

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський державний технічний університет
Дніпровський національний університет залізничного транспорту
імені академіка В.Лазаряна

О. Д. Романюк
Л. П. Теліпко
С. В. Ракша

ТЕОРЕТИЧНА ТА ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

КОРОТКИЙ КУРС

(для здобувачів першого(бакалаврського) рівня закладу вищої освіти)

Навчальний посібник

Рекомендовано

*Вченою радою Дніпровського державного технічного університету
як навчальний посібник для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
закладу вищої освіти*

Кам'янське
«ДДТУ»
2021

УДК 531.8:620.1:621.01(075.8)

Р69

Рецензенти:

С.В.Білодіденко – д.т.н., професор, завідувач кафедри «Машини і агрегати металургійного виробництва» національної металургійної академії України

С.В.Шатов – д.т.н., професор кафедри будівельних і дорожніх машин Придніпровської державної академії будівництва та архітектури

Л.Н.Ширін – д.т.н., професор кафедри транспортних систем і технологій національного технічного університету «Дніпровська політехніка»

*Рекомендовано Вченою радою Дніпровського державного технічного університету
як навчальний посібник для здобувачів першого бакалаврського рівня*

закладу вищої освіти

(лист № 9 від 24.12.2020 р.)

Романюк О.Д., Теліпко Л.П., Ракша С.В.

Р69 Теоретична та прикладна механіка. Короткий курс /О.Д. Романюк, Л.П. Теліпко, С.В. Ракша. Кам'янське: ДДТУ, 2021. 282 с.

Навчальний посібник містить короткий курс теоретичної та прикладної механіки, який написано відповідно до навчальних та робочих програм з дисципліни теоретична та прикладна механіка за результатами науково-педагогічної діяльності у галузях немеханічних спеціальностей. В стислій формі викладено основні теоретичні положення з теоретичної механіки, опору матеріалів та деталей машин.

Посібник призначений для студентів денної та заочної форми навчання немеханічних спеціальностей.

УДК 531.8:620.1:621.01(075.8)

ISBN

ISBN

© О.Д. Романюк, Л.П. Теліпко, С.В. Ракша

© ДДТУ. 2021

ЗМІСТ

ВСТУП	10
Частина I ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА	12
Розділ I. СТАТИКА	12
1. Основні поняття та визначення статички	13
1.1. Аксиоми статички	14
1.2. В'язі та їхні реакції	16
2. Система збіжних сил	20
2.1. Геометричний спосіб визначення рівнодійної	20
2.2. Аналітичний спосіб визначення рівнодійної	21
2.3. Рівняння рівноваги системи збіжних сил	22
2.4. Теорема про три сили	23
3. Момент сили відносно точки і осі	23
3.1. Момент сили відносно точки	23
3.2. Теорема Варіньона для системи збіжних сил	25
3.3. Момент сили відносно осі	26
4. Система паралельних сил	27
4.1. Додавання двох паралельних сил	27
4.2. Теорія пар сил	30
5. Довільна система сил. Умови рівноваги довільної системи сил	32
5.1. Теорема про паралельне перенесення сили	32
5.2. Зведення системи сил до центру	32
5.3. Умови рівноваги просторової системи сил	34
5.3.1. Просторова система паралельних сил	35
5.3.2. Довільна система сил, розміщених у площині	36
5.3.3. Система паралельних сил, розміщених у площині	36
6. Контрольні питання для самоперевірки	37
Розділ II. КІНЕМАТИКА	38
1. Кінематика точки	38
1.1. Способи задавання руху точки	38
1.2. Швидкість точки	40
1.3. Прискорення точки	43
1.4. Окремі випадки руху точки	46
2. Кінематика твердого тіла	47
2.1. Поступальний рух твердого тіла	47
2.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі	48

2.2.1. Рівняння руху, кутова швидкість і кутове прискорення	48
2.2.2. Окремі випадки обертання тіла навколо нерухомої осі	50
2.2.3. Лінійні швидкість і прискорення точки тіла при обертанні навколо нерухомої осі	51
2.3. Плоско-паралельний рух твердого тіла	53
2.3.1. Рівняння плоско-паралельного руху	53
2.3.2. Розкладання плоско-паралельного руху	53
2.3.3. Визначення швидкостей точки при плоско-паралельному русі	54
2.3.4. Миттєвий центр швидкостей	55
2.4. Прискорення точок при плоско-паралельному русі тіла	56
3. Контрольні питання для самоперевірки	
Розділ III. ДИНАМІКА	59
1. Динаміка точки	60
1.1. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки	61
1.1.1. Векторний спосіб задавання руху	61
1.1.2. Координатний спосіб задавання руху	61
1.1.3. Природний спосіб задавання руху	61
1.2. Основні задачі динаміки матеріальної точки	62
1.2.1. Розв'язування прямої задачі динаміки матеріальної Точки	63
1.2.2. Розв'язування оберненої задачі динаміки матеріальної Точки	63
2. Динаміка механічних систем	64
2.1. Внутрішні та зовнішні сили	64
2.2. Центр мас механічної системи	65
2.3. Момент інерції механічної системи відносно осі	66
3. Загальні теореми динаміки точки і матеріальної системи	67
3.1. Теорема про рух центра мас матеріальної системи	67
3.2. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки і Системи	69
3.2.1. Кількість руху точки і системи. Імпульс сили	69
3.2.2. Теорема про зміну кількості руху точки	69
3.2.3. Теорема про зміну кількості руху системи	70
3.3. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки і системи	72
3.3.1. Момент кількості руху точки і системи	72

3.3.2. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки відносно центра та осі	73
3.3.3. Теорема про зміну кінетичного моменту матеріальної системи відносно центра і осі	74
3.4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки та системи	76
3.4.1. Кінетична енергія матеріальної точки і твердого тіла	76
3.4.2. Робота сили	78
3.4.3. Потужність	82
3.4.4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки	82
3.4.5. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи	83
3.4.6. Силоне поле. Потенціальна енергія	84
4. Контрольні питання для самоперевірки	86
Частина II. ОПІР МАТЕРІАЛІВ	88
Розділ I. ВСТУП	88
1.1. Наука про опір матеріалів. Розрахункова схема	88
1.2. Види деформацій	91
1.3. Зовнішні сили	91
1.4. Внутрішні сили. Метод перерізів	92
1.5. Напруження	94
1.6. Основні гіпотези в опорі матеріалів	95
Контрольні питання для самоперевірки	95
Розділ 2. РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСКАННЯ	96
2.1. Поздовжні зусилля	96
2.2. Напруження в поперечних та похилих перерізах стержня	97
2.3. Деформації при розтяганні – стисканні	101
2.4. Механічні характеристики матеріалів	103
2.5. Основи інженерних розрахунків на міцність	108
Контрольні питання для самоперевірки	110
Розділ 3. ТЕОРІЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ	111
3.1. Поняття про напружений стан	111
3.2. Аналіз плоского напруженого стану	112
3.3. Головні площадки та головні напруження	115
3.4. Екстремальні дотичні напруження	116

3.5. Узагальнений закон Гука	117
3.6. Об'ємна деформація	119
3.7. Питома потенціальна енергія деформації	121
3.8. Чистий зсув	123
3.9. Основні гіпотези міцності	124
Контрольні питання для самоперевірки	129
Розділ 4. КРУЧЕННЯ	130
4.1. Деформація кручення. Внутрішні зусилля	131
4.2. Напруження та деформації при крученні валу круглого перерізу	132
4.3. Розрахунок валів на міцність та жорсткість	137
4.4. Розрахунок гвинтових пружин з малим кроком витка	140
Контрольні питання для самоперевірки	143
Розділ 5. ЗГИНАННЯ	145
5.1. Деформація згинання. Опори та опорні реакції. Типи балок	145
5.2. Внутрішні зусилля при згинанні	147
5.3. Диференціальні залежності при згинанні	150
5.4. Визначення нормальних напружень	154
5.5. Дотичні напруження при згинанні	162
5.6. Головні напруження при поперечному згинанні	165
5.7. Розрахунок балок на міцність	167
5.8. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки	169
5.9. Визначення переміщень безпосереднім інтегруванням рівняння пружної лінії	171
5.10. Метод початкових параметрів	172
5.11. Розрахунок балок на жорсткість	174
Контрольні питання для самоперевірки	175
Розділ 6. СКЛАДНИЙ ОПІР	177
6.1. Основні поняття	177
6.2. Неплоске та косе згинання	177
6.3. Згинання з розтяганням або стисканням	181
6.4. Згинання з крученням	182
Контрольні питання для самоперевірки	187

Розділ 7. СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ	189
7.1. Види пружної рівноваги. Критична сила	189
7.2. Формула Ейлера для критичної сили	190
7.3. Вплив умов закріплення кінців стержня на значення критичної сили	193
7.4. Втрата стійкості за границею пропорціональності (формула Ясинського)	195
7.5. Практичний метод розрахунку на стійкість	197
Контрольні питання для самоперевірки	199
Частина III. ДЕТАЛІ МАШИН	201
Розділ I КРИТЕРІЇ ПРАЦЕЗДАТНОСТІ ТА НАДІЙНОСТІ	201
1. Навантаження в машинах	201
2. Критерії працездатності деталей машин	202
3. Критерії надійності деталей машин	205
4. Контрольні питання для самоперевірки	205
Розділ II МЕХАНІЧНІ ПЕРЕДАЧІ	206
1. Циліндричні зубчасті передачі	207
1.1. Типи циліндричних передач	207
1.2. Геометричні параметри прямозубого зачеплення	208
1.3. Особливості геометрії косозубих передач	210
1.4. Розрахунок на міцність циліндричних зубчастих передач	211
2. Конічні зубчасті передачі	218
2.1. Основні відомості	218
2.2. Геометричні параметри конічної передачі	219
2.3. Зусилля в зачепленні прямозубої конічної передачі	220
2.4. Розрахунок на міцність прямозубої конічної передачі	221
3. Черв'ячні передачі	222
3.1. Основні відомості	222
3.2. Геометричні параметри передачі	222
3.3. Кінематичні параметри передачі	224
3.4. Зусилля в зачепленні	225
3.5. Розрахунок на міцність черв'ячних передач	226
3.6. Тепловий розрахунок передачі	227
4. Фрикційні передачі	228
4.1. Основні відомості та групи фрикційних передач	228
4.2. Фактори визначаючі якість фрикційних передач	231

4.3. Основи розрахунку на міцність фрикційних передач	232
5. Пасові передачі	232
5.1. Основні відомості та класифікація	232
5.2. Геометричні та кінематичні параметри передач	233
5.3. Сили та силові залежності	235
5.4. Основи розрахунку передач	236
5.5. Плоско-пасові та клиноремінні передачі	236
6. Ланцюгові передачі	238
6.1. Основні відомості	238
6.2. Основні характеристики передач	239
6.3. Приводні ланцюги	240
6.4. Зірочки приводних ланцюгів	242
6.5. Зусилля в ланцюговій передачі	242
6.6. Критерії працездатності та розрахунок	242
7. Контрольні питання для самоперевірки	243
Розділ III. ВАЛИ ТА ОСІ	245
1. Типи валів	246
2. Конструктивні елементи валів	246
3. Матеріали валів. Критерії працездатності	247
4. Проектний розрахунок валів	248
5. Розрахунок валів на втомливість	249
6. Контрольні питання для самоперевірки	251
Розділ IV. ПІДШИПНИКИ	252
1. Підшипники ковзання	252
1.1. Конструкція та область використання	252
1.2. Умови роботи та види руйнування	253
1.3. Розрахунок підшипників ковзання	254
2. Підшипники кочення	254
2.1. Конструкція та область використання	254
2.2. Класифікація підшипників кочення і їх маркірування	255
2.3. Практичний розрахунок (вибір) підшипників кочення	257
3. Контрольні питання для самоперевірки	258
Розділ V. МУФТИ	259
1. Загальні відомості	259
2. Некеровані муфти	260

3. Керовані муфти	263
4. Самокеровані муфти	265
5. Контрольні питання для самоперевірки	266
Розділ VI . З'ЄДНАННЯ ДЕТАЛЕЙ	268
1. Роз'ємні з'єднання	268
1.1. Різьбові з'єднання	268
1.2. Шпонкові з'єднання	270
1.3. Штифтові з'єднання	273
1.4. Шліцові з'єднання	274
2. Нероз'ємні з'єднання	275
2.1. Зварні з'єднання	275
2.2. Заклепкові з'єднання	277
2.3. З'єднання паянням та склеюванням	278
3. Контрольні питання для самоперевірки	279
ЛІТЕРАТУРА	281

ВСТУП

Сучасний інженер повинен володіти новими методами розрахунку та конструювання нових швидкохідних автоматизованих та високовиробничих машин. Раціонально спроектована машина повинна задовольняти соціальним вимогам – безпеці обслуговування персоналу, а також експлуатаційним, економічним і виробничим вимогам. Але відомо що, такі основні критерії як: міцність, надійність, довговічність та економічність чи естетичність є протилежними факторами. Тому конструктивне рішення повинно відповідати «золотій середині».

Для виконання такого роду задач здобувач освіти повинен глибоко вивчити та оволодіти основними положеннями теоретичної механіки, опору матеріалів та деталей машин, які дають можливість враховувати всі необхідні вимоги для вибору «золотої середини» в процесі дослідження та проектування кінематичних схем машин різних типів.

Навчальний посібник «Теоретична та прикладна механіка» в якому стисло викладені програмні матеріали теоретичної механіки, опору матеріалів та деталей машин написаний відповідно до програм підготовки спеціалістів немеханічного профілю ставить за мету поглибити та узагальнити теоретичні знання, а також використовувати ці знання в комплексному рішенні конкретної інженерної задачі по дослідженню та розрахунку механізмів і машин.

Для спеціалістів електромашинобудівельних, металургійних, хіміко-технологічних галузей промисловості знання теоретичної механіки, опору матеріалів та деталей машин також крайнє необхідне, так як дозволяє більш розширено зрозуміти роботу технологічного обладнання і відповідно забезпечувати надійність та довговічність його експлуатації.

За структурою навчальний посібник складається з трьох частин.

В першій частині викладено теоретичну механіку предметом якої є вивчення найбільш узагальнених законів механічного руху та рівноваги матеріальних об'єктів. Наведені такі розділи як: статика – розглядаються загальні відомості про сили та встановлюються умови рівноваги матеріальних тіл під дією різних систем сил; кінематика – розглядає механічний рух матеріальної точки, системи матеріальних точок та абсолютно твердого тіла на площині чи в просторі за відповідний проміжок часу, без урахування сил, які обумовлюють цей рух; динаміка – розглядає рух матеріальних тіл під дією зовнішніх сил прикладених до них

В другій частині викладено опір матеріалів предметом якого є

вивчення понять міцності, жорсткості та стійкості деталей машин та елементів споруд. Також опір матеріалів дає знання про механічні властивості матеріалів та процедуру їх визначення.

Наведені такі розділи як: розрахунки на міцність та жорсткість при розтяганні-стисканні, крученні валів круглого перерізу; теорія напруженого стану; розрахунки на міцність та жорсткість при плоскому згинанні; задачі складного опору і стійкість стиснутих стержнів.

В третій частині викладено деталі машин предметом яких є вивчення конструкції механізмів та розрахунку й конструювання складових елементів машин. Наведені такі розділи як: критеріїв працездатності деталей машин – розглянуті критерії міцність, жорсткість, зносостійкість, теплостійкість, вібростійкість; механічні передачі – розглянуті передачі зачепленням (зубчасті, черв'ячні, ланцюгові) та передачі тертям (фрикційні, пасові) їх конструкція розрахунок та проектування; вали та осі – розглянуто конструктивні особливості та основи проектного і перевірного розрахунку валів; підшипники – розглянуто класифікацію підшипників їх конструкцію, вибір та перевірку на довговічність; муфти – розглянуто класифікацію муфт їх використання, конструкцію та розрахунок; з'єднання деталей – розглянуто роз'ємні та нероз'ємні з'єднання деталей їх використання, конструкція і розрахунок.

Теоретична та прикладна механіка є однією з основних загальноосвітніх інженерних дисциплін і грає дуже важливу роль у формуванні технічного кругозору фахівців усіх немеханічних спеціальностей, так як розуміння проблем міцності, надійності та довговічності напряду пов'язано з безаварійною експлуатацією будь якого технологічного обладнання.

Основні питання курсу теоретична та прикладна механіка ілюстровані прикладами, однак їх кількість невелика і вони не складні. Планується написати окремий посібник, присвячений практичним прикладам і задачам. В ньому також будуть наведені завдання для розрахунково-проектувальних робіт та приклади їх виконання з пояснюваннями.

Частина I

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Теоретична механіка — це наука про найбільш загальні закони механічного руху і рівноваги матеріальних об'єктів.

Основні поняття та визначення теоретичної механіки виникли на підставі численних дослідів і спостережень над явищами природи з відповідним абстрагуванням від конкретних умов. У теоретичній механіці користуються граничними абстракціями: матеріальна точка і абсолютно тверде тіло. Наведені абстракції дозволяють вивчати самі загальні закони механічного руху, що і відповідає основному завданню теоретичної механіки. Теоретична механіка є основою для вивчення таких дисциплін як опір матеріалів, теорія механізмів і машин та деталі машин.

Курс теоретичної механіки складається з трьох частин:

- **Статики**;
- **Кінематики**;
- **Динаміки**.

Розділ I. СТАТИКА

Статика — розділ теоретичної механіки, в якому розглядаються загальні відомості про сили та встановлюються умови рівноваги матеріальних тіл під дією різних систем сил.

Під рівновагою тіла розуміють його стан відносного спокою або рівномірного прямолінійного руху.

Усі тіла в природі під дією різних систем сил змінюють свою форму й розміри, тобто деформуються. Завдяки невеликим деформаціям в першому наближенні можна вважати, що тіло абсолютно тверде. В курсі теоретичної механіки розглядають задачі про статичну рівновагу лише абсолютно твердих тіл.

Матеріальна точка — це матеріальне тіло, розмірами якого за умовою задачі можна знехтувати.

В статистиці розглядають дві основні задачі:

- додавання сил і зведення даної системи сил до найпростішої — їй еквівалентної;
- визначення умов рівноваги системи сил, що діють на абсолютно тверде тіло.

1. Основні поняття та визначення статички

Сила — міра взаємодії між тілами. В механіці силу розглядають як кількісну міру механічної взаємодії одного тіла з іншим. Сила, яка діє на тіло, характеризується трьома параметрами: скалярною величиною (модулем $|\vec{F}|$, або F); векторною величиною (\vec{F} , чи лінія дії); точкою прикладання (точка A) рис.1.1. В системі СІ сила вимірюється в ньютоних [Н].

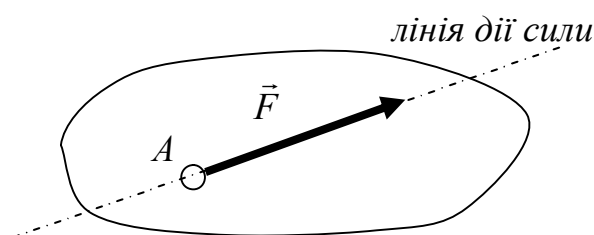


Рис. 1.1

Усі сили, які розглядає механіка, можна поділити на два основні класи: сили, що виникають тільки при безпосередньому стиканні тіл, і сили, які можуть діяти за відсутності безпосереднього контакту між тілами.

До *першого* класу належать пружні сили і сили тертя; до *другого* — сили всесвітнього тяжіння або гравітаційні сили. У свою чергу сили поділяються на внутрішні й зовнішні, активні сили і реакції в'язей, зосереджені в одній точці або розподілені по поверхні, сталі й змінні.

Системою сил називають сукупність кількох сил, що діють на тіло.

Еквівалентними називають дві системи сил, які однаково впливають на тіло

$$[\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n] \equiv [\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3, \dots, \vec{Q}_n].$$

Сила, яка еквівалентна заданій системі сил, є **рівнодійна сила** і позначається \vec{R} :

$$\vec{R} \equiv [\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n].$$

Сила, яка дорівнює за модулем рівнодійній і протилежна їй за напрямом, називається **зрівноважувальна**.

$$\vec{R} = -\vec{P}.$$

Система сил, яка не порушує стану рівноваги тіл, називається зрівноваженою системою або системою, яка еквівалентна нулю.

$$[\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n] \equiv 0.$$

1.1. Аксиоми статички

Аксиома 1. (аксіома про зрівноважування сил) Дві сили, що діють на вільне абсолютно тверде тіло, зрівноважуються тоді і тільки тоді, коли вони однакові за модулем ($F_1 = F_2$), і вектори яких спрямовані вздовж однієї прямої у протилежних напрямках (рис.1.2).

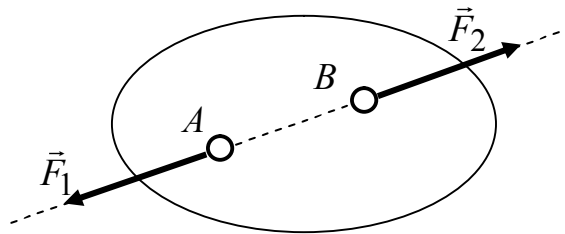


Рис. 1.2

Аксиома 2. (аксіома про додавання сил) Дія заданої системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо до неї додати або відняти зрівноважену систему сил (рис.1.3).

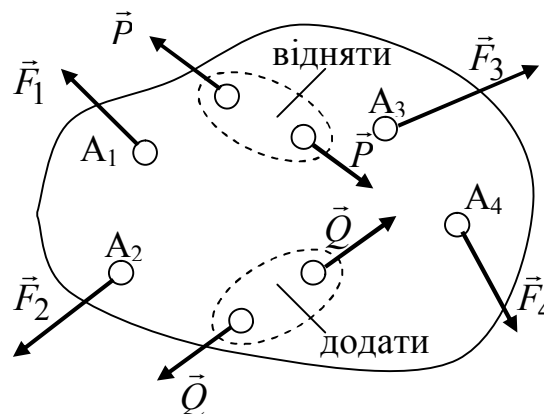


Рис. 1.3

Висновок з аксіом 1-2.

Не змінюючи дії сили на абсолютно тверде тіло, її можна переносити вздовж її лінії дії, тобто сила є ковзний вектор.

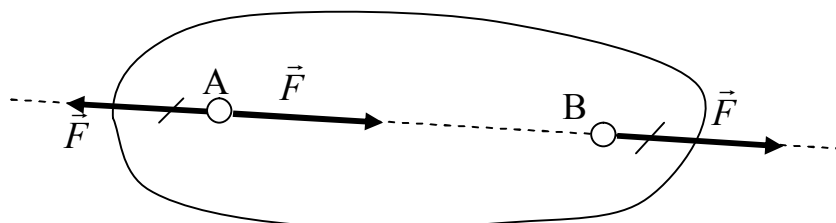


Рис. 1.4

Аксиома 3 (*аксіома про паралелограм сил*). Рівнодійна двох сил, що прикладені до абсолютно твердого тіла в одній точці під кутом одна до одної, спрямована по діагоналі паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах (рис. 1.5), і дорівнює їх геометричній сумі.

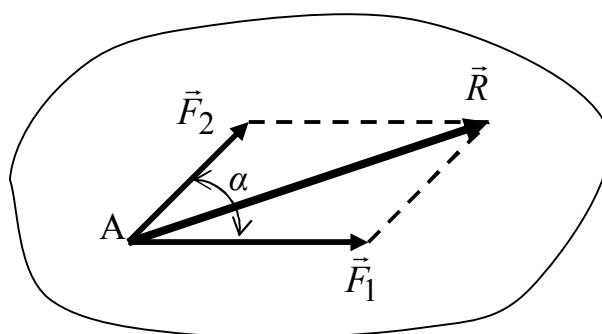


Рис. 1.5

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Модуль рівнодійної визначається рівнянням

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha}.$$

Якщо: а) $\alpha = 0^\circ$, то $R = F_1 + F_2$;

б) $\alpha = 90^\circ$, то $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$;

в) $\alpha = 180^\circ$, то $R = F_1 - F_2$.

Аксиома 4. (*аксіома про взаємодію*) При взаємодії матеріальних тіл будь-якій дії відповідає рівна за величиною і протилежна за напрямом

протидія (рис.1.6):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

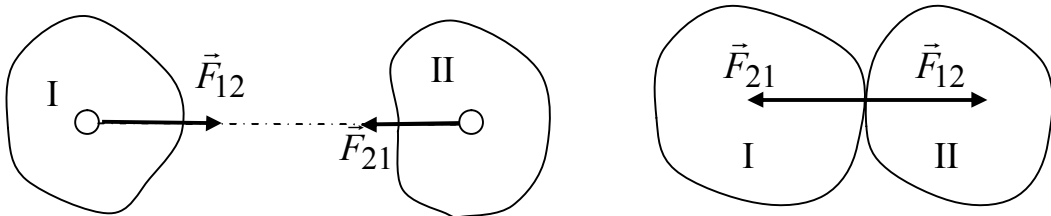


Рис. 1.6

Аксиома 5 (аксіома про затвердіння). Рівновага змінюваного (деформованого) тіла під дією заданої системи сил не зміниться, якщо його вважати затверділим (рис. 1.7).



Рис. 1.7

1.2. В'язі та їхні реакції

За станом руху матеріальні тіла розподіляються на вільні та невільні.

В'язями називають все те, що обмежує переміщення даного тіла в просторі чи на площині.

Реакціями в'язей називають сили, з якими в'язі діють на матеріальне тіло. Якщо на тіло накладені в'язі, то воно називається **невільним**, а якщо в'язі не накладені — то **вільним**.

Аксиома 6. Всяке невільне тіло можна перетворити у вільне, відкинувши накладені на нього в'язі і замінивши їх дію реакціями в'язей (рис. 1.8).

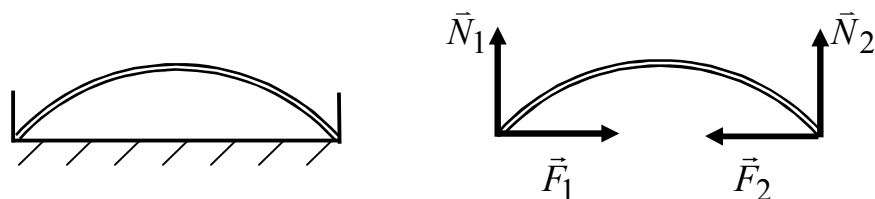


Рис. 1.8

Аксиома 7. Від накладання додаткових в'язей рівновага твердого тіла не порушиться (рис. 1.9).

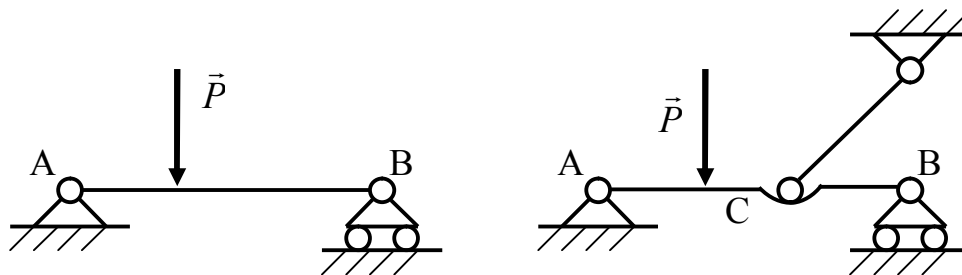


Рис. 1.9

Реакції в'язей залежать від їх конструктивного оформлення і від дії зовнішніх сил.

Найпростіші види геометричних в'язей.

Найчастіше трапляються наступні види в'язей при розв'язуванні задач. Це ідеально гладенька поверхня, стержень, нитка, циліндричний та сферичний шарніри.

Реакція ідеально гладенької поверхні спрямована по нормалі до неї. Якщо стикаються дві ідеально гладкі поверхні, реакція спрямована по їх спільній нормалі (рис. 1.10). Якщо одна поверхня має загострення, то реакція спрямована по нормалі до тієї поверхні, до якої можна провести нормаль (рис. 1.11).

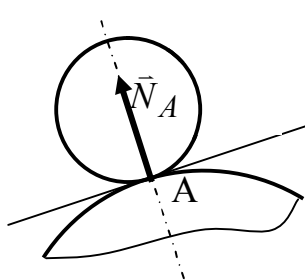


Рис. 1.10

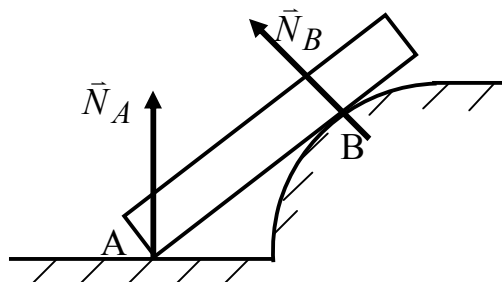


Рис. 1.11

Реакція стержня спрямована вздовж осі симетрії стержня, а реакція нитки направлена вздовж нитки до точки підвісу тіла (рис. 1.12).

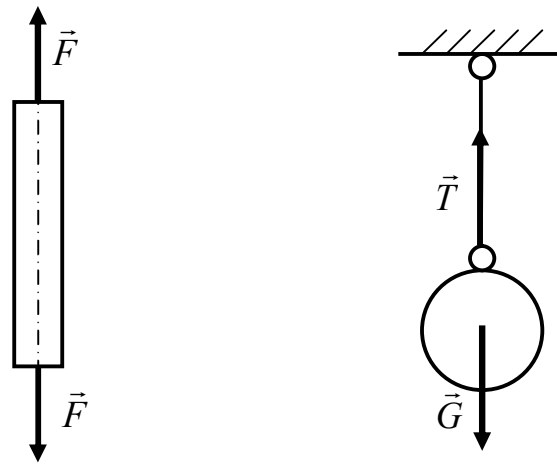


Рис. 1.12

Циліндричним шарніром називається в'язь, що допускає обертання тіла навколо осі, яка проходить через центр шарніра. Розглядають шарнірно рухомі та шарнірно нерухомі в'язі.

Реакція, яка виникає в нерухомому шарнірі прикладена в центрі шарніра і перпендикулярна до його осі. Невідомі модуль та напрям реакції. Тому при розв'язанні задач повну реакцію розкладають на дві складові (рис. 1.13).

Реакція рухомого шарніра прикладена в його центрі і спрямована перпендикулярно до опорної поверхні. Невідомий тільки модуль реакції (рис. 1.14).

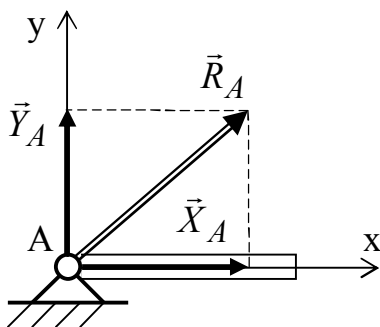


Рис. 1.13

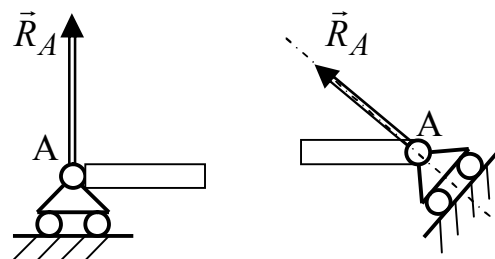


Рис. 1.14

Реакція затисненої опори складається з двох сил \vec{X}_A, \vec{Y}_A та моменту \vec{M}_A який називається моментом затиснення. Таким чином, затиснена

опора накладає три в'язі, які запобігають руху точці A вздовж осей X, Y та обертанню опорного перерізу (рис. 1.15).

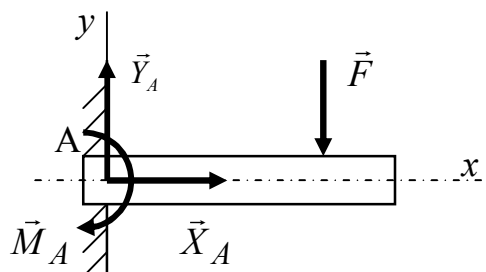


Рис. 1.15

Сферичний шарнір дає можливість як завгодно повертатись одному тілу відносно іншого навколо центра шарніра.

Реакція сферичного шарніра проходить через центр шарніра і має невідомі модуль і напрям. Тому при розв'язуванні задач на рівновагу тіл під дією просторової системи сил реакція сферичного шарніра розкладається на три складові $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$.

Підп'ятник забезпечує обертальний рух тіл, які його утворюють, тільки відносно осі симетрії стержня.

Реакція підп'ятника прикладена до осі обертання в точці дотику тіл і має невідомі модуль і напрям. Тому при розв'язуванні задач на рівновагу тіл під дією просторової системи сил реакція підп'ятника розкладається на три складові $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, аналогічно сферичному шарніру (рис. 1.16).

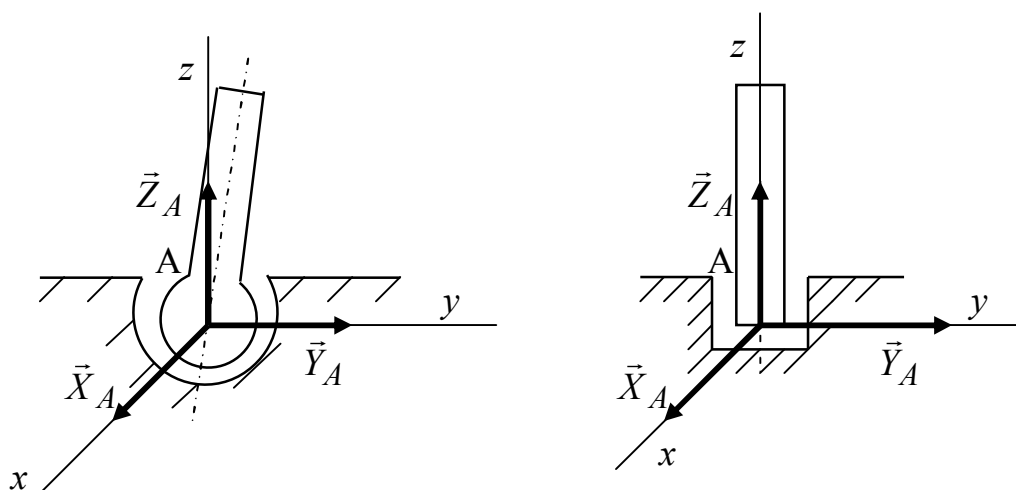


Рис. 1.16

2. Система збіжних сил

Збіжною називають систему сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці. (рис. 2.1). Якщо всі сили розташовані в одній площині, то вони утворюють плоску систему збіжних сил. Сили, які діють у просторі, утворюють просторову систему збіжних сил. Систему збіжних сил можна звести до однієї сили, яку називають **рівнодійною**. Рівнодійну збіжної системи сил визначають графічно чи аналітично.

2.1. Геометричний спосіб визначення рівнодійної

Рівнодійна двох збіжних сил визначається за правилом паралелограма сил (згідно аксіомі 3) рис 1.17.

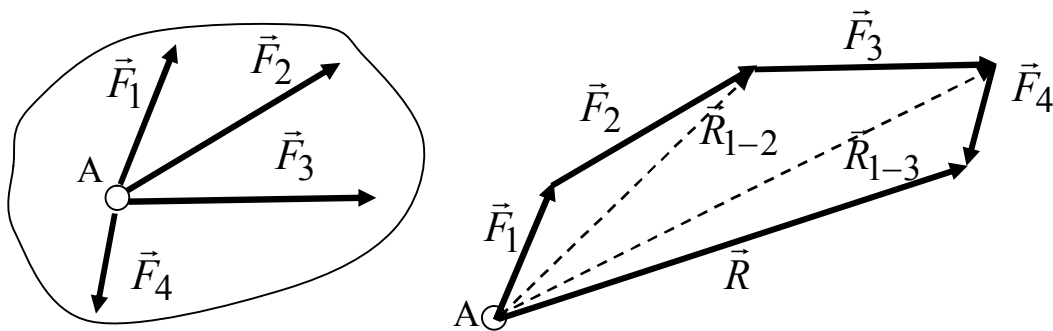


Рис. 1.17

Застосовуючи до системи сил послідовно правило паралелограма, отримаємо правило многокутника сил, згідно з яким визначається рівнодійна \vec{R} (рис. 1.17). То б то, має місце правило складання векторів.

$$\vec{R}_{1-2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

$$\vec{R}_{1-3} = \vec{R}_{1-2} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3,$$

$$\vec{R}_{1-4} = \vec{R}_{1-3} + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{R}.$$

Відповідно, якщо маємо систему сил з n векторів то

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n,$$

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k.$$

2.2. Аналітичний спосіб визначення рівнодійної

Як відомо з курсу вищої математики проекція вектора на вісь є скаляр, який дорівнює добутку модуля вектора (в даному випадку сили) на косинус кута α між напрямом вектора і додатним напрямом осі координат

$$F_x = F \times \cos \alpha .$$

Таким чином, в залежності від кута α проекція може бути додання ($+F_{1x}$) при $\cos \alpha > 0$, від'ємна ($-F_{3x}$) при $\cos \alpha < 0$, а при $\cos \alpha = 0$ дорівнює нулю ($F_{2x} = 0$) так як сила перпендикулярна до осі (рис. 1.18).

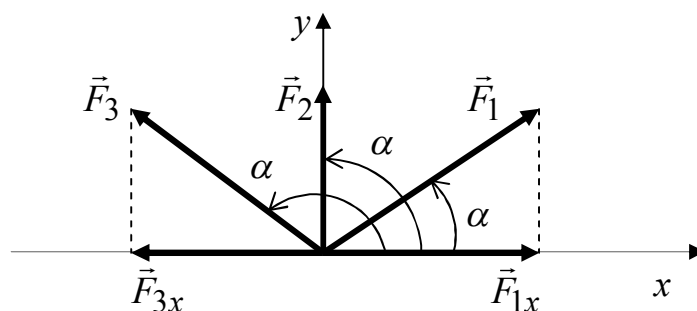


Рис. 1.18

Теорема про проекцію рівнодійної на вісь. Проекція рівнодійної на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових на ту саму вісь.

$$\vec{R} = R_x \times \vec{i} + R_y \times \vec{j} + R_z \times \vec{k} ,$$

де:
$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = \sum_{k=1}^n X_k ; \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = \sum_{k=1}^n Y_k ; \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = \sum_{k=1}^n Z_k .$$

Модуль і напрям рівнодійної визначаються за формулами:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2 + (\sum Z_k)^2} ,$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} , \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R} , \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R} .$$

Кути α , β , γ — кути між напрямом вектора сили і напрямом відповідно осей x , y , z .

Відповідно для плоскої системи сил $R_z = 0$.

2.3. Рівняння рівноваги системи збіжних сил

Для того щоб система збіжних сил перебувала у рівновазі, необхідно й достатньо, щоб рівнодійна цієї системи сил дорівнювала нулю або силовий багатокутник був замкнений, тобто

$$\vec{R} = 0.$$

Дана умова виконується при умові, що:

$$\Sigma X_k = 0, \quad \Sigma Y_k = 0, \quad \Sigma Z_k = 0.$$

Таким чином, для того щоб система збіжних сил перебувала у рівновазі, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій усіх сил на кожен з трьох координатних осей дорівнювала нулю.

Для плоскої системи сил умови рівноваги мають вигляд

$$\Sigma X_k = 0, \quad \Sigma Y_k = 0.$$

Послідовність розв'язування задач про рівновагу збіжної системи сил:

- виділити об'єкт (абсолютно тверде тіло, або матеріальну точку), рівновагу якого розглядають;
- у відповідних точках зобразити дані сили;
- визначити в'язі, що накладені на тіло;
- застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, відкинути в'язі й прикласти відповідні реакції в'язей;
- виконати аналіз утвореної системи сил.

При розв'язуванні задачі аналітичним методом потрібно:

- а) вибрати прямокутну систему координат;
- б) скласти рівняння рівноваги абсолютно твердого тіла під дією збіжної системи сил;
- в) розв'язати систему рівнянь і визначити всі невідомі величини;
- г) виконати аналіз розв'язку.

При розв'язуванні задачі геометричним методом слід побудувати замкнений багатокутник сил (у вибраному масштабі), з якого визначити величину і напрям реакцій.

2.4. Теорема про три сили

Теорема про три сили.

Якщо абсолютно тверде тіло під дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, перебуває в рівновазі, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці (рис. 1.19).

Із умови рівноваги

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{R}_{1-2} + \vec{F}_3 = 0$$

маємо, що

$$\vec{F}_3 = -\vec{R}_{1-2},$$

де $\vec{R}_{1-2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ на підставі аксіоми 3.

Згідно з аксіомою 1 сили \vec{F}_3 і \vec{R}_{1-2} спрямовані вздовж однієї прямої. Це означає, що \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , і \vec{F}_3 збігаються в одній точці.

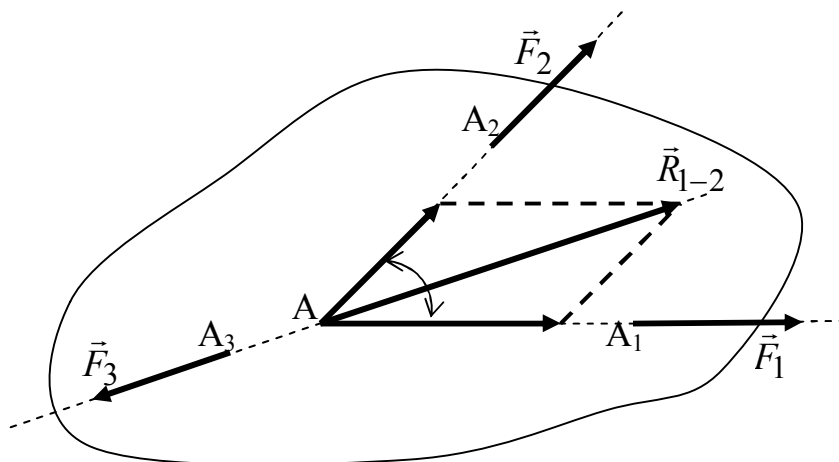


Рис. 1.19

3. Момент сили відносно точки і осі

3.1. Момент сили відносно точки

Момент сили відносно центра (точки) характеризує обертаючу дію сили відносно центра і кількісно дорівнює взятому зі знаком «+» або «-» добутку модуля сили на плече (рис. 1.20). Перпендикуляр, опущений із центра на лінію дії сили (або на напрям сили) називається **плечем сили**.

$$m_o(\vec{F}) = \pm F \times h.$$

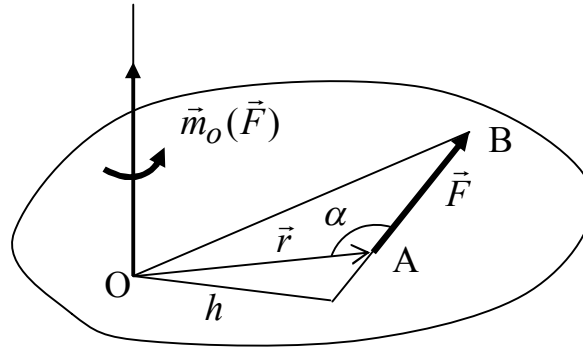


Рис. 1.20

Момент сили не змінюється, якщо точку прикладання сили переносити вздовж лінії дії сили. Момент вважається додатним, якщо сила обертає тіло проти ходу годинникової стрілки, і від'ємним, якщо обертає за ходом годинникової стрілки.

Згідно трикутника OAB плече сили $h = r \times \sin \alpha$, то

$$m_o(\vec{F}) = r \times F \times \sin \alpha.$$

З курсу вищої математики відомо, що даний вираз визначає модуль векторного добутку радіуса-вектора \vec{r} , який проведено з центра O в точку прикладання сили на вектор сили \vec{F} . Таким чином, момент сили відносно центра можна представити як вектор-момент

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F},$$

який перпендикулярний до площини дії моменту (тобто площини OAB), і напрямлений за правилом гвинта (тобто таким чином, що з його кінця видно обертання таким, яке відбувається проти ходу годинникової стрілки). Вектор-момент $\vec{m}_o(\vec{F})$ зображено на рис. 1.20. Точкою прикладання зображеного на рис. 1.20 вектора-моменту $\vec{m}_o(\vec{F})$ є точка O .

Вектор-момент сили можна виразити як визначник

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Проекції вектора-моменту сили \vec{M}_O на координатні осі (рис. 1.21) запишуться у вигляді:

$$[m_O(\vec{F})]_x = F_z \times y - F_y \times z \equiv M_{Ox};$$

$$[m_O(\vec{F})]_y = F_x \times z - F_z \times x \equiv M_{Oy};$$

$$[m_O(\vec{F})]_z = F_y \times x - F_x \times y \equiv M_{Oz}.$$

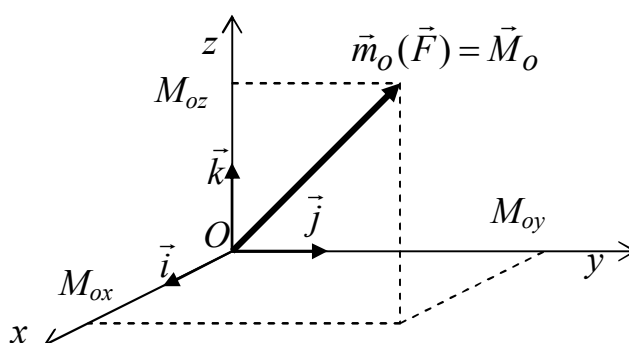


Рис. 1.21

3.2. Теорема Варіньона для системи збіжних сил

Теорема. Момент рівнодійної збіжної системи сил відносно будь-якого центру дорівнює геометричній сумі моментів складових сил відносно того самого центру (рис. 1.22):

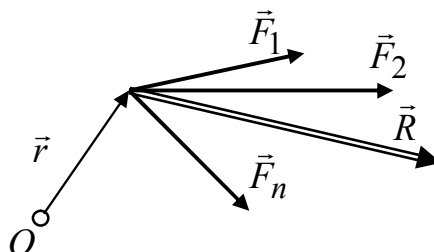


Рис. 1.22

$$\begin{aligned}\vec{m}_o(\vec{R}) &= \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) = \\ &= \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n = \vec{m}_o(\vec{F}_1) + \vec{m}_o(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_o(\vec{F}_n).\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\vec{m}_o(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n \vec{m}_o(\vec{F}_k).$$

3.3. Момент сили відносно осі

Момент сили відносно осі – це скалярна величина, яка характеризує обертальну дію сили відносно даної осі.

Визначимо момент сили \vec{F} відносно осі z , тобто $m_z(\vec{F})$ (рис. 1.23).

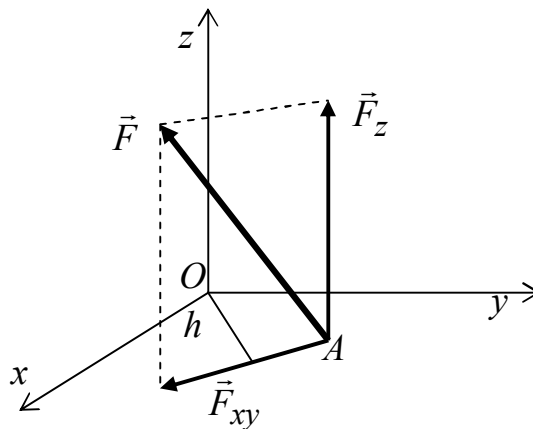


Рис. 1.23

Згідно з теоремою Варіньона

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{m}_o(\vec{F}_z) + \vec{m}_o(\vec{F}_{xy}).$$

В даному випадку сила, \vec{F}_z , рівнобіжна осі z , тому не обертає тіло відносно осі z . Знайдемо проєкції векторного рівняння на вісь z :

$$[\vec{m}_o(\vec{F})]_z = [\vec{m}_o(\vec{F}_z)]_z + [\vec{m}_o(\vec{F}_{xy})]_z.$$

Враховуючи, що

$$[\vec{m}_o(\vec{F}_z)]_z = m_z(\vec{F}_z) = 0,$$

маємо

$$[\vec{m}_o(\vec{F})]_z = m_z(\vec{F}) = [\vec{m}_o(\vec{F}_{xy})]_z,$$

або

$$m_z(\vec{F}) = m_z(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \times h.$$

Таким чином, момент сили відносно деякої осі дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, яка перпендикулярна до осі, відносно точки перетину осі з площиною. Якщо сила рівнобіжна осі або перетинає вісь, то момент сили відносно осі дорівнює нулю.

Для того щоб визначити момент сили відносно осі, треба знайти проекцію сили на площину, яка перпендикулярна до осі, і визначити момент цієї проекції відносно точки перетину осі з площиною. Для визначення моменту сили відносно осей можна використовувати формули проекції вектора-моменту сили \vec{M}_o на координатні осі, а модуль і напрям вектора-моменту сили відносно центра визначається за формулами:

$$M_o = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} = \sqrt{[m_x(\vec{F})]^2 + [m_y(\vec{F})]^2 + [m_z(\vec{F})]^2};$$

$$\cos \alpha = M_{ox} / M_o; \quad \cos \beta = M_{oy} / M_o; \quad \cos \gamma = M_{oz} / M_o,$$

де: α, β, γ — кути між напрямом вектора-моменту сили і напрямими координатних осей x, y, z відповідно.

4. Система паралельних сил

4.1. Додавання двох паралельних сил

Системи паралельних сил, як і збіжні системи, є окремим випадком довільних систем сил. В залежності від того, як вони розташовані, їх поділяють на плоскі й просторові. Розглянемо на прикладі додавання двох паралельних сил способи перетворення таких систем сил.

Сили напрямлені в один бік.

Розглянемо систему двох паралельних сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , які прикладені у точках A і B твердого тіла (рис. 1.24) і напрямлені в один бік.

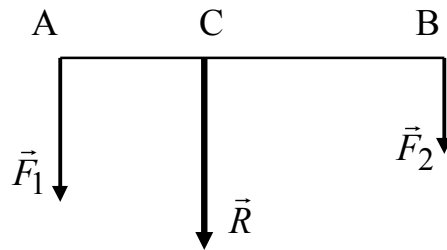


Рис. 1.24

Для визначення рівнодійної цих сил та точки її прикладення використаємо четверту аксіому статки. Прикладаємо в точках A і B дві сили рівні за величиною і протилежні за напрямом \vec{P}_1 і \vec{P}_2 , але не паралельні силам \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , від цього стан тіла не зміниться. Додаючи попарно сили \vec{F}_1 і \vec{P}_1 та \vec{F}_2 і \vec{P}_2 , одержимо їх рівнодійні \vec{Q}_1 і \vec{Q}_2 , лінії дії яких перетинаються в деякій точці, куди й переносимо рівнодійні.

Розкладаємо сили \vec{Q}_1 і \vec{Q}_2 на дві їхні попередні складові \vec{F}_1 і \vec{P}_1 та \vec{F}_2 і \vec{P}_2 . Сили \vec{P}_1 і \vec{P}_2 як взаємно зрівноважені відповідно можна відкинути, а напрямлені в один бік сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 будуть мати рівнодійну, модуль якої дорівнює сумі модулів цих сил, тобто

$$R = F_1 + F_2.$$

Лінія дії рівнодійної \vec{R} перетинає відрізок (AB) у точці C , яка ділить цей відрізок на частини обернено пропорційні модулям сил

$$\frac{(AC)}{(BC)} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Таким чином, рівнодійна двох паралельних сил, які напрямлені у один бік, за модулем дорівнює сумі модулів цих сил, напрямлена в той же бік, що й задані сили, і ділить відстань між точками прикладення сил на відрізки, обернено пропорційні силами.

Сили напрямлені у різні боки.

Аналогічним чином можна визначити рівнодійну двох паралельних сил, напрямлених у різні боки (рис. 1.25), модуль якої дорівнює різниці модулів складових сил

$$R = F_2 - F_1,$$

якщо по модулю сила $F_2 > F_1$.

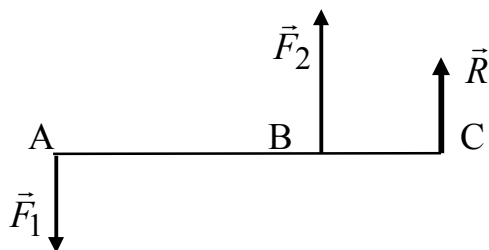


Рис. 1.25

Лінія дії рівнодійної сили R перетинає продовження відрізка (AB) у точці C , відстань якої від точок A і B визначається із співвідношення

$$\frac{(AC)}{(BC)} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Таким чином, рівнодійна двох паралельних сил, напрямлених у різні боки, за модулем дорівнює різниці модулів складових сил, напрямлена в бік більшої (за модулем) сили та ділить відстань між точками прикладання даних сил зовнішнім чином на частини, які обернено пропорційні модулям сил.

Сили напрямлені у різні боки, та рівні за модулем. Ці сили утворюють так звану пару сил (рис. 1.26).

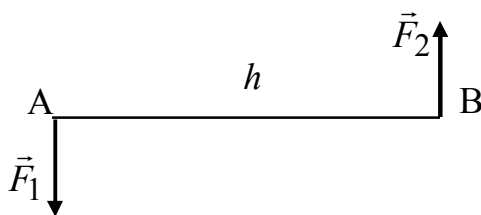


Рис. 1.26

Модуль рівнодійної пари сил дорівнює нулю:

$$R = F_1 - F_2 = 0.$$

Однак дія пари сил на тіло не нульова, а викликає обертальний рух тіла.

4.2. Теорія пар сил

Пара сил — це система двох спрямованих у протилежні боки паралельних сил, (\vec{F}, \vec{F}') у яких однакові модулі (рис. 1.27). Пара сил має обертальний ефект, який характеризується моментом пари сил $\vec{m}(\vec{F})$.

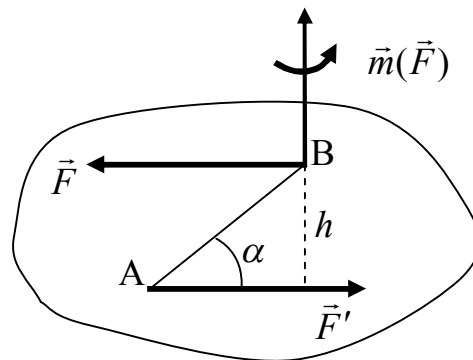


Рис. 1.27

Модуль моменту пари сил дорівнює добутку модуля сили F на плече пари (найкоротша відстань між лініями дії пари сил):

$$|\vec{m}(\vec{F})| = m(\vec{F}) = \pm F \times h,$$

або

$$m(\vec{F}) = \pm F \times AB \times \sin \alpha.$$

Момент пари сил — це вектор-момент, який перпендикулярний до площини дії пари, модуль якого визначається як добутку модуля сили F на відстань (AB) та синуса кута α (згідно рис. 1.27). Напрямок якого вважається додатним при обертанні тіла проти ходу годинникової стрілки. У векторній формі

$$\vec{m}(\vec{F}) = \overrightarrow{AB} \times \vec{F} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}'.$$

Теорема. Момент пари сил є вільний вектор, тобто його можна переносити паралельно самому собі у будь-яку точку простору.

Визначимо $\Sigma \vec{m}_C(\vec{F})$ (рис. 1.28):

$$\Sigma \vec{m}_C(\vec{F}) = \vec{r}_1 \times \vec{F}' + \vec{r}_2 \times \vec{F} = \vec{r}_2 \times \vec{F} - \vec{r}_1 \times \vec{F} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}.$$

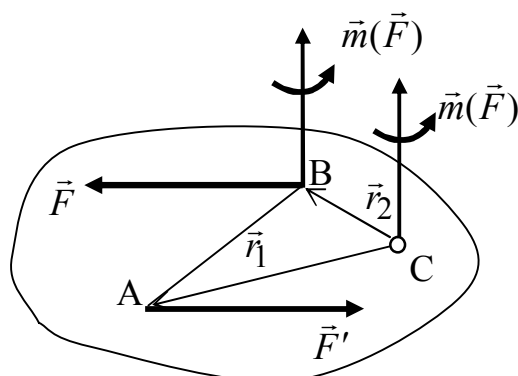


Рис. 1.28

Таким чином, сума моментів сил, що входять до пари, відносно будь-якої точки C дорівнює моменту пари сил $\vec{m}(\vec{F})$.

На основі даної теореми можна сформулювати основні властивості пари сил:

- пару сил, не змінюючи її дії, можна переносити в площину, їй паралельну;
- пару сил можна переносити в площині її дії;
- не змінюючи дії пари, можна одночасно змінювати величину сили і плече, залишаючи незмінними момент і напрям обертання,

$$m = F_1 \times h_1 = F_2 \times h_2 .$$

Момент рівнодійної пари дорівнює геометричній сумі моментів складових пар у площинах, які перетинаються:

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 .$$

Якщо діє багато пар сил, то момент рівнодійної

$$\vec{m} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_k .$$

Якщо всі пари сил діють в одній площині, то всі вектори-моменти сил будуть рівнобіжні, а момент рівнодійної пари дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх пар, тобто

$$m = \sum_{k=1}^n m_k .$$

5. Довільна система сил. Умови рівноваги довільної системи сил

5.1. Теорема про паралельне перенесення сили

Теорема. Силу, яка діє на абсолютно тверде тіло, можна, не змінюючи її дію, переносити паралельно самій собі у будь-яку точку тіла, додаючи при цьому пару сил з моментом, який дорівнює моменту сили, яку переносять, відносно точки, куди сила переноситься.

Розглянемо випадок, коли потрібно перенести силу із точки A в довільну точку B рис. 1.29.

Для цього прикладемо в точці B зрівноважену систему сил (\vec{F}, \vec{F}') .
Тоді

$$\vec{F}_A \Rightarrow (\vec{F}_A - \vec{F}'_B + \vec{F}_B) \Rightarrow (\vec{F}_B, \vec{m} = \overline{AB} \times \vec{F}) \Rightarrow (\vec{F}_B, \vec{m} = \vec{m}_B(\vec{F})).$$

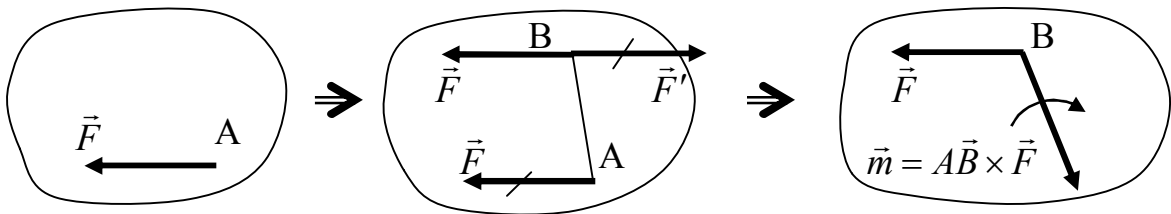


Рис. 1.29

5.2. Зведення системи сил до центру

Теорема 1. Усяка довільна просторова система сил, що діє на абсолютно тверде тіло, при зведенні до довільного центру O , замінюється однією силою — головним вектором \vec{R}^{sum} системи, прикладеною у центрі, й до однієї пари сил з моментом, що дорівнює головному моменту \vec{M}_O^{sum} системи сил відносно центру.

Розглянемо абсолютно тверде тіло до якого в точках A_1, A_2, \dots, A_n прикладені сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, які утворюють задану систему сил. Необхідно звести всі сили до довільно вибраного центру O (рис. 1.30).

Застосовуючи теорему про паралельне перенесення сили отримаємо наступні рівняння

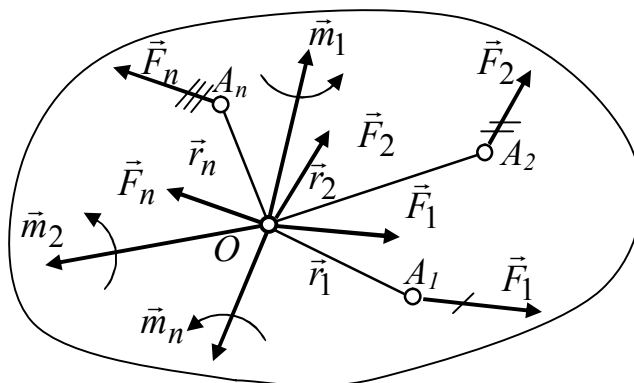


Рис. 1.30

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_1(A_1) &\Rightarrow (\vec{F}_1(O), \quad \vec{m}_1 = \vec{m}_O(\vec{F}_1)), \\ \vec{F}_2(A_2) &\Rightarrow (\vec{F}_2(O), \quad \vec{m}_2 = \vec{m}_O(\vec{F}_2)), \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{F}_n(A_n) &\Rightarrow (\vec{F}_n(O), \quad \vec{m}_n = \vec{m}_O(\vec{F}_n)), \end{aligned} \right\}$$

Отриману систему збіжних сил у точці O додаємо за правилом многокутника сил в результаті отримуємо так званий **головний вектор системи сил**

$$\vec{R}^{sum} = \vec{F}_1(O) + \vec{F}_2(O) + \dots + \vec{F}_n(O) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n,$$

$$\vec{R}^{sum} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k.$$

Таким чином геометрична сума заданих сил є головним вектором системи сил, який не залежить від вибору центра зведення.

Додаючи геометрично вектори-моменти отримуємо **головний момент системи сил**

$$\vec{M}_O^{sum} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_n = \sum \vec{m}_k = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k),$$

який дорівнює геометричній сумі векторів-моментів усіх заданих сил відносно обраного центру.

Теорема 2. Довільна система сил, що розміщена у площині і діє на абсолютно тверде тіло, замінюється однією силою й однією парою сил.

Проекція головного вектора довільної просторової системи сил на

будь-яку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій усіх сил системи на ту саму вісь, тобто

$$R_x^{sum} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R_y^{sum} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad R_z^{sum} = \sum_{k=1}^n F_{kz},$$

а величина і напрям головного вектора системи визначаються за формулами

$$R^{sum} = \sqrt{\left(R_x^{sum}\right)^2 + \left(R_y^{sum}\right)^2 + \left(R_z^{sum}\right)^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x^{sum}}{R^{sum}}; \quad \cos \beta = \frac{R_y^{sum}}{R^{sum}}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z^{sum}}{R^{sum}},$$

де α, β, γ — кути між напрямом вектора \vec{R}^{sum} і координатними осями x, y, z відповідно.

Проекції головного моменту сил на координатні осі

$$M_{Ox}^{sum} = \sum_{k=1}^n m_x(\vec{F}_k); \quad M_{Oy}^{sum} = \sum_{k=1}^n m_y(\vec{F}_k); \quad M_{Oz}^{sum} = \sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k),$$

а величина і напрям головного моменту системи відносно центра зведення

$$M_O^{sum} = \sqrt{\left(M_{Ox}^{sum}\right)^2 + \left(M_{Oy}^{sum}\right)^2 + \left(M_{Oz}^{sum}\right)^2},$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{M_{Ox}^{sum}}{M_O^{sum}}; \quad \cos \beta_1 = \frac{M_{Oy}^{sum}}{M_O^{sum}}; \quad \cos \gamma_1 = \frac{M_{Oz}^{sum}}{M_O^{sum}}.$$

Де: $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — кути, що утворює вектор \vec{M}_O^{sum} з осями координат.

5.3. Умови рівноваги просторової системи сил

Довільна просторова система сил, яка прикладена до вільного твердого тіла, перебуватиме в рівновазі, якщо головний вектор і головний момент цієї системи сил дорівнюють нулю:

$$\vec{R}^{sum} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0, \quad \vec{M}^{sum} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}_k) = 0.$$

Геометричні умови рівноваги: вільне тверде тіло перебуватиме в рівновазі, якщо многокутник сил, які прикладені до тіла, і многокутник векторів-моментів сил, узятих відносно довільного центру, будуть замкнені.

Аналітична умова рівноваги: головний вектор і головний момент системи сил дорівнюють нулю.

$$\begin{aligned} R^{sum} &= \sqrt{(R_x^{sum})^2 + (R_y^{sum})^2 + (R_z^{sum})^2} = \\ &= \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2 + (\sum F_{kz})^2} = 0, \\ M^{sum} &= \sqrt{(M_x^{sum})^2 + (M_y^{sum})^2 + (M_z^{sum})^2} = \\ &= \sqrt{[\sum m_x(\vec{F}_k)]^2 + [\sum m_y(\vec{F}_k)]^2 + [\sum m_z(\vec{F}_k)]^2} = 0. \end{aligned}$$

Також аналітичні умови рівноваги можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, & \sum m_x(\vec{F}_k) &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & \sum m_y(\vec{F}_k) &= 0, \\ \sum F_{kz} &= 0, & \sum m_z(\vec{F}_k) &= 0. \end{aligned}$$

Таким чином, для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил на три координатні осі і алгебраїчні суми моментів сил відносно трьох координатних осей дорівнювали нулю.

Розглянемо окремі випадки.

5.3.1. Просторова система паралельних сил

Розглянемо випадок коли сили прикладені до абсолютно твердого тіла паралельні осі Oz . Відповідно умови рівноваги запишуться у вигляді:

$$\sum F_{kx} \equiv 0, \quad \sum F_{ky} \equiv 0, \quad \sum m_z(\vec{F}_k) \equiv 0,$$

чи у вигляді

$$\sum F_{kz} = 0, \quad \sum m_x(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum m_y(\vec{F}_k) = 0.$$

5.3.2. Довільна система сил, розміщених у площині

Розглянемо випадок коли сили прикладені до абсолютно твердого тіла лежать у площині (наприклад, у площині xOy), то відповідно умови рівноваги запишуться у вигляді:

$$\sum F_{kz} \equiv 0, \quad \sum m_x(\vec{F}_k) \equiv 0, \quad \sum m_y(\vec{F}_k) \equiv 0,$$

або

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_O(\vec{F}) = 0.$$

Тобто, система сил, розміщених в одній площині, зрівноважується, якщо алгебраїчні суми проекцій сил на дві координатні осі і алгебраїчна сума моментів сил відносно якої-небудь точки, розміщеної в площині дії сил, дорівнюють нулю.

Умови рівноваги системи сил, розміщеної в площині, мають ще дві інші форми:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum m_B(\vec{F}_k) = 0$$

(причому вісь Ox не повинна бути перпендикулярна до прямої, яка проходить через точки A і B), та

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum m_B(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum m_C(\vec{F}_k) = 0$$

(точки A , B , C не лежать на одній прямій).

5.3.3. Система паралельних сил, розміщених у площині

Умови рівноваги такої системи сил мають дві форми рівноваги:

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_A(\vec{F}_k) = 0; \end{array} \right\}$$

або

$$\left. \begin{array}{l} \sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum m_B(\vec{F}_k) = 0. \end{array} \right\}$$

6. Контрольні питання для самоперевірки

6.1. Основні поняття та визначення статички

1. Які питання розглядаються в теоретичній механіці?
2. Основні поняття та означення статички.
3. Сформулювати аксіоми статички.
4. Що таке рівнодійна сила?
5. Що таке зрівноважувальна сила?
6. Що таке вільне і невільне тіло?
7. Види в'язей та їх реакції.
8. Принцип звільнення від в'язей.

6.2. Система збіжних сил

1. Яка система сил називається збіжною?
2. У чому суть геометричних умов рівноваги системи збіжних сил?
3. У чому суть аналітичних умов рівноваги системи збіжних сил?
3. Як застосовують теорему про три сили при розв'язуванні задач і в чому полягає її методичне значення?
4. В яких випадках застосовують умови рівновага збіжних сил у векторній формі?

6.3. Момент сили відносно точки і осі

1. Що таке момент сили?
2. Як знайти вектор-момент сили відносно точки?
3. Як обчислити модуль моменту сили відносно точки?
4. Теорема Варіньйона для системи збіжних сил.
5. В якому випадку момент сили відносно точки дорівнює нулю?
6. Чи залежить момент сили відносно точки при перенесенні сили вздовж її лінії дії?
7. Що таке момент сили відносно осі і як його обчислити?
8. В яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?

6.4. Система паралельних сил

1. Яка величина повністю характеризує пару сил?
2. Які основні властивості пари сил?
3. Як довести, що вектор-момент пари сил є вільний вектор?
4. Які існують умови рівноваги системи пар сил?

6.5. Довільна система сил

1. Теорема про паралельне перенесення сили.
2. Як звести задану систему сил, що діють на вільне тверде тіло, до головного вектора і головного моменту?
3. Назвіть геометричні умови рівноваги вільного твердого тіла, на яке діє просторова система сил.
4. Назвіть аналітичні умови рівноваги вільного твердого тіла, на яке діє просторова система сил.
5. Які умови рівноваги системи сил, розміщеної в площині?

Розділ II. КІНЕМАТИКА

Кінематика — розділ теоретичної механіки, який вивчає механічний рух матеріальної точки, системи матеріальних точок та абсолютно твердого тіла на площині чи в просторі за відповідний проміжок часу, без урахування сил, які обумовлюють цей рух.

В основі класичної механіки лежить поняття про абстрактний геометричний простір, який називають «тривимірний евклідовий простір» та поняття часу, який перебігає рівномірно, неперервно та однаковий в усіх частинах відповідного простору.

Положення матеріальної точки чи абсолютно твердого тіла в кінематиці визначається відносно вибраної системами відліку. За відповідну систему відліку вибирають інші довільні тіла.

Кінематика поділяється на кінематику точки і кінематику абсолютно твердого тіла.

Основна задача кінематики точки полягає у визначенні закону її руху і кінематичних характеристик руху.

Основна задача кінематики абсолютно твердого тіла полягає у визначенні закону руху тіл в цілому і кожної точки тіла окремо.

Законом руху називається залежність між положенням точки у вибраній системі відліку за відповідний проміжок часу.

1. Кінематика точки

1.1. Способи задавання руху точки

Рух точки можна визначити трьома способами: векторним;

координатним; натуральним (природним).

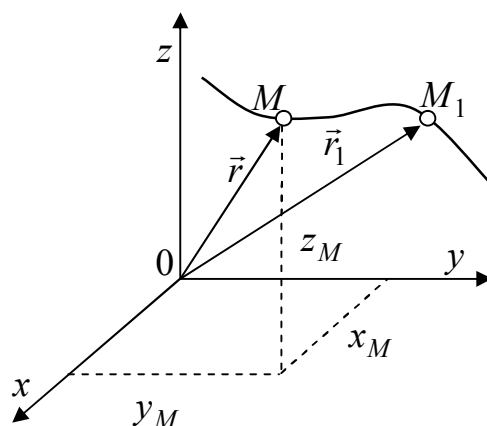


Рис. 2.1

Векторний спосіб (рис. 2.1).

