МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА
1899

Конспект лекцій

з дисципліни
«Основи механіки твердого тіла»
Розділ «Теоретична механіка»

Дніпро, 2020

ВСТУП

В умовах сучасного розвитку техніки виникають задачі, зв'язані з розрахунком, проектуванням, виробництвом і експлуатацією різних споруджень, машин і механізмів. У визначеній мірі рішення їх ґрунтується на деяких загальних принципах. Це викликано тим, що в поставлених задачах істотне місце займають питання, що вимагають обов'язкового вивчення законів руху або умов рівноваги розглянутих матеріальних об'єктів.

Теоретична механіка являє собою частину механіки, у якій вивчаються загальні закони руху матеріальних об'єктів, а також їхньої умови рівноваги під дією сил.

Під рухом розуміється механічна зміна положення матеріальних об'єктів у просторі з часом.

Весь курс «Теоретична механіка» містить три основних розділи: статика, кінематика і динаміка.

СТАТИКА – це розділ, у якому вивчається рівновага матеріальних об'єктів під дією сил.

1. Основні поняття і визначення

Сила – це параметр, що є кількісною мірою механічної взаємодії тіл. Сила – величина векторна.

Система сил – це будь-яка сукупність сил, що діють на тіло.

Урівноважена система сил – це система, під дією якої матеріальний об'єкт (тіло) знаходиться в стані відносного спокою. Урівноважені системи еквівалентні нулю.

Рівновага матеріального об'єкта – це стан його нерухомості (спокою) стосовно Землі.

Еквівалентні системи сил – це системи, що впливають на матеріальний об'єкт однаково.

Рівнодіюча системи сил ($\vec{R}$) – це сила еквівалентна даній системі сил ($\vec{F}_k$). Вона дорівнює векторної (геометричної) сумі всіх сил, що діють на тіло (рис. 1).

$$\boxed{\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots \vec{F}_N = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k} \tag{1}$$

Зосереджена сила – це сила, прикладена в конкретній точці тіла (рис. 2).

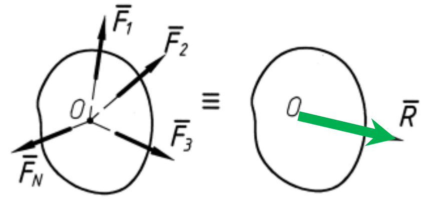


Рис. 1. Рівнодіюча системи сил

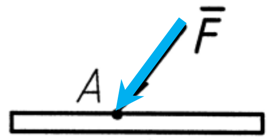


Рис. 2. Зосереджена сила

Розподілене навантаження (сила) – це сила, що розподілена по довжині, площі або обсягові тіла. Надалі будемо розглядати тільки випадки плоских розподілених по довжині тіла сил (уздовж відрізка прямій).

Така розподілена сила характеризується її інтенсивністю $q\left(\frac{\text{Н}}{\text{м}}\right)$, тобто величиною сили, що приходиться на одиницю довжини навантаженого відрізка.

Розподілене навантаження буває рівномірним і нерівномірним.

а) рівномірне – сила рівномірно розподілена уздовж відрізка прямій (рис. 3). Інтенсивність її q на всій ділянці постійна.

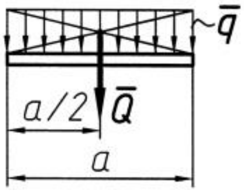


Рис. 3. Рівномірно розподілене навантаження

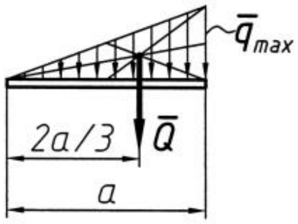


Рис. 4. Нерівномірно розподілене навантаження

При статичних розрахунках цю систему сил можна замінити рівнодіючою зосередженою силою

$$\boxed{Q = aq} \qquad (2)$$

Прикладена вона в центрі ваги фігури (прямокутника) навантаження.

б) нерівномірна сила довільно розподілена уздовж відрізка прямої.

Розглянемо випадок лінійної зміни інтенсивності розподіленого навантаження (рис. 4).

Тут $q_{\max}$ – максимальне значення інтенсивності розподіленого навантаження.

