

Кафедра будівельної, теоретичної та
прикладної механіки



**Дисципліна: Основи механіки
твердого тіла**

**Конспект лекцій
Розділ: Опір матеріалів**

Викладач: Наumenко О.Г.
btpm.nmu.org.ua
Email: naumenko.o.h@nmu.one

ЛЕКЦІЯ 1. ОСНОВНІ ГІПОТЕЗИ, ПРИПУЩЕННЯ. МЕТОД ПЕРЕРІЗІВ. ЗАВДАННЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

У лекції викладено, що вивчає опір матеріалів.

Наведено задачі міцності та об'єкти, що вивчаються.

Викладено основні види простих деформацій, метод перерізів та основні гіпотези опору матеріалів.

Спираючись на матеріал лекції, довідкову та науково-технічну літературу

студент повинен уміти:

формулювати задачі опору матеріалів;

описувати сутність умов міцності, жорсткості та стійкості;

тлумачити задачі міцності для об'єктів, що вивчаються;

розрізняти основні види деформацій;

використовувати метод перерізів для обчислювання внутрішніх сил;

давати визначення напруження та його складових;

формулювати основні гіпотези опору матеріалів.

ОПОРОМ МАТЕРІАЛІВ НАЗИВАЮТЬ НАУКУ ПРО ІНЖЕНЕРНІ МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ЕЛЕМЕНТІВ МАШИН ТА СПОРУД НА МІЦНІСТЬ, ЖОРСТКІСТЬ І СТІЙКІСТЬ.

В процесі експлуатації машин і споруд їх елементи (стрижні, балки, пластини, болти,) в тій чи іншій мірі приймають участь у роботі конструкції і зазнають дії різних сил – навантажень.

Наука про опір матеріалів вивчає поведінку різних матеріалів під дією на них сил і вказує, як підібрати для кожного елемента конструкції належний матеріал та поперечні розміри за умови повної надійності роботи і найбільшої дешевизни споруди.

Іноді опору матеріалів доводиться вирішувати видозмінену задачу – **перевіряти достатність розмірів конструкцій, що існує або вже запроектованої.** Вимога надійності і найбільшої економії суперечать одна іншій. Перша веде, зазвичай, до збільшення витрат матеріалу, друга вимагає зниження витрат. Це протиріччя – найважливіший елемент наукової методики, що обумовлює розвиток опору матеріалів. Опір матеріалів обслуговує будівельну справу, машино-та суднобудування.

Для забезпечення нормальної роботи конструкція повинна задовольняти необхідним умовам міцності, жорсткості та стійкості.

***Міцність** – здатність конструкції та її елементів витримувати певне навантаження без руйнування.*

***Жорсткість** – здатність конструкції, її частин та деталей протидіяти зовнішнім навантаженням у відношенні деформації (зміни форми і розмірів). При заданих навантаженнях деформації не повинні перевищувати певної величини, яка встановлюється відповідно до вимог, що висуваються до конструкції.*

***Стійкість** – це здатність конструкції та її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги.*

1.1 Задачі міцності

Пряма: визначення міцних розмірів елементів таким чином, щоб вони при мінімальній вартості витримували задане навантаження протягом певного терміну.

Зворотна: перевірка на міцність елементів споруд та вузлів, що вже існують.

1.2 Об'єкти, що вивчаються

При всьому різноманітті видів конструктивних елементів, що зустрічаються в машинах та спорудах, їх можна звести до невеликого числа основних форм. Це:

1. Стрижні (бруси) – тіла, у яких один розмір (довжина) значно більше двох інших (поперечних).

Стрижні можуть бути прямолінійними (вал, вісь, балка) та криволінійними (ланка ланцюга, гак), тонкостінними, а також мати круглий, призматичний чи змінний переріз (рисунок 1.1).

Вісь стрижня – це сукупність точок, рівновіддалених від його поверхні



Рисунок 1.1 – Стрижні

2. Оболонки – тіла, обмежені криволінійними поверхнями, що розташовані близько одна від одної. У техніці зустрічаються оболонки циліндричної, конічної та сферичної конфігурації (рисунок 1.2). До оболонок відносяться купола будівель, корпуси підводних човнів, неплоскі стінки резервуарів.

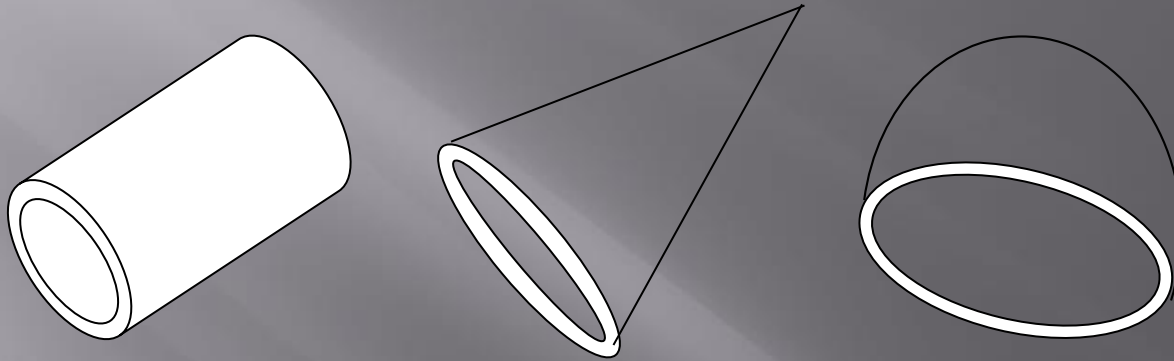


Рисунок 1.2 – Оболонки

3. Пластини – оболонки, у яких поверхня є площиною. Існують пластини круглої, прямокутної та іншої форми. До пластин відносяться плоскі днища та кришки резервуарів, диски турбомашин, перекриття інженерних споруд.

4. Масивні тіла – тіла, у яких всі три розміри мають однаковий порядок. До них відносяться фундаменти, підпірні стінки та ін.

1.3 Поняття про деформації

У теоретичної механіці (статика) вивчається рівновага абсолютно твердого тіла. Цього уявлення про матеріал достатньо для вирішення сформульованої у статиці задачі – визначити умови рівноваги прикладених до тіла сил.

При вивченні опору матеріалів необхідно врахувати, що реальні тіла можуть змінювати свої розміри та форму під дією зовнішніх сил і, врешті-решт, – руйнуватися. Ця зміна називається **деформацією**. Вперше на цю властивість було вказано Галілеєм у 1638 році.

Деформації бувають **пружні** (які зникають після припинення дії сил, що їх спричинили) та **пластичні, залишкові** (які не зникають після зняття навантажень).

Основні види простих деформацій:

- розтяг–стискання;
- зсув або зріз;
- кручення;
- згин.

Більш складні деформації – це сума простих видів.

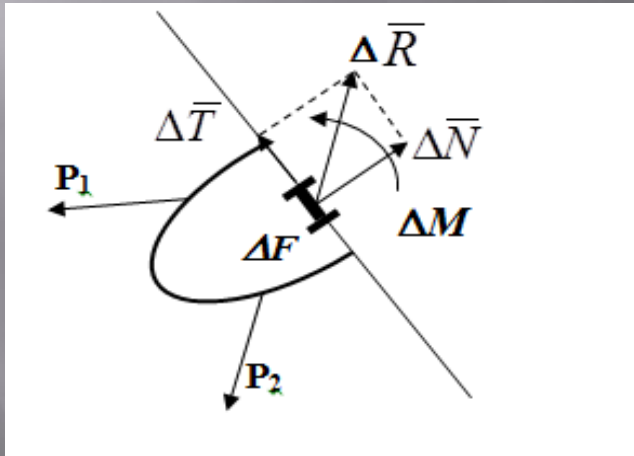
1.4 Метод **перерізів**

Для вирішення задачі міцності необхідно знати зовнішні сили, механічні властивості матеріалів, а також уміти визначати внутрішні сили.

Внутрішні сили – це сили міжатомної взаємодії між окремими частинами елемента споруди, що виникають під дією зовнішніх зусиль.

Чисельно характеризувати ступінь впливу зовнішніх зусиль на деформований елемент, необхідно навчитися, якщо вимірювати та обчислювати величину внутрішніх міжатомних сил, що виникають як результат деформації. Для цієї мети існує метод перерізів.

Для визначення внутрішніх зусиль в будь-якому перетині елемента потрібно подумки провести **переріз** (розріз) у цьому місці, відкинувши одну частину, і розглянути рівновагу іншої, замінивши дію відкинутої частини силами.



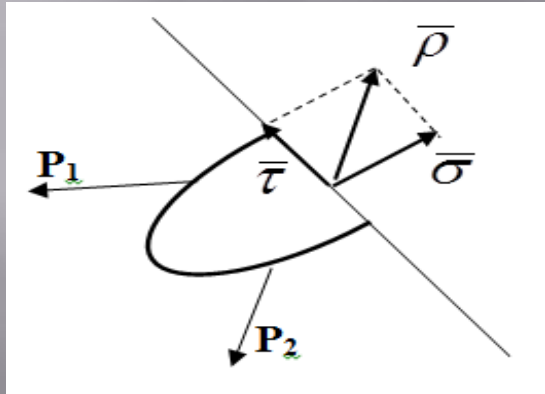
Величину внутрішніх зусиль (*головний вектор R* і *головний момент M*) у загальному випадку можна визначити з умов рівноваги (рівнянь рівноваги).

Рисунок 1.3 – Головний вектор та момент

Однак необхідно також знати характер розподілу по перетину внутрішніх зусиль – міру їхньої дії. Такою мірою є **напруження**.

Напруження є векторна величина, що характеризує інтенсивність внутрішніх зусиль в даній точці по даному перерізу.

Виділимо навколо точки, що нас цікавить, елементарну площу ΔF . Внутрішні зусилля в ній зводяться до головного вектору та головного моменту (рис. 1.3). Через те, що ΔM – нескінченно мала величина, то можемо нею знехтувати. Тоді напруження – це



$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta F} = \bar{\rho} \quad (1.1)$$

Розмірність напруження – $[Н/м^2]$, $[кГ/см^2]$.
Абсолютна величина напруження дорівнює

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}, \quad (1.2)$$

Рисунок 1.4 – Напруження.

де σ та τ – відповідно нормальна і дотична складова напруження у даній точці по даному перерізу (рис. 1.4).

Якщо внутрішні зусилля розподілені вздовж перерізу рівномірно, то величина напруження дорівнює

$$\sigma = \frac{N}{F}; \quad \tau = \frac{T}{F}; \quad \rho = \frac{R}{F}, \quad (1.3)$$

де N та T – **нормальна** і **дотична** складова головного вектора внутрішніх зусиль R по перерізу F .

1.5 Основні гіпотези

Для побудови теорії опору матеріалів приймають деякі гіпотези щодо структури та властивостей матеріалів, а також характеру деформацій.

I. Гіпотеза про суцільність матеріалу. Передбачається, що матеріал суцільно (без пустот) заповнює форму тіла.

II. Гіпотеза про однорідність та ізотропність. Передбачається, що в будь-якому напрямку механічні властивості матеріалу однакові (рис. 1.5).

Однак, іноді ця гіпотеза є неприйнятною. Наприклад, деревина та армовані матеріали є анізотропними.

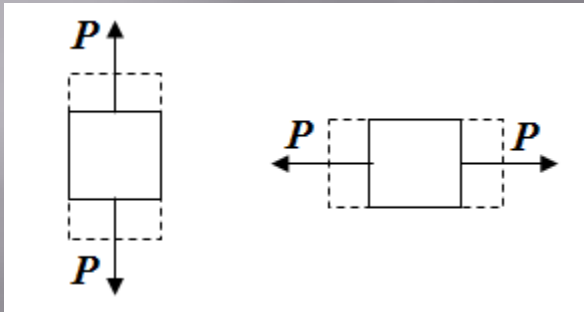


Рисунок 1.5 - Гіпотеза II

III. Гіпотеза про малість деформацій. Припускається, що деформації нескінченно малі у порівнянні з розмірами тіла. Це дозволяє знехтувати зміною в розташуванні зовнішніх сил відносно частин тіла і скласти рівняння рівноваги як для недеформованого тіла.

IV. Гіпотеза про ідеальну пружність матеріалу. Всі тіла в опорі матеріалів передбачаються абсолютно пружними. Відхилення точок прикладення зусиль при навантаженні реальних тіл несуттєві. Ними можна знехтувати до певних меж

V. Гіпотеза про пропорційність напружень і деформацій матеріалу. Деформації матеріалу конструкції в кожній його точці прямо пропорційні напруженням в цій точці. Виконується закон Гука (лінійна деформованість матеріалу).

VI. Принцип суперпозиції. Принцип незалежності дії сил і додавання навантажень. Результат дії на конструкцію системи навантажень дорівнює сумі результатів впливу на неї кожного навантаження окремо (рис. 1.6)

$$f = f_1 + f_2 + f_3$$

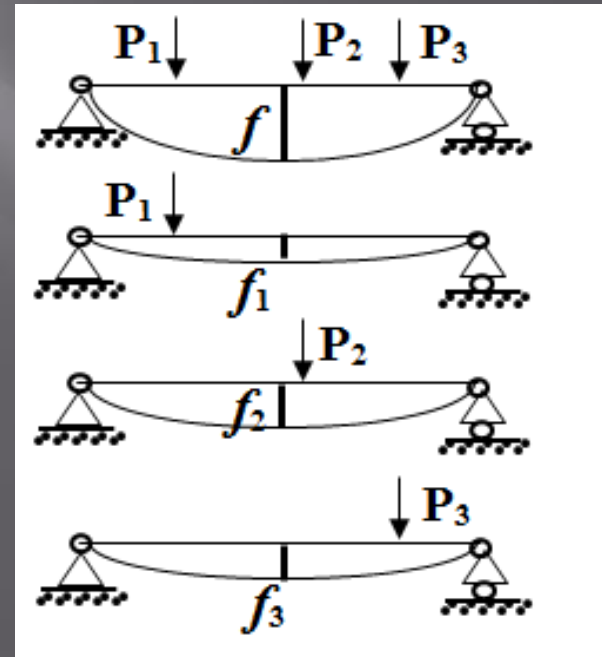


Рисунок 1.7 – Гіпотеза IV

VII. Гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі). Поперечні перерізи бруса, що були плоскими та перпендикулярними осі бруса до його навантаження, залишаються плоскими і нормальними до його осі і під дією навантаження (рис. 1.7).



Дану гіпотезу використовують при виведенні більшості форм для розрахунку брусів.

1.6 Завдання для самоконтролю

1. Опишіть, що вивчає опір матеріалів.
2. Сформулюйте визначення міцності, жорсткості, стійкості конструкції.
3. Перелічіть задачі, які вирішує наука про опір матеріалів.
4. Назвіть основні вимоги з точки зору опору матеріалів, що висувуються до машин і споруд, що проектуються.
5. Дайте визначення стрижня, пластини, оболонки, масивного тіла.
6. Дайте визначення осі бруса.
7. Сформулюйте визначення деформації тіла.
8. Поясніть, яка деформація називається пружною, а яка пластичною.
9. Назвіть основні види деформацій, які обумовлені дією зовнішніх зусиль.
10. Опишіть, що являють собою внутрішні сили.
11. Поясніть сутність методу перерізів.
12. Дайте визначення напруження та назвіть його розмірність.
13. Роз'ясніть, яке напруження називається нормальним, а яке дотичним.
14. Опишіть залежність між повним, дотичним і нормальними напруженнями в точці по даному перерізу.
15. Сформулюйте основні передумови, які покладено в основу науки про опір матеріалів.
16. Розтлумачте принцип незалежності дії сил.
17. Дайте тлумачення гіпотези плоских перерізів.

