



**Методичні рекомендації до проведення практичних занять**  
з дисципліни  
«Основи механіки твердого тіла»

Дніпро, 2020

## Система збіжних сил.

### Умови рівноваги

**Системою збіжних сил** називається система сил, лінії дії яких сходяться в одній точці (рис. 24).

Рівнодіюча системи збіжних сил дорівнює векторній сумі всіх сил

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k. \quad (14)$$

Якщо тіло під дією системи збіжних сил знаходиться в рівновазі, то її рівнодіюча дорівнює нулеві:

$$\vec{R} = 0. \quad (15)$$

Очевидно, що при рівновазі повинні виконуватися необхідні умови

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^N F_{ky} = 0, \\ \sum_{k=1}^N F_{kz} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Це аналітична форма умов рівноваги збіжної системи сил.

**Висновок.** Для рівноваги збіжної системи сил необхідно і досить, щоб сума проекцій усіх сил, прикладених до тіла, на відповідні осі координат дорівнювала 0.

ПРИКЛАД. Тіло вагою  $\vec{G}$  підвішено на двох нитках. Визначити зусилля (реакції) у нитках (рис. 25, а). Вагою ниток зневажити. Тут  $\alpha$  - кут нахилу ниток до обрію.  $G = 10 \text{ Н}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .

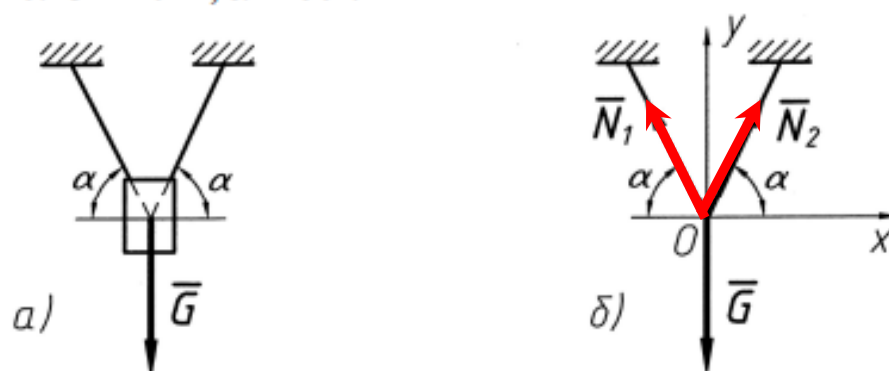


Рис. 25. Тіло, підвішене на нитці

#### АЛГОРИТМ РІШЕННЯ:

- використовуємо принцип звільнення від в'язей (в'язі умовно відкидаємо, а їхні дії заміняємо реакціями  $\vec{N}_1$  і  $\vec{N}_2$ ) (рис. 25, б);
- усі сили переносимо по лінії дії в точку їхнього перетинання  $O$ ;
- проводимо осі координат  $xOy$  (у даному випадку необхідні дві осі, тому що всі сили діють в одній площині  $xOy$ );
- записуємо умови рівноваги:

$$\sum_{k=1}^N F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^N F_{ky} = 0.$$

На підставі умов рівноваги складаємо рівняння рівноваги, з яких знаходимо реакції  $\vec{N}_1$  і  $\vec{N}_2$ :

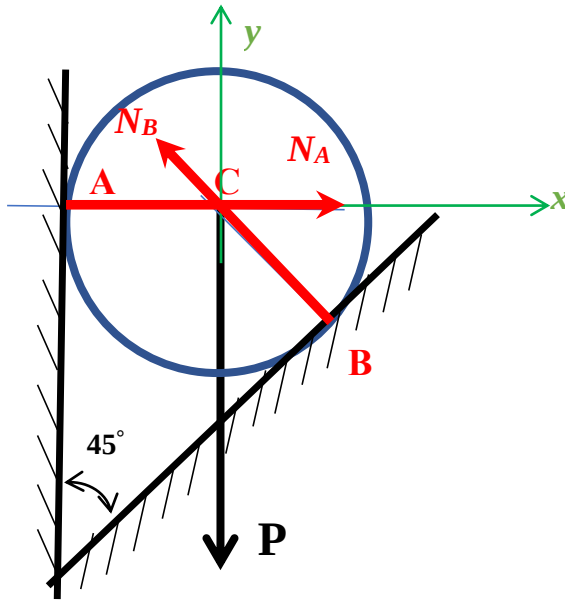
$$\sum_{k=1}^N F_{kx} = 0, \quad -N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^N F_{ky} = 0, \quad -G + N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0.$$

Вирішуючи рівняння, визначаємо:

$$N_1 = N_2 = N, \quad N = \frac{G}{2 \sin \alpha} = \frac{10}{2 \cdot 0,87} = 5,75 \text{ Н}.$$

**ПРИКЛАД** Кілю вагою  $P=10$  кН розташували між вертикальною та похилою площинами, кут між якими складає  $45^\circ$ . Визначити, з якою силою куля діє на похилу площину.



Рішення.

а) Аналітичний метод (за допомогою рівнянь рівноваги)

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0 & \quad N_A - N_B \cdot \cos 45^\circ = 0 \\ \sum F_{iy} = 0 & \quad N_B \cdot \sin 45^\circ - P = 0 \end{aligned}$$

$$N_A = N_B \cdot \cos 45^\circ$$

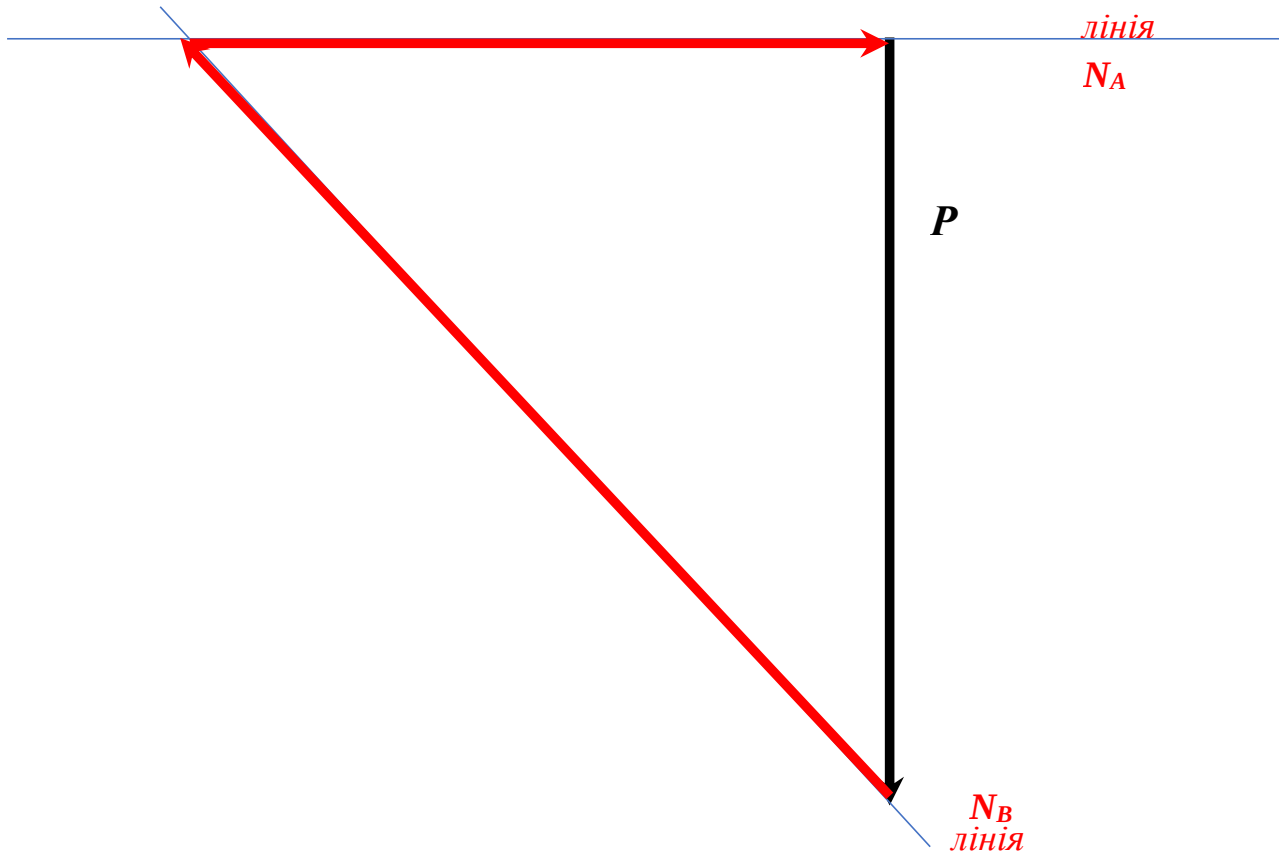
$$N_B \cdot \sin 45^\circ = P$$

$$N_B = P / \sin 45^\circ = 10 / 0.7 = 14.285$$

$$N_A = 14.285 \cdot 0.7 = 10$$

б) Графічний метод (за допомогою побудови силового трикутника)

Для рівноваги збіжної системи тіл необхідно та достатньо, щоб силовий трикутник, побудований на векторах сил, був замкнутий.

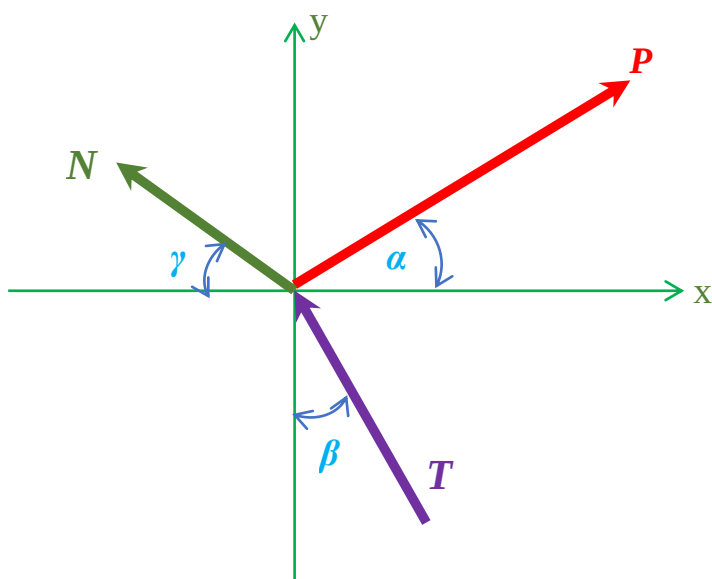


## Додатковий матеріал \*

### 1. Значення тригонометричних функцій стандартних кутів

| $\alpha$       | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ |
|----------------|-----------|------------|------------|------------|------------|
| $\sin(\alpha)$ | 0         | 0.5        | 0.7        | 0.86       | 1          |
| $\cos(\alpha)$ | 1         | 0.86       | 0.7        | 0.5        | 0          |

### 2. Проекція сили на осі координат

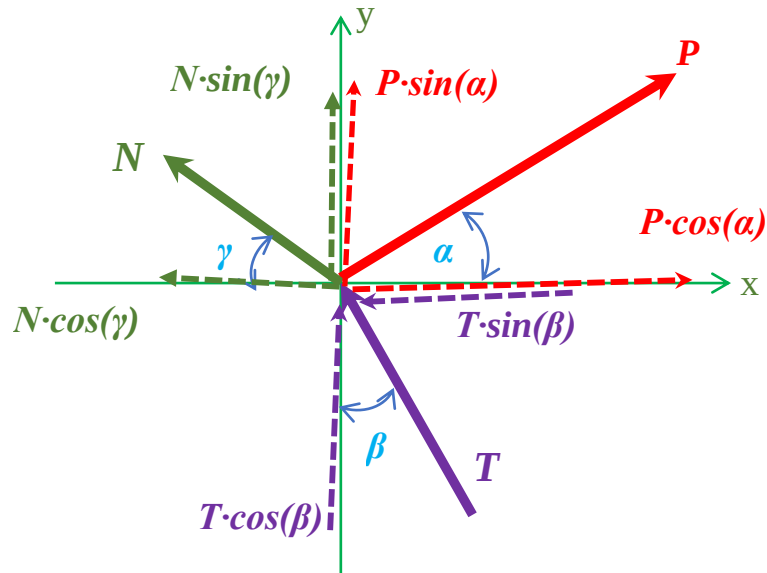


## Додатковий матеріал \*

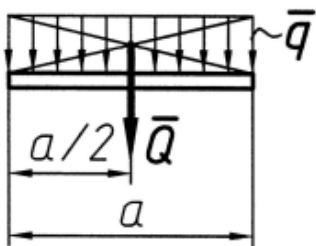
### 1. Значення тригонометричних функцій стандартних кутів

| $\alpha$       | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ |
|----------------|-----------|------------|------------|------------|------------|
| $\sin(\alpha)$ | 0         | 0.5        | 0.7        | 0.86       | 1          |
| $\cos(\alpha)$ | 1         | 0.86       | 0.7        | 0.5        | 0          |

### 2. Проекція сили на осі координат

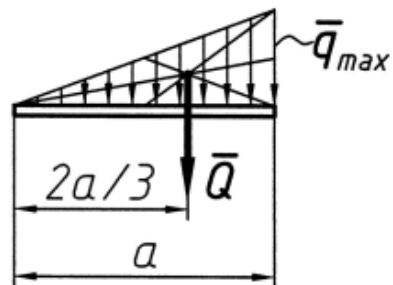


### 3. Розподілене навантаження



Рівномірно розподілене навантаження

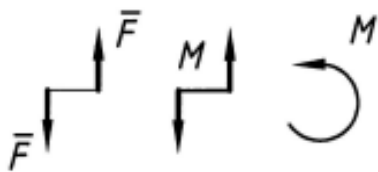
$$Q = aq$$



Нерівномірно розподілене навантаження

$$Q = \frac{1}{2} a q_{\max}$$

### 4. Момент сили відносно центру.

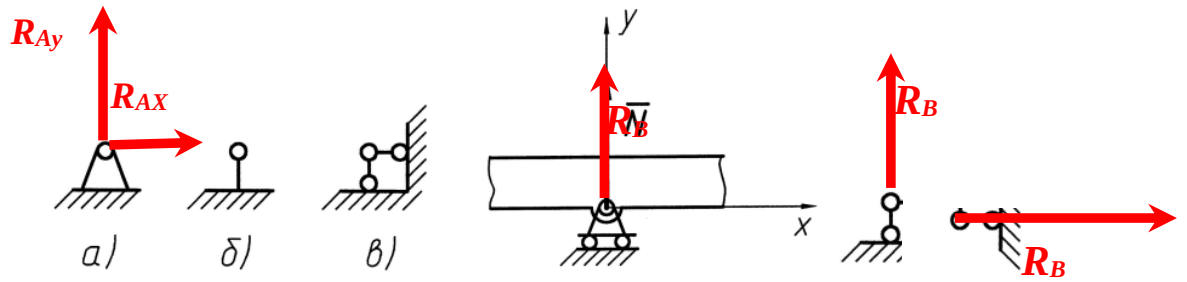


$$M_o = \pm F \cdot h.$$

## 5. Типи схем.

а) балка на двох опорах

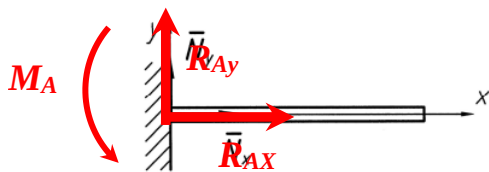
б) рама (балка з вигнутою віссю)



