

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»**



МЕХАНІКО-МАШИНОБУДІВНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра будівельної, теоретичної та прикладної механіки

Методичні вказівки

до самостійних робіт студентів

з дисципліни «**Методи подібності та розмірності у механіці**»

що навчаються за освітньою програмою «Промислова естетика і сертифікація виробничого обладнання» спеціальності 132 «Матеріалознавство»

**м. Дніпро
2019**

Ропай В.А. Методичні вказівки до самостійних робіт студентів за дисципліною «Методи подібності та розмірності у механіці», що навчаються за освітньою програмою «Промислова естетика і сертифікація виробничого обладнання» спеціальності 132 «Матеріалознавство» / В.А. Ропай, – Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Д. НТУ «ДП», 2019. – 12 с.

Затверджено на засіданні кафедри будівельної, теоретичної та прикладної механіки (протокол № 5 від 19.06.2019 р.).

Представлені методичні вказівки до самостійних робіт студентів за дисципліною «Методи подібності та розмірності у механіці», що навчаються за освітньою програмою «Промислова естетика і сертифікація виробничого обладнання» спеціальності 132 «Матеріалознавство».

Практичні роботи допоможуть студентам набути базові знання та навички із застосування теорії подібностей, ознайомитись з методологією сучасних методів проектування з урахуванням наявності подібностей конструкцій. Наведені типові приклади використання теорій подібності і розмірності для встановлення фундаментальних механічних закономірностей.

Зміст

Вступ	4
1 Основні поняття аналізу розмірностей і подібності.....	5
Приклад №1	6
Приклад №2	7
Приклад №3	8
Приклад №4	9
2 Задачі для самостійного рішення	10
Висновки.....	11
Рекомендована література.....	11

Вступ

З сивої давнини людство використовує метод аналогії, який полягає в поширенні властивостей одних об'єктів на інші.

Значного розвитку міркування аналогій досягли в Стародавній Греції, де Евклідом була розроблена перша теорія подібності - теорія подібності геометричних фігур. Проте з розвитком механічного виробництва, металургії, кораблебудування, будівництва в XVI – XVIII ст. все частіше виявлялася недостатність геометричної подібності для прогнозування властивостей об'єктів більших розмірів на основі властивостей об'єктів менших розмірів.

Наприклад, при побудові в Венеції в XVII ст. галери великих розмірів підпори з перерізами, вибраними на основі міркувань геометричної подібності, виявилися недостатньо міцними і корабель зруйнувався під час його спуску на воду. Ставало дедалі все зрозумілішим, що моделювання фізичних об'єктів не може спиратися лише на поняття геометричної подібності, що призвело до зародження та розвитку теорії фізичного моделювання.

Основна ідея фізичного моделювання полягає в дослідженні об'єкту (моделі), яка є в деякому відношенні подібною до оригінального об'єкту (натури). Проблема встановлення подібності здавна привертала до себе увагу дослідників. Нею займалися у свій час ще Марк Вітрувій та Леонардо да Вінчі. Міркування щодо природи подібності в механіці можна зустріти в "Бесідах" Галілео Галілея, який відмічав, що "міцності подібних тіл не зберігають того ж відношення, яке існує між розмірами тіл". Достатньо повне означення механічної подібності дав в своїх "Основах" Ньютон.

Проте і після цього на протязі довгого часу використання міркувань подібності для розв'язання практично важливих задач мало місце в поодиноких випадках. Автором однієї з найбільш цікавих таких робіт був видатний російський механік Іван Петрович Кулібін.

В 1772 році Лондонське королівське товариство запровадило міжнародний конкурс на побудову кращої моделі моста, "який би складався з однієї дуги без підпор і тримався своїми кінцями тільки на берегах річки". Слід зауважити, що найбільший одноарочний міст, який існував у той час мав проліт всього 60 метрів. Англійці ж збиралися перекинути одноарочний міст через Темзу, який повинен був мати в чотири-п'ять разів більшу довжину прольоту.

