МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

ЗАТВЕРДЖУЮ
Ректор НУХТ
професор С.В Іванов
____
(підпис)
"___" _________ 2013 р.

М.А. МАСЛО, О.О. ОСЬМАК

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів напрямів підготовки 6.050502 «Інженерна механіка», 6.050503 «Машинобудування», 6.050601 «Теплоенергетика», 6.050604 «Енергомашинобудування»
денної та заочної форм навчання

Всі цитати, цифровий та фактичний матеріал, бібліографічні відомості перевірені. Написання одиниць відповідає стандартам

Підпис(и) автора(ів) _______________
від 29.11.2012 р. _______________
____
____
____

Реєстраційний номер електронного конспекту лекцій у НМВ
____

СХВАЛЕНО
на засіданні кафедри теоретичної механіки та ресурсоощадних технологій
Протокол № 6
від «21» 11 2012 р.

Київ НУХТ 2013

М.А. Масло, О.О. Осьмак. Теоретична механіка: конспект лекцій для студентів напрямів підготовки 6.050502 «Інженерна механіка», 6.050503 «Машинобудування», 6.050601 «Теплоенергетика», 6.050604 «Енергомашинобудування» денної та заочної форм навч. – К.: НУХТ, 2013. – 132 с.

Рецензент **О.М. ШИКУЛА**, д-р. фіз.-мат. наук

М.А. МАСЛО, канд. тех. наук
О.О. ОСЬМАК

Зміст

ВСТУП

Світ за своєю природою матеріальний. Матерія – це єдина і універсальна субстанція світу. Як єдина та універсальна субстанція світу, матерія реально існує лише у конкретних формах або видах. Конкретні види (форми) існування матерії видозмінюються і взаємно перетворюються, завжди залишаючись різними формами прояву єдиної матерії.

Матерія вічно й безперервно розвивається, перебуваючи у безперервному русі. Рух є основна властивість матерії і форма її існування. Матерія і рух не можуть існувати незалежно одна від одного. Світ являє собою безмежні у просторі і нескінченні в часі різні форми руху матерії.

Можна умовно виділити найбільш значні та які часто зустрічаються в природі форми руху матерії:

1) механічний рух – найпростіша форма руху; 2) фізико-хімічні процеси; 3) електромагнітні процеси; 4) теплові процеси; 5) біологічні процеси; 6) внутрішньоатомні та внутрішньоядерні процеси; 7) соціально-економічні пронеси; 8) вища форма руху матерії – процес мислення.

Кожна з форм руху має свої специфічні особливості, закономірності, що притаманні тільки їй, на відміну від інших. Відмінність форм руху матерії складає об'єктивну основу для відповідного поділу науки на окремі галузі, кожна з яких вивчає специфічні закономірності певної форми руху.

Наука, що вивчає закономірності найпростішої форми руху матерії – механічної, дістала назву механіки.

Теоретична механіка – це частина механіки, яка вивчає загальні закони механічного руху макроскопічних матеріальних тіл (тіл, маса яких набагато більша за масу атомів, з яких вони складаються).

Механічним рухом називається такий прояв руху матерії, який, зводиться до зміни положення у просторі і в часі одного матеріального об'єкту по відношенню до іншого.

Механічний рух у тій чи іншій мірі супроводжує всі інші форми руху матерії.

Вивчення більш складних форм руху матерії вимагає попереднього уявлення про механічний рух та знання законів механіки. Тому механіка має відношення до всіх явищ природи та творень техніки, до всього природознавства.

Вивчення теоретичної механіки як науки, що вивчає закономірності механічного руху матеріальних об'єктів позбавлено змісту до тих пір, поки не виявлено, що означають терміни «простір», «час» та «матеріальний об'єкт». Роз'яснення того, яке розуміння вкладає у ці терміни теоретична механіка розглянемо далі.

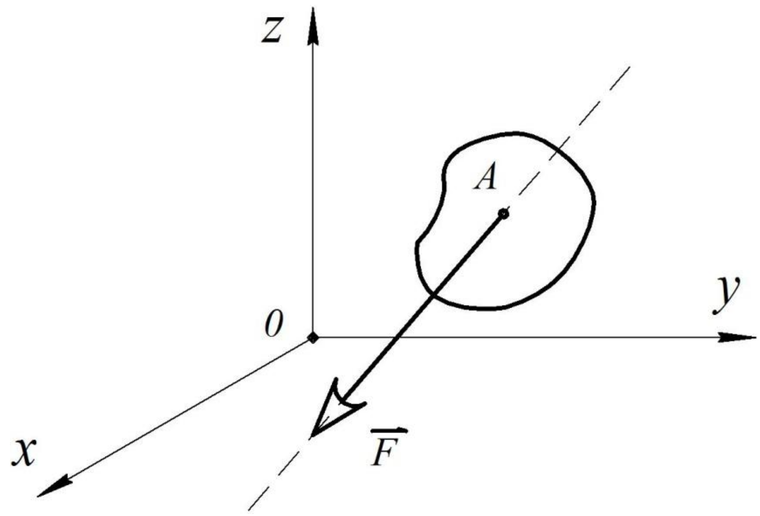
1. СТАТИКА

Статика – розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються умови рівноваги системи сил, що діють на тверде тіло, і викладаються методи перетворення одних систем сил в інші, їм еквівалентні.

Сила – кількісна міра взаємодії матеріальних тіл, що визначає інтенсивність та напрям цієї взаємодії.

Сила визначається: числовим значенням, напрямом дії та точкою прикладання.

Числове значення сили встановлення за статичним і динамічним її правилами і повністю відповідає визначенню вектора (зображується Z вектором).



Довжина вектора, який зображує силу у відповідному масштабі, дорівнює числовому значенню сили. Вектор сили прикладений в певній точці тіла (точка A) і напрямлений у бік дії сили. Пряма, за якою напрямлений вектор сили, називається лінією однієї сили.

Числове значення (модуль) сили позначають $|\vec{F}|$, або F.

Одиницею сили в системі СІ є ньютон [Н].

Сили, які прикладаються до тіла у будь-якій його точці, називаються зосередженими силами.

Система сил – сукупність сил, що діють на тіло.

Сили, які входять до складу даної системи, називаються складовими системи сил. $\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}\}$.

Якщо одну систему сил, що діє на тіло, можна замінити іншою, не порушуючи механічного стану твердого тіла, то такі системи називаються еквівалентними.

$$\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}\} \sim \{\overrightarrow{\mathrm{P}_1}, \overrightarrow{\mathrm{P}_2}, \dots, \overrightarrow{\mathrm{P}_m}\}.$$

Якщо система сил еквівалентна одній силі, то така сила називається рівнодійною.

$$\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}\} \sim \vec{R}.$$

<u>Зрівноважені системи сил</u> (системи сил еквівалентні нулю) – це такі системи сил,під дією яких матеріальна точка або тверде тіло перебувають у стані рівноваги відносно інтегральної системи відліку.

$$\{\vec{F_1}, \vec{F_2}, \dots, \vec{F_n}\} \sim \vec{0}.$$

<u>Рівновага матеріальної точки або твердого тіла</u> – це такий їх стан, за якого вони, перебуваючи під дією системи сил $\{\vec{F_1}, \vec{F_2}, \dots, \vec{F_n}\} \sim \vec{0}$, залишаються у спокої відносно інерціальної системи відліку.

Під рівновагою матеріальної точки або твердого тіла розуміють не тільки стан спокою, а й рух за інерцією.

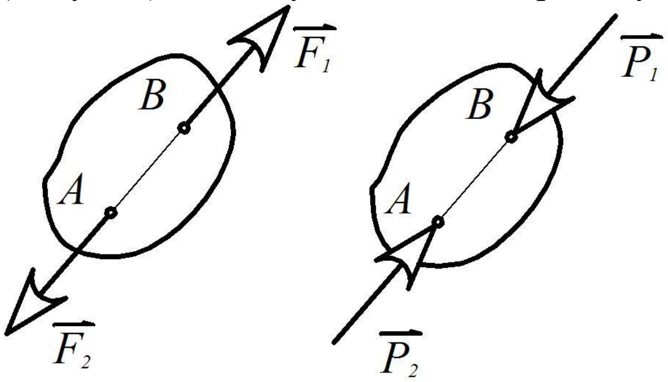
Рівномірний прямолінійний рух матеріальної точки є рухом за інерцією.

Для твердого тіла існують різні види руху за інерцією – рівномірний прямолінійний рух і рівномірно обертальний рух навколо нерухомої осі.

<u>1.1 Аксіоми про сили.</u> <u>Теорема про три сили.</u>

<u>Аксіома механіки</u> – це деякі твердження, що приймаються без доказу.

1. **<u>Аксіома про дві сили</u>** – дві сили, прикладені до твердого тіла, взаємно врівноважуються тоді, коли вони рівні за числовим значенням (модулем) і діють уздовж однієї прямої у протилежних напрямках.



$$\vec{F_1} = -\vec{F_2} \qquad |\vec{F_1}| = |\vec{F_2}|$$
$$\vec{P_1} = -\vec{P_2} \qquad P_1 = P_2$$

Якщо тіло у початковий момент перебуває у стані рівноваги, то цей стан тіла зберігається.

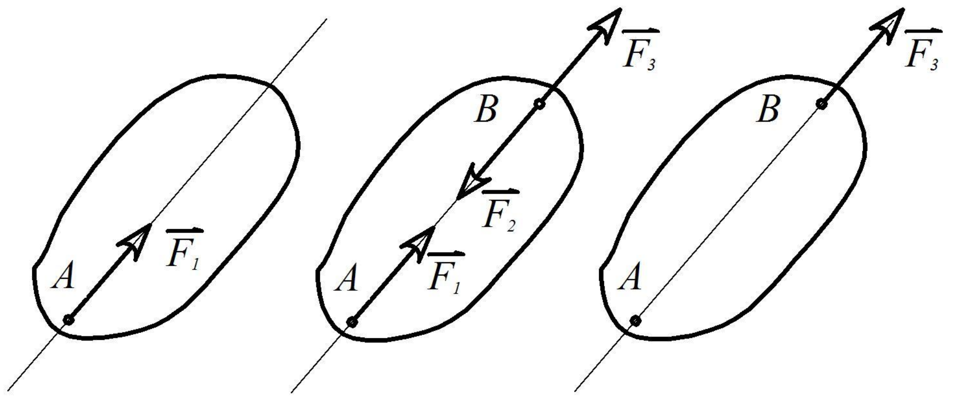
2. **<u>Аксіома про додавання та віднімання зрівноваженої системи сил</u>**. Стан твердого тіла під дією системи сил не зміниться, якщо до цієї системи додати або відняти від неї зрівноважену систему сил.

<u>Наслідок 3 аксіом про дві сили про додавання та віднімання зрівноваженої системи сил</u>:

- Дія сили на тверде тіло не зміниться, якщо перенести точку прикладання сили вздовж її лінії у довільну точку.

Нехай сила $\vec{F_1}$ прикладена до твердого тіла у точці А (рис.).

Прикладемо у точці В уздовж лінії дві сили $\vec{F_1}$ дві сили $\vec{F_2}$ і $\vec{F_3}$, вважаючи, що $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = |\vec{F_3}|$.



Тоді на підставі аксіоми про додавання та віднімання зрівноваженої сил будемо мати

$$\overrightarrow{F_1} \sim \{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}\},$$

тобто додаємо до сили $\overrightarrow{F_1}$ зрівноважену систему сил.

В свою чергу,утворилась нова зрівноваженасистема сил.

$$\{\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}\} \sim \vec{0};$$

$\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\} \sim \vec{0}$, яку можна відняти від утвореної системи з трьох сил, тобто

$$\overrightarrow{F_1} \sim \{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}\} \sim \overrightarrow{F_3},$$

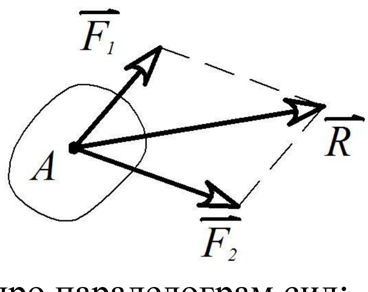
або

$$\overrightarrow{F_1} \sim \overrightarrow{F_3}$$

Наслідок 3 аксіом показує, що сила, прикладена до абсолютно твердого, розглядається як ковзний вектор («ковзкий» вектор).

Наслідок: Силу (вектор сили) прикладену до абсолютно твердого тіла можна переносити вздовж лінії дії сили. При цьому стан тіла (спокою чи руху) не зміниться.

3. **Аксіома про паралелограм сил**. Не змінюючи механічного стану твердого тіла, дві сили, що прикладені до нього в одній точці під кутом одна до одної, можна замінити однією силою, прикладеною у тій самій точці, яка визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах.



Наслідки 3 аксіоми про паралелограм сил:

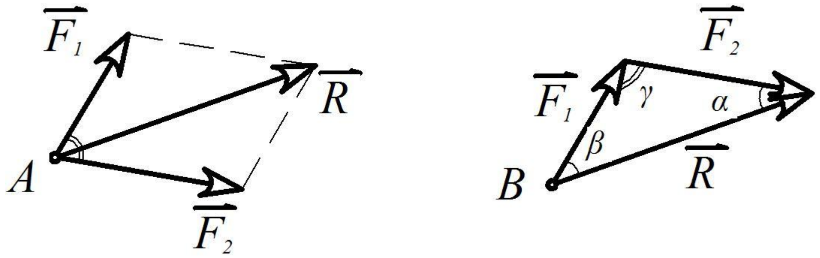
1. Дві сили прикладені в одній точці твердого тіла під кутом одна до одної, мають рівнодійну, тобто еквівалентні одній силі:

$$\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\} \sim \vec{R}$$

2. Аксіома визначає модуль, точку прикладення та напрям рівнодійної як геометричної суми двох сил

$$\vec{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}.$$

Напрям рівнодійної визначає діагональ паралелограма,або замикаюча сторона трикутника.



Числове значення (модуль) рівнодійної двох сил визначають графічно і аналітично.

Графічно – довжина діагоналі паралелограма або довжина замикаючої сторони трикутника.

Аналітично $\vec{R}$ визначається як діагональ паралелограма за допомогою теореми косинусів

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 cos\widehat{F_1 \cdot F_2}},$$

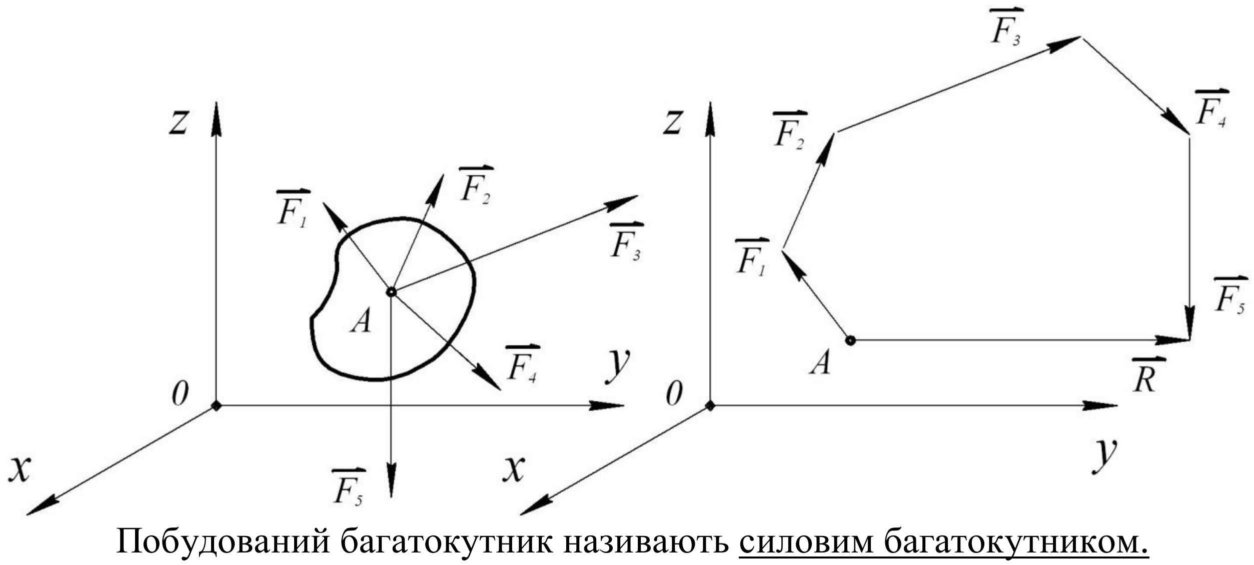
або як замикаюча сторона трикутника за теоремою синусів:

$$\frac{R}{sin\gamma} = \frac{F_1}{sin\alpha} = \frac{F_2}{sin\beta}.$$

3. Аксіома визначає загальне правило геометричного складання сил, прикладені до тіл в одній точці.

Щоб визначити рівнодіючу сил прикладених до тіла в одній точці А, потрібно приєднати до першого вектора $\overrightarrow{F_1}$ вектор $\overrightarrow{F_2}$, до вектора $\overrightarrow{F_2}$ вектор $\overrightarrow{F_3}$ і т.д. послідовно вектори всіх сил. Вектор проведений з точки А до кінця останнього вектора (замикаюча сторона багатокутника) і буде рівнодіючою силою розглянутої системи.

$$\vec{R}=\sum_{k=0}^{n}\overrightarrow{F_k}$$

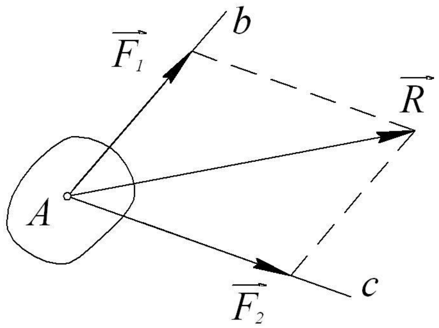


Побудований багатокутник називають <u>силовим багатокутником.</u>

Розглянуто <u>правило геометричного складання сил (векторів).</u>

4. Аксіома визначає правило розкидання сил за заданими напрямами:

а) <u>Розкладання сили за двома заданими напрямками</u>



Задача зводиться до побудови паралелограма, у якого діагональ буде $\vec{R}$, а сторони – складові сили $\vec{F_1}$ і $\vec{F_2}$.

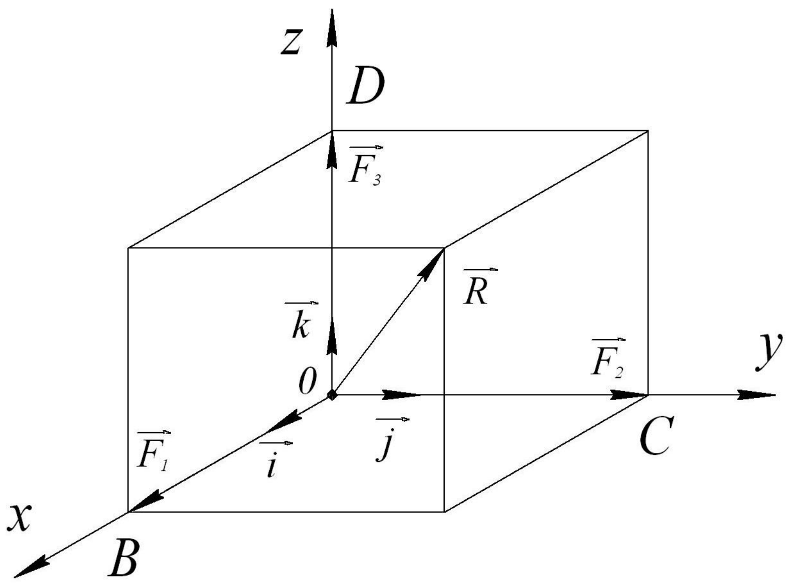
$$\vec{R}=\vec{F_1}+\vec{F_2};$$

б) <u>Розкладання сили за трьома заданими напрямками:</u>

(Розкладання вектори сили $\vec{R}$ за трьома взаємно перпендикулярними напрямами).

Задача зводиться до побудови прямокутного паралелепіпеда, в якого діагональ буде зображувати вектор сили $\vec{R}$, а ребра – складові сили ($\vec{F_x}, \vec{F_y}, \vec{F_z}$) $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ і $\vec{R}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}$;

Введено одиничні вектори (орти) осей Декартової системи координат $\vec{\gamma}$, $\vec{\imath}$, $\vec{k}$.



Тоді $\vec{F_1}=F_x\cdot\vec{\imath}$; $\vec{F_2}=F_y\cdot\vec{\gamma}$; $\vec{F_3}=F_z\cdot\vec{k}$;

де F_x, F_y, F_z – скалярні величини (довжини ребер паралелепіпеда)

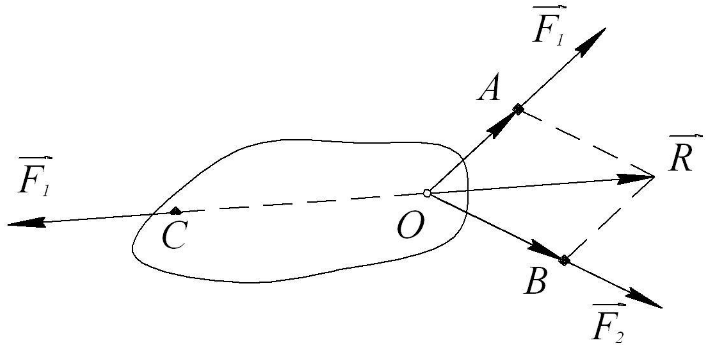
Тоді

$$\vec{R}=F_x\cdot\vec{\imath}+F_y\cdot\vec{\gamma}+F_z\cdot\vec{k}$$

Рівняння (*) є рівнянням розкладання вектори $\vec{R}$ по осях декартової системи координат.

1.2 Теорема про три сили.

Якщо тверде тіло перебуває у стані рівноваги під дією трьох непаралельних сил, що розташовані в одній площині, то лінії дії цих сил перетинається в одній точці.

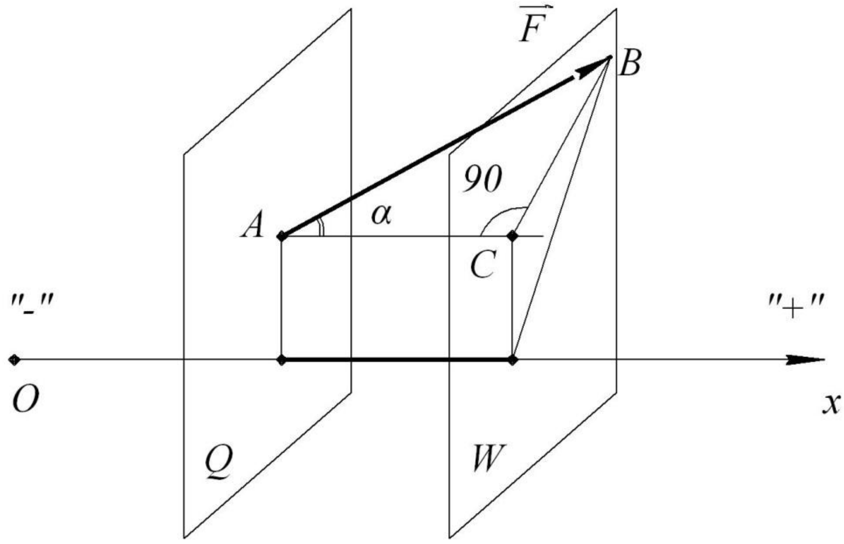


Тіло перебуває у рівновазі під дією трьох сил $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$. Згідно з умовою теореми сили $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ непаралельні. Тоді лінії дії двох сил, наприклад $\overrightarrow{F_1}$ і $\overrightarrow{F_2}$ перетинаються в точці О. Перенесемо сили $\overrightarrow{F_1}$ і $\overrightarrow{F_2}$ у точку О і знайдемо їх рівнодійну $\vec{R}$.

Розглядаємо рівновагу тіла, на яке діють дві сили $\vec{R}$ і $\overrightarrow{F_3}$. Очевидно, що ці сили діють вздовж однієї прямої, тобто утворюють найпростішу зрівноважену систему сил. Звідси випливає, що лінія дії сили $\overrightarrow{F_3}$ проходить через точку О. Тобто лінії дії всіх трьох сил $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ проходять через точку О (перетинаються в точці О).

1.3 Проекція сили на вісь. (Аналітичне завдання сили).

Проекція точки на вісь або площину – точки перетину перпендикуляра, проведено з даної точки, з віссю або даною площиною.



Маємо вектор сили $\overrightarrow{F_1}$ і деяку вісь Ох. Побудуємо дві площини, що проходять через початок А і кінець В вектора $\overrightarrow{F_1}$ перпендикулярно до осі Ох.

Точки а і в є точками перетину віссю Ох площин і, відповідно, проекціями точок А і В на вісь Ох.

Довжина відрізка АВ, яка береться з відповідним знаком, називається <u>проекцією вектора сили $\vec{F}$</u> на вісь Ох. Таким чином:

<u>Проекція вектора сили на вісь є алгебраїчною скалярною величиною зі знаком «+», коли напрям вектора співпадає з напрямком вісі, і зі знаком «-», коли напрям вектора протилежний напрямку вісі.</u>

Співвідношення між модулем вектора сили $\vec{F}$ та його проекцією:

Пряма АС паралельна Ох. АС|| Ох; АС = ав;

ΔАВС – прямокутний трикутник, кут АВС=90º;

Тоді АС=АВ$\cdot \cos\alpha$ АВ = F; АС = F_x, звідси

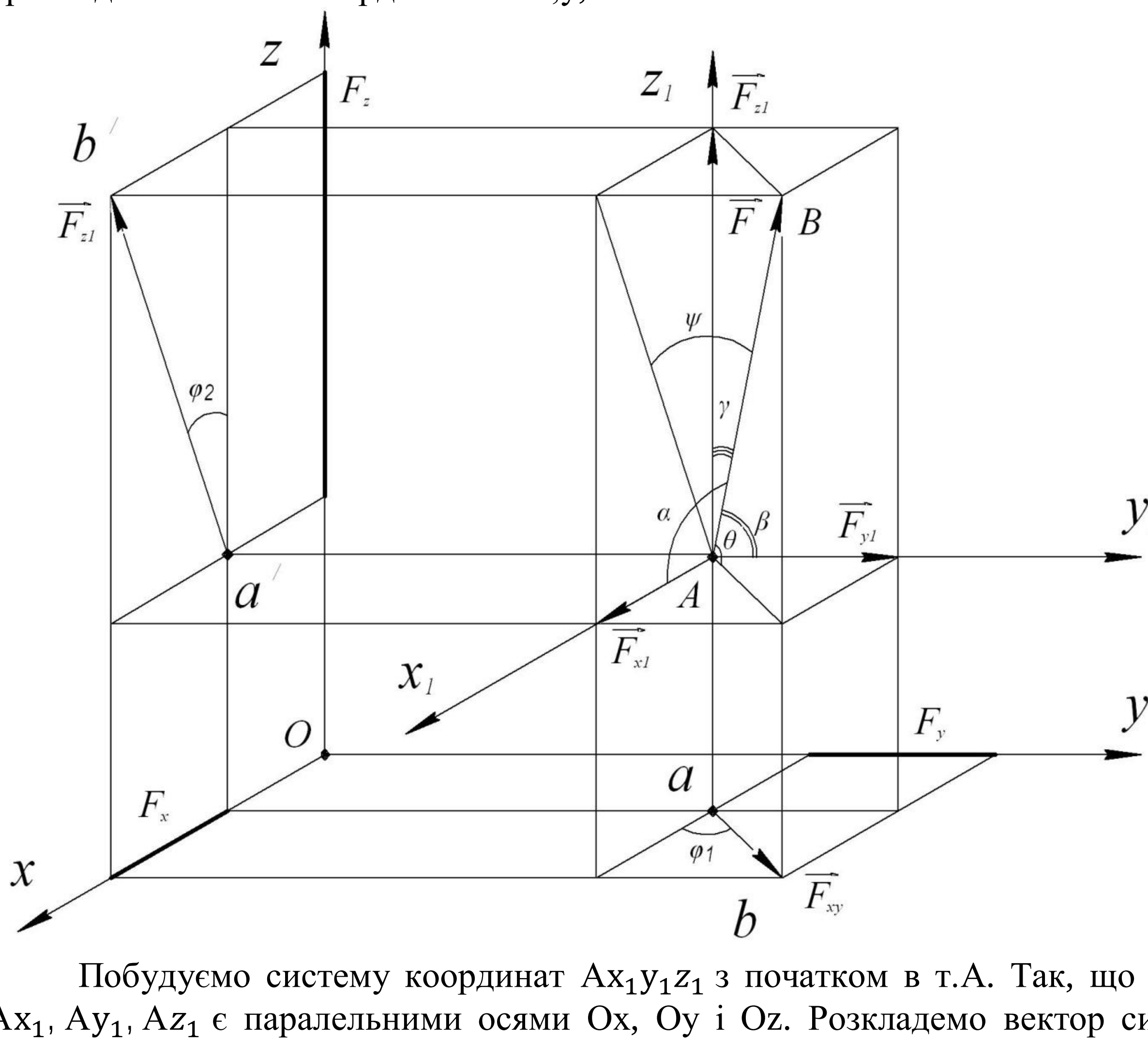
$$F_x = F \cdot \cos\alpha \tag{1.1}$$

<u>Проекція сили на вісь</u> – скалярна величина, що дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між напрямком сили і додатнім напрямом осі.

Наслідок: Проекція сили на вісь не знімається, якщо переносити вектор паралельно самому собі, або проекцію вати вектор на осі, які будуть паралельні між собою і мати однаковий напрямок.

<u>1.4 Аналітичне завдання сили.</u>

Розглянемо довільний вектор $\vec{F}$ в декартовій системі координат. Вектор прикладений в т.А з координатами x,y, z.



Побудуємо систему координат $Ax_1y_1z_1$ з початком в т.А. Так, що осі Ax_1, Ay_1, Az_1 є паралельними осями Ох, Оу і Оz. Розкладемо вектор сили

$\vec{F}$ по осях $\mathrm{Ax}_1, \mathrm{Ay}_1, \mathrm{A}z_1$. Довжини ребер паралелепіпеда, взяті з відповідним знаком, є проекціями вектора сили $\vec{F}$ на осі $\mathrm{Ax}_1, \mathrm{Ay}_1, \mathrm{A}z_1$, що є теж само, на осі Ox, Oy та Oz.

Позначимо ці проекції відповідно F_x, F_y, F_z.

Звідси

$$F_x = F \cdot \cos\alpha\,;$$
$$F_y = F \cdot \cos\beta\,; \qquad (1.2)$$
$$F_z = F \cdot \cos\gamma\,;$$

Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його ребер:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2.$$

Тоді величина модуля вектора сили $\vec{F}$ визначається

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad (1.3)$$

На підставі рівностей (2) та (3) визначаємо

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}};$$
$$\cos\beta = \frac{F_y}{F} = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}; \qquad (1.4)$$
$$\cos\gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}};$$

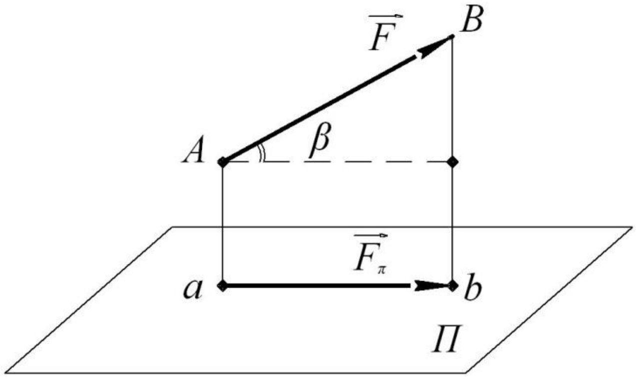
Рівність (1.4) називається напрямними косинусами вектора сили.

Аналітично задати силу – це задати проекції цієї сили на осі координат і координати точки прикладання сили. Тоді на підставі рівності (1.3) визначають числове значення сили (модуль), а на підставі рівностей (1.4) – напрям сили відносно даної системи координат.

(Сила повністю визначається через проекції на осі координат).

Проекція сили на площину.

Проекція сили на $\vec{F}$ на будь-яку площину називається вектор, що розташований між проекціями початку та кінця вектора сили $\vec{F}$ на цю площину.



Проекція сили на площину є величина векторна. Вони характеризуються числовим значенням і напрямком у площині П.

Модуль проекції сили на площину визначають за формулою:

$$F_\pi = F \cdot \cos\beta,$$

де β – кут між вектором сили $\vec{F}$ та її проекцією на площину π.

Для визначення проекції сили на осі декартової системи координат використати метод подвійного проекціювання. Спочатку знаходять проекцією вектора $\vec{F}$ на площину XOy, тобто вектор $\overrightarrow{F_{xy}}$. Далі визначають проекції вектора $\overrightarrow{F_{xy}}$ на осі Ox і Oy. Тобто

$$F_x = F_{xy} \cdot \cos\varphi_1 = F \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi_1;$$
$$F_y = F_{xy} \cdot \sin\varphi_1 = F \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi_1;$$

Аналогічно визначається F_z. Проекція вектора $\vec{F}$ на площину xOz – вектор $\overrightarrow{F_{xz}}$. Остаточно

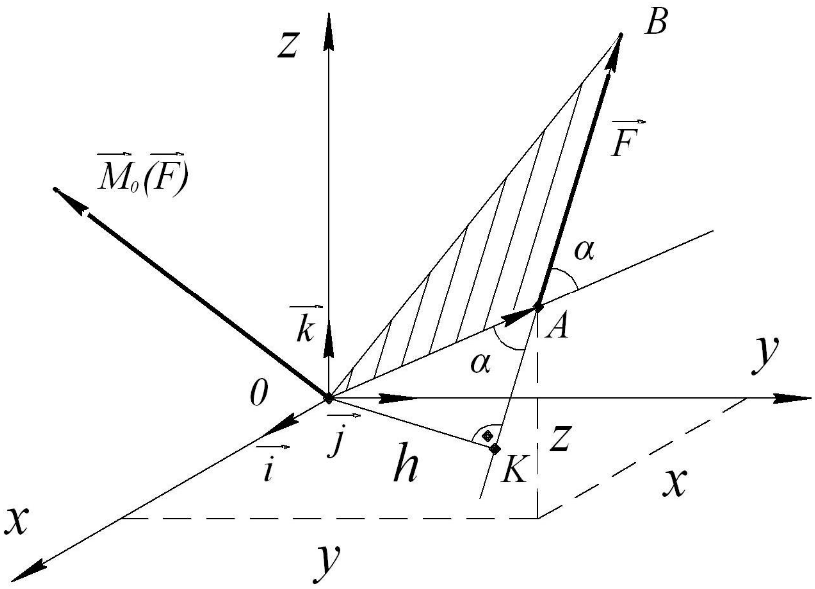
$$F_z = F_{xz} \cdot \cos\varphi_2 = F \cdot \cos\omega \cdot \cos\varphi_2;$$

1.5 Момент сили відносно точки та осі

Момент сили відносно точки та відносно осі – це фізичні величини, що визначають властивості сили надавати твердому тілу обертальний рух відносно довільної точки або осі.

Момент сили відносно точки О – це фізична величина, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного з т. О у точку прикладання сили, на цю силу.

$$\overrightarrow{M_0}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$



Модуль векторного добутку

$$\left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = r \cdot F \cdot \sin\alpha$$
$$h = OK;$$

OK – перпендикуляр з т.О на лінію $\vec{F}$.
h – плече моменту сили відносно точки О.

З рисунку (ΔАКО – прямокутний)

$$h = r \cdot \sin\alpha$$

Тоді модуль моменту сили відносно т. О визначиться у вигляді

$$M_0(\vec{F}) = F \cdot h$$

Момент сили відносно довільної точки О є вектором, перпендикулярним до площини, що містить у собі точку та силу (площина дії моменту), який дорівнює за модулем добутку модуля сили на найкоротшу відстань між точкою та частиною дії сили (плече моменту сили) і направлений у ту частину простору, звідки обертання тіла під дією сили відносно точки видно руху стрілки годинника.

Точки перпендикуляра вектора моменту сили – точка, відносно якої визначається момент сили.

Одиниця моменту сили відносно точки – ньютон-метр $[\text{Н} \cdot \text{м}]$ – система СІ.

Аналітичне задання моменту сили відносно точки.

Задаються проекції сили на осі декартової системи координат та координати точки прикладання сили (або будь-якої точки на лінії дії сили). Тоді векторний добуток можна подати у вигляді (див. рис.)

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_0}(\vec{F})=\vec{r} \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = \left(yF_z - zF_y\right)\vec{\imath} + (zF_x - xF_z)\vec{\jmath} + (xF_y - yF_x)\vec{k} \quad (1.5)$$

де $\vec{\imath}, \jmath, \overrightarrow{\vec{k}}$ – орти системи координат;

x, y, z – координати точки прикладання сили;

$F_{\text{x},}\ F_y, F_z$ – проекції сили на осі координат.

Отримане рівняння є рівнянням розкладання вектора $\overrightarrow{\mathrm{M}_0}(\vec{F})$ по осях декартової системи координат.

Тоді модуль моменту сили відносно точки визначитися

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_0}(\vec{F})=\sqrt{(yF_z - zF_y)^2 \quad + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2} \quad (1.6)$$

Напрям вектора моменту сили відносно даної системи координат.

$$\cos\left(\vec{\imath},\widehat{\overrightarrow{M_0}(\vec{F})}\right) = \frac{yF_z - zF_y}{\sqrt{(yF_z - zF_y)^2 \quad + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}}$$

$$\cos\left(\vec{\jmath},\widehat{\overrightarrow{M_0}(\vec{F})}\right) = \frac{zF_x - xF_z}{\sqrt{(yF_z - zF_y)^2 \quad + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}}$$

$$\cos\left(\vec{k},\widehat{\overrightarrow{M_0}(\vec{F})}\right) = \frac{xF_y - yF_x}{\sqrt{(yF_z - zF_y)^2 \quad + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}} \quad (1.7)$$

Рівності (1.7) називаються напрямними косинусами вектора моменту сили відносно точки.

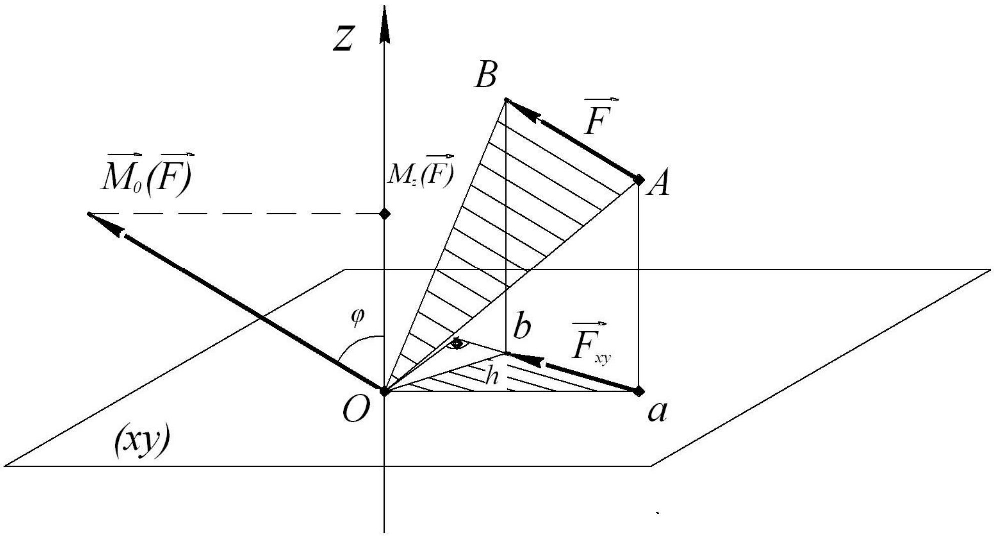
Властивості моменту сили відносно точки.

а) при переміщенні точки прикладання сили вздовж її лінії дії момент сили відносно точки не змінюється;

б) якщо лінії дії сили проходять через точку, відносно якої визначається момент сили, то момент сили відносно цієї точки дорівнює нулю;

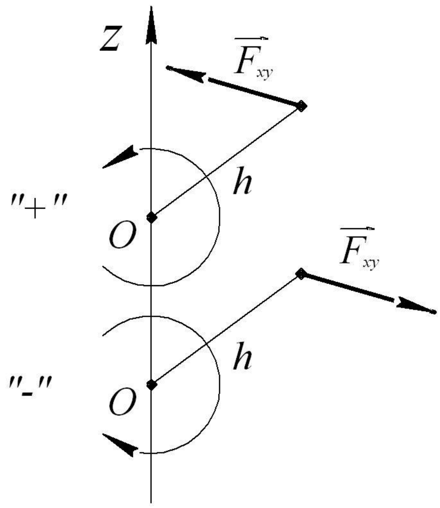
в) момент сили відносно точки чисельно дорівнює подвоєній площі трикутника ΔОАВ, тобто $\overrightarrow{\mathrm{M}_0}(\vec{F})=\mathrm{F}\cdot h = 2 \cdot S_{OAB}$

Момент сили відносно осі – фізична скалярна алгебраїчна величина, що дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, перпендикулярну до осі, відносно точки перетину осі з площиною.



$$M_z(\vec{F}) = M_0(\overrightarrow{F_{xy}}) = \pm F_{xy} \cdot h \qquad (1.8)$$

де h – найкоротша відстань між лінією дії вектора проекції сили на площину $\overrightarrow{F_{xy}}$ та точкою перетину осі з площиною (плече моменту проекції $\overrightarrow{F_{xy}}$).



Момент сили відносно вісі дорівнює нулю у двох випадках:

а) якщо лінії дії сили паралельні осі;

б) якщо лінія діїі сили перетинає вісі;

Момент сили відносно осі проекції на цю вісь моменту силии відносно будь-якої точки, що розміщена на цій осі.

Дійсно, проекція вектора моменту $\overrightarrow{\mathrm{M}_0}(\vec{F})$ на вісь Oz (рис.)

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_0}(\vec{F}) \cdot \cos\varphi = 2S_{\mathrm{OAB}} \cdot \cos\varphi = \pm 2S_{oab},$$

(кут φ між вектором $\overrightarrow{\mathrm{M}_0}(\vec{F})$ та віссю Oz дорівнює куту між площиною ΔOAB та площиною xy, а площина ΔOaв є проекцією площини ΔOAB).

