

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ЧАСТЬ II ДИНАМИКА

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для студентов
машиностроительных, механических, электротехнических,
приборостроительных и строительных специальностей
высших технических учебных заведений*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
МОСКВА — 1966

Рецензенты:

*Кафедра теоретической механики
Московского авиационного института
Профессор И. М. Воронков*

Александр Александрович Яблонский
КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Редактор *З. Г. Овсянникова*
Технический редактор *Л. М. Матюшина*
Художник *В. З. Казакевич*
Корректор *М. И. Козлова*

Т-00388. Сдано в набор 25/XII 1965 г. Подписано к печати 5/III 1966 г.
Формат 60×90¹/₁₆. Объем 25,75 печ. л. Уч.-изд. л. 21,51.
Изд. № ОТ-34/65. Тираж в переплете № 7—10 000 экз., в № 5—
90 000 экз. Цена в переплете № 7—87 коп., в переплете № 5—70 коп.

Тематический план издательства
„Высшая школа“ (вузы и техникумы) на 1966 г.

Позиция № 109,
Издательство «Высшая школа»,
Москва, И-51, Пеглинная ул., д. 29/14.
Заказ № 7.

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров
СССР. Измайловский проспект, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник «Курс теоретической механики» часть II «Динамика», так же как и часть I «Статика и кинематика», составлен в полном соответствии с программой курса теоретической механики для высших технических учебных заведений.

Учебник рассчитан на студентов очной и заочной систем обучения.

Наряду с изложением теоретического материала в учебнике имеется подробное решение задач основных типов и даны вопросы для самоконтроля.

Решение всех примеров выполнено в единицах системы МКС.

При переиздании учебника учтены многие пожелания и замечания читателей и рецензентов, которым автор выражает признательность.

Отзывы и пожелания, направленные на улучшение этого издания, следует посылать в адрес издательства «Высшая школа».

АВТОР

ГЛАВА I
ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ

**§ 1. Предмет динамики. Краткий исторический обзор
развития динамики**

Динамикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в зависимости от действующих на них сил.

Динамика представляет собой наиболее общий раздел механики, имеющий особое значение для решения многих практических задач в различных областях техники.

Основоположителем динамики явился великий ученый Галилей (1564—1642). Он впервые ввел в механику понятие скорости и ускорения движущейся точки при неравномерном прямолинейном движении и установил законы падения тел в пустоте. Галилей сформулировал первый закон динамики — закон инерции, установил, что движение тела, брошенного под углом к горизонту в пустоте, совершается по параболе. Голландский ученый Гюйгенс (1629—1695) ввел понятие момента инерции, создал теорию маятника, изобрел часы. Обобщив понятие ускорения на случай криволинейного движения точки, Гюйгенс установил понятие центробежной силы.

Начатая Галилеем работа по созданию динамики была завершена великим английским ученым Ньютоном (1643—1727), который в своем знаменитом сочинении «Philosophiæ naturalis principia mathematica» (1686)* сформулировал основные законы классической механики и на основе этих законов дал систематическое изложение динамики. Ньютон открыл закон всемирного тяготения.

Особое значение имел установленный Ньютоном закон равенства действия и противодействия, позволивший перейти от динамики материальной точки к динамике механической системы.

Развивая идею Декарта (1596—1650) о сохраняемости количества движения, Ньютон установил, что изменение количества движения механической системы определяется лишь внешними силами.

* Сочинение Ньютона переведено на русский язык А. Н. Крыловым под заглавием «Математические начала натуральной философии», «Известия Морской академии», 1915—1916.

Область применения законов классической механики, созданной Галилеем и Ньютоном, как показали новейшие открытия конца XIX и первой четверти XX вв., ограничена. Эти законы не согласуются с опытом при изучении движения тел, скорость которых одного порядка со скоростью света. Новая релятивистская механика (теория относительности), созданная в начале XX в. немецким физиком Альбертом Эйнштейном (1879—1955), коренным образом изменила представления механики о пространстве, времени, массе и энергии.

Однако результаты, полученные на основе законов классической и релятивистской механики для тел, скорость которых несоразмерно меньше скорости света, практически совпадают.

В свете теории относительности классическая механика Галилея — Ньютона приобрела характер ее частного случая и сохраняет свое значение и в настоящее время, являясь научно-теоретической базой большинства отраслей техники.

На основе законов Галилея—Ньютона в дальнейшем доказывались теоремы и устанавливались принципы механики, составляющие содержание современного курса теоретической механики.

Теорема об изменении кинетической энергии или, как ее ранее называли, теорема живых сил была сформулирована Иваном Бернулли (1667—1748) и Даниилом Бернулли (1700—1782). Теорема об изменении момента количества движения установлена почти одновременно (1746) Эйлером и Даниилом Бернулли. В 1716 г. Я. Германом (1678—1733), академиком Петербургской Академии наук, установлен принцип механики, дающий общий метод, с помощью которого уравнения динамики придают по форме вид уравнений статики, получивший название петербургского принципа (метод кинестатики)

В 1737 г. Эйлер обобщил этот принцип и применил его для изучения колебаний гибких тел.

В 1743 г. Даламбер высказал принцип, получивший название начала Даламбера, послуживший базой построения механики систем, подчиненных связям. Начало Даламбера позволило расширить применение принципа Германа — Эйлера на случай сложных систем, состоящих из значительного числа связанных между собой тел.

Лагранж (1736—1813) связал принцип Германа — Эйлера — Даламбера с общим принципом статики — принципом возможных перемещений и придал ему удобную для практического применения форму.

Впервые принцип возможных перемещений был установлен Стевином (1548—1620).

Галилей дополнил исследования Стевина рассуждением о наклонной плоскости и дал знаменитую формулировку золотого правила механики: *что выигрывается в силе, то теряется в скорости.*

Над строго научным доказательством принципа возможных перемещений работали Иван Бернулли, Фурье, Пуассон, Ампер и Лагранж.

Академик М. В. Остроградский (1801—1862) обобщил принцип возможных перемещений и применил его к решению многих новых задач механики.

Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах были получены Лагранжем и носят его имя.

Уравнения Лагранжа определяют движение механической системы в наиболее общей форме. Эти уравнения Лагранж применил к исследованию малых колебаний системы, имеющих большое практическое значение.

В XIX и XX столетиях большое значение для развития динамики приобретают работы отечественных ученых, к числу которых в первую очередь следует отнести А. М. Ляпунова, Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина, И. В. Мещерского, К. Э. Циолковского, А. Н. Крылова и ряда других.

А. М. Ляпунов (1857—1918) — создатель современной теории устойчивости движения. Ему принадлежит также исследование устойчивости форм равновесия вращающейся жидкости, имеющее огромное значение для научной космогонии.

Н. Е. Жуковский (1847—1921) является основателем одной из важнейших областей механики — аэродинамики. Кроме того, он написал большое число выдающихся работ по гидромеханике, гидравлике и динамике твердого тела. Работа Н. Е. Жуковского «О присоединенных вихрях» послужила теоретической основой для определения подъемной силы крыла самолета.

В декрете Совета Народных Комиссаров РСФСР, подписанном 3 декабря 1920 года, В. И. Ленин назвал Н. Е. Жуковского «отцом русской авиации».

—Академик С. А. Чаплыгин (1869—1942) —ученик Н. Е. Жуковского также сыграл большую роль в развитии русской авиации. Он вывел обобщенные уравнения движения, в которых ограничивающие условия накладываются не только на положение точек, но и на их скорости. Созданная Чаплыгиным теория неустановившегося движения крыла самолета и аэродинамика больших скоростей является фундаментом расчетов самолета.

И. В. Мещерский (1859—1935) —автор известного сборника задач по теоретической механике, в работе «Динамика точки переменной массы» (1897) открыл новую отрасль механики — механику тел переменной массы, одним из разделов которой является теория движения реактивных аппаратов.

Создание основ расчета реактивного движения принадлежит выдающемуся русскому ученому и изобретателю К. Э. Циолковскому (1857—1935), разработавшему конструкцию первой космической ракеты.

Труды И. В. Мещерского и К. Э. Циолковского лежат в основе теории движения современных многоступенчатых ракет, позволивших запустить искусственные спутники Земли, космические корабли-спутники, послать автоматические межпланетные станции к Луне и в сто-

рону Венеры. 12 апреля 1961 г. советские ученые и инженеры осуществили давнишнюю мечту человечества, запустив космический корабль с первым космонавтом Ю. А. Гагариным, открыв этим эру непосредственного проникновения человека в космическое пространство.

Работы академика А. Н. Крылова (1863 — 1945) по теории корабля, теории гироскопов, теории колебаний, уравнениям математической физики, внешней баллистике и теории упругости оказали большое влияние на развитие механики в нашей стране и создали ему мировую славу.

Передовые русские ученые в области механики, положившие в основу своих работ тесную связь теории и практики, внесли большой вклад в сокровищницу мировой науки.

§ 2. Основные законы механики (законы Галилея — Ньютона)

В основе динамики лежат законы, впервые сформулированные Ньютоном и названные им аксиомами, или законами движения (*Axiomata sive leges motus*).

1. Закон инерции

Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие других тел не изменит это состояние.

2. Закон пропорциональности силы и ускорения

Ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление.

3. Закон равенства действия и противодействия

Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

4. Закон независимости действия сил

Несколько одновременно действующих на материальную точку сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме.

Законы классической механики подтверждаются опытами и наблюдениями, а потому являются объективными законами природы.

Первый закон — закон инерции, установленный Галилеем, характеризует стремление тела сохранить неизменной скорость своего движения или, иначе, сохранить приобретенное им ранее механическое движение.

Это свойство тела называется его *инертностью*. Движение материи, его вечность и несотворимость имеет как бы свою обратную сторону, свое другое проявление — инертность, которая, как говорит Энгельс, «есть не что иное как отрицательное выражение неуничтожаемости движения»*.

Второй закон — закон пропорциональности силы P и ускорения w устанавливает, как изменяется скорость движения материальной точки под действием силы (рис. 1).

Этот закон выражается следующим образом:

$$P = mw. \quad (2.1)$$

Соотношение (2.1), устанавливающее связь между силой P , массой m и ускорением w , является важнейшим в классической механике и называется *основным уравнением динамики*.

Такую форму второму закону придал Эйлер в своем трактате «Механика» (1736).

У Ньютона этот закон выражался следующим соотношением:

$$P(t - t_0) = m(v - v_0).$$

Эйлер путем деления обеих частей равенства на $\Delta t = t - t_0$ и перехода к пределу получил:

$$P = m \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v - v_0}{t - t_0} = mw.$$

Масса есть мера инертности материальных тел при их поступательном движении.

Современной физикой установлено, что масса тела увеличивается с возрастанием скорости его движения, т. е. масса и энергия взаимно связаны.

В классической же механике масса движущегося тела принимается равной массе покоящегося тела, т. е. рассматривается как постоянная величина.

Векторному равенству (2.1) соответствует числовое равенство

$$P = mw. \quad (2.2)$$

Из этого равенства масса может быть определена по формуле:

$$m = \frac{P}{w}. \quad (2.3)$$

Применяя уравнение (2.3) к точке (телу) весом G и учитывая, что ускорение свободного падения равно g , имеем:

$$m = \frac{G}{g}, \quad (2.4)$$

* Энгельс. Диалектика природы, 1955, стр. 1.

т. е. *масса материальной точки (тела) численно равна ее весу, деленному на ускорение свободного падения.*

$$G = mg. \quad (2.5)$$

Так как ускорение свободного падения в различных местах земной поверхности различно и зависит от географической широты места и от его высоты над уровнем моря, то в отличие от массы тела его вес не является постоянной величиной.

Системы механических единиц измерения

Для измерения механических величин применяются две системы единиц: физическая и техническая.

В физической системе механических единиц за основные единицы приняты единицы длины, массы и времени, а сила является величиной производной и имеет размерность:

$$[F] = [L^1 M^1 T^{-2}].$$

В технической системе механических единиц за основные единицы приняты единицы длины, силы и времени, а масса является величиной производной и имеет размерность:

$$[m] = [L^{-1} F^1 T^2].$$

В СССР в качестве государственного стандарта принята Международная система единиц измерения СИ (*SI* — от «Le système international d'unités») — в механике МКС, которая, так же как и система СГС, является физической системой единиц.

Система единиц измерения МКГСС является технической системой единиц.

За единицу массы в системе МКС принимается масса, равная одному килограмму (*кг*) платинового эталона, хранящегося в архиве Французской республики, а за единицу силы — *ньютон* (*н*) — сила, сообщающая массе 1 *кг* ускорение 1 *м/сек*².

1 *ньютон* = 10 *дециньютон* (*дн*) = 100 *сантиньютон* (*сн*) = 1000 *миллиньютон* (*мн*).

1 *килоньютон* = 10 *гектоньютон* (*гн*) = 10 *деканьютон* (*дан*) = 1000 *ньютон*.

В системе СГС за единицу массы принимается грамм (*г*), а за единицу силы — *дина* — сила, сообщающая массе 1 *г* ускорение 1 *см/сек*².

В системе МКГСС за единицу силы принимается *килограмм-сила* (*кгс*), сообщающая массе 1 *кг* ускорение 9,80665 *м/сек*².

За единицу массы в этой системе принимается *техническая единица массы* (*т. е. м.*), т. е. масса, которой сила 1 *кгс* сообщает ускорение 1 *м/сек*².

1 *ньютон* = 10⁵ *дин* = 0,102 *кгс*

1 *кгс* = 9,81 *ньютон* = 981000 *дин*.

1 *т. е. м.* = 9,81 *кг*.

Из второго закона следует, что если сила, действующая на точку, равна нулю, то и ускорение точки равно нулю, т. е. точка, не взаимодействующая с другими телами, или движется равномерно прямолинейно, или находится в покое.

Таким образом, первый закон динамики можно рассматривать как следствие более общего второго закона.

Система отсчета, в которой проявляются первый и второй законы, называется инерциальной системой отсчета. Для большинства задач за такую систему отсчета можно принять систему осей, связанных с Землей.

В случае, если необходимо учитывать суточное вращение Земли, за инерциальную систему отсчета принимают геоцентрическую систему осей координат с началом в центре Земли и осями, направленными к трем выбранным «неподвижным» звездам.

При решении астрономических задач пользуются гелиоцентрической системой осей координат с началом в центре Солнца и осями, направленными к трем выбранным «неподвижным» звездам. Эту систему с большей степенью точности можно принять за инерциальную систему.

Третий закон — закон равенства действия и противодействия двух тел отражает двусторонность механических процессов природы. Этот закон устанавливает, что при взаимодействии двух тел, в каком бы кинематическом состоянии они ни находились, силы, приложенные к каждому из них, равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Будучи приложенными к разным телам, эти силы не уравновешиваются.

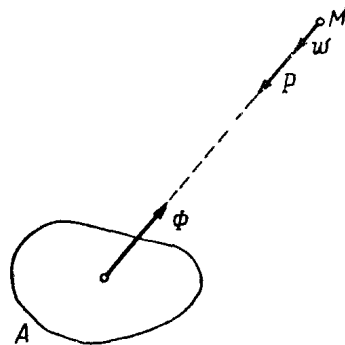


Рис. 2.

Если, например, в результате механического взаимодействия некоторого тела A и материальной точки M массой m эта точка получает ускорение w (рис. 2), то сила P , выражающая действие тела A на точку M, определяется вторым законом динамики:

$$P = mw.$$

По закону равенства действия и противодействия со стороны материальной точки M на тело A действует сила Φ , равная по модулю силе P и направленная по той же прямой в противоположную сторону, т. е.

$$\Phi = -P,$$

или

$$\Phi = -mw. \quad (2.6)$$

Модуль силы:

$$\Phi = mw. \quad (2.7)$$

Сила Φ , равная по модулю произведению массы материальной точки на модуль ее ускорения, направленная противоположно ускорению и приложенная к телу, сообщаемому это ускорение, называется силой инерции материальной точки. При этом точка M и тело A могут не соприкасаться, тогда точка будет свободной (при действии сил тяготения или электростатических сил) или соприкасаться, тогда точка будет несвободной (наличие связи). Пусть, например, тело M лежит на гладкой горизонтальной плоскости, тогда вес его G уравновешивается реакцией плоскости N.

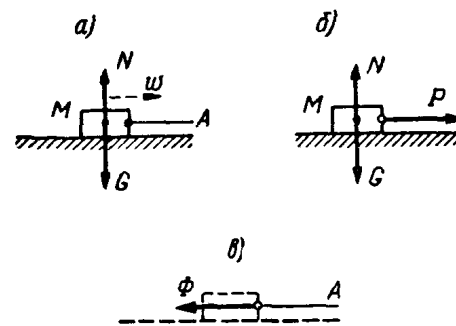


Рис. 3.

Если телу сообщают ускорение w при помощи нити A (рис. 3, а), действующей на тело с силой $P = mw$ (рис. 3, б), то сила инерции $\Phi = -mw$ приложена к нити A (рис. 3, в). Эту силу ощущает человек, который тянет нить.

Таким образом, сила инерции материальной точки является реальной силой, представляющей собой противодействие материальной точки изменению ее скорости, и приложена к телу, сообщаемому этой точке ускорение.

При неравномерном криволинейном движении точки силу инерции Φ разлагают на две составляющие, направленные по касательной к траектории и по главной нормали (рис. 4).

Полученные составляющие Φ_τ и Φ_n называют касательной и нормальной силами инерции. Эти силы инерции направлены противоположно касательному и нормальному ускорениям.

Поэтому имеем:

$$\Phi_\tau = -mw_\tau, \quad \Phi_n = -mw_n. \quad (2.8)$$

Из кинематики известно (§ 85):

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho},$$

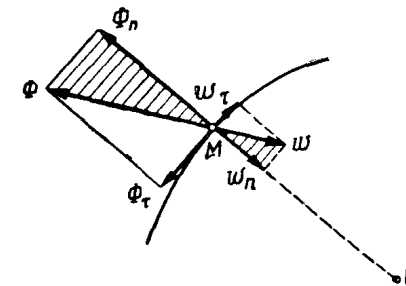


Рис. 4.

где v — алгебраическая величина скорости точки*;
 ρ — радиус кривизны траектории.

* Здесь и в дальнейшем, для упрощения заалгебраические величины скорости, касательного ускорения, угловой скорости и углового ускорения обозначаются буквами v , w_τ , ω и ϵ без «змейки».

Пользуясь этими выражениями, получаем:

$$\Phi_{\tau} = m \left| \frac{dv}{dt} \right|, \quad \Phi_n = \frac{mv^2}{\rho}. \quad (2.9)$$

Если точка M движется равномерно по кривой, то $\frac{dv}{dt} = 0$, $\Phi_{\tau} = 0$ и сила инерции Φ имеет лишь нормальную составляющую, а ее модуль

$$\Phi = \Phi_n = \frac{mv^2}{\rho}.$$

Если точка M движется неравномерно по прямой, то $\omega_n = 0$, $\Phi_n = 0$ и сила инерции Φ имеет лишь касательную составляющую, а ее модуль

$$\Phi = \Phi_{\tau} = m \left| \frac{dv}{dt} \right|.$$

В случае равномерного прямолинейного движения точки $\omega = 0$, а потому и сила инерции равна нулю, т. е. $\Phi = 0$.

Если точка M принадлежит твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, то модули ее вращательного и центростремительного ускорений вычисляются по формулам:

$$|\omega^B| = R|\varepsilon|, \quad \omega^u = R\omega^2,$$

где ω и ε — алгебраические значения угловой скорости и углового ускорения тела;

R — расстояние от точки M до оси вращения.

Тогда модули касательной и нормальной сил инерции, называемых в этом случае *вращательной* и *центробежной* силами инерции, определяются по формулам:

$$\Phi^B = mR|\varepsilon|, \quad \Phi^u = mR\omega^2. \quad (2.10)$$

При равномерном вращении тела $\varepsilon = 0$, $\Phi^B = 0$, сила инерции

$$\Phi = \Phi^u = mR\omega^2.$$

Сила инерции является одним из важнейших понятий динамики.

Действие сил инерции учитывается при решении многих технических задач и, в частности, при определении реакций связей движущейся несвободной механической системы.

Четвертый закон — закон независимости действия сил — не был сформулирован Ньютоном как отдельный закон механики, но он содержится в сделанном им обобщении правила параллелограмма сил.

Положим, что на материальную точку M действуют силы $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ (рис. 5). Каждая из этих сил, действуя на материальную точку отдельно, сообщает ей ускорения w_1, w_2, \dots, w_n ,

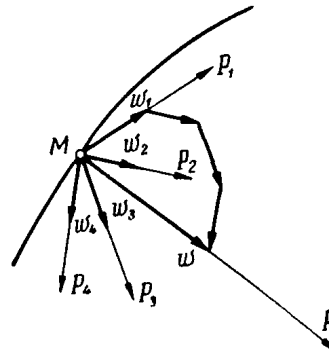


Рис. 5.

определяемые по второму закону:

$$P_1 = mw_1, \quad P_2 = mw_2, \quad \dots, \quad P_n = mw_n.$$

Согласно четвертому закону, ускорение материальной точки, находящейся под действием сил P_1, P_2, \dots, P_n , определяется уравнением:

$$mw = P_1 + P_2 + \dots + P_n.$$

Если принять ускорение w , получаемое материальной точкой под действием всей системы одновременно действующих на нее сил, равным геометрической сумме составляющих ускорений, т. е.

$$w = w_1 + w_2 + \dots + w_n,$$

то, умножив обе части этого равенства на m , получим:

$$mw = mw_1 + mw_2 + \dots + mw_n$$

или

$$mw = P_1 + P_2 + \dots + P_n.$$

Таким образом, закон независимости действия сил равносильен утверждению, что ускорение w , получаемое материальной точкой от одновременно действующей на нее системы сил, равно геометрической сумме ускорений w_1, w_2, \dots, w_n , сообщаемых этой точке каждой из сил в отдельности.

Четвертый закон, так же как и остальные законы классической механики, подтверждается опытами и наблюдениями.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте основные законы механики.
2. Какое уравнение называется основным уравнением динамики?
3. Какова мера инерции твердых тел при поступательном движении?
4. Зависит ли вес тела от местонахождения тела на Земле?
5. Какую систему отсчета называют инерциальной?
6. К какому телу приложена сила инерции материальной точки и каковы ее модуль и направление?
7. Каковы модули и направления касательной и нормальной сил инерции материальной точки?
8. При каком движении материальной точки равна нулю ее касательная сила инерции и при каком нормальная?
9. По каким формулам вычисляются модули вращательной и центробежной сил инерции точки, принадлежащей твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси?

ГЛАВА II

ДИНАМИКА СВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 3. Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки в декартовых координатах

Рассмотрим движение материальной точки M массой m под действием приложенных к ней сил P_1, P_2, \dots, P_n (рис. 6). Выберем прямоугольную систему осей координат x, y, z .

Основное уравнение динамики имеет вид:

$$mw = P_1 + P_2 + \dots + P_n. \quad (3.1)$$

Проектируя обе части векторного равенства (3.1) на координатные оси, получаем:

$$\left. \begin{aligned} m\omega \cos(\mathbf{w}, \mathbf{i}) &= X_1 + X_2 + \dots + X_n, \\ m\omega \cos(\mathbf{w}, \mathbf{j}) &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \\ m\omega \cos(\mathbf{w}, \mathbf{k}) &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

где $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; \dots; X_n, Y_n, Z_n$ — проекции сил $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ на оси x, y, z .

Из кинематики известно, что проекция ускорения точки на каждую ось декартовых координат равна второй производной по времени от соответствующей координаты точки, т. е.

$$\begin{aligned} \omega \cos(\mathbf{w}, \mathbf{i}) &= \omega_x = \ddot{x}, \\ \omega \cos(\mathbf{w}, \mathbf{j}) &= \omega_y = \ddot{y}, \\ \omega \cos(\mathbf{w}, \mathbf{k}) &= \omega_z = \ddot{z}. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в равенства (a), получаем:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum X_i, \\ m\ddot{y} &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum Y_i, \\ m\ddot{z} &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum Z_i. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Уравнения (3.2) называются *дифференциальными уравнениями движения материальной точки*.

§ 4. Естественные уравнения движения материальной точки

Спроектируем обе части векторного равенства (3.1) на естественные координатные оси (подвижные) — касательную, главную нормаль и бинормаль (рис. 7):

$$\left. \begin{aligned} m\omega \cos(\mathbf{w}, \boldsymbol{\tau}) &= \sum P_i \cos(\mathbf{P}_i, \boldsymbol{\tau}), \\ m\omega \cos(\mathbf{w}, \mathbf{n}) &= \sum P_i \cos(\mathbf{P}_i, \mathbf{n}), \\ m\omega \cos(\mathbf{w}, \mathbf{b}) &= \sum P_i \cos(\mathbf{P}_i, \mathbf{b}). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Проекция ускорения на касательную и главную нормаль определяются по формулам из кинематики (см. § 85), т. е.

$$\begin{aligned} \omega \cos(\mathbf{w}, \boldsymbol{\tau}) &= \frac{d^2s}{dt^2}, \\ \omega \cos(\mathbf{w}, \mathbf{n}) &= \frac{v^2}{\rho}. \end{aligned}$$

Подставляя значения этих проекций в два первых равенства (a), получаем:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2s}{dt^2} &= \sum P_i \cos(\mathbf{P}_i, \boldsymbol{\tau}), \\ \frac{mv^2}{\rho} &= \sum P_i \cos(\mathbf{P}_i, \mathbf{n}). \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Из кинематики известно, что вектор ускорения \mathbf{w} лежит в соприкасающейся плоскости и его проекция на бинормаль равна нулю:

$$\omega \cos(\mathbf{w}, \mathbf{b}) = 0.$$

Из третьего равенства (a) следует, что сумма проекций всех сил, приложенных к точке, на бинормаль равна нулю:

$$\sum P_i \cos(\mathbf{P}_i, \mathbf{b}) = 0.$$

Уравнения (4.1) называются *естественными уравнениями движения материальной точки*.

Этими уравнениями удобно пользоваться в случае, когда известна траектория точки. Применение уравнений (4.1) показано в гл. IV.

§ 5. Две основные задачи динамики точки

При помощи дифференциальных уравнений движения точки можно решать две основные задачи динамики точки.

Первая задача динамики. Зная массу точки m и уравнения ее движения:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

найти модуль и направление равнодействующей сил, приложенных к точке.

Эта задача легко решается следующим путем:

$$X = m\ddot{x}, \quad Y = m\ddot{y}, \quad Z = m\ddot{z},$$

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\cos(\mathbf{P}, \mathbf{i}) = \frac{X}{P}, \quad \cos(\mathbf{P}, \mathbf{j}) = \frac{Y}{P}, \quad \cos(\mathbf{P}, \mathbf{k}) = \frac{Z}{P}.$$

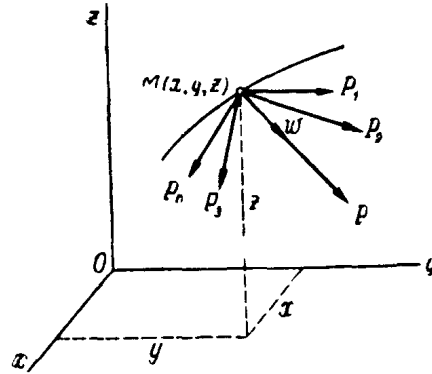


Рис. 6.

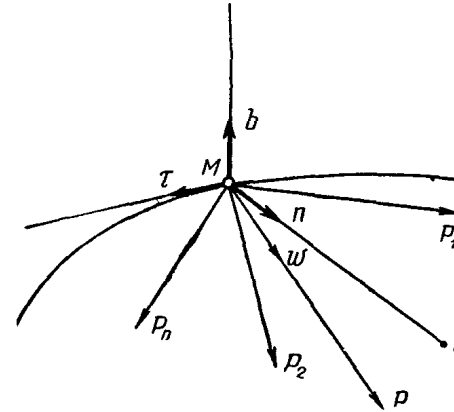


Рис. 7.

Пример 1. Уравнения движения точки M массой m имеют вид:

$$x = r \cos kt, \quad y = r \sin kt.$$

Определить равнодействующую приложенных к точке сил.

Решение. Исключая время t из уравнений движения, находим уравнение траектории точки:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Траектория — окружность радиусом r (рис. 8).

Определяем проекции ускорения точки на оси координат:

$$\ddot{x} = -k^2 r \cos kt,$$

$$\ddot{y} = -k^2 r \sin kt.$$

Находим проекции равнодействующей силы;

$$X = m\ddot{x} = -mk^2 r \cos kt,$$

$$Y = m\ddot{y} = -mk^2 r \sin kt.$$

Определяем модуль и направление силы:

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2} = mk^2 r \sqrt{\cos^2 kt + \sin^2 kt} = mk^2 r,$$

$$\cos(\mathbf{P}, \mathbf{i}) = \frac{X}{P} = -\cos kt = -\frac{x}{r} = -\cos \varphi,$$

$$\cos(\mathbf{P}, \mathbf{j}) = \frac{Y}{P} = -\sin kt = -\frac{y}{r} = -\sin \varphi.$$

Углы, составленные направлением силы \mathbf{P} с направлением осей координат, имеют значения:

$$\angle(\mathbf{P}, \mathbf{i}) = 180^\circ - \varphi;$$

$$\angle(\mathbf{P}, \mathbf{j}) = 90^\circ + \varphi,$$

т. е. в любой момент сила \mathbf{P} направлена к началу координат O .

Таким образом, установлено, что на точку действует сила притяжения, модуль которой пропорционален массе точки и ее расстоянию от центра притяжения O .

Вторая задача динамики. Зная силы, действующие на материальную точку, ее массу m , а также начальное положение точки и ее начальную скорость, получить уравнения движения точки.

Для решения этой задачи необходимо в левую часть уравнений (3.2) подставить значение массы m , а в правую часть — суммы проекций приложенных сил и полученные уравнения дважды проинтегрировать по времени.

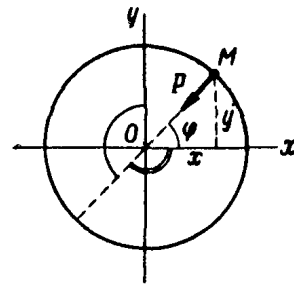


Рис. 8.

Эта задача имеет большое практическое значение и в общем случае является более сложной, чем первая.

При интегрировании каждого дифференциального уравнения движения точки появляются две постоянные, а потому при интегрировании трех дифференциальных уравнений движения точки будет шесть постоянных. Значения этих постоянных определяют по начальным условиям движения: значениям трех координат точки и проекций ее скорости на три оси в некоторый момент времени, обычно (но не обязательно) в начальный момент.

Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ известны координаты точки и проекции ее скорости на оси, т. е.

$$\left. \begin{aligned} t = t_0; \quad x = x_0; \quad y = y_0; \quad z = z_0, \\ \dot{x} = \dot{x}_0; \quad \dot{y} = \dot{y}_0; \quad \dot{z} = \dot{z}_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Эти значения подставляют в уравнения, представляющие собой общие решения дифференциальных уравнений движения точки.

Из этих уравнений определяют постоянные интегрирования C_1, C_2, \dots, C_6 в зависимости от начальных координат и проекций начальной скорости. Подставляя найденные значения постоянных интегрирования в общее решение дифференциальных уравнений движения точки, получают уравнения движения точки в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ y &= f_2(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ z &= f_3(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Процесс интегрирования дифференциальных уравнений движения точки разберем на конкретных примерах. При этом рассмотрим следующие случаи изменения силы, действующей на точку:

- 1) сила постоянна по модулю и направлению;
- 2) сила зависит от времени;
- 3) сила зависит от положения точки в пространстве;
- 4) сила зависит от скорости точки.

§ 6. Свободное падение тела без учета сопротивления воздуха

Рассмотрим движение тела M , падающего на поверхность земли с высоты H , полагая вес тела G постоянным (рис. 9).

Пренебрегая размерами тела, будем считать его материальной точкой. Сначала рассмотрим падение тела в пустоте, т. е. без учета сопротивления воздуха.

Направим ось y по траектории прямолинейного движения тела в сторону его движения и примем за начало координат начальное положение тела. Если начальная скорость тела равна нулю, то начальные условия рассматриваемого движения будут иметь вид

$$t = 0, \quad y_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = 0.$$

Дифференциальное уравнение этого прямолинейного движения тела под действием силы тяжести примет вид

$$m\ddot{y} = \sum Y_1 = G = mg,$$

откуда

$$\ddot{y} = g,$$

т. е. ускорение движения постоянно.

Интегрируя дважды по t , получаем

$$\dot{y} = gt + C_1,$$

$$y = \frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 определим по начальным условиям. Подставив в первое уравнение $t = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, получим

$$C_1 = 0.$$

Подставив во второе уравнение $t = 0$, $y_0 = 0$, получим

$$C_2 = 0.$$

Уравнения, характеризующие свободное падение тела при значениях $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, примут вид

$$\dot{y} = gt, \quad (6.1)$$

$$y = \frac{gt^2}{2}, \quad (6.2)$$

Законы свободного падения тела, выраженные этими уравнениями, были впервые экспериментально установлены Галилеем:

1. *Скорость свободно падающего тела пропорциональна времени падения (6.1).*

2. *Пути, проходимые свободно падающим телом, пропорциональны квадрату времени падения (6.2).*

Пользуясь уравнением (6.2), можно определить время свободного падения тела с высоты H :

$$H = \frac{gt_H^2}{2}, \quad t_H = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (6.3)$$

§ 7. Движение тела, брошенного под углом к горизонту, без учета сопротивления воздуха

Определим движение тела M , брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 , пренебрегая сопротивлением воздуха и принимая тело за материальную точку (рис. 10).

Совместим начало координат O с точкой вылета тела, направив ось x по горизонтали вправо, а ось y — вверх по вертикали.

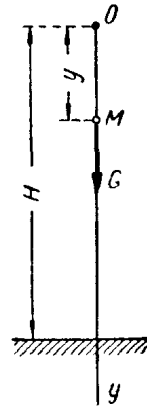


Рис. 9.

Тогда получим начальные условия движения:

$$t = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0,$$

$$\dot{x}_0 = v_{0x} = v_0 \cos \alpha,$$

$$\dot{y}_0 = v_{0y} = v_0 \sin \alpha.$$

Составим дифференциальные уравнения движения тела под действием постоянной силы тяжести G в декартовых координатах:

$$m\ddot{x} = \sum X_i = 0,$$

$$m\ddot{y} = \sum Y_i = -G = -mg.$$

Проекция ускорения точки из этих уравнений будут

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g.$$

Сначала проинтегрируем дважды по t дифференциальное уравнение движения тела вдоль оси x :

$$\dot{x} = C_1,$$

$$x = C_1t + C_2.$$

Определим постоянные интегрирования. Подставив в первое уравнение проекцию начальной скорости $\dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha$, получим $C_1 = v_0 \cos \alpha$.

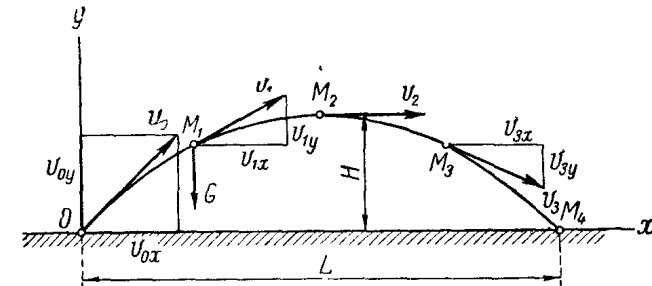


Рис. 10.

Подставив во второе уравнение $t = 0$, $x_0 = 0$, получим $C_2 = 0$. При найденных значениях C_1 и C_2

$$\dot{x} = v_0 \cos \alpha, \quad (7.1)$$

$$x = v_0 t \cos \alpha. \quad (7.2)$$

Уравнения (7.1) и (7.2) показывают, что проекция скорости тела на горизонтальную ось постоянна и горизонтальное перемещение тела совершается по закону равномерного движения со скоростью $v_0 \cos \alpha$, т. е. по инерции.

Проинтегрировав дважды по t дифференциальное уравнение $\ddot{y} = -g$, получим

$$\dot{y} = -gt + C_3,$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_3t + C_4.$$

Определим значения C_3 и C_4 по начальным условиям.

Подставив в первое уравнение $t=0$, $\dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha$, получим $C_3 = v_0 \sin \alpha$.

Из второго уравнения при $t=0$ и $y_0=0$ получим $C_4=0$. При найденных значениях C_3 и C_4

$$\dot{y} = v_0 \sin \alpha - gt, \quad (7.3)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (7.4)$$

Уравнения (7.3) и (7.4) показывают, что вертикальное движение тела является равнопеременным. При подъеме оно замедленное, так как направления вертикальной составляющей скорости и ускорения силы тяжести противоположны, а при спуске — ускоренное, так как эти направления совпадают.

Исключим время t из уравнений движения тела (7.2) и (7.4):

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2};$$

получим уравнение траектории:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (7.5)$$

Траектория представляет собой параболу с вертикальной осью и вершиной в наивысшей точке. Форма траектории тела, движущего в пустоте под действием силы тяжести, была впервые установлена Галилеем.

Определим скорость движения тела по траектории способом проекций (см. ч. I, «Кинематика», § 80):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}.$$

Эта формула показывает, что движение, полученное сложением равномерного горизонтального и равнопеременного вертикального движений, не является равнопеременным.

Определим дальность и продолжительность полета тела.

В точке M_4 падения тела на землю $y_4=0$.

Продолжительность полета определим из уравнения (7.4) при $y=0$:

$$v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} = 0.$$

Отсюда получим момент вылета $t=0$ и момент падения $t_4 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$.

Дальность полета определим, подставив значение t_4 в уравнение (7.2):

$$L = x_4 = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (7.6)$$

Формула (7.6) показывает, что дальность полета тела при одной и той же скорости вылета тела v_0 зависит от угла α .

Очевидно, что наибольшая дальность полета наблюдается при $\sin 2\alpha = 1$, т. е. при $\alpha = 45^\circ$.

Наибольшую высоту подъема тела при заданной начальной скорости v_0 и угле α можно определить из условия, что в наивысшей точке M_2 проекция скорости на вертикальную ось равна нулю:

$$v_{2y} = \dot{y}_2 = v_0 \sin \alpha - gt_2 = 0.$$

откуда

$$t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Подставляя значение t_2 в уравнение (7.4), получаем:

$$H = y_2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (7.7)$$

Движение материальной точки под действием силы тяжести является примером движения под действием силы, постоянной по модулю и направлению.

§ 8. Движение падающего тела с учетом сопротивления воздуха

Рассмотрим влияние сопротивления воздуха на движение тела, падающего на землю (рис. 11).

Положим, что тело M весом G движется вниз без начальной скорости из точки O , принятой за начало координат. Ось y направим вертикально вниз. Тогда начальные условия движения будут иметь вид:

$$t = 0; \quad y_0 = 0; \quad \dot{y}_0 = 0.$$



Рис. 11.

Рассмотрим падение тела при сопротивлении воздуха, пропорциональном скорости движения тела. Тогда силу сопротивления можно представить в виде $R = \alpha v$, где α — коэффициент пропорциональности. Обозначим $\frac{\alpha}{m} = k$.

Коэффициент k равен модулю силы сопротивления воздуха, приходящейся на единицу массы движущегося тела при скорости его, равной единице, и имеет размерность (сек^{-1}).

Составим дифференциальное уравнение движения тела под действием силы тяжести G и силы сопротивления воздуха R :

$$m\ddot{y} = G - R = mg - mkv,$$

откуда

$$\ddot{y} = g - kv.$$

Можно понизить порядок уравнения, перейдя от переменной y к переменной $v = \dot{y}$. Для этого представим ускорение точки в виде $\ddot{y} = \frac{dv}{dt}$, где v — алгебраическое значение скорости. Тогда

$$\frac{dv}{dt} = g - kv,$$

или

$$dv = (g - kv) dt.$$

Разделив переменные, получим:

$$\frac{dv}{g - kv} = dt.$$

Введем переменную

$$u = g - kv,$$

тогда

$$du = -k dv \quad \text{и} \quad dv = -\frac{du}{k}.$$

Заменяя переменную, получим уравнение: $\frac{du}{u} = -k dt$. Интегрируя, найдем:

$$\ln u = -kt + C_1,$$

или

$$\ln(g - kv) = -kt + C_1.$$

Определим значение C_1 , подставив в полученное уравнение $t = 0$, $y_0 = v_0 = 0$; $\ln g = C_1$.

При найденном значении C_1

$$\ln(g - kv) = -kt + \ln g,$$

или

$$\ln\left(\frac{g - kv}{g}\right) = -kt.$$

Потенцируя, получим:

$$\frac{g - kv}{g} = e^{-kt},$$

или

$$1 - \frac{k}{g}v = e^{-kt}.$$

Из этого уравнения найдем значение v :

$$v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}). \quad (8.1)$$

При $t \rightarrow \infty$ имеем $e^{-kt} \rightarrow 0$, $v \rightarrow \frac{g}{k}$, т. е. скорость падения возрастает, стремясь к предельной скорости

$$v_{\text{пр}} = \frac{g}{k}.$$

Практически по истечении некоторого конечного промежутка времени движение становится равномерным.

При скорости $v_{\text{пр}} = \frac{g}{k}$ сила сопротивления становится равной весу тела, так как

$$R = mkv_{\text{пр}} = mk \frac{g}{k} = G.$$

Представим уравнение (8.1) в виде

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}),$$

или

$$dy = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}) dt.$$

Проинтегрируем его:

$$y = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}e^{-kt} + C_2.$$

Для определения значения C_2 в полученное уравнение подставим $t = 0$, $y_0 = 0$, тогда

$$0 = \frac{g}{k^2} + C_2,$$

откуда

$$C_2 = -\frac{g}{k^2}.$$

При найденном значении C_2 получим уравнение движения падающего тела с учетом сопротивления воздуха:

$$y = \frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}). \quad (8.2)$$

В рассмотренном примере показано интегрирование дифференциального уравнения движения точки при наличии силы, зависящей от скорости точки.

§ 9. Пример интегрирования дифференциальных уравнений движения точки для случая силы, зависящей от времени

На точку M массой $m = 2$ г действует горизонтальная сила P , остающаяся параллельной некоторой прямой и имеющая величину $P = 2 \cos 5t$ мн. Определить движение точки M в горизонтальной плоскости, если в начальный момент скорость точки v_0 была перпендикулярна к направлению силы P и имела модуль $v_0 = 10$ см/сек.

Решение. Примем начальное положение точки за начало координат (рис. 12). Направим ось x вдоль начальной скорости точки v_0 , а ось y — параллельно линии действия силы P .

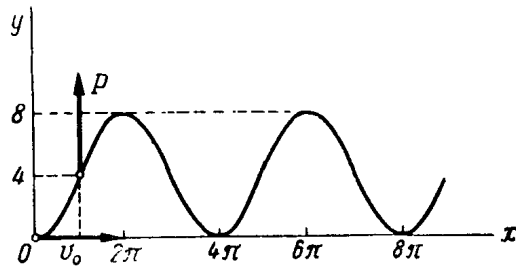


Рис 12.

Тогда начальные условия движения будут следующими

$$t=0, \quad x_0=0, \quad y_0=0, \quad \dot{x}_0=v_0=10 \text{ см/сек}, \quad \dot{y}_0=0.$$

Единственной силой, действующей на точку в горизонтальной плоскости, является заданная сила P , параллельная оси y .

Составим два дифференциальных уравнения движения точки:

$$m\ddot{x} = \sum X_i = 0; \quad m\ddot{y} = \sum Y_i = P.$$

Из первого дифференциального уравнения

$$\ddot{x} = 0.$$

Проинтегрировав это уравнение дважды по t , получим:

$$\dot{x} = C_1, \quad x = C_1 t + C_2.$$

Подставив в первое уравнение проекцию начальной скорости $\dot{x}_0 = 10 \text{ см/сек}$, получим $C_1 = 10$. Подставив во второе уравнение $t=0, x_0=0$, получим $C_2=0$. При этих значениях C_1 и C_2 для движения точки вдоль оси x

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10 \text{ см/сек}; \\ x &= 10t \text{ (см)}. \end{aligned}$$

Получим второе дифференциальное уравнение, выражая массу точки в граммах, а силу P в динах:

$$2\ddot{y} = 200 \cos 5t \quad \text{или} \quad \ddot{y} = 100 \cos 5t.$$

Проинтегрировав его дважды по t , получим

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 20 \sin 5t + C_3, \\ y &= -4 \cos 5t + C_3 t + C_4. \end{aligned}$$

Подставив в первое уравнение $t=0, \dot{y}_0=0$, найдем $C_3=0$. Подставив во второе уравнение $t=0, y_0=0$, получим: $0 = -4 + C_4$, откуда $C_4=4$. При найденных значениях C_3 и C_4 для движения точки вдоль оси y

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 20 \sin 5t \text{ (см/сек)}, \\ y &= 4(1 - \cos 5t) \text{ (см)}. \end{aligned}$$

Чтобы получить уравнение траектории точки, исключим время из уравнений ее движения:

$$t = \frac{x}{10}, \quad y = 4\left(1 - \cos \frac{x}{2}\right).$$

На рис. 12 показана траектория точки при движении, полученном сложением равномерного движения вдоль оси x и гармонического колебательного движения вдоль оси y .

§ 10. Пример интегрирования дифференциального уравнения движения точки для случая силы, зависящей от положения точки

Материальная точка M массой $m=20 \text{ г}$ отталкивается от некоторого центра O силой, обратно пропорциональной кубу расстояния OM .

В начальный момент известны: расстояние $OM_0=5 \text{ см}$, скорость точки $v_0=10 \text{ см/сек}$, направленная по прямой OM от центра O , и сила отталкивания $P=0,4 \text{ мн}$.

Получить уравнение движения точки под действием силы отталкивания, а также определить скорость, приобретенную точкой на расстоянии 20 см от центра O .

Решение. Центр отталкивания O примем за начало координат, ось x направим по прямой, соединяющей этот центр с движущейся точкой M (рис. 13). Установим начальные условия:

$$\begin{aligned} t=0, \quad x_0 &= OM_0 = 5 \text{ см}, \\ \dot{x}_0 &= v_0 = 10 \text{ см/сек}. \end{aligned}$$

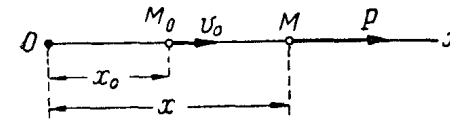


Рис. 13.

На точку действует сила отталкивания P , направленная по оси x . Модуль этой силы обратно пропорционален кубу расстояния OM , т. е.

$$P = \frac{k}{x^3}.$$

Значение коэффициента k можно определить по условию, что при $x_0=5 \text{ см}$ сила отталкивания $P_0=0,4 \text{ мн} = 40 \text{ дин}$:

$$k = P_0 x_0^3 = 40 \frac{\text{г см}}{\text{сек}^2} \cdot 125 \text{ см}^3 = 5000 \text{ г см}^4/\text{сек}^2.$$

Составим дифференциальное уравнение движения точки M :

$$m\ddot{x} = \sum X_i = P = \frac{k}{x^3}.$$

Чтобы понизить порядок дифференциального уравнения, представим ускорение в виде $\ddot{x} = \frac{dv}{dt}$, где v — алгебраическое значение скорости.

Тогда

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{k}{x^3}.$$

Последнее уравнение содержит переменную величину x , кроме переменных v и t .

Исключаем из уравнения переменную t , применив преобразование:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v. \quad (10.1)$$

Дифференциальное уравнение движения точки примет вид:

$$mv \frac{dv}{dx} = \frac{k}{x^3}.$$

Разделим переменные:

$$mv dv = \frac{k}{x^3} dx.$$

При интегрировании уравнения воспользуемся определенными интегралами с переменным верхним пределом.

При изменении скорости от v_0 до v координата точки изменяется от x_0 до x . Тогда

$$m \int_{v_0}^v v dv = k \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^3}; \quad \frac{mv^2}{2} \Big|_{v_0}^v = -\frac{k}{2x^2} \Big|_{x_0}^x,$$

или

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x^2} \right),$$

откуда

$$v^2 = v_0^2 + \frac{k}{m} \left(\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x^2} \right),$$

Подставив числовые значения k , m , v_0 , получим

$$v^2 = 100 + \frac{5000}{20} \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{x^2} \right),$$

или

$$v = \sqrt{110 - \frac{250}{x^2}}. \quad (10.2)$$

Полученное выражение определяет скорость v точки в зависимости от ее координаты x . Из этого уравнения можно найти искомое значение скорости при $x = 20$ см:

$$v = \sqrt{110 - \frac{250}{400}} = 10,46 \text{ см/сек.}$$

Чтобы получить уравнение движения точки $x = f(t)$, воспользуемся уравнением (10.2):

$$v = \sqrt{110 - \frac{250}{x^2}} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{110} \cdot \sqrt{x^2 - \frac{25}{11}}}{x}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{x dx}{\sqrt{x^2 - \frac{25}{11}}} = \sqrt{110} dt.$$

Левую часть проинтегрируем в пределах от $x_0 = 5$ см до x , а правую — в пределах от $t_0 = 0$ до t :

$$\int_5^x \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - \frac{25}{11}}} = \sqrt{110} \int_0^t dt,$$

или

$$\sqrt{x^2 - \frac{25}{11}} \Big|_5^x = \sqrt{110} t \Big|_0^t.$$

Подставим значения пределов:

$$\sqrt{x^2 - \frac{25}{11}} - \sqrt{25 - \frac{25}{11}} = \sqrt{110} t,$$

или

$$\sqrt{x^2 - \frac{25}{11}} = \sqrt{\frac{250}{11}} + \sqrt{110} t.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$x^2 - \frac{25}{11} = \frac{250}{11} + 100t + 110t^2.$$

Отсюда получим уравнение движения точки:

$$x = \sqrt{25 + 100t + 110t^2} \text{ см.}$$

Примечания:

1. Определенные интегралы с переменными верхними и нижними пределами, соответствующими начальным значениям переменных интегрирования, могли быть использованы и при решении предыдущих примеров. Применение их освобождает от определения постоянных интегрирования по начальным условиям. Наоборот, при решении последнего примера можно было бы применять неопределенные интегралы, определяя постоянные интегрирования по начальным условиям.

2. Преобразование (10.1) $m\ddot{x} = mv \frac{dv}{dx}$ иногда удобно применять и в случае силы, зависящей от скорости. Тогда дифференциальное уравнение с переменными v и t переходит в уравнение с переменными v и x .

Вопросы для самоконтроля

1. Какие уравнения динамики называются естественными уравнениями движения материальной точки?
2. Каковы две основные задачи динамики точки, которые решаются при помощи дифференциальных уравнений движения материальной точки?
3. Как определяются постоянные при интегрировании дифференциальных уравнений движения материальной точки?
4. Каковы законы свободного падения тела?
5. По каким законам происходят горизонтальное и вертикальное перемещения тела, брошенного под углом к горизонту в пустоте; какова траектория его движения и при каком угле α тело имеет наибольшую дальность полета?

ГЛАВА III

КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 11. Виды колебательных движений материальной точки. Свободные колебания материальной точки

Колебательное движение материальной точки происходит при условии, если на точку M , отклоненную от положения покоя O (рис. 14), действует сила P , стремящаяся вернуть точку в это положение. Такая сила называется *восстанавливающей*.



Рис. 14.

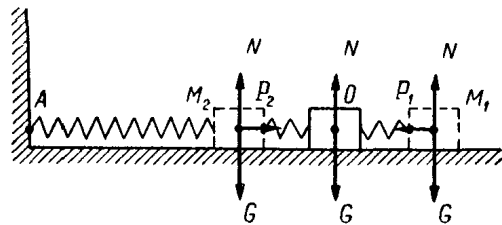


Рис. 15.

Рассмотрим простейший, но имеющий большое практическое значение, случай, когда восстанавливающая сила пропорциональна отклонению точки от положения покоя, т. е. $P = c \cdot OM$, где c — постоянный коэффициент пропорциональности.

Примером такой линейной восстанавливающей силы может служить сила упругости пружины.

Пусть, например, тело весом G , лежащее на гладкой горизонтальной плоскости в положении O (рис. 15), соединено с недеформированной пружиной, другой конец которой закреплен в точке A . В этом положении приложенные к телу силы, его вес G и реакция плоскости N взаимно уравновешиваются.

На тело, отклоненное в положение M_1 , будет действовать, кроме сил G и N , сила упругости растянутой пружины P_1 , стремящаяся

вернуть тело в положение покоя O . Модуль этой силы пропорционален удлинению пружины, т. е. $P_1 = c \cdot OM_1$.

В положении M_2 сила упругости сжатой пружины P_2 , имеющая модуль $P_2 = c \cdot OM_2$, также стремится вернуть тело в положение O .

Таким образом, сила упругости деформированной пружины всегда направлена к точке O — положению покоя тела и пропорциональна отклонению тела от этого положения.

Колебания могут происходить и под действием восстанавливающих сил, изменяющихся по другому закону.

Различают четыре основных случая колебательного движения материальной точки:

1) *свободные колебания*, совершающиеся под действием только восстанавливающей силы,

2) *затухающие колебания*, совершающиеся под действием восстанавливающей силы и силы сопротивления движению,

3) *вынужденные колебания*, совершающиеся под действием восстанавливающей силы и силы периодического характера, называемой *возмущающей силой*.

4) *вынужденные колебания*, совершающиеся под действием восстанавливающей силы, возмущающей силы и силы сопротивления движению.

Изучим свободные колебания материальной точки. Примем прямолинейную траекторию движения точки M за ось x и поместим начало координат O в положение, в котором точка M могла бы находиться в покое (рис. 16).

Если точка M выведена из состояния покоя, то на нее по оси x действует только восстанавливающая сила P .

Если в некоторый момент времени t точка M имеет координату x , то модуль восстанавливающей силы

$$P = c \cdot OM = c|x|,$$

где c — коэффициент жесткости пружины, численно равный силе упругости ее при деформации, равной единице.

Так как восстанавливающая сила в любом положении направлена к точке O , то ее проекция на ось x имеет всегда знак, противоположный знаку координаты x , т. е.

$$P_x = -cx. \quad (11.1)$$

Составим дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки M под действием восстанавливающей силы P :

$$m\ddot{x} = \sum X_i = P_x.$$

Пользуясь выражением (11.1), получим:

$$m\ddot{x} = -cx, \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0.$$

Обозначая $\frac{c}{m} = k^2$, имеем

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \quad (11.2)$$

Уравнение (11.2) называется *дифференциальным уравнением свободных колебаний материальной точки*.

Для интегрирования этого однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами составим характеристическое уравнение:

$$z^2 + k^2 = 0.$$

Его корни $z_1 = +ik$ и $z_2 = -ik$.

Общее решение уравнения (11.2) имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (11.3)$$

Чтобы определить значения постоянных C_1 и C_2 , найдем уравнение, определяющее скорость точки, продифференцировав уравнение (11.3):

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt. \quad (11.4)$$

Пусть в начальный момент $t = 0$ точка имеет координату x_0 и проекцию скорости на ось x , равную \dot{x}_0 . Тогда, подставив начальные условия в уравнения (11.3) и (11.4), найдем

$$C_1 = x_0, \quad \dot{x}_0 = kC_2, \quad \text{откуда} \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}.$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в уравнение (11.3), получаем уравнение движения точки M :

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt. \quad (11.5)$$

Уравнению (11.3) можно придать и другой вид, введя вместо постоянных C_1 и C_2 две новые постоянные a и β , положив:

$$C_1 = a \sin \beta; \quad C_2 = a \cos \beta.$$

Подставив эти значения C_1 и C_2 в уравнение (11.3), получим

$$x = a \sin(kt + \beta). \quad (11.6)$$

Уравнение (11.6) является *уравнением гармонического колебательного движения точки* (см. ч I, «Кинематика», § 89).

Таким образом, установлено, что свободные колебания материальной точки под действием линейной восстанавливающей силы являются гармоническими колебаниями.

Амплитуда a и начальная фаза β свободных колебаний материальной точки как постоянные интегрирования, введенные вместо C_1 и C_2 , определяются по начальным условиям движения.

Уравнение, определяющее скорость точки, имеет вид:

$$\dot{x} = ak \cos(kt + \beta). \quad (11.7)$$

Подставив в уравнения (11.6) и (11.7) значения начальной координаты x_0 , проекции начальной скорости \dot{x}_0 и времени $t_0 = 0$, получим:

$$x_0 = a \sin \beta; \quad \dot{x}_0 = ak \cos \beta.$$

Из этих выражений найдем a и β :

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2}, \quad (11.8)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{kx_0}{\dot{x}_0}. \quad (11.9a)$$

Так как каждому значению тангенса соответствуют два угла в пределах от 0 до 2π , то необходимо определить еще $\sin \beta$ или $\cos \beta$:

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{x_0}{a} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}} = \\ &= \frac{kx_0}{\sqrt{k^2x_0^2 + \dot{x}_0^2}}, \end{aligned} \quad (11.9b)$$

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{\dot{x}_0}{ak} = \frac{\dot{x}_0}{k \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}} = \\ &= \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{k^2x_0^2 + \dot{x}_0^2}}. \end{aligned} \quad (11.9b)$$

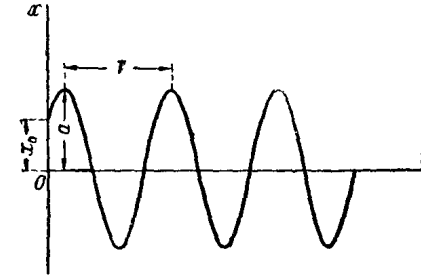


Рис. 17.

Так как $k^2 = \frac{c}{m}$, то циклическая частота* и период свободных колебаний определяются по формулам:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad (11.10)$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (11.11)$$

Как видно, частота и период свободных колебаний точки зависят лишь от массы этой точки и от коэффициента c , характеризующего восстанавливающую силу, и не зависят от начальных условий движения.

Период свободных колебаний T увеличивается при увеличении массы точки и уменьшается при увеличении коэффициента c .

График свободных колебаний показан на рис. 17.

* Ниже циклическая частота именуется «частотой».

§ 12. Свободные колебания груза, подвешенного к пружине

Рассмотрим груз весом G , подвешенный к пружине AB , конец A которой закреплен неподвижно (рис. 18). Когда груз находится в покое, удлинение пружины равно $f_{ст}$. Положим, что в некоторый момент времени груз был смещен из положения покоя вниз по вертикали на величину y_0 и отпущен с начальной скоростью \dot{y}_0 . Определим возникшее движение груза, пренебрегая массой пружины.

Примем груз за материальную точку и направим по его вертикальной прямой траектории ось y (рис. 19). Начало координат O совместим с положением покоя груза, которому соответствует статическое удлинение пружины $f_{ст}$.

Тогда начальному положению груза M_0 будут соответствовать координата y_0 и проекция начальной скорости \dot{y}_0 .

Начальные условия будут: $t_0 = 0$, $y = y_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$. На груз действуют силы: его вес G и сила упругости пружины P , модуль которой пропорционален деформации пружины. В положении M , определяемом координатой y , деформация пружины равна $f_{ст} + y$, а модуль силы упругости определяется:

$$P = c(f_{ст} + y).$$

Проекция силы P на ось y :

$$P_y = -c(f_{ст} + y),$$

Когда груз находится в покое, то его вес уравновешивается силой упругости, равной по модулю $P_{ст} = cf_{ст}$, т. е.

$$G = P_{ст} = cf_{ст}. \quad (12.1)$$

Дифференциальное уравнение движения груза имеет вид:

$$m\ddot{y} = \sum Y_i = G - c(f_{ст} + y).$$

Рис. 19.

Подставив в дифференциальное уравнение значение коэффициента жесткости пружины c , определяемое формулой (12.1), получим

$$m\ddot{y} = G - \frac{G}{f_{ст}}(f_{ст} + y) = G - G - \frac{G}{f_{ст}}y.$$

Так как $G = mg$, то

$$\ddot{y} + \frac{g}{f_{ст}}y = 0. \quad (12.2)$$

Уравнение (12.2) является дифференциальным уравнением свободных колебаний материальной точки (11.2):

$$\ddot{y} + k^2y = 0,$$

где

$$k^2 = \frac{g}{f_{ст}}.$$

Частота свободных колебаний груза

$$k = \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}}. \quad (12.3)$$

Период его колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{f_{ст}}{g}}. \quad (12.4)$$

Формула (12.4) может быть получена и непосредственно из формулы (11.11).

Общее решение дифференциального уравнения (12.2) имеет вид (11.3) и (11.6).

Представим уравнение движения груза в форме (11.6):

$$y = a \sin(kt + \beta). \quad (12.5)$$

Амплитуду a и начальную фазу β колебаний определим по формулам (11.8) и (11.9), пользуясь начальными условиями:

$$a = \sqrt{y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{k^2}},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{ky_0}{\dot{y}_0}.$$

Уравнение движения груза (12.5) примет вид

$$y = a \sin\left(\sqrt{\frac{g}{f_{ст}}}t + \beta\right). \quad (12.6)$$

Формула (12.4) является общей для определения периода свободных колебаний груза, поддерживаемого упругой связью.

Она позволяет определить период свободных колебаний этого груза около положения, в котором действующие на груз силы уравновешиваются.

Для определения периода по формуле (12.4) нужно знать статическую деформацию, соответствующую этому положению. Так, например, период свободных колебаний груза, лежащего на упругой балке и вызывающего статический прогиб балки, равный 5 мм, определится (без учета массы балки):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f_{ст}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,5}{981}} = 0,142 \text{ сек.}$$

Если вес кузова вагона вызывает прогиб вагонных рессор $f_{ст} = 4 \text{ см}$, то период свободных колебаний кузова на рессорах

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4}{981}} = 0,401 \text{ сек.}$$

§ 13. Примеры и свободные колебания

Пример 2. Тело весом $G = 20$ н, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости и прикрепленное к концу недеформированной пружины (рис. 20), отклоняют из положения покоя вправо, растягивая пружину на 4 см, и отпускают, сообщая начальную скорость 56 см/сек, направленную влево (удлинение пружины на 1 см вызывается силой 4 н). Определить дальнейшее движение тела, пренебрегая массой пружины (рис. 21).

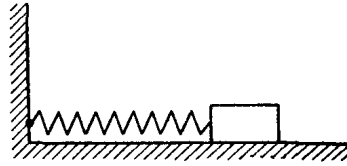


Рис. 20.

Решение. Направим ось x горизонтально вправо, считая началом координат O положение покоя тела, принятого за материальную точку. Тогда начальные условия будут следующими:

$$t = 0, \quad x_0 = 4 \text{ см}, \quad \dot{x}_0 = -56 \text{ см/сек}.$$

В произвольный момент времени t на тело M , имеющее координату x , действуют силы: вес тела G , реакция плоскости N и сила упругости деформированной пружины P , направленная к точке O . Модуль силы P пропорционален деформации пружины, т. е.

$$P = c \cdot OM,$$

где c — коэффициент жесткости пружины. Проекция силы P на ось x :

$$P_x = -cx.$$

По условию задачи $c = 4$ н/см.

Составив дифференциальное уравнение движения тела, получим дифференциальное уравнение свободных колебаний:

$$m\ddot{x} = \sum X_i = P_x = -cx$$

или

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0,$$

т. е.

$$\ddot{x} + k^2x = 0.$$

Решение дифференциального уравнения представим в форме (11.6):

$$x = a \sin(kt + \beta).$$

Вычислим частоту и период колебаний по формулам (11.10) и (11.11):

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{cg}{G}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 981}{20}} = 14 \text{ сек}^{-1},$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{6,28}{14} = 0,45 \text{ сек}.$$

Амплитуду a и начальную фазу β свободных колебаний тела вычислим по начальным условиям при помощи формул (11.8) и (11.9)

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} = \sqrt{4^2 + \frac{(-56)^2}{14^2}} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2} \approx 5,7 \text{ см},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{kx_0}{\dot{x}_0} = \frac{14 \cdot 4}{-56} = -1, \quad \sin \beta = \frac{x_0}{a} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\beta = 135^\circ = \frac{3}{4}\pi.$$

Уравнение свободных колебаний груза имеет вид:

$$x = 5,7 \sin\left(14t + \frac{3}{4}\pi\right) \text{ (см)}.$$

На рис. 22 построен график движения, соответствующего полученному уравнению. При этом по оси абсцисс отложены не значения t , а пропорциональные им произведения kt . Тогда начальная фаза β изображается величиной смещения начала волны синусоиды в направлении, противоположном направлению оси абсцисс.

Примечание. Амплитуда свободных колебаний зависит как от начального отклонения тела из положения покоя, так и от начальной скорости. При этом направление начальной скорости не влияет на амплитуду. Так, если начальную скорость направить вправо ($\dot{x}_0 = 56$ см/сек), амплитуда будет иметь ту же величину. Если тело опустить без начальной скорости ($\dot{x}_0 = 0$), то амплитуда

$$a = \sqrt{x_0^2} = |x_0| = 4 \text{ см},$$

т. е. амплитуда будет равна начальному отклонению тела от положения покоя.

Наличие начальной скорости увеличивает амплитуду.

Пример 3. Груз весом G подвешен на двух пружинах с различными коэффициентами жесткости c_1 и c_2 . Определить периоды свободных колебаний груза при последовательном и параллельном соединении пружин при условии, что удлинения параллельно соединенных пружин одинаковы (рис. 23 и рис. 24, а).

Решение. Периоды свободных колебаний груза определим по формуле (12.4):

а) В случае последовательного соединения пружин общее статическое удлинение связи, поддерживающей груз, равно сумме удли-

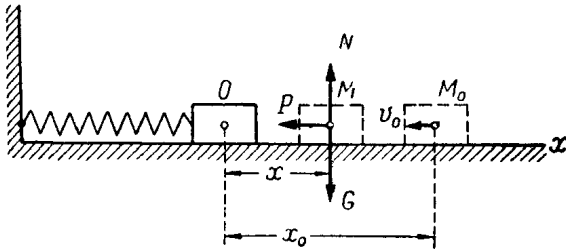


Рис. 21.

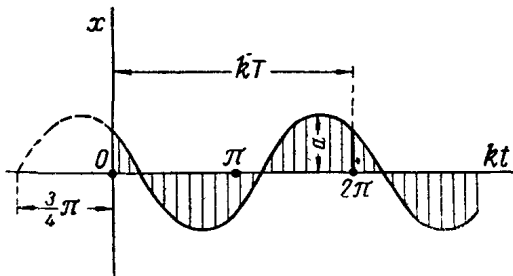


Рис. 22.

нений двух пружин. Определяем эти удлинения по формуле (12.1):

$$f_{ст} = f_{1ст} + f_{2ст} = \frac{G}{c_1} + \frac{G}{c_2} = G \frac{c_1 + c_2}{c_1 \cdot c_2}.$$

Таким образом, при последовательном соединении пружин приведенный коэффициент жесткости:

$$c_{пр} = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}.$$

Период колебаний груза

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{f_{ст}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{G(c_1 + c_2)}{g c_1 \cdot c_2}}. \quad (13.1)$$

б) В случае параллельного соединения пружин (рис. 24, а) силы S_1 и S_2 , растягивающие пружины, определяются как параллельные составляющие силы G (рис. 24, б):

$$S_1 + S_2 = G, \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{l_2}{l_1}. \quad (а)$$

По условию задачи удлинения обеих пружин должны быть одинаковы:

$$f_{1ст} = f_{2ст}.$$

Определяем удлинения по формуле (12.1):

$$\frac{S_1}{c_1} = \frac{S_2}{c_2}. \quad (б)$$

Условие, обеспечивающее одинаковые удлинения пружин, получается из пропорций (а) и (б):

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{c_1}{c_2}.$$

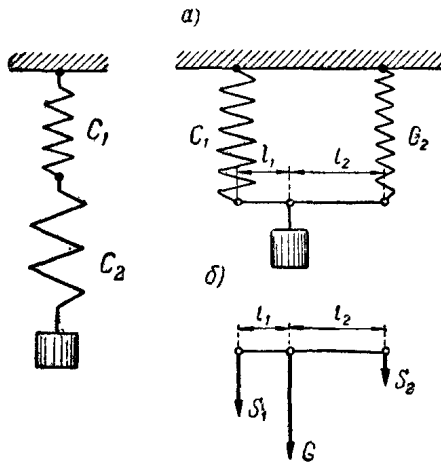


Рис. 23.

Рис. 24.

Величина удлинения каждой пружины определяется отношением (б), т. е.

$$f_{ст} = \frac{S_1}{c_1} = \frac{S_2}{c_2} = \frac{S_1 + S_2}{c_1 + c_2} = \frac{G}{c_1 + c_2}.$$

Период колебаний груза

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{f_{ст}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{G}{g(c_1 + c_2)}}. \quad (13.2)$$

Пример 4. Груз весом $G = 19,62$ н падает с высоты $H = 40$ см на середину твердой квадратной плиты, укрепленной на четырех симметрично расположенных пружинах. Коэффициент жесткости каждой пружины равен 2 н/см. Соприкасаясь с плитой, груз заклинивается

на ней и движется вместе с ней. Определить колебательное движение груза с плитой, пренебрегая массой плиты (рис. 25, а).

Решение. Направим ось y вертикально вниз по траектории центра тяжести груза (рис. 25, б). Начало координат O поместим

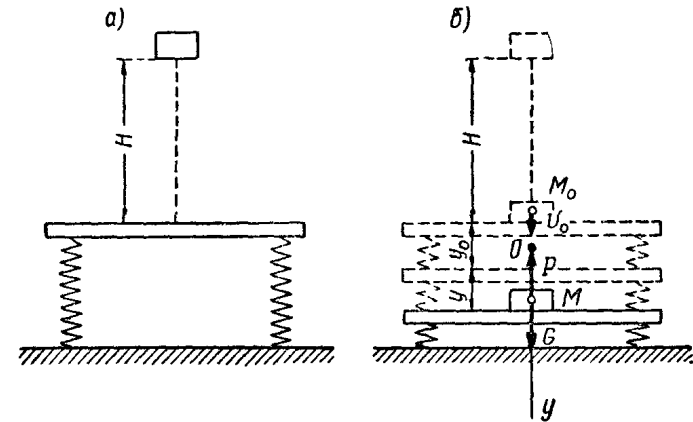


Рис. 25.

в той точке, где находился бы центр тяжести груза, лежащего на плите и вызывающего статическое сжатие пружин, определяемое формулой (12.1):

$$f_{ст} = \frac{G}{c}.$$

Суммарный коэффициент жесткости четырех пружин, соединенных параллельно и расположенных симметрично, определяется (см. пример 3):

$$c = 4 \cdot 2 = 8 \text{ н/см.}$$

Статическое сжатие

$$f_{ст} = \frac{19,62}{8} = 2,45 \text{ см.}$$

Колебательное движение груза начинается в момент соприкосновения с плитой, лежащей на недеформированных пружинах (если масса плиты мала по сравнению с массой груза и не учитывается), т. е. начальному положению груза M_0 соответствует координата $y_0 = -f_{ст} = -2,45$ см. В этот момент скорость груза равна скорости свободного падения с высоты H

$$v_0 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 40} = 280 \text{ см/сек.}$$

Так как v_0 имеет направление оси y , то

$$\dot{y}_0 = v_0 = 280 \text{ см/сек.}$$

Начальные условия колебательного движения

$$t = 0; \quad y_0 = -2,45 \text{ см,} \quad \dot{y}_0 = 280 \text{ см/сек.}$$

На груз, движущийся вместе с плитой, действуют его вес G и сила упругости пружин P , проекция которой на ось y определяется выражением

$$P_y = -c(f_{ст} + y).$$

Дифференциальное уравнение движения груза под действием сил P и G имеет вид

$$m\ddot{y} = \sum Y_i = -c(f_{ст} + y) + G \quad \text{или} \quad m\ddot{y} = -cy,$$

так как $-cf_{ст} + G = 0$ согласно формуле (12.1).

Далее получаем дифференциальное уравнение (11.2) свободных колебаний

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}y = 0, \quad \text{или} \quad \ddot{y} + k^2y = 0.$$

Частоту колебаний можно определить по формулам (11.10) или (12.3).

Применим вторую формулу:

$$k = \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}} = \sqrt{\frac{981}{2,45}} = 20 \text{ сек}^{-1}.$$

Период колебания

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{6,28}{20} = 0,314 \text{ сек}.$$

Уравнение движения груза напишем в виде (11.3):

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Продифференцировав это уравнение по времени, получим уравнение, определяющее скорость груза

$$\dot{y} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

Подставив начальные условия и числовое значение k в эти два уравнения, найдем C_1 и C_2 :

$$C_1 = -2,45,$$

$$C_2 \cdot 20 = 280 \quad \text{или} \quad C_2 = 14.$$

Подставив найденные значения C_1 и C_2 в уравнение движения груза, получим

$$y = -2,45 \cos 20t + 14 \sin 20t \text{ (см)}.$$

§ 14. Затухающие колебания материальной точки

Материальная точка, совершающая колебания в реальных условиях, испытывает сопротивление движению (трение, сопротивление воздуха и т. п.). Это означает, что, кроме восстанавливающей силы, направленной к центру колебаний, на точку действует сила сопротивления, направленная всегда в сторону, противоположную направлению движения точки. Закон изменения модуля силы сопротивления

зависит от физической природы этой силы. Так, например, модуль силы трения скольжения можно принять постоянным.

Сопротивление воздуха при малых скоростях движения тел считают пропорциональным первой степени скорости, а при больших скоростях, в довольно широких пределах, его принимают пропорциональным квадрату скорости движущегося тела.

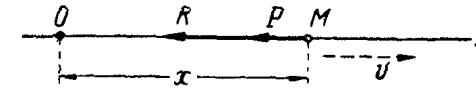


Рис. 26.

Рассмотрим колебания материальной точки M под действием линейной восстанавливающей силы P и силы сопротивления движению R (рис. 26), пропорциональной скорости точки.

Направим ось x по траектории точки и совместим начало координат O с положением покоя точки. Модуль восстанавливающей силы P

$$P = c \cdot OM = c|x|.$$

Проекция силы P на ось x

$$P_x = -cx.$$

Модуль силы сопротивления среды R пропорционален модулю скорости точки, т. е.

$$R = av.$$

Если $v = 1$, то $R = a$, т. е. коэффициент пропорциональности a численно равен силе сопротивления при скорости движения точки, равной единице.

Сила сопротивления R направлена всегда противоположно скорости точки v , т. е. $R = -av$.

Проекция силы R и скорости v на ось x имеют противоположные знаки:

$$R_x = -av_x = -a\dot{x}. \quad (14.1)$$

Составим дифференциальное уравнение движения материальной точки под действием сил P и R :

$$m\ddot{x} = \sum X_i = P_x + R_x = -cx - a\dot{x},$$

или

$$\ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0.$$

Вводя обозначения $\frac{a}{m} = 2n$ и $\frac{c}{m} = k^2$, получаем:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0. \quad (14.2)$$

Уравнение (14.2) является дифференциальным уравнением движения материальной точки под действием восстанавливающей силы и силы сопротивления, пропорциональной скорости движения точки.

Для интегрирования уравнения (14.2) составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$z^2 + 2nz + k^2 = 0, \quad (14.3)$$

$$z_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2}; \quad z_2 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Величина $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ является частотой свободных колебаний данной точки.

Коэффициент $n = \frac{\alpha}{2m}$ характеризует сопротивление среды.

Рассмотрим случай колебаний материальной точки, который имеет место при $n < k$. Так как $n = \frac{\alpha}{2m}$ и $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$, то в рассматриваемом случае $\frac{\alpha}{2m} < \sqrt{\frac{c}{m}}$, или $\alpha < 2\sqrt{mc}$.

В этом случае корни характеристического уравнения (14.3) можно представить в следующем виде:

$$z_1 = -n + i\sqrt{k^2 - n^2}, \quad z_2 = -n - i\sqrt{k^2 - n^2}.$$

Общее решение уравнения (14.2) имеет вид:

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t).$$

Вместо постоянных интегрирования C_1 и C_2 введем две новые постоянные a и β , положив:

$$C_1 = a \sin \beta, \quad C_2 = a \cos \beta.$$

Подставив эти значения C_1 и C_2 , получим решение дифференциального уравнения (14.2), т. е. уравнения движения точки в виде:

$$x = ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \beta). \quad (14.4)$$

Движение, определяемое уравнением (14.4), имеет колебательный характер, так как координата x периодически изменяет свой знак при изменении знака, входящего в уравнение синуса. Множитель e^{-nt} указывает на то, что амплитуда колебаний с течением времени уменьшается.

Колебания этого вида называются *затухающими*. График затухающих колебаний изображен на рис. 27.

Так как $|\sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \beta)| \leq 1$, то абсолютная величина координаты x удовлетворяет условию:

$$|x| \leq |ae^{-nt}|.$$

Следовательно, график затухающих колебаний заключен между двумя симметричными относительно оси абсцисс кривыми, имеющими уравнения:

$$x = ae^{-nt} \quad \text{и} \quad x = -ae^{-nt}.$$

Величины a и β как постоянные интегрирования определяются по начальным условиям задачи. Чтобы найти a и β , получим уравнение, определяющее скорость точки, продифференцировав уравнение (14.4):

$$\dot{x} = -nae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \beta) + a\sqrt{k^2 - n^2} e^{-nt} \cos(\sqrt{k^2 - n^2} t + \beta) =$$

$$= -nx + a\sqrt{k^2 - n^2} e^{-nt} \cos(\sqrt{k^2 - n^2} t + \beta). \quad (14.5)$$

Пусть в начальный момент $t=0$ точка имела координату x_0 и проекцию скорости на ось x , равную \dot{x}_0 .

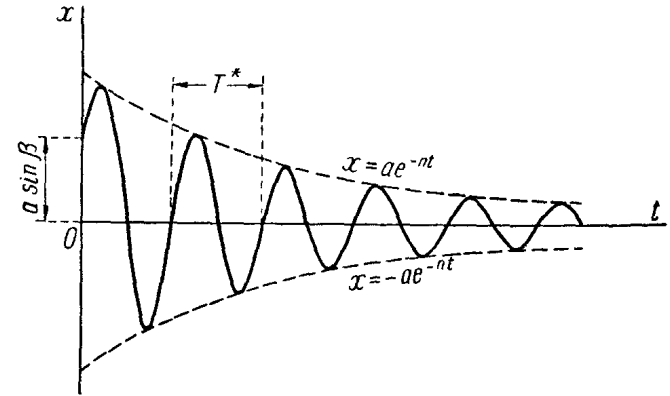


Рис. 27.

Подставив в уравнения (14.4) и (14.5) эти начальные условия получим:

$$x_0 = a \sin \beta,$$

$$\dot{x}_0 = -nx_0 + a\sqrt{k^2 - n^2} \cos \beta \quad \text{или} \quad \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} = a \cos \beta.$$

Отсюда находим:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}}, \quad (14.6)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x_0 \sqrt{k^2 - n^2}}{\dot{x}_0 + nx_0}, \quad (14.7a)$$

$$\sin \beta = \frac{x_0}{a}, \quad (14.7b)$$

$$\cos \beta = \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{a\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (14.7b)$$

Частота затухающих колебаний

$$k^* = \sqrt{k^2 - n^2}. \quad (14.8)$$

Период затухающих колебаний T^* представляет собой промежуток времени между двумя последовательными прохождениями точки в одном направлении через положение покоя (рис. 27):

$$T^* = \frac{2\pi}{k^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (14.9)$$

Формулу (14.9) можно представить в следующем виде:

$$T^* = \frac{2\pi}{k \sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}}, \quad (14.10)$$

где $T = \frac{2\pi}{k}$ — период свободных колебаний этой же точки.

Формула (14.10) показывает, что период затухающих колебаний больше периода свободных колебаний точки. Однако при небольшом сопротивлении это увеличение незначительно. В случае небольшого сопротивления период затухающих колебаний можно принимать равным периоду свободных колебаний.

Амплитудой затухающих колебаний называют наибольшие отклонения точки в ту и другую сторону от положения покоя в течение каждого колебания.

Из последовательных значений переменной амплитуды можно составить ряд (рис. 28):

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n.$$

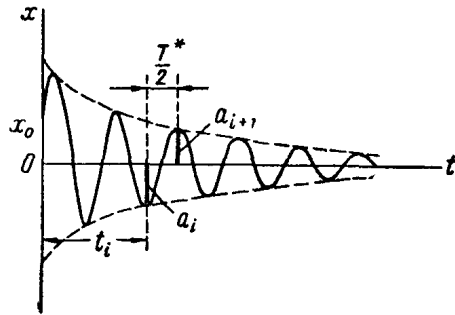


Рис. 28.

Определим отношение последовательных членов ряда a_{i+1} и a_i , соответствующих моментам времени $t_{i+1} = t_i + \frac{T^*}{2}$ и t_i :

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{ae^{-n\left(t_i + \frac{T^*}{2}\right)}}{ae^{-nt_i}} = e^{-n\frac{T^*}{2}}. \quad (14.11)$$

Так как отношение $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ постоянно и по величине меньше единицы, то последовательные значения амплитуды составляют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $e^{-\frac{nT^*}{2}}$.

Отвлеченное число $e^{-\frac{nT^*}{2}}$ называется *декрементом* затухающих колебаний; натуральный логарифм декремента, т. е. величина $-\frac{nT^*}{2}$

называется *логарифмическим декрементом* *:

$$-n\frac{T^*}{2} = -\frac{\pi n}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (14.12)$$

Коэффициент n называют *коэффициентом затухания*.

Затухание колебаний происходит очень быстро даже при малом сопротивлении. Так, например, при $n = 0,05k$:

$$T^* = 1,00125T, \\ e^{-nT^*} = 0,7301,$$

т. е. период затухающих колебаний T^* отличается от периода свободных колебаний T лишь на 0,125%, а амплитуда колебаний за время одного полного колебания уменьшается на 0,27 своей величины, а после 10 полных колебаний становится равной лишь 0,04304 своего первоначального значения.

Таким образом, основное влияние сопротивления на свободные колебания материальной точки выражается в уменьшении амплитуды колебаний с течением времени, т. е. в затухании колебаний.

§ 15. Аперриодическое движение точки

Движение материальной точки теряет колебательный характер и становится аперриодическим в случае большого сопротивления, т. е. при $n \geq k$ или $a \geq 2\sqrt{mc}$.

а) При $n > k$ корни характеристического уравнения (14.3) вещественны, отрицательны и различны:

$$z_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2}, \quad z_2 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Общее решение уравнения (14.2) имеет вид

$$x = e^{-nt} (C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t}). \quad (15.1)$$

Введем вместо постоянных интегрирования C_1 и C_2 две новые постоянные B_1 и B_2 , положив

$$C_1 = \frac{B_1 + B_2}{2}, \quad C_2 = \frac{B_1 - B_2}{2}.$$

Подставив эти значения C_1 и C_2 в уравнение (15.1), получим

$$x = e^{-nt} \left(B_1 \frac{e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} + e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t}}{2} + B_2 \frac{e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} - e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t}}{2} \right).$$

Введем в полученное уравнение гиперболические функции:

$$\frac{e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} + e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t}}{2} = ch \sqrt{n^2 - k^2} t,$$

$$\frac{e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} - e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t}}{2} = sh \sqrt{n^2 - k^2} t.$$

* «Декремент» означает убывание.

Тогда получаем уравнение в следующем виде:

$$x = e^{-nt} (B_1 ch \sqrt{n^2 - k^2} t + B_2 sh \sqrt{n^2 - k^2} t).$$

Дальнейшее преобразование этого уравнения проведем путем замены постоянных B_1 и B_2 двумя другими постоянными a и β по условию:

$$B_1 = ash\beta, \quad B_2 = ach\beta.$$

Тогда уравнение примет вид

$$x = ae^{-nt} sh(\sqrt{n^2 - k^2} t + \beta). \quad (15.2)$$

Уравнение движения точки (15.2) показывает, что рассматриваемое движение точки не является колебательным, так как гиперболический синус не является периодической функцией. В зависимости от начальных условий материальная точка может совершать одно из движений, графики которых показаны на рис. 29—31.

Все три графика соответствуют начальному отклонению точки от положения покоя на величину $x_0 > 0$. На рис. 29 показан график движения точки с начальной скоростью v_0 , имеющей направление, совпадающее с направлением оси x . Благодаря этой скорости точка сначала удаляется от положения покоя, а затем под действием восстанавливающей силы постепенно приближается к этому положению. Графики (рис. 30 и 31) соответствуют движению точки с начальной скоростью v_0 , направленной противоположно направлению оси x . При достаточно большой начальной скорости точка может совершить один переход через положение покоя и затем при обратном движении приближаться к этому положению (рис. 30).



Рис. 29.



Рис. 30.

