

## ТМ-9 частина 2

Для заданої механічної системи визначити швидкість  $v_1$  та прискорення  $a_1$  тіла 1, коли його переміщення дорівнюватиме  $x_1 = 1$  м. Відомо, що маса  $m_1 = 10$  кг,  $m_2 = 20$  кг,  $m_3 = 30$  кг, зовнішній радіус тіла 2  $R_2 = 1$  м, внутрішній радіус тіла 2  $r_2 = 0,5$  м, радіус тіла 3  $R_3 = 0,75$  м, радіуси інерції тіл 2 та 3  $i_2 = i_3 = 0,75$  м, коефіцієнт тертя тіла 1  $f = 0,1$ , крутний момент  $M_2 = 10$  Н·м, сила  $F = 50$  Н, кут  $\alpha = 45^\circ$ . Механічна система знаходиться у стані спокою у момент часу  $t_0 = 0$ , тертям ниток на шківках знехтувати.

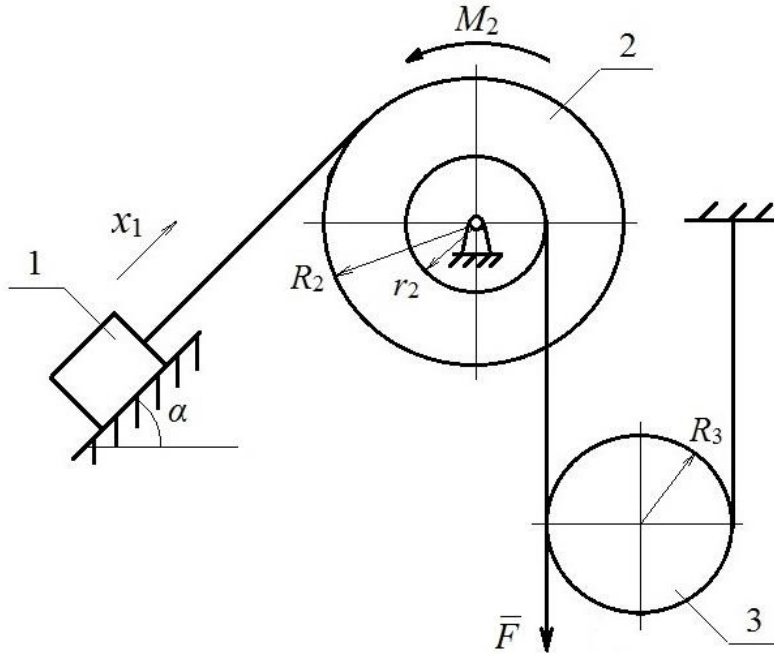


Рис. 1 Вихідна схема

### Розв'язання

Дано:

$$x_1 = 1 \text{ м}$$

$$m_1 = 10 \text{ кг}$$

$$m_2 = 20 \text{ кг}$$

$$m_3 = 30 \text{ кг}$$

$$R_2 = 1 \text{ м}$$

$$r_2 = 0,5 \text{ м}$$

$$R_3 = 0,75 \text{ м}$$

$$i_2 = i_3 = 0,75 \text{ м}$$

$$f = 0,1$$

$$M_2 = 10 \text{ Н·м}$$

$$F = 50 \text{ Н}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Знайти:

