гМІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до лабораторних робіт з дисципліни
„МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В БІОЛОГІЇ ТА МЕДИЦИНІ”
для студентів денної та заочної форм навчання за напрямом
163 – „Біомедична інженерія”

ЗАТВЕРДЖЕНО
кафедрою біомедичних
електронних пристроїв і систем.
Протокол № 8 від 01.02.2019

Харків 2019

Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни „Методи математичної в біології та медицині” для студентів денної та заочної форм навчання за спеціальністю 163 – „Біомедична інженерія” / Упоряд. Скляр О.І. – Харків, ХНУРЕ, 2019. – 112 с.

Упорядники: О. І. Скляр

Рецензент: Лінник О. В., канд. тех. наук доцент каф. БМІ

ЗМІСТ

ВСТУП

Дисципліна „Методи математичної фізики в біології та медицині” дає можливість оволодіти математичними методами при моделюванні фізичних або біологічних об’єктів і процесів, які відбуваються в них.

Ці методичні вказівки призначені для виконання лабораторних робіт при вивчення дисципліни „Методи математичної фізики в біології та медицині”

Суть та задачі дисципліни. При вивченні явищ чи процесів природи використовуються математичні моделі, а для опису просторово-часових процесів цих моделей використовується відповідний математичний апарат [1]. Саме цей математичний апарат і вивчає дисципліна „Методи математичної фізики в біології та медицині”

Метою вивчення дисципліни „Методи математичної фізики в біології та медицині” є засвоєння принципів розв’язання рівнянь, що описують моделі об’єктів та процесів, які відбуваються у них.

Вивчення дисципліни „Методи математичної фізики в біології та медицині” потребує знання: математики; фізики; особливостей будови та функціонування живого організму; програмування.

Окрім лекцій, при вивченні дисципліни передбачено виконання лабораторних робіт з використанням комп’ютерів, програмне забезпечення яких дозволяє аналітично розв’язувати диференціальні рівняння у частинних похідних.

Це дозволяє отримати аналітичні розв’язки, побудувати відповідні графіки, проаналізувати поведінку описуваного процесу у просторі та часі.

Порядок виконання лабораторних робіт. На початку першого заняття всі студенти повинні ознайомитися з правилами техніки безпеки і розписатися про це в журналі обліку виконання лабораторних робіт. Студенти, які не ознайомилися з правилами техніки безпеки, до виконання лабораторних робіт не допускаються.

Кожній лабораторній роботі (ЛР) має передувати самостійна підготовки студентів з вивчення джерел. Студент має знати мету і порядок виконання роботи.

Результати виконання ЛР відображуються у звіті, який має вміщувати: назву лабораторної роботи, мету роботи, опис типу досліджуваних процесів, що вивчався, аналітичний розв’язок рівнянь, що описують досліджувані процеси з відповідним лістингом програми та висновки.

До початку наступної ЛР студент повинен надати викладачеві повністю оформлений звіт про попередню роботу та захистити її. Залік з ЛР студент отримує після співбесіди з викладачем за темою виконання робіт.

ТЕМА 1. ВИВЧЕННЯ УНІВЕРСАЛЬНОГО МАТЕМАТИЧНОГО ПАКЕТУ MAPLE POWER EDITION

При аналітичному розв'язанні деяких математичних задач нині є можливість використовувати програмні пакети, що дозволяють проводити символьні обчислення, які ще називають комп'ютерною алгеброю. Система *Maple* саме відноситься до таких програмних пакетів [2, 3]. Ця система була розроблена групою дослідників університету *Waterloo* (Канада). Всі інші розробники відомих математичних пакетів (*MathCad*, *MatLab*) використовують символьний процесор *Maple*, математичні редактори Scientific Word, MathOffice для виконання розрахунків також ним доповнені.

Система *Maple* дозволяє:

– виконувати складні алгебраїчні перетворення та спрощення над полем комплексно-спряжених чисел;

– знаходити скінченні та нескінченні суми, добутки тощо;

– розв'язувати аналітично та чисельно системи звичайних диференціальних рівнянь;

– розв'язувати аналітично та чисельно деякі класи рівнянь у частинних похідних;

– самостійно створювати команди і таким чином розширювати можливості *Maple* для розв'язання спеціальних задач.

Програмний пакет *Maple* має дуже гарну графіку, тому побудова графіків розв'язань диференціальних рівнянь, як звичайних так і в частинних похідних не є якоюсь проблемою.

Програмний пакет *Maple* має декілька версій. Найчастіше використовуються версії *Maple 11 – Maple 14.* Кожна наступна версія підтримує програми, створені, у попередніх версіях.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1
ВИВЧЕННЯ ПРОГРАМНОГО ЗАСОБУ *MAPLE*

1.1 Мета роботи

Ознайомлення з програмним пакетом *Maple*, його інтерфейсом, структурою об'єктів, синтаксисом, операторами.

1.2 Підготовка до виконання роботи

При підготовці до ЛР необхідно опрацювати матеріал за темою „Виконання математичних обчислень за допомогою програмного пакета *Maple*”.

Як будь-який Windows–додаток Maple має віконний інтерфейс. У залежності від виконуваних дій цей інтерфейс може відрізнятися і мати вигляд: стандартний, довідкової системи, графічної двовимірної системи, тривимірної графічної системи. Стандартний інтерфейс підтримує концепцію робочих листків („worksheets”), які об’єднують текст, вхідні команди, отриманий розв’язок та графіку в одному документі. Інші віконні інтерфейси трохи відрізняються один від одного в залежності від виконуваних завдань (інтерфейс довідкової системи; інтерфейс графічної двовимірної системи; інтерфейс тривимірної графічної системи).

1.2.1 Стандартний інтерфейс робочого документа Maple буде показаний на екрані (рис. 1.1), якщо користувач працює в робочому документі, то там же знаходиться курсор вводу.

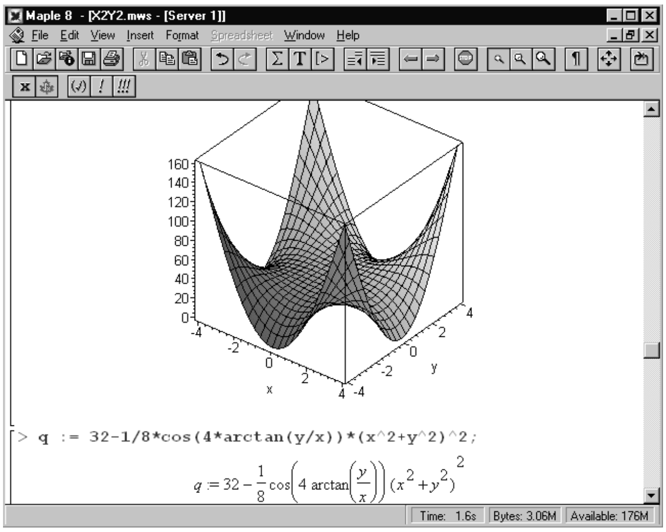


Рисунок 1.1 – Інтерфейс робочого документа

Найчастіше використовувані команди керування робочим документом винесені в піктографічне меню подібних до Windows, є й додаткові, опис яких наведено нижче:

Σ – вставка команди *Maple* безпосередньо в ту частину документа, де знаходиться курсор;

T – вставка і форматування тестового коментарю;

[> – вставка групи виконуваних команд;

– перетворення виділення в підсекцію;

– дія, зворотна попередній;

– крок назад під час роботи з гіперпосиланнями;

– крок вперед під час роботи з гіперпосиланнями;

– переривання обчислення;

– масштаб відображення робочого документа (100 %, 150 % і 200 % відповідно);

– збільшити розмір активного вікна;

– очистити внутрішню пам'ять (restart);

– переключення відображення рядка команд із математичного в *Maple-нотацію* і назад;

– виконувати/не виконувати вираз;

– автоматична корекція синтаксису виразу;

– виконати поточний вираз;

– виконати робочий документ.

1.2.2 Інтерфейс довідкової системи *Maple* має достатньо могутню діалогову систему контекстної допомоги. Інтерфейс довідкової системи може мати вигляд, показаний на рис. 1.2.

Довідкову інформацію можна шукати за темою або командою. Для одержання довідки за конкретною командою потрібно в робочому документі ввести "?" та ім'я команди, або установити курсор на цікавлячу команду і натиснути клавішу **F1**.

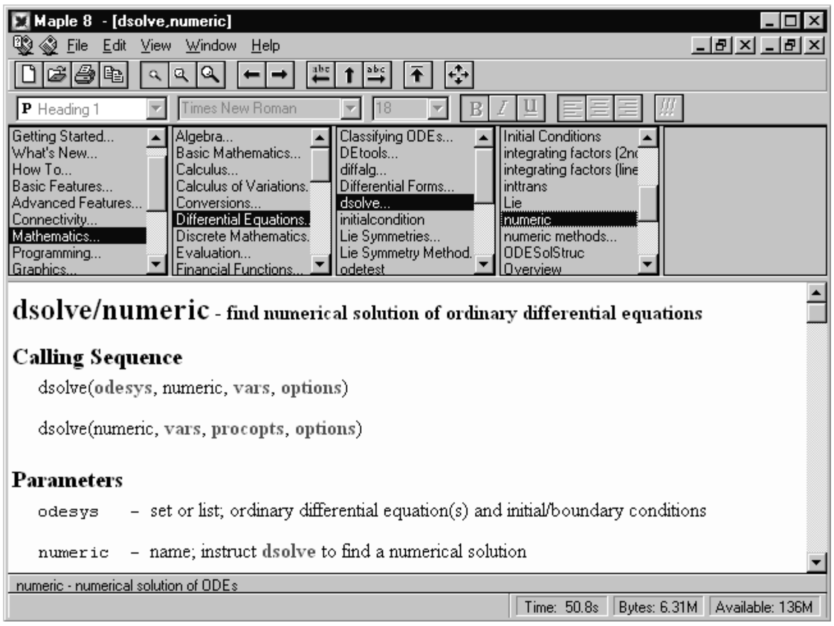


Рисунок 1.2 – Інтерфейс довідкової системи – **Axes** – команди управління стилем координатних осей

1.2.3 Інтерфейс двовимірної графічної системи використовується під час виконання графічних побудов на площині. Командний рядок цього інтерфейсу має такі додаткові пункти (рис. 1.3):

– **Format** – команди форматування;
– **Style** – команди стилю побудови;
– **Legend** – команди редагування і показу легенди;
– **Projection** – команди визначення масштабу зображення;
– **Animation** – команди анімації графіки;
– **Export** – команди збереження графіки у файли різних форматів.

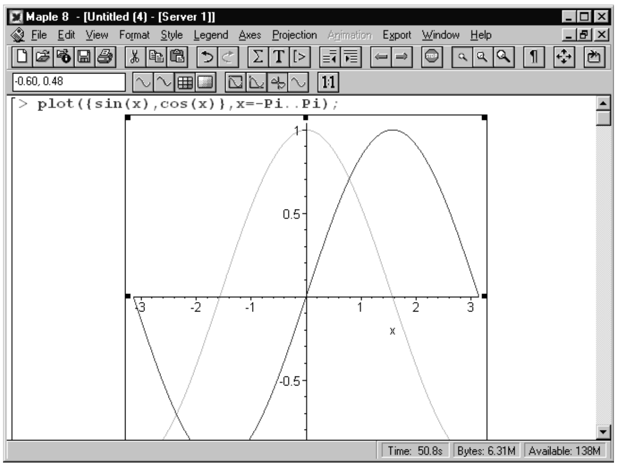
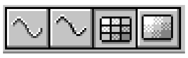
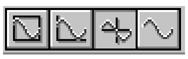


Рисунок 1.3 – Графічний інтерфейс 2-D з початком робочого листка програмного засобу *Maple* 8

Найчастіше використовувані команди керування двовимірною графічною системою винесено у піктографічне меню (рис. 1.4), опис яких наведено нижче.

– координати курсору;

 – стилі побудови;

 – стилі координатних осей;

 – масштабування зображення.

Рисунок 1.4 – Елементи піктографічного меню графічного інтерфейсу

Керувати двовимірною графічною системою можна, використовуючи контекстне меню (рис. 1.5). Воно викликається натисканням правої клавіші миші на полі зображення.

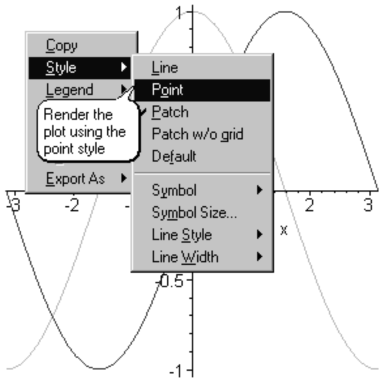


Рисунок 1.5 – Контекстне меню графічного інтерфейсу

1.2.4 Інтерфейс тривимірної графічної системи показано на рис. 1.6, у командному рядку є додатковий пункт для вибору кольору зображення „**Color**”, а також додаткове піктографічне меню (рис. 1.7).

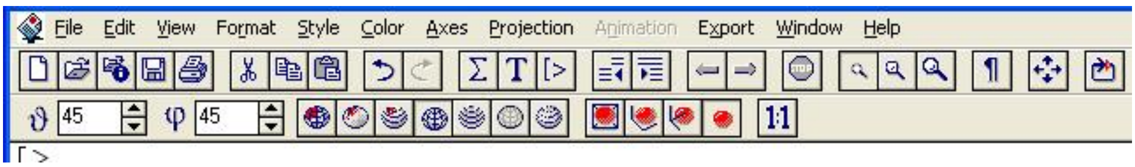
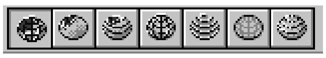


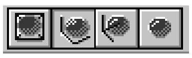
Рисунок 1.6 – Графічний інтерфейс 3-D з початком робочого листка програмного засобу Maple 11

1.2.5 Елементи мови Maple розбиті на чотири складові: символи (characters), вирази (tokens), синтаксис (syntax) та семантика (semantics) – тлумачення.

Символи – це 26 прописних та 26 великих літер латинського алфавіту, 10 цифр та 32 спеціальні символи. Вирази, які ще називають лексемами, – це слова, оператори програмування, строки, натуральні числа та знаки пунктуації.

 – напрямок погляду на об'єкт;

 – стилі побудови;

 – стилі координатних осей;

 – масштабування зображення.

Рисунок 1.7 – Додаткове піктографічне меню тривимірного графічного інтерфейсу

1.2.6 Найпростіші вирази можуть складатися з одного числа або змінної. У загальному випадку вирази Maple можуть складатися з тисяч чисел та імен, які з'єднані за допомогою арифметичних операторів. Арифметичні оператори Maple такі ж самі як і у звичайній математиці.

1.2.7 У Maple використовуються загальноприйняті назви основних математичних функцій (табл. 1.1).

1.2.8 Тригонометричні функції записуються так: **sin(*x*), cos(*x*), tan(*x*), sec(*x*), csc(*x*), cot(*x*), sinh(*x*), cosh(*x*), tanh(*x*), sech(*x*), csch(*x*), coth(*x*), arcsin(*x*), arccos(*x*), arctan(*x*), arcsec(*x*), arccsc(*x*), arccot(*x*), arcsinh(*x*), arccosh(*x*), arctanh(*x*), arcsech(*x*), arccsch(*x*), arccoth(*x*), arctan(*y*, *x*).**

1.2.9 Найважливіші математичні константи π і $i = \sqrt{-1}$ починаються з великих літер **Pi**, **I**.

Крім звичайних знаків математичних операцій використовують: **<, >, >=, <=, =** – логічні операції; ****** або **^** – піднесення до степеня; **!** – факторіал; **:=** – знак присвоєння; **%** –результат попередньої операції.

У мові Maple є зарезервовані слова та вирази, які мають спеціальне значення і їх не можна застосовувати як змінні, наприклад, **D**, **I** тощо.

Таблиця 1.1 – Загальноприйняті назви основних математичних функцій

	Опис
abs	модуль
sqrt	квадратний корінь
log	звичайний логарифм
log10	десятковий логарифм
ln	натуральний логарифм
exp	експонента
round	округлення
trunc	відсікання дробової частини
Re	дійсна частина
Im	комплексна частина
argument	аргумент комплексного числа

1.2.10 При роботі з математичними виразами є необхідність виконувати такі операції, як зведення подібних членів, розкриття дужок, розкладання на множники. У пакеті Maple це можна зробити за допомогою спеціальних функцій (табл. 1.2).

Таблиця 1.2 — Оператори деяких перетворень

Функція	Опис
`simplify`	Спростити вираз
`factor`	Факторизувати (розкласти на множники)
`expand`	Виконати дії (розкрити всі дужки)
`normal`	Привести вираз до "нормального" вигляду
`convert`	Переписати в заданому вигляді
`coeff`	Коефіцієнти виразу
`collect`	Зібрати разом частини виразу

1.2.11 У Maple виконувані математичні вирази вводяться після символу >.

Робота має починатися з директиви – **restart (**почати знову**).**

Кожен вираз має закінчуватися роздільним знаком — крапка з комою або двокрапкою (якщо результат не потрібно виводити на екран).

У виразах не можна використовувати пропуски, якщо потрібно розділити якісь змінні, то використовується кома.

Для продовження запису на наступному рядку використовують комбінацію "**Shift + Enter**".

При натискання клавіші "**Enter**" запропонована дія виконується.

Знайшовши помилку, Maple виводить повідомлення про неї в наступному рядку.

1.3 Порядок виконання роботи

1.3.1 Відкрийте стандартний інтерфейс програмного засобу Maple.

1.3.2 У відкритому вікні інтерфейсу набирайте вирази, які наведено в таблицях у колонці „Оператор”, після символу >. Після набору виразу натискайте на клавішу „**Enter**” і програма виконуватиме запропоновані дії. Щоразу перевіряйте отриманий результат з наведеним результатом у методичці – у таблицях колонка „Отриманий результат”. Якщо отримано інший результат, то перевірте запис виконуваної дії, виправте помилки та виконайте цю дію спочатку. Іноді перед повторним виконання зазначеної дії слід додатково вставити оператор “**restart;**”.

1.3.2.1 Виконайте прості обчислення зазначені у таблицях 1.3 – 1.15.

Таблиця 1.3 – Прості обчислення

Оператор	Отриманий результат
> **restart;** > **1+2;**	3
> **12*4/3;**	16
> **1+3/2;**	5/2
> **1.125/2;**	0.5625000000
> **1/0;**	*Error, numeric exception: division by zero.*

Цілі числа в *Maple* мають найвищий пріоритет, тому 1+3/2=5/2, а не 2.5. Завжди можна отримати результат у вигляді десяткового дробу за допомогою функції перетворення **evalf** (*вираз*, [*точність*]) – табл. 1.4.

Таблиця 1.4 – Оператор обчислення

Оператор	Отриманий результат
> **evalf(1+3/2);**	2.500000000
> **evalf(113/112);**	1.008928571

Зазвичай *Maple* проводить обчислення з точністю до десятого знака після коми, однак, можна задати необов'язковий параметр *точність* у функції **evalf**, можна її як зменшити, так і збільшити – табл. 1.5.

Таблиця 1.5 – Оператор обчислення з вказаною точністю

Оператор	Отриманий результат
> **evalf(113/112,20);**	1.0089285714285714286

Якщо необхідно змінити точність обчислень для усіх виразів, то для цього необхідно присвоїти відповідне значення змінній **Digits** – табл. 1.6.

Таблиця 1.6 – Змінна для визначення кількості розрядів при розрахунку

Оператор	Отриманий результат
> **Digits:=25: evalf(13/7);**	1.857142857142857142857143

Запис деяких математичних констант показано в табл. 1.7. Основа натурального логарифма – ***e***, може бути отримана за допомогою функції **exp.**

Змінні можна записати як вирази, при цьому кожна змінна характеризується типом та ім'ям – набором символів, у яких рядкові і прописні букви розрізняються. Зазвичай, ім'я не має збігатися з існуючими вже іменами – табл. 1.8.

Таблиця 1.7 – Деякі математичні константи

Оператор	Отриманий результат
> **`Pi; evalf(%);`**	π 3.1415926535897932384626433
> **`exp(1); evalf(%);`**	e 2.718281828459045235360287
> **`I;`**	*I*
> **`infinity;`**	∞

Таблиця 1.8 – Вид запису змінних

Оператор	Отриманий результат
> **`a:=5; A:=12; b:=15; B:=6;`** **`c:=a/b; C:=A/B;`**	*a*:=5 *A*:=12 *b*:= 5 *B*:= 6 *c*:=1/3 *C*:= 2

Під час запису виразів є дві форми – виконувана та інертна. Якщо потрібно розрахувати значення виразу, то використовується виконувана форма запису (оператор Maple пишеться з малої літери), якщо потрібно записати саме вираз, то це інертна форма запису (оператор Maple пишеться з великої літери) – табл. 1.9.

Якщо індексові (k) до моменту обчислення суми вже присвоєне будь-яка значення, то функція **sum** призведе до помилки – табл. 1.10.

Для того щоб уникнути помилок слід використовувати одинарні лапки, як показано у табл. 1.11

Таблиця 1.9 – Вид запису виконуваної та інертної форми виразів

Оператор	Результат	Коментар
> **`sum(k^2,k=1..10);`**	385	Отримання результату

Продовження табл. 1.9

Оператор	Результат	Коментар
`> Sum(k^2,k=1..10);`	$\sum_{k=1}^{10} k^2$	Інертна форма запису суми
`> Sum(k^2,k=1..10)= sum(k^2,k=1..10);`	$\sum_{k=1}^{10} k^2 = 385$	Запис результатів розрахунку з використанням як інертної, так і виконуваної форм

Таблиця 1.10 – Приклад некоректного використання індексу

Оператор	Отриманий результат
`> k:=125;`	$k := 125$
`> sum(k^2,k=1..10);`	*Error, (in sum) summation variable previously assigned, second argument evaluates to 125 = 1 .. 10*

Таблиця 1.11 – Приклад коректного використання індексу

Оператор	Отриманий результат
`> sum('m^2','m'=1..10);`	385

Функція **value** служить для розрахунку інертних форм – табл. 1.12.

Таблиця 1.12 – Приклад обчислення інертної форми

Оператор	Отриманий результат
`> S:=Sum('n^2','n'=1..10);`	$S := \sum_{n=1}^{10} n^2$
`> value(S);`	385

Багато нескінченних сум сходяться до визначених значень і Maple здатний їх обчислити – табл. 1.13.

Для розрахунку добутків використовуються функції **product (**виконувана форма**)** та **Product (**інертна форма**) —** табл. 1.14.

Таблиця 1.13 – Приклади обчислення нескінченої суми

Оператор	Отриманий результат
`>restart; Sum(1/k!, k=0..infinity)= sum(1/k!, k=0..infinity);`	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e$
`> Sum(1/k^2, k=1..infinity)= sum(1/k^2,k=1..infinity);`	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$

Таблиця 1.14 – Приклад обчислення добутків

Оператор	Отриманий результат
`>restart;Product(k^2,k = 1..5)= product(k^2, k = 1 .. 5);`	$\prod_{k=1}^{5}k^2=14400$

Для розрахунку меж використовуються функції **limit (**виконувана форма**)** та **Limit (**інертна форма**)** – табл. 1.15.

Таблиця 1.15 – Приклади обчислення меж

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> Limit(12*sin(x), x=Pi/4)=limit(12*sin(x), x=Pi/4);`	$lim_{x\to\pi/4}12sinx=6\sqrt{2}$	Межа функції $y=12sinx$ в точці $\pi/4$
`> Limit(1/x,x=0)= limit(1/x,x=0);`	$lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=undefined$	Межа функції $1/x$ у точці $x=0$
`> Limit(1/x,x=0,right)= limit(1/x,x=0,right);`	$lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty$	Межа функції праворуч від нуля
`> Limit(1/x,x=0,left)= limit(1/x,x=0,left);`	$lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$	Межа функції ліворуч від нуля
`> Limit(sin(x)/x,x=0)= limit(sin(x)/x,x=0);`	$lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$	Перша чудова межа

1.3.2.2 Основні типи даних, з якими зустрічаються під час виконання різних обчислень.

Виконайте дії, зазначені у таблицях 1.16 – 1.24.

Для перевірки приналежності виразів до певного типу використовуються дві функції (табл. 1.16): **whattype** (*вираз*) визначає тип виразу; **type** (*вираз*, *тип*) вказує *true* (*істина*), якщо *вираз* належить до зазначеного *типу*, і *false* (*невірно*) – якщо не належить до зазначеного типу.

Цілі числа. Вираз належить до цілого типу (тип ***integer***), якщо він складається з послідовності цифр, які не мають у своєму складі ніяких знаків. *Maple* може працювати з цілими числами практично нескінченної довжини. Числа типу ***integer*** можуть бути як додатними, так і від'ємними.

Таблиця 1.16 – Типи чисел

Оператор	Отриманий результат
> **whattype(-125)**;	*integer*
> **type(-125,integer)**;	*true*

Дріб. Дріб (тип ***fraction***) подаються у вигляді: $\frac{a}{b}$, де a – ціле число зі знаком, b – ціле число без знака. У виразі типу ***fraction*** обов'язково присутні два поля: чисельник і знаменник, які можуть бути виділені функцією **op** – табл. 1.17.

Таблиця 1.17 – Виконання дій з дробом

Оператор	Отриманий результат
> **type(-3/7,integer)**;	*false*
> **whattype(-3/7)**;	*fraction*
> **op(-3/7)**;	-3, 7

Числа з плаваючою точкою. Числа з точкою, що плаває, (тип ***float***) можна визначити так (табл. 1.18):

1) послідовність чисел, розділених крапкою:

а) <*integer*>**.**<*integer*>

б) <*integer*>**.**

в) **.**<*integer*>

2) у вигляді: Float(M, E), тобто M*10E.

