

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання самостійної роботи
з курсу „Теоретична механіка. Статика”
для студентів механічних спеціальностей
денної та заочної форм навчання

Запоріжжя

2009

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з курсу „Теоретична механіка. Статика” для студентів механічних спеціальностей денної та заочної форм навчання/ Укл.: П.К. Штанько, С.Г. Саксонов, І.І. Кузьменко, О.Д. Лутова, Л.Ф. Дзюба, – Запоріжжя: ЗНТУ, 2009. – 54 с.

Укладачі: *П.К. Штанько*, доцент, к.т.н., ЗНТУ
С.Г. Саксонов, доцент, к.ф.-м.н., ЗНТУ
І.І. Кузьменко, доцент, к.т.н., ЗНТУ
О.Д. Лутова, ст. викл., ЗНТУ.
Л.Ф. Дзюба, доцент, к.т.н.,
Львівський державний університет БЖД

Комп’ютерна графіка
та верстка: *Г.А. Кот*

Рецензент: *Б.О. Трескунов*, доцент, к.т.н., ЗНТУ

Експерт: *Г.Д. Фурсіна*, доцент, к.т.н., ЗНТУ

Відповідальний
за випуск: *В.Г. Шевченко*, зав. кафедри механіки ЗНТУ,
доцент, к.т.н.

Видання перероблене та доповнене.

ЗАТВЕРДЖЕНО

на засіданні кафедри
механіки

Протокол № 1
від 27.08.2009 року

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ	4
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ	5
1 Завдання С.1 Визначення реакцій опор твердого тіла, завантаженого плоскою системою сил	5
1.1 Приклад виконання завдання	7
2 Завдання С.2 Визначення реакцій опор твердого тіла	9
2.1 Приклад виконання завдання	11
3 Завдання С.3 Визначення реакцій опор просторової конструкції	14
3.1 Приклад виконання завдання	16
4 Завдання С.4 Визначення реакцій опор просторової конструкції	19
4.1 Приклад виконання завдання	21
5 Завдання С.5 Визначення реакцій опор в конструкціях, завантажених довільно розташованими силами	25
6 Завдання С.6 Рівновага тіл з урахуванням сил тертя	35
6.1 Приклад виконання завдання	37
7 Завдання С.7 Визначення положення центра ваги тіла	40
7.1 Приклад виконання завдання	41
ЛІТЕРАТУРА	45
Додаток А В'язі та їх реакції	46
Додаток Б Проекції сили	50
Додаток В Моменти сил	51
Додаток Г Перелік питань до модульного контролю	53

ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Кожен студент виконує дві контрольні роботи, передбачені навчальною програмою дисципліни. Контрольна робота складається із завдань, наведених в цих методичних вказівках.

Викладач задає кожному студенту номер завдання.

Студент вибирає з відповідних таблиць вихідні дані до кожної задачі відповідно до трьох останніх цифр номера залікової книжки і перших трьох літер українського алфавіту, які слід розмістити під останніми трьома цифрами номера залікової книжки, наприклад,

номер залікої книжки – 0 1 5 0 7 2 ;

літери – а б в .

З кожного вертикального стовпця таблиці, позначеного внизу однією з трьох літер, слід вибрати лише одне число, що розміщене в ній в горизонтальному рядку, номер якої співпадає з номером букви.

Наприклад, з таблиці 1 при вказаному номері залікової книжки 015072 студент повинен взяти зі стовпця "в" – рядок 2, тобто схему II і $q=4$ кН/м, зі стовпця "б" – рядок 7, тобто $P=2$ кН, а зі стовпця "а" – рядок 0, тобто $M=5$ кН·м.

До виконання контрольної роботи слід приступати після вивчення відповідного розділу дисципліни і детального аналізу прикладів, наведених у рекомендованих підручниках.

Контрольну роботу слід виконувати відповідно до вимог стандарту СТП 15-96.

Перед розв'язуванням кожної задачі потрібно вписати повністю її умову з числовими даними, викреслити акуратний ескіз розрахункової схеми в масштабі і вказати на ньому позначення літерами та числовими значаннями тих величин, що необхідні для розрахунку.

Розв'язок кожної задачі потрібно супроводжувати короткими поясненнями і чіткими кресленнями та вказувати розмірності всіх величин, отриманих за розрахунками. Всі розрахунки виконувати до двох знаків після коми.

Після перевірки контрольної роботи студент повинен виправити в ній всі зазначені помилки і виконати всі вказівки викладача. Якщо робота не зарахована, потрібно в найкоротший термін виправити зазначені помилки і подати її повторно на перевірку. Усі виправлення, як в зарахованій, так і в незарахованій контрольних роботах, потрібно виконувати в тому самому зошиті після рецензії викладача. Виправляти потрібно тільки невірно розв'язані задачі.

До іспиту з дисципліни контрольна робота має бути зарахована.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1 Завдання С.1 *Визначення реакцій опор твердого тіла, завантаженого плоскою системою сил*

Визначити реакції опор A і B бруса, якщо на нього діють:

- *зосереджена сила \bar{P} ;*
- *пара сил з моментом M ;*
- *рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю q .*

Виконати перевірку знайдених рішень.

Схеми навантаження наведені на рисунку 1.1, числові дані для розрахунку – в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

№ рядка	№ схеми	P , кН	M , кН·м	q , кН/м	Розміри, м		
					a	b	c
1	I	10	6	2	2	3	4
2	II	20	5	4	4	3	2
3	III	15	8	1	1	2	3
4	IV	5	2	1	3	1	2
5	V	20	12	2	2	3	4
6	VI	6	2	1	4	2	3
7	VII	2	4	2	3	1	1
8	VIII	20	10	4	4	3	2
9	IX	10	4	3	2	4	3
0	X	10	5	2	3	4	2
	<i>в</i>	<i>б</i>	<i>а</i>	<i>в</i>	<i>б</i>	<i>а</i>	<i>в</i>

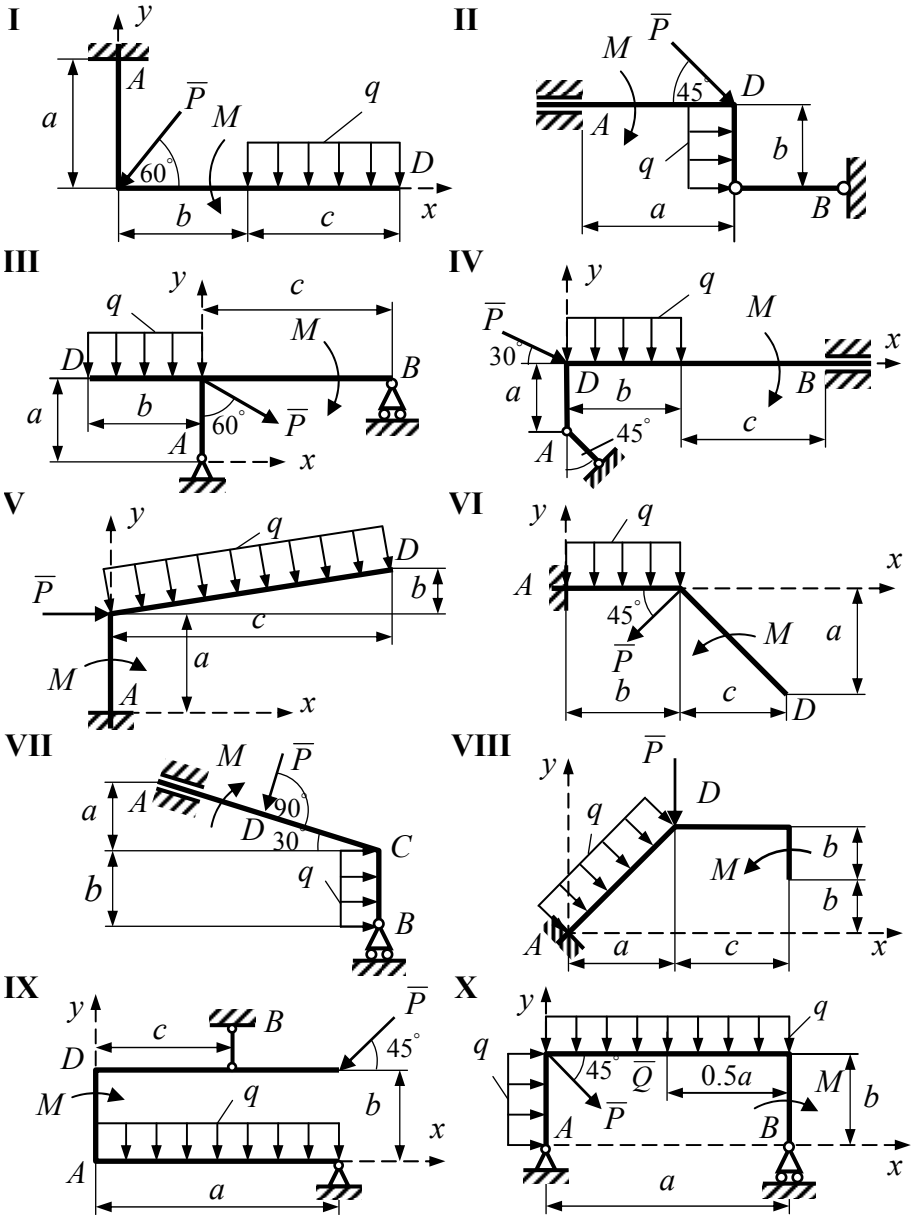


Рисунок 1.1

1.1 Приклад виконання завдання

Задача 1. Визначити реакції опор бруса, вісь якого – ламана лінія.

На брус діють:

- зосереджена сила $P=4$ кН;
- пара сил з моментом $M=6$ кН·м;
- рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю $q=5$ кН/м.

Навантаження бруса, а також розміри ділянок бруса (в метрах) показано на рис. 1.2, причому $a=2$ м, $b=2$ м, $c=2$ м.

Виконати перевірку визначених реакцій опор бруса.

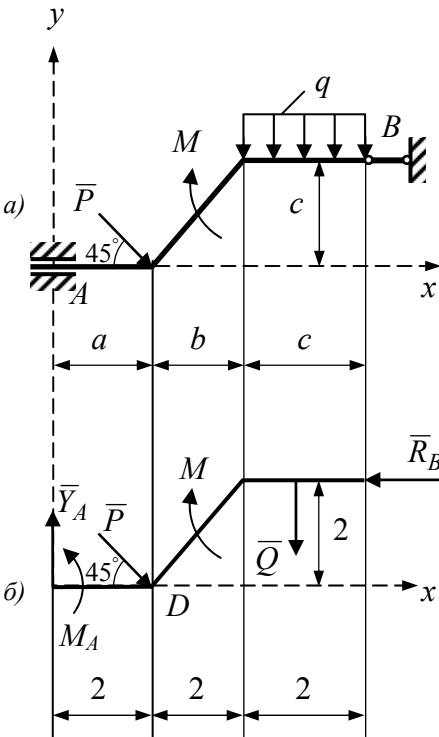


Рисунок 1.2

1.1.1 Розв'язування задачі

1.1.1.1 За вихідними даними викреслюємо у масштабі задану схему (рис. 1.2, а).

1.1.1.2 Виділяємо брус (рис. 1.2, б). Показуємо на схемі активні сили та моменти, звільняємо брус від в'язей, прикладаємо до нього відповідні реакції в'язей. Правильність вибору реакції перевіряємо за додатком А "В'язі та їх реакції". Дію ковзного затискання замінюємо реакцією \bar{Y}_A та парою сил з моментом M_A , а бішарнірну опору – реакцією \bar{R}_B .

1.1.1.3 Розглядаємо брус як тверде тіло, яке знаходиться у рівновазі під дією активних сил і реакцій в'язей.

1.1.1.4 Рівномірно розподілене навантаження q замінюємо зосередженою силою $Q=q \cdot c=5 \cdot 2=10$ кН.

1.1.1.5 Для визначення двох невідомих реакцій Y_A і R_B та реактивного моменту M_A запишемо рівняння рівноваги

$$\sum F_{kx} = 0; -R_B + P \cos 45^\circ = 0; \quad (1.1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; Y_A - P \sin 45^\circ - Q = 0; \quad (1.2)$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0; M_A - M - P \sin 45^\circ \cdot a - Q \cdot (a + b + c/2) + R_B \cdot c = 0. \quad (1.3)$$

Із рівняння (1.1) визначимо невідому реакцію R_B

$$R_B = P \cdot \cos 45^\circ; R_B = 2.83 \text{ кН.}$$

Із рівняння (1.2) визначимо невідому реакцію Y_A

$$Y_A = P \cdot \sin 45^\circ + Q = 4 \cdot 0.707 + 10 = 12.83 \text{ кН.}$$

Із рівняння (1.3) визначимо невідомий реактивний момент M_A

$$\begin{aligned} M_A &= M + P \cdot \sin 45^\circ \cdot a + Q(a + b + c/2) - R_B \cdot c = \\ &= 6 + 4 \cdot 0.707 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 5 - 2.83 \cdot 2 = 56 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Для перевірки правильності визначення реакцій запишемо рівняння моментів всіх сил, прикладених до бруса, відносно точки D

$$\begin{aligned} \sum M_D(\bar{F}_k) &= 0; \\ -Y_A \cdot 2 + M_A - M - Q \cdot 3 + R_B \cdot 2 &= -12.83 \cdot 2 + 56 - 6 - 10 \cdot 3 + 2.83 \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

Відповідь: $Y_A = 12.83 \text{ кН;}$

$M_A = 56.0 \text{ кН} \cdot \text{м;}$

$R_B = 2.83 \text{ кН.}$

2 Завдання С.2 Визначення реакцій опор твердого тіла

Визначити реакції опор A і B горизонтальної прямолінійної балки AB , якщо на неї діють:

- зосереджена сила \bar{F} ;
- пара сил з моментом M ;
- рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю q .