На підставі визначення моменту сили відносно осі

$$M_z(\vec{F}) = M_0(\overrightarrow{F_{xy}}) = \pm 2S_{Oab} ;$$

Тоді

$$M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}) \cdot \cos\varphi; \qquad (1.9)$$

Якщо силу $\vec{F}$ задано аналогічно, тобто проекціями F_x, F_y, F_z , та координатами x,y,z точки прикладання сили, то на підставі формул (1.5) і (1.9) маємо:

$$M_x(\vec{F})=M_0\left(\overrightarrow{F_{yz}}\right) = yF_z - zF_y;$$
$$M_y(\vec{F})=M_0\left(\overrightarrow{F_{xz}}\right) = zF_x - xF_z; \qquad (1.10)$$
$$M_z(\vec{F})=M_0\left(\overrightarrow{F_{xy}}\right) = xF_y - yF_x;$$

Рівності (1.10) визначають момент сили відносно вісей декартової системи координат при аналітичному заданні сили. Одиниця моменту сили відносно осі – ньютон-метр $[H \cdot м]$

1.6 Теорема про момент рівнодійної системи сил

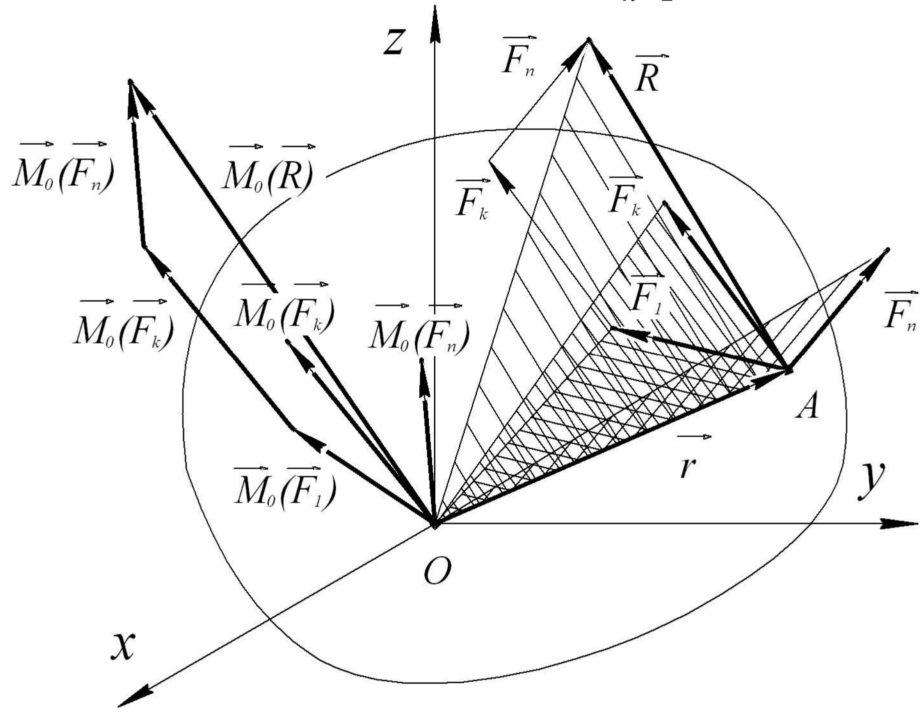
(Теорема Варіньона) (П'єр Варіньон (1654-1722) – французький вчений, математик та механік)

Якщо система сил має рівнодійну, то момент цієї рівнодійної відносно довільної точки дорівнює геометричній сумі моментів сил цієї системи відповідно тієї самої точки:

$$\overrightarrow{M_o}(\vec{R})=\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_o}(\overrightarrow{F_k}) \qquad (1.11)$$

Нехай у точці А до твердого тіла прикладена система сил $\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots , \overrightarrow{F_n}\}$. На підставі аксіоми про паралелограм сил рівнодійна системи визначається за формулою

$$\vec{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \cdots + \overrightarrow{F_n} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k}.$$



Візьмемо початок координат О як точку твердого тіла радіус-вектор $\vec{r}$. На підставі визначення моменту сили відносно точки маємо

$$\overrightarrow{M_o}(\vec{R})= \vec{r} \times \vec{R} =$$
$$\vec{r} \times \{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots , \overrightarrow{F_n}\}=\vec{r} \times \overrightarrow{F_1}+\vec{r} \times \overrightarrow{F_2} + \cdots + \vec{r} \times$$
$$\overrightarrow{F_n}=\overrightarrow{M_o}(\overrightarrow{F_1})+ \overrightarrow{M_o}(\overrightarrow{F_2})+\dots \overrightarrow{M_o}(\overrightarrow{F_n})= \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_o}(\overrightarrow{F_k});$$

Теорема доведена.

Якщо спроектувати рівняння теореми (20) на осі декартової системи координат x,y,z, то на підставі виразу (5) та теореми про проекцію геометричної суми векторів на будь-яку вісь запишемо:

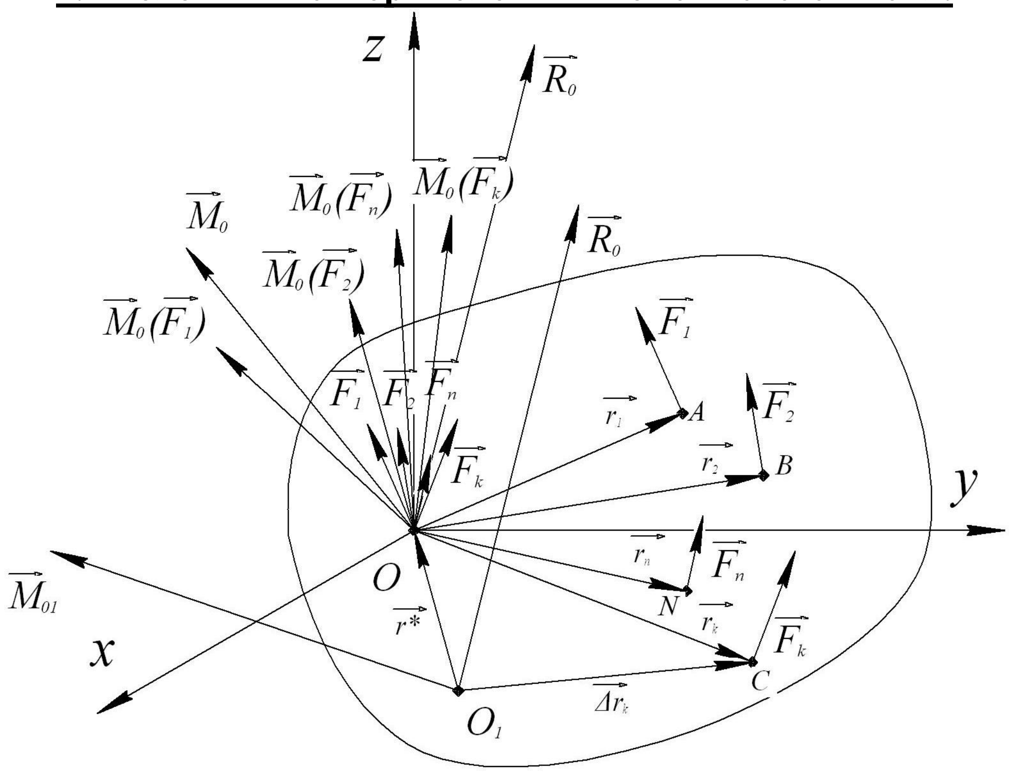
$$\overrightarrow{M_x}(\vec{R})=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{M_x}(\overrightarrow{F_k})\ ;$$
$$\overrightarrow{M_y}(\vec{R})=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{M_y}(\overrightarrow{F_k})\ ; \qquad (1.12)$$
$$\overrightarrow{M_z}(\vec{R})=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{M_z}(\overrightarrow{F_k})\ ;$$

З рівності (8) можна сформулювати <u>теорему про момент рівнодійної системи сил відносно довільної осі:</u>

<u>Якщо система сил має рівнодійну, то момент цієї рівнодійної відносно довільної осі дорівнює алгебраїчної сумі моментів сил цієї системи відносно тієї самої вісі.</u>

Розглянута теорема справджується для будь-яких систем сил що мають рівнодійну.

1.7 Головний вектор і головний момент системи сил.



$\{\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\ldots,\overrightarrow{F_n}\}$ – довільна просторова система сил, що діє на тверде тіло.
$A, B, C \ldots$, N – точки прикладення сил системи.
$\overrightarrow{F_1^*},\overrightarrow{F_2^*},\ldots,\overrightarrow{F_n^*}$ сили прикладення до точки O.

$$(\overrightarrow{F_1^*}=\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2^*}=\overrightarrow{F_2}\ldots,\overrightarrow{F_n^*}=\overrightarrow{F_n})$$

Складаючи $\overrightarrow{F_1^*},\overrightarrow{F_2^*},\ldots,\overrightarrow{F_n^*}$ за правилом солового багатокутника знайдемо

$$\overrightarrow{R_o}=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F_k^*}=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F_k}$$

$\overrightarrow{R_o}$ – головний вектор даної системи мил.
т. O – центр зведення системи мил.

Головним вектором системи сил називається вектор, який дорівнює геометричній сумі сил системи і прикладений у довільній точці твердого тіла (центрі зведення).

Головний вектор системи сил не залежить від вибору центра зведення. Вектори моментів усіх сил системи $\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}\}$ відносно центра зведення (т.О) і їх геометрична сума за правилом векторного багатокутника

$$\overrightarrow{\mathrm{M_o}} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_o}(\overrightarrow{F_k}).$$

$\overrightarrow{\mathrm{M_o}}$ – головний момент даної системи сил.

Головним моментом системи сил $\overrightarrow{\mathrm{M_0}}$ називається вектор, що дорівнює геометричній сумі векторів моментів сил системи відносно довільної точки тіла (центра зведення).

При зміні центра зведення головний момент змінюється і визначається за формулою:

$$\overrightarrow{\mathrm{M_{01}}} = \overrightarrow{\mathrm{M_o}} + \overrightarrow{\mathrm{M_{01}}}(\overrightarrow{R_0}).$$

Візьмемо силу $\overrightarrow{F_к}$ із системи $\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}\}$ і силу $\overrightarrow{F_к^*}$ із системи $\{\overrightarrow{F_1^*}, \overrightarrow{F_2^*}, \dots, \overrightarrow{F_n^*}\}$;

Нехай $\overrightarrow{r_к}$, $\overrightarrow{r^*}$, $\Delta\overrightarrow{r_к}$ – радіуси вектора цих сил відносно точок О та $\mathrm{O_1}$.

З рисунка $\overrightarrow{r^*} + \overrightarrow{r_к} = \Delta\overrightarrow{r_к}$

Момент сили $\overrightarrow{F_к}$ відносно точки $\mathrm{O_1}$ визначається за формулою

$$\overrightarrow{\mathrm{M_{01}}}(\overrightarrow{F_к}) = \Delta\overrightarrow{r_к} \times \overrightarrow{F_к} = (\overrightarrow{r^*} + \overrightarrow{r_к}) \times \overrightarrow{F_к} = (\overrightarrow{r^*} \times \overrightarrow{F_к}) + (\overrightarrow{r_к} \times \overrightarrow{F_к})$$
$$= (\overrightarrow{r^*} \times \overrightarrow{F_к^*}) + (\overrightarrow{r_к} \times \overrightarrow{F_к});$$

Аналогічно головний момент системи $\overrightarrow{\mathrm{M_{01}}}$ відносно т. О дорівнює

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{M_{01}}}(\overrightarrow{F_к}) = \sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{r^*} \times \overrightarrow{F_к^*}) + \sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{r_к} \times \overrightarrow{F_к}) = \overrightarrow{r} \times \sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{F_к^*}) + \overrightarrow{\mathrm{M_0}},$$

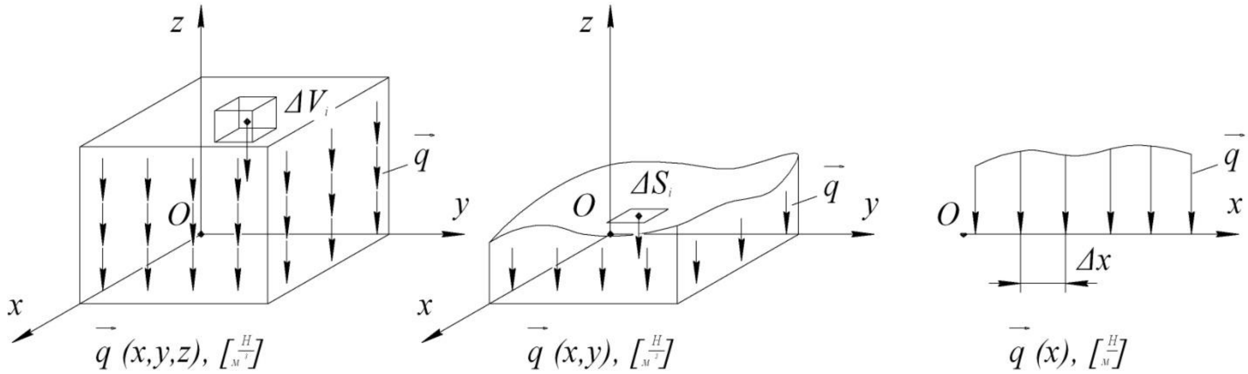
або $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{M_{01}}}(\overrightarrow{F_к}) = \overrightarrow{\mathrm{M_0}} + \overrightarrow{\mathrm{M_{01}}(R_0)}$.

Операція з визначенням головного вектора та головного моменту системи сил називається зведенням системи сил до довільної точки.

1.8 Розподілені сили

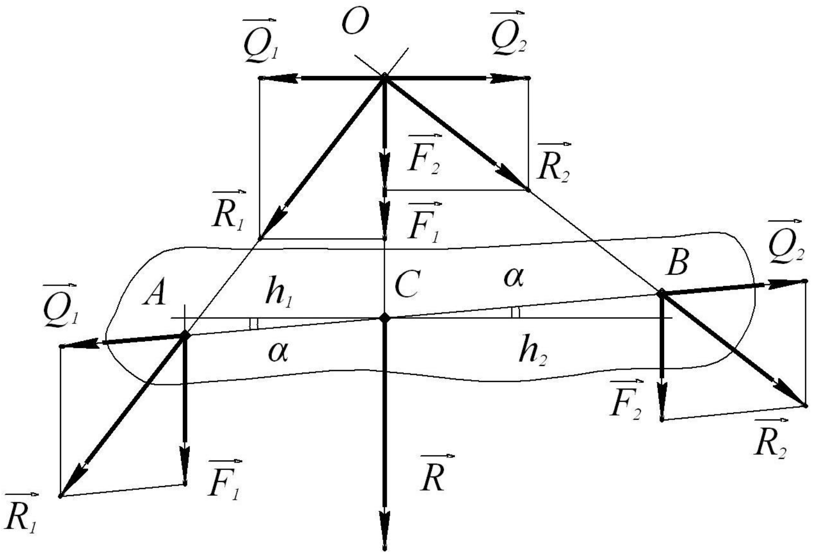
Сили, які в теоретичній механіці розглядається як зосереджені, є рівнодійними деяких розподілених по об’єму, поверхні або лінії за тим чи іншим законом розподілення системи сил. Приклади – сила тяжіння тіла; - сила тиску робочої рідини на поршень гідроциліндра.

Найпоширенішими у практиці є паралельні розподілені сили. Ці сили характеризуються інтенсивністю $\vec{q}$, тобто силою, що діє відповідно на одиницю об’єму, поверхні або довжини лінії.



1.9 Еквівалентні перетворення систем паралельних сил.

а) Складання двох паралельних сил $\overrightarrow{F_1} || \overrightarrow{F_2}$



$$\{\overrightarrow{Q_1}, \overrightarrow{Q_2}\} \sim 0; \{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{Q_1}\} \sim \overrightarrow{R_1}; \{\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{Q_2}\} \sim \overrightarrow{R_2};$$

Перенесемо сили $\overrightarrow{R_1}$ і $\overrightarrow{R_2}$ уздовж їх ліній дії в точку перетину цих ліній, тобто в точку О.

Розкладаючи сили $\{\overrightarrow{Q_1}, \overrightarrow{Q_2}\} \sim 0$ (зрівноважена) то сили $\overrightarrow{Q_1}$ і $\overrightarrow{Q_2}$ можна вікинути. Залишилися сили $\overrightarrow{F_1}$ і $\overrightarrow{F_2}$, що направлені вздовж однієї прямої ОС. Складаючи сили $\overrightarrow{F_1}$ і $\overrightarrow{F_2}$, отримуємо рівнодійну $\vec{R}$.

$\vec{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ – напрям сили $\vec{R}$ складає з напрямком $\overrightarrow{F_1}$ і $\overrightarrow{F_2}$.

За модулем рівнодійна дорівнює

$$R = F_1 + F_2.$$

Знайдемо положення точки С, через яку проходить лінія дії рівнодійної сили $\vec{R}$.

На підставі теореми Варіньона про момент рівнодійної сил можна записати:

$$\overrightarrow{M_c}(\vec{R}) = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_c}(\overrightarrow{F_k}) = \overrightarrow{M_c}(\overrightarrow{F_1}) + \overrightarrow{M_c}(\overrightarrow{F_2})$$

Оскільки $\overrightarrow{M_c}(\vec{R}) = 0$ (лінія дії $\vec{R}$ проходить через т.С),

то $\overrightarrow{M_c}(\overrightarrow{F_1}) + \overrightarrow{M_c}(\overrightarrow{F_2}) = 0;$

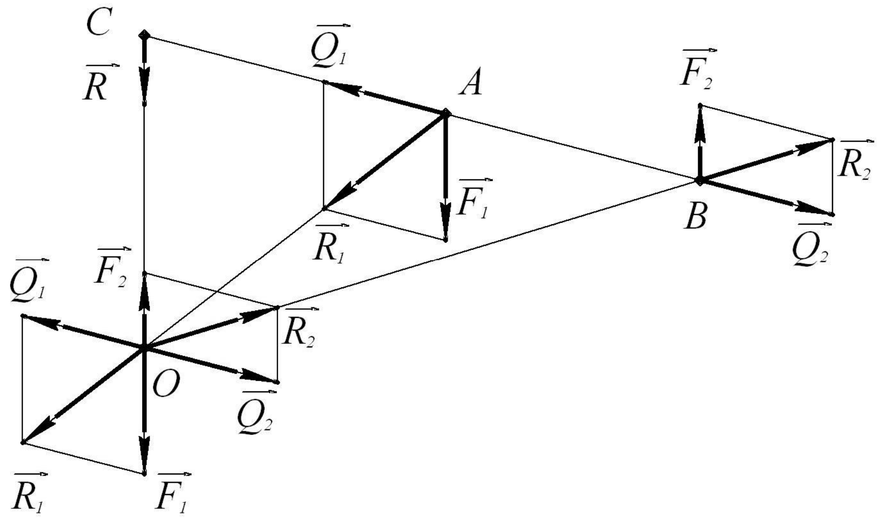
$$M_c(\overrightarrow{F_1}) = F_1 \cdot h_1; \qquad M_c(\overrightarrow{F_2}) = -F_2 \cdot h_2;$$

$$F_1 \cdot h_1 - F_2 \cdot h_2 = 0; \qquad F_1 \cdot h_1 = F_2 \cdot h_2; \qquad \frac{h_1}{h_2} = \frac{F_2}{F_1};$$

$$h_1 = AC \cdot \cos\alpha; \qquad h_2 = BC \cdot \cos\alpha; \qquad \frac{AC \cdot \cos\alpha}{BC \cdot \cos\alpha} = \frac{F_2}{F_1};$$

$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{F_2}}{\mathrm{F_1}} \quad (*)$ Співвідношення (*) називається <u>правилом важеля.</u>

- сили $\overrightarrow{F_1}$ і $\overrightarrow{F_2}$ паралельні і направлені у протилежні сторони.



У цьому випадку рівнодійна сила $\vec{R}$ двох сил $\overrightarrow{F_1}$ і $\overrightarrow{F_2}$ напрямлена в бік більшої сили і має числове значення.

$$\mathrm{R}=\overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2}; \qquad \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{F_2}}{\mathrm{F_1}};$$

Лінія дії рівнодійної сили паралельна лініям дії складових сил і проходять через точку С, розташовану на прямій АВ поза відрізком АВ.

б) Якщо розглянути <u>систему паралельних сил</u> $\left\{\overrightarrow{F_1^*}, \overrightarrow{F_2^*}, \dots, \overrightarrow{F_n^*}\right\}$, то значення рівнодійної системи паралельних сил дорівнює алгебраїчній сумі всіх сил системи.

$$\mathrm{R}=\sum_{k=1}^{n} F_k$$

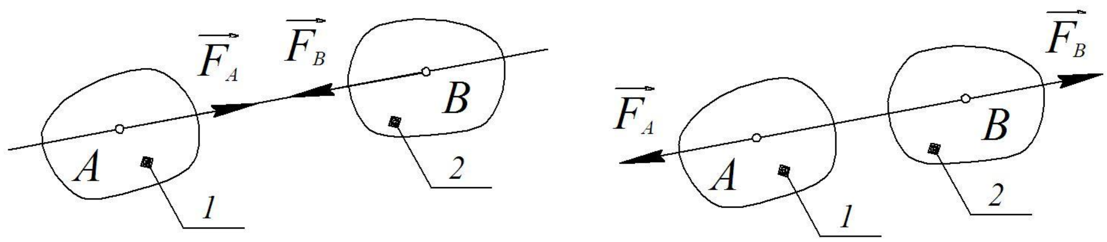
в) Якщо система паралельних сил складається з сил однакових за модулем, то <u>еквівалентний перехід від розподілених до зосереджених сил</u> має вигляд

<u>$\vec{q} = const$:</u>

$$\vec{Q} = q \cdot V, \quad (q(x, y, z))$$
$$\vec{Q} = q \cdot S, \quad \left(q(x, y,)\right)$$
$$\vec{Q} = q \cdot l, \quad (q(x))$$

<u>1.10 Аксіома про рівність дії та протидії</u>

<u>Сили, з якими два діють одне на одне, рівні за числовими значеннями та напрямками по одній прямій у протилежні боки.</u>



Якщо на тіло 1 діє сила $\overrightarrow{F_{\text{A}}}$ з боку тіла 2, то й на тіло 2 з боку тіла 1 діє сила $\overrightarrow{F_{\text{B}}}$; сили $\overrightarrow{F_{\text{A}}}$ і сила $\overrightarrow{F_{\text{B}}}$ рівні за модулем і напрямлені по прямій, що з'єднує точки прикладання сил, у протилежній сторони.

Одна із називається дією, а друга протидією.

Сили прикладемо до різних тіл і вони не утворюють зрівноважену систему сил (у розумінні аксіоми про дві сили).

Під дією сил $\overrightarrow{F_{\text{A}}}$ і $\overrightarrow{F_{\text{B}}}$ тіла 1 і 2 не будуть у стані рівноваги, вони будуть рухатися, віддаляючись або наближаючись одне до одного.

У теоретичній механіці виділяють вільні та невільні тверді тіла.

Вільним називається тверде тіло, рух якого під дією прикладених до нього сил обмежений іншими тілами.

Невільним називається тверде тіло, рух якого під дією прикладених до нього сил обмежений іншими тілами.

1.11 В'язі та їх реакції.(Аксіоми про в'язі).

В'язями називається обмеження на рухи твердого тіла, що зберігаються за будь-яких сил, що прикладені до твердого тіла.

В'язі обмежують рух твердого тіла, який був би, якщо тверде тіло було б вільним, тобто в'язі є джерелом сил, прикладених до тіла.

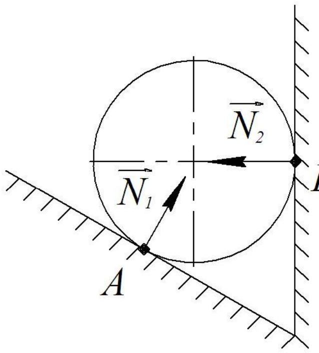
Сила, з якою в'язь діє на тверде тіло, обмежуючи його рух у просторі, називається силою реакції в'язі або просто реакцією.

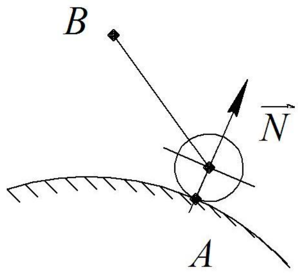
Сили, які характеризуються числовим значенням, напрямом дії та точного прикладання і які при дії на тверде тіло можуть надати йому того чи іншого руху, називається активними.

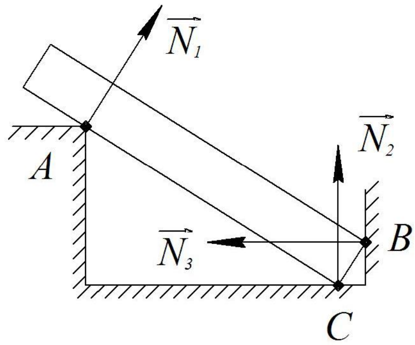
Реакції в'язей діючи на тіло не надають йому руху, а навпаки обмежують (унеможливлюють) рух і на відміну від активних сил їх називають пасивними.

Види в'язей та їх реакції.

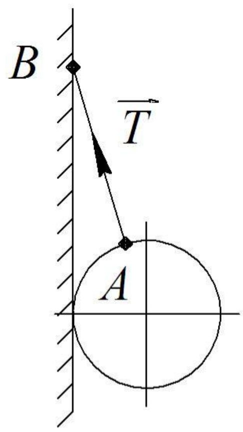
1. Якщо тіло опирається на головну поверхню (без тертя), то сила реакції поверхні напрямлена по нормалі до цієї поверхні у точці дотику (перпендикулярно до дотичної площини в даній точці). Таки реакція називається нормальною реакції.







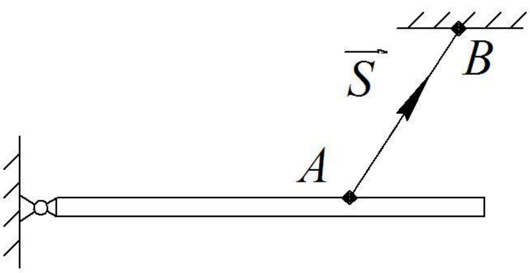
2. Якщо на тіло накладені в'язь у вигляді невагомої нитки (каната, ланцюга), то сила реакції в'язі прикладена до тіла у точці його кріплення і напрямлена вздовж в'язі (нитки) від точки кріплення до точки підвищення в'язі.

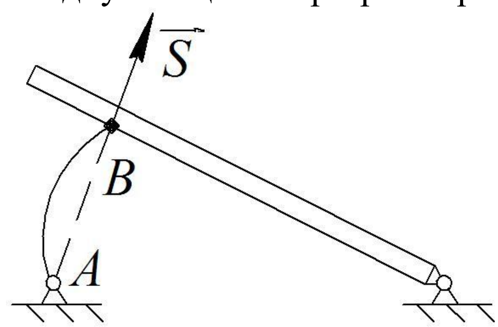


3. Якщо на тіло накладено в'язь у вигляді прямолінійного або криволінійного (невагомого ідеального без тертя в шарнірах) стержня, то лінія дії реакції в'язів проходить:

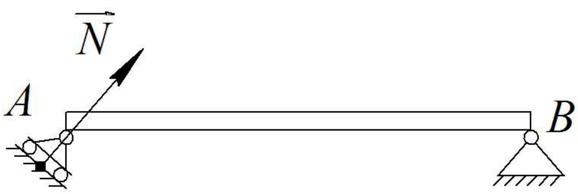
а) прямолінійного – вздовж стержня

в) криволінійного – вздовж прямої, що з'єднує кінцеві шарніри стержня

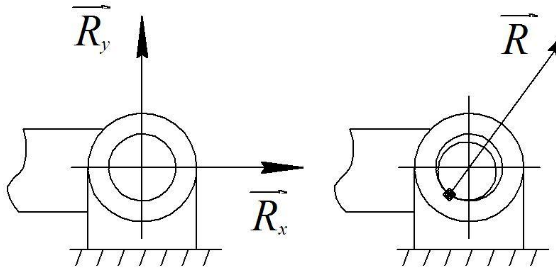


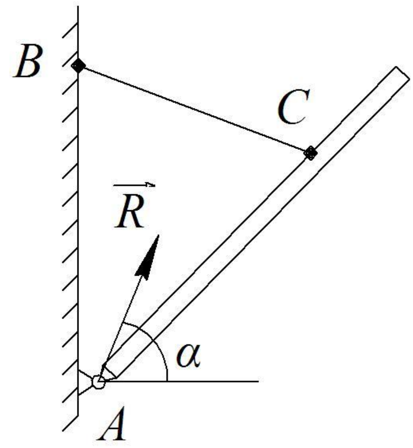


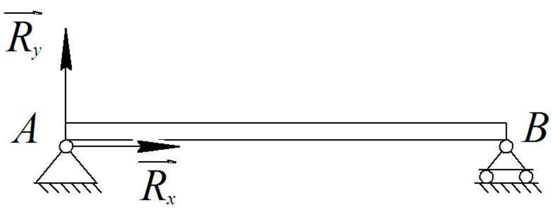
4. Якщо тіло спирається на рухомий шарнір (шарнірно – рухома опора), то сила реакції в'язі напрямлена на нормалі до площини, на якій котиться коток чи котки.



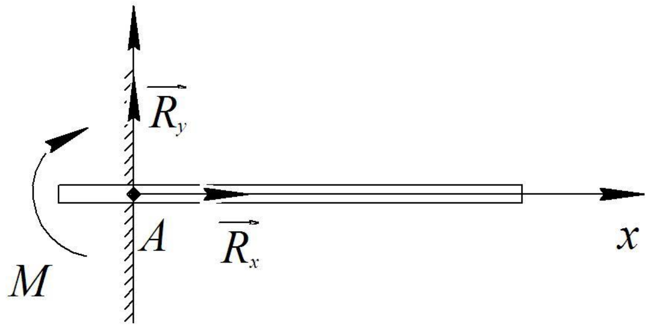
5. Якщо тіло спирається на нерухомий шарнір (шарнірно-нерухома опора). Реакція в’язі подається у вигляді двох складових по координатних осях або однією реакцією та кутом φ.



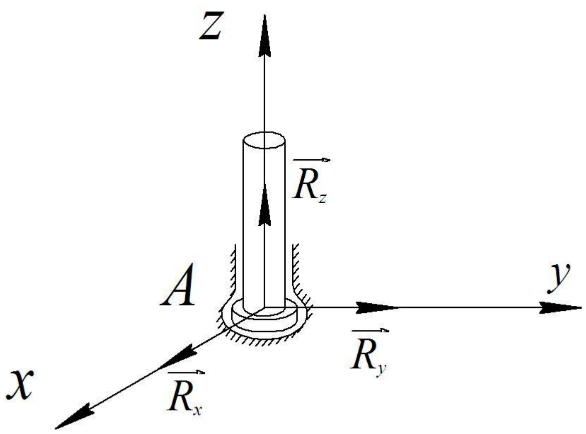


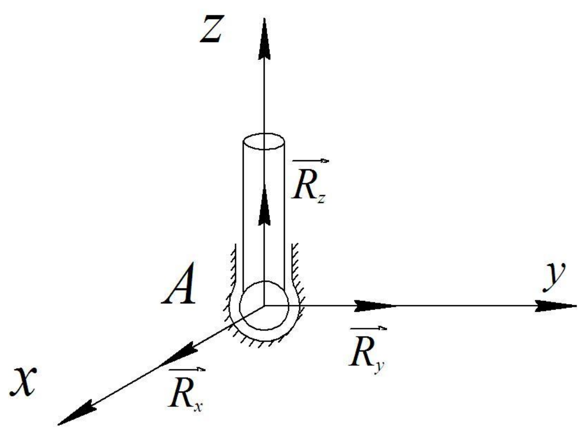


6. Якщо на тіло накладено в’язь у вигляді жорсткої нерухомої опори (жорстке защемлення), то дія такої в’язі на тіло складається з двох сил і моменту. Така в’язь перешкоджає не тільки лінійним переміщенням тіла, а й повороту його навколо точки закріплення.



7. Якщо на тіло накладено в’язь у вигляді сферичного шарніра або підп’ятника, то реакції таких в’язей проходять через т. А, а їх лінії дії у просторі невідомі. Реакції таких в’язей подаються як три складові по координатних осях.





Аксіоми про в’язі:

1. Аксіома про звільнення тіла від в’язей.

Механічний стан невільного твердого тіла не зміниться, відкинути кожну накладену на нього в’язь, замінивши їх реакціями відповідних в’язей, і розглядати тіло як вільне.

2. Аксіома про накладення нових в’язей.

Рівновага твердого тіла не порушується при накладенні на нього нових в’язей.

3. Аксіома затвердіння.

Рівновага деформованого тіла не порушиться, якщо жорстко зв’язати його точки та вважати тіло недеформованим. (Аксіома виражає необхідну, але недостатню умову рівноваги тіл, що деформуються)

1.12 Зовнішні та внутрішні сили.

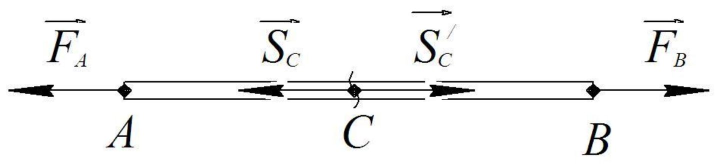
Зовнішніми називаються сили, які виникають при взаємодії матеріальних точок, твердих тіл або частинок суцільного середовища даної системи з іншими матеріальними точками, твердими тілами або частинами суцільного середовища, що не належать до даної системи, рівновага чи рух якої вивчаються.

Внутрішніми називаються сили взаємодії між матеріальними точками, твердими тілами, або частинками суцільного середовища, що входять до складу даної системи, рівновага чи рух якої вивчається.

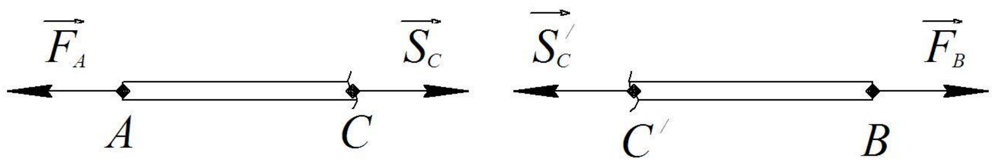
Внутрішні сили, згідно з аксіомою про дію та протидію, попарно рівні за модулем та діють уздовж однією прямої у протилежні боки.

1.13 Метод перерізів.

Метод перерізів дає можливість провести вивчення внутрішніх сил через вивчення зовнішніх сил.



внутрішні сили



зовнішні сили

Метод перерізів – спосіб виділення сил взаємодії між частинами неперервного середовища, тобто внутрішніх сил.

1.14 Задачі статики твердого тіла.

Дві основні задачі статики твердого тіла:

1. Задача про еквівалентні перетворення сил – заміна складної системи сил іншою, більш простою еквівалентної їй.

2. Задача про рівновагу тіла – визначення умов, яким має задовольняти система сил, прикладена до твердого тіла, щоб воно перебувало у стані рівноваги.

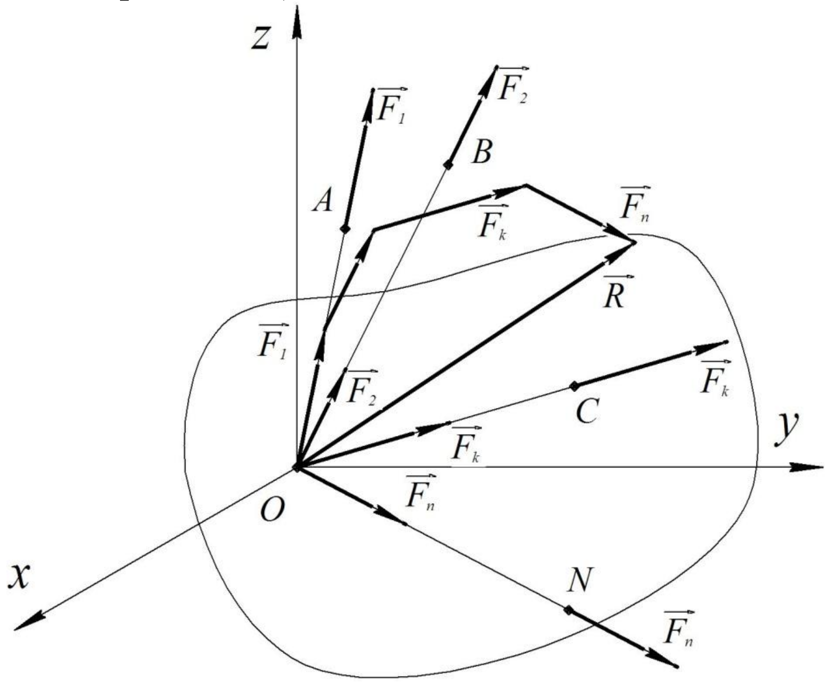
1.15 Збіжна система сил, що діє на тверде тіло.

Еквівалентне перетворення системи збіжних сил.

Сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці, утворюють систему збіжних сил.

$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\}$ – система збіжних сил

Складаючи сили за правилом силового багатокутника знайдемо геометричну суму сил системи (рівнодійну, так як перетворення не змінюють механічний стан твердого тіла).



$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

Рівнодіюча R прикладена в точці перетину ліній дії сил системи і дорівнює геометричній сумі цих сил.

На підставі аналітичного задання сил в декартовій системі координат:

- модуль рівнодіючої

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\sum_{k=1}^{v} F_{kx})^2 + (\sum_{k=1}^{v} F_{ky})^2 + (\sum_{k=1}^{v} F_{zy})^2};$$

- напрямок рівнодіючої (направляючої косинуса)

$$\cos(\vec{R},x)=\frac{R_x}{R}=\frac{\sum_{k=1}^{v}F_{kx}}{\sqrt{(\sum_{k=1}^{v}F_{kx})^2+(\sum_{k=1}^{v}F_{ky})^2+(\sum_{k=1}^{v}F_{zy})^2}};$$

$$\cos(\vec{R},y)=\frac{R_y}{R}=\frac{\sum_{k=1}^{v}F_{ky}}{\sqrt{(\sum_{k=1}^{v}F_{kx})^2+(\sum_{k=1}^{v}F_{ky})^2+(\sum_{k=1}^{v}F_{zy})^2}};$$

$$\cos(\vec{R},z)=\frac{R_z}{R}=\frac{\sum_{k=1}^{v}F_{zy}}{\sqrt{(\sum_{k=1}^{v}F_{kx})^2+(\sum_{k=1}^{v}F_{ky})^2+(\sum_{k=1}^{v}F_{zy})^2}}.$$

Теорема. Проекція геометричної суми векторів на будь яку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових векторів на ту саму вісь.

$$R_x=\sum_{r=1}^{n}F_{kx};\ R_y=\sum_{r=1}^{n}F_{ky};\ R_z=\sum_{r=1}^{n}F_{kz};$$

Доведення теореми:

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_n=(F_{1x}\cdot\vec{i}+F_{1y}\cdot\vec{j}+F_{1z}\cdot\vec{k})+$$

$$+(F_{2x}\cdot\vec{i}+F_{2y}\cdot\vec{j}+F_{2z}\cdot\vec{k})+\ldots+(F_{2x}\cdot\vec{i}+F_{2y}\cdot\vec{j}+F_{2z}\cdot\vec{k})=$$

$$=(F_{1x}+F_{2x}+\ldots+F_{nx})\cdot\vec{i}+(F_{1y}+F_{2y}+\ldots+F_{ny})\cdot\vec{j}+$$

$$+(F_{1z}+F_{2z}+\ldots+F_{nz})\cdot\vec{k}=R_x\cdot\vec{i}+R_y\cdot\vec{j}+R_z\cdot\vec{k};$$

Звідси:

$$R_x=F_{1x}+F_{2x}+\ldots+F_{nx}=\sum_{k=1}^{n}F_{kx};$$

$$R_y=F_{1y}+F_{2y}+\ldots+F_{ny}=\sum_{k=1}^{n}F_{ky};$$

$$R_z=F_{1z}+F_{2z}+\ldots+F_{nz}=\sum_{k=1}^{n}F_{kz}$$

Теорему доведено.

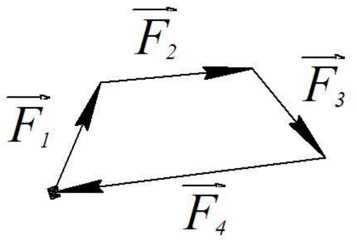
Рівнодійні системи збіжних сил може бути визначено геометрично за допомогою побудови силового багатокутника або аналітично через проекції сил на осі декартової системи координат.

1.16 Умови рівноваги системи збіжних сил.

Механічна умова рівноваги. Для рівноваги системи збіжних сил, що діють на тверде тіло, необхідно і достатньо, щоб рівнодійна цієї системи сил дорівнювала нулю:

$$R = \sum_{k=1}^{n} F_k = 0$$

Геометричні умови рівноваги. Для рівноваги системи збіжних сил, що діють на тверде тіло, необхідно і достатньо, щоб багатокутник, побудований із сил системи, був замкненим.



$$\vec{R} = 0.$$

Аналітичні умови рівноваги. Для рівноваги системи збіжних сил, що діють на тверде тіло, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій усіх сил системи на осі декартової системи координат дорівнювали нулю.

$$R = \sqrt{(\sum_{k=1}^{n} F_{kx})^2 + (\sum_{k=1}^{n} F_{ky})^2 + (\sum_{k=1}^{n} F_{kz})^2} = 0;$$

Звідси маємо:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \tag{1.13}$$

У випадку системи збіжних сил, які розташовані в одній площі (наприклад ХОУ) з трьох умов залишаються дві:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0: \tag{1.14}$$

Якщо сили розташовані вздовж однієї осі (ОХ), то залишається одна умова:

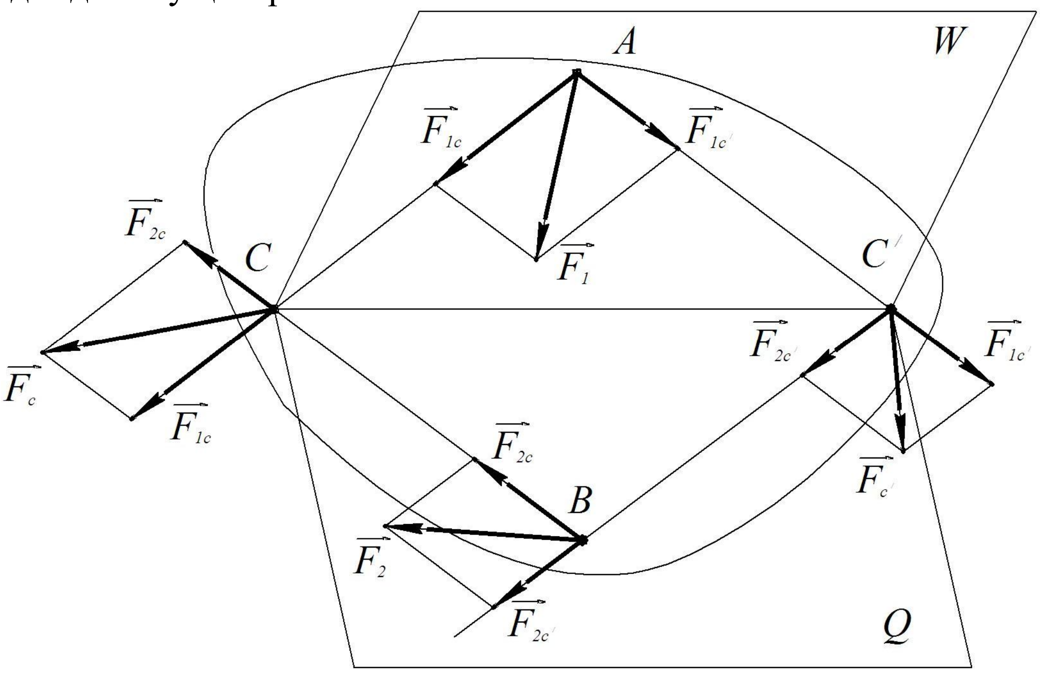
$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \tag{1.15}$$

Рівняння (1.13) (1.14) і (1.15) називаються рівняннями рівноваги і дають можливість визначити невідомі сили, що діють на тіло у стані рівноваги.

1.17 Довільна просторова система сил, що діє на тверде тіло.

Лема про дві сили.

Систему двох довільно розташованих у просторі сил, що діють на тверде тіло, можна, не змінюючи механічного стану твердого тіла, замінити еквівалентною системою двох сил, одна з яких буде прикладена у довільному наперед заданому центрі.



$$\overrightarrow{F_1} \sim \{\overrightarrow{F_{1c}}, \overrightarrow{F_{1c'}}\}, \overrightarrow{F_2} \sim \{\overrightarrow{F_{2c}}, \overrightarrow{F_{2c'}}\}, \{\overrightarrow{F_{2c}}, \overrightarrow{F_{2c'}}\} \sim \overrightarrow{F_c}$$
$$\{\overrightarrow{F_{1c}}, \overrightarrow{F_{1c'}}\} \sim \overrightarrow{F_{c'}}, \{\overrightarrow{F_c}, \overrightarrow{F_{c'}}\} \sim \{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\}$$

1.18 Загальні теореми статики твердого тіла

Теорема 1.

Довільну систему сил, що діє на тверде тіло, можна, не змінюючи її дії на тверде тіло, замінити еквівалентною системою двох сил, одна з яких прикладена у довільному наперед заданому центрі, причому головний вектор та головний момент системи сил відносно центра зведення не змінюються.

$\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}\}$ – довільна система n сил, що діє на тіло.

Якщо взяти точку С, то на підставі леми про дві сили можна записати

$$\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\} \sim \{\overrightarrow{F_{1c}}, \overrightarrow{F_{2c'}}\}$$

Таким чином, система n сил замінюються системою n сил, одна з яких прикладена у точці С.