Таблиця 1.18 – Вид запису чисел з точкою, що плаває

Оператор	Отриманий результат
> **whattype(0.123)**;	*float*
> **Float(2,3)**;	2000

Строкові типи. Вирази строкового типу (тип ***string***) – це послідовність символів, взятих у подвійні лапки (табл. 1.19).

Таблиця 1.19 – Дії зі строковим типом даних

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> **`str:= "Це рядок !";`**	*str*:= "Це рядок !"	Запис строкового типу даних
> **`whattype (str);`**	*string*	Визначення типу даних
> **`length(str);`**	10	Визначення довжини рядка
> **`substring (str,4..10);`**	"рядок"	З рядка можна витягти його частину

Булеві вирази. Булеві вирази (тип ***boolean***) можуть приймати одне з двох значень: *true* (*істина*) або *false* (*неправда*). У булевих виразах можна використовувати такі оператори: **and**, **or**, **xor**, **implies**, **not**, а також оператори відношення <, <=, >, >=, =, <>. Функція **evalb** обчислює складний логічний вираз – табл. 1.20.

Таблиця 1.20 – Дії з булевими виразами

Оператор	Отриманий результат
> **`5>3;`**	$3 < 5$
> **`evalb(5>3);`**	*true*

Послідовності. Послідовність (тип **exprseq**) – набір елементів без дужок, які розділені комами (табл. 1.21). Порожня послідовність позначається **NULL.**

Множини. Множина (тип **set**) – набір елементів, розділених комами та розміщених у фігурних дужках. Для множин дійсні всі правила перетворення, які прийняті у класичній математиці – табл. 1.22.

Оператор **%** використовується для того щоб вказати на те, що дія стосується попереднього виразу; якщо цей оператор вказано двічі, то це означає, що дія стосується виразу, який використовувався перед попереднім.

Списки. Список (тип **list**) – набір елементів, які розділені комами та розміщені у квадратних дужках (табл. 1.23). Список на відміну від множини, може містити однакові елементи.

Таблиця 1.21 – Дії з послідовностями

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> **S:=1,2,3,4,5, 6,7,8,9,10;**	*S*:= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	Запис послідовності
> **whattype(S);**	*exprseq*	Визначення типу даних
> **S:=seq(i,i=1..10);**	*S*:= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	Запис послідовності за допомогою оператора **seq**
> **$ 2..5;**	2, 3, 4, 5	Запис послідовності за допомогою оператора **$**
> **a[i] $ i = 1..3;**	*a*1, *a*2, *a*3	

Таблиця 1.22 – Дії з множинами

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> **{1, 2, 3, 4, 5, 1};**	{1, 2, 3, 4, 5}	Запис множини
> **whattype(%);**	*set*	Тип даних
> **nops(%%);**	5	Кількість елементів
>P:={seq(a[i],i=1..5)}		
> **P:={op(P),a[6]};**	*P*:= {*a*1, *a*2, *a*3, *a*4, *a*5, *a*6}	Додавання елемента до множини *P*
> **P:= subsop(3=NULL,P);**	*P*:= {*a*1, *a*2, *a*4, *a*5, *a*6}	Вилучення третього елемента з множини *P*

Таблиця 1.23 – Дії зі списками

Оператор	Отриманий результат	Коментар
>**[a, b, c, d];**	[*a*, *b*, *c*, *d*]	Запис списку
> **whattype(%);**	*list*	Визначення типу даних
>**L:=[sin, cos, tan];**	*L*:= [*sin*, *cos*, *tan*]	Запис списку
> **D(L);**	[*cos*, −*sin* , 1+ tan^2]	Операція диференціювання списку

Масиви. Масив (тип **array**) – кінцевий список з цілочисельними індексами. Для створення масиву служить функція **array** – табл. 1.24.

Таблиця 1.24 – Дії з масивами

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> A:=array(1..5);`	A:= array (1.. 5, [ ])	Створення порожнього масиву з п'яти елементів
`> C:=array(1..2, 1..2, [[x^3, 3], [sin(x),2.33]]);`	$C := \begin{bmatrix} x^3 & 3 \\ \sin(x) & 2.33 \end{bmatrix}$	Масив може містити елементи різних типів
`> map(diff,C,x);`	$C := \begin{bmatrix} 3x^2 & 0 \\ \cos(x) & 0 \end{bmatrix}$	Функція виконує будь-яку операцію над всіма елементами масиву, наприклад, диференціювання всіх елементів масиву по x

1.3.2.3 Операції з формулами виконуються за допомогою спеціальних операторів (табл. 1.25 – 1.29). Виконайте дії, зазначені у таблицях 1.25 – 1.29.

Таблиця 1.25 – Приклади виконання дій з формулами

Оператор	Отриманий результат
`> sin(x)^2+cos(x)^2;`	$(\sin x)^2 + (\cos x)^2$
`> simplify(%);`	1
`> cos(x)^5+sin(x)^4+2*cos(x)^2-2*sin(x)^2-cos(2*x);`	$(\cos x)^5 + (\sin x)^4 + 2(\cos x)^2 - 2(\sin x)^2 - \cos(2x)$
`> simplify(%);`	$(\cos x)^4((\cos x + 1))$
`> sqrt(x^2);`	$\sqrt{x^2}$

Функція **normal** звичайно використовується для поліномів і раціональних функцій, хоча іноді може бути застосована і для більш загальних виразів.

Функція **convert** перетворює вираз у різні форми – табл. 1.27.

Виділення коефіцієнтів полінома здійснюється функцією **coeff** (*вираз, змінна, степінь*) – табл. 1.28.

Функція **collect** дозволяє збирати разом коефіцієнти з однаковими степенями. У наступних прикладах збираються коефіцієнти при ln(x) та x (табл. 1.29).

Таблиця 1.26 – Приклади виконання дій з виразами

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> **6*x^2+18*x-24;**	$6\,x^2+18\,x-24$	Запис виразу
> **factor(%);**	$6\,(x+4)(x-1)$	Факторизувати – розкласти вираз на множники
> **ifactor(132);**	$(2)^2\,(3)\,(11)$	Розкладання на множники **цілих** чисел
> **(x+1)*(x+2);**	$(x+1)(x+2)$	Запис виразу
> **expand(%);**	$x^2+3\,x+2$	Розкриття дужок
> **(x+1)/(x+2);**	$\frac{x+1}{x+2}$	Запис виразу
> **expand(%);**	$\frac{x}{x+2}+\frac{1}{x+2}$	Виконання дій
> **1/x+x/(x+1);**	$\frac{1}{x}+\frac{x}{x+1}$	Запис виразу
> **normal(%);**	$\frac{x+1+x^2}{x(x+1)}$	Зведення виразу до єдиного знаменника
>**normal(%%, expanded);**	$\frac{x+1+x^2}{x^2+x}$	Розкриття дужок

Таблиця 1.27 – Приклади виконання дій

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> **convert (1.23456, fraction);**	$\frac{3858}{3125}$	Перетворення десяткового дробу в натуральний
> **(x^3+x)/ (x^2-1);**	$\frac{x^3+x}{x^2-1}$	Запис виразу у вигляді елементарного дробу
> **convert (%, parfrac, x);**	$x+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$	Розкладання виразу на прості складові

Функція **trigsubs** дозволяє отримати всі еквіваленти виразів у вигляді списку (табл. 1.29).

Вибрати елементи зі списку можна за допомогою функції **op**, вказавши першим параметром номер елемента, який вибирається (табл. 1.29).

Таблиця 1.28 – Виділення коефіцієнтів

Оператор	Отриманий результат
> **p := 2*x^2 + 3*y^3 - 5;**	$p := 2x^2 + 3y^3 - 5$
> **coeff(p,x,0);**	$3y^3 - \ 5$

Таблиця 1.29 – Вибір елементів з виразів

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> **a*ln(x)-ln(x)* x-x;**	$a\ln(x) - \ln(x)\,x - x$	Запис виразу
> **collect (%,ln(x));**	$(a - x)\ln(x) - x$	Збирання коефіцієнтів з функцією $\ln(x)$
> **y/x+2*z/x+ x^(1/3)- y*x^(1/3);**	$\frac{y}{x} + \frac{2z}{x} + x^{(1/3)} - yx^{(1/3)}$	Запис виразу
> **collect(%,x);**	$(1 - y)x^{(1/3)} + \frac{y + 2z}{x}$	Збирання коефіцієнтів при x

1.3.2.4 Обчислення похідних здійснюється за допомогою функцій **diff** та **Diff**. Першим параметром цих функцій є вираз, який диференціюється, далі – ім'я змінної або послідовність імен змінних.

Виконайте дії, зазначені у таблицях 1.30 – 1.35.

Таблиця 1.30 – Приклади диференціювання

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> **diff(sin(x),x);**	$cos\ (x)$	Диференціювання функції $sin(x)$ по x
> **diff(%,x);**	$-\ sin(x)$	Подвійне диференціювання функції $sin(x)$ по x різними способами
> **diff(sin(x),x,x);**	$-\ sin(\ x)$	
> **diff(sin(x),x$2);**	$-\ sin\ (x)$	

В останньому прикладі табл. 1.30 для запису послідовності з двох змінних x використовується оператор генерації послідовності – **$**.

Один оператор **diff** може виконати диференціювання за декількома змінними – табл. 1.31.

Для обчислення інтегралів використовуються функції **int** та **Int**. Під час обчислення невизначених інтегралів перший параметр – вираз, який інтегрується, другий – змінна (табл. 1.32).

Таблиця 1.31 – Диференціювання за декількома змінними

Оператор	Отриманий результат
`> Diff(y*sin(x)/cos(y),x,y) = diff(y*sin(x)/cos(y),x,y);`	$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{ysin(x)}{cos(y)}\right) = \frac{cos(x)}{cos(y)} + \frac{ycos(x)\sin(y)}{cos(y)^2}$

Таблиця 1.32 – Приклади інтегрування

Оператор	Отриманий результат
`> Int(sin(x),x)=int(sin(x),x);`	$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$
`> eq:=exp(-x^2)*ln(x);`	$eq := e^{(-x^2)}\ln(x)$
`> int(eq,x);`	$\int e^{(-x^2)}\ln(x)dx$

Якщо інтеграл не береться, як в останньому прикладі, то підінтегральний вираз може бути розкладений в степеневий ряд функцією **series**. Розкладемо підінтегральний вираз в ряд до 8-го порядку (табл. 1.33).

Таблиця 1.33 – Розкладання в ряд підінтегрального виразу

Оператор	Отриманий результат
`> series (eq,x,8);`	$\ln(x) - \ln(x)\,x^2 + \frac{1}{2}\ln(x)\,x^4 - \frac{1}{6}\ln(x)\,x^6 + O(x^8)$

Тепер цей ряд можна інтегрувати (табл. 1.34).

Обчислення визначених інтегралів показано в табл. 1.35.

1.3.2.5 Деякі функції Maple крім ядра можуть знаходитися в пакетах розширень, що входять у базове постачання системи. Перед використанням таких функцій ці пакети слід завантажити. Для завантаження усіх функцій будьякого пакета використовується функція **with** (*ім'я_пакета*). Для завантаження обраних функцій пакета – **with** (*ім'я_пакета, функція_1, функція_2, ...*). Деякі функції пакетів розширень можуть перевизначати однойменні функції ядра.

Виконайте дії, зазначені у таблицях 1.36 – 1.39.

Таблиця 1.34 – Інтегрування ряду

Оператор	Отриманий результат
> **int (%,x);**	$x\ln(x) - x - \frac{1}{3}\ln(x)\,x^3 + \frac{x^3}{9} + \frac{1}{10}\ln(x)\,x^5 - \frac{x^5}{50} - \frac{1}{42}\ln(x)\,x^7 + \frac{x^7}{294} + O(x^9)$

Таблиця 1.35 – Обчислення визначених інтегралів

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> Int(sin(x), x=0..Pi/4)= int(sin(x), x=0..Pi/4);`	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$	При обчисленні визначених інтегралів необхідно задавати межі інтегрування
`> evalf (Int(sin(x), x=0..Pi/4));`	0.2928932188	Чисельне обчислення визначеного інтеграла
`> Int(exp(-x), x=0..infinity)= int(exp(-x), x=0..infinity);`	$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{(-x)}dx = 1$	Розрахунок інтеграла з нескінченною верхньою межею

Пакет **linalg** містить більш ніж сто функцій для розв’язання задач лінійної алгебри. Розглянемо деякі з них на прикладі двох матриць 3 × 3, створених за допомогою функції **matrix**, аналогічної функції **array** – табл. 1.36.

Деякі функції пакета **student** дозволяють проводити обчислення поетапно (табл. 1.37). Функція **intparts** – інтегрування по частинах. Інтегрування підстановкою – функція **changevar**. В останньому рядку табл. 1.37 межі інтегрування змінилися автоматично.

1.3.2.6 Основною функцією побудови графіків є оператор **plot**. Крім самої функції, графік якої потрібно побудувати, обов'язковим параметром є *область*. *Область* – це вікно у декартовій системи координат, у якому будується графік.

Якщо в *області* завдано тільки діапазон по *x* (як у першому прикладі табл. 1.38), то діапазон по *y* розраховується автоматично. Області можна задавати з використанням констант, у тому числі *infinity*.

Таблиця 1.36 – Приклади використання пакетів лінійної алгебри

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> **restart; with(linalg):** > **A := matrix(3,3,[[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]) ;**	$A := \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$	Запис матриці **A**
> **B := matrix(3,3,[[7,4,3],[1,2,5],[8,9,6]]);**	$B := \begin{bmatrix}7 & 4 & 3\\1 & 2 & 5\\8 & 9 & 6\end{bmatrix}$	Запис матриці **B**
> **det(A);**	0	Обчислення визначників матриць **A, B**
> **det(B);**	-116	
> **matadd(A,B);**	$\begin{bmatrix}8 & 6 & 6\\5 & 7 & 11\\15 & 17 & 15\end{bmatrix}$	Обчислення суми матриць **A** та **B**

Таблиця 1.37 – Приклади використання пакета **student**

Оператор	Отриманий результат
> **with(student):** > **Int(x*cos(x),x);**	$\int xcos(x)dx$
> **intparts(Int(x*cos(x),x),x);**	$xsin(x) - \int sin(x)dx$
> **value(%);**	$xsin(x) + \cos(x)$
> **Int((cos(x)+1)^3*sin(x),x);**	$\int (\cos(x)+1)^3 sin(x)dx$
> **changevar(cos(x)+1=u,** **Int((cos(x)+1)^3*sin(x),x),u);**	$\int -u^3\,du$
> **Int(sqrt(1-x^2),x=a...b);**	$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx$

`> changevar(x=sin(u), Int(sqrt(1-x^2),x=a...b), u);`	$\int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \sqrt{1-\sin(u)^2}\cos(u)\,du$

Функція **plot** може мати 27 додаткових параметрів; деякі з них описані нижче. Під час побудови графіків можна вибирати *стиль* інтерполяції. Стиль задається за допомогою ключового слова ***style***. Існують три стилі:

– POINT – графік будується по точках;

– LINE – точки з'єднуються прямими. Використовується звичайно;

– PATCH – застосовується для побудови пофарбованих багатокутників.

Тип лінії може бути заданий параметром ***linestyle***. Є такі стилі:

– SOLID – суцільна лінія;

– DOT – лінія з точок;

– DASH – штрихова лінія;

– DASHDOT – штрих-пунктирна лінія.

Колір лінії задається параметром ***color***, товщина лінії параметром ***thickness*** (див. табл. 1.38)

Під час побудови графіків Maple вибирає масштаби по осях автоматично так, щоб графік був найбільш інформативний, але, використовуючи параметр ***scaling*** (масштабування), можна заборонити використання різних масштабів по осях, як це зроблено в прикладі (див. табл. 1.38).

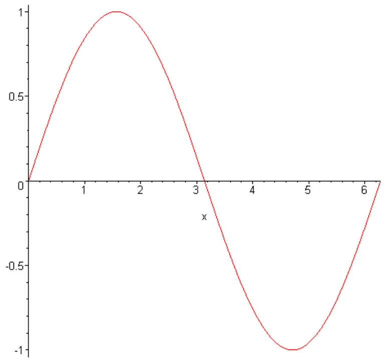
Зазвичай Maple будує графіки в декартовій системі координат. Параметр ***coords*** дозволяє вибрати систему координат. У другому прикладі (табл. 1.39) графік функції $y = x$ побудований у полярній системі координат.

Maple може побудувати декілька графіків на одній координатній площині. Для цього достатньо вказати у функції **plot** множину або список функцій, при цьому для різних графіків автоматично вибираються різні кольори. За необхідності для кожної функції можна вказати бажаний колір і стиль побудови (третій приклад у табл. 1.39).

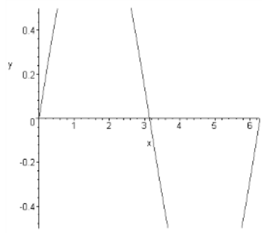
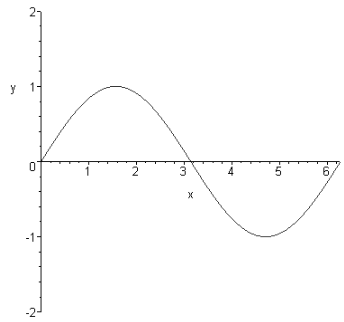
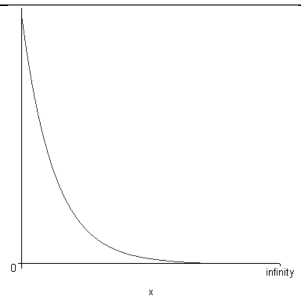
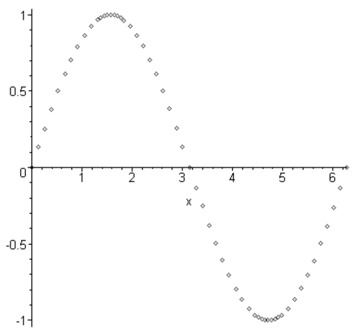
Виконайте дії, зазначені у табл. 1.38 – 1.39.

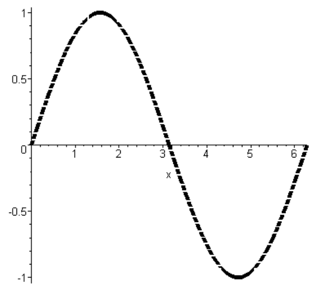
Таблиця 1.38 – Приклади побудови двовимірних графіків

Оператор	Отриманий результат

`> plot(sin(x),x=0..2*Pi);`	

Продовження табл. 1.38

Оператор	Отриманий результат
`>plot(sin(x),x=0..2*Pi, y=-0.5..0.5);`	
`>plot(sin(x),x=0..2*Pi, y=-2..2);`	
`> plot(exp(-x),x=0..infinity);`	
`>plot(sin(x),x=0..2*Pi, style=POINT);`	

`> plot(sin(x),x=0..2*Pi, style=patch, color=blue,thickness=3);`	

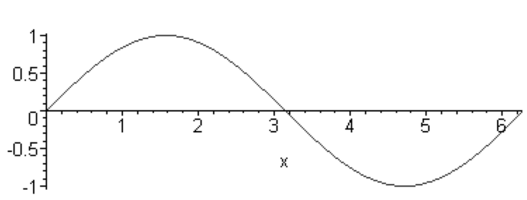
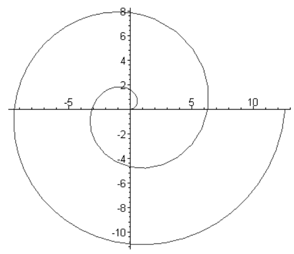
Анімація графіків. Функція **animate** дозволяє створювати анімовані зображення. Ця функція знаходиться в пакеті ***plots***, який попередньо слід підключити. Суть анімації полягає в побудові серії зображень, де кожне зображення (фрейм) пов'язане зі зміною в часі змінної ***t***.

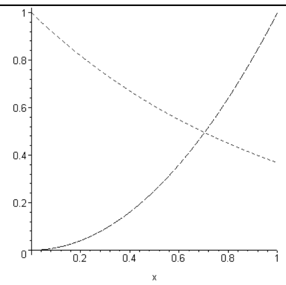
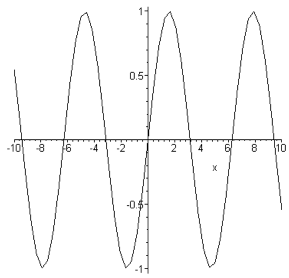
Слід встановити курсор на отримане зображення та виділити його, при цьому з'являється панель програвання анімаційних кліпів. Вона має кнопки керування з позначеннями, прийнятими для магнітофонів (рис. 1.8).

Рисунок 1.8 – Вигляд піктографічного меню під час анімації графіків

Натиснувши кнопку , можна спостерігати анімоване зображення.

Таблиця 1.39 – Різні види двовимірної графіки

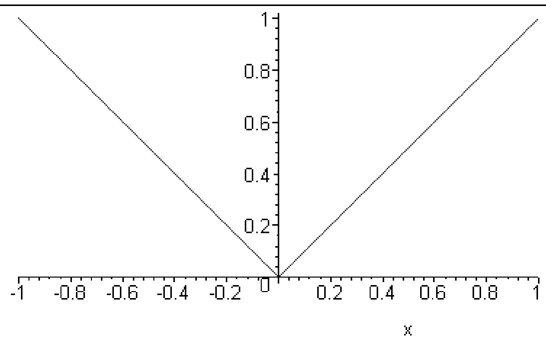
Оператор	Отриманий результат
`> plot(sin(x),x=0..2*Pi, scaling= CONSTRAINED);`	
`> plot(x,x=0..4*Pi, coords=polar, scaling=CONSTRAINED);`	

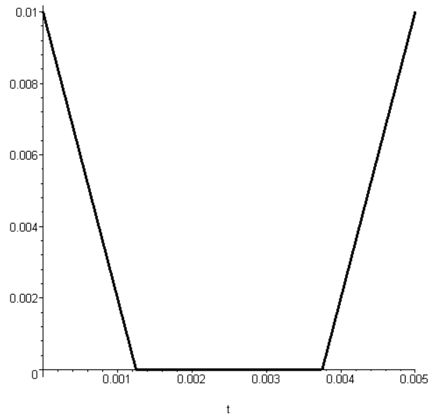
`> plot([x^2,exp(-x)],x=0..1,color=[blue,violet],linestyle=[DASH,DASHDOT]);`	
`> with(plots):animate(sin(x*t),x=-10..10,t=1..2);`	

1.3.2.7 Запис шматочно-безперервних функцій

Ця дія виконується за допомогою оператора **piecewise**. Виконайте дії, зазначені у табл. 1.40.

Таблиця 1.40 – Запис шматочно-безперервної функції

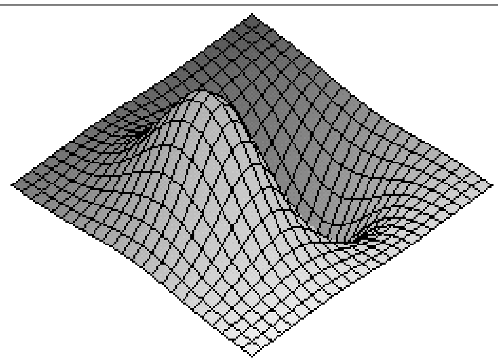
Оператор	Отриманий результат
`> p:=x-> piecewise(x<0,-x,x>0,x);`	$p := x \rightarrow piecewise(x < 0, -x, 0 < x, x)$
`> plot(p(x), x=-1..1,scaling=constrained);`	
`> with(plots):U:=0.01; T:=0.005; u5:=t->piecewise(t<0,0,t<=T/4,U*(1-4*t/T),t<=3*T/4,0,t<=T,U*(4*t/T-3),t>T,0);`	Warning, the changecoords has been redefined U:=0.01 T:=0.005

	$u5 := t \to piecewise\left(\begin{array}{c} t < 0,\quad 0 \\ t \le \frac{T}{4},\ \ U\left(1 - \frac{4t}{T}\right), \\ t \le \frac{3T}{4},\quad 0, \\ t \le T\ ,\ \ U\left(\frac{4t}{T} - 3\right), \\ T < t,\ \ 0 \end{array}\right)$
`plot(u5(t),t=0..T, numpoints=400, color=black, thickness=3);`	

1.3.2.8 Maple має велику кількість функцій тривимірної графіки. Багато функцій тривимірної графіки аналогічна раніше розглянутим функція двовимірної графіки. Основна функція тривимірної графіки **plot3d** – табл. 1.41.

Виконайте дії, зазначені у табл.1.41.

Таблиця 1.41 – Приклад побудови тривимірного графіка

Оператор	Отриманий результат
`> plot3d(x*exp(-x^2-y^2),x=-2..2,y=-2..2, grid=[25,25]);`	

1.3.2.9 Для аналітичного розв'язання лінійних і нелінійних рівнянь та систем служить функція **solve** – табл. 1.42. При використанні цієї функції як перший параметр записується рівняння, а як другий – змінна, щодо якої рівняння потрібно розв'язати. Якщо права частина рівняння дорівнює нулеві, то знак рівності і нуль можуть бути опущені (другий приклад табл. 1.42). Якщо знайдено кілька розв’язків рівняння, то корені записуються у вигляді послідовності. Аналогічно може бути отриманий розв’язок для нерівності (Open – відкритий діапазон, тобто зазначене в дужках значення до нього не входить) – третій приклад табл. 1.42. Коли першим параметром функції **solve** є множина, яка складається з рівнянь, то Maple розглядатиме цю множину як систему – четвертий приклад у табл.1.42.