ЛЕКЦІЯ 2. ОСЬОВИЙ РОЗТЯГ ТА СТИСКАННЯ

У лекції викладено загальні відомості про осьовий розтяг та стискання.

Представлено поняття напруження та деформації, сформульовано закон Гука.

Введено поняття *коефіцієнта Пуассона*.

Наведено приклади побудови епюр внутрішніх поздовжніх сил.

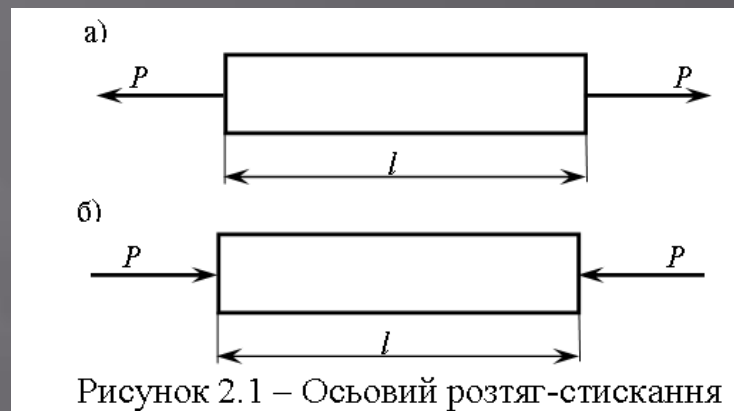
Спираючись на матеріал лекції, довідкову літературу студент повинен уміти:

- визначати випадки осьового розтягу та стискання;
- обчислювати величину поздовжньої сили в поперечному перерізі бруса;
- формулювати *закон Гука* в абсолютній та відносній формі;
- давати визначення абсолютної та відносної поперечної деформації бруса
- будувати епюри поздовжніх зусиль бруса та пояснювати їх властивості;
- тлумачити *принцип Сен-Венана* для центрально розтягнутого стрижня;
- обчислювати розподілені нормальні напруження в поперечних перерізах розтягнутого або стиснутого бруса та будувати їх епюри.

Центральний (осьовий) розтяг /стискання - вид деформації, при якому в поперечних перерізах бруса виникають тільки поздовжні зусилля (паралельні осі бруса).

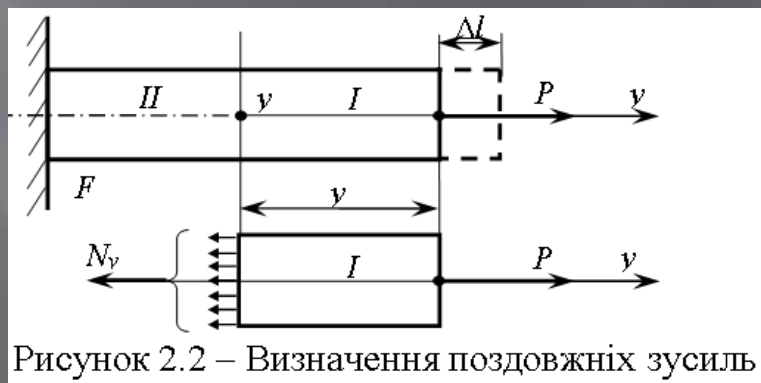
Поздовжні зусилля, що розтягують – позитивні;

Ті, що стискають – негативні (рис. 2.1).



2.1 Напруження та деформації. **Закон Гука**

Розглянемо прямий брус постійного поперечного перерізу F , затиснений одним кінцем і навантажений на вільному кінці силою P (рис. 2.2). Скористаємося методом перерізів. Подумки відокремлюємо від нього дану частину перерізом, розташованим на довільній відстані y від вільного кінця стрижня. Дію відкинутої затисненої частини можна замінити внутрішнім поздовжнім зусиллям N , спрямованим від перерізу. З умови рівноваги розглянутої частини отримаємо невідоме зусилля.



$$\sum F_Y = 0$$

$$N_Y - P = 0$$

$$N_Y = P$$

Досліди з розтягуванням стрижнів показують, що при центральному розтягу стрижня внутрішні зусилля (і напруження) розподіляються по перерізу рівномірно, виключаючи лише перерізи досить близькі до тих, в яких прикладені зовнішні зусилля.

Цей висновок був сформульований французьким вченим Барі де Сен-Венаном (1797–1886) як **Принцип Сен-Венана**.

Тому нормальні напруження, що виникають в поперечних перерізах бруса при розтягу-стисканні визначаються рівністю

$$\sigma = \frac{N_Y}{F} = \frac{P}{F} \quad (2.1)$$

Під дією зовнішнього навантаження початкова довжина бруса l збільшиться на деяку величину Δl що називається абсолютною поздовжньою деформацією (подовженням) бруса.

Відношення абсолютного подовження бруса Δl до його початкової довжини l є відносною поздовжньою деформацією (відносним подовженням) бруса.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.2)$$

Чим більше величина діючої сили, що розтягує, тим більше подовження бруса. Чим більше площа поперечного перерізу бруса, тим подовження бруса менше. Подовження бруса також залежить від властивостей матеріалу

$$\varepsilon = \frac{N_Y}{EF} \quad (2.3)$$

Тут E - коефіцієнт, що залежить від фізичних властивостей матеріалу, характеризує опірність матеріалу пружній деформації при розтягу (стисканні) і називається **модулем пружності I роду (модуль Юнга)**. Його розмірність $[Н/м^2]$, $[Па]$:

для легваної сталі $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kH} / \text{м}^2$
 для сірого чавуна $E = 1 \cdot 10^6 \text{ kH} / \text{м}^2$
 для дерева (вздовж волокон) $E = 1 \cdot 10^5 \text{ kH} / \text{м}^2$

Враховуючи (2.1), отримаємо $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, або $\sigma = E\varepsilon$ (2.4)

Абсолютне подовження бруса виражається формулою

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EF} \quad (2.5)$$

Добуток EF є *жорсткістю* поперечного перерізу бруса при розтягу і стисканні.

Формули (2.3) – (2.5) є математичним виразом **закону Гука** (1678).

Закон Гука виконується в певних межах (межах пропорційності матеріалу).

2.2 Коефіцієнт поперечної деформації. Коефіцієнт Пуассона

При дії на брус сили, що розтягує або стискає, крім поздовжньої, виникає також поперечна деформація.

При стисканні бруса поперечні розміри його збільшуються, а при розтягуванні – зменшуються.

Якщо поперечний розмір бруса до прикладання до нього сили, що розтягує P , позначити b , то зміна його під дією сили P називається абсолютною поперечною деформацією бруса (рис. 2.3).



Величина

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}$$

є відносною поперечною деформацією.

Досвід показує, що в межах застосування закону Гука при осьовому розтягу-стисканні **поперечна деформація пропорційна поздовжній деформації, але має зворотний знак:**

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon \quad (2.6)$$

Коефіцієнт пропорційності залежить від властивостей матеріалу та є коефіцієнтом поперечної деформації або коефіцієнтом Пуассона, та являє собою відношення поперечної деформації до поздовжньої, узяті по модулю.

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \quad (2.7)$$

Для сталі коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,25 \dots 0,3$, для пробки $\mu = 0$, для гуми $\mu = 0,5$, для ряду інших матеріалів (чавуну, цинку, бронзи, міді) $\mu = 0,23 \dots 0,36$.

Знаючи μ , можна обчислити **зміну об'єму бруса** V при розтягу-стисканні.

$$\begin{aligned} \text{Довжина бруса під навантаженням дорівнює} & \quad l + \Delta l = l(1 + \varepsilon) \\ \text{площа поперечного перерізу відповідно дорівнює} & \quad F(1 - \varepsilon\mu^2), \\ \text{Об'єм бруса під дією навантаження стає рівним} & \quad V' = Fl(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon\mu^2) = V(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon\mu^2) \end{aligned}$$

Через те, що в межах пропорційності ε — мала величина, то величиною, можна знехтувати. Тоді

$$V' = V[1 + \varepsilon(1 - 2\mu)]$$

$$\text{Відносна зміна об'єму бруса дорівнює} \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \varepsilon(1 - 2\mu) \quad (2.8)$$

Для більшості матеріалів, тобто при розтягуванні об'єм бруса збільшується, а при стисканні — зменшується.

2.3 Епюри поздовжніх зусиль

Епюрою є графік, що показує зміну внутрішніх силових факторів, що діють в поперечному перерізі бруса, уздовж його поздовжньої осі.

Основні правила побудови епюр:

- 1) вісь епюри паралельна поздовжній осі бруса;
- 2) значення внутрішнього зусилля, що діє в даному поперечному перерізі бруса, відкладається в масштабі по нормалі до осі епюри, в точці осі епюри, що відповідає даному перерізу;
- 3) епюри забезпечуються:
 - назвою внутрішнього силового фактора;
 - одиницями його вимірювання;
 - знаками;
 - цифровими значеннями в характерних точках.

2.4 Приклади побудови епюр поздовжніх сил

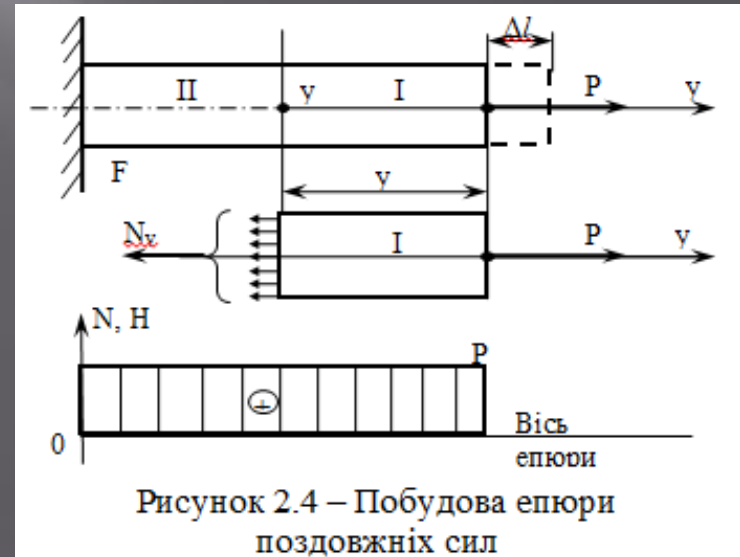
Приклад 1.

Розглянемо випадок центрального розтягування бруса силою P (рис. 2.4)

У всіх його поперечних перерізах виникають тільки поздовжні зусилля

$$N_T = P \quad (2.9)$$

Будуємо епюру, тобто графічно представляємо залежність (2.9).



Приклад 2.

Стрижень навантажений зовнішніми силами $2P$, P , $5P$ (рис. 2.5).

Якщо до бруса докладено кілька зовнішніх сил, то його необхідно розбити на ділянки.

Межами ділянок є:

- перерізи, в яких прикладені зосереджені зовнішні зусилля (в тому числі і опорні реакції);
- перерізи, в яких стрибком змінюється площа поперечного перерізу бруса.

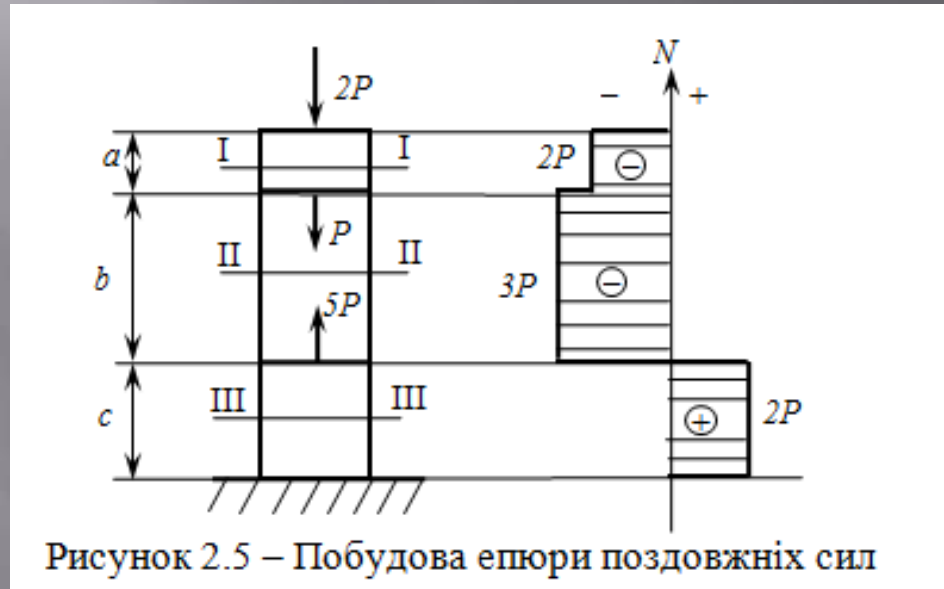


Рисунок 2.5 – Побудова епюри поздовжніх сил

Номери ділянок позначимо римськими цифрами. У довільному перерізі кожної ділянки визначаємо значення поздовжньої сили, складаючи умови рівноваги:

$$\begin{aligned} N_1 + 2P &= 0; \Rightarrow N_1 = -2P; & \text{при} & & 0 \leq y \leq a; \\ N_2 + P + 2P &= 0; \Rightarrow N_2 = -3P; & \text{при} & & a \leq y \leq (a+b); \\ N_3 - 5P + P + 2P &= 0; \Rightarrow N_3 = 2P; & \text{при} & & (a+b) \leq y \leq (a+b+c). \end{aligned}$$

По значеннях N_1, N_2, N_3 будемо епюру поздовжніх зусиль.

Епюру штрихують перпендикулярно її осі.

Довжина штрихування в кожному перерізі бруса дорівнює величині поздовжньої сили в цьому перерізі.

Висновки:

- 1) на епюрі поздовжніх сил є стрибки в тих перерізах, де прикладені зовнішні зосереджені сили, і рівні за величиною цим силам;
- 2) внутрішні зусилля N в перерізі рівні алгебраїчній сумі зовнішніх сил, розташованих з однієї сторони від перерізу.

Для прикладу 2 визначимо загальне подовження стрижня як алгебраїчну суму подовжень всіх його ділянок:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{F} = \frac{-2Pa}{F}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{F} = \frac{-3Pb}{F}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{F} = \frac{2Pc}{F}$$

Тоді

$$\Delta l_{\text{заг}} = \sum \Delta l_i = \frac{-2Pa - 3Pb + 2Pc}{F}$$

2.5 Завдання для самоконтролю

1. Назвіть види деформації бруса, які є осьовим розтягом та стисканням.
2. Поясніть, як обчислити значення поздовжньої сили в поперечному перерізі бруса.
3. Дайте визначення абсолютної поздовжньої деформації. Опишіть, що являє собою відносна поздовжня деформація. Назвіть їх розмірності.
4. Дайте визначення модуля пружності (Юнга) E . Поясніть, що він характеризує та в яких одиницях вимірюється. Опишіть, як впливає величина E на деформацію бруса.
5. Сформулюйте закон Гука в абсолютній та відносній формі.
6. Дайте визначення абсолютної та відносної поперечної деформації бруса та назвіть їх розмірності.
7. Дайте визначення коефіцієнта Пуассона при осьовому розтягу.
8. Дайте визначення жорсткості поперечного перерізу при розтягу та стисканні.
9. Поясніть, що відбувається з поперечними розмірами бруса при його розтягу та стисканні.
10. Дайте визначення епюри поздовжніх зусиль та поясніть, як вона будується.
11. Назвіть властивості епюр поздовжніх зусиль від зовнішніх зосереджених сил.
12. Дайте тлумачення принципу Сен-Венана для центрально розтягнутого стрижня.
13. Опишіть, як розподілені нормальні напруження в поперечних перерізах розтягнутого або стиснутого бруса і чому вони дорівнюють.
14. Наведіть залежність для визначення відносної зміни об'єму бруса при осьовому розтягу та стисканні.