В 1773 році Кулібіним був запропонований проект дерев'яного арочного моста прольотом в триста метрів. Для обґрунтування свого проекту, проробивши всі попередні розрахунки та провівши багато дослідів, Кулібін побудував модель мосту довжиною біля 30 метрів, тобто в 1:10 натуральної величини. Він також самостійно сформулював умови подібності для її навантаження. Ейлер підтвердив правильність розрахунків Кулібіна і модель була випробувана в присутності найавторитетніших петербурзьких академіків. Модель витримала навантаження більш ніж 55 тон, що значно перевищувало необхідну межу навантаження за розрахунками. Навіть при сучасному рівні розвитку будівельної техніки ця робота вражає увагу.

При вивченні механічних явищ вводиться ряд понять, наприклад енергія, швидкість, напруга і т. п., які характеризують дане явище і можуть бути задані і визначені за допомогою чисел. Всі питання про рух і про рівновагу формулюються як завдання про визначення деяких функцій і чисельних значень для величин, що характеризують явище, причому при вирішенні таких завдань закони природи і різні геометричні співвідношення представляють у вигляді функціональних рівнянь, зазвичай диференціальних.

У даному методичному посібнику, призначеному для студентів денної і заочної форм навчання розглядаються приклади вирішення завдань по всьому курсу теорії розмірностей і подібності в механіці.

Мета виконання практичної роботи – отримання студентами базових знань та навичок із застосування теорії подібностей, ознайомлення з методологією сучасних методів проектування з урахуванням наявності подібностей конструкцій.

1 Основні поняття аналізу розмірностей і подібності

Досить часто фізичний процес не вдається описати математично. У цьому випадку не має можливості застосувати теорію подібності і тому звертаються до альтернативного підходу – аналізу розмірностей. При використанні аналізу розмірностей достатньо знати лише перелік всіх величин, від яких залежить даний процес.

На основі аналізу розмірностей задача моделювання розв'язується за такою схемою:

- визначається тип задачі і вибирається система розмірностей;
- складається перелік величин, які суттєві для досліджуваного явища;
- за π -теореми визначається число критеріїв-комплексів та їх структура;

При цьому принципове значення мають два моменти: вибір системи розмірностей та перелік суттєвих величин. Обидві проблеми вирішуються тільки на основі достатньо глибокого розуміння фізичного механізму досліджуваного процесу. Тому для успішного застосування аналізу розмірностей необхідно володіти певним рівнем фізичних уявлень та інтуїцією дослідника.

Характерною особливістю аналізу розмірностей є те, що він не вимагає залучення основних рівнянь задачі. Крім того, часто виникає ситуація, коли рівняння відомі, проте аналітичне їх дослідження нашоувується на непереборні математичні труднощі. У таких випадках головну роль відіграють експериментальні методи дослідження, які дозволяють встановити найпростіші факти і записати їх у вигляді деяких математичних співвідношень. Для правильної постановки експериментів і узагальнення одержаних результатів на випадки, коли експеримент безпосередньо не проводився, необхідно вміти складати безрозмірні комплекси із величин, які суттєві для процесу і які для подібних явищ залишаються незмінними. Можливість такого попереднього теоретичного аналізу якраз і забезпечує теорія розмірностей.

Теорія подібності і розмірності вже тривалий період використовується вченими і немає меж її застосування. Наведемо для підтвердження цього хоча б дві сучасні області, в яких без знання теорії подібності не обійтися: 1) в теорії диференціальних рівнянь не завжди можливо отримати рішення в замкненому вигляді і тут застосовуючи теорію розмірностей можна отримати задовільний результат; 2) при моделюванні процесів, що швидко відбуваються, неможливо передбачити вплив окремих факторів і параметрів компонентів на кінцевий результат. І прикладів можна навести багато. Таким чином, теорія подібності і розмірності і в майбутньому з успіхом буде застосовуватися для моделювання складних процесів і явищ в різних областях знань, у т.ч. стосовно задач аналізу і синтезу в механіці та матеріалознавстві. При вивченні нового предмета студенти, як і всі починають вчатися на простих завданнях, поступово їх ускладнюючи. Коло завдань теорії подібності та розмірностей дуже широкий, тому починаємо з простих завдань.

