МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

МЕТОДИ ПОДІБНОСТІ ТА РОЗМІРНОСТІ У МЕХАНІЦІ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

ДНІПРО – 2019
НТУ
«Дніпровська політехніка»

Лекція 1 Вступ

З сивої давнини людство використовує метод аналогії, якийполягає в поширенні властивостей одних об`єктів на інші.Історично першими моделями безперечно були символьні умовнімоделі, які були пов`язані з обміном інформацією в первісномусуспільстві. Значного розвитку міркування аналогій досягли вСтародавній Греції, де Евклідом була розроблена перша теоріяподібності – теорія подібності геометричних фігур. Проте зрозвитком механічного виробництва, металургії, кораблебудування,будівництва в XVI – XVIII ст. все частіше виявлялася недостатністьгеометричної подібності для прогнозування властивостей об`єктівбільших розмірів на основі властивостей об`єктів менших розмірів.Наприклад, при побудові в Венеції в XVII ст. галери великихрозмірів підпори з перерізами, вибраними на основі міркуваньгеометричної подібності, виявилися недостатньо міцними ікорабель зруйнувався під час його спуску на воду. Ставало дедалівсе зрозумілішим, що моделювання фізичних об`єктів не можеспиратися лише на поняття геометричної подібності, що призвелодо зародження та розвитку теорії фізичного моделювання.

Основна ідея фізичного моделювання полягає в дослідженніоб`єкту (моделі), яка є в деякому відношенні подібною дооригінального об`єкту (натури). Проблема встановлення подібностіздавна привертала до себе увагу дослідників. Нею займалися у свійчас ще Марк Вітрувій та Леонардо да Вінчі. Міркування щодоприроди подібності в механіці можна зустріти в "Бесідах" ГалілеоГалілея, який відмічав, що "міцності подібних тіл не зберігаютьтого ж відношення, яке існує між розмірами тіл". Достатньо повнеозначення механічної подібності дав в своїх "Основах" Ньютон.Проте і після цього на протязі довгого часу використання міркуваньподібності для розв`язання практично важливих задач мало місце вподиноких випадках. Автором однієї з найбільш цікавих такихробіт був видатний російський механік Іван Петрович Кулібін.

В 1772 році Лондонське королівське товариство запровадило міжнародний конкурс на побудову кращої моделі моста, "який би складався з однієї дуги без підпор і тримався своїми кінцями тільки на берегах річки". Слід зауважити, що найбільший одноарочний міст, який існував у той час мав проліт всього 60 метрів. Англійці ж збиралися перекинути одноарочний міст через Темзу, який повинен був мати в чотири–п`ять разів більшу довжину прольоту.

В 1773 році Кулібіним був запропонований проект дерев`яного арочного моста прольотом в триста метрів. Для обгрунтування свого проекту, проробивши всі попередні розрахунки та провівши багато дослідів, Кулібін побудував модель мосту довжиною біля 30 метрів, тобто в 1:10 натуральної величини. Він також самостійно сформулював умови подібності для її навантаження. Ейлер підтвердив правильність розрахунків Кулібіна і модель була випробувана в присутності найавторитетніших петербуржських академіків. Модель витримала навантаження більш ніж 55 тон, що значно перевищувало необхідну межу навантаження за розрахунками. Навіть при сучасному рівні розвитку будівельної техніки ця робота вражає уяву.

Подальший розвиток вчення про подібність пов`язаний з дослідженнями В.Фруда та О.Рейнольдса в області гідродинаміки, В.Л.Кірпічова в області теорії пружності та Н.Є.Жуковского,

Д.Релея, Ф.Букінгема, зусиллями яких була сформульована в першій редакції π-теорема, яка дозволила встановити умови подібності явищ довільної фізичної природи. Слід зазначити, що після розробки І.Ньютоном та Г.Лейбніцем числення нескінченно малих посиленими темпами стало розвиватися математичне моделювання, яке полягає, у описі відповідного процесу на основі розв`язку повної системи рівнянь, що описує дане явище. Проте досить часто відповідні рівняння є настільки складними, що їх розв`язок з необхідною точністю стикається з непереборними труднощами. У такому випадку для вивчення фізичних властивостей об`єкта теж звертаються до фізичного моделювання.

Важко переоцінити важливість застосування фізичногомоделювання в таких галузях сучасної техніки як будівництво,суднобудування, літакобудування, ракетобудування та багатьохінших. Воно стало потужним засобом пошуку різних недоліківтехнічних пристроїв та знаходження шляхів їх усунення.Моделювання стало широко використовуватися для перевіркинових оригінальних конструкцій. З іншого боку теорія подібностістала науковою основою фізичного експерименту, що робить їіневід`ємним засобом фундаментальних досліджень.

Лекція 2 Аналіз розмірностей

1.1 Основні поняття аналізу розмірностей

До цього часу ми вивчали метод моделювання у йогокласичному розумінні, тобто на основі теорії подібності. Теоріюподібності можна ефективно застосовувати у тих випадках, коли наоснові прийнятої фізичної моделі складені основні рівняння тавстановлено умови єдиності їх розв`язку. Обробка основних рівняньза допомогою апарату теорії подібності дозволяє знайти критеріїподібності – степеневі комплекси параметрів задачі, об`єднані водне ціле тими зв`язками, які закладені вже в самій основівідповідного процесу. Цим досягається зменшення кількостіфізичних параметрів, які характеризують явище, та більшаузагальненість одержуваних результатів.

Проте досить часто фізичний процес не вдається описатиматематично. У цьому випадку не має можливості застосуватитеорію подібності і тому звертаються до альтернативного підходу–*аналізу розмірностей*. При використанні аналізу розмірностейдостатньо знати лише перелік всіх величин, від яких залежитьданий процес.

На основі аналізу розмірностей задача моделюваннярозв`язується за такою схемою:

– визначається тип задачі і вибирається система розмірностей;

– складається перелік величин, які суттєві для досліджуваногоявища;

– за π- теоремою визначається число критеріїв–комплексів та їхструктура.

При цьому принципове значення мають два моменти: вибірсистеми розмірностей та перелік суттєвих величин. Обидвіпроблеми вирішуються тільки на основі достатньо глибокогорозуміння фізичного механізму досліджуваного процесу. Тому дляуспішного застосування аналізу розмірностей необхідно володітипевним рівнем фізичних уявлень та інтуїцією дослідника.Характерною особливістю аналізу розмірностей є те, що він невимагає залучення основних рівнянь задачі. Крім того, частовиникає ситуація, коли рівняння відомі, проте аналітичне їхдослідження наштовхується на непереборні математичні труднощі.У таких випадках головну роль відіграють експериментальніметоди дослідження, які дозволяють встановити найпростіші фактиі записати їх у вигляді деяких математичних співвідношень. Дляправильної постановки експериментів і узагальнення одержанихрезультатів на випадки, коли експеримент безпосередньо непроводився, необхідно вміти складати безрозмірні комплекси ізвеличин, які суттєві для процесу і які для подібних явищзалишаються незмінними. Можливість такого попередньоготеоретичного аналізу якраз і забезпечує теорія розмірностей.

Перш ніж перейти до предметного вивчення теорії розмірностіпотрібно з`ясувати, що таке взагалі є *розмірність*. Поняттярозмірності нерозривно пов`язане з одиницями виміру. Під*одиницею виміру* слід розуміти міру, за допомогою якої отримуютьсвої значення фізичні чи геометричні характеристики системи,тобто це масштаб, у долях частин якого вимірюється відповіднавеличина. Прикладами одиниць виміру можуть слугувати метр тафунт у випадку виміру лінійних розмірів, градус за Цельсієм таградус за Фаренгейтом у випадку температури, секунди та хвилиниу випадку часу і т.д. Іноді замість того, щоб казати, що довжинавимірюється у метрах, а температура в градусах, кажуть, щорозмірність довжини є метри, а температури – градуси. Аналогічнівислови можна застосовувати і до будь-якої іншої одиниці виміру.

Виникає питання: розмірності є абсолютними чи відносними засвоєю суттю? Відповідь на це запитання може бути такою:звичайно, розмірності – це відносні величини. Адже з таким самимуспіхом ми можемо вимірювати довжину не в метрах, а в метрахквадратних, вважаючи за одиницю виміру сторону чи діагональквадрата, площа якого складає один квадратний метр. Але намзначно простіше порівнювати між собою величини однієї природи.Тому довжини ми міряємо у долях еталонної довжини, значенняякої прийнято вважати за один метр.

Робочі операції виміру повинні бути такими, що фізичніспіввідношення, які виконуються для величин, виміряних у одниходиницях, мають мати місце і для величин, виміряних у будь–якихінших одиницях. Це буде виконуватися, якщо значення величини,отримане в результаті виміру, буде обернено пропорційне величиніодиниці виміру. Величини, числове значення яких залежить відвибору масштабів, тобто від вибору системи одиниць виміру,називаються *розмірними величинами*. Якщо числове значеннявеличини не залежить від системи одиниць виміру, то такавеличина називається *безрозмірною*. Прикладами розмірнихвеличин можуть слугувати довжина, час, сила, швидкість і т.д.Безрозмірними величинами можна вважати кути, деформації,відношення двох однойменних величин.

Поділ величин на розмірні та безрозмірні є в деякій міріумовним. Наприклад, кути нами було віднесено до безрозмірнихвеличин. Проте відомо, що кути можна вимірювати як у радіанах,відносячи довжину відповідної дуги кола до його радіуса, так і вградусах або граданах – рівних частинах прямого кута. Алеоскільки в усіх системах виміру (системах одиниць виміру)використовують в якості основної одиниці виміру кутів радіани, токути дійсно можна вважати безрозмірною величиною. Так само,якщо б в усіх системах виміру була вибрана одна й та ж одиницявиміру довжини, то довжина теж була б безрозмірною величиною.Проте в різних системах існують різні одиниці для виміру довжини,що пояснюється тим фактом, що подібні фігури мають рівні кути,але не завжди рівні розміри сторін. Отже довжина є розмірноювеличиною.

Тиск звичайно розглядають як розмірну величину і вимірюють його в паскалях ($1Па=1Н/м^2$) або в $кг/см^2$. З іншого боку, вбагатьох задачах зустрічається у вигляді параметру атмосфернийтиск, тобто тиск стовпа повітря на рівні поверхні моря (10^5 Па).Цей параметр можна використати у якості еталона і вимірюватитиск у частинах від атмосферного тиску, тобто в атмосферах (*ат*).Тиск виміряний у атмосферах є безрозмірною величиною, бо йогозначення не залежить від системи одиниць виміру.

Таким чином, поняття розмірних та безрозмірних величин євідносними. При побудові системи виміру вводиться деякий запасодиниць виміру. Тоді величини, для яких одиниці виміру однакові вусіх системах виміру, будуть безрозмірними. Відповідно всі іншівеличини будуть розмірними.

Різні фізичні величини пов`язані між собою певнимиспіввідношеннями. Тому ми не можемо всі одиниці вимірувибирати незалежними. Якщо деякі з них ми виберемонезалежними, то одиниці виміру для інших можна буде побудуватина їх основі. Величини, одиниці виміру яких вибираютьсянезалежно, називаються *основними* або *первинними* величинами.Інші отримали назву *похідних* або *вторинних* величин.

При вивченні механічних явищ достатньо вибрати незалежнимилише три одиниці виміру. Як правило, це одиниці, які відповідаютьтрьом основним філософським категоріям – простору, часу таматерії, тобто одиниці довжини $[l] = L$, часу $[t] = T$та маси$[m] = M$. Інколи за незалежні одиниці зручно взяти одиницідовжини, часу та сили. Звичайно, в якості основних одиниць можнавибирати і інші.

В задачах електромеханіки до одиниць виміру часу, довжини тамаси додають ще одиниці виміру сили струму $[i] = I$. В задачахпов`язаних з процесами теплообміну до основних одиниць додаютьодиниці виміру температури.

Розподіл величин на основні та похідні необхідним чиномпризводить до виникнення ще одного поняття – розмірності. Під*розмірністю* слід розуміти вираз для похідної одиниці виміру черезосновні одиниці виміру. Розмірність швидкості є $[v] = LT^{-1}$,розмірність прискорення є $[a] = LT^{-2}$, а розмірність сили – $[f] = MLT^{-2}$. Співвідношення, за допомогою яких вториннівеличини виражаються через первинні, називаються *визначальнимирівняннями*.

Лекція 3

1.2 Формула розмірностей. π–теорема

При всій різноманітності визначальних рівнянь, в деякомувідношенні вони є спорідненими. Покажемо, що структурадовільного визначального рівняння є єдиною в усіх можливихвипадках. Це твердження є наслідком того, що первинні величинимають незалежні одиниці виміру, а будь-яка вторинна величина,будучи визначеною через первинні величини, має змінюватисяпропорційно при переході від одних одиниць виміру до інших.Іншими словами, свобода вибору одиниць виміру первиннихвеличин може бути збережена тільки завдяки обмеженням,накладеним на визначальні рівняння. Представимо ці обмеження ваналітичній формі.

Нехай визначальне рівняння має вигляд

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right) \tag{1.1}$$

де y – деяка вторинна величина, x_1, x_2,…, x_m– первиннівеличини, через які вона виражається. Перейдемо від однієїсистеми одиниць виміру до іншої. Як було відмічено раніше, цеозначає, що всі величини мають змінитися пропорційно, тобто

$$\overline{y} = Ky, \quad \overline{x}_1 = k_1 x_1, \quad \overline{x}_m = k_m x_m \tag{1.2}$$

При цьому саме визначальне співвідношення має залишатися в силі:

$$\overline{y} = f\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m\right) \tag{1.3}$$

Порівнюючи (1.1) та (1.3) отримуємо

$$f\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m\right) = Kf\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right) \tag{1.4}$$

Пригадуючи означення гомогенної функції, можемо констатувати,що визначальні співвідношення представляються саме такимифункціями. Спираючись на раніше отримані результати, можемостверджувати, що y буде мати вигляд

$$y = f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right) = Cx_1^{a_1} x_2^{a_2} .... x_m^{a_m} \qquad (1.5)$$

Підставляючи (1.2) в (1.5) та враховуючи (1.3), отримуємо

$$K = k_1^{a_1} k_2^{a_2} .... k_m^{a_m} \qquad (1.6)$$

В загальному випадку y є однорідним оператором від x_1, x_2,…, x_m,який має за зведений степеневий комплекс (1.5).

Співвідношення (1.6), яке виражає коефіцієнт перетворення вторинної величини через коефіцієнти перетворення первинних величин прийнято записувати ще у вигляді

$$\left[y\right] = \left[x_1\right]^{a_1} \left[x_2\right]^{a_2} .... \left[x_m\right]^{a_m} \qquad (1.7)$$

де множники перетворення заміщуються символами одиниць виміру самих величин. У такому вигляді дане співвідношення називається *формулою розмірності* величини y, а показникистепенів при первинних величинах α_1,α_2,…,α_m називаються *розмірностями* вторинної величини по відношенню до відповідної первинної величини. Наприклад, формула розмірності для швидкості запишеться у вигляді

$$\left[v\right] = LT^{-1} \qquad (1.8)$$

Поняття розмірності можна поширити і на первинні величини, якщовважати, що розмірність первинної величини по відношенню досамої себе рівна одиниці, а по відношенню до будь-якої іншоїпервинної величини – нулеві.

Поняття розмірності також зберігає свій зміст, коли вториннавеличина визначається через інші вторинні величини. Це означає,що вторинна величина може входити до проміжного символічногоспіввідношення у якості аргументу. Проте кінцеві формулирозмірності мають бути записаними через первинні величини.Наприклад,

$$\left[f\right] = M\left[a\right] = MLT^{-2} \qquad (1.9)$$

де $[a] = LT^{-2}$– розмірність прискорення. Аналогічно можемо визначити розмірності роботи

$$[w] = [f]L = ML^2T^{-2} \quad (1.10)$$

та кількості руху

$$[i] = [f]T = MLT^{-2} \quad (1.11)$$

Якщо деяка величина має нульову розмірність відносно всіхпервинних величин, то така величина, очевидно, є безрозмірною,адже, як це випливає з означення розмірності, така величина небуде змінювати свого значення при переході від однієї системиодиниць виміру до іншої.

При встановленні структури визначального рівняння намивикористовувалася лише їх інваріантність по відношенню досистеми одиниць виміру, що дало змогу встановити співвідношення(1.6) між множниками метричного перетворення вторинноївеличини та первинних величин, через які вона виражається. Протевирішення питання про розмірність вторинної величини такимчином не можна вважати повним. Незавершеність полягає в тому,що вторинна величина визначається через первинні величини зточністю до постійного множника C. Залежність (1.6) має місце лише тоді, коли C є безрозмірною величиною. В загальномувипадку це не завжди так.

Питання про розмірність константи розглянемо, виходячи знаступних міркувань. Покладемо значення всіх первинних величинв (1.5) рівними відповідній одиниці виміру. Тоді за величиною yтотожно буде рівне C. Зрозуміло, що якщо зафіксувати значенняC, то тим самим буде однозначно визначено вторинну величину yчерез первинні величини x_1, x_2,…, x_m. Найбільш простий спосібприйняти C= 1, тобто вимагати одночасно прийняття одиничногозначення вторинною та первинними величинами. В більшостівипадків діє саме таке правило визначення вторинних величин.Проте, коли існують два (чи більше) незалежних визначальнихрівняння, що пов`язують між собою деяку вторинну та первинніvеличини, положення кардинально змінюється. Подібні ситуаціївиникають тоді, коли розвиток знань призводить до відкриттянових, раніше невідомих співвідношень, які можуть бутипокладеними в основу визначення вторинної величини разом зтими, які існували до моменту їх відкриття.

Нехай для деякої величини y відомі два співвідношення типу (1.5)

$$y = Ax_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m}, \qquad y = Bx_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_m^{b_m} \tag{1.12}$$

Одне з них можна вибрати у якості визначального рівняння, а для іншого y буде вже цілком визначеною величиною. Виберемо у якості визначального рівняння перше співвідношення:

$$[y] = [x_1]^{a_1} [x_2]^{a_2} \ldots. [x_m]^{a_m} \tag{1.13}$$

Тоді для розмірності константи B отримаємо вираз

$$[B] = \frac{[y]}{[x_1]^{b_1} [x_2]^{b_2} \ldots. [x_m]^{b_m}} = [x_1]^{a_1 - b_1} [x_2]^{a_2 - b_2} \ldots. [x_m]^{a_m - b_m} \tag{1.14}$$

Такого типу величини, котрі фактично є коефіцієнтами пропорційності у визначальних рівняннях і не можуть бути виключеними лише тому, що одиниці виміру всіх величин вже вибрані раніше, називаються *розмірними постійними* або *розмірними константами*. Ця назва відтіняє їх головну особливість **–** повну незалежність по відношенню до умов протіканняфізичного процесу і разом з тим змінність при переході до іншої системи одиниць виміру.