Виконати перевірку знайдених рішень.

Схеми навантаження наведені на рисунку 2.1, числові дані для розрахунку – в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

№ рядка	№ схеми	F , кН	q , кН/м	M , кН·м	l , м	a_1 , м	a_2 , м	α , рад
1	I	20	8	8	7	4	3	$\pi/6$
2	II	12	7.5	7.5	7.5	4	3	$\pi/4$
3	III	14	7	7	8	4	3	$\pi/3$
4	IV	16	6.5	6.5	8.5	3	2	$\pi/6$
5	V	18	6	6	9	3	2	$\pi/4$
6	VI	20	5.5	5.5	9.5	3	2	$\pi/3$
7	VII	22	5	5	10	2	2.5	$\pi/6$
8	VIII	24	4.5	4.5	10.5	2	2.5	$\pi/4$
9	IX	26	4	4	11	2	3.5	$\pi/3$
0	X	28	3.5	3.5	11.5	2	3.5	$\pi/6$
	<i>в</i>	<i>б</i>	<i>а</i>	<i>в</i>	<i>а</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>а</i>

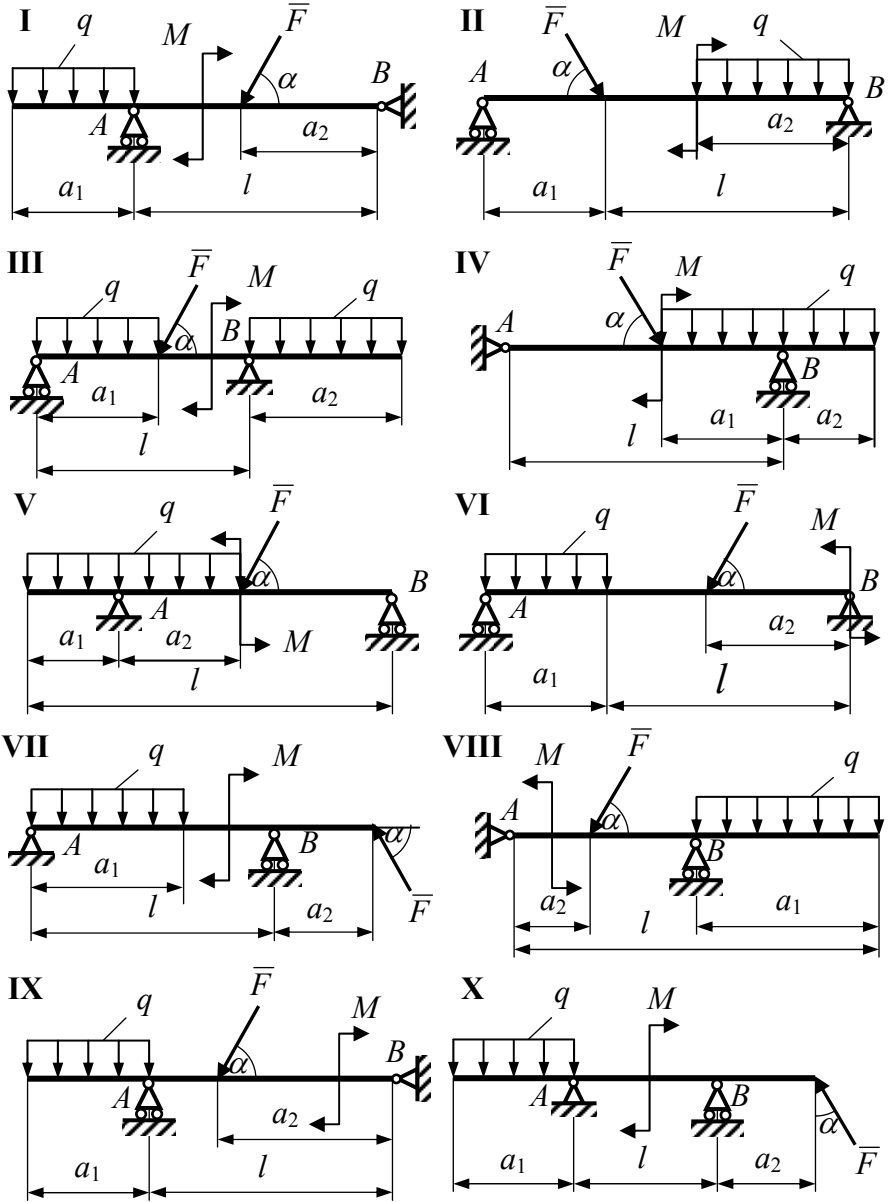


Рисунок 2.1

2.1 Приклад виконання завдання

Задача 2. Визначити реакції в шарнірно рухомій опрі A і в шарнірно нерухомій опорі B горизонтальної балки CB , якщо на неї діють:

- зосереджена сила $F=20$ кН;
- пара сил з моментом $M=10$ кН·м;
- рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю $q=5$ кН/м.

Задано також розміри ділянок балки (рис. 2.2): $a_1=2$ м, $a_2=2$ м, $a_3=3$ м, $l=4$ м, $\alpha=45^\circ$.

Виконати перевірку знайдених реакцій опор бруса.

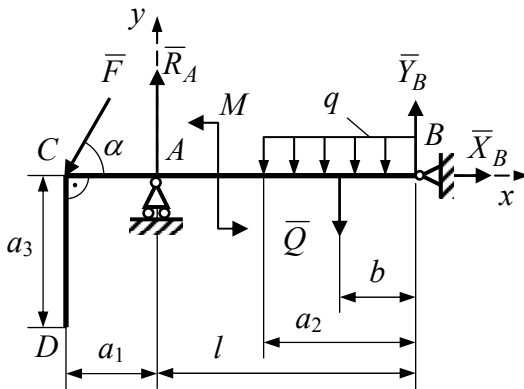


Рисунок 2.2

го відповідні реакції в'язей.

2.1.1.4 Розглянути рівновагу даного невідного твердого тіла як тіла вільного, що знаходиться під дією активних сил і реакцій в'язей.

2.1.1.5 Використати необхідні і достатні умови (рівняння) рівноваги відповідно до взаємного розміщення сил, прикладених до твердого тіла, та визначити шукані величини.

2.1.1 План розв'язування задачі

Розв'язування задач на рівновагу твердого тіла рекомендовано проводити в такому порядку.

2.1.1.1 Виділити тверде тіло, рівновагу якого слід розглянути.

2.1.1.2 Показати на рисунку активні сили.

2.1.1.3 Якщо тіло не вільне, то, застосувавши принцип звільнення від в'язей, прикласти до нього

2.1.2 Розв'язування задачі

2.1.2.1 Тілом, рівновагу якого потрібно розглянути, є горизонтальна балка.

2.1.2.2 До балки прикладена система довільно розташованих на площині зовнішніх навантажень:

- зосереджена сила \vec{F} ;
- зосереджений момент M ;
- рівномірно розподілене навантаження q .

Рівномірно розподілене навантаження q замінюємо зосередженою силою

$$Q = q \cdot a_2 = 5 \cdot 2 = 10 \text{ кН},$$

яка прикладена посередині ділянки дії розподіленого навантаження, тобто на відстані $b = \frac{a_2}{2} = \frac{2}{2} = 1$ м від опори B . Задані зовнішні активні сили показуємо на рисунку (рис. 2.2).

2.1.2.3 Оскільки балка не вільна, а оперта на дві опори (шарнірно рухомої опору A і шарнірно нерухомої опору B), то звільняємо її від в'язей і замінюємо їх дію реакціями. Дію шарнірно рухомої опору A замінимо реакцією R_A , яка є перпендикулярною до поверхні, по якій котяться котки, а дію опори B замінимо двома перпендикулярними реакціями \vec{X}_B і \vec{Y}_B .

2.1.2.4 Розглянемо рівновагу балки як вільного твердого тіла, що перебуває під дією довільної плоскої системи сил – заданих зовнішніх активних сил та реакцій в'язей. Виберемо в точці A початок декартової системи координат (вісь x – горизонтальна, вісь y – вертикальна).

2.1.2.5 Для визначення трьох невідомих реакцій X_B , Y_B , R_A запишемо три рівняння рівноваги (рівняння статки)

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -F \cos \alpha + X_B = 0; \quad (2.1)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad F \sin \alpha \cdot a_1 + M - Q \cdot (l - b) + Y_B \cdot l = 0; \quad (2.2)$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad F \sin \alpha \cdot (a_1 + l) - R_A \cdot l + M + Q \cdot b = 0. \quad (2.3)$$

Із рівняння (2.1) визначимо невідому реакцію X_B

$$X_B = F \cdot \cos \alpha = 20 \cdot \cos 45^\circ = 14.14 \text{ кН.}$$

Із рівняння (2.2) знаходимо реакцію Y_B

$$Y_B = \frac{1}{l} (-F \cdot \sin \alpha \cdot a_1 - M + Q(l-b)) = \frac{1}{4} (-20 \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 - 10 + 10 \cdot 3) = -2.07 \text{ кН.}$$

Із рівняння (2.3) знаходимо реакцію R_A

$$R_A = \frac{1}{l} (F \cdot \sin \alpha (a_1 + l) + M + Q \cdot b) = \frac{1}{4} (-20 \cdot \sin 45^\circ \cdot 6 + 10 + 10 \cdot 1) = 26.21 \text{ кН.}$$

2.1.2.6 Проведемо перевірку правильності визначення реакцій. Запишемо рівняння моментів всіх сил, прикладених до балки, відносно точки D (рис. 2.2)

$$\sum M_{iD} = 0;$$

$$\begin{aligned} F \cdot \cos \alpha \cdot a_3 + R_A \cdot a_1 + M - Q(a_1 + l - b) + Y_B(a_1 + l) - X_B \cdot a_3 = \\ = 20 \cdot 0.707 \cdot 3 + 26.21 \cdot 2 + 10 - (2 + 4 - 1) + (-2.07)(2 + 4) - 42.42 = 0. \end{aligned}$$

Отже реакції визначені вірно.

3 Завдання С.3 Визначення реакцій опор просторової конструкції

Визначити реакції опор A і B просторової конструкції та прикладену до конструкції силу P . На конструкцію діють:

- сила ваги \bar{G} ;
- зосереджена сила \bar{Q} .

Виконати перевірку знайдених рішень.

Схеми конструкції, точки прикладання сил та їх напрямки показані на рисунку 3.1, числові дані для розрахунку наведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

№ рядка	№ схеми	Сили, кН		Розміри, м				
		Q	G	a	b	c	R	r
1	I	2	20	0.20	0.30	0.10	0.15	0.05
2	II	4	2	0.20	0.10	0.30	0.10	0.10
3	III	3	2	0.30	0.20	0.10	0.15	0.10
4	IV	5	3	0.30	0.40	0.20	0.20	0.15
5	V	5	3	0.20	0.15	0.10	0.30	0.20
6	VI	4	2	0.20	0.30	0.10	0.15	0.10
7	VII	10	5	0.40	0.30	0.20	0.25	0.15
8	VIII	3	2	0.60	0.20	0.40	0.20	0.05
9	IX	2	1	0.15	0.10	0.20	0.20	0.05
0	X	5	1	0.40	0.40	0.10	0.20	0.05
	<i>в</i>	<i>в</i>	<i>б</i>	<i>а</i>	<i>в</i>	<i>а</i>	<i>б</i>	<i>б</i>