При векторному способі задавання руху точки необхідно знати радіус-вектор \vec{r} точки як функцію часу:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Координатний спосіб (рис. 2.1). За систему відліку звичайно беруть прямокутну систему координат (Декартові координати), але можна застосовувати полярні, циліндричні та сферичні системи координат. При координатному способі задаються координати точки як функції часу

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Дані рівняння називаються параметричними рівняннями кривої, вздовж якої рухається точка M . Лінія, вздовж якої рухається точка, називається **траєкторією**.

Для визначення рівняння траєкторії у звичайному вигляді треба із параметричних рівнянь виключити час (параметр t).

Взаємозв'язок між векторним і координатним способами задавання руху точки в просторі визначається співвідношенням:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}.$$

Природний спосіб (рис. 2.2). При цьому способі задавання руху

точки задається:

- траєкторія;
- початок відріку O з позначенням знаком «+» додатного напрямку відріку координат, а знаком «-» від'ємного напрямку відріку;
- дугова координата S , яка залежить від часу.

Тобто

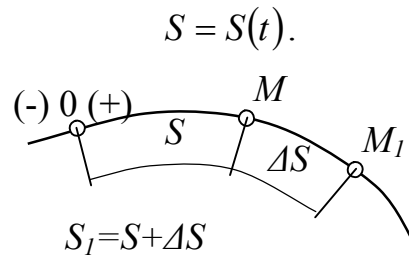


Рис. 2.2

Траєкторія точки може бути прямолінійною або криволінійною в залежності від характеру руху точки. Дугова координата S (рис. 2.2) визначає положення точки на траєкторії, тобто координату для даного моменту часу, в той час як шлях точки – це сума абсолютних значень дугових координат.

1.2. Швидкість точки

Швидкість це величина яка характеризує зміну в часі положення точки відносно вибраної системи координат.

Швидкість точки можна визначити трьома способами: векторним; координатним; натуральним (природним).

Векторний спосіб. Згідно з рис. 2.3 можна записати

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}.$$

де: $\Delta\vec{r}$ — вектор переміщення точки; \vec{r}_1 , \vec{r}_2 — радіуси-вектори, які визначають початкове і кінцеве положення точки.

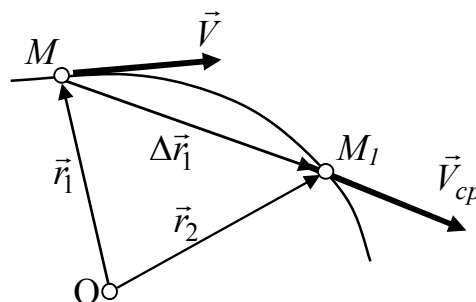


Рис. 2.3

Середня швидкість точки M це вектор, який дорівнює відношенню вектора переміщення $\Delta\vec{r}$ до проміжку часу Δt за який відбулось це переміщення:

$$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Вектор середньої швидкості \vec{V}_{cp} спрямований вздовж хорди MM_1 .

Дійсна швидкість точки

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Таким чином, швидкість точки в даний момент часу це вектор, який дорівнює першій похідній від радіуса-вектора за часом і спрямований по дотичній до траєкторії точки.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Координатний спосіб. Згідно з рис. 2.4 можна записати наступні рівняння:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x \times \vec{i} + y \times \vec{j} + z \times \vec{k}, \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dx}{dt} \times \vec{i} + \frac{dy}{dt} \times \vec{j} + \frac{dz}{dt} \times \vec{k}. \\ \vec{V} &= V_x \times \vec{i} + V_y \times \vec{j} + V_z \times \vec{k}. \end{aligned}$$

Порівнюючи ліві частини записаних рівнянь отримаємо:

$$V_x = \frac{dx}{dt}; \quad V_y = \frac{dy}{dt}; \quad V_z = \frac{dz}{dt}.$$

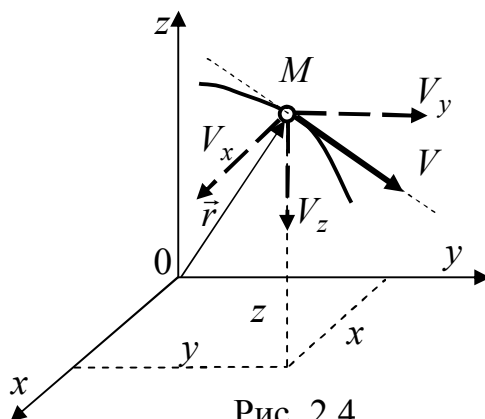


Рис. 2.4

Таким чином, проекції вектора швидкості на декартові осі координат дорівнюють першим похідним за часом від відповідних координат. Модуль вектора швидкості та його напрям визначаються за формулами:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2};$$

$$\cos(\vec{V}, \vec{i}) = V_x / V, \quad \cos(\vec{V}, \vec{j}) = V_y / V, \quad \cos(\vec{V}, \vec{k}) = V_z / V.$$

Природний спосіб. Швидкість точки (згідно рис. 2.5) при цьому способі задавання руху можна визначити наступним чином:

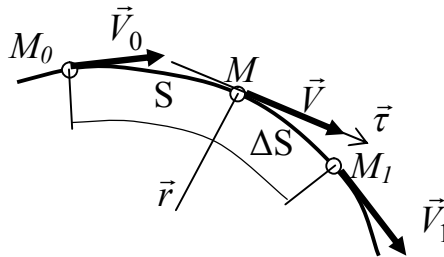


Рис. 2.5

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{ds}{dt},$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} = \vec{\tau},$$

де $\vec{\tau}$ – орт дотичної.

Модуль границі

$$\left| \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} \right| = 1.$$

Тоді

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt} \times \vec{\tau} = \dot{S} \times \vec{\tau}.$$

Таким чином, швидкість при природному способі задавання руху дорівнює першій похідній за часом від дугової координати і спрямована по дотичній до траєкторії руху точки.

Одиниця вимірювання швидкості в СІ — метр на секунду (м/с).

1.3. Прискорення точки

Під час руху точки її швидкість, може змінюватись як за напрямом так і за величиною. Величина, яка характеризує цю зміну, називається **прискоренням**. Прискорення це векторна величина. одиниця вимірювання в СІ — метр за секунду в квадраті (м/с^2).

Векторний спосіб задавання руху (рис. 2.6):

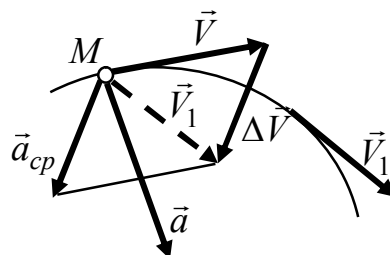


Рис. 2.6

Враховуючи, що швидкість точки M величина змінна то відповідно

$$\vec{V}_1 = \vec{V} + \Delta\vec{V}, \quad \Delta\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}.$$

Середнє прискорення точки

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}, \quad \text{і відповідно } \vec{a}_{cp} \parallel \Delta\vec{V}.$$

Дійсне прискорення точки M в даний момент часу

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Таким чином, прискорення точки дорівнює першій похідній за часом від швидкості або другій похідній за часом від радіуса-вектора точки. Вектор прискорення напрямлений завжди всередину угнутості траєкторії.

Координатний спосіб. Розкладемо вектор прискорення точки \vec{a} по координатним осям з урахуванням залежності для визначення прискорення та швидкості отримаємо:

$$\vec{a} = a_x \times \vec{i} + a_y \times \vec{j} + a_z \times \vec{k};$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt} \times \vec{i} + \frac{dV_y}{dt} \times \vec{j} + \frac{dV_z}{dt} \times \vec{k};$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \times \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \times \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \times \vec{k}.$$

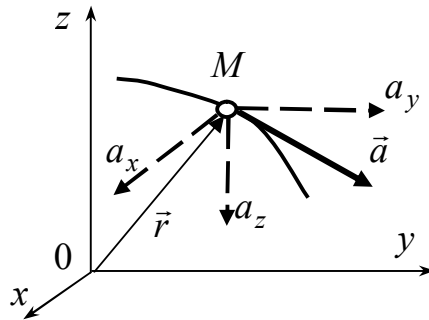


Рис. 2.7

Порівнюючи ліві й праві частини цих залежностей, маємо:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \ddot{x}; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \ddot{y}; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \ddot{z}.$$

Таким чином, проекції вектора прискорення на осі координат дорівнюють першим похідним за часом від відповідних проекцій швидкостей або другим похідним за часом від відповідних координат точки.

Модуль і напрям вектора прискорення визначаються за формулами:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = a_x / a, \quad \cos(\vec{a}, \vec{j}) = a_y / a, \quad \cos(\vec{a}, \vec{k}) = a_z / a.$$

Природний спосіб. Введемо природні осі координат (τ , n , b), які постійно зв'язані з рухомою точкою M , рис. 2.8. Площина, яка проходить через дотичну τ і нормаль n , називається дотичною.

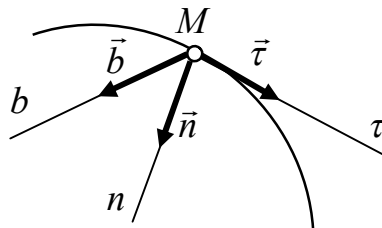


Рис. 2.8

Із формули швидкості при природному способі задавання руху

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt} \times \vec{\tau},$$

знаходимо прискорення

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \times \vec{\tau} \right) = \frac{d^2s}{dt^2} \times \vec{\tau} + \frac{ds}{dt} \times \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \times \vec{\tau} + \frac{ds}{dt} \times \frac{d\vec{\tau}}{ds} \times \frac{ds}{dt} = \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} \times \vec{\tau} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \times \frac{d\vec{\tau}}{ds}. \end{aligned}$$

Вектор $d\vec{\tau}$ показує зміну орта дотичної за довжиною дуги і має назву вектора кривини:

$$|\vec{k}| = \lim_{\Delta\vec{\tau} \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s} \right| = \frac{1}{\rho}; \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{k} = \frac{1}{\rho} \times \vec{n}.$$

Таким чином отримаємо залежність для визначення прискорення

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \times \vec{\tau} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \times \frac{1}{\rho} \times \vec{n} = \frac{dV}{dt} \times \vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \times \vec{n} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

де: \vec{a}_τ – дотичне, або тангенціальне, прискорення, яке характеризує зміну швидкості за величиною (вектор \vec{a}_τ напрямлений по дотичній до кривої). Причому вектор швидкості \vec{V} завжди напрямлений по дотичній у напрямі руху точки, а вектор дотичного прискорення \vec{a}_τ , може бути напрямлений і в протилежний бік, якщо швидкість зменшується зі зміною часу (на рис. 2.9 цей вектор показано пунктиром); \vec{a}_n – нормальне, або доцентрове, прискорення, яке характеризує зміну швидкості за напрямом (вектор \vec{a}_n напрямлений по головній нормалі до центра кривизни).

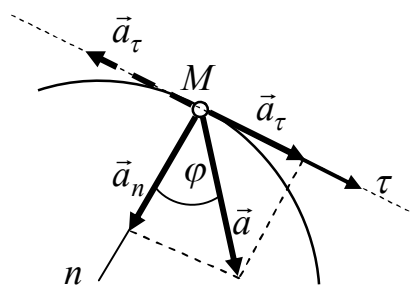


Рис. 2.9

Модуль повного прискорення точки M та його напрям визначаються наступними формулами:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{|a_\tau|}{a_n}.$$

1.4. Окремі випадки руху точки

Можливі наступні випадки руху матеріальної точки.

1) *Прямолінійний рух.* Такий рух точки буде у тому випадку, коли нормальне прискорення точки $\vec{a}_n = 0$. Відповідно повне прискорення $\vec{a} = \vec{a}_\tau$.

2) *Рівномірний прямолінійний рух.* Такий рух точки має місце у випадку коли її прискорення $\vec{a} = 0$. Відповідно $\vec{a}_n = 0$, і $\vec{a}_\tau = 0$. Швидкість точки при цьому русі не змінюється ні за величиною, ні за напрямком, тобто $V = \text{const}$.

Тоді закон руху точки визначається рівнянням

$$s = s_0 + (V \times t).$$

3) *Рівномірний криволінійний рух.* Такий рух точки буде, коли дотичне прискорення $\vec{a}_\tau = 0$, а повне прискорення $\vec{a} = \vec{a}_n$, при умові, що $a_n \neq 0$. Проекція швидкості при цьому не змінюється, тобто $V_\tau = \text{const}$.

4) *Рівнозмінний криволінійний рух.* Такий рух точки буде в тому випадку, якщо дотичне прискорення залишається весь час сталою величиною, тобто, $\vec{a}_\tau = \text{const}$. Причому, якщо прискорення \vec{a}_τ збігається з напрямом швидкості, то рух точки називається *рівноприскореним*, якщо \vec{a}_τ напрямлене в бік, протилежний напрямку швидкості то *рівноуповільнений*. Швидкість і закон руху визначаються за формулами:

$$V = V_0 \pm (a_\tau \times t); \quad s = s_0 + (V_0 \cdot t) \pm \frac{1}{2}(a_\tau \times t^2).$$

Якщо рух точки прискорений, то в формулах береться знак « + », а якщо сповільнений, то знак « - ».

2. Кінематика твердого тіла

2.1. Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому будь-яка пряма, що проведена в тілі, залишається паралельною самій собі за весь час руху тіла (рис. 2.10).

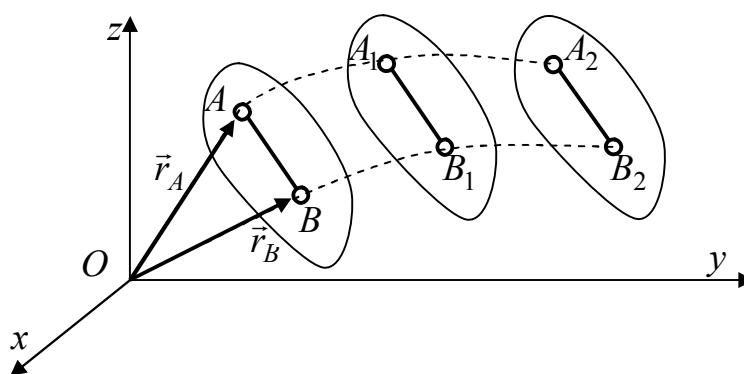


Рис. 2.10

Теорема. При поступальному русі абсолютно твердого тіла всі точки тіла рухаються по однакових еквідистантних траєкторіях і мають однакові за модулем і напрямом швидкості і прискорення.

Згідно рис. 2.10 маємо, що

$$AB = \text{const}; \quad \vec{r}_B = \vec{r}_A + A\vec{B}.$$

Візьмемо першу похідну за часом від \vec{r}_B :

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(A\vec{B})}{dt},$$

де: $\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{V}_B$; $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{V}_A$; $\frac{d(A\vec{B})}{dt} = 0$.

Відповідно маємо

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A.$$

Диференціюючи за часом, маємо:

$$\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt}, \text{ або } \vec{a}_B = \vec{a}_A.$$

Отже, визначивши рух якої-небудь однієї точки тіла, ми водночас визначимо рух будь-якої його точки.

Таким чином, кінематика поступального руху абсолютно твердого тіла зводиться до кінематики точки.

2.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Якщо тіло, має дві нерухомі точки, то воно здійснює обертальний рух навколо осі, що проходить через ці дві точки. При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі всі його точки (крім тих, що лежать на осі) описують кола, які лежать у площинах, перпендикулярних до осі обертання. Центри всіх цих кіл лежать на осі обертання, а радіуси дорівнюють відстані від точок до осі.

2.2.1. Рівняння руху, кутова швидкість і кутове прискорення

Положення тіла в будь-який час при обертальному русі навколо нерухомої осі визначається кутом обертання φ (рис. 2.11).

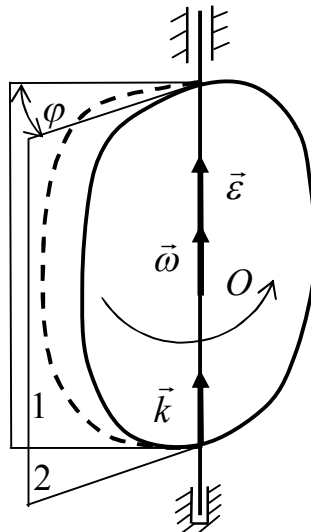


Рис. 2.11

Закон обертального руху тіла

$$\varphi = \varphi(t).$$

Основними кінематичними характеристиками тіла, яке обертається, є

кутова швидкість ($\vec{\omega}$) та кутове прискорення ($\vec{\varepsilon}$). Кутова швидкість $\vec{\omega}$ тіла характеризує зміну за часом кута обертання. Середня кутова швидкість

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Миттєва кутова швидкість, або просто кутова швидкість,

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Кутовою швидкістю в даний момент часу називається границя, до якої прямує відношення кутового переміщення $\Delta\varphi$ до проміжку часу Δt , протягом якого це переміщення відбулося при нескінченному зменшенні Δt , або кутова швидкість дорівнює першій похідній за часом від кута обертання.

Одиниця вимірювання кутової швидкості радіан за секунду (рад/с) або (c^{-1}).

Іноді кутову швидкість $\vec{\omega}$ визначають числом обертів n за хвилину. Перейти від обертів за хвилину до радіанів за секунду можна за допомогою співвідношення

$$\omega = \frac{\pi \times n}{30}.$$

Кутову швидкість зображають вектором, напрямленим уздовж осі обертання в той бік, звідки напрям обертання відбувається проти руху годинникової стрілки (рис. 2.11). Якщо орт осі обертання \vec{k} , то

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \times \vec{k} = \dot{\varphi} \times \vec{k}.$$

Кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ характеризує зміну кутової швидкості за часом:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t};$$

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

Кутове прискорення дорівнює першій похідній за часом від кутової швидкості, або другій похідній за часом від кута обертання.

Кутове прискорення зображають вектором, напрямленим уздовж осі обертання. Він збігається за напрямом з вектором $\vec{\omega}$, коли кутова швидкість зростає за величиною, і напрямлений у протилежний бік, коли $\vec{\omega}$ зменшується:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} \times \vec{k} \right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \times \vec{k} = \ddot{\varphi} \times \vec{k}.$$

Кутова швидкість тіла і кутове прискорення — кінематичні характеристики всього тіла, вони однакові для всіх точок тіла.

2.2.2. Окремі випадки обертання тіла навколо нерухомої осі

В процесі обертального руху твердого тіла можливі такі випадки:

а) рівномірне обертання: В даному випадку $\omega = const$. При цьому кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

а кут повороту змінюється пропорційно часу

$$\omega = \varphi/t, \Rightarrow \varphi = \omega \times t.$$

Закон руху

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \times t.$$

б) рівнозмінне обертання: В даному випадку $\varepsilon = const$. Виконавши відповідні перетворення

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}, \quad d\omega = \varepsilon \times dt, \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \pm \varepsilon \int_0^t dt,$$

отримаємо залежність для визначення кутової швидкості

$$\omega - \omega_0 = \pm \varepsilon \times t, \quad \omega = \omega_0 \pm \varepsilon \times t.$$

Закон руху

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 \pm \varepsilon \times t, \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 \pm \varepsilon \times t) dt,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \times t \pm \frac{1}{2} \varepsilon \times t^2,$$

де: φ_0 – початковий кут повороту.

Знак «+» відповідає прискореному обертанню тіла, а знак «-» сповільненому обертанню тіла.

2.2.3. Лінійні швидкість і прискорення точки тіла при обертанні навколо нерухомої осі

Розглянемо обертальний рух абсолютно твердого тіла відносно нерухомої осі.

Точка M , яка знаходиться на відстані h від осі обертання (рис. 2.12), при повороті тіла на малий кут $d\varphi$ опише малу дугу $ds = h \times d\varphi$. Ділячи обидві частини цієї рівності на елементарний проміжок часу dt , протягом якого відбулося це переміщення, отримаємо

$$V = \frac{ds}{dt} = h \times \frac{d\varphi}{dt} = h \times \omega,$$

де: V – лінійна швидкість точки тіла.

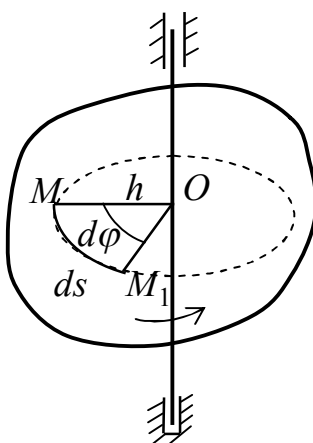


Рис. 2.12

Таким чином лінійна швидкість довільної точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює добутку кутової швидкості на радіус кола, яке описує точка і напрямлена по дотичній до кола в бік обертання. Відповідно вектор лінійної швидкості завжди перпендикулярний до радіуса кола.

Знаючи кутову швидкість і кутове прискорення тіла, можна знайти лінійне прискорення точки, що рухається по колу. Для цього скористаємося природним способом задавання руху і підставимо у співвідношення визначення дотичного та нормального прискорення вираз, що пов'язує лінійну швидкість з кутовою:

$$a_O = a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(h \times \omega)}{dt} = h \times \frac{d\omega}{dt} = h \times \varepsilon,$$

$$a_D = a_n = \frac{V^2}{h} = \frac{h^2 \times \omega^2}{h} = h \times \omega^2,$$

де: a_O – обертальне прискорення точки, a_D – доцентрове прискорення точки.

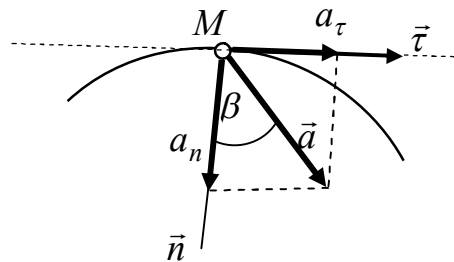


Рис. 2.13

Таким чином, повне прискорення точки M (рис. 2.13) має вигляд

$$\vec{a} = a_n \times \vec{n} + a_\tau \times \vec{\tau},$$

або за модулем

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\varepsilon^2 \times h^2 + \omega^4 \times h^2} = h \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Напрямок одержаного прискорення знайдемо за тангенсом кута β , утвореного між повним та нормальним (доцентровим) прискореннями:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

2.3. Плоско-паралельний рух твердого тіла

2.3.1. Рівняння плоско-паралельного руху

Плоско-паралельним рухом твердого тіла називається такий рух, при якому всі точки тіла переміщуються у площинах, що паралельні деякій нерухомій площині.

Усі точки, що лежать на перпендикулярі до нерухомої площини, рухатимуться однаково. Через це положення тіла при плоско-паралельному русі буде визначатися положенням довільного перерізу, паралельного даній нерухомій площині (рис. 2.14).

Для визначення положення перерізу в площині xOy необхідно задати координати довільної точки тіла і напрям довільної прямої (рис. 2.15); тобто необхідно знати закон зміни за часом:

$$x_A = x(t), \quad y_A = y(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

Ці рівняння і є рівняння плоско-паралельного руху твердого тіла.

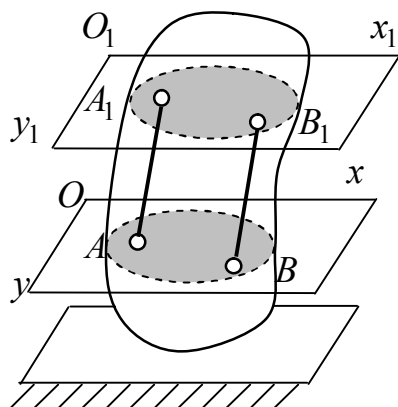


Рис. 2.14

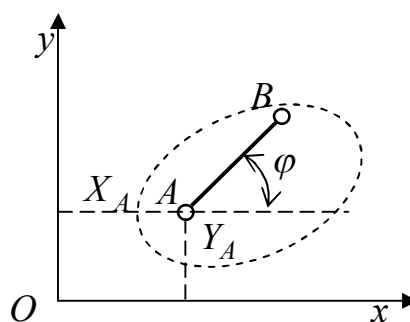


Рис. 2.15

2.3.2. Розкладання плоско-паралельного руху

Плоско-паралельний рух твердого тіла може бути розкладений на найпростіші рухи: поступальний і обертальний.

Теорема. Плоско-паралельний рух твердого тіла складається із поступального руху, при якому всі точки рухаються як деяка точка, що взята за полюс, і обертального руху тіла навколо полюса (рис. 2.16).

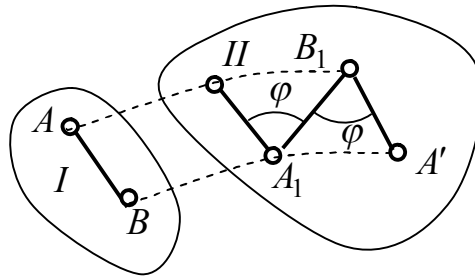


Рис. 2.16

Зміна полюса обумовлює тільки зміну поступальної частини повного переміщення тіла. При цьому обертальна частина руху від полюса не залежить.

2.3.3. Визначення швидкостей точки при плоско-паралельному русі

Теорема. Швидкість довільної точки при плоско-паралельному русі дорівнює геометричній сумі швидкості полюса і швидкості обертального руху навколо полюса.

Згідно з рис. 2.17 можна записати:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}.$$

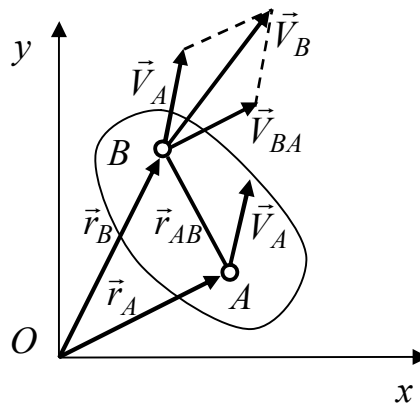


Рис. 2.17

Диференціюючи за часом цю векторну рівність отримаємо:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\vec{r}_{AB})}{dt}.$$

Оскільки вектор \vec{r}_{AB} змінює тільки напрям, то $\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}$ являє собою швидкість обертального руху, відповідно:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

За полюс беруть точку, швидкість якої відома або легко може бути знайдена згідно з умовою задачі. Для визначення $|\vec{V}_{BA}|$ треба знайти кутову швидкість обертання тіла навколо полюса. Тоді швидкість V_{BA} дорівнюватиме

$$V_{BA} = \omega \times (AB).$$

2.3.4. Миттєвий центр швидкостей

Точка, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю, називається миттєвим центром швидкостей.

Теорема. Якщо відома швидкість деякої точки при плоско-паралельному русі то миттєвий центр швидкостей міститься на перпендикулярі, який проведено до цієї швидкості, на відстані $(AD) = V_A / \omega$, рис. 2.18.

Згідно з теоремою до відомої швидкості \vec{V}_A точки A проводимо перпендикуляр на якому вибираємо (довільно) точку D . Швидкість точки D можемо визначити наступним рівнянням

$$\vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_{DA},$$

де: $\vec{V}_{DA} \perp (AD)$; $V_{DA} = \omega \times (AD)$.

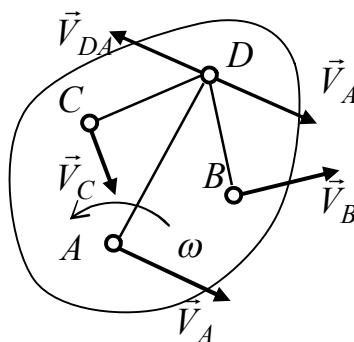


Рис. 2.18

Так як

$$V_{DA} = \omega \times (AD) = V_A,$$

то відповідно

$$V_D = V_A - V_{DA} = 0.$$

Таким чином, точка D – миттєвий центр швидкостей, відстань до якого визначається із співвідношення

$$(AD) = V_A / \omega.$$

Беручи точку D за полюс, для точок B, C маємо:

$$V_B = \omega \times (BD); \quad V_C = \omega \times (CD).$$

Оскільки $V_D = 0$, тоді

$$\omega = \frac{V_A}{(AD)} = \frac{V_B}{(BD)} = \frac{V_C}{(CD)}.$$

З отриманих рівностей випливає:

1. Швидкості точок плоскої фігури (перерізу тіла) при плоско-паралельному русі пропорційні їх відстаням до миттєвого центра швидкостей.

2. Для визначення положення миттєвого центра швидкостей необхідно знати напрям швидкостей двох точок тіла.

3. Для визначення швидкості будь-якої точки за допомогою миттєвого центра швидкостей треба знати модуль і напрям швидкості однієї точки (A) і напрям швидкості іншої точки (B). Миттєвий центр швидкостей міститься в точці перетину перпендикулярів до швидкостей точок A і B . Тоді швидкість точки B можна визначити з співвідношення

$$V_B = V_A \times (BD)/(AD).$$

2.4. Прискорення точок при плоско-паралельному русі тіла

Швидкість будь-якої точки при плоско-паралельному русі тіла, як відомо, визначається за формулою

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

Візьмемо першу похідну за часом від лівої і правої частини цього рівняння:

$$\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \frac{d\vec{V}_{BA}}{dt}.$$

Таким чином, отримаємо векторне рівняння визначення прискорення точки B

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA},$$

де: \vec{a}_{BA} – прискорення обертального руху точки B навколо полюса – точки A , яке складається із обертального (\vec{a}_{BA}^τ) і (\vec{a}_{BA}^n) доцентрового прискорень. Тоді рівняння можна записати у вигляді:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n,$$

де:

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon \times (BA); \quad a_{BA}^n = \omega^2 \times (BA).$$

Доцентрове прискорення напрямлене від B до A , а обертальне – перпендикулярно до (BA) .

Як правило кутова швидкість відома, а кутове прискорення – ні. Тому визначаємо прискорення точки B аналітичним способом, тобто шляхом проектування векторного рівняння на осі τ і n (рис. 2.19):

$$a_B^\tau = a_A \times \sin \alpha + a_{BA}^\tau; \quad a_B^n = a_A \times \cos \alpha + a_{BA}^n;$$

$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2}; \quad \cos(\vec{a}_B, \vec{\tau}) = \frac{|a_B^\tau|}{a_B}.$$

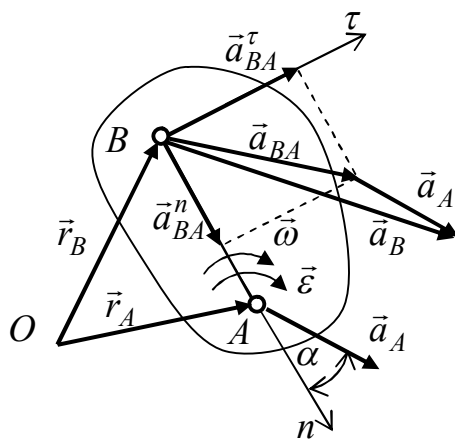


Рис. 2.19

3. Контрольні питання для самоперевірки

3.1. Кінематика точки

1. У чому полягає основна задача кінематики точки?
2. Які є способи задавання руху точки?
3. Що таке «шлях» та «дугова координата»?
4. Як скласти рівняння траєкторії точки?
5. Що характеризує швидкість?
6. Способи визначення швидкості руху точки?
7. Що характеризує прискорення?
8. Способи визначення прискорення руху точки?

3.2. Кінематика твердого тіла

1. Який рух тіла називається поступальним?
2. Швидкості та прискорення при поступальному русі.
3. Рівняння поступального руху тіла в координатній формі.
4. Рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.
5. Що таке кутова швидкість і в яких одиницях вона вимірюється?
6. Як записати кутову швидкість у векторній формі?
7. Що таке кутове прискорення?
8. Як записується кутове прискорення у векторній формі?
9. Як скласти рівняння рівномірного обертального руху?
10. Величина і напрям обертального прискорення точки тіла.
11. Величина і напрям доцентрового прискорення точки тіла.
12. Який рух називають плоско-паралельним рухом твердого тіла?
13. Швидкість довільної точки при плоско-паралельному русі.
14. Що таке миттєвий центр швидкості плоскої фігури?
15. Як визначити швидкість точок плоскої фігури за допомогою миттєвого центра швидкості?
16. Прискорення точок при плоско-паралельному русі тіла.

Розділ III. ДИНАМІКА

Динаміка — розділ теоретичної механіки, який розглядає рух матеріальних тіл під дією зовнішніх сил прикладених до них.

Зовнішні сили які діють на матеріальні тіла розподіляються на сталі і несталі. Несталі сили можуть бути залежними від: переміщення; часу; та швидкості. Наприклад, при розтягуванні пружини сила пружності буде залежати від переміщення, а сила опору середовища залежить від швидкості тіла.

Динаміка матеріальних тіл базується на законах Ньютона які встановлені на основі чисельних дослідів та спостережень і є об'єктивними законами природи, що приймаються без доведень.

Перший закон Ньютона, який описує властивість матеріальних тіл зберігати стан руху формулюється наступним чином.

Ізольоване від зовнішнього середовища матеріальне тіло зберігає стан рівномірного і прямолінійного руху або перебуває в стані спокою доти, доки вплив з боку інших тіл не виведе його з цього стану.

Другий закон Ньютона, який виражає зв'язок між прискоренням матеріального тіла та силою формулюється наступним чином.

Добуток маси матеріального тіла на його прискорення дорівнює силі, що діє на це тіло

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Даний закон дає можливість розрахувати кількісно величину сили зовнішнього впливу на тіло яке перебуває у стані спокою або руху.

Третій закон Ньютона, який встановлює зв'язок між силами взаємодії двох різних матеріальних тіл формулюється наступним чином.

Будь-якій дії відповідає однакова за величиною і протилежна за напрямом протидія

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Тобто, сили взаємодії двох матеріальних тіл однакові між собою за величиною але напрямлені у протилежні сторони.

Розглядання руху матеріальних тіл під дією зовнішніх сил прикладених до них завжди проводиться у відповідній системі координат, яку називають інерційною системою відліку. Система відліку може бути нерухома чи рухатись прямолінійно і рівномірно.

1. Динаміка точки

1.1. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Диференціальні рівняння руху й основні теореми динаміки для вільної матеріальної точки отримують на основі другого закону Ньютона який ще називають основним законом механіки. Форма запису диференціальних рівнянь руху вільної матеріальної точки залежить від способу задавання її руху: векторного; координатного чи природного.

1.1.1. Векторний спосіб задавання руху

Розглянемо рух матеріальної точки M під дією зовнішньої сили \vec{F} в декартовій системі координат (рис. 3.1).

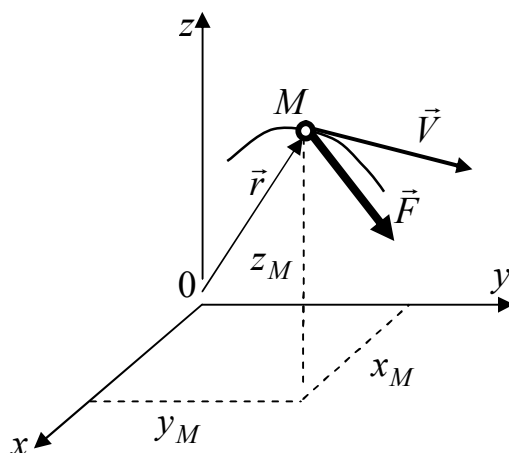


Рис. 3.1

Згідно другому закону Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$. Враховуючи те, що рух матеріальної точки заданий векторним способом то згідно кінематики прискорення даної точки визначається рівнянням

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}},$$

яке підставляємо в другий закон Ньютона

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}.$$

Таким чином ми отримали диференціальне рівняння руху матеріальної точки у векторній формі.

В тому випадку коли на матеріальну точку діє декілька різних сил

диференціальне рівняння руху буде мати вигляд

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F}_i.$$

1.1.2. Координатний спосіб задавання руху

Спроекуємо праву та ліву частину рівняння $m\vec{a} = \vec{F}$ на осі декартової системи координат (рис. 3.1) отримаємо відповідні рівняння:

$$ma_x = F_x; \quad ma_y = F_y; \quad ma_z = F_z.$$

Підставимо в дані рівняння відповідні значення проєкцій прискорень

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x},$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y},$$

$$a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z},$$

отримаємо динамічні рівняння руху матеріальної точки в координатній формі

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z.$$

В тому випадку коли на матеріальну точку діє декілька різних сил диференціальні рівняння руху будуть мати вигляд

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix}, \quad m\ddot{y} = \sum F_{iy}, \quad m\ddot{z} = \sum F_{iz}.$$

1.1.3. Природний спосіб задавання руху

Спроекуємо праву та ліву частину рівняння $m\vec{a} = \vec{F}$ на осі природного тригранника (рис. 3.2) отримаємо відповідні рівняння:

$$ma_\tau = F_\tau; \quad ma_n = F_n; \quad ma_b = F_b.$$

Враховуючи, що прискорення при природному способі задавання руху визначається рівнянням

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} \times \vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \times \vec{n} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

отримаємо динамічні рівняння руху матеріальної точки в натуральній формі або у формі Ейлера

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = F_{i\tau}, \quad m \frac{V^2}{\rho} = F_{in}, \quad 0 = F_{ib}.$$

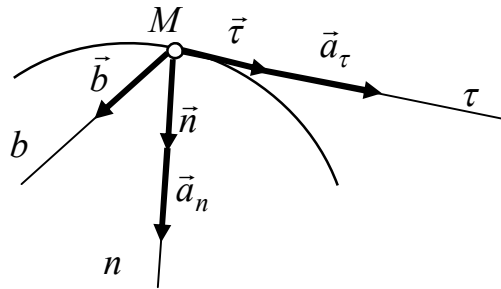


Рис. 3.2

В тому випадку коли на матеріальну точку діє декілька різних сил диференціальні рівняння руху будуть мати вигляд

$$m \frac{dV}{dt} = \sum F_{i\tau}, \quad m \frac{V^2}{\rho} = \sum F_{in}.$$

1.2. Основні задачі динаміки матеріальної точки

Задачі які зустрічаються при дослідженні руху матеріальної точки можуть бути зведені до прямої (першої) чи оберненої (другої) задач динаміки.

Згідно прямої задачі динаміки відома маса та закон руху матеріальної точки на основі чого необхідно визначити силу, чи сили які обумовлюють цей рух.

При оберненій задачі динаміки відома маса та сили, які прикладені до матеріальної точки, а також початкові умовами згідно яких необхідно визначити закон руху даної точки.

1.2.1. Розв'язування прямої задачі динаміки матеріальної точки

При розв'язуванні прямої задачі в першу чергу необхідно виділити об'єкт (рух якого досліджується) з яким безпосередньо пов'язані як задані, так і шукані величини сил. Якщо об'єкт який досліджується обмежений в'язями, то користуючись аксіомою звільнення від в'язей, замінити їх дію силами реакцій в'язей. У результаті чого об'єкт руху можна вважати умовно вільним. Для того, щоб скласти динамічні рівняння:

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix}, \quad m\ddot{y} = \sum F_{iy}, \quad m\ddot{z} = \sum F_{iz};$$

$$m \frac{dV}{dt} = \sum F_{it}, \quad m \frac{V^2}{\rho} = \sum F_{in},$$

необхідно вибрати систему координат прив'язану до об'єкта з урахуванням всіх активних сили та реакції в'язей, що діють на нього. Згідно заданого закону руху визначають проекції прискорення на відповідні осі координат. Отримані результати разом з відомою масою об'єкта підставляють в динамічні рівняння які розв'язують відносно невідомих сил.

1.2.2. Розв'язування оберненої задачі динаміки матеріальної точки

При розв'язуванні оберненої задачі дотримуються послідовності розв'язку прямої задачі до складання динамічних рівнянь руху. Отримавши рівняння руху об'єкту дослідження необхідно з'ясувати, що являють собою сили які входять до них.

Якщо сили що входять в рівняння сталі або залежать від часу та швидкості, то проекція прискорення на вісь записується як перша похідна за часом від проекції швидкості на цю вісь.

Якщо сили що входять в рівняння залежать від переміщення або від квадрата швидкості, то проекцію прискорення на вісь записують у такому вигляді:

$$\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{dV_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = V_x \frac{dV_x}{dx};$$

$$\ddot{y} = \frac{dV_y}{dt} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dV_y}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = V_y \frac{dV_y}{dy};$$

$$\ddot{z} = \frac{dV_z}{dt} \cdot \frac{dz}{dz} = \frac{dV_z}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = V_z \frac{dV_z}{dz}.$$

Отримані результати разом з відомою масою об'єкта підставляють в динамічні рівняння які двічі інтегруючи знаходять загальний розв'язок, який містить довільні сталі інтегрування. Відповідно до заданих початкових умов руху об'єкту, які записуються у вигляді

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

визначають сталі інтегрування. Підставляючи у загальний розв'язок задачі значення сталих інтегрування отримують рівняння руху матеріальної точки під дією даної системи сил при заданих початкових умовах.

2. Динаміка механічних систем

Механічною системою називають таку систему матеріальних точок чи тіл, в якій розташування та рух кожної точки чи тіла однозначно залежить відповідно до розташування чи руху всіх інших точок чи тіл.

2.1. Внутрішні та зовнішні сили

Розглянемо довільну механічну систему (рис 3.3) яка складається із n матеріальних точок чи тіл. Положення та рух матеріальних точок чи тіл в даній системі залежить від розташування чи руху всіх елементів системи.

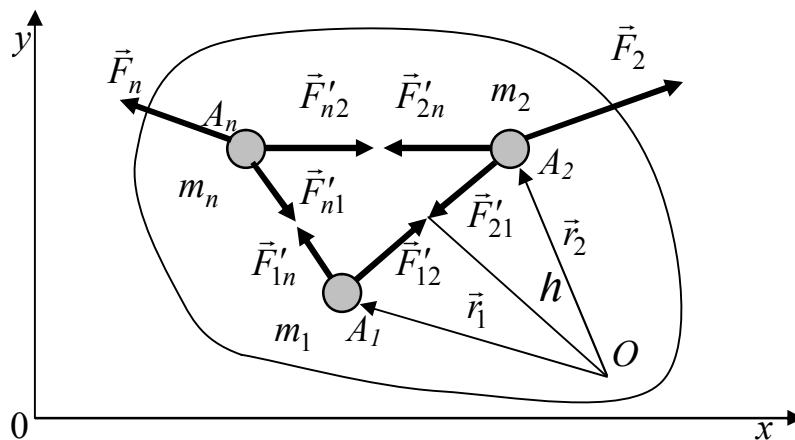


Рис. 3.3

На відповідні точки механічної системи діють зі сторони інших тіл чи систем зовнішні сили \vec{F}_i , внаслідок чого виникають сили взаємодії між точками чи тілами даної системи які називають внутрішніми силами \vec{F}'_{ij} (рис. 3.3).

Згідно третього закону Ньютона, сили взаємодії між елементами механічної системи повинні буди однакові між собою за величиною але напрямлені у протилежні сторони. Таким чином маємо:

$$\vec{F}'_{1,2} = -\vec{F}'_{2,1}, \dots, \vec{F}'_{n-1,n} = -\vec{F}'_{n,n-1},$$

відповідно, головний вектор внутрішніх сил

$$\vec{R}'_{sum} = \sum_{k=1}^n \vec{F}'_k = 0.$$

Враховуючи, що момент внутрішніх сил відносно деякої точки O (рис. 3.3)

$$\vec{M}'_{12} = \vec{r}_1 \times \vec{F}'_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}'_{21} = 0,$$

оскільки

$$|\vec{r}_1 \times \vec{F}'_{12}| = F'_{12} \times h \quad \text{і} \quad |\vec{r}_2 \times \vec{F}'_{21}| = -F'_{21} \times h.$$

Відповідно головний момент внутрішніх сил

$$\vec{M}'_{sum} = \sum_{k=1}^n M'_{sum(k,k-1)} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}'_k) = 0$$

Тобто внутрішні сили та моменти взаємно врівноважуються.

2.2. Центр мас механічної системи

Розглянемо довільну механічну систему (рис. 3.4) яка складається із n матеріальних точок чи тіл.

Маса даної механічної системи дорівнює алгебраїчній сумі відповідно мас матеріальних точок чи тіл які утворюють систему

$$M = \sum_{k=1}^n m_k.$$

Центром мас механічної системи називається така точка (точка C рис. 3.4), радіус вектор якої розраховується згідно рівняння

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M}.$$

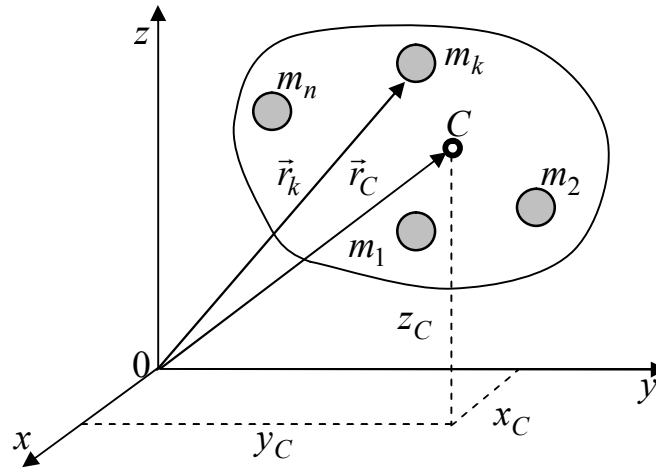


Рис. 3.4

У декартовій системі координат центр мас визначається наступними залежностями

$$x_C = \frac{\sum m_k \cdot x_k}{M}, \quad y_C = \frac{\sum m_k \cdot y_k}{M}, \quad z_C = \frac{\sum m_k \cdot z_k}{M}.$$

Центр мас та центр ваги механічної системи збігаються в полі тяжіння.

За допомогою поняття центра мас можна звести, у деяких випадках, задачу про рух матеріальної системи до задачі про рух тільки однієї точки – центру мас, що суттєво спрощує розв'язування відповідної задачі.

2.3. Момент інерції механічної системи відносно осі

Моментом інерції механічної системи відносно осі називається скалярна величина суми добутків мас усіх точок системи на квадрати їх відстаней від відповідних осей.

Для декартової системи координат відповідно маємо:

$$J_x = \sum_{k=1}^n m_k \times h_k^2, \quad \text{або} \quad J_x = \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2);$$

$$J_y = \sum_{k=1}^n m_k \times h_k^2, \quad \text{або} \quad J_y = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + z_k^2);$$

$$J_z = \sum_{k=1}^n m_k \times h_k^2, \text{ або } J_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

Момент інерції твердого тіла відносно осі може бути визначений наступним чином:

$$J = M \times i^2,$$

де: M – маса тіла (кг); i – радіус інерції тіла відносно осі (м).

Радіусом інерції тіла називають ту відстань від осі до точки де потрібно зосередити всю масу M , щоб момент інерції цієї точки дорівнював моменту інерції всього тіла.

При розрахунку моменту інерції суцільного тіла відносно осі його поділяють на елементарні частини. Відповідно

$$J = \int_{(V)} h^2 dm.$$

3. Загальні теореми динаміки точки і матеріальної системи

Загальні чи основні теореми динаміки характеризують окремі властивості механічного руху і надають часткову інформацію про цей рух.

У динаміці системи матеріальних точок розглядають чотири основні теореми:

- про рух центра мас;
- про зміну кількості руху;
- про зміну кінетичного моменту;
- про зміну кінетичної енергії.

У динаміці матеріальної точки основних теорем три:

- про зміну кількості руху;
- про зміну моменту кількості руху;
- про зміну кінетичної енергії.

3.1. Теорема про рух центра мас матеріальної системи

Теорема. Добуток маси матеріальної системи на прискорення центра мас дорівнює геометричній сумі зовнішніх сил, що діють на систему, або центр мас механічної системи під дією зовнішніх сил рухається як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи.

Рівняння руху довільної матеріальної системи на яку діють зовнішні та внутрішні сили згідно закону Ньютона запишемо в наступному вигляді

$$\sum m_k \vec{a}_k = \sum \vec{F}_k + \sum \vec{F}'_k .$$

Згідно властивостям внутрішніх сил

$$\sum \vec{F}'_k = 0 ,$$

а також враховуючи, що

$$\sum m_k \vec{a}_k = \sum m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = M \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} = M \times \ddot{\vec{r}}_C = M \times \vec{a}_C ,$$

отримаємо рівняння руху довільної матеріальної системи

$$M \times \vec{a}_C = \sum \vec{F}_k .$$

У проєкціях на осі декартової системи координат рівняння буде мати вигляд

$$M \times \ddot{x}_C = \sum F_{kx} , \quad M \times \ddot{y}_C = \sum F_{ky} , \quad M \times \ddot{z}_C = \sum F_{kz} .$$

Дана теорема дозволяє виключити з розгляду заздалегідь невідомі внутрішні сили та дає обґрунтування динаміки матеріальної точки.

Наслідками із даної теореми є закон збереження руху центра мас матеріальної системи. Можливі два наступних випадки:

1. Якщо головний вектор зовнішніх сил, які діють на матеріальну систему, дорівнює нулю, то центр мас цієї системи рухається зі сталою за модулем і напрямом швидкістю.

$$\sum \vec{F}_k = 0 , \text{ то } M \times \vec{a}_C = 0 , \text{ відповідно } \vec{V}_C = \text{const} .$$

2. Якщо зовнішні сили, які діють на систему, такі, що сума їх проєкцій на будь-яку вісь дорівнює нулю, то проєкція вектора швидкості центра мас на вісь є величина стала.

$$\sum \vec{F}_{kx} = 0 , \text{ то } M \times \ddot{x}_C = 0 , \text{ відповідно } V_{Cx} = \dot{x}_C = \text{const} ,$$

$$\sum \vec{F}_{ky} = 0 , \text{ то } M \times \ddot{y}_C = 0 , \text{ відповідно } V_{Cy} = \dot{y}_C = \text{const} ,$$

$$\sum \vec{F}_{kz} = 0 , \text{ то } M \times \ddot{z}_C = 0 , \text{ відповідно } V_{Cz} = \dot{z}_C = \text{const} ,$$

3.2. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки і системи

3.2.1. Кількість руху точки і системи. Імпульс сили

Кількістю руху точки називається векторна величина добутку маси точки на вектор її швидкості.

$$\vec{q} = m \times \vec{V}.$$

Вектор кількості руху точки напрямлений по дотичній до траєкторії руху точки. Розмірність $[m \times \vec{V}] = \text{кг} \times (\text{м/с}) = \text{Н} \times \text{с}$.

Кількість руху механічної системи дорівнює геометричній сумі кількостей руху всіх точок, що входять до системи, або добутку маси системи на швидкість її центра мас.

$$\vec{Q} = \sum m_k \vec{V}_k = M \times \vec{V}_C.$$

Імпульс сили це міра дії сили за деякий інтеграл часу. Елементарний імпульс сили

$$d\vec{S} = \vec{F} \times dt,$$

а імпульс сили за довільно фіксований проміжок часу

$$\vec{S} = \int_{(t)} d\vec{S} = \int_0^t \vec{F} \cdot dt.$$

3.2.2. Теорема про зміну кількості руху точки

Теорема про зміну кількості руху точки еквівалентна основному рівнянню динаміки і формулюється наступним чином:

Перша похідна від кількості руху матеріальної точки за часом дорівнює геометричній сумі сил, що діють на точку

$$\frac{d(m \times \vec{V})}{dt} = \sum \vec{F}_i.$$

Інтегруючи дане рівняння за деякий довільний проміжок часу одержимо цю теорему в інтегральній формі

$$d(m \times \vec{V}) = \sum \vec{F}_i \cdot dt,$$

$$\int_{\vec{V}_0}^{\vec{V}_1} d(m \times \vec{V}) = \sum_0^t \int \vec{F}_i \cdot dt,$$

$$m \times \vec{V}_1 - m \times \vec{V}_0 = \sum \vec{S}_i.$$

Таким чином ми отримали, що приріст кількості руху матеріальної точки за будь-який довільно фіксований проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів усіх сил, що діють на точку, за той самий проміжок часу.

3.2.3. Теорема про зміну кількості руху системи

Теорема. Перша похідна за часом від кількості руху матеріальної системи дорівнює геометричній сумі зовнішніх сил, що діють на систему.

Розглянемо довільну матеріальну систему (рис. 3.5) на кожну точку якої діють як зовнішні \vec{F}_k , так і внутрішні сили \vec{F}'_k .

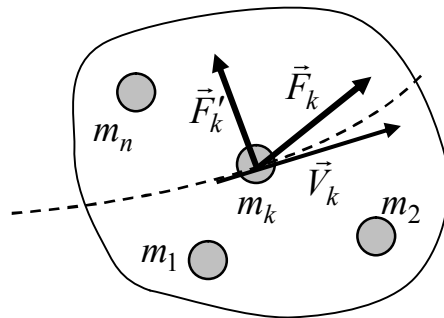


Рис. 3.5

Згідно теореми зміни кількості руху точки, розглянувши довільну точку k , отримаємо рівняння

$$\frac{d(m_k \times \vec{V}_k)}{dt} = \vec{F}_k + \vec{F}'_k, \text{ де } (k = 1, \dots, n).$$

Відповідно, для всіх точок матеріальної системи

$$\sum \frac{d(m_k \times \vec{V}_k)}{dt} = \sum \vec{F}_k + \sum \vec{F}'_k.$$

Згідно властивостям внутрішніх сил

$$\sum \vec{F}'_k = 0,$$

а також враховуючи, що

$$\sum \frac{d(m_k \times \vec{V}_k)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_k \vec{V}_k = \frac{d\vec{Q}}{dt},$$

Отримаємо

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k.$$

Інтегруючи дане рівняння за деякий довільний проміжок часу одержимо цю теорему в інтегральній формі

$$d\vec{Q} = \sum \vec{F}_k dt,$$

$$\int_{\vec{Q}_0}^{\vec{Q}_1} d\vec{Q} = \sum \int_0^t \vec{F}_k dt,$$

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k.$$

Відповідно ми отримали, що приріст кількості руху системи за будь-який фіксований проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів, що діють на систему зовнішніх сил, за той самий проміжок часу.

Наслідками із даної теореми є закон збереження кількості руху матеріальної системи. Можливі два наступних випадки:

1. Якщо головний вектор зовнішніх сил, які діють на систему, дорівнює нулю, то головний вектор кількості руху цієї системи є величина стала за напрямом і модулем

$$\sum \vec{F}_k = 0, \text{ то } \vec{Q} = const.$$

2. Якщо зовнішні сили, що діють на систему, такі, що сума їх проєкцій на будь-яку вісь дорівнює нулю, то проєкція головного вектора кількості руху системи на цю вісь є величина стала

$$\sum \vec{F}_{kx} = 0, \text{ то } Q_x = const,$$

$$\sum \vec{F}_{ky} = 0, \text{ то } Q_y = const,$$

$$\sum \vec{F}_{kz} = 0, \text{ то } Q_z = const.$$

3.3. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки і системи

3.3.1. Момент кількості руху точки і системи

Моментом кількості руху матеріальної точки M відносно центра O називається вектор-момент, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора на вектор кількості руху:

$$\vec{m}_0(m\vec{V}) = \vec{r} \times m\vec{V}.$$

Вектор-момент $\vec{m}_0(m\vec{V})$ прикладається в центрі системи координат, перпендикулярний до площини ΔMOA і спрямований у той бік, звідки видно обертання вектора $m\vec{V}$ проти ходу годинникової стрілки (рис.3.6).

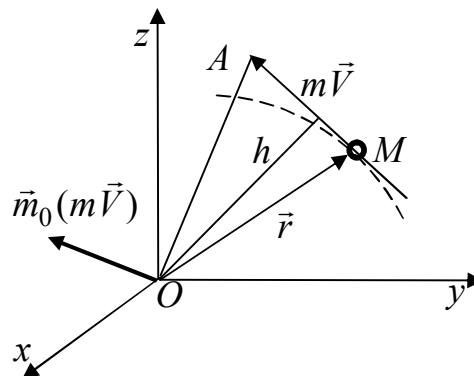


Рис. 3.6

Модуль вектора-моменту:

$$m_0(m\vec{V}) = m \times V \times h.$$

Головний момент (кінетичний момент) кількості руху \vec{L}_0 матеріальної системи відносно центра дорівнює геометричній сумі моментів кількості руху точок, що входять до системи, відносно цього центра:

$$\vec{L}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{m}_0(m_k \vec{V}_k) = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k).$$

Кінетичний момент системи відносно будь-якої осі дорівнює

проекції головного моменту кількості руху відносно центра на вісь, що проходить через цей центр:

$$\vec{L}_x = np_x(\vec{L}_0) = \sum_{k=1}^n m_x(m_k \vec{V}_k);$$

$$\vec{L}_y = np_y(\vec{L}_0) = \sum_{k=1}^n m_y(m_k \vec{V}_k);$$

$$\vec{L}_z = np_z(\vec{L}_0) = \sum_{k=1}^n m_z(m_k \vec{V}_k).$$

Таким чином, проекція на нерухому вісь головного моменту кількості руху системи дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх векторів кількості руху відносно цієї осі.

3.3.2. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки відносно центра та осі

Теорема. Похідна за часом від моменту кількості руху точки відносно нерухомого центра дорівнює моменту сили відносно того самого центра.

Встановимо як змінюється за часом вектор моменту кількості руху точки $\vec{m}_0(m\vec{V})$ відносно нерухомого центра (рис. 3.7)

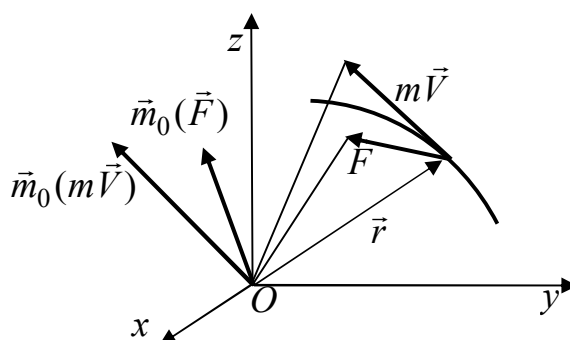


Рис. 3.7

Візьмемо похідну від $\vec{m}_0(m\vec{V})$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[m_0(m\vec{V})] &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{V}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{V} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{V}}{dt} = \\ &= \vec{V} \times m\vec{V} + \vec{r} \times m\vec{a} = 0 + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{m}_0(\vec{F}). \end{aligned}$$

Таким чином

$$\frac{d}{dt} [\vec{m}_0(m\vec{V})] = \vec{m}_0(\vec{F}).$$

Ми отримали що, похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно нерухомої осі дорівнює моменту сили, яка діє на точку, відносно тієї самої осі.

Якщо спроектувати на осі координат то відповідно отримаємо:

$$\frac{d}{dt} [\vec{m}_x(m\vec{V})] = \vec{m}_x(\vec{F});$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{m}_y(m\vec{V})] = \vec{m}_y(\vec{F});$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{m}_z(m\vec{V})] = \vec{m}_z(\vec{F}).$$

Наслідками із даної теореми є закон збереження моменту кількості руху матеріальної точки.

1. Якщо момент сили, що діє на точку, відносно будь-якого нерухомого центра дорівнює нулю, то момент кількості руху точки відносно цього центра є величина стала як за модулем, так і за напрямом;

2. Якщо момент сили, що діє на точку, відносно будь-якої нерухомої осі дорівнює нулю, то момент кількості руху матеріальної точки відносно цієї осі є величина стала.

3.3.3. Теорема про зміну кінетичного моменту матеріальної системи відносно центра і осі

Теорема. Похідна за часом від кінетичного моменту системи відносно будь-якого нерухомого центра дорівнює сумі моментів всіх зовнішніх сил, що діють на систему, відносно того самого центра.

Розглянемо довільну матеріальну систему (рис. 3.8) на кожну точку якої масою m_k діють як зовнішні \vec{F}_k , так і внутрішні сили \vec{F}'_k . Згідно теореми про зміну моменту кількості руху точки маємо,

$$\frac{d}{dt} [\vec{m}_0(m_k\vec{V}_k)] = \vec{m}_0(\vec{F}_k) + \vec{m}_0(\vec{F}'_k).$$

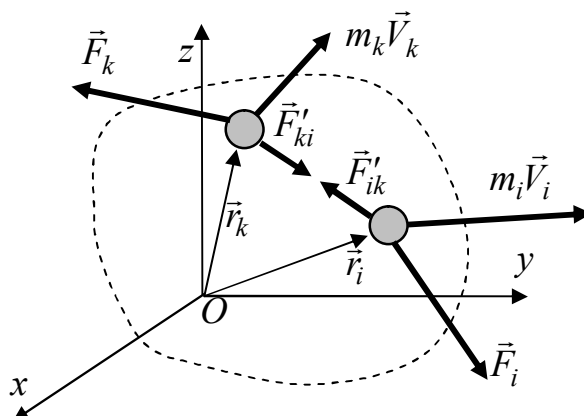


Рис. 3.8

Складемо відповідні вирази для всіх точок системи

$$\sum \frac{d}{dt} [\bar{m}_0 (m_k \vec{V}_k)] = \sum \bar{m}_0 (\vec{F}_k) + \sum \bar{m}_0 (\vec{F}'_k).$$

Враховуючи, що головний момент кількості руху \vec{L}_0 матеріальної системи відносно центра дорівнює геометричній сумі моментів кількості руху точок, що входять до системи, відносно цього центра, отримаємо:

$$\sum \frac{d}{dt} [\bar{m}_0 (m_k \vec{V}_k)] = \frac{d}{dt} \sum \bar{m}_0 (m_k \vec{V}_k) = \frac{d\vec{L}_0}{dt},$$

а згідно властивостям внутрішніх сил

$$\sum \bar{m}_0 (\vec{F}'_k) = 0,$$

то відповідно отримаємо

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \bar{m}_0 (\vec{F}_k) = \vec{M}_0.$$

Похідна за часом від головного моменту кількості руху системи відносно нерухомої осі дорівнює головному моменту усіх зовнішніх сил, що діють на систему відносно цієї осі.

Наслідками із даної теореми є закон збереження головного моменту кількості руху системи:

1. Якщо головний момент зовнішніх сил, що діють на матеріальну систему, відносно даного центра дорівнює нулю, то головний момент кількості руху системи відносно цього центра є величина стала за модулем і напрямом

$$\vec{M}_0 = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k) = 0, \text{ відповідно } \vec{L}_0 = \text{const}.$$

2. Якщо головний момент зовнішніх сил, що діють на матеріальну систему, відносно будь-якої осі дорівнює нулю, то головний момент кількості руху системи відносно цієї осі є величина стала:

$$M_x = \sum m_x(\vec{F}_k) = 0, \text{ відповідно } L_x = \text{const};$$

$$M_y = \sum m_y(\vec{F}_k) = 0, \text{ відповідно } L_y = \text{const};$$

$$M_z = \sum m_z(\vec{F}_k) = 0, \text{ відповідно } L_z = \text{const}.$$

3.4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки та системи

3.4.1. Кінетична енергія матеріальної точки і твердого тіла

Кінетична енергія – міра механічного руху. Скалярна величина кінетичної енергії T виражається в джоулях (Дж).

Кінетична енергія матеріальної точки дорівнює половині добутку маси на квадрат її швидкості

$$T = \frac{1}{2} m V^2.$$

Кінетична енергія твердого тіла відповідно буде дорівнювати алгебраїчній сумі кінетичних енергій точок, які входять до даної системи (тіла).

$$T = \sum \left(\frac{1}{2} m_k V_k^2 \right).$$

Розглянемо визначення кінетичної енергії тіла в залежності від характеру його руху.

1. Поступальний рух. При поступальному русі тіла швидкість усіх точок однакова. Таким чином, швидкість довільної точки тіла буде дорівнювати швидкості центра мас ($\vec{V}_K = \vec{V}_C$). Відповідно отримаємо

$$T = \frac{1}{2} \sum m_K V_C^2 = \frac{V_C^2}{2} \sum m_K = \frac{M V_C^2}{2}.$$

Таким чином, кінетична енергія тіла при поступальному русі дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості центра мас.

2. Обертальний рух. При обертальному русі швидкість кожної точки тіла визначається як добуток кутової швидкості тіла ω на відстань точки до центру обертання h_K

$$V_K = \omega \times h_K.$$

То згідно рівнянню кінетичної енергії маємо

$$T = \sum \frac{m_K V_K^2}{2} = \frac{1}{2} \sum m_K \omega^2 h_K^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_K h_K^2 = \frac{1}{2} I_z \times \omega^2,$$

де $\sum m_K h_K^2 = J_z$ – момент інерції тіла відносно осі обертання.

Таким чином, кінетична енергія тіла при обертальному русі дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості.

3. Плоско-паралельний рух.

При плоско-паралельному русі швидкості точок у кожний момент часу можна визначити як при обертальному русі даного тіла відносно осі, що проходить через миттєвий центр швидкості (точка P , рис 3.9).

Відповідно

$$T = \frac{1}{2} J_P \times \omega^2,$$

де: J_P – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через миттєвий центр швидкості.

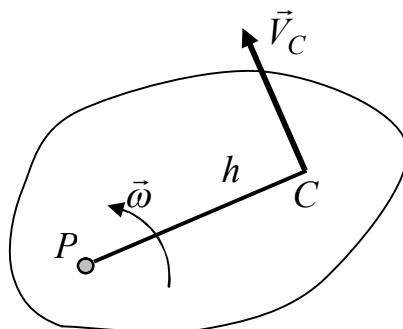


Рис. 3.9

Враховуючи те, що положення центра P під час руху тіла постійно змінюється, відповідно і величина J_P змінна. Тому, для розрахунку

кінетичної енергії використаємо сталий момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас J_C . То відповідно із теореми про момент інерції відносно паралельних осей

$$J_p = J_C + Mh^2.$$

Тоді

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 (J_C + Mh^2) = \frac{1}{2} MV_C^2 + \frac{1}{2} J_C \times \omega^2,$$

де $V_C = \omega \times (PC) = \omega \times h$ – швидкість центра мас тіла.

Таким чином при плоско-паралельному русі кінетична енергія тіла дорівнює сумі енергій поступального руху зі швидкістю центра мас і обертального руху навколо центра мас.

4. Складний рух. Враховуючи те, що складний рух можна розкласти на поступальний рух зі швидкістю центра мас і обертальний рух навколо осі, що проходить через центр мас, то відповідно кінетична енергія тіла при такому русі буде дорівнювати сумі енергій двох складових рухів,

$$T = \frac{1}{2} MV_C^2 + \frac{1}{2} J_C \times \omega^2.$$

3.4.2. Робота сили

Робота – міра дії сили на заданому переміщені. Робота сили вимірюється в джоулях: $[A] = \text{Дж}$, (1Дж = 1Н·м). Роботу можна розподілити на: - елементарну роботу сили; та - повну роботу сили.

Елементарна робота сили дорівнює скалярному добутку вектора сили на елементарне переміщення точки прикладання сили

$$dA = \vec{F} \times d\vec{r}.$$

Елементарне переміщення точки прикладання сили напрямлене по дотичній до траєкторії, рис. 3.10.

Розглянемо визначення елементарної роботи в залежності від типу задавання руху.

1. Природним способом.

$$dA = F_\tau \times ds = F \times ds \times \cos \alpha,$$

де: $ds = |d\vec{r}|$.

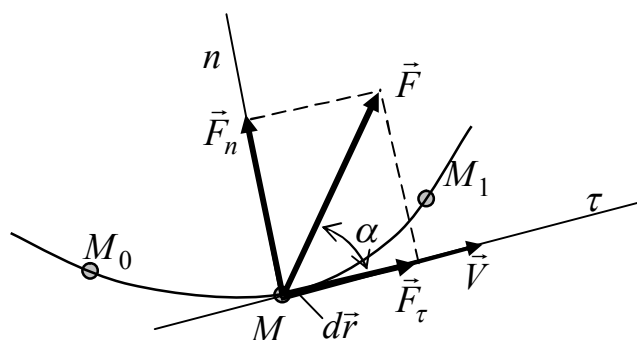


Рис. 3.10

В залежності від напрямлення сили, тобто значення кута α , можливі наступні випадки:

- а) якщо $\alpha = 0$, то $dA = F \times ds$;
- б) якщо $\alpha = 90^\circ$, то $dA = 0$.
- в) якщо $\alpha = 180^\circ$, то $dA = -F \times ds$.

Таким чином, елементарна робота сили залежить від напрямлення сили по відношенню до переміщення.

2. Аналітичним чи координатним способом.

$$dA = F_x \times dx + F_y \times dy + F_z \times dz,$$

де

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_x \times \vec{i} + F_y \times \vec{j} + F_z \times \vec{k}, \\ d\vec{r} &= dx \times \vec{i} + dy \times \vec{j} + dz \times \vec{k}.\end{aligned}$$

Повна робота сили на розглядуваному переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт цієї сили на складових переміщеннях. Так, робота сили на кінцевому інтервалі переміщення M_0M_1 по криволінійній траєкторії

$$A = \int_{(M_0, M_1)} dA = \int_{M_0}^{M_1} F \times ds \times \cos \alpha = \int_{M_0}^{M_1} (F_x \times dx + F_y \times dy + F_z \times dz).$$

Робота рівнодійної сили на деякому кінцевому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил на тому самому переміщенні $A = \sum_i A_i$.

Розглянемо конкретні випадки визначення роботи деяких сил.

1. Робота сили ваги \vec{G} , рис. 3.11.

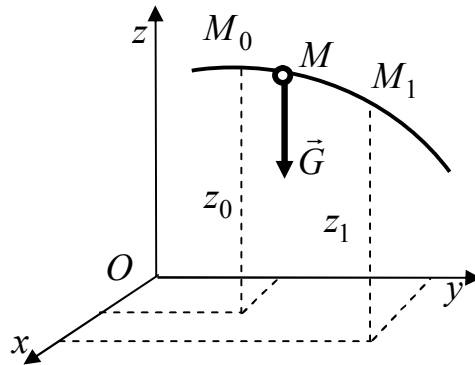


Рис. 3.11

Розглянемо роботу сили ваги на кінцевому інтервалі переміщення M_0M_1 по криволінійній траєкторії

$$A = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x \times dx + F_y \times dy + F_z \times dz) = \left\{ \begin{array}{l} F_x = F_y = 0 \\ F_z = -G \end{array} \right\} = - \int_{z_0}^{z_1} G \times dz =$$

$$= -G(z_1 - z_0) = G(z_0 - z_1) = GH,$$

де H – вертикальне переміщення точки.