Цікаво відмітити, що існує можливість виключення розмірної постійної. Можна одну з первинних величин, наприклад x_m, перевести в розряд вторинних. Тоді співвідношення (1.12) будуть визначальними рівняннями для y та x_m. Практично цей метод застосовується за умови, якщо з ним не пов`язана ломка всієї системи одиниць.

Закон всесвітнього тяжіння Ньютона може бути записаний увигляді

$$f = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1.15}$$

В системі первинних величин $M\ L\ T$ розмірність постійної тяжіння є

$$[\gamma]=[f]M^{-2}L^{2}=M^{-1}L^{3}T^{-2} \tag{1.16}$$

В системі CGS (см, г, сек) $\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-8}$см^3/(г сек^2), в системі СІ (м, кг, с) $\gamma=6{,}67\cdot 10^{-11}$м^3/(кг с^2). Отже, використовуючи закон всесвітнього тяжіння, маємо нагоду виключити одну з первинних величин, наприклад масу. Проте через складність перебудови всієї системи одиниць даний крок був визнаний недоцільним.

Нехай комплекс π складено з первинних величин $x_1, x_2,\ldots, x_m$та вторинних величину$_1$, $y_2,\ldots, y_r$:

$$\pi = x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_m^{a_m}y_1^{\beta_1}y_2^{\beta_2}\ldots y_r^{\beta_r} \tag{1.17}$$

Знайдемо необхідні та достатні умови безрозмірності комплексу (1.17), тобто рівності одиниці множника перетворення K_π. Виходячи з означення комплексу π, маємо

$$K_\pi = k_1^{a_1}k_2^{a_2}\ldots k_m^{a_m}K_1^{\beta_1}K_2^{\beta_2}\ldots K_r^{\beta_r} \tag{1.18}$$

Але оскільки y_j– вторинні величини, то

$$K_j = k_1^{a_{j1}}k_2^{a_{j2}}\ldots k_m^{a_{jm}} \qquad j=1,2,\ldots r. \tag{1.19}$$

Підставляючи (1.19) в (1.18), будемо мати

$$k_1^{a_1+\sum aj1\beta_j}k_2^{a_2+\sum aj2\beta_j}\ldots k_m^{a_m+\sum ajm\beta_j}=1 \tag{1.20}$$

Оскільки співвідношення (1.20) утримує множники тільки незалежних величин, а вони можуть вибиратися довільними, то дане співвідношення буде виконуватися тоді і тільки тоді, коли всі показники будуть рівні нулю. Таким чином, отримали систему

$$a_i + \sum_{j+1}^{r} a_{ji}\beta_j = 0, \qquad i=1,2,\ldots,m \tag{1.21}$$

Система (1.21) представляє собою сукупність необхідних та достатніх умов безрозмірності комплексу π. Її слід розглядати як систему відносно невідомих α_1, α_2,…, α_m та β_1, β_2,…, β_r загальним числом $r + m = n$. Оскільки самих рівнянь m, то загальний розв`язок (1.21) утримує r довільних констант. Зміст цього факту полягає в тому, що сукупність n фізично різнорідних величин допускає компоновку $r = n - m$ різних безрозмірних комплексів, де r – число вторинних величин. Цей результат відомий під назвою π *-теореми* Бекінгема: *число безрозмірних комплексів рівне числу всіх фізично різнорідних величин, суттєвих для даного процесу, виключаючи число первинних величин.*

Розглянемо ще одну інтерпретацію π -теореми, яка буде корисною при розв`язанні різних задач механіки. Припустимо, що деяка розмірна величина y_rможе бути подана як функція відпервинних величин x_1, x_2,…, x_mта вторинних величин y_1, y_2,…, y_{r-1}:

$$y_r = f\left(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., x_{r-1}\right) \qquad (1.22)$$

Нехай як і раніше коефіцієнти перетворень величин пов`язані співвідношенням (1.19). Запишемо (1.22) у безрозмірному вигляді. Для цього перейдемо до безрозмірних змінних

$$\overline{y}_j = \pi_j = \frac{y_j}{x_1^{a_{j1}} x_2^{a_{j2}} ... x_m^{a_{jm}}}, \quad j = 1, 2, ..., r \qquad (1.23)$$

Тоді співвідношення (1.22) може бути представлено у формі

$$\pi_r = F\left(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{r-1}\right) \qquad (1.24)$$

Цей результат призводить до іншого формулювання π -теореми: *всяке рівняння, яке пов`язує m первинних та r вторинних величин, які характеризують досліджуване явище, може бути представлене у вигляді залежності між r безрозмірними комплексами, складеними з цих величин.*

Наведемо одне важливе доповнення до π -теореми. При виводі π -теореми ми виходили з того, що кількість задіяних в процесі первинних величин

m'співпадає з загальною кількістю всіх первинних величин m, які необхідні для утворення суттєвих дляпроцесу величин. У більшості випадків, дійсно, $m'= m$, проте взагальному випадку $m' \leq m$. Якщо ж деякі з первинних величиннесуттєві для процесу ($m<m$) , то при фіксованому числівторинних величин кількість безрозмірних комплексів зменшиться,оскільки несуттєві первинні величини мають бути виключені, акожна з операцій виключення призводить до зменшення числакомплексів на одиницю. Таким чином, кінцеве число комплексів які раніше буде рівне $n -m$, тобто твердження теореми Бекінгемазалишається в силі.

Розглянемо в якості ілюстрації задачу про гідродинамічний опірпри стаціонарному русі нестисливої рідини по каналу. Невідомоювеличиною є перепад тисків Δp. Крім того, суттєвими для процесує довжина каналу l , швидкість рідини v , її густина ρ та в`язкість μ. За своєю суттю задача є типово механічною, тому за системупервинних величин виберемо $M\ L\ T$. Загальна кількість суттєвихвеличин $n = 5$, кількість первинних величин $m = 3$. Отже, числонезалежних безрозмірних комплексів, що характеризують процес, є$n–m=2$.

Величина	Формула розмірності	Приведений комплекс
l	$[l] = L$	
Δp	$[p] = ML^{-1}T^{-2}$	$\pi_1 = \frac{\Delta p l t^2}{m}$
v	$[v] = LT^{-1}$	$\pi_2 = \frac{vt}{l}$
ρ	$[\rho] = ML^{-3}$	$\pi_3 = \frac{\rho l^3}{m}$

μ	$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$	$\pi_4 = \dfrac{\mu l t}{m}$

Виключаючи первинні величини m та t, які не є суттєвими за умовами задачі, отримуємо добре відомі нам вирази:

$$\frac{\pi_1}{\pi_3 \pi_2^2} = \frac{\Delta p}{\rho v^2} = Eu, \qquad \frac{\pi_2 \pi_3}{\pi_4} = \frac{\rho v l}{\mu} = Re \qquad (1.25)$$

Лекція 4

1.3 Застосування аналізу розмірностей

З доведеної π -теореми випливає, що, якщо кількість величин, які характеризують процес, лише на одиницю більше від кількості основних одиниць, то на основі аналізу розмірностей шукана величина визначається з точністю до сталого безрозмірного множника:

$$y = Cx_1^{a_1}x_2^{a_2}....x_m^{a_m} \qquad (1.26)$$

Для знаходження невизначеної сталої С достатньо провести один експеримент або застосувати інші методи дослідження. Крім того, у багатьох випадках значення цієї сталої не є суттєвим для аналізу і розв`язок задачі у вигляді (1.26) достатній для формулювання висновків стосовно певного явища. Розглянемо застосування аналізу розмірностей на основі конкретних прикладів. **Доведення теореми Піфагора.** Очевидно, що прямокутний трикутник можна однозначно визначити, задаючи довжину його сторони (наприклад, гіпотенузи с) та одного з його двох гострих кутів. Таким чином, площу прямокутного трикутника можна розглядати як функцію довжини гіпотенузи с та гострого кута φ . Оскільки в геометричних задачах існує лише одна основна одиниця виміру — довжина, а кут є безрозмірною величиною, то згідно (1.26) вираз для площі можемо представити у вигляді

$$S = C(\varphi)c^{a_1} \qquad (1.27)$$

Враховуючи те, що розмірність c є L , а S — L^2 , приходимо до висновку, що a_1= 2. Отже

$$S = C(\varphi)c^2 \qquad (1.28)$$

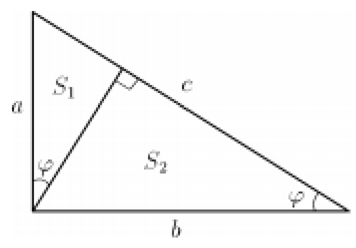

Рис. 1

Проведемо в трикутнику висоту, опущену на гіпотенузу з прямого кута. Ця висота розбиває даний трикутник на два йому подібних, гіпотенузами яких є катети вихідного трикутника a та b. Тоді згідно (1.28) площа цих двох трикутників є

$$S_1 = C(\varphi)a^2, \quad S_2 = C(\varphi)b^2 \tag{1.29}$$

Зіншоїсторони $S = S_1 + S_2$,тобто

$$C(\varphi)c^2 = C(\varphi)a^2 + C(\varphi)b^2 \tag{1.30}$$

або

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{1.31}$$

що і треба було довести.

Знайдемо період коливань математичного маятника. Під математичним маятником будемо розуміти важку матеріальну точку, яка підвішена на невагомому та недеформівному стержні, який закріплений іншим своїм кінцем так, що може вільно обертатися в деякій вертикальній площині навколо точки підвісу. Введемо деякі позначення, які будуть необхідні для подальшого розгляду: l — довжина маятника (стержня), φ — кут між стержнем та вертикальною прямою, m — маса матеріальної точки, T — період коливань, g — прискорення вільного падіння. Оскільки з набору п\`яти суттєвих для процесу величин одна безрозмірна (кут φ), а три з числа інших чотирьох відносяться до первинних величин, то період коливань можна представити у вигляді

$$T = Cm^{a_1} l^{a_2} g^{a_3} \tag{1.32}$$

Прирівнюючи розмірності лівої та правої частин (1.30), доходимо висновку, що

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{2}$$

тобто

$$T = C\sqrt{\frac{l}{g}} \ . \tag{1.33}$$

Отже, період коливань маятника не залежить від його маси.

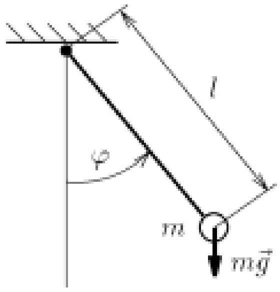

Рис.2

Подальші дослідження не пов`язані з аналізом розмірностей, тому лише зауважимо, що константа C є парною функцією амплітуди кута φ. Для малих значень амплітуди C може бути покладеним рівним 2π.

Визначимо прогин балки під дією довільного навантаження. Нехай балка довжини l з площею поперечного перерізу S та з модулем пружності E знаходиться під дією зовнішнього навантаження, момент від якого в деякому перерізі є M. Потрібно знайти прогин балки w. Очевидно, що в загальному випадку прогин можна вважати функцією E, l, M та моменту інерції поперечного перерізу J. Оскільки всі ці величини є розмірними, то прогин можна представити у вигляді

$$w = CE^{a_1}J^{a_2}M^{a_3}l^{a_4}. \tag{1.34}$$

За систему основних одиниць виберемо довжину, силу та час (L F T). Тоді формули розмірностей величин, які входять до (1.34), є суть

$$\begin{aligned} &[w] = L, \quad [E] = FL^{-2}, \quad [J] = L^4, \\ &[M] = FL, \quad [l] = L \end{aligned} \tag{1.35}$$

Прирівнюючи в (1.34) показники при основних одиницях виміру, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} &L: \quad 1 = -2_{a_1} + 4_{a_2} + a_3 + a_4, \\ &F: \quad 0 = a_1 + a_2 \end{aligned} \tag{1.36}$$

Як бачимо, для визначення чотирьох невідомих величин a_i маємо лише два рівняння, тобто аналіз розмірностей у його класичному варіанті не дозволяє однозначно розв`язати поставлену задачу. Спробуємо розв`язати задачу шляхом збільшення числа основних одиниць виміру. Оскільки w за своєю суттю є величиною відмінною від довжини балки l, тому введемо до розгляду незалежну розмірність прогину *[W] = w* . Крім того, розміри поперечного перерізу балки також незалежні від її довжини, тому для площі поперечного перерізу введемо незалежну одиницю виміру *S*. Отже, замість системи, яка складалась з двох основних одиниць виміру *L* та *F*, маємо нову систему з чотирьох одиниць *L, W, S* та *F*. Тепер кількість величин, які входять до (1.34), перевищує кількість одиниць вимірів всього на один, а тому аналіз розмірностей дозволяє розв`язати задачу однозначно.

В новій системі одиниць важливі для процесу величини мають наступні розмірності

$$\begin{aligned} &[W]=w, \quad [E]=FS^{-1}LW^{-1}, \\ &[J]=SL^2, \quad [M]=FL, \quad [l]=L. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Тутпотрібнозауважити, що:

–розмірністьдлямоментуінерції*J*одержана, виходячизозначенняцієївеличиниякдобуткуелементуплощіпоперечногоперерізу наквадратвіддалі;

–розмірністьмодуляпружності*E*визначаєтьсяяквідношенняpозмірностінапруженняFS^{-1}дорозмірностідеформаціїWL^{-1} .

Зврахуванням (1.37) формуларозмірностідляwприймаєвигляд

$$W=\left(FS^{-1}WL^{-1}\right)^{a_1}\left(SL^2\right)^{a_2}\left(FL\right)^{a_3}L^{a_4} \tag{1.38}$$

Звідки

$$\begin{aligned} &L: \quad 0=a_1+2_{a_2}+a_3+a_4, \\ &F: \quad 0=a_1+a_3, \\ &W: \quad 1=-a_1, \\ &S: \quad 0=-a_1+a_2 \end{aligned} \tag{1.39}$$

або

$$a_1=-1, \quad a_2=-1, \quad a_3=1, \quad a_4=2. \tag{1.40}$$

Таким чином, вираз для прогину приймає вигляд

$$w=C\frac{Ml^2}{EJ} \tag{1.41}$$

Розглянемо вимушені коливання пружної системи з демпфуванням. Раніше ми вже знаходили критерії подібності в цій задачі на основі положень теорії подібності. Отримаємо аналогічні результати, застосовуючи аналіз розмірностей.

Отже, розглядаються коливання матеріальної точки маси m на пружині жорсткості c у в`язкому середовищі з коефіцієнтом демпфування η під дією періодичної сили з амплітудою H і частотою ω. Зміщення точки x є функцією цих величин та часу t:

$$x = f\left(m, \eta, \omega, c, H, t\right) \tag{1.42}$$

У фізичній системі одиниць виміру $L\ M\ T$ величини, які входять до (1.42), мають розмірності

$$\begin{gathered} [x] = L, \quad [m] = M, \quad [t] = T, \quad [\omega] = T^{-1}, \\ [\eta] = MT^{-1}, [c] = MT^{-2}, [H] = MLT^{-2} \end{gathered} \tag{1.43}$$

Оскільки всіх величин сім, а основних одиниць три, то можемо скласти чотири безрозмірні комплекси. Враховуючи те, що кількість вторинних величин теж рівна чотирьом, найпростіше побудувати комплекси у вигляді співвідношень відповідної вторинної величини до степеневого комплексу, складеного з основних величин:

$$\begin{gathered} \pi_1 = \frac{\eta}{x^{a_1} m^{a_2} t^{a_3}}, \qquad \pi_2 = \frac{\eta}{x^{b_1} m^{b_2} t^{b_3}}, \\ \pi_3 = \frac{\eta}{x^{c_1} m^{c_2} t^{c_3}}, \qquad \pi_4 = \frac{\eta}{x^{d_1} m^{d_2} t^{d_3}}, \end{gathered} \tag{1.44}$$

З умови безрозмірності π_i отримуємо

$$\begin{gathered} a_1 = 0, \qquad a_2 = 1, \qquad a_3 = -1, \\ b_1 = 0, \qquad b_2 = 0, \qquad b_3 = -1, \\ c_1 = 0, \qquad c_2 = 1, \qquad c_3 = -2, \\ d_1 = 1, \qquad d_2 = 1, \qquad d_3 = -2, \end{gathered} \tag{1.45}$$

Отже,

$$\pi_1 = \frac{\eta t}{m}, \quad \pi_2 = \omega t, \quad \pi_3 \frac{ct^2}{m}, \pi_4 \frac{Ht^2}{mx}. \tag{1.46}$$

Комбінуючи критерії π_1 , π_2 , π_3 та π_4 , можна ввести нові, більш зручні критерії

$$\begin{gathered} \pi_1' = \frac{\pi_3}{\pi_4}, \qquad \pi' = \pi_2 = \omega t, \\ \pi_3' = \frac{\pi_1}{\pi_3} = \frac{\eta}{m\omega}, \qquad \pi_4' = \frac{\pi_2^2}{\pi_3} = \frac{m\omega^2}{c}. \end{gathered} \tag{1.47}$$

Таким чином, дві системи — "н"-натура і "м"-модель будуть подібними, якщо виконуються рівності

$$\pi'_{iH} = \pi'_{iM}, \quad i = 1,2,3,4. \tag{1.48}$$

Для цих систем переміщення x_Mта x_H у подібні моменти часу t_M та t_H=$t_M\omega_M/\omega_H$ будуть пов`язані співвідношенням

$$x_H = \frac{H_H c_M}{H_M c_H} x_M \ . \tag{1.49}$$

При цьому параметри процесів повинні задовольняти умовам

$$\frac{\eta_H}{\eta_M} = \frac{m_H \omega_H}{m_M \omega_M}, \qquad \frac{c_H}{c_M} = \frac{m_H \omega_H^2}{m_M \omega_M^2}. \tag{1.50}$$

Моделювання рівноваги пружного тіла. Розглянемо однорідне ізотропне лінійнопружне тіло, матеріал якого характеризується модулем Юнга E та коефіцієнтом Пуассона ν. Нехай лінійні розміри тіла визначає характерний розмір l, а величина зовнішнього навантаження визначається силою P. Тоді процес деформації тіла можна представити у вигляді співвідношення

$$F(\sigma, \varepsilon, u, P, E, \nu, l) = 0, \tag{1.51}$$

куди крім вищезазначених величин входять напруження σ , деформації ε та зміщення u . В системі одиниць виміру L F величини, що входять в (1.51), мають розмірності

$$\begin{aligned} &[l] = [u] = L, \qquad [P] = FL^{-2}, \\ &[\varepsilon] = [\nu] = 1, \qquad [\sigma] = [E] = FL^{-2}. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Таким чином, параметрів важливих для процесу — сім, а основних одиницьвиміру — лише дві. Тому можемо скласти п`ять безрозмірних комплексів, наприклад, наступних:

$$\begin{aligned} &\pi_1 = \frac{\sigma}{Pl^{-2}}, \qquad \pi_2 = \frac{E}{Pl^{-2}}, \\ &\pi_3 = \frac{u}{l}, \quad \pi_4 = \nu, \quad \pi_5 = \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.53}$$

Іноді замість комплексу π_1 вводять комплекс

$$\pi'_1 = \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{\sigma}{E}. \tag{1.54}$$

На основі одержаних критеріїв отримуємо формули для перерахунку напружень, деформацій та зміщень при переході від моделі до натури:

$$\sigma_H = \frac{E_H}{E_M}\sigma_M, \tag{1.55}$$

При цьому мають виконуватися умови

$$P_H = \frac{E_H l_H^2}{E_M l_M^2} P_M, \tag{1.56}$$

Якбачимо, критеріїподібності, отриманінаосновіаналізурозмірностей, повністюспівпадаютьзвідповіднимикритеріями, знайденимизадопомогоютеоріїподібності. Різниця полягає лише в об`ємі попередніх знань, які стосуються досліджуваного явища. Успішне застосування теорії подібності значним чином залежить від можливості виконати замкнену математичну постановку задачі або, принаймні, скласти систему основних рівнянь та визначити умови єдиності їх розв`язку. Для використання ж аналізу розмірностей не має необхідності знати основні рівняння, достатньо лише знати, в якій системі загальних співвідношень знаходяться величини, суттєві для явища. Таким чином, різниця між теорією подібності та аналізом розмірностей полягає в тому, що апарат теорії подібності застосовується до рівнянь, які описують явище, а апарат аналізу розмірностей — до формули розмірності. Проте за своєю суттю обидва методи співпадають, а тому призводять до абсолютно еквівалентних результатів.