Приклад №1

Розглянемо вимушені коливання пружної системи з демпфуванням.

Отже, розглядаються коливання матеріальної точки маси m на пружині жорсткості c у в'язкому середовищі з коефіцієнтом демпфування β під дією періодичної сили з амплітудою H і частотою ω . Зміщення точки x є функцією цих величин та часу t :

$$x = f(m, \beta, \omega, c, H, t). \quad (1)$$

У фізичній системі одиниць виміру $L M T$ величини, які входять до (1), мають розмірності

$$\begin{aligned} [x] &= L, [m] = M, [t] = T, [\omega] = T^{-1}, \\ [\beta] &= MT^{-1}, [c] = MT^{-2}, [H] = MLT^{-2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Оскільки всіх величин сім, а основних одиниць три, то можемо скласти чотири безрозмірні комплекси. Враховуючи те, що кількість вторинних величин теж рівна чотирьом, найпростіше побудувати комплекси у вигляді співвідношень відповідної вторинної величини до степеневого комплексу, складеного з основних величин:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\beta}{x^{a_1} m^{a_2} t^{a_3}}, & \pi_2 &= \frac{\omega}{x^{b_1} m^{b_2} t^{b_3}}, \\ \pi_3 &= \frac{c}{x^{c_1} m^{c_2} t^{c_3}}, & \pi_4 &= \frac{H}{x^{d_1} m^{d_2} t^{d_3}}. \end{aligned} \quad (3)$$

З умови безрозмірності π_i отримуємо

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, & a_2 &= 1, & a_3 &= -1, \\ b_1 &= 0, & b_2 &= 0, & b_3 &= -1, \\ c_1 &= 0, & c_2 &= 1, & c_3 &= -2, \\ d_1 &= 1, & d_2 &= 1, & d_3 &= -2. \end{aligned} \quad (4)$$

Отже,

$$\pi_1 = \frac{\beta t}{m}, \quad \pi_2 = \omega t, \quad \pi_3 = \frac{ct^2}{m}, \quad \pi_4 = \frac{Ht^2}{mx}, \quad (5)$$

Комбінуючи критерії π_1, π_2, π_3 та π_4 можна ввести нові, більш зручні критерії

$$\begin{aligned} \pi_1' &= \frac{\pi_3}{\pi_4} = \frac{cx}{H}, & \pi_2' &= \pi_2 = \omega t, \\ \pi_3' &= \frac{\pi_1}{\pi_3} = \frac{\beta}{m\omega}, & \pi_4' &= \frac{\pi_2^2}{\pi_3} = \frac{m\omega^2}{c}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким чином, дві системи – «н» – натура і «м»– модель будуть подібними, якщо виконуються рівності

$$\pi_{iH}' = \pi_{iM}' \quad i=1,2,3,4. \quad (7)$$

Для цих систем переміщення x_M та x_H у подібні моменти часу t_M та t_H , $t_H = t_M \omega_M / \omega_H$ будуть пов'язані співвідношенням

$$x_H = \frac{H_H c_M}{H_M c_H} x_M. \quad (8)$$

При цьому параметри процесів повинні задовольняти умовам

$$\frac{\eta_H}{\eta_M} = \frac{m_H \omega_H}{m_M \omega_M}, \quad \frac{c_H}{c_M} = \frac{m_H \omega_H^2}{m_M \omega_M^2}. \quad (9)$$

Приклад №2

Визначимо прогин балки під дією довільного навантаження. Нехай балка довжини l з площею поперечного перерізу S та з модулем пружності E знаходиться під дією зовнішнього навантаження, момент від якого в деякому перерізі є M . Потрібно знайти прогин балки w .

Очевидно, що в загальному випадку прогин можна вважати функцією E, l, M та моменту інерції поперечного перерізу J . Оскільки всі ці величини є розмірними, то прогин можна представити у вигляді

$$w = CE^{a_1} J^{a_2} M^{a_3} l^{a_4}, \quad (10)$$

де C – const.