Нерухома шарнирна опора

Рухома шарнирна опора

в) консоль



## 6. Умови рівноваги.

$$\sum_{k=1}^N F_{kx} = 0,$$

беруть участь сили, паралельні вісі  $x$

$$\sum_{k=1}^N F_{ky} = 0,$$

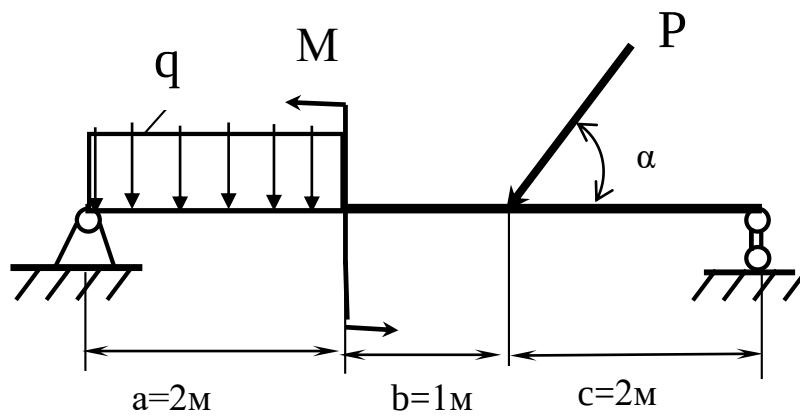
беруть участь сили, паралельні вісі  $y$

$$\sum_{k=1}^N M_0 \left( \vec{F}_k \right) = 0.$$

не беруть (!) участь сили, що проходять через задану точку



**Задача.**  
Балка на двох опорах



Дано:

$$P=10 \text{ kH}$$

$$M=5 \text{ kH} \cdot \text{m}$$

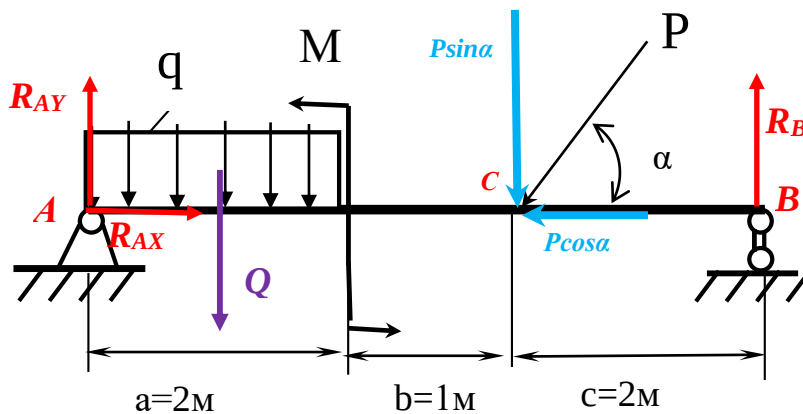
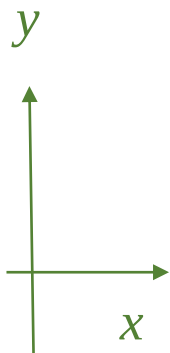
$$q=2 \text{ kH/m}$$

$$\alpha=45^\circ$$

Визначити:

Реакції опор

Рішення.



Дано:

$$P=10 \text{ kH}$$

$$M=5 \text{ kH} \cdot \text{m}$$

$$q=2 \text{ kH/m}$$

$$\alpha=45^\circ$$

Визначити:

$R_{AX}$ ,  $R_{AY}$ ,  $R_B$  -?

$$P \sin \alpha = 10 \cdot 0.7 = 7 \text{ kH}$$

$$P \cos \alpha = 10 \cdot 0.7 = 7 \text{ kH}$$

$$Q = q \cdot a = 2 \cdot 2 = 4 \text{ kH}$$

$$\sum_{k=1}^N F_{kx} = 0,$$

$$R_{AX} - P \cos \alpha = 0$$

$$\sum_{k=1}^N F_{ky} = 0,$$

$$R_{AY} - Q - P \sin \alpha + R_B = 0$$

$$\sum_{k=1}^N M_{\bullet} \left( \vec{F}_k \right) = 0.$$

$$M - Q \cdot (a/2) - P \sin \alpha \cdot (a + b) + R_B \cdot (a + b + c) = 0$$

$$R_{AX} = P \cos \alpha = 10 \cdot 0,7 = 7 \text{ кН}$$

$$R_B = \frac{-M + Q(a/2) + P \cdot \sin \alpha (a + b)}{(a + b + c)} = 4 \text{ кН}$$

$$R_{AY} = Q + P \sin \alpha - R_B = 4 + 7 - 4 = 7 \text{ кН}$$

$$\overset{\text{Перевірка}}{\sum_{k=1}^N M} \textcolor{red}{c} \left( \vec{F}_k \right) = 0 .$$

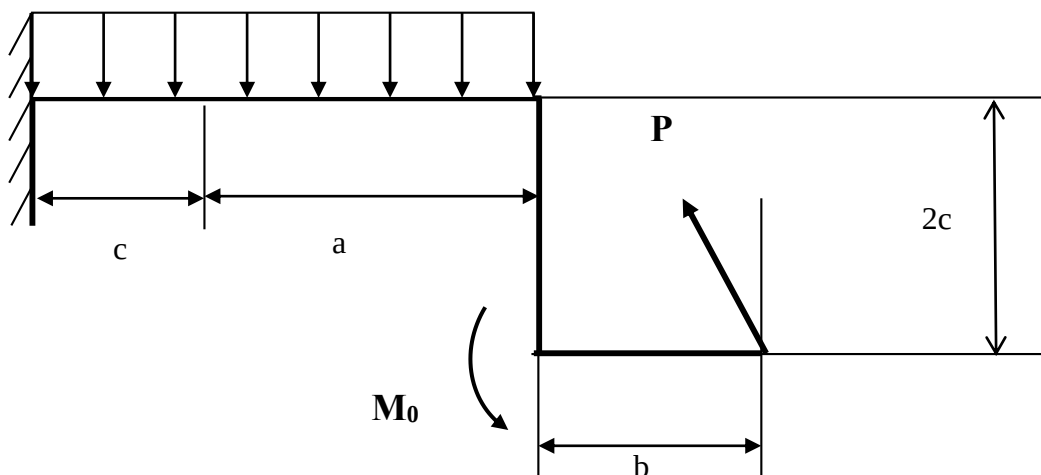
$$M + Q \cdot (a/2 + b) + R_B \cdot (c) - R_{AY} \cdot (a + b) = 0 \quad ?$$

$$5 + 4 \cdot (2/2 + 1) + 4 \cdot (2) - 7 \cdot (2 + 1) = 5 + 8 + 8 - 21 = 21 - 21 = 0$$

## Приклад захисту індивідуального завдання ТМ-1

### Задача 1. Визначити реакції опор

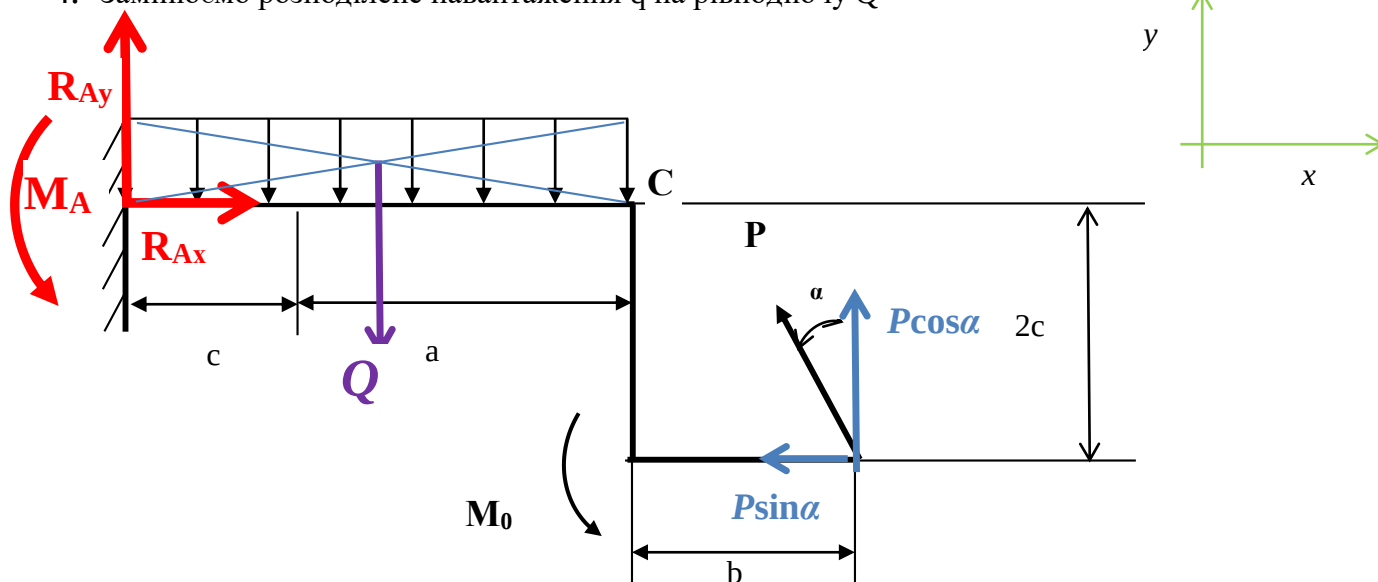
$P=10$  кН,  $M_0=5$  кНм,  $q=2$  кН/м,  $\alpha=45^\circ$ ,  $a=2.5$  м,  $b=1.5$  м,  $c=1.6$  м.



Дано  
 $P=10$  кН  
 $M_0=5$  кНм  
 $q=2$  кН/м  
 $\alpha=45^\circ$   
 $a=2.5$  м  
 $b=1.5$  м  
 $c=1.6$  м  
 Визначити

1. Позначаємо на схемі точку А та реакції опори
2. Зображуємо систему координат
3. Розкладаємо силу  $P$  на складові ( $P\sin\alpha$ ,  $P\cos\alpha$ )
4. Замінюємо розподілене навантаження  $q$  на рівнодіючу  $Q$

$$Q = q \cdot (a+c) = 2 \cdot (2.5+1.6) = 8.2$$



### Умови рівноваги довільної плоскої системи сил:

$$\sum F_{ix} = 0 \quad R_{AX} - P\sin\alpha = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0 \quad R_{AY} + P\cos\alpha - Q = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad M_A + M_0 - Q\left(\frac{a+c}{2}\right) + P\cos\alpha(a+b+c) - P\sin\alpha(2c) = 0$$

З кожного рівняння визначаємо невідому реакцію ( $R_{AX}$ ,  $R_{AY}$ ,  $M_A$ )

$$R_{AX} = P \sin \alpha = 10 \cdot 0,7 = 7$$

$$R_{Ay} = -P \cos \alpha + Q = -10 \cdot 0,7 + 8,2 = 1,2$$

$$\begin{aligned} M_A &= -M_o + Q\left(\frac{a+c}{2}\right) - P \cos \alpha (a+b+c) + P \sin \alpha (2c) = \\ &= -5 + 8,2(2,5+1,6)/2 - 10 \cdot 0,7(2,5+1,6+1,5) + 10 \cdot 0,7(2 \cdot 1,6) = \\ &= -5 + 8,2 \cdot 2,05 - 7 \cdot 5,6 + 7 \cdot 3,2 = -5 + 16,81 - 39,2 + 22,4 = -4,99 \end{aligned}$$

### Перевірка

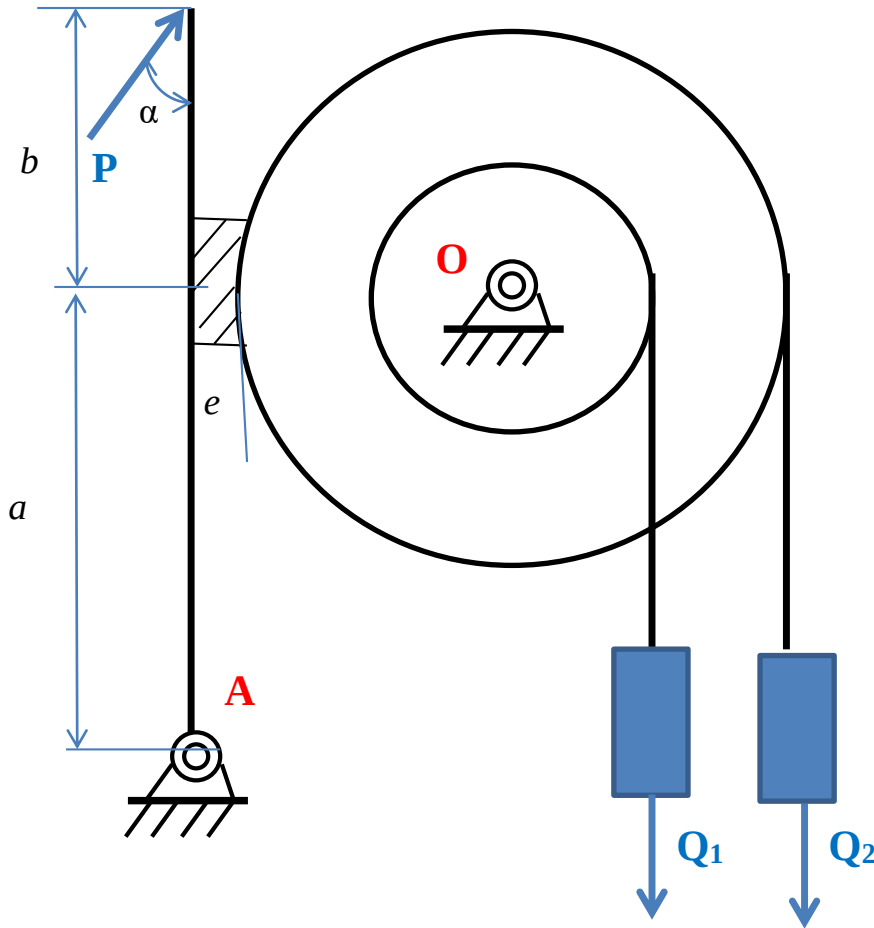
$$\sum M_c = 0$$

$$\begin{aligned} \sum M_c &= M_A + M_o - R_{AY}(a+c) + Q\left(\frac{a+c}{2}\right) - P \sin \alpha (2c) + \\ &+ P \cos \alpha (b) = \\ &= -4,99 + 5 - 1,2(2,5+1,6) + 8,2\left(\frac{2,5+1,6}{2}\right) - 7(2 \cdot 1,6) + \\ &+ 7(1,5) = -4,99 + 5 - 4,92 + 16,81 - 22,4 + 10,5 = \\ &- 32,31 + 32,31 = 0 \end{aligned}$$

## ТМ-3

### Рівновага системи тіл з урахуванням тертя.

#### СХЕМА А



Дано:

$$Q_1 = 5 \text{ кН}$$

$$Q_2 = 10 \text{ кН}$$

$$R = 1 \text{ м}$$

$$r = 0.5 \text{ м}$$

$$a = 0.4 \text{ м}$$

$$b = 0.2 \text{ м}$$

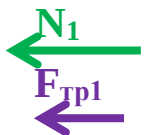
$$e = 0.1 \text{ м}$$

$$f = 0.15$$

Визначити:  $P$  -?

$$R_{ox} \quad R_{oy} \quad ?$$

$$R_{ax} \quad R_{ay} \quad ?$$



В умові задачі наведено коефіцієнт тертя  $f$ .