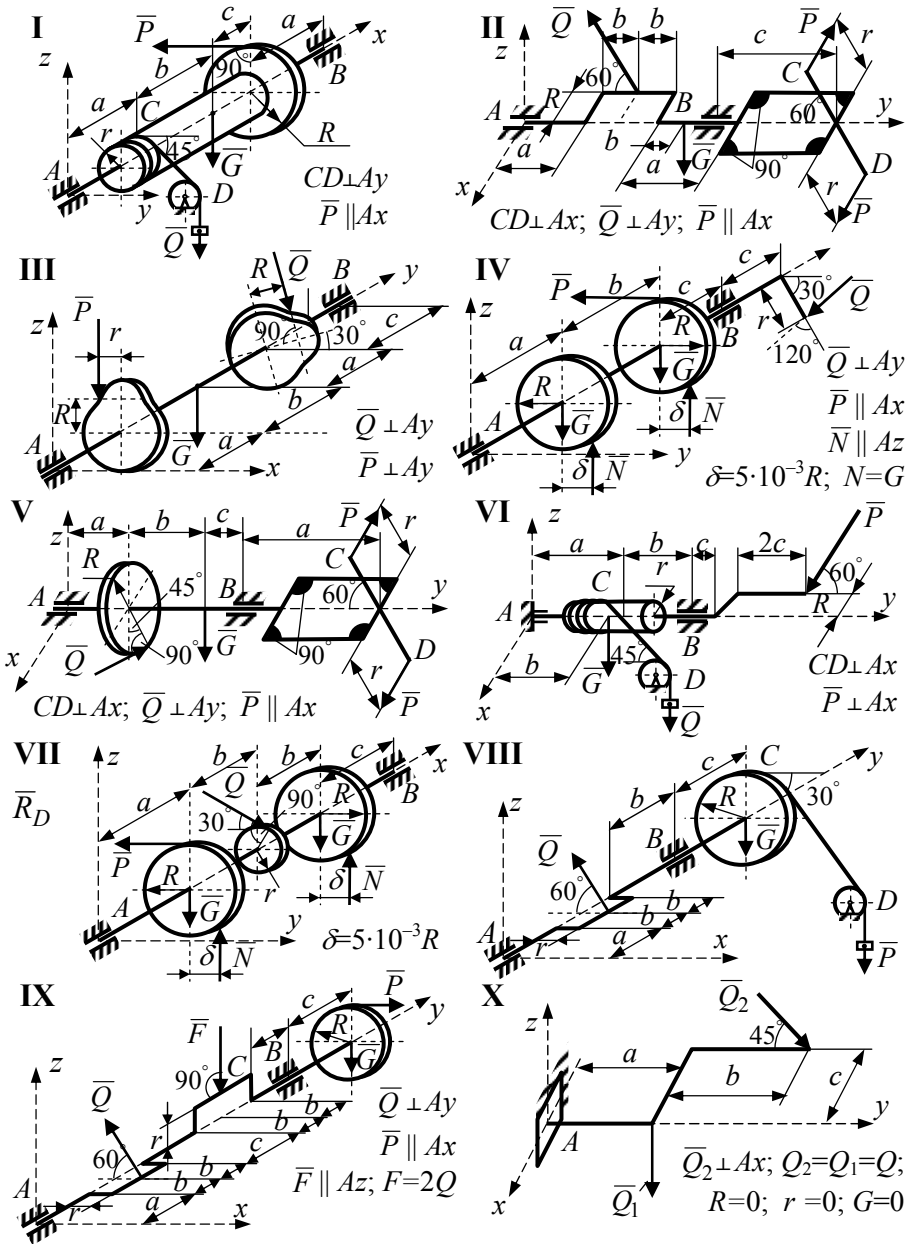


Рисунок 3.1

3.1 Приклад виконання завдання

Задача 3. Визначити реакції опор A і B колінчастого вала та прикладену силу \bar{P} . На вал діють:

- зосереджена сила \bar{Q} ;
- сила ваги \bar{G} .

Вихідні дані (рис. 3.2): $Q=5$ кН, $G=2$ кН, $a=0.30$ м, $b=0.20$ м, $c=0.10$ м, $R=0.20$ м, $r=0.10$ м.

Виконати перевірку знайдених реакцій опор вала.

3.1.1 Розв'язування задачі

3.1.1.1 За вихідними даними викреслюємо у масштабі задану схему (рис. 3.2, а).

3.1.1.2 Виділяємо вал, показуємо на схемі (рис. 3.2, б) активні сили \bar{G} , \bar{P} і $\bar{F} = \bar{Q}$, звільняємо вал від в'язей, прикладаємо замість опор відповідні реакції в'язей. Правильність вибору реакцій \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{Z}_A ,

\bar{X}_B , \bar{Y}_B перевіряємо за додатком А ”В’язі та їх реакції“.

3.1.1.3 Розглядаємо вал як тверде тіло, яке перебуває у рівновазі під дією активних сил і реакцій в’язей.

3.1.1.4 Обчислюємо попередньо значення проєкцій всіх сил на координатні осі x , y , z і їх моментів відносно цих осей. Заносимо отримані дані в таблицю 3.2.

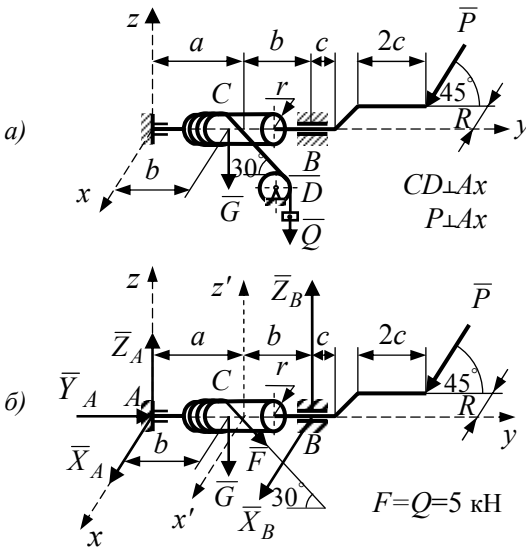


Рисунок 3.2

Таблиця 3.2

\bar{F}_k	\bar{F}	\bar{G}	\bar{P}	\bar{R}_A	\bar{R}_B
F_{kx}	0	0	0	X_A	X_B
F_{ky}	$F \cdot \cos 30^\circ$	0	$-P \cdot \cos 45^\circ$	Y_A	0
F_{kz}	$-F \sin 30^\circ$	$-G$	$-P \sin 45^\circ$	Z_A	Z_B
$M_x(\bar{F}_k)$	$-F \cdot \sin 30^\circ \cdot a$	$-G \cdot b$	$-P \sin 45^\circ \cdot (a+b+3c)$	0	$Z_B \cdot (a+b)$
$M_y(\bar{F}_k)$	$F \cdot \sin 30^\circ \cdot r$	0	$-P \cdot \sin 45^\circ \cdot R$	0	0
$M_z(\bar{F}_k)$	$F \cdot \cos 30^\circ \cdot r$	0	$P \cdot \cos 45^\circ \cdot R$	0	$-X_B \cdot (a+b)$

3.1.1.5 Запишемо умови рівноваги у загальному вигляді

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B = 0; \quad (3.1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad F \cdot \cos 30^\circ - P \cdot \cos 45^\circ + Y_A = 0; \quad (3.2)$$

$$\sum F_{kz} = 0; \quad -F \cdot \sin 30^\circ - G - P \cdot \sin 45^\circ + Z_A + Z_B = 0; \quad (3.3)$$

$$\sum M_x(\bar{F}_k) = 0; \quad -F \cdot \sin 30^\circ \cdot a - G \cdot b - P \cdot \sin 45^\circ \cdot (a+b+3c) + Z_B \cdot (a+b) = 0; \quad (3.4)$$

$$\sum M_y(\bar{F}_k) = 0; \quad F \cdot \sin 30^\circ \cdot r - P \cdot \sin 45^\circ \cdot R = 0; \quad (3.5)$$

$$\sum M_z(\bar{F}_k) = 0; \quad F \cdot \cos 30^\circ \cdot r + P \cdot \cos 45^\circ \cdot R - X_B \cdot (a+b) = 0; \quad (3.6)$$

Із рівняння (3.5) визначаємо P ($Q=F=5$ кН).

$$P = \frac{F \sin 30^\circ r}{R \sin 45^\circ} = \frac{5 \cdot 0.5 \cdot 0.1}{0.2 \cdot 0.707} = 1.77 \text{ кН.}$$

Із рівняння (3.2) визначимо невідому реакцію Y_A

$$Y_A = P \cdot \cos 45^\circ - F \cdot \cos 30^\circ = 1.77 \cdot 0.707 - 5 \cdot 0.5 = -1.25 \text{ кН.}$$

Із рівняння (3.4) визначимо Z_B

$$Z_B = \frac{F \cdot a \cdot \sin 30^\circ + G \cdot b + P \cdot (a + b + 3c) \sin 45^\circ}{a + b} =$$

$$= \frac{5 \cdot 0.3 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.2 + 1.77 \cdot 0.8 \cdot 0.707}{0.5} = 4.3 \text{ кН.}$$

Із рівняння (3.3) визначимо Z_A

$$Z_A = F \cdot \sin 30^\circ + G + P \cdot \sin 45^\circ - Z_B = 5 \cdot 0.5 + 2 + 1.77 \cdot 0.707 - 4.3 = 1.45 \text{ кН.}$$

Із рівняння (3.6) визначимо X_B

$$X_B = \frac{F \cdot \cos 30^\circ \cdot r + P \cdot \cos 45^\circ \cdot R}{a + b} =$$

$$= \frac{5 \cdot 0.866 \cdot 0.1 + 1.77 \cdot 0.707 \cdot 0.2}{0.5} = 1.37 \text{ кН.}$$

Із рівняння (3.1) $X_A = -X_B = -1.37 \text{ кН.}$

Відповідь: $X_A = -1.37 \text{ кН;}$ $Y_A = -1.25 \text{ кН;}$ $Z_A = -1.45 \text{ кН;}$
 $X_B = -1.37 \text{ кН;}$ $Y_B = 0;$ $Z_B = 4.3 \text{ кН.}$

3.1.1.6 Для перевірки правильності визначення величини сили P та реакцій X_A, X_B запишемо суму моментів всіх сил відносно осі $z' \parallel z$.

$$\sum M_{z'}(\bar{F}_k) = 0;$$

$$X_A \cdot a + F \cdot \cos 30^\circ \cdot r - X_B \cdot b + P \cdot \cos 45^\circ \cdot R =$$

$$= -1.37 \cdot 0.3 + 5 \cdot 0.866 \cdot 0.1 - 1.37 \cdot 0.2 + 1.77 \cdot 0.707 \cdot 0.2 = 0.$$

Для перевірки правильності визначення Z_A, Z_B та P запишемо суму моментів всіх сил відносно осі $x' \parallel x$.

$$\sum M_{x'}(\bar{F}_k) = 0;$$

$$-Z_A \cdot a + G \cdot (a - b) - P \cdot \sin 45^\circ \cdot (b + 3c) + Z_B \cdot b =$$

$$= -1.45 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.1 - 1.77 \cdot 0.707(0.2 + 0.3) + 4.3 \cdot 0.2 = 0.$$

4 Завдання С.4 Визначення реакцій опор просторової конструкції

Визначити реакції опор A і B конструкції, на яку діють:

- сила ваги \bar{G}
- зосереджена сила \bar{Q} ;
- натяги \bar{T} і \bar{t} ведучої та ведомої віток паса.

Виконати перевірку знайдених рішень.

Схеми конструкцій, точки прикладання сил та їх напрям показані на рисунку 4.1, числові дані сил та розміри конструкцій – у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

№ рядка	№ схеми	Сили, кН/м			Розміри, м				
		Q	T	G	a	b	c	R	r
1	I	1	4	2	0.40	0.30	0.20	0.20	0.10
2	II	2	3	1	0.30	0.10	0.05	0.15	0.05
3	III	4	6	3	0.20	0.40	0.15	0.20	0.10
4	IV	1	4	2	0.30	0.40	0.20	0.20	0.10
5	V	2	2	1	0.20	0.30	0.15	0.15	0.10
6	VI	2	2	3	0.30	0.90	0.20	0.30	0.10
7	VII	3	8	2	0.20	0.30	0.40	0.20	0.015
8	VIII	4	4	3	0.15	0.20	0.15	0.15	0.10
9	IX	3	5	4	0.30	0.20	0.10	0.30	0.10
0	X	2	2	3	0.20	0.30	0.10	0.25	0.05
	<i>в</i>	<i>в</i>	<i>б</i>	<i>а</i>	<i>в</i>	<i>б</i>	<i>а</i>	<i>в</i>	<i>б</i>

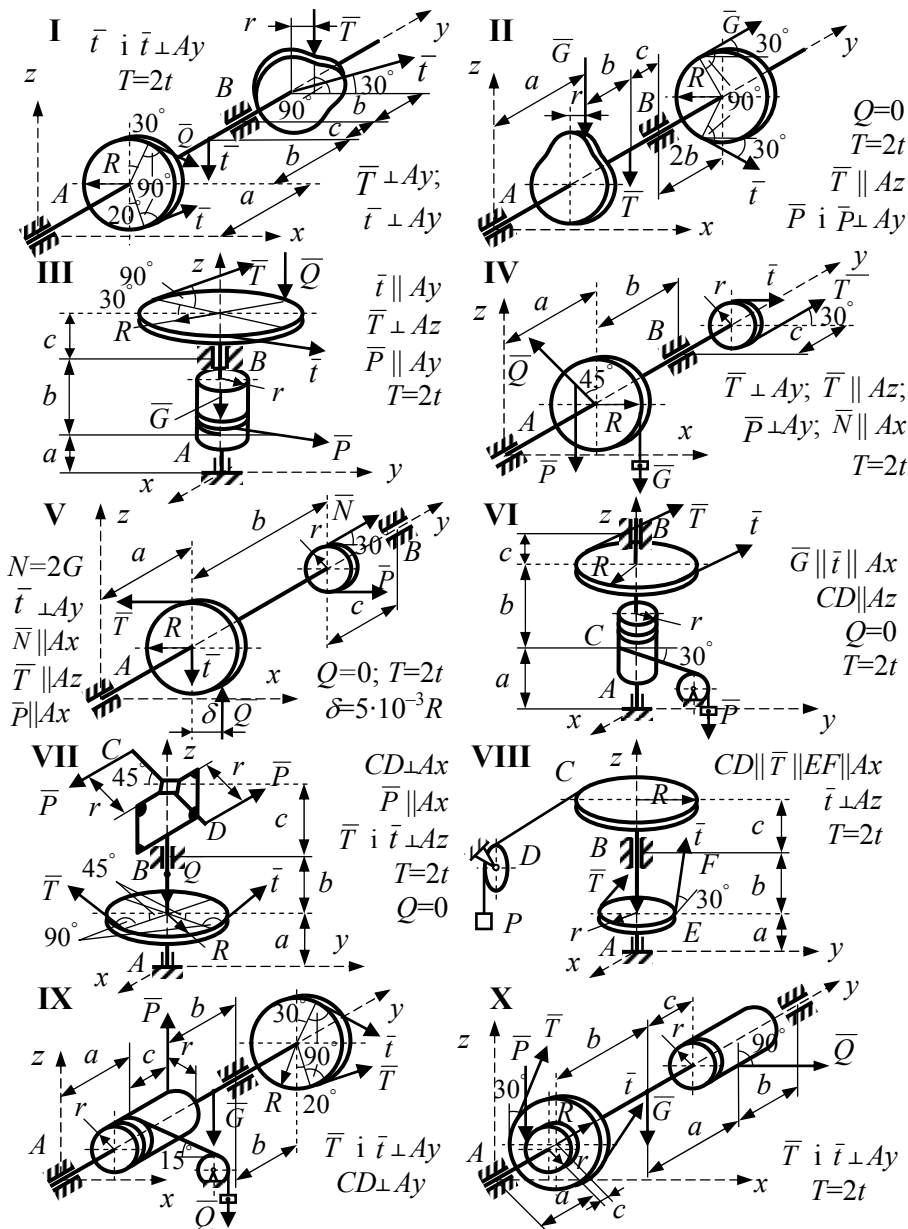


Рисунок 4.1

4.1 Приклад виконання завдання

Задача 4. Визначити реакції опор колінчастого вала та прикладену силу \bar{P} . На вал діють:

- зосереджена сила $Q=20$ кН;
- сила ваги вала $G=10$ кН;
- натяг паса $T=10$ кН і $T=2t$ (рис. 4.2, а).