Лекція 5 Основні положення теорії подібності

2.1 Про постановку задач в механіці. Основні рівняння та умови єдиності їх розв`язку.

Звичайно побудові моделі передує тривалий процес встановлення фізичних уявлень про певне явище. При цьому виявляються головні його чинники та відсіюються другорядні. Якщо закономірності, які лежать в основі явища, детально вивчені і записані у вигляді законів, то перед дослідником відкривається можливість побудови фізично обгрунтованої моделі.

Як правило, основу моделі складають рівняння, які пов`язують між собою відомі величини та ті, що потрібно визначити. В переважній більшості випадків це є диференціальні, інтегральні абоінтегро-диференціальні рівняння. Оскільки вони відтворюють нашіуявлення про явище, то дістали назву *основних рівнянь*. У випадку,коли рівнянь декілька маємо *систему основних рівнянь*.

При виводі основних рівнянь особливе значення мають, так звані, *першоосновні величини*. Першоосновними величинаминазиваються величини, якими прийнято характеризувати кількісніпрояви даного явища, тобто це величини, якими ми користуємося внаших аналітичних дослідженнях, експериментах, розрахунках і т.п. та які можуть бути безпосередньо виміряні. Звичайно поділвеличин на першоосновні та інші є досить умовним, але історично склалося так, що деякі величини такі, як довжина, час і т.д.виміряти легше ніж, наприклад, кінетичну енергію, імпульс, а томувони і були вибрані за першоосновні. Фактично скласти основнірівняння означає виразити фізичні закони за допомогоюпершоосновних змінних.

Проте основні рівняння не можуть самі по собі дати намуявлення про певне явище, бо вони мають місце для цілого класуявищ. Так наявність лише рівнянь руху матеріальної точки під дієюсили тяжіння не дає відповіді на питання про рух конкретноїпланети, а наявності рівнянь Нав`є-Стокса є недостатньою длявідповіді на питання про силу опору руху деякого тіла у в`язкійрідині. Тобто основні рівняння не утримують ніяких відомостей проспецифічні властивості даного явища, які вирізняють його поміжйому подібних.

Розв`язком основного рівняння як і будь-якого іншого єзагальний його інтеграл, який представляє невідому величину якфункцію незалежних змінних. Взагалі розв`язком рівняннявважається функція, яка перетворює його на тотожність. Але вбільшості випадків таких функцій можна навестинескінченнукількість. Загальний інтеграл об`єднує в собі всі ці розв`язки, якіможна отримати з нього як часткові випадки (частинні розв`язки). Це пояснюється самою формою загального інтеграла, до складуякого входять, так званні, константи інтегрування. Вибираючипевні значення констант із загального інтегралу, отримуємочастинний розв`язок. Таким чином, слід розрізняти розв`язокрівняння, яким є загальний інтеграл, та розв`язок певної задачі,яким є частинний розв`язок основного рівняння. Для того, щоб зрозв`язку рівнянь отримати розв`язок задачі необхідні додатковіумови, які допоможуть однозначно визначити константиінтегрування. Ці умови називаються *умовами єдиності розв`язку*.

В загальному випадку питання про знаходження умов єдиностірозв`язку є складним і до кінцянерозв`язаним. Проте існує цілийклас задач, для яких умови єдиності розв`язку мають цілком

визначений вигляд. Вони носять назву *крайових задачматематичної фізики* і займають головне місце середматематичних проблем механіки.

До умов однозначності входять наступні складові:

1. Геометрична характеристика області *V*, в якій вивчається процес. Ця характеристика задається рівнянням границі *S*області *V*. Наприклад,

$$x_3 = \varphi(x_1, x_2) \tag{2.1}$$

2. Значеннями фізичних констант, які входять до системиосновних рівнянь. Прикладами фізичних констант в задачахтеорії пружності можуть слугувати коефіцієнт Пуассона тамодуль Юнга. Разом з величинами, які

характеризуютьгеометричні властивості системи, фізичні константи утворюютьсукупність постійних *параметрів задачі*. Параметри задачіразом з незалежними змінними відносяться до *аргументівзадачі*.

3. Початкові умови, які задають значення невідомих функцій вдеякий (початковий) момент часу як функцій просторовихкоординат:

$$U_i\big|_{\tau=0} = U_{i\tau}(x_1, x_2, x_3), \tag{2.2}$$

деU_i — деяка функція, що фігурує в системі основних рівнянь,

$U_{i\tau}$ — відома функція.

4. Граничні умови, які можна записати у вигляді:

$$U_i\big|_{S=0} = U_{iS}(x_1, x_2, x_3) \tag{2.3}$$

де функціїU_{iS} відомі на границі *S*.

Сформульовані вище умови однозначності не можуть бути задані довільним чином. Вони повинні бути узгодженими з системою основних рівнянь. Відповідний аналіз повинен довести необхідність та достатність цих умов для одержання єдиногорозв`язку. Розглянемо в якості прикладу задачі Діріхле та Неймана теорії потенціалу.

Нехай в деякій області *V* функція *T* задовольняє рівнянняЛапласа:

$$\Delta T = 0, \tag{2.4}$$

а на поверхні *S* ця функція має певне відоме значення:

$$T = T\left(x_1, x_2, x_3\right) = T\left(x_1, x_2, \phi\left(x_1, x_2\right)\right). \tag{2.5}$$

Покажемо, що умова (2.5) достатня для однозначного визначення функції *T* в області *V*.

Припустимо, що існують дві різні неперервні функції T_1 та T_2 ,що задовольняють рівняння (2.4) та граничні умови (2.5).Позначимо різницю функцій T_1-T_2 через T_0. Очевидно, що функція T_0 буде задовольняти в області *V* рівнянню (2.4) та маєтотожно рівне нулю значенняна границі S . Застосуємо до функціїT$_0$ формулу Гріна:

$$\int_V \left[T_0 \Delta T_0 + \left(\mathrm{grad} T_0 \right)^2 \right] dV = \int_S T_0 \frac{\partial T_0}{\partial n} dS \qquad (2.6)$$

З того, що в області V $\Delta T_0 = 0$, а на границі $S T_0 = 0$, випливає, що

$$\int_V \left(\mathrm{grad} T_0 \right)^2 dV = 0 \quad . \qquad (2.7)$$

Оскільки підінтегральна функція в лівій частині (2.7) є невід`ємною, то

$$\mathrm{grad} T_0 = 0 \qquad (2.8)$$

тобто

$$T_1 - T_2 = const \qquad (2.9)$$

Але на границі S за умовою повинно бути

$$T_1 - T_2 = 0 \qquad (2.10)$$

Таким чином, функції T_1 та T_2 співпадають:

$$T_1 = T_2 \qquad (2.11)$$

Аналогічно у випадку, коли на границі S задана нормальна похідна функції T :

$$\frac{\partial T_0}{\partial n} = \vartheta(x_1, x_2, x_3) = \vartheta(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)), \qquad (2.12)$$

можна показати, що розв`язок рівняння (2.4) визначається однозначно з точністю до довільної константи.

Розглянемо в якості другого прикладу функцію T , яка в області V задовольняє рівнянню Фур`є:

$$\frac{\partial T_0}{\partial \tau} = a \Delta T . \qquad (2.13)$$

Нехай в початковий момент часу $\tau = 0$ в області V та в будь-який момент часу на границі S значення функції вважаються відомими:

$$T\big|_{\tau=0} = T_\tau\left(x_1, x_2, x_3\right), \tag{2.14}$$

$$T\big|_s = T_S\left(x_1, x_2, x_3\right) = T_S\left(x_1, x_2, \phi\left(x_1, x_2\right)\right) \tag{2.15}$$

Покажемо, що умови (2.14), (2.15) разом з рівнянням (2.13) однозначно визначають функцію T в області V.

Знову, ідучи від супротивного, припустимо, що існують дві різні функції T_1 та T_2 такі, що задовольняють рівняння (2.13) та умови(2.14), (2.15). Тоді функція $T_0 = T_1 - T_2$ буде задовольняти в області V рівнянню (2.13) та нульовим початковим та граничним умовам.Оскільки на границі S функція T_0 тотожно рівна нулю, то з формули Гріна випливає, що

$$\int_V \frac{T_0}{a}\frac{\partial T_0}{\partial \tau}\, dV = -\int_V \left(\mathrm{grad} T_0\right)^2 dV \tag{2.16}$$

або

$$\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_V T_0^2 dV = -\int_V \left(\mathrm{grad} T_0\right)^2 dV \tag{2.17}$$

Співвідношення (2.17) показує, що невід`ємний інтеграл від T_0^2 по області V не може зростати з плином часу. Але в початковий момент його значення було рівне нулю. Отже,

$$T_0 = T_1 - T_2 = 0, \tag{2.18}$$

що доводить достатність умов (2.14), (2.15), як умов єдності розв`язку.

У випадку довільної системи основних рівнянь вивести умовиєдиності розв`язку значно складніше і для цього не існуєвідповідного загального підходу. Для їх одержання можна лишерекомендувати керуватися наведеними вище чотирма пунктами.

Лекція 6

2.2 Подібні явища та подібні перетворення

Теоретичну основу фізичного моделювання складає теорія подібності, яка встановлює зв`язки між подібними явищами наоснові аналізу відповідних основних рівнянь та умов єдиності їх розв`язку. Два *явища* будемо називати *подібними*, якщо за відомимихарактеристиками одного явища можна однозначно визначитихарактеристики іншого явища за допомогою деякого перетворення,яке називається *подібним перетворенням*.

За виглядом подібного перетворення розрізняють два типиподібності. Якщо характеристики двох явищ пов`язаніспіввідношенням вигляду

$$\overline{x}_i = k_i x_i, \qquad i = 1, 2, ..., N, \tag{2.19}$$

деx_i— характеристика першого явища,$\overline{x}_i$— відповідна характеристика другого явища, k_i— деякий постійний коефіцієнт, який дістав назву *масштабного коефіцієнту* або просто *масштабу*,то дані явища знаходяться у відношенні *простої подібності*, а сам метод визначення характеристик $\overline{x}_i$називається *методоммасштабів*. При цьому важливим є те, що величини однієї природимають спільний масштабний коефіцієнт. Прикладом простої

подібності може слугувати пропорційна подібність в геометрії. Такміж двома еліпсоїдами

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{2.20}$$

та

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{\overline{y}^2}{b^2} + \frac{\overline{z}^2}{c^2} = R^2, \tag{2.21}$$

які зображено на рисунку 3, маємо просту подібність, адже перетворення

$$\overline{x} = Rx, \quad \overline{y} = Ry, \quad \overline{z} = Rz \tag{2.22}$$

дозволяє визначити координати точок еліпсоїда (2.21) за відомимикоординатами точок еліпсоїда (2.20). Домовимося надалі відповідні геометричні точки подібних систем називати *подібними точками*. У випадку еліпсоїдів (2.20) та (2.21) такими точками, наприклад, будутьточки (a,0,0) та (aR,0,0).

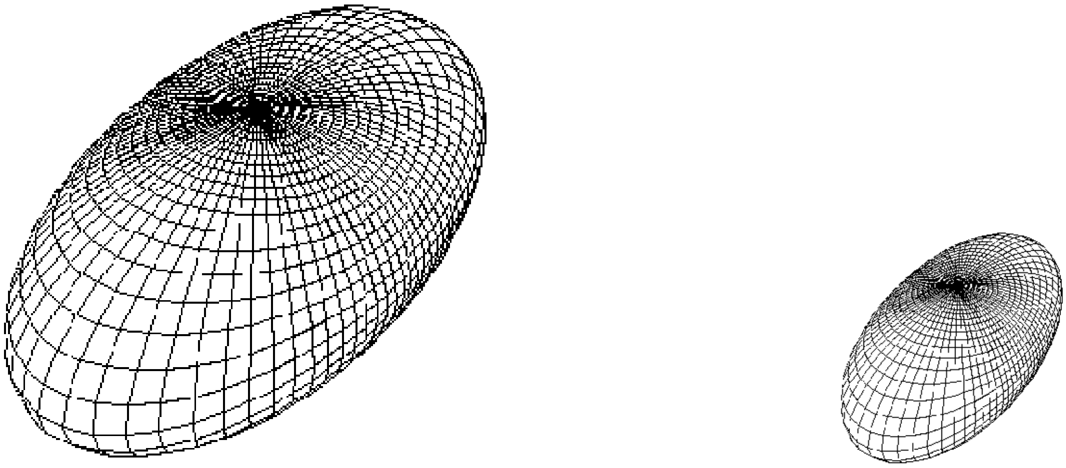

Рис. 3

Використання простої подібності дозволяє розв`язати задачумоделювання, не звертаючись до складного математичного апарату, проте не завжди є можливість побудувати модель, яка б задовольняла умовам (2.19). За таких обставин звертаються домоделювання на основі *розширеної подібності*, яка поділяється на*афінну* та *нелінійну*. У випадку афінної подібності загальний вигляд перетворення (2.19) зберігається, проте масштабні коефіцієнти для співрозмірних величин можуть вибиратися незалежними.

Прикладом афінного перетворення є перетворення

$$x = a\tilde{x}, \quad y = b\tilde{y}, \quad z = c\tilde{z}, \tag{2.23}$$

яке переводить еліпсоїд (2.20) в сферу

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = 1,, \tag{2.24}$$

тобто еліпсоїд (2.21) є афінноподібним до сфери (2.24).

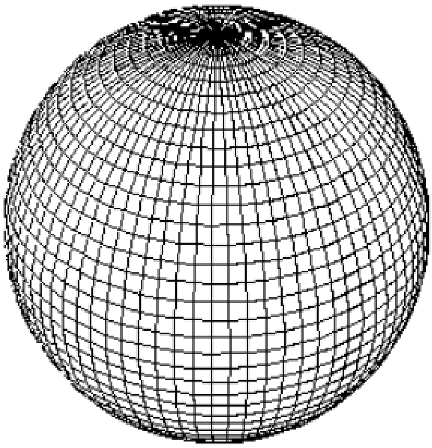

Рис. 4

Очевидно, що використання афінної подібності значно розширює коло задач, які можна вирішити за допомогою фізичногомоделювання. Проте найбільш загальним випадком подібності є,так звана, нелінійна або функціональна подібність, при якійзалежності між характеристиками x_i та $\overline{x}_i$ являють собою деякі нелінійні функції:

$$\overline{x}_i = f_i\left(x_1, x_2, ..., x_N\right), \qquad i = 1, 2, ..., N. \tag{2.25}$$

На основі перетворення типу (2.25) теоретично можна поставити увідношення подібності будь-які два явища однієї природи. Так, якщо покласти

$$\tilde{x} = \sqrt{|\hat{x}|}, \quad \tilde{y} = \sqrt{|\hat{y}|}, \quad \tilde{z} = \sqrt{|\hat{z}|} \tag{2.26}$$

то виявляється, що сфера (2.24) функціонально подібна октаедру(див. рис. 5)

$$|\hat{x}| + |\hat{y}| + |\hat{z}| = 1 \tag{2.27}$$

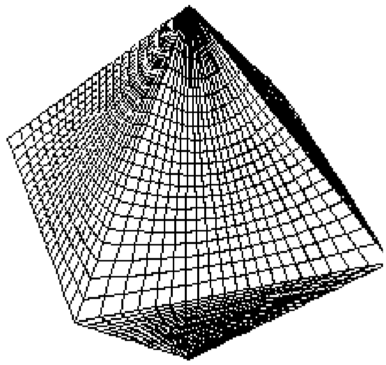

Рис.5

В загальному випадку явища будуть нелінійно подібними одне одному, якщо виконуються наступні умови: відповідні об`єкти (модель та натура) є геометрично нелінійно подібними, після застосування перетворень (2.24) до характеристик модельногопроцесу основні рівняння та умови єдиності їх розв`язку переходятьв основні рівняння та умови єдиності їх розв`язку натурного процесу. Зрозуміло, що підбір перетворень (2.24) є непростою задачею, що пояснюється загалом значно складнішим характером нелінійних проблем у порівнянні з лінійними.