Таким чином, робота сили ваги матеріальної точки чи тіла дорівнює добутку сили ваги на різницю висот кінцевого й початкового положень точки чи тіла. Як видно з рівняння, дана робота не залежить від траєкторії руху точки прикладання сили ваги, а тільки від початкового та кінцевого положень точки чи тіла. Такі сили називаються потенціальними.

2. Робота обертальної сили \vec{F} (або моменту пари сил) рис. 3.12.

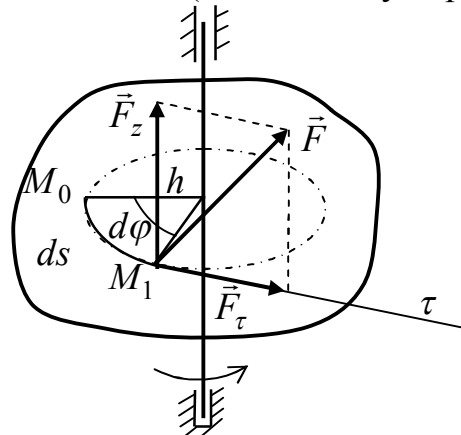


Рис. 3.12

Обертальну силу \vec{F} розкладемо на дві складові

$$\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_\tau.$$

Так як, $\vec{F}_z \perp ds$ то робота даної сили на даному переміщені дорівнює нулю, відповідно отримаємо

$$dA_{(\vec{F})} = dA_{(\vec{F}_\tau)} = F_\tau \times ds = F_\tau \times h \times d\varphi = M \times d\varphi.$$

Таким чином, робота моменту сили дорівнює добутку обертального моменту на кут повороту.

3. Робота сили пружності, рис. 3.13.

Розглянемо стискання пружини жорсткість якої характеризується коефіцієнтом пружності c . В даному випадку сила пружності визначається рівнянням

$$F = -c \times x.$$

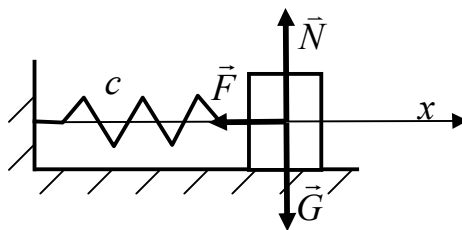


Рис. 3.13

Відповідно робота сили пружності на переміщені тіла з положення x_0 в положення x_1

$$A = \int_{x_0}^{x_1} F_x \times dx = - \int_{x_0}^{x_1} c \times x \times dx = - \frac{cx^2}{2} \Big|_{x_0}^{x_1} = - \frac{c(x_1^2 - x_0^2)}{2},$$

або

$$A = \frac{c}{2}(x_0^2 - x_1^2).$$

Таким чином, робота сили пружності при кінцевому переміщенні пропорційна до різниці квадратів величин кінцевого й початкового переміщення пружини, або пропорційна квадрату деформації пружини.

3.4.3. Потужність

Потужність W характеризує швидкість виконання роботи за відповідний проміжок часу. Потужність вимірюється в ватах: $[W] = \text{Ват}$, $(1 \text{ Ват} = 1 \text{ Дж/с} = 1(\text{Н}\cdot\text{м})/\text{с})$.

Потужність сили розраховується як скалярний добуток векторів сили та швидкості її точки прикладання

$$W = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \times \vec{V}.$$

3.4.4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки може бути сформульована як в диференціальній так і в інтегральній форм.

Теорема (диференціальна форма). Диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі рівнодійної всіх сил, що діють на точку.

Розглянемо рух точки M під дією деяких сил (рис. 3.14).

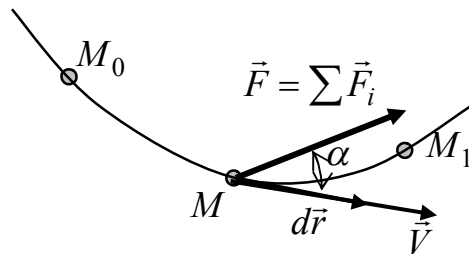


Рис. 3.14

Згідно другого закону Ньютона маємо

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i,$$

або

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F}_i.$$

Помноживши скалярно ліву і праву частини цього рівняння на $d\vec{r}$, отримаємо

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} \times d\vec{r} = \sum \vec{F}_i \times d\vec{r}.$$

Враховуючи, що $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$, а $\sum \vec{F}_i \times d\vec{r} = \vec{F} \times d\vec{r} = dA$ отримаємо

$$m\vec{V} \times d\vec{V} = dA,$$

або

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dA.$$

Інтегруючи отримане рівняння одержимо теорему в інтегральній формі

$$\int_{\vec{V}_0}^{\vec{V}_1} d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \int_{(M_0)}^{(M_1)} dA,$$

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A_{(M_0, M_1)}.$$

Теорема (інтегральна форма). Зміна кінетичної енергії матеріальної точки на скінченному проміжку шляху дорівнює роботі рівнодійної всіх сил, прикладених до точки на тій самій ділянці шляху.

3.4.5. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи

Аналогічно матеріальній точці, теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи може бути сформульована як в диференціальній так і в інтегральній формі.

Теорема (диференціальна форма). Диференціал кінетичної енергії матеріальної системи дорівнює алгебраїчній сумі елементарних робіт зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на систему.

Матеріальна система складається із n точок на кожен з яких діють як зовнішні так і внутрішні сили. Тому згідно теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки для довільної точки k системи можемо записати рівняння

$$d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = dA_k + dA'_k.$$

Для всієї системи відповідно маємо, що

$$\sum d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \sum dA_k + \sum dA'_k .$$

Так як

$$\sum d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = d\sum\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = dT ,$$

то відповідно отримаємо

$$dT = \sum dA_k + \sum dA'_k .$$

Інтегруючи отримане рівняння одержимо теорему в інтегральній формі

$$\int_{T_0}^{T_1} dT = \int_{(M_0, M_1)} d\left(\sum A_k\right) + \int_{(M_0, M_1)} d\left(\sum A'_k\right) ,$$

$$T_1 - T_0 = \sum A_k + \sum A'_k .$$

Теорема (інтегральна форма). Зміна кінетичної енергії матеріальної системи на скінченному переміщенні дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх сил на цьому самому переміщенні.

Таким чином, теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи, враховує роботу не тільки зовнішніх, а й внутрішніх сил, що суттєво ускладнює процес розв'язування задач. Але, в тих випадках коли робота внутрішніх сил дорівнює нулю:

- абсолютно тверде тіло (незмінна система матеріальних точок);
- внутрішні сили є реакціями ідеально гладеньких поверхонь;
- внутрішні сили є реакціями абсолютно шорстких поверхонь,

теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи набуває вигляду

$$T_1 - T_0 = \sum A_k .$$

3.4.6. Силоне поле. Потенціальна енергія

Особливе місце в механіці посідає клас сил величина і напрям яких залежить тільки від положення точки чи системи в просторі. Рух точки чи системи під дією таких сил називається рухом в силовому полі.

Прикладами силового поля можуть бути поля сил тяжіння, сил пружності, електростатичне поле.

Силовим полем називається частина фізичного простору, в якому на точки розташованої в ньому механічної системи діють сили, залежні лише від положення цих точок, тобто від координат і часу. В тому випадку коли сила явно не залежать від часу силове поле називають стаціонарним, а якщо залежать – нестаціонарним.

Потенціальним називають силове поле робота сил якого не залежить від форми траєкторії руху точки чи системи і визначається тільки їх початковим і кінцевим положеннями. Сили, що діють в такому полі, називаються силами, що мають потенціал, або консервативними силами.

Сили мають потенціал чи називаються консервативними при умові, якщо існує однозначна силова функція координат

$$U'(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n),$$

частинні похідні від якої за координатами будь-якої точки дорівнюють проекціям прикладеної до цієї точки сили на відповідні осі

$$X_i = \frac{\partial U'}{\partial x_i}; \quad Y_i = \frac{\partial U'}{\partial y_i}; \quad Z_i = \frac{\partial U'}{\partial z_i}.$$

Елементарна робота сил потенціального поля дорівнює повному диференціалу силової функції

$$dA = dU'.$$

Відповідно, робота сил, що діють на точку чи систему в потенціальному полі, не залежить від траєкторій їх руху та дорівнює різниці значень силової функції в кінцевому та початковому положеннях

$$A_{1,2} = \int_1^2 dU' = U'_2 - U'_1.$$

Для потенціальних сил вводять поняття потенціальної енергії як величину, що характеризує «запас роботи», який має матеріальна точка чи система в даній координаті силового поля. Тому для відповідного порівняння «запасу роботи» необхідно визначитись з вибором нульової точки, в якій умовно вважають, що «запас роботи» дорівнює нулю.

Потенціальною енергією точки чи системи називається скалярна величина U яка дорівнює роботі сил потенціального поля, що прикладені

до точки чи системи, на переміщенні із даного положення в нульове.

Таким чином, потенціальна енергія залежить від координат, тобто

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n).$$

Відповідно, при переміщенні механічної системи з одного положення в інше, робота сил прикладених до точок системи буде дорівнювати різниці значень потенціальної енергії в початковому і кінцевому положеннях системи

$$A_{1,2} = U_1 - U_2.$$

З вище наведених залежностей випливає взаємозв'язок між силовою функцією і потенціальною енергією

$$A = U = U'_0 - U'.$$

Тобто, потенціальна енергія U системи відрізняється від силової функції U' , взятої зі знаком « \rightarrow » на сталу величину U'_0 , і відповідно:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{\partial U'}{\partial x_i}; \quad \frac{\partial U}{\partial y_i} = -\frac{\partial U'}{\partial y_i}; \quad \frac{\partial U}{\partial z_i} = -\frac{\partial U'}{\partial z_i}.$$

Враховуючи, що частинні похідні від силової функції за координатами будь-якої точки дорівнюють проєкціям прикладеної до цієї точки сили на відповідні осі отримаємо:

$$X_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad Y_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad Z_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

тобто, проєкції на координатні осі сили, що діє в потенціальному полі на кожную точку механічної системи, дорівнюють взятим зі знаком « \rightarrow » частинним похідним від потенціальної енергії системи за відповідними координатами цієї точки.

4. Контрольні питання для самоперевірки

4.1. Динаміка точки

1. Основні закони динаміки?
2. Як виводяться диференціальні рівняння руху матеріальної точки?
3. Які дві основні задачі динаміки вільної матеріальної точки?

4. Що таке початкові умови руху?

4.2. Динаміка механічних систем

1. Які дві класифікації сил застосовують у механіці?
2. Що таке центр мас системи?
3. Як визначають положення центра мас?
4. Що таке момент інерції твердого тіла відносно осі?
5. Диференціальні рівняння руху системи у векторній формі.

4.3. Загальні теореми динаміки точки і матеріальної системи

1. Теорема про рух центра мас матеріальної системи.
2. Що характеризує імпульс сили?
3. Що називається кількістю руху матеріальної точки і системи?
4. Теорема про зміну кількості руху матеріальної системи.
5. При яких умовах кількість руху матеріальної системи є сталою?
6. Що називається моментом кількості руху матеріальної точки відносно центра та осі?
7. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки відносно центра та осі.
8. Що називається кінетичним моментом матеріальної системи відносно центра та осі?
9. Теорема про зміну кінетичного моменту системи відносно центра та осі.
10. Закон збереження кінетичного моменту системи відносно центра та осі.
11. Як визначають кінетичний момент твердого тіла відносно його осі обертання?
12. Що називається кінетичною енергією матеріальної точки і системи?
13. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки і системи.
14. Як визначають роботу сили при трьох способах задавання руху матеріальної точки?
15. Як обчислюють кінетичну енергію твердого тіла в різних випадках його руху?
16. Що таке потенціальна енергія точки чи системи?

Частина II

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Опір матеріалів є однією з основних загальноосвітніх інженерних дисциплін і грає дуже важливу роль у формуванні технічного кругозору фахівців усіх технічних спеціальностей, так як розуміння проблем міцності, жорсткості та стійкості наряду пов'язано з безаварійною експлуатацією будь якого технологічного обладнання.

Навчальний матеріал другої частини написаний для студентів немеханічних спеціальностей і присвячений загальним основам курсу опору матеріалів. В ньому розглянуті питання опору стержня простим деформаціям □ розтягання-стисканню, зсуву, крученню, згинанню. Також кратко викладений матеріал по теорії напружено-деформованому стану. Розглядаються також питання опору стержня просторовому згинанню і згинанню з крученням. Надані основні відомості по розрахунку стиснутих стержнів на стійкість.

Розділ I. ВСТУП

1.1. Наука про опір матеріалів. Розрахункова схема

Опір матеріалів □ це наука про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість та стійкість деталей машин і елементів споруд.

Міцністю називається здібність конструкції, її окремих елементів сприймати навантаження певної величини не руйнуючись.

Жорсткістю називається здібність конструкції чинити опір деформуванню при дії зовнішнього навантаження. Метою розрахунку на жорсткість є визначення таких розмірів деталей машин і елементів споруд при яких деформації не перебільшують нормативних значень, що забезпечують умови їх нормальної експлуатації.

Стійкістю називається здібність конструкції, її окремих елементів зберігати у деформованому стані свою початкову форму пружної рівноваги.

При проектуванні машини або споруди завданням інженера є

забезпечення достатньої міцності, жорсткості та стійкості їх при мінімальних витратах матеріалу.

Вивчення характеру дії зовнішніх сил на споруду, виведення умов рівноваги між зовнішніми та внутрішніми зусиллями в різних деталях машини та елементах споруди, а також визначення необхідних розмірів цих деталей і елементів і є предметом дисципліни „Опір матеріалів”.

Опір матеріалів є теоретично дослідною наукою, в якій і теорія і дослід мають однаково важливе значення. Часто одні тільки теоретичні міркування не дозволяють отримати відповідь на поставлене питання. Провівши відповідні експериментальні дослідження і поєднавши їх результати з теоретичними рішеннями можна отримати відповідь на поставлене питання.

У теоретичній механіці усі тіла розглядаються абсолютно жорсткими, тобто такими що не змінюють своєї форми і розмірів при дії зовнішніх сил. Це допущення прийнятне для теоретичної механіки, так як задовольняє задачам цієї науки.

В опорі матеріалів, навпаки, береться до уваги природа або фізичні властивості тих матеріалів, з яких виготовляють деталі машин і елементи споруд, і розглядається робота пружних тіл.

Саме тому вивчення цих властивостей та дослідження міцності машинобудівельних матеріалів також передбачається в курсі опору матеріалів.

Розрахунок на міцність, жорсткість та стійкість реальних деталей машин і елементів споруд проводиться по розрахунковій схемі, на підставі якої проводиться ідеалізація реального об'єкта шляхом урахування основних його параметрів, нехтуючи другорядними, що мало впливають на його роботу. У розрахунковій схемі усе різноманіття конструктивних форм реальних деталей машин і елементів споруд зведено до наступних основних видів – до стержнів, пластин, оболонки та масивних тіл. В опорі матеріалів розглядається тільки стержень. Інші конструктивні форми розглядаються в „Теорії пружності”.

Стержень (брус) – це тіло, у якого один розмір (довжина) значно перевищує два інших (поперечних) розміри. Стержні можуть бути прямолінійними (рис. 1.1 а), криволінійними (рис. 1.1 б), перемінного перерізу (рис. 1.1 в), тощо. У розрахунковій схемі стержень зображується своєю віссю, при цьому навантаження яке прикладене до його поверхні повинно бути приведено до його осі. На рис. 1.2 показаний стержень прямокутного перерізу під дією зосередженої сили і його розрахункова

схема, при складанні якої був застосований прийом теоретичної механіки – паралельний перенос зосередженої сили (рис. 1.3).



Рис. 1.1

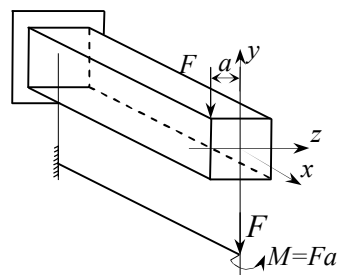


Рис. 1.2

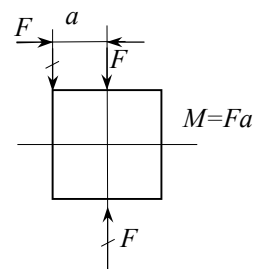


Рис. 1.3

Теорія опору матеріалів, як і кожна наука, має свою історію.

Початком розвитку науки про міцність пов'язують з ім'ям італійського вченого Г. Галілея (1564-1642).

Англійський вчений Роберт Гук відкрив у 1678 р. основний закон у теорії опору матеріалів – закон деформування пружних тіл, за яким деформації пружних тіл пропорційні навантаженню, діючому на них.

Інтенсивний розвиток науки про опір матеріалів відзначається з кінця XVIII ст. у зв'язку з бурхливим розвитком промисловості та транспорту. Із вчених цього періоду проблемами міцності займалися Д. Бернуллі, Юнг, Кулон, Нав'є, Коші, Пуассон, Сен-Венан, Максвелл, Кастільяно, Мор та ін.

Також проблемами міцності займалися академік Петербурзької академії наук Леонард Ейлера, видатні вчені Д.І.Журавський, Х.С. Головін, Ф.С. Ясинський, І.Г. Бубнов, А.В. Гадолін, М.О. Белелюбський та інші.

Значний внесок у науку про опір матеріалів у XX ст. внесли видатні вчені С.П. Тимошенко, А.М. Крилов, Б.Г. Гальоркін, М.М. Беляєв, І.М. Рабінович, В.З. Власов, О.М. Динник, М.М. Карнаухов, Г.М. Савін, С.В. Серенсен, Г.С. Писаренка та інші.

1.2. Види деформацій

Реальні тіла під дією зовнішніх впливів (сил або нестационарних температур) можуть деформуватися, тобто змінювати свою форму та розміри. Деформації бувають пружними та пластичними. Пружною називається така деформація, які повністю зникає після розвантаження тіла. Якщо після розвантаження тіла деформація частково залишається, то вона називається залишковою, або пластичною. Взагалі, деформації реальних матеріалів можуть складатися з пружної та залишкової складових, але реальні деталі та елементи повинні навантажуватися таким навантаженням, при якому будуть виникати тільки пружні деформації.

Пружністю взагалі називається властивість тіл відновлювати свої початкові розміри та форму після того, як знято зовнішнє навантаження.

Пластичністю називається властивість тіла зберігати після зняття навантаження ті розміри й форму, яких воно набрало під дією цього навантаження.

У курсі опору матеріалів вивчаються такі основні види деформації стержня: розтягання та стискання, зсув (або зріз), кручення, згинання.

На практиці зустрічаються й складніші деформації, які створюються, як комбінації кількох зазначених вище основних деформацій.

1.3. Зовнішні сили

Зовнішніми – називаються сили взаємодії між розглядуваними елементами конструкції, або елементом і пов'язаним з ним тілом. До зовнішніх також можна віднести сили, що прикладаються із зовні цієї споруди - вони називаються активними силами, або навантаженням, і ті, що передаються від інших частин споруди - так звані реактивні сили, або реакції.

Зовнішні сили поділяються на поверхневі та об'ємні. До поверхневих належать сили контактної взаємодії розглядуваного тіла з іншими тілами, до об'ємних – сили, що діють на кожну частинку тіла (вага тіла, сили інерції, сили магнітного притягання).

Поверхневі сили за характером прикладання бувають зосередженими F (Н, кН), або розподіленими уздовж лінії q , чи по площі, а також зосередженими моментами M (Н·м, кНм). Розподілене навантаження характеризується своєю інтенсивністю q , тобто величиною навантаження, що приходить на одиницю довжини (Н/м, кН/м), або на одиницю площі

(Н/м², кН/м²).

Залежно від характеру зміни навантажень у часі зовнішні сили поділяють на статичні та динамічні. Статичним називається навантаження, яке повільно й плавно зростає від нуля до свого кінцевого значення, а далі лишається незмінним. При цьому прискорення точок конструкції під час її деформування дуже малі, тому силами інерції, які виникають у процесі руху, можна знехтувати.

Динамічне навантаження, на відміну від статичного, швидко змінює свою величину або точку прикладання за порівняно малий проміжок часу. Це приводить до появи значних сил інерції, якими при розрахунках нехтувати не можна.

1.4. Внутрішні сили. Метод перерізів

Внутрішніми силами називаються сили взаємодії між сусідніми частинками тіла. Ці сили зберігають тіло як єдине ціле. Зовнішнє навантаження прикладене до тіла, спричинює його деформацію, внаслідок якої змінюється взаємне розташування частинок і змінюються сили взаємодії між ними. Тобто при деформації тіла виникають додаткові внутрішні сили, які і є предметом вивчення в опорі матеріалів.

Розв'язування будь якої задачі опору матеріалів починається з визначення внутрішніх сил за заданими зовнішніми силами.

Внутрішні сили визначаються за допомогою методу перерізів, за яким тіло умовно розсікається січною площиною на дві частини, одна з яких (будь яка) відкидається і розглядається рівновага іншої. З рівноваги розглядуваної частини і визначаються внутрішні сили.

Розглянемо довільне тіло, на яке діє урівноважена система зовнішніх сил. Розсічемо його січною площиною на дві частини (рис. 1.4 а). По перерізах частин розсіченого тіла діють внутрішні сили - сили взаємодії між цими частинами тіла (рис. 1.4 б). Треба відмітити, що внутрішні сили, що діють по лівій і правій частинам розсіченого тіла на підставі третього закону Ньютона взаємні, тобто однакові по величині і протилежні по напрямку. Одну частину (наприклад, праву) відкинемо й розглянемо рівновагу лівої частини тіла (рис. 1.4 в). Внутрішні сили можна звести до центру ваги перерізу, отримавши головний вектор \bar{R} та головний момент \bar{M} внутрішніх сил (рис. 1.4 в). Розклавши головний вектор \bar{R} та головний момент \bar{M} внутрішніх сил на складові уздовж координатних осей x , y , z отримаємо

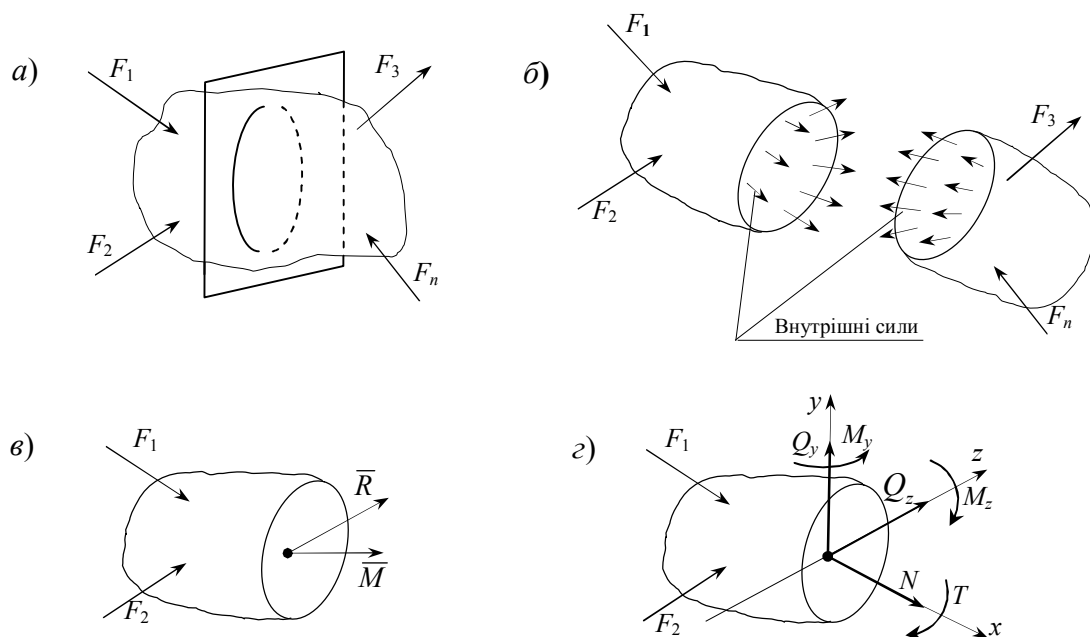


Рис. 1.4

шість внутрішніх зусиль (рис. 1.4 г), пов'язаних з чотирма простими деформаціями:

N - поздовжня сила, спричинює розтягання або стискання;

$\left. \begin{matrix} Q_y \\ Q_z \end{matrix} \right\}$ - поперечні сили, спричинюють деформацію зсуву;

$\left. \begin{matrix} M_y \\ M_z \end{matrix} \right\}$ - згинальні моменти, спричинюють згинання;

T - крутний момент, викликає кручення.

Розглядувана частина тіла під дією зовнішніх сил та внутрішніх зусиль повинна знаходитися у рівновазі і тому повинна задовольняти шести умовам рівноваги, з яких і визначаються внутрішні зусилля N , Q_y , Q_z , M_y , M_z , T .

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0 &\rightarrow N; & \Sigma M_y = 0 &\rightarrow M_y; \\ \Sigma Y = 0 &\rightarrow Q_y; & \Sigma M_z = 0 &\rightarrow M_z; \\ \Sigma Z = 0 &\rightarrow Q_z; & \Sigma M_x = 0 &\rightarrow T. \end{aligned}$$

Коли в перерізі бруса діє якийсь один внутрішній силовий фактор, то такий окремий вид навантаження зветься простим опором. Так при дії лише N \square відбувається розтягання або стискання; при дії лише Q \square

відбувається деформація зсуву, якщо діє тільки T □ то відбувається кручення, при дії лише M_z або M_y відбувається згинання в вертикальній або у горизонтальній площині.

Якщо ж одночасно діють два і більше внутрішніх зусиль, то таке деформація зветься складним опором.

1.5. Напруження

В розглядуваному перерізі візьмемо нескінченно малий елемент площі dA і будемо вважати, що внутрішні зусилля розподілені рівномірно по площі dA . Рівнодійна внутрішніх зусиль буде проходити через центр ваги елемента dA . (рис. 1.5). Розкладемо dR на елементарну поздовжню силу dN та елементарні поперечні сили dQ_y, dQ_z .

Поділивши dN, dQ_y, dQ_z на площу dA дістанемо нормальне σ та дотичні τ напруження

$$\sigma = \frac{dN}{dA}; \tau_y = \frac{dQ_y}{dA}; \tau_z = \frac{dQ_z}{dA}.$$

Отже, відношення внутрішній сили до одиниці площі називається напруженням. Іншими словами □ інтенсивність внутрішніх сил називається напруженням.

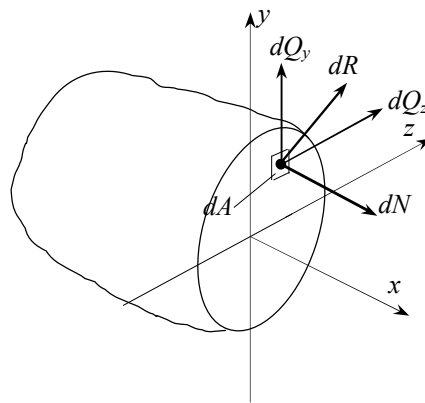


Рис. 1.5

Інколи мають справу з повним напруженням p

$$p = \frac{dR}{dA}.$$

Повне напруження можна визначити через його складові

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2}.$$

Одиниця виміру напруження: Паскаль – Па (Н/м²), МПа (МН/м²).

Нормальні та дотичні напруження відіграють дуже важливе значення у розрахунках на міцність.

1.6. Основні гіпотези в опорі матеріалів

Теорія опору матеріалі побудована на деяких гіпотезах відносно структури і властивостей матеріалу, а також характеру деформування.

1. *Гіпотеза про суцільність матеріалу.* Передбачається, що матеріал суцільно заповнює форму тіла. Ця гіпотеза дає змогу не зважати на атомістичну та молекулярну структуру речовини.

2. *Гіпотеза однорідності та ізотропності.* Вважається, що матеріал буде однорідним і ізотропним, якщо механічні властивості матеріалу в будь-якому об'ємі та в будь-якому напрямі однакові. В природі існують матеріали у яких властивості по різних напрямам різні. Такі матеріали називаються анізотропними. Прикладом є деревина, властивості якої уздовж та поперек волокон різні.

3. *Гіпотеза малості деформацій* вказує на те, що порівняно з розмірами тіла його деформації малі. Математичні операції з деформаціями виконуються за законами аналізу нескінченно малих.

4. На стадії складання рівнянь статички усі тіла вважаються абсолютно твердими, тобто не враховуються зміни, в наслідок деформації тіла, в розташуванні зовнішніх сил відносно окремих частин тіла.

5. Припускається, що справджується принцип незалежності дії сил: результат дії групи сил дорівнює алгебраїчній сумі результатів дії кожної сили окремо. Він має місце лише при виконанні гіпотези 4.

Слід пам'ятати, що всі перелічені гіпотези та принципи мають свої межі застосовності, поза якими вони втрачають силу, а отже, не мають чинності й ті формули, які виведені на підставі відповідних гіпотез.

Контрольні питання для самоперевірки

1. Що є сутністю науки про опір матеріалів?
2. Що називається міцністю конструкції та її елементів?
3. Які параметри визначаються в розрахунках конструкцій на жорсткість?
4. Що називається стійкістю конструкції та її елементів?
5. Як у розрахунковій схемі класифікуються реальні тіла в

- залежності від їх розмірів і форми?
6. Що є предметом вивчення в опорі матеріалів?
 7. Що називається деформацією?
 8. Зовнішні сили і їх класифікація.
 9. Які внутрішні сили вивчаються в опорі матеріалів і за яким методом вони визначаються?
 10. Що є суттю механічного напруження в опорі матеріалів?
 11. Повне напруження і його складові.
 12. Основні гіпотези в опорі матеріалів.

Розділ 2. РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСКАННЯ

2.1. Поздовжні зусилля

Якщо зовнішні сили діють уздовж осі стержня, або рівнодійна групи сил співпадає з віссю стержня, то такий випадок навантаження називається осьовим розтяганням, або стисканням (залежно від напрямку сили по відношенню до стержня).

Скориставшись методом перерізів, можна визначити всі внутрішні зусилля, які виникають в поперечних перерізах стержня при його осьовому навантаженні (рис. 2.1, а, б).

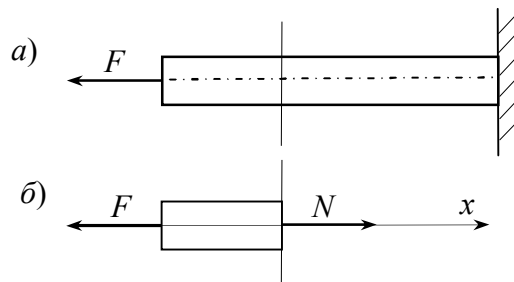


Рис. 2.1

Так як у даному випадку зовнішня сила F діє вздовж осі стержня то п'ять з шести рівнянь статки перетворюються на тотожності:

$$\sum X \equiv 0; \quad \sum Y \equiv 0; \quad \sum M_x \equiv 0; \quad \sum M_y \equiv 0; \quad \sum M_z \equiv 0.$$

Отже, у поперечних перерізах стержня, який розглядається, виникають лише поздовжні внутрішні зусилля, які визначаються одним рівнянням статки, що залишилося,

$$\sum X = N - F = 0; \quad N = F.$$

У розглянутому прикладі внутрішнє зусилля N однакове в кожному перерізі стержня. І якщо побудувати графік зміни поздовжнього зусилля при переході від одного перерізу до іншого, то він матиме вигляд прямокутника (рис. 2.2, а).

Аналогічно визначаємо зусилля у випадку, показаному на рис. 2.2,б. Накреслені графіки різняться лише знаком. В опорі матеріалів розтягуючі зусилля (напруження, деформації) вважаються додатними (+), а стискуючі – від’ємними (-).

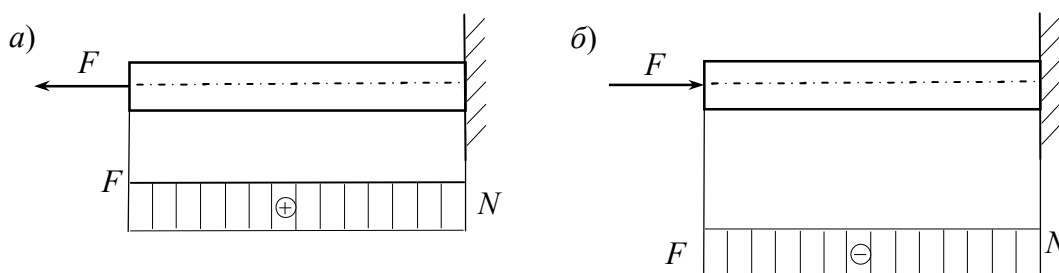


Рис. 2.2

Якщо на розглядувану частину стержня буде діяти декілька зовнішніх сил, то рішення рівняння рівноваги набуває вигляду

$$N = \sum F_i \quad (2.1)$$

З виразу (2.1) випливає наступне правило для визначення поздовжніх сил: поздовжнє зусилля в розглядуваному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на вісь стержня всіх зовнішніх сил, прикладених до відсіченої частини. При цьому проекції сил, напрямлених від розглядуваного перерізу, потрібно брати зі знаком «+», а проекції сил, напрямлених до розглядуваного перерізу, – зі знаком «-». У цьому разі знак поздовжнього зусилля N автоматично відповідатиме знаку деформації на розглядуваній ділянці.

Після визначення поздовжніх сил будується графік, який показує зміну поздовжніх сил по довжині стержня. Цей графік називається епюрою поздовжніх зусиль. Вміння будувати такі епюри необхідне, як стане зрозумілим з подальшого викладу, для визначення так званого небезпечного, тобто найбільш напруженого перерізу стержня.

2.2. Напруження в поперечних та похилих перерізах стержня

Поздовжнє зусилля N , яке виникає в поперечному перерізі стержня

при розтяганні чи стисканні, є рівнодійною внутрішніх нормальних сил, розподілених по площі перерізу. Тому в поперечних перерізах стержня будуть діяти тільки нормальні напруження σ , а дотичні τ дорівнюють нулю. В перерізі стержня візьмемо площадку dA в точках якої діють нормальні напруження σ (рис. 2.3). Так як розміри площадки dA безліч малі то можна вважати, що напруження σ в усіх точках площадки dA однакові. Тоді рівнодійна dN цих напружень буде дорівнювати

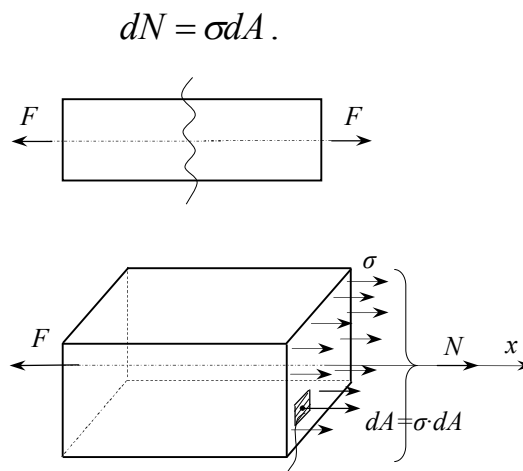


Рис. 2.3

Сумуючи усі такі сили dN , які діють по усім площадкам dA перерізу отримаємо

$$N = \int_A \sigma dA. \quad (2.2)$$

З рівняння (2.2) не можна визначити напруження σ , так як невідомий закон їх зміни по перерізу стержня.

Задачі, в яких неможна визначити невідомі за допомогою самих лише рівнянь статки називаються статично невизначуваними. Щоб їх розв'язати, необхідно щоразу розглядати деформацію даної механічної системи.

Для визначення закону зміни нормальних напружень по перерізу стержня проведемо такий експеримент. Нанесемо на поверхню стержня ортогональну сітку прямих ліній (рис. 2.4). При розтяганні чи стисканні стержня ці лінії лишаються прямими. На підставі цього спостереження можна припустити, що поперечні перерізи стержня, які були плоскими до деформування, лишаються плоскими й у процесі деформування.

Це припущення в опорі матеріалів називають гіпотезою плоских

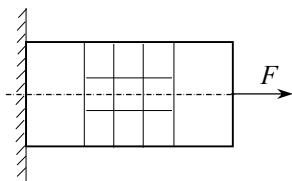


Рис. 2.4

перерізів або гіпотезою Бернуллі.

Гіпотеза плоских перерізів дає змогу дійти висновку, що внутрішні зусилля при осьовому

навантаженні розподіляються за перерізом рівномірно.

Уявімо, що стержень складається з цілого ряду волокон, паралельних поздовжній осі. Нехай кожне волокно на однаковому рівні має вузлик. Геометричне місце всіх вузликів умовно позначає поперечний переріз стержня. Прикладемо тепер до кінця такого стержня деяку поздовжню силу. Тоді під її дією всі волокна змінять свою довжину і, оскільки поперечний переріз лишиться плоским, усі вузлики перемістяться на однакову відстань. Це означає, що на кожне волокно діє однакова частина сили. Отже, внутрішнє зусилля розподілилося рівномірно між усіма волокнами, тобто за перерізом стержня ($\sigma = const$).

Тоді матимемо

$$N = \sigma \int_A dA = \sigma A,$$

звідки

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (2.3)$$

Визначимо тепер напруження в похилому перерізі $n-n$ стержня, що розташований під кутом α до його поперечного перерізу (рис. 2.5).

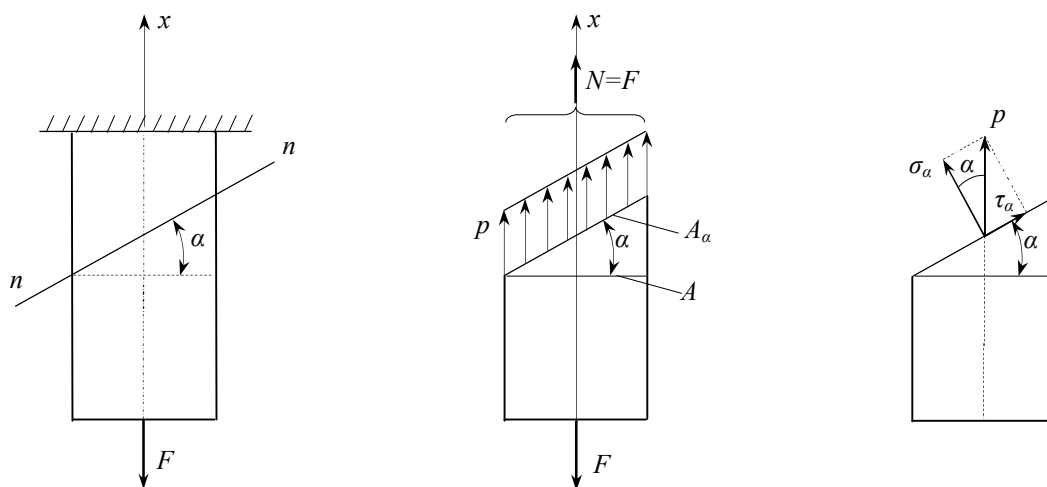


Рис. 2.5

В похилому перерізі внутрішнє зусилля розподіляється також рівномірно.

Тоді повне напруження p , напрямлене паралельно осі стержня, буде дорівнювати

$$p = \frac{N}{A_\alpha}; \quad (2.4)$$

$$A_\alpha = A / \cos \alpha. \quad (2.5)$$

Розкладемо повне напруження на нормальну σ та дотичну τ складові

$$\sigma_\alpha = p \cos \alpha, \quad \tau_\alpha = p \sin \alpha. \quad (2.6)$$

Підставляючи в (2.6) вирази (2.4) та (2.5), маємо

$$\sigma_\alpha = \frac{N}{A_\alpha} \cos \alpha = \frac{N}{A} \cos^2 \alpha = \sigma \cos^2 \alpha; \quad (2.7)$$

$$\tau_\alpha = \frac{N}{A_\alpha} \sin \alpha = \frac{N}{A} \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.8)$$

Отже, в похилих перерізах стержня при осьовому навантаженні його діють як нормальні, так і дотичні напруження, які за всіх інших однакових умов залежать від кута α нахилу перерізу.

Дослідимо цю залежність, розглянувши три випадки.

$$1) \alpha = 0, \sigma_{\alpha=0} = \frac{N}{A} = \sigma_{\max}, \tau_{\alpha=0} = 0.$$

У поперечному перерізі діють лише нормальні напруження. Вони мають найбільше значення порівняно з тими, що діють за усіма іншими похилими перерізами. Дотичне напруження в такому перерізі відсутнє.

$$2) \alpha = \pi / 2; \sigma_{\alpha=\pi/2} = \sigma_{\min} = 0; \tau_{\alpha=\pi/2} = 0.$$

У поздовжніх перерізах відсутні як нормальні σ так і дотичні τ напруження.

$$3) \alpha = 45^\circ; \sigma_{\alpha=45^\circ} = \frac{\sigma}{2}; \tau_{\alpha=45^\circ} = \frac{\sigma}{2} = \tau_{\max};$$

В цьому перерізі діють максимальні дотичні напруження.

2.3. Деформації при розтяганні - стисканні

Прямий стержень під дією осевого навантаження змінює свої поздовжні та поперечні розміри. У випадку розтягування довжина стержня набуває приросту Δl , який називають видовженням, а поперечний переріз його при цьому зменшується (звужується). А якщо стержня стискається, довжина його зменшується на деяку величину Δl (скорочення), а розміри поперечного перерізу збільшуються (розширюються) (рис. 2.6).

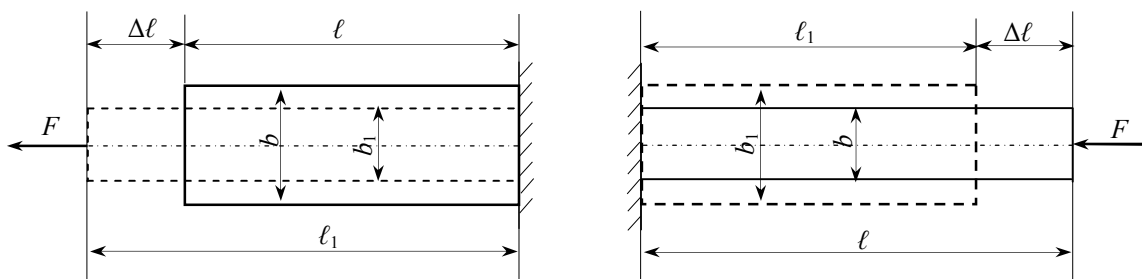


Рис. 2.6

Зміна довжини визначається як різниця між деформованою та початковою довжинами стержня:

- а) $\Delta l = l_1 - l > 0$ (видовження);
- б) $\Delta l = l_1 - l < 0$ (скорочення).

Аналогічно визначається зміна поперечного перерізу:

- а) $\Delta v = v_1 - v < 0$ (звуження);
- б) $\Delta v = v_1 - v > 0$ (розширення).

Такі зміни розмірів стержня називаються абсолютними поздовжніми (Δl) та поперечними (Δv) деформаціями. Вони виражаються в одиницях довжини.

Відношення абсолютної деформації деякого розміру до його початкового значення називається відносною деформацією:

$$\begin{aligned} \text{а) } \varepsilon &= \frac{\Delta l}{l} > 0 \text{ (розтягання);} & \text{б) } \varepsilon &= \frac{\Delta l}{l} < 0 \text{ (стискання);} \\ \varepsilon' &= \frac{\Delta b}{b} < 0 \text{ (звуження),} & \varepsilon' &= \frac{\Delta b}{b} > 0 \text{ (розширення).} \end{aligned}$$

Відносні деформації ε безрозмірними величинами. Досліди показують, що при осьовому навантаженні поперечна деформація пропорційна до поздовжньої і має протилежний знак:

$$\varepsilon' = -\nu \varepsilon. \quad (2.9)$$

Коефіцієнт пропорційності ν називається коефіцієнтом поперечного звуження або коефіцієнтом Пуассона.

Коефіцієнт Пуассона - це відношення поперечної деформації до поздовжньої, взяте за модулем, тобто

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (2.10)$$

Цей коефіцієнт залежить від виду матеріалу стержня. Він визначається з дослідів з використанням формули (2.10).

Для різних матеріалів значення ν коливається в межах $0 < \nu < 0,5$, не досягаючи крайніх значень. Наприклад, сталь – $\nu=0,3$, каучук $\square \nu=0,47$, корок $\square \nu=0,003$.

У 1678 р. англійський фізик Р.Гук сформулював закон, який за сучасною термінологією тлумачиться так: у будь якій точці деформованого тіла напруження прямо пропорційне деформації, тобто

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.11)$$

де E \square модуль пружності матеріалу на розтягання (модуль пружності першого роду, або модуль Юнга). Одиниця модуля пружності \square мегапаскаль (МПа). Це механічна характеристика матеріалу, яка визначається з дослідів з використанням формули (2.11). Так, наприклад, для сталі $E = (2,0 \dots 2,2) \cdot 10^5$ МПа; міді $E = 1 \cdot 10^5$ МПа; алюмінія $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа; чавуна $E = (0,7 \dots 1,6) \cdot 10^5$ МПа; деревини (уздовж волокон) $E = 1 \cdot 10^4$ МПа.

Закон (2.11) являє собою дослідний факт. При осьовому розтяганні (стисканні)

$$\sigma = \frac{N}{A}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (2.12)$$

Враховуючи (2.12) співвідношення (2.11) можна подати у вигляді

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (2.13)$$

Формули (2.11) і (2.13) різняться між собою лише за математичним написанням і виражають один і той же закон, суть якого полягає в тому, що напруження (зусилля) пропорційне деформації (видовженню).

Добуток EA називається поздовжньою жорсткістю бруса. Вона характеризує здатність бруса чинити опір розтяганню або стисканню.

Одиниця жорсткості на розтягання; меганьютон (МН) або кілоньютон (кН). Як бачимо, жорсткість бруса залежить від розмірів поперечного перерізу (площі A) та матеріалу (модуля E).

Формула (2.13) дає змогу визначити зміну довжини стержня при осьовому навантаженні. При цьому слід пам'ятати, що коли стержень має декілька ділянок навантаження, то за формулою (2.13) слід визначити зміну довжини кожної ділянки, а далі всі результати алгебраїчно просумувати.

2.4. Механічні характеристики матеріалів

В інженерній практиці застосовуються різноманітні матеріали, які відрізняються між собою своїми властивостями.

При розрахунках на міцність, жорсткість та стійкість з трьох основних груп механічних характеристик – міцнісних, деформаційних і енергетичних – характеристики першої групи є найважливішими.

Деформаційні і енергетичні властивості матеріалів зазвичай грають роль додаткових показників надійності і в багатьох випадків не застосовуються в розрахунках.

Механічні властивості матеріалів визначають з дослідів на розтягання, стискання, кручення, зсув, згинання та твердість.

Найбільш поширеними є випробування матеріалів на осьове розтягання статичним навантаженням, оскільки вони дуже прості і дають змогу визначити основні механічні характеристики.

Механічні випробування виконуються на зразках, форма і розміри яких встановлюються стандартами або технічними умовами.

Зразки випробовують на відповідних випробувальних машинах. Сучасні такі машини обладнані спеціальним пристроєм, який у процесі випробування будує графік залежності між навантаженням та деформацією зразка. Характер діаграми дослідів залежить від властивостей випробуваного матеріалу.

Типова діаграма розтягання зразка з маловуглецевої сталі має вигляд, зображений на рис. 2.7.

Діаграма розтягання має декілька ділянок. На початковій стадії випробувань залежність між силою F та видовженням Δl лінійна (ділянка OA), тобто процес деформування здійснюється за законом Гука. На цій стадії деформування виникає тільки пружна деформація, яка зникає після розвантаження. Верхня межа цієї ділянки (точка A) відповідає так званій

границі пропорційності (σ_{pr}).

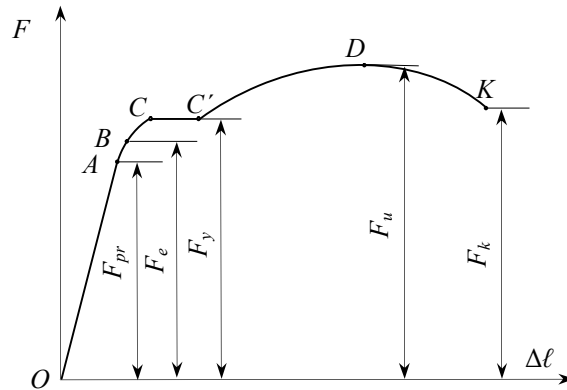


Рис.2.7

Границею пропорційності називається найбільше напруження, для якого справедливий закон Гука. Визначається границя пропорційності за формулою

$$\sigma_{pr} = \frac{F_{pr}}{A_0} \quad (2.14)$$

При подальшому навантаженні починається деяке відхилення від прямої (закону Гука), але після розвантаження деформація зникає практично повністю. Тобто матеріал ще деякий час продовжує перебувати в пружній стадії деформування. Точка B на діаграмі відповідає границі пружності матеріалу (σ_e).

Границею пружності називається найбільше напруження, при залишкова деформація у зразку не виявляється.

Визначається границя пружності за формулою

$$\sigma_e = \frac{F_e}{A_0}. \quad (2.15)$$

Різниця між границею пропорційності і границею пружності незначна і тому на практиці різницею між ними нехтують.

Подальше навантаження приводить до точки C , в якій спостерігається перехід до горизонтальної ділянки CC' , яка називається площадкою текучості. На цій стадії навантаженні деформації зразка зростають при сталому навантаженні, тобто відбувається так звана текучість матеріалу. Поряд з пружними виникають і пластичні (залишкові)

деформації.

Точка C на діаграмі досліду відповідає границі текучості матеріалу (σ_y).

Границею текучості називається напруження, при якому деформації зростають при постійному навантаженні. Визначається границя текучості за формулою

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A_0}. \quad (2.16)$$

На цій стадії навантаження полірована поверхня зразка стає матовою, і на ній з'являються лінії, нахилені під кутом 45° до осі зразка. Це так звані лінії ковзання, що являють собою сліди зсувів за напрямом дії найбільших дотичних напружень. Ці лінії називають лініями Чернова (в іноземній літературі лініями Людерса).

Ряд матеріалів на діаграмі розтягання не мають площадки текучості. Для таких матеріалів установлюється умовна границя текучості.

Напруження, при якому залишкова деформація становить 0,2%, називається умовною границею текучості $\sigma_{0,2}$.

Коли площадка текучості закінчується, діаграма знову набирає криволінійного характеру. Ділянка CD характеризує стадію зміцнення матеріалу. Матеріал знову набуває здатності чинити опір деформації. При цьому до точки D на діаграмі видовження відбувається рівномірно, тобто зразок зберігає циліндричну форму, потоншуючись рівномірно по всій довжині. Коли сила досягає максимального значення (точка D) починається процес руйнування зразка. Деформації локалізуються на невеликій довжині зразка що приводить до утворення у зразку шийки, тобто місцевого звуження. Поперечний переріз зразка в шийці настільки швидко зменшується, що розтягувальна сила спадає, хоч напруження продовжує зростати аж до точки K - фактичного розриву зразка.

Сила, яка відповідає точці D , називається руйнівною, а напруження, що визначається поділом руйнівної сили на початкову площу A_0 поперечного перерізу зразка – тимчасовим опором, або границею міцності матеріалу

$$\sigma_u = \frac{F_u}{A_0}, \quad (2.17)$$

Основними характеристиками міцності, які використовуються в розрахунках, є границя пропорціональності σ_{pr} , границя текучості σ_y і

тимчасовий опір σ_u .

Вигляд діаграми розтягання в координатах $F - \Delta l$ залежить не лише від властивостей матеріалу, а й від розмірів випробуваного зразка. Тому, щоб отримати діаграму, яка характеризує лише механічні властивості матеріалу, первинну діаграму розтягання перебудовують в осях $\sigma - \varepsilon$ (рис. 2.8). Діаграма має умовний характер, тому що ординати точок a, b, c, d, k , розраховувались шляхом віднесення відповідних зусиль F_i до початкової площі A_0 поперечного перерізу зразка, яка насправді в процесі розтягування зразка безперервно зменшується. Діаграма дійсних напружень показана на рис. 2.8 пунктирною лінією.

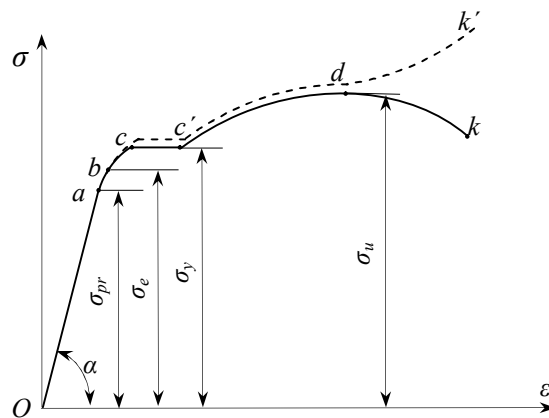


Рис. 2.8

Розходження між умовними та істинними напруженнями стає особливо помітним після точки d .

З діаграми напружень і закону Гука (2.11) випливає

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \operatorname{tg} \alpha .$$

Крім механічних характеристик міцності з дослідів на розтягання визначаються й деформаційні характеристики, до яких належать відносне залишкове видовження δ при розриві та відносне звуження ψ площі поперечного перерізу зразка в області шийки, обчислюванні в відсотках:

$$\delta = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 100\% , \quad (2.18)$$

$$\psi = \frac{\Delta A}{A_0} \cdot 100\% . \quad (2.19)$$

Ці формули характеризують пластичність матеріалу. Умовно матеріали можна поділити на пластичні й крихкі. Якщо $\delta > 5\%$, то матеріал

можна вважати пластичним, а при $\delta < 5\%$ – крихким. Чим більше ψ , тим більш пластичний матеріал.

Діаграма стискання пластичної сталі показана на рис. 2.9. Зразок при стисканні розплющується, площа його перерізу збільшується. З дослідів на стискання визначаються границя пропорціональності σ_{pr} і границя текучості σ_y , при цьому ці параметри при розтяганні та стисканні для однієї й тієї самої пластичної сталі практично однакові. Таким чином пластичні матеріали однаково працюють на розтягання і стискання.

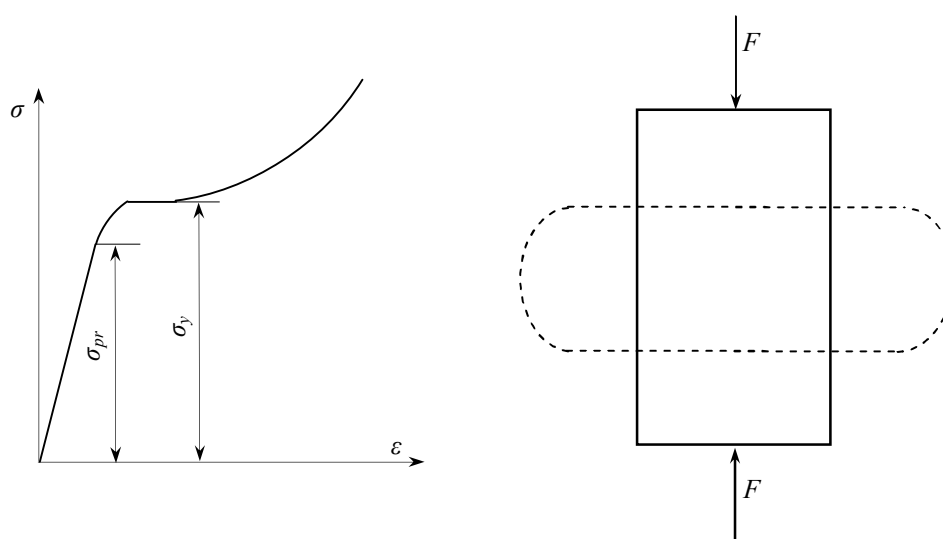


Рис. 2.9

Крихкі матеріали при стисканні і при розтяганні руйнуються при дуже незначних деформаціях.

Діаграми розтягання (крива I) та стискання (крива II) зразка з крихкого матеріалу (чавуну) показані на рис. 2.10. Вони злегка криволінійні, що свідчить про те, що деформації чавуну з початку навантаження аж до руйнування не відповідають закону Гука. Проте нелінійність між σ та ε незначна, і тому в практичних розрахунках вважають, що й для чавуну виконується закон Гука.

Для крихких матеріалів з дослідів на розтягання та стискання можна визначити лише одну характеристику міцності – границю міцності (тимчасовий опір). З діаграм (рис. 2.10) випливає, що границя міцності при розтяганні σ_u^t чавуну істотно менша за границю міцності при стискання σ_u^c . Отже, чавун значно гірше працює на розтягання, ніж на стискання.

При стисканні чавунний зразок руйнується в результаті утворення тріщин, розміщених приблизно під кутом 45° до осі зразка, тобто паралельно перерізам, в яких діють найбільші дотичні напруження.

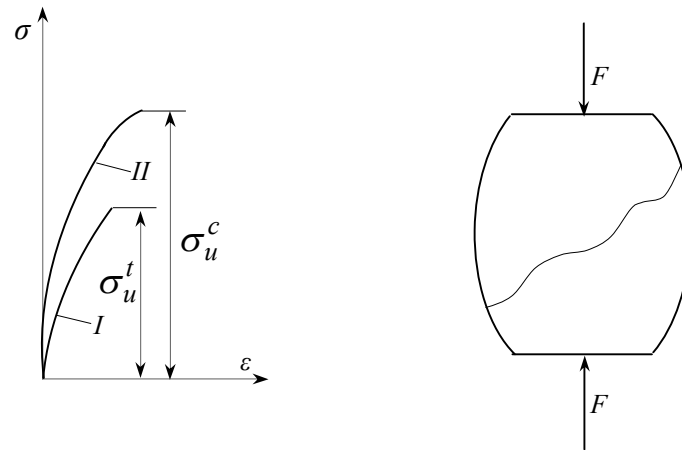


Рис. 2.10

2.5. Основи інженерних розрахунків на міцність

В реальних умовах навантаження деталей машин і технічних споруд не можна доводити до такого рівня, при якому напруження в них можуть досягти граничних (небезпечних) значень, при яких або буде відбуватися руйнування або будуть виникати значні деформації, що перешкоджатимуть їх нормальній роботі.

В машинобудуванні в деталях з пластичного матеріалу не допускається виникнення пластичних деформацій, тому граничними напруженнями для них будуть напруження що дорівнюють границі текучості матеріалу σ_y .

Деталі з крихкого матеріалу руйнуються раптово при дуже незначних деформаціях, тому граничними напруженнями для них будуть напруження що дорівнюють границі міцності матеріалу σ_u .

Виконуючи розрахунки, слід заздалегідь встановити верхні межі напружень, які гарантували б достатню міцність та експлуатаційну надійність кожного елемента, а отже, і всієї споруди. Ці напруження називають допустимими й позначають σ_{adm} або τ_{adm} . Вони визначаються за формулою

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma^0}{n}, \quad (2.20)$$

де σ^o – граничне напруження; n – коефіцієнт запасу міцності.

$$\sigma^o = \begin{cases} \sigma_u & \text{– крихкі матеріали;} \\ \sigma_y & \text{– пластичні матеріали.} \end{cases} \quad (2.21)$$

Коефіцієнт запасу міцності n показує, у скільки разів руйнівне напруження більше за допустиме. Цей коефіцієнт завжди більший за одиницю. Значення його коливаються в межах

$$n = \begin{cases} 2,5 \dots 5 & \text{- для крихких матеріалів;} \\ 1,5 \dots 2,5 & \text{- для пластичних матеріалів.} \end{cases}$$

Коефіцієнт запасу міцності n залежить від багатьох факторів: від виду матеріалу; характеру навантаження; призначення технічної споруди; середовища; умови роботи споруди; географічного розміщення споруди; терміна експлуатації.

Крім зазначених, існує ще цілий ряд інших факторів, які впливають на величину n .

Очевидно, що одним єдиним коефіцієнтом n практично важко врахувати ці фактори. Саме це є основним недоліком методу розрахунку за допустимими напруженнями.

Проте в машинобудуванні ще домінує розрахунок на міцність за допустимими напруженнями.

Згідно з цим методом умова міцності полягає в тому, що максимальне напруження не повинне перевищувати допустимого

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm}. \quad (2.22)$$

У випадку осьового розтягання або стискання умова (2.26) приводить до такої розрахункової формули:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq \sigma_{adm}. \quad (2.23)$$

Розрахунок виконується за так званим небезпечним перерізом, тобто за перерізом, у якому виникають найбільші напруження.

У стержні зі сталим поперечним перерізом небезпечним перерізом буде той, у якому діє найбільше зусилля N_{\max} .

Якщо зусилля N стале по всій довжині стержня, зі змінними поперечними розмірами небезпечним буде переріз, який має найменшу площу.

При виявленні небезпечного перерізу має значення й матеріал, з якого виготовлено даний стержень, якщо для цього матеріалу різними є

допустимі напруження на розтягання σ_{adm}^t та стискання σ_{adm}^c (наприклад, чавун). У таких випадках звичайно небезпечних перерізів буде два: на розтягнутій та на стиснутій ділянках стержня.

Згідно з формулою (2.23) умова міцності дає змогу розв'язувати три види задач.

1. Перевірений розрахунок.

За даними A та N визначають фактичні напруження, а далі порівнюють їх із заданими допустимими:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq \sigma_{adm}.$$

2. Проектний розрахунок майбутньої споруди.

У цьому разі за заданим зусиллям N та допустимим напруженням σ_{adm} визначають потрібні розміри поперечного перерізу:

$$A \geq \frac{N}{\sigma_{adm}}.$$

3. Визначення вантажопідйомності вже існуючої споруди.

За відомими значеннями площі A та допустимого напруження σ_{adm} визначають поздовжні зусилля N , які можна допустити в різних елементах споруди. За цими значеннями N далі визначають допустимі навантаження:

$$N_{\max} = \sigma_{adm} A.$$

Контрольні питання для самоперевірки

1. Яке внутрішнє зусилля виникає в перерізах стержня при розтяганні – стисканні і за яким методом воно визначається?
2. Які знаки мають деформації розтягання та стискання?
3. За якою формулою визначаються нормальні напруження в поперечних перерізах стержня при розтяганні або стисканні?
4. Запишіть формулу закону Гука при осьовій деформації.
5. Запишіть формулу за якою визначається абсолютна поздовжня деформація при осьовій деформації.
6. З яких дослідів визначаються механічні властивості матеріалів?
7. Які механічні характеристики визначають міцність матеріалів?
8. Які механічні характеристики визначають деформативність матеріалів?

Розділ 3. ТЕОРІЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

3.1. Поняття про напружений стан

Розглядаючи напруження, які діють за різними перерізами прямого стержня при осьовому його навантаженні, бачимо, що вони залежать від орієнтації перерізу (площадки). Тобто в одній і тій же точці напруження в різних напрямках різні.

Сукупність нормальних σ та дотичних τ напружень, діючих за різними площадками (перерізами), що проходять через розглядувану точку, називають напруженим станом у цій точці.

Для дослідження напруженого стану в точці в її околиці виділяють безліч малий елемент у вигляді паралелепіпеда або кубика, по гранях якого будуть діяти нормальні та дотичні напруження, які відображають вплив відкинутої частини тіла. Якщо змінювати орієнтацію граней елемента, то напруження на гранях елемента будуть змінюватися. Можна знайти таке положення, при якому на гранях елемента будуть діяти тільки нормальні напруження, а дотичні будуть дорівнювати нулю. Площинки, на яких діють тільки нормальні напруження називаються головними. Нормальні напруження на головних площинках називаються головними напруженнями. Доведено, що незалежно від навантаження тіла, через будь яку його точку можна провести тільки три взаємно перпендикулярні головні площинки, по яким будуть діяти головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. При цьому індекси треба розставляти так, щоб виконувалася наступна алгебраїчна нерівність

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Тому, якщо, одне головне напруження дорівнює нулю, друге $\square 30$ МПа, третє $\square 50$ МПа то вони позначаються наступним чином:

$$\sigma_1 = 0; \quad \sigma_2 = -30 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = -50 \text{ МПа}.$$

Розрізняють просторовий (об'ємний, тривісний), плоский (двовісний) та лінійний (одновісний) напружені стани.

Напружений стан, в якому усі три головних напружень не дорівнюють нулю називається просторовим (рис. 3.1).

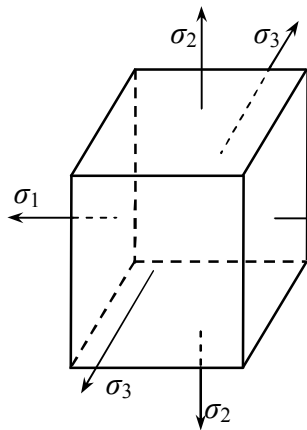


Рис. 3.1

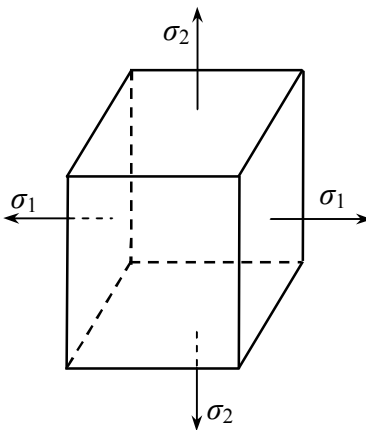


Рис. 3.2

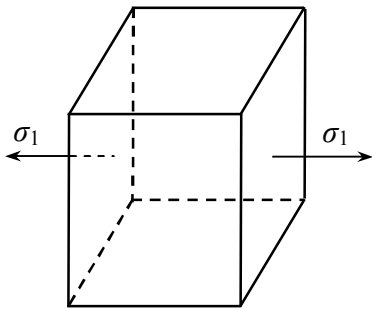


Рис. 3.3

Якщо з трьох головних напружень одне дорівнює нулю, то маємо плоский напружений стан (рис. 3.2). У випадку коли з трьох головних напружень два дорівнюють нулю, а третє відрізняється від нуля напружений стан буде лінійним (рис. 3.3).

3.2. Аналіз плоского напруженого стану

З навантаженого тіла, яке знаходиться в плоскому напруженому стані, виділимо елементарний паралелепіпед зі сторонами dx , dy , dz . Вплив відкинутої частини тіла компенсуємо прикладанням напружень σ і τ (рис. 3.4). Кожному напруженню привласнимо індекс, що показує якій осі паралельне діюче напруження. Так як усі розміри елемента малі будемо вважати, що напруження по протилежним граням однакові, розподілені рівномірно і дорівнюють напруженням в площадках, що проходять паралельно цим граням через розглядувану точку. Нескінченно малий елемент при плоскому напруженому стані прийнято зображати у вигляді прямокутника, який являє собою проекцію елемента на площину, що співпадає з площадкою вільною від напружень (рис. 3.5).

Прийmemo наступні правила знаків для напружень: нормальне напруження буде додатнім, якщо воно розтягує елемент і від'ємним – якщо стискає; дотичне напруження буде додатнім, якщо воно намагається повернути виділений елемент за годинниковою стрілкою відносно будь-якої точки, що лежить на внутрішній нормалі, проведеній до площадки, за якою воно діє (рис. 3.5).

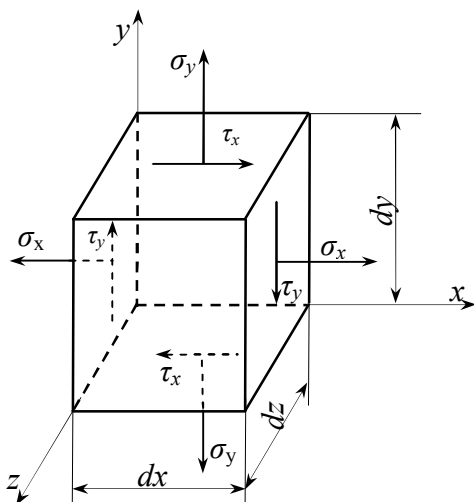


Рис. 3.4

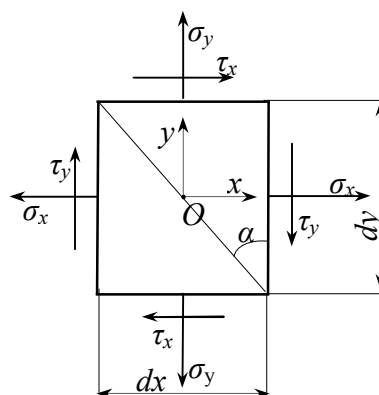


Рис. 3.5

Складемо рівняння рівноваги для розглядуваного елемента з умови $\sum M_O = 0$. Для отримання повної сили кожне напруження треба помножити на площу тієї грані, на якій воно діє.

$$\sum M_O = 0 \quad \tau_x \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \tau_y \cdot dx \cdot dz \cdot dy = 0,$$

звідки

$$\tau_x = -\tau_y \quad (3.1)$$

Рівність (3.1) є законом парності дотичних напружень: дотичні напруження на двох взаємно перпендикулярних площадках однакові по величині і протилежні по напрямку.

Інші дві умови рівноваги $\sum X = 0, \sum Y = 0$ перетворюються в тотожність.

В розглядуваному елементі виділимо площадку під кутом α (рис. 3.5). Кут α буде додатним якщо він відраховується від площадки де діє напруження σ_x проти годинникової стрілки. Відкинемо нижню частину і розглянемо рівновагу трикутної призми abc (рис. 3.6). На похилій грані будуть діяти напруження σ_α і τ_α .