1.3.2.10 Розв’язок системи нелінійних рівнянь.

Виконайте дії, зазначені у табл. 1.43.

При розв’язку системи нелінійних рівнянь, попередньо проілюструємо її розв’язок графічно – перший приклад табл. 1.43. У другому прикладі табл. 1.43 присутній вираз RootOf, який означає, що розв’язок отримано в неявній формі. Для отримання розв’язку в явній формі необхідно скористатися функцією **allvalues** – третій приклад табл. 1.43.

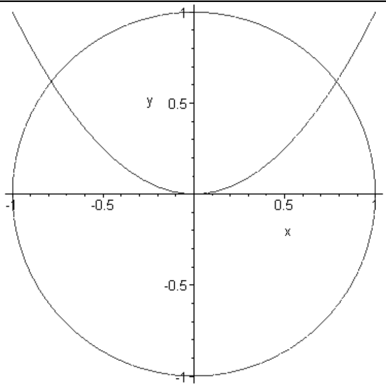
В останньому прикладі після перетворення отриманого розв’язку до виду десяткового дробу, виявилось, що система має два дійсних корені (їх видно на графіку) і два комплексних.

Таблиця 1.42 – Розв’язання рівнянь

Оператор	Отриманий результат
`> solve(a*x^2+b*x+c=0,x);` `> solve(a*x^2+b*x+c,x);`	$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
`> solve(x^2+x>5,x);`	$RealRange\left(-\infty,\ Open\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{21}}{2}\right)\right)$ $RealRange\left(Open\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}\right),\ \infty\right)$
`> solve({x+5*y+z=1, 2*x-y+4*z=4, x+2*y+2*z=12}, {x,y,z});`	$x=-42, \quad y=4, \quad z=23$

Таблиця 1.43 – Розв’язання системи нелінійних рівнянь

Оператор	Отриманий результат

`> plots[implicitplot]({y=x^2,x^2+y^2=1}, x=-1..1, y=-1..1);`	
`> solve({y=x^2,x^2+y^2=1},{x,y});`	$y = RootOf\left(\_Z + \_Z^2 - 1, label = \_L1\right),$ $x = RootOf\left(-RootOf\left(\_Z + \_Z^2 - 1, label = \_L1\right) + \_Z^2, label = \_L2\right)$

Продовження табл. 1.43

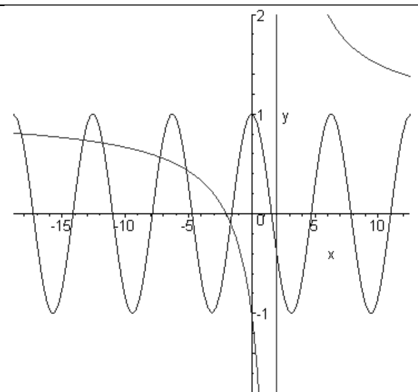
Оператор	Отриманий результат
`> allvalues(%);`	$y = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2},\ x = \frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{5}}}{2}\right\}$ $y = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2},\ x = -\frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{5}}}{2}\right\}$ $y = \left\{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2},\ x = \frac{\sqrt{-2 - 2\sqrt{5}}}{2}\right\}$ $y = \left\{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2},\ x = -\frac{\sqrt{-2 - 2\sqrt{5}}}{2}\right\}$
`> evalf(%);`	$\{y = 0.6180339880,\quad x = 0.78615113775\},$ $\{y = 0.6180339880,\quad x = -0.78615113775\},$ $\{y = -1.618033988,\quad x = 1.272019650\, I\}$ $\{y = -1.618033988,\quad x = -1.272019650\, I\}$

В останньому прикладі після перетворення отриманого розв’язку до виду десяткового дробу, виявилось, що система має два дійсних корені (їх видно на графіку) і два комплексних.

1.3.2.11 Розвязок рівнянь чисельним методом. Якщо за якихось причин за допомогою функції **solve** не вдалося знайти розв’язок, то можна використати функцію **fsolve** для знаходження розв’язків чисельним методом. Виконайте дії, зазначені в табл. 1.44.

Дано рівняння $\cos(x) - \frac{x+2}{x-2} = 0$. Попередньо для з'ясування кількості коренів побудовано графіки функцій $y = \cos(x)$ та $y = \frac{x+2}{x-2}$ (табл. 1.44). На графіку гіпербола $y = \frac{x+2}{x-2}$ має вертикальну $x = 2$ та горизонтальну $y = 1$ асимптоти. Таким чином, запропоноване для розв’язку рівняння має нескінченну кількість коренів у діапазоні від нуля до –∞. Розв’яжемо рівняння за допомогою функції **fsolve.** Знайдено найближчий до нуля корінь. Для того, щоб знайти наступний корінь функції **fsolve** слід вказати інтервал для пошуку, при цьому вкрай бажано щоб на цьому інтервалі був тільки один корінь, таким чином, знайдемо інший корінь.

Таблиця 1.44 – Розв’язання рівняння чисельним методом

Оператор	Отриманий результат
> **plot({cos(x),(x+2)/(x-2)}, x=-6*Pi..4*Pi, y=-2..2,color=[red, blue]);**	
> **fsolve(cos(x)-(x+2)/(x-2),x);**	-1.662944360
> **fsolve(cos(x)-(x+2)/(x-2),x=-6..-4);**	-5.170382990

1.3.2.12 У тих випадках, коли наукову або технічну проблему можна сформулювати математично, найбільш імовірно, що задача зведеться до одного або декількох диференціальних рівнянь. Це завжди має місце для широкого класу проблем, пов'язаних із силами та рухом.

Виконайте дії, зазначені у табл. 1.45.

Таблиця 1.45 – Використання оператора **unapply** (заміна) у функціях

Оператор	Отриманий результат
`> p := x^2+sin(x)+1;`	$p \coloneqq x^2 + \sin(x) + 1$
`> f := unapply(p,x);`	$f \coloneqq x \to x^2 + \sin(x) + 1$
`> f(Pi/12);`	$\frac{\pi^2}{144} + sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + 1$

1.3.2.13 Розв'язок диференціальних рівнянь

У біології, гідро- і аеродинаміці, теплотехніці, радіотехніці і багатьох інших областях науки і техніки велика кількість задач зводиться до диференціальних рівнянь. Однак, незважаючи на великі зусилля, що більше двох сторіч долають багато математиків світу, кількість типів диференціальних рівнянь, що мають аналітичний розв'язок, залишається дуже обмеженою.

Сьогодні існує ряд проблем, які описуються диференціальними рівняннями, але розв'язок яких ще не знайдено. Усе це призвело до того, що поряд з аналітичними і наближеними методами почали широко застосовуватися чисельні методи розв'язку диференціальних рівнянь, роль яких особливо зросла з використанням ЕОМ.

Maple має засоби для аналітичного, наближеного і чисельного розв'язку як звичайних диференціальних рівнянь (*ordinary differential equations – ODEs*), так і диференціальних рівнянь у частинних похідних (*partial differential equations – PDEs*), а також їхніх систем.

Для розв'язку звичайних диференціальних рівнянь використовується функція: **dsolve**(*ODE*, *y*(*x*), [параметри]), де *ODE* – звичайне диференціальне рівняння; *y*(*x*) – шукана функція.

Функція **dsolve** дозволяє знайти розв'язок багатьох диференціальних рівнянь. Зазвичай **dsolve** намагається знайти точний (аналітичний) розв'язок. Однак, якщо точний розв'язок не може бути отримано, то можна спробувати знайти наближений розв'язок за допомогою розвинення в ряд (параметр *type = series*) або чисельним методом (параметр *type = numeric*).

У табл. 1.46 різними способами подано загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}(y(x)) + 3x \cdot y(x) = \exp(-2x^3).$$

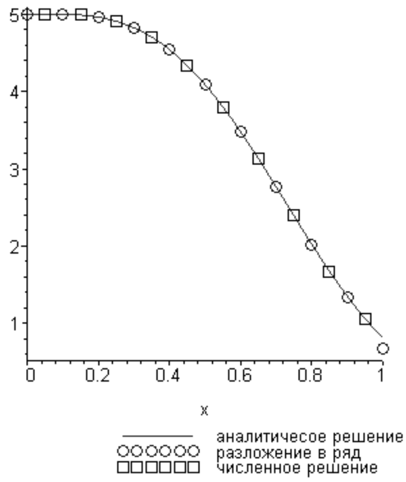
Виконайте операції, зазначені у табл. 1.46

Таблиця 1.46 – Розв’язання диференціального рівняння різними способами

Оператор	Отриманий результат і коментар
`>ode:=diff(y(x),x)/(2*x) +3*x*y(x)=exp(-2*x^3);`	$ODE := \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dx}y(x)}{x} + 3xy = e^{(-2x^3)}$ Коментар: Запис рівняння
`> dsolve(ode);`	$y(x) = (x^2 + \_C1)e^{(-2x^3)}$ Коментар: Загальний розв’язок диференціального рівняння. Диферен-ціальне рівняння містило тільки одну функцію – y (x), щодо якої можливий розв’язок, тому у функції **dsolve** другий параметр може бути опущений.
`> R1:=dsolve({ode, y(0)=5});`	$R1 := y(x) = (x^2 + 5)e^{(-2x^3)}$ Коментар: Знайдено частковий розв’язок за умови, що y (0) = 5.

Продовження табл. 1.46

Оператор	Отриманий результат і коментар
`> Order:=16: R2:=dsolve({ode, y(0)=5},y(x), series);`	$R2 := y(x) =$ $= 5 + x^2 - 10x^3 - 2x^5 + 10x^6 + 2x^8 - \frac{20}{3}x^9 -$ $-\frac{4}{3}x^{11} + \frac{10}{3}x^{12} + \frac{2}{3}x^{14} - \frac{4}{3}x^{15} + O(x^{16})$ Коментар: Розв’язок отримано за допомогою рядів. Попередньо установлено максимальну степінь ряду – 16, (зазвичай це значення дорівнює 6).
`> R3:=dsolve({ode, y(0)=5},numeric);`	$R3 := proc(x\_rkf45) \ldots end\ proc$ Коментар: Розв’язок отримано чисельним методом. Зазвичай викорис-товується метод Рунге-Кутта четвертого-п'ятого порядку. При чисельному розв’язку функція **dsolve** створює процедуру. З викликом процедури, підставляючи як параметр значення аргументу, виводиться список, що

	складається з аргументу і відповідного значення функції. Використовуючи отриманий у вигляді процедури розв’язок, організовано список із координат точок у діапазоні x від 0 до 1.
`> R3(0.12);` `> R3p:= [seq([i/25+0.02,op(2, op(2,R3(i/25+0.02)))], i=0..25)]:`	$x = 0.12,$ $y(x) = 4.99709897276009496$ 

Продовження табл. 1.46

Оператор	Отриманий результат і коментар
`> plot ([rhs(R1), R2, R3p], x=0..1, style= [line,point,point], color= [red,blue, black],symbol= [box, circle], symbolsize= [17,17],legend=["аналітичний розв’язок", "розвинення в ряд", "чисельний розв’язок "]);` `> plots [odeplot] (R3,0..1);`	Коментар: На одній координатній площині поєднано аналітичне, чисельне рішення та розв’язок за допомогою рядів. У прикладі використано такі параметри функції **plot:** – *symbolsize* – розмір точок (зазвичай – 10); – *legend* – напис під рисунком (легенда). – *symbol* – спосіб відображення точок.

1.3.2.14 Розв'язок систем диференціальних рівнянь

При розв'язку систем диференціальних рівнянь першим параметром функції **dsolve** має бути множина або список диференціальних рівнянь, які входять у систему, а у випадку знаходження часткового розв'язку туди також мають входити і додаткові умови. У табл. 1.47 різними способами подано розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t) - x(t), \quad \frac{dy(t)}{dt} = -x(t) - 3y(t),$$

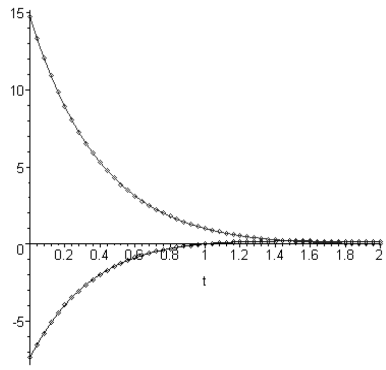
які задовольняють умову $x(1) = 0, y(1) = 1$.

Виконайте дії, зазначені у табл.1.47.

При розв'язку диференціальних рівнянь вище першого порядку буває необхідно задати не тільки значення функції в будь-якій точці, але й значення її похідних. Для цього використовується диференціальний оператор – **D**. Якщо, наприклад, значення похідної функції *y*(*t*), у точці *t* = 0 дорівнює 5, то необхідно записати – **D**(*y*)(0) = 5. Те саме для другої похідної – **D**(**D**(*y*))(0) = 5 або (**D**@@2)(*y*)(0) = 5, для третьої – **D**(**D**(**D**(*y*)))(0) = 5 або (**D**@@3)(*y*)(0) = 5 і т.д. Таким чином, похідну *n-го* порядку можна записати як (**D**@@n)(*y*)(0).

Таблиця 1.47 – Розв'язання системи диференціальних рівнянь різними способами

Оператор	Отриманий результат
`> SYS:= {diff(x(t),t)=y(t)-x(t),diff(y(t),t)=-x(t)-3*y(t), x(1)=0,y(1)=1};`	$SYS := \left\{ \begin{array}{c} y(1) = 1,\ x(1) = 0, \\ \frac{d}{dt}y(t) = -x(t) - 3y(t), \\ \frac{d}{dt}x(t) = y(t) - x(t) \end{array} \right\}$ Коментар: Запис системи
`> R1:= dsolve(SYS, {x(t),y(t)});`	$R1 := \left\{ \begin{array}{c} y(t) = -e^{(-2t)}(-2e^2 + e^2 t) \\ x(t) = e^{(-2t)}(-e^2 + e^2 t) \end{array} \right\}$ Коментар: Аналітичний розв'язок
`> R2:= dsolve(SYS,{x(t), y(t)},numeric);`	$R2 := proc(x\_rkf45) \ldots end\ proc$ Коментар: Чисельний розв'язок

> **A:=plot([rhs(R1[1]), rhs(R1[2])], t=0..2, color=[blue,red]):**	
> **B:=plots[odeplot](R2,[[t,x(t),color=blue, style=point], [t,y(t),color=red,style=point]],0..2):**	Коментар: Виведення графіків на екран. Суцільними лініями показано аналітичний розв’язок системи диференціальних рівнянь, а крапками – чисельний.
> **plots[display](A,B);**	

Приклад розв’язку диференціального рівняння

$$y'''(t) + 2y'(t) + 12y(t) = 0$$

при додаткових умовах $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$ подано у табл. 1.48.

Виконайте дії, зазначені у табл. 1.48.

1.3.2.15 Розв’язок диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Для розв’язку диференціальних рівнянь у частинних похідних використовується функція: **pdsolve**(*PDE*, *u*(*x*, *y*), [параметри]), де *PDE* – диференціальне рівняння у частинних похідних; *u*(*x*, *y*) – шукана функція декількох змінних.

Таблиця 1.48 – Розв’язання диференціального рівняння з додатковими умовами

Оператор	Отриманий результат
> **de:=diff(y(t),t$3)+2*diff(y(t),t)+12*y(t)=0;**	$de := \left(\frac{d^3}{dt^3}y(t)\right) + 2\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + 12y(t) = 0$
> **init:=y(0)=4,D(y)(0)=0,(D@@2)(y)(0)=0;**	$init := y(0) = 4$ $D(y)(0) = 0$ $(D^{(2)})(y)(0) = 0$

`> dsolve({de,init});`	$y(t) = \frac{12}{7} e^{(-2t)} + \frac{8}{35}\sqrt{5} e^{t} \sin(\sqrt{5}\, t) + \frac{16}{7} e^{t} \cos(\sqrt{5}\, t)$

Необов'язкові параметри виконують приблизно таку ж роль, що й у функції **dsolve.** Для розв’язку системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, як перші два параметри слід використовувати множини або списки з рівняннями і шуканими функціями.

Типовою особливістю диференціальних рівнянь у частинних похідних і їхніх системах є те, що для однозначного визначення частинного розв’язку потрібно задавати не значення того або іншого скінченого числа параметрів, а деякі функції.

Приклади розвязку диференцільних рівнянь у частинних похідних буде подано у наступних лабораторних роботах.

1.4 Зміст звіту

Звіт має містити:

– назву роботи;

– мету роботи;

– лістинги виконаних завдань до 3 сторінок з найважлівішими (на думку автора) функціями, які використовує дисципліна «Методи математичної фізики в біології та медицині»;

– висновки.

1.5 Контрольні запитання

1. Як виконуються прості обчислення за допомогою програмного засобу Maple?
2. З якими типами даних працює система Maple?
3. Як у системі Maple записати формулу та розв’язати рівняння?
4. Як задаються інтеграли та диференціали?
5. У чому різниця між інертною та виконуваною формами запису?
6. Як працюють з графікою у системі Maple?
7. Як побудувати два графіки у одній площині?
8. Як розв’язують звичайні та диференціальні рівняння у системі Maple?

ТЕМА 2. КЛАСИФІКАЦІЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Будь-яке квазілінійне диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку з двома незалежними змінними, щодо шуканої функції $u(x, y)$, може бути зведене до однієї з канонічних форм, розв'язок яких достатньо повно вивчено, принаймні, у межах класичних методів математичної фізики [1]. Це наприклад, рівняння виду:

$$A_{11}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + A_{12}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + A_{21}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + A_{22}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} +$$
$$+B_1(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + B_2(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0. \qquad (2.1)$$

де $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$ – функції двох змінних (в окремому випадку постійні коефіцієнти), що мають безперервні похідні до другого порядку включно.

Рівнянню (2.1) відповідає алгебраїчна квадратична форма:

$$g = A_{11}X^2 + (A_{12} + A_{21})XY + A_{22}Y^2 =$$

$$= \frac{1}{A_{11}}[(A_{11}X + A_{12}Y)^2 + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})Y^2], A_{11} \neq 0, \qquad (2.2)$$

де X, Y – деякі змінні;
детермінант якої дорівнює:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21},$$

зазвичай $A_{12} = A_{21}$, тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - {A_{12}}^2.$$

Квадратична форма (2.2) вважається визначеною, якщо вона зберігає знак при будь-яких змінах X, Y і невизначеною, якщо її знак змінюється.

Знак квадратичної форми залежить від знака **детермінанта.** У загальному випадку, якщо квадратична форма знак змінює, то початкове рівняння належить до гіперболічного типу ($\Delta < 0$), якщо квадратична форма визначена, то рівняння може належати або до параболічного ($\Delta = 0$) типу, або до еліптичного ($\Delta > 0$).

Одним із способів розв'язку диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних є зведення початкового рівняння до однієї з канонічних форм, розв'язок яких відомий. Зведення до однієї з канонічних форм досягається за допомогою спеціальної заміни змінних $\xi = \varphi(x, y)$ і $\eta = \psi(x, y)$, що взаємно однозначно відображує точки (x, y) в точки (ξ, η) у відповідних областях, причому якобіан цього перетворення:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0,$$

тоді рівняння (2.1) у змінних (x, y) можна звести до нового лінійного диференціального рівняння другого порядку в частинних похідних з невідомою функцією $U(\xi, \eta)$ і незалежними змінними ξ і η, тобто виконати лінійне перетворення $u(x, y) \to U(\xi, \eta)$:

$$\overline{A_{11}}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} + 2\overline{A_{12}}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{A_{22}}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial \eta^2} + \bar{B}\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = 0, \tag{2.3}$$

де $\overline{A_{11}} = A_{11}(\frac{\partial\xi}{\partial x})^2 + 2A_{12}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + A_{22}(\frac{\partial\xi}{\partial y})^2$; (2.4)

$$\overline{A_{12}} = A_{11}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + A_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + A_{22}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}, \tag{2.5}$$

$$\overline{A_{22}} = A_{11}(\frac{\partial\eta}{\partial x})^2 + 2A_{12}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + A_{22}(\frac{\partial\eta}{\partial y})^2, \tag{2.6}$$

а функція $\bar{B}$ лінійна відносно $U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}$.

Якщо визначити значення змінних, при яких вирази (2.4) – (2.6) обертаються в нуль, то рівняння (2.3), а відповідно і (2.1), стають істотно простішими. З цією метою розглянемо рівняння, аналогічне виразу (2.4) або (2.6), але зі змінною z:

$$A_{11}(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + 2A_{12}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + A_{22}(\frac{\partial z}{\partial y})^2 = 0. \qquad (2.7)$$

Для розв'язку рівняння (2.7) складаємо допоміжне характеристичне рівняння (нелінійне рівняння у повних диференціалах)

$$A_{11}(dy)^2 - 2A_{12}dxdy + A_{22}(dx)^2 \qquad (2.8)$$

Рівняння (2.8) відносно $\frac{dy}{dx}$ може бути подано системою двох рівнянь:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A_{12}+\sqrt{A_{12}{}^2-A_{11}A_{22}}}{A_{11}}; \qquad (2.9)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A_{12}-\sqrt{A_{12}{}^2-A_{11}A_{22}}}{A_{11}}. \qquad (2.10)$$

Інтегруючи рівняння (2.9) і (2.10) отримуємо їхні загальні розв'язки відповідно: $\varphi(x, y) = const$, $\psi(x, y) = const$. Ці інтеграли є також розв'язками рівняння (2.7) і називаються характеристиками цього рівняння.

Тепер, якщо у рівнянні (2.7) замість довільної змінної z зробити заміну змінних $\xi = \varphi(x, y)$ і $\eta = \psi(x, y)$, то рівняння (2.7) прийме вид виразу (2.4) або (2.6), тобто щодо змінних ξ і η значення $\overline{A_{11}}$ і $\overline{A_{22}}$ обертаються в нуль. Тим самим рівняння (2.3) набуває вигляду:

$$2\overline{A_{12}}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 U(\xi, \eta)}{\partial\xi\partial\eta} + \bar{B}\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial\xi}, \frac{\partial U}{\partial\eta}\right) = 0$$

або $$\frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} = \tilde{B}\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial\xi}, \frac{\partial U}{\partial\eta}\right). \qquad (2.11)$$

Рівняння (2.11) є *першою канонічною формою рівняння гіперболічного типу.* Якщо виконати ще одну заміну змінних виду:

$$\xi = t + \tau,$$
$$\eta = t - \tau,$$

де t та τ – нові змінні;
то прийдемо до *другої канонічної форми рівняння гіперболічного типу*:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \breve{B}, \quad (2.12)$$

де $\breve{B} = 4\tilde{B}$.

У випадку, коли детермінант квадратичної форми дорівнює нулю, вирази (2.9) і (2.10) – співпадають, тоді це – рівняння параболічного типу. У цьому випадку маємо одне сімейство характеристик $\varphi(x, y) = const$. Приймемо, що $\xi = \varphi(x, y)$ і $\eta = \psi(x, y)$. Хай $\psi(x, y)$ – будь-яка функція, незалежна від функції $\varphi(x, y)$, але така щоб її можна було диференціювати потрібну кількість раз. Зазвичай вибирають $\psi(x, y) = x$ або $\psi(x, y) = y$ за умови не рівності нулю якобіана перетворення $J \neq 0$. При обраній заміні змінних, коефіцієнти $\overline{A_{11}}$ і $\overline{A_{12}}$ обертаються в нуль. Тоді рівняння (2.3) перетворюється до виду:

$$\overline{A_{22}}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial \eta^2} + \bar{B}\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}\right),$$

або
$$\frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial \eta^2} = \tilde{B}\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}\right), \quad (2.13)$$

який називається *канонічною формою рівняння параболічного типу.*

У випадку $\Delta > 0$ праві частини (2.9) і (2.10) – комплексно спряжені. Якщо $\varphi(x, y)$ – комплексний розв'язок (2.9), тоді $\varphi^*(x, y) = const$ – розв'язок рівняння (2.10), де $\varphi^*(x, y)$ – функція, комплексно спряжена з $\varphi(x, y)$ Якщо тепер перейти до комплексним змінних $\xi = \varphi(x, y)$ і $\eta = \varphi^*(x, y)$, то рівняння (2.1) зведеться до виду:

$$\frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}\right),$$

тобто його вигляд точно такий самий, як і в гіперболічного рівняння (2.11). Щоб залишитися в даній області, зробимо ще одну заміну змінних:

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2I}, \quad (2.14)$$

де $I^2 = -1$.

З такою заміною змінних маємо $\overline{A_{11}} = \overline{A_{22}}$, $\overline{A_{12}} = 0$. Таким чином, початкове рівняння (2.1) зводиться до виду:

$$\frac{\partial^2 u(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u(\alpha,\beta)}{\partial \beta^2} = \Theta(\alpha,\beta,u,\frac{\partial u}{\partial \alpha},\frac{\partial u}{\partial \beta}), \qquad (2.15)$$

який називається *канонічною формою рівняння еліптичного типу.*

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2
ЗВЕДЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ІЗ ДВОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

2.1 Мета роботи

За допомогою універсального математичного пакета Maple звести задане диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку до канонічного вигляду.

2.2 Підготовка до виконання лабораторної роботи

При підготовці до виконання лабораторної роботи потрібно ознайомитися з методичними вказівками щодо виконання даної лабораторної роботи, повторити лекційний матеріал за даною темою, виконати задані завдання за практичними заняттями за даною темою, виконати і захистити попередню лабораторну роботу «Вивчення універсального математичного пакета Maple».