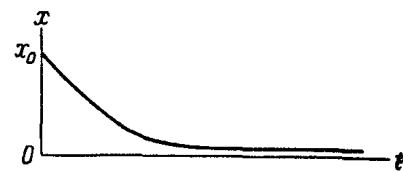


Рис. 31.

б) При $n = k$ корни характеристического уравнения (14.3) вещественны, равны и отрицательны:

$$z_1 = z_2 = -n.$$

Общее решение уравнения (14.2) в этом случае имеет вид

$$x = e^{-nt} (C_1 t + C_2). \quad (15.3)$$

Движение точки, определяемое уравнением (15.3), является также *аперриодическим*.

Постоянные C_1 и C_2 определяются по начальным условиям $t = 0$, x_0 , \dot{x}_0 из уравнения (15.3) и из уравнения, полученного его дифференцированием.

Пример 5. К пружине AB с коэффициентом жесткости 10 см/см , закрепленной неподвижно концом A , прикреплена железная пластинка массой $m = 50 \text{ г}$, находящаяся между полюсами магнита (рис. 32). Магнитный поток между его полюсами равен $\Phi = 2.10^{-5}$ вебер. Появление токов Фуко вызывает сопротивление движению пластинки в магнитном поле. Сила сопротивления $R = \mu v \Phi^2$ ньютонов, где $\mu = 10^9$, v — скорость в м/сек , а Φ — магнитный поток между полюсами магнита. Определить движение пластинки, которое возникает, если пластинка, находящаяся в положении покоя, сообщить начальную скорость $v_0 = 26,8 \text{ см/сек}$, направленную вниз.

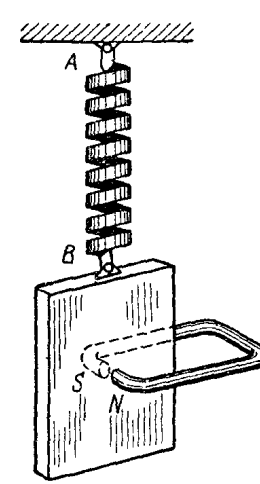


Рис. 32.

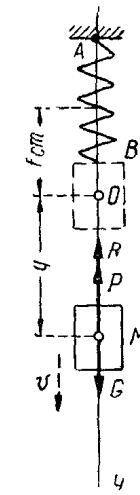


Рис. 33.

Решение. Положение поступательно движущейся пластинки будем определять положением ее центра тяжести. Направим ось y вертикально вниз и за начало координат O примем положение центра тяжести пластинки, соответствующее статическому удлинению пружины (рис. 33). Тогда начальные условия будут следующими: $t = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0$.

На движущуюся пластинку в положении M действуют силы: сила тяжести G , сила упругости пружины P , проекция которой на ось y определяется выражением $P_y = -c(f_{ст} + y)$, и сила сопротивления $R = -\mu \Phi^2 v$, имеющая проекцию на ось y : $R_y = -\mu \Phi^2 \dot{y}$.

Дифференциальное уравнение движения пластинки под действием сил P , R и G имеет вид

$$m \ddot{y} = \sum Y_i = P_y + R_y + G,$$

или

$$m \ddot{y} = -c(f_{ст} + y) - \mu \Phi^2 \dot{y} + G.$$

Согласно (12.1) имеем $P_{ст} = c f_{ст} = G$. Учитывая это, получаем дифференциальное уравнение движения пластинки:

$$m \ddot{y} = -c y - \mu \Phi^2 \dot{y}$$

или

$$\ddot{y} + \frac{\mu \Phi^2}{m} \dot{y} + \frac{c}{m} y = 0. \quad (15.4)$$

Уравнение (15.4) представляет собой дифференциальное уравнение (14.2), где

$$2n = \frac{\mu\Phi^2}{m}, \quad k^2 = \frac{c}{m}.$$

Определяем числовые значения n и k , пользуясь системой единиц МКС. В этой системе

$$m = 0,05 \text{ кг}, \quad c = 10 \text{ сн/см} = 10 \text{ н/м},$$

$$\Phi = 2 \cdot 10^{-5} \text{ вебер},$$

$$n = \frac{\mu\Phi^2}{2m} = \frac{10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 0,05} = 4 \text{ сек}^{-1},$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0,05}} \approx 14 \text{ сек}^{-1}.$$

Так как $n < k$, то движение пластинки представляет собой затухающие колебания. Уравнение движения пластинки имеет вид (14.4):

$$y = ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \beta).$$

Постоянные a и β определяем по формулам (14.6) и (14.7), пользуясь начальными условиями.

При $y_0 = 0$ формула (14.6) принимает вид:

$$a = \frac{\dot{y}_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Определяем числовое значение a :

$$\sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{196 - 16} = 13,4 \text{ сек}^{-1},$$

$$a = \frac{26,8}{13,4} = 2 \text{ см}.$$

При $y_0 = 0$ по формулам (14.7)

$$\operatorname{tg} \beta = 0; \quad \cos \beta = \frac{\dot{y}_0}{a\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{26,8}{2 \cdot 13,4} = 1; \quad \beta = 0.$$

Подставляя числовые значения, получаем уравнение движения

$$y = 2e^{-4t} \sin 13,4t \text{ (см)}.$$

§ 16. Вынужденные колебания материальной точки

Вынужденные колебания совершает материальная точка, на которую наряду с восстанавливающей силой действует периодически изменяющаяся сила, называемая *возмущающей силой*.

Практически наиболее важным является случай, когда возмущающая сила Q изменяется по гармоническому закону, т. е. проекция ее на ось x , направленную по траектории точки, определяется:

$$Q_x = H \sin(pt + \delta), \quad (16.1)$$

где H — максимальный модуль, или амплитуда возмущающей силы; p — частота изменения возмущающей силы, равная числу полных циклов изменения возмущающей силы за 2π сек (см. ч. I, «Кинематика», § 89);

$pt + \delta$ — фаза изменения возмущающей силы;

δ — начальная фаза изменения возмущающей силы.

Период изменения возмущающей силы τ определяется по ее частоте:

$$\tau = \frac{2\pi}{p}. \quad (16.2)$$

Изменение возмущающей силы по гармоническому закону можно наблюдать в устройствах, имеющих схему, изображенную на рис. 34.

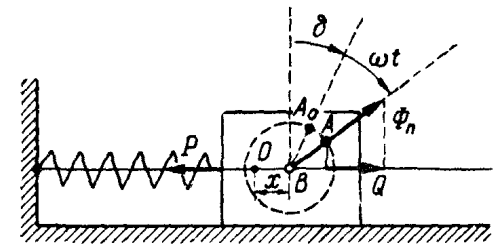


Рис. 34.

Положим, что стержень BA с грузом A заклинен на валу, вращающемся с постоянной угловой скоростью ω . Подшипники, в которых вращается вал, укреплены на теле, прикрепленном к горизонтальной пружине и находящемся на гладкой горизонтальной плоскости.

Пренебрегая массой стержня и рассматривая груз как материальную точку массой m , можно определить его центробежную силу инерции Φ_n . Эта сила направлена от центра вращения и приложена к связи, т. е. к телу, несущему подшипники, и равна

$$\Phi_n = m\omega_n^2 = m \cdot BA \cdot \omega^2.$$

Пусть угол поворота стержня, отсчитанный от вертикали, в начальный момент равен δ . Тогда в момент времени t этот угол равен $\omega t + \delta$. Проекция силы Φ_n на горизонтальную ось Ox , направленную по оси пружины, определяется:

$$\Phi_{nx} = \Phi_n \sin(\omega t + \delta).$$

Таким образом, в горизонтальном направлении на тело действует возмущающая сила Q , проекция которой на ось x имеет вид (16.1):

$$Q_x = H \sin(pt + \delta),$$

где $H = \Phi_n$, а $p = \omega$, т. е. амплитуда возмущающей силы равна модулю центробежной силы инерции груза, а частота изменения возмущающей силы равна угловой скорости вращения стержня.

Возмущающая сила Q смещает тело то в одном, то в другом направлении по горизонтали, вызывая деформацию пружины. При этом появляется восстанавливающая сила P , зависящая от деформации пружины. Модуль и направление возмущающей силы Q не зависят от положения тела на оси x , а зависят только от положения стержня.

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки M (рис. 35) под действием восстанавливающей силы P и возмущающей силы Q , изменяющейся по гармоническому закону.

Направим ось x по прямолинейной траектории точки M , а начало координат поместим в положение покоя точки M , соответствующее недеформированной пружине.

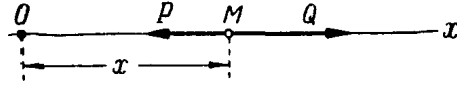


Рис. 35.

Составим дифференциальное уравнение движения точки, учитывая, что на точку M с координатой x в момент времени t действуют силы P и Q , имеющие проекции на ось x :

$$P_x = -cx \quad \text{и} \quad Q_x = H \sin(pt + \delta).$$

Получим:

$$m\ddot{x} = -cx + H \sin(pt + \delta),$$

или

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{H}{m} \sin(pt + \delta).$$

Здесь $\frac{c}{m} = k^2$ — квадрат частоты свободных колебаний. Введя обозначение $\frac{H}{m} = h$, получим:

$$\ddot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta). \quad (16.3)$$

Уравнение (16.3) представляет собой *дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки*.

Общее решение уравнения (16.3) складывается из общего решения однородного уравнения $\ddot{x} + k^2x = 0$ и частного решения данного уравнения (16.3):

$$x = x^* + x^{**}.$$

Однородное уравнение $\ddot{x} + k^2x = 0$ имеет общее решение (11.3):

$$x^* = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

В соответствии с видом функции $f(t)$ в правой части уравнения (16.3) будем искать частное решение уравнения (16.3) в виде:

$$x^{**} = A \sin(pt + \delta). \quad (16.4)$$

Определим постоянную A подстановкой функции (16.4) в уравнение (16.3).

Так как $\ddot{x}^{**} = -Ap^2 \sin(pt + \delta)$, то после подстановки (16.4) в уравнение (16.3) получим:

$$-Ap^2 \sin(pt + \delta) + Ak^2 \sin(pt + \delta) = h \sin(pt + \delta).$$

Полученное равенство должно быть справедливо при любом значении $\sin(pt + \delta)$. Это выполняется лишь при равенстве коэффициентов в левой и правой частях, т. е.

$$A(k^2 - p^2) = h,$$

откуда

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2}. \quad (16.5)$$

Подставляя значение A в выражение (16.4), находим искомое частное решение уравнения (16.3):

$$x^{**} = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (16.6)$$

Общее решение уравнения (16.3) получает вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (16.7)$$

Если же решению однородного уравнения $\ddot{x} + k^2x = 0$ придать вид (11.6), то общее решение уравнения (16.3) примет вид

$$x = a \sin(kt + \beta) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (16.8)$$

Уравнение (16.8) показывает, что точка M совершает сложное колебательное движение, складывающееся из двух гармонических колебаний.

Первый член правой части уравнения (16.8) определяет свободные колебания, а второй — вынужденные колебания точки.

Таким образом, установлено, что *при одновременном действии восстанавливающей и возмущающей сил материальная точка совершает сложное колебательное движение, представляющее собой результат наложения свободных и вынужденных колебаний точки*.

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 в уравнении (16.7) или постоянные a и β в уравнении (16.8) определяются по начальным условиям движения.

Последний член правой части уравнения (16.7) и (16.8), определяющий вынужденные колебания точки, не содержит постоянных интегрирования, следовательно, *вынужденные колебания не зависят от начальных условий движения точки*.

Исследуем вынужденные колебания точки. Эти колебания определяются уравнением (16.6):

$$x^{**} = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta).$$

Частота p и период $\tau = \frac{2\pi}{p}$ вынужденных колебаний совпадают с частотой и периодом изменения возмущающей силы.

Вынужденные колебания, частота p которых меньше частоты k свободных колебаний точки, называют *вынужденными колебаниями малой частоты*.

Вынужденные колебания, частота p которых больше частоты k свободных колебаний, называют *вынужденными колебаниями большой частоты*.

1. Фаза вынужденных колебаний

Уравнение вынужденных колебаний малой частоты (при $p < k$) имеет вид (16.6):

$$x^{**} = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta).$$

В этом случае фаза колебаний $pt + \delta$ совпадает с фазой возмущающей силы и амплитуда вынужденных колебаний определяется формулой (16.5):

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2}.$$

В случае вынужденных колебаний большой частоты (при $p > k$) уравнению (16.6) придают такой вид, чтобы коэффициент при синусе был положительным:

$$x^{**} = \frac{h}{p^2 - k^2} \sin(pt + \delta - \pi). \quad (16.9)$$

В этом случае амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{h}{p^2 - k^2}. \quad (16.10)$$

Фаза вынужденных колебаний большой частоты ($pt + \delta - \pi$) отличается от фазы возмущающей силы ($pt + \delta$) на величину π , т. е. фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы противоположны.

Таким образом, в случае вынужденных колебаний малой частоты точка M всегда отклонена от начала координат O в ту сторону, в которую направлена в данный момент возмущающая сила Q .

В случае вынужденных колебаний большой частоты отклонение точки M от начала координат O всегда противоположно направлению возмущающей силы Q в данный момент. При этом в обоих случаях максимальное отклонение точки от начала координат имеет место в момент времени, когда модуль возмущающей силы достигает максимума.

2. Амплитуда вынужденных колебаний

Исследуем зависимость амплитуды вынужденных колебаний A от частоты p возмущающей силы. Для этого введем статическое отклонение A_0 точки M от начала координат O под действием постоянной силы H (рис. 36).

Величина A_0 определяется из условия равновесия сил H и P :

$$P = cA_0 = H,$$

откуда

$$A_0 = \frac{H}{c} = \frac{\frac{H}{m}}{\frac{c}{m}} = \frac{h}{k^2}.$$

Отношение η амплитуды вынужденных колебаний A к величине A_0 называется *коэффициентом динамичности*:

при $p < k$:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{A}{A_0} = \frac{\frac{h}{k^2 - p^2}}{\frac{h}{k^2}} = \\ &= \frac{k^2}{k^2 - p^2} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{k^2}}; \quad (16.11) \end{aligned}$$

при $p > k$ имеем:

$$\eta = \frac{A}{A_0} = \frac{\frac{h}{p^2 - k^2}}{\frac{h}{k^2}} = \frac{1}{\frac{p^2}{k^2} - 1}. \quad (16.12)$$

Изменение амплитуды вынужденных колебаний A в зависимости от изменения частоты возмущающей силы p характеризуется графиком коэффициента динамичности (рис. 37).

На горизонтальной оси этого графика отложены значения отношения $\frac{p}{k}$, а на вертикальной оси — соответствующие значения

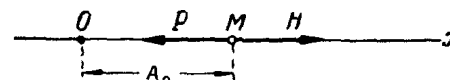


Рис. 36.

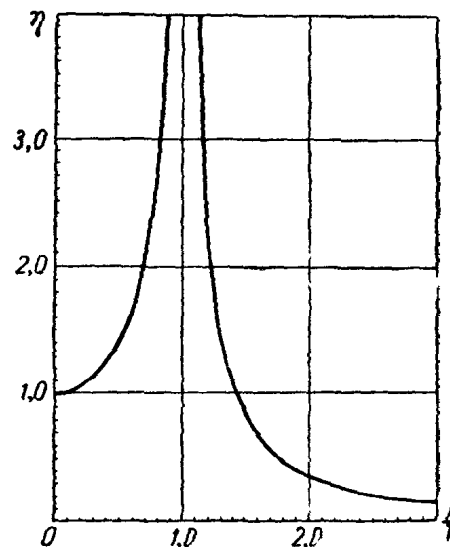


Рис. 37.

величины $\eta = \frac{A}{A_0}$, определенные по формуле (16.11) при $p < k$ и по формуле (16.12) при $p > k$.

График показывает, что при увеличении частоты возмущающей силы от $p = 0$ до $p = k$ коэффициент динамичности возрастает от 1 до ∞ , а при дальнейшем увеличении p до ∞ коэффициент динамичности убывает от ∞ до 0.

При $p = k$ коэффициент динамичности равен бесконечности. Этот случай вынужденных колебаний, называемый *явлением резонанса*, рассмотрен в § 18.

Закончив исследование уравнения (16.6), определяющего вынужденные колебания точки, рассмотрим уравнение (16.7), которое определяет результирующее движение точки под действием возмущающей и восстанавливающей сил:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta).$$

Продифференцируем это уравнение по t :

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos(pt + \delta).$$

Определим значения постоянных C_1 и C_2 , подставив в два последних уравнения начальные условия движения точки $t_0 = 0$, x_0 , \dot{x}_0 :

$$x_0 = C_1 + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin \delta,$$

$$\dot{x}_0 = kC_2 + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos \delta,$$

откуда

$$C_1 = x_0 - \frac{h}{k^2 - p^2} \sin \delta; \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \frac{p}{k} \cos \delta.$$

Подставив эти значения C_1 и C_2 в уравнение (16.7), получим:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \frac{h}{k^2 - p^2} \left(\sin \delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt \right) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (16.13)$$

Согласно уравнению (16.13), движение точки M можно рассматривать как результат сложения трех ее движений:

1) свободных колебаний точки, которые возникли бы при отсутствии возмущающей силы, отклонении точки из положения покоя на расстояние x_0 и сообщении ей начальной скорости v_0 , проекция которой на ось x равна \dot{x}_0 :

$$x_{(1)}^* = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt;$$

2) колебаний, имеющих тоже частоту k , но вызванных действием на точку возмущающей силы:

$$x_{(2)}^* = -\frac{h}{k^2 - p^2} \left(\sin \delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt \right);$$

3) вынужденных колебаний точки, частота которых равна частоте возмущающей силы p :

$$x_{(3)}^{**} = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta).$$

§ 17. Явление биений

При частоте возмущающей силы, близкой к частоте свободных колебаний точки, наступает явление, называемое биениями. Полагая в уравнении (16.13) $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$, рассмотрим колебания материальной точки, вызываемые лишь действием возмущающей силы:

$$x = x_{(2)}^* + x_{(3)}^{**} = -\frac{h}{k^2 - p^2} \left(\sin \delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt \right) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta).$$

Принимая $\frac{p}{k} \approx 1$, приведем это уравнение к виду:

$$x = \frac{h}{k^2 - p^2} [\sin(pt + \delta) - \sin(kt + \delta)].$$

Используя формулу

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

и имея в виду, что $\frac{p+k}{2} \approx p$, получаем

$$x = \frac{2h}{k^2 - p^2} \sin\left(\frac{p-k}{2} t\right) \cos(pt + \delta). \quad (17.1)$$

Уравнение (17.1) определяет движение точки, являющееся результатом наложения дополнительных колебаний, вызванных действием возмущающей силы, на собственно вынужденные колебания в случае $p \approx k$.

Обозначим

$$A(t) = \frac{2h}{k^2 - p^2} \sin\left(\frac{p-k}{2} t\right). \quad (17.2)$$

Тогда уравнение (17.1) примет вид

$$x = A(t) \cos(pt + \delta). \quad (17.3)$$

Движение, определяемое уравнением (17.3), можно рассматривать как колебания частоты p и периода $\tau = \frac{2\pi}{p}$, амплитуда которых $A(t)$ является периодической функцией (17.2).

Период изменения амплитуды

$$T_A = \frac{2\pi}{\frac{p-k}{2}} = \frac{4\pi}{p-k}. \quad (17.4)$$

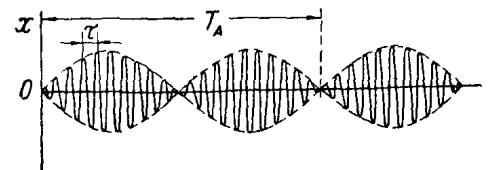


Рис. 38

Так как $p \approx k$, то период T_A велик по сравнению с периодом $\tau = \frac{2\pi}{p}$.

График движения, определяемого уравнением (17.3) и называемого биениями, показан на рис. 38.

§ 18. Явление резонанса

Явление резонанса возникает при совпадении частот вынужденных и свободных колебаний точки:

$$p = k.$$

В этом случае амплитуда вынужденных колебаний точки, вычисленная как по формуле (16.5), так и по формуле (16.10), равна бесконечности и многие выражения из § 16 теряют смысл. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (16.3) при $p = k$ принимает вид

$$\ddot{x} + k^2x = h \sin(kt + \delta). \quad (18.1)$$

Уравнение (18.1) имеет общее решение:

$$x = x^* + x^{**}.$$

Здесь общее решение однородного уравнения $\ddot{x} + k^2x = 0$, по-прежнему, можно представить в виде (11.3):

$$x^* = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Частное решение x^{**} уравнения (18.1) должно быть линейно-независимым от x^* . Поэтому вид (16.4) в этом случае непригоден и частное решение x^{**} ищем в виде:

$$x^{**} = Bt \cos(kt + \delta). \quad (18.2)$$

Находим производную x^{**} как производную произведения функций Bt и $\cos(kt + \delta)$:

$$\dot{x}^{**} = B \cos(kt + \delta) - Bkt \sin(kt + \delta).$$

Аналогично находим:

$$\ddot{x}^{**} = -Bk \sin(kt + \delta) - Bk \sin(kt + \delta) - Bk^2t \cos(kt + \delta).$$

Для нахождения величины B подставляем значения x^{**} и \ddot{x}^{**} в уравнение (18.1):

$$-Bk \sin(kt + \delta) - Bk \sin(kt + \delta) - Bk^2t \cos(kt + \delta) + k^2Bt \cos(kt + \delta) = h \sin(kt + \delta),$$

или

$$-2Bk \sin(kt + \delta) = h \sin(kt + \delta).$$

Приравнявая коэффициенты при синусе в обеих частях уравнения, определяем:

$$B = -\frac{h}{2k}.$$

Получаем общее решение дифференциального уравнения (18.1):

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt - \frac{h}{2k} t \cos(kt + \delta),$$

или

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{2k} t \sin\left(kt + \delta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (18.3)$$

Уравнение (18.3) показывает, что движение точки M при резонансе является результатом наложения свободных и вынужденных колебаний точки, так же как и при $p \neq k$.

Свободные колебания определяются уравнением:

$$x^* = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Вынужденные колебания при резонансе определяются уравнением:

$$x^{**} = \frac{h}{2k} t \sin\left(kt + \delta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (18.4)$$

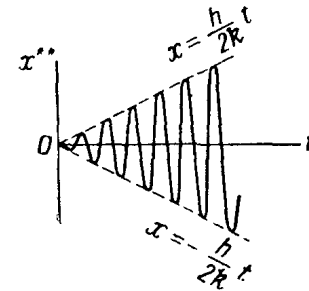


Рис. 39.

Частота и период вынужденных колебаний при резонансе равны частоте k и периоду $T = \frac{2\pi}{k}$ свободных колебаний точки.

Фаза вынужденных колебаний $kt + \delta - \frac{\pi}{2}$ отстает от фаз возмущающей силы $kt + \delta$ на величину $\frac{\pi}{2}$.

Уравнение (18.4) показывает, что амплитуда вынужденных колебаний при резонансе возрастает пропорционально времени. График вынужденных колебаний точки при резонансе показан на рис. 39.

§ 19. Примеры на вынужденные колебания

Пример 6. Определить вынужденные колебания мотора весом $G = 15$ кн, помещенного посередине двух положенных рядом двутавровых балок № 30 с моментами инерции поперечного сечения $J = 8881$ см⁴ и пролетом $l = 10$ м (рис. 40), пренебрегая весом балок и считая их свободно лежащими, если эти колебания вызываются равномерным вращением вала мотора, на котором укреплен груз весом $G_1 = 4$ н на расстоянии $r = 5$ см от оси вращения, если угловая скорость вала $\omega = 25$ сек⁻¹.

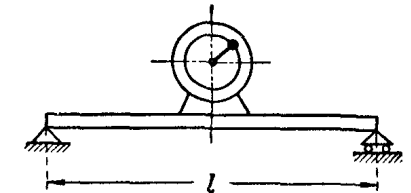


Рис. 40.

Решение. По известной формуле из курса сопротивления материалов определяем статический прогиб упругих балок, свободно лежащих на двух опорах и нагруженных сосредоточенной силой G , приложенной в середине пролета:

$$f_{ст} = \frac{1}{48} \frac{Gl^3}{EJ} = \frac{15000 \cdot 1000^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 8881} = 0,88 \text{ см.}$$

Здесь $E = 2 \cdot 10^7$ н/см² — модуль упругости стали, $2J = 2 \cdot 8881$ см⁴ — суммарный момент инерции поперечного сечения двух балок, поддерживающих мотор.

Частота свободных колебаний мотора на упругой балке определится по формуле (12.3):

$$k = \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}} = \sqrt{\frac{981}{0,88}} = \sqrt{1115} \approx 33,4 \text{ сек}^{-1}.$$

Направим ось y вниз по вертикальной траектории колебательного движения точки M мотора, лежащей на оси вращения вала. Начало координат O совместим с положением покоя точки, соответствующим статическому прогибу балки.

Как указывалось в § 16, центробежная сила инерции Φ_n груза M_1 приложена к связи, т. е. к мотору. Ее проекция на ось y изменится по гармоническому закону (рис. 41):

$$\Phi_{ny} = \Phi_n \sin \varphi = \Phi_n \sin \omega t.$$

Таким образом, на мотор действует вертикальная возмущающая сила Q , проекция которой на ось y равна:

$$Q_y = \Phi_{ny} = \Phi_n \sin \omega t.$$

Восстанавливающей силой является сила упругости балок P , модуль которой пропорционален прогибу балок $f_{ст} + y$, а проекция на ось y равна:

$$P_y = -c(f_{ст} + y).$$

Составим дифференциальное уравнение движения мотора под действием сил P , G и Q (рис. 42):

$$m\ddot{y} = \sum Y_i = -c(f_{ст} + y) + G + \Phi_n \sin \omega t.$$

Преобразуем правую часть уравнения, пользуясь формулой (12.1) $cf_{ст} = G$ и определяя модуль центробежной силы инерции по формуле:

$$\Phi_n = m_1 r \omega^2,$$

где m_1 — масса груза.

Дифференциальное уравнение принимает вид

$$m\ddot{y} = -cy + m_1 r \omega^2 \sin \omega t$$

или

$$\ddot{y} + \frac{c}{m} y = \frac{m_1 r \omega^2}{m} \sin \omega t.$$

Рис. 42.

Полученное уравнение имеет вид (16.3):

$$\ddot{y} + k^2 y = h \sin(pt + \delta),$$

где $\delta = 0$, $p = \omega$, $h = \frac{m_1 r \omega^2}{m} = \frac{G_1 r \omega^2}{G}$.

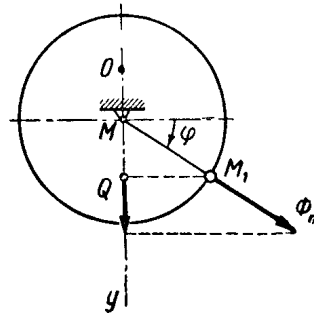
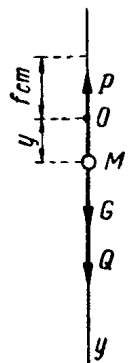


Рис. 41.



Так как $p = \omega = 25 \text{ сек}^{-1}$, а $k = 33,4 \text{ сек}^{-1}$, то имеем вынужденные колебания малой частоты.

Амплитуда вынужденных колебаний мотора определяется по формуле (16.5):

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{G_1 r \omega^2}{G(k^2 - \omega^2)} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 625}{15000(1115 - 625)} = 0,0017 \text{ см}.$$

Уравнение вынужденных колебаний мотора на упругих балках имеет вид (16.4):

$$y^{**} = A \sin \omega t, \text{ т. е. } y^{**} = 0,0017 \sin 25t \text{ (см)}.$$

Пример 7. По условию предыдущего примера найти угловую скорость вала мотора, при которой возникает резонанс.

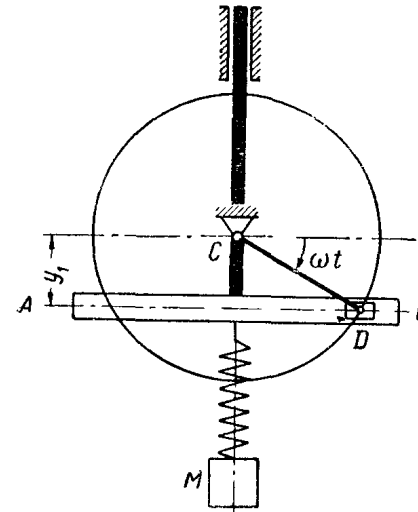


Рис. 43

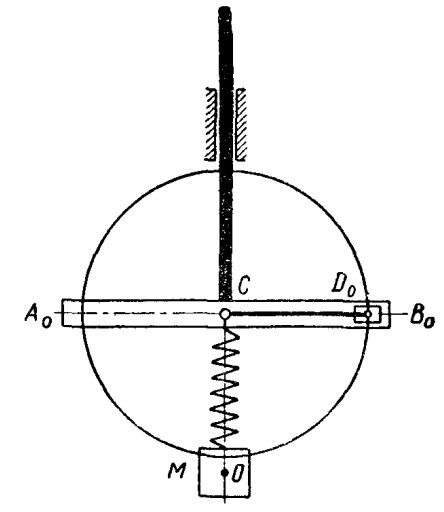


Рис. 44.

Решение. Резонанс возникает в случае, когда частота вынужденных колебаний p равна частоте свободных колебаний точки k . Эта частота называется критической:

$$p_{кр} = k.$$

Так как в рассмотренном примере 6 частота вынужденных колебаний мотора равна угловой скорости вращения его вала, то критическая угловая скорость вала определяется:

$$\omega_{кр} = p_{кр} = k = 33,4 \text{ сек}^{-1}.$$

Выразив угловую скорость в *об/мин*, получим

$$n_{кр} = \frac{30\omega_{кр}}{\pi} = \frac{30 \cdot 33,4}{3,14} \approx 319 \text{ об/мин}.$$

Пример 8. Кривошип CD вращается равномерно вокруг оси C и сообщает кулисе AB поступательное движение согласно уравнению $y_1 = r \sin \omega t$, где $r = CD = 10$ см, $\omega = 5$ сек $^{-1}$. К кулисе прикреплена пружина, поддерживающая груз M весом $G = 4$ н. Коэффициент жесткости пружины $c = 0,2$ н/см. Определить вынужденные колебания груза (рис. 43).

Решение. При колебаниях кулисы AB груз M тоже совершает колебательное движение по вертикали. При этом абсолютное движение груза состоит из его переносного движения вместе с кулисой и относительного движения по отношению к кулисе, происходящего за счет деформации пружины. Направим ось y по траектории движения груза M , принятого за материальную точку.

Начало координат O поместим в положение покоя груза, соответствующее статическому удлинению $f_{ст}$ пружины, при условии, что кулиса занимает среднее положение A_0B_0 (рис. 44). Если в момент времени t кулиса занимает положение AB , определяемое координатой y_1 , а груз M имеет координату y (рис. 45 и 46), то удлинение пружины равно $f_{ст} + (y - y_1)$. Составим дифференциальное уравнение движения груза под действием силы веса G и силы упругости пружины P , проекция которой на ось y



Рис. 45.

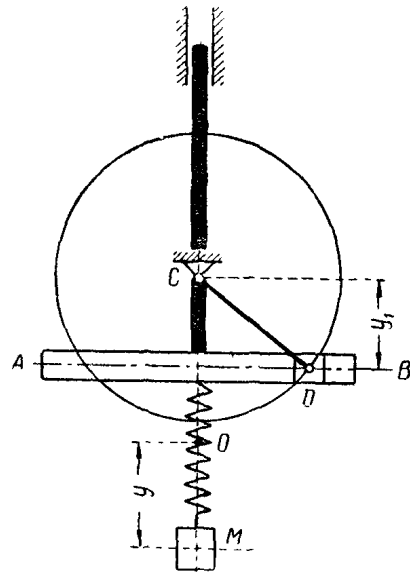


Рис. 46.

$$P_y = -c(f_{ст} + y - y_1).$$

Дифференциальное уравнение имеет вид:

$$m\ddot{y} = G - c(f_{ст} + y - y_1).$$

По формуле (12.1) имеем: $cf_{ст} = G$. По условию задачи: $y_1 = r \sin \omega t$. Учитывая это, получим:

$$m\ddot{y} = -cy + cr \sin \omega t \quad \text{или} \quad \ddot{y} + \frac{c}{m}y = \frac{cr}{m} \sin \omega t.$$

Полученное уравнение имеет вид (16.3)

$$\ddot{y} + k^2y = h \sin(pt + \delta),$$

где

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{0,2 \cdot 981}{4} \approx 49 \text{ сек}^{-2}; \quad k = 7 \text{ сек}^{-1}.$$

$$h = \frac{cr}{m} = 49 \cdot 10 = 490 \text{ см/сек}^{-2}; \quad p = \omega = 5 \text{ сек}^{-1}, \quad \delta = 0.$$

Уравнение вынужденных колебаний (16.4) принимает вид:

$$x^{**} = A \sin \omega t.$$

Так как $p < k$, то амплитуду A определяем по формуле (16.5):

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{490}{49 - 25} = 20,4 \text{ см}.$$

Поэтому

$$x^{**} = 20,4 \sin 5t \text{ (см)}.$$

В рассмотренном устройстве верхний конец пружины не является неподвижным, и через пружину грузу передается возмущающее действие движущейся кулисы. Поэтому груз совершает вынужденные колебания, хотя к нему приложены только вес и сила упругости пружины.

Период и частота колебаний груза равны периоду и частоте колебаний кулисы. Фаза колебаний груза в рассмотренном случае совпадает с фазой колебаний кулисы, так как $p < k$. Если $p > k$, то фазы колебаний груза и кулисы будут противоположны, т. е. при крайнем нижнем положении кулисы груз займет крайнее верхнее положение и наоборот. Амплитуда колебаний груза больше амплитуды колебаний кулисы. При этом величина амплитуды колебаний груза зависит от соотношения величин p и k . Меняя пружины, т. е. частоту свободных колебаний груза k , можно получать при одной и той же угловой скорости кривошипа ω различные амплитуды вынужденных колебаний груза A .

§ 20. Влияние сопротивления движению на вынужденные колебания

Рассмотрим влияние сопротивления движению на вынужденные колебания материальной точки, полагая модуль силы сопротивления пропорциональным первой степени скорости точки. Рассмотрим материальную точку M (рис. 47), совершающую прямолинейное движение под действием восстанавливающей

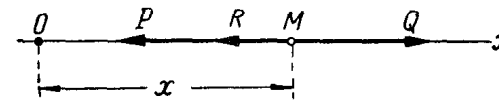


Рис. 47.

силы P , возмущающей силы Q , изменяющейся по гармоническому закону, и силы сопротивления $R = -av$.

Направим ось x по траектории точки M , поместив начало координат O в положение покоя точки, соответствующее недеформированной пружине.

Определим проекции сил \mathbf{P} , \mathbf{Q} и \mathbf{R} на ось x в момент времени t , когда движущаяся точка M имеет координату x . Проекция восстанавливающей силы \mathbf{P} , направленной к положению покоя O , определится формулой: $P_x = -cx$.

Проекция возмущающей силы \mathbf{Q} , изменяющейся по гармоническому закону, определяется формулой (16.1):

$$Q_x = H \sin(pt + \delta).$$

Проекция силы сопротивления $\mathbf{R} = -\alpha\mathbf{v}$, направленной противоположно скорости \mathbf{v} и ей пропорциональной, определяется формулой (14.1):

$$R_x = -\alpha\dot{x}.$$

Дифференциальное уравнение движения точки под действием сил \mathbf{P} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} будет:

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x} + H \sin(pt + \delta).$$

Переносим члены cx и $\alpha\dot{x}$ в левую часть равенства и разделив уравнение на m , получим

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{H}{m}\sin(pt + \delta).$$

Рассмотрим коэффициенты уравнения.

Здесь $\frac{c}{m} = k^2$ — квадрат частоты свободных колебаний;

$\frac{\alpha}{m} = 2n$, где n — коэффициент затухания (см. § 14),

$\frac{H}{m} = h$ — отношение амплитуды возмущающей силы к массе точки (см. § 16).

При этих обозначениях дифференциальное уравнение движения точки примет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta). \quad (20.1)$$

Уравнение (20.1) представляет собой *дифференциальное уравнение вынужденных колебаний при наличии сопротивления движению, пропорционального скорости*.

Общее решение уравнения (20.1) состоит из общего решения уравнения (14.2) и частного решения данного уравнения (20.1):

$$x = x^* + x^{**}.$$

Общее решение уравнения (14.2) x^* в зависимости от соотношения величин k и n может иметь вид (14.4), (15.2) или (15.3).

Частное решение уравнения (20.1) будем искать в форме

$$x^{**} = A_c \sin(pt + \delta - \epsilon). \quad (20.2)$$

Постоянные A_c и ϵ должны быть определены путем подстановки функции x^{**} и ее производных в уравнение (20.1).

Для этого найдем \dot{x}^{**} и \ddot{x}^{**} :

$$\dot{x}^{**} = A_c p \cos(pt + \delta - \epsilon),$$

$$x^{**} = -A_c p^2 \sin(pt + \delta - \epsilon).$$

Подставим x^{**} , \dot{x}^{**} и \ddot{x}^{**} в уравнение (20.1):

$$-A_c p^2 \sin(pt + \delta - \epsilon) + 2nA_c p \cos(pt + \delta - \epsilon) + A_c k^2 \sin(pt + \delta - \epsilon) = h \sin(pt + \delta). \quad (a)$$

Преобразуем правую часть равенства:

$$h \sin(pt + \delta) = h \sin(pt + \delta - \epsilon + \epsilon) = h \sin(pt + \delta - \epsilon) \cos \epsilon + h \cos(pt + \delta - \epsilon) \sin \epsilon.$$

Подставим это выражение в правую часть равенства (a), перенесем все члены в левую часть и сгруппируем отдельно члены, содержащие $\sin(pt + \delta - \epsilon)$ и $\cos(pt + \delta - \epsilon)$:

$$[A_c(k^2 - p^2) - h \cos \epsilon] \sin(pt + \delta - \epsilon) + [2nA_c p - h \sin \epsilon] \cos(pt + \delta - \epsilon) = 0.$$

Это равенство будет справедливым при всех значениях аргумента $(pt + \delta - \epsilon)$ лишь при равенстве нулю коэффициентов при $\sin(pt + \delta - \epsilon)$ и при $\cos(pt + \delta - \epsilon)$. Приравнявая эти коэффициенты нулю, получаем:

$$A_c(k^2 - p^2) = h \cos \epsilon, \quad 2npA_c = h \sin \epsilon. \quad (20.3)$$

Из выражений (20.3) определяем значения A_c и ϵ :

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}; \quad (20.4)$$

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}; \quad (20.5a)$$

$$\sin \epsilon = \frac{2npA_c}{h} = \frac{2np}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}; \quad (20.5b)$$

$$\cos \epsilon = \frac{A_c(k^2 - p^2)}{h} = \frac{k^2 - p^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}. \quad (20.5b)$$

Так как $\sin \epsilon > 0$, то $0 \leq \epsilon \leq \pi$.

Подставляя найденное значение A_c и учитывая, что величина ϵ тоже найдена, получаем частное решение уравнения (20.1) в виде:

$$x^{**} = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt + \delta - \epsilon); \quad (20.6)$$

Общее решение уравнения (20.1) в зависимости от соотношения величин k и n будет следующим:

1) при $n < k$

$$x = ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \beta) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt + \delta - \epsilon); \quad (20.7)$$

2) при $n > k$

$$x = ae^{-nt} sh(\sqrt{n^2 - k^2} t + \beta) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt + \delta - \epsilon); \quad (20.8)$$

3) при $n = k$

$$x = e^{-nt} (C_1 t + C_2) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt + \delta - \epsilon). \quad (20.9)$$

Величины a и β в уравнениях (20.7) и (20.8), а также величины C_1 и C_2 в уравнении (20.9) являются постоянными интегрирования и определяются по начальным условиям движения.

Движение материальной точки под действием восстанавливающей и возмущающей сил и силы сопротивления среды, пропорциональной скорости точки, представляет собой наложение собственно вынужденных колебаний на затухающие колебания при $n < k$ или наложение вынужденных колебаний на аperiodическое движение при $n \geq k$. Наличие множителя e^{-nt} в членах, соответствующих затухающим колебаниям или аperiodическому движению, обуславливает быстрое затухание этих движений.

Поэтому при установившемся режиме, т. е. через достаточно большой промежуток времени после начала движения, результирующее движение точки практически состоит только из собственно вынужденных колебаний, определяемых уравнением (20.6):

$$x^{**} = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt + \delta - \epsilon).$$

На рис. 48 показан график движения точки в случае, когда $n < k$.

1. Исследование вынужденных колебаний при наличии сопротивления движению

Уравнение (20.6) показывает, что вынужденные колебания материальной точки при сопротивлении среды, пропорциональном скорости точки, являются гармоническими колебаниями, так как ампли-

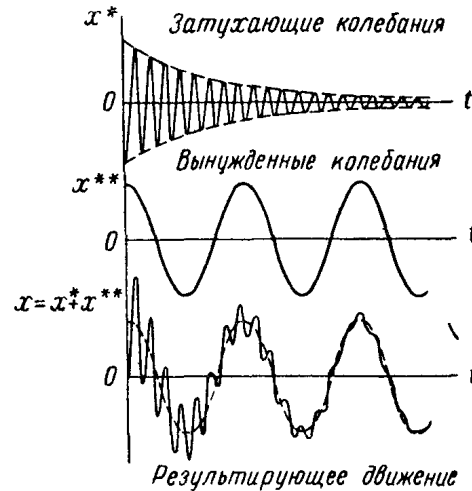


Рис. 48.

туда их не изменяется с течением времени, т. е. *вынужденные колебания под влиянием сопротивления не затухают*. Они не затухают потому, что возмущающая сила все время поддерживает колебательное движение точки.

Этим вынужденные колебания существенно отличаются от свободных колебаний, которые затухают даже при самом незначительном сопротивлении.

2. Частота и период вынужденных колебаний

Частота p и период $\tau = \frac{2\pi}{p}$ вынужденных колебаний точки при наличии сопротивления равны частоте и периоду изменения возмущающей силы, т. е. *сопротивление не влияет на частоту и период вынужденных колебаний*.

3. Фаза вынужденных колебаний

Фаза вынужденных колебаний точки при наличии сопротивления $(pt + \delta - \epsilon)$ отстает от фазы возмущающей силы $(pt + \delta)$ на величину ϵ , называемую *сдвигом фазы* и определяемую формулами (20.5).

Из формулы (20.5б) следует, что $0 \leq \epsilon \leq \pi$. В этих пределах величина сдвига фазы ϵ однозначно определяется формулой (20.5а):

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \epsilon = \frac{2 \frac{n}{k} \frac{p}{k}}{1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2}.$$

Величина ϵ зависит от отношения $\frac{p}{k}$, характеризующего возмущающую силу, и от отношения $\frac{n}{k}$, характеризующего сопротивление

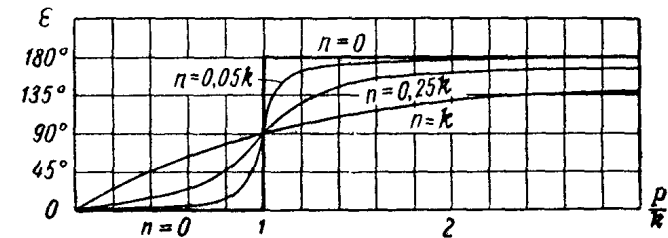


Рис. 49.

среды. Поэтому, задавшись определенным значением отношения $\frac{n}{k}$, можно построить кривую зависимости ϵ от отношения $\frac{p}{k}$. Такие кривые построены на рис. 49 для различных значений $\frac{n}{k}$.

При отсутствии сопротивления $n=0$ и $\operatorname{tg} \varepsilon=0$. В этом случае $\varepsilon=0$ для вынужденных колебаний малой частоты ($p < k$) и $\varepsilon=\pi$ для вынужденных колебаний большой частоты ($p > k$).

Под влиянием сопротивления этот разрыв сглаживается.

Если $p=k$, то при любом значении коэффициента затухания n

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2} = \infty, \quad \text{т. е.} \quad \varepsilon = \frac{\pi}{2}.$$

Зная k , p и n , можно определить сдвиг фазы ε непосредственно по графику.

4. Амплитуда вынужденных колебаний

Амплитуда вынужденных колебаний точки при наличии сопротивления определяется по формуле (20.4):

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}.$$

Из этой формулы следует, что большей величине сопротивления среды, т. е. большему значению коэффициента затухания n , соответствует меньшая величина амплитуды вынужденных колебаний A_c .

Для установления зависимости амплитуды вынужденных колебаний A_c от частоты изменения возмущающей силы p воспользуемся коэффициентом динамичности η , введенным в § 16.

Этот коэффициент представляет собой отношение амплитуды вынужденных колебаний под действием возмущающей силы Q , модуль которой $Q = |H \sin(pt + \delta)|$, к статическому отклонению точки от начала координат $A_0 = \frac{h}{k^2}$ под действием постоянной силы H :

$$\eta = \frac{A_c}{A_0} = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \cdot \left(\frac{h}{k^2}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{n}{k}\right)^2 \left(\frac{p}{k}\right)^2}}. \quad (20.10)$$

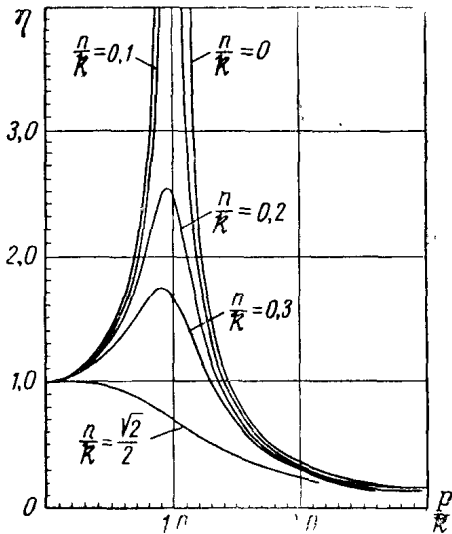


Рис. 50.

Так как коэффициент динамичности зависит от двух величин $\frac{p}{k}$ и $\frac{n}{k}$, то на рис. 50 построены кривые, каждая из которых представляет собой зависимость η от $\frac{p}{k}$ при определенном значении $\frac{n}{k}$.

При отсутствии сопротивления явление резонанса выражается в стремлении амплитуды вынужденных колебаний к бесконечности. На рис. 37 кривая, соответствующая $n=0$, имеет разрыв при $p=k$, т. е. при $\frac{p}{k}=1$. При наличии сопротивления амплитуда, определенная по формуле (20.4), при $p=k$ имеет конечную величину

$$A_c = \frac{h}{2nk}. \quad (20.11)$$

Найдем по правилам дифференциального исчисления то значение p , при котором A_c имеет максимум, а следовательно, подкоренное выражение знаменателя в (20.4) имеет минимум.

Для этого найдем производную этого выражения по p и приравняем ее нулю:

$$\frac{d}{dp} [(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2] = 2(k^2 - p^2)(-2p) + 4n^2 \cdot 2p = 0.$$

Корни этого уравнения

$$p_1 = 0; \quad p_2 = \sqrt{k^2 - 2n^2}. \quad (20.12)$$

При $p_1 = 0$

$$A_c = A_0 = \frac{h}{k^2}.$$

Подставляя значение p_2 в формулу (20.4), получаем максимальное значение амплитуды при данном сопротивлении:

$$A_{c_{\max}} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - 2n^2}}. \quad (20.13)$$

При малом значении n величина $\sqrt{k^2 - 2n^2}$ очень близка к величине k .

Так, например, при $n = 0,05k$

$$\sqrt{k^2 - 2n^2} = 0,9975k.$$

В этом случае

$$A_{c_{\max}} = 10,0125 \frac{h}{k^2} = 10,0125 A_0.$$

Таким образом, при малых значениях n при $p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$ происходит резкое увеличение амплитуды A_c . С увеличением коэффициента n величина $A_{c_{\max}}$ уменьшается. Максимум амплитуды вынужденных колебаний при наличии сопротивления существует только при условии $k^2 - 2n^2 > 0$, т. е. при $n < \frac{k\sqrt{2}}{2}$.

При $n > \frac{k\sqrt{2}}{2}$ максимума A_c не существует, т. е. ординаты кривых (рис. 50) только уменьшаются при увеличении $\frac{p}{k}$.

Так как A_c имеет максимум при $p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$, то по мере увеличения n эти значения p уменьшаются, т. е. точки максимума на линиях зависимости коэффициента динамичности η от $\frac{p}{k}$ (рис. 50) смещаются влево от прямой $\frac{p}{k} = 1$.

Таким образом, влияние сопротивления на вынужденные колебания материальной точки выражается в сдвиге фазы колебаний по отношению к фазе возмущающей силы и в уменьшении амплитуды колебаний по мере увеличения сопротивления.

Пример 9. Прямоугольная пластинка весом $G = 0,5$ н, помещенная в сосуд с вязкой жидкостью, прикреплена к концу B упругой пружины AB с коэффициентом жесткости $0,25$ н/см. В некоторый момент ползунок A , к которому прикреплен верхний конец пружины, начинает совершать вертикальные колебания согласно уравнению $y_1 = b \sin pt$, где $b = 2$ см и $p = 15$ сек⁻¹. Сила сопротивления движению пластинки в жидкости пропорциональна скорости пластинки, причем при скорости 1 см/сек сила сопротивления равна $3,06$ мн. Получить уравнение установившихся вертикальных вынужденных колебаний пластинки (рис. 51, а).

Решение. Поступательное движение пластинки будем рассматривать как движение материальной точки M . Направим ось y вертикально вниз по траектории точки M . Совместим начало координат O с положением покоя M , соответствующим статическому удлинению $f_{ст}$ пружины, при условии, что ползунок A , удерживающий пружину, занимает свое среднее положение O_1 (рис. 51, б). На движущуюся пластинку M , имеющую координату y (рис. 51, в), действуют три силы: вес G , сила упругости пружины P и сила сопротивления жидкости R .

Отклонение пластинки y от положения покоя O превышает отклонение ползунка y_1 от его среднего положения на величину динамического удлинения пружины. Это удлинение равно $y - y_1$. Полное удлинение пружины равно $f_{ст} + y - y_1$.

Проекция силы P на ось y

$$P_y = -c(f_{ст} + y - y_1).$$

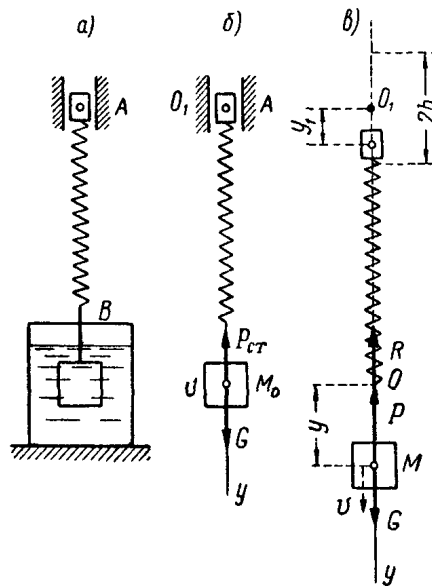


Рис. 51.

Проекция силы сопротивления $R = -\alpha v$ на ось y равна:

$$R_y = -\alpha \dot{y}.$$

Составляем дифференциальное уравнение движения пластинки под действием сил P , R и G :

$$m\ddot{y} = \sum Y_i = -c(f_{ст} + y - y_1) - \alpha \dot{y} + G.$$

Подставляя значение $y_1 = b \sin pt$ и учитывая, что $P_{ст} = cf_{ст} = G$ (рис. 51, б), получаем:

$$m\ddot{y} = -cy + cb \sin pt - \alpha \dot{y},$$

или

$$\ddot{y} + \frac{\alpha}{m} \dot{y} + \frac{c}{m} y = \frac{cb}{m} \sin pt.$$

Полученное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение (20.1) вынужденных колебаний точки при наличии сопротивления среды, пропорционального скорости точки:

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = h \sin(pt + \delta).$$

Определяем числовые значения параметров:

$$n = \frac{\alpha}{2m}.$$

Так как $\alpha = 3,06$ мн · сек/см,

то $n = \frac{3,06 \cdot 10^{-3} \cdot 980}{2 \cdot 0,5} = 3$ сек⁻¹,

$$k^2 = \frac{c}{m};$$

так как $c = 0,25$ н/см, то

$$k^2 = \frac{0,25 \cdot 980}{0,5} = 490 \text{ сек}^{-2},$$

$$h = \frac{cb}{m} = \frac{0,25 \cdot 980 \cdot 2}{0,5} = 980 \text{ см/сек}^2,$$

$$p = 15 \text{ сек}^{-1}, \quad \delta = 0.$$

Уравнение установившихся вынужденных колебаний пластинки имеет вид (20.6):

$$y = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt + \delta - \epsilon).$$

Определяем сдвиг фазы колебаний по отношению к фазе возмущающей силы, пользуясь формулой (20.5а):

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 15}{490 - 225} = \frac{90}{265} = 0,33963.$$

По таблице тангенсов находим:

$$\epsilon = 18^\circ 45' 32''.$$

Выражая ε в радианах для подстановки в уравнение движения, получаем $\varepsilon = 0,3274$.

Для определения амплитуды находим:

$$\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} = \sqrt{(490 - 225)^2 + 4 \cdot 9 \cdot 225} \approx 280 \text{ сек}^{-2}.$$

Амплитуда вынужденных колебаний равна:

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{980}{280} \approx 3,5 \text{ см.}$$

Уравнение вынужденных колебаний пластинки будет:

$$y = 3,5 \sin(15t - 0,3274) \text{ (см.)}$$

В рассмотренном примере пластинка совершает вынужденные колебания в результате возмущающего действия колебаний верхнего конца пружины, которое через пружину передается пластинке. Частотой и фазой возмущающей силы является частота p и фаза pt колебаний ползунка.

Вопросы для самоконтроля

1. Под действием какой силы совершаются свободные колебания материальной точки?
2. Какой вид имеет дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки?
3. От каких факторов зависят частота, период, амплитуда и начальная фаза свободных колебаний материальной точки?
4. Каков вид графиков свободных и затухающих колебаний, а также апериодического движения материальной точки?
5. Какой вид имеет дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки и каково его общее решение?
6. Из каких составляющих движений складывается движение материальной точки, находящейся под действием восстанавливающей и возмущающей сил?
7. Каковы частота и период вынужденных колебаний материальной точки?
8. Какие вынужденные колебания называются колебаниями малой частоты и какие — колебаниями большой частоты? Чем характеризуются тот и другой вид колебаний?
9. От каких факторов зависит амплитуда вынужденных колебаний точки?
10. Что называют коэффициентом динамичности и каков график его зависимости от отношения $\frac{p}{k}$?
11. При каком условии возникает явление биений; каков график биений?
12. При каких условиях возникает резонанс и каковы уравнение и график вынужденных колебаний материальной точки при резонансе?
13. Как влияет сопротивление, пропорциональное скорости, на амплитуду, фазу, частоту и период вынужденных колебаний?
14. Как определить максимальное значение амплитуды вынужденных колебаний при данном значении коэффициента затухания n ?
15. При каком значении коэффициента затухания максимум амплитуды вынужденных колебаний не существует?
16. Какова зависимость сдвига фазы колебаний ε от частоты изменения возмущающей силы p и от коэффициента затухания n ?

ДИНАМИКА НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 21. Несвободная материальная точка. Связи и динамические реакции связей

Несвободной материальной точкой называется точка, свобода движения которой ограничена. Тела, ограничивающие свободу движения точки, называются *связями*.

Пусть связь представляет собой поверхность некоторого тела, по которой движется точка. Тогда координаты точки должны удовлетворять уравнению этой поверхности, называемому уравнением связи:

$$f(x, y, z) = 0. \quad (21.1)$$

Аналогично, если точка вынуждена двигаться по некоторой линии (движение шарика внутри криволинейной трубки), то уравнениями связи являются уравнения этой линии:

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0. \quad (21.2)$$

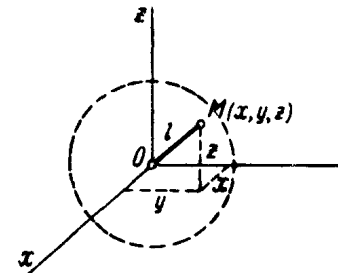


Рис. 52.

Таким образом, движение несвободной материальной точки зависит не только от приложенных к точке сил и начальных условий, а также от имеющихся связей. При этом значения начальных условий не могут быть независимыми друг от друга, а должны удовлетворять уравнениям связей.

Связи, уравнения которых не содержат явно времени, называются стационарными.

Примером такой связи может служить абсолютно жесткий стержень OM длиной l , соединяющий материальную точку с неподвижной точкой O (рис. 52). Стержень OM ограничивает движение точки, допуская ее движение лишь по сферической поверхности радиусом l .

Уравнение связи имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0. \quad (21.3)$$

Уравнение (21.3) связывает координаты точки и не содержит времени.

Связи, уравнения которых содержат время t , называются нестационарными.

Рассмотрим пример такой связи — материальную точку M , прикрепленную к концу нерастяжимой и невесомой нити $КОМ$, проходящей через неподвижное кольцо O (рис. 53).

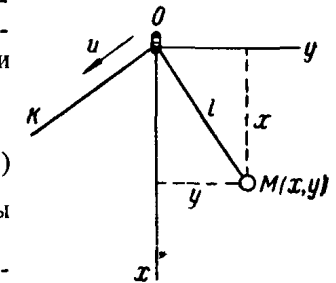


Рис. 53.

Если конец нити K перемещается с постоянной скоростью u , то длина нити $OM = l$ изменяется с течением времени согласно уравнению:

$$l = l_0 - ut,$$

где l_0 — длина OM_0 в начальный момент.

Если нить KOM остается в одной и той же плоскости, то в системе координат xOy получим

$$x^2 + y^2 = l^2,$$

или

$$x^2 + y^2 - (l_0 - ut)^2 = 0. \quad (21.4)$$

Для каждого момента времени уравнение связи определяет окружность, но с течением времени радиус этой окружности уменьшается. Таким образом, точка M должна находиться на окружности, стягивающейся с течением времени в точку.

В этом случае уравнение связи

$$f(x, y, t) = 0, \quad (21.5)$$

кроме координат точки x и y , содержит время t .

Связи, накладывающие ограничения не только на координаты точки, но и на ее скорость, называются неголономными.

Уравнения неголономных связей имеют вид

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0, \quad (21.6)$$

причем соотношения (21.6) не интегрируемы, так как в противном случае после интегрирования можно было бы получить уравнения, связывающие только координаты точки.

Связи, не накладывающие ограничений на скорость точки, называются голономными.

Примерами голономных связей являются связи, рассмотренные выше.

Кроме рассмотренных классификаций, существует деление связей на *двусторонние, или удерживающие*, и связи *односторонние, или неудерживающие*.

Примером односторонней связи может служить горизонтальная плоскость (рис. 54, а), примером двусторонней связи — совокупность двух горизонтальных плоскостей (рис. 54, б).

Горизонтальная плоскость препятствует перемещению шарика только вертикально вниз. Две горизонтальные плоскости препятствуют его перемещению как вниз, так и вверх по вертикали.

Односторонней, или неудерживающей, называется связь, препятствующая перемещению тела в некотором направлении и допускающая его перемещение в противоположном направлении.

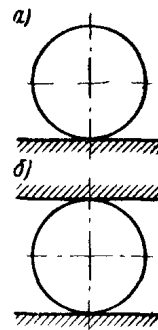


Рис. 54.

Двусторонней, или удерживающей, называется связь, препятствующая перемещению тела в двух противоположных направлениях.

При наличии односторонней связи материальная точка может в некоторый момент времени отделиться от связи и начать двигаться свободно. В этот момент реакция связи становится равной нулю. До этого момента реакция направлена только в сторону возможного отдаления точки от связи.

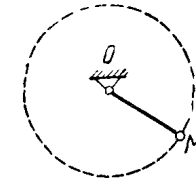


Рис. 55.

Так, например, тяжелый шарик M , привязанный к нити OM , закрепленной в точке O , может находиться не только на поверхности сферы радиусом $r = l = OM$, но и внутри сферы (рис. 55).

Движение шарика внутри сферы должно происходить как свободное до тех пор, пока он не удалится от неподвижной точки на расстояние, равное длине нити.

Рассмотренная связь имеет уравнение:

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leq 0. \quad (21.7)$$

Если материальная точка движется по окружности радиусом l с центром в начале координат и окружность расположена в плоскости yOz , то уравнение связи имеет вид:

$$y^2 + z^2 = l^2 \quad \text{и} \quad x = 0.$$

Неравенство, соответствующее неудерживающей нестационарной связи, имеет общий вид:

$$f(x, y, z, t) \leq 0 \quad (21.8)$$

или

$$f(x, y, z, t) \geq 0. \quad (21.9)$$

Все силы, действующие на несвободную материальную точку, или несвободное тело, делят на *задаваемые силы и реакции связей*.

Задаваемые силы выражают действие на материальную точку некоторых тел, вызывающих или стремящихся вызвать определенное ее движение.

Реакции связей выражают действие связей, ограничивающих движение материальной точки или препятствующих ему.

При изучении движения несвободной материальной точки применяют принцип освобожденности точки от связей, использованный ранее в курсе статики (гл. I, § 3).

Принцип освобожденности точки от связей позволяет рассматривать движение несвободной материальной точки как движение свободной точки под действием задаваемых сил и реакций связей.

§ 22. Дифференциальные уравнения движения материальной точки по заданной неподвижной поверхности

Рассмотрим материальную точку M , движущуюся под действием задаваемой силы \mathbf{P} по некоторой неподвижной поверхности, являющейся для точки связью (рис. 56). Пусть уравнение этой поверхности имеет вид:

$$f(x, y, z) = 0.$$

Рассмотрим сначала случай, когда эта поверхность абсолютно гладкая. В этом случае реакция связи \mathbf{N} направлена по нормали к поверхности и называется нормальной реакцией.

Согласно принципу освобождения от связи отбросим связь, заменив ее действие реакцией \mathbf{N} . Тогда для несвободной материальной точки M получим основное уравнение динамики

$$m\mathbf{w} = \mathbf{P} + \mathbf{N}. \quad (22.1)$$

Спроектировав векторы обеих частей этого равенства на оси x, y, z , получим дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки M :

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + N_x, \\ m\ddot{y} &= Y + N_y, \\ m\ddot{z} &= Z + N_z, \end{aligned} \right\} (22.2)$$

где X, Y, Z — проекции силы \mathbf{P} на оси x, y, z , а N_x, N_y, N_z — проекции нормальной реакции \mathbf{N} на те же оси, т. е.

$$N_x = N \cos(\mathbf{N}, \mathbf{i}); \quad N_y = N \cos(\mathbf{N}, \mathbf{j}); \quad N_z = N \cos(\mathbf{N}, \mathbf{k}).$$

При наличии удерживающей связи, т. е. двух параллельных поверхностей, между которыми движется точка, реакция \mathbf{N} может быть направлена по нормали к поверхности как в одну, так и в другую сторону. Условимся считать нормальную реакцию положительной, когда она направлена в сторону внешней нормали к поверхности, т. е. в сторону точек пространства, для которых $f(x, y, z) > 0$, и отрицательной — в противоположном случае.

Тогда косинусы углов, образованных направлением \mathbf{N} с осями координат, можно определить по формулам дифференциальной геометрии как направляющие косинусы внешней нормали к поверхности, имеющей уравнение $f(x, y, z) = 0$:

$$\cos(\mathbf{N}, \mathbf{i}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f}; \quad \cos(\mathbf{N}, \mathbf{j}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta f}; \quad \cos(\mathbf{N}, \mathbf{k}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta f}, \quad (22.3)$$

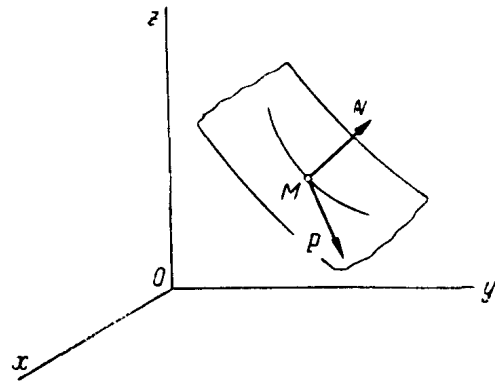


Рис. 56.

где

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \quad (22.4)$$

Определив проекции N_x, N_y, N_z при помощи формулы (22.4) и подставив найденные значения в дифференциальные уравнения (22.3), получим:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \frac{N}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= Y + \frac{N}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= Z + \frac{N}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \right\} (22.5)$$

Обозначив $\frac{N}{\Delta f} = \lambda$ (множитель Лагранжа), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \right\} (22.6)$$

Уравнения (22.6) называются *дифференциальными уравнениями движения несвободной материальной точки в форме Лагранжа*.

Из трех дифференциальных уравнений (22.6) и уравнения связи (21.1) можно определить в зависимости от времени четыре неизвестные величины: x, y, z, λ .

Получив координаты точки x, y, z как функции времени, определим движение точки M .

Определив множитель Лагранжа λ , можно найти алгебраическое значение нормальной реакции поверхности по формуле:

$$N = \lambda \Delta f. \quad (22.7)$$

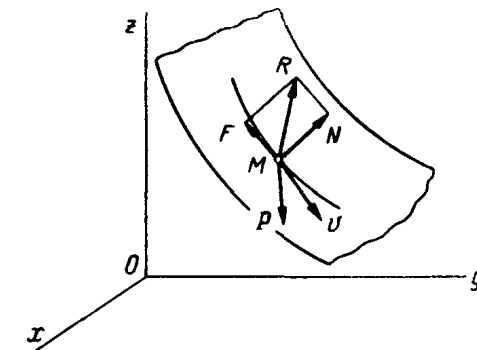


Рис. 57.

При наличии неудерживающей связи (одной поверхности) направление реакции совпадает с определенным направлением нормали. В этом случае обращение значения N в нуль с последующим изменением знака означает отрыв точки M от поверхности.

Рассмотрим теперь движение материальной точки по заданной негладкой неподвижной поверхности, уравнение которой $f(x, y, z) = 0$. В этом случае реакция связи \mathbf{R} имеет две составляющие: нормальную реакцию \mathbf{N} и силу трения \mathbf{F} с модулем $F = fN$, направленную противоположно скорости точки (рис. 57).

Основное уравнение динамики для несвободной материальной точки в этом случае имеет вид

$$m\mathbf{w} = \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{F}. \quad (22.8)$$

Ему соответствуют дифференциальные уравнения движения точки:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + N_x + F_x, \\ m\ddot{y} &= Y + N_y + F_y, \\ m\ddot{z} &= Z + N_z + F_z. \end{aligned} \right\} \quad (22.9)$$

Проекция силы трения на оси координат можно представить так:

$$F_x = F \cos(\mathbf{F}, \mathbf{i}) = -F \cos(\mathbf{v}, \mathbf{i}) = -F \frac{v_x}{v} = -\frac{F}{v} \dot{x}.$$

Аналогично

$$F_y = -\frac{F}{v} \dot{y}, \quad F_z = -\frac{F}{v} \dot{z}.$$

Подставив в уравнения (22.9) значения проекций нормальной реакции \mathbf{N} и силы трения \mathbf{F} , получим дифференциальные уравнения движения точки в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{F}{v} \dot{x}, \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{F}{v} \dot{y}, \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{F}{v} \dot{z}. \end{aligned} \right\} \quad (22.10)$$

Из трех дифференциальных уравнений (22.10), уравнения связи (21.1) и уравнения $F = fN$ можно определить пять неизвестных величин: x , y , z , λ и F . Алгебраическое значение нормальной реакции определится по формуле (22.7).

§ 23. Дифференциальные уравнения движения материальной точки по заданной плоской неподвижной линии

Рассмотрим движение материальной точки по заданной гладкой неподвижной линии, лежащей в одной плоскости. Примером такого движения может служить движение шарика в плоской криволинейной трубке (рис. 58).

Положим, что уравнение заданной линии, отнесенное к осям xOy , проведенным в ее плоскости, имеет вид

$$f(x, y) = 0. \quad (23.1)$$

Пусть на точку действует задаваемая сила \mathbf{P} , расположенная в плоскости xOy .

Согласно принципу освобожденности от связей заменим действие связи (заданной гладкой линии) нормальной реакцией \mathbf{N} и для рассматриваемой материальной точки составим основное уравнение динамики:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{P} + \mathbf{N}. \quad (23.2)$$

Так как вектор ускорения \mathbf{w} и сила \mathbf{P} лежат в плоскости xOy , то реакция \mathbf{N} лежит в этой же плоскости, т. е. она направлена по главной нормали к заданной линии.

Спроектировав векторы левой и правой частей уравнения (23.2) на оси координат, получим:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + N \cos(\mathbf{N}, \mathbf{i}); \\ m\ddot{y} &= Y + N \cos(\mathbf{N}, \mathbf{j}). \end{aligned} \right\}$$

Направляющие косинусы нормали к плоской кривой $f(x, y) = 0$ определяются по формулам из дифференциальной геометрии:

$$\cos(\mathbf{N}, \mathbf{i}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f}; \quad \cos(\mathbf{N}, \mathbf{j}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta f}; \quad \Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

Подставляя эти значения в дифференциальные уравнения, получим дифференциальные уравнения движения материальной точки по заданной плоской линии в виде двух первых уравнений (22.6):

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (23.3)$$

Из дифференциальных уравнений (23.3) и уравнения связи (23.1) можно определить три неизвестные x , y и λ в зависимости от t , т. е. движение точки M , и найти алгебраическое значение реакции связи N по формуле $N = \lambda \Delta f$.

Однако при движении точки по заданной плоской линии удобнее проектировать векторы уравнения (23.2) не на оси декартовых координат, а на естественные координатные оси, т. е. на направления касательной и нормали траектории, лежащих в плоскости кривой xOy .

При этом касательную направляют в сторону возрастания дуговой координаты $s = O_1M$, отсчитанной от произвольно выбранного начала отсчета O_1 , а нормаль направляют к центру кривизны траектории.

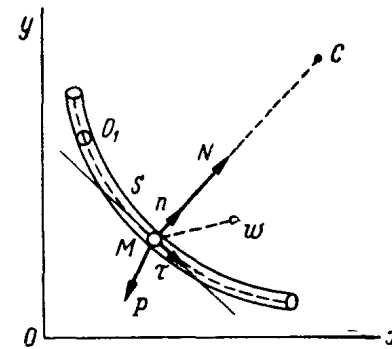


Рис. 58.

Спроектировав все векторы уравнения (23.2) на соответствующие оси, получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} m\omega \cos(\mathbf{w}, \boldsymbol{\tau}) &= P_{\tau}, \\ m\omega \cos(\mathbf{w}, \mathbf{n}) &= P_n + N, \end{aligned} \right\} \quad (23.4)$$

где P_{τ} и P_n — проекции силы P на касательную и нормаль. Из кинематики известно (см. § 85), что:

$$\omega \cos(\mathbf{w}, \boldsymbol{\tau}) = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad \omega \cos(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \frac{v^2}{\rho}.$$

Подставляя эти значения проекций ускорения на касательную и нормаль в уравнения (23.4), получаем

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2s}{dt^2} &= P_{\tau}, \\ \frac{mv^2}{\rho} &= P_n + N. \end{aligned} \right\} \quad (23.5)$$

Полученные уравнения называются *уравнениями движения несвободной точки в форме Эйлера*.

Интегрируя первое уравнение, можно определить сначала скорость $v = f'(t)$, а затем закон движения точки M по заданной траектории $s = f(t)$. Подставив скорость $v = f'(t)$ во второе уравнение, можно найти алгебраическое значение нормальной реакции N .

Рассмотрим теперь случай, когда точка M , двигаясь по плоской линии, испытывает сопротивление движению.

Положим, что на эту точку действует сила трения F с модулем $F = fN$, направленная противоположно скорости точки (рис. 59).

Основное уравнение динамики несвободной материальной точки

$$m\mathbf{w} = \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{F}. \quad (23.6)$$

Уравнения движения несвободной точки в форме Эйлера

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2s}{dt^2} &= P_{\tau} - F, \\ \frac{mv^2}{\rho} &= P_n + N. \end{aligned} \right\} \quad (23.7)$$

Уравнения (23.7) и уравнение $F = fN$, где f — коэффициент трения, позволяют определить закон движения точки по заданной траектории $s = f(t)$, алгебраическое значение нормальной реакции N и модуль силы трения F .

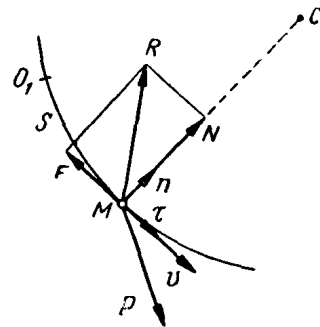


Рис. 59.

§ 24. Математический маятник и его малые колебания

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на нерастяжимой невесомой нити, совершающая движение в одной вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

Рассмотрим движение маятника массой m и длиной $OM = l$ (рис. 60).

На точку M действуют две силы: ее вес G и реакция нити N . Уравнения движения точки M в форме Эйлера имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2s}{dt^2} &= P_{\tau} = -G \sin \varphi = -mg \sin \varphi, \\ \frac{mv^2}{\rho} &= P_n + N = -mg \cos \varphi + N, \end{aligned} \right\}$$

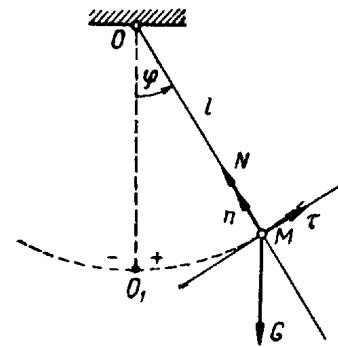


Рис. 60.

За начало отсчета дуговой координаты s примем наименьшее положение O_1 .

Так как $s = O_1M = l\varphi$, то

$$\frac{d^2s}{dt^2} = l \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Подставляя значение $\frac{d^2s}{dt^2}$ в первое уравнение, получаем

$$ml \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (24.1)$$

Проинтегрировать уравнение (24.1) по времени при помощи элементарных функций нельзя.

При малом угле φ можно принять $\sin \varphi \approx \varphi$. Тогда дифференциальное уравнение движения математического маятника примет вид:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (24.2)$$

Это дифференциальное уравнение имеет вид (11.2), т. е. соответствует гармоническому колебательному движению.

Обозначим

$$k^2 = \frac{g}{l}, \quad \text{т. е.} \quad k = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (24.3)$$

Получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид (11.3) или (11.6):

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (24.4)$$

или

$$\varphi = \alpha \sin(kt + \beta), \quad (24.5)$$

где α — амплитуда угла φ при малых колебаниях маятника.

Величина амплитуды зависит от начальных условий движения маятника. Период малых колебаний маятника определится по частоте колебаний k :

$$T = \frac{2\pi}{k}, \quad \text{т. е.} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (24.6)$$

Модуль реакции нити N определим из второго уравнения движения точки при $\rho = l$:

$$N = \frac{mv^2}{l} + mg \cos \varphi. \quad (24.7)$$

Чтобы найти N , необходимо иметь значение скорости v точки M .

Для определения v преобразуем уравнение (24.1) при помощи зависимости:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \omega.$$

Уравнение (24.1) примет вид

$$\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi$$

или

$$\omega d\omega = -\frac{g}{l} \sin \varphi d\varphi.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим:

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{l} \cos \varphi + C. \quad (24.8)$$

Для определения постоянной C необходимы начальные условия задачи.

Пусть в начальный момент $t_0 = 0$ угловая скорость маятника была ω_0 , а угол равен φ_0 . Подставим эти значения в уравнение (24.8):

$$\frac{\omega_0^2}{2} = \frac{g}{l} \cos \varphi_0 + C,$$

отсюда

$$C = \frac{\omega_0^2}{2} - \frac{g}{l} \cos \varphi_0.$$

Подставив найденное значение C в уравнение (24.8), получим:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\frac{g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_0). \quad (24.9)$$

Умножив обе части равенства (24.9) на l^2 , найдем:

$$v^2 = v_0^2 + 2gl(\cos \varphi - \cos \varphi_0). \quad (24.10)$$

Подставив значение (24.10) в формулу (24.7), найдем модуль реакции нити:

$$N = G \left(\frac{v_0^2}{gl} + 3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0 \right). \quad (24.11)$$

Из формулы (24.11) следует, что модуль реакции нити в любом положении маятника зависит от начальной скорости v_0 и начального отклонения маятника φ_0 . Формула (24.11) справедлива не только при малых колебаниях, так как получена не из приближенного, а точного дифференциального уравнения (24.1).

§ 25. Примеры на движение несвободной материальной точки

Пример 10. Груз подвешен на нити длиной $l = 70$ см. В наинизшем положении грузу сообщена горизонтальная скорость $v_0 = 4,9$ м/сек. Определить:

1) в каком положении нить перестанет удерживать груз и он начнет двигаться как свободная точка;

2) при какой наименьшей начальной горизонтальной скорости v_0^{min} груз опишет полную окружность?

Решение. Модуль реакции нити математического маятника в любом его положении определяется по формуле (24.11):

$$N = G \left(\frac{v_0^2}{gl} + 3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0 \right).$$

1. Положение груза M_1 (рис. 61), в котором нить перестанет его удерживать и он начнет двигаться как свободная точка, определится из условия, что в этом положении реакция нити равняется нулю:

$$N = 0; \quad \frac{v_0^2}{gl} + 3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0 = 0,$$

откуда

$$\cos \varphi = \frac{2 \cos \varphi_0 - \frac{v_0^2}{gl}}{3}.$$

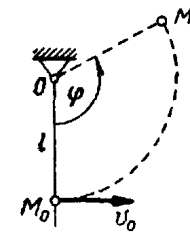


Рис 61.

Подставляя числовые значения всех заданных величин и начальное значение угла поворота $\varphi_0 = 0$, получаем:

$$\cos \varphi = \frac{2 - \frac{4,9^2}{9,8 \cdot 0,7}}{3} = -0,5,$$

следовательно, искомое положение груза определяется углом $\varphi = 120^\circ$.

2. Минимальная начальная скорость в наинизшем положении, при которой груз опишет полную окружность, будет такой же, как и

для прохождения полуокружности, и определяется по формуле (24.11) из условия

$$N \geq 0 \text{ при } \varphi = 180^\circ$$

т. е.

$$\frac{v_0^2}{gl} + 3 \cos 180^\circ - 2 \geq 0,$$

откуда

$$v_0 \geq \sqrt{5gl}$$

и

$$v_0^{\min} = \sqrt{5gl}.$$

Пример 11. Шарик, находившемуся в вершине гладкой шаровой поверхности радиусом $R = 0,5 \text{ м}$, сообщена скорость $v_0 = 0,7 \text{ м/сек}$. Определить, в какой точке шарик отделится от поверхности и начнет двигаться свободно.

Решение. Шарик движется по гладкой шаровой поверхности под действием двух сил: силы тяжести G и реакции поверхности N (рис. 62).

Основное уравнение динамики для несвободной точки M в этом случае имеет вид:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{G} + \mathbf{N}.$$

Уравнения движения шарика в форме Эйлера будут:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 s}{dt^2} &= G \sin \varphi, \\ \frac{mv^2}{R} &= G \cos \varphi - N. \end{aligned} \right\} (25.1)$$

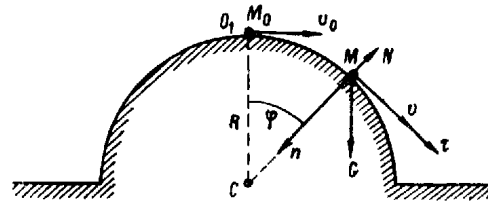


Рис. 62.

В момент отделения шарика от поверхности реакция ее равняется нулю.

Из второго уравнения (25.1) при $N = 0$

$$\frac{mv^2}{R} = G \cos \varphi, \text{ или } \cos \varphi = \frac{v^2}{gR}. \quad (25.2)$$

Для определения v^2 используем первое уравнение (25.1) За начало отсчета O_1 дуговой координаты s примем начальное положение шарика M_0 ; тогда

$$s = O_1 M = R\varphi,$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = R \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = R \frac{d\omega}{dt} = R \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = R \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \omega.$$

Подставив значение $\frac{d^2 s}{dt^2}$ в первое уравнение (25.1), будем иметь

$$mR \frac{d\omega}{d\varphi} \omega = mg \sin \varphi \text{ или } R\omega d\omega = g \sin \varphi d\varphi.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$R \frac{\omega^2}{2} = -g \cos \varphi + C.$$

Выразим угловую скорость через линейную скорость точки M по формуле $\omega = \frac{v}{R}$:

$$\frac{v^2}{2R} = -g \cos \varphi + C. \quad (25.3)$$

Значение C определим из уравнения (25.3) по начальным условиям движения:

$$\varphi_0 = 0; \quad v = v_0.$$

Тогда

$$\frac{v_0^2}{2R} = -g + C.$$

откуда

$$C = \frac{v_0^2}{2R} + g.$$

Подставим значение C в уравнение (25.3):

$$\frac{v^2}{2R} = -g \cos \varphi + \frac{v_0^2}{2R} + g.$$

или

$$v^2 = v_0^2 + 2gR(1 - \cos \varphi).$$

Подставив значение v^2 в формулу (25.2), найдем

$$\cos \varphi = \frac{v^2}{gR} = \frac{v_0^2}{gR} + 2(1 - \cos \varphi),$$

откуда

$$\cos \varphi = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{v_0^2}{gR} \right).$$

Подставим заданные числовые значения:

$$\cos \varphi = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{0,49}{9,8 \cdot 0,5} \right) = \frac{2,1}{3} = 0,7.$$

В точке, которой соответствует угол $\varphi = \angle O_1 C M = 45^\circ 35'$, шарик отделится от поверхности.

Вопросы для самоконтроля

1. В каких случаях материальную точку называют несвободной и каковы дифференциальные уравнения движения этой точки?
2. Дайте определения стационарных и нестационарных, голономных и неголономных связей.
3. Какие связи называют двусторонними и односторонними?
4. В чем сущность принципа освобожденности от связей?
5. Какой вид имеют дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки в форме Лагранжа? Что называют множителем Лагранжа?

ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 26. Дифференциальные уравнения относительно
движения материальной точки.
Переносная и кориолисова силы инерции

Два первых закона классической механики и все полученные на их основе уравнения справедливы для движения материальной точки относительно инерциальной системы отсчета (см. § 2).

Изучим движение материальной точки относительно неинерциальной системы.

Положим, что система отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$ является инерциальной, а не связанная с ней система $Oxyz$ — неинерциальной (рис. 63). Примем систему $\Omega\xi\eta\zeta$ за условно неподвижную, а систему $Oxyz$ за подвижную систему отсчета.

Рассмотрим движение материальной точки M , не связанной неизменно с подвижной системой отсчета, а движущейся по отношению к ней. Движение точки M относительно системы $\Omega\xi\eta\zeta$ называется абсолютным, а движение точки относительно системе $Oxyz$ называется относительным.

Установим основное уравнение динамики относительного движения материальной точки, считая, что переносное движение системы $Oxyz$ и силы, действующие на точку, известны.

Основное уравнение динамики для абсолютного движения точки M имеет вид:

$$m\mathbf{w} = \sum \mathbf{P}_i, \quad (26.1)$$

где \mathbf{w} — абсолютное ускорение материальной точки, а $\sum \mathbf{P}_i$ — геометрическая сумма приложенных к точке сил.

В разделе «Кинематика» (§ 125) установлено, что в случае непоступательного переносного движения абсолютное ускорение точки \mathbf{w} ,

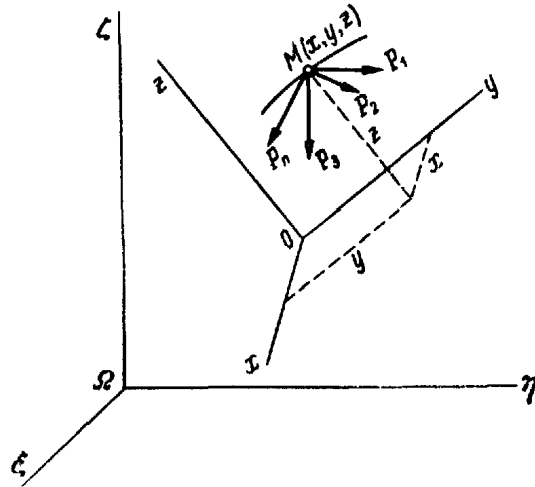


Рис. 63.