Окрім класифікації типів подібності у відповідності до вигляду функціональної залежності між параметрами моделі та натури розрізняють види подібності і за характером фізичної природи явища. Нами вже розглянуто різні поняття *геометричноїподібності*. Крім неї існує ще поняття *механічної подібності*. У випадку простої подібності воно включає в себе геометричну

подібність відповідних систем, кінематичну подібність, тобто паралельність тапропорційність швидкостей в будь-яких двох подібних точках систем, та динамічну подібність, тобто паралельність та пропорційність зусиль в подібних точках. Існують також *теплова, гідродинамічна, аеродинамічна* та багато інших

типів подібності.

Надалі, якщо не буде обумовлено інше, розглядатимемо лише просту подібність. Тому варто дати більш конкретне означення подібності: *явище називається подібним, якщо кожну величину, щохарактеризує перше явище* *(натурне), можна представити увигляді добутку масштабного коефіцієнта на відповідну величину,що характеризує друге явище (модельне), причому значеннямасштабного коефіцієнта має залишатися постійним для всіх величин спільної фізичної природи в усіх подібних точках системи*.

Не зважаючи на свою простоту та прозорість, дане означення не дає конструктивної відповіді на питання про те, чи будуть деякі явища подібними, чи ні. Для того, щоб відповісти на це запитання, потрібно звернутись до постановки задачі, яка, як відомо, зводиться до основних рівнянь та умов єдиності їх розв`язку. Оскільки за означенням явища мають належати до однієї фізичної природи, то,очевидно, що в наслідок подібного перетворення основні рівняння мають зберегти свій вигляд. Отже, зміни можуть торкнутися лише умов однозначності в розширеному розумінні цього терміну, тобто, включаючи вирази для фізичних констант систем. З іншої сторони, у подібних явищ відповідні величини відрізняються лише своїми абсолютними значеннями, тому й в умовах однозначності можуть змінюватися лише абсолютні значення величин, що задаються (початкові чи граничні), а не закони їх розподілу. Таким чином, для подібних явищ мають виконуватися дві умови: тотожністьосновних рівнянь та подібність (пропорційність) умов однозначності їх розв`язку. Ці дві умови не випливають одна з одної і, взагалі кажучи, ніщо наперед не вказує на їх взаємну непротиречивість.

Лекция 7

2.3 Інваріантність рівнянь по відношенню до подібних перетворень. Гомогенні функції

Перш за все дослідимо питання про інваріантність рівнянь по відношенню до подібних перетворень. Зрозуміло, що для того, щоб рівняння залишалися інваріантними, необхідно, щоб чи за умови довільності подібного перетворення самі рівняння мали певні властивості, чи подібне перетворення задовольняло певним умовам.Розглянемо перший варіант вказаної дилеми. Але перед тим як визначати, які властивості повинні мати основні рівняння, щоб залишатися інваріантними при довільному подібному перетворенні, прослідкуємо, яким чином змінюються диференціальні та інтегральні оператори в наслідок подібного перетворення.

Нехай деяка змінна z визначається через змінні x та y наступним чином

$$z = \frac{dy}{dx}, \tag{2.28}$$

а подібне перетворення є

$$x = k_x \bar{x}, \quad y = k_y \bar{y}, \quad z = k_z \bar{z}\,. \tag{2.29}$$

Підставляючи (2.29) в (2.28) і вимагаючи незмінності (інваріантності) (2.28), отримуємо співвідношення між масштабними коефіцієнтами

$$k_z = \frac{k_y}{k_x} \tag{2.30}$$

Аналогічно, для другої похідної

$$u = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} \tag{2.31}$$

отримаємо

$$k_u = \frac{k_z}{k_x} = \frac{k_y}{k_x^2} \quad . \tag{2.32}$$

В загальному випадку, якщо між змінними *v*, *y* та *x* існує співвідношення

$$v = \frac{d^n y}{dx^n} \tag{2.33}$$

то для збереження його вигляду після подібного перетворення необхідно щоб між масштабними коефіцієнтами перетворення мало місце співвідношення

$$k_v = \frac{k_y}{k_x^n}. \tag{2.34}$$

Виходячи з (2.33) та (2.34), бачимо, що похідна $d^n y/dx^n$ при подібному перетворенні змінюється як степеневий комплекс yx^{-n}.Цю обставину позначають наступним чином:

$$K_{\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)} = K_{\left(\frac{y}{x^n}\right)}, \tag{2.35}$$

а комплекс yx^{-n} називають *приведеним степеневим комплексом* по

відношенню до похідної $d^n y/dx^n$.

Нехай тепер

$$z = \int_{x_1}^{x_2} y dx. \tag{2.36}$$

Доповнимо перетворення (2.29) співвідношеннями

$$x_1 = k_x \overline{x}_1, \quad x_2 = k_x \overline{x}_2 \tag{2.37}$$

які є наслідком простої подібності. Тоді, підставляючи (2.29) та (2.37) в (2.36) та вимагаючи інваріантності (2.36), приходимо до співвідношення

$$k_z = k_y k_x. \tag{2.38}$$

Аналогічно можна показати, що у випадку n-кратного інтегралу

$$K_{\left(\int \dots \int y dx_1 \dots dx_n\right)} = K_{\left(yx^n\right)}. \tag{2.39}$$

Співвідношення (2.35) та (2.39) були отримані нами длянайпростіших диференціальних та інтегральних операторів. Протеважко переконатися, що подібні співвідношення мають місце длябудь-якого однорідного оператора. Отже, можна стверджувати, щомасштабний коефіцієнт перетворення однорідного операторасліпвпадає з масштабним коефіцієнтом перетворення відповідногоприведеного степеневого комплексу. Це твердження дозволяє при

вивченні питання інваріантності рівняння відносно подібногоперетворення замінити однорідні оператори відповіднимистепеневими комплексами, що значно спрощує задачу.

Перейдемо тепер до вивчення питання про інваріантністьосновних рівнянь відносно подібних перетворень. Не зменшуючизагальності, будемо вважати, що деяке явище описується однимрівнянням

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_p\right) = 0, \tag{2.40}$$

де $x_1, x_2, ..., x_p$ — невідома функція та аргументи задачі. Застосуємо до всіх цих величин подібне перетворення

$$\overline{x}_i = k_i x_i, \quad i = 1, 2, ... p\,. \tag{2.41}$$

Оскільки за умовою задачі рівняння має зберігати свою форму і для змінних $\overline{x}_i, i = 1, 2......., p$, то

$$F\left(k_1 x_1, k_2 x_2, ..., k_p x_p\right) = 0. \tag{2.42}$$

Це можливо тоді та лише тоді, коли

$$F\left(k_1 x_1, k_2 x_2 ... k_p x_p\right) = R\Big(F\left(x_1, x_2, ... x_p\right), k_1, k_2, ... k_p\Big), \tag{2.43}$$

де $R(s, k_1, k_2, \ldots k_p)$— деяка функція, що має єдиний нуль в точціs=0 незалежно від значень параметрів k_1, $k_2, \ldots k_p$. Враховуючи, що кожний масштабний коефіцієнт пов`язаний зі своїм аргументом чи залежною змінною, неважко дійти висновку, що функція R має бути лінійною, тобто

$$F\left(k_1x_1,k_2x_2...k_px_p\right)=\phi\left(,k_1,k_2,...k_p\right)F\left(x_1,x_2,...x_p\right), \tag{2.44}$$

або скорочено

$$F\left[\overline{x}_i\right]=F\left[k_ix_i\right]=\phi\left[k_i\right]F\left[x_i\right]. \tag{2.45}$$

Співвідношення (2.44) вказує на те, що подібне перетворенняа ргументів функції F призводить до подібного перетворення самої функції. Таку властивість функції називають *гомогенністю*, а саму функцію — *безумовно гомогенною* або просто *гомогенною*. Таким чином, для того щоб деяке рівняння було інваріантним по відношенню до будь-якого подібного перетворення необхідно тадостатньо, щоб його ліва частина являла собою безумовно гомогенну функцію своїх аргументів.

З`ясуємо, які функції мають властивість гомогенності. Для цього припустимо, що $F(x_1,x_2,....\mathrm{x}_p)$, — гомогенна функція, тобто задовольняє (2.44). Тоді

$$\frac{\partial F\left[\overline{x}_i\right]}{\partial k_1}=\frac{\partial\phi\left[k_i\right]}{\partial k_1}F\left[x_i\right] \tag{2.46}$$

З іншого боку

$$\frac{\partial F\left[\overline{x}_i\right]}{\partial k_1}=\frac{\partial F\left[\overline{x}_i\right]}{\partial\overline{x}_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_1}=\frac{\partial F\left[\overline{x}_i\right]}{\partial\overline{x}_1}x_1 \tag{2.47}$$

Оскільки співвідношення (2.44) виконується при довільних значеннях масштабних коефіцієнтів k_i, i=1,2,.., p, то воно буде справедливим і при k_i=1, i=1,2,.., p. Позначимо

$$a_1=\left.\left(\frac{\partial\phi\left[k_i\right]}{\partial k_1}\right)\right|_{k_i=1}-const. \tag{2.48}$$

Тоді, прирівнюючи праві частини (2.46) та (2.27), маємо

$$\frac{\partial F\left[x_i\right]}{\partial x_1}x_1=a_1F\left[x_i\right]. \tag{2.49}$$

Розв`язавши диференціальне рівняння (2.49) відносно $F[x_i]$,знаходимо

$$F\left[x_i\right] = C_1 x_1^{a_1} \tag{2.50}$$

Провівши аналогічні міркування відносно інших аргументів функції $F[x_i]$, приходимо до висновку, що вона є степеневим комплексом своїх аргументів:

$$F\left(x_1, x_2, ...x_p\right) = C x_1^{a_1} x_2^{a_2} ....x_p^{a_p} \tag{2.51}$$

Таким чином, функція буде гомогенною, якщо вона являє собоюстепеневий комплекс. Приймаючи до уваги міркування, наведені напочатку цього розділу, можемо стверджувати, що інваріантними повідношенню до довільного подібного перетворення є рівняння, лівічастини яких є однорідними операторами. Зрозуміло, що клас такихрівнянь вельми обмежений. Тому для того, щоб розширити класрівнянь, які залишаються інваріантними в наслідок подібнихперетворень, слід відмовитись від припущення про довільність

самих подібних перетворень.

Лекция 8

2.4Умовно гомогенні функції. Критерії подібності

Оскільки умови, які мають бути накладені на основні рівняннядля того, щоб вони залишалися інваріантними по відношенню додовільного перетворення своїх аргументів значно обмежують кластаких рівнянь, то для розширення області практичногозастосування моделювання спробуємо відповісти на оберненепитання: яким умовам повинні задовольняти подібні перетвореннядля того, щоб рівняння залишалися інваріантними, незалежно відсвоєї структури?

З самої природи подібного перетворення випливає, що воно залишить будь-які рівняння інваріантними, якщо покласти значеннявсіх масштабних коефіцієнтів k_iрівними одиниці. Звичайно, цейрезультат є тривіальним, проте, якщо б аналогічне перетворення мало місце для деяких інших змінних, які можна утворити з першоосновних змінних x_1, $x_{2,......,}x_p$, то цим можна було б скористатися при встановлені умов, яким повинні задовольняти подібні перетворення.

Введемо в якості нових змінних степеневі комплекси

$$\Pi_j\left[x_i\right]=Cx_1^{a_1^{(j)}}x_2^{a_2^{(j)}}....x_p^{a_p^{(j)}} \qquad j=1,2....,r. \tag{2.52}$$

Змінні Π_jє гомогенними функціями $x_1,x_2,\ldots,x_p$, , тому приподібному перетворенні вони змінюються за законом

$$\Pi_j\left[x_i\right]=K_j\Pi_j\left[x_i\right], \quad j=1,2....,r \tag{2.53}$$

де

$$K_j=k_1^{a_1^{(j)}}k_2^{a_2^{(j)}}....k_p^{a_p^{(j)}} \tag{2.54}$$

Якщо покласти

$$K_j=1, \tag{2.55}$$

то рівняння у змінних Π_j зміняться. При цьому з 2.55) не обов`язково випливає, що $k_1=k_2=\ldots=k_p=1$, тобто умови (2.55) є умовами інваріантності деякої системи рівнянь, накладеними намасштабні коефіцієнти подібного перетворення.

Продемонструємо сказане на прикладі рівняння (2.40)

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_p\right)=0,$$

але будемо тепер вважати, що його ліва частина вже не є безумовно гомогенною функцією. Для цього виділимо всі незалежні степеневі комплекси, які стоять під знаком функції *F*. Під *незалежними* будемо розуміти степеневі комплекси, серед множини яких не можна знайти такого, що утворюється з точністю до постійного множника за допомогою операцій множення та піднесення достепеня, виконаними над іншими комплексами цієї множини.

Очевидно, що число таких комплексів *r* не перевищує кількості першопочаткових змінних *p*. Винесемо їх спільну частину, яку позначимо через Π_0, за знак функції

$$F\left(x_1, x_2, ...x_p\right)=\Pi_0 \Phi\left(\Pi_1, \Pi_2, ...\Pi_r\right) \quad (2.56)$$

Тоді рівняння (2.40) стає еквівалентним сукупності рівнянь

$$\Pi_0\left(x_1, x_2, ..., x_p\right)=0 \quad (2.57)$$

та

$$\Phi\left(\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_r\right)=0 \quad (2.58)$$

Що стосується рівняння (2.57), то воно не викликає інтересу, оскільки повертає нас до поняття безумовно гомогенної функції. В частковому випадку комплекс Π_0 взагалі може виявитисяконстантою. Значно цікавіші результати можна отримати з рівняння(2.58). Після подібного перетворення (2.40) воно в силу (2.53) приймає вигляд

$$\Phi\left[K_j \Pi_j\right]=0 \quad (2.59)$$

Для виконання умови інваріантності рівняння (2.58), а з ним і рівняння (2.40) достатньо задовольнити умовам (2.55). Якщо в (2.55) підставити (2.54), то отримуємо співвідношення відносно масштабних коефіцієнтів подібного перетворення

$$k_1^{a_1^{(j)}} k_2^{a_2^{(j)}} ....k_p^{a_p^{(j)}} = 1, \quad j = 1, 2, ...r, \tag{2.60}$$

виконання яких є необхідною умовою для збереження інваріантності рівняння (2.40), тобто властивості гомогенності функції $F(x_1,x_2,\dots x_p)$. В такому разі рівняння (2.60) прийнято називати *обумовлюючими рівняннями*, а функцію $F(x_1,x_2,\dots x_p)$— *умовно гомогенною* функцією.

Зауважимо, що (2.60) являє собою систему r рівнянь відносно p масштабних коефіцієнтів. Це означає, що ми можемо довільновибрати (p -r) масштабів k_i. Тому різницю (p-r) прийнятоназивати *числом ступенів вільності* перетворення. Якщо pпринаймні на одиницю більше за r, то вибираючи одинмасштабний коефіцієнт довільно, можна отримати безліч частиннихрозв`язків рівняння. Якщо ж $p$ =$r$, то система (2.60) може бутизадоволена лише, коли$k_1$=$k_2$=…=$k_p$, тобто простеперетворення подібності для даного рівняння не може дати новихрозв`язків. В більшості практично важливих випадках умова r <pвсе ж виконується, що дозволяє для моделювання використовуватипросту подібність.

Умови інваріантності рівнянь відносно деякого подібного перетворення можна формулювати не тільки в термінах масштабних коефіцієнтів. Для цього відмітимо, що рівність одиниціmасштабного коефіцієнта перетворення комплексу Π_jозначає, щосам комплекс зберігає своє значення при подібному перетворенні.Такі комплекси прийнято називати *інваріантами перетворення* або*критеріями подібності*. Той факт, що критерій залишається інваріантним при перетворенні прийнято позначати наступним чином:

$$\Pi_j = idem. \tag{2.61}$$

Слід чітко розрізняти масштабні коефіцієнти та критерії подібності. Масштабний коефіцієнт зберігає постійне значення припереході від однієї точки системи до іншої, проте він змінюється при переході від одного подібного явища до іншого. Критерій подібності, навпаки, має різне значення в різних точках системи, оскільки являє собою степеневий комплекс першоосновних змінних системи, проте він не змінює свого значення в подібних точках при переході від одного явища до йому подібного.

Таким чином, можемо стверджувати, що: *якщо два явища є подібними, то масштабні коефіцієнти відповідного перетворення мають задовольнятисистемі обумовлюючих рівнянь, які є наслідком інваріантності системи основних рівнянь.*

Це твердження, яке називається *першою теоремою подібності* можна сформулювати і в іншому вигляді: *Для того, щоб два явища були подібними, необхідно, щоб критерії подібності зберігали своє значення.*

У якості першого прикладу розглянемо матеріальну точку маси m, яка рухається під дією постійної сили F. Як відомо [4], рівняння руху в проекції на напрямок дії сили можна подати у вигляді

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = F\,, \tag{2.62}$$

де r — відстань, яку проходить точка вздовж лінії дії сили. Знайдемо яким умовам повинні задовольняти подібні перетворення для того, щоб залишити рівняння (2.62) інваріантним. Для цього застосуємо подібне перетворення

$$\overline{m} = k_m m, \quad \overline{r} = k_1 r, \quad \overline{t} = k_t t, \quad \overline{F} = k_f F\,. \tag{2.63}$$

Рис. 6

Підставляючи (2.63) в (2.63), отримуємо

$$\frac{k_t^2}{k_m k_l}\bar{m}\frac{d^2\bar{r}}{d\bar{t}^2}=\frac{1}{k_f}\bar{F}\,. \qquad (2.64)$$

Звідки, в силу інваріантності (2.62), виводимо обумовлююче рівняння

$$\frac{k_t^2 k_f}{k_m k_l}=1 \qquad (2.65)$$

Іншими словами, подібні перетворення повинні залишати незмінними в подібних точках степеневий комплекс $Ft^2\ m^{-1}r^{-1}$або комплекс $Frm^{-1}v^{-2}$, де v — проекція швидкості точки на напрямок дії сили. Цей факт прийнято позначати наступним чином:

$$Ne=\frac{Fr}{mv^2}=idem \qquad (2.66)$$

та називати критерієм Ньютона на честь вченого, який вперше запропонував розглядати (2.66) як умову подібності двохмеханічних процесів.