За систему основних одиниць виберемо довжину, силу та час ($L F T$). Тоді формули розмірностей величин, які входять до (10) є такі:

$$\begin{aligned} [w] &= L, & [E] &= FL^{-2}, & [J] &= L^4, \\ [M] &= FL, & [l] &= L. \end{aligned} \quad (11)$$

Прирівнюючи в (10) показники при основних одиницях виміру, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} L: & \quad 1 = -2a_1 + 4a_2 + a_3 + a_4, \\ F: & \quad 0 = a_1 + a_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Як бачимо, для визначення чотирьох невідомих величин ми маємо лише два рівняння, тобто аналіз розмірностей у його класичному варіанті не дозволяє однозначно розв'язати поставлену задачу. Спробуємо розв'язати задачу шляхом збільшення числа основних одиниць виміру. Оскільки w за своєю суттю є величиною відмінною від довжини балки l , тому введемо до розгляду незалежну розмірність прогину $[w] = W$. Крім того, розміри поперечного перерізу балки також незалежні від її довжини, тому для площі поперечного перерізу введемо незалежну одиницю виміру S . Отже, замість системи, яка складалась з двох основних одиниць виміру L та F , маємо нову систему з чотирьох одиниць L , W , S та F . Тепер кількість величин, які входять до (10), перевищує кількість одиниць вимірів всього на один, а тому аналіз розмірностей дозволяє розв'язати задачу однозначно. В новій системі одиниць важливі для процесу величини мають наступні розмірності:

$$\begin{aligned} [w] &= W, & [E] &= FS^{-1}LW^{-1}, \\ [J] &= SL^2, & [M] &= FL, & [l] &= L. \end{aligned} \quad (13)$$

Тут потрібно зауважити, що:

– розмірність для моменту інерції J одержана, виходячи з означення цієї величини як добутку елемента площі поперечного перерізу на квадрат віддалі;

– розмірність модуля пружності E визначається як відношення розмірності напруження FS^{-1} до розмірності деформації WL^{-1} .

З врахуванням (13) формула розмірності для w приймає вигляд

$$W = (FS^{-1}WL^{-1})^{a_1} (SL^2)^{a_2} (FL)^{a_3} L^{a_4}. \quad (14)$$

Звідки

$$\begin{aligned} L: & \quad 0 = a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4, \\ F: & \quad 0 = a_1 + a_3, \\ W: & \quad 1 = -a_1, \\ S: & \quad 0 = -a_1 + a_2, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{звідки} \quad a_1 = -1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 2. \quad (16)$$

Таким чином, вираз для прогину балки приймає вигляд

$$w = C \frac{Ml^2}{EJ}. \quad (17)$$

Приклад №3

Моделювання рівноваги пружного тіла. Розглянемо однорідне ізотропне лінійно пружне тіло, матеріал якого характеризується модулем Юнга E та коефіцієнтом Пуассона ν . Нехай лінійні розміри тіла визначає характерний розмір l , а величина зовнішнього навантаження визначається силою P . Тоді процес деформації тіла можна представити у вигляді співвідношення

$$F(\sigma, \varepsilon, \nu, P, E, l) = 0, \quad (18)$$

куди крім вищезазначених величин входять напруження σ , деформації ε та зміщення u . В системі одиниць виміру L, F величини, що входять в (18), мають розмірності

$$\begin{aligned} [l] = [u] = L, & \quad [P] = FL^{-2}, \\ [\varepsilon] = [v] = 1, & \quad [\sigma] = [E] = FL^{-2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким чином, параметрів важливих для процесу - сім, а основних одиниць виміру - лише дві. Тому можемо скласти п'ять безрозмірних комплексів, наприклад, наступних:

$$\begin{aligned} \pi_1 = \frac{\sigma}{Pl^{-2}}, & \quad \pi_2 = \frac{E}{Pl^{-2}}, \\ \pi_3 = \frac{U}{l}, & \quad \pi_4 = v, \quad \pi_5 = \varepsilon. \end{aligned} \quad (20)$$