ЛЕКЦІЯ 4. УРАХУВАННЯ ВЛАСНОЇ ВАГИ ПРИ РОЗТЯГУ-СТИСКАННІ. ГРАНИЧНА ТА КРИТИЧНА ДОВЖИНА СТРИЖНЯ.

У лекції розглянуто випадки, в яких є необхідність урахування власної ваги елемента при розтягу-стисканні.

Визначено зусилля, напруження та деформації стрижнів з урахуванням ваги.

Наведено поняття критичної та граничної довжини стрижня.

Проаналізовано розрахунок статично невизначуваних систем.

Спираючись на матеріал лекції, довідкову та науково-технічну літературу студент повинен уміти:

- *описувати залежність поздовжніх сил та нормальних напружень від власної ваги;*
- *розрізняти поняття критичної та граничної довжини стрижня;*
- *формулювати умови міцності стрижня при осьовому розтягу та стисканні з урахуванням власної ваги;*
- *пояснювати відмінність у підборі перерізу стрижня з урахуванням власної ваги та без;*
- *розрізняти статично визначувані та невизначувані конструкції;*
- *складати план розрахунку статично невизначуваних стрижнів та систем;*
- *тлумачити сутність спільності деформацій елементів системи та складати рівняння спільності деформацій статично невизначуваної стрижневої системи.*

Вивчаючи розтяг та стискання стрижнів, ми враховували дію тільки зовнішніх сил, ігноруючи їхню власну вагу. Однак при значній довжині бруса (штанги, троса) власною вагою нехтувати не можна.

4.1 Зусилля, напруження та деформації з урахуванням ваги

Розглянемо вертикальний стрижень довжиною l , жорстко закріплений своїм верхнім кінцем. Площа поперечного перерізу F , питома вага матеріалу γ , модуль пружності E .

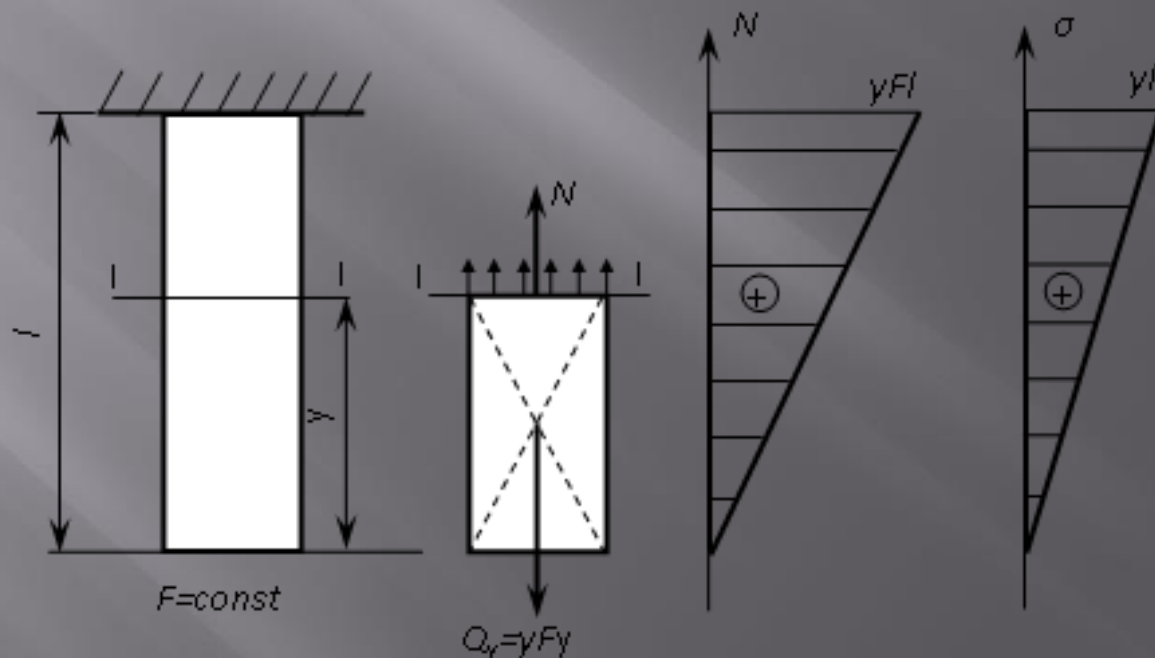


Рис. 4.1 – Епюри N та σ від власної ваги.

Використовуючи метод перерізів, визначимо внутрішні поздовжні зусилля N та нормальні напруження σ по перерізу I-I на відстані y від вільного кінця стрижня (рис. 4.1) з умов рівноваги виділеного елемента:

$$\sum F_Y = 0: \quad N - Q_Y = 0 \quad 0 \leq y \leq l$$

де $Q_Y = \gamma \cdot F \cdot y$ - вага ділянки стрижня довжиною y .

Тоді поздовжні зусилля дорівнюватимуть $N = \gamma F y$ (4.1)

Покажемо їх на епюрі N Нормальні напруження в перерізі дорівнюватимуть

$$\sigma_y = \frac{N}{F} = \gamma \cdot y \quad (4.2)$$

Епюра σ має аналогічний вигляд (див. рис.4.1). Найбільші напруження будуть виникати у верхньому кінці стрижня

$$\sigma_{\max} = \gamma \cdot l$$

Їх **величина не залежить від розміру перерізу стрижня.**

Якщо крім власної ваги на стрижень діє сила P , прикладена до вільного його кінця, то зусилля та напруження знаходимо з умов рівноваги аналогічно (рис. 4.2).

$$\sum F_y = 0 \quad N - P - Q_y = 0, \quad 0 \leq y \leq l$$

$$N = P + \gamma F y \quad (4.3)$$

та напруження

$$\sigma_y = \frac{P}{F} + \gamma y$$

(4.4)

Будуємо епюри N та σ

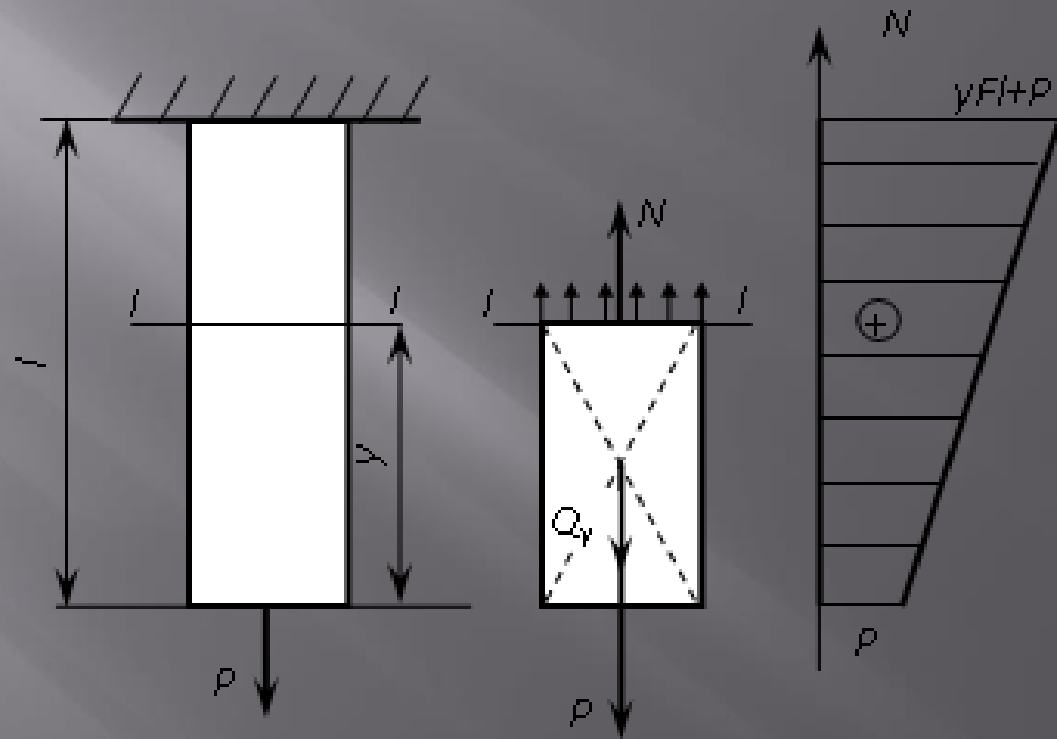


Рисунок 4.2 – Епюра N з урахуванням власної ваги

Висновки:

1) З виразу (4.4) випливає, що напруження в будь-якому поперечному перерізі стрижня дорівнюють алгебраїчній сумі напружень від зовнішнього навантаження та від власної ваги.

2) З виразу (4.2) випливає, що напруження з урахуванням власної ваги не залежать від площі поперечного перерізу стрижня, а залежать тільки від довжини стрижня і питомої ваги матеріалу.

Довжина стрижня l , при якій $\mathcal{N} = \sigma_v$, стрижень руйнується від власної ваги, є критичною довжиною стрижня.

$$l_{кр} = \frac{\sigma_v}{\gamma} \quad (4.5)$$

Довжина стрижня l , при якій $\mathcal{N} = [\sigma]$, в стрижні досягаються допустимі напруження $[\sigma]$ лише від дії власної ваги, є граничною довжиною.

$$l_{np} = \frac{[\sigma]}{\gamma} \quad (4.6)$$

Наприклад, для сталі 3 допустиме напруження $[\sigma] = 1600 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$
 питома вага $\gamma = 7,8 \frac{\text{Г}}{\text{см}^3} = 0,0078 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^3}$

тоді з(4.6) гранична довжина сталевого стрижня дорівнює

$$l_{np} = \frac{[\sigma]}{\gamma} = 2040 \text{ м}$$

У найбільш напруженому (небезпечному) перерізі стрижня при $y = l$
 напруження дорівнюватимуть

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma l$$

Тому умова міцності з урахуванням власної ваги матиме вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma l \leq [\sigma] \quad (4.7)$$

Підбір перерізу.

Через те, що форма поперечного перерізу при розтягу - стисканні стрижня не має
 значення, з (4.7) випливає, що

$$F \geq \frac{P}{[\sigma] - \gamma l} \quad (4.8)$$

(для порівняння: $F \geq \frac{P}{[\sigma]}$ без урахування власної ваги).

4.2 Визначення деформацій стрижня з урахуванням власної ваги

Із закону Гука $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ – відносне подовження стрижня, тобто з (4.7)

$$\varepsilon = \frac{P}{EF} + \frac{\gamma y}{E}$$

Абсолютне подовження стрижня

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon \cdot dy$$

Інтегруючи, отримаємо

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma^2 l^2}{2E} \quad \text{або}$$

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{Ql}{2EF} \quad (4.8)$$

Висновок: подовження стрижня від власної ваги вдвічі менше, ніж від сили P , прикладеної до кінця стрижня та рівній його вазі.

З епюр σ та N видно, що довгі стрижні постійного перерізу виявляються **невигідними (непрактичними)**, через те, що лише в одному перерізі досягаються допустимі напруження, а в інших міцність матеріалу недовикористовується.

Тому вигідніше використовувати **стрижні рівного опору**, у яких в усіх перерізах напруження однакові та рівні допустимому $[\sigma]$:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = [\sigma] \quad (4.9)$$

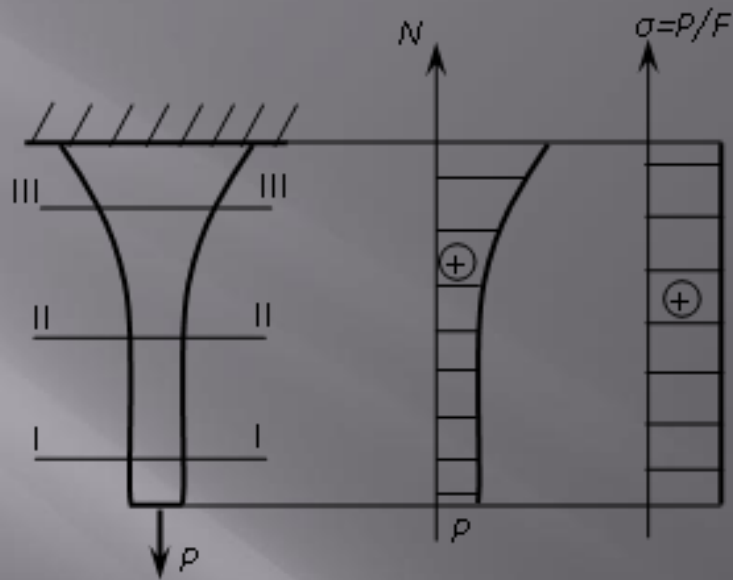


Рисунок 4.3 – Епюри N та σ для стрижнів рівного опору

На практиці частіше використовуються *ступінчасті стрижні*, через те, що стрижні рівного опору дуже складні у виготовленні.

Довжину ділянок стрижня та їх поперечні перерізи підбирають так, щоб виконувалася рівність (4.9). Покажемо це на прикладі (рис. 4.4). Подовження розглянутого стрижня дорівнюватиме сумі подовжень на кожній його ділянці.

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$$

де

$$\Delta l_1 = \frac{Pl_1}{EF_1} + \frac{Q_1l_1}{2EF_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{(P + Q_1)l_2}{EF_2} + \frac{Q_2l_2}{2EF_2}; \quad \Delta l_3 = \frac{(P + Q_1 + Q_2)l_3}{EF_3} + \frac{Q_3l_3}{2EF_3}.$$

Висновки:

- 1) на епюрі N маємо стрибки в тих перерізах, де прикладені зосереджені зовнішні сили і величина стрибка дорівнює модулю прикладеної сили;
- 2) крива, що огинає епюрі N з урахуванням власної ваги, нахилена на всіх ділянках в одну й ту ж сторону;
- 3) на епюрі N є злами (зміна нахилу огинаючої) в тих перерізах, де змінюється площа поперечного перерізу стрижня.