Зауважимо, що

$$\frac{dx}{dS} = \sin \alpha; \quad \frac{dy}{dS} = \cos \alpha. \quad (3.2)$$

Тепер складемо суму проєкцій усіх сил на осі u та v :

$$\sum V = \sigma_\alpha dS dz - \sigma_x dy dz \cos \alpha - \sigma_y dx dz \sin \alpha - \tau_x dx dz \cos \alpha + \tau_y dy dz \sin \alpha = 0,$$

$$\sum U = \tau_{\alpha} dS dz - \sigma_y dx dz \cos \alpha + \sigma_x dy dz \sin \alpha + \tau_x dx dz \sin \alpha + \tau_y dy dz \cos \alpha = 0.$$

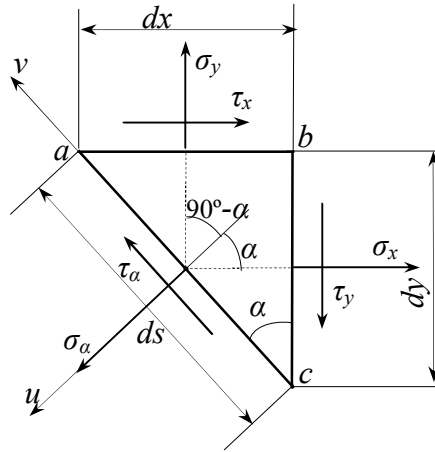


Рис. 3.6

Ділячи обидві рівності на $dSdz$ і враховуючи (3.1) і (3.2) отримаємо наступні формули

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_x \sin 2\alpha, \quad (3.3)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_x \cos 2\alpha. \quad (3.4)$$

Визначимо тепер напруження, що діють за площадкою, перпендикулярною до попередньої площадки dS . Для цього у формули (3.3) і (3.4) замість α підставляємо $\alpha' = 90^\circ + \alpha$ й дістаємо

$$\sigma_{\alpha'} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \tau_x \sin 2\alpha, \quad (3.5)$$

$$\tau_{\alpha'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha = -\tau_{\alpha}. \quad (3.6)$$

Склавши рівності (3.3) і (3.5), маємо

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha'} = \sigma_x + \sigma_y = \text{const}. \quad (3.7)$$

Це інваріантне співвідношення показує, що сума нормальних напружень, що діють за двома взаємно перпендикулярними площадками, для даного стану є величина стала, незалежна від орієнтації площадок.

3.3. Головні площадки та головні напруження

Нагадаємо, що головними називаються площадки, за якими не діють дотичні напруження. Визначимо положення головних площадок. Для цього дорівнюємо до нуля похідну виразу (3.3):

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0} = -2\sigma_x \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + 2\sigma_y \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + 2\tau_x \cos 2\alpha_0 = 0,$$

$$\text{або} \quad -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_x \cos 2\alpha_0 = 0, \quad (3.8)$$

$$\text{звідки одержуємо} \quad \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (3.9)$$

Цією формулою визначається орієнтація площадок, за якими діють екстремальні нормальні напруження. Порівнявши вираз (3.8), з якого дістали формулу (3.9), з виразом (3.4), бачимо, що при $\alpha = \alpha_0$ $\tau_\alpha = 0$. Отже, ці площадки є головними.

Якщо визначений за формулою (3.9) кут α_0 буде додатним, то головна площадка повернута відносно площадки, де діє напруження σ_x проти годинникової стрілки.

Головні напруження можна визначити за формулами (3.3) та (3.5), підставляючи туди значення $\alpha = \alpha_0$ і $\alpha' = \alpha_0 + 90^\circ$,

де

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} \right). \quad (3.10)$$

Проте існують зручніші з практичного боку формули для визначення головних напружень. Подамо їх без виведення:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}, \\ \sigma_{min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Для визначення положення головної площадки з напруження σ_{max} треба площадку з більшим (в алгебраїчному змісті) нормальним напруженням повернути на кут α_0 у напрямі вектору дотичного напруження, що діє на цій площадці. Площадка з σ_{min} перпендикулярна площадці з σ_{max} .

3.4. Екстремальні дотичні напруження

Визначимо площадки по яким дотичні напруження τ мають екстремальні значення. Ці площадки називаються площадками зсуву.

Прирівняємо до нуля похідну виразу (3.4):

$$\left. \frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_1} = 2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha_1 + 2\tau_x \sin 2\alpha_1 = 0,$$

звідки маємо

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_x}. \quad (3.12)$$

Тут α_1 – кут нахилу площадки зсуву до площадки з напруженням σ_x . Формула (3.12) дозволяє визначити положення двох взаємно перпендикулярних площадок, по одній з яких діє τ_{\max} по іншій τ_{\min} , причому $\tau_{\max} = -\tau_{\min}$ (за законом парності дотичних напружень).

Порівнюючи (3.9) та (3.12), бачимо, що

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_0},$$

звідки

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - 2\alpha_1) = -\operatorname{ctg} 2\alpha_0 = \operatorname{ctg}(-2\alpha_0),$$

отже,

$$90^\circ - 2\alpha_1 = -2\alpha_0,$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + 45^\circ.$$

Таким чином, площадки зсуву розташовані по відношенню до головних площадок під кутом 45° .

Щоб визначити $\tau_{\max} = -\tau_{\min}$, за вихідні площадки візьмемо головні. Тоді у виразах (3.4) і (3.6) треба покласти $\sigma_x = \sigma_{\max}$, $\sigma_y = \sigma_{\min}$, $\tau_x = 0$, $\alpha_1 = \pm 45^\circ$, після чого отримаємо

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \quad (3.13)$$

Підставляючи в (3.13) вираз (3.11), маємо

$$\tau_{\max} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}. \quad (3.14)$$

Нормальні напруження σ_{α_1} , діючі за площадками, де $\tau = \tau_{max} = -\tau_{min}$, рівні між собою і визначаються формулою

$$\sigma_{\alpha_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}. \quad (3.15)$$

3.5. Узагальнений закон Гука

Досліджуючи деформації і питання міцності при об'ємному напруженому стані будемо вважати, що матеріал відповідає закону Гука, а деформації малі.

У випадку одновісного (лінійного) напруженого стану ми з'ясували, що відносна поздовжня деформація і відносна поперечна деформація дорівнюють

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (3.16)$$

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon = -\nu \frac{\sigma}{E}. \quad (3.17)$$

Ці формули встановлені експериментально.

У випадку об'ємного напруженого стану зв'язок між деформаціями та напруженням має складніший характер, який не піддається експериментальному визначенню. Тому встановимо цей зв'язок аналітично.

Розглянемо елемент, який знаходиться у просторовому напруженому стані, що заданий на головних площадках (рис. 3.7).

Позначимо відносні деформації ребер елемента в напрямі головних напружень – відповідно ε_1 , ε_2 , ε_3 .

Скористаємося принципом незалежності дії сил і визначимо ε_1 , ε_2 і ε_3 послідовно розглядаючи окремо дію напружень σ_1 , σ_2 , σ_3 (рис. 3.7). Тобто будемо вважати, що деформація, спричинена одночасною дією усіх трьох головних напружень, дорівнює алгебраїчній сумі відповідних деформацій, спричинених кожним напруженням окремо.

Деформації, що виникають в кожному з трьох лінійних напружених станів, позначимо через $\varepsilon_{i,k}$, ($i, k = 1, 2, 3$), де перший індекс (i) вказує, з напрямом якого напруження збігається напрям даної деформації, а другий індекс (k) – яким напруженням спричинена ця деформація.

Отже, користуючись формулами (3.16) і (3.17) визначаємо деформації, які виникають у кожному з трьох лінійних напружених станів.

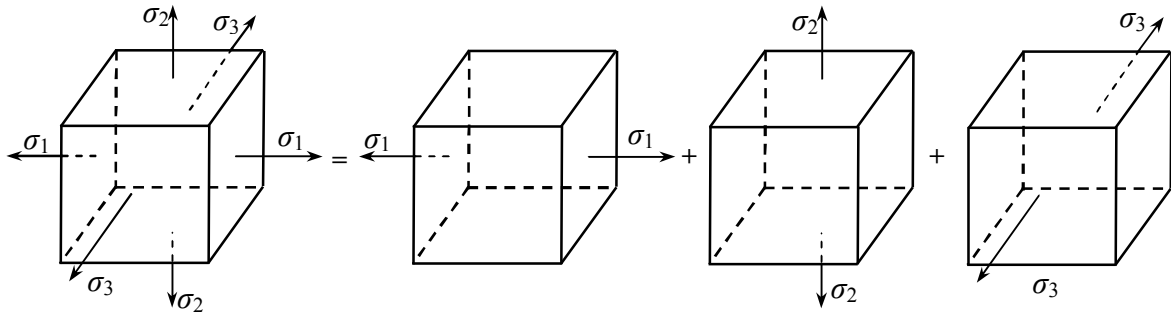


Рис. 3.7

Діє лише напруження σ_1 :

деформація в напрямі напруження σ_1

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E};$$

в напрямі σ_2

$$\varepsilon_{21} = -\nu\varepsilon_{11} = -\nu\frac{\sigma_1}{E};$$

в напрямі σ_3

$$\varepsilon_{31} = -\nu\varepsilon_{11} = -\nu\frac{\sigma_1}{E}.$$

Нагадаємо, що деформації ε_{21} та ε_{31} являють собою поперечне звуження при поздовжньому розтягу.

Аналогічно визначаємо деформації при дії напружень σ_2 і σ_3

$$\varepsilon_{12} = -\nu\varepsilon_{22} = -\nu\frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_{32} = -\nu\varepsilon_{22} = -\nu\frac{\sigma_2}{E};$$

$$\varepsilon_{13} = -\nu\varepsilon_{33} = -\nu\frac{\sigma_3}{E}; \quad \varepsilon_{23} = -\nu\varepsilon_{33} = -\nu\frac{\sigma_3}{E}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_3}{E}.$$

Тоді, згідно з принципом суперпозиції, відносні деформації, спричинені одночасною дією усіх трьох напружень σ_1 , σ_2 , σ_3 , будуть дорівнювати

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13},$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23},$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{31} + \varepsilon_{32} + \varepsilon_{33},$$

або, після підставлення значень $\varepsilon_{i,k}$, виражених через напруження, остаточно маємо:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Оскільки дотичні напруження не спричинюють подовження ребер елемента, а лише перекошують прямі кути між його гранями, то формули (3.18) можна використовувати й тоді, коли грані елементарного елемента не є головними площадками. У такому разі зв'язок між напруженнями й відповідними деформаціями подається у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Вирази (3.18) та (3.19) називають узагальненим законом Гука. Формулюється він так: якщо маємо об'ємний напружений стан, то деформації є лінійними однорідними функціями напружень.

3.6. Об'ємна деформація

Визначимо зміну об'єму елемента, з ребрами завдовжки dl_1 , dl_2 , dl_3 , який знаходиться у просторому напруженому стані (рис. 3.8).

Після навантаження тіла цей паралелепіпед зазнав деформування, причому нові довжини його ребер дорівнюють відповідно dl'_1 , dl'_2 , dl'_3 . При цьому припускати мемо, що грані виділеного елемента паралельні головним площадкам.

Об'єм паралелепіпеда до деформування

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3, \quad (3.20)$$

а після деформування

$$dV' = dl'_1 dl'_2 dl'_3, \quad (3.21)$$

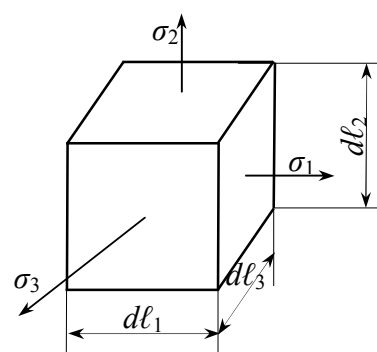


Рис. 3.8

де

$$\left. \begin{aligned} dl'_1 &= dl_1 + \Delta dl_1 = dl_1 \left(1 + \frac{\Delta dl_1}{dl_1} \right) = dl_1 (1 + \varepsilon_1), \\ dl'_2 &= dl_2 + \Delta dl_2 = dl_2 \left(1 + \frac{\Delta dl_2}{dl_2} \right) = dl_2 (1 + \varepsilon_2), \\ dl'_3 &= dl_3 + \Delta dl_3 = dl_3 \left(1 + \frac{\Delta dl_3}{dl_3} \right) = dl_3 (1 + \varepsilon_3). \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Підставляючи (3.22) у (3.21) й враховуючи (3.20), маємо

$$dV' = dV(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3).$$

Якщо розкрити дужки й на підставі малих деформацій знехтувати їх добутками, то об'єм елемента після його деформування буде

$$dV' = dV(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Тоді приріст об'єму або абсолютна об'ємна деформація визначиться так:

$$\Delta(dV) = dV' - dV = dV(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3),$$

а відносна об'ємна деформація буде

$$\theta = \frac{\Delta dV}{dV} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (3.23)$$

Підставивши у (3.23) замість деформацій ε_i їх вирази через узагальнений закон Гука (3.18), після нескладних перетворень отримаємо

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (3.24)$$

На підставі (3.19) відносну зміну об'єму можна визначити, знаючи не головні, а будь-які нормальні напруження, що діють за трьома взаємно перпендикулярними площадками:

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (3.25)$$

Отже, зміна об'єму спричинюється лише нормальними напруженнями, а дотичні на величину об'ємної деформації не впливають.

3.7. Питома потенціальна енергія деформації

Виділимо з напруженого тіла нескінченно малий елемент, обмежений головними площадками (рис. 3.8). Через малізну площ його граней зусилля, які діють за цими гранями, визначаються так:

$$dN_1 = \sigma_1 dl_2 dl_3; \quad dN_2 = \sigma_2 dl_1 dl_3; \quad dN_3 = \sigma_3 dl_1 dl_2. \quad (3.26)$$

Під дією цих зусиль елемент отримає деякі деформації, причому видовження ребер дорівнюють

$$\Delta dl_1 = \varepsilon_1 dl_1; \quad \Delta dl_2 = \varepsilon_2 dl_2; \quad \Delta dl_3 = \varepsilon_3 dl_3. \quad (3.27)$$

Припустимо, що зусилля, які діють на елемент, поступово зростають від нуля до свого кінцевого значення, тобто навантаження тіла за характером є статичним. У такому разі елементарна робота dW зовнішніх сил на видовженнях, а отже, й потенціальна енергія dU пружної деформації елементарного паралелепіпеда визначаються виразом

$$dW = dU = \frac{dN_1 \Delta dl_1}{2} + \frac{dN_2 \Delta dl_2}{2} + \frac{dN_3 \Delta dl_3}{2}.$$

Тут використано принцип незалежності дії сил, який у даному разі можна застосовувати, оскільки діючі сили взаємно перпендикулярні, отже, робота однієї сили на переміщенні, спричиненому другою силою, дорівнює нулю.

Підставляючи значення зусиль (3.26) та деформацій (3.27), маємо

$$dU = \frac{dl_1 \cdot dl_2 \cdot dl_3}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3).$$

Поділивши знайдене значення потенціальної енергії паралелепіпеда на початковий об'єм елемента $dV = dl_1 dl_2 dl_3$, дістанемо повну питому потенціальну енергію пружної деформації:

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3}{2}. \quad (3.28)$$

Підставивши замість деформацій ε_1 , ε_2 , ε_3 їх вирази через напруження за узагальненим законом Гука (3.18), отримаємо:

$$u = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right]. \quad (3.29)$$

Оскільки взагалі $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$, то відносні видовження ребер елемента будуть різні ($\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$). Тому в результаті дії прикладених сил він змінив не лише свій об'єм, а й форму.

Згідно з цим повна питома потенціальна енергія деформації (3.29) складається з двох частин; питомої енергії зміни об'єму u_v та питомої енергії зміни форми u_ϕ :

$$u = u_v + u_\phi. \quad (3.30)$$

Очевидно, що змінити об'єм елемента не змінюючи його форми, можна лише тоді, коли за всіма його гранями діють однакові нормальні напруження σ_0 .

Щоб знайти величину напруження σ_0 , яке спричинює лише зміну об'єму без зміни форми елемента, скористаємося формулою (3.24):

$$\frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_0 + \sigma_0 + \sigma_0).$$

звідки отримаємо (рис. 3.9, б)

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (3.31)$$

Розклавши напружений стан $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ на два напружених стани $(\sigma_0, \sigma_0, \sigma_0)$ та $(\sigma_1 - \sigma_0, \sigma_2 - \sigma_0, \sigma_3 - \sigma_0)$ й скориставшись принципом незалежності дії сил, зможемо визначити обидві складові питомої потенціальної енергії деформації.

Розглядаючи рис. 3.9, помічаємо, що коли приймаємо σ_0 (3.31), то енергія зміни об'єму, накопичувана в елементі *a*, повністю визначатиметься енергією, накопичуваною в елементі *b*, а енергія зміни форми, яка виникає у вихідному елементі *a*, визначається енергією деформації елемента *b*.

Застосувавши до кожного з елементів *b* і *в* загальний вираз повної питомої потенціальної енергії (3.29) і виконавши відповідні перетворення з урахуванням (3.31), отримаємо

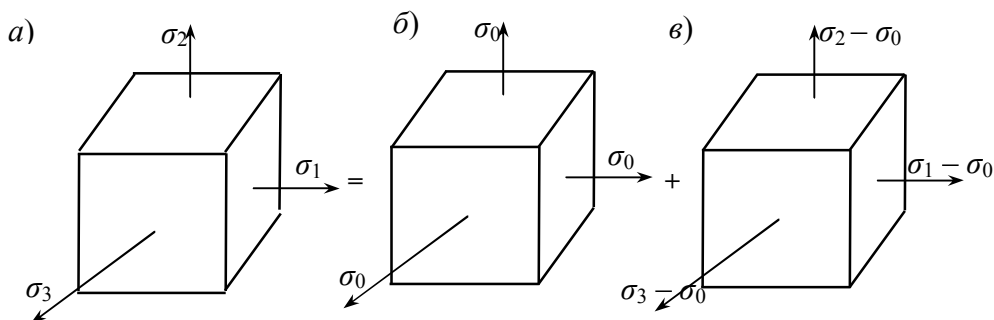


Рис. 3.9

$$u_v = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2; \quad (3.32)$$

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{3E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]. \quad (3.33)$$

Легко перевірити, що $u = u_v + u_\phi$. Це означає, що сили, які діють у стані b , не виконують роботи на переміщеннях, спричинених станом v .

У разі плоского напруженого стану при $\sigma_3 = 0$ будемо мати

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2]. \quad (3.34)$$

$$u_v = \frac{1+2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2)^2; \quad (3.35)$$

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{3E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2). \quad (3.36)$$

3.8. Чистий зсув

Чистий зсув є частковим випадком плоского напруженого стану, коли по граням елемента діють лише дотичні напруження (рис. 3.10)

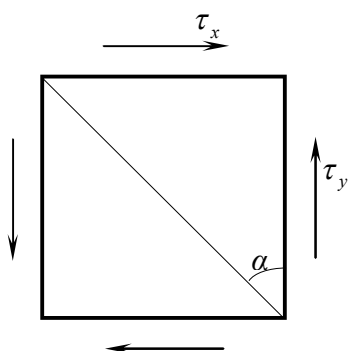


Рис. 3.10

Напруження на похилих площадках, розташованих під кутом α , відповідно формул (3.3, 3.4, 3.5), дорівнюють:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \tau_x \sin 2\alpha, \\ \sigma_{\alpha'} &= -\tau_x \sin 2\alpha, \\ \tau_\alpha &= -\tau_x \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

При чистому зсуві нормальні напруження на двох взаємно перпендикулярних площадках рівні за величиною та протилежні за знаком.

Головні площадки при чистому зсуві розташовані під кутом 45° по відношенню до площадок чистого зсуву і головні напруження на цих площадках, відповідно формулам (3.11), дорівнюють:

$$\sigma_{\max} = \tau_x \text{ і } \sigma_{\min} = -\tau_x. \quad (3.38)$$

У разі, коли чистий зсув заданий на довільних площадках, положення головних площадок визначаються по формулі (3.9).

3.9. Основні гіпотези міцності

Основною задачею інженерного розрахунку є оцінка міцності деталі по відомому напруженому стану, тобто по відомим головним напруженням в точках деталі. Просто ця задача вирішується для лінійного напруженого стану, так як в цьому випадку значення граничних (небезпечних) напружень легко встановити з дослідів на осьове розтягання. Для пластичного матеріалу граничними є напруження при яких виникають значні залишкові деформації, а для крихких \square напруження при яких починається руйнування матеріалу. По граничним напруженням встановлюються допустимі напруження, забезпечуючи відповідний запас міцності проти виникнення граничного стану. Умова міцності для лінійного стану має вигляд

$$\sigma_1 \leq \sigma_{adm}^t \quad \text{або} \quad \sigma_3 \leq \sigma_{adm}^c.$$

При складному напруженому стану в точках деталей два або три головних напружень не дорівнюють нулю. В цьому випадку досліди показують, що небезпечний стан для одного й того ж матеріалу може виникати при різних граничних значеннях головних напружень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в залежності від їх співвідношень. Тому експериментально встановити весь спектр граничних значень головних напружень дуже складно. З викладеного виникає очевидна необхідність створення загального методу оцінки міри небезпечності будь якого напруженого стану при обмеженій кількості механічних дослідів матеріалу. Це і є змістом теорії міцності. Для цього вводиться гіпотеза про переважний вплив на міцність матеріалу того чи іншого фактору, граничне значення якого визначається з випробувань на осьове розтягання або стискання. Отже, введення теорії міцності дає

змогу зіставити даний складний напружений стан з лінійним (рис. 3.11) і знайти при цьому таке еквівалентне напруження, яке в обох випадках дає однаковий запас міцності.

Класичні теорії міцності

Перша теорія міцності - теорія найбільших нормальних напружень.

Основоположником цієї теорії вважається Галілео Галілей. Сучасна постановка гіпотези, що відповідає першій теорії міцності, формулюється так.

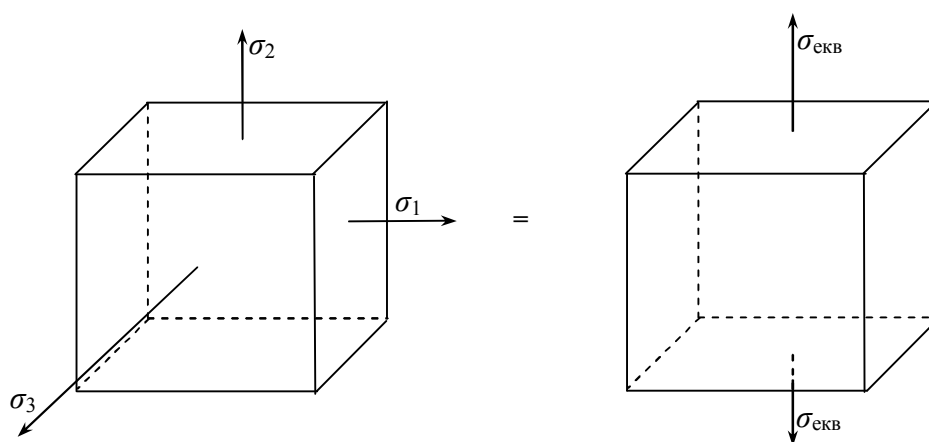


Рис. 3.11

Руйнування матеріалу, який перебуває в умовах тривісного напруженого стану, відбудеться тоді, коли найбільше нормальне напруження σ_{\max} досягне значення σ_0 , при якому зразок з даного матеріалу руйнується в умовах одновісного навантаження.

Згідно з першою гіпотезою міцності при розрахунках необхідно обмежувати найбільші головні напруження. Якщо допустимі напруження на розтягання та стискання для матеріалу однакові (пластичний матеріал), то перша теорія міцності приводить до наступної розрахункової формули:

$$\max|\sigma| \leq \sigma_{adm}. \quad (3.39)$$

А якщо допустимі напруження на розтягання σ_{adm}^t та стискання σ_{adm}^c різні (крихкий матеріал), то умова міцності записується у вигляді двох нерівностей:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &\leq \sigma_{adm}^t, \\ \sigma_3 &\leq \sigma_{adm}^c.\end{aligned}\tag{3.40}$$

Досліди на кручення сталевих зразків, здатних на значні пластичні деформації, виявили, що перша теорія міцності удвічі переоцінює міцність матеріалу. Крім того, досліди щодо всебічного стиску ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 < 0$) показали, що всі матеріали не виявляють жодних ознак руйнування при напруженнях, значно перевищуючих межу міцності. Таким чином, у цьому разі згадана теорія істотно недооцінює міцність матеріалів.

Отже, для пластичних матеріалів перша теорія міцності абсолютно непридатна. Вона дає задовільні результати лише для крихких матеріалів, причому за умови, що одне з головних напружень за абсолютною величиною значно більше за решту.

Цього й слід було чекати, оскільки дана теорія з трьох головних напружень ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) бере до уваги лише одне, тим часом як два інших також, безумовно, можуть істотно впливати на ступінь наближення матеріалів до небезпечного стану.

Тому тепер перша теорія міцності для складних напружених станів не застосовується.

Друга теорія міцності - теорія найбільших відносних деформацій. Основи другої теорії міцності були закладені наприкінці XVII ст. Маріоттом, а остаточні формулювання подав у XIX ст. Сен-Венан. У цій теорії за критерій міцності береться максимальна деформація ε_{\max} .

Небезпечний стан матеріалу, що перебуває в умовах тривісного напруженого стану, досягається тоді, коли максимальна деформація ε_{\max} набуде руйнівного значення ε_0 при одновісному навантаженні.

Згідно з цією гіпотезою при розрахунках потрібно обмежувати величину ε_{\max} деформацій

$$|\varepsilon_{\max}| \leq \varepsilon_{adm}.\tag{3.41}$$

Умови міцності можна виразити через напруження використовуючи узагальнений закон Гука. Хай найбільше відносне подовження буде ε_1 .

Тоді

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)].\tag{3.42}$$

При простому розтяганні

$$\varepsilon_{adm} \frac{\sigma_{adm}}{E}. \quad (3.43)$$

Підставляючи вирази (3.48), (3.49) в умову міцності (3.47) отримаємо

$$\sigma_{екв}^{II} = [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \sigma_{adm}. \quad (3.44)$$

Досліди підтверджують цю гіпотезу лише для крихких матеріалів.

Третя теорія міцності - теорія найбільших дотичних напружень.

Основоположником цієї теорії є видатний фізик, механік та інженер XVIII ст. Кулон, який за критерій міцності запропонував прийняти найбільші дотичні напруження.

Руйнування матеріалу, що перебуває в умовах об'ємного напруженого стану, відбудеться тоді, коли максимальне дотичне напруження τ_{max} досягне значення τ_0 , при якому зразок з даного матеріалу руйнується при одновісному навантаженні.

За цією теорією обмежувати потрібно дотичні напруження:

$$\tau_{max} \leq \tau_{adm}. \quad (3.45)$$

При просторовому напруженому стану

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (3.46)$$

При осьовому розтяганні можна прийняти

$$\tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{2}. \quad (3.47)$$

Враховуючи (3.45), (3.46) і (3.47), маємо:

$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{adm}. \quad (3.48)$$

Недоліком цієї теорії є те, що вона не враховує проміжного головного напруження σ_2 , яке також впливає на міцність матеріалу. Похибка третьої теорії при цьому може досягати 10-15 %.

Незважаючи на це, третя теорія завдяки своїй простоті тепер широко використовується в інженерних розрахунках конструкцій з пластичних матеріалів.

Четверта -енергетична теорія міцності.

Враховуючи ці недоліки, але сприймаючи правильність гіпотези про істотний вплив енергії деформації на міцність матеріалу, Львівський

професор Губер у 1904 р. запропонував наступну гіпотезу: руйнування відбувається тоді, коли питома енергія деформації форми досягає значення, при якому руйнується зразок з даного матеріалу в умовах осьового навантаження.

Умова міцності за цієї теорії має вигляд

$$u_{\Phi} \leq u_{\Phi, adm}, \quad (3.55)$$

де u_{Φ}

$$u_{\Phi} = \frac{1 + \mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (3.56)$$

Якщо навантаження одновісне, то u_{Φ}

$$u_{\Phi, adm} = \frac{1 + \nu}{3E} \sigma_{adm}^2. \quad (3.57)$$

Тоді умова міцності (3.55) набуває вигляду

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leq \sigma_{adm}, \quad (3.58)$$

або

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \sigma_{adm}. \quad (3.59)$$

Енергетична теорія міцності добре підтверджується на практиці й широко застосовується в інженерних розрахунках конструкцій, виготовлених з пластичних матеріалів. Оскільки формозміна матеріалів тісно пов'язана з деформаціями зсуву та дотичними напруженнями, то в цьому розумінні третя та четверта теорії якісно близькі між собою, а кількісно різняться незначно.

Теорія міцності Мора. Узагальнення третьої теорії міцності для крихких матеріалів дає теорія міцності Мора (1900 р.).

Мор також припускає, що проміжне головне напруження не впливає на виникнення ковзань, які створюють небезпечний стан. Таким чином, розрахунок похибки в загальному випадку тривісного напруженого стану зводиться до розрахунку міцності для двовісного напруженого стану. Не спиняючись детально на виведенні умов міцності, які відповідають теорії Мора, запишемо остаточну розрахункову формулу

$$\sigma_{екв}^M = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq \sigma_{adm}^t, \quad (3.60)$$

де

$$k = \frac{\sigma_{adm}^t}{\sigma_{adm}^c} = \frac{\sigma_u^t}{\sigma_u^c}. \quad (3.61)$$

Умова міцності (3.60) придатна для розрахунку як крихких ($k \neq 1$), так і пластичних ($k=1$) матеріалів. В останньому разі (коли $k = 1$) теорія Мора переходить у третю теорію міцності. Враховуючи це, можна вважати, що теорія Мора, як самостійна, застосовується в розрахунках на міцність крихких матеріалів, для яких допустимі напруження на розтяг σ_{adm}^t та стиск σ_{adm}^c різні.

Недоліком цієї теорії є також нехтування проміжних напружень σ_2 .

Контрольні питання для самоперевірки

1. Що називається напруженим станом в точці?
2. Які площадки називаються головними?
3. За якими площадками діють головні напруження?
4. Які існують види напруженого стану?
5. Скільки головних напружень відрізняються від нуля при плоскому напруженому стані?
6. За якими формулами визначаються нормальні та дотичні напруження на похилих площадках при плоскому напруженому стані?
7. За якою формулою визначається положення головних площадок?
8. За якими формулами визначаються головні напруження?
9. Який вигляд має узагальнений закон Гука?
10. Запишіть умову міцності за другою теорією міцності.
11. Запишіть умову міцності за третьою теорією міцності.
12. Запишіть умову міцності за четвертою теорією міцності.
13. Запишіть умову міцності за теорією міцності Мора.

Розділ 4. КРУЧЕННЯ

4.1. Деформація кручення. Внутрішні зусилля

Крученням називають такий вид деформації, при якому в поперечних перерізах стержня виникає лише один внутрішній силовий фактор – крутний момент T . Кручення зазнають численні деталі машин і споруд, вали двигунів і верстатів, осі моторних вагонів і локомотивів, елементи просторових конструкцій тощо.

Кручення прямого стержня відбувається при навантаженні зовнішніми скручуючими моментами M (парами сил), площини дії яких перпендикулярні до його поздовжньої осі. Стержень, який працює на кручення називається валом.

Якщо вал знаходиться в стані спокою або рівномірного обертання, то алгебраїчна сума усіх зовнішніх скручуючих моментів, прикладених до валу, дорівнює нулю.

Розглянемо рівновагу валу, який сприймає дію двох моментів (рис. 4.1).

$$\Sigma M_x = 0, \quad M_1 - M_2 = 0 \text{ звідки } M_1 = M_2.$$

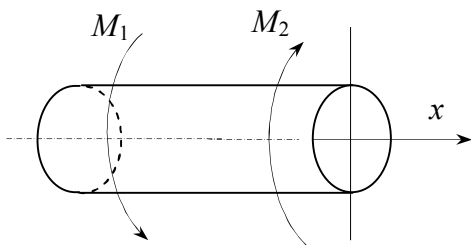


Рис. 4.1

На практиці часто бувають заданими не моменти (M , Н·м), прикладені до шківів або зубчатих коліс, а потужності (P , кВт), які передаються на них або знімаються з них, а також число обертів валу за хвилину (n , об/хв.).

Знайдемо залежність між цими величинами.

Якщо вал здійснює за хвилину n обертів, то кут його повороту за 1с, виражений у радіанах, становить $\frac{n}{60}2\pi$ або $\frac{\pi n}{30}$. Робота скручуючого моменту M за 1с, тобто потужність P , яка передається валом, дорівнює добутку моменту на кут повороту валу (у радіанах) за 1 с:

$$P = \frac{\pi n M}{30},$$

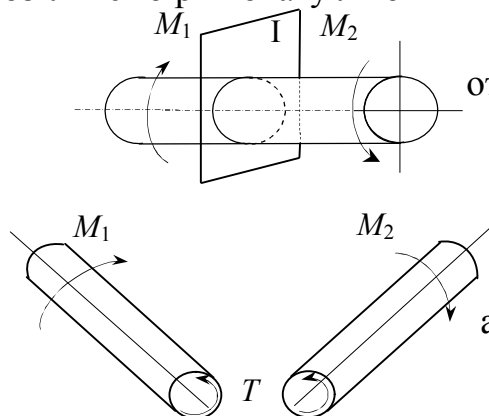
звідки

$$M = 9,55 \frac{P}{n} \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad (4.1)$$

де P виражено в кіловатах, а n – у обертах за хвилину.

Крутні моменти, що діють в поперечних перерізах валу, визначаються по зовнішнім скручувальним моментам за допомогою методу перерізів.

Розглянемо вал на рис.4.2. Розсічемо вал січною площиною I та розглянемо рівновагу лівої чи правої частини.



Записавши це через рівняння рівноваги, отримаємо

$$\sum M_x = T - M_1 = 0; T = M_1,$$

$$\sum M_x = T - M_2 = 0; T = M_2,$$

але $M_1 = M_2$ тоді

$$T = |M_1| = |M_2|.$$

Рис. 4.2

Якщо на розглядувану частину валу буде діяти декілька зовнішніх скручувальних моментів то рішення рівняння рівноваги запишеться

$$T = \sum M_i.$$

Таким чином, крутний момент у будь-якому перерізі вала чисельно дорівнює алгебраїчній сумі скручуючих моментів, які діють на розглядувану частину валу (або по один, будь-який, бік від узятого перерізу).

При цьому домовимося скручуючий момент брати із знаком „плюс”, якщо, дивлячись на нього з боку перерізу, бачитимемо, що він обертає проти годинникової стрілки, і зі знаком „мінус” у протилежному напрямку.

Щоб розрахувати вал на міцність, дуже важливо вміти будувати графік зміни крутних моментів за довжиною вала. Цей графік називається епюрою крутних моментів. Розглянемо побудову епюри крутних моментів на прикладі (рис. 4.3) при наступних вихідних даних: $M_1=30\text{КНм}$, $M_2=70\text{КНм}$, $M_3=10\text{КНм}$, $M_4=30\text{КНм}$.

Застосовуючи метод перерізів до кожної з ділянок I, II та III вала, отримаємо

$$\left. \begin{array}{l} \text{на ділянці I} \quad T_1 = M_1 = 30 \text{кНм}, \\ \text{на ділянці II} \quad T_2 = M_1 - M_2 = 30 - 70 = -40 \text{кНм}, \\ \text{на ділянці III} \quad T_3 = M_1 - M_2 + M_3 = 30 - 70 + 10 = -30 \text{кНм}. \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

При цьому розглядалася рівновага лівої частини вала. Якщо розглядати рівновагу правої частини вала, яка перебуває справа від перерізів I, II, III, дістанемо ті ж самі значення. Побудована еюра наведена на рис. 4.3.

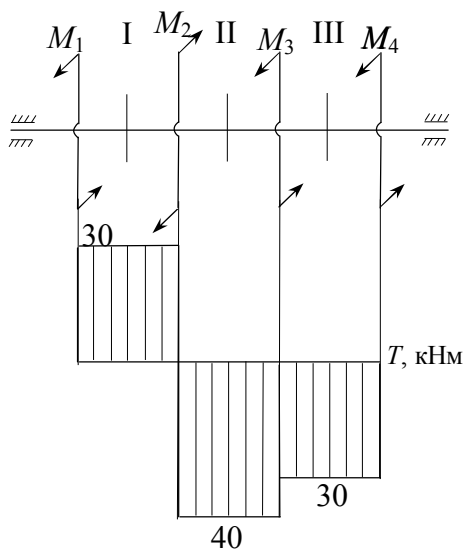


Рис. 4.3

Розглянувши структуру еюри (рис. 4.3), бачимо, що для її побудови можна не обчислювати вирази (4.2), а скористатися так званим методом стрибків. Йдучи, наприклад, зліва направо, потрібно в певному масштабі з урахуванням знака відкладати значення скручуючих моментів під тими перерізами, де вони діють, а в проміжках між ними проводити горизонтальні лінії. За такої побудови правило знаків береться згідно раніше прийнятому: „плюс” – проти годинникової стрілки, „мінус” – за годинниковою стрілкою, хоча вибір

правила знаків при крученні особливої ролі не відіграє.

4.2. Напруження та деформації при крученні валу круглого перерізу

Величина крутного моменту T в будь якому перерізі складається з моментів внутрішніх розподілених зусиль, що діють в перерізі валу. Для знаходження цих зусиль та відповідних їм напружень розглянемо деформування валу.

Якщо на бічну поверхню легко деформуємого (наприклад, гумового) циліндра нанести сітку із системи рівновіддалених кіл та твірних (рис. 4.4), то після скручування цього циліндра будемо спостерігати наступне.

1. Усі твірні повертаються на один і той же кут γ , а квадрати, утворені ортогональною сіткою, перетворюються на ромби, тобто підвергаються деформації зсуву.

2. Кола не змінюють свого діаметра, залишаючись у попередніх площинах.

3. Відносна відстань між колами не змінюється.

На підставі спостережень за поверхнею скручуваного циліндра можна прийняті наступні гіпотези щодо кручення валів круглого поперечного перерізу, які добре підтверджуються практикою.

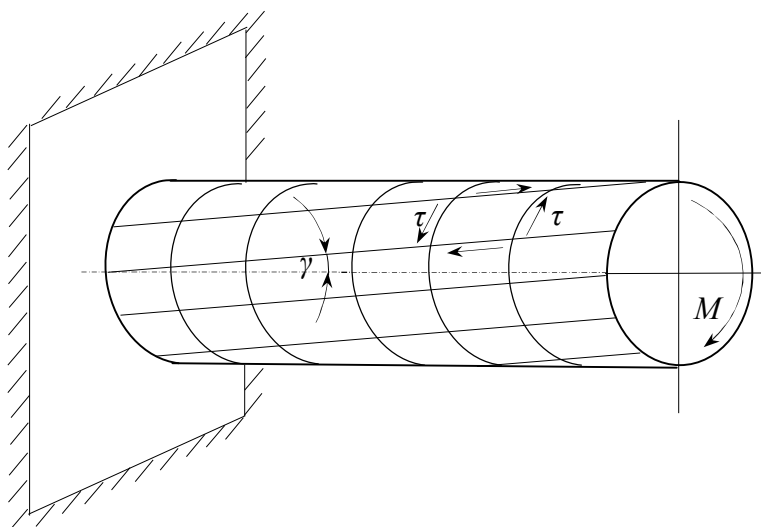


Рис. 4.4

1. Поперечні перерізи стержня, плоскі до деформації кручення, лишається плоскими і після неї. Це припущення називається гіпотезою плоских перерізів.

2. Радіуси поперечних перерізів бруса при скручуванні залишаються прямими.

3. Відстань між поперечними перерізами не змінюється.

Так як деформація кручення є результатом зсувів, спричинених взаємним поворотом поперечних перерізів, то в поперечних перерізах виникають тільки дотичні напруження τ , а нормальні напруження $\sigma = 0$.

Розсічемо вал січною площиною I-I (рис. 4.5). В перерізі візьмемо елементарну площадку dA на відстані ρ від центру перерізу. На цю площадку буде діяти елементарна сила $\tau_\rho dA$ направлена перпендикулярно до радіусу ρ (рис. 4.6). Очевидно, що елементарний крутний момент

$$dT = \tau_\rho dA \rho. \quad (4.3)$$

Інтегруючи (4.3) за площею перерізу, будемо мати

$$T = \int_A \tau_\rho \rho dA. \quad (4.4)$$

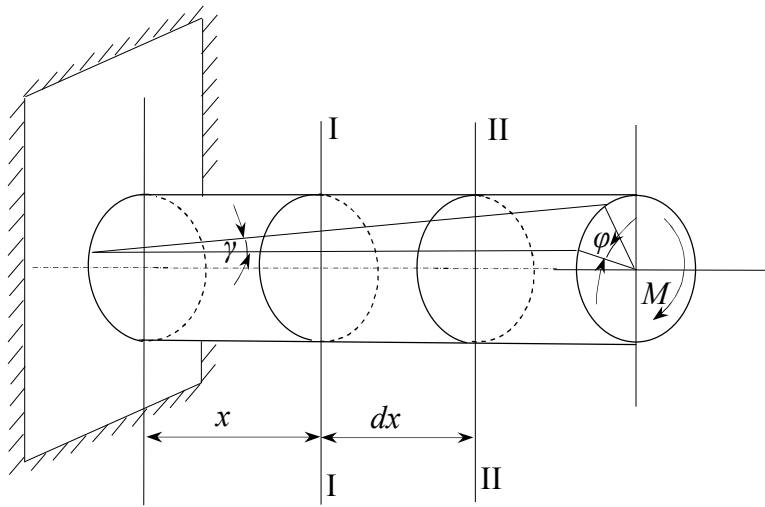


Рис. 4.5

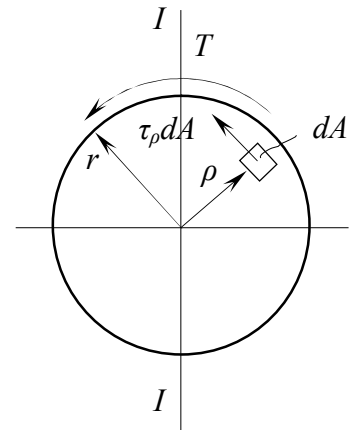


Рис. 4.6

Обчислити інтеграл (4.4) неможливо оскільки розподіл дотичних напружень за перерізом невідомий. Тому розглянемо деформацію валу. Виділимо із валу січними площинами I-I та II-II ділянку довжиною dx (рис. 4.7).

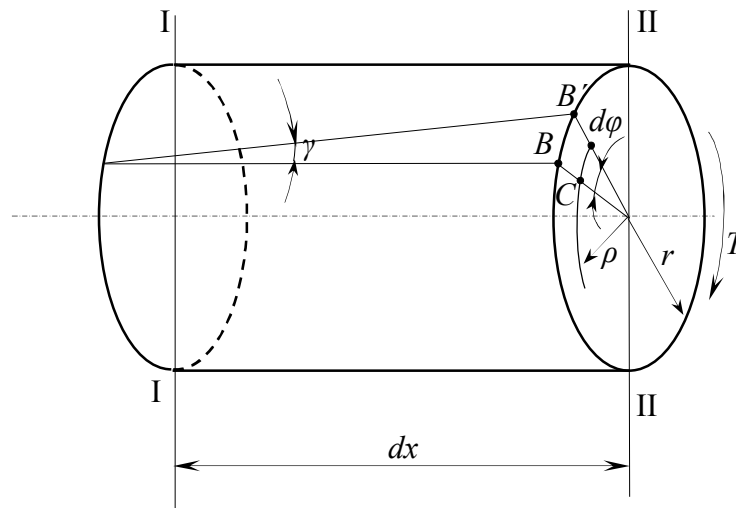


Рис. 4.7

При дії крутного моменту правий переріз повернеться відносно лівого на кут $d\varphi$ (кут закручування валу). Твірна AB після деформації повернеться на кут γ і займе положення AB' . Дуга BB' являє собою абсолютний зсув і буде дорівнювати

$$BB' = r d\varphi. \quad (4.5)$$

Кут між твірними AB і AB' являє собою відносний зсув, або кут зсуву

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{BB'}{AB} = \frac{BB'}{dx} \approx \gamma.$$

Враховуючи (4.5) кут зсуву можна представити у вигляді

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dx}. \quad (4.6)$$

Величина

$$\frac{d\varphi}{dx} = \theta \quad (4.7)$$

є відносним (погоним) кутом закручування.

Враховуючи (4.7) формулу (4.6) можна записати у вигляді

$$\gamma = r \cdot \theta. \quad (4.8)$$

На підставі прийнятих гіпотез про те, що перерізи валу залишаються плоскими, а радіуси прямими вираз для кута зсуву в точці С на відстані ρ від центру перерізу можна представити формулою, аналогічній формулі (4.8)

$$\gamma_\rho = \rho \cdot \theta. \quad (4.9)$$

Для пружних деформацій зв'язок між дотичними напруженнями τ та кутом зсуву γ підкоряється закону Гука

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (4.10)$$

Коефіцієнт пропорційності G в формулі (4.10) називається модулем пружності при зсуві або модулем зсуву і має одиницю виміру МПа. Модуль зсуву G пов'язан з модулем пружності E при розтяганні виразом

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (4.11)$$

Так як $0 \leq \nu \leq 0,5$ то на підставі формули (4.11) G змінюється в межах $0,33E \leq G \leq 0,5E$. Для більшості матеріалів, в тому числі і для сталі, можна приймати $G=0,4E$; тобто $G=0,8 \cdot 10^5$ МПа.

На підставі формул (4.8), (4.9), (4.10) напруження τ в точках B та C будуть дорівнювати

$$\begin{aligned} \tau &= \gamma \cdot G = G\theta \cdot r, \\ \tau_\rho &= \gamma_\rho \cdot G = G\theta \cdot \rho. \end{aligned} \quad (4.12)$$

З формул (4.12) випливає, що дотичні напруження в поперечних перерізах валу змінюється за лінійним законом прямо пропорційно

відстані ρ точок від центру перерізу. Максимальні напруження будуть в точках на поверхні валу при $\rho=r$. В центрі валу вони дорівнюють нулю. Епюра τ приведена на рис. 4.8.

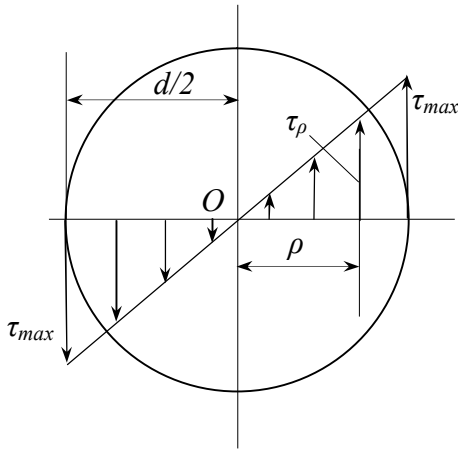


Рис. 4.8

Підставляючи другу формулу з виразів (4.12) у (4.4), отримаємо

$$T = \int_A \theta G \rho^2 dA, \quad (4.13)$$

Так як G і θ не залежать від площі поперечного перерізу, то їх можна винести за знак інтегралу

$$T = \theta G \int_A \rho^2 dA.$$

Інтеграл $\int_A \rho^2 dA = I_p$ називається

полярним моментом інерції площі поперечного перерізу валу.

Таким чином, маємо

$$T = \theta G I_p.$$

Звідки

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{G I_p} \quad (4.14)$$

Підставляючи (4.14) в другу формулу виразів (4.12) отримаємо формулу для визначення дотичних напружень у довільній точці поперечного перерізу валу

$$\tau_\rho = \frac{T}{I_p} \rho. \quad (4.15)$$

Покладаючи в (4.15) $\rho = \rho_{\max} = d/2$, знайдемо найбільше дотичне напруження

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_p} \rho_{\max} = \frac{T}{I_p / \rho_{\max}} = \frac{T}{W_\rho},$$

де введено позначення

$$W_\rho = \frac{I_p}{\rho_{\max}}, \text{ [м}^3\text{]}. \quad (4.16)$$

Відношення полярного моменту інерції до відстані від центра до

поверхні називається полярним моментом опору W_p .

Таким чином остаточно маємо

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p}. \quad (4.17)$$

Розглянемо тепер визначення деформацій валу. З виразу (4.7) маємо

$$d\varphi = \theta dx. \quad (4.18)$$

Інтегруючи вираз (4.18) в межах довжини валу та враховуючи (4.14) отримаємо формулу для визначення кутів закручування валу

$$\varphi = \int_{\ell} \theta dx = \int_{\ell} \frac{T dx}{GI_p}. \quad (4.19)$$

Якщо на довжині ℓ $T = \text{const}$, $GI_p = \text{const}$ то будемо мати

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p}. \quad (4.20)$$

Добуток GI_p [$\text{Н}\cdot\text{м}^2$] називається жорсткістю валу при крученні. Вона характеризує здатність валу чинити опір скручуванню.

В тих випадках, коли крутний момент за довжиною вала змінюється стрибками (див. рис. 4.3), повний кут закручування визначається за формулою (4.20) як алгебраїчна сума кутів закручування на кожній ділянці вала. Виконуючи обчислення, слід у (4.20) замість l та GI_p підставляти довжину й жорсткість тієї ділянки, на якій діє відповідний крутний момент:

$$\varphi = \sum \varphi_i = \sum \frac{T_i l_i}{(GI_p)_i}. \quad (4.21)$$

Кут закручування φ вимірюється в радіанах.

4.3. Розрахунок валів на міцність та жорсткість

Виконуючи розрахунки валів на міцність, обмежують максимальні дотичні напруження, які виникають в небезпечному перерізі вала,

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq \tau_{adm}. \quad (4.22)$$

Це і є умова міцності при крученні. Допустиме напруження τ_{adm}

залежить від матеріалу та умов роботи валу.

Розрахунок валів на міцність виконується за небезпечним перерізом. Для валів сталого перерізу небезпечним буде той переріз, у якому діє найбільший крутний момент, а для валів змінного перерізу небезпечним буде переріз з найбільшим відношенням T/W_ρ .

За формулою (4.22), як і в разі розтягання, можна розв'язувати три типи задач на міцність.

1. Добір перерізу валу (проектний розрахунок). Умова міцності запишеться

$$W_\rho = \frac{T_{\max}}{\tau_{adm}}. \quad (4.23)$$

Полярний момент інерції площі перерізу валу: суцільного, діаметром D

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32}; \quad (4.24)$$

порожнистого, зовнішній діаметр якого D , а внутрішній d

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4), \quad (4.25)$$

де $\alpha = d/D$.

Тоді полярний момент опору суцільного валу

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^4}{32 \frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16}, \quad (4.26)$$

порожнистого

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^4}{32 \frac{D}{2}}(1 - \alpha^4) = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4). \quad (4.27)$$

З (4.23) з урахуванням (4.26), (4.27) розміри поперечного перерізу вала визначаються так:

для суцільного

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{\max}}{\pi\tau_{adm}}} \approx \sqrt[3]{\frac{T_{\max}}{0,2\tau_{adm}}}, \quad (4.28)$$

для порожнистого

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{\max}}{\pi\tau_{adm}(1-\alpha^4)}} \approx \sqrt[3]{\frac{T_{\max}}{0,2\tau_{adm}(1-\alpha^4)}}, \quad d = \alpha D. \quad (4.29)$$

Зауважимо, що, розраховуючи порожнистий вал, необхідно наперед задаватися відношенням діаметрів $\alpha = \frac{d}{D}$.

2. Визначення несучої здатності (вантажопідйомності) валу.

Умова міцності в цьому випадку запишеться

$$T_{adm} \leq \tau_{adm} W_{\rho}. \quad (4.30)$$

За заданим допустимим напруженням τ_{adm} та розмірами поперечного перерізу вала (W_{ρ}) визначається максимально допустимий крутний момент T_{\max} , а за ним розраховуються допустимі зовнішні навантаження M , які створюють цей момент.

3. Визначення напружень у небезпечному перерізі (перевірний розрахунок).

При цьому розрахунку умова міцності має вигляд

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_{\rho}} \leq \tau_{adm}. \quad (4.31)$$

За заданими розмірами поперечного перерізу вала (W_{ρ}) і навантаженням (T_{\max}) визначається максимальне дотичне напруження і порівнюється із заданим допустимим напруженням τ_{adm} .

Розрахунок вала на міцність не виключає можливої появи в ньому недопустимо великих деформацій. Тому для забезпечення нормальної роботи вала необхідно, щоб його деформації не перевищували допустимих. Це потребує перевірного розрахунку вала на жорсткість.

Умова жорсткості для валу має вигляд

$$\theta_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_{\rho}} \leq \theta_{adm}. \quad (4.32)$$

Допустимі кути закручування в техніці найчастіше задають у градусах на один метр погонної довжини валу (град/м.).

Практикою вироблені наступні допустимі погонні кути закручування валів:

для звичайних умов роботи	$\theta_{adm} = 0,3$ град/м;
для поступово змінних навантажень	$\theta_{adm} = 0,25$ град/м;
для навантажень, що раптово змінюються	$\theta_{adm} = 0,15$ град/м.

При проектувальному розрахунку умова жорсткості (4.32) набуває вигляду

$$I_p \geq \frac{T_{max}}{G\theta_{adm}}. \quad (4.33)$$

Враховуючи вирази полярних моментів інерції суцільного валу (4.24) та порожнистого (4.25) з формули (4.33) отримаємо розміри перерізу, які забезпечать потрібну жорсткість валу, а саме:

для суцільного вала

$$d = \sqrt[4]{\frac{32T_{max}}{\pi G\theta_{adm}}} \cong \sqrt[4]{\frac{T_{max}}{0,1G\theta_{adm}}}; \quad (4.34)$$

для порожнистого

$$D = \sqrt[4]{\frac{32T_{max}l}{\pi G\theta_{adm}(1-\alpha^4)}} \cong \sqrt[4]{\frac{T_{max}}{0,1G\theta_{adm}(1-\alpha^4)}}. \quad (4.35)$$

Тут також необхідно заздалегідь задати відношення $\frac{d}{D} = \alpha$.

Якщо допустимий кут закручування задано не в радіанах, а в градусах на 1 м, то у формулах (4.34) і (4.35) слід виконати відповідний перехід до радіанів шляхом множення θ_{adm} на $\pi/180$. У такому разі розрахункові формули набувають вигляду

$$d = \sqrt[4]{\frac{32T_{max} \cdot 180}{\pi^2 G\theta_{adm}}}; \quad D = \sqrt[4]{\frac{32T_{max} \cdot 180}{\pi^2 G\theta_{adm}(1-\alpha^4)}}. \quad (4.36)$$

4.4. Розрахунок гвинтових пружин з малим кроком витка

У техніці часто застосовуються гвинтові циліндричні пружини з малим кроком витка, які зазнають розтягання або стискання. Прикладом можуть бути ресори вагонів, пружину клапанів та різних приладів.

Розглянемо гвинтову циліндричну пружину з малим нахилом витків і заданими параметрами (рис. 4.9): R – середній радіус витка пружини; d – діаметр дроту пружини; F – сила, що розтягує пружину.

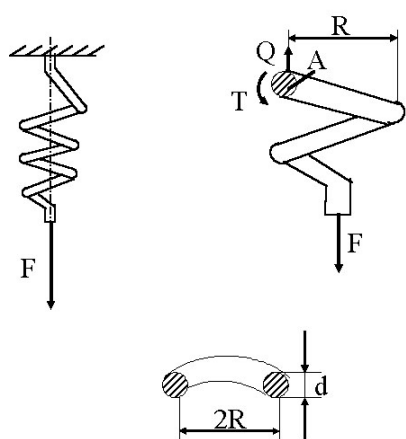


Рис. 4.9

Розсічемо мислено дрід площиною, що проходить через вісь пружини та відкинемо верхню частину. Нижня частина пружини буде знаходитися в рівновазі під дією зовнішньої сили та внутрішніх зусиль в перерізі дроту у вигляді поперечної сили Q та крутного моменту T , що замінюють вплив відкинutoї верхньої частини пружини на нижню. Ці внутрішні зусилля будуть дорівнювати

$$Q = F, \quad T = F \cdot R.$$

Від поперечної сили Q і крутного моменту T у перерізі дроту пружини виникають дотичні напруження. Припускаючи рівномірний розподіл дотичних напружень τ' , що виникають від поперечної сили Q , за перерізом дроту пружини, будемо мати

$$\tau' = \frac{Q}{A} = \frac{4F}{\pi d^2}. \quad (4.37)$$

Максимальні дотичні напруження τ'' від крутного моменту будуть дорівнювати

$$\tau''_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{16FR}{\pi d^3}. \quad (4.38)$$

Епюри дотичних напружень τ' (4.37) і τ'' (4.38) вздовж горизонтального діаметру перерізу наведені на рис. 4.10. При накладанні епюр τ' та τ'' бачимо, що найбільше сумарне напруження виникає поблизу від внутрішньої поверхні витка пружини (точка A):

$$\tau_{\max} = \tau'_{\max} + \tau''_{\max} = \frac{16FR}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4R}\right). \quad (4.39)$$

В багатьох випадках при розрахунках пружин великого середнього діаметру радіуса R , виготовлених з тонкого дроту, при $\frac{d}{4R} \ll 1$

напруження від кручення τ'' будуть значно більше напружень від зрізу τ' і тому напруження τ' можна не враховувати.

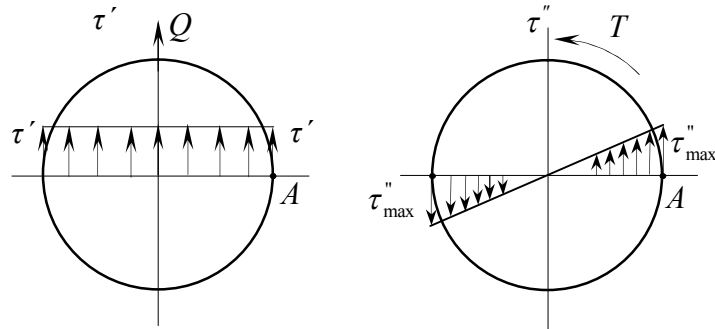


Рис. 4.10

У такому разі формула (4.39) набуває вигляду:

$$\tau_{\max} = \frac{16FR}{\pi d^3} = \frac{T}{W_p}. \quad (4.40)$$

Якщо задані R і τ_{adm} , то діаметр дроту пружини буде дорівнювати

$$d = \sqrt[3]{\frac{16FR}{\pi\tau_{adm}}}. \quad (4.41)$$

У випадку, коли задані d і τ_{adm} , можна знайти середній радіус пружини

$$R = \frac{nd^3\tau_{adm}}{16F}. \quad (4.42)$$

Крім розрахунку на міцність часто доводиться виконувати розрахунок пружин на жорсткість. Для цього необхідно вміти визначати скорочення або видовження пружини.

Визначаючи деформацію пружини, враховують звичайно лише крутний момент, який спричинює кутову деформацію дроту пружини:

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p}. \quad (4.43)$$

При статичному прикладанні навантаження зовнішня сила F , розтягнувши пружину на величину λ , виконує роботу, яка чисельно дорівнює потенціальній енергії пружини, що накопичується в результаті

скручування дроту,

$$U = \frac{F\lambda}{2} = \frac{T^2 l}{2GI_p}. \quad (4.44)$$

Враховуючи, що

$$l = 2\pi Rn, \quad T = FR, \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32},$$

з (4.44) остаточно отримаємо видовження (стиснення) пружини

$$\lambda = \frac{64FR^3 n}{Gd^4}, \quad (4.45)$$

де n – число витків пружини.

Знаючи допустиму осадку λ_{adm} , можна за умовою $\lambda \leq \lambda_{adm}$ визначити або d за рештою заданих величин, або R , або n :

$$d = \sqrt[4]{\frac{64FR^3 n}{G\lambda_{adm}}}, \quad (4.46)$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{\lambda_{adm} G d^4}{64Fn}}, \quad (4.47)$$

$$n = \frac{Gd^4 \lambda_{adm}}{64FR^3}. \quad (4.48)$$

Звертаємо увагу, що потрібна кількість витків n визначається лише з умови жорсткості.

Контрольні питання для самоперевірки

1. Який вид деформації називається крученням?
2. За яким методом визначаються крутні моменти в перерізах валу?
3. Які напруження виникають в точках поперечного перерізу валу при крученні?
4. За якою формулою визначаються дотичні напруження в довільній точці поперечного перерізу валу?
5. За яким законом змінюються дотичні напруження по поперечному перерізу валу?

6. За якою формулою визначаються максимальні дотичні напруження при крученні?
7. Як записується умова міцності при крученні?
8. За якою формулою визначаються кути закручування валу?
9. Як записується умова жорсткості при крученні?
10. Які внутрішні зусилля діють в перерізі дроту гвинтової пружини?
11. Як записується умова міцності для гвинтової пружини?
12. За якою формулою визначається скорочення або видовження циліндричної гвинтової пружини?

Розділ 5. ЗГИНАННЯ

5.1. Деформація згинання. Опори та опорні реакції. Типи балок

Згинанням називається деформація стержня, при якій відбувається викривлення осі прямолінійного стержня, або зміна кривизни осі криволінійного стержня.

Деформація згинання виникає під дією прикладеного до стержня навантаження, що розташоване у площині, яка проходить через поздовжню вісь стержня.

Стержні, які працюють на згинання називаються балками.

Будемо розглядати згинання прямолінійних балок, перерізи яких мають хоча би одну вісь симетрії, при цьому зовнішнє навантаження лежить в площині симетрії перерізу. В цьому випадку згинання буде відбуватися в площині дії навантаження і буде називатися плоским або прямим згинанням.

При згинанні усі поздовжні волокна балки, з яких вона складається коли розглядається її деформація, викривлюються. При цьому одна частина з них викривлюючись стискається, а інша \square розтягається (рис. 5.1).

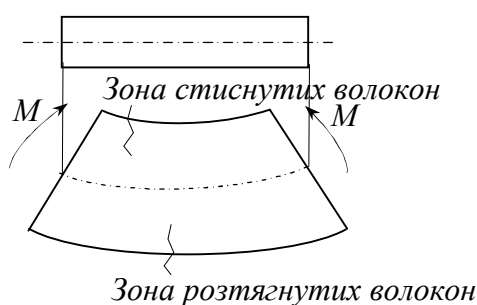


Рис. 5.1

Балка може бути навантажена (рис. 5.2) зосередженими силами F , зосередженими моментами M , розподіленим навантаженням інтенсивності q .

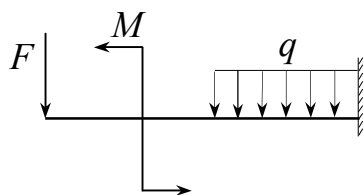


Рис. 5.2

Балки до основи закріплюються за допомогою опорних пристроїв. По конструктивній формі вони дуже різноманітні, але в розрахунковій схемі вони зводяться до

трьох типів.

1. Шарнірно-рухома опора (рис. 5.3) допускає поступальне переміщення опорного перерізу в горизонтальному напрямі та кутове переміщення навколо точки закріплення. Отже, шарнірно-рухома опора накладає на опорний переріз один зв'язок, у напрямі якого на балку діє опорна реакція R_A .

2. Шарнірно-нерухома опора (рис. 5.4) допускає лише кутове переміщення закріпленого перерізу балки. Схематично шарнірно-нерухома опора має два опорних стержня, та три шарніри. У напрямі цих двох опорних стержнів виникають відповідні опорні реакції H_A і R_A .

3. Жорстке закріплення або защемлення (рис. 5.5) перешкоджає будь-якому переміщенню опорного перерізу. Отже, на опорний переріз накладаються три зв'язки, реакції яких відповідають горизонтальній опорній реакції H_A , вертикальній опорній реакції R_A та реакції у вигляді опорного моменту M_A .

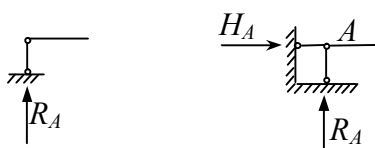


Рис. 5.3

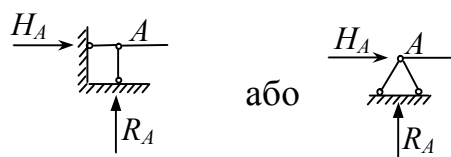


Рис. 5.4

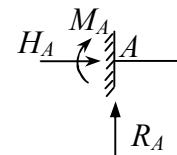


Рис. 5.5

Залежно від комбінації опор, використаних для закріплення балок, останні можуть бути як статично визначуваними, так і статично невизначуваними.

Якщо всі опорні реакції, які діють на балку, можна визначити за допомогою самих лише рівнянь статки, то балка буде статично визначуваною.

В залежності від того, як закріплена балка до основи, розрізняють такі види балок:

1. Проста (однопрогінна) балка, яка опирається своїми кінцями на шарнірні (рухоми та нерухомі) опори (рис. 5.6, а);

2. Одно консольна (рис. 5.6, б), або двох консольна (рис. 5.6, в) балки, які до основи закріплюються за допомогою шарнірних (рухомої та нерухомої) опор;

3. Консоль – балка, яка до основи закріплюється жорстко одним кінцем (рис. 5.6, г);

4. Комбінована балка – має як шарнірні опори, так і опору у вигляді защемлення (рис. 5.6, д), (така балка є статично невизначуваною).

Опорні реакції визначаються з умов рівноваги балки (рис. 5.7).

Горизонтальна реакція H_A визначається з рівняння $\Sigma X = 0$, вертикальні \square з умови рівноваги $\Sigma M = 0$ відносно опорних точок, тобто

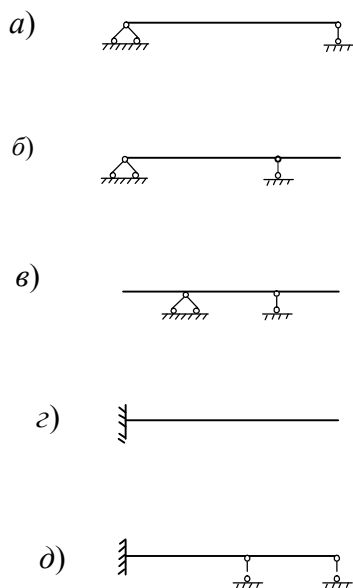


Рис. 5.6

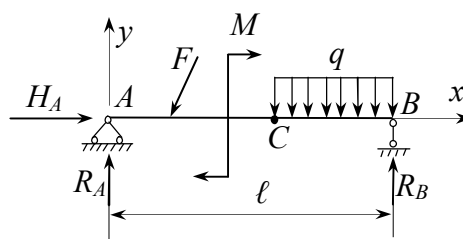


Рис. 5.7

з рівняння $\Sigma M_A = 0$ \square вертикальна реакція R_B ;

з рівняння $\Sigma M_B = 0$ \square вертикальна реакція R_A .

Після визначення опорних реакцій виконується перевірка правильності обчислення. Для цього застосовують умови рівноваги \square $\Sigma Y = 0$ або $\Sigma M_C = 0$.

Перша умова застосовується тоді коли до балки не прикладений зосереджений момент M . Якщо таке навантаження є, то треба брати другу умову, тобто $\Sigma M_C = 0$.

Опорні реакції відносяться до зовнішнього навантаження і тому, не знаючи їх, здебільшого не можна визначити внутрішні зусилля в балках.

5.2. Внутрішні зусилля при згинанні

Щоб визначити внутрішні сили, які виникають у поперечних перерізах балки при згині, скористаємося, як звичайно, методом перерізів.

Розглянемо балку, яка зазнає дію зовнішнього навантаження у

вигляді зосередженої сили F , зосередженого моменту M та розподіленого навантаження інтенсивністю q (рис. 5.8) та реакцій опор R_A , R_B . У довільному перерізі x мислено розсічемо балку на дві частини – праву та ліву.

Відкинемо праву частину і розглянемо рівновагу лівої частини балки. Розглядувана частина має перебувати в рівновазі під дією прикладених до неї заданих зовнішніх сил та внутрішніх зусиль.

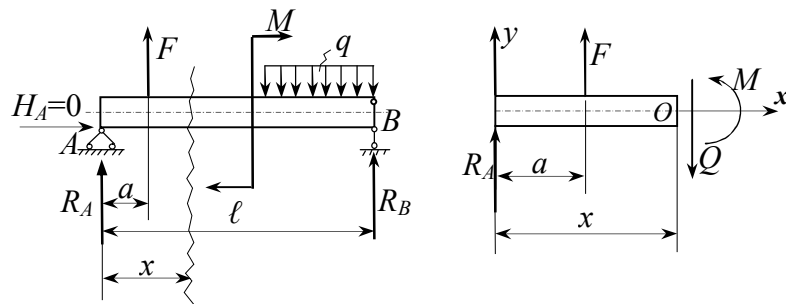


Рис.5.8

Для плоскої системи сил, у загальному випадку необхідними й достатніми умовами рівноваги будуть три рівняння статички $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma M_O = 0$. Проте в нашому випадку, оскільки всі сили вертикальні, перше рівняння перетворюється на тотожність

$$\Sigma X \equiv 0.$$

Лишаються два рівняння. Оскільки на розглядувану частину балки діють сили R_A та F то для рівноваги лівої частини очевидно необхідно, щоб у перерізі x балки діяли поперечна сила Q та згинальний момент M . Ці невідомі внутрішні зусилля визначаються з рівнянь статички:

$$\begin{aligned}\Sigma Y &= R_A + F - Q = 0, \\ \Sigma M_o &= R_A \cdot x + F(x - a) - M = 0.\end{aligned}$$

Звідси отримаємо

$$Q = R_A + F, \text{ тобто } Q = \Sigma F_i \quad (5.1)$$

$$M = R_A \cdot x + F(x - a), \text{ тобто } M = \Sigma M_i \quad (5.2)$$

З виразів (5.1) та (5.2) випливають наступні правила за якими на практиці визначають Q і M .

Поперечна сила Q в будь-якому перерізі балки чисельно дорівнює

алгебраїчній сумі проєкцій на вісь y всіх зовнішніх сил, які діють по один (притому будь-який) бік від розглядуваного перерізу балки.

Згинальний момент M у будь-якому перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил, які діють по один (будь-який) бік від узятого перерізу відносно його центра ваги.

Правила знаків для поперечної сили і згинального моменту.

Поперечна сила Q буде додатною, якщо зовнішня сила F обертає розглядувану частину балки відносно перерізу де визначається Q за годинниковою стрілкою (рис. 5.9, *a*), і від'ємною, якщо проти (рис. 5.9, *б*).