При виконанні лабораторної роботи слід використати систему аналітичних обчислень універсального математичного пакета Maple.

Зведення диференціального рівняння другого порядку в частинних похідних до канонічного вигляду можна здійснити за допомогою математичного пакета Maple, створивши спеціальний програмний засіб, наприклад, за таким алгоритмом:

– за допомогою спеціалізованого пакета Maple – **with(LinearAlgebra)**: [пакет лінійної алгебри] – задати коефіцієнти досліджуваного рівняння у вигляді елементів матриці-рядка;

– сформувати саме диференціальне рівняння і виділити його ліву частину, використовуючи оператори **diff(*)** і **lhs(*)**;

– визначити матрицю старших коефіцієнтів, тобто коефіцієнтів при старших похідних, використовуючи оператори **linalg[matrix](2,2,[coeff(*)])**;

– обчислити детермінант матриці старших коефіцієнтів за допомогою оператора **simplify(linalg[det](*))**;

– за значенням детермінанта слід встановити тип диференціального рівняння, що очікується;

– сформувати характеристичне рівняння і розв’язати його за допомогою оператора **solve(*)**;

– віднайти характеристики диференціального рівняння;

– за знайденими характеристиками виконати заміну змінних у залежності від типу диференціального рівняння;

– за допомогою спеціалізованого пакета **PDEtools[dchange](*)=0;** звести задане диференціальне рівняння до канонічного вигляду;

– результати роботи зберегти на носії інформації за допомогою стандартних процедур **save, save as** тощо.

2.3 Порядок виконання роботи

Є різні диференціальні рівняння другого порядку в частинних похідних, наприклад (2.16) – (2.18):

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + 10\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - 3\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0, \qquad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\sin(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - (\cos(x))^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \cos(x)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0,$$
$$x > 0, y > 0, \qquad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0,\ x > 0, y > 0. \qquad (2.18)$$

У табл. 2.1 – 2.3 подано приклади створення трьох програмних засобів для зведення рівнянь (2.16 – 2.18) до однієї з канонічних форм запису.

2.3.1 Виконайте операції, зазначені у таблицях 2.1 – 2.3. При виконанні дій після введення кожного операнда потрібно скористайтеся клавішею «Enter».

2.3.2 Проаналізуйте задане за варіантом рівняння, виберіть спосіб зведення його до канонічного вигляду, використовуючи приклади, подані в табл.2.1 – 2.3 та методику викладену у п. 2.2.

2.3.3 Зведіть задане рівняння до канонічного вигляду (встановіть тип до якого воно відноситься, підтвердіть це канонічною формою запису отриманого рівняння).

2.3.4 Продемонструйте отриманий вираз викладачеві.

2.3.5 Збережіть створений програмний засіб на носій інформації або занотуйте.

Таблиця 2.1 – Програма для зведення до канонічного виду рівняння (2.16)

Операнд	Отриманий результат	Коментар
> **restart;with (LinearAlgebra): a:=1,-6,10,1,-3;**	$a := 1, -6, 10, 1, -3$	Задаємо коефіцієнти рівняння
>**equ:=a[1]*diff (u(x,y),x,x)+ a[2]*diff (u(x,y),x,y)+ a[3]*diff (u(x,y),y,y)+ a[4]*diff (u(x,y),x)+ a[5]*diff (u(x,y),y)=0;**	$equ := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)\right) - -6\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u(x,y)\right) + +10\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\right) + +\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)\right) - 3\left(\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right) = = 0$	Формуємо досліджуване рівняння
> **eq:=lhs(equ);**	$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)\right) - -6\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u(x,y)\right) + +10\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\right) + +\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)\right) - 3\left(\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right)$	Виділяємо ліву частину рівняння

Продовження табл. 2.1

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`>A:=linalg [matrix](2,2, [coeff(eq,diff (u(x,y),x,x)), coeff(eq,diff (u(x,y),x,y))/2, coeff(eq,diff (u(x,y),x,y))/2, coeff(eq,diff (u(x,y),y,y))]);`	$A := \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$	Формуємо матрицю старших коефіцієнтів і її дискримінант
`> Delta:= simplify (linalg[det] (A));`	$\Delta = 1$	Розраховуємо значення детермінанта. Оскільки детермінант більше нуля, то тип рівняння – еліптичний.
`>A[1,1]*z^2-2*A[1,2]*z+A[2,2]=0;`	$z^2 + 6z + 10 = 0$	Для випадку $A[1,1] \neq 0$ формуємо характеристичне рівняння відповідно до рівняння (2.8)
`> res1:=simplify ({solve(A[1,1]* z^2-2*A[1,2]*z+ A[2,2],z)});`	$res1 := \{-3 + I, -3 - I\}$	Розв’язуємо сформоване рівняння
`> res2:={seq (dsolve(diff (y(x),x)=res1[i], y(x)),i=1..2)};`	$res2 := = \begin{Bmatrix} y(x) = -(3 - I)x + \_C1, \\ y(x) = -(3 + I)x + \_C1 \end{Bmatrix}$	Створюємо рівняння характеристик
`> res2:=subs(y(x) =y,res2);`	$res2 := = \begin{Bmatrix} y = -(3 - I)x + \_C1, \\ y = -(3 + I)x + \_C1 \end{Bmatrix}$	В отриманому результаті проведемо функціональну заміну $y(x) \equiv y$. Отримали дві комплексні характеристики у вигляді послідовності.

Продовження табл. 2.1

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> {seq(solve(res2[i],_C1), i=1..nops(res2))};`	$\{y+3x-xI, y+3x+xI\}$	Визначимо два значення константи _C1 з системи рівнянь.
`> itr:=simplify({xi=coeff(%[1],I),eta=%[1]-coeff(%[1],I)*I});`	$itr \coloneqq \{\xi=-x, \eta=y+3x\}$	Здійснюємо заміну змінних відповідно до (2.14) та спрощуємо вираз.
`> tr:=solve(itr,{x,y});`	$it \coloneqq \{x=\xi, y=\eta-3\xi\}$	Встановлюємо зв’язок між новими і старими змінними (x,y)
`> if has(%,RootOf) then tr:=allvalues(%)[1]end if;` `> PDEtools[dchange](tr,eq,itr,[eta,xi],simplify)=0;`	$\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}u(\eta,\xi)\right)+ +\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}u(\eta,\xi)\right)+ +\left(\frac{\partial}{\partial\xi}u(\eta,\xi)\right)=0$	У загальному випадку попередній вираз може мати довільний вид. За допомогою операторів з пакета **PDEtools** зводимо початкове рівняння щодо змінної ξ і η до канонічної форми. Отримане рівняння є рівнянням еліптичного типу.

Таблиця 2.2 – Програма для зведення до канонічного вигляду рівняння (2.17)

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> restart;with(LinearAlgebra):assume(x>0,y>0);a:=1,-2*sin(x),-cos(x)^2,0,-cos(x);`	$a \coloneqq$ $=1,-2\sin(x\sim), -cos(x\sim)^2, 0, -\cos(x\sim)$	Формуємо матрицю-рядок початкового рівняння

Продовження табл. 2.2

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`>equu:=a[1]*diff(u(x,y),x,x)+a[2]*diff(u(x,y),x,y)+a[3]*diff(u(x,y),y,y)+a[4]*diff(u(x,y),x)+a[5]*diff(u(x,y),y)=0;`	$equ := \left(\frac{\partial^2}{\partial x\sim^2} u(x\sim, y\sim)\right) - 2\sin(x\sim)\left(\frac{\partial^2}{\partial x\sim \partial y\sim} u(x\sim, y\sim)\right) - cos(x\sim)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y\sim^2} u(x\sim, y\sim)\right) - \cos(x\sim)\left(\frac{\partial}{\partial y\sim} u(x\sim, y\sim)\right) = 0$	Задаємо саме рівняння
`> eq:=lhs(equ);`	$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial x\sim^2} u(x\sim, y\sim)\right) - 2\sin(x\sim)\left(\frac{\partial^2}{\partial x\sim \partial y\sim} u(x\sim, y\sim)\right) - cos(x\sim)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y\sim^2} u(x\sim, y\sim)\right) - \cos(x\sim)\left(\frac{\partial}{\partial y\sim} u(x\sim, y\sim)\right)$	Виділяємо ліву частину заданого рівняння
`>A:=linalg[matrix](2,2,[coeff(eq,diff(u(x,y),x,x)),coeff(eq,diff(u(x,y),x,y))/2,coeff(eq,diff(u(x,y),x,y))/2,coeff(eq,diff(u(x,y),y,y))]);`	$A := \begin{bmatrix} 1 & -sin(x\sim) \\ -sin(x\sim) & -cos(x\sim)^2 \end{bmatrix}$	Обчислюємо матрицю старших коефіцієнтів
`> Delta:=simplify(linalg[det](A));`	$\Delta := -1$	Детермінант менше нуля, тип рівняння – гіперболічний.
`> A[1,1]*z^2-2*A[1,2]*z+A[2,2]=0;`	$z^2 + 2\,sin(x\sim)\,z - cos(x\sim)^2 = 0$	Характеристичне рівняння при $A[1,1] \neq 0$.

Продовження табл. 2.2

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> **`res1:=solve(A[1,1]*z^2-2*A[1,2]*z+A[2,2],z);`**	$res1 \coloneqq -\sin(x\sim)+1,$ $-\sin(x\sim)-1$	Отримали дві дійсні різні характеристики.
> **`res2:={seq(dsolve(diff(y(x),x)= res1[i],y(x)),i=1..2)};`**	$res2 \coloneqq = \begin{cases} y(x) = \cos(x\sim) - x\sim + \_C1 \\ y(x) = \cos(x\sim) + x\sim + \_C1 \end{cases}$	Формуємо і розв'язуємо систему рівнянь
> **`res2:=subs(y(x)=y,res2);`**	$res2 \coloneqq = \left\{ \begin{matrix} y = \cos(x\sim) - x\sim + \_C1 \\ y = \cos(x\sim) + x\sim + \_C1 \end{matrix} \right\}$	Проводимо функціональну заміну $y(x) \equiv y$.
> **`{seq(solve(res2[i],_C1),i=1..nops(res2))};`**	$\left\{ \begin{matrix} y - \cos(x\sim) - x\sim, \\ y - \cos(x\sim) + x\sim \end{matrix} \right\}$	Визначаємо два значення константи _C1.
>**`itr:={xi=(%[1]+%[2])/2,eta=(%[1]-%[2])/2};`**	$itr \coloneqq \left\{ \begin{matrix} \eta = x\sim \\ \xi = y - \cos\,(x\sim) \end{matrix} \right\}$	Вводимо нову заміну змінних у виді напівсуми і напіврізниці вище знайдених характеристик
>**`tr:=solve(itr,{x,y});`** > **`if has(%,RootOf) then tr:=allvalues(%)[1] end if;`**	$tr \coloneqq \left\{ \begin{matrix} x = \eta \\ y = \xi + \cos\,(\eta) \end{matrix} \right\}$	Встановлюємо зв'язок між новими і старими змінними (x, y)
> **`PDEtools[dchange](tr,eq,itr,[eta,xi],simplify)=0;`**	$-\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(\eta,\xi)\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u(\eta,\xi)\right) = 0$	Зводимо задане рівняння до канонічного вигляду. Отримане рівняння має вигляд рівняння гіперболічного типу другої канонічної форми

Таблиця 2.3 – Програма для зведення до канонічного вигляду рівняння (2.18)

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> restart;with (LinearAlgebra): assume(x>0,y>0); > a:=1,-2*x,x^2,0,-2;`	$a := 1, -2x, x^2, 0, -2$	Формуємо матрицю-рядок коефіцієнтів заданого рівняння
`>equ:=a[1]*diff (u(x,y),x,x)+a[2] *diff(u(x,y),x,y) +a[3]*diff(u(x,y), y,y)+a[4]*diff (u(x,y),x)+a[5]* diff(u(x,y),y)=0;`	$equ := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)\right) - 2x\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u(x,y)\right) + x^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\right) - 2\left(\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right) = 0$	Задаємо саме рівняння
`> eq:=lhs(equ);`	$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)\right) - 2x\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u(x,y)\right) + x^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\right) - 2\left(\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right)$	Визначимо його ліву частину
`>A:=linalg[matrix] (2,2,[coeff(eq, diff (u(x,y),x,x)), coeff(eq,diff(u(x,y), x,y))/2,coeff (eq,diff(u(x,y), x,y))/2, coeff(eq, diff(u(x,y),y,y))]);`	$A := \begin{bmatrix} 1 & -x \\ -x & x^2 \end{bmatrix}$	Визначаємо детермінант матриці старших коефіцієнтів.

Продовження табл. 2.3

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> `Delta:=simplify (linalg[det](A));`	$\Delta := 0$	Розраховуємо детермінант матриці. Оскільки він дорівнює нулю, то рівняння відноситься до параболічного типу.
> `A[1,1]*z^2-2* A[1,2]*z+A[2,2]=0;`	$z^2 + 2xz + x^2 = 0$	Записуємо характеристичне рівняння.
> `res1:=solve (A[1,1]*z^2-2* A[1,2]*z+A[2,2], z);`	$res1 := -x, \quad -x$	Знаходимо його дві дійсні однакові характеристики
> `subs(y=y(x), res1[1]);`	$-x$	Вказуємо на цю характеристику
> `res2:=dsolve (diff(y(x),x)=%, y(x));`	$res2 := y(x) = -\frac{x^2}{2} + \_C1$	Розв'язуємо рівняння
> `res2:=subs(y(x)= y,res2);`	$res2 := y = -\frac{x^2}{2} + \_C1$	В отриманому розв'язку проводимо функціональну заміну $y(x) \equiv y$.
> `itr:={xi=solve (res2,_C1),eta=x};`	$itr := \left\{\eta = x,\ \xi = y + \frac{x^2}{2}\right\}$	Заміну змінних проводимо так, щоб якобіан перетворення не дорівнював би нулеві, наприклад, виберемо $\eta = x$. Перевіряємо, що $J \neq 0$.

Продовження табл. 2.3

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> tr:=solve(itr, {x,y});` `> if has(%,RootOf) then tr:=allvalues (%)[1] end if;`	$tr := \left\{x = \eta, y = \xi - \frac{\eta^2}{2}\right\}$	Встановлюємо зв'язок між новими і старими змінними (x, y)
`> PDEtools [dchange](tr,eq, itr, [eta,xi], simplify)=0;`	$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u(\eta, \xi)\right) - \left(\frac{\partial}{\partial \xi} u(\eta, \xi)\right) = 0$	Отримано рівняння параболічного типу

2.4 Зміст звіту

Звіт має містити:

– назву роботи;

– мету роботи;

– дані варіанта (рівняння) за вказівкою викладача;

– програму зведення заданого рівняння до канонічного вигляду та результат виконання програми (вид отриманого рівняння);

– висновки

Таблиця 2.4 – Варіанти завдань

Варі-ант	Рівняння другого порядку в частинних похідних. В області, де зберігається тип рівняння, звести його до канонічного вигляду.
1	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\sin(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + sin^2(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - ctg(x)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0, x > 0$
2	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\sin(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + (2 - cos^2(x))\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, x > 0$
3	$3\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + 3\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$
4	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + 2\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$
5	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - 5\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$

Продовження табл. 2.4

Варі-ант	Рівняння другого порядку в частинних похідних. В області, де зберігається тип рівняння, звести його до канонічного вигляду.
6	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\exp(x/2)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$
7	$ctg^2(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2ctg(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} +$ $+cosec^2\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0, x > 0$
8	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$
9	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + 5\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$
10	$x^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$
11	$2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + 4\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + 4\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$
12	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$
13	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$
14	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$
15	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$
16	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\cos(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - \left(3 + sin^2(x)\right)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} -$ $-y\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$
17	$9\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - 3\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$

Продовження табл. 2.4

Варі-ант	Рівняння другого порядку в частинних похідних. В області, де зберігається тип рівняння, звести його до канонічного вигляду.
18	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-y\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0$
19	$x^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}-2x\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$
20	$2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0$
21	$3\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+2\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+3\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0$
22	$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}-x\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0,\ \ x>0$
23	$4\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}-2\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0$

2.5 Контрольні запитання та завдання

1. Які є канонічні форми рівнянь математичної фізики?
2. Як за значенням детермінанта класифікуються рівняння математичної фізики?
3. Яка методика зведення рівнянь до канонічного вигляду?
4. Записати канонічні форми рівняння гіперболічного типу.
5. Записати канонічну форму рівняння параболічного типу.
6. Записати канонічну форму рівняння еліптичного типу.
7. До якого типу належить рівняння, якщо його детермінант більше нуля?
8. До якого типу належить рівняння, якщо його детермінант менше нуля?

ТЕМА 3. РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ У НЕОБМЕЖЕНИХ І НАПІВОБМЕЖЕНИХ ОДНОВИМІРНИХ ПРОСТОРАХ

Задачі механіки (поперечні коливальні рухи струн, подовжні коливання стрижнів, поперечні коливання мембран, коливання тривимірних структур), задачі фізики (електромагнітні коливання в антенах, рупорах, різних випромінювачах, поширення хвиль в електричних хвилеводах), задачі біофізики (поширення потенціалу дії, передача сигналів по нейронах тощо) описуються рівняннями виду:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \nabla * \big(p(x) * \nabla u(x,t)\big) - q(x) * u(x,t) + F(x,t), \qquad (3.1)$$

де $u(x,t)$ – невідома функція, що залежить від n просторових координат (зазвичай $n = 1{,}2{,}3$, тобто $x \equiv x_1, x_2, x_3$) і часу t;

$\rho(x), p(x), q(x)$ – коефіцієнти, які визначають властивості середовища, де відбувається коливальний процес;

$F(x,t)$ – вільний член, що виражає інтенсивність зовнішнього впливу;

$\nabla \equiv \vec{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial x_3}$ – оператор Гамільтона (символічний вектор набла);

$\nabla * \big(p(x) * \nabla u(x,t)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(p(x)\frac{\partial u(x_i,t)}{\partial x_i}\Big)$ – оператор дії.

Розв'язків рівняння (3.1) є безліч. Для того щоб повністю описати хвильовий процес, необхідно, крім самого рівняння (3.1), задати початковий стан коливального процесу (*початкові умови*) і умови на межі області, у якій відбувається коливальний процес (*граничні умови*). Їх ще називають *крайовими умовами – початкові і граничні умови.* Відповідні задачі називають *крайовими задачами*. Розрізнюють такі типи крайових задач для хвильового рівняння:

Задача Коші: задаються початкові умови, область дослідження процесу (область зміни аргументів задачі) звичайно є R^n (n – вимірний дійсний простір) із межею S; граничні умови відсутні.

Так для рівняння (3.1) в одновимірному просторі задача Коші ставиться у такий спосіб: знайти функцію $u(x,t) \in C^{(2)}(t > 0) \cap C^{(1)}(t \geq 0$, що задовольняє дане рівняння в напівпросторі $t > 0$ і початковим умовам при $t = +0$:

$$u(x,t\,)|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x). \qquad (3.2)$$

При цьому необхідно, щоб виконувалися умови – $F(x,t) \in C(t > 0)$, $\varphi(x) \in C^{(1)}(R^1)$, $\psi(x) \in C(R^1)$ – безперервності і диференціюванню зовнішніх дій і початкових умов.

Мішана задача – задаються як початкові, так і граничні умови. Так для однорідної напівобмеженої струни, у якої, наприклад, лівий кінець закріплений, а правий вільний, із заданою:

– **початковою функцією** відхилення точок струни

$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x)$;

– **початковою швидкостю**

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x)$;

слід знайти розв'язок рівняння (3.1) в області

$B = \{(x,t), t \in (0,T), x \in (0,+\infty), T = const\}$,

якщо на **межі** поведінка розглянутого явища задається деякою функцією часу

$u(x,t)|_{t=0} = \mu(t)$ – *перша крайова задача*,

або $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = \upsilon(t)$ – *друга крайова задача*.

Розв'язок задачі Коші для рівняння поширення коливань у необмеженому одновимірному просторі записується формулою Даламбера. Цей розв'язок є єдиним і безперервно залежить від початкових умов:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi +$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau)d\xi, \qquad (3.3)$$

де $\varphi(x-at)$ – пряма хвиля (хвиля, яка біжить вправо);
$\varphi(x+at)$ – зворотна хвиля (хвиля, яка біжить вліво);

$\psi(x)$ – початкова функція швидкості зміни коливального процесу, лише в інтервалі $(x-at,\ x+at)$; значення $\psi(x)$ за межами цього інтервалу не має значення під час визначення розв'язку $u(x,t)$;

$F(x,t)$ – зовнішня дія, якщо $F(x,t)\equiv 0$, то такий хвильовий процес називають *вільними коливаннями*.

Одним з варіантів розв'язку першої крайової задачі в напівобмеженому просторі є метод аналітичних продовжень. У такому випадку розв'язок надається у вигляді модифікованих формул Даламбера:

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\\ +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{a+at}\psi(\xi)d\xi+\dfrac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(\xi,\tau)d\xi\\ \left(x>0,\quad t<\dfrac{x}{a}\right)\\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right)+\dfrac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\\ +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{a+at}\psi(\xi)d\xi+\dfrac{1}{2a}\int_0^{t-\frac{x}{a}}d\tau\int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi+\\ +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}dt\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(\xi,\tau)d\xi\\ \left(x>0,\quad t>\dfrac{x}{a}\right)\end{cases}\quad,\qquad(3.4)$$

де $\mu(t-\frac{x}{a})$ – задана гранична умова;

$\varphi(at-x)$ – відбита хвиля.

Таким чином, розв'язок надається у вигляді падаючої та відбитої від лівого кінця струни хвиль. Розв'язок може бути розривним.

Для другої крайової задачі розв'язок (3.1) надається у виді

$$
u(x,t)=\begin{cases}
\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{a+at}\psi(\xi)d\xi+\\
+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(\xi,\tau)d\xi, \qquad \left(x>0, t<\frac{x}{a}\right)\\
-a\int\limits_{0}^{t-\frac{x}{a}}v(z)dz+\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\\
+\frac{1}{2a}\left[\int\limits_{0}^{at-x}\psi(\xi)d\xi+\int\limits_{0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi\right]+\\
+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t-\frac{x}{a}}d\tau\int\limits_{0}^{a(t-\tau)-x}f(\xi,\tau)d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t-\frac{x}{a}}d\tau\int\limits_{0}^{x+a(t-\tau)}F(\xi,\tau)d\xi+\\
+\frac{1}{2a}\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t}d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(\xi,\tau)d\xi\\
\left(x>0, t>\frac{x}{a}\right)
\end{cases}, \quad (3.5)
$$

де $v(z)$ – задана гранична умова.

Цей розв'язок також може бути розривним. Тільки за умов погодженості початкових та граничних умов $\varphi(x)|_{x=0}=0$, $\psi(x)|_{x=0}=0$, $\mu(t)|_{t=0}=0$, $v(t)|_{t=0}=0$ можна очікувати безперервних розв'язків.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3

ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ В ОДНОВИМІРНИХ НЕОБМЕЖЕНИХ І НАПІВОБМЕЖЕНИХ ПРОСТОРАХ

3.1 Мета роботи

Навчитися розв'язувати однорідні і неоднорідні хвильові рівняння в необмеженому та напівобмеженому одновимірному просторі за допомогою універсального математичного пакета Maple.

3.2 Підготовка до виконання лабораторної роботи

При підготовці до виконання лабораторної роботи слід ознайомитися з методичними вказівками щодо виконання даної лабораторної роботи, повторити лекційний матеріал за даною темою, виконати вказані завдання по практичних заняттях за даною темою, виконати і захистити попередні лабораторні роботи.

Розв’язок однорідного або неоднорідного хвильового рівняння в необмеженому просторі (задача Коші) або відповідної (першої або другої) крайової задачі в напівобмеженому просторі можна здійснити за допомогою математичного пакета Maple, створивши програмний засіб, наприклад, за таким алгоритмом:

1. Записати хвильове рівняння із заданими початковими умовами (задача Коші) або граничною умовою для напівобмеженої задачі.

2. За допомогою операторів Maple розв’язати поставлену задачу і, якщо задано, виконати анімацію отриманого розв’язку.

3. Результати роботи зберегти на носії інформації за допомогою стандартних процедур **save, save as** і ін.

3.3 Порядок виконання роботи

3.3.1 Виконайте дії, наведені в табл. 3.1 – 3.5.

3.3.2 Скористайтесь наведеними прикладами програм (табл. 3.1 – 3.5) для розв’язку хвильових рівнянь у вигляді формул Даламбера або їхніх модифікацій, створіть програмний засіб для розв’язання поставленої задачі (за варіантом сигналу, зазначеним викладачем – табл. 3.6).

3.3.3 Виконайте анімацію отриманого розв’язку. Продемонструйте результат роботи програми викладачеві.

3.3.4 Збережіть розроблену програму на носії інформації.

Таблиця 3.1 – Програма для розв’язку рівняння про поширення вільних коливань в одновимірному необмеженому просторі (задача Коші), що описується рівнянням вигляду: $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0$ з початковими умовами $u(x,0) = \varphi(x,0)$ та $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\big|_{t=0} = \psi(x)$.