Розміри конструкції: $a=0.5$ м, $b=3$ м, $c=0.3$ м, $R=0.2$ м, $r=0.1$ м.
Виконати перевірку знайдених реакцій та сили P .

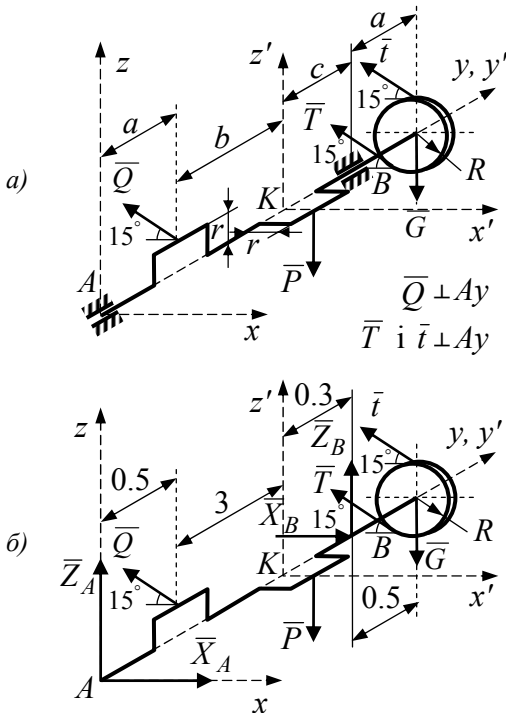


Рисунок 4.2

4.1.1 Розв'язування задачі

4.1.1.1 За вихідними даними викреслюємо у масштабі задану схему (рис. 4.2, а).

4.1.1.2 Виділяємо вал (рис. 4.2, б). Показуємо на схемі активні сили, звільняємо вал від в'язей, прикладаємо замість опор відповідні реакції в'язей. Правильність вибору реакцій перевіряємо за додатком А "В'язі та їх реакції".

4.1.1.3 Розглядаємо вал як тверде тіло, яке перебуває у рівновазі під дією активних сил \bar{Q} , \bar{P} , \bar{G} , \bar{T} , \bar{t} і реакцій в'язей \bar{X}_A , \bar{Z}_A , \bar{X}_B , \bar{Z}_B .

4.1.1.4 Для умов рівноваги визначаємо попередньо і записуємо в таблицю 4.2

значення проєкцій всіх сил на координатні осі і їх моментів відносно цих осей.

Таблиця 4.2

\bar{F}_k	\bar{Q}	\bar{T}	\bar{t}	\bar{P}	\bar{R}_A	\bar{R}_B	\bar{G}
F_{kx}	$-Q\cos 15^\circ$	$-T\cos 15^\circ$	$-t\cdot\cos 15^\circ$	0	X_A	X_B	0
F_{ky}	0	0	0	0	0	0	0
F_{kz}	$Q\sin 15^\circ$	$T\sin 15^\circ$	$t\cdot\sin 15^\circ$	$-P$	Z_A	Z_B	$-G$
$M_x(\bar{F}_k)$	$Q\sin 15^\circ\cdot a$	$T\sin 15^\circ\cdot(2a+b+c)$	$t\cdot\sin 15^\circ(2a+b+c)$	$-P(a+b)$	0	$Z_B\cdot(a+b+c)$	$-G(2a+b+c)$
$M_y(\bar{F}_k)$	$-Q\cos 15^\circ\cdot r$	$T\cdot R$	$-t\cdot R$	$P\cdot r$	0	0	0
$M_z(\bar{F}_k)$	$Q\cos 15^\circ\cdot a$	$T\cos 15^\circ(2a+b+c)$	$t\cdot\cos 15^\circ(2a+b+c)$	0	0	$-X_B\cdot(a+b+c)$	0

4.1.1.5 Запишемо умови рівноваги у загальному вигляді

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B - Q\cos 15^\circ - T\cos 15^\circ - t\cdot\cos 15^\circ = 0; \quad (4.1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad (4.2)$$

$$\sum F_{kz} = 0; \quad +Z_A + Z_B - G + Q\sin 15^\circ + T\sin 15^\circ + t\cdot\sin 15^\circ - P = 0; \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \sum M_x(\bar{F}_k) = 0; \quad & Z_B\cdot(a+b+c) + Q\sin 15^\circ\cdot a + T\sin 15^\circ\cdot(2a+b+c) + \\ & + t\cdot\sin 15^\circ(2a+b+c) - P(a+b) - \\ & - G\cdot(2a+b+c) = 0; \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\sum M_y(\bar{F}_k) = 0; \quad -Q\cos 15^\circ\cdot r + T\cdot R - t\cdot R + P\cdot r = 0; \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \sum M_z(\bar{F}_k) = 0; \quad & -X_B\cdot(a+b+c) + Q\cos 15^\circ\cdot a + T\cos 15^\circ\cdot(2a+b+c) + \\ & + t\cdot\cos 15^\circ(2a+b+c) = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Враховуючи, що $\cos 15^\circ = 0.966$, із рівняння (4.5) визначаємо P

$$\begin{aligned} P &= \frac{Q \cdot \cos 15^\circ \cdot r - T \cdot R + t \cdot R}{r} = \\ &= \frac{20 \cdot 0.966 \cdot 0.1 - 10 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.2}{0.1} = 9.32 \text{ кН}; \end{aligned}$$

Враховуючи, що $\sin 15^\circ = 0.259$, із рівняння (4.4) знаходимо Z_B

$$\begin{aligned} Z_B &= \frac{-Q \sin 15^\circ \cdot a - 1.5T \sin 15^\circ (2a + b + c)}{a + b + c} + \\ &+ \frac{P(a + b) + G(2a + b + c)}{a + b + c} = \\ &= \frac{-20 \cdot 0.259 \cdot 0.5 - 1.5 \cdot 10 \cdot 0.259 \cdot 4.3}{3.8} + \\ &+ \frac{9.32 \cdot 3.5 + 10 \cdot 4.3}{3.8} = 14.82 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Із рівняння (4.3) визначимо Z_A

$$\begin{aligned} Z_A &= G - Z_B - Q \sin 15^\circ - 1.5T \sin 15^\circ + P = \\ &= 10 - 14.82 - 20 \cdot 0.259 - 1.5 \cdot 10 \cdot 0.259 + 9.32 = -4.565 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Із рівняння (4.6) знаходимо X_B

$$\begin{aligned} X_B &= \frac{Q \cos 15^\circ \cdot a + 1.5T \cos 15^\circ (2a + b + c)}{a + b + c} = \\ &= \frac{20 \cdot 0.966 \cdot 0.5 + 1.5 \cdot 10 \cdot 0.966 \cdot 4.3}{3.8} = 18.94 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Із рівняння (4.1) визначимо X_A

$$\begin{aligned}
 X_A &= -X_B + Q \cos 15^\circ + 1.5T \cos 15^\circ = \\
 &= -18.94 + 20 \cdot 0.966 + 1.5 \cdot 10 \cdot 0.966 = 14.87 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $X_A = 14.87 \text{ кН}; \quad Z_A = -4.565 \text{ кН}; \quad P = 9.32 \text{ кН};$
 $X_B = 18.94 \text{ кН}; \quad Z_B = 14.82 \text{ кН}.$

4.1.1.6 Виконаємо перевірку отриманих результатів.

Для цього візьмемо допоміжну систему координат $x' y' z'$ з полюсом в точці K (рис. 4.2). Запишемо суми моментів всіх сил, які діють на вал, відносно осі z' , а потім відносно осі x'

$$\sum M_{z'}(\bar{F}_k) = 0;$$

$$\sum M_{x'}(\bar{F}_k) = 0;$$

$$\begin{aligned}
 X_A(a+b) - Q \cdot \cos 15^\circ \cdot b - X_B \cdot c + (T+t) \cdot \cos 15^\circ \cdot (a+c) = \\
 = 14.87 \cdot 3.5 - 20 \cdot 0.966 \cdot 3 - 18.94 \cdot 0.3 + 15 \cdot 0.966 \cdot 0.8 = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -Z_A(a+b) - Q \cdot \sin 15^\circ \cdot b + Z_B \cdot c + (T+t) \cdot \sin 15^\circ \cdot (a+c) - G(a+c) = \\
 = 4.565 \cdot 3.5 - 20 \cdot 0.259 \cdot 3 + 14.82 \cdot 0.3 + 15 \cdot 0.259 \cdot 0.8 - 10 \cdot 0.8 = 0.
 \end{aligned}$$

Перевірка показала, що сили P, X_A, X_B, Z_A, Z_B визначені вірно.

5 Завдання С.5 Визначення реакцій опор в конструкціях, завантажених довільно розташованими силами

На конструкціях, які показані на рисунку 5.1, діють сили \bar{P} , \bar{G} і розподілене навантаження q . На деякі конструкції діє пара сил з моментом M . Сила \bar{P} – вага тіла. Сила \bar{G} розташована в площині, вказаній на схемі, її положення визначається кутом θ .

Визначити реакції опор і зусилля у невагомих важелях.

Схеми конструкцій наведені на рисунку 5.1, а необхідні для розрахунків числові дані – в таблицях 5.1, 5.2.

Варіант завдання задає викладач

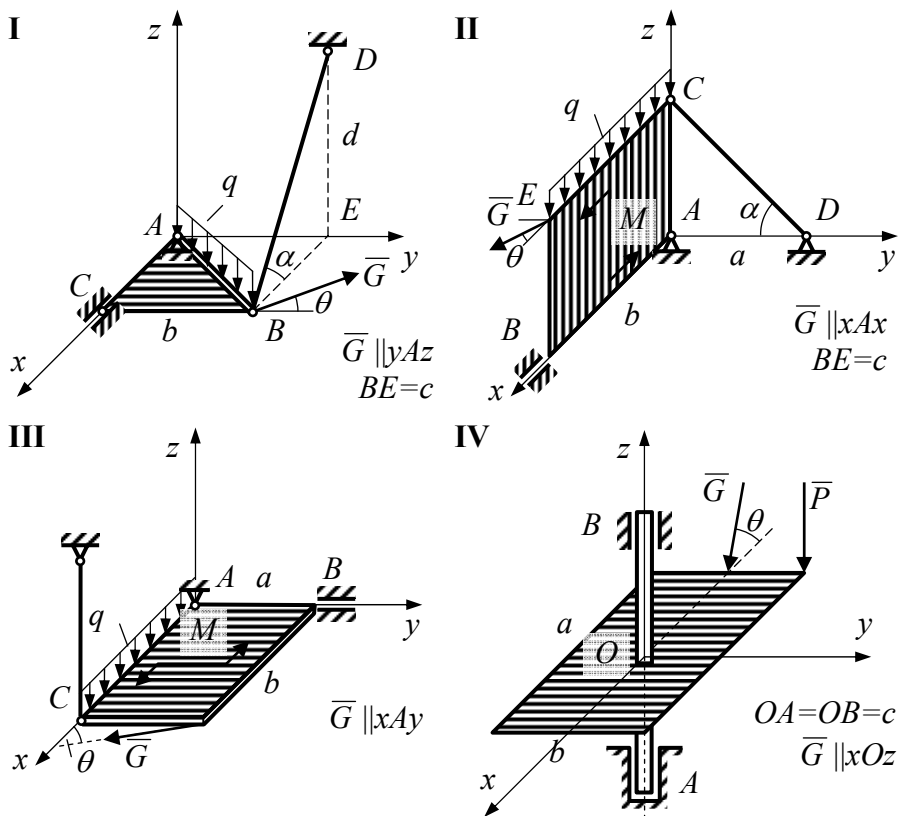
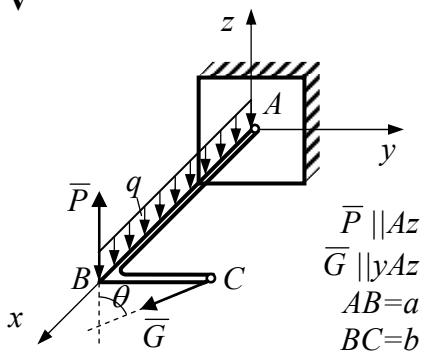
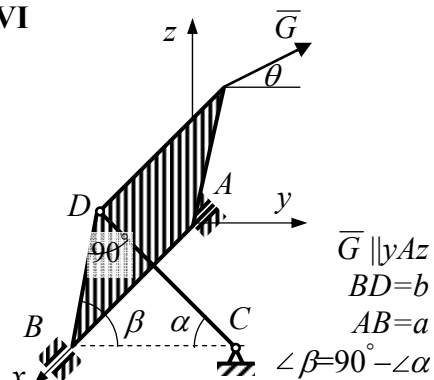