В точці контакту (т.К) позначаємо дві пари сил, що однакові за модулем, але спрямовані протилежно.  $(N_1; N_2)$ ,  $(F_{тр1}; F_{тр2})$ .

Таке додавання **не змінить рівновагу** всієї системи.

$$|F_{mp1}| = |F_{mp2}|$$

$$|N_1| = |N_2|$$

$$F_{mp1} = f \cdot N_1$$

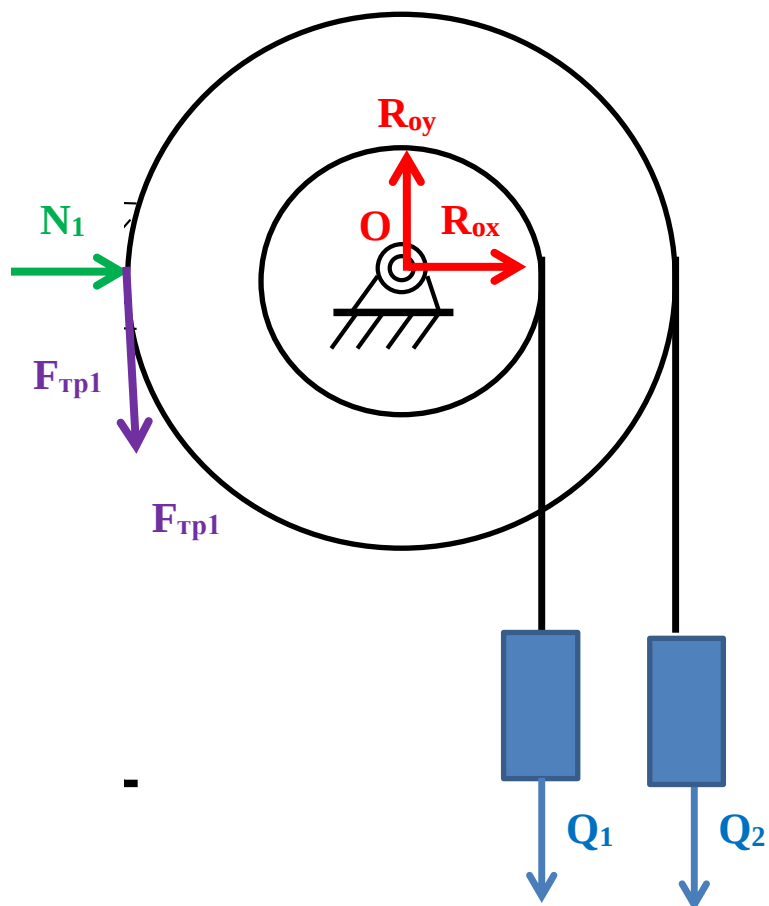
$$F_{mp2} = f \cdot N_2$$

Кількість невідомих дорівнює – 5.

А кількість рівнянь рівноваги – 3.

Тому алгоритм рішення задачі пропонує розглянути рівновагу окремо кожного тіла.

1) Розглянемо рівновагу барабану. Складаємо рівняння рівноваги:

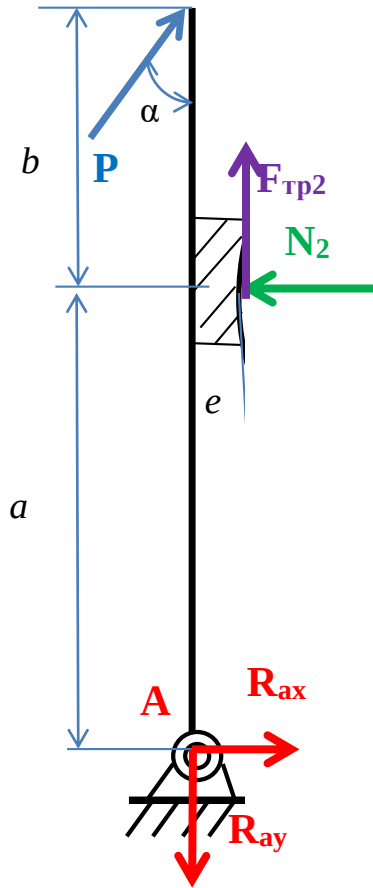


$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$\sum M_O = 0$$

2) Розглянемо рівновагу гальмівної колодки. Складаємо рівняння рівноваги



$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

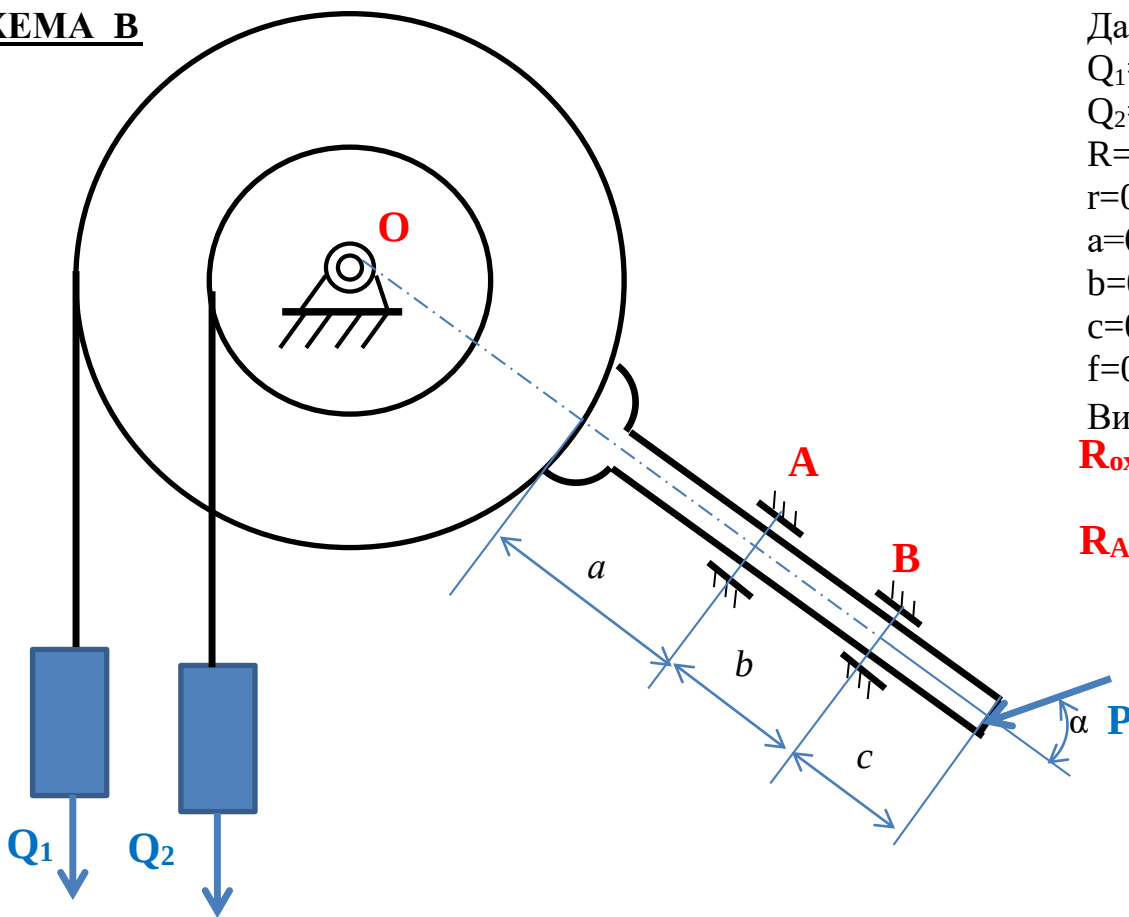
$$\sum M_A = 0$$

3) Перевірку робимо по схемі, що поєднує тіла в систему (тобто, першою) відносно точки контакту (т.К).

$$\sum M_K = 0$$



### СХЕМА В



Дано:

$$Q_1 = 5 \text{ кН}$$

$$Q_2 = 10 \text{ кН}$$

$$R = 1 \text{ м}$$

$$r = 0.5 \text{ м}$$

$$a = 0.4 \text{ м}$$

$$b = 0.2 \text{ м}$$

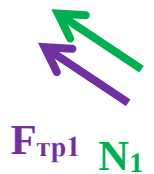
$$c = 0.1 \text{ м}$$

$$f = 0.15$$

Визначити:  $P$  -?

$$R_{ox} \quad R_{oy} \quad ?$$

$$R_A \quad R_B \quad ?$$



В умові задачі наведено коефіцієнт тертя  $f$ .

В точці контакту (т.К) позначаємо дві пари сил, що однакові за модулем, але спрямовані протилежно.  $(N_1; N_2)$ ,  $(F_{тр1}; F_{тр2})$ .

Таке додавання **не змінить рівновагу** всієї системи.

$$|F_{mp1}| = |F_{mp2}|$$

$$|N_1| = |N_2|$$

$$F_{mp1} = f \cdot N_1$$

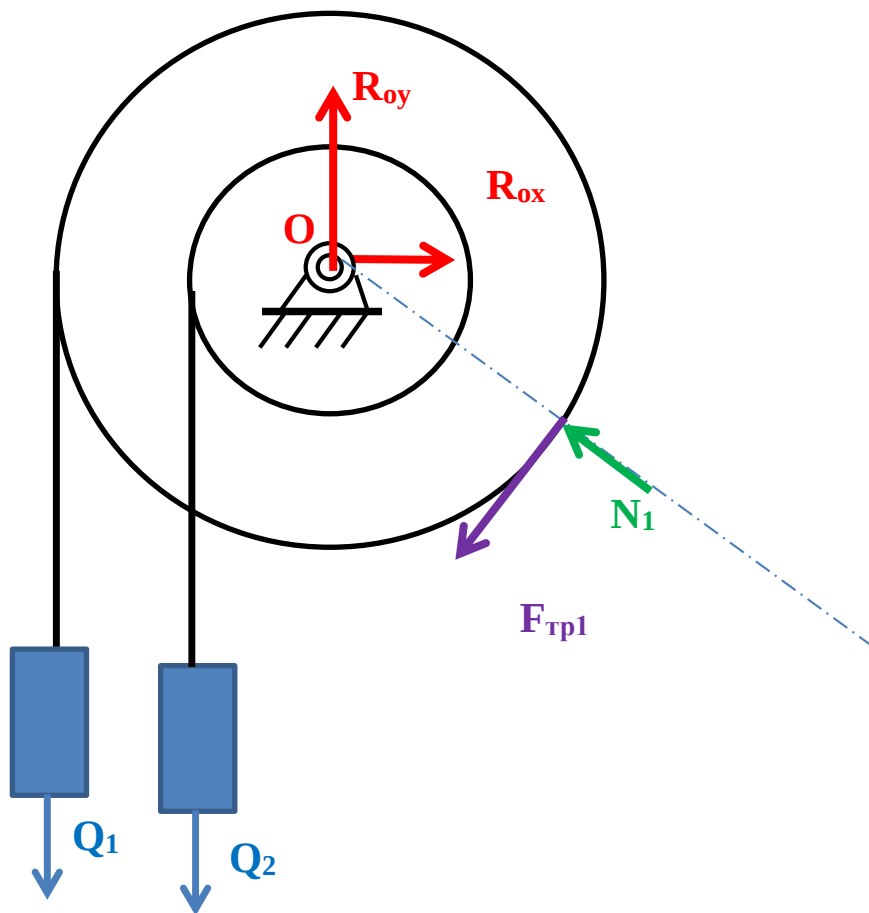
$$F_{mp2} = f \cdot N_2$$

Кількість невідомих дорівнює – 5.

А кількість рівнянь рівноваги – 3.

Тому алгоритм рішення задачі пропонує розглянути рівновагу окремо кожного тіла.

1) Розглянемо рівновагу барабану. Складаємо рівняння рівноваги:

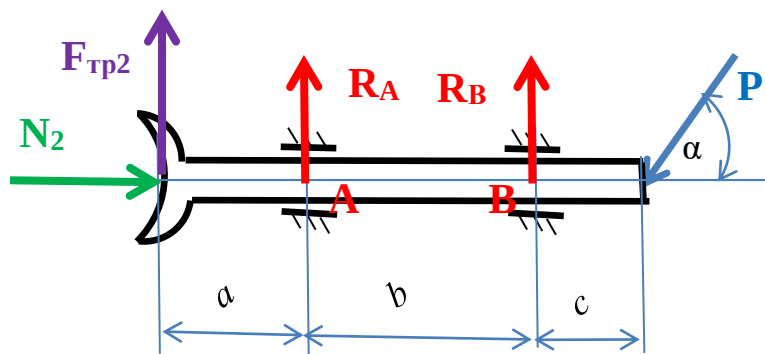


$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$\sum M_O = 0$$

2) Розглянемо рівновагу гальмівного штоку. При цьому розташовуємо сам шток горизонтально. Складаємо рівняння рівноваги.



$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

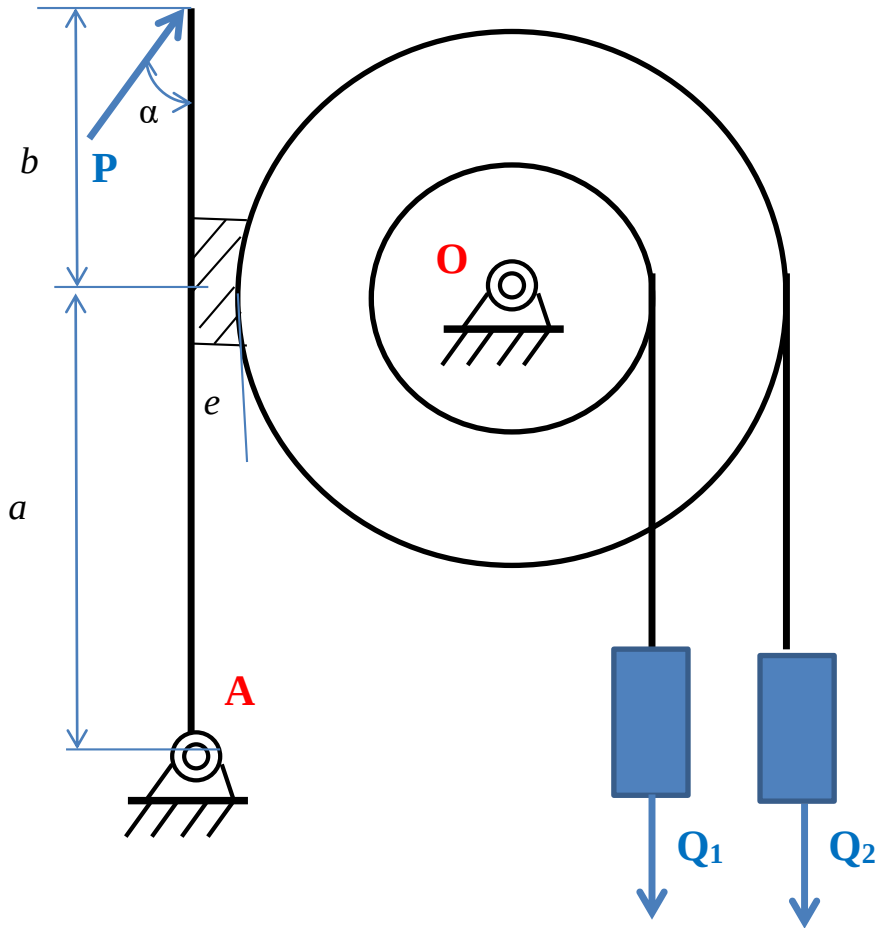
3) Перевірку робимо по схемі, що поєднує тіла в систему (тобто, першою) відносно точки контакту (т.К).

$$\sum M_K = 0$$

# ТМ-3

Рівновага системи тіл з урахуванням тертя.