Застосуємо далі лему до сил $\overrightarrow{F_{2c}}$ i $\overrightarrow{F_3}$, тобто

$$\{\overrightarrow{F_{2c'}}, \overrightarrow{F_3}\} \sim \{\overrightarrow{F_{2c}}, \overrightarrow{F_{3c'}}\}$$

Отже система сил замінюється іншою системою сил, дві з яких прикладені у точці С.

$$\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}\} \sim \{\overrightarrow{F_{1c}}, \overrightarrow{F_{2c}}, \overrightarrow{F_{3c'}}, \dots, \overrightarrow{F_n}\}$$

Продовжуючи подібні операції, отримаємо систему n сил, (n–1) з яких прикладенні у точці С, тобто

$$\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}\} \sim \left\{\overrightarrow{F_{1c}}, \overrightarrow{F_{2c}}, \dots, \overrightarrow{F_{(n-1)c}}, \overrightarrow{F_n^{/}}\right\}$$

Оскільки друга система сил отримана з першої за допомогою найпростіших дій із силами, то головний вектор та головний момент відносно довільного центра системи сил не змінюється.

$$\overrightarrow{R_0} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \cdots + \overrightarrow{F_n} = \overrightarrow{F_c} + \overrightarrow{F_n^{/}}$$

$$\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{M_0}\,(\overrightarrow{F_1}) + \overrightarrow{M_0}\,(\overrightarrow{F_2}) + \cdots + \overrightarrow{M_0}\,(\overrightarrow{F_n}) = \overrightarrow{M_0}\,(\overrightarrow{F_c}) + \overrightarrow{M_0}\,(\overrightarrow{F_n^{/}})$$

Теорема 2.

Для рівноваги довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор та головний момент системи сил відносно довільного центра дорівнювали нулю.

$$\overrightarrow{R_0} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k} = 0,\ \overrightarrow{M_0} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_0}\,(\overrightarrow{F_k}) = 0$$

Необхідність умов:

Система $\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}\}$ зрівноважена.

Замінюємо цю систему еквівалентною системою двох сил, одна з яких прикладена в точці О.

$$\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}\} \sim \left\{\overrightarrow{F_0}, \overrightarrow{F_n^{/}}\right\}$$

Система $\left\{\overrightarrow{F_0}, \overrightarrow{F_n^{/}}\right\}$ також зрівноважена і згідно з аксіомою про дві системи $\left\{\overrightarrow{F_0}, \overrightarrow{F_n^{/}}\right\}$ рівні за величиною і напрямками вздовж прямої, що проходить через точку О. Тобто

$$\overrightarrow{R_0} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \cdots + \overrightarrow{F_n} = \overrightarrow{F_c} + \overrightarrow{F_n^{/}} = 0$$

$$\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{M_0}\,(\overrightarrow{F_1}) + \overrightarrow{M_0}\,(\overrightarrow{F_2}) + \cdots + \overrightarrow{M_0}\,(\overrightarrow{F_n}) = \overrightarrow{M_0}\,(\overrightarrow{F_c}) + \overrightarrow{M_0}\,(\overrightarrow{F_n^{/}}) = 0$$

Достатність умов:

Системи сил $\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}\}$ є такою, що

$$\overrightarrow{R_0} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \cdots + \overrightarrow{F_n} = 0$$

$$\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{M_0}\,(\overrightarrow{F_1}) + \overrightarrow{M_0}\,(\overrightarrow{F_2}) + \cdots + \overrightarrow{M_0}\,(\overrightarrow{F_n}) = 0$$

Якщо замінити цю систему сил двома силами $\overrightarrow{F_0}$ і $\overrightarrow{F_n^{/}}$ рівні за модулем і напрямками вздовж однієї прямої у протилежні сторони і проходять через точку О. (момент рівний нулю).

Теорема 3.

Для еквівалентності двох систем сил необхідно і достатньо, щоб їх головні вектори та головні моменти відносно довільного центра були геометрично рівні.

Необхідність умов: Маємо дві системи сил, що є еквівалентними

$$\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}\} \sim \{\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \dots, \overrightarrow{P_m}\}$$

Прикладемо до твердого тыла зрівноважену систему сил $\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}, -\overrightarrow{F_1}, -\overrightarrow{F_2}, \dots, -\overrightarrow{F_n}\}$, де сила $\overrightarrow{F_\iota}$ чисельно дорівнює силі $-\overrightarrow{F_\iota}$, та має протилежний до неї напрям уздовж спільної лінії дії.

Якщо замінити систему сил $\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}\}$, що входить до складу системи $\{\overrightarrow{F_1}, \dots, \overrightarrow{F_n}, -\overrightarrow{F_1}, \dots, -\overrightarrow{F_n}\}$, еквівалентною системою сил $\{\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \dots, \overrightarrow{P_m}\}$, то механічний стан твердого тіла не змінюється, тобто

$$\{\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \dots, \overrightarrow{P_m}, -\overrightarrow{F_1}, -\overrightarrow{F_2}, \dots, -\overrightarrow{F_n}\} \sim 0$$

На підставі теореми 2 та еквівалентності нулю останньої системи сил маємо

$$\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \cdots + \overrightarrow{P_m} - \overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2} - \cdots - \overrightarrow{F_n} = 0$$
$$\overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{P_1}\right) + \cdots + \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{P_m}\right) - \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_1}\right) - \cdots - \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_n}\right) = 0$$

Звідси маємо

$$\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \cdots + \overrightarrow{P_m} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \cdots + \overrightarrow{F_n}$$
$$\overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{P_1}\right) + \cdots + \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{P_m}\right) = \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_1}\right) + \cdots + \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_n}\right)$$

<u>Достатність умов</u>: Доведемо, що дві системи сил $\left\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \ldots, \overrightarrow{F_n}\right\}$ та $\left\{\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_m}\right\}$, які мають геометрично рівні головні вектори та головні моменти відносно довільного центра, еквівалентні, тобто

$$\overrightarrow{R_0} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \cdots + \overrightarrow{F_n} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \cdots + \overrightarrow{P_m}$$
$$\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_1}\right) + \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_2}\right) + \cdots + \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_n}\right) = \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{P_1}\right) + \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{P_2}\right) + \cdots + \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{P_m}\right)$$

З рівностей (*) система сил $\left\{-\overrightarrow{F_1}, -\overrightarrow{F_2}, \ldots, -\overrightarrow{F_n}, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_m},\right\}$ є рівноваженою. Її можна додати до системи сил, що діє на тверде тіло, не змінюючи його механічного стану.

$$\left\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \ldots, \overrightarrow{F_n}, -\overrightarrow{F_1}, -\overrightarrow{F_2}, \ldots, -\overrightarrow{F_n}, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_m},\right\} \sim \left\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \ldots, \overrightarrow{F_n}\right\}$$

З отриманої системи відкидаємо зрівноважену систему сил

$$\left\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \ldots, \overrightarrow{F_n}, -\overrightarrow{F_1}, -\overrightarrow{F_2}, \ldots, -\overrightarrow{F_n}\right\}$$

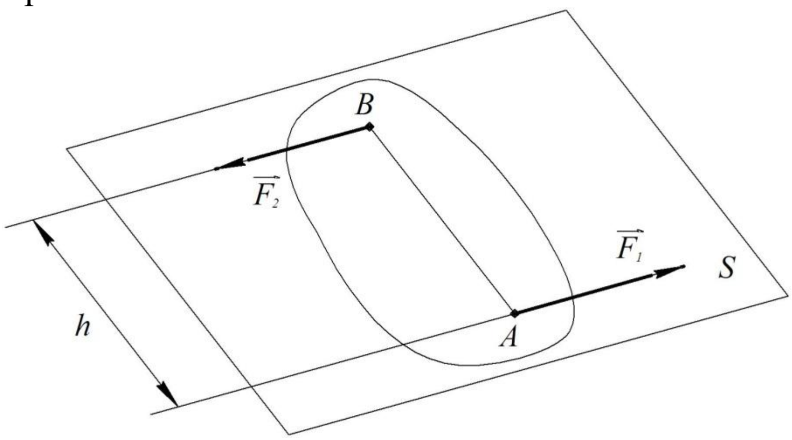
Отримаємо

$$\left\{\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_m},\right\} \sim \left\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \ldots, \overrightarrow{F_n}\right\},$$

що і треба було довести.

1.19 Пара сил. Момент пари сил.

<u>Пара сил</u>, що прикладена до твердого тіла, – це система двох рівних за модулем паралельних між собою сил, які напрямлені у протилежні боки вздовж різних прямих.



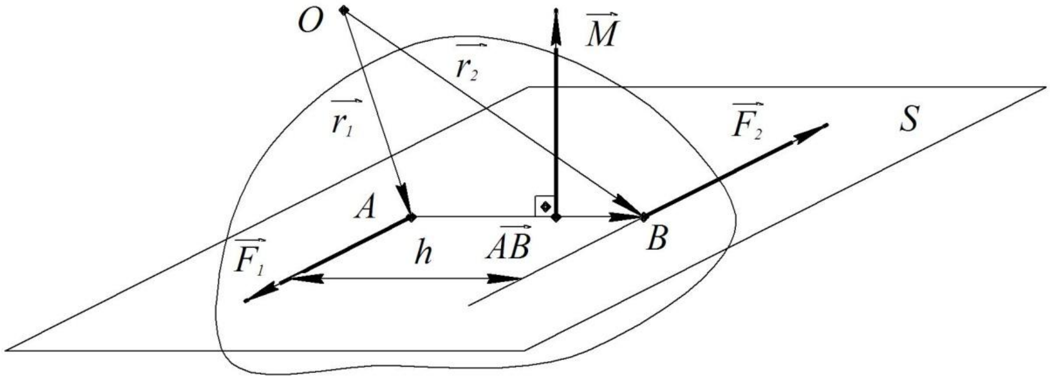
S – площа дії пари сил (площина пари);
h – плече пари сил (найкоротша відстань між лініями дії сил).

З аксіоми про дві сили – система сил, що створює пару, не перебуває у стані рівноваги.

Пари сил не має рівнодійної, оскільки головний вектор сил пари дорівнює нулю.

Пара сил, що діє на тверде тіло, намагається надати йому обертання.

Визначимо чому дорівнює сума моментів сил, що складають пару відносно довільної точки.



Згідно з визначенням моменту сили відносно довільної точки

$$\overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_1}\right) + \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_2}\right) = \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{F_2} - \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{F_2} = (\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}) \times \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{F_2}$$

Різниця векторів $\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{AB}$

Векторний добуток $\vec{M} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{F_2}$ називається <u>моментом пари сил.</u>

<u>Момент пари сил</u> – вектор перпендикулярний до площини дії пари сил, який дорівнює за модулем добутку модуля однієї сил з пари на довжину плеча пари і напрямлений на ту частину простору, звідки обертання тіла видно проти ходу стрілки годинника.

Момент пари сил не залежить від положення точки О, тобто моент пари сил є вектором вільним.

Модуль моменту пари сил М визначають за формулою

$$M = F_1 \times h$$

де h – плече пари сил. Одиниця виміру М, [Н·М];

<u>1.20 Теорема про еквівалентність пар сил.</u>

<u>Пари сил, що мають геометрично рівні моменти, еквівалентні</u>.

Теорема є окремим випадком теореми 3, оскільки головний момент системи сил, що утворюють пару, дорівнює моменту пари сил, а головний вектор дорівнює нулю.

<u>Наслідки теореми. Властивості пари сил:</u>

Не змінюючи дії даної пари сил на тверде тіло, можна:

1) повертати цю пару сил у площині її дії на будь-який кут і в будь-який бік;

2) переносити пару сил у площині її дії в будь-яке місце;

3) переносити пару сил у площину, що є паралельною площині її дії;

4) змінювати числові значення сил, що утворюють пару, і її плече, не змінюючи моменту пари.

5) система пар сил еквівалентна одній пари сил з моментом, що дорівнює геометричній сумі моментів пар сил системи

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_k}$$

1.21 Рівновага системи пар сил.

Фізичні умови. Оскільки будь-яка системи пар сил еквівалентна одній парі сил з моментом $\vec{M}$, то при рівновазі

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_k} = 0$$

Геометричні умови. Багатокутник, побудований із векторів моментів пар сил, діють на тверде тіло, має бути замкненим.

Аналітичні умови рівноваги системи пар сил:

$$M = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} M_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} M_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} M_{kz}\right)^2} = 0,$$

де $\sum_{k=1}^{n} M_{kx}$, $\sum_{k=1}^{n} M_{ky}$, $\sum_{k=1}^{n} M_{kz}$ – проекції вектора геометричної суми векторів моментів пар сил системи на осі декартової системи координат.

Тобто аналітичні умови рівноваги системи пар сил

$$\sum_{k=1}^{n} M_{kx} = 0, \sum_{k=1}^{n} M_{ky} = 0, \sum_{k=1}^{n} M_{kz} = 0$$

1.22 Еквівалентне перетворення довільної просторової системи сил

Теорема про зведення довільної системи сил до довільного центра

Довільну систему сил, не змінюючи механічного стану твердого тіла, можна замінити трьома силами, одна з яких чисельно та за напрямком збігається з головним вектором системи і прикладається в довільному наперед заданому центрі О, а дві інші утворюють пару сил з моментом, що дорівнює головному моменту системи відносно вибраного центра.

$\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}\}$ – довільна система сил, що діє тверде тіло.

Головний вектор системи та головний момент відносно довільного центра О.

$$\overrightarrow{R_0} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \cdots + \overrightarrow{F_n};$$
$$\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_1}\right) + \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_2}\right) + \cdots + \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_n}\right)$$

Згідно з умовою теореми, система трьох сил $\{\overrightarrow{P_0}, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}\}$ має головний вектор $\overrightarrow{P_0} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \cdots + \overrightarrow{F_n}$ і головний момент відносно центра О.

$$\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{P_0}\right) + \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{P_1}\right) = \vec{M}\ ; \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{P_0}\right) = 0$$

(сила P_0 прикладена в т. О)

де $\vec{M}$ – момент пари сил $\{\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}\}$.

Оскільки $\overrightarrow{P_0} = \overrightarrow{R_0}$ та $\overrightarrow{M_0} = \vec{M}$, то на підставі теореми 3

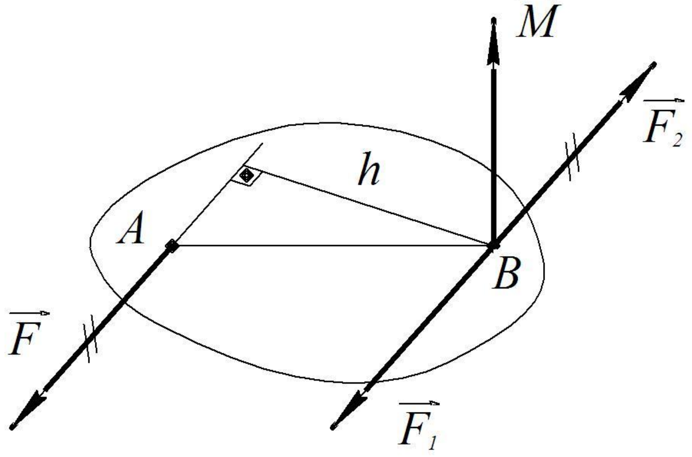
$$\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \dots, \overrightarrow{F_n}\} \sim \{\overrightarrow{P_0}, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}\},$$

що і треба було довести.

Лема про паралельне перенесення сили. Силу що діє на тверде тіло, не змінюючи механічного стану тіла, можна перенести паралельно самій собі у будь-яку точку цього тіла, прикладаючи при цьому пару сил з моментом, що дорівнює моменту сили, який переноситься відносно точки, куди сила переноситься.

$\overrightarrow{F_1}$ – сила прикладена в т. А., у т. В прикладаємо найпростішу зрівноважену систему сил $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$.

Модулі $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ і дорівнюють модулю сили $\overrightarrow{F_i}$ лінії їх дії паралельні.



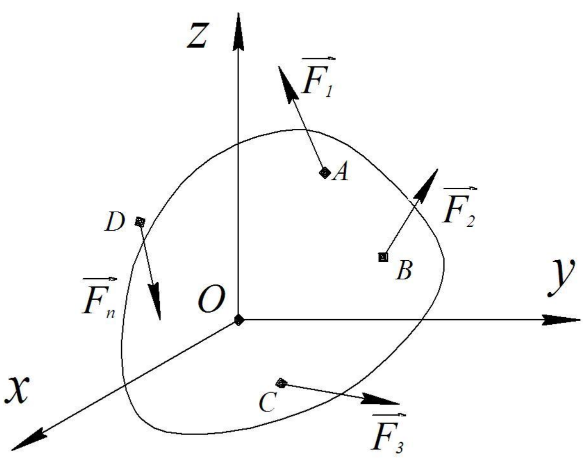
Сили $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ – пари сил з моментом $\vec{M}$ величиною $M = M_B\left(\vec{F}\right) = F \times h$

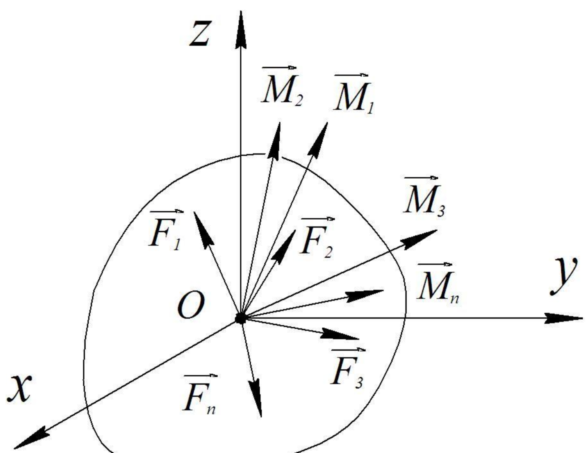
Сили F_1 за модулем дорівнює силі F і прикладена в т. В.

<u>1.23 Теорема про зведення довільної системи сил до довільного центра</u>

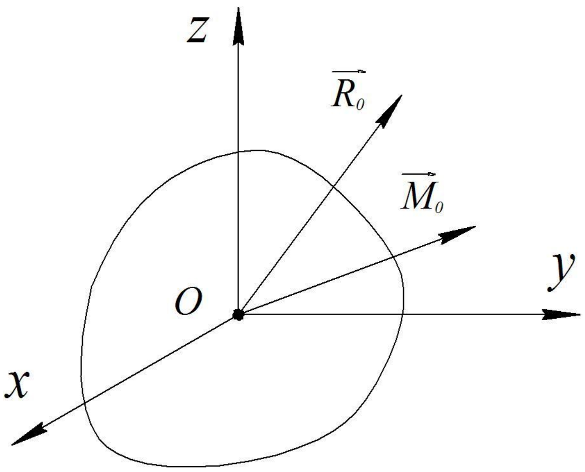
<u>(Теорема Пуансо)</u>. Луї Пуансо (1777-1859) французький механік, математик.

Довільну систему сил, що діють на тверде тіло, можна замінити еквівалентною системою, що складається з однієї сили, яка прикладена в довільно вибраній точці тіла (центрі зведення), і дорівнює головному вектору даної системи сил і одній парі сил, момент якої дорівнює головному моменту всіх сил системи відносно вибраного центра зведення.





Система збіжних сил



$$\overrightarrow{R_0} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k}$$

$$\overrightarrow{M_0} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_k} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_k}(\overrightarrow{F_k})$$

1.24 Умови рівноваги довільної просторової системи сил.

а) Механічні умови рівноваги

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи сил відносно довільного центра дорівнювали нулю:

$$\overrightarrow{R_0} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k} = 0$$

$$\overrightarrow{M_0} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_k} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_k}(\overrightarrow{F_k}) = 0$$

Умови рівноваги є наслідком теореми 2 і називаються механічними умовами рівноваги довільної просторової системи сил.

б) Аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил:

На підставі теореми про проекцію геометричної суми векторів на будь-яку вісь:

$$R_0 = \sqrt{R_x^{\ 2} + R_y^{\ 2} + R_z^{\ 2}} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{kz}\right)^2}\ ;$$

$$\mathrm{M}_0 = \sqrt{\mathrm{M_X}^{\ 2} + \mathrm{M}_y^{\ 2} + \mathrm{M}_z^{\ 2}} = \left(\sum_{k=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_k\right)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_y\right)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_z\right)\right)^2$$

Де $R_x = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx}$; $R_y = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky}$; $R_z = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz}$ – проекції головного вектора довільної просторової системи сил $\vec{R}_0$ на осі x, y і z декартової системи координат;

$\sum\limits_{k=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_k\right)$; $\sum\limits_{k=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_y\right)$; $\sum\limits_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_z\right)$ – проекції головного моменту довільної просторової системи сили $\vec{M}_0$ на осі x, y і z декартової системи координат.

Враховуючи умови рівноваги довільної просторової системи сил запишемо:

$$R_0 = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{kz}\right)^2} = 0\,;$$

$$\mathrm{M}_0 = \left(\sum_{k=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_k\right)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_y\right)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_z\right)\right)^2 = 0\;;$$

Звідси визначаються аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\; \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\; \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_k\right);\; \sum_{k=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_k\right);\; \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_k\right);$$

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій усіх сил системи на осі декартової системи координат та алгебраїчні суми моментів цих сил відносно цих координатних осей дорівнювали нулю.

У випадку просторової системи паралельних сил, наприклад, усі сили паралельні вісі Z умови рівноваги набувають вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0;\; \sum_{k=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_k\right) = 0;\; \sum_{k=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_k\right) = 0$$

Якщо на тверде тіло окрім сил діють пари сил з моментами $\vec{M}_1, \vec{M}_2, ..., \vec{M}_n$, то останні три рівняння умов рівноваги набувають вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_k\right) + \sum_{k=1}^{n} M_{kx} = 0;$$

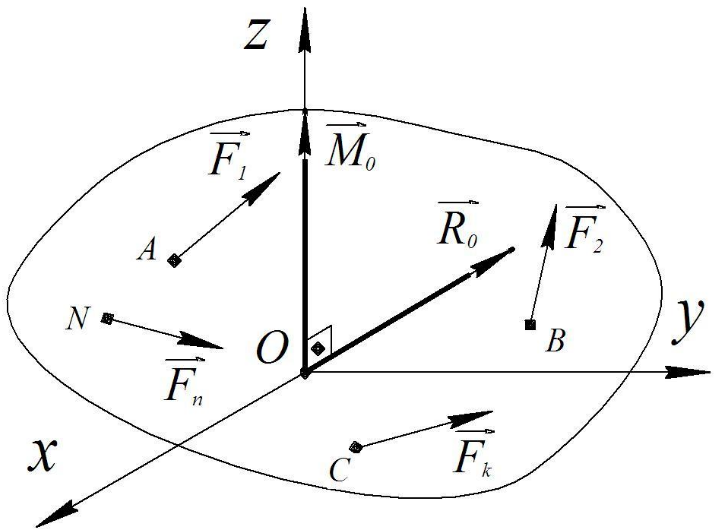
$$\sum_{k=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_k\right) + \sum_{k=1}^{n} M_{ky} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_k\right) + \sum_{k=1}^{n} M_{kz} = 0;$$

$\sum_{k=1}^{n} M_{kx}$, $\sum_{k=1}^{n} M_{ky}$, $\sum_{k=1}^{n} M_{kz}$ – алгебраїчні суми проекцій векторів моментів пари сил на осі декартової системи координат.

1.25 Довільна плоска система сил, що діє на тверде тіло.

Еквівалентні перетворення довільної плоскої системи сил.



Сили довільно розташовані в одній площині утворюють довільну плоску систему сил.

$\left\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n\right\}$ – довільна плоска система сил.

Замінимо довільну плоску систему еквівалентною системою, що складається із сили $\vec{R}$ (головний вектор) та пари сил з моментом $\vec{M}_0$ (головний момент). Центр зведення в т. О.

Головний вектор дорівнює геометричній сумі сил системи:

$$\vec{R}_0 = \sum_{k=1}^{n} F_z;$$

Головний момент дорівнює геометричній сумі моментів сил системи відносно центра зведення:

$$\vec{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_k).$$

Лінія дії головного вектора

$\vec{R}_0$ розташована у площині S, а лінія дії вектору моменту $\vec{M}_0$ перпендикулярна до площині S.

1.26 Умови рівноваги довільної плоскої системи сил.

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи сил відносно довільного центра дорівнювали нулю:

$$\vec{R}_0 = \sum_{k=1}^{n} F_k = 0; \;\; \vec{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} M_0(\vec{F}_k) = 0;$$

– механічні умови рівноваги довільної плоскої системи сил.

Аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил.

На підставі теореми про проекцію геометричної суми векторів на будь-яку вісь

$$R_0 = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2},$$

де $R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}$; $R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}$ – проекції головного вектора довільної просторової системи сил $\vec{R}_0$ на осі x та у декартової системи координат.

З умови рівноваги

$$R_0 = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2} = 0$$

$$M_0 = \sum_{k=1}^{n} M_0(\vec{F}_k) = 0$$

Звідси визначаємо аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \ \sum_{k=1}^{n} M_0(\vec{F}_k) = 0; \qquad (1.16)$$

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій усіх сил системи на кожну з двох осей декартової системи координат та алгебраїчна сума моментів цих сил відносно будь якого центра, що лежить у площині дії сил системи дорівнювали нулю.

Отриманні рівняння (1.16) є <u>основною формою рівнянь рівноваги довільної просторової системи сил</u>.

Додаткові форми рівнянь рівноваги плоскої системи сил:

<u>Форма 1</u>

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_B(\vec{F}_k) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{kx} = 0;$$

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх трьох сил системи відносно будь-яких двох центрів А і В і алгебраїчна сума проекцій сил системи на вісь Х, не перпендикулярну до прямої АВ, дорівнює нулю.

Необхідність рівнянь – При рівновазі довільної плоскої системи сил алгебраїчна сума моментів усіх сил системи і алгебраїчна сума проекцій сил на будь-який напрям дорівнює нулю.

Достатність умов. Якщо виконуються дві перших умови, то головний момент системи дорівнює нулю. Така система еквівалентна одній силі, лінія дії якої проходить через точки А і В. Для того щоб рівнодійна була рівна нулю, проекція її повинна братись на вісь по перпендикулярній лінії АВ.

Форма 1

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_B(\vec{F}_k) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_c(\vec{F}_k) = 0$$

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил системи відносно будь-яких трьох центрів (точки) А, В та С, що не лежать на одній прямій, дорівнює нулю.

У випадку плоскої системи паралельних сил, наприклад, у випадку, коли усі сили паралельні осі У, основна форма рівняння має вигляд

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \ \sum_{k=1}^{n} M_0(\vec{F}_k) = 0;$$

Додаткова форма рівнянь

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0; \ \sum_{k=1}^{n} M_B(\vec{F}_k) = 0;$$

При цьому точки А і В не повинні лежати на прямій, яка паралельна лініям дій сил системи.

Якщо на тверде тіло окрім сил діють ще пари сил, що розташовані у площині дії сил, з моментами $M_1, M_2, \dots, M_n$, то вигляд двох перших рівнянь умов рівноваги не змінюється, а останнє рівняння набуває вигляду

$$\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \right) \ \sum_{k=1}^{n} M_0(\vec{F}_k) + \sum_{k=1}^{n} M_k = 0;$$

Аналітично змінюють вигляд рівняння усіх форм умов рівноваги плоскої системи сил.

1.27 Статичні інваріанти систем сил.

(інваріанти – мат. величини, які не змінюються при будь-яких перетвореннях)

Із попереднього матеріалу:

- головний вектор довільної системи сил не змінюється зі зміною центра звернення.

$$\vec{R}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0;$$

- головний момент довільної системи сил відносно довільного центра звернення

$$\vec{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} M_0(\vec{F}_k)$$

Зі зміною центра зведення головний момент змінюється

$$\vec{M}_{01} = \vec{M}_0 + \vec{M}_{01}(\vec{R}_0) \qquad (1.17)$$

Помножимо скалярно обидві частини рівності (1) на вектор $\vec{R}_0$.

$$\vec{M}_{01} \times \vec{R}_0 = \vec{M}_0 \times \vec{R}_0 + \vec{M}_{01}(\vec{R}_0) \times \vec{R}_0,$$

$$\vec{M}_{01}(\vec{R}_0) \times \vec{R}_0 = 0, \text{ т. як вектор } \vec{M}_{01}(\vec{R}_0) \perp \vec{R}_0.$$

Тоді

$$\underline{\underline{\vec{M}_{01} \times \vec{R}_0 = \vec{M}_0 \times \vec{R}_0}} \qquad (1.18)$$

Скалярний добуток головного моменту системи сил $\vec{M}_0$ на головний вектор системи $\vec{R}_0$ зі зміною центра зведення не змінюється.

Перший статичний інваріант – головний вектор системи сил.

$$\underline{\underline{\vec{I}_1 = \vec{R}_0}}$$

($\vec{I}_1$ – перший статичний інваріант)

Другий статичний інваріант – скалярний добуток головного моменту системи сил на головний вектор

$$\vec{I}_2 = \vec{M}_0 \times \vec{R}_0$$

($\vec{I}_2$ – другий статичний інваріант)

Другий статичний інваріант можна записати у вигляді

$$\vec{I}_2 = \vec{M}_0 \times \vec{R}_0 \times cos(\widehat{M_0, R_0})$$

Тоді

$$cos(\widehat{M_0,R_0}) = \frac{I_2}{M_0 \times R_0} = \frac{\vec{M}_0 \times \vec{R}_0}{M_0 \times R_0}.$$

Вектори $\vec{M}_0$ та $\vec{R}_0$ можна записати у вигляді

$$\vec{R}_0 = R_x \times i + R_y \times \vec{j} + R_z \times \vec{k};$$

$$M_0 = M_x \times i + M_y \times \vec{j} + M_z \times \vec{k}.$$

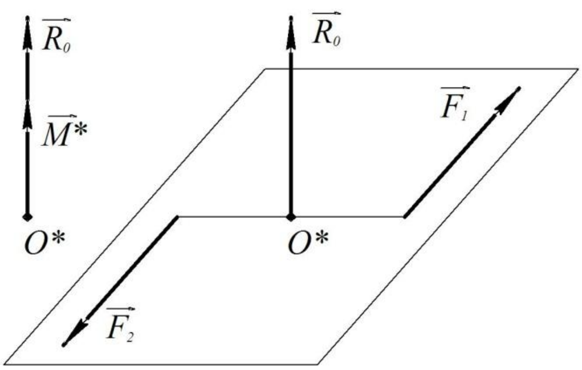
Відповідно

$$\cos(M_0, R_0) = \frac{M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z}{M_0 \times R_0}$$

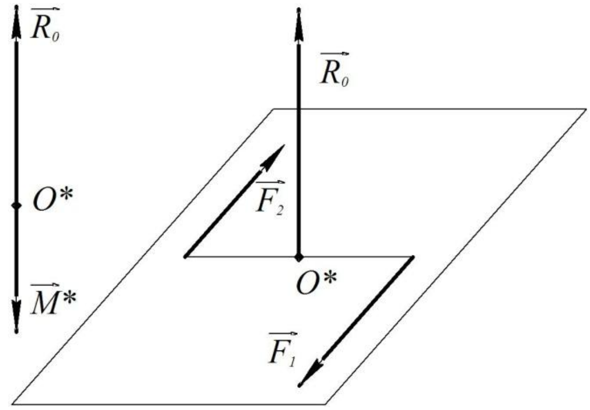
де R_x, R_y, R_z – проекції головного вектора $\vec{R}_0$ на осі декартової системи координат.

<u>1.28 Динамічний гвинт.</u>

Динамічним гвинтом називається сукупність сили і пари сил, яка лежить у площині, перпендикулярній до сили.



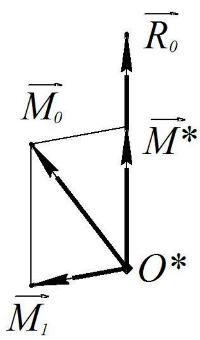
а) правий динамічний гвинт



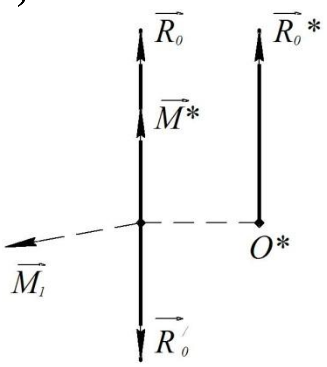
б) лівий динамічний гвинт

<u>1.29 Теорема про зведення довільної просторової системи сил до динамічного гвинта.</u>

а)



б)



Якщо другий статичний інваріант довільної просторової системи сил не дорівнює нулю, то цю систему сил можна звести до динамічного гвинта.

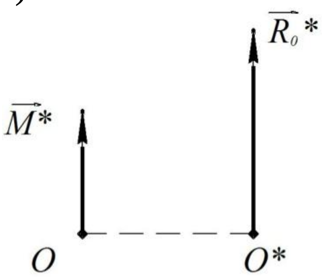
У довільній точці О довільна просторова система сил зведена до сили, що дорівнює головному вектору системи $\vec{R}_0$, та до пари сил, що дорівнює головному моменту системи сил $\vec{M}_0$.

За умовою теореми $\vec{I}_2 = \vec{M}_0 \times \vec{R}_0 \neq 0$. Розкладемо вектор $\vec{M}_0$ за двома напрямками. Вектор $\vec{M}_1$ перпендикулярний вектору $\vec{R}_0$, а вектор $\vec{M}^*$ співпадає з вектором $\vec{R}_0$. Складову $\vec{M}_1$ можна подати у вигляді пари сил $\vec{R}_0' = \vec{R}_0^*$

Сили $\vec{R}_0$ і $\vec{R}_0'$ утворюють зрівноважену систему сил, яку можна відімкнути.

Система векторів $\vec{R}_0$ і $\vec{M}_0$ зведена до двох інших векторів M^* прикладений у т. О і $\vec{R}_0^*$ прикладений у т. О*.

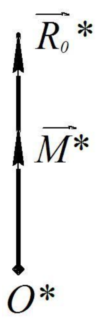
в)



Оскільки момент пари сил $\vec{M}^*$ є вектор вільний, його можна перенести у т. О*.

В результаті маємо силу $\vec{R}_0^*$, що дорівнює головному вектору системи $\vec{R}_0$ і прикладена у т. О*, та пару сил з моментом $\vec{M}^*$, тобто маємо правий динамічний гвинт.

г)



Якщо кут між векторами $\vec{R}_0$ та $\vec{M}_0$ буде тупим, аналогічним чином отримаємо лівий динамічний гвинт.

Проекція вектора момента пари сил $\vec{M}^*$ на напрям головного вектора $\vec{R}_0$ визначається за формулою:

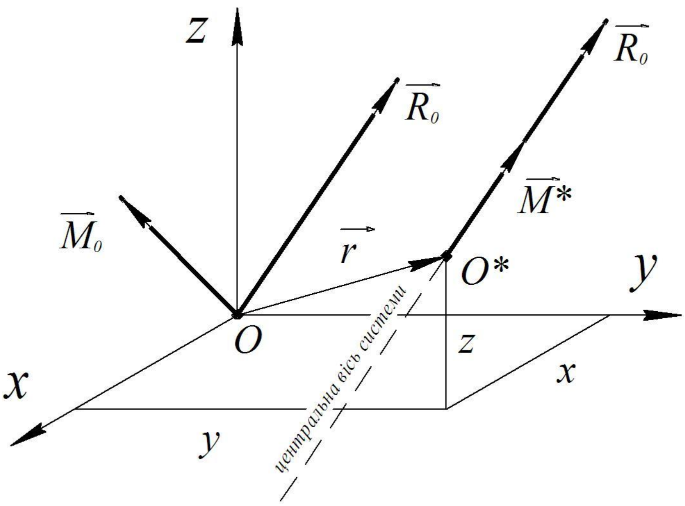
$$M^* = M_0 \times \cos\left(\vec{M}_0, \vec{R}_0\right) = \cancel{M}_0 \frac{\vec{M}_0 \times \vec{R}_0}{\cancel{M}_0 \times R_0} = \frac{\vec{M}_0 \times \vec{R}}{R_0} = \frac{M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z}{R_0}.$$

Система сил може бути зведена до динамічного гвинта у всіх точках прямої, що проходить через т. O* і є лінією дії сили $\vec{R}_0^* = \vec{R}_0$.

Ця пряма називається <u>центральною віссю системи сил.</u>

<u>Рівняння центральної осі системи сил.</u>

Точка O* – точка центральної осі.



На підставі формули (1):

$$\vec{M}^* = \vec{M}_0 - \vec{r} \times \vec{R}_0,$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор між точкою O та точкою O*.

Умови колінеарності головного вектора та моменту $\vec{M}^*$ для точки O* має вигляд

$$p\vec{R}_0 = \vec{M}^*,$$

де ρ – параметр гвинта, що має розмірність довжини

Тоді

$$p\vec{R}_0 = \vec{M}_0 - \vec{r} \times \vec{R}_0. \tag{1.19}$$

З урахуванням того, що

$$\vec{R}_0 = \vec{R}_x \cdot \vec{i} + \vec{R}_y \cdot \vec{j} + \vec{R}_z \cdot \vec{k};$$

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_x \cdot \vec{i} + \vec{M}_y \cdot \vec{j} + \vec{M}_z \cdot \vec{k}$$

$$r = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

Рівняння (3) перепишемо до виду

$$p\left(\vec{R}_x \cdot \vec{i} + \vec{R}_y \cdot \vec{j} + \vec{R}_z \cdot \vec{k}\right) = \vec{M}_x \cdot \vec{i} + \vec{M}_y \cdot \vec{j} + \vec{M}_z \cdot \vec{k} - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left[M_x - \left(yR_z - zR_y\right)\right]\vec{i} + \left[M_y - \left(zR_x - xR_z\right)\right]\vec{j} + \left[M_z - \left(xR_y - yR_x\right)\right]\vec{k}.$$

Порівнюючи коефіцієнти при ортах $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ запишемо

$$pR_x = M_x - \left(yR_z - zR_y\right);$$

$$pR_y = M_y - \left(zR_x - xR_z\right);$$

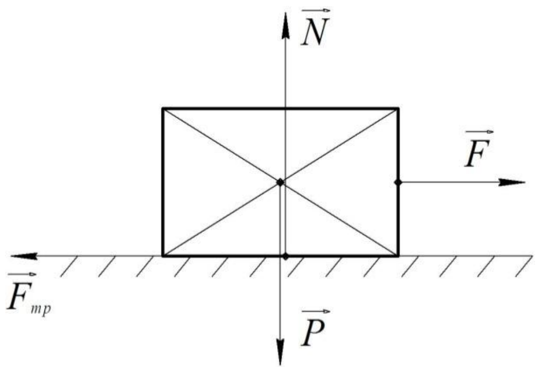
$$pR_z = M_z - \left(yR_y - zR_x\right);$$

Звідси рівняння центральної осі довільної просторової системи сил матиме вигляд:

$$\frac{M_x-\left(yR_z-zR_y\right)}{R_x}=\frac{M_y-\left(zR_x-xR_z\right)}{R_y}=\frac{M_z-\left(xR_y-yR_x\right)}{R_z}.$$

1.30 Тертя твердих тіл.

Теорія ковзання



Опір, що виникає при ковзанні контактуючих поверхонь твердих тіл, називається тертям ковзання.

Тертя, що виникає при безпосередньому контакті матеріальних тіл, є складним фізичним явищем, (мікро нерівності, молекулярне зчеплення, дифузія, нагрів, електризація і т.к.)

Загальні закономірності, які відображають основні особливості явища тертя, обумовлюються законами тертя ковзання Кулона-Амонтона.

1. При намаганні зрушити одне тіло по поверхні другого у площині контакту тіл виникає сила тертя. (величина сили тертя може мати значення від де $F_{тр}$ – граничної сили тертя

Сила тертя напрямлена у протилежному напрямку дії активних сил, які намагаються зрушити тіло.

2. Величина граничної сил тертя дорівнює добутку коефіцієнта тертя на нормальну реакцію.

$$\boxed{F_{тр} = f\cdot N,}$$

де $F_{тр}$ – гранична сила тертя (сила тертя у русі і сила тертя у спокої);
f – коефіцієнт тертя ковзання;
N – нормальна реакція в’язі на тверде тіло.

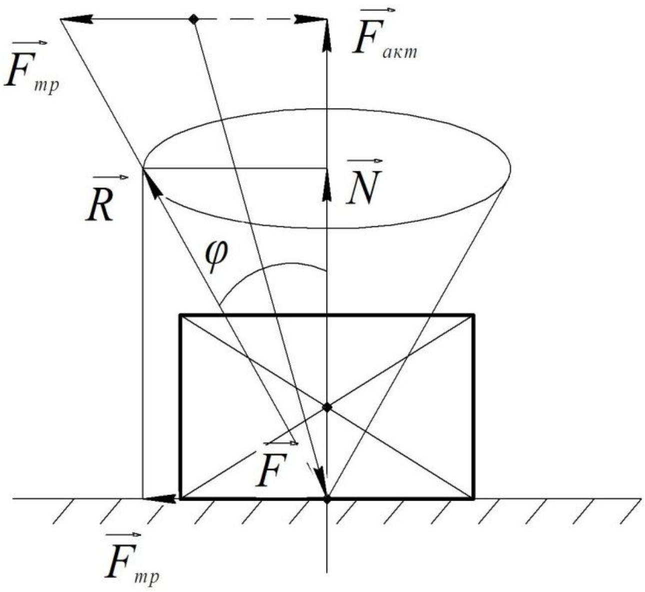
3. Величина сили тертя $F_{тр}$ не залежить від розмірів контактуючих поверхонь.

Сила тертя спокою.

$F'_{тр} \le F_{тр}$ – при перевищенні активною силою $F_{тр}$ починається рух тіла (тертя у русі)

$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{тр}$ – рівнодійна сил $\vec{N}$ і $\vec{F}_{тр}$, т. нова реакція поверхні в'язі на тверде тіло.

Кут φ – кут тертя.



$$tg\varphi = \frac{F_{Тр}}{N} = \frac{f \cdot N}{N} = f$$

$$\boxed{tg\varphi = f};$$

$$\boxed{\varphi = arctg(f)};$$

Геометричним місцем усіх можливих напрямів граничної реакції $\vec{R}$ є поверхня конуса – конуса тертя.

Простір у середині конуса тертя утворює область тертя.

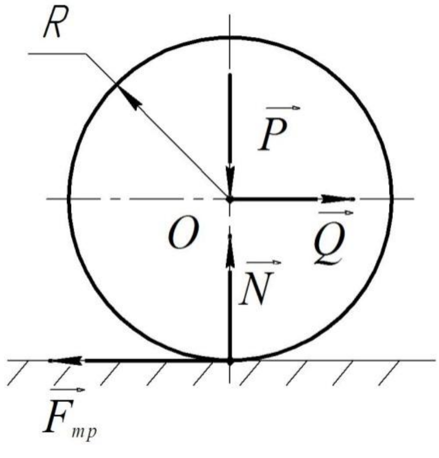
Область тертя має наступну властивість:

Якою б великою за інтенсивністю не була активна сила F, лінія дії якої розташована в середині області тертя, вона не може привести в рух тіло, що спирається на поверхню в'язі.

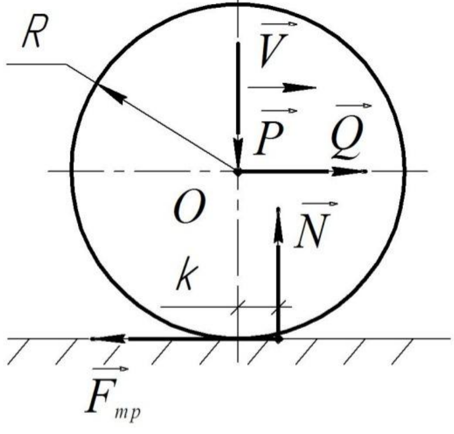
$$\left(F'_{тр} \geq F_{акт.}\right)$$

Тертя кочення

а) стан спокою



б) стан руху (кочення)



$$\sum M_0 = 0; \;\; N \cdot K - F_{Тр} \cdot R = 0; \;\; R = \frac{D}{2};$$

$$F_{Тр} = \frac{K}{R} \cdot N; \;\; F_{Тр} = \frac{2K}{D} \cdot N;$$

К – коефіцієнт тертя кочення.

1.31 Центр ваги твердого тіла

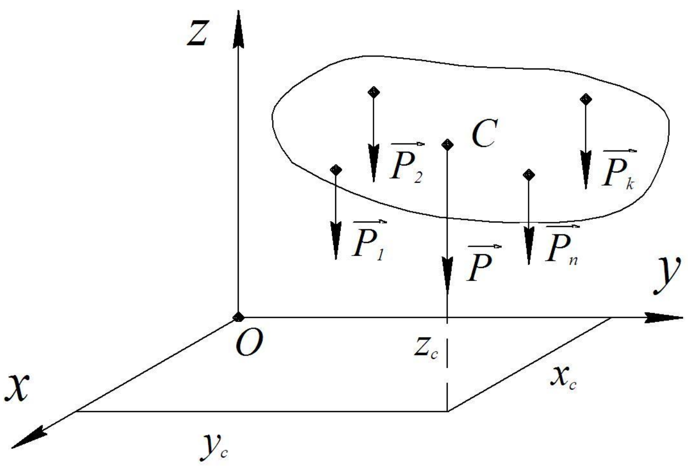
На будь-яку частину твердого тіла, що розміщене поблизу земної поверхні діє сила, яка напрямлена вертикально вниз – сила ваги цієї частинки $\mathrm{P_k}$.