равно геометрической сумме трех ускорений: относительного \mathbf{w}_r , переносного \mathbf{w}_e и поворотного (кориолисоваго) \mathbf{w}_c , т. е.

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c.$$

Подставив это значение \mathbf{w} в уравнение (26.1), получим

$$m\mathbf{w}_r + m\mathbf{w}_e + m\mathbf{w}_c = \sum \mathbf{P}_i.$$

Из полученного уравнения определим произведение массы точки на ее относительное ускорение:

$$m\mathbf{w}_r = \sum \mathbf{P}_i - m\mathbf{w}_e - m\mathbf{w}_c. \quad (26.2)$$

Введем два вектора:

$$\Phi_e = -m\mathbf{w}_e, \quad \Phi_c = -m\mathbf{w}_c.$$

численно равные произведениям $m\mathbf{w}_e$ и $m\mathbf{w}_c$ и направленные противоположно ускорениям \mathbf{w}_e и \mathbf{w}_c . Эти векторы назовем *переносной и кориолисовой силами инерции*.

Подставим эти векторы в уравнение (26.2):

$$m\mathbf{w}_r = \sum \mathbf{P}_i + \Phi_e + \Phi_c \quad (26.3)$$

Уравнение (26.3) представляет собой *основное уравнение динамики относительного движения материальной точки*

Сопоставляя уравнения (26.1) и (26.3), заключаем: в случае непоступательного переносного движения относительное движение материальной точки можно рассматривать как абсолютное, если к действующим на точку силам присоединить переносную и кориолисову силы инерции

Разложив силу инерции материальной точки $\Phi = -m\mathbf{w}$ на составляющие, получим

$$\Phi = -m\mathbf{w} = -m\mathbf{w}_r - m\mathbf{w}_e - m\mathbf{w}_c = \Phi_r + \Phi_e + \Phi_c.$$

Таким образом, переносная и кориолисовы силы инерции Φ_e и Φ_c , так же как и вектор $\Phi_r = -m\mathbf{w}_r$ являются составляющими силы инерции Φ точки M .

При помощи уравнений относительного движения материальной точки

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

можно выразить проекции относительного ускорения \mathbf{w}_r на оси x, y, z :

$$w_{rx} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad w_{ry} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad w_{rz} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}.$$

Проектируя векторы уравнения (26.3) на оси подвижной системы отсчета $Oxyz$, получаем дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum X_i + \Phi_{ex} + \Phi_{cx}, \\ m\ddot{y} &= \sum Y_i + \Phi_{ey} + \Phi_{cy}, \\ m\ddot{z} &= \sum Z_i + \Phi_{ez} + \Phi_{cz}. \end{aligned} \right\} \quad (26.4)$$

Дифференциальные уравнения (26.4) отличаются от дифференциальных уравнений абсолютного движения материальной точки (3.2) наличием в правой части проекций на соответствующие координатные оси переносной и кориолисовой сил инерции.

Рассмотрим частные случаи относительного движения материальной точки, соответствующие различным видам переносного движения.

1. *Переносное движение — неравномерное вращение тела вокруг неподвижной оси* (рис. 64).

В этом случае переносное ускорение w_e равно геометрической сумме вращательного и центростремительного ускорений:

$$w_e = w_e^B + w_e^U.$$

В соответствии с этим переносная сила инерции Φ_e имеет две составляющие: вращательную силу инерции $\Phi_e^B = -mw_e^B$ и центробежную силу инерции $\Phi_e^U = -mw_e^U$, т. е.

$$\Phi_e = \Phi_e^B + \Phi_e^U.$$

Тогда уравнение (26.3) принимает вид

$$mw_r = \sum P_i + \Phi_e^B + \Phi_e^U + \Phi_c. \quad (26.5)$$

Правая часть уравнения (26.5), кроме приложенных к точке сил, содержит переносную вращательную, переносную центробежную и кориолисову силы инерции

Модули переносного вращательного и переносного центростремительного ускорений определяются по формулам:

$$|\omega_e^B| = MK \cdot |\varepsilon_e|, \quad \omega_e^U = MK \cdot \omega_e^2,$$

где ω_e и ε_e — алгебраические величины угловой скорости и углового ускорения переносного вращения; MK — расстояние в данный момент от точки M до оси вращения.

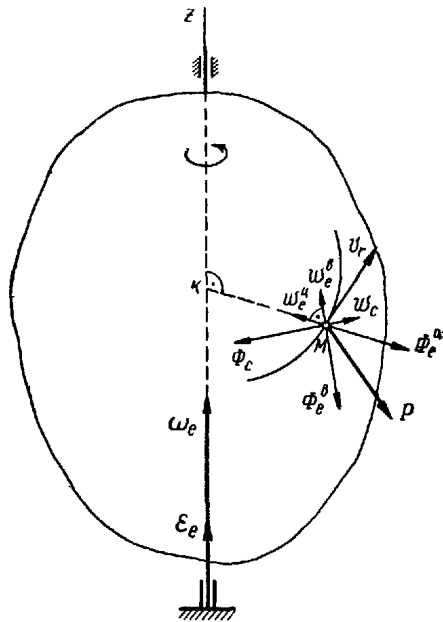


Рис 64

Переносная вращательная сила инерции Φ_e^B направлена противоположно вращательному ускорению, а ее модуль

$$\Phi_e^B = m |\omega_e^B| = m \cdot MK \cdot |\varepsilon_e|$$

Переносная центробежная сила инерции Φ_e^U направлена противоположно центростремительному ускорению, т. е. направлена по радиусу MK от оси вращения z , а ее модуль

$$\Phi_e^U = m\omega_e^U = m \cdot MK \cdot \omega_e^2$$

Поворотное, или кориолисово, ускорение w_c , как известно (см. «Кинематика», § 126), определяется векторным произведением $w_c = 2(\omega_e \times v_r)$. Его модуль $w_c = 2|\omega_e| \cdot |v_r| \cdot \sin(\omega_e, v_r)$. Кориолисова сила инерции направлена противоположно кориолисову ускорению точки, а ее модуль

$$\Phi_c = 2m \cdot |\omega_e| \cdot |v_r| \cdot \sin(\omega_e, v_r)$$

Направление кориолисовой силы инерции Φ_c , обратно направлению ускорения w_c , перпендикулярно к векторам ω_e и v_r , т. е. перпендикулярно как к оси переносного вращения, так и к касательной к траектории относительного движения точки

2. *Переносное движение — равномерное вращение вокруг неподвижной оси*

В этом случае $\varepsilon_e = 0$ и $\Phi_e^B = 0$ и основное уравнение динамики относительного движения точки (26.5) примет вид.

$$mw_r = \sum P_i + \Phi_e^U + \Phi_c \quad (26.6)$$

3. *Переносное движение — поступательное неравномерное криволинейное движение*

В этом случае $\omega_e = 0$ и $\Phi_c = 0$, а потому уравнение (26.3) принимает вид:

$$mw_r = \sum P_i + \Phi_e \quad (26.7)$$

Правая часть уравнения (26.7) кроме приложенных к точке сил, содержит только переносную силу инерции $\Phi_e = -mw_e$, направленную противоположно ускорению поступательного движения системы $Oxyz$ с модулем $\Phi_e = m|w_e|$

В случае поступательного неравномерного криволинейного движения

$$\Phi_e = \Phi_{e\tau} + \Phi_{en},$$

где

$$\Phi_{e\tau} = m \left| \frac{dv_e}{dt} \right| \quad \text{и} \quad \Phi_{en} = \frac{mv_e^2}{\rho}.$$

4. *Переносное движение — поступательное прямолинейное и равномерное движение*

В этом случае $\omega_e = 0$ и $\Phi_e = 0$, а потому уравнение (26.7) принимает вид:

$$m\mathbf{w}_r = \sum \mathbf{P}_i \quad (26.8)$$

В правой части уравнения (26.8) имеется только геометрическая сумма приложенных к точке сил, как в основном уравнении абсолютного движения точки (26.1), т. е. подвижная система отсчета $Oxuz$ является в этом случае тоже инерциальной системой

§ 27. Принцип относительности классической механики. Инерциальные системы отсчета

Сопоставление уравнений (26.8) и (26.1) показывает, что при равномерном прямолинейном поступательном переносном движении уравнение (26.8), определяющее относительное ускорение материальной точки \mathbf{w}_r , ничем не отличается от основного уравнения динамики (26.1), определяющего абсолютное ускорение точки \mathbf{w} . В этом случае относительное движение с динамической точки зрения ничем не отличается от абсолютного движения,

Таким образом, относительное движение материальной точки по отношению к подвижной системе отсчета, движущейся прямолинейно

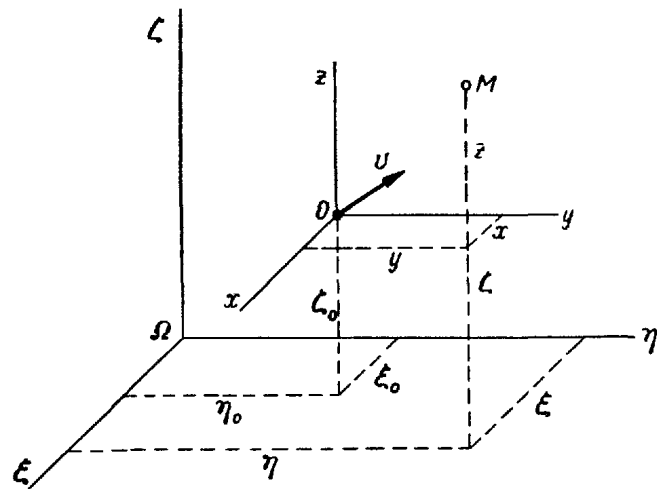


Рис. 65

и равномерно, происходит так же, как и по отношению к неподвижной системе отсчета (рис. 65)

Все такие подвижные системы являются инерциальными системами отсчета, и движение материальной точки относительно любой из этих систем можно рассматривать как абсолютное движение. Это указывает на инвариантность уравнений динамики при переходе от одной инерциальной системы к другой.

Очевидно поэтому, что наблюдения над относительным движением материальной точки по отношению к любой из таких систем не позволяют судить о том, совершает ли эта система равномерное прямолинейное поступательное движение или находится в покое.

Это положение, называемое *принципом относительности классической механики*, можно сформулировать так:

Никакие механические явления, происходящие в среде, не могут обнаружить ее прямолинейного и равномерного поступательного движения.

Этот принцип, распространенный не только на механические, но и на все физические явления, лежит в основе теории относительности.

§ 28. Случай относительного покоя. Сила тяжести

Рассмотрим случай, когда материальная точка под действием приложенных к ней сил находится в состоянии относительного покоя, т. е. не совершает движения относительно подвижной системы отсчета $Oxuz$.

При отсутствии относительного движения абсолютное ускорение точки равно ее переносному ускорению, т. е. $\mathbf{w} = \mathbf{w}_e$.

Тогда уравнение (26.1) принимает вид

$$m\mathbf{w}_e = \sum \mathbf{P}_i,$$

или $\sum \mathbf{P}_i - m\mathbf{w}_e = 0$, откуда

$$\sum \mathbf{P}_i + \Phi_e = 0. \quad (28.1)$$

Таким образом, в случае, когда материальная точка находится в состоянии относительного покоя,

геометрическая сумма приложенных к точке сил и переносной силы инерции равна нулю.

В качестве примера рассмотрим относительный покой материальной точки (тела) на поверхности Земли (рис. 66).

Условие относительного покоя точки M выражается равенством (28.1) в виде

$$\mathbf{P} + \mathbf{N} + \Phi_e^u = 0,$$

где \mathbf{P} — сила притяжения Земли, направленная к ее центру, \mathbf{N} — реакция опоры; Φ_e^u — переносная сила инерции, которая вследствие равномерного вращения Земли представляет собой центробежную силу

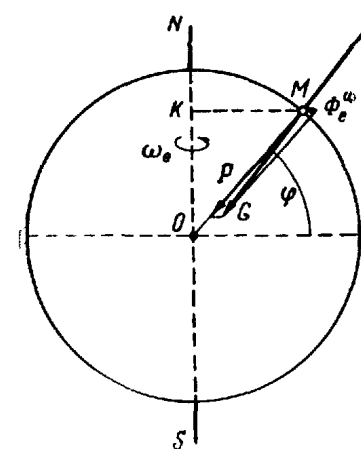


Рис. 66.

инерции. Ее модуль

$$\Phi_e^H = mMK\omega_e^2,$$

где $\omega_e = \frac{2\pi}{25 \cdot 3600} \text{сек}^{-1}$ — угловая скорость вращения Земли

Очевидно, что действие тела на опору выражается силой $\mathbf{G} = -\mathbf{N}$, т. е. $\mathbf{G} = \mathbf{P} + \Phi_e^H$, причем сила \mathbf{G} — равнодействующая сила притяжения Земли и переносной силы инерции — представляет собой силу тяжести, т. е. вес тела. Направление силы тяжести \mathbf{G} определяет направление вертикали в данной точке земной поверхности, а плоскость, перпендикулярная к \mathbf{G} , является горизонтальной плоскостью.

По модулю центробежная сила инерции Φ_e^H всегда мала по сравнению с весом тела G . Найдем отношение их модулей:

$$\frac{\Phi_e^H}{G} = \frac{mMK\omega_e^2}{mg} = \frac{OM\omega_e^2 \cos \varphi}{g} = \frac{R\omega_e^2 \cos \varphi}{g},$$

где R — радиус земного шара,

φ — широта, на которой находится точка M ,

Отношение $\frac{\Phi_e^H}{G}$ имеет максимальное значение на экваторе:

$$\varphi = 0, \quad R = 6370 \text{ км}, \quad g = 9,78 \text{ м/сек}^2,$$

$$\frac{\Phi_e^H}{G} = 0,00346, \quad \text{или} \quad \frac{\Phi_e^H}{G} = \frac{1}{290}.$$

Из этого следует, что вес тела G по модулю мало отличается от силы притяжения тела к Земле P и направление вертикали составляет с направлением этой силы очень малый угол.

Наибольший вес тело имеет на полюсе, а наименьший — на экваторе по двум причинам:

- 1) сила притяжения \mathbf{P} на полюсе имеет наибольший модуль;
- 2) переносная сила инерции Φ_e^H на полюсе равна нулю.

Ускорение свободного падения тела g равно 983 см/сек^2 на полюсе и 978 см/сек^2 на экваторе.

§ 29. Отклонение падающих тел к востоку

Наблюдения показывают, что все тела, падающие на Землю, незначительно отклоняются от вертикали в восточном направлении.

Объяснение этого явления легко получить, рассмотрев относительное движение падающего тела без начальной скорости по отношению к подвижной системе отсчета, связанной с вращающимся земным шаром.

Начало координат O этой системы совместим с точкой поверхности Земли, лежащей на одной вертикали с начальным положением

падающего тела M_0 (рис. 67 и 68). Ось z направим по вертикали вверх через центр Земли, пренебрегая ее незначительным отклонением, ось x — по касательной к меридиану к югу, а ось y — перпендикулярно к плоскости меридиана xOz к востоку.

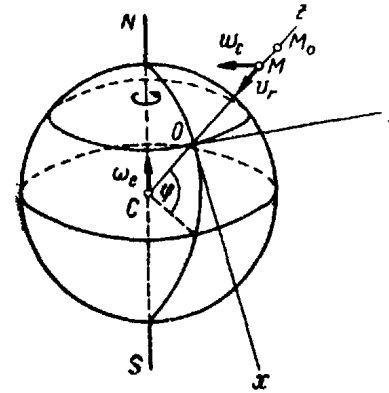


Рис. 67.

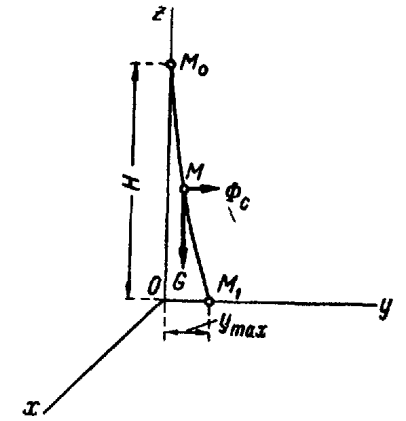


Рис. 68.

Тогда начальные условия относительного движения материальной точки будут:

$$t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = H, \\ \dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = 0, \quad \dot{z}_0 = 0.$$

Если сопротивление воздуха не учитывается, то на точку действует только сила притяжения Земли \mathbf{P} .

Основное уравнение динамики относительного движения точки (26.6) в случае, когда переносное движение — равномерное вращение — имеет вид:

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{P} + \Phi_e^H + \Phi_c. \quad (29.1)$$

Но равнодействующая силы притяжения \mathbf{P} и переносной центробежной силы инерции Φ_e^H равна силе тяжести (весу) тела \mathbf{G} и направлена по вертикали.

Тогда уравнение (29.1) получает вид:

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{G} + \Phi_c. \quad (29.2)$$

Кориолисово ускорение точки $\mathbf{w}_c = 2(\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r)$ направлено на запад перпендикулярно к плоскости меридиана, содержащей векторы $\boldsymbol{\omega}_e$ и \mathbf{v}_r . Кориолисова сила инерции Φ_c противоположна ускорению \mathbf{w}_c , следовательно, она направлена на восток, т. е. в сторону положительного направления оси y .

Ее модуль

$$\Phi_c = 2m \cdot |\boldsymbol{\omega}_e| \cdot |\mathbf{v}_r| \cos \varphi,$$

где φ — широта, на которой находится точка M .

Составим дифференциальные уравнения движения точки M , соответствующие уравнению (29.2), в предположении, что направление скорости v_r во все время движения мало отклоняется от вертикали z . Получим:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum X_i = 0, \\ m\ddot{y} &= \sum Y_i = \Phi_c = 2m\omega_e v_r \cos \varphi, \\ m\ddot{z} &= \sum Z_i = -G = -mg. \end{aligned} \right\} \quad (29.3)$$

Интегрируем первое уравнение (29.3):

$$\dot{x} = C_1, \quad x = C_1 t + C_2.$$

По начальным условиям $t_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $x_0 = 0$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$$

Уравнение движения точки вдоль оси x получает вид

$$x = 0. \quad (29.4)$$

Таким образом, точка M движется только в плоскости zOy . Интегрируем третье уравнение (29.3):

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -g, \\ \dot{z} &= -gt + C_3, \\ z &= -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4. \end{aligned}$$

По начальным условиям $t_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$ и $z_0 = H$

$$C_3 = 0, \quad C_4 = H.$$

Для движения точки вдоль оси z

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -gt, \\ z &= H - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (29.5)$$

Приступая к интегрированию второго уравнения (29.3), учтем, что направление относительной скорости v_r очень мало отличается от направления вертикали, а потому с достаточной степенью точности можно принять:

$$v_r = v_z = |\dot{z}| = gt.$$

Тогда второе уравнение (29.3) принимает вид

$$m\ddot{y} = 2m\omega_e gt \cos \varphi.$$

Интегрируя, получаем:

$$\dot{y} = \omega_e g t^2 \cos \varphi + C_5, \quad y = \frac{1}{3} \omega_e g t^3 \cos \varphi + C_5 t + C_6.$$

По начальным условиям $t_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, $y_0 = 0$

$$C_5 = 0, \quad C_6 = 0.$$

Для движения точки вдоль оси y

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \omega_e g t^2 \cos \varphi, \\ y &= \frac{1}{3} \omega_e g t^3 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (29.6)$$

Определяем из уравнения (29.5) при $z = 0$ момент падения точки на Землю

$$\frac{gt_1^2}{2} = H, \quad t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Подставляя значение t_1 в уравнение (29.6), получаем

$$y_{\max} = \frac{1}{3} \omega_e g \sqrt{\frac{8H^3}{g^3}} \cos \varphi$$

или

$$y_{\max} = \frac{2}{3} H \omega_e \sqrt{\frac{2H}{g}} \cos \varphi. \quad (29.7)$$

По формуле (29.7) можно по высоте и широте места падения тела найти величину его отклонения от вертикали к востоку. Так, например, на широте Ленинграда ($\varphi = 60^\circ$) тело, падающее с высоты $H = 100$ м, без учета сопротивления воздуха отклоняется в восточном направлении на $y_{\max} = 1,1$ см.

Тело, брошенное вертикально вверх, отклоняется от вертикали не на восток, а на запад, так как кориолисова сила инерции в этом случае направлена перпендикулярно к плоскости меридиана к западу.

§ 30. Примеры на относительное движение материальной точки

Пример 12. Определить периоды качаний математического маятника, точка привеса которого движется по вертикали:

- 1) вверх с ускорением w ;
- 2) вниз с ускорением $w < g$;
- 3) вниз с ускорением $w = g$ и
- 4) вниз с ускорением $w > g$.

Решение. 1. Если точка привеса математического маятника движется, то абсолютное движение маятника является сложным,

Свяжем подвижную систему отсчета xOy с ползуном O , движущимся поступательно вверх с ускорением w (рис. 69). Тогда это движение будет переносным движением. Переносное ускорение w_e будет равно заданному ускорению w . Относительным движением маятника по отношению к этой системе будет качание маятника вокруг точки привеса O . Чтобы определить это движение, применим основное уравнение относительного движения в случае, когда переносное движение поступательное (26.7):

$$m\mathbf{w}_r = \sum \mathbf{P}_i + \Phi_e.$$

К маятнику M приложены: сила тяжести G и реакция нити N . Условно приложим к точке M переносную силу инерции $\Phi_e = -m\mathbf{w}_e$, направленную противоположно переносному ускорению w_e , т. е. вертикально вниз. Уравнение (26.7) примет вид:

$$m\mathbf{w}_r = G + N + \Phi_e. \quad (30.1)$$

Составим уравнения относительного движения, соответствующие уравнению (30.1), в форме Эйлера (23.5):

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 s_r}{dt^2} &= -(G + \Phi_e) \sin \varphi_r = -m(g + w_e) \sin \varphi_r, \\ m \frac{v_r^2}{\rho} &= N - (G + \Phi_e) \cos \varphi_r. \end{aligned} \right\} (30.2)$$

Так как

$$s_r = O_1 M = l\varphi_r,$$

то

$$\frac{d^2 s_r}{dt^2} = l \frac{d^2 \varphi_r}{dt^2}.$$

Подставим это значение $\frac{d^2 s_r}{dt^2}$ в первое уравнение (30.2):

$$ml \frac{d^2 \varphi_r}{dt^2} = -m(g + w_e) \sin \varphi_r$$

или

$$\frac{d^2 \varphi_r}{dt^2} + \frac{g + w_e}{l} \sin \varphi_r = 0. \quad (30.3)$$

Полагая угол φ_r малым по величине, принимаем $\sin \varphi_r = \varphi_r$. Тогда уравнение (30.3) принимает вид:

$$\ddot{\varphi}_r + \frac{g + w_e}{l} \varphi_r = 0. \quad (30.4)$$

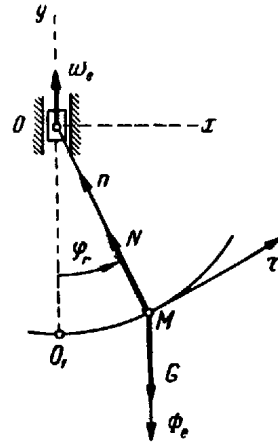


Рис. 69.

Уравнение (30.4) аналогично дифференциальному уравнению (24.2) качаний математического маятника.

Пользуясь этим, определим частоту и период качаний рассматриваемого маятника:

$$k = \sqrt{\frac{g + w_e}{l}} \quad \text{и} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + w_e}}. \quad (30.5)$$

Полученный результат показывает, что при увеличении ускорения переносного движения w_e маятник должен качаться быстрее.

Из второго уравнения (30.2) можно определить модуль реакции нити N :

$$N = (G + \Phi_e) \cos \varphi_r + \frac{mv_r^2}{\rho} = mg \cos \varphi_r + mw_e \cos \varphi_r + \frac{mv_r^2}{l}. \quad (30.6)$$

Относительную скорость v_r в зависимости от угла φ_r можно определить из первого уравнения (30.2), как это было сделано в § 24.

2 В случае, если точка привеса маятника движется вниз с ускорением $w_e < g$, то период качаний определится:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - w_e}}, \quad (30.7a)$$

т. е. ускоренное движение точки привеса вниз увеличивает период качаний маятника.

3. Если точка привеса маятника свободно падает вниз, т. е. $w_e = g$, то нить маятника не препятствует свободному падению материальной точки M , а потому колебаний маятника не происходит ($T = \infty$).

4. Если точка привеса маятника движется вниз с ускорением, большим чем ускорение свободного падения, т. е. $w_e > g$ (рис. 70), то получается обратный маятник, так как $\Phi_e > G$.

Период его качаний определяется:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{w_e - g}}. \quad (30.7b)$$

Пример 13. Тело весом $G = 2$ н положено на гладкую грань трехгранной призмы, другая грань которой лежит на горизонтальной плоскости. Какое горизонтальное ускорение должна иметь призма, чтобы тело не двигалось относительно призмы и какое давление производит тело на призму в этом случае, если $\alpha = \arctg \frac{3}{4}$ (рис. 71).

Решение. Если тело находится в состоянии относительного покоя по отношению к движущейся призме, то применимо уравне-

ние (28.1), т. е. геометрическая сумма приложенных к телу сил и переносной силы инерции равна нулю.

К телу приложены: его вес \mathbf{G} и реакция гладкой плоскости \mathbf{N} (рис. 72).

Условно приложим к телу переносную силу инерции Φ_e , направленную противоположно переносному ускорению \mathbf{w}_e , представляющему собой ускорение движения призмы. Модуль этой силы определится:

$$\Phi_e = m\mathbf{w}_e,$$

где m — масса тела.

Составим для сил \mathbf{G} , \mathbf{N} и Φ_e уравнение (28.1):

$$\mathbf{G} + \mathbf{N} + \Phi_e = 0, \quad (30.8)$$

Проектируя векторы этого равенства на оси x и y , связанные с движущейся призмой, получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} G \sin \alpha - \Phi_e \cos \alpha &= 0, \\ N - G \cos \alpha - \Phi_e \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} (30.9)$$

Из первого уравнения (30.9) найдем модуль ускорения \mathbf{w}_e :

$$mg \sin \alpha - m\mathbf{w}_e \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$\mathbf{w}_e = g \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} g = 7,35 \text{ м/сек}^2;$$

тогда

$$\Phi_e = m\mathbf{w}_e = mg \operatorname{tg} \alpha = G \operatorname{tg} \alpha.$$

Определим модуль реакции призмы N из второго уравнения (30.9):

$$\begin{aligned} N &= G \cos \alpha + \Phi_e \sin \alpha = G \cos \alpha + G \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha = \\ &= G \cos \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = G \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \\ &= G \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 2 \cdot \frac{5}{4} = 2,5 \text{ н.} \end{aligned}$$

Пример 14. Гладкий стержень длиной $l = 0,5 \text{ м}$ равномерно вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через его конец. Угловая скорость его вращения равна $2\pi \text{ сек}^{-1}$. В некоторый момент времени кольцу, находящемуся посередине стержня, представляют возможность скользить по нему. Через сколько секунд кольцо сойдет со стержня?

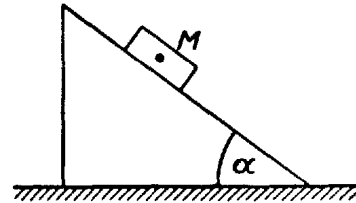


Рис. 71.

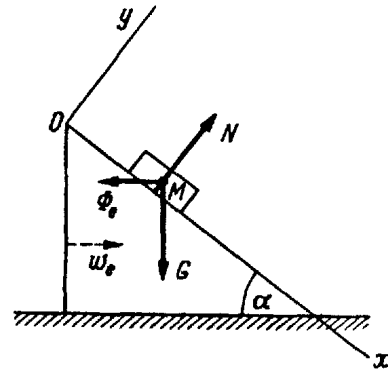


Рис. 72.

Решение. Свяжем подвижную систему отсчета $Oxuz$ с вращающимся стержнем. Направим ось x вдоль стержня, ось y — перпендикулярно к оси x в горизонтальной плоскости, ось z — вертикально вверх (рис. 73).

Вращение этой системы вокруг оси z будет переносным движением. Относительным движением кольца по отношению к этой системе будет

его скольжение по стержню. Когда переносное движение является равномерным вращением, относительное движение точки определяется уравнением (26.6):

$$m\mathbf{w}_r = \sum \mathbf{P}_i + \Phi_e^u + \Phi_c.$$

К кольцу приложены силы: его вес \mathbf{G} и реакция стержня, перпендикулярная к его оси, имеющая две составляющие: вертикальную N_1 и горизонтальную N_2 .

Условно прикладываем к кольцу переносную центробежную силу инерции Φ_e^u и кориолисову силу инерции Φ_c (рис. 74, а и б), которые направлены противоположно ускорениям \mathbf{w}_e^u и \mathbf{w}_c (рис. 73). Направление ускорения \mathbf{w}_c определено по правилу Жуковского поворотом вектора \mathbf{v}_r на 90° в плоскости, перпендикулярной к оси переносного вращения, в сторону этого вращения. Модули сил инерции

$$\Phi_e^u = m\mathbf{w}_e^u = m\mathbf{x}\omega_e^2,$$

$$\Phi_c = m\mathbf{w}_c = 2m\omega_e \mathbf{v}_r \sin(\omega_e, \mathbf{v}_r) = 2m\omega_e v_r,$$

так как $\omega_e \perp \mathbf{v}_r$, то $\sin(\omega_e, \mathbf{v}_r) = 1$.

Уравнение (26.6) в данном случае имеет вид:

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{G} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \Phi_e^u + \Phi_c. \quad (30.10)$$

Составим дифференциальное уравнение относительно движения кольца вдоль оси x , соответствующее уравнению (30.10):

$$m\ddot{x} = \sum X_i = \Phi_e^u = m\mathbf{x}\omega_e^2,$$

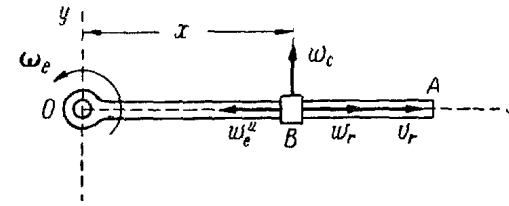


Рис. 73.

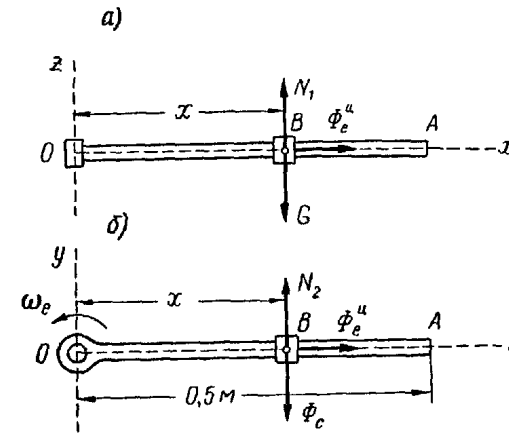


Рис. 74.

откуда

$$\ddot{x} - \omega_e^2 x = 0, \quad (30.11)$$

Характеристическое уравнение будет:

$$r^2 - \omega^2 = 0,$$

откуда

$$r_{1,2} = \pm \omega.$$

Решение уравнения (30.11) имеет вид:

$$x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}. \quad (30.12)$$

Скорость этого движения получим, дифференцируя по t уравнение (30.12):

$$\dot{x} = \omega (C_1 e^{\omega t} - C_2 e^{-\omega t}). \quad (30.13)$$

Определим постоянные C_1 и C_2 по начальным условиям:

$$t = 0, \quad x_0 = \frac{l}{2} = 0,25 \text{ м}, \quad \dot{x}_0 = 0.$$

Подставим эти значения в уравнения (30.12) и (30.13):

$$0,25 = C_1 + C_2,$$

$$0 = C_1 - C_2,$$

тогда

$$C_1 = C_2 = 0,125.$$

Подставляя значение угловой скорости $\omega_e = 2\pi \text{ сек}^{-1}$ и значение постоянных C_1 и C_2 в уравнение (30.12), получаем уравнение относительного движения кольца:

$$x = 0,125 (e^{2\pi t} + e^{-2\pi t}). \quad (30.14)$$

Продолжительность T движения кольца до конца стержня находим из уравнения (30.14) при $x = 0,5 \text{ м}$:

$$0,5 = 0,125 (e^{2\pi T} + e^{-2\pi T})$$

или

$$e^{2\pi T} + e^{-2\pi T} = 4.$$

Для решения этого уравнения положим

$$e^{2\pi T} = u, \quad e^{-2\pi T} = \frac{1}{u};$$

тогда

$$u + \frac{1}{u} = 4$$

или

$$u^2 - 4u + 1 = 0,$$

откуда

$$u = 2 \pm \sqrt{4 - 1} = 2 \pm \sqrt{3} = 2 \pm 1,732.$$

Так как $T > 0$, то

$$e^{2\pi T} > 1.$$

Поэтому

$$e^{2\pi T} = u = 3,732, \quad 2\pi T = \ln 3,732,$$

откуда

$$T = \frac{\ln 3,732}{6,28} = 0,21 \text{ сек}.$$

Чтобы определить модули реакций стержня N_1 и N_2 , спроектируем векторы уравнения (30.10) на оси y и z .

Учитывая, что $w_r \perp Oy$ и $w_r \perp Oz$, получаем:

$$0 = N_2 - \Phi_c,$$

$$0 = N_1 - G.$$

Из этих уравнений найдем:

$$N_2 = \Phi_c = 2m\omega_e v_r = 2m\omega_e \dot{x} = 2m2\pi \cdot 0,25\pi (e^{2\pi t} - e^{-2\pi t}) = \\ = m\pi^2 (e^{2\pi t} - e^{-2\pi t}), \quad (30.15)$$

$$N_1 = G. \quad (30.16)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какой модуль и какое направление имеют переносная и кориолисова силы инерции?
2. В чем заключается различие между дифференциальными уравнениями относительного и абсолютного движений материальной точки?
3. Как определяются переносная и кориолисова силы инерции в различных случаях переносного движения?
4. В чем состоит сущность принципа относительности классической механики?
5. Какие системы отсчета называются инерциальными?
6. Каково условие относительного покоя материальной точки?
7. В каких точках земной поверхности сила тяжести имеет наибольшее и наименьшее значения?
8. Чем объясняется отклонение падающих тел к востоку?
9. В каком направлении отклоняется тело, брошенное вертикально вверх?

ГЛАВА VI

СИСТЕМА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК. ТВЕРДОЕ ТЕЛО. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 31. Силы, действующие на точки механической системы

Системой материальных точек, или *механической системой*, называют мысленно выделенную совокупность материальных точек, взаимодействующих между собой.

Систему материальных точек, движение которых не ограничено никакими связями, а определяется лишь действующими на эти точки силами, называют *системой свободных точек*.

Примером системы свободных точек может служить солнечная система, планеты которой рассматриваются в астрономии как материальные точки. Планеты свободно перемещаются по орбитам, зависящим от действующих на планеты сил.

Система материальных точек, движения которых ограничиваются наложенными на точки связями, называется *системой несвободных точек*.

Примером системы несвободных точек может служить любой механизм или машина, у которых движения отдельных элементов ограничены связями.

Известно, что механическое действие связей на точки системы выражается силами, называемыми реакциями связей. Таким образом, все силы, действующие на систему несвободных точек, можно разделить на задаваемые силы и реакции связей.

Равнодействующую всех задаваемых сил, приложенных к точке M_i несвободной механической системы, условимся обозначать P_i , а равнодействующую реакций связей — R_i .

Все силы, действующие на точки любой механической системы как свободной, так и несвободной, можно разделить и по другому признаку: на внешние и внутренние силы.

Внешними называют силы, действующие на точки системы со стороны материальных точек, не входящих в состав данной системы.

Внутренними силами называют силы взаимодействия между материальными точками данной механической системы.

Внешние силы условимся обозначать P_i^E , а внутренние силы — P_i^I .

Примером внутренних сил могут служить силы упругости, действующие между частицами упругого тела, принятого за механическую систему.

Одна и та же сила может быть как внешней, так и внутренней, в зависимости от того, какая механическая система рассматривается. Так, например, реакции подшипников вала являются внешними силами по отношению к самому валу. Эти же реакции относятся к внутренним силам, когда рассматривается вся установка вместе со станиной.

Таким образом, любая сила, действующая на точку механической системы в соответствии с приведенными двумя классификациями сил, является внешней или внутренней и в то же время она является задаваемой силой или реакцией связи.

Движение точек механической системы зависит как от внешних, так и от внутренних сил.

На основании закона равенства действия и противодействия каждой внутренней силе соответствует другая внутренняя сила, равная ей по модулю и противоположная по направлению.

Из этого следует:

1. *Главный вектор всех внутренних сил системы и суммы их проекций на координатные оси равны нулю:*

$$R^I = \sum P_i^I = 0, \quad (31.1)$$

$$\sum X_i^I = 0; \quad \sum Y_i^I = 0; \quad \sum Z_i^I = 0. \quad (31.2)$$

2. *Главные моменты всех внутренних сил системы относительно любого центра и координатных осей равны нулю:*

$$M_0^I = \sum M_{i_0}^I = 0, \quad (31.3)$$

$$\sum M_{i_x}^I = 0; \quad \sum M_{i_y}^I = 0; \quad \sum M_{i_z}^I = 0. \quad (31.4)$$

Хотя уравнения (31.2) и (31.4) имеют вид уравнений равновесия сил, произвольно расположенных в пространстве, но внутренние силы не уравновешиваются, так как они приложены к различным точкам системы и могут вызывать перемещения этих точек относительно друг друга.

§ 32. Центр масс системы материальных точек и его координаты

Каждая точка M_i механической системы имеет определенную массу m_i , а ее положение по отношению к системе отсчета $Oxyz$ в каждый момент времени определяется радиусом-вектором r_i или тремя координатами x_i, y_i, z_i .

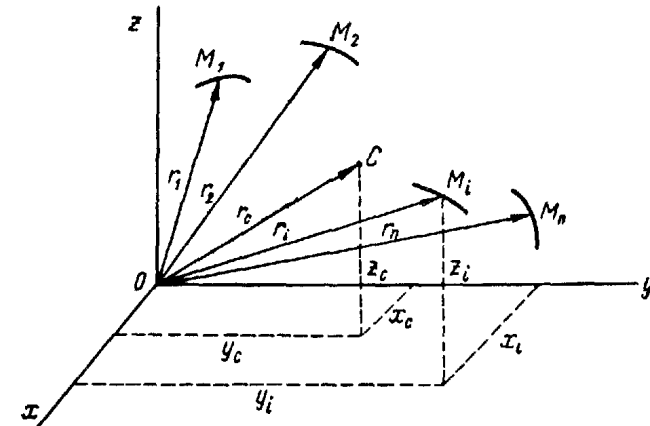


Рис. 75.

Центром масс системы называется геометрическая точка C , радиус-вектор которой r_c определяется по формуле:

$$r_c = \frac{\sum m_i r_i}{m}, \quad (32.1)$$

где $m = \sum m_i$ — масса системы (рис. 75).

Проектируя векторы обеих частей равенства (32.1) на оси x, y, z , получаем формулы, определяющие координаты центра масс системы:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{m}, \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{m}. \quad (32.2)$$

Как видно из формул (32.1) или (32.2), положение центра масс системы в каждый момент времени зависит только от положения и массы каждой точки этой системы. Нетрудно убедиться в том, что центр тяжести тела или системы тел является центром масс этой системы. Для этого воспользуемся формулами, определяющими координаты центра тяжести тела (см. ч. I, «Статика», § 66):

$$x_c = \frac{\sum G_i x_i}{G} = \frac{\sum m_i g x_i}{mg} = \frac{\sum m_i x_i}{m},$$

$$y_c = \frac{\sum G_i y_i}{G} = \frac{\sum m_i g y_i}{mg} = \frac{\sum m_i y_i}{m},$$

$$z_c = \frac{\sum G_i z_i}{G} = \frac{\sum m_i g z_i}{mg} = \frac{\sum m_i z_i}{m}.$$

Действительно, центр тяжести системы тел совпадает с их центром масс. Понятие «центр масс системы» применимо для любой системы материальных точек независимо от того, находится ли она под действием каких-либо сил или нет, тогда как понятие «центр тяжести» применяется лишь для твердого тела или системы твердых тел, находящихся в однородном поле сил тяжести.

§ 33. Твердое тело

Рассмотрим систему n материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными. Такая система называется *неизменяемой*.

Для образования неизменяемой системы из двух точек M_1 и M_2 их следует соединить между собой абсолютно жестким и невесомым (идеальным) стержнем (рис. 76). Чтобы образовать неизменяемую систему из трех точек M_1 , M_2 и M_3 , необходимы три стержня: M_1M_2 , M_2M_3 и M_3M_1 . Для образования неизменяемой системы из четырех точек, не лежащих в одной плоскости, нужно присоединить точку M_4 к трем первым точкам тремя стержнями M_1M_4 , M_2M_4 и M_3M_4 . Действительно, если присоединить точку M_4 двумя стержнями M_1M_4 и M_2M_4 , то система будет изменяемой, так как угол между треугольниками $M_1M_2M_3$ и $M_1M_2M_4$ может изменяться. Чтобы сделать этот угол неизменяемым, необходим третий стержень M_3M_4 .

Очевидно, что для образования неизменяемой системы каждую последующую точку нужно соединять идеальными стержнями, по крайней мере, с тремя точками, уже входящими в неизменяемую систему.

Найдем минимальное число стержней, обеспечивающих неизменяемость системы из n материальных точек.

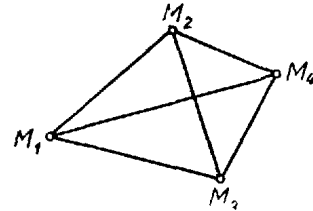


Рис. 76.

Для образования неизменяемой системы из трех точек нужно три стержня, а для присоединения к ней каждой из остальных $(n - 3)$ точек необходимо также три стержня.

Таким образом, минимальное число стержней, необходимое для образования неизменяемой системы из n точек, определится:

$$3 + 3(n - 3) = 3n - 6. \quad (33.1)$$

Считая число точек неизменяемой системы бесконечно большим, а длины соединяющих их идеальных стержней бесконечно малыми, получаем модель так называемого *абсолютно твердого тела*.

§ 34. Моменты инерции твердого тела. Радиус инерции

При поступательном движении твердого тела, так же как и при движении материальной точки, мерой его инертности является масса тела. При вращательном движении твердого тела мерой инертности является *момент инерции твердого тела* относительно оси вращения.

Поэтому до исследования различных видов движения твердого тела следует рассмотреть вычисление моментов инерции твердых тел и установить основные теоремы о моментах инерции, играющие существенную роль в динамике твердого тела.

Для установления понятий моментов инерции твердого тела относительно плоскости, оси и полюса проведем через произвольную точку O три взаимно перпендикулярные координатные оси x , y , z и изобразим координатные плоскости yOz , zOx и xOy (рис. 77).

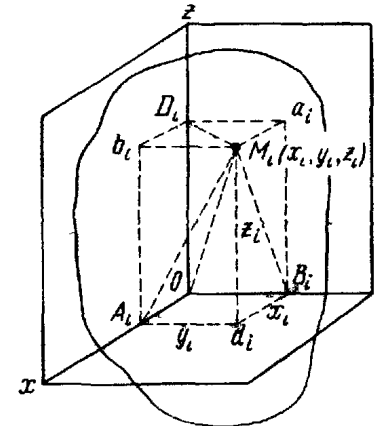


Рис. 77.

Будем рассматривать заданное твердое тело как множество материальных точек M_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$).

Моментом инерции твердого тела относительно плоскости называется скалярная величина, равная сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния от этой точки до плоскости.

Для определения моментов инерции тела относительно координатных плоскостей опустим из каждой точки тела M_i перпендикуляры на плоскости yOz , zOx , xOy :

$$M_i a_i = x_i, \quad M_i b_i = y_i, \quad M_i d_i = z_i.$$

Обозначив моменты инерции твердого тела относительно координатных плоскостей J_{yOz} , J_{zOx} и J_{xOy} , получим:

$$J_{yOz} = \sum m_i x_i^2; \quad J_{zOx} = \sum m_i y_i^2; \quad J_{xOy} = \sum m_i z_i^2, \quad (34.1)$$

Моментом инерции твердого тела относительно оси называется скалярная величина, равная сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния от этой точки до оси.

Для определения моментов инерции твердого тела относительно координатных осей опустим из каждой точки тела M_i на оси x , y , z перпендикуляры M_iA_i , M_iB_i , M_iD_i . Квадраты этих перпендикуляров

$$(M_iA_i)^2 = y_i^2 + z_i^2, \quad (M_iB_i)^2 = z_i^2 + x_i^2, \quad (M_iD_i)^2 = x_i^2 + y_i^2.$$

Обозначим моменты инерции твердого тела относительно координатных осей J_x , J_y , J_z :

$$J_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2); \quad J_y = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2); \quad J_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (34.2)$$

Моментом инерции твердого тела относительно полюса (полярным моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния от точки до этого полюса.

Обозначим J_O — момент инерции твердого тела относительно полюса O

$$J_O = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2). \quad (34.3)$$

Между моментами инерции твердого тела относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат существуют следующие зависимости:

$$J_O = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = J_{yOz} + J_{zOx} + J_{xOy}, \quad (34.4)$$

$$J_x + J_y + J_z = 2 \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 2J_O.$$

откуда

$$J_O = \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z), \quad (34.5)$$

$$J_x = J_{zOx} + J_{xOy}; \quad J_y = J_{xOy} + J_{yOz}; \quad J_z = J_{yOz} + J_{zOx}. \quad (34.6)$$

Эти зависимости используются при вычислении моментов инерции твердых тел.

Момент инерции твердого тела относительно заданной оси, например оси z , можно представить в виде произведения массы тела на квадрат линейной величины, называемой *радиусом инерции тела* относительно этой оси:

$$J_z = m i_z^2, \quad (34.7)$$

где m — масса тела;

i_z — радиус инерции тела относительно оси z .

Формула (34.7) показывает, что радиус инерции i_z определяет расстояние от оси z до точки, в которой нужно сосредоточить всю массу m тела, чтобы момент инерции точки относительно этой оси равнялся моменту инерции тела.

Момент инерции твердого тела относительно оси как сумма положительных слагаемых всегда положителен и не может равняться нулю.

Единицей момента инерции в системе МКС является $1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, а в системе СГС — $1 \text{ г} \cdot \text{см}^2$. В технической системе единиц МКГСС за единицу момента инерции принимается $1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}^2$.

§ 35. Теорема о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей (теорема Штейнера)

Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси равен моменту инерции тела относительно параллельной оси,

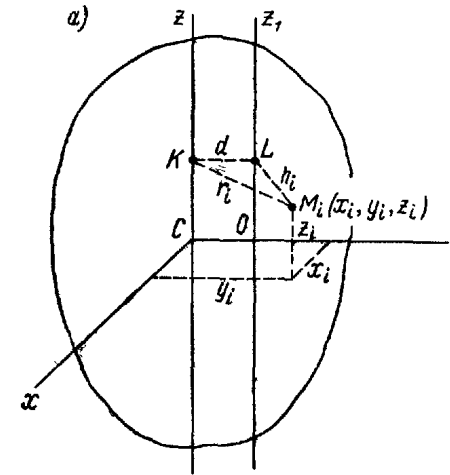
проходящей через его центр тяжести, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.

Положим, что задана ось Oz_1 . Для доказательства теоремы проведем через центр тяжести тела C три взаимно перпендикулярные оси, из которых ось Cz параллельна заданной оси Oz_1 , а ось Cy лежит в плоскости параллельных осей Cz и Oz_1 (рис. 78, а и б). Обозначим d расстояние между осями Cz и Oz_1 .

Для вычисления моментов инерции тела относительно осей Cz и Oz_1 опустим из каждой точки M_i рассматриваемого тела перпендикуляры r_i и h_i на оси Cz и Oz_1 . Выразим длины этих перпендикуляров через координаты этих точек:

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2,$$

$$h_i^2 = x_i^2 + (y_i - d)^2 = x_i^2 + y_i^2 + d^2 - 2y_i d = r_i^2 + d^2 - 2y_i d. \quad (a)$$



б)

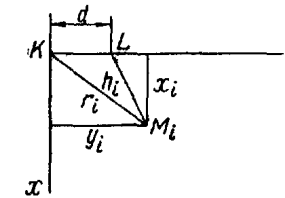


Рис. 78.

Определим моменты инерции тела относительно осей Cz и Oz_1 :

$$J_{Cz} = \sum m_i r_i^2, \quad J_{z_1} = \sum m_i h_i^2.$$

Пользуясь зависимостью (а), получим

$$J_{z_1} = \sum m_i r_i^2 + \sum m_i d^2 - 2 \sum m_i y_i d,$$

или

$$J_{z_1} = J_{Cz} + d^2 \sum m_i - 2d \sum m_i y_i. \quad (б)$$

Здесь $\sum m_i = m$ — масса тела.

Из формулы (32.2), определяющей координату y_C центра масс тела имеем:

$$\sum m_i y_i = m y_C.$$

Так как $y_C = 0$, то

$$\sum m_i y_i = 0.$$

Подставляя это значение в равенство (б), получаем зависимость, установленную теоремой Штейнера:

$$J_{z_1} = J_{Cz} + md^2. \quad (35.1)$$

Формула (35.1) показывает, что из совокупности параллельных осей ось, проходящая через центр тяжести тела, характеризуется наименьшим моментом инерции.

Полярный момент инерции твердого тела относительно центра тяжести согласно (34.5)

$$J_C = \frac{1}{2} (J_{Cx} + J_{Cy} + J_{Cz}).$$

Отсюда следует, что центр тяжести тела является полюсом, относительно которого полярный момент инерции тела имеет наименьшее возможное значение.

Воспользуемся формулой (35.1) для установления зависимости между радиусами инерции твердого тела i_{Cz} и i_{z_1} относительно осей Cz и Oz_1 . Согласно (34.7)

$$J_{z_1} = m i_{z_1}^2, \quad J_{Cz} = m i_{Cz}^2,$$

тогда

$$m i_{z_1}^2 = m i_{Cz}^2 + md^2,$$

откуда

$$i_{z_1}^2 = i_{Cz}^2 + d^2. \quad (35.2)$$

§ 36. Вычисление моментов инерции однородных тел относительно осей, проходящих через их центры тяжести и являющихся осями симметрии

Вычислим моменты инерции некоторых однородных симметричных тел относительно осей, проходящих через центры тяжести тел и являющихся осями симметрии.

Ось, проходящая через центр тяжести тела, называется *центральной осью*.

1. Момент инерции однородного тонкого стержня

Определим момент инерции однородного тонкого стержня относительно оси Cy , проходящей через центр тяжести стержня перпендикулярно к его оси (рис. 79).

Положим, что стержень длиной l имеет постоянное весьма малое сечение F и плотность ρ . Масса стержня равна произведению плотности стержня на его объем:

$$m = \rho Fl.$$

Разобьем стержень по длине на малые элементы. Масса элемента длиной Δx_i равна:

$$m_i = \rho F \Delta x_i.$$

Вычислим момент инерции стержня относительно оси Cy :

$$J_{Cy} = \sum m_i x_i^2 = \sum \rho F x_i^2 \Delta x_i.$$

Перейдя к пределу суммы, получаем определенный интеграл:

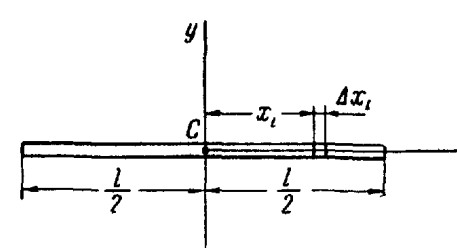


Рис 79

$$\begin{aligned} J_{Cy} &= \int_{-l/2}^{+l/2} F \rho x^2 dx = \\ &= F \rho \int_{-l/2}^{+l/2} x^2 dx = \frac{F \rho l^3}{12}. \end{aligned}$$

Заменяв в этом выражении произведение $F l \rho$ массой стержня m , окончательно получим

$$J_{Cy} = \frac{m l^2}{12}. \quad (36.1)$$

2. Момент инерции однородной круглой пластинки малой толщины

Определим моменты инерции однородной тонкой круглой пластинки относительно осей Cx и Cy , совпадающих с диаметрами круга и оси Cz , проходящей через центр круга, перпендикулярно к его плоскости (рис. 80).

Положим, что круглая пластинка радиусом R имеет весьма малую толщину h и плотность ρ .

Тогда масса пластинки

$$m = \rho h \pi R^2.$$

Разобьем пластинку на множество элементарных колец радиусом r_i и шириной Δr_i . Масса кольца

$$m_i = \rho h 2\pi r_i \Delta r_i.$$

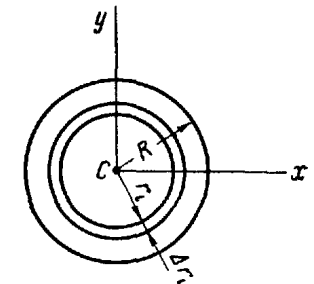


Рис. 80.

Так как толщина пластинки мала, то для всех точек пластинки можно принять $z_i = 0$. Тогда формулы (34.2) для моментов инерции пластинки относительно осей координат примут вид:

$$\begin{aligned} J_{Cx} &= \sum m_i y_i^2; & J_{Cy} &= \sum m_i x_i^2; \\ J_{Cz} &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2). \end{aligned}$$

отсюда следует, что

$$J_{Cz} = J_{Cx} + J_{Cy}.$$

Так как

$$J_{Cx} = J_{Cy},$$

то

$$J_{Cx} = J_{Cy} = \frac{J_{Cz}}{2},$$

Вычислим J_{Cz} :

$$J_{Cz} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i r_i^2. \quad (a)$$

Так как расстояния r_i от всех точек каждого кольца до оси Cz одинаковы, то величину m_i в выражении (a) можно считать не массой точки, а массой всего кольца. Тогда выражение (a) примет вид:

$$J_{Cz} = \sum 2\rho h \pi r_i^3 \Delta r_i$$

или

$$J_{Cz} = \int_0^R 2\rho h \pi r^3 dr = 2\rho h \pi \int_0^R r^3 dr = \frac{2\rho h \pi R^4}{4} = \frac{\rho h \pi R^4}{2}.$$

После подстановки $\rho h \pi R^2 = m$ получим:

$$J_{Cz} = \frac{mR^2}{2} \quad (36.2)$$

и

$$J_{Cx} = J_{Cy} = \frac{mR^2}{4}. \quad (36.3)$$

3. Моменты инерции однородного круглого цилиндра

Определим моменты инерции однородного круглого цилиндра относительно продольной оси цилиндра Cz и осей Cx и Cy , проведенных по диаметрам среднего поперечного сечения цилиндра (рис. 81).

Положим, что цилиндр радиусом R и высотой H имеет плотность ρ . Тогда масса цилиндра

$$m = \rho H \pi R^2.$$

Разобьем цилиндр на множество элементарных пластинок толщиной Δz_i , параллельных основанию цилиндра.

Масса каждой пластинки

$$m_i = \rho \pi R^2 \Delta z_i.$$

Момент инерции цилиндра относительно оси Cz определим как сумму моментов инерции ΔJ_{Cz} элементарных пластинок относительно

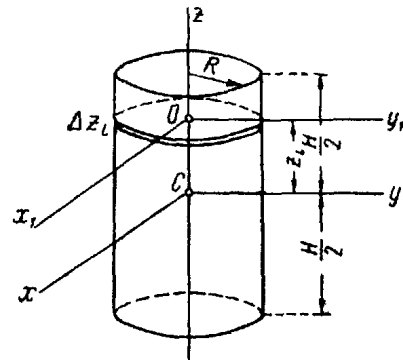


Рис. 81.

этой же оси, пользуясь формулой (36.2):

$$J_{Cz} = \sum \Delta J_{Cz} = \sum \frac{m_i R^2}{2} = \frac{R^2}{2} \sum m_i = \frac{mR^2}{2}. \quad (36.4)$$

Для вычисления момента инерции цилиндра относительно оси Cx воспользуемся теоремой о моментах инерции тела относительно параллельных осей (§ 35).

Момент инерции каждой элементарной пластинки относительно оси Ox_1 , проведенной по ее диаметру, параллельному оси Cx , определится формулой (36.3):

$$\Delta J_{x_1} = \frac{m_i R^2}{4}.$$

Момент инерции этой пластинки относительно оси Cx , параллельной оси Ox_1 и находящейся от нее на расстоянии z_i , определится по формуле (35.1):

$$\Delta J_{Cx} = \Delta J_{x_1} + m_i z_i^2 = \frac{m_i R^2}{4} + m_i z_i^2.$$

Подставив значение m_i и просуммировав моменты инерции пластинок, получим момент инерции цилиндра:

$$J_{Cx} = \sum \Delta J_{Cx} = \sum \frac{\rho \pi R^4}{4} \Delta z_i + \sum \rho \pi R^2 z_i^2 \Delta z_i$$

или

$$J_{Cx} = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \frac{\rho \pi R^4}{4} dz + \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \rho \pi R^2 z^2 dz = \frac{\rho \pi R^4 H}{4} + \frac{\rho \pi R^2 H^3}{12}.$$

После подстановки $\rho H \pi R^2 = m$ получим

$$J_{Cx} = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right). \quad (36.5)$$

Так как оси Cx и Cy расположены по отношению к цилиндру одинаково, то

$$J_{Cy} = J_{Cx}.$$

4. Момент инерции полого цилиндра

Момент инерции полого цилиндра с внешним радиусом R_1 и внутренним радиусом R_2 (рис. 82) относительно его центральной продольной оси Cz можно определить как разность моментов инерции сплошных цилиндров радиусами R_1 и R_2 .

Пользуясь формулой (36.4), получаем:

$$J_{Cz} = \frac{m_1 R_1^2}{2} - \frac{m_2 R_2^2}{2}.$$

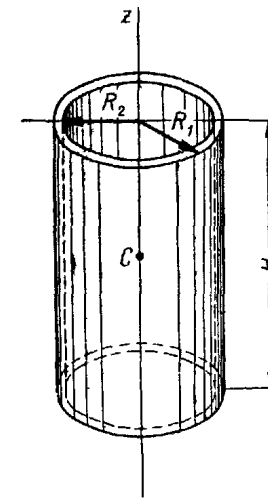


Рис. 82

Массы сплошных цилиндров

$$m_1 = \rho H \pi R_1^2, \quad m_2 = \rho H \pi R_2^2.$$

Момент инерции полого цилиндра

$$J_{Cz} = \frac{1}{2} \rho H \pi R_1^4 - \frac{1}{2} \rho H \pi R_2^4 = \frac{1}{2} \rho H \pi (R_1^4 - R_2^4) = \\ = \frac{1}{2} \rho H \pi (R_1^2 - R_2^2)(R_1^2 + R_2^2).$$

Масса полого цилиндра

$$m = m_1 - m_2 = \rho H \pi (R_1^2 - R_2^2).$$

Пользуясь значением массы, окончательно получаем

$$J_{Cz} = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2). \quad (36.6)$$

5. Момент инерции однородного кругового конуса

Положим, что конус имеет высоту H , радиус основания R и плотность ρ (рис. 83). Тогда масса конуса

$$m = \rho \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Для определения момента инерции конуса относительно его центральной продольной оси Cz разобьем конус на множество элементарных пластинок толщиной Δz_i , параллельных основанию. Масса пластинки радиусом r_i

$$m_i = \rho \pi r_i^2 \Delta z_i.$$

Так как $\frac{r_i}{R} = \frac{z_i}{H}$, то $r_i = z_i \frac{R}{H}$.

Момент инерции элементарной пластинки относительно оси Cz определится по формуле (36.2):

$$\Delta J_{Cz} = \frac{m_i r_i^2}{2} = \frac{1}{2} \rho \pi \frac{R^4}{H^4} z_i^4 \Delta z_i.$$

Момент инерции конуса получим, суммируя моменты инерции элементарных пластинок; переходя к пределу суммы, будем иметь:

$$J_{Cz} = \frac{1}{2} \rho \pi \frac{R^4}{H^4} \int_0^H z^4 dz = 0,1 \rho \pi R^4 H.$$

После подстановки $\frac{1}{3} \rho \pi R^2 H = m$ получим:

$$J_{Cz} = 0,3 m R^2. \quad (36.7)$$

6. Моменты инерции однородного шара

Масса шара радиусом R и плотностью ρ (рис. 84)

$$m = \frac{4}{3} \rho \pi R^3.$$

Для определения момента инерции шара относительно центральной оси Cz разобьем его на множество элементарных пластинок, параллельных плоскости xCy , толщиной Δz_i . Масса пластинки радиусом r_i

$$m_i = \rho \pi r_i^2 \Delta z_i.$$

Момент инерции элементарной пластинки относительно оси Cz определяем по формуле (36.2) с последующей подстановкой:

$$r_i^2 = R^2 - z_i^2;$$

$$\Delta J_{Cz} = \frac{1}{2} m_i r_i^2 = \frac{1}{2} \rho \pi r_i^4 \Delta z_i = \\ = \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - z_i^2)^2 \Delta z_i.$$

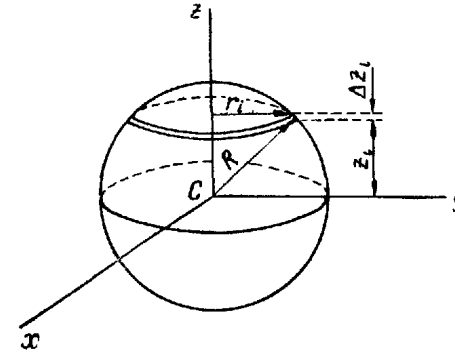


Рис. 84.

Момент инерции шара относительно оси Cz получаем, суммируя моменты инерции элементарных пластинок, и переходя к пределу суммы:

$$J_{Cz} = \int_{-R}^{+R} \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 \int_{-R}^{+R} dz - \rho \pi R^2 \int_{-R}^{+R} z^2 dz + \\ + \frac{1}{2} \rho \pi \int_{-R}^{+R} z^4 dz = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 \cdot 2R - \rho \pi R^2 \frac{2}{3} R^3 + \frac{1}{2} \rho \pi \frac{2}{5} R^5 = \frac{8}{15} \rho \pi R^5.$$

После подстановки $\frac{4}{3} \rho \pi R^3 = m$ получим

$$J_{Cz} = \frac{2}{5} m R^2. \quad (36.8)$$

Так как оси Cx , Cy , Cz проведены по диаметрам шара, то

$$J_{Cx} = J_{Cy} = J_{Cz}.$$

Из формул (36.7), (36.8) и (36.4) следует, что моменты инерции конуса, шара и цилиндра, имеющих равные массы и радиусы, относятся как 3 : 4 : 5.

§ 37. Формула для вычисления момента инерции твердого тела относительно любой оси, проходящей через начало координат. Центробежные моменты инерции

Проведем через некоторую точку O тела три взаимно перпендикулярные оси x, y, z и произвольно направленную ось v , составляющую с этими осями углы α, β и γ (рис. 85).

Определим момент инерции J_v данного тела относительно оси v . Разобьем тело на множество материальных точек $M_i (i=1, 2, \dots, n)$. Опустим из каждой точки $M_i (x_i, y_i, z_i)$ перпендикуляры на ось v : $M_i K_i = h_i$ и составим выражение момента инерции данного тела относительно оси v :

$$J_v = \sum m_i h_i^2. \quad (37.1)$$

Соединив точку M_i с началом координат O , получим треугольник $OM_i K_i$, из которого найдем:

$$h_i^2 = OM_i^2 - OK_i^2, \quad (a)$$

где $OM_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$, а отрезок OK_i есть проекция отрезка OM_i на ось v .

Заметим, что:

$$\overline{OM_i} = \overline{OA_i} + \overline{A_i B_i} + \overline{B_i M_i}.$$

Проектируя векторы левой и правой частей этого равенства на ось v , получаем

$$OK_i = OA_i \cos \alpha + A_i B_i \cos \beta + B_i M_i \cos \gamma$$

или

$$OK_i = x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma.$$

Подставив значения OM_i и OK_i в выражение (a), найдем:

$$h_i^2 = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2.$$

Умножив сумму $(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$ в правой части равенства на величину $(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$, равную единице, получим

$$h_i^2 = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2.$$

После преобразований будем иметь:

$$h_i^2 = (y_i^2 + z_i^2) \cos^2 \alpha + (z_i^2 + x_i^2) \cos^2 \beta + (x_i^2 + y_i^2) \cos^2 \gamma - 2y_i z_i \cos \beta \cos \gamma - 2z_i x_i \cos \gamma \cos \alpha - 2x_i y_i \cos \alpha \cos \beta.$$

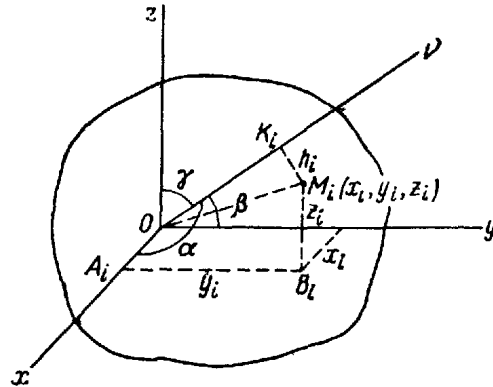


Рис. 85.

Подставив это значение h_i^2 в формулу (37.1), получим

$$J_v = \cos^2 \alpha \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) + \cos^2 \beta \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) + \cos^2 \gamma \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum m_i y_i z_i - 2 \cos \gamma \cos \alpha \sum m_i z_i x_i - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum m_i x_i y_i.$$

В первые три слагаемых правой части входят множителями выражения (34.2), определяющие моменты инерции данного тела относительно координатных осей.

Обозначим их следующим образом:

$$A = J_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2),$$

$$B = J_y = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2),$$

$$C = J_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2).$$

Кроме того, введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} D &= J_{yz} = \sum m_i y_i z_i, \\ E &= J_{zx} = \sum m_i z_i x_i, \\ F &= J_{xy} = \sum m_i x_i y_i. \end{aligned} \right\} \quad (37.2)$$

Величины D, E, F называются *центробежными моментами инерции твердого тела* соответственно относительно осей y и z, z и x, x и y . Центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Пользуясь введенными обозначениями, получаем формулу для вычисления момента инерции твердого тела относительно оси v в следующем виде:

$$J_v = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma - 2D \cos \beta \cos \gamma - 2E \cos \gamma \cos \alpha - 2F \cos \alpha \cos \beta. \quad (37.3)$$

Формула (37.3) позволяет вычислить момент инерции тела относительно любой оси v , проведенной через начало координат, если известны моменты инерции тела относительно осей координат $A = J_x, B = J_y, C = J_z$ и центробежные моменты инерции тела относительно каждой пары координатных осей $D = J_{yz}, E = J_{zx}, F = J_{xy}$.

§ 38. Эллипсоид инерции. Главные оси и главные моменты инерции

Момент инерции твердого тела относительно оси v (рис. 86) определяется по формуле (37.3):

$$J_v = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma - 2D \cos \beta \cos \gamma - 2E \cos \gamma \cos \alpha - 2F \cos \alpha \cos \beta.$$

Рассмотрим изменение момента инерции J_v , происходящее при изменении направления оси v , т. е. при изменении углов α , β , γ .

Для наглядного изображения этого изменения отложим по оси v от точки O отрезок ON , длина которого равна

$$ON = \frac{1}{\sqrt{J_v}}, \quad (38.1)$$

где J_v — момент инерции тела относительно оси v .

Выразим направляющие косинусы оси v через координаты x , y , z точки N и длину отрезка ON :

$$\cos \alpha = \frac{x}{ON} = x \sqrt{J_v};$$

$$\cos \beta = \frac{y}{ON} = y \sqrt{J_v};$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{ON} = z \sqrt{J_v}.$$

Подставив значения $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ в выражение (37.3), будем иметь:

$$J_v = A \cdot J_v x^2 + B \cdot J_v y^2 + C \cdot J_v z^2 - 2D \cdot J_v yz - 2E \cdot J_v zx - 2F \cdot J_v xy.$$

Разделив на J_v , получим:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1. \quad (38.2)$$

Уравнение (38.2) определяет поверхность, по которой перемещается точка N , при изменении направления оси v при условии:

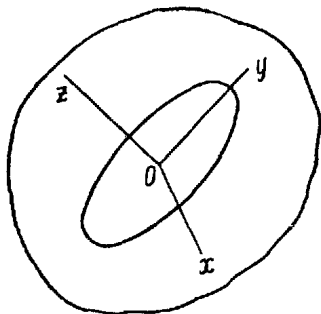


Рис. 87.

Если за оси координат принять главные оси инерции (рис. 87) то в уравнении эллипсоида инерции исчезают члены, содержащие произведение координат, и оно принимает вид:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1, \quad (38.3)$$

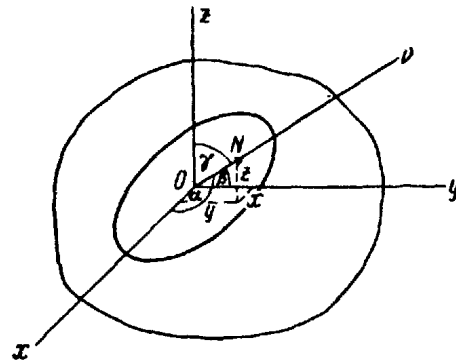


Рис. 86.

$ON = \frac{1}{\sqrt{J_v}}$. Это уравнение представляет собой уравнение поверхности второго порядка. Эта поверхность является эллипсоидом, так как расстояния от всех точек N до точки O , определяемые формулой (38.1), всегда конечны ($J_v \neq 0$). Этот эллипсоид называется *эллипсоидом инерции*. Центр эллипсоида находится в начале координат, так как уравнение (38.2) не содержит координат в первой степени. Три оси симметрии эллипсоида инерции называются *главными осями инерции*

тела в точке O , а моменты инерции относительно этих осей называются *главными моментами инерции*.

где коэффициенты A , B , C имеют новые значения, равные моментам инерции тела относительно главных осей инерции в данной точке, а центробежные моменты инерции D , E , F относительно каждой пары координатных осей равняются нулю.

Каждой точке тела соответствует определенный эллипсоид инерции, который характеризует моменты инерции тела относительно всех осей, проходящих через данную точку. Действительно, имея эллипсоид инерции для некоторой точки O (рис. 88), по расстоянию ON_1 от начала координат O до точки N_1 , в которой какая-либо ось v_1 пересекает эллипсоид инерции, можно определить момент инерции тела относительно этой оси по формуле (38.1):

$$J_{v_1} = \frac{1}{(ON_1)^2}.$$

Эллипсоид инерции, соответствующий центру тяжести тела, называется *центральным эллипсоидом инерции*, а его оси симметрии — *главными центральными осями инерции*.

§ 39. Свойства главных и главных центральных осей инерции

Установим свойства главной оси инерции в некоторой точке.

Положим, что координатная ось Oz — главная ось инерции в точке O , т. е. одна из осей симметрии эллипсоида инерции, а оси x и y — произвольные оси (рис. 89).

Тогда каждой точке $N(x, y, z)$ эллипсоида инерции соответствует симметричная ей относительно оси Oz точка $N'(-x, -y, z)$.

Подставив в уравнение (38.2) координаты той и другой точки, получим:

для точки N

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1;$$

для точки N'

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx - 2Fxy = 1.$$

Вычитая из одного равенства другое, найдем:

$$4Dyz + 4Ezx = 0,$$

или

$$z(Dy + Ex) = 0.$$

Так как координаты x , y и z этих точек не равны нулю, то равенство выполняется лишь при условии:

$$D = 0, \quad E = 0,$$

т. е. при равенстве нулю центробежных моментов инерции относительно осей y , z и x , z :

$$D = \sum m_i y_i z_i = 0$$

$$E = \sum m_i z_i x_i = 0$$

Таким образом, если какая-либо из осей координат, проведенных через заданную точку, является главной осью инерции в этой точке, то центробежные моменты инерции в которые входит соответствующая этой оси координата, равны нулю.

Установим разницу в свойствах главных и главных центральных осей инерции.

Положим, например, что ось Cz (рис. 90) является главной центральной осью инерции, т. е. главной осью инерции в центре тяжести, а ось Oz (рис. 91) — главной осью инерции в произвольной точке O .

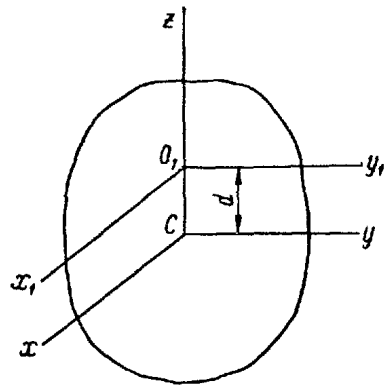


Рис. 90.

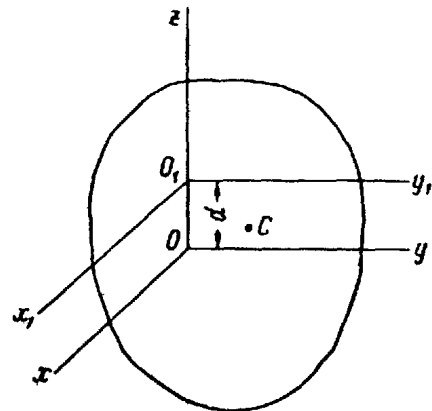


Рис. 91.

Так как эти оси являются главными осями инерции, то

$$D = \sum m_i y_i z_i = 0; \quad E = \sum m_i z_i x_i = 0.$$

Возьмем на этих осях произвольные точки O_1 ($CO_1 = OO_1 = d$) и проведем через них оси x_1 и y_1 , соответственно параллельные осям x и y .

Вычислим центробежные моменты инерции тела D_1 и E_1 относительно осей y_1 , z и z , x_1 :

$$D_1 = \sum m_i y_i (z_i - d) = \sum m_i y_i z_i - d \sum m_i y_i.$$

Так как $\sum m_i y_i z_i = D = 0$, а согласно (32.2) $\sum m_i y_i = m y_C$, то

$$D_1 = -d m y_C;$$

$$E_1 = \sum m_i (z_i - d) x_i = \sum m_i z_i x_i - d \sum m_i x_i.$$

Так как $\sum m_i z_i x_i = E = 0$, а согласно (32.2) $\sum m_i x_i = m x_C$, то

$$E_1 = -d m x_C.$$

В случае главной центральной оси (рис. 90) координаты центра тяжести тела равны нулю: $x_C = 0$ и $y_C = 0$. Поэтому

$$D_1 = 0 \quad \text{и} \quad E_1 = 0,$$

т. е. ось Cz является главной осью инерции не только в точке C , но и в точке O_1 .

Таким образом, главная центральная ось инерции является главной осью инерции для всех своих точек.

В случае главной оси, не проходящей через центр тяжести тела (рис. 91), $x_C \neq 0$ и $y_C \neq 0$, а потому

$$D_1 \neq 0 \quad \text{и} \quad E_1 \neq 0.$$

т. е. ось Oz не является главной осью инерции в точке O_1 .

Таким образом, главная ось инерции, не проходящая через центр тяжести твердого тела, является главной осью инерции лишь в одной своей точке.

При определении направлений главных центральных и главных осей инерции однородных тел нужно иметь в виду следующее:

1. Если однородное тело имеет ось симметрии, то эта ось является его главной центральной осью инерции.

2. Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то во всех точках этой плоскости одна из главных осей инерции направлена по перпендикуляру к этой плоскости.

Эти положения легко обосновать.

1. Центр тяжести однородного тела, имеющего ось симметрии, находится на этой оси. Направим ось Cz по оси симметрии тела, а оси Cx и Cy — произвольно в перпендикулярной к ней плоскости (рис. 92). Тогда каждой точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$ будет соответствовать симметричная точка $M'_i(-x_i, -y_i, z_i)$, а потому

$$D = \sum m_i y_i z_i = 0; \quad E = \sum m_i z_i x_i = 0.$$

Из этого следует, что ось симметрии тела Cz является главной центральной осью инерции тела.

2. На рис. 93 изображено твердое тело, имеющее плоскость симметрии. Через произвольную точку O этой плоскости проведены оси Ox и Oy в плоскости симметрии, а ось Oz — перпендикулярно к ней. Так как каждой

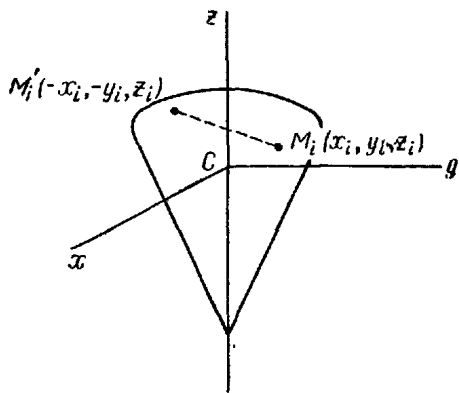


Рис. 92.

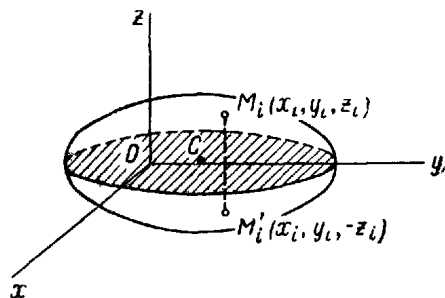


Рис. 93.

точке тела $M_i(x_i, y_i, z_i)$ в этом случае соответствует симметричная ей точка $M'_i(x_i, y_i, -z_i)$, то

$$D = \sum m_i y_i z_i = 0, \quad E = \sum m_i z_i x_i = 0.$$

Поэтому ось Oz , перпендикулярная к плоскости симметрии тела, является главной осью инерции тела в точке O .

§ 40. Вычисление моментов инерции твердого тела относительно произвольных осей

Момент инерции твердого тела относительно произвольной оси может быть легко определен, если известны направления его главных центральных осей инерции и моменты инерции тела относительно этих осей.

Рассмотрим два случая вычисления момента инерции твердого тела относительно произвольной оси.

Случай 1. Ось проходит через центр тяжести тела (рис. 94)

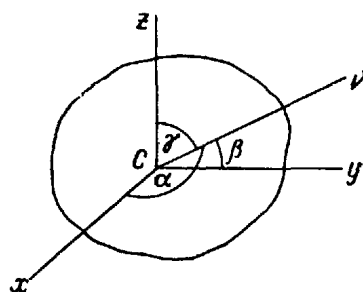


Рис. 94.

За оси координат принимают главные центральные оси инерции тела и вычисляют моменты инерции твердого тела A, B, C относительно этих осей.

Затем, пользуясь углами α, β, γ , составленными осью v с главными центральными осями инерции, вычисляют момент инерции тела относительно центральной оси Cv по формуле (37.3), которая в этом случае принимает вид:

$$J_{Cv} = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma. \quad (40.1)$$

Случай 2. Ось не проходит через центр тяжести тела (рис. 95)

Для вычисления момента инерции твердого тела относительно произвольной оси v сначала по формуле (40.1) определяют его момент инерции относительно оси Cv_1 , параллельной оси v и проходящей

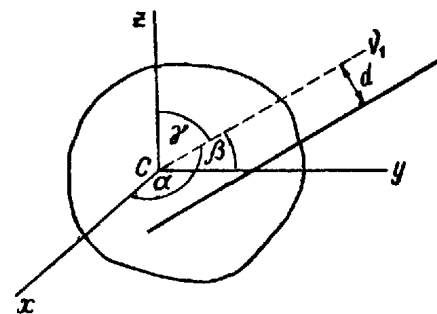


Рис. 95.

через центр тяжести тела. Затем к полученному результату прибавляют произведение массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$\left. \begin{aligned} J_{Cv_1} &= A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma, \\ J_v &= J_{Cv_1} + md^2. \end{aligned} \right\} \quad (40.2)$$

§ 41. Примеры вычисления моментов инерции однородных тел относительно произвольных осей

Пример 15. Определить моменты инерции однородного тонкого стержня длиной l и массой m :

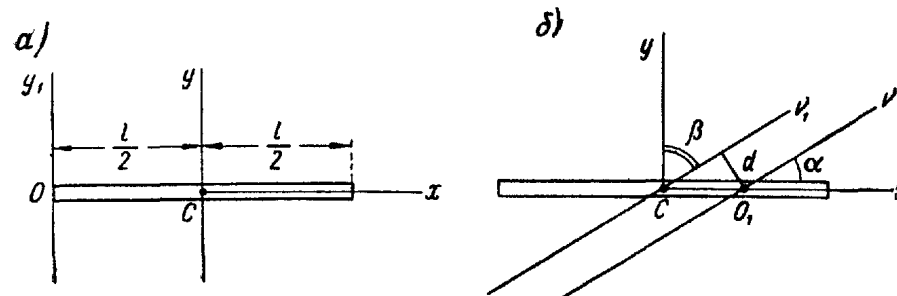


Рис. 96

1) относительно оси Oy_1 , проходящей через конец стержня перпендикулярно к его оси (рис. 96,а) и

2) относительно оси v , проходящей через точку O_1 ($CO_1 = \frac{l}{4}$) и составляющей с осью стержня угол 30° (рис. 96,б).

Решение. 1. Момент инерции стержня относительно центральной оси Cy , перпендикулярной к оси стержня, определяется формулой (36.1):

$$B = J_{Cy} = \frac{ml^2}{12}.$$

Момент инерции стержня относительно оси Oy_1 , параллельной центральной оси Cy , можно определить по формуле (35.1):

$$J_{y_1} = J_{Cy} + md^2,$$

где

$$d = \frac{l}{2},$$

$$J_{y_1} = \frac{ml^2}{12} + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}.$$

2. Определим момент инерции стержня относительно оси O_1v по формуле (40.2).

За оси координат примем оси симметрии стержня, т. е. его главные центральные оси инерции: Cx — ось стержня, Cy — ось, перпендикулярную к оси стержня и лежащую в плоскости чертежа, и Cz — ось, перпендикулярную к плоскости чертежа.

Положим, что заданная ось v лежит в плоскости чертежа. Проведем через центр тяжести ось v_1 , параллельную оси v , и вычислим момент инерции стержня относительно оси v_1 :

$$J_{Cv_1} = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma.$$

Ось v_1 составляет с осями координат углы:

$$\alpha = 30^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \quad \gamma = 90^\circ.$$

Так как $A = J_{Cx} \approx 0$ и $\cos \gamma = 90^\circ = 0$, то:

$$J_{Cv_1} = B \cos^2 60^\circ = \frac{ml^2}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{ml^2}{48}.$$

Расстояние между осями Cv_1 и O_1v равно:

$$d = \frac{l}{4} \sin 30^\circ = \frac{l}{8}.$$

Момент инерции относительно оси v определится:

$$J_v = J_{Cv_1} + md^2 = \frac{ml^2}{48} + m \left(\frac{l}{8}\right)^2 = \frac{7}{192} ml^2.$$

Пример 16. Определить момент инерции однородной круглой пластинки массой m и радиусом R относительно оси v , проходящей через точку O ($CO = \frac{R}{2}$) и составляющей с перпендикуляром к пластинке угол 30° . Проекция оси v на плоскость пластинки совпадает с диаметром пластинки (рис. 97).

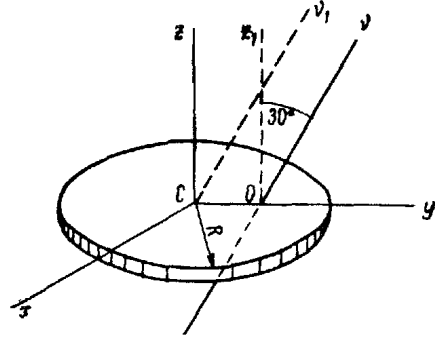


Рис. 97

Решение. Вычислим момент инерции пластинки относительно оси Ov по формуле (40.2). Для этого за оси координат примем главные центральные оси инерции (оси симметрии пластинки): Cx , Cy и Cz , из которых ось Cy проходит через точку O .