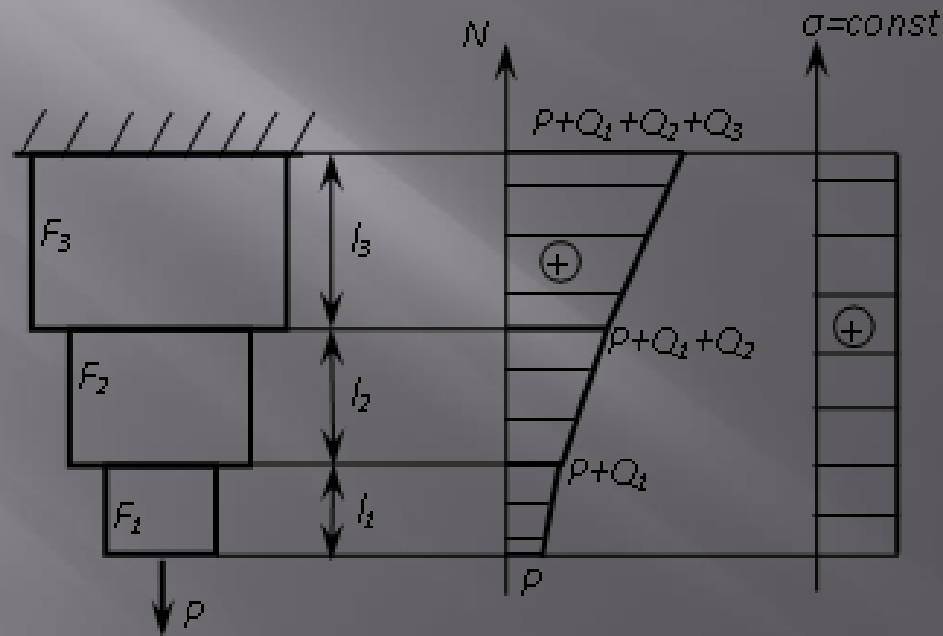


Рисунок 4.4 – Епюрі N та σ ступінчастих стрижнів

Завдання для самоконтролю

1. Поясніть, як залежать поздовжні сили та нормальні напруження від власної ваги вертикального бруса постійного перерізу.
2. Дайте визначення критичної та граничної довжини стрижня.
3. Роз'ясніть, у чому полягає умова міцності стрижня при осьовому розтягу та стисканні з урахуванням власної ваги.
4. Поясніть, чи відрізняється підбір перерізу стрижня з урахуванням власної ваги та без нього, та у чому ця відмінність.
5. Поясніть наявність множника $\frac{1}{2}$ у формулі подовження (4.8) вертикального бруса постійного перерізу від власної ваги.
6. Дайте визначення стрижня рівного опору.
7. Сформулюйте властивості епюри поздовжніх зусиль стрижня з урахуванням власної ваги.

ЛЕКЦІЯ 5. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ

Спираючись на матеріал лекції, довідкову та науково-технічну літературу студент повинен уміти:

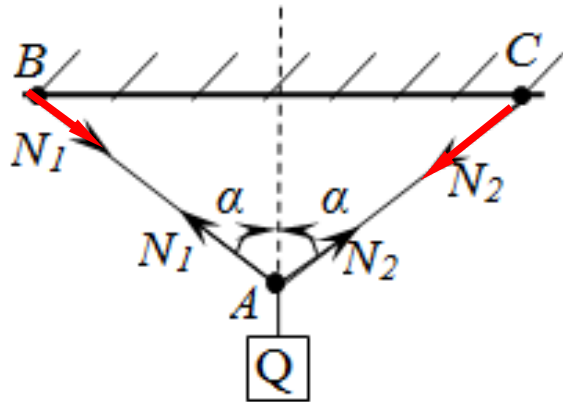
- *розрізняти статично визначувані та невизначувані конструкції;*
- *- складати план розрахунку статично невизначуваних стрижнів та систем;*
- *- тлумачити сутність спільності деформацій елементів системи та складати рівняння спільності деформацій статично невизначуваної стрижневої системи.*

Розрахунок статично невизначуваних систем

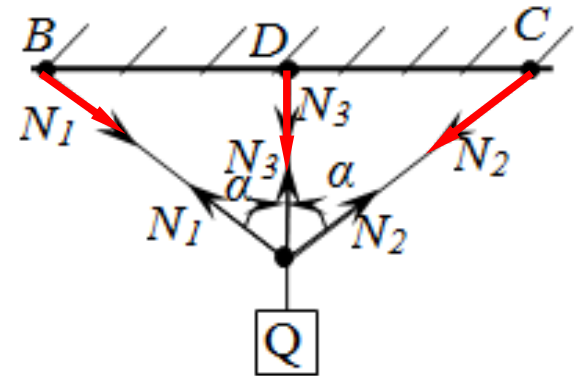
Уміння обчислювати деформації стрижнів при розтягу та стисканні дає можливість встановити, наскільки змінилися форма та розміри елементів конструкцій під дією зовнішніх сил. Зазвичай ці зміни такі незначні, що їх визначення здається позбавленим практичного сенсу.

Однак існує цілий ряд конструкцій, для яких перевірка міцності та підбір перерізу окремих елементів неможливі без вміння визначати деформації.

Це так звані **статично невизначувані конструкції**. Знаходження внутрішніх зусиль в їхніх елементах складає статично невизначувану задачу. Таку задачу неможна вирішити, використовуючи тільки рівняння статички, через те, що кількість невідомих зусиль в ній перевищує кількість рівнянь рівноваги.



а)



б)

Рисунок 4.5 – Статично визначувані та невизначувані стрижневі системи

Необхідні для розв'язування задачі додаткові рівняння можна скласти, вивчаючи ті деформації, які зазнає конструкція. Ці додаткові рівняння складаються з умови спільності деформацій системи.

Спільність деформацій елементів системи полягає в тому, що у будь-якій конструкції при її деформації не відбувається розривів стрижнів, їх роз'єднання, переміщення однієї частини конструкції відносно іншої.

Загальний метод розрахунку:

- 1) з'ясувати, які зусилля необхідно визначити;
- 2) записати всі рівняння статички твердого тіла;
- 3) скласти необхідні додаткові рівняння спільності деформацій так, щоб з них знайти невідомі зусилля.

Приклад.

Сталевий брус довжиною l та площею F поперечного перерізу затиснений обома кінцями і піддається дії сили P у перерізі $m-n$ (рисунок 4.6). Визначимо поздовжні зусилля в перерізах стрижня по обидва боки від $m-n$.

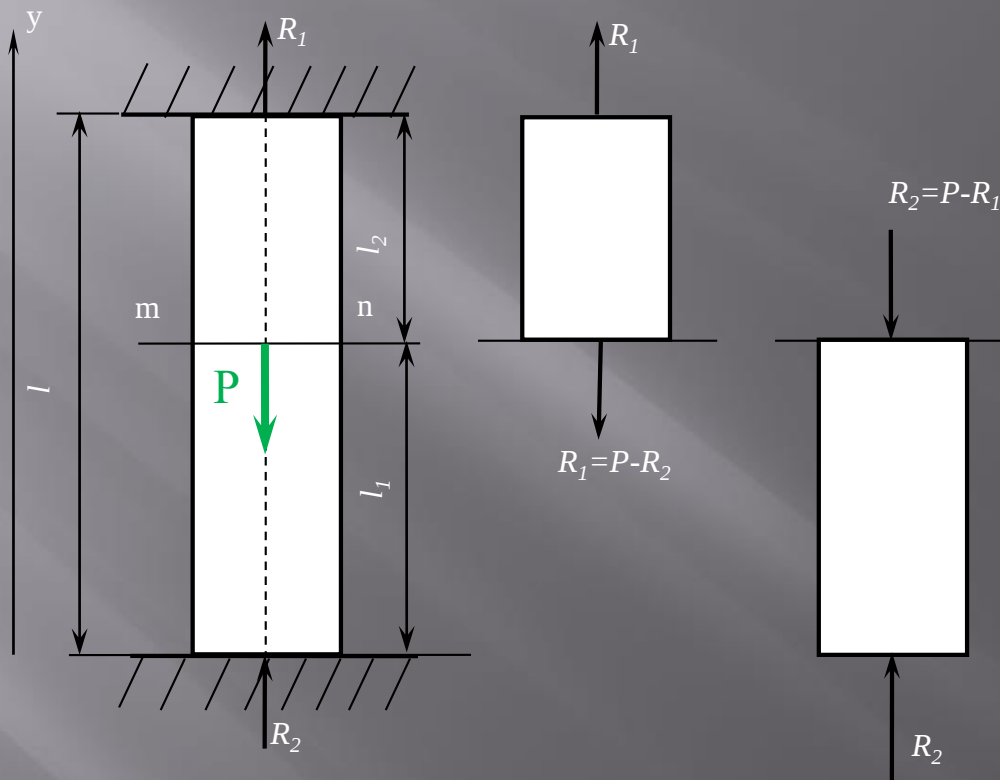


Рисунок 4.6 – Статично невизначуваний стрижень

Сила P розтягує верхню частину стрижня і стискає нижню. Тому реакції в обох опорах спрямовані вгору. Для визначення та можна записати **тільки одне рівняння рівноваги**:

$$\sum F_Y = 0$$

$$R_1 + R_2 - P = 0$$

$$R_1 + R_2 = P$$

Друге рівняння отримаємо з розгляду деформації бруса. Через те, що кінці бруса затиснені, то подовження верхньої частини бруса дорівнює вкороченню нижньої, тобто

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = 0$$

або

$$|\Delta l_1| = |\Delta l_2|$$

Із рисунка 4.6, а маємо

$$\Delta l_1 = \frac{R_1 l_1}{EF};$$

із рисунка 4.6, б

$$\Delta l_2 = \frac{R_2 l_2}{EF}.$$

Тоді

$$\frac{R_1 l_1}{EF} = \frac{R_2 l_2}{EF}$$

або

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

Тобто зусилля в стрижні обернено пропорційні довжині ділянок. Вирішуючи це рівняння спільно з рівнянням статки, отримаємо

$$R_1 = \frac{Pl_2}{l_1 + l_2} = \frac{Pl_2}{l};$$

$$R_2 = \frac{Pl_1}{l_1 + l_2} = \frac{Pl_1}{l}.$$

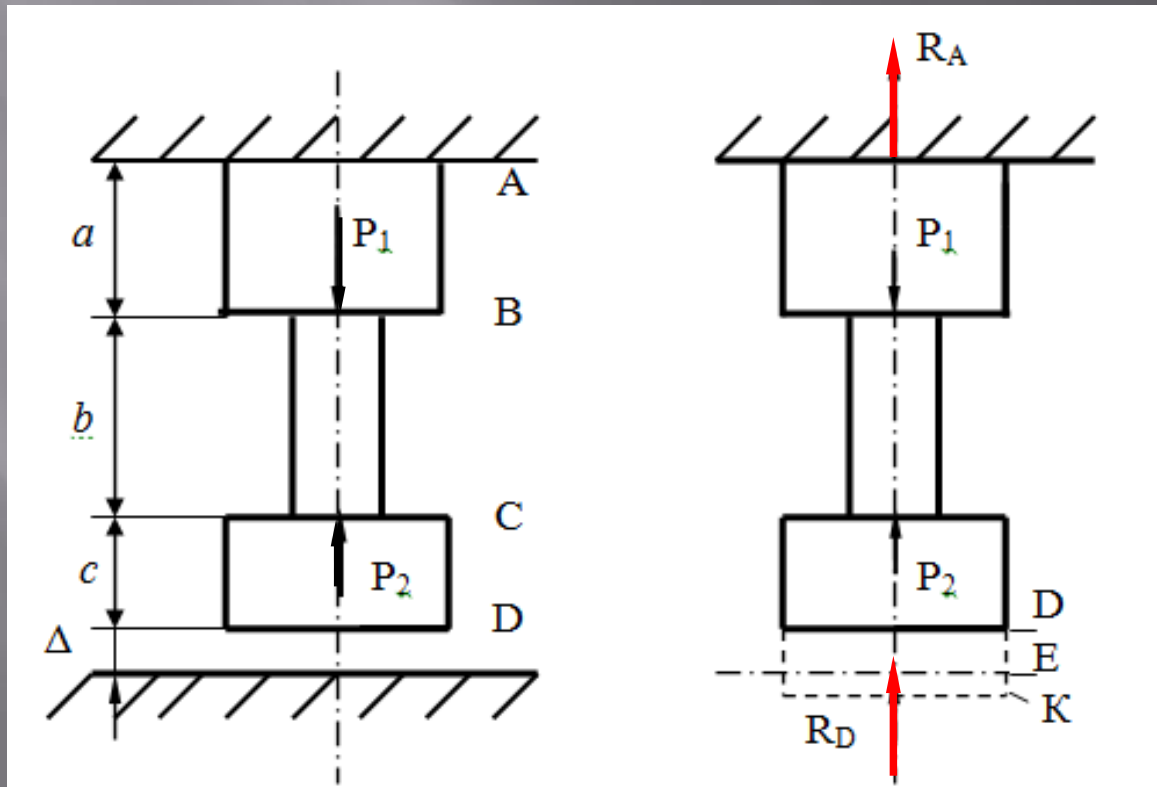
Приклад індивідуального завдання СМ – 3

Сталевий східчастий стрижень, зображений на мал. 1, а, має площі поперечних перерізів окремих ступіней $F_1=2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$, $F_2=4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$. Величина зазору $\Delta=1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$,

$P_1=100 \text{ кН}$, $P_2=20 \text{ кН}$, $a=2 \text{ м}$, $b=1 \text{ м}$, $c=2 \text{ м}$, модуль пружності матеріалу $E=2 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2$.

Для заданого стрижня потрібно:

- Визначити реакції опор.
- Побудувати епюрові подовжніх сил.
- Визначити нормальні напруження в кожній частині стрижня.



а)

Мал.1

б)

Рішення

Для багатьох систем, складених з окремих стрижнів, зусилля в останніх не можуть бути визначені з одних тільки рівнянь рівноваги. Такі системи називаються статично невизначеними. Дві реакції R_A і R_D (мал. 1, б) **не можуть бути визначені з одного рівняння статички**

$$R_A - P_1 + P_2 + R_D = 0. \quad (1)$$

Для визначення реакцій необхідно скласти, у даному випадку, ще одне рівняння, що називається рівнянням спільності деформацій.

Між нижнім кінцем стрижня і закладенням мається малий зазор величиною Δ . Вважаємо, що в результаті дії сил зазор закриється і виникне реакція R_D . Для визначення цієї реакції відкинемо нижнє закладення, замінивши її дію на стрижень силою R_D . Відрізок DE зображує те подовження, що одержав би стрижень під дією сил P_1 і P_2 при відсутності закладення. Відрізок KE представляє укорочення стрижня під дією тільки реакції R_D . З мал. 1, б випливає, що

$$DE = DK + KE = \Delta + KE. \quad (2)$$

Визначимо DE , як подовження даного стрижня під дією сил P_1 і P_2 , використовуючи закон Гука:

$$DE = \frac{P_1 a}{EF_2} - \frac{P_2 b}{EF_1} - \frac{P_2 a}{EF_2} \quad (3)$$

Визначимо KE , як укорочення стрижня під дією сили R_D :

$$KE = \frac{R_D(c + a)}{EF_2} + \frac{R_D b}{EF_1} \quad (4)$$

Підставляючи (3) і (4) у (2), одержимо:

$$\frac{P_1 a}{EF_2} - \frac{P_2 b}{EF_1} - \frac{P_2 a}{EF_2} - \frac{R_D(c + a)}{EF_2} - \frac{R_D b}{EF_1} = \Delta \quad (5)$$