Відповідно, просторова система паралельних сил ваги частинок тіла $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$ має рівнодійну силу, що визначається рівністю

$$P = \sum_{k=1}^{n} P_k.$$

Ця рівнодіюча називається <u>силою ваги</u> або <u>вагою твердого тіла.</u>

Лінія дії сили ваги $\vec{P}$ за будь-якого положення тіла проходить через одну й ту саму незмінно зв'язану з тілом точку С. Точки С – центр паралельних сил ваги частинок тіла.



Точка С називається центром ваги твердого тіла.

<u>Центр ваги твердого тіла</u> це незмінно зв'язана з цим тілом точка, через яку проходить лінія дії рівнодійної сили ваги частинок тіла за будь-якого положення тіла у просторі.

Оскільки центром ваги твердого тіла є центр паралельних сил, то визначення положення центра ваги тіла відносно декартової системи координат здійснюється за формулами

$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k x_k}{P};$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k yk}{\sum_{k=1}^{n} P_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k y_k}{P}; \qquad (1.20)$$

$$z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k z_k}{P};$$

де x_k , y_k , z_k – відносно координати точок прикладання сил P_k ;
P – вага всього тіла.

Якщо тверде тіло однорідне, тобто якщо питома вага тіла стала $(\gamma = const)$, то вага тіла P та вага частини цього тіла P_k пропорційні об'єму тіла V та об'єму елементарної частини цього тіла ΔV_k , тобто

$$P = \gamma \cdot V \text{ , } P_k = \gamma \Delta V_k .$$

Тому підставляючи значення P та P_k в рівності (1.20) отримаємо формули для визначення центра ваги твердого тіла як центра ваги об'єму

$$x_c = \frac{\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \Delta V_k x_x}{\mathrm{V}}; \ y_c = \frac{\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \Delta V_k y_x}{\mathrm{V}}; \ z_c = \frac{\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \Delta V_k z_x}{\mathrm{V}};$$

Усі фізичні тіла мають три виміри. На практиці існують випадки коли можна знехтувати одним, а іноді і двома вимірами тіла.

1. Тонка пластинка – розглядається як матеріальна плоска фігура.

Вага такої плоскої фігури P та вага будь-якої її частини P_k пропорційна площі фігури S та площі ΔS її елементарної частини, тобто

$$P = \gamma_1 \cdot S; \ P_k = \gamma_1 \cdot \Delta S_k ,$$

де γ_1 – вага одиниці площі фігури.

Підставляючи значення P та P_k в рівності (1) отримаємо формули для визначення центра ваги твердого тіла як центра ваги площі

$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta S_k x_k}{S}; \ Y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta S_k Y_k}{S};$$

2. Тонкий стержень (лінія). Вага такого тіла в цілому, а також вага його частинок пропорційна їх довжині, тобто

$$P = \gamma_2 \cdot S, \ P_k = \gamma_2 \cdot \Delta L_k$$

Тоді

$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta L_k x_k}{L}; \ Y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta L_k Y_k}{L}; \ Z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta L_k Z_k}{L}.$$

Положення центра ваги твердого тіла у вигляді тонкого стержня залежить від довжини стержня та положення стержня у просторі.

Центр ваги однорідного твердого тіла визначається як центр ваги об'єму, площі або лінії.

Способи визначення координат центра ваги.

1. Спосіб симетрії. Якщо однорідне тверде тіло має центр, вісь або площу симетрії, то центр сили такого тіла розташований відповідно в центрі, або на осі, або у площини симетрії.

Звідси – центр ваги кільця, диска, оболонки кулі, об'єму кулі розташований в їх геометричних центрах. Центр ваги прямокутника, паралелограма, ромба у точках перетину їх діагоналей.

Центр ваги паралелепіпеда у точці перетину діагоналей (у геометричному центрі).

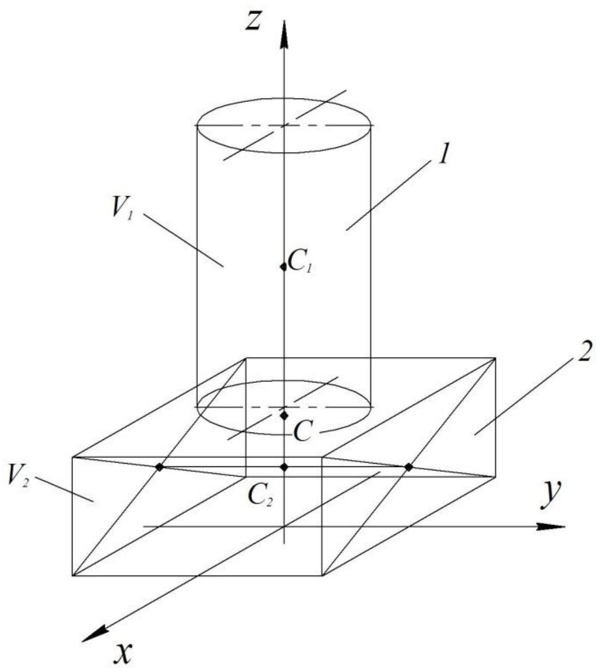
2. Спосіб розбиття. Якщо однорідне тверде тіло можна розбити на скінченну кількість таких частин, для кожної з яких положення центра ваги відомо заздалегідь, то координати центра ваги всього тіла можна визначити безпосередньо за приведеними вище формулами.

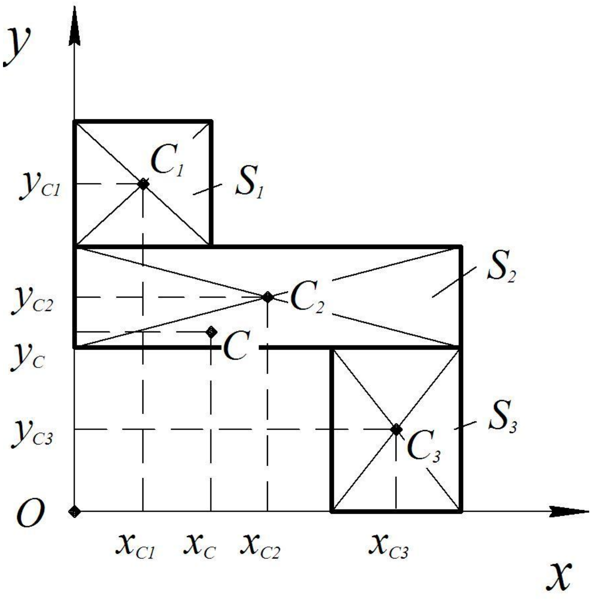
$$Z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \cdot Z_k}{V} = \frac{V_1 \cdot Z_{c1} + V_2 \cdot Z_{c2}}{V_1 + V_2};$$

$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta S_k x_k}{S} = \frac{S_1 x_{c1} + S_2 x_{c2} + S_3 x_{c3}}{S_1 + S_2 + S_3};$$

$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta S_k y_k}{S} = \frac{S_1 y_{c1} + S_2 y_{c2} + S_3 y_{c3}}{S_1 + S_2 + S_3};$$

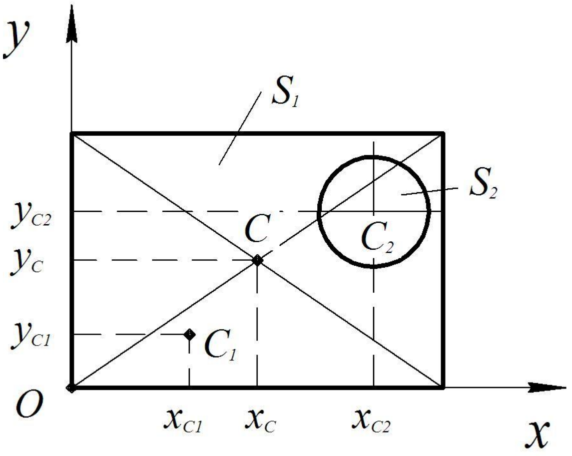
а) б) $X_c=0$; $Y_c=0$;





3. <u>Спосіб доповнення.</u> Окремий випадок способу розбиття. Застосовується до твердих тіл, що мають порожнини, отвори або вирізи.

У цьому випадку в формулах центра ваги об'єми або площі віднятих частин твердого тіла необхідно вважати від'ємними, тобто враховувати їх у рівностях зі знаками мінус.



$$X_c = \frac{S_1 x_{c1} + S_2 x_{c2}}{S_1 - S_2};$$

$$Y_c = \frac{S_1 y_{c1} + S_2 y_{c2}}{S_1 - S_2};$$

<u>4.Спосіб інтегрування.</u> Якщо тверде тіло неможливо розбити на скінченне число частин, то тіло розбивають на n довільно малих об'ємів ΔV_k або площ ΔS_k, та виконують граничний перехід, збільшуючи n до ∞ і $\Delta V_k \to dV_k$ або $\Delta S_k \to dS$

Тоді рівності центрів ваги набувають вигляду, наприклад:

$$X_c = \frac{1}{V}\int_{(V)} x dV;\; Y_c = \frac{1}{V}\int_{(V)} y dV;\; Z_c = \frac{1}{V}\int_{(V)} z dV,$$

або

$$X_c = \frac{1}{S}\int_{(S)} x dS;\; Y_c = \frac{1}{S}\int_{(S)} y dS,$$

де $\int_{(V)} x dV,\; \int_{(V)} y dV,\; \int_{(V)} z dV$ – інтеграли, поширені на усю поверхню тіла.

5.Експериментальний спосіб.

а) спосіб підвищування;

а) спосіб зважування.

Контрольні запитання до першого розділу

1. Якої форми руху матерії стосуються закони теоретичної механіки?
2. Що розуміють під механічною формою руху матерії?
3. Якими є поняття про простір і час в теоретичній механіці?
4. Який зміст мас поняття «система відліку» в теоретичній механіці?
5. Чи мають фізичний зміст такі абстрактні поняття, як матеріальна точка, абсолютно тверде тіло та система матеріальних точок?
6. Що розуміють під поняттям «сила»?
7. Які системи сил називаються еквівалентними та зрівноваженими?
8. Яка сила називається рівнодійною?
9. Що розуміють під рівновагою матеріальної точки та твердого тіла?
10. Як формулюється аксіома про дві сили?
11. Як формулюється аксіома про додавання та віднімання зрівноваженої системи сил?
12. При якій умові сила може розглядатися як ковзний вектор?
13. Як формулюється аксіома про паралелограм сил?
14. Якими є найпростіші дії над силами, при яких механічний стан твердого тіла не змінюється?
15. Що таке проекція сили на вісь?
16. Що таке проекція сили на площину?
17. Як формулюється теорема про три сили?
18. У чому полягають дві основні задачі статики твердого тіла?
19. Яка система сил, прикладених до твердого тіла, називається збіжною?
20. Яким є розв'язок першої основної задачі статики твердого тіла для системи збіжних сил?
21. У чому суть механічних, геометричних та аналітичних умов рівноваги системи збіжних сил?
22. Як формулюється аксіома про рівність дії та протидії?
23. Які тверді тіла називаються вільними та невільними?
24. Що таке реакція в'язі?
25. Назвіть основні види в'язей для яких лінії дії реакцій відомі?
26. Як формулюється аксіома про звільнення тіла від в'язей?
27. Як формулюється аксіома про накладання нових в'язей?
28. Як формулюється аксіома затвердіння?
29. Назвіть порядок розв'язання задач статики твердого тіла,
30. Що таке момент сили відносно точки?
31. Як визначити момент сили відносно точки аналітично?
32. Що таке момент сили відносно осі і як його обчислити?
33. Яка залежність між моментом сили відносно осі і моментом сили відносно точки, що лежить на цій осі?

34. В яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
35. Чи змінюється момент сили відносно точки при перенесенні сили вздовж її лінії дії?
36. В якому випадку момент сили відносно точки дорівнює нулю?
37. Яка система сил називається парою сил?
38. Що таке момент пари сил і як його обчислити?
39. Як визначається точка прикладання вектора-момента пари сил?
40. Як формулюється теорема про пари сил?
41. Яка фізична величина повністю характеризує пару сил?
42. Які основні властивості пари сил?
43. Сформулюйте умови рівноваги систем пар сил?
44. Як формулюється теорема про паралельне перенесення сили?
45. Що таке головний вектор довільної просторової системи сил?
46. Що таке головний момент довільної просторової системи сил?
47. У чому суть механічних та аналітичних умов рівноваги довільної просторової системи сил?
48. Що таке сила тертя ковзання?
49. Що таке кут тертя, як його визначити?
50. Що таке конус тертя і кут природного нахилу?
51. Що таке центр ваги твердого тіла?

2. КІНЕМАТИКА

Кінематика – розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух матеріальних об'єктів незалежно від причин, які його викликають.

При розв'язанні задач кінематики рух матеріальних об'єктів визначається відносно певної системи відліку.

В кінематиці відсутні такі фізичні поняття як сила та маса, а розглядаються лише геометричні характеристики руху – траєкторії, швидкості і прискорення.

В кінематиці всі лінійні величини (координати, довжина шляху та ін.) виражаються в метрах (м – система СІ). Час, як скалярна величина розглядається як незалежна змінна (аргумент).

Усі інші змінні величини розглядаються як функції часу (координати тіла, швидкості, прискорення і т.п.). Одиниця часу – секунда (с – система СІ).

Кінематично визначити (задати) рух даного об'єкта означає встановити його положення відносно системи відліку у будь-який момент часу.

Дві задачі кінематики:

Перша задача кінематики – встановлення математичних способів задання руху об'єктів дослідження.

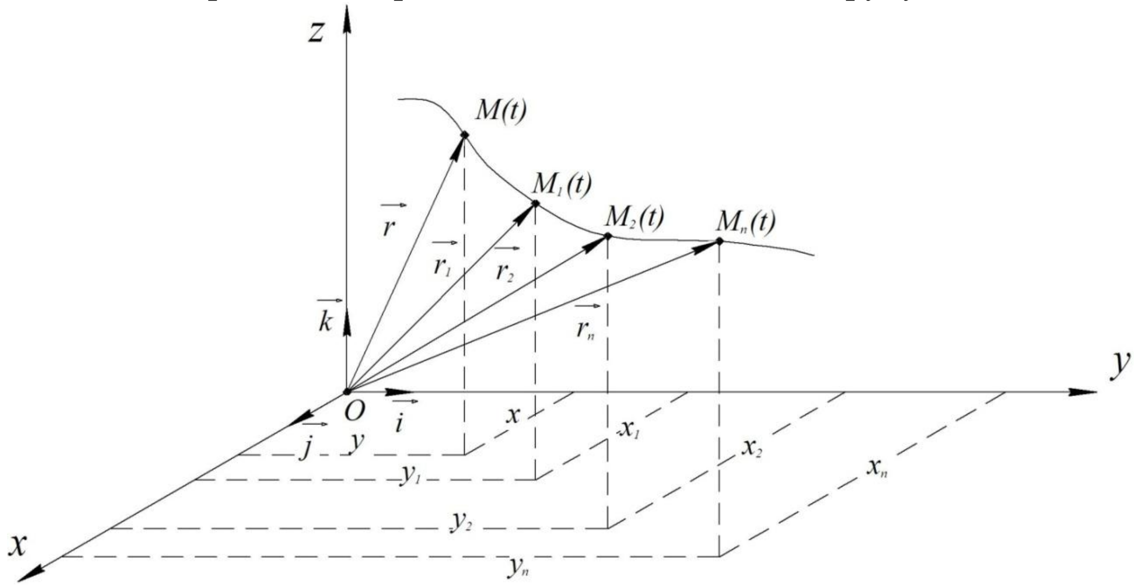
Друга задача кінематики – на підставі математичних способів задання руху об'єктів дослідження відносно даної системи відліку визначити всі кінематичні величини, які характеризують рух об'єктів в цілому, а також рух кожної з їх точок окремо (траєкторію, швидкість і прискорення).

Предмет дослідження в кінематиці – матеріальна точка і абсолютно тверде тіло (моделі матеріальних тіл такі як і в розділі статики).

2.1 Кінематика точки

Способи задання руху точки 1.

Векторний та координатний способи задання руху точки.



Точка M здійснює рух у просторі, що визначає система координат Oxyz, послідовно у визначені моменти часу проходить через деякі точки цього простору M, M_1, M_2, …, M_n, положення яких визначається радіус-вектором $\vec{r}$ або координатами x, y, z.

Кожному моменту часу t_i відповідають певні значення радіус-вектор $\vec{r}_i$ або координат x_i, y_i, z_i.

Отже радіус-вектор $\vec{r}$ та координати x, y, z є функціями часу t.

Тоді:

1. $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – кінематичне рівняння руху точки у векторній формі.

2. $\left.\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned}\right\}$ – кінематичні рівняння руху точки в декартових координатах.

Функція (1) визначає векторний спосіб задання руху точки, а функції (2) визначають координатний спосіб задання руху точки.

З математичної точки зору функції (1) і (2) як неперервні, однозначні і які можуть бути про диференційовані.

Співвідношення між векторним та координатним способами задання руху точки має наступний вигляд

$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$,

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори (орти) декартової системи координат.

Безперервна послідовність точок простору, через які проходить точка M при її русі, називається <u>траєкторією</u> руху цієї точки M.

Рівняння (2) являють собою рівняння траєкторії руху точки в параметричній формі. Параметром є час t. Щоб визначити рівняння траєкторії точки в координатній формі з рівнянь (2) необхідно виключити час.

<u>Годограф векторної функції по скалярному аргументу</u>

Годографом векторної функції по скалярному аргументу називається крива, яку креслять кінець радіус-вектора, який приймає значення векторної функції, при неперервній зміні скалярного аргументу.

Годограф радіус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ точки M є траєкторією цієї точки.

<u>Натуральний спосіб задання руху точки.</u>

<u>Натуральна система координат.</u>

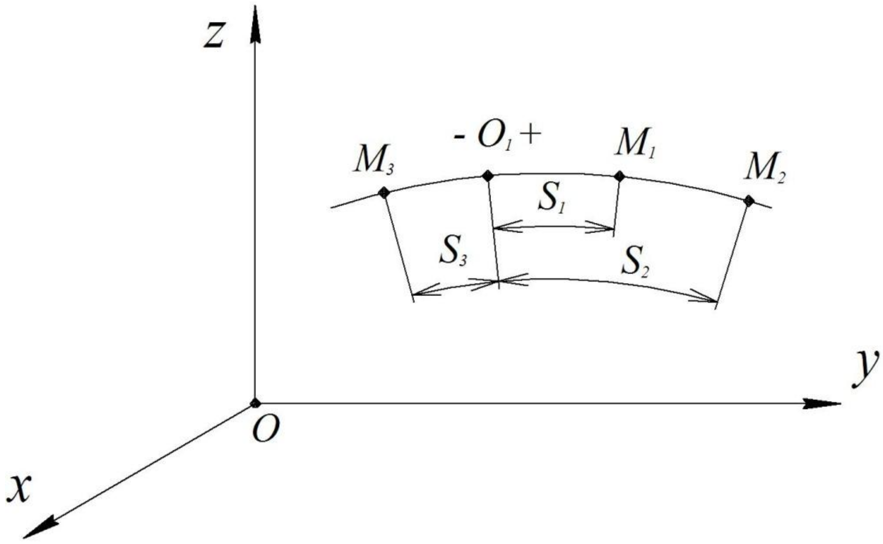
Рух точки буде задано натуральним способом, якщо буде відомо:

1) траєкторія руху точки;
2) напрям додатного та від’ємного відліку руху точки по траєкторії;
3) кінематичне рівняння руху точки по траєкторії, тобто

$S' = S'(t)$

де S' – дугова координата точки.

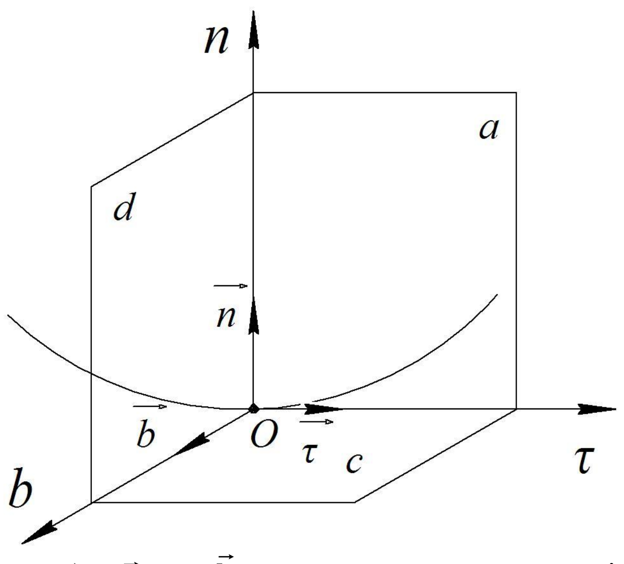
Розглянемо рух точки М, беручи початок відліку дугових координат в т. O_1, позначимо знаком «+» напрям додатного відліку координат, а знаком «–« напрям від’ємного відліку.



Дуги S_i' визначають координати точок M_i для даного моменту часу. Шлях дорівнює сумі абсолютних значень дугових координат.

В кожній точці кривої можна вказати три взаємно перпендикулярні напрями: напрям дотичної, головної нормалі та бінормалі.

Ці три взаємо перпендикулярні напрями утворюють натуральну систему координат з початком у т. М, тобто: дотичну вісь τ з одиничним вектором $\vec{\tau}$, що має напрям у бік додаткового відліку дуги, вісь головної нормалі n з одиничним вектором $\vec{n}$, що має напрям у бік угнутості кривої та бінормаль ну вісь b з одиничним вектором $\vec{b}$, що має напрям вектора векторного добутку $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$.



Так як вектори $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ та $\vec{b}$ утворюють праву трійку ортогональних векторів, то осі τ, n та b утворюють праву систему натуральних координат $M\tau nb$.

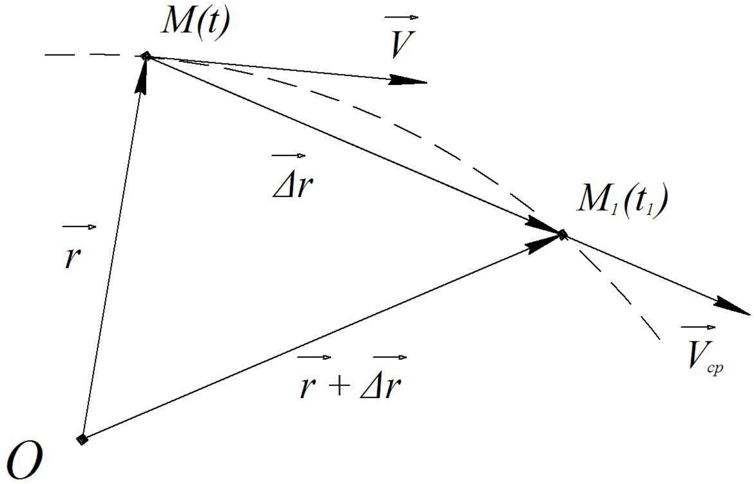
Площину, проведену через т. М перпендикулярно до бінормалі називають <u>стичною площиною </u>(площина a).

Площина, проведена через т. M перпендикулярно до дотичної – нормальна площина (площина d).

Площина, проведена через т. M перпендикулярно до головної нормалі– спрямна площина (площина c).

2.2 Швидкість і прискорення точки

Розглядаючи радіус-вектори у т. M як векторну функцію по скалярному аргументу, введемо поняття миттєвої швидкості та миттєвого прискорення.



Точки M і M_1 – положення точки, що рухається у просторі, в моменти часу t і $(t + \Delta t)$, де Δt – скінчений приріст часу при переміщенні точки з положення M в положення M_1. В момент часу t положення т. M визначається радіус-вектором $\vec{r} + \Delta\vec{r}$.

Очевидно, що $\Delta\vec{r} = \vec{M}\vec{M}_1$ – вектор переміщення точки за проміжок часу Δt.

Відношення вектора $\Delta\vec{r}$ до проміжку часу Δt називається вектором середньої швидкості точки за проміжок часу Δt:

$$\vec{\vartheta}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Напрям вектора $\vec{\vartheta}_{ср}$ співпадає з напрямом вектора переміщення Δr, тобто $\vec{\vartheta}_{ср}$ напрямлений вздовж хорди MM_1.

Вектором миттєвої швидкості точки або вектором швидкості в даний момент часу, називається границя відношення вектора переміщення точки $\Delta\vec{r}$ до проміжку часу, за який відбувається переміщення, коли проміжок часу прямує до нуля, тобто

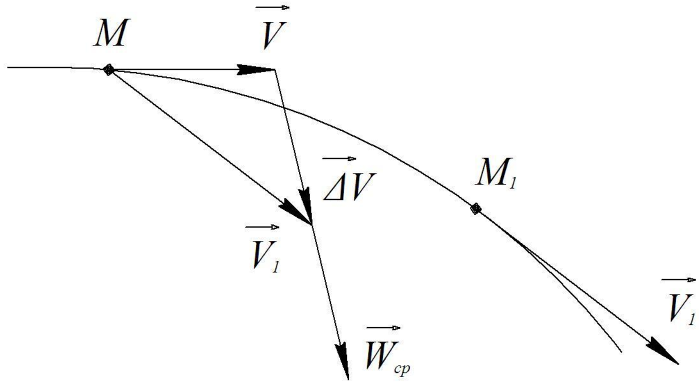
$$\vec{\vartheta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Вектор $\vec{\vartheta}$ прикладений до точки, що рухається, і напрямлений вздовж дотичної до траєкторії в бік руху точки (так як границею хорди MM_1 є дотична).

Тобто, **вектор миттєвої швидкості точки дорівнює першій похідній за часом від радіуса-вектора точки.**

Вектор швидкості точки напрямлений вздовж дотичної до траєкторії точки у бік руху точки.

Вектор швидкості точки характеризує швидкість зміни просторового положення точки з часом.



т. M і M_1 – положення точки, що рухається у просторі, в момент часу t і $t+\Delta t$;

$\vec{\vartheta}$ і $\vec{\vartheta}_1$ – вектори швидкості точки в положеннях M і M_1.

Перенесемо вектор $\vec{\vartheta}_1$ в т. M і знайдемо вектор приросту швидкості точки $\Delta\vec{\vartheta}_1$ за проміжок часу Δt.

$\vec{W}_{cp} = \dfrac{\Delta\vec{\vartheta}}{\Delta t}$ – відношення вектора приросту швидкості $\Delta\vec{\vartheta}$ до проміжку часу Δt – середнє прискорення точки за проміжок часу Δt.

Напрям вектора $\vec{W}_{cp}$ співпадає з напрямом вектора $\Delta\vec{\vartheta}$, тобто вектор $\vec{W}_{cp}$ напрямлений завжди у бік угнутості траєкторії.

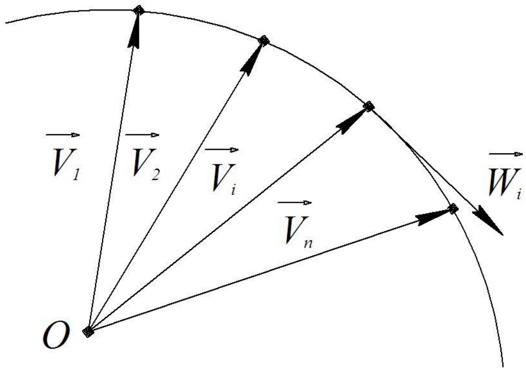
<u>Вектором миттєвого прискорення точки</u> називається границя відношення вектора приросту швидкості точки $\Delta\vec{\vartheta}$ до проміжку часу, за який відбувається цей приріст, коли проміжок часу прямує до нуля.

Тобто

$$\vec{W} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\vartheta}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Вектор $\vec{W}$, прикладений до точки, що рухається. Лінія дії вектора $\vec{W}$ напрямлена вздовж дотичної до годографа вектора швидкості.

Вектор прискорення точки дорівнює першій похідній за часом від вектора швидкості точки $\vec{\vartheta}$ або другій похідній за часом від радіус-вектора точки $\vec{r}$.



Вектор прискорення точки характеризує швидкість зміни вектора швидкості з часом.

<u>Визначення швидкості і прискорення точки в декартовій системі координат</u>

З визначення швидкості точки (з рівняння вектора швидкості)

$$\vec{\vartheta} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k},$$

де $\dot{x} = \vartheta_x = \dfrac{dx}{dt}$; $\dot{y} = \vartheta_y = \dfrac{dy}{dt}$; $\dot{z} = \vartheta_z = \dfrac{dz}{dt}$, проекції вектора швидкості точки на осі декартової системи координат.

Числове значення (модуль) вектора швидкості точки визначається за формулою:

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,;$$

Напрям вектора швидкості точки відносно декартової системи координат визначається за допомогою напрямку косинусів

$$\cos(\widehat{\vartheta, x}) = \frac{\vartheta_x}{\vartheta} = \frac{\dot{x}}{\vartheta};\ \cos(\widehat{\vartheta, y}) = \frac{\vartheta_y}{\vartheta} = \frac{\dot{y}}{\vartheta};\ \cos(\widehat{\vartheta, z}) = \frac{\vartheta_z}{\vartheta} = \frac{\dot{z}}{\vartheta}.$$

Отримані рівності визначають величину та напрям вектора швидкості точки при координатному способі задання руху точки.

З рівняння вектора прискорення точки при векторному способі задання її руху:

$$\vec{W} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\cdot\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

де $\ddot{x} = W_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$; $\ddot{y} = W_y = \dfrac{d^2y}{dt^2}$; $\ddot{z} = W_z = \dfrac{d^2z}{dt^2}$,

проекції вектора прискорення точки на осі декартової системи координат.

Проекції вектора прискорення точки на осі декартової системи координат дорівнюють другим похідним від відповідних координат точки, що визначаються функціями координат положення точки за часом.

Числове значення (модуль) вектора прискорення точки визначається за формулою

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

Напрям вектора прискорення точки відносно декартової системи координат, визначається за допомогою напрямних косинусів:

$$\cos(\vec{W}, \hat{x}) = \frac{W_x}{W} = \frac{\ddot{x}}{W};\ \cos(\vec{W}, \hat{y}) = \frac{W_y}{W} = \frac{\ddot{y}}{W};\ \cos(\vec{W}, \hat{z}) = \frac{W_z}{W} = \frac{\ddot{z}}{W}.$$

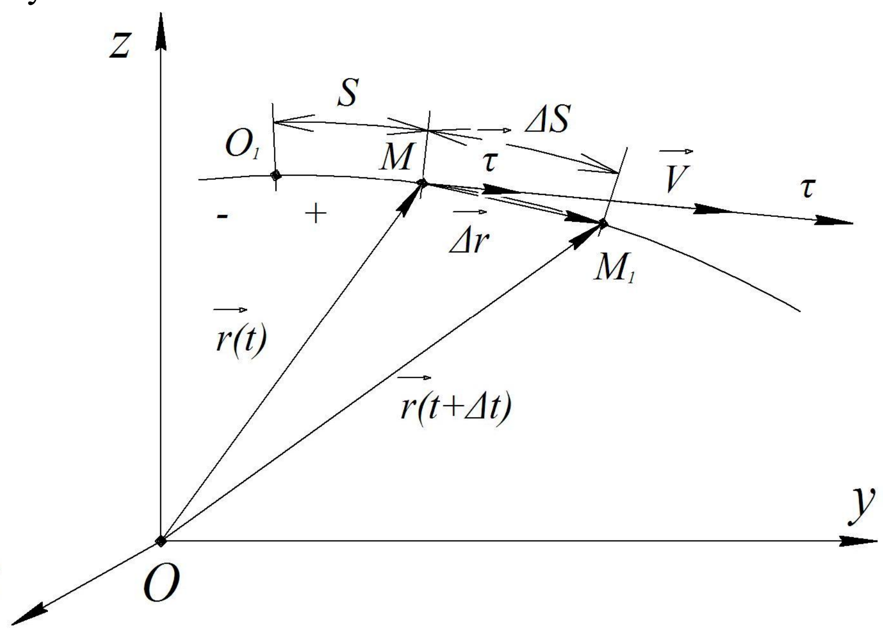
Отримані рівності визначають величину та напрям вектора прискорення точки при координатному способі задання руху точки.

Одиниця швидкості точки – $\left[\frac{м}{с}\right]$ – система СІ

Одиниця прискорення точки – $\left[\frac{м}{с^2}\right]$ – система СІ

<u>Визначення швидкості і прискорення точки в натуральній системі координат.</u>

а) <u>визначення вектора швидкості точки</u> при натуральному способі задання її руху



Точка рухається по певній траєкторії. В момент часу t точка приймає положення, що визначається радіус-вектором $\vec{r}(t)$, відносно декартової системи координат O_{xyz} та дуговою координатою S відносно початку відліку на траєкторії O_1. В момент часу $t + \Delta t$ точка приймає положення M_1, що визначається радіус-вектором $\vec{r}(t + \Delta t)$ та дуговою координатою $S + \Delta S$.

Вектор швидкості точки визначається як перша похідна від радіус-вектора точки за часом

$$\vec{\vartheta} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Так як радіус-вектор точки при її русі по траєкторії є складною функцією часу

$$\vec{r} = \vec{r}(S), \quad S = S(t),$$

$$\text{то } \vec{\vartheta} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS}\frac{dS}{dt}, \qquad (2.1)$$

де вектор $\frac{d\vec{r}}{dS} = \lim_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta S} = \vec{\tau}$ – одиничний вектор (орт) дотичної осі τ натуральної системи координат.

Тоді формула (2.1) набуває вигляду

$$\vec{\vartheta} = \frac{dS}{dt} \cdot \vec{\tau}$$

З останнього виразу можна записати

$$\frac{dS'}{dt} = \pm\vartheta_{\tau}, \; \vec{\vartheta} = \vartheta_{\tau} \cdot \vec{\tau}$$

тобто $\frac{dS'}{dt}$ – це проекція вектора швидкості точки $\vec{\vartheta}$ на дотичну вісь натуральної системи координат.

Модуль вектора швидкості точки при натуральному способі задання її руху визначається за формулою

$$\vartheta = \left|\frac{dS}{dt}\right|.$$

б) визначення вектора прискорення точки при натуральному способі задання її руху

Вектор прискорення визначається як перша похідна швидкості по часу

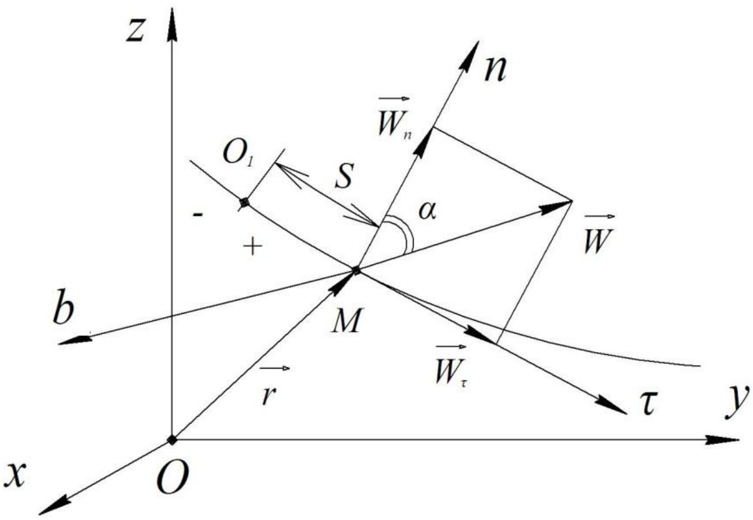
$$\vec{W} = \frac{d\vec{\vartheta}}{dt};$$

Враховуючи, що $\vec{\vartheta} = \vartheta_{\tau} \cdot \vec{\tau}$ можна записати

$$\vec{W} = \frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = \frac{d(\vartheta_{\tau} \cdot \vec{\tau})}{dt} = \frac{d\vartheta_{\tau}}{dt} \cdot \vec{\tau} + \vartheta\frac{d\vec{\tau}}{dt} \qquad (2.2)$$

Розглянемо похідну $\frac{d\tau}{dt}$. Одиничний вектор $\vec{\tau}$ дотичної осі натуральної системи координат при русі точки по траєкторії є складною функцією часу

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(S), \; S = S(t).$$



Тоді похідна $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dS'}\frac{dS'}{dt}$; $\frac{dS'}{dt} = \vartheta$.

Розглянемо похідну $\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \tau\frac{d\varphi}{dS}\cdot\vec{n}$,

де $\tau = 1$ – модуль одиничного вектора на осі τ;
$\vec{n}$ – одиничний вектор головної нормалі натуральної системи координат.

Розглянемо похідну $\frac{d\varphi}{dS} = \lim\limits_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta\varphi}{|\Delta S|} = k$

Оскільки границя відношення кута суміжності дуги до її довжини, якщо довжина дуги прямує до нуля, дорівнює кривизні k кривої у даній точці.

Кривизна кривої у даній точці $k = \frac{1}{\rho}$, тобто кривизна це величина, обернена до радіуса кривизни ρ кривої у даній точці.

Тоді $\frac{d\varphi}{dS} = \frac{1}{\rho}$; $\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \frac{1}{\rho}\cdot\vec{n}$; $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{\vartheta}{\rho}\vec{n}$.

З урахуванням останнього виразу рівняння (2.2) можна записати у вигляді

$$\vec{W} = \frac{d\vartheta_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{\vartheta^2}{\rho}\vec{n} = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{\vartheta^2}{\rho}\vec{n}$$

$$\vec{W} = \vec{W}_\tau + \vec{W}_n$$

З останнього виразу випливає, що **вектор прискорення точки при натуральному способі задання її руху визначається як геометрична сума двох векторів – <u>вектора дотичного (тангенціального) прискорення</u> $\vec{W}_\tau$ <u>та вектора нормального прискорення</u> $\vec{W}_n$.**

Вектори $\vec{W}$, $\vec{W}_\tau$ та $\vec{W}_n$ знаходяться у стичній площині.

Вектор дотичного (тангенціального) прискорення

$$\vec{W}_\tau = \frac{d\vartheta_\tau}{dt}\cdot\vec{\tau} = \frac{d^2S}{dt^2}\cdot\vec{\tau}$$

характеризує зміну вектора швидкості при її русі по траєкторії за величиною.

Похідна $\frac{d\vartheta_\tau}{dt}$ визначає проекцію дотичного прискорення на дотичну вісь τ, тобто

$$\frac{d\vartheta_\tau}{dt} = \pm W_\tau$$

$$W_\tau = \vec{\tau} \cdot \vec{W} = \frac{\vec{\vartheta} \cdot \vec{W}}{\vartheta} = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y} + \dot{z} \cdot \ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}};$$

Модуль вектора дотичного прискорення $W_\tau = \left| \frac{d\vartheta_\tau}{dt} \right|$

Якщо величина вектора швидкості та величина вектора дотичного прискорення точки мають один і той же знак, то модуль вектора швидкості точки зростає і рух точки буде прискореним.

Якщо величина вектора швидкості та величина вектора дотичного прискорення точки мають різні знаки, то модуль вектора швидкості точки зменшується і рух точки буде сповільненим.

При $W_\tau = 0$ модуль вектора швидкості точки буде сталим, а рух точки рівномірним.

Вектор нормального прискорення $\vec{W}_n = \frac{\vartheta^2}{\rho}\vec{n}$ характеризує зміну вектора швидкості точки при її русі по траєкторії за напрямом.

Модуль вектора нормального прискорення визначається за формулою

$$W_n = \frac{\vartheta^2}{\rho},$$

де ρ – радіус кривизни траєкторії.

Модуль вектора прискорення точки при натуральному способі задання її руху визначається наступним чином

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\vartheta_\tau}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta^2}{\rho}\right)^2}.$$

Напрям вектора $\vec{W}$ відносно осей τ та n визначається за допомогою напрямних косинусів

$$\cos(\vec{W}, \vec{\tau}) = \frac{W_\tau}{W}; \ \cos(\vec{W}, \vec{n}) = \frac{W_n}{W}.$$

Напрям вектора $\vec{W}$ визначається за допомогою кута α

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{W_\tau}{W_n}.$$

<u>Зв’язок між координатним і натуральним способом задання руху точки.</u>

Перехід від координат6ного (декартові координати) способу задання руху точки до натурального здійснюється за формулою

$$S = \pm \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt,$$

де $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$; $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$; $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ – перші похідні від відповідних координат точок за часом.

Знак «+» або «-» необхідно ставити в залежності від вибору напряму додатного відліку дугової координати S; якщо рух точки починається у бік додатного відліку S, то необхідно ставити знак «+», в протилежному разі – «-».

Рівномірний рух точки. Якщо величина швидкості точки при її русі залишається сталою $(\vartheta = \text{const})$, то рух точки називається рівномірним.

Кінематичний закон рівномірного руху точки має вигляд

$$S = S_0 \pm \vartheta \cdot t.$$

Знак «+» у випадку, коли точка рухається у бік додатного напряму руху, в протилежному – «-«.

Рівнозмінний рух точки – величина дотичного прискорення при русі точки залишається сталою, тобто $W_\tau = \text{const}$.

Кінематичний закон зміни швидкості при рівнозмінному русі точки

$$\vartheta = \vartheta_0 \pm W_\tau t.$$

Кінематичний закон рівнозмінного руху точки

$$S = S_0 + \vartheta_0 \cdot t \pm \frac{W_\tau t^2}{2}.$$

2.3 Кінематика твердого тіла

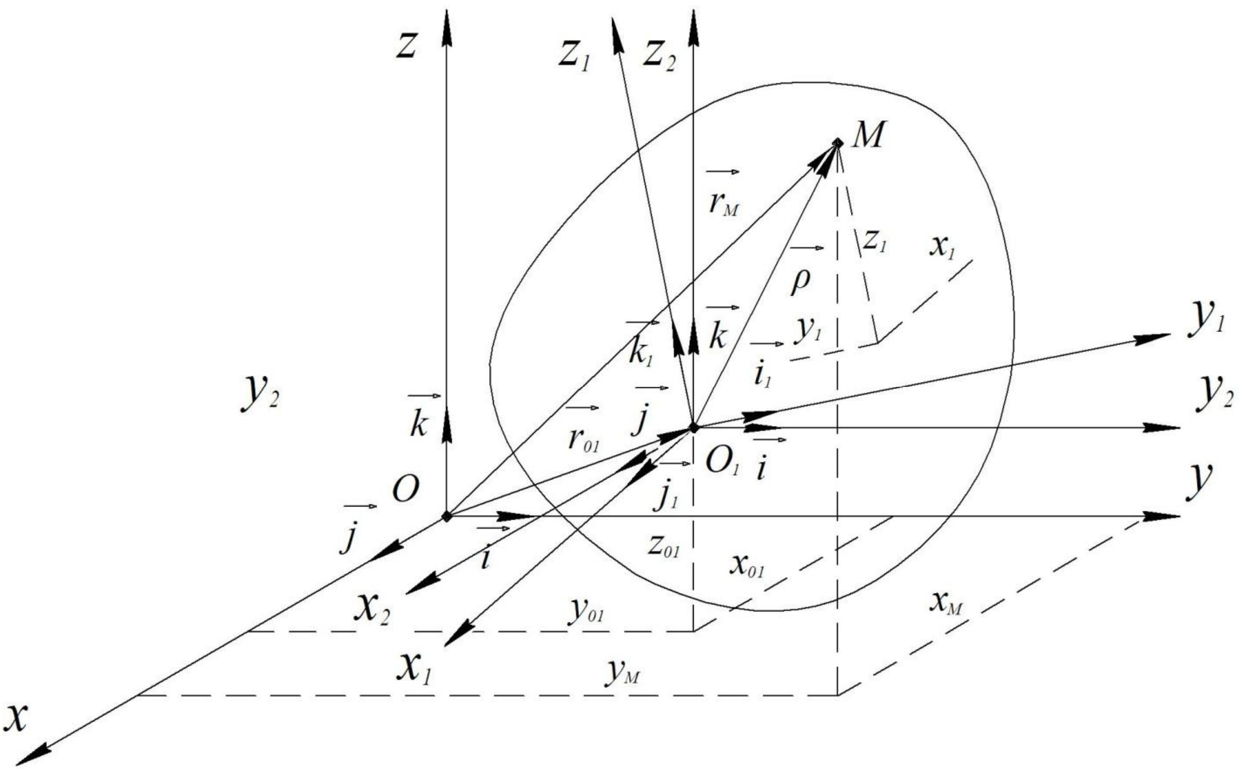
Дві основні задачі кінематики твердого тіла:

1 – встановлення способів задання руху твердого тіла і вивчення кінематичних характеристик, притаманних тілу;

2 – визначення руху точок твердого тіла, тобто визначення траєкторій, швидкостей і прискорень окремих точок тіла.