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> restart;` `> PDE:= diff(u(x,t), t,t)=a^2*diff (u(x,t),x,x);`	$PDE := \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right)$	Формування однорідного хвильового рівняння
`> pdsolve(PDE);`	$u(x,t) = \_F1(at+x) + \_F2(at-x)$	Розв’язання заданого рівняння
`> u(x,t):= U1(x-a*t)+ U2(x+a*t);`	$u(x,t) = U1(x-at) + U2(at+x)$	Оскільки розв’язок надано у вигляді аналітичних функцій, то необхідно ввести нову функцію
`> u_0(x):= subs(t=0,u(x,t))- phi(x)=0;`	$u\_0(x) := U1(x) + U2(x) - -\varphi(x) = 0$	Для отримання однозначного розв’язку рівняння врахуємо задані початкові умови $\varphi(x)$ і $\psi(x)$. З цією метою підставимо в останнє отримане рівняння $t = 0$, і запишемо початкові умови, як для шуканої функції, так і для її похідної за часом. Отримали систему рівнянь.
`> ut_0(x):=subs (t=0,diff (u(x,t),t))- psi(x)=0;`	$ut\_0(x) := -D(U1)(x)a + D(U2)(x)a - \psi(x) = 0$	

Продовження табл. 3.1

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> int(diff(-a*U1(xi),xi)+diff(a*U2(xi),xi)-psi(xi),xi=0..x);`	$\int_0^x \left(-a\left(\frac{d}{d\xi}U1(\xi)\right)+a\left(\frac{d}{d\xi}U2(\xi)\right)-\psi(\xi)d\xi\right)$	Інтегрування виразу
`> -a*(U1(x)-U2(x))+a*(U1(0)-U2(0))=int(psi(xi),xi=0..x);`	$-a\big(U1(x)-U2(x)\big)+a\big(U1(0)-U2(0)\big)=\int_0^x \psi(\xi)d\xi$	Оскільки тут подано інтегрування диференціала неявної функції, то можна записати розв'язок, використовуючи відому властивість інтегрування диференціала складної функції з точністю до деякої сталої.
`> -a*(U1(x)-U2(x))=int(psi(xi),xi=0..x)+a*C;`	$-a\big(U1(x)-U2(x)\big)=\int_0^x \psi(\xi)d\xi+aC$	
`> solve({U1(x)+U2(x)-phi(x)=0, -a*(U1(x)-U2(x))=int(psi(xi),xi = 0 .. x)+a*C}, {U1(x),U2(x)});`	$\left\{U1(x)=-\frac{1}{2}\frac{-a\varphi(x)+\int_0^x\psi(\xi)d\xi+aC}{a},\ U2(x)=\frac{1}{2}\frac{a\varphi(x)+\int_0^x\psi(\xi)d\xi+aC}{a}\right\}$	Тепер повернемося до системи рівнянь і розв'яжемо отриману систему звичайних рівнянь щодо функцій $U1(x)$ і $U2(x)$. Отримали два розв'язки системи рівнянь, що враховують початкові умови.

Продовження табл. 3.1

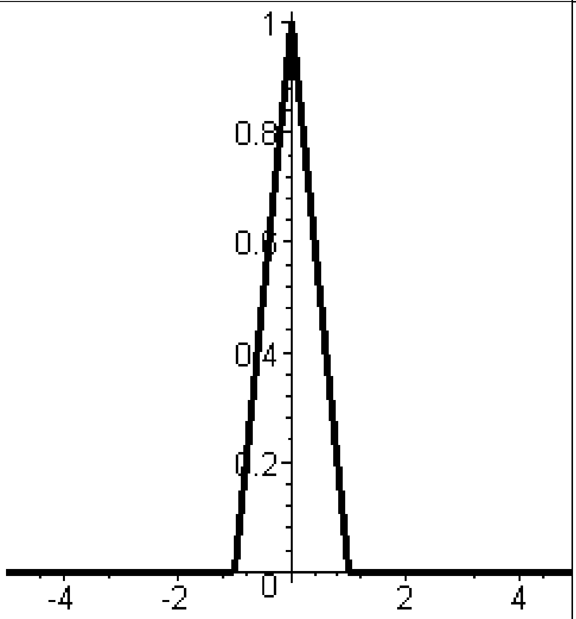
Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> u(x,t):= simplify(subs (x=x-a*t,U1(x))+ (subs(x=x+a*t, U2(x))));`	$u(x,t) \coloneqq U1(x-at)$ $+U2(at+x)$	При розв'язку хвильового рівняння у загальному вигляді отримали розв'язок, поданий сумою $U1$ і $U2$, при цьому аргумент $U1$ дорівнює $(x-a*t)$, аргумент $U2$ дорівнює $(x+a*t)$. Тому запишемо суму $U1$ й $U2$ і зробимо заміну змінних для суми $U1$ і $U2$
`> u(x,t):= collect(1/2* (a*phi(x-a*t)- int(psi(xi),xi = 0 .. x-a*t)+ a*phi(x+a*t)+ int(psi(xi), xi = 0 .. x+ a*t))/a, a);`	$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) + +\frac{1}{2}\varphi(at+x) + +\frac{\frac{1}{2}\int_0^{x-at}\psi(\xi)d\xi}{a} + +\frac{\frac{1}{2}\int_0^{at+x}\psi(\xi)d\xi}{a}$	Зведемо подібні члени
`> u(x,t):=1/2* phi(x-a*t)+ 1/2*phi(x+a*t) +1/2*int(psi (xi),xi = x- a*t .. x+a*t)/a;`	$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) + \frac{1}{2}\varphi(at+x) + \frac{1}{2}(\frac{1}{a}\int\limits_{x-at}^{at+x}\psi(\xi)d\xi)$	Запишемо отриманий розв'язок у стандартному виді (формула Даламбера)

Таблиця 3.2 – Запис форми сигналу шматково-безперервною функцією

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> `a:=1;` `L:=1;alpha:=1;`	$a := 1$ $L := 1$ $\alpha := 1$	Запис функції $\varphi(x)$ з параметрами: a – швидкість поширення хвильового процесу, L – половина основи заданого трикутного сигналу, α – амплітуда заданого сигналу

> `phi(x):=`
`x->piecewise`
`(x<=-L,0, x<=0,`
`alpha*`
`(1+x/L),`
`x<=L,alpha*`
`(1-x/L),`
`x>L,0);`
	$\varphi(x) := x$
	$\to piecewise\begin{pmatrix} x < -L, 0, \\ x < 0, \alpha\left(1 + \frac{x}{L}\right), \\ x < L, \alpha\left(1 - \frac{x}{L}\right), \\ L < x, 0 \end{pmatrix}$
		Задання форми сигналу за допомогою шматково-безперервної функції

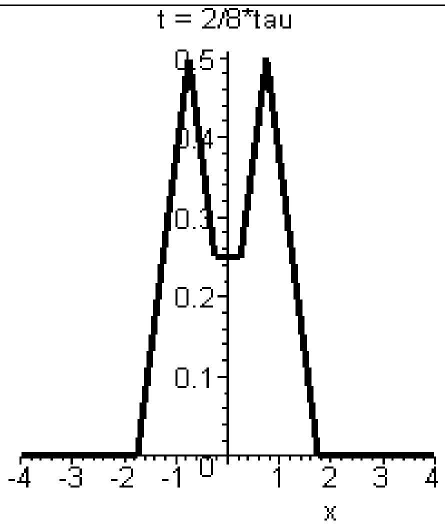
> `psi(x):=0;`	$\psi(x) := 0$	Початкова швидкість поперечних коливань дорівнює нулеві

> `plot(phi(x),`
`-5..5,`
`numpoints=400,`
`color=black,`
`thickness=3);`
		Побудуємо початковий розподіл хвильового руху

Таблиця 3.3 – Програма анімації коливального руху

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> `u(x,t):=subs(x=x-a*t,1/2*piecewise(x<=-L,0,x<=0,alpha*(1+x/L),x<=L,alpha*(1-x/L),x>L,0))+(subs(x=x+a*t,1/2*piecewise(x<=-L,0,x<=0,alpha*(1+x/L),x<=L,alpha*(1-x/L),x>L,0)));`	$u(x,t) \coloneqq$ $= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & x-t \le -1 \\ 1+x-t & x-t \le 0 \\ 1-x+t & x-t \le 1 \\ 0 & 1 < x-t \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & t+x \le -1 \\ 1+t-x & t+x \le 0 \\ 1-t+x & t+x \le 1 \\ 0 & 1 < t+x \end{pmatrix}$	Сформуємо розв'язок хвильового рівняння для заданої шматково-безперервної функції $\varphi(x)$
> `with(plots): animate(u(x,t), x=-15..15, t=0.01..60, frames=250, thickness=3);`	Після виділення мишею графіка з'являється панель керування зображенням, натиснемо клавішу  і переглянемо процес поширення хвильового руху	Подамо отриманий розв'язок у вигляді двовимірних анімованих графіків
> `tau:=3: u_1(x):=subs(t=tau*0,u(x,t)): u_2(x):=subs(t=tau*(1/8),u(x,t)): u_3(x):=subs(t=tau*(2/8),u(x,t)): u_4(x):=subs(t=tau*(3/8),u(x,t)): u_5(x):=subs(t=tau*(4/8),u(x,t)): u_6(x):=subs(t=tau*(5/8),u(x,t)): u_7(x):=subs(t=tau*(6/8),u(x,t)): u_8(x):=subs(t=tau*(7/8),u(x,t)):`		Далі задамо час $\tau = 3$. Подамо розв'язок для деяких моментів часу .

Продовження табл. 3.3

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`plot(u_1(x),x=-4..4, title="t = 0", color=black,thickness=3); plot(u_2(x),x=-4..4, title="t=1/8*tau", color=black,thickness=3); plot(u_3(x),x=-4..4, title="t=2/8*tau", color=black,thickness=3); plot(u_4(x),x=-4..4, title="t=3/8*tau", color=black,thickness=3); plot(u_5(x),x=-4..4, title="t=4/8*tau", color=black,thickness=3);`		За допомогою двовимірної графіки побудуємо ці розв'язки.
`plot(u_6(x),x=-4..4, title="t=5/8*tau", color=black,thickness=3); plot(u_7(x),x=-4..4, title="t=6/8*tau", color=black,thickness=3); plot(u_8(x),x=-4..4, title="t=7/8*tau", color=black,thickness=3);`		Один з таких розв'язків подано.

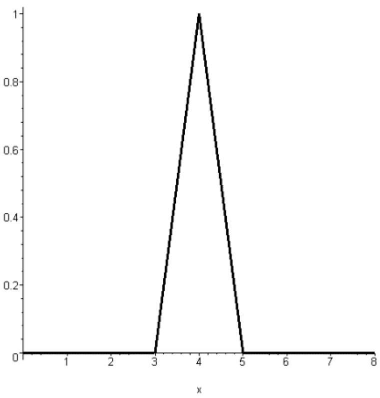
Таблиця 3.4 – Парне або непарне продовження безперервних або шматково-безперервних функцій, заданих на відрізку, за допомогою функції Хевісайда («одинична сходинка»)

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> **restart:with (plots):**	`Warning, the name changecoords has been redefined`	
> **HS:=x->(1+signum(x))/2;**	$HS \coloneqq x \to \frac{1}{2} + \frac{1}{2} signum(x)$	Задамо функцію Хевісайда
> **HS(1); HS(0); HS(-1);HS(4);**	1 $\frac{1}{2}$ 0 1	Перевіримо її значення в різних точках на прямій
> **evnf:=(f,x)->HS(x)*f(x)+HS(-x)*f(-x);** > **oddf:=(f,x)->HS(x)*f(x)-HS(-x)*f(-x);**	$evnf \coloneqq (f,x) \to HS(x)f(x) +$ $+HS(-x)f(-x)$ $oddf \coloneqq (f,x) \to HS(x) -$ $-HS(-x)f(-x)$	Побудуємо непарне і парне продовження будь-якої функції, заданої на відрізку прямої

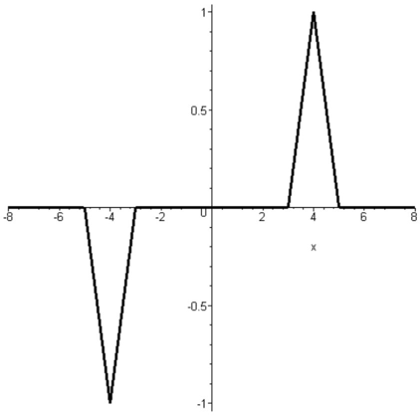
Таблиця 3.5 – Програма розв'язання задачі про поширення вільних коливань в одновимірному півпросторі, що описуються рівнянням вигляду: $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, $0 \le x < \infty$, $t > 0$ при заданих – початкових $u(x,0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$ і однорідній граничній умові $u(0,t) = 0$.

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> **u(x,t):=(phi,psi,x,t,a)->(phi(x+a*t)+phi(x-a*t))/2+int(psi(xi),xi=x-a*t..x+a*t)/(2*a);**	$u(x,t) \coloneqq (\varphi,\psi,x,t,a) \to$ $\to \frac{1}{2}\varphi(x+at)$ $+\frac{1}{2}\varphi(x-at)$ $+\frac{1}{2}\left(\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi\right)$	Розв'язок поставленої задачі можна здійснити методом аналітичних продовжень, відомих для необмеженої задачі. Задамо функцію $u(x,t)$ у вигляді формули Даламбера, де a – швидкість

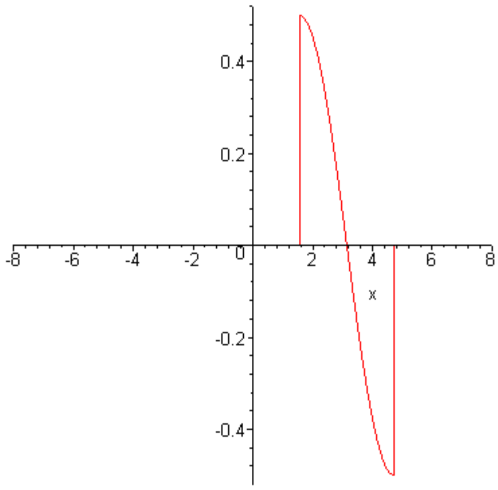
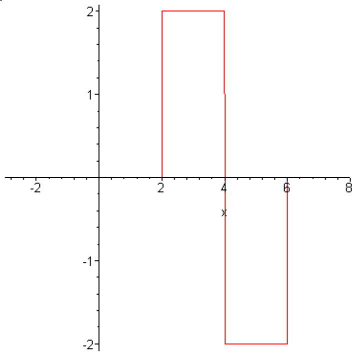
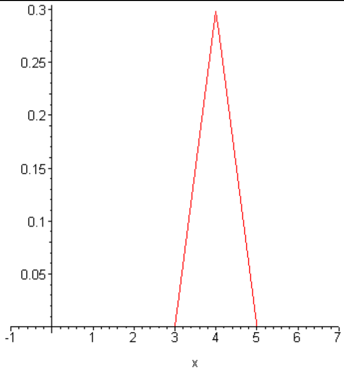
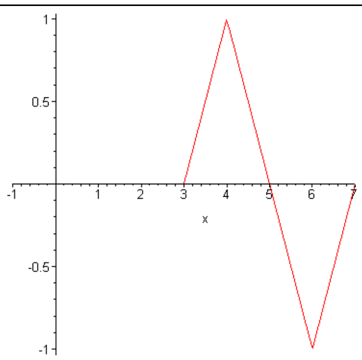
Продовження табл. 3.5

Оператор	Отриманий результат	Коментар
		поширення коливань вздовж ***необмеженої*** осі
> **a:=-1;**	$a \coloneqq -1$	Значення і напрямок швидкості поширення коливань виберемо рівним $a = -1$ – коливальний рух спрямовано вліво (до межі $x = 0$)
> **phi:= x->piecewise (x<=3,0,x<=4,x -3,x<=5,- x+5,x>5,0);** **psi(x):=0;**	$\varphi \coloneqq x \to piecewise \left(\begin{matrix} x \leq 3,0, x \leq 4, x-3, \\ x \leq 5, -x+5, 5 < x, 0 \end{matrix} \right)$ $\psi(x) \coloneqq 0$	Сформуємо форму початкового розподілу коливального руху за допомогою оператора створення шматково-безперервної функції **(piecewise(*))** і розглядатимемо випадок, коли початкова швидкість коливального руху дорівнює нулеві
> **plot (phi(x), x=0..8, numpoints=400, color=black, thickness=3);**		Побудуємо початковий розподіл коливального руху
> **oddphi:= (phi,x)- >(HS(x)* phi(x)-HS(-x)* phi(-x));**	$oddphi \coloneqq (\varphi, x) \to$ $\to HS(x)\varphi(x) -$ $-HS(-x)\varphi(-x)$	Створимо **непарне** продовження початкового розподілу для заданої функції $\varphi(x)$ за допомогою функції Хевісайда для врахування заданої граничної умови – $u(0,t) = 0$.

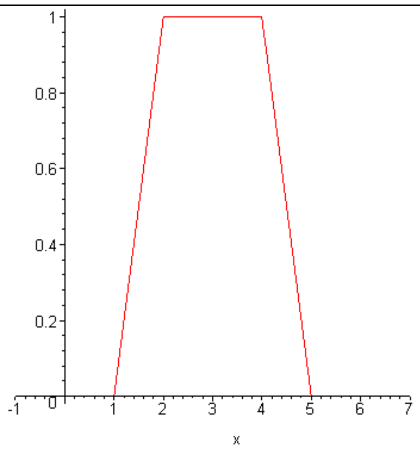
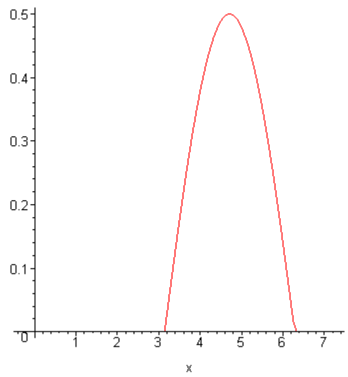
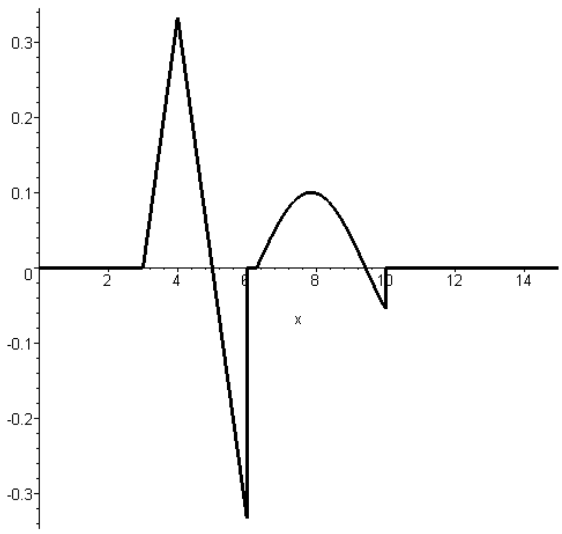
Продовження табл. 3.5

Оператор	Отриманий результат	Коментар
> **plot(oddphi (phi,x),x=-8..8, numpoints=400, color=black, thickness=3);**		Побудуємо його
> **u:=(x,t) ->(oddphi(phi, x+a*t)+ oddphi(phi,x-a*t))/2;**	$u := (x,t) \to$ $\to \frac{1}{2} oddphi(\varphi, x + at) +$ $+ \frac{1}{2} oddphi(\varphi, x - at)$	Повернемося до розв'язуваної задачі. Запишемо розв'язок початкової задачі з урахуванням непарного аналітичного продовження заданого хвильового процесу, що відбувається в напівобмеженому просторі
> **plot3d (u(x,t), x=0..8, t=0..10, orientation=[-35,45], axes=normal, grid=[50,50]);**		Подамо отриманий розв'язок у вигляді тривимірного графіка
>**animate(u(x,t), x=0..10,t=0..15, numpoints=75, color=RED, frames=150);**		Створимо анімацію хвильового процесу, що відбувається в напів-обмеженому просторі, для якого на межі $u(0,t) = 0$

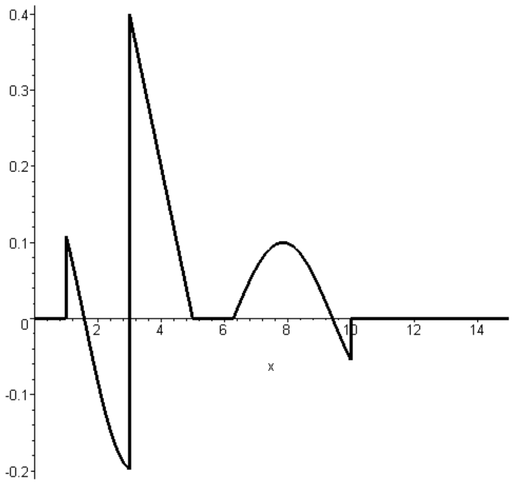
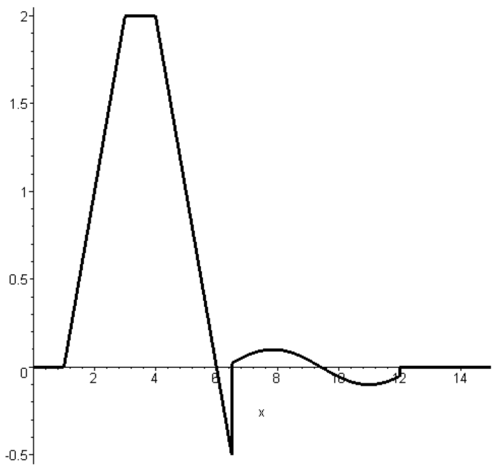
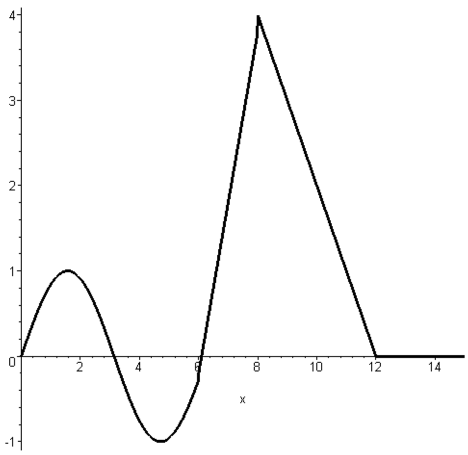
Таблиця 3.6 – Варіанти сигналів

Номер вар.	Форма сигналу	Функція, що описує сигнал на інтервалі, межі інтервалу та амплітуда сигналу
1		$y = a * \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$ $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ $a = 1/2$
2		$y = \left\{\begin{matrix} 0, & x < 2 \\ 4 * a, & 2 \leq x \leq 4 \\ -4 * a, & 4 < x \leq 6 \\ 0, & x > 6 \end{matrix}\right\}$ $a = 1/2$
3		$y = \left\{\begin{matrix} 0, & x \leq 3 \\ a * (x - 3), & 3 < x \leq 4 \\ a * (-x + 5), & 4 < x \leq 5 \\ 0, & x > 5 \end{matrix}\right\}$ $a = 1/3$
4		$y = \left\{\begin{matrix} 0, & x \leq 3 \\ a * (x - 3), & 4 \leq x \\ a * (-x + 5), & 6 \leq x \\ a * (x - 7), & 7 \leq x \\ 0, & 8 \leq x \end{matrix}\right\}$ $a = 1$

Продовження табл. 3.6

Номер вар.	Форма сигналу	Функція, що описує сигнал на інтервалі, межі інтервалу та амплітуда сигналу
5		$y = \left\{\begin{array}{c} 0, \quad x < 1 \\ a * (x-1), \quad x \leq 2 \\ a, \quad x \leq 4 \\ a * (-x+5), \quad x \leq 5 \\ 0, \quad 6 \leq x \end{array}\right\}$ $a = 1$
6		$y = \left\{\begin{array}{c} 0, \quad x < \pi \\ a * \sin(x+\pi), \quad x \leq 3\pi \\ 0, \quad x > 3\pi \end{array}\right\}$ $a = 0.5$
7		$y = \left\{\begin{array}{c} 0, \quad x \leq 3 \\ 1/3 * (x-3), \quad x \leq 4 \\ 1/3 * (-x+5), \quad x \leq 6 \\ 0, \quad x \leq 6.3 \\ 0.1 * \sin(x) \quad x \leq 10 \\ 0, \quad x > 10 \end{array}\right\}$ $a = 1$

Продовження табл. 3.6

Номер вар.	Форма сигналу	Функція, що описує сигнал на інтервалі, межі інтервалу та амплітуда сигналу
8		$$y = \left\{\begin{matrix} 0, \quad x \le 1 \\ 0.2 * \cos(x), \quad x \le 3 \\ 1/5 * (-x+5), \quad x \le 5 \\ 0, \quad x \le 6.3 \\ 0.1 * \sin(x) \quad x \le 10 \\ 0, \quad x > 10 \end{matrix}\right\}$$ $$a = 1$$
9		$$y = \left\{\begin{matrix} 0, \quad x \le 1 \\ x-1, \quad x \le 3 \\ a, \quad x \le 4.2 \\ -x+6, \quad x \le 6.5 \\ 0.1 * \sin(x), \quad x \le 12 \\ 0, \quad x > 12 \end{matrix}\right\}$$ $$a = 2$$
10		$$y = \left\{\begin{matrix} 0, \quad x \le 0 \\ \sin(x), \quad x \le 6 \\ a * x - 12.2, \quad x \le 8 \\ -x+12, \quad x \le 12 \\ 0, \quad x > 12 \end{matrix}\right\}$$ $$a = 2$$

3.4 Зміст звіту

Звіт має містити:

– назву роботи;

– мету роботи;

– дані варіанта (сигнал – табл. 3.6) за вказівкою викладача;

– програму задання форми сигналу;

– висновки.

3.5 Контрольні запитання та завдання

1. Які задачі біомеханіки та біофізики можуть бути описані хвильовим рівнянням?