Нехай матеріальна важка точка рухається під дією сили притягання, яка діє між нею та нерухомою точкою маси *m*. У цьому випадку рівняння руху точки в проекції на радіальний напрямок системи координат, пов`язаної з нерухомою точкою, є

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\gamma\frac{m}{r^2}\,, \qquad (2.67)$$

де r— відстань між точками, γ— гравітаційна постійна. Застосуємо до (2.67) подібне перетворення

$$\bar{m}=k_m m,\quad \bar{r}=k_l r,\quad \bar{t}=k_t t,\quad \bar{\gamma}=k_\gamma \gamma\,. \qquad (2.68)$$

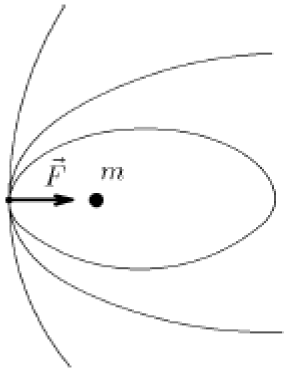

Рис.7

Вимагаючи інваріантності (2.67), приходимо до обумовлюючого рівняння

$$\frac{k_\gamma k_m k_t^2}{k_l^3} = 1 \tag{2.69}$$

В реальних умовах гравітаційна константа не змінює свого значення, тобто $k_\gamma = 1$. Тоді відповідний критерій, який має виконуватися в задачах руху небесних тіл, для того щоб їх траєкторії були подібними, набуває вигляду

$$\frac{r^3}{mt^2} = idem\,. \tag{2.70}$$

З співвідношення (2.70) випливає третій закон Кеплера рухупланет навколо Сонця: квадрати періодів обертання планет навколо Сонця пропорційні кубам більших напівосей їх орбіт. В залежності від значення критерію (2.70) траєкторія матеріальної точки, що рухається в полі центральної сили, є еліпсом, параболою чи гіперболою (див. рис. 7).

Розглянемо балку довжини *l*, яка знаходиться під дією рівномірного розподіленого навантаження *q* (див. рис. 8). Рівняння рівноваги такої балки можна записати у вигляді

$$EJ\frac{d^4w}{dx^4} = q\,, \tag{2.71}$$

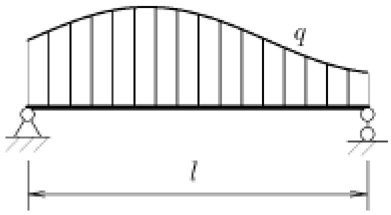

Рис. 8

де w — прогин балки, E — модуль Юнга, J — момент інерції поперечного перерізу. Застосуємо до (2.71) афінно подібне перетворення

$$\begin{aligned} &\overline{x} = k_l x, \quad \overline{l} = k_l l, \quad \overline{w} = k_w w, \\ &\overline{J} = k_J J, \quad \overline{E} = k_E E, \quad \overline{q} = k_q q \end{aligned} \quad . \tag{2.72}$$

Обумовлююче рівняння, задоволення якого, дозволяє залишити інваріантним рівняння (2.72), очевидно, має вигляд

$$\frac{k_E k_J k_w}{k_l^4 k_q} = 1 \tag{2.73}$$

Йому відповідає критерій

$$\frac{EJw}{l^4 q} = idem\,. \tag{2.74}$$

Тобто, знаючи розв`язок модельної задачі $\overline{w}$, прогин натурноїбалки обраховується за формулою

$$w = \frac{\overline{EJ}}{EJ} \frac{l^4 q}{\overline{l}^4 \overline{q}} \overline{w}\,. \tag{2.75}$$

Зауважимо, що коли балки є геометрично пропорційноподібними, то $k_J = k_l^4, \quad k_w = k_l$ і критерій (2.74) набуває значно простішого вигляду.

Лекция 9

2.5 Нормалізація рівнянь. Відносні змінні. Параметричні критерії

До цього часу ми розглядали умови подібності перетворення, які випливають з інваріантності основних рівнянь. Проте за подібного перетворення окрім збереження вигляду системи основних рівнянь потрібно забезпечити подібність умов єдиності її розв`язку. Для того, щоб не проводити окремого дослідження цього питання, застосуємо техніку, відому під назвою *нормалізації* рівнянь. Вона полягає в переході до безрозмірних змінних. Це дозволяє всірезультати, отримані для основних рівнянь, автоматично перенести на умови єдиності їх розв`язку, адже в безрозмірних змінних вимога подібності умов єдиності трансформується в вимогу їх інваріантності. Крім того, нормалізовані рівняння дозволяють загалом більш ефективно застосовувати методи теорії подібності.

Розглянемо рівняння вигляду

$$D_0 + D_1 + ... + D_r = 0, \tag{2.76}$$

яке пов`язує між собою величини x_1, x_2,…x_p, , які являють собоюневідомі функції та аргументи задачі, D_j— оператори, кожний зяких визначає деякий фізичний ефект.

Припустимо, що для всіх величин можна вибрати *характерні значення*: x_{10}, x_{20},…x_{p0}. Як правило, характерні значенняаргументів та невідомих функцій задаються в умовах єдиностірозв`язку. Тоді можна ввести безрозмірні величини

$$x_1' = \frac{x_1}{x_{10}}, \quad x_2' = \frac{x_2}{x_{20}}, \quad x_p' = \frac{x_p}{x_{p0}}, \tag{2.77}$$

які домовимося називати *відносними змінними*. Якщо тепер укожному з операторів D_jперейти від змінних x_iдо відноснихзмінних x_i', то можна показати, що кожний з операторів допускаєпредставлення

$$D_j = D_{j0} D_j', \tag{2.78}$$

де $D_{j0} = x_{10}^{a_{1j}} x_{20}^{a_{2j}} ... x_{p0}^{a_{pj}}$ — степеневі комплекси, складені з характерних значень, D'_j — безрозмірний оператор.

Так, наприклад, якщо маємо диференціальний оператор

$$D_d = \frac{d^m y}{dx^m}, \tag{2.79}$$

то покладаючи

$$y = y_0 y', \quad x = x_0 x', \tag{2.80}$$

знаходимо

$$D_{d0} = y_0 x_0^{-m} \tag{2.81}$$

Приведемо рівняння (2.76) до безрозмірного вигляду. Для цього,вважаючи, що $D_0 \neq 0$, розділимо усі доданки на D_0 :

$$1 + \frac{D_1}{D_0} + \frac{D_2}{D_0} + ... + \frac{D_r}{D_0} = 0 \tag{2.82}$$

або

$$1 + d_1 + d_2 + ... + d_r = 0. \tag{2.83}$$

Оператори d_j=D$_j$/D$_0$є безрозмірними, бо всі члени рівняння (2.76)повинні мати однакову розмірність. Вони характеризують відносну інтенсивність різних ефектів, які мають вплив на явище.

Перейдемо в рівнянні (2.76) до відносних змінних x'_i. Якщооператори D_jоднорідні, то оператори d_jдопускають представлення

$$d_j = \frac{D_j}{D_0} = \frac{x_{10}^{a_{1j}} x_{20}^{a_{2j}} ... x_{p0}^{a_{pj}} D'_j}{x_{10}^{a_{10j}} x_{20}^{a_{20j}} ... x_{p0}^{a_{p0}} D'_0} = \pi_j d'_j, \tag{2.84}$$

де $\pi_j = x_{10}^{b_{1j}} x_{20}^{b_{2j}} ... x_{p0}^{a_{pj}}$ — безрозмірні комплекси, складені з характерних величин, а — d'_jбезрозмірні оператори, які за виглядом співпадають з операторами d_j, але є функціями лишевідносних змінних x_i' і не залежать від характерних значень x_{i0}. Оператори d_j' змінюються тільки при зміні безрозмірних законіврозподілу, тобто форми залежності між змінними, і зовсім непов`язані з абсолютними значеннями величин. Тому рівняння (2.82), записане у вигляді

$$1+\pi_1 d_1'+\pi_2 d_2'+...\pi_r d_r'=0, \tag{2.85}$$

має залишатися інваріантним у термінах відносних змінних, незалежно від того чи є воно основним рівнянням, чи є рівнянням,яке виражає умови однозначності розв`язку.

Очевидно, що необхідною та достатньою умовою інваріантності рівняння (2.85) є збереження степеневими комплексами π_j своїх значень. Інваріантність комплексів π_j не означає збереженняхарактерних значень самих змінних та параметрів задачі, оскількиза умови $r<p$ можна навести нескінченний ряд значень x_{i0} , якізалишатимуть π_j незмінними. Отже, π_j можна розглядати, як критерії подібності комплексного типу, а розв`язок задачі можнаподати в неявному вигляді наступним чином:

$$R\left(x_1',x_2',...,x_p',\pi_1,\pi_2,...,\pi_r\right)=0. \tag{2.86}$$

Це твердження дістало назву *другої теореми подібності*.

Вигляд критеріїв подібності π_j не може бути визначено однозначно, адже навіть сам метод їх отримання допускав багато альтернативних варіантів (ми могли б, наприклад, з таким самим успіхом розділити рівняння (2.76) на D_p, а не на D_0). Крім того, припустимо, що π_1 та π_2 є два критерії подібності, тобто величини, які зберігають своє значення при перетворенні. Тоді своє значення буде зберігати і будь-яка функція від π_1, π_2. Іншими словами, будь-яка комбінація критеріїв подібності є теж критерієм подібності.

Можна піти по цьому шляху далі і розглянути добуток відносної змінної на критерій. Очевидно, що добуток відносної змінної на ненульову константу являє собою теж відносну змінну. Але для подібних явищ критерій подібності і є константою. Отже, добуток відносної змінної на будь-яку комбінацію критеріїв є теж відносною змінною. Можливість комбінувати критерії з відносними змінними дозволяє будувати критерії раціональним чином.

Іноді трапляється ситуація, коли для деякої змінної x_nне можна знайти за умовами задачі її характерного значення x_{n0}. В наслідок цього випадає з розгляду відносна змінна x_n', а разом з тим виявляються невизначеними критерії, які мають утримувати x_{n0} .Вихід з цієї ситуації полягає в комбінуванні відносної змінної x_n'з відповідними критеріями з метою виключення x_{n0} . Очевидно, що це призводить до заміни в критеріях x_{n0} на x_n. Тут потрібно зупинитися більш детально на означенні поняття *критерію подібності*. В цьому розділі ми розглядали критерії лише якстепеневі комплекси, складені з характерних значень змінних.Проте у відповідності з попереднім розділом критерій подібностіявляє собою степеневий комплекс, складений з довільних

параметрів та змінних системи, що є загально прийнятим підходом в сучасній теорії подібності. Домовимось називати критерій подібності, побудований лише на характерних значеннях змінних, *критерієм подібності у вузькому розумінні*, а критерій-функцію — *критерієм подібності у широкому розумінні*. Таким чином, заміна x_{n0} на x_nпризводить до перетворення деякого критерію з критерію подібності в вузькому розумінні в критерій подібності в широкому

розумінні. В цьому розділі будемо використовувати лише поняття критерію подібності в вузькому розумінні, а тому відповідний x_n критерій в широкому розумінні будемо розглядати як відносну змінну, у якої замість *характерного* значення у знаменнику стоїть її *характеристичне* значення, що являє собою степеневий комплекс, складений з характерних значень інших змінних. Іноді таку змінну комплексного типу називають *числом* (наприклад, число Маха, число Рейнольдса і т.д.).

Досить часто трапляється і обернена ситуація, коли однійзмінній у відповідність умовами поставлено два або більше характерних значення.

Очевидно, що в такому разі отримуємо групи критеріїв, які всередині однієї групи відрізняються один від одного лише входженням різних характерних значень відповідної змінної. Комбінуючи критерії в межах кожної групи, приходимо до висновку, що кожну групу можна представити у вигляді одного

критерію комплексного типу та критеріїв *Pj*, числом на один меншим від кількості характерних значень змінної, які являють собою незалежні попарні відношення між цими характерними значеннями. Критерії такого типу прийнято називати *параметричними критеріями* або *симплексами*. Частіше за все трапляються симплекси геометричної природи, які являють собою відношення геометричних розмірів системи.

Таким чином, узагальнене співвідношення другої тереми подібності можна подати у вигляді

$$R\left(x_1',x_2',...,x_p',\pi_1,\pi_2,...,\pi_r,P_1,P_2,...,P_s\right)=0, \qquad (2.87)$$

де x_i'— відносні змінні, π_j— критерії комплексного типу, P_n— критерії параметричного типу. Знаходження конкретного вигляду функції R не відноситься до задач теорії подібності і він має бути визначений іншим шляхом (наприклад, експериментально). Теорія подібності встановлює лише умови за яких можна використовувати (2.87).

Застосуємо метод нормалізації, встановивши критерії подібності в задачі про вимушені коливання матеріальної точки маси m на пружині жорсткості c у в`язкому середовищі з коефіцієнтом демпфування η під дією періодичної сили з амплітудою H і частотою ω. Рівняння, яке описує даний процес, є добре відомим [4]:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\eta\frac{dx}{dt}+cx=H\sin\omega t. \qquad (2.88)$$

Позначимо характерні значення зміщення x через x_0, а часу t — через t_0. Тоді в безрозмірних змінних

$$x' = \frac{x}{x_0}, \quad t' = \frac{t}{t_0} \tag{2.89}$$

рівняння (2.88) може бути записаним у вигляді

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} + \pi_1 \frac{dx}{dt'} + \pi_2 x = \pi_3 \sin \pi_4 t' \quad , \tag{2.90}$$

де

$$\pi_1 = \frac{\eta t_0}{m}, \quad \pi_2 = \frac{c t_0^2}{m}, \quad \pi_3 = \frac{H t_0^2}{m x_0}, \quad \pi_4 = \omega t_0 \tag{2.91}$$

— критерії подібності розглядуваної задачі.

В загальному випадку за характерне значення зміщення x_0

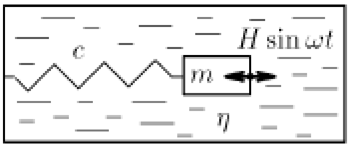

Рис. 9

можна взяти початкове відхилення маси від положення рівноваги, а за характерне значення t_0 відношення $x_0 / \dot{x}_0$, де $\dot{x}_0$ — початкова швидкість маси. За таких обставин розв`язок задачі запишеться у формі

$$x' = f\left(t', \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\right) \tag{2.92}$$

У випадку, коли не можна вказати характерне значення для x та t , (наприклад, коли початкові умови є нульовими), критерій π_3 взагалі випадає з розгляду, а замість критеріїв π_1 , π_2 та π_4 , виключаючи з них t_0 , одержуємо два нових критерії

$$\pi_1' = \frac{\pi_1}{\pi_4} = \frac{\eta}{m\omega}, \quad \pi_2' = \frac{\pi_4^2}{\pi_2} = \frac{m\omega^2}{c}. \tag{2.93}$$

Остаточно розв`язок задачі набуває вигляду

$$x' = f\left(t', \pi_1', \pi_2'\right). \tag{2.94}$$

Навпаки, якщо існує декілька характерних значень для *x* та *t*, скажімо, змушуюча сила в правій частині (2.88) діє не весь час, а лише протягом часу *T*, то під знак функції в (2.92) слід внести параметричний критерій T/t_0.

Лекция 10

2.6 Необхідні та достатні умови подібності

При розгляді питання про інваріантність основних рівняньвідносно подібного перетворення нами було з`ясовано, що необхідною для цього умовою є задоволення масштабними коефіцієнтами системи обумовлюючих рівнянь (2.55). Дійсно, умова K_j=1 є наслідком інваріантності степеневого комплексу Π_j, анезмінність значень всіх комплексів Π_jє необхідною умовою інваріантності системи основних рівняння. З іншого боку, якщо масштабні коефіцієнти задовольняють систему (2.55), то всі комплекси Π_jзалишаються інваріантними, а разом з ними залишається інваріантним і система основних рівнянь.

Припустимо, що за умовами задачі для деякої змінної x_iнезадано її характерного значення. Тоді може існувати один (але небільше) комплекс Π_j, який буде критерієм в широкому розумінні,але не буде критерієм у вузькому розумінні, тобто буде включати усвій склад змінну x_i. Очевидно, що виконання умови K_j=1завжди можна досягнути правильним вибором масштабногокоефіцієнта k_i. Зміна значення k_iніяким чином не відобразиться

на інваріантності інших критеріїв, а просто призведе до зміниправила перерахування значень змінної x_iпри подібномуперетворенні. Цілком аналогічна ситуація буде спостерігатися і увипадку, коли маємо декілька критеріїв у широкому розумінні.Таким чином, *необхідною та достатньою умовою подібності явищє інваріантність критеріїв у вигляді степеневих комплексів,складених з характерних значень змінних, тобто критеріїв увузькому розумінні*. Це твердження, яке складає основу *третьоїтеореми*, замикає теорію подібності та дозволяє однозначно встановити умови подібності двох явищ.

Лекція 11. Застосування теорії подібності

3.1. Критерії подібності в задачах теплопровідності

Задачі теплопровідності є одними з найбільш вивчених задач фізики суцільного середовища, тому логічно почати розгляд застосування методів теорії подібності на їх прикладі. Як відомо, задача теплопровідності для трьохвимірного тіла за відсутності в ньому джерела описується рівнянням Фур'є

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \tag{3.1}$$

де $T(x, y, z, t)$ — температура, t — час, x, y, z - просторові координати, $a = \lambda / c\rho$, λ — коефіцієнт теплопровідності, c — питома теплоємкість, ρ — густина.

Для визначення розв`язку конкретної задачі до рівняння (3.1) мають бути додані умови єдиності його розв`язку, які складаються з початкових та граничних умов. Початкова умова в задачах теплопровідності завжди має вигляд

$$T(x, y, z, 0) = T_\Omega(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in \Omega, \tag{3.2}$$

і означає, що в початковий момент має бути задане значення температури в кожній точці області Ω, яку займає тіло.

Граничні умови задаються, як правило, трьох типів:

1) задається розподіл температури на поверхні тіла, як функція

часу:

$$T(x, y, z, t)\big|_{(x,y,z)\in S} = T_S(x, y, z, t), \qquad t > 0, \tag{3.3}$$

де S — границя області Ω. Умову такого типу вдається реалізувати на практиці досить рідко.

2) заданий тепловий потік в усіх точках поверхні тіла. Виходячи з означення теплового потоку $\left(q=-\lambda\partial T/\partial\vec{n}=-\lambda\vec{n}\,grad\,T\right)$, гранична умова може бути записаною у вигляді

$$\frac{\partial T}{\partial\vec{n}}\bigg|_{(x,y,z)\in S}=-\frac{q_S\left(x,y,z,t\right)}{\lambda},\ t>0, \tag{3.4}$$

Умова (3.4) теж досить рідко зустрічається в конкретних фізичних задачах.

