4 y(x) = \frac{q(x)}{EI}, \quad (10.30)$$

де $4a^4 = \frac{k}{EI}$ або $a = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \left[\frac{1}{m} \right]$.

Для знаходження розв'язку диференціального рівняння (10.30) розглянемо випадок, коли безмежно довга балка навантажена зосередженою силою P (рис.10.13), а розподілене навантаження відсутнє ($q(x) \equiv 0$). За такого навантаження рівняння (10.30) зводиться до вигляду

$$y^{IV}(x) + 4a^4 y(x) = 0. \quad (10.31)$$

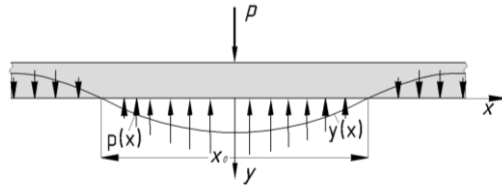


Рис. 10.13

Загальний розв'язок цього рівняння буде наступним

$$y(x) = e^{ax} (A \sin ax + B \cos ax) + e^{-ax} (C \sin ax + D \cos ax). \quad (10.32)$$

Тут сталі A, B, C, D визначаються з граничних умов на кінцях балки, або інших умов. Для нескінченно довгої балки, з умови обмеженості переміщень $y(x)$ та сумарної реакції основи

для $x \rightarrow +\infty$, необхідно покласти нулю сталі інтегрування $A = B = 0$. В результаті, прогини в безмежно віддалених точках мають бути близькими до нуля, а сумарної реакція має дорівнювати силі P .

За цими умовами перший доданок виразу (10.32) перетворюються в нуль. Отже, вираз для прогинів може бути записаний у вигляді

$$y(x) = e^{-ax} (C \sin ax + D \cos ax). \quad (10.33)$$

Для визначення сталих C і D необхідно записати два додаткових рівняння, які можна отримати з умов, що внаслідок симетрії балки та навантаження кут повороту перерізу в початку координат (кут нахилу дотичної до лінії прогинів) має дорівнювати нулю - $y'(0) = 0$, а поперечна сила справа від точки прикладання сили P дорівнює $Q(0) = -P/2$.

Використовуючи першу умову, продиференціюємо вираз (10.32)

$$y'(x) = -ae^{-ax} ((C + D) \sin ax + (D - C) \cos ax),$$

та поклавши в ньому $x = 0$, одержимо

$$C - D = 0, \quad C = D. \quad (10.34)$$

На основі одержаної залежності (10.34) вираз (10.33) для прогинів балки трансформується в наступний

$$y(x) = e^{-ax} C (\sin ax + \cos ax). \quad (10.35)$$

Для того, щоби визначити сталу C , скориставшись другою граничною умовою для поперечної сили $Q(x)$ в початку координат, знайдемо похідні вищих порядків від прогину $y(x)$:

$$y'(x) = -2ae^{-ax} C \sin ax;$$

$$y''(x) = -2a^2 e^{-ax} C (\cos ax - \sin ax); \quad y'''(x) = 4a^3 e^{-ax} C \cos ax.$$

Підставивши значення третьої похідної від прогину у вираз (10.28) для поперечної сили, та задовольнивши граничну умову для неї в початку координат ($x = 0$), отримаємо

$$4EIa^3 C = \frac{P}{2}; \quad C = \frac{P}{8EIa^3}. \quad (10.36)$$

Таким чином, після визначення сталої C , остаточні вирази для прогину, згинального моменту та поперечної сили для безмежно довгої балки, навантаженої зосередженою силою, мають вигляд:

$$y(x) = \frac{P}{8EIa^3} e^{-ax} (\sin ax + \cos ax);$$

$$M(x) = \frac{P}{4a} e^{-ax} (\cos ax - \sin ax); \quad Q(x) = -\frac{P}{2} e^{-ax} \cos ax. \quad (10.37)$$

Одержані результати, застосовуючи *метод суперпозиції*, можна використати і для інших випадків навантаження: дії декількох сил, або пари сил з моментом M ; дії розподіленого навантаження $q(x)$, якщо замість сили P у формулах (10.37) підставити величину $q(x)dx$ і проінтегрувати кожний з виразів в межах дії цього навантаження.

М.М. Філоненко-Бородичем та С.Л. Посацьким досліджено можливість застосування розв'язків для безмежно довгої балки у практичних розрахунках балок скінченної довжини. Ними було використано той факт, що зігнута вісь балки є хвилястою кривою з максимумом в точці прикладання сили та довжиною півхвилі $x_0 = \frac{\pi}{a}$. Легко дослідити, що на віддалі $x_0/2$ від початку координат прогин балки складає 4% від максимального прогину, а на віддалі x_0 - уже лише $\sim 0,2\%$. Тобто, для коротких балок з довжиною $l \geq 2x_0$, з достатньою для практики точністю, можна користуватися розв'язками для безмежно довгих балок.

Наприклад, для довгої бетонної $\left(E = 2 \cdot 10^4 \frac{Ml}{i^2} \right)$ балки з прямокутним перерізом (з висотою $h = 0,5i$ та шириною $b = 1m$, $I = 0,01m^4$), що знаходиться на пружній утрамбованій основі, для якої $k_1 = 200Ml / i^3$, а параметр

$$a = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{200}{4 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 0,01}} = 0,7 \frac{1}{i}.$$

У цьому випадку довжина півхвилі прогину дорівнює

$$x_0 = \frac{\pi}{a} = \frac{3,14}{0,7} = 4,5\lambda . \text{ Тому для короткої балки довжиною}$$

$l = 9\lambda$, навантаженої посередині зосередженою силою P , можна користуватися формулами (10.37) для нескінченно довгої балки.

Точні розв'язки для коротких балок довільної довжини одержані в оригінальних роботах О.М. Крилова та І.Г. Бубнова у будівельній механіці корабля, де О.М. Криловим були запропоновані відомі функції, а І.Г. Бубновим складені спеціальні таблиці .

Запитання для самоконтролю

1. Який згин балки називається *прямим*?
2. Що таке *поперечна сила* та *згинальний момент* в перерізі балки?
3. Яке згин називається *чистим*?
4. Який згин називається *поперечним*?
5. Які гіпотези приймаються за чистого згину балки?
6. Запишіть закон Гука за деформації згину.
7. Запишіть умову міцності за деформації згину.
8. Запишіть *формулу Журавського* для дотичних в перерізах балки.
9. Запишіть диференціальне рівняння *пружної лінії* балки.
10. Як знаходяться сталі інтегрування рівняння пружної лінії балки?
11. Запишіть *універсальне рівняння прогинів* балки.
12. З яких умов знаходяться *початкові параметри* універсального рівняння прогинів балки?
13. Які властивості властивості пружної основи моделі Фусса – Вінклера?
14. Які недоліки пружної основи моделі Фусса – Вінклера?
15. Як знаходиться *коефіцієнт постелі* k ?
16. Запишіть диференціальне рівняння прогинів балки на пружній основі.

17. Запишіть загальний розв'язок диференціального рівняння прогинів для безмежної балки на пружній основі.
18. У яких випадках розв'язок диференціального рівняння прогинів для безмежної балки можна використати для короткої балки?

ТЕМА 11 (лекції 24-26). СКЛАДНИЙ ОПІР

11.1. Косий згин

Опір стрижня, при якому виникає тільки один вид деформації (розтяг або стиск, кручення чи прямий згин), прийнято називати простим. При сумісній дії декількох видів деформації виникає так званий складний опір стрижнів. Одним із таких випадків є косий згин.

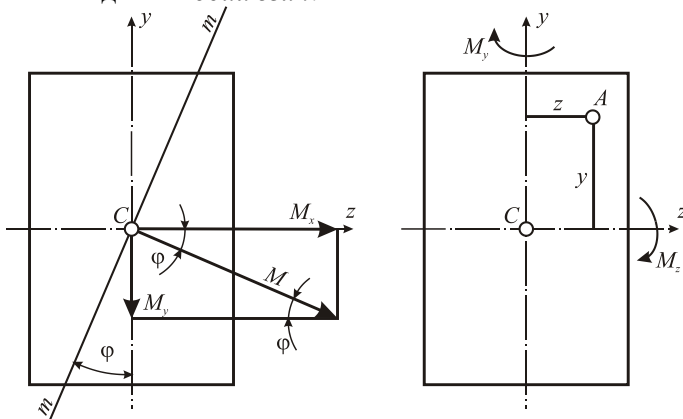


Рис. 11.1

Косим згином називається такий вид навантаження бруса (стрижня), при якому в його поперечному перерізі виникає згинальний момент, площина дії якого mm не проходить ні через одну з головних осей. Такий момент може виникнути у результаті дії навантаження, що проходить через центр ваги поперечного перерізу бруса під довільним кутом до його головних центральних осей (рис. 11.1). Необхідно визначити закон розподілу напружень у поперечному перерізі бруса при

косому згині. Для цього зобразимо косий згин як суму двох прямих згинів від дії згинальних моментів M_z і M_y , що виникають у головних площинах бруса. Використовуючи принцип додавання дії сил, згідно якого нормальне напруження від результуючого моменту в довільній точці $A(z, y)$ дорівнює сумі напружень від дії кожного із згинальних моментів M_z і M_y :

$$\sigma(y, z) = \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z, \quad (11.1)$$

де I_z і I_y – моменти інерції перерізу відносно головних осей.

Згинальні моменти M_z і M_y можна виразити через сумарний момент M :

$$M_y = M \sin \varphi; \quad M_z = M \cos \varphi, \quad (11.2)$$

де
$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}.$$

Формула (11.1) для нормальних напружень, з врахуванням залежностей (11.2), набере вигляду:

$$\sigma(y, z) = \pm M \left(\frac{y}{I_z} \cos \varphi + \frac{z}{I_y} \sin \varphi \right). \quad (11.3)$$

Моменти M , M_y , M_z вважаються додатними, коли вони викликають розтяг у першому квадранті координатної системи.

З формули (11.3) видно, що напруження σ є лінійною функцією координат y і z . Тому, незалежно від величини навантаження, у площині перерізу завжди знайдуться точки, де напруження будуть дорівнювати нулю. Згадані точки будуть утворювати лінію, яка називається *нейтральною лінією епюри напружень*.

Її рівняння знайдемо з формули (11.3), поклавши $\sigma(y, z) = 0$, тобто:

$$\frac{y}{I_z} \cos \varphi + \frac{z}{I_y} \sin \varphi = 0, \quad (11.4)$$

звідки

$$y = -\operatorname{tg} \varphi \frac{I_z}{I_y} z = kz,$$

де

$$k = -\operatorname{tg} \varphi \frac{I_z}{I_y} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Кут α – це кут нахилу нейтральної лінії до осі z . У загальному випадку кут α не дорівнює куту φ , тому нейтральна вісь не перпендикулярна до площини, у якій діє навантаження. Винятком можуть бути випадки, коли $\varphi = 0$, $\varphi = 90^\circ$ або $I_z = I_y$ (квадрат, круг).

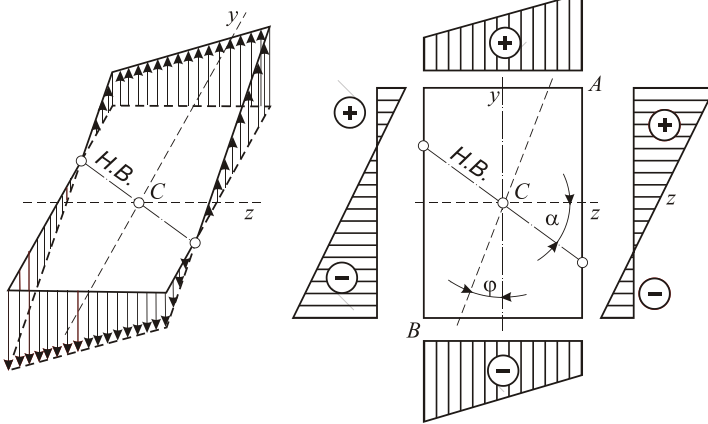


Рис. 11.2

Разом з тим, в усіх випадках нейтральна лінія (вісь) є лінією перетину площини перерізу з площиною просторової епюри нормальних напружень (рис. 11.2). Аналіз цієї епюри показує, що найбільші за величиною нормальні напруження знаходяться в точках найвіддаленіших від нейтральної лінії. Для прямокутного перерізу цими точками можуть бути кутові точки A і B . За абсолютною величиною максимальне напруження можна знайти за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{M_z}{W_z} \left(1 + \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{W_z}{W_y} \right), \quad (11.5)$$

де $W_z = \frac{bh^2}{6}$, $W_y = \frac{hb^2}{6}$ – моменти опору прямокутника відносно осей z і y .

Підставивши у формули (11.5) значення величин M_y , M_z , W_y і W_z , отримаємо:

$$\sigma_{\max} = \frac{6M}{bh^2} \left(\cos \varphi + \frac{h}{b} \sin \varphi \right). \quad (11.6)$$

При сталому згинальному моменті максимальне нормальне напруження є функцією кута φ . Дослідивши його на екстремум ($d\sigma_{\max}/d\varphi = 0$), отримаємо:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{b}, \text{ а } \sigma_{\max} = \sqrt{\left(\frac{6M}{bh^2} \right)^2 + \left(\frac{6M}{hb^2} \right)^2}.$$

Це означає, що площина згинального моменту має бути перпендикулярною до діагоналі прямокутника (рис. 11.2), а найбільше напруження дорівнює квадратному кореню із суми квадратів найбільших напружень, які виникають при прямому згині в одній і в другій площинах.

Небезпечність виникнення деформації косоного згину проєктантам давно відома. Наприклад, відхилення площини згинального моменту всього на кут $\varphi = 5^\circ$ при $h/b = 4$, згідно з формулою (11.6) веде до різкого збільшення максимального напруження:

$$\sigma_{\max} = \frac{6M}{bh^2} \left(\cos 5^\circ + 4 \cdot \sin 5^\circ \right) = 1,35 \frac{6M}{bh^2}.$$

Тобто, напруження збільшиться на 35% у порівнянні із прямим згином.

Перевірка міцності балки при косому згині полягає у порівнянні максимального нормального напруження, що

виникає у перерізі з найбільшим рівнодійним згинальним моментом M_{\max} , з допустимим напруженням $[\sigma]$:

$$\frac{M_z}{W_z} \left(1 + \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{W_z}{W_y} \right) \leq [\sigma]. \quad (11.7)$$

Форма підбору поперечного перерізу балки має вигляд:

$$W_z \geq \frac{M_z}{[\sigma]} \left(1 + \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{W_z}{W_y} \right). \quad (11.8.)$$

У випадку прямокутного перерізу відношення $W_z/W_y = h/b$, тому формула підбору перерізу (11.8) буде:

$$W_z = \frac{M_z}{[\sigma]} \left(1 + \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{h}{b} \right). \quad (11.9)$$

Для остаточного підбору прямокутного перерізу відношення h/b мусить бути наперед заданим.

Визначення переміщень при косому згині здійснюється шляхом знаходження кожної із складових у напрямку головних осей з подальшим їх геометричним сумуванням. Наприклад, повний прогин консолі, навантаженої кінцевою силою під кутом φ до вертикальної осі (рис. 11.3), дорівнює:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}, \quad (11.10)$$

де $f_y = \frac{FL^3}{3EI_z} \cos \varphi;$

$$f_z = \frac{FL^3}{3EI_y} \sin \varphi;$$

L – довжина консолі.

Напрямок повного прогину утворює з віссю y кут α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f_z}{f_y} = \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{I_z}{I_y}. \quad (11.11)$$

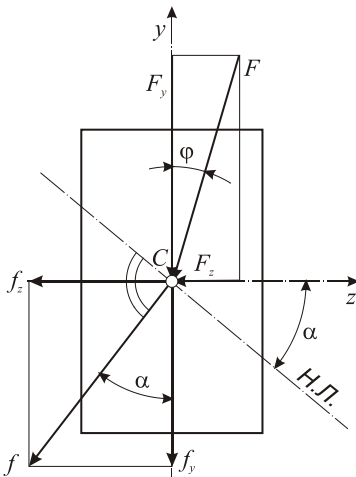


Рис. 11.3

Порівняння даної формули з формулою (11.4) показує, що кут нахилу прогину до осі y дорівнює куту нахилу нейтральної лінії до осі z . Отже, *напрямки прогину та нейтральної лінії між собою взаємно перпендикулярні*. Разом з тим, у загальному випадку кути α і φ нерівні. Тобто, при косому згині напрямок дії навантаження і напрямок дії прогину між собою не збігаються, за винятком випадку, коли $I_z = I_y$.

11.2. Позацентровий розтяг або стиск

Позацентровий розтяг або стиск стрижня виникає тоді, коли лінія дії рівнодійної навантаження F проходить паралельно до осі стрижня з ексцентриситетом e (рис. 11.4). Будемо вважати, що для стрижня великої жорсткості деформації поздовжнього згину відсутні і величина “ e ” залишається сталою. Використавши правило паралельного переносу, дію позацентрової сили F розкладаємо на еквівалентну їй систему дії центральної (осьової) сили F та пари сил з моментом $M = F \cdot e$. Складовими даного моменту є моменти відносно відповідних осей перерізу: $M_y = Fz_p$; $M_z = Fy_p$, де y_p, z_p – координати точки прикладання рівнодіючої F позацентрового навантаження у головній центральній системі координат.

Тоді, згідно з принципом суперпозиції, нормальне напруження σ у довільній точці перерізу з координатами y і z буде дорівнювати:

$$\sigma(y, z) = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{M_z}{I_z} y. \quad (11.12)$$

де I_y, I_z – головні моменти інерції перерізу; A – площа перерізу стрижня.

Вважаючи, що поздовжня сила $N = F$ та, підставивши замість моментів M_y і M_z їх значення, одержимо для довільної точки перерізу

$$\sigma(y, z) = \pm \frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_p z}{i_y^2} + \frac{y_p y}{i_z^2} \right), \quad (11.13)$$

де i_y, i_z – головні радіуси інерції поперечного перерізу.

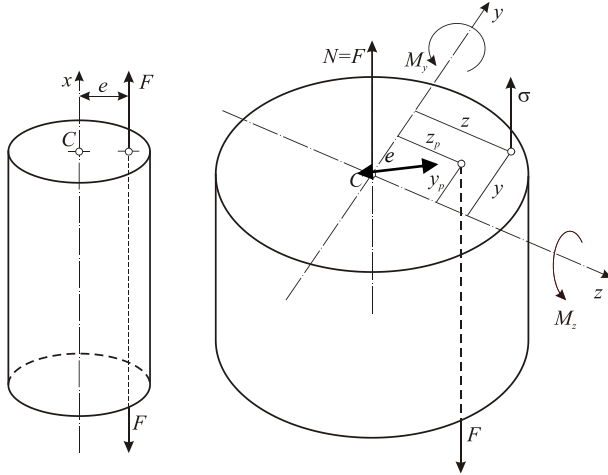


Рис. 11.4

Квадрати головних радіусів інерції, що входять до формули (11.13), визначають за формулами:

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A}, \quad i_z^2 = \frac{I_z}{A}.$$

Так само, як і при косому згині, при позацентровому розтягу або стиску лінією перетину площини напружень з площиною поперечного перерізу стрижня є *нейтральна лінія* епюри напружень. Її рівняння отримаємо, прирівнявши вираз (11.13) до нуля:

$$\frac{y_p y}{i_z^2} + \frac{z_p z}{i_y^2} + 1 = 0. \quad (11.14)$$

Ввівши позначення:

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_p}; \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_p}, \quad (11.15)$$

рівняння (11.14) зводиться до канонічного рівняння прямої

$$\frac{y}{a_y} + \frac{z}{a_z} = 1,$$

де a_y, a_z – відрізки, що відсікаються нейтральною лінією епюри нормальних напружень на головних центральних осях (рис. 11.5).

В окремих випадках, коли сила прикладається на одній з координатних осей, наприклад осі Oy , матимемо $z_p = 0$, отже

$$a_z = \infty; a_y = -\frac{i_z^2}{y_p},$$

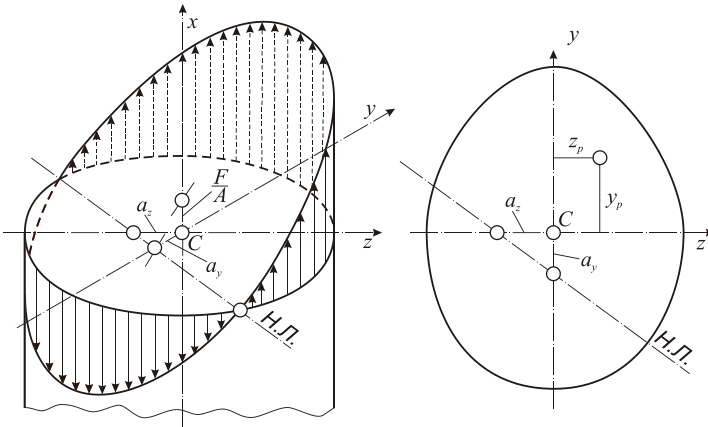


Рис. 11.5

а нейтральна лінія буде паралельною осі Oz . При $y_p = 0$ нейтральна лінія буде паралельною осі Oy .

Таким чином, від точки прикладення позacentрованої сили залежить положення нейтральної лінії відносно перерізу: вона може перетинати переріз, бути дотичною до нього або проходити поза перерізом (рис. 11.5). Відповідно напруження будуть мати різні знаки, або один знак, якщо нейтральна лінія дотична до перерізу чи проходить поза ним.

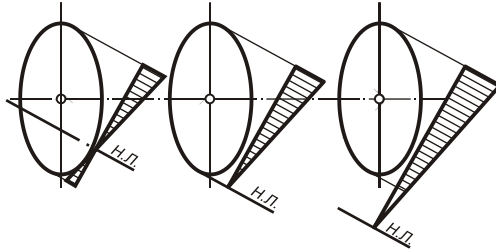


Рис. 11.6

У деяких випадках стиску стрижня (колони) вимагається, щоб напруження у поперечних перерізах були тільки одного знаку – стискуючими. Це стосується конструкцій із крихких матеріалів, що дуже погано працюють на розтяг, тому виникнення в їх перерізах розтягуючих напружень може привести до руйнування. Тоді необхідно розв’язувати обернену задачу: за положенням нейтральної лінії, яка береться дотичною до перерізу, шукати всі точки прикладення позацентрової сили. З’єднавши їх, отримаємо замкнуту лінію, яка обмежує область, що носить назву *ядра перерізу*. Позацентрові сили, які прикладені у межах ядра перерізу, викликають у всьому перерізі напруження лише одного знаку. Координати точок контуру ядра знаходимо із формули (11.15):

$$y_{я} = -\frac{i_z^2}{a_y}; \quad z_{я} = -\frac{i_y^2}{a_z}, \quad (11.16)$$

де a_y і a_z – відрізки, що відсікаються на головних центральних осях дотичного до перерізу, яка у даному випадку вважається нейтральною лінією перерізу (рис. 11.7, а).

Для прикладу побудуємо ядро перерізу для еліпса з півосями a , b (рис.11.7, б).

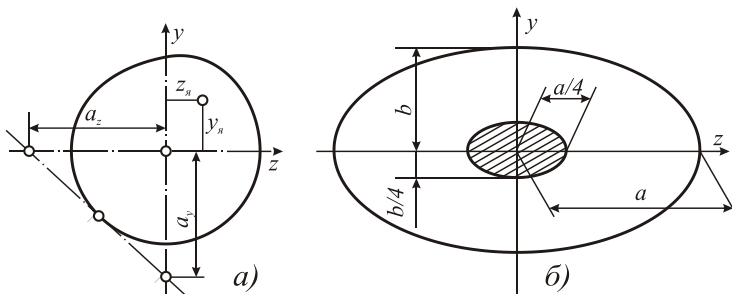


Рис. 11.7

Геометричні характеристики такого еліпса: $A = \pi ab$;

$$I_z = \frac{1}{4} \pi ab^3; \quad I_y = \frac{1}{4} \pi ba^3; \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \frac{b}{2}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \frac{a}{2}.$$

Провівши нейтральну лінію, дотичну до еліпса в точці $(0, b)$ і паралельну до осі z , отримаємо:

$$y_n = -\frac{b^2/4}{b} = -\frac{b}{4}; \quad z_n = 0.$$

Аналогічно, дотичній в точці $(a, 0)$ будуть відповідати точки:

$$y_n = 0; \quad z_n = -\frac{a}{4}.$$

Використавши принцип симетрії, знайдемо ще дві точки ядра перерізу, які також будуть симетричні до знайдених. Додаткові математичні дослідження показують, що крива, яка буде з'єднувати ці чотири точки, буде еліпсом із півосями $a/4$, $b/4$.

Аналогічно будуються ядра перерізів і для інших перерізів. Небезпечними точками цих перерізів є точки, у яких виникають екстремальні нормальні напруження. Це контурні точки, які найвіддаленіші від нейтральної лінії. Підставляючи координати точок у формули (11.12), (11.13), можна визначити величину екстремальних напружень і виконати перевірку міцності. Для перерізів, що мають дві осі симетрії, умову міцності краще використовувати у такому вигляді:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{F}{A} \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (11.17)$$

При визначенні головних моментів інерції складних перерізів, їх розбивають на прості елементи і використовують формули залежності між моментами інерції відносно взаємно-паралельних осей, з яких одна вісь центральна:

$$I_y = I_{y_c} + a^2 A, \quad I_z = I_{z_c} + b^2 A. \quad (11.18)$$

Тут через I_{y_c} і I_{z_c} позначені головні моменти інерції фігури відносно її власних головних центральних осей, через a і b – відповідні координати центра ваги фігури у системі головних центральних осей всього перерізу.

Для фігур, показаних на рис. 11.8, головні моменти інерції дорівнюють:

а) для прямокутника: $I_y = bh^3/12$, $I_z = hb^3/12$;

б) для квадрата: $I_y = I_z = I_{y_1} = I_{z_1} = a^4/12$;

в) для трикутника: $I_y = bh^3/36$;

г) для рівностороннього трикутника: $I_y = I_z = \frac{a^4 \sqrt{3}}{96}$;

д) для круга: $I_y = I_z = \frac{\pi r^4}{4}$;

е) для півкруга: $I_y \approx 0.1096r^4$, $I_z = \frac{\pi r^4}{8}$.

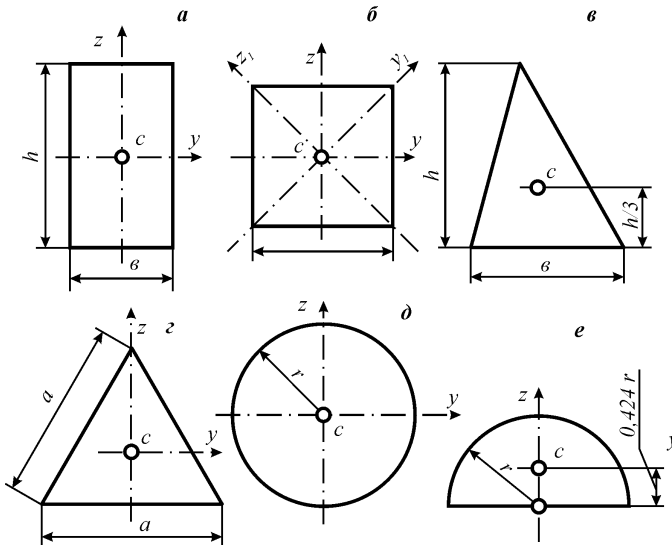


Рис. 11.8

Приклад. Для заданого перерізу (рис. 11.9) потрібно визначити допустиме навантаження $[F]$, рівнодійна F якого прикладена у точці B з координатами $y'_B = 60\text{ мм}$, $z'_B = 20\text{ мм}$ в допоміжній системі координат $Oy'z'$, а допустимі напруження дорівнюють: на стиск - $[\sigma]_c = 20,0\text{ МПа}$; на розтяг- $[\sigma]_p = 2,0\text{ МПа}$.

Розв'язування.

1. Визначення положення головних центральних осей і обчислення головних моментів інерції перерізу

Вісь симетрії z є однією з головних центральних осей перерізу. Друга головна центральна вісь y проходить через центр ваги перерізу C перпендикулярно до осі z .

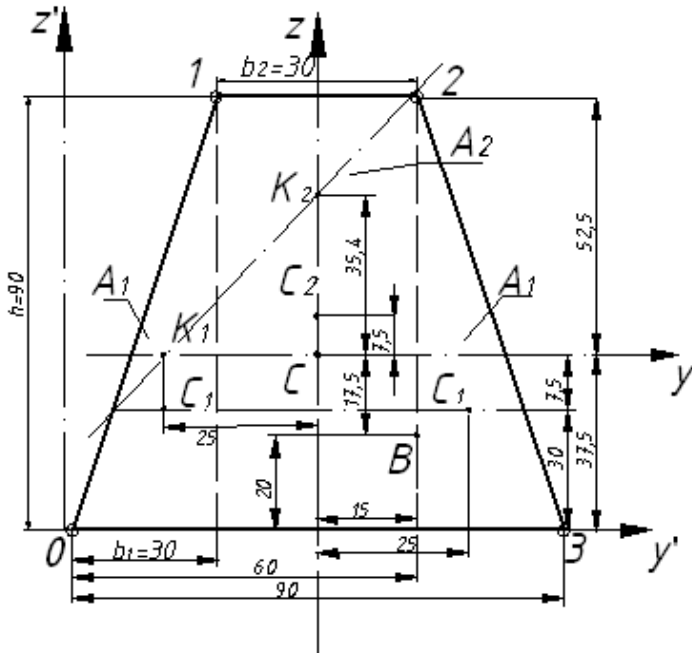


Рис. 11.9

Для визначення координати z'_C центра ваги C фігури у системі координат $Oy'z'$ розбиваємо весь переріз на два трикутники з площами A_1 і центрами ваги C_1 ($z'_C = 30\text{см}$) і прямокутник з площею A_2 і центром ваги C_2 ($z'_C = 45\text{см}$) .
Окремі площі дорівнюють:

$$A_1 = \frac{1}{2}b_1h = \frac{30 \cdot 90}{2} = 1350\text{см}^2, \quad A_2 = b_2h = 30 \cdot 90 = 2700\text{см}^2.$$

Координата z'_C центра ваги C дорівнює:

$$z'_C = \frac{2A_1z_{C_1} + A_2z_{C_2}}{A_1 + A_2} = \frac{2 \cdot 1350 \cdot 30 + 2700 \cdot 45}{2 \cdot 1350 + 2700} = 37.5\text{см}.$$

Через центр ваги C проводимо ще одну головну центральну вісь y , а через центри ваги C_1 і C_2 окремих частин

перерізу – осі y_1 і y_2 , паралельні осі y . Координати центрів ваги C_1 і C_2 у системі головних центральних осей дорівнюють:

$$a_1 = -7.5 \text{ см}, \quad a_2 = 7.5 \text{ см}.$$

Головні моменти інерції визначаємо за формулами (11.18):

$$\begin{aligned} I_y &= 2\left(\frac{b_1 h^3}{36} + A_1 a_1^2\right) + \frac{b_2 h^3}{12} + A_2 a_2^2 = 2\left(\frac{30 \cdot 90^3}{36} + 1350 \cdot 7.5^2\right) + \\ &+ \frac{30 \cdot 90^3}{12} + 2700 \cdot 7.5^2 = 3341250 \text{ см}^4, \\ I_z &= 2\left(\frac{hb_1^3}{36} + A_1\left(\frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{2}b_2\right)^2\right) + \frac{hb_2^3}{12} = \\ &= 2\left(\frac{90 \cdot 30^3}{36} + 1350 \cdot 25^2\right) + \frac{90 \cdot 30^3}{12} = 2025000 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

2. Визначення положення нейтральної осі.

За формулами (11.14) знаходимо:

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{3341250}{5400} = 619 \text{ см}^2, \quad i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{2025000}{5400} = 375 \text{ см}^2.$$

Координати точки прикладання рівнодіючої F навантаження дорівнюють у системі головних центральних осей:

$$y_p = 15 \text{ см}, \quad z_p = -17,5 \text{ см}.$$

Відрізки, що відсікаються нейтральною віссю на головних центральних осях перерізу, визначаємо за формулами (11.15):

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_p} = -\frac{375}{15} = -25 \text{ см}, \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_p} = \frac{619}{17.5} = 35,4 \text{ см}.$$

На рис.11.9 нейтральна вісь проходить через точки K_1 , K_2 .

3. Визначення допустимого навантаження.

Небезпечними точками у перерізі є точки, найвіддаленіші від нейтральної осі. Такими точками є точка 3(45,-37.5), у якій

виникає найбільше стискувальне напруження і точка 1(-15,52.5), у якій виникає найбільше розтягувальне напруження.

Нормальні напруження у цих точках визначаємо за формулами (11.13):

$$\sigma_3 = -\frac{F}{5400 \cdot 10^{-4}} \left[1 + \frac{(-17.5) \cdot (-37.5)}{619} + \frac{15 \cdot 45}{375} \right] = -\frac{3.86}{5400 \cdot 10^{-4}} F, \left[\frac{H}{M^2} \right];$$

$$\sigma_1 = -\frac{F}{5400 \cdot 10^{-4}} \left[1 + \frac{(-17.5) \cdot 52.5}{619} + \frac{15 \cdot (-15)}{375} \right] = \frac{1.08}{5400 \cdot 10^{-4}} F, \left[\frac{H}{M^2} \right].$$

З умов міцності на розтяг і стиск знаходимо:

$$\sigma_1 \leq [\sigma]_p; \quad \frac{1.08 \cdot F}{5400 \cdot 10^{-4}} = 20 \cdot 10^5, \quad F_p = 10^6 H = 1 MN,$$

$$\sigma_3 \leq [\sigma]_c; \quad \frac{3.86}{5400 \cdot 10^{-4}} F = 200 \cdot 10^5,$$

$$F_c = 2.8 \cdot 10^6 H = 2.8 MN.$$

Менша з одержаних двох сил є допустимою:

$$[F]_p = 1 MN.$$

4. Побудова епюри нормальних напружень.

Для одержання повної картини розподілу нормальних напружень у перерізі стрижня побудуємо їх епюру (рис. 11.10).

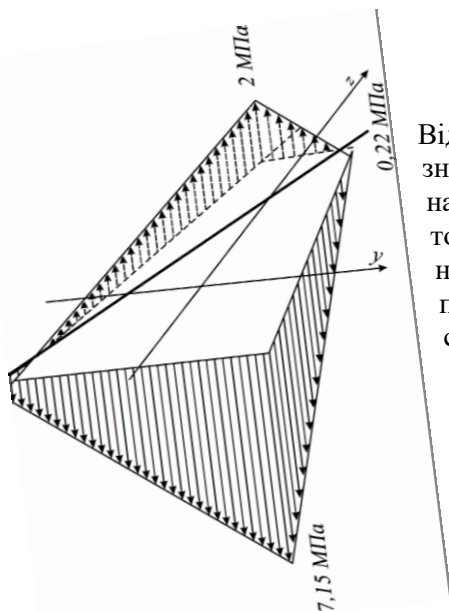
Для кутових точок перерізу знаходимо за формулою (11.13):

$$\sigma_0 = -\frac{10^6}{5400 \cdot 10^{-4}} (1 + 1.06 - 1.8) = -4.8 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2} = -0,48 MPa;$$

$$\sigma_1 = -\frac{10^6}{5400 \cdot 10^{-4}} (1 - 1.48 - 0.60) = 20.0 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2} = 2 MPa;$$

$$\sigma_2 = -\frac{10^6}{5400 \cdot 10^{-4}} (1 - 1.48 + 0.60) = -2.2 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2} = -0,22 MPa$$

$$; \sigma_3 = -\frac{10^6}{5400 \cdot 10^{-4}} (1 + 1.06 + 1.80) = -71.5 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2} = -7,15 MPa$$



Відклавши (у масштабі) значення знайдених напружень у відповідних точках, одержимо епюру нормальних напружень у поперечному перерізі стрижня (рис.11.10).

Рис. 11.10

11.3. Згин з крученням

У деяких випадках *складного опору* доводиться розраховувати стрижні з ламаною віссю, що складаються з двох взаємно перпендикулярних ділянок (рис. 11.11) або машинних валів, які одночасно зазнають *згину з крученням*.

Як у першому, так і у другому випадках ділянка *AB* стрижня (вала) працює на згин ($M_{\text{зг}} = Fl$) та закручується парою сил з моментами Fa або $FD/2$, відповідно. Епюри згинальних та крутних моментів показані на рис. 11.11. Як видно з епор, небезпечним перерізом обох конструкцій в даному випадку буде опорний переріз, де одночасно виникають максимальний згинальний та крутний моменти. Від дії цих моментів у поперечних перерізах стрижня виникають нормальні

та дотичні напруження. Слід зауважити, що при такого типу навантаженнях у поперечних перерізах конструкції виникають ще і дотичні напруження від дії поперечних сил, що визначаються за формулою Журавського (10.12). Але в цих випадках їх вплив настільки малий, що ними, як правило, нехтують.

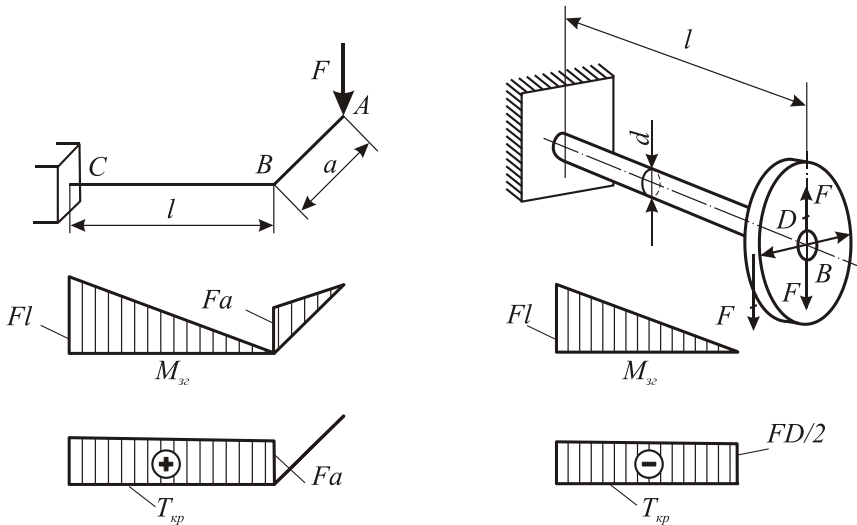


Рис. 11.11

Будемо вважати спочатку, що поперечний переріз стрижня (вала) на ділянці AB є *кругом*. Тоді максимальні нормальні і дотичні напруження знаходяться за формулами:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{zc}}{W_z}; \quad \tau_{\max} = \frac{T_{кр}}{W_p}. \quad (11.18)$$

Використовуючи умову (8.10) теорії міцності *найбільших дотичних напружень*

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma],$$

та підставивши в неї вирази для максимальних нормальних та дотичних напружень, отримаємо:

$$\sigma_{\dot{a}\dot{a}}^{III} = \frac{\sqrt{M_{\dot{c}\dot{a}}^2 + T_{\dot{e}\dot{d}}^2}}{W_z} \leq [\sigma], \text{ або } \frac{M_{\dot{a}\dot{c}}^{III}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (11.19)$$

де через $M_{\text{розр}}^{III}$ позначено *розрахунковий момент*, який дорівнює $M_{\dot{a}\dot{c}}^{III} = \sqrt{M_{\dot{c}\dot{a}}^2 + T_{\dot{e}\dot{d}}^2}$ за умови, що $W_p = 2W_z$.

З умови (11.19) дістаємо формулу підбору круглого поперечного перерізу при сумісній дії згину та кручення:

$$W_z \geq \frac{M_{\dot{a}\dot{c}}^{III}}{[\sigma]}. \quad (11.20)$$

При перевірці міцності за *енергетичною теорією* (умова (8.14)) розрахунковий момент $M_{\text{розр}}$ необхідно обчислювати за формулою

$$M_{\dot{a}\dot{c}}^{IV} = \sqrt{M_{\dot{c}\dot{a}}^2 + 0,75T_{\dot{e}\dot{d}}^2}. \quad (11.21)$$

У другому випадку (рис. 11.11) крутний момент, що передається на вал, залежить від потужності P , кВт та частоти обертання n , хв^{-1} і виражається через них за формулою (5.15):

$$T_{\dot{e}\dot{d}} = 9,549 \frac{P}{n} \cdot \dot{\iota}.$$

У випадку, коли стрижень AB прямокутного перерізу висотою h і шириною b , то при крученні максимальні дотичні напруження виникають посередині довшої сторони і дорівнюють

$$\tau_{\text{max}} = \frac{T_{\dot{e}\dot{d}}}{\beta hb^2}, \quad (11.22)$$

де коефіцієнт β залежить від відношення сторін прямокутника і знаходиться в межах:

$$0,21 \leq \beta \leq \frac{1}{3}, \quad (11.23)$$

де ліве значення відповідає квадрату, а праве відношенню $h/b > 10$.

Якщо сили, що згинають вал, не лежать в одній площині, то тоді в розрахункових формулах (11.19) (11.21) замість величини $M_{зг}$ необхідно підставити величину повного згинального моменту

$$M_{зг.п.} = \sqrt{M_z^2 + M_\theta^2},$$

де M_z і M_θ – згинальні моменти, що діють у горизонтальній та вертикальній площинах відповідно.

Приклад. Перевірити міцність вала зубчатої передачі, виготовленого із сталі Ст 4, границя плинності для якої $\sigma_{пл} = 260 \text{ МПа}$. Потужність, що передається, дорівнює $P = 40 \text{ кВт}$ при кутовій швидкості $n = 1000 \text{ хв}^{-1}$; допустимий коефіцієнт запасу міцності $[n] = 2,5$. Діаметр вала $d = 35 \text{ мм}$, а діаметр зубчатої передачі $D = 300 \text{ мм}$ (рис. 11.12). Довжини ділянок вала - $\overline{AC} = \overline{CB} = l = 2 \text{ м}$.

Розв'язування. Визначимо величину крутного моменту, що передається на вал:

$$T_{кр} = 9,549 \frac{P}{n} = 9,549 \cdot \frac{40}{1000} = 0,38 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Колове зусилля, що передається в передачі, знаходимо за формулою:

$$F_t = 2T_{кр} / D = 2 \cdot 0,38 / 0,3 = 2,53 \text{ кН}.$$

Радіальне зусилля знаходимо за формулою:

$$F_r = 0,36 \cdot F_t = 0,36 \cdot 2,53 = 0,913 \text{ кН}.$$

Розрахункова схема вала має вигляд на рис. 11.12, б. Максимальний згинальний момент у вертикальній площині дорівнює:

$$M_{зг}^e = F_t l / 2 = 2,53 \cdot 0,2 / 2 = 0,253 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Максимальний згинальний момент у горизонтальній площині (радіальне зусилля F_r направлене горизонтально) дорівнює:

$$M_{3z}^e = F_r l / 2 = 0,913 \cdot 0,2 / 2 = 0,0913 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

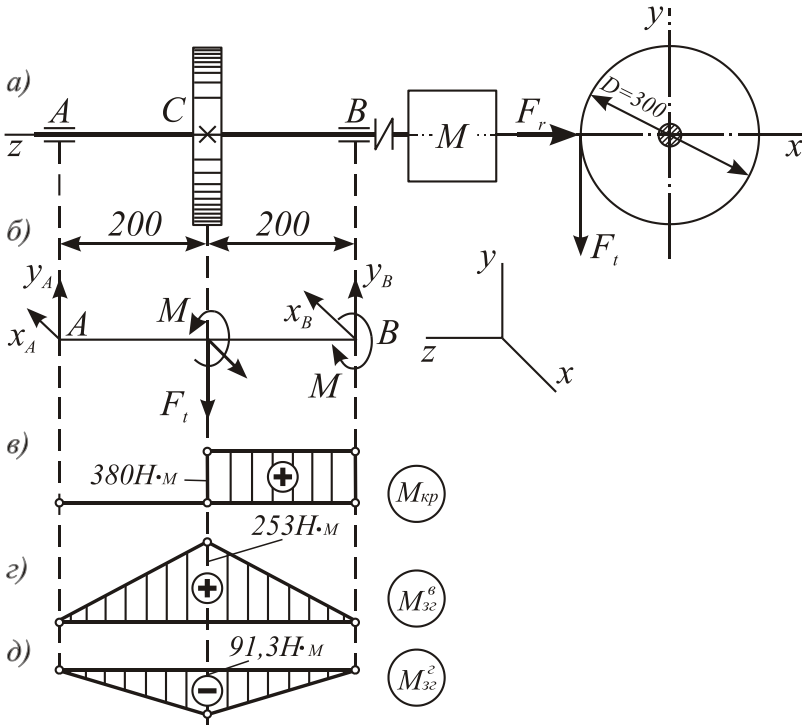


Рис. 11.12

Максимальний згинальний момент у вертикальній площині дорівнює:

$$M_{3z}^e = F_t l / 2 = 2,53 \cdot 0,2 / 2 = 0,253 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

Максимальний згинальний момент у горизонтальній площині (радіальне зусилля F_r направлене горизонтально) дорівнює:

$$M_{3z}^e = F_r l / 2 = 0,913 \cdot 0,2 / 2 = 0,0913 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

За знайденими значеннями моментів будемо епюри $T_{кр}$, $M_{зг}^6$, $M_{зг}^2$ (рис. 11.12 в, з, д) та визначаємо небезпечний переріз. З епюр видно, що небезпечний переріз знаходиться у місці закріплення зубчатого колеса.