Задання (визначення) руху твердого тіла. Визначити (задати) положення вільного твердого тіла у будь-який момент часу відносно даної системи відліку – це значить мати спосіб визначення координат кожної його точки в даній системі у будь-який момент часу.

Нехай вільне тверде тіло рухається відносно нерухомої системи відліку (нерухомої системи координат $Oxyz$).



O_1 – довільна точка тіла. Візьмемо т. O_1 за полюс і зв'яжемо з цією точкою початок двох систем координат $O_1x_2y_2z_2$ і $O_1x_1y_1z_1$, що рухаються разом з тілом.

Перша система $O_1x_2y_2z_2$, рухаючись разом з тілом, залишається завжди паралельною до нерухомої системи $Oxyz$.

Друга система координат $O_1x_1y_1z_1$, здійснюючи рух разом з тілом, у будь-який момент часу займає довільне положення відносно системи координат $O_1x_2y_2z_2$ і відносно системи $Oxyz$.

Положення довільної точки M твердого тіла в нерухомій системі координат $Oxyz$ визначається радіус-вектором $\vec{r}_м$, а в рухомій системі координат $O_1x_1y_1z_1$ – радіус-вектором $\vec{\rho}$. Положення полюса O_1 в нерухомій системі $Oxyz$ визначається радіус-вектором $\vec{r}_{o_1}$.

Тоді з рисунка

$$\vec{r}_м = \vec{r}_{o_1} + \vec{\rho},$$

або $\vec{r}_м = \vec{r}_{o_1} + x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1,$ (2.3)

де x_1, y_1, z_1 – сталі величини, такі як система координат $Ox_1y_1z_1$ рухається разом з тілом.

$\vec{r}_{o_1}, \vec{i}_1, \vec{z}_1$ – змінні величини, функції часу.

Проецируючи рівність (2.3) на осі нерухомої системи координат, маємо:

$$x_м = x_{o_1} + x_1 \cdot a_{11} + y_1 \cdot a_{12} + z_1 \cdot a_{13};$$

$$y_м = y_{o_1} + x_1 \cdot a_{21} + y_1 \cdot a_{22} + z_1 \cdot a_{23}; \quad (2.4)$$

$$z_м = z_{o_1} + x_1 \cdot a_{31} + y_1 \cdot a_{32} + z_1 \cdot a_{33}$$

де $x_{o_1}, y_{o_1}, z_{o_1}$ – координати полюса O_1 в системі $Oxyz$;

x_1, y_1, z_1 – координати точки М в системі $O_1x_1y_1z_1$;

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ – косинуси кутів (напрямні косинуси) між осями координат $O_1x_2y_2z_2$ і $O_1x_1y_1z_1$.

$$\vec{i}_1 \cdot \vec{i} = \cos(x_1, x_2) = a_{11};\ \vec{i}_1 \cdot \vec{j} = \cos(x_1, y_2) = a_{12};\ \vec{i}_1 \cdot \vec{k}_2 = \cos(x_1, z_2) = a_{13};$$

$$\vec{j}_1 \cdot \vec{i} = \cos(y_1, x_2) = a_{21};\ \vec{j}_1 \cdot \vec{j} = \cos(y_1, y_2) = a_{22};\ \vec{i}_1 \cdot \vec{k}_2 = \cos(y_1, z_2) = a_{23}$$

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{i} = \cos(z_1, x_2) = a_{31};\ k_1 \cdot \vec{j} = \cos(z_1 \cdot y_2) = a_{23};\ \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 = \cos(z_1 \cdot z_2) = a_{33}$$

Рівняння (2.4) містять три сталих координати x_1, y_1, z_1 і дванадцять функцій часу: три координати полюса $x_{o_1}, y_{o_1}, z_{o_1}$ і дев’ять напрямлених косинусів a_{mn} $(m, n = 1,2,3)$.

З наведених дев’яти косинусів незалежними є тільки три, так як між ними внаслідок ортогональності осей координат існують такі залежності:

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1; \quad a_{11} \cdot a_{13} + a_{21} \cdot a_{23} + a_{31} \cdot a_{33} = 0;$$

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1; \quad a_{11} \cdot a_{12} + a_{21} \cdot a_{22} + a_{31} \cdot a_{32} = 0;$$

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1; \quad a_{12} \cdot a_{13} + a_{22} \cdot a_{23} + a_{32} \cdot a_{33} = 0.$$

Таким чином, положення довільної точки вільного твердого тіла відносно нерухомої системи відміну і тим самим положення тіла відносно цієї системи визначається шістьма незалежними параметрами – трьома координатами точки O_1 і трьома напрямленими косинусами. т. O_1 називається полюсом.

Рівняння (2.4) називаються кінематичними рівняннями руху вільного твердого тіла.

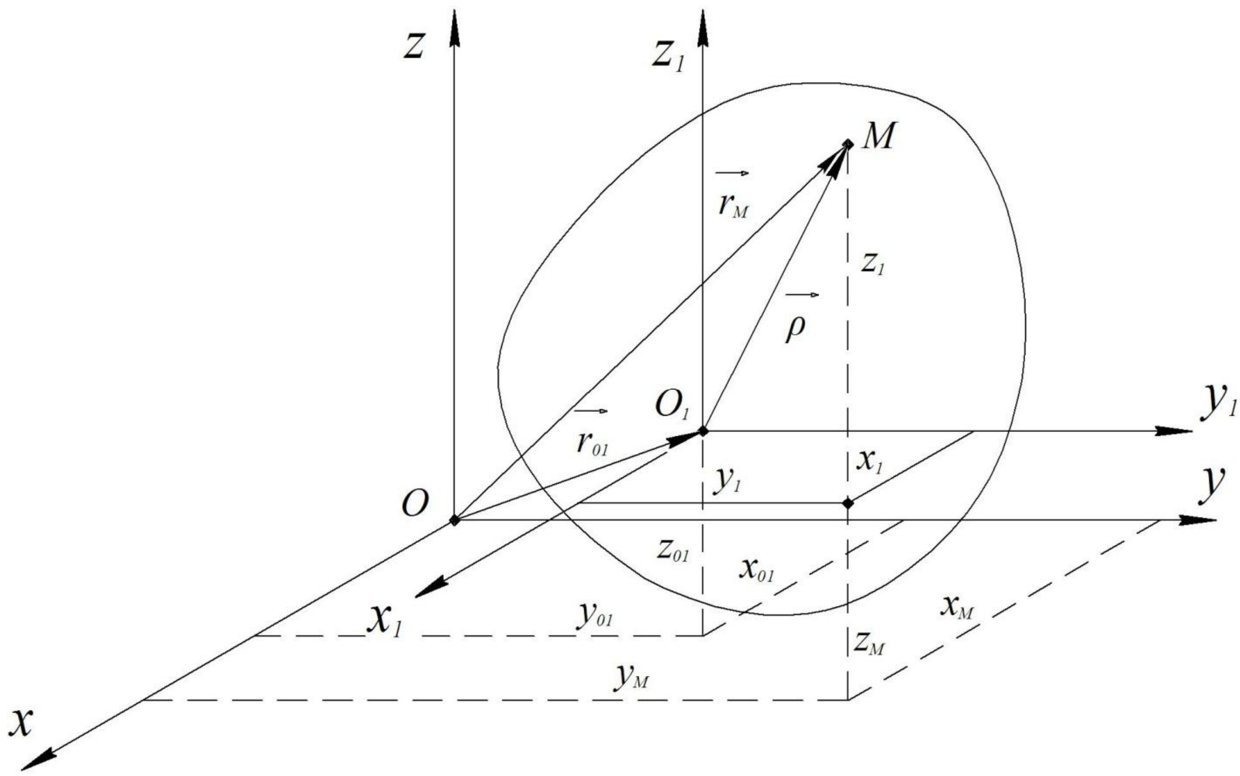
Кількість незалежних між собою параметрів, які однозначно визначають положення вільного твердого тіла, тобто положення кожної його точки відносно системи відліку, називається кількістю ступенів вільності тіла.

З розглянутого вище випливає, що вільне тверде тіло має шість ступенів вільності.

2.4 Поступальний рух твердого тіла

Кінематичні рівняння поступального руху твердого тіла.

Поступальним рухом твердого тіла називається такий рух, при якому довільна пряма, проведена в тілі, залишається при русі тіла паралельною своєму початковому положенню.



Нехай тверде тіло рухається поступально відносно нерухомої системи координат $Oxyz$. Візьмемо в тілі довільну точку O_1 (полюс) і зв'яжемо з цією точкою системи координат $O_1x_1y_1z_1$, що рухається разом з тілом.

Так як тіло рухається поступально, то осі координат $O_1x_1y_1z_1$, будучи у початковий момент руху паралельними осями координат нерухомої системи $Oxyz$, залишаються такими в будь-який момент часу руху тіла.

Координати довільної точки М твердого тіла, що рухається поступально і положення самого тіла відносно нерухомої системи координат $Oxyz$ визначаються за формулами.

$$x_м = x_{o_1} + x_1 \cdot a_{11} + y_1 \cdot a_{12} + z_1 \cdot a_{13} = x_{o_1} + x_1;$$

$$y_м = y_{o_1} + x_1 \cdot a_{21} + y_1 \cdot a_{22} + z_1 \cdot a_{23} = y_{o_1} + y_1;$$

$$z_м = z_{o_1} + x_1 \cdot a_{31} + y_1 \cdot a_{32} + z_1 \cdot a_{33} = z_{o_1} + z_1;$$

Так як $\quad a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1;$

$$a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0;$$

$$x_м = x_{o_1} + x_1;$$

$$y_м = y_{o_1} + y_1; \qquad (2.5)$$

$$z_м = z_{o_1} + z_1;$$

В формулах (2.5) функції $O_1x_1y_1z_1$ – сталі величини, а $x_{o_1}, y_{o_1}, z_{o_1}$ – функції часу, тобто $x_{o_1} = f_1(t)$; $y_{o_1} = f_2(t)$; $z_{o_1} = f_3(t)$

З рисунку $\vec{r}_{o_1} = \vec{r}_{o_1}(t)$.

Отримані рівняння називаються кінематичними рівняннями поступального руху твердого тіла.

Поступальний рух твердого тіла визначається трьома незалежними параметрами – координатами довільної точки O_1 (полюса).

Тіло, що здійснює поступальний рух має три ступені вільності.

Траєкторії, швидкість і прискорення точок твердого тіла при поступальному русі.

Траєкторії точок тіла при поступальному русі однакові і утворюються одна з одної шляхом паралельного зміщення.

Швидкість довільної точки М твердого тіла, що рухається поступально

$$\vec{\vartheta}_м = \frac{d\vec{r}_м}{dt} = \frac{d(\vec{r}_{o_1} + \vec{\rho})}{dt} = \frac{d\vec{r}_{o_1}}{dt} = \vec{\vartheta}_{o_1}$$

$$\vec{\rho} = const\,; \ \underline{\vec{\vartheta}_м = \vec{\vartheta}_{o_1}}$$

Прискорення довільної точки М

$$\vec{W}_м = \frac{d\vec{\vartheta}_м}{dt} = \frac{d\vec{\vartheta}_{o_1}}{dt} = \vec{W}_{o_1}$$

$$\underline{\vec{W}_м = \vec{W}_{o_1}}$$

Поступальний рух твердого тіла повністю характеризується рухом однієї його точки, за яку беруть O_1 – початок рухомої системи координат.

Траєкторія, швидкість і прискорення полюса O_1 є траєкторія, швидкість і прискоренням твердого тіла, що рухається поступально.

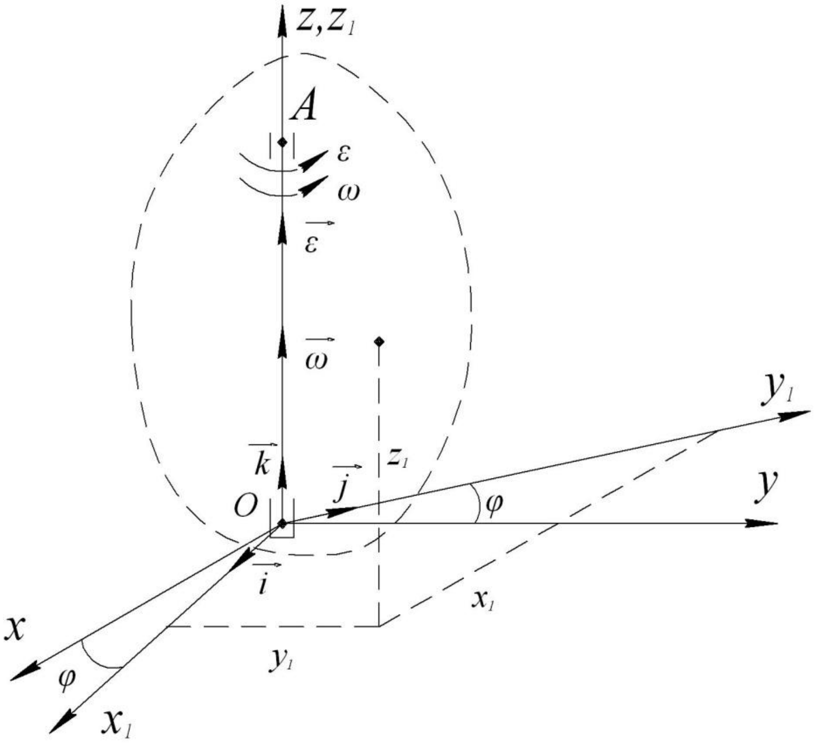
Всі закономірності характерні для руху матеріальної точки є справедливими для поступального руху твердого тіла.

2.5 Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, при якому будь-які дві точки тіла залишаються нерухомими. Пряма, проведена через ці дві нерухомі точки, називається нерухомою віссю обертання.

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі. Візьмемо на осі обертання дві точки О і А і введемо нерухому систему координат Oxyz з початком в точці О і віссю Z, що проходить через т. А. Побудуємо ще рухому систему координат $O_1x_1y_1z_1$ незмінно зв'язану з твердим тілом так, що вісь Oz_1 збігається з віссю обертання Oz.

На підставі кінематичних рівнянь руху вільного твердого тіла координати довільної точки М і отже положення самого тіла відносно нерухомої системи координат Oxyz будуть визначатися за формулами



$$x_M = x_{01} + x_1 a_{11} + y_1 a_{12} + z_1 a_{13} = x_1 a_{11} + y_1 a_{12};$$
$$y_M = y_{01} + x_1 a_{21} + y_1 a_{22} + z_1 a_{23} = x_1 a_{21} + y_1 a_{22}; \quad (2.6)$$
$$z_M = z_{01} + x_1 a_{31} + y_1 a_{32} + z_1 a_{333} = z_1;$$

Так як $x_{01} = y_{01} = z_{01} = 0$;

$a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$; $a_{33} = 1$;

$a_{12} = -\sin\varphi$; $a_{21} = \sin\varphi$; $a_{11} = a_{22} = \cos\varphi$;

В формулах (2.6) $x_{1,} y_1, z_1$ - сталі величини;

$a_{12,} a_{21}, a_{11}, a_{22}$ - функції часу, так як

$$\varphi = \varphi(t) \quad (2.7)$$

Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі, визначається одним параметром – кутом повороту φ.

Тіло, що здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі має один ступінь вільності.

Функція (2.7) називається кінематичним рівнянням обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі або законом обертального руху тіла.

φ - кут повороту твердого тіла.

Напрям кута повороту φ - якщо з боку додатного напряму осі Oz перехід від нерухомої до рухомої системи координат відбувається проти руху стрілки годинника, то кут повороту φ вважається додатнім («+»), у противному випадку від'ємний («-»).

Кут φ вимірюється в радіанах.

<u>2.6 Кутова швидкість і кутове прискорення твердого тіла</u>

<u>Кутова швидкість</u> - фізична величина, характеризує зміну кута повороту φ з часом.

<u>Кутова швидкість</u> - це вектор, напрямлений по осі обертання в той бік, з якого обертання тіла здійснюється проти руху стрілки годинника:

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{k}$$

Величина вектора кутової швидкості дорівнює границі відношення приросту кута повороту $\Delta\varphi$ до проміжку часу Δt, протягом якого відбувся цей поворот при Δt, що прямує до нуля:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Кутова швидкість за величиною дорівнює першій похідній за часом від кута повороту φ.

В системі СІ кутова швидкість має розмірність $\left[\frac{рад}{С}\right], \left[\frac{1}{С}\right], \left[c^{-1}\right]$;

У техніці кутову швидкість часто визначають за формулою

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}; \qquad \boxed{\vec{\omega} = \frac{\pi n}{30}}$$

де n – число обертів тіла за хвилину: [n], об/хв.

<u>Кутове прискорення</u> – фізична величина, що характеризує зміну кутової швидкості з часом.

Кутове прискорення тіла – це вектор напрямлений по дотичній до годографа вектора кутової швидкості, тобто по осі обертання твердого тіла:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{k}$$

Величина вектора кутового прискорення дорівнює границі відношення приросту кутової швидкості $\Delta\omega$ до проміжку часу Δt, протягом якого відбувся цей приріст при Δt, що прямує до нуля:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi};$$

Кутове прискорення твердого тіла дорівнює першій похідній від кутової швидкості за часом, або другій похідній від кута повороту тіла за часом.

В системі СІ кутове прискорення має розмірність $\left[\frac{рад}{С^2}\right], \left[\frac{1}{С^2}\right], \left[c^{-2}\right]$;

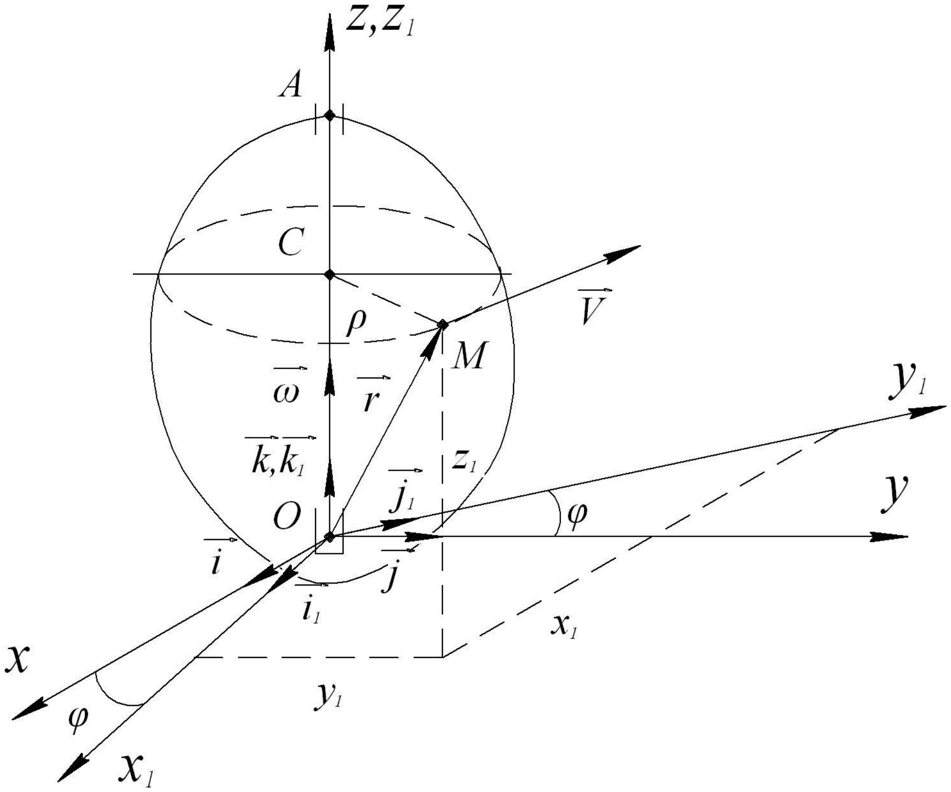
Якщо вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ має напрям у той бік, що і вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$, тобто $\dot{\varphi}$ і $\ddot{\varphi}$ мають однакові знаки, то обертальний рух твердого тіла буде прискореним, якщо вектори $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{\omega}$ мають різні напрями, тобто $\dot{\varphi}$ і $\ddot{\varphi}$ мають різні знаки, то рух твердого тіла буде сповільненим.

Кутова швидкість ω і кутове прискорення ε твердого тіла часто зображують у вигляді кутових стрілок.

Кутова стрілка кутової швидкості ω показує напрям прирості кута повороту φ, тобто напрям обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

Кутова стрілка кутового прискорення ε показує напрям приросту кутової швидкості.

<u>Визначення швидкості точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі.</u>



Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі Oz з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$.

O xyz - нерухома система координат;

$Ox_1y_1z_1$ – рухома система координат незмінно зв'язана з тілом, що обертається

M – довільна точка твердого тіла

Радіус-вектор r точки M запишемо у вигляді:

$$\vec{r} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 \tag{2.8}$$

де x_1, y_1, z_1 – координати точки M в системі $Ox_1y_1z_1$ (сталі величини)

$\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ - одиничні вектори осей x_1, y_1, z_1 (функції часу).

Швидкість точки M за визначенням і на підставі рівняння:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt};$$

Вектор $\vec{k}_1$ нерухомий, тому $\frac{d\vec{k}}{dt} = 0$. Остання рівність набуває вигляду

$$\vec{v} = x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} \qquad (2.9)$$

Розглянемо похідні $\frac{d\vec{i}_1}{dt}$ і $\frac{d\vec{j}_1}{dt}$

З приведеного рисунка:

$$\vec{i}_1 = \vec{i} \cdot \cos\varphi + \vec{j} \sin\varphi;$$

$$\vec{j}_1 = -\vec{i} \cdot \sin\varphi + \vec{j} \cos\varphi,$$

де $\vec{i}, i, \vec{j}$ - одиничні вектори нерухомої системи $Oxyz$.

Про диференціюємо останні рівності по часу:

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \frac{d\left(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi\right)}{dt} = -\vec{i}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \vec{j}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} =$$

$$= \frac{d\varphi}{dt}\left(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi\right) = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\vec{j}_1 = \omega\cdot\vec{j}_1;$$

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} = \frac{d\left(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi\right)}{dt} = -\vec{i}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} - \vec{j}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} =$$

$$= -\frac{d\varphi}{dt}\left(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi\right) = -\frac{d\varphi}{dt}\cdot\vec{i}_1 = -\omega\cdot\vec{i}_1;$$

Значення $\frac{d\vec{i}_1}{dt}$ і $\frac{d\vec{j}_1}{dt}$ підставляємо в формулу (2.9)

$$\vec{v} = x_1\cdot\omega\cdot\vec{j}_1 - y_1\cdot\omega\cdot\vec{i}$$

З останнього виразу випливає, що проекції вектора швидкості довільної точки М твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, на рухомі осі координат $Ox_1y_1z_1$ відповідно дорівнюють:

$$V_{x1} = -y_1\cdot\omega\ ;\ \ V_{y_1} = x_1\cdot\omega;\ \ V_{z1} = 0;$$

Розглянемо векторний добуток $\vec{\omega}\times\vec{r}$ і визначимо його проекції на осі рухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$.

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = -y_1\omega\vec{i}_1 + x_1\omega\vec{j}.$$

Так як пропозиції векторів $\vec{v}$ і $\vec{\omega}\times\vec{r}$ однакові, то

$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}}$ - формула Ейлера

Швидкість довільної точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості тіла на радіус – вектор цієї точки.

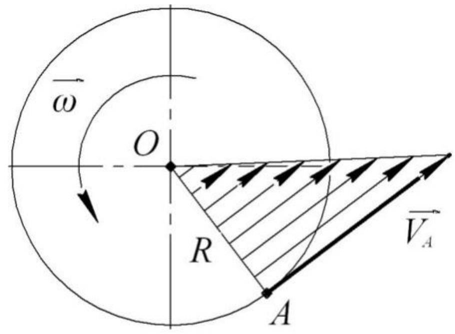
На підставі визначення векторного добутку, вектор швидкості довільної точки М напрямлений вздовж перпендикуляра до площини, що утворюють вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$ у бік обертання твердого тіла, тобто по дотичній до кола, по якому рухається точки М при обертанні тіла.

Величина (модуль) вектора швидкості точки М дорівнює

$$\nu = \omega \cdot r \cdot \sin\left(\vec{\omega}\hat{\ }\vec{r}\right) = \omega \cdot \rho \ ,$$

де ρ – найкоротша відстань від т. М до осі обертання (радіус обертання точки М).

Тобто, швидкості точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі розподіляють в тілі вздовж радіуса обертання по лінійному закону,
тобто при $\rho = 0 \Rightarrow \nu = \nu_0 = 0$,
а при $\rho = R \Rightarrow \nu = \omega \cdot R$;



Визначення прискорення точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

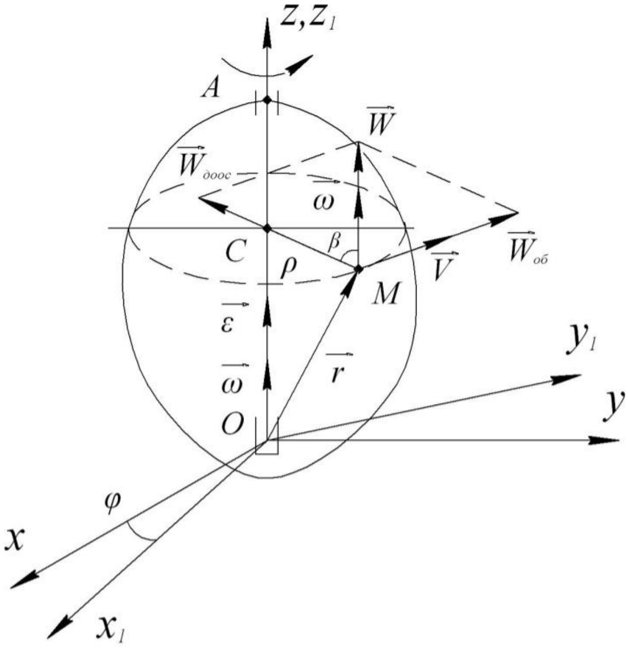
Згідно визначення прискорення і на підставі формули Ейлера прискорення довільної точки М твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі визначається за формулами

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Так як $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ і $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, то остаточно матиме

$$\vec{w} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{w}^{об} + \vec{w}^{доос}.$$

Прискорення довільної точки М дорівнює геометричній прогресії т. М – $w^{об}$ і до осьового прискорення точки М – $w^{доос}$.



Вектор обертального прискорення $\vec{w}_{об} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ І напрямлений до площини, що утворюють вектори у той бік, звідки найкоротший поворот від вектора $\vec{\varepsilon}$ до вектора $\vec{r}$ видно таким, який здійснюється проти руху годинникової стрілки. Вектор $\vec{w}_{об}$ напрямлений так, як вектор швидкості $\vec{v}$.

За величиною обертальне прискорення $w_{об}$ дорівнює:

$$w_{об} = \varepsilon \cdot r \cdot \sin\left(\vec{\varepsilon}, ^\wedge \vec{r}\right) = \varepsilon \cdot \rho,$$

де ρ - найкоротша відстань від т. М до осі обертання.

Вектор доосьового прискорення дорівнює

$$\vec{w}_{доос} = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Вектор $\vec{w}_{доос}$ напрямлений перпендикулярно до площини, яку утворюють вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{v}$, у той бік звідки найкоротший поворот від вектора $\vec{\omega}$ до вектора $\vec{v}$,видно проти руху стрілки годинника.

За величиною (модуль) до осьове прискорення $w_{доос}$ дорівнює

$$w_{доос} = \omega \cdot v \cdot \sin(\vec{\omega}, ^\wedge \vec{v}) = \omega \cdot v \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \omega \cdot v = \omega^2 \cdot \rho$$

Так як $v = \omega \cdot \rho$.

Величина (модуль) прискорення довільної точки М твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює

$$w = \sqrt{w_{об}^2 + w_{доос}^2} = \sqrt{(\varepsilon \cdot \rho)^2 + \left(\omega^2 \rho\right)^2} = \rho\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$\boxed{w = \rho\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

Кут β, що утворюється векторами $\vec{w}_{об}$ і $w_{доос}$, визначається за формулою

$$tg\beta = \frac{w_{об}}{w_{доос}} = \frac{\varepsilon \cdot \rho}{\omega^2 \cdot \rho} = \frac{\varepsilon}{\omega^2};$$

Окремі випадки обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

а) Якщо кутова швидкість твердого тіла залишається сталою $(\omega = \text{const})$, то обертання тіла називається <u>рівномірним.</u> Кінематичний закон рівномірного обертання тіла має вигляд:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega t}$$

б) Якщо кутове прискорення твердого тіла є сталою величиною, тобто $\varepsilon = \text{const}$, то обертання тіла називається <u>рівнозмінним</u>.

Кінематичний закон зміни кутової швидкості при рівно змінному обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі має вигляд:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$$

Кінематичний закон рівно змінного обертання твердого тіла навколо нерухомої осі визначається за формулою

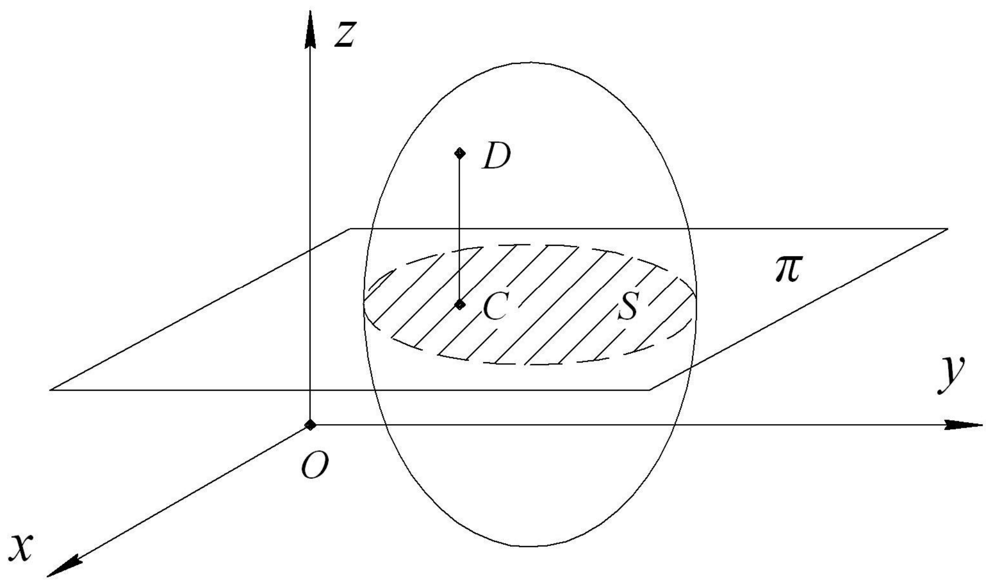
$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

2.7 Плоскопаралельний рух твердого тіла

Плоско паралельним рухом твердого тіла називається такий рух, при якому всі точки тіла рухаються паралельно деякій нерухомій площині.

(приклад – кочення циліндра по горизонтальній площині так, що його основи залишається весь час паралельною до площини yOz).

З визначення плоско паралельного руху – будь-яка пряма проведена в тілі перпендикулярно до площини xOy буде рухатись наступально, тобто траєкторії, швидкості та прискорення всіх точок цієї прямої будуть однаковими.



Для визначення руху тіла необхідно знати рух лише однієї точки на кожній такій прямій.

Якщо взяти точки в одній площині, яка є паралельною до нерухомої координатної площини xOy, точки стверджувати, що вивчення плоско паралельного руху тіла зводиться до вивчення руху плоскої фігури, тобто перерізу тіла площиною, паралельною нерухомій координатній площині xOy.

Таким чином, надалі кажучи про плоско паралельний рух твердого тіла будемо мати на увазі рух його перерізу.

Тверде тіло здійснює плоско паралельний рух відносно нерухомої системи координат.

Довільна точка O_1 – полюс. Система координат $O_1x_2y_2$ здійснює рух разом з тілом і залишається завжди паралельною до нерухомої системи Oxy.

Друга система координат $O_1x_1y_1$, здійснюючи рух разом з тілом розвертається відносно системи координат $O_1x_2y_2$ або, що те саме відносно системи Oxy.

Координати довільної точки M твердого тіла, яке здійснює плоско паралельний рух, і отже положення самого тіла відносно нерухомої системи координат Oxy будуть визначатися за формулами:

$$x_M = x_{01} + x_1 \cdot a_{11} + y_1 a_{12};$$

$$y_M = y_{01} + x_1 \cdot a_{21} + y_1 a_{22}, \qquad (2.10)$$

де $a_{11} = a_{22} = \cos\varphi$; $a_{12} = -\sin\varphi$; $a_{21} = \sin\varphi$

У формулах (2.10) x_1, y_1 - сталі величини, а $x_{01}, y_{01}, a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$ - функції часу.

Отже, маємо

$$x_{01} = f_1(t);\;\; y_{01} = f_2(t);\;\; \varphi = \varphi(t) \tag{2.11}$$

Таким чином, плоско паралельний рух твердого тіла визначається трьома незалежними параметрами: двома координатами полюса O_1 і кутом повороту тіла навколо полюса O_1.

Тіло, що здійснює плоско паралельний рух, має три ступеня вільності.

Функції (2.11) називаються кінематичними рівняннями плоско паралельного руху твердого тіла.

Плоско паралельний рух твердого тіла розкладається на два рухи: поступальний, який визначається першими двома рівностями і обертальний навколо полюса, який визначається третьою рівністю.

При цьому кут повороту тіла φ не залежить від вибору полюса. Тоді вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ є вільними векторами.

Визначення швидкості довільної точки твердого тіла при плоско паралельному русі.

Радіус - вектор $\vec{r}_M$, який визначає положення довільної точки М:

$\vec{r}_M = \vec{r}_{01} + \vec{\rho}$,

де $\vec{r}_{01}$ - радіус-вектор положення полюса O_1 в системі координат Оху;

$\vec{\rho}$ - радіус- вектор положення довільної точки М у системі координат $O_1x_2y_2$;

Тоді швидкість точки М визначається:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{01} + \vec{\rho}) = \frac{d\vec{r}_{01}}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} \tag{2.12}$$

Похідні $\frac{d\vec{r}_{01}}{dt}$ визначає швидкість полюса O_1

Тобто $\vec{v}_{01} = \frac{d\vec{r}_{01}}{dt}$;

Похідна $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ визначає швидкість точки М відносно рухомої системи координат $O_1x_2y_2$.

$$\vec{v}_{M01} = \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

Рух твердого тіла відносно системи координат $O_1x_2y_2$ є обертанням навколо полюса O_1:

$$\vec{v}_{M01} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} \qquad \text{(ф-ла Ейлера)}$$

і модуль швидкості

$$v_{M01} = \omega \cdot \rho = \omega \cdot O_1M$$

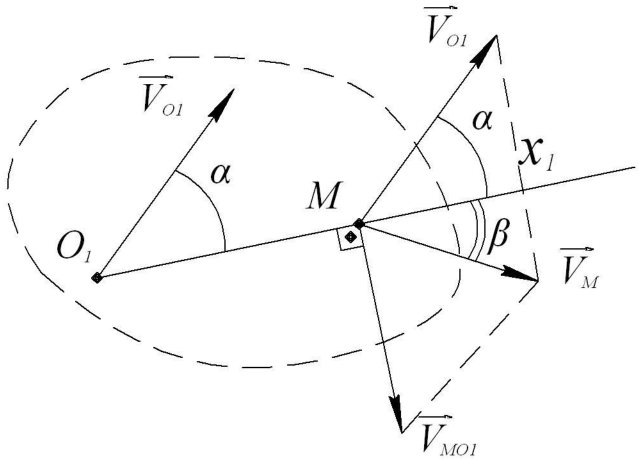
Тоді формула (2.12) набирає вигляду:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{01} + \vec{\omega} \times \vec{\rho},$$

Або

$$\boxed{\vec{v}_M = \vec{v}_{01} + \vec{v}_{M01}} \tag{2.13}$$

Швидкість довільної точки М твердого тіла, що здійснює плоско паралельний рух дорівнює геометричній сумі швидкості полюса $\vec{v}_{01}$ і швидкості $\vec{v}_{M01}$ точки М при обертанні тіла навколо полюса.



Щоб визначити вектор швидкості довільної точки М при плоско паралельному русі необхідно знати напрям і величину кутової швидкості тіла.

Три способи визначення швидкості точок тіла:

1-й спосіб полюса – на підставі векторної рівності (2.13) побудувати в довільній точці тіла відповідні вектори і визначити величини і напрям вектора швидкості довільної точки тіла як геометричну суму двох векторів.

2-й спосіб проекції – швидкостей двох точок тіла напряму, що сполучає ці точки, рівні між собою

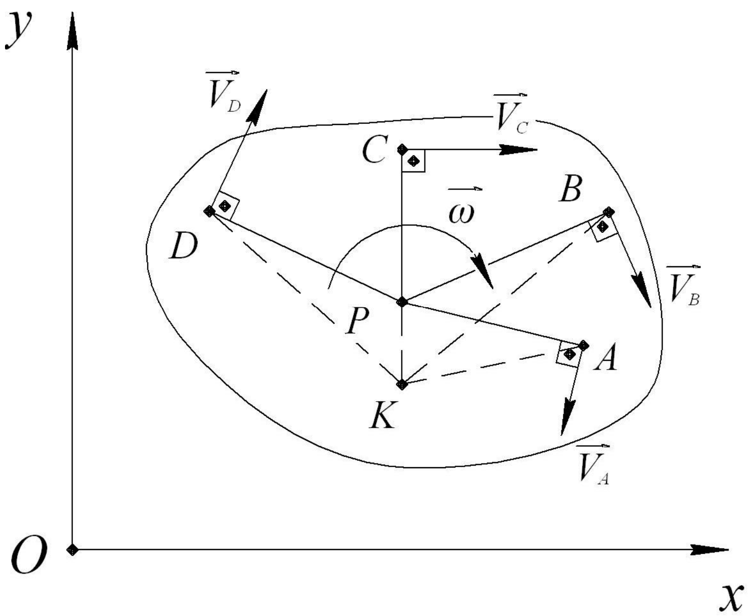
$$v_M \cdot \cos\beta = v_{01} \cdot \cos\alpha$$

3-й спосіб – визначення швидкості довільної точки твердого тіла, що здійснює плоско паралельний рух, ґрунтується на понятті миттєвого центра швидкостей (МЦШ).

<u>Миттєвим центром швидкостей</u> (миттєвим центром обертання) твердого тіла, що здійснює плоско паралельний рух, називається точка тіла, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

р– миттєвий центр швидкостей.

При плоско паралельному русі миттєвий центр швидкостей існує і ця точка в даний момент часу єдина.



$\vec{v}_p = 0$;

Якщо $\vec{v}_p \neq 0$, то $\vec{v}_p$ повинен бути одночасно перпендикулярним pA, pB, pC і pD, що неможливо. Точка p - єдина. Якщо взяти т. K то проекції векторів на відрізки не $\neq 0$.

Якщо за полюс при плоско паралельному русі тіла взяти миттєвий центр швидкостей, то швидкість довільної точки визначиться виразом:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{Mp}$$

або

$$v_M = \omega \cdot pM,$$

де $\vec{v}_{Mp}$ - вектор швидкості довільної точки M тіла при його обертанні навколо миттєвого центра швидкостей;

ω - кутова швидкість обертання тіла;

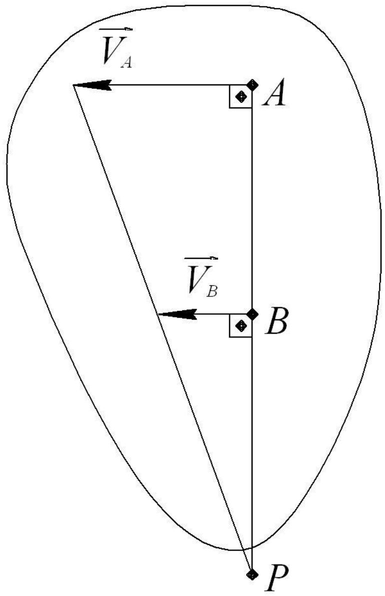
pM – вітань від миттєвого центра швидкостей до довільної точки M тіла.

Тоді: $v_D = \omega \cdot pD$; $v_C = \omega \cdot pC$; $v_B = \omega \cdot pB$; $v_A = \omega \cdot pA$.

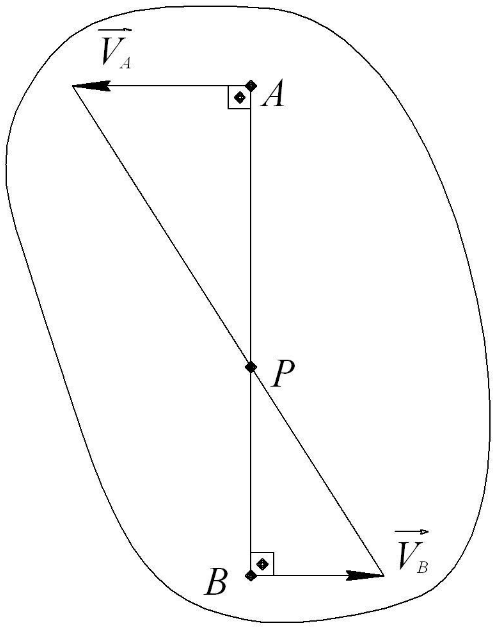
Знаючи положення миттєвого центра швидкостей, можна визначити швидкість усіх точок тіла, що здійснює плоско паралельний рух, якщо відома швидкість будь-якої точки тіла (модуль вектора швидкості і його напрям).

$\vec{v}_D$ - відома; тоді $\omega = \dfrac{v_D}{p_D}$; $v_B = \omega \cdot pB = \dfrac{v_D}{pD} pB$.

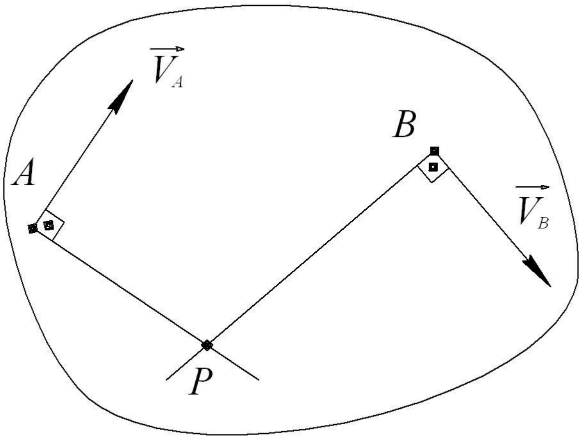
2.8 Окремі випадки визначення миттєвого центра швидкостей:



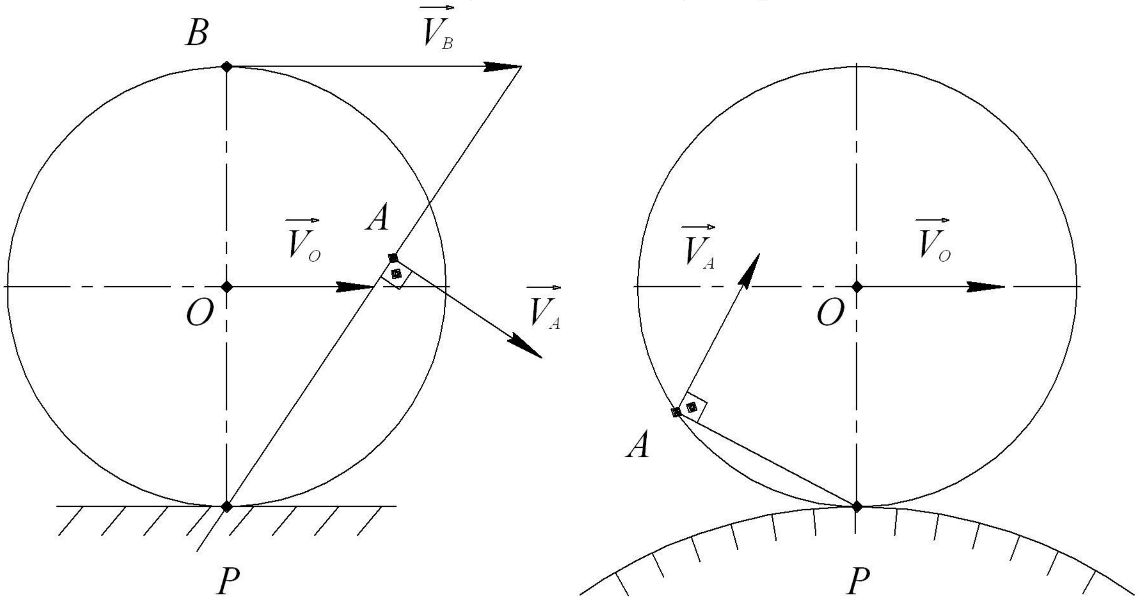
1. Якщо вектори швидкостей точок А і В твердого тіла, що здійснює плоско паралельний рух, паралельні і одночасно перпендикулярні до відрізка АВ, мають однаковий напрям і не рівні між собою, то МЦШ розміщений на продовженні АВ у точці перетину з прямою, яка сполучає кінці векторів швидкостей цих точок.
2. Якщо вектори швидкостей точок А і В паралельні і перпендикулярні до відрізка АВ, мають протилежні напрями, то МЦШ лежить на відрізку АВ у точці його перетину з відрізком, який сполучає кінці векторів швидкостей $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$ точок А і В.