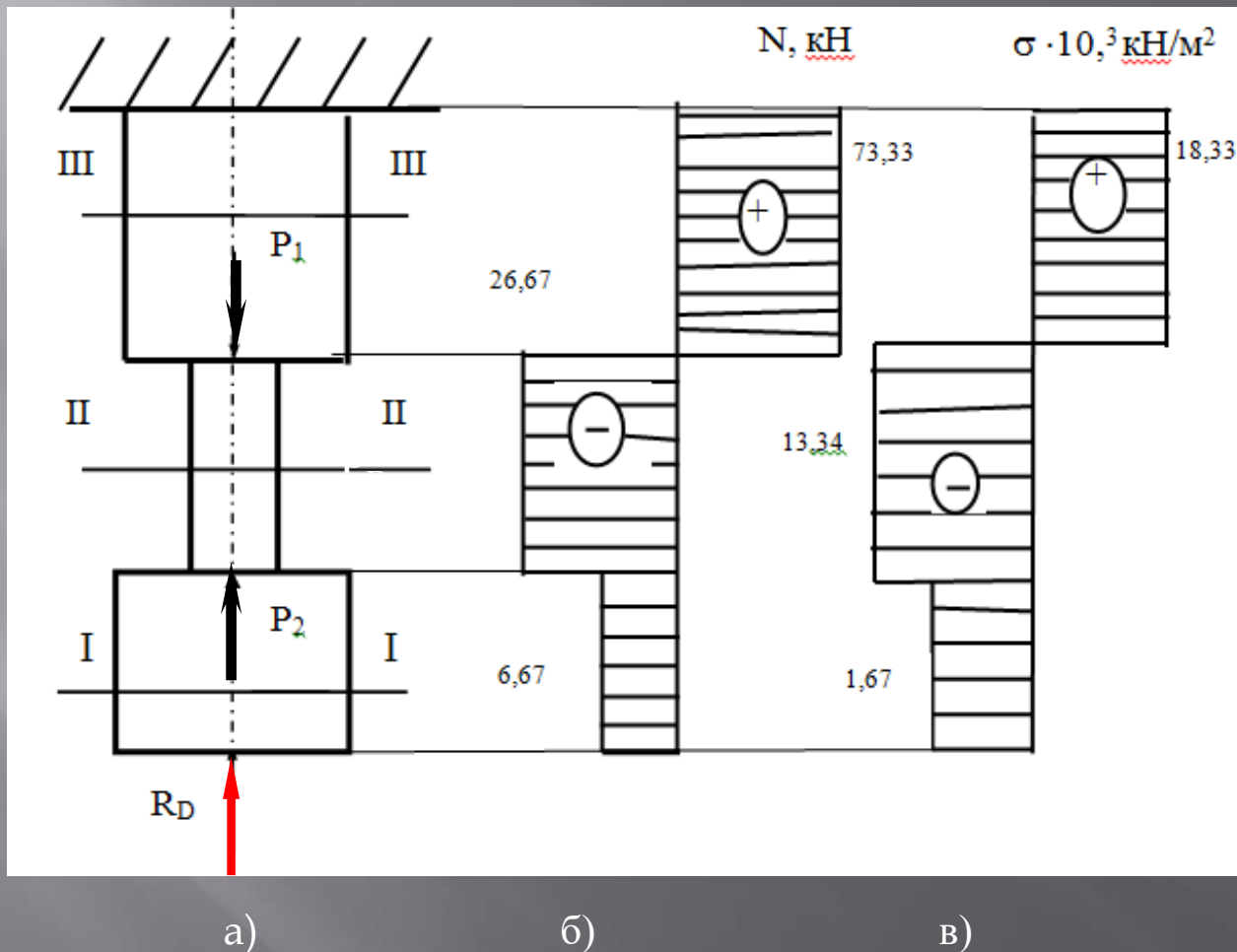
З рівняння спільності деформацій (5) знаходимо R_D . Потім з рівняння рівноваги (1) визначаємо R_A .

Підставляючи числові значення в (5), одержимо $R_D = 6,67$ кН, з (1) $R_A = 73,33$ кН. Якби R_D вийшло зі знаком мінус, то це означало б, що діючі активні сили P_1 і P_2 недостатні для закриття зазору і для цього необхідно прикласти до нижнього кінця стрижня силу R_D , спрямовану зверху вниз.

Таким чином, при негативному значенні сили R_D задача зводиться до визначення зусиль у поперечних переріз стрижня під дією сили P_1 і P_2 (статично визначна задача).

Рішення аналогічне, *якщо $\Delta=0$, тобто зазор відсутній*.

Подальше рішення проводимо так само, як і для статично визначної задачі (СМ-1, СМ-2). Для побудови епюри подовжніх зусиль розбиваємо стрижень перетинами на характерні ділянки (мал. 2, а).



б)
Мал.2

Проведемо перетин I-I і розглянемо рівновагу нижньої частини стрижня

Рівняння рівноваги:.

$$N_1 + R_D = 0, \quad \text{звідси}$$

$$N_1 = -R_D = -6,67 \text{ кН.}$$

Перетин II-II

Рівняння рівноваги:

$$N_2 + P_2 + R_D = 0, \quad \text{звідси}$$

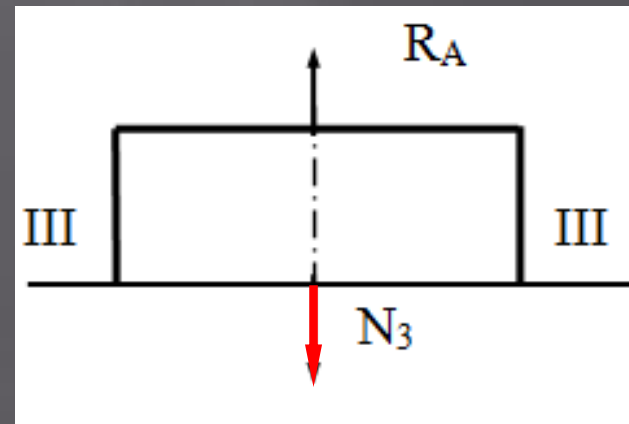
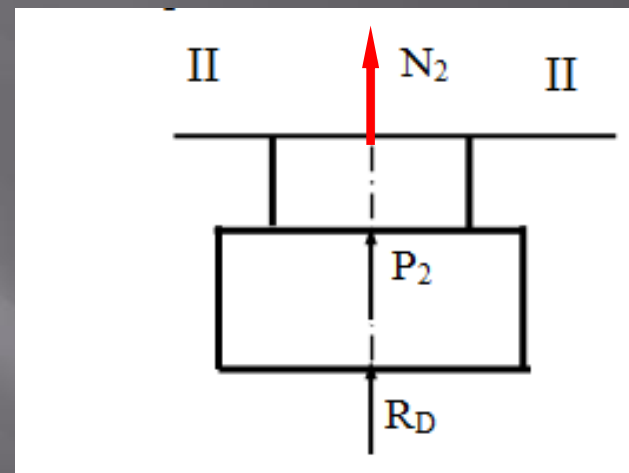
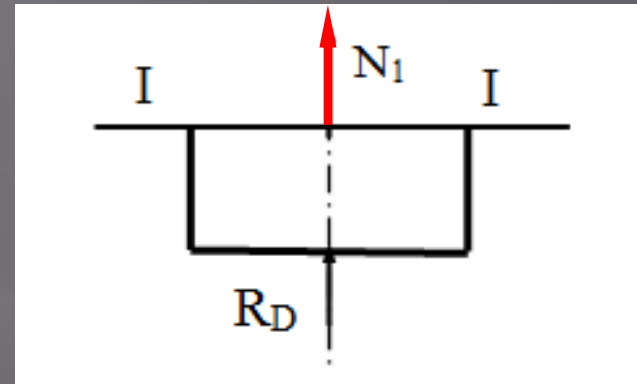
$$N_2 = -R_D - P_2 = -26,67 \text{ кН.}$$

Перетин III-III (*відкидаємо нижню частину*)

Рівняння рівноваги:

$$R_A - N_3 = 0, \quad \text{звідси}$$

$$N_3 = R_A = 73,33 \text{ кН}$$



За отриманими результатами будемо епюру подовжніх зусиль, зображену на мал. 2, б.

3. Визначимо нормальні напруження, маючи у виді, що "стрибки" напружень можуть бути обумовлені не тільки „стрибками” в епюрі подовжніх сил, але і *східчастою зміною площі поперечного перерізу стрижня.*

У даному прикладі маються три характерних ділянки.

У нижній ступіні стрижня нормальні напруження рівні:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_2} = -\frac{6,67}{4 \cdot 10^{-3}} = -1,67 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$$

У середній

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_1} = -\frac{26,67}{2 \cdot 10^{-3}} = -13,34 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$$

У верхній

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{73,33}{4 \cdot 10^{-3}} = 18,33 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$$

За отриманими результатами будемо епюру нормальних напружень з урахуванням знаків подовжніх зусиль (мал. 2, в).

Завдання для самоконтролю

1. Опишіть, які конструкції є статично невизначуваними.
2. Сформулюйте сутність додаткових рівнянь для статично невизначуваних систем.
3. Розтлумачте, у чому полягає спільність деформацій елементів системи.

ЛЕКЦІЯ 6. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

У лекції викладено поняття статичного моменту та моменту інерції перерізу.

Розглянуто приклади обчислення моментів інерції перерізу.

Проаналізовано, як змінюються моменти інерції при паралельному перенесенні осей та при повороті осей.

Сформульовано поняття головних осей та головних центральних осей.

*Спираючись на матеріал лекції, довідкову та науково-технічну літературу студент повинен уміти:
розраховувати, чому дорівнює статичний момент відносно довільної осі та осі, що проходить через центр ваги перерізу;*

визначати центр ваги простих та складних перерізів;

давати визначення осьового, полярного та відцентрового моменту інерції перерізу та називати їх розмірності;

обчислювати зміну осьових моментів інерції при паралельному переносі або повороті осей;

розрізняти головні та головні центральні моменти інерції, пояснювати, що таке головні осі інерції

5.1 Статичний момент перерізу

При розтягу і стисканні стрижнів їх міцність і жорсткість, а також на-напруження, що виникають в поперечних перерізах, залежать від розмірів поперечного перерізу стрижня. Причому форма перерізу та його розташування по відношенню до зовнішнього навантаження значення не мають.

Таким чином, площа поперечного перерізу є найпростішою геометричною характеристикою перерізів.

$$F = \int_F dF. \quad (5.1)$$

При розрахунках стрижнів на кручення, згин та складний опір необхідне використання більш складних характеристик, таких як *статичний момент, осьовий, полярний та відцентровий моменти інерції, момент опору перерізу*.

Геометричні характеристики визначають за формулами або за таблицями Держстандарту (ДСТУ).

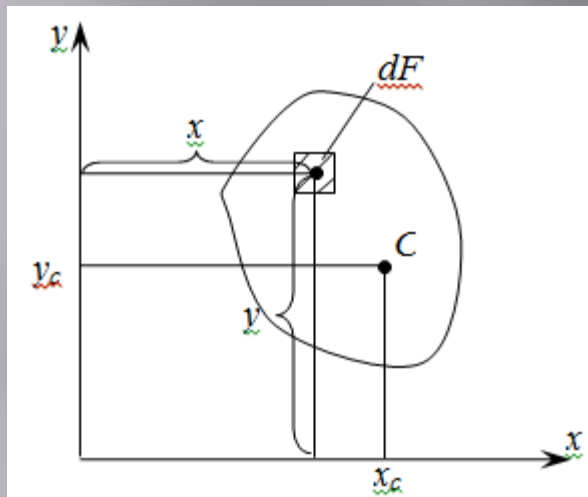


Рис. 5.1 – Площа перерізу

Статичним моментом, плоскої фігури відносно осей x та y є сума добутків елементарних площадок dF (рис. 5.1) на їх відстані до цієї осі, тобто інтеграл виду

$$S_x = \int_F y \cdot dF, \quad S_y = \int_F x \cdot dF. \quad (5.2)$$

Розмірність статичних моментів S_x та S_y – $[м^3]$, $[см^3]$.

Інтегрування ведеться по всій площі перерізу.

Якщо відома площа поперечного перерізу і положення його центра ваги, то статичні моменти обчислюють за такими формулами:

$$S_x = y_c \cdot F, \quad S_y = x_c \cdot F. \quad (5.3)$$

Ці формули отримані з відповідних залежностей теоретичної механіки, що визначають положення центра ваги плоскої фігури:

$$x_c = \frac{\sum x_i F_i}{F} = \frac{S_y}{F}, \quad y_c = \frac{\sum y_i F_i}{F} = \frac{S_x}{F}.$$

Висновок. Якщо вісі координат проходять через центр ваги перерізу (центральні вісі), то статичний момент плоскої фігури відносно центральних осей дорівнює нулю.

Вірне і зворотнє твердження: якщо статичний момент перерізу відносно будь-якої вісі дорівнює нулю, то ця вісь є центральною, тобто

$$S_{xc} = 0, S_{yc} = 0.$$

Залежно від положення перерізу відносно координатних осей статичний момент може приймати значення <0 , >0 , $=0$.

5.2 Моменти інерції плоских перерізів

Осьовими моментами інерції перерізу називаються інтеграли виду

$$I_x = \int_F y^2 dF, \quad I_y = \int_F x^2 dF. \quad (5.4)$$

Відцентровий момент інерції перерізу – це інтеграл виду

$$I_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF. \quad (5.5)$$

Полярний момент інерції перерізу – це інтеграл виду

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF. \quad (5.6)$$

Розмірність всіх моментів інерції – $[\text{м}^4]$, $[\text{см}^4]$.

Через те, що $\rho^2 = x^2 + y^2$ (див. рисунок 5.1),

$$I_\rho = I_x + I_y. \quad (5.7)$$

Якщо початок координат зберігає своє положення **$\rho = \text{const}$** , то при будь-якому повороті осей координат, тоді *сума осьових моментів інерції дорівнює полярному та є постійною величиною:*

$$I_x + I_y = \text{const}. \quad (5.8)$$

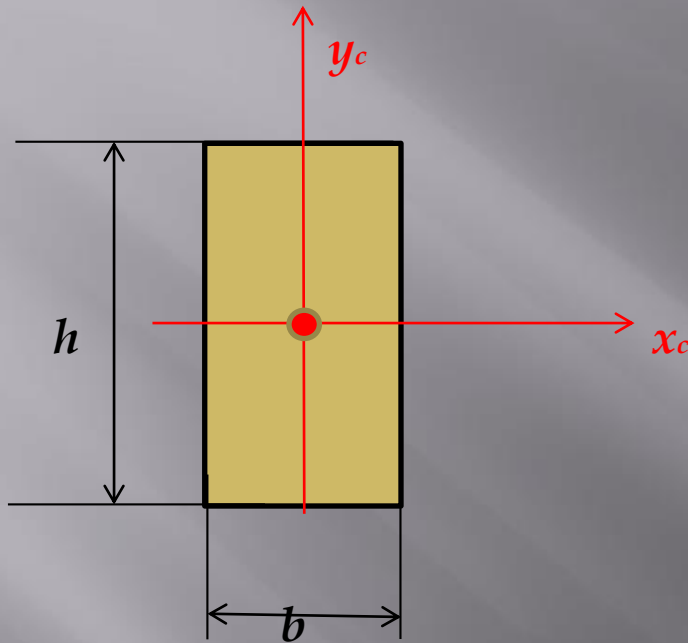
Осьові та полярний моменти інерції, як видно з (5.4) та (5.6) завжди приймають позитивні значення (>0), а відцентровий момент інерції може бути $>0, <0, =0$.

Момент інерції складного перерізу дорівнює алгебраїчній сумі моментів інерції простих складових його частин

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n.$$

5.3 Приклади обчислення моментів інерції перерізів

Обчислимо осьові моменти інерції прямокутного перерізу основою b та висотою h (рис.5.2) відносно центральних осей координат.



$$I_{x_c} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_{y_c} = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

$$I_{x_c y_c} = 0$$

(переріз має осі симетрії)

Рис. 5.2 – Моменти інерції прямокутного перерізу

5.4 Зміна моментів інерції при паралельному перенесенні осей

Нехай відомо моменти інерції та статичні моменти перерізу відносно деяких заданих координатних осей ox та oy , а також площу перерізу F (рис. 5.4)

Знайдемо моменти інерції того ж перерізу відносно нових осей координат o_1x_1 та o_1y_1 , отриманих паралельним переносом заданих осей.