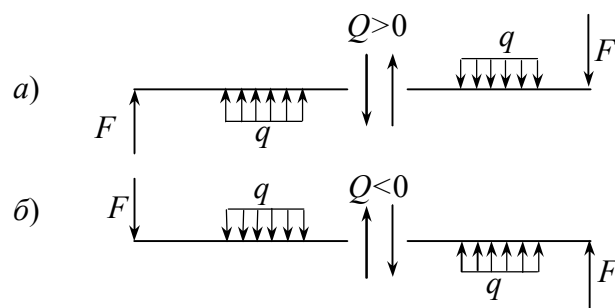


Рис. 5.9

Згинальний момент M вважається додатним, якщо момент зовнішньої сили F згинає балку так, що верхні волокна балки стискаються, а нижні – розтягаються (балка вигинається опуклістю вниз) (рис. 5.10, *a*), і від'ємні – якщо нижні волокна балки стискаються, а верхні – розтягаються (балка вигинається опуклістю вгору) (рис. 5.10, *б*).

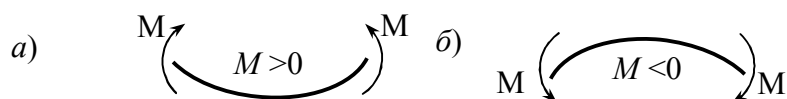


Рис. 5.10

Після визначення поперечних сил та згинальних моментів будуються їх епюри.

Еюра поперечних сил – це графік, що показує зміну поперечної сили по довжині балки.

Епюрою згинальних моментів називається графік, що показує зміну згинального моменту по довжині балки.

Порядок побудови епюр Q та M .

2. Визначаються опорні реакції та перевіряється правильність їх обчислювання.

3. Розбивається балка на ділянки з однаковим законом зміни навантаження. Межею ділянок є перерізи де прикладені зосереджені сили, зосереджені моменти, а також перерізи де починається та закінчується дія розподіленого навантаження.

4. Складаються рівняння $Q(x)$ і $M(x)$ для довільного перерізу на кожній ділянці.

5. Обчислюються ординати Q і M в окремих перерізах (як правило на початку і в кінці ділянок) балки за складеними рівняннями.

6. Будуються у вибраному масштабі епюри Q і M , відкладаючи додатні значення угору, а від'ємні – униз.

5.3. Диференціальні залежності при згинанні

Розглянемо деякі особливості епюр поперечних сил Q та згинальних моментів M , знання яких полегшує побудову епюр і дає змогу певною мірою контролювати їх правильність.

Розглянемо просту балку з довільним навантаженням (рис. 5.11). Розподілене навантаження $q(x)$ будемо вважати додатним, коли воно направлено вгору (від такого навантаження в будь якому перерізі виникає додатний згинальний момент).

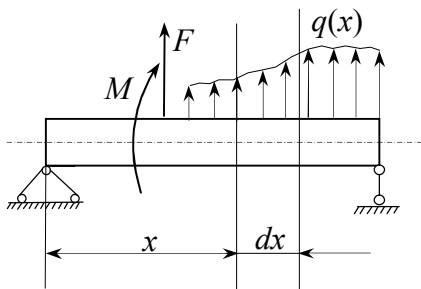


Рис. 5.11

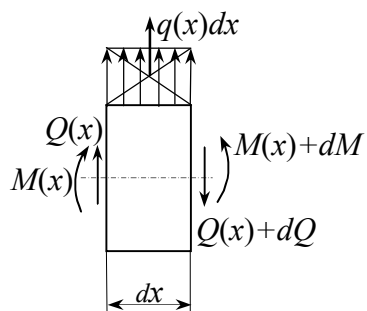


Рис. 5.12

Виділимо на ділянці де діє розподілене навантаження двома нескінченно близькими перерізами x і $x+dx$ ділянку балки завдовжки dx і замінимо дію відкинутих лівої та правої частин відповідними поперечними силами та згинальними моментами, вважаючи їх додатними (рис. 5.12).

Внаслідок безліч малої довжини розглядуваного елемента інтенсивність розподіленого навантаження будемо вважати усталеною. Тоді рівнодія цього навантаження буде дорівнювати $-q dx$.

Оскільки взагалі Q та M змінюються вздовж осі балки, то на відстані dx , вони набудуть нескінченно малих приростів dQ , і dM порівняно з їх значеннями Q , M в лівому

перерізі.

Складемо тепер рівняння рівноваги:

$$\Sigma Y = Q + qdx - (Q + dQ) = 0,$$

$$\Sigma M_0 = Q \cdot dx + \frac{qdx^2}{2} + M - (M + dM) = 0.$$

Після приведення подібних й нехтуванням доданком другого порядку малості, будемо мати

$$\frac{dQ}{dx} = q, \quad (5.3)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (5.4)$$

Ці диференціальні залежності формулюються так.

Похідна від поперечної сили за координатою x , обчислена в деякому перерізі балки, дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження в тому самому перерізі (5.3).

Похідна від згинального моменту за координатою x , обчислена в будь-якому перерізі балки, дорівнює поперечній силі в цьому ж перерізі (5.4).

Друге формулювання прийнято називати теоремою Журавського на честь видатного інженера та вченого Д.І.Журавського, який у 1850 р. вперше скористався співвідношенням (5.4) при виводі формули дотичних напружень в балках.

Очевидно, що співвідношення (5.3) і (5.4) можна об'єднати:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q. \quad (5.5)$$

Співвідношення (5.3), (5.4) та (5.5) називаються диференціальними залежностями при згинанні.

Враховуючи властивості похідних (5.3), (5.4) та (5.5) та їх геометричне тлумачення можна сформулювати особливості (правила) побудови епюр Q і M .

1. На ділянці де немає розподіленого навантаження епюра Q окреслена прямою лінією, яка паралельна базовій лінії, а епюра M \square прямою похилою лінією. При цьому, якщо Q додатна, то момент зліва направо збільшується, якщо Q від'ємна \square то зменшується.

2. На ділянці де є розподілене навантаження епюра Q окреслена прямою похилою лінією, нахил якої співпадає з напрямом розподіленого навантаження; епюра M окреслена квадратною параболою, опуклість якої направлена назустріч розподіленого навантаження. При цьому, якщо епюра Q перетинає базову лінію та змінює знак з " + " на " - " то в перерізі де $Q = 0$ в епюрі M буде максимум, якщо з " - " на " + " мінімум.

3. В перерізі де діє зосереджена сила F в епюрі Q буде стрибок на величину цієї сили і в її напрямі, якщо йти по балці зліва направо; в епюрі M буде злам, вістря якого направлено на зустріч силі.

4. В перерізі де діє зосереджений момент M в епюрі Q нічого не буде, а епюрі M буде стрибок на величину цього моменту.

5. На кінцевій шарнірній опорі поперечна сила дорівнює опорній реакції, а згинальний момент дорівнює нулю, якщо в цьому опорному перерізі немає зовнішнього зосередженого моменту.

Розглянемо приклад побудови епюр поперечних сил Q та згинальних моментів M для консолі (рис. 5.13), якщо $F = 20\text{кН}$, $q = 30\text{кН/м}$, $M = 40\text{кНм}$, $a = 2\text{м}$, $v = 1\text{м}$.

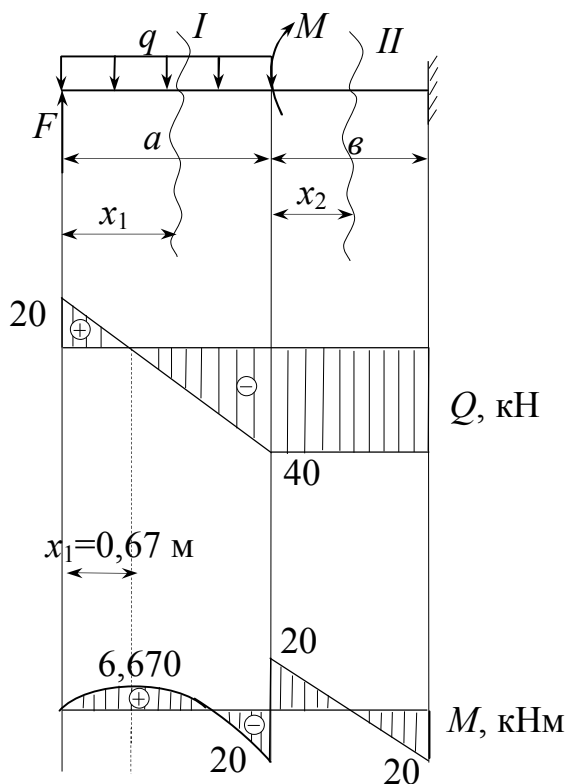


Рис. 5.13

лівої, запишемо функції Q та M .

Для консолі не треба розраховувати опорні реакції. Але тоді при визначенні поперечних сил та згинальних моментів обхід по балці треба виконувати від вільного кінця до опорного перерізу. Після побудови епюр Q та M при необхідності опорні реакції можна легко визначити з цих епюр.

Розбиваємо консоль на дві ділянки і, йдучи зліва, записуємо для кожної ділянки функції поперечних сил та згинальних моментів.

Перша ділянка.

Розсічемо консоль на першій ділянці у довільному перерізі x_1 на дві частини, відкинемо праву частину і, розглядаючи рівновагу

$$Q(x_1) = F - qx_1, \quad (5.6)$$

$$M(x_1) = Fx_1 - \frac{qx_1^2}{2}. \quad (5.7)$$

Зауважимо, що за наявності розподіленого навантаження рівнодійна сила від такого навантаження дорівнює площі графіка q , а момент \square добутку цієї рівнодійної на відстань від центра ваги графіка q до того перерізу, відносно якого обчислюється момент.

Вирази (5.6) і (5.7) показують, що поперечна сила є лінійною функцією абсциси x_1 , а згинальний момент \square квадратичною функцією абсциси x_1 .

Перемінна x_1 змінюється в інтервалі першої ділянки $0 \leq x_1 \leq a = 2\text{ м}$. Підставимо граничні значення перемінної x_1 в функції Q та M і обчислимо Q та M на границях ділянки:

$$x_1 = 0, \quad Q = F = 20\text{ кН}, \quad M = 0;$$

$$x_1 = 2\text{ м}, \quad Q = F - qa = 20 - 30 \cdot 2 = -40\text{ кН},$$

$$M = F \cdot a - \frac{q \cdot a^2}{2} = 20 \cdot 2 - \frac{30 \cdot 2^2}{2} = -20\text{ кНм}.$$

Розрахунки показують, що на першій ділянці поперечна сила змінює знак, переходячи в певному перерізі балки з плюса на мінус. Тому в перерізі де $Q = 0$ в епюрі M буде максимум. Для визначення положення цього перерізу і значення згинального моменту в ньому візьмемо першу похідну від функції $M(x_1)$ і дорівняємо її до нуля.

$$\frac{dM(x_1)}{dx} = F - qx_1 = 0.$$

Звідки

$$x_1 = \frac{F}{q} = \frac{20}{30} = 0,67\text{ м}.$$

Тоді

$$M_{(x_1=0,67\text{ м})} = F \cdot 0,67 - \frac{q \cdot 0,67^2}{2} = 20 \cdot 0,67 - \frac{30 \cdot 0,67^2}{2} = 6,67\text{ кНм}.$$

Вибираємо масштаб сил та моментів, відкладаємо знайдені ординати на початку та в кінці першої ділянки і, приймаючи до уваги вищенаведені

правила побудови епюр Q та M , сполучуємо відкладені ординати Q і M відповідними лініями: епюру Q окреслюємо прямою похилою лінією, а епюру M – квадратною параболою, опуклість якої направлена на зустріч розподіленому навантаженню, тобто вгору.

Друга ділянка.

Для довільного перерізу x_2 за аналогією до першої ділянки маємо

$$Q(x_2) = F - qa = 20 - 30 \cdot 2 = -40 \text{ кН}, \quad (5.8)$$

$$M(x_2) = F(a + x_2) - qa\left(\frac{a}{2} + x_2\right) + M. \quad (5.9)$$

Вираз (5.8) показує, що $Q(x_2)$ не залежить від x_2 і є сталою величиною, графік якої є пряма лінія, що паралельна базовій лінії. Вираз (5.9) свідчить, що згинальний момент є лінійна функція. Тому, щоб побудувати епюру M , досить знати дві її ординати в інтервалі $0 \leq x_2 \leq b = 1 \text{ м}$.

Тоді

$$x_2 = 0, \quad M = F \cdot a - qa \cdot \frac{a}{2} + M = 20 \cdot 2 - 30 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + 40 = 20 \text{ кНм};$$

$$x_2 = b = 1 \text{ м},$$

$$M = F(a + b) - qa\left(\frac{a}{2} + b\right) + M = 20(2 + 1) - 30 \cdot 2\left(\frac{2}{2} + 1\right) + 40 = -20 \text{ кНм}.$$

Відкладаємо у відповідних місцях ці ординати і, проводячи прямі лінії, закінчуємо побудову епюр (рис. 5.13) для розглядуваного прикладу.

Якщо балка закріплена до основи за допомогою шарнірних опор, то спочатку треба визначити опорні реакції. Після визначення опорних реакцій побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів відбувається так же, як і для консолі.

5.4. Визначення нормальних напружень

Побудова епюр поперечних сил Q та згинальних моментів M дозволяє визначити внутрішні зусилля в будь-якому перерізі балки, які складаються з нормальних та дотичних напружень, що виникають в цьому перерізі при згинанні.

Розглянемо спочатку визначення нормальних напружень при згинанні, коли в перерізах балки виникає тільки згинальний момент. Таке згинання називається чистим згинанням. Якщо в перерізах балки діють

згинальний момент та поперечна сила, то згинання називається поперечним.

Розглянемо балку прямокутного сталого перерізу, що знаходиться в стані чистого плоского згинання (рис. 5.14).

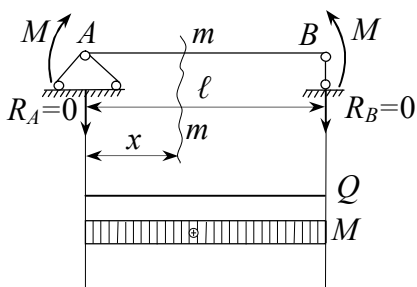


Рис. 5.14

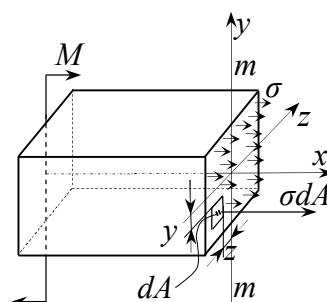


Рис. 5.15

В перерізах балки буде діяти тільки згинальний момент M . Розсічемо балку січною площиною $m-m$ на дві частини і розглянемо рівновагу, наприклад, лівої частини (рис. 5.15). В площині перерізу проведемо координатні осі y і z , які є осями симетрії поперечного перерізу тому вони будуть проходити через центр ваги перерізу, при цьому вісь y буде співпадати з силовою лінією (лінією перетину силової площини з площиною перерізу). Вісь x направимо \perp осям y і z . Виділимо в перерізі $m-m$ елемент площі dA , координати якого y та z . Так як в кожній точці поперечного перерізу діють нормальні напруження σ , то на елементарну площадку dA буде діяти нормальна сила dN , що дорівнює

$$dN = \sigma \cdot dA \quad (5.10)$$

Розглядувана частина балки знаходиться в рівновазі під дією зовнішнього моменту M і нормальних зусиль dN тому повинна задовольняти шести умовам рівноваги, три з яких задовольняються автоматично: $\Sigma Y \equiv 0$; $\Sigma Z \equiv 0$; $\Sigma M_x \equiv 0$. Три інші умови рівноваги приводять до наступних рівнянь рівноваги

$$\Sigma X = 0; \quad \int_A \sigma dA = 0, \quad (5.11)$$

$$\Sigma M_y = 0; \quad \int_A \sigma \cdot z \cdot dA = 0, \quad (5.12)$$

$$\Sigma M_z = 0; \int_A \sigma \cdot y \cdot dA - M = 0. \quad (5.13)$$

Отриманих рівнянь недостатньо для визначення нормальних напружень, так як невідомий закон зміни σ по перерізу балки. Тому необхідно розглянути картину деформування балки (провести дослід).

Нанесемо на бічну поверхню балки з достатньо пружного матеріалу (наприклад, гуми) ортогональну сітку ліній (рис. 5.16, а).

Кожну лінію сітки, що перпендикулярна до осі балки, можна розглядати як слід деякого поперечного перерізу, а горизонтальні лінії – як поздовжні волокна балки. При чистому згинанні балка буде деформуватися наступним чином (рис. 5.16, б).

1. Вертикальні лінії будуть залишатися прямими; вони лише повертаються одна відносно іншої на якийсь кут θ .

2. Поздовжні лінії викривлюються по дузі кола. При цьому довжина однієї частини ліній зменшується ($a_1 < a$), а іншої – збільшується ($a_2 > a$). Отже верхні волокна стискаються, а нижні – розтягаються. Очевидно, по висоті балки будуть і такі волокна, довжина яких не змінюється ($a_0 = a$).

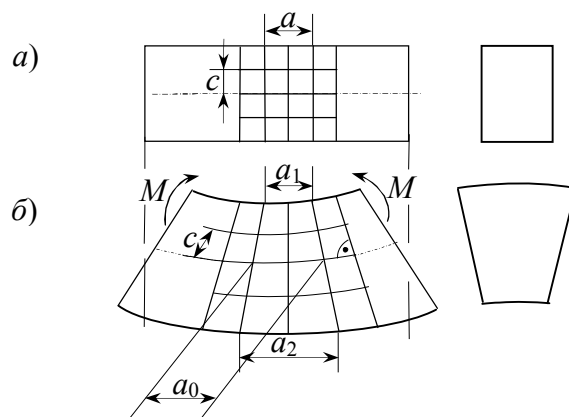


Рис. 5.16

3. Відстань між поздовжніми лініями не змінюється ($c = const.$) і висота h перерізу балки лишається сталою.

4. Всюди вертикальні лінії перетинаються з поздовжніми під прямим кутом.

5. Ширина b перерізу балки в стиснутій зоні збільшується, а в розтягнутій – зменшується.

На підставі результатів дослідів, що спостерігаються на поверхні

балки в умовах чистого згинання, можна прийняти наступні гіпотези про деформації, які відбуваються всередині балки.

1. При чистому згинанні виконується гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Я.Бернуллі): перерізи, плоскі й перпендикулярні до осі балки перед згинанням, лишаються плоскими й перпендикулярними до осі балки в процесі згинання.

2. Поздовжні волокна не тиснуть одне на одне. Вони зазнають осьового розтягання або стискання.

3. Деформації волокон, а отже, напруження за шириною перерізу балки однакові.

Прийняті гіпотези добре узгоджуються з результатами дослідів з досить довгими балками ($l \geq 4h$).

Приймемо деякі означення.

Сукупність волокон балки, довжина яких не змінюється при згинанні, називається нейтральним шаром (н.ш.).

Лінія перетину поперечного перерізу з нейтральним шаром називається нейтральною (нульовою) лінією (н.л.).

При плоскому згинанні н.ш. буде перпендикулярним до силової площини і тому н.л. буде перпендикулярною до силової лінії в перерізі.

Будемо вважати, що нейтральна лінія співпадає з віссю z .

Виділимо з балки двома поперечними перерізами $m - m$ і $n - n$ елемент довжиною dx (рис. 5.17) і, прийнявши до уваги гіпотезу плоских перерізів, розглянемо його деформований стан. Перерізи $m - m$ і $n - n$ повернуться на кут $d\theta$. Волокно a_0b_0 нейтрального шару перетвориться в дугу $a'_0b'_0$ з радіусом кривизни ρ , а довільне волокно av , в криволінійне волокно $a'v'$ з радіусом кривизни $\rho + y$. Відносне подовження волокна $a'v'$ буде

$$\varepsilon = \frac{a'v' - av}{av}.$$

Але $a'v' = (\rho + y) \cdot d\theta$; $av = dx$ тому

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y) \cdot d\theta - dx}{dx}. \quad (5.14)$$

Для того, щоб спростити вираз (5.14) розглянемо волокно a_0b_0 нейтрального шару. Його довжина до деформації $a_0b_0 = dx$. Після деформації воно перетворилося в дугу $a'_0b'_0 = \rho \cdot d\theta$. Але волокна нейтрального шару не змінюють своєї довжини і тому

$$dx = \rho \cdot d\theta. \quad (5.15)$$

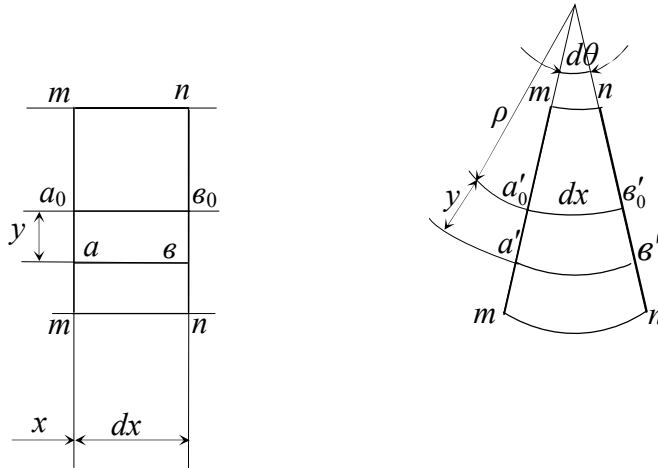


Рис. 5.17

Підставивши (5.15) в (5.14) отримаємо

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho},$$

тобто

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (5.16)$$

На підставі другої гіпотези волокно av знаходиться в стані осьового розтягання, тому закон Гука для нього запишеться у вигляді

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (5.17)$$

Підставляючи (5.17) у (5.16), отримаємо

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y. \quad (5.18)$$

Підставимо вираз (5.18) в рівняння (5.13)

$$M = \int_A \frac{E}{\rho} y^2 dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA.$$

Інтеграл $\int_A y^2 dA = I_z$ називається моментом інерції площі перерізу відносно осі z .

Тоді будемо мати

$$M = \frac{E}{\rho} \cdot I_z$$

або

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}. \quad (5.19)$$

Підставляючи (5.19) в (5.18) отримаємо формулу для визначення σ у довільній точці перерізу балки

$$\sigma = \frac{M}{I_z} \cdot y. \quad (5.20)$$

Слід зауважити, що підстановка виразу (5.20) в рівняння (5.11) і (5.12) доводить те, що ми прийняли вище без доказу: нейтральна лінія при плоскому згинанні завжди буде проходити через центр ваги перерізу. Таким чином, якщо силова лінія співпадає з віссю симетрії поперечного перерізу, то нейтральна лінія буде проходити через центр ваги перерізу перпендикулярно силевій лінії.

Проаналізуємо отримані результати.

Формула (5.19) пов'язує кривизну нейтрального шару з діючим моментом в перерізі і носить назву закону Гука при згинанні. Добуток EI_z називається жорсткістю балки при згинанні. Формула (5.20) показує, що при будь-якому поперечному перерізі і будь-яких розмірах, напруження в точках *н.л.* дорівнюють нулю. Величина σ лінійно зростає по мірі віддалення від нейтральної лінії.

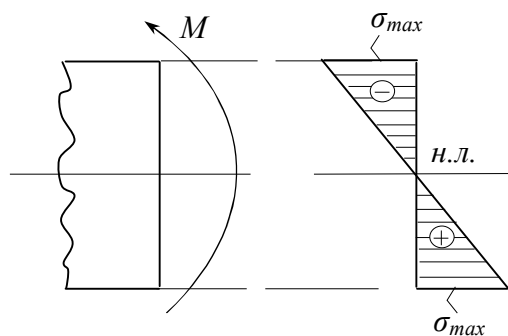
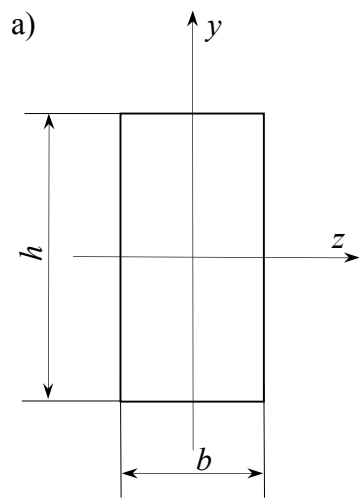


Рис. 5.18

Епюра σ приведена на рис. 5.18. Максимальних значень нормальні напруження досягають в точках найбільш віддалених від нейтральної лінії, тобто в точках що знаходяться на верхній та нижній поверхнях балки для яких $y = y_{max}$.

$$\sigma_{max} = \frac{M}{I_z} y_{max}.$$

Введемо позначення



$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}, \quad (5.21)$$

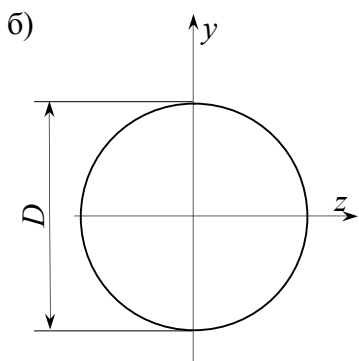
тоді

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}, \quad (5.22)$$

де W_z - осьовий момент опору, м³.

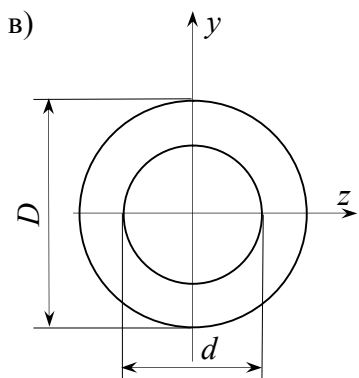
Згідно з (5.21) осьовим моментом опору називається відношення осьового моменту інерції відносно нейтральної лінії до відстані від неї до найвіддаленішого волокна балки.

Для прямокутного перерізу балки (рис. 5.19. а) нейтральна лінія є віссю симетрії перерізу балки, то



$$I_z = \frac{bh^3}{12}, y_{\max} = \frac{h}{2}, W_z = \frac{I_z}{h/2} = \frac{bh^2}{6}.$$

Для круглого перерізу балки (рис. 5.19,



б)

$$I_z = \frac{\pi D^4}{64}, y_{\max} = \frac{D}{2}, W_z = \frac{I_z}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32}.$$

Для балки трубчастого перерізу (рис. 5.19, в)

$$I_z = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4), y_{\max} = \frac{D}{2},$$

$$W_z = \frac{I_z}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4).$$

Рис. 5.19

Для балок з прокатних профілів значення моментів інерції та моментів опору наведені в так званих таблицях сортаменту.

Якщо переріз балки несиметричний відносно нейтральної осі (рис. 5.20), то формули для визначення найбільших напружень запишуться так:

$$\sigma' = \frac{M}{W_1} \text{ — для розтягнутих,}$$

$$\sigma'' = \frac{M}{W_2} \text{ — для стиснутих волокон,}$$

де

$$W_1 = \frac{I_z}{h_1}; \quad W_2 = \frac{I_z}{h_2}. \quad (5.23)$$

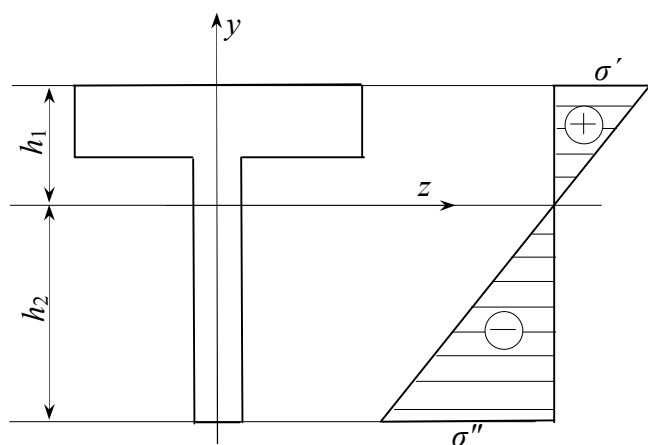


Рис. 5.20

Формули (5.20) і (5.22) отримані для чистого згинання. При поперечному згинанні дія поперечної сили приводить до того, що гіпотези покладені в основу формул (5.20) і (5.22) порушуються: перерізи не залишаються плоскими, а викривлюються; волокна балки тиснуть один на одне і знаходяться не в лінійному, а в плоскому напруженому стані.

Але практика показує, що і при поперечному згинанні можна користуватися формулами (5.20) і (5.22).

Умова міцності за нормальними напруженнями має вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq \sigma_{adm}. \quad (5.24)$$

Умова міцності (5.24) записується для небезпечного перерізу, яким буде той поперечний переріз балки, в якому діє максимальний, по абсолютному значенні, згинальний момент.

При проектному розрахунку умова міцності набуває вигляду

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}}. \quad (5.25)$$

Задавшись формою поперечного перерізу, по знайденому моменту опору W_z знаходять розміри поперечного перерізу.

У промислових конструкціях переважно використовуються балки, виготовлені з прокатних профілів. У такому разі за формулою (5.25) визначається потрібне розрахункове значення моменту опору, за яким з відповідних таблиць сортаменту добирається номер прокату даного

профілю з моментом опору, найближчим більшим до розрахункового.

Іноді можна брати номер профілю з моментом опору, який дещо менший за розрахунковий, але в цьому випадку балка буде перевантажена. Нормами дозволяється перевантаження балки до 5 %.

5.5. Дотичні напруження при згинанні

При поперечному згинанні, коли в перерізах балки діють поперечна сила Q і згинальний момент M , виникають не тільки нормальні напруження σ але і дотичні напруження τ .

Дослідженням дотичних напружень при згинанні балок прямокутного перерізу вперше займався Д.І.Журавський, яким були прийняті наступні допущення при побудові теорії дотичних напружень при згинанні:

1) дотичні напруження в поперечному перерізі балки всюди

паралельні поперечній силі Q , яка є рівнодійною цих напружень;

2) дотичні напруження сталі за шириною перерізу балки, тобто в точках, однаково віддалених від нейтральної лінії, вони рівні між собою.

Ці допущення справедливі для балок, у яких висота більше ширини.

Розглянемо балку прямокутного поперечного перерізу (рис. 5.21) і виділимо з неї елемент 1-2-3-4 двома

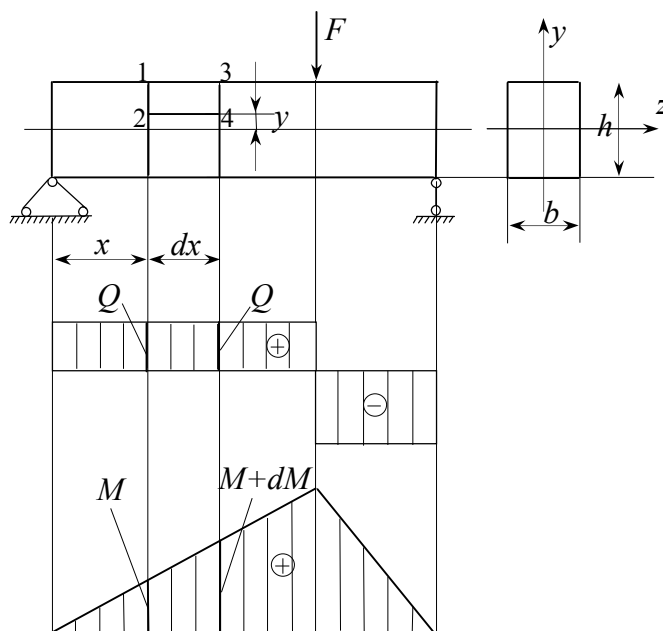


Рис. 5.21

поперечними перерізами, віддаленими один від одного на нескінченно малу відстань dx , і третім перерізом (2-4), паралельним нейтральному шару (рис. 5.21). Поперечний переріз A_1 виділеного елемента являє собою заштриховану частину площі поперечного перерізу A балки (рис. 5.22 б)

У перерізі балки з абсцисою x діє згинальний момент M , а у перерізі з абсцисою $x+dx$ – момент $M+dM$. Нормальні напруження, що діють по торцю 1-2 виділеного елемента на відстані y від нейтрального шару за

формулою (5.20) дорівнюють

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y,$$

а нормальні напруження на тому ж рівні по торцю 3-4

$$\sigma' = \frac{M + dM}{I_z} y.$$

Епюри цих напружень приведені на рис. 5.22 а.

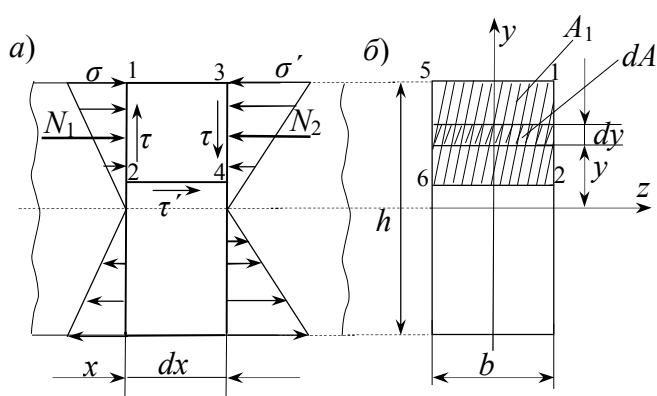


Рис. 5.22

По перерізам 1-2 і 3-4 (рис. 5.22 а) розглядуваного елемента діють ще дотичні напруження τ , а по площині 2-4 відповідно закону парності дотичних напружень будуть діяти дотичні напруження $\tau' = \tau$. Рівнодійна цих напружень $dT = \tau' \cdot b dx = \tau \cdot b dx$.

Розглянемо переріз 1-2 (рис. 5.22 б). На елементарну площадку $dA = b dy$, яка розташована на відстані y від нейтрального шару діє нормальне зусилля $dN_1 = \sigma dA$. Повне зусилля, що діє по площі відсіченої частини 1-2-5-6 буде дорівнювати

$$N_1 = \int_{A_1} \sigma dA = \int_{A_1} \frac{M}{I_z} y dA = \frac{M}{I_z} \int_{A_1} y dA.$$

Інтеграл $\int_{A_1} y dA = S_z^{\text{відсіч.}}$ являє собою статичний момент відсіченої частини площі, що розташована між площиною 2-6 і верхнім краєм балки. Таким чином маємо

$$N_1 = \frac{M}{I_z} S_z^{\text{відсіч.}}$$

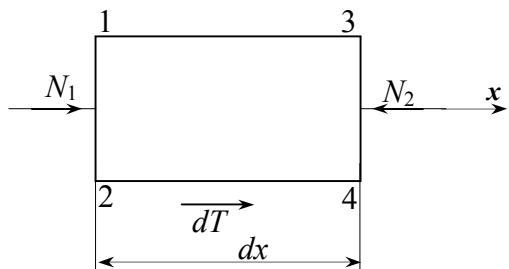
Аналогічно, рівнодійна нормальних напружень σ' , що діють по грані 3-4 дорівнює

$$N_2 = \frac{M + dM}{I_z} S_z^{\text{відсіч.}}$$

Розглядуваний елемент з діючими на нього зусиллями показаний на рис. 5.23. Умова рівноваги для нього

$$\Sigma X = N_1 - N_2 + dT = 0.$$

Після підстановки в рівняння рівноваги значення зусиль N_1 , N_2 і dT отримаємо



$$\frac{M}{I_z} S_z^{\text{відсіч.}} - \frac{M + dM}{I_z} S_z^{\text{відсіч.}} + \tau \cdot b dx = 0,$$

або

$$\tau \cdot b dx = \frac{dM}{I_z} S_z^{\text{відсіч.}}$$

Рис. 5.23

Поділимо цей вираз на $b dx$ і врахуємо, що $\frac{dM}{dx} = Q$ отримаємо

$$\tau = \frac{Q S_z^{\text{відсіч.}}}{b I_z}. \quad (5.26)$$

В формулі (5.26) $Q(x)$ – абсолютне значення поперечної сили в розглядуваному перерізі x ; $S_z^{\text{відсіч.}}$ – статичний момент частини площі поперечного перерізу відносно нейтральної лінії, яка відсікається лінією, що проходить через точку де визначається τ паралельно осі z ; I_z – момент інерції всього поперечного перерізу балки відносно осі z ; b – ширина поперечного перерізу балки на тому рівні, на якому визначається дотичне напруження.

Формула (5.26) дає величину τ ; його напрям співпадає з напрямом поперечної сили Q , тобто знак τ співпадає з знаком Q .

Розглянемо розподіл дотичних напружень за висотою прямокутного перерізу балки (рис. 5.24). Взагалі треба відмітити, що статичний момент площі відносно осі, коли відома площа та положення її центра ваги дорівнює добутку площі на відстань від центра ваги до осі, відносно якої знаходиться статичний момент. На підставі цього статичний момент відсіченої частини площі відносно осі z (рис. 5.24) буде дорівнювати

$$S_z^{\text{відсіч.}} = A_{\text{відсіч.}} \cdot y_c = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] = \frac{b h^2}{8} \left(1 - \frac{4 y^2}{h^2} \right).$$

Момент інерції прямокутника

$$I_z = \frac{bh^3}{12}.$$

Підставляючи $S_z^{\text{відсіч.}}$ та I_z в формулу (5.26) отримаємо

$$\tau = Q \cdot \frac{\frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)}{b \cdot \frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right). \quad (5.27)$$

Вираз (5.27) показує, що дотичні напруження по висоті балки змінюються за законом квадратної параболи. В точках на верхній та нижній поверхнях балки для яких $y = \pm \frac{h}{2}$ дотичні напруження дорівнюють $\tau = 0$. Для точок нейтральної лінії (осі z) $y=0$ і дотичні напруження досягають максимальних значень

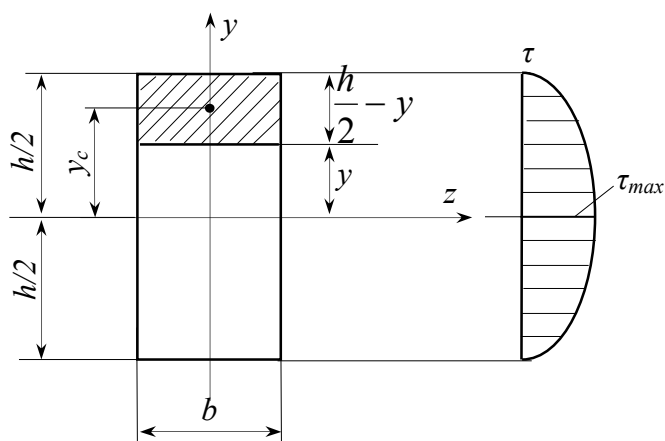


Рис. 5.24

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A}.$$

Епюра τ приведена на рис. 5.24.

Для круглого поперечного перерізу дотичні напруження визначаються за формулою

$$\tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi R^2} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right).$$

5.6. Головні напруження при поперечному згинанні

Розглянемо балку, що знаходиться в стані поперечного згинання (рис. 5.25) та з'ясуємо, в якому напруженому стані знаходяться волокна балки. По висоті балки візьмемо точки 1, 2, 3, 4, 5 в околиці яких виділимо елементарні кубики, одна грань яких співпадає з поперечним перерізом.

Розглянемо, наприклад, кубик 4 (рис. 5.26), який знаходиться на відстані y від нейтрального шару. По граням AB і CD діють нормальні і дотичні напруження, при цьому у відповідності до епюр Q і M вони додатні. По граням BC і AD діють тільки дотичні напруження. Передня та

задня грані являють собою бокові поверхні балки тому вони вільні від напружень. Таким чином розглядуваний елемент знаходиться в плоскому напруженому стані. Напруження σ і τ визначаються за формулами (5.20) і (5.26). Є дві взаємно перпендикулярні головні площадки по яким діють головні напруження σ_{\max} і σ_{\min} . Також є площадки зсуву, які розташовані під кутом 45° по відношенню до головних площадок. На площадках зсуву діють τ_{\max} і τ_{\min} .

Ці напруження визначаються наступними виразами

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad (5.28)$$

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 - 4\tau^2}. \quad (5.29)$$

При цьому $\sigma_{\max} = \sigma_1$, а $\sigma_{\min} = \sigma_3$.

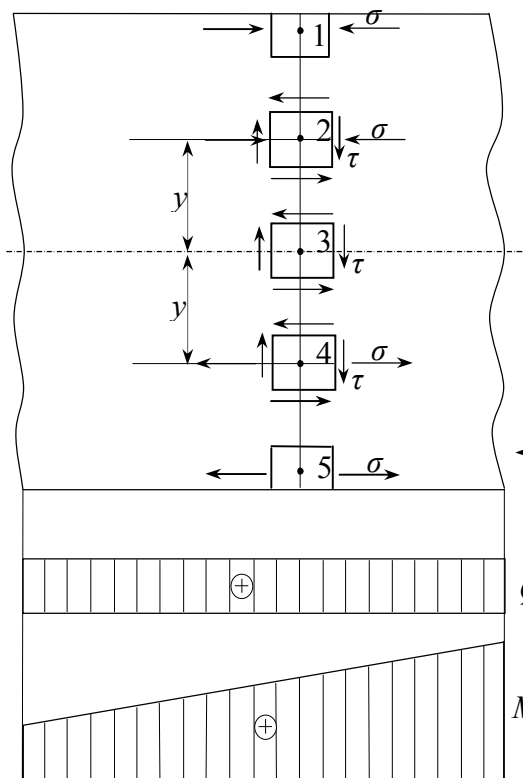


Рис. 5.25

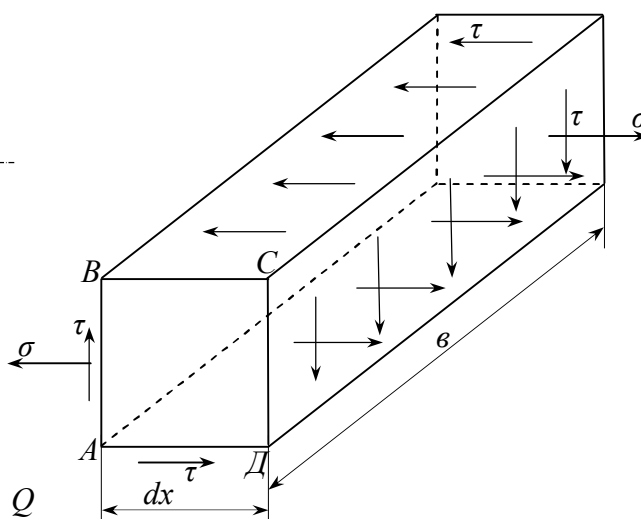


Рис. 5.26

Розглянемо тепер інші елементи. Елементи 1 та 5 знаходяться в крайніх волокнах перерізу. Тут $\tau = 0$, а $\sigma = \sigma_{\max}$, при цьому для елемента 1 $\sigma = \sigma_3$, а для 5 – $\sigma = \sigma_1$. Ці елементи знаходяться в лінійному напруженому стані, в стані розтягання та стискання. Елемент 3 знаходиться в нейтральному шарі, де $\sigma = 0$, а

$\tau = \tau_{\max}$ і тому він знаходиться в плоскому напруженому стані чистого зсуву. Елемент 2 знаходиться в плоскому напруженому стані.

Таким чином при згинанні балки в точках поперечного перерізу на різних відстанях від нейтральної лінії можна визначити нормальні σ і дотичні τ напруження, головні напруження σ_1 і σ_3 і екстремальні дотичні напруження τ_{\max} і τ_{\min} .

5.7. Розрахунок балок на міцність

При поперечному згинанні балки її матеріал знаходиться в неоднорідному напруженому стані. Умова міцності повинна бути записана для небезпечної точки, в якій матеріал знаходиться в найбільш напруженому стані.

Небезпечною точкою буде одна з наступних трьох точок.

Перша небезпечна точка – це точка де нормальні напруження досягають максимальної величини. Вона знаходиться в крайніх волокнах того перерізу де згинальний момент M має найбільшу, по абсолютному значенню, величину. Умова міцності для цієї точки має вигляд

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq \sigma_{adm}. \quad (5.30)$$

Друга небезпечна точка – це точка в якій дотичні напруження τ досягають максимального значення. Вона знаходиться на нейтральній лінії, того перерізу де поперечна сила Q має найбільше, по абсолютній величині, значення. Умова міцності для цієї точки має вигляд

$$\tau = \frac{Q_{\max} \cdot S_z^{\text{відсіч.}}}{I_z \cdot b} \leq \tau_{adm}. \quad (5.31)$$

Положення третьої небезпечної точки не стільки точно визначено, як положення перших двох. Це точка, в якій σ і τ хоча і не приймають найбільших значень, але в своїй комбінації створюють найбільш невідгідне сполучення. В цій точці матеріал балки знаходиться в плоскому напруженому стані, для якого головні напруження визначаються за формулою (5.28). Підставляючи головні напруження в вирази для $\sigma_{екв.}$ по різним теоріям міцності, отримаємо умови міцності для цієї точки

$$\sigma_{red}^{II} = \frac{1-\nu}{2} \sigma + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm}; \quad (5.32)$$

$$\sigma_{red}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm}; \quad (5.33)$$

$$\sigma_{red}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{adm}; \quad (5.34)$$

$$\sigma_{red}^M = \frac{1-m}{2}\sigma + \frac{1+m}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm}, \quad (5.35)$$

де

$$m = \frac{\sigma_{adm}^t}{\sigma_{adm}^c}.$$

Для балок з пластичних матеріалів треба застосовувати III і IV теорії міцності, тобто вирази (5.33) і (5.34).

Практика розрахунків балок показує, що основною умовою міцності є умова (5.30).

При згинанні можливі три наступні розрахунки на міцність.

1. Перевірка напружень (перевірний розрахунок).
2. Добір перерізу (проектний розрахунок).
3. Визначення допустимого навантаження.

У випадку проектного розрахунку умова міцності (5.30) записується у вигляді

$$W_z = \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}}. \quad (5.36)$$

При визначенні допустимого навантаження умова міцності (5.30) записується у вигляді

$$M_{adm, \max} = W_z \cdot \sigma_{adm}. \quad (5.37)$$

Якщо балка виготовлена з крихкого матеріалу, то умова міцності (5.30) записується для розтягнутих і для стиснутих волокон. В цьому випадку маємо

$$\sigma_t = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq \sigma_{adm}^t, \quad \sigma_c = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq \sigma_{adm}^c. \quad (5.38)$$

У випадках, коли в перерізах балки виникають значні поперечні сили і незначні згинальні моменти, небезпечною точкою може бути точка, що знаходиться на осі балки. Тому для розрахунку застосовується умова міцності (5.31).

В балках з тонкостінним перерізом (двотавр, швелер) небезпечною може бути точка, що розташована в місці з'єднання стінки з полкою. Тому для таких балок треба проводити повний розрахунок на міцність, тобто

виконувати умови міцності в усіх трьох небезпечних точках.

В усіх випадках, коли розрахунок проектний, добір перерізу проводиться по основній умові міцності (5.30) після чого виконується перевірка по усім умовам міцності.

5.8. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки

У більшості випадків практичного розрахунку деталей, що працюють на згинання необхідно проводити розрахунок їх на жорсткість, під яким розуміється оцінка пружної податливості балки під дією зовнішнього навантаження та добір таких розмірів поперечного перерізу, при яких переміщення не будуть перебільшувати нормативних значень.

Для виконання таких розрахунків необхідно вміти обчислювати переміщення точок балки при дії будь якого навантаження.

Розглянемо консоль, навантажену силою F на вільному кінці. Очевидно, що під дією цієї сили балка зігнеться, як зображено на рис. 5.27, при цьому кожна її точка отримає своє лінійне переміщення $y(x)$. Зігнута вісь називається пружною лінією. Переміщення точок осі балки по нормалі до її недеформованої осі називаються прогинами балки та позначаються літерою y .

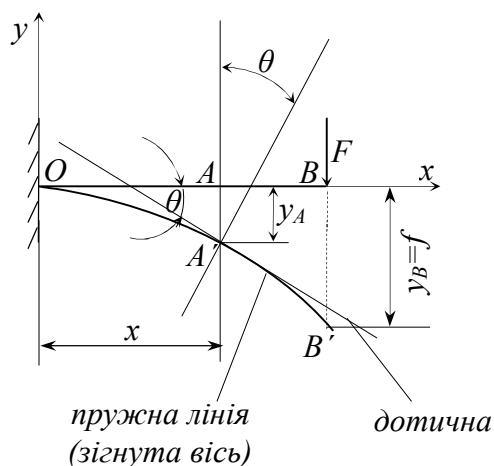


Рис. 5.27

Найбільший прогин називається стрілою прогину f . При деформування балки її перерізи не тільки поступально переміщуються, але і повертаються. Кут θ , на який кожний переріз повертається по відношенню до свого початкового положення називається кутом повороту перерізу балки. Кут повороту може бути також визначений як кут між дотичною до пружної лінії та віссю балки.

Візьмемо прямокутну систему координат x y з початком O на лівому кінці балки; вісь x направимо по осі балки вправо, вісь y \square вгору. Прогин y вважається додатним, якщо точка переміщається вгору. Кут повороту додатний, якщо поворот перерізу відбувається проти годинникової стрілки.

Рівняння зігнутої осі балки $y = f(x)$. Тангенс кута утвореного

дотичною до кривої $y = f(x)$ з віссю x дорівнює

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx}.$$

Так як прогини балки малі з достатньою точністю можна вважати $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$, тоді

$$\theta = \frac{dy}{dx}, \quad (5.39)$$

тобто кут повороту перерізу дорівнює першій похідній по x від прогину y в цьому перерізі. Таким чином для визначення деформацій балки треба мати рівняння зігнутої осі балки $y = f(x)$.

Прогини та кути повороту являють собою переміщення перерізів балки при згинанні.

Форму пружної лінії балки можна визначити з допомогою одержаного раніш виразу (5.19) для кривизни зігнутої осі, поширивши його і на поперечний згин, тобто

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI_z}. \quad (5.40)$$

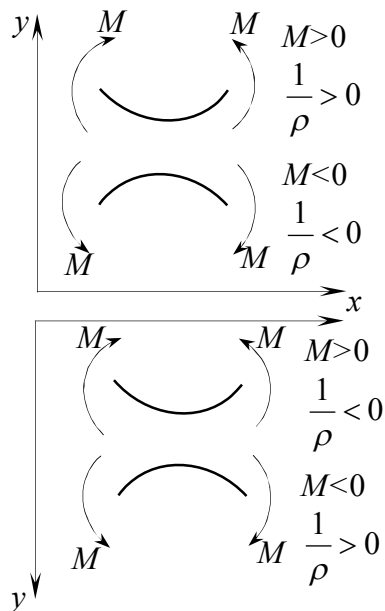


Рис. 5.28

З іншого боку, з математичного аналізу відома наступна формула для кривизни будь-якої плоскої кривої

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (5.41)$$

Для отримання диференціального рівняння зігнутої осі треба дорівняти праві частини виразів (5.40) і (5.41), попередньо з'ясувавши питання про знак. На рис. 5.28 показано співвідношення знаків кривизни $\frac{1}{\rho}$ і згинального моменту

M в залежності від напрямку координатної осі y . У нашому випадку (рис. 5.27) маємо, що знаки згинального моменту M і кривизни $\frac{1}{\rho}$ від'ємні, тобто однакові, і тому просто дорівнюємо праві частини рівностей (5.40) і (5.41).

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI_z}. \quad (5.42)$$

Рівняння (5.42) є точним диференціальним рівнянням пружної лінії балки. Воно нелінійне і його інтегрування пов'язано з значними складностями.

При розрахунку машинобудівельних конструкцій і деталей машин, які працюють на згинання, норми допустимого прогину складають

$$f_{\text{adm}} = \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{1000}\right)l.$$

При максимально допустимому прогині $f_{\text{adm}} = \frac{1}{100}l$ кут повороту перерізу не перебільшує 1° . В знаменнику рівняння (5.42) стоїть величина $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + tg^2 \theta = 1 + tg^2 1^\circ = 1 + 0.02^2 = 1 + 0.0004$. Таким чином

$tg^2 \theta = 0,0004 \ll \ll \ll 1$ і тому доданком $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ можна знехтувати без відчутної для практичних цілей похибки. Тоді з (5.42) отримаємо спрощене диференціальне рівняння зігнутої осі балки.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z}. \quad (5.43)$$

Рівняння (5.43) називається основним диференціальним рівнянням пружної лінії.

5.9. Визначення переміщень безпосереднім інтегруванням рівняння пружної лінії

Розв'язуючі задачу по визначення переміщень аналітичним методом, кути повороту перерізу $\theta(x)$ і прогини $y(x)$ визначають шляхом безпосереднього інтегрування основного диференціального рівняння пружної лінії.

Інтегруючи рівняння (5.43) один раз отримаємо загальний вираз для кута повороту $\theta(x)$

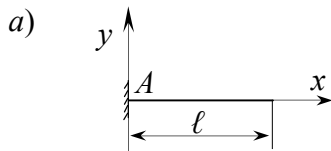
$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M(x)dx}{EI_z} + C. \quad (5.44)$$

Інтегруючи ще раз, приходимо до загального виразу для прогину $y(x)$

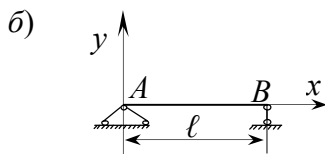
$$y(x) = \int dx \int \frac{M(x)dx}{EI_z} + Cx + D. \quad (5.45)$$

В виразах (5.44), (5.45) C і D довільні сталі інтегрування, які визначаються з граничних умов, тобто з умов закріплення балки. Для консолі (рис. 5.29,а) граничні умови мають вигляд

$$\theta_A = 0, y_A = 0.$$



Для балки, що закріплена за допомогою двох шарнірних опор (рис. 5.29,б) граничні умови запишуться



$$y_A = 0, y_B = 0.$$

Інколи за граничну умову можна прийняти симетричність зігнутої осі балки відносно середини прогину, де поворот перерізу відсутній ($\theta = 0$).

Рис. 5.29

5.10. Метод початкових параметрів

Якщо балка має n ділянок, то для кожної ділянки треба скласти своє диференціальне рівняння. Їх інтегрування дає $2n$ невідомих довільних сталих інтегрування. З граничних умов та з умов нерозривності деформацій на межах ділянок впливає система алгебраїчних рівнянь порядку $2n$ для визначення усіх сталих інтегрування. Задача визначення довільних сталих при великому числі ділянок стає дуже трудомісткою і практично неприйнятною.

Тому на практиці для визначення переміщень балок застосовують метод початкових параметрів. Нижче, без доводу, приведені рівняння методу початкових параметрів для визначення прогинів та кутів повороту перерізів балки. Вони були отримані для частини балки, наведеній на рис.

5.30 при умові, що на балку можуть діяти декілька зосереджених моментів, зосереджених сил та є декілька ділянок з розподіленим навантаженням

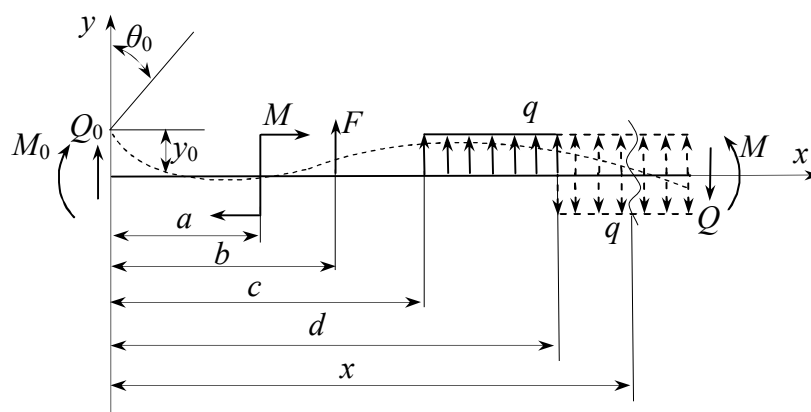


Рис. 5.30

$$EIy(x) = EIy_0 + EI\theta_0 x + M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} + \sum M \frac{(x-a)^2}{2!} + \sum F \frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q \frac{(x-d)^4}{4!}, \quad (5.46)$$

$$EI\theta(x) = EI\theta_0 + M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2!} + \sum M(x-a) + \sum F \frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q \frac{(x-c)^3}{3!} - \sum q \frac{(x-d)^3}{3!}. \quad (5.47)$$

В рівняннях (5.46) і (5.47) θ_0, y_0 — відповідно кут повороту і прогин балки на початку координат. Це кінематичні початкові параметри. Вони визначаються з граничних умов. Q_0, M_0 — відповідно поперечна сила і згинальний момент. Це статичні початкові параметри, які визначаються з рівнянь рівноваги, або беруться з епюр Q та M , якщо вони побудовані.

В рівняннях (5.46) і (5.47) x — відстань від початку координат до того перерізу де визначається переміщення; a, b, c, d — відстань від початку координат до перерізів, де прикладені моменти, зосереджені сили, та до початку і кінця ділянок, де діє рівномірно розподілене навантаження; M, F, q — зовнішні моменти та зосереджені і розподілені сили, які розташовані між розглядуваним перерізом та початком координат.

Якщо розподілене навантаження не доходить до розглядуваної

ділянки, то його треба продовжити до її кінця, а для відновлення дійсного навантаження треба ввести компенсуюче розподілене навантаження такою ж інтенсивністю, але протилежного напрямку.

Доданки в формулах (5.46) і (5.47) треба брати з знаком "+", якщо від відповідних силових факторів у розглядуваному перерізі буде виникати згинальний момент додатного знаку.

Таким чином, визначення переміщень за методом початкових параметрів, при будь-якому навантаженні, зводиться насамперед до визначення початкових параметрів M_0 , Q_0 , y_0 , θ_0 тому рівняння (5.46) і (5.47) називаються універсальними рівняннями пружної лінії балки. Зазначимо, що з чотирьох початкових параметрів завжди відомі два, а два треба знаходити.

5.11. Розрахунок балок на жорсткість

Для надійної експлуатації балочних конструкцій (кранових балок, робочих площадок агрегатів, перекриттів та ін.) треба обмежувати їх можливі прогини. Це забезпечується шляхом розрахунку балки на жорсткість. Умова жорсткості має вигляд

$$f \leq f_{adm}, \quad (5.48)$$

де f — абсолютне значення максимального прогину балки; f_{adm} — допустимий прогин.

Якщо максимальний прогин балки f більше допустимого f_{adm} то треба збільшити розміри поперечного перерізу і знову перевірити жорсткість балки.

На рис. 5.31 для найбільш поширених на практиці схем балок наведені абсолютні значення максимальних прогинів.

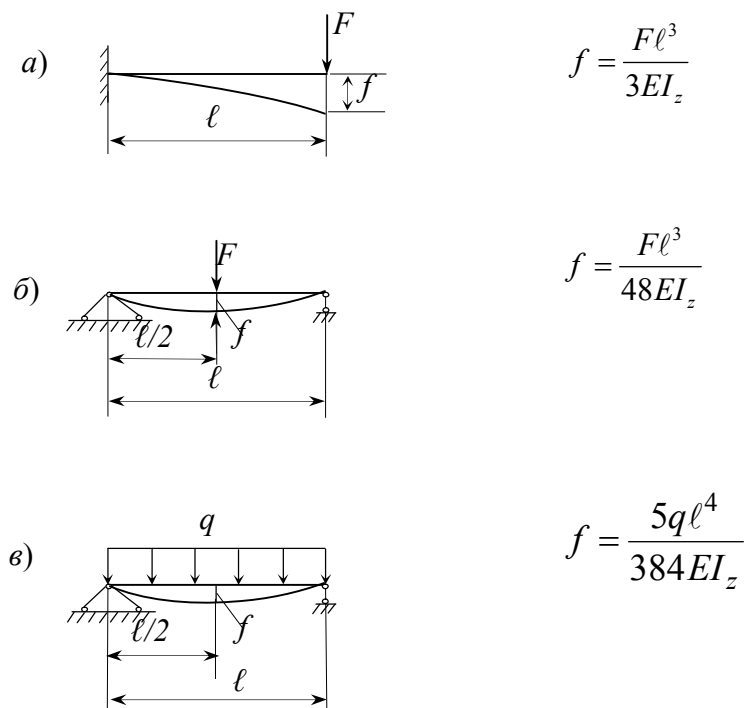


Рис. 5.31

Контрольні питання для самоперевірки

1. Що називається деформацією згинання?
2. Що відбувається з волокнами балки при згинанні?
3. Яка класифікація опорних пристроїв балок у розрахунковій схемі?
4. Які існують типи балок?
5. Які внутрішні зусилля виникають в перерізах балки при згинанні?
6. Чому дорівнює поперечна сила у розглядуваному перерізі балки?
7. Чому дорівнює згинальний момент у розглядуваному перерізі балки?
8. Як формулюються правила знаків для поперечної сили та згинального моменту?
9. Яке згинання називається чистим згинанням, а яке – поперечним?
10. Запишіть диференціальні залежності при згинанні.
11. Сформулюйте правила для перевірки правильності побудови епюр поперечних сил та згинальних моментів.
12. Запишіть формулу для визначення нормальних напружень у довільній точці балки.
13. Запишіть формулу для визначення максимальних нормальних напружень у балці.
14. Запишіть формулу для визначення дотичних напружень у балці.

15. Запишіть основну умову міцності балки.
16. В якій послідовності проводиться повний розрахунок балки на міцність?
17. Запишіть наближене диференціальне рівняння зігнутої осі балки.
18. Запишіть універсальні формули методу початкових параметрів.
19. Який вигляд має умова жорсткості балок?

Розділ 6. СКЛАДНИЙ ОПІР

6.1. Основні поняття

Раніше ми вивчали найпростіші види деформації: осьове розтягання або стискання, зсув, кручення і плоске поперечне згинання. В цих випадках в поперечних перерізах стержня виникали: поздовжня сила N , в другому випадку поперечна сила Q в третьому - крутний момент T і в четвертому - згинальний момент M та поперечна сила Q .

На практиці поряд з простими видами деформації зустрічаються і деформації, які є комбінацією декількох простих деформацій.

Такі випадки деформацій, коли в перерізах стержня виникають два і більше внутрішніх зусиль називаються складним опором. Виключенням є плоске згинання, при якому в перерізах стержня виникають два внутрішніх зусиль – згинальний момент M та поперечна сила Q . Але плоске згинання відноситься до простого опору, так як основний вплив на несучу здатність балки здійснює згинальний момент M .

Розв'язок задач складного опору базується на принципі незалежності дії сил (принципі суперпозиції), на підставі якого повні напруження і деформації визначаються як сума напружень і деформацій, що виникають при простих деформаціях окремо. Треба зауважити, що принцип суперпозиції можна застосовувати тоді, коли деформації малі і виконується закон Гука.

Розрізняють наступні види складного опору.

1. Неплоске та косе згинання.
2. Згинання з розтяганням або стисканням.
3. Згинання з крученням.
4. Позацентрове розтягання або стискання.

6.2. Неплоске та косе згинання

Неплоске (просторове) згинання виникає в тому випадку, коли на балку діє зовнішнє навантаження, що розташоване в різних площинах, що проходять через поздовжню вісь балки (рис. 6.1 а).

Якщо навантаження знаходиться в одній площині, яка проходить через поздовжню вісь балки, але не проходить через вісі симетрії поперечного перерізу (рис. 6.1 б) то згинання називається косим. Косе

згинання є окремим випадком просторового згинання.

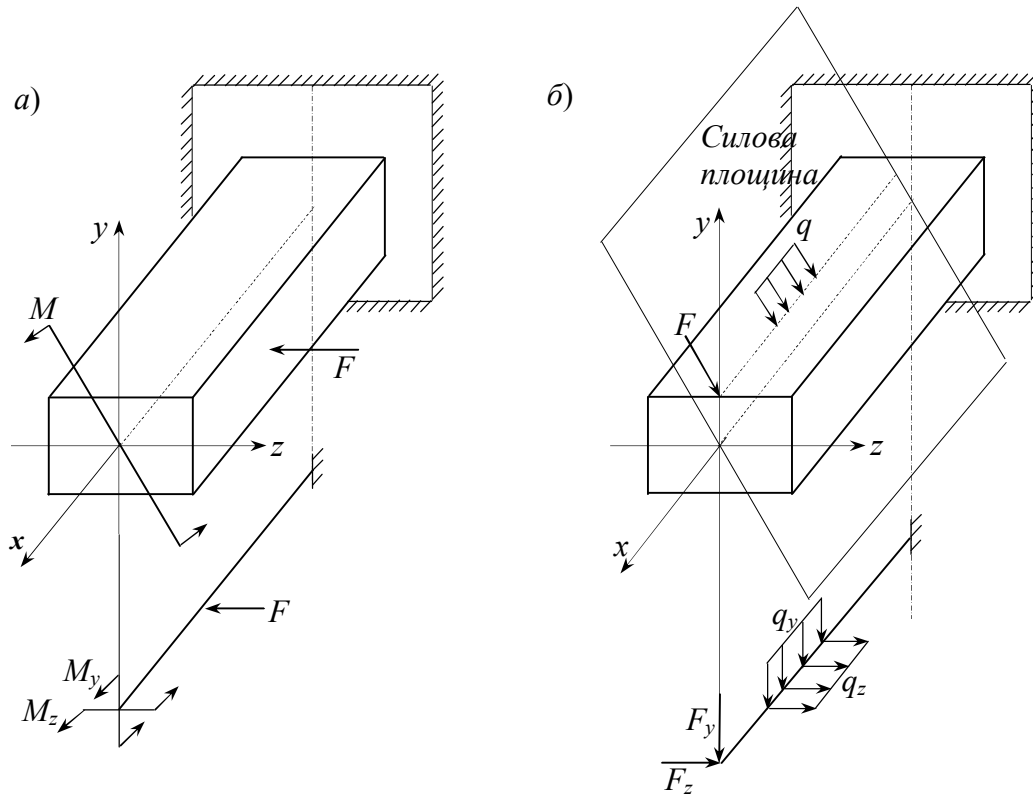


Рис. 6.1

На підставі принципу незалежності дії сил неплоске та косе згинання можна представити як суму двох плоских згинань. Для цього навантаження, що діють у різних площинах, треба розкласти на складові, що діють у вертикальній та горизонтальній площинах (рис. 6.1, а, б).

При складному згинанні в поперечному перерізі балки в загальному випадку виникають згинальні моменти M_z , M_y та поперечні сили Q_z , Q_y . При розрахунках на міцність поперечними силами нехтують.

Визначимо нормальні напруження у довільній точці с координатами y , z поперечного перерізу, в якому діють згинальні моменти M_z , M_y (рис. 6.2). Згинальні моменти будемо вважати додатними, якщо вони викликають в точках першого квадранту розтягуючі напруження.

Виходячи з принципу суперпозиції, знайдемо напруження, розглядаючи два плоских згинання.

Якщо діє згинальний момент M_z , то напруження у розглядуваній точці будуть дорівнювати

$$\sigma' = \frac{M_z \cdot y}{I_z}.$$

Коли діє згинальний момент M_y , то напруження у розглядуваній точці визначаються формулою

$$\sigma'' = \frac{M_y \cdot z}{I_y}.$$

При одночасній дії обох згинальних моментів напруження в точці визначаються, як алгебраїчна сума напружень σ' і σ''

$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y}. \quad (6.1)$$

Формула (6.1) дозволяє визначати напруження при складному (просторовому та косому) згинанні. Згинальні моменти та координати точок, в яких визначаються напруження, підставляються в формулу з власними знаками.

При косому згинанні усе зовнішнє навантаження знаходиться в одній площині. В цій же площині буде діяти і повний згинальний момент M (рис. 6.3). Складові повного згинального моменту M дорівнюють

$$M_z = M \cdot \cos \alpha, \quad (6.2)$$

$$M_y = M \cdot \sin \alpha. \quad (6.3)$$

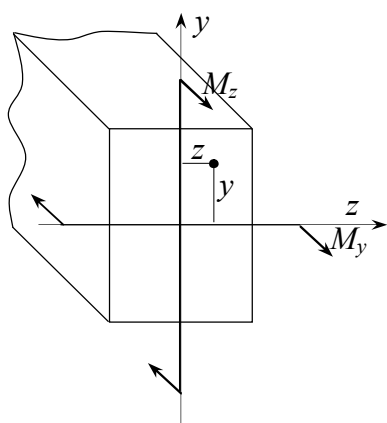


Рис. 6.2

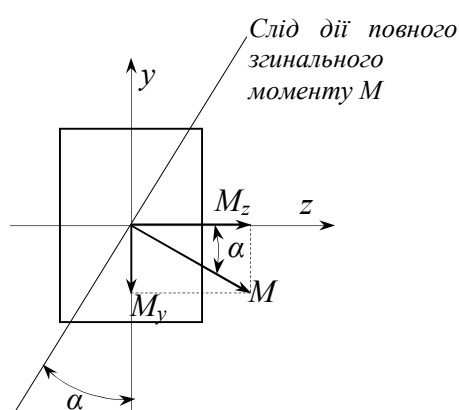


Рис. 6.3

Повний згинальний момент M через його складові визначається за наступним виразом

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}. \quad (6.4)$$

Поділимо вираз (6.3) на (6.2)

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{M_y}{M_z} \right|. \quad (6.5)$$

За формулою (6.4) встановлюється положення площини дії повного згинального моменту при неплоскому згинанні. При цьому треба мати на увазі, що ця площина проходить через центр ваги і два квадранта, в якому моменти M_z і M_y викликають нормальні напруження одного знаку.

Підстановка (6.2) і (6.3) в (6.1) приводить до формули, за якою можна визначати нормальні напруження у довільній точці поперечного перерізу при косому згинанні

$$\sigma = M \left(\frac{y \cdot \cos \alpha}{I_z} + \frac{z \cdot \sin \alpha}{I_y} \right). \quad (6.6)$$

При неплоскому та косому згинанні, так як і при плоскому згинанні, нейтральна лінія проходить через центр ваги перерізу, але вона не буде перпендикулярною до площини дії повного згинального моменту M . Її положення визначається формулою

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y}. \quad (6.7)$$

В цій формулі β – кут (рис. 6.4), на який треба повернути вісь z за годинниковою стрілкою при $\beta > 0$, для того щоб вона співпала з нейтральною лінією (н. л.).