Рисунок 5.1

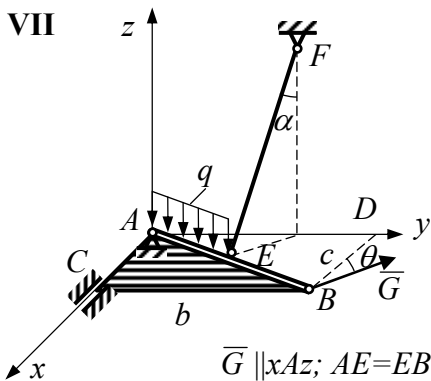
V



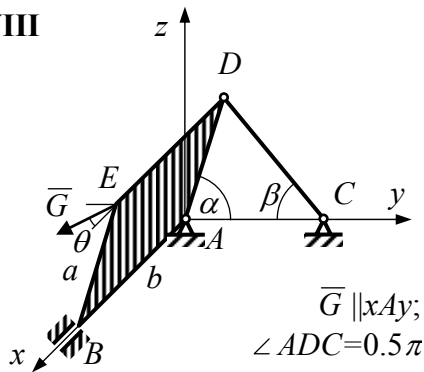
VI



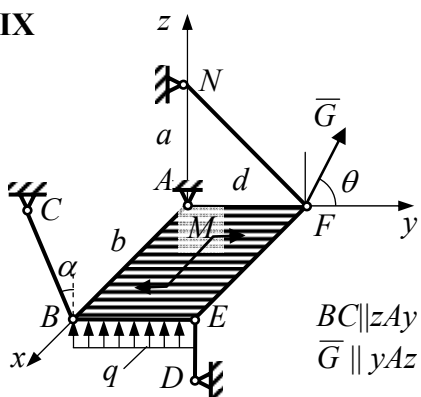
VII



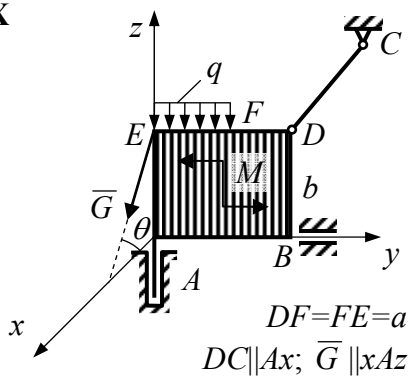
VIII



IX

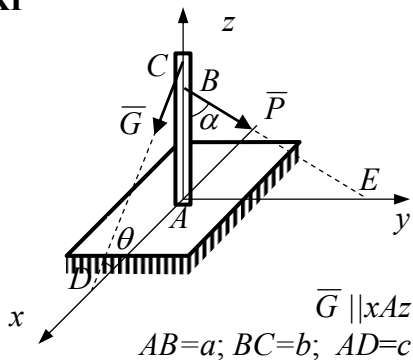


X

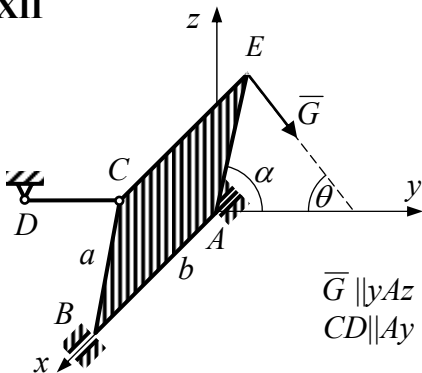


Продовження рисунка 5.1

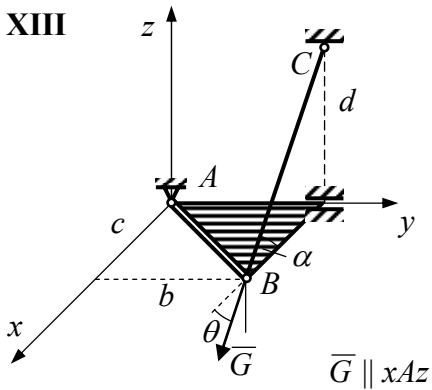
XI



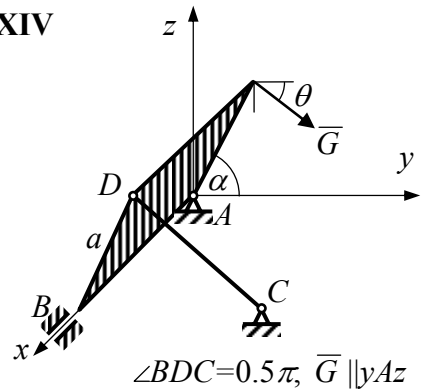
XII



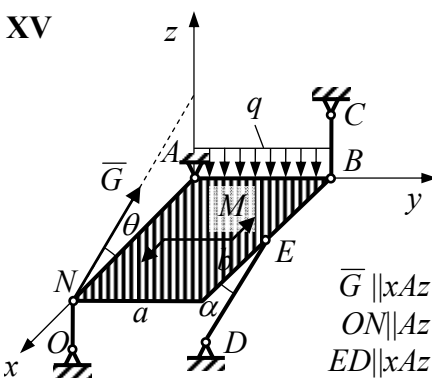
XIII



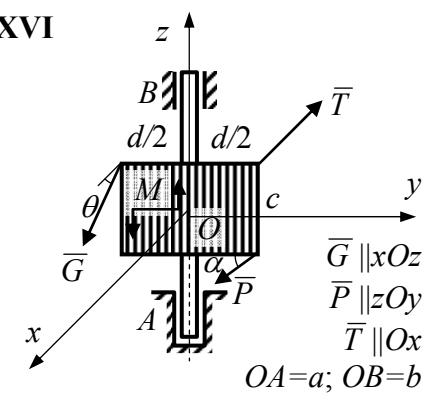
XIV



XV

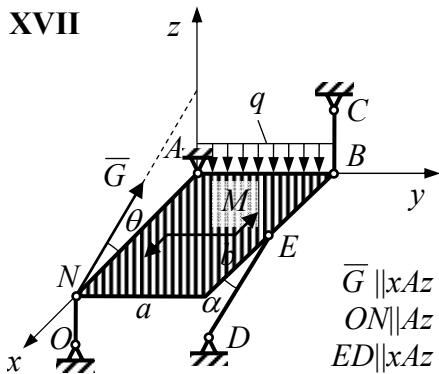


XVI

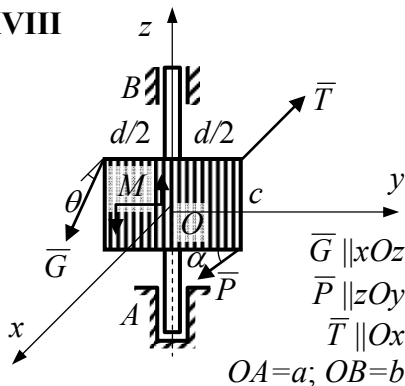


Продовження рисунка 5.1

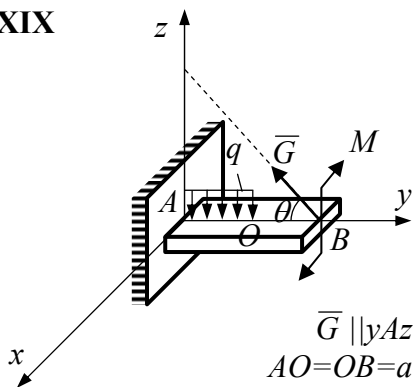
XVII



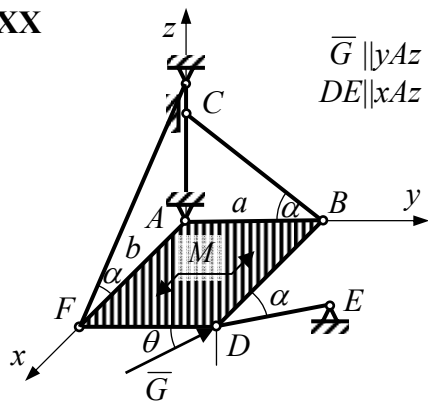
XVIII



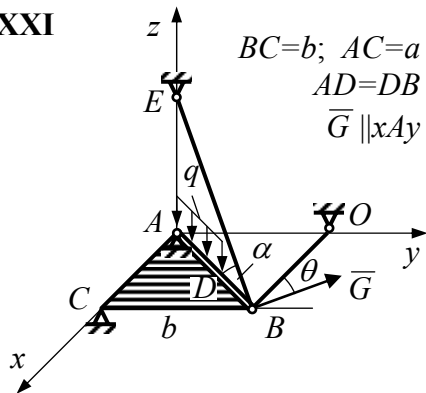
XIX



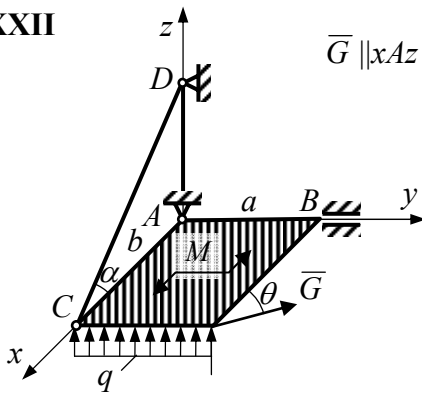
XX



XXI

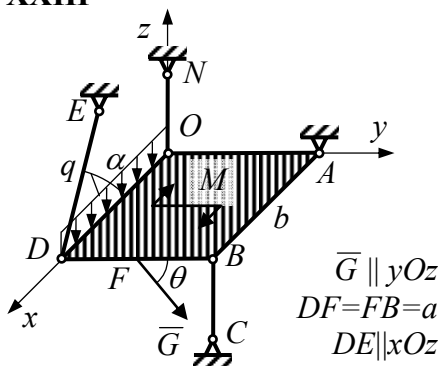


XXII

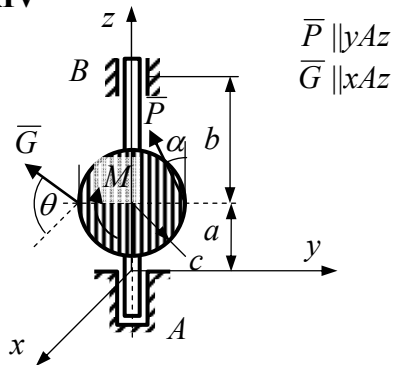


Продовження рисунка 5.1

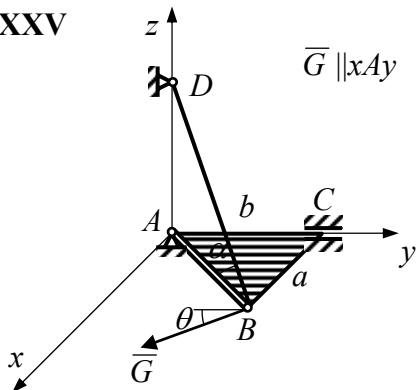
XXIII



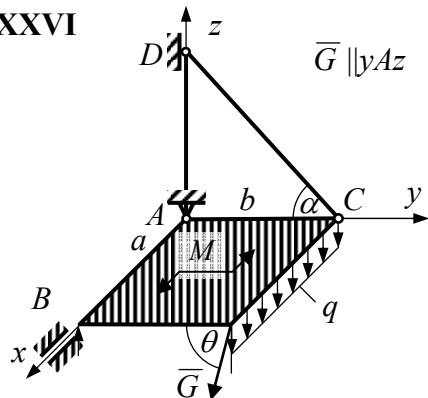
XXIV



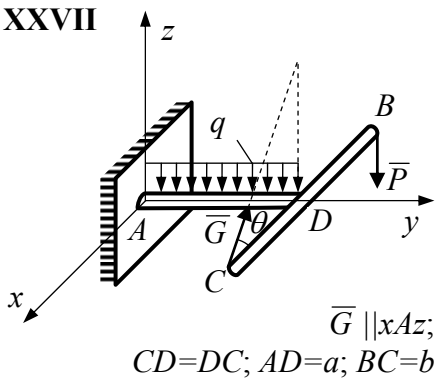
XXV



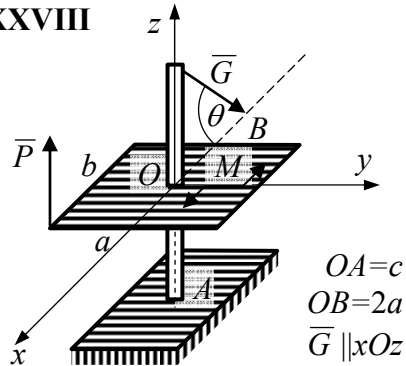
XXVI



XXVII

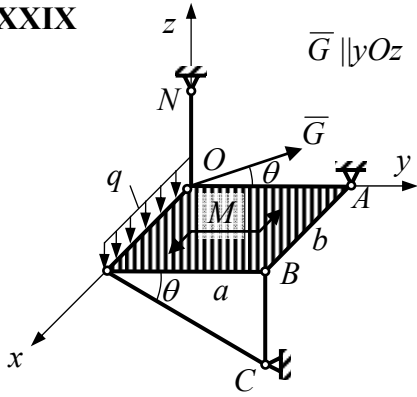


XXVIII

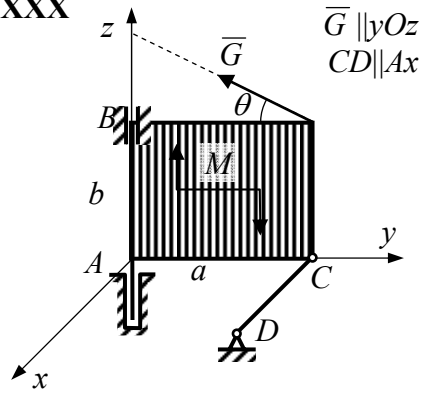


Продовження рисунка 5.1

XXIX



XXX



Продовження рисунка 5.1

Таблиця 5.1

№ вар.	P , кН	G , кН	q , кН/м	M , кН·м	α , град	Відстань, м				Вид накладених в'язів і місця їх розташування			
						a	b	c	d	важелі	сфер. шарнір, під'ятник	підшипник	жорстка в'язь
1	2	3	2		60	1	4	3	4		в точці A	в точці C	
2	3	4	2	10	60	2	4	3	1		в точці A	в точці B	
3	4	5	2		60	3	6	2	1		в точці A	в точці B	
4	5	6			45	6	2	3	4		в точці A	в точці B	
5	6	7	2		60	4	6	2	3				в точці A
6	7	8			30	4	4	3	3			в точках A і O	
7	8	9	2		45	2	6	4	3		в точці A	в точці C	
8	9	10			60	5	6	4	3		в точці A	в точці B	
9	10	9	2	10	30	4	3	2	3		в точці A		
10	9	8	2	10	45	2	2	4	3		в точці A	в точці B	
11	8	7			60	4	2	6	3		в точці A		в точці A
12	7	6			60	3	4	5	6			в точках A і B	
13	6	5			30	1	3	4	3		в точці A	в точці D	
14	5	4			30	2	4	3	5		в точці A	в точці B	
15	4	3	2	10	60	2	4	5	6		в точці A		

Продовження таблиці 5.1

№ вар.	P , кН	G , кН	q , кН/м	M , кН·м	α , град	Відстань, м				Вид накладених в'язів і місця їх розташування			
						a	b	c	d	важелі	сфер. шарнір, підп'ятник	підшипник	жорстка в'язь
16	3	2		10	45	2	3	1	1		в точці A	в точці B	
17	2	1	2	10	30	2	4	3	2				в точці A
18	1	2		10	45	3	4	4	3	DE, CB, OF	в точці A		
19	2	3	2		60	3	4	5	6	BE, BO	в точці A		
20	3	4	2	10	45	4	6	3	2	CD	в точці A	в точці B	
21	4	5	2		60	4	3	1	2		в точці A		в точці A
22	5	6	2	10	30	4	2	3	5	FC	в точці A	в точці B	
23	6	7	2	10	45	2	4	5	3	ON, BC, DE	в точці A		
24	7	8		10	45	2	3	1	4		в точці A	в точці B	
25	8	9			30	3	4	5	6	DB	в точці A		
26	9	10	2	10	45	2	4	3	4	DC	в точці A	в точці B	
27	10	10	2		60	3	4	5	6				в точці A
28	9	8		10	45	5	5	3	4				в точці A
29	8	7	2	10	30	4	3	2	3	CD, BC, ON			в точці A
30	7	6		10	60	4	5	6	3	DC	в точці A	в точці B	

Таблиця 5.2

№ вар.	P , кН	G , кН	q , кН/м	M , кН·м	α , град	Відстань, м				Вид накладених в'язів і місця їх розташування				
						a	b	c	d	важелі	сфер. шарнір, підп'ятник	підшипник	жорстка в'язь	
1	3	4	4		45	2	3	4	4		BD	в точці A	в точці C	