Для знаходження еквівалентного напруження $\sigma_{екв}$ застосуємо умову (8.14) енергетичної теорії міцності

$$\sigma_{\hat{a}\hat{e}\hat{a}}^{IV} = \frac{M_{\hat{d}\hat{i}\hat{c}\hat{d}}^{IV}}{W_z}, \quad (11.24)$$

де $M_{\hat{d}\hat{i}\hat{c}\hat{d}}^{IV} = \sqrt{M_{\hat{c}\hat{a},\hat{c}\hat{a}}^2 + 0,75T_{\hat{e}\hat{d}}^2}$, $M_{зг.зб} = \sqrt{(M_{зг}^6)^2 + (M_{зг}^2)^2}$.

Тоді $M_{зг.зб} = \sqrt{(0,0913)^2 + (0,253)^2} = 0,269 \text{ кН} \cdot \text{м}$,

а $M_{розр}^{IV} = \sqrt{0,269^2 + 0,75 \cdot 0,38^2} = 0,425 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

За формулою (11.24) знаходимо

$$\sigma_{екв}^{IV} = \frac{0,425 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 35^3 \cdot 10^{-9}} = 99,1 \text{ МПа}.$$

Визначимо коефіцієнт запасу міцності

$$n_{nl} = \frac{\sigma_{nl}}{\sigma_{екв}^{IV}} = \frac{260}{99,1} = 2,62.$$

Порівнюючи знайдену величину n_{nl} з допустимим коефіцієнтом запасу міцності $[n]$, бачимо, що $n_{nl} > [n]$, тобто міцність вала забезпечена.

11.4. Розрахунок кривих стрижнів

Поряд із косим згином, позацентровим розтягом і стиском, згином із крученням, ще одним випадком складного опору є визначення напружень та переміщень у кривих стрижнях, які зустрічаються в деяких інженерних конструкціях (вантажопідійомних гаках, арках, кільцях ланцюгів, замкнутих

голівках шатунів та ін.). Розглядається випадок, коли осі кривих стрижнів є *плоскими кривими*. Будемо вважати, що перерізи цих стрижнів є сталими і симетричними. Радіус кривини осі стрижня R вважатимемо сталим.

У поперечних перерізах плоского кривого стрижня виникають три внутрішніх силових фактори: *поздовжня сила* N , *поперечна сила* Q та *згинальний момент* M (рис. 11.13).

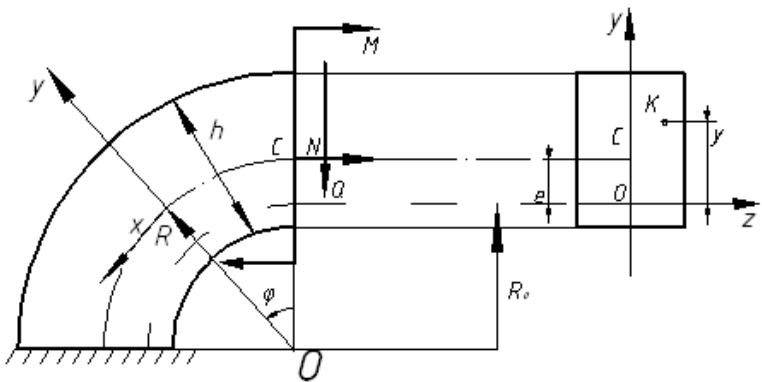


Рис. 11.13

Поздовжня сила N у довільному перерізі стрижня дорівнює сумі проєкцій всіх сил на вісь x , що розміщені з одного боку від перерізу. Сили, що діють на розтяг (від перерізу) приймаються додатними.

Поперечна сила Q дорівнює сумі проєкцій всіх сил на вісь y , що розміщені з одного боку від перерізу. Сила Q вважається додатною ($Q > 0$), якщо обертає переріз за годинниковою стрілкою.

Згинальний момент M дорівнює сумі моментів лівих або правих від перерізу сил відносно горизонтальної осі, що проходить через центр ваги "C" перерізу. Згинальний момент вважається додатним, якщо він збільшує кривину стрижня.

У залежності від відношення радіуса кривини осі стрижня R до висоти перерізу h розрізняють стрижні *малої кривини*, в яких $h/R < 1/5$, та стрижні *великої кривини*, в яких $h/R \geq 1/5$. Такий розподіл робиться з тої причини, що для стрижнів *малої кривини* напруження в поперечних перерізах обчислюють за формулами (1.5), (10.12) та (10.15) для *прямих стрижнів*:

$$\sigma_N = \frac{N}{A}, \quad \sigma_M = \frac{My}{I_z}, \quad \tau_y = \frac{QS_z}{bI_z}. \quad (11.25)$$

Для стрижнів великої кривини при обчисленні напруження σ_M необхідно додатково враховувати кривину стрижня і той факт, що радіус кривини стрижня R , на якому містяться центри ваги перерізу і радіус нейтрального шару R_0 , де напруження дорівнюють нулю, не співпадають. Відстань від нейтрального шару до центра ваги позначають через величину $e = R - R_0$.

Для визначення напружень σ_M використовується гіпотеза плоских перерізів, згідно якої можна записати відносне видовження довільного волокна стрижня у вигляді:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_\varphi y / \rho, \quad (11.26)$$

де $\rho = R_0 + y$ - радіус кривини довільного волокна;

$$\varepsilon_\varphi = \Delta(d\varphi) / d\varphi$$

- відносний приріст центрального кута повороту перерізу; y - координата точки перерізу стрижня відносно осі z , що збігається з нейтральною віссю.

Використавши ще одну *гіпотезу про відсутність тиску між поздовжніми волокнами* кривого стрижня (волокна знаходяться в лінійному напруженому стані), на основі закону Гука запишемо вираз для *нормальних напружень* у цих перерізах

$$\sigma_M = E\varepsilon_\varphi \frac{y}{R_0 + y}. \quad (11.27)$$

У формулу (11.27) входить дві невідомих величини ε_φ та R_0 , які знаходимо з двох рівнянь рівноваги для елемента кривого стрижня, що знаходиться в умовах *чистого згину*:

$$\Sigma X = 0; \int_A \sigma_M dA = 0; \quad (11.28)$$

$$\Sigma M_z = 0; \int_A y\sigma_M dA = M. \quad (11.29)$$

Підставивши в рівняння (11.28) значення напруження σ_M з (11.27), одержимо

$$E\varepsilon_\varphi \int_A \frac{y}{R_0 + y} dA = 0.$$

Оскільки у цьому виразі $E\varepsilon_\varphi \neq 0$, то

$$\int_A \frac{\rho - R_0}{\rho} dA = 0. \quad (11.30)$$

Звідки $A - \int_A \frac{dA}{\rho} = 0$, або

$$R_0 = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{\rho}}. \quad (11.31)$$

Враховуючи, що для прямокутного перерізу з розмірами $b \times h$: $A = bh$, $dA = bd\rho$, то

$$R_0 = \frac{bh}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{bd\rho}{\rho}} = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (11.32)$$

За аналогією, для круглого перерізу з діаметром d будемо мати:

$$R_0 = \frac{d^2}{4(2R - \sqrt{4R^2 - d^2})}. \quad (11.33)$$

Підставивши значення σ_M у друге рівняння рівноваги (11.29), одержимо

$$E\varepsilon_\varphi \int_A \frac{y^2}{\rho} dA = M. \quad (11.34)$$

Інтеграл в рівнянні (11.34) можна перетворити до наступного вигляду:

$$\int_A \frac{y^2}{\rho} dA = \int_A \frac{y(\rho - R_0)}{\rho} = \int_A ydA - R_0 \int_A \frac{y}{\rho} dA.$$

Останній із двох інтегралів дорівнює нулеві (рівняння (11.30)), а перший, за визначенням, є статичним моментом S_z площі поперечного перерізу відносно нейтральної осі z . Тому

$$\int_A \frac{y^2}{\rho} dA = \int_A y dA = Ae = S_z. \quad (11.35)$$

Таким чином, на основі формул (11.34), (11.35), можна знайти величину

$$\varepsilon_\varphi = \frac{M}{AeE}. \quad (11.36)$$

Підставивши вираз (11.36) у формулу (11.27), одержимо кінцевий вираз для визначення нормальних напружень у поперечних перерізах кривих стрижнів

$$\sigma_M = \frac{My}{Ae(R_0 + y)}. \quad (11.37)$$

Тут y – координата точки, в якій визначають напруження відносно нейтральної осі z ; e – координата центра перерізу відносно нейтральної осі.

Абсолютні значення напружень у крайніх волокнах кривого стрижня, згідно з формулою (11.37), обчислюються за формулами:

$$\sigma_{M1} = \frac{My_1}{AeR_1}; \quad \sigma_{M2} = \frac{My_2}{AeR_2}, \quad (11.38)$$

де $R_1 = R_0 + y_1$, $R_2 = R_0 + y_2$, - радіуси кривин крайніх волокон кривого стрижня; y_1, y_2 - відстані від нейтральної лінії до цих волокон (рис.11.14).

В розрахунках на міцність кривих стрижнів користуються сумарними нормальними напруженнями в довільному перерізі стрижня, що знаходяться за формулою

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M. \quad (11.39)$$

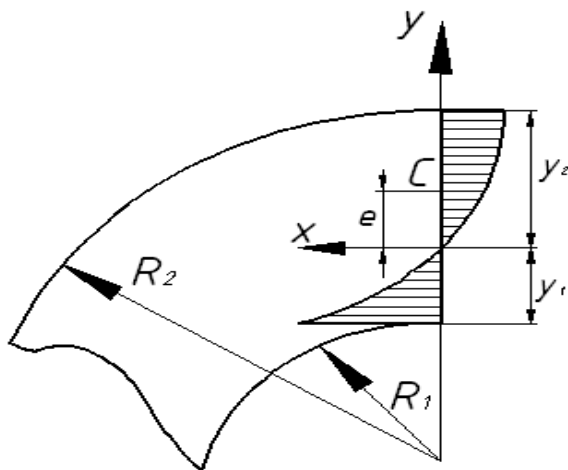


Рис.11.14

Отже, з формул (11.37), (11.38) видно, що нормальні напруження при чистому згині кривих стрижнів великої кривини змінюються за *гіперболічним* законом, на відміну від *лінійного* закону у прямих стрижнях. При цьому, спостерігається різка концентрація напружень збоку ввігнутості кривого стрижня. Тобто, це область підвищеної небезпеки появи тріщин

у крихкому матеріалі та область появи пластичних деформацій – для пластичного матеріалу.

Приклад. Кривий стрижень у вигляді чверті кільця сталого перерізу з розмірами $b = 4\text{см}$, $h = 16\text{см}$ та радіусом кривини осі стрижня $R = 50\text{ см}$ (рис.11.15) навантажений на вільному кінці силою $F = 64\text{ кН}$. Необхідно побудувати епюри N, Q, M , та визначити у небезпечному перерізі напруження $\sigma_N, \sigma_{M1}, \sigma_{M2}$, а також сумарні нормальні напруження $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$.

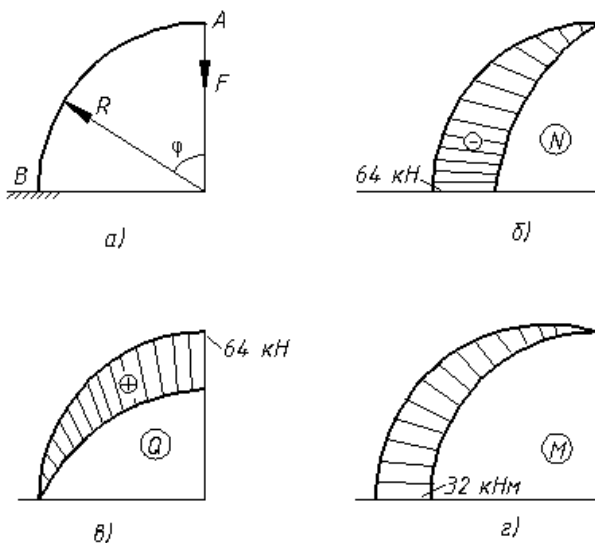


Рис.11.15

Внутрішні силові фактори N, Q, M у довільному перерізі стрижня залежать від центрального кута φ і мають вигляд:

$$N(\varphi) = -F \sin \varphi = -64 \sin \varphi \text{ кН};$$

$$Q(\varphi) = F \cos \varphi = 64 \cos \varphi \text{ кН};$$

$$M(\varphi) = FR \sin \varphi = 32 \sin \varphi \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Епюри N, Q, M показані на рис.11.15 б,в,г. Аналіз цих епюр приводить до висновку, що найнебезпечнішим перерізом стрижня за такого навантаження є переріз, який проходить через т.В, де

$$\varphi = \pi / 2, \text{ а } N = -64 \text{кН}, M = 32 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{Напруження } \sigma_N = \frac{N}{A} = -\frac{64 \text{кН}}{4 \cdot 16 \text{см}^2} = 1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Оскільки відношення $\frac{R}{h} = \frac{50}{16} = 3,1 < 5$, то розглядуваний

стрижень вважається *стрижнем великої кривини* і для його розрахунку необхідно застосовувати формули (11.31)- (11.38).

Радіус кривини нейтрального шару R_0 знайдемо за формулою (11.32):

$$R_0 = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{16}{\ln \frac{58}{42}} = \frac{16}{\ln 1,381} = 49,57 \text{ см}.$$

$$\text{Тоді } e = R - R_0 = 50 - 49,57 = 0,43 \text{ см}.$$

Координати крайніх точок перерізу y_1, y_2 відносно нейтральної лінії будуть дорівнювати

$$y_1 = -8 + 0,43 = -7,57 \text{ см}, \quad y_2 = 8 + 0,43 = 8,43 \text{ см}.$$

Знаходимо нормальні напруження σ_M у крайніх волокнах перерізу стрижня:

$$\sigma_{M1} = \frac{My_1}{AeR_1} = -\frac{32 \cdot 7,57 \cdot 10^2}{64 \cdot 0,43 \cdot 42} = -21 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2};$$

$$\sigma_{M_2} = \frac{My_2}{AeR_2} = \frac{32 \cdot 8,43 \cdot 10^2}{64 \cdot 0,43 \cdot 58} = 16,9 \frac{\kappa H}{\text{см}^2} .$$

Для розрахунку кривих стрижнів на міцність необхідно знати сумарні напруження у крайніх волокнах перерізу. Названі напруження дорівнюють:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{M_2} + \sigma_N = 16,9 - 1 = 15,9 \kappa H / \text{см}^2;$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{M_1} + \sigma_N = -21 - 1 = -22 \kappa H / \text{см}^2.$$

Дотичні напруження τ_y не справляють значного впливу на міцність стрижнів (за винятком тонкостінних перерізів або композитних матеріалів), але у разі потреби їх можна знайти за формулою Журавського (11.25).

Запитання для самоконтролю

1. Що таке *складний опір* стрижня?
2. Що називається *косим згином* бруса?
3. Як записується напруження за косоного згину бруса?
4. Як визначається *сумарний момент*, що діє на брус?
5. Що називається *нейтральною лінією епюри напружень*?
6. Запишіть умову міцності за косоного згину.
7. Як записується *повний прогин* балки?
8. Як співвідносяться між собою напрямки прогину та *нейтральної лінії* перерізу?
9. Який напружено-деформований стан називається *позацентричним розтягом або стиском* стрижня?
10. Запишіть рівняння *нейтральної лінії* за позацентричного розтягу або стиску стрижня.
11. Що таке *ядро перерізу*?
12. Як записується *розрахунковий момент* для теорії найбільших дотичних напружень?
13. Як записується умова міцності за *енергетичною теорією*?
14. Запишіть залежність між крутним моментом, потужністю, що передається на вал, та частотою обертання.
15. Запишіть залежність для повного згинального моменту.

16. Які внутрішні силові фактори виникають у поперечних перерізах *кривого стрижня*?
17. Як відбувається поділ кривих стрижнів за величиною кривини осі стрижня?
18. Які *гіпотези опору матеріалів* використовуються при обчисленні напружень у поперечних перерізах кривих стрижнів?
19. Запишіть формули для напружень у поперечних перерізах кривих стрижнів.
20. З якої умови рівноваги визначається радіус кривини нейтрального шару кривого стрижня?
21. За яким законом змінюються нормальні напруження у поперечних перерізах кривих стрижнів?

ТЕМА 12 (лекції 27-30)

ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ У СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМАХ. РОЗРАХУНОК НЕРОЗРІЗНИХ БАЛОК

12.1. Робота сил та потенціальна енергія деформації в стрижневих системах

Робота зовнішньої сили за розтягу або стиску стрижня записується формулою (2.20) у вигляді:

$$A = \frac{1}{2} F \Delta l.$$

Неважко показати, що у межах закону Гука виведена формула буде мати такий самий вигляд і для випадків інших деформацій (згину, кручення, зсуву). Тобто, у загальному випадку її можна записати наступним чином -

$$A = \frac{1}{2} F \Delta, \quad (12.1)$$

де величину F будемо називати *узагальненою силою*, а Δ – *відповідним узагальненим переміщенням*, на якому узагальнена сила виконує роботу. У деяких підручниках величину Δ називають ще узагальненою координатою.

Під *узагальнюючою силою* надалі будемо розуміти не тільки силу чи групу сил, а й розподілене навантаження або

пару сил (рис. 12.1). Крім того, сумарна робота від дії декількох сил дорівнює сумі робіт від дії кожної з них –

$$A_{\Sigma} = \sum_i A_i. \quad (12.2)$$

Крім зовнішніх сил, при деформуванні стрижнів роботу виконують і внутрішні сили. Вони завжди діють у протилежному напрямку до переміщень, тому їх робота вважається від'ємною величиною.

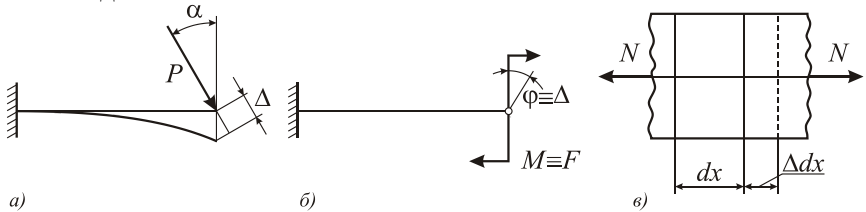


Рис. 12.1

Наприклад, елементарна робота, яку на переміщенні стрижня $\Delta(dx)$ виконує поздовжня сила N (рис. 12.1, в) дорівнює

$$dV(N) = -\frac{1}{2} N \cdot \Delta(dx) = -\frac{N^2}{2EA} dx, \quad (12.3)$$

де вважалось, що видовження відбувається у межах закону Гука $\Delta(dx) = Ndx/EA$.

Для стрижня довжиною l отримаємо:

$$V(N) = -\int_0^l \frac{N^2}{2EA} dx. \quad (12.4)$$

Аналогічно, як для деформації розтягу – стиску, легко отримати вираз для роботи внутрішніх сил від згинального та крутного моментів на відповідних кутах повороту перерізів:

$$V(M) = -\int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx, \quad V(T_{кр}) = -\int_0^l \frac{T_{кр}^2}{2GI_k} dx. \quad (12.5)$$

Разом з тим, робота поперечних сил при зсуві двох поперечних перерізів один відносно одного, може бути записана подібним чином, але із деяким поправочним коефіцієнтом, що залежить від форми поперечного перерізу:

$$V(Q) = -k \int_0^l \frac{Q^2}{2GA} dx, \quad (12.6)$$

де $k \approx 1,2$ – для прямокутного та круглого перерізів;
 $k \approx A/A_{об}$ – для двотавра (A – загальна площа, $A_{об}$ – площа стінки двотавра).

Сумарна робота кожного із внутрішніх факторів визначається, як сума робіт кожної із внутрішніх сил окремо:

$$V = -\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EI} + k \frac{Q^2}{GA} + \frac{T_{кр}^2}{GI_k} \right) dx. \quad (12.7)$$

Якщо навантаження, що діють в пружних системах, є статичними, то робота внутрішніх сил, взята зі протилежним знаком, дорівнює потенційній енергії деформації, що накопичується у системі:

$$U = -V = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EI} + k \frac{Q^2}{GA} + \frac{T_{кр}^2}{GI_k} \right) dx. \quad (12.8)$$

12.2 Можлива робота зовнішніх та внутрішніх сил. Інтеграл Мора

Зовнішні сили, що деформують пружну систему, крім дійсної роботи, можуть виконувати і так звану *можливу роботу* на відповідних *можливих* переміщеннях. За *можливі* переміщення приймають малі переміщення пружної системи, що допускаються зв'язками системи і не залежать від сил, що виконують на них роботу.

Для обчислення величини можливої роботи від дії зовнішніх та внутрішніх сил розглянемо просту балку, яка спочатку навантажується системою сил F , а пізніше системою сил P (рис. 12.2).

Повне переміщення точки прикладення системи сил F буде:

$$\Delta_F = \Delta_{FF} + \Delta_{FP}.$$

Тоді сумарна робота системи навантаження F і P на відповідних переміщеннях буде дорівнювати:

$$A_I = A_{FF} + A_{FP} + A_{PP}, \quad (12.9)$$

де A_{FF} , A_{PP} – дійсні роботи, що виконуються системами сил F і P на відповідних переміщеннях і обчислюються за формулою (12.1), а величина

$$A_{FP} = F \cdot \Delta_{FP}, \quad (12.10)$$

називається *можливою* роботою. Вона не має множника $1/2$ у правій частині, тому що сила F , яка виконувала роботу на переміщенні Δ_{FP} , надалі залишалась сталою (рис.12.2, в). У зв'язку з тим, що переміщення Δ_{FP} не залежить від системи сил F , то таке переміщення (за означенням) є *можливим*, а робота A_{FP} – *можливою*.

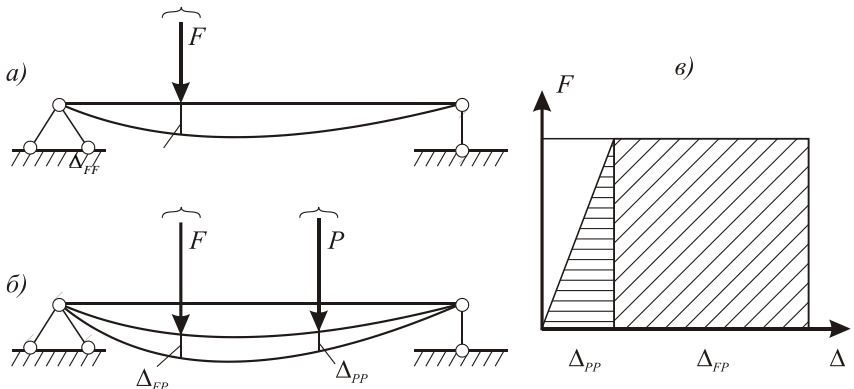


Рис. 12.2

Разом із зовнішніми силами можливою роботу будуть виконувати і внутрішні сили. Так, при навантаженні пружної системи (рис. 12.2) системою сил F у стрижнях системи виникають внутрішні сили N_F , M_F , Q_F і M_{kF} , які будуть виконувати можливою роботу на елементарних переміщеннях:

$$\frac{N_p dx}{EA}, \quad \frac{M_p dx}{EI}, \quad k \frac{F_p dx}{GA}, \quad \frac{T_{kp} dx}{GI_k},$$

що з'являються як результат дії внутрішніх сил N_P , M_P , Q_P і T_{kP} .

Тоді можлива робота V_{FP} внутрішніх сил стану F на переміщеннях, викликаних станом навантажень P , буде дорівнювати:

$$V_{FP} = -\int_0^l \left(\frac{N_F N_P}{EA} + \frac{M_F M_P}{EI} + k \frac{Q_F Q_P}{GA} + k \frac{T_{kF} T_{kP}}{GI_k} \right). \quad (12.11)$$

Аналіз природи та визначення можливих переміщень показує, що термін “можливі” є відносним. Бо переміщення певної точки пружної системи, де прикладена сила F , є “можливим” відносно цієї системи сил, але водночас є дійсним і абсолютно реальним для системи сил P .

Визначити ці переміщення можна, скориставшись відповідним *принципом можливих переміщень*. Згідно з цим принципом, у *матеріальній системі, що перебуває у стані рівноваги під дією прикладених до неї сил, робота цих сил на можливих безмежно малих переміщеннях системи з положення рівноваги дорівнює нулеві*.

Розглядаючи роботу пружних систем у межах закону Гука, принцип можливих переміщень можна застосувати і для малих скінчених переміщень у вигляді

$$A_{FP} + V_{FP} = 0. \quad (12.12)$$

Тобто, у випадку пружної рівноваги сума можливих робіт, зовнішніх та внутрішніх сил, прикладених до системи, дорівнює нулеві.

Прикладом для визначення прогинів у довільній точці може бути балка на двох опорах (рис. 12.2), навантажена системою сил P . Замість системи сил F будемо прикладати одиничне навантаження ($F = 1$): одиничну силу, якщо необхідно визначати прогин, і одиничний момент, якщо потрібно визначити кут повороту у певній точці. Враховуючи у формулі (12.11) тільки вплив згинальних моментів, запишемо рівняння (12.12) у розгорнутому вигляді:

$$1 \cdot \Delta_{1P} - \int_0^l \frac{M_1 M_P}{EI} dx = 0,$$

звідки

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{M_1 M_P}{EI} dx, \quad (12.13)$$

де M_1 , M_P – аналітичні вирази для згинальних моментів від відповідних силових факторів на ділянці $[0, l]$.

Формула (12.13) носить назву *інтеграла Мора* і використовується для визначення переміщень у довільних пружних системах. Якщо в останніх, крім згинальних моментів, виникають ще інші внутрішні силові фактори, то *інтеграл Мора* у загальному випадку має вигляд:

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \left(\frac{N_1 N_P}{EA} + \frac{M_1 M_P}{EI} + k \frac{Q_1 Q_P}{GA} + \frac{T_{k1} T_{kP}}{GI_k} \right) dx. \quad (12.14)$$

Необхідно зауважити, що у випадках, коли вирази для внутрішніх сил є різними на частинах ділянки, то інтеграл Мора необхідно обчислювати на кожній ділянці окремо, а результати “підсумовувати”. Якщо результат підсумовування від’ємний, то це означає, що дійсний напрямок переміщень буде протилежним до напрямку одиничної сили.

12.3. Способи обчислення інтеграла Мора

а) Спосіб Верещагіна. При обчисленні інтеграла Мора у тому вигляді, як він представлений формулою (12.14), в інженерних розрахунках виникають деякі математичні ускладнення, особливо при великій кількості відрізків з різними виразами підінтегральних функцій. Тому існує низка способів, які спрощують його обчислення у випадках, коли епюри внутрішніх сил змінюються за певними законами. Одним із найпростіших випадків є випадок, коли одна із епюр (вантажна чи одинична) є лінійною функцією (рис. 12.3), а інша змінюється за довільним законом.

Нехай епюра згинальних моментів від одиничного навантаження є прямою лінією – $M_1(x) = ax + b$, а вантажна – $M_p(x)$ є довільною функцією від x .

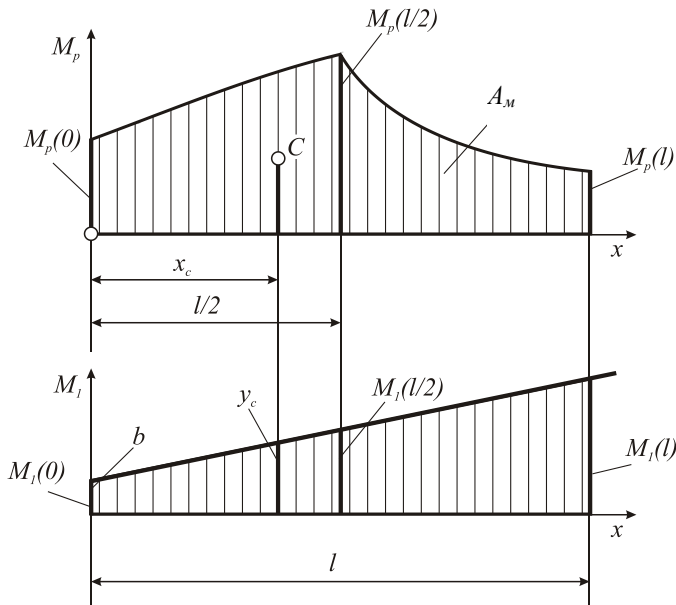


Рис. 12.3

Підставимо ці вирази у формулу Мора (12.13) за умови, що жорсткість EI - стала величина. Дістаємо

$$\Delta_{1p} = \int_0^l \frac{(ax+b) \cdot M_p(x)}{EI} dx = \frac{a}{ES} \int_0^l x M_p(x) dx + \frac{b}{EI} \int_0^l M_p(x) dx.$$

Другий інтеграл в останній формулі є площею епюри ω згинальних моментів $M_p(x)$, а перший – статичним моментом цієї площі відносно осі M_p :

$$A_M = \int_0^l M_p(x) dx; \quad \int_0^l x M_p(x) dx = \omega \cdot x_c, \quad (12.15)$$

де x_c – відстань до центра ваги епюри M_p .

Підставивши останні позначення у формулу для Δ_{1p} , отримаємо

$$\Delta_{1p} = \frac{A_m}{EI} (ax_c + b).$$

За означенням, вираз у дужках є ординатою y_c епюри M_1 , тому остаточна формула для визначення переміщення в пружній системі (формула Верещагіна) має вигляд

$$\Delta_{1p} = \frac{A_m y_c}{EI}. \quad (12.16)$$

Відповідні формули від дії поздовжніх та поперечних сил, а також крутних моментів будуть:

$$\Delta_{1p} = \frac{A_m y_c}{EA}; \quad \Delta_{1p} = k \frac{A_m y_c}{GA}; \quad \Delta_{1p} = \frac{A_m y_c}{GI_k}, \quad (12.17)$$

де (так само як і при згині) A_m – площа “вантажної” епюри N_p , Q_p і M_p ; y_c – ордината відповідної “одиничної” епюри.

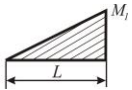
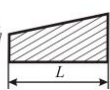
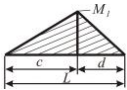

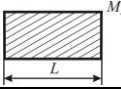
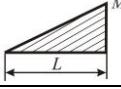
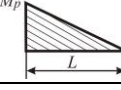
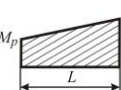

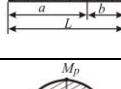
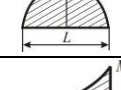
Перед формулами (12.15), (12.16) ставиться знак “-”, якщо перемножувані епюри розміщені по різні боки нульової лінії. Крім того, якщо лінійна епюра має точку перелому, або в якійсь точці стрижень змінює свою жорсткість, то формулу Верещагіна необхідно застосувати між цими точками, а результат підсумувати.

б) *Спосіб Сімпсона–Корноухова.* Ще один спосіб обчислення інтегралу Мора запропонував М.В. Корноухов, який базується на формулі Сімпсона для обчислення означеного інтегралу:

$$\int_0^l y(x) dx = \frac{l}{6} [y(0) + 4y(l/2) + y(l)], \quad (12.18)$$

де величини у квадратних дужках – значення підінтегральної функції $y(x)$ у певних точках інтервалу інтегрування.

Таблиця 12.1. Результати перемноження окремих епюр

M_1 M_p				
	$\frac{L}{2}M_1M_p$	$\frac{L}{2}(M_1 + M_1')M_p$	$\frac{L}{2}M_1M_p$	$\frac{2L}{3}M_1M_p$
	$\frac{L}{2}M_1M_p$	$\frac{L}{6}(M_1 + M_1')M_p$	$\frac{L}{6}\left(1 + \frac{c}{L}\right)M_1M_p$	$\frac{L}{3}M_1M_p$
	$\frac{L}{6}M_1M_p$	$\frac{L}{6}(2M_1 + M_1')M_p$	$\frac{L}{6}\left(1 + \frac{d}{L}\right)M_1M_p$	$\frac{L}{3}M_1M_p$
	$\frac{L}{6}M_1(M_p + 2M_1')M_p$	$\frac{L}{6}(2M_1 + M_1')M_p + \frac{L}{6}M_1'(M_p + 2M_1')$	$\frac{L}{6}\left(1 + \frac{d}{L}\right)M_1M_p + \frac{L}{6}\left(1 + \frac{c}{L}\right)M_1M_1'$	$\frac{L}{3}M_1(M_p + M_p')$
	$\frac{L}{6}\left(1 + \frac{a}{L}\right)M_1M_p$	$\frac{L}{6}\left(1 + \frac{b}{L}\right)M_1M_p + \frac{L}{6}\left(1 + \frac{a}{L_p}\right)M_1'M_p$	При $a \leq c$: $\frac{L}{3}M_1M_p - \frac{L(c-a)^2}{6bc}M_1M_p$	$\frac{L}{3}\left(1 + \frac{ab}{L^2}\right)M_1M_p$
	$\frac{L}{3}M_1M_p$	$\frac{L}{3}(M_1 + M_1')M_p$	$\frac{L}{3}\left(1 + \frac{ad}{L^2}\right)M_1M_p$	$\frac{8L}{15}M_1M_p$
	$\frac{L}{4}M_1M_p$	$\frac{L}{12}(M_1 + 3M_1')M_p$	$\frac{L}{12}\left(1 + \frac{c}{L} + \frac{c^2}{L^2}\right)M_1M_p$	

Підставивши у формулу (12.18) замість підінтегральної функції величину

$$y(x) = \frac{1}{EI} M_1(x) \cdot M_p(x), \quad (12.19)$$

одержимо формулу Сімсона-Корноухова для обчислення інтегралу Мора:

$$\Delta_{1p} = \frac{l}{6EI} \left[M_1(0) \cdot M_p(0) + 4M_1(l/2)M_p(l/2) + M_1(l) \cdot M_p(l) \right], \quad (12.20)$$

де величини у квадратних дужках відповідають значенням епюр згинальних моментів на рис. 12.3.

Зауважимо, що формула (12.20) є точною, якщо добуток $M_p(x) \cdot M_1(x)$ є поліномом не вище третього степеня. Для економії часу проведення підрахунків, результати перемноження епюр, які найчастіше трапляються, зведені у таблицю 12.1.

12.4. Рівняння трьох моментів

В розрахунках балок на міцність та жорсткість у більшості випадків доводиться мати справу із статично невизначеними балками, які ще називають нерозрізними.

Ступінь статичної невизначеності нерозрізної балки визначається кількістю зайвих зв'язків Z , що дорівнює:

$$Z = C - 3, \quad (12.21)$$

де C – кількість опорних стрижнів (защемлення опорного перерізу відповідає трьом опорним стрижням, а нерухома опора – двом).

Нехай задана нерозрізна балка з довільною кількістю прогонів (рис.12.4, а). За **основну систему** (систему статично визначених балок) для цієї балки приймаємо ряд простих балок, що отримуються після умовного включення шарнірів на кожній проміжній опорі нерозрізної балки (рис. 12.4, б).

При такій **основній системі** невідомими у рівняннях переміщень будуть згинальні моменти в опорних перерізах нерозрізної балки. Припустивши, що ці моменти додатні, прикладемо їх разом із заданим навантаженням до простих балок основної системи. Під дією такого навантаження балки основної системи деформуються. Зокрема, їх опорні перерізи повертаються один відносно одного на якийсь кут, позначений на n -ній опорі через $\Theta_n \equiv \Theta'_n + \Theta''_n$ (рис.12.4, в).

Рівняння переміщень складаються з умови, що задана нерозрізна балка проходить суцільно над усіма опорами, і тому опорні перерізи однопрогінних балок основної системи не можуть повертатися один відносно одного, тобто їх взаємний кут повороту має дорівнювати нулеві: $\Theta_n = 0$.

Величина кута Θ_n залежить лише від навантаження двох суміжних з n -ною опорою прогонів і тому кожне з рівнянь переміщень вміщує лише три невідомі: опорний момент на даній опорі та на опорах ліворуч і праворуч від неї.

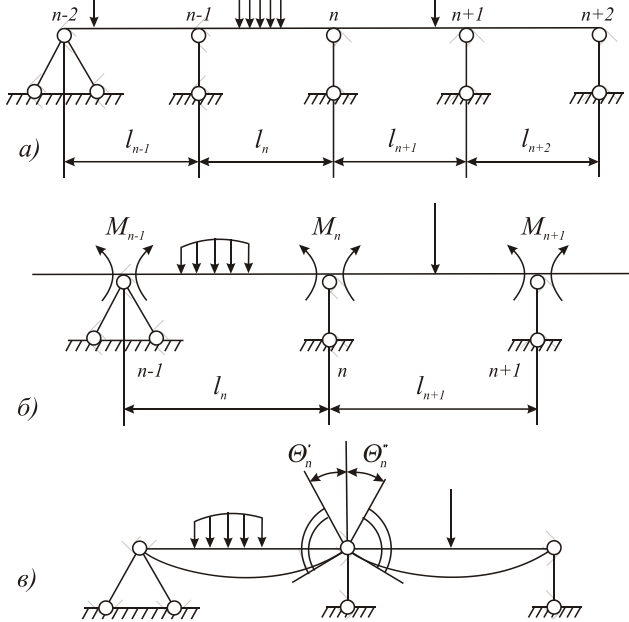


Рис. 12.4

При виведенні канонічного рівняння методу сил у загальному випадку навантажуюмо основну систему по черзі невідомими опорними моментами M_{n-1} , M_n і M_{n+1} , приймаючи їх рівними одиниці, і заданим навантаженням на прогоні.

Використовуючи закон незалежності дії сил і закон Гука, зобразимо кут Θ_n як суму добутків кутів повороту від одиничних опорних моментів на величину відповідного моменту та кута повороту від прогінного навантаження:

$$\delta_{n, n-1} M_{n-1} + \delta_{n, n} \cdot M_n + \delta_{n, n+1} \cdot M_{n+1} + \Delta_{np} = 0. \quad (12.22)$$

Коефіцієнти $\delta_{i,k}$ знаходяться методом Верещагіна шляхом перемноження епюр згинальних моментів від навантаження опор основної системи (рис. 12.1) відповідними одиничними моментами. Вільний член Δ_{np} – взаємний кут повороту опорних перерізів простих балок основної системи на n -й опорі від дії навантажень на прогоні, подамо як суму кутів повороту ліворуч (θ_n') і праворуч (θ_n'') від n -ї опори: $\Delta_{np} = \theta_n' + \theta_n''$.

Тоді канонічне рівняння методу сил переходить (після перемноження епюр основної системи способом Верещагіна) у так зване рівняння трьох моментів, яке для n -ї опори нерозрізної балки сталої жорсткості EI (рис. 12.4, а) приймає вигляд:

$$M_{n-1}l_n + M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6EI(\theta_n' + \theta_n''), \quad (12.23)$$

де θ_n' – кут повороту правого опорного перерізу простої балки ліворуч від n -ної опори, θ_n'' – кут повороту лівого опорного перерізу простої балки праворуч від n -ної опори.

Рівнянням трьох моментів можна користуватись також у випадку глухих защемлень кінцевих перерізів нерозрізної балки. Нехай, наприклад, лівий кінцевий переріз нерозрізної балки глухо закріплений на опорі n (рис. 12.5, а). Тоді у рівнянні (12.23) можна покласти $l_n = 0$, $\theta_n' = 0$, а саме рівняння набуває такого вигляду:

$$2M_n l_{n+1} + M_{n+1} l_{n+1} = -6EI\theta_n''. \quad (12.24)$$

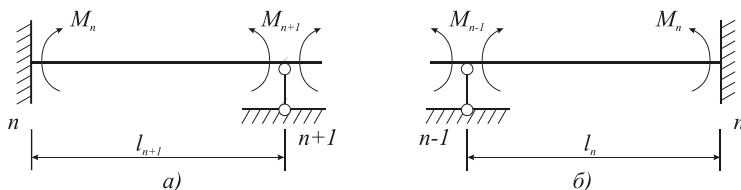


Рис. 12.5

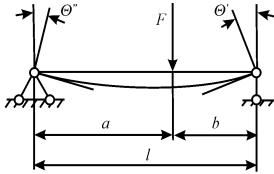
Якщо на n -ій опорі закріплений правий кінцевий переріз, то $l_{n+1} = 0$, $\theta_n'' = 0$, тоді матимемо

$$M_{n-1}l_n + 2M_nl_n = -6EI\theta_n'' \quad (12.25)$$

Для зручності розрахунку нерозрізних балок доцільно задалегідь визначити кути повороту опорних перерізів простої балки для кількох найпростіших випадків навантаження, користуючись способом Верещагіна.

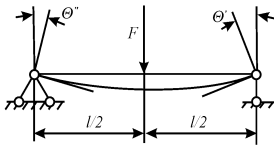
12.5. Кути повороту опорних перерізів простої балки для деяких навантажень

В правих частинах рівнянь трьох моментів (12.23)-(12.25) є величини θ_i , які визначаються як кути повороту опорних перерізів від навантаження на прогоні. Їх значення для деяких навантажень простої балки (рис. 12.6) наведені нижче.

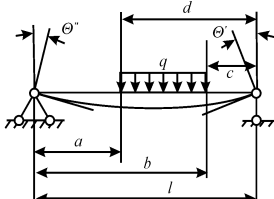


$$EI\theta'' = \frac{Fab}{6l}(l+b), \quad a)$$

$$EI\theta' = \frac{Fab}{6l}(l+a), \quad б)$$

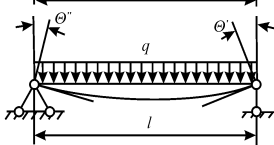


$$EI\theta'' = EI\theta' = \frac{Fl^2}{16}, \quad в)$$

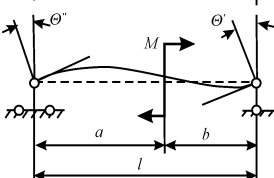


$$EI\theta'' = \frac{q(d^2 - c^2)}{12l} \left(l^2 - \frac{c^2 + d^2}{2} \right), \quad г)$$

$$EI\theta' = \frac{q(b^2 - a^2)}{12l} \left(l^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} \right), \quad д)$$



$$EI\theta'' = EI\theta' = \frac{ql^3}{24}, \quad е)$$



$$EI\theta'' = -\frac{M}{6l}(l^2 - 3b^2), \quad ж)$$

$$EI\theta' = -\frac{M}{6l}(l^2 - 3a^2), \quad з)$$

Рис. 12.6.