слід площини дії повного
згинального моменту M

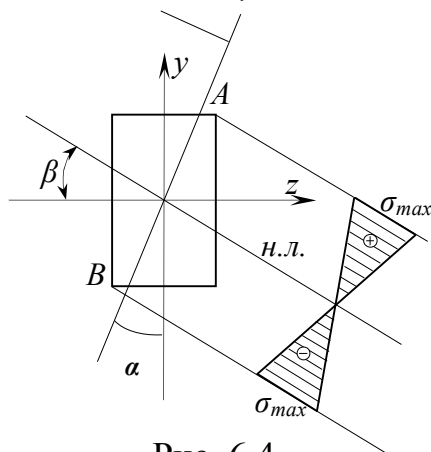


Рис. 6.4

Перевірку міцності треба проводити в тих перерізах, де M_z і M_y одночасно мають максимальні значення, або достатньо великі значення.

З формули (6.1) випливає, що нормальні напруження по перерізу змінюються за лінійним законом, тому небезпечними точками будуть точки найбільш віддалені від нейтральної лінії. На рис. 6.4 це точки A та B , при цьому відповідно до рис. 6.2 в точці A будуть

найбільші розтягуючі напруження, а в точці B – найбільші стискаючі. Епюра σ приведена на рис. 6.4.

Умова міцності має вигляд

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_{adm}, \quad (6.8)$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}, \quad W_y = \frac{I_y}{z_{max}} - \text{моменти опору.}$$

Взагалі, якщо поперечний переріз балки має дві осі симетрії і кутові точки, то небезпечною точкою буде одна з кутових, умова міцності для якої описується формулою (6.8).

Для косоного згинання умова міцності запишеться

$$\sigma = M \left(\frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right) \leq \sigma_{adm}. \quad (6.9)$$

У випадку проектного розрахунку при неплоскому згинанні для балок з пластичного матеріалу умова міцності має вигляд

$$W_z \geq \frac{M_z + \frac{W_z}{W_y} \cdot M_y}{\sigma_{adm}}. \quad (6.10)$$

З виразу (6.10) випливає, що при проектному розрахунку треба задаватися відношенням $\frac{W_z}{W_y}$ і шляхом послідовних наближень визначати значення W_z і W_y , які будуть задовольняти умову міцності.

6.3. Згинання з розтяганням або стисканням

Коли на балку діють поздовжні і поперечні навантаження (рис. 6.5), то в загальному випадку в поперечному перерізі виникають згинальні моменти M_z і M_y , поперечні сили Q_z і Q_y , а також поздовжня сила N . Таким чином буде складне згинання з розтяганням або стисканням. Нормальні напруження у довільній точці перерізу (рис. 6.6) визначаються за формулою

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z. \quad (6.11)$$

Згинальні моменти, поздовжню силу та координати точки, в якій визначають σ , підставляють в формулу з власними знаками.

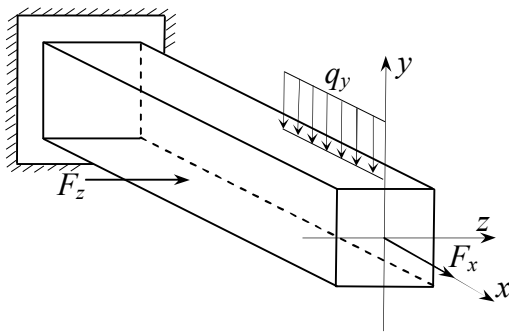


Рис. 6.5

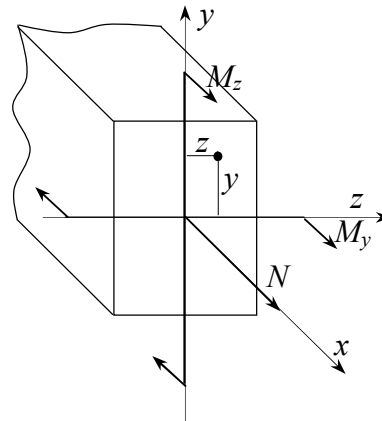


Рис. 6.6

Нехтуючи дотичними напруженнями від поперечних сил, можна вважати, що напружений стан у небезпечній точці буде лінійним і умова міцності має вигляд

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{adm}. \quad (6.12)$$

Для перерізу, що має дві осі симетрії і виступаючі кути, небезпечною буде одна з кутових точок. Напруження в ній можна визначити за формулою

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}. \quad (6.13)$$

6.4. Згинання з крученням

Сполучення згинання і кручення частіше усього зустрічається в різних деталях машин. Наприклад, колінчатий вал сприймає значні крутні моменти та, крім того, працює на згинання. Вали редукторів, осі моторних вагонів електровозів також працюють на згинання з крученням.

В загальному випадку дії зовнішнього навантаження вал круглого перерізу чинить опір плоскому згинанню в двох площинах та крученню і в його перерізах виникають згинальні моменти M_z і M_y , поперечні сили Q_z і Q_y і крутний момент T . В практичних розрахунках впливом поперечних сили нехтують.

Для розрахунку вала необхідно встановити небезпечний переріз. Для цього повинні бути побудовані епюри згинальних моментів M_z і M_y і крутного моменту T .

На валу можуть бути розташовані такі деталі, як шківні пасових передач, або зубчасті колеса зубчастих передач. Зусилля, що виникають в пасах, або на зуб'ях треба, по правилам теоретичної механіки, привести до осі валу. Після приведення зусиль до осі валу, в перерізах де розташовані прямозубі колеса, або шківні будуть діяти зосереджені сили F_i і скручувальні моменти T_i (рис. 6.7.а). Вагою валу і тертям в підшипниках нехтуємо. На підставі принципу незалежності дії сил згинання і кручення розглядаємо окремо.

Якщо відомі кількість обертів валу за одиницю часу n та потужність P , яка передається шківом, то величина скручувального моменту M на шківу, може бути знайдена за формулою

$$M = 9,55 \frac{P(\text{Квт})}{n(\text{об} / \text{хв})} (K_{нм}). \quad (6.14)$$

Зосереджені сили F_i , які у загальному випадку діють у різних площинах, розкладаємо на складові, що діють у вертикальній і горизонтальній площинах.

Від сил F_{iy} , що діють у вертикальній площині, будуємо епюру згинальних моментів M_z (рис. 6.7 б), а від сил F_{iz} , що діють у горизонтальній площині – епюру згинальних моментів M_y (рис. 6.7 в).

При згинанні валу круглого перерізу в кожному його перерізі має місце плоске згинання від дії повного згинального моменту M

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}.$$

Епюра повного згинального моменту на крайніх ділянках окреслена прямими лініями, а на решті ділянок – кривими (рис. 6.7, г).

Епюра крутних моментів будується так як при чистому крученні (рис. 6.7, д).

По епюрам M і T шукаємо небезпечні перерізи. Взагалі небезпечними вважаються ті перерізи у яких одночасно великі M та T .

Після визначення небезпечного перерізу встановимо небезпечні точки в цьому перерізі. Для цього розглянемо розподіл напружень при одночасній дії згинального моменту M і крутного моменту T .

Будемо вважати, що вісь у перпендикулярна площині дії повного згинального моменту M (рис. 6.8), тобто вісь u є нейтральною лінією

перерізу. В поперечному перерізі валу виникають нормальні напруження σ від згинання і дотичні напруження τ від кручення.

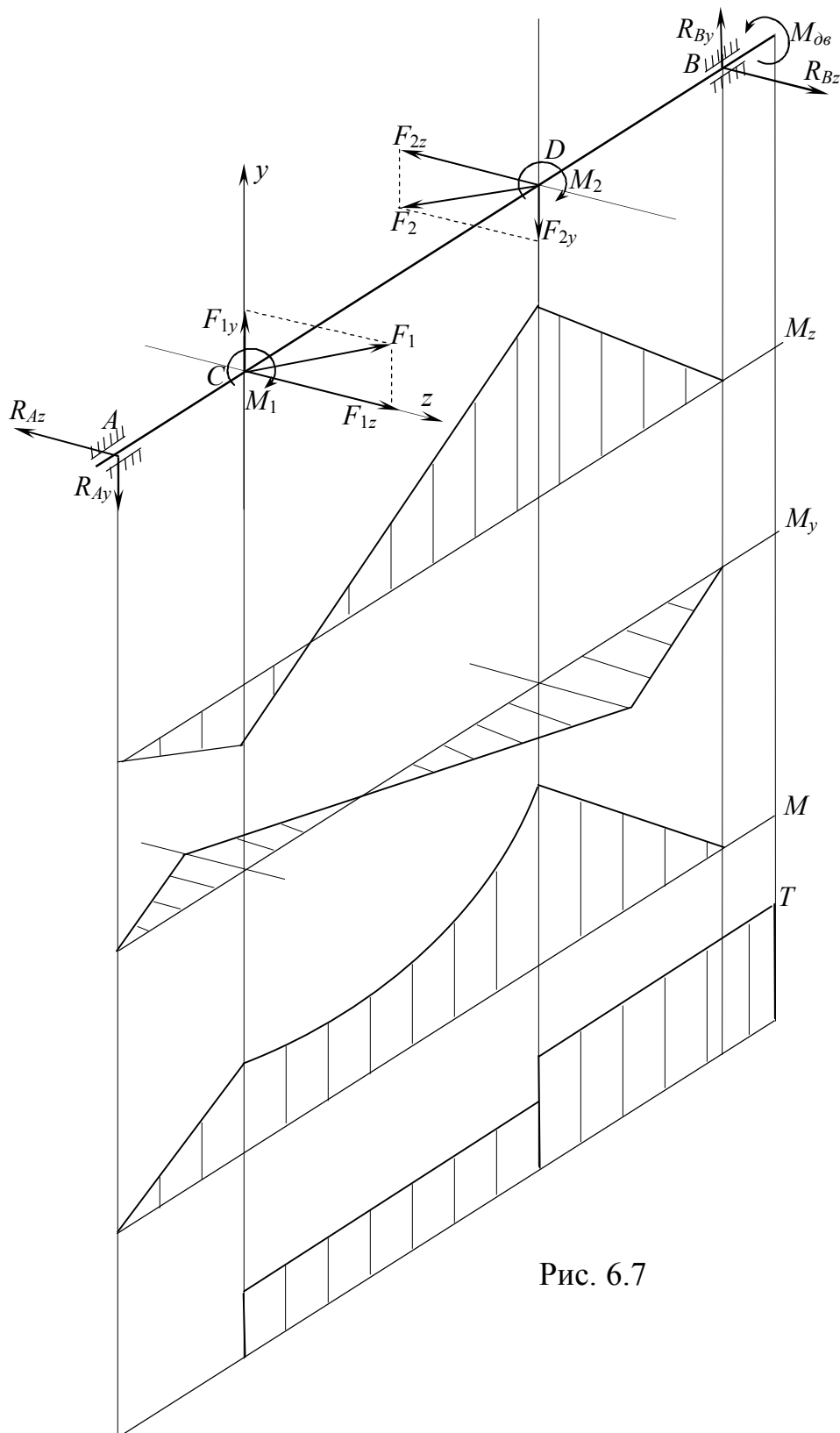


Рис. 6.7

Нормальні напруження σ визначаються за формулою

$$\sigma = \frac{M}{I_y} \cdot z.$$

Епюра цих напружень приведена на рис. 6.8. Найбільші по величині σ виникають в точках m і n і дорівнюють

$$\sigma_m = -\sigma_n = \frac{M}{W},$$

де W – осьовий момент опору поперечного перерізу валу.

Дотичні напруження τ визначаються за формулою

$$\tau = \frac{T}{I_\rho} \cdot \rho.$$

Епюра дотичних напружень приведена на рис. 6.8. Найбільші по величині τ також виникають в точках m і n і дорівнюють

$$\tau = \frac{T}{W_\rho} = \frac{T}{2W},$$

де W_ρ – полярний момент опору поперечного перерізу валу.

Епюри розподілу σ і τ приводять до висновку, що небезпечними точками у небезпечному перерізі будуть точки m і n .

Для з'ясування в якому напруженому стані знаходиться матеріал у небезпечних точках, в околиці точки n виділимо елементарний елемент і покажемо напруження, що діють по гранях цього елемента (рис. 6.9). З трьох взаємно перпендикулярних граней одна вільна від напружень, а по двом іншим діють напруження: по грані, що співпадає з поперечним перерізом діють σ і τ , а по грані, що співпадає з поздовжнім перерізом – дотичні напруження τ . Таким чином, матеріал у небезпечних точках знаходиться у плоскому напруженому стані.

Аналогічні напруження на гранях елемента ми мали у балці при плоскому згинанні, тому тут головні напруження треба визначити за тими самими формулами:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (6.15)$$

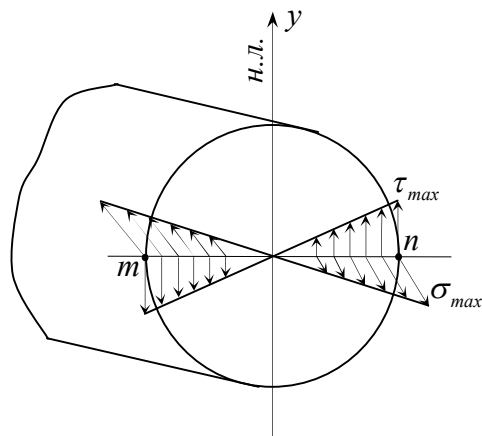


Рис. 6.8

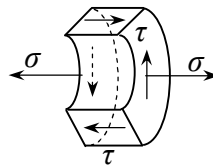


Рис. 6.9

Тільки при згинанні дотичні напруження спричинювалися поперечною силою, а в (6.15) вони спричинюються крутним моментом T .

Оцінка міцності матеріалу вала в небезпечних точках можлива за допомогою теорій міцності. Для валів з пластичного матеріалу (сталевих валів) застосовується третя та четверта теорії міцності. Підставляючи значення головних напружень в умови міцності за цими теоріями

$$\sigma_{екк}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{adm}, \quad \sigma_{екк}^{IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \leq \sigma_{adm},$$

отримаємо наступні вирази для визначення еквівалентних (розрахункових) напружень

$$\sigma_{екк}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (6.16)$$

$$\sigma_{екк}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (6.17)$$

Підставляючи у формули (6.16) та (6.17) значення $\sigma = \frac{M}{W}$; $\tau = \frac{T}{2W}$, отримаємо

$$\sigma_{екк}^{III} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} \leq \sigma_{adm}. \quad (6.18)$$

$$\sigma_{екк}^{IV} = \frac{\sqrt{M^2 + 0,75T^2}}{W} \leq \sigma_{adm}. \quad (6.19)$$

Чисельник цих формул є зведеними моментами

$$M_{red}^{III} = \sqrt{M^2 + T^2} . \quad (6.20)$$

$$M_{red}^{IV} = \sqrt{M^2 + 0,75T^2} . \quad (6.21)$$

З урахуванням (6.20) і (6.21) умови міцності (6.16) та (6.17) можна замінити однією простою формулою

$$\sigma_{екв} = \frac{M_{red}^i}{W} \leq \sigma_{adm} . \quad (6.22)$$

При проектному розрахунку умова міцності (6.22) запишеться у вигляді

$$W = \frac{M_{red}^i}{\sigma_{adm}} . \quad (6.23)$$

Підставивши в (6.23) значення моменту опору $W = \frac{\pi d^3}{32}$ отримаємо формулу для визначення діаметру вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_{red}^i}{\pi\sigma_{adm}}} \approx \sqrt[3]{\frac{M_{red}^i}{0,1\sigma_{adm}}} . \quad (6.24)$$

Зазначимо, що наведені формули цілком придатні також для трубчастих валів, поперечний переріз має форму кільця.

Контрольні питання для самоперевірки

1. Яка деформація називається складним опором?
2. На якій гіпотезі базується рішення задач складного опору?
3. На які види поділяється складний опір?
4. При яких умовах навантаження виникає неплоске згинання?
5. При яких умовах навантаження виникає косе згинання?
6. За якими формулами визначаються нормальні напруження у довільній точці при неплоскому та косому згинаннях?
7. Запишіть умову міцності при неплоскому та косому згинаннях.
8. При яких умовах навантаження виникає складне згинання з розтяганням або стисканням?
9. Які внутрішні зусилля виникають при згинанні з крученням?

10. Як визначається небезпечний переріз валу при згинанні з крученням?
11. Де в поперечному перерізі розташовані небезпечні точки при згинанні з крученням?
12. В якому напруженому стані знаходиться матеріал валу у небезпечних точках при згинанні з крученням?
13. За якими теоріями міцності перевіряється міцність сталевих валів при згинанні з крученням?
14. Запишіть умову міцності при згинанні з крученням.

Розділ 7. СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ

7.1. Види пружної рівноваги. Критична сила

Виконуючи розрахунки на міцність та жорсткість при різних видах деформацій ми вважали, що в деформованому стані будь якої системи має місце наперед відома єдина форма рівноваги. В дійсності рівновага між зовнішніми і, спричиненими ними, внутрішніми силами може бути як стійкою так і нестійкою.

Пружна рівновага буде стійкою, якщо деформоване тіло, що виведене з стану рівноваги будь яким зовнішнім додатковим впливом намагається повернутися до початковому стану і повертається до нього після зняття зовнішнього додаткового впливу.

Пружна рівновага буде нестійкою, якщо деформоване тіло, що виведено з стану рівноваги будь яким зовнішнім впливом продовжує деформуватися у напрямі даного йому відхилення і після зняття зовнішнього впливу в початковий стан не повертається.

Між цими двома станами рівноваги існує перехідний стан, який називається критичним, в якому деформоване тіло знаходиться в байдужій рівновазі: воно може зберігати початкову форму, але може втратити її від дуже незначного впливу.

Стійкість форми рівноваги деформованого тіла залежить від величини прикладеного до нього навантаження. Наприклад, якщо величина сили що стикає стержень буде незначною, то початкова форма рівноваги буде стійкою. При намаганні відхилити його в бік, наприклад, шляхом короткочасної дії горизонтальної сили, стержень буде після ряду коливань повертатися до початкової прямолінійної форми рівноваги як тільки горизонтальна сила буде знята (рис. 7.1, а).

При поступовому збільшенню сили F стержень буде усе повільніше повертатися у початковий стан при перевірці його стійкості. Нарешті можна довести силу до такої величини, при якому стержень буде знаходитися в стані байдужої рівноваги. Поряд з прямолінійної форми стержня в цьому випадку можливі суміжні з нею злегка викривлені рівноваги (штрихові лінії на рис. 7.1, б). При подальшому самому незначному збільшенні навантаження прямолінійна форма буде миттєво втрачена, відбудеться випучування стержня, яке завершиться його

руйнуванням (рис. 7.1, в). Це означає, що навантаження перевищило критичне значення.

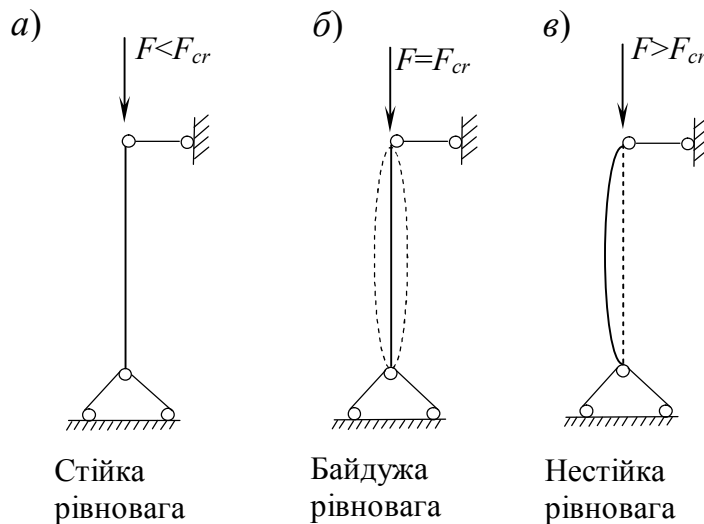


Рис. 7.1

Навантаження, незначне перебільшення якого приводить до втрати стійкості початкової форми тіла називається критичним і позначається F_{cr} .

Особлива небезпека руйнування внаслідок втрати стійкості полягає в тому, що вона відбувається раптово і при низьких значеннях напружень, коли міцність елемента далеко не вичерпана. Тому в розрахунках на стійкість критична сила подібна руйнівній силі при розрахунках на міцність.

Для забезпечення певного запасу стійкості необхідно, щоб задовольнялася умова

$$F \leq F_{adm}^s = \frac{F_{cr}}{k_s},$$

де F – діюче навантаження; F_{adm}^s – допустиме навантаження, k_s – коефіцієнт запасу стійкості.

Отже, щоб мати можливість здійснювати перевірку на стійкість треба мати можливість визначати критичне навантаження F_{cr} .

7.2. Формула Ейлера для критичної сили

Втрата стійкості прямолінійної форми рівноваги при центральному стисканні прямого довгого тонкого стержня називається поздовжнім згинанням. Це найбільш проста, але і найбільш важна інженерна задача,

що пов'язана з проблемою стійкості.

Задача по визначенню критичної сили, що утримує в рівновазі злегка викривлений стержень, була розглянута академіком Петербурзької Академії наук Леонардом Ейлером у 1744 році.

Розглянемо прямолінійний стержень з шарнірними опорами на який діє сила $F=F_{cr}$ (рис. 7.2 а). Припустимо, що під дією сили $F=F_{cr}$ стержень злегка зігнувся. Віднесемо викривлену вісь стержня до прямокутної системи координат з початком в точці O (рис. 7.2 б). Будемо вважати, що деформація згинання стержня дуже мала і напруження в ньому не перебільшують границі пропорційності σ_{pr} . Тоді для визначення F_{cr} можна скористатися наближеним диференціальним рівнянням зігнутої осі балки

$$EI_{min} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \pm M(x), \quad (7.1)$$

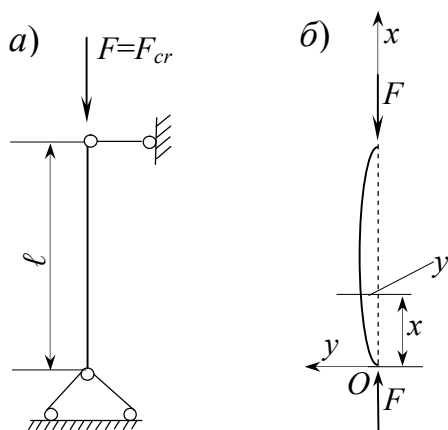


Рис. 7.2

Тут враховується найменша жорсткість стержня EI_{min} , оскільки прогин відбудеться перпендикулярно до осі найменшої жорсткості, якщо решта умов для згинання в усіх площинах однакові.

Згинальний момент в перерізі x стержня дорівнює

$$M(x) = -F \cdot y(x) \quad (7.2)$$

Момент при будь-якому напрямку осі y треба брати зі знаком «мінус», так як знак прогину завжди протилежний знаку другої похідної $d^2 y / dx^2$.

Підставивши (7.2) у (7.1), отримаємо

$$EI_{min} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -F \cdot y, \quad (7.3)$$

або

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{F}{EI_{min}} \cdot y = 0. \quad (7.4)$$

Введемо позначення

$$\frac{F}{EI_{min}} = k^2. \quad (7.5)$$

З урахуванням (7.5) рівняння (7.4) набуває вигляду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 \cdot y = 0 \quad (7.6)$$

Рівняння (7.6) є однорідним лінійним диференціальним рівнянням, інтеграл якого можна виразити гармонійною функцією:

$$y = A \cdot \sin kx + B \cdot \cos kx \quad (7.7)$$

Сталі інтегрування A та B повинні задовольняти граничним умовам:

1. при $x = 0$, $y(0) = 0$;

2. при $x = \ell$, $y(\ell) = 0$

З першої граничної умови випливає, що $B = 0$,
тоді

$$y = A \cdot \sin kx \quad (7.8)$$

З другої граничної умови отримаємо

$$A \cdot \sin k\ell = 0.$$

Випадок, коли $A = 0$, відповідає прямолінійній формі рівноваги, але нас цікавить криволінійна форма, тобто $A \neq 0$. Це означає, що

$$\sin k\ell = 0.$$

Корені цього рівняння

$$k\ell = \pi n,$$

де n – довільне ціле число ($n=1,2,3,\dots$).

Отже, тоді

$$k^2 \ell^2 = \pi^2 n^2$$

і звідки

$$k^2 = \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2}. \quad (7.9)$$

Дорівнюючі праві частини виразів (7.5) і (7.9) отримаємо

$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI_{\min}}{\ell^2}.$$

Практично нас цікавить найменше значення поздовжньої стисуючої сили, при якому стає можливим поздовжнє згинання; найменше значення критичної сили F_{cr} буде при $n=1$,

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{\ell^2}. \quad (7.10)$$

Вираз (7.10) називається формулою Ейлера для стержня з шарнірно опертими кінцями.

Рівняння пружної лінії (7.7) можна привести до вигляду

$$y(x) = f \sin(n\pi x/\ell),$$

тобто стержень згинається по півхвилі синусоїди з максимальним прогином f посередині стержня.

7.3. Вплив умов закріплення кінців стержня на значення критичної сили

Формула (7.10) справедлива для стержня з шарнірно закріпленими кінцями. Узагальнимо цю формулу на інші випадки закріплення стержня.

I. Стержень закріплений жорстко одним кінцем рис. 7.3.б. Порівнюючи рис. 7.3.б та 7.3.а бачимо, що зігнута вісь стержня, закріпленого одним кінцем, перебуває в тих самих умовах, що і половина стержня завдовжки 2ℓ з шарнірно закріпленими кінцями. Тому критична сила для стержня з одним жорстко закріпленим кінцем довжиною ℓ буде такою ж, що і для стержня з шарнірно закріпленими кінцями довжиною 2ℓ

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(2\ell)^2} \quad (7.11)$$

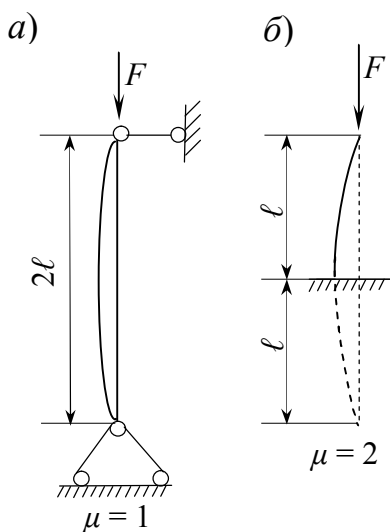


Рис. 7.3

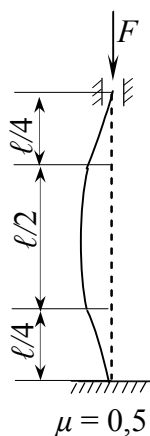


Рис. 7.4

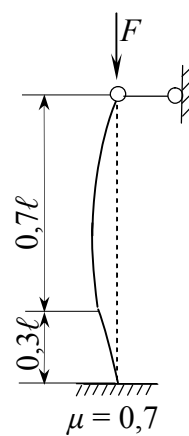


Рис. 7.5

При цьому зігнута вісь стержня (рис. 7.3, а) має вигляд половини півхвилі синусоїди.

2. Стержень з жорстко закріпленими кінцями (рис. 7.4). Після втрати стійкості стержня внаслідок симетрії його середня частина довжиною $\ell/2$ працює в тих самих умовах, що і стержень з шарнірно закріпленими кінцями. При цьому утворюються дві півхвилі: середня завдовжки $\ell/2$ та дві крайні половинки півхвилі завдовжки $\ell/4$. Критична сила у цьому випадку буде

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}. \quad (7.12)$$

3. Стержень довжиною ℓ з одним жорстко, а іншим шарнірно закріпленими кінцями (рис. 7.5). Після втрати стійкості виникає півхвиля синусоїди довжиною $0,7\ell$. Таким чином ділянка стержня довжиною $0,7\ell$ буде знаходитися в тих самих умовах, що і стержень з шарнірно закріпленими кінцями.

Отже

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(0,7\ell)^2}. \quad (7.13)$$

Співвідношення (10.9), (10.10), (10.11), (10.12) можна об'єднати в одну формулу.

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu \cdot \ell)^2}, \quad (7.14)$$

де $\mu\ell = \ell_{red}$ – зведена довжина стержня; ℓ – фактична довжина стержня; μ – коефіцієнт зведення довжини.

Через F_{cr} можна визначити критичне напруження при якому прямолінійна форма рівноваги стає нестійкою.

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{A(\mu \cdot \ell)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}}\right)^2}, \quad (7.15)$$

де $i_{\min}^2 = \frac{I_{\min}}{A}$ – квадрат найменшого радіуса інерції площі перерізу стержня.

Введемо безрозмірну величину

$$\lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}}, \quad (7.16)$$

що називається гнучкістю стержня. Остаточно будемо мати

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (7.17)$$

З формули (7.17) випливає, що критичні напруження залежать тільки від пружних властивостей матеріалу (модуль пружності E) і гнучкості стержня.

7.4. Втрата стійкості за границею пропорційності (формула Ясинського)

Формула Ейлера ґрунтується на застосуванні диференціального рівняння пружної лінії, коли справедливий закон Гука. Тому формули (7.14) і (7.17) справедливі тільки тоді, коли напруження σ_{cr} не перебільшують границі пропорційності

$$\sigma_{cr} \leq \sigma_{pr},$$

або

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{pr}. \quad (7.18)$$

У системі координат $\sigma_{cr} - \lambda$ залежність (7.18) має вигляд кривої, що зветься гіперболою Ейлера (рис. 7.6).

Бачимо, що в міру зростання гнучкості λ критичне напруження σ_{cr} наближається до нуля, і навпаки, в міру наближення λ до нуля критичне напруження наближається до нескінченності.

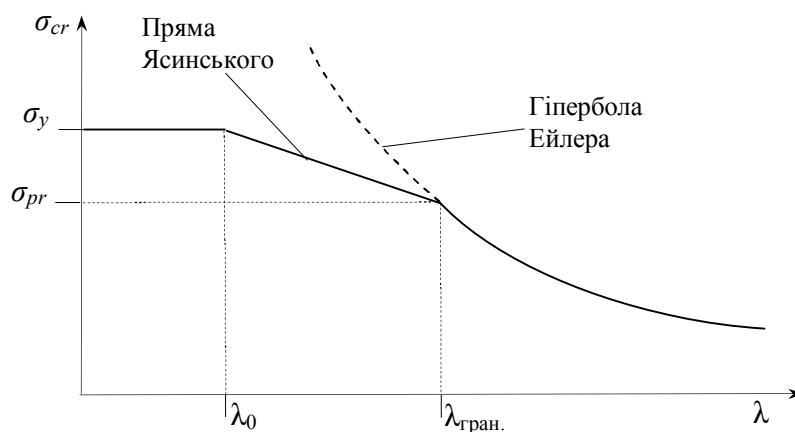


Рис. 7.6

Якщо з умови (7.18) виразити гнучкість λ , то умова застосування формули Ейлера прийме вигляд

$$\lambda_{\text{гран.}} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}} \quad (7.19)$$

Це означає, що формула Ейлера стає непридатною при гнучкості стержня, меншій за граничне значення $\lambda_{\text{гран.}}$, яка залежить тільки від властивостей матеріалу. Встановлено, що дійсні критичні напруження для стержнів з малою гнучкістю, для яких $\lambda < \lambda_{\text{гран.}}$ менші, ніж визначені за формулою Ейлера. Отже, в цьому разі формула Ейлера дає завищені значення F_{cr} . Тому використання формули Ейлера для стержнів, що втрачають стійкість за границею пружності, дуже небезпечно за своїми наслідками.

Зауважимо, що при $\sigma_{cr} > \sigma_{pr}$ поздовжнє згинання стержнів супроводжується не тільки пружною деформацією, але і пластичною.

Ф.С.Ясинський на підставі обробки великої кількості дослідного матеріалу, щодо поздовжнього згинання стержнів для яких $\lambda < \lambda_{\text{гран.}}$, запропонував емпіричну формулу для визначення критичних напружень за границею пропорційності

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda + c\lambda^2. \quad (7.20)$$

Значення коефіцієнтів наведено в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Матеріал	$\lambda_{\text{гран}}$	a	b	c
		МПа		
Ст.3	100	310	1,14	–
Ст.5	100	464	3,26	–
Деревина	110	29,3	0,19	–
Чавун	80	776	12	0,53

Залежність критичних напружень при $\lambda < \lambda_{\text{гран.}}$ на рис. 7.6 має вигляд похилої прямої (пряма Ясинського), що лежить між границею пропорційності σ_{pr} та границею текучості σ_y .

При деякому значенні гнучкості λ_0 величина σ_{cr} , що визначена по формулі (7.20) стає дорівнювати граничному напруженні при стисканні:

для пластичних матеріалів – $\sigma_{cr} = \sigma_y$;

для крихких матеріалів – $\sigma_{cr} = \sigma_u$.

На рис. 7.6 ця обставина зображена прямою лінією.

Стержні, у яких $\lambda < \lambda_0$ на стійкість не розраховуються. Вони розраховуються на міцність.

Графік на рис.7.6, який побудований для пластичного матеріалу, називається графіком критичних напружень.

7.5. Практичний метод розрахунку на стійкість

Центрально стиснуті стержні втрачають свою несучу здатність від втрати стійкості раніше, ніж від втрати міцності, оскільки критичне напруження завжди менше від границі текучості для пластичних матеріалів або границі міцності для крихких матеріалів

$$\sigma_{cr} < \sigma_y; \quad \sigma_{cr} < \sigma_u.$$

Щоб визначити допустиме напруження на стійкість, треба вибрати коефіцієнт запасу k_s , бо не можна припустити виникнення у стержні критичного напруження. Тоді

$$\sigma_{adm}^S = \frac{\sigma_{cr}}{k_s}. \quad (7.21)$$

Допустиме напруження на стійкість та допустиме напруження на міцність при стисканні

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{k},$$

де k – основний коефіцієнт запасу на міцність, взаємно пов'язані.

Складемо відношення їх:

$$\frac{\sigma_{adm}^S}{\sigma_{adm}} = \frac{\sigma_{cr} k}{k_s \sigma_y},$$

звідки

$$\sigma_{adm}^S = \frac{\sigma_{cr} k}{k_s \sigma_y} \sigma_{adm}.$$

Позначивши

$$\varphi = \frac{\sigma_{cr} k}{k_s \sigma_y} \quad (7.22)$$

матимемо допустиме напруження на стійкість у вигляді

$$\sigma_{adm}^S = \varphi \cdot \sigma_{adm} \quad (7.23)$$

Тут φ – коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження при розрахунку на стійкість. Цей коефіцієнт для кожного матеріалу можна обчислити при всіх значеннях гнучкості λ й подати у вигляді таблиці. Значення φ для сталей та чавуну наведено у табл. 7.2.

Умова стійкості стиснутих стержнів має вигляд

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{adm}^S,$$

або

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \sigma_{adm} \quad (7.24)$$

Оскільки при розрахунку на стійкість місцеві ослаблення перерізу практично не змінюють значення критичної сили, то в розрахункові формули вводиться повна площа A поперечного перерізу стержня.

Перевірний розрахунок стиснутих стержнів проводиться таким чином.

Таблица 7.2

Гнучкість λ	φ				Гнучкість λ	φ			
	Ст2 Ст3 Ст4	Ст5	Чавун	Деревина		Ст2 Ст3 Ст4	Ст5	Чавун	Деревина
0	1,00	1	1	1	110	0,52	0,43	-	0,25
10	0,99	0,98	0,97	0,99	120	0,45	0,36	-	0,22
20	0,96	0,95	0,91	0,97	130	0,40	0,33	-	0,18
30	0,94	0,92	0,81	0,93	140	0,36	0,29	-	0,16
40	0,92	0,89	0,69	0,87	150	0,32	0,26	-	0,14
50	0,89	0,86	0,57	0,80	160	0,29	0,24	-	0,12
60	0,86	0,82	0,44	0,71	170	0,26	0,21	-	0,11
70	0,81	0,76	0,34	0,60	180	0,23	0,19	-	0,10
80	0,75	0,70	0,26	0,48	190	0,21	0,17	-	0,09
90	0,69	0,62	0,20	0,38	200	0,19	0,16	-	0,08
100	0,60	0,51	0,16	0,31					

Виходячи з відомих розмірів та форми поперечного перерізу, визначаємо площу A , найменший осьовий момент інерції I_{\min} , обчислюємо найменший радіус інерції перерізу

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}},$$

та гнучкість

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}.$$

За таблицею знаходимо коефіцієнт φ та порівнюємо дійсне напруження з допустимим на стійкість

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \sigma_{adm}.$$

Проектувальний розрахунок проводиться у такий спосіб. З (7.24) маємо шукану площу поперечного перерізу

$$A = \frac{F}{\varphi \sigma_{adm}}.$$

Тут є дві невідомі величини – φ та A . Тому слід користуватися методом послідовних наближень.

В першій спробі беруть $\varphi = 0,5 - 0,6$, визначають потрібну площу A та добирають переріз, для якого визначають фактичне φ'_1 . Якщо φ'_1 значно відрізняється від φ_1 , то слід повторити розрахунок, тобто зробити другу спробу для

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}.$$

У результаті другої спроби визначають φ'_2 . Якщо потрібна третя спроба, то

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2},$$

і так далі, поки різниця між φ'_i і φ_i буде дуже малою (≤ 0.01). Після цього треба перевірити стійкість спроектованого стержня.

Контрольні питання для самоперевірки

1. Яка рівновага називається стійкою?

2. Яка рівновага називається нестійкою?
3. Яке навантаження називається критичним?
4. Запишіть формулу Ейлера для визначення критичної сили.
5. Яким чином відображається в формулі Ейлера вплив умов закріплення стержня на величину критичної сили?
6. Коли можна застосовувати формулу Ейлера?
7. Запишіть формулу Ясинського для визначення критичної сили.
8. Коли застосовується формула Ясинського?
9. Який вигляд має умова стійкості?

Частина III

ДЕТАЛІ МАШИН

Деталі машин – загальноосвітня дисципліна, яка розглядає конструкції механізмів, а також питання розрахунку й конструювання машин і механізмів.

Усі машини і механізми складаються з деталей.

Деталь – частина механізму, яка виготовляється без допомоги складальних операцій з одного матеріалу.

Складальна одиниця – декілька деталей, які з'єднуються з допомогою складальних операцій для виконання спільних цілей.

Вузол – закінчена складальна одиниця, що складається з деталей загального функціонального призначення.

Машина – декілька механізмів, що служать для перетворення одного виду енергії в інший (машини-двигуни, машини-генератори) або для виконання корисної роботи (робочі машини).

Розділ I. КРИТЕРІЇ ПРАЦЕЗДАТНОСТІ ТА НАДІЙНОСТІ

1. Навантаження в машинах

Навантаження в машинах розподіляються на номінальні та робочі навантаження. До номінальних відносять ті навантаження, які відповідають паспортному або розрахунковому режиму роботи, а до робочих, які діють на деталі машини в процесі експлуатації.

Навантаження на деталі машин і напруження в них, можуть бути постійними (статичними) і змінними за часом (динамічними).

Деталі, які в процесі роботи сприймають постійне навантаження у машинах майже не зустрічаються. В деяких випадках постійні просторі навантаження викликають в обертових деталях (валах) змінні напруження. Однак деякі деталі працюють із напруженнями, що мало змінюються. Їх при розрахунку можна приймати за постійні. До них відносяться деталі з великими навантаженнями від сили ваги (у транспортних і підійомно-

транспортних машинах), деталі з великим початковим затягуванням (заклепки, кріпильні гвинти).

2. Критерії працездатності деталей машин

Успішна робота деталей і машин полягає в забезпеченні певних критеріїв. До них відносяться: міцність; жорсткість; зносостійкість; теплостійкість; вібростійкість.

Міцність – здатність деталей пручатися руйнуванню під дією внутрішніх напружень, виникаючих від зовнішніх навантажень.

Міцність підрозділяють на статичну, під дією постійних навантажень, динамічну й витривалість, що має місце при дії циклічних перемінних навантажень.

Статична міцність. Відповідний розрахунок виконують в тому випадку коли має місце статичне навантаження деталі і умова міцності записується у вигляді

$$\sigma < [\sigma] \text{ чи } \tau < [\tau],$$

де: σ – розрахункова величина максимальних нормальних напружень, МПа; τ – розрахункова величина максимальних дотичних напружень, МПа; $[\sigma], [\tau]$ – допустима величина, відповідно, нормальних і дотичних напружень, МПа.

Таким чином, в процесі проектування необхідно урахувати й забезпечувати такі умови роботи, щоб напруження в матеріалі деталей не перевищували допустимих.

У якості допустимих не можна призначати граничні напруження, при яких настає зміна форми (межа текучості матеріалу – σ_T) деталі, чи руйнування (межа витривалості – σ_B) матеріалу.

За допустимі напруження варто приймати напруження менші за граничні,

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\max.}}{n},$$

де n – коефіцієнт запасу.

У різних обставинах коефіцієнт запасу може бути обраний з довідкових нормативів, або обчислений з урахуванням точності визначення навантажень, однорідності матеріалу й специфічних вимог до надійності машин.

Динамічна міцність. Відповідний розрахунок виконують в тому випадку коли має місце навантаження яке виникає під дією змінної сили (особливо коли виникають удари) і умова міцності аналогічна статичній, але з урахуванням часу дії сили. В даному курсі такі фактори не розглядаються.

Витривалість (втомливість). Відповідний розрахунок виконують в тому випадку коли має місце циклічна зміна напружень.

В процесі роботи в деталях можуть виникати наступні цикли зміни напружень:

- від нульовий (пульсуючий) цикл, у якому напруження змінюються від нуля до максимуму;
- знакозмінний симетричний цикл, у якому напруження міняються від негативного до такого ж позитивного значення;
- асиметричний, знакопостійний.

Оцінку міцності деталі здійснюють по загальному коефіцієнту міцності

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} \geq [n] = (1,7 \dots 2,5),$$

де: n_{σ} – коефіцієнт запасу міцності по нормальним напруженням;

n_{τ} – коефіцієнт запасу міцності по дотичним напруженням.

На міцність деталі значно впливають «концентратори напружень», тобто, зміна геометрії (шпоночці канавки, отвори, місця переходу діаметрів і т.д.), яка обумовлює різке збільшення напружень. Також важливу роль грає в міцності стан поверхні. У випадку чистої й тонко обробленої поверхні межа утоми зростає. Тому для підвищення міцності необхідно домагатися високої чистоти поверхні, особливо поблизу концентрації напружень. Крім того необхідно враховувати ще так званий масштабний фактор, громіздкі деталі мають великий запас енергії деформації, яка спричиняє процес руйнування.

Для будь-якої деталі чи вузла механізму обов'язково виконують розрахунки на міцність.

Дійсний запас міцності при інженерних розрахунках визначається з урахуванням виду деформації, механічних властивостей, форми й геометричних розмірів, стану поверхні й режиму навантаження деталі.

Жорсткість – здатність тіла або конструкції пручатися утворенню деформації. Розрізняють власну жорсткість деталі, обумовлену

деформаціями всього матеріалу деталі, і контактну жорсткість, яка пов'язана з деформаціями тільки поверхневих шарів матеріалу деталі в зоні контакту з іншою деталлю.

Кількісно жорсткість урахується коефіцієнтом жорсткості, що визначається відношенням силового фактора до деформації, викликаной цим силовим фактором.

Крім безпосередньо жорсткості використовується поняття твердість.

Твердість – здатність матеріалу пручатися прониканню стороннього предмета. В залежності від способу виміру розпізнають твердість по:

1. HB - твердість по Брінелю;
2. HRC - твердість по Роквелу;
3. HV - твердість по Вікерсу.

Зносостійкість – це властивість матеріалу чинити опір зносу при відповідних умовах тертя, оцінюване величиною, зворотної швидкості зношування або інтенсивності зношування.

Зносостійкість залежить від складу і структури матеріалу, вихідної жорсткості, шорсткості і технології обробки деталі.

Поняття зносостійкості прямо пов'язане з поняттям зношування. Зношування – зміна розмірів, форми, маси або стану поверхні виробу або інструмента внаслідок руйнування (зношування) поверхневого шару деталі при терті.

Розрізняють наступні види зношування:

1. Механічне, яке виникає при терті двох деталей;
2. Абразивно-механічне, виникає внаслідок влучення в зону тертя абразивних часток;
3. Корозійно-механічне, якщо ці частки є продуктом корозії.

Для підвищення зносостійкості в техніці використовують наступні методи: раціональний підбор матеріалів пар тертя, таким чином, щоб швидше зношувалася більш дешева деталь; забезпечення оптимального режиму змащення; застосування різних методів термообробки.

Теплостійкість – здатність вузла чи механізму працювати в заданому температурному режимі протягом заданого терміну служби.

Для забезпечення теплостійкості необхідно щоб при роботі машини виділювана кількість тепла не перевищувала кількість тепла, що відводиться.

Розрахунки на теплостійкість зводяться до визначення теплового балансу виробу. Якщо тепловий баланс не виконується, то назначають різні варіанти охолодження механізму (збільшують площу тепловіддачі,

застосовують примусове повітряне чи рідинне охолодження).

Вібростійкість – здатність конструкцій працювати в потрібному діапазоні режимів коливань без появи неприпустимих частот коливань.

Основне розповсюдження в машинах має:

- вимушені коливання, які виникають в наслідок дії періодичних зовнішніх сил (не зрівноважування деталей, що здійснюють обертальний рух, зміни сили в компресорах і т.п.);

- автоколивання, які виникають внаслідок збуджуючої сили визвано самими.

3. Критерії надійності деталей машин

Надійність деталей машин суттєво залежить від того, наскільки близько режим роботи деталей по напруженням, швидкостям і температурам до граничних, тобто від запасів по основним критеріям працездатності.

Надійність – властивість виробу виконувати в деякий період часу свої функції, зберігаючи експлуатаційні показники. Надійність виробів обумовлюється їх безвідмовністю, довговічністю, ремонтпридатністю та здатністю зберігатися.

Безвідмовність – властивість зберігати працездатність за період заданого терміну роботи без вимушених переривів.

Довговічність – властивість виробу зберігати працездатність до граничного стану з необхідними параметрами для ремонту і технологічного обслуговування.

Ремонтпридатність – придатність виробу до попередження, знаходження та усунення відказів та несправностей способом проведення технічного обслуговування і ремонту.

Здатність зберігатися – властивість виробу зберігати відповідні експлуатаційні показники після встановленого терміну зберігання і транспортування.

4. Контрольні питання для самоперевірки

1. Основні поняття (деталь, складальна одиниця, вузол, машина).
2. Які існують машини?
3. Які види деформацій сприймають деталі?
4. Основні критерії працездатності деталей.

5. Основні критерії працездатності виробів.
6. Що таке міцність деталі?
7. Що таке втомливість матеріалу (критерій)?
8. Надійність і чим вона обумовлюється?

Розділ II. МЕХАНІЧНІ ПЕРЕДАЧІ

Робочі машини приводяться в рух двигунами (в основному електродвигуни). Вони характеризуються високою швидкохідністю і мають незначну величину крутного моменту. Тому виникає необхідність узгодження режимів роботи двигуна й виконавчого органу машини. Для цього і використовуються механічні передачі.

Механічними передачами або просто передачами називаються механізми, які перетворюють кінематичні і силові параметри двигуна та передають їх до виконавчих органів машини.

Отже, пристрій, що служить для передачі потужності $N, кВт$ від двигуна (Д.) до виконавчих органів машини (В.О.М.) називають механічними передачами (М.П.).

Таким чином, загальний схема приводу має вигляд

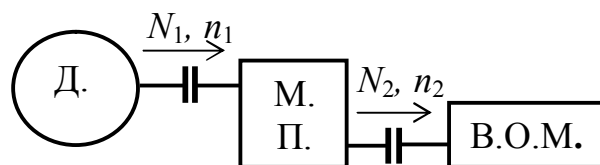


Рис. 2.1 Схема приводу

В залежності від того який принцип закладено в основу передачі руху, механічні передачі розподіляють на дві групи:

- передачі зачепленням (зубчасті, черв'ячні, гвинтові, ланцюгові);
- передачі тертям (фрикційні і пасові).

Основними параметрами, які характеризують передачі є потужність $N, кВт$ та швидкохідність, яка може бути виражена частотою обертання валу $n, хв\lambda^{-1}$ чи кутовою швидкістю $\omega, 1/с$.

До похідних характеристик передач відносять, коефіцієнт корисної дії (ККД) $\eta = \frac{N_2}{N_1}$ та передаточне відношення (чи число) $i(u) = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$.

Передачі в яких $u > 1$ називають силовими (редуктори). Вони характеризуються збільшенням обертового моменту в u раз і відповідно зменшенням швидкохідності в u раз.

Передачі в яких $u < 1$ називають мультиплікатори. Вони характеризуються збільшенням швидкохідності в u раз і відповідно зменшенням обертового моменту в u раз.

1. Циліндричні зубчасті передачі

1.1. Типи циліндричних передач

Циліндричні передачі передають обертальний момент між паралельними валами і розподіляються на передачі зовнішнього та внутрішнього зачеплення.

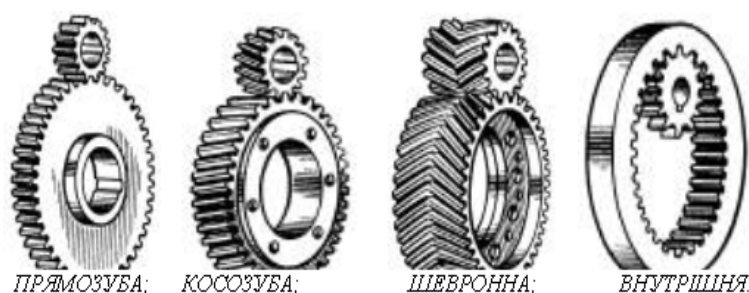


Рис. 2.2 Типи циліндричних передач

В залежності від розташування зубів передачі розподіляють на прямозубі, косозубі та шевронні.

Прямозубі колеса застосовують при невисоких і середніх швидкостях, коли динамічні навантаження невеликі, у планетарних, відкритих передачах, а також при необхідності осьового переміщення коліс.

Косозубі колеса мають більшу плавність ходу й застосовуються для відповідальних механізмів при середніх і високих швидкостях, але мають осьову силу в зачепленні, що вимагає посилення опорних вузлів передачі.

Шевронні колеса мають достоїнства косозубих коліс плюс урівноважені осьові сили, що дає можливість передавати значні обертальні моменти при невеликих габаритних розмірах передачі.

1.2 Геометричні параметри прямозубого зачеплення

Розглянемо прямозубу циліндричну передачу з евольвентним профілем зубів виготовлену без зміщення.

Менше із пари зубчатих коліс називають шестернею, а більше – колесом. Термін «зубчате колесо» являється загальним. Всі параметри, що мають відношення до шестерні позначаються індексом – 1, а до колеса – 2.

Основною геометричною характеристикою є модуль зачеплення – m , мм. Величина модуля зачеплення вибирається згідно стандарту.

Z_1, Z_2 – число зубів шестерні і колеса, відповідно. Мінімальне число зубів шестерні приймають не менше ніж 17 штук. В протилежному випадку буде мати місце підрізання зубів в процесі їх виготовлення.

$$h' = m \text{ – висота головки зуба.}$$

$$h'' = 1,25m \text{ – висота ніжки зуба.}$$

$$h = 2,5m \text{ – висота зуба.}$$

$$d_1 = mZ_1 \text{ – ділильний діаметр шестерні.}$$

$$d_2 = mZ_2 \text{ – ділильний діаметр колеса.}$$

$$d_{a1} = d_1 + 2m \text{ – діаметр вершин зубів шестерні.}$$

$$d_{a2} = d_2 + 2m \text{ – діаметр вершин зубів колеса.}$$

$$d_{f1} = d_1 - 2,5m \text{ – діаметр западин зубів шестерні.}$$

$$d_{f2} = d_2 - 2,5m \text{ – діаметр западин зубів колеса.}$$

$$a_w = \frac{d_1 + d_2}{2} \text{ – міжосьова відстань.}$$

$p = \pi m$ – крок зачеплення, відстань по ділильному колі між однойменними робочими профілями.

$$S = 1/2p \text{ – товщина зуба по ділильному колі.}$$

$$S_3 = 1/2p \text{ – ширина западини по ділильному колі.}$$

Δ – радіальний зазор.

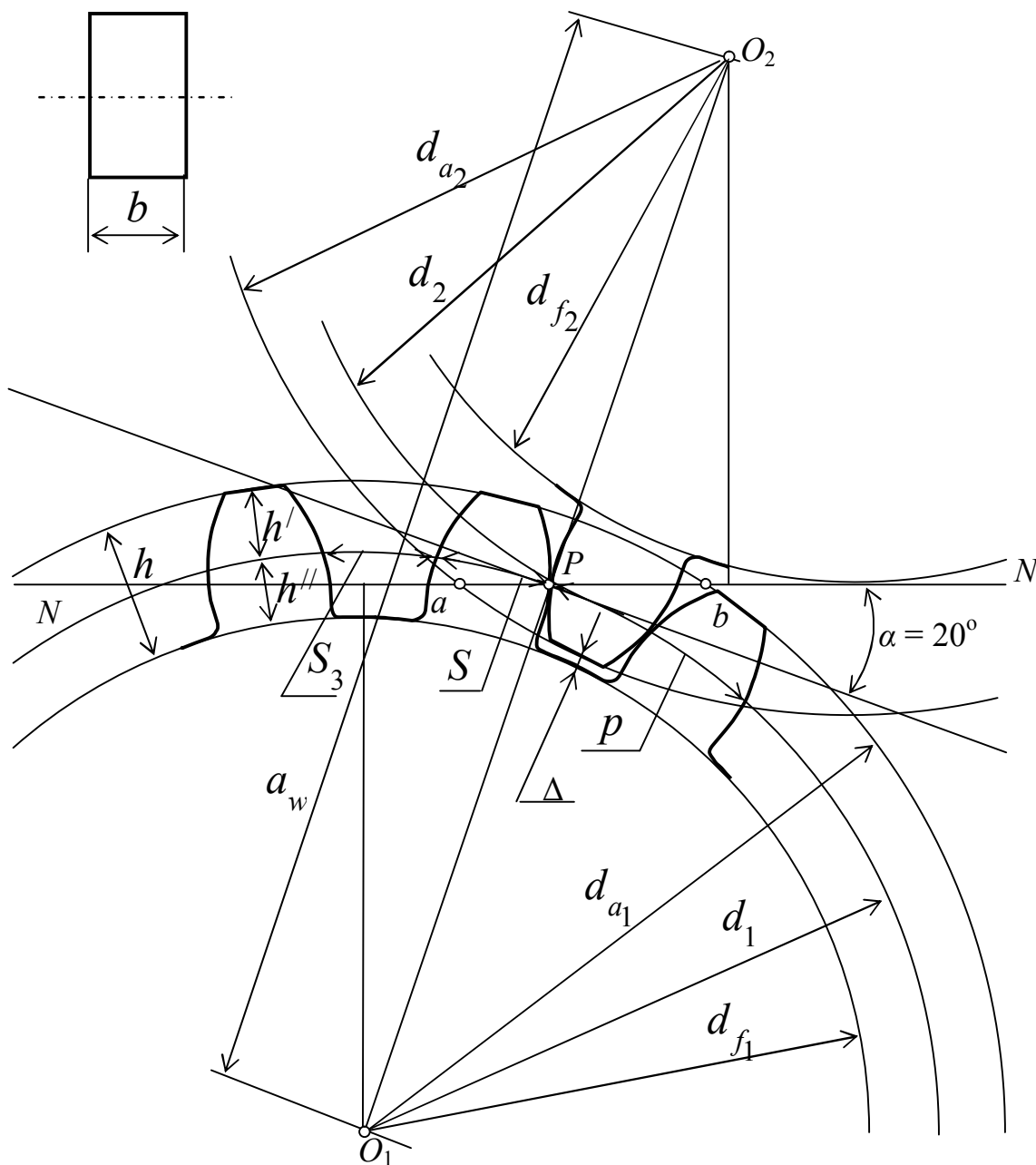


Рис. 2.3 Геометричні параметри прямозубого зачеплення

α – кут зачеплення. В основному кут зачеплення $\alpha = 20^\circ$.

b – ширина вінця зубчатого колеса.

$N - N$ – лінія передачі руху.

(ab) – довжина активної лінії зачеплення.

P – полюс зачеплення.

1.3. Особливості геометрії косозубих передач

Косозубими називають колеса в яких зубці розташовані під деяким кутом β відносно осі обертання колеса. Із збільшенням кута нахилу зуба збільшується довжина лінії контакту, а також збільшується кількість пар зубів в зоні перекриття, що підвищує швидкісні характеристики передачі і можливість передавати значні навантаження. Але при цьому пропорційно тангенсу цього самого кута збільшується осьова складова навантаження. Тому цей кут обмежують в межах 8 – 15 градусів.

У разі передачі великої потужності при великому числі оборотів застосовують шевронні колеса. По суті, це здвоєні косозубі колеса із стрічним нахилом зубів. Вони виконуються з суцільним шевроном (збільшення навантажувальної здатності на 20...30%, але складність виготовлення у зв'язку із застосуванням спеціального зубонарізного інструменту) і з розрізним шевроном.

Геометричні параметри косозубих і шевронних коліс вимірюються в двох площинах. В площині $(n-n)$ нормального перетину, яка перпендикулярна зубу і в площині $(t-t)$ перпендикулярної осі обертання колеса.

Профіль косоного зуба в нормальному перетині еквівалентний профілю прямозубого колеса. Тому при розрахунках використовують поняття еквівалентне прямозубе колесо, колесо в якому форма зуба еквівалентна формі косоного зуба в перетині $(n-n)$.

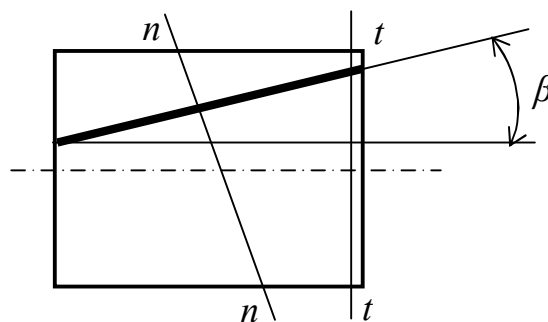


Рис. 2.4 Особливості геометрії косозубих коліс

Діаметр еквівалентного колеса та число його зубів визначають рівнянням

$$d_v = \frac{d}{\cos^2 \beta}, \text{ і } Z_v = \frac{Z}{\cos^3 \beta}.$$

В торцевому перетині ($t-t$) параметри косоного зуба змінюються в залежності від β .

Геометричні параметри визначаються співвідношенням:

окружний крок в торцевому перетині $p_t = p_n / \cos \beta$;

окружний модуль в торцевому перетині $m_t = m_n / \cos \beta$;

ділительний діаметр $d = m_t Z = m_n Z / \cos \beta$.

де p_n, m_n – крок і модуль в нормальному перетині.

Інші геометричні параметри визначаються аналогічно прямозубій передачі.

Передаточне число передачі визначають рівнянням

$$u = \frac{d_2}{d_1} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

1.4 Розрахунок на міцність циліндричних зубчастих передач

Основні види руйнування зубів коліс.

Згідно експлуатаційним дослідженням до найбільш частих поломок при роботі передач відноситься: викришування, абразивне зношування й заїдання поверхонь зубів, а також злам зуба. Викришування, абразивне зношування й заїдання обумовлені поверхневою міцністю, а злам – об'ємною міцністю зубів.

Викришування – найбільш серйозний і розповсюджений дефект навіть для закритих добре змащених й захищених від забруднення передач. На робочих поверхнях з'являються невеликі поглиблення, які потім перетворюються в раковини, що приводить до підвищення контактного тиску й порушення роботи передачі. Викрашування носить характер втоми і викликане контактними напруженнями. Для запобігання викришування необхідно підвищувати твердість матеріалу термообробкою або підвищувати ступені точності передачі, а також правильно призначати розміри з розрахунку на утому по контактним напруженням.

Абразивне зношування є основною причиною виходу з ладу передач при поганому змащенні. Це, у першу чергу, відкриті передачі, а також закриті, що перебувають у запиленому середовищі. В наслідок абразивного

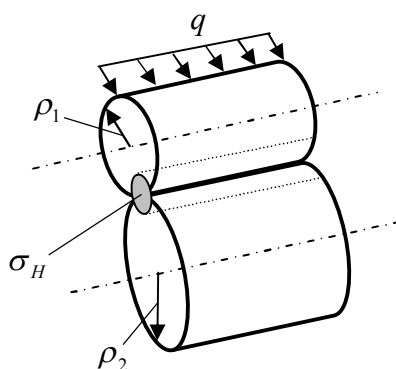
зношування підвищуються зазори в зачепленні, підсилюються шум, вібрація, динамічні перевантаження, змінюється форма зуба, зменшуються розміри поперечного перерізу, а значить і міцність зуба. Заходи попередження зношування полягають в підвищенні твердості поверхні зубів, захисту від забруднення, застосування спеціальних мастил.

Заїдання відбувається у високонавантажених і високошвидкісних передачах. У місці контакту зубів виникає підвищена температура, що приводить до молекулярного зчеплення металу з наступним відривом. Вирвані частки потім дряпають поверхні тертя. Звичайно заїдання відбуваються внаслідок видавлювання масляної плівки між зубів при спільній дії високих тисків і швидкостей. Заходи попередження аналогічні, що й при абразивному зношуванні.

Злам зуба – явище, що зустрічається рідше, але є не менш небезпечний вид поломок, пов'язаний з напругами вигину. Злам зуба може привести до досить тяжких наслідків аж до руйнування валів і підшипників, а іноді й усього механізму. Для попередження зламу проводиться розрахунок зуба по напруженнях вигину.

Контактні напруження

Контактні напруження виникають в місці дотику двох тіл в тих випадках, коли розміри площадки дотику малі порівняно до розмірів тіл. В зв'язку з тим, що контактні напруження обумовлюють основні види руйнування робочих поверхонь зубів, основним розрахунком є розрахунок на міцність по контактним напруженням. Математичною моделлю для визначення величини контактних напружень в евольвентних профілях зубів є стискання двох циліндрів. Відповідна модель може врахувати, як



зовнішнє зачеплення так і внутрішнє (циліндр в циліндрі, внутрішній контакт).

q – питоме погонне навантаження, яке обумовлює стискання циліндрів.

ρ_1, ρ_2 – радіуси кривизни циліндрів.

σ_H – контактні напруження.

Рис. 2.5 Математична модель

Згідно математичній моделі величина контактних напружень в першому наближенні визначається рівнянням Герца

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{E_{np} q}{\rho_{np}}},$$

де: E_{np} – приведений модуль пружності матеріалів циліндрів;
 ρ_{np} – приведений радіус кривизни циліндрів.

Якщо циліндри виготовлені з різних матеріалів то величина приведенного модуля пружності визначається рівнянням

$$E_{np} = \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2},$$

а приведений радіус кривизни

$$\rho_{np} = \frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2}.$$

Знак + відповідає зовнішньому контакту, знак – внутрішньому контакту.

Зусилля в зачепленні прямозубої передачі

В процесі передачі обертального моменту T_1 від першого колеса до другого в зоні зачеплення виникає сила нормального тиску \vec{F}_n , яка завжди направлена по нормалі ($N-N$) до евольвентних профілів зубів.

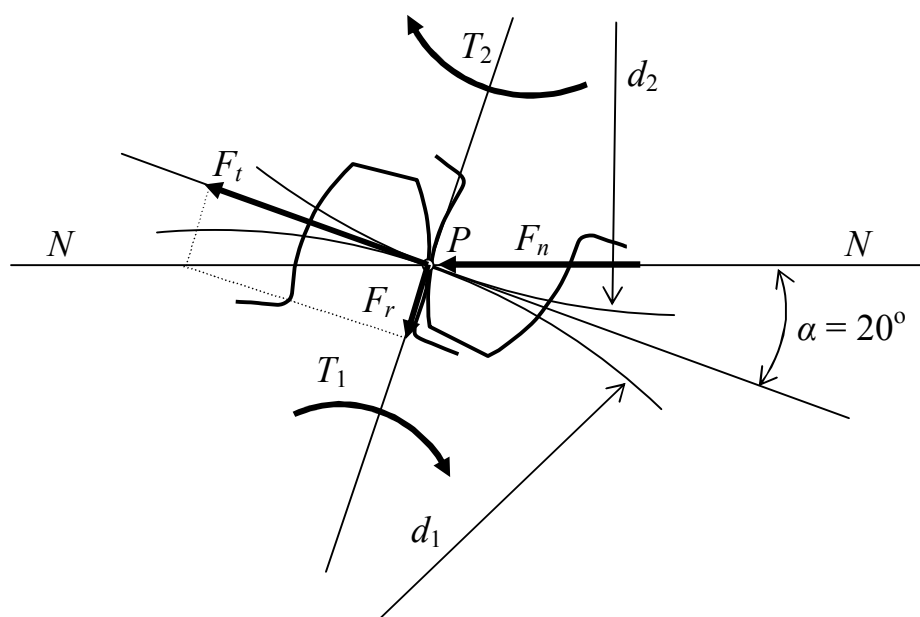


Рис. 2.6. Зусилля в зачепленні прямозубої передачі

Розкладемо силу нормального тиску на дві складові: окружну силу F_t , яка направлена по дотичній до ділительного кола зубчатого колеса; радіальну силу F_r , яка направлена по радіусу до центру обертання зубчатого колеса.

Розглянемо рівновагу першого колеса відносно центру його обертання у вигляді суми моментів всіх сил

$$F_t \frac{d_1}{2} - T_1 = 0,$$

звідки знаходимо величину окружної сили

$$F_t = \frac{2T_1}{d_1}.$$

Величину радіальної сили визначаємо з відповідного силового трикутника

$$F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha.$$

Враховуючи, що в зоні зачеплення має місце рівновага то на друге колесо діють відповідні сили за модулем, але направлені в протилежну сторону.

Розрахунок зубів по контактним напруженням

Розв'язуючи рівняння Герца з урахуванням геометричних та силових характеристик прямозубої передачі отримуємо формулу для розрахунку величини контактних напружень навколо полюсної зони, де відповідні напруження максимальні.

Величину питомого погонного навантаження визначаємо рівнянням

$$q = \frac{F_n K_H}{b},$$

де: $K_H = K_{H\beta} K_{H\alpha} K_{H\nu}$ – коефіцієнт розрахункового навантаження; $K_{H\beta}$ – коефіцієнт враховуючий нерівномірність розподілення навантаження по довжині зуба; $K_{H\alpha}$ – коефіцієнт враховуючий нерівномірність розподілення навантаження між зубцями; $K_{H\nu}$ – коефіцієнт динамічності.

Враховуючи, що $F_n = F_t / \cos \alpha$, а також $F_t = 2T_1 / d_1$ відповідно маємо

$$q = \frac{FK_{Ht}}{b \cos \alpha} = \frac{2T_1 K_H}{d_1 b \cos \alpha}.$$

Радіуси кривизни першої та другої евольвенти в навколо полюсної зони визначаються рівняннями

$$\rho_1 = \frac{1}{2}d_1 \sin \alpha \quad \text{і} \quad \rho_2 = \frac{1}{2}d_2 \sin \alpha .$$

Приведений радіус кривизни буде мати вигляд

$$\rho_{np} = \frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{d_1 \sin \alpha} \pm \frac{2}{d_2 \sin \alpha} = \frac{2}{d_1 \sin \alpha} \left(\frac{u \pm 1}{u} \right) .$$

Підставивши відповідні параметри в рівняння Герца отримуємо формулу для розрахунку величини контактних напружень яку запишемо у вигляді умови міцності

$$\sigma_H = 1,18 \sqrt{\frac{E_{np} T_1 K_H}{d_1^2 b \sin 2\alpha} \left(\frac{u \pm 1}{u} \right)} \leq [\sigma_H] .$$

Знак $+$ відповідає зовнішньому зачеплені коліс, а знак $-$ внутрішньому.

Розв'язуючи отримане рівняння відносно міжосьової відстані з урахуванням, що $T_1 = T_2 / u$, $d_1 = 2a_w / (u \pm 1)$ і вводимо коефіцієнт ширини вінця зубчатого колеса по міжосьовій відстані $\psi_{ba} = b / a_w$, а також коефіцієнт ширини вінця зубчатого колеса по ділильному діаметру $\psi_{bd} = b / d = 0,5\psi_{ba} (u \pm 1)$ отримаємо рівняння для розрахунку a_w

$$a_w = 0,85(u \pm 1) \sqrt[3]{\frac{E_{np} T_2 K_{H\beta}}{[\sigma_H]^2 u^2 \psi_{ba}}} .$$

Дане рівняння використовують в проектувальних розрахунках, так як габаритні розміри передачі визначаються величиною міжосьової відстані.

Розрахунок зубів по напруженням згину.

Зуб представляють як консольну балку змінного перерізу, навантажену окружною й радіальною силами. Окружна сила прагне зігнути зуб, викликаючи максимальні напруження згину в небезпечному кореневому перерізі, а радіальна сила стискає зуб.

Таким чином величина напружень в кореневому перетині зуба визначається, як сума напружень згинання та стискання

$$\sigma_F = \frac{F_t l}{W} - \frac{F_r}{S} ,$$

де: W – момент опору кореневого перетину зуба згинанню; S – площа кореневого перетину зуба.

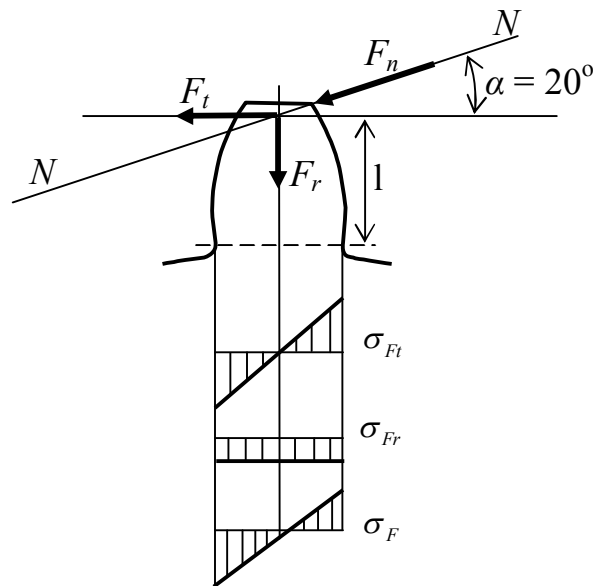


Рис. 2.7. Розрахункова схема

Розв'язуючи дане рівняння з урахуванням геометричних та силових характеристик прямозубої циліндричної передачі отримаємо рівняння для визначення величини згинаючих напружень яке запишемо у вигляді умови міцності

$$\sigma_F = \frac{F_t K_F Y_F}{bm} \leq [\sigma_F],$$

де: $K_F = K_{F\beta} K_{F\alpha} K_{FV}$ – коефіцієнт розрахункового навантаження (фізичний смисл складових коефіцієнтів аналогічний K_H); Y_F – коефіцієнт форми зуба.