СХЕМА А



Дано:

$$Q_1 = 5 \text{ кН}$$

$$Q_2 = 10 \text{ кН}$$

$$R = 1 \text{ м}$$

$$r = 0.5 \text{ м}$$

$$a = 0.4 \text{ м}$$

$$b = 0.2 \text{ м}$$

$$e = 0.1 \text{ м}$$

$$f = 0.15$$

Визначити:  $P$  -?

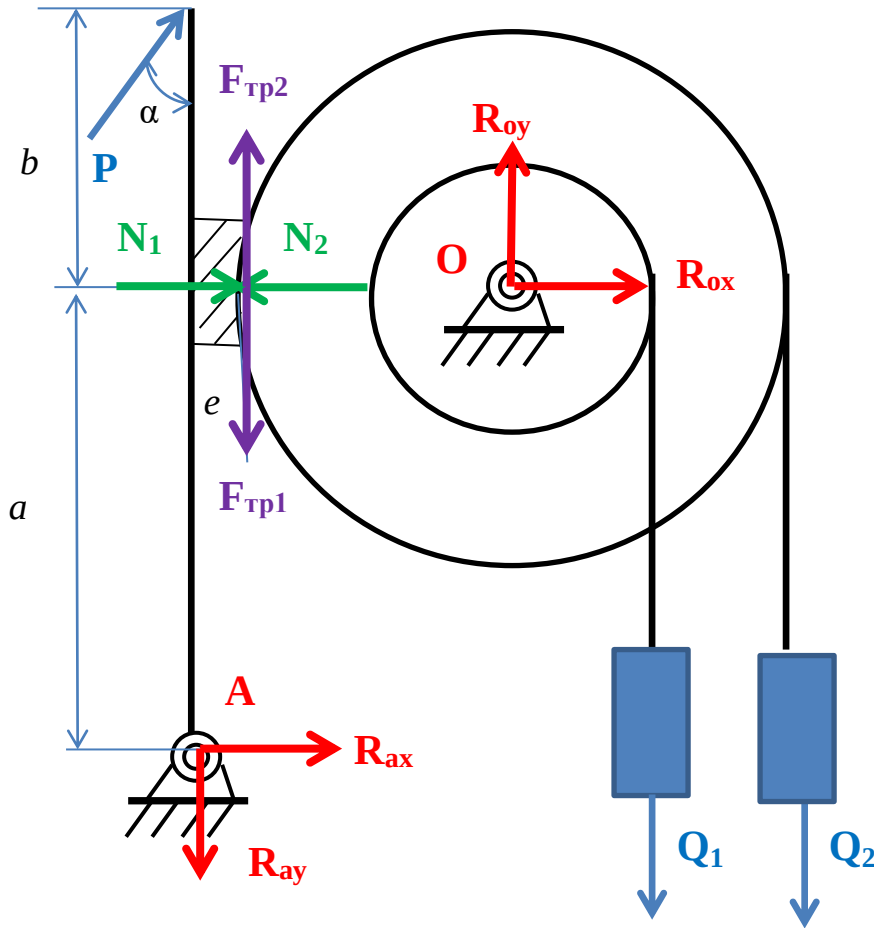
$$R_{ox} \quad R_{oy} \quad ?$$

$$R_{ax} \quad R_{ay} \quad ?$$

# ТМ-3

## Рівновага системи тіл з урахуванням тертя.

### СХЕМА А



Дано:

$$Q_1 = 5 \text{ кН}$$

$$Q_2 = 10 \text{ кН}$$

$$R = 1 \text{ м}$$

$$r = 0.5 \text{ м}$$

$$a = 0.4 \text{ м}$$

$$b = 0.2 \text{ м}$$

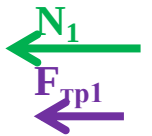
$$e = 0.1 \text{ м}$$

$$f = 0.15$$

Визначити:  $P$  -?

$$R_{ox} \quad R_{oy} \quad ?$$

$$R_{ax} \quad R_{ay} \quad ?$$



В умові задачі наведено коефіцієнт тертя  $f$ .

В точці контакту (т.К) позначаємо дві пари сил, що однакові за модулем, але спрямовані протилежно.  $(N_1; N_2)$ ,  $(F_{тр1}; F_{тр2})$ .

Таке додавання **не змінить рівновагу** всієї системи.

$$|F_{mp1}| = |F_{mp2}|$$

$$|N_1| = |N_2|$$

$$F_{mp1} = f \cdot N_1$$

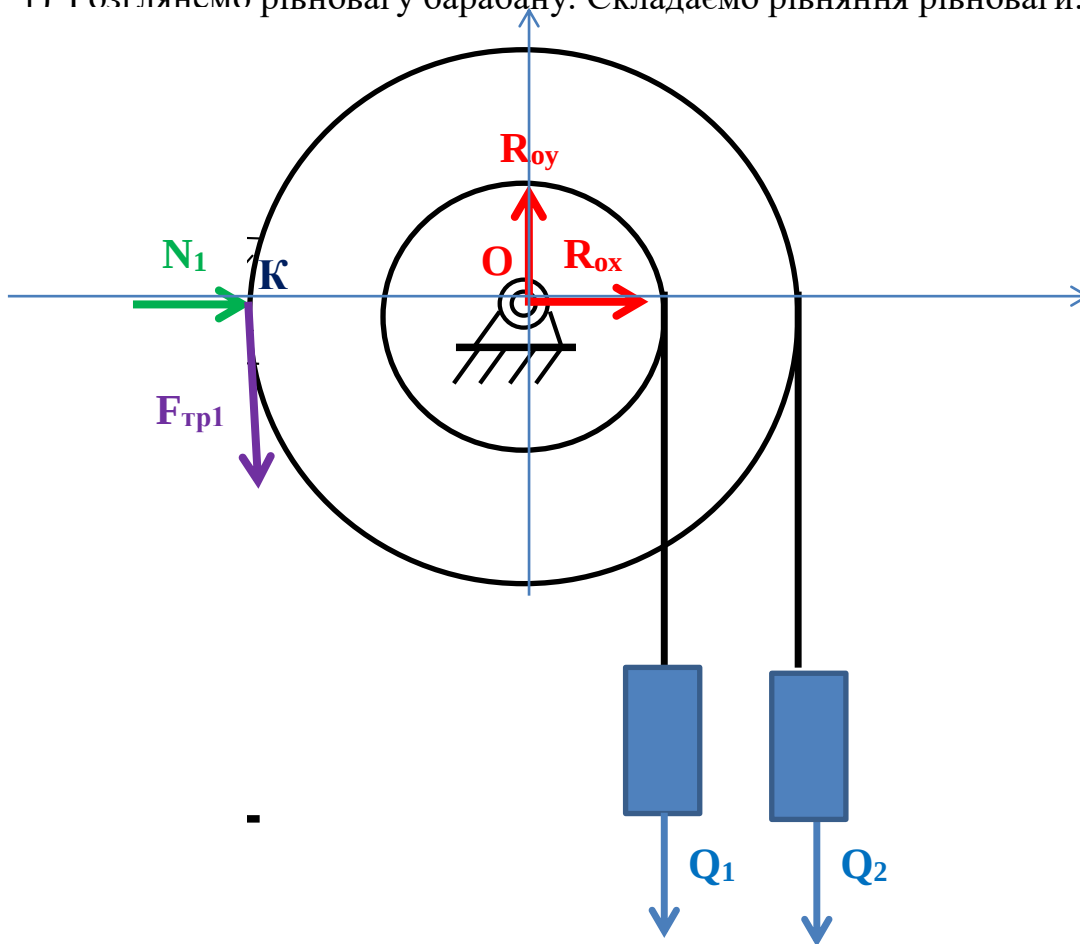
$$F_{mp2} = f \cdot N_2$$

Кількість невідомих дорівнює – 5.

А кількість рівнянь рівноваги – 3.

Тому алгоритм рішення задачі пропонує розглянути рівновагу окремо кожного тіла.

1) Розглянемо рівновагу барабану. Складаємо рівняння рівноваги:



$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$\sum M_O = 0$$

$$R_{ox} + N_1 = 0$$

$$R_{oy} - Q_1 - Q_2 - F_{mp1} = 0$$

$$F_{mp1}(R) - Q_1(r) - Q_2(R) = 0$$

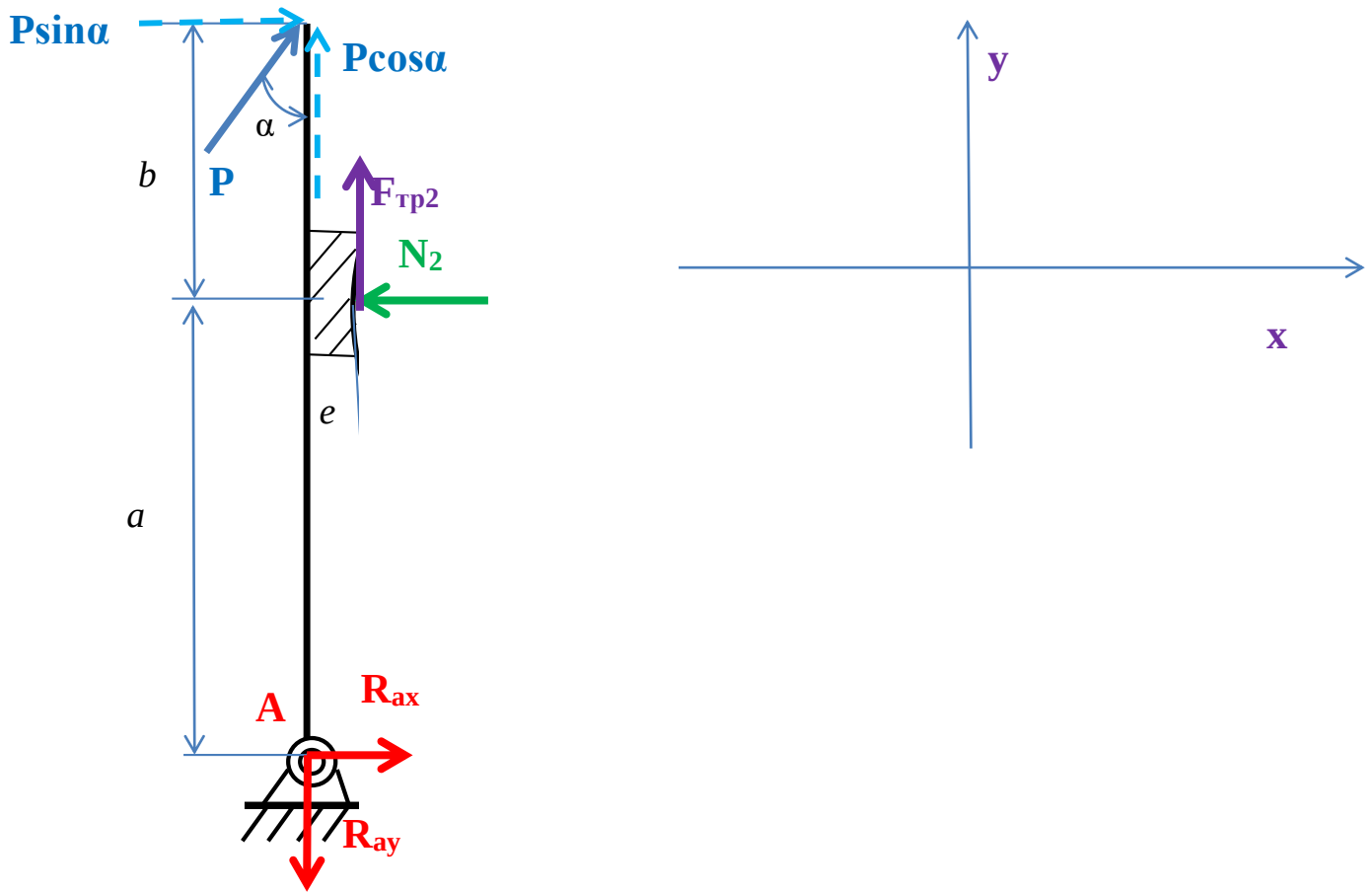
$$F_{mp1}(R) = Q_1(r) + Q_2(R)$$

$$F_{mp1} = \frac{Q_1(r) + Q_2(R)}{R}$$

$$N_1 = \frac{F_{mp1}}{f}$$

$$F_{mp1} \geq 0 (!)$$

2) Розглянемо рівновагу гальмівної колодки. Складаємо рівняння рівноваги



$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$R_{ax} - N_2 + P \sin \alpha = 0$$

$$-R_{ay} + F_{mp2} + P \cos \alpha = 0$$

$$-P \sin \alpha (a + b) + N_2 (a) + F_{mp2} (e) = 0$$

$$P = \frac{N_2 (a) + F_{mp2} (e)}{\sin \alpha (a + b)} \quad P \geq 0 \quad (!)$$