12.6. Згинальні моменти і поперечні сили у довільному перерізі n -ного прогону балки

Після визначення опорних моментів згинальний момент і поперечна сила в n -ому прогоні нерозрізної балки знаходяться як для статично визначної балки, навантаженої заданим прогінним навантаженням і опорними моментами (рис. 12.7). При цьому, одержимо такі загальні вирази для згинального моменту і поперечної сили:

$$M(x) = M_p(x) + M_{n-1} + \frac{M_n}{l_n}x - \frac{M_{n-1}}{l_n}x = \quad (12.26)$$

$$= M_{n-1} + (M_n - M_{n-1}) \frac{x}{l_n},$$

$$Q(x) = \frac{dM}{dx} = Q_p(x) + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}.$$

Через $M_p(x)$ і $Q_p(x)$ позначені згинальні моменти і поперечні сили від прогінного навантаження у статично визначній простій балці

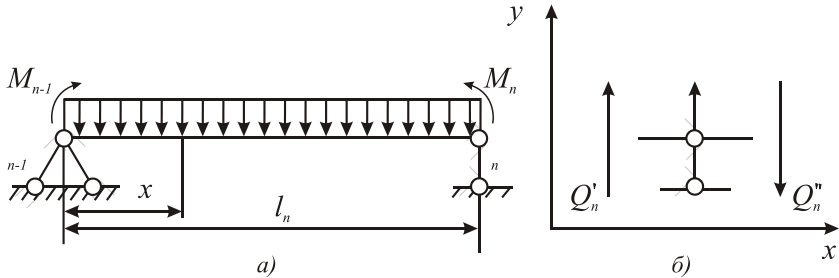


Рис. 12.7

Знаючи поперечні сили Q'_n і Q''_n , що виникають ліворуч і праворуч від n -ої опори балки (рис.12.6), можемо з умови рівноваги вертикальних сил визначити опорну реакцію R_n :

$$\sum Y = 0: Q'_n + R_n - Q''_n = 0,$$

звідки

$$R_n = Q''_n - Q'_n.$$

Додатній знак реакції, обчисленої за отриманою формулою, вказує на те, що реакція напрямлена вгору.

Приклад. Для заданої нерозрізної балки (рис. 12.8, а, б) треба побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил, підібрати з умови міцності двотавровий переріз і визначити прогин у перерізі А, якщо:

$$l_1 = 3 \text{ м}, l_2 = 4 \text{ м}, l_3 = 1 \text{ м}, a = 2 \text{ м}, b = 1 \text{ м},$$

$$M = 120 \text{ кНм}, q = 30 \text{ кН/м}.$$

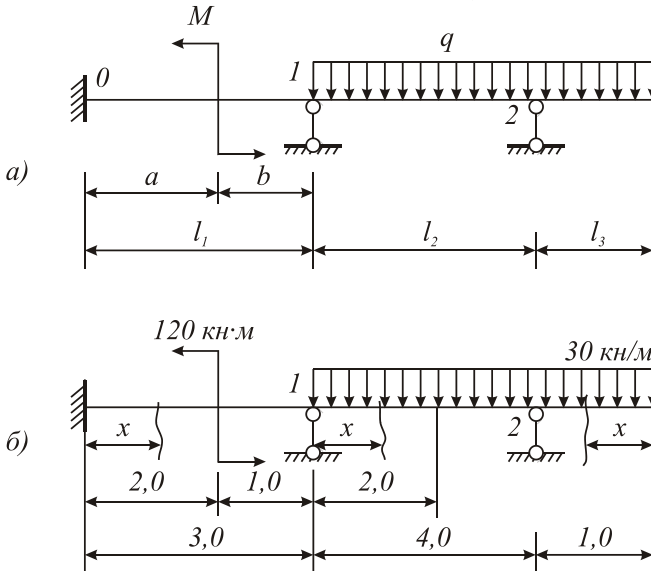


Рис. 12.8

Матеріал балки – сталь, для якої $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Розв'язування.

1. Визначених опорних моментів.

Знаходимо за формулою (12.21) ступінь статичної невизначеності балки:

$$Z = 5 - 3 = 2.$$

Балка двічі статично невизначна і для її розв'язання треба скласти два рівняння трьох моментів, а саме для опор 0 і 1.

$$n = 0: 2M_0l_1 + M_1l_1 = -6EI\theta_0'',$$

$$n = 1: M_0l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2l_2 = -6EI(\theta_1' + \theta_1'').$$

За формулами (12.е), (12.ж), (12.з) (рис. 12.6) знаходимо:

$$EI\theta_0'' = \frac{M}{6l_1}(l_1^2 - 3b^2) = \frac{120}{6 \cdot 3}(3^2 - 3 \cdot 2^2) = 40 \text{ кН м}^2,$$

$$EI\theta_1' = -\frac{M}{6l_1}(l_1^2 - 3a^2) = -\frac{120}{6 \cdot 3}(3^2 - 3 \cdot 1^2) = 20 \text{ кН м}^2,$$

$$EI\theta_1'' = \frac{ql_2^3}{24} = \frac{30 \cdot 4^3}{24} = 80 \text{ кН м}^2.$$

Крім того, маємо:

$$M_2 = -\frac{ql_3^2}{2} = -\frac{30 \cdot 1}{2} = -15 \text{ кН м}.$$

Рівняння трьох моментів набувають вигляду:

$$6M_0 + 3M_1 = -6 \cdot 40 = -240,$$

$$3M_0 + 14M_1 = -6 \cdot (20 + 80) + 15 \cdot 4 = -540.$$

Розв'язавши рівняння, знаходимо:

$$M_0 = -23.2 \text{ кН м}, \quad M_1 = -33.6 \text{ кН м}.$$

2. Побудова епюр $M(x)$ і $Q(x)$.

Згинальні моменти і поперечні сили на прогонах балки знаходимо за формулами (4) і (5).

Прогін 0-1

Відрізок I— $0 \leq x \leq 2$:

$$M(x) = \frac{120}{3}x - 23.2 + \frac{-33.6 + 23.2}{3.0}x = 36.6x - 23.2,$$

$$M(0) = -23.2 \text{ кН м},$$

$$M(2) = 50.0 \text{ кН м}.$$

Відрізок II— $2 \leq x \leq 3$:

$$M(x) = 36.6x - 23.2 - 120 = 36.6x - 143.2,$$

$$M(2) = -70 \text{ кН м},$$

$$M(3) = -36.6 \text{ кН м}.$$

Для всього прогону:

$$Q = \frac{dM}{dx} = 36.6 \text{ кН}.$$

Прогін 1-2

Для всього прогону:

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{30 \cdot 4}{2} x - \frac{30}{2} x^2 - 33,6 + \frac{-15 + 33,6}{4,0} x = \\ &= 64,7x - 15x^2 - 33,6, \\ Q(x) &= 64,7 - 30x. \end{aligned}$$

Максимальний згинальний момент виникає у перерізі з абсцисою x_0 , яка визначається з умови $Q(x) = 0$:

$$64,7 - 30x_0 = 0, \quad x_0 = 2,16 \text{ м},$$

$$M_{\max} = 64,7 \cdot 2,16 - 15 \cdot 2,16^2 - 33,6 = 26,4 \text{ кН м},$$

$$Q(0) = 64,7 \text{ кН},$$

$$Q(4) = -55,3 \text{ кН}.$$

Консоль

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} = -15x^2,$$

$$M(0) = 0, \quad M(1) = 15 \text{ кН м},$$

$$Q(0) = 0, \quad Q(1) = 30 \text{ кН}.$$

За одержаними даними на рис. 12.9 побудовано епюри згинальних моментів і поперечних сил.

3. Підбір перерізу балки.

Максимальний згинальний момент у балці дорівнює:

$$M_{\max} = 70 \text{ кН м}.$$

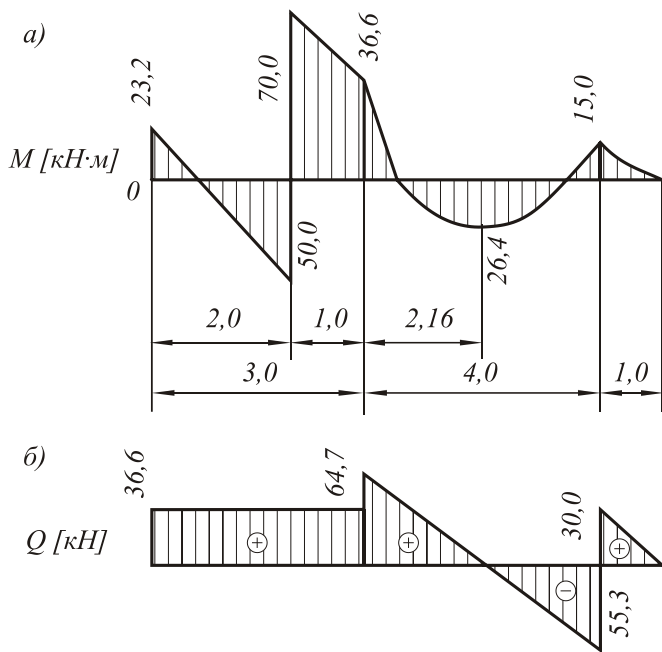


Рис. 12.9

З умови міцності знаходимо потрібний момент опору перерізу:

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{70 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 437 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 437 \text{ см}^3.$$

Приймаємо двотавр №30 (ГОСТ 8239), для якого

$$W_x = 472 \text{ см}^3, I_x = 7080 \text{ см}^4.$$

4. Визначення прогину у перерізі А балки.

Прогин визначаємо за методом Верещагіна. Для цього прикладаємо у перерізі А статично невизначеної балки 1-2 основної системи одиничну безрозмірну силу і будуємо епору згинальних моментів M_1 (рис. 12.10, а, б).

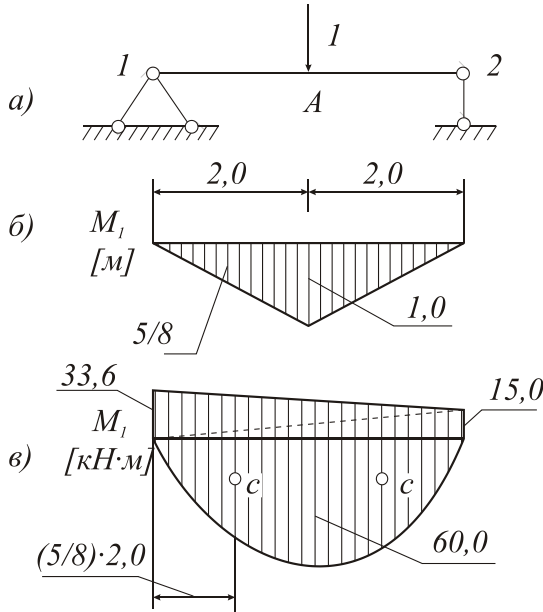


Рис. 12.10

Епюру згинальних моментів M від заданого навантаження на прогоні 1-2 представляємо як суму параболічної епюри для простої балки з максимальною ординатою

$$M = \frac{ql_2^2}{8} = \frac{30 \cdot 4^2}{8} = 60 \text{ кН м},$$

і двох трикутних епюр від опорних моментів (рис. 12.10, в).

Перемножуючи епюри, одержуємо:

$$EIf_A = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 60.0 \cdot 2.0 \cdot \frac{5}{8} \cdot 1.0 - \frac{1}{2} \cdot 4.0 \cdot 1.0 \cdot \frac{1}{2} (33.6 + 15.0) = 51.4 \text{ кН м}^3$$

;

$$f_A = \frac{51.4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = 0.36 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 0.36 \text{ см}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Запишіть вираз для роботи узагальненої сили на відповідному узагальненому переміщенні.
2. Що таке узагальнена сила
3. Як записується робота внутрішніх сил
4. Чому дорівнює потенціальна енергія деформації
5. Що називається можливою роботою
6. Запишіть вираз для можливої роботи внутрішніх сил.
7. Як читається принцип можливих переміщень
8. Запишіть вираз для інтегралу Мора.
9. У якому випадку інтеграл Мора обчислювати способом Верещагіна
10. Запишіть формулу Верещагіна.
11. Запишіть формулу Сімпсона – Корноухова.
12. Як визначається ступінь статичної невизначеності нерозрізної балки
13. Що таке основна система
14. Яка умова записується для прогінного кута повороту
15. Запишіть рівняння трьох моментів для n - ої опори нерозрізної балки.
16. Запишіть вираз для згинального моменту в n - му прогоні нерозрізної балки.
17. Запишіть вираз для поперечної сили в n - му прогоні нерозрізної балки.
18. Запишіть умову для визначення реакції n - ої опори нерозрізної балки.

ТЕМА 13 (лекції 31,32). РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ РАМ

13.1. Основні поняття та визначення. Розрахунок статично визначних рам

В конструкціях часто використовуються стрижні з ламаною віссю – *рами*. На відміну від *ферм*, де стрижні обов'язково мусять бути з'єднані між собою шарнірами, що навантажені силами, прикладеними у вузлах, *рами* мають один або декілька жорстких вузлів. Рамні конструкції можуть складатися як з прямолінійних, так і криволінійних елементів.

Статично невизначною плоскою рамою називається така геометрично незмінна стрижнева система, у якій опорні реакції або внутрішні зусилля не можуть бути визначені з умови рівноваги сил. Система є геометрично незмінною, якщо переміщення окремих її точок можливі тільки в результаті деформації системи. Для її забезпечення необхідно накласти на неї (в її площині) не менше як три в'язі. Ними можуть бути три опорні стрижні, що не перетинаються в одній точці, або не паралельні між собою.

Статична невизначеність з'являється через те, що така система має так звані *зайві зв'язки*. *Зайвими називаються зв'язки, які наявні у системі понад ті, що потрібні для забезпечення геометричної незмінності і нерухомості рами при дії на неї навантаження*. *Плоскими* називаються такі рами, осі стрижнів яких лежать в одній площині і навантаження діє у цій же площині.

Кількість зайвих зв'язків у статично невизначній плоскій рамі може бути визначена за формулою:

$$Z = 3n - Ш, \quad (13.1)$$

де n – кількість замкнутих контурів, $Ш$ – кількість одиничних шарнірів, тобто шарнірів, у яких з'єднуються по два стрижні. (Шарнір, в якому з'єднується k стрижнів, містить $k-1$ одиничних шарнірів).

При розрахунку статично визначної рами, якщо вона має більше ніж одну опору, спочатку методами статички знаходять опорні реакції. Побудова епюр згинальних моментів M ,

поперечних сил Q та поздовжніх сил N у рамі здійснюється для кожного прямолінійного елемента рами так як для балки (стрижня).

Для зусиль N і Q правило знаків залишається таким самим, як і прийняте раніше:

$N > 0$, якщо зусилля розтягує стрижень;

$Q > 0$, якщо поперечна сила обертає переріз за годинниковою стрілкою.

Ординати епюр відкладаються перпендикулярно до осей стрижнів рами. При цьому, додатні значення будемо відкладати із зовнішнього боку рами, а від'ємні – із внутрішнього. Для згинального моменту M спеціального правила знаків не встановлюють, а ординати епюр відкладають зі сторони розтягнутих (або стиснутих) волокон. У деяких підручниках використовується *правило пунктирної лінії*.

Таку лінію проводять паралельно осі кожного стрижня всередині або зовні рами. Тоді згинальний момент вважається додатнім, коли він розтягує цю лінію.

Побудуємо епюри N , Q і M для рами, зображеної на рис. 13.1. Оскільки рама має тільки одну опору, то опорні реакції рами знаходити не будемо, а епюри почнемо будувати з вільного кінця стрижня AB рами.

Для побудови епюр N і Q знаходимо, що

на ділянці AB : $N = 0$; $Q = -2P$;

на ділянці BC : $N = -2P$; $Q = 0$;

на ділянці CD : $N = -2P$; $Q = P$;

на ділянці DE : $N = P$; $Q = 2P$.

За одержаними даними будуємо епюри N , Q (рис 13.1, а, б).

Для побудови епюр моментів M будемо обчислювати значення згинальних моментів у характерних точках A , B , C , D , E , враховуючи *правило пунктирної лінії*:

$$M_A = 0; M_B = P \cdot AB = -2Pl; M_C = -2Pl.$$

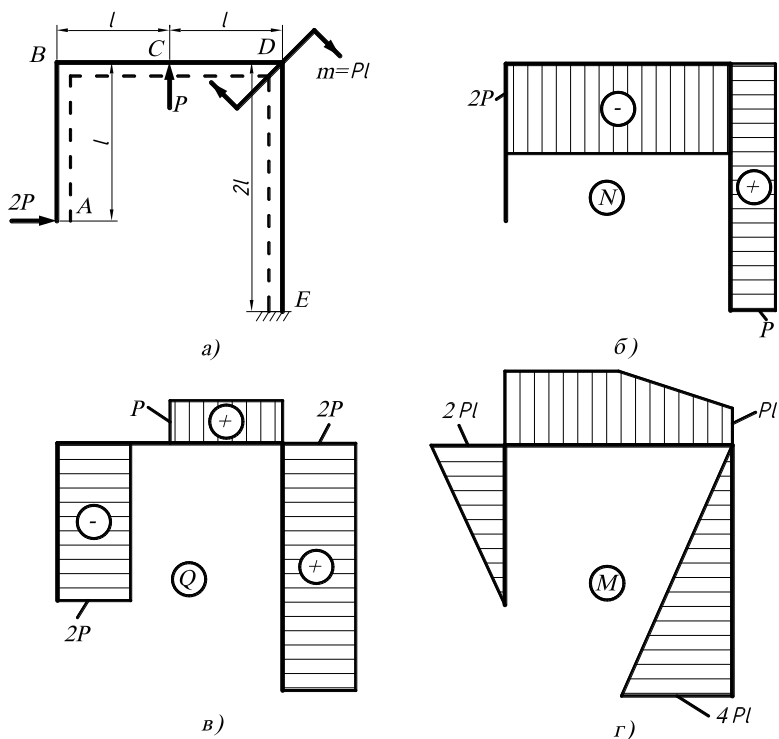


Рис. 13.1

У перерізі D на епюрі M має бути стрибок на величину прикладеного моменту m . Тому в точці D , яка ще належить стрижню BD , згинальний момент дорівнює

$$M_D^{(BD)} = M_C + P \cdot CD = -Pl.$$

Згинальний момент справа від точки D у нескінченно близькій до неї точці, що вже належить стрижню DE , буде дорівнювати

$$M_D^{(BD)} = -Pl + m = 0;$$

$$M_E = 2P \cdot DE = 4Pl.$$

Таким чином, моменти у стрижнях AB і BD виявилися від'ємними, а пунктирна лінія стиснутою, тому ординати згинальних моментів будемо відкладати із протилежної сторони

Після визначення невідомих з канонічних рівнянь, згинальні моменти у довільному перерізі рами знаходять способом додавання дії сил:

$$M = M_p + \tilde{M}_1 X_1 + \tilde{M}_2 X_2 + \dots + \tilde{M}_n X_n. \quad (13.4)$$

Тут позначені: M_p – згинальний момент в основній системі від заданого навантаження; \tilde{M}_i – згинальні моменти від одиничних навантажень $X_i = 1$.

Поперечні сили доцільно визначати за допомогою диференційної залежності:

$$Q_x = \frac{dM}{dx} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (13.5)$$

де α – кут між віссю елемента і дотичною до епюри M .

Поперечна сила буде при цьому додатною, коли вісь елемента треба повернути до співпадання з дотичною до епюри M за ходом годинникової стрілки на кут менший від 90° .

Поздовжні сили в елементах рами знаходять з умов рівноваги вирізаних вузлів, навантажених заданими зовнішніми силами, відомими уже поперечними силами і невідомими поздовжніми силами. Розтягувальні поздовжні сили вважаються додатними, стискувальні – від’ємними.

13.3. Практичний розрахунок статично невизначних рам

Приклад. Для заданої рами (рис. 13.2) треба побудувати епюри згинальних моментів, поперечних і поздовжніх сил, підібрати двотавровий переріз і визначити горизонтальне переміщення перерізу А.

$$h = 3\text{ м}, \quad l = 6\text{ м}, \quad q = 40\text{ кН/м}, \quad M = 50\text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Матеріал – сталь, для якої $[\sigma] = 160\text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5\text{ МПа}$.

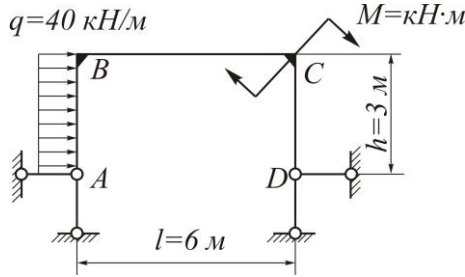


Рис. 13.2

Розв'язання. Рама має три замкнуті контури ($n=3$), позначені на рис. 13.3, а римськими цифрами I, II, III, чотири одиничні і два подвійні шарніри ($III=8$). За формулою (13.1) знаходимо кількість зайвих зв'язків

$$3 = 3 \cdot 3 - 8 = 1,$$

отже рама один раз статично невизначна.

Дві з можливих основних систем для даної рами показані на рис. 13.3 б, в.

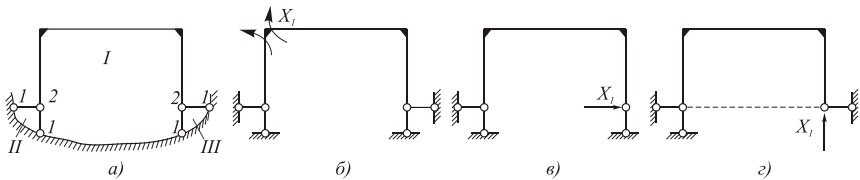


Рис. 13.3

Для розрахунку обираємо основну систему 13.3, б, в якій невідомим зусиллям, що має бути визначеним з канонічного рівняння, є згинальний момент у лівому верхньому вузлі рами. Порівняно з основною системою (рис. 13.3, в), в якій невідомим є горизонтальна складова опорної реакції, система на рис. 13.3, б зручніша, оскільки об'єм обчислювальної роботи при її застосуванні менший.

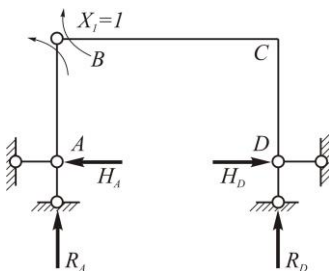


Рис. 13.4

Система, показана на рис. 13.3, г, геометрично змінна (напрями трьох опорних стрижнів рами перетинаються в одній точці, навколо якої рама

може повернутись) і тому вона не допустима як основна система методу сил. Геометрично змінну систему називають ще миттєво змінюваною або механізмом, якщо при дії на неї навіть малих навантажень виникають великі зусилля, а також у випадку, коли три або більше шарнірів розміщені на одній прямій.

Канонічне рівняння методу сил приймає в даному випадку вигляд:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0.$$

Навантажуюмо основну систему невідомим згинальним моментом, приймаючи його рівним одиниці, заданим навантаженням та будуємо епюри згинальних моментів M_1 і M_p (рис. 13.5, *a, б, в*).

Епюру згинальних моментів M_1 для основної системи побудуємо, поклавши момент $X_1 = 1$ (рис. 13.4).

Перш за все знайдемо опорні реакції рами. У кожному нерухомому опорному шарнірі A та D по дві складові реакції: вертикальні R_A і R_B та горизонтальні H_A та H_B . Дійсні напрями цих реакцій ще невідомі, тому спрямуємо їх поки що довільно. Для визначення чотирьох складових реакцій R_A , R_B , H_A і H_B , крім звичайних рівнянь статички, маємо ще умову рівності нулю суми моментів відносно точки B усіх сил, розташованих по один бік від неї (інакше кажучи, рівність нулю згинального моменту у перерізі B , де є шарнір).

Можна вибрати різні варіанти чотирьох рівнянь статички для визначення реакцій, але найзручніше розглядати суми моментів відносно шарнірів A , D та B :

$$\sum (M)_A = R_D \cdot l = 0; \quad R_D = 0;$$

$$\sum (M)_D = R_A \cdot l = 0; \quad R_A = 0;$$

$$\sum_{np} (M)_B = 1 - H_A \cdot h = 0; \quad H_A = \frac{1}{h};$$

$$\sum_{лів} (M)_B = H_D \cdot h - 1 = 0; \quad H_D = \frac{1}{h}.$$

Реакції H_A та H_D виявились додатними, отже, вони дійсно спрямовані так, як було вибрано. Перевіримо, чи правильно знайдено реакції (вісь x -ів направлена вправо, а вісь y -ів – вверх):

$$\sum X = -H_A + H_D = -\frac{1}{h} + \frac{1}{h} = 0;$$

$$\sum Y = R_A + R_D = 0 + 0 = 0.$$

Рівняння рівноваги задовольняються тотожно.

Оскільки опорні реакції визначено, то можна будувати епюру згинальних моментів M_1 :

на ділянці AB $M_B = H_A \cdot h = \frac{1}{h} \cdot h = 1$ (розтягнуті праві волокна);

на ділянці DC $M_C = H_D \cdot h = \frac{1}{h} \cdot h = 1$ (розтягнуті ліві волокна);

на ділянці BC $M_B = M_C = 1$ (розтягнуті нижні волокна).

За цими даними будуємо одиничну епюру M_1 (на розтягнутих волокнах, рис. 13.5, a).

Побудуємо епюру згинальних моментів $M_p(q)$ в основній системі від дії розподіленого навантаження q . Виберемо напрямок опорних реакцій таким самим, як і на рис. 13.4. Для визначення опорних реакцій в основній системі складаємо рівняння статки:

$$\sum (M)_A = R_D \cdot l - \frac{qh^2}{2} = 0; \quad R_D = \frac{qh^2}{2l};$$

$$\sum (M)_D = R_A \cdot l + \frac{qh^2}{2} = 0; \quad R_A = -\frac{qh^2}{2l};$$

$$\sum_{\text{лів}} (M)_B = H_A \cdot h - \frac{qh^2}{2} = 0; \quad H_A = \frac{qh}{2};$$

$$\sum_{\text{пр}} (M)_B = H_D \cdot h + R_D \cdot l = 0; \quad H_D = -\frac{qh}{2}.$$

Реакції R_A та H_D виявилися від'ємними, отже, мають напрям, протилежний вибраному. Побудова епюр згинальних моментів $M_p(q)$ здійснюється шляхом їх побудови на кожній окремії ділянці рами. На ділянці AB епюра згинальних моментів буде мати такий самий вигляд, як для шарнірно опертої балки. В довільному перерізі на відстані x від точки A згинальний момент дорівнює

$$M_{AB}(x) = \frac{qh}{2}x - \frac{qx^2}{2}.$$

Найбільшого значення згинальний момент досягає посередині стійки при $x = h/2$, тобто $M\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{qh^2}{8}$ (розтягнуті праві волокна).

Права стійка має лінійний розподіл згинальних моментів M_{DC} вздовж стійки DC з найбільшим значенням у точці C –

$$M_C = H_D \cdot h = \frac{qh}{2}h = q\frac{h^2}{2}.$$

Таке ж саме значення у точці C приймає згинальний момент і у стрижні BC , лінійно зменшуючись до нуля у точці B . За одержаними даними будуємо епюру $M_p(q)$, що зображена на рис. 13.5, б.

Для побудови епюр згинальних моментів $M_p(M)$ від дії зосередженого моменту M скористаємось тими ж рівняннями рівноваги, що і у попередніх випадках:

$$\sum(M)_A = R_D \cdot l - M = 0; \quad R_D = \frac{M}{l};$$

$$\sum(M)_D = R_A \cdot l + M = 0; \quad R_A = -\frac{M}{l};$$

$$\sum_{\text{лів}}(M)_B = H_A h = 0; \quad H_A = 0;$$

$$\sum_{\text{пр}}(M)_B = H_D h = 0; \quad H_D = 0.$$

У зв'язку з тим, що горизонтальні складові реакцій H_A та H_D дорівнюють нулю то епюри згинальних моментів від дії зосередженого моменту M на вертикальних стійках рами будуть також нульовими. Епюра на горизонтальному стрижні BC буде трикутною з нульовим значенням у точці C (рис. 13.5, в).

Коефіцієнт δ_{11} і вільний член рівняння переміщень знаходимо за способом Верещагіна. Для визначення переміщення δ_{11} треба “перемножити” епюру M_1 на саму себе, оскільки епюри від навантаження ($X_1 = 1$) і від одиничної сили, прикладеної у місці шуканого переміщення, тотожні. Для визначення переміщення Δ_{1p} треба перемножити епюри M_1 і M_p .

При цьому одержуємо:

$$\begin{aligned} EI\delta_{11} &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 1 \cdot l \cdot 1 = 2 + 6 = 8 \text{ м}, \\ EI\Delta_{1p} &= \frac{2}{3} \cdot h \cdot \frac{qh^2}{8} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} l \left(\frac{qh^2}{2} + M \right) \cdot 1 - \frac{1}{2} h \cdot \frac{qh^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \\ &= 45 - 690 - 180 = -825 \text{ кН} \cdot \text{м}^3. \end{aligned}$$

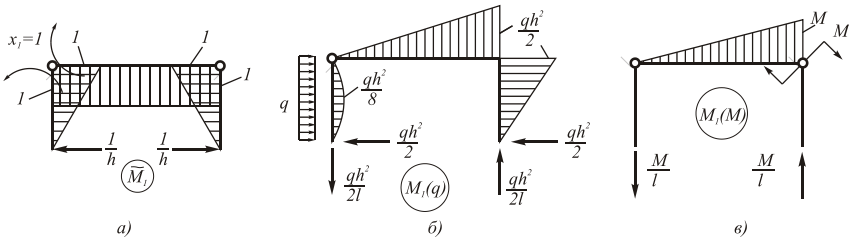


Рис. 13.5

Рівняння переміщень приймає вигляд:

$$8X_1 - 825 = 0,$$

звідки

$$X_1 = \frac{825}{8,0} = 103,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Згинальні моменти у характерних перерізах рами знаходимо за формулою (13.5), поперечні сили – за формулою (13.5).

При побудові епюр згинальних моментів використовуємо правило пунктирної лінії (рис. 13.6, а). Згинальні моменти, що викликають розтяг пунктирної сторони стрижнів рами, вважаємо додатними. Для зручності, початок та кінець кожного стрижня рами позначимо арабськими цифрами.

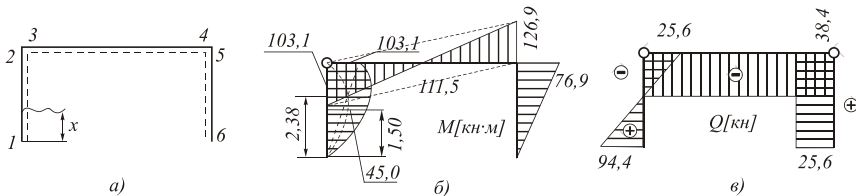


Рис. 13.6

Перемноживши епюру \tilde{M}_1 на величину X_1 (рис. 13.5, а), додаємо до вантажних епюр $M_p(q)$ та $M_p(M)$ –

$$M_1 = 0, \quad M_2 = 1 \cdot X_1 = 103,1 \text{кН} \cdot \text{м}^2,$$

$$M_{1-2} = \frac{qh}{2}x - \frac{qx^2}{2} + \frac{M_2}{h}x = 94,4x - 20x^2,$$

$$Q_{1-2} = \frac{dM}{dx} = 94,4 - 40x, \quad Q_1 = 94,4 \text{кН}, \quad Q_2 = -25,6 \text{кН}.$$

Максимальний згинальний момент виникає у перерізі з абсцисою, для якої $Q = 0$:

$$94,4 - 40x_0 = 0, \quad \text{звідки} \quad x_0 = 2,38 \text{м},$$

$$M_{\max} = 94,4 \cdot 2,38 - 20 \cdot 2,38^2 = 111,5 \text{кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$M_3 = M_2 = 103,1 \text{кН} \cdot \text{м}^2; \quad M_4 = -\frac{qh^2}{2} - M + 1 \cdot X_1 = -126,9 \text{кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$M_5 = -\frac{qh^2}{2} + 1 \cdot X_1 = -76,9 \text{кН} \cdot \text{м}^2; \quad M_6 = 0;$$

$$Q_{3-4} = -\frac{103,1 + 126,9}{6,0} = -38,4 \text{кН}; \quad Q_{5-6} = \frac{76,9}{3,0} = 25,6 \text{кН}.$$

За одержаними даними побудовані на рис. 13.6, б, в епюри згинальних моментів і поперечних сил.

Для перевірки правильності побудови епюри M знаходимо взаємний кут повороту перерізів “2” і “3”, який повинен бути рівний (за означенням) нулеві. Для визначення цього кута перемножуємо епюру M на епюру \tilde{M}_1 , розклавши, для зручності перемноження, “вантажні” епюри для стрижнів \overline{AB} \overline{BC} на дві складові (пунктирні лінії):

$$EI\varphi = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 45 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 103,1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 103,1 - \\ - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 126,9 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 76,9 \cdot \frac{2}{3} = 457,4 - 457,6 = -0,2 \approx 0.$$

Умова рівності нулеві взаємного кута повороту задовольняється з достатньою точністю.

Поздовжні сили у стрижнях рами знаходимо методом вирізання вузлів. Для вузлів 2/3 і 4/5 (рис. 13.7, а, б) маємо:

Вузол 2/3:

$$\Sigma X = 0: 25,6 - N_{3-4} = 0, \quad N_{3-4} = 25,6 \text{ кН}.$$

Поздовжня сила N_{3-4} напрямлена до перерізу і є стискуючою.

$$\Sigma Y = 0: 38,4 - N_{1-2} = 0; \quad N_{1-2} = 38,4 \text{ кН}.$$

Вузол 4/5:

$$\Sigma X = 0: N_{3-4} - 25,6 = 0, \quad N_{3-4} = 25,6 \text{ кН}.$$

$$\Sigma Y = 0: N_{5-6} - 38,4 = 0; \quad N_{5-6} = 38,4 \text{ кН}.$$

Поздовжня сила N_{5-6} , направлена до перерізу і є стискуючою. Епюра поздовжніх сил побудована на рис. 13.7, в.

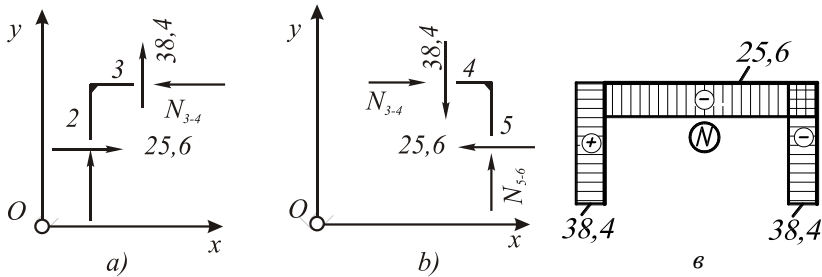


Рис. 13.7

Підбір перерізу рами. Максимальний згинальний момент у рамі дорівнює $M_{\max} = 126,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$. У цьому ж перерізі виникає стискаюча сила $N = 25,6 \text{ кН}$. Визначимо розміри перерізу з умови міцності на згин і перевіримо його достатність при сумісному згині та стиску.

Потрібний момент опору перерізу:

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{126,9 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 793 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 793 \text{ см}^3.$$

Приймаємо двотавр № 40 (ГОСТ 8239), для якого $W_x = 947 \text{ см}^3$, $I_x = 18930 \text{ см}^4$, $A = 71,4 \text{ см}^2$.

Максимальне стискаюче напруження при сумісній дії згину і стиску дорівнює:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{25,6 \cdot 10^3}{71,4 \cdot 10^{-4}} + \frac{126,9 \cdot 10^3}{947 \cdot 10^{-6}} = \\ &= (36 + 1340) \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2 = 137,6 \text{ МПа} < [\sigma]. \end{aligned}$$

Визначення горизонтального переміщення перерізу С. У напрямі шуканого переміщення прикладаємо у перерізі С основної системи одиничну силу ($F=1$) і будуємо епюру згинальних моментів $\tilde{M}_1(F)$ для цього одиничного навантаження (рис. 13.8). Склавши рівняння рівноваги, аналогічні попереднім, знаходимо:

$$R_A = -h/l; \quad R_D = h/l; \quad H_A = 0; \quad H_D = 1.$$

Таким чином, моменти в шарнірах В і D дорівнюють нулю, а в точці С

$$M_C = R_A \cdot l = H_D \cdot h = -3,0 \text{ м.}$$

У цьому випадку розтягнутими будуть зовнішні волокна стрижнів BC та CD . За способом Верещагіна перемножуємо епюру згинальних моментів M (рис. 13.6, б) і епюру M_1 (рис. 13.8). Знаходимо:

$$\begin{aligned} EI\Delta_C &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 126,9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 103,1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 76,9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = 682,8 \text{ кН} \cdot \text{м}^3, \\ \Delta_C &= \frac{682,8 \cdot 10^3}{18930 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 1,81 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 1,81 \text{ см.} \end{aligned}$$

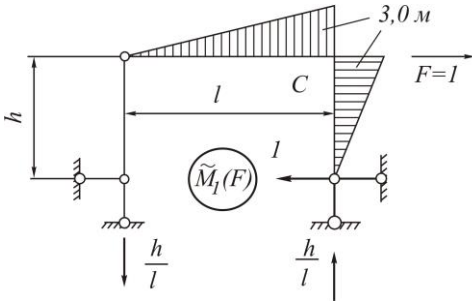


Рис. 13.8

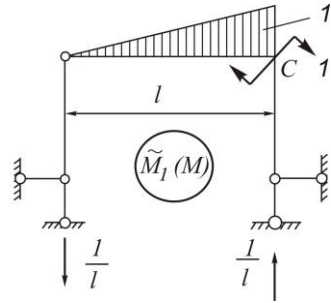


Рис. 13.9

Визначення кута повороту перерізу C . У перерізі C основної системи прикладаємо одиничний момент ($M=1$) і будемо епюру згинальних моментів $\tilde{M}_1(M)$ (рис. 13.9). Епюра згинальних моментів буде такою ж як на рис. 13.5, в, коли покласти величину $M=1$. За способом Верещагіна перемножуємо епюру згинальних моментів M (рис. 13.6, б) і епюру $\tilde{M}_1(M)$ (рис. 13.9).

Знаходимо:

$$EI\varphi_C = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 126,9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 103,1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 150,7 \text{ кН} \cdot \text{м}^2,$$

$$\varphi_c = \frac{150,7 \cdot 10^3}{18930 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ (рад)}.$$

Отримані додатні значення переміщення Δ_c та кута повороту φ_c показують, що вони відбуваються у напрямках, прикладених у цій точці одиничних навантажень.

Запитання для самоконтролю

1. Якими властивостями відрізняються рами від ферм?
2. Що таке *зайві зв'язки* в статично невизначній рамі?
3. Якою формулою визначається кількість зайвих зв'язків у рамі?
4. Яке правило знаків для поздовжніх та поперечних сил у стрижнях рам?
5. В чому полягає *правило пунктирної лінії*?
6. Що таке *основна система* для статично невизначної рами?
7. Запишіть вираз для згинального моменту в довільній точці стрижня рами.
8. Запишіть диференціальну залежність між поперечною силою та згинальним моментом.
9. З яких умов знаходять поздовжні сили в елементах рами?
10. Як визначаються коефіцієнти системи канонічних рівнянь методу сил?

ТЕМА 14 (лекції 33,34)
РОЗРАХУНОК ЦЕНТРАЛЬНО СТИСНУТИХ
СТРИЖНІВ НА СТІЙКІСТЬ

14.1. Основні поняття розрахунку стрижнів на стійкість

Для багатьох деталей машин, елементів конструкцій і споруд розрахунки на міцність і жорсткість бувають недостатніми, щоб одержати повну уяву про їх працездатність, вияснити, чи знаходиться дана конструкція в стані рівноваги. Наводячи розрахунки конструкцій на міцність і жорсткість при різних деформаціях, вважаємо, що під час їх деформації має місце єдина насамперед відома форма рівноваги. Якщо ця форма рівноваги зберігається постійно, то можна говорити, що конструкція стійка. Якщо ж конструкція такої властивості не має, то ми будемо вважати стан конструкції нестійким.

Іншими словами – пружна рівновага тіла буде стійкою, коли при довільному малому відхиленні від стану рівноваги внутрішні сили здатні повернути тіло у початковий стан рівноваги, і нестійкою – коли тіло продовжує деформуватись у напрямку, заданому йому відхиленням. Після зняття цього збурення тіло в попередній стан вже не повертається. Між цими двома станами рівноваги існує перехідний, так званий критичний стан, при якому тіло знаходиться у байдужому стані. Тобто, тіло може зберігати задану йому початкову форму, але може втратити її від самої незначної дії.

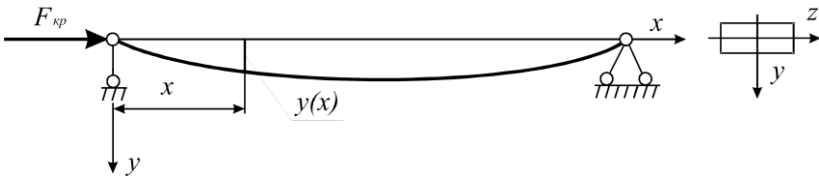


Рис. 14.1

Навантаження тіла, що відповідає переходу від стійкого стану конструкції до нестійкого, називається **критичним**. **Критичною силою** для прямого стрижня є найменша стискувальна сила, при якій прямолінійна форма рівноваги стрижня стає нестійкою. Згин стрижня після втрати стійкості від

дії осевих стискувальних сил називається *поздовжнім згином* прямого стрижня. Щоб попередити втрату стійкості стрижня, необхідно навчитися визначати величину критичного навантаження.

14.2. Задача Ойлера(Ейлера). Критична сила та критичне напруження

Вперше задача визначення критичної сили була поставлена та розв’язана в 1744 р. видатним ученим Л. Ойлером (L.Euler), тому її ще називають “задачею Ойлера (Ейлера)”.

Розглянемо стиск шарнірно опертого стрижня силою F (рис. 14.1). При досягненні цієї силою критичного значення $F_{кр}$, стрижень досягне байдужого стану рівноваги і може перебувати у дещо викривленій (від прямолінійної) формі в площині з найменшою жорсткістю EI_{\min} . При такому навантаженні в поперечних перерізах стрижня виникнуть згинальні моменти, пропорційні його прогинам $y(x)$:

$$M(x) = \pm F_{кр} \cdot y(x).$$

Виходячи з диференційного рівняння (10.18) для зігнутої осі стрижня, де

$$EI_{\min} y''(x) = M(x), \quad (14.1)$$

отримаємо рівняння поздовжнього згину стрижня:

$$EI_{\min} y''(x) + F_{кр} y(x) = 0. \quad (14.2)$$

Зауважимо, що знак згинального моменту $M(x)$ у рівнянні (14.1) завжди вибирається таким, щоби знаки прогину $y(x)$ та кривини $y''(x)$ зігнутої осі стрижня були протилежними.

Рівняння (14.2) зводиться до рівняння

$$y'' + k^2 y = 0,$$

$$\text{де } k^2 = F_{кр} / EI_{\min}.$$

Розв’язок цього диференційного рівняння записується у формі

$$y(x) = A \sin kx + B \cos kx, \quad (14.3)$$

де сталі інтегрування A , B знаходяться із граничних умов на кінцях стрижня:

$$y(0) = y(l) = 0. \quad (14.4)$$

Підставивши граничні умови (14.4) у розв'язок (14.3), отримаємо систему двох рівнянь:

$$B = 0; \quad A \sin kl = 0. \quad (14.5)$$

Приймаючи, що стала A у розв'язку (14.3) не може дорівнювати нулю, дістанемо умову $\sin kl = 0$, звідки

$$kl = n\pi, \quad (14.6)$$

де $n = 1; 2; 3; \dots$ – довільне ціле число.

З урахуванням того, що $k = \sqrt{F_{кр} / EI_{\min}}$, отримаємо:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 n^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (14.7)$$

Із самого означення *критичної сили* (вона має бути найменшою) необхідно покласти $n = 1$. Тоді величина *критичної сили* для стиснутого стрижня може бути записане узагальненою формулою, яка носить назву *формули Ойлера*,

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_{зг}^2}, \quad (14.8)$$

де E – модуль пружності матеріалу стрижня, I_{\min} – мінімальний осьовий момент інерції площі поперечного перерізу, $l_{зг} = \mu l$ – зведена довжина стрижня, l – довжина стрижня, μ – коефіцієнт зведеної довжини стрижня, що враховує умови на його кінцях. Значення μ для випадків закріплення кінців стрижня, які найчастіше зустрічаються, наведено на рис. 14.2. Але бувають інші, складніші, способи закріплення кінців стрижня. Коефіцієнти μ для них можна знайти в спеціальних довідниках. Форми рівноваги стрижня, що відповідають значно більшим значенням $F_{кр}$ (при $n = 2, 3, \dots$ тощо) є нестійкими і не мають практичного значення.