$$v_1, a_1$$

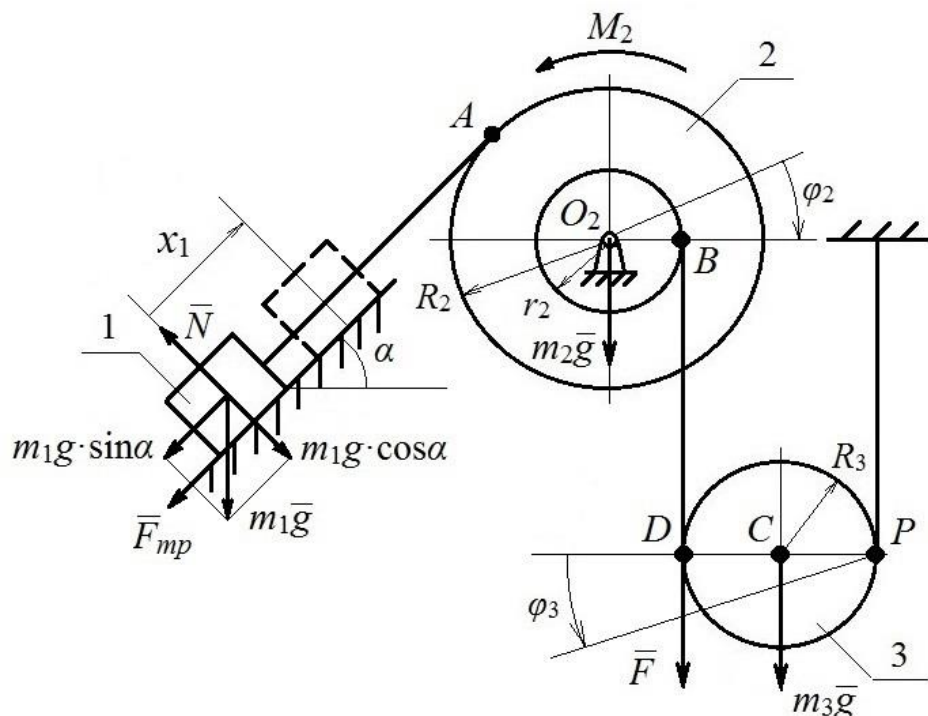


Рис. 2 Розрахункова схема

Скористаємося теоремою про зміну кінетичної енергії системи (1).

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^I, \quad (1)$$

де  $T$  та  $T_0$  – кінетичні енергії системи у поточному та початковому положеннях, відповідно,  $\sum A_i^E$  та  $\sum A_i^I$  – суми робіт зовнішніх та внутрішніх сил, що прикладені до системи, на переміщенні із початкового положення у поточне, відповідно.

Для даної системи, що складається із абсолютно твердих тіл (АТТ), що з'єднані нитками, що не розтягуються, сума робіт внутрішніх сил  $\sum A_i^I = 0$ .

Також з вихідних даних відомо, що у початковому положенні система знаходиться у стані спокою, тобто  $T_0 = 0$ . Тоді формулу (1) можна представити у наступному вигляді

$$T = \sum A_i^E. \quad (2)$$

Для того, щоб визначити кінетичну енергію  $T$  та суму робіт зовнішніх сил  $\sum A_i^E$ , складемо розрахункову схему (рис. 2) та позначимо на ній дану систему у поточному положенні штриховою лінією. На схемі позначимо допоміжні точки  $A, B, C, D, P, O_2$  та напрямки руху тіл 2 та 3. Також позначимо всі зовнішні сили, що діють на систему, тобто сили тяжіння тіл  $m_1g, m_2g, m_3g$ , силу тертя тіла 1 по поверхні  $F_{\text{тр}}$ , нормальну реакцію опори  $N$ .

Складемо кінематичні співвідношення між швидкостями та переміщеннями точок системи, тобто рівняння в'язей. В рівняннях виразимо швидкості та переміщення точок системи через параметри тіла 1 ( $x_1, v_1$ ).

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_2 \cdot R_2, \\ \varphi_2 \cdot r_2 &= \varphi_3 \cdot 2R_3, \end{aligned}$$

звідки отримаємо

$$\varphi_2 = \frac{x_1}{R_2}, \quad (3)$$

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 \cdot r_2}{2R_3} = \frac{x_1 \cdot r_2}{2R_2 \cdot R_3}, \quad (4)$$

$$x_C = \varphi_3 \cdot R_3 = \frac{x_1 \cdot r_2}{2R_2}, \quad (5)$$

$$x_D = \varphi_3 \cdot 2R_3 = \frac{x_1 \cdot r_2}{R_2}. \quad (6)$$

Відповідно

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{v_1}{R_2}, \quad (7)$$

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{v_1 \cdot r_2}{2R_2 \cdot R_3}, \quad (8)$$

$$v_C = \frac{dx_C}{dt} = \frac{v_1 \cdot r_2}{2R_2}. \quad (9)$$

Кінетична енергія системи

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (10)$$

Тоді кінетичні енергії тіл з урахуванням залежностей (7-9)