Дане рівняння використовують тільки в перевірочних розрахунках.

Особливості розрахунку косозубих передач

Визначення зусиль в зачепленні. Розкладемо силу нормального тиску на три складові: окружну силу F_t , яка направлена по дотичній до ділильного кола зубчатого колеса; радіальну силу F_r , яка направлена по радіусу до центру обертання зубчатого колеса; осьову силу F_a , яка направлена паралельно осі обертання валу.

З рівняння рівноваги зубчатого колеса відносно центру його обертання знаходимо величину окружної сили

$$F_t = \frac{2T_1}{d_1} = \frac{2T_2}{d_2}.$$

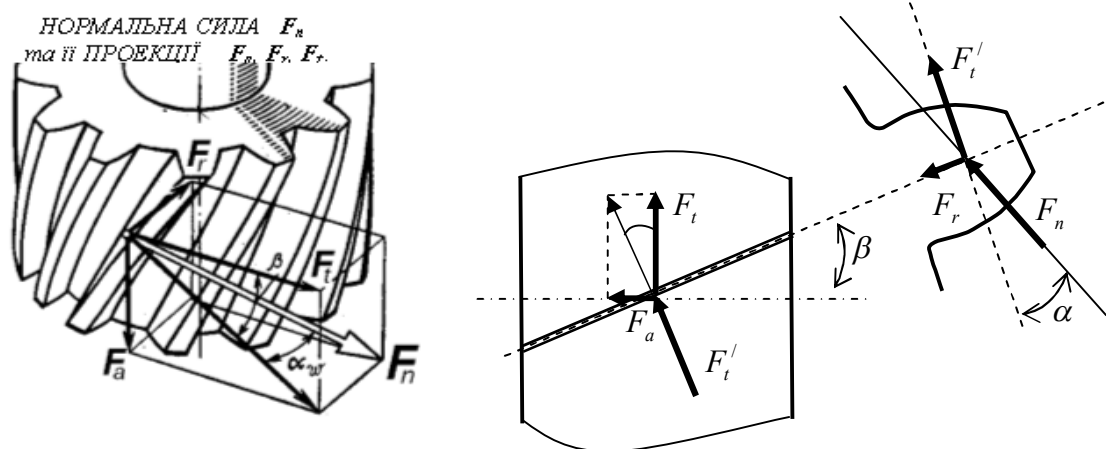


Рис. 2.8. Зусилля в зачепленні косозубого колеса

Величину радіальної та осьової сили визначаємо з відповідних силових трикутників

$$F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha / \cos \beta ;$$

$$F_a = F_t \operatorname{tg} \beta .$$

Розрахунок на міцність по контактним напруженням. Розв'язуючи рівняння Герца з урахуванням геометричних та силових характеристик косозубої циліндричної передачі отримаємо рівняння для визначення величини контактних напружень яке запишемо у вигляді умови міцності

$$\sigma_H = 1,18 Z_{H\beta} \sqrt{\frac{E_{np} T_1 K_H}{d_1^2 b \sin 2\alpha} \left(\frac{u \pm 1}{u} \right)} \leq [\sigma_H],$$

де $Z_{H\beta}$ – коефіцієнт підвищеної міцності косозубих передач по контактним напруженням.

Розв'язуючи отримане рівняння відносно міжосьової відстані з урахуванням, що $Z_{H\beta} \approx 0,85$, $T_1 = T_2 / u$, $d_1 = 2a_w / (u \pm 1)$ і $\psi_{ba} = b / a_w$, а також $\psi_{bd} = b / d = 0,5\psi_{ba} (u \pm 1)$ отримаємо рівняння для розрахунку a_w

$$a_w = 0,75 (u \pm 1)^3 \sqrt{\frac{E_{np} T_2 K_{H\beta}}{[\sigma_H]^2 u^2 \psi_{ba}}} .$$

Отримане рівняння використовують в проектувальних розрахунках.

Розрахунок на міцність по напруженням згинання. Розв'язуючи рівняння, яке було отримане для прямозубої передачі при згинанні, з урахуванням геометричних та силових характеристик косозубої

циліндричної передачі отримаємо рівняння для визначення величини напружень згинань яке запишемо у вигляді умови міцності

$$\sigma_F = \frac{F_t Z_{F\beta} K_F Y_F Y_\beta}{b m_n} \leq [\sigma_F],$$

де: $Z_{F\beta}$ – коефіцієнт підвищеної міцності косозубих передач по напруженням згинання; m_n – модуль в нормальному перетині; Y_β – коефіцієнт враховуючий похибку спрощеної розрахункової схеми.

Дане рівняння використовують тільки в перевірочних розрахунках.

2. Конічні зубчасті передачі

2.1. Основні відомості

Конічні зубчасті колеса використовуються в передачах, які передають обертаючий момент між валами з пересічними осями. На практиці найбільш поширені передачі в яких осі валів розташовані під кутом 90° .

В залежності від розташування зубців на вінці зубчастого колеса передачі бувають: прямозубими (Рис. 2.9,а); косозубими (Рис. 2.9,б) та з круговим зубом (Рис. 2.9,в).

Профіль зуба – евольвента.

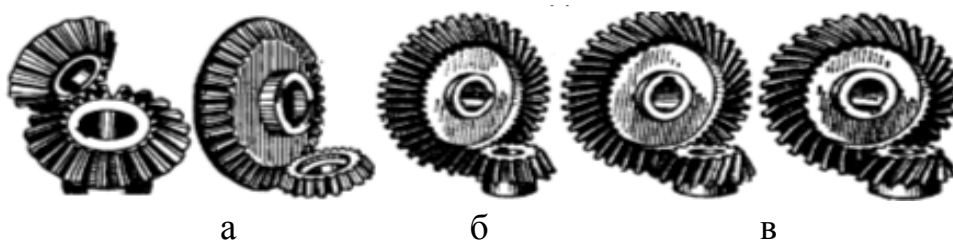


Рис. 2.9 Конічні зубчасті передачі

Переваги конічних передач:

- можливість передавати крутний момент під певним кутом.

Недоліки конічних передач:

- менша навантажувальна здатність, до 0,85 циліндричних;

- складність виготовлення;

- наявність значних осьових зусиль, що ускладнює конструкцію опорних вузлів.

2.2. Геометричні параметри конічної передачі

Площа поперечного перетину зуба змінюється в залежності від розглянутого перетину. Тому розглядають три основні торцеві перетини: зовнішнє, внутрішнє і середнє. Розміри, що мають відношення до зовнішнього торцевого перетину позначаються індексом e , а розміри середнього перетину m . Зовнішні розміри вказують на робочих кресленнях (зручно вимірювати). Розміри середнього перетину використовують при силових розрахунках передачі.

До основних геометричних параметрів передачі відносять:

δ_1, δ_2 – кути ділительних конусів;

R_e, R_m – зовнішня та середня конусна відстань;

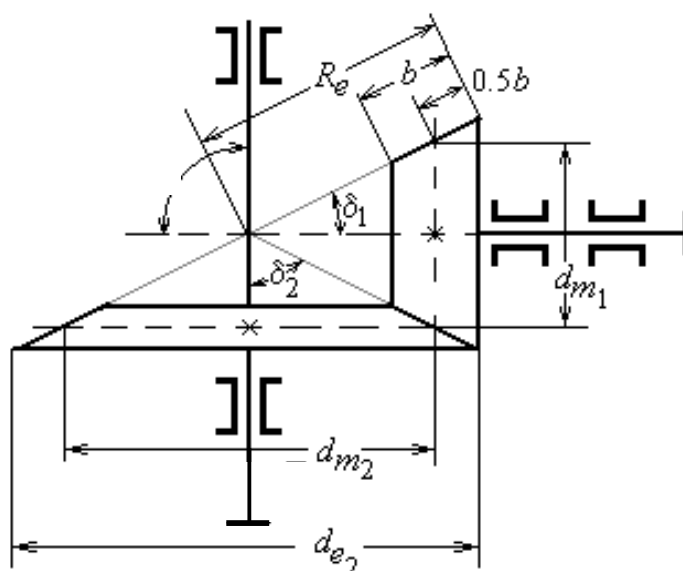


Рис. 2.10 Геометричні параметри конічних коліс

b – ширина вінця конічного зубчатого колеса;

d_m – діаметр основи ділительного конуса в середньому перетині;

d_e – діаметр основи ділительного конуса в зовнішньому перетині.

Залежність розмірів в середньому та зовнішньому торцевому перетині визначається співвідношенням:

$$R_e = R_m + 0,5b ;$$

$$d_e = d_m \frac{R_e}{R_m}; \quad (d_m = m_{tm} Z - \text{прямозуба передача})$$

$$m_{te} = m_{tm} \frac{R_e}{R_m}.$$

Передаточне число

$$u = \frac{d_2}{d_1} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1},$$

а при умові, що $\Theta = \delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$

$$u = \operatorname{tg} \delta_2 = \operatorname{ctg} \delta_1.$$

Таким чином величину передаточного числа використовують для визначення кутів ділительних конусів.

2.3. Зусилля в зачепленні прямозубої конічної передачі

Сили в конічній передачі діють аналогічно циліндричній, але в наслідок перпендикулярності осей радіальна сила на шестерні аналогічна осьовій силі для колеса і навпаки, а окружна сила при переході від шестерні до колеса тільки міняє знак.

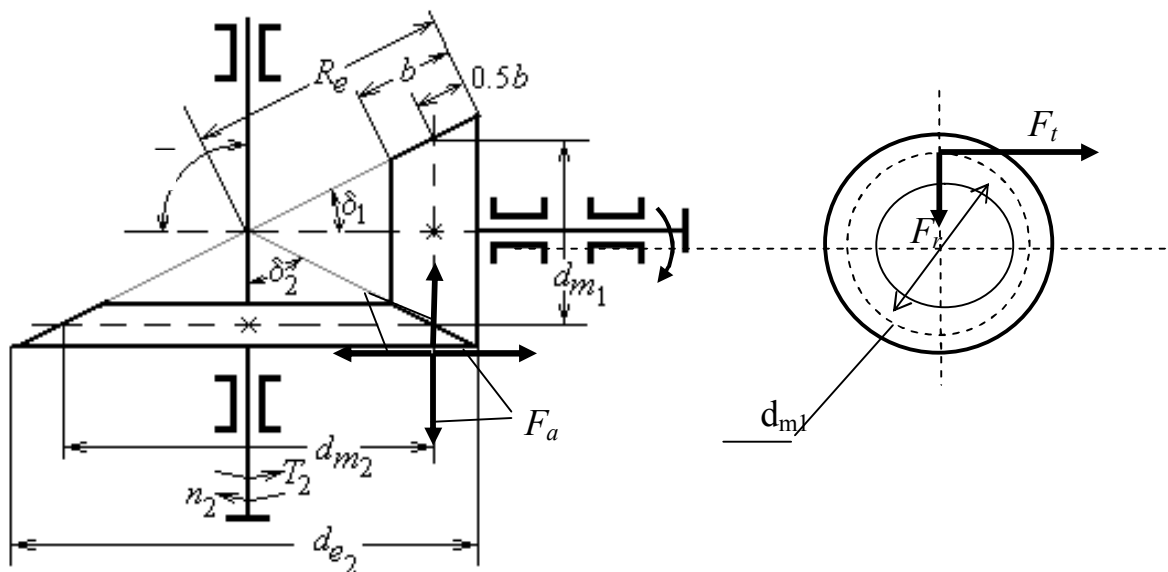


Рис. 2.11. Зусилля в зачепленні конічної передачі

Визначаємо зусилля в зачепленні на колесі:

$$\begin{aligned} \text{окружна сила} & F_t = \frac{2T_2}{d_{m2}}; \\ \text{радіальна сила} & F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha \cos \delta_2; \\ \text{осьова сила} & F_a = F_t \operatorname{tg} \alpha \sin \delta_2. \end{aligned}$$

2.4. Розрахунок на міцність прямозубої конічної передачі

При розрахунках на міцність використовують параметри еквівалентного колеса. Форма зуба в нормальному перетині конусом утворююча якого перпендикулярна ділильному конусу еквівалентна прямозубому колесу.

Розрахунок зубів прямозубої конічної передачі по контактним напруженням базується на розв'язуванні рівняння Герца з урахуванням геометричних та силових характеристик передачі.

Підставивши відповідні параметри отримуємо формулу для розрахунку величини контактних напружень у вигляді умови міцності

$$\sigma_H = 1,18 \sqrt{\frac{E_{np} T_1 K_H}{v_H d_{m1}^2 b \sin 2\alpha} \left(\frac{\sqrt{u^2 + 1}}{u} \right)} \leq [\sigma_H],$$

де: v_H – експериментальний коефіцієнт, який залежить від твердості зубів.

Розв'язуючи отримане рівняння відносно діаметру основи ділильного конуса в зовнішньому торцевому перетині отримаємо залежність яку використовують в проектному розрахунку

$$d_{e2} = 1,173 \sqrt{\frac{E_{np} T_2 K_{H\beta}}{[\sigma_H]^2 v_H (1 - K_{be}) K_{be}}},$$

де: K_{be} – коефіцієнт ширини зубчастого вінця відносно зовнішньої конусної відстані. $K_{be} = b/R_e$, рекомендують вибирати $K_{be} \leq 0,3$.

Для розрахунку конічної передачі на міцність по напруженням згинання розглядають розрахункову схему в середньому перетині, аналогічну розрахунковій схемі циліндричної прямозубої передачі.

Таким чином, отримаємо рівняння для визначення величини згинаючих напружень у вигляді умови міцності

$$\sigma_F = \frac{F_t K_F Y_F}{v_F b m_{im}} \leq [\sigma_F].$$

Рівняння використовують тільки в перевірочних розрахунках.

3. Черв'ячні передачі

3.1. Основні відомості

Черв'ячна передача відноситься до передач зачепленням осі валів якої перехрещуються в просторі. Вона складається з черв'яка 1 на якому нарізана гвинтова лінія та черв'ячного колеса 2 із зубами відповідної специфічної форми. Рух в черв'ячній передачі передається по принципу гвинтової пари.

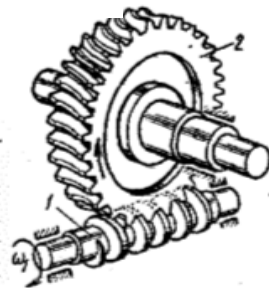


Рис. 2.12. Черв'ячна передача

Переваги черв'ячних передач:

- велике передаточне відношення (до 80);
- можливість передавати значне навантаження;
- невеликі габаритні розміри;
- плавність і безшумність ходу.
- само гальмова передача, тобто рух передається в силових передачах тільки від черв'яка до колеса.

Недоліки черв'ячних передач:

- низький ККД ($0,7 \div 0,85$) обумовлений тертям сковзання в зоні зачеплення;
- нагрівання передачі в процесі роботи;
- складність виготовлення та необхідність застосовувати дорогі антифрикційні матеріали.

3.2. Геометричні параметри передачі

Черв'яки. По формі поверхні, на якій утворюється різьба черв'яки розподіляються на: циліндричні та глобоїдні.

По формі профілю різьби в осьовому перетині на: прямолінійні та криволінійні.

Найбільш розповсюдженні циліндричні черв'яки. В черв'яків з прямолінійним профілем витки в торцевому перетині окреслені архімедовою спіраллю (звідки і назва архімедовий черв'як). Найбільш поширені на практиці високо тверді черв'яки ($HRC > 45$) з евольвентним профілем в торцевому перетині з шліфованими витками, що значно зменшує тертя в зоні зачеплення.

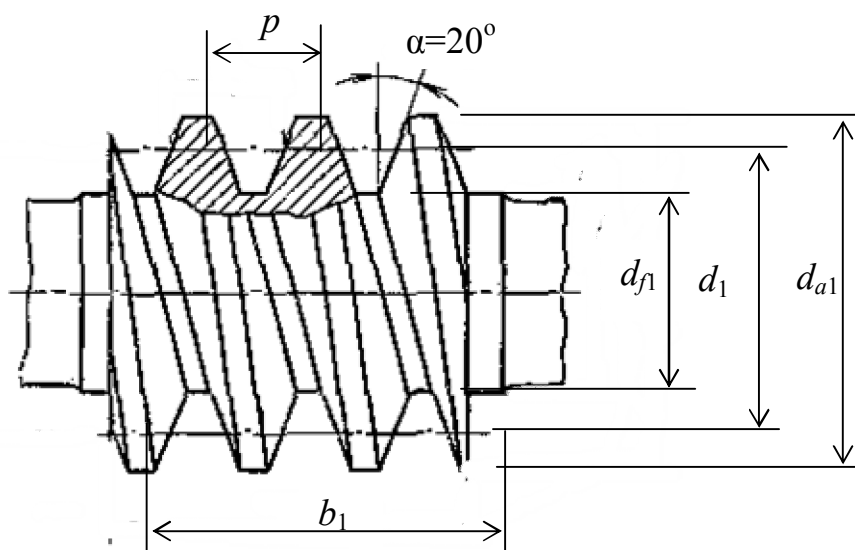


Рис. 2.13. Геометрія черв'яка

Основною геометричною характеристикою є:

q – коефіцієнт діаметра черв'яка, стандартна величина;

m – модуль зачеплення, теж стандартна величина.

Z_1 – число заходів витків черв'яка. Згідно стандарту $Z_1 = 1; 2; 4$.

$d_1 = qm$, ділительний діаметр черв'яка.

$d_{a1} = d_1 + 2m$, діаметр вершин витків черв'яка.

$d_{f1} = d_1 - 2,4m$, діаметр западин витків черв'яка.

$p = \pi m Z_1$, крок зачеплення.

α – профільний кут ($\alpha = 20^\circ$).

γ – кут підйому гвинтової лінії, $\operatorname{tg} \gamma = Z_1 / q$.

b_1 – довжина нарізної частини черв'яка.

Черв'ячні колеса. В основному вінець черв'ячного колеса виготовляють з антифрикційного матеріалу, бронзових сплавів, а інколи з латуні та чавуну. Найбільш оптимальна антифрикційна пара «сталь – бронза».

Зубчатий вінець, як правило кріпиться на порівняно дешевій сталевій чи чавунній маточині. В деяких випадках черв'ячні колеса виготовляються повністю ливарним способом з чавуну. «Сталь – чавун» теж є антифрикційною парою.

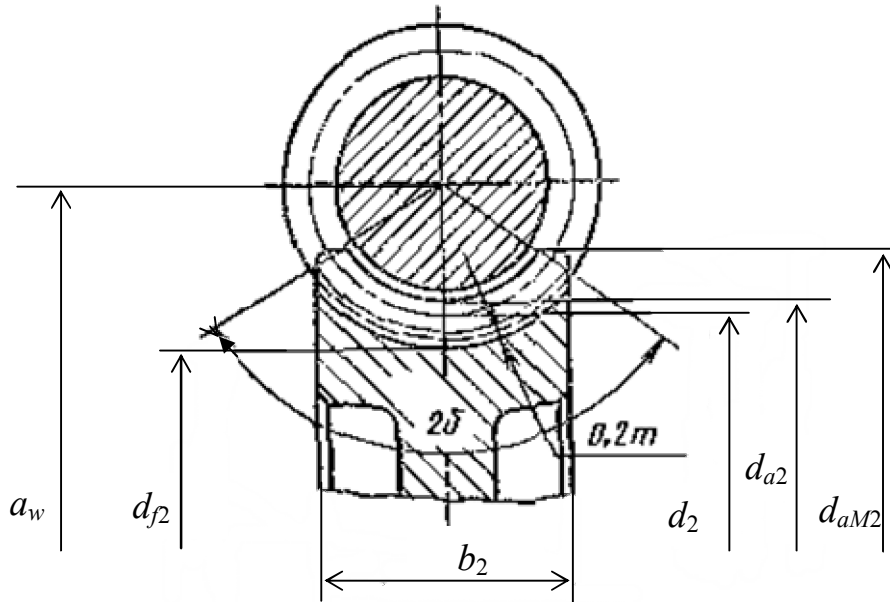


Рис. 2.14. Геометрія черв'ячного колеса

Z_2 – число зубів черв'ячного колеса. По умові не підрізання зубів $Z_2 \geq 28$.

$d_2 = Z_2 m$, ділительний діаметр колеса.

$d_{a2} = d_2 + 2m$, діаметр вершин зубів черв'ячного колеса.

$d_{f2} = d_2 - 2,4m$, діаметр западин зубів черв'ячного колеса.

$a_w = 0,5(q + Z_2)m$, міжосьова відстань.

2δ – кут обхвату черв'яка колесом. Для силових передач $2\delta \approx 100^\circ$.

b_2 – ширина вінця колеса.

d_{aM2} – максимальний діаметр колеса.

Параметри b_2 і d_{aM2} визначають в залежності від Z_1

Z_1	1	2	4
d_{aM2}	$\leq d_{a2} + 2m$	$\leq d_{a2} + 1,5m$	$\leq d_{a2} + m$
b_2	$\leq 0,75d_{a1}$	$\leq 0,75d_{a1}$	$\leq 0,67d_{a1}$

3.3. Кінематичні параметри передачі

В черв'ячних передачах лінійні швидкості точок дотику черв'яка і

черв'ячного колеса не співпадають, як це має місце в циліндричних передачах. Тобто, в процесі передачі руху витки черв'яка ковзають по зубам черв'ячного колеса.

Швидкість сковзання направлена по дотичній до гвинтової пари і визначається рівнянням

$$V_c = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = V_1 / \cos \gamma.$$

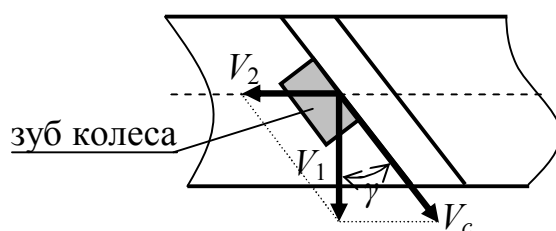


Рис. 2.15. Розподілення швидкостей в зоні зачеплення

Передаточне відношення черв'ячної передачі знаходять аналогічно циліндричній, але з урахуванням сковзання не може бути виражено відношенням ділільних діаметрів, так як лінійні швидкості не співпадають, відповідно

$$u = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Очевидно, що при $Z_1 = 1$ можна отримати велике передаточне відношення, але наявність значних сил тертя значно знижує ККД до 0,7. При $Z_1 = 2 \div 4$, передаточне відношення зменшується, проте зростає ККД до 0,85, що пов'язано із зменшенням тертя за рахунок зростання кута тертя.

3.4. Зусилля в зачепленні

Силу нормального тиску, яка виникає в процесі передачі крутного моменту від черв'яка до черв'ячного колеса розкладаємо на три складові, окружну, радіальну і осьову.

Враховуючи, що осі валів перехрещуються в просторі то відповідно окружна сила черв'яка дорівнює осьовій силі черв'ячного колеса, а окружна сила колеса дорівнює осьовій силі черв'яка. Із відповідних рівнянь рівноваги у вигляді суми моментів відносно осей обертання визначаємо зусилля в зачепленні

$$F_{t1} = F_{a2} = \frac{2T_1}{d_1},$$

$$F_{t2} = F_{a1} = \frac{2T_2}{d_2},$$

$$F_r = F_{t2} \operatorname{tg} \alpha.$$

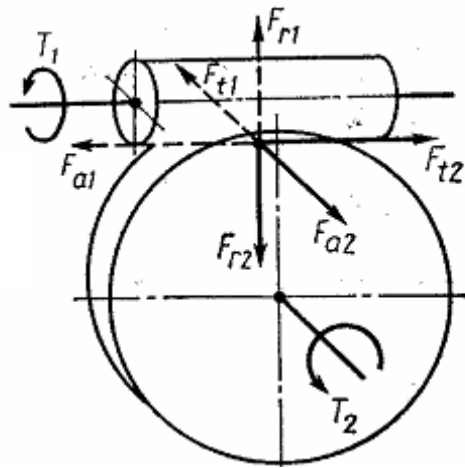


Рис. 2.16. Зусилля в зачепленні черв'ячної передачі

Сила нормального тиску $F_n = F_{t2} / (\cos \alpha \cos \gamma)$.

3.5. Розрахунок на міцність черв'ячних передач

Основні причини виходу з ладу черв'ячних передач нагадують характерні дефекти зубчатих передач, тому і розрахунки проводяться аналогічно.

Черв'ячні передачі розраховують на міцність та жорсткість. Розрахунок на міцність виконують по контактним напруженням (в основному зубці черв'ячного колеса) та напруженням згину. На жорсткість розраховують тільки черв'як. Потреба розрахунку черв'яка на жорсткість пов'язана з тим, що черв'як у більшості випадків має порівняно малий діаметр і значну відстань між опорами. Дія на черв'як сил, що виникають у його зачепленні з колесом, може призвести до його значного поперечного прогину, який негативно впливає на зачеплення витків та роботу черв'ячної передачі.

При розрахунках на міцність використовують параметри еквівалентного колеса.

Розрахунок зубів черв'ячної передачі по контактним напруженням

базується на розв'язуванні рівняння Герца з урахуванням геометричних та силових характеристик передачі.

Підставивши відповідні параметри отримуємо формулу для розрахунку величини контактних напружень у вигляді умови міцності

$$\sigma_H = 1,18 \sqrt{\frac{E_{np} T_2 K_H \cos^2 \gamma}{d_2^2 d_1 \delta \varepsilon_\alpha \xi \cos 2\alpha}} \leq [\sigma_H],$$

де: ε_α – коефіцієнт торцевого перекриття; ξ – коефіцієнт враховуючий довжину контактної лінії; $K_H = K_{H\beta} K_{H\alpha} K_{HV}$ – коефіцієнт розрахункового навантаження.

Розв'язуючи отримане рівняння відносно міжосьової відстані отримуємо залежність яку використовують в проектному розрахунку

$$a_w = 0,625 (q / Z_2 + 1) \sqrt[3]{\frac{E_{np} T_2}{[\sigma_H]^2 (q / Z_2)}}.$$

У проектному розрахунку із умови стійкості активних поверхонь зубців колеса проти втомного руйнування та заїдання визначають міжосьову відстань черв'ячної передачі як основний параметр, що визначає габаритні розмір передачі. З проектувального розрахунку знаходять осьовий модуль черв'яка, а по ньому і всі геометричні параметри зачеплення.

Потім проводиться перевірочний розрахунок зубів черв'ячного колеса по контактним напруженням та по напруженням згину, які визначають рівнянням

$$\sigma_F = 0,7 \frac{F_{t2} K_F Y_F}{b_2 m \cos \gamma} \leq [\sigma_F],$$

де: $K_F = K_{F\beta} K_{F\alpha} K_{FV}$ – коефіцієнт розрахункового навантаження; Y_F – коефіцієнт форми зуба.

3.6. Тепловий розрахунок передачі

Наявність тертя сковзання в зоні зачеплення обумовлює значне нагрівання черв'ячної пари. Тому виникає потреба в тепловому розрахунку передачі. Допустима температура роботи передачі не повинна перевищувати 65°C. Значне підвищення температури обумовлює зниження в'язкості мастила і відповідно можливість виникнення сухого тертя, що

приведе до заїдання і навіть зварювання черв'ячної пари.

Кількість теплоти, яка виділяється за одиниці часу оцінюється тепловою потужністю Q ,

$$Q = N(1 - \eta),$$

де: N – потужність на валу черв'яка; η – ККД черв'ячної передачі.

Кількість теплоти, яка відається за одиниці часу в навколишнє середовище визначається потужність тепловіддачі

$$Q_1 = K(t_1 - t_0)A,$$

де: K – коефіцієнт тепловіддачі; t_1 – внутрішня температура (мастила); t_0 – температура навколишнього середовища; A – площа поверхні охолодження.

Умовою природного охолодження є нерівність

$$Q \leq Q_1,$$

в протилежному випадку необхідно реалізувати штучне охолодження черв'ячного редуктора.

4. Фрикційні передачі

4.1. Основні відомості та групи фрикційних передач

Робота фрикційних передач основана на використанні сил тертя, яке виникає в зоні контакту двох тіл під дією стискаючої сили F_n .

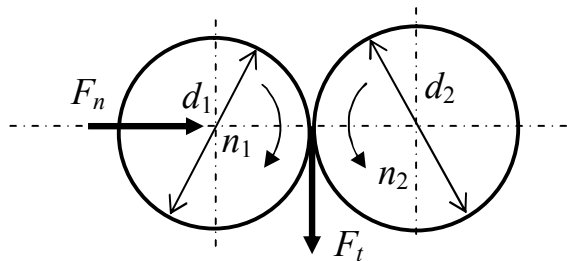


Рис. 2.17. Фрикційна передача з циліндричними котками

Умова передачі руху фрикційних передач виражається нерівність

$$F_t \leq F_T,$$

де: F_t – окружна сила; F_T – сила тертя між робочими тілами передачі, яка визначається рівнянням

$$F_T = F_n f ,$$

де f – коефіцієнт тертя.

Значення коефіцієнт тертя:

сталь по сталі $f = 0,04 \div 0,05$;

сталь по чавуну насухо $f = 0,15 \div 0,2$;

сталь по текстоліту насухо $f = 0,2 \div 0,3$.

Фрикційні передачі розподіляють на: передачі з паралельними осями і осями, що перетинаються; передачі з циліндричними, конічними, кульовими і торовими поверхнями робочих котків; передачі з постійним і автоматичним регулюванням стискаючої сили; з проміжним (паразитним) фрикційним елементом і т. п.

Все розмаїття передач розподіляється на дві основні групи:

1) передачі з постійним передаточним відношенням;

2) передачі з регульованим передаточним відношенням (варіатори).

Переваги фрикційних передач:

- простота тіл кочення;
- рівномірність обертання, що зручне для приладів;
- можливість плавного регулювання швидкості;
- відсутність мертвого ходу при реверсі передачі.
- можливість пробуксовки внаслідок перенавантаження.

Недоліки фрикційних передач:

- потреба в притискних пристроях;
- великі навантаження на вали, оскільки необхідне притиснення дисків;
- великі втрати на тертя;
- неточність передаточного числа із-за пробуксовки.

Найбільш широко поширеними передачами першої групи є фрикційна передача з циліндричними катками (рис. 2.17). Передаточне відношення таких передач визначається через відношення робочих діаметрів катків з урахуванням сковзання

$$u = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1(1-\varepsilon)},$$

де: ε – коефіцієнт сковзання ($\varepsilon = 0,01 \div 0,03$).

Величина стискаючої сили

$$F_n = \frac{kF_t}{f},$$

де: k – коефіцієнт зчеплення, для силових передач $k = 1,25 \div 1,5$.

Типовим представником другої групи передач є лобовий варіатор, який складається з ведучого ролика 1, що може вільно переміщатися на валу, веденого диска 2, та пружного елемента 3, що забезпечує силу стискування F_n .

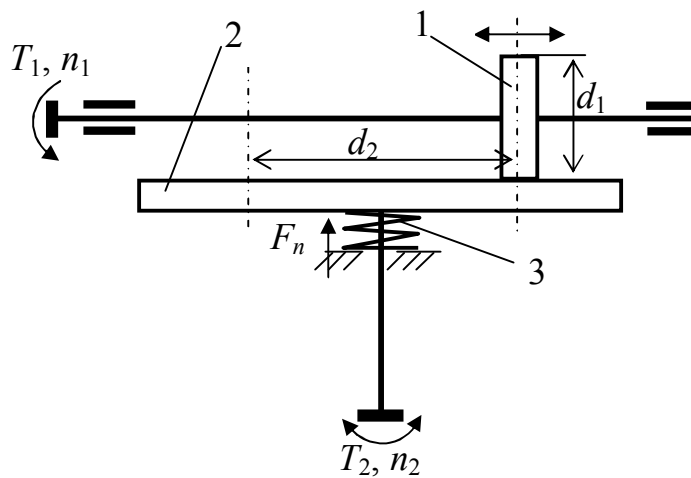


Рис. 2.18. Лобовий варіатор

Змінюючи робочий діаметр веденого диску d_2 відповідно змінюємо передаточне відношення передач, так як робочий діаметр ведучого ролика залишається постійним. Лобовий варіатор має властивість реверсивності.

З урахуванням геометрії передачі відповідно маємо

$$u_{max} = \frac{n_1}{n_{2max}} \approx \frac{d_{2max}}{d_1},$$

$$u_{min} = \frac{n_1}{n_{2min}} \approx \frac{d_{2min}}{d_1}.$$

Діапазон регулювання, як основна характеристика варіатора визначається рівнянням

$$D = \frac{n_{2max}}{n_{2min}} = \frac{u_{max}}{u_{min}} = \frac{d_{2max}}{d_{2min}}.$$

На практиці діапазон регулювання не більше трьох, так як при зменшенні робочого діаметру веденого диска значно зростає ковзання і

зношування поверхонь.

4.2. Фактори визначаючі якість фрикційних передач

Сковзання – являється причиною зносу, зменшення ККД і непостійності передаточного відношення в фрикційних передачах.

Три види сковзання:

1) буксування виникає при перенавантаженні коли окружна сила більше сили тертя. При буксуванні ведений каток зупиняється, а ведучий ковзається по ньому. Обумовлює місцевий знос та здирання поверхні.

2) пружне ковзання – обумовлене деформацією пружності в зоні контакту. Рівність окружних швидкостей виконується тільки в точках розташованих на одній із ліній площі контакту.

3) геометричне сковзання пов'язано з різною величиною лінійних швидкостей на площі контакту у ведучого та веденого катка (лобовий варіатор).

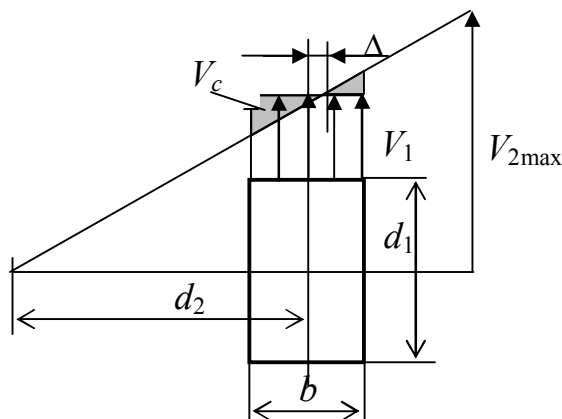


Рис. 2.19. Фізична картина геометричного сковзання

Полюс кочення в процесі роботи зміщений на величину Δ , а при холостому ході проходить через центр ведучого ролика. Величину зміщення визначають рівнянням

$$\Delta = \frac{T_1 b}{d_1 F_n f}.$$

Величина швидкості сковзання

$$V_c = \left[\frac{\pi n_1}{30u} \right] \left(\frac{b}{2} + \Delta \right).$$

4.3. Основи розрахунку на міцність фрикційних передач

Основними видами руйнування робочих поверхонь деталей фрикційних передач є:

а) Втомливе викришування. Виникає в передачах, які працюють в мастилi, коли утворюється рідинне тертя;

б) Зношування. Виникає в передачах, робочі деталі яких працюють в умовах сухого тертя;

в) Здирання поверхні. Виникає в процесі буксування, чи в наслідок значного розігріву передачі при великих швидкостях та навантаженнях.

Усі вище наведені види руйнування залежать від напружень в зоні контакту. Тому міцність та довговічність фрикційних передач оцінюють по контактним напруженням.

Для фрикційної пари в якій контакт по лінії розрахункову величину контактних напружень визначають рівнянням

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{E_{np} F_n}{b \rho_{np}}} \leq [\sigma_H],$$

при контактi в точці (та всі інші випадки)

$$\sigma_H = m^3 \sqrt{\frac{F_n E_{np}^2}{\rho_{np}^2}} \leq [\sigma_H],$$

де: m – коефіцієнт, який враховує форму тіл кочення.

Загальної форми проектного розрахунку для фрикційних передач не існує, через причину великого різноманіття форми тіл кочення.

5. Пасові передачі

5.1. Основні відомості та класифікація

Пасова передача складається з двох шківів, закріплених на валах, і пасу, який охоплює шківви.

Навантаження передається силами тертя, що виникає між шківвами та пасом в результаті натягу останнього.

Пасові передачі застосовуються для приводу агрегатів від електродвигунів малої і середньої потужності, а також для приводу від малопотужних двигунів внутрішнього згорання.

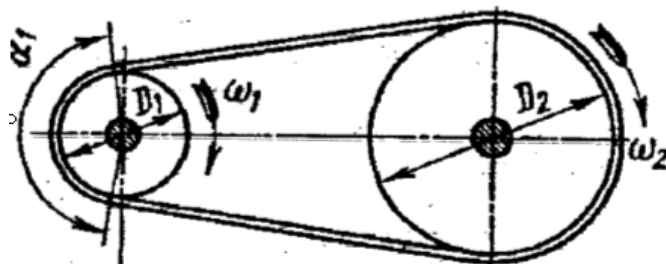


Рис. 2.20. Конструкція пасової передачі

В залежності від форми поперечного перетину пасу передачі розподіляють на: плоско-пасові; клиноремінні; кругло-пасові.

Переваги пасових передач.

- можливість передачі руху на значні відстані (до 15 м і більше);
- плавність та безшумність передачі при значних швидкостях;
- запобігання механізмів від різких коливань навантаження внаслідок пружності пасу;
- запобігання механізмів від перенавантаження за рахунок можливої пробуксовки пасу;
- простота конструкції та експлуатації

Недоліки пасових передач.

- значні габаритні розміри;
- деяка змінність передаточного відношення, обумовлена ковзанням пасу;
- збільшення навантаження на вали та їх опори, що пов'язано з необхідністю попереднього натягу пасу;
- невисока довговічність пасів.

5.2. Геометричні та кінематичні параметри передачі

Основною геометричною характеристикою пасових передач є кут обхвату пасом ведучого шківів α який характеризує тягову здатність передачі. Для силових передач $\alpha > 120^\circ$.

d_1, d_2 – робочі діаметри шківів.

a_w – міжосьова відстань.

β – кут між гілками пасу.

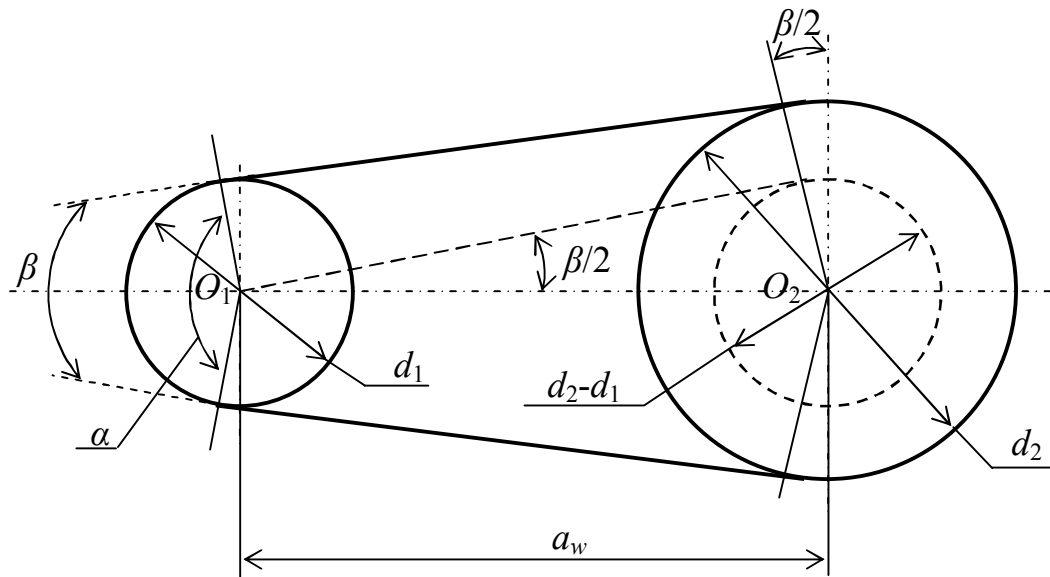


Рис. 2.21. Геометрія пасових передач

Величина кута α визначається співвідношенням $\alpha = 180^\circ - \beta$. Так як $\sin(\beta/2) = (d_2 - d_1) / 2a_w$, а також враховуючи, що кут $\beta \leq 15^\circ$, то маємо $\beta \approx (d_2 - d_1) / a_w$, рад. $\approx 57(d_2 - d_1) / a_w$ град. Відповідно кут обхвату малого шківів $\alpha = 180^\circ - 57d_1(u-1) / a_w$.

Довжину пасу визначають, як суму прямолінійних ділянок і дуг обхвату

$$l \approx 2a_w + 0,5\pi(d_2 + d_1) + (d_2 - d_1)^2 / 4a_w.$$

Окружні швидкості на шківів

$$V_1 = \frac{\pi d_1 n_1}{60},$$

$$V_2 = \frac{\pi d_2 n_2}{60}.$$

З урахуванням пружного сковзання пасу по шківів лінійні швидкості не співпадають $V_1 > V_2$, тому

$$V_2 = V_1(1 - \varepsilon),$$

де: ε – коефіцієнт сковзання.

При нормальному навантаженні $\varepsilon = 0,01 \dots 0,02$.

Величину передаточного числа передачі визначають рівнянням

$$u = \frac{n_1}{n_2} = \frac{V_1 d_2}{V_2 d_1} = \frac{d_2}{d_1(1-\varepsilon)}.$$

5.3. Сили та силові залежності

Розглянемо модель пасової передачі в робочому та не робочому режимі. В не робочому режимі на гілки пасу діє тільки сила натягу F_0 , відповідно обидві гілки мають деформацію λ . В робочому режимі на ведучу гілку пасу буде діяти сила F_1 , а на ведену гілку F_2 . Відповідно деформація веденої гілки $\lambda + \Delta$, а ведучої $\lambda - \Delta$.

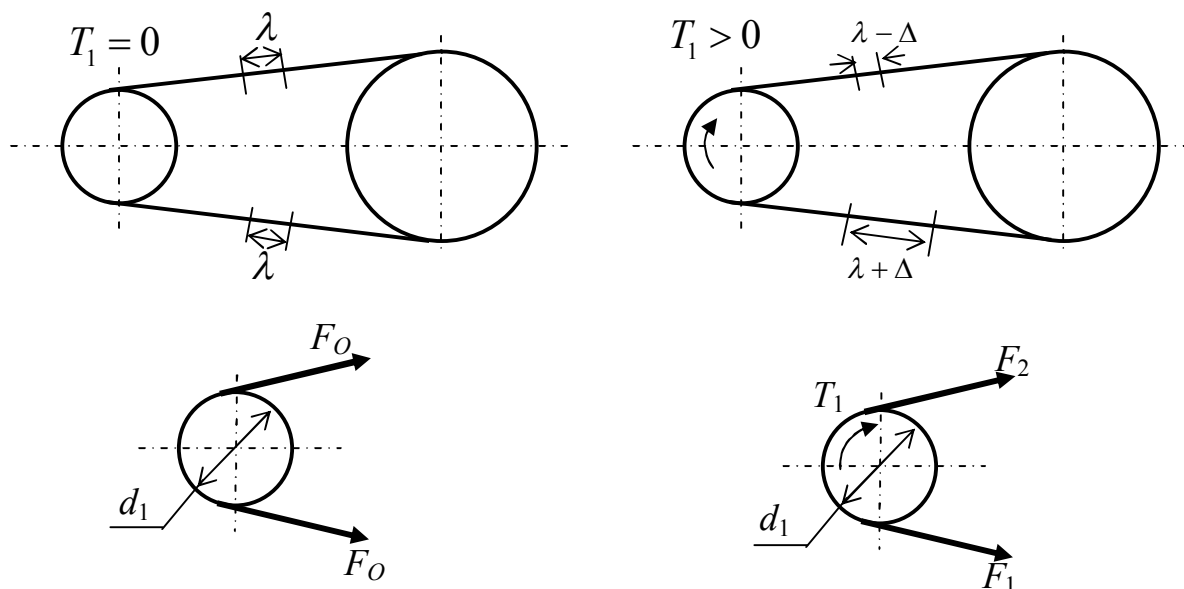


Рис. 2.22. Зусилля в пасі

Окружна сила на шківі $F_t = \frac{2T_1}{d_1}$.

З умови рівноваги шківа відповідно маємо $F_t = F_1 - F_2$, а враховуючи, що довжина пасу величина постійна то $2F_0 = F_1 + F_2$. Таким чином маємо систему рівнянь

$$F_1 = F_0 + \frac{F_t}{2},$$

$$F_2 = F_0 - \frac{F_t}{2}.$$

Тягову здатність передачі встановлюють рівнянням Ейлера

$$F_1 = F_2 e^{f\alpha}.$$

Мінімальне попереднє натягування пасу при якому можлива передача заданого навантаження оцінюється нерівність

$$F_0 < \frac{F_t}{2} \left(\frac{e^{f\alpha} + 1}{e^{f\alpha} - 1} \right).$$

При русі пасу по колу з відповідною швидкість в межах кута обхвату діє центробіжна сила

$$F_v = \rho S V^2,$$

де: ρ – густина матеріалу пасу; S – площа поперечного перетину пасу.

Вплив центробіжних сил на працездатність передач має місце тільки при значних швидкостях $V > 20 \text{ м/с}$.

5.4. Основи розрахунку передач

Теоретичні основи розрахунку є загальними для всіх типів пасів.

Основними критеріями працездатності пасових передач є:

- тягова здатність (визначається силою тертя між пасом та шківом);
- довговічність паса (руйнування пасу від втомливості).

Основним розрахунком пасових передач є розрахунок по тяговій здатності.

5.5. Плоско-пасові та клиноремінні передачі

В залежності від конструкції плоско-пасові передачі розподіляються на: відкриті (рис. 2.20); перехресну (рис. 2.23, а); на пів перехресну (рис. 2.23, б); передачу з натяжним роликком (рис. 2.23, в); регульовану передачу.

Відкрита передача (найбільш широко поширена) забезпечує передачу руху між паралельними валами з однаковим направленням кутових швидкостей. Перехресна передача забезпечує передачу руху між паралельними валами з протилежним направленням кутових швидкостей. Недоліком передачі є наявність тертя між гілками пасів, що обумовлює їх швидке зношування. На пів перехресна передача забезпечує передачу руху між валами, які перехрещуються в просторі.

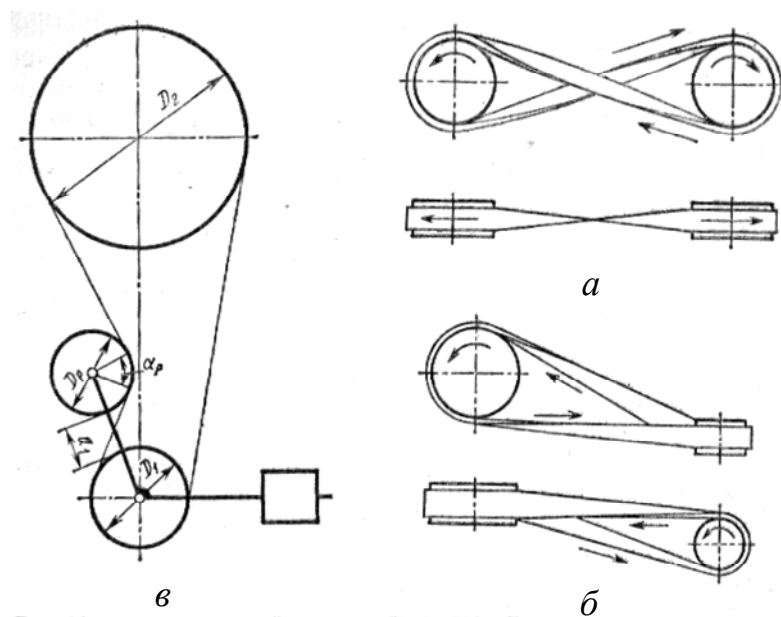


Рис. 2.23. Типи плоско-пасових передач

Передача з натяжним роликком забезпечує передачу руху між паралельними валами з однаковим напрямком кутових швидкостей і характеризується збільшеним кутом обхвату малого шківця (внаслідок використання ролика). Недоліком передачі є додатковий згин пасу на роликку, що знижує довговічність його роботи. Регульована передача забезпечує зміну передаточного відношення внаслідок зміни діаметрів шківців.

До основних типів плоских пасів відносять: шкіряні (висока тягова здатність, довговічність, надійність, але мають високу ціну); прогумовані тканині паси; бавовняні паси; полімерні. У сирих приміщеннях і агресивних середовищах застосовують ремені з гумовими прокладками.

Клиноремінні передачі найбільш широко використовуються в техніці. Це обумовлено тим, що тягова здатність в них підвищується внаслідок особливої конструкції шківця та пасу. В процесі роботи клиновидний пас заклинюється в канавці шківця і робочими являються бокові поверхні пасу, що значно збільшує силу тертя приблизно в три рази.

Всі розміри клиноремінних передач стандартизовано. Клиновидний пас виготовляється замкненим, відпадає необхідність в з'єднанні гілок пасу, як це має місце в плоско пасових передачах.

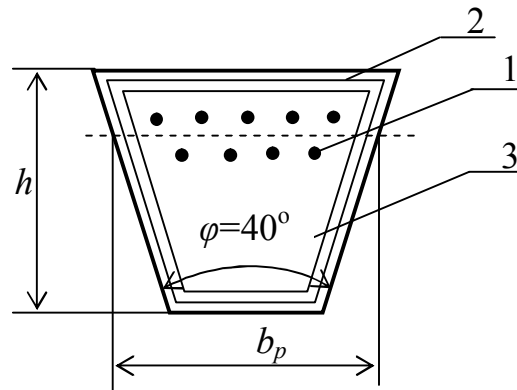


Рис. 2.24. Конструкція клиновидного пасу

Клиновидний пас складається: 1 – корд, основний несучий елемент пасу (металева проволока); 2 – тканина обмотка, оберігає пас від зношування; 3 – наповнювач, гума, каучук.

До основних геометричних параметрів відносять: φ – кут заклинювання; b_p – робоча ширина пасу, визначається по нейтральній лінії; h – висота пасу.

Види клиновидних пасів.

1. Нормального перетину. Загальне використання V до 30м/с.
2. Вузькі. Використовуються при V до 40м/с.
3. Широкі. Для безступінчастих передач, варіаторів.

6. Ланцюгові передачі

6.1. Основні відомості

Принцип дії ланцюгової передачі оснований на зачепленні ланцюга з зірочками.

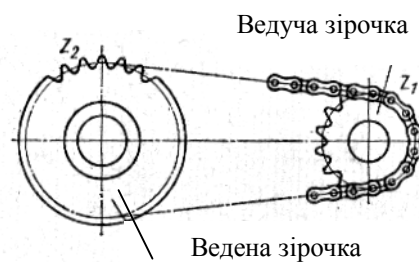


Рис. 2.25. Схема ланцюгової передачі

Переваги ланцюгових передач порівняно з пасовими:

- передавати значні навантаження в наслідок зачеплення та значної міцності сталюого ланцюга;
- постійність передаточного відношення, так як відсутнє буксування та сковзання;
- відсутність попереднього натягу;
- робота при незначних міжосьових відстанях та при великих передаточних відношеннях;
- передавати потужність від однієї ведучої зірочки до декількох ведених.

Недоліки ланцюгових передач:

- додаткове динамічне навантаження, так як можливі удари ланок ланцюга по зубцям зірочок;
- значний шум передачі;
- зношування шарнірів ланцюга;
- необхідність організації системи змащування.

Основна причина відповідних недоліків обумовлена конструкцією ланцюга, який складається з окремих жорстких ланок. Відповідно розташовується на зірочці не по колу, а по многокутнику.

6.2. Основні характеристики передачі

Потужність яку передає ланцюгова передача визначається рівнянням

$$N = F_t V ,$$

де: V – швидкість ланцюга, F_t – окружна сила.

Швидкість ланцюга визначають рівнянням

$$V = \frac{nZp_1}{60} ,$$

де: n – частота обертання зірочки; Z – число зубів зірочки; p_1 – крок ланцюгу.

Шум та динамічне навантаження приводу залежить від величини швидкості ланцюга та частоти обертання зірочки. В основному розповсюджені тихохідні та середньо хідні передачі з швидкістю до 15 м/с та частотою обертання до 500 хвл⁻¹.

Передаточне відношення

$$u = \frac{n_1}{n_2} = \frac{Z_2}{Z_1} .$$

В основному використовують передачі з передаточним відношенням до 6(10). При збільшенні передаточного відношення значно зростають габаритні розміри передачі.

Коефіцієнт корисної дії в середньому становить 0,96...0,98. Витрати потужності в основному складаються з витрат на тертя в шарнірах ланцюгу, на зубцях зірочок та в опорах валів.

Мінімальна величина міжосьової відстані обмежується допустимим зазором між зірочками (30...50мм)

$$a_w = \frac{d_{a1} + d_{a2}}{2} + (30...50),$$

де d_a – зовнішній діаметр зірочки.

З урахування умови довговічності рекомендують приймати

$$a_w = (30...50)p_l,$$

найменше значення приймають для $u = 1...2$, найбільше для $u = 6...7$.

Довжину ланцюга виражають в кроках, або числом ланок

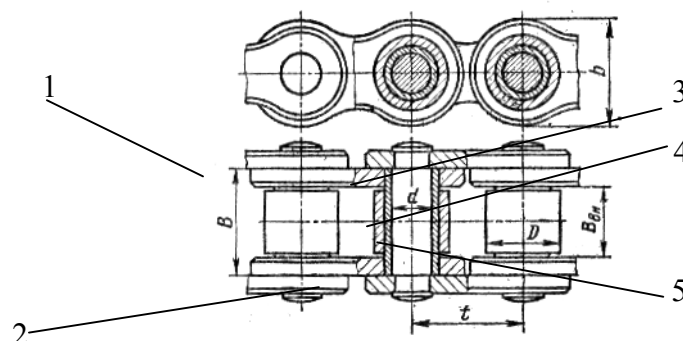
$$L_p = \frac{2a_w}{p_l} + \frac{Z_1 + Z_2}{2} + \left(\frac{Z_2 - Z_1}{2\pi} \right)^2 \frac{p_l}{a_w}.$$

Довжину ланцюга округляють до цілого числа, яке бажано брати парним, щоб не використовувати спеціальні з'єднуючі ланки.

6.3. Приводні ланцюги

До основних типів приводних ланцюгів відносять: шарнірно-роликові; втулкові та зубчасті.

Шарнірно-роликові ланцюги виготовляють однорядними та багаторядними (двох, трьох та чотирьох рядні).



Шарнірно – роликовий

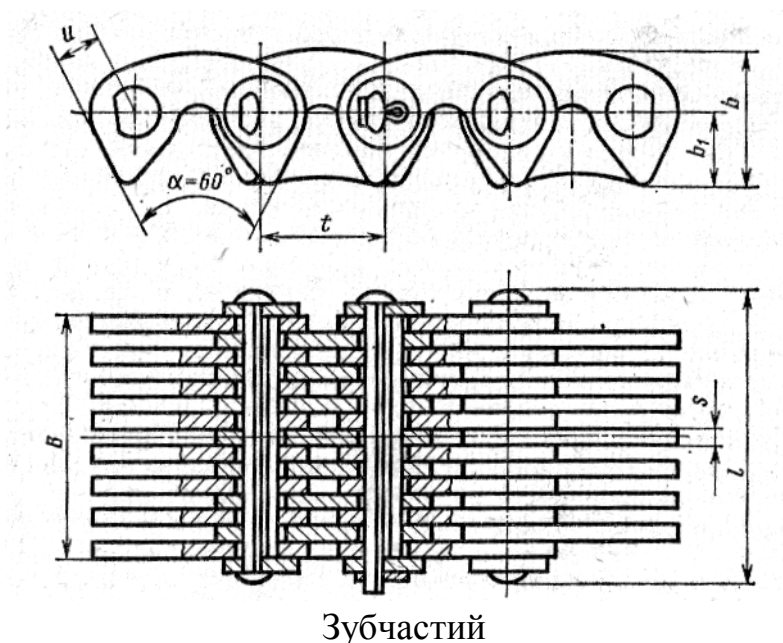


Рис. 2.26. Конструкція приводних ланцюгів

Валик 3 запресований в отвори зовнішньої ланки 2, а втулка 4 в отвори внутрішньої ланки 1. Втулка на валику і ролик 5 на втулці можуть вільно провертатись. Зачеплення ланцюга з зубом зірочки здійснюється через ролик.

Переваги використання ролика:

- рівномірне розподілення навантаження на втулку, а відповідно і на валик, що суттєво зменшує зношування шарнірів;
- заміна тертя сковзання на тертя кочення, що зменшує зношування зубів зірочок.

Шарнірно-роликові ланцюги використовуються при колових швидкостях до 20 м/с.

Наявність ролика збільшує вагу ланцюга, а також його вартість.

Втулкові ланцюги по конструкції аналогічні роликовим тільки в них відсутній ролик. Внаслідок чого збільшується зношування шарнірів та зношування зубів зірочок, але знижується вага та вартість.

Зубчасті ланцюги складаються з набору пластин з двома зубоподібними виступами. Виготовляються широкими, що дозволяє передавати значні навантаження при швидкостях до 35 м/с.

6.4. Зірочки приводних ланцюгів

Ділильне коло зірочки проходить через центри шарнірів ланцюга і визначається рівнянням

$$d = \frac{P_t}{\sin(\pi / Z)}$$

Профілі зубів зірочок для зубчатих ланцюгів виконують прямолінійними, а для роликкових та втулкових – випуклими, прямолінійними чи вгнутими.

6.5. Зусилля в ланцюговій передачі

Силова схема аналогічна силовій схемі пасової передачі: F_1 і F_2 – натяг ведучої та веденої гілки ланцюгу; F_t – окружна сила; F_0 – сила попереднього натягу ланцюга; F_v – натяг від центробіжних сил.

Таким чином

$$F_1 - F_2 = F_t;$$

$$F_v = qV^2,$$

де: q – вага одиниці довжини ланцюга (вибирається згідно каталогу).

Для ланцюгової передачі сила попереднього натягу визначається, як натяг від сили ваги вільної гілки ланцюгу

$$F_0 = K_f a q g,$$

де: K_f – коефіцієнт провисання, залежить від розташування приводу та стріли провисання ланцюга; a – довжина вільної гілки ланцюгу ($a \approx a_w$); g – прискорення вільного падіння.

Для передач ($V \leq 10$ м/с) сила F_0 складає декілька процентів, а F_v складає приблизно 0,1% від F_t , відповідно

$$F_1 \approx F_t \text{ і } F_2 \approx 0.$$

6.6. Критерії працездатності та розрахунок

Основна причина втрати працездатності є зношування шарнірів

ланцюгу. За один пробіг ланцюгу в кожному шарнірі відбувається чотири повороти, що спричиняє зношування втулок і валиків. Таким чином, в якості основного розрахунку приймають розрахунок на зносостійкість шарнірів. Основним розрахунковим критерієм виступає тиск в шарнірі

$$P = \frac{F_t}{Bd} \leq [P],$$

де: d і B – діаметр і довжина втулки; $[P]$ – допустимий тиск в шарнірі.

Вплив різноманітних умов роботи розрахункової та типової передачі прийнято враховувати введенням коефіцієнту експлуатації K_E . Згідно цього коефіцієнту величина допустимого тиску для розрахункової передачі визначається рівнянням

$$[P] = \frac{[P_o]}{K_E},$$

де: $[P_o]$ – допустимий тиск для типової передачі (таблична величина).

$$K_E = K_a K_D K_H K_{pe} K_C K_P,$$

де: K_a – коефіцієнт міжосьової відстані, або довжини ланки; K_D – коефіцієнт динамічного навантаження; K_H – коефіцієнт нахилу передачі до горизонту; K_{pe} – коефіцієнт способу регулювання натягу ланцюгу; K_C – коефіцієнт змащування; K_P – коефіцієнт режиму роботи передачі.

7. Контрольні питання для самоперевірки

7.1 Циліндричні зубчасті передачі

1. Типи циліндричних передач.
2. Основна геометрична характеристика зубчастої передачі.
3. Як визначити дільний діаметр зубчатого колеса?
4. Які діаметри характеризують зачеплення?
5. Чому дорівнює міжосьова відстань?
6. Основні особливості геометрії косозубих передач.
7. Основні види руйнування зубів?
8. Що таке контактні напруження?
9. Формула Герца.
10. Зусилля в зачепленні прямозубої передачі.

11. Визначення величини контактних напружень.
12. Розрахунок напружень згинання.
13. Зусилля в зачеплені косозубих передач.
14. В чому особливість розрахунку косозубих передач?
15. Чим обумовлена підвищена міцність косозубих коліс?

7.2 Конічні передачі

1. Основні типи конічних передач.
2. Переваги та недоліки конічних передач.
3. Які основні перетини існують в передачі?
4. Співвідношення геометричних параметрів передач.
5. Як визначається передаточне відношення?
6. Зусилля в зачепленні.
7. Розрахунок конічних передач на міцність.

7.3. Черв'ячні передачі

1. Особливості конструкції черв'ячної передачі?
2. Переваги та недоліки черв'ячної передачі.
3. Які існують черв'яки та їх геометрія?
4. Конструкція черв'ячного колеса та геометрія.
5. Як визначається передаточне відношення?
6. Зусилля в зачепленні.
7. Розрахунок передачі на міцність.
8. Тепловий розрахунок черв'ячної передачі.

7.4. Фрикційні передачі

1. Особливості конструкцій фрикційних передач?
2. Переваги та недоліки передач.
3. Види фрикційних передач?
4. Які два типи фрикційних передач існують?
5. Конструкція лобового варіатора.
6. Як визначається передаточне відношення?
7. Що таке діапазон регулювання?
8. Види сковзання?
9. Суть геометричного сковзання?
10. Види руйнування робочих поверхонь.

11. Основи розрахунку на міцність.

7.5. Пасові передачі

1. Конструкція пасової передачі?
2. Переваги та недоліки передачі.
3. Види пасів?
4. Основні геометричні параметри передачі?
5. Зусилля в пасі.
6. Як визначається передаточне відношення?
7. Які основні критерії працездатності передачі?
8. Розрахунок передачі?
9. Типи плоско пасових передач.
10. Конструкція клиновидного пасу.

7.6. Ланцюгові передачі

1. Конструкція ланцюгової передачі?
2. Переваги та недоліки передачі.
3. Основні характеристики?
4. Основні геометричні параметри передачі?
5. Які існують приводні ланцюги?
6. Зірочки приводних ланцюгів?
7. Зусилля в ланцюговій передачі?
8. Які основні критерії працездатності передачі?
9. Розрахунок передачі?

Розділ III. ВАЛИ ТА ОСІ

Вали та осі найбільш широко розповсюджені деталі в машинобудуванні. На валах та осях розташовуються деталі, які здійснюють обертальний рух: зубчасті колеса, шківни, барабани і т. п..

Вал призначений для підтримки деталей, які на ньому розташовані та передачі обертального моменту. В процесі роботи вал сприймає деформацію згинання та кручення, а в деяких випадках також розтягнення чи стискання. Вали завжди здійснюють обертальний рух. Максимальна довжина валів (суцільних) становить до 7м.

Вісь призначена тільки для підтримки деталей, які на ній

розташовані. Вісі бувають рухомі та нерухомі. Максимальна довжина осей до 3м.

1. Типи валів

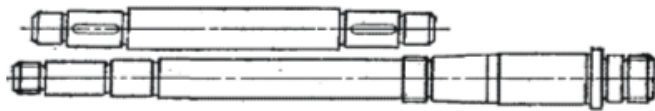
По геометричній формі вали розподіляються на: прямолінійні, колінчасті та гнучкі. Будемо розглядати тільки прямолінійні вали. Осі, як правило, виготовляють прямолінійними.

По конструкції вали розподіляють на: гладенькі, фасонні чи ступінчасті, вали-черв'яки та вали-шестерні.

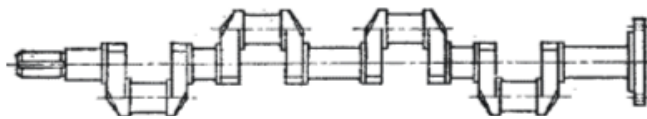
По типу перетину вали розподіляють на: суцільні та порожнисті.



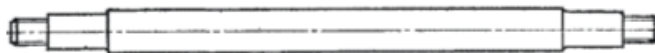
гладенький вал



фасонний (ступінчастий) вал



колінчастий вал



вісь

Рис. 3.1. Типи валів та осів

2. Конструктивні елементи валів

Частина валу, яка розташовується в опорі називається – цапфою. Цапфи розподіляються на: шипи, ший та п'ята.

Шипом називається цапфа, розташована на кінцевих ділянках валу чи осі і передає переважно радіальне навантаження.

Шийкою називається цапфа, розташована в середніх ділянках валу.

Опорами для шипів та ший є підшипники. Шипи та ший по формі можуть бути циліндричні (а, б), конічні (в) чи сферичні (г). В основному циліндрична форма.

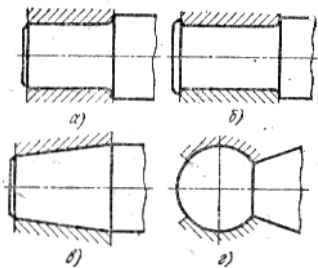


Рис.3.2. Форми цапф

П'ятою називається цапфа, яка передає осьове навантаження. Опорою для п'ят є підп'ятники. П'ята по формі можуть бути: суцільними, кільцевими та гребінчастими.

Перехідні ділянки між двома ступенями валу чи осі виконують:

1) з канавкою зі округленням, для виходу шліфувального круга

Відповідна конструкція значно підвищує концентрацію напружень тому доцільно використовувати тільки на кінцевих ділянках валів де величина згинаючого моменту невелика.

2) з галтеллю постійного радіусу

3) з галтеллю змінного радіусу.

3. Матеріали валів. Критерії працездатності

Основними матеріалами для валів є вуглецеві та леговані сталі. Поверхні валів, що призначені для спряження з іншими деталями, повинні бути точно і чисто оброблені різцями.

Для валів, розміри поперечних перерізів яких вибирають за умовою жорсткості, переважно використовують сталі Ст5 і Ст6. Для більшості інших випадків застосовують сталі 45, 50, 40Х, 40ХН та ін. Вали з цих сталей піддаються нормалізації, поліпшенню або гартуванню з нагрівом СВЧ і низьким відпуском. Швидкохідні вали, які розташовуються в підшипниках скочвання, виготовляються із сталі 20 чи 20Х з наступною цементацією цапф.

Вали та осі, що обертаються, в процесі роботи сприймають навантаження яке обумовлює циклічну зміну напружень. Тому, основним критерієм працездатності являється втомлива міцність (витривалість), а також жорсткість. Втомлива міцність оцінюється коефіцієнтом запасу міцності, а жорсткість прогином в місцях посадки деталей і кутом нахилу чи закручуванням перетину.

В основному руйнування валів носить втомливий характер відповідно основним розрахунком є розрахунок на втомливість.

Основними розрахунковими факторами є величина обертового та згинального моментів. Величину поздовжньої сили, як правило не враховують.

4. Проектний розрахунок валів

Проектний розрахунок валу проводять на статичну міцність для конструктивного визначення діаметру.

При проектувальному розрахунку в основному відомо: величина обертового моменту, потужність і частота обертання валу, навантаження та розміри основних деталей, що розташовуються на валу. Конструктивно назначають матеріал з якого будуть виготовляти вал.

Проектний розрахунок виконують умовно тільки по дотичним напруженням, так як невідома геометрія валу. Визначають діаметр валу по допустимим дотичним напруженням. При відповідному розрахунку вплив згину, концентрації напружень і характеру навантаження на міцність компенсується зниженими допустимими дотичними напруженнями.

Діаметр розрахункового перетину валу визначають рівнянням

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{T}{0,2[\tau]}}$$

де: T – величина обертового моменту; $[\tau]$ – знижені допустимі дотичні напруження, для Ст.5, Ст6, сталі 45, $[\tau] = 20 \div 25 \text{ МПа}$.

Згідно розрахованого діаметру проводять ескізу розробку (конструювання) валу, на основі якої складають розрахункову схему.

При складанні розрахункової схеми вали розглядають як прямі бруси, лежачі на шарнірних опорах. При виборі типу опори вважають, що деформації валів малі і, якщо підшипник допускає хоч би невеликий нахил або переміщення цапфи, його вважають шарнірно-нерухомою або шарнірно-рухомою опорою. Підшипники ковзання або кочення, що сприймають одночасно радіальні і осьові зусилля, розглядають як шарнірно-нерухомі опори, а підшипники, сприймаючі тільки радіальні зусилля, як шарнірно-рухомі.

На основі розрахункової схеми виконують уточнений розрахунок валів де враховують не тільки крутні але й згинальні моменти, так як відома довжина всіх ділянок валу, відоме положення деталей на валу, а

також розраховані сили, що діють на вал.

Викреслюються розрахункові схеми валу в двох площинах. По відомих силах в зубчатих передачах і відстаням до опор будуються епюри згинальних моментів в горизонтальній і фронтальній площинах. Потім обчислюється сумарний згинальний момент

$$M_C = \sqrt{M_{zy}^2 + M_{xy}^2}.$$

Далі розраховується і будується епюра еквівалентного моменту

$$M_E = \sqrt{\alpha T^2 + M_C^2}.$$

де $\alpha = 0,75$ або 1 залежно від прийнятої енергетичної теорії міцності.

Обчислюється еквівалентне напруження від сумісної дії вигину і кручення

$$\sigma_E = \frac{M_E}{W_3} \leq [\sigma_3],$$

на основі якого визначають відповідний діаметр валу

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_E}{0,1[\sigma_3]}}.$$

Одержаний в уточненому розрахунку мінімальний діаметр валу приймається остаточно для подальшого проектування.