2	4	5	4	8	60	4	2	2	4		CD	в точці A	в точці B	
3	5	6	4	0	60	6	2	5	4		CD	в точці A	в точці B	
4	6	7			30	2	6	3	4			в точці A	в точці B	
5	7	8	4		45	6	4	3	2					в точці A
6	8	9			60	4	4	3	2		CD		в точках A і O	
7	9	10	4		30	2	4	6	3		EF	в точці A	в точці C	
8	10	11			45	6	5	4	3		DC	в точці A	в точці B	
9	11	12	4	8	60	4	3	5	2		BC, ED, FN	в точці A		
10	12	12	4	8	30	2	2	4	3		DC	в точці A	в точці B	
11	12	11			45	2	4	6	3					в точці A
12	11	10			30	4	3	3	4		DC		в точках A і B	
13	10	9			60	3	1	3	4		BC	в точці A	в точці D	
14	9	8			45	4	2	3	5		DC	в точці A	в точці B	
15	8	7	4	8	30	4	2	5	3		BC, ED, ON	в точці A		

Продовження таблиці 5.2

№ вар.	P , кН	G , кН	q , кН/м	M , кН·м	α , град	Відстань, м				Вид накладених в'язів і місця їх розташування			
						a	b	c	d	важелі	сфер. шарнір, підп'ятник	підшипник	жорстка в'язь
16	7	6		8	60	3	2	1	1		в точці A	в точці B	
17	6	5	4	8	60	4	3	2	4				в точці A
18	5	4		8	30	4	3	4	3	CB, DE, OF	в точці A		
19		2	4		30	4	3	5	6	BE, BO	в точці A		
20	2	1	4	8	60	6	4	5	3	CD	в точці A	в точці B	
21	1	1	4		45	3	4	1	2				в точці A
22	1	2	4	8	60	4	2	3	2	FC	в точці A	в точці B	
23	2	3	4	8	30	4	2	3	2	ON, BC, DE	в точці A		
24	2	3		8	30	1	3	1	2		в точці A	в точці B	
25	3	4			60	4	3	5	6	BD	в точці A	в точці C	
26	4	5	4	8	30	4	2	3	4	DC	в точці A	в точці B	
27	5	6	4		45	4	3	5	5				в точці A
28	6	7		8	30	6	6	4	3				в точці A
29	7	8	4	8	60	3	4	5	6	CD, BC, ON	в точці A		
30	8	9		8	30	5	4	3	2	CD	в точці A	в точці B	

6 Завдання С.6 Рівновага тіл з урахуванням тертя

Визначити мінімальне значення сили \bar{P} і реакції опор в точках O та A системи, яка перебуває у спокої.

Схеми варіантів наведені на рисунку 6.1, а необхідні для розрахунків числові дані – в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

№ рядка	№ схеми	Сили, кН		Розміри, м			α , град.	Коефіцієнт зчеплення (коефіцієнт тертя спокою)
		G	Q	a	b	c		
1	I	1	10	0.2	0.1	0.04	30	0.1
2	II	1.3	14	0.45	0.4	0.05	45	0.2
3	III	1.8	15	0.1	0.4	0.06	30	0.2
4	IV	1.5	16	0.2	0.3	0.04	45	0.3
5	V	2.0	20	0.2	0.5	0.05	30	0.4
6	VI	1.8	22	0.3	0.3	0.04	45	0.25
7	VII	1.9	24	0.4	0.5	0.06	30	0.2
8	VIII	1.7	24	0.1	0.25	0.04	60	0.15
9	IX	1.2	15	0.2	0.45	0.04	45	0.25
0	X	1.2	14	0.2	0.3	0.05	60	0.35
	<i>в</i>	<i>б</i>	<i>а</i>	<i>в</i>	<i>б</i>	<i>а</i>	<i>б</i>	<i>в</i>

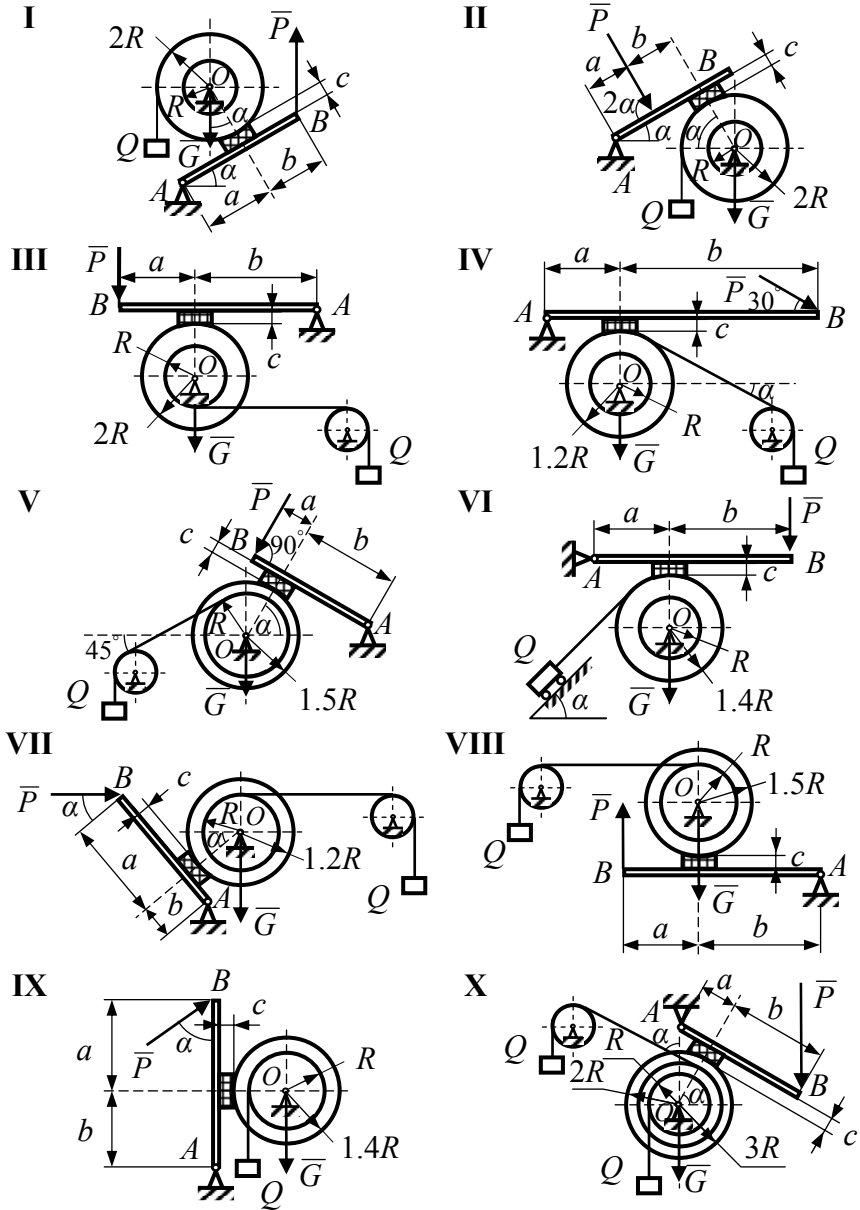


Рисунок 6.1

6.1 Приклад виконання завдання

Задача 5. Визначити мінімальне значення сили \bar{P} і реакції в опорах A, C, D . Схема наведена на рисунку 6.2.

Вихідні дані: $G_2=1.7$ кН, $Q=16$ кН, $a=0.5$ м, $b=0.2$ м, $c=0.02$ м, $\alpha=30^\circ$, $f_{зм}=0.4$.

Виконати перевірку знайдених рішень.

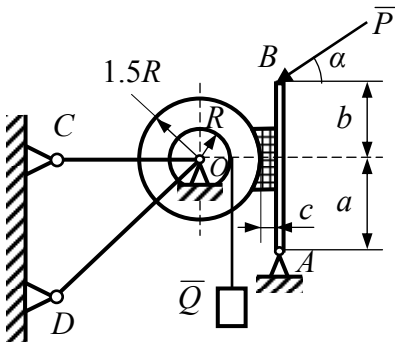


Рисунок 6.2

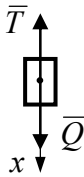


Рисунок 6.3

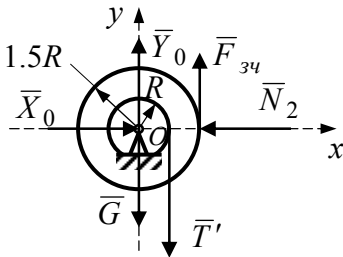


Рисунок 6.4

6.1.1 Розв'язування задачі

6.1.1.1 За вихідними даними викреслюємо у масштабі задану схему (рис. 6.2).

6.1.1.2 Виділяємо тіло 1 (рис. 6.3). Показуємо сили, які діють на це тіло. Це сила ваги \bar{Q} і реакція нитки \bar{T} . Знаходимо модуль реакції нитки T .

$$\sum X_i = 0; Q - T = 0; T = Q = 16 \text{ кН.}$$

6.1.1.3 Розглянемо рівновагу сил, прикладених до барабана. Викреслюємо це тіло окремо і прикладаємо всі сили, які діють на нього (рис. 6.4).