Рівнодіюча $\vec{Q}$ визначається аналогічно попередньому випадкові.

$$\boxed{Q = \frac{1}{2} a q_{\max}.} \qquad (3)$$

<u>**Висновок.**</u> Розподілене навантаження можна замінити зосередженою силою $\vec{Q}$, рівної площі фігури навантаження. Прикладено зосереджену силу в центрі ваги фігури навантаження.

Вільне тіло – це тіло не зв'язане з іншими тілами і воля переміщення якого нічим не обмежена. У протилежному випадку – тіло невільне. Наприклад, тіло, що знаходиться на поверхні іншого, є невільним. А тіло в польоті (без опору повітря) – вільне.

2. Аксіоми статики

2.1. Аксіома 1

Абсолютно тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією двох сил, якщо ці сили рівні по модулі, протилежні по напрямку і спрямовані уздовж одній прямій (рис. 5).

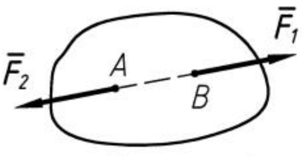


Рис. 5. Рівновага тіла

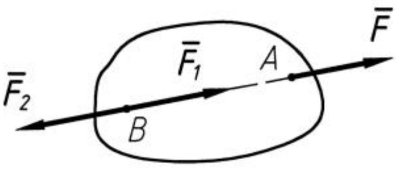


Рис. 6. Перенос сили по лінії її дії

$$\boxed{|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|,} \quad \boxed{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0.}$$

2.2. Аксіома 2

Дія даної системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо до неї додати або відняти будь-яку іншу урівноважену систему сил (тому що урівноважена система сил еквівалентна нулю).

<u>Наслідок з аксіом 1 і 2.</u> Дія сили на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо її перенести в будь-яку точку по лінії дії сили (рис. 6).

Покажемо це.

Нехай на тіло діє сила $\vec{F}$, прикладена в точці A. У довільній точці B по лінії дії цієї сили прикладемо урівноважену систему двох сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ таких, що $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}\right|$ (відповідно до аксіоми 1). При цьому сили $\vec{F}$ і $\vec{F}_2$ також утворять урівноважену систему сил, що може бути відкинута. У результаті на тіло буде діяти только сила $\vec{F}_1 = \vec{F}$.

<u>Висновок</u>. Силу, що діє на тверде тіло, можна переносити в будь-яку точку по лінії її дії. При цьому рівновага тіла не порушиться.

2.3. Аксіома 3 (аксіома про паралелограм сил)

Дві непаралельні сили, прикладені до тіла в одній точці, мають рівнодіючу, прикладену в тій же точці і являє собою діагональ паралелограма, побудованого на цих силах, як на сторонах (рис. 7).

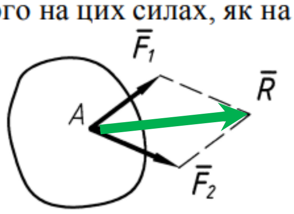


Рис. 7. Рівнодіюча двох сил

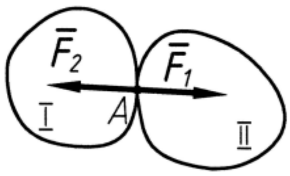


Рис. 8. Рівнодія двох тіл

<u>Висновок</u>. Рівнодіюча двох сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, прикладених в одній точці, дорівнює геометричної (векторної) сумі цих сил.

2.4. Аксіома 4

Два тіла взаємодіють між собою із силами рівними по модулю і протилежно спрямованими (рис. 8). Тобто дія одного тіла на інше дорівнює протидії іншого.

2.5. Аксіома 5 (принцип затвердіння)

Рівновага тіла, що деформується і знаходиться під дією системи сил не зміниться, якщо тіло вважати абсолютно твердим.

Усяке тіло, що деформується, в стані рівноваги не змінює своєї форми і розмірів, тому його можна вважати абсолютно твердим.

3. В'язи і їх реакції
3.1. Поняття в'язей і реакцій

В'язи – це тіла, що обмежують переміщення розглянутого тіла в просторі. Наприклад, для вантажу, що лежить на поверхні столу, в'язою є стіл. Реакція в'язі – це сила, з якою в'язь діє на розглянуте тіло. Наприклад, вантаж, що лежить на поверхні столу, діє на неї із силою власної ваги. У свою чергу поверхня діє на вантаж з такою же, але протилежно спрямованою силою. (аксіома 4). Ця сила – реакція в'язі. Сили, що не є реакціями, називаються активними силами.