3. Якщо відомі напрями векторів швидкостей двох точок А і В твердого тіла, що здійснює плоско паралельний рух, то МЦШ розміщений у точці перетину перпендикулярів, проведено з т.А і В до векторів швидкостей $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$.



4. Якщо тверде тіло, що здійснює плоско паралельний рух, котиться без ковзання по нерухомій поверхні (прямолінійній чи криволінійній), то МЦШ лежить у точці дотику твердого тіла з площиною.



5. Якщо вектори швидкостей двох точок А і В паралельні і не перпендикулярні до відрізку АВ, або вектори швидкостей двох точок паралельні і рівні між собою, то МЦШ у даний момент не існує, кутова швидкість дорівнює нулю і тверде тіло здійснює миттєво – поступальний рух.

Для аналітичного визначення швидкості довільної точки М необхідно її координати за формулами:

$$x_M = x_{01} + x_1 \cdot \cos\varphi - y_1 \cdot \sin\varphi$$
$$y_M = y_{01} + x_1 \cdot \sin\varphi - y_1 \cdot \cos\varphi$$

Диференціюючи ці вирази, отримаємо проекції швидкості довільної т. М на осі нерухомої системи відміну Оху:

$$\dot{x}_M = \dot{x}_{01} - \dot{\varphi}(x_1 \cdot \sin\varphi + y_1 \cdot \cos\varphi)$$
$$\dot{y}_M = \dot{y}_{01} + \dot{\varphi}(x_1 \cdot \cos\varphi - y_1 \cdot \sin\varphi)$$

Модуль швидкості т. М:

$$\nu_M = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = \sqrt{\left[\dot{x}_{01} - \dot{\varphi}(x_1 \sin\varphi + y_1 \cdot \cos\varphi)\right]^2 + \left[\dot{y}_{01} + \dot{\varphi}(x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi\right]^2}$$

Напрям вектора швидкості т. М визначається за допомогою напрямних косинусів

$$\cos(\vec{v}_M{}^\wedge, x) = \frac{\dot{x}_M}{\nu_M}; \ \cos(\vec{v}_M{}^\wedge, y) = \frac{\dot{y}_M}{\nu_M};$$

<u>Визначення прискорення довільної точки твердого тіла при плоскопаралельному русі.</u>

На підставі формули швидкості т. М при плоско паралельному русі:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{01} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

і за визначенням прискорення, маємо:

$$\vec{W}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{01} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \frac{d\vec{v}_{01}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} =$$

$$= \vec{W}_{01} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{M01} = \vec{W}_{01} + \vec{W}_{M01}^{об} + \vec{W}_{M01}^{доос} = \vec{W}_{01} + \vec{W}_{M01};$$

де $\frac{d\vec{v}_{01}}{dt} = \vec{W}_{01}$ - прискорення полюса O_1;

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ - кутове прискорення твердого тіла при обертанні навколо полюса O_1

$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_{MO_1}$ - швидкість т.М твердого тіла при обертанні тіла навколо полюса O_1.

Векторний добуток $\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} = \vec{W}_{MO_1}^{об}$ - вектор обертального прискорення т.М при обертанні тіла навколо полюса O_1.

Вектор $\vec{W}_{01} + \vec{W}_{M01}^{об} + \vec{W}_{M01}^{доос}$ - повне прискорення т.М при обертанні тіла навколо O_1.

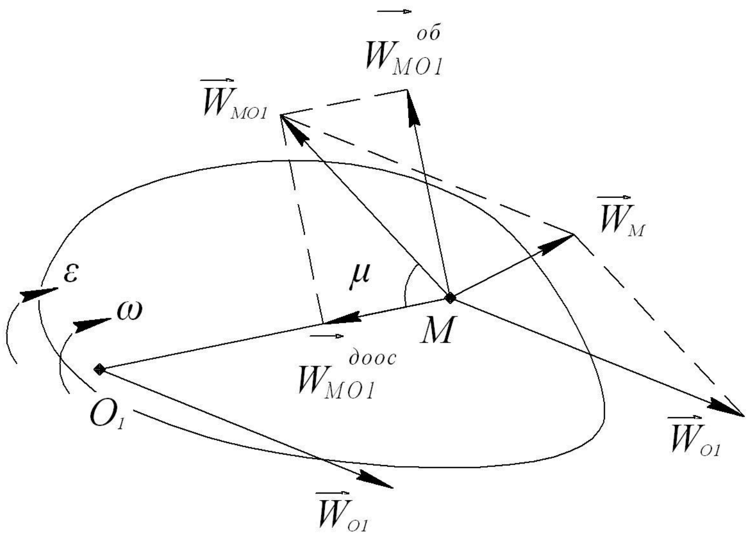
Векторний добуток $\vec{\omega} \times \vec{v}_{M01} = \vec{W}_{M01}^{доос}$ - вектор до осьового прискорення т.М при обертанні тіла навколо полюса O_1;

За модулем прискорення $\vec{W}_{01}, \vec{W}_{M01}^{об}, \vec{W}_{M01}^{доос}$ дорівнюють:

$\vec{W}_{M01}^{об} = \varepsilon \cdot \rho = \varepsilon \cdot O_1M$;

$\vec{W}_{M01}^{доос} = \omega^2 \cdot \rho = \omega^2 \cdot O_1M$;

$\vec{W}_{M01} = \sqrt{(W_{MO_1}^{об})^2 + (W_{MO_1}^{доос})^2} = \sqrt{(\varepsilon \cdot \rho)^2 + (\omega^2 \rho)^2} = \rho\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$;



Кути μ між векторами $\vec{W}_{M01}$ і $\vec{W}^{доос}_{M01}$

$$tg\mu = \frac{\left|W^{об}_{MO_1}\right|}{\left|W^{доос}_{MO_1}\right|} = \frac{\rho \cdot \varepsilon}{\rho \cdot \omega^2} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2};$$

Щоб визначити вектор прискорення довільної точки тіла при плоско паралельному русі, необхідно знати напрям і величину вектора прискорення полюса, а також напрям і величину кутової швидкості і кутового прискорення тіла.

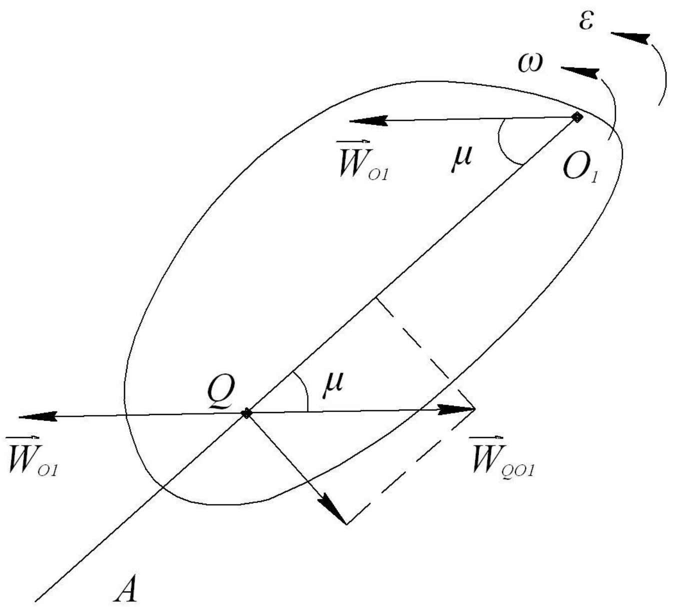
Далі на підставі векторної рівності: $\vec{W}_M = \vec{W}_{01} + \vec{W}^{об}_{M01} + \vec{W}^{доос}_{M01}$

Побудувати в довільній точці М відповідні вектори і визначити величину і напрям вектора прискорення довільної точки тіла як геометричну суму трьох векторів.

<u>Визначення прискорення точок твердого тіла за допомогою миттєвого центра прискорень (МЦП).</u>

Прискорення довільної точки тіла, що здійснює плоско паралельний рух, визначається як геометрична сума прискорень полюса і прискорення довільної точки при обертанні тіла навколо полюса.

В кожний момент часу існує точка, прискорення якої дорівнює нулю – миттєвий центр прискорень.



$\vec{W}_{01}$ - прискорення полюса O_1
ω - кутова швидкість тіла;
ε - кутове прискорення тіла;
μ - кут напряму на МЦП

$$\mathrm{tg}\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Уздовж прямої O_1A відкидаємо відрізок O_1Q

$$O_1Q = \frac{W_{0_1}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}};$$

Точка Q – миттєвий центр прискорень;
На підставі формули прискорення Q:

$$\vec{W}_Q = \vec{W}_{0_1} + \vec{W}^{\text{об}}_{Q0_1} + \vec{W}^{\text{доос}}_{Q0_1} = \vec{W}_{0_1} + \vec{W}_{Q0_1}$$

Величина прискорення $\vec{W}_{Q01}$

$$\vec{W}_{Q0_1} = QO_1\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{W_{0_1}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = W_{O_1};$$

Кут між вектором $\vec{W}_{QO_1}$ і відрізком O_1Q визначається за формулою

$$\mathrm{tg}\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

і підліковується від вектора $\vec{W}_{QO_1}$ проти руху стрілки годинника. Тобто

$$\vec{W}_{QO_1} = -\vec{W}_{O_1}; \text{ звідси } \vec{W}_Q = 0;$$

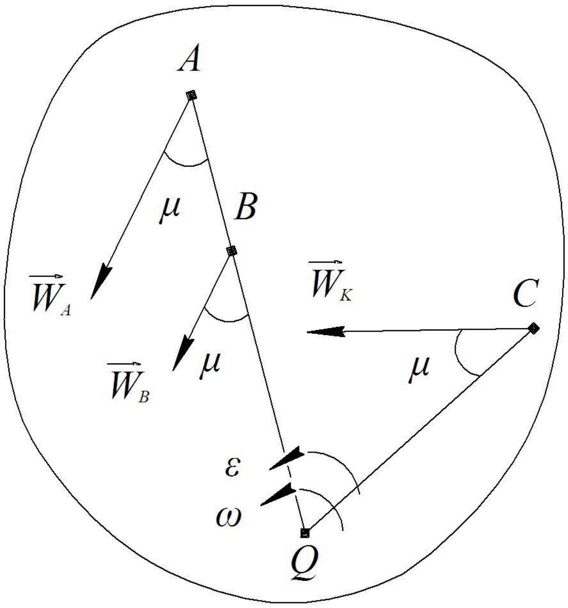
Точка Q, прискорення якої у даний момент часу дорівнює нулю називається **миттєвим центром прискорень.**

Якщо за полюс взяти миттєвий центр прискорень, то прискорення довільної точки М твердого тіла визначиться за формулою

$$\vec{W}_M = \vec{W}_{MQ} = \vec{W}^{\text{об}}_{MQ} = \vec{W}^{\text{доос}}_{MQ}$$

Модуль вектора прискорення довільної точки M

$$\vec{W}_M = \vec{W}_{MQ} = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$



В даний момент часу прискорення будь-якої точки твердого тіла, що здійснює плоско паралельний рух визначається як прискорення цієї точки при обертанні тіла відносно МЦП.

$$W_A = QA \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$W_B = QB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$W_C = QC \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$\frac{W_B}{W_A} = \frac{QB}{QA}, \ \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

<u>Аналітичний спосіб визначення прискорення довільної точки твердого тіла, що здійснює плоско паралельний рух.</u>

Швидкість довільної точки M (проекції швидкості)

$$\dot{x}_M = \dot{x}_{01} - \dot{\varphi}(x_1 \cdot \sin\varphi + y_1 \cdot \cos\varphi)$$

$$\dot{y}_M = \dot{y}_{01} + \dot{\varphi}(x_1 \cdot \cos\varphi - y_1 \cdot \sin\varphi)$$

Прискорення т. M визначається як похідні за часом від проекцій вектора швидкості

$$\ddot{x}_M = \ddot{x}_{01} - \ddot{\varphi}(x_1 \cdot \sin\varphi + y_1 \cdot \cos\varphi) - \dot{\varphi}^2(x_1 \cdot \cos\varphi - y_1 \cdot \sin\varphi)$$

$$\ddot{y}_M = \ddot{y}_{01} + \ddot{\varphi}(x_1 \cdot \cos\varphi - y_1 \cdot \sin\varphi) - \dot{\varphi}^2(x_1 \cdot \sin\varphi - y_1 \cdot \cos\varphi)$$

Отримані рівності визначають проекції прискорення довільної точки M на осі нерухомої системи координат Oxy.

Модуль прискорення точки M

$$W_M = \sqrt{\ddot{x}_M^2 + \ddot{y}_M^2} =$$

$$= \sqrt{\begin{aligned}&\left[\ddot{x}_{O_1} - \ddot{\varphi}(x_1 \cdot \sin\varphi + y_1 \cdot \cos\varphi) - \dot{\varphi}^2(x_1 \cdot \cos\varphi - y_1 \sin\varphi)\right]^2 + \\ &+ \left[\ddot{y}_{O_1} + \ddot{\varphi}(x_1 \cdot \cos\varphi - y_1 \cdot \sin\varphi) - \dot{\varphi}^2(x_1 \cdot \sin\varphi + y_1 \cos\varphi)\right]^2\end{aligned}}$$

Напрям вектора прискорення точки М визначається за допомогою напрямних косинусів

$$\cos(\vec{W}_{M,}{}^{\wedge}x) = \frac{\ddot{x}_M}{W_M};\; \cos(\vec{W}_{M,}{}^{\wedge}y) = \frac{\ddot{y}_M}{W_M}$$

Контрольні запитання до другого розділу

1. Як визначається вектор швидкості довільної точки тіла, що обертається і навколо нерухомої осі?
2. Як визначається вектор прискорення довільної точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
3. Як визначити величину і напрям обертального прискорення точки тіла, що І обертається навколо нерухомої осі?
4. Як визначити величину і напрям до осьового прискорення точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
5. Яким є обертання тіла, якщо обертальне прискорення точок тіла дорівнює нулю?
6. Як записується закон рівномірного обертання твердого тіла навколо і нерухомої осі?
7. Як записується закон зміни кутової швидкості і закон рівнозмінного руху твердого тіла при його обертанні навколо нерухомої осі?
8. Який рух твердого тіла називається плоско паралельним?
9. До вивчення руху якої фігури зводиться кінематика плоско паралельного руху?
10. Як записуються кінематичні рівняння плоско паралельного руху твердого тіла?
11. Яку кількість ступенів вільності має тверде тіло, що рухається плоско паралельно?
12. Чи можна розглядати плоско паралельний рух тіла, як складний рух?
13. Чи залежить обертальна частина плоско паралельного руху твердого тіла від вибору полюса?
14. Як визначити швидкість довільної точки тіла при плоско паралельному русі?
15. Чому дорівнюють проекції швидкостей кінців незмінного відрізка на його напрям?
16. Що таке миттєвий центр швидкостей при плоско паралельному русі твердого тіла?
17. За якою формулою визначається величина швидкості точки тіла при застосуванні поняття миттєвого центра швидкостей?

18. Які є способи визначення положення миттєвого центра швидкостей?
19. Як визначити аналітично швидкість довільної точки тіла, що здійснює
20. плоско паралельний рух?
21. Як визначити прискорення довільної точки тіла при плоско паралельному русі?
22. Що таке складний рух точки?
23. Який рух називається абсолютним?
24. Який рух називається відносним?
25. Який рух називається переносним?
26. Як визначити відносну і переносну швидкість точки в складному русі?
27. Як формулюється теорема про додавання швидкостей у складному русі точки?
28. Як формулюється теорема про додавання прискорення у складному русі точки?
29. Як визначається за величиною і напрямом прискорення Коріоліса?
30. У яких випадках прискорення Коріоліса дорівнює нулю?
31. Назвіть дві фізичні причини появи прискорення Коріоліса?

3. ДИНАМІКА

<u>**Динаміка**</u> – розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних об’єктів з урахуванням сил, що прикладені до цих об’єктів.

<u>**Дві основні задачі динаміки**</u>:

– перша – знаючи рух матеріального об’єкта, необхідно визначити діючі на об’єкт сили.

– друга – по діючим на матеріальний об’єкт силам визначити рівняння його руху.

Предметом дослідження в динаміці є моделі матеріальних тіл – матеріальна точка, механічна система точок і абсолютно тверде тіло.

<u>3.1 Динаміка матеріальної точки</u>

<u>Перший закон І. Ньютона (закон інерції)</u>:

Ізольована матеріальна точка знаходиться у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху до тих пір, поки вона не буде змушена прикладеними до неї силами змінити цей стан.

Такий стан точки називається <u>інерціальним</u> і система відліку, в який має місце такий рух є <u>інерціальною.</u>

<u>Другий закон І. Ньютона (основний закон динаміки)</u>

Зміна кількості руху матеріальної точки пропорційна прикладеній до точки силі і відбувається у напрямі прямої, вздовж якої діє ця сила.

$$\frac{d(m\vec{\vartheta})}{dt} = \vec{F} \qquad\qquad m\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = \vec{F}$$

Прискорення, з яким рухається тіло, пропорційне силі, що прикладена до тіла, і обернено пропорційне масі тіла

$$\vec{W} = \frac{\vec{F}}{m}:$$

Тобто, в аналітичній формі другий закон І. Ньютона має вигляд

$$m\vec{W} = \vec{F},$$

m – маса матеріальної точки; $\vec{W}$ – прискорення точки;
$\vec{F}$ – сила, що діє на точку.

<u>Третій закон І. Ньютона (закон дії і протидії)</u>

Дві матеріальні точки діють одна на одну з силами, які є рівні за величиною (модулем) і напрямлені вздовж однієї прямої у протилежні сторони.

З третього закону Ньютона – джерело появи сили це взаємодія матеріальної точки з іншої точкою або тілами.

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B;$$

$$\vec{F}_A = m_A\vec{W}_A;\ \vec{F}_B = m_B \cdot \vec{W}_B$$

$$m_A \cdot \vec{W}_A = -m_B\vec{W}_B$$

$$\left|\frac{\vec{W}_A}{\vec{W}_B}\right| = \frac{m_B}{m_A};$$

Прискорення, які надають одна одній дві матеріальні точки за модулем обернено пропорційні масам цих точок і спрямовані вздовж прямої, що з'єднує ці точки, у протилежні сторони.

Четвертий закон І. Ньютона (закон незалежної дії сил):

Якщо на матеріальну точку діють декілька сил, то точка одержує прискорення, яке дорівнює геометричній сумі тих прискорень, які б вона одержала під дією кожної із цих сил окремо.

$$m\vec{W}_1 = \vec{F}_1;\ m\vec{W}_2 = \vec{F}_2;\ m\vec{W}_n = \vec{F}_n$$

$$m(\vec{W}_1 + \vec{W}_2 + ... + \vec{W}_n) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$$

$$m\vec{W} = \vec{F};\ \vec{W} = \vec{W}_1 + \vec{W}_2 + ... + \vec{W}_n$$

Основне рівняння руху вільної матеріальної точки $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...\vec{F}_n$.

Рух матеріальної точки під дією сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n$ буде таким же, як і при дії однієї сили, що дорівнює їх геометричній сумі – рівнодійній $\vec{F}$.

3.2 Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки.

Матеріальна точка називається вільною, якщо на її рух не накладені ніякі обмеження, тобто у довільний момент часу вона може зайняти довільне положення в системі відліку і мати довільну швидкість.

$$m\vec{W} = \vec{F};\ m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \tag{3.1}$$

(3.1) – диференціальне рівняння руху вільної матеріальної точки у векторній формі;

m – маса точки; $\vec{W} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ – прискорення матеріальної точки;

$\vec{F}$ – рівнодійна сил, що діють на матеріальну точку.

Якщо спроекціювати обидві частини рівняння (3.1) на осі декартової системи координат, то здобудемо рівняння

$$\underline{m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}};\ \underline{m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}};\ \underline{m\ddot{z} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}} \tag{3.2}$$

де $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – проекції вектора прискорення $\vec{W}$ на осі декартової системи координат;

$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}$, $\sum_{k=1}^{n} F_{ky}$, $\sum_{k=1}^{n} F_{kz}$ – проекції вектора рівнодійної сил на осі координат.

Рівняння (3.2) називаються рівняннями руху вільної матеріальної точки в координатній формі.

Якщо спроєціювати обидві частини рівняння (3.1) на осі натуральної системи координат, то одержимо рівняння

$$m\frac{d\vartheta_\tau}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau};\quad m\frac{\vartheta^2}{\rho} = \sum_{k=1}^{n} F_{kn};\quad 0 = \sum_{k=1}^{n} F_{kb}$$

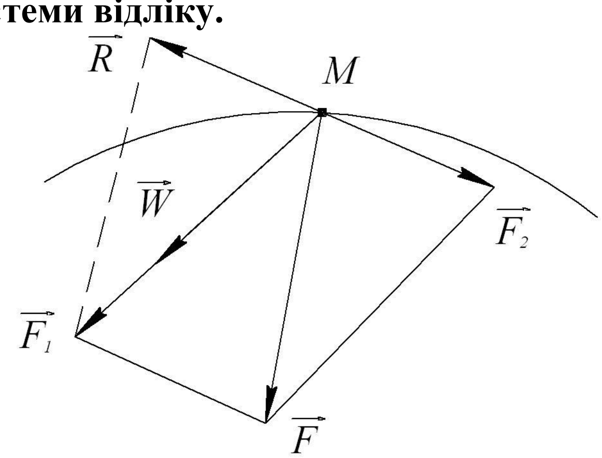
$$\left(mW_\tau = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}\right); \quad \left(mW_n = \sum_{k=1}^{n} F_{kn}\right);$$

$W_\tau = \dfrac{d\vartheta_\tau}{dt}, \quad W_n = \dfrac{\vartheta^2}{\rho}$ – проекції вектора прискорення точки на осі натуральної системи координат.

$\sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kn}; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kb}$ – проекції вектора рівнодійної всіх сил, що діють на точку на осі натуральної системи координат.

3.3 Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки

Матеріальна точка називається невільною, якщо внаслідок накладання в'язей вона не може у довільний момент часу займати довільне положення в системі відліку і мати довільну швидкість, так як здійснює рух по деякій поверхні або кривій, або рухається в деякій заданій області системи відліку.



$\vec{F}$ – рівнодійна сил, що діють на точку.

Розглянемо $\vec{F}$ на напрями $\vec{W}$ і $\perp$ до $\vec{W}$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F};$$

$$\vec{F}_1 = m\vec{W};$$

Під дією сили $\vec{F}_2$ виникає сила реакції в'язі $\vec{R}$. Сила $\vec{F}_2$ не викликає зміни стану руху. На підставі третього закону Ньютона

$$\vec{F}_2 + \vec{R} = 0; \quad \vec{F}_2 = -\vec{R}.$$

Тобто: **не змінюючи стану руху невільної матеріальної точки її можна розглядати як вільну, якщо уявно відкинути накладену на точку в'язь і до діючої на точку силу $\vec{F}$ додати реакцію відкинутої в'язі (аксіома про звільнення від в'язей).**

З рисунка $\vec{F}_1 = \vec{F} + \vec{R}$.

Тоді диференціальне рівняння руху невільної матеріальної точки у векторній формі матиме вигляд

$$m\vec{W} = \vec{F} + \vec{R},$$

або

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + \vec{R}.$$

Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки в координатній формі (Декартові осі координат)

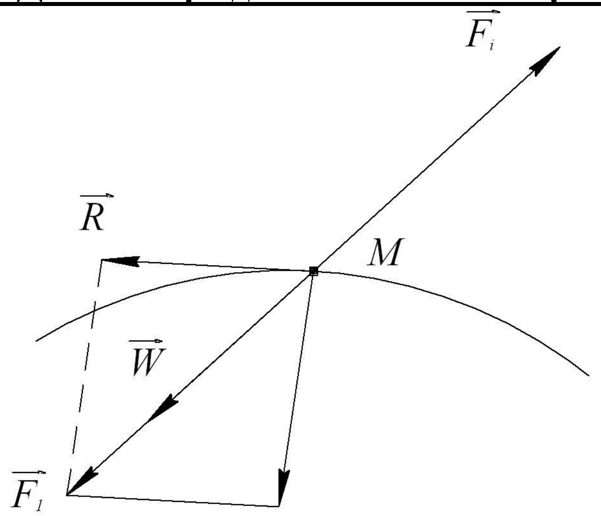
$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} + R_x; \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} + R_y; \quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} + R_z \quad .$$

Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки в проекціях на осі натуральної системи координат

$$m\frac{d\vartheta_\tau}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau} + R_\tau; \quad m\frac{\vartheta^2}{\rho} = \sum_{k=1}^{n} F_{kn} + R_n;$$

$$0 = \sum_{k=1}^{n} F_{kb} + R_b;$$

3.4 Принцип Д'Аламбера для невільної матеріальної точки



Точка М здійснює невільний рух під дією сили $\vec{F}$. Застосувавши аксіому про звільнення від в'яза $\vec{F}_1 = \vec{F} + \vec{R}$. З іншого боку сила $\vec{F}_1$ на підставі закону Ньютона $\vec{F}_1 = m\vec{W}$;

Якщо звести рух матеріальної точки М до стану спокою, то очевидно, що для цього достатньо додати до діючих на тіло сил силу $\vec{F}_{ін}$ рівну за модулем силі $\vec{F}_1$ і напрямлену вздовж лінії дії сили $\vec{F}_1$ у протилежну сторону. Тобто

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_{ін} = 0 \tag{3.3}$$

Сила $\vec{F}_{ін}$ рівна за модулем добутку маси точки на її прискорення і напрямлена протилежно до вектора прискорення точки, називається даламберовою силою інерції

$$\vec{F}_{ін} = -m\vec{W};$$

Проекціюючи векторну рівність (3.3) на осі декартової системи координат:

$$F_{інx} = -mW_x; \quad F_{інy} = -mW_y; \quad F_{інz} = -mW_z;$$

Проеціруючи векторну рівність (3.3) на осі натуральної системи координат

$$F_{ін\tau} = -m\frac{d\vartheta_\tau}{dt} = -mW\tau; \quad F_{інn} = -mW_n = -m\frac{\vartheta^2}{\rho};$$

$$F_b = -mW_b = 0.$$

Складова $F_{ін\tau}$ напрямлена вздовж дотичної осі τ – дотична сила інерції. $F_{інn}$ – нормальна сила інерції, або відцентрова сила інерції.

Математичний вираз принципу Даламбера

$$\underline{\vec{F} + \vec{R} + \vec{F}_{ін} = 0} \tag{3.4}$$

Принцип Д'Аламбера: В кожний момент руху матеріальної точки геометрична сума прикладеної до точки сили $\vec{F}$, реакції в'язі $\vec{R}$ та сили інерції $\vec{F}_{ін}$ дорівнює нулю.

Рівняння (3.4) є рівнянням руху точки, яке записується у формі умови рівноваги сил.

Таким чином – **задачі динаміки можуть бути розв'язані методами статики (зміст методу кінетостатики).**

3.5 Дві задачі динаміки матеріальної точки

Пряма задача. Знаючи масу матеріальної точки і закон її руху, визначити силу, що діє на цю точку (або рівнодійну сил, що діють на точку).

Основна задача (обернена). Знаючи масу матеріальної точки, прикладені до точки сили і початкові умови руху точки, визначити закон руху точки.

Діючі на матеріальну точку сили можуть бути сталими або змінними. Змінна сила може: 1) змінюватись за визначеним законом з часом; 2) залежати від положення точки, яка визначається її радіус-вектором; 3) залежати від швидкості точки, що рухається.

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{\vartheta}).$$

Перша задача динаміки вільної матеріальної точки розв'язується шляхом диференціювання рівнянь руху точки.

Якщо відомі рівняння руху точки в декартові системі координат

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t),$$

то проекції сили на осі координат визначаються з диференціальних рівнянь руху точки

$$\begin{aligned} F_x &= m\ddot{x} = m\frac{d^2x}{dt^2}; \\ F_y &= m\ddot{y} = m\frac{d^2y}{dt^2}; \\ F_z &= m\ddot{z} = m\frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Знаючи проекції сили на осі координат, можна визначити величину сили і її напрямні косинуси за формулами

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2};$$

$$\cos(\vec{F}, x) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(\vec{F}, y) = \frac{F_y}{F}; \quad \cos(\vec{F}, z) = \frac{F_z}{F};$$

Якщо рух матеріальної точки задано натуральним способом, тобто відома траєкторія руху точки і закон її руху по траєкторії

$$S = S(t),$$

то проекції сили $\vec{F}$, що діє на точку, на осі натурального тригранника (натуральної осі) визначаються з рівнянь

$$F_\tau = m\frac{d\vartheta_\tau}{dt}; \quad F_n = \frac{m\vartheta^2}{\rho}; \quad F_b = \sum_{k=1}^{n} F_{kb} = 0;$$

Величина (модуль) сили $\vec{F}$: $F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2 + F_b^2}$;

Напрямні косинуси:

$$\cos(\vec{F}, \tau) = \frac{F_\tau}{F}; \quad \cos(\vec{F}, n) = \frac{F_n}{F}; \quad \cos(\vec{F}, b) = \frac{F_b}{F};$$

Для розв'язання другої задачі динаміки вільної матеріальної точки потрібно двічі інтегрувати диференціальні рівняння руху точки.

Сили, що діють на матеріальну точку можуть бути сталими або змінними.

Змінні сили можуть змінюватися:
1 – за визначеним законом з часом;
2 – залежати від положення точки, яка визначається її радіус-вектором;
3 – залежати від швидкості точки, що рухається.

Тобто,

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{\vartheta}).$$

Тоді диференціальні рівняння руху матимуть вигляд (при координатному способі задання руху)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + F_x(t) + F_x(x) + F_x(\dot{x}); \\ m\ddot{y} &= F_y + F_y(t) + F_y(y) + F_y(\dot{y}); \\ m\ddot{z} &= F_z + F_z(t) + F_z(z) + F_z(\dot{z}); \end{aligned} \tag{3.6}$$

При інтегруванні кожного диференціального рівняння руху матеріальної точки наявні дві сталі інтегрування. Тому при інтегруванні трьох диференціальних рівнянь буде шість сталих.

Рівняння

$$\begin{aligned} x &= x(t, c_1, ..., c_6) \\ y &= y(t, c_1, ..., c_6) \\ z &= z(t, c_1, ..., c_6) \end{aligned} \tag{3.7}$$

є загальним розв'язком рівнянь (3.6), де $c_1, ..., c_6$ сталі інтегрування.

З рівностей (3.7) $\rightarrow$ для визначення закону руху точки потрібно знати початкові умови її руху.

Початковий стан руху матеріальної точки визначається її положенням та її швидкістю в початковий момент часу $(t = 0)$.

Якщо точка рухається в декартовій системі координат, то необхідно знати її координати і проекції швидкості на осі координат у початковий момент руху:

$$t = 0; \quad x(0) = x_0; \quad y(0) = y_0; \quad z(0) = z_0;$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0; \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0; \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0;$$

Сукупність отриманих даних – початкові умови руху матеріальної точки.

Для визначення сталих інтегрування надаємо рівнянням (3.7) значення $t = 0$ і, взявши необхідні за часом, отримуємо шість рівнянь

$$x_0 = x(0, c_1, \ldots c_6); \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(0, c_1, \ldots c_6);$$

$$y_0 = y(0, c_1, \ldots c_6); \quad \dot{y}_0 = \dot{y}(0, c_1, \ldots c_6);$$

$$z_0 = z(0, c_1, \ldots c_6); \quad \dot{z}_0 = \dot{z}(0, c_1, \ldots c_6);$$

Звідси сталі інтегрування визначаються

$$c_1 = f_1(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$$

$$c_2 = f_2(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$$

$$c_3 = f_3(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$$

$$c_4 = f_4(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$$

$$c_5 = f_5(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$$

$$c_6 = f_6(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$$

Тоді розв’язок рівнянь (3.7) набуває вигляду

$$x = x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$$

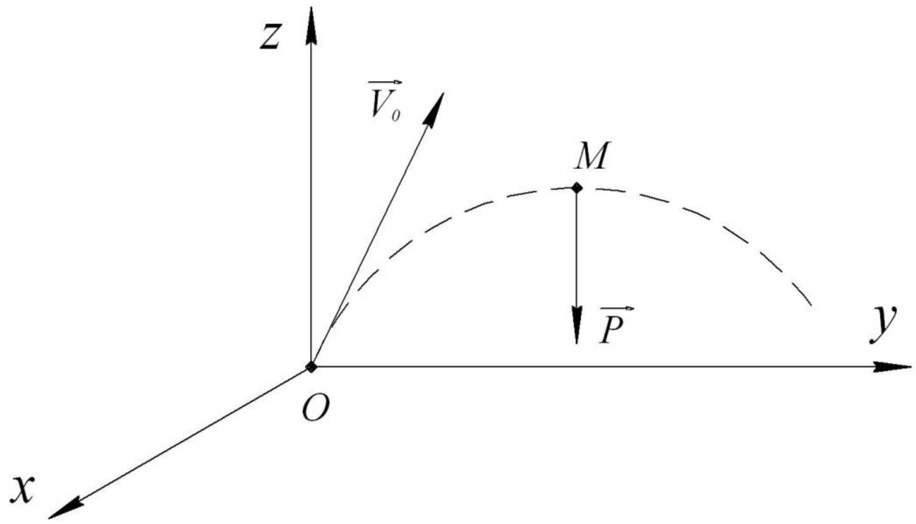
$$y = y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$$

$$z = z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).$$

Отримані рівняння визначають єдиний розв’язок системи диференціальних рівнянь руху точки.

3.6 Окремі випадки руху матеріальної точки

1. **Вільний рух точки в однорідному полі сил тяжіння біля поверхні Землі**



Точка М масою m рухається в однорідному полі сил тяжіння під дією тільки однієї сили тяжіння $\vec{P}$.

За обраної системи відліку диференціальні рівняння руху т. М записуються:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = 0; \quad m\ddot{z} = -mg;$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}; \quad \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt}; \quad \ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt}; \quad m \neq 0;$$

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = 0; \quad \ddot{z} = -g:$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 0; \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = 0; \quad \frac{d\dot{z}}{dt} = -g;$$

Інтегруючи:

$$\dot{x} = c_1; \quad \dot{y} = c_2; \quad \dot{z} = -\int g\, dt + c_3;$$

Інтегруючи ще раз отримані вирази, здобудемо загальний розв’язок диференціальних рівнянь руху точки М:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = c_1; \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = c_2; \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt} = -\int g\, dt + c_3;$$

$$x = \int c_1 dt + c_4; \quad y = \int c_2 dt + c_5; \quad z = -\int (\int g\, dt + c_3) dt + c_6;$$

c_1, c_2, c_3 – початкові умови швидкості;

c_4, c_5, c_6 – початкові умови координат точки.

Сталі інтегрування c_1, c_2,…c_6 визначаються з початкових умов руху точки М.

2. **Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що змінюється з часом.**

Для прямолінійного руху точки необхідно, щоб вектор сили був паралельним вектору початкової швидкості точки.

Диференціальне рівняння руху точки має вигляд

$$m\ddot{x} = F_x(t)$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m}F_x(t); \quad d\dot{x} = \frac{1}{m}F_x(t)dt;$$

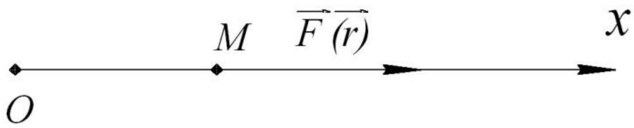
$$\dot{x} = \frac{1}{m}\int F_x(t)dt + c_1; \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}\int F_x(t)dt + c_1;$$

$$x = \frac{1}{m}\int\left(\int F_x(t)dt + c_1\right)dt + c_2;$$

де c_1 і c_2 – сталі інтегрування, що визначається з початкових умов руху матеріальної точки.

3. **Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що залежить від положення точки**

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$



Диференціальне рівняння руху точки:

$$m\ddot{x} = F_x(x)$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dt}\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{\dot{x}\,d\dot{x}}{dx};$$

$$\text{Тоді} \quad m\frac{\dot{x}\,d\dot{x}}{dx} = F_x(x)$$

$$\dot{x}\,d\dot{x} = \frac{1}{m}F_x(x)dx$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{1}{m}\int F_x(x)dx + c_1;$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + c_1};$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + c_1}};$$

Після інтегрування

$$t = \int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + c_1}} + c_2;$$

c_1 і c_2 визначаються з початкових умов руху точки.

4. **<u>Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що залежить від швидкості точки</u>** $\left(\vec{F}(\vec{\vartheta})\right)$**.**

Диференціальне рівняння руху точки

$$m\ddot{x} = F_x(\dot{x});$$

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = F_x(\dot{x});$$

$$dt = \frac{md\dot{x}}{F_x(\dot{x})};$$

$$t = \int \frac{md\dot{x}}{F_x(\dot{x})} + c_1;$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \varphi(t); \quad dx = \varphi(t)dt;$$

$$x = \int \varphi(t)dt + c_2.$$

c_1 і c_2 визначаються з початкових умов руху матеріальної точки.

3.7 Динаміка системи матеріальної точки (механічної системи)

Динаміка механічної системи

Механічною системою або системою матеріальних точок називається сукупність матеріальних точок, положення і рух яких взаємозв'язані.

1. **<u>Вільна механічна система</u>**

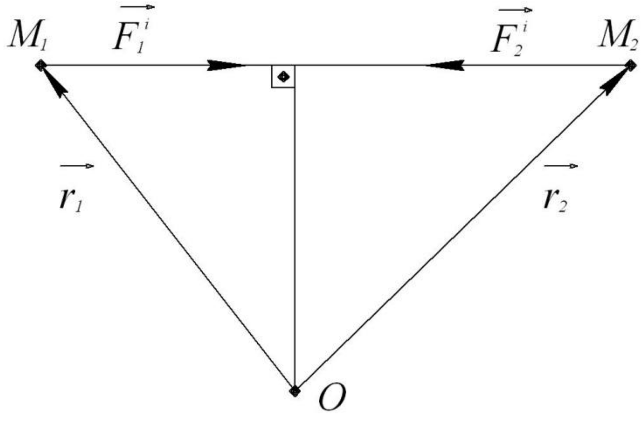
<u>Система матеріальних точок називається вільною</u>, якщо в будь-який момент часу всі точки системи можуть займати довільні положення в системі відліку і можуть мати довільні швидкості.

Сили, з якими матеріальні точки даної системи взаємодіють з матеріальними точками або тілами, що не належать до даної системи, називаються <u>зовнішніми силами.</u>

Сили взаємодії між матеріальними точками однієї механічної системи називаються <u>внутрішніми.</u>

$\vec{F}^e$ – зовнішні сили;

$\vec{F}^i$ – внутрішні сили.



На підставі третього закону Ньютона, геометрична сума сил взаємодії між двома точками даної системи, наприклад, точками M_1 і M_2 дорівнює нулю, тобто $\vec{F}_1^i + \vec{F}_2^i = \vec{0}$.

Головний вектор внутрішніх сил $\vec{R}_0^i$ буде складатися з векторної суми таких сил.

$$\vec{R}_0^i = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i = \vec{0}$$

Геометрична сума усіх внутрішніх сил системи (головний вектор внутрішніх сил) дорівнює нулю.

Геометрична сума моментів сил $\vec{F}_1^i$ і $\vec{F}_2^i$ і відносно довільної точки М. З рисунка

$\vec{M}_0\left(\vec{F}_1^i\right) + \vec{M}_0\left(\vec{F}_2^i\right) = 0;$ – обидві сили мають однакові плечі відносно т. О і протилежно напрямлені.

Геометричний момент внутрішніх сил $\vec{M}_0^1$ відносно довільної т. О буде складатися з геометричної суми таких моментів

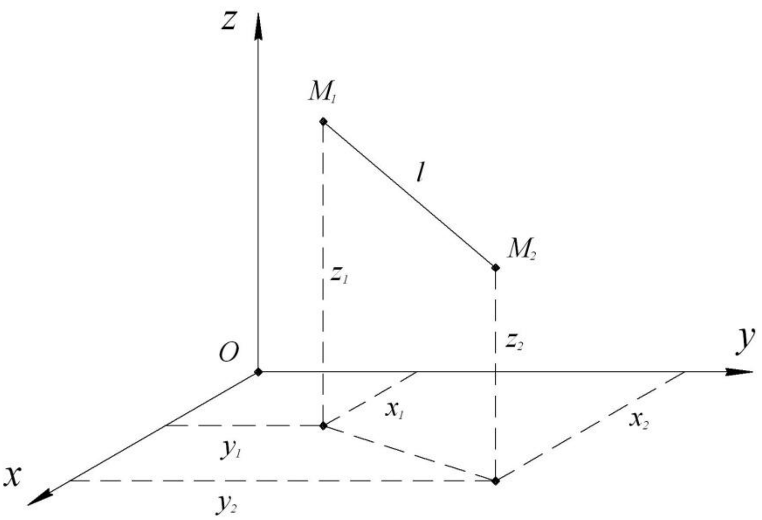
$$\vec{M}_0^i = \sum_{k=1}^{n} \left(\vec{r}_k \times \vec{F}_k^i\right) = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0^i\left(\vec{F}_k^i\right) = 0;$$

Головний момент внутрішніх сил (геометрична сума моментів всіх внутрішніх сил системи відносно довільної точки) дорівнює нулю.

2. Невільна механічна система.

Механічна система, або система матеріальних точок називається невільною, якщо внаслідок будь-яких обмежень (умов) точки системи, не можуть займати довільні положення в системі відліку і мати довільні швидкості.

Умови, що забезпечують зазначені обмеження на рух точок системи, називаються в'язями.



Матеріальні точки M_1 і M_2 з'єднані жорстким невагомим стержнем.

Аналітично в'язі записуються у вигляді рівнянь або нерівностей (рівнянь в'язей)

x_1, y_1, z_1 – координати точок M_1 і M_2;

$$x_2, y_2, z_2$$

l – довжина стержня.

Рівняння в'язі (рисунок)

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0 \qquad (1)$$

В'язь, що описується рівнянням (1) називається <u>голономною,</u> стримувальною, або парною.

Сили, що діють на точки невільної механічної системи, можна поділити на активні сили $\vec{F}$ і реакції в'язей $\vec{R}$.

Якщо розглядати рух вільної механічної системи, то положення кожної точки системи можна визначити, наприклад, трьома декартовими координатами x, y, z.

Тоді, положення системи, що складається з n матеріальних точок буде визначатись 3 n координатами.

Якщо розглядати рух невільної механічної системи, яка складається з n матеріальних точок і на яку накладено h в'язей, то положення такої системи буде визначатись кількістю незалежних параметрів

$$S = 3n - h$$

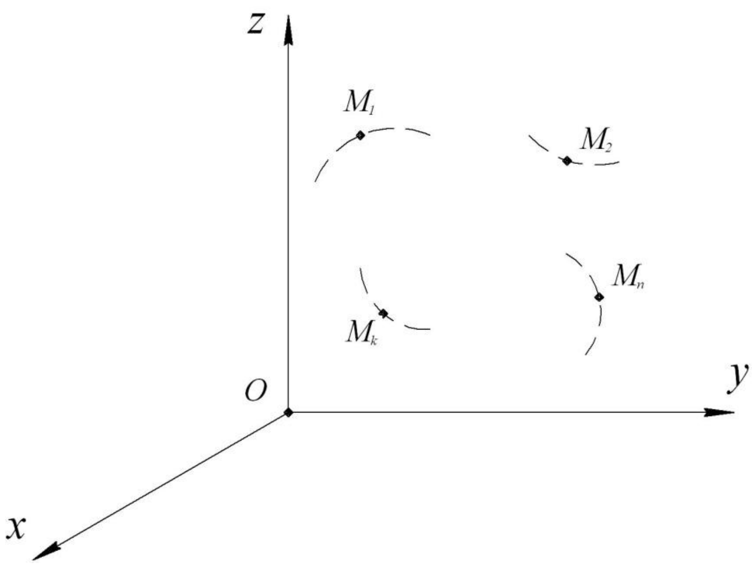
Кількість незалежних параметрів, які цілком однозначно визначають положення точок механічної системи, називається кількістю ступенів вільної системи.