На барабан діє сила ваги \bar{G} , реакція нитки $T' = T$, сила нормального тиску \bar{N}_2 з боку важіля AB , сила зчеплення (тертя спокою) $\bar{F}_{зч}$ між гальмівною колодкою і барабаном та реакції \bar{Y}_0 і \bar{X}_0 .

Сили зчеплення визначаємо із формули

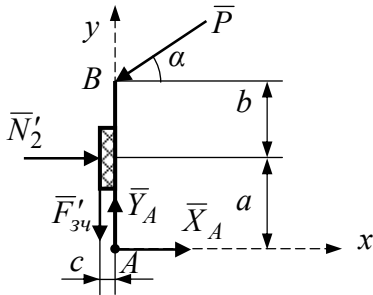


Рисунок 6.5

У стані граничної рівноваги сила \bar{P} мінімальна.

Із рівняння (6.1) визначимо F_{3y}

$$F_{3y} = \frac{T' \cdot R}{1.5R} = \frac{T'}{1.5} = \frac{16}{1.5} = 10.67 \text{ кН.}$$

Але $F_{3y} = f_{3y} \cdot N_2$, звідси знаходимо, що

$$N_2 = \frac{F_{3y}}{f_{3y}} = \frac{10.67}{0.4} = 26.67 \text{ кН.}$$

Із рівнянь (6.2), (6.3) визначимо реакції \bar{X}_0 і \bar{Y}_0

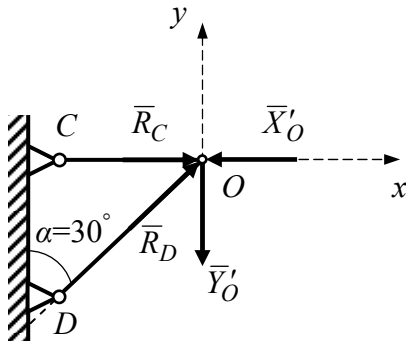


Рисунок 6.6

$$F_{3y} = f_{3y} N_2.$$

Запишемо рівняння рівноваги

$$\sum M_{iO} = 0; -T' \cdot R + F_{3y} \cdot 1.5R = 0; \quad (6.1)$$

$$\sum X_i = 0; X_O - N_2 = 0; \quad (6.2)$$

$$\sum Y_i = 0; Y_O - G - T' + F_{3y} = 0. \quad (6.3)$$

$$X_O = N_2 = 26.67 \text{ кН;}$$

$$Y_O = G + T' - F_{3y} = 1.7 + 16 - 10.67 = 7.03 \text{ кН.}$$

6.1.1.4 Викреслюємо важіль AB , прикладаємо до нього у відповідних точках сили \bar{P} , \bar{F}'_{3y} , реакції \bar{N}'_2 , \bar{X}'_A і \bar{Y}'_A (рис. 6.5).

Розглянемо рівновагу сил, прикладених до важіля AB .

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + N'_2 - P \cos \alpha = 0; \quad (6.5)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A - F'_{34} - P \sin \alpha = 0. \quad (6.6)$$

$$\sum M_{i_A} = 0; \quad + F'_{34} \cdot c + P \cos \alpha (a+b) - N'_2 \cdot a = 0; \quad (6.7)$$

Із рівняння (6.7) визначаємо P

$$P = \frac{N'_2 \cdot a - F'_{34} \cdot c}{\cos \alpha \cdot (a+b)} = \frac{26.67 \cdot 0.5 - 10.67 \cdot 0.02}{0.5 \cdot 0.7} = \frac{13.12}{0.35} = 37.49 \text{ кН.}$$

Із рівняння (6.5) визначимо невідому реакцію X_A

$$X_A = -N'_2 + P \cdot \cos \alpha = -26.67 + 37.49 \cdot 0.866 = -26.67 + 32.47 = 5.8 \text{ кН.}$$

Із рівняння (6.6) обчислюємо Y_A

$$Y_A = F'_{34} + P \cdot \sin \alpha = 10.67 + 37.49 \cdot 0.5 = 29.415 = 29.42 \text{ кН.}$$

6.1.1.5 Викреслюємо схему рами кріплення блока O , прикладаємо діючі сили і реакції в точках O , C , D . В точці O прикладаємо реакції \bar{X}'_O та \bar{Y}'_O , які мають протилежний напрямок до \bar{X}_O та \bar{Y}_O .

Запишемо суму проєкцій всіх сил на осі x і y

$$\sum F_{kx} = 0; \quad -X'_O + R_C + R_D \cdot \cos 60^\circ = 0; \quad (6.8)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad -Y'_O + R_D \cdot \sin 60^\circ = 0. \quad (6.9)$$

Із рівняння (6.9) обчислимо R_D

$$R_D = Y'_O = 8.12 \text{ кН.}$$

Із рівняння (6.8) обчислимо R_C

$$R_C = X'_O - R_D \cdot \cos 60^\circ = 26.67 - 8.12 \cdot 0.5 = 26.67 - 4.06 = 22.61 \text{ кН.}$$

7 Завдання С.7 Визначення положення центра ваги тіла

Визначити положення центра ваги плоскої фігури,

якщо $R=a$, $r = \frac{a}{2}$.

Схеми плоских фігур наведені на рисунку 7.1, числові дані для розрахунку – в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1

№ рядка	№ схеми	a , см	№ рядка	№ схеми	a , м
1	I	10	6	VI	60
2	II	20	7	VII	70
3	III	30	8	VIII	80
4	IV	40	9	IX	90
5	V	50	0	X	100
	ϵ	δ		ϵ	δ

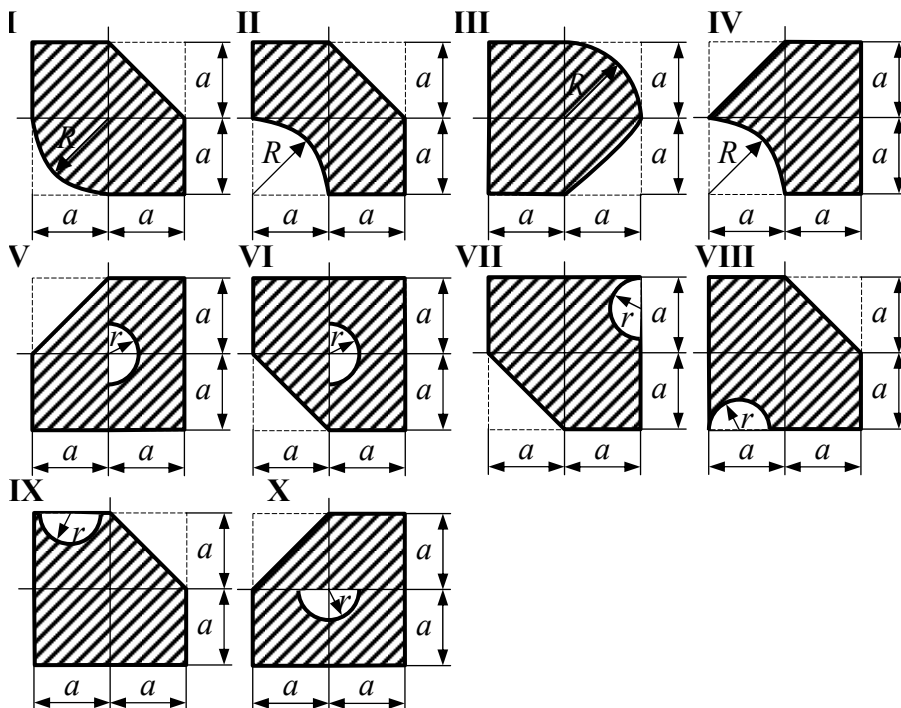


Рисунок 7.1

7.1 Приклад виконання завдання

Задача 6. Визначити положення центра ваги плоскої фігури, якщо $R=a$, $r = \frac{a}{2}$.

7.1.1 План розв'язування задачі

7.1.1.1 Розділити складну плоску фігуру на прості геометричні фігури, для яких відомі положення центрів ваги.

Слід пам'ятати:

- центр ваги площі однорідного трикутника розміщений в точці на перетині його медіан;
- центр ваги площі однорідного прямокутника розміщений в точці перетину його діагоналей;
- центр ваги площі однорідної чверті круга або півкруга знаходиться на відстані $\frac{2d}{3\pi}$ від основи.

7.1.1.2 Вибрати систему координат, в якій визначити положення центра ваги однорідної плоскої фігури, якщо фігура має вісь симетрії, то одну з осей координат слід направити вздовж цієї осі. Друга вісь буде перпендикулярна до осі симетрії.

7.1.1.3 У вибраній системі координат знайти положення центрів ваги простих геометричних фігур, на які розділили складну фігуру. записати координати цих центрів.

7.1.1.4 Визначити площі простих геометричних фігур.

7.1.1.5 Положення центра ваги складної плоскої фігури визначити за формулами

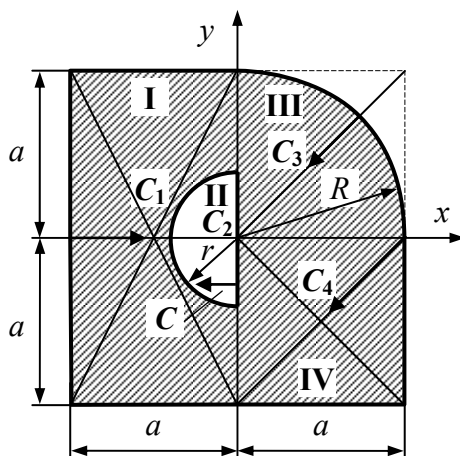


Рисунок 7.2

$$x_C = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{\sum A_i}; \quad y_C = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i}, \quad (7.1)$$

де A_i , x_i , y_i – відповідно площі і координати центрів ваги окремих частин складної фігури, яких положення центрів ваги і площі відомі.

Якщо в складній фігурі є отвори, то для знаходження положення центра ваги потрібно використати метод від'ємних площ, тобто площі отворів у формулі (7.1) входять зі знаком мінус.

7.1.2 Розв'язування задачі

7.1.2.1 Розділяємо наведену на рис. 6.2 складну плоску фігуру на складові частини – прості геометричні фігури:

I - прямокутник із сторонами a і $2a$;

II - півкруг діаметра $d=a$;

III - чверть круга радіуса $R=a$;

IV - квадрат зі стороною a .

7.1.2.2 Виберемо систему координат x , y з центром в точці O (центр півкруга), відносно якої визначатимемо положення центрів ваги складових плоских фігур.

7.1.2.3 У вибраній системі координат знаходимо положення центрів ваги простих геометричних фігур, на які розділили складну фігуру.

Координати центра ваги прямокутника

$$x_1 = -\frac{a}{2}; \quad y_1 = 0.$$

Координати центра отвору у формі півкруга

$$x_2 = -\frac{2d}{3\pi} = -\frac{2a}{3\pi}; \quad y_2 = 0.$$

Координати центра ваги кругового сектора

$$x_3 = y_3 = \frac{2d}{3\pi} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Координати центра ваги квадрата

$$x_4 = \frac{a}{2}; \quad y_4 = -\frac{a}{2}.$$

7.1.2.4 Визначаємо площі простих геометричних фігур.

Площа прямокутника

$$A_1 = a \cdot 2a = 2a^2.$$

Площа отвору у формі півкруга буде від'ємною, оскільки отвір вирізаний

$$A_2 = -\frac{\pi d^2}{8} = -\frac{\pi a^2}{8}.$$

Площа кругового сектора

$$A_3 = \frac{\pi d^2}{16} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Площа квадрата

$$A_4 = a \cdot a = a^2.$$

7.1.2.5 Визначаємо положення центра ваги площі складної плоскої фігури за формулами (7.1)

$$x_C = \frac{-\frac{a}{2} \cdot 2a^2 + \frac{2a}{3\pi} \cdot \frac{\pi a^2}{8} + \frac{4a}{3\pi} \cdot \frac{\pi a^2}{4} + \frac{a}{2} \cdot a^2}{2a^2 - \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi a^2}{4} + a^2} = \frac{-\frac{a^3}{12}}{\left(3 + \frac{\pi}{4}\right)a^2} = -\frac{a}{36 + 3\pi};$$

$$y_C = \frac{0 + 0 + \frac{4a}{3\pi} \cdot \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a}{2} \cdot a^2}{2a^2 - \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi a^2}{4} + a^2} = \frac{-\frac{a^3}{12}}{\left(3 + \frac{\pi}{4}\right)a^2} = -\frac{a}{18 + 1.5\pi}.$$

Після підстановки числових значень отримуємо

$$x_C = \frac{10}{36 + 3 \cdot 3.14} = -0.22 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{10}{18 + 1.5 \cdot 3.14} = -0.44 \text{ см}.$$

Показуємо положення центра ваги даної плоскої фігури на рисунку.