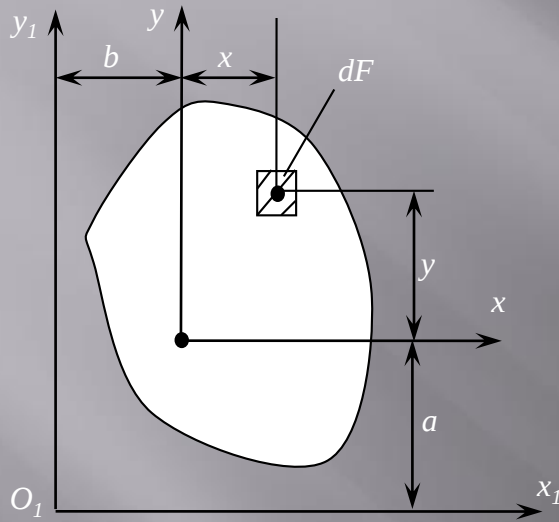


Рис. 5.4. - Моменти інерції перерізу відносно паралельних осей

Із рис. 5.4 видно, що формули переходу від заданих координатних осей до нових мають вигляд:

$$\begin{aligned}x_1 &= x + b, \\y_1 &= y + a.\end{aligned}$$

Тоді момент інерції перерізу відносно осі o_1x_1 буде дорівнювати

$$I_{x_1} = I_x + 2a \cdot S_x + a^2 F. \quad (5.9)$$

Аналогічно отримуємо момент інерції перерізу відносно осі o_1y_1

$$I_{y_1} = I_y + 2b \cdot S_y + b^2 F. \quad (5.10)$$

Отримаємо вираз для відцентрового моменту інерції перерізу відносно нових осей o_1x_1 та o_1y_1 .

$$I_{x_1y_1} = I_{xy} + bS_x + aS_y + abF \quad (5.11)$$

Якщо вихідні осі координат є центральними x_c та y_c , то вирази для моментів інерції перерізу приймуть такий вигляд

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= I_x + a^2 F, \\ I_{y_1} &= I_y + b^2 F, \\ I_{x_1 y_1} &= I_{xy} + abF. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Вираз для полярного моменту інерції перерізу тоді матиме вигляд:

$$I_{\rho_1} = I_{\rho} + (a^2 + b^2)F. \quad (5.13)$$

Теорема Гюйгенса-Штернера: Осьовий момент інерції перерізу відносно довільної осі дорівнює осьовому моменту інерції перерізу відносно центральної осі, паралельної даній довільній осі, плюс добуток площі перерізу на квадрат відстані між осями.

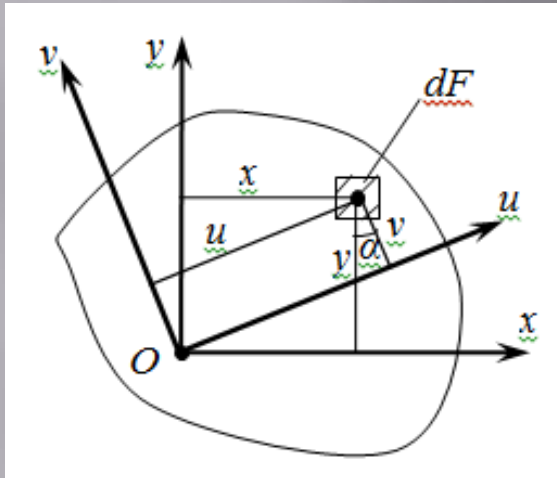
Висновок: Момент інерції перерізу відносно центральної осі є найменшим з усіх осьових моментів інерції відносно інших паралельних осей.

5.5 Залежності між моментами інерції при повороті осей. Головні осі та головні моменти інерції

Нехай моменти інерції перерізу I_x та I_y відносно деяких заданих координатних осей ox та oy , а також площа перерізу F відомі (рис. 5.5).

Визначимо моменти інерції перерізу щодо нових осей u та v , отриманих поворотом вихідних осей на кут α

Формули переходу від заданих осей до нових:



$$u = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha$$

$$v = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha$$

Осьові моменти інерції перерізу в нових осях координат дорівнюватимуть:

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha . \quad (5.14)$$

$$I_v = I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha . \quad (5.15)$$

Вираз для відцентрового моменту інерції перерізу відносно нових осей:

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha . \quad (5.16)$$

Додаючи (5.14) та (5.15), отримаємо

$$I_u + I_v = I_x + I_y = \text{const} . \quad (5.17)$$

Властивість інваріантності осьових моментів інерції: сума осьових моментів інерції при повороті осей залишається незмінною.

Із (5.17) випливає, що можна знайти таку величину – кута повороту осей, при якому один з осьових моментів досягне найбільшого, а інший – найменшого значення, тобто осьові моменти інерції набудуть екстремальних значень (**max, min**). Шукане значення знайдемо, дослідивши на екстремум вираз (5.14).

Умова екстремуму:

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = 0.$$

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = -2I_x \cos \alpha_0 \cdot \sin \alpha_0 + 2I_y \cos \alpha_0 \cdot \sin \alpha_0 - 2I_{xy} \cos \alpha_0 = 0, \quad \text{тобто}$$

$$(I_x - I_y) \sin 2\alpha_0 + 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0.$$

Звідси випливає

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}. \quad (5.18)$$

Правило знаків для α_0 якщо $\alpha_0 > 0$, то кут повороту відкладаємо від осі x проти годинникової стрілки, якщо $\alpha_0 < 0$, то його відкладаємо за годинниковою стрілкою.

З (5.18) отримуємо два значення α_0 (α_0' та $\alpha_0'' = \alpha_0' + 90^\circ$). Робимо висновок, що існують **дві взаємно перпендикулярні осі, відносно яких осьові моменти інерції приймають екстремальні значення**.

Ці осі координат є головними осями інерції.

Осьові моменти інерції відносно головних осей інерції називаються головними моментами інерції.

Вісь максимум, відносно якої головний момент інерції буде максимальним, знаходиться ближче до тієї з осей x та y, по відношенню до якої вихідний осьовий момент інерції приймає більше значення.

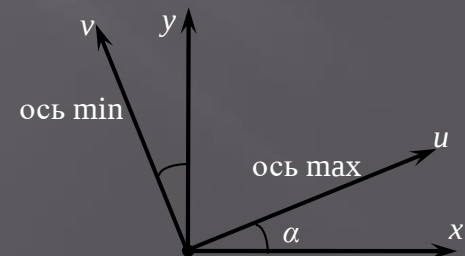


Рис. 5.6 – Осі максимум та мінімум

Значення головних моментів інерції перерізу обчислюються за формулою:

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}. \quad (5.19)$$

Порівнюючи формули (5.16) та (5.18) приходимо до висновку, що **відносно головних осей інерції відцентровий момент інерції дорівнює нулю**, тобто

$$I_{uv} = 0.$$

Таким чином, головні осі – ті, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю. Особливе практичне значення мають головні осі, що проходять через центр ваги, тобто головні центральні осі. Якщо за вихідні осі прийняти головні центральні, то (5.14) – (5.16) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} I_u &= I_{xc} \cos^2 \alpha + I_{yc} \sin^2 \alpha, \\ I_v &= I_{xc} \sin^2 \alpha + I_{yc} \cos^2 \alpha, \\ I_{uv} &= \frac{I_{xc} - I_{yc}}{2} \cdot \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Властивості головних осей інерції:

- якщо переріз має одну вісь симетрії, то ця вісь а також будь-яка їй перпендикулярна утворюють систему головних осей інерції;
- якщо переріз має дві осі симетрії, то ці осі є головними центральними осями інерції перерізу.

Величина, що дорівнює відношенню осьового моменту інерції перерізу до відстані від цієї осі до найбільш віддаленої від неї точки перерізу називається осьовим моментом опору перерізу. Його розмірність $[м^3]$.

Величина, що дорівнює відношенню осьового моменту інерції перерізу до відстані від цієї осі до найбільш віддаленої від неї точки перерізу називається осьовим моментом опору перерізу. Його розмірність $[м^3]$.

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}.$$

Головні моменти опору перерізу – це відношення виду

$$W_u = \frac{I_u}{v_{\max}}, W_v = \frac{I_v}{u_{\max}}.$$

Ці характеристики перерізу мають особливе практичне значення під час розрахунків стрижнів на кручення та згин.

ЛЕКЦІЯ 7. ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО ТА ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

У лекції проаналізовано напружений стан в точці.

Викладено лінійний та плоский напружений стан.

Введено поняття круга напружень (круга Мора).

Представлено узагальнений закон Гука.

Спираючись на матеріал лекції, довідкову та науково-технічну літературу

студент повинен уміти:

- давати визначення напруженого стану в даній точці по заданому перерізу деформованого твердого тіла;*
- тлумачити сутність головних площадок та визначати їх взаємне розташування;*
- розраховувати головні напруження та давати їх визначення;*
- формулювати закон парності дотичних напружень та властивість інваріантності суми осьових напружень;*
- будувати круг напружень (круг Мора) та визначати за ним екстремальні значення напружень;*

7.1 Напружений стан в точці

Напруженим станом в даній точці деформованого твердого тіла є сукупність нормальних і дотичних напружень, що діють по всіх площадках, які проходять через цю точку.

Під час дослідження напруженого стану тіла в даній точці А, навколо неї зазвичай виділяють елемент у вигляді нескінченно малого паралелепіпеда (рис. 7.1, а), який у збільшеному масштабі показано на рисунку 7.1, б.

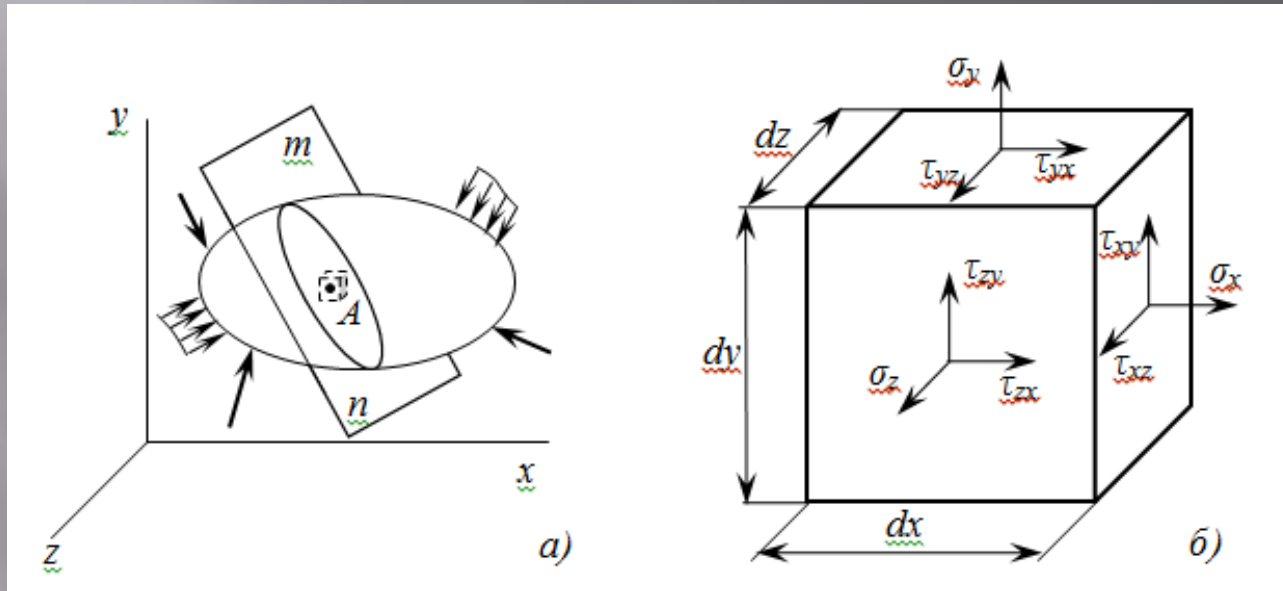


Рис. 7.1 – Напружений стан тіла в точці

Оскільки даний елемент дуже малий, то можна вважати, що напруження на його гранях розподілені рівномірно. Повні напруження представляємо у вигляді дотичних і нормальних складових.

Нормальні напруження позначають σ з індексом, відповідним напрямку нормалі до площадки, на якій вони діють.

Дотичні напруження позначають τ з двома індексами: перший відповідає напрямку нормалі до площадки, а другий – напрямленню самого напруження.

Таким чином, на гранях показаного на рисунку 7.1, б паралелепіпеда, виділеного навколо точки А навантаженого тіла, діють дев'ять компонентів напруження. Величини σ і τ на площадках залежать від положення цих площадок.

7.2 Лінійний (одновісний) напружений стан

Розглянемо випадок лінійного напруженого стану, тобто осового розтягу-стискання. На поперечних перерізах стрижня поперечною площею F діють поздовжні зусилля N , які дорівнюють розтягуючій силі P , а напруження ρ зводяться тільки до нормальних напружень. Позначимо їх σ_1 (рис. 7.2)

Як відомо,

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} = \frac{P}{F} \quad (7.1)$$

Обчислимо напруження в перерізі площею F_α , розташованому під кутом α до поперечного перерізу стрижня (кут α вважають позитивним, якщо відлік проти годинникової стрілки). Напруження на цій площадці $\bar{\rho}_\alpha$ (рис. 7.3).

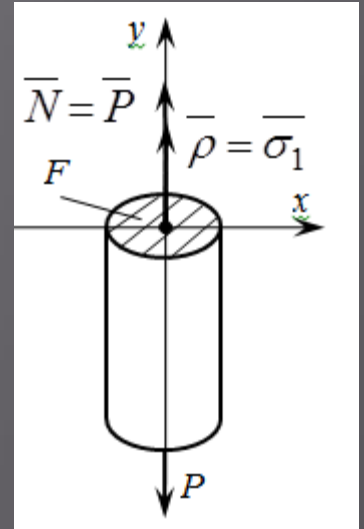
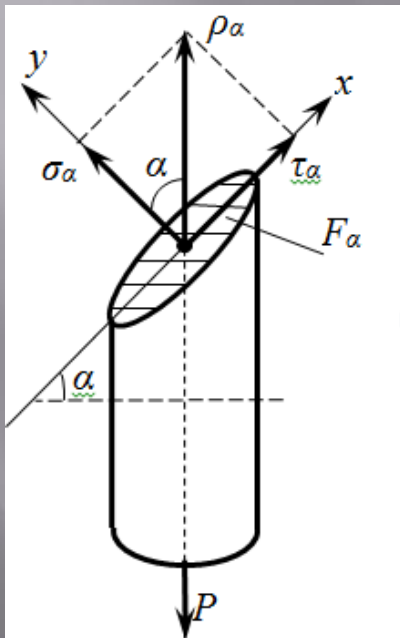


Рис. 7.2 – Поперечний переріз стрижня



$$\rho_\alpha = \frac{P}{F_\alpha} = \frac{P \cdot \cos \alpha}{F} = \sigma_1 \cdot \cos \alpha,$$

через те, що

$$F_\alpha = \frac{F}{\cos \alpha}.$$

Його складові (нормальна і дотична) визначаються як проекції $\bar{\rho}_\alpha$ на дотичну x та нормаль y до перерізу:

$$\sigma_\alpha = \rho_\alpha \cdot \cos \alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha \quad (7.2)$$

$$\tau_\alpha = \rho_\alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (7.3)$$

Рис. 7.3 – Переріз під кутом α до поперечного

Якщо розглянути переріз стрижня, перпендикулярний попередньому (рис. 7.4) , і визначимо напруження $\rho_{\alpha 1}$ на ньому:

Площу перерізу позначимо

$$\rho_{\alpha 1} = \frac{P}{F_{\alpha 1}} = \frac{P \cdot \cos(90 - \alpha)}{F} = \sigma_1 \cdot \sin \alpha$$

Його складові

$$\sigma_{\alpha 1} = \rho_{\alpha 1} \cdot \cos(90 - \alpha) = \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\tau_{\alpha 1} = -\rho_{\alpha 1} \cdot \sin(90 - \alpha) = -\frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

Порівнюючи вирази для дотичних напружень, приходимо до висновку, що

$$|\tau_{\alpha}| = |\tau_{\alpha 1}|$$

Закон парності дотичних напружень:

дотичні напруження, що діють на двох взаємно перпендикулярних площадках, завжди рівні за абсолютною величиною і спрямовані одночасно або до ребра, що з'єднує площадки, або від нього (рис. 7.5).