По формулам (36.3) и (36.2) будем иметь:

$$A = J_{Cx} = \frac{mR^2}{4}; \quad B = J_{Cy} = \frac{mR^2}{4}; \quad C = J_{Cz} = \frac{mR^2}{2}.$$

Ось Cv_1 , параллельная оси Ov , составляет с осями координат углы:

$$\alpha = 90^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \quad \gamma = 30^\circ.$$

Момент инерции пластинки относительно оси Cv_1 :

$$J_{Cv_1} = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma.$$

Так как $\cos \alpha = \cos 90^\circ = 0$, то

$$J_{Cv_1} = \frac{mR^2}{4} \cos^2 60^\circ + \frac{mR^2}{2} \cos^2 30^\circ = \frac{mR^2}{16} + \frac{3}{8} mR^2 = \frac{7}{16} mR^2.$$

Расстояние между осями Cv_1 и Ov :

$$d = \frac{R}{2} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} R.$$

Момент инерции относительно оси v :

$$J_v = J_{Cv_1} + md^2 = \frac{7}{16} mR^2 + m \frac{3}{16} R^2 = \frac{5}{8} mR^2.$$

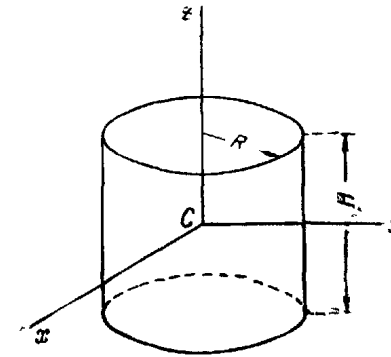


Рис. 98.

Пример 17. Определить, при какой высоте H главные моменты инерции однородного круглого цилиндра радиусом R относительно всех трех главных центральных осей инерции будут одинаковы (рис. 98).

Решение. Моменты инерции однородного круглого цилиндра относительно его осей симметрии, т. е. относительно главных центральных осей инерции, вычислены в § 36:

$$J_{Cx} = J_{Cy} = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right); \quad J_{Cz} = \frac{mR^2}{2}.$$

При равенстве всех трех моментов инерции имеем:

$$m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) = \frac{mR^2}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{H^2}{12} = \frac{R^2}{4},$$

откуда $H = \sqrt{3} R$.

Пример 18. Определить моменты инерции однородного параллелепипеда, длины ребер которого равны a , b , c : 1) относительно его главных центральных осей инерции; 2) относительно оси y_1 ,

совпадающей с одним из ребер параллелепипеда, и 3) относительно оси v , совпадающей с диагональю параллелепипеда (рис. 99, а).

Решение. 1. Главными центральными осями инерции прямоугольного параллелепипеда являются три его оси симметрии Cx , Cy , Cz (рис. 99, б). Для вычисления моментов инерции параллелепипеда относительно каждой из этих осей воспользуемся формулами (34.6), т. е.

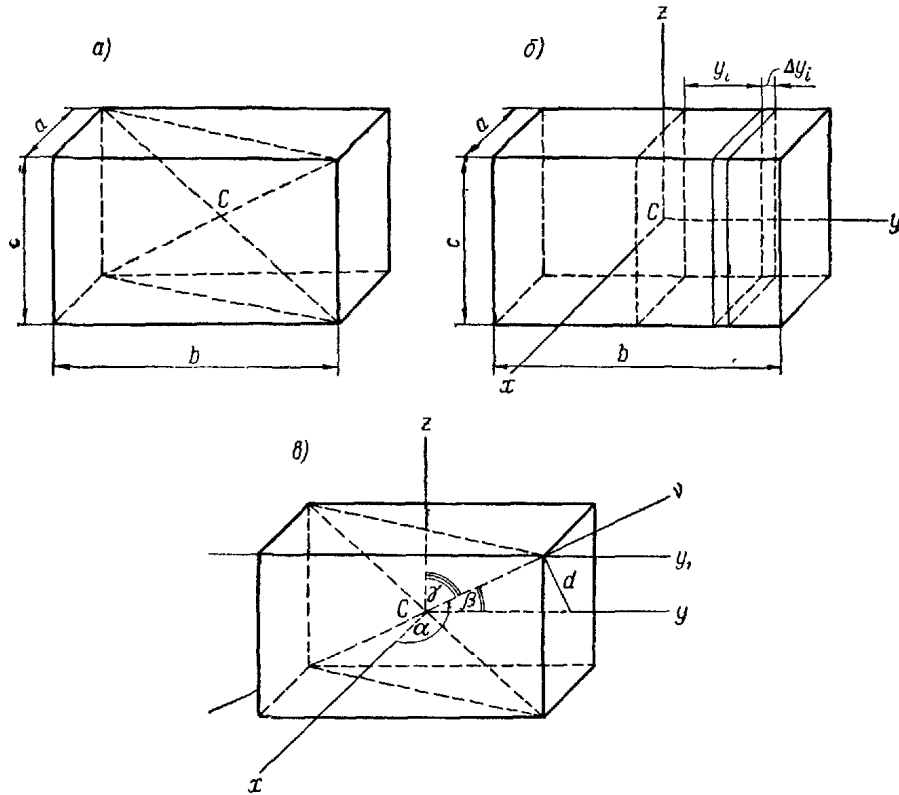


Рис. 99.

вычислим момент инерции относительно каждой оси как сумму моментов инерции параллелепипеда относительно двух координатных плоскостей, пересекающихся на этой оси.

Чтобы определить момент инерции параллелепипеда J_{zCx} относительно плоскости zCx , разобьем параллелепипед на множество элементарных прямоугольных пластинок, параллельных этой плоскости и имеющих толщину Δy_i .

Тогда масса каждой пластинки

$$m_i = \rho a c \Delta y_i,$$

где ρ — плотность параллелепипеда.

Момент инерции каждой пластинки:

$$\Delta J_{zCx} = \rho a c y_i^2 \Delta y_i.$$

Момент инерции параллелепипеда относительно плоскости zCx определится как предел суммы моментов инерции элементарных пластинок:

$$J_{zCx} = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \rho a c y^2 dy = \rho a c \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 dy = \frac{\rho a c b^3}{12}.$$

Так как масса параллелепипеда $m = \rho a b c$, то:

$$J_{zCx} = \frac{m b^2}{12}.$$

Аналогично:

$$J_{xCy} = \frac{m c^2}{12}; \quad J_{yCz} = \frac{m a^2}{12}.$$

Моменты инерции параллелепипеда относительно главных центральных осей инерции определяются по формулам (34.6):

$$J_{Cx} = J_{zCx} + J_{xCy} = \frac{m}{12} (b^2 + c^2);$$

$$J_{Cy} = J_{xCy} + J_{yCz} = \frac{m}{12} (c^2 + a^2);$$

$$J_{Cz} = J_{yCz} + J_{zCx} = \frac{m}{12} (a^2 + b^2).$$

2. Момент инерции параллелепипеда относительно оси y_1 , отстоящей от оси Cy_1 на расстоянии $d = \frac{1}{2} \sqrt{c^2 + a^2}$ (рис. 99, в), определим по формуле (35.1):

$$J_{y_1} = J_{Cy} + m d^2 = \frac{m}{12} (c^2 + a^2) + \frac{1}{4} m (c^2 + a^2) = \frac{1}{3} m (c^2 + a^2).$$

Момент инерции параллелепипеда относительно оси v , совпадающей с его диагональю (рис. 99, в), определим по формуле (40.1):

$$J_{Cv} = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma;$$

$$A = J_{Cx} = \frac{m}{12} (b^2 + c^2); \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};$$

$$B = J_{Cy} = \frac{m}{12} (c^2 + a^2); \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};$$

$$C = J_{Cz} = \frac{m}{12} (c^2 + a^2); \quad \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Подставляя эти значения в формулу (40.1), получаем:

$$J_{Cv} = \frac{m}{12} \frac{a^2 (b^2 + c^2) + b^2 (c^2 + a^2) + c^2 (a^2 + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

или

$$J_{Cv} = \frac{1}{6} m \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Пример 19. Однородная тонкая пластинка имеет форму прямоугольного треугольника, катеты которого равны a и b . Определить ее центробежный момент инерции относительно осей, направленных по катетам.

Решение. Положим, что пластинка имеет толщину h и плотность ρ . Тогда масса пластинки

$$m = \rho h \frac{1}{2} ab.$$

Для определения центробежного момента инерции пластинки относительно осей x и y , направленных по катетам треугольника, разобьем пластинку на элементарные прямоугольники, имеющие стороны Δx_i и Δy_i (рис. 100).

Масса каждого прямоугольника

$$m_i = \rho h \Delta x_i \Delta y_i.$$

Центробежный момент инерции пластинки относительно осей x и y будет иметь вид

$$J_{xy} = \sum m_i x_i y_i = \sum \rho h x_i y_i \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i.$$

При переходе к пределу суммы получим двойной интеграл, вычисленный по площади треугольника. Для определения пределов интегрирования воспользуемся уравнением прямой AB в отрезках на осях: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, откуда $y = b \left(1 - \frac{x}{a}\right)$.

Пределы изменения x : 0, a .

Пределы изменения y : 0, $b \left(1 - \frac{x}{a}\right)$.

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \rho h x y \, dx \, dy = \rho h \int_0^a \left[\frac{xy^2}{2} \right]_0^{b(1-\frac{x}{a})} dx = \\ &= \rho h \int_0^a \frac{b^2 x}{2} \left(1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{\rho h b^2}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3a} + \frac{x^4}{4a^2} \right]_0^a = \\ &= \frac{\rho h b^2}{2} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{2}{3} a^2 + \frac{a^2}{4} \right] = \frac{\rho h b^2 a^2}{24}. \end{aligned}$$

Так как $\frac{1}{2} \rho h a b = m$, то

$$J_{xy} = \frac{m a b}{12}.$$

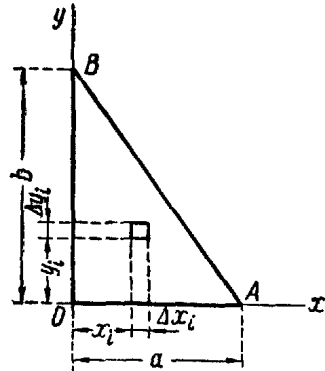


Рис. 100.

Вопросы для самоконтроля

1. Как классифицируют в динамике силы, действующие на точки механической системы?
2. Что называется центром масс системы точек и как определяют его координаты?
3. Что называют моментом инерции твердого тела относительно плоскости, оси и точки?
4. Какую величину называют радиусом инерции тела относительно оси?
5. Каковы размерности момента инерции в системах единиц МКС, СГС и МКГСС?
6. Какова зависимость между моментами инерции, а также между радиусами инерции тела относительно параллельных осей?
7. Что представляет собой эллипсоид инерции и какие оси называют главными осями инерции твердого тела в данной точке?
8. При каких условиях некоторая ось является главной осью инерции в данной точке?
9. Что называется центробежным моментом инерции твердого тела?
10. Как определить по эллипсоиду инерции, относительно какой оси из всех осей, проходящих через данную точку, момент инерции твердого тела имеет наибольшее значение?
11. Какими свойствами обладают главные и главные центральные оси инерции?
12. Как вычисляется момент инерции твердого тела относительно произвольной оси, проходящей или не проходящей через центр тяжести тела?
13. Относительно какого полюса момент инерции данного тела имеет наименьшее значение?

ГЛАВА VII

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

§ 42. Дифференциальные уравнения движения механической системы

Рассмотрим систему n материальных точек $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n$ (рис. 101).

Массу каждой точки обозначим m_i и в каждую точку проведем из начала координат радиус-вектор \mathbf{r}_i . Приложенные к точкам силы разделим на внешние и внутренние. Равнодействующие приложенных к точке внешних и внутренних сил обозначим соответственно \mathbf{P}_i^E и \mathbf{P}_i^I .

Составим основное уравнение динамики для каждой точки M_i ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$m_i \mathbf{w}_i = m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{P}_i^E + \mathbf{P}_i^I. \quad (42.1)$$

Проектируя векторы обеих частей равенства (42.1) на оси x, y, z , получаем:

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= X_i^E + X_i^I, \\ m_i \ddot{y}_i &= Y_i^E + Y_i^I, \\ m_i \ddot{z}_i &= Z_i^E + Z_i^I. \end{aligned} \right\} \quad (42.2)$$

Для механической системы, имеющей n точек, получим $3n$ дифференциальных уравнений движения.

Так как внутренние силы, приложенные к точкам системы, в большинстве случаев остаются неизвестными, а число точек системы обычно велико, то эти $3n$ уравнений могут быть проинтегрированы лишь в исключительных случаях.

§ 43. Теорема о движении центра масс механической системы

Рассмотрим движущуюся систему материальных точек M_1, M_2, M_i, M_n , находящихся под действием системы внешних и внутренних сил (рис. 102). Положение центра масс системы C определяется равенством (3.21):

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{m}.$$

Уравнения движения точек этой системы имеют вид (42.1):

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{P}_i^E + \mathbf{P}_i^J$$

($i = 1, 2, \dots, n$).

Суммируя эти уравнения, находим

$$\sum m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum \mathbf{P}_i^E + \sum \mathbf{P}_i^J. \quad (a)$$

Преобразуем левую часть равенства (a), учитывая (32.1):

$$\sum m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum m_i \mathbf{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} (m \mathbf{r}_C) = m \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2}.$$

Геометрическая сумма внутренних сил равна нулю (см. § 31). Уравнение (a) приобретает вид

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} = \sum \mathbf{P}_i^E = \mathbf{R}_E,$$

или

$$m \mathbf{w}_C = \sum \mathbf{P}_i^E = \mathbf{R}_E. \quad (43.1)$$

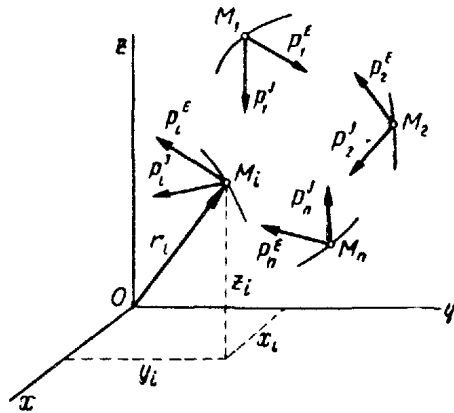


Рис. 101.

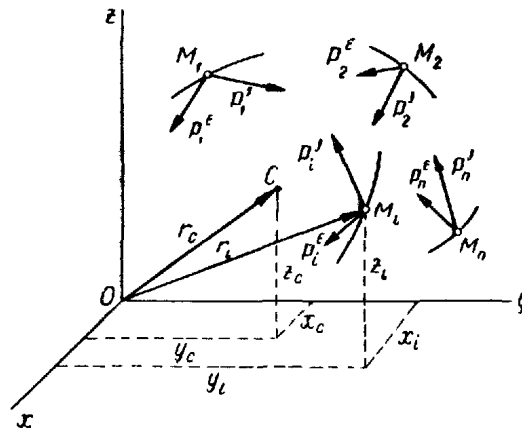


Рис. 102.

Уравнение (43.1) выражает теорему о движении центра масс системы, которая формулируется следующим образом: центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе всей системы, к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

Проектируя обе части векторного равенства (43.1) на оси x, y, z , получаем три уравнения в проекциях на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x}_C &= \sum X_i^E = X^E, \\ m \ddot{y}_C &= \sum Y_i^E = Y^E, \\ m \ddot{z}_C &= \sum Z_i^E = Z^E, \end{aligned} \right\} \quad (43.2)$$

где X_i^E, Y_i^E, Z_i^E — проекции силы \mathbf{P}_i^E , а

X^E, Y^E, Z^E — проекции главного вектора сил \mathbf{R}^E на оси координат.

Уравнения (43.2) представляют собой дифференциальные уравнения движения центра масс. Из уравнений (43.1) и (43.2) следует, что внутренние силы непосредственно не влияют на движение центра масс.

Отсутствие внутренних сил в уравнениях (43.1) и (43.2), выражающих теорему о движении центра масс, придает им большое практическое значение.

Из кинематики известно, что поступательное движение твердого тела полностью определяется движением одной из его точек. Следовательно, решив задачу о движении центра масс тела как материальной точки с массой, равной массе всего тела, можно определить поступательное движение всего тела.

Во многих примерах, решенных в предыдущих главах курса, поступательное движение тела и рассматривалось как движение материальной точки, обладающей массой данного тела.

Движение свободного твердого тела в общем случае можно разложить на поступательное движение вместе с центром масс и на сферическое вокруг центра масс.

По теореме о движении центра масс системы в этом случае можно определить только поступательное движение тела как движение материальной точки, а сферическое движение приходится рассматривать особо, пользуясь другими теоремами динамики. Таким образом, вопрос о том, можно ли рассматривать то или иное тело как материальную точку, решается в зависимости от характера движения тела, а не от его размеров.

Так, например, при исследовании поступательных движений планет солнечной системы их можно рассматривать как материальные точки, обладающие массами этих планет, но при изучении вращений планет вокруг их осей рассматривать их как точки нельзя.

Следствия из теоремы.

1. Если главный вектор внешних сил все время остается равным нулю, то центр масс механической системы находится в покое или движется прямолинейно и равномерно.

Из уравнения (43.1) следует, что если $R^E = 0$, то $w_C = 0$, т. е. $v_C = \text{const}$.

При этом, если начальная скорость v_{C_0} центра масс равна нулю, то центр масс находится в покое. Если же начальная скорость $v_{C_0} \neq 0$, то центр масс движется прямолинейно и равномерно с этой скоростью.

2. Если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо неподвижную ось все время остается равной нулю, то проекция центра масс механической системы на эту ось или неподвижна или движется равномерно.

Из первого уравнения (43.2) следует, что если $X^E = 0$, то

$$\ddot{x}_C = \dot{v}_{Cx} = 0, \text{ т. е. } v_{Cx} = \text{const}.$$

Если при этом в начальный момент $v_{Cx} = 0$, то $\dot{x}_C = 0$, $x_C = \text{const}$, т. е. координата x центра масс остается постоянной; а при $v_{Cx} \neq 0$ проекция центра масс на ось x движется равномерно.

Следствия из теоремы о движении центра масс системы выражают закон сохранения движения центра масс системы.

§ 44. Иллюстрация теоремы о движении центра масс механической системы

Теорема о движении центра масс системы, одна из основных теорем динамики, объясняет целый ряд явлений, которые приходится наблюдать. Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие эту теорему и ее следствия.

1. Движение человека по горизонтальной плоскости

Если человек начинает идти по горизонтальной плоскости, то перемещение его центра тяжести происходит под действием сил сцепления между подошвами его обуви и плоскостью. Эти силы всегда направлены в сторону движения человека и являются по отношению к нему внешними. Они возникают при соответствующем напряжении мускулов человека, что создает иллюзию того, что движущими силами являются напряжения мускулов, т. е. внутренние силы.

Если бы сцепление отсутствовало, т. е. плоскость была гладкой, то человек не мог бы по ней идти.

2. Движение локомотива или автомобиля по горизонтальному пути

Внешними силами, вызывающими движение локомотива или автомобиля по горизонтальному пути, являются силы сцепления, приложенные к ведущим колесам в точках соприкосновения их с рельсами или поверхностью дороги. Эти силы направлены в сторону движения локомотива или автомобиля.

Действительно, к ведущему колесу со стороны двигателя приложен вращающий момент $M_{вр}$, стремящийся вращать колесо вокруг

его оси (рис. 103, а). Такому вращению препятствует действующая со стороны пути сила сцепления $F_{сц}$. Эта сила заставляет колесо катиться, а локомотив или автомобиль двигаться в ту сторону, куда направлена эта сила. Вращающий момент, действующий на колесо со стороны двигателя, относится к внутренним силам и вызвать движение центра тяжести локомотива (автомобиля) не может. Этот момент только вызывает появление внешних сил — сил сцепления.

Локомотив, поставленный на абсолютно гладкие рельсы, под действием вращающего момента не сдвинется с места, так как при отсутствии сцепления ведущие колеса будут только вращаться вокруг своих осей (буксовать).

Торможение поезда также вызывается внешними силами, приложенными к колесам со стороны рельсов.

К ведомому колесу, не связанному с двигателем, приложена сила давления на ось P , параллельная пути (рис. 103, б). В точке касания с рельсом к колесу приложена сила сцепления $F_{сц}$, препятствующая

скольжению колеса под действием силы P . При торможении модуль силы сцепления $F_{сц}$, направленной противоположно движению, возрастает и под действием этой силы поезд (автомобиль) получает замедление. Силы взаимодействия между тормозными колодками и колесами являются внутренними и не могут произвести торможение поезда (автомобиля), но эти силы вызывают увеличение модуля внешней силы $F_{сц}$. Если колеса начинают скользить, то сила сцепления превращается в силу трения скольжения. При равномерном движении поезда все действующие на него внешние силы уравновешиваются.

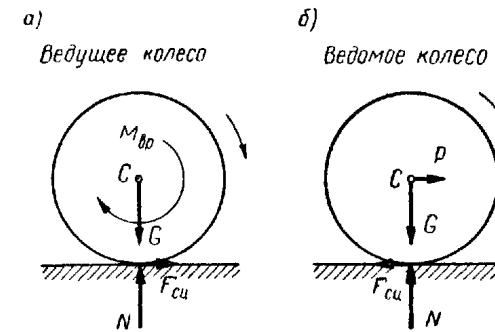


Рис. 103.

3. Действие пары сил на свободное твердое тело

Если приложить пару сил к свободному твердому телу, находящемуся в покое, то согласно первому следствию теоремы центр масс тела сохранит состояние покоя. Под действием этой пары сил тело начнет вращаться вокруг своего центра масс.

4. Откатывание орудия при выстреле

Внутренние силы взрыва, действующие в стволе орудия, при выстреле не могут привести в движение центр масс системы орудие — снаряд.

Если снаряд вылетает в горизонтальном направлении, то свободно стоящее орудие откатывается в противоположную сторону, так как при отсутствии горизонтальных внешних сил центр масс системы

орудие — снаряд не может перемещаться по горизонтали. В действительности горизонтальная внешняя сила имеется (реакция шероховатой поверхности, на которой находится орудие), но величина ее недостаточна, чтобы устранить это явление.

§ 45. Примеры применения теоремы о движении центра масс механической системы

Пример 20. Человек весом G_1 стоит на корме лодки весом G_2 и длиной l , находящейся в покое в стоячей воде. Определить, пренебрегая сопротивлением воды, расстояние σ , на которое переместится лодка, если человек перейдет на нос лодки.

Решение. Система лодка — человек находится в покое под действием трех внешних вертикальных сил: веса лодки G_2 , веса человека G_1 и реакции воды R , линия действия которой проходит через центр масс системы (рис. 104). Проведем из произвольной точки O горизонтальную и вертикальную оси координат. Обозначим x_1 и x_2 горизонтальные координаты центров тяжести частей системы, находящейся в покое, и вычислим координату центра масс этой системы x_C по формуле (32.2):

$$x_C = \frac{G_1 x_1 + G_2 x_2}{G_1 + G_2}.$$

Так как проекция на ось x главного вектора внешних сил, действующих на рассматриваемую систему, равна нулю и начальная скорость равна нулю, то согласно второму следствию из теоремы (§ 43) координата x_C центра масс не изменяется. Отсюда следует, что при движении человека с кормы лодки на нос, т. е. вправо, лодка должна переместиться влево, чтобы центр масс C системы остался на той же вертикали. Новые координаты центров тяжести человека и лодки станут равными (рис. 105):

$$x'_1 = x_1 + l - \sigma; \quad x'_2 = x_2 - \sigma.$$

Координата центра масс всей системы в этом положении определится:

$$x'_C = \frac{G_1 x'_1 + G_2 x'_2}{G_1 + G_2} = \frac{G_1 (x_1 + l - \sigma) + G_2 (x_2 - \sigma)}{G_1 + G_2}.$$

Так как $x_C = \text{const}$, то приравняем два ее значения: $x_C = x'_C$, т. е.

$$\frac{G_1 x_1 + G_2 x_2}{G_1 + G_2} = \frac{G_1 (x_1 + l - \sigma) + G_2 (x_2 - \sigma)}{G_1 + G_2},$$

отсюда

$$G_1 x_1 + G_2 x_2 = G_1 x_1 + G_1 l - G_1 \sigma + G_2 x_2 - G_2 \sigma$$

или

$$(G_1 + G_2) \sigma = G_1 l,$$

тогда

$$\sigma = l \frac{G_1}{G_1 + G_2},$$

т. е. перемещение лодки σ меньше относительного перемещения человека l во столько раз, во сколько раз вес человека G_1 меньше суммы весов $G_1 + G_2$.

Пример 21. Однородный стержень длиной $2l$, опирающийся одним концом на гладкую горизонтальную плоскость, начинает падать из состояния покоя, образуя в начальный момент с плоскостью угол α . Определить траекторию верхнего конца B стержня при падении.

Решение. Проведем горизонтальную и вертикальную оси координат в плоскости движения стержня, приняв за начало координат O начальное положение A_0 его нижнего конца (рис. 105, а). Движение стержня совершается под действием двух внешних сил: веса G и реакции гладкой горизонтальной плоскости N . Так как обе внешние силы вертикальны и в начальный момент стержень находился в покое, то, по второму следствию теоремы (§ 43), координата центра масс стержня не изменяется и во все время движения равна своему начальному значению:

$$x_C = x_{C_0} = l \cos \alpha.$$

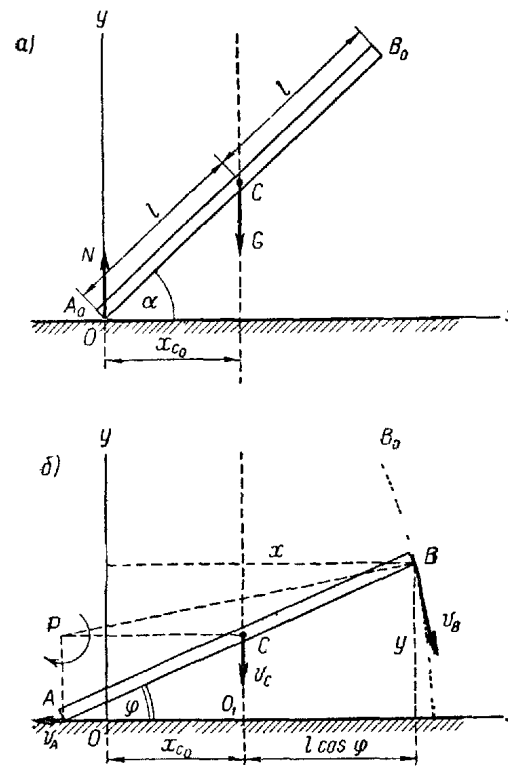


Рис 105

Учитывая, что центр тяжести стержня AB движется по вертикали, определим координаты x и y верхнего конца стержня B в зависи-

мости от угла φ , составленного стержнем с плоскостью в произвольный момент времени t (рис. 105, б)

$$x = x_C + l \cos \varphi = l \cos \alpha + l \cos \varphi;$$

$$y = 2l \sin \varphi.$$

Исключая из этих уравнений параметр φ , найдем уравнение траектории точки B :

$$\cos \varphi = \frac{x - l \cos \alpha}{l}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{2l};$$

$$\frac{(x - l \cos \alpha)^2}{l^2} + \frac{y^2}{4l^2} = 1.$$

Полученное уравнение показывает, что конец B стержня движется по эллипсу. Центр эллипса находится в точке $O_1(l \cos \alpha, 0)$, а длины полуосей равны l и $2l$.

Для любого положения стержня мгновенным центром скоростей P является точка пересечения перпендикуляров, восставленных в точках C и A к вертикальной скорости v_C и горизонтальной скорости v_A . Скорость v_B точки B перпендикулярна к отрезку PB .

Пример 22. На гладком горизонтальном фундаменте установлен электромотор весом G_1 . На валу мотора под прямым углом к оси вращения закреплен однородный стержень длиной $2l$ и весом G_2 , на конце которого насажен точечный груз весом G_3 . Вал вращается равномерно с угловой скоростью ω (рис. 106, а). Определить:

- 1) уравнение горизонтального движения мотора, поставленного на фундамент свободно;
- 2) наибольшее горизонтальное давление на болты, если электромотор прикреплен ими к фундаменту.

Решение. 1. Рассмотрим механическую систему, состоящую из мотора (без стержня и груза) массой $m_1 = \frac{G_1}{g}$, стержня массой $m_2 = \frac{G_2}{g}$ и точечного груза массой $m_3 = \frac{G_3}{g}$. Если мотор поставлен на гладкий фундамент свободно, то на систему действуют внешние силы: веса частей G_1 , G_2 , G_3 и реакция опорной плоскости N .

Положим, что в начальный момент стержень был расположен вертикально и система находилась в покое (рис. 106, б), а по истечении некоторого промежутка времени установилась постоянная угловая скорость вращения вала ω .

Проведем оси координат, как указано на рис. 106, б.

Так как проекция X^E главного вектора внешних сил на ось x равна нулю и в начальный момент система находилась в покое, то по второму следствию теоремы (§ 43) имеем $x_C = \text{const}$. В начальный момент центр масс системы C , т. е. точка приложения равнодействующей трех сил тяжести G_1 , G_2 , G_3 находилась на оси y , т. е.

$$x_C = 0.$$

Так как координата x_C остается постоянной, то при смещении центров тяжести стержня и груза влево от оси y центр тяжести мотора смещается вправо и наоборот.

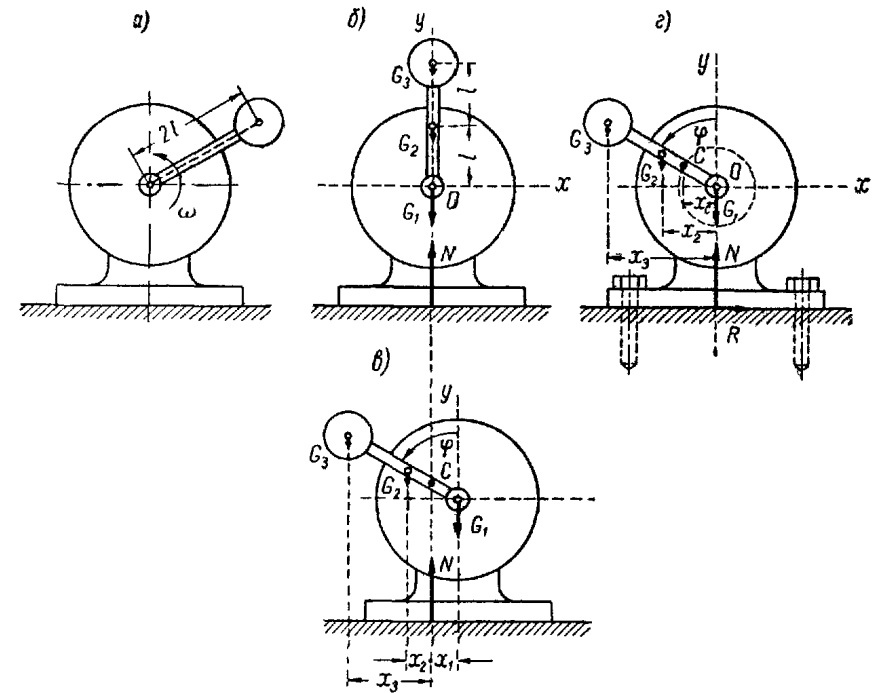


Рис. 106

Определим координату центра масс системы C в любой момент времени t по рис. 106, в, пользуясь формулой (32.2), и приравняем ее начальному значению $x_C = 0$:

$$x_C = \frac{G_1 x_1 + G_2 x_2 + G_3 x_3}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{G_1 x_1 - G_2 (l \sin \varphi - x_1) - G_3 (2l \sin \varphi - x_1)}{G_1 + G_2 + G_3} = 0.$$

Отсюда определим x_1 :

$$G_1 x_1 - G_2 l \sin \varphi + G_2 x_1 - G_3 2l \sin \varphi + G_3 x_1 = 0,$$

$$x_1 = \frac{G_2 + 2G_3}{G_1 + G_2 + G_3} l \sin \varphi.$$

Подставив значение $\varphi = \omega t$, получим уравнение горизонтального движения мотора:

$$x_1 = \frac{G_2 + 2G_3}{G_1 + G_2 + G_3} l \sin \omega t.$$

Мотор совершает гармонические колебания амплитуды $\frac{G_2 + 2G_3}{G_1 + G_2 + G_3} l$ и периода $\frac{2\pi}{\omega}$.

2. Если мотор прикреплен к фундаменту (рис. 106, з), то на систему действует и горизонтальная внешняя сила—реакция болтов R . В этом случае центр масс системы C перемещается по окружности радиусом OC и его координата x_C изменяется.

Модуль реакции R можно найти из дифференциального уравнения движения центра масс (43.2):

$$m\ddot{x}_C = X^E.$$

Определим координату x_C в любой момент времени t по рис. 106, з, пользуясь формулой (32.2):

$$x_C = \frac{G_1x_1 + G_2x_2 + G_3x_3}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{G_1 \cdot O - G_2l \sin \varphi - G_32l \sin \varphi}{G_1 + G_2 + G_3} = \\ = -\frac{G_2 + 2G_3}{G_1 + G_2 + G_3} l \sin \omega t.$$

Вычислим \ddot{x}_C :

$$\ddot{x}_C = \frac{G_2 + 2G_3}{G_1 + G_2 + G_3} l \omega^2 \sin \omega t.$$

Масса системы

$$m = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{g}.$$

Проекция главного вектора внешних сил на ось x : $X^E = R_x$.

Подставим значения m , \ddot{x}_C и X^E в уравнение (43.2):

$$\frac{G_1 + G_2 + G_3}{g} \left(\frac{G_2 + 2G_3}{G_1 + G_2 + G_3} l \omega^2 \sin \omega t \right) = R_x,$$

отсюда

$$R_x = \frac{G_2 + 2G_3}{g} l \omega^2 \sin \omega t.$$

Проекция силы R на ось x изменяется по гармоническому закону. Наибольший модуль силы R получим при $\sin \omega t = \pm 1$, т. е. при горизонтальных положениях стержня:

$$R_{\max} = \frac{G_2 + 2G_3}{g} l \omega^2.$$

Пример 23. Найти угловую скорость ω вала электромотора, описанного в примере 20, при которой электромотор, не прикрепленный болтами к фундаменту, отрывается от фундамента.

Решение. Составим дифференциальное уравнение (43.2) движения центра масс системы вдоль оси y :

$$m\ddot{y}_C = Y^E.$$

Определим координату y_C центра масс системы по формуле (32.2):

$$y_C = \frac{G_1y_1 + G_2y_2 + G_3y_3}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Пользуясь рис. 106, в, найдем ординаты центров тяжести частей системы:

$$y_1 = 0; \quad y_2 = l \cos \varphi = l \cos \omega t; \quad y_3 = 2l \cos \varphi = 2l \cos \omega t.$$

Подставив эти значения ординат, получим

$$y_C = \frac{(G_2 + 2G_3) l \cos \omega t}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Найдем \ddot{y}_C :

$$\ddot{y}_C = -\frac{G_2 + 2G_3}{G_1 + G_2 + G_3} l \omega^2 \cos \omega t.$$

Определим проекцию главного вектора внешних сил на ось y :

$$Y^E = N - G_1 - G_2 - G_3.$$

Подставим значения m , y_C , Y^E в дифференциальное уравнение (43.2):

$$\frac{G_1 + G_2 + G_3}{g} \left(-\frac{G_2 + 2G_3}{G_1 + G_2 + G_3} l \omega^2 \cos \omega t \right) = N - G_1 - G_2 - G_3,$$

откуда

$$N = G_1 + G_2 + G_3 - \frac{G_2 + 2G_3}{g} l \omega^2 \cos \omega t.$$

Максимальное и минимальное значения N будут следующими:

$$N_{\max} = G_1 + G_2 + G_3 + \frac{G_2 + 2G_3}{g} l \omega^2,$$

$$N_{\min} = G_1 + G_2 + G_3 - \frac{G_2 + 2G_3}{g} l \omega^2.$$

Неприкрепленный к фундаменту мотор начинает подпрыгивать, когда реакция опорной плоскости равняется нулю. Наименьшую угловую скорость, при которой мотор отрывается от фундамента, найдем из условия:

$$N_{\min} = 0, \quad \text{т. е.} \quad G_1 + G_2 + G_3 - \frac{G_2 + 2G_3}{g} l \omega^2 = 0,$$

откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{(G_1 + G_2 + G_3)g}{(G_2 + 2G_3)l}}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему о движении центра масс системы.
2. Какое движение твердого тела можно рассматривать как движение материальной точки, имеющей массу данного тела и почему?
3. При каких условиях центр масс системы находится в состоянии покоя и при каких условиях он движется равномерно и прямолинейно?
4. При каких условиях центр масс системы не перемещается вдоль некоторой оси?
5. Приведите примеры, иллюстрирующие теорему о движении центра масс механической системы?
6. Какое действие на свободное твердое тело оказывает приложенная к нему пара сил?

ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ
МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ
МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

§ 46. Импульс силы и его проекции на координатные оси

Если постоянная по модулю и направлению сила \mathbf{P} действует в течение промежутка времени $\tau = t_2 - t_1$, то ее импульсом за этот промежуток времени является вектор

$$\mathbf{S} = \mathbf{P}\tau. \quad (46.1)$$

Направление этого вектора совпадает с направлением силы, а его модуль равен произведению модуля силы на время ее действия, т. е.

$$S = P\tau.$$

Импульс силы характеризует передачу материальной точке механического движения со стороны действующих на нее тел за данный промежуток времени.

Единицами импульса являются: в системе МКС импульс силы в один ньютон за время в одну секунду, т. е. один ньютон секунда ($\text{кг} \cdot \text{м}/\text{сек}$), в системе СГС — одна дина-секунда ($\text{г} \cdot \text{см}/\text{сек}$), а в системе МКГСС — $1 \text{ кгс} \cdot \text{сек}$.

Чтобы найти импульс переменной силы $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ за промежуток времени $t_2 - t_1$, этот промежуток разбивают на n элементарных промежутков Δt_k и определяют элементарные импульсы силы за эти промежутки. Модуль элементарного импульса ΔS_k равен произведению модуля силы в момент t_k на Δt_k , а направление совпадает с направлением силы в этот момент (рис. 107):

$$\Delta S_k = \mathbf{P}_k \Delta t_k. \quad (46.2)$$

Импульс силы \mathbf{P}_k за промежуток $t_2 - t_1$ определяется как предел геометрической суммы элементарных импульсов при $n \rightarrow \infty$ и при $\Delta t_k \rightarrow 0$:

$$\mathbf{S} = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum \Delta S_k = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum \mathbf{P}_k \Delta t_k.$$

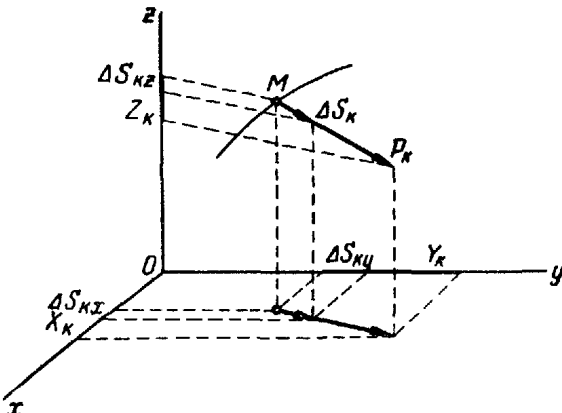


Рис. 107.

Предел векторной суммы бесчисленного множества бесконечно малых слагаемых $\mathbf{P}_k \Delta t_k$ при $\Delta t_k \rightarrow 0$ называется векторным интегралом от вектора \mathbf{P} по скалярному аргументу t и обозначается $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{P} dt$.

Таким образом,

$$\mathbf{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{P} dt. \quad (46.3)$$

Модуль и направление импульса переменной силы можно определить по способу проекций.

Импульс \mathbf{S} переменной силы \mathbf{P} за промежуток времени $t_2 - t_1$ представляет собой предел геометрической суммы элементарных импульсов ΔS_k . Поэтому проекция импульса \mathbf{S} на каждую координатную ось равна пределу алгебраической суммы проекций элементарных импульсов ΔS_k на эту ось.

Проекция элементарного импульса $\Delta S_k = \mathbf{P}_k \Delta t$ на оси координат будут (рис. 107):

$$\Delta S_{kx} = \Delta S_k \cos(\Delta S, \mathbf{i}) = P_k \Delta t_k \cos(\mathbf{P}_k, \mathbf{i}) = X_k \Delta t_k;$$

аналогично

$$\Delta S_{ky} = Y_k \Delta t_k, \quad \Delta S_{kz} = Z_k \Delta t_k,$$

где X_k, Y_k, Z_k — проекции силы \mathbf{P}_k на оси координат.

Просуммировав проекции элементарных импульсов и перейдя к пределу, получим определенные интегралы по переменной t , представляющие собой проекции импульса \mathbf{S} на оси координат:

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} X dt; \quad S_y = \int_{t_1}^{t_2} Y dt; \quad S_z = \int_{t_1}^{t_2} Z dt. \quad (46.4)$$

Здесь $X = f_1(t); Y = f_2(t); Z = f_3(t)$ — проекции переменной силы $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ на оси координат.

Модуль и направление импульса \mathbf{S} определяются по его проекциям:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2},$$

$$\cos(\mathbf{S}, \mathbf{i}) = \frac{S_x}{S}; \quad \cos(\mathbf{S}, \mathbf{j}) = \frac{S_y}{S}; \quad \cos(\mathbf{S}, \mathbf{k}) = \frac{S_z}{S}. \quad (46.5)$$

Для постоянной по модулю и направлению силы \mathbf{P} , действующей в течение промежутка времени τ , формулы (46.4) имеют вид

$$S_x = X\tau, \quad S_y = Y\tau, \quad S_z = Z\tau, \quad (46.6)$$

где X, Y, Z — проекции силы \mathbf{P} на оси координат.

§ 47. Импульс равнодействующей

Если к точке M приложено несколько сил P_1, P_2, \dots, P_n , то равнодействующая этих сил

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n.$$

Умножим обе части этого равенства на dt и проинтегрируем в пределах от t_1 до t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} P_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} P_2 dt + \dots + \int_{t_1}^{t_2} P_n dt.$$

Так как каждый из членов этого равенства представляет собой импульс соответствующей силы, то

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n, \quad (47.1)$$

т. е. импульс равнодействующей нескольких сил за некоторый промежуток времени равен геометрической сумме импульсов составляющих сил за этот же промежуток времени.

В проекциях на координатные оси это равенство принимает вид

$$\left. \begin{aligned} S_x &= S_{1x} + S_{2x} + \dots + S_{nx}, \\ S_y &= S_{1y} + S_{2y} + \dots + S_{ny}, \\ S_z &= S_{1z} + S_{2z} + \dots + S_{nz}. \end{aligned} \right\} \quad (47.2)$$

Равенства (47.2) показывают, что проекция импульса равнодействующей на любую ось равна алгебраической сумме проекций импульсов составляющих сил на ту же ось.

§ 48. Теорема об изменении количества движения материальной точки

Количеством движения материальной точки называется вектор, имеющий направление скорости и модуль, равный произведению массы m на скорость v (рис 108).

Количество движения, зависящее от массы точки и ее скорости, является мерой механического движения.

Понятие количества движения было введено в механику Декартом и положено в основу механики Ньютоном.

Единицей количества движения является количество движения точки, имеющей единицу массы и движущейся со скоростью, равной единице скорости, т. е. в системе МКС $1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/сек} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/сек}$, в системе СГС $1 \text{ г} \cdot 1 \text{ см/сек} = 1 \text{ г} \cdot \text{см/сек}$

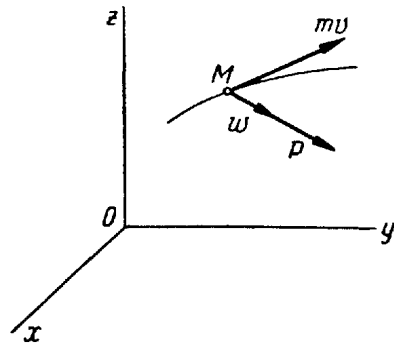


Рис 108.

и в системе МКГСС $1 \text{ кгс} \cdot \text{сек}^2/\text{м} \cdot 1 \text{ м/сек} = 1 \text{ кгс} \cdot \text{сек}$. Единицы количества движения совпадают с единицами импульса силы. Проекция количества движения mv на оси x, y, z равны:

$$mv_x, mv_y, mv_z, \quad (48.1)$$

где v_x, v_y, v_z — проекции скорости на оси координат.

Положим, что P — равнодействующая сил, приложенных к материальной точке. Преобразуем основное уравнение динамики следующим образом:

$$m\dot{v} = P, \quad \text{или} \quad m\dot{v} = m \frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = P. \quad (48.2)$$

Уравнение (48.2) выражает теорему об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме, которая формулируется так: производная по времени от количества движения материальной точки геометрически равна равнодействующей сил, приложенных к этой точке.

Установим зависимость между изменением количества движения и импульсами действующих на точку сил.

Из уравнения (48.2)

$$d(mv) = P dt. \quad (48.3)$$

Проинтегрируем обе части равенства в пределах, соответствующих моментам времени t_1 и t_2 :

$$\int_{v_1}^{v_2} d(mv) = \int_{t_1}^{t_2} P dt.$$

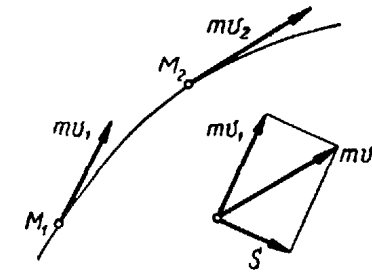


Рис. 109.

Так как правая часть этого равенства представляет собой импульс S силы P за промежуток времени $t_2 - t_1$ (46.3), то

$$mv_2 - mv_1 = S. \quad (48.4)$$

Из равенства (48.4)

$$mv_2 = mv_1 + S.$$

т. е. вектор mv_2 можно определить диагональю параллелограмма, построенного на векторах mv_1 и S (рис. 109).

Заменяв импульс S равнодействующей силы P в уравнении (48.4) импульсами S_1, S_2, \dots, S_n составляющих сил P_1, P_2, \dots, P_n , получим

$$mv_2 - mv_1 = S_1 + S_2 + \dots + S_n,$$

или

$$mv_2 - mv_1 = \sum S_i. \quad (48.5)$$

Уравнение (48.5) выражает теорему об изменении количества движения материальной точки в конечной форме: *изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов сил, приложенных к точке за тот же промежуток времени.*

Эту теорему называют также *теоремой импульсов.*

Векторному уравнению (48.5) соответствуют три уравнения в проекциях на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} mv_{2x} - mv_{1x} &= S_{1x} + S_{2x} + \dots + S_{nx}, \\ mv_{2y} - mv_{1y} &= S_{1y} + S_{2y} + \dots + S_{ny}, \\ mv_{2z} - mv_{1z} &= S_{1z} + S_{2z} + \dots + S_{nz}, \end{aligned} \right\} \text{или} \left. \begin{aligned} mv_{2x} - mv_{1x} &= \sum S_{ix}, \\ mv_{2y} - mv_{1y} &= \sum S_{iy}, \\ mv_{2z} - mv_{1z} &= \sum S_{iz}. \end{aligned} \right\} \quad (48.6)$$

Уравнения (48.6) показывают, что *изменение проекции количества движения материальной точки на данную ось за некоторый промежуток времени равно сумме проекций на ту же ось импульсов приложенных к точке сил за тот же промежуток времени.*

Большинство задач решается по уравнениям в проекциях на оси координат.

§ 49. Примеры применения теоремы об изменении количества движения материальной точки

Пример 24. Материальная точка массой $m = 10$ г движется по окружности с постоянной скоростью 40 см/сек. Найти импульс сил, действующих на точку за время прохождения точкой половины окружности.

Решение. Определим импульс сил по уравнению (48.4):

$$mv_2 - mv_1 = S.$$

В рассмотренном случае (рис. 110)

$$mv_1 = -mv_2,$$

поэтому

$$S = 2mv_2.$$

Модуль импульса

$$S = 2mv_2 = 2 \cdot 10 \cdot 40 = 800 \text{ гсм/сек.}$$

При изменении положения диамметра M_1M_2 изменится направление импульса S , но сохранится его модуль.

Рассматриваемое равномерное движение точки по окружности происходит под действием постоянной по модулю силы, направленной к центру окружности.

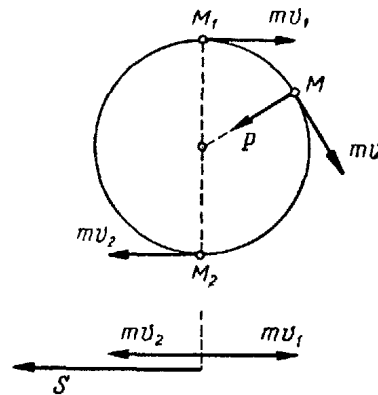


Рис. 110.

Пример 25. Среднее показание динамометра, установленного между тепловозом и вагонами грузового поезда за t сек, оказалось равным P . В течение этого времени поезд двигался на подъем $i = \operatorname{tg} \alpha$ (α — угол подъема) и скорость его увеличилась от v_0 до v км/час. Коэффициент суммарного сопротивления движению состава равен f . Определить вес состава.

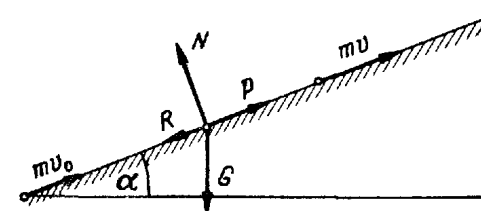


Рис. 111

Решение. Рассматриваем поступательное движение состава как движение материальной точки. Применяем к его движению теорему импульсов в проекциях на ось x , направ-

ленную по траектории движения поезда в сторону его движения (рис. 111)

Согласно (48.6) для промежутка времени от t_0 до t имеем

$$mv_x - mv_{0x} = \sum S_{ix}. \quad (a)$$

Так как векторы количеств движения mv_0 и mv направлены в сторону направления оси x , то $mv_x = mv$ и $mv_{0x} = mv_0$

Уравнение (a) принимает вид

$$mv - mv_0 = \sum S_{ix}. \quad (б)$$

На состав действуют силы: движущая сила P , приложенная со стороны тепловоза, модуль которой показывает динамометр, вес состава G , нормальная реакция пути N и сила сопротивления движению состава R с модулем $fG \cos \alpha$. Проекции импульсов этих сил на ось x можно определить по первой формуле (46.6):

$$S_x = Xt,$$

где X — проекция соответствующей силы на ось x , t — время ее действия.

Проекции импульсов сил P , G , R и N на ось x соответственно будут.

$$Pt, \quad -G \cdot \sin \alpha \cdot t, \quad -R \cdot t, \quad 0$$

Подставив эти значения в уравнение (б), получим

$$mv - mv_0 = Pt - G \sin \alpha \cdot t - Rt. \quad (в)$$

Для малого угла α имеем: $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha = i$. Уравнение (в) примет вид

$$\frac{G(v - v_0)}{g} = Pt - Gt - fGt,$$

откуда

$$G = \frac{Pt}{\frac{v - v_0}{g} + (i + f)t}.$$

§ 50. Теорема об изменении количества движения механической системы

Количеством движения механической системы называется вектор, равный геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех материальных точек этой системы.

Если отдельная точка системы M_i ($i=1, 2, \dots, n$) имеет массу m_i и скорость v_i , то вектор количества движения системы K

$$K = \sum m_i v_i. \quad (50.1)$$

Преобразуем выражение (50.1):

$$K = \sum m_i v_i = \sum m_i \frac{dr_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i r_i.$$

Так как согласно (32.1) имеем $\sum m_i r_i = m r_C$, то

$$K = \frac{d}{dt} (m r_C) = m \frac{dr_C}{dt} = m v_C,$$

т. е.

$$K = m v_C. \quad (50.2)$$

Выражение (50.2) показывает, что вектор количества движения механической системы имеет модуль, равный произведению массы системы на скорость ее центра масс и направление этой скорости.

Проектируя вектор $K = \sum m_i v_i = m v_C$ на оси координат, получаем

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \sum m_i v_{ix} = m v_{Cx}, \\ K_y &= \sum m_i v_{iy} = m v_{Cy}, \\ K_z &= \sum m_i v_{iz} = m v_{Cz} \end{aligned} \right\} \quad (50.3)$$

Проекция количества движения механической системы на каждую координатную ось, равная сумме проекций количеств движения всех точек системы на эту ось, определяется произведением массы системы на проекцию скорости центра масс на эту же ось

Дифференцируя (50.2) по времени, получаем

$$\frac{dK}{dt} = m \frac{dv_C}{dt} = m w_C.$$

Согласно уравнению (43.1) движения центра масс системы

$$m w_C = R^E.$$

Следовательно,

$$\frac{dK}{dt} = R^E. \quad (50.4)$$

Уравнение (50.4) выражает теорему об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме: производная по времени от количества движения механической системы геометрически равна главному вектору внешних сил, действующих на эту систему.

Векторному уравнению (50.4) соответствуют три уравнения в проекциях на оси координат:

$$\frac{dK_x}{dt} = X^E, \quad \frac{dK_y}{dt} = Y^E, \quad \frac{dK_z}{dt} = Z^E. \quad (50.5)$$

Уравнения (50.5) показывают, что производная по времени от проекции количества движения механической системы на любую ось равна проекции главного вектора внешних сил, действующих на систему, на ту же ось.

Из уравнений (50.4) или (50.5) следует, что изменение количества движения механической системы вызывается только внешними силами.

Следствия из теоремы:

1. Если главный вектор внешних сил все время равен нулю, то количество движения механической системы остается постоянным.

Из уравнения (50.4) следует, что если $R^E = 0$, то $\frac{dK}{dt} = 0$, т. е.

$$K = m v_C = \text{const}. \quad (50.6)$$

2. Если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо ось все время равна нулю, то проекция количества движения механической системы на эту ось постоянна.

Так, например, при $X^E = 0$ из первого уравнения (50.5)

$$\frac{dK_x}{dt} = X^E = 0,$$

откуда

$$K_x = m v_{Cx} = \text{const} \quad (50.7)$$

Следствия из теорем об изменении количества движения механической системы выражают закон сохранения количества движения системы.

Так как уравнения (50.4) и (50.5) тесно связаны с уравнениями (43.1) и (43.2), определяющими движение центра масс системы, то формулы (50.6) и (50.7) можно иллюстрировать некоторыми примерами из § 44. Так, например, пренебрегая внешними силами, действующими на солнечную систему, можно заключить, что количество движения системы $K = m v_C$ остается постоянным и ее центр масс движется прямолинейно и равномерно.

Откат орудия при выстреле по горизонтальному направлению обусловлен тем, что проекция количества движения системы орудие —

снаряд на горизонтальную ось x не изменяется при отсутствии горизонтальных внешних сил, т. е. по формуле (50.7):

$$K_x = mv_{Cx} = \text{const.}$$

Как до выстрела, так и после него, $K_x = 0$. Отсюда можно определить скорость отката орудия:

$$K_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = 0,$$

где m_1, v_1 — масса и скорость вылета снаряда;

m_2, v_2 — масса и скорость отката орудия.

Скорость отката орудия определится ее проекцией

$$v_{2x} = -\frac{m_1}{m_2} v_{1x}.$$

Установим теперь зависимость между изменением количества движения механической системы и импульсами действующих на эту систему сил.

Разделим силы, приложенные к точкам механической системы, на внешние силы \mathbf{P}_i^E и внутренние силы \mathbf{P}_i^J

Определим изменение количества движения каждой точки системы за промежуток времени $t_2 - t_1$ по уравнению (48.5):

$$(m_i v_i)_2 - (m_i v_i)_1 = \mathbf{S}_i^E + \mathbf{S}_i^J \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где \mathbf{S}_i^E и \mathbf{S}_i^J — импульсы внешних и внутренних сил, действующих на точку M_i в промежутке $t_2 - t_1$.

Суммируя левые и правые части составленных n равенств, получим

$$(\sum m_i v_i)_2 - (\sum m_i v_i)_1 = \sum \mathbf{S}_i^E + \sum \mathbf{S}_i^J$$

Так как главный вектор внутренних сил, действующих на механическую систему, равен нулю, то и геометрическая сумма импульсов внутренних сил равна нулю, т. е. $\sum \mathbf{S}_i^J = 0$. Тогда

$$(\sum m_i v_i)_2 - (\sum m_i v_i)_1 = \sum \mathbf{S}_i^E$$

или

$$K_2 - K_1 = \sum \mathbf{S}_i^E. \quad (50.8)$$

Уравнение (50.8) выражает теорему об изменении количества движения механической системы в конечной форме, или теорему импульсов: *изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов внешних сил, приложенных к системе, за тот же промежуток времени.*

Векторному уравнению (50.8) соответствуют три уравнения в проекциях на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} K_{2x} - K_{1x} &= \sum \mathbf{S}_{ix}^E, \\ K_{2y} - K_{1y} &= \sum \mathbf{S}_{iy}^E, \\ K_{2z} - K_{1z} &= \sum \mathbf{S}_{iz}^E \end{aligned} \right\} \quad (50.9)$$

Уравнения (50.9) показывают, что *изменение проекции количества движения механической системы на любую ось равно сумме проекций импульсов всех внешних сил, действующих на систему, на ту же ось*

При решении задач обычно пользуются уравнениями (50.9). Эти уравнения так же, как и уравнения (50.5), не содержат внутренних сил, что имеет большое практическое значение

§ 51. Примеры применения теоремы об изменении количества движения механической системы

Пример 26. Определить количество движения диска массой m и радиусом R , вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр тяжести, с угловой скоростью ω

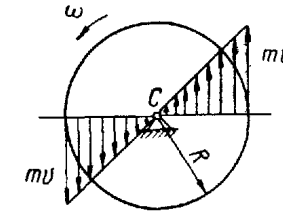


Рис 112

Решение. Так как центр масс диска остается неподвижным, т. е. $v_C = 0$, то количество движения диска

$$K = mv_C = 0.$$

Показав векторы количества движения точек диска, расположенных на одном из его диаметров (рис 112), убедимся в том, что их геометрическая сумма равна нулю. Поэтому и геометрическая сумма количества движения всех точек диска оказывается равной нулю, т. е.

$$K = \sum m_i v_i = 0$$

Пример 27. Колесо весом G и радиусом R катится без скольжения по рельсу, делая n об/мин. Определить количество движения колеса.

Решение. Количество движения колеса

$$K = mv_C$$

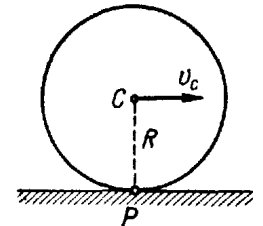


Рис 113

Скорость v_C центра масс колеса определяется как вращательная скорость вокруг мгновенного центра скоростей, который находится в точке P соприкосновения колеса с рельсом (рис 113):

$$v_C = R\omega$$

Так как $\omega = \frac{\pi n}{30}$, то $v_c = \frac{R\pi n}{30}$.

Подставляя значения m и v_c в выражение, определяющее K , получаем

$$K = \frac{GR\pi n}{30g}.$$

Пример 28. Гимнаст весом G , оттолкнувшись от трамплина, имеет скорость v_0 , направленную под углом α к горизонту, и движется в воздухе, держа в руках гирию весом Q . В наивысшей точке своей траектории он отбрасывает назад гирию с горизонтальной относительной скоростью u . Определить,

- 1) скорость гимнаста после отбрасывания гири;
- 2) удлинение прыжка гимнаста с помощью гири и
- 3) место падения гири.

Решение 1 Будем рассматривать систему гимнаст — гирия как систему двух материальных точек весом G и Q . Если сопротивление воздуха не учитывается, то внешними силами, действующими на систему во время прыжка, являются силы тяжести G и Q .

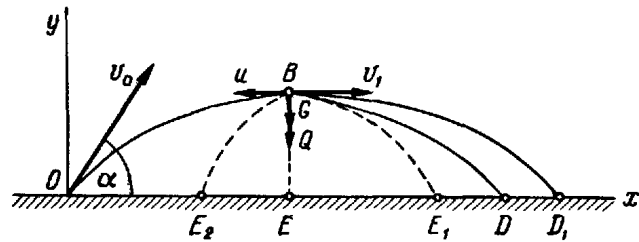


Рис 114

Как известно из § 7, движение гимнаста вместе с гирей под действием сил тяжести должно происходить по параболе OBD (рис 114) согласно уравнениям:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha, \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}$$

При этом горизонтальное движение происходит со скоростью $v_0 \cos \alpha$, а продолжительность подъема по кривой OB и продолжительность падения по кривой BD одинаковы и равны:

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

В рассматриваемой задаче движение гимнаста вместе с гирей имеет место только на участке OB . Так как в точке B гирия получает горизонтальную относительную скорость u , т. е. взаимодействие между гимнастом и гирей происходит в горизонтальном направлении,

то на участке BD_1 законы, изложенные в § 7, сохраняются только для вертикального движения.

Поэтому время падения как гимнаста, так и гири, сохраняет значение

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Так как проекция главного вектора вертикальных внешних сил $X^E = 0$, то согласно (50.7) проекция количества движения системы $K_x = \text{const}$ за все время движения.

В любой момент времени K_x имеет начальное значение, т. е.

$$K_x = \frac{G+Q}{g} v_0 \cos \alpha.$$

В точке B гимнаст, отбросивший гирию со скоростью u , приобрел скорость v_1 . Абсолютная скорость гири в этот момент горизонтальна и равна

$$v_0 \cos \alpha - u.$$

Проекция количества движения системы, выраженная через скорость гимнаста и гири в точке B :

$$K'_x = \sum m_i v_{ix} = \frac{G}{g} v_1 + \frac{Q}{g} (v_0 \cos \alpha - u).$$

Согласно (50.7) $K'_x = K_x$, т. е.

$$\frac{G}{g} v_1 + \frac{Q}{g} (v_0 \cos \alpha - u) = \frac{G+Q}{g} v_0 \cos \alpha,$$

откуда

$$\frac{G}{g} v_1 = \frac{G}{g} v_0 \cos \alpha + \frac{Q}{g} u,$$

или

$$v_1 = v_0 \cos \alpha + \frac{Q}{G} u. \quad (51.1)$$

Формула (51.1) показывает, что отбрасывание назад гири со скоростью u увеличивает горизонтальную скорость гимнаста на величину $\frac{Q}{G} u$.

2. Применяя (50.7) к движению гимнаста без гири на участке BD_1 , устанавливаем, что модуль его горизонтальной скорости v_1 не меняется.

Длину прыжка гимнаста определяем из условия, что его горизонтальное движение на каждом из участков OB и BD_1 происходит равномерно:

$$\begin{aligned} OD_1 &= OE + ED_1 = v_0 \cos \alpha t + v_1 t = \\ &= v_0 \cos \alpha \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \left(v_0 \cos \alpha + \frac{Q}{G} u \right) \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \\ &= \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} + \frac{Q}{G} u \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \end{aligned} \quad (51.2)$$

Первое слагаемое правой части (51.2) определяет длину прыжка OD без отбрасывания гири, а второе слагаемое — удлинение прыжка DD_1 , вызванное отбрасыванием гири.

3. Горизонтальное движение гири, брошенной гимнастом, происходит равномерно со скоростью

$$v_0 \cos \alpha = u.$$

Возможны три вида ее траектории:

1) $u < v_0 \cos \alpha$ — гиря продолжает двигаться вперед по параболе BE_1 . Положение точки падения

$$EE_1 = (v_0 \cos \alpha - u)t = (v_0 \cos \alpha - u) \frac{v_0 \sin \alpha}{g};$$

2) $u = v_0 \cos \alpha$ — гиря падает по вертикали BE ;

3) $u > v_0 \cos \alpha$ — гиря движется назад по параболе BE_2 . Положение точки падения

$$EE_2 = (u - v_0 \cos \alpha) \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Таким образом, приземление гимнаста вместе с гирей происходит в точке D . Если же гимнаст отбрасывает гирю, то он движется дальше, приземляясь в точке D_1 , а гиря приземляется в одной из точек E , т. е. по другую сторону от точки D .

При сохранении горизонтальной проекции количества движения системы происходит ее перераспределение между частями системы в результате взаимодействия этих частей.

Пример 29. Струя жидкости плотностью ρ вытекает со скоростью v из трубки с площадью поперечного сечения F и ударяется под углом α о вертикальную стену. Определить давление, производимое струей на стену (рис. 115).

Решение. Применим теорему импульсов к движению объема жидкости, вытекающей из трубки за некоторый промежуток времени τ . Этот объем заполняет участок струи длиной $v\tau$ с площадью поперечного сечения F . Пренебрегая действием силы тяжести на форму струи, будем считать его прямолинейным. Масса этого объема равна произведению плотности жидкости ρ на объем:

$$m = \rho F v \tau.$$

На рассматриваемую механическую систему действуют следующие внешние силы: сила тяжести, реакция стены R , направленная перпендикулярно к стене, и давление той части жидкости, которая соприкасается с выделенным объемом; это давление вследствие его незначительности учитывать не будем.

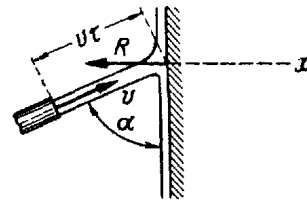


Рис 115

Направим ось x , как указано на рис. 115, и воспользуемся уравнением (50.9):

$$K_{2x} - K_{1x} = \sum S_{ix}^E.$$

Положим, что все частицы жидкости струи имеют одинаковую скорость v . Тогда количество движения рассматриваемого объема жидкости в момент $t_1 = 0$ будет вектором, имеющим направление скорости v и модуль

$$K_1 = mv = \rho F v^2 \tau.$$

Его проекция на ось x

$$K_{1x} = K_1 \sin \alpha = \rho F v^2 \tau \sin \alpha.$$

К моменту $t_2 = \tau$ частицы струи без учета брызг приобретут скорости, направленные по стене.

Проекция количества движения рассматриваемого объема жидкости на ось x в момент $t_2 = \tau$:

$$K_{2x} = 0.$$

В правую часть уравнения (50.9) входит лишь проекция импульса горизонтальной силы R , определенная по формуле (46.6):

$$S_x = -R\tau.$$

Подставляя значения K_{2x} , K_{1x} и S_x в уравнение (50.9), получаем:

$$- \rho F v^2 \tau \sin \alpha = -R\tau.$$

Отсюда определяется модуль реакции стены, равной тому давлению, которое производит струя на стену:

$$R = \rho F v^2 \sin \alpha.$$

Максимальное давление имеет место при $\alpha = 90^\circ$:

$$R_{\max} = \rho F v^2.$$

§ 52. Понятие о теле переменной массы. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского

В классической механике Ньютона масса движущегося тела рассматривалась только как постоянная величина. Между тем встречаются случаи движения тел, масса которых за время движения изменяется.

Рассмотрим примеры такого движения, взятые из области техники.

Масса и момент инерции вращающегося веретена, на которое навивается нить, изменяются в процессе движения. То же самое происходит с рулоном газетной бумаги, когда он разматывается на валу печатной машины.

Убывает также масса летящей ракеты вследствие сгорания топлива; убывает масса аэростата при выбрасывании балласта; возрастает масса

привязного аэростата, поднимающего за собой канат при подъеме, и т. п.

Реактивный самолет представляет собой тело, масса которого увеличивается за счет частиц воздуха, засасываемых в двигатель, и уменьшается вследствие отбрасывания продуктов горения топлива.

В природе тоже имеется немало примеров движения тел, масса которых изменяется с течением времени. Так, например, масса Земли возрастает вследствие падения на нее метеоритов. Масса метеорита, движущегося в атмосфере, убывает вследствие отрыва и сгорания его частиц. Масса плавающей льдины возрастает вследствие намерзания и убывает вследствие таяния. Масса Солнца возрастает от присоединения космической пыли и уменьшается от излучения.

Создателями основ механики тела переменной массы являются русские ученые И. В. Мещерский (1859 — 1935) и К. Э. Циолковский (1857 — 1935).

В работах «Динамика точки переменной массы» (1897) и «Уравнения движения материальной точки переменной массы в общем случае» (1904) И. В. Мещерский впервые вывел уравнение движения точки переменной массы.

Работы К. Э. Циолковского были посвящены вопросам движения ракет. Полученные им результаты заложили основу современной науки о движении реактивных аппаратов.

Телом переменной массы называют тело, масса которого изменяется с течением времени.

Если размерами этого тела по сравнению с проходимыми им расстояниями можно пренебречь, то его можно рассматривать как *точку переменной массы*.

Точка переменной массы определяется математически как точка с массой, являющейся функцией времени $m(t)$. Положив, что изменение массы точки происходит в результате непрерывного отбрасывания или присоединения материальных частиц, массы которых весьма малы, получим возможность считать функцию $m(t)$ непрерывной и дифференцируемой.

При отбрасывании элементарной материальной частицы возникает элементарная реактивная сила, действующая как на основную, так и на отделяемую точку.

Эти две силы, представляющие собой действие и прогиводействие, равны между собой по модулю и направлены в противоположные стороны.

Если основная и отделяемые точки рассматриваются как единая система, то силы взаимодействия между ними являются для этой системы внутренними силами и масса этой системы не изменяется, оставаясь за все время движения постоянной.

Из этого следует, что к такой системе можно применять теоремы динамики системы постоянной массы. Положим, что в некоторый момент времени t одна точка конечной массы $m(t)$ движется с абсолютной скоростью v , а другая — элементарной массы $dm(t)$ движется

с абсолютной скоростью u . В момент времени $t + dt$ эти точки образуют одну точку с массой $m + dm$, абсолютная скорость которой равна $v + dv$. При этом $dm > 0$ (в случае присоединения элементарной массы) и $dm < 0$ (при отделении ее от массы основной точки). Количество движения системы

в момент t :

$$mv + u dm,$$

в момент $t + \Delta t$:

$$(m + dm)(v + dv).$$

Изменение количества движения системы за время dt :

$$\begin{aligned} dK &= (m + dm)(v + dv) - (mv + u dm) = \\ &= m dv + dm(v - u) + dm \cdot dv. \end{aligned}$$

По теореме об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме (50.4) имеем:

$$\frac{dK}{dt} = P,$$

где P — равнодействующая сил, приложенных к точке с конечной массой.

Подставляя в уравнение (50.4) полученное выше выражение dK и пренебрегая членом $dm \cdot dv$, получаем

$$m \frac{dv}{dt} + (v - u) \frac{dm}{dt} = P, \quad (52.1)$$

где $u - v = u_r$ — относительная скорость присоединенной массы.

Вводя относительную скорость u_r , имеем

$$m \frac{dv}{dt} = P + u_r \frac{dm}{dt}.$$

Обозначив $u_r \frac{dm}{dt} = R$, получим

$$m \frac{dv}{dt} = P + R. \quad (52.2)$$

Здесь R — реактивная сила, равная произведению относительной скорости u_r присоединяющейся массы на секундное приращение массы основной точки $\frac{dm}{dt}$:

$$R = u_r \frac{dm}{dt}. \quad (52.3)$$

Уравнение (52.2) представляет собой *основное уравнение динамики точки переменной массы и называется уравнением Мещерского*.

Из этого уравнения следует, что *уравнение движения точки переменной массы имеет вид основного уравнения динамики*

точки постоянной массы, находящейся под действием приложенных к ней сил и реактивной силы.

В случае, если абсолютная скорость u присоединяющейся массы равна нулю, уравнение (52.1) принимает вид

$$m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} = P,$$

или

$$\frac{d}{dt} (mv) = P. \quad (52.4)$$

Если же равняется нулю относительная скорость u_r присоединяющейся массы, то согласно (52.3) $R = 0$, и уравнение (52.2) принимает вид основного уравнения динамики точки постоянной массы:

$$m \frac{dv}{dt} = P.$$

Применим уравнение Мещерского к свободному движению ракеты без учета сил притяжения к Земле и сопротивления воздуха. В этом случае

$$P = 0.$$

Положим (рис. 116), что неизменная масса корпуса ракеты равна m_k , переменная масса горючего — m_r , а масса газов, проходящих через

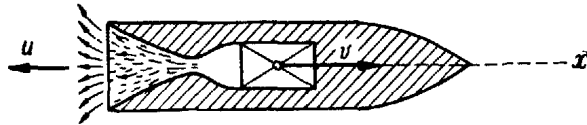


Рис. 116.

выхлопное отверстие сопла в 1 сек, равна $\frac{dm_r}{dt}$. Скорость движения ракеты обозначим v , а относительную скорость выхлопа продуктов горения u_r .

Определим движение ракеты уравнением (52.2) при $P = 0$ в проекциях на ось x , направленную по оси ракеты в сторону ее движения:

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= R_x \\ (m_k + m_r) \frac{dv_x}{dt} &= u_{rx} \frac{dm_r}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (52.5)$$

Подставляя в полученное уравнение проекции скоростей $v_x = v$ и $u_{rx} = -u_r$, имеем

$$(m_k + m_r) \frac{dv}{dt} = -u_r \frac{dm_r}{dt}. \quad (52.6)$$

Умножив полученное уравнение на dt и разделив переменные, проинтегрируем его в пределах, соответствующих начальному моменту движения ракеты $t_0 = 0$ и некоторому моменту t во время ее движения:

$$\int_{v_0}^v dv = - \int_{m_r^0}^{m_r} u_r \frac{dm_r}{m_k + m_r},$$

$$v|_{v_0}^v = -u_r \ln(m_k + m_r) \Big|_{m_r^0}^{m_r},$$

откуда

$$v = v_0 + u_r \ln \frac{m_k + m_r^0}{m_k + m_r}. \quad (52.7)$$

Когда весь запас взрывчатых веществ сгорает, то ракета имеет наибольшую скорость. При $m_r = 0$

$$v_{\max} = v_0 + u_r \ln \left(1 + \frac{m_r^0}{m_k} \right). \quad (52.8)$$

Эта формула выведена К. Э. Циолковским и называется формулой Циолковского. Формула (52.8) показывает, что предельная скорость ракеты зависит от ее начальной скорости v_0 , от относительной скорости вылета продуктов горения u_r и от относительного запаса топлива $\frac{m_r^0}{m_k}$.

Из этой формулы следует, что предельная скорость ракеты не зависит от времени полного сгорания топлива.

При помощи формулы (52.8) Циолковским составлена таблица наибольших скоростей ракеты в зависимости от запаса топлива и относительной скорости отброса*.

Из этой таблицы следует, что для достижения первой космической скорости, равной 7,9 км/сек, при которой ракета становится спутником Земли, при отношении массы топлива к массе ракеты $\frac{m_r^0}{m_k} = 4$ скорость отброса должна быть равна 6 км/сек.

Получение столь значительных скоростей отброса трудно осуществить. Поэтому в настоящее время увеличение скорости ракеты достигается применением составной (многоступенчатой) ракеты. Части (ступени) такой ракеты, после израсходования содержащегося в них топлива, автоматически отделяются от ракеты. При каждом таком отделении ракета получает дополнительную скорость. Таким образом, последняя ступень ракеты получает скорость, обеспечивающую ее движение в виде спутника Земли или ее полет в космическое пространство (см. § 77).

* К Э Циолковский. Труды по ракетной технике. Оборонгиз, 1947, стр 349.

1. Как определяется импульс переменной силы за конечный промежуток времени? Что характеризует импульс силы?
2. Чему равны проекции импульса постоянной и переменной силы на оси координат?
3. Чему равен импульс равнодействующей?
4. Как изменяется количество движения точки, движущейся равномерно по окружности?
5. Что называется количеством движения механической системы?
6. Чему равно количество движения маховика, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр тяжести?
7. Сформулируйте теоремы об изменении количества движения материальной точки и механической системы в дифференциальной и конечной формах. Выразите каждую из этих четырех теорем векторным уравнением и тремя уравнениями в проекциях на оси координат.
8. При каких условиях количество движения механической системы не изменяется? При каких условиях не изменяется его проекция на некоторую ось?
9. Почему происходит откат орудия при выстреле?
10. Могут ли внутренние силы изменить количество движения системы или количество движения ее части?
11. Что называют телом переменной массы?
12. Кем созданы основы механики тел переменной массы?
13. Какой вид имеет основное уравнение динамики точки переменной массы? В каком случае оно имеет вид основного уравнения динамики точки постоянной массы?
14. От каких факторов зависит скорость свободного движения ракеты?
15. Зависит ли конечная скорость ракеты от времени сгорания топлива?

ГЛАВА IX

ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

§ 53. Моменты количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси

В разделе «Статика» (§ 44 и 45) введены и широко использованы понятия моментов силы относительно точки и относительно оси. Так как количество движения материальной точки mv является вектором, то можно определить его моменты относительно центра и относительно оси таким же путем, как определялись моменты силы.

Момент количества движения mv точки M относительно центра O (рис. 117) представляет собой вектор L_O , направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через вектор mv и центр O в ту сторону, откуда вектор mv по отношению к центру O виден направленным против движения часовой стрелки. Модуль

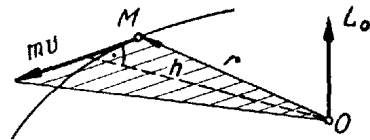


Рис. 117.

вектора L_O равен произведению величины mv на плечо h вектора mv относительно центра O :

$$L_O = mvh. \quad (53.1)$$

Момент количества движения L_O можно определить векторным произведением радиуса-вектора r , проведенного из центра O в точку M , на вектор количества движения mv :

$$L_O = r \times mv. \quad (53.2)$$

Момент L_z количества движения mv точки M относительно оси z (рис. 118) равен взятому со знаком плюс или минус произведению проекции вектора mv на плоскость I , перпендикулярную к оси z , на плечо этой проекции относительно точки O пересечения оси z с плоскостью I :

$$L_z = \pm mv_1 h_1, \quad (53.3)$$

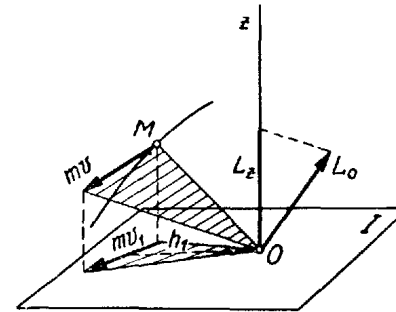


Рис. 118

причем $L_z > 0$, если, смотря навстречу оси z , можно видеть проекцию mv_1 по отношению к точке O , направленной против движения часовой стрелки, и $L_z < 0$ — в обратном случае.

Моменты количества движения точки относительно центра O и относительно оси z , проходящей через этот центр, связаны зависимостью (ч. I, «Статика», § 46):

$$L_z = L_O \cos(L_O, k), \quad (53.4)$$

т. е. проекция момента количества движения материальной точки относительно некоторого центра на ось, проходящую через этот центр, равна моменту количества движения точки относительно этой оси.

Аналитические выражения моментов количества движения точки относительно осей координат будут (ч. I, «Статика», § 47):

$$\left. \begin{aligned} L_x &= y \cdot mv_z - z \cdot mv_y = m(yv_z - zv_y), \\ L_y &= z \cdot mv_x - x \cdot mv_z = m(zv_x - xv_z), \\ L_z &= x \cdot mv_y - y \cdot mv_x = m(xv_y - yv_x), \end{aligned} \right\} \quad (53.5)$$

где x, y, z — координаты движущейся точки M , v_x, v_y, v_z — проекции скорости точки M на оси координат (рис. 119).

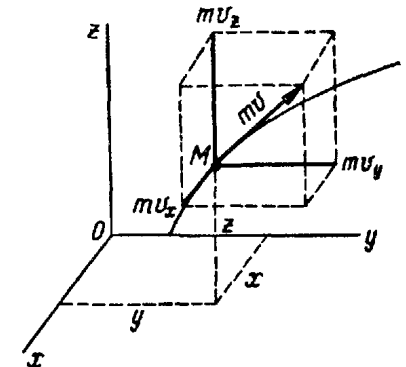


Рис. 119

§ 54. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки

Положим, что движение материальной точки M происходит под действием силы \mathbf{P} (рис. 120). Проведем из произвольного центра O в точку M радиус-вектор \mathbf{r} и определим момент силы \mathbf{P} относительно этого центра по формуле из статики:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{P}.$$

Определим также момент количества движения точки M относительно центра O по формуле (53.2):

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}.$$

Чтобы установить зависимость между моментом количества движения точки \mathbf{L}_O и моментом силы \mathbf{M}_O , следует найти производную по времени от момента количества движения:

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Здесь

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}; \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{w}.$$

Пользуясь этими выражениями, получим

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{w}.$$

Так как угол $(\mathbf{v}, m\mathbf{v}) = 0$, то

$$\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0,$$

тогда

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{r} \times m\mathbf{w} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

или

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{M}_O. \quad (54.1)$$

Если на материальную точку действуют несколько сил, то \mathbf{M}_O следует рассматривать как момент их равнодействующей. Заменяв \mathbf{M}_O геометрической суммой моментов составляющих сил, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} &= \mathbf{M}_{1O} + \mathbf{M}_{2O} + \dots + \mathbf{M}_{nO} \\ \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} &= \sum \mathbf{M}_{iO}. \end{aligned} \right\} \quad (54.2)$$

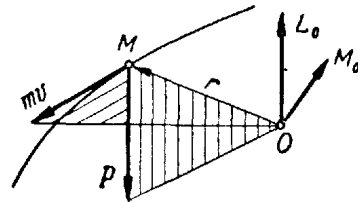


Рис. 120.

Соотношение (54.2) выражает теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра: *производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторого центра равна геометрической сумме моментов сил, действующих на точку, относительно того же центра.*

Так как проекция векторной производной на любую ось равна производной от ее проекции на эту ось (см. ч I, «Кинематика», § 80), то, проектируя векторное равенство (54.2) на оси x, y, z , получим три равенства:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= M_{1x} + M_{2x} + \dots + M_{nx}, \\ \frac{dL_y}{dt} &= M_{1y} + M_{2y} + \dots + M_{ny}, \\ \frac{dL_z}{dt} &= M_{1z} + M_{2z} + \dots + M_{nz}, \end{aligned} \right\} \text{ или } \left. \begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= \sum M_{ix}, \\ \frac{dL_y}{dt} &= \sum M_{iy}, \\ \frac{dL_z}{dt} &= \sum M_{iz}. \end{aligned} \right\} \quad (54.3)$$

Здесь согласно (53.4) L_x, L_y, L_z — моменты количества движения точки M относительно осей координат, а M_{ix}, M_{iy}, M_{iz} — моменты силы \mathbf{P}_i относительно этих же осей.

Равенства (54.3) выражают теорему об изменении момента количества движения точки относительно оси: *производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторой оси равна алгебраической сумме моментов сил, действующих на точку, относительно этой же оси.*

Следствия из теоремы: 1. *Если линия действия равнодействующей приложенных к материальной точке сил все время проходит через некоторый неподвижный центр, то момент количества движения материальной точки относительно этого центра остается постоянным.*

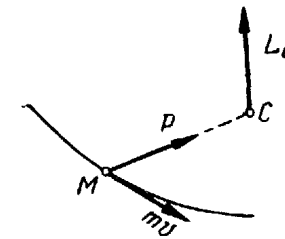


Рис. 121.

Из уравнения (54.2) следует, что если $\sum \mathbf{M}_{iO} = 0$, то

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = 0, \text{ и } \mathbf{L}_O = \text{const.} \quad (54.4)$$

Примером, иллюстрирующим это следствие, может служить движение материальной точки под действием центральной силы.

Центральной силой называется сила, линия действия которой за все время движения проходит через некоторый центр, а модуль зависит от расстояния между этим центром и точкой приложения силы.

Положим, что линия действия центральной силы \mathbf{P} за все время движения проходит через центр C (рис. 121). Тогда

$$\mathbf{M}_C = 0 \text{ и } \mathbf{L}_C = \text{const.}$$

Из этого следует, что плоскость, проходящая через вектор количества движения точки mv и центр S , не изменяет своего положения, т. е. траектория точки лежит в одной плоскости.

2. Если момент равнодействующей приложенных к материальной точке сил относительно некоторой оси все время равен нулю, то момент количества движения материальной точки относительно этой оси остается постоянным.

Из уравнения (54.3) следует, что если, например, $\sum M_{ix} = 0$, то

$$\frac{dL_x}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad L_x = \text{const.} \quad (54.5)$$

Пример. 30. Шарик весом G находится на гладкой горизонтальной плоскости. К шарiku привязывают невесомую нерастяжимую нить, которую пропускают через отверстие O на плоскости и тянут вниз с постоянной скоростью c (рис. 122, а). В момент, когда расстояние шарика от отверстия $OM_0 = R$, шарiku сообщают скорость v_0 .