$$T_1 = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2}, \quad (11)$$

$$T_2 = \frac{I_2 \cdot \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 \cdot i_2^2 \cdot \left(\frac{v_1}{R_2}\right)^2}{2}, \quad (12)$$

$$T_3 = \frac{m_3 \cdot v_C^2}{2} + \frac{I_3 \cdot \omega_3^2}{2} = \frac{m_3 \cdot \left(\frac{v_1 \cdot r_2}{2R_2}\right)^2}{2} + \frac{m_3 \cdot i_3^2 \cdot \left(\frac{v_1 \cdot r_2}{2R_2 \cdot R_3}\right)^2}{2}, \quad (13)$$

де моменти інерції тіл 2 та 3 дорівнюють відповідно

$$I_2 = m_2 \cdot i_2^2 = 20 \cdot 0,75^2 = 11,25 \text{ (кг} \cdot \text{м}^2\text{)},$$

$$I_3 = \frac{m_3 \cdot i_3^2}{2} = \frac{30 \cdot 0,75^2}{2} = 8,438 \text{ (кг} \cdot \text{м}^2\text{)}.$$

Підставимо (11-13) у (10)

$$T = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot i_2^2 \cdot \left(\frac{v_1}{R_2}\right)^2}{2} + \frac{m_3 \cdot \left(\frac{v_1 \cdot r_2}{2R_2}\right)^2}{2} + \frac{\frac{m_3 \cdot i_3^2}{2} \cdot \left(\frac{v_1 \cdot r_2}{2R_2 \cdot R_3}\right)^2}{2}$$

та винесемо  $\frac{v_1^2}{2}$  за скобку

$$T = \frac{v_1^2}{2} \left[ m_1 + m_2 \cdot i_2^2 \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right)^2 + m_3 \cdot \left(\frac{r_2}{2R_2}\right)^2 + \frac{m_3 \cdot i_3^2}{2} \cdot \left(\frac{r_2}{2R_2 \cdot R_3}\right)^2 \right] = \frac{v_1^2}{2} \cdot M_{\text{пр}} \quad (14)$$

де величина у скобці  $M_{\text{пр}} = 24,06$  – приведена маса, кг.

Визначимо роботу всіх зовнішніх сил

$$\sum A_i^E = A(m_1 g) + A(F_{fr}) + A(N) + A(m_2 g) + A(M_2) + A(m_3 g) + A(F). \quad (15)$$

Роботу сили тяжіння тіла 1 визначаємо як добуток модуля сили тяжіння, переміщення точки, до якої вона прикладена (тобто переміщення тіла 1) та косинуса кута між переміщенням тіла 1 та вектором сили тяжіння. За аналогією визначаємо роботи інших сил та моментів з урахуванням залежностей (3-6).

$$\begin{aligned} A(m_1 g) &= m_1 g \cdot x_1 \cdot \cos(m_1 g; x_1) = m_1 g \cdot x_1 \cdot \cos(90^\circ + \alpha) = \\ &= 10 \cdot 9,8 \cdot x_1 \cdot (-0,707) = -69,29 \cdot x_1 \text{ (Дж)}. \end{aligned}$$

Робота сили тертя

$$\begin{aligned} A(F_{\text{тр}}) &= F_{\text{тр}} \cdot x_1 \cdot \cos(F_{\text{тр}}; x_1) = F_{\text{тр}} \cdot x_1 \cdot \cos 180^\circ = \\ &= 6,93 \cdot x_1 \cdot (-1) = -6,93 \cdot x_1 \text{ (Дж)}, \end{aligned}$$

де  $F_{\text{тр}} = N \cdot f = m_1 g \cdot \cos \alpha \cdot f = 10 \cdot 9,8 \cdot 0,707 \cdot 0,1 = 6,93$  (Н),

та з рівняння рівноваги на вісь, перпендикулярну поверхні  $N = m_1 g \cdot \cos \alpha$ .