2. Записати вид хвильового рівняння за наявності зовнішньої дії.

3. Якщо задано початкові умови для хвильового рівняння, то до якого типу відноситься така крайова задача?

4. Як записуються початкові умови для одновимірної задачі Коші?

5. Якою формулою описується розв’язок хвильового рівняння в необмеженому та напівобмеженому просторі?

6. Чи може розв’язок хвильового рівняння бути розривним?

7. Як за допомогою програми Maple усунути проблему розривності заданої функції?

8. Що описує формула Даламбера?

ТЕМА 4. МЕТОД ФУР'Є В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Метод Фур'є, або ***метод відокремлення змінних*** – один з основних аналітичних методів розв’язання крайових задач математичної фізики. Успішне застосування методу залежить від типу поставленої задачі – вона має бути лінійною й відноситися до класу диференціальних рівнянь із змінними, які розділяються.

Диференціальне рівняння називається ***лінійним***, якщо невідома функція й всі її похідні входять у рівняння в першій степені і якщо воно не містить членів з добутками цих величин. Лінійне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$L(u) \equiv \sum_{i-1}^{n} \sum_{j-1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x)u = 0, \tag{4.1}$$

-

де L – лінійний диференціальний оператор,

$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – шукана функція n - змінних;

$a_{ij}, b_i, c,$ – коефіцієнти даного рівняння: задані функції $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Якщо права частина рівняння (4.1) відмінна від нуля, тобто $L(u) = F(x)$, де $F(x)$ відома функція x, то таке рівняння називається – ***неоднорідним***.

В основі методів розв’язання лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних лежить *принцип суперпозиції* (*накладення*) у вигляді наступної теореми.

Принцип суперпозиції. *Якщо кожна з функцій $u_1(x), u_2(x), \dots u_n(x)$ є розв’язком однорідного лінійного диференціального рівняння $L(u) = 0$, то їхня лінійна комбінація*

$$u(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \dots + C_n u_n(x)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$, – довільні сталі,
також є розв’язком цього рівняння.

Узагальненням даного принципу є ряд $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x)$, який також є розв’язком цього рівняння, якщо він сходиться до деякої функції $u(x)$, а також допускає диференціювання кожного компонента ряду окремо.

Розвиток цього принципу такий: якщо розв’язок рівняння в частинних похідних $L(u) = 0$ можна надати у вигляді $u(x, \xi)$ (тобто він залежить від деякого параметра ξ, який змінюється на скінченому або нескінченому інтервалі a, b існування розв’язків), то застосування лінійного оператора призводить до тотожності $L(u(x,\xi)) \equiv 0$; з цього маємо твердження — добуток деякої параметричної функції $v(\xi)$ й шуканої функції $u(x,\xi)$ також є розв'язком лінійного диференціального рівняння $L(u) = 0$. У цьому випадку також передбачається існування нескінченної суми таких розв'язків. Оскільки, у принципі, $v(\xi)$ залежить безперервно від параметра ξ, то це додавання має виконуватися за допомогою інтеграла $\int_a^b v(\xi)\, u(x,\xi) d\xi$ за умови існування й законності операції диференціювання під знаком інтеграла.

Рівняння (4.1) відноситься до класу рівнянь із змінними, які відокремлюються, якщо воно допускає нескінченну множину розв'язків у вигляді

$$u = \prod_{i=1}^{n} X_i(x_i), \tag{4.2}$$

причому всі розв'язки $X_i(x_i)$ знаходять із **звичайних диференціальних рівнянь** підстановкою (4.2) в (4.1).

Для того щоб змінні в (4.1) розділялися, необхідно, щоб оператор L мав певну структуру. Так рівняння вигляду

$$L(u) = L_1(u) + L_2(u) + \cdots + L_n(u) = 0,$$

де L_1 –залежить тільки від x_1, L_2 – тільки від x_2 а L_n – тільки відx_n, допускає відокремлення змінних. Наприклад, якщо $n = 2$, маємо:

$$L(u) = L_1(u) + L_2(u) = 0. \tag{4.3}$$

Змінні можуть бути відокремлені, якщо оператор L має таку структуру ($n = 3$):

$$L(u) = L_1(u) + L_2(u) + g(x_2)L_3(u) = 0. \tag{4.4}$$

Процедура відокремлення змінних, наприклад для (4.3), цілком очевидна. Так якщо $u(x_1, x_2) = X_1(x_1) \cdot X_2(x_2)$, де L_1 залежить від x_1, а L_2 – від x_2, то підставляючи в (4.3) їхні вирази маємо:

$$X_2(x_2)L_1\big(X_1(x_1)\big) + X_1(x_1)L_2\big(X_2(x_2)\big) = 0 \Rightarrow \frac{L_1\big(X_1(x_1)\big)}{X_1(x_1)} + \frac{L_2\big(X_2(x_2)\big)}{X_2(x_2)} = 0. \tag{4.5}$$

Остання рівність можлива лише у випадку, коли:

$$\frac{L_1(X_1(x_1))}{X_1(x_1)} = -\lambda, \qquad \frac{L_2(X_2(x_2))}{X_2(x_2)} = \lambda, ,$$

де λ — деяка константа.

Таким чином, маємо систему двох звичайних рівнянь із розділеними змінними:

$$L_1\big(X_1(x_1)\big) + \lambda \cdot X_1(x_1) = 0, \qquad L_2\big(X_2(x_2)\big) - \lambda \cdot X_2(x_2) = 0 \tag{4.6}$$

Число λ називають *параметром відокремлення*. Інтеграли системи (4.6) залежать від параметра λ та сталих інтегрування. Таких розв'язків може бути нескінченна множина.

Для рівняння (4.4) нескладно виконати відокремлення змінних у вигляді

$$\begin{gathered} L_1\big(X_1(x_1)\big) + \lambda \cdot X_1(x_1) = 0, \\ L_2\big(X_2(x_2)\big) - [\mu \cdot g(x_2) + \lambda] \cdot X_2(x_2) = 0, \\ L_3\big(X_3(x_3)\big) + \mu \cdot X_3(x_3) = 0, \end{gathered} \tag{4.7}$$

де μ – другий параметр відокремлення змінних.

У задачах математичної фізики доводиться виконувати відокремлення змінних у різних системах координат (декартова прямокутна система координат, циліндрична, сферична тощо). Існує кілька координатних систем, у яких можливе відокремлення змінних. Так для оператора Лапласа це можливо в одинадцяти системах координат. Використання спеціальних систем координат може виявитися зручним, якщо граничні умови задані на поверхні, яка є координатною поверхнею, у відповідній системі ортогональних координат.

У математичній фізиці важливими є методи, у яких розв'язок задачі отримується у формі ряда (або інтеграла), тобто у вигляді розкладання за деякою системою функцій. Такі розкладання звичайно добре вивчені, коли кожна з функцій, за якими здійснюється розкладання, залежить тільки від однієї змінної. Щоб знайти систему функцій розкладання, іноді необхідно знайти допоміжний розв'язок деякої **граничної задачі для звичайного диференціального рівняння, що** отримала назву ***задачі Штурма – Ліувілля***.

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння другого порядку

$$[p(x)X'(x)]' + [\lambda \cdot r(x) - q(x)]X(x) = 0, \qquad a < x < b, \tag{4.8}$$

де $p(x), q(x), r(x)$ – дійсні та безперервні функції x на інтервалі (a,b), а $p(x)$ і $r(x)$ – додатні;

λ – параметр, який приймає будь-які значення.

Рівняння (4.8) можна подати у вигляді:

$$X''(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}X'(x) + \left[\lambda\frac{r(x)}{p(x)} - \frac{q(x)}{p(x)}\right]X(x) = 0, \quad (4.9)$$

де $X(x)$ – розв'язок даного рівняння, що задовольняють деякі граничні умови на інтервалі $[a,b]$.

Кожна внутрішня точка цього інтервалу це – звичайна точка рівняння (4.9). Кінці інтервалу можуть бути як звичайними точками, так і особливими – сингулярними, наприклад, такими, що мають нескінченний розрив. Нагадаємо, якщо коефіцієнти рівняння (4.9) у деяких точках – не обмежені, або для них $p(x) = 0$, то говорять, що в цих точках коефіцієнти рівняння мають особливості.

Нас цікавитимуть розв'язки рівняння (4.9), які задовольняють *однорідні лінійні граничні умови з дійсними коефіцієнтами.* Граничну задачу з такими умовами називають *задачею Штурма – Ліувілля*. Зазвичай вона формулюється так: знайти розв'язок рівняння (4.8), що належать до класу $C^{(2)}$ в області дослідження $[a,b]$ та задовольняє деякі однорідні граничні умови, заданих на кінці інтервалу. Розрізнюють задачі двох типів – ***регулярну*** та ***сингулярну*** задачу. Задача Штурма – Ліувілля називається регулярною, якщо інтервал $[a,b]$ скінчений, кінці інтервалу – звичайні точки розглянутого рівняння. Задача називається сингулярною, якщо хоча б одне із цих умов не виконано. Сингулярна задача може бути з одним або двома сингулярними кінцями. Характер однорідних граничних умов регулярної й сингулярної задач різний.

Так для регулярної задачі характерні умови:

– граничні умови першого роду

$$X(a) = 0, \qquad X(b) = 0; \quad (4.10)$$

– граничні умови другого роду

$$X'(a) = 0, \qquad X'(b) = 0; \quad (4.11)$$

– граничні умови третього роду

$$X'(a) - h_a X(a) = 0, \qquad X'(b) + h_b X(b) = 0, \qquad h_a, h_b \geq 0 \ ; \quad (4.12)$$

– *граничні умови четвертого роду*

$$X(a) = X(b), \qquad X'(a) = X'(b), \qquad p(a) = p(b). \qquad (4.13)$$

Граничні умови четвертого роду називають *умовами періодичності.* Точний зміст цих умов такий: $X(a) = lim_{x \to a+0} X(x)$, $X(b) = lim_{x \to b-0} X(x)$, $X'(a) = lim_{x \to a-0} X'(x)$, тощо. Тому їх називають граничними умовами. Всі перераховані умови – *однорідні*.

У випадку сингулярної задачі розрізнюють два варіанти задач залежно від того, одна або дві межі області досліджень сингулярні. Нехай $x = a$ – сингулярна межа, $x = b$ – регулярна межа. Тоді на сингулярній межі ставиться умова обмеженості функції $X|_{x \to a+0} = O(1)$, а на регулярній межі можуть бути умови першого, другого або третього роду. Якщо обидві межі сингулярні, то ставляться умови обмеженості функцій $X|_{x \to a+0} = O(1)$, $X|_{x \to b-0} = O(1)$. Іноді вказується порядок зростання функції на сингулярній межі, наприклад, у вигляді $\int_a^b r(x) X(x)^2 dx = O(1)$. Перераховані умови для сингулярних меж також однорідні.

Задача Штурма-Ліувілля завжди має розв'язок $X(x) \equiv 0$, який не являє інтересу, що названий *тривіальним*. Нас цікавитимуть *нетривіальні розв'язки*. Однак нетривіальних розв'язків при деякому довільному λ може й не бути. Тому зміст задачі Штурма – Ліувілля є не тільки відшукання розв'язків при даному λ, але й визначення сукупності значень λ, при яких існують нетривіальні розв'язки. Будь-який нетривіальний розв'язок задачі Штурма – Ліувілля називається *власною функцією* даної задачі. Значення параметра λ називають *власними значеннями* задачі. Власні функції, за визначенням, відшукують із точністю до довільної константи. Іноді накладають умову: $\int_a^b r(x) X(x)^2 dx = 1$, яка названа *умовою нормування* і тоді ми маємо справу з нормованими власними функціями. Даному власному значенню можуть відповідати одна або дві (не більше) власні функції. Множина власних функцій називається *спектром* даної задачі.

Основні властивості власних значень і власних функцій задачі Штурма – Ліувілля:

1. Всі власні значення регулярної задачі Штурма – Ліувілля (4.8) – дійсні та обмежені знизу.

2. Система власних функцій регулярної задачі (4.8) ортогональна на відрізку $[a, b]$ з вагою $p(x) = r(x)$, тобто

$$\int_a^b r(x)X_m(x)X_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ ||X_n(x)||^2, & m = n \end{cases}.$$

Більш детальну інформацію про властивості власних значень і власних функцій задач Штурма-Ліувілля можна знайти в [1].

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4
ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ І ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ РЕГУЛЯРНИХ ЗАДАЧ ШТУРМА – ЛІУВІЛЛЯ

4.1 Мета роботи

Знайти розв'язок регулярної задачі Штурма – Ліувілля й визначити спектр власних значень та набір власних функцій для заданих однорідних граничних умов за допомогою універсального математичного пакета Maple.

4.2 Підготовка до виконання лабораторної роботи

При підготовці до виконання лабораторної роботи потрібно ознайомитися з методичними вказівками щодо виконання даної лабораторної роботи, повторити лекційний матеріал за даною темою, виконати задані завдання з практичних занять за даною темою, виконати й захистити попередні лабораторні роботи.

Розв'язок однорідної лінійної задачі Штурма – Ліувілля з даними коефіцієнтами можна виконати за допомогою математичного пакета Maple, створивши програмний засіб, наприклад, за таким алгоритмом:

1. Задати досліджуване рівняння для двох значень параметра λ: $\lambda \neq 0$ (нетривіальний розв'язок) і $\lambda = 0$ (пошук тривіального розв'язку).

2. Спочатку розглянути випадок, коли $\lambda \neq 0$, дійсний розв'язок, тобто $\lambda > 0$.

3. Знайти загальний розв'язок заданого рівняння у вигляді набору власних функцій, поданих з точністю до деяких сталих.

4. Із знайдених власних функцій визначити, якщо необхідно, їхні похідні, або самі власні функції для задання граничних умов.

5. Створити систему рівнянь для визначення власних значень.

6. Подати отриману систему рівнянь у вигляді матриці.

7. Обчислити її визначник.

8. Створити характеристичне рівняння для визначення власних значень задачі з умови рівності нулю визначника.

9. Визначити спектр власних значень.

10. Визначити набір власних функцій поставленої задачі.

11. Перевірити умову ортогональності для отриманих власних функцій у заданих межах досліджуваної задачі.

12. Визначити норму для набору власних функцій.

13. Подати набір власних значень і власних функцій заданої задачі Штурма–Ліувілля.

14. Проаналізувати випадок $\lambda = 0$.

15. Встановити, чи є $\lambda = 0$ власним значенням поставленої задачі, і зробити висновки про можливості існування тривіального розв'язку.

16. Результати роботи зберегти на носії інформації за допомогою стандартних процедур ***save, save as*** і ін.

4.3 Порядок виконання роботи

4.3.1 Виконайте дії, наведені в табл.4.1 – 4.2.

4.3.2 Скористайтесь наведеними прикладами програм (табл.4.1 – 4.2) для розв'язку задач Штурма – Ліувілля з однорідними граничними умовами і створіть програмний засіб для розв'язання поставленої задачі (за варіантом, зазначеним викладачем – табл. 4.3). Продемонструйте результат роботи програми викладачеві.

4.3.3 Збережіть розроблену програму на носії інформації.

Таблиця 4.1 – Програма розв'язку задачі Штурма – Ліувілля: $y'' + \lambda \cdot y = 0,\ y(a) = 0,\ y'(b) = 0,\ x \in [a, b]$ на знаходження власних значень та власних функцій

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> eq:=diff (y(x),x,x)+ lambda*y(x)=0;`	$eq := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + \lambda y(x) = 0$	Задаємо рівняння: $(diff(f(x), x, x))$ — друга похідна функції $f(x)$
`> dsolve (eq,y(x)); y:=unapply (rhs(%),x);`	$y(x) = \_C1\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + \_C2cos(\sqrt{\lambda}\,x)$ $y := x \to \_C1\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + \_C2cos(\sqrt{\lambda}\,x)$	Знаходимо загальний розв'язок (власна функція у загальному вигляді) і виділяємо праву частину рівняння

Продовження табл. 4.1

Оператор	Отриманий результат	Коментар

`> assume(b>a):`
`> eq1:=y(a)=0;`
`eq2:=`
`D[1](y)(b)=0;`
	$eq1 := \_C1 sin(\sqrt{\lambda}a\sim) + \_C2 cos(\sqrt{\lambda}a\sim) = 0$
	
	$eq2 := \_C1 cos(\sqrt{\lambda}b\sim)\sqrt{\lambda} - \_C2 sin(\sqrt{\lambda}b\sim)\sqrt{\lambda} = 0$
		Для випадку $b > a$ задаємо граничні умови

`> linalg`
`[genmatrix]`
`({eq1,eq2},`
`{_C1,_C2});`
`linalg`
`[det](%);`
`Delta:`
`=combine(%);`
	$\begin{bmatrix} sin(\sqrt{\lambda}a\sim) & cos(\sqrt{\lambda}a\sim) \\ cos(\sqrt{\lambda}b\sim)\sqrt{\lambda} & -sin(\sqrt{\lambda}b\sim)\sqrt{\lambda} \end{bmatrix}$
	
	$-sin(\sqrt{\lambda}\,a\sim)\,sin(\sqrt{\lambda}\,b\sim)\sqrt{\lambda} -$
	$-cos(\sqrt{\lambda}\,a\sim)cos(\sqrt{\lambda}\,b\sim)\sqrt{\lambda}$
	
	$\Delta := -\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\ a\sim - \sqrt{\lambda}\ b\sim)$
		Формуємо матрицю коефіцієнті в і розрахо-вуємо її детермінант

`> Delta:=`
`select`
`(has,Delta,`
`[cos]);`
	$\Delta := cos(\sqrt{\lambda}\ a\sim - \sqrt{\lambda}\ b\sim)$	Для $\lambda \neq 0$ формуємо допоміжний визначник, з якого от-римуємо характерис-тичне рівняння

`> _EnvAll`
`Solutions:`
`=true:`
`>lambda:=`
`solve(Delta,`
`lambda);`
	$\lambda := \dfrac{\pi^2(1+2\_Z1\sim)^2}{4(-b\sim + a\sim)^2}$	Для отри-мання явно-го розв'язку в радикалах вводять команду true і визначаємо власні значення

Продовження табл. 4.1

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> lambda:= subs (_Z1='k', lambda);`	$\lambda := \dfrac{\pi^2(1+2k)^2}{4(-b\sim+a\sim)^2}$	Виконуємо заміну
`> assume (k,posint): y(x);`	$\_C1 sin\left(\dfrac{\sqrt{4}\sqrt{\dfrac{\pi^2(1+2k\sim)^2}{(-b\sim+a\sim)^2}}}{4}\right) + \_C2 cos\left(\dfrac{\sqrt{4}\sqrt{\dfrac{\pi^2(1+2k)^2}{(-b\sim+a\sim)^2}}x}{4}\right)$	Здійснюємо підстановку знайдених власних значень в отримані власні функції, де k – цілі позитивні числа
`> C1:=solve (eq1,_C1);`	$C1 := \dfrac{\_C2\ cos\ (\frac{\pi(1+2k\sim)a\sim}{2(-b\sim+a\sim)})}{sin\ (\frac{\pi(1+2k\sim)a\sim}{2(-b\sim+a\sim)})}$	Із заданих граничних умов, визначаємо сталі інтегрування $C1$ та $C2$:
`> simplify (subs(_C1=C1, y(x)));`	$\_C2\left(-cos\left(\dfrac{\pi(1+2k\sim)a\sim}{2(-b\sim+a\sim)}\right) \cdot sin\left(\dfrac{\pi(1+2k\sim)x}{2(-b\sim+a\sim)}\right) + cos\left(\dfrac{\pi(1+2k\sim)x}{2(-b\sim+a\sim)}\right) \cdot sin\left(\dfrac{\pi(1+2k\sim)a\sim}{2(-b\sim+a\sim)}\right)\right) / sin\left(\dfrac{\pi(1+2k\sim)a\sim}{2(-b\sim+a\sim)}\right)$	Спрощуємо вираз $y(x)$
`> combine(%);`	$-\dfrac{\_C2 sin\left(\frac{-\pi a\sim+\pi x-2\pi a\sim k+2\pi x k\sim}{-2b\sim+2a\sim}\right)}{sin\left(\frac{\pi a\sim+2\pi a\sim k\sim}{-2b\sim+2a\sim}\right)}$	

Продовження табл. 4.1

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> Yn:= unapply (select (has,%,[x]), x,k);`	$Yn := (x, k\sim) \to sin\left(\frac{-\pi a\sim + \pi x - 2\pi a\sim k + 2\pi x k\sim}{-2b\sim + 2a\sim}\right)$	Формування набіру власних функцій
`> y:='y': Yn(x,k); simplify (subs(y(x)= %,eq));`	$sin\left(\frac{-\pi a\sim + \pi x - 2\pi a\sim k + 2\pi x k\sim}{-2b\sim + 2a\sim}\right)$ $0 = 0$	Перевірка, знайдених власних функції
`> Yn(a,k)=0; simplify (D[1] (Yn) (b,k))=0;`	$0 = 0$ $0 = 0$	Перевірка граничних умов
`> assume(n, posint): assume (m,posint): Int(Yn(x,n)* Yn(x,m), x=a..b); simplify (value(%));`	$\int_{a\sim}^{b\sim} sin\left(\frac{-\pi a\sim + \pi x - 2\pi a\sim n + 2\pi x n}{-2b\sim + 2a\sim}\right) \cdot sin\left(\frac{-\pi a\sim + \pi x - 2\pi a\sim m + 2\pi x m}{-2b\sim + 2a\sim}\right) dx$ $\begin{cases} \frac{b\sim}{2} - \frac{a\sim}{2} & -n+m \\ 0 & other\ wise \end{cases}$	Перевірка ортогональності знайдених власних функцій на відрізку $[a, b]$
`> Norma:= Int (Yn(x,n)^2, x=a..b); simplify (value(%));`	$Norma :=$ $\int_{a\sim}^{b\sim} sin\left(\frac{-\pi a\sim + \pi x - 2\pi a\sim n + 2\pi x n}{-2b\sim + 2a\sim}\right)^2$ $\frac{b\sim}{2} - \frac{a\sim}{2}$	Визначення норми власних функцій
`> simplify (collect((- Pi*a+Pi*x-2*Pi* a*k+2*Pi*x*k)/ (-2*b+2*a),x));`	$\frac{(1 + 2k\sim)\pi(-a\sim + x)}{2(-b\sim + a\sim)}$	Спрощення аргументу виразу

Продовження табл. 4.1

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> lambda:=0;eq;`	$\lambda := 0$ $\frac{d^2}{dx^2}y(x) = 0$	Дослідження випадку $\lambda = 0$
`> dsolve(eq,y(x)); assign(%): y0:=unapply(y(x),x);`	$y(x) = \_C1x + \_C2$ $y0 :=\to x\_C1x + C2$	
`> eq0_1:=y0(a)=0; eq0_2:=D(y0)(b)=0;`	$eq0\_1 := \_C1a\sim + \_C2 = 0$ $eq0\_2 := \_C1 = 0$	
`> linalg[genmatrix]({eq0_1,eq0_2}, {_C1,_C2}); Delta0:= linalg[det](%);`	$\begin{bmatrix} a\sim & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\Delta 0 := -1$	Визначник відмінний від нуля, отже – існує тільки тривіальний розв’язок. Отже, $\lambda = 0$ – не є власне значення задачі.
У результаті розв’язання заданої задачі Штурма – Ліувілля, дискретний спектр власних значень має вигляд: $\lambda_k = \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4(b-a)^2}$, $k = 1,2,3,...$, а власні функції подано у вигляді $y_k(x) = sin\left(\frac{(2k+1)\pi(a-x)}{2(b-a)}\right)$ $k = 1,2,3,...$		

Таблиця 4.2 – Програма визначення власних значень та власних функцій задачі Штурма – Ліувілля: $y'' + \lambda \cdot y = 0$, $-y'(0) + h \cdot y(0) = 0$, $y'(a) + h \cdot y(a) = 0, x \in [0, a]$, $h > 0$.

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> eq:=diff(y(x), x$2)+lambda*y(x)=0; lambda:=0;eq0:= subs(y(x)=y0(x),eq); lambda:='lambda';`	$eq := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + \lambda y(x) = 0$ $\lambda := 0$	Формуємо рівняння для двох значень параметра λ, знаходимо його загальний

Продовження табл. 4.2

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> assume (a>0): assume (lambda>0): > dsol:= dsolve (eq,y(x)); assign(dsol);`	$eq0 := \frac{d^2}{dx^2}y0(x) = 0$ $\lambda := \lambda$ $dsol := y(x)\_C1sin(\sqrt{\lambda\sim}x) + \_C2cos(\sqrt{\lambda\sim}x)$	розв’язок і перевіряємо цей розв’язок
`> simplify (value(eq));`	$0 = 0$	
`> y:=y(x); y1:=simplify (diff(y,x));`	$y := \_C1\sin(\sqrt{\lambda\sim}x) + \_C2cos(\sqrt{\lambda\sim}x)$ $y1 := \sqrt{\lambda\sim}(\_C1\cos(\sqrt{\lambda\sim}x) - \_C2sin(\sqrt{\lambda\sim}x))$	Визначаємо похідну
`> eq1:= simplify(subs (x=0, -y1+h*y))=0; > eq2:= simplify(subs (x=a, y1+h*y))=0;`	$eq1 := -\sqrt{\lambda\sim}\_C1 + h\_C2 = 0$ $eq2 := \sqrt{\lambda\sim}\_C1\cos(\sqrt{\lambda\sim}a\sim) - \sqrt{\lambda\sim}\_C2\sin(\sqrt{\lambda\sim}a\sim) + h\_C1\sin(\sqrt{\lambda\sim}a\sim) + h\_C2\cos(\sqrt{\lambda\sim}a\sim) = 0$	Створюємо систему рівнянь для визначення власних значень, виходячи із заданих граничних умов
`>A:=linalg [genmatrix] ({eq1,eq2}, {_C1,_C2}); Delta:= simplify (linalg [det](A));`	$A := \begin{bmatrix} -\sqrt{\lambda\sim} & h \\ \sqrt{\lambda\sim}\cos(\sqrt{\lambda\sim}a\sim) + +hsin(\sqrt{\lambda\sim}a\sim) & -\sqrt{\lambda\sim}\sin(\sqrt{\lambda\sim}a\sim) + + hcos(\sqrt{\lambda\sim}a\sim) \end{bmatrix}$	Формуємо матрицю цієї системи рівнянь і знаходимо її визначник

Продовження табл. 4.