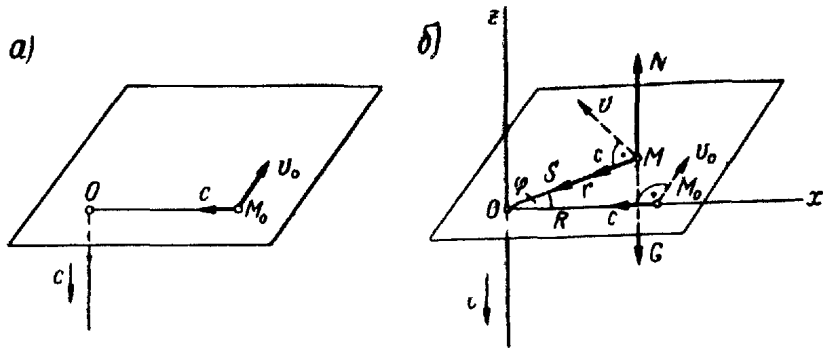


Рис. 122

направленную перпендикулярно к нити OM_0 . Определить дальнейшее движение шарика.

Решение. Положение шарика M на плоскости будем определять двумя полярными координатами r и φ . Проведем ось Ox через начальное положение шарика M_0 . Тогда начальные условия будут: $t_0 = 0$, $r_0 = R$, $\varphi_0 = 0$ (рис. 122, б).

На шарик действуют три силы: сила веса G , реакция плоскости N и реакция нити S . Так как момент каждой из этих сил относительно вертикальной оси Oz равен нулю, то

$$\sum M_{iz} = 0.$$

Согласно (54.5)

$$L_z = \text{const.}$$

Так как по условию задачи нить втягивается равномерно со скоростью c , то изменение координаты r определится уравнением

$$r = R - ct. \quad (54.6)$$

Для определения координаты φ в зависимости от t воспользуемся условием $L_z = \text{const.}$ Абсолютная скорость шарика состоит из двух скоростей, направленных вдоль осей полярных координат (см. ч. I. «Кинематика», § 128): скорости c и перпендикулярной к ней скорости v , модуль которой

$$v = r\omega = r\dot{\varphi}.$$

Вектор количества движения mv не имеет момента относительно оси Oz , так как прямая, по которой он направлен, пересекает ось Oz .

Момент вектора количества движения mv относительно оси z в любой момент времени определяется по формуле (53.3):

$$L_z = mvr = mr^2\dot{\varphi}.$$

В начальный момент:

$$L_{z_0} = mv_0R.$$

Так как $L_z = \text{const.}$, то $L_{z_0} = L_z$, т. е.

$$mv_0R = mr^2\dot{\varphi},$$

откуда

$$\dot{\varphi} = \frac{Rv_0}{r^2}$$

или после подстановки значения r из формулы (54.6):

$$\dot{\varphi} = \frac{Rv_0}{(R-ct)^2}.$$

Проинтегрируем по времени:

$$\varphi = \frac{Rv_0}{c(R-ct)} + C.$$

Постоянную C определим подстановкой в уравнение начальных условий $t_0 = 0$; $\varphi_0 = 0$:

$$0 = \frac{Rv_0}{cR} + C; \quad C = -\frac{v_0}{c}.$$

Подставив значение C , получим второе уравнение движения шарика:

$$\varphi = \frac{v_0 t}{R-ct}. \quad (54.7)$$

Уравнение траектории шарика в полярных координатах, полученное исключением t из его уравнений движения (54.6) и (54.7), имеет вид

$$\varphi = \frac{v_0}{c} \left(\frac{R}{r} - 1 \right). \quad (54.8)$$

Следует отметить, как это вытекает из выражения

$$L_z = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.}$$

при уменьшении r возрастает угловая скорость $\dot{\varphi}$ вращения нити.

Пример 31. Определить малые колебания математического маятника длиной l , точка привеса которого начинает совершать горизонтальные колебания, согласно уравнению $x = a \cos pt$. В начальный момент маятник находился в состоянии покоя и нить располагалась вертикально.

Решение. Маятник совершает составное движение. Примем поступательное движение вместе с осью привеса O_1y , перпендикулярной к плоскости чертежа за переносное движение (рис. 123). Тогда качание маятника вокруг этой оси будет его относительным движением. Это движение требуется определить.

Чтобы применить к относительному движению точки какое-либо положение динамики, необходимо, кроме действующих на точку сил, учесть переносную силу инерции точки (см. § 26). Для определения этой силы найдем проекцию переносного ускорения на ось x , пользуясь заданным уравнением переносного движения:

$$w_{ex} = \ddot{x} = -ap^2 \cos pt.$$

Проекция переносной силы инерции, направленной противоположно переносному ускорению, определится:

$$\Phi_{ex} = -m w_{ex} = ma p^2 \cos pt.$$

Так как переносное движение является гармоническим колебательным движением, то его ускорение w_e направлено всегда к центру колебаний O , а переносная сила инерции в противоположную сторону.

Приложим к маятнику, нить которого отклонена от вертикальной оси O_1z на угол φ_r , две действующие на него силы: силу тяжести \mathbf{G} и реакцию нити \mathbf{S} , а также его переносную силу инерции Φ_e . Применим к относительному движению маятника теорему об изменении момента количества движения маятника относительно оси O_1y .

Согласно (54.3)

$$\frac{dL_{yr}}{dt} = M_{1y} + M_{2y} + M_{3y}. \quad (a)$$

Момент количества движения маятника в относительном движении

$$L_{yr} = m v_r l \dot{\varphi}_r = ml^2 \dot{\omega}_r = ml^2 \dot{\varphi}_r.$$

Момент силы тяжести \mathbf{G} относительно оси O_1y

$$M_{1y} = -Gl \sin \varphi_r = -mgl \sin \varphi_r.$$

Момент реакции нити \mathbf{S} относительно оси O_1y равен $M_{2y} = 0$, так как линия действия силы \mathbf{S} пересекает ось O_1y .

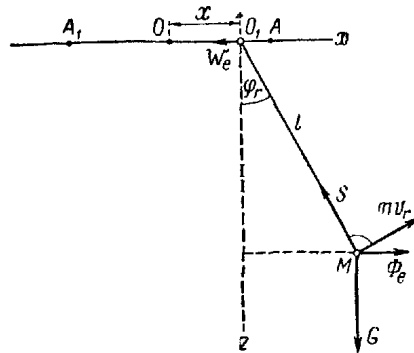


Рис. 123.

Момент переносной силы инерции относительно оси O_1y

$$M_{3y} = z_1 \Phi_{ex} = l \cos \varphi_r m a p^2 \cos pt.$$

Подставляем эти значения в уравнение (а):

$$\frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\varphi}_r) = -mgl \sin \varphi_r + ma p^2 l \cos \varphi_r \cos pt.$$

Рассматривая малые колебания маятника, принимаем

$$\sin \varphi_r \approx \varphi_r; \quad \cos \varphi_r \approx 1.$$

Тогда

$$ml^2 \ddot{\varphi}_r = -mgl \varphi_r + ma p^2 l \cos pt$$

или

$$\ddot{\varphi}_r + \frac{g}{l} \varphi_r = \frac{ap^2}{l} \cos pt.$$

Полученное уравнение можно представить в виде

$$\ddot{\varphi}_r + k^2 \varphi_r = h \cos pt, \quad (б)$$

где $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$ и $h = \frac{ap^2}{l}$.

Уравнение (б) является дифференциальным уравнением вынужденных колебаний маятника, отличаясь от уравнения (16.3) наличием $\cos pt$ вместо $\sin pt$. В соответствии с этим его решение имеет вид

$$\varphi_r = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{ap^2}{l(k^2 - p^2)} \cos pt. \quad (в)$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 найдем производную:

$$\dot{\varphi}_r = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt - \frac{ap^2}{l(k^2 - p^2)} \sin(pt). \quad (г)$$

Так как в начальный момент маятник находился в покое и нить его располагалась вертикально, то начальные условия

$$t = 0; \quad \varphi_{0r} = 0; \quad \dot{\varphi}_{0r} = 0.$$

Подставляем эти значения в уравнения (в) и (г):

$$0 = C_1 + \frac{ap^2}{l(k^2 - p^2)},$$

откуда

$$C_1 = -\frac{ap^2}{l(k^2 - p^2)},$$

$$0 = kC_2,$$

где $C_2 = 0$.

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в уравнение (в), получаем уравнение малых вынужденных колебаний маятника:

$$\varphi_r = -\frac{ap^2}{l(k^2 - p^2)} \cos kt + \frac{ap^2}{l(k^2 - p^2)} \cos pt$$

или

$$\varphi_r = \frac{ap^2}{l(k^2 - p^2)} (\cos pt - \cos kt). \quad (д)$$

Уравнение (д) показывает, что вынужденным колебаниям частоты p сопутствуют свободные колебания частоты k , которые вызваны наличием возмущающей силы.

§ 55. Кинетический момент механической системы относительно центра и оси

Кинетическим моментом или главным моментом количества движения механической системы относительно данного центра называют вектор, равный геометрической сумме моментов количества движения всех материальных точек системы относительно этого центра.

Момент количества движения каждой материальной точки системы (рис. 124) относительно центра O определяется по формуле (53.2):

$$L_{iO} = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i.$$

Кинетический момент механической системы относительно центра O

$$\mathbf{L}_O = \sum \mathbf{L}_{iO} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i. \quad (55.1)$$

Кинетическим моментом, или главным моментом количества движения механической системы относительно оси, называется алгебраическая сумма моментов количества движения всех материальных точек системы относительно этой оси.

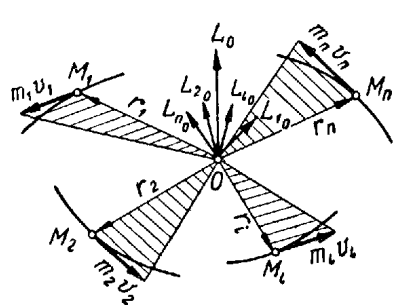


Рис. 124.

Момент количества движения L_{iz} каждой точки системы (рис. 118) относительно оси Oz определяется согласно (53.3).

Кинетический момент системы относительно оси (рис. 125)

$$L_z = \sum L_{iz}. \quad (55.2)$$

Кинетические моменты механической системы относительно некоторого центра O и какой-либо оси z , проходящей через этот центр связаны такой же зависимостью, как и главные моменты системы сил относительно центра и оси, т. е.

$$L_z = L_O \cos(\mathbf{L}_O, \mathbf{k}). \quad (55.3)$$

Таким образом, проекция кинетического момента механической системы относительно некоторого центра O на ось, проходящую через этот центр, равна кинетическому моменту системы относительно этой оси.

§ 56. Теорема об изменении кинетического момента механической системы

Положим, что система материальных точек M_1, M_2, \dots, M_n движется под действием некоторой системы сил, которые разделим на внешние силы $\mathbf{P}_1^E, \mathbf{P}_2^E, \dots, \mathbf{P}_n^E$ и внутренние силы $\mathbf{P}_1^J, \mathbf{P}_2^J, \dots, \mathbf{P}_n^J$.

Выберем некоторый неподвижный центр O и определим изменение момента количества движения каждой точки M_i относительно этого центра по уравнению (54.2):

$$\frac{dL_{iO}}{dt} = \mathbf{M}_{iO}^E + \mathbf{M}_{iO}^J \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Просуммируем полученные n уравнений:

$$\sum \frac{dL_{iO}}{dt} = \sum \mathbf{M}_{iO}^E + \sum \mathbf{M}_{iO}^J. \quad (a)$$

Как указывалось в § 31, геометрическая сумма моментов всех внутренних сил относительно любого центра равна нулю, т. е. $\sum \mathbf{M}_{iO}^J = 0$.

Преобразуем левую часть равенства (а), учитывая (55.1):

$$\sum \frac{dL_{iO}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum L_{iO} = \frac{dL_O}{dt}.$$

Тогда уравнение (а) принимает вид

$$\frac{dL_O}{dt} = \sum \mathbf{M}_{iO}^E = \mathbf{M}_O^E. \quad (56.1)$$

Уравнение (56.1) выражает теорему об изменении кинетического момента механической системы: производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого центра геометрически равна главному моменту внешних сил, действующих на эту систему относительно того же центра.

Векторному равенству (56.1) соответствуют три равенства в проекциях на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= \sum M_{ix}^E = M_x^E, \\ \frac{dL_y}{dt} &= \sum M_{iy}^E = M_y^E, \\ \frac{dL_z}{dt} &= \sum M_{iz}^E = M_z^E. \end{aligned} \right\} \quad (56.2)$$

Здесь согласно (55.3): L_x, L_y, L_z — кинетические моменты механической системы относительно осей координат, а M_x^E, M_y^E, M_z^E — главные моменты внешних сил относительно этих осей.

Уравнения (56.2) показывают, что производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторой оси равна главному моменту внешних сил относительно этой оси.

Следствия из теоремы: 1. Если главный момент внешних сил относительно некоторого центра все время равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этого центра остается постоянным.

Из уравнения (56.1) следует, что если $M_O^E = 0$, то

$$\frac{dL_O}{dt} = 0 \text{ и } L_O = \text{const.} \quad (56.3)$$

2. Если главный момент внешних сил относительно некоторой оси все время равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этой оси остается постоянным.

Из уравнений (56.2) следует, что если, например, $M_x^E = 0$, то

$$\frac{dL_x}{dt} = 0 \text{ и } L_x = \text{const.} \quad (56.4)$$

Следствия из теорем об изменении кинетического момента механической системы выражают закон сохранения кинетического момента механической системы

Пример 32. Колесо гидравлической турбины вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (рис. 126, а).

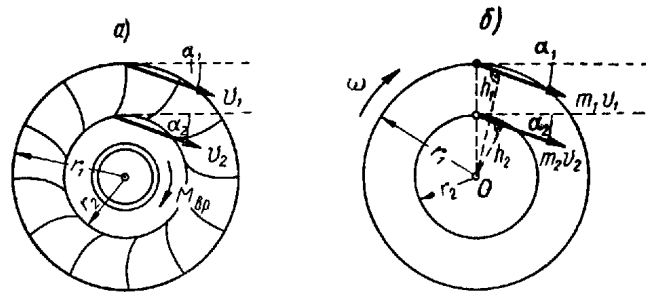


Рис. 126.

Абсолютная скорость частиц воды во входном сечении равна v_1 и составляет с касательной к внешней окружности обода колеса угол α_1 . В выходном сечении скорость частиц воды равна v_2 и составляет с касательной к внутренней окружности обода угол α_2 . Радиусы внешней и внутренней окружностей обода соответственно равны r_1 и r_2 . Определить вращающий момент, сообщаемый колесу протекающей между лопатками водой.

Решение. В качестве механической системы рассмотрим объем воды, заполняющей все каналы между лопатками колеса.

Определим изменение кинетического момента этой системы относительно вертикальной оси вращения турбины по уравнению (56.2):

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^E.$$

Внешними силами, действующими на систему, являются сила тяжести G , не имеющая момента относительно оси z , и реакции стенок каналов.

Следовательно, главный момент внешних сил M_z^E представляет собой главный момент реакций стенок.

Положим, что в некоторый момент времени t в одном из n каналов находится объем воды $abcd$ (рис. 127). В момент времени $t + dt$ этот же объем занимает положение $a_1b_1c_1d_1$.

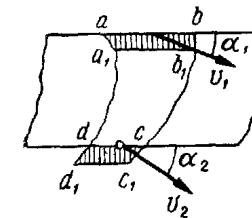


Рис. 127.

При этом элементарные объемы dcc_1d_1 и abb_1a_1 равны, так как количество воды, втекшей в канал и вытекшей из него за время dt , одинаково. Масса каждого из этих объемов — это масса воды, протекающей через один канал за время dt :

$$m_1 = m_2 = m = \frac{Q}{ng} dt,$$

где Q — вес жидкости, протекающей через все каналы в единицу времени.

Определим изменение главного момента количества движения объема $abcd$ относительно оси z за время dt , считая направление вращения турбины положительным. Это изменение равно разности моментов количеств движения объемов dcc_1d_1 и abb_1a_1 :

$$dL_{iz} = mv_2h_2 - mv_1h_1,$$

где h_1 — плечо вектора mv_1 и h_2 — плечо вектора mv_2 относительно точки O , принадлежащей оси z (рис. 126, б). Подставив значения

$$h_1 = r_1 \cos \alpha_1, \quad h_2 = r_2 \cos \alpha_2 \text{ и } m = \frac{Q}{ng} dt,$$

получим

$$dL_{iz} = \frac{Q}{ng} dt v_2 r_2 \cos \alpha_2 - \frac{Q}{ng} dt v_1 r_1 \cos \alpha_1.$$

Изменение кинетического момента всей рассматриваемой механической системы за время dt определяется суммированием величин L_{iz} , относящихся к отдельному каналу:

$$dL_z = \sum_{i=1}^n dL_{iz} = n \frac{Q}{ng} dt (v_2 r_2 \cos \alpha_2 - v_1 r_1 \cos \alpha_1).$$

Из уравнения (56.2) находим M_z^E .

$$M_z^E = \frac{dL_z}{dt} = \frac{Q}{g} (v_2 r_2 \cos \alpha_2 - v_1 r_1 \cos \alpha_1).$$

Силы давления воды на стенки каналов равны по модулю и противоположны по направлению реакциям стенок. Следовательно, к колесу со стороны жидкости приложен вращающий момент $M_{вр}$, равный по величине и противоположный по знаку моменту M_z^E , т. е.

$$M_{вр} = -M_z^E = \frac{Q}{g} (v_1 r_1 \cos \alpha_1 - v_2 r_2 \cos \alpha_2).$$

Полученная формула показывает, что момент, вращающий колесо гидравлической турбины, зависит от модулей и направлений абсолютных скоростей воды во входном и выходном сечениях каналов.

§ 57. Кинематическая интерпретация теоремы об изменении кинетического момента механической системы относительно центра. Теорема Резаля

При движении механической системы ее кинетический момент относительно некоторого центра изменяется как по модулю, так и по направлению.

Пусть L_O — кинетический момент системы точек M_1, M_2, \dots, M_n относительно центра O (рис. 128). Система движется под действием внешних сил $P_1^E, P_2^E, \dots, P_n^E$ и внутренних сил $P_1^J, P_2^J, \dots, P_n^J$.

При движении системы точка A — конец вектора L_O — описывает в пространстве некоторую линию, называемую *годографом кинетического момента механической системы*.

Скорость u движения точки A по годографу определяется векторной производной радиуса-вектора L_O этой точки по времени:

$$u = \frac{dL_O}{dt}. \quad (57.1)$$

С другой стороны, на основании (56.1)

$$\frac{dL_O}{dt} = M_O^E.$$

Сопоставляя (57.1) и (56.1), устанавливаем:

$$u = M_O^E. \quad (57.2)$$

Уравнение (57.2) показывает, что *скорость конца вектора кинетического момента механической системы относительно некоторого центра геометрически равна главному моменту внешних сил, действующих на эту систему, относительно того же центра*.

Это положение выражает теорему об изменении кинетического момента механической системы в другой форме и носит название *теоремы Резаля*.

Нетрудно убедиться в том, что единицы измерения величин, стоящих в обеих частях равенства (57.2), совпадают.

Действительно за единицу момента количества движения в системе МКС принимается $1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{сек}$. Единицей скорости его изменения с течением времени является $1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{сек}^2$, т. е. единица момента силы.

Вопросы, изложенные в данной главе, имеют широкое практическое приложение. Примеры их применения показаны в главах XII, XIII, XIV и XV.

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяются моменты количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси? Какова зависимость между ними?
2. При каком расположении вектора количества движения материальной точки его момент относительно оси равен нулю?
3. Сформулируйте теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси.
4. Почему траектория материальной точки, движущейся под действием центральной силы, лежит в одной плоскости?
5. Что называют кинетическим моментом механической системы относительно центра или оси?
6. Сформулируйте теорему об изменении кинетического момента механической системы относительно центра и относительно оси.
7. При каких условиях остается постоянным кинетический момент механической системы относительно центра и при каких — кинетический момент относительно оси?
8. Какова кинематическая интерпретация теоремы об изменении кинетического момента механической системы относительно центра?

ГЛАВА X

РАБОТА. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

§ 58. Две меры механического движения

В динамике рассматриваются два случая преобразования механического движения материальной точки или системы точек:

- 1) механическое движение переносится с одной механической системы на другую в качестве механического движения;
- 2) механическое движение превращается в другую форму движения материи (в форму потенциальной энергии, теплоты, электричества и т. д.).

Каждый из этих случаев преобразования механического движения имеет свои измерители как механического движения, так и действия силы. Когда рассматривается преобразование механического движения без перехода его в другую форму движения, мерой механического движения является вектор количества движения материальной точки $\mathbf{K} = m\mathbf{v}$ или механической системы $\mathbf{K} = m\mathbf{v}_C$.

Мерой действия силы в этом случае является вектор импульса силы \mathbf{S} (см. § 46).

Когда механическое движение превращается в другую форму движения материи, в качестве меры механического движения выступает кинетическая энергия материальной точки или механической системы.

Из элементарного курса физики известно, что кинетическая энергия материальной точки массой m , движущейся со скоростью v , равна половине произведения массы этой точки на квадрат скорости ее движения:

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Мерой действия силы при превращении механического движения в другую форму движения является работа силы, которая также рассматривается в элементарном курсе физики.

В данной главе рассмотрены различные случаи вычисления работы сил и установлена теорема об изменении кинетической энергии как материальной точки, так и механической системы.

Итак, существуют две различные меры механического движения: $m\mathbf{v}$ и $\frac{mv^2}{2}$ и две различные меры действия силы: импульс силы \mathbf{S} и работа силы A .

Следует отметить, что измерителями механического движения и действия силы в первом случае являются векторные величины $m\mathbf{v}$ и \mathbf{S} , а во втором случае — скалярные величины $\frac{mv^2}{2}$ и A . Вопрос о выборе меры механического движения был предметом многолетней полемики между сторонниками Декарта и сторонниками Лейбница.

Декарт считал, что мерой механического движения является количество движения $m\mathbf{v}$, и Лейбниц утверждал, что динамические свойства тел характеризуются величиной mv^2 .

Этот спор был разрешен Ф. Энгельсом, который в своей работе «Диалектика природы»* показал существование двух мер механического движения.

Так как изменение величины $\frac{mv^2}{2}$ связано с работой приложенных к телу сил, то работа является количественной мерой превращения механического движения в какую-либо другую форму движения.

* Ф. Энгельс. Диалектика природы. Госполитиздат, 1955, стр. 69.

«При всех явлениях форма движения, начинающая процесс и превращающаяся благодаря ему в другую форму движения, совершает работу и притом такое ее количество, которое соответствует ее собственному количеству...»

Механическое движение нигде и никогда не может произвести работу, если оно не будет по видимости уничтожено как таковое, если оно не превратится в какую-нибудь другую форму движения*. Так, например, работа сил трения, тормозящих движение тела, работа сил тяжести поднимаемого груза, работа сил упругости пружины, останавливающей движущееся тело, являются мерами уничтожаемого механического движения, которое превращается в теплоту, потенциальную энергию, энергию упругого тела.

§ 59. Работа постоянной силы

Рассмотрим в первую очередь вычисление работы постоянной по модулю и направлению силы на прямолинейном перемещении ее точки приложения.

Положим, что точка приложения постоянной силы \mathbf{P} перемещается по прямой из M в M_1 (рис. 129), а вектор силы \mathbf{P} составляет с вектором перемещения \mathbf{u} угол α .

Работа силы в этом случае равна произведению модуля силы на длину пути, пройденного точкой приложения силы, и на косинус угла между направлениями вектора силы и вектора перемещения точки ее приложения:

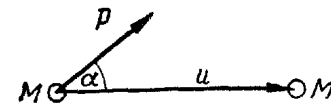


Рис. 129

$$A = Pu \cos \alpha = Pu \cos (\mathbf{P}, \mathbf{u}). \quad (59.1)$$

Если угол α острый, то работа силы положительна, если тупой — то отрицательна.

Из векторной алгебры известно, что скалярное произведение двух векторов равно:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{u} = Pu \cos (\mathbf{P}, \mathbf{u}).$$

Следовательно, работа силы \mathbf{P} на перемещении \mathbf{u}

$$A = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}, \quad (59.2)$$

т. е. работа постоянной по модулю и направлению силы на прямолинейном перемещении определяется скалярным произведением вектора силы на вектор перемещения точки ее приложения.

Если направления силы и перемещения совпадают, т. е. $\alpha = 0$, то

$$A = Pu.$$

* Ф. Энгельс. Диалектика природы Госполитиздат, 1955, стр. 60—73.

Если направление силы перпендикулярно к направлению перемещения, т. е. $\alpha = 90^\circ$, то

$$A = 0.$$

Если направление силы противоположно направлению перемещения, т. е. $\alpha = 180^\circ$, то

$$A = -Pu.$$

§ 60. Элементарная работа. Работа силы на конечном пути. Теоремы о работе силы. Изображение работы в виде площади

Положим, что точка приложения переменной по модулю и направлению силы \mathbf{P} перемещается по криволинейной траектории из M_1 в M_2 (рис. 130). Чтобы вычислить работу силы \mathbf{P} на этом перемещении, нужно разбить это перемещение на элементарные участки, вычислить работу силы на каждом элементарном участке как работу постоянной силы и определить предел суммы элементарных работ при стремлении числа участков к бесконечности и длине каждого из них к нулю.

Элементарная работа силы \mathbf{P} на участке MM' определяется по формуле (59.1):

$$\delta A = P d\sigma \cos(\mathbf{P}, \mathbf{v}). \quad (60.1)$$

Здесь P — модуль силы, соответствующей точке M ;

$d\sigma$ — длина пути MM' , т. е. пройденный точкой элементарный путь;

$\angle \mathbf{P}, \mathbf{v}$ — угол, составленный направлением силы \mathbf{P} и скоростью \mathbf{v} в точке M .

Элементарная работа обозначается δA , а не dA , так как в общем случае она не является дифференциалом функции. Знак работы в выражении (60.1) определяется только знаком косинуса угла $\angle \mathbf{P}, \mathbf{v}$.

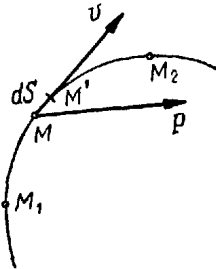


Рис. 130

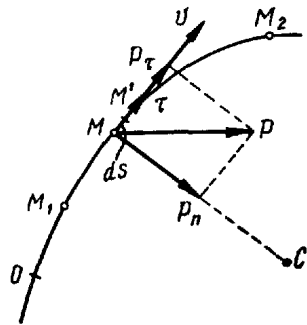


Рис. 131

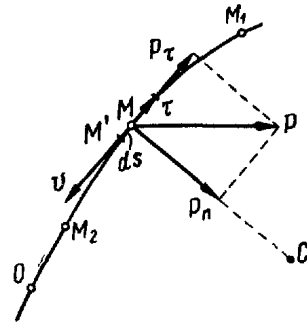


Рис. 132.

Будем определять положение точки M на траектории дуговой координатой $s = OM$ (рис. 131 и 132) и орт $\boldsymbol{\tau}$ — касательной

к траектории — направим в сторону возрастания дуговой координаты (см. ч I, «Кинематика» § 79 и 84).

Тогда при движении точки M в сторону возрастания s (рис. 131) имеем:

$$1) ds > 0, d\sigma = |ds| = ds;$$

$$2) \cos(\mathbf{P}, \mathbf{v}) = \cos(\mathbf{P}, \boldsymbol{\tau}), \text{ так как направления } \mathbf{v} \text{ и } \boldsymbol{\tau} \text{ совпадают.}$$

Тогда элементарная работа силы \mathbf{P}

$$\delta A = P d\sigma \cos(\mathbf{P}, \mathbf{v}) = P ds \cos(\mathbf{P}, \boldsymbol{\tau}).$$

При движении точки M в сторону уменьшения s (рис. 132) имеем:

$$1) ds < 0; d\sigma = |ds| = -ds;$$

2) $\cos(\mathbf{P}, \mathbf{v}) = -\cos(\mathbf{P}, \boldsymbol{\tau})$, так как направления \mathbf{v} и $\boldsymbol{\tau}$ противоположны

Тогда элементарная работа силы \mathbf{P}

$$\delta A = P d\sigma \cos(\mathbf{P}, \mathbf{v}) = P ds \cos(\mathbf{P}, \boldsymbol{\tau}).$$

Таким образом, при движении точки в любом направлении по траектории элементарная работа силы определяется:

$$\delta A = P ds \cos(\mathbf{P}, \boldsymbol{\tau}), \quad (60.2)$$

где P — модуль силы, соответствующей точке M ;

ds — приращение дуговой координаты точки (алгебраическая величина);

$\angle \mathbf{P}, \boldsymbol{\tau}$ — угол между направлением силы \mathbf{P} и орта $\boldsymbol{\tau}$, направленного всегда по касательной в сторону увеличения дуговой координаты.

В выражении (60.2) знак работы определяется как знаком ds , так и знаком косинуса угла $\angle \mathbf{P}, \boldsymbol{\tau}$.

Обычно работа силы вычисляется отдельно для участков с движением в одном направлении. Тогда это направление принимается за положительное и формула (60.2) приобретает смысл формулы (60.1), т. е. ds обозначает элементарный путь $d\sigma$, а угол $\angle \mathbf{P}, \boldsymbol{\tau}$ является углом $\angle \mathbf{P}, \mathbf{v}$ (рис. 131).

Разложим силу \mathbf{P} на составляющие, направленные по касательной и главной нормали к траектории в точке M .

Проекции силы \mathbf{P} на касательную и главную нормаль определяются:

$$\left. \begin{aligned} P_\tau &= P \cos(\mathbf{P}, \boldsymbol{\tau}), \\ P_n &= P \cos(\mathbf{P}, \mathbf{n}). \end{aligned} \right\} \quad (60.3)$$

Пользуясь первой формулой (60.3), выражению (60.2) можно придать вид

$$\delta A = P_\tau ds. \quad (60.4)$$

Формула (60.4) показывает, что работу на перемещении ds совершает только касательная составляющая силы \mathbf{P}_τ , работа же нормальной составляющей \mathbf{P}_n , перпендикулярной к направлению скорости точки \mathbf{v} , равна нулю. Согласно (59.2) представим элементарную

работу силы \mathbf{P} (рис. 133) как скалярное произведение:

$$\delta A = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}, \quad (60.5)$$

где $d\mathbf{r}$ — вектор элементарного перемещения точки M .

Обозначив проекции силы \mathbf{P} на координатные оси X, Y, Z , а проекции вектора элементарного перемещения $d\mathbf{r}$ на оси dx, dy, dz , получим скалярное произведение векторов \mathbf{P} и $d\mathbf{r}$ в виде

$$\delta A = X dx + Y dy + Z dz. \quad (60.6)$$

Формула (60.6) дает выражение элементарной работы через проекции силы на оси координат.

Работа силы \mathbf{P} на конечном перемещении равна сумме ее работ на элементарных участках

$$A = \sum \delta A.$$

Пользуясь выражениями элементарной работы (60.1), (60.2), (60.4), (60.5) или (60.6) и переходя к пределу при стремлении числа участков к бесконечности, получаем следующие выражения работы силы \mathbf{P} на конечном перемещении $M_1 M_2$:

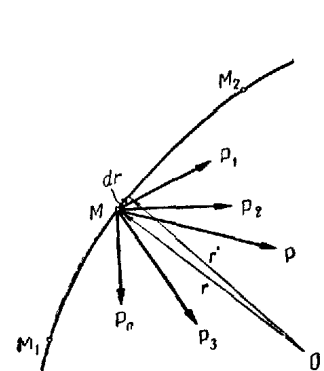


Рис. 134.

$$A_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} P d\sigma \cos(\mathbf{P}, \mathbf{v}), \quad (60.7)$$

$$A_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} P ds \cos(\mathbf{P}, \boldsymbol{\tau}), \quad (60.8)$$

$$A_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} P_\tau ds, \quad (60.9)$$

$$A_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}, \quad (60.10)$$

$$A_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} (X dx + Y dy + Z dz). \quad (60.11)$$

Теоремы о работе силы

Теорема 1. Работа равнодействующей силы на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же перемещении.

Положим, что на точку M действуют силы $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ (рис. 134). Равнодействующая этих сил

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_n.$$

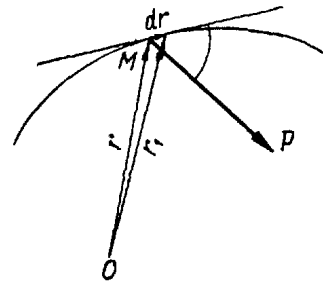


Рис. 133

Если точка M получает элементарное перемещение $d\mathbf{r}$, то элементарная работа равнодействующей силы \mathbf{P} на этом перемещении равна

$$\begin{aligned} \delta A = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} &= (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_n) \cdot d\mathbf{r} = \\ &= \mathbf{P}_1 \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{P}_2 \cdot d\mathbf{r} + \dots + \mathbf{P}_n \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Для вычисления работы равнодействующей силы на конечном участке пути $M_1 M_2$ воспользуемся формулой (60.10)

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{P}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{P}_2 \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{P}_n \cdot d\mathbf{r}.$$

Полученная сумма криволинейных интегралов представляет собой сумму работ отдельных сил на конечном участке пути $M_1 M_2$.

Таким образом,

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

Теорема 2. Работа постоянной силы на результирующем перемещении равна алгебраической сумме работ этой силы на составляющих перемещениях.

Положим, что точка приложения постоянной силы \mathbf{P} получает совокупность последовательных перемещений $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ (рис. 135, выполнен для $n=3$).

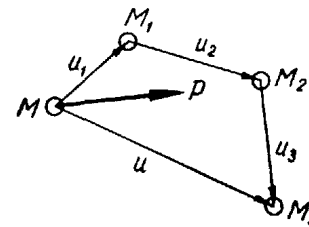


Рис. 135.

Результирующее перемещение точки M

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_n.$$

Работа силы \mathbf{P} на этом перемещении определяется по формуле (59.2)

$$\begin{aligned} A = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{P} \cdot (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_n) = \\ &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n \end{aligned}$$

Полученная сумма представляет собой сумму работ силы на составляющих перемещениях.

Таким образом,

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

На основании этой теоремы при вычислении работы постоянной силы на криволинейном перемещении криволинейное перемещение можно заменить прямолинейным. При $\mathbf{u} = 0$, т. е. в случае замкнутого контура, работа постоянной силы равна нулю.

Изображение работы в виде площади

Установлено, что работа переменной силы на конечном перемещении $M_1 M_2$ определяется криволинейным интегралом, взятым вдоль дуги $M_1 M_2$ траектории, которую описывает точка приложения силы.

Криволинейный интеграл, определяющий работу силы, вычисляется

обычно аналитически при помощи формулы (60.11) или графически — на основе формулы (60.9).

Для графического определения работы силы \mathbf{P} на перемещении M_1M_2 (рис. 131) используется график (рис. 136). По оси абсцисс этого графика отложены значения дуговой координаты точки s , а по оси ординат — соответствующие значения проекции силы на касательную P_τ . Построенная кривая изображает зависимость P_τ от s .

Элементарная работа силы \mathbf{P} согласно (60.4) равна:

$$\delta A = P_\tau ds.$$

На рис. 136 эта величина изображается площадью элементарного прямоугольника, имеющего основание ds и высоту P_τ . Работа силы \mathbf{P} на перемещении M_1M_2 изобразится площадью фигуры $acdb$, ограниченной осью абсцисс, кривой $P_\tau = f(s)$ и ординатами ac и bd , соответствующими точкам M_1 и M_2 :

$$A = \text{пл. } acdb.$$

Если проекция силы на касательную P_τ отрицательна, то соответствующая площадь расположится ниже оси абсцисс и работа силы \mathbf{P} будет отрицательна. В качестве примера рассмотрим проводимое в механических лабораториях графическое вычисление работы, затрачиваемой на разрыв образца.

На рис. 137 изображена полученная опытным путем диаграмма растяжения образца. По оси ординат отложена величина растягивающей силы, а по оси абсцисс — произведение ею абсолютное удлинение образца, т. е. перемещение точки приложения силы. Точка B обозначает предел пропорциональности, C — предел текучести, D — наибольшую величину нагрузки, воспринимаемой образцом, K — нагрузку в момент разрыва образца.

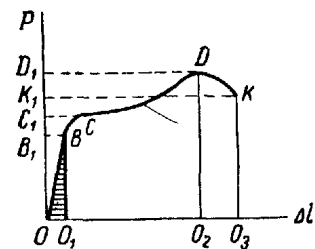


Рис. 137.

Работа, затрачиваемая на растяжение образца до предела пропорциональности, определяется площадью треугольника OBO_1 .

Площадь $OBCDKO_3$ определяет всю работу, затрачиваемую на разрыв испытуемого образца. Величину этой площади находят обычно при помощи планиметра или путем вычислений.

За единицу работы в системе МКС принимается 1 джоуль (дж), т. е. работа силы в 1 ньютон на перемещении по направлению силы в 1 м, а в системе СГС — 1 эрг, т. е. работа силы в 1 дину на перемещении по направлению силы в 1 см. В системе МКГСС за

единицу работы принимается 1 кгс·м, т. е. работа силы в 1 кгс на перемещении по направлению силы в 1 м.

$$1 \text{ джоуль} = 10^7 \text{ эргов} = 0,102 \text{ кгс} \cdot \text{м}.$$

$$1 \text{ кгс} \cdot \text{м} = 9,81 \text{ дж}.$$

Изменение работы силы, отнесенное к единице времени, называется *мощностью силы*.

Если в течение малого промежутка времени dt сила \mathbf{P} совершает работу $\delta A = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}$, то мощность N этой силы

$$N = \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{P} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}. \quad (60.12)$$

Таким образом, *мощность силы равна скалярному произведению векторов силы и скорости ее точки приложения*.

Аналитическое выражение мощности силы имеет вид

$$N = Xv_x + Yv_y + Zv_z, \quad (60.13)$$

где v_x , v_y , v_z — проекции скорости точки приложения силы на оси координат.

Из формулы (60.12) следует:

$$N = Pv \cos(\mathbf{P}, \mathbf{v}). \quad (60.14)$$

Если направления силы \mathbf{P} и скорости \mathbf{v} совпадают, то

$$N = Pv. \quad (60.15)$$

За единицу мощности в системе МКС принимается 1 ватт (вт) = 1 дж/сек = 0,102 кгс·м/сек, а в системе СГС — 1 эрг/сек.

В системе МКГСС за единицу мощности принимается 1 кгс·м/сек.

Кроме того, применяются следующие единицы мощности:

1 киловатт (квт) = 10^3 вт = 102 кгс·м/сек = 1,36 лошадиной силы.

1 лошадиная сила (HP) = 75 кгс·м/сек = 0,736 квт = 736 вт.

В технике часто за единицу работы принимается 1 киловатт-час ($\text{квт} \cdot \text{ч}$), т. е. работа, совершаемая в течение одного часа движущей силой машины, мощность которой равна 1 киловатту:

1 киловатт-час = $1000 \cdot 3600 \text{ ватт} \cdot \text{секунд}$ = $36 \cdot 10^5 \text{ джоулей}$.

§ 61. Работа силы тяжести, силы упругости и силы тяготения

1. Работа силы тяжести

Положим, что на материальную точку M действует сила тяжести \mathbf{G} (рис. 138). Вычислим работу этой силы на перемещении M_1M_2 , величина которого мала по сравнению с радиусом Земли. В этом случае модуль и направление силы тяжести постоянны. Проведем оси координат, направив ось z вверх по вертикали, и воспользуемся аналитическим выражением работы (60.6):

$$\delta A = X dx + Y dy + Z dz.$$

Проекция силы \mathbf{G} на оси координат будут:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = -G.$$

Подставив эти значения в (60.6), получим

$$\delta A = -G dz.$$

Суммируя элементарные работы и переходя к пределу, имеем

$$A_{1,2} = - \int_{z_1}^{z_2} G dz = -G(z_2 - z_1) = G(z_1 - z_2).$$

Здесь $z_1 - z_2 = H$ — величина вертикального перемещения точки M .

Если $z_1 > z_2$, т. е. точка M_1 расположена выше точки M_2 , работа силы тяжести положительна.

Если $z_1 < z_2$, т. е. точка M_1 расположена ниже точки M_2 , работа силы тяжести отрицательна.

Таким образом, окончательно

$$A_{1,2} = \pm GH, \quad (61.1)$$

где знак плюс соответствует перемещению точки вниз, а знак минус — перемещению точки вверх.

Выражение (61.1) показывает, что работа силы тяжести равна взятому со знаком плюс или минус произведению силы тяжести на вертикальное перемещение точки ее приложения.

Работа силы тяжести не зависит от вида траектории, по которой перемещается точка ее приложения, а зависит лишь от расстояния между горизонтальными плоскостями, проходящими через начальное и конечное положения точки.

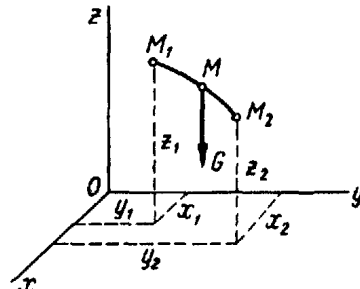


Рис. 138.

2. Работа силы упругости

Рассмотрим пружину AB_1 , конец A которой закреплен неподвижно (рис. 139, а). При растяжении пружины в ней возникают силы упругости и на тело, вызывающее растяжение, действует реакция пружины \mathbf{P} . Эта сила направлена противоположно перемещению свободного конца пружины, а ее модуль пропорционален удлинению пружины:

$$P = c \cdot B_1D,$$

где c — коэффициент жесткости пружины.

Направим ось x по оси пружины, приняв за начало координат конец недеформированной пружины B_1 .

Проекция силы упругости \mathbf{P} на ось x :

$$P_x = -cx.$$

Вычислим работу силы упругости на перемещении $B_1B_2 = h$ при помощи формулы (60.6):

$$\delta A = X dx + Y dy + Z dz.$$

Проекция силы упругости, направленной по оси x — на оси координат:

$$X = -cx; \quad Y = 0; \quad Z = 0.$$

Элементарная работа силы упругости

$$\delta A = -cx dx.$$

Работа силы упругости на перемещении $B_1B_2 = h$

$$A_{1,2} = -c \int_0^h x dx = -\frac{ch^2}{2}. \quad (61.2)$$

Наибольшей деформации пружины B_1B_2 соответствует наибольшее значение силы упругости $P_{\max} = ch$, а потому

$$A_{1,2} = -\frac{P_{\max}h}{2}. \quad (61.3)$$

Работа силы упругости отрицательна в том случае, когда деформация увеличивается, т. е. когда сила упругости направлена противоположно перемещению ее точки приложения, и положительна, когда деформация уменьшается.

Работа силы \mathbf{P} на перемещении B_2B_1

$$A_{2,1} = \frac{ch^2}{2} = \frac{P_{\max}h}{2}. \quad (61.4)$$

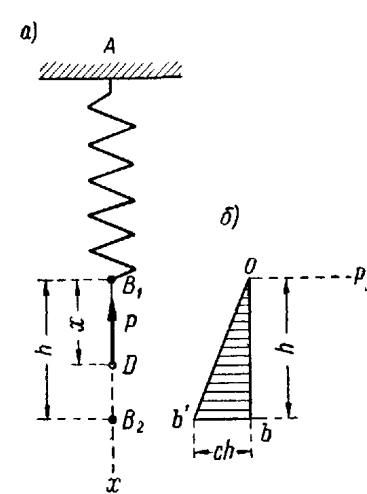


Рис. 139.

На рис. 139, б показан график изменения проекции силы упругости P_x в зависимости от перемещения конца пружины x . Так как $P_x = -cx$, то линия графика Ob' — прямая.

Работа силы упругости определяется площадью треугольника Obb' :

$$A_{1,2} = -\frac{ch^2}{2} = -\frac{P_{\max}h}{2},$$

т. е. имеем тот же результат, который был получен аналитически.

Формулы (61.2), (61.3), (61.4) имеют большое применение в технических расчетах. Эти формулы используются для вычисления работы сил упругости во всех случаях, когда имеется пропорциональность между силами и деформацией, т. е. когда справедлив закон Гука.

3. Работа силы тяготения

Допустим, что на материальную точку M массой m , расположенную в пространстве на расстоянии r от неподвижного притягивающего центра C массой m_0 , действует ньютонова сила тяготения

$$P = f \frac{m m_0}{r^2}.$$

Определим работу этой силы на перемещении точки из положения M_1 в положение M_2 (рис. 140).

Проведем через неподвижный центр C оси декартовых координат. Элементарную работу силы \mathbf{P} вычислим при помощи формулы (60.6):

$$\delta A = X dx + Y dy + Z dz.$$

Здесь

$$X = P \cos(\mathbf{P}, \mathbf{i}) = -\frac{f m m_0}{r^2} \frac{x}{r} = -f m m_0 \frac{x}{r^3}.$$

Аналогично

$$Y = -f m m_0 \frac{y}{r^3};$$

$$Z = -f m m_0 \frac{z}{r^3}.$$

Поэтому

$$\delta A = -f m m_0 \frac{x dx + y dy + z dz}{r^3}.$$

Так как

$$x dx + y dy + z dz = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} d(r^2) = r dr,$$

то

$$\delta A = -f m m_0 \frac{r dr}{r^3} = -f m m_0 \frac{dr}{r^2}.$$

Работа силы тяготения \mathbf{P} при перемещении точки из M_1 в M_2

$$A = -f m m_0 \int_{M_1}^{M_2} \frac{dr}{r^2} = -f m m_0 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = f m m_0 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (61.5)$$

Как видно из (61.5), работа силы ньютонова притяжения не зависит от формы траектории точки.

§ 62. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

Рассмотрим материальную точку M массой m , движущуюся под действием сил $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$. Установим зависимость между работой, совершаемой приложенными к точке силами на перемещении $M_1 M_2$,

и изменением кинетической энергии точки на этом перемещении (рис. 140).

Выберем начало и направление отсчета дуговой координаты $s = OM$. Укажем в точке M орт касательной $\boldsymbol{\tau}$, направленный всегда в сторону увеличения дуговой координаты. Проекция скорости точки на касательную определяется (см. ч. I, «Кинематика», § 79):

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Проекция ускорения точки на касательную равна (см. ч. I, «Кинематика», § 85):

$$\omega_{\boldsymbol{\tau}} = \frac{dv}{dt},$$

или

$$\omega_{\boldsymbol{\tau}} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v.$$

Воспользуемся основным уравнением динамики:

$$m \boldsymbol{\omega} = \sum \mathbf{P}_i.$$

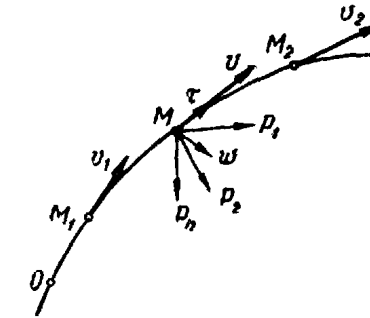


Рис. 141.

Спроектируем векторы, входящие в это уравнение, на касательную, имеющую направление орта $\boldsymbol{\tau}$:

$$m \omega_{\boldsymbol{\tau}} = \sum P_i \cos(\mathbf{P}_i, \boldsymbol{\tau}).$$

Подставляя в это уравнение значение $\omega_{\boldsymbol{\tau}}$ и умножая обе части равенства на ds , получаем:

$$m v dv = \sum P_i ds \cos(\mathbf{P}_i, \boldsymbol{\tau}). \quad (62.1)$$

Левая часть полученного равенства представляет собой дифференциал кинетической энергии точки, а правая часть является суммой элементарных работ, приложенных к точке сил.

Таким образом, имеем:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum \delta A_i. \quad (62.2)$$

Равенство (62.2) показывает, что дифференциал кинетической энергии материальной точки равен сумме элементарных работ сил, приложенных к точке.

Проинтегрируем обе части равенства (62.1) в пределах, соответствующих начальному и конечному положениям точки M_1 и M_2 :

$$m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \sum \int_{M_1}^{M_2} P_i ds \cos(\mathbf{P}_i, \boldsymbol{\tau}),$$

откуда

$$\frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = \sum A_i. \quad (62.3)$$

Уравнение (62.3) выражает теорему об изменении кинетической энергии материальной точки: *изменение кинетической энергии материальной точки на некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на эту точку сил на этом же перемещении.*

Если сумма работ сил положительна, то $v_2 > v_1$, т. е. кинетическая энергия точки возрастает, если же эта сумма отрицательна, то $v_2 < v_1$, т. е. кинетическая энергия точки убывает. Применяя эту теорему к движению несвободной материальной точки, следует освободить эту точку от связей, заменив их действие соответствующими реакциями. При движении точки по неподвижной гладкой поверхности реакция этой поверхности направлена по нормали к этой поверхности, а потому ее работа при перемещении точки по поверхности равна нулю.

Следовательно, изменение кинетической энергии материальной точки в этом случае равно сумме работ на соответствующем перемещении всех задаваемых сил, приложенных к точке. При движении материальной точки по неподвижной шероховатой поверхности действует сила трения F , направленная противоположно скорости точки. Работу этой силы можно определить по формуле (6д.7):

$$A_{\text{тр}} = \int_{M_1}^{M_2} F d\sigma \cos(\mathbf{P}, \mathbf{v}) = - \int_{M_1}^{M_2} F d\sigma.$$

Здесь $\cos(\mathbf{P}, \mathbf{v}) = -1$, так как направления силы трения F и скорости точки v противоположны. В правой части уравнения (62.3) в этом случае, кроме работ задаваемых сил, содержится и работа силы трения F .

§ 63. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в относительном движении

В § 26 установлено, что относительное движение материальной точки можно рассматривать как абсолютное, если к приложенным к точке силам присоединить переносную и кориолисову силы инерции. Из этого следует, что применяя к относительному движению материальной точки теорему об изменении кинетической энергии, необходимо к работе действующих сил добавить работу переносной и кориолисовой сил инерции Φ_e и Φ_c .

Однако поворотное ускорение w_c , а следовательно, и кориолисова сила инерции Φ_c всегда перпендикулярны к относительной скорости точки v_r . Следовательно, *работа кориолисовой силы инерции на относительном перемещении точки равна нулю и не входит в уравнение изменения кинетической энергии.*

Поэтому это уравнение для относительного движения точки имеет вид

$$\frac{mv_{2r}^2}{2} - \frac{mv_{1r}^2}{2} = \sum_{M_1}^{M_2} \int P_i d\sigma_r \cos(\mathbf{P}_i, \mathbf{v}_r) + \int_{M_1}^{M_2} \Phi_e d\sigma_r \cos(\Phi_e, \mathbf{v}_r). \quad (63.1)$$

§ 64. Примеры применения теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки

Пример 33. Состав из 50 вагонов весом в 800 кн каждый движется по подъему $i = \operatorname{tg} \alpha = 0,002$. Сопротивление его движению составляет 3 н на кн веса. На протяжении 750 м скорость поезда изменяется от 18 км/час до 36 км/час. Определить силу тяги тепловоза.

Решение. Рассматриваем поступательное движение состава как движение материальной точки. Применяем к его движению теорему

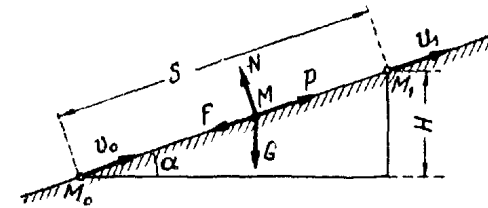


Рис 142

об изменении кинетической энергии на перемещении M_0M_1 (рис. 142). Скорость поезда на этом перемещении изменяется от $v_0 = 18 \text{ км/час} = 5 \text{ м/сек}$ до $v_1 = 36 \text{ км/час} = 10 \text{ м/сек}$.

На состав действуют постоянные по модулю и направлению силы: сила тяги тепловоза P , вес состава G , нормальная реакция рельсов N и сила сопротивления движению F , модуль которой равен $0,003G$. Составляем уравнение (62.3):

Составляем уравнение (62.3):

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_i.$$

Работу силы тяги P на перемещении M_0M_1 определяем по формуле (59.1):

$$A_P = Ps \cos 0 = Ps.$$

Работа силы тяжести G зависит только от вертикального перемещения H и согласно (61.1)

$$A_G = -GH = -Gs \sin \alpha.$$

Так как угол α мал, то $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = i$ и

$$A_G = -Gsi = -0,002Gs.$$

Работа силы N , перпендикулярной к перемещению, равна нулю. Работа силы сопротивления F определяется по формуле (59.1):

$$A_F = Fs \cos 180^\circ = -Fs = -0,003Gs.$$

Подставляя в уравнение (62.3) значение массы состава $m = \frac{G}{g}$ и значения работы всех приложенных к нему сил, получаем

$$\frac{G}{2g}(v_1^2 - v_0^2) = Ps - 0,002Gs - 0,003Gs,$$

откуда

$$P = \frac{G}{2gs}(v_1^2 - v_0^2) + 0,005G.$$

Подставляя числовые значения, находим модуль силы тяги тепловоза:

$$P = \frac{40\,000}{2 \cdot 9,8 \cdot 750} (10^2 - 5^2) + 0,005 \cdot 40\,000 = 204 + 200 = 404 \text{ кн.}$$

Пример 34. Нить длиной $l = 2 \text{ м}$ отклонена на угол $\alpha_0 = \arccos \frac{3}{4}$ от вертикали и привязанному к ней грузу сообщена начальная скорость $v_0 = 3,13 \text{ м/сек}$ (рис. 143, а). Определить наибольший угол отклонения нити в другую сторону от вертикали.

Решение. Груз M будет двигаться по окружности до точки M_1 , в которой его скорость v_1 обратится в нуль (рис. 143, б). Изменение

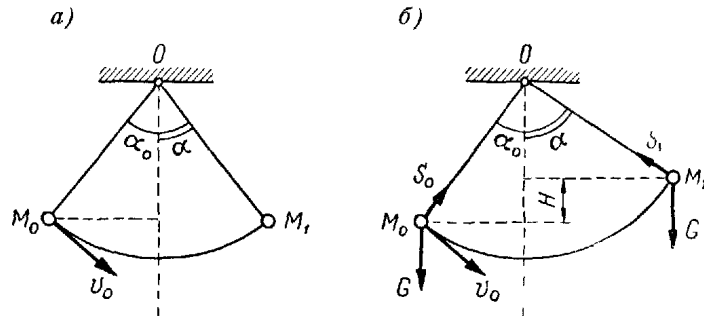


Рис 143

кинетической энергии груза на участке M_0M_1 определяется уравнением (62.3):

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_i.$$

Реакция нити S направлена перпендикулярно к вектору скорости груза v и работа этой силы равна нулю.

Работа силы тяжести определяется по формуле (61.1):

$$A_G = -GH,$$

где перемещение груза по вертикали $H = l \cos \alpha_0 - l \cos \alpha = l(\cos \alpha_0 - \cos \alpha)$.

Уравнение (62.3) принимает вид

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -GH = -Gl(\cos \alpha_0 - \cos \alpha).$$

Так как $v_1 = 0$, то $\frac{Gv_0^2}{2g} = Gl(\cos \alpha_0 - \cos \alpha)$,

откуда $\cos \alpha = \cos \alpha_0 - \frac{v_0^2}{2gl}$,

Подставляя числовые значения, находим:

$$\cos \alpha = \frac{3}{4} - \frac{3,13^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, наибольший угол отклонения нити от вертикали $\alpha = 60^\circ$.

Пример 35. Шарик весом $G = 50 \text{ сн}$ вложен в вертикально поставленный самострел, пружина которого сжата на $h = 10 \text{ см}$.

Коэффициент жесткости пружины $c = 4 \text{ н/см}$. Определить, с какой скоростью шарик вылетит из самострела и на какую высоту он поднимется при отсутствии сопротивления воздуха.

Решение. 1. Для определения скорости вылета шарика из самострела v_1 применяем к его движению на участке $M_0M_1 = h$ (рис. 144) теорему об изменении кинетической энергии.

На этом участке к шарикам приложены сила тяжести G и реакция упругой пружины P . Работа силы тяжести при вертикальном перемещении вверх согласно (61.1) равна:

$$A_G = -Gh.$$



Рис. 144.

Сила упругости пружины, восстанавливающей свою форму, направлена в сторону движения шарика. Работа переменной силы упругости на перемещении $M_0M_1 = h$ определяется по формуле (61.4):

$$A_P = \frac{ch^2}{2}.$$

Уравнение (62.3) для движения шарика на участке M_0M_1 имеет вид

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{ch^2}{2} - Gh.$$

Так как начальная скорость шарика $v_0 = 0$, то

$$\frac{Gv_1^2}{2g} = \frac{ch^2}{2} - Gh,$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{\frac{ch^2g}{G} - 2gh}.$$

Подставляя числовые значения, получаем скорость вылета шарика из самострела:

$$v_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 100 \cdot 980}{0,5} - 2 \cdot 980 \cdot 10} = \sqrt{764\,400} = 874 \text{ см/сек} = 8,74 \text{ м/сек.}$$

2. Чтобы определить высоту H , на которую поднимается шарик, воспользуемся уравнением (62.3) для перемещения шарика M_0M_2 . Начальная скорость v_0 и конечная скорость v равны нулю. Тогда уравнение (62.3) принимает вид

$$\sum A_i = 0.$$

Эта сумма состоит из работы силы упругости \mathbf{P} на перемещении $M_0M_1 = h$ и работы силы тяжести \mathbf{G} на перемещении $M_0M_2 = h + H$, т. е.

$$\frac{ch^2}{2} - G(h + H) = 0,$$

откуда

$$H + h = \frac{ch^2}{2G}.$$

Подставляя числовые значения, получаем высоту подъема шарика:

$$h + H = \frac{4 \cdot 100}{2 \cdot 0,5} = 400 \text{ см} = 4 \text{ м}.$$

§ 65. Работа сил, приложенных к твердому телу

1. Работа внутренних сил

Твердое тело представляет собой механическую систему, расстояния между точками которой остаются неизменными.

Рассмотрим две произвольные точки твердого тела M_1 и M_2 (рис. 145).

Обозначим \mathbf{P}_1^J силу, действующую на точку M_1 со стороны точки M_2 , а \mathbf{P}_2^J — силу, действующую на точку M_2 со стороны точки M_1 . Эти внутренние силы на основании закона равенства действия и противодействия равны по модулю и противоположны по направлению, т. е.

$$\mathbf{P}_1^J = -\mathbf{P}_2^J. \quad (65.1)$$

Положим, что твердое тело получило элементарное перемещение, при котором отрезок M_1M_2 переместился в положение $M_1'M_2'$. Проведем из произвольного неподвижного центра O в точки M_1 и M_2 радиус-векторы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Тогда элементарные перемещения точек M_1 и M_2

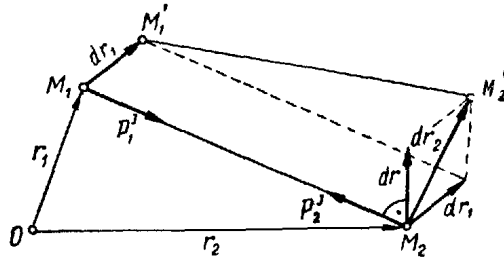


Рис 145.

$$\overline{M_1M_1'} = d\mathbf{r}_1; \quad \overline{M_2M_2'} = d\mathbf{r}_2.$$

Вычислим сумму работ сил \mathbf{P}_1^J и \mathbf{P}_2^J на этих перемещениях. Для этого примем точку M_1 за полюс и разложим перемещение твердого тела на поступательное перемещение с полюсом M_1 и сферическое перемещение по отношению к этому полюсу (см. ч. I, «Кинематика», § 119). Тогда перемещение точки M_2 разложится:

$$d\mathbf{r}_2 = d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}, \quad (65.2)$$

где $d\mathbf{r}_1$ — элементарное поступательное перемещение с полюсом M_1 , а $d\mathbf{r}$ — элементарное сферическое перемещение по отношению к полюсу M_1 , перпендикулярное к отрезку M_1M_2 , соединяющему точку M_2 с полюсом M_1 .

Сумма элементарных работ двух сил \mathbf{P}_1^J и \mathbf{P}_2^J определится на основе формулы (60.5):

$$\delta A_i^J = \mathbf{P}_1^J \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{P}_2^J \cdot d\mathbf{r}_2.$$

Пользуясь выражениями (65.1) и (65.2), получаем

$$\delta A_i^J = \mathbf{P}_1^J \cdot d\mathbf{r}_1 - \mathbf{P}_1^J (d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}) = -\mathbf{P}_1^J \cdot d\mathbf{r}.$$

Так как

$$d\mathbf{r} \perp M_1M_2,$$

то

$$d\mathbf{r} \perp \mathbf{P}_1^J.$$

Тогда $\cos(\mathbf{P}_1^J, d\mathbf{r}) = 0$ и скалярное произведение векторов, определяющее работу, равняется нулю:

$$\delta A_i^J = -P_1^J dr \cos(\mathbf{P}_1^J, d\mathbf{r}) = 0, \quad (65.3)$$

Так как каждой внутренней силе соответствует другая, равная ей по модулю и противоположная по направлению, то сумма элементарных работ всех внутренних сил тоже равна нулю:

$$\delta A^J = \sum_{i=1}^n \delta A_i^J = 0.$$

Конечное перемещение является совокупностью элементарных перемещений, а потому

$$A^J = 0, \quad (65.4)$$

т. е. сумма работ внутренних сил твердого тела на любом его перемещении равна нулю.

2. Поступательное движение твердого тела

Выше установлено, что сумма работ внутренних сил твердого тела на любом его перемещении равна нулю.

Поэтому следует вычислить лишь работу внешних сил, приложенных к телу. Положим, что к твердому телу, движущемуся поступательно, приложены внешние силы $\mathbf{P}_1^E, \mathbf{P}_2^E, \dots, \mathbf{P}_i^E, \dots, \mathbf{P}_n^E$ (рис. 146).

При поступательном движении твердого тела траектории всех его точек тождественны и параллельны. Следовательно, векторы элементарных перемещений всех точек геометрически равны между собой, т. е.

$$d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}.$$

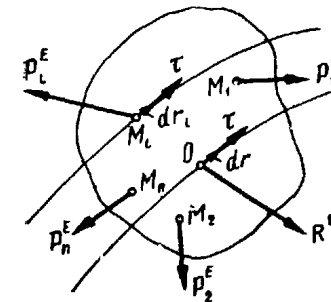


Рис 146

Элементарная работа силы \mathbf{P}_i^E

$$\delta A_i^E = \mathbf{P}_i^E \cdot d\mathbf{r}.$$

Элементарная работа всех сил, приложенных к телу, равна элементарной работе внешних сил

$$\delta A = \sum \delta A_i^E = \sum \mathbf{P}_i^E \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \sum \mathbf{P}_i^E, \text{ но } \sum \mathbf{P}_i^E = \mathbf{R}^E,$$

где \mathbf{R}^E — главный вектор всех внешних сил.

Следовательно,

$$\delta A = \mathbf{R}^E \cdot d\mathbf{r}. \quad (65.5)$$

Выражение (65.5) показывает, что элементарная работа сил, приложенных к твердому телу, движущемуся поступательно, равна элементарной работе главного вектора внешних сил, приложенного в любой точке тела.

Работа на конечном перемещении

$$A = \int_I^{II} \mathbf{R}^E \cdot d\mathbf{r}. \quad (65.6)$$

3. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Положим, что к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси z , приложены внешние силы $\mathbf{P}_1^E, \mathbf{P}_2^E, \dots, \mathbf{P}_n^E$ (рис. 147). Вычислим сначала элементарную работу отдельной силы \mathbf{P}_i^E , которая приложена в точке M_i , описывающей окружность радиусом $M_i K_i = R_i$. Разложим эту силу на три составляющие, направленные по естественным осям траектории точки M_i :

$$\mathbf{P}_i^E = \mathbf{P}_{i\tau}^E + \mathbf{P}_{in}^E + \mathbf{P}_{ib}^E.$$

Определим момент силы \mathbf{P}_i^E относительно оси z как сумму моментов ее составляющих относительно этой оси. Составляющая по главной нормали \mathbf{P}_{in}^E пересекает ось z , составляющая по бинормали \mathbf{P}_{ib}^E параллельна оси z , следовательно, моменты этих сил равны нулю. Таким образом, момент силы \mathbf{P}_i^E относительно оси z равен моменту силы $\mathbf{P}_{i\tau}^E$, которая лежит в плоскости, перпендикулярной к оси z :

$$M_{iz}^E = P_{i\tau}^E \cdot R_i.$$

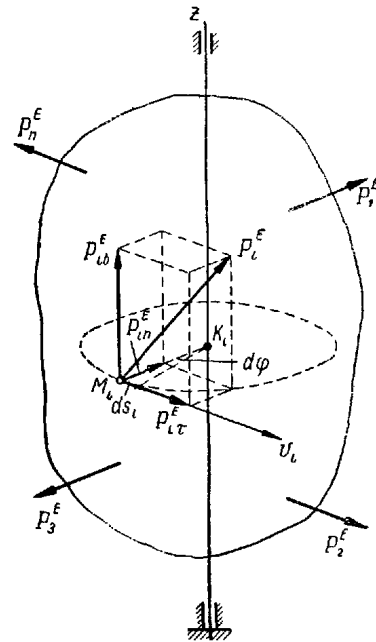


Рис 147

При элементарном перемещении тела его угол поворота φ получает приращение $d\varphi$, а дуговая координата точки M_i — приращение $ds_i = R_i d\varphi$. Вычислим работу силы \mathbf{P}_i^E на этом перемещении как сумму работ трех ее составляющих (см. § 60). Работа сил \mathbf{P}_{in}^E и \mathbf{P}_{ib}^E , перпендикулярных к вектору скорости точки M_i , равна нулю. Поэтому элементарная работа силы \mathbf{P}_i^E

$$\delta A_i^E = P_{i\tau}^E ds_i = P_{i\tau}^E R_i d\varphi = M_{iz}^E d\varphi.$$

Элементарная работа всех сил, приложенных к твердому телу,

$$\delta A = \sum \delta A_i^E = \sum M_{iz}^E d\varphi = d\varphi \sum M_{iz}^E,$$

где $\sum M_{iz}^E = M_z^E$ — главный момент внешних сил относительно оси вращения z .

Таким образом,

$$\delta A = \sum \delta A_i^E = M_z^E d\varphi, \quad (65.7)$$

т. е. элементарная работа сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна произведению главного момента внешних сил относительно оси вращения на приращение угла поворота.

Если при вращении тела значение его угла поворота изменяется от φ_1 до φ_2 , сумма работ сил на этом конечном перемещении будет:

$$\sum A_i = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z^E d\varphi. \quad (65.8)$$

В случае, если главный момент внешних сил относительно оси вращения тела постоянен, имеем

$$M_z^E = \text{const},$$

$$\sum A_i = M_z^E \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = M_z^E (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (65.9)$$

т. е. в этом случае сумма работ сил на конечном перемещении равна произведению главного момента внешних сил относительно оси вращения на конечное изменение угла поворота тела.

В формуле (65.9) угол поворота выражен в радианах, т. е. представляет собой отвлеченную величину, а размерность работы совпадает с размерностью момента.

Пользуясь формулой (65.8), можно определить мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω .

$$N = \frac{\sum \delta A_i^E}{dt} = M_z^E \frac{d\varphi}{dt} = M_z^E \omega. \quad (65.10)$$

4. Общий случай движения свободного твердого тела

Положим, что к свободному твердому телу, движущемуся как угодно в пространстве, приложены внешние силы $P_1^E, P_2^E, \dots, P_i^E, \dots, P_n^E$ (рис. 148). Элементарное перемещение свободного твердого тела можно разложить на поступательное перемещение с некоторым полюсом O , определяемое приращением дуговой координаты ds_0 , и поворот на элементарный угол $d\alpha$ вокруг мгновенной оси Ω , проходящей через полюс (см. ч. 1, «Кинематика», § 119).

Сумма элементарных работ всех сил на поступательном перемещении определится по формуле (65.5) как элементарная работа главного вектора внешних сил R^E , приложенного в полюсе O .

Сумма элементарных работ всех сил на перемещении при повороте вокруг мгновенной оси Ω определится по формуле (65.7) как произведение главного момента внешних сил относительно мгновенной оси M_Ω^E на элементарный угол $d\alpha$.

Тогда элементарная работа всех сил, приложенных к свободному твердому телу, движущемуся как угодно, определяется:

$$\delta A = \sum \delta A_i^E = R^E \cdot dr_0 + M_\Omega^E d\alpha. \quad (65.11)$$

Таким образом, *элементарная работа внешних сил, приложенных к свободному твердому телу в общем случае его движения, равна сумме элементарных работ их главного вектора на перемещении точки его приложения — полюса и главного момента этих сил относительно мгновенной оси, проходящей через полюс, на перемещении при повороте вокруг этой оси.*

§ 66. Сопротивление качению

Рассмотрим цилиндрический каток, находящийся на горизонтальной плоскости в состоянии покоя (рис. 149, а). На каток действуют две взаимно уравновешивающиеся силы: вес катка G и нормальная реакция плоскости N , где $N = -G$. Если под действием горизонтальной силы P , приложенной в центре катка C , он катится по плоскости без скольжения, то силы G и N образуют пару сил, препятствующую качению катка по плоскости (рис. 149, б).

Возникновение этой пары сил обусловлено неабсолютной твердостью материалов катка и опорной плоскости. Под действием давления

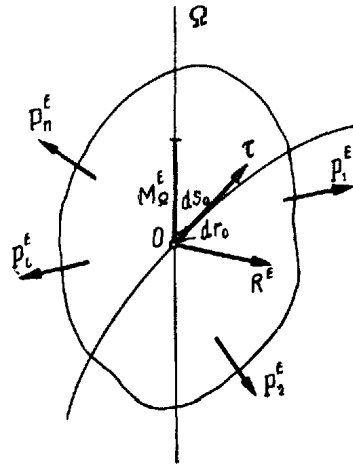


Рис. 148.

катка происходит деформация соприкасающихся поверхностей и соприкосновение катка с плоскостью происходит не по линии, а по некоторой малой площадке. В этом случае реакция N является нормальной составляющей равнодействующей реактивных сил, распределенных по этой площадке. Ее линия действия оказывается сдвинутой в сторону движения катка на некоторое расстояние δ от линии действия силы G . Реакция плоскости N и вес катка G образует пару сил сопротивления качению с плечом δ . Момент этой пары называется моментом сопротивления качению. Величина его определяется произведением нормальной реакции на плечо пары δ , называемое *коэффициентом трения качения*:

$$M_{\text{сопр}} = N\delta. \quad (66.1)$$

Коэффициент трения качения выражается в линейных единицах. Значение коэффициента трения качения для некоторых материалов приводится в следующей таблице:

Материал тела и плоскости	δ [см]
Мягкая сталь по мягкой стали	0,005
Стальной бандаж по стальному рельсу . .	0,05
Дерево по стали	0,03—0,04
Дерево по дереву	0,05—0,06

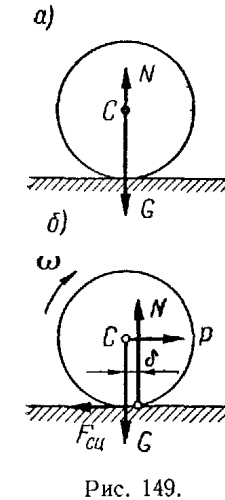


Рис. 149.

Определим наименьшую горизонтальную силу P , приложенную к центру цилиндрического катка, находящегося на горизонтальной плоскости (рис. 149, б), которая может вывести каток из состояния покоя. Для того чтобы каток начал катиться, необходимо, чтобы момент пары сил, составленный силой P и силой сцепления F_{cu} , был больше момента сопротивления, т. е.

$$PR > N \cdot \delta,$$

откуда

$$P > \frac{\delta}{R} N.$$

Так как в рассматриваемом случае $N = G$, то

$$P > \frac{\delta}{R} G. \quad (66.2)$$

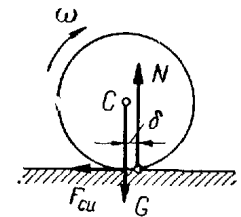


Рис. 150.

Выражение (66.2) показывает, что модуль силы P , приводящей цилиндрический каток в движение, обратно пропорционален радиусу катка R . Если действие силы P прекращается (рис. 150), качение катка происходит замедленно до остановки вследствие действия пары сопротивления.

§ 67. Теорема о кинетической энергии механической системы в общем случае ее движения (теорема Кенига)

Кинетическая энергия механической системы определяется как сумма значений кинетической энергии всех входящих в эту систему материальных точек:

$$T = \sum T_i = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (67.1)$$

Положим, что система материальных точек $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n$ движется как угодно в пространстве (рис. 151).

Выберем неподвижную систему отсчета $Oxyz$. В качестве подвижной системы отсчета возьмем систему осей ξ, η, ζ , проведенных через центр масс системы параллельно неподвижным осям x, y, z и движущихся с центром масс поступательно. Тогда абсолютное движение системы точек можно рассматривать как совокупность поступательного движения системы вместе с центром масс (переносное движение) и относительного движения системы по отношению к центру масс.

Абсолютная скорость \mathbf{v}_i любой точки M_i механической системы определится как геометрическая сумма скорости центра масс и относительной скорости этой точки в ее движении по отношению к центру масс.

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{ir}. \quad (67.2)$$

Из векторной алгебры известно, что скалярное произведение двух одинаковых векторов равно квадрату их модуля. Действительно,

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = v_i v_i \cos(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = v_i^2.$$

Преобразуем выражение кинетической энергии (67.1), учитывая формулу (67.2):

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \sum m_i (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{ir}) \cdot (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{ir}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C + \sum m_i \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_{ir} + \frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{v}_{ir} \cdot \mathbf{v}_{ir} = \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i v_C^2 + \mathbf{v}_C \cdot \sum m_i \mathbf{v}_{ir} + \frac{1}{2} \sum m_i v_{ir}^2. \end{aligned} \quad (67.3)$$

В полученном выражении первое слагаемое можно преобразовать:

$$\frac{1}{2} \sum m_i v_C^2 = \frac{1}{2} v_C^2 \sum m_i = \frac{1}{2} m v_C^2.$$

Покажем, что второе слагаемое равно нулю. Для этого проведем из центра масс C радиусы-векторы ρ_i во все точки системы. Радиус-вектор центра масс $\rho_C = 0$.

Согласно формуле (32.1)

$$\rho_C = \frac{\sum m_i \rho_i}{m}.$$

Следовательно,

$$\sum \dot{m}_i \rho_i = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \left(\sum m_i \rho_i \right) = 0.$$

Так как радиус-вектор ρ_i проведен из начала координат подвижной системы отсчета, то производная $\frac{d\rho_i}{dt}$ представляет собой относительную скорость точки \mathbf{v}_{ir} :

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \rho_i = \sum m_i \frac{d\rho_i}{dt} = \sum m_i \mathbf{v}_{ir} = 0. \quad (67.4)$$

На основании (67.4)

$$\mathbf{v}_C \cdot \sum m_i \mathbf{v}_{ir} = 0.$$

Тогда выражение (67.3), определяющее кинетическую энергию системы, принимает вид

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \sum \frac{m_i v_{ir}^2}{2}. \quad (67.5)$$

Равенство (67.5) выражает теорему о кинетической энергии механической системы: *кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии центра масс системы, масса которого равна массе всей системы, и кинетической энергии этой системы в ее относительном движении по отношению к центру масс.*

Эта теорема была установлена голландским математиком С. Кенигом (1751 г.).

§ 68. Кинетическая энергия твердого тела

В настоящем параграфе получены формулы для вычисления кинетической энергии твердого тела во всех случаях движения.

1. Поступательное движение твердого тела

При поступательном движении твердого тела скорости всех его точек в каждый момент времени геометрически равны между собой (рис. 152). Кинетическая энергия тела определится (67.1):

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_i.$$

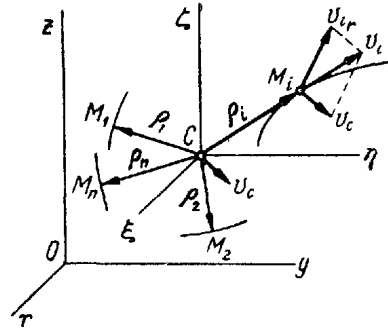


Рис. 151.

Так как $\sum m_i = m$, то окончательно

$$T = \frac{1}{2} m v^2. \quad (68.1)$$

На основании (68.1) устанавливаем, что *кинетическая энергия твердого тела, движущегося поступательно, равна половине произведения массы тела на квадрат его скорости.*

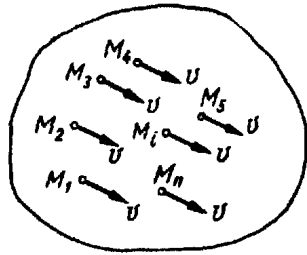


Рис. 152.

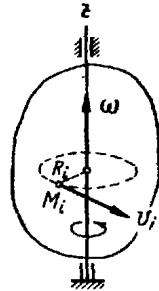


Рис. 153.

Таким образом, кинетическая энергия тела, движущегося поступательно, вычисляется как кинетическая энергия материальной точки, имеющей массу данного тела.

2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси (рис. 153) скорость любой точки тела определяется как вращательная скорость

$$v_i = R_i \omega.$$

Кинетическую энергию твердого тела определяем по формуле (67.1):

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i R_i^2.$$

Здесь $\sum m_i R_i^2 = J_z$ — момент инерции тела относительно оси вращения.

Кинетическая энергия тела

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2. \quad (68.2)$$

На основании (68.2) устанавливаем, что *кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения его момента инерции относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела.*

Сравнив формулы (68.2) и (68.1), можно заметить, что при вращении тела его момент инерции играет такую же роль, как его масса при поступательном движении.

3. Плоское движение твердого тела

Положим, что при плоском движении твердого тела его центр масс C движется в плоскости чертежа (рис. 154). Разложим это движение на поступательное движение вместе с центром масс и относительное движение по отношению к центру масс (см. § 67).

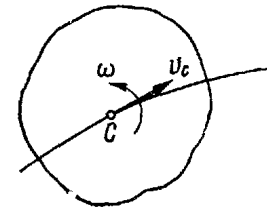


Рис. 154.

В этом случае относительное движение представляет собой вращение тела вокруг оси C_z , проходящей через центр масс C перпендикулярно к плоскости чертежа. Определим кинетическую энергию тела по теореме Кенига (67.5):

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_{C_z} \omega^2. \quad (68.3)$$

Здесь $\frac{1}{2} m v_c^2$ — кинетическая энергия тела в поступательном движении вместе с центром масс, а $\frac{1}{2} J_{C_z} \omega^2$ — кинетическая энергия во вращении тела вокруг неподвижной оси C_z , определенная на основании формулы (68.2).

4. Сферическое движение твердого тела

Скорости точек твердого тела при сферическом движении в каждый момент можно рассматривать как вращательные вокруг мгновенной оси вращения (рис. 155). Поэтому кинетическая энергия тела, совершающего сферическое движение в данный момент, определяется по формуле:

$$T = \frac{1}{2} J_{\Omega} \omega^2, \quad (68.4)$$

где ω — мгновенная угловая скорость тела; J_{Ω} — момент инерции твердого тела относительно мгновенной оси вращения.

Выражение (68.4) показывает, что *кинетическая энергия твердого тела, совершающего сферическое движение, равна половине произведения момента инерции тела относительно мгновенной оси вращения на квадрат угловой скорости тела.*

При этом величина момента инерции J_{Ω} непрерывно изменяется, так как изменяется положение мгновенной оси Ω по отношению к телу.

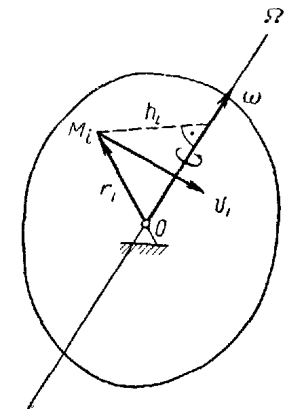


Рис. 155.

5. Общий случай движения твердого тела

Движение свободного твердого тела в общем случае можно разложить на два составляющих движения: на переносное поступательное

движение вместе с центром масс и относительное сферическое движение по отношению к центру масс (рис. 156). Тогда кинетическая энергия тела определится по формуле Кенига (65.5):

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_{c\Omega} \omega^2. \quad (68.5)$$

Таким образом, кинетическая энергия твердого тела в общем случае его движения равна сумме кинетической энергии тела в его переносном поступательном движении вместе с центром масс и его кинетической энергии в сферическом движении относительно центра масс.

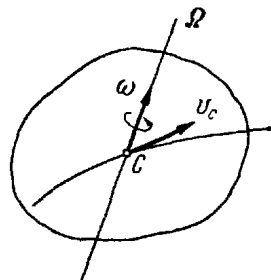


Рис. 156

§ 69. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Установим зависимость между изменением кинетической энергии механической системы и работой приложенных к ее точкам сил. Для этого разделим силы, действующие на точки $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$, на внешние силы $P_1^E, P_2^E, \dots, P_i^E, \dots, P_n^E$ и внутренние силы $P_1^J, P_2^J, \dots, P_i^J, \dots, P_n^J$. Применим к движению каждой точки M_i теорему об изменении кинетической энергии. Положим, что при перемещении механической системы из первого положения во второе каждая точка M_i перемещается из $M_{i(1)}$ в $M_{i(2)}$, причем скорость ее изменяется от $v_{i(1)}$ и $v_{i(2)}$ (рис. 157).

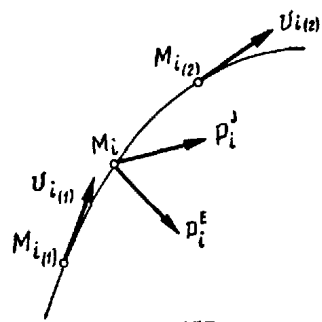


Рис. 157.

Тогда по уравнению (62.3) для каждой материальной точки имеем

$$\frac{m_i v_{i(2)}^2}{2} - \frac{m_i v_{i(1)}^2}{2} = A_i^E + A_i^J \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где A_i^E — работа силы P_i^E и A_i^J — работа силы P_i^J на перемещении $M_{i(1)} M_{i(2)}$.

Просуммируем левые и правые части составленных n равенств:

$$\left(\sum \frac{m_i v_i^2}{2} \right)_2 - \left(\sum \frac{m_i v_i^2}{2} \right)_1 = \sum A_i^E + \sum A_i^J.$$

Согласно (67.1): $\left(\sum \frac{m_i v_i^2}{2} \right)_1 = T_1$ — кинетическая энергия системы

в первом ее положении; $\left(\sum \frac{m_i v_i^2}{2} \right)_2 = T_2$ — кинетическая энергия системы во втором положении.

Таким образом,

$$T_2 - T_1 = \sum A_i^E + \sum A_i^J. \quad (69.1)$$

Уравнение (69.1) выражает теорему об изменении кинетической энергии механической системы: изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на материальные точки системы на этом перемещении.

Согласно (65.4) сумма работ внутренних сил твердого тела на любом перемещении равна нулю, т. е. $\sum A_i^J = 0$.

Для твердого тела уравнение (69.1) принимает вид

$$T_2 - T_1 = \sum A_i^E, \quad (69.2)$$

т. е. изменение кинетической энергии твердого тела на некотором перемещении равно сумме работ внешних сил, действующих на тело на этом перемещении.

§ 70. Механический коэффициент полезного действия машины

Для установления мощности машины необходимо рассмотреть действующие на машину силы. Эти силы можно разделить на три категории:

1. Силы, совершающие положительную работу, называемые *движущими силами*, например, давление пара на поршень в цилиндре паровой машины или газа в двигателе внутреннего сгорания.

2. Силы, совершающие отрицательную работу, называемые *силами сопротивления*. Силы сопротивления делятся на две группы:

а) *полезные силы сопротивления* — силы, для преодоления которых предназначена машина, например, сопротивление поднимаемого машиной груза и т. д.;

б) *вредные силы сопротивления* — побочные силы сопротивления, как, например, силы трения, сопротивление воздуха и т. п.

3. *Силы тяжести* отдельных частей машины, совершающих попеременно то положительную, то отрицательную работу. Работа этих сил за полный цикл работы машины равна нулю, так как результирующее перемещение точки приложения каждой силы тяжести равно нулю.