Іноді замість комплексу π_1 вводять комплекс

$$\pi'_1 = \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{\sigma}{E}. \quad (21)$$

На основі одержаних критеріїв отримуємо формули для перерахунку напружень, деформацій та зміщень при переході від моделі до натурі:

$$\sigma_H = \frac{E_H}{E_M} \sigma_M, \quad \varepsilon_H = \varepsilon_M, \quad u_H = \frac{l_H}{l_M} u_M. \quad (22)$$

При цьому мають виконуватися умови

$$P_H = \frac{E_H l_H^2}{E_M l_M^2} P_M, \quad v_H = v_M. \quad (23)$$

Приклад №4

Розглянемо балку довжини l , яка знаходиться під дією рівномірного розподіленого навантаження q (рис. 1). Рівняння рівноваги такої балки можна записати у вигляді

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = q, \quad (24)$$

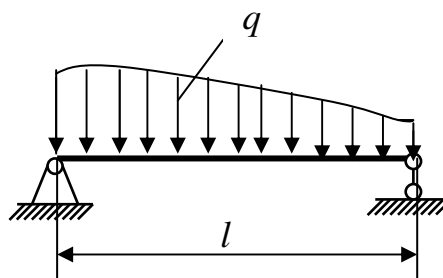


Рис. 1 Схема балки

де w – прогин балки, E – модуль Юнга, J – момент інерції поперечного перерізу. Застосуємо до (24) афінно подібне перетворення:

$$\bar{x} = k_x x; \quad \bar{l} = k_l l; \quad \bar{w} = k_w w; \quad \bar{J} = k_J J; \quad \bar{E} = k_E E; \quad \bar{q} = k_q q. \quad (25)$$

Обумовлююче рівняння, задоволення якого, дозволяє залишити інваріантним рівняння (24), очевидно, має вигляд

$$\frac{k_E k_J k_w}{k_l^4 k_q} = 1. \quad (26)$$

Йому відповідає критерій

$$\frac{E J w}{l^4 q} = idem. \quad (27)$$

Тобто, знаючи розв'язок модельної задачі \bar{w} , прогин натурної балки обраховується за формулою

$$w = \frac{\bar{E} \bar{J} l^4 q}{E J l^4 \bar{q}} \bar{w}. \quad (28)$$

Зауважимо, що коли балки є геометрично пропорційно подібними, то $k_J = k_l^4$, $k_w = k_l$ і критерій (27) набуває значно простішого вигляду.

Як бачимо, критерії подібності, отримані на основі аналізу розмірностей, повністю співпадають з відповідними критеріями, знайденими за допомогою теорії подібності. Різниця полягає лише в об'ємі попередніх знань, які стосуються досліджуваного явища. Успішне застосування теорії подібності значним чином залежить від можливості виконати замкнену математичну постановку задачі або, принаймні, скласти систему основних рівнянь та визначити умови єдиності їх розв'язку. Для використання ж аналізу розмірностей не має необхідності знати основні рівняння, достатньо лише знати, в якій системі загальних співвідношень знаходяться величини, суттєві для явища. Таким чином, різниця між теорією подібності та аналізом розмірностей полягає в тому, що апарат теорії подібності застосовується до рівнянь, які описують явище, а апарат аналізу розмірностей - до формули розмірності. Проте за своєю суттю обидва методи співпадають, а тому призводять до абсолютно еквівалентних результатів.

2 Задачі для самостійного рішення

1. За допомогою аналізу розмірностей знайти залежність періоду коливань математичного маятника від його довжини l , маси маятника m , прискорення вільного падіння g , кутової амплітуди θ .

2. Для дослідного (оптимального) зразка моделі молота отримані наступні параметри: хід ударника x_1 , маса ударника $m_1 = 150$ кг; число ударів за хвилину $z_1 = 180$ уд/хв; енергія удару $N = 3000$ Нм; ККД молота $\eta = 0,7$. Знайти параметри подібного зразка, якщо відомо, що $x = 680$ мм, $z = 120$ уд/хв, $A = 1500$ Нм.