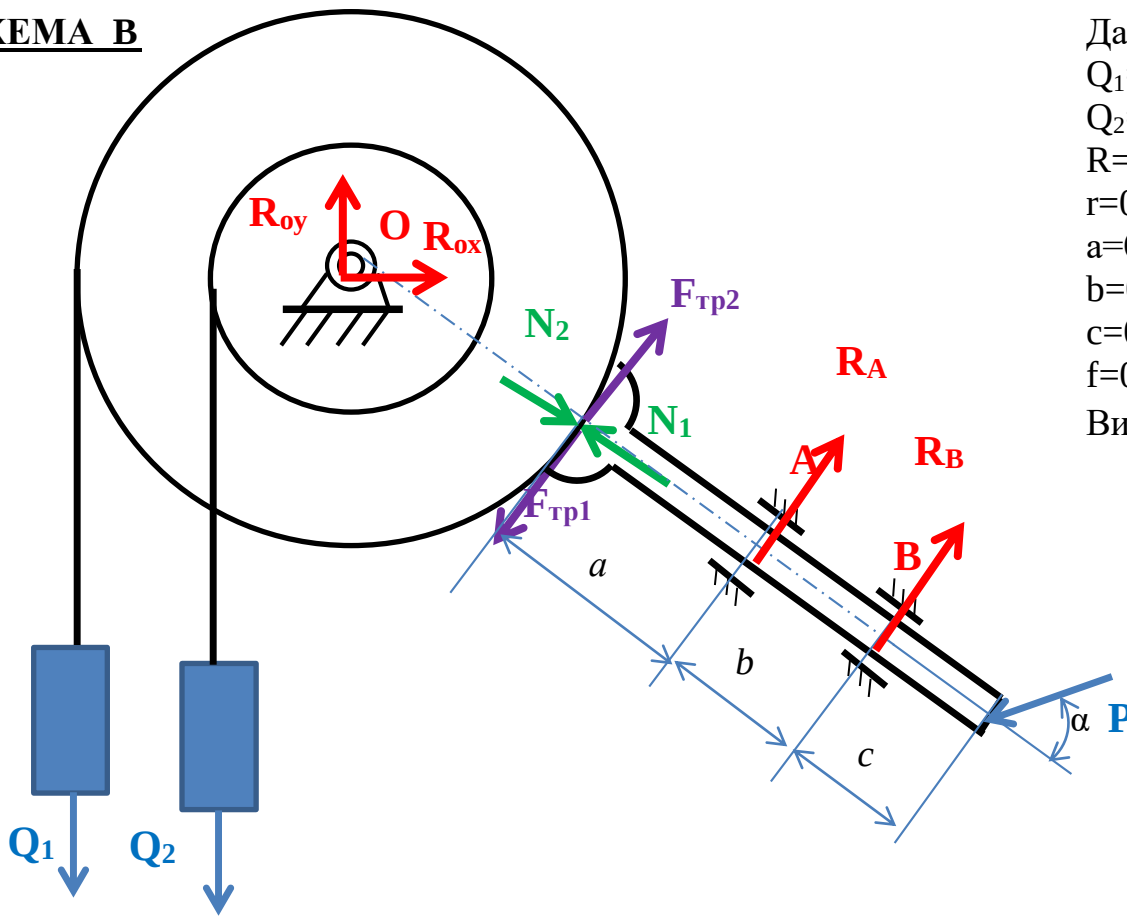


3) Перевірку робимо по схемі, що поєднує тіла в систему (тобто, першою) відносно точки контакту (т.К).

$$\sum M_K = 0$$

$$\begin{aligned}\sum M_K &= R_{oy}(R) - Q_1(R + r) - Q_2(R + R) - P \cos \alpha(e) - \\ &- P \sin \alpha(b) + R_{ay}(e) + R_{ax}(a) = \\ &= 0\end{aligned}$$

## СХЕМА В



Дано:

$$Q_1=5 \text{ кН}$$

$$Q_2=10 \text{ кН}$$

$$R=1 \text{ м}$$

$$r=0.5 \text{ м}$$

$$a=0.4 \text{ м}$$

$$b=0.2 \text{ м}$$

$$c=0.1 \text{ м}$$

$$f=0.15$$

Визначити:  $P$  -?

$$R_{ox} \quad R_{oy} \quad ?$$

$$R_A \quad R_B \quad ?$$

В умові задачі наведено коефіцієнт тертя  $f$ .

В точці контакту (т.к) позначаємо дві пари сил, що однакові за модулем, але спрямовані протилежно.  $(N_1; N_2)$ ,  $(F_{тр1}; F_{тр2})$ .

Таке додавання **не змінить рівновагу** всієї системи.

$$|F_{mp1}| = |F_{mp2}|$$

$$|N_1| = |N_2|$$

$$F_{mp1} = f \cdot N_1$$

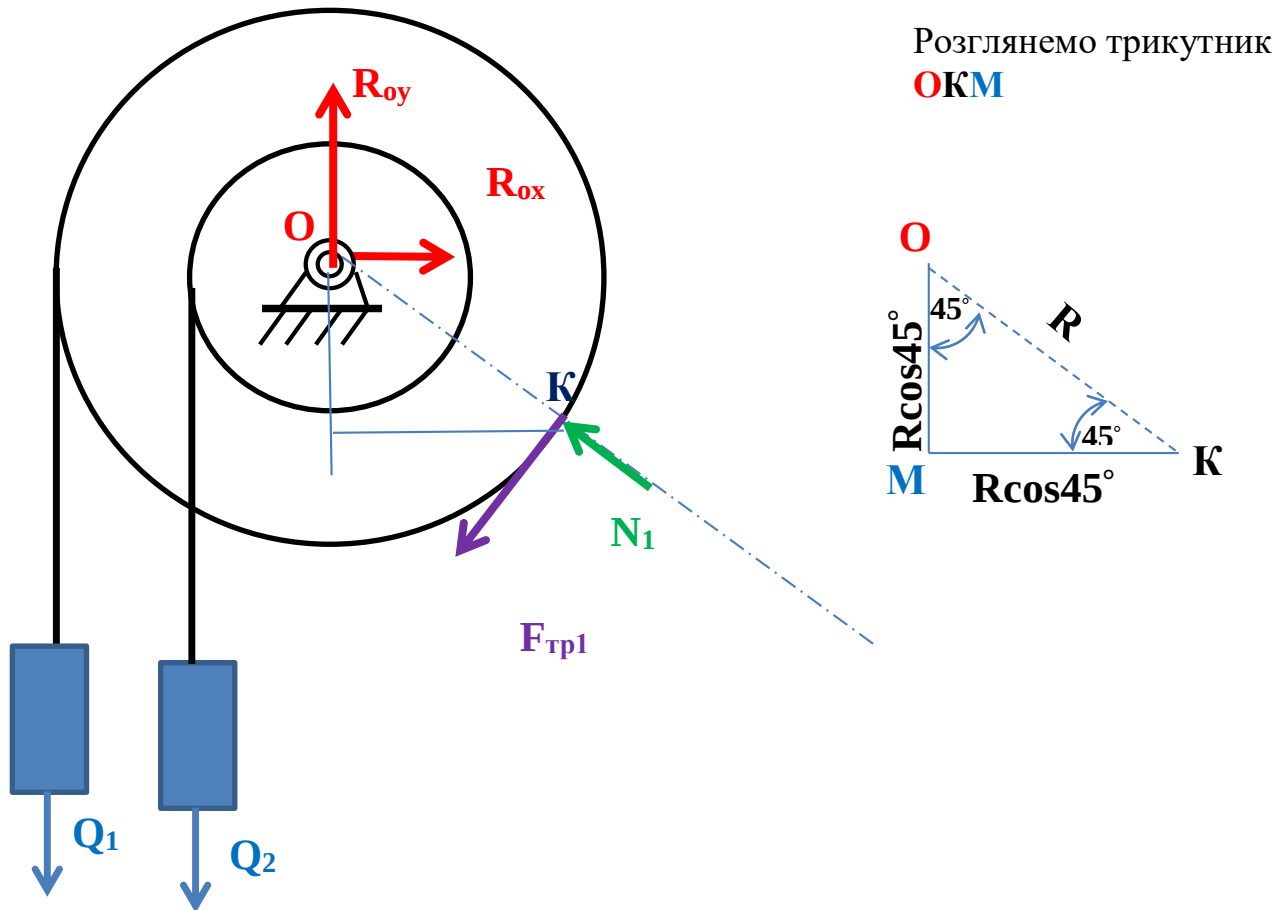
$$F_{mp2} = f \cdot N_2$$

Кількість невідомих дорівнює – 5.

А кількість рівнянь рівноваги – 3.

Тому алгоритм рішення задачі пропонує розглянути рівновагу окремо кожного тіла.

1) Розглянемо рівновагу барабану. Складаємо рівняння рівноваги:



$$\sum F_{ix} = 0$$

$$R_{ox} - N_1 \cos 45^\circ - F_{mp1} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$R_{oy} + N_1 \cos 45^\circ - F_{mp1} \cos 45^\circ - Q_1 - Q_2 = 0$$

$$\sum M_O = 0$$

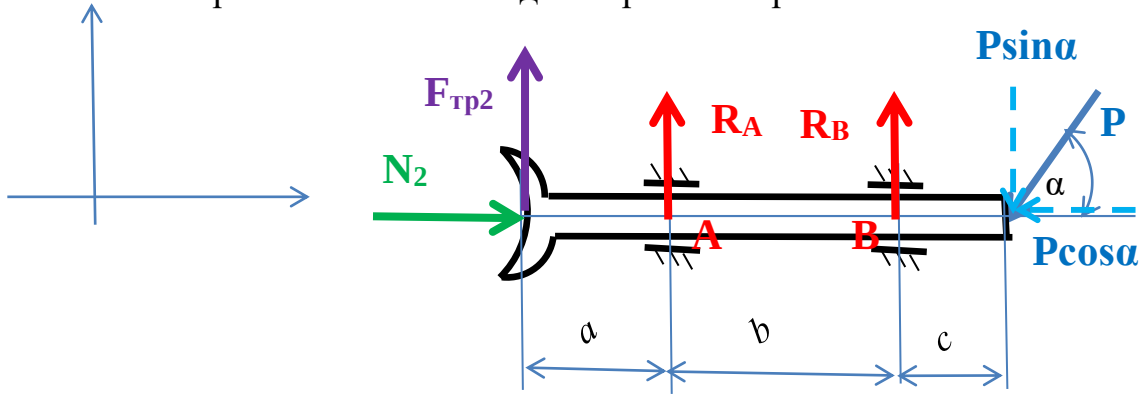
$$-F_{mp1}(R) + Q_1(R) + Q_2(r) = 0$$

$$F_{mp1} = \frac{Q_1(R) + Q_2(r)}{R}$$

$$F_{mp1} \geq 0 (!)$$

$$N_1 = \frac{F_{mp1}}{f}$$

2) Розглянемо рівновагу гальмівного штоку. При цьому розташовуємо сам шток горизонтально. Складаємо рівняння рівноваги.



$$\sum F_{ix} = 0$$

$$N_2 - P \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$F_{mp2} + R_A + R_B - P \sin \alpha = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$R_B(b) - P \sin \alpha(b + c) - F_{mp2}(a) = 0$$

$$P = N_2 / \cos \alpha$$

$$P \geq 0 \quad (!)$$

3) Перевірку робимо по схемі, що поєднує тіла в систему (тобто, першою) відносно точки контакту (т.К).

$$\Sigma M_K = 0$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_K = & -P \sin \alpha (a + b + c) + R_B (a + b) + R_A (a) - \\ & - R_{ox} (R \cdot \cos 45^\circ) - R_{oy} (R \cdot \cos 45^\circ) + Q_2 (r + R \cdot \cos 45^\circ) + \\ & + Q_1 (R + R \cdot \cos 45^\circ) = 0 \end{aligned}$$

## Довільна просторова система сил. Умови рівноваги

$$\sum F_{ix} = 0$$

(приймають участь сили, паралельні осі  $x$ )

$$\sum F_{iy} = 0$$

(приймають участь сили, паралельні осі  $y$ )

$$\sum F_{iz} = 0$$

(приймають участь сили, паралельні осі  $z$ )

$$\sum M_x = 0$$

(**не приймають участь** сили, паралельні осі  $x$ , або вісь  $x$  перетинають)

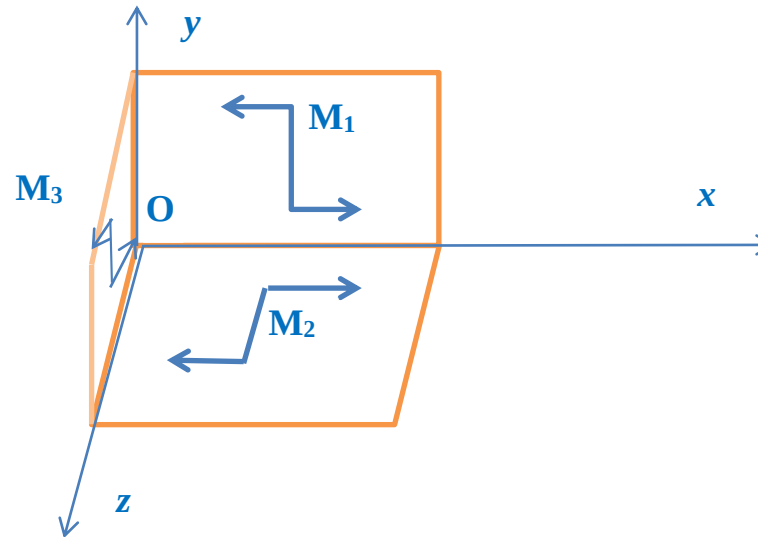
$$\sum M_y = 0$$

(**не приймають участь** сили, паралельні осі  $y$ , або вісь  $y$  перетинають)

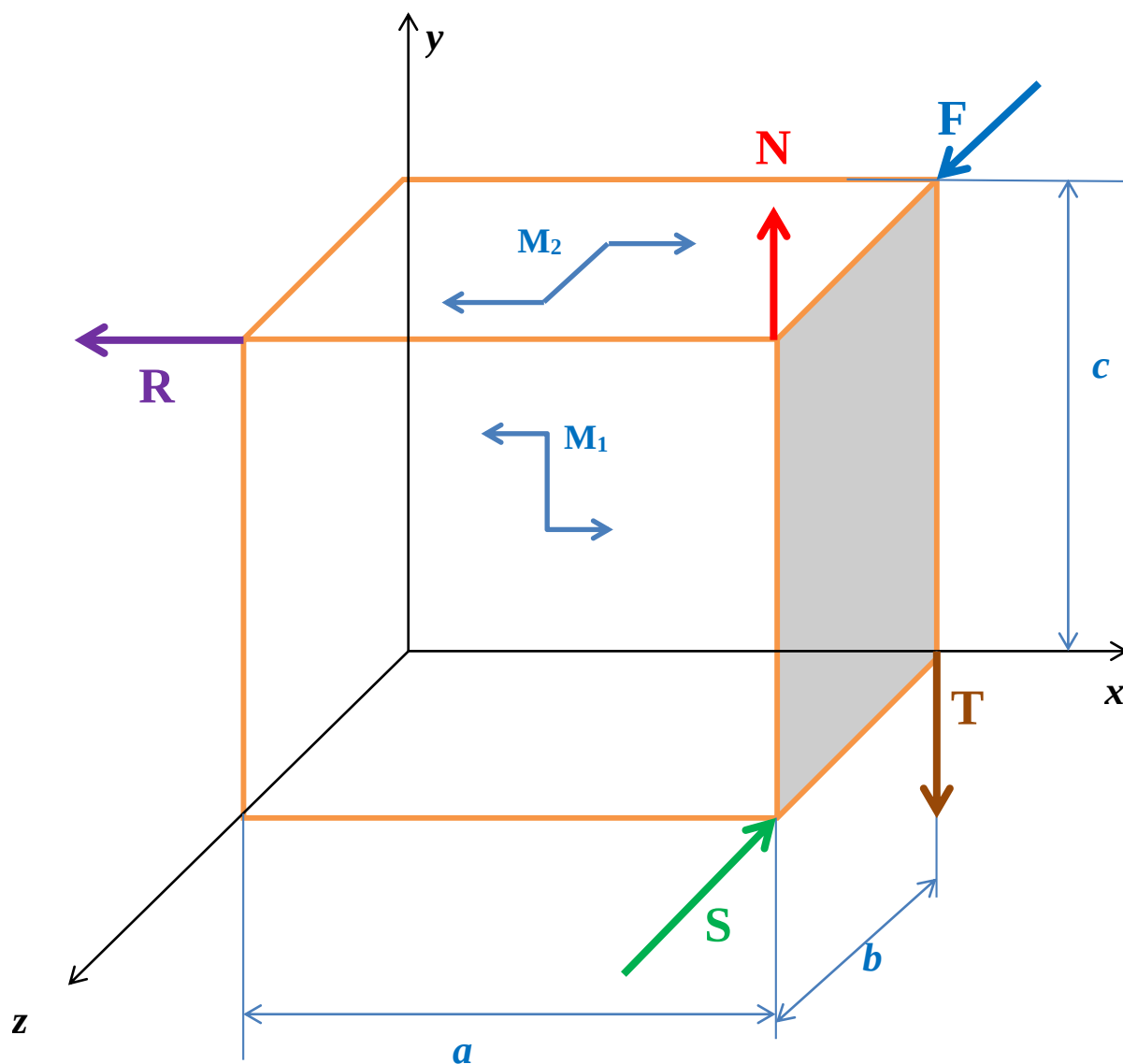
$$\sum M_z = 0$$

(**не приймають участь** сили, паралельні осі  $z$ , або вісь  $z$  перетинають)

Момент пари сил ( $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ) приймають участь лише у рівнянні моментів відносно осі, перпендикулярної до площини дії моменту пари.