При установившемся движении машины ее кинетическая энергия не изменяется и сумма работ приложенных к ней движущих сил и сил сопротивления равна нулю

$$A_{дв.с} + A_{пол.сопр} + A_{вр.сопр} = 0.$$

Так как работа сил сопротивления отрицательна, то эту сумму можно представить в виде

$$A_{дв.с} - |A_{пол.сопр}| - |A_{вр.сопр}| = 0,$$

или

$$A_{дв.с} = |A_{пол.сопр}| + |A_{вр.сопр}|,$$

т. е. при установившемся движении машины работа движущих сил равна абсолютной величине работы сил сопротивления. Это значит, что работа, затрачиваемая на приведение машины в движение, расходуется на преодоление полезных и вредных сопротивлений:

$$A_{затр} = A_{пол. сопр} + A_{вр. сопр}$$

Механический коэффициент полезного действия машины η при установившемся ее движении равен отношению полезной работы машины к работе, затраченной на приведение машины в движение:

$$\eta = \frac{A_{пол. сопр}}{A_{затр}} < 1. \quad (70.1)$$

Если известны полезная мощность машины $N_{маш}$ и мощность двигателя, приводящего ее в движение $N_{дв}$, то механический коэффициент полезного действия машины

$$\eta = \frac{N_{маш}}{N_{дв}}. \quad (70.2)$$

§ 71. Примеры применения теоремы об изменении кинетической энергии механической системы

Пример 36. На цилиндрический вал весом 8 кН и диаметром 20 см насажено маховое колесо весом 25 кН и радиусом инерции относительно оси колеса $i_x = 0,6$ м. Вследствие трения в подшипниках вращение вала замедляется. Коэффициент трения в подшипниках равен 0,05, начальная угловая скорость вала 120 об/мин. Определить, сколько оборотов сделает вал до остановки.

Решение. Так как вал с маховиком представляет собой твердое тело, то изменение кинетической энергии его происходит согласно уравнению (69.2):

$$T - T_0 = \sum A_i^E$$

В момент остановки $T = 0$ и уравнение (69.2) принимает вид

$$-T_0 = \sum A_i^E. \quad (a)$$

Кинетическая энергия вала с маховиком, вращающегося вокруг неподвижной оси, которую примем за ось x , определяется по формуле (68.2):

$$T_0 = \frac{1}{2} J_x \omega_0^2, \quad (б)$$

где J_x — момент инерции этого вала с маховиком относительно оси вращения.

К валу приложены внешние силы: суммарный вес вала и маховика G , нормальная реакция подшипников N и сила трения скольжения F , приложенная к валу в точке, где передается давление вала

на подшипники, и направленная противоположно вращательной скорости v этой точки (рис. 158). Работу этих сил можно вычислить по формуле (65.9), так как момент каждой силы относительно оси вращения постоянен. Угол поворота вала изменяется от 0 до φ и сумма работ внешних сил

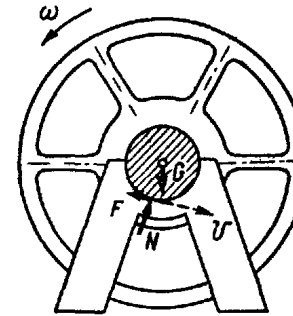


Рис 158

$$\sum A_i^E = M_x^E \varphi.$$

Так как силы G и N пересекают ось вращения вала, то их моменты относительно этой оси равны нулю.

Момент относительно оси вала имеет лишь сила трения F , модуль которой $F = fN$.

Так как угол наклона силы N к вертикали практически очень мал, то $N \approx G$ и $F \approx fG$.

Поэтому сумма работ внешних сил

$$\sum A_i^E = -FR\varphi = -fGR\varphi. \quad (в)$$

Момент силы трения отрицателен, так как направление вращения вала (против движения часовой стрелки) принимается за положительное, а момент силы трения направлен противоположно (по движению часовой стрелки).

Подставив выражения (б) и (в) в уравнение (а), получаем

$$-\frac{J_x \omega_0^2}{2} = -fGR\varphi, \text{ откуда } \varphi = \frac{J_x \omega_0^2}{2fGR}. \quad (г)$$

Вычислим моменты инерции вала (сплошного цилиндра) и махового колеса по соответствующим формулам:

$$J_{x_B} = \frac{m_B R^2}{2} = \frac{GR^2}{2g} = \frac{8000 \cdot 0,1^2}{2 \cdot 9,81} = 4,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$J_{x_M} = m_M i_x^2 = \frac{G_M i_x^2}{g} = \frac{25000 \cdot 0,6^2}{9,81} = 918,4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Момент инерции рассматриваемого тела равен сумме моментов инерции вала и маховика:

$$J_x = J_{x_B} + J_{x_M} = 4,1 + 918,4 = 922,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Начальная угловая скорость тела

$$\omega_0 = \frac{\pi n_0}{30} = \frac{\pi \cdot 120}{30} = 4\pi \text{ сек}^{-1}.$$

Подставляя числовые значения величин в формулу (г), получаем величину угла φ в радианах:

$$\varphi = \frac{922,5 \cdot 16\pi^2}{2 \cdot 0,05 \cdot 33000 \cdot 0,1} = 44,73\pi^2.$$

Выразив φ в оборотах, найдем число оборотов вала до остановки:

$$\varphi = \frac{44,73\pi^2}{2\pi} = 22,36\pi = 70 \text{ оборотов}$$

Пример 37. Цилиндрический каток диаметром 0,5 м вкатывается на наклонную плоскость, имея в начальный момент скорость точек оси 1,4 м/сек. Угол наклона плоскости к горизонту равен 30° , коэффициент трения качения равен 0,5 см. Определить путь, пройденный осью катка до остановки, предполагая, что каток катится по наклонной плоскости без скольжения.

Решение. К плоскому движению катка применим теорему об изменении кинетической энергии системы в форме уравнения (69.2):

$$T - T_0 = \sum A_i^E.$$

В момент остановки

$$T = 0,$$

тогда

$$-T_0 = \sum A_i^E. \quad (a)$$

На рис. 159 показано перемещение среднего сечения катка. Начальное значение кинетической энергии катка, совершающего плоское движение, находим по формуле (68.3)

$$T_0 = \frac{1}{2} m v_{C_0}^2 + \frac{1}{2} J_{C_0} \omega_0^2. \quad (б)$$

Момент инерции цилиндра относительно его продольной оси согласно формуле (36.4) равен $J_{C_0} = \frac{mR^2}{2}$. Угловая скорость катка равна отношению линейной скорости его центра тяжести C к расстоянию от точки C до мгновенного центра скоростей, т. е. $\omega_0 = \frac{v_{C_0}}{R}$. Подставив значение J_{C_0} и ω_0 в формулу (б), получим

$$T_0 = \frac{1}{2} m v_{C_0}^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{v_{C_0}^2}{R^2} = \frac{3}{4} m v_{C_0}^2 = \frac{3}{4} C v_{C_0}^2. \quad (в)$$

На каток действуют внешние силы: вес катка G , нормальная реакция плоскости N и сила сцепления $F_{сц}$.

Разложим вес катка G на две составляющие силы:

$$G_1 = G \cos \alpha \text{ и } G_2 = G \sin \alpha.$$

При наличии сопротивления качению сила G_1 и нормальная реакция N составляют пару сопротивления качению с плечом $\delta = 0,5 \text{ см}$ (см. § 66).

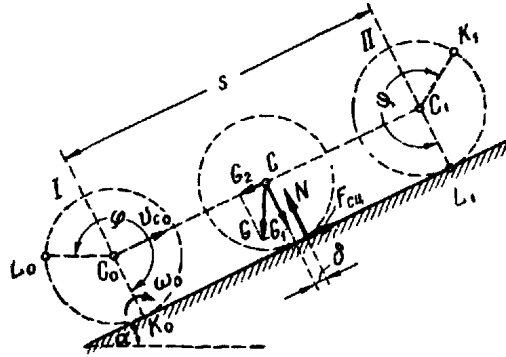


Рис 159.

Работу совершают сила G_2 и пара сопротивления G_1, N .

Сила сцепления $F_{сц}$ работу не производит, так как скорость мгновенного центра скоростей, в котором она приложена, равна нулю. Работа силы G_2

$$A_{G_2} = -G_2 \cdot s = -G \cdot \sin \alpha \cdot s.$$

Работу пары сопротивления определяем по формуле (65.9):

$$A_{сопр} = -M_{сопр} \cdot \varphi,$$

где

$$M_{сопр} = N\delta = G_1 \cdot \delta = G \cdot \cos \alpha \cdot \delta.$$

При перемещении катка из положения I в положение II точка K_0 переходит в положение K_1 , а точка L_0 — в положение L_1 , причем каток поворачивается на угол φ .

Если каток катится без скольжения, то длина дуги $K_0L_0 = K_1L_1$ равна длине отрезка K_0L_1 , т. е. равна пути s , пройденному центром катка. Изменение угла поворота катка φ можно определить:

$$\varphi = \frac{\overset{\frown}{K_0L_0}}{R} = \frac{s}{R}.$$

Подставим значения $M_{сопр}$ и φ в выражение работы пары сопротивления

$$A_{сопр} = -G \cos \alpha \cdot \delta \cdot \frac{s}{R}.$$

Работа отрицательна, так как направление пары противоположно направлению вращения катка.

Подставим в уравнение (а) значение кинетической энергии (б), а также работу силы G_2 и пары сопротивления:

$$-\frac{3}{4} \frac{G v_{C_0}^2}{g} = -G \cdot \sin \alpha \cdot s - G \cdot \cos \alpha \cdot \delta \cdot \frac{s}{R},$$

отсюда найдем путь, пройденный центром катка до остановки:

$$s = \frac{3}{4} \frac{v_{C_0}^2}{g \left(\sin \alpha + \frac{\delta}{R} \cos \alpha \right)} = \frac{3}{4} \frac{1,96}{9,8 \left(0,5 + \frac{0,5}{25} 0,866 \right)} = 0,29 \text{ м.}$$

Примечание. При скольжении сплошного цилиндра по плоскости со скоростью v_C , т. е. при поступательном движении, его кинетическая энергия согласно (68.1) равна $\frac{1}{2} m v_C^2$, а при качении цилиндра по плоскости без скольжения с той же скоростью осн v_C кинетическая энергия равна $\frac{3}{4} m v_C^2$, так как к энергии поступательного движения добавится энергия во вращении.

Пример 38. Доска весом G_1 лежит на двух одинаковых цилиндрических катках весом G каждый, находящихся на горизонтальной плоскости. К доске приложена постоянная горизонтальная сила P . При движении системы скольжение между катками и доской, а также между катками и плоскостью отсутствует. Определить ускорение движения доски, пренебрегая сопротивлением качению (рис. 160, а).

Решение. К движению механической системы, состоящей из доски и двух катков, применим теорему об изменении кинетической энергии в форме уравнения (69.1):

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^I.$$

Работа внутренних сил каждого из твердых тел равна нулю согласно (65.4). Работа внутренних сил взаимодействия между катком и доской равна нулю, так как эти силы равны по модулю, противоположны по направлению и приложены к точкам, элементарные перемещения которых одинаковы (на рис. 160, б эти силы не показаны)

Таким образом,

$$\sum A_i^I = 0.$$

Кинетическая энергия каждого из цилиндрических катков, совершающих плоское движение

$$T_k = \frac{3}{4} \frac{G}{g} v_C^2.$$

Кинетическую энергию доски, движущейся поступательно со скоростью v , равной скорости верхней точки обода каждого катка, определяем по формуле (68.1):

$$T_d = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} \frac{G_1 v^2}{g}.$$

При качении катка без скольжения его мгновенный центр скоростей находится в точке соприкосновения с неподвижной плоскостью. Из кинематики известно, что скорости точек пропорциональны расстояниям точек от мгновенного центра скоростей, т. е.

$$\frac{v}{v_C} = \frac{2R}{R} = 2, \text{ откуда } v = 2v_C.$$

Кинетическая энергия всей механической системы, т. е. двух катков и доски равна:

$$T = 2T_k + T_d = \frac{3}{2} \frac{G}{g} v_C^2 + \frac{1}{2} \frac{G_1}{g} v^2,$$

или

$$T = \frac{3}{2} \frac{G}{g} \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{G_1}{g} v^2 = \frac{1}{8} \frac{v^2}{g} (3G + 4G_1).$$

Аналогично

$$T_0 = \frac{1}{8} \frac{v_0^2}{g} (3G + 4G_1).$$

На систему действуют внешние силы: движущая сила P , веса частей G и G_1 и реакции неподвижной плоскости в виде нормальных реакций N_1 и N_2 и сил сцепления $F_{1\text{сц}}$ и $F_{2\text{сц}}$.

Работа сил тяжести на горизонтальном перемещении их точек приложения равна нулю

Работа реакций, приложенных в мгновенных центрах скоростей катков, равна нулю. Сумма работ внешних сил содержит только работу силы P на перемещении доски s , т. е.

$$\sum A_i^E = Ps.$$

Подставляя значения T_1 , T_0 и $\sum A_i^E$ в уравнение (69.1), находим

$$\frac{1}{8} \frac{v^2}{g} (3G + 4G_1) - \frac{1}{8} \frac{v_0^2}{g} (3G + 4G_1) = Ps,$$

или

$$(3G + 4G_1)(v^2 - v_0^2) = 8gPs.$$

Продифференцировав это уравнение по времени, получим

$$2v \frac{dv}{dt} (3G + 4G_1) = 8gP \frac{ds}{dt}.$$

Здесь $\frac{dv}{dt} = w$ — ускорение прямолинейного движения доски;

$\frac{ds}{dt} = v$ — скорость доски, т. е.

$$2vw(3G + 4G_1) = 8gPv,$$

откуда

$$w = \frac{4P}{3G + 4G_1} g.$$

Пример 39. Однородный стержень BD длиной $l = 0,8$ м опирается концами на гладкую стену и гладкий пол.

Стержень, первоначально удерживаемый в состоянии покоя под углом $BDE = 60^\circ$ к горизонтали, начинает падать, оставаясь в одной и той же вертикальной плоскости. Определить скорость конца B стержня в момент удара его о пол (рис. 161, а).

Решение. Стержень движется в вертикальной плоскости как линейка эллипсографа, т. е. конец D движется по горизонтали, а конец B по вертикали. Мгновенный центр скоростей стержня P находится в точке пересечения перпендикуляров к направлениям скоростей

точек B и D (рис. 161, б). В момент падения стержня на пол мгновенный центр скоростей оказывается в точке D (рис. 161, в). Для определения скорости точки B стержня в этот момент воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы в форме уравнения (69.2):

$$T - T_0 = \sum A_i^E,$$

где $T_0 = 0$, так как в начальный момент стержень был неподвижен. Вычислим кинетическую энергию стержня в момент его падения на землю по формуле (68.3), так как движение стержня плоское:

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{Cz} \omega^2.$$

Выразим скорость центра тяжести стержня v_C и угловую скорость стержня ω через скорость конца v_B , которую требуется определить

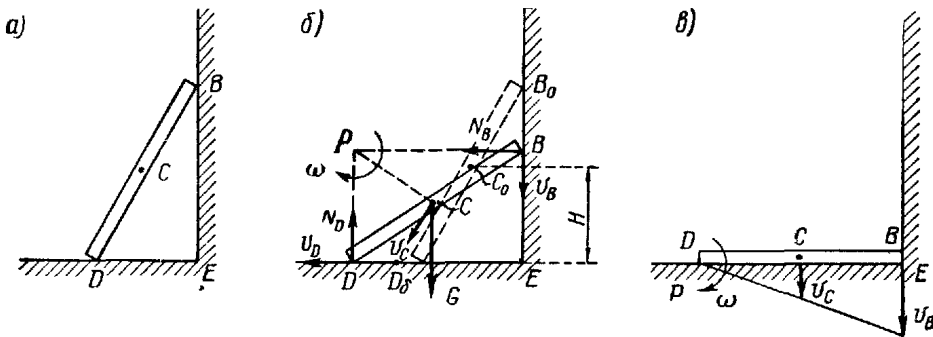


Рис 161.

Пользуясь расстояниями от точек C и B до мгновенного центра скоростей D (рис. 161, в), получаем

$$\frac{v_C}{v_B} = \frac{DC}{DB} = \frac{\frac{1}{2}l}{l} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$v_C = \frac{1}{2} v_B; \quad \omega = \frac{v_B}{DB} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{v_B}{l}.$$

Момент инерции однородного стержня относительно оси Cz , проходящей через его центр тяжести, можно определить по формуле

$$J_{Cz} = \frac{1}{12} m l^2.$$

Подставим значения v_C , ω и J_{Cz} в выражение кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{v_B}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m l^2 \left(\frac{v_B}{l}\right)^2 = \frac{1}{6} m v_B^2 = \frac{1}{6} C v_B^2.$$

К стержню приложены внешние силы: вес стержня G и реакции плоскостей N_B и N_D .

Работа сил N_B и N_D равна нулю, так как каждая из этих сил перпендикулярна к скорости ее точки приложения. Сумма работ внешних сил содержит только работу силы тяжести, определяемую по формуле (61.1):

$$\sum A_i^E = GH = G \frac{l}{2} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} Gl.$$

Подставляем значения кинетической энергии и суммы работ в уравнение (69.2):

$$\frac{1}{6} \frac{G}{g} v_B^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} Gl,$$

откуда

$$v_B = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2} gl} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 9,8 \cdot 0,8} = 4,51 \text{ м/сек.}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Каковы две меры механического движения и соответствующие им измерители действия силы?
2. Как определяется работа постоянной по модулю и направлению силы на прямолинейном перемещении?
3. Чему равна работа силы трения скольжения, если эта сила постоянна по модулю и направлению?
4. Каким простым способом можно вычислить работу постоянной по модулю и направлению силы на криволинейном перемещении?
5. Чему равна работа равнодействующей силы?
6. Как выразить элементарную работу силы через элементарный путь точки приложения силы и как — через приращение дуговой координаты этой точки?
7. Каково векторное выражение элементарной работы?
8. Каково выражение элементарной работы силы через проекции силы на оси координат?
9. Напишите различные виды криволинейного интеграла, определяющего работу переменной силы на конечном криволинейном перемещении?
10. В чем состоит графический способ определения работы переменной силы на криволинейном перемещении?
11. Как вычисляется работа силы тяжести и работа силы упругости?
12. На каких перемещениях работа силы тяжести:
 - а) положительна,
 - б) отрицательна,
 - в) равна нулю?
13. В каком случае работа силы упругости положительна и в каком отрицательна?
14. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии материальной точки
15. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в относительном движении. Почему равна нулю работа кориолисовой силы инерции?
16. Какова сумма работ внутренних сил твердого тела на любом перемещении тела?
17. Как вычисляется сумма элементарных работ внешних сил, приложенных к твердому телу?

а) в случае поступательного движения; б) в случае его вращения вокруг неподвижной оси и в) в общем случае его движения?

18. Как вычисляется мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω ?

19. Что представляет собой сопротивление качению, что называется коэффициентом трения качения и какова его размерность?

20. Сформулируйте теорему Кенига о кинетической энергии механической системы в общем случае ее движения.

21. Как вычисляется кинетическая энергия твердого тела в различных случаях его движения?

22. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии механической системы.

ГЛАВА XI

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ СИЛОВОЕ ПОЛЕ

§ 72. Силовое поле. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Потенциальная энергия

Силовым полем называется физическое пространство, удовлетворяющее тому условию, что на точки механической системы, находящейся в этом пространстве, действуют силы, зависящие от положения этих точек или от положения точек и времени (но не от их скоростей).

Силовое поле, силы которого не зависят от времени, называется стационарным.

Примерами силового поля могут служить поле силы тяжести, электростатическое поле, поле силы упругости.

Стационарное силовое поле называется потенциальным, если работа сил поля, действующих на механическую систему, не зависит от формы траекторий ее точек и определяется только их начальным и конечным положениями.

Эти силы называются *силами, имеющими потенциал*, или *консервативными силами*.

Докажем, что приведенное условие выполняется, если существует однозначная функция координат:

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n), \quad (72.1)$$

называемая *силовой функцией поля*, частные производные от которой по координатам любой точки $M_i (i=1, 2, \dots, n)$ равны проекциям приложенной к этой точке силы на соответствующие оси, т. е.

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}. \quad (72.2)$$

Элементарную работу силы, приложенной к каждой точке, можно определить по формуле (60.6):

$$\delta A_1 = X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1,$$

$$\delta A_2 = X_2 dx_2 + Y_2 dy_2 + Z_2 dz_2,$$

$$\delta A_n = X_n dx_n + Y_n dy_n + Z_n dz_n.$$

Элементарная работа сил, приложенных ко всем точкам системы, равна:

$$\delta A = \sum \delta A_i = [(X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1) + (X_2 dx_2 + Y_2 dy_2 + Z_2 dz_2) + \dots + (X_n dx_n + Y_n dy_n + Z_n dz_n)].$$

Пользуясь формулами (72.2), получаем

$$\delta A = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial U}{\partial z_1} dz_1 \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial U}{\partial z_2} dz_2 \right) + \dots + \left(\frac{\partial U}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial U}{\partial y_n} dy_n + \frac{\partial U}{\partial z_n} dz_n \right) \right] = dU. \quad (72.3)$$

Как видно из (72.3), *элементарная работа сил потенциального поля равна полному дифференциалу силовой функции.*

Работа сил поля на конечном перемещении механической системы из положения (1) в положение (2) равна:

$$A_{1,2} = \int_{(1)}^{(2)} dU = U_2 - U_1, \quad (72.4)$$

т. е. *работа сил, действующих на точки механической системы в потенциальном поле, равна разности значений силовой функции в конечном и начальном положениях системы и не зависит от формы траекторий точек этой системы.*

Из этого следует, что силовое поле, для которого существует силовая функция (72.1), действительно является потенциальным.

Формула (72.4) показывает, что *работа сил, действующих на точки системы в потенциальном поле на всяком замкнутом перемещении, т. е. на перемещении, при котором начальные и конечные положения для всех точек совмещены, равна нулю*, так как в этом случае $U_2 = U_1$.

Введем понятие *потенциальной энергии*. Пусть, например, механическая система M_1, M_2, \dots, M_n (рис. 162) находится в потенциальном поле под действием сил P_1, P_2, \dots, P_n . Примем некоторое произвольное положение этой системы $M_1^{(0)}, M_2^{(0)}, \dots, M_n^{(0)}$ за нулевое положение.

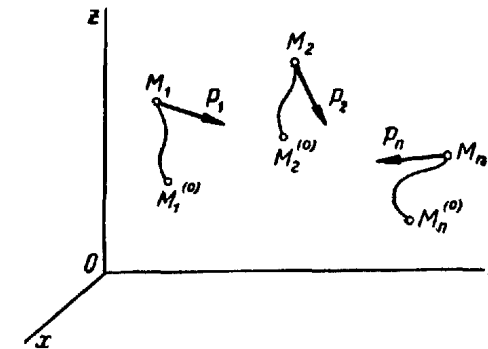


Рис. 162.

Потенциальная энергия системы в любом данном ее положении равна сумме работ сил потенциального поля, приложенных к ее точкам на перемещении системы из данного положения

в любое другое положение системы. Пусть, например, механическая система M_1, M_2, \dots, M_n (рис. 162) находится в потенциальном поле под действием сил P_1, P_2, \dots, P_n . Примем некоторое произвольное положение этой системы $M_1^{(0)}, M_2^{(0)}, \dots, M_n^{(0)}$ за нулевое положение.

Потенциальная энергия системы в любом данном ее положении равна сумме работ сил потенциального поля, приложенных к ее точкам на перемещении системы из данного положения

ния в нулевое. Так как эта сумма работ зависит только от того, из какого положения система перемещается в выбранное нулевое положение, то потенциальная энергия Π зависит только от положения системы.

Таким образом, потенциальную энергию системы можно представить как функцию координат ее точек:

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n), \quad (72.5)$$

Из определения потенциальной энергии системы следует, что в нулевом положении ее значение равно нулю:

$$\Pi_0 = 0.$$

Положим, что механическая система перемещается из первого положения $M_1^{(1)}, M_2^{(1)}, \dots, M_n^{(1)}$ во второе $M_1^{(2)}, M_2^{(2)}, \dots, M_n^{(2)}$ (рис. 163).

Из определения потенциальной энергии следует, что работа сил поля, приложенных к точкам системы, на ее перемещении из первого положения в нулевое $M_1^{(0)}, M_2^{(0)}, \dots, M_n^{(0)}$, равна потенциальной энергии системы в первом положении Π_1 . Аналогично работа сил поля на перемещении системы из второго положения в нулевое равна потенциальной энергии системы во втором положении Π_2 .

Отсюда следует, что работа сил поля на перемещении системы из первого положения во второе равна разности:

$$A_{1,2} = \Pi_1 - \Pi_2. \quad (72.6)$$

Таким образом, работа сил приложенных к точкам механической системы, на любом ее перемещении равна разности значений потенциальной энергии в начальном и конечном положениях системы.

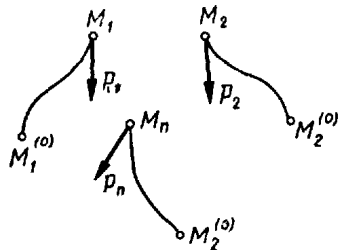


Рис 164.

Установим зависимость между силовой функцией и потенциальной энергией механической системы. При перемещении механической системы из данного положения M_1, M_2, \dots, M_n (рис. 164) в нулевое положение $M_1^{(0)}, M_2^{(0)}, \dots, M_n^{(0)}$ работа приложенных к точкам сил равна потенциальной энергии Π системы в этом положении C другой стороны, эту работу можно определить по формуле (72.4) как разность значений силовой функции U в нулевом положении и в данном, т. е.

$$A = \Pi = U_0 - U. \quad (72.7)$$

Равенство (72.7) показывает, что потенциальная энергия системы Π отличается от силовой функции U , взятой со знаком минус, на постоянную величину U_0 .

Из равенства (72.7) следует

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} = -\frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Тогда на основании формулы (72.2)

$$X_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}; \quad Y_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}; \quad Z_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}, \quad (72.8)$$

т. е. проекции на координатные оси силы, действующей в потенциальном поле на каждую точку M_i механической системы, равны взятым со знаком минус частным производным от потенциальной энергии системы по соответствующим координатам этой точки.

Рассмотрим, какой вид получат выведенные выше формулы при движении в потенциальном поле лишь одной материальной точки.

Силовая функция в этом случае имеет вид

$$U(x, y, z), \quad (72.9)$$

где x, y, z — координаты рассматриваемой точки.

Потенциальная энергия точки:

$$\Pi(x, y, z). \quad (72.10)$$

Формулы (72.2), определяющие проекции X, Y, Z действующей на точку силы поля на оси координат, принимают вид

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (72.11)$$

Формулы (72.8) принимают вид

$$X = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (72.12)$$

По заданной функции $\Pi(x, y, z)$ (72.10) легко дать геометрическую характеристику зависимости потенциальной энергии точки от ее положения в пространстве.

Геометрическое место точек пространства, в которых потенциальная энергия материальной точки имеет одно и то же значение C , определяется из уравнения

$$\Pi(x, y, z) = C. \quad (72.13)$$

Уравнение (72.13) определяет некоторую поверхность в пространстве, которая называется *поверхностью равного потенциала* или *эквипотенциальной поверхностью*. Давая параметру C всевозможные значения, можно получить бесчисленное множество эквипотенциальных поверхностей. Через каждую точку поля проходит одна экви-

потенциальная поверхность. Параметру $C=0$ соответствует нулевая эквипотенциальная поверхность, проходящая через нулевое положение $M^{(0)}$; во всех ее точках потенциальная энергия равна нулю. Проведя бесчисленное множество бесконечно близких эквипотенциальных поверхностей, можно разделить потенциальное поле на ряд бесконечно тонких слоев. Установим направление силы поля в каждой точке по отношению к эквипотенциальной поверхности, проходящей через эту точку. Положим, что точка M перемещается в бесконечно близкое положение M' на той же эквипотенциальной поверхности (рис. 165).

Тогда элементарная работа силы поля P на перемещении MM' согласно (60.5) равна

$$\delta A = P \cdot \overline{MM'} = P \cdot MM' \cdot \cos(P, \overline{MM'}).$$

С другой стороны, эта работа определяется формулой (72.6):

$$\delta A = P - P' = 0.$$

потому что $P = P'$ в точках M и M' , принадлежащих одной и той же эквипотенциальной поверхности. Так как $P \neq 0$, $MM' \neq 0$, то $\cos(P, \overline{MM'}) = 0$, т. е. $P \perp \overline{MM'}$, следовательно, сила P направлена по нормали к эквипотенциальной поверхности, проходящей через данную точку.

Положим, что точка получает элементарное перемещение MM'' по направлению силы, тогда

$$\delta A = P \cdot MM'' \cdot \cos 0 = P \cdot MM'' > 0.$$

Согласно формуле (72.6)

$$\delta A = P - P''.$$

Сопоставляя два выражения элементарной работы, находим

$$P - P'' > 0, \text{ или } P > P''.$$

Следовательно, сила P направлена в сторону уменьшения значений потенциальной энергии.

§ 73. Примеры потенциальных силовых полей

1. Поле силы тяжести

Сила тяжести, работа которой не зависит от траектории ее точки приложения, является примером силы, имеющей потенциал. Исследуем поле этой силы:

1. Рассмотрим сначала движение в этом поле одной материальной точки весом G . Направим ось z вверх по вертикали, а оси x и y произвольно в горизонтальной плоскости.

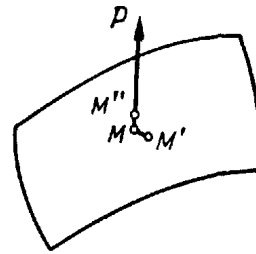


Рис. 165.

Определим потенциальную энергию материальной точки M (рис. 166), применяя формулу (72.12) к проекциям силы тяжести G на оси координат:

$$X = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0, \quad Y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0, \quad Z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -G.$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия точки Π зависит только от координаты z . Тогда $\frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{d\Pi}{dz} = G$, откуда $d\Pi = G dz$.

Интегрируя, получаем

$$\Pi = Gz + C.$$

Положим, что потенциальная энергия точки равна нулю при $z=0$, т. е. примем за нулевую эквипотенциальную поверхность координатную плоскость xOy .

Тогда $C=0$ и потенциальная энергия точки

$$\Pi = Gz. \quad (73.1)$$

Согласно (72.13) уравнения эквипотенциальных поверхностей имеют вид

$$Gz = \text{const} \text{ или } z = \text{const},$$

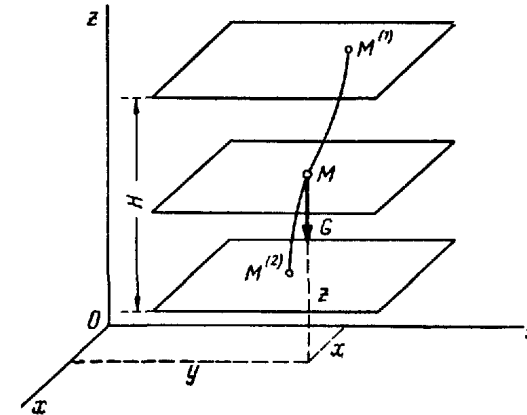


Рис. 166.

т. е. эквипотенциальные поверхности поля силы тяжести представляют собой горизонтальные плоскости.

Очевидно, что эквипотенциальные поверхности поля силы тяжести можно считать плоскостями лишь на сравнительно небольшом протяжении, где можно пренебрегать кривизной земной поверхности.

Сила тяжести направлена перпендикулярно к этим плоскостям в сторону уменьшения значений потенциальной энергии.

Определим работу силы тяжести на перемещении точки из $M^{(1)}$ в $M^{(2)}$ по формуле (72.6):

$$A_{1,2} = \Pi^{(1)} - \Pi^{(2)} = Gz^{(1)} - Gz^{(2)} = GH,$$

где $H = z^{(1)} - z^{(2)}$ при $z^{(1)} > z^{(2)}$.

Полученное выражение совпадает с формулой (61.1).

2. Рассмотрим теперь механическую систему M_1, M_2, \dots, M_n , на которую действуют силы тяжести G_1, G_2, \dots, G_n (рис. 167).

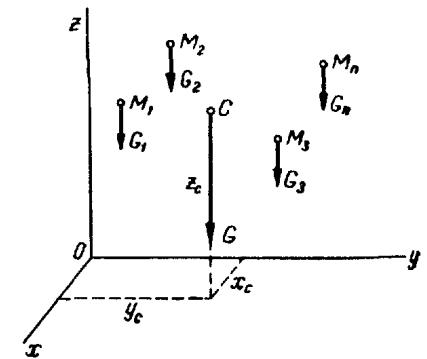


Рис. 167.

Определим потенциальную энергию системы при помощи формулы (73.1):

$$П = G_1 z_1 + G_2 z_2 + \dots + G_n z_n = \sum G_i z_i.$$

Координаты центра тяжести системы определяются по формулам из статики:

$$z_C = \frac{\sum G_i z_i}{G}, \quad \text{откуда} \quad \sum G_i z_i = G z_C,$$

тогда

$$П = G z_C, \quad (73.2)$$

т. е. потенциальная энергия механической системы, находящейся под действием сил тяжести, равна произведению веса системы на высоту ее центра тяжести над нулевой эквипотенциальной плоскостью.

2. Поле центральной силы

Положим, что на материальную точку M массой m (рис. 168) действует сила притяжения к центру O , равная $P = k \frac{m}{r^2}$, где $r = OM$.

Проведем через точку O три взаимно перпендикулярные координатные оси x , y , z .

Обозначим углы, составленные направлением OM с этими осями через α , β , γ .

Определим проекции силы P на оси координат:

$$\begin{aligned} X &= -P \cos \alpha = \\ &= -k \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -k \cdot \frac{m}{r^3} x, \\ Y &= -P \cos \beta = \\ &= -k \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \frac{y}{r} = -k \cdot \frac{m}{r^3} y, \\ Z &= -P \cos \gamma = \\ &= -k \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \frac{z}{r} = -k \cdot \frac{m}{r^3} z. \end{aligned}$$

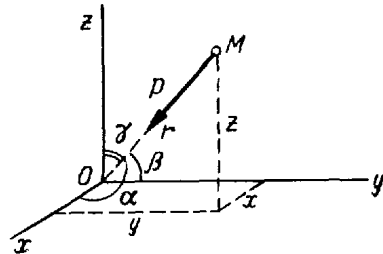


Рис 168

Полный дифференциал потенциальной энергии $\Pi(x, y, z)$ точки M

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz.$$

Пользуясь формулами (72.12), имеем

$$d\Pi = -(X dx + Y dy + Z dz) = k \frac{m}{r^3} (x dx + y dy + z dz)$$

Так как $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, то $r dr = x dx + y dy + z dz$.

Пользуясь этим равенством, получаем

$$d\Pi = k \frac{m}{r^3} \cdot r dr = km \frac{dr}{r^2}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\Pi = -\frac{km}{r} + C.$$

Потенциальная энергия точки зависит от ее расстояния r до центра притяжения. Положим, что $\Pi = 0$ при $r = \infty$. Тогда $C = 0$ и потенциальная энергия точки

$$\Pi = -\frac{km}{r}. \quad (73.3)$$

Уравнения эквипотенциальных поверхностей согласно (72.3) имеют вид

$$-\frac{km}{r} = \text{const} \quad \text{или} \quad r = \text{const},$$

т. е. эквипотенциальные поверхности поля силы притяжения представляют собой сферические поверхности с центром в точке O .

Сила притяжения P направлена по нормали к эквипотенциальной поверхности, проходящей через данную точку, в сторону уменьшения значений потенциальной энергии.

§ 74. Закон сохранения механической энергии

При движении механической системы под действием сил, имеющих потенциал, изменения кинетической энергии системы определяются зависимостями (70.1) и (72.6):

$$T_2 - T_1 = \sum A_i = \Pi_1 - \Pi_2,$$

откуда

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2,$$

т. е.

$$T + \Pi = \text{const}. \quad (74.1)$$

Сумму кинетической и потенциальной энергий системы называют полной механической энергией системы и обозначают E :

$$E = T + \Pi.$$

Выражение (74.1) принимает вид

$$E = \text{const}. \quad (74.2)$$

Таким образом, *при движении механической системы под действием сил, имеющих потенциал, полная механическая энергия системы за все время движения остается неизменной.*

В реальных условиях на механическую систему могут действовать не только потенциальные силы, и полная механическая энергия системы может изменяться. Это происходит, когда часть энергии

механической системы расходуется на преодоление различных сопротивлений или наблюдается приток энергии от других систем.

Расход механической энергии движущейся механической системы обычно означает превращение ее в теплоту, электричество, звук или свет, а приток механической энергии связан с обратным процессом превращения различных видов энергии в механическую энергию.

§ 75. Движение точки под действием центральной силы. Закон площадей. Уравнение Бине

В § 54 установлено, что если на материальную точку M действует центральная сила \mathbf{P} (рис. 169), то момент количества движе-

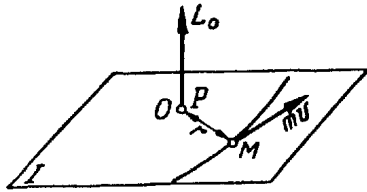


Рис. 169

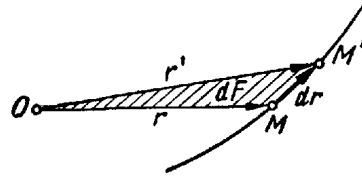


Рис. 170.

ния этой точки L_O относительно центра силы O постоянен и точка движется в плоскости I , перпендикулярной к L_O . В этом случае

$$L_O = \text{const.} \quad (75.1)$$

По формуле (54)

$$L_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \text{const.} \quad (75.2)$$

Рассмотрим векторное произведение: $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$.

Площадь треугольника OMM' (рис. 170), построенного на векторах \mathbf{r} и $d\mathbf{r}$, равна половине модуля этого векторного произведения:

$$dF = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|.$$

Площадь треугольника OMM' представляет собой площадь, описанную радиусом-вектором \mathbf{r} движущейся точки в течение промежутка времени dt .

Чтобы охарактеризовать быстроту изменения этой площади с течением времени, введем величину $\frac{dF}{dt}$, называемую *секторной скоростью*:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} \left| \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|.$$

Сравнивая полученную формулу с выражением (75.2), устанавливаем

$$\frac{dF}{dt} = C = \text{const.} \quad (75.3)$$

С точностью до величины первого порядка малости площадь треугольника OMM' можно определить как площадь кругового сектора, т. е.

$$dF = \frac{1}{2} r^2 d\varphi.$$

Тогда секторная скорость

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \quad (75.4)$$

Из равенства (75.3)

$$F = Ct + F_0. \quad (75.5)$$

Выражение (75.5) показывает, что при движении точки под действием центральной силы площадь, описываемая радиусом-вектором точки, изменяется пропорционально времени. Это положение называется *законом площадей*.

Чтобы получить дифференциальное уравнение траектории материальной точки, движущейся под действием центральной силы, воспользуемся полярными координатами в плоскости I (рис. 171). Проведем полярную ось x через центр силы O и начальное положение точки M_0 . Тогда начальные значения координат будут $OM_0 = r_0$ и $\varphi_0 = 0$. Проекции скорости точки на оси полярных координат r и φ можно определить по формулам из кинематики:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}.$$

Подставляя значения проекций начальной скорости, имеем

$$v_0 \cos \alpha = \dot{r}_0, \quad v_0 \sin \alpha = r_0 \dot{\varphi}_0.$$

Таким образом, начальные условия движения точки имеют вид

$$t_0 = 0; \quad r = r_0; \quad \varphi_0 = 0; \quad \dot{r}_0 = v_0 \cos \alpha; \quad r_0 \dot{\varphi}_0 = v_0 \sin \alpha. \quad (75.6)$$

Проекции ускорения точки \mathbf{w} на оси полярных координат r и φ можно определить по формулам из кинематики:

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2; \quad w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}.$$

Второе выражение можно преобразовать:

$$w_\varphi = \frac{1}{r} (r^2 \ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi}) = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}).$$

Спроектировав векторы левой и правой частей основного уравнения динамики $m\mathbf{w} = \mathbf{P}$ на оси полярных координат, получим

$$\left. \begin{aligned} m\omega_r &= P_r, \\ m\omega_\varphi &= P_\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Проекция центральной силы \mathbf{P} на оси полярных координат равны в случае притяжения $P_r = -P$; $P_\varphi = 0$;
в случае отталкивания $P_r = P$; $P_\varphi = 0$.

Подставив в уравнение (a) значения ω_r и ω_φ , получим дифференциальные уравнения движения точки в полярных координатах:

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= P_r, \\ \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (75.7)$$

Из второго уравнения (75.7) находим:

$$r^2\dot{\varphi} = \text{const.}$$

Произведение $r^2\dot{\varphi}$, не зависящее от времени, равно своему начальному значению, т. е.

$$r^2\dot{\varphi} = r_0^2\dot{\varphi}_0.$$

Подставляя начальные условия, получаем

$$r^2\dot{\varphi} = r_0 v_0 \sin \alpha. \quad (б)$$

Согласно (75.4) секторная скорость

$$C = \frac{1}{2} r^2\dot{\varphi}, \quad \text{откуда} \quad \dot{\varphi} = \frac{2C}{r^2}. \quad (в)$$

Пользуясь равенством (б), находим

$$C = \frac{1}{2} r_0 v_0 \sin \alpha. \quad (75.8)$$

Таким образом, секторная скорость полностью определена начальными условиями движения.

Определим производные \dot{r} и \ddot{r} , пользуясь формулой (в):

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{2C}{r^2} = -2C \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right),$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \dot{\varphi} = -2C \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \frac{2C}{r^2} = -\frac{4C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Таким образом

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= -2C \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right), \\ \ddot{r} &= -\frac{4C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (75.9)$$

Подставив в первое равенство (75.7) значение \ddot{r} из (75.9) и значение $\dot{\varphi}$ из формулы (в), получим

$$-\frac{4C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{4C^2}{r^3} = \frac{P_r}{m},$$

откуда

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2 P_r}{4mC^2}. \quad (75.10)$$

Уравнение (75.10) представляет собой дифференциальное уравнение траектории точки в форме Бине.

Из дифференциальной геометрии известно, что в случае, если выражение $\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r}$ положительно, то кривая обращена к полюсу вогнутостью, а если оно отрицательно, то выпуклостью.

Из этого следует, что в случае притяжения, когда $P_r < 0$ траектория обращена к полюсу O вогнутостью, а в случае отталкивания при $P_r > 0$ — выпуклостью.

§ 76. Поле ньютоновой силы притяжения. Вид траектории точки в зависимости от начальных условий движения. Законы Кеплера

В поле ньютоновой силы тяготения тело, рассматриваемое как материальная точка, движется под действием силы притяжения \mathbf{P} . Проекция этой силы на ось r

$$P_r = -f \frac{mm_0}{r^2}, \quad (76.1)$$

где m_0 — масса тела, вокруг которого движется рассматриваемое тело;

m — масса рассматриваемого тела;

r — расстояние между центрами тяжести этих тел.

Уравнение Бине (75.10) в этом случае принимает вид

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{fm_0}{4C^2}. \quad (76.2)$$

Установим по уравнению (76.2) вид траектории тела, движущегося в поле ньютоновой силы тяготения в зависимости от начальных условий движения.

Введем обозначение:

$$p = \frac{4C^2}{fm_0}. \quad (76.3)$$

Тогда уравнение (76.2) примет вид

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}. \quad (76.4)$$

Подставив значение C (75.8) в формулу (76.3), получим

$$p = \frac{r_0^2 v_0^2}{f m_0} \sin^2 \alpha. \quad (76.5)$$

В уравнении (76.4) угол φ является аргументом, величина $\frac{1}{r}$ — искомой функцией.

Общий интеграл уравнения (76.4) складывается из общего интеграла однородного уравнения и частного решения этого уравнения. Характеристическое уравнение $z^2 + 1 = 0$ имеет корни $z_{1,2} = \pm i$.

Этим корням соответствует общее решение:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{\text{одн}} = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi.$$

Частное решение уравнения (76.4) имеет вид

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{\text{частн}} = A = \frac{1}{p}.$$

Тогда общее решение уравнения (76.4) получим в виде

$$\frac{1}{r} = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + \frac{1}{p}. \quad (76.6)$$

Дифференцируя (76.6) по φ , получим первый интеграл уравнения (76.4):

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi. \quad (76.7)$$

Постоянные C_1 и C_2 определим подстановкой в уравнения (76.6) и (76.7) начальных условий (75.6):

$$t_0 = 0; \quad r = r_0; \quad \varphi_0 = 0; \quad \dot{r}_0 = v_0 \cos \alpha; \quad r_0 \dot{\varphi}_0 = v_0 \sin \alpha.$$

Из (76.6)

$$\frac{1}{r_0} = C_1 + \frac{1}{p}, \quad C_1 = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{p}.$$

Так как

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}},$$

то

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{t=0} = \frac{\dot{r}_0}{\dot{\varphi}_0}.$$

Пользуясь этим, из (76.7) найдем

$$-\frac{1}{r_0^2} \frac{\dot{r}_0}{\dot{\varphi}_0} = C_2.$$

Из начальных условий

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\dot{r}_0}{r_0 \dot{\varphi}_0}, \quad C_2 = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{r_0}.$$

Подставим найденные значения постоянных C_1 и C_2 в уравнение (76.6):

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{p}\right) \cos \varphi - \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{r_0} \sin \varphi + \frac{1}{p}. \quad (76.8)$$

Введем новые постоянные:

$$\frac{1}{r_0} - \frac{1}{p} = D \cos \varepsilon; \quad -\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{r_0} = D \sin \varepsilon. \quad (76.9)$$

Величину этих постоянных можно определить из формул (76.9):

$$D = \sqrt{\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{p}\right)^2 + \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{r_0^2}} = \sqrt{\frac{1}{r_0^2 \sin^2 \alpha} + \frac{1}{p^2} - \frac{2}{r_0 p}}, \quad (76.10)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{p}{r_0 - p} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \text{или} \quad \varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{p}{r_0 - p} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (76.11)$$

Подставив значения D и ε в уравнение (76.8), получим

$$\frac{1}{r} = D \cos(\varphi - \varepsilon) + \frac{1}{p}. \quad (76.12)$$

Введем новую постоянную

$$e = pD \quad (76.13)$$

и новую переменную

$$\psi = \varphi - \varepsilon. \quad (76.14)$$

Тогда уравнение (76.12) примет вид

$$\frac{1}{r} = \frac{e}{p} \cos \psi + \frac{1}{p}. \quad (76.15)$$

Откуда

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \psi}. \quad (76.16)$$

Уравнение (76.16) представляет собой уравнение конического сечения в каноническом виде. Величины p и e являются основными параметрами, определяющими форму конического сечения.

В зависимости от величины эксцентриситета e имеем следующие виды конического сечения:

- $e = 0$ — окружность;
- $e < 1$ — эллипс;
- $e = 1$ — парабола;
- $e > 1$ — гипербола.

Таким образом, под действием ньютоновой силы тяготения тело описывает траекторию в виде конического сечения, форма которого зависит от величины эксцентриситета e .

При $e < 1$ траектория тела представляет собой эллипс, полуоси которого определяются по формулам из геометрии:

$$a = \frac{p}{1 - e^2}. \quad (76.17)$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (76.18)$$

Расстояние между фокусами равно:

$$2c = 2ae. \quad (76.19)$$

Точка P на эллиптической орбите планеты, находящаяся на наименьшем расстоянии от центра притяжения O (Солнца), называется *перигелием*, а точка A , наиболее удаленная от центра, — *афелием* (рис. 172). Перигелию P соответствуют значения

$$\varphi = \varepsilon, \text{ т. е. } \psi = 0, \text{ и}$$

$$r_{\min} = a - c = \frac{p}{1 + e}.$$

Афелию соответствуют

$$\varphi = \varepsilon + \pi, \text{ т. е. } \psi = \pi, \text{ и}$$

$$r_{\max} = a + c = \frac{p}{1 - e}.$$

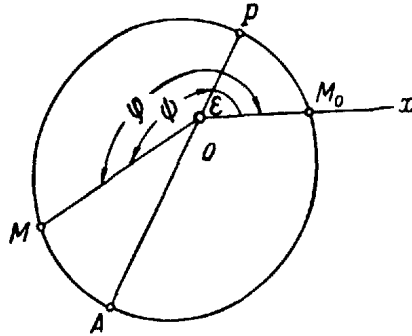


Рис. 172.

Определим продолжительность обращения тела по эллиптической орбите.

Площадь F , которую описывает радиус-вектор точки M за период обращения T , представляет собой площадь эллипса с полуосями a и b :

$$F = \pi ab.$$

С другой стороны, эта площадь согласно (75.5)

$$F = CT.$$

Приравняв значения площади, находим

$$CT = \pi ab.$$

Согласно (76.18)

$$CT = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

или

$$C^2 T^2 = \pi^2 a^4 (1 - e^2),$$

откуда

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{C^2},$$

или на основании (76.17)

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^3 p}{C^2}.$$

Подставив значение p , определяемое формулой (76.3), окончательно получим

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{f m_0} a^3, \quad (76.20)$$

т. е. *квадрат периода обращения тела по эллиптической орбите пропорционален кубу большой полуоси орбиты.*

Движение планет вокруг Солнца представляет собой рассмотренное выше движение тел по эллиптическим орбитам под действием ньютоновой силы притяжения. Законы движения планет были открыты немецким астрономом Кеплером (1571—1630) до открытия Ньютоном закона всемирного тяготения и подготовили открытие этого закона.

Закон всемирного тяготения дал математическое обоснование законам Кеплера, которые формулируются так:

1. *Под действием ньютоновой силы тяготения все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.*

2. *Площади, описываемые радиусами-векторами планет относительно Солнца, пропорциональны времени.*

3. *Квадраты времени обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит.*

Первый закон Кеплера вытекает из уравнения Бине (76.2).

Второй закон Кеплера выражает установленную выше (§ 75) теорему площадей.

Третий закон Кеплера можно получить на основании (76.20).

Действительно, обозначив время обращения двух планет вокруг Солнца T_1 и T_2 , а большие полуоси их орбит — a_1 и a_2 , из (76.20) получим

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{a_1^3}. \quad (76.21)$$

§ 77. Понятие о траекториях искусственных спутников Земли

Движение искусственных спутников Земли в поле земного тяготения совершается под действием силы притяжения к Земле:

$$F = f \frac{Mm}{r^2}, \quad (77.1)$$

где M — масса Земли;

m — масса спутника;

r — расстояние между центрами тяжести Земли и спутника;

f — постоянная тяготения*.

* Постоянная тяготения f выражает в ньютонах силу взаимного притяжения двух масс в 1 кг каждая, находящихся на расстоянии 1 м друг от друга. Она определена Кавендишем в 1798 г.:

$$f = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2.$$

Для тела, находящегося на поверхности Земли,

$$P = G = mg = f \frac{Mm}{R^2},$$

откуда

$$f = \frac{gR^2}{M}. \quad (77.2)$$

Здесь R расстояние от данного тела до центра земного шара (геоида), равное $6,37 \cdot 10^6$ м.

Определим минимальную начальную скорость тела v_0 (рис. 173), при которой тело становится искусственным спутником Земли, полагая, что эта скорость направлена перпендикулярно к направлению силы притяжения P , т. е. $\alpha = 90^\circ$.

Эту скорость называют *первой космической скоростью*.

Положим, что тело находится на расстоянии H от поверхности Земли.

Из траекторий тела, движущегося под действием ньютоновой силы тяготения, рассмотренных в § 76, только окружность и эллипс соответствуют движению спутника (рис. 174). Чтобы судить о форме траектории тела, необходимо найти эксцентриситет конического сечения e .

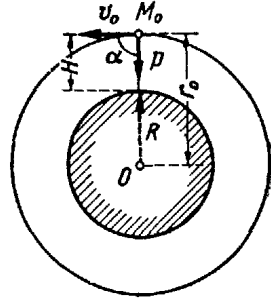


Рис. 173.

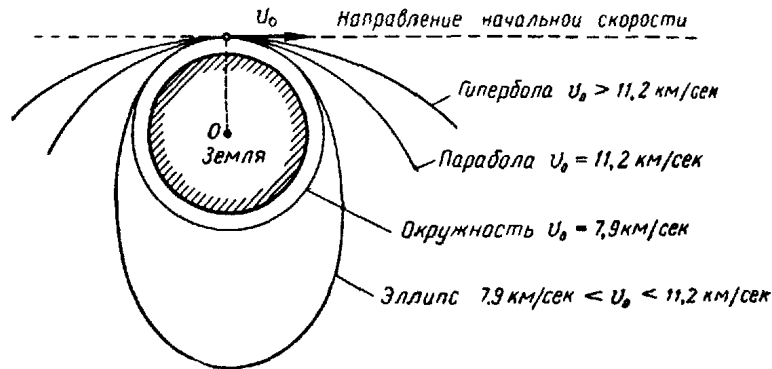


Рис. 174.

Для определения e найдем сначала параметр p по формуле (76.5):

$$p = \frac{r_0^2 v_0^2}{f m_0} \sin^2 \alpha.$$

Здесь

$$r_0 = OM_0 = R + H, \quad \sin \alpha = \sin 90^\circ = 1, \quad m_0 = M$$

и согласно (77.2)

$$f = \frac{gR^2}{M}.$$

Подставив эти значения, получим

$$p = \frac{(R+H)^2 v_0^2 M}{gR^2 M} = \frac{(R+H)^2 v_0^2}{gR^2}.$$

Далее определим постоянную D по формуле (76.10) при $\text{ctg } \alpha = \text{ctg } 90^\circ = 0$:

$$D = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{p} = \frac{1}{R+H} - \frac{gR^2}{(R+H)^2 v_0^2}.$$

Эксцентриситет e найдем по формуле (76.13):

$$e = pD = \frac{(R+H) v_0^2}{gR^2} - 1. \quad (77.3)$$

Минимальной скорости $v_0 = v_1$ соответствует минимальный эксцентриситет $e = 0$, при котором траектория тела является окружностью.

При $e = 0$

$$\frac{(R+H) v_1^2}{gR^2} - 1 = 0,$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+H}},$$

Модуль первой космической скорости у поверхности Земли при $H = 0$

$$v_1 = \sqrt{gR}. \quad (77.4)$$

Подставив числовые значения, имеем

$$v_1 = \sqrt{9,81 \cdot 6,37 \cdot 10^6} \text{ м/сек} \approx 7,9 \text{ км/сек}.$$

При начальных скоростях, которые меньше первой космической скорости, тело не выйдет на круговую орбиту, а возвратится на Землю. Движение по круговой орбите невозможно и в том случае, когда при достаточной начальной скорости ее направление не перпендикулярно к r_0 .

Минимальная начальная скорость, при которой тело, преодолев земное тяготение, удаляется в межпланетное пространство, называется *второй космической скоростью*. Это имеет место при незамкнутой траектории тела — параболе и гиперболе, т. е. при $e \geq 1$.

Определим модуль второй космической скорости из выражения (77.3) при $e = 1$

$$\frac{(R+H)v_{II}^2}{gR^2} - 1 = 1,$$

откуда

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+H}}.$$

У поверхности Земли при $H = 0$

$$v_{II} = \sqrt{2gR}. \quad (77.5)$$

Из выражений (77.4) и (77.5) устанавливаем зависимость между первой и второй космическими скоростями:

$$v_{II} = \sqrt{2}v_I, \quad (77.6)$$

отсюда находим числовое значение второй космической скорости:

$$v_{II} = 1,414 \cdot 7,9 = 11,2 \text{ км/сек.}$$

Таким образом, в зависимости от модуля начальной скорости возможны следующие случаи движения тела в поле земного тяготения (рис. 174): при $v_0 = 7,9 \text{ км/сек}$ траектория тела — окружность; при $7,9 \text{ км/сек} < v_0 < 11,2 \text{ км/сек}$ — эллипс; при $v_0 = 11,2 \text{ км/сек}$ — парабола; при $v_0 > 11,2 \text{ км/сек}$ — гипербола.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое силовое поле называется потенциальным?
2. Что называют силовой функцией?
3. Как определить элементарную работу сил потенциального поля и работу этих сил на конечном перемещении системы, если известна силовая функция поля?
4. Какова работа сил, действующих на точки системы в потенциальном поле, на замкнутом перемещении?
5. Чему равна потенциальная энергия системы в любом ее положении?
6. Чему равно изменение потенциальной энергии механической системы при перемещении ее из одного положения в другое?
7. Какая зависимость существует между силовой функцией потенциального поля и потенциальной энергией системы, находящейся в этом поле?
8. Как определяются проекции на координатные оси силы, действующей в потенциальном поле на любую точку системы?
9. Какие поверхности называются эквипотенциальными и каковы их уравнения?
10. Как направлена сила, действующая на материальную точку в потенциальном поле, по отношению к эквипотенциальной поверхности, проходящей через эту точку?
11. Чему равна потенциальная энергия материальной точки и механической системы, находящихся под действием сил тяжести?
12. Какой вид имеют эквипотенциальные поверхности поля силы тяжести и ньютоновой силы тяготения?
13. В чем заключается закон сохранения и превращения механической энергии?

14. Почему под действием центральной силы материальная точка описывает плоскую кривую?

15. Что называют секторной скоростью и как выразить ее модуль в полярных координатах?

16. В чем заключается закон площадей?

17. Какой вид имеет дифференциальное уравнение в форме Бине, определяющее траекторию точки, движущейся под действием центральной силы?

18. По какой формуле определяется модуль ньютоновой силы тяготения?

19. Каков канонический вид уравнения конического сечения и при каких значениях эксцентриситета траектория тела, движущегося в поле ньютоновой силы тяготения, представляет собой:

1) окружность;

2) эллипс;

3) параболу;

4) гиперболу?

20. Сформулируйте законы движения планет, открытые Кеплером.

21. При каких начальных условиях тело становится спутником Земли и при каких — оно способно преодолеть земное притяжение?

22. Каковы первая и вторая космические скорости?

ГЛАВА XII

ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 78. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела

При поступательном движении твердого тела все его точки движутся так же, как и его центр масс. Поэтому дифференциальные уравнения движения центра масс тела (§ 43) являются дифференциальными уравнениями поступательного движения твердого тела:

$$m\ddot{x}_C = \sum X_i^E = X^E,$$

$$m\ddot{y}_C = \sum Y_i^E = Y^E,$$

$$m\ddot{z}_C = \sum Z_i^E = Z^E.$$

Здесь m — масса тела;

x_C, y_C, z_C — координаты центра масс тела;

X_i^E, Y_i^E, Z_i^E — проекции внешней силы P_i^E на оси координат;

X^E, Y^E, Z^E — проекции главного вектора внешних сил на эти оси.

По дифференциальным уравнениям поступательного движения можно решать два основных типа задач на поступательное движение твердого тела:

1) по заданному движению твердого тела определять главный вектор приложенных к нему внешних сил и

2) по заданным внешним силам, действующим на тело, и начальным условиям движения находить кинематические уравнения движения тела, если известно, что оно движется поступательно.

Условие, при котором движение тела является поступательным, рассмотрено в § 95.

Изучение поступательного движения твердого тела, таким образом, сводится к изучению движения отдельной материальной точки, имеющей массу этого тела.

Во многих примерах, рассмотренных выше, дифференциальные уравнения движения материальной точки применялись к поступательному движению твердого тела.

§ 79. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω (рис. 175). Вычислим кинетический момент этого тела относительно оси его вращения. Момент количества движения точки M_i тела относительно оси z

$$L_{iz} = m_i v_i r_i,$$

где r_i — радиус окружности, описываемой точкой M_i ;

$v_i = r_i \omega$ — алгебраическая величина вращательной скорости точки M_i .

Подставляя это значение v_i , получаем

$$L_{iz} = m_i r_i^2 \omega.$$

Кинетический момент твердого тела относительно оси z

$$L_z = \sum L_{iz} = \sum m_i r_i^2 \omega = \omega \sum m_i r_i^2.$$

Здесь $\sum m_i r_i^2 = J_z$ — момент инерции твердого тела относительно оси z .

Таким образом,

$$L_z = J_z \omega, \quad (79.1)$$

т. е. кинетический момент вращающегося твердого тела относительно неподвижной оси его вращения равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость тела.

Рассмотрим изменение кинетического момента тела относительно оси z под действием приложенных к нему задаваемых внешних сил $\mathbf{P}_1^E, \mathbf{P}_2^E, \dots, \mathbf{P}_n^E$. Теорема об изменении кинетического момента механической системы выражается уравнением (56.2):

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_{iz}^E.$$

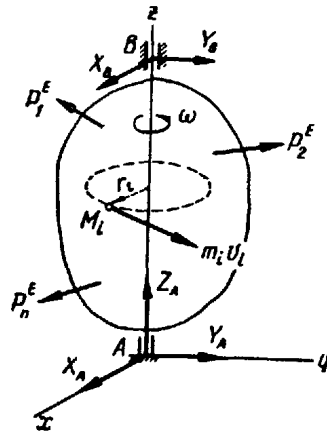


Рис. 175.

Реакции подшипника B и подпятника A являются внешними силами, но при отсутствии трения их моменты относительно оси z равны нулю и правая часть уравнения (56.2) содержит только сумму моментов задаваемых внешних сил.

При наличии трения эта сумма содержит также момент сил трения.

Так как по (79.1) $L_z = J_z \omega = J_z \dot{\varphi}$, то $\frac{dL_z}{dt} = J_z \ddot{\varphi}$, а потому уравнение (56.2) принимает вид

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum M_{iz}^E. \quad (79.2)$$

Уравнение (79.2) представляет собой дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Сравним уравнение (79.2) с дифференциальным уравнением поступательного прямолинейного движения твердого тела:

$$m \ddot{x}_C = \sum X_i^E.$$

Очевидно, что момент инерции твердого тела при вращательном движении имеет то же значение, что и масса тела при его поступательном движении: момент инерции является характеристикой инертности тела при вращательном движении.

Если вращение тела происходит в одном направлении, то это направление считают положительным. В этом случае моменты движущих сил положительны, моменты сил сопротивления отрицательны, а главный момент внешних сил может иметь тот или другой знак. Если $\sum M_{iz}^E > 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} > 0$, т. е. тело вращается ускоренно. Если $\sum M_{iz}^E = 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} = 0$; $\omega = \text{const}$, т. е. вращение тела равномерное (по инерции). Если $\sum M_{iz}^E < 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} < 0$, т. е. тело вращается замедленно.

По дифференциальному уравнению (79.2) можно решать следующие задачи:

1) по заданному уравнению вращения тела $\varphi = f(t)$ и его моменту инерции J_z определять главный момент внешних сил, действующих на тело:

$$M_z^E = J_z \ddot{\varphi};$$

2) по заданным внешним силам, приложенным к телу, по начальным условиям вращения φ_0 и ω_0 и по моменту инерции тела J_z находить уравнение вращения тела $\varphi = f(t)$;

3) определять момент инерции тела J_z относительно оси вращения, зная величины M_z^E и $\ddot{\varphi}$.

Пример 40. Натяжения ветвей ремня, приводящего во вращение шкив, равны 20 и 40 н. Шкив имеет вес 80 н, радиус 30 см и радиус инерции относительно оси вращения 25 см. Составить уравнение вращения шкива из состояния покоя, пренебрегая трением.

Решение. Дифференциальное уравнение вращения шкива вокруг неподвижной оси Ox (рис. 176) имеет вид (79.2)

$$J_x \ddot{\varphi} = M_x^E.$$

К шкиву приложены внешние силы: реакции ветвей ремня T_1 и T_2 , вес шкива G и составляющие реакции опоры Y_0 и Z_0 .

Направление вращения тела принимают всегда за положительное направление. Тогда моменты сил, направленных в сторону вращения, положительны, а моменты сил, направленных противоположно, отрицательны. Главный момент внешних сил

$$M_x^E = T_1 r - T_2 r = 40 \cdot 30 - 20 \cdot 30 = 600 \text{ н} \cdot \text{см} = 6 \text{ н} \cdot \text{м},$$

(моменты сил G , Y_0 , Z_0 относительно оси Ox равны нулю). Момент инерции шкива определяем по радиусу инерции:

$$J_x = m i_x^2 = \frac{G}{g} i_x^2 = \frac{80 \cdot 0,25^2}{9,81} = 0,51 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

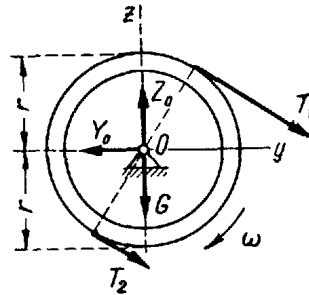


Рис. 176

Подставляем числовые значения J_x и M_x^E в уравнение (79.2):

$$0,51 \ddot{\varphi} = 6.$$

Отсюда находим угловое ускорение

$$\ddot{\varphi} = \frac{6}{0,51} = 11,76 \text{ сек}^{-2}.$$

Интегрируем дважды по t :

$$\dot{\varphi} = 11,76t + C_1,$$

$$\varphi = 5,88t + C_1 t + C_2.$$

По начальным условиям $t_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$ находим $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$.

Таким образом, уравнение вращения шкива имеет вид

$$\varphi = 5,88t^2.$$

Пример 41. Однородная прямоугольная пластинка весом G , длиной L и высотой h вращается вокруг вертикальной оси Cz , являющейся ее осью симметрии (рис. 177)

При вращении пластинка испытывает сопротивление воздуха. Сила сопротивления, приложенная к каждому элементу пластинки, направлена перпендикулярно к плоскости пластинки, пропорциональна площади элемента и квадрату скорости его движения, причем коэффициент пропорциональности равен α . Определить промежуток времени T , в течение которого угловая скорость пластинки уменьшится от ω_1 до ω_2 .

Решение. Воспользуемся дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси (79.2):

$$J_{Cz} \ddot{\varphi} = M_{Cz}^E.$$

Для определения момента инерции пластинки представим ее в виде множества тонких полос, перпендикулярных к оси Cz

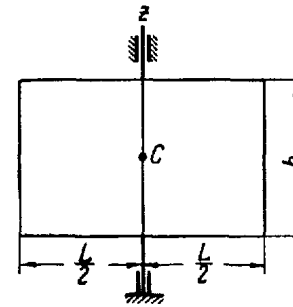


Рис. 177.

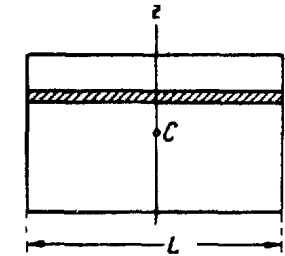


Рис. 178

(рис. 178). Момент инерции каждой полосы можно определить по формуле

$$\Delta J_{Cz} = \frac{m_i L^2}{12}.$$

Момент инерции всей пластинки относительно оси Cz :

$$J_{Cz} = \sum \frac{m_i L^2}{12} = \frac{L^2}{12} \sum m_i = \frac{m L^2}{12} = \frac{G L^2}{12g}.$$

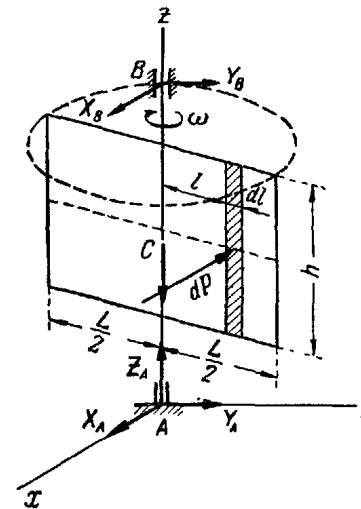


Рис. 179.

К вращающейся пластинке приложены внешние силы: ее вес G , реакции подшипника B и подпятника A и силы сопротивления воздуха (рис. 179). Вес G и реакции опор моментов относительно оси Cz не имеют.

Для получения главного момента сил давления воздуха относительно оси Cz найдем сначала силу, приложенную к элементарной площадке $dF = h dl$, скорости точек которой равны $v = \omega l$. Сила давления воздуха, приложенная к элементарной площадке:

$$dP = \alpha v^2 dF = \alpha \omega^2 l^2 h dl.$$

Момент этой силы, направленной в сторону, противоположную вращению относительно оси Cz :

$$dM_{Cz}^E = -l dP = -\alpha h \omega^2 l^3 dl.$$

Интегрируя, получаем главный момент сил давления воздуха:

$$M_{Cz}^E = -2 \int_0^{\frac{L}{2}} ah\omega^2 l^3 dl = -\frac{1}{32} ah\omega^2 L^4.$$

Подставляя найденное значение в уравнение (79.2), получаем

$$\frac{GL^2}{12g} \ddot{\varphi} = -\frac{1}{32} ah\omega^2 L^4,$$

отсюда определяем

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt},$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{8} \frac{ahgL^2}{G} \omega^2.$$

Разделяем переменные и интегрируем в пределах, соответствующих изменению угловой скорости пластинки от ω_1 до ω_2 :

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{\omega^2} = -\frac{3}{8} \frac{ahgL^2}{G} \int_0^T dt. \quad -\left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_1}\right) = -\frac{3}{8} \frac{ahgL^2}{G} T$$

или

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 \omega_2} = \frac{3}{8} \frac{ahgL^2}{G} T,$$

откуда определяем искомый промежуток времени:

$$T = \frac{8G}{3ahgL^2} \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 \omega_2}.$$

§ 80. Сохранение кинетического момента вращающейся системы. Скамейка Жуковского

В § 56 установлено, что сохранение кинетического момента механической системы L_z относительно неподвижной оси z происходит при условии, если главный момент M_z^E внешних сил, приложенных к системе, относительно этой оси равен нулю. Для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, при $M_z^E = 0$

$$L_z = J_z \omega = \text{const.}$$

Так как $J_z = \text{const}$, то $\omega = \text{const}$, т. е. твердое тело вращается равномерно (по инерции). Если отдельные элементы вращающейся системы в процессе вращения изменяют свое положение по отношению к неизменяемой оси вращения, то изменяется величина момента инерции системы J_z относительно этой оси. Тогда при $L_z = \text{const}$ изменяется угловая скорость вращения системы ω .

В этом случае при $M_z^E = 0$

$$L_z = J_{1z} \omega_1 = J_{2z} \omega_2 = \text{const}, \quad (80.1)$$

где J_{1z} , J_{2z} — моменты инерции вращающейся системы при двух разных положениях ее элементов,

ω_1 , ω_2 — угловые скорости вращения системы, соответствующие значениям моментов инерции J_{1z} и J_{2z} .

Из (80.1)

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{J_{2z}}{J_{1z}}, \quad (80.2)$$

т. е. при увеличении момента инерции системы угловая скорость ее вращения уменьшается и наоборот.

Условие (80.2) наглядно демонстрируется на приборе, называемом «скамейка Жуковского». Этот прибор представляет собой круглую горизонтальную платформу на шариковых подшипниках, которая может вращаться вокруг вертикальной оси при очень малом трении. На платформу помещается человек, и систему приводят во вращение. Внешними силами, действующими на вращающуюся систему скамейка — человек, являются силы тяжести скамейки и человека и реакция опоры (трением пренебрегаем). Эти вертикальные силы не имеют моментов относительно оси вращения, а потому $L_z = \text{const}$. Изменяя положение своих рук и тем самым изменяя момент инерции, человек изменяет угловую скорость системы.

§ 81. Физический маятник и его малые колебания

Физическим маятником называется твердое тело, имеющее неподвижную горизонтальную ось вращения, не проходящую через его центр тяжести, и находящееся под действием только силы тяжести.

Ось вращения физического маятника называется осью привеса маятника.

Примем ось привеса маятника за ось x . Координатную плоскость yOz проведем через центр тяжести C маятника и совместим эту плоскость с плоскостью чертежа (рис. 180). На маятник, отклоненный от положения покоя, действуют внешние силы: его вес G и составляющие реакции цилиндрического шарнира Y_0 и Z_0 . Трением в шарнире пренебрегаем. Реактивные силы не имеют моментов относительно оси привеса. Момент силы G относительно оси x равен:

$$M_x = -Gd \sin \varphi.$$

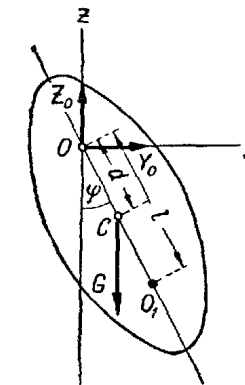


Рис. 180.

При повороте маятника на угол φ в положительном направлении, т. е. против движения часовой стрелки, сила G стремится вращать плоскость zOy по движению часовой стрелки и наоборот. Следова-

тельно, знак момента силы G относительно оси x противоположен знаку угла поворота маятника φ и знаку $\sin \varphi$.

Дифференциальное уравнение (79.2) вращения тела вокруг неподвижной оси принимает для маятника вид

$$J_x \ddot{\varphi} = -Gd \sin \varphi, \quad (81.1)$$

где J_x — момент инерции маятника относительно оси привеса, G — вес маятника; d — расстояние от центра тяжести маятника до оси привеса. Уравнение (81.1) можно представить в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{Gd}{J_x} \sin \varphi = 0. \quad (81.2)$$

Уравнение (81.2) представляет собой *дифференциальное уравнение качаний физического маятника*. Это уравнение отличается от дифференциального уравнения качаний математического маятника (24.1) только значением постоянного коэффициента при $\sin \varphi$.

Уравнение (24.1) имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Определим длину математического маятника, период качаний которого равен периоду качаний данного физического маятника. Для этого приравняем значения постоянных коэффициентов при $\sin \varphi$ в уравнениях (24.1) и (81.2)

$$\frac{g}{l} = \frac{Gd}{J_x},$$

отсюда

$$l = \frac{J_x g}{Gd} = \frac{J_x}{md}. \quad (81.3)$$

Формула (81.3) определяет *приведенную длину физического маятника, т. е. длину такого математического маятника, период качаний которого равен периоду качаний данного физического маятника*.

Вспользуемся зависимостью (35.1) между моментами инерции маятника относительно параллельных осей Ox и Cx :

$$J_x = J_{Cx} + md^2 = mi_{Cx}^2 + md^2,$$

где i_{Cx} — радиус инерции маятника относительно оси Cx .

Подставим это значение J_x в формулу (81.3):

$$l = \frac{mi_{Cx}^2 + md^2}{md}.$$

Отсюда получаем другое выражение приведенной длины физического маятника:

$$l = \frac{i_{Cx}^2}{d} + d. \quad (81.4)$$

Формула (81.4) показывает, что $l > d$.

Отложив по прямой OC отрезок $OO_1 = l$, получим точку O_1 , называемую *центром качания маятника*. Ось, проходящая через центр качания параллельно оси привеса, называется *осью качаний маятника*. Вспользуемся формулой (81.4) для установления особых свойств оси привеса и оси качаний физического маятника. Положим, что маятник качается вокруг оси привеса Ox (рис. 181, а).

Определим по формуле (81.4) его приведенную длину:

$$l_1 = \frac{i_{Cx}^2}{d} + d.$$

Обозначим

$$\frac{i_{Cx}^2}{d} = b,$$

отсюда

$$i_{Cx}^2 = bd, \quad (81.5)$$

тогда приведенная длина маятника

$$l_1 = b + d,$$

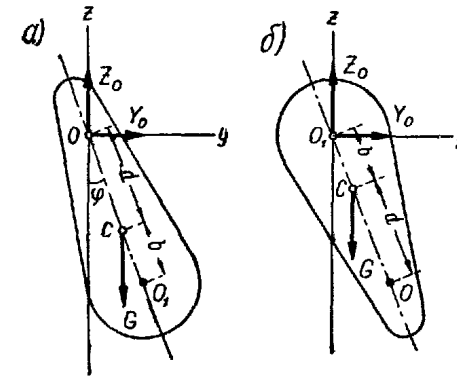


Рис. 181.

где $d = OC$, $b = CO_1$, точка O_1 — центр качаний и ось O_1x — ось качаний. Сделаем ось качаний O_1x осью привеса маятника (рис. 181, б); тогда расстояние от центра тяжести маятника до этой оси станет равным b , а его приведенная длина согласно (81.4)

$$l_2 = \frac{i_{Cx}^2}{b} + b.$$

Пользуясь формулой (81.5), найдем:

$$l_2 = d + b;$$

отсюда следует, что осью качаний второго маятника является бывшая ось привеса Ox . Приведенные длины обоих маятников равны:

$$l_2 = l_1.$$

Следовательно, и периоды качаний обоих маятников тоже равны.

Таким образом, *если ось качаний физического маятника сделать осью привеса, то прежняя ось привеса станет его осью качаний*.

Это положение составляет содержание *теоремы Гюйгенса о свойстве взаимности оси привеса и оси качаний физического маятника*.

В случае малых колебаний физического маятника $\sin \varphi \approx \varphi$ дифференциальное уравнение (81.2) принимает вид дифференциального уравнения гармонического колебательного движения:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Gd}{J_x} \varphi = 0 \quad (81.6)$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0,$$

где $k = \sqrt{\frac{Gd}{J_x}}$ — частота колебаний маятника.

Решение дифференциального уравнения (81.6), т. е. уравнение малых колебаний маятника имеет вид

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (81.7)$$

или

$$\varphi = \alpha \cdot \sin(kt + \beta), \quad (81.8)$$

где α — амплитуда колебаний маятника в радианах;
 β — начальная фаза колебаний.

Период малых колебаний физического маятника

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{J_x}{Gd}}. \quad (81.9)$$

Период малых колебаний физического маятника можно определить и по формуле (24.6) как период малых колебаний математического маятника, длина которого равна приведенной длине l данного физического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (81.10)$$

Пример 42. Маятник представляет собой однородный круглый диск радиусом r . Ось привеса маятника перпендикулярна к плоскости диска и отстоит от его центра на расстоянии $\frac{r}{2}$. Определить приведенную длину, положение центра качания и период качаний маятника.

Решение. Приведенную длину этого маятника (рис. 182) определим по формуле (81.3):

$$l = \frac{J_x}{md}.$$

Момент инерции маятника относительно оси привеса Ox найдем по формуле:

$$J_x = J_{Cx} + md^2.$$

При $J_{Cx} = \frac{mr^2}{2}$ и $d = \frac{r}{2}$

$$J_x = \frac{mr^2}{2} + m \frac{r^2}{4} = \frac{3}{4} mr^2.$$

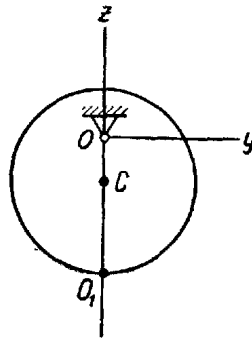


Рис. 182.

Приведенная длина маятника

$$l = \frac{\frac{3}{4} mr^2}{m \frac{r}{2}} = \frac{3}{2} r.$$

Отложив вдоль OC отрезок $OO_1 = l = \frac{3}{2} r$, получаем центр качаний маятника O_1 на ободке диска.

Период качаний определяем по формуле (81.10):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{3r}{2g}}.$$

Пример 43. Показать, что приведенная длина и период качаний маятника, представляющего собой подвешенную за середину дуги окружности, зависят лишь от радиуса окружности R и не зависят от центрального угла 2α .

Решение. Приведенная длина рассматриваемого маятника (рис. 183), согласно (81.3),

$$l = \frac{J_{Ox}}{md}.$$

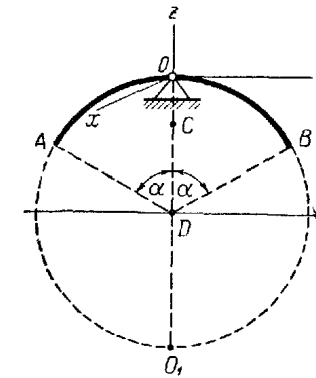


Рис. 183.

Положение центра тяжести дуги окружности определяется формулой [(72.2) ч. I]):

$$DC = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} d &= OC = OD - DC = \\ &= R - R \frac{\sin \alpha}{\alpha} = R \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

По формуле (35.1) имеем:

$$J_{Ox} = J_{Cx} + md^2 \quad \text{и} \quad J_{Dx} = J_{Cx} + mDC^2.$$

Подставим в первую формулу значение J_{Cx} , найденное из второй:

$$J_{Ox} = J_{Dx} - mDC^2 + md^2. \quad (a)$$

Определим момент инерции дуги AB относительно оси Dx , проходящей через центр окружности:

$$J_{Dx} = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i R^2 = R^2 \sum m_i = mR^2.$$

Подставим в формулу (a) значения J_{Dx} , DC и d :

$$\begin{aligned} J_{Ox} &= mR^2 - mR^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} + mR^2 \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 = \\ &= mR^2 \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} + 1 - 2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \right) = 2mR^2 \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Подставив значения J_{Ox} и d в формулу (81.3), определим приведенную длину физического маятника:

$$l = \frac{2mR^2 \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)}{mR \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)} = 2R.$$

Ось качаний маятника O_1x и ось привеса Ox находятся на одинаковом расстоянии от центра окружности D .

Период качаний маятника найдем по формуле (81.10):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

Таким образом, приведенная длина и период качаний маятника не зависят от центрального угла 2α .

Для маятника, представляющего собой полную окружность, приведенная длина и период качаний являются такими же.

§ 82. Опытное определение моментов инерции тел

Вычисление моментов инерции неоднородных и однородных тел неправильной геометрической формы в ряде случаев бывает сложным.

Поэтому моменты инерции таких тел определяют обычно опытным путем. Опытное определение моментов инерции основывается на наблюдении того или иного вида вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, так как момент инерции тела — это характеристика его инертности во вращательном движении.

Рассмотрим три экспериментальных способа определения моментов инерции тел, применяющихся в технике: способ качаний, способ крутильных колебаний и способ падающего груза.

1. Способ качаний

Положим, что требуется определить момент инерции и радиус инерции какой-нибудь детали, например, шатуна, относительно оси, проходящей через его центр тяжести. Для этого предварительно определяют положение центра тяжести шатуна. Затем шатун подвешивают, продев через втулку тонкий цилиндрический стержень (рис. 184), чтобы он мог качаться вокруг горизонтальной оси. Отклонив шатун от положения покоя на небольшой угол, его приводят в колебательное движение и наблюдают время τ определенного числа колебаний n . По этим данным определяют величину периода колебаний:

$$T = \frac{\tau}{n}.$$

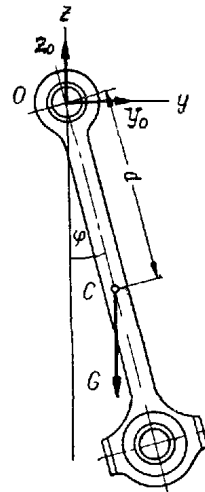


Рис 184.

Подвешенная таким образом любая деталь представляет собой физический маятник с осью привеса Ox , совпадающей с осью стержня.

Период качаний физического маятника определяется по формуле (81.9):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_x}{Gd}}.$$

Из этой формулы можно определить момент инерции детали J_x относительно оси привеса Ox :

$$J_x = \frac{T^2 G d}{4\pi^2}, \quad (82.1)$$

так как T — период качаний, G — вес детали и d — расстояние от ее центра тяжести до оси привеса известны.

Для определения момента инерции детали относительно центральной оси Cx , параллельной оси привеса Ox , воспользуемся формулой (35.1):

$$J_x = J_{Cx} + md^2,$$

откуда

$$J_{Cx} = J_x - md^2 = \frac{GdT^2}{4\pi^2} - \frac{G}{g}d^2. \quad (82.2)$$

Определив момент инерции детали J_{Cx} относительно центральной оси, параллельной оси привеса, можно определить радиус инерции детали относительно этой оси:

$$i_{Cx} = \sqrt{\frac{J_{Cx}}{m}} = \sqrt{\frac{g d T^2}{4\pi^2} - d^2}. \quad (82.3)$$

2. Способ крутильных колебаний

Рассмотрим определение моментов инерции тел по способу крутильных колебаний. К нижнему концу проволоки, заземленной верхним концом неподвижно, подвешивают сначала эталон, т. е. тело, момент инерции которого относительно центральной оси Cz известен (рис. 185), а затем деталь, момент инерции которой относительно оси Cz следует определить (рис. 186). Тело, прикрепленное к проволоке, поворачивают на некоторый угол φ_0 вокруг вертикальной оси Cz и отпускают. Под действием сил упругости закрученной проволоки система стремится вернуться в положение покоя. Возвратившись в это положение, система обладает угловой скоростью, вследствие чего поворачивается на угол φ_0 в противоположную сторону.

Таким образом, возникают крутильные колебания системы. На тело со стороны проволоки, закрученной на угол φ , действует момент сил упругости, пропорциональный этому углу:

$$M_{кр} = -c\varphi.$$

Здесь $c = \frac{GJ_0}{l}$ — коэффициент жесткости, зависящий от модуля упругости материала проволоки при кручении G , полярного момента инерции сечения проволоки J_0 и длины проволоки l .

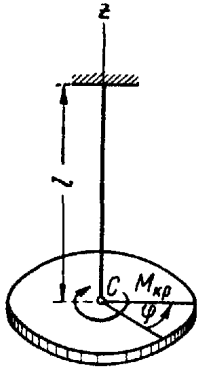


Рис. 185.

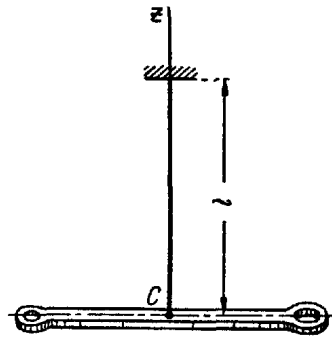


Рис. 186.