реакції всіх видів в'язів показано червоним кольором.
Вирішуючи задачу, реакції потрібно самостійно позначати на схемі.

3.2. Деякі типи в'язей і їх реакції
3.2.1. Ідеальна нитка

Це умовно нерозтяжна і невагома нитка (рис. 9).

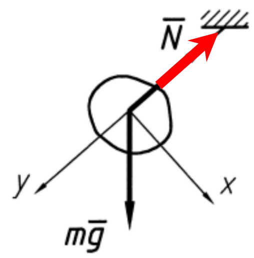


Рис. 9. В'язь – ідеальна нитка

Наприклад, якщо вага каната і його деформація не впливають на кінцевий результат задачі, то даний канат можна моделювати ідеальною ниткою. До цього також можна віднести ланцюг, трос, мотузку і т.д.

Тут: $m\vec{g}$ – сила ваги тіла, $\vec{N}$ – реакція нитки.

У даному випадку переміщення тіла обмежене тільки по осі y через наявність в'язі (нитки), тому реакція $\vec{N}$ буде спрямована по осі y уздовж нитки.

Висновок. Реакція нитки завжди спрямована по нитці.

3.2.2. Гладка поверхня

Гладкою називається поверхня, тертям об яку можна в першому наближенні зневажити (рис. 10). Така поверхня не дає тілу рухатися тільки по напрямку загального перпендикуляра (нормалі) до поверхні дотичних тіл у точці їхнього торкання.

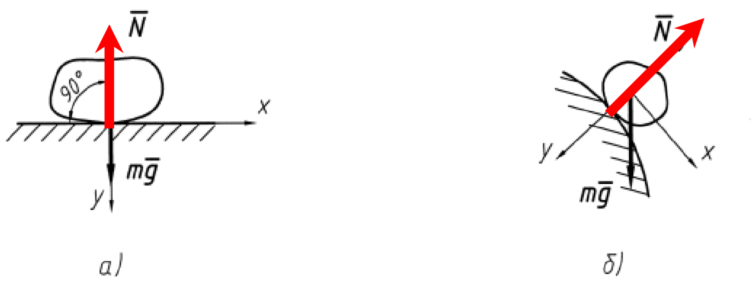


Рис. 10. В'язь – гладка поверхня

Тут також рух тіла обмежений тільки по осі y (наявність в'язі по осі y).

Висновок. Реакція гладкої поверхні завжди спрямована перпендикулярно поверхням дотичних тіл.

3.2.3. Циліндрична шарнірна опора

Простим прикладом циліндричного шарніра може служити болтове з'єднання двох тел. Опора може бути нерухома і рухлива.

Нерухома циліндрична шарнірна опора (рис. 11)

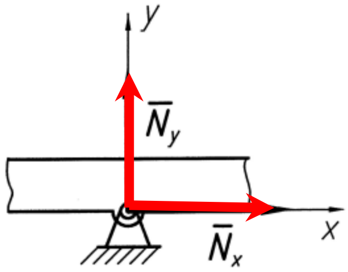


Рис. 11. В'язь нерухома циліндрична шарнірна опора

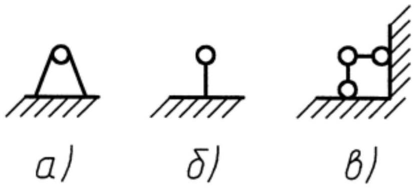


Рис. 12. Схематичне позначення нерухомої опори

Тут рух тіла обмежений відразу по двох осях x и y. Тому при дії активних сил на тіло в шарнірі виникають дві складові реакції $\vec{N}_x$ і $\vec{N}_y$.

Умовні позначки нерухомої циліндричної шарнірної опори показані на розрахункових схемах (рис. 12)

Рухлива циліндрична шарнірна опора (рис. 13)

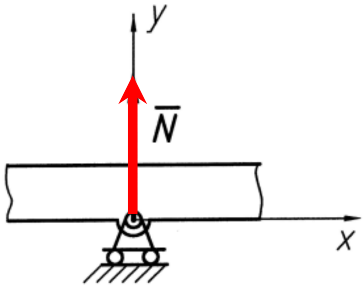


Рис. 13. В'язь – рухлива циліндрична шарнірна опора

Дана опора може бути представлена як і опора (рис. 11), але підставою своєю спирається на один або дві ковзанки (циліндра). Тому по осі x тіло може поступально рухатися. Для цього типу в'язі рух тіла обмежений тільки по осі y.