**Тренувальна вправа:** скласти рівняння рівноваги, враховуючи задані силові фактори.



$$\sum F_{ix} = -R$$

$$\sum F_{iy} = N - T$$

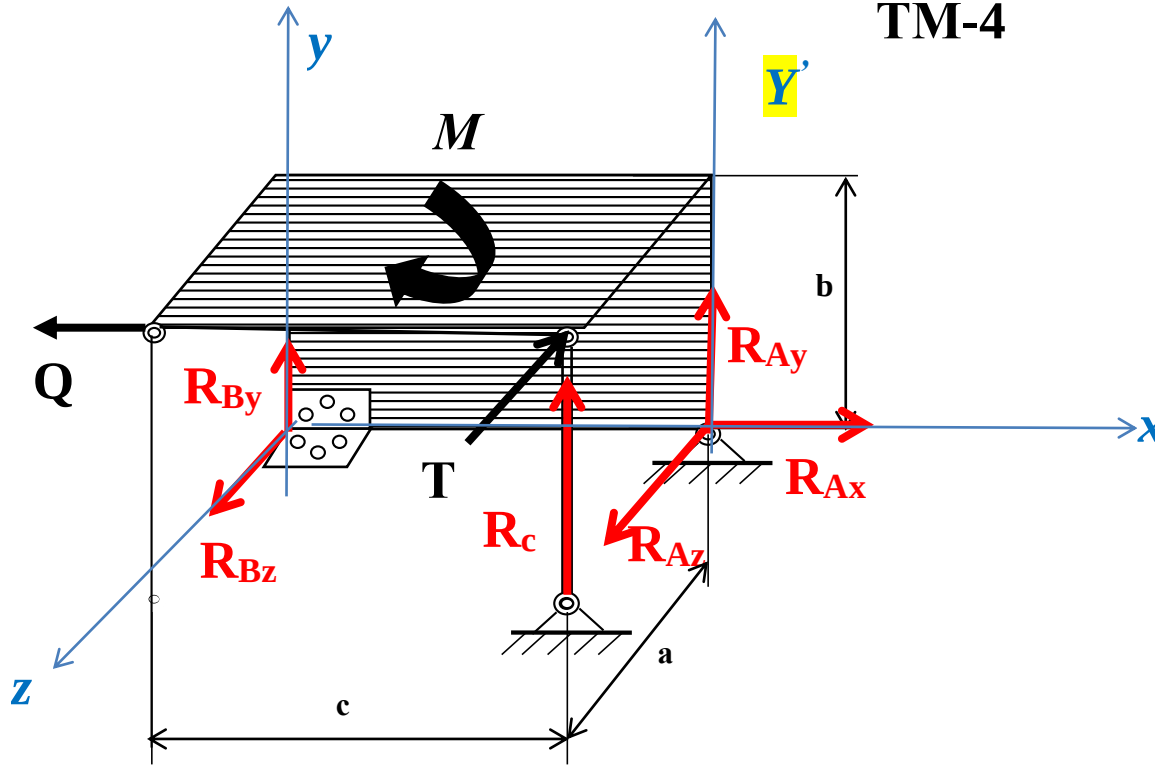
$$\sum F_{iz} = F - S$$

$$\sum M_x = F(c) - N(b)$$

$$\sum M_y = -M_2 - R(b) + S(a) - F(a)$$

$$\sum M_z = M_1 + R(c) + N(a) - T(a)$$

ТМ-4



Дано :

$$Q = 5 \text{ кН}$$

$$T = 3 \text{ кН}$$

$$M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$a = 2 \text{ м}$$

$$b = 1 \text{ м}$$

$$c = 2 \text{ м}$$

Визначити реакції опор

$$\sum F_{ix} = 0 \quad R_{Ax} - Q = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0 \quad R_{Ay} + R_{By} + R_C = 0$$

$$\sum F_{iz} = 0 \quad R_{Az} + R_{Bz} - T = 0$$

$$\sum M_x = 0 \quad -T(b) - R_C(a) = 0$$

$$\sum M_y = 0 \quad -R_{Az}(c) + T(c) - M - Q(a) = 0$$

$$\sum M_z = 0 \quad R_{Az}(c) + R_C(c) + Q(b) = 0$$

$$\sum M_x = 0 \quad -T(b) - R_C(a) = 0$$

$$\sum M_y = 0 \quad -R_{Az}(c) + T(c) - M - Q(a) = 0$$

$$\sum M_z = 0 \quad R_{Ay}(c) + R_C(c) + Q(b) = 0$$

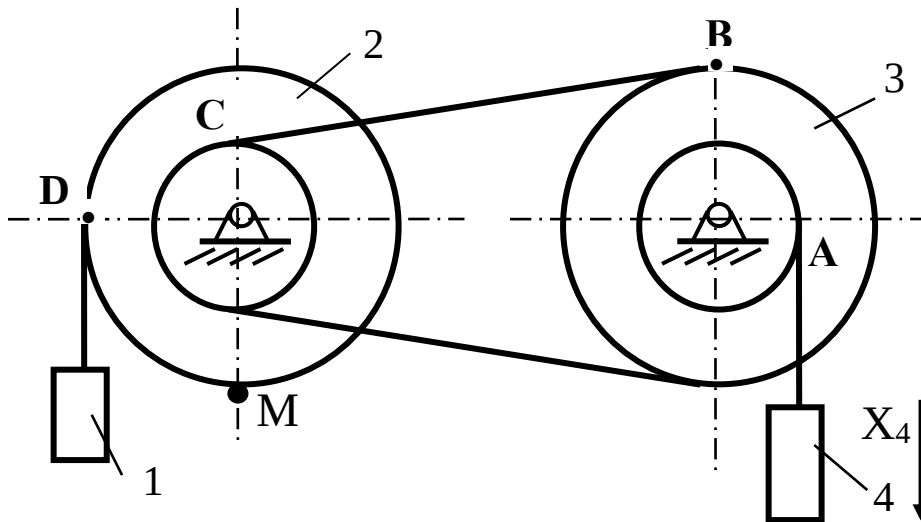


Перевірка: Для перевірки проводимо додаткову вісь  $Y'$  через точку A і складемо рівняння рівноваги

$$\sum M_y'' = 0 \quad R_{BZ}(c) - M - Q(a) = 0$$

### Приклад рішення задачі ТМ-5

По заданому рівнянню поступового руху тіла 4 визначити швидкість та прискорення т. М та закони руху всіх тіл.



Дано:

$$X_4 = 5t^2 + t;$$

$$R_2 = 0.4 \text{ м}; r_2 = 0.2 \text{ м};$$

$$R_3 = 0.4 \text{ м}; r_3 = 0.2 \text{ м};$$

$$t = 1 \text{ с}$$

Визначити  $V_M$  - ?  $a_M$  - ?

Рішення

Для визначення кінематичних характеристик потрібно знати закон руху тіла.

#### 1. Проведемо кінематичний аналіз механізму.

Розглянемо рух кожного тіла системи окремо:

- тіла 1, 4 здійснюють поступовий рух, закони їх руху  $X_1 = f_1(t)$ ,  $X_4 = f_4(t)$ ;
- тіла 2, 3 здійснюють обертальний рух, закони їх руху  $\varphi_2 = f_2(t)$ ,  $\varphi_3 = f_3(t)$ .

#### 2. Визначення швидкостей точок тіл.

Продиференціюючи за часом рівняння руху тіла 4, знайдемо закон зміни його швидкості,

$$v_4 = \frac{dx_4}{dt} = 10t + 1 \text{ м/с.}$$

Всі точки нерозтягнутого гнучкого зв'язку на ділянці від тіла 4 до точки A тіла 3 здійснюють поступовий рух (при якому всі її точки рухаються з однаковою швидкістю). Тобто,  $V_A = V_4 = 10t + 1$  м/с. Знаючи швидкість точки A та її положення та тілі, що обертається, можливо визначити кутову швидкість обертання шківу 3,

$$\omega_3 = \frac{v_A}{r_3} = \frac{10t + 1}{0.2} = 50t + 5 \text{ 1/с.}$$

Лінійна швидкість точки, яка знаходиться на тілі, що обертається, визначається як добуток кутової швидкості тіла та відстані від точки до осі обертання. Таким чином. швидкість т.  $B$

$$V_B = \omega_3 R_3 = (50t + 5) 0,4 = 20t + 2 \text{ м/с.}$$

Всі точки нерозтягнутого гнучкого зв'язку мають однакові швидкості, тому

$$V_C = V_B = 20t + 2 \text{ м/с.}$$

Але точка  $C$  також належить і до тіла 2. Кутову швидкість обертання тіла 2 можливо визначити, знаючи швидкість т.  $C$  та відстань від точки  $C$  до осі обертання -  $r_2$ .

$$V_c = \omega_2 r_2, \text{ звідки } \omega_2 = \frac{V_c}{r_2} = \frac{20t + 2}{0,2} = 100t + 10 \text{ 1/с.}$$

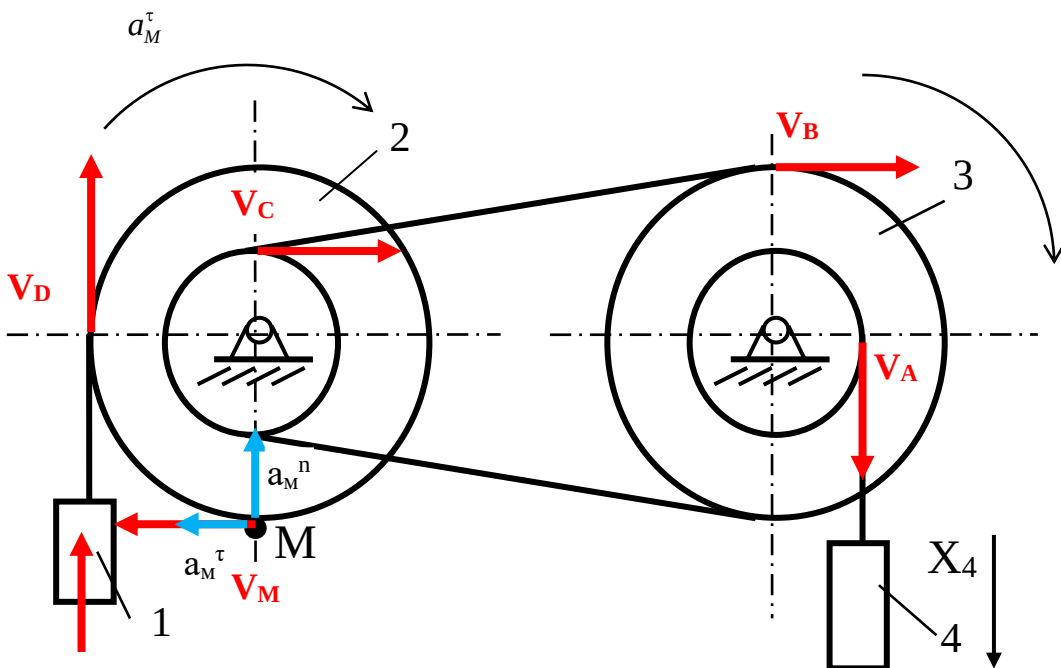
Лінійна швидкість т.  $M$ , що належить до тілу 2 та знаходиться на великому радіусі, визначається як

$$V_M = \omega_2 R_2 = (100t + 10) 0,4 = 40t + 4 \text{ м/с.}$$

В момент часу  $t = 1 \text{ с}$   $V_M = 40 \cdot 1 + 4 = 44 \text{ м/с.}$

Так як відстань точок  $M$  і  $D$  (які належать тілу 2) до осі обертання однакова  $R_2$ , то  $V_D = V_M = 40t + 4 \text{ м/с.}$

На ділянці від точки  $D$  до тіла 1 всі точки гнучкого зв'язку здійснюють поступовий рух. Отже,  $V_1 = V_D = 40t + 4 \text{ м/с.}$



### 3. Визначення прискорення точки $M$ .

Вектор прискорення точки тіла, що обертається, має дві складові:

- нормальне прискорення –  $a_n$ ;
- тангенціальне прискорення –  $a_\tau$ .

$$\vec{a}_M = \vec{a}_M^n + \vec{a}_M^\tau;$$

$$a_M^n = \frac{V_M^2}{R_2}, \quad a_M^n = \frac{44^2}{0,4} = \frac{1936}{0,4} = 4840 \text{ м/с}^2;$$

$$a_M^\tau = \frac{dV_M}{dt}, \quad a_M^\tau = (40t + 4)' = 40 \text{ м/с}^2.$$

Вектор нормального прискорення точки  $\vec{a}^n$  завжди спрямований до осі обертання.

Вектор тангенціального прискорення точки  $\vec{a}^\tau$  (спрямований за дотичною до траєкторії в заданій точці), в сторону обертання, якщо  $a^\tau > 0$  (прискорений рух), або в сторону, протилежну обертанню, якщо  $a^\tau < 0$  (уповільнений рух).

Повне прискорення точки по модулю дорівнює

$$a_M = \sqrt{a_M^{n^2} + a_M^{\tau^2}} = \sqrt{4840^2 + 40^2} = 4840.16 \text{ м/с}^2.$$

Кут поміж вектором повного прискорення точки та радіусом обертання визначається за формулою:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a^\tau}{a^n}, \text{ звідки } \mu = \operatorname{arctg} \left( \frac{a^\tau}{a^n} \right).$$

### 4. Визначення законів руху тіл.

У відповідності до проведеного кінематичного аналізу механізму для визначення законів руху тіл необхідно проінтегрувати за часом відповідно:

- для тіла 1 закон зміни швидкості  $V_1(t)$ ,

$$X_1(t) = \int V_1(t) dt = \int (40t + 4) dt = \frac{40t^2}{2} + 4t + C_1 = 20t^2 + 4t + C_1 \text{ м};$$

- для тіла 2 закон зміни кутової швидкості  $\omega_2(t)$ ,

$$\varphi_2(t) = \int \omega_2(t)dt = \int_t (100t + 10)dt = \frac{100t^2}{2} + 10t + C_2 = 50t^2 + 10t + C_2 \text{ рад.}$$

- для тіла 3 закон зміни кутової швидкості  $\omega_3(t)$ ,

$$\varphi_3(t) = \int \omega_3(t)dt = \int_t (50t + 5)dt = \frac{50t^2}{2} + 5t + C_3 = 25t^2 + 5t + C_3 \text{ рад.}$$

При обранні початку відліку переміщення кожного тіла (в положенні тіла при  $t=0$ ), постійні інтегрування  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ .

Результати обчислення зведені до таблиці:

|                          |                       |        |
|--------------------------|-----------------------|--------|
| $X_1(t)=20t^2+4t$        | $V_1(t)=40t+4$        | Тіло 1 |
| $\varphi_2(t)=50t^2+10t$ | $\omega_2(t)=100t+10$ | Тіло 2 |
| $\varphi_3(t)=25t^2+5t$  | $\omega_3(t)=50t+5$   | Тіло 3 |
| $X_4(t)=5t^2+t$          | $V_4(t)=10t+1$        | Тіло 4 |

### Приклад задачі індивідуального завдання ТМ-9.

Задача ТМ-9 на визначення кінематичних параметрів точок і тіл. Для заданої системи тіл визначити швидкість та прискорення точок, у момент часу  $t$ , якщо відомий закон руху одного з тіл системи.

**Вказівки:** Для розв'язання задачі необхідно знати як визначаються швидкості та прискорення точок при плоско-паралельному русі (П.П.Р.) тіла.

1. Швидкість будь-якої точки  $M$  тіла, що здійснює П.П.Р., дорівнює:

$$V_M = \omega \cdot MP,$$

де:  $\omega$  кутова швидкість тіла;

$MP$  – відстань від даної точки до миттєвого центру швидкостей (М.Ц.Ш.) тіла.

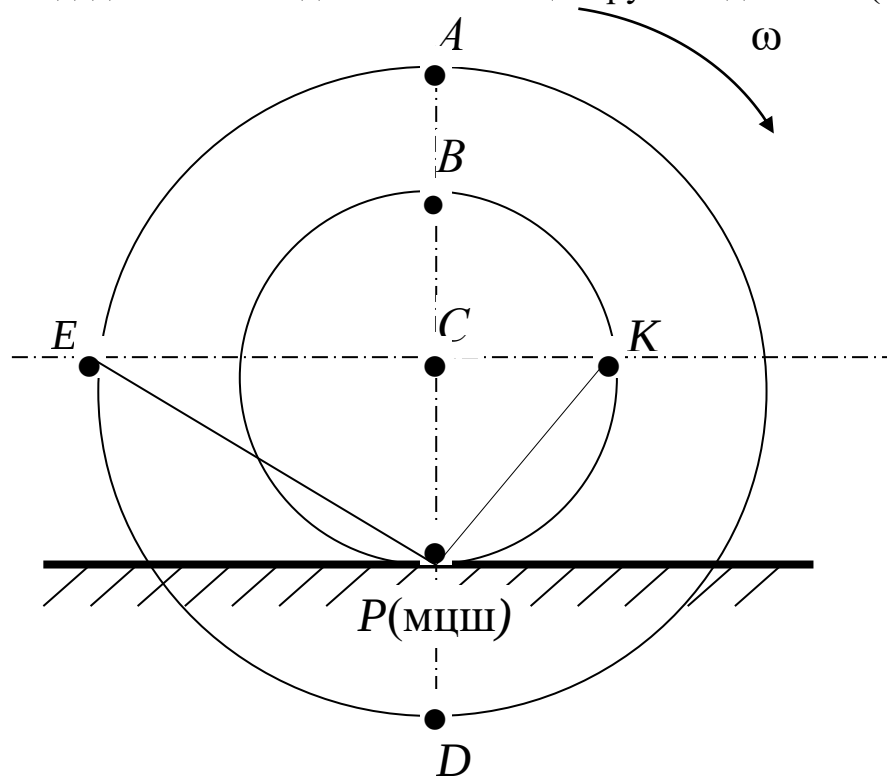


Рис. 1

Для точок  $A, B, C, D, E, K$ , які знаходяться на тілі, що здійснює П.П.Р., залежності для визначення швидкостей приведені нижче:

$$V_A = \omega \cdot AP = \omega \cdot (R + r);$$

$$V_B = \omega \cdot BP = \omega \cdot (2r);$$

$$V_C = \omega \cdot CP = \omega \cdot (r);$$

$$V_D = \omega \cdot DP = \omega \cdot (R - r);$$

$$V_E = \omega \cdot EP = \omega \cdot \sqrt{(R^2 + r^2)};$$

$$V_K = \omega \cdot KP = \omega \cdot (r) \sqrt{2}.$$

(Для визначення довжин відрізків  $EP$ ,  $KP$  застосовуємо теорему Піфагора).

Для позначення на схемі векторів швидкостей дотримуємось правила: **вектор швидкості точки** – це перпендикуляр до відрізка, який поєднує точку з миттєвим центром швидкостей (М.Ц.Ш.) тіла, та спрямований в напрямку обертання тіла (задає кутова швидкість  $\omega$ ). (рис. 2)

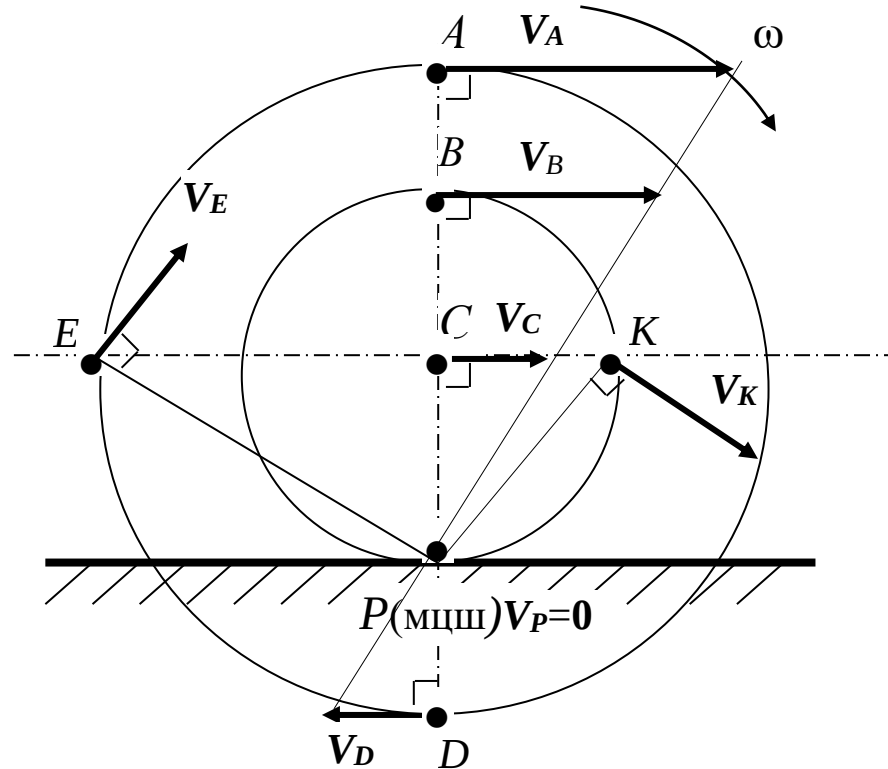


Рис. 2

**Звертаємо увагу!!!** На відміну від обертального руху (нерухома точка – це завжди центр, через який проходить вісь обертання, а швидкості точок на одному радіусі були однакові), при плоско-паралельному русі (нерухома точка весь час змінює положення), швидкості точок на одному радіусі (наприклад А, Е, D) мають РІЗНІ відстані до МЦШ, а тому і різні швидкості. (рис.2)

2. Прискорення довільної точки  $M$  при П.П.Р. тіла є векторна сума складових прискорень

$$\vec{a}_M = \vec{a}_K + \vec{a}_{MK}^{\tau} + \vec{a}_{MK}^n$$

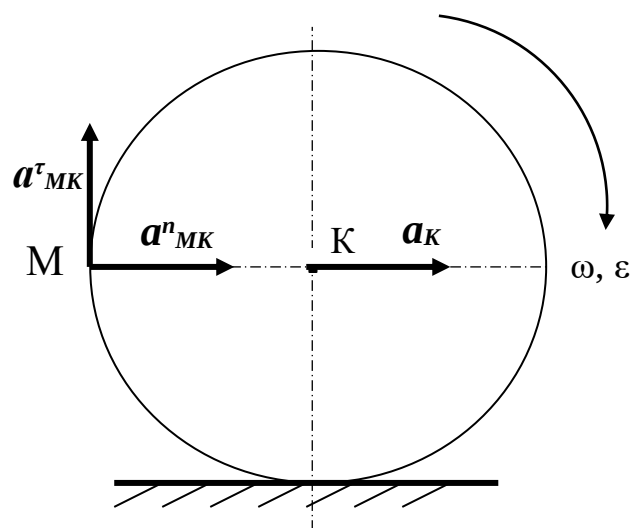
де:  $a_K$  – прискорення полюса  $K$ ;

$a_{MK}^{\tau}$  – тангенціальне прискорення обертального руху точки  $M$  навколо полюса  $K$ ;

$a_{MK}^n$  – нормальне прискорення точки  $M$  відносно полюса.

За полюс необхідно прийняти ту точку тіла, для якої відомі відповідні кінематичні характеристики (точка  $K$  – центр кола) (рис. 3).

a)



б)

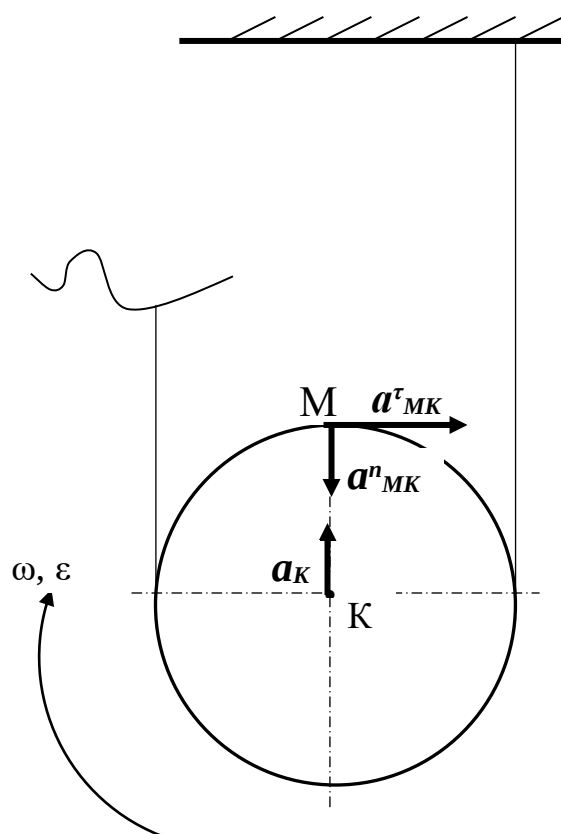


Рис. 3



### Приклад задачі

Для заданої системи тіл (рис. 4) визначити швидкість та прискорення точки **A**.

Дано:  $X_1 = 2t^2$  м,  $R_2 = 2$  м,  $r_2 = 1$  м,  $R_3 = 2$  м,  $t = 1$  с.

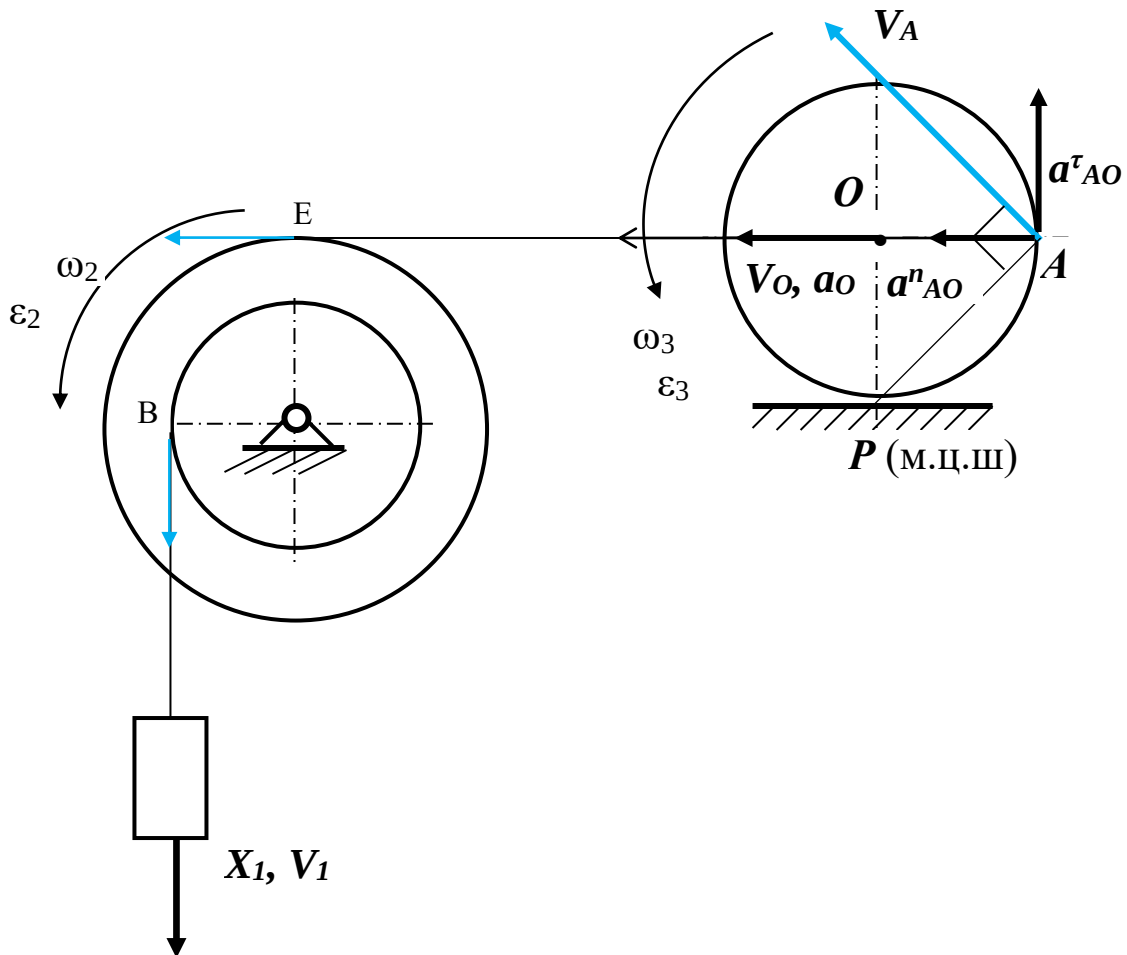


Рис. 4.