Дифференциальное уравнение крутильных колебаний получаем на основе дифференциального уравнения вращения (79.2):

$$J_{Cz} \ddot{\varphi} = M_{кр} = -c\varphi$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{J_{Cz}} \varphi = 0. \quad (82.4)$$

Уравнение (82.4) представляет собой дифференциальное уравнение гармонического колебательного движения.

Частота колебаний

$$k = \sqrt{\frac{c}{J_{Cz}}}.$$

Период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_{Cz}}{c}}. \quad (82.5)$$

Чтобы получить формулу, не содержащую коэффициента c , надо определить путем наблюдений период крутильных колебаний эталона T_1 и период крутильных колебаний испытуемой детали T_2 . Тогда по формуле (82.5)

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{1Cz}}{c}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{2Cz}}{c}}.$$

Здесь J_{1Cz} — момент инерции эталона относительно оси Cz ,
 J_{2Cz} — момент инерции детали относительно оси Cz .

Найдем отношение периодов:

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{J_{2Cz}}{J_{1Cz}}},$$

отсюда

$$J_{2Cz} = J_{1Cz} \frac{T_2^2}{T_1^2}.$$

По этой формуле можно найти момент инерции J_{2Cz} испытуемой детали, зная момент инерции эталона J_{1Cz} и определив периоды крутильных колебаний T_1 и T_2 .

3. Способ падающего груза

Чтобы определить момент инерции махового колеса радиусом r относительно оси его вращения Cx при помощи метода разгона падающим грузом, колесо обматывают тонкой проволокой, к концу которой привязывают груз B весом G_1 . Груз помещают на горизонтальную площадку (рис. 187). Освободив груз от этой связи, предоставляют ему возможность опускаться, приводя во вращение маховое колесо. Определив время T_1 падения груза с высоты H , повторяют тот же опыт с другим грузом G_2 , определяя время его падения T_2 .

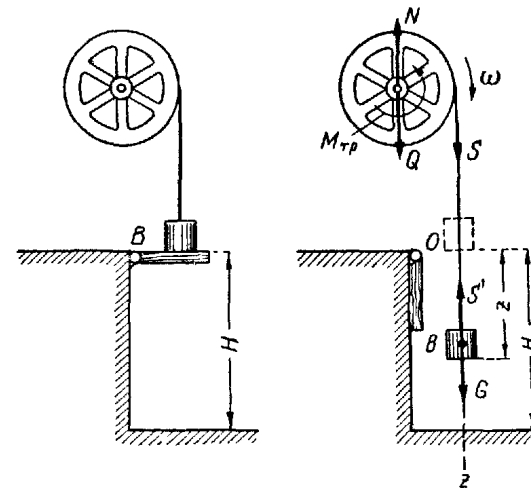


Рис. 187.

Рис. 188.

На маховик, приводимый во вращение падающим грузом B , действуют внешние силы: его вес Q , натяжение проволоки S , являющееся движущей силой, нормальная реакция подшипников N и сила трения в подшипниках. Направление вращения маховика примем за положительное направление.

Дифференциальное уравнение его вращения (79.2) будет иметь вид

$$J_{Cx} \ddot{\varphi} = Sr - M_{тр}, \quad (a)$$

где $M_{тр}$ — момент сил трения.

На груз весом G_1 действуют две силы: его вес G_1 и реакция проволоки S' , модуль которой $S' = S$ (рис. 188).

Направим ось z вниз по траектории движения груза, приняв начальное положение груза O за начало координат.

Составим дифференциальное уравнение движения груза:

$$\frac{G_1}{g} \ddot{z} = G_1 - S' \quad (6)$$

Путь, пройденный грузом по вертикали, равен пути, пройденному точкой обода маховика. Поэтому координата z связана с углом поворота маховика зависимостью

$$z = r\varphi,$$

откуда

$$\ddot{z} = r\ddot{\varphi} \quad \text{и} \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{z}}{r}.$$

Подставим это значение $\ddot{\varphi}$ в уравнение (а):

$$\frac{J_{Cx}}{r} \ddot{z} = Sr - M_{\text{тр}}. \quad (в)$$

Умножив уравнение (б) на r и сложив его с уравнением (в), получим:

$$\frac{G_1}{g} r \ddot{z} + \frac{J_{Cx}}{r} \ddot{z} = G_1 r - M_{\text{тр}},$$

откуда

$$\ddot{z} = \frac{gr(G_1 r - M_{\text{тр}})}{G_1 r^2 + J_{Cx} g}.$$

Так как $\ddot{z} = \text{const}$, то по формуле для равнопеременного движения точки при начальных условиях $t_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$

$$z = \frac{\ddot{z} t^2}{2}.$$

При $t = T_1$, $z = H$, а потому

$$H = \frac{gr(G_1 r - M_{\text{тр}})}{2(G_1 r^2 + J_{Cx} g)} T_1^2.$$

В это выражение входит неизвестная величина момента сил трения $M_{\text{тр}}$, который принимается одинаковым в обоих опытах. Чтобы исключить $M_{\text{тр}}$, воспользуемся аналогичным выражением для падения груза весом G_2 :

$$H = \frac{gr(G_2 r - M_{\text{тр}})}{2(G_2 r^2 + J_{Cx} g)} T_2^2.$$

Из этих двух выражений найдем значения $M_{\text{тр}}$ и приравняем их:

$$M_{\text{тр}} = G_1 r - \frac{2H}{grT_1^2} (G_1 r^2 + J_{Cx} g) = G_2 r - \frac{2H}{grT_2^2} (G_2 r^2 + J_{Cx} g).$$

Отсюда можно определить момент инерции махового колеса в зависимости от величин, заданных в условии:

$$J_{Cx} = r^2 \frac{\frac{1}{2H} (G_1 - G_2) - \frac{1}{g} \left(\frac{G_1}{T_1^2} - \frac{G_2}{T_2^2} \right)}{\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2}}.$$

§ 83. Примеры на применение теоремы об изменении кинетического момента механической системы

Пример 44. Через неподвижный блок весом G , с массой равномерно распределенной по ободу, перекинута веревка, весом которой можно пренебречь. К концу веревки подвешен груз B весом Q .

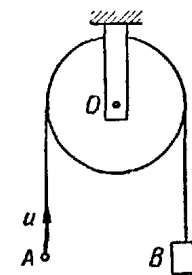


Рис. 189.

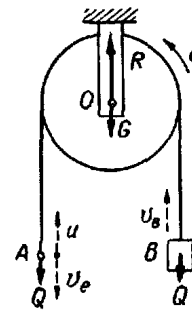


Рис. 190.

По веревке от другого ее конца начинает подниматься человек A таким же весом с относительной скоростью u . Определить угловую скорость вращения блока ω и скорость движения груза v_B , вызванные движением человека, если в начальный момент система была неподвижна (рис. 189).

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из блока и двух материальных точек — человека и груза. К движению этой системы применим теорему об изменении кинетического момента в форме (56.2):

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^E,$$

где ось Ox — ось вращения блока (рис. 190).

На рассматриваемую систему действуют внешние силы: вес человека Q , вес груза Q , вес блока G и реакция оси блока R .

Главный момент внешних сил относительно оси Ox равен:

$$M_x^E = Qr - Qr = 0$$

(реакция оси R и вес блока G не имеют моментов относительно оси Ox).

Так как $M_x^E = 0$, то

$$L_x = \text{const}. \quad (а)$$

До начала движения человека вверх по веревке система находилась в состоянии покоя и кинетический момент ее был равен нулю, т. е.

$$L_{0x} = 0.$$

Согласно условию (а) имеет место сохранение кинетического момента системы, следовательно, в любой момент времени

$$L_x = 0. \quad (6)$$

Предположим, что при движении человека по веревке блок вращается с угловой скоростью ω против движения часовой стрелки. Тогда скорость движения груза v_B будет направлена вверх и равна $v_B = \omega r$. Человек будет иметь относительную скорость u , направленную вверх, и переносную скорость v_e , направленную вниз и равную $v_e = \omega r$. Кинетический момент всей механической системы

$$L_x = L_{1x} + L_{2x} + L_{3x}.$$

Считаем моменты количества движения точек системы положительными, если они направлены по отношению к точке O против движения часовой стрелки, и отрицательными — в обратном случае.

Момент количества движения груза B

$$L_{1x} = m v_B r = \frac{Q}{g} \omega r^2.$$

Момент количества движения человека A

$$L_{2x} = m (v_e - u) \cdot r = \frac{Q}{g} (\omega r^2 - ur).$$

Кинетический момент блока, вращающегося вокруг неподвижной оси Ox , определим по формуле (79.1):

$$L_{3x} = J_x \omega.$$

Так как масса блока равномерно распределена по ободу, то его момент инерции относительно оси Ox равен

$$J_x = m_1 r^2 = \frac{G}{g} r^2,$$

тогда

$$L_{3x} = \frac{G}{g} r^2 \omega.$$

Кинетический момент системы

$$L_x = \frac{Q}{g} \dot{\omega} r^2 + \frac{Q}{g} \omega r^2 - \frac{Q}{g} ur + \frac{G}{g} r^2 \omega.$$

Приравнивая его нулю согласно условию (б), имеем

$$\frac{Q}{g} \dot{\omega} r^2 + \frac{Q}{g} \omega r^2 - \frac{Q}{g} ur + \frac{G}{g} r^2 \omega = 0$$

или

$$2Q\omega r^2 - Qur + G\omega r^2 = 0,$$

отсюда

$$\omega = \frac{Qu}{(2Q + G)r},$$

$$v_B = \omega r = \frac{Qu}{2Q + G}.$$

Положительные ответы указывают на то, что предположенное направление вращения блока и движения груза совпадают с действительными.

Пример 45. Круглая горизонтальная платформа весом G и радиусом R вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω_0 . В точке D платформы на расстоянии r от этой оси стоит человек весом Q . Определить, пренебрегая трением в подпятнике и подшипнике, угловую скорость ω , с которой будет вращаться платформа, когда человек начнет перемещаться по платформе с относительной скоростью u по окружности радиусом r в сторону вращения платформы.

Решение. К механической системе, состоящей из платформы и человека (материальной точки), применим теорему об изменении кинетического момента механической системы в форме уравнения (56.2):

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^E,$$

где ось z — ось вращения платформы.

Если пренебречь трением в подшипнике и подпятнике, то внешними силами, действующими на рассматриваемую систему, будут: вес

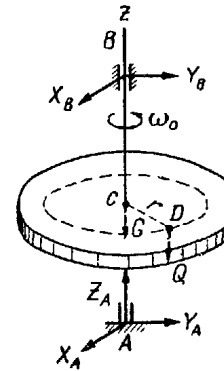


Рис. 191

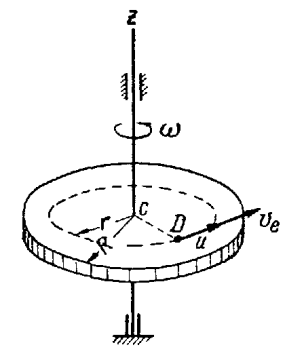


Рис. 192.

платформы G , вес человека Q и реакции подпятника A и подшипника B (рис. 191).

Момент каждой из этих сил относительно оси z равен нулю. Поэтому $M_z^E = 0$ и $L_z = \text{const}$.

Определим значения кинетического момента системы до начала движения человека и после него; приравняем эти значения, так как кинетический момент системы не изменяется.

1. Начальный момент времени $t_0 = 0$ (рис. 191). Полагая платформу однородным диском, определяем ее момент инерции относительно оси z по формуле:

$$J_z = \frac{GR^2}{2g}.$$

Кинетический момент платформы

$$L_{1z} = J_z \omega_0 = \frac{GR^2 \omega_0}{2g}.$$

Момент количества движения человека, движущегося только вместе с платформой,

$$L_{2z} = m v_e r = \frac{Q}{g} \omega_0 r^2.$$

Кинетический момент системы

$$(L_z)_{t_0} = L_{1z} + L_{2z} = \frac{GR^2 \omega_0}{2g} + \frac{Qr^2 \omega_0}{g}.$$

2. Произвольный момент времени t при движении человека (рис. 192). Кинетический момент платформы:

$$L_{1z} = J_z \omega = \frac{GR^2 \omega}{2g}.$$

Момент количества движения человека

$$L_{2z} = m(v_e + u)r = \frac{Q}{g} \omega r^2 + \frac{Q}{g} ur.$$

Кинетический момент системы

$$(L_z)_t = L_{1z} + L_{2z} = \frac{GR^2 \omega}{2g} + \frac{Qr^2 \omega}{g} + \frac{Q}{g} ur.$$

Приравниваем значения кинетического момента.

$$(L_z)_{t_0} = (L_z)_t;$$

$$\frac{GR^2 \omega_0}{2g} + \frac{Qr^2 \omega_0}{g} = \frac{GR^2 \omega}{2g} + \frac{Qr^2 \omega}{g} + \frac{Qur}{g}$$

или

$$(GR^2 + 2Qr^2) \omega_0 = (GR^2 + 2Qr^2) \omega + 2Qur,$$

откуда

$$\omega = \omega_0 - \frac{2Qur}{GR^2 + 2Qr^2},$$

т. е. при движении человека в сторону вращения платформы угловая скорость платформы уменьшилась.

Вопросы для самоконтроля

1. Каковы дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела?
2. По какой формуле вычисляется кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, относительно этой оси?
3. Какой вид имеет дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси?

4. При каких условиях тело вращается вокруг неподвижной оси: а) ускоренно; б) равномерно; в) замедленно?

5. Мерой чего является момент инерции твердого тела относительно оси?

6. Каковы основные типы задач, которые можно решать при помощи дифференциального уравнения вращения тела вокруг неподвижной оси?

7. Какое положение механики иллюстрируется при помощи скамейки Жуковского?

8. Что называют приведенной длиной, центром и осью качания физического маятника?

9. По какой формуле вычисляется приведенная длина физического маятника?

10. Каким свойством обладают ось привеса и ось качаний физического маятника?

11. По какой формуле вычисляется период малых колебаний физического маятника?

12. Назовите способы опытного определения моментов инерции твердых тел и укажите, в чем заключается их сущность

ГЛАВА XIII

ДИНАМИКА ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 84. Теорема о зависимости между кинетическими моментами механической системы относительно неподвижного центра и относительно центра масс системы

В § 56 рассмотрена теорема об изменении кинетического момента механической системы относительно неподвижного центра.

Для изучения сложного движения твердого тела, каким является плоское движение, необходимо воспользоваться зависимостью между

кинетическими моментами механической системы относительно неподвижного центра и относительно центра масс системы.

Для установления этой зависимости любое движение механической системы разлагают на два составляющих движения: переносное движение с подвижной системой отсчета $C\xi\eta\zeta$, движущейся поступательно, и относительное движение по отношению к этой системе (рис. 193). Эти движения называют поступательным движением системы с центром масс и

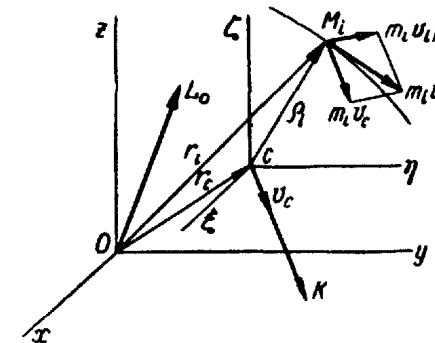


Рис. 193

относительным движением ее по отношению к центру масс. Такое же разложение движения системы произошло в § 67 для вычисления ее кинетической энергии.

В каждую точку M_i механической системы проведем радиус-векторы: r_i — из начала координат неподвижной системы отсчета O

и ρ_i — из центра масс системы C . Эти радиусы-векторы связаны зависимостью:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C + \rho_i.$$

Абсолютная скорость \mathbf{v}_i любой точки M_i равна геометрической сумме ее переносной и относительной скоростей:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{ir}.$$

В соответствии с этим вектор количества движения точки равен:

$$m_i \mathbf{v}_i = m_i \mathbf{v}_C + m_i \mathbf{v}_{ir}.$$

Кинетический момент системы относительно неподвижного центра O определится по формуле:

$$L_O = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i.$$

Подставив значения \mathbf{r}_i и $m_i \mathbf{v}_i$, получим

$$L_O = \sum (\mathbf{r}_C + \rho_i) \times (m_i \mathbf{v}_C + m_i \mathbf{v}_{ir}) = \sum \mathbf{r}_C \times m_i \mathbf{v}_C + \\ + \sum \mathbf{r}_C \times m_i \mathbf{v}_{ir} + \sum \rho_i \times m_i \mathbf{v}_C + \sum \rho_i \times m_i \mathbf{v}_{ir}.$$

Преобразуем каждое из слагаемых полученного выражения в отдельности:

1) $\sum \mathbf{r}_C \times m_i \mathbf{v}_C = \mathbf{r}_C \times \sum m_i \mathbf{v}_C = \mathbf{r}_C \times \mathbf{v}_C \sum m_i = \mathbf{r}_C \times m \mathbf{v}_C = \mathbf{r}_C \times \mathbf{K}$, где $\mathbf{K} = m \mathbf{v}_C$ — главный вектор количества движения системы;

2) $\sum \mathbf{r}_C \times m_i \mathbf{v}_{ir} = \mathbf{r}_C \times \sum m_i \mathbf{v}_{ir} = 0$, так как согласно (67.4) $\sum m_i \mathbf{v}_{ir} = 0$;

3) $\sum \rho_i \times m_i \mathbf{v}_C = (\sum m_i \rho_i) \times \mathbf{v}_C = 0$, так как согласно § 32 $\sum m_i \rho_i = m \rho_C$, а радиус-вектор центра масс $\rho_C = 0$;

4) $\sum \rho_i \times m_i \mathbf{v}_{ir} = L_{Cr}$, где L_{Cr} — кинетический момент системы относительно центра масс в ее относительном движении по отношению к этому центру.

Подставив эти значения в выражение кинетического момента механической системы, получим

$$L_O = \mathbf{r}_C \times \mathbf{K} + L_{Cr}. \quad (84.1)$$

Уравнение (84.1) выражает теорему о зависимости между кинетическим моментом механической системы относительно неподвижного центра и относительно центра масс системы: *при любом движении механической системы ее кинетический момент относительно неподвижного центра равен геометрической сумме: момента относительно этого центра главного вектора количества движения системы, условно приложенного в центре масс, и кинетического момента системы в ее относительном движении по отношению к центру масс относительно этого центра.*

Обозначим момент главного вектора количества движения \mathbf{K} , условно приложенного в центре масс, относительно неподвижного центра O :

$$\mathbf{r}_C \times \mathbf{K} = L_{OK},$$

тогда уравнение (84.1) примет вид

$$L_O = L_{OK} + L_{Cr}. \quad (84.2)$$

Если центр O , относительно которого вычисляется кинетический момент механической системы, совпадает в данный момент с центром масс системы C , то $\mathbf{r}_C = 0$ и формула (84.1) принимает вид

$$L_C = L_{Cr}, \quad (84.3)$$

т. е. *кинетические моменты механической системы относительно центра масс в абсолютном движении и в относительном движении по отношению к центру масс геометрически равны.*

В проекциях на оси координат получим три равенства, соответствующих векторному равенству (84.2):

$$\left. \begin{aligned} L_x &= L_{xK} + L_{\xi r}, \\ L_y &= L_{yK} + L_{\eta r}, \\ L_z &= L_{zK} + L_{\zeta r}. \end{aligned} \right\} \quad (84.4)$$

Здесь L_x, L_y, L_z — кинетические моменты механической системы относительно неподвижных осей x, y, z ;

L_{xK}, L_{yK}, L_{zK} — моменты главного вектора количества движения системы \mathbf{K} , условно приложенного в центре масс, относительно осей x, y, z ;

$L_{\xi r}, L_{\eta r}, L_{\zeta r}$ — кинетические моменты системы относительно подвижных осей ξ, η, ζ , проходящих через центр масс C в относительном движении системы по отношению к центру масс, т. е. по отношению к системе отсчета $S\xi\eta\zeta$.

Если ось, относительно которой вычисляется кинетический момент механической системы, проходит в данный момент через ее центр масс, то из формул (84.4)

$$L_{\xi} = L_{\xi r}, \quad (84.5)$$

так как

$$L_{xK} = 0.$$

Таким образом, *кинетические моменты механической системы относительно оси, проходящей в данный момент через центр масс системы, в абсолютном и в относительном движениях системы по отношению к центру масс равны по величине и одинаковы по знаку.*

Пример 46. В эпициклическом механизме кривошип *III* весом G_3 вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси Ox . Кривошип приводит в движение колесо *II* весом G_2 и радиусом r_2 , катящееся без скольжения по неподвижному колесу *I* радиусом r_1 (рис. 194). Найти кинетический момент механизма относительно оси Ox , перпендикулярной к плоскости механизма.

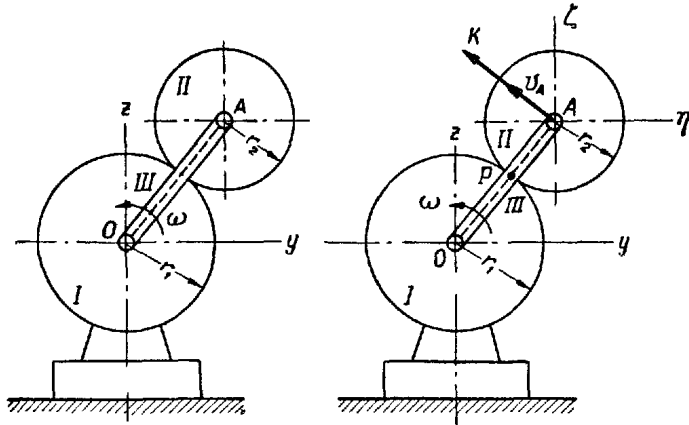


Рис. 194.

Рис. 195.

Решение. Кинетический момент эпициклического механизма относительно оси Ox (рис. 195) складывается из кинетических моментов колеса *II* и кривошипа *III* относительно этой оси:

$$L_x = L_x^{II} + L_x^{III}. \quad (a)$$

Направление вращения кривошипа против движения часовой стрелки примем за положительное направление.

Кинетический момент колеса *II* определим по формуле (84.3):

$$L_x^{II} = L_{xK}^{II} + L_{\xi r}^{II}. \quad (б)$$

Скорость центра колеса *II*

$$v_A = OA \cdot \omega = (r_1 + r_2) \omega.$$

Направление главного вектора количества движения \mathbf{K} колеса *II* совпадает с направлением \mathbf{v}_A , а его модуль

$$K = m_2 v_A = \frac{G_2}{g} (r_1 + r_2) \omega.$$

Момент вектора \mathbf{K} , условно приложенного в центре тяжести колеса *II* и направленного против движения часовой стрелки относительно точки O , положителен и равен

$$L_{xK} = K \cdot OA = \frac{G_2}{g} (r_1 + r_2)^2 \omega.$$

Движение колеса *II* относительно подвижных осей координат ξ , η , ζ , проходящих через центр тяжести A колеса *II*, является вращением против движения часовой стрелки вокруг оси $A\xi$. Кинетический момент колеса в этом движении относительно подвижной оси $A\xi$, перпендикулярной к плоскости колеса, положителен и согласно формуле (79.1) равен:

$$L_{\xi r} = J_{\xi} \omega_1.$$

Момент инерции колеса (однородного диска) найдем по формуле

$$J_{\xi} = \frac{m_2 r_2^2}{2} = \frac{G_2 r_2^2}{2g}.$$

Угловую скорость колеса *II* определим как отношение модуля скорости его центра к расстоянию от его центра до мгновенного центра скоростей P колеса *II*:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{PA} = \frac{(r_1 + r_2)}{r_2} \omega.$$

По найденным значениям J_{ξ} и ω_1 получим

$$L_{\xi r} = \frac{G_2 r_2 (r_1 + r_2)}{2g} \omega.$$

Подставив значения L_{xK} и $L_{\xi r}$ в формулу (б), найдем кинетический момент колеса *II*:

$$L_x^{II} = \frac{G_2}{g} (r_1 + r_2)^2 \omega + \frac{G_2 r_2 (r_1 + r_2)}{2g} \omega = \frac{G_2}{g} (r_1 + r_2) \left(r_1 + \frac{3}{2} r_2 \right) \omega.$$

Кривошип *III* вращается против движения часовой стрелки вокруг неподвижной оси Ox . Его кинетический момент относительно этой оси найдем по формуле (79.1):

$$L_x^{III} = J_x \omega,$$

где момент инерции кривошипа (однородного стержня)

$$J_x = \frac{m_3 l^2}{3} = \frac{G_3 (r_1 + r_2)^2}{3g}.$$

Подставив это значение J_x , получим кинетический момент кривошипа

$$L_x^{III} = \frac{G_3 (r_1 + r_2)^2}{3g} \omega.$$

Сложив значения L_x^{II} и L_x^{III} , получим кинетический момент механизма относительно оси Ox :

$$L_x = \frac{r_1 + r_2}{g} \left[G_2 \left(r_1 + \frac{3}{2} r_2 \right) + G_3 \frac{r_1 + r_2}{3} \right] \omega.$$

§ 85. Теорема об изменении кинетического момента механической системы в относительном движении по отношению к центру масс

Для доказательства теоремы воспользуемся равенством (84.1):

$$L_O = r_C \times mv_C + L_{Cr}.$$

Продифференцируем это выражение по t :

$$\frac{dL_O}{dt} = \frac{dr_C}{dt} \times mv_C + r_C \times m \frac{dv_C}{dt} + \frac{dL_{Cr}}{dt}.$$

Здесь $\frac{dr_C}{dt} = v_C$, следовательно, $\frac{dr_C}{dt} \times mv_C = 0$ и

$$r_C \times m \frac{dv_C}{dt} = r_C \times mw_C = r_C \times R^E.$$

Тогда

$$\frac{dL_O}{dt} = r_C \times R^E + \frac{dL_{Cr}}{dt}. \quad (85.1)$$

Главные моменты внешних сил относительно неподвижного центра O и подвижного центра масс C связаны зависимостью, установленной в статике:

$$M_C^E = M_O^E - r_C \times R^E. \quad (85.2)$$

Подставляя (85.1) и (85.2) в уравнение (51.1):

$$\frac{dL_O}{dt} = M_O^E,$$

получаем

$$r_C \times R^E + \frac{dL_{Cr}}{dt} = M_C^E + r_C \times R^E,$$

откуда

$$\frac{dL_{Cr}}{dt} = M_C^E. \quad (85.3)$$

Уравнение (85.3) выражает теорему об изменении кинетического момента механической системы в относительном движении по отношению к центру масс системы: *производная по времени от кинетического момента механической системы относительно центра масс системы в относительном движении системы по отношению к этому центру геометрически равна главному моменту внешних сил, действующих на точки системы относительно центра масс.*

Векторному уравнению (85.3) соответствуют три уравнения в проекциях на оси координат:

$$\frac{dL_{\xi r}}{dt} = M_{\xi}^E = \sum M_{i\xi}^E, \quad \frac{dL_{\eta r}}{dt} = M_{\eta}^E = \sum M_{i\eta}^E, \quad \frac{dL_{\zeta r}}{dt} = M_{\zeta}^E = \sum M_{i\zeta}^E. \quad (85.4)$$

Здесь $L_{\xi r}$, $L_{\eta r}$, $L_{\zeta r}$ — кинетические моменты механической системы в ее относительном движении по отношению к центру масс, вычисленные относительно подвижных осей ξ , η , ζ , проходящих через центр масс;

M_{ξ}^E , M_{η}^E , M_{ζ}^E — главные моменты внешних сил, действующих на точки системы относительно этих же осей.

Уравнения (85.4) показывают, что *производная по времени от кинетического момента механической системы относительно любой оси, проходящей через центр масс системы в относительном движении системы по отношению к центру масс равна главному моменту внешних сил, действующих на точки системы, относительно этой оси.*

Следствия теоремы: 1. *Если главный момент внешних сил относительно центра масс все время остается равным нулю, то кинетический момент механической системы в ее относительном движении по отношению к центру масс, вычисленный относительно центра масс, не изменяется.*

Из уравнения (85.3) следует, что если $M_C^E = 0$, то

$$\frac{dL_{Cr}}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad L_{Cr} = \text{const}. \quad (85.5)$$

2. *Если главный момент внешних сил относительно некоторой оси, проходящей через центр масс системы, все время остается равным нулю, то кинетический момент механической системы в относительном движении по отношению к центру масс, вычисленный относительно этой оси, не изменяется.*

Из уравнения (85.4) следует, что если $M_{\xi}^E = 0$, то

$$\frac{dL_{\xi r}}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad L_{\xi r} = \text{const}.$$

Рассмотренные следствия из теоремы называют *законом сохранения кинетического момента механической системы в относительном движении по отношению к центру масс.*

Классическим примером применения этого закона является приложение его к движению тел солнечной системы. Это движение происходит под действием внутренних сил взаимного притяжения между телами этой системы.

Поэтому кинетический момент солнечной системы L_{Cr} относительно ее центра масс должен оставаться неизменным по модулю и направлению. Это положение было установлено французским математиком и астрономом Лапласом (1749—1827).

Если единственной внешней силой, приложенной к механической системе, является сила тяжести, то главные моменты внешних сил относительно центра масс и относительно любой оси, через него проходящей, равны нулю.

В этом случае кинетический момент системы относительно центра масс L_{Cr} , а также ее кинетический момент относительно любой оси,

проходящей через центр масс, например $L_{\zeta r}$, остаются постоянными. Так, например, во время прыжка танцовщика его кинетический момент L_{ζ} относительно вертикальной оси ζ , проходящей через центр тяжести, не изменяется.

Если в начале прыжка танцовщик приобрел угловую скорость вокруг оси ζ , то его кинетический момент в относительном движении по отношению к центру масс, т. е. во вращении вокруг оси ζ , вычисляется по формуле (79.1): $L_{\zeta} = J_{\zeta} \omega$.

Так как $L_{\zeta} = \text{const}$, то $J_{1\zeta} \omega_1 = J_{2\zeta} \omega_2$, откуда

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{J_{2\zeta}}{J_{1\zeta}},$$

т. е. танцовщик может изменять угловую скорость во время прыжка, изменяя момент инерции тела путем изменения положения рук. Сохранением кинетического момента относительно центральной оси объясняется, например, и способность кошки, используя движение хвоста, переворачиваться во время падения и способность бегущей по лесу собаки быстро поворачиваться, обегая деревья.

§ 86. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела

Положим, что твердое тело совершает плоское движение. Совместим с плоскостью чертежа плоскость, в которой движется центр масс тела, показав плоскую фигуру, полученную от сечения тела этой плоскостью (рис. 196). В динамике за полюс принимают не произвольную точку фигуры, а центр масс тела. Тогда уравнения движения плоской фигуры имеют вид

$$x_C = f_1(t),$$

$$y_C = f_2(t),$$

$$\varphi = f_3(t).$$

Если известны внешние силы $P_1^E, P_2^E, \dots, P_n^E$, действующие на тело, то два дифференциальных уравнения движения плоской фигуры можно получить из дифференциальных уравнений (43.2):

$$m \ddot{x}_C = \sum X_i^E = X^E;$$

$$m \ddot{y}_C = \sum Y_i^E = Y^E,$$

где m — масса тела, X^E и Y^E — проекции главного вектора внешних сил, приложенных к телу, на оси x и y .

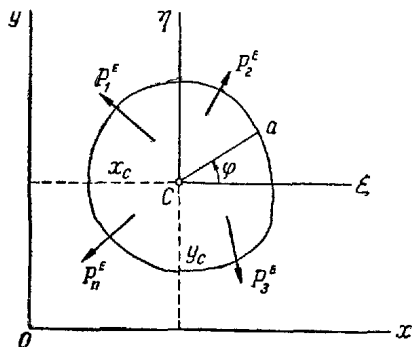


Рис 196.

Третье дифференциальное уравнение движения плоской фигуры получают из уравнения (85.4):

$$\frac{dL_{\zeta r}}{dt} = \sum M_{i\zeta}^E = M_{\zeta}^E.$$

Здесь $L_{\zeta r}$ — кинетический момент тела относительно оси ζ в относительном движении тела по отношению к центру масс; ось ζ проходит через центр масс тела перпендикулярно к чертежу;

M_{ζ}^E — главный момент внешних сил, приложенных к телу, относительно той же оси ζ .

Так как относительное движение тела по отношению к центру масс, т. е. по отношению к подвижной системе осей $C\xi\eta\zeta$ является вращением вокруг оси ζ , то кинетический момент $L_{\zeta r}$ определяется по формуле (79.1):

$$L_{\zeta r} = J_{\zeta} \omega.$$

Дифференцируем по t :

$$\frac{dL_{\zeta r}}{dt} = J_{\zeta} \frac{d\omega}{dt} = J_{\zeta} \ddot{\varphi}.$$

Подставляя это значение в уравнение (85.4), получаем

$$J_{\zeta} \ddot{\varphi} = \sum M_{i\zeta}^E = M_{\zeta}^E.$$

Таким образом, дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x}_C &= \sum X_i^E = X^E, \\ m \ddot{y}_C &= \sum Y_i^E = Y^E, \\ J_{\zeta} \ddot{\varphi} &= \sum M_{i\zeta}^E = M_{\zeta}^E. \end{aligned} \right\} \quad (86.1)$$

Интегрируя эти уравнения, можно определить x_C , y_C и φ как функции времени

Для определения шести постоянных интегрирования используются начальные условия движения: координаты центра масс x_{C0} , y_{C0} и угол поворота тела φ_0 в начальный момент $t_0 = 0$, а также проекции начальной скорости центра масс на оси координат \dot{x}_{C0} , \dot{y}_{C0} и начальная угловая скорость тела $\dot{\varphi}_0$.

При определении движения несвободного твердого тела наряду с задаваемыми внешними силами учитываются и неизвестные реакции связей. В этом случае для решения задачи используются дополнительные уравнения, определяющие ограничения движения тела имеющимися связями.

В том случае, когда траектория центра масс задана, удобно пользоваться дифференциальными уравнениями движения точки C в проекциях на касательную и главную нормаль к этой траектории.

Тогда дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{s}_C &= \sum P_{i\nu}^E, \\ m \frac{v_C^2}{\rho} &= \sum P_{in}^E, \\ J_C \ddot{\varphi} &= \sum M_{i\xi}^E. \end{aligned} \right\} \quad (86.2)$$

Здесь s_C — дуговая координата центра масс, v_C — его скорость и ρ — радиус кривизны его траектории.

§ 87. Примеры на плоское движение твердого тела

Пример 47. Однородный диск радиусом $r = 20$ см вращается вокруг неподвижной оси Oz , проходящей через одну из точек его обода, перпендикулярной к его плоскости (рис. 197, а). В момент,

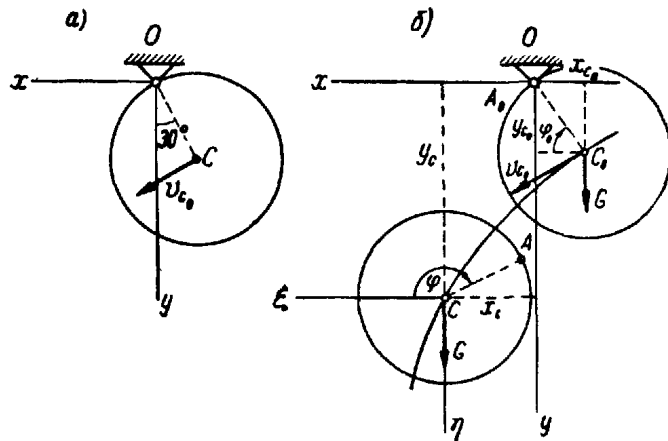


Рис. 197.

когда радиус OC составляет угол 30° с вертикалью, диск отделяется от оси вращения, имея скорость центра $v_{C_0} = 2$ м/сек. Определить дальнейшее движение диска.

Решение. После отрыва от оси на диск действует одна внешняя сила — его вес G . Так как в момент отрыва скорости всех точек диска лежат в плоскости xOy и сила тяжести лежит тоже в этой плоскости, то диск будет двигаться в плоскости xOy .

Установим начальные условия этого плоского движения по рис. 197, б, считая момент отрыва начальным моментом $t_0 = 0$.

Координаты центра тяжести диска в этот момент:

$$\begin{aligned} x_{C_0} &= -OC_0 \sin 30^\circ = -0,2 \cdot 0,5 = -0,10 \text{ м}, \\ y_{C_0} &= OC_0 \cos 30^\circ = 0,2 \cdot 0,866 = 0,17 \text{ м}. \end{aligned}$$

Угол поворота диска будем отсчитывать от подвижной оси ξ к радиусу CA , обозначив A точку диска, совпадающую в момент отрыва с началом координат. Тогда начальное значение угла поворота

$$\varphi_0 = -60^\circ = -\frac{\pi}{3}.$$

Знак минус указывает на отсчет угла по движению часовой стрелки.

Проекции начальной скорости центра тяжести диска на оси координат:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{C_0} &= v_{C_0} \cos 30^\circ = 2 \cdot 0,866 = 1,73 \text{ м/сек}; \\ \dot{y}_{C_0} &= v_{C_0} \sin 30^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м/сек}. \end{aligned}$$

Модуль начальной угловой скорости диска

$$\omega_0 = \frac{v_{C_0}}{OC_0} = \frac{2}{0,2} = 10 \text{ сек}^{-1}.$$

Алгебраическая величина угловой скорости вращения, происходящего по движению часовой стрелки:

$$\dot{\varphi}_0 = -\omega_0 = -10 \text{ сек}^{-1}.$$

Таким образом, начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} t_0 = 0, \quad x_{C_0} &= -0,10 \text{ м}; \quad y_{C_0} = 0,17 \text{ м}, \quad \varphi_0 = -\frac{\pi}{3}; \\ \dot{x}_{C_0} &= 1,73 \text{ м/сек}; \quad \dot{y}_{C_0} = 1 \text{ м/сек}, \quad \dot{\varphi}_0 = -10 \text{ сек}^{-1}. \end{aligned}$$

Составим дифференциальные уравнения (86.1) плоского движения диска под действием силы G :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= \sum X_i^E = 0, & \text{откуда } \ddot{x}_C &= 0; \\ m\ddot{y}_C &= \sum Y_i^E = G = mg, & \text{откуда } \ddot{y}_C &= g; \\ J_C \ddot{\varphi} &= \sum M_{i\xi}^E = 0, & \text{откуда } \ddot{\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Интегрируем первое уравнение два раза по t :

$$\dot{x}_C = C_1, \quad x_C = C_1 t + C_2.$$

По начальным условиям находим C_1 и C_2 :

$$C_1 = 1,73; \quad C_2 = -0,10.$$

Получаем уравнение движения центра тяжести диска вдоль оси x :

$$x_C = 1,73t - 0,10.$$

Интегрируем второе уравнение два раза по t :

$$\dot{y}_C = gt + C_3, \quad y_C = \frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4.$$

По начальным условиям находим C_3 и C_4 :

$$C_3 = 1; \quad C_4 = 0,17.$$

Уравнение движения центра тяжести диска вдоль оси y будет

$$y_C = 4,9t^2 + t + 0,17.$$

Интегрируем третье уравнение два раза по t :

$$\dot{\varphi} = C_5; \quad \varphi = C_5t + C_6.$$

По начальным условиям определяем C_5 и C_6 :

$$C_5 = -10; \quad C_6 = -\frac{\pi}{3}.$$

Получаем уравнение вращения диска вокруг оси ξ , проходящей через его центр тяжести:

$$\varphi = -10t - \frac{\pi}{3}.$$

Таким образом, уравнения плоского движения диска имеют вид

$$x_C = 1,73t - 0,10,$$

$$y_C = 4,9t^2 + t + 0,17,$$

$$\varphi = -10t - \frac{\pi}{3}.$$

Здесь: t — в секундах, x_C , y_C — в метрах, φ — в радианах.

Исключая t из первых двух уравнений, находим уравнение траектории центра тяжести:

$$t = \frac{x_C + 0,10}{1,73},$$

$$y_C = 4,9 \left(\frac{x_C + 0,10}{1,73} \right)^2 + \frac{x_C + 0,10}{1,73} + 0,17.$$

Полученное уравнение является уравнением параболы. Чтобы определить положение ее вершины, следует привести уравнение к виду

$$(x - a)^2 = 2p(y - b),$$

где a и b — координаты вершины.

Пример 48. Однородный тонкий стержень AB длиной l и весом G прикреплен концом B к вертикальной нити BD , а концом A опирается на гладкую горизонтальную плоскость, составляя с ней угол $\varphi_0 = 45^\circ$ (рис. 198). В некоторый момент нить BD пережигают и стержень начинает падать. Определить реакцию плоскости в точке A в момент начала падения стержня.

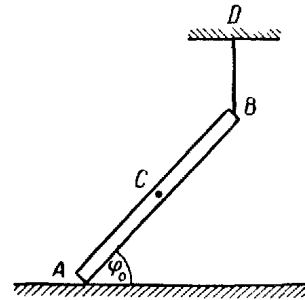


Рис. 198.

Решение. При наличии нити реакция плоскости, так же как и реакция нити, составляет $\frac{1}{2}G$. Освобожденный от нити стержень будет двигаться под действием двух внешних сил: веса G и реакции плоскости N (рис. 199). Так как эти силы вертикальны и в начальный момент стержень был в состоянии покоя, то центр тяжести стержня будет двигаться по вертикали. Направим ось y вверх по траектории центра тяжести стержня, поместив начало координат в опорной плоскости. Составим дифференциальные уравнения (86.1) плоского движения стержня в плоскости xOy :

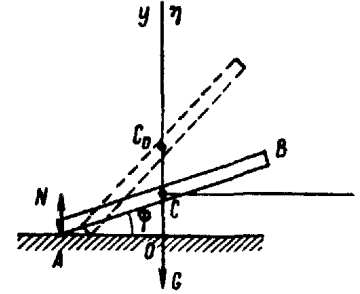


Рис. 199.

$$m\ddot{x}_C = \sum X_i^E = 0,$$

$$m\ddot{y}_C = \sum Y_i^E = N - G,$$

$$J_C\ddot{\varphi} = \sum M_{iC}^E = -N \frac{l}{2} \cos \varphi.$$

Из первого уравнения и следует, что центр тяжести стержня движется по вертикали.

В двух последних уравнениях имеются три неизвестные величины \ddot{y}_C , $\ddot{\varphi}$ и N . Для их определения необходимо составить еще четвертое уравнение, выражающее ограничение, которое накладывает на движение стержня связь — горизонтальная плоскость. Так как конец стержня A перемещается по горизонтали, то

$$y_C = \frac{l}{2} \sin \varphi.$$

Находим производные:

$$\dot{y}_C = \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi,$$

$$\ddot{y}_C = \frac{l}{2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi).$$

Во второе уравнение подставляем это значение \ddot{y}_C , а в третье уравнение подставляем значение момента инерции стержня $J_C = \frac{ml^2}{12}$ относительно оси $C\xi$, перпендикулярной к плоскости движения стержня xOy :

$$\frac{ml}{2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = N - G, \quad (a)$$

$$\frac{ml^2}{12} \ddot{\varphi} = -N \frac{1}{2} \cos \varphi, \quad \text{или} \quad \frac{ml}{6} \ddot{\varphi} = -N \cos \varphi. \quad (b)$$

Чтобы исключить из этих уравнений $\ddot{\varphi}$ и определить N , умножим уравнение (b) на $-3 \cos \varphi$ и сложим его с уравнением (a). Тогда

получим

$$-\frac{ml}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = N - G + 3N \cos^2 \varphi,$$

откуда

$$N = \frac{G - \frac{ml}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi}{1 + 3 \cos^2 \varphi}.$$

В начальный момент $t_0 = 0$ имеем $\varphi_0 = 45^\circ$ и $\dot{\varphi}_0 = 0$, поэтому

$$N_0 = \frac{G}{1 + 3 \cos^2 45^\circ} = \frac{G}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{2}{5} G.$$

Пример 49. Однородный цилиндр весом G и радиусом r катится без скольжения по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α . Коэффициент сцепления равен $f_{\text{сц}}$. Определить: 1) ускорение движения центра тяжести цилиндра и 2) угол наклона плоскости, при котором начинается скольжение цилиндра, без учета сопротивления качению.

Решение. Движение цилиндра совершается под действием трех внешних сил: веса G , нормальной реакции плоскости N и силы сцепления $F_{\text{сц}}$. Направим оси x и y , как указано на рис 200. Через центр тяжести цилиндра C проведем оси ξ и η и ось ζ , перпендикулярную к плоскости чертежа и направленную к читателю. Момент силы относительно оси $C\xi$ будет положителен, если сила стремится вращать плоскость чертежа вокруг точки C против движения часовой стрелки, и отрицателен — в противоположном случае.

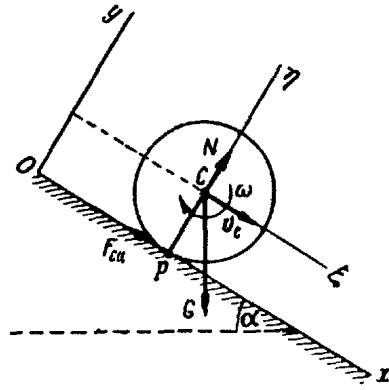


Рис. 200.

Составим дифференциальные уравнения (86.1) плоского движения тела:

$$m \ddot{x}_C = \sum X_i^E = G \sin \alpha - F_{\text{сц}}, \quad (\text{а})$$

$$m \ddot{y}_C = \sum Y_i^E = N - G \cos \alpha, \quad (\text{б})$$

$$J_\zeta \ddot{\varphi} = \sum M_{i\zeta}^E = -F_{\text{сц}} r \quad (\text{в})$$

Так как за все время $y_C = r = \text{const}$, то $\ddot{y}_C = 0$, а потому из уравнения (б)

$$N - G \cos \alpha = 0, \quad \text{откуда} \quad N = G \cos \alpha.$$

Дифференциальные уравнения (а) и (в) содержат три неизвестные величины: \ddot{x}_C , $F_{\text{сц}}$ и $\ddot{\varphi}$. Для определения этих неизвестных к двум составленным уравнениям добавим еще одно уравнение.

Так как цилиндр катится без скольжения, то точка P соприкосновения среднего сечения цилиндра с плоскостью является мгновенным центром скоростей среднего сечения.

Поэтому

$$v_C = |\omega| r. \quad (\text{г})$$

Проекция скорости точки C на ось x :

$$\dot{x}_C = v_C = |\omega| r.$$

Алгебраическая величина угловой скорости $\dot{\varphi}$ отрицательна, так как цилиндр вращается по движению часовой стрелки, т. е.

$$\dot{\varphi} = -|\omega|,$$

где $|\omega|$ — абсолютное значение угловой скорости.

Формулу (г) можно представить в виде

$$\dot{x}_C = -r \dot{\varphi}.$$

Дифференцируя это выражение по t , получаем необходимое для решения задачи четвертое уравнение:

$$\ddot{x}_C = -r \ddot{\varphi}. \quad (\text{д})$$

Из уравнения (д) имеем

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\ddot{x}_C}{r}.$$

Момент инерции цилиндра относительно оси $C\xi$

$$J_\zeta = \frac{mr^2}{2}.$$

Подставив эти значения в уравнение (в), получаем

$$\frac{mr^2}{2} \left(-\frac{\ddot{x}_C}{r} \right) = -F_{\text{сц}} r, \quad \text{или} \quad \frac{m \ddot{x}_C}{2} = F_{\text{сц}}.$$

Решив это уравнение совместно с уравнением (а), найдем \ddot{x}_C и $F_{\text{сц}}$:

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x}_C &= G \sin \alpha - F_{\text{сц}}, \\ \frac{m \ddot{x}_C}{2} &= F_{\text{сц}}, \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{3}{2} m \ddot{x}_C = G \sin \alpha, \quad \text{откуда} \quad \ddot{x}_C = \frac{2}{3} \frac{G}{m} \sin \alpha = \frac{2}{3} g \sin \alpha.$$

$$F_{\text{сц}} = \frac{m \ddot{x}_C}{2} = \frac{1}{3} G \sin \alpha.$$

Полученный результат показывает, что центр тяжести цилиндра движется равноускоренно с ускорением $\omega_C = |\ddot{x}_C| = \frac{2}{3} g \sin \alpha$, не зависящим от веса цилиндра.

Для определения угла наклона плоскости, при котором начинается скольжение цилиндра, воспользуемся известным положением из статики:

$$F_{\text{ск}} \leq F_{\text{ск}}^{\text{max}} = f_{\text{ск}} N.$$

Подставив значения $F_{\text{ск}}$ и N , получаем

$$\frac{1}{3} G \sin \alpha \leq f_{\text{ск}} G \cos \alpha,$$

откуда

$$\text{tg } \alpha \leq 3f_{\text{ск}}.$$

Таким образом, скольжение начнется при $\alpha = \text{arctg } 3f_{\text{ск}}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему о зависимости между кинетическими моментами механической системы относительно неподвижного центра и относительно центра масс системы в векторной форме и в проекциях на оси координат.
2. Как формулируется теорема об изменении кинетического момента механической системы в относительном движении по отношению к центру масс в векторной форме и в проекциях на оси координат?
3. Почему сила тяжести не влияет на изменение кинетического момента механической системы относительно центра масс и относительно любой оси, проходящей через центр масс системы?
4. Почему кинетический момент солнечной системы относительно ее центра масс не изменяется?
5. Какой вид имеют дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела и на основании каких теорем они получены?
6. Каким видом дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела удобно пользоваться, если задана траектория центра масс тела?

ГЛАВА XIV

ДИНАМИКА СФЕРИЧЕСКОГО И СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 88. Кинетические моменты твердого тела относительно неподвижной точки и координатных осей при его сферическом движении

Кинетический момент твердого тела, совершающего сферическое движение, относительно неподвижной точки (рис. 201), определяется по общей формуле (55.1):

$$L_O = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i.$$

Из кинематики известно (§ 116), что скорость \mathbf{v}_i любой точки M_i тела, совершающего сферическое движение, определяется векторным произведением:

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i.$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости тела, направленный по мгновенной оси Ω , а \mathbf{r}_i — радиус-вектор, проведенный в точку M_i из неподвижной точки O . Подставляя это значение \mathbf{v}_i в формулу (55.1), получаем

$$L_O = \sum \mathbf{r}_i \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i). \quad (88.1)$$

Воспользуемся известной формулой двойного векторного произведения:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

Согласно этой формуле выражение (88.1) примет вид

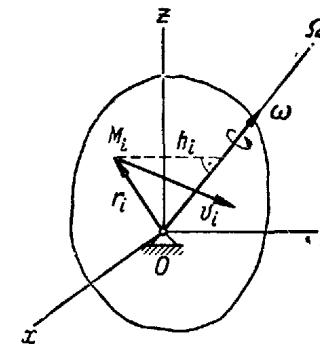


Рис. 201.

$$\begin{aligned} L_O &= \sum m_i \boldsymbol{\omega} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) - \sum m_i \mathbf{r}_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i) = \\ &= \boldsymbol{\omega} \sum m_i r_i^2 - \sum m_i \mathbf{r}_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i). \end{aligned} \quad (88.2)$$

Для определения расстояния от точки до начала координат имеем

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2.$$

Скалярное произведение векторов можно выразить через их проекции на оси координат:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i = \omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i.$$

Пользуясь этими выражениями, получим кинетический момент тела относительно точки O в виде

$$L_O = \boldsymbol{\omega} \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \sum m_i \mathbf{r}_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i). \quad (88.3)$$

Определим кинетический момент тела относительно оси x , проходящей через точку O , как проекцию L_O на ось x :

$$L_x = \omega_x \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \sum m_i x_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i).$$

После соответствующих преобразований

$$L_x = \omega_x \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i z_i x_i.$$

Здесь $\sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = J_x$ — момент инерции тела относительно оси x ;

$\sum m_i x_i y_i = J_{xy}$ — центробежный момент инерции тела относительно осей x и y ;

$\sum m_i z_i x_i = J_{zx}$ — центробежный момент инерции тела относительно осей z и x .

Подставляя эти значения в выражение, определяющее L_x , получаем формулы для вычисления кинетических моментов тела, совер-

шающего сферическое движение относительно оси x и по аналогии относительно осей y и z :

$$\left. \begin{aligned} L_x &= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{zx} \omega_z, \\ L_y &= -J_{xy} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z, \\ L_z &= -J_{zx} \omega_x - J_{yz} \omega_y + J_z \omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (88.4)$$

Если за оси координат приняты главные оси инерции в неподвижной точке O , то центробежные моменты инерции тела относительно этих осей равны нулю, т. е.

$$J_{xy} = 0, \quad J_{yz} = 0, \quad J_{zx} = 0.$$

тогда формулы (88.4) принимают вид

$$L_x = J_x \omega_x, \quad L_y = J_y \omega_y, \quad L_z = J_z \omega_z. \quad (88.5)$$

§ 89. Дифференциальные уравнения сферического движения твердого тела (динамические уравнения Эйлера)

При сферическом движении твердого тела его кинетический момент L_O относительно неподвижной точки O изменяется согласно уравнению (56.1):

$$\frac{dL_O}{dt} = M_O^E.$$

Свяжем с движущимся телом подвижные оси координат ξ, η, ζ , обозначив орты этих осей i_1, j_1, k_1 (рис. 202).

Разложим вектор L_O на составляющие, имеющие направление осей ξ, η, ζ :

$$L_O = i_1 L_\xi + j_1 L_\eta + k_1 L_\zeta. \quad (89.1)$$

Согласно (56.2) проекции L_ξ, L_η, L_ζ вектора L_O на оси ξ, η, ζ представляют собой кинетические моменты тела относительно этих осей. Определим производную $\frac{dL_O}{dt}$, учитывая, что орты i_1, j_1, k_1 — переменные векторы:

$$\frac{dL_O}{dt} = \left(\frac{di_1}{dt} L_\xi + \frac{dj_1}{dt} L_\eta + \frac{dk_1}{dt} L_\zeta \right) + \left(i_1 \frac{dL_\xi}{dt} + j_1 \frac{dL_\eta}{dt} + k_1 \frac{dL_\zeta}{dt} \right). \quad (a)$$

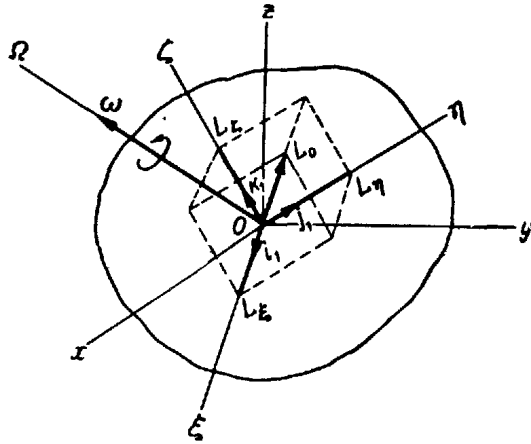


Рис. 202.

Производные ортов i_1, j_1, k_1 по времени можно выразить по формулам из кинематики (§ 124):

$$\frac{di_1}{dt} = \omega \times i_1, \quad \frac{dj_1}{dt} = \omega \times j_1, \quad \frac{dk_1}{dt} = \omega \times k_1.$$

Пользуясь этими формулами, преобразуем первую сумму в правой части равенства (a):

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} L_\xi + \frac{dj_1}{dt} L_\eta + \frac{dk_1}{dt} L_\zeta &= \omega \times i_1 L_\xi + \omega \times j_1 L_\eta + \omega \times k_1 L_\zeta = \\ &= \omega \times (i_1 L_\xi + j_1 L_\eta + k_1 L_\zeta) = \omega \times L_O = \\ &= \begin{vmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ L_\xi & L_\eta & L_\zeta \end{vmatrix} = i_1 (\omega_\eta L_\zeta - \omega_\zeta L_\eta) + j_1 (\omega_\zeta L_\xi - \omega_\xi L_\zeta) + k_1 (\omega_\xi L_\eta - \omega_\eta L_\xi). \end{aligned}$$

Подставив это выражение в равенство (a), получим

$$\begin{aligned} \frac{dL_O}{dt} &= i_1 (\omega_\eta L_\zeta - \omega_\zeta L_\eta) + j_1 (\omega_\zeta L_\xi - \omega_\xi L_\zeta) + \\ &+ k_1 (\omega_\xi L_\eta - \omega_\eta L_\xi) + i_1 \frac{dL_\xi}{dt} + j_1 \frac{dL_\eta}{dt} + k_1 \frac{dL_\zeta}{dt} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dL_O}{dt} &= i_1 \left(\frac{dL_\xi}{dt} + \omega_\eta L_\zeta - \omega_\zeta L_\eta \right) + j_1 \left(\frac{dL_\eta}{dt} + \omega_\zeta L_\xi - \omega_\xi L_\zeta \right) + \\ &+ k_1 \left(\frac{dL_\zeta}{dt} + \omega_\xi L_\eta - \omega_\eta L_\xi \right), \quad (89.2) \end{aligned}$$

где множители при ортах представляют собой проекции вектора $\frac{dL_O}{dt}$ на подвижные оси координат ξ, η, ζ .

Подставив это выражение в равенство (56.1), находим

$$\begin{aligned} i_1 \left(\frac{dL_\xi}{dt} + \omega_\eta L_\zeta - \omega_\zeta L_\eta \right) + j_1 \left(\frac{dL_\eta}{dt} + \omega_\zeta L_\xi - \omega_\xi L_\zeta \right) + \\ + k_1 \left(\frac{dL_\zeta}{dt} + \omega_\xi L_\eta - \omega_\eta L_\xi \right) = M_O^E. \end{aligned}$$

Этому векторному равенству соответствуют три равенства в проекциях на подвижные оси ξ, η, ζ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_\xi}{dt} + (\omega_\eta L_\zeta - \omega_\zeta L_\eta) &= M_\xi^E, \\ \frac{dL_\eta}{dt} + (\omega_\zeta L_\xi - \omega_\xi L_\zeta) &= M_\eta^E, \\ \frac{dL_\zeta}{dt} + (\omega_\xi L_\eta - \omega_\eta L_\xi) &= M_\zeta^E. \end{aligned} \right\} \quad (89.3)$$

Если за подвижные координатные оси приняты главные оси инерции тела в точке O , то кинетические моменты тела относительно этих осей определяются по формулам (88.5):

$$L_\xi = J_\xi \omega_\xi, \quad L_\eta = J_\eta \omega_\eta, \quad L_\zeta = J_\zeta \omega_\zeta.$$

В этом случае уравнения (89.3) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} J_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} + \omega_\eta \omega_\zeta (J_\xi - J_\eta) &= M_\xi^E, \\ J_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} + \omega_\zeta \omega_\xi (J_\eta - J_\zeta) &= M_\eta^E, \\ J_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} + \omega_\xi \omega_\eta (J_\zeta - J_\xi) &= M_\zeta^E, \end{aligned} \right\} \quad (89.4)$$

где J_ξ, J_η, J_ζ — моменты инерции тела относительно его главных осей инерции в точке O ;

$M_\xi^E, M_\eta^E, M_\zeta^E$ — главные моменты внешних сил, приложенные к телу, относительно этих осей;

$\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ — проекции вектора угловой скорости тела ω на оси ξ, η, ζ . Эти проекции можно определить по формулам Эйлера из курса «Кинематика» (§ 130):

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \end{aligned}$$

где ψ, θ, φ — углы Эйлера, определяющие положение тела при сферическом движении (см. ч. I, «Кинематика», § 113).

Дифференциальные уравнения (89.4) сферического движения твердого тела называются *динамическими уравнениями Эйлера*.

Интегрирование динамических уравнений Эйлера связано с большими трудностями. Поэтому исследователи этого вопроса рассматривали лишь частные случаи сферического движения твердого тела. Наиболее существенные результаты по этому вопросу имеются в работах Эйлера, Лагранжа и С. В. Ковалевской. Теория сферического движения твердого тела лежит в основе теории гироскопов, получивших широкое применение в технике.

§ 90. Понятие о гироскопе. Кинетический момент быстро вращающегося гироскопа

Гироскопом называется твердое тело, вращающееся вокруг оси материальной симметрии, одна из точек которой неподвижна.

Положим, что гироскоп имеет неподвижную точку O и ось симметрии $O\xi$ (рис. 203). Если гироскоп вращается вокруг оси $O\xi$ с угловой скоростью ω и положение оси $O\xi$ не изменяется, то вектор

угловой скорости гироскопа ω направлен по оси $O\xi$. Его проекции на подвижные оси координат

$$\omega_\xi = \omega, \quad \omega_\eta = 0, \quad \omega_\zeta = 0.$$

Как установлено в § 39, ось симметрии $O\xi$ является главной осью инерции для всех своих точек, в том числе и для точки O . Поэтому кинетические моменты гироскопа относительно осей ξ, η, ζ определяются по формулам (88.5):

$$L_\xi = J_\xi \omega; \quad L_\eta = 0; \quad L_\zeta = 0,$$

где J_ξ — момент инерции гироскопа относительно оси $O\xi$.

Кинетический момент гироскопа относительно неподвижной точки O

$$L_O = L_\xi = J_\xi \omega.$$

Рассмотрим теперь сложное движение гироскопа, состоящее из вращения вокруг его оси симметрии $O\xi$ с угловой скоростью ω и вращения вместе с этой осью вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω_1 (рис. 204, а).

В этом случае вектор абсолютной угловой скорости гироскопа ω_2 определяется диагональю параллелограмма, построенного на угловых скоростях составляющих вращений:

$$\omega_2 = \omega + \omega_1.$$

Кинетический момент гироскопа L_O относительно точки O можно определить по его проекциям на подвижные оси координат ξ, η, ζ , пользуясь формулами (88.5).

В этом случае направление L_O не совпадает с направлением оси гироскопа ξ . Если угловая скорость вращения гироскопа вокруг его оси симметрии ω во много раз больше угловой скорости вращения самой этой оси ω_1 , то направления векторов ω, ω_2 , а следовательно, L_ξ и L_O , весьма близки между собой.

В дальнейшем, полагая, что угловая скорость ω вращения гироскопа вокруг его оси симметрии во много раз превышает угловую скорость ω_1 вращения самой оси (рис. 204, б), условимся считать

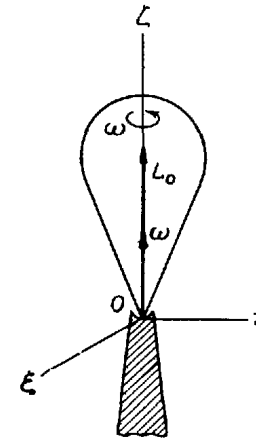


Рис. 203.

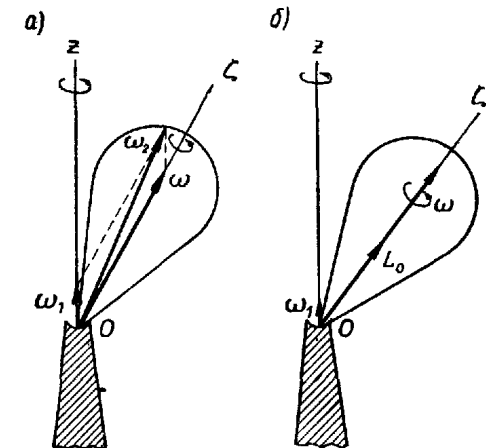


Рис. 204.

кинетический момент гироскопа относительно неподвижной точки O направленным вдоль оси симметрии гироскопа и равным:

$$L_O = J_\zeta \omega. \quad (90.1)$$

На этом условии основана приближенная теория гироскопических явлений, которая изложена в данном курсе.

§ 91. Гироскоп с тремя степенями свободы

Гироскопом с тремя степенями свободы называется гироскоп, движение которого ограничено только наличием одной неподвижной точки.

Положение твердого тела, одна из точек которого неподвижна, можно определить заданием трех эйлеровых углов ψ , θ и ϕ . Из этого следует, что такое тело имеет три степени свободы. Гироскоп с тремя степенями свободы, быстро вращающийся вокруг своей оси, обладает особым физическим свойством — оказывать сопротивление силам, стремящимся сместить его ось. Чтобы обнаружить это свойство, рассмотрим гироскоп, неподвижная точка которого совпадает с его центром тяжести.

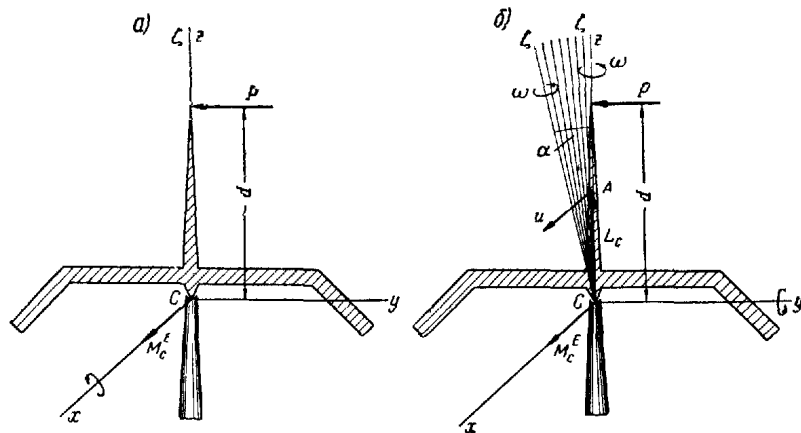


Рис. 205.

На рис. 205, *а, б* показан гироскоп, острие которого совпадает с его центром тяжести C . Острие гироскопа совмещено с неподвижной точкой опоры. Сила тяжести гироскопа в любом его положении уравновешена реакцией опоры.

Рассмотрим действие некоторой силы \mathbf{P} на гироскоп, находящийся в состоянии покоя (рис. 205, *а*), и на гироскоп, вращающийся вокруг своей оси симметрии $C\xi$ с большой угловой скоростью ω (рис. 205, *б*). Положим, что постоянная по модулю сила \mathbf{P} , перпендикулярная к оси симметрии гироскопа, действует на неподвижный гироскоп

(рис. 205, *а*) в течение некоторого промежутка времени. Будем считать, что до действия силы \mathbf{P} ось симметрии гироскопа $C\xi$ совпадает с неподвижной осью Cz и что линия действия силы \mathbf{P} лежит в плоскости yCz .

Очевидно, что под действием силы \mathbf{P} гироскоп начинает вращаться вокруг оси Cx , перпендикулярной к плоскости, проходящей через линию действия силы \mathbf{P} и неподвижную точку C . Главный момент внешних сил, действующих на гироскоп, относительно неподвижной точки C равен лишь моменту силы \mathbf{P} и направлен по оси Cx . Его модуль

$$M_C^E = Pd. \quad (91.1)$$

При наличии постоянного момента M_C^E гироскоп вращается равноускоренно и в течение промежутка времени τ угловая скорость вращения гироскопа вокруг оси Cx возрастает от 0 до ω_1 .

После прекращения действия силы \mathbf{P} гироскоп продолжает вращаться по инерции вокруг оси Cx с постоянной угловой скоростью ω_1 , которую он приобрел под действием силы \mathbf{P} , т. е. ось симметрии гироскопа перемещается в плоскости yCz , в которой была расположена линия действия силы \mathbf{P} .

Действие силы \mathbf{P} на тот же гироскоп, вращающийся вокруг своей оси симметрии с большой угловой скоростью ω (рис. 205, *б*), дает совершенно другой эффект.

Согласно условию (90.1) кинетический момент гироскопа относительно неподвижной точки C направлен по оси симметрии гироскопа $C\xi$ и равен

$$L_C = J_\zeta \omega. \quad (91.2)$$

По теореме Резаля (§ 57) скорость точки A — конца вектора \mathbf{L}_C кинетического момента гироскопа относительно неподвижной точки C — геометрически равна главному моменту внешних сил, приложенных к гироскопу, относительно той же точки, т. е.

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}_C^E, \quad \text{где } M_C^E = Pd.$$

Направление главного момента M_C^E совпадает с направлением оси Cx , перпендикулярной к плоскости, проходящей через центр тяжести C и линию действия силы \mathbf{P} , а потому и скорость \mathbf{u} направлена параллельно оси x .

Из этого следует, что сила \mathbf{P} , параллельная оси Cy , вызывает перемещение оси симметрии гироскопа $C\xi$ в плоскости zCx , т. е. вращение ее вокруг оси Cy , а не вокруг оси Cx , как в случае гироскопа, не вращающегося вокруг своей оси симметрии.

Сопоставляя результаты действия силы \mathbf{P} на гироскоп, находившийся в состоянии покоя, и на гироскоп, вращающийся вокруг своей оси симметрии с большой угловой скоростью, устанавливаем, что смещение оси быстро вращающегося гироскопа происходит

не по направлению силы, а по направлению ее момента, перпендикулярно к направлению силы.

В момент прекращения действия силы \mathbf{P} главный момент внешних сил относительно точки C равняется нулю и в дальнейшем остается равным нулю. Поэтому, начиная с этого момента,

$$u = M_C^E = 0,$$

т. е. точка A , а следовательно, и вся ось симметрии гироскопа мгновенно останавливается.

Начиная с этого момента, гироскоп только вращается с угловой скоростью ω вокруг своей оси симметрии $C\xi$, отклоненной от первоначального положения на угол α .

Таким образом, быстрое вращение сообщает гироскопу способность противодействовать силам, стремящимся изменить направление его оси вращения.

§ 92. Случай регулярной прецессии

В § 91 рассмотрено движение гироскопа с тремя степенями свободы в случае, когда сила тяжести не оказывает влияния на движение гироскопа. Рассмотрим теперь гироскоп, центр тяжести которого не совпадает с точкой опоры. Примером такого гироскопа может служить волчок, опирающийся на неподвижную поверхность острием O , которым оканчивается его ось симметрии (рис. 206).

Положим, что ось симметрии волчка $O\xi$ составляет с неподвижной вертикальной осью Oz угол θ и волчок вращается вокруг оси $O\xi$ с большой угловой скоростью ω .

Кинетический момент волчка относительно неподвижной точки O согласно (90.1) направлен по оси $O\xi$ и

$$L_O = J_\xi \omega.$$

На волчок действуют внешние силы: его вес \mathbf{G} , приложенный в центре тяжести, и реакция опоры O .

Так как момент реакции опоры относительно точки O равен нулю, то главный момент внешних сил относительно этой точки равен моменту силы тяжести \mathbf{G} .

Обозначив $OC = d$, находим

$$M_O^E = Gd \sin \theta.$$

Вектор M_O^E направлен перпендикулярно к вертикальной плоскости $zO\xi$, проходящей через линию действия силы \mathbf{G} и точку O .

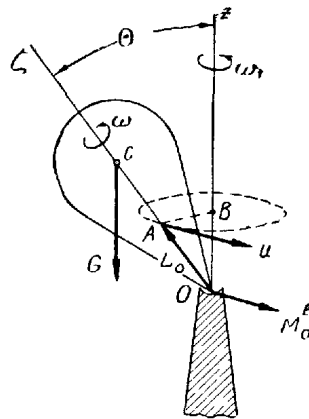


Рис. 206.

По теореме Резаля скорость \mathbf{u} точки A — конца кинетического момента L_O — геометрически равна главному моменту внешних сил M_O^E :

$$\mathbf{u} = M_O^E.$$

Следовательно, скорость \mathbf{u} точки A параллельна вектору M_O^E , т. е. в любой момент времени перпендикулярна к плоскости $zO\xi$.

Из этого вытекает, что ось симметрии волчка $O\xi$ вращается вокруг неподвижной оси Oz с некоторой угловой скоростью ω_1 , описывая коническую поверхность.

Угол θ , составленный осями $O\xi$ и Oz , при этом движении остается постоянным. Это движение, совершаемое осью симметрии волчка, называется *регулярной прецессией*, а угловая скорость ω_1 ее вращения вокруг неподвижной оси Oz называется *угловой скоростью прецессии*. Для ее определения воспользуемся выражением скорости \mathbf{u} .

По теореме Резаля

$$u = M_O^E = Gd \sin \theta.$$

С другой стороны, скорость \mathbf{u} можно рассматривать как вращательную скорость точки A во вращении волчка вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω_1 . Ее модуль: $u = AB\omega_1$, где AB — расстояние от точки A до оси Oz :

$$AB = OA \sin \theta = L_O \sin \theta = J_\xi \omega \sin \theta.$$

Таким образом,

$$u = J_\xi \omega \omega_1 \sin \theta.$$

Приравниваем два выражения, определяющие модуль скорости u :

$$J_\xi \omega \omega_1 \sin \theta = Gd \sin \theta,$$

отсюда

$$\omega_1 = \frac{Gd}{J_\xi \omega}. \quad (92.1)$$

Формула (92.1) показывает, что *угловая скорость прецессии ω_1 тем меньше, чем больше угловая скорость ω вращения волчка вокруг его оси симметрии.*

§ 93. Гироскоп с двумя степенями свободы. Гироскопический момент

Рассмотрим теперь гироскоп с двумя степенями свободы. Этот гироскоп представляет собой маховик (рис. 207, а), ось симметрии которого DE опирается на подпятники, укрепленные в подвижной раме. Рама может вращаться вокруг неподвижной оси AB , проходящей через центр тяжести C маховика. Положение гироскопа определяется двумя величинами: углом поворота маховика вокруг его оси DE и углом поворота рамы вокруг оси AB , т. е. гироскоп имеет две степени свободы. Положим, что маховик вращается вокруг своей

оси симметрии $C\zeta$ с большой угловой скоростью ω , а рама, несущая подпятники D и E , неподвижна. Если смотреть от точки E к точке C , видно вращение маховика происходящим против движения часовой стрелки. Тогда кинетический момент маховика относительно точки C направлен от точки C к точке E и имеет модуль $L_C = J_C \omega$.

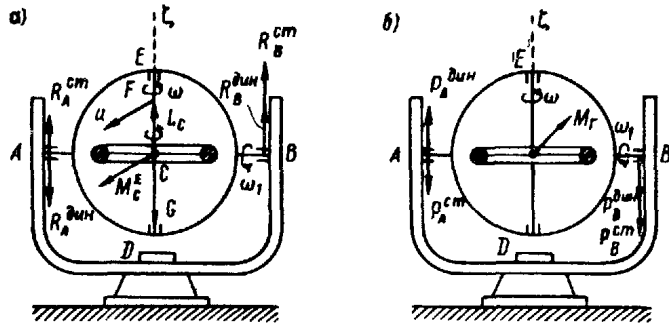


Рис. 207.

Предположим теперь, что раме сообщено вращение вокруг оси AB с небольшой угловой скоростью ω_1 и что это вращение происходит против движения часовой стрелки, если смотреть от точки B к точке C .

В этом случае точка F — конец вектора кинетического момента маховика L_C — имеет вращательную скорость u , направленную в сторону вращения рамы и равную по модулю

$$u = L_C \omega_1 = J_C \omega \omega_1. \quad (93.1)$$

Определим, какие внешние силы действуют на раму при этом вращении.

По теореме Резаля главный момент внешних сил M_C^E относительно точки C геометрически равен скорости u . На раму с укрепленным в ней маховиком действуют внешние силы: сила тяжести G гироскопа и реакции подшипников A и B , в которых находится ось рамы. Сила тяжести G , приложенная в точке C , не имеет относительно нее момента, и следовательно, главный момент внешних сил M_C^E представляет собой суммарный момент реакций подшипников.

Так как при вращении рамы центр тяжести гироскопа остается неподвижным, то согласно уравнению (43.1) главный вектор внешних сил равен нулю.

Отсюда следует, что внешние силы, приложенные к гироскопу, приводятся к паре сил с моментом M_C^E .

Реакции подшипников A и B складываются из статических и динамических реакций (рис. 207, а). Статические реакции, уравновешивающие силу тяжести G , постоянны по модулю и направлению

и вследствие симметрии

$$R_A^{ст} = R_B^{ст} = \frac{G}{2}.$$

Динамические реакции составляют пару сил с моментом M_C^E . Плоскость пары перпендикулярна к моменту M_C^E и, следовательно, совпадает с плоскостью, определяемой осями AB и DE . На рис. 207, а эта плоскость вертикальна и в соответствии с направлением момента M_C^E силы пары направлены: $R_B^{дин}$ — вверх и $R_A^{дин}$ — вниз. При вращении рамы плоскость пары сил ($R_A^{дин}$, $R_B^{дин}$) поворачивается вместе с рамой. Зная расстояние между подшипниками, т. е. плечо пары сил AB , можно определить модули динамических реакций подшипников.

Пользуясь теоремой Резаля и формулой (93.1), получаем

$$M_C^E = u = J_C \omega \omega_1,$$

тогда динамические реакции подшипников

$$R_A^{дин} = R_B^{дин} = \frac{J_C \omega \omega_1}{AB}. \quad (93.2)$$

Статическая и динамическая реакции в каждой точке складываются геометрически. При вертикальном положении плоскости пары ($R_A^{дин}$, $R_B^{дин}$) линии действия статических и динамических реакций совпадают. В этот момент одна из полных реакций подшипников имеет минимальное значение, а другая — максимальное:

$$\left. \begin{aligned} R_{A_{\min}} &= R_A^{ст} - R_A^{дин} = \frac{G}{2} - \frac{J_C \omega \omega_1}{AB}, \\ R_{B_{\max}} &= R_B^{ст} + R_B^{дин} = \frac{G}{2} + \frac{J_C \omega \omega_1}{AB}. \end{aligned} \right\} \quad (93.3)$$

По закону равенства действия и противодействия устанавливаем, что действие рамы на подшипники выражается также парой сил. Момент пары сил, приложенной к подшипникам, равен по модулю M_C^E , но направлен в противоположную сторону. Этот момент называют *гироскопическим*.

Обозначив его M_r , получим

$$M_r = -M_C^E. \quad (93.4)$$

Появление гироскопического момента называется *гироскопическим эффектом*.

На рис. 207, б показаны гироскопический момент M_r и соответствующая ему пара сил ($R_A^{дин}$, $R_B^{дин}$), приложенная к подшипникам. Таким образом, при вращении рамы гироскопа подшипники испытывают, кроме статических давлений $R_A^{ст}$ и $R_B^{ст}$, динамические давления $R_A^{дин}$ и $R_B^{дин}$. Давления рамы на подшипники противоположны по

направлению соответствующим реакциям подшипников и равны им по модулю, т е

$$P_A^{ст} = -R_A^{ст}, \quad P_B^{ст} = -R_B^{ст}; \quad P_A^{ст} = P_B^{ст} = \frac{G}{2},$$

$$P_A^{дин} = -R_A^{дин}; \quad P_B^{дин} = -R_B^{дин}; \quad P_A^{дин} = P_B^{дин} = \frac{J_{z_{\text{центр}}} \omega_1}{AB}.$$

Полное давление на каждый подшипник равно геометрической сумме статического и динамического давлений

Появление динамических давлений на подшипники обусловлено действием сил инерции гироскопа на опоры

Гироскопический момент представляет собой момент пары, составленной силами инерции гироскопа

Гироскопический эффект в той или иной форме проявляется всегда, когда изменяется направление оси быстро вращающегося гироскопа

В § 91 для гироскопа с тремя степенями свободы установлено, что под действием приложенной силы его ось поворачивается в плоскости, перпендикулярной к силе. Предположим, что на гироскоп, изображенный на рис 207, а, б, действует в течение малого промежутка времени τ сила, имеющая направление скорости u . При наличии трех степеней свободы ось гироскопа DE повернулась бы в плоскости рамы вокруг точки C по движению часовой стрелки. Опоры гироскопа с двумя степенями свободы этого перемещения не допускают. При этом они испытывают давление в виде пары $(P_A^{дин}, P_B^{дин})$, стремящейся повернуть плоскость рамы по движению часовой стрелки, а рама гироскопа в результате действия приложенной силы начинает и продолжает вращаться вокруг оси AB , как указано на рис 207, а

Следовательно, гироскоп с двумя степенями свободы не обладает способностью противодействовать изменению направления его оси вращения

Гироскопы получили широкое применение в различных областях техники: на транспорте, в морском флоте, в авиации, в военном деле и проч

Так, например, гироскопический эффект используется при езде на велосипеде

Гироскопические устройства обеспечивают также устойчивость движения двухколесного автомобиля и вагона однорельсовой железной дороги

С помощью гироскопических устройств направляются по заданному курсу движения судов в открытом море и совершаются слепые полеты самолетов

Гироскопические приборы используются для управления полетом баллистической ракеты и обеспечивают движение в заданном направлении торпеды.

Для того чтобы обеспечить пуле и снаряду устойчивость в полете, ствол винтовки и орудия снабжают винтовой нарезкой. Тогда при выходе из ствола пуля и снаряд получают быстрое вращение вокруг продольной оси и приобретают свойства быстро вращающегося гироскопа, обеспечивающие их устойчивость в полете*.

§ 94. Примеры гироскопических явлений

Пример 50. Велосипедное колесо весом G свободно насажено на ось BC длиной l (рис. 208). Момент инерции колеса относительно оси BC равен J . Колесу сообщили быстрое вращение с угловой скоростью ω вокруг этой оси, расположенной горизонтально, и закрепили только точку B .

Определить движение колеса, пренебрегая весом оси.

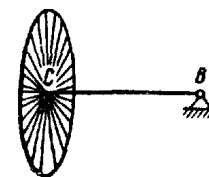


Рис 208.

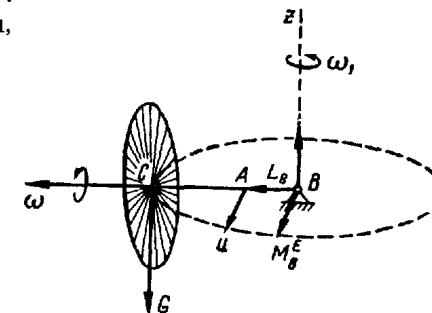


Рис. 209.

Решение. Так как неподвижной является только точка B , то вращающееся колесо представляет собой гироскоп с тремя степенями свободы. Положим, что колесо вращается вокруг оси BC против движения часовой стрелки, если смотреть от точки C к точке B . Кинетический момент гироскопа относительно точки B имеет направление, указанное на рис. 209, и модуль

$$L_B = J\omega.$$

Главный момент внешних сил относительно точки B равен моменту силы тяжести колеса G , так как реакция опоры B момента не имеет:

$$M_B^E = G \cdot BD = Gl.$$

Момент M_B^E направлен перпендикулярно к вертикальной плоскости, проходящей через линию действия силы G и неподвижную точку B , причем, смотря ему навстречу, можно видеть силу G вращающей эту плоскость против движения часовой стрелки.

* Применение гироскопов в технике изложено в книге Е. Л. Николаи. Гироскоп и некоторые его технические применения, Гостехиздат, 1947.

На основании теоремы Резаля

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}_B^E,$$

откуда

$$u = M_B^E = Gl.$$

Скорость \mathbf{u} точки A — конца вектора \mathbf{L}_B — имеет направление главного момента внешних сил \mathbf{M}_B^E . Следовательно, ось колеса BC поворачивается вокруг вертикальной оси Bz и центр тяжести колеса C описывает окружность в горизонтальной плоскости. Чтобы найти угловую скорость этой прецессии ω_1 , представим скорость \mathbf{u} как вращательную скорость точки A :

$$u = L_B \omega_1 = J \omega \omega_1.$$

Приравняв два значения u , получаем

$$Gl = J \omega \omega_1,$$

откуда определяется угловая скорость прецессии:

$$\omega_1 = \frac{Gl}{J \omega}.$$

Прецессия имеет место потому, что центр тяжести колеса C не совпадает с точкой опоры B .

Пример 51. Ротор быстроходной турбины, ось которой совпадает с продольной осью корабля, имеет вес $G = 39,2 \text{ кн}$, радиус инерции относительно оси вращения $0,75 \text{ м}$ и угловую скорость $n = 3000 \text{ об/мин}$. Определить максимальные гироскопические давления турбины на подшипники при килевой качке с амплитудой $\varphi_0 = 5^\circ$ и периодом $T = 12 \text{ сек}$, если расстояние между подшипниками $AB = 2 \text{ м}$.

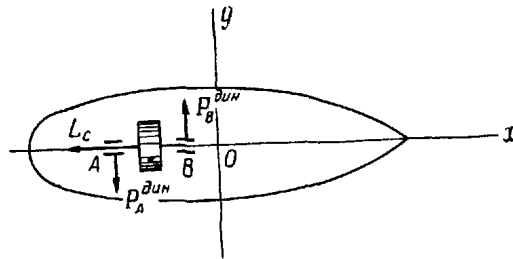


Рис. 210.

