ТМ-9 частина 1

Визначити закони руху тіл 2 та 3 (рис. 1), а також абсолютну швидкість та прискорення точки M, якщо відомо: закон руху тіла 1 $x_1 = 5t^2$, м; зовнішній радіус тіла 2 $R_2 = 1$ м, внутрішній радіус тіла 2 $r_2 = 0{,}5$ м, радіус тіла 3 $R_3 = 0{,}75$ м, момент часу $t = 1$ с.

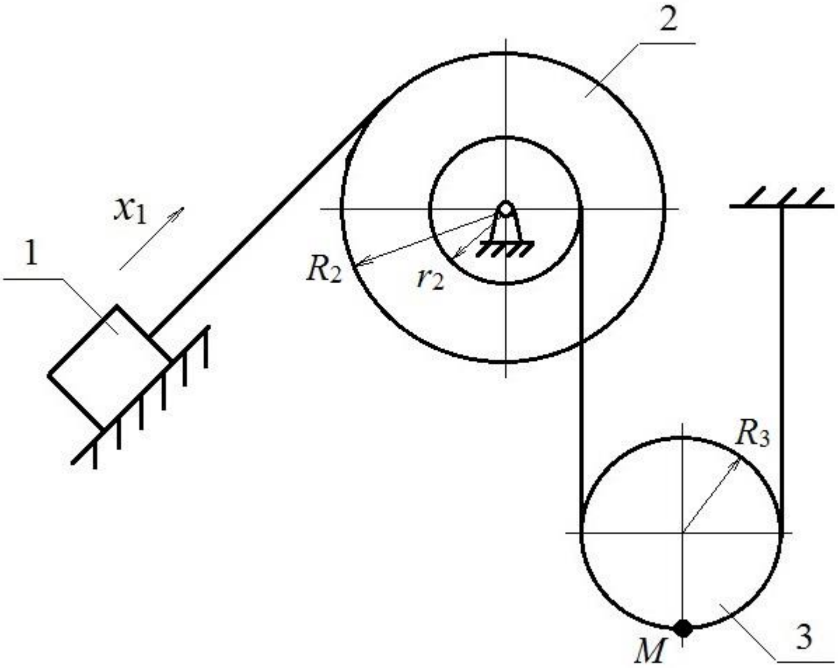

Рис. 1 Вихідна схема

Розв'язання

Дано:
$x_1 = 5t^2$, м
$R_2 = 1$ м
$r_2 = 0{,}5$ м
$R_3 = 0{,}75$ м
$t = 1$ с
Знайти:
φ_2, φ_3, v_M, a_M