Унаслідок дії на тіло активних сил, реакція $\vec{N}$ в шарнірі буде спрямована перпендикулярно поверхні опори.

3.2.4. Ідеальний стрижень

Це умовно невагомий стрижень, закріплений на обох кінцях шарнірами (рис. 14).

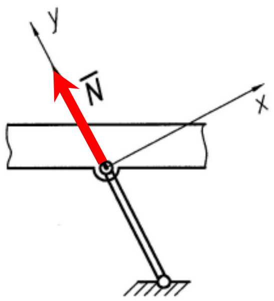


Рис. 14. В'язь – ідеальний стрижень

Наприклад, якщо вага стрижня і його деформація не впливають на його кінцевий результат задачі, то даний стрижень можна в першому наближенні вважати невагомим. Тут воля переміщення обмежена по осі y (рис. 14). Тому реакція $\vec{N}$ буде спрямована уздовж осі стрижня.

3.2.5. Кульовий шарнір (рис. 15) і підп'ятник (рис. 16)

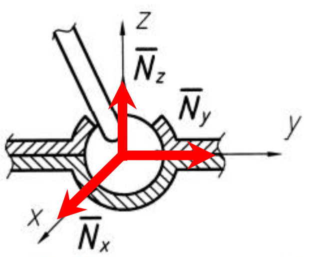


Рис. 15. В'язь – кульовий шарнір

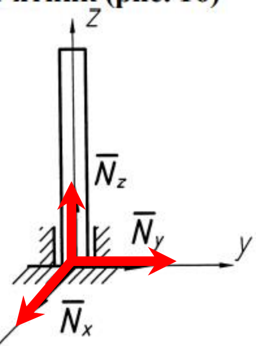


Рис. 16. В'язь – підп'ятник

Прикладом таких в'язей є кульова п'ята, за допомогою якої закріплюють фотоапарат до штатива, підшипник з упором і т.п.

Для даних типів в'язей (воля тіла обмежена відразу по 3-м осям), виникають 3 складових реакції $\vec{N}_x$, $\vec{N}_y$, $\vec{N}_z$.

3.2.6. Жорстке защемлення, закладення (рис. 17)

Наприклад, балка жорстко затиснена в стіні.

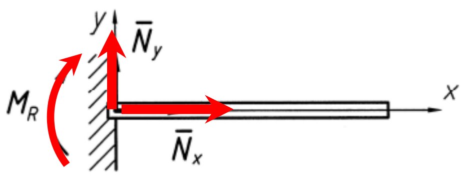


Рис. 17. В'язь – жорстке защемлення

У випадку дії на балку активних сил у площині xy виникають три реактивних силових фактори: сили – реакції $\vec{N}_x$ і $\vec{N}_y$, а також реактивний момент M_R. Реактивний момент M_R є внутрішнім силовим фактором в'язі, що протидіє поворотові балки щодо стіни.

Висновок. Для даного типу в'язі (у випадку дії активних сил у площині xy) виникають сили – реакції $\vec{N}_x$, $\vec{N}_y$ і реактивний момент M_R.

4. Аксіома в'язей (принцип звільнення від в'язей)

Усяке невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути всі в'язі і замінити їхні дії реакціями цих в'язів (рис. 18).

Наприклад, брус AB вагою G (рис. 18, *а*), для якого в'язами є поверхні в точках D і A, можна розглядати як вільне тіло. При цьому умовно відкинуті в'язі заміняються реакціями $\vec{N}_D$ і $\vec{N}_A$ (рис. 18, *б*).

Рис. 18. Звільнення від в'язей

5. Момент сили щодо центра (точки)

При дії сили на тіло, сила прагне зрушити тіло поступально і зробити обертання тіла навколо якої-небудь точки. Обертальний ефект сили характеризується її моментом.

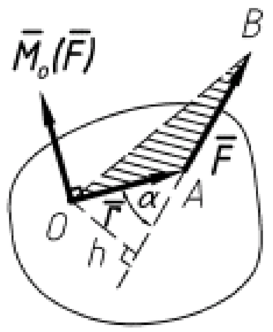


Рис. 19. Момент сили щодо центра

Нехай на тіло діє сила $\vec{F}$, прикладена в т. A. Допустимо, що сила прагне повернути тіло навколо центра O (рис. 19).