3) найчастіше в практично важливих задачах відома температура зовнішнього по відношенню до тіла середовища $\mathrm{T_c}$. В такому випадку звертаються до закону Фур`є: тепловий потік між середовищем та тілом в деякій точці поверхні тіла пропорційний з коефіцієнтом пропорційності $\alpha$, який називається коефіцієнтом теплообміну, різниці між температурою середовища та температурою поверхні тіла в даній точці. На основі закону Фур`є гранична умова в цьому випадку приймає вигляд

$$\left(\frac{T}{\vec{n}}+\frac{\alpha}{\lambda}T\right)\bigg|_{(x,y,z)\in S}=\frac{\alpha}{\lambda}T_c\left(x,y,z,t\right),\ t>0, \tag{3.5}$$

Зауважимо, що інколи задається змішана гранична умова, тобто на різних, взаємно доповнюючих одна одну частинах поверхні тіла задаються різні умови з числа 1)–3).

Переходячи до знаходження умов подібності в задачах теплопровідності, позначимо через T_t, T_l, x_0, y_0, z_0 та t_0 відповідно характерні значення для розподілу температури в часі та в просторі, характерні значення довжин у трьох просторових вимірах та характерне значення часу. Тоді в безрозмірних змінних

$$T'=\frac{T}{T_t},\qquad T''=\frac{T}{T_l},\qquad t'=\frac{t}{t_0}, \tag{3.6}$$

$$x'=\frac{x}{x_0},\qquad y'=\frac{y}{y_0},\qquad z'=\frac{z}{z_0}$$

рівняння (7.1) набуває вигляду

$$\frac{T'}{t'}=\frac{aT_l t_0}{T_t}\left(\frac{l}{x_0^2}\frac{\partial^2 T''}{\partial x'^2}+\frac{l^2}{y_0^2}\frac{\partial^2 T''}{\partial y'^2}+\frac{l}{z_0^2}\times\frac{\partial^2 T''}{\partial z'^2}\right). \tag{3.7}$$

В (3.7) для температури введено два характерних значення T_t та T_l, а для геометричних розмірів — три: x_0, y_0, z_0. Якщо для цих величин ввести по одному характерному значенню T_0 та l, то (3.7) трансформується в

$$\frac{\partial T'}{\partial t'}=\frac{at_0}{l^2}\frac{T_l/T_0}{T_t/T_0}\left(\frac{l^2}{x_0^2}\frac{\partial^2 T''}{x'^2}+\frac{l^2}{y_0^2}\frac{\partial^2 T''}{y'^2}+\frac{l^2}{z_0^2}\frac{\partial^2 T''}{z'^2}\right). \tag{3.8}$$

Таким чином, єдиним степеневим комплексом, збереження свого значення яким залишає рівняння теплопровідності інваріантним, є

$$\frac{\alpha t_0}{l^2}=Fo. \tag{3.9}$$

Комплекс (3.9) називається критерієм Фур`є. Якщо значення T_t, T_l, x_0, y_0 та z_0 задані за умовами задачі, то відношення

$$\frac{T_t}{T_0},\quad \frac{T_l}{T_0},\quad \frac{x_0}{l},\quad \frac{y_0}{l},\quad \frac{z_0}{l} \tag{3.10}$$

мають увійти у розв`язок у вигляді параметричних критеріїв.

Початкова умова (3.2) не додає критеріїв у вигляді степеневого комплексу і легко може бути приведеною до безрозмірного вигляду. Єдине, що вона може додати — це характерне значення T_l, тобто параметричний критерій T_l/T_0. Аналогічний результат, але відносно параметричного критерію T_t $/T_0$, отримуємо привівши до безрозмірного вигляду граничну умову (3.3) або (3.4).

Зовсім інша ситуація виникає у випадку граничної умови (3.5), яка в безрозмірному вигляді може бути записана наступним чином:

$$\left.\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha l}\right)\left(\frac{l}{x_0}\frac{\partial T''}{\partial x'}n_x+\frac{l}{y_0}\frac{\partial T''}{\partial y'}n_y+\frac{l}{z_0}\frac{\partial T''}{\partial z'}n_z\right)+T''\right]\right|_{(x,y,z)\in S}=$$

$$=\frac{T_t/T_0}{T_l/T_0}T_c\left(x,y,z,t\right). \tag{3.11}$$

Бачимо, що крім параметричних критеріїв T/T_0, T_t/T_0, $x_0\,/l$, $y_0\,/l$ та $z_0\,/l$ (3.11) утримує комплексний критерій

$$\frac{\lambda}{\alpha l} = Bi. \tag{3.12}$$

Критерій (3.12) дістав назву критерію Біо.

Таким чином, задача теплопровідності в загальному випадку характеризується двома критеріями подібності комплексного типу: Fo та Bi. Її загальний розв`язок може бути представлений у вигляді

$$\frac{T}{T_0} = f\left(\frac{x}{l},\frac{y}{l},\frac{z}{l},\frac{t}{t_0},Fo,Bi,P_1,P_2,\ldots\right), \tag{3.13}$$

що вказує на те, що температурні поля в геометрично подібних системах (натура та модель) будуть подібними, якщо для них критерії Фур`є т Біо будуть зберігати свої значення. Рівність параметричних критеріїв $P_j$ для моделі та натури не є суттєвою і пов`язує між собою лише характерні значення відповідних змінних.

З`ясуємо фізичний зміст критеріїв Фур`є та Біо. Якщо уважно проаналізувати степеневий комплекс, який являє собою критерій Фур`є, то можна дійти висновку, що критерій Фур`є встановлює певне співвідношення між швидкістю зміни умов зовнішнього середовища та швидкістю зміни розподілу температурного поля всередині тіла. Дійсно, характерне значення часу t_0 визначає темп зміни температури зовні тіла, в той час як комбінація параметрів a та l відповідає за темп зміни внутрішньої температури тіла. Отже, критерій Фур`є вказує на те, що в подібних явищах теплообміну темп зміни внутрішньої температури пропорційний швидкості зміни температури зовнішнього середовища. Критерії такого роду, які встановлюють відповідність між швидкостями розвитку різних ефектів, що вливають на хід нестаціонарного процесу, прийнято називати критеріями *гомохронності*.

Звернімося до розгляду критерію Біо. Він об`єднує в собі один параметр, який характеризує геометричні розміри системи, та два фізичні параметри, що характеризують інтенсивність передачі тепла: a — між тілом та середовищем та λ — всередині тіла. Позначимо через ΔT температурний тиск, тобто різницю між температурою середовища та температурою поверхні тіла в деякій точці, а через δT — перепад температури всередині тіла біля його поверхні. Тоді

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\alpha l}{\lambda} \frac{\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}}{\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}} = Bi. \qquad (3.14)$$

Отже, критерій *Bi* являє собою мір у відношення температурного перепаду в тілі до температурного тиску, який діє між тілом та середовищем.

З метою кращого усвідомлення фізичного змісту критеріїв подібності в задачах теплопровідності розглянемо випадки їх граничних значень.

1). $Fo >> 1\left(t_0 >> l^2 / a\right)$ Бачимо, що перебудова температурного поля всередині тіла відбувається набагато швидше, ніж зміна температури зовнішнього середовища. В цьому випадку температурне поле всередині тіла швидко вирівнюється і, отже, можна рахувати, що температура тіла співпадає з температурою зовнішнього середовища. В такому разі відпадає власне необхідність розв`язувати задачу теплопровідності.

2). $Fo << 1\left(t_0 << l^2 / a\right)$ У цьому випадку, навпаки, умови зовнішнього середовища змінюються настільки швидко, що тіло не встигає реагувати на ці зміни. Для ефективного використання критерію *Fo* необхідно усереднити температуру зовнішнього середовища на періоді $t_1 >> t_0$ і розглядати t_1 як нове характерне значення часу.

3). $Bi >> 1$. Інакше кажучи, температурний перепад всередині тіла значно більший температурного натиску. Отже, температурним натиском можна знехтувати, тобто вважати, що на поверхні задана температура. В цьому випадку крайова умова третього роду вироджується в краєву умову першого роду, а сам критерій *Bi* випадає з розгляду.

4). $Bi \gg 1$. В такому разі, навпаки, можна знехтувати температурним перепадом всередині тіла у порівнянні із зовнішнім натиском, тобто можна вважати, що температура всередині тіла не змінюється від точки до точки. Звичайно, таке припущення є досить суттєвим, адже у цьому разі температура є лише функцією часу. Фактично з розгляду випадає сам процес теплопровідності, що призводить до злиття критеріїв Біо та Фур`є в один критерій*FoBi*. Дійсно, основне рівняння в цьому випадку можна записати у вигляді

$$c\rho V dT = \alpha S \Delta T dt, \tag{3.15}$$

де V — об`єм тіла, S — площа його поверхні. Нормалізуючи (3.15), отримуємо критерій

$$\frac{\alpha S \Delta T dt}{c\rho V dT} \to \frac{\alpha t_0}{c\rho l} = \frac{\alpha t_0 a}{l\lambda} = \frac{\alpha t_0}{l^2}\frac{\alpha l}{\lambda} = FoBi. \tag{3.16}$$

Розглянемо окремо випадок, коли при сталих зовнішніх умовах температура тіла монотонно змінюється, тобто за умовами задачі не існує характерне значення часу t_0. За таких умовt_0 необхідно виключити з розв`язку задачі. Це можна зробити, якщо скомбінувати критерій Фур`є з відносною змінною $t/\ t_0$ у вигляді безрозмірного часу

$$\tau = \frac{\alpha t_0}{l^2}\frac{t}{t_0} = \frac{\alpha t}{l^2}, \tag{3.17}$$

який називається числом Фур`є. При цьому сам критерій Фур`є вироджується, а для подібності явищ достатньо вимагати лише незмінності критерію Біо. В подібних процесах однаковим значенням числа Фур`є відповідають подібні моменти часу.

Якщо граничні умови є умовами першого або другого роду, із розгляду випадає і критерій Біо. Отже, відповідна задача теплопровідності має розв`язок, який не містить жодного критерію комплексного типу. Це означає, що всі процеси, які виникають за зазначених умов, подібні без будь-яких обмежень. У такому разі прийнято говорити, що процес має властивість автомодельності або є автомодельним.

Лекція 12.

Метод сил. Критерії подібності в механіці рідин та газу

В кінці XIX століття бурхливий розвиток гідродинаміки стимулював пошук нових підходів до виявлення критеріїв подібності в механіці рідини. Релеєм для знаходження π - комплексів було запропоновано використовувати відношення сил різної природи, які діють в елементарному об`ємі рідини. Даний підхід дістав назву методу сил і за своєю суттю є одним із варіантів методу нормалізації. Він продемонстрував свою ефективність, яка базується на більшій прозорості у порівнянні з "класичним" методом теорії подібності.

Метод сил передбачає виконання двох наступних кроків:

1). Виявляються всі сили, які можна вважати суттєвими для досліджуваного процесу, і поділяються на незалежні сили та залежні, тобто такі, які можна виразити через незалежні. Для кожної з цих сил, базуючись на фізичних уявленнях та аналізі розмірностей, складають аналітичний вираз.

2). Безрозмірні степеневі комплекси, які характеризують процес, утворюються шляхом комбінування відношень сил та відношень лінійних розмірів. Останні необхідні для геометричної подібності систем. Число незалежних комплексів π, на відношеннях сил, на одиницю менше від кількості незалежних сил.

Як бачимо, в основі методу сил лежить поняття механічної подібності. Нагадаємо, що механічна подібність передбачає геометричну подібність, кінематичну подібність та динамічну подібність, тобто подібність сил в подібних точках. Слід зауважити, що метод сил мало придатний для дослідження явищ, де основні ефекти важко описати в термінах сил. Прикладом такого процесу може слугувати явище теплопровідності. Тому основним полем застосування методу сил є механіка в цілому і аерогідродинаміка зокрема. Звернімося до встановлення критеріїв подібності в механіці рідини. В гідродинаміці розглядають шість достатньо загальних сил, використовуючи які можна утворити 15 безрозмірних відношень з двох сил (див. таблицю). Вирази для сил через системи та безрозмірні співвідношення наведено в таблиці, де L— характерна довжина, ρ — густина, v — швидкість, μ— в`язкість, E — модуль стиску, S — коефіцієнт поверхневого натягу, g — локальне гравітаційне прискорення, p — тиск.

	$\left[F_v\right]=\mu vL$ сила в'язкості	$\left[F_p\right]=\Delta pL$ сила тиску	$\left[F_c\right]=EL^2$ сила пружності	$\left[F_s\right]=SL$ сила поверхневого натягу	$\left[F_G\right]=\rho gL^3$
$\left[F_i\right]=\rho v^2L^2$ сила інерції	$\frac{\left[F_i\right]}{\left[F_v\right]}=\frac{\rho vL}{\mu}$ число Рейнольдса	$\frac{\left[F_p\right]}{\left[F_i\right]}=\frac{\Delta p}{\rho v^2}$ число Ейлера	$\frac{\left[F_i\right]}{\left[F_c\right]}=\frac{\rho v^2}{E}$ число Коші	$\frac{\left[F_i\right]}{\left[F_s\right]}=\frac{\rho v^2L}{S}$ число Вебера	$\frac{\left[F_i\right]}{\left[F_G\right]}=\frac{v^2}{gL}$ число Фруда
$\left[F_G\right]$	$\frac{\left[F_i\right]}{\left[F_v\right]}=\frac{\rho gL^2}{\mu v}$	$\frac{\left[F_i\right]}{\left[F_v\right]}=\frac{\rho gL^2}{\mu v}$	$\frac{\left[F_G\right]}{\left[F_c\right]}=\frac{\rho gL}{E}$	$\frac{\left[F_G\right]}{\left[F_s\right]}=\frac{\rho gL^2}{S}$	
$\left[F_s\right]$	$\frac{\left[F_s\right]}{\left[F_v\right]}=\frac{S}{\mu v}$	$\frac{\left[F_s\right]}{\left[F_p\right]}=\frac{S}{\Delta pL}$	$\frac{\left[F_s\right]}{\left[F_c\right]}=\frac{S}{EL}$		
$\left[F_c\right]$	$\frac{\left[F_c\right]}{\left[F_v\right]}=\frac{EL}{\mu v}$	$\frac{\left[F_c\right]}{\left[F_p\right]}=\frac{E}{\Delta p}$			
$\left[F_p\right]$	$\frac{\left[F_p\right]}{\left[F_v\right]}=\frac{\Delta pL}{\mu v}$				

Іноді замість числа Коші розглядають число Маха $M=\sqrt{F_i/F_c}$, яке являє собою відношення швидкості рідини (газу) дошвидкостізвукувданійточці.

Взалежності від реологічної моделі рідини чи газу деякі критерії відіграють першочергове значення, а інші вироджуються (є набагато більшими або набагато меншими за одиницю). Так в задачі про стаціонарний поступальний рух тіла в нестисливій в`язкій рідині основним критерієм є число Рейнольдса *Re* (іноді число Рейнольдса позначають як *R*). При моделюванні відповідного явища результати дослідів на моделі можна переносити на натуру, якщо має місце геометрична та кінематична подібності, а також виконується критерій

$$R_e = R = \frac{\rho v L}{\mu} = idem. \qquad (3.18)$$

Якщо модель менша натури, то для збереження значення числа Рейнольдса необхідно або збільшувати швидкість обтікання тіла рідиною, що часто практично зробити важко, або значно змінювати густину чи в`язкість рідини. На практиці ця обставина створює значні проблеми при вивченні опору. Справа в тому, що в`язкість повітря є малою і підібрати газ з на багато меншою в`язкістю практично неможливо. Тому для проведення необхідних дослідів доводиться будувати або аеродинамічні труби, які здатні вмістити модель в натуральну величину, або герметичні труби, в яких циркулює з великою швидкістю стиснуте повітря, тобто повітря з більшою густиною. Якщо в процесі крім сил в`язкості та інерції значну роль грає сила гравітації, то крім числа Рейнольдса потрібно забезпечити постійність числа Фруда. Для досягнення цієї мети використовують центрифуги, за допомогою яких гравітаційне поле імітується відцентровими силами.

З`ясуємо фізичний зміст критерію Рейнольдса. З означення випливає, що критерій Рейнольдса характеризує співвідношення між силами інерції та внутрішніми силами опору. Чим більше число Рейнольдса, тим більше вплив інерції і менше в`язкості. Для правильного розуміння суті цього питання необхідно усвідомлювати, що рухома рідина увесь час знаходиться під дією збурень, які проникають в потік зовні та заважають спокійній формі течії. Однією з причин такого роду збурень може бути поверхня, яка обмежує рідину.

Сили внутрішнього тертя згладжують збурення, приводячи систему в найбільшу відповідність з руслом потоку. Діаметрально протилежну роль відіграють сили інерції. Неважко переконатися, що будь-які зміни упорядкованої форми течії стають причиною прояву інертності, яка в свою чергу дестабілізуючи діє на потік. Таким чином, збурення в потоці рідини підпадають під вплив двох взаємно протилежних за своєю напрямленністю впливів. Якщо число *Re* мале, то переважають сили тертя і збурення, не отримавши розвитку, локалізуються і не пливають на увесь потік. Навпаки, якщо *Re*>>1, то переважають інерції і як завгодно мале збурення може призвести до зміни характеру руху всього потоку. Встановлюється, так званий, турбулентний потік на відміну спокійного — ламінарного.

Важливим є те, що для всіх значень *Re*, менших за деяке критичне значення *Re**, потік залишається ламінарним і стійким по відношенню до зовнішніх збурень. Як тільки *Re* стає більшим від *Re**, найменше збурення призводить до того, що потік стає турбулентним. Турбулентний потік тісно пов`язаний з явищем хаосу і є, власне, наочним його прикладом. В такому потоці передбачити рух частинок рідини на певний достатньо великий проміжок часу практично неможливо на відміну від випадку ламінарного руху. Можливість визначення *Re** на основі чисто теоретичних міркувань викликає великі сумніви, оскільки процес зародження турбулентного потоку тісно пов`язаний з філософським питанням виникнення хаосу. На практиці *Re** визначити досить просто, наприклад, у випадку руху рідини по прямій круглій трубі$Re^* = 2300$.

Таким чином, дотримання критерію *Re* є дуже важливим при моделюванні, бо навіть порівняно незначне його відхилення призводить до зміни якісної та кількісної картини явища. Розглянемо декілька прикладів застосування методу сил.