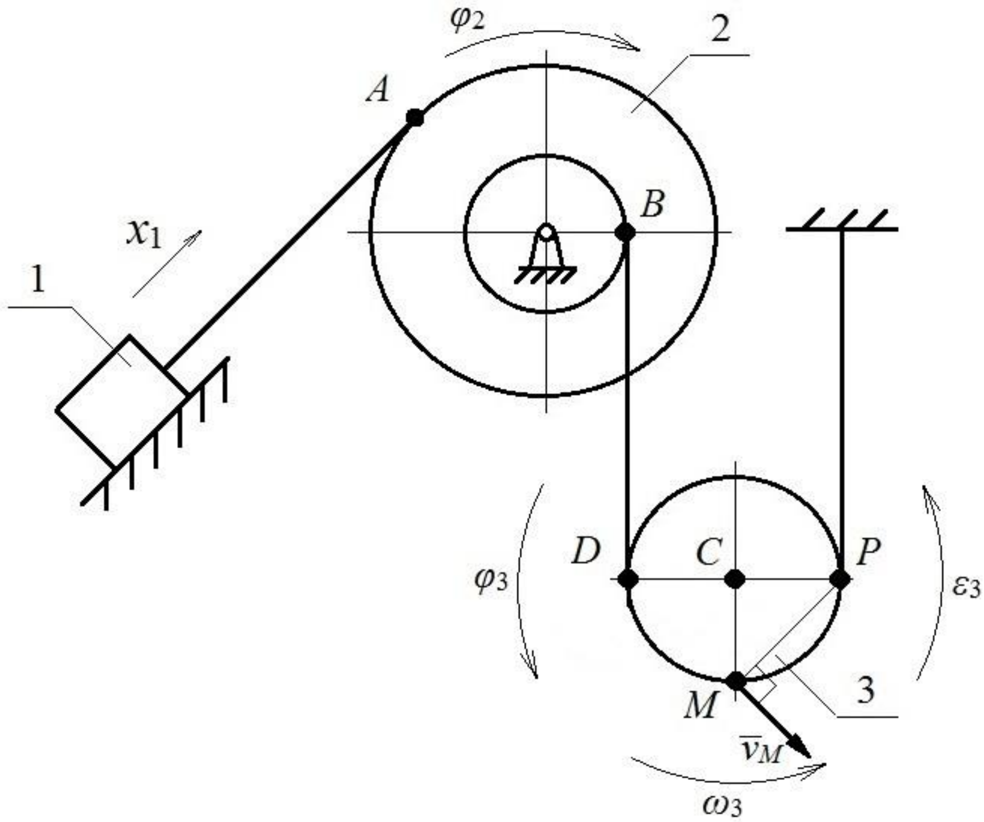

Рис. 2 Розрахункова схема

Складемо розрахункову схему (рис. 2). На ній позначимо – допоміжні точки *A*, *B*, *C*, *D*, *P*, напрямки руху тіл 2 та 3, напрямки кутової швидкості ω_3 та кутового прискорення ε_3 тіла 3, та вектор абсолютної швидкості v_M.

Тіло 1 рухається поступово, тіло 2 має обертальний рух, тіло 3 – плоско-паралельний рух. Тіло 1 та точка *A* пов'язані ідеальною ниткою (такою, що не розтягується). Точки *B* та *D*, *P* та опора – також пов'язані ідеальними нитками.

З вихідних даних маємо напрямок руху тіла 1. Якщо тіло 1 поступово піднімається вздовж похилої поверхні та пов'язане з точкою *A* ідеальною ниткою, то тіло 2 обертається за годинниковою стрілкою (позначено φ_2 на рис. 2). Аналогічно визначаємо напрямок руху тіла 3, яке обертається проти годинникової стрілки (позначено φ_3 на рис. 2).

Якщо нитка ідеальна, то переміщення тіла 1 дорівнює довжині нитки, що намотується на зовнішній радіус тіла 2. Аналогічно, довжина нитки, що розмотується з внутрішнього радіуса тіла 2, дорівнює довжині нитки, що намотується на радіус тіла 3.

Визначимо рівняння кінематичних зв'язків

$$x_1 = \varphi_2 \cdot R_2,$$
$$\varphi_2 \cdot r_2 = \varphi_3 \cdot 2R_3.$$

Звідки закони руху тіл 2 та 3

$$\varphi_2 = \frac{x_1}{R_2} = \frac{5t^2}{1} = 5t^2, \text{рад},$$
$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 \cdot r_2}{2R_3} = \frac{5t^2 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 0{,}75} = 1{,}67t^2, \text{рад}.$$

Визначимо кутову швидкість ω_3 та кутове прискорення ε_3 тіла 3.

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{d(1{,}67t^2)}{dt} = 3{,}34t, \text{рад/с},$$
$$\varepsilon_3 = \frac{d\varepsilon_3}{dt} = \frac{d(3{,}34t)}{dt} = 3{,}34, \text{рад/с}^2.$$

Напрямки ω_3 та ε_3 – проти годинникової стрілки через те, що вони додатні при додатному t.

Тіло 3 рухається плоско-паралельно та підвішене за допомогою ідеальної нитки до опори. Тому центром обертання (миттєвим центром швидкостей) тіла 3 є точка *P*.