5. Розрахунок валів на втомливість

Розрахунок валів на втомливість виконується як перевірочний на стадії робочого проектування, коли практично готове робоче креслення валу, тобто відома його точна форма, розміри і всі концентратори напружень: пази, шпони, кільцеві канавки, крізні і глухі отвори, посадки з натягом, радіуси галтелі. При розрахунку вважається, що напруження вигину змінюються по симетричному циклу, а дотичні напруження кручення – по від нульовому пульсуючому циклу.

Оцінку міцності валу в небезпечних ділянках здійснюють по загальному коефіцієнту запасу міцності

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \geq [n] = (1,7 \dots 2,5),$$

де: n_σ – коефіцієнт запасу міцності по нормальним напруженням; n_τ – коефіцієнт запасу міцності по дотичним напруженням. Якщо $[n] = 1,7$ то необхідно виконати розрахунок валу на жорсткість, в основному приймають $[n] = 2,5$.

Коефіцієнт запасу міцності по нормальним і дотичним напруженням визначаються згідно рівнянь:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} \sigma_a + \sigma_m \psi_\sigma}; \quad n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau \beta} \tau_a + \tau_m \psi_\tau},$$

де: σ_{-1}, τ_{-1} – межа витривалості матеріалу, для вуглецевих сталей $\sigma_{-1} = 0,43\sigma_B$, а для легованих $\sigma_{-1} = 0,35\sigma_B + (7 \div 120)$, $\tau_{-1} = 0,58\sigma_{-1}$, МПа; σ_a, τ_a – амплітудне значення нормального та дотичного напружень, МПа; σ_m, τ_m – середнє значення нормального та дотичного напружень циклу напруження, МПа; k_σ, k_τ – ефективний коефіцієнт концентрації напружень (визначається згідно таблиць); $\varepsilon_\sigma, \varepsilon_\tau$ – масштабний фактор залежить від діаметру вала (таблична величина); β – коефіцієнт враховуючий ступінь обробки поверхні деталі, при $R_a = 0,32 \dots 2,5$, $\beta = 0,97 \div 0,9$; ψ_σ, ψ_τ – коефіцієнти враховуючі вплив нормальних та дотичних напружень на втомливість матеріалу, для вуглецевих сталей $\psi_\sigma = 0,2$, для легованих $\psi_\sigma = 0,25 \div 0,3$, $\psi_\tau = 0,1$ для вуглецевих та легованих сталей.

Величину амплітудного значення нормального та дотичного напружень визначають рівнянням:

$$\sigma_a = \frac{M_c}{W_3}, \quad \tau_a = \frac{T}{2W_K}.$$

Величина середнього значення $\sigma_m = 0$, з урахуванням симетричного циклу, а $\tau_m = \tau_a$ з урахуванням пульсуючого циклу.

На міцність деталі значно впливають «концентратори напружень», тобто, зміна геометрії (шпоночці канавки, отвори, місця переходу діаметрів і т.д.), яка обумовлює різке збільшення напружень. Також важливу роль грає в міцності стан поверхні. У випадку чистої й тонко обробленої поверхні межа утоми зростає. Тому для підвищення міцності необхідно домагатися високої чистоти поверхні, особливо поблизу

концентрації напружень. Крім того необхідно враховувати ще так званий масштабний фактор, громіздкі деталі мають великий запас енергії деформації, яка спричиняє процес руйнування.

Якщо коефіцієнт запасу виявляється менше потрібного, то опір втоми можна істотно підвищити, застосувавши поверхнєве зміцнення: азотування, поверхнєвий гарт струмами високої частоти, обкатку роликками і т.д. При цьому можна одержати збільшення межі витривалості до 50% і більш.

6. Контрольні питання для самоперевірки

1. Призначення валів та осів?
2. Типи валів?
3. Основні конструктивні елементи валів?
4. Критерії працездатності валів?
5. Попередній розрахунок валу (основний принцип)?
6. Уточнений розрахунок валу?
7. Суть ескізної розробки валу?
8. Які основні принципи складання розрахункової схеми валу?
9. Чим обумовлено необхідність розрахунку валів на втомливість?
10. Умова міцності при розрахунку на втомливість?
11. Що таке концентрація напружень?
12. В яких ділянках валу виникає концентрація напружень?
13. Що враховує масштабний фактор?
14. Який вплив на втомливість мають розміри деталі?
15. Як визначається амплітудне значення величини напружень?
16. Які існують способи підвищення довговічності валу?

Розділ IV. ПІДШИПНИКИ

Підшипники служать опорами валів та осів, що обертаються. Призначення підшипника полягає в тому, що він повинен забезпечити надійне і точне з'єднання деталі, що обертається з нерухомим корпусом.

Підшипники класифікуються по виду тертя і навантаженню яке вони сприймають.

По характеру тертя підшипники розділяють на дві групи:

- підшипники ковзання, у яких опорна ділянка валу ковзається по поверхні підшипника (тертя ковзання);
- підшипники кочення, у яких тертя ковзання замінюється на тертя кочення внаслідок встановлення шариків чи роликів між опорними поверхнями підшипника та валу (тертя кочення).

По навантаженню, яке сприймають підшипники їх розподіляють на:

- радіальні, що сприймають тільки радіальне навантаження і незначне осьове;
- радіально – упорні, що сприймають велике радіальне і менше осьове навантаження;
- упорні, що сприймають тільки осьове навантаження.

1. Підшипники ковзання

1.1. Конструкція та область використання

Основним елементом таких підшипників є вкладиш з антифрикційного матеріалу або, принаймні, з антифрикційним покриттям на опорній поверхні. Вкладиш встановлюють між валом і корпусом підшипника. В деяких випадках вкладиш запресовують безпосередньо в корпус механізму.

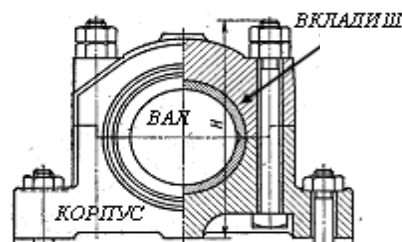


Рис. 4.1. Конструкція підшипника ковзання

При всьому різноманітті і складності конструктивних варіантів підшипникових вузлів ковзання принцип їх пристрою полягає в тому, що між корпусом і валом встановлюється тонкостінна втулка з антифрикційного матеріалу, як правило, бронзи або бронзових сплавів, бабіти, а для механізмів, які сприймають незначні навантаження, з пластмас. Є успішний досвід експлуатації в дизелях тепловозів, тонкостінних біметалічних вкладишів, завтовшки не більше 4 мм, виконаного із сталеві смуги і алюмінієво-олов'яного сплаву.

Більшість радіальних підшипників мають циліндровий вкладиш, який, проте, може сприймати і осьові навантаження за рахунок галтелі на валу і закруглення кромки вкладиша. Підшипники з конічним вкладишем застосовуються рідко, їх використовують при невеликих навантаженнях, коли необхідно систематично усувати зазор від зносу підшипника для збереження точності механізму.

Таким чином форма робочої поверхні вкладишу аналогічна формі цапфи валу.

Підшипники ковзання використовують тільки в тих випадках коли неможливо використати підшипники кочення, тобто:

- роз'ємні підшипники, необхідні по умові збирання (колінчаті вали);
- при великих швидкостях обертання (газодинамічні підшипники в турбореактивних двигунах при $V > 30$ м/с), довговічність підшипників кочення різко знижується;
- при необхідності точного центрування валів та необхідності регулювання зазорів;
- робота підшипників в особливих умовах (агресивні середовища);
- підшипники тихохідних машин.

1.2. Умови роботи та види руйнування

Робота підшипників ковзання супроводжується зношуванням вкладишу. Інтенсивність зношування пов'язана з силами тертя і обумовлює довговічність підшипника. Тертя ковзання обумовлює нагрівання вкладишу, що являється основною причиною його руйнування. З підвищенням температури знижується в'язкість мастила і збільшується ймовірність заїдання цапфи в підшипнику, що приводить до виплавлення вкладишу.

Для роботи підшипників без зносу поверхні цапфи і втулки повинні бути розділені шаром мастила достатньої товщини.

Залежно від режиму роботи підшипника в ньому може бути реалізоване:

- 1) рідинне тертя, коли робочі поверхні валу і вкладиша розділені шаром

масла, товщина якого більше суми висот шорсткості поверхонь; при цьому масло сприймає зовнішнє навантаження, ізолюючи вал від вкладиша, запобігаючи їх зносу. Опір руху дуже малий;

2) наполовину рідинне тертя, коли нерівності валу і вкладиша можуть торкатися один одного і в цих місцях відбувається їх схоплювання і відрив частинок вкладиша. Таке тертя приводить до абразивного зносу навіть без попадання пилу ззовні.

1.3. Розрахунок підшипників ковзання

Забезпечення режиму рідинного тертя є основним критерієм розрахунку більшості підшипників ковзання. При цьому одночасно забезпечується працездатність по критеріях зносу і заїдання.

Критерієм міцності, а отже, і працездатності підшипника ковзання є контактні напруження в зоні тертя або, що, у принципі, те ж саме - контактний тиск.

Розрахунковий контактний тиск порівнюють з допустимим

$$p = \frac{R}{(\ell \times d)} \leq [p],$$

де: R – сила нормального тиску валу на втулку (реакція опори); ℓ – робоча довжина втулки підшипника; d – діаметр цапфи валу.

Іноді зручніше порівнювати розрахунковий допустимий добуток тиску, на швидкість ковзання. Швидкість ковзання легко розрахувати, знаючи діаметр і частоту обертання валу.

$$pV = \frac{RV}{ld} = \frac{Rn\pi}{60l} \leq [pV].$$

Добуток тиску на швидкість ковзання характеризує тепловиділення і знос підшипника. Найбільш небезпечним є момент пуску механізму, оскільки у спокої вал розташовується на вкладиші і при початку руху неминуче сухе тертя.

2. Підшипники кочення

2.1. Конструкція та область використання

Підшипники кочення являють собою готові вузли, основним елементом яких є тіла кочення – шарики чи ролики.

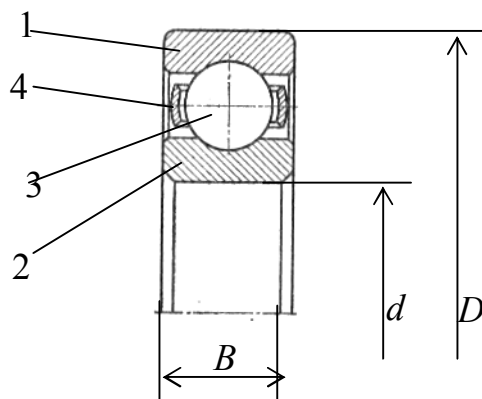


Рис.4.2 Конструкція підшипника кочення

Звичайно підшипник виконується як самостійна складальна одиниця (рис. 4.2), що складається із зовнішнього 1 і внутрішнього 2 кілець, між якими і поміщені тіла кочення 3.

Тіла кочення щоб уникнути непотрібного контакту один з одним і рівномірного розподілу по колу поміщені в спеціальну кільцеподібну обойму – сепаратор 4.

Переваги підшипників кочення:

- низьке тертя, що значно зменшує нагрівання;
- високий рівень стандартизації;
- економія дорогих антифрикційних матеріалів.

Недоліки підшипників кочення:

- значні габаритні розміри та вага;
- високі вимоги до оптимізації вибору типорозміру;
- слабкий віброзахист (тіла кочення є генераторами вібрації за рахунок їх неминучої різної розмірності).

2.2. Класифікація підшипників кочення і їх маркірування

За формою тіл кочення підшипники діляться на:

Шарикові (швидкохідні, здібні самі встановлюватись за рахунок можливості деякого відхилення осі обертання);

Роликові – циліндричні, конічні, бочкоподібні, голчаті, виті (більш вантажопідійомні, але із-за точно фіксованого положення осі обертання не здатні самі встановлюватись, окрім бочкоподібних роликів).

По числу рядів тіл кочення – однорядні та багаторядні.

По радіальних габаритах (по величині зовнішнього діаметру D , рис.

4.2) підшипники згруповані в серії: надлегкі; особливо легкі; легкі; середні та важкі.

По осьових габаритах (по ширині підшипника B , рис. 4.2) підшипники згруповані в серії: особливо вузькі; вузькі; нормальні; широкі та особливо широкі.

По класах точності підшипники розрізняють: нормального класу; підвищеної точності; високої точності; особливо високої точності; надвисокої точності.

По сприйманих силах всі підшипники діляться на чотири групи.

Радіальні підшипники (якщо $F_r \ll F_a$), що сприймають тільки радіальне навантаження і незначне осьове. Це циліндричні роликові (якщо $F_a = 0$) і радіальні шарикові підшипники.

Радіально-упорні підшипники (якщо $F_r > F_a$), що сприймають велике радіальне і менше осьове навантаження. Це радіально-упорні шарикові і конічні роликові з малим кутом конуса.

Упорно-радіальні підшипники (якщо $F_r < F_a$), що сприймають велике осьове і менше радіальне навантаження. Це конічні роликові підшипники з великим кутом конуса.

Упорні підшипники, «підп'ятники» (якщо $F_r \ll F_a$), що сприймають тільки осьове навантаження. Це упорні шарикові і упорні роликові підшипники. Вони не можуть центрувати вал і застосовуються тільки в поєднанні з радіальними підшипниками.

Маркуються підшипники кочення з допомогою цифр, які наносяться на торець кільця.

Дві перші цифри, рахуючи справа, означають умовно внутрішній діаметр підшипників, до того ж для всіх підшипників із внутрішнім діаметром 20мм і більше ці дві цифри означають частку від ділення діаметра (в міліметрах) на 5. Для підшипників з внутрішнім діаметром до 9мм перша цифра праворуч показує фактичний розмір внутрішнього діаметра (тоді на третьому місці стоїть цифра 0). Внутрішні діаметри 10; 12; 15 і 17 мм позначають двома цифрами 00; 01; 02; 03 відповідно.

Третя цифра праворуч свідчить про серію підшипників всіх діаметрів ($d > 10\text{мм}$): основна з особливо легких серій позначається цифрою 1, легка – 2, середня – 3, важка – 4, легка широка – 5, середня широка – 6.

Четверта цифра праворуч показує на тип підшипника: 0 – радіальний шариковий однорядний (при манкіровці не проставляється); 1 – радіальний шариковий дворядний сферичний; 2 – радіальний із короткими циліндричними роликами; 3 – радіальний роликовий дворядний

сферичний; 4 – роликовий із довгими циліндричними роликами або голчастий; 5 – роликовий із витими роликами; 6 – радіально-упорний шариковий; 7 – роликовий конічний; 8 – упорний шариковий; 9 – упорний роликовий.

П'ята та шоста цифри праворуч, що вводяться не для всіх підшипників, характеризують їхні конструктивні особливості.

Цифри 6, 5, 4 і 2, що стоять через знак «дефіс» перед умовним позначенням підшипника, означають його клас точності (2 – надвисокий клас точності, 4 – особливо високий, 5 – високий, 6 – підвищений). Нормальний клас точності позначається цифрою 0, яка при манкіровці не проставляється.

2.3. Практичний розрахунок (вибір) підшипників кочення

Розрахунок підшипників кочення ґрунтується на двох критеріях: 1) розрахунок на статичну вантажопідйомність по залишковим деформаціям, виконується для попередження можливості виникнення залишкових деформацій;

2) розрахунок на ресурс (довговічність) по втомливому викришуванню, виконується для попередження втомливого руйнування (викришування) робочих поверхонь деталей підшипника.

Підшипники кочення вибираються по внутрішньому діаметру d , і в залежності від частоти обертання валу виконують один із двох розрахунків. Якщо частота обертання валу $n \geq 10 \text{ хвл}^{-1}$, то перевіряють підшипник на довговічність згідно рівняння

$$L = \left(\frac{C}{P} \right)^n,$$

де: C – динамічна вантажопідйомність підшипника, кН (вибирається згідно каталогу); P – еквівалентне динамічне навантаження, кН ; n – показник степені (для шарикових підшипників $n = 3$, для роликових $n = 3,333$).

Відповідний ресурс роботи підшипника визначається в мільйон обертів, що не зручно на практиці. Тому довговічність роботи підшипників, як правило розраховують в годинах згідно рівнянню

$$L_h = \frac{10^6 L}{60n},$$

де: n – частота обертання валу.

Для редукторів загального машинобудування довговічність роботи підшипників повинна становити 10000...35000 годин.

Еквівалентне динамічне навантаження для радіальних та радіально-упорних підшипників є таке умовно постійне радіальне навантаження, при дії якого підшипник має таку довговічність, що і при дійсних умовах навантаження.

$$P = (VXF_r + YF_a)K_\sigma K_T,$$

де: F_r, F_a – радіальне та осьове навантаження; X, Y – коефіцієнти радіального та осьового навантаження; V – коефіцієнт обертання кільця ($V = 1$ при обертанні внутрішнього кільця, $V = 1,2$ при обертанні зовнішнього кільця); K_σ – коефіцієнт безпеки, враховує характер навантаження (для редукторів 1,2...1,3); K_T – температурний коефіцієнт (до 100°C приймають $K_T = 1$).

3. Контрольні питання для самоперевірки

3.1. Підшипники ковзання

1. Типи підшипників?
2. Яке навантаження сприймають підшипники?
3. Конструкції підшипників ковзання?
4. Де використовуються підшипники ковзання?
5. Що обумовлює довговічність роботи підшипників ковзання?
6. Які види тертя реалізуються в підшипниках ковзання?
7. Які матеріали використовують для виготовлення вкладишів?
8. Розрахунок підшипників ковзання?

3.2. Підшипники кочення

1. Типи підшипників кочення?
2. Класифікація підшипників кочення?
3. Конструкції підшипників кочення?
4. Маркірування підшипників кочення?
5. Що обумовлює довговічність роботи підшипників?
6. Які існують види розрахунків підшипників кочення?
7. Що таке еквівалентне динамічне навантаження?

Розділ V. МУФТИ

1. Загальні відомості

Муфтами називають пристрої, що з'єднують вали і передають крутний момент. Інколи муфтами з'єднують вал із розміщеними на ньому деталями – зубчастими колесами, шківками, зірочками.

Застосування муфт пов'язане з тим, що більшість машин, у тому числі і їх привод, компонують із окремих складальних одиниць, що мають вхідні та вихідні вали. Такими складальними одиницями є, наприклад, двигун і робочий орган машини або двигун, редуктор і робочий орган машини. Безпосередній кінематичний і силовий зв'язок між двигуном і редуктором, редуктором і робочим органом здійснюється за допомогою муфт. Потреба у муфтах виникає і в тих випадках, коли довгі вали за умовами технології виготовлення і складання або транспортування слід виготовляти з кількох складових частин.

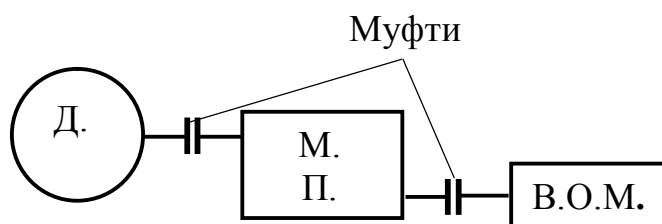


Рис. 5.1. Схема приводу

У машинобудуванні використовують муфти дуже різноманітних конструкцій. Як самостійні складальні одиниці найбільш часто вживаються муфти стандартизовані.

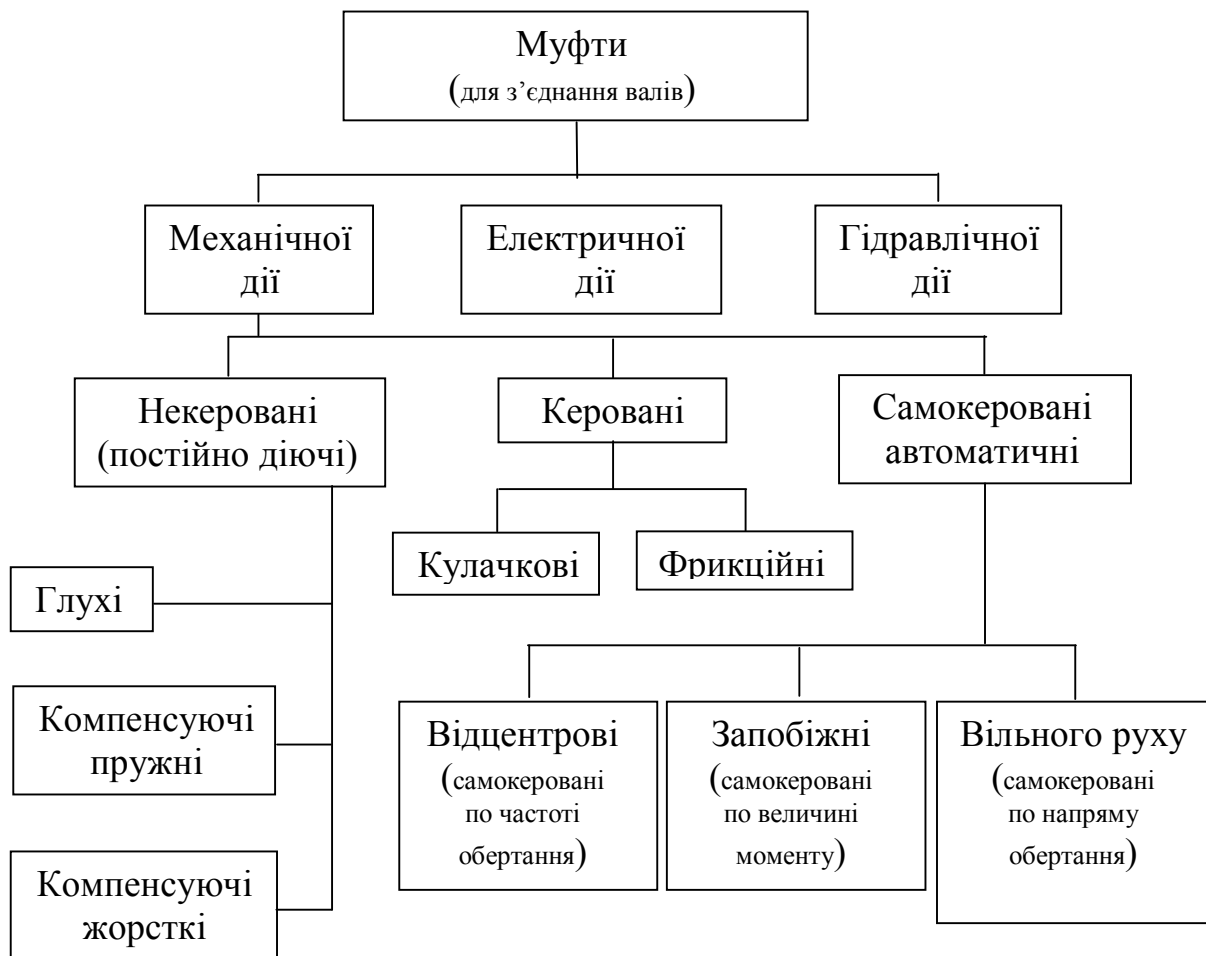
Основною характеристикою кожної муфти є обертовий момент T , на передавання якого вона розрахована. Іншими важливими показниками конструкцій муфт є гранична частота обертання, габаритні розміри, маса і момент інерції муфти щодо осі обертання.

Стандартні муфти не розраховують, а підбирають за обертовим моментом у відповідних довідниках. Лише у деяких випадках в разі потреби виконують перевіірочні розрахунки.

Муфти обчислюють за розрахунковим обертовим моментом $T_p = K_n T$, де: T – номінальний обертовий момент; K_n – коефіцієнт, що враховує короточасні перевантаження або режим роботи муфти. Для машин із

невеликими приводними масами і спокійному навантаженні $K_n = 1,0 \dots 1,5$, для машин із середніми масами та змінним навантаженням (поршневі компресори, стругальні верстати) $K_n = 1,5 \dots 2,0$. У машинах із великими приводними масами та ударним навантаженням (молоти, прокатні стани, роторні дробарки) $K_n = 2,5 \dots 3,0$.

Класифікація механічних муфт розглянемо у вигляді структурної схеми.



2. Некеровані муфти

До класу некерованих муфт належать усі не розчіпні (постійно діючі) муфти, тобто такі, в яких частини муфти (ведуча і ведена пів муфти) з'єднані між собою постійно. Цей клас муфт є найпоширенішим.

Глухі муфти призначені для жорсткого з'єднання співвісних валів. Вони бувають втулкові і фланцеві.

Втулкова муфта – найпростіша з глухих муфт, суцільна і насаджується на кінці валів, які підлягають з'єднанню.

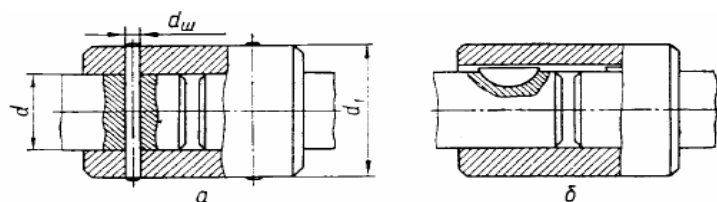


Рис. 5.2. Втулкова муфта

З'єднання суцільної втулки з валами може здійснюватись за допомогою штифтів рис. 5.2а, шпонок рис. 5.2б або за допомогою шліців. При монтажі або демонтажі муфти виникає потреба у відносному осьовому зміщенні валів. Тому для втулкових муфт не використовують посадки з гарантованим натягом.

Втулкові муфти застосовують здебільшого для діаметрів валів $d \leq (60 \dots 70) \text{ мм}$. Матеріал втулок – сталь 40, 45, а при великих розмірах – чавун СЧ18, СЧ20. Штифти виготовляють із сталей 45, 50.

Фланцева муфта складається з двох виконаних у вигляді фланців пів муфт, які насаджені на кінці валів і з'єднані між собою болтами рис. 5.3.

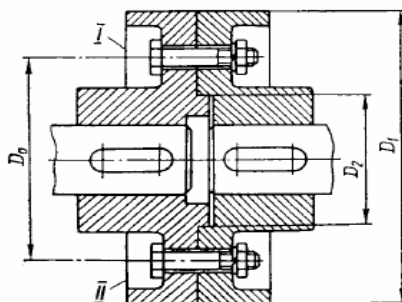


Рис. 5.3. Фланцева муфта

Болти муфти ставлять із зазором (варіант I) або без зазору (варіант II). У першому випадку момент T_p передається за рахунок моменту сил тертя, що виникає у площині стику пів муфти від затяжки болтів, а у другому випадку – безпосередньо болтами, які знаходяться під дією деформації зрізу. Фланцеві муфти стандартизовані для валів діаметром 12 – 220 мм і обертових моментів 8 – 45000 Нм.

Компенсуючі пружні муфти використовують переважно для зменшення динамічних навантажень у приводі і можуть у деякій мірі компенсувати не співвісність валів. За конструкцією пружні муфти дуже різноманітні.

Муфта пружна втулково-пальцева (МПВП) складається з двох пів муфт, нерухомо закріплених в одній пів муфті пальців, на яких розміщені

гумові гофровані втулки, що взаємодіють із другою пів муфтою.

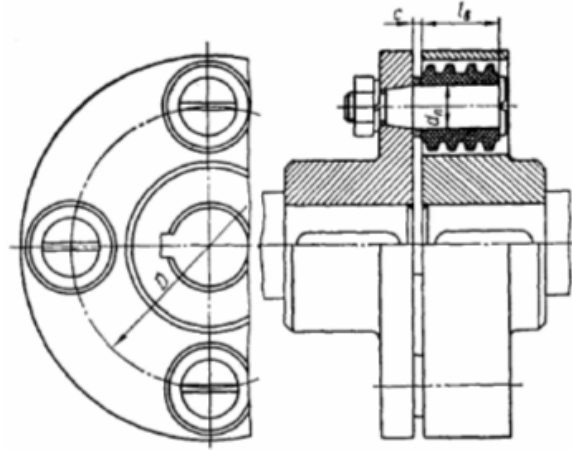


Рис.5.4. Муфта пружна втулково-пальцева

Пружність муфти забезпечується за рахунок гофрованих втулок, здатних деформуватись при передаванні муфтою обертового моменту T_p . МПВП допускає зміщення валів: осьове $\Delta_o=(1...5)мм$, радіальне $\Delta_r=(0,2...0,5)мм$ і кутове $\Delta_\alpha=(0,5...1,0)^\circ$. Однак зміщення Δ_r і Δ_α збільшують спрацювання пружних елементів і нерівномірність розподілу навантаження між пальцями муфти. Крім цього, такі зміщення додатково навантажують вали у радіальному напрямі. Перевагами МПВП є простота конструкції та заміни пружних елементів, малі габаритні розміри та маса. МПВП стандартизовані для валів діаметром $(10...160)мм$ і обертових моментів $6,3 - 16000Нм$.

Компенсуючі жорсткі муфти використовують для з'єднання валів із незначною не співвісністю, спричиненою неточністю виготовлення та монтажу, а також пружними деформаціями валів. Вони підвищують надійність роботи приводів, бо призводять до незначних додаткових радіальних навантажень на вали.

До жорстких компенсуючих муфт належать кулачкові-дискові, зубчасті, ланцюгові, шарнірні та ін.

Кулачково-дискова муфта складається з двох пів муфт, що взаємодіють між собою через проміжний диск. На внутрішніх торцях пів муфт є діаметрально розміщені пази, а проміжний диск має на обох торцях взаємно перпендикулярні виступи, які входять у пази двох пів муфт. Осьовий зазор δ між проміжним диском і пів муфтами дозволяє компенсувати поздовжні зміщення валів, а взаємно перпендикулярний

напрям виступів на торцях проміжного диску забезпечує можливість компенсації похибок Δ_r і Δ_α . Переважно компенсаційна здатність муфти становить $\Delta_o=(2\dots4)\text{мм}$, $\Delta_r=(1\dots3)\text{мм}$, $\Delta_\alpha \leq 0,5^\circ$. Розміри муфти вибирають згідно стандарту для діаметрів валів 16 – 150мм і обертових моментів 16 – 16000 Нм.

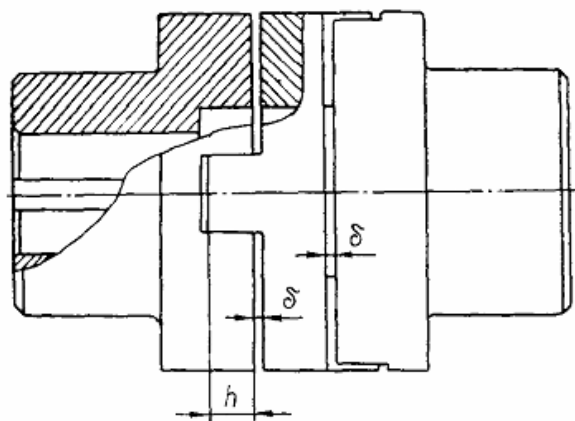


Рис. 5.5. Кулачково-дискоса муфта

Не співвісність валів спричиняє ковзання виступів проміжного диску у пазах пів муфт і їхнє спрацювання. Інтенсивність спрацювання зростає зі збільшенням не співвісності та кутової швидкості валів.

Деталі кулачково-дискосих муфт виготовляють із сталей Ст5 або 45Л. Для важко навантажених муфт застосовують леговані сталі типу 15Х, 20Х із цементацією робочих поверхонь.

3. Керовані муфти

До класу керованих належать муфти, за допомогою яких з'єднують і роз'єднують вали під час зупинки і роботи привода. Ці муфти поділяють на кулачкові і фрикційні.

Кулачкова муфта у найпростішому вигляді складається з двох пів муфт, на торцях яких розміщені кулачки. Одна пів муфта закріплюється на валу нерухомо, а інша, що знаходиться на другому валу, може переміщатися уздовж цього вала. Рухому пів муфту переміщують за допомогою спеціального пристрою – механізму керування муфтою. Вилку механізму керування розміщують у кільцевому пазу рухомої пів муфти. Із введенням у зачеплення кулачків двох пів муфт здійснюється передавання обертового моменту від одного вала до другого.

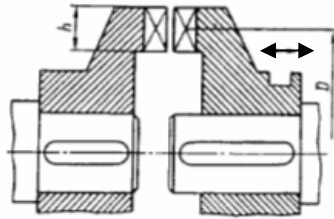


Рис. 5.6. Кулачкова муфта

Вмикання кулачкових муфт під час обертання валів завжди супроводжується ударами, які можуть спричинити руйнування кулачків. Тому такі муфти не рекомендують використовувати для вмикання приводів під навантаженням і при великих швидкостях відносно обертання валів (відносна колова швидкість кулачків $V > 1 \text{ м/с}$).

Пів муфти кулачкових муфт виготовляють із сталей, що підлягають цементації, 15, 20, 15X, 20X, а при великих розмірах – із сталей 45, 40X, 40XH. Твердість кулачків повинна бути $H \geq 50 \dots 55 \text{ HRC}$.

Фрикційні муфти передають обертовий момент за рахунок моменту сил тертя на робочих поверхнях їхніх деталей.

Під час вмикання фрикційних муфт обертовий момент на веденому валу зростає поступово і пропорційно збільшенню сили притискання поверхонь тертя. Це дозволяє з'єднувати вали під навантаженням і зі значною початковою різницею їх кутових швидкостей. У процесі вмикання муфта пробуксовує, а розгін веденого вала відбувається плавно без ударів. Фрикційні муфти за формою робочих поверхонь бувають таких видів: дискові, конусні і циліндричні, які мають циліндричну робочу поверхню.

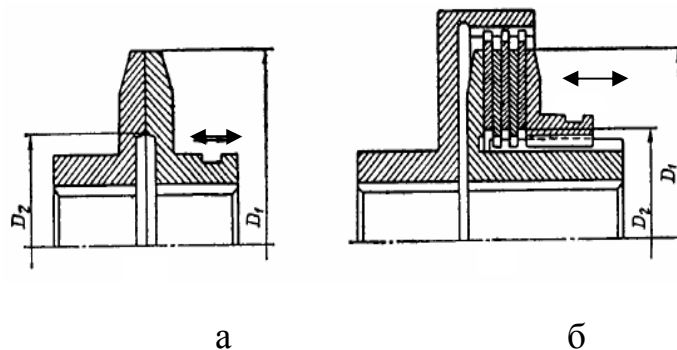


Рис. 5.7. Фрикційні муфти

Дискові фрикційні муфти бувають із однією парою поверхонь тертя і з багатьма парами поверхонь тертя.

У відповідних муфт сила притискання дисків залежить від

коефіцієнту тертя ковзання на поверхнях дисків та кількості пар (z) поверхонь тертя (для муфт, які приведені на рис.5.7 а, $z = 1$, а для муфти на рис. 5.7 б, $z = 6$).

Таким чином, із застосуванням багатодискових муфт можна збільшити обертовий момент, що передається у z разів порівняно з дводисловою муфтою, якщо зберігається та сама сила стискання дисків і їхні діаметри.

4. Самокеровані муфти

Самокеровані муфти автоматично з'єднують або роз'єднують вали, якщо параметри роботи машини недопустимі за тими чи іншими показниками. В разі потреби з'єднання валів залежно від швидкості обертання одного з них застосовують відцентрові муфти; із обмеженням напрямку обертання і передавання навантаження використовують обгінні муфти, а із обмеженням робочого навантаження – запобіжні муфти.

Відцентрові муфти автоматично з'єднують (роз'єднують) вали з досягненням певної кутової швидкості. Такі муфти керуються відцентровою силою.

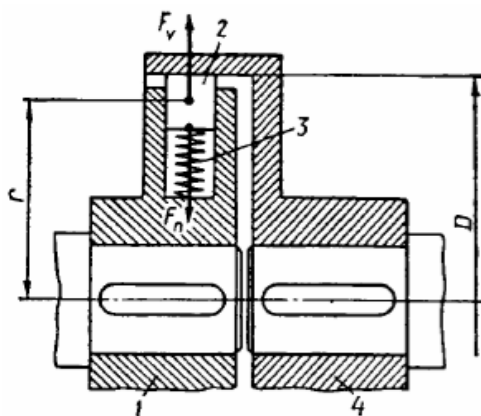


Рис. 5.8. Відцентрова муфта

Муфта складається зі з'єднаної з ведучим валом пів муфтою 1, у пазах якої розміщені колодки 2, що утримуються пружинами 3, та пів муфти 4 у вигляді барабана, закріпленої на веденому валу.

Під час обертання ведучого вала колодки знаходяться під дією відцентрової сили F_v та сили пружини F_n . Якщо швидкість вала мала, то $F_n > F_v$ і колодки не притиснуті до барабана, тобто муфта не передає

обертового моменту (ведений вал не обертається). Із збільшенням кутової швидкості ω_1 зростає і відцентрова сила F_V , а при $F_V > F_n$ колодки стикаються з барабаном і за рахунок сил тертя між колодками і барабаном передається обертовий момент до веденого вала (вал почне обертатися). Відповідно зі зменшенням кутової швидкості ведучого вала муфта розмикається.

Запобіжні муфти використовуються для захисту окремих органів машини від перевантажень. Вони бувають із не руйнованими елементами та з руйнованими елементами.

Запобіжні муфти із руйнованим елементом застосовують при відносно рідких перевантаженнях привода машини. Недоліком цих муфт є потреба заміни зруйнованих елементів.

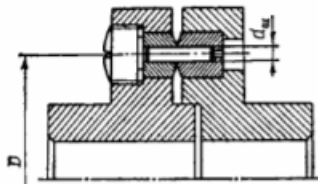


Рис. 5.9. Запобіжна муфта

На рис.5.9 зображена муфта із запобіжним штифтом. Тут обертовий момент від однієї пів муфти до іншої передається через штифт, який зрізується при перевантаженні. Для відновлення роботи муфти штифт замінюють. Загартовані втулки, в яких знаходиться штифт, запобігають зминанню більш м'якого матеріалу пів муфт штифтом і тим самим наближають дійсні умови зрізу штифта до розрахункових. Переважно кількість штифтів у муфті $z = 1$, рідше $z = 2$. Матеріал штифтів – середньо вуглецева сталь.

5. Контрольні питання для самоперевірки

5.1. Загальні відомості

1. Для чого використовують муфти?
2. Класифікація муфт?

5.2. Некеровані муфти

3. Конструкції втулкових муфт?
4. Конструкції фланцевої муфти?

5. Компенсуючі пружні муфти?
6. Компенсуючі жорсткі муфти?
7. Які існують відхилення осів валів від номінального?

5.3. Керовані муфти

1. Для чого використовують керовані муфти?
2. Конструкція кулачкових муфт?
3. Конструкції фрикційних муфт?
4. Принцип роботи фрикційних муфт?

5.4. Самокеровані муфти

1. Для чого використовують самокеровані муфти?
2. Конструкція та принцип роботи відцентрових муфт?
3. Конструкції запобіжних муфт?
4. Принцип роботи запобіжної муфти?

Розділ VI. З'ЄДНАННЯ ДЕТАЛЕЙ

Деталі машин зв'язані між собою тим чи іншим способом. Відповідні в'язі розподіляють на: рухомі та нерухомі.

Нерухомі в'язі в техніці називають з'єднанням.

По принципу роз'ємності всі види з'єднань можна розділити на: роз'ємні та нероз'ємні.

Роз'ємні з'єднання – дозволяють роз'єднувати деталі без їх ушкодження. До них відносяться: різьбові; шпонкові; шліцові, штифтові; клемові та профільні.

Нероз'ємні з'єднання – не дозволяють роз'єднувати деталі без їх ушкодження. До них відносяться: зварні; заклепкові; пресові; клеєні та паяні. Пресові відносяться до групи умовно, так як в процесі демонтажу має місце деяка залишкова деформація поверхонь.

Основним критерієм працездатності з'єднань є міцність. Необхідно прагнути, щоб з'єднання були рівно міцні з з'єднувальними елементами.

1. Роз'ємні з'єднання

1.1. Різьбові з'єднання

Різьбовими називаються такі з'єднання, які виконуються за допомогою деталей, що мають різьбу. Широке використання різьбових з'єднань у машинобудуванні обумовлене їхньою простотою, високою несучою здатністю, надійністю, а також зручністю з'єднання та роз'єднання деталей. Застосуванню різьбових з'єднань сприяють також наявність значної номенклатури спеціальних різьбових деталей, пристосованих до різних конструктивних варіантів з'єднань, їхня широка стандартизація та мала вартість в умовах масового виготовлення.

Обмеження у використанні різьбових з'єднань пов'язані з наявністю значної кількості концентраторів напружень на поверхнях різьбових деталей, що зменшує їх втомну міцність при дії змінних напружень.

Кріпильні різьби застосовують у деталях різьбових з'єднань. Залежно від форми поверхні, на якій нарізана різьба, розрізняють циліндричні та конічні різьби. В основному використовуються циліндричні кріпильні різьби. Конічну різьбу застосовують у випадках, коли треба забезпечити герметичність з'єднання.

Кріпильні різьби бувають: метричні, трубні та круглі.

Метрична різьба є основною кріпильною різьбою. Вона має назву метричної тому, що всі її розміри задаються в міліметрах (на відміну від мало розповсюдженої дюймової різьби, розміри якої задаються в дюймах). Метрична різьба має трикутний профіль витків із кутом профілю $\alpha = 60^\circ$. Вершини витків та впадин притуплені по прямій або по дузі кола, по вершинах та впадинах утворений зазор. Така конструкція полегшує обробку різьби, зменшує концентрацію напружень та запобігає пошкодженням складальних одиниць.

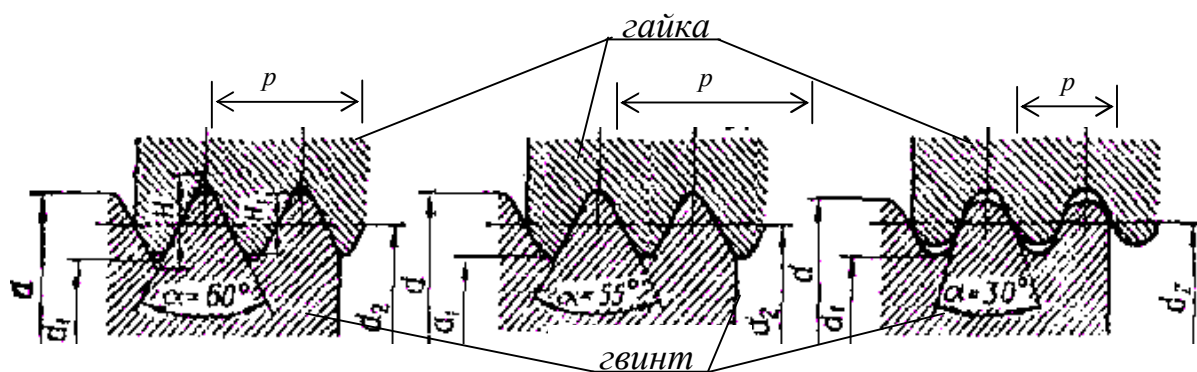


Рис. 6.1. Кріпильні різьби (метрична, кругла і трубна)

Метрична різьба характеризується такими основними геометричними параметрами:

- $d(D)$ – зовнішній (номінальний), $d_1 (D_1)$ – внутрішній і середній $d_2(D_2)$ діаметри різьб. Діаметри, що відносяться до зовнішньої різьби – болт, шпилька і т. п. – d, d_1 і d_2 , діаметри, що відносяться до внутрішньої різьби – гайка, різьбовий отвір і т. п. – D, D_1 і D_2 ;
- p – крок різьби (відстань між однойменними сторонами двох сусідніх витків, виміряна в напрямі осі гвинта);
- $H=0,54p$ – робоча висота профілю, на якій дотикаються витки гвинта і гайки.;
- n – число заходів різьби (для кріпильних метричних різьб $n=1$);
- ψ – кут підйому гвинтової лінії різьби по її середньому діаметру.

Позначення метричної різьби: $M20$ – метрична різьба з нормальним кроком і зовнішнім діаметром $d=20\text{мм}$; $M20 \times 1,5$ – метрична різьба з малим кроком витків $p=1,5\text{мм}$ і зовнішнім діаметром $d=20\text{мм}$.

Основні геометричні параметри метричних різьб регламентовані стандартами.

Трубна різьба використовується для герметичного з'єднання труб

арматури. Ця різьба має кут профілю витків $\alpha = 55^\circ$, вершини та впадини витків закруглені і відсутній зазор між вершинами та впадинами, що надає з'єднанню деталей високу щільність.

Трубна різьба має малий крок витків, оскільки нарізується на трубі з малою товщиною стінки. За номінальний діаметр трубної різьби беруть внутрішній діаметр труби. Зовнішній діаметр такої різьби в дійсності більший номінального на дві товщини стінки труби.

У міжнародному стандарті для трубної різьби зберігається дюймове вимірювання ($1' = 25,4 \text{ мм}$). Нині замість трубних різьб часто застосовують метричні різьби з малим кроком витків.

Кругла різьба зручна для виготовлення накатуванням або витисканням на тонкостінних металевих та пластмасових деталях, а також відливанням на чавунних, скляних, пластмасових та інших виробках. Профіль витків круглої різьби утворюється спряженими дугами кіл, а кут профілю $\alpha = 30^\circ$.

Круглі різьби мають обмежене застосування, і в основному вони використовуються для деталей, що часто загвинчуються та відгвинчуються в умовах забруднення (пожежна арматура, вагонні стяжки, цоколі електроламп та ін.). Параметри круглої різьби регламентовані стандартом.

1.2. Шпонкові з'єднання

Шпонкою називається деталь, яку вставляють у пази вала і маточини (втулки) з метою утворення з'єднання, здатного передавати обертовий момент від вала до маточини або від маточини до вала.

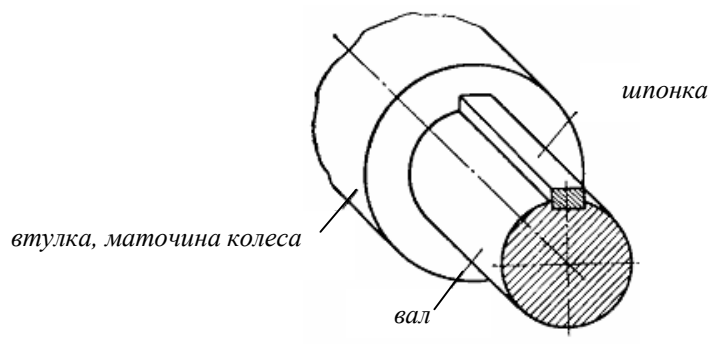


Рис. 6.2. Шпонкове з'єднання

Завдяки простоті та надійності конструкції, порівняно низькій вартості, а також зручності складання шпонкові з'єднання широко застосовують у машинобудуванні. До недоліків шпонкових з'єднань

належать послаблення вала та маточини шпонковими пазами, які зменшують поперечний переріз і спричиняють значну концентрацію напружень, що сприяє втомному руйнуванню валів.

Розрізняють ненапружені та напружені шпонкові з'єднання. Ненапружені шпонкові з'єднання здійснюють за допомогою призматичних та сегментних шпонок.

Призматичні шпонки за призначеннями бувають звичайні та напрямні. Звичайні призматичні шпонки призначені для нерухомого з'єднання маточини (втулки) з валом. Вони бувають із округленими або плоскими торцями. Направні шпонки застосовують у тих випадках, коли деталі, розміщені на валах, можуть рухатись уздовж валів. Направну шпонку закріплюють до вала гвинтами.

Згідно із стандартом ширину призматичної шпонки b і висоту h вибирають залежно від діаметра вала d . Стандарт також регламентує глибину паза на валу t_1 і у втулці t_2 . Довжину шпонки l вибирають за шириною деталі, розміщеної на валу, перевіряють розрахунком на міцність і також узгоджують зі стандартом.

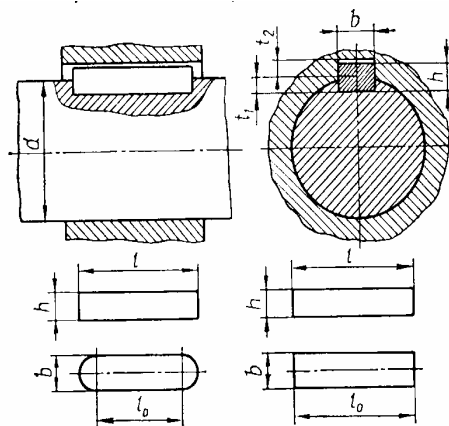


Рис. 6.3. Геометрія призматичних шпонок

Робочими гранями призматичних шпонок є їхні бічні грані, які контактують з бічними гранями пазів. Робоча довжина призматичної шпонки з округленими торцями $l_0 = l - b$, а шпонки з плоскими торцями $l_0 = l$.

З'єднання за допомогою сегментної шпонки. Глибока посадка шпонки на валу забезпечує їй більш стійке положення, ніж призматичної шпонки. Це запобігає перекошуванню шпонок під навантаженням. Однак глибокий паз значно послаблює вал, тому сегментні шпонки

використовують головним чином для з'єднання деталей на ділянках валів з невеликим навантаженням, наприклад на кінцях валів.

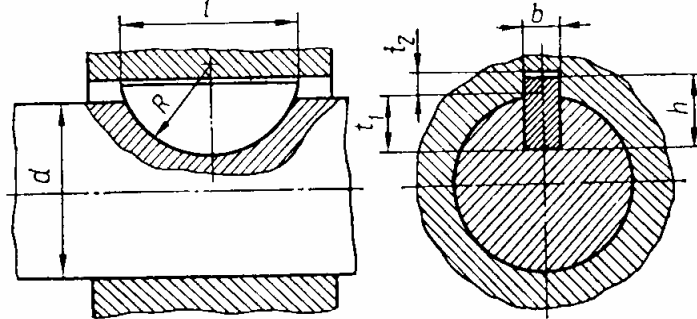


Рис. 6.4. Геометрія сегментної шпонки

З'єднання сегментними шпонками є технологічним, оскільки виготовлення як шпонок, так і пазів на валах досить просте. Сегментні шпонки стандартизовані. Розміри сегментних шпонок та пазів для них вибирають за стандартом залежно від діаметру валу.

Ненапружені шпонкові з'єднання є найбільш розповсюдженими. Вони використовуються в поєднанні з перехідними посадками деталей на вал або з посадками із гарантованим натягом. У таких випадках забезпечується достатнє центрування деталей та висока надійність з'єднання.

Оскільки шпонкові з'єднання стандартизовані і їхні розміри вибирають залежно від діаметра валу за відповідними стандартами, розрахунок шпонкових з'єднань у більшості випадків виконують як перевірочний.

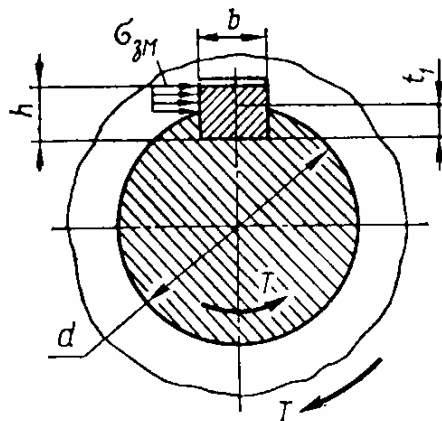


Рис. 6.5. Розрахункова схема шпонки

Розрахунок з'єднання призматичною шпонкою. В з'єднанні

обертовий момент T передається від вала до маточини деталі, розміщеної на ньому, за допомогою взаємодії бічних вузьких граней шпонки з бічними стінками пазів на валу та в маточині в наслідок чого навантажені поверхні зминаються. Основним розрахунком з'єднання призматичною шпонкою є розрахунок за умови обмеження напружень зминання

$$\sigma_3 = \frac{2T}{dl_o(h-t_1)} \leq [\sigma_3].$$

Коли умови міцності шпонкового з'єднання не виконуються, то тоді треба збільшити довжину шпонки, якщо дозволяє довжина маточини, або передбачити в з'єднанні дві шпонки, взаємно зміщені на 180° , або три шпонки, взаємно зміщені на 120° , але це застосовують дуже рідко.

1.3. Штифтові з'єднання

Штифти застосовують в основному для точного установлення з'єднуючих деталей машин. Штифтами користуються для фіксації положення редуктора відносно його корпусу. Рідше штифти застосовують для скріплення деталей машин, які передають невеликі навантаження.

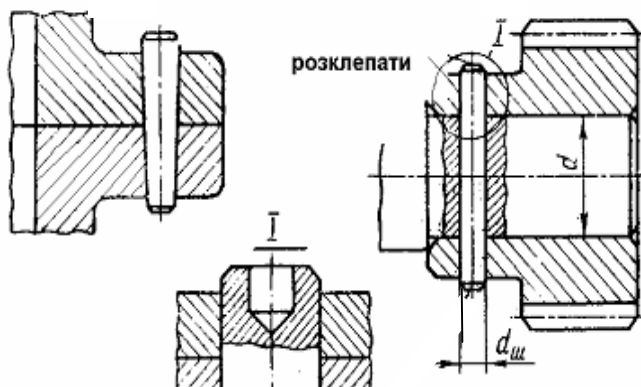


Рис. 6.6. Штифтові з'єднання

По формі розрізняють конічні і циліндричні штифти. Конічні штифти виконують із конусністю 1:50, яка забезпечує самогальмування. Циліндричні штифти встановлюють на робоче місце з натягом, а в рухомих з'єднаннях – із розклепуванням кінців. Звичайні конічні штифти встановлюють при прохідних отворах, коли їх можливо вибивати з протилежного боку. Штифти виготовляють із сталей Ст4, Ст5, 35, 40 і 45.

1.4. Шліцові з'єднання

Шліцові з'єднання – утворюються виступами на валу, що входять в зв'язані пази маточини колеса. Як на вигляд, так і за динамічними умовами роботи шліци можна вважати як багато шпонкове з'єднання. Деякі автори називають їх зубчатими з'єднаннями.

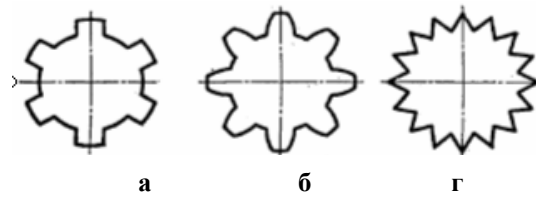


Рис. 6.7. Види шліців

В основному використовуються прямо бічні шліци (а), рідше зустрічаються евольвентні (б) і трикутні (в) профілі шліців. Прямо бічні шліци можуть центрувати колесо по бічних поверхнях, по зовнішніх поверхнях та по внутрішніх поверхнях.

Порівняно з шпонками шліци мають велику несучу здатність, краще центрують колесо на валу, підсилюють перетин валу за рахунок більшого моменту інерції ребристого перетину в порівнянні з круглим, але вимагають спеціального устаткування для виготовлення отворів.

Зминання і знос робочих поверхонь обумовлено контактними напруженнями. Це дозволяє розраховувати шліци по узагальненому критерію. Допустимі напруження призначають на основі досвіду експлуатації подібних конструкцій.

При розрахунку враховується нерівномірність розподілу навантаження по зубах

$$\sigma_3 = \frac{8T}{zhld_{сер}} \leq [\sigma_3],$$

де: z – число шліців; h – робоча висота шліців; l – робоча довжина шліців; $d_{сер}$ – середній діаметр шліцевого з'єднання.

Для евольвентних шліців робоча висота приймається рівною модулю профілю, за $d_{сер}$ приймають ділильний діаметр.

2. Нероз'ємні з'єднання

2.1. Зварні з'єднання

Зварювання – технологічний процес з'єднання деталей, який здійснюється при місцевому нагріванні стику деталей до розплавленого або пластичного стану їх із подальшим взаємним деформуванням.

Утворення такого типу з'єднань базується на використанні сил молекулярного зчеплення. Тому, зварні з'єднання є найдосконалішими з нероз'ємних з'єднань, оскільки вони у значній мірі наближають з'єднані деталі до цілісних.

Зварювання використовують не тільки як спосіб з'єднання деталей, а й як технологічний метод виготовлення самих деталей. Зварені деталі в багатьох випадках із успіхом замінюють деталі ковани, штамповані або виготовлені литтям. Зварюванням виготовляють станини, рами і основи машин, шківів, зірочки, маховики, барабани, ферми, колони, різні резервуари, труби, корпуси річкових та морських суден.

Із всіх видів зварювання найбільш широко розповсюджена електрична. В основному використовують два види електричної зварки: дугову та контактну.

Електродугова зварка основана на використанні теплоти електричної дуги.

Контактна зварка основана на використанні підвищеного омичного опору в стику деталей.

Основними перевагами зварних з'єднань є:

- відсутність додаткових з'єднуючих елементів;
- рівномірність шва щодо з'єднуваних елементів деталей,
- економія матеріалу та зменшення маси виробів;
- висока продуктивність та простота процесу зварювання.

До недоліків зварних з'єднань належать:

- поява температурних напружень;
- значна концентрація напружень в області зварних швів;
- знижена стійкість проти корозії та ін.

Залежно від взаємного розміщення з'єднуваних елементів деталей розрізняють такі основні види зварних з'єднань: стикові, напускові, таврові та кутові.

Стикове з'єднання є найраціональнішим видом зварних з'єднань. Воно утворюється за допомогою дугового або контактного зварювання.

Таке з'єднання виконується стиковим зварним швом.

Зварні стикові з'єднання (рис. 6.8) бувають з прямим (а), косим (б) та кільцевим (в) швами.

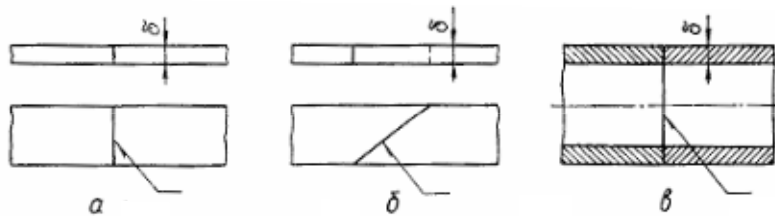


Рис. 6.8. Стикові зварні з'єднання

Напусківі з'єднання виконують за допомогою кутових (валоподібних) швів. Залежно від розміщення шва щодо лінії дії сили F кутові шви рис. 6.9 називаються лобовими (а), які розташовані перпендикулярно лінії дії сили F , косими, які розташовані під кутом до лінії дії сили F , фланговими (б), які розташовані паралельно до лінії дії сили F , комбінованими (в) і кільцевими (г).

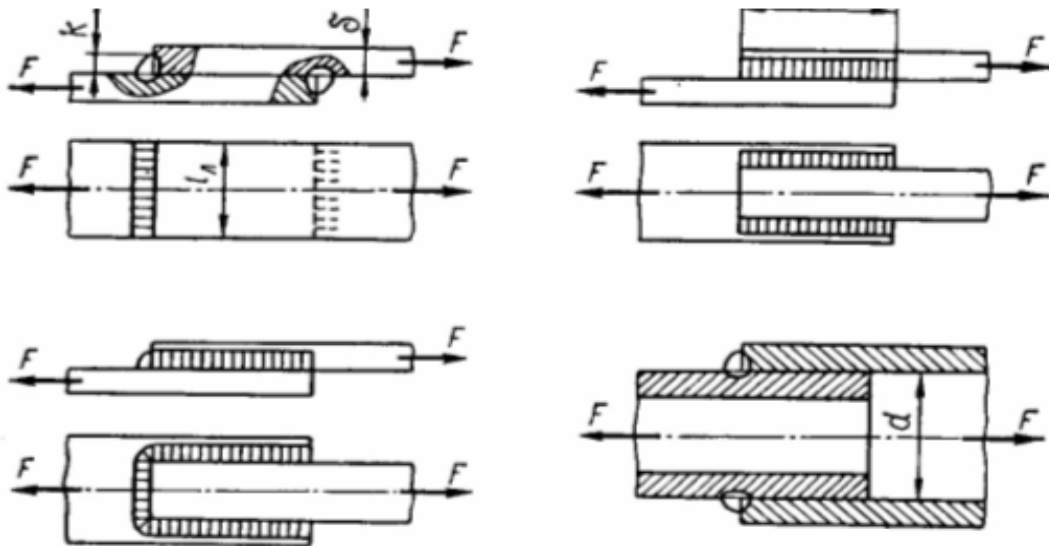


Рис. 6.9. Напусківі зварні з'єднання

Кутові шви розподіляються на: нормальні; вгнуті та випуклі. Найбільш розповсюджені нормальні шви. Основною геометричною характеристикою кутового шва є катет k і висота h . Величина висоти визначається $h = k \sin 45^\circ$, в основному $k = \delta$.

Кутове з'єднання є мало навантаженими і використовуються для забезпечення щільності.

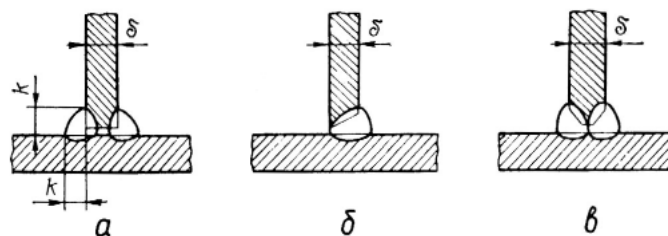


Рис. 6.10. Таврове з'єднання

Таврове з'єднання використовують при розміщенні з'єднуваних деталей у взаємно перпендикулярних площинах.

2.2. Заклепкові з'єднання

Заклепкове з'єднання здійснюються за допомогою спеціальної деталі – заклепки, яку встановлюють у отвори з'єднуваних деталей. Заклепка має циліндричний стержень і закладну головку на одному кінці.

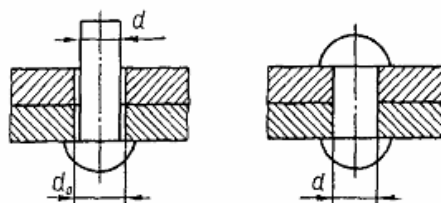


Рис. 6.11. Заклепкове з'єднання

Після пластичного деформування другого кінця утворюється замикаюча головка, і таким чином маємо з'єднання деталей. Для зручності вставлення заклепки діаметр отвору d_0 у з'єднуваних елементах дещо більший, ніж діаметр стержня d заклепки.

Під час клепаання (щоб мати замикаючу головку) стержень заклепки збільшує свій діаметр і щільно заповнює отвір. В готовому заклепковому з'єднанні діаметр заклепки дорівнює діаметру отвору під заклепку. Заклепки стягують з'єднувані деталі, завдяки чому частина навантаження з'єднання передається за рахунок сил тертя в площині стику, а частина сприймається стержнем заклепки.

Форма та розміри основних видів заклепок стандартизовані. Широке застосування мають заклепки рис. 6.12 з напівкруглою (*a*), потайною (*б*) та наполовину потайною (*в*) головками. Крім цих заклепок із суцільним стержнем у машинобудуванні та приладобудуванні використовують трубчасті пістони, що виготовляють точінням (*г*) або штампуванням (*д*, *е*).

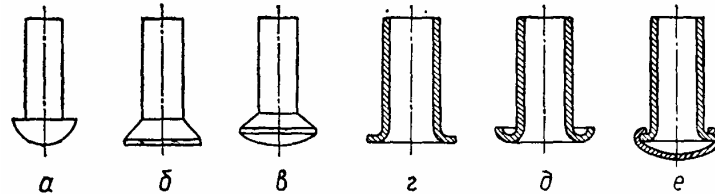


Рис. 6.12. Форми заклепок

Матеріал заклепки повинен бути достатньо пластичним, щоб забезпечити формування головок при виготовленні і клепанні заклепок. Заклепки бувають сталеві, алюмінієві, латунні, мідні та ін.

Матеріал заклепок повинен бути таким самим, як і матеріал металевих з'єднаних деталей для запобігання хімічної корозії в з'єднаннях. Заклепки із кольорових металів та їх сплавів широко застосовують для з'єднання деталей із неметалевих матеріалів. Взагалі заклепкові з'єднання застосовують у конструкціях, що не допускають зварювання.

2.3. З'єднання паянням та склеюванням

За конструкцією з'єднання паянням та склеюванням подібні до зварних з'єднань. На відміну від зварювання, паяння та склеювання здійснюється без розплавлювання деталей, що з'єднуються. Зв'язок між елементами тут забезпечується силами молекулярної взаємодії або адгезії поверхонь деталей із додатковим матеріалом – припоєм або клеєм.

Паянням та склеюванням можна з'єднувати деталі не тільки з однорідних, а й неоднорідних матеріалів. За допомогою паяння з'єднують деталі з чорних та кольорових металів та сплавів, деталі зі скла, кераміки, графіту. Склеювати можна деталі з металів із деталями зі скла, фарфору, кераміки, дерева, гуми.

За міцністю паяні та клейові з'єднання поступаються перед зварними, виконаними якісним зварюванням. Тільки при з'єднанні тонкостінних конструкцій можна досягти рівномірності з'єднання паянням

та склеюванням і матеріалу деталей.

Область використання паяних та клейових з'єднань у техніці все більше розширюється у зв'язку із застосуванням нових конструкційних матеріалів, високоміцних легованих сталей, багато з яких важко піддаються зварюванню. На сьогодні паяння широко застосовують в авіабудуванні.

Паяння використовують при виготовленні камер згорання сучасних реактивних двигунів, ядерних реакторів та інших об'єктів (радіаторів автомобілів і тракторів, паливних та масляних трубопроводів). Паяні з'єднання можуть працювати при високих тисках, температурах та в агресивних середовищах. Клейові з'єднання також застосовують у відповідних конструкціях, у будівництві мостів, авіа будівництві. Паяні та клейові з'єднання дуже широко розповсюджені в приладобудуванні.

Конструкції клейових з'єднань подібні до конструкцій паяних з'єднань, тільки замість припою використовується клей. Після затвердіння клею виникають сили адгезії, за рахунок яких передається з'єднанням деяке навантаження. Процес склеювання відбувається без нагрівання або в умовах порівняно невеликого нагрівання з'єднуваних деталей (для прискорення затвердіння клею). Перед склеюванням поверхні деталей повинні бути очищені та оброблені наждачним папером, оскільки шорсткість збільшує поверхню склеювання.

На сьогодні виготовляються клейові суміші з вибірковою адгезією до будь-яких певних матеріалів (спеціальні клеї) або з високою адгезією до різних матеріалів (універсальні клеї, наприклад, типу БФ).

3. Контрольні питання для самоперевірки

3.1. Роз'ясні з'єднання

1. Для чого необхідно з'єднання деталей?
2. Які існують з'єднання?
3. Які існують різьбові з'єднання?
4. Основна геометрія різьби.
5. Види шпонок.
6. Конструкція з'єднання призматичною шпонкою.
7. Конструкція з'єднання сегментною шпонкою.
8. Розрахунок шпонкового з'єднання.
9. Штифтові з'єднання.

10. Шліцові з'єднання.

3.2. Нероз'ємні з'єднання

1. Які існують нероз'ємні з'єднання ?
2. Які існують зварні з'єднання?
3. Які існують види зварних швів?
4. Основна геометрія кутового шва.
5. Види заклепок.
6. Конструкція заклепкового з'єднання.
7. Паяні та клеєні з'єднання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переславцев О.М. Теоретична механіка: Підручник; У2ч. – Ч1: Кінематика. – К.: Знання, 2004. – 599с.
2. Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переславцев О.М. Теоретична механіка: Підручник; У2ч. – Ч2: Динаміка. – К.: Знання, 2004. – 590с.
3. Зінченко В.І., Мамаєв Л.М., Постольник Ю.С. Основи інженерної механіки: Навч. посібник. – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2004. – 444с.
4. Зінченко В.І., Мамаєв Л.М. Теоретична механіка: Навч. посібник. – К.: ІСДО. 1995. – 228с.
5. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512с.
6. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. Опір матеріалів: Підручник. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища шк., 2004. – 655с. іл.
7. Конспект лекцій з опору матеріалів. Частина 1. Постольник Ю.С., Теліпко Л.П., Манько В.М. Дніпродзержинський індустріальний інститут. РОВО «Укрвузполіграф», 1991. □ 180 с.
8. Степин П.А. Сопротивление материалов: Учеб. Для машиностроит. Спец. Вузов. – 8-е изд. – М.: Высшая школа, 1988. -368 с.
9. Писаренко Г.С., Ружицкий В.М. Сопротивление материалов: Учеб. Пособие для студ. Втузов /Под ред. Г.С.Писаренко. –К.: Вища школа, 1984. -91 с. –(Лабораторный практикум).
10. Писаренко Г.С. и др. Справочник по сопротивлению материалов /Г.С.Писаренко, А.П.Яковлев, В.В.Матвеев – 2-е изд. перераб. и доп. –К.: Наукова думка, 1988. -734 с.
11. Теліпко Л.П., Мамаєв Л.М., Манько В.М. Порадник до розв'язування задач та виконання розрахунково-проектувальних завдань з основ інженерної механіки. Розділ: Опір матеріалів. Частина 1. Простий опір: навч. Посібник; 1 – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2015. – 279с.
12. Шкельов Л.Т., Станкевич А.М., Пошивач Д.Р. Опір матеріалів: Підручник для студентів вищих навчальних закладів; – К.: ЗАТ «Віпса», 2011. – 456с.
13. Гузенков П.Г. Детали машин. 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1975. – 424с.
14. Иванов М.Н. Детали машин. – М.: Высшая школа. 1991. – 336с.
15. Коновалюк Д.М., Ковальчук Р.М. Детали машин: Підручник; –К.:Кондор, 2004, – 583с.
16. Мінняйло А.В., та ін. Детали машин: Підручник; –К.:Агроосвіта, 2013. – 448с.
17. Решетов Д.Н. Детали машин. 3-е изд. – М.: Машиностроение, 1994. – 655с.

Навчальне видання

***РОМАНЮК** Олександр Дмитрович*

***ТЕЛІПКО** Леонід Петрович*

***РАКША** Сергій Васильович*

ТЕОРЕТИЧНА ТА ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

Короткий курс

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня закладу
вищої освіти)

Навчальний посібник

Підписано до друку 2021р. Формат 60x84/16.

Папір друк. Друк – різнограф. Ум. друк. арк. 00.

Тираж – 300. Зам. №

Видавець і виготовлювач

Дніпровський державний технічний університет

51918, м. Кам'янське, вул. Дніпробудівська, 2

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи

до державного реєстру видавництв серія ДК № 5399
від 26.07.2017 р.