**Розв'язування:** Визначимо швидкість тіла 1 за його законом руху

$$V_1 = \frac{dx_1}{dt} = 4t \text{ м/с.}$$

$$V_B = V_1 = 4t$$

Кутова швидкість тіла 2 дорівнюватиме

$$\omega_2 = \frac{V_B}{r_2} = \frac{V_1}{r_2} = \frac{4t}{1} = 4t \text{ с}^{-1}.$$

$$V_E = \omega_2 \cdot R_2 = \left(\frac{V_1}{r_2}\right) \cdot R_2 = 4t \cdot 2 = 8t$$

Швидкість точки  $O$  визначиться виразом

$$V_0 = \omega_2 \cdot R_2 = 8t \text{ м/с.}$$

Кутова швидкість тіла 3 дорівнює відношенню швидкості точки  $O$  до відстані від точки  $O$  до М.Ц.Ш. (точка  $P$ ).

$$\omega_3 = \frac{V_0}{OP} = \frac{V_0}{R_3} = \frac{8t}{2} = 4t \text{ с}^{-1}. \quad (!)$$

Швидкість точки  $A$  дорівнюватиме :

$$V_A = \omega_3 \cdot AP = 4t \cdot (R_3 \cdot \sqrt{2}) = 4t \cdot 2\sqrt{2} = 10,6t \text{ м/с.}$$

Визначимо прискорення точки  $O$ , знаючи, що траєкторія її пряма лінія.

$$a_0 = \frac{dV_0}{dt} = 8 \text{ м/с}^2.$$

Прискорення точки  $A$  (точку  $O$  прийнято за полюс) має вигляд:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_0 + \vec{a}_{AO}^{\tau} + \vec{a}_{AO}^n$$

Спроекуємо дане векторне рівняння на осі координат  $x$  та  $y$  відповідно і отримаємо

$$a_{Ax} = a_0 + a_{AO}^n, \quad a_{Ay} = a_{AO}^{\tau}.$$

Нормальне прискорення точки  $A$  при обертанні тіла відносно полюса  $O$  дорівнює

$$a_{AO}^n = \omega_3^2 AO = \omega_3^2 R_3 = 32t^2.$$

Тоді проекція прискорення точки  $A$  на вісь  $x$  дорівнюватиме

$$a_{Ax} = 8 + 32t^2$$

При  $t = 1 \text{ с.}$   $a_{Ax} = 40 \text{ м/с}^2.$

Тангенціальне прискорення точки  $A$  при обертанні тіла відносно полюса  $O$  дорівнює:

$$a_{AO}^{\tau} = \varepsilon_3 \cdot AO,$$

де  $\varepsilon_3$  – кутове прискорення тіла 3.

При  $t = 1 \text{ с.}$

$$a_{Ay} = a_{AO}^{\tau} = 8 \text{ м/с}^2.$$

Остаточно визначимо модуль прискорення точки  $A$  (рис. 5).

$$a_A = \sqrt{(a_{Ax})^2 + (a_{Ay})^2} = \sqrt{40^2 + 8^2} = 40,8 \text{ (м/с}^2\text{.)}$$

Відповідь:  $V_A = 10,6 \text{ м/с}; \quad a_A = 40,8 \text{ м/с}^2.$

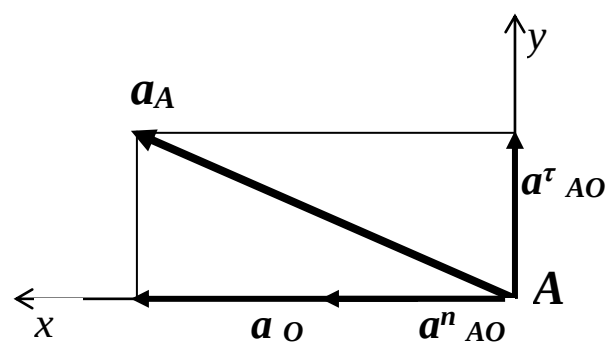
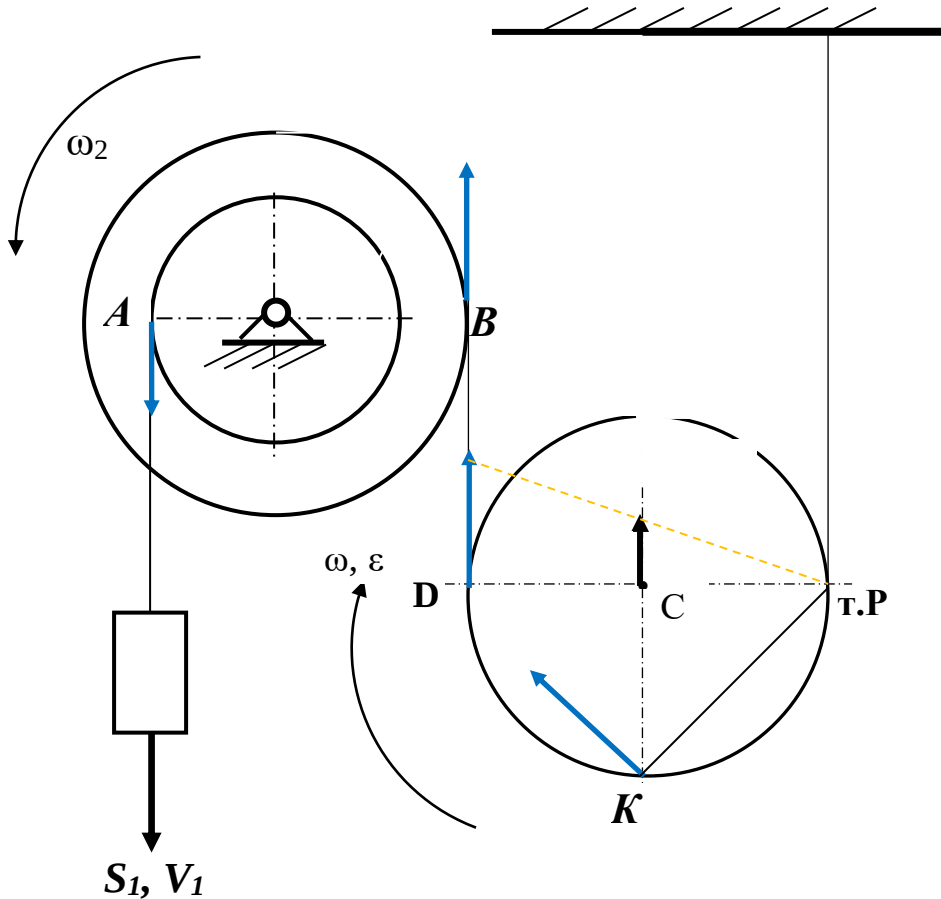


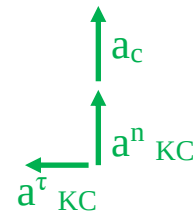
Рис. 5.

### Приклад задачі індивідуального завдання ТМ-9.

Для заданої системи тіл визначити швидкість та прискорення точки К, у момент часу  $t=1$  с, якщо відомий закон руху одного з тіл системи.



Дано:  
 $S_1=0.1t^2$   
 $R_2=0.5$  м  
 $r_2=0.25$  м  
 $R_3=2$  м  
 $r_3=1$  м  
 Визначити  
 $V_K$ -?  
 $a_K$ -?



1 Проводимо кінематичний аналіз механізму:

Тіло 1 – поступовий рух,

Тіло 2 – обертальний;

Тіло 3 – плоско-паралельний рух.

Для зручності рішення позначаємо на схемі точки передачі руху (точки, розташовані таким чином, що є спільними і для канату і для тіла). (точки А, В, D).

2.Визначаємо швидкість точки  $V_K$ .

Швидкість тіла 1 ( $V_1$ ):

$$V_1 = \frac{dS_1}{dt} = 0.2t$$

$$V_A = V_1 = 0.2t$$

Кутова швидкість тіла 2 дорівнюватиме

$$\omega_2 = \frac{V_A}{r_2} = \frac{0.2t}{0.25} = 0.8t \text{ с}^{-1}.$$

Знаходимо швидкість наступної точки, що належить тілу 2 (точка В):

$$V_B = \omega_2 \cdot R_2 = 0.8t \cdot 0.5 = 0.4t$$

Для передачі руху від тіла 2 до тіла 3 (канат в нас нерозтяжний) дорівнюємо швидкості точок D та В:

$$V_D = V_B = 0.4t$$

Для визначення кутової швидкості тіла 3 (тіло здійснює плоско-паралельний рух !) будемо використовувати наступний вираз:

$$\omega_3 = \frac{V_D}{DP} = \frac{V_D}{2R_3} = \frac{0.4t}{2 \cdot 2} = \frac{0.4t}{4} = 0.1t$$

Знайдемо положення миттєвого центру швидкостей (МЦШ) (т.Р) тіла 3: це точка, спільна з нерухомим канатом (він позначений штрихуванням).

Лінійна швидкість точок, які належать тілу 3, можна знайти за виразом:

$$V_K = \omega_3 \cdot KP = 0.1t \cdot (R_3 \cdot \sqrt{2}) = 0.1t \cdot 2\sqrt{2} = 0.28t$$

$$V_{K(t=1c)} = 0.28 \cdot 1 = 0.28 \text{ (м/с)}$$

$V_C = \omega_3 \cdot CP = 0.1t \cdot (R_3) = 0.1t \cdot 2 = 0.2t$  (точка С нам потрібна для визначення прискорення у якості полюса).

3. Визначаємо прискорення точки К ( $a_K$ ).

Якщо тіло здійснює плоско-паралельний рух, то прискорення точки на ньому визначаємо за наступною формулою:

$$\vec{a}_K = \vec{a}_C + \vec{a}_{KC}^{\tau} + \vec{a}_{KC}^n \quad (*)$$

Визначимо прискорення точки С, знаючи, що траєкторія її пряма лінія.

$$a_C = \frac{dV_C}{dt} = 0.2 \text{ м/с}^2.$$

Нормальне прискорення точки К при обертанні тіла відносно полюса С дорівнює

$$a_{KC}^n = \omega_3^2 KC = \omega_3^2 R_3 = (0.1t)^2 2 = 0.02t^2.$$

$$\text{При } t=1 \text{ с } a_{KC}^n = 0.02 \cdot 1^2 = 0.02 \text{ м/с}^2.$$

Тангенціальне (дотичне) прискорення точки  $K$  при обертанні тіла відносно полюса  $C$  дорівнює:

$$a_{KC}^{\tau} = \varepsilon_3 \cdot KC = \varepsilon_3 \cdot R_3, \text{ м/с}^2.$$

$$\text{де } \varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = 0.1 \text{ 1/с}^2.$$

$$a_{KC}^{\tau} = \varepsilon_3 \cdot KC = 0.1 \cdot 2 = 0.2, \text{ м/с}^2.$$

Позначаємо всі складові вектора прискорення на схемі.

Спроектуємо дане векторне рівняння (\*) на осі координат  $x$  та  $y$  відповідно і отримаємо

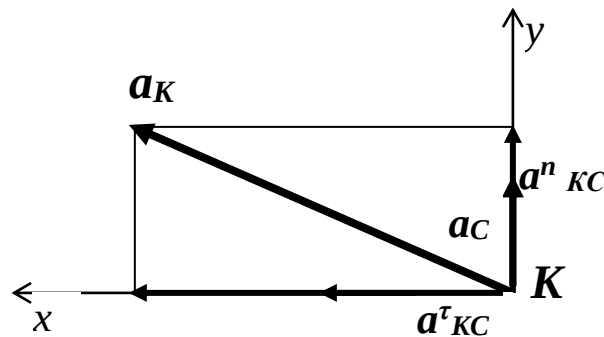
$$a_{KX} = a_{KC}^{\tau} \quad a_{KY} = a_C + a_{KC}^n,$$

Тоді проекція прискорення точки  $K$  на вісь  $x$  дорівнюватиме

$$a_{KX} = 0.2 \quad a_{KY} = 0.2 + 0.02 = 0.22 \text{ м/с}^2.$$

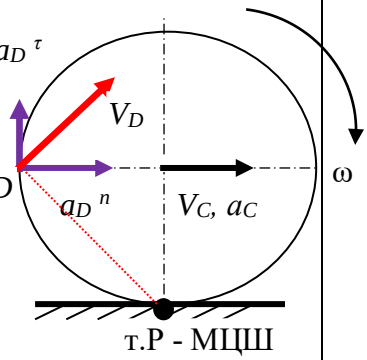
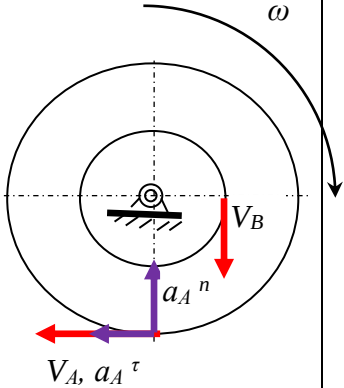
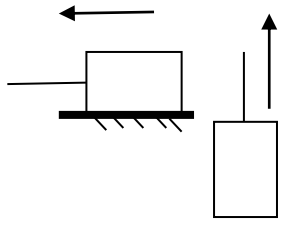
Остаточно визначимо модуль прискорення точки  $K$  (рис. 5).

$$a_K = \sqrt{(a_{Kx})^2 + (a_{Ky})^2} = \sqrt{0.2^2 + 0.22^2} = 0.297 \approx 0.3 \text{ (м/с}^2\text{.)}$$



# Залежності між законами руху, швидкостями та прискореннями тіл

$S, V, a$



| Вид руху тіла        | Закон руху               | Швидкість                                                                                                                                                                                                                                      | Прискорення                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|----------------------|--------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.Поступовий         | $S(t);$<br>або $x(t)$    | $V = \frac{dS}{dt}$                                                                                                                                                                                                                            | $a = \frac{dV}{dt}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 2.Обертальний        | $\varphi(t)$             | $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$<br>$V_A = \omega \cdot R$<br>$V_B = \omega \cdot r$                                                                                                                                                             | $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$<br>$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau$<br>$\bar{a}_A^n = \omega^2 \cdot R = \frac{V_A^2}{R}$<br>(спрямований до осі обертання)<br>$\bar{a}_A^\tau = \varepsilon \cdot R = \frac{dV_A}{dt}$<br>(спрямований перпендикулярно до $\bar{a}_A^n$ за напрямом обертання $\varepsilon$ )                                             |
| 3.Плоско-паралельний | $\varphi(t)$<br>$S_C(t)$ | $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$<br>$V_C = \frac{dS_C}{dt}$<br>$V_D = \omega \cdot DP$ (є прямований перпендикулярно до DP за напрямом обертання $\omega$ ).<br><br>Але і навпаки: якщо відома швидкість $V_D$ , то<br>$\omega = \frac{V_D}{DP}$ | $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$<br>$a_C = \frac{dV_C}{dt}$ (спрямований як $\bar{V}_C$ )<br>$\bar{a}_D = \bar{a}_C + \bar{a}_{DC}^n + \bar{a}_{DC}^\tau$<br>$\bar{a}_{DC}^n = \omega^2 \cdot DC$ (спрямований до осі обертання)<br>$\bar{a}_{DC}^\tau = \varepsilon \cdot DC$ (спрямований перпендикулярно до $\bar{a}_{DC}^n$ за напрямом обертання $\varepsilon$ ) |