З'єднаємо точки O и A радіусом-вектором $\vec{r}$. Очевидно, що обертальний ефект залежить від сили $\vec{F}$ і радіуса-вектора $\vec{r}$. Момент сили $\vec{F}$ щодо центра O являє собою векторний добуток двох векторів $\vec{r}$ і $\vec{F}$.

$$\vec{M}_o\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{4}$$

Момент сили $\vec{F}$ щодо центра O – вектор, прикладений у центрі O и спрямований перпендикулярно площини, у якій лежать вектори $\vec{F}$ й $\vec{r}$ у ту сторону відкіля поворот тіла навколо т. O видний проти годинникової стрілки.

Розкриємо вираження (4)

$$\boxed{M_o\left(F\right) = F \cdot r \cdot \sin\alpha = \pm F \cdot h.} \tag{5}$$

Тоді по величині моментом сили $\vec{F}$ щодо центра O називається добуток модуля сили на плече (5).

Плече – найкоротша відстань від центра O до лінії дії сили, тобто довжина перпендикуляра, опущеного з т. O на лінію дії сили.

Властивості моменту сили щодо центра:

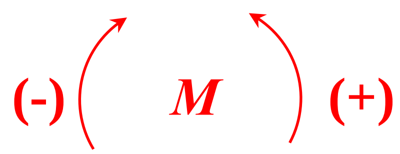
- момент сили $\vec{F}$ щодо центра O не зміниться при переносі сили по лінії її дії;
- момент сили $\vec{F}$ щодо центра O дорівнює нулеві, якщо:

а) сила $\vec{F}$ в даний момент часу дорівнює нулеві ($\vec{F} = 0$);

б) лінія дії сили $\vec{F}$ проходить через центр O ($h = 0$).

Надалі умовимося вважати, що величина моменту має знак плюс (+), якщо сила прагне повернути тіло навколо центра O проти ходи годинникової стрілки, і знак мінус (-) – по годинникової стрілці.

(умовне правило знаків)



Розкладемо силу $\vec{F}$ на дві складові $\vec{F}_z$ і $\vec{F}_{xy}$ ($\vec{F}_z$ рівнобіжна осі z, а $\vec{F}_{xy}$ лежить у площині xy.

Очевидно, що сила $\vec{F}_z$ не може повернути тіло навколо осі z (вона тільки прагне зрушити тіло уздовж осі z). Отже, обертальний ефект сили $\vec{F}$ буде створювати тільки складова $\vec{F}_{xy}$.

$$M_z\left(\vec{F}\right) = M_z\left(\vec{F}_{xy}\right). \tag{6}$$

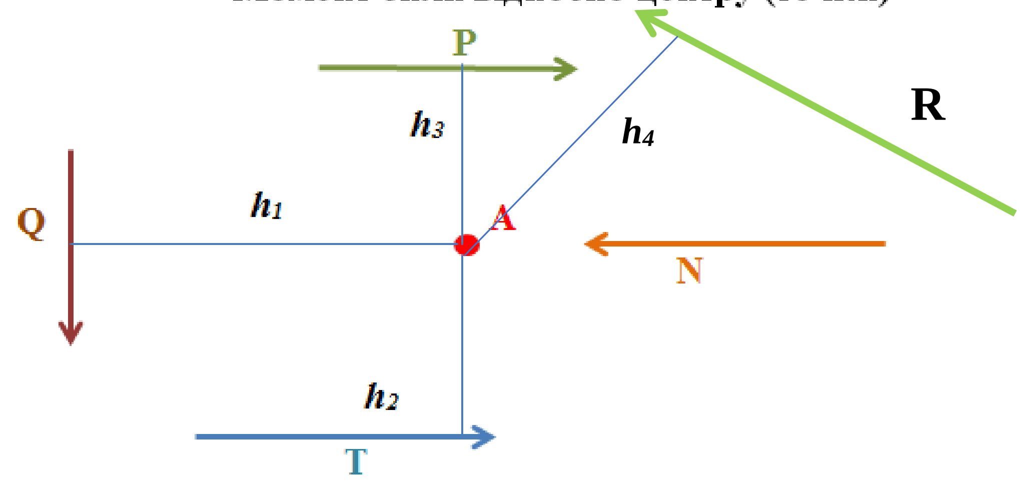
Обертальний ефект сили $\vec{F}_{xy}$ виміряється добутком модуля цієї сили на найкоротшу відстань від лінії дії цієї сили до осі z. Але цією же величиною виміряється і момент сили щодо точки O, у якій ось z перетинається з площиною xy.

$$M_z\left(\vec{F}\right) = M_o\left(\vec{F}_{xy}\right) = \pm F_{xy} \cdot h. \tag{7}$$

Висновок. Моментом сили щодо осі називається величина, рівна моментові проекції цієї сили на площину, перпендикулярну осі, узятому щодо точки перетинання осі з площиною.