Оператор	Отриманий результат	Коментар
	$\Delta := \lambda\sim sin(\sqrt{\lambda\sim}a\sim) - 2\sqrt{\lambda\sim}hcos(\sqrt{\lambda\sim}a\sim) - h^2 sin\,(\sqrt{\lambda\sim}a\sim)$	
`> eq:=expand (Delta/cos (lambda^ (1/2)* a))=0;`	$eq := \frac{\lambda\sim sin(\sqrt{\lambda\sim}a\sim)}{cos(\sqrt{\lambda\sim}a\sim)} - 2\sqrt{\lambda\sim}h - \frac{h^2 sin(\sqrt{\lambda\sim}a\sim)}{\cos(\sqrt{\lambda\sim}a\sim)} = 0$	Прирівнюємо нулю визначник, це і буде характеристичне рівняння для визначення власних значень
`> eq:= convert (eq,tan);`	$eq := \lambda\sim tan\,(\sqrt{\lambda\sim}a\sim) - 2\sqrt{\lambda\sim}h - h^2 tan\,(\sqrt{\lambda\sim}a\sim) = 0$	Перетворимо отриманий результат у рівняння
`> solve(eq, tan(lambda^ (1/2)* a));`	$\frac{2\sqrt{\lambda\sim}h}{\lambda\sim - h^2}$	Розв'яжемо отримане рівняння відносно $tg(a\sqrt{\lambda})$
`> assume (mu>0): simplify (subs (lambda= (mu/a) ^2,%));`	$-\frac{2\mu\sim a\sim h}{-\mu\sim^2 + h^2 a\sim^2}$	Зробимо заміну змінних $\lambda = (\mu/a)^2$.
`> f:= tan(mu)-%;`	$f := tan(\mu\sim) + \frac{2ha\sim\mu\sim}{-\mu^2 + h^2 a\sim^2}$	Значення μ визначимо з вище отриманого рівняння $f(\mu) = tg(\mu) - \frac{2ha\mu}{\mu^2 - h^2 a^2} = 0$, що є трансцендентним рівнянням, яке ми не розв'язуватимемо. Нехай $\mu_k,\ k = 1,2,3,\ldots$ –

Продовження табл. 4.2

Оператор	Отриманий результат	Коментар
		відомі додатні корені цього рівняння. Тоді власні значення визначаються за формулою $\lambda_k = (\mu_k/a)^2$.
`> _C2:=solve (eq1,_C2); _C2:=simplify (subs(lambda= (mu/a)^2, _C2));`	$\_C2 := \frac{\sqrt{\lambda\sim}\_C1}{h}$ $\_C2 := \frac{\mu\sim\_C1}{a\sim h}$	Визначимо власні функції поставленої задачі
`> y:= collect (simplify (subs (lambda= (mu/a)^2, y)),_C1);`	$y := \frac{\_C1(sin\left(\frac{\mu\sim x}{a\sim}\right) a\sim h + \mu\sim \cos\left(\frac{\mu\sim x}{a\sim}\right))}{a\sim h}$	
`> y:= unapply (subs(mu=mu [n], select (has,y,x)), x,n);`	$y := (x,n) \to sin\left(\frac{\mu\sim_n x}{a\sim}\right) a\sim h + \mu\sim_n cos\left(\frac{\mu\sim_n x}{a\sim}\right)$	

Продовження табл. 4.2

Оператор	Отриманий результат	Коментар
`> Int(y(x,n)*y(x,m), x=0..a); res:=value(%);`	$\int_0^{a\sim}\left(\left(\sin\left(\frac{\mu\sim_n x}{a\sim}\right)a\sim h + \mu\sim_n \cos\left(\frac{\mu\sim_n x}{a\sim}\right)\right) * \left(\sin\left(\frac{\mu\sim_m x}{a\sim}\right)a\sim h + \mu\sim_m \cos\left(\frac{\mu\sim_m x}{a\sim}\right)\right)\right)dx$ $res := -a\sim(h^2a^2\mu\sim_n \cos(\mu\sim_n) \cdot \sin(\mu\sim_m) + \mu\sim_n\mu\sim_m{}^2 \cdot \cos(\mu\sim_n)\sin(\mu\sim_m)) - h^2a\sim^2\mu\sim_m \sin(\mu\sim_n) \cdot \cos(\mu\sim_m) - a\sim h\mu\sim_n^2 \cdot \sin(\mu\sim_n) \cdot \sin(\mu\sim_m) - \mu\sim_n^2\mu\sim_m \sin(\mu\sim_n) \cdot \cos(\mu\sim_m) + a\sim h\,\mu\sim_m^2 \cdot \sin(\mu\sim_n) \cdot \sin(\mu\sim_m)/(\mu\sim_n^2 - \mu\sim_m^2)$	Перевіримо їх ортогональність на відрізку $[0,a]$
`> res_cos:=solve(Delta,cos(lambda^(1/2)*a));` `>simplify(subs(cos(mu[m])=subs(lambda=(mu[m]/a)^2,res_cos),res));`	$res\_cos := \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda\sim}a\sim\right)(\lambda\sim = h^2)}{\sqrt{\lambda\sim}h}$ $\frac{1}{2}\sin(\mu\sim_m)(2a\sim^3h^3\,\mu\sim_n\cos(\mu\sim_n) + 2\mu\sim_n\mu\sim_m^2\cos\mu\sim_n\,a\sim h + a\sim^2h^2\mu\sim_m^2\sin(\mu\sim_n) + h^4\sin(\mu\sim_n)\,a\sim^4 - a\sim^2h^2\mu\sim_n^2\sin(\mu\sim_n) - \mu\sim_n^2\mu\sim_m^2\sin(\mu\sim_n))/(h(\mu\sim_n^2 - \mu\sim_m^2))$	Спростимо отриманий результат з урахуванням характеристичного рівняння $f(\mu)=0$

Продовження табл. 4.2

Оператор	Отриманий розв’язок	Коментар
`>simplify(subs (cos(mu[n])= subs(lambda= (mu[n]/a)^2, res_cos),%)) ;`	0	Знайдений набір власних функцій є ортогональним
`> Int (y(x,n)^2, x=0..a); Norma:= simplify (value(%));`	$\int_0^{a\sim} \left(sin\left(\frac{\mu\sim_n x}{a\sim}\right) a\sim h + \mu\sim_n cos\left(\frac{\mu\sim_n x}{a\sim}\right)\right)^2 dx$ $Norma := \frac{1}{2} a\sim\big(-a\sim^2 h^2 \cos(\mu\sim_n)\sin(\mu\sim_n) + \mu\sim_n^3 + \mu\sim_n^2 cos(\mu\sim_n) sin(\mu\sim_n) + h^2 a\sim^2 \mu\sim_n - 2a\sim\mu\sim_n h cos(\mu\sim_n)^2 + 2\mu\sim_n a\sim h\big)/\mu\sim_n$	Обчислимо норму власних функцій
`>Norma:= simplify(subs (cos(mu[n])= subs(lambda= (mu[n]/a)^2, res_cos), Norma));`	$Norma := = \frac{1}{2} a\sim\left(2a\sim h + \mu\sim_n{}^2 + h^2 a\sim^2\right)$	Спростимо результат
`> sol0:= dsolve(eq0,y0(x)); assign(sol0); simplify (value(eq0));`	$sol0 := y0(x) = \_C1x + \_C3$ $0 = 0$	Перевіримо значення $\lambda = 0$. Визначник не дорівнює нулю, отже, можемо мати тільки тривіальний розв’язок

Продовження табл. 4.2

Оператор	Отриманий розв'язок	Коментар
`> y1_0:=diff(y0(x),x);`	$y1\_0 := \_C1$	
`> eq1_0:=y1_0+h*subs (x=0,y0(x));eq2_0:= y1_0+h*subs(x=a,y0(x));`	$eq1\_0 := \_C1 + h\_C3$ $eq2\_0 := \_C1 + h(\_C1a\sim + \_C3)$	
`>A0:=linalg[genmatrix] ({eq1_0,eq2_0},{_C1, _C3}); Delta0:=simplify (linalg[det](A0));`	$A0 := \begin{bmatrix} 1 + a\sim h & h \\ 1 & h \end{bmatrix}$ $\Delta 0 := a\sim h^2$	Виходить, число $\lambda = 0$ не є власним значенням задачі.

Таблиця 4.3 – Варіанти завдань

Варіант	Знайти власні значення й власні функції крайової задачі
1	$y'' + \lambda \cdot y = 0,\ y(0) = 0,\ y(L) = 0, x \in [0, L]$
2	$y'' + \lambda \cdot y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(L) + h \cdot y(L) = 0,\ \ \ x \in [0, L],\ \ h > 0$
3	$y'' + \lambda \cdot y = 0,\ \ y(L) = 0,\ \ -y'(0) + h \cdot y(0) = 0,\ \ \ x \in [0, L]$
4	$y'' + \lambda \cdot y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(L) = 0,\ \ \ x \in [0, L]$
5	$y'' + \lambda \cdot y = 0,\ \ y'(0) = 0,\ y(L) = 0,\ \ \ x \in [0, L]$
6	$y'' + \lambda \cdot y = 0,\ \ y'(0) = 0,\ y'(L) = 0,\ \ \ x \in [0, L]$
7	$y'' + \lambda \cdot y = 0,\ \ y'(0) = 0,\ \ \ y'(L) + h \cdot y(L) = 0,\ \ x \in [0, L]$
8	$y'' + \lambda \cdot y = 0,\ \ y'(0) = 0,\ \ \ y'(L) + h \cdot y(L) = 0,\ \ x \in [0, L],\ h > 0$
9	$y'' + \lambda \cdot y = 0,\ \ -y'(0) + h \cdot y(0) = 0,\ \ y'(L) + h \cdot y(L) = 0,$ $x \in [0, L],\ h > 0$
10	$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\lambda}{x}y=0,\ \ y(a) = 0,\ \ y(b) = 0,\ \ x \in [a, b],\ \ a \neq 0,\ b \neq 0$
11	$\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\lambda}{x}x^2 y=0,\ \ y(a) = 0,\ \ y(b) = 0,\ \ x \in [a, b],\ \ a \neq 0,\ b \neq 0$
12	$y'' + \lambda \cdot y = 0,\ \ y(-L) = 0,\ \ y(L) = 0,\ \ x \in [-L, L]$
13	$y'' + \lambda \cdot y = 0,\ \ y'(-L) = 0,\ \ y'(L) = 0,\ \ x \in [-L, L]$
14	$y'' + \lambda \cdot y = 0,\ \ -y'(L) + h \cdot y(-L) = 0,\ \ y'(L) + h \cdot y(L) = 0,\ \ \ x \in [-L, L],\ h > 0$
15	$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\lambda}{x}y=0,\ \ \ y'(a) = 0,\ \ \ y'(b) = 0,\ \ x \in [a, b],\ \ a \neq 0,\ b \neq 0$

4.4 Зміст звіту

Звіт має містити:

– назву роботи;
– мету роботи;
– дані варіанта (табл.4.3) за вказівкою викладача;
– програму розв’язання задачі Штурма – Ліувілля;
– висновки.

4.5 Контрольні запитання та завдання

1. Яке диференціальне рівняння відноситься до лінійних?
2. У чому суть принципу суперпозиції під час розв’язання однорідних лінійних диференціальних рівнянь?
3. Що являє собою характеристичне рівняння?
4. Що називають параметром відділення?
5. Які задачі відносяться до задач Штурма-Ліувілля?
6. Що таке граничні умови?
7. Якими граничними умовами характеризуються регулярна та нерегулярна задачі Штурма-Ліувілля?
8. Що таке власне число?
9. Що таке власна функція?
10. Як записується умова нормування функції?
11. Які основні властивості власних значень та власних функцій?
12. Який алгоритм розв’язання задачі Штурма-Ліувілля?

ТЕМА 5 ОСНОВНІ РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ: МЕТОД ФУР'Є В ОДНОРІДНИХ ЗАДАЧАХ

До основних рівнянь математичної фізики звичайно відносять ***рівняння Лапласа***:

$$\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3^2}=\Delta u(x_1,x_2,x_3)=0 \qquad (5.1)$$

яке зустрічається в задачах електростатики, магнітостатики, в стаціонарних задачах поширення хвиль, гідро- і аеродинаміці, теорії теплопровідності, теорії масопереносу, теорії пружності тощо. Рівняння Лапласа має задовольняти потенціал сил тяжіння й сил взаємодії зарядів у всіх точках простору, потенціал швидкості безвихорного потоку рідини, що не стискається, температури в однорідному тілі, потенціал електромагнітного поля, концентрацію речовини, що дифундує, тощо.

Рівняння Пуасона:

$$\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3^2}=-f(x_1,x_2,x_3) \qquad (5.2)$$

зустрічається у задачах з розподіленими внутрішніми джерелами (наприклад – розподілений у просторі заряд), у стаціонарних задачах тепломасоперенесення тощо.

Хвильове рівняння:

$$\Delta u(x_1,x_2,x_3,t)-\frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial t^2}=-f(x_1,x_2,x_3,t), \qquad (5.3)$$

яке характерно для поширення хвиль різної природи (електромагнітні, звукові й ультразвукові й ін.).

Рівняння теплопровідності Фур'є або рівняння тепломасоперенесення:

$$\Delta u(x_1,x_2,x_3,t)-\frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial t}=-f(x_1,x_2,x_3,t), \qquad (5.4)$$

яке зустрічається в рівняннях теплопровідності, дифузії, теорії напівпровідників, теорії ядерних реакторів тощо.

Рівняння Гельмгольца:

$$\Delta u(x_1, x_2, x_3) + k^2 u(x_1, x_2, x_3) = -f(x_1, x_2, x_3), \qquad k = const, \qquad (5.5)$$

де $k = \omega / v$ – хвильове число.

Це рівняння описує амплітуди сталих періодичних коливань заданої частоти.

Рівняння Шредингера:

$$\Delta\psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\big(E - V(x)\big)\psi(x) = 0\,, \qquad (5.6)$$

де $\psi(x)$ – хвильова функція;

m – маса частки;

E – енергія частки;

$V(x)$ – потенціал зовнішнього силового поля;

ħ – стала Планка (ħ $= 1{,}054 \cdot 10^{-27}$ ерг· с).

Це одне з рівнянь квантової механіки.

Рівняння поширення хвиль у середовищах з поглинанням енергії:

$$\Delta u(x_1, x_2, x_3, t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t^2} - b\frac{\partial u(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} -$$
$$-c \cdot u(x_1, x_2, x_3, t) = -f(x_1, x_2, x_3, t)\,. \qquad (5.7)$$

Всі перераховані рівняння є лінійними рівняннями в частинних похідних другого порядку. Ці рівняння стали вже класичними рівняннями математичної фізики. З іншими рівняннями, що зустрічаються в задачах математичної фізики, можна ознайомитися в [1].

Щоб повністю охарактеризувати деякий фізичний процес, крім вище наведених рівнянь, необхідно задати початковий стан процесу, який розглядається, – *початкові умови* і режим на межі області, у якій відбувається процес, – *граничні умови*. Математично це пов'язано з наявністю багатьох розв’язків диференціальних рівнянь. Тому, щоб виділити розв’язок, який реально описує досліджуваний процес, необхідно задати додаткові умови. Такими додатковими умовами і є *крайові умови – початкові й граничні умови.* Відповідні задачі називаються *крайовими задачами.* Для диференціальних рівнянь розрізнюють три основні типи крайових задач:

1. ***Задача Коші*** для рівнянь гіперболічного й параболічного типів: задаються початкові умови, областю дослідження процесу (область зміни аргументів задачі) зазвичай є R^n (n–вимірний дійсний простір) із межею S; граничні умови відсутні.

Так для рівняння коливань (5.3) задача Коші ставиться у такий спосіб: знайти функцію $u(x_1, x_2, x_3, t) \in C^{(2)}(t > 0) \cap C^{(1)}(t \geq 0)$, що задовольняє дане рівняння у напівпросторі $t > 0$ та початкові умови при $t = +0$:

$$u(x_1, x_2, x_3, t)|_{t=0} = u_0(x_1, x_2, x_3) \ ,$$

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x_1, x_2, x_3). \qquad (5.8)$$

При цьому необхідно, щоб ці початкові умови були безперервними та могли диференціюватися:

$$f(x_1, x_2, x_3, t) \in C(t > 0),$$

$$u_0(x_1, x_2, x_3) \in C^{(1)}(R^{(n)}),$$

$$u_1(x_1, x_2, x_3) \in C(R^n).$$

Для рівняння теплопровідності або тепломасоперенесення (5.4) задача Коші ставиться в такий спосіб: знайти функцію

$$u(x_1, x_2, x_3, t) \in C^{(2)}(t > 0) \cap C(t \geq 0),$$

що задовольняє дане рівняння в напівпросторі $t > 0$ й початкову умову при $t = +0$, тобто:

$$u(x_1, x_2, x_3, t)|_{t=0} = u_0(x_1, x_2, x_3). \qquad (5.9)$$

При цьому необхідно, щоб

$$f(x_1, x_2, x_3, t) \in C(t > 0) \ ,$$

$$u_0(x_1, x_2, x_3) \in C(R^{(n)}).$$

2. ***Крайова задача*** для рівнянь еліптичного типу: задаються граничні умови на межі S, початкові умови не задаються.

Так для рівнянь (5.1, 5.2) і стаціонарного рівняння тепломасоперенесення крайова задача ставиться у такий спосіб: знайти функцію

$$u(x_1, x_2, x_3) \in C^{(2)}(G) \cap C^{(1)}(\bar{G}),$$

що задовольняє дані рівняння у деякій області G ($\bar{G}$ - її замикання) і граничну умову на межі S виду:

$$[\alpha \cdot u(x_1, x_2, x_3) + \beta \frac{\partial u(x_1, x_2, x_3)}{\partial n}]|_S = \nu(x_1, x_2, x_3) \tag{5.10}$$

де α, β, ν – задані безперервні функції на межі S, причому $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$.

Виділяють такі *три типи граничних умов* (5.10):

Граничні умови першого роду ($\alpha = 1, \beta = 0$):

$$u(x_1, x_2, x_3)|_S = u_0(x_1, x_2, x_3). \tag{5.11}$$

Граничні умови другого роду ($\alpha = 0, \beta = 1$):

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, x_3)}{\partial n}|_S = u_1(x_1, x_2, x_3). \tag{5.12}$$

Граничні умови третього роду ($\alpha \geq 0, \beta = 1$):

$$[\alpha \cdot u(x_1, x_2, x_3) + \beta \frac{\partial u(x_1, x_2, x_3)}{\partial n}]|_S = u_2(x_1, x_2, x_3) \tag{5.13}$$

Відповідні крайові задачі називаються *крайовими задачами першого, другого й третього роду.*

Для рівнянь Лапласа (5.1) й Пуасона (5.2) крайова задача першого роду називається *внутрішньою задачею Діріхле*. Крайова задача другого роду називається *внутрішньою задачею Неймана*. Крайова задача третього роду називається *внутрішньою третьою крайовою задачею.*

Для необмеженої області D^* (зовнішньої стосовно поверхні S) аналогічно визначаються так звані *зовнішні крайові задачі*. Відмінність полягає в тому, що крім граничної умови (5.10) на межі S, задаються ще й умови на нескінченності – обмеженості (або регулярності). Відзначимо, що клас задач може бути істотно розширений. Більш докладно див. [1, 2].

Як допоміжний матеріал наведемо запис оператора Лапласа в деяких спеціальних системах координат, який часто зустрічається.

Полярна система координат. Координатна поверхня: коло, радіуса r із центром координат 0; кут повороту φ. Оператор Лапласа записується у вигляді:

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Зв'язок з декартовою системою координат такий: $x = r \cdot cos\varphi,\ y = r \cdot sin\varphi,\ z = 0$.

Циліндрична система координат. Координатні поверхні: кругові циліндри з віссю обертання $0z$; площини, перпендикулярні осі $0z$; площини, що проходять через вісь $0z$. Оператор Лапласа в циліндричній системі координат записується так:

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Зв'язок з декартовою системою координат такий: $x = r \cdot cos\varphi,\ y = r \cdot sin\varphi,\ z = z$.

Сферична система координат. Координатні поверхні: сфери із центром 0 і радіусом ρ; кругові конуси з вершиною 0, їх утворюючі становлять із віссю обертання кут θ; напівплощини, що проходять через $0z$ під кутом φ до площини $0xz$. Оператор Лапласа у сферичній системі координат записується так:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\rho^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Зв'язок з декартовою системою координат такий: $x = \rho \cdot sin\theta \cdot cos\varphi$, $y = \rho \cdot sin\theta \cdot sin\varphi$, $z = \rho \cdot cos\theta$.

3. ***Мішана задача*** для рівнянь гіперболічного й параболічного типів. У цьому випадку задаються як початкові, так і граничні умови.

Так для рівнянь гіперболічного типу (5.3, 5.7) потрібно знайти функцію $u(x_1, x_2, x_3, t) \in C^{(2)}(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$, що задовольняє (5.3) або (5.7), початкову умову (5.8) і граничну умову (5.10). При цьому мають бути виконані умови:

– *гладкості*:

$$f(x_1, x_2, x_3, t) \in C(G), \quad u_0(x_1, x_2, x_3) \in C^{(1)}(\bar{G}),$$

$$u_1(x_1, x_2, x_3) \in C(\bar{G}), \ \ \nu \in C(S \times [0, T]),$$

де T – висота циліндра області задавання рівнянь (5.3) і (5.7);
– *узгодженості*:

$$\left[\alpha \cdot u_0(x_1, x_2, x_3, t) + \beta \frac{\partial u_0(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial n}\right]|_S = \nu(x_1, x_2, x_3, t)|_{t=0}.$$

Тут прийнято, що область G, де відбувається процес, обмежена бічною поверхнею $S \times [0, T]$ й двома основами: нижньою $\bar{G} \times [0]$ і верхньою $\bar{G} \times [T]$.

Аналогічно для рівнянь параболічного типу (5.4) мішана задача ставиться так: знайти функцію $u(x_1, x_2, x_3, t) \in C^{(2)}(t > 0) \cap C(t \geq 0)$, що задовольняє дане рівняння (5.4), початкову умову (5.9) і граничну умову (5.10).

Як приклади розв'язання задач математичної фізики, розглянемо застосування методу Фур'є для розв'язання однорідних крайових задач (однорідні рівняння й однорідні граничні умови) з використанням системи аналітичних обчислень MAPLE .

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5
МЕТОД ФУР'Є В ОДНОРІДНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

5.1 Мета роботи

За допомогою універсального математичного пакета Maple навчитися знаходити розв'язки деяких однорідних задач математичної фізики (задачі гіперболічного й параболічного типів) при заданих початкових і граничних умовах.

5.2 Підготовка до виконання лабораторної роботи

При підготовці до виконання лабораторної роботи слід ознайомитися з методичними вказівками до даної лабораторної роботи, повторити лекційний матеріал за даною темою, виконати завдання до практичних занять за даною темою, виконати й захистити попередні лабораторні роботи. Для виконання лабораторної роботи скористатися системою аналітичних обчислень універсального математичного пакета Maple.

Відповідно до отриманого завдання під час виконання лабораторної роботи необхідно створити програмні засоби за наведеними прикладами розв’язання відповідної крайової задачі за допомогою математичного пакета Maple.

5.2.1 Алгоритм розв’язання деяких однорідних крайових задач може бути таким:

1. З використанням операторів пакета Maple записати поставлену задачу у вигляді диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку для функції двох змінних.

2. Якщо необхідно, задати початкові умови для поставленої задачі (виконується тільки для рівнянь гіперболічного й параболічного типів).

3. Сформувати граничні умови.

4. Виконати відділення змінних, сформувати систему простих диференціальних рівнянь із цими розділеними змінними.

5. Окремо вирішити граничну задачу Штурма-Ліувілля — визначити власні значення й власні функції задачі (Тема лабораторної роботи 4).

6. Виконати нормування власних функцій.

7. У задачах гіперболічного й параболічного типів знайти загальний розв’язок другого диференціального рівняння.

8. Подати розв’язок початкової задачі у вигляді нескінченного ряду.

9. Враховуючи початкові умови, визначити коефіцієнти цього ряду, використовуючи властивість шматково-безперервних функцій розвинення у ряд Фур'є, при цьому коефіцієнти ряду визначаються так:

$$A_k = \int_0^l \rho(x) \cdot u_0(x) \cdot X_k(x) dx,$$

$$B_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^l \rho(x) \cdot u_1(x) \cdot X_k(x) dx.$$

10. Сформувати остаточний розв’язок поставленої крайової задачі.