Робота нормальної реакції опори

$$A(N) = N \cdot x_1 \cdot \cos(N; x_1) = N \cdot x_1 \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Робота сили тяжіння тіла 2 дорівнює 0 через відсутність переміщень точки  $O_2$ .

$$A(m_2 g) = m_2 g \cdot x_{O_2} \cdot \cos(m_2 g; x_{O_2}) = 0.$$

Робота моменту  $M_2$

$$\begin{aligned} A(M_2) &= M_2 \cdot \varphi_2 \cdot \cos(M_2; \varphi_2) = M_2 \cdot \frac{x_1}{R_2} \cdot \cos 180^\circ = \\ &= 10 \cdot \frac{x_1}{1} \cdot (-1) = -10 \cdot x_1 \text{ (Дж)}. \end{aligned}$$

Робота сили тяжіння тіла 3

$$\begin{aligned} A(m_3 g) &= m_3 g \cdot x_C \cdot \cos(m_3 g; x_C) = m_3 g \cdot \frac{x_1 \cdot r_2}{2R_2} \cdot \cos 0^\circ = \\ &= 30 \cdot 9,8 \cdot \frac{x_1 \cdot 0,5}{2 \cdot 1} \cdot 1 = 73,5 \cdot x_1 \text{ (Дж)}. \end{aligned}$$

Робота сили  $F$

$$\begin{aligned}
 A(F) &= F \cdot x_D \cdot \cos(F; x_D) = F \cdot \frac{x_1 \cdot r_2}{R_2} \cdot \cos 0^\circ = \\
 &= 50 \cdot \frac{x_1 \cdot 0,5}{1} \cdot 1 = 25 \cdot x_1 \text{ (Дж)}.
 \end{aligned}$$

Підставимо роботи усіх сил в (15)

$$\begin{aligned}
 \sum A_i^E &= m_1 g \cdot x_1 \cdot \cos(90^\circ + \alpha) + F_{\text{тр}} \cdot x_1 \cdot \cos 180^\circ + \\
 &+ M_2 \cdot \frac{x_1}{R_2} \cdot \cos 180^\circ + m_3 g \cdot \frac{x_1 \cdot r_2}{2R_2} \cdot \cos 0^\circ + F \cdot \frac{x_1 \cdot r_2}{R_2} \cdot \cos 0^\circ,
 \end{aligned}$$

винесемо  $x_1$  за скобку

$$\begin{aligned}
 \sum A_i^E &= x_1 \cdot [m_1 g \cdot \cos(90^\circ + \alpha) + F_{\text{тр}} \cdot \cos 180^\circ + \\
 &+ M_2 \cdot \frac{1}{R_2} \cdot \cos 180^\circ + m_3 g \cdot \frac{r_2}{2R_2} \cdot \cos 0^\circ + F \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \cos 0^\circ] = \\
 &= x_1 \cdot [-69,29 - 6,93 - 10 + 73,5 + 25] = x_1 \cdot F_{\text{пр}}, \tag{16}
 \end{aligned}$$

де  $F_{\text{пр}} = 12,28$  – приведена сила, Н.

Прирівняємо (14) та (16), що фактично є виразом (2)

$$\frac{v_1^2}{2} \cdot M_{\text{пр}} = x_1 \cdot F_{\text{пр}}, \tag{17}$$

звідки отримаємо

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot x_1 \cdot F_{\text{пр}}}{M_{\text{пр}}}},$$

куди підставимо з вихідних даних  $x_1 = 1$  м і отримаємо

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 12,28}{24,06}} = 1,01 \text{ (м/с)}.$$

Диференціюємо (17) за параметром часу

$$\begin{aligned}
 \frac{d\left(\frac{v_1^2}{2} \cdot M_{\text{пр}}\right)}{dt} &= \frac{d(x_1 \cdot F_{\text{пр}})}{dt}, \\
 \frac{1}{2} \cdot 2v_1 \cdot a_1 \cdot M_{\text{пр}} &= v_1 \cdot F_{\text{пр}}, \\
 a_1 = \frac{F_{\text{пр}}}{M_{\text{пр}}} &= \frac{12,28}{24,06} = 0,51 \text{ (м/с}^2\text{)}.
 \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $v_1 = 1,01$  м/с,  $a_1 = 0,51$  м/с<sup>2</sup>.