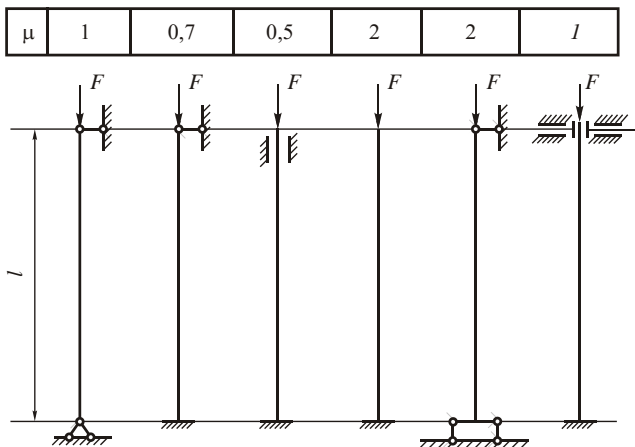


Рис. 14.2

Нормальне напруження, що виникає в поперечному перерізі стрижня при досягненні стискувальною силою критичного значення, називається критичним:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_{36}^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (14.9)$$

У формулі (14.9) $\lambda = l_{36}/i_{\min}$ – гнучкість стрижня, величина $i_{\min} = \sqrt{I_{\min}/A}$ називається мінімальним радіусом інерції поперечного перерізу.

Встановлено, що користуватися формулою Ойлера можна лише тоді, коли напруження, що виникає від дії критичної сили, не перевищує межі пропорційності для матеріалу стрижня, тобто

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}. \quad (14.10)$$

На практиці ця нерівність замінюється за допомогою формули (14.2) іншою нерівністю:

$$\lambda \geq \lambda_{сп}, \quad (14.11)$$

де $\lambda_{сп}$ – гранична гнучкість, при якій ще можна застосувати формулу Ойлера

$$\lambda_{cp} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{nc}}}. \quad (14.12)$$

Отже, гранична гнучкість залежить лише від фізико-механічних властивостей матеріалу (E і σ_{nc}). Незавжно впевнитись, що для більшості марок сталей, а також для дерева гранична гнучкість знаходиться в межах $90 \div 110$ (табл. 14.1).

Таблиця 14.1. Значення параметрів λ_{cp} , a та b

Матеріал	λ_{cp}	a	b
		МПа	
Ст 2, Ст 3	100	310	1,14
Ст 5	100	464	3,26
Сталь 40	90	321	1,16
Кремнієва сталь	100	589	3,82
Дерево (сосна)	110	29,3	0,194
Чавун	80	776	12,0

При розрахунках на стійкість необхідно завжди перевіряти, чи можливе застосування формули Ойлера. У тих випадках, коли нерівності (14.10), (14.11) порушуються, користуються емпіричною формулою Ф.С. Ясинського

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (14.13)$$

де a і b – сталі коефіцієнти (в МПа) для даного матеріалу величини (табл. 14.1).

При деякому значенні гнучкості (позначимо її через λ_0) величина $\sigma_{кр}$, обчислена за формулою (14.13), перевищує границю плинності σ_{nl} для стрижнів з пластичних матеріалів або границю міцності на стиск σ_{mc} для стрижнів з крихких матеріалів. В таких випадках ($\lambda \leq \lambda_0$) стрижні уже не розраховуються на стійкість, а лише на міцність.

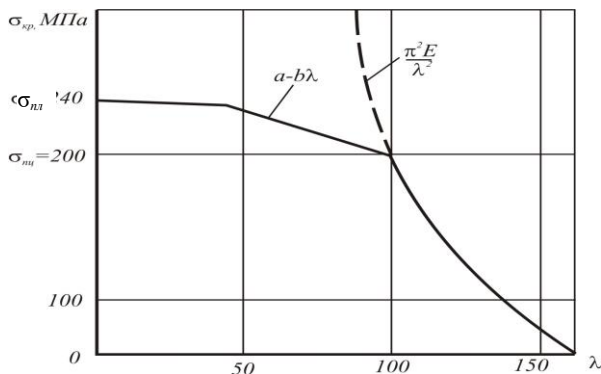


Рис. 14.3

Отже, для кожного матеріалу критичне напруження залежить тільки від гнучкості матеріалу. Графік, що характеризує залежність критичного напруження від гнучкості стрижня зі сталі Ст 3, наведений на рис.14.3.

14.3. Практичний розрахунок стрижнів на стійкість

При практичному вирішенні питання підбору поперечного перерізу центрально стиснутого стрижня крім умови міцності повинна бути виконана також умова стійкості

$$\sigma = \frac{F}{\varphi A} \leq [\sigma], \quad (14.14)$$

де A – розрахункова площа поперечного перерізу, $[\sigma]$ – допустиме напруження на стиск; φ – коефіцієнт поздовжнього згину, який залежить від матеріалу і гнучкості стрижня, ($0 < \varphi < 1$). Ця залежність може подаватись у вигляді формул чи таблиць (табл. 14.2) для сталі.

Таблиця 14.2. Значення коефіцієнта φ

Гнучкість	Сталі марок Ст 4, 3, 2, ОС	Гнучкість	Сталі марок Ст 4, 3, 2, ОС	Гнучкість	Сталі марок Ст 4, 3, 2, ОС
0	1,00	70	0,81	140	0,36
10	0,99	80	0,75	150	0,32
20	0,96	90	0,69	160	0,29
30	0,94	100	0,60	170	0,26
40	0,92	110	0,52	180	0,23
50	0,89	120	0,45	190	0,21
60	0,86	130	0,40	200	0,19

Умова (14.14) використовується для перевірки на стійкість стрижнів в цілому (загальна стійкість) та окремих гілок решітчастих стрижнів (місцева стійкість). Крім цього, вона дає можливість визначити допустиме навантаження $[F]$ та підібрати поперечний переріз стрижня.

Допустиме навантаження $[F]$ для центрально стиснутого стрижня визначається за формулою

$$[F] = \varphi[\sigma]A. \quad (14.15)$$

Підбір поперечного перерізу здійснюється методом наближень. В першому наближенні необхідно задатись початковим значенням коефіцієнта поздовжнього згину φ_1 (в більшості випадків приймають $\varphi = 0,5$), або початковим значенням гнучкості λ_1 (для сталевих стрижнів рекомендується $\lambda_1 = 80 \div 120$). Алгоритм послідовного наближення має вигляд:

а) визначається коефіцієнт поздовжнього згину (табл. 14.2)

$$\varphi_k = \varphi(\lambda_k);$$

б) визначається площа поперечного перерізу

$$A = F / (\varphi_k[\sigma]);$$

в) проектується поперечний переріз, обчислюється його площа A_k та мінімальний момент інерції I_k (тільки для нестандартних перерізів);

з) визначається радіус інерції

$$i_k = \sqrt{I_k / A_k},$$

(для стандартних профілів береться з таблиць сортаменту);

д) визначається гнучкість

$$\lambda_{k+1} = l_{зб} / i_k,$$

і порівнюється з попередньою – якщо з точністю до прийнятої похибки $\Delta\lambda$ вони співпадають, то процес послідовних наближень закінчується.

В інженерній практиці береться, як правило, $\Delta\lambda = 5$, рідше –

$\Delta\lambda = 0,5$. Підбір поперечного перерізу закінчується перевіркою виконання умови (14.14).

Приклад. Для центрально стиснутого стрижня (матеріал – сталь Ст 3, $[\sigma] = 12 \text{ кН/см}^2$) довжиною $l = 3 \text{ м}$, навантаженого стискувальною силою $F = 600 \text{ кН}$, опорні перерізи якого закріплені, як показано на рис. 14.4, потрібно:

а) підібрати суцільний поперечний переріз стрижня та визначити допустиме навантаження;

б) виконати п. “а” для решітчастого стрижня та порівняти результати.

А. Розрахунок суцільного стрижня.

Коефіцієнт зведеної довжини стрижня (рис. 14.4) дорівнює $\mu = 0,7$.

Зведена довжина стрижня дорівнює

$$l_{зб} = \mu l = 0,7 \cdot 3 = 2,1 (\text{м}) = 210 (\text{см}).$$

Перше наближення. Вибираємо початкову гнучкість $\lambda_1 = 100$.

Згідно табл. 14.2 коефіцієнт поздовжнього згину дорівнює $\varphi_1 = 0,6$.

Шукаємо площу поперечного перерізу стрижня

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{600}{0,6 \cdot 12} = 83,33 (\text{см}^2).$$

Приймаємо двотавр №45: $A_1 = 83,0 \text{ см}^2$; $i_1 = 3,12 \text{ см}$.

Гнучкість

$$\lambda_2 = \frac{l_{\text{зв}}}{i_1} = \frac{210}{3,12} = 67,3.$$

Друге наближення. Коефіцієнт поздовжнього згину

$$\varphi_2 = 0,82 \text{ (табл. 14.2)}$$

Площа поперечного перерізу

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma]} = \frac{600}{0,82 \cdot 12} = 61 (\text{см}^2).$$

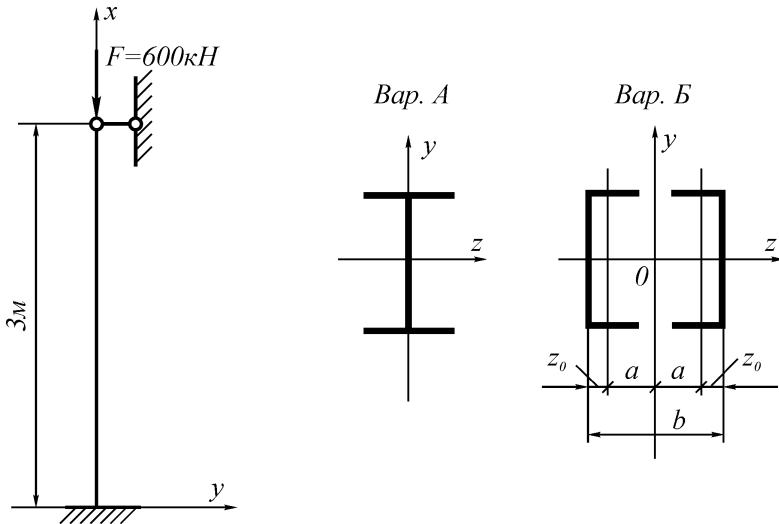


Рис. 14.4

Цій площі відповідає двотавр №36; $A_2 = 61,9 \text{ см}^2$; $i_2 = 2,89 \text{ см}$.

Гнучкість

$$\lambda_3 = \frac{l_{\text{зв}}}{i_3} = \frac{210}{2,89} = 72; \quad \varphi_3 = 0,8 \quad (\text{табл. 14.2}).$$

Процес послідовних наближень закінчено. Остаточню приймаємо двотавр №36, $A = 61,9 \text{ см}^2$, $i_2 = 2,82 \text{ см}$, $\varphi = 0,80$.

Перевіряємо виконання умови стійкості:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi \cdot A} = \frac{600}{0,8 \cdot 61,9} = 12,1 (\text{кН/см}^2).$$

Умова стійкості виконується з точністю до 1%.

Допустиме навантаження для суцільного стрижня рівне величині

$$[F] = \varphi [\sigma] \cdot A = 0,8 \cdot 12 \cdot 61,9 = 594 (\text{кН}).$$

Б. Розрахунок решітчастого стрижня.

Б.1. Розрахунок відносно матеріальної осі "Oz".

Як і в п. А, за перше наближення беремо значення гнучкості $\lambda_1 = 100$, якій відповідають величини $\varphi_1 = 0,6$ і $A_1 = 83,33 \text{ см}^2$. Знаходимо необхідну площу поперечного перерізу швелера:

$$A_1^{\text{III}} = A_1 / 2 = 41,66 \text{ см}^2.$$

Приймаємо швелер № 30, $A_1^{\text{III}} = 40,5 \text{ см}^2$, $i_1 = i_1^{\text{III}} = 12 \text{ см}$.

Гнучкість стрижня

$$\lambda_2 = \frac{l_{\text{зв}}}{i_1} = \frac{210}{12} = 18, \quad \varphi_2 = 0,97 \quad (\text{табл. 14.2}).$$

Друге наближення. Площа поперечного перерізу

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma]} = \frac{600}{0,97 \cdot 12} = 51,6 (\text{см}^2), \quad A_2^{\text{III}} = 25,8 (\text{см}^2).$$

Візьмемо швелер №22, $A_2^{\text{III}} = 26,7 \text{ см}^2$, $A_2 = 53,4 \text{ см}^2$, $i_2 = 8,91 \text{ см}$.

Гнучкість

$$\lambda_3 = \frac{l_{3\text{е}}}{i_2} = \frac{210}{8,91} = 24, \quad \varphi_3 = 0,95 \text{ (табл. 14.2)}$$

Третє наближення. Площа поперечного перерізу

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 [\sigma]} = \frac{600}{0,95 \cdot 12} = 52,6 (\text{см}^2), \quad A_3^{\text{III}} = 26,3 (\text{см}^2).$$

Даний переріз знову відповідає швеллеру №22, $A^{\text{III}} = 26,7 \text{ см}^2$, $\lambda_3 = 24$, $I_y^{\text{III}} = 151 \text{ см}^4$, $\varphi_3 = 0,95$.

Процес послідовних наближень закінчено.

Перевірка виконання умови стійкості

$$\sigma = \frac{F}{\varphi A} = \frac{600}{0,95 \cdot 53,4} = 11,8 (\text{кН/см}^2) < 12 \text{ кН/см}^2.$$

Умова стійкості відносно матеріальної осі Oz виконується.

Б.2. Розрахунок відносно вільної осі “ Oy ”.

В основу розрахунку кладеться умова рівності стійкості

$$\lambda_y = \lambda_z, \quad i_y = i_z,$$

яка забезпечує економію матеріалів. З цієї умови отримаємо момент інерції перерізу відносно вільної осі “ Oy ”.

$$I_y = I_z = i_z^2 \cdot A = 8,91^2 \cdot 53,4 = 4239 (\text{см}^4).$$

Відстань a від вільної осі Oy до головної осі швелера знаходимо з залежності

$$I_y = 2(I_y^{\phi} + a^2 A^{\phi}),$$

звідси

$$a^2 = (I_y - 2I_y^{\text{III}}) / 2A^{\text{III}} = (4239 - 2 \cdot 151) / 2 \cdot 26,7 = 73,73 (\text{см}^2),$$

$$a = \sqrt{73,73} = 8,58 (\text{см}).$$

Решітчастий стрижень має меншу площу поперечного перерізу

$$A_p / A = 53,4 / 61,9 = 0,863.$$

Допустиме навантаження для решітчастого стрижня

$$[F_p] = \varphi[\sigma] \cdot A_p = 0,95 \cdot 12 \cdot 53,4 = 609 \text{ (кН)} .$$

Решітчастий стрижень має більше допустиме навантаження -

$$[F_p] / [F] = 609 / 594 = 1,02 ,$$

що на 2% перевищує допустиме навантаження суцільного стрижня.

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення критичної сили.
2. Запишіть рівняння Ойлера.
3. Яким коефіцієнтом у формулі Ойлера враховуються граничні умови на кінцях стрижня?
4. Що таке гнучкість стрижня?
5. Як записується формула для критичного напруження?
6. Коли користуються емпіричною формулою Ясинського?
7. Як визначається радіус інерції поперечного перерізу?
8. Запишіть умову стійкості.
9. Як визначається коефіцієнт поздовжнього згину?
10. Яка послідовність підбору поперечного перерізу стрижня?

ТЕМА 15 (лекції 35-37)
РОЗРАХУНОК СТРИЖНІВ
ЗА ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

15.1. Вільні коливання системи з одним ступенем вільності

Коливання – одне із найпоширеніших явищ у природі, фізиці та техніці. Динамічні системи, які здатні вільно коливатися, називаються *коливальними*. За кількістю ступенів вільності розрізняють системи зі скінченим числом ступенів вільності та континуальні, що мають їх нескінченне число. *Ступенем вільності* коливання динамічної системи називається число незалежних координат (переміщень) усіх її матеріальних точок. Реальні пружні системи мають безмежну кількість ступенів вільності (рис. 15.1, а), нескінченне число частот і форм вільних коливань. Тобто *таких коливань, що відбуваються без активного впливу зовнішніх сил (без зовнішнього надходження енергії), під дією одних лише сил пружності системи.*

В інженерній практиці такі системи зазвичай замінюють *динамічно еквівалентними системами* з одним ступенем вільності (рис. 15.1, б). Для цього масу систем m , яка розподілена вздовж середньої лінії перерізу, замінюють масою $M = \alpha \cdot m$, зосередженою в деякій точці. При вимушених коливаннях, що відбуваються при активній дії зовнішніх (збуджуючих) сил, здебільшого періодичних, ця точка переважно співпадає з точкою прикладення збуджуючої сили. *Динамічно еквівалентні системи мають однакові (точно чи наближено) головні (мінімальні) частоти.*

Розрахунок на вільні коливання системи з одним ступенем вільності зводиться до розв'язку диференціального *рівняння вільних коливань*

$$M\ddot{Y} + CY = 0, \quad (15.1)$$

де M – зведена маса системи; C – жорсткість системи; Y – змінна від часу складова координати, котра

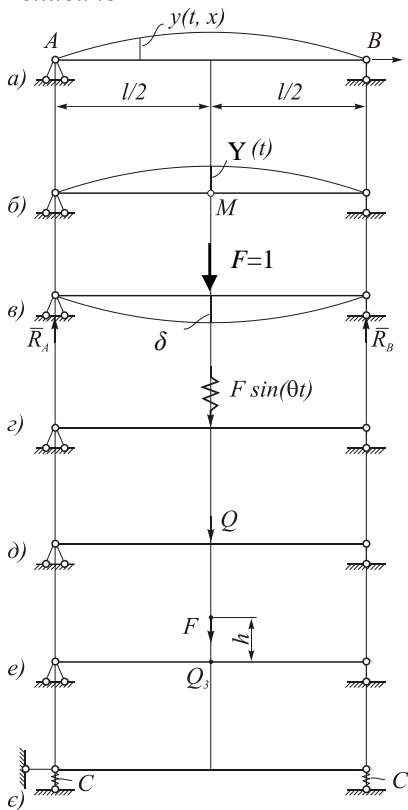
визначає положення центра ваги системи; $\ddot{Y} = \frac{d^2 Y}{dt^2}$ – прискорення.

Запишемо рівняння (15.1) у вигляді

$$\ddot{Y} + \omega^2 \cdot Y = 0, \quad (15.2)$$

де $\omega^2 = C/M$.

Як відомо, рівняння (15.2) є рівнянням гармонічного коливального руху, а $\omega = \sqrt{C/M}$ – коловою частотою коливань невагомої балки із зосередженою масою M .



$$m = \text{const.}$$

$$M = 0,5ml,$$

$$\omega = 1/\sqrt{M\delta}.$$

$$0,75 < \theta/\omega < 125,$$

$$\beta = 1/(1 - \theta^2/\omega^2),$$

$$S_g = \beta S_{cm},$$

$$S_{cm} = F\delta.$$

$$\delta = \sum \int \frac{\bar{M}^2}{EI} dx = \sum \frac{A_M y_c}{EI}.$$

$$0,75 < \theta/\omega < 125$$

$$h_p = hF/(F + Q_3),$$

$$\Delta_{cm} = F\delta,$$

$$k_g = 1 + \sqrt{1 + 2h_p/\Delta_{cm}},$$

$$\Delta_g = k_g \cdot \Delta_{cm}.$$

$$\delta_1 = \sum \int (\bar{M}^2/EI) dx,$$

$$\delta_2 = \sum \bar{R}^2/c,$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2.$$

Рис. 15.1

Загальний розв'язок рівняння (15.2) можна звести до вигляду

$$Y = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (15.3)$$

Тут стала A – величина найбільшого відхилення центра ваги системи від рівноважного положення, яка називається *амплітудою коливань*, стала φ – їх початковою фазою.

Формулу для колової частоти ω можна записати в іншому вигляді, якщо врахувати, що $C = \frac{1}{\delta} = \frac{Q_3}{\Delta_{cm}}$:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = \frac{1}{\sqrt{M\delta}}. \quad (15.4)$$

де Q_3 – зведена вага системи, g – прискорення сили тяжіння, δ – одиничне переміщення в точці прикладання одиничної сили $F=1$ (рис. 15.1, в), $\Delta_{cm} = F\delta$ – статичне переміщення.

Для балки (рис. 15.1, д), коли вантаж Q прикладений до її середини, статичне переміщення, жорсткість системи та колова частота будуть наступними:

$$\Delta_{cm} = Ql^3/(48EI), C = 48EI/l^3, \text{ а } \omega = \sqrt{48EI/(ml^3)}. \quad (15.5)$$

Якщо ж коливальна система складається з пружного тонкого стрижня, верхній кінець якого жорстко затиснутий, а до нижнього прикріплений вантаж Q , то

$$\Delta_{cm} = Ql/(EA), C = EA/l, \text{ а } \omega = \sqrt{EA/(ml)}. \quad (15.6)$$

Тут E – модуль Юнга, I – осьовий момент інерції перерізу, A – площа поперечного перерізу.

Для знаходження частоти коливань стрижнів з розподіленою масою необхідно розв'язувати більш складні диференціальні рівняння руху із виконанням граничних умов на кінцях. У випадках, наведених вище прикладів, врахування власної ваги балки чи стрижня веде до уточнення формул (15.5), (15.6) для частоти ω , де замість маси вантажу m необхідно підставити суму мас $m + m_0/3$. Тут величина $m_0/3$ є третиною

дійсної маси балки (стрижня) і називається її “зведеною масою”. Більш детально такі задачі розв’язуються в дисципліні „Будівельна механіка”.

15.2. Вимушені коливання системи з одним ступенем вільності

Вимушеними коливаннями називаються коливання, що спричинені силовим або кінематичним збудженням. Найпростіші вимушені коливання виникають при дії збуджуючої сили $H(t)$, що змінюється за гармонічним законом

$$H(t) = H \sin \theta \cdot t.$$

де θ – частота вимушених коливань.

Диференціальне рівняння вимушених коливань відрізняється від рівняння вільних коливань (15.1) наявністю правої частини у вигляді $H(t)$:

$$M\ddot{Y} + CY = H \sin \theta \cdot t. \quad (15.7)$$

Частковий розв’язок цього рівняння вибираємо у вигляді:

$$Y = A \sin \theta \cdot t,$$

де амплітуда вимушених коливань виражається через їх частоту за допомогою *коефіцієнта зростання коливань* β :

$$A = \frac{H}{C} \beta, \quad \text{де} \quad \beta = \frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2}.$$

Величина H/C є статичною деформацією стрижня при дії максимальної величини збуджуючої сили H . Якщо ж частота вимушених коливань наближається до частоти власних коливань системи, амплітуда вимушених коливань прямує до нескінченності. Явище, коли $\omega = \theta$ називається резонансом.

У реальних умовах амплітуда вимушених коливань при резонансі не зростає необмежено внаслідок дії сил опору, які в більшості випадків приймають пропорційними швидкості коливального руху ($R = -\alpha_0 \cdot \dot{Y}$). З урахуванням дії цих сил коефіцієнт зростання коливань β записують формулою

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + \gamma^2 \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}}. \quad (15.8)$$

Тут $\gamma = \frac{\alpha_0}{M\omega}$ – *питомий коефіцієнт опору*, тобто сила опору, віднесена до одиниці об'єму маси при швидкості руху, що дорівнює одиниці.

Питомий коефіцієнт опору γ у більшості випадків змінюється в межах: $0 < \gamma \leq 0,5$ (хоча в деяких випадках він може бути і більшим від 1).

При вібраційному навантаженні (рис. 15.1, з) потрібно насамперед виконати перевірку на резонанс. Частота змушених коливань θ не повинна лежати в резонансній смузі

$$0,75 < \theta/\omega < 1,25.$$

Переконавшись у відсутності резонансу, виконуємо звичайний статичний розрахунок на амплітудне значення H вібраційного навантаження (рис. 15.1, з) та визначаємо коефіцієнт зростання коливань β . При одночасній дії вібраційного навантаження $H(t)$ і сталого навантаження Q статичні S_{cm} та динамічні S_g характеристики системи зв'язані співвідношенням

$$S_g = k_g \cdot S_{cm}, \quad (15.9)$$

де $k_g = 1 + \frac{H}{Q} \cdot \beta$ – *динамічний коефіцієнт*. Якщо ж стале навантаження Q відсутнє, то $k_g = \beta$.

В межах справедливості закону Гука формула (15.9) справедлива при будь-яких динамічних навантаженнях.

Коефіцієнти динамічності перехідних режимів можуть досягати великих значень. Так, наприклад, при раптовому прикладенні сили (вибух, розрив троса тощо) $k_g = 2$.

15.3. Визначення динамічного коефіцієнта за ударних навантажень

Ударним навантаженням називають таке навантаження, яке передається на тіло протягом дуже короткого проміжку часу і надає тілу значні прискорення. В результаті такої взаємодії в тілі (пружній системі) можуть виникати – місцевий напружено-деформований стан та коливний рух всієї системи. Це є досить складною задачею математичної теорії пружності та пластичності.

У зв'язку з вищесказаним, будемо розглядати тільки найпростіший випадок (нехтуючи місцевими напруженнями, деформаціями та коливаннями) ударного навантаження, коли жорстке тіло вільно падає з висоти h на пружну систему. При цьому **вважається, що тіло, яке ударяє, починає рухатися із пружною системою (непружний удар), а між напруженнями і деформаціями зберігаються залежності Гука.** Такий інженерний підхід (який ще називають *технічною теорією удару*) дозволяє досить точно розраховувати пружну систему на ударні навантаження. Основою цієї теорії є енергетичний підхід, згідно з яким енергія системи ударник-пружне тіло залишається сталою. Тобто робота A_F ударника вагою F , що падає з висоти h (рис. 15.1, *e*) повністю переходить у потенціальну енергію деформації U_g пружної системи:

$$A_F = U_g, \quad (15.10)$$

де $A_F = F(h + \Delta_g)$, $U_g = \frac{1}{2} F_g \cdot \Delta_g$; F_g – сила, з якою тіло ударяє пружну систему; Δ_g – динамічне переміщення пружної системи.

Вважаючи, що жорсткість C пружної системи є однаковою як при статичних, так і при динамічних навантаженнях $\left(C = \frac{F}{\Delta_{ст}} = \frac{F_g}{\Delta_g} \right)$, рівність (15.10) приводиться до наступного рівняння

$$\Delta_g^2 - 2\Delta_{cm}\Delta_g - 2\Delta_{cm}h = 0. \quad (15.11)$$

Звідки знаходимо:

$$\Delta_g = \Delta_{cm} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}} \right) = k_g \cdot \Delta_{cm}, \quad (15.12)$$

де коефіцієнт динамічності $k_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}}$; $\Delta_{cm} = F \cdot \delta$ – статичне переміщення; δ – переміщення системи від одиничного навантаження.

Точніша формула для коефіцієнта динамічності враховує вагу пружної системи Q , що записується через так звану розрахункову висоту падіння вантажу – $h_p = h / \left(1 + \alpha \frac{Q}{F} \right)$:

$$k_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h_p}{\Delta_{cm}}}. \quad (15.13)$$

Величина коефіцієнта α та переміщення Δ_{cm} залежить від виду пружної системи і місця прикладення удару. Якщо удар відбудеться вздовж осі стрижня сталого перерізу (поздовжній удар), то $\alpha = \frac{1}{3}$, а Δ_{cm} визначається за формулою (15.6):

$$\Delta_{cm} = Ql / (EA).$$

Для вільно опертої балки на двох опорах, що ударно навантажена посередині прогону (поперечний удар), коефіцієнт $\alpha = 0,5$, а переміщення Δ_{cm} визначається за формулою (15.5):

$$\Delta_{cm} = Ql^3 / (48EI).$$

Для консолі, навантаженої ударно на вільному кінці коефіцієнт $\alpha \approx 0,24$, а $\Delta_{cm} = Fl^3 / (3EI)$.

За інших, складніших, способів навантаження пружних систем переміщення Δ_{cm} шукаються запропонованими вище (в темах 12-13) методами.

Після знаходження динамічного коефіцієнта k_g , силу F_g , з якою тіло ударає пружну систему, а також умову міцності при ударі (з урахуванням співвідношення (15.9)), можна записати у вигляді:

$$F_g = k_g F_{cm}; \quad \sigma_g = k_g \cdot \sigma_{cm} \leq [\sigma], \quad (15.14)$$

де σ_{cm} – напруження, що виникає при статичному прикладенні навантаження до конкретної пружної системи.

Для зменшення коефіцієнтів динамічності застосовують, головним чином, активний віброзахист – різної конструкції амортизатори (рис. 15.1, ϵ). Якщо коефіцієнт жорсткості C цих пристроїв збільшувати, то головна частота вільних коливань системи також збільшується.

15.4. Міцність матеріалів за ударних навантажень.

Ударна в'язкість

Дослідження матеріалу елементів конструкцій, які зазнають ударних навантажень показують, що його механічні характеристики значно відрізняються від аналогічних характеристик за статистичних навантажень.

Численні досліди показують, що за таких навантажень різко зростають границі плинності та тимчасовий опір матеріалу, з одночасним зниженням характеристик пластичності (рис. 15.2, a).

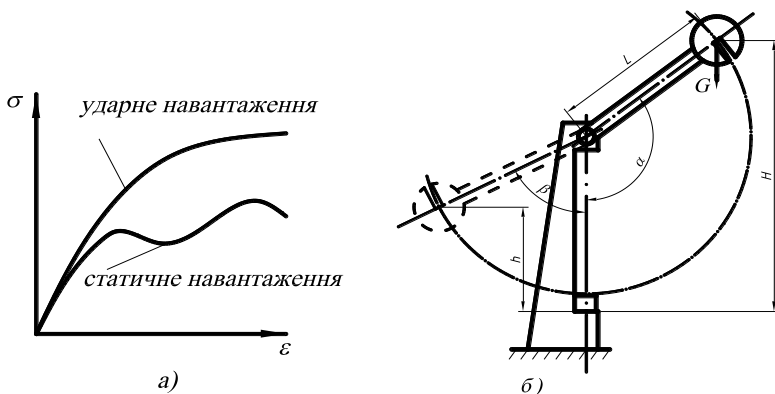


Рис 15.2.

Зниження пластичності матеріалу за ударних навантажень веде до того, що матеріал, який можна вважати пластичним, від таких навантажень руйнується як крихкий. Для виявлення схильності матеріалу опиратися ударним навантаженням проводяться ударні випробування на спеціальних установках, що називаються маятниковими копрами (рис. 15.2, б).

Маятниковий копер – це пристрій, робочою частиною якого є важкий диск, що, падаючи з певної висоти, руйнує зразок матеріалу. Таким зразком є брусок призматичної форми, у якому з однієї сторони роблять надріз певної форми та глибини (рис. 15.3).

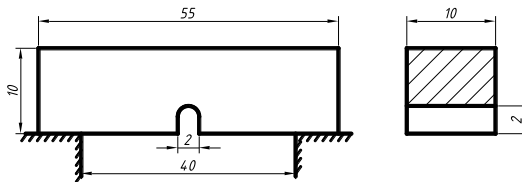


Рис. 15.3.

У зв'язку з тим, що глибина надрізу та радіус його заокруглення дуже сильно впливають на величину ударної в'язкості, бажано порівнювати тільки ідентичні, за всіма параметрами, зразки. Згідно ГОСТ 9454-78 рекомендуються зразки розміром 10x10x55 мм із U – подібним надрізом завглибшки 2 мм та радіусом заокруглення 1 мм (зразок Менаже, тип U).

За допомогою таких установок визначають характеристику матеріалу, що називається **ударною в'язкістю**. *Ударна в'язкість* – це питома робота руйнування матеріалу за дії динамічного навантаження. Вона характеризує здатність матеріалу поглинати механічну енергію за випробувань зразків на ударний згин.

Ударну в'язкість матеріалу KC визначають як відношення роботи, затраченої на руйнування зразка, до площі його поперечного перерізу в місці надрізу

$$KC = \frac{W_G}{A_H},$$

де $W_G = G(H - h) = GL(\cos \beta - \cos \alpha)$ – робота, що затрачена на руйнування зразка.

Вважається, що конструкційні сталі для деталей, які працюють за динамічних навантажень, повинні мати ударну в'язкість – $KC > 8 \cdot 10^5 \div 10^6 \text{ Дж} / \text{м}^2$.

Матеріали, для яких $KC < 3 \cdot 10^5 \text{ Дж} / \text{м}^2$, вважаються крихкими і такими, котрі не можна використовувати в елементах конструкцій, що зазнають ударних навантажень.

На величину ударної в'язкості впливають різні чинники. Ударна в'язкість однієї і тієї ж сталі залежить від її структури. Так, для крупнозернистої і дрібнозернистої сталей марки Ст.2 (0,15% вуглецю), за однакових пластичних характеристик δ і ψ , ударна в'язкість буде значно відрізнятися – $KC = 2,6 \cdot 10^5 \text{ Дж} / \text{м}^2$ для крупнозернистої і $KC = 13,1 \cdot 10^5 \text{ Дж} / \text{м}^2$ для дрібнозернистої. Ударна в'язкість для чорних матеріалів значно знижується за пониження температури і вони стають крихкими. Температура, за якої ударна в'язкість понижується раптово, називається **критичною температурою крихкості** $T_{кр}$ або **порогом хладоломкості**. $T_{кр}$ визначає температурний інтервал переходу матеріалу від в'язкого руйнування до крихкого і може бути мірою тріщиностійкості матеріалу. Нижче від цієї температури метал стає непридатним для роботи за динамічних навантажень. Основною причиною в'язкокрихкого переходу є зменшення межі плинності $\sigma_{пл}$ за підвищення температури. Останнє веде до збільшення пластичної зони у вершині тріщини і перешкоджає поширенню самої тріщини.

15.5. Розрахунок на міцність за повторно-змінних напружень

Більшість деталей машин та механізмів, на відміну від будівельних конструкцій, в процесі їх експлуатації перебувають під дією змінних у часі напружень. Практика експлуатації таких механізмів свідчить, що їх деталі руйнуються значно швидше і за менших напружень, ніж при відповідних статичних

навантаженнях. Руйнування деталей за змінних у часі напружень, виготовлених навіть із високопластичних матеріалів, відбувається крихко через появу та розвиток у зоні концентрації напружень мікротріщин, які через певний час розвиваються у макротріщини і стають головною причиною раптового руйнування. Тому розрахунок деталей та елементів конструкцій за такого напруженого стану має бути точнішим і більш відповідальним.

Руйнування, що відбувається в таких випадках, називають *втомним руйнуванням*. Природою такого руйнування вважають *явище поступового нагромадження пошкоджень на границях зерен матеріалу, які під дією повторно-змінних навантажень розвиваються у макротріщини, що призводить до появи втомних тріщин, їх розвитку та остаточного руйнування*. В даний час найбільш ґрунтовно вивчені випадки багаточислових навантажень, що викликають повторно-змінні напруження (рис. 15.2, а). Сукупність усіх значень напружень, за час одного періоду їх зміни, називають **циклом напружень**. Відношення найменшого напруження σ_{min} циклу до найбільшого σ_{max} називають *коефіцієнтом асиметрії* r :

$$r = \sigma_{min} / \sigma_{max}, \quad (-1 \leq r \leq 1). \quad (15.15)$$

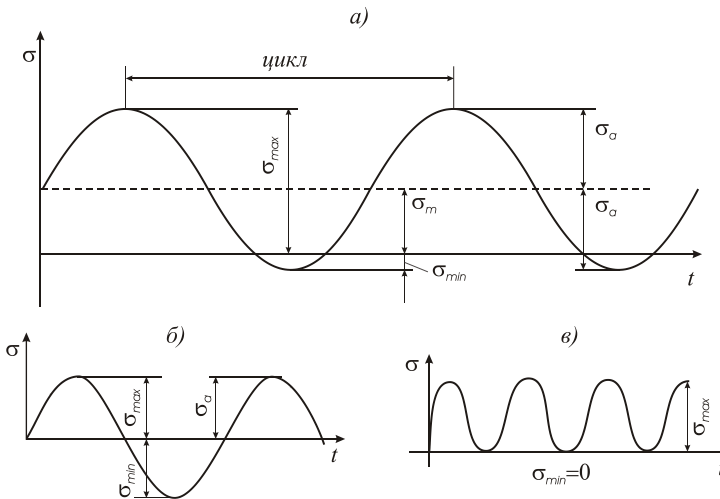


Рис. 15.4

Цикл напружень називається симетричним, коли $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$; $r = -1$ (рис. 15.4, б). Якщо найменше напруження дорівнює нулю ($\sigma_{\min} = 0$; $r = 0$), то такий цикл називається *віднульовим або пульсівним* (рис. 15.4, в).

Цикли характеризуються також *середнім напруженням* σ_m та *амплітудою* σ_a :

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_{\max}(1+r)}{2};$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_{\max}(1-r)}{2}.$$
(15.16)

З рівностей (15.16) отримують:

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a; \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a.$$
(15.17)

Основною характеристикою в розрахунках на міцність за повторно-змінних напружень є величина, яку називають *границею втоми* або *границею витривалості* і позначають σ_r або τ_r (r – коефіцієнт асиметрії циклу). Це найбільше напруження, яке витримує матеріал без руйнування при практично нескінченній кількості циклів N . Границю витривалості знаходять експериментально, найчастіше в умовах симетричного циклу. Для цього в координатах $\sigma - N$. Будують криву (рис. 15.5), яку називають *кривою витривалості* (кривою Велера).

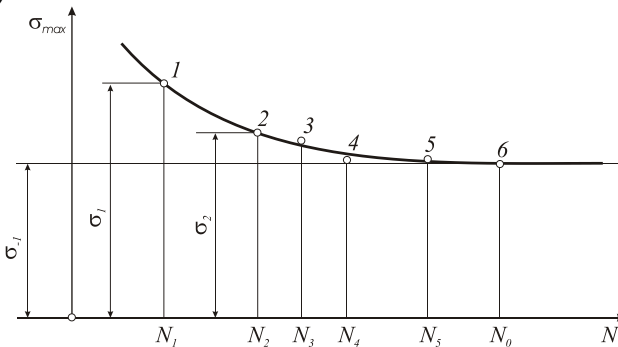


Рис. 15.5

На першому етапі вибирають початкове напруження σ_1 , за якого зразок витримує відносно малу кількість циклів N_1 . Далі напруження поступово зменшують до такої величини, за якої зразок може витримати $N_0 = 10^7$ циклів (для сталі), а для кольорових металів $N_0 = 10^8$ циклів. Число N_0 називається базовим числом для визначення границі витривалості.

Дослідами встановлено, що для симетричних циклів границя витривалості найнижча. При цьому, границя витривалості за згину σ_{-1} вища від границі витривалості за розтягу-стиску σ_{-1}^p та границі витривалості за кручення τ_{-1}^k . Численними дослідями для сталі між цими величинами встановлено наступний емпіричний зв'язок:

$$\sigma_{-1}^p = (0,7 \div 0,8)\sigma_{-1}; \quad \tau_{-1}^k = (0,5 \div 0,6)\sigma_{-1}. \quad (15.18)$$

Основним недоліком кривої Велера є те, що вона (за однакових розмірів і характеристик деталей) дуже залежить від асиметрії циклу. Границі витривалості для асиметричних циклів досліджені мало і то, коли середнє напруження $\sigma_m > 0$. Тому, знаючи границі витривалості σ_r тільки для деяких асиметричних циклів, будують діаграму граничних амплітуд в координатах σ_m, σ_a (рис. 15.6).

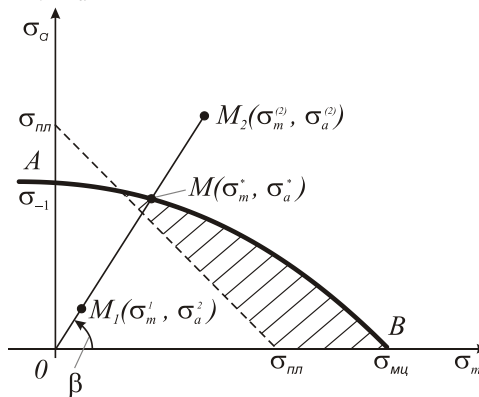


Рис. 15.6

Точка A на діаграмі відповідає симетричному циклу $\sigma_r = \sigma_a = \sigma_{-1}$; $\sigma_m = 0$. Точка B на осі абсцис відповідає статичному навантаженню $-\sigma_r = \sigma_m = \sigma_{m1}$, $\sigma_a = 0$. Довільна точка M на діаграмі має координати (σ_m^*, σ_a^*) , а границя втоми в цій точці дорівнює $-\sigma_r = \sigma_m^* + \sigma_a^*$. Штрихова лінія на діаграмі є межею, за якою вже починається пластичне руйнування.

Будь-яка точка M_1 що лежить на прямій OM з координатами σ_m^1, σ_a^1 буде відповідати максимальному напруженню циклу $\sigma_{\max}^1 = \sigma_m^1 + \sigma_a^1$. Цикл буде вважатися

безпечним, якщо відношення $\frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}^1} > 1$. Якщо ж цикл напружень

буде характеризуватись точкою M_2 з максимальним напруженням циклу $\sigma_{\max}^{(2)} = \sigma_m^2 + \sigma_a^2 > \sigma_r$, то руйнування настане вже після невеликої кількості циклів.

Кут нахилу β променя \overline{OM} до осі абсцис знаходиться з рівності

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_a^*}{\sigma_m^*} = \frac{1-r}{1+r}. \quad (15.19)$$

У зв'язку з експериментальними труднощами визначення границь витривалості для асиметричних циклів користуються *спрощеними діаграми граничних амплітуд*. Однією з них є діаграмами Серенсена-Кінасашвілі. Для її побудови вздовж осі абсцис відкладається точка B_1 (рис. 15.7) з абсцисою σ_{nl} а з неї проводиться промінь під кутом 45° до перетину з віссю ординат в точці C . Точка A на осі ординат з'єднується з точкою $D [\sigma_0/2, \sigma_0/2]$, для якої величину σ_0 можна знайти на основі емпіричних формул для границь витривалості віднульового циклу ($r = 0$):

$$\sigma_0 = (1,5 \div 1,8) \sigma_{-1} \quad \text{— за розтягу-стиску та згину;}$$

$\tau_0 = (1,7 \div 2,0) \tau_{-1}$ – за кручення.

Точкою перетину прямих CB_1 і AB_2 є точка D_1 . Тоді внутрішні точки $M(\sigma_m, \sigma_a)$ заштрихованої області, обмеженої ламаною лінією AD_1B_1 , відповідають безпечним напруженим станам, за дії яких не виникатиме плинність матеріалу і не розвива-

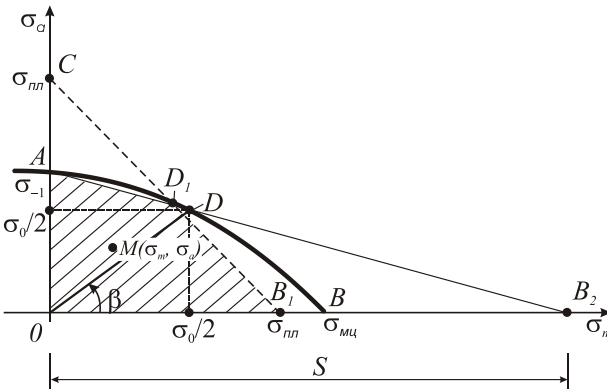


Рис. 15.7

тиметься втомна тріщина. Для напружень, визначених внутрішніми координатами області AD_1C , відбуватиметься втомне руйнування без плинності, а в точках області D_1B_1B плинність з'являється швидше, ніж втомне руйнування.

Рівняння граничної прямої ADB_2 має вигляд -

$$\frac{\sigma_a^*}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m^*}{S} = 1, \quad (15.20)$$

де $S = \sigma_{-1} \cdot \sigma_0 (2\sigma_{-1} - \sigma_0)^{-1}$ – відрізок, що відсікається цією прямою на осі абсцис. Для конструкційних сталей його можна прийняти з достатньою точністю $S = 1200 \text{ МПа}$.

Для знаходження коефіцієнта запасу міцності n_σ деталі конструкції при зміні нормальних напружень за симетричним циклом користуються формулою

$$n_\sigma = \sigma_{-1} / \sigma_\alpha, \quad (15.21)$$

де σ_{-1} - границя витривалості зразка за симетричного циклу при згинанні або розтягу - стиску.