5.2.2 Розв’язок рівняння Лапласа (внутрішньої задачі Діріхле) з заданими граничними умовами, у випадку якщо $f(\varphi)$ безперервна функція, яка диференціюється, надається у вигляді рядка:

$$u = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (N_n \sin(n\varphi) + M_n \cos(n\varphi)) R^n, \qquad (5.14)$$

де $M_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi)\, d\varphi;$

$N_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi;$

$M_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi.$

5.3 Порядок виконання роботи

5.3.1 Виконати дії, зазначені у табл. 5.1 – 5.2.

5.3.2 Розробити програму для розв’язання рівняння тепломасо-перенесення методом відділення змінних відповідно до заданого викладачем варіанта (табл. 5.3). Роботу програми та отриманий результат розв’язання рівняння продемонструвати викладачеві.

5.3.3 Розробити програму для розв’язання хвильового рівняння методом відділення змінних відповідно до заданого викладачем варіанта (табл. 5.4). Роботу програми та отриманий результат розв’язання рівняння продемонструвати викладачеві.

5.3.4 Розробити програму для розв’язання рівняння Лапласа для внутрішньої задачі Діріхле відповідно до заданого викладачем варіанта (табл. 5.6). Роботу програми та отриманий результат розв’язання рівняння продемонструвати викладачеві.

5.3.5 Робочі програми за пп. 5.3.2 – 5.3.4 зберегти на носії інформації.

Таблиця 5.1 – Програма розв’язання однорідного рівняння тепломасо-перенесення $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0$ з початковими $u(x,0) = \phi(x) = \frac{c \cdot x \cdot (x-L)}{L^2}$ і граничними умовами $u(0,t) = 0, u(L,t) = 0.$

Оператор	Отриманий результат і коментар
`> restart; with(student):` `> eq:=diff (u(x,t),t)-a^2* diff(u(x,t), x,x)=0; 0<x,x<L,t>0;`	$eq := \left(\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\right) - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = 0$ $0 < x, x < L, 0 < t$ Коментар: Підключення пакета „студент” та запис початкового рівняння з межами відрізку та часовим інтервалом
`> init_c:= u(x,0) =phi(x);`	$init\_c := u(x,0) = \phi(x)$ Коментар: У загальному виді запис початкової умови

Продовження табл. 5.1

Оператор	Отриманий результат
`> bound_c:= u(0,t)=0, u(L,t)=0;`	$bound\_c := u(0,t) = 0, u(L,t)$ Коментар: Запис граничних умов
`> phi:= x->c*x*(L-x)/L^2;`	$$\phi := x \rightarrow \frac{c \cdot x \cdot (L-x)}{L^2}$$ Коментар: Підстановка значення заданої початкової умови
`> res:= pdsolve (eq,HINT=`*`);`	$$res := (u(x,t) = \_F1(x) * \_F2(t))$$ $$\& where$$ $$\left[\left\{\frac{d}{dt}\_F2(t) = a^2\_c_1\_F2(t),\ \frac{d^2}{dx^2}\_F1(x) - \_c_1\_F1(x)\right\}\right]$$ Коментар: Розв’язок заданого диференціального рівняння в частинних похідних методом розділення змінних за допомогою спеціальної команди
`> res1:= op(2,res);`	$$res1 :=$$ $$\left[\left\{\frac{d}{dt}\_F2(t) = a^2\_c_1\_F2(t),\ \frac{d^2}{dx^2}\_F1(x) - \_c_1\_F1(x)\right\}\right]$$ Коментар: Створення з попереднього результату системи простих диференціальних рівнянь
`> s1:= op(1,res1[1]); s2:= op(2,res1[1]);`	$$s1 := \frac{d^2}{dx^2}\_F1(x) = \_c_1\_F1(x)$$ $$s2 := \frac{d}{dt}\_F2(t) = a^2\_c_1\_F2(t)$$ Коментар: Виділення окремих простих диференціальних рівняннь із системи диференціальних рівнянь для змінних x та t.
`> eq1:= lhs(s1)+ lambda*_F1(x);`	$$eq1 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\_F1(x)\right) + \lambda\_F1(x)$$ Коментар: Формування відповідної задачі Штурма-Ліувілля тільки для того з рівнянь, у якому є залежність від просторової координати

Продовження табл. 5.1

Оператор	Отриманий результат і коментар
`> assume (lambda>0): dsolve (eq1,_F1(x));`	$\_F1(x) = \_C1\, sin(\sqrt{\lambda}\, x) + \_C2 cos(\sqrt{\lambda}\, x)$ Коментар: Запис загального розв'язку крайової задачі для $\lambda > 0$
`> _F1:=unapply (rhs(%),x); e1:=_F1(0)=0; e2:=_F1(L)=0; sist:={e1,e2};`	$\_F1{:=}\, x \to \_C1\, sin(\sqrt{\lambda}\, x) + \_C2 cos(\sqrt{\lambda}\, L) = 0$ $e1 \coloneqq \_C2 = 0$ $e2{:=}\, \_C1\, sin(\sqrt{\lambda}\, L) + \_C2 cos(\sqrt{\lambda}\, L) = 0$ $sist \coloneqq$ $\left\{ \begin{matrix} \_C2 = 0 \\ \_C1\, sin(\sqrt{\lambda}\, L) + \_C2 cos(\sqrt{\lambda}\, L) = 0 \end{matrix} \right\}$ Коментар: Для заданих граничних умов формування системи однорідних рівнянь
`> A:=linalg [genmatrix] (sist,{_C1,_C2}); > Delta:=convert (linalg[det](A), trig);`	$A \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ sin(\sqrt{\lambda}\, L) & cos(\sqrt{\lambda}\, L) \end{bmatrix}$ $\Delta{\coloneqq} -sin(\sqrt{\lambda}\, L)$ Коментар: Розрахунок визначника системи
`> _EnvAllSolutions := true: solve(Delta, lambda);`	$\frac{\pi^2 \_Z1{\sim}^2}{L^2}$ Коментар: З умови рівності нулю визначника знаходимо власні значення крайової задачі
`> subs(_Z1='k',%): > ev:= unapply(%,k);`	$ev \coloneqq k \to \frac{\pi^2 k^2}{L^2}$ Коментар: Присвоєння невизначеним коефіцієнтам сталих цілих значеннь
`> _F1:='_F1': assume(k,posint): subs(lambda= ev(k),eq1);`	$\left(\frac{d^2}{dx^2}\_F1(x)\right) + \frac{\pi^2 k{\sim}^2 \_F1(x)}{L^2}$ Коментар: Визначання власних функцій

Продовження табл. 5.1

Оператор	Отриманий результат і коментар
`> dsolve({%, _F1(0)=0, _F1(L)=0}, _F1(x));`	$\_F1(x) = \_C1 sin\left(\frac{\pi k\sim x}{L}\right)$ Коментар: Знаходження функцій $\_F1(x)$
`> rhs(%)/sqrt(int(rhs(%)^2,x=0..L));`	$\frac{\_C1 sin\left(\frac{\pi k\sim x}{L}\right)\sqrt{2}}{\sqrt{\_C1^2 L}}$ Коментар: Нормування функції, використовуючи визначення «норми» базисних функцій

`> simplify(%,radical,symbolic):`
 `> ef:= unapply(%,(k,x));`
 `> ev(k);`
 `ef(k,x);`
	$ef := (k\sim, x) \rightarrow \frac{sin\left(\frac{\pi k\sim x}{L}\right)\sqrt{2}}{\sqrt{L}}$
	 $\frac{\pi^2 k\sim^2}{L^2}$
	 $\frac{sin\left(\frac{\pi k\sim x}{L}\right)\sqrt{2}}{\sqrt{L}}$
	 Коментар: Подання розв'язоку задачі Штурма – Ліувілля у виді набору власних значень і відповідних нормованих власних функцій

`> eq2:= lhs(s2)+a^2*ev(k)*_F2(t);` `> dsolve(eq2,_F2(t));`	$eq2 := \left(\frac{d}{dt}\_F2(t)\right) + \frac{a^2\pi^2 k\sim^2 \_F2(t)}{L^2}$ $\_F2(t) = \_C1 e^{\left(\frac{a^2\pi^2 k\sim^2 t}{L^2}\right)}$ Коментар: Розв'язок другого рівняння (змінна t), використовуючи відомі власні значення
`>U:=(x,t)-> Sum(C(k)*exp(-ev(k)*a^2*t)*ef(k,x),k=1..infinity);` `U(x,t);`	$U := (x,t) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} C(k) e^{(-ev(k)a^2 t)} ef(k,x)$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C(k\sim) e^{\left(\frac{a^2\pi^2 k\sim^2 t}{L^2}\right)} sin\left(\frac{\pi k\sim x}{L}\right)\sqrt{2}}{\sqrt{L}}$ Коментар: Подання загального розв'язку задачі у вигляді ряда, використовуючи принцип суперпозиції.

Продовження табл. 5.1

Оператор	Отриманий результат і коментар
`> value(subs (u=U, init_c));`	$$\sum_{k\sim=1}^{\infty} \frac{C(k\sim)sin\,(\frac{\pi k\sim x}{L})\,\sqrt{2}}{\sqrt{L}} = \frac{c\cdot x\cdot (L-x)}{L^2}$$
`> assume(L>0): *Ck:= Int((phi(x)) *ef(k,x), x=0..L);Ck:= value(Ck);`	$$Ck := \int_0^L \frac{c\cdot x\cdot (L\sim -x)sin\left(\frac{\pi k\sim x}{L}\right)\sqrt{2}}{L^{(5/2)}}dx$$ $$Ck := -\frac{2\sqrt{L\sim}\, c\,\sqrt{2}((-1)^{k\sim}-1)}{\pi^3 k\sim^3}$$
`> C:=unapply (Ck,k);`	$$C := k\sim \to -\frac{2\sqrt{L\sim}\, c\,\sqrt{2}((-1)^{k\sim}-1)}{\pi^3 k\sim^3}$$ Коментар: Коефіцієнти ряду визначаємо відповідно до теореми розвинення у ряд із заданих початкових умов
`> u(x,t)= U(x,t);`	$$u(x,t) =$$ $$= \sum_{k\sim=1}^{\infty}\left(-\frac{4c((-1)^{k\sim}-1)e^{\left(-\frac{a^2\pi^2k\sim^2t}{L\sim^2}\right)}sin\left(\frac{\pi k\sim x}{L\sim}\right)}{\pi^3k\sim^3}\right)$$ Коментар: Запис формального розв'язку поставленої задачі
`> subs(k= 2*m+1, op(1, U(x,t))); assume(m, integer): > simplify (%): factor(%);`	$$-\frac{4c\big((-1)^{(2m+1)}-1\big)e^{\left(-\frac{a^2\pi^2(2m+1)^2t}{L\sim^2}\right)}sin\left(\frac{\pi(2m+1)x}{L\sim}\right)}{\pi^3(2m+1)^3}$$ $$\frac{8ce^{\left(-\frac{a^2\pi^2(2m+1)^2t}{L\sim^2}\right)}sin\left(\frac{\pi(2m+1)x}{L\sim}\right)}{\pi^3(2m+1)^3}$$ Коментар: Деякі тривіальні перетворення
`> u(x,t)= Sum(%,m= 0.. infinity);`	$$u(x,t) = \sum_{m\sim=0}^{\infty}\left(\frac{8ce^{\left(-\frac{a^2\pi^2(2m\sim+1)^2t}{L\sim^2}\right)}sin\left(\frac{\pi(2m\sim+1)x}{L\sim}\right)}{\pi^3(2m\sim+1)^3}\right)$$ Коментар: Запис отриманої функції

Продовження табл. 5.1

Оператор	Отриманий результат і коментар
`> sol:= subs (a='a', k='k', L='L', m='m',%);`	$$sol := u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{8ce^{\left(-\frac{a^2\pi^2(2m+1)^2t}{L^2}\right)}sin\left(\frac{\pi(2m+1)x}{L}\right)}{\pi^3(2m+1)^3}\right)$$ Коментар: Запис розв'язку задачі в остаточному виді. Розв'язок подано у виді ряда, що швидко збігається з декрементом загасання $\frac{a^2\pi^2(2m\sim+1)^2}{L^2}$.

Таблиця 5.2 – Програма розв'язку однорідного рівняння коливань в обмеженому просторі $\frac{\partial^2 u(x,t)}{v^2\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \;\; 0 < x < L,\; t > 0$ з початковими $u(x,0) = \varphi(x) = 0,\; \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) = x$ і однорідними граничними умовами $u(0,t) = 0, u(L,t)$.

Оператор	Отриманий результат
`> restart; with(student): eq:=diff(u(x,t), t,t)/v^2- diff(u(x,t), x,x)=0; 0<x,x<L,t>0;`	$$eq := \frac{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}}{v^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right) = 0$$ $0 < x, \quad x < L, \quad 0 < t$ Коментар: Підключення пакету (student) і запис диференціального рівняння коливань, що розвиваються в обмеженому координатному просторі
`> init_c:= u(x,0)=0, D[2](u(x,0))= psi(x);` `> psi(x):=x;`	$init\_c{:=}u(x{,}0){=}0$ $D_2(u)(x,0) = \psi(x)$ $\psi(x) := x$ Коментар: Запис початкових умов
`> bound _c:=u(0,t)=0, u(L,t)=0;`	$bound\_c := u(0,t) = 0$ $u(L,t) = 0$ Коментар: Запис граничних умов
`> subs(u(x,t)= X(x)*T(t),eq);` `> expand (lhs(%)/ X(x)/T(t))=0;`	$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(X(x)T(t)\right)}{v^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(X(x)T(t)\right)\right) = 0$$

Продовження табл. 5.2

Оператор	Отриманий результат і коментар
	$$\frac{\frac{d^2}{dt^2}T(t)}{T(t)\nu^2}-\frac{\frac{d^2}{dx^2}X(x)}{X(x)}=0$$ Коментар: Відокремлення змінних
`> s1:= op(1,lhs(%))= -lambda; s2:=op(2, lhs(%%))= lambda;`	$$s1 := \frac{\frac{d^2}{dt^2}T(t)}{T(t)\nu^2}=-\lambda$$ $$s2 := -\frac{\frac{d^2}{dx^2}X(x)}{X(x)}=\lambda$$ Коментар: Формування двох звичайних диференціальних рівняннь з розділеними змінними
`> assume (lambda>0): dsolve (s2,X(x)); > X:=unapply (rhs(%),x);`	$$X(x)=\_C1sin\left(\sqrt{\lambda\sim}\,x\right)+\_C2cos\left(\sqrt{\lambda\sim}\,x\right)$$ $$X:=x\to\_C1sin\left(\sqrt{\lambda\sim}\,x\right)+\_C2cos\left(\sqrt{\lambda\sim}\,x\right)$$ Коментар: Для рівняння, що має просторову залежність, виділення задачі Штурма-Ліувілля й його розв’язок при заданих граничних умовах
`> e1:=X(0)=0; e2:=X(L)=0; sist:= {e1,e2};`	$$e1 := \_C2=0$$ $$e2:=\_C1sin\left(\sqrt{\lambda\sim}\,L\right)+\_C2cos\left(\sqrt{\lambda\sim}\,L\right)=0$$ $$sist := \left\{\begin{matrix}\_C1sin\left(\sqrt{\lambda\sim}\,L\right)+\_C2cos\left(\sqrt{\lambda\sim}\,L\right)=0\\ \_C2=0\end{matrix}\right\}$$ Коментар: Формування системи рівнянь із заданих граничних умов
`> A:=linalg [genmatrix] (sist,{_C1, _C2}); > Delta:= convert (linalg[det] (A),trig);`	$$A := \begin{bmatrix}cos\left(\sqrt{\lambda\sim}\,L\right) & sin\left(\sqrt{\lambda\sim}\,L\right)\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$ $$\Delta := -sin\left(\sqrt{\lambda\sim}\,L\right)$$ Коментар: Розрахунок визначника цієї системи
`> _EnvAll Solutions:= true:`	$$\frac{\pi^2\_Z1\sim^2}{L^2}$$

Продовження табл. 5.2

Оператор	Отриманий результат
solve(Delta, lambda); **>subs (_Z1=k,%);** > **ev:= unapply(%,k);**	$\frac{\pi^2 k^2}{L^2}$ $ev := k \to \frac{\pi^2 k^2}{L^2}$ Коментар: Прирівняння визначника нулю – це буде рівняння для визначення власних значень і його розв'язок.
> **assume (k,posint);** > **X:='X';** **subs(lambda= ev(k),s2);**	$X := X$ $-\frac{\frac{d^2}{dx^2}X(x)}{X(x)} = \frac{\pi^2 k{\sim}^2}{L^2}$ Коментар: Підстановка знайдених власних чисел у рівняння, яке залежить від просторової координати
> **dsolve ({%,X(0)=0, X(L)=0}, X(x));**	$X(x) = \_C1 sin\left(\frac{\pi k{\sim} x}{L}\right)$ Коментар: Визначення власних функції задачі із заданих граничних умов
> **rhs(%)/ sqrt(int (rhs(%)^2, x=0..L));**	$\frac{\_C1 sin\left(\frac{\pi k{\sim} x}{L}\right)\sqrt{2}}{\sqrt{\_C1^2 L}}$ Коментар:Нормування власних функції
> **simplify (%,radical, symbolic):** > **ef:= unapply (%,(k,x)):** > **ev(k);** **ef(k,x);**	$\frac{\pi^2 k{\sim}^2}{L^2}$ $\frac{sin\left(\frac{\pi k{\sim} x}{L}\right)\sqrt{2}}{\sqrt{L}}$ Коментар: Подання власних значеннь і власних функції у виді ортонормованого базису
> **s1:= lhs(s1)= -ev(k);** > **dsolve ({s1,T(0)=0}, T(t));**	$s1 := \frac{\frac{d^2}{dt^2}T(t)}{T(t)v^2} = -\frac{\pi^2 k{\sim}^2}{L^2}$ $T(t) = \_C1 sin\left(\frac{\pi k{\sim} v t}{L}\right)$ Коментар: Розв'язок другого диференціального рівняння з урахуванням однієї з початкових умов

Продовження табл. 5.2

Оператор	Отриманий результат
`> spr:=Sum (C(k)*op(2, rhs(%))*ef (k,x),k=1.. infinity);`	$$spr := \sum_{k\sim=1}^{\infty} \frac{C(k\sim) sin\left(\frac{\pi k\sim v t}{L}\right) sin\left(\frac{\pi k\sim x}{L}\right)\sqrt{2}}{\sqrt{L}}$$ Коментар: Формування розв'язку початкової задачі у виді нескінченного ряду
`> value (subs(t=0, diff(spr,t) ))=psi;`	$$\sum_{k\sim=1}^{\infty} \frac{C(k\sim)\cos(0)\pi k\sim v sin\left(\frac{\pi k\sim x}{L}\right)\sqrt{2}}{\sqrt{L^{(3/2)}}} = \psi$$ Коментар: Визначення із другої початкової умови (для похідної за часом від шуканої функції) коефіцієнтів розвинення в ряд Фур'є
`> Ck:=Int (ef(k,x), x=0..L)/ev (k)^1/2/v;` `> assume(L>0) :Ck:= simplify (value (Ck));` `> C:=unapply (Ck,k);` `> sol:=spr;`	$$Ck := \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{\pi^2 k\sim^2 v} \int_0^L \frac{sin\left(\frac{\pi k\sim x}{L}\right)\sqrt{2}}{\sqrt{L}}\, dx\right)$$ $$Ck := -\frac{\sqrt{2}\, L\sim^{(3/2)}((-1)^{k\sim}-1)}{2\pi^3 k\sim^3 v}$$ $$C := k\sim - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\, L\sim^{(5/2)}((-1)^{k\sim}-1)}{2\pi^3 k\sim^3 v}$$ $$sol := \sum_{k\sim=1}^{\infty}\left(-\frac{L\sim^2((-1)^{k\sim}-1) sin\left(\frac{\pi k\sim v t}{L\sim}\right) sin\left(\frac{\pi k\sim x}{L\sim}\right)}{\pi^3 k\sim^3 v}\right)$$ Коментар: Отримання формальниого розв'язку задачі у виді нескінченного ряда
`> subs(k=2* m+1,op(1, sol));` `> assume(m, integer); simplify (%);`	$$-\frac{L\sim^2\left((-1)^{(2m+1)}-1\right) sin\left(\frac{\pi(2m+1)vt}{L\sim}\right) sin\left(\frac{\pi(2m+1)x}{L\sim}\right)}{\pi^3(2m+1)^3 v}$$ $$\frac{2L\sim^2 sin\left(\frac{\pi(2m\sim+1)vt}{L\sim}\right) sin\left(\frac{\pi(2m\sim+1)x}{L\sim}\right)}{\pi^3(2m\sim+1)^3 v}$$ Коментар: Виконання деяких тривіальних перетвореннь для остаточного подання

Продовження табл. 5.2

Оператор	Отриманий результат
> **solution:= Sum(%,m=0.. infinity);**	$solution := \sum_{m\sim=0}^{\infty} \left(\frac{2L\sim^2 sin\left(\frac{\pi(2m\sim+1)vt}{L\sim}\right) sin\left(\frac{\pi(2m\sim+1)x}{L\sim}\right)}{\pi^3(2m\sim+1)^3 \nu} \right)$ Коментар: Розв'язок задачі це нескінченний набір гармонік із частотами $\omega_m = \frac{(2m+1)\pi\cdot\nu}{L}$ у виді стоячих хвиль на відрізку $[0, L]$

Таблиця 5.3 – Варіанти завдань (рівняння тепломасоперенесення в обмеженому просторі)

Номер вар.	Рівняння, інтервал, часовий проміжок	Початкові умови	Граничні умови
1	$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - u(x,t)$, $0 < x < g, t > 0$	$u(x,0) = 1$	$u(0,t) = u(g,t) = 0$
2	$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) -$ $-4u(x,t)$, $0 < x < \pi, t > 0$	$u(x,0) = x^2 - \pi x$	$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$
3	$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) -$ $-\beta u(x,t)$, $0 < x < g, t > 0$	$u(x,0) = \varphi(x)$	$u(0,t) = u(g,t) = 0$
4	$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) -$ $-\beta u(x,t)$, $0 < x < g, t > 0$	$u(x,0) = \sin\frac{x\pi}{2g}$	$u(0,t) = u(g,t) = 0$
5	$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t)$, $0 < x < g, t > 0$	$u(x,0) = 0$	$u(0,t) = u(g,t) = 0$
6	$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$ $0 < x < g, t > 0$	$u(x,0) = 1$	$u(0,t) = u(g,t) = 0$

Таблиця 5.4 – Варіанти завдань (хвильові рівняння в обмеженому просторі)

Вар.	Рівняння, відрізок, часовий проміжок	Початкові умови	Граничні умови
1	$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$, $0 < x < \pi, t > 0$	$u(x,0) = 0$ $u_t(x,0) = 0$	$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$
2	$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$, $0 < x < g, t > 0$	$u(x,0) = 0$ $u_t(x,0) = 0$	$u(0,t) = u(g,t) = 0$
3	$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$, $0 < x < 1, t > 0$	$u(x,0) = x + 1$ $u_t(x,0) = 0$	$u(0,t) = u(1,t) = 0$
4	$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + u(x,t)$, $0 < x < g, t > 0$	$u(x,0) = 0$ $u_t(x,0) = \frac{x}{g}$	$u(0,t) = u(g,t) = 0$
5	$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$, $0 < x < g, t > 0$	$u(x,0) = \frac{16}{5}h\left[\left(\frac{x}{g}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{g}\right)^3 + \frac{x}{g}\right]$ $u_t(x,0) = 0$	$u(0,t) = u(g,t) = 0$
6	$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$, $0 < x < g, t > 0$	$u(x,0) = k \cdot x$ $u_t(x,0) = 0$	$u(0,t) = u(g,t) = 0$

5.4 Зміст звіту

Звіт має містити:
– назву роботи;
– мету роботи;
– дані варіанта (з табл. 5.3 – 5.4);
– програми розв’язання хвильового рівняння, рівняння тепломасоперенесення, рівняння Лапласа та отримані розв’язки ;
– висновки.

5.5 Контрольні запитання та завдання

1. Записати рівняння Лапласа.
2. Записати рівняння Пуасона.
3. Записати хвильове рівняння.
4. Записати рівняння тепломасоперенесення.

6. Які задачі відносяться до крайових?
7. Що таке початкові умови?
8. Які є типи крайових задач?
9. Який алгоритм розв’язання крайових задач методом відділення змінних?

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. Курс лекцій: Навч. посібник. – К.:Либідь, 1993.– 248 с.
2. Головенко В. М. Методи математичної фізики при моделюванні процесів у біології та медицині в задачах і прикладах: навч. посіб. / В. М. Головенко; МОН України, Харк. нац. ун-т радіоелектроніки. – Харків : ХНУРЕ, 2010. – 168 с.
3. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. – СПб.:Питер, 2004.– 539 с.
4. Манзон Б.М. Maple V.Power Edition.– М.:Филинъ, 1998. – 240 с.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до лабораторних робіт з дисципліни
„МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В БІОЛОГІЇ ТА МЕДИЦИНІ"
для студентів усіх форм навчання за спеціальністю
163 – „Біомедична інженерія"

Упорядники: Скляр Ольга Ігорівна

Відповідальний випусковий О. Г. Аврунін

Редактор Б. П. Косіковська

Комп'ютерна верстка

План 2019 поз..
Підп.до друку . Формат 60x84 1/16. Спосіб друку – ризографія
Умов. друк. арк. . Облік вид. арк. Тираж 25 прим.
Зам. № . Ціна договірна

ХНУРЕ Україна. 61166, Харків, просп. Науки, 14

Віддруковано у редакційно-видавничому
відділі ХНУРЕ
61166, Харків, просп. Науки, 14