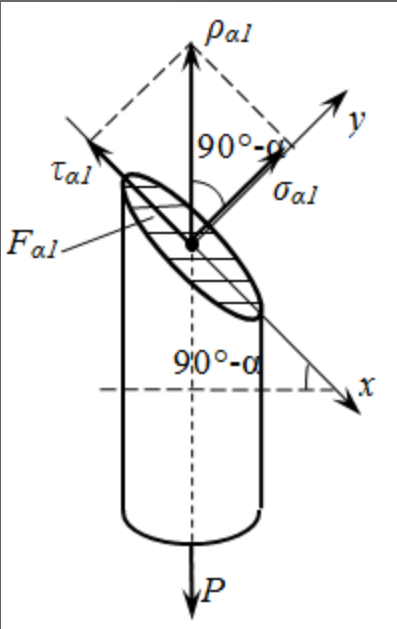


Рис. 7.4 - Поперечний переріз під кутом $90^\circ - \alpha$ до поперечного

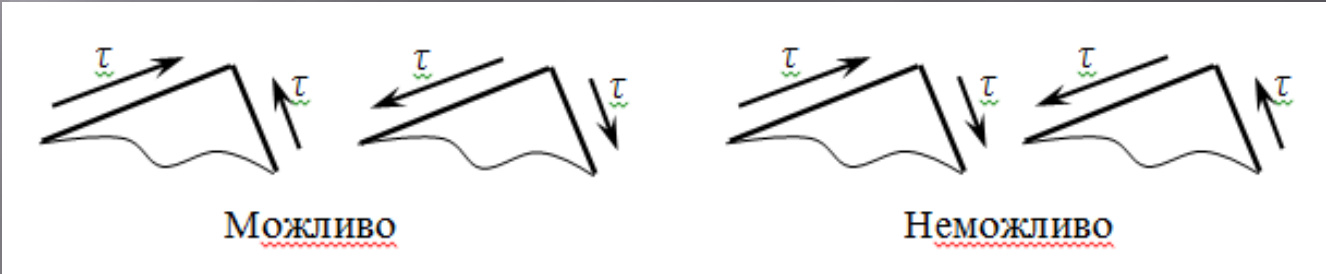


Рис. 7.5 – Закон парності дотичних напружень

Розглянемо деякий виділений шар у розтягнутому силами P стрижні, розташованому під кутом α до поперечного перерізу. По обидва його боки діють дотичні і нормальні напруження.

Як видно з рис. 7.6, нормальні σ_α прагнуть розтягнути шар, що розглядується, а дотичні τ_α прагнуть зрушити поверхні шару один до одного.

Тобто при осьовому розтягу стрижня на його похилих площадках присутні два види деформацій: **розтяг** і **зсув**.

Правило знаків σ та τ :

Нормальні напруження, що розтягують вважаємо позитивними, ті, що стискають – негативними.

Дотичні напруження вважаємо позитивними, якщо вони створюють момент, що обертає елемент за годинниковою стрілкою відносно його центру, проти годинникової стрілки - негативними.

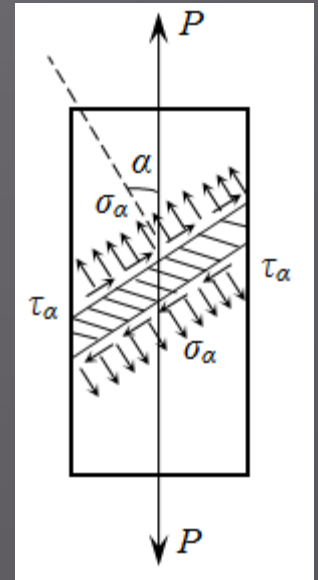


Рис. 7.6 – Напруження на похилих площадках стрижня

Висновки:

Із (7.3), (7.5) витікає, що найбільші дотичні напруження $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}$ при $\alpha = 45^\circ$.

Із (7.2), (7.4) витікає, що в разі одноосного напруженого стану дотичні напруження відсутні $\tau = 0$ в поперечних перетинах стрижня ($\alpha = 0^\circ$), та поздовжніх ($\alpha = 90^\circ$). Нормальні напруження в цих перетинах приймають екстремальні значення та будуть відповідно дорівнювати: $\sigma_\alpha = \sigma_1$ $\sigma_{\alpha 1} = 0$

Площини, на яких немає дотичних напружень, є головними площадками.

Нормальні напруження, що діють по головних площадках та приймають екстремальні значення, є головними напруженнями.

Далі, у разі об'ємного (трьохвісного) напруженого стану, будемо позначати

- σ_1 - найбільше в алгебраїчному сенсі головне напруження;
- σ_2 - середнє
- σ_3 - найменше

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

7.3 Плоский (двовісний) напружений стан

Розглянемо випадок головного напруженого стану, коли по двох взаємно перпендикулярних гранях виділеного елементарного паралелепіпеда (головною його площадкою) діють головні напруження. σ_1 та σ_2 ($\sigma_3 = 0$).

Задамо деякий кут та повернемо паралелепіпед на цей кут α проти годинникової стрілки ($\alpha > 0$). Визначимо напруження σ_x , σ_y , та τ_{xy} на повернутих площадках (рис. 7.7).

Скористаємося принципом суперпозиції (див. рисунки 7.7, а та 7.7, б).

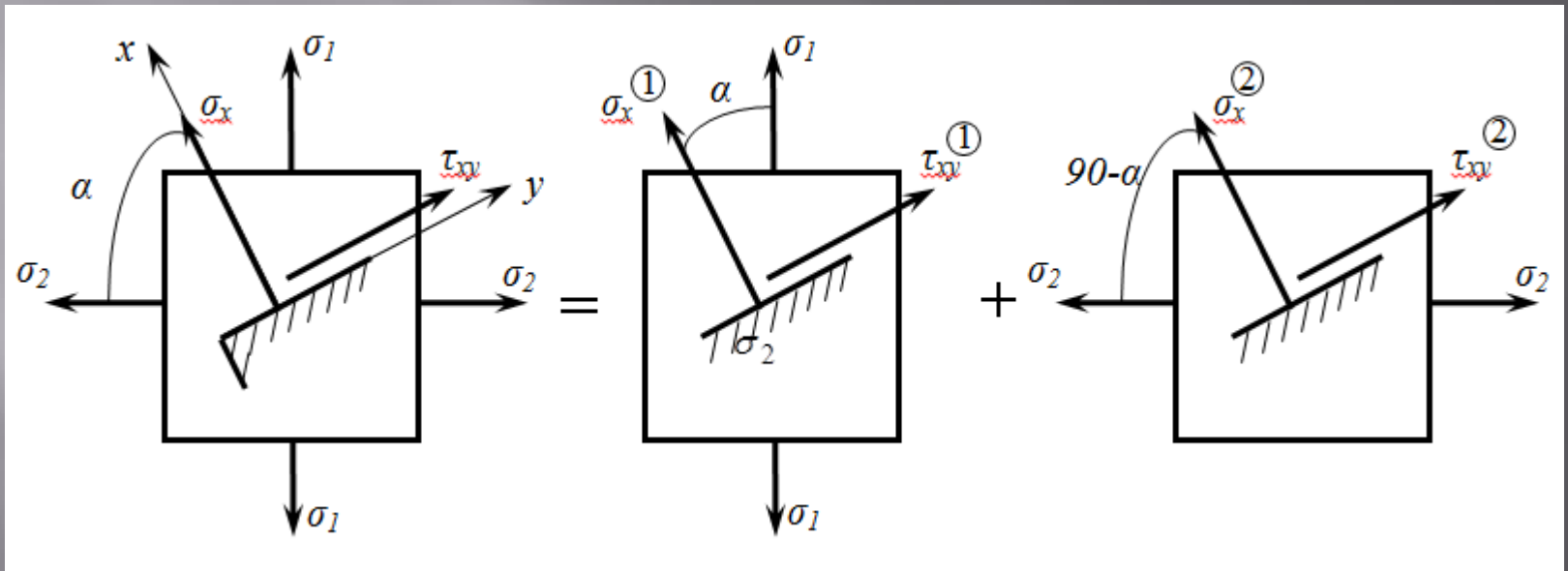


Рисунок 7.7 – Принцип суперпозиції

Визначимо нормальне напруження σ_x , яке отримаємо як суму напружень σ_{x1} та σ_{x2} від діючих незалежно головних напружень σ_1 та σ_2 :

$$\sigma_x = \sigma_{x1} + \sigma_{x2}$$

Згідно з (7.2) та (7.4)

$$\sigma_{x1} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\sigma_{x2} = \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\text{Тоді} \quad \sigma_x = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha \quad (7.7)$$

$$\text{Аналогічно} \quad \sigma_y = \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha \quad (7.8)$$

$$\text{Додаючи (7.7) та (7.8), отримаємо} \quad \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (7.9)$$

Рівняння (7.9) є **властивістю інваріантності нормальних напружень**: сума нормальних напружень на двох взаємно перпендикулярних площадках залишається незмінною при повороті цих площадок і дорівнює сумі головних напружень.

Визначимо дотичні напруження на розглянутих площадках. За аналогією з вищевикладеним

$$\text{Згідно з (7.3), (7.5)} \quad \tau_{jx1} = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad \tau_{jx2} = -\frac{\sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad \tau_{jx} = \tau_{jx1} + \tau_{jx2}$$

$$\tau_{jx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (7.10)$$

Тоді

$$\text{Згідно із законом парності дотичних напружень} \quad \tau_{xy} = -\tau_{jx}$$

$$\text{Із (7.10) видно, що найбільше значення для дотичних напружень буде при} \quad \sin 2\alpha = 1 \quad \text{тобто} \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

З властивості інваріантності нормальних напружень можна зробити наступний висновок, що існують **дві взаємно перпендикулярні площадки (головні)**, на яких діють екстремальні нормальні напруження, а дотичні напруження відсутні.

Положення головних площадок по відношенню до довільних можна визначити **з умови екстремуму нормальних напружень**:

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = 0$$

Кут α , на який необхідно повернути розглянутий елемент, щоб з довільного положення зорієнтувати його по головних площадках, визначається із (7.7), (7.8), (7.10):

$$(7.11)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Із (7.11) отримуємо два значення кута: α та $\alpha' = \alpha + 90^\circ$ (оскільки є дві взаємно перпендикулярні площадки).

Якщо $\alpha > 0$, то поворот розглянутого елемента проводиться проти годинникової стрілки.

Значення головних напружень знаходять за формулою

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2} \quad (7.12)$$

Правило визначення положення головних площадок. Для визначення положення головних площадок по заданих довільних необхідно повернути довільно орієнтований заданий елемент на кут α в сторону, що вказується напрямком τ , чинним на площадці з більшим в алгебраїчному сенсі нормальним напруженням (див. приклад на рис. 7.8).

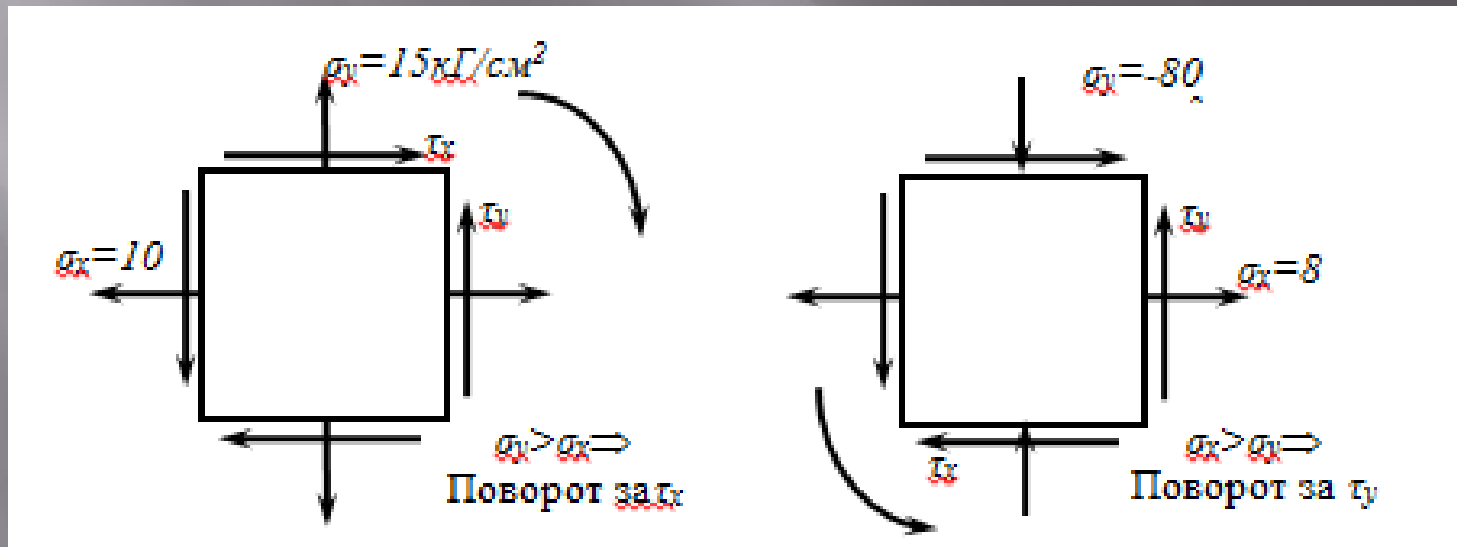
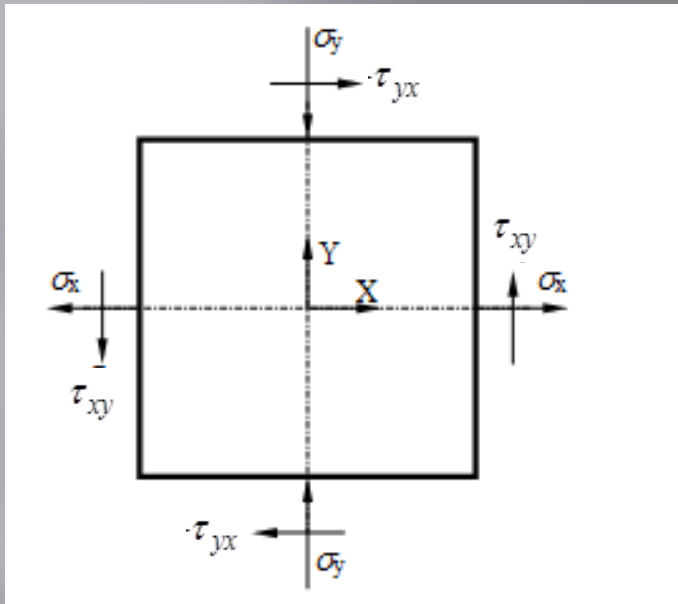


Рисунок 7.8 – Визначення головних площадок

Приклад.