У випадку випадку кручення за симетричним циклом напружень відповідний коефіцієнт запасу на втому n_τ буде дорівнювати:

$$n_\tau = \tau_{-1} / \tau_\alpha. \quad (15.21, a)$$

У випадку асиметричного розтягу-стиску чи згину для знаходження коефіцієнта запасу міцності n_σ , за наявних робочих напружень σ_m, σ_a , підставимо у рівняння (15.20) замість граничних напружень σ_m^*, σ_a^* відповідні робочі напруження σ_m, σ_a , помножені на коефіцієнт запасу n_σ : $\sigma_m^* = n_\sigma \sigma_m$, $\sigma_a^* = n_\sigma \sigma_a$. Тоді для цих видів навантажень будемо мати

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\psi_\sigma \sigma_m + \sigma_a}, \quad (15.22)$$

де $\psi_\sigma = \sigma_{-1} / S = (2\sigma_{-1} - \sigma_0) / \sigma_0$.

Разом з тим, багаточисельні експерименти, що проведені із зразками різних форм і розмірів, а також із різним станом обробки поверхні, показують, що названі чинники сильно впливають на границю втоми матеріалу і не впливають на тимчасовий опір (границю міцності) за сталого навантаження. Тому у формулу (15.22) для коефіцієнта запасу міцності деталі n_σ відносно до втомного руйнування необхідно ввести додатковий загальний коефіцієнт впливу $k_{d\sigma}$:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\psi_\sigma \sigma_m + k_{d\sigma} \sigma_a}, \quad (15.23)$$

де $k_{d\sigma} = k_{\sigma} / (\varepsilon_M \beta_0)$ - загальний коефіцієнт впливу; $\varepsilon_M = (\sigma_{-1})_d / \sigma_{-1}$ - масштабний коефіцієнт, що визначається експериментально, як відношення границі витривалості геометрично подібної деталі заданих розмірів (діаметра) до границі витривалості лабораторного зразка; $\beta_0 = (\sigma_{-1})_{II} / \sigma_{-1}$ - коефіцієнт впливу обробки поверхні, що дорівнює відношенню границі витривалості $(\sigma_{-1})_{II}$ при симетричному циклі зразка з певною обробкою поверхні до границі витривалості полірованого зразка σ_{-1} ; $k_{\sigma} = \sigma_{-1} / \sigma_{-1k}$ - ефективний коефіцієнт концентрації, що дорівнює відношенню границі витривалості гладкого циліндричного зразка до границі витривалості з такими ж розмірами поперечного перерізу, але з наявністю концентрації напружень.

На відміну від теоретичного коефіцієнта концентрації α_k , що залежить лише від форми деталей, ефективний коефіцієнт концентрації k_{σ} залежить також і від властивостей матеріалу - чим менш пластичний матеріал, тим він більш чутливий до концентрації напружень. Зв'язок між ефективним коефіцієнтом концентрації k_{σ} та теоретичним коефіцієнтом α_k виражається формулою:

$$q = \frac{k_{\sigma} - 1}{\alpha_k - 1}, \quad (15.24)$$

де q - коефіцієнт чутливості матеріалу до концентрації напружень, що визначається експериментально.

Для сталей, при симетричному циклі, він знаходиться в межах $q = 0,5 \div 0,9$. Нижня границя стосується маловуглецевих сталей, а верхня - високоміцних. Для деталей із сірого чавуну можна вважати, що $q \approx 0$. Тобто чавун практично не реагує на концентрацію напружень. Незважаючи на те, що границі витривалості високоміцних сталей прямо пропорційні їх границям міцності, високолеговані сталі чутливіші до концентрації напружень, ніж маловуглецеві сталі. Тому

використання високоміцних сталей у конструкціях з різкими змінами форми може бути недоцільним. Більш ефективними у цих випадках можуть бути маловуглецеві сталі.

За відсутності даних про величину коефіцієнтів k_σ і α_k , в наближених розрахунках можна користуватися емпіричними співвідношеннями:

за відсутності гострих концентраторів напружень для деталей з чисто обробленою поверхнею –

$$k_\sigma = 1,2 + 0,2 \frac{\sigma_{мц} - 400}{1100}; \quad (15.25)$$

за наявності гострих концентраторів –

$$k_\sigma = 1,5 + 1,5 \frac{\sigma_{мц} - 400}{1100}. \quad (15.25,а)$$

У співвідношеннях (15.25), (15.25, а) величина $\sigma_{мц}$ виражена у МПа, а коефіцієнт обробки деталі β_0 , в даному випадку, береться рівним одиниці. При визначенні коефіцієнта k_σ іншими методами, врахування стану обробки деталі відбувається за допомогою коефіцієнта β_0 , що знаходиться з графіка на рис. 15.8.

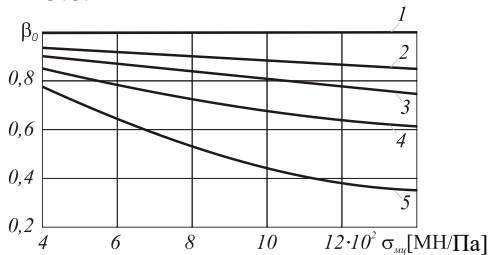


Рис. 15.8

Горизонтальна пряма 1 на ньому відповідає полірованому зразку, крива 2 – шліфованій поверхні, крива 3 – поверхні з тонкою обточкою, 4 – поверхні з грубою обточкою, 5 – поверхні з окалиною.

Величину масштабного коефіцієнта ε_M можна знайти в залежності від діаметра сталевих зразків із таблиці 15.1:

Таблиця 15.1. Значення масштабного коефіцієнта ε_M

$d, \text{ мм}$	10	20	30	40	50	100	150
ε_M	1	0,93	0,87	0,82	0,78	0,65	0,58

Коефіцієнт запасу міцності на втому за асиметричного кручення n_τ має вигляд:

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\psi_\tau \sigma_m + k_{d\tau} \tau_a}, \quad (15.26)$$

де $\psi_\tau = 0,5\psi_\sigma$; $k_{d\tau} = k_\tau / (\varepsilon_M \beta_0)$ - загальний коефіцієнт впливу, а коефіцієнти k_τ , ε_M , β_0 шукаються так само, як і для n_σ .

Якщо точка M (рис.15.7) лежить в області трикутника B_1BD_1 діаграми граничних амплітуд, то запас міцності шукають за формулою –

$$n_\sigma \equiv n_{i\ddot{e}} = \sigma_{i\ddot{e}} / (\sigma_a + \sigma_m). \quad (15.27)$$

і розрахунок ведуть на статичну міцність.

За складного напруженого стану (наприклад, згин із крученням) експериментально доведено, що між нормальними і дотичними амплітудними напруженнями існує форма еліптичної залежності. У більшості випадків, такий розрахунок має перевірний характер, а *загальний коефіцієнт запасу міцності на втому n* для деталей знаходиться із рівняння:

$$1/n^2 = 1/n_\sigma^2 + 1/n_\tau^2, \quad (15.28)$$

звідки

$$n = n_\sigma \cdot n_\tau / \sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}. \quad (15.29)$$

За відсутності експериментальних даних для визначення границі витривалості симетричного циклу можна скористатись емпіричними залежностями, наведеними у довіднику*:

a) в залежності від границі міцності

$$\sigma_{-1} = \alpha' \sigma_{mц}, \quad (15.30)$$

* Соппротивление материалов деформированию и разрушению, Справочное пособие (под ред. акад. Трощенко В.Т.), ч. 2. К. 1994. с. 549.

де $\alpha' = 0,4 \div 0,6$ – для сталей та сірого чавуну; $\alpha' = 0,3 \div 0,5$ – для латуні та алюмінієвих стопів.

б) в залежності від границі плинності

$$\sigma_{-1} = 122 + 0,45\sigma_{i\dot{\epsilon}}, \quad (\sigma_{i\dot{\epsilon}} \hat{=} \dot{\lambda} \dot{I} \dot{a}). \quad (15.31)$$

або

$$\sigma_{-1} = (0,55 \div 0,86)\sigma_{nl},$$

де для маловуглецевих сталей беруть верхню границю, а для легованих, у більшості випадків, вибирається нижня.

Для дуже великої асиметрії циклів роль змінних напружень в оцінці міцності може стати несуттєвою, тому, поряд із розрахунками на втому, необхідно перевірити міцність деталі за граничними напруженнями при статичних навантаженнях.

Приклад 1. Для простої балки (матеріал – вуглецева сталь, схема – рис. 15.9):

а) визначити зведену масу і коефіцієнт α ;

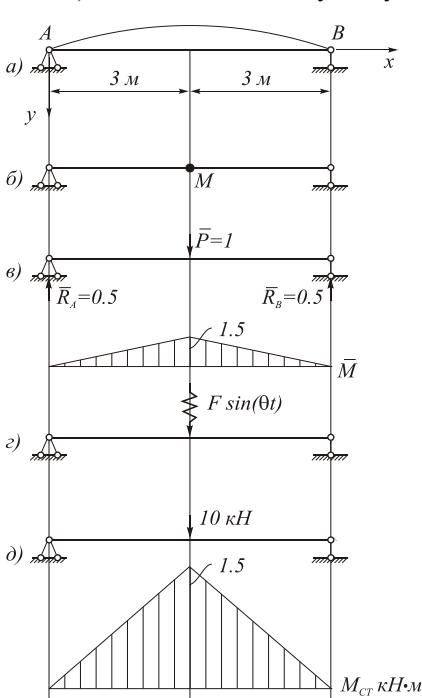


Рис. 15.9

$$\alpha = 0,5;$$

$$M = 60,9 \text{ кЗ},$$

$$\omega = 118 \text{ с}^{-1}.$$

$$\delta = 1,184 \cdot 10^{-3} \text{ м/кН}.$$

$$F = 10 \text{ кН}, \quad \theta = 80 \text{ с}^{-1},$$

$$k_g = 1,823$$

$$\sigma_{cm} = 8,28 \text{ кН/см}^2.$$

$$\sigma_g = 15,1 \text{ кН/см}^2.$$

б) визначити головну частоту вільних коливань;
 в) визначити динамічні розрахункові нормальні напруги при вібрації ($F = 10\hat{e}I$, $\theta = 80c^{-1}$), та удари ($F = 1кН$, $h = 10см$);

г) виконати пункти “б” і “в”, замінивши жорсткі опори амортизаторами з коефіцієнтом жорсткості $C = 100кН/м$, та порівняти нові та старі значення коефіцієнтів динамічності.

А. Визначення зведеної маси і головної частоти вільних коливань балки. Погонна маса двотавра №20 $m_n = 20,3кг/м$ (табл. сортаменту). Для простої балки, приведенної на рис. 15.9, її динамічно еквівалентною системою буде невагома балка із зведеною масою M посередині (коефіцієнт $\alpha = 0,5$):

$$M = 0,5m_n l = 0,5 \cdot 20,3 \cdot 6 = 60,9кг.$$

Прикладемо в точці C одиничну силу $F = 1$ та будуємо епюру одиничних моментів \bar{M} :

$$\bar{R}_A = \bar{R}_B = 0,5; \quad \bar{M}_A = \bar{M}_B = 0; \quad \bar{M}_C = 0,5 \cdot 3 = 1,5м.$$

Розрахунковий (максимальний) момент інерції двотавра №20 і модуль Юнга дорівнюють $I = 1810см^4$, $E = 2,1 \cdot 10^4 кН/см^2$.

Згинальна жорсткість балки $EI = 2,1 \cdot 10^4 \cdot 1,81 \cdot 10^3 = 3801(кН \cdot м^2)$. Момент опору двотавра № 20 – $W_z = 181см^3$.

Знаходимо одиничне переміщення (формула Верещагіна) балки

$$\delta = \sum \frac{\dot{A}_M \cdot y_C}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 \cdot 2 = \frac{4,5}{EI} = 1,18 \cdot 10^{-3} (i / \hat{e}I).$$

Головна частота вільних коливань дорівнює

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{M\delta}} = \frac{1}{\sqrt{60,9 \cdot 1,18 \cdot 10^{-6}}} = 118(c^{-1}).$$

Б. Визначення розрахункового динамічного напруження за вібрації. Відношення частот вимушених та вільних коливань буде

$$\theta/\omega = 80/118 = 0,68 < 0,75,$$

тому в даному випадку резонанс відсутній.

Прикладемо в точці C силу $F = 10\hat{e}I$ та будуємо епюру (рис.15.9, д).

Статичний розрахунковий момент дорівнює

$$M_{\bar{i}0} = F \cdot \bar{M}_1 = 10 \cdot 1,5 = 15(\hat{e}I \cdot i).$$

Знаходимо статичне розрахункове нормальне напруження

$$\sigma_{cm.} = \frac{M_{cm}}{W_z} = \frac{15 \cdot 10^2}{181} = 8,28(\text{кН}/\text{см}^2).$$

Динамічне розрахункове нормальне напруження за вібрації дорівнює

$$\sigma_g = k_g \sigma_{cm} = 1,82 \cdot 8,28 = 15,1(\text{кН}/\text{см}^2).$$

Додаткові підрахунки показали, що в даному випадку неврахування впливу власної ваги балки на величину нормальних напружень не перевищує 3%.

В. Визначення головної частоти вільних коливань балки із амортизаторами. Одиничне переміщення балки (рис. 15.9, е) в цьому випадку складається з одиничного

переміщення від деформації балки $\delta_1 = 1,18 \cdot 10^{-3} \frac{M}{\text{кН}}$ і

одиничного переміщення δ_2 від деформації

опор: $\delta_2 = \bar{R}_A/C = 0,5/100 = 5 \cdot 10^{-3} (M).$

Повне одиничне переміщення

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = (1,18 + 5) \cdot 10^{-3} = 6,18 \cdot 10^{-3} (M/\text{кН}).$$

Частота вільних коливань

$$\omega' = \frac{1}{\sqrt{60,9 \cdot 6,18 \cdot 10^{-6}}} = 51,5(c^{-1}).$$

Відношення частот $\omega'/\omega = 51,5/118 = 0,436.$

Г. Визначення динамічного розрахункового нормального напруження при вібрації із амортизаторами. Перевіримо відношення частот вимушених та вільних коливань

$$\frac{\theta}{\omega'} = \frac{80}{51,5} = 1,55 > 1,25 .$$

Резонанс відсутній.

Коефіцієнт динамічності за вібрації дорівнює

$$k' = \beta = 1 / \left(1 - \theta^2 / (\omega')^2 \right) = 1 / \left(1 - 1,55^2 \right) = 0,714 .$$

Коефіцієнт динамічності зменшився

$$k' / k_g = 0,714 / 1,82 = 0,39 .$$

Динамічне розрахункове нормальне напруження за вібрації балки з амортизаторами рівне

$$\sigma'_g = k'_g \sigma_{cm} = 0,714 \cdot 8,28 = 5,81 \left(\frac{\kappa H}{\text{см}^2} \right) .$$

Як показують підрахунки – амортизатори зменшили розрахункове напруження в 2,56 рази.

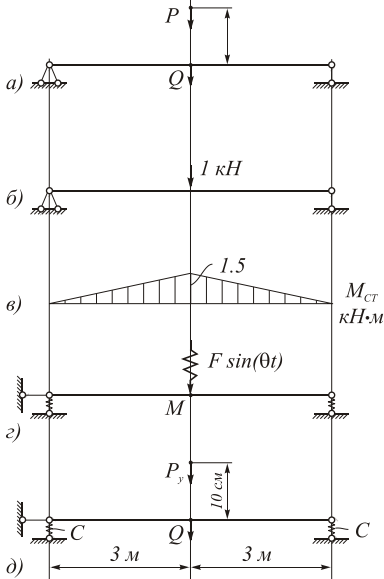


Рис. 15.10

$$Q = 0,609 \kappa H , F_y = 1 \kappa H ,$$

$$h_F = 6,214 \text{ см} ,$$

$$k_g = 11,3 ,$$

$$\sigma_{cm} = 0,828 \kappa H / \text{см}^2 .$$

$$\sigma_g = 9,36 \kappa H / \text{см}^2 .$$

$$C = 100 \kappa H / \text{м} ,$$

$$k' = 0,714 ,$$

$$\sigma_g = 5,81 \kappa H / \text{см}^2 .$$

$$k'_g = 5,59 ,$$

$$\sigma'_g = 4,63 \kappa H / \text{см}^2 .$$

Д. Визначення розрахункового динамічного напруження за удару. Зведена вага балки

$$Q_3 = Mg = 60,9 \cdot 9,81 = 600H = 0,6(\kappa H).$$

Розрахункова висота падіння ударника (рис. 15.10, а)

$$h_p = h / (1 + Q_3 / F_y) = 10 / (1 + 0,6) = 6,25(\text{см}).$$

Статичне переміщення від ваги ударника $F_y = 1\kappa H$ дорівнює

$$\Delta_{cm.} = F_y \cdot \delta = 1 \cdot 1,18 \cdot 10^{-3} = 1,18 \cdot 10^{-3}(\text{м}).$$

Згідно формули (15.10) коефіцієнт динамічності за удару дорівнює

$$k_g = 1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 6,25 / 0,118} = 11,3.$$

Знаходимо динамічні розрахункові нормальні напруження за удару

$$\sigma_g = k_g \cdot \sigma_{cm.} = 11,3 \cdot 0,828 = 9,36(\kappa H / \text{см}^2).$$

Визначимо розрахункове динамічне напруження за удару в системі з амортизаторами (рис. 15.10, б).

Статичне переміщення від ваги ударника $F_y = 1\kappa H$ дорівнює

$$\Delta_{cm.} = F_y \cdot \delta = 1 \cdot 6,18 \cdot 10^{-3} = 6,18 \cdot 10^{-3}(\text{м}).$$

Знаходимо коефіцієнт динамічності за удару

$$k'_g = 1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 6,25 \cdot 10^{-2} / 6,18 \cdot 10^{-3}} = 5,59.$$

Коефіцієнт динамічності за удару в балці з амортизаторами значно зменшився

$$k'_g / k_g = 5,59 / 11,3 = 0,495.$$

Знаходимо динамічне розрахункове нормальне напруження

$$\sigma'_g = 5,59 \cdot 0,828 = 4,63(\kappa H / \text{см}^2).$$

Як бачимо, застосування амортизаторів за ударних навантажень зменшує розрахункове нормальне напруження в балці більше, ніж у 2 рази.

Приклад 2. Електродвигун, масою $m = 80 \text{ кг}$, встановлений на кінці ступінчастої консолі круглого поперечного перерізу (рис. 15.11). Ротор двигуна, масою $m_1 = 0,5 \text{ т}$, має ексцентриситет $e = 5 \text{ мм}$.

Довжина консолі $l = 1 \text{ м}$, діаметр її тоншої частини $d = 40 \text{ мм}$, відношення діаметрів $\frac{D}{d} = 1,3$, $\frac{r}{d} = 0,1$ (r – радіус галтелі на ступінчастому переході). Матеріал консолі – вуглецева сталь, для якої $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{мц}} = 600 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{пл}} = 280 \text{ МПа}$. Питомий коефіцієнт опору за коливань $\gamma = 0,1$.

В ході розрахунку необхідно визначити колову частоту ω власних коливань системи і частоту коливань θ збурювальної сили. Для того, щоб уникнути явища резонансу, робоча частота коливань збурювальної сили повинна відрізнятись на $\sim 30\%$ від частоти власних коливань пружної системи, отже повинні задовольнятись умови $\theta \leq 0,7\omega$ або $\theta \geq 1,3\omega_0$.

Приймаючи другу з цих умов, потрібно визначити:

1. Коефіцієнт запасу міцності $n_{\text{пл}}$ за плинністю. Цей коефіцієнт є відношенням границі плинності матеріалу до максимального напруження, викликаного статичним і динамічним навантаженнями системи; коефіцієнт запасу міцності n_{σ} за “втомним руйнуванням”.

2. За якої кількості обертів n_0 настане резонанс; робочу кількість обертів.

3. Перевірити на міцність переріз 1 – 1 консолі, якщо необхідний запас міцності $n = 1,5$.

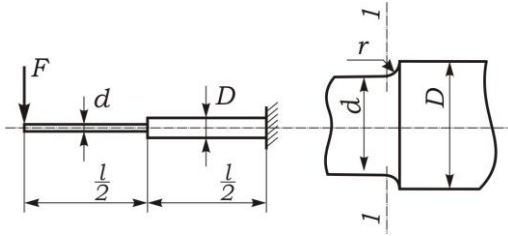


Рис. 15.11

Розв'язування.

Власна частота коливань консолі (без врахування власної ваги консолі) визначається за формулою

$$\omega = \sqrt{C/m},$$

де C – жорсткість консолі, m – маса двигуна, розташованого на її кінці. Жорсткість C консолі знаходимо з залежності $C = F/\Delta_{cm}$, де F – вага двигуна, Δ_{cm} – викликаний нею прогин кінця консолі.

Статичний прогин Δ_{cm} кінця консолі (рис. 15.12) знайдемо способами Верещагіна (ф.12.16) та Сімсона-Корноухова (ф.12.20):

$$EI_D \Delta_{cm} = \frac{Fl^3}{24} \cdot \frac{I_D}{I_d} + \frac{7Fl^3}{24} = \frac{Fl^3}{24} \left(\frac{I_D}{I_d} + 7 \right).$$

За заданого відношення $\frac{D}{d} = 1,3$ маємо $\frac{I_D}{I_d} = \left(\frac{D}{d} \right)^4 = 1,3^4 = 2,86$.

$$\text{Таким чином, } \Delta_{cm} = \frac{Fl^3}{24} \cdot \frac{9,86}{EI_D}, \quad c = \frac{24}{9,86} \cdot \frac{EI_D}{l^3}.$$

За формулою (15.5) визначаємо ω

$$\omega = \sqrt{\frac{24 \cdot EI_D}{9,86 \cdot l^3 \cdot m}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot 5,2^4 \cdot 10^{-8}}{9,86 \cdot 1 \cdot 80 \cdot 64}} = 46,7 \text{ сек}^{-1}.$$

1. Визначаємо n_0 – кількість обертів двигуна, за якої настане резонанс, і робочу кількість обертів:

$$n_0 = \frac{30 \cdot \omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 46,7}{3,14} = 446 \hat{a} / \hat{o} \hat{a};$$

робоча кількість обертів

$$n = 1,3 \cdot n_0 = 1,3 \cdot 446 = 580 \text{ об/хв}.$$

2. Колова частота збудовальної сили

$$\theta = 1,3 \cdot \omega = 1,3 \cdot 46,7 = 60,7 \text{ сек}^{-1}.$$

3. Динамічний коефіцієнт за вимушених коливань

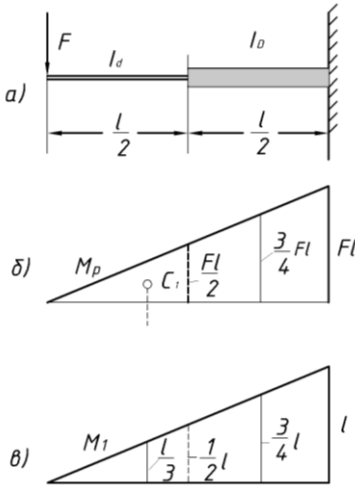


Рис. 15.12

$$k_g = 1 + \frac{Q}{F} \beta,$$

де $F = m \cdot g$ – вага двигуна, Q – амплітуда збудовальної сили, що дорівнює

$$Q = m_1 \theta^2 e = 0,5 \cdot 80 \cdot 60,7^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 73,5 \text{ Н}.$$

β – коефіцієнт зростання коливань:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + \gamma^2 \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - 1,3^2)^2 + 0,1^2 \cdot 1,3^2}} = 1,43.$$

Таким чином, $k_g = 1 + \frac{73,5}{80 \cdot 9,81} \cdot 1,43 = 1,13.$

4. Визначаємо амплітуду напружень σ_a у перерізі 1-1 консолі. Осьовий момент опору перерізу 1-1 консолі дорівнює

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 4^3 \cdot 10^{-6}}{32} = 6,28 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Максимальне нормальне напруження у перерізі 1-1 при дії статичного навантаження силою $F = m \cdot g$, що є одночасно амплітудним напруженням при коливаннях, дорівнює:

$$\sigma_a = \frac{m \cdot g \cdot l}{2 \cdot W} = \frac{80 \cdot 9,81 \cdot 1}{2 \cdot 6,28 \cdot 10^{-6}} = 625 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2 = 62,5 \text{ МПа}.$$

Максимальне динамічне напруження у цьому ж перерізі дорівнює:

$$\max \sigma_g = \sigma_a \cdot k_g = 62,5 \cdot 1,13 = 70,6 \text{ МПа}.$$

5. Визначаємо границю витривалості матеріалу. У випадку відсутності, експериментальних даних границі витривалості (для симетричного циклу згину) визначають за відомими значеннями границі міцності чи границі плинності із емпіричних співвідношень для гладких зразків з вуглецевих сталей за формулами (15.30), (15.31).

$$\sigma_{-1}^{\text{зп}} = \alpha' \cdot \sigma_{\text{мл}}.$$

Вибираємо $\alpha' = 0,4$. Тоді $\sigma_{-1}^{\text{зп}} = 0,4 \cdot 600 = 240 \text{ МПа}.$

6. Визначення допустимого напруження:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{мл}}}{n_{\text{мл}}} = \frac{420}{1,5} \approx 187 \text{ МПа}.$$

7. Записуємо умову міцності і перевіримо міцність перерізу 1-1 за існуючих коливань:

$$\max \sigma_g \leq [\sigma], \quad 70,6 < 280,$$

або

$$n_{i\ddot{e}} = \frac{\sigma_{i\ddot{e}}}{\max \sigma_g} = \frac{420}{70,6} = 4,0 > 1,5.$$

8. *Визначаємо запас міцності за дії повторно-змінних напружень:*

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\max \sigma_g} = \frac{240}{70,6} = 3,4 > 1,5.$$

Оскільки $n_\sigma > n_{nl}$, то міцність деталі забезпечена.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке ступінь вільності динамічної системи?
2. Що називається вільними коливаннями?
3. Запишіть рівняння вільних коливань.
4. Що таке колова частота коливань?
5. Запишіть формулу для статичного переміщення стрижня.
6. Що називається зведеною масою?
7. Що таке амплітуда вимушених коливань?
8. Що таке коефіцієнт зростання коливань?
9. Як записується динамічний коефіцієнт за динамічних навантажень?
10. Що таке ударне навантаження?
11. Що називається ударною в'язкістю?
12. Що таке критична температура крихкості?
13. Яка природа втомного руйнування?
14. Що таке цикл напружень?
15. Які бувають цикли напружень?
16. Як будується крива Велера?
17. Що таке границя втоми?
18. Що таке масштабний коефіцієнт концентрації?
19. Як записується коефіцієнт чутливості матеріалу до концентрації напружень?
20. Запишіть загальний коефіцієнт запасу міцності на втому.

ТЕМА 16 (лекції 38,39)
РОЗРАХУНОК ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ
ЗА ГРАНИЦЕЮ ПРУЖНОСТІ

16.1. Модель ідеального пружно-пластичного матеріалу

Розрахунки елементів конструкцій, які проводилися у попередніх розділах, відбувалися за умови, коли максимальні напруження у небезпечному перерізі не перевищували граничних (для даного матеріалу) значень. Такий розрахунок називається *розрахунком за методом допустимих напруг*. При цьому не брався до уваги стан матеріалу в інших частинах конструкцій.

Як показують детальніші дослідження, такі конструкції в цілому можуть задовольняти експлуатаційні вимоги. Тобто, їх ще можна додатково навантажувати, бо конструкція має запас міцності більший, ніж визначений при розрахунку у пружній стадії. У разі такого довантаження в небезпечних перерізах елементів з'являються *пластичні деформації*. Поява останніх вимагає знання характеру деформування конкретного матеріалу за межею плинності. У переважній більшості інженерних розрахунків, для їх спрощення, вибирають *модель ідеального пружно-пластичного матеріалу*, співвідношення якої описані у попередніх розділах формулами (2.14). За цією моделлю матеріал відповідає закону Гука до досягнення *граници плинності*, після якої деформування відбувається за сталого напруження $\sigma_{пл}$.

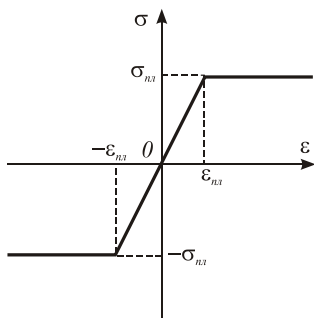


Рис. 16.1

Вищезгадана схема деформування найближча для таких матеріалів як маловуглецеві сталі та алюмінієві сплави. Їх поведінку за різних видів деформацій можна представити так званою діаграмою Прандтля (рис 16.1).

Нехтування на цій діаграмі ділянкою зміцнення,

як правило, забезпечує додатковий запас міцності всієї конструкції. Метод розрахунку на міцність, у якому використовуються пластичні деформації, називається *методом граничних навантажень*, або *методом “руйнівних” навантажень*.

Граничним чи *руйнівним* навантаженням умовно називається таке навантаження, яке викликає в конструкції великі пластичні деформації (за рахунок появи в її елементах так званих *пластичних шарнірів*), після чого вона перестає задовольняти експлуатаційні вимоги. Цей метод дозволяє ефективніше використати утримувальну здатність конструкції, ніж розрахунок за напруженнями, і тому є більш економічним.

16.2. Розрахунок статично невизначних стрижневих систем

Розрахунок стрижневих систем на розтяг і стиск відрізняється від розрахунку таких систем на інші види деформацій тим, що за розтягу (стиску) досягнення максимальним напруженням граничного значення в одній точці є рівнозначним досягненню граничних значень *фактично* в усьому перерізі елемента конструкції. Якщо така конструкція є статично визначною, то це означає, що далі її навантаження веде до втрати нею тримкості і перетворення її у геометрично змінний механізм. Тому навантаження, яке привело її до цього стану, можна називати *граничним* або *руйнівним*. Тобто, у статично визначних стрижневих системах розрахунок на розтяг і стиск *за методом граничних напружень* є еквівалентним до розрахунку таких систем *за методом граничних навантажень*. Разом з тим, для статично невизначних систем розрахунки за різними методами будуть давати різні результати.

а) Розрахунок методом допустимих напружень. Розглянемо статично невизначну стрижневу систему, що складається з жорсткого бруса, шарнірно закріпленого в точці *A*, та двох пружних стрижнів, котрі його підтримують (рис. 16.2). В кінці бруса (т. *B*) діє сила *F*. Для спрощення розрахунку приймається, що брус як жорстке тіло, отримує переміщення тільки за рахунок деформацій стрижнів. При цьому, будемо нехтувати горизонтальними складовими

переміщень точок бруса, як величинами другого порядку мализни, порівняно з вертикальними складовими цих переміщень.

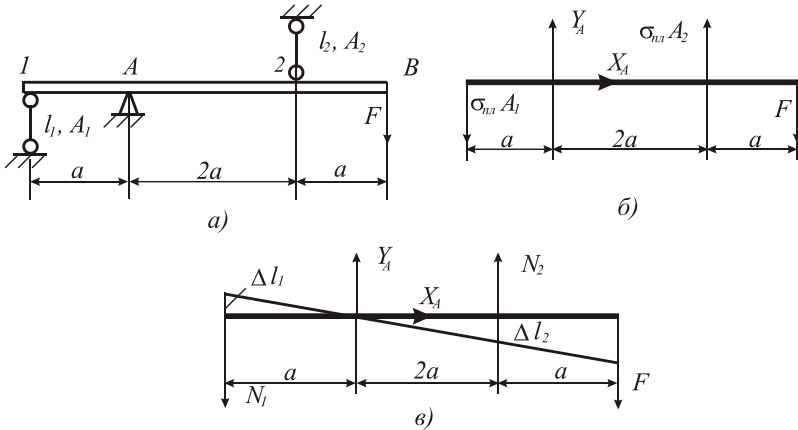


Рис. 16.2

Для того, щоб скласти рівняння рівноваги всіх зусиль, що діють на брус, уявно відкинемо усі в'язі бруса і замінимо їх невідомими реакціями X_A , Y_A , N_1 , N_2 (рис. 16.3, б). Складемо для такої плоскої системи три рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum X = 0: \quad X_A &= 0; \\ \sum Y = 0: \quad Y_A - N_1 + N_2 - F &= 0; \\ \sum (M_A) = 0: \quad N_1 \cdot a + N_2 \cdot 2a - F \cdot 3a &= 0. \end{aligned} \quad (16.1)$$

Аналіз системи рівнянь (16.1) показує, що останні два рівняння містять три невідомих зусилля. Тобто система є один раз статично невизначною. Для її розкриття необхідно скласти ще одне додаткове рівняння, яке називають рівнянням переміщень. Таке рівняння легко скласти, якщо виходити із схеми деформування стрижневої системи (рис. 16.2, в), на основі геометричної залежності між переміщеннями стрижнів Δl_1 і Δl_2 :

$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{2a}, \quad (16.2)$$

звідки $2\Delta l_1 = \Delta l_2$.

Згідно закону Гука, при розтягові (стиску) отримаємо

$$2\frac{N_1}{C_1} = \frac{N_2}{C_2}, \quad (16.3)$$

де $C_i = E_i A_i / l_i$ – жорсткості стрижнів.

У випадку, коли жорсткості обох стрижнів однакові, зусилля в другому стрижні вдвічі більше від зусилля у першому, тобто $N_2 = 2N_1$.

Підставивши залежність (16.3) у систему рівнянь (16.1), отримаємо шукані вирази невідомих реакцій через зусилля F :

$$N_1 = \frac{3F}{1 + 4C_2/C_1}, \quad N_2 = \frac{6F}{4C_1/C_2}; \quad (16.4)$$

$$Y_A = F + N_1 - N_2.$$

Якщо $C_1 = C_2$, то: $N_1 = 0,6F$, а $N_2 = 1,2F$.

Напруження в стрижнях 1, 2, з однаковою площею поперечного перерізу, $A_1 = A_2 = A$, будуть:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = 0,6\frac{F}{A}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A} = 1,2\frac{F}{A}. \quad (16.5)$$

З умови міцності $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ знаходимо величину допустимого навантаження для даної стрижневої системи:

$$\sigma_2 = 1,2\frac{P}{A} = [\sigma],$$

звідки

$$[F] = \frac{5}{6}[\sigma] \cdot A. \quad (16.6)$$

Підставивши величину допустимого завантаження $[F]$ у вираз для нормального напруження у першому стрижні, одержимо $\sigma_1 = 0,5[\sigma]$, тобто перший стрижень системи навантажений тільки наполовину, а система в цілому залишається недовантаженою, що є недоліком самого методу розрахунку за граничними напруженнями.

б) *Розрахунок за методом граничних навантажень.* При розрахунку за методом допустимих напружень вимагалось, що хоча б в одному із стрижнів (в даному випадку у другому) нормальне напруження досягало *границі плинності* – σ_{nl} . Разом з тим, як показала перевірка, у першому стрижні нормальне напруження досягає тільки половини *границі плинності*, тобто стримувальна здатність системи ще себе не вичерпала.

За умови, що матеріал стрижнів веде себе як ідеально пластичний, будемо вважати, що зусилля у другому стрижні залишається сталим (рівним $N_2 = \sigma_{nl} \cdot A_2$) за дальшого збільшення сили F . В цей же час, зусилля N_1 у першому стрижні зростатиме доти, поки в ньому також не виникне плинність матеріалу і воно стане рівним $N_1 = \sigma_{nl} \cdot A_1$. Після цього можна вважати, що стримувальна здатність системи себе вичерпала і дальше збільшення навантаження неможливе.

Для визначення величини граничної сили F_{nl} скористаємось третім рівнянням рівноваги (16.1), підставивши у нього значення зусиль N_1 і N_2 :

$$\sigma_{nl} \cdot A_1 a + \sigma_{nl} \cdot A_2 \cdot 2a - F_{nl} \cdot 3a = 0,$$

звідки

$$F_{nl} = \frac{1}{3} \sigma_{nl} (A_1 + 2A_2). \quad (16.7)$$

При $A_1 = A_2 = A$ будемо мати

$$F_{nl} = \sigma_{nl} \cdot A. \quad (16.8)$$

Поділивши праву і ліву частину рівності (16.8) на коефіцієнт запасу k_{nl} , отримаємо

$$[F_{nl}] = [\sigma] \cdot A, \quad (16.9)$$

де $[F_{nl}] = F_{nl} / k_{nl}$ – допустиме навантаження за методом граничних навантажень. Умова перевірки міцності за цим методом набуває вигляду

$$F_{\max} \leq [F_{nl}]. \quad (16.10)$$

Порівнявши результати розрахунку даної системи за методом допустимих напружень (формула (16.6)) та методом граничних навантажень (формула (16.9)), маємо:

$$\frac{[F_{nl}]}{[F]} = \frac{6}{5}.$$

Тобто, при таких співвідношеннях геометричних характеристик стрижнів системи, *метод граничних навантажень* дозволяє підвищити величину навантаження F ще на 20% у порівнянні з *методом граничних напружень*. Необхідно зауважити, що за інших співвідношень жорсткостей стрижнів різниця між допустимими навантаженнями буде іншою, але завжди розрахунок за руйнівними навантаженням веде до ефективнішого використання міцності матеріалу стрижнів. Хоча завжди потрібно пам'ятати, що даний метод не можна використовувати за повторно-змінних напружень, бо за такого виду напружень пластичні деформації сприяють швидкому втомному руйнуванню конструкції.

16.3. Утримувальна здатність вала за деформації кручення

Порядок розрахунку вала на кручення методом допустимих напружень наводився в X розділі. Допускалося, що небезпечний напружений стан у валі настає тоді, коли максимальне дотичне напруження досягає границі плинності. Але, на відміну від деформацій розтягу-стиску, за деформації кручення вала область граничних значень напружень буде проходити тільки через поверхневі точки перерізу вала (рис. 16.3, а).

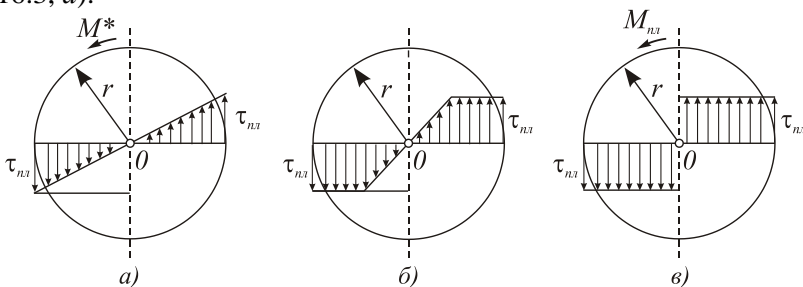


Рис. 16.3

Точки, що лежать ближче до осі вала, будуть залишатися менш навантаженими. Тому крутний момент, що передається на вал, можна ще збільшувати, поки плинність матеріалу не пошириться на всю площину поперечного перерізу вала. Тільки у цьому випадку тримкість вала буде повністю вичерпана. Якщо матеріал вала ідеально пластичний, то епюра дотичних напружень буде зображатись двома прямокутниками з висотою τ_T (рис. 16.3, в). Вираз для граничного моменту M_{nl} запишеться у вигляді

$$M_{nl} = \tau_{nl} \cdot \int_A \rho dA, \quad (16.11)$$

де величина dA у полярних координатах дорівнює $dA = \rho d\rho \cdot d\varphi$. Підставивши її в інтеграл (16.11), одержимо

$$M_{nl} = \tau_{nl} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^r \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} \pi r^3 \cdot \tau_{nl}. \quad (16.12)$$

Розділивши праву та ліву частину рівності (16.12) на коефіцієнт запасу k_{nl} , отримаємо величину допустимого граничного моменту $[M_{nl}]$ за руйнівними навантаженнями

$$[M_{nl}] = \frac{M_{nl}}{k_{nl}} = \frac{2}{3} \pi r^3 [\tau]. \quad (16.13)$$

Допустимий момент, обчислений за формулою (5.10) в В розділі *методом допустимих напружень*, дорівнює

$$[M_{nl}] = W_p [\tau] = \frac{1}{2} \pi r^3 \cdot [\tau]. \quad (16.14)$$

Порівнюючи формули (16.13) і (16.14), бачимо, що відношення допустимого крутного моменту за руйнівними навантаженнями до допустимого крутного моменту *методу допустимих напружень*, дорівнює

$$\frac{[M_{nl}]}{[M]} = \frac{4}{3}. \quad (16.15)$$

Із співвідношення (16.15) видно, що після появи на поверхні вала пластичних деформацій, його граничний стан за руйнівними навантаженнями досягається додатковим збільшенням крутного моменту ще на одну третину. Разом з

тим, застереження відносно застосування цього методу тільки для статичних навантажень залишається правомірним, як і за розрахунків на розтяг і стиск.

16.4. Пластичний розрахунок статично визначної балки

Розглянемо чистий згин балки з ідеально пружно-пластичного матеріалу та визначимо утримувальну здатність методом граничних навантажень. До балки прикладений згинальний момент, максимальне напруження від якого не перевищує границі плинності σ_{nl} , а балка знаходиться в стані звичайного пружного згину з лінійним законом розподілу напружень по товщині (рис. 16.4, б). За умови певного зростання згинального моменту до величини M^* , максимальне напруження в ній досягає границі плинності матеріалу σ_{nl} . Тоді допустимий згинальний момент згідно методу допустимих напружень, буде дорівнювати

$$[M] = \frac{M^*}{k_{nl}} = W \cdot [\sigma]. \quad (16.16)$$

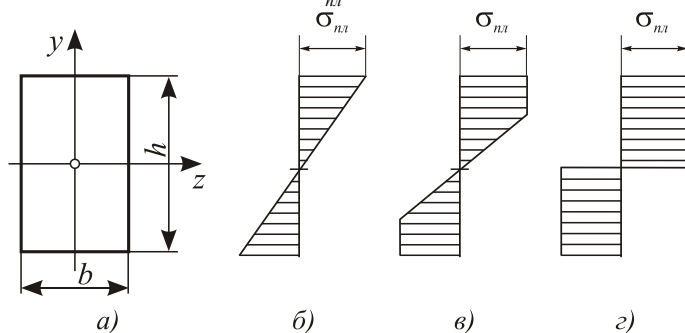


Рис. 16.4

Для балки прямокутного поперечного перерізу з висотою h і шириною b , осьовий момент опору $W = \frac{1}{6}bh^2$. В цьому випадку

$$[M] = \frac{1}{6}bh^2[\sigma]. \quad (16.17)$$

При подальшому зростанні згинального моменту плинність матеріалу з крайніх волокон поперечного перерізу балки почне поширюватися на нижчі шари волокон у напрямку до нейтрального шару (рис. 16.4, в). Такий процес буде продовжуватися доти, поки в усьому поперечному перерізі балки не виникнуть напруження, що дорівнюватимуть границі плинності матеріалу σ_{nl} (рис. 16.4, з). У цьому випадку поперечний переріз балки повністю перейде у пластичну зону, в якій виникає необмежена пластична плинність. Балка у цьому перерізі послаблється надзвичайно великими поворотами, тоді як обидві половини балки залишаються відносно жорсткими. Таким чином, балка веде себе подібно як два жорсткі стрижні, що з'єднані *пластичним шарніром*, який дозволяє цим стрижням повертатися один відносно одного під дією граничного згинального моменту M_{nl} :

$$M_{nl} = 2 \int_{A/2} \sigma_{nl} y dA = 2\sigma_{nl} S_{\max},$$

де $S_{\max} = \left\{ \frac{\epsilon h^2}{8}; \frac{2}{3} r^3 \right\}$ – максимальний статичний момент

половини прямокутного або круглого перерізів відносно осі Ox (рис. 4.2).

Допустимий згинальний момент $[M_{nl}]$, за коефіцієнта запасу k_{nl} , буде дорівнювати

$$[M_{nl}] = \frac{M_{nl}}{k_{nl}} = 2[\sigma] \cdot S_{\max}. \quad (16.18)$$

Формулу (16.18) можна записати у більш прийнятному вигляді –

$$[M_{nl}] = n[\sigma] \cdot W, \quad (16.19)$$

де $n = 2S_{\max}/W$. Для прямокутного перерізу параметр $n = 1,5$; для круглого $n \approx 1,7$; для стандартних двотаврових балок в середньому $n = 1,16$. Але у випадку тонкостінних перерізів (типу двотавра, швелера, кутника) балку необхідно додатково перевіряти на втрату стійкості плоскої форми згину.

Перевірка міцності балки за методом граничних навантажень полягає у порівнянні максимального згинального моменту M_{\max} із допустимим моментом $[M_{nl}]$ –

$$M_{\max} \leq [M_{nl}] = n[\sigma] \cdot W. \quad (16.20)$$

Отже, розрахунок балки за методом руйнівних навантажень рівнозначний збільшенню допустимого напруження $[\sigma]$ або осьового моменту опору W в n разів у порівнянні з методом допустимих напружень.