Знайдемо на основі методу сил критерії подібності в задачі про коливання маси m на пружині жорсткості с у в`язкому середовищі з коефіцієнтом в`язкості

η. За умовою задачі значення мають лише три сили: $F_i = m\ddot{x}$ — сила інерції, $F_c = cx$ — сила пружності та $F_v = \eta\dot{x}$ — сила в`язкого тертя. З цих сил можемо утворити два степеневих комплекси:

$$\pi_1 = \frac{[F_i]}{[F_v]} = \frac{mv^2 / l}{\eta v} = \frac{mv}{\eta l} \tag{3.19}$$

та

$$\pi_2 = \frac{[F_i]}{[F_c]} = \frac{mv^2 / l}{cl} = \frac{mv^2}{cl^2} \tag{3.20}$$

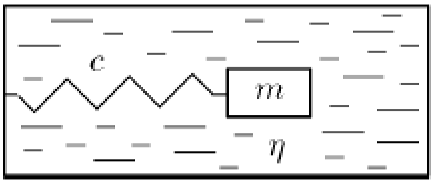

Рис. 10.

За самою побудовою зрозуміло, що (3.19) та (3.20) є аналогами чисел Рейнольдса та Коші. Процеси будуть подібними, якщо відповідні системи є геометрично та кінематично подібними та виконуються критерії (3.19) та (3.20).

Розглянемо задачу про обтікання потоком в`язкої нестисливої рідини з динамічним коефіцієнтом в`язкості μ, густиною ρ та постійною на нескінченності швидкістю *v* циліндра діаметром *l*. Знайдемо силу опору циліндра *W*, вважаючи, що рух стаціонарний і можна знехтувати впливом об`ємних сил. Оскільки сила опору складається із сили тертя між рідиною та поверхнею тіла та сили тиску потоку, то крім числа Рейнольдса в даному явищі свою роль буде грати й число Ейлера. Проте, якщо для числа Рейнольдса визначені характерні значення всіх величин, що входять до його складу:

$$R_e = \frac{\rho v l}{\mu}, \tag{3.21}$$

то у випадку числа Ейлера відсутнє характерне значення тиску. Отже, критерій на основі числа Ейлера не може бути побудований, а може бути введений лише безрозмірний тиск. Тому сила опору є функцією лише критерію Re та параметричних критеріїв (фактично число Ейлера саме буде функцією числа Re):

$$C_W = C_W\left(Re, P_1, P_2, \ldots\right). \tag{3.22}$$

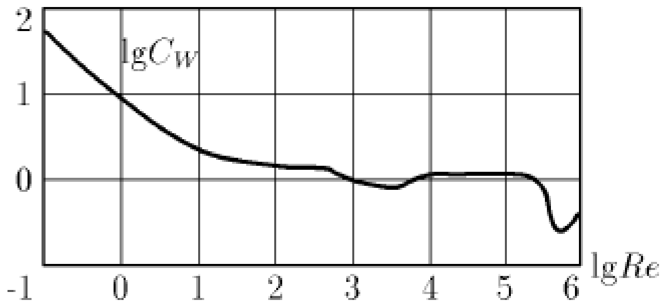

Рис. 11.

Експериментальні дані повністю підтверджують цей висновок:

$$W = \frac{1}{2}\rho v^2 l^2 C_W, \tag{3.23}$$

де C_W— коефіцієнт опору, який є функцією лише числа Re (див. рис. 11).

Розглянемо стаціонарний прямолінійни поступальний рух корабля по поверхні води, яка заповнює весь нижній півпростір і знаходиться в стані спокою в значно віддалених від корабля точках. При дослідженні руху корабля будемо вважати такими, що відіграють першочергову роль, силу інерції, силу ваги та силу в`язкості води. Властивості стисливості, капілярності та інші не мають практичного значення. Отже, для того, щоб правильно знайти силу опору води, яка виникає при русі судна, на основі експериментів на моделі необхідно забезпечити незмінність чисел Рейнольдса та Фруда

$$Re = R = \frac{\rho v L}{\mu} = idem, \qquad Fr = F = \frac{v^2}{gL} = idem \tag{3.24}$$

Неважко переконатися в тому, що для моделі та натури не може бути використана одна й та ж рідина. Дійсно, з незмінності числа Фруда випливає, що при зменшенні лінійних розмірів корабля швидкість повинна зменшуватись, а з незмінності числа Рейнольдса випливає, що при зменшенні лінійних розмірів корабля швидкість повинна збільшуватись. Тому при моделюванні цього явища зі зміною масштабу довжин не виконується повна подібність, що призводить до неспівпадіння коефіцієнтів опору для моделі та натури.

Таким чином, для коефіцієнтів опору можемо записати

$$C_W = C_W\left(Re, Fr, P_1, P_2, \ldots\right). \tag{3.25}$$

Цікаво відмітити, що з усіх параметричних критеріїв P_1, P_2, практичне значення має лише один, так званий, коефіцієнт гостроти:

$$\psi = \frac{L}{\sqrt[3]{D}}, \tag{3.26}$$

де L — довжина корабля, D — об`ємна водотоннажність. Коефіцієнт гостроти можна розглядати, як довжину корпуса, який має об`єм один куб та геометрично подібний до корпуса корабля.

Лекція 13.

Критерії подібності в механіці деформівного твердого тіла

Переходячи до розгляду критеріїв подібності в механіці твердого деформівного тіла, нагадаємо, що в загальному випадку напружено-деформівний стан твердого тіла може бути описаний на основі рівнянь рівноваги

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}+F_j=0,\quad j=1,2,3, \tag{3.27}$$

геометричних співвідношень між зміщеннями та деформаціями, які за умови малих деформацій можуть бути записані у вигляді

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\quad i,j=1,2,3 \tag{3.28}$$

та реологічних співвідношень між напруженнями та деформаціями

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}\left(\sigma_{kl},t,c_1,c_2,\ldots\right),\quad i,j,k,l=1,2,3. \tag{3.29}$$

Тут t — час, x_i — просторові декартові координати, u_{i} — зміщення точок тіла, σ_{ij} — компоненти тензора напружень, F_j — об`ємні сили, $\varepsilon_{\mathrm{ij}}$ — компоненти тензора деформацій, $c_i$ — фізичні константи матеріалу. За відсутності об`ємних сил рівняння (3.27) та (3.28) можуть бути записані через однорідні оператори, а тому не можуть бути використані для отримання критеріїв подібності. Отже, основою для знаходження критеріїв є реологічні співвідношення (3.29), що дозволяє говорити про подібність матеріалів. Під подібними матеріалами будемо розуміти матеріали, графіки реологічних співвідношень яких (9.3) є геометрично афінно подібними.

Звичайно, за наявності об`ємних сил критерії подібності матеріалів мають бути доповненими критеріями, що характеризують об`ємні сили. Крім того, іноді використовують розширену афінну подібність, коли для лінійних розмірів та зміщень вводяться різні масштабні коефіцієнти. Тоді геометричні співвідношення (3.27) перестають бути однорідними і на їх основі має бути визначено критерій подібності.

Перейдемо до розгляду умов подібності конкретних типів матеріалів.

Лінійно пружне тіло. Найпростіший критерій подібності може бути сформулюваний для лінійно пружних однорідних ізотропних матеріалів. Як відомо, в цьому випадку реологічні співвідношення утримують дві фізичні константи і можуть бути записані у вигляді

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk}\right), \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{3.30}$$

де E — модуль Юнга, ν — коефіцієнт Пуассона, σ_{ij} — символ Кронекера. Проте тільки одна з них, а саме коефіцієнт Пуассона, відіграє роль критерію подібності. Другу ж константу (модуль Юнга) слід розглядати як характерне значення напружень, а тому вона не впливає на подібність матеріалів. Дійсно, якщо підставити (3.28) та (3.30) в (3.27), то отримаємо рівняння Нав`є

$$\frac{1}{1-2\nu} grad\ div\vec{u} + \Delta\vec{u} + \frac{2+2\nu}{E}\vec{F} = 0. \tag{3.31}$$

Бачимо, що за відсутності об`ємних сил для збереження вигляду (3.31) необхідно і достатньо залишити незмінним значення коефіцієнта Пуассона. Таким чином, два лінійно пружних однорідних ізотропних матеріали є подібними, якщо вони мають однакові коефіцієнти Пуассона. Проте не завжди умова коефіцієнта Пуассона є необхідною при розгляді задач лінійної теорії пружності. Наприклад, у випадку одновимірного або в деяких випадках двовимірного напружено-деформівного стану, про які мова йде далі, рівняння (3.31) значно спрощуються і зміна коефіцієнта Пуассона не впливає на їх інваріантність. З іншого боку в загальному випадку за наявності масових сил до критерію у вигляді коефіцієнта Пуассона мають бути додані інші критерії. Так, якщо масові сили — це сили власної ваги, то з інваріантності рівнянь (3.31) випливає, що має виконуватися критерій

$$\frac{[F_G]}{[F_c]}=\frac{\rho g l}{E}=idem, \qquad (3.32)$$

який встановлює співвідношення між силами гравітації та пружності. У випадку динаміки об`ємні сили являють собою сили інерції. Відповідний степеневий критерій може бути записаний у вигляді числа Коші

$$\frac{[F_i]}{[F_c]}=\frac{\rho v^2}{E}=idem. \qquad (3.33)$$

Аналогічним чином можна отримати критерій для сил іншої природи. Окремо слід зупинитися на двовимірних задачах теорії пружності, точніше на задачах плоскої теорії пружності (до двовимірних задач теорії пружності відносяться також осесиметричні задачі). Розрізняють плоский деформівний та плоский напружений стани. В першому випадку тіло має бути достатньо видовженим циліндром (не обов`язково круговим), а навантаження має бути ортогональним до його твірних і не змінюватися від одного поперечного перерізу до іншого. За таких умов, спрямовуючи вісь x_3 вздовж твірної, можемо покласти $\partial/\partial x_3=0$ та $\varepsilon_{33}\equiv 0$. При цьому третє рівняння в (3.27) виконується тотожно, а інші два разом з (3.30) зберігають свій вигляд. У випадку плоского напруженого стану, навпаки, тіло в одному з напрямків має бути тонким. Проте зовнішнє навантаження як і раніше має залишатися ортогональним до цього напрямку. За таких припущень для середніх по товщині значень компонент тензора напружень досить точно маємо $\tilde{\sigma}_{33}=\tilde{\sigma}_{13}=\tilde{\sigma}_{23}=0$, де "~" означає, що відповідна характеристика усереднена по товщині. Оскільки при цьому знову третє рівняння в (3.27) виконується тотожно, можемо виключити $\tilde{\sigma}_{33}$ з закону Гука

$$\sigma_{11}=\frac{E}{1-v^2}\left((1-v)\varepsilon_{11}+v\varepsilon_{22}\right), \qquad (3.34)$$

Співвідношення (3.33) у випадку плоскої деформації та співвідношення (3.34) відрізняються лише виразами для коефіцієнтів, а тому приводять до еквівалентних з математичної точки зору результатів, що пояснює об`єднання плоскої деформації та плоского напруженого стану в один розділ плоскої теорії пружності.

Для моделювання в рамках плоскої теорії пружності незмінність значення коефіцієнту Пуассона не завжди є обов`язковою. Сказане відноситься до випадку першої граничної задачі, тобто коли на поверхні тіла задані зусилля. При цьому мають також бути відсутніми об`ємні сили, а тіло — однозв`язним. Дане твердження носить назву теореми Леві і є наслідком безумовної гомогенності системи (3.30) за відсутності об`ємних сил. Дійсно, за зроблених припущень немає необхідності звертатися до рівняння (3.35). Раціональніше доповнити систему (3.30) диференціальними однорідними співвідношеннями між компонентами тензора деформацій, які випливають з (3.31) і називаються умовами сумісності деформацій. В двовимірному випадку таке співвідношення одне. На основі закону Гук (3.33) чи (3.34) воно може бути представлене у вигляді

$$\Delta\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)=0,,$$

тобто теж як безумовно гомогенне.

В наведених міркуваннях суттєвим є припущення про однозв`язність тіла. Під *однозв`язним* плоским тілом будемо розуміти тіло, яке поділяється на дві частини кожною кривою, що проходить через двіточки його границі. У випадку двозв`язного тіла в ньому можливе існування ненульових внутрішніх напружень за відсутності зовнішнього навантаження. Оскільки при цьому вказані напруження є наслідком кінематичних умов, тобто умов для компонент вектора зміщень, то їх значення будуть залежати від коефіцієнту Пуассона. Прикладом такого напруженого стану може слугувати кільце, якому вирізано частину вздовж радіальних променів, акінці знову з`єднано (див. рис. 12). Проте Мітчелл показав, що і у випадку багатов`язного тіла напружений стан не залежить від коефіцієнту Пуассона, якщо головний вектор рівнодійної зусиль, взятих вздовж кожного замкненого контуру, розташованого в тілі, тотожно рівний нулеві.

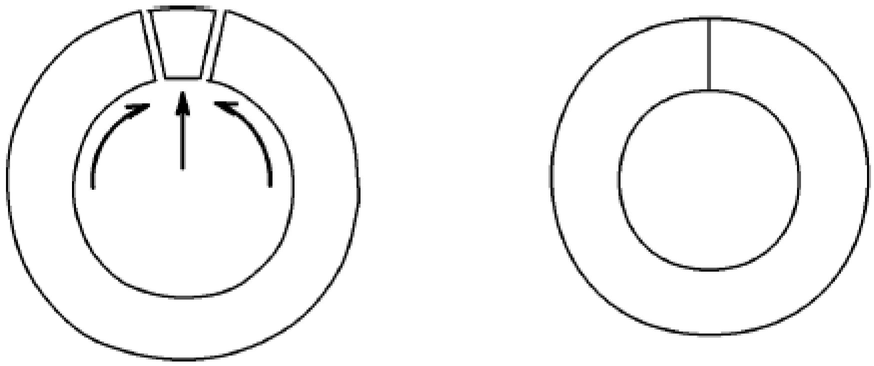

Рис. 12.

Ідеально пружно-пластичне тіло. В такому тілі до досягнення напруженнями значення σ_{pl} деформації підлягають закону Гука і є зворотними. Як тільки напруження досягнуть значення σ_{pl}, яке вони не можуть перевищити, виникають незворотні пластичні деформації. Схематично таке тіло можна уявляти увигляді послідовно з\`єднаного пружного елементу та пластичного елементу, який чине опір зовнішньому навантаженню за допомогою сил сухого тертя, що діють між його складовими (див. рис. 13). Отже, для випадку одноосного стиску-розтягу реологічне рівняння (3.32) може бути записаним у вигляді

$$\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{E}, & \sigma < \sigma_{pl}, \\ \dfrac{\sigma_{pl}}{E} + \varepsilon_{pl}, & \sigma = \sigma_{pl}. \end{cases} \tag{3.35}$$

Після зняття зовнішнього навантаження в такому тілі залишаються деформації ε_{pl}.

Очевидно, що для подібних матеріалів *E* вже не можна вважати довільною константою. Для того, щоб залежність (3.35) залишилася незмінною між *E* та σ_{pl} має бути фіксоване відношення, тобто

$$\frac{\sigma_{pl}}{E} = idem. \tag{3.36}$$

Незважаючи на те, що (3.36) нагадує параметричний критерій, його слід розглядати як критерій подібності двох ідеально пружно-пластичних середовищ. Таким чином, для подібності двох ідеально пружно-пластичних тіл крім тотожності їх коефіцієнтів Пуассона необхідне виконання критерію (3.36).

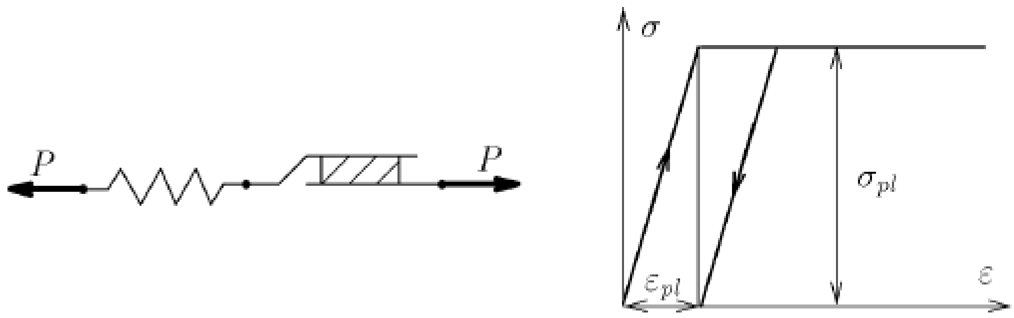

Рис. 13

**В`язко-пластичне тіло Бінгама** складається з трьох елементів: паралельно з`єднаних пластичного та в`язкого елементів та послідовно з ними пружного елементу (див. рис. 14). Залежність деформацій від напружень для такого тіла має вигляд

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \begin{cases} 0, & \sigma < \sigma_{pl}, \\ \dfrac{\sigma - \sigma_{pl}}{E}, & \sigma > \sigma_{pl}. \end{cases} \tag{3.37}$$

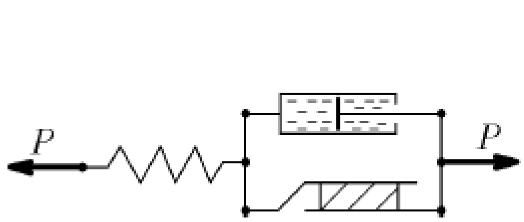

Рис. 14

Тобто у випадку простої подібності повинен знову виконуватися критерій (3.36). Критерій (3.36) — достатньо жорсткий критерій, адже не завжди вдається підібрати матеріали з однаковими співвідношенням між E та σ_{pl}. У таких випадках доцільно звернутися до розширеної афінної подібності

$$\overline{\sigma} = k_\sigma \sigma, \quad \overline{\sigma}_{pl} = k_\sigma \sigma_{pl}, \tag{3.38}$$

$$\overline{E} = k_E E, \quad \overline{\varepsilon} = k_\varepsilon \varepsilon, \quad \overline{t} = k_t t.$$

Тоді критерій (3.36) може бути замінений обумовлюючим рівнянням

$$\frac{k_\varepsilon}{k_t} = \frac{k_\sigma}{k_E}, \tag{3.39}$$

задовольнити яке значно простіше, наприклад, вибравши вдало масштаб по часу.