Момент сили умовно вважається позитивним, якщо з позитивного кінця осі z поворот тіла від сили $\vec{F}_{xy}$ видний, що відбувається проти ходу годинникової стрілки (негативний – навпаки).

Момент сили відносно центру (точки)



$$M_A(Q) = Q \cdot (h_1) \qquad M_A(P) = -P \cdot (h_3)$$

$$M_A(T) = T \cdot (h_2)$$

$$M_A(N) = 0$$ (лінія дії сили проходить через точку A)

6. Момент сили щодо осі

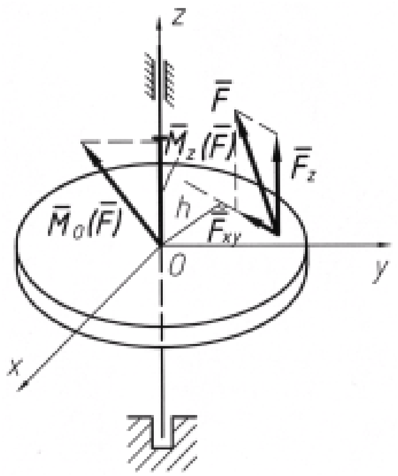


Рис. 20. Момент сили щодо осі

Момент сили щодо осі характеризує обертальний ефект, створюваний силою, що прагне повернути тіло навколо осі.

Момент сили $\vec{F}$ щодо осі (наприклад, осей *x*, *y* и *z*) прийнято позначати символами: $M_x\left(\vec{F}\right)$, $M_y\left(\vec{F}\right)$, $M_z\left(\vec{F}\right)$.

Розглянемо деяке тіло, що під дією сили $\vec{F}$ може обертатися щодо осі *z* (рис. 20).

7. Головний вектор і головний момент системи сил

Головний вектор – це векторна сума всіх сил системи.

$$\vec{R}_0 = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k. \tag{8}$$

Головний момент – це векторна сума моментів усіх сил системи щодо деякого заданого центра

$$\overline{M}_o = \sum_{k=1}^{N} M_o\left(\overline{F}_k\right). \tag{9}$$

8. Пари сил

Парою сил називається система з двох рівних по модулі, протилежно спрямованих і рівнобіжних між собою сил (рис. 21)

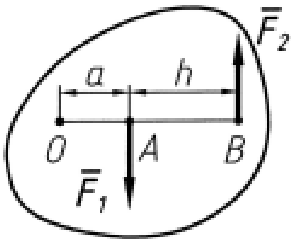


Рис. 21. Пари сил

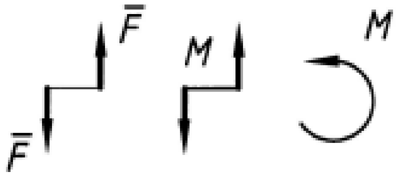


Рис. 22. Схематичне позначення пари сил

Визначимо головний вектор пари сил

$$\vec{R}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0. \qquad (10)$$

Головний момент пари сил щодо будь-якого центра *O* дорівнює

$$M_o = -F \cdot a + F(h + a) = F \cdot h. \qquad (11)$$

У загальному випадку головний момент у залежності від напрямку дії сил пари виразиться

$$M_o = \pm F \cdot h. \qquad (12)$$

Як видно, головний момент пари сил від вибору центра не залежить. Це значить, що пари сил можна переносити куди завгодно в площині її дії.

Висновок.

- головний вектор пари сил дорівнює 0;
- головний момент пари сил завжди дорівнює добуткові сили на найкоротшу відстань між силами.

З огляду на те, що пара сил викликає тільки обертаючий ефект, неї позначають моментом.

Умовна позначка пари сил показана на розрахункових схемах (рис. 22).