Одержані формули та висновки для чистого згину балки справедливі і для поперечного згину. Тільки в цьому випадку вони будуть стосуватися перерізів з найбільшим згинальним моментом. А у випадку перевірки балки на міцність у ліву сторону нерівності (16.20) підставляється значення максимального згинального моменту, вираженого через відповідне зовнішнє навантаження.

16.5. Розрахунок нерозрізних балок методом граничних навантажень

Для того, щоб дослідити поведінку статично невизначних балок, розглянемо, наприклад, консольну балку з додатковою опорою на кінці, що навантажена посередині зосередженою силою F (рис. 16.5, а). Спочатку знайдемо розрахунковий момент за методом допустимих напружень.

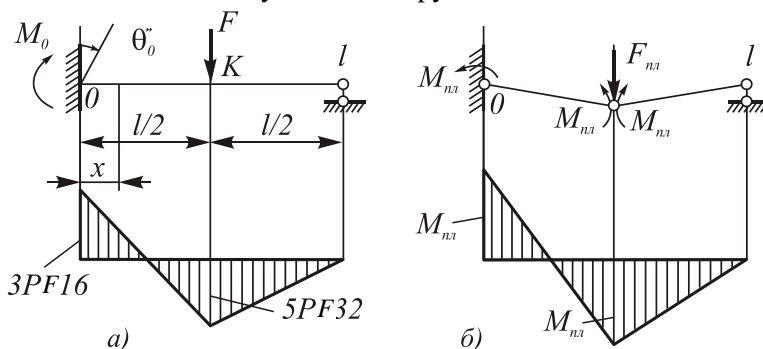


Рис. 16.5

Для розкриття статичної невизначеності та побудови епюри згинальних моментів скористаємось рівнянням трьох моментів (12.24) з розділу 12 для опори $n = 0$ –

$$2M_0l + M_1l = -6EI\theta_0'' . \quad (16.21)$$

В даному випадку опорний момент $M_1 = 0$, а опорний кут повороту θ_0'' знайдемо за формулою (12, в) –

$$EI\theta_0'' = \frac{Fl^2}{16} .$$

Підставивши знайдені величини у рівняння (16.21), одержимо

$$M_0 = -\frac{3}{16}Fl . \quad (16.22)$$

Крім опорного моменту, в лівій опорі статично невизначної балки діє реакція

$$R_0 = \frac{F}{2} - \frac{M_0}{l} = \frac{11}{16}F .$$

Таким чином, найбільший прогінний момент посередині балки дорівнює

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = R_0 \cdot \frac{l}{2} + M_0 = \frac{5}{32}Fl . \quad (16.23)$$

Максимальний прогінний момент менший від опорного, а тому, згідно методу допустимих напружень, за небезпечний переріз вибираємо опорний. В результаті умова міцності для визначення допустимого навантаження F^{adm} запишеться наступним чином

$$|M_{\max}| = \frac{3}{16}Fl \leq [\sigma] \cdot W ,$$

звідки

$$[F] = \frac{16}{3}[\sigma]W/l . \quad (16.24)$$

При збільшенні навантаження до величини F_{nl} , опорний та прогінний моменти зростуть до величини M_{nl} , при якій в обох перерізах утворяться пластичні шарніри. Після цього балка перетвориться у геометрично змінну систему, що не може

опиратися подальшому збільшенню навантаження. Епюра граничних згинальних моментів, що відповідає утворенню у прольоті двох пластичних шарнірів, показана на рис. 16.5, б.

Величину граничного моменту M_{nl} легко знайти з рівняння (16.23) для прогінного моменту $M(l/2)$ посередині балки, поклавши в ньому $M_0 = -M_{nl}$

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = R_0 \frac{l}{2} - M_{nl} = M_{nl}, \quad (16.25)$$

де

$$R_0 = \frac{F}{2} + \frac{M_{nl}}{l}.$$

Тоді

$$M_{nl} = \frac{1}{6} F_{nl} \cdot l. \quad (16.26)$$

Величину допустимого граничного навантаження знайдемо з умови перевірки міцності за граничним навантаженням (16.20):

$$\frac{1}{6} [F_{nl}] \cdot l = n [\sigma] \cdot W,$$

звідки

$$[F_{nl}] = 6n [\sigma] \cdot W/l. \quad (16.27)$$

Використавши вирази (16.24) і (16.27), можна знайти відношення допустимого граничного навантаження до допустимого навантаження, визначеного за методом допустимих напружень:

$$\frac{[F_{\text{гг}}]}{[F]} = \frac{9}{8} n. \quad (16.28)$$

Як видно з рівності (16.28), величина відношення допустимих навантажень, визначених за різними методами, для статично невизначених систем дещо більша, ніж для статично визначених. Отриманий результат пояснюється тим, що в статично невизначених системах має місце деякий перерозподіл моментів: Після утворення у певному перерізі пластичного шарніра величина згинального моменту у ньому залишається сталою; тоді як в усіх інших перерізах по довжині балки

моменти будуть зростати доти, доки максимальний згинальний момент в одному з них не досягне величини граничного моменту $M_{пл}$, за якого появиться пластичний шарнір і балка перетвориться у геометрично змінний механізм.

Така тенденція перерозподілу моментів завжди збільшує *утримувальну здатність* статично невизначної конструкції, тому що, коли вичерпується міцність однієї ділянки, додаткове навантаження починають приймати на себе інші ділянки конструкції. Статично визначні системи такої здатності не мають.

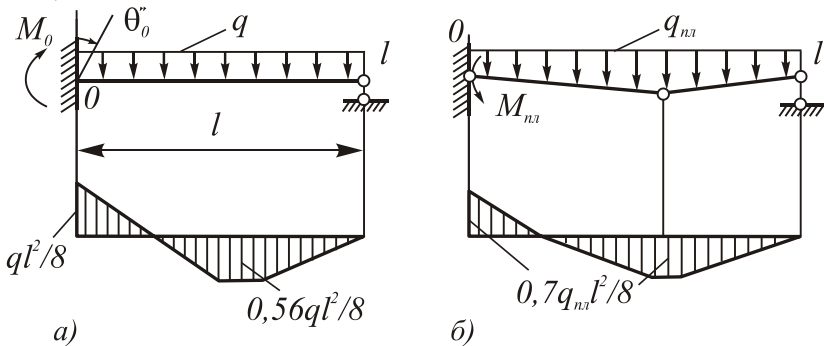


Рис.16.6

Нами розглядалися випадки, коли місце появи пластичного шарніра було передбачуваним. У випадку дії розподіленого навантаження небезпечний переріз необхідно шукати методом знаходження екстремуму функції, якою описується пролітний згинальний момент. Для прикладу розглянемо випадок, коли попередня нерозрізна балка навантажена розподіленим навантаженням q (рис. 16.6, а). У цьому випадку рівняння трьох моментів буде мати вигляд (16.21), а вираз для опорного кута повороту θ_0'' знайдемо за формулою (12.e):

$$EI\theta_0'' = \frac{ql^3}{24}.$$

Підставивши отримане значення в рівняння трьох моментів (поклавши також $M_1 = 0$), знайдемо вираз для опорного моменту:

$$M_0 = -\frac{ql^2}{8}. \quad (16.29)$$

Вираз для прогінного згинального моменту, на відстані x від лівої опори, дорівнює

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} - \frac{M_0}{l}x + M_0. \quad (16.30)$$

Абсциса x_0 перерізу з максимальним прогінним моментом визначається з умови $dM/dx = 0$. Дістанемо рівняння

$$\frac{ql}{2} - qx_0 - \frac{M_0}{l} = 0,$$

з якого знаходимо

$$x_0 = \frac{l}{2} - \frac{M_0}{ql} = \frac{5}{8}l. \quad (16.31)$$

Підставивши значення x_0 у рівняння (16.30), одержимо значення максимального моменту

$$M_{\max} = 0,56 \cdot \frac{ql^2}{8}.$$

Отже, чисельно найбільше значення згинального моменту буде в області защемлення, тому прирівняємо його до величини граничного моменту M^* :

$$\frac{q^* l^2}{8} = M^*. \quad (16.32)$$

Звідки, поділивши праву і ліву частини рівності на коефіцієнт запасу k_{nl} , одержимо

$$[q] = 8[M]/l^2 = 8[\sigma] \cdot W/l^2. \quad (16.33)$$

Збільшуючи значення розподіленого навантаження q , доведемо значення згинального моменту в опорі до величини M_{nl} , при якій в опорі утвориться пластичний шарнір. При дальшому збільшенні розподіленого навантаження до величини q_{nl} , у перерізі з найбільшим прогінним моментом утвориться ще один пластичний шарнір і балка втратить свою утримувальну здатність.

Для знаходження величини невідомого граничного моменту M_{nl} скористаємось рівнянням (16.30), підставивши в нього, замість величини M_0 , величину невідомого граничного моменту M_{nl} та, прирівнявши прольотний момент в точці $x_0 = (l/2) + (M_{nl}/q_{nl}l)$ до величини M_{nl} :

$$M(x_0) = \frac{q_{i\bar{e}}l}{2}x_0 - \frac{q_{i\bar{e}}x_0^2}{2} + \frac{M_{i\bar{e}}}{l}x_0 - M_{i\bar{e}} = M_{i\bar{e}}.$$

Розв'язавши це квадратне рівняння відносно M_{nl} , одержимо

$$M_{nl} = (12 - 8\sqrt{2})q_{nl}l^2. \quad (16.34)$$

Поділивши отриману рівність на коефіцієнт запасу k_{nl} та, підставивши у рівність (16.20), отримаємо

$$[q]_{nl} \approx 11.66 \cdot n[\sigma] \cdot W/l^2. \quad (16.35)$$

На основі виразів (16.33) та (16.35) робимо висновок, що

$$\frac{[q]_{nl}}{[q]} = 1,46 \cdot n. \quad (16.36)$$

Отриманий результат значно перевищує величину (16.28), коли замість розподіленого навантаження діє зосереджена сила, а також для випадку статично визначної балки.

В даному випадку, так само як і для статично визначних балок, метод граничних навантажень *не можна застосовувати* за дії повторно-змінних навантажень.

Запитання для самоконтролю

1. Поясніть модель ідеального пружно пластичного матеріалу.
2. В чому суть методу граничних навантажень?
3. В чому полягає недолік методу граничних напружень за розрахунку статично-невизначних стрижневих систем?
4. За якого методу (граничних навантажень чи граничних напружень) допустиме навантаження є більшим?
5. За яких навантажень (статичних чи змінних у часі) використовується метод граничних навантажень?
6. Що таке пластичний шарнір?
7. Чим різняться епюри напружень за пружного згину балки та при появі пластичного шарніру?
8. Чому дорівнює статичний момент половини перерізу прямокутного профілю?
9. Який переріз балки в розрахунках на міцність є економічнішим-круглий чи прямокутний?
10. Яка послідовність розрахунку нерозрізної методом граничних навантажень?
11. Де більше відношення граничних навантажень за різними методами – для статично визначних чи статично невизначних систем?
12. Чому не можна розраховувати конструкції методом граничних навантажень за повторно змінних напружень?
13. Запишіть умову міцності для вала при крученні.
14. Запишіть умову міцності для балки за згину.
15. Який порядок розрахунку статично невизначної стрижневої системи методом граничних навантажень?

ТЕМА 17 (лекції 40-42)
РОЗРАХУНОК ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ
ІЗ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

17.1. Узагальнений закон Гука для анізотропного матеріалу

Розвиток науки і техніки привів до відкриття і застосування нових композиційних матеріалів з наперед запроєктованими фізико-механічними характеристиками. До цих матеріалів можна віднести скло – метало - і органопластики, багатошарові утворення і залізобетони, які за своєю природою є *гетерогенними*, але з погляду макромеханіки у багатьох випадках їх можна вважати *гомогенними* анізотропними лінійно-пружними матеріалами з певними усередненими значеннями фізико-механічних характеристик.

1. Анізотропією пружних властивостей володіють також і багато кристалів (кварц, топаз, барит, берилій тощо), які широко застосовуються в приладобудуванні та машинобудуванні. Анізотропія матеріалу істотно змінює напружено-деформований стан окремих елементів, а також вимагає нових методів розрахунку та рівнянь, що враховують ці властивості. Одним з найфундаментальніших законів механіки деформівного твердого тіла є узагальнений закон Гука, що зв'язує між собою напруження та деформації, що виникають у навантаженому тілі. Найзагальніша формула закону Гука для анізотропного матеріалу має вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{xz} + a_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + \dots + a_{26}\tau_{xy}, \\ &\dots \\ \gamma_{xy} &= a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + \dots + a_{66}\tau_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

де між компонентами деформацій, ε_y , ε_z , γ_{xz} , γ_{yz} , γ_{xy} та компонентами переміщень u , v , w існують диференціальні залежності, які називаються залежностями Коші:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned}
\tag{17.2}$$

В загальному випадку рівняння (17.1) містять 36 коефіцієнтів a_{ij} , але в дійсності їх завжди менше, як це буде показано далі. Виходячи з виразу для пружного потенціалу, С.Г. Лехніцький показав, що коефіцієнти a_{ij} мають бути симетричні відносно i, j . Тобто, $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, 6$).

(17.3)

В результаті, число незалежних пружних сталих зменшується до 21-ї, або, як показано В.В. Новожиловим, ще менше – 18. У випадку, коли матеріал має певного роду симетрію властивостей, то число незалежних пружних сталих ще зменшується. Наприклад, якщо через кожну точку тіла проходить площина, яка має такі властивості, що будь-які два напрямки симетричні відносно неї є еквівалентними у відношенні до пружних властивостей, то в цьому випадку вісім пружних сталих в (17.1) мусять бути рівними нулю. Направляючи вісь z перпендикулярно до площини пружної симетрії, а дві інші в цій площині, будемо мати наступні рівності:

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{46} = a_{15} = a_{25} = a_{35} = a_{56} = 0. \tag{17.4}$$

Таким чином, число незалежних пружних сталих a_{ij} зводиться до 13. Рівняння узагальненого закону Гука (17.1) набувають вигляду:

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{16}\tau_{xy}; \\
 \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{26}\tau_{xy}; \\
 \varepsilon_z &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{36}\tau_{xy}; \\
 \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz}; \\
 \gamma_{xz} &= a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz}; \\
 \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{36}\sigma_z + a_{66}\tau_{xy}.
 \end{aligned} \right\} \quad (17.5)$$

2. Якщо в однорідному тілі існують дві взаємно перпендикулярні площини пружної симетрії, то і третя, перпендикулярна до них, також буде площиною пружної симетрії. Матеріал, що володіє такими властивостями, характеризується дев'ятьма пружними сталими і називається ортотропним. Ортотропними є: пиломатеріали, дикт, багато шаруватих та волокнистих композиційних матеріалів. Для таких матеріалів, крім рівностей (17.4), додатково мусять виконуватись ще чотири:

$$a_{16} = a_{26} = a_{36} = a_{45} = 0. \quad (17.6)$$

У цьому випадку число незалежних пружних змінних a_{ij} стає рівним дев'яти.

Узагальнений закон Гука для ортотропного матеріалу через технічні сталі E_i, G_{ij}, ν_{ij} , можна записати у вигляді:

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_y - \frac{\nu_{13}}{E_3}\sigma_z, & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{23}}\tau_{yz}, \\
 \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{21}}{E_1}\sigma_x + \frac{1}{E_2}\sigma_y - \frac{\nu_{23}}{E_3}\sigma_z, & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G_{13}}\tau_{xz}, \\
 \varepsilon_z &= -\frac{\nu_{31}}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{32}}{E_2}\sigma_y + \frac{1}{E_3}\sigma_z, & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{12}}\tau_{xy}
 \end{aligned} \right\} \quad (17.7)$$

де $E_1 = E_x$, $E_2 = E_y$, $E_3 = E_z$ – модулі Юнга в головних напрямках x, y, z , відповідно; $G_{12} = G_{xy}$, $G_{13} = G_{xz}$, $G_{23} = G_{yz}$ – модулі зсуву, що характеризують зміну кутів між головними напрямками x і y , x і z , y і z : $\nu_{12} = \nu_{xy}$, $\nu_{21} = \nu_{yx}$, $\nu_{13} = \nu_{xz}$,

$\nu_{23} = \nu_{yz}$, $\nu_{32} = \nu_{zy}$ – коефіцієнти Пуассона, що характеризують поперечне скорочення (розширення) при розтягу (стиску) у напрямках осей координат (перший індекс показує напрямок скорочення або розширення, а другий індекс – напрямок дії навантаження).

У зв'язку із симетрією рівнянь (17.5), (17.7) справедливі наступні залежності:

$$E_1\nu_{12} = E_2\nu_{21}, \quad E_2\nu_{23} = E_3\nu_{32}, \quad E_3\nu_{31} = E_1\nu_{13}. \quad (17.8)$$

Якщо виходити з умови, що об'єм тіла не може збільшуватися за всестороннього стиску, то А.Л. Рабинович для коефіцієнтів Пуассона отримав умову

$$\nu_{xy} + \nu_{yz} + \nu_{zx} \leq \frac{3}{2}. \quad (17.9)$$

Зокрема, для ізотропного тіла завжди $\nu \leq 0,5$ (знак рівності відповідає абсолютно нестискувальному тілу).

Таким чином, тіло, що має три взаємно перпендикулярні площини пружної симетрії, називається ортотропно анізотропним або ортотропним тілом.

3. Якщо через кожен точку тіла можна провести площину, де всі напрямки (у відношенні до пружних властивостей) є еквівалентними (площина ізотропії), то в цьому випадку число незалежних пружних сталей зменшується до п'яти. Такий матеріал називається трансверсально ізотропним або скорочено – трансропним.

Закон Гука для трансропного матеріалу записується наступним чином:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu'}{E'} \sigma_z, & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G'} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu'}{E'} \sigma_z, & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G'} \tau_{xz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E'} \sigma_z - \frac{\nu''}{E} \sigma_x - \frac{\nu''}{E} \sigma_y, & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \end{aligned} \quad (17.10)$$

де E, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона в площині ізотропії; $G = E / (2(1 + \nu))$ – модуль зсуву в площині ізотропії; E', G' – модулі Юнга та зсуву у площинах,

перпендикулярних до площини ізотропії; $\nu' = \nu_{13}$, $\nu'' = \nu_{23}$ – коефіцієнти Пуассона, між якими існує зв'язок

$$\nu'' E' = \nu' E. \quad (17.11)$$

Разом з тим, для багатьох (сорока п'яти) досліджених гірничих порід, які можна вважати трансверсально-ізотропними, за висновками С.А. Батугіна та Р.К. Ніренбурга число незалежних пружних сталей може бути рівним не п'яти, а чотирьом.

Тобто, у цьому випадку модуль зсуву G' може бути виражений через інші сталі у вигляді формул: для гірничих порід-

$$G' = \frac{EE'}{E(1+2\nu') + E'}, \text{ або } G' = \frac{E'\sqrt{E/E'}}{2(1+\sqrt{\nu\nu'})} - \text{ для склопластиків.}$$

Для випадку ізотропного матеріалу вони трансформуються у точну формулу для модуля зсуву: $G = E/[2(1+\nu)]$.

4. Якщо в тілі всі напрямки еквівалентні, то таке тіло називається ізотропним, а узагальнений закон Гука зводиться до системи рівнянь (7.8), якщо в останніх здійснити перепозначення коефіцієнта Пуассона з μ на ν :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (17.12)$$

Число незалежних пружних сталей для ізотропних матеріалів дорівнює двом: модуль Юнга E та коефіцієнт Пуассона ν . Модуль зсуву G виражається через ці постійні за допомогою приведеної вище формули.

Крім цих (чотирьох) основних випадків пружної симетрії, існує ще цілий ряд інших. Типовими тут є різні види геометричної симетрії кристалів, котрі детальніше вивчаються в інших дисциплінах.

17.2. Узагальнений закон Гука та рівняння рівноваги для плоскої задачі теорії пружності

Плоска задача теорії пружності об'єднує дві фізично різні задачі:

а) задачу плоского напруженого стану, коли одне з нормальних напружень (наприклад σ_z) та двоє дотичних напружень (τ_{xz}, τ_{yz}) дорівнюють нулю ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$). Такий напружений стан може бути реалізований в тонких пластинах та оболонках;

б) задачу плоского деформованого стану, коли переміщення всіх точок тіла можуть відбуватись лише у двох напрямках, тобто в одній площині. Тоді одна з лінійних деформацій (наприклад, ε_z) та дві кутові деформації (γ_{xz} та γ_{yz}) дорівнюють нулю ($\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$).

Такий напружено-деформований стан може бути реалізований у масивних тілах типу довгих трубопроводів чи тунелів, а також циліндрів, навантажених в діаметральній площині та інші. Деформації цих тіл у напрямку третьої координати залишаються незмінними або дорівнюють нулю.

Рівняння закону Гука для ортотропного матеріалу (17.7) у цих випадках можна записати, використавши співвідношення Коші (17.2), у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_x &= L \frac{\partial u}{\partial x} + M \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \sigma_y = M \frac{\partial u}{\partial x} + N \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \tau_{xy} &= G_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (17.13)$$

де коефіцієнти $L = \tilde{E}_1$, $M = \nu_{12} \tilde{E}_1$, $N = \tilde{E}_2$ для випадку плоского напруженого стану, $\tilde{E}_i = E_i / (1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21})$.

У випадку плоскої деформації для ортотропного матеріалу ці коефіцієнти виражаються через технічні сталі дещо складнішими залежностями, а для ізотропного матеріалу вони дорівнюють:

$$L = N = 2G + \lambda; \quad M = \lambda = 2\nu G / (1 - 2\nu). \quad (17.14)$$

Рівняння рівноваги в напруженнях для обох випадків мають вигляд

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (17.15)$$

Компоненти напружень в рівняннях рівноваги (17.15) змінюються в усіх точках об'єму тіла, тому на його границі вони мають бути такими, які б зрівноважували поверхневі сили, що прикладені до цієї границі (рис. 17.1).

Тобто, необхідно задатися умовами, котрі пов'язували б ці сили з напруженнями на взаємно перпендикулярних площинках, що прилягають до поверхні тіла. На самій поверхні тіла діють компоненти поверхневих сил X_n , Y_n , що віднесені до одиниці площі. У цій точці границі вони повинні виражатися через напруження наступним чином:

$$X_n = l\sigma_x + m\tau_{xy}, \quad Y_n = m\sigma_y + l\tau_{xy}, \quad (17.16)$$

де l та m – напрямні косинуси нормалі n до границі тіла.

Нормальна та дотична складові поверхневих сил записуються через внутрішні напруження наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi; \\ \tau_n &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (17.17)$$

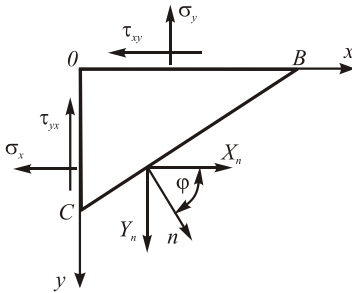


Рис. 17.1

За цими ж формулами обраховується напруження на похилій площині BC із зовнішнього нормаллю n , що направлена під кутом φ до напруження σ_x . Якщо напрямки Ox і Oy є головними, то у формулах (17.17) члени, що містять дотичні напруження, необхідно відкинути.

Умови на границі тіла (17.16), (17.17) дозволяють визначити сталі інтегрування рівнянь рівноваги (17.15).

Через те, що два рівняння рівноваги містять три компоненти напружень σ_x , σ_y , τ_{xy} , то задача їх визначення є статично невизначною. Для її розв'язання необхідно задовольнити ще одному рівнянню, яке встановлює додаткову залежність між компонентами деформацій тіла

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (17.18)$$

Останнє рівняння називається *умовою сумісності деформацій* Б. Сен-Венана або *рівнянням нерозривності деформацій*. Підставивши в нього замість деформацій $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ відповідні залежності (17.7) узагальненого закону Гука, коли $\sigma_z = 0$, та, продиференціювавши перше рівняння рівноваги (17.15) за x , а друге за y , складемо їх. Одержаний вираз для другої похідної від τ_{xy} підставимо у нове рівняння сумісності деформацій (в напруженнях). В результаті, отримаємо умову сумісності для ортотропного матеріалу в напруженнях

$$\Delta_x \sigma_x + \Delta_y \sigma_y = 0, \quad (17.19)$$

де $\Delta_x = \bar{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\Delta_y = \bar{n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \bar{m} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператори диференціювання; $\bar{m} = E_1 / (2G_{12}) - \nu_{21}$; $\bar{n} = E_1 / E_2$.

У випадку ізотропного матеріалу оператори Δ_x , Δ_y спрощуються: $\Delta_x = \Delta_y = \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, а рівняння (17.19) набуває відомого вигляду

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (17.20)$$

Розв'язування плоскої задачі теорії пружності зручно звести до знаходження однієї функції $\phi(x, y)$, яку вперше запропонував британський математик Дж. Ері. Цю функцію ще називають *функцією напружень Ері*, а самі напруження виражаються через неї співвідношеннями:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (17.21)$$

Після підстановки формул (17.21) у рівняння рівноваги (17.15), дістанемо тотожність. Третє рівняння (17.19) зведеться до умови, яку має задовольнити функція напружень $\varphi(x, y)$

$$\bar{n} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\bar{m} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (17.22)$$

У випадку ізотропного матеріалу рівняння (17.22) спрощується до відомого бігармонічного рівняння

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad \text{або} \quad \Delta^2 \varphi = 0. \quad (17.23)$$

Використовувати функцію Ері зручно для розв'язання плоскої задачі теорії пружності *оберненим* чи *напівоберненим* методами. У цих випадках функцію напружень задають у вигляді поліноміальних чи тригонометричних рядів, а невідомі коефіцієнти знаходять із граничних умов.

Якщо розв'язувати плоску задачу в переміщеннях, то необхідно в рівняння рівноваги (17.15) підставити співвідношення узагальненого закону Гука (17.7), де деформації виражаються через переміщення u , v за допомогою формул Коші (17.2). Отримана таким способом система двох рівнянь Ляме буде мати різні коефіцієнти в залежності від того, чи розглядається *плоский напружений стан*, чи *плоский деформований стан*. Граничні умови (17.16) на поверхні тіла у цих випадках також записуються через переміщення. Методи інтегрування таких рівнянь розглянемо нижче.

17.3. Концепція пограничних шарів у теорії пружності анізотропних гомогенних матеріалів

Розрахунок напруженого стану композитних матеріалів, які за своєю природою є *гетерогенними*, зводять до розрахунку еквівалентних їм *гомогенних матеріалів* з анізотропними властивостями.

Розрахунок конструкцій з таких матеріалів є досить громіздким, тому в деяких випадках, коли матеріал у якомусь із

напрямок є істотно анізотропним, порівняно з іншими напрямками, є сенс застосувати метод пограничних шарів.

Розглянемо поведінку істотно анізотропного пружного середовища, що знаходиться в умовах плоско-напруженого чи плоско-деформованого стану. Для ізотропного випадку така задача описується бігармонічною функцією напружень. Для анізотропного матеріалу у загальному випадку такий розв'язок може бути набагато складнішим. Разом з тим, розглянемо граничний випадок, коли матеріал є нескінченно жорстким в одному з напрямків (наприклад Ox), тобто утворений укладкою нескінченно жорстких випрямлених волокон в площині, що розглядається. Для цього підставимо у рівняння рівноваги (17.15) замість відповідних напружень їх значення із закону Гука (17.13). В результаті, отримаємо

$$L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (M + G_{12}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + G_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (17.24)$$

$$G_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (M + G_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + N \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Перепишемо рівняння (17.24), замінивши в них відношення модулів через нові параметри:

$$\frac{G_{12}}{L} = \varepsilon^2; \quad \frac{G_{12}}{M} = d^2; \quad \frac{G_{12}}{N} = c^2. \quad (17.25)$$

В результаті отримаємо:

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 + \frac{1}{d^2}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad (17.26)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(1 + \frac{1}{d^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Надалі будемо вважати, що величина модуля L така, що відповідає орієнтації жорстких волокон у напрямку x .

Оскільки модуль L набагато більший, у порівнянні з іншими модулями, то величину ε^2 можна вважати дуже малою. З фізичної точки зору це означає, що нескінченно жорсткі волокна, а також напрямок, що їм відповідає, мусять нести зосереджене навантаження без збурення навколишнього середовища. Цей напрямок можна назвати сингулярним. У

випадку, коли волокна не є нескінченно жорсткими, то можна чекати, що область збурення в околі навантаженого волокна невелика і також, на певній віддалі, зникає, так само як для сингулярного напрямку. Тому звідси виходить, що існують можливості для передачі зусиль вздовж вузьких зон, які швидко “розмиваються” за незначного віддалення від них. Цей факт можна врахувати у такому варіанті пограничного шару, для якого координата, що перпендикулярна до сингулярного напрямку, “втягується” в залежності від швидкості зміни характеристик у цьому напрямку. Тобто, поклавши $u = \varepsilon \eta$, ми, таким чином, ніби “розтягуємо” координату у .

Після такої заміни рівняння рівноваги отримують вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{d^2}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \eta} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{d^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \eta} + \frac{1}{\varepsilon^2 c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} &= 0. \end{aligned} \quad (17.27)$$

Відкинувши в отриманих рівняннях члени з множниками c і d , вважаючи їх величинами вищого порядку мализни за ε , отримаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0. \quad (17.29)$$

В іншому вигляді ці рівняння можна записати наступним чином

$$\Delta u = 0, \quad v = g(x) + \eta h(x), \quad (17.28)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$ – оператор Лапласа, $g(x)$ і $h(x)$ – невідомі функції, що остаточно визначаються із граничних умов.

Таким чином, плоска задача теорії пружності звелась до визначення гармонічної функції $u(x)$ замість бігармонічної функції напружень. Таке спрощення виявилось можливим завдяки застосуванню концепції пограничного шару, вперше запропонованої Дж. Еверстайном та Е. Пипкіним у 1971 році.

17.4. Дія зосередженої сили на площину

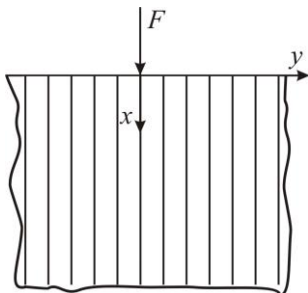


Рис. 17.2

Розглянемо ортотропну пів-
площину, навантажену
зосередженою силою F (рис. 17.2).
Граничні умови на її краю мають
вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -F \cdot \delta(y) \quad \text{çà } x=0, \\ \tau_{xy} &= 0 \quad \text{çà } x=0, \end{aligned} \quad (17.30)$$

де $\delta(y)$ – дельта-функція Дірака,
що має властивості: $\delta(y)=0$ за
 $y \neq 0$; $\delta(0)=\infty$; $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) dy = 1$.

Будемо вважати, що напрямок найбільшої жорсткості співпадає з напрямом x .

Рівняння узагальненого закону Гука (17.19) для даного випадку, із застосуванням підстановки $y = \varepsilon \eta$, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x}{G_{12}} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon d^2} \frac{\partial v}{\partial \eta}, & \frac{\tau_{xy}}{G_{12}} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \eta}, \\ \frac{\sigma_y}{G_{12}} &= \frac{1}{d^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon c^2} \frac{\partial v}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (17.31)$$

Відкидаючи в рівняннях (17.31) члени вищого порядку малості (за параметром ε), отримаємо:

$$\frac{\sigma_x}{G_{12}} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\sigma_y}{G_{12}} = \frac{1}{\varepsilon c^2} \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \frac{\tau_{xy}}{G_{12}} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \eta}. \quad (17.32)$$

На основі рівнянь (17.32), а також властивостей дельта-функції $-\left(\delta(\varepsilon \eta) = \frac{1}{\varepsilon} \delta(\eta)\right)$, граничні умови (17.30)

трансформуються до вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\varepsilon \frac{F}{G_{12}} \delta(\eta) \quad \text{за } x=0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \quad (17.33)$$

З умови, що на нескінченості $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$, випливає

$$\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} \eta \rightarrow \pm\infty; \\ x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (17.34)$$

Виходячи з розв'язку (17.29) для v , а також умови, що $v=0$ при $y=0$, необхідно, щоб величина $v=0$ була одним із розв'язків задачі. Для знаходження другого розв'язку (для переміщення u) візьмемо похідну за x в рівнянні (17.29):

$$\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (17.35)$$

Розв'язком цього рівняння, котрий може задовольняти умовам при $x=0$, $x \rightarrow \infty$ та $\eta \rightarrow \pm\infty$, є розв'язок

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\varepsilon F}{\pi G_{12}} \cdot \frac{x}{x^2 + \eta^2}, \quad \text{або після інтегрування}$$

$$u = -\frac{\varepsilon F}{2\pi G_{12}} \ln(x^2 + \eta^2) + A, \quad (17.36)$$

де A – стала величина.

Для визначення сталої A необхідно допустити, що деяка точка осі $x-iv$ на глибині d від початку координат не має вертикального переміщення. Тоді з рівняння (17.36) знаходимо

$$A = \frac{\varepsilon F}{\pi G_{12}} \ln d.$$

Знайдемо вертикальне переміщення півплощини вздовж осі $x-iv$ на відстані x від початку координат

$$u_0 = \frac{\varepsilon F}{\pi G_{12}} \ln \frac{d}{x}. \quad (17.37)$$

З отриманої формули видно, що переміщення півплощини в точці прикладання зосередженої сили F має особливість та прямує до нескінченності. Ця недоречність виникає в результаті деякої ідеалізації постановки задачі. Вона зникне, якщо зосереджену силу F розподілити вздовж деякої малої (dy) ділянки півплощини.

З формул (17.31), (17.32) знаходимо напруження у півплощині:

$$\sigma_x = -\frac{F}{\pi\varepsilon} \cdot \frac{x}{x^2 + \eta^2}; \quad \sigma_y = 0; \quad (17.38)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{F}{\pi} \cdot \frac{\eta}{x^2 + \eta^2}.$$

З аналізу формул (17.38) видно, що дотичне напруження τ_{xy} не дорівнює нулю, як вимагають умови (17.29), але цей результат узгоджується з концепцією пограничного шару тому, що τ_{xy} має більший порядок малості у порівнянні з σ_x , котре має множник $1/\varepsilon$.

Для ізотропної півплощини розв'язки даної задачі знайдені французьким вченим А. Фламаном (1892) інтегруванням бігармонічного рівняння (17.23). Отримані ним формули для напружень відрізняються від формул (17.38) множником $x^2/(x^2 + y^2)$, який для максимальних напружень $\sigma_i (y=0)$ рівний одиниці.

17.5. Вплив анізотропії на концентрацію напружень в ортотропній пластині з круговим ядром

Розглянемо ортотропну пластинку з круглим отвором, у який впаяне без натягу кругове ядро того ж діаметру, але з іншого ортотропного матеріалу, пружного або абсолютно жорсткого (рис. 17.3, а).

Вважається, що головні напрямки пластинки і пружного ядра паралельні до сторін пластинки, протилежні сторони якої навантажені рівномірно розподіленими нормальними зусиллями p . Необхідно знайти вирази для напружень в пластині на межі спаю її з ядром, а також дослідити вплив анізотропії на ці напруження. Вперше ця задача розв'язана С.Г. Лехніцьким (1954). Вирази для напружень у випадку, коли ядро є пружним, має досить складний вигляд. Але для випадків, коли ядро абсолютно жорстке, або має нульову жорсткість (отвір, задача Кірша), формули для напружень значно спрощуються і в характерних точках *нескінченної* пластини можуть бути записані тільки через відношення пружних сталей.

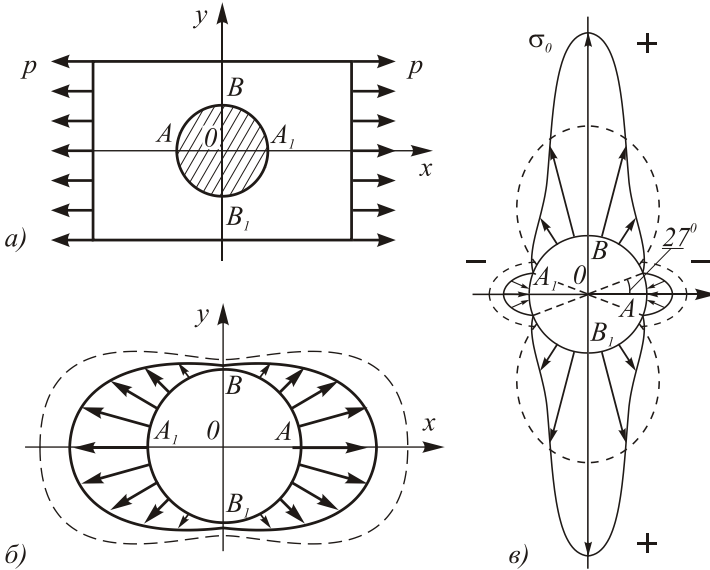


Рис. 17.3

Наприклад, для випадку жорсткого ядра, вирази для напружень у точках перетину лінії контуру отвору і головних осей пружності (A, A_1, B, B_1) мають вигляд:

$$(\sigma_r)_A = \frac{p}{\Delta'}(k + 2\bar{m} + n_0 + \nu_{21}), \quad (\sigma_\theta)_A = \nu_{12}(\sigma_r)_A; \quad (17.39)$$

$$(\sigma_r)_B = \frac{p}{\Delta'}(1 - \nu_{12}k(1 + n_0)), \quad (\sigma_\theta)_A = \nu_{21}(\sigma_r)_B,$$

$$\text{де } \Delta' = E_1/G_{12} + k(1 - \nu_{12}\nu_{21}), \quad n_0 = \sqrt{2(k + \bar{m})}, \quad k = \sqrt{E_1/E_2}, \\ \bar{m} = E_1/(2G_{12}) - \nu_{21}.$$

Для випадку нескінченної пластини з круглим отвором (без ядра) напруження σ_θ в точках A, A_1 та B, B_1 можна записати в наступному вигляді:

$$\sigma_\theta = p \cdot k_A, \quad \sigma_\theta = p \cdot k_B \quad (17.40)$$

де $k_A = -1/k$, $k_B = 1 + n_0$ – коефіцієнти, що характеризують концентрацію напружень і їх можна назвати коефіцієнтами концентрації.

В табл. 17.1 наведені числові значення напружень на контурі отвору в пластині із березової дикти з круглим жорстким ядром і з пружним ядром, у якого характеристики жорсткості вдвічі менші. Для порівняння в останньому стовпчику приведені значення відносних напружень σ_{\ominus}/p для пластинки з круглим отвором.

Таблиця 17.1

α°	Жорстке ядро		Пружне ядро		Круглий отвір
	σ_{\ominus}/p	σ_r/p	σ_r/p	σ_{\ominus}/p	
0	0,044	1,237	0,841	-0,062	-0,707
45	0,516	0,698	0,413	0,488	0,404
90	0,003	0,0039	-0,016	1,684	5,453

В табл. 17.1 кути $\alpha = 0^{\circ}$ і $\alpha = 90^{\circ}$ відповідають точкам А, А₁ та В, В₁, відповідно.

На рис. 17.3, б показано графіки розподілу напружень σ_r по краю отвору в пластині з березової дикти ($E_1/E_2 = 2$, $E_1/G_{12} = 17$, 14 , $\nu_{21} = 0,071$). Суцільна лінія – розподіл напружень в пластині з пружним ядром, пунктирна – випадок абсолютно жорсткого ядра.

Аналіз результатів, приведених в таблиці та на рисунку, показує, що найбільшим розтягальним напруженням в пластинці з жорстким ядром $-\sigma_r = 1,237p$, яке виникає на кінці діаметра, паралельного розтягальним зусиллям. Разом з тим, для ізотропного матеріалу ($k = 1$, $n_0 = 2$, $\nu = 0,3$) це ж напруження буде дещо більшим $-\sigma_r = 1,51p$.

При відсутності ядра, найбільшим напруженням у пластині є напруження $\sigma_{\ominus} = 5,453p$, що виникає на кінцях діаметра, перпендикулярного до напрямку розтягальних напружень (рис. 17.3, в). Для ізотропного матеріалу (штрихова лінія) воно буде значно меншим $-\sigma_{\ominus} = 3p$.

Таким чином, з одержаних результатів можна зробити висновок, що у більшості випадків анізотропія матеріалу збільшує концентрацію напружень в елементах конструкцій.

Разом з тим, її можна і значно зменшити, якщо правильно вибрати орієнтацію головних осей анізотропії та напрямків навантаження. Наприклад, якщо цю ж саму пластинку з отвором розтягувати у напрямку, для якого модуль Юнга найменший, то напруження в точках A і A_1 будуть рівними

$$\sigma_{\ominus} = -1,41p,$$

а в точках B і B_1

$$\sigma_{\ominus} = 4,15p.$$

Ще меншим буде коефіцієнт концентрації напружень, якщо розтягувати пластинку під кутом 45° до головних напрямків анізотропії. У цьому випадку

$$\sigma_{\ominus} = 3,3p,$$

що дуже мало відрізняється від відповідного значення для ізотропної пластини.

17.6. Розрахунок безмоментних оболонок, армованих волокнами

У багатьох задачах, що вимагають визначення деформацій в оболонкових елементах інженерних конструкцій (котлах,

резервуарах, куполах будівель) , напруженням згину можна знехтувати, враховуючи лише ті напруження, що виникають за рахунок деформації серединних поверхонь оболонок. Тобто, в таких оболонках залишаються невідомими тільки розтягальні або стискувальні зусилля N_{α} та N_{β} , а також зсувне зусилля –

$N_{\alpha\beta}$. Їх ще називають *мембранними зусиллями*, а теорію

оболонок, що нехтує згинальними напруженнями (рис.17.4, а), називають *мембранною теорією*. Такий напружений стан стає можливим, якщо сама оболонка та навантаження, що діють на неї, є осесиметричними. Граничні умови також мають бути такими, аби край оболонки міг вільно переміщатися по дотичній до її поверхні. Сама поверхня оболонки має бути повільно змінною, без перегинів та жорстких закріплень. Нормальні та дотичні напруження, що виникають у “безмоментних” облонках, вважаються рівномірно розподіленими по товщині:

$$N_{\alpha} = \sigma_{\alpha} \cdot h; \quad N_{\beta} = \sigma_{\beta} \cdot h; \quad N_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta} \cdot h. \quad (17.41)$$

Нормальні зусилля N_α , N_β оболонки задовольняють рівнянню Лапласа

$$\frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\beta}{R_\beta} = q, \quad (17.42)$$

де R_α , R_β – радіуси кривин серединної поверхні оболонки q – внутрішній тиск, що діє на стінки оболонки.

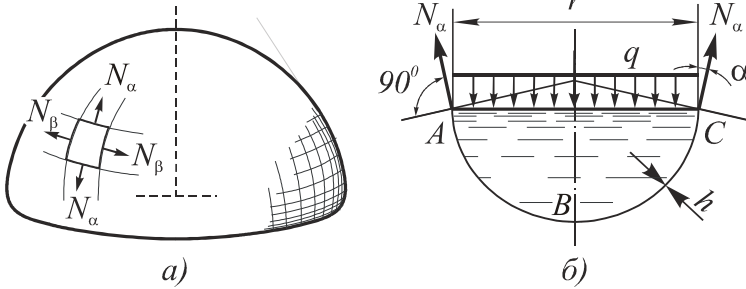


Рис. 17.4

Рівняння (17.42) встановлює залежність між двома зусиллями – N_α та N_β . Оскільки невідомих зусиль два, то для їх визначення одного рівняння недостатньо. Тому, можна додатково розглянути рівновагу довільної скінченної частини ABC оболонки (рис. 17.4, б)

Вздовж контуру перерізу AC оболонки (по радіусу r) діють лінійні зусилля N_α . Сумарне вертикальне зусилля від дії N_α спрямоване вгору і дорівнює $2\pi r \cdot N_\alpha \cdot \cos \alpha$, де α – кут нахилу меридіанної кривої до осі резервуара. Вертикально вниз діють: зовнішній тиск $q \cdot \pi r^2$ та вага Q відрізаної частини резервуара (разом із рідиною чи сипкою речовиною).