Пружно-в\`язке тіло Фойта та релаксуюче тіло Максвела. Для цих двох типів суцільних середовищ, двоелементні схеми яких наведено зліва та справа на малюнку 15, рівняння стану можуть бути записані як

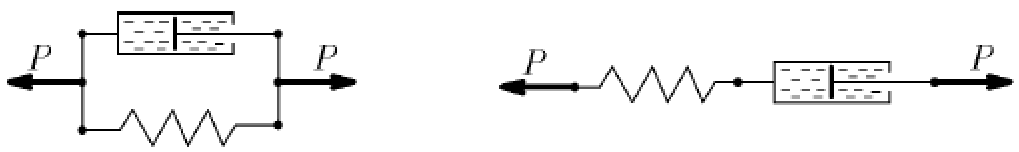

Рис. 15

$$\sigma = E\varepsilon + \mu \frac{d\varepsilon}{dt} \tag{3.40}$$

та

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\mu} \tag{3.41}$$

відповідно. Незважаючи на різний характер поведінки тіл вони мають спільні умови подібності. Так у випадку простої подібності обумовлююче рівняння має вигляд

$$k_\mu = k_\sigma k_t \tag{3.42}$$

в той час, як у випадку розширеної подібності (3.38) обумовлююче рівняння (93.39) має бути доповнене співвідношенням

$$k_\sigma = k_E k_\varepsilon. \tag{3.43}$$

Для кращого засвоєння правил побудови критеріїв подібності в механіці твердого тіла розглянемо декілька прикладів.

Розглянемо пружний півпростір, до поверхні якого притиснутий силою P абсолютно жорсткий, круглий в плані гладкий штамп радіуса a. Необхідно знайти величину δ занурення штампа в пружний півпростір. Для знаходження відповіді на це питання звернімося до фізичного моделювання. Нехай модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона півпростору є E та ν Тоді для моделювання підберемо півпростір з матеріалу, у якого коефіцієнт Пуассона рівний теж ν. Інші параметри моделі та натури нехай будуть пов`язані співвідношеннями

$$\overline{a} = k_l a, \quad \overline{\delta} = k_l \delta, \quad \overline{P} = k_P P, \quad \overline{E} = k_E E. \tag{3.44}$$

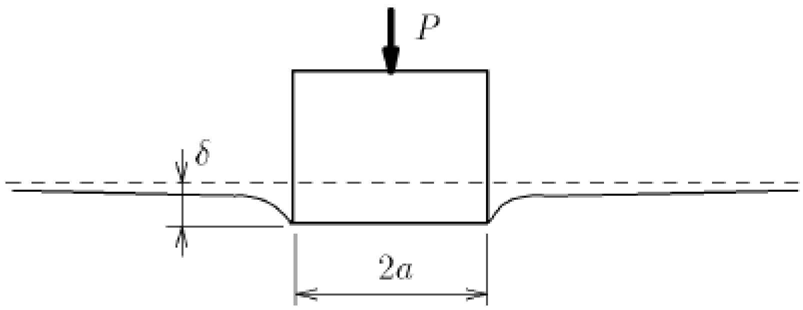

Рис.16.

Між масштабними коефіцієнтами, що входять до (3.44) має існувати співвідношення. Дійсно, контактний тиск під штампом в силу лінійності закону Гука буде пропорційним величині притискаючої сили. З іншого боку тиск є обернено пропорційним площі штампу, тобто

$$k_P = k_E k_l^2. \tag{3.45}$$

Таким чином, для знаходження величини проникнення натурного штампу модельний штамп має бути притиснутий силою

$$\overline{P} = k_K k_l^2 P = \frac{\overline{E}\overline{a}^2}{Ea^2} P. \tag{3.46}$$

Тоді після виміру величини проникнення модельного штампу $\overline{\delta}$, величина проникнення натурного штампу знаходиться за формулою

$$\delta = k_l^{-1}\overline{\delta} = \frac{a}{\overline{a}}\overline{\delta}. \tag{3.47}$$

Враховуючи те, що напружено-деформівний стан півпростору описується лінійними співвідношеннями закону Гука, силу притискання в модельному процесі $\overline{P}$ можна вибрати довільною. Тоді вираз для перерахунку величини проникнення буде мати вигляд

$$\delta = k_l^{-1}\overline{\delta} = \frac{k_E k_l}{k_r}\overline{\delta} = \frac{P\overline{a}\overline{E}}{\overline{P}aE}\overline{\delta}, \tag{3.48}$$

що повністю підтверджується аналітичним розв`язком задачі.

$$\delta = \frac{P\left(1 - v^2\right)}{2aE}. \tag{3.49}$$

Таким чином, крім вимоги збереження значення коефіцієнта Пуассона не існує жодних обмежень, які мають бути накладені на модель в цій задачі.

Розглянемо дві пружні кулі, притиснуті одна до одної двома центральними (такими, лінії яких проходять через центри куль) протилежно направленими силами P. Нехай радіуси куль є R_1 та R_2 ,а пружні константи відповідно E_1, v_1 та E_2, v_2. Потрібно визначити радіус площадки контакту а та величину взаємного зближення куль δ.

Розв`яжемо задачу н основі методу фізичного моделювання. Для цього підберемо дві пружні кулі з коефіцієнтами Пуассона v_1 та v_2. Крім того, радіуси R_1, R_2 та модулі Юнга E_1, E_2 цих куль мають задовольняти співвідношення

$$\frac{\overline{R}_1}{\overline{R}_2} = \frac{R_1}{R_2} = idem, \quad \frac{\overline{E}_1}{\overline{E}_2} = \frac{E_1}{E_2} = idem, \tag{3.50}$$

які фактично є параметричними критеріями. Критерії (4.50) разом з вимогою збереження значень коефіцієнтів Пуассона складають необхідні умови подібності. У цьому неважко переконатися, виходячи з співвідношень контактної теорії Герца

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}\frac{P\left(k_1 + k_2\right)R_1R_2}{R_1 + R_2}}, \qquad (3.51)$$

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16}\frac{P^2\left(k_1 + k_2\right)^2(R_1 + R_2)}{R_1R_2}}, \qquad (3.52)$$

де

$$k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1}, \quad k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2}. \qquad (3.53)$$

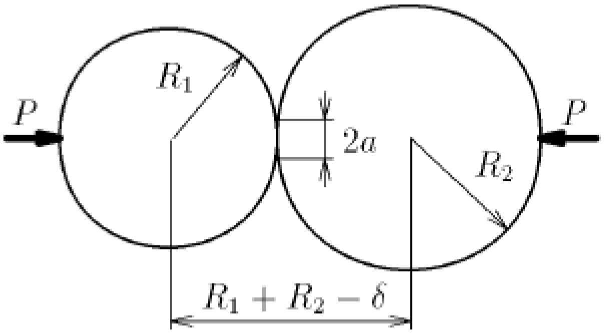

Рис. 17

Тоді за аналогією із попереднім прикладом радіус площадки контакту та величина взаємного зближення центрів куль в натурному процесі можуть бути визначені на основі формул

$$a = \overline{a}\,\frac{R_1}{R_1}\sqrt[3]{\frac{P\overline{E}_1}{\overline{P}E_1}}, \quad \delta = \overline{\delta}\,\frac{R_1}{\overline{R}_1}\sqrt[3]{\left(\frac{P\overline{E}_1}{\overline{P}E_1}\right)^2}, \qquad (3.54)$$

де $\overline{P}$ — сила притискання в модельному процесі, $\overline{a}$ — радіус площадки контакту в моделі, $\overline{\delta}$ — зближення центрів куль в моделі.

Зауважимо, що механічні напруження всередині куль можуть бути перераховані за формулами

$$\sigma_{ij} = \frac{P\overline{E}_1\overline{R}_1^2}{\overline{P}E_I R_1^2}\overline{\sigma}_{ij}, \quad i, j = 1,2,3. \qquad (3.55)$$

Нехай пружний стержень b довжини l, з закріпленим верхнім кінцем, знаходиться під дією власної сили ваги. Вважаючи густину матеріалу стержня рівною ρ, а прискорення вільного падіння рівним g, потрібно знайти видовження стержня.

Виходячи з загальних умов подібності пружних тіл можемо стверджувати, що деякий пружний стержень $\overline{b}$, який знаходиться в аналогічних умовах закріплення, буде подібний до стержня b, якщо коефіцієнти Пуассона матеріалів, з яких зроблено стержні, співпадають, а також виконується критерій

$$\frac{[F_G]}{[F_c]} = \frac{\rho g l}{E} = idem. \tag{3.56}$$

В такому разі видовження стержня $b\Delta l$ може бути знайденим на основі експерименту, проведеному на стержні $\overline{b}$:

$$\Delta l = \frac{l}{\overline{l}}\Delta\overline{l}, \tag{3.57}$$

де $\overline{l}$ та $\Delta\overline{l}$ — довжина та видовження стержня $\overline{b}$. Взагалі будь-яке зміщення та повздовжнє напруження в стержнях можуть бути перераховані за формулами

$$u_i = \frac{l}{\overline{l}}\overline{u}_i, \quad \sigma_{ij} = \frac{E}{\overline{E}}\overline{\sigma}_{ij}, \quad i, j = 1,2,3. \tag{3.58}$$

На підтвердження цієї думки наведемо аналітичний розв`язок задачі. Якщо через вісь x_3 позначити вісь, напрямлену вгору, а за її початок прийняти вільний кінець стержня, то зміщення точок стержня задаються виразами

$$u_1 = -\frac{\rho g}{E}\nu x_1 x_3, \quad u_2 = -\frac{\rho g}{E}\nu x_2 x_3, \tag{3.59}$$

$$u_3 = \frac{\rho g}{2E}\left(x_3^2 + \nu\left(x_1^2 + x_2^2\right) - l^2\right).$$

Знайдемо на основі фізичного моделювання власні частоти повздовжніх коливань призматичного стержня b довжини l з різними умовами закріплення.

Для цього нагадаємо, що повздовжні зміщення такого стержня мають задовольняти рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{3.60}$$

де ρ— густина стержня, E — модуль Юнга. З (3.60) випливає, що для проведення досліду на моделі не має необхідності підбирати матеріал з тим самим коефіцієнтом Пуассона, що і у стержня Ь. Натомість має виконуватись умова

$$\frac{k_\rho k_1^2}{k_E k_t^2} = 1, \tag{3.61}$$

яка забезпечує інваріантність числа Коші

$$\frac{\rho v^2}{E} = idem. \tag{3.62}$$

Якщо на кінцях стержня задані повздовжні зміщення або напруження (умови першого та другого роду), то крім критерію (3.62) не існує інших обмежень, які мають бути накладені на модель. У випадку пружного закріплення гранична умова записується у вигляді

$$SE\frac{\partial u}{\partial x} + cu = 0, \tag{3.63}$$

де c — жорсткість закріплення, S — площа поперечного перерізу. Тому для збереження подібності між моделлю та натурою має виконуватись критерій

$$\frac{cl}{SE} = idem. \tag{3.64}$$

Оскільки $SE\,/l$ є не що інше як жорсткість стержня як пружини, то критерій (3.64) встановлює співвідношення між жорсткостями стержня та закріплення. Він є аналогом критерію Біо в задачах повздовжніх коливань стержнів.

Таким чином, для динамічної подібності двох пружних стержнів, модельного та натурного, необхідно, щоб модель задовольняла критерію Коші та, за наявності умов пружного закріплення, критерію (3.64). Тоді власні частоти коливань натурного стержня визначаються на основі експериментально знайдених власних частот коливань модельного стержня за формулою

$$\nu_i = \bar{\nu}\sqrt{\frac{E\bar{\rho}l^2}{\bar{E}\rho l^2}}. \tag{3.65}$$

Розглянемо ідеально пружно пластичний стержень радіуса α, довжини l, один кінцем якого є жорстко закріплений, а до іншого прикладено скручуючий момент M. Дотичні напруження, які діють в такому стержні, розподіляються за законом

$$\tau = \begin{cases} \dfrac{r\tau_{pl}}{c}, & r < c, \\ \tau_{pl}, & r > c, \end{cases} \tag{3.66}$$

де r — радіальна координата, c — межа, яка розділяє області пружних та пластичних деформацій, τ_{pl} — рівень пластичних напружень.

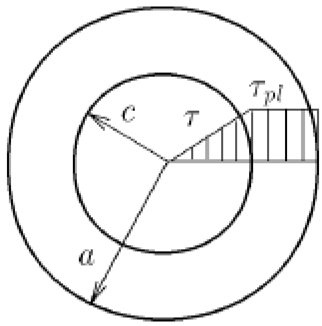

Рис. 18

Якщо проінтегрувати дотичні напруження (3.66) по перерізу стержня, то можна дістати залежність радіуса циліндричної пружної зони від скручуючого моменту

$$M = M_{\max}\left(1 - \frac{c^3}{4a^3}\right), \tag{3.67}$$

де $M_{\max} = \left(2\pi / 3\right)\tau_{pl} a^3$ — максимальний момент, який може утримувати стержень. Кут повороту перерізу, до якого прикладено скручуючий момент, як це випливає з закону Гука для пружної частини стержня, є

$$\varphi = \frac{\tau_{pl}}{G}\frac{l}{c} = \frac{2\left(1+\nu\right)\tau_{pl}}{E}\frac{l}{c}. \tag{3.68}$$

Якщо виходити з загальних положень теорії подібності для ідеально пружно пластичних тіл, то для побудови подібної моделі слід задовольнити два критерії

$$\nu = idem, \quad \frac{\tau_{pl}}{E} = idem. \tag{3.69}$$

Проте, виходячи з (3.68) можна стверджувати, що для збереження подібності досить виконати лише критерій

$$\frac{\tau_{pl}}{G} = idem. \tag{3.70}$$

Більше того, звертаючись до моделювання на основі афінної подібності, можна в якості моделі брати будь-який ідеально пружно пластичний стержень. Дійсно, якщо до моделі прикласти скручуючий момент

$$\bar{M} = \frac{\bar{\tau}_{pl}\bar{a}^3}{\bar{\tau}_{pl}a^3}M, \tag{3.71}$$

то кут повороту вільного перерізу натурного стержня знаходиться на основі співвідношення

$$\varphi = \frac{\tau_{pl}\bar{G}}{\bar{\tau}_{pl}G}\bar{\varphi}. \tag{3.72}$$

Розглянемо умови подібності при моделюванні тонкостінних елементів. Характерною особливістю для даного типу задач є неможливість через малу товщину натурного об`єкту забезпечити виконання умов простої подібності, а тому виникає необхідність звертатися до афінної подібності.

Як відомо, рівняння рівноваги пологих тонких оболонок за умови великих прогинів можуть бути записані у вигляді

$$\frac{D}{h}\Delta^2 w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\rho_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\rho_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{p}{h}, \qquad (3.73)$$

$$\frac{\Delta_2\varphi}{E}=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\rho_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\rho_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

де w – прогин, φ – функція напружень, $\Delta^2=\Delta\Delta$ – бігармонічний оператор, $D=Eh^3/12\left(1-\nu^2\right)$ – циліндрична жорсткість, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, h – товщина оболонки, ρ_x, ρ_y – головні кривини, p – зовнішнє рівномірно розподілене поверхневе навантаження.

Рівняння (3.73) одержані в припущенні про розділ загального напружено-деформівного стану на мембранний, якому відповідають постійні по товщині оболонки деформації та напруження, останні з яких представляються через функцію напружень у вигляді

$$\sigma_{11}^{(0)}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\quad \sigma_{22}^{(0)}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\quad \sigma_{12}^{(0)}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y},$$

та згинний, який характеризується лінійно розподіленими по товщині напруженнями та деформаціями, пов`язаними з прогином співвідношеннями

$$\varepsilon_{11}^{(1)}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \varepsilon_{22}^{(1)}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad \varepsilon_{12}^{(1)}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.$$

У випадку подібності сукупних полів напружень та деформацій в моделі та натурі необхідне виконання наступних обумовлюючих рівнянь:

$$\frac{k_w}{k_h}=1,\quad \frac{k_h}{k_\rho k_l}=1,\quad k_\nu=1,\quad \frac{k_\rho}{k_\sigma k_h^2}=1,$$

$$\frac{k_\sigma}{k_E k_\varepsilon}=1,\quad \frac{k_\sigma k_l^2}{k_E k_h^2}=1. \qquad (3.74)$$

Перетворення (3.74) є афінно подібним перетворенням, оскільки допускає різні значення масштабного коефіцієнту лінійних розмірів оболонок k_l та масштабного коефіцієнту між їх товщинами k_h.

Якщо необхідно моделювати напружено-деформівний стан натурної оболонки "*n*" на основі моделі "*m*" з матеріалу з іншим коефіцієнтом Пуассона, то відповідні умови можуть бути записані у вигляді

$$\frac{k_h}{k_{\bar{\nu}}^{1/2} k_\rho k_l^2} = 1, \quad \frac{k_{\bar{\nu}}^{1/2} k_p}{k_\sigma^{(0)} k_h^2} = 1, \quad \frac{k_{\bar{\nu}}^{1/2} k_w}{k_h} = 1, \tag{3.75}$$

$$\frac{k_{\bar{\nu}} k_\sigma^{(0)} k_l^2}{k_E k_h^2} = 1, \quad \frac{k_h k_w}{k_\varepsilon^{(1)} k_l^2} = 1, \quad k_{\bar{\nu}} = \frac{1 - \nu_n^2}{1 - \nu k_m^2}.$$

Проте при виконанні умов (3.75) сукупні поля напружень та деформацій не будуть подібними. Подібність збережеться лише між мембранними складовими напружень та згинними складовими деформацій.

У випадку малих прогинів рівняння (4.46) можна лінеаризувати, а умови (3.75) можуть бути замінені на менш жорсткі

Рис. 19

$$\frac{k_h}{k_{\bar{\nu}}^{1/2} k_\rho k_l^2} = 1, \quad \frac{k_{\bar{\nu}}^{1/2} k_p}{k_\sigma^{(0)} k_h^2} = 1, \tag{3.76}$$

$$\frac{k_{\bar{\nu}}^{1/2} k_\sigma^{(0)} k_l^2}{k_E k_h k_w} = 1, \quad \frac{k_h k_w}{k_\varepsilon^{(1)} k_l^2} = 1, \quad k_{\bar{\nu}} = \frac{1 - \nu_n^2}{1 - \nu_m^2}.$$

Умови (3.74) – (3.76) широко використовуються на практиці для моделювання тонкостінних елементів. Так в додатку наведені оригінальні роботи присвячені моделюванню напруженого стану в багатошарових гільзованих та рулонованих циліндричних оболонках, поперечні перерізи яких зображено на рисунку 17 зліва та справа відповідно.