На гранях сталевго кубика діють нормальні (горизонтальні $\sigma_{\text{гор}}$ і вертикальні $\sigma_{\text{вертик}}$, а також дотичні напруження τ) і вони дорівнюють $\sigma_{\text{гор}}=8 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$, $\sigma_{\text{вертик}}=-2 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$, $\tau=5 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$

Визначити: головні напруження та положення головних площадок.



Дано:

$$\sigma_x = \sigma_{\text{гор}} = 8 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2 \quad (\text{розтяжне})$$

$$\sigma_y = \sigma_{\text{вертик}} = -2 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2 \quad (\text{стискаюче})$$

$$\tau_{xy} = -5 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$$

$$\tau_{yx} = 5 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$$

Визначити: σ_1 -? σ_2 -? σ_3 -? α - ?

Оскільки кубик знаходиться в плоскому напруженому стані, то величини головних напружень визначимо по формулі:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_y^2};$$

$$\sigma_{\max} = \frac{8 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^4}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(8 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4)^2 + 4(5)^2 \cdot 10^8} = 3 \cdot 10^4 + 7.07 \cdot 10^4 = 10.07 \cdot 10^4$$

$$\sigma_{\min} = \frac{8 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^4}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(8 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4)^2 + 4(5)^2 \cdot 10^8} = 3 \cdot 10^4 - 7.07 \cdot 10^4 = -4.07 \cdot 10^4$$

Відзначимо, що в подальших розрахунках набагато зручніше оперувати не з двома головними напруженнями ($\sigma_{\max}$ і $\sigma_{\min}$), а з трьома (як при об'ємному напруженому стані), вважаючи одне з головних напружень як таким, що дорівнює нулеві. У цьому випадку головні напруження позначають ініціалами 1,2,3. Індексом 1 позначають більше (з урахуванням знака) головне напруження, індексом 3 — найменше. У розглянутому прикладі, додавши до двох знайдених головних напружень $\sigma_2=0$, запишемо

$$-4,07 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2; \quad 0; \quad 10,07 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2,$$

і порівнюючи них, позначимо:

$$\sigma_3 = -4,07 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_1 = 10,07 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2;$$

Положення площадки, на якій діє більше головне напруження, визначають по куту α між заданими і головними площадками, що визначають по формулі

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Кут α відраховують від алгебраїчно більшого заданого напруження з урахуванням його знака: позитивний кут відкладають проти годинникової стрілки, негативний — за годинниковою.

На площадці, перпендикулярній до знайденого, діє менше головне напруження.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \cdot (-5 \cdot 10^4)}{8 \cdot 10^4 - (-2 \cdot 10^4)} = -\frac{(-10)}{10} = 1$$

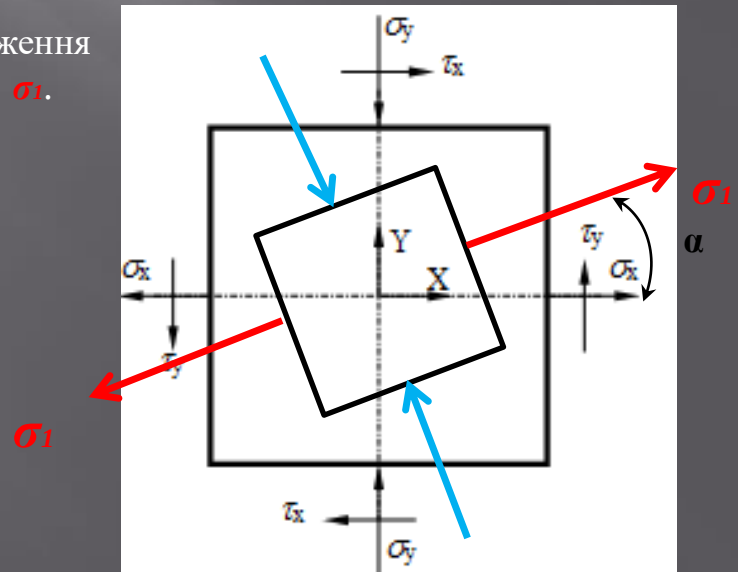
$$2\alpha = 45^\circ$$

$$\alpha = 22,5^\circ$$

$$\underline{\alpha > 0}$$

Знайдений кут α потрібно відкласти від нормального напруження σ_x проти годинникової стрілки (це буде напрям напруження σ_1). Напруження σ_3 діє на перпендикулярній площадці.

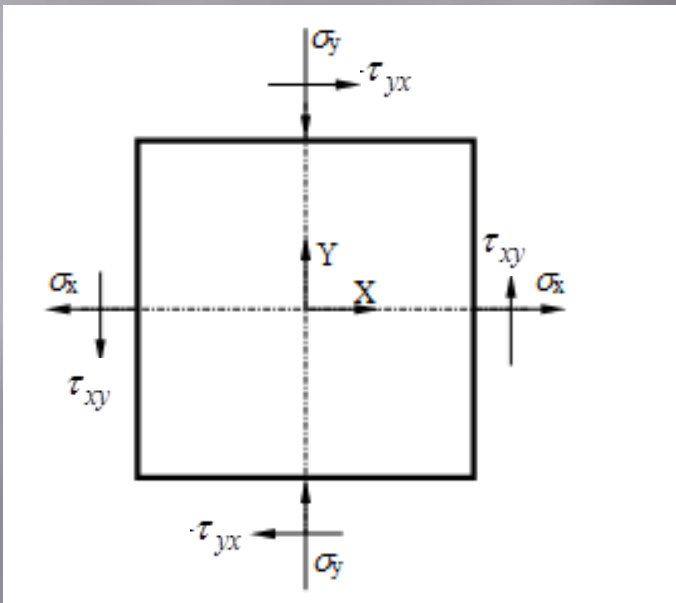
Результати аналітичного розрахунку відображено на рис. 2.



7.4 Круг напряжень Мора

Використовуючи коло Мора, можна визначити головні напруження та положення головних площадок по заданих довільних напруженнях.

Розглянемо головний напружений стан елемента (рис. 7.9), по гранях якого діють нормальні напруження та дотичні. Визначити: головні напруження та положення головних площадок.



Дано:

$$\sigma_x = \sigma_{\text{гор}} = 8 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2 \quad (\text{розтяжне})$$

$$\sigma_y = \sigma_{\text{вертик}} = -2 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2 \quad (\text{стискаюче})$$

$$\tau_{xy} = -5 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$$

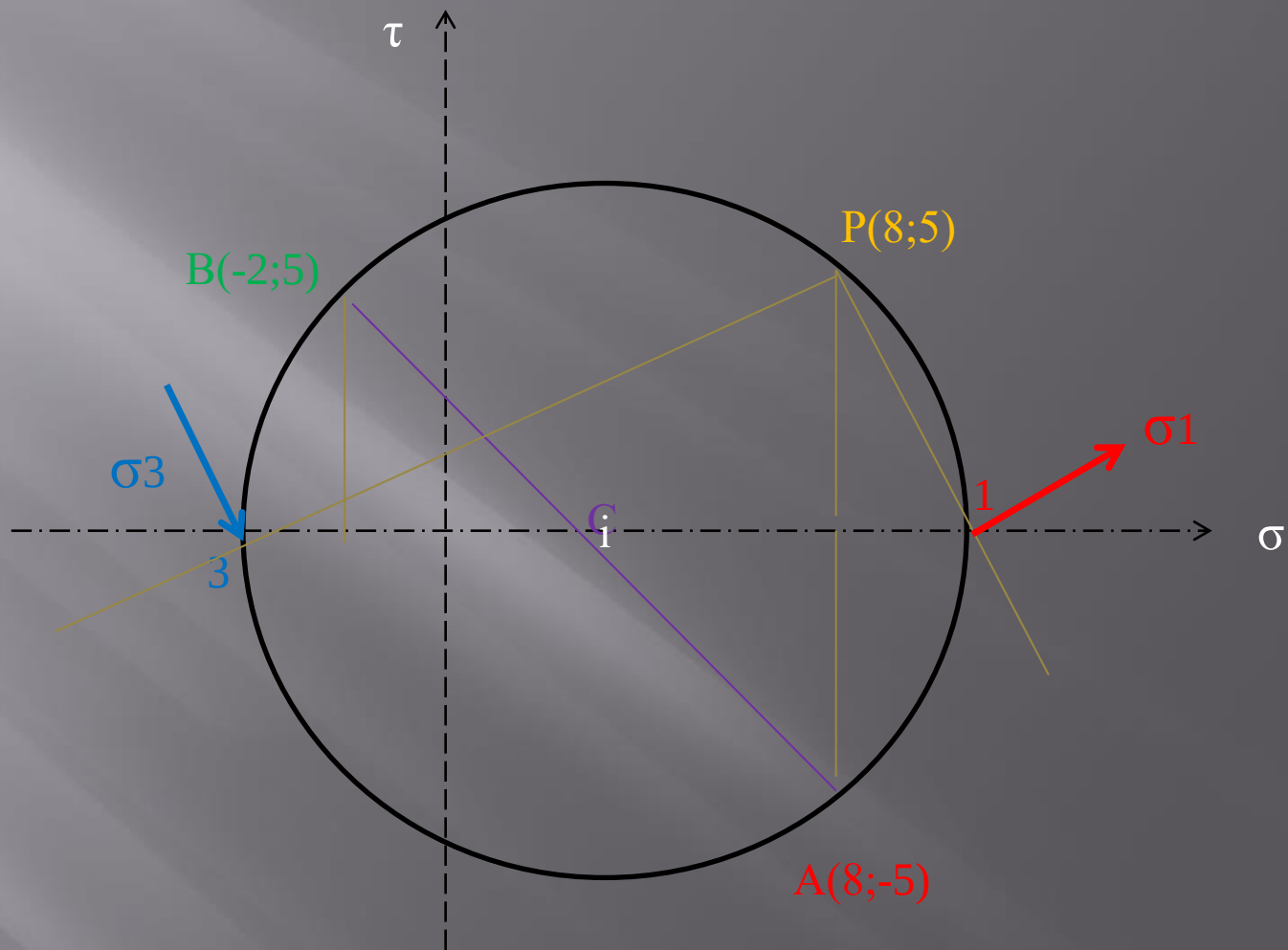
$$\tau_{yx} = 5 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$$

Визначити: σ_1 -? σ_2 -? σ_3 -? α - ?

Алгоритм побудови кола Мора:

Перейдемо до побудови кола напружень (кола Мору). Для цього:

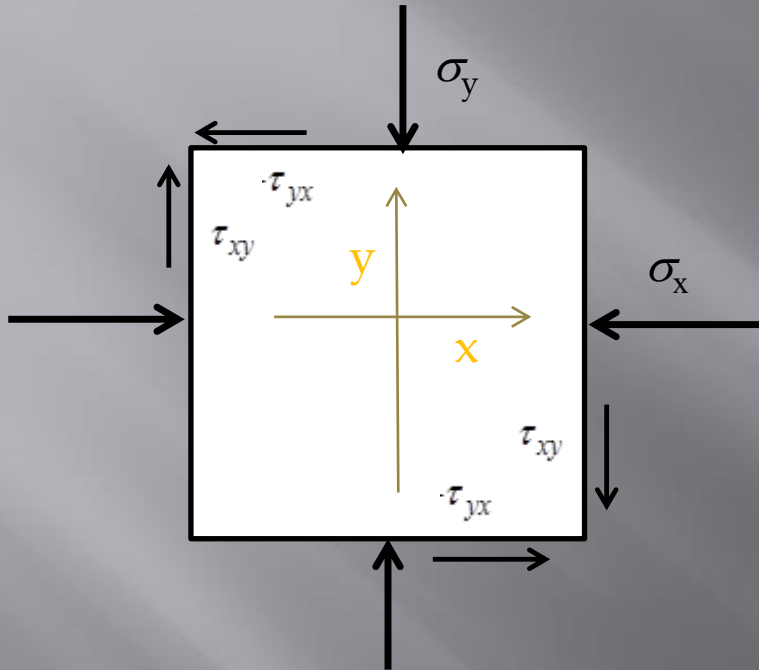
- 1) проведемо осі σ і τ ; виберемо масштаб напружень, у розглянутому прикладі зазначений відрізок відповідає напруженню, рівному $1 \cdot 10^4$ кН/м²;
- 2) по координатах побудуємо точки А та В з координатами : $A(\sigma_x; \tau_{xy})$; $B(\sigma_y; \tau_{xy})$;
- 3) з'єднаємо крапки А и В прямої; крапка перетинання прямих АВ з віссю σ є центром кола напружень; позначимо її літерою С;
- 4) радіусом АС=ВС проведемо окружність; крапки перетинання даної окружності з віссю σ відповідають головним напруженням (у нашому випадку крапка 1 відповідає напруженню σ_1 , а крапка 3 - σ_3); вимірюючи довжину відрізків між віссю τ і даними крапками, одержимо в обраному масштабі величини відповідних головних напружень;
- 5) для визначення положення головних площадок побудуємо полюс кола напружень (позначимо полюс буквою Р); координати крапки Р рівні $(\sigma_x; -\tau_{xy})$;
- 6) провівши прямі через крапку Р и крапки 1 і 3, знаходимо положення головних площадок і покажемо діючі на них головні напруження.



Приклад СМ-5.

На гранях сталевго кубика діють нормальні (горизонтальні $\sigma_{\text{гор}}$ і вертикальні $\sigma_{\text{вертик}}$, а також дотичні напруження τ і вони дорівнюють $\sigma_{\text{гор}}=4 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$, $\sigma_{\text{вертик}}=8 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$, $\tau=4 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$

Визначити: головні напруження та положення головних площадок.



Дано:

$$\sigma_x = \sigma_{\text{гор}} = -4 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2 \quad (\text{стискаюче})$$

$$\sigma_y = \sigma_{\text{вертик}} = -8 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2 \quad (\text{стискаюче})$$

$$\tau_{xy} = 4 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$$

$$\tau_{yx} = -4 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$$

Визначити: σ_1 -? σ_2 -? σ_3 -? α -?

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2};$$

$$\sigma_{\max} = \frac{-4 \cdot 10^4 + (-8) \cdot 10^4}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(-4 \cdot 10^4 - (-8 \cdot 10^4))^2 + 4(4)^2 \cdot 10^8} = -6 \cdot 10^4 + 4,47 \cdot 10^4 =$$
$$= -1,53 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2;$$

$$\sigma_{\min} = \frac{-4 \cdot 10^4 + (-8) \cdot 10^4}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(-4 \cdot 10^4 - (-8 \cdot 10^4))^2 + 4(4)^2 \cdot 10^8} = -6 \cdot 10^4 - 4,47 \cdot 10^4 =$$
$$= -10,47 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$$

Отримали значення двох напружень (min, max оба негативні) та ще одне для плоскої системи дорвнює нулю.

Розташовуємо їх в послідовність : $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -1,53 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2, \quad \sigma_3 = -10,47 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2;$$

(!) (σ_1 завжди позитивне; σ_3 завжди негативне; σ_2 може бути з будь-яким знаком)

Положення площадки, на якій діє більше головне напруження, визначають по куту α між заданими і головними площадками, що визначають по формулі

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^4}{-4 \cdot 10^4 - (-8 \cdot 10^4)} = -\frac{8}{4} = -2$$

Кут α відраховують від алгебраїчно більшого заданого напруження з рахуванням його знака: позитивний кут відкладають проти годинникової стрілки, негативний — за годинниковою.

На площадці, перпендикулярній до знайденого, діє менше головне напруження.

Знайдений кут α потрібно відкласти від нормального напруження σ_x за годинниковою стрілкою (це буде напрям напруження σ_2 .)

Напруження σ_3 діє на перпендикулярній площадці.

Результати аналітичного розрахунку відображено на рис.