Тоді з умови рівноваги

$$2\pi r N_\alpha \cdot \cos \alpha - q\pi r^2 - Q = 0$$

знаходимо

$$N_\alpha = \frac{qr}{2 \cos \alpha} + \frac{Q}{2\pi r \cos \alpha}. \quad (17.43)$$

Якщо на оболонку діють дотичні зусилля або крутні моменти, то для них також можна скласти відповідне рівняння рівноваги.

Нормальні деформації ε_α , ε_β оболонки, якщо її матеріал вважається ортотропним, знаходяться із відповідних рівнянь закону Гука (17.7), коли в останніх покласти напруження $\sigma_z = 0$:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E_1 h} (N_\alpha - \nu_{21} N_\beta); \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{E_2 h} (N_\beta - \nu_{12} N_\alpha). \quad (17.44)$$

Тобто, вважається, що матеріал оболонки знаходиться в плоскому напруженому стані.

Для замкнутої сферичної оболонки у всіх її точках будуть діяти однакові зусилля: $N_\alpha = N_\beta = \frac{1}{2} qR$.

Тоді

$$\varepsilon_\alpha = \frac{qR}{2E_1 h} (1 - \nu_{21}); \quad \varepsilon_\beta = \frac{qR}{2E_2 h} (1 - \nu_{12}). \quad (17.45)$$

При проектуванні резервуарів з волокнистих композитів, що знаходяться під тиском, необхідно знати систему діючих навантажень та їх точні напрямки. В найпростішому випадку задача полягає в тому, щоби надати таку орієнтацію армованим волокнам, яка б забезпечила опір навантаженням у найнебезпечніших напрямках. На практиці прийнято вважати, що такими напрямками є напрямки головних напружень. Якщо напрямок дії головних напружень відхиляється від напрямку армування, то міцність такого матеріалу змінюється за складним законом зміни механізму руйнування. Досліджено, що для малих кутів розоорієнтування (в межах декількох градусів) спостерігається деяке підвищення міцності. У разі подальшого збільшення кута φ , міцність композитного матеріалу контролюється руйнуванням у площинках, паралельних до волокон і тому знижується, досягаючи мінімуму за $\varphi = 45^\circ$. Далі знову буде йти незначне зміцнення, що контролюється міцністю матриці ($\sigma_{мц,м}$) та напруженням зчеплення матриці ($\tau_{мц,м}$) й армувального волокна. В цьому випадку –

$\varphi_{кр} = \arctg(\sigma_{мц,м}/\tau_{мц,м})$, де відношення $\sigma_{мц,м}/\tau_{мц,м}$ може бути різним. Але, для деяких матеріалів, його можна вважати рівним 2. Тоді $-\varphi_{кр} \approx 55^\circ$.

Для армованих матеріалів оболонки армувальні елементи можуть бути як одномірними (волокна, нитки), так і двомірними (тканини, мембрани). Тому, з достатньою точністю можна вважати, що такі матеріали задовольняють рівнянням узагальненого закону Гука для ортотропного матеріалу.

Для спрощення розрахунків іноді приймають, що оптимальне розміщення волокон приведе до квазіізотропного типу конструкції, коли шари випрямлених волокон, укладених під різними кутами, утворюють квазімонокотропний матеріал з ефективним модулем пружності E та коефіцієнтом Пуассона ν .

Для визначення цих характеристик допускається, що між матрицею і волокнами існує жорсткий зв'язок, а їх сумісна деформація підпорядковується закону Гука. У найпростішому випадку однонапрявленого композиційного матеріалу, армованого безперервними паралельними волокнами, поздовжній модуль пружності у напрямку вздовж волокон та ефективний коефіцієнт Пуассона в площині армування, розраховують за правилом сумішей або рівнянням адитивності:

$$\{E, \nu\} \approx \{E_v, \nu_v\} V_v + \{E_m, \nu_m\} V_m = \{E_v, \nu_v\} V_v + \{E_m, \nu_m\} (1 - V_v), \quad (17.46)$$

де V_v, V_m – об'ємні частки матеріалів волокна та матриці.

Для такої квазіізотропної замкнутої сферичної оболонки, що знаходиться в плоскому напруженому стані, залежність між напруженнями і деформаціями буде мати вигляд

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma = [E/(1-\nu)] \cdot \varepsilon. \quad (17.47)$$

Якщо волокна дуже жорсткі, порівняно із матрицею ($E_v \gg E_m$), то згідно складніших досліджень Халфіна, Джерани

та Уїтні (1973) можна вважати, що $E \approx \frac{1}{3} V_v E_v$, $\nu \approx \frac{1}{3}$.

Тоді з формул (17.45) та (17.47) одержимо

$$\varepsilon = qR/(V_v \cdot h \cdot E_v). \quad (17.48)$$

Тепер, при відомих уже деформаціях однонаправленого шару, можна застосувати критерій максимальних деформацій. Названий критерій визначає, що граничний стан композиційного матеріалу настає у разі досягнення поточними деформаціями величин, що відповідають граничним деформаціям:

$$\varepsilon_{\max} \leq \varepsilon_{zp}^p; \quad \varepsilon_{\max} \leq \varepsilon_{zp}^c, \quad (17.49)$$

де ε_{zp}^p , ε_{zp}^c – граничні деформації волокна або матриці.

Якщо цей критерій відноситься до повного руйнування всіх волокон конструкції, то для визначення мінімально необхідної величини h сферичної оболонки необхідно у формулу (17.48) підставити граничну величину деформації волокон при руйнуванні $\varepsilon_{zp,\varepsilon}$

$$h = \frac{qR}{V_\varepsilon E_\varepsilon \varepsilon_{zp,\varepsilon}}. \quad (17.49)$$

Разом з тим, для більшості однонаправлених композитів при їх розтягу в напрямку, перпендикулярному до волокон, гранична деформація матриці $\varepsilon_{zp,m}$ набагато менша від граничної деформації $\varepsilon_{zp,\varepsilon}$, тому у формулу (17.44) необхідно підставити величину $\varepsilon_{zp,m}$. Це необхідно ще і тому, що деформація $\varepsilon_{zp,m}$ визначається станом розтріскування матриці, що для резервуарів високого тиску є критичною характеристикою працездатності виробу. Адже дифузія газів і парів, що відбувається через сітку мікроскопічних каналів, які створюються тріщинами, може привести до небажаних наслідків. Очевидно, що в цьому випадку волокна з меншою граничною деформацією руйнуються першими, а після того йде руйнування волокон з більшою граничною деформацією. Критерій максимальних деформацій, завдяки своїй простоті, має широке використання тільки для одномірних станів. Тому необхідно бути дуже обережним при використанні його у випадках багатомірних напружених чи деформованих станів.

1. *Розрахунок сферичного купола під дією розподіленого навантаження p (рис. 17.5, а), яке може бути власною вагою*

одиниці площі оболонки. При розрахунку такого купола за безмоментною теорією вважається, що в ньому виникають тільки нормальні зусилля (рис. 17.4, а), направлені за дотичними до його серединної поверхні.

Для розрахунку такої оболонки скористаємося рівнянням Лапласа (17.42), поклавши в ньому $q = -p \cos \varphi$ та $R_\alpha = R_\beta = R$.

Тоді

$$N_\alpha + N_\beta = -pR \cos \varphi. \quad (17.50)$$

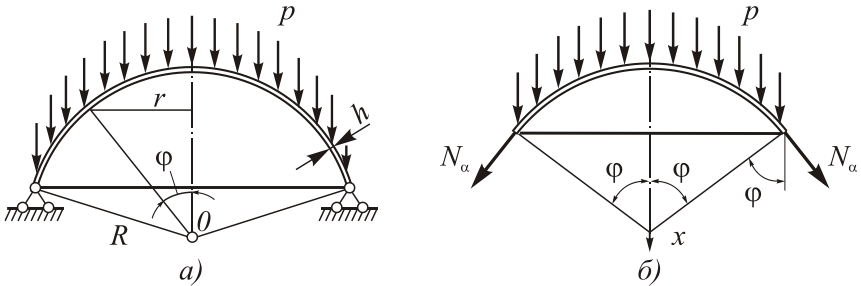


Рис. 17.5

Ще одне рівняння складемо, виходячи з умови рівноваги відсіченої частини купола (рис. 17.5, б)

$$pA + N_\alpha \cdot 2\pi r \sin \varphi = 0, \quad (17.51)$$

де $A = 2\pi RH$ – площа кульового сегмента, а $H = R(1 - \cos \varphi)$ – його висота.

Підставивши у рівняння (17.51) значення для величини A та H , визначимо величину зусилля

$$N_\alpha = -\frac{pR}{1 + \cos \varphi}. \quad (17.52)$$

Тоді

$$N_\beta = -pR \cos \varphi + \frac{pR}{1 + \cos \varphi} = pR \cdot \frac{\sin^2 \varphi - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}. \quad (17.53)$$

Аналіз формул (17.52), (17.53) показує, що для сферичного купола $\left(H = R, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right)$ меридіанне зусилля (напруження) N_α в усіх точках буде від'ємним, тобто

стискувальним. Воно буде плавно збільшуватись від вершини купола у напрямку до опор:

$$N_{\alpha}(\varphi=0) = -\frac{1}{2} pR; \quad N_{\alpha}(\varphi=\pi/2) = -pR.$$

Кільцеві зусилля N_{β} на вершині купола будуть від'ємними і дорівнюватимуть меридіанним. Тоді як на контурі вони отримують додатні значення і будуть максимальними та рівними, за модулем, меридіанним ($N_{\beta} = -N_{\alpha} = pR$). Для опору цим напруженням вздовж периметра купола передбачено спеціальні розпірні кільця. Тобто конструкція стає такою, що куполу передаються тільки вертикальні реакції опор, а горизонтальні гасяться розпірним кільцем, яке знаходиться в стані рівномірного тангенціального розтягу.

2. Розрахунок циліндричного балона, заповненого газом, тиск якого дорівнює q (рис. 17.6, а).

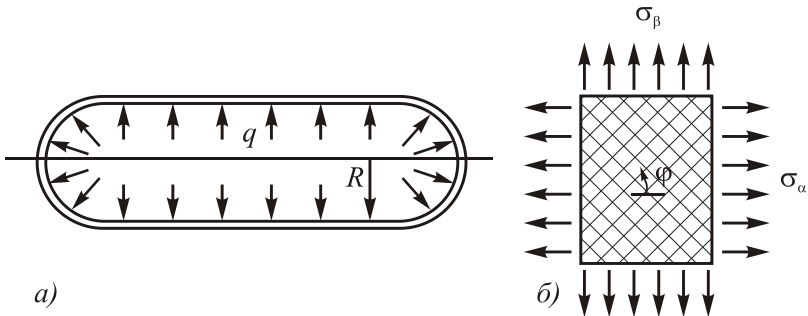


Рис. 17.6

У цьому випадку

$$R_{\alpha} = \infty; \quad R_{\beta} = R.$$

Тоді з рівняння (17.42) отримуємо, що $N_{\beta} = qR$. Для визначення зусилля N_{α} скористаємося рівнянням (17.43), де $Q = 0$, а $\cos \alpha = 1$. Отже

$$N_{\alpha} = \frac{1}{2} qR.$$

Виходячи із рівностей (17.41), знаходимо вирази для напружень:

$$\sigma_\alpha = \frac{qR}{2h}; \quad \sigma_\beta = \frac{qR}{h}. \quad (17.54)$$

Нехай армування циліндра здійснюється по гвинтовій лінії під кутом φ до осьової лінії (рис. 17.6, б). Крім того, будемо вважати, що напруження, які виникають у волокнах, є досить великими у порівнянні із іншими компонентами напружень. Тому, якщо у волокні буде виникати напруження σ , то його складові у напрямку твірної циліндра α та колової координати β можна визначити із рівнянь (17.17), де $\sigma_x \equiv \sigma$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma \cos^2 \varphi = \frac{qR}{2h}; \\ \sigma_\beta &= \sigma \sin^2 \varphi = \frac{qR}{h}. \end{aligned} \quad (17.55)$$

Об'єднання формул (17.55) дає: $\operatorname{tg}^2 \varphi = 2$, $\varphi \approx 55^\circ$, що відповідає попередньому результаті. З точки зору цього простого аналізу видно, що оптимальний кут намотування φ , очевидно, не співпадає з напрямком головних напружень. Крім того, оптимальна схема намотування для циліндричної частини балона не веде до оптимальної схеми намотування його днища. На практиці такі балони спочатку намотуються з дуже малим кутом φ , який дозволяє сформуванню одночасно як циліндричну частину, так і днище. Далі, витками волокон, укладених по колу, покривається циліндрична частина для забезпечення додаткової жорсткості, що необхідна для опору коловим напруженням. Таким способом виготовляли корпуси для двигунів ракет на твердому паливі, де на циліндри з високоміцної сталі поздовжньо-поперечним намотуванням наносили склопластик. Пізніше, у зв'язку із створенням високоміцних органічних волокон, стало можливим проектування і виготовлення конструкцій типу „кокон”, у яких бічна циліндрична частина і днище корпусу утворюється під час самого намотування і становлять єдине ціле. Загалом, ракети з двигунами типу “кокон” на 65% складаються з полімерних композиційних матеріалів. У перспективі цей відсоток має досягати 80%.

Аналіз закордонних джерел засвідчує, що в найближче десятиліття ХХІ ст. ми прийдемо до пластмасової ракети.

Разом з тим, при розрахунках таких конструкцій необхідно пам'ятати, що застосування методу граничних деформацій для гетерогенних матеріалів ще недостатньо вивчене і тому вимагає перевірки іншими критеріями міцності. В даному випадку йдеться про гетерогенні матеріали з дискретними фазами, що мають поверхню розмежування. Вважається, що фази, які складають гетерогенне середовище є однорідними та ізотропними. На противагу *еквівалентній гомогенності (квазіоднорідності)*, в *гетерогенних матеріалах* розрахунки проводяться для кожної фази окремо, а на границях кожної з них мусять використовуватись умови неперервності векторів напружень та переміщень. Разом з тим, для типових виробів із композитів, що складаються з багатьох тисяч або мільйонів окремих частинок чи волокон, такі розрахунки немислимі. Тому в попередніх розрахунках і вводилася гіпотеза про еквівалентну гомогенність, яка В.В. Болотіним названа *принципом розмазування*. Одержані, в результаті осереднення, ефективні властивості матеріалу – це ті ж властивості, які можна використовувати в розрахунках навантаженого тіла із композиту. Співвідношення між ефективними властивостями та реальними властивостями фаз у сукупності з розрахунком конкретних конструкцій якраз і є головною проблемою оптимізації матеріалів.

17.7. Проблеми підвищення конструкційної міцності композиційних матеріалів та сплавів

Для забезпечення надійної роботи елементів конструкцій їх необхідно наділити цілим комплексом механічних властивостей, які мають відповідати певному рівню низки показників матеріалу: високих значень характеристик міцності ($\sigma_{мц}$; $\sigma_{пл}$; σ_{-1}), пластичності (δ , ψ), ударної в'язкості (KC), енергетичного (K_{1C}) та деформаційного (δ_c) критеріїв тріщиностійкості, низького порогу холодноламкості ($T_{кр}$). Весь цей комплекс показників, що забезпечує працездатність

матеріалу в конкретній конструкції за даних умов експлуатації, називають *конструкційною міцністю*.

Якщо конструкційна міцність матеріалу зберігається у встановлених межах протягом певного часу експлуатації, то таку властивість конструкції називають *надійністю*. Разом з тим, *надійність* елемента конструкції визначається здатністю матеріалу протистояти раптовим перевантаженням при виникненні піків напружень, випадкових ударів тощо. Слід підкреслити, що згаданий вище комплекс характеристик матеріалу між собою дуже пов'язаний. Тому суттєве покращення однієї з них, майже завжди, веде до погіршення іншої. Наприклад, підвищення границі плинності сталі з величини $\sigma_{0,2} = 1000 \text{ МПа}$ до величини $\sigma_{0,2} = 2000 \text{ МПа}$ веде до зниження параметра тріщиностійкості від $K_{IC} = 120 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$ до $K_{IC} = 15 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$, а параметрів пластичності (δ, ψ) – на порядок нижчими. Тобто, використання такої високоміцної сталі для виробництва деталей машин, що працюють при складних напружених станах та ударних навантаженнях, може бути менш ефективним у порівнянні з використанням звичайних маловуглецевих сталей.

Табл. 17.2 (дані С.С. Дяченко)

Терм. обробка	$\sigma_{\text{мц}},$ МПа	$\sigma_{0,2},$ МПа	$\delta, \%$	$\psi, \%$	КС, Дж/см ²
Нормалізація	570	320	17	45	70
Гартування	1300	950	1	3	10
Гарт.+відпуск, 600°C	700	550	20	60	120

В табл. 17.2 наводяться механічні властивості сталі 40 після різної термічної обробки. Так, гартування сталі веде до значного підвищення границі міцності, при одночасному значному пониженні її пластичних характеристик: δ, ψ та ударної в'язкості КС (табл. 17.2), а значить і пониження конструкційної міцності. Разом з тим, гартування сталі 40 одночасно з високим відпуском хоча і понижує механічні

характеристики, зате значно підвищує пластичні показники та ударну в'язкість, а отже і конструкційну міцність.

З наведених прикладів видно, що підвищення конструкційної міцності металевих сплавів шляхом термообробки, дислокаційного, дисперсійного та зернограничного зміцнень є досить складною проблемою, але, на даний час, вже достатньо дослідженою. Разом з тим, у багатьох випадках (машинобудування, ракетобудування, прилади точної механіки) цих методів не вистачає для досягнення бажаної конструкційної міцності. Особливо це стосується таких показників, як питомі міцність $\sigma_{мц}/\rho$ та жорсткість E/ρ , котрі в металах значно вищі від тих, які мали би забезпечити вагову ефективність матеріалу. Тому сьогодні для вирішення цих проблем широке застосування знаходить метод створення композиційних матеріалів, де можливе одночасне підвищення характеристик міцності, пластичності і в'язкості руйнування при низьких параметрах питомої міцності та твердості.

Отримання високоякісних характеристик в композиційних матеріалах відбувається за рахунок поєднання компонент, одна із яких має високі пластичні показники (*матриця сплаву*), а інші (*наповнювачі* або *зміцнювачі*) високі характеристики міцності.

В композитних матеріалах в якості зміцнювачів використовують високоміцні та високожорсткі волокна (вуглецеві, металеві, борні, скляні, органічні, керамічні) або шари (тканини, стрічки, джгути). Показники міцності КМ (композиційного матеріалу з великою часткою армувальних волокон) у першому наближенні підпорядковані правилу адитивності

$$\sigma_{мц}^{KM} = \sigma_{мц}^M \cdot V_M + \sigma_{мц}^e \cdot V_e, \quad (17.56)$$

де $\sigma_{мц}^{KM}$, $\sigma_{мц}^M$, $\sigma_{мц}^e$ - середні границі міцності або тимчасові опори КМ, матриці та волокна, відповідно; V_M , V_e - об'ємні частки матриці та волокна.

У відповідності із законом адитивності (17.56), межа міцності та модуль Юнга зростають зі збільшенням об'ємної частки волокон у композиті. Такий ріст можна прослідкувати на

прикладі, композиту з алюмінієвою матрицею, де вплив вмісту волокон бору зведено в табл. 17.3 (за даними С. Дяченко)

Таблиця 17.3

Характеристики	$V_g, \%$			
	0	20	40	50
$\sigma_{мц}, МПа$	70...140	500...650	900...1140	1100...1400
$E, МПа$	$70 \cdot 10^3$	$135 \cdot 10^3$	$200 \cdot 10^3$	$230 \cdot 10^3$

З таблиці видно, що це зростання не є прямопропорційним.

Експериментальні дані для склопластика на полімерній основі показують, що максимальний вміст скловолкна, який забезпечує найбільшу міцність композита становить 65,7%. Перевищення цього відсотка призводить до нерівномірності навантаження волокон, росту пористості полімерної основи та великого розкиду властивостей пластика.

Таким чином, формула (17.56) справедлива тільки при умові сумісного деформування матриці та волокон. В реальних матеріалах це не виконується, тому, для більшої точності, доданки правої половини формули (17.56) домножують ще на відповідні коефіцієнти (менші від одиниці), котрі враховують можливі взаємні розорієнтування волокон або наявність залишкової пористості та внутрішніх напружень у матриці і т.д. Міцність дискретно армованих композиційних матеріалів описується більш складнішою формулою, яка залежить ще і від довжини волокон та їх діаметру.

Таблиця 17.4

Матеріал	$\gamma, т/м^3$	$\sigma_{мц}, МПа$	$\sigma_{num}, км$	$E_{num} \cdot 10^{-3}, км$
Сталь	7,8	1500	19	27
КМ Al -бор	2,6	1300	50	85
КМ Al -сталь	4,6	1700	37	24
Скловолкніт	2,0	2000	100	300

В табл. 17.4 наведені значення питомих міцностей та жорсткостей деяких металів та композиційних матеріалів у порівнянні з відповідними абсолютними границями міцності та густинами.

З наведених у таблиці даних видно, що легкі матеріали, навіть якщо їх міцність нижча, можуть мати питому міцність і жорсткість вищими у порівнянні з хоча і міцним, але важчим металом. Що стосується композиційних матеріалів з полімерною матрицею (скловолокніт, бороволокніт, органоволокніт), котрі мають густину в 3-4 рази меншу від металів, то їх питома міцності та жорсткості можуть на цілий порядок перевищувати відповідні характеристики металів. На виробництві часто використовують шаруваті волокнисті матеріали, в яких чергуються шари з різними властивостями. Наприклад, якщо листи високоміцної середньо-вуглецевої сталі з'єднати між собою пластичним нікелевим прошарком, то зразки такого композиту стають майже на порядок в'язкішими. Дослідження показали, що тріщина затримується вже біля першого м'якого прошарку.

Детальні підрахунки (С. Дяченко) показують, що заміна традиційних матеріалів на композитні знижує матеріалоємність приблизно в 2,5 рази при збільшенні надійності в експлуатації в півтора рази, а ресурсу експлуатації – втричі.

Вуглецеві склопластики є перспективними матеріалами для використання в будівництві у вигляді профілів, а неорієнтовані пластики застосовують у виробництві світлопрозорих покриттів для облицювання бетонних і залізобетонних конструкцій. Фірми „Форд” і „Крайслер” застосовують вуглепластики для виготовлення деталей автомобіля: кузова, шатунів, ресор, карданних валів тощо. Плитки на основі кварцового волокна були використані при створенні орбітального корабля „Буран” для виготовлення облицювальних плиток, що можуть витримувати високі температури до 1200° С.

Разом з тим, широкому використанню композиційних матеріалів заважає ще висока вартість армувальних волокон, яка, в першу чергу, пов'язана із застосуванням морально

застарілих технологій, що підлягають заміні на прогресивні. Тому, сьогодні в Україні (і в цілому світі) на перший план виходять новітні технології – одна з головних ланок технічного прогресу XXI століття.

Запитання для самоконтролю

1. Які матеріали називаються *ізотропними* і, які *анізотропними*?
2. Яка кількість пружних сталей у рівняннях узагальненого закону Гука для анізотропного тіла?
3. Які тіла називаються *ортотропними*?
4. Запишіть рівняння закону Гука для ортотропного матеріалу.
5. Запишіть рівняння узагальненого закону Гука для ізотропного матеріалу.
6. Як виражаються *пружні сталі* G і λ через модуль пружності E та коефіцієнт Пуассона ν ?
7. Який випадок напруженого та деформованого стану називають *плоскою задачею*?
8. Запишіть рівняння рівноваги в напруженнях для плоскої задачі.
9. Запишіть *рівняння нерозривності деформацій* для плоскої задачі.
10. Запишіть рівняння, якому задовольняє *функція напружень* E_i для ізотропного матеріалу.
11. Які записуються через функцію напружень E_i ?
12. Які матеріали називаються *гетерогенними*, а які *гомогенними*?
13. Який матеріал називається *композиційним*?
14. В чому полягає *концепція пограничного шару*?
15. Як впливає анізотропія матеріалу на *концентрацію напружень* у пластині з отвором?
16. Запишіть *рівняння Лапласа* для тонкостінної оболонки.
17. Запишіть *правило сумішей* для модуля пружності композиційного матеріалу.

18. Запишіть критерій максимальних деформацій для композиційного матеріалу.
19. Який комплекс показників матеріалу називають *конструкційною міцністю*?
20. Що таке *надійність* конструкції?

ТЕМА 18 (лекції 43-45) ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ РОЗРАХУНКУ ТОНКИХ ПЛАСТИН

18.1. Основні допущення. Класифікація пластин

Пластиною називають *призматичне циліндричне тіло*, висота якого h (рис. 18.1) значно менша від двох інших лінійних розмірів. Розрізняють *тонкі* та *товсті* пластини. Якщо товщина пластини h менша в 10 – 20 разів від згаданих розмірів, то така пластинка вважається *тонкою*. Якщо ж відношення товщини пластини до меншого з лінійних розмірів перевищує значення $1/3$ ($h/a > 1/3$), то таку пластину називають *товстою плитою*.

Площина xOy , що ділить пластину навпіл називається *серединною площиною*.

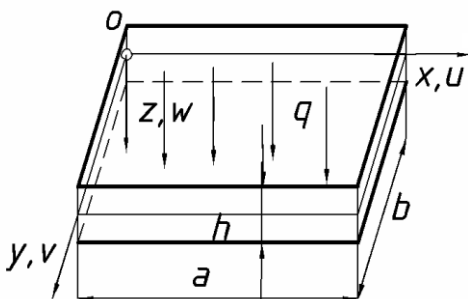


Рис. 18.1

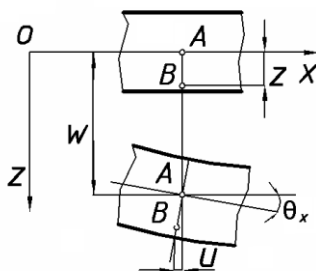


Рис.18.2

Переміщення пластини u напрямку кожної з осей координат позначимо латинськими буквами u, v, w , відповідно. Ці переміщення вважаються *додатними*, якщо вони відбуваються в додатному напрямку кожної з відповідних осей. Якщо вертикальні переміщення (прогини) w малі і задовольняють умову $w < h/5$, то для такої пластини, крім

загальних допущень теорії пружності, можна застосувати додаткові гіпотези, які називають *гіпотезами Кірхгофа* (1850р.).

1. Прямолинійний елемент, що перпендикулярний до серединної поверхні пластини (рис. 18.2), після деформації може тільки повертатися, залишаючись прямолинійним і перпендикулярним до неї. Довжина цього елемента залишається сталою.

2. Окремі шари пластини не тиснуть один на одного, тобто у всіх точках пластини нормальні напруження σ_z вважаються рівними нулю ($\sigma_z \approx 0$).

3. Розтягувальні або стискувальні деформації серединної поверхні xOy відсутні. Всі її точки одержують тільки вертикальні переміщення ($w = w(x, y)$).

У випадку *товстих плит*, коли $h > a/3$ (a – менший розмір плити) гіпотези Кірхгофа є неприйнятними і їх застосування веде до значних похибок у розрахунках. Гіпотези Кірхгофа підтверджуються частково тільки у випадку чистого згину ізотропних пластин, коли на їх краях діють розподілені згинальні моменти.

У випадку згину тонкої пластини поперечним навантаженням $q(x, y)$ гіпотези Кірхгофа не підтверджуються експериментальними дослідженнями. Разом з тим, точність розрахунків, проведених на основі прийнятих гіпотез, знаходяться у межах, що задовольняють проєктантів певного класу конструкцій.

18.2. Напруження, деформації та внутрішні зусилля в поперечних перерізах пластин

У зв'язку з тим, що згідно гіпотез Кірхгофа нормальне напруження σ_z в тонкій пластинці приймається рівним нулю, то напружений стан в ній можна вважати *плоским*. Нормальні напруження σ_x , σ_y та дотичне напруження τ_{xy} запишемо у вигляді закону Гука (7.12), (7.13):

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y);$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x); \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}, \quad (18.1.)$$

де $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ - залежності

Коші (7.12); E, μ - відповідно модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона.

Виходячи із гіпотез Кірхгофа, тангенціальні переміщення u і v довільної точки B (рис.18.2), що знаходяться на відстані z від серединної поверхні можна виразити через вертикальне переміщення w за допомогою формул:

$$u = -z \cdot \operatorname{tg} \theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} z; \quad v = -z \cdot \operatorname{tg} \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} z; \quad w = w(x, y), \quad (18.2)$$

де вважається, що через малість W справедливі рівності:

$$\operatorname{tg} \theta_x \approx \theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \operatorname{tg} \theta_y \approx \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Підставивши останні залежності для u, v в рівняння (18.1), одержимо:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ (18.3) \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

З аналізу формул (18.3) видно, що нормальні напруження σ_x, σ_y та дотичне напруження τ_{xy} , які виникають в пластині при її згині, змінюються лінійно по товщині і є функціями кривин $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ та деформації кручення $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$ серединної поверхні.

Так само, як і в теорії згину оболонки, в теорії згину тонких пластинок користуються рівняннями, де розрахунковими величинами є погонні моменти:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy} dz.$$

Підставивши в наведені формули вирази для напружень та здійснивши інтегрування, одержимо наступні вирази:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad (18.4)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$M_{xy} = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Тут $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$ - циліндрична жорсткість пластини.

Співставивши формули (18.3) і (18.4), видно, що вирази для напружень можна записати через відповідні моменти у наступному вигляді:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I} z; \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I} z; \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{I} z, \quad (18.5)$$

де $I = h^3/12$ - момент інерції смужки пластини одиничної ширини.

Таким чином, усі силові та деформаційні характеристики теорії згину тонких пластинок є функціями від вертикального переміщення $w(x, y)$, котре вважається сталим по всій товщині пластинки. Теорію згину тонких пластинок, що базується на гіпотезах Кірхгофа і має незалежним параметром тільки одну величину вертикального прогину w , називають ще *класичною теорією згину тонких пластинок*.

Теорії згину пластин, котрі враховують поперечні нормальні напруження σ_z , а також деформації поперечного

зсуву γ_{xz}, γ_{yz} , називають *некласичними теоріями тонких пластин типу Тимошенка*. В таких теоріях, крім вертикального переміщення, незалежними параметрами є ще й *кути зсуву* у поперечному напрямку. В некласичних теоріях, котрі враховують ще й *поперечне обтиснення*, вертикальні переміщення W вже є функціями, не тільки координат x, y , а й поперечної координати z . Тангенціальні переміщення u, v у цих випадках вже можуть бути нелінійними по відношенню до поперечної координати z . За допомогою *некласичних теорій пластин* вже можна розраховувати *пластини середньої товщини* ($0.1 \leq h < 0.3a$).

18.3. Основні рівняння згину пластинки

Для того, аби отримати основне розрахункове рівняння згину тонких пластинок використовують рівняння, одержані з умов рівноваги елемента пластинки (рис. 18.3).

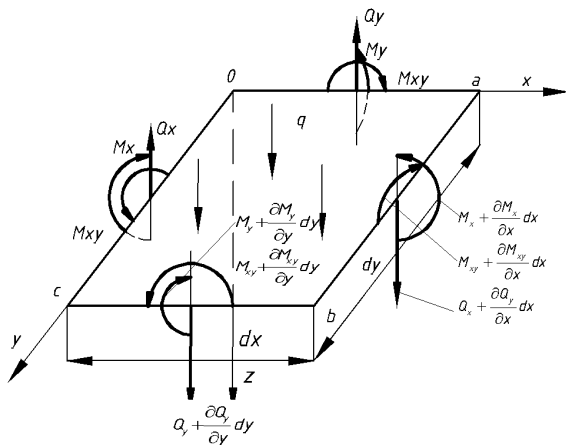


Рис. 18.3

Даний елемент знаходиться під дією поперечного навантаження $q(x, y)$, що зрівноважується поперечними силами Q_x, Q_y та згинальними і крутними моментами - M_x, M_y, M_{xy} . Склавши рівняння рівноваги моментів відносно осей x та y , та

рівняння проєкцій всіх сил на напрямок осі z , отримаємо наступну систему рівнянь рівноваги:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0; \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0; \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0.\end{aligned}\tag{18.6}$$

Систему рівнянь (18.6) можна отримати ще й іншим способом теорії пружності, проінтегрувавши певним чином систему рівнянь рівноваги Нав'є-Коші в напруженнях. Виключивши з системи рівнянь (18.6) поперечні сили Q_x і Q_y , одержимо наступне результуюче рівняння

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q.\tag{18.7}$$

Підставивши в рівняння (18.7) замість моментів M_x , M_y , M_{xy} їхні значення з (18.4), отримаємо наступну залежність:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}.\tag{18.8}$$

Дане рівняння згину тонких пластин називають ще *рівнянням Софі Жермен – Лагранжа*. Ці вчені були першими на початку XIX століття, хто записав його у такому вигляді. Через *оператор Лапласа* це рівняння записується у компактнішому вигляді:

$$D\Delta^2 w = q,\tag{18.9}$$

де $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа.

Таким чином, рівняння згину тонких пластин зводиться до одного диференціального рівняння (18.8), розв'язок якого, функція прогинів w , мусить задовольняти ще і граничним умовам на краях пластинки. Якщо для конкретної пластини

функція прогинів w знайдена, то далі за формулами (18.4) легко знайти згинальні та крутні моменти. На їх основі, з перших двох рівнянь рівноваги системи (18.6), знаходяться поперечні сили Q_x і Q_y :

$$Q_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) = -D \frac{\partial}{\partial x}(\Delta w);$$

$$Q_y = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right) = -D \frac{\partial}{\partial y}(\Delta w).$$
(18.10)

Знаючи величини моментів та поперечних сил, легко визначити також і найбільші та найменші значення напружень σ_x , σ_y , τ_{xy} в точках $z = \pm h/2$ за формулами:

$$\sigma_x^{\min} = \pm \frac{M_x}{W}; \quad \sigma_y^{\min} = \pm \frac{M_y}{W}; \quad \tau_y^{\min} = \pm \frac{M_{xy}}{W},$$
(18.11)

де $W = h^2/6$ - осьовий момент опору смужки одиничної ширини.

Для вертикальних дотичних напружень τ_{xz} і τ_{yz} справедливі формули (10.12)-(10.14); - коли $b = 1$:

$$\tau_{xz} = Q_x S / I; \quad \tau_{yz} = Q_y S / I.$$
(18.12)

де $S = h^2(1 - (2z/h)^2)/8$.

З формул (18.12) одержуємо максимальні дотичні напруження τ_{xz}^{\max} , τ_{yz}^{\max} , що виникають на серединній поверхні пластини ($z = 0$):

$$\tau_{xz}^{\max} = \frac{3Q_x}{2h}; \quad \tau_{yz}^{\max} = \frac{3Q_y}{2h}.$$
(18.13)

18.4. Граничні умови на краях пластинки

Інтегрування диференціального рівняння (18.8) веде до появи у його розв'язку двох невідомих сталих. Їх знаходять шляхом задоволення цього розв'язку двом граничним умовам на краю пластини. Ці умови еквівалентні граничним умовам на кінцях балки. Наприклад, якщо пластинка вільно спирається на

опори при $x=0; a$ (рис.18.4), то на цьому краю мають виконуватися наступні умови:

$$w=0; M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0. \quad (18.14)$$

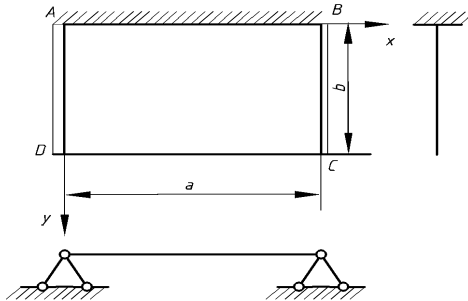


Рис. 18.4

Але в напрямку Oy край пластинки завжди залишається прямолінійним і його кривина $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \equiv 0$. В результаті, умови (18.14) вільного опертя пластинки по краях $x=0; a$ спрощуються до вигляду:

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (18.15)$$

Для випадку жорсткого закріплення краю $y=0$ пластинки граничні умови будуть наступними:

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (18.16)$$

Ще одним з найпоширеніших випадків граничних умов є умови для вільного краю пластинки. Нехай край $y=b$ пластинки є вільним від навантаження. Тоді на цьому краю повинні бути використовуватися три умови:

$$M_y = 0, \quad Q_y = 0, \quad M_{xy} = 0. \quad (18.17)$$

Тобто, тут одна з умов є зайвою. В цьому випадку Кірхгоф запропонував ввести замість двох останніх умов одну для фіктивної поперечної сили

$$Q_y^\phi = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0.$$

Підставивши в цю формулу замість Q_y і M_{xy} їх значення (18.4), (18.10) через переміщення w , одержимо:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0. \quad (18.18)$$

Разом із умовою $M_y = 0$, граничні умови Кірхгофа для вільного краю пластинки матимуть вигляд:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0. \quad (18.19)$$

Щодо граничних умов (18.19), то необхідно зауважити, що в точніших теоріях згину пластин, так званих *некласичних теоріях типу Тимошенка*, граничні умови вільного краю задовольняються у вигляді (18.17). Інші граничні умови на краях також мають три умови. Це пов'язано із тим, що теорії типу Тимошенка описуються системою диференціальних рівнянь шостого порядку, а не четвертого, як теорія Кірхгофа. Ці теорії побудовані на менш жорстких гіпотезах, ніж класична теорія Кірхгофа. Згадана некласична теорія частково враховує деформації поперечного зсуву. Тобто, *прямолінійний елемент, який спочатку був перпендикулярним до серединної поверхні пластини, після деформації вже перестає бути перпендикулярним, хоча і залишається прямолінійним*. Уточнення, які отримуються за допомогою теорії типу Тимошенка стають суттєвими тільки у випадках пластин із композитних матеріалів, де відношення модулів пружності для $E/G > 10$, або для пластин середньої товщини, де $h > 0.1a$.

Приклад. Розглянемо згин вільно опертої прямокутної пластини під дією поперечного навантаження. Одним із найпоширеніших аналітичних методів розрахунку таких

пластин є метод Нав'є. Суть метода, запропонованого 1820р., полягає в тому, що розв'язок рівняння $w(x, y)$ і навантаження $q(x, y)$ представляються у вигляді подвійних чи одинарних тригонометричних рядів Фур'є. Після підстановки таких представлень у розрахункове рівняння С. Жермен-Лагранжа невідомі коефіцієнти переміщення виражаються через коефіцієнти навантаження за допомогою алгебраїчних формул. Недоліком цього методу є те, що він використовується тільки у випадках, коли є вільне опертя пластини хоча би на двох протилежних краях.

Найпростішим частковим випадком розв'язку такої задачі методом Нав'є, є задача згину прямокутної вільно опертої на краях ($x = 0, a$; $y = 0, b$) пластини, навантаженої розподіленим навантаженням (рис.18.5), що змінюється в обох напрямках (x, y) за законом синуса:

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (18.20)$$

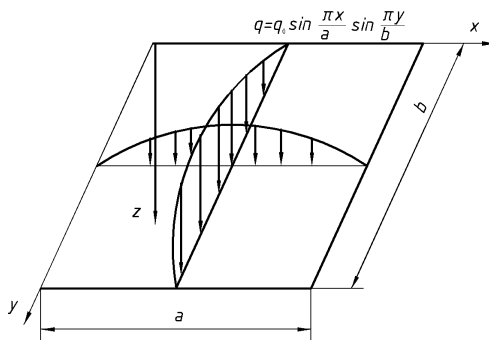


Рис. 18.5

Представимо функцію для прогину w у вигляді, який буде задовольняти умовам вільного опертя на краях пластини:

$$w = w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (18.21)$$

де w_0 - максимальний прогин в центрі пластини.

Підставивши вирази (18.20), (18.21) в диференціальне рівняння (18.8), отримаємо наступну рівність:

$$Dw_0 \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 = q_0,$$

з якої знайдемо

$$w_0 = \frac{q_0 a^4}{D\pi^4(1+k)^2}, \quad (18.22)$$

де $k = a^2/b^2$.

В результаті, прогин у довільній точці пластини має вигляд:

$$w = \frac{q_0 a^4}{D\pi^4(1+k)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Максимальні згинальні моменти в центрі пластини ($x = \frac{a}{2}$; $y = \frac{b}{2}$) знаходяться із формул (18.4), (18.3) у вигляді

$$M_x^{\max} = \frac{q_0 a^2(1+\mu k)}{\pi^2(1+k)^2}, \quad M_y^{\max} = \frac{q_0 a^2(k+\mu)}{\pi^2(1+k)^2}. \quad (18.23)$$

На основі третьої формули (18.4) та залежності (18.3) крутний момент у пластині змінюється за законом косинуса:

$$M_{xy} = -\frac{q_0 a^3(1-\mu)}{b\pi^2(1+k)^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b},$$

тому, на відміну від згинальних моментів, у центрі пластини він дорівнює нулю.

Поперечні сили в пластині описується наступними формулами:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) = \frac{q_0 a^2}{\pi(1+k)b} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b};$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) = \frac{q_0 a}{\pi(1+k)b} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (18.24)$$

Так само, як і крутні моменти, поперечні сили приймають максимальні значення на краях пластини. З аналізу формул отриманих для моментів та поперечних сил видно, що у випадку

коли коефіцієнт $k = a^2 / b^2$ прямує до нуля, держимо результати для довгої смужки (балки), у якій $M_{xy} = Q_y = 0$.

Отримавши вирази для моментів та поперечних сил за формулами (18.5), (18.12), легко знайти величини відповідних напружень у пластині.

18.5. Розрахунок круглих пластин

Формули, виведені для прямокутних пластин, легко застосувати і для круглих, якщо скористатися циліндричною системою координат $r\theta z$ (рис.18.6). У цьому випадку перехід від однієї системи до іншої для оператора Лапласа Δ має вигляд:

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$$

Тоді рівняння С. Жермен – Лагранжа для тонкої пластини можна записати в такому вигляді:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q}{D}. \quad (18.25)$$

Розглянемо тільки випадок осесиметричної задачі, коли навантаження та граничні умови не залежать від кутової координати θ .

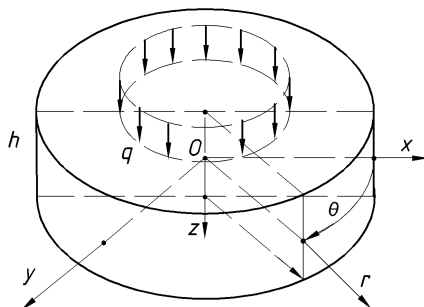


Рис. 18.6

Тоді одержане вище розрахункове рівняння значно спрощується до вигляду:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{q}{D},$$

або

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{q}{D}. \quad (18.26)$$

Вирази для згинальних моментів у полярній системі координат також неважко отримати, якщо вісь x направити в напрямку радіуса r . Тоді для осесиметричної задачі

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad a \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}$$

і згинальні моменти M_r, M_θ описуються наступними формулами:

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right); \quad (18.27)$$

$$M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right).$$

Крутний момент за умов симетрії дорівнює нулю.

Формули для поперечних сил у круглій пластині, так само як і в прямокутній, виводять із рівнянь рівноваги. Для випадку осьової симетрії поперечна сила $Q_\theta = 0$, а радіальна поперечна сила Q_r знаходиться із залежностей:

$$Q_r = M_\theta - \frac{d}{dr} (r M_r) = D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right). \quad (18.28)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (18.26) має вигляд:

$$w = \frac{qr^4}{64D} + C_1 r^2 + C_2 \ln \frac{r}{R} + C_3 r^2 \ln \frac{r}{R} + C_4, \quad (18.29)$$

де R – радіус пластини.

У тих випадках, коли пластина суцільна, коефіцієнти C_2, C_3 покладають рівними нулю, тому що в протилежному

випадку при $r=0$ прогин та моменти мали б бути нескінченними. В результаті, роз-в'язок (18.29) спрощується до вигляду

$$w = C_1 r^2 + C_4 + \frac{qr^4}{64D}. \quad (18.30)$$

Коефіцієнти C_1, C_4 знаходяться із умов на контурі пластини.