Визначимо абсолютну швидкість точки *M*.

$$v_M = \omega_3 \cdot MP = 3{,}34t \cdot \sqrt{2} \cdot R_3 = 3{,}53t, \text{м/с}.$$

У момент часу $t = 1$ с

$$v_M = 3{,}53 \cdot 1 = 3{,}53 \text{ м/с}.$$

Абсолютне прискорення точки тіла, що рухається плоско-паралельно, визначається як векторна сума прискорення полюса $\overline{a_C}$ та нормального $\overline{a_{MC}^n}$ та тангенціального прискорення $\overline{a_{MC}^\tau}$ точки навколо цього полюса. В якості полюса обирається точка, прискорення якої відомо або легко знайти. Призначимо полюсом точку *C* через те, що вона є центром мас тіла 3 та рухається поступово.

$$\overline{a_M} = \overline{a_C} + \overline{a_{MC}^n} + \overline{a_{MC}^\tau}$$

Визначимо прискорення точки *C*

$$x_C = \varphi_3 \cdot CP = 1{,}67t^2 \cdot R_3 = 1{,}25t^2, \text{м},$$

$$v_C = \frac{dx_C}{dt} = \frac{d(1{,}25t^2)}{dt} = 2{,}5t, \text{м/с},$$
$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = \frac{d(2{,}5t)}{dt} = 2{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Визначимо нормальне та тангенціальне прискорення точки M відносно полюса C у момент часу $t = 1$ с

$$a_{MC}^n = \omega_3^2 \cdot MC = (3{,}34t)^2 \cdot R_3 = 8{,}37 \text{ (м/с}^2),$$
$$a_{MC}^\tau = \varepsilon_3 \cdot MC = 3{,}34 \cdot R_3 = 2{,}51 \text{ (м/с}^2).$$

Для визначення абсолютного прискорення точки M спроектуємо вектори визначених прискорень на осі координат x та y (рис. 3). Зазначимо, що нормальне прискорення a_{MC}^n спрямовано від точки M до полюса C, а тангенціальне прискорення a_{MC}^τ – перпендикулярно до нормального прискорення у напрямку кутового прискорення ε_3.

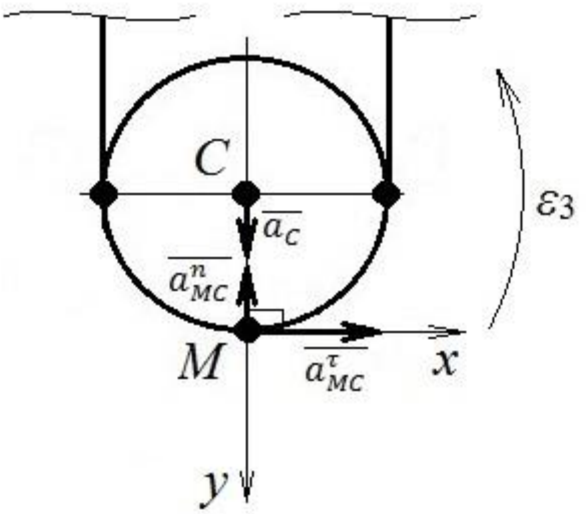

Рис. 3 Розрахункова схема прискорень

Тоді абсолютне прискорення a_M точки M

$$a_M = \sqrt{\left(\sum a_{ix}\right)^2 + \left(\sum a_{iy}\right)^2} = \sqrt{(a_{MC}^\tau)^2 + (a_C - a_{MC}^n)^2} =$$
$$= \sqrt{2{,}51^2 + (2{,}5 - 8{,}37)^2} = 6{,}38 \text{ (м/с}^2).$$

Відповідь: $\varphi_2 = 5t^2$, рад, $\varphi_3 = 1{,}67t^2$, рад, $v_M = 3{,}53$ м/с, $a_M = 6{,}38$ м/с^2.