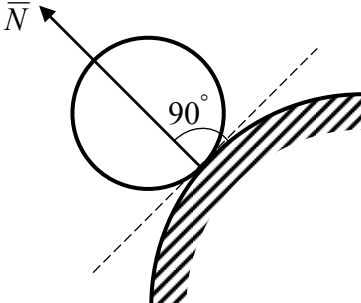
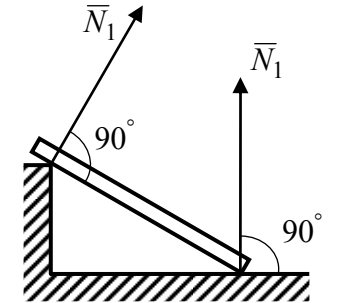
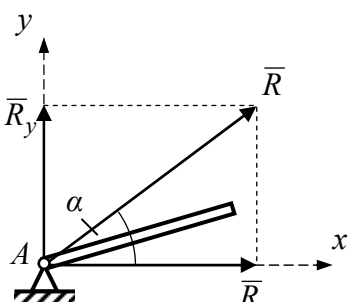
ЛІТЕРАТУРА

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1966. – 416 с.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1986. – 448 с.
3. Сборник задач по теоретической механике. /Под редакцией А.А. Яблонского. – М.: Высшая школа, 1985. – 378 с.
4. Бать М.И.0 Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1990. – 670 с.
5. Яскілка М.Б. Збірник задач для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки. – К.: Вища школа, 1999. – 362 с.
6. Теоретична механіка. Тексти лекцій. /Штанько П.К., Саксонов С.Г., Лутова О.Д., Куляба І.В. – Запоріжжя.: ЗНТУ, 2003. – 325 с.
7. Методические указания и контрольные работы по курсу «Проблемы и методы решения инженерных задач». Часть 1. /Штанько П.К. – Запорожье.: ЗГТУ, 1996. – 43 с.
8. Теоретична механіка. Статика. Конспект лекцій. /Штанько П.К., Павлюк М.Ф., Саксонов С.Г. та інші. – Запоріжжя.: ЗДТУ, 1999. – 74 с.
9. Теоретична механіка. Кінематика. Конспект лекцій. /Штанько П.К., Саксонов С.Г. та інші. – Запоріжжя.: ЗДТУ, 1998. – 61 с.
10. Теоретична механіка. Динаміка. Конспект лекцій. /Штанько П.К., Саксонов С.Г. та інші. – Запоріжжя.: ЗДТУ, 2000. – 184 с.
11. Стандарт підприємства. Пояснювальна записка до курсових і дипломних проектів. – Запоріжжя.: ЗДТУ, 1996.

Додаток А

В'язі та їх реакції

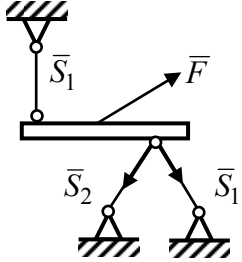
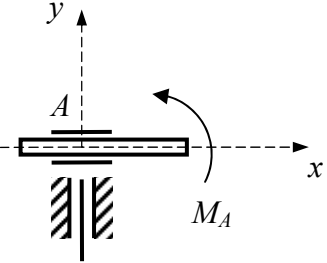
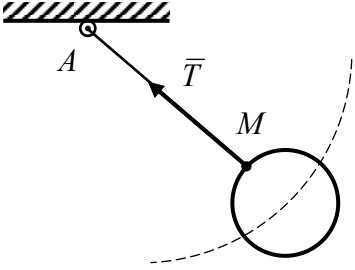
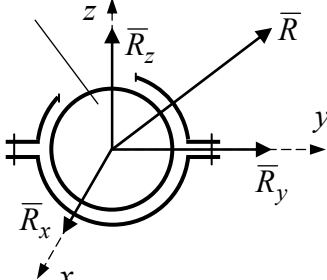
Таблиця А.1

№ п/п	Вид в'язі	Найменування	Напрямок дії і реакції
1	2	3	4
1.		Гладка поверхня (без тертя)	По загальній нормалі до поверхонь стичних тіл у точці контакту
2.		Контакт тіл у точці (без тертя)	По нормалі до поверхні
3.		Циліндричний шарнір (підшипник)	Реакцію \bar{R} розділяють на дві складові – проекції на осі координат x і y

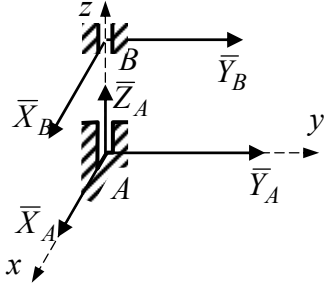
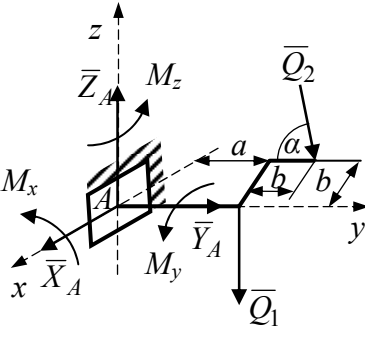
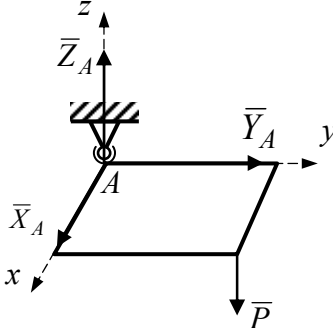
Продовження таблиці А.1

1	2	3	4
4.		Циліндричний шарнір на рухомій опорі	Перпендикулярно до опорної поверхні
5.		Бішарнір на нерухомій опорі	Одна реакція перпендикулярна опорі (вздовж стержня)
6.		Жорстка закладка (зашемлення)	Реакцію представляють у вигляді двох взаємно перпендикулярних складових X_A і Y_A та реактивного моменту затискання M_A у площині xAy
7.		Ковзне зашемлення	Перпендикулярно опорній поверхні. Реактивний момент M_A у площині xu

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4
8.		Невагомий стержень	Вздовж осі стержня
9.		Біковне затискання	Реакція відсутня. Реактивний момент M_A у площині xu
10.		Гнучка нерозтяжна нитка	Вздовж нитки до точки підвісу
11.		Сферичний шарнір	Загальну реакцію R розкладають на складові R_x, R_y, R_z

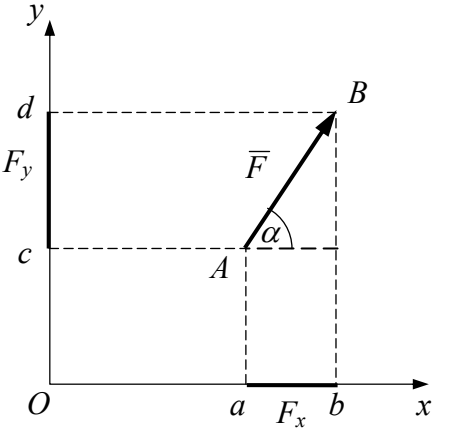
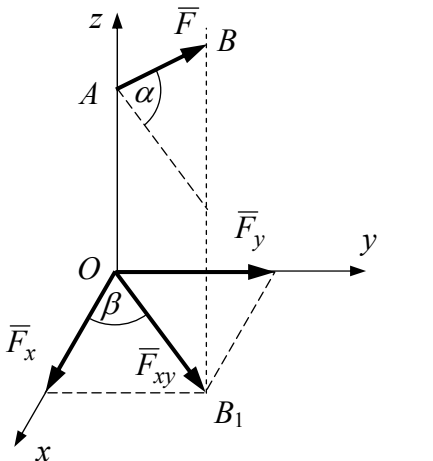
Продовження таблиці А.1

1	2	3	4
12.		Підп'ятник A та підшипник B	Загальні реакції R розкладають на складові X_A, Y_A, Z_A та X_B, Y_B
13.		Жорстке просторове защемлення	Реакцію защемлення розділяють на три складові сили $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$, спрямовані вздовж осей, та три реактивні моменти M_x, M_y, M_z відносно осей координат x, y, z
14.		Сферичний нерухомий момент	Реакцію розділяють на три складові $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$, спрямованих вздовж осей координат x, y, z

Додаток Б

Проекція сили

Таблиця Б.1

1	ПРОЕКЦІЯ СИЛИ НА ВІСЬ		
	$F_x = F \cdot \cos \alpha;$ $F_y = F \cdot \sin \alpha$	Проекція сили на вісь є величина алгебраїчна	
2	ПРОЕКЦІЯ СИЛИ НА ПЛОЩИНУ		
	$\overline{F_{xy}} = \overline{OB_1}$ $F_x = F_{xy} \cdot \cos \beta = F \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta;$ $F_y = F_{xy} \cdot \sin \beta = F \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta;$	Проекція сили на площину є величина векторна	

Додаток В

Моменти сил

Таблиця В.1

МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ	
	<p>1 Векторний момент сили \vec{F} відносно точки O</p> $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$ <p>Векторний момент $\vec{M}_O(\vec{F})$ прикладається у точці O і спрямовується перпендикулярно до площини, яка проходить через силу і точку O в той бік, звідки сила намагається повертати тіло проти ходу годинникової стрілки.</p> <p>2 Алгебраїчний момент сили \vec{F} відносно точки O</p> $M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h,$ <p>де h – плече сили (найкоротша відстань від точки до лінії дії сили).</p>
МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ОСІ	
	<p>1 Момент сили \vec{F} відносно осі – це алгебраїчний момент проєкції сили \vec{F} на площину xy, перпендикулярну до цієї осі відносно точки перетину осі з площиною xy</p> $M_z(\vec{F}) = M_O(F_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h = \pm F \cdot \cos \alpha \cdot h$ <p>2 Момент сили \vec{F} відносно осі дорівнює нулю у двох випадках:</p> <ul style="list-style-type: none"> – лінія дії сили перетинає вісь; – сила паралельна до осі.

Продовження таблиці В.1

ПАРА СИЛ І ЇЇ МОМЕНТ	
	<p>1 <i>Векторний момент пари сил</i></p> $\begin{aligned}\bar{M} &= \bar{M}(\bar{F}, \bar{F}') = \bar{M}_A(\bar{F}') = \\ &= \bar{M}_B(\bar{F}) = \bar{A}\bar{B} \times \bar{F}' = \bar{B}\bar{A} \times \bar{F}\end{aligned}$ <p>Модуль векторного моменту M дорівнює</p> $M = F \cdot d.$ <p>Векторний момент \bar{M} пари сил спрямовується перпендикулярно до площини дії пари сил так, щоб з кінця цього вектора можна було спостерігати намагання пари сил обертати тіло проти ходу годинникової стрілки. Вектор \bar{M} є вільним вектором.</p>
	<p>2 <i>Алгебраїчний момент пари сил</i></p>
	$M = \pm F \cdot d.$

Додаток Г

Перелік питань до модульного контролю

1. Що називають статикою ?
2. Що називають матеріальною точкою і абсолютно твердим тілом ?
3. Поняття сили. Якими елементами визначається сила ?
4. Поняття рівнодійної системи сил.
5. Еквівалентні системи сил.
6. Зовнішні і внутрішні сили.
7. Аксиоми статички. Аксиома в'язей.
8. Механічні в'язі та їх реакції.
9. Задачі статички.
10. Що називають системою збіжних сил ?
11. Рівнодійна системи збіжних сил.
12. Проекції сили на вісь і площину.
13. Аналітичний спосіб визначення рівнодійної.
14. Геометрична умова рівноваги системи збіжних сил.
15. Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил.
16. Теорема про три непаралельні сили.
17. Момент сили відносно центра (точки).
18. Додавання двох паралельних сил.
19. Пара сил. Момент пари сил.
20. Еквівалентність пар сил.
21. Додавання пар сил, що лежать в одній площині.
22. Головний вектор і головний момент довільної плоскої системи сил.
23. Як визначаються модуль і напрям головного вектора ?
24. Теорема про паралельне перенесення сили.
25. Зведення плоскої системи сил до заданого центра (основна теорема статички).
26. Окремі випадки зведення плоскої системи сил.

27. Теорема Варіньона про момент рівнодійної.
28. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил і плоскої системи паралельних сил.
29. Розподілені навантаження (рівномірне, за лінійним законом, по дузі кола).
30. Сила тертя ковзання. Закони Кулона.
31. Кут і конус тертя.
32. Коли наступає явище заклинювання ?
33. Рівновага системи тіл. Статично визначені і статично невизначені задачі.
34. Момент сили відносно точки (центра) як вектор і як векторний добуток.
35. Момент пари сил як вектор.
36. Момент сили відносно осі. Коли момент сили відносно осі дорівнює нулю ?
37. Залежність між моментами сили відносно осі та центра на цій осі.
38. Головний вектор та головний момент просторової системи сил.
39. Зведення просторової системи сил до заданого центра.
40. Геометричні та аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил.
41. Умови рівноваги паралельних сил і пар сил в просторі.
42. Як визначити модуль і напрям рівнодійної системи паралельних сил, направлених в один бік і в протилежні боки ?
43. Що називають центром системи паралельних сил і центром ваги тіла ?
44. Координати центра системи паралельних сил та центра ваги тіла.
45. Центр ваги об'єму, площі, лінії.
46. Методи знаходження центра ваги тіл.
47. Центр ваги фігур, які мають площину, вісь або центр симетрії.
48. Інтегральні формули визначення координат центра ваги тіла.
49. Центр ваги площі, трикутника, дуги кола, площі кругового сектора.

Підписано до друку 13.10.2009 р. Формат 60×84 1/16 3,37 д.а. Тираж 10 прим. Зам. №1572
69063, м. Запоріжжя, ЗНТУ, Друкарня, вул. Жуковського, 64