Розглянемо два випадки граничних умов:

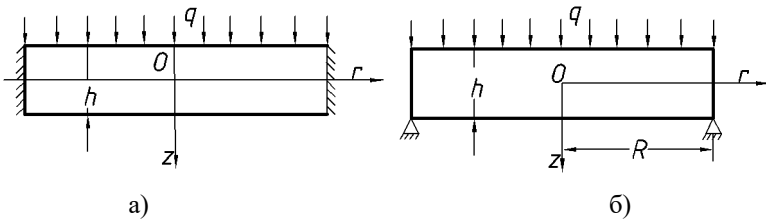


Рис. 18.7

а) Контур пластини жорстко закріплений (рис.18.7,а). Граничні умови на контурі ($r=R$) мають вигляд:

$$\frac{dw}{dr} = 0 \text{ та } w = 0. \quad (18.31)$$

з першої умови $\frac{dw}{dr} = 0$ знаходимо

$$C_1 = -\frac{qR^2}{32D}$$

Після підстановки коефіцієнта C_1 в рівняння $w(R) = 0$, знаходимо:

$$C_4 = \frac{qR^4}{64D}.$$

Таким чином, кінцевий вигляд для функції прогинів защемленої на контурі круглої пластини має вигляд:

$$w = \frac{qR^4}{64D} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2. \quad (18.32)$$

Аналіз формули (18.32) показує, що максимальний прогин такої пластини буде в центрі ($r = 0$) -

$$w_{\max} = \frac{qR^4}{64D}. \quad (18.33)$$

Знайдені за формулами вирази для згинальних моментів M_r, M_θ будуть:

$$M_r = \frac{qR^2}{16} \left[(1 + \mu) - (3 + \mu) \frac{r^2}{R^2} \right]; \quad (18.34)$$

$$M_\theta = \frac{qR^2}{16} \left[(1 + \mu) - (1 + 3\mu) \frac{r^2}{R^2} \right].$$

Значення моментів у защемленому краю пластини рівні:

$$M_r(R) = -\frac{qR^2}{8}; \quad M_\theta(R) = -\mu \frac{qR^2}{8}. \quad (18.35)$$

В центрі пластини розглядувані моменти будуть однаковими:

$$M_r(0) = M_\theta(0) = \frac{qR^2}{16} (1 + \mu).$$

і майже вдвічі меншими, ніж в області защемлення.

б) Контур пластини вільно опертий (рис.18.7,б); а граничні умови на контурі $r = R$ мають вигляд:

$$w = 0; \quad M_r = \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0. \quad (18.36)$$

Задовольнивши розв'язок (18.30) граничним умовам (18.36), знаходимо сталі C_1, C_4 :

$$C_1 = -\frac{3 + \mu}{1 + \mu} \frac{qR^2}{32D}; \quad C_4 = \frac{5 + \mu}{1 + \mu} \frac{qR^4}{64D}.$$

Таким чином, кінцевий вираз для переміщення вільно опертої круглої пластини має вигляд

$$w = \frac{qR^4}{64D} \left(\frac{5 + \mu}{1 + \mu} - \frac{6 + 2\mu}{1 + \mu} \frac{r^2}{R^2} + \frac{r^4}{R^4} \right). \quad (18.37)$$

Максимальний прогин в центрі пластини буде дорівнювати:

$$w_{\max} = \frac{qR^4}{64D} \frac{5 + \mu}{1 + \mu}. \quad (18.38)$$

Порівнюючи максимальний прогин круглої вільно опертої пластинки (18.38) та жорстко защемленої пластини, видно, що при вільному оперті її максимальний прогин збільшується приблизно в $4 \div 5$ раз (залежно від значення коефіцієнта Пуассона μ).

Використовуючи вирази (18.27) для визначення моментів M_r , M_θ та формулу (18.37), одержимо:

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{qR^2}{16} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)(3 + \mu); \\ M_\theta &= \frac{qR^2}{16} \left[(3 + \mu) - (1 + 3\mu) \frac{r^2}{R^2} \right]. \end{aligned} \quad (18.37)$$

В центрі пластини моменти M_r , M_θ будуть максимальними і рівними:

$$M_r^{\max}(0) = M_\theta^{\max}(0) = \frac{qR^2}{16} (3 + \mu). \quad (18.38)$$

Так само як прогини, максимальні моменти в вільно опертій пластині значно перевищують максимальні згинальні моменти у жорстко защемленій пластині. Тобто, защемлення круглої пластини по контуру значно знижує величину як прогинів, так і згинальних моментів.

Для визначення нормальних напружень σ_r, σ_θ у поперечних перерізах круглих пластин можна скористатися формулами (18.5):

$$\sigma_r = \frac{M_r}{I} z; \quad \sigma_\theta = \frac{M_\theta}{I} z. \quad (18.39)$$

Тоді нормальні напруження в центрі вільно опертої пластини визначаються за формулами:

$$\sigma_r(0, z) = \sigma_\theta(0, z) = \frac{3qR^2 z}{4h^3} (3 + \mu). \quad (18.40)$$

Для визначення напружень на зовнішніх поверхнях пластини необхідно покласти $z = \pm h/2$.

18.6. Некласичні теорії згину тонких пластин

Вище були наведені основні залежності, що стосувалися теорії тонких пластин, яка побудована на гіпотезах Кірхгофа. Використання цієї теорії, яку ще називають *класичною*, дозволяє розв'язувати з достатньою точністю більшість практичних задач теорії пружності для ізотропних пластин. Разом з тим, існує цілий клас задач, де пластини зазнають дії *локалізованих* та *контактних* навантажень, коли без врахування додаткових ефектів *поперечного зсуву та обтиснення* неможливо отримати більш - менш достовірних результатів. Ще одним напрямком розрахунку пластин, що вимагає застосування *некласичних* теорій, є розрахунок пластин з композитних матеріалів, армованих волокнами вуглецю, скла, графіту та іншими матеріалами, які мають високу питому міцність та жорсткість у поздовжньому напрямку, але низьку- у поперечному. Тому, для врахування згаданих факторів необхідні нові, *некласичні теорії*, за допомогою яких можна було б одержати розв'язки задач, котрі не можна одержати за допомогою *класичної* теорії.

Вперше, підходи до побудови таких теорій, а також і самі теорії для пластин і оболонки, були запропоновані С.П.Тимошенком (1921), Н.О.Кільчевським (1940), Е.Рейснером (1944), Б.Ф.Власовим (1957), С.А.Амбарцумяном (1958) та іншими. Серед багатьох варіантів теорій пластин найбільше поширення одержали теорії типу Тимошенка та теорія Е.Рейснера. В теорії типу Тимошенка (в основу якої лягли підходи С.П. Тимошенка) приймаються ті ж самі три гіпотези, що і в теорії Кірхгофа, за виключенням дещо зміненої першої гіпотези, яка вже не вимагає перпендикулярності прямолінійного елемента серединної поверхні після деформації. Дана гіпотеза записується наступним чином:

Прямолінійний елемент, що перпендикулярний до серединної поверхні пластини (рис. 18.2), після деформації може тільки повертатися; залишаючись прямолінійним, але не перпендикулярним до неї. Довжина цього елемента залишається сталою.

Тобто, замість співвідношень (18.2) для переміщень u, v , записуються більш загальні залежності:

$$u = \gamma_x \cdot z; \quad v = \gamma_y \cdot z; \quad w = w(x, y), \quad (18.41)$$

де γ_x, γ_y - називають узагальненими кутами повороту поперечних перерізів пластини (за $\gamma_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$ будемо мати перехід до співвідношень теорії Кірхгофа).

Залишаються справедливими і вирази (18.5), (18.12) для напружень:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \frac{M_x}{I} z; \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I} z; \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{I} z, \\ \tau_{xz} = Q_x S / I; \quad \tau_{yz} = Q_y S / I, \end{aligned} \quad (18.42)$$

$$\text{де } \frac{S}{I} = \frac{3}{2h} (1 - (2z/h)^2).$$

Вирази для згинальних M_x, M_y та крутного M_{xy} моментів, а також поперечних сил Q_x, Q_y у цих формулах, уже виражаються через узагальнені кути поворотів γ_x, γ_y та переміщення w .

$$\begin{aligned} M_x = D \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right); \quad M_y = D \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right); \\ M_{xy} = \frac{1}{2} D (1 - \mu) \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \right); \\ Q_x = k' Gh \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_x \right); \quad Q_y = k' Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \gamma_y \right), \end{aligned} \quad (18.43)$$

Тут $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$; $k' = \frac{5}{6}$ – так званий коефіцієнт зсуву, який

залежить від прийнятого закону розподілу дотичних напружень τ_{xz}, τ_{yz} . В теорії згину типу Тимошенка та в низці інших неklasичних теорій приймається, що ці дотичні напруження змінюються за законом квадратної параболи.

Підставивши значення внутрішніх зусиль $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$ у систему рівнянь рівноваги (18.6), одержимо систему розрахункових рівнянь для визначення невідомих γ_x, γ_y та w :

$$\Delta\gamma_x + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\gamma_y}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_x}{\partial y} \right) = \frac{k'Gh}{D} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_x \right);$$

$$\Delta\gamma_y + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\gamma_x}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_y}{\partial x} \right) = \frac{k'Gh}{D} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \gamma_y \right);$$

(18.44)

$$\frac{\partial\gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_y}{\partial y} + \Delta w = -\frac{q}{k'Gh}.$$

Одержана система рівнянь є значно складнішою (у порівнянні з теорією Кірхгофа) для інтегрування. Тому, шляхом певних підстановок для кутів повороту перерізів:

$$\gamma_x = -\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w_\tau}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \gamma_y = -\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_\tau}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial x},$$

одержимо нову систему рівнянь з новими невідомими w_τ та Ω .

$$D\Delta\Delta w = q - \varepsilon\Delta q; \quad (18.45)$$

$$D\Delta w_\tau = -\varepsilon q; \quad \Delta\Omega - k^2\Omega = 0, \quad (18.46)$$

де $\varepsilon = \frac{0,1h^2}{(1-\mu^2)} \frac{E}{G}$; $k^2 = \frac{2}{\varepsilon(1-\mu)}$, w_τ - складова вертикального

переміщення серединної поверхні від дії деформації поперечного зсуву; Ω - вихрова складова деформації поперечного зсуву.

Одержана система рівнянь відрізняється від розрахункового рівняння класичної теорії тонких пластин вищим, шостим (гармонічне рівняння для визначення w_τ не є незалежним), сумарним порядком диференціальних рівнянь та наявністю параметра ε , який є результатом врахування деформації поперечного зсуву. Для класичної теорії цей параметр дорівнює нулю, бо вважається, що поперечна жорсткість тонкої пластини

є нескінченно великою ($G \rightarrow \infty$), тому відношення E/G має дорівнювати нулеві. Крім цього, наявність додаткових рівнянь (18.46) для *некласичної* теорії дозволяє їй задовольнити трьом граничним умовам на краю пластини замість двох – для класичної теорії. Останнє дозволяє повністю задовольнити умови (18.17) для вільного краю пластини без введення фіктивної поперечної сили $Q_{x,y}^0$. Наприклад, умови (18.16) жорсткого закріплення краю пластинки $y = 0$ будуть мати вигляд

$$w = 0, \gamma_x = 0, \gamma_y = 0. \quad (18.47)$$

Також трьома умовами, а не двома як у (18.14), будуть задовольнятися і умови вільного опертя краю пластинки $x = 0; a$:

$$w = 0; M_x = 0; M_{xy} = 0. \quad (18.48)$$

Крім наведених, “класичних”, умов уточнені теорії допускають більшу варіативність граничних умов на краях пластинок, ніж це допускає теорія тонких пластинок Кірхгофа.

Ще однією, досить поширеною, *некласичною* терією тонких пластин є теорія Е.Рейснера. Дана теорія у якості *першої* гіпотези бере співвідношення (18.42), замість *другої* гіпотези приймається, що нормальні напруження $\sigma_z \neq 0$ і змінюються по товщині за законом кубічної параболи. *Третя* гіпотеза залишається такою ж як і в теорії типу Тимошенка. Розрахункові рівняння та граничні умови залишаються у вигляді (18.45) - (18.48), тільки в бігармонічному рівнянні (18.45) параметр ε необхідно замінити на новий параметр

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{0,1h^2}{(1-\mu^2)} \left(\frac{E}{G} - \mu(1+\mu) \right),$$

що є результатом впливу нормальних

напружень σ_z . Разом з тим, і класична теорія, і обидві некласичні дотримуються гіпотези лінійного розподілу за товщиною і деформацій, і напружень. Тому, розглянуті некласичні теорії дозволяють уточнити тільки величину вертикальних переміщень w , залишаючи без змін, або майже без змін (теорія Е.Рейснера), величини напружень σ_x, σ_y .

Наприклад, у задачі згину прямокутної пластини синусоїдальним навантаженням (п.18.4) переміщення w , знайдене за *некласичною* теорією, записується через переміщення, знайдене за *класичною* теорією $w_{\varepsilon\varepsilon}$ за допомогою наступної формули

$$w = w_{\varepsilon\varepsilon} (1 + 2\varepsilon\pi^2\dot{a}^2). \quad (18.49)$$

Величина уточнення переміщення w залежить від величини параметра $t = \frac{E h^2}{G a^2}$, який у випадку пластин з композитного матеріалу ($E/G = 20-100$) може досягати великих значень (див. табл. 18.1).

Табл. 18.1

t	0,05	0,1	0,2	0,5	1,0
$\frac{w}{w_{\varepsilon\varepsilon}}$	1,11	1,22	1,43	2,10	3,21

З аналізу даних, наведених у табл. 18.1, видно, що навіть для такого поширеного матеріалу як дерево ($E/G = 20$), за відношення $h/a = 0,1$, де параметр $t = 0,2$, переміщення пластини, порашовані за класичною теорією будуть занижені в 1,43 рази. А для таких матеріалів як епоксидні графітопластики ($E/G = 50$) відповідні похибки, коли $h/a = 0,1$ і $h/a = 1/7$, будуть ще більшими (п'ятий та шостий стовпці).

Для уточнення *напруженого стану* в тонкій пластині користуються некласичними теоріями С.О.Амбарцумяна, Б.Ф.Власова, Х.М.Муштарі, В.Г.Піскунова, А.О.Расказова та іншими, котрі враховують нелінійний розподіл нормальних напружень σ_x, σ_y та переміщень u, v за товщиною пластини. Методи побудови цих теорій приблизно такі самі, як і методи побудови теорій згину типу Тимошенка та Е.Рейсснера, коли постулюються закони зміни напружень чи переміщень за товщиною (метод гіпотез), а невідомі функції в площині пластини шукаються з рівнянь рівноваги, або певними варіаційними методами. Більшість теорій цієї групи, крім

деформацій поперечного зсуву, враховують ще і деформацію поперечного обтиснення ($\varepsilon_z \neq 0$). Останнє дозволяє одержувати ефективні розв'язки низки задач теорії пружності про контактну взаємодію пластин з жорсткими штампами. Без врахування деформації поперечного обтиснення одержати фізично коректні розв'язки таких задач неможливо.

Дослідимо вплив врахування фактора нелінійності розподілу нормальних напружень та переміщень на уточнене визначення цих напружень неklasичними теоріями тонких пластин, користуючись розв'язками попередніх задач про згин синусоїдальним навантаженням прямокутної пластини та рівномірно розподіленим навантаженням круглої пластини, що вільно оперті на краях. На основі рівнянь одної^{1,2} з таких неklasичних теорій нормальні напруження в центрі квадратної та круглої пластин можна визначати за допомогою наступних формул:

$$\sigma_x(z) = \frac{3qa^2z}{\pi^2h^3}(1+\mu) \left(1 + \frac{2\pi^2\tilde{\varepsilon}_1}{(1+\mu)a^2} \left(\frac{20z^2}{3\kappa h^2} - 1 \right) \right) - \frac{\mu q}{2(1-\mu)}; \quad (18.50)$$

$$\sigma_r(z) = \frac{3qR^2z}{4h^3}(3+\mu) \left(1 + \frac{2\tilde{\varepsilon}_2}{(3+\mu)R^2} \left(\frac{20z^2}{3h^2} - 1 \right) \right), \quad (18.51)$$

$$\text{де } \tilde{\varepsilon}_1 = 0,1h^2(2-3\mu); \quad \tilde{\varepsilon}_2 = \frac{0,1h^2}{(1-\mu)} \left(\frac{E}{G} - \mu(3+\mu) \right); \quad \kappa = \frac{2-3\mu}{2+\mu}.$$

Вирази у великих дужках із множниками $\tilde{\varepsilon}_1$, $\tilde{\varepsilon}_2$ даних формул є уточненнями, що появляються як результат врахування фактору нелінійності, а також впливу деформацій поперечного зсуву і обтиснення. Формула (18.51) повністю збігається з відповідною формулою теорії трансропних товстих плит С.Г.Лехніцького.

містяться в порівняльній табл. 18.2.

Ще одними методами побудови уточнених теорій пластин є методи редукції рівнянь тривимірної задачі теорії пружності до двовимірних рівнянь теорії пластин. До цих методів належать

методи розвинення компонент напружень та переміщень за товщиною (М.О.Кільчевський, І.Н.Векуа, Ш.К.Галімов, В.А.Сало, М.А.Сухорольський та інші) та асимптотичні методи І.І.Воровича, О.С.Космодаміанського, А.Л.Гольденвейзера і інших дослідників. Теорії, побудовані на цих методах, є більш громіздкими і складнішими, але їх уже можна використовувати для розрахунку *товстих плит* і їх результати вже можуть бути еталонними для попередньої групи неklasичних теорій тонких пластин.

Запитання для самоконтролю

1. При яких умовах пластину можна розглядати як тонку?
2. Що називається серединною поверхнею пластини?
3. Сформууйте гіпотези Кірхгофа.
4. Які залежності між напруженнями та деформаціями в плоскій задачі для ізотропного матеріалу?
5. Як записується згинальні та крутні моменти через переміщення W для ізотропної пластини?
6. Запишіть диференціальне рівняння згину тонких пластин S . Жермен-Лагранжа
7. В чому заключається ідея Нав'є розв'язування задачі для вільно опертих пластин?
8. Чому дорівнює прогин в центрі круглої пластини вільно опертої на контурі?
9. Чому дорівнює прогин пластин жорстко закріпленої на контурі?
10. Яка з пластин вільно оперта чи защемлена, буде мати більші згинальні моменти та переміщення?
11. Як записуються граничні умови для вільно опертої по контуру круглої пластинки?
12. Як записуються граничні умови задачі для жорстко защемленої по контуру круглої пластинки?
13. Як записуються граничні умови задачі для вільно опертої по контуру прямокутної пластини?
14. Як записуються граничні умови задачі для вільного краю прямокутної пластинки?

15. У якому вигляді записується переміщення довільної точки пластини?

16. Як записуються нормальні та дотичні напруження через моменти та поперечні сили в довільній точці пластини?

17. Чим відрізняються гіпотези Кірхгофа для тонкої пластини від гіпотез Тимошенка?

18. Запишіть систему рівнянь рівноваги пластини в зусиллях та моментах.

19. Як здійснюється перехід від рівнянь рівноваги в декартовій системі координат до рівнянь в полярній системі координат?

20. Запишіть розв'язок рівняння С. Жермен-Лагранжа для круглих пластин.

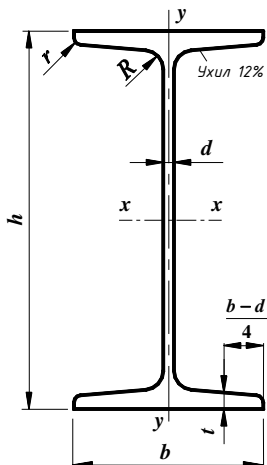
21. З якою метою будуються *некласичні* теорії тонких пластин?

22. Які додаткові чинники враховуються розрахунковими рівняннями *некласичних* теорій?

23. Які Ви знаєте методи побудови уточнених теорій пластин?

ДОДАТОК №1

Сортамент прокатної сталі (неповні дані)



- h – висота балки
- b – ширина полицки
- d – товщина стінки
- t – середня товщина полицки
- R – радіус внутрішнього закруглення
- r – радіус закруглення полицки
- I – момент інерції
- W – момент опору
- S – статичний момент половини перерізу
- i – радіус інерції

Таблиця 1. Балки двотаврові. ГОСТ 8240-89

№ профілю	Розміри, мм						Площа перерізу, см ²	Додаткові величини для осей						Вага 1 пог.м, кг	
								x-x				y-y			
	h	b	d	t	R	r		$I_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$I_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$		$i_y, \text{см}$
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,4
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7

Продовження табл. 1

№ профілю	Розміри, мм						Площа перерізу, см ²	Додаткові величини для осей						Вага 1 пог.м, кг	
								x-x				y-y			
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>	<i>R</i>	<i>r</i>		<i>I_x</i> , см ⁴	<i>W_x</i> , см ³	<i>i_x</i> , см	<i>S_x</i> , см ³	<i>I_y</i> , см ⁴	<i>W_y</i> , см ³		<i>i_y</i> , см
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	90	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	1430	159	7,50	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	1840	184	8,29	104	115	23,1	2,07	21,0
20a	200	100	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	2030	203	8,38	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22a	220	110	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,51	25,7
24	240	120	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	3460	289	10,0	163	198	34,5	2,39	27,3
24a	240	115	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,6
27a	270	125	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,79	33,9
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	135	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,96	39,2
33	330	145	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	140	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,0	13,0	15,0	6,0	71,4	18930	947	16,3	540	666	85,9	3,05	56,0
45	450	160	8,6	14,2	16,0	7,0	83,0	27450	1220	18,2	699	807	101	3,12	65,2

Продовження табл. 1

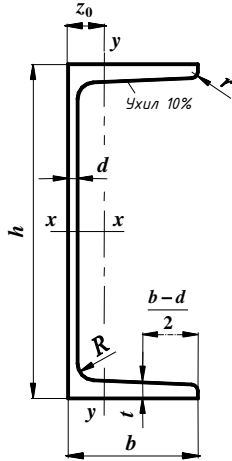
№ профілю	Розміри, мм						Площа перерізу, см ²	Додаткові величини для осей						Вага 1 пог.м, кг	
								x-x			y-y				
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>	<i>R</i>	<i>r</i>		<i>I_x</i> , см ⁴	<i>W_x</i> , см ³	<i>i_x</i> , см	<i>S_x</i> , см ³	<i>I_y</i> , см ⁴	<i>W_y</i> , см ³		<i>i_y</i> , см
50	500	170	9,5	15,2	17,0	7,0	97,8	39290	1570	20,0	905	1040	122	3,26	76,8
55	550	180	10,3	16,5	18,0	7,0	114	55150	2000	22,0	1150	1350	150	3,44	89,5
60	600	190	11,1	17,8	20,0	8,0	132	75450	2510	23,9	1450	1720	181	3,61	103,6
65	650	200	12,0	19,2	22,0	9,0	153	101400	3120	25,7	1800	2170	217	3,77	120,1
70	700	210	13,0	20,8	24,0	10,0	176	134600	3840	27,7	2230	2730	260	3,94	138,2
70а	700	210	15,0	24,0	24,0	10,0	202	152700	4360	27,5	2550	3240	309	4,00	158,6
70б	700	210	17,5	28,2	24,0	10,0	234	175300	5010	27,4	2940	3910	373	4,09	183,7

Додаток №2

Механічні характеристики чавуну

Марка чавуну	Границя міцності, МПа, при				Твердість за Брінеллем НВ	Границя витривалості, МПа, при	
	розтягання $\sigma_{мц}$	стискання $\sigma_{мц}$	згинальні $\sigma_{мц}$	кручення $\sigma_{мц}$		згинання $\sigma_{-1зг}$	кручення τ_{-1}
СЧ 15	150	650	320	240	163...229	70	50
СЧ 18	180	700	360	-	170...229	-	-
СЧ 21	210	750	400	280	171...241	100	80
СЧ 24	240	850	440	300	187...217	120	100
СЧ 28	280	1000	480	350	170...241	140	110
СЧ 32	320	1100	520	390	187...255	140	110
СЧ 35	350	1200	560	400	197...269	150	115
СЧ 38	380	1400	600	460	207...269	150	115
ВЧ 40-10	400	1600...1700	-	480...510	156...197	150...170	198
ВЧ 60-2	600	2040...2290	-	660...810	197...269	170...230	150...160

Примітка. Границя плинності $\sigma_{пл}$ для ВЧ 40-10 становить 300 МПа, а для ВЧ 60-2 – 420 МПа.



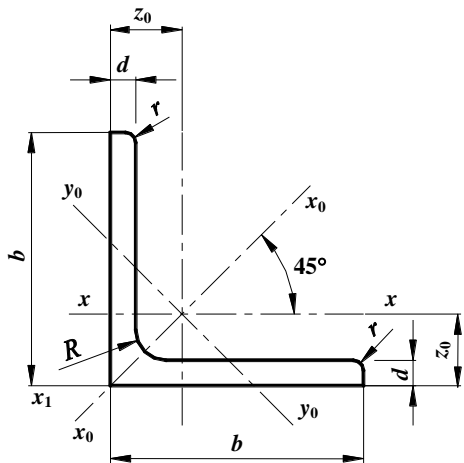
- h – висота швелера
 b – ширина полочки
 d – товщина стінки
 t – середня товщина полочки
 R – радіус внутрішнього закруглення
 r – радіус закруглення полочки
 I – момент інерції
 W – момент опору
 S – статичний момент половини перерізу
 i – радіус інерції
 z_0 – відстань від осі y - y до зовнішньої грані стінки

Таблиця 2. Швелери. ГОСТ 8240-89

№ профілю	Розміри, мм						Площа перерізу, см ²	Додаткові величини для осей							Вага 1 пог.м, кг	
								x - x				y - y				z_0 , см
	h	b	d	t	r	r_1		I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см		
5	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	22,8	9,12	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,69	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,76	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,9	174	34,8	4,00	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,56
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,3	304	50,7	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4

Продовження табл. 2

№ профілю	Розміри, мм						Площа перерізу, см ²	Додаткові величини для осей							Вага 1 пог.м, кг	
								x-x				y-y				z ₀ , см
	h	b	d	t	r	r ₁		I _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	S _x , см ³	I _y , см ⁴	W _y , см ³	i _y , см		
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,6	491	70,1	5,61	40,8	45,4	11,0	1,71	1,67	12,2
14a	140	62	4,9	8,7	8,0	3,0	17,0	545	77,9	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80	14,2
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	823	103	6,50	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,7	1090	121	7,26	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94	16,2
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	19,9	2,17	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,4	1520	152	8,06	87,8	113	20,4	2,20	2,07	18,4
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	4,0	25,2	1670	167	8,14	95,9	139	24,3	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,2	2,38	2,21	21,0
22a	220	87	5,4	10,2	10,0	4,0	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,6	2900	242	9,74	139	208	31,6	2,61	2,42	24,0
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	32,9	3180	265	9,83	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,6
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,7	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3



- b – ширина полички
 d – товщина полички
 R – радіус внутрішнього закруглення
 r – радіус закруглення полички
 I – момент інерції
 i – радіус інерції
 z_0 – відстань від центра ваги до зовнішньої грані стінки

Таблиця 3. Кутики рівнополичні. ГОСТ 8509-86

№ профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см^2	Додаткові величини для осей							Вага 1 пог.м, кг	
						$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1		z_0 , см
	$I_{x_0}, \text{см}^4$	$i_{x_0}, \text{см}$	$I_{x_0}, \text{см}^4$	$i_{x_0}, \text{см}$		$I_{y_0}, \text{см}^4$	$i_{y_0}, \text{см}$	$I_{x_1}, \text{см}^4$						
5,6	56	3,5			3,86	11,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50	3,03
		4	6	2	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,2	1,52	3,44
		5			5,41	16,0	1,72	25,4	2,17	6,59	1,10	29,3	1,57	4,25
6,3	63	4			4,96	18,9	1,95	29,9	2,46	7,81	1,25	33,1	1,69	3,89
		5	7	2,3	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,7	1,74	4,81

Продовження табл. 3

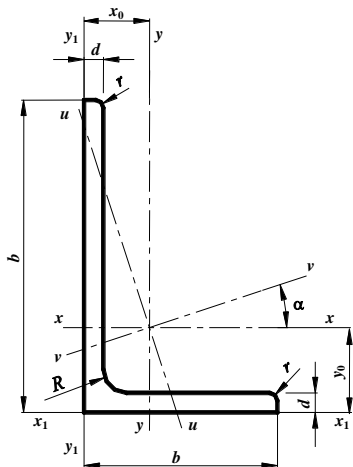
№ профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см ²	Додаткові величини для осей							Вага 1 пог.м, кг	
						$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1		z_0 , см
	b	d	R	r		I_{xx} , см ⁴	i_{xx} , см	I_{x_0} , см ⁴	i_{x_0} , см	I_{y_0} , см ⁴	i_{y_0} , см	I_{x_1} , см ⁴		
		6			7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,2	1,78	5,71
7	70	4,5			6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	50,9	1,88	4,87
		5			6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,39
		6	8	2,7	8,15	37,6	2,15	59,6	2,70	15,5	1,38	68,3	1,94	6,40
		7			9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,3	1,99	7,39
		8			10,7	48,2	2,12	76,4	2,67	20,0	1,37	91,9	2,02	8,40
7,5	75	5			7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,7	2,02	5,80
		6			8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	9	3	10,1	53,3	2,30	84,6	2,89	22,1	1,48	97,8	2,10	7,93
		8			11,5	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113	2,15	9,03
		9			12,8	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,47	127	2,18	10,0
8	80	5,5			8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,3	2,17	6,77
		6			9,38	57,0	2,47	90,4	3,10	23,5	1,58	102	2,19	7,36
		7	9	3	10,8	65,3	2,46	104	3,10	27,0	1,58	119	2,23	8,48
		8			12,3	73,4	2,44	116	3,07	30,3	1,57	137	2,27	9,66
9	90	6	10	3,3	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43	8,32

Продовження табл. 3

№ профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см^2	Додаткові величини для осей							Вага 1 пог.м, кг	
	b	d	R	r		x-x		x ₀ -x ₀		y ₀ -y ₀		x ₁ -x ₁		z ₀ , см
						$I_{xx}, \text{см}^4$	$i_{xx}, \text{см}$	$I_{x_0}, \text{см}^4$	$i_{x_0}, \text{см}$	$I_{y_0}, \text{см}^4$	$i_{y_0}, \text{см}$	$I_{x_1}, \text{см}^4$		
		7			12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47	9,66
		8			13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,78	194	2,51	10,9
		9			15,6	118	2,75	186	3,45	48,6	1,77	219	2,55	12,2
10	100	6,5			12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68	10,0
		7			13,8	131	3,08	207	3,87	54,2	1,98	232	2,71	10,8
		8			15,6	147	3,07	233	3,86	60,9	1,98	265	2,75	12,2
		10	12	4	19,2	179	3,05	284	3,85	74,1	1,96	333	2,83	15,1
		12			22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91	17,9
		14			26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99	20,6
		16			29,7	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06	23,3
11	110	7	12	4	15,2	176	3,40	279	4,28	72,7	2,19	309	2,96	11,9
		8			17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00	13,5
12,5	125	8			19,7	294	3,86	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9			22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	581	3,40	17,3
		10	14	4,6	24,3	360	3,85	571	4,85	149	2,48	649	3,45	19,1
		12			28,9	422	3,82	670	4,81	174	2,45	782	3,53	22,7

Продовження табл. 3

№ профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см ²	Додаткові величини для осей							Вага 1 пог.м, кг	
						$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1		z_0 , см
	b	d	R	r		I_{xx} , см ⁴	i_{xx} , см	I_{x_0} , см ⁴	i_{x_0} , см	I_{y_0} , см ⁴	i_{y_0} , см	I_{x_1} , см ⁴		
		14			33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	917	3,61	26,2
		16			37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,43	1051	3,68	29,7
14	140	9			24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	819	3,78	19,4
		10	14	4,6	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	910	3,82	21,4
		12			32,5	602	4,30	957	5,43	248	2,76	1096	3,90	25,5
16	160	10			31,4	774	4,96	1229	6,26	319	3,19	1355	4,30	24,6
		11			34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1495	4,35	27,0
		12			37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1634	4,39	29,4
		14	16	5,3	43,3	1046	4,91	1662	6,20	431	3,15	1911	4,47	34,0
		16			49,1	1175	4,89	1866	6,16	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18			54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20			60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4



B – ширина більшої полицки
 b – ширина меншої полицки
 d – товщина полицки
 R – радіус внутрішнього закруглення
 r – радіус закруглення полицки
 I – момент інерції
 i – радіус інерції
 x_0, y_0 – відстань від центра ваги до зовнішніх граней полицок

Таблиця 4. Кутики нерівнополичні. ГОСТ 8510-86

№ профілю	Розміри, мм					Площа перерізу, см^2	Додаткові велечини для осей								Кут нахилу до осі, $\text{tg}\alpha$	Вага пог.м, кг		
							$x-x$		$y-y$		x_1-x_1	y_1-y_1	$u-u$	$v-v$			Центр ваги	
	$I_{xx}, \text{см}^4$	$i_{xx}, \text{см}$	$I_{yy}, \text{см}^4$	$i_{yy}, \text{см}$	$I_{x_1}, \text{см}^4$		$I_{y_1}, \text{см}^4$	$I_{u}, \text{см}^4$	$I_{v}, \text{см}^4$	$x_0, \text{см}$	$y_0, \text{см}$							
6,3/4	63	40	4	7,0	2	4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	32,9	8,51	3,08	18,4	0,91	2,03	0,397	3,17
			4,98			19,9	2,00	6,26	1,12	41,4	10,8	3,72	22,4	0,95	2,08	0,396	3,91	
			5,90			23,3	1,99	7,28	1,11	49,8	13,1	4,35	26,2	0,99	2,12	0,393	4,63	

Продовження табл. 4

№ профілю	Розміри, мм					Площа перерізу, см ²	Додаткові величини для осей										Кут нахилу осі, α	Вага 1 пог.м, кг
							x-x		y-y		x ₁ -x ₁		y ₁ -y ₁		u-u			
	B	b	d	R	r		I _{xx} , см ⁴	i _{xx} , см	I _{yy} , см ⁴	i _{yy} , см	I _{x₁} , см ⁴	I _{y₁} , см ⁴	I _{uu} , см ⁴	I _{vv} , см ⁴	x ₀ , см	y ₀ , см		
			8			7,68	29,6	1,96	9,15	1,09	66,8	17,9	5,57	33,2	1,07	2,20	0,386	6,03
7/4,5	70	45	5	8	3	5,07	25,3	2,23	8,25	1,28	51,0	13,6	4,86	28,7	1,03	2,25	0,407	3,98
			5,59			27,8	2,23	9,05	1,27	56,9	15,2	5,35	31,5	1,05	2,28	0,406	4,39	
7,5/5	75	50	5	8,0	3	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	20,9	7,27	40,0	1,17	2,39	0,436	4,80
			7,25			40,9	2,38	14,6	1,42	84,1	25,2	8,46	47,0	1,21	2,44	0,435	5,69	
			9,47			52,4	2,35	18,5	1,40	113	34,3	10,8	60,1	1,29	2,52	0,430	7,43	
8/5	80	50	5	8,0	3	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	20,8	7,61	46,7	1,13	2,60	0,387	4,99
			7,55			49,0	2,55	14,8	1,40	102	25,1	8,81	55,0	1,17	2,65	0,386	5,93	
9/5,6	90	56	6	9,0	3,0	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	132	32,2	11,8	73,2	1,26	2,92	0,384	6,17
			8,54			70,6	2,88	21,2	1,58	145	35,2	12,7	79,1	1,28	2,95	0,384	6,70	
			11,2			90,9	2,85	27,1	1,56	194	47,8	16,3	102	1,36	3,04	0,380	8,79	
10/6,3	100	63	6	10	3	9,59	98,3	3,20	30,6	1,79	198	49,9	18,2	111	1,42	3,23	0,393	7,53
			11,1			113	3,19	35,0	1,78	232	58,7	20,8	127	1,46	3,28	0,392	8,71	
			12,6			127	3,17	39,2	1,76	266	67,6	23,4	143	1,50	3,32	0,391	9,89	
			15,5			154	3,15	47,1	1,74	333	85,8	28,3	173	1,58	3,40	0,387	12,2	
11/7	110	70	7	10	3	11,4	142	3,53	45,6	2,00	286	74,1	27,0	161	1,58	3,55	0,402	8,95
			12,3			152	3,52	48,7	1,99	309	80,2	28,8	172	1,6	3,57	0,402	9,66	

Продовження табл. 4

№ профілю	Розміри, мм					Площа перерізу, см ²	Додаткові величини для осей										Кут нахилу осі, $tg\alpha$	Вага 1 пог.м, кг
							<i>x-x</i>		<i>y-y</i>		<i>x₁-x₁</i>	<i>y₁-y₁</i>	<i>u-u</i>	<i>v-v</i>	Центр ваги			
	<i>I_x</i> , см ⁴	<i>i_x</i> , см	<i>I_y</i> , см ⁴	<i>i_y</i> , см	<i>I_{x₁}</i> , см ⁴		<i>I_{y₁}</i> , см ⁴	<i>I_u</i> , см ⁴	<i>I_v</i> , см ⁴	<i>x₀</i> , см	<i>y₀</i> , см							
			8			13,9	172	3,52	54,6	1,98	353	92,0	32,2	194	1,64	3,61	0,400	10,9
12,5/8	125	80	7	11	4	14,1	227	4,01	73,7	2,29	454	119	43,3	257	1,8	4,01	0,407	11,1
			8			16,0	256	4,00	83,0	2,28	518	137	48,9	290	1,84	4,05	0,406	12,6
			10			19,7	312	3,98	100	2,25	650	173	58,6	353	1,92	4,14	0,404	15,5
			12			23,4	365	3,95	117	2,24	782	211	69,8	412	2	4,22	0,400	18,4
14/9	140	90	8	12	4,0	18,0	364	4,50	120	2,58	727	194	70,4	414	2,03	4,49	0,411	14,1
			10			22,2	444	4,47	146	2,56	910	246	86,1	504	2,12	4,58	0,409	17,4
16/10	160	100	9	13	4	22,9	606	5,14	186	2,85	1223	300	110	682	2,23	5,19	0,391	18,0
			10			25,3	667	5,13	204	2,84	1359	336	121	750	2,28	5,23	0,390	19,9
			12			30,0	784	5,11	239	2,82	1633	406	142	881	2,36	5,32	0,388	23,6
			14			34,7	897	5,08	272	2,80	1909	477	163	1006	2,43	5,40	0,385	27,2
18/11	180	110	10	14	5	28,3	952	5,80	276	3,12	1930	444	165	1063	2,44	5,88	0,375	22,2
			12			33,7	1123	5,77	324	3,10	2324	538	194	1253	2,52	5,97	0,374	26,5

Додаток №3

Механічні характеристики матеріалів

№ пор.	Матеріал	Границя плинності, $\sigma_{пл}$, МПа	Границя міцності, $\sigma_{міц}$, МПа
1	Сталь Ст3	210...240	380...470
2	Сталь Ст5	260...280	500...620
3	Сталь 45	360	610...750
4	Сталь 40Х	650...900	730...1050
5	Чавун сірий СЧ 18-36	–	$\sigma_e^p = 180$ $\sigma_e^p = 700$ $\sigma_e^p = 360$
6	Латунь Л68 м'яка	$\sigma_{0,1} = 91$	320
7	Бронза алюмінієва БрА5	70	280
8	Алюмінієві сплави АЛ1	170	200
9	Бетон	-	5...48
10	Деревина (сосна, вздовж волокон)	$\sigma_{np} = 60$	93...115

Додаток №4

Орієнтовні значення допустимих напружень

№ пор.	Матеріал	σ^{adm} , МПа	
		на розтяг	на стиск
1	Сталь Ст2	140	140
2	Сталь Ст3	160	160
3	Сталь Ст2 (у мостах)	140	140
4	Легована конструкційна сталь	100...400	100...400
5	Чавун сірий	28...80	120...150
6	Мідь	30...120	30...120
7	Латунь	70...140	70...140
8	Бронза	60...120	60...120
9	Алюміній	30...80	30...80
10	Дюралюміній	80...150	80...150
11	Бетон	0,1...0,7	1...9
12	Сосна (вздовж волокон)	7...10	10...12
13	Дуб (вздовж волокон)	9...13	13...15

Додаток №5

Модулі пружності і коефіцієнти Пуассона для деяких матеріалів

Матеріал	Модуль пружності		Коефіцієнт Пуассона μ
	$\overset{\circ}{A}$, МПа	G , МПа	
Чавун білий, сірий - ковкий	$(1,15\dots1,60) \cdot 10^5$ $1,55 \cdot 10^5$	$4,5 \cdot 10^4$ -	0,23... 0,27 -
Сталь вуглецева - легована	$(2,0\dots2,1) \cdot 10^5$ $(2,0\dots2,1) \cdot 10^5$	$(8,0\dots8,1) \cdot 10^4$ $(8,0\dots8,1) \cdot 10^4$	0,24...0,28 0,25...0,30
Мідь прокатана - холодно тягнута - лита	$1,1 \cdot 10^5$ $1,3 \cdot 10^5$ $0,84 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$ $4,9 \cdot 10^4$ -	0,31...0,34 - -
Бронза катана	$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$	0,35
Латунь холодно тягнута	$(0,91\dots0,99) \cdot 10^3$	$(3,5\dots3,7) \cdot 10^4$	0,32...0,42
Алюміній катаний	$0,69 \cdot 10^5$	$(2,6\dots2,7) \cdot 10^4$	0,32...0,36
Дуралюмін катаний	$0,71 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^4$	-
Цинк катаний	$0,84 \cdot 10^5$	$3,2 \cdot 10^4$	0,27
Свинець	$0,17 \cdot 10^5$	$0,70 \cdot 10^4$	0,42
Лід	$0,1 \cdot 10^5$	$(0,28\dots0,3) \cdot 10^4$	-
Скло	$0,56 \cdot 10^5$	$2,2 \cdot 10^4$	0,25
Граніт	$0,49 \cdot 10^5$	-	-
Вапняк	$0,42 \cdot 10^5$	-	-
Мармур	$0,56 \cdot 10^5$	-	-
Пісковик	$0,18 \cdot 10^5$	-	-
Кам'яна кладка з цегли	$0,03 \cdot 10^5$	-	-
Бетон ($\sigma_{\text{мц}} = 10 \text{ МПа}$)	$(0,15\dots0,20) \cdot 10^5$	-	0,16...0,18
Бетон ($\sigma_{\text{мц}} = 20 \text{ МПа}$)	$(0,18\dots0,23) \cdot 10^5$	-	0,16...0,18

Деревина вздовж волокон - поперек волокон	$(0,1...0,12) \cdot 10^5$	$0,055 \cdot 10^4$	-
	$(0,005...0,01) \cdot 10^5$	-	-
Каучук	$0,00008 \cdot 10^5$	-	0,47
Бакеліт	$(2...3) \cdot 10^3$	-	0,36

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ашкенази Е.К., Ганов Э.В. Анизотропия конструкционных материалов: Справочник – Л.: Машиностроение. 1980. – 247 с.
2. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Элементы теории пластичности та міцності: Навч. посібник – Львів: Світ. 1999. – 945 с.
3. Горик О.В. Основы расчета инженерных конструкций: Навч. посібник – Полтава: ПДТУ. 2000. – 286 с.
4. Дяченко С.С. Фізичні основи міцності та пластичності металів: Навч. посібник – Харків: Видавництво ХНАДУ, 2003. – 226 с.
5. Корнілов О.А. Опір матеріалів. – Київ: Лотос. 2000. – 551 с.
6. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності / за заг. ред. В.Т. Піскунова. У 2-х частинах, 5-ти книгах. – К.: Вища школа. 1994, 1995.
7. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. Опір матеріалів. – К.: Вища школа. 2004. – 655с.
8. Посацький С.Л. Опір матеріалів. Підручник. Львів: Вид-во Львівського університету. 1973. – 404 с.
9. Тимошенко С.П. Гере Дж. Механика материалов. Изд-во «Мир» (перевод с английского). 1976. – 670 с.
10. Сопротивление материалов. Лабораторные работы. Цурпал И.А., Барабан Н.П., Швайко В.М. – К.: Вища школа. 1978. – 192 с.
11. Опір матеріалів. Розрахункові роботи. Ковтун В.В., Павлов В.С., Дорофеев О.А. //Навчальний посібник. – Львів: «Афіша». 2002. – 280 с.
12. Мороз Л.С. Механика и физика деформаций и разрушения материалов. – Л.: Машиностроение, 1984. – 224 с.
13. Ольховий І.М., Стасюк Б.М., Станкевич В.З. Короткий курс опору матеріалів: Навчальний посібник.-Серія "Дистанційне навчання".-Львів: Вид-во «Національний університет "Львівська політехніка", 2004.-196 с.