3. За допомогою теорії подібності отримати вираз, що описує III закон Кеплера.
4. Отримати критерії подібності для пружних механічних систем з одним ступенем вільності.
5. Отримати формулу періоду власних коливань крапельки в'язкої рідини під впливом її поверхневого натягіння.
6. Є пружний маятник, що складається з пружної пружини, жорсткості k , з підвішеним контейнером, об'ємом v , наповнений рідиною, щільністю ρ . Отримати вираз для періоду коливань маятника.
7. Завдання про витік сипкого матеріалу з отвору.
Знайти критерії подібності і встановити зв'язок між критеріями подібності
Прийняти наступні позначення:
 Q - витрата сипкого матеріалу, кг/с;
 D - діаметр отвору, м
 d - середній розмір зерна, м
 ρ - щільність матеріалу, кг/м³
 g - прискорення вільного падіння, м/с²
8. Робочий процес вентилятора визначають наступні параметри: ρ – щільність середовища, кг/м³; n – число оборотів в одиницю часу, 1/с; D – діаметр гвинта, м; Q – витрата повітря, м³/с; H – натиск, Н/м²; N – потужність, Вт. Отримати критерії подібності.
9. Визначити силу опору, що діє на тіло, рухомого з деякою швидкістю у в'язкій рідині, що має вільну поверхню.
10. Розглянути опір води або повітря руху твердих тіл, прийнявши можливість звернення рухів, тобто розглянути нерухомих тіло, обтічне рідкою або газоподібний струменем.
11. Розглянути моделювання сили тяжіння поблизу поверхні Землі.
12. Відцентрове моделювання. Оцінити на моделі термін служби греблі або дамби заданої форми.
13. Застосування теорії подібності та розмірності для дослідження поршневих двигунів.
14. Встановлення закономірності руйнування вугілля водяним струменем.
15. Подібність кривошипно-шатунних механізмів.

Висновки

Теорія подібності і розмірності широко застосовується для моделювання складних процесів і явищ в різних областях знань, у т.ч. стосовно задач аналізу і синтезу в механіці та матеріалознавстві.

За результатами виконання практичної роботи студент повинен вміти:

- формулювати критерії та умови подібності, отримані на основі аналізу розмірностей;
- застосовувати методи розв'язання задач теорії подібності;
- використовувати методи аналізу розмірностей і критерії подібності при моделюванні фізичних процесів та явищ в механіці та матеріалознавстві.

Рекомендована література

1. Ропай В.А. Методи подібності та розмірності у механіці. Конспект лекцій. НТУ «ДП», 2019. 84 с.
2. Основи теорії подібності та аналізу розмірностей та їх застосування в задачах механіки: Навчальний посібник / Упорядники: Т.Ю. Кепич та О.Г. Куценко – К., 2004. – 101 с.
3. Алабужев П.М. Теории подобия и размерностей. Моделирование. / П.М. Алабужев, В.Б. Геронимус, Л.М. Миневиц, Б.А. Шеховцов – М.: Высшая школа – 1968. – 278 с.
4. Гухман А.А. Введение в теорию подобия. М.: Высшая школа, 1973. – 296 с.
5. Жуковский Н.Е. Теоретические основы воздухоплавания. М.: ОГТИ, 1938. – 539 с.
6. Кирпичев М.В. Математические основы теории подобия / М.В. Кирпичев, П.К. Конаков – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1949. –128 с.
7. Кирпичев М.В. Теория подобия. М.: Изд-во АН СССР, 1953. –143 с.
8. Назаров А.Г. О механическом подобии твердых деформируемых тел. Ереван: Изд-во АН СССР, 1965. – 167 с.
9. Седов Л.И. Методы подобия и размерностей в механике. М.: Наука, 1987. – 448 с.
10. Шаповалов Л.А. Моделирование в задачах механики элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1990. – 228 с.