Вільна механічна система $S = 3n$;

Невільна механічна система $S = 3n - h$;

3. <u>Диференціальні рівняння руху механічної системи.</u>

а) вільна механічна система складається з n матеріальних точок і рухається відносно інерціальної системи відліку.



Кожну точку системи розглядаємо як вільну, що рухається під дією сил $\vec{F}_k^e$ і $\vec{F}_k^i$.

Рівняння руху k-тої точки

$$m\vec{W}_k = \vec{F}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i;$$

$$\vec{W}_k = \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2}; \quad \vec{F}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i;$$

Тоді

$$m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i$$

$$m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i$$

……………………

$$m_n \frac{d^2\vec{r}_n}{dt^2} = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i$$

диференціальні рівняння руху вільної механічної системи у векторній формі.

в) невільна механічна система складається з n матеріальних точок і рухається відносно інерціальної системи відліку.

Застосувавши аксіому про звільнення від в'язей шляхом заміни їх відповідними реакціями і розглядаючи кожну точку системи як вільну, що рухається під дією сил $\vec{F}$ і $\vec{R}$ замінимо рівняння руху k-ї точки

$$m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k + \vec{R}_k$$

Приймаючи до уваги, що система сили дається з n матеріальних точок, запишемо

$$m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{R}_1$$

$$m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2 + \vec{R}_2$$

……………………

$$m_n \frac{d^2\vec{r}_n}{dt^2} = \vec{F}_n + \vec{R}_n$$

диференціальні рівняння руху невільної механічної системи у векторній формі.

Якщо спроеціювати векторні системи на осі нерухомої декартової системи координат, то здобудемо систему з 3 n скалярних диференціальних рівнянь руху вільної і невільної механічної системи.

<u>3.8 Дві задачі динаміки механічної системи</u>

1. <u>Пряма задача вільної механічної системи</u> – за кінематичними рівняннями руху точок механічної системи і їх масою, визначити рівнодійні сили, що діють на точки системи.

2. <u>Обернена (основна) задача динаміки вільної механічної системи</u> – за силами, що діють на точки механічної системи (зовнішні і внутрішні), масами і початковими умовами їх руху, визначити закони руху усіх точок системи.

3. Пряма задача невільної механічної системи – за кінематичними рівняннями руху точок механічної системи, їх масами і активними силами, що прикладені до точок системи визначити рівнодійні реакцій в'язей, що накладені на точки системи.

4. Обернена (основна) задача динаміки невільної механічної системи – за активними силами, що діють на точки системи, рівняннями накладених в'язей, початковими умовами руху точок і їх масою, визначити закон руху кожної точки системи і реакції накладених в'язей.

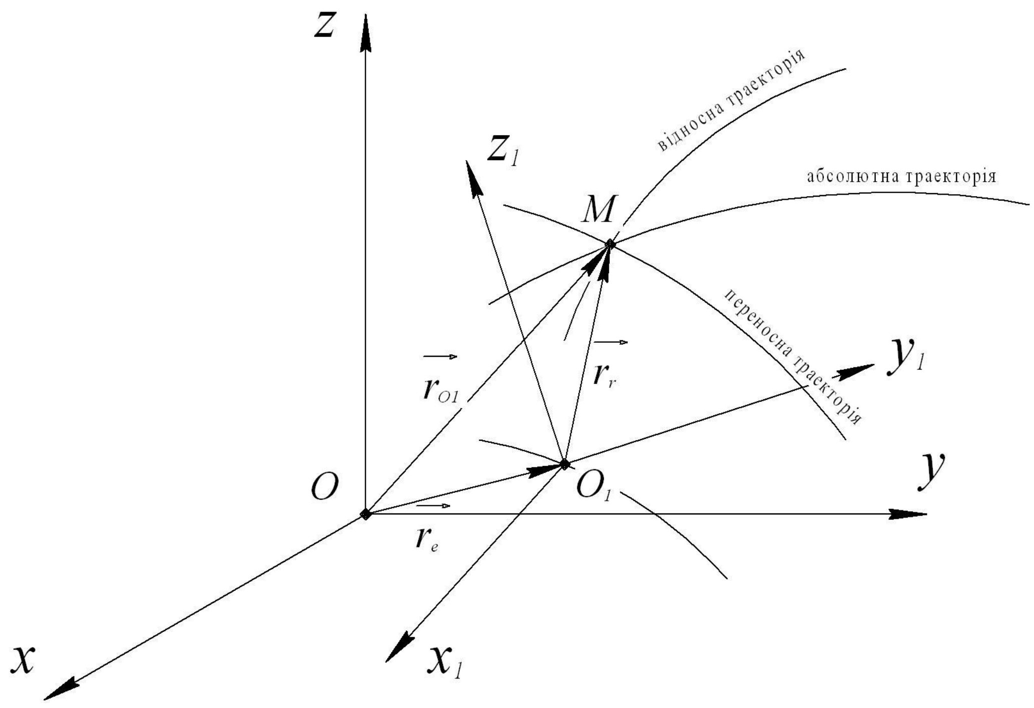
3.9 Відносний рух матеріальної точки

1. Диференціальне рівняння відносного руху матеріальної точки.

Якщо матеріальна точка здійснює рух відносно системи відліку, яка в свою чергу рухається відносно нерухомої (інерціальної), то рух точки називається складним.

Складний рух точки.

Розглянемо дві системи відліку. Перша система відліку визначається декартовою системою координат Oxyz і розглядається як нерухома. Друга система відліку визначається декартовою системою координат $O_1x_1y_1z_1$ і здійснює довільний рух відносно нерухомої системи відліку Oxyz.



$\vec{r}_a$ – радіус-вектор т. М в її абсолютному русі;

$\vec{r}_r$ – радіус-вектор т. М відносно руху4

$\vec{r}_e$ – радіус-вектор т. М переносного руху.

Рух точки відносно нерухомої системи координат називається абсолютним рухом точки.

Рух точки відносно рухомої системи координат називається відносним рухом точки.

Рух рухомої системи координат та всіх незмінно зв'язаних з нею точок відносно нерухомої системи називається <u>переносним рухом.</u>

<u>3.10 Теорема про додавання швидкостей в складному русі точки.</u>

Вектор абсолютної швидкості $\vec{\vartheta}_a$ при складному русі точки дорівнює векторній сумі векторів відносної $\vec{\vartheta}_r$ і переносної $\vec{\vartheta}_e$ швидкостей точки.

З рис. випливає очевидна рівність

$$\vec{r}_a = \vec{r}_e + \vec{r}_r$$

Диференціюючи рівність за часом, маємо

$$\frac{d\vec{r}_a}{dt} = \frac{d\vec{r}_e}{dt} + \frac{d\vec{r}_r}{dt}$$

Тобто

$$\underline{\vec{\vartheta}_a = \vec{\vartheta}_e + \vec{\vartheta}_r}$$

<u>3.11 Теорема про додавання прискорень в складному русі точки (теорема Коріоліса)</u>

Вектор абсолютного прискорення точки в складному русі дорівнює геометричній сумі векторів переносного, відносного і коріолісового прискорень точки

$$\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_k$$

Прискорення Коріоліса визначається векторним додаванням

$$\vec{W}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{\vartheta}_r,$$

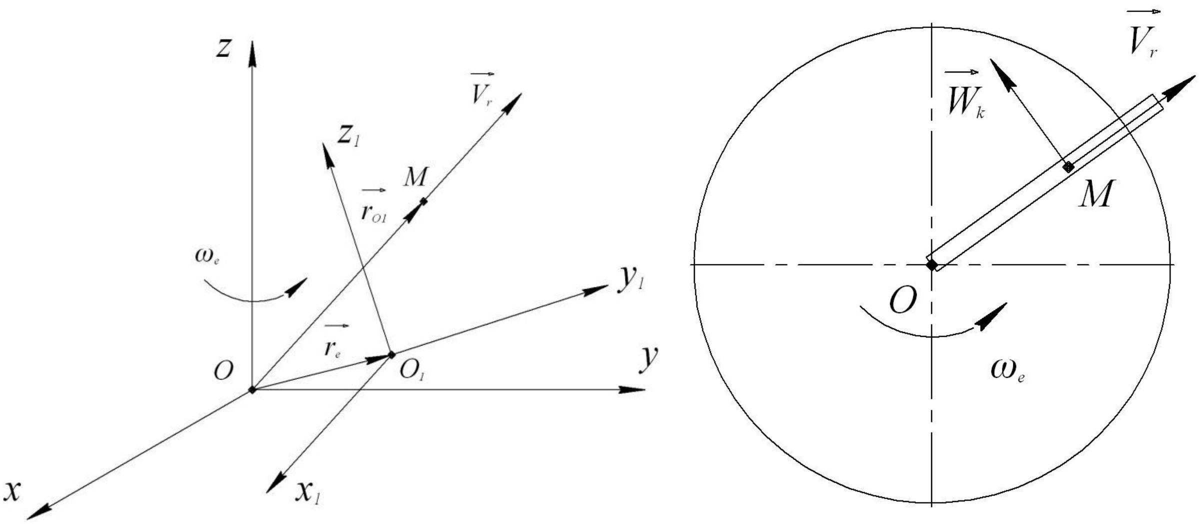
$\vec{\omega}_e$ – вектор кутової швидкості переносного руху;

$\vec{\vartheta}_r$ – вектор відносної швидкості точки.

Величина Коріолісового прискорення визначається

$$W_k = 2\omega_e \cdot \vartheta_r \sin\left(\vec{W}_e, \hat{\vec{\vartheta}_r}\right);$$

Фізичний зміст прискорення Коріоліса



Вільний рух точки відносно інерціальної системи відліку описується основним рівнянням динаміки

$$m\vec{W} = \vec{F}, \tag{3.8}$$

де $\vec{W} = \vec{W}_a$ – абсолютне прискорення точки.

Враховуючи, що

$$\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_k$$

Запишемо

$$m\left(\vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_k\right) = \vec{F}.$$

Тоді $m\vec{W}_r = \vec{F} + \left(-m\vec{W}_e\right) + \left(-m\vec{W}_k\right)$.

Введемо позначення

$\vec{F}_e^{ін} = -m\vec{W}_e$ – переносна сила інерції;

$\vec{F}_k^{ін} = -m\vec{W}_k$ – коріолісова сила інерції;

$\vec{F}_e^{ін}$ і $\vec{F}_k^{ін}$ – Ейлерові сили інерції.

Переносна сила інерції точки в її відносному русі має напрям протилежний до вектора переносного прискорення точки і за величиною дорівнює

$$\vec{F}_e^{ін} = mW_e;$$

Величина Коріолісового прискорення визначає величину Коріолісової сили інерції:

$$\vec{F}_k^{ін} = m \cdot W_k;$$

На підставі розглянутого рівняння (3.8) приймає вигляд

$$m\vec{W}_r = \vec{F} + \vec{F}_e^{ін} + \vec{F}_k^{ін} \tag{3.9}$$

Якщо рух точки буде невільним, то рівняння (3.9) набуває вигляду

$$m\vec{W}_r = \vec{F} + \vec{R} + \vec{F}_e^{ін} + \vec{F}_k^{ін}, \tag{3.10}$$

де $\vec{R}$ – реакція накладеної на точку в’язі.

Якщо спроеціювати рівняння (3.9) і (3.10) на осі неінерціальної системи відліку, то отримуємо рівняння вільного і невільного відносного руху точки в координатній формі

а) вільний рух

$$m\ddot{x}_r = \sum_{k=1}^{n} F_{k_{x_1}} + F^{ін}_{e_{x_1}} + F^{ін}_{k_{x_1}};$$

$$m\ddot{y}_r = \sum_{k=1}^{n} F_{k_{y_1}} + F^{ін}_{e_{y_1}} + F^{ін}_{k_{y_1}};$$

$$m\ddot{z}_r = \sum_{k=1}^{n} F_{k_{z_1}} + F^{ін}_{e_{z_1}} + F^{ін}_{k_{z_1}};$$

б) невільний рух

$$m\ddot{x}_r = \sum_{k=1}^{n} F_{k_{x_1}} + R_{x_1} + F^{ін}_{e_{x_1}} + F^{ін}_{k_{x_1}};$$

$$m\ddot{y}_r = \sum_{k=1}^{n} F_{k_{y_1}} + R_{y_1} + F^{ін}_{e_{y_1}} + F^{ін}_{k_{y_1}};$$

$$m\ddot{z}_r = \sum_{k=1}^{n} F_{k_{z_1}} + R_{z_1} + F^{ін}_{e_{z_1}} + F^{ін}_{k_{z_1}};$$

Рівняння (3.9) і (3.10) називаються основними рівняннями динаміки вільного і невільного руху матеріальної точки.

Для того, щоб скласти диференціальні точки в будь-якій неінерціальній системі відліку в формі основного закону динаміки, необхідно до рівнодійної активних сил, що діють на точку, додати переносну і коріолісову сили інерції, а якщо точка невільна, додати реакції в'язей.

3.12 Загальні теореми динаміки.

1. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки і механічної системи.

Кожна із загальних теорем динаміки має фізичний зміст, який відображає певну область явищ природи і базується на векторній або скалярній величині, що носить назву міри механічного руху:

а) кількість руху (векторна величина).

Основне диференціальне рівняння руху матеріальної точки

$$m\vec{W} = \vec{F};$$

де $m = \text{const}; \quad \vec{W} = \dfrac{d\vec{\vartheta}}{dt};$

Тоді

$$m\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = \frac{d(m\vec{\vartheta})}{dt} = F;$$

або

$$d(m\vec{\vartheta}) = \vec{F} \cdot dt \qquad (3.11).$$

Векторна величина, яка дорівнює добутку $m \cdot \vec{\vartheta}$ називається кількістю руху матеріальної точки, а векторна величина, яка дорівнює добутку $\vec{F} \cdot dt$ – елементарний імпульс сили.

Теорема: Елементарна зміна кількості руху матеріальної т очки дорівнює елементарному імпульсу рівнодійної всіх сил, що діють на точку.

Інтегруючи вираз (3.11) в означених межах маємо

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d(m\vec{\vartheta}) = \int_0^t \vec{F}\cdot dt$$

або

$$m\vec{\vartheta} - m\vec{\vartheta}_0 = \vec{S}, \qquad (3.12)$$

де $\vec{S} = \int_0^t \vec{F}dt$ – імпульс рівнодійної всіх сил, що діють на точку, за кінцевий проміжок часу.

Зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу рівнодійної всіх сил, що діють на точку, за той же проміжок часу.

Проеціюючи векторні вирази (3.11) і (3.12) на осі нерухомої декартової системи координат, отримаємо скалярні вирази розглянутої теореми

$$d\left(m\dot{x}\right) = \sum_{k=1}^{n} F_{k_x}\cdot dt; \quad m\dot{x} - m\dot{x}_0 = S_x;$$

$$d\left(m\dot{y}\right) = \sum_{k=1}^{n} F_{k_y}\cdot dt; \quad m\dot{y} - m\dot{y}_0 = S_y;$$

$$d\left(m\dot{z}\right) = \sum_{k=1}^{n} F_{k_z}\cdot dt; \quad m\dot{z} - m\dot{z}_0 = S_z;$$

де $\quad S_x = \sum_{k=1}^{n}\int_0^t F_{k_x}\cdot dt; \quad S_y = \sum_{k=1}^{n}\int_0^t F_{k_y}\cdot dt; \quad S_z = \sum_{k=1}^{n}\int_o^t F_{k_z}\cdot dt;$

3.13 Теорема про зміну кількості руху механічної системи

Кількість руху механічної системи – є вектор, що дорівнює векторній сумі кількостей руху окремих точок системи, тобто

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k\vec{\vartheta}_k;$$

Проекції кількості руху механічної системи на осі нерухомої декартової системи координат

$$Q_x = \sum_{k=1}^{n} m_k\dot{x}_k; \quad Q_y = \sum_{k=1}^{n} m_k\dot{y}_k; \quad Q_z = \sum_{k=1}^{n} m_k\dot{z}_k;$$

$\vec{Q} = M\vec{\vartheta}_c$, – кількість руху механічної системи

де $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ – маса механічної системи;

$\vec{\vartheta}_c$ – вектор швидкості центра мас механічної системи.

Кількість руху механічної системи дорівнює добутку маси системи на швидкість центра мас системи.

Зміна кількості руху механічної системи за будь-який проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів всіх зовнішніх сил, що діють на точки системи за той же проміжок часу.

$$\vec{Q}-\vec{Q}_0=\vec{S}^e, \tag{3.13}$$

де $\vec{Q}$ – кількість руху механічної системи в момент часу t;

$\vec{Q}_0$ – кількість руху механічної системи в момент $t=0$;

$\vec{S}^e=\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_0^t \vec{F}_k^e dt$ – головний вектор імпульсів всіх зовнішніх сил, що діють на точки системи.

Векторна рівність (3.13) еквівалентна трьом скалярним рівностям в проекціях на нерухомі осі декартової системи координат

$$Q_x-Q_{0_x}=S_x^e;\quad Q_y-Q_{0_y}=S_y^e;\quad Q_z-Q_{0_z}=S_z^e; \tag{3.14}$$

Приріст кількості руху механічної системи в проекції на будь-яку нерухому вісь декартової системи координат, за будь-який фіксований фіксований проміжок часу, дорівнює проекції головного вектора імпульсів всіх зовнішніх сил, що діють на точки системи, на ту ж саму вісь за той же проміжок часу.

<u>Наслідки з теореми про зміну кількості руху механічної системи:</u>

1. Внутрішні сили безпосередньо не впливають на зміну кількості руху механічної системи.

2. У тих випадках, коли геометрична сума всіх зовнішніх сил, що діють на механічну систему $\sum\limits_{k=1} F_k^e=0$, то вектор кількості руху системи $\vec{Q}$ є сталим за величиною і напрямом

$$\vec{Q}-\vec{Q}_0=\vec{S}_e.$$

2. <u>Теорема про рух центра мас механічної системи.</u>

Центр мас механічної системи рухається як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи і до якої прикладені всі зовнішні сили, що діють на точки системи

$$d\vec{Q}=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^e\cdot dt$$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^e;\quad \vec{Q}=M\vec{\vartheta}_c$$

$$M\frac{d\vec{\vartheta}_c}{dt}=\sum_{k=1}^{n}F_k^e\quad M\vec{W}_c=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^e$$

Векторна рівність еквівалентна трьом скалярним рівностям в проекціях на нерухомі осі декартової системи координат:

$$M\ddot{x}_c=\sum_{k=1}^{n}F_{k_x}^e;\quad M\ddot{y}_c=\sum_{k=1}^{n}F_{k_y}^e;\quad M\ddot{z}_c=\sum_{k=1}^{n}F_{k_z}^e;$$

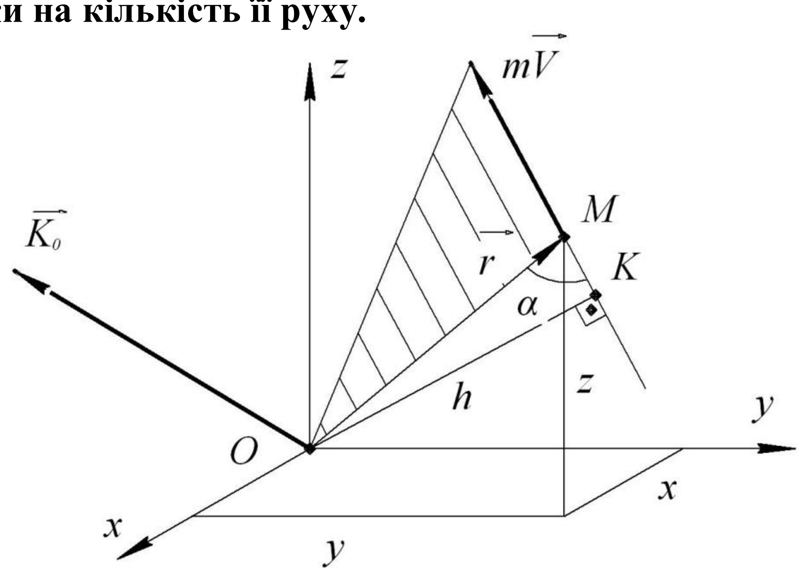
<u>Наслідки з теореми:</u> 1. Внутрішніми силами безпосередньо не можна змінити характер руху центра мас системи, так як рівняння їх не містить.

2. Якщо геометрична сума всіх зовнішніх сил, що діють на точки системи дорівнює нулю, то центр мас механічної системи перебуває у спокої, або рухається рівномірно і прямолінійно, тобто $\vartheta_c=\text{const}$.

3. Якщо алгебраїчна сума проекцій всіх зовнішніх сил, що діють на точки системи, на будь-яку нерухому вісь декартової системи координат дорівнює нулю, то проекція вектора швидкості центра мас механічної системи на цю вісь не змінюється, тобто $\vartheta_{c_x} = \dot{x}_c = \text{const}$.

3.14 Момент кількості руху матеріальної точки і механічної системи (кінетичний момент)

Момент кількості руху окремої матеріальної точки відносно довільного нерухомого центра O дорівнює векторному добутку радіус-вектора точки на кількість її руху.



$$\vec{K}_0 = \vec{r} \times m\vec{\vartheta}.$$

За модулем вектор $\vec{K}_0$ такий

Кінетичний момент – векторна величина.

Для механічної системи моментом кількості руху системи, або кінематичним моментом системи відносно довільного нерухомого центра (точки) O, називається геометрична сума моментів кількості руху всіх точок системи відносно цього довільного центра (точки):

Вектор моменту кількості руху механічної системи $\vec{K}_0$ прикладений в центрі, відносно якого він визначається.

Одиниця моменту кількості руху $\vec{K}_0$ і $\vec{k}_0$ – $\left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}\right]$ в системі СІ

$$\vec{K}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{k}_{0_k}$$

3.15 Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки і механічної системи.

Основне рівняння динаміки матеріальної точки

$$m\vec{W} = \vec{F}$$

Помноживши зліва обидві частини рівняння на радіус-вектор, маємо

$$\vec{r} \times m\vec{W} = \vec{r} \times \vec{F};$$

Оскільки $\vec{W} = \dfrac{d\vec{\vartheta}}{dt}$, то $\vec{r} \times m\dfrac{d\vec{\vartheta}}{dt} = \dfrac{d\left(\vec{r} \times m\vec{\vartheta}\right)}{dt} = \dfrac{d\vec{k}_0}{dt}$;

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0\left(\vec{F}\right)$$

Тоді основне рівняння динаміки матеріальної точки набуває вигляду

$$\frac{d\vec{k}_0}{dt} = \vec{M}_0\left(\vec{F}\right) \qquad (3.15)$$

Теорема (точка): **Похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно деякого нерухомого центра О дорівнює моменту рівнодійної всіх сил. Що діють на точку, відносно того самого центра О.**

Векторній рівності (3.15) відповідають три скалярні рівності

$$\frac{dk_x}{dt} = M_x\left(\vec{F}\right); \quad \frac{dk_y}{dt} = M_y\left(\vec{F}\right); \quad \frac{dk_z}{dt} = M_z\left(\vec{F}\right) \qquad (3.16)$$

Розглянемо механічну систему, що складається з n матеріальних точок.

Застосуємо до кожної точки системи теорему про змінні моменти кількості руху.

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{k}_{0_1}}{dt} = \vec{M}_0\left(\vec{F}_1^{\,e}\right) + \vec{M}_0\left(\vec{F}_1^{\,i}\right); \\ \dfrac{d\vec{k}_{0_2}}{dt} = \vec{M}_0\left(\vec{F}_2^{\,e}\right) + \vec{M}_0\left(\vec{F}_2^{\,i}\right); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d\vec{k}_{0n}}{dt} = \vec{M}_0\left(\vec{F}_n^{\,e}\right) + \vec{M}_0\left(\vec{F}_n^{\,i}\right); \end{cases}$$

Складаючи рівняння почленно, маємо

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d\vec{k}_{0_k}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0\left(\vec{F}_k^{\,e}\right) + \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0\left(\vec{F}_k^{\,i}\right),$$

де

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d\vec{k}_{0_k}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \frac{d\vec{k}_{0_k}}{dt} = \frac{d\vec{K}_0}{dt}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0\left(\vec{F}_k^{\,i}\right) = 0;$$

Тоді:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0\left(\vec{F}_k^{\,e}\right) \qquad (3.17)$$

Теорема про зміну моменту кількості руху механічної системи:

Похідна за часом від вектора моменту кількості руху механічної системи (кінетичного моменту) відносно довільного нерухомого центра (точки) дорівнює геометричній сумі моментів усіх зовнішніх сил, що діють на точки системи, відносно того самого центра (точки).

У проекціях на нерухомі осі декартової системи координат векторна рівність (3.17) еквівалентна трьом скалярним виразам

$$\frac{dK_x}{dt}=\sum_{k=1}^{n}M_x\left(\vec{F}_k^e\right);\quad \frac{dK_y}{dt}=\sum_{k=1}^{n}M_y\left(\vec{F}_k^e\right);\quad \frac{dK_z}{dt}=\sum_{k=1}^{n}M_z\left(\vec{F}_k^e\right);\qquad (3.18)$$

Наслідки з теореми про зміну моменту кількості руху механічної системи:

1. Внутрішніми силами безпосередньо не можна змінити кінетичний момент механічної системи, оскільки рівняння (3.17) і (3.18) їх не містять.

2. Якщо геометрична сума всіх моментів зовнішніх сил, що діють на точки механічної системи, відносно довільного нерухомого центра (точки) дорівнює нулю, то кінетичний момент механічної системи відносно того самого центра не змінюється ні за модулем, ні за напрямом. $\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_0\left(\vec{F}_k^e\right)=0\Rightarrow\vec{K}_0=const$ (із визначення похідної).

3. Якщо алгебраїчна сума всіх моментів зовнішніх сил, що діють на точки механічної системи, відносно будь-якої нерухомої осі декартової системи координат дорівнює нулю, то кінетичний момент механічної системи відносно тієї самої осі не змінюється в процесі руху.

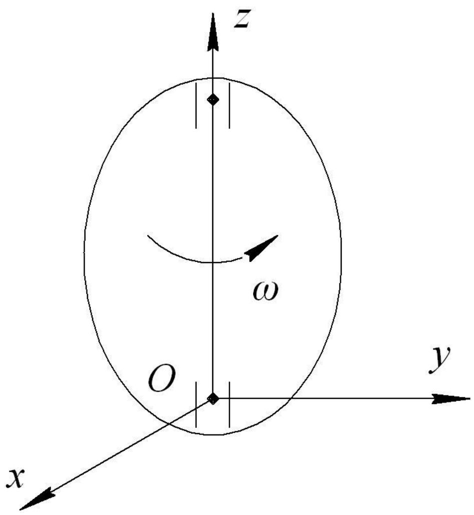
Наслідки 2 і 3 є закон збереження кінетичного моменту механічної системи

$$K_z=I_z\cdot\omega=const,\ \text{оскільки}$$

$\sum_{k=1}^{n}M_z\left(\vec{F}_k^e\right)=0$ (фігуристка обертається навколо нерухомої вертикальної осі O_z).

3.16 Обертальний рух твердого тіла.

Диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі



$$\frac{d(I_z\ \omega_z)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_k^e\right)$$

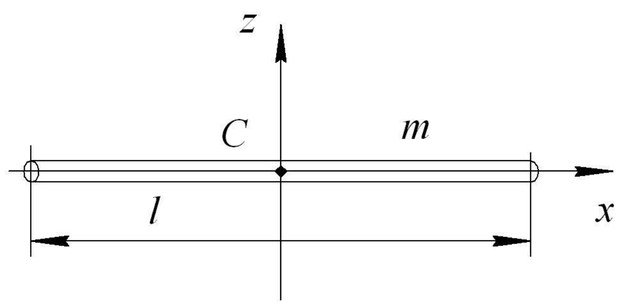
або $\quad I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(F_k^e\right),$

де $\quad \ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ – кутове прискорення твердого тіла

I_z – момент інерції твердого тіла відносно осі обертання;

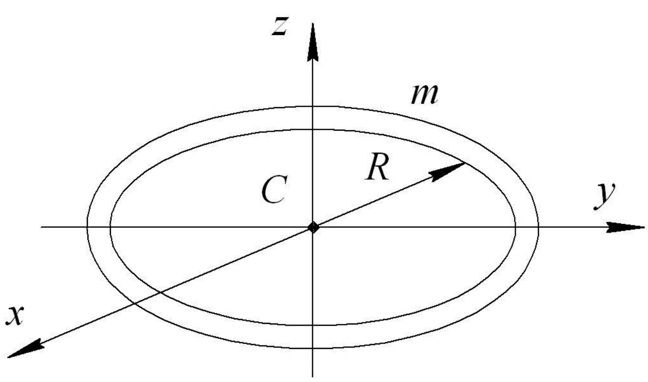
$\sum_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_k^e\right)$ – момент зовнішніх сил відносно вісі обертання.

а) стержень



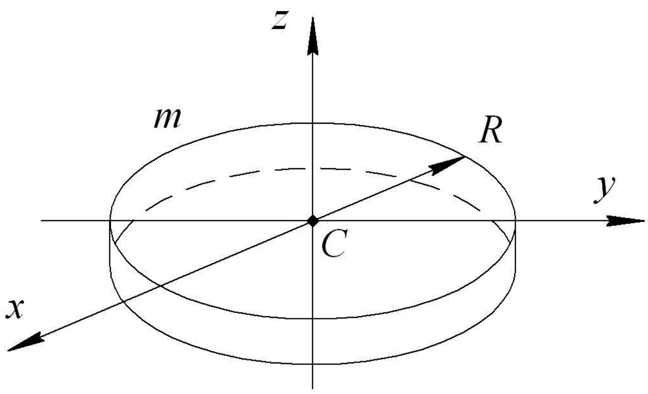
$$I_z = \frac{ml^2}{2}$$

б) кільце



$$I_z = mR^2$$

в) диск



$$I_z = \frac{mR^2}{2};$$

$$I_z = I_y = \frac{mR^2}{4};$$

3.17 Кінетична енергія матеріальної точки і механічної системи. Кінетична енергія твердого тіла.

Кінетична енергія – міра механічного руху, яка характеризує його здатність перетворюватися в еквівалентну кількість іншого виду руху (теплоту, електрику, тощо).

Кінетична енергія окремої матеріальної точки дорівнює півдобутку маси точки на квадрат її швидкості

$$T = \frac{\vartheta^2}{2},$$

m – маса точки;
ϑ – швидкість точки.

Кінетична енергія матеріальної точки є скалярною величиною завжди додатною. Розмірність кінетичної енергії [Дж = Н·м].

Кінетична енергія механічної системи дорівнює сумі кінетичних енергій всіх точок системи:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \cdot \vartheta_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{2}\left(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2\right)$$

де $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ – проекції швидкості k-ї точки механічної системи на нерухомі осі декартової системи координат.

Кінетична енергія твердого тіла:

а) при поступальному русі твердого тіла. Всі точки тіла рухаються з однаковими швидкостями, $\vartheta_k = \vartheta_c$:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \cdot \vartheta_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \cdot \vartheta_c^2}{2} = \frac{M\vartheta_c^2}{2};$$

$$T = \frac{M\vartheta_c^2}{2};$$

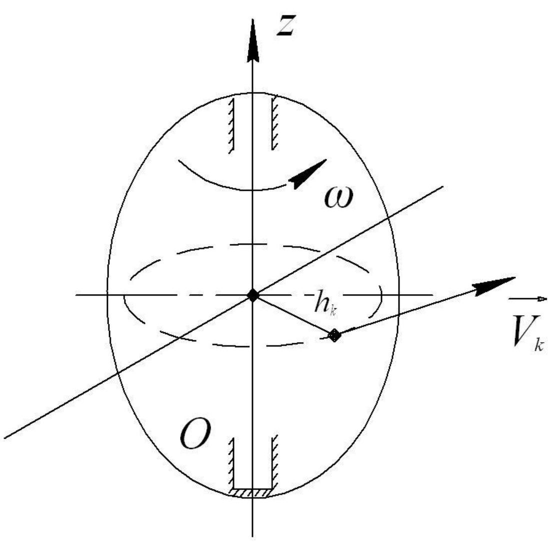
$M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ – маса твердого тіла.

б) при обертальному русі твердого тіла навколо нерухомої осі. Швидкість будь-якої точки тіла масою m_k становить $\vartheta_k = \omega \cdot h_k$, де ω – кутова швидкість обертання тіла; h_k – радіус обертання т. К відносно вісі Oz.

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \cdot \vartheta_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \cdot (\omega h_k)^2}{2} = \left(\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot h_k^2 \right) \frac{\omega^2}{2} = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2};$$

$$T = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2},$$

де I_z – момент інерції твердого тіла відносно осі обертання: $I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot h_k^2$



Кінетична енергія твердого тіла при його обертанні навколо нерухомої осі дорівнює півдобутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості тіла.

в) при плоско паралельному русі твердого тіла. Кінетична енергія тіла визначається за допомогою теореми Кеніга:

$$T = \frac{M\vartheta_c^2}{2} + \frac{I_c\, \omega^2}{2};$$

де I_c – момент інерції твердого тіла відносно осі, що проходить через центр мас тіла С перпендикулярно до нерухомої площини.

Кінетична енергія твердого тіла при плоскопаралельному русі складається з кінетичної енергії тіла при його поступальному русі зі швидкістю центра мас ϑ_c і кінетичної енергії тіла при його обертанні

навколо осі, що проходить через центр мас С тіла перпендикулярно до нерухомої площини, з кутовою швидкістю ω.

г) <u>при довільному русі твердого тіла.</u> Кінетична енергія визначається за допомогою теореми Кеніга:

$$T = \frac{M\vartheta_c^2}{2} + \frac{I_{смм}\,\omega^2}{2},$$

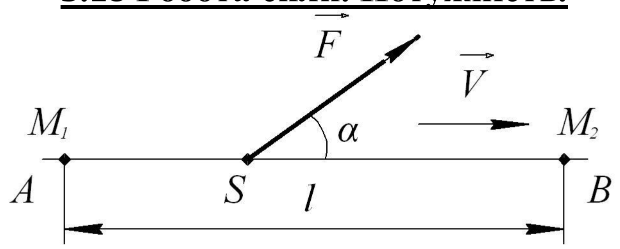
де м – маса твердого тіла; ϑ_c – швидкість центра мас твердого тіла; $I_{смм}$ – момент інерції твердого тіла відносно миттєвої осі, що проходить через центр мас тіла; ω – миттєва кутова швидкість тіла.

Якщо механічна система складається з кількох твердих тіл, то кінетична енергія такої системи дорівнює сумі кінетичних енергій кожного твердого тіла, що входить до складу цієї системи.

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k,$$

де T_k – кінетична енергія окремого твердого тіла, що входить до складу механічної системи.

3.18 Робота сили. Потужність.



Точка М рухається вздовж прямої АВ під дією сталої за модулем і напрямом сили $\vec{F}$.

$$\underline{A = F \cdot S \cdot \cos\alpha}.$$

Робота сталої сили $\vec{F}$ на прямолінійному відрізку АВ є добуток величини сили F **на величину переміщення S і на косинус кута між ними.**

Робота сили – скалярна величина;

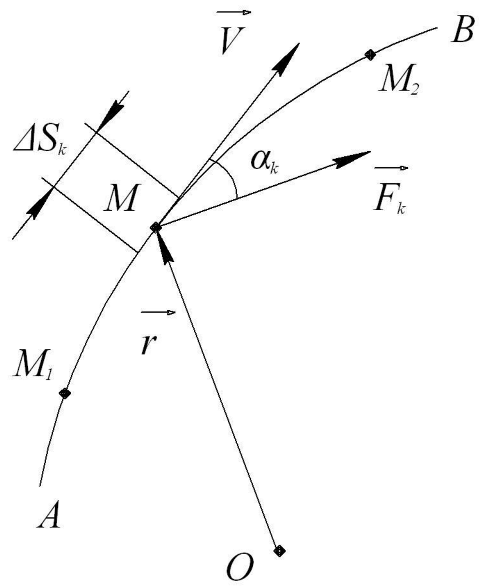
При $\alpha < \pm\frac{\pi}{2}$ – робота сили додатна;

При $\alpha > \pm\frac{\pi}{2}$ – робота сили від'ємна;

При $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ – робота сили F на переміщення S дорівнює нулю.

За одиницю роботи – розмірність [A]=[Дж=Н м].

У випадку криволінійного руху матеріальної точки під дією змінної сили відрізок кривої M_1M_2 поділимо на n довільних малих відрізків довжиною ΔS_k.



Вважаючи кожний відрізок прямолінійним і таким, що при переміщенні точки М уздовж цього відрізка сила $\vec{F}$ залишається сталою за величиною і напрямом, знайдемо приблизне значення роботи сили $\vec{F}$ на переміщенні точки від M_1 до M_2.

$$A \approx \lim_{\substack{n\to 0\\ \Delta S\to 0}} \sum_{k=1}^{n} F_k \cdot \cos\alpha_k \cdot \Delta S_k = \int_{M_1M_2} F\cdot\cos\alpha\cdot dS$$

Отриманий інтеграл називається криволінійним інтегралом по дузі M_1M_2.

Елементарна робота сили – вираз, що міститься під знаком інтеграла

$$dA = F\cdot\cos\alpha\cdot dS.$$

З кінематики відомо, що $dS = |d\vec{r}|$, де $d\vec{r}$ – елементарний приріст радіуса-вектора точки.

Тоді $dA = F\cdot\cos\alpha\,|d\vec{r}|$,

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

Якщо розкласти $\vec{F}$ і $d\vec{r}$ по осям декартової системи координат

$$\vec{F} = F_x\cdot\vec{i} + F_y\cdot\vec{j} + F_z\cdot\vec{k};$$

$$d\vec{r} = dx\cdot\vec{i} + dy\cdot\vec{j} + dz\cdot\vec{k},$$

то елементарна робота сили визначиться

$$dA = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz.$$

Інтегруючи вираз, матимемо

$$A = \int_{M_1M_2} \left(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz\right). \qquad (3.19)$$

За формулою (3.19) визначається робота змінної сили на криволінійному переміщенні матеріальної точки при координатному способі задання її руху, якщо сила $\vec{F}$ залежить від положення точки.

Потужність N характеризує роботу сили за одиницю часу (швидкість виконання роботи).

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{\vartheta}$$

$$\underline{N = \vec{F} \cdot \vec{\vartheta}},$$

де $\vec{\vartheta}$ – вектор швидкості точки.

Потужність дорівнює скалярному добутку вектора сили $\vec{F}$, що прикладена до точки, на вектор швидкості $\vec{\vartheta}$ цієї точки.

Одиниця потужності в системі СІ [Вт]=[$\frac{Дж}{с}$]=[$\frac{Н \cdot м}{с}$].

Елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла.

а) при поступальному русі твердого тіла елементарна робота зовнішніх сил дорівнює скалярному добутку головного вектора зовнішніх сил $\vec{R}_0^e$ на вектор елементарного переміщення центра мас $d\vec{r}_c$ твердого тіла.

(при поступальному русі всі точки тіла мають однакові елементарні переміщення, які дорівнюють елементарному переміщенню центра мас)

$$dA = \vec{F}_1^e\, d\vec{r}_c + \vec{F}_2^e\, d\vec{r}_c + \ldots + \vec{F}_n^e\, d\vec{r}_c = \left(\vec{F}_1^e + \vec{F}_2^e + \ldots + \vec{F}_n^e\right) d\vec{r}_c = \vec{R}_0^e\, d\vec{r}_c$$

$$\underline{dA = \vec{R}_0^e\, d\vec{r}_c};$$

б) при обертальному русі твердого тіла елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, дорівнює добутку головного моменту зовнішніх сил відносно осі обертання M_z^e на елементарний кут повороту твердого тіла

$$\underline{dA = M_z^e \cdot d\varphi};$$

в) при плоско паралельному русі твердого тіла елементарна робота зовнішніх сил дорівнює сумі роботи поступального руху центра мас і обертального руху тіла навколо осі, що проходить через центр мас.

$$\boxed{dA = \vec{R}_O^e \cdot d\vec{r}_c + M_c^e \cdot d\varphi}$$

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки.

Основне рівняння динаміки матеріальної точки

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

Помноживши скалярно ліву і праву частини цього рівняння на $d\vec{r}$ (вектор елементарного переміщення точки):

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Перетворимо ліву частину цього виразу

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v} = m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v} = d(\frac{mv^2}{2})$$

Тоді

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Про інтегрувавши цей вираз у визначених межах отримаємо:

$$\int_{v_0}^{v} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{M_0M} \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad \int_{T_0}^{T} dT = \int_{M_0M} dA$$

Отримаємо $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A \;\; T - T_0 = A$

<u>Теорема: </u> Зміна кінетичної енергії матеріальної точки на деякому її переміщенні дорівнює роботі рівнодійної всіх сил, що діють на точку, на цьому самому переміщенні:

$$T - T_0 = A$$

<u>Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи</u>

Диференціальне рівняння руху к-ї точки:

$$m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$$

Помноживши скалярно обидві частини рівняння на $d\vec{r}_k$:

$$m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt}\cdot d\vec{r}_k = \vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k + \vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k$$

$$m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt}\cdot d\vec{v}_k = m_k \cdot \vec{v}_k d\vec{v}_k = d\left(\frac{m_k \vec{v}_k^2}{2}\right)$$

$$d\left(\frac{m_k \vec{v}_k^2}{2}\right) = \vec{F}_k^e d\vec{r}_k + \vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k$$

або

$$d\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e d\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i d\vec{r}_k$$

$$dT = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e + \sum_{k=1}^{n} dA_k^i$$

$$\boxed{dT = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e d\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i d\vec{r}_k} \qquad (3.20)$$

Диференціал кінетичної енергії механічної системи дорівнює сумі елементарних робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладеної до точок системи.

Про інтегрувавши обидві частини рівняння (3.20) у визначених межах:

$$\int_{To}^{T} dT = \sum_{k=1}^{n} \int_{M_0M} dA_k^e + \sum_{k=1}^{n} \int_{MoM} dA_k^i$$

Маємо

$$\boxed{\int_{To}^{T} dT = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i}$$

Теорема: Зміна кінетичної енергії механічної системи з одного положення в інше дорівнює сумі робіт на цьому переміщенні усіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до точок системи.

Коливання. Вільні коливання матеріальної точки.

Коливання – це рухи або процеси, які періодично повторюються через певні проміжки часу (маятник, вібрації машин і споруд).

Розрізняють коливання:
- вільні, або власні;
- згасаючі;
- змушені.

Вільними, або власними, коливаннями матеріальної точки називається рух точки, який відбувається під дією відновлюваної сили. (Джерело відновлюваної сили – різні пружні тіла, з якими взаємодіє матеріальна точка, наприклад розтягнена або стиснена пружина).

Відновлювальна сила, величина якої пропорційна відхиленню точки від положення рівноваги, називається силою пружності.

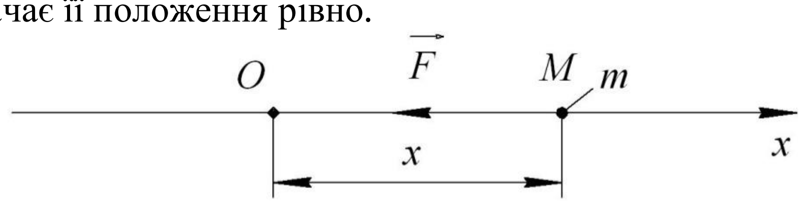
На підставі закону Гука сила пружності дорівнює:

$$\vec{F} = -c \cdot \vec{\Delta},$$

де c - коефіцієнт жорсткості (пружності);

$\vec{\Delta}$ - відхилення точки від положення рівноваги.

Точка М рухається під дією відновлюваної сили $\vec{F}$ уздовж осі Ox, а точка O визначає її положення рівно.



Визначимо закон руху точки (друга основна задача динаміки).

Диференціальне рівняння руху точки в проекції на вісь Ox має вигляд

$$m\ddot{x} = -cx,$$

або

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0 \qquad (3.21)$$

Введемо заміну $\frac{c}{m} = k^2$

Тоді рівняння (3.21) набуде вигляду

$$\ddot{x} + k^2 x = 0; \qquad (3.22)$$

Рівняння (3.22) – диференціальне рівняння вільних коливань матеріальної точки.

Щоб про інтегрувати це однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, необхідно скласти характеристики рівняння $r^2 + k^2 = 0$; і визначити його корені $r_{12} = \pm ik$. Оскільки корені суто уявні, то загальний розв'язок рівняння (3.22) має вигляд

$$x = c_1 \cdot \sin kt + c_2 \cos kt, \qquad (3.23)$$

де c_1, c_2 – сталі інтегрування.

Введемо нові сталі a і α, взявши, що

$$c_1 = a \cdot \cos\alpha; \; c_2 = a \cdot \sin\alpha;$$

Підставляючи значення c_1 і c_2 у рівняння 3.23 матимемо:

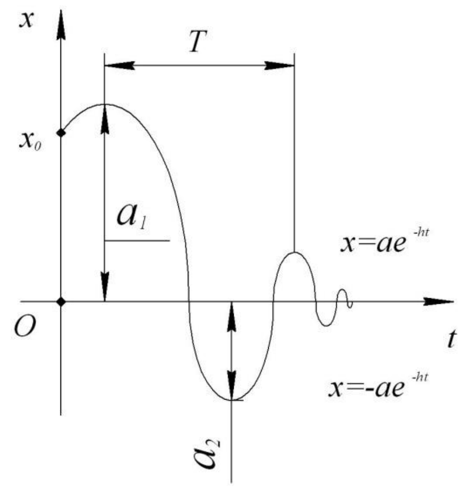
$$x = a\cos\alpha\sin kt + a\sin\alpha \cdot \cos kt$$

або

$$x = a\sin(kt + \alpha) \qquad (3.24)$$

- закон руху матеріальної точки кут коливальному русі (рівняння коливального руху матеріальної точки).

Таким чином, під дією відновлювальної сили матеріальна точка рухається за синусоїдальним законом, тобто здійснює гармонічний і коливальний рух.



У рівнянні (3.24): a - амплітуда коливання - абсолютна величина найбільшого відхилення точки від її положення рівноваги;

$(kt + \alpha)$ - фаза коливання;

α - початкова фаза коливання;

k - колова частота коливання (власна частота) – кількість коливань матеріальної точки за 2 секунд.

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}};$$

Власна частота коливань не залежить від початкових умов руху матеріальної точки.

Амплітуда і початкова фаза вільних коливань матеріальної точки визначаються на підставі початкових умов руху точки.

Для визначення швидкості руху точки необхідно про диференціювати рівняння (3.24) за часом

$$\dot{x} = ak\cos(kt + \alpha) \qquad (3.25)$$

Періодом коливання T матеріальної точки називається проміжок часу, по закінченню якого точка має ту саму координату x і ту саму проекцію швидкості $\dot{x}$. Оскільки значення синуса повністю повторюється через 2π, то по закінченню періоду коливання фаза коливання також змінюється на 2π.

Тоді з рівняння (3.24) матимемо:

$$\left[k(t+T)+\alpha\right]-(kt+\alpha)=2\pi;$$
$$kt+kT+\alpha-kt-\alpha=2\pi$$
$$T=\frac{2\pi}{k} \tag{3.26}$$
період коливання T матеріальної точки.

Період коливань матеріальної точки не залежить від початкових умов руху точки.

Величина ν, обернена до періоду коливання, визначає кількість коливань матеріальної точки за одну секунду і називається частотою коливань.

$$\nu=\frac{1}{T}$$

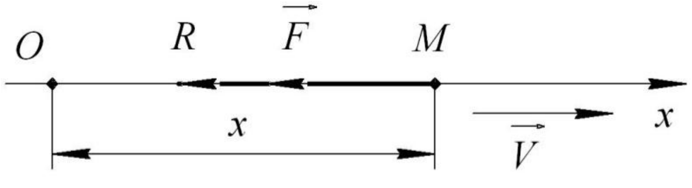
Частота коливань ν у системі СІ вимірюється в герцах $[\nu]=[\text{Гц}]$

Висновки:

1. Вільні (власні) коливання матеріальної точки повністю визначаються амплітудою, коловою частотою, початковою фазою і періодом коливання.
2. Вільні коливання матеріальної точки відбуваються за синусоїдальним законом, тобто вони є гармонічними
3. Амплітуда та початкова фаза вільних коливань залежить від початкових умов коливання.
4. Колова частота і період вільних коливань матеріальної точки не залежить від початкових умов коливання, а визначаються властивістю відновлювальної сили (коефіцієнтом жорсткості c і масою точки m).
5. Вільні коливання матеріальної точки можуть вплинути тільки за початкових умов, відмінних від кутових.
6. Вільні коливання матеріальної точки продовжуються під дією відновлювальної сили без зміни параметрів коливання як завгодно довго коли інші сили не змінять характер цих коливань.

Згасаючі коливання матеріальної точки

На матеріальну точку M окрім відновлювальної сили $\vec{F}=-c\vec{\Delta}$ діє сили опору середовища R.



Величина сили R пропорційна першому ступеню швидкості точки і напрямлена сили $\vec{R}$ у протилежний від вектора швидкості точки $\vec{v}$ в бік.

$$\vec{R}=-b\vec{v},$$

де b – коефіцієнт опору середовища.

Диференціальне рівняння руху точки в проекції на вісь Ox має вигляд :

$$m\ddot{x}=-cx-b\dot{x}$$

або

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{c}{m} = 0$$

Введемо коефіцієнт:

$h = \frac{b}{2m}$ - коефіцієнт, що характеризує властивості середовища з опором;

і параметр $k^2 = \frac{c}{m}$ - параметр, що характеризує пружні характеристики джерела відновлювальної сили.

Тоді, останнє рівняння набуде вигляду:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = 0 \tag{3.27}$$

Рух точки, що описується рівнянням (3.27) є згасаючим. Рівняння (3.27) називається диференціальним рівнянням згасаючих коливань.

Для інтегрування лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами складемо характеристичне рівняння:

$$r^2 + 2hr + k^2 = 0$$

і знайдемо його корені:

$$r_{12} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2} \tag{3.28}$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння залежить від коренів характеристичного рівняння.

Тут можуть бути три випадки:

Випадок 1.

$h \langle k$ - малий опір середовища

Корені рівняння (3.28)

$$r_{12} = -h \pm i\sqrt{k^2 - h^2}\,.$$

Загальний розв'язок рівняння (1) у цьому випадку має вигляд:

$$x = e^{-ht}\left(c_1 \sin k^* t + c_2 \cos k^* t\right) \tag{3.29}$$

де c_1 і c_2 - сталі інтегрування; $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$;

Випадок 2

$h \rangle k$ - великий опір середовища.

Корені характеристичного рівняння (3.28)

$$r_{12} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}$$

Загальний розв'язок рівняння (3.27) у цьому випадку має вигляд:

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \tag{3.30}$$

де c_1 і c_2 - сталі інтегрування ; e =2,718;

Випадок 3.

$h = k$ (граничний випадок) , (опір середовища відповідає значенню відновлювальної сили).

Корені характеристичного рівняння:

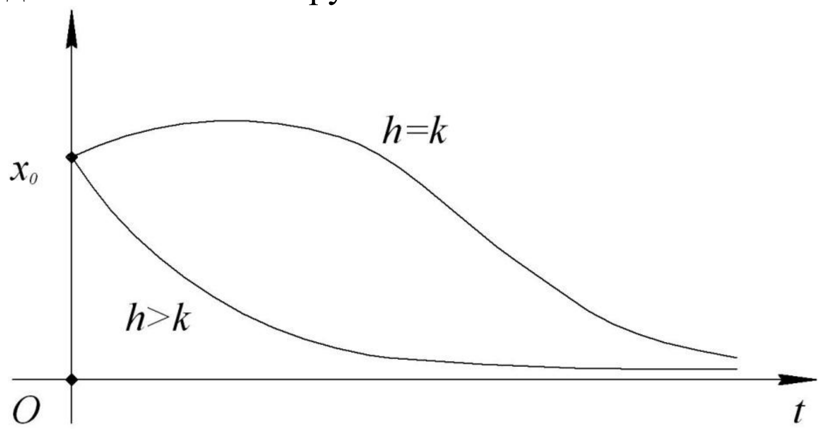
$$r_{12} = -h\,;$$

Загальний розв'язок рівняння (3.27) у цьому випадку має вигляд:

$$x = (c_1 t + c) \cdot e^{-ht}, \qquad (3.31)$$

де c_1 і c_2 - сталі інтегрування.

З рівнянь (3.30) і (3.31) випливає, що у випадках, коли $h \rangle k$ і $h = k$, рух матеріальної точки не має коливального характеру, точка здійснює так званий аперіодичний згасаючий рух.



Розглянемо докладно випадок малого опору середовища. Перетворимо загальний розв'язок (3.29) у більш зручний для аналізу вигляд. Для цього введемо нові сталі a і α за допомогою формул

$$c_1 = a \cdot \cos\alpha \ ; \ c_2 = a \cdot \sin\alpha$$

Тоді

$$x = e^{-ht}\left(a\cos\alpha \cdot \sin k^* t + a \sin\alpha \cdot \cos k^* t\right),$$

або

$$x = ae^{-ht}\left(\sin k^* t \cos\alpha + \cos k^* t \cdot \sin\alpha\right)$$

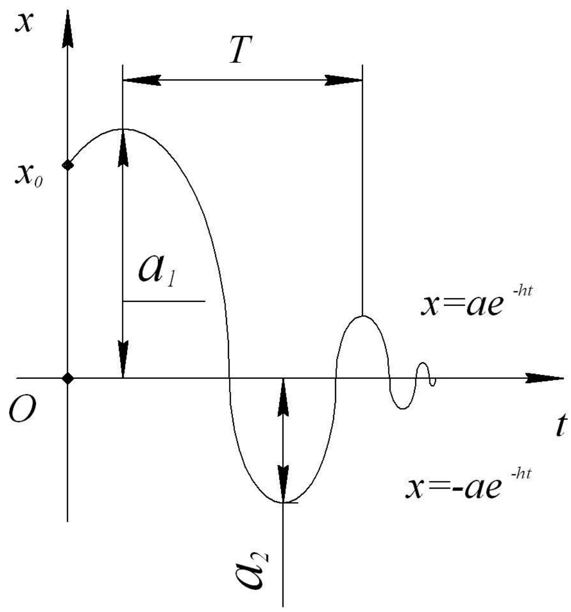
Остаточно закон руху матеріальної точки

$$\boxed{x = ae^{-ht}\sin\left(k^* t + \alpha\right)} \qquad (3.32)$$

де $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$

Рівняння (3.32) є законом згасаючого коливального руху матеріальної точки.

З рівняння (3.32) випливає, що рух точки має коливальний характер, оскільки координата ч набуває або додатного, або від'ємного значення. При цьому множник e^{-ht} показує, що коливання будуть згасати.



Рух матеріальної точки не є періодичним, оскільки величина ae^{-ht} зменшується за експонціальним законом.

Амплітуда і початкових умов руху точки.

Для визначення швидкості руху точки про диференціюємо рівняння (3.32) за часом

$$\dot{x} = -ahe^{-ht}\sin(k^*t + \alpha) + ak^*e^{-ht}\cos(k^*t + \alpha) \qquad (3.33)$$

За початковими умовами руху точки:

$$t = 0; \quad x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

З рівнянь (3.32) і (3.33) визначимо початкову фазу і амплітуду вільних коливань матеріальної точки:

$$tg\alpha = \frac{k^* x_0}{\dot{x}_0 + hx_0}; \qquad a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + hx_0)^2}{(k^*)^2}};$$

Колова частота згасаючих коливань матеріальної точки визначається за формулою:

$$k^* = \sqrt{k^2 - h^2}.$$

Період згасаючих коливань матеріальної точки

$$T^* = \frac{2\pi}{k^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}} = \frac{2\pi}{k\sqrt{1 - \left(\frac{h}{k}\right)^2}} \approx T \qquad (3.34)$$

Формула (3.34) показує, що період згасаючих коливань матеріальної точки дещо більший за період вільних коливань точки.

При малому опорі середовища можна вважати, що період T^* дорівнює періоду вільних коливань T.

Амплітуда згасаючих коливань a_1, a_2, a_3…. Зменшується за період за законом геометричної прогресії.

Знаменник геометричної прогресії:

$$q = \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{ae^{-h(t+T^*)}\sin\left[k^*(t+T^*)+\alpha\right]}{ae^{-ht}\sin(k^*t+\alpha)} = \frac{ae^{-h(t+T^*)}}{ae^{-ht}} = e^{-hT^*}$$

$\boxed{q = e^{-hT^*}}$ - декремент коливання

<u>Логарифмічним декрементом коливання</u> називається логарифм співвідношення двох сумісних амплітуд, які відрізняються за часом на T^*;

$$\boxed{\ln\frac{a_i}{a_{i+1}} = h \cdot T^*}$$

Зменшення амплітуди коливання відбувається за експонціальним законом. Малий опір середовища, в якому здійснюється коливання, приводить до незначного збільшення періоду коливання матеріальної точки порівняно з випадком вільних коливань і до зменшення амплітуди коливань з часом.

<u>3.19 Потенціальне силове поле</u>

<u>Силове поле</u> – частина простору (обмежена або необмежена) в кожній точці якої на розташовану там матеріальну точку діє сила, величина і напрям якої залежить від декартових координат x, y, z цієї точки, або від координат точки і часу t.

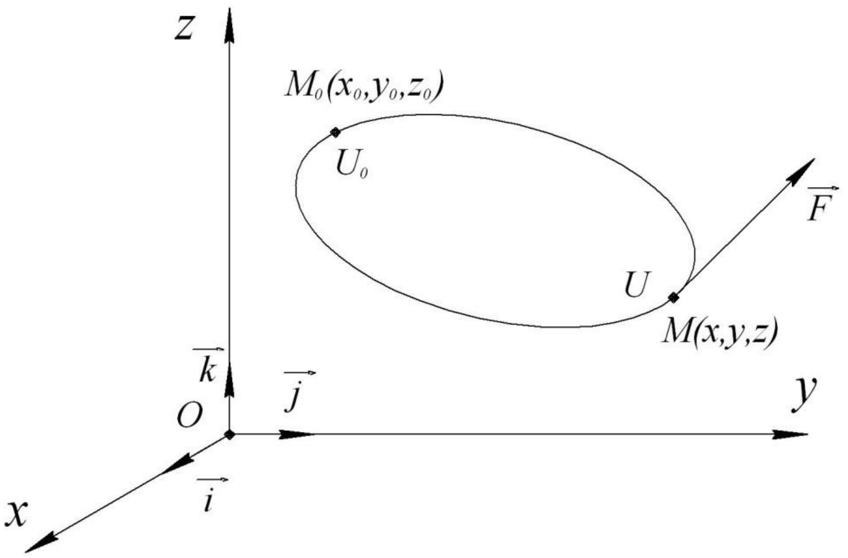
<u>Стаціонарне силове поле</u> – силове поле в якому сили не змінюються з часом, тобто не залежать від часу.

Стаціонарне <u>силове поле</u> називається <u>потенціальним</u>, якщо існує функція $u = u(x, y, z)$, яка залежить від координат матеріальної точки і за допомогою якої проекції сил поля на координатні осі в кожній точці поля визначаються за формулами:

$$F_x = \frac{du}{dx}; \qquad F_y = \frac{du}{dy}; \qquad F_z = \frac{du}{dz}; \qquad (3.35)$$

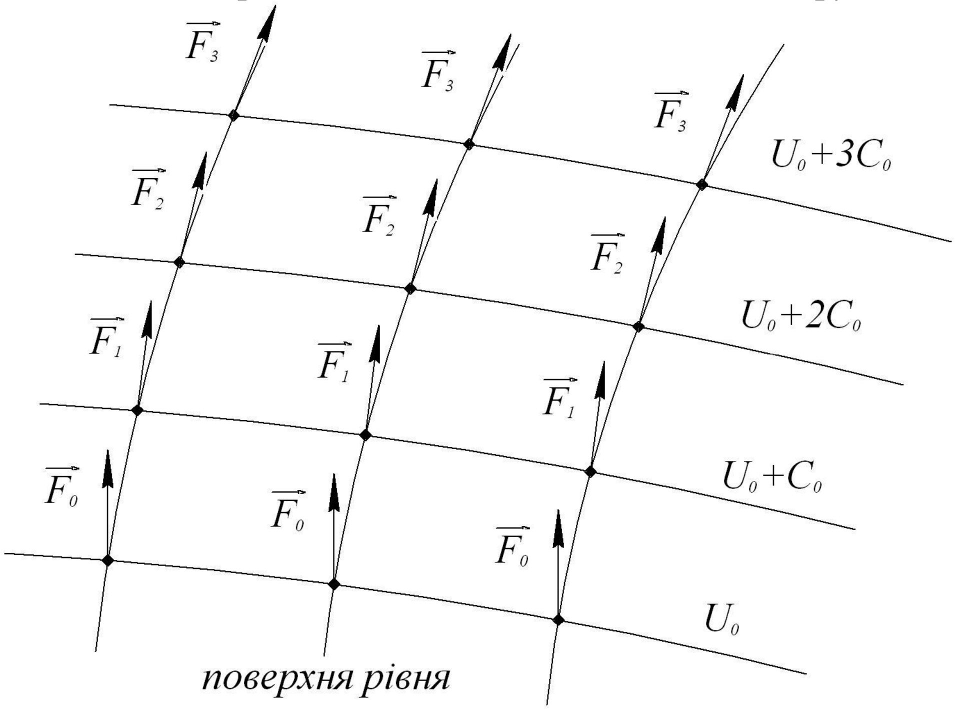
$u = u(x, y, z)$ - силова функція

Сили, для яких існує силова функція $u = u(x, y, z)$, називаються <u>потенціальними силами.</u>



Поверхні, що мають однакові значення силової функції $u = u(x, y, z)$, називаються поверхнями однакового потенціалу або еквіпотенціальними поверхнями (поверхні однакового рівня, поверхні рівня).

В потенціальному силовому полі можна виділити ряд еквіпотенціальних поверхонь, які мають значення силових функцій



У будь-якій точці кожної еквіпотенціальної поверхні будуть діяти відповідні потенціальні сили $\vec{F}_i$, які за величиною і за напрямом будуть визначатися силовою функцією $u = u(x, y, z)$.

Якщо відстань між суміжними 5еквіпотенціальними поверхнями буде нескінченно малою, то силове поле можна подати нескінченим рядом цих поверхонь.

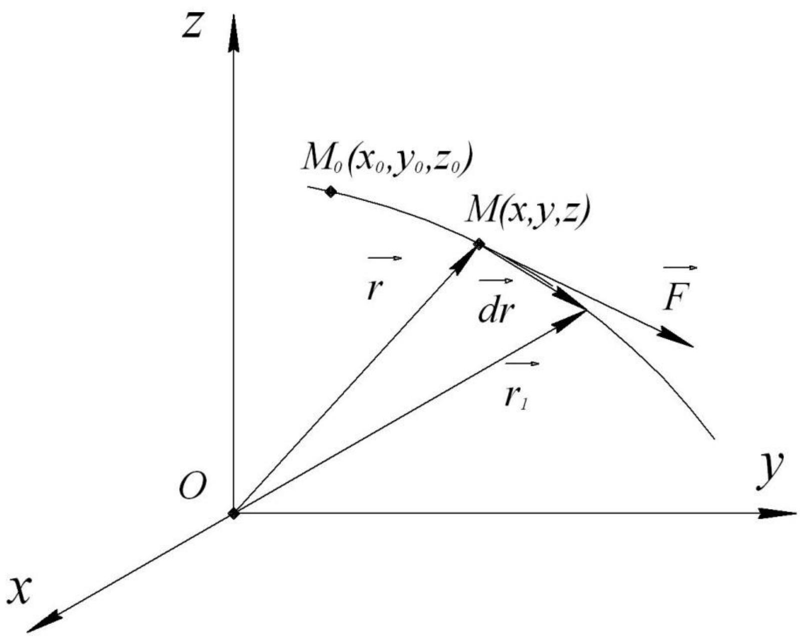
Тоді силова функція $u = u(x, y, z)$ буде мати такі властивості:

1. Силова функція буде однозначною в кожній точці поля, оскільки еквіпотенціальні поверхні, що мають різні значення силової функції, не перетинаються одна з одною і не торкаються одна одної.

2. Силову функцію можна вважати безперервною, оскільки перехід від однієї поверхні до другої відбувається неперервно , тому різних змін («стрибків») функції $u = u(x, y, z)$ не може бути.

Розглянуті властивості силової функції дають змогу обчислювати проекції сил поля F_x, F_y, F_z в усіх точках поля до визначених скінчених значень.

Силова лінія – лінія силового поля, в кожній точці якої сила поля напрямлена вздовж дотичної до цієї лінії.



У стаціонарному полі силова лінія збігається з траєкторією руху матеріальної точки в силовому полі.

Елементарне переміщення матеріальної точки $d\vec{r}$ має напрям по дотичній до силової лінії в точці прикладання сили $\vec{F}$. Тому вектори $\vec{F}$ і $d\vec{r}$ паралельні.

З умови паралельності векторів випливають залежності:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}; \tag{3.36}$$

Які визначають диференціальні рівняння силової лінії.

Приклади потенціальних силових полів:

а) Поле сили тяжіння

Для матеріальної точки, вага якої дорівнює $\vec{P}$, проекції сили $\vec{P}$ на осі декартової системи координат становлять:

$$F_x = 0, F_y = 0, F_z = -P$$

Тоді на підставі співвідношень (1) маємо:

$$\frac{du}{dx} = 0; \qquad \frac{du}{dy} = 0,$$

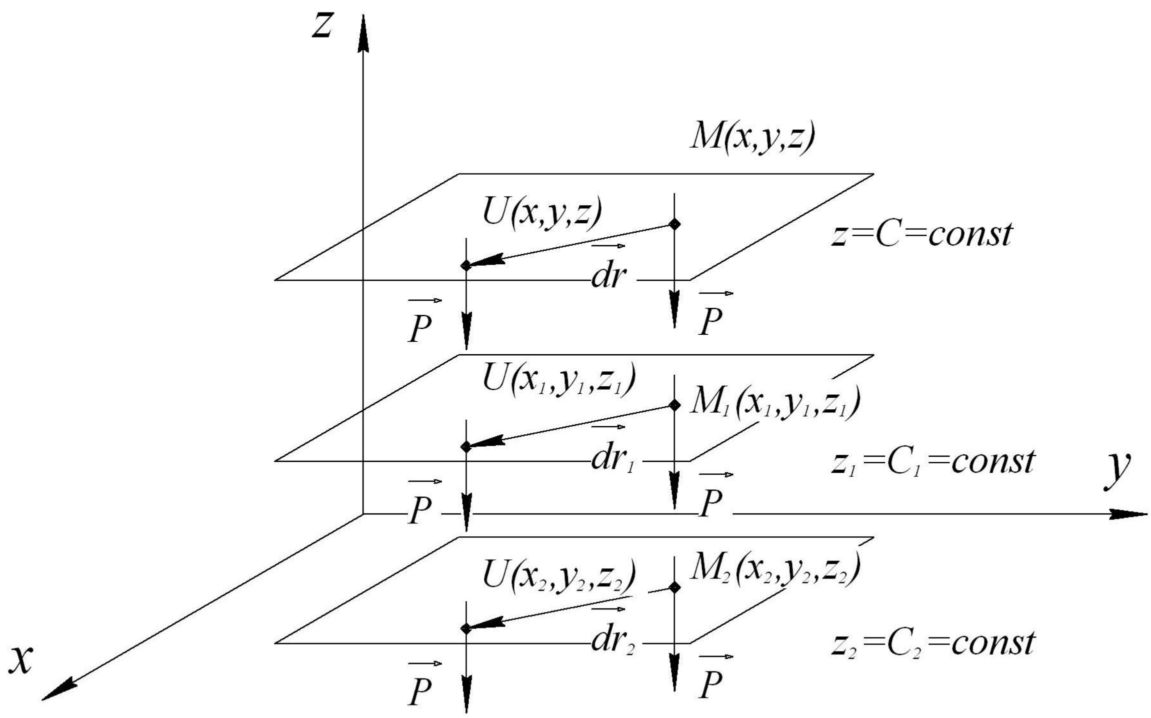
Звідки $u = \text{const}$, тобто силова функція поля тяжіння не змінює свого значення в площині xOy.

Із співвідношення $\frac{du}{dz} = -P$ після інтегрування.

$$\frac{du}{dz} = -P \Rightarrow du = -pdz; \int du = -p\int dz + \text{Const}$$

$$u = -P_z + \text{const} \tag{3.37}$$

Рівняння (3.37) визначає силову функцію однорідного поля тяжіння тобто поля, в якому сила тяжіння стала за величиною і за напрямом.



Якщо координата z буде мати фіксовані значення

$$z = c = const; \quad z = c_1 = const; \quad z = c_2 = const; \quad z = c_n = const;$$

Тоді можна зобразити еквіпотенціальні поверхні поля сил.

Тяжіння у вигляді паралельних горизонтальних площин, положення яких залежить від фіксованих значень координати z.

Силові лінії такого поля є вертикальними прямими лініями, які збігаються з лініями дії сили тяжіння $\vec{P}$.

Таким чином, поле сили тяжіння можна подати «пластинчастим», тобто у вигляді нескінченого ряду паралельних еквіпотенціальних поверхонь, пронизаних системою вертикальних силових ліній.

б) Поле сили пружності.

Для лінійної сили пружності, яка підпорядковується закону Гука:

$$\vec{F} = -c\vec{\Delta},$$

де c – сталий коефіцієнт (коефіцієнт жорсткості);

$\vec{\Delta}$ - відстань від матеріальної точки, на яку діє сила $\vec{F}$, до положення її статичної рівноваги, тобто до положення, в якому $\vec{F} = 0$.

Тоді $\dfrac{du}{d\Delta} = F = -c \cdot \Delta$

Після інтегрування цього виразу матимемо

$$u = -\frac{c\Delta^2}{2} + const \tag{3.38}$$

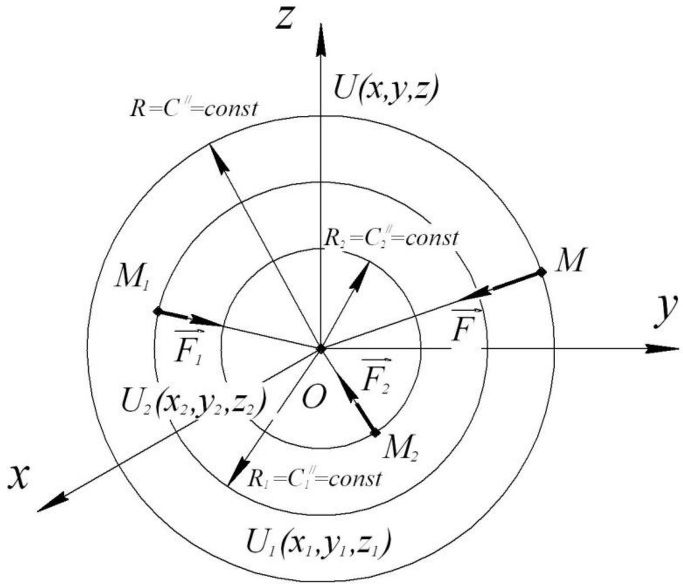
Беручи до уваги, що $\Delta^2 = x^2 + y^2 + z^2$, остаточно маємо

$$u = -\frac{c\Delta^2}{2} + const = -\frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + const$$

Таким чином, еквіпотенціальними поверхнями поля сил пружності будуть сфери, що мають радіусу:

$R = c''_{12} = \text{const}$; $R_1 = c''_1 = \text{const}$; $R_2 = c''_2 = \text{const}$, …. $R_n = c''_n = \text{const}$.

Силовими лініями поля буде сукупність радіусів, уздовж яких діють пружні сили



<u>Властивості силової функції і потенціальних сил</u>

Координати матеріальної точки M - x, y, z в потенціальному силовому полі.

Проекції сили поля $\vec{F}$ на відповідні координатні осі дорівнюють F_x, F_y, F_z $\quad F_x = \dfrac{du}{dx}; \quad F_y = \dfrac{du}{dy}; \; F_z = \dfrac{du}{dz};$

Надамо точці M елементарного переміщення

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$$

Обчислимо елементарну роботу сили $\vec{F}$ на переміщенні $d\vec{r}$

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} \;;$$

$$d'A = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = du\,;$$

$$\boxed{d'A = du}$$

В потенціальному силовому полі елементарна робота потенціальної сили дорівнює повному диференціалу силової функції.

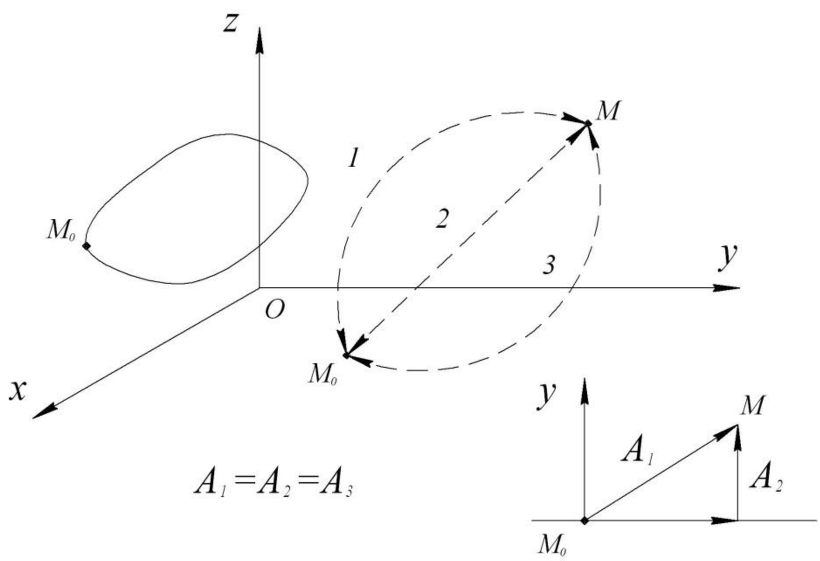
Повна робота потенціальної сили при переміщенні матеріальної точки від положення M_0 в положення M

$$A = \int_{M_0}^{M} d'A = \int_{U_0}^{U} du = u - u_0\,;$$

$$\boxed{A = u - u_0} \qquad (3.39)$$

З виразу (3.39):

Повна робота потенціальної сили на деякому переміщенні матеріальної точки дорівнює різниці значень силової функції в кінцевому і в початковому положеннях матеріальної точки і не залежить від форми траєкторії, по якій рухається точка.



Силова функція характеризує здатність потенціальних сил виконувати роботу.

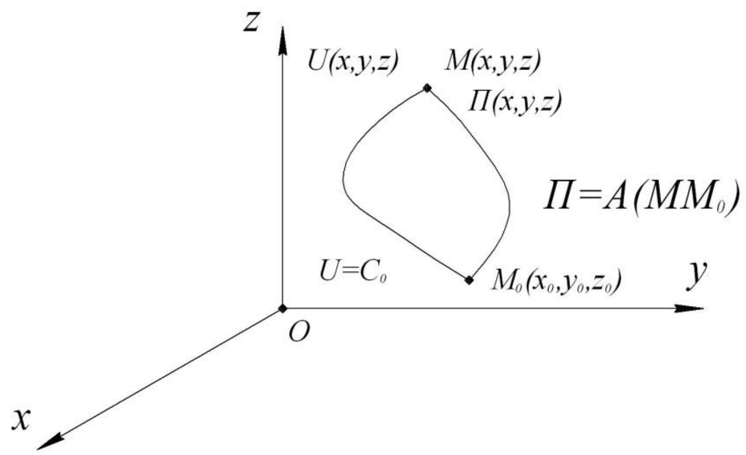
Робота потенціальної сили в потенціальному силовому полі по будь-якому замкненому контуру матеріальної точки дорівнює нулю, оскільки значення силової функції в початковому та в кінцевому положеннях матеріальної точки однакова.

3.20 Потенціальна енергія

Силова функція $u = u(x, y, z)$ характеризує здатність потенціальних сил виконувати роботу з переміщення матеріальної точки з одного поверхневого рівня поля на інший. Робота сил на цьому переміщенні матеріальної точки супроводжується зміною енергетичного стану цієї точки.

Для характеристики потенціального силового поля вводиться функція, яка визначає запас енергії в даній точці поля, тобто потенціальну енергію матеріальної точки у даному положенні.

Потенціальною енергією матеріальної точки у даному положенні М називається скалярна величина П, що дорівнює роботі, яку можуть виконати потенціальні сили поля при переміщенні матеріальної точки з положення М в її початкове положення M_0.



Потенціальна енергія П залежить від координат матеріальної точки

$$\Pi = \Pi(x, y, z)$$

Початкові точки для функцій $u = u(x, y, z)$ та $\Pi = \Pi(x, y, z)$ збігаються.

Нехай у початковому положенні матеріальної точки M_0 $И_0 = C_0$. Тоді

$$\Pi = A_{(MM_0)} = u_0 - u = c_0 - u;$$

C_0 – стала величина одна і та сама для усіх точок поля.

Величина C_0 залежить від того, яку точку поля взяти за початкову (нульову).

Отже, $\Pi = -u + \text{const};$

Якщо взяти, що $u_0 = c_0 = 0$, то

$$u = -\Pi;$$

Потенціальна енергія матеріальної точки в будь-якій точці потенціального силового поля з точністю до довільної сталої може бути визначена через силову функцію в тій самій точці поля зі згином «-».

При цьому роботу потенціальних сил можна обчислювати за формулою:

$$A = u - u_o = \Pi_o - \Pi;$$

Проекції потенціальних сил на координатній осі:

$$F_x = \frac{du}{dx} = -\frac{d\Pi}{dx}; \;\; F_y = \frac{du}{dy} = -\frac{d\Pi}{dx}; \;\; F_z = \frac{du}{dz} = -\frac{d\Pi}{dz};$$

На підстав розглянутого потенціальна енергія матеріальної точки, яка розміщена в полі сил тяжіння обчислюється:

$$\Pi = -u = P \cdot z + const;$$

Потенціальна енергія матеріальної точки, що розміщена в полі сил пружності уданому положенні:

$$\Pi = -u = \frac{c}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + const;$$

3.21 Механічна енергія. Закон збереження механічної енергії матеріальної точки.

Розглянемо рух матеріальної точки в потенціальному силовому полі точками M і M_0. Нехай потенціальна енергія матеріальної точки в точках M і M_0 дорівнює відповідно Π і Π_0.

Запишемо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum_{u=1}^{n} A_k$$

$\sum_{u=1}^{n} A_k$ - сума робіт потенціальних сил.

$$\sum_{u=1}^{n} A_k = \Pi_0 - \Pi;$$

Тоді $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Pi_0 - \Pi$,

або $\boxed{\frac{mv^2}{2} + \Pi = \frac{mv_0^2}{2} + \Pi_0 = \text{const}}$

$$\boxed{E = \frac{mv^2}{2} + П = \text{const}} \quad (*) \quad \boxed{E = T + П}$$

E-<u> повна механічна енергія</u> – сума кінетичної і потенціальної енергій.

<u>**Закон збереження механічної енергії матеріальної точки:**</u>

При русі під дією потенціальних сил повна механічна енергія матеріальної точки в кожному її положенні залишається силовою величиною.

<u>**Закон збереження механічної енергії механічної системи.**</u>

Механічна система переміщується в потенціальному силовому полі з положення M_y початкове положення M_o . Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії системи в інтегральній формулі:

$$T - T_o = \sum_{u=1}^{n} A_k^e + \sum_{u=1}^{u} A_k^i$$

Тоді

$$T - T_o = П_o \text{ - П},$$

або

$$T + П = T_o + \text{П}_\text{о} = \text{const}.$$

Враховуючи позначення повної механічної енергії

$$E = T + П = \text{const}$$

<u>**Закон збереження механічної енергії механічної системи:**</u>

При русі під дією потенціальних сил повна механічна енергія механічної системи в кожному її положенні залишається сталою величиною.

Механічна система, для якої виконується закон збереження механічної енергії, називається **консервативною**.

У протилежному випадку – **неконсервативна механічна система**.

Закон збереження механічної енергії механічної системи, що здійснює рух у не потенціальному силовому полі.

Силове поле в якому одночасно діють як потенціальні, так і не потенціальні сили. У цьому випадку сума робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил прикладених до точок механічної системи:

$$\sum_{u=1}^{n} A_k = \sum_{u=1}^{n} A_k^e + \sum_{u=1}^{n} A_k^i + \sum_{u=1}^{n} A_k^{НПС}$$

де $\sum_{u=1}^{n} A_k^{НПС}$ - сума робіт потенціальних.

З урахуванням, що

$$\sum_{u=1}^{n} A_k^e + \sum_{u=1}^{n} A_k^i = П_o - П,$$

$$\sum_{u=1}^{n} A_\text{k} = П_o - П + \sum_{u=1}^{n} A_k^{НПС}.$$

Застосовуючи теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи в інтегральній формі, маємо:

$$T - T_o = \sum_{u=1}^{\text{n}} A_к,$$

або

$$T - T_o = П_o - \Pi + \sum_{u=1}^{n} A_k^{НПС}$$

$$(T + \Pi) - (T_o + П_o) = \sum_{u=1}^{n} A_k^{НПС}$$

$$E - E_o = \sum_{\kappa=1}^{n} A_k^{НПС}$$

Зміна повної механічної енергії механічної системи на деякому її переміщенні в не потенціальних сил на цьому переміщенні.

(Втрачена механічна енергія перетворюється в інші види енергії - теплова, хімічна тощо).

Контрольні запитання до третього розділу

1. Як формулюється закон інерції ?
2. Як формулюється основний закон динаміки ?
3. Що називається масою матеріальної точки ?
4. Які властивості фізичних тіл ураховуються поняттям маси ?
5. Як формулюється закон дії і протидії ?
6. Як формулюється закон незалежної дії сил ?
7. Як вивести диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки при трьох способах задання її руху ?
8. Який фізичний зміст має аксіома про звільнення матеріальної точки від в'язі ?
9. Як вивести диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки при трьох способах задания її руху ?
10. Як формулюється принцип Д'Аламбера для невільної матеріальної точки. Яке значення він має ?
11. Що таке Д’Аламберові сила інерції і як вона визначається ?
12. Як формулюються дві задачі динаміки вільної і невільної матеріальної точки ?
13. За допомогою яких математичних операцій їх розв'язують ?
14. Як записується диференціальне рівняння вільних коливань матеріальної точки?
15. Віл яких факторів залежать частота, період, амплітуда і початкова фаза вільних коливань матеріальної точки ?
16. За яким законом змінюється амплітуда загасаючих коливань ?
17. Що таке декремент коливання ?
18. Який вигляд має графік вільних і загасаючих коливань ?
19. За якими формулами визначається період вільних і загасаючих коливань ?
20. Який вигляд має диференціальне рівняння змушених коливань матеріальної точки і який його загальний розв'язок ?
21. З яких складових рухів складається рух матеріальної точки, на яку діють відновлювальна і збурювальна сили ?
22. За якими формулами визначається частота і період змушених коливань

матеріальної точки ?
23. Від яких факторів залежить амплітуда змушених коливань матеріальної точки?
24. Що таке коефіцієнт динамічності і яка його залежність від відношення рік ?
25. В якому випадку при дії на матеріальну точку гармонічної збурювальної сили настає явище резонансу? В чому полягає це явище ?
26. Який вплив чинить опір середовища на амплітуду, фазу і період змушених коливань ?
27. За якою формулою визначається амплітуда змушених коливань при наявності опору середовища ?
28. Що називається кількістю руху матеріальної точки?
29. Що називається елементарним імпульсом сили?
30. Як формулюється теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі?
31. За якою формулою визначається імпульс рівнодійної всіх сил, що діють на матеріальну точку за кінцевий проміжок часу?
32. Як формулюється теорема імпульсів для матеріальної точки?
33. Що називається кількістю руху механічної системи?
34. За якими формулами визначається кількість руху механічної системи?
35. Як формулюється теорема про зміну кількості руху механічної системи в диференціальній формі?
36. За якою формулою визначається головний вектор імпульсів всіх зовнішніх сил, що діють наточки механічної системи?
37. Як формулюється закон збереження кількості руху механічної системи?
38. Як формулюється теорема про рух центра мас?
39. Як формулюється закон збереження руху центра мас?
40. Що називається моментом кількості руху матеріальної точки відносно центра (точки)?
41. Що називається моментом кількості руху механічної системи відносно центра (точки)?
42. За якими формулами визначається момент кількості руху механічної системи?
43. За якою формулою визначається момент кількості руху (кінетичний момент) твердого тіла відносно його осі обертання?
44. Як формулюється теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки?
45. Як формулюється теорема про зміну моменту кількості руху механічної системи?
46. Як формулюється закон збереження моменту кількості руху механічної системи?
47. Як формулюється теорема про зміну кількості відносно руху механічної системи відносно центра мас?
48. Що називається кінетичною енергією матеріальної точки?
49. Що називається кінетичною енергією механічної системи?

50. Як формулюється теорема Кеніга?
51. За якими формулами визначають кінетичну енергію твердого тіла, в різних випадках його руху?
52. Чому дорівнює кінетична енергія системи твердих тіл?
53. Що таке робота сили і як вона визначається при трьох способах задания руху матеріальної точки?
54. Як формулюється теорема про роботу рівнодійної сили?
55. Що таке потужність сили?
56. За якими формулами визначається робота сили ваги, робота пружної сили і робота моменту пружних сил?
57. За якими формулами визначається робота зовнішніх сил при поступальному, обертальному і плоско паралельному рухах твердого тіла?
58. Чому дорівнює робота внутрішніх сил твердого тіла?
59. Як формулюється теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки?
60. Як формулюється теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи?
61. Який вигляд має математичний вираз теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи для незмінних механічних систем?
62. Сформулюйте принцип Д'Аламбера для механічної системи.
63. За якими формулами визначаються головний вектор і головний момент сил інерції механічної системи?
64. Чому дорівнюють головний вектор і головний момент сил інерції твердого тіла, що здійснює поступальний рух?
65. Чому дорівнюють головний вектор і головний момент сил інерції твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, яка проходить через центр мас тіла і є головною центральною віссю інерції тіла?
66. Чому дорівнюють головний вектор і головний момент сил інерції твердого тіла відносно центра мас при плоско паралельному русі тіла?
67. Якими є диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла?
68. Сформулюйте умови, при яких рух твердого тіла буде поступальним?
69. Як записується диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі?
70. Мірою чого є момент інерції твердого тіла при його обертанні відносно довільної осі?
71. Запишіть диференціальні рівняння плоскопаршіельного руху твердого тіла.
72. Яку в'язь називають утримувальною, яку неутримувальною?
73. Яку в'язь називають стаціонарною, яку нестаціонарною?
74. Що таке голономні в'язі?
75. За якою формулою можна визначити кількість ступенів вільності механічної системи, на точки якої накладені голомні і утримувальні в'язі?
76. Що таке можливі переміщення механічної системи?
77. Чим відрізняються дійсні переміщення від можливих?

78. Що таке ідеальні в'язі ?
79. Як формулюється принцип можливих переміщень?
80. Як формулюється принцип Д'Аламбера - Лагранжа?
81. Які параметри називаються узагальненими координатами? Скільки їх має механічна система? Навести приклади узагальнених координат?
82. Які величини називаються узагальненими силами?
83. Назвіть найбільш поширений спосіб обчислення узагальненої сили.
84. Виведіть рівняння Лагранжа II роду?
85. Яка роль рівняння Лагранжа II роду при розв'язанні другої основної задачі динаміки невільної механічної системи?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переяславцев О.М. Теоретична механіка: Підручник: У 2 ч. - Ч.1: Статика. Кінематика. - К.: Знання, 2004. - 599 с.

2. Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переяславцев О.М. Теоретична .механіка: Підручник: У 2 ч. - Ч.2: Динаміка. - К.: Знання, 2004. - 590 с

3. Тар г СМ. Краткий курс теоретичної механіки. - М.: Наука, 1970. - 579 .

4. Мещерський И.В. Сборник задач по теоретической механике. - М.: Наука, 1986. -448 с.