Решение. Обозначим продольную и поперечную оси судна Ox и Oy (рис. 210). Определим кинетический момент ротора турбины, вращающегося вокруг оси Ox , относительно его центра тяжести C :

$$L_C = J_{Cx} \omega = \frac{G}{g} r_x^2 \frac{\pi n}{30} = \frac{39\,200}{9,81} \cdot 0,75^2 \cdot \frac{3,14 \cdot 3000}{30} = 706\,500 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{сек}.$$

Килевая качка представляет собой качание судна вокруг поперечной оси Oy .

Положим, что это качание происходит по гармоническому закону:

$$\varphi = \varphi_0 \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Угловая скорость вращения корпуса судна вокруг оси y :

$$\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \varphi_0 \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Наибольший модуль угловой скорости ω_1 , соответствует значениям $\cos \frac{2\pi}{T} t = \pm 1$:

$$\omega_{1\max} = \frac{2\pi\varphi_0}{T} = \frac{2\pi \cdot \frac{\pi}{36}}{18 \cdot 12} = \frac{9,86}{18 \cdot 12} = 0,046 \text{ сек}^{-1}.$$

Положим, что нос судна поднимается, а корма опускается. Тогда вращательная скорость \mathbf{u} конца вектора \mathbf{L}_C направлена вертикально вниз и равна

$$u = L_C \omega_1.$$

Согласно теореме Резаля момент пары, составленной реакциями подшипников и приложенной к ротору турбины, направлен так же, как и скорость \mathbf{u} — вертикально вниз

$$M_C^E = u = L_C \omega_1.$$

Гироскопический момент, т. е. момент пары, приложенной к подшипникам, определяется согласно (93.4):

$$M_r = -M_C^E,$$

т. е. гироскопический момент направлен вертикально вверх

$$M_r = M_C^E = L_C \omega_1.$$

Пара $(P_A^{\text{дин}}, P_B^{\text{дин}})$, составленная динамическими давлениями ротора на подшипники, лежит в горизонтальной плоскости, а силы $P_A^{\text{дин}}$ и $P_B^{\text{дин}}$ имеют направления, указанные на рис. 209.

Определяем эти силы:

$$P_A^{\text{дин}} = P_B^{\text{дин}} = \frac{M_r}{AB} = \frac{L_C \omega_1}{AB}.$$

Максимальные гироскопические давления ротора на подшипники равны:

$$P_{A\max}^{\text{дин}} = P_{B\max}^{\text{дин}} = \frac{L_C \omega_{1\max}}{AB} = \frac{706\,500 \cdot 0,046}{2} = 16\,250 \text{ н} = 16,25 \text{ кн}.$$

При движении кормы вверх динамические давления ротора на подшипники имеют направления, противоположные указанным на рис. 210.

§ 95. Дифференциальные уравнения движения свободного твердого тела

Движение свободного твердого тела можно рассматривать как совокупность двух его движений: поступательного вместе с центром масс и сферического вокруг центра масс.

Рассмотрим свободное тело, движущееся под действием внешних сил $P_1^E, P_2^E, \dots, P_n^E$ (рис. 211).

Проведем через центр масс тела оси ξ, η, ζ , неизменно связанные с движущимся телом, направив их по главным центральным осям инерции тела, а также оси x_1, y_1, z_1 , движущиеся поступательно, т. е. остающиеся параллельными неподвижным осям x, y, z . Дифференциальные уравнения поступательного движения тела вместе с центром масс получаются на основе теоремы о движении центра масс системы.

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_C &= \sum X_i^E = X^E, \\ m\ddot{y}_C &= \sum Y_i^E = Y^E, \\ m\ddot{z}_C &= \sum Z_i^E = Z^E, \end{aligned} \right\} \quad (95.1)$$

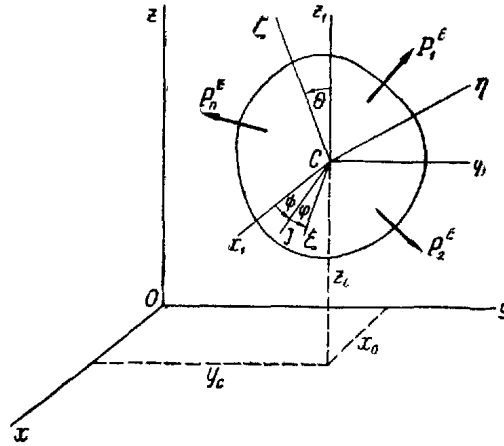


Рис. 211.

Здесь m — масса тела;
 x_C, y_C, z_C — координаты центра масс тела;
 X^E, Y^E, Z^E — проекции главного вектора внешних сил, приложенных к телу, на неподвижные координатные оси x, y, z .

Сферическое движение твердого тела вокруг центра масс представляет собой движение тела по отношению к системе осей $Cx_1y_1z_1$. Это движение определяется динамическими уравнениями Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} J_\xi \cdot \frac{d\omega_\xi}{dt} + \omega_\eta\omega_\zeta (J_\zeta - J_\eta) &= \sum M_{i\xi}^E = M_\xi^E, \\ J_\eta \cdot \frac{d\omega_\eta}{dt} + \omega_\zeta\omega_\xi (J_\xi - J_\zeta) &= \sum M_{i\eta}^E = M_\eta^E, \\ J_\zeta \cdot \frac{d\omega_\zeta}{dt} + \omega_\xi\omega_\eta (J_\eta - J_\xi) &= \sum M_{i\zeta}^E = M_\zeta^E. \end{aligned} \right\} \quad (95.2)$$

Здесь J_ξ, J_η, J_ζ — моменты инерции тела относительно главных центральных осей инерции ξ, η, ζ ;
 $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ — проекции вектора угловой скорости тела на оси ξ, η, ζ , неизменно связанные с телом;
 $M_\xi^E, M_\eta^E, M_\zeta^E$ — главные моменты внешних сил, приложенных к телу, относительно осей ξ, η, ζ .

Уравнения (95.1) и (95.2) составляют шесть дифференциальных уравнений движения свободного твердого тела.

Выразив проекции угловой скорости $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ через эйлеровы углы ψ, θ, φ и их производные по времени (см. ч. I, «Кинематика»,

§130), получим шесть дифференциальных уравнений второго порядка. Интегрирование этих уравнений даст шесть уравнений движения свободного твердого тела.

$$\begin{aligned} x_C &= f_1(t), & \psi &= f_4(t), \\ y_C &= f_2(t), & \theta &= f_5(t), \\ z_C &= f_3(t), & \varphi &= f_6(t). \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования определяются по начальным условиям движения. Как указывалось выше, интегрирование последних трех уравнений связано с большими трудностями.

Установим условие, при котором движение твердого тела является поступательным. При поступательном движении сферического движения тела вокруг центра масс не происходит, и кинетический момент его относительно центра масс все время равен нулю:

$$L_{Cr} = \text{const} = 0.$$

Согласно следствию из теоремы о кинетическом моменте системы, в относительном движении по отношению к центру масс имеем: если $L_{Cr} = \text{const}$, то

$$M_C^E = 0,$$

Таким образом, для того чтобы твердое тело двигалось поступательно, необходимо, чтобы в начальный момент движения кинетический момент тела относительно центра масс был равен нулю и главный момент внешних сил относительно центра масс тела все время оставался равным нулю.

Вопросы для самоконтроля

1. По каким формулам вычисляются кинетические моменты твердого тела относительно неподвижной точки и относительно координатных осей при его сферическом движении?
2. Чему равны кинетические моменты твердого тела относительно главных осей инерции, проведенных из неподвижной точки тела, при его сферическом движении?
3. Какой вид имеют динамические уравнения Эйлера?
4. Какое твердое тело называют гироскопом?
5. Чему равен и как направлен кинетический момент быстро вращающегося гироскопа относительно неподвижной точки?
6. Какими физическими свойствами обладает быстро вращающийся гироскоп с тремя степенями свободы?
7. Какой эффект производит действие одной и той же силы, приложенной к оси неподвижного и быстро вращающегося гироскопа с тремя степенями свободы?
8. Выведите формулу для вычисления угловой скорости прецессии оси гироскопа.
9. В чем состоит разница в свойствах гироскопов с двумя и тремя степенями свободы?
10. Какова физическая сущность гироскопического эффекта и при каких условиях он наблюдается?

11. По каким формулам определяются динамические реакции подшипников, в которых вращается рама вращающегося гироскопа с двумя степенями свободы?

12. Каковы дифференциальные уравнения движения свободного твердого тела?

13. При каких условиях движение свободного твердого тела является поступательным?

ГЛАВА XV

ТЕОРИЯ УДАРА

§ 96. Явление удара

Движение твердого тела, происходящее под действием обычных сил, характеризуется непрерывным изменением модулей и направлений скоростей его точек. Однако встречаются случаи, когда скорости точек тела, а следовательно, и количество движения твердого тела, за ничтожно малый промежуток времени получают конечные изменения.

Явление, при котором за ничтожно малый промежуток времени скорости точек тела изменяются на конечную величину, называется ударом.

Примерами этого явления могут служить: удар мяча о стену, удар кия о бильярдный шар, удар молота о болванку, лежащую на наковальне, удар бабы копра о сваю и ряд других случаев.

Конечное изменение количества движения твердого тела или материальной точки за ничтожно малый промежуток времени удара происходит потому, что модули сил, которые развиваются при ударе, весьма велики, вследствие чего импульсы этих сил за время удара являются конечными величинами.

Такие силы называются *мгновенными или ударными*.

§ 97. Действие ударной силы на материальную точку

Рассмотрим материальную точку M (рис. 212), движущуюся под действием приложенных к ней сил. Равнодействующую этих сил (конечной величины) обозначим P_K . Положим, что в некоторый момент t_1 на точку M , занимавшую положение B , дополнительно начала действовать ударная сила P , прекратившая свое действие в момент $t_2 = t_1 + \tau$, где τ — время удара.

Определим изменение количества движения материальной точки за промежуток времени τ . Обозначим S и S_K импульсы сил P и P_K , действовавшие на точку за время τ .

По теореме изменения количества движения материальной точки имеем:

$$mv_2 - mv_1 = S + S_K \quad (a)$$

Импульс S_K силы P_K за ничтожно малый промежуток времени τ будет величиной того же порядка малости, что и τ . Импульс же S

ударной силы P за это время является величиной конечной. Поэтому импульсом S_K (по сравнению с импульсом S) можно пренебречь.

Тогда уравнение (a) примет вид

$$mv_2 - mv_1 = S \quad (97.1)$$

или

$$v_2 - v_1 = \frac{S}{m}. \quad (97.2)$$

Уравнение (97.2) показывает, что скорость v_2 отличается от скорости v_1 на конечную величину $\frac{S}{m}$. Ввиду того, что продолжительность удара τ ничтожно мала, а скорость точки в течение этого промежутка времени имеет конечную величину, перемещение точки за время удара весьма мало и им можно пренебречь.

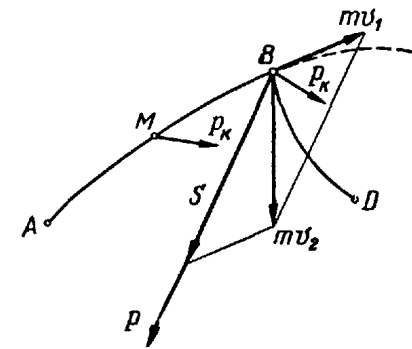


Рис. 212.

В положении B точка получает конечное изменение скорости от v_1 до v_2 . Поэтому в положении B , где действовала ударная сила, происходит резкое изменение траектории точки ABD . После прекращения действия ударной силы точка движется снова под действием равнодействующей P_K (на участке BD).

Таким образом, можно сделать следующие выводы о действии ударной силы на материальную точку:

- 1) действием не мгновенных сил за время удара можно пренебречь;
- 2) перемещение материальной точки за время удара можно не учитывать;
- 3) результат действия ударной силы на материальную точку выражается в конечном изменении за время удара вектора ее скорости, определяемом уравнением (97.2)

§ 98. Теорема об изменении количества движения механической системы при ударе

Положим, что к точкам механической системы одновременно приложены ударные импульсы. Определим вызванное ими изменение количества движения рассматриваемой системы. На основании § 97 действием на точки конечных сил за время удара будем пренебречь. Разделим ударные силы, действующие на каждую точку M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) механической системы, на внешние и внутренние силы.

Обозначим равнодействующие внешних и внутренних ударных импульсов, приложенных к каждой точке, S_i^E и S_i^I .

Обозначим скорости каждой точки M_i системы в момент начала действия ударных сил \mathbf{v}_i , а момент окончания их действия \mathbf{u}_i .

Тогда для каждой точки M_i системы уравнение (97.1) будет иметь вид:

$$m_i(\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i) = \mathbf{S}_i^E + \mathbf{S}_i^J \quad i = 1, 2, \dots, n).$$

Суммируя составленные n уравнений, получаем

$$\sum m_i \mathbf{u}_i - \sum m_i \mathbf{v}_i = \sum \mathbf{S}_i^E + \sum \mathbf{S}_i^J.$$

Здесь $\sum m_i \mathbf{u}_i = \mathbf{K}$ — количество движения механической системы в момент окончания действия ударных сил;

$\sum m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{K}_0$ — количество движения механической системы в момент начала действия ударных сил.

По свойству внутренних сил

$$\sum \mathbf{S}_i^J = 0;$$

следовательно,

$$\mathbf{K} - \mathbf{K}_0 = \sum \mathbf{S}_i^E. \quad (98.1)$$

Уравнение (98.1) выражает теорему об изменении количества движения механической системы при ударе: *изменение количества движения механической системы за время удара равно геометрической сумме всех внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы.*

Векторному уравнению (98.1) соответствуют три уравнения в проекциях на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} K_x - K_{x0} &= \sum S_{ix}^E, \\ K_y - K_{y0} &= \sum S_{iy}^E, \\ K_z - K_{z0} &= \sum S_{iz}^E. \end{aligned} \right\} \quad (98.2)$$

Эти уравнения показывают, что *изменение проекции количества движения системы на любую ось равно сумме проекций на ту же ось всех внешних ударных импульсов, приложенных к системе.*

Количество движения механической системы можно выразить через массу всей системы m и скорости центра масс системы \mathbf{v}_C и \mathbf{u}_C по формулам:

$$\mathbf{K} = m\mathbf{u}_C \quad \text{и} \quad \mathbf{K}_0 = m\mathbf{v}_C.$$

Подставив эти значения в уравнение (98.1), получим

$$m\mathbf{u}_C - m\mathbf{v}_C = \sum \mathbf{S}_i^E. \quad (98.3)$$

Уравнение (98.3) определяет изменение скорости центра масс системы при ударе.

Векторному уравнению (98.3) соответствуют три уравнения в проекциях на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} m u_{Cx} - m v_{Cx} &= \sum S_{ix}^E, \\ m u_{Cy} - m v_{Cy} &= \sum S_{iy}^E, \\ m u_{Cz} - m v_{Cz} &= \sum S_{iz}^E. \end{aligned} \right\} \quad (98.4)$$

Эти уравнения определяют изменение проекции скорости центра масс на любую ось при ударе.

Из уравнений (98.1) и (98.2), при отсутствии внешних ударных импульсов,

$$\sum \mathbf{S}_i^E = 0, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_0; \quad \mathbf{u}_C = \mathbf{v}_C,$$

т. е. *при действии на механическую систему лишь внутренних ударных импульсов количество движения системы не изменяется.*

Таким образом, удары, возникающие при столкновении тел, входящих в одну механическую систему, не могут вызвать изменения количества движения системы, т. е. скорости движения ее центра масс.

§ 99. Удар шара о неподвижную поверхность. Коэффициент восстановления при ударе

Положим, что шар массой m движется поступательно и скорость его центра \mathbf{v} направлена по нормали к неподвижной массивной поверхности в некоторой ее точке A (рис. 213, а).

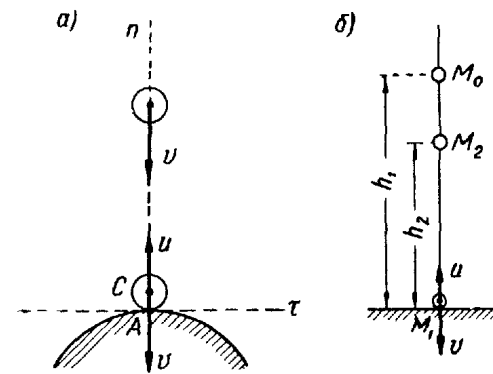


Рис. 213.

В момент времени t , когда шар достигает этой поверхности, происходит удар, называемый прямым.

Различают две фазы этого удара. В течение первой фазы удара шар деформируется до тех пор, пока скорость его не станет равной нулю. Ничтожно малый промежуток времени, в течение которого происходит деформация, обозначим τ_1 . Во время этой фазы начальная кинетическая энергия шара пере-

ходит в потенциальную энергию сил упругости деформированного тела и частично расходуется на нагревание тела.

В течение второй фазы удара под действием сил упругости шар частично восстанавливает свою первоначальную форму. Ничтожно малый промежуток времени, в течение которого происходит восстановление, обозначим τ_2 .

Из-за остаточных деформаций и нагревания шара первоначальная кинетическая энергия шара полностью не восстанавливается. Поэтому шар отделяется от поверхности со скоростью u , модуль которой меньше модуля его скорости до удара v .

Отношение модуля скорости шара в конце удара к модулю его скорости в начале удара при прямом ударе шара о неподвижную поверхность называется *коэффициентом восстановления при ударе*.

$$k = \frac{u}{v}. \quad (99.1)$$

Значения коэффициента восстановления для различных материалов определяются опытным путем.

В расчетах обычно принимают коэффициент восстановления зависящим лишь от материала соударяющихся тел, однако опыты показывают, что коэффициент восстановления зависит также от формы соударяющихся тел и соотношения их масс.

Коэффициент восстановления можно определить при помощи следующего простого опыта (рис. 213, б). Шарик из испытуемого материала дают возможность падать без начальной скорости с высоты h_1 на массивную горизонтальную плиту из того же или другого испытуемого материала и определяют высоту h_2 , на которую он поднимается после удара.

Применяя к движению шарика под действием силы тяжести на участке M_0M_1 теорему об изменении кинетической энергии, можно определить скорость шарика в начале удара:

$$v = \sqrt{2gh_1}.$$

По той же теореме для участка M_1M_2 можно определить его скорость в конце удара:

$$u = \sqrt{2gh_2}.$$

Подставив значения v и u в формулу (99.1), можно определить коэффициент восстановления:

$$k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \quad (99.2)$$

Совершенно очевидно, что

$$0 \leq k \leq 1.$$

Например, для стекла коэффициент восстановления принимается равным $^{15}/_{16}$, для слоновой кости— $^8/9$, для стали— $^5/9$, для дерева— $^1/2$.

В случае неупругого удара явление удара заканчивается одной первой фазой. В этом случае $u=0$ и $k=0$. При абсолютно упругом ударе $u=v$ и $k=1$. В этом случае происходит полное восстановление формы шара.

Коэффициенту восстановления при ударе можно дать и другую физическую интерпретацию.

Обозначим N_I переменную ударную реакцию гладкой поверхности, действующую на шарик в течение первой фазы, а N_{II} —в течение второй фазы. Тогда модули импульсов этой силы, соответствующие первой и второй фазам удара, будут:

$$S_I = \int_t^{t+\tau_1} N_I dt; \quad S_{II} = \int_{t+\tau_1}^{t+\tau_1+\tau_2} N_{II} dt.$$

Воспользуемся для первой и второй фаз удара теоремой об изменении количества движения материальной точки (§ 48).

Теорему применим в проекциях на нормаль к поверхности, направленную вертикально вверх (рис. 214), учитывая, что скорость шарика в конце первой и в начале второй фазы равна нулю:

$$0 - mv_n = S_{In}, \\ mu_n - 0 = S_{II n}.$$

Представив значения проекций в виде $v_n = -v$; $u_n = u$, $S_{In} = S_I$; $S_{II n} = S_{II}$, получим

$$mv = S_I; \quad mu = S_{II}.$$

Найдем отношение модулей импульсов:

$$\frac{S_{II}}{S_I} = \frac{mu}{mv} = \frac{u}{v} = k. \quad (99.3)$$

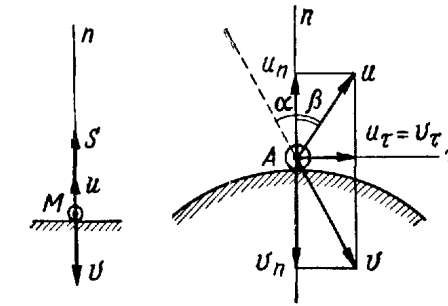


Рис 214.

Рис. 215

Таким образом, *отношение модулей импульсов ударной реакции гладкой поверхности за вторую и первую фазы удара равно коэффициенту восстановления при ударе*.

Если $k=1$, то $S_{II}=S_I$ и $u=v$.

Рассмотрим теперь удар шара о неподвижную гладкую поверхность в случае, когда скорость его центра v образует с нормалью к поверхности угол падения α (рис. 215). Определим скорость u , с которой он отскакивает от этой поверхности и угол отражения β , составленный скоростью u и нормалью к поверхности. Для этого проведем через нормаль к поверхности и вектор скорости центра шара v плоскость, совместив ее с плоскостью чертежа. Спроектируем вектор скорости v на нормаль и касательную в этой плоскости. При отсутствии трения реакция поверхности направлена по нормали и ее проекция на касательную At равна нулю. На основании теоремы о проекции количества движения

$$mu_\tau - mv_\tau = 0, \quad \text{или} \quad u_\tau = v_\tau.$$

Изменение нормальной составляющей скорости при ударе происходит согласно формуле (99.1):

$$k = \frac{|u_n|}{|v_n|}, \quad (99.4)$$

откуда

$$|u_n| = k |v_n|,$$

где $|u_n|$ и $|v_n|$ — абсолютные значения проекций скоростей u и v на нормаль.

Модуль скорости центра шара u после удара

$$u = \sqrt{u_\tau^2 + u_n^2} = \sqrt{v_\tau^2 + k^2 v_n^2} = \sqrt{(v \sin \alpha)^2 + (k v \cos \alpha)^2} = v \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha}. \quad (99.5)$$

Найдем связь между углом падения шара α и углом отражения β . По рис. 215

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_\tau}{|v_n|}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{u_\tau}{|u_n|} = \frac{v_\tau}{k |v_n|} = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha. \quad (99.6)$$

Так как $k < 1$, то $\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha$ и $\beta > \alpha$, т. е. *угол отражения больше угла падения*

В случае абсолютно упругого удара: $k = 1$, $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$ и $\beta = \alpha$, т. е. *угол отражения равен углу падения*.

§ 100. Прямой центральный удар двух тел

Предположим, что при поступательном и прямолинейном движениях двух тел их центры тяжести C_1 и C_2 движутся вдоль одной и той же прямой со скоростями v_1 и v_2 . Пусть масса первого тела равна m_1 , а масса второго — m_2 .

Если второе тело находится впереди и $v_1 > v_2$, то в некоторый момент первое тело нагонит второе и произойдет удар этих тел.

На рис. 216, а изображен удар двух шаров, при котором скорости центров тел в начале удара направлены по общей нормали к поверхностям этих тел в точке их соприкосновения.

Удар, происходящий при этом условии, называется *прямым центральным ударом двух тел*

Определим, пользуясь теоремой импульсов, скорости этих тел после удара.

От момента t соприкосновения тел происходит смятие тел до тех пор, пока их скорости не сравняются между собой. Общую скорость тел в момент наибольшей деформации $t_1 = t + \tau_1$ обозначим u . Если соударяющиеся тела совершенно лишены упругости, т. е. удар является неупругим, то, начиная с этого момента, они движутся как одно целое, не отделяясь друг от друга.

Удар упругих тел, или *упругий удар*, не заканчивается в момент, когда скорости соударяющихся тел становятся равными. Начиная с этого момента, происходит восстановление первоначальной формы тел за счет накопившейся в них потенциальной энергии упругой

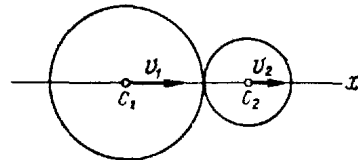


Рис. 216, а.

деформации. В некоторый момент времени $t_2 = t_1 + \tau_2$ тела отделяются друг от друга, имея различные скорости u_1 и u_2 , направленные так же, как и скорости v_1 и v_2 , по общей нормали к поверхностям соударяющихся тел в точке касания. Рассмотрим сначала первую фазу удара от момента t до момента их наибольшей деформации $t + \tau_1$.

Проведем ось x по общей нормали к поверхностям соударяющихся тел в точке их касания, направив эту ось в сторону движения тел до удара.

Условимся обозначать v_1, v_2, u_1, u_2 не абсолютные величины скоростей тел в начале и в конце удара, а алгебраические величины, равные проекциям этих скоростей на ось x . В течение первой фазы продолжительностью τ_1 к телам приложены взаимные ударные реакции, равные по модулю и направленные по оси x в противоположные стороны (рис. 216, б). Импульс ударной реакции, действующей на первое тело, S_1 направлен в сторону, обратную направлению оси x , а импульс реакции, приложенной ко второму телу S'_1 имеет направление оси x . Модули импульсов равны:

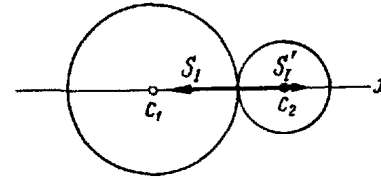


Рис. 216, б.

$$S_1 = S'_1.$$

Силы взаимодействия соударяющихся тел являются для рассматриваемой системы тел внутренними силами. Согласно уравнению (98.1) количество движения системы при ударе не изменяется.

Приравняем значения проекций на ось x количества движения системы тел в начале удара и в момент наибольшей деформации:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u,$$

откуда

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (100.1)$$

Чтобы определить импульсы ударных сил взаимодействия тел за время первой фазы удара, воспользуемся уравнением (98.4), учитывая, что для каждого тела в отдельности эти импульсы являются внешними:

для первого тела

$$\left. \begin{aligned} m_1(u - v_1) &= -S_1, \\ m_2(u - v_2) &= S'_1. \end{aligned} \right\} \quad (100.2)$$

Подставив в последнее равенство значение u из формулы (100.1), найдем модули ударных импульсов первой фазы:

$$S_1 = m_2 \left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2 \right) = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \quad (100.3)$$

Рассмотрим теперь вторую фазу упругого удара от момента наибольшей деформации $t + \tau_1$ до момента $t + \tau_1 + \tau_2$ полного или частичного восстановления и отделения тел друг от друга. Обозначим S_{II} и S'_{II} импульсы ударных реакций соударяющихся тел за время τ_2 . Их направления совпадают с направлениями соответствующих ударных импульсов первой фазы удара, изображенных на рис. 217. Проекции u_1 и u_2 скоростей тел в конце удара на ось x определим по уравнению (98.4) для второй фазы удара:

$$\left. \begin{aligned} m_1(u_1 - u) &= -S_{II}, \\ m_2(u_2 - u) &= S'_{II}. \end{aligned} \right\} \quad (100.4)$$

На основании (99.3)

$$S_{II} = kS_I \quad \text{и} \quad S'_{II} = kS'_I.$$

Подставим в уравнение (100.4) эти значения импульсов:

$$\left. \begin{aligned} m_1(u_1 - u) &= -kS_I, \\ m_2(u_2 - u) &= kS_I. \end{aligned} \right\} \quad (100.5)$$

Разделив первое уравнение (100.5) на первое уравнение (100.2) и второе уравнение (100.5) на второе уравнение (100.2), получим

$$\frac{u_1 - u}{u - v_1} = k \quad \text{и} \quad \frac{u_2 - u}{u - v_2} = k,$$

отсюда

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u + k(u - v_1) = u(1 + k) - kv_1, \\ u_2 &= u + k(u - v_2) = u(1 + k) - kv_2, \end{aligned} \right\} \quad (100.6)$$

Подставляя значения u , получим окончательно

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= v_1 - (1 + k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2), \\ u_2 &= v_2 + (1 + k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \end{aligned} \right\} \quad (100.7)$$

Так как внутренние силы не изменяют количества движения системы, то за все время удара оно остается неизменным, т. е.

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2. \quad (100.8)$$

Из формул (100.6)

$$u_2 - u_1 = k(v_1 - v_2),$$

откуда

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}. \quad (100.9)$$

Таким образом, коэффициент восстановления при ударе двух тел равен отношению модулей относительной скорости тел после удара и до него.

Определим модуль ударного импульса, приложенного к каждому телу, за весь период упругого удара:

$$S = S_I + S_{II}.$$

Подставив значения S_I и S_{II} из вторых уравнений (100.2) и (100.4) и затем значение u_2 из второй формулы (100.6), найдем

$$\begin{aligned} S = S' &= m_2(u_2 - v_2) = m_2[u(1 + k) - kv_2 - v_2] = \\ &= m_2(1 + k)(u - v_2) = (1 + k)S_I. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой (100.3), получим

$$S = (1 + k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \quad (100.10)$$

На основании установленных здесь общих формул получим формулы для определения скоростей тел после удара и ударных импульсов в случаях неупругого и абсолютно упругого ударов.

При неупругом ударе $k = 0$ удар имеет только первую фазу. В этом случае после удара тела движутся совместно со скоростью, определяемой по формуле (100.1):

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Модуль ударного импульса определяется выражением (100.3):

$$S_I = S'_I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2).$$

При абсолютно упругом ударе $k = 1$. В этом случае формулы (100.6), определяющие скорости тел после удара, принимают вид

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 2u - v_1 = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_1 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2), \\ u_2 &= 2u - v_2 = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_2 = v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \end{aligned} \right\} \quad (100.11)$$

Формула (100.10), определяющая модуль ударного импульса, приложенного к каждому телу, за весь период абсолютно упругого удара, принимает вид

$$S = S' = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \quad (100.12)$$

Из формул (100.3) и (100.12) следует, что при абсолютно упругом ударе ударный импульс вдвое больше, чем при неупругом. Это объясняется тем, что при абсолютно упругом ударе к импульсу фазы деформации добавляется импульс фазы восстановления такого же модуля.

**§ 101. Потеря кинетической энергии при ударе двух тел.
Теорема Карно**

Из-за остаточных деформаций и нагревания тел при ударе происходит частичная потеря начальной кинетической энергии соударяющихся тел.

Определим потерю кинетической энергии при упругом ударе тел, имеющих коэффициент восстановления k .

Начальная кинетическая энергия тел

$$T_0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

Кинетическая энергия тел в конце удара

$$T = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2.$$

Потеря кинетической энергии тел за время удара

$$\begin{aligned} T_0 - T &= \frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - u_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - u_2^2) = \\ &= \frac{1}{2} m_1 (v_1 + u_1)(v_1 - u_1) + \frac{1}{2} m_2 (v_2 + u_2)(v_2 - u_2). \end{aligned} \quad (a)$$

По формулам (100.6) находим

$$\left. \begin{aligned} v_1 - u_1 &= v_1 - u(1+k) + kv_1 = (1+k)(v_1 - u), \\ v_2 - u_2 &= v_2 - u(1+k) + kv_2 = (1+k)(v_2 - u). \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Подставим эти значения в уравнение (а):

$$T_0 - T = \frac{1}{2} m_1 (1+k)(v_1 - u)(v_1 + u_1) + \frac{1}{2} m_2 (1+k)(v_2 - u)(v_2 + u_2).$$

Преобразуем это выражение при помощи уравнения (100.2):

$$\begin{aligned} T_0 - T &= \frac{1}{2} (1+k) S_1 (v_1 + u_1) - \frac{1}{2} (1+k) S'_1 (v_2 + u_2) = \\ &= \frac{1}{2} (1+k) S_1 (u_1 - u_2 + v_1 - v_2). \end{aligned}$$

На основании (100.9)

$$\begin{aligned} T_0 - T &= \frac{1}{2} (1+k) S_1 [-k(v_1 - v_2) + (v_1 - v_2)] = \\ &= \frac{1}{2} (1+k) S_1 (1-k)(v_1 - v_2). \end{aligned}$$

Подставив в это выражение значение ударного импульса (100.3) получим потерю кинетической энергии при упругом ударе в виде

$$T_0 - T = (1-k^2) \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2. \quad (101.1)$$

Так как $k < 1$, то $T_0 - T > 0$, или $T_0 > T$, т. е. при ударе происходит потеря кинетической энергии.

Лишь при абсолютно упругом ударе ($k = 1$) $T_0 - T = 0$, т. е. потери кинетической энергии не происходит.

Согласно (100.3)

$$S_1^2 = \frac{m_1^2 m_2^2 (v_1 - v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2},$$

откуда

$$\frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{m_1 + m_2} = \frac{S_1^2 (m_1 + m_2)}{m_1 m_2} = \frac{S_1^2}{m_1} + \frac{S_1'^2}{m_2}.$$

Преобразуем выражение (101.1) на основе полученной зависимости, заменяя далее S_1^2 и $S_1'^2$ их значениями из уравнений (100.2):

$$\begin{aligned} T_0 - T &= (1-k^2) \left(\frac{S_1^2}{2m_1} + \frac{S_1'^2}{2m_2} \right) = \\ &= (1-k^2) \left[\frac{m_1 (v_1 - u)^2}{2} + \frac{m_2 (v_2 - u)^2}{2} \right] = \\ &= \frac{1-k^2}{(1+k)^2} \left[\frac{m_1 (v_1 - u)^2 (1+k)^2}{2} + \frac{m_2 (v_2 - u)^2 (1+k)^2}{2} \right]. \end{aligned}$$

На основании уравнений (б)

$$T_0 - T = \frac{1-k}{1+k} \left[\frac{1}{2} m_1 (v_1 - u_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - u_2)^2 \right]. \quad (101.2)$$

В этом выражении величины $(v_1 - u_1)$ и $(v_2 - u_2)$ представляют собой скорости, потерянные телами при ударе.

Обозначим кинетическую энергию тел, соответствующую их потерянными скоростям T^* . Ее величина

$$T^* = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - u_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - u_2)^2. \quad (101.3)$$

Тогда выражение (101.2), определяющее потерю кинетической энергии тел при ударе, примет вид

$$T_0 - T = \frac{1-k}{1+k} T^*. \quad (101.4)$$

Таким образом, кинетическая энергия, потерянная телами при упругом ударе, равна произведению коэффициента $\frac{1-k}{1+k}$ на кинетическую энергию тел T^* , соответствующую их потерянными скоростям.

При неупругом ударе, когда $k = 0$ и $u_1 = u_2 = u$, формула (101.2) принимает вид

$$T_0 - T = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - u)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - u)^2 = T^*. \quad (101.5)$$

Формула (101.5) выражает теорему Карно*: *кинетическая энергия, потерянная телами при неупругом ударе, равна кинетической энергии тел, соответствующей их потерянному скоростям.*

Если при неупругом ударе одно из тел, например второе, до удара находилось в покое, то

$$v_2 = 0; \quad T_0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2; \quad T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2.$$

Формула (100.1) принимает вид

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Определим T , пользуясь этим значением u :

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} T_0.$$

Потеря кинетической энергии при ударе

$$T_0 - T = T_0 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} T_0,$$

откуда

$$T_0 - T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_0. \quad (101.6)$$

Выражение (101.6) показывает, что если масса m_2 тела, находившегося до удара в покое, велика по сравнению с массой m_1 движущегося тела, то коэффициент $\frac{m_2}{m_1 + m_2} \approx 1$.

В этом случае почти вся кинетическая энергия движущегося тела теряется при ударе, расходуясь на деформацию тел.

Наоборот, если масса m_2 тела, находившегося до удара в покое, мала по сравнению с массой m_1 движущегося тела, то коэффициент $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$ мал и потеря кинетической энергии на деформацию тел незначительна.

На этом основании наковальня должна иметь вес, во много раз превышающий вес молота, чтобы кинетическая энергия молота полностью использовалась на деформацию металла.

Наоборот, вес бабы копра, забивающего сваи в грунт, должен быть по возможности велик по сравнению с весом сваи, чтобы она при забивке не деформировалась.

* Л. Карно (1753—1823) — выдающийся французский ученый и общественный деятель эпохи Французской буржуазной революции.

§ 102. Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ударе

Рассмотрим изменение кинетического момента механической системы из n материальных точек при ударе.

В § 98 составлено уравнение изменения количества движения материальной точки M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) под действием приложенных к ней внешних и внутренних ударных импульсов:

$$m_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i) = \mathbf{S}_i^E + \mathbf{S}_i^J \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Проведем в каждую точку M_i системы из произвольно выбранного неподвижного центра O радиус-вектор \mathbf{r}_i .

Умножим векторно вектор \mathbf{r}_i на каждую из частей составленного равенства:

$$\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{u}_i - \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{S}_i^E + \mathbf{r}_i \times \mathbf{S}_i^J \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Просуммируем уравнения, составленные для всех n точек механической системы:

$$\sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{u}_i - \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{S}_i^E + \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{S}_i^J.$$

Здесь $\sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{u}_i = L_O$ — кинетический момент системы относительно центра O в момент окончания действия ударных сил;

$\sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = L_O^{(0)}$ — кинетический момент системы относительно центра O в момент начала действия ударных сил;

$\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{S}_i^E = \sum M_O(\mathbf{S}_i^E)$ — главный момент всех внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, относительно центра O ;

$\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{S}_i^J = \sum M_O(\mathbf{S}_i^J) = 0$ — главный момент всех внутренних ударных импульсов относительно центра O (по свойству внутренних сил равный нулю).

Подставляя эти значения, получаем

$$L_O - L_O^{(0)} = \sum M_O(\mathbf{S}_i^E). \quad (102.1)$$

Уравнение (102.1) выражает теорему об изменении кинетического момента механической системы при ударе: *изменение кинетического момента механической системы относительно любого центра при ударе равно геометрической сумме моментов всех внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, относительно того же центра.*

Из уравнения (102.1) при отсутствии внешних ударных импульсов, т. е. при $\sum M_O(\mathbf{S}_i^E) = 0$,

$$L_O = L_O^{(0)}.$$

Таким образом, если к точкам механической системы приложены только внутренние ударные импульсы, то кинетический момент системы относительно любого центра не изменяется.

Векторному уравнению (102.1) соответствуют три уравнения в проекциях на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} L_x - L_x^{(0)} &= \sum M_x(\mathbf{S}_i^E), \\ L_y - L_y^{(0)} &= \sum M_y(\mathbf{S}_i^E), \\ L_z - L_z^{(0)} &= \sum M_z(\mathbf{S}_i^E), \end{aligned} \right\} \quad (102.2)$$

т. е. изменение кинетического момента механической системы относительно любой оси при ударе равно сумме моментов всех внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы относительно той же оси.

§ 103. Действие ударных сил на твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, и на твердое тело, совершающее плоское движение

Положим, что твердое тело вращается вокруг неподвижной оси z . В момент, когда оно имело угловую скорость ω_0 , на него действовали внешние силы.

Определим изменение угловой скорости тела под действием этих сил. Для этого воспользуемся уравнением (102.2):

$$L_z - L_z^{(0)} = \sum M_z(\mathbf{S}_i^E).$$

Кинетический момент твердого тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела (79.1), т. е.

$$L_z^{(0)} = J_z \omega_0, \quad L_z = J_z \omega.$$

Подставив эти значения в уравнение (102.2), получаем

$$J_z(\omega - \omega_0) = \sum M_z(\mathbf{S}_i^E),$$

откуда

$$\omega - \omega_0 = \frac{\sum M_z(\mathbf{S}_i^E)}{J_z}. \quad (103.1)$$

Таким образом, изменение угловой скорости твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, под действием внешних ударных сил равно сумме моментов импульсов этих сил относительно оси вращения, разделенной на момент инерции тела относительно той же оси.

Вясним теперь влияние внешних ударных сил на плоское движение твердого тела. Рассмотрим это движение тела как совокупность двух движений: поступательного движения вместе с центром масс и вращения вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно к той плоскости, в которой он движется.

В плоскости движения центра масс проведем оси x и y . Положим, что в момент начала действия ударных сил скорость центра масс была v_C , а угловая скорость — ω_0 .

Обозначим скорость центра масс в момент конца действия ударных сил u_C , а угловую скорость тела — ω .

Изменение проекций скорости центра масс определяют два уравнения (98.4):

$$\left. \begin{aligned} m(u_{Cx} - v_{Cx}) &= \sum S_{ix}^E, \\ m(u_{Cy} - v_{Cy}) &= \sum S_{iy}^E, \end{aligned} \right\} \quad (103.2)$$

где S_{ix}^E и S_{iy}^E — проекции внешнего ударного импульса \mathbf{S}_i^E на оси x и y .

Так как $\frac{dL_{\zeta r}}{dt} = \frac{dL_r}{dt}$ (84.4), то изменение угловой скорости тела определяет уравнение (103.1):

$$J_{\zeta}(\omega - \omega_0) = \sum M_{\zeta}(\mathbf{S}_i^E), \quad (103.3)$$

где J_{ζ} — момент инерции тела относительно подвижной оси ζ , проходящей через центр тяжести перпендикулярно к плоскости xy ;

$M_{\zeta}(\mathbf{S}_i^E)$ — момент внешнего ударного импульса \mathbf{S}_i^E относительно той же оси.

Таким образом, внешние ударные силы, действующие на твердое тело, совершающее плоское движение, вызывают конечное изменение скорости центра масс тела, определяемое уравнениями (103.2), и конечное изменение угловой скорости тела, определяемое уравнением (103.3).

§ 104. Центр удара твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Допустим, что к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси (рис. 217), в некоторой его точке приложен внешний ударный импульс. Этот импульс вызывает появление в опорных точках ударных реакций, а опоры испытывают ударные давления.

Действие ударных сил на опоры может вызвать их повреждение. Установим условия, при которых опоры вращающегося твердого тела, когда к нему прикладывается внешний ударный импульс, не испытывают действия ударных сил.

Выберем следующую систему осей координат: ось z направим по оси вращения тела в сторону угловой скорости ω , плоскость yOz проведем через ось вращения и центр тяжести тела C ($x_C = 0$; $y_C = d \neq 0$; $z_C \neq 0$), а ось x покажем так, чтобы получить правую координатную систему $Oxyz$.

Эту систему осей, связанную с вращающимся телом, будем считать неподвижной, так как перемещения тела за время удара не происходит.

Разложим действующий на тело в точке $K(x_K, y_K, z_K)$ ударный импульс \mathbf{S}^E на составляющие: S_x^E, S_y^E, S_z^E . Расстояние от опорных точек A и B до плоскости xOy обозначим h_1 и h_2 .

Реактивные ударные импульсы \mathbf{S}_A и \mathbf{S}_B , приложенные к телу в опорных точках A и B , разложим на составляющие

$$S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Az} \text{ и } S_{Bx}, S_{By}, S_{Bz}.$$

Результатом действия на тело ударных сил является изменение скорости центра масс тела и изменение его кинетического момента.

Изменение скорости центра масс можно определить тремя уравнениями (98.4), а изменение его кинетического момента относительно неподвижной точки O тремя уравнениями (102.2).

Совокупность этих шести уравнений имеет вид

$$\left. \begin{aligned} m(u_{Cx} - v_{Cx}) &= \sum S_{ix}^E, \\ m(u_{Cy} - v_{Cy}) &= \sum S_{iy}^E, \\ m(u_{Cz} - v_{Cz}) &= \sum S_{iz}^E, \\ L_x - L_x^{(0)} &= \sum M_x(\mathbf{S}_i^E), \\ L_y - L_y^{(0)} &= \sum M_y(\mathbf{S}_i^E), \\ L_z - L_z^{(0)} &= \sum M_z(\mathbf{S}_i^E). \end{aligned} \right\} (104.1)$$

Положим, что вращение тела, как до удара, так и после него, происходит в направлении, соответствующем вектору ω , указанному на рис. 217, а угловая скорость его за время удара изменяется от ω_0 до ω . Тогда вращательная скорость точки C параллельна оси x и направлена противоположно направлению этой оси.

До удара

$$v_C = \omega_0 d;$$

после удара

$$u_C = \omega d.$$

Ее проекции на оси координат:

до удара

$$v_{Cx} = -\omega_0 d; \quad v_{Cy} = 0; \quad v_{Cz} = 0;$$

после удара

$$u_{Cx} = -\omega d; \quad u_{Cy} = 0; \quad u_{Cz} = 0.$$

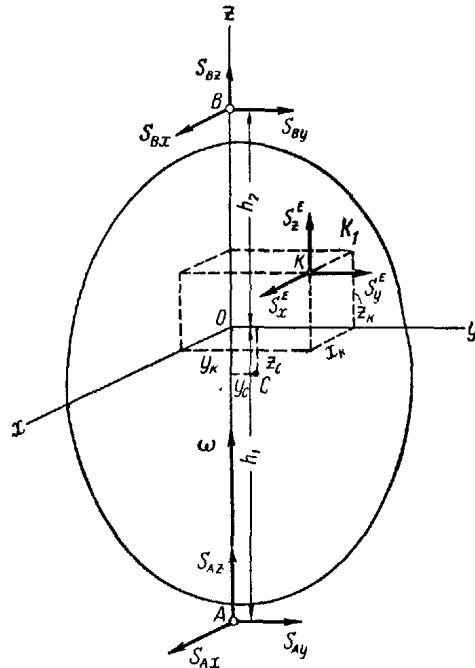


Рис. 217.

Кинетические моменты тела относительно координатных осей определяются по формулам (88.4).

Проекции вектора угловой скорости тела на оси координат будут: до удара

$$\omega_{0x} = 0; \quad \omega_{0y} = 0; \quad \omega_{0z} = \omega_0;$$

после удара

$$\omega_x = 0; \quad \omega_y = 0; \quad \omega_z = \omega.$$

При этих значениях формулы (88.4) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} L_x^{(0)} &= -J_{zx}\omega_0; & L_y^{(0)} &= -J_{yz}\omega_0; & L_z^{(0)} &= J_z\omega_0, \\ L_x &= -J_{zx}\omega; & L_y &= -J_{yz}\omega; & L_z &= J_z\omega. \end{aligned} \right\}$$

Здесь J_z — момент инерции тела относительно оси z ;

J_{zx}, J_{yz} — центробежные моменты инерции тела относительно осей z, x и осей y, z .

Подставляем значения проекций скорости точки C и кинетических моментов тела в левые части уравнений (104.1), а также проекции и моменты всех внешних ударных импульсов в правые части этих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -md(\omega - \omega_0) &= S_x^E + S_{Ax} + S_{Bx}, \\ 0 &= S_y^E + S_{Ay} + S_{By}, \\ 0 &= S_z^E + S_{Az} + S_{Bz}, \\ -J_{zx}(\omega - \omega_0) &= S_z^E y_K - S_y^E z_K - S_{Ay} h_1 - S_{By} h_2, \\ -J_{yz}(\omega - \omega_0) &= S_x^E z_K - S_z^E x_K - S_{Ax} h_1 + S_{Bx} h_2, \\ J_z(\omega - \omega_0) &= S_y^E x_K - S_x^E y_K. \end{aligned} \right\} (104.2)$$

Из шести уравнений (104.2) можно определить изменение угловой скорости тела при ударе $\omega - \omega_0$, четыре проекции на оси координат реактивных ударных импульсов: $S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Bx}, S_{By}$ и сумму проекций реактивных импульсов на ось вращения z : $S_{Az} + S_{Bz}$.

Установим условия, при которых эти проекции, а следовательно, и ударные импульсы \mathbf{S}_A и \mathbf{S}_B равняются нулю. Для этого в уравнениях (104.2) приравняем нулю все проекции реактивных импульсов \mathbf{S}_A и \mathbf{S}_B :

$$\left. \begin{aligned} -md(\omega - \omega_0) &= S_x^E, \\ 0 &= S_y^E, \\ 0 &= S_z^E, \\ -J_{zx}(\omega - \omega_0) &= S_z^E y_K - S_y^E z_K, \\ -J_{yz}(\omega - \omega_0) &= S_x^E z_K - S_z^E x_K, \\ J_z(\omega - \omega_0) &= S_y^E x_K - S_x^E y_K. \end{aligned} \right\} (104.3)$$

Первое условие устанавливаем по второму и третьему уравнениям (104.3).

Так как $S_y^E = 0$ и $S_z^E = 0$, то $S^E = |S_x^E|$, т. е. *внешний ударный импульс должен быть направлен перпендикулярно к плоскости, проведенной через центр масс и ось вращения тела.* Для получения второго условия рассмотрим остальные уравнения (104.3). При $S_y^E = S_z^E = 0$ первое, четвертое, пятое и шестое уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} -md(\omega - \omega_0) &= S_x^E, \\ -J_{zx}(\omega - \omega_0) &= 0, \\ -J_{yz}(\omega - \omega_0) &= S_x^E z_K, \\ J_z(\omega - \omega_0) &= -S_x^E y_K. \end{aligned}$$

Из четвертого уравнения (104.3)

$$J_{zx} = 0, \quad (104.4)$$

Из первого уравнения определяется изменение угловой скорости тела при ударе:

$$\omega - \omega_0 = -\frac{S_x^E}{md}. \quad (104.5)$$

Из пятого и шестого уравнений определяются координаты z_K и y_K точки K , в которой должен быть приложен внешний ударный импульс S^E :

$$\begin{aligned} z_K &= -\frac{J_{yz}(\omega - \omega_0)}{S_x^E} = -\frac{J_{yz}}{S_x^E} \left(-\frac{S_x^E}{md} \right) = \frac{J_{yz}}{md}, \\ y_K &= -\frac{J_z(\omega - \omega_0)}{S_x^E} = -\frac{J_z}{S_x^E} \left(-\frac{S_x^E}{md} \right) = \frac{J_z}{md}. \end{aligned}$$

Координата x_K может иметь любую величину, а координаты y_K и z_K должны иметь значения:

$$z_K = \frac{J_{yz}}{md}, \quad (104.6)$$

$$y_K = \frac{J_z}{md}. \quad (104.7)$$

Так как согласно (35.1) $J_z = J_{Cz} + md^2$, то формуле (104.7) можно придать вид

$$y_K = \frac{J_{Cz}}{md} + d. \quad (104.8)$$

Из этой формулы следует, что $y_K > d$, т. е. проекция K_1 точки K на плоскость yoZ должна находиться от оси вращения Oz дальше, чем центр тяжести тела C .

Формулы (104.7) и (104.8) аналогичны формулам (81.3) и (81.4), определяющим приведенную длину физического маятника.

Предположим теперь, что точка K приложения ударного импульса лежит в плоскости xOy ($z_K = 0$). Тогда из пятого уравнения получаем, что $J_{yz} = 0$, т. е. что ось вращения z должна быть главной в точке O поскольку и $J_{zx} = 0$.

Второе условие отсутствия ударных давлений на опоры вращающегося тела можно сформулировать так:

1) *ось вращения тела должна быть главной осью инерции в точке пересечения ее с плоскостью, перпендикулярной оси вращения и содержащей точку приложения ударного импульса;*

2) *положение центра удара — точки в этой плоскости, к которой должен быть приложен внешний ударный импульс S^E для того, чтобы ось не испытывала ударных давлений, определяется координатой y_K по формулам (104.7) или (104.8).*

Известно, что если однородное тело имеет плоскость симметрии, то во всех точках этой плоскости одна из главных осей инерции направлена по перпендикуляру к этой плоскости (§ 39).

Поэтому для тела, имеющего плоскость симметрии, выведенные условия отсутствия реактивных ударных импульсов получают следующую формулировку:

1) *ось вращения тела должна быть перпендикулярна плоскости симметрии тела;*

2) *ударный импульс должен действовать в плоскости симметрии тела, быть перпендикулярным к прямой, проходящей через ось и центр тяжести тела, а точка приложения ударного импульса должна совпадать с центром удара, определяемым координатой y_K по формулам (104.7) или (104.8).*

§ 105. Примеры действия ударных сил

Пример. 52. Деревянный шар массой m_1 , имеющий скорость v_1 , ударя неподвижный деревянный шар, теряет половину своей скорости. Полагая удар шаров прямым и центральным, а коэффициент восстановления равным 0,5, определить массу второго шара и его скорость после удара.

Решение. При $v_2 = 0$ воспользуемся формулой (100.9):

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1}.$$

Так как $k = 0,5$, а $u_1 = 0,5v_1$, то

$$0,5 = \frac{u_2}{v_1} - \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_1} - 0,5,$$

откуда $u_2 = v_1$.

Подставляя в (100.7), получаем

$$u_1 = v_1 - \frac{3}{2} \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1,$$

$$0,5v_1 = v_1 - \frac{3}{2} \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{или} \quad \frac{3}{2} \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2},$$

т. е. $m_2 = \frac{m_1}{2}$.

По формуле (100.8)

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1,$$

$$0,5m_1 v_1 + m_2 v_1 = m_1 v_1; \quad m_2 = 0,5m_1.$$

Таким образом, после удара второй шар, масса которого в два раза меньше массы первого, получит скорость, которую имел первый шар до удара.

Пример 53. Молот весом $G_1 = 40$ кн падает на наковальню с высоты $h = 2$ м. Вес наковальни вместе с куском металла, подвергающимся ковке, равен $G_2 = 360$ кн. Приблизительно рассматривая удар молота о наковальню как удар свободных тел, найти коэффициент полезного действия молота.

Решение. Как известно, коэффициент полезного действия машины равен отношению полезной работы к работе, затрачиваемой на приведение машины в движение.

В данном случае полезной является работа, израсходованная на деформацию металла. Эта работа равна потере кинетической энергии тел при ударе $T_0 - T$.

Работа затрачиваемая на подъем молота, равна увеличению его потенциальной энергии, т. е. $G_1 h$.

При падении молота его потенциальная энергия переходит в кинетическую. Таким образом, затрачиваемая работа равна кинетической энергии тел до удара T_0 . Коэффициент полезного действия молота

$$\eta = \frac{T_0 - T}{T_0}.$$

По формуле (101.6)

$$\eta = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{или} \quad \eta = \frac{G_2}{G_1 + G_2}.$$

Подставляя числовые значения, найдем

$$\eta = \frac{360}{40 + 360} = 0,9.$$

Пример 54. Маятниковый копер Шарпи для определения сопротивления материалов удару имеет массу m и момент инерции относительно оси вращения J_x . Центр тяжести C маятника находится на расстоянии d от оси его вращения (рис. 218).

Отклонив маятник от положения покоя, его освобождают. В нижнем положении вращающийся маятник разбивает испытуемый образец и продолжает поворачиваться, потеряв при ударе часть своей энергии. Полагая, что сила удара направлена горизонтально, определить, где должен быть помещен образец, чтобы ось вращения маятника не испытывала удара.

Решение. Для того чтобы ось вращения маятника (рис. 218) при его ударе об испытуемый образец не испытывала действия ударной силы, должны быть выполнены условия, установленные в § 104. По условию задачи внешний ударный импульс S^E , приложенный к маятнику, горизонтален, т. е. перпендикулярен к плоскости zOx , проходящей через ось вращения маятника Px и его центр тяжести C . Следовательно, первое условие выполнено.

Импульс S^E приложен в плоскости yOz , проходящей через центр тяжести маятника C перпендикулярно к его оси вращения Ox . Тогда второе условие состоит в следующем:

а) ось вращения маятника должна быть его главной осью инерции в точке O ;

б) центр удара K должен находиться на оси Oz , проходящей через центр тяжести, на расстоянии от оси вращения Ox , определяемом формулой (104.7).

Условие (а) выполнено, так как маятник симметричен относительно плоскости yOz . Ось Ox , перпендикулярная к этой плоскости, является главной осью инерции. В соответствии с условием (б)

$$z_K = \frac{J_x}{md},$$

Согласно формуле (81.3) это расстояние равно приведенной длине маятника l .

Таким образом, центр удара совпадает с центром качаний маятника.

Пример 55. Баллистический маятник, служащий для определения скорости снаряда, представляет собой цилиндр, открытый с одного конца, наполненный песком и подвешенный так, что он может поворачиваться вокруг горизонтальной оси Ox (рис. 219, а). Снаряд, попадая в цилиндр, производит поворот маятника вокруг оси Ox на некоторый угол α . Снаряд влетает в цилиндр на расстоянии l от оси привеса, причем эта ось не испытывает удара. Известны также: m_1 -масса снаряда, m -масса маятника, $OC = d$ — расстояние от центра тяжести маятника до оси Ox . Определить скорость снаряда v .

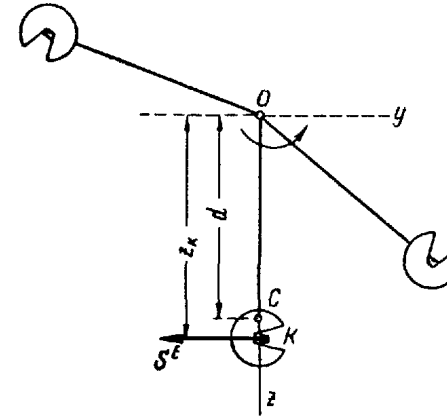


Рис. 218.

Решение. К удару, происходящему при попадании снаряда в неподвижный цилиндр, применим теорему о кинетическом моменте механической системы при ударе.

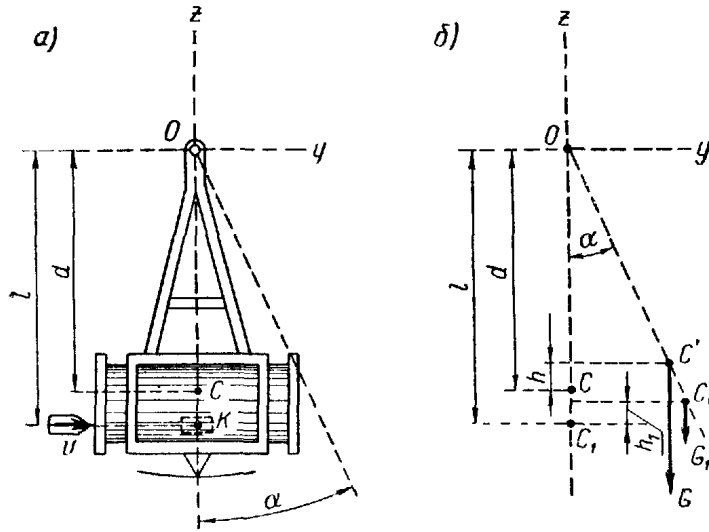


Рис. 219.

Кинетический момент системы маятник-снаряд до удара равнялся кинетическому моменту снаряда относительно оси Ox , т. е.

$$L_x = m_1 v l.$$

После неупругого удара снаряд движется вместе с маятником, имеющим угловую скорость ω . Кинетический момент системы относительно оси Ox

$$L_x = (J_x + J_{1x}) \omega.$$

Подставляя значения моментов инерции маятника $J_x = m l_{Cx}^2$ и снаряда $J_{1x} = m_1 l^2$, получаем

$$L_x = (m l_x^2 + m_1 l^2) \omega.$$

Так как к системе были приложены только внутренние ударные импульсы, кинетический момент системы при ударе не изменился, т. е.

$$L_x^0 = L_x$$

или

$$m_1 v l = (m l_x^2 + m_1 l^2) \omega,$$

откуда

$$v = \frac{m l_x^2 + m_1 l^2}{m_1 l} \omega, \quad (a)$$

Действие снаряда на цилиндр выражается ударным импульсом, который для цилиндра является внешним. По условию этот импульс не вызывает ударных давлений маятника на ось. Этот импульс расположен в плоскости yOz , проходящей через центр тяжести маятника C перпендикулярно к его оси вращения Ox . В этом случае центр удара K находится на оси Oz , проходящей через центр тяжести маятника C . Расстояние от центра удара K до оси привеса маятника определяется по формуле (104.7):

$$l = \frac{J_x}{m d} = \frac{m l_x^2}{m d} = \frac{l_x^2}{d},$$

откуда

$$l_x^2 = l d.$$

Подставляя значение l_x^2 в формулу (а), определяющую скорость снаряда, получаем

$$v = \frac{m l d + m_1 l^2}{m_1 l} \omega = \frac{m d + m_1 l}{m_1} \omega. \quad (б)$$

Для определения угловой скорости ω баллистического маятника в конце удара воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии, рассматривая поворот маятника на угол α после удара (рис. 219, б):

$$T - T_0 = \sum A_i. \quad (в)$$

В наивысшем положении маятника $T = 0$. Кинетическая энергия вращающегося тела в начальном положении (где произошел удар):

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} (J_x + J_{1x}) \omega^2 = \frac{1}{2} (m l_x^2 + m_1 l^2) \omega^2 = \\ &= \frac{1}{2} (m d l + m_1 l^2) \omega^2 = \frac{l}{2} (m d + m_1 l) \omega^2. \end{aligned}$$

Сумму работ сил тяжести снаряда и маятника определяем по формуле (61.1):

$$\begin{aligned} \sum A_i &= -G h - G_1 h_1 = -m g d (1 - \cos \alpha) - m_1 g l (1 - \cos \alpha) = \\ &= -g (m d + m_1 l) (1 - \cos \alpha) = -2g (m d + m_1 l) \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Подставляем значения T_0 и $\sum A_i$ в уравнение (в):

$$-\frac{l}{2} (m d + m_1 l) \omega^2 = -2g (m d + m_1 l) \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда определяем угловую скорость маятника:

$$\omega = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Подставив значение ω в формулу (б), получаем величину скорости снаряда:

$$v = \frac{2 (m d + m_1 l)}{m_1} \sqrt{\frac{g}{l}} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

1. Какое явление называется ударом?
2. Чем характеризуется ударная сила?
3. Какой эффект имеет действие ударной силы на материальную точку?
4. Сформулируйте теорему об изменении количества движения механической системы при ударе в векторной форме и в проекциях на оси координат.
5. Могут ли внутренние ударные импульсы изменить количество движения механической системы?
6. Что называют коэффициентом восстановления при ударе и как он определяется опытным путем? В каких пределах находятся его числовые значения?
7. Какова зависимость между углами падения и отражения при ударе шара о гладкую неподвижную поверхность?
8. Чем характеризуется первая и вторая фазы упругого удара? В чем состоит особенность абсолютно упругого удара?
9. Как определяются скорости двух шаров в конце каждой фазы прямого центрального удара (неупругого, упругого, абсолютно упругого)?
10. Какова зависимость между ударными импульсами второй и первой фаз при абсолютно упругом ударе?
11. Какова потеря кинетической энергии двух соударяющихся тел при неупругом, упругом и абсолютно упругом ударах?
12. Как формулируется теорема Карно?
13. Как формулируется теорема об изменении кинетического момента механической системы при ударе в векторной форме и в проекциях на оси координат?
14. Могут ли внутренние ударные импульсы изменить кинетический момент механической системы?
15. Какие изменения вносит действие ударных сил в движение твердых тел: вращающегося вокруг неподвижной оси и совершающего плоское движение?
16. При каких условиях опоры вращающегося тела не испытывают действия внешнего ударного импульса, приложенного к телу?
17. Что называют центром удара и каковы его координаты?

ГЛАВА XVI

ПРИНЦИП ГЕРМАНА — ЭЙЛЕРА — ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

§ 106. Принцип Германа — Эйлера — Даламбера для материальной точки

Принципом Германа — Эйлера — Даламбера называют общий метод, при помощи которого уравнения динамики по форме придают вид уравнений статики. Этот метод, предложенный в 1716 г. Германом и обобщенный в 1737 г. Эйлером, получивший название петербургского принципа, часто называют началом или принципом Даламбера, хотя действительная сущность начала Даламбера не аналогична петербургскому принципу*.

* Николаи Е. Л. О начале Даламбера и о силах инерции. Труды Ленинградского индустриального института, № 6, 1936.

Положим, что материальная точка M под действием системы сил P_1, P_2, \dots, P_n движется с ускорением w (рис. 220).

Основное уравнение динамики имеет вид

$$mw = P_1 + P_2 + \dots + P_n.$$

Перенесем член mw из левой части уравнения в правую. Тогда

$$0 = P_1 + P_2 + \dots + P_n - mw.$$

Так как $-mw = \Phi$, то

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n + \Phi = 0. \quad (106.1)$$

Полученное соотношение формулируется так: *геометрическая сумма всех приложенных к точке сил и силы инерции этой точки равна нулю.*

Это означает, что для решения задачи динамики материальной точки по принципу Германа — Эйлера — Даламбера следует, помимо приложенных к точке M сил, условно приложить к этой точке и силу инерции Φ . Тогда многоугольник рассматриваемой системы сил $P_1, P_2, \dots, P_n, \Phi$ будет замкнут и суммы их проекций на координатные оси будут равны нулю. Как известно (§ 2), в действительности сила инерции материальной точки приложена не к ней, а к телу, сообщаемому точке ускорение. Приложение силы инерции к точке является лишь условным приемом, сводящим задачу динамики по форме решения к задаче статики.

Благодаря своей простоте этот метод получил широкое применение во многих прикладных дисциплинах. В ряде случаев он обеспечивает наиболее простое и удобное решение задач динамики.

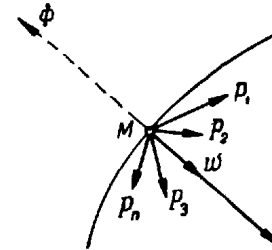


Рис. 220.

§ 107. Примеры применения принципа Германа — Эйлера — Даламбера

Пример 56. Подъемник весом $G = 7350$ н поднимается равноускоренно и в первые 5 сек проходит 25 м. Найти натяжение поднимающего его троса.

Решение. Приложим к подъемнику действующие на него силы: его вес G и реакцию троса T (рис. 221). Условно приложим к подъемнику его силу инерции $\Phi = -mw$, направив ее противоположно ускорению w , т. е. вниз. Тогда геометрическая сумма сил G, T и Φ равна нулю:

$$G + T + \Phi = 0.$$

Так как силы направлены по одной прямой, то

$$T - G - \Phi = 0,$$

откуда

$$T = G + \Phi.$$

Для определения реакции троса найдем модуль силы инерции подъемника, определив предварительно его ускорение. Уравнение равноускоренного движения из состояния покоя:

$$H = \frac{\omega t^2}{2};$$

откуда

$$\omega = \frac{2H}{t^2} = \frac{2 \cdot 25}{5^2} = 2 \text{ м/сек}^2.$$

Модуль силы инерции

$$\Phi = m\omega = \frac{G}{g} \omega = \frac{7350}{9,8} \cdot 2 = 1500 \text{ н.}$$

Находим реакцию троса, равную его натяжению:

$$T = G + \Phi = 7350 + 1500 = 8850 \text{ н.}$$

При движении подъемника вниз с тем же ускорением (рис. 221, б)

$$T - G + \Phi = 0,$$

откуда

$$T = G - \Phi = 7350 - 1500 = 5850 \text{ н.}$$

При равномерном движении подъемника (как вверх, так и вниз) $\omega = 0$, $\Phi = 0$, а потому

$$T = G = 7350 \text{ н.}$$

Пример 57. Шарик A весом $G = 50 \text{ сн}$ подвешен на нити длиной $l = 40 \text{ см}$, закрепленной в неподвижной точке O . Шарик совершает равномерное движение по окружности в горизонтальной плоскости, при котором нить составляет с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$. Определить натяжение нити и скорость шарика этого конического маятника (рис. 222, а).

Решение. Прикладываем к шарiku действующие на него силы: его вес G и реакцию нити T (рис. 222, б). Условно прикладываем к шарiku и его силу инерции Φ .

При равномерном движении сила инерции шарика Φ равна нормальной силе инерции Φ_n , направленной противоположно нормальному ускорению w_n . Ее модуль

$$\Phi = \Phi_n = \frac{mv^2}{r}, \text{ где } r = l \sin \alpha.$$

Строим замкнутый треугольник сил G , T , Φ . Из треугольника определяем модули сил T и Φ :

$$T = \frac{G}{\cos \alpha} = \frac{50}{0,866} = 57,7 \text{ сн}; \quad \Phi = G \operatorname{tg} \alpha = 50 \cdot 0,577 = 28,85 \text{ сн.}$$

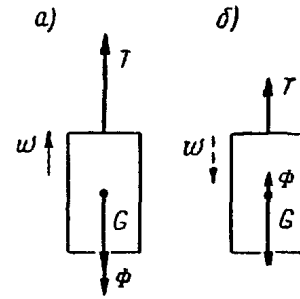


Рис. 221.

Определив модуль силы инерции, находим скорость шарика A :

$$v = \sqrt{\frac{\Phi \cdot r}{m}} = \sqrt{\frac{\Phi g l \sin \alpha}{G}} = \sqrt{\frac{0,2885 \cdot 9,8 \cdot 0,4 \cdot 0,5}{0,5}} = 1,06 \text{ м/сек.}$$

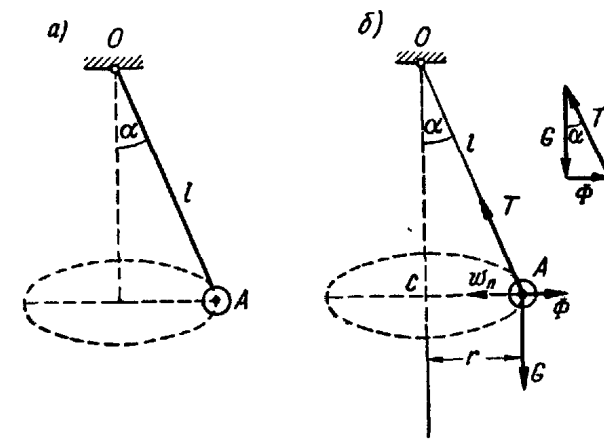


Рис. 222.

Пример 58. Гири M весом $G = 5 \text{ н}$, подвешенная к пружине, совершает колебания согласно уравнению $x = 2 \sin 20t$ (t — в секундах, x — в сантиметрах) Определить наибольшее и наименьшее натяжения пружины при колебаниях (рис. 223, а).

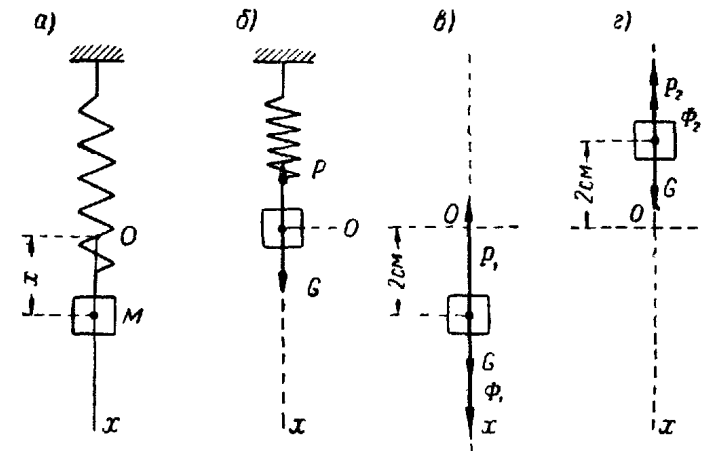


Рис. 223.

Решение. К движению гири применим принцип Германа — Эйлера — Даламбера.

Приложим к гире действующие на нее силы: ее вес G и реакцию пружины P . При отсутствии колебаний $P = G$ (рис. 223, б).

Определим силу инерции гири. Для этого найдем по уравнению движения гири проекцию ее ускорения на ось x (см. ч. I. «Кинематика» § 83):

$$w_x = \ddot{x} = -800 \sin 20t \text{ (см/сек}^2\text{)} = -8 \sin 20t \text{ (м/сек}^2\text{)}.$$

Так как проекции на ось x силы инерции Φ и ускорения w гири имеют противоположные знаки, то проекция силы инерции

$$\Phi_x = -mw_x = -\frac{G}{g} w_x = -\frac{5}{9,8} (-8 \sin 20t) = 4,08 \sin 20t \text{ (н)}.$$

Проекция силы инерции изменяется периодически. Рассмотрим промежуток времени, в течение которого $\sin 20t$ изменяется непрерывно от $+1$ до -1 . Проекция силы инерции в этом промежутке изменяется непрерывно от $+4,08$ до $-4,08$ н.

В первой половине этого промежутка времени сила инерции направлена по направлению оси x , т. е. вниз, и абсолютная величина ее убывает от $4,08$ н до нуля. Во второй половине промежутка сила инерции направлена противоположно направлению оси, т. е. вверх, и абсолютная величина ее возрастает от нуля до $4,08$ н.

Определим натяжение пружины в моменты времени t_1 и t_2 , соответствующие экстремальным значениям проекции силы инерции:

$$1. \sin 20t_1 = 1.$$

Координата центра тяжести гири $x_1 = 2$ см (рис. 223, в). Проекция силы инерции $\Phi_{1x} = 4,08$ н. Сила инерции Φ_1 направлена вниз и имеет модуль $\Phi_1 = 4,08$ н. Приложим ее условно к гире. Тогда геометрическая сумма сил G , P_1 и Φ_1 будет равна нулю, а потому и сумма их проекций на ось x равна нулю:

$$\sum X_i = 0; \quad -P_1 + G + \Phi_1 = 0,$$

откуда

$$P_1 = G + \Phi_1 = 5 + 4,08 = 9,08 \text{ н}.$$

$$2. \sin 20t_2 = -1.$$

Координата центра тяжести гири $x_2 = -2$ см (рис. 223, г). Проекция силы инерции $\Phi_{2x} = -4,08$ н. Сила инерции Φ_2 направлена вверх и имеет модуль $\Phi_2 = 4,08$ н. Приложим ее условно к гире. Тогда снова геометрическая сумма сил G , P_2 и Φ_2 равна нулю, а потому сумма их проекций на ось x равна нулю:

$$\sum X_i = 0, \quad -P_2 - \Phi_2 + G = 0,$$

откуда

$$P_2 = G - \Phi_2 = 5 - 4,08 = 0,92 \text{ н}.$$

Таким образом, натяжение пружины при колебаниях изменяется периодически, принимая все значения в пределах от $0,92$ до $9,08$ н. В § 89 первой части курса установлено, что при гармоническом колебательном движении точки ее ускорение направлено к среднему

положению точки, т. е. к началу координат. Поэтому сила инерции материальной точки в любом положении направлена от начала координат. Ее модуль имеет максимум в крайних положениях точки (рис. 223, в и г), где имеет максимум модуль ускорения.

§ 108. Принцип Германа — Эйлера — Даламбера для несвободной механической системы

При изучении движения несвободной механической системы, так же как и при изучении движения одной несвободной точки, применяют принцип освобожденности от связей (см. § 21). По этому принципу имеющиеся связи отбрасывают, заменяя их действие соответствующими реакциями. Полученную механическую систему рассматривают как свободную, находящуюся под действием задаваемых сил и реакций связей.

Рассмотрим несвободную механическую систему, состоящую из n материальных точек.

Применим к каждой точке M_i этой системы принцип Германа — Эйлера — Даламбера (см. § 106). Тогда

$$P_i + R_i + \Phi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (108.1)$$

где

P_i — равнодействующая всех задаваемых сил, приложенных к точке M_i ,

R_i — равнодействующая реакций связей, приложенных к этой точке.

$\Phi_i = -m_i w_i$ — сила инерции материальной точки M_i .

Уравнение (106.1) показывает, что в любой момент времени геометрическая сумма равнодействующей задаваемых сил, равнодействующей реакции связей и силы инерции для каждой материальной точки несвободной механической системы равна нулю.

Это положение называется *принципом Германа — Эйлера — Даламбера для несвободной механической системы*.

Сложив все n уравнений (108.1), получим

$$\sum P_i + \sum R_i + \sum \Phi_i = 0. \quad (108.2)$$

Здесь $\sum P_i = P^*$ — главный вектор задаваемых сил;

$\sum R_i = R^*$ — главный вектор реакций связей;

$\sum \Phi_i = \Phi^*$ — главный вектор сил инерции точек системы.

Подставляя эти значения в уравнение (108.2), получаем

$$P^* + R^* + \Phi^* = 0. \quad (108.3)$$

Из уравнения (108.3) следует, что в любой момент времени для всякой несвободной механической системы геометрическая сумма главных векторов задаваемых сил, реакций связей и сил инерции материальных точек системы равна нулю.

Проведем из произвольного неподвижного центра O в каждую точку системы M_i радиус-вектор r_i .

Умножим векторно радиус-вектор \mathbf{r}_i каждой точки M_i на сумму векторов левой части равенства (108.1):

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i + \mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_i + \mathbf{r}_i \times \Phi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Сложим все n полученных уравнений:

$$\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i + \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_i + \sum \mathbf{r}_i \times \Phi_i = 0. \quad (108.4)$$

Здесь $\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = \sum \mathbf{M}_{iO}^P = \mathbf{M}_O^P$ — главный момент задаваемых сил относительно центра O ;

$\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_i = \sum \mathbf{M}_{iO}^R = \mathbf{M}_O^R$ — главный момент реакций связей относительно центра O ;

$\sum \mathbf{r}_i \times \Phi_i = \sum \mathbf{M}_{iO}^\Phi = \mathbf{M}_O^\Phi$ — главный момент сил инерции точек системы относительно центра O .

Подставляя эти значения в уравнение (108.4), получаем

$$\mathbf{M}_O^P + \mathbf{M}_O^R + \mathbf{M}_O^\Phi = 0. \quad (108.5)$$

Уравнение (108.5) показывает, что в любой момент времени для всякой несвободной механической системы геометрическая сумма главных моментов задаваемых сил, реакций связей и сил инерции материальных точек системы относительно любого неподвижного центра равна нулю.

§ 109. Приведение сил инерции точек твердого тела к простейшему виду

К системе сил инерции точек твердого тела можно применить метод Пуансо — метод приведения сил к некоторому центру, рассмотренный в статике (см. ч. I «Статика», § 18 и 50). В динамике за центр приведения сил инерции выбирают обычно центр масс тела C . Тогда в результате приведения получится сила Φ^* , равная главному вектору сил инерции точек тела, и пара сил с моментом \mathbf{M}^Φ , равным главному моменту сил инерции относительно центра масс

$$\Phi^* = \sum \Phi_i = - \sum m_i \mathbf{w}_i, \quad (109.1)$$

$$\mathbf{M}^\Phi = \mathbf{M}_C^\Phi = \sum \mathbf{M}_{iC}^\Phi = - \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{w}_i, \quad (109.2)$$

где радиусы-векторы \mathbf{r}_i проведены во все точки тела из центра масс. Количество движения системы

$$\sum m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_C.$$

Продифференцировав это выражение по времени, будем иметь

$$\sum m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} \quad \text{или} \quad \sum m_i \mathbf{w}_i = m \mathbf{w}_C.$$

Пользуясь этим выражением, получим главный вектор сил инерции точек твердого тела *при любом ее движении*:

$$\Phi^* = - m \mathbf{w}_C. \quad (109.3)$$

Остается определить главный момент сил инерции точек тела относительно центра масс.

Рассмотрим некоторые случаи движения твердого тела.

1. Поступательное движение

В случае поступательного движения ускорения всех точек тела геометрически равны ускорению его центра масс

При этом условии

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_C^\Phi &= - \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{w}_i = - \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{w}_C = - \sum m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{w}_C = \\ &= - m \mathbf{r}_C \times \mathbf{w}_C = 0, \end{aligned}$$

так как радиус-вектор центра масс $\mathbf{r}_C = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{m}$ относительно центра масс равен нулю

В этом случае силы инерции точек твердого тела приводятся к равнодействующей, приложенной в центре масс и равной главному вектору сил инерции, а потому

$$\Phi = \Phi^* = - m \mathbf{w}_C.$$

Таким образом, *при поступательном движении силы инерции точек твердого тела приводятся к равнодействующей силе, приложенной в центре масс тела, равной по модулю произведению массы тела на модуль ускорения его центра масс и направленной противоположно этому ускорению.*

2. Вращение твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии, вокруг неподвижной оси, перпендикулярной к этой плоскости

В этом случае неподвижная ось вращения тела является главной осью инерции тела в точке O .

Каждой точке M'_i (рис. 224, а) соответствует точка M''_i такой же массы, симметричная относительно заданной плоскости (на рис. 224, а эта плоскость заштрихована).

Из кинематики известно, что ускорения всех точек, лежащих на одной прямой, параллельной оси вращения, геометрически равны. Поэтому силы инерции $\Phi'_i = - m'_i \mathbf{w}'_i$ и $\Phi''_i = - m''_i \mathbf{w}''_i$ точек M'_i и M''_i геометрически равны и их равнодействующая приложена в точке M_i , лежащей в плоскости симметрии.

Отсюда следует, что в точке M_i приложена равнодействующая сил инерции всех точек тела, лежащих на перпендикуляре к плоскости симметрии, восстановленном в этой точке. Таким образом,

сложение сил инерции точек тела в этом случае движения сводится к сложению сил инерции точек материальной плоской фигуры, имеющей массу данного тела и тот же момент инерции относительно оси вращения (рис. 224, б).

Приведем силы инерции точек фигуры к центру ее вращения O . При приведении получим силу, приложенную в этом центре, и пару

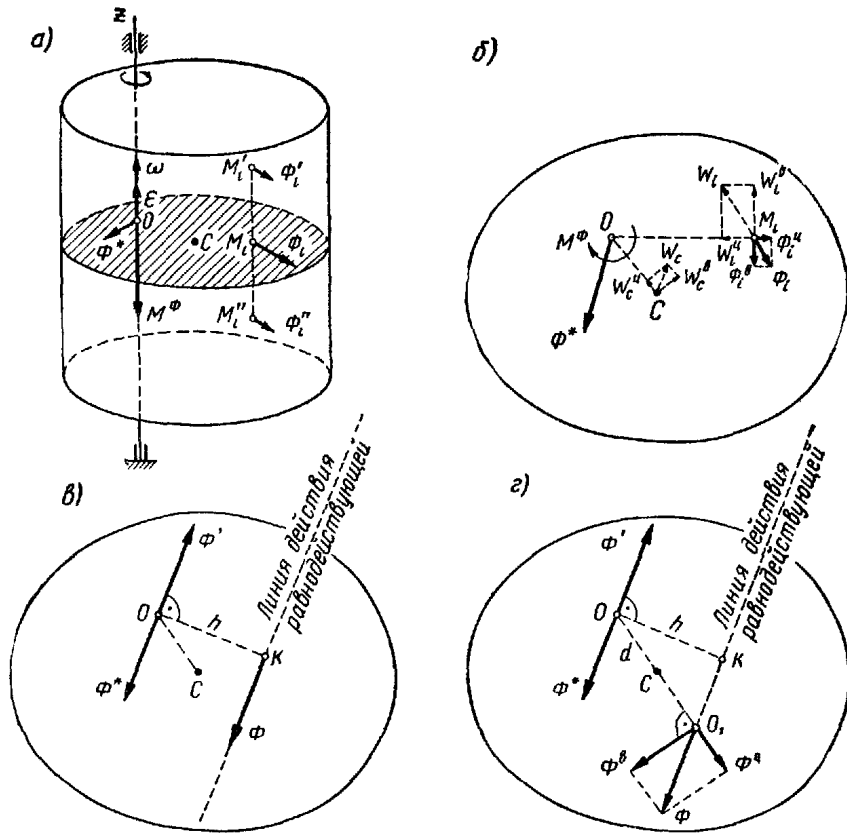


Рис 224.

сил, лежащую в плоскости фигуры. Сила равна главному вектору, определяемому формулой (109.3):

$$\Phi^* = -m\omega_C.$$

Главный вектор направлен противоположно ускорению центра масс w_C и имеет модуль:

$$\Phi^* = m\omega_C.$$

Для определения момента пары разложим силу инерции каждой точки на вращательную и центробежную силу инерции, направленные

противоположно вращательному и центростремительному ускорениям этой точки.

Их модули определим по формулам

$$|\Phi_i^b| = m_i |\omega_i^b| = m_i r_i |\varepsilon|, \quad \Phi_i^a = m_i \omega_i^a = m_i r_i \omega^2.$$

Так как линии действия центробежных сил инерции проходят через центр вращения O , то искомый момент пары равен сумме моментов вращательных сил инерции относительно точки O :

$$M^\Phi = M_O^\Phi = -\sum \Phi_i^b r_i = -\sum m_i r_i^2 \varepsilon = -\varepsilon \sum m_i r_i^2.$$

Здесь $\sum m_i r_i^2 = J_z$ — момент инерции материальной плоской фигуры относительно оси Oz , перпендикулярной к ее плоскости, равный моменту инерции данного тела относительно этой оси.

Таким образом, алгебраическая величина момента пары, составленной силами инерции,

$$M^\Phi = -J_z \varepsilon, \quad (109.4)$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси вращения; ε — алгебраическая величина углового ускорения тела.

Вектор M^Φ направлен перпендикулярно к плоскости фигуры, т. е. по оси вращения тела противоположно вектору углового ускорения, т. е.

$$M^\Phi = -J_z \varepsilon.$$

Как известно из статики (§ 55), силу Φ^* и пару с моментом M^Φ , лежащих в одной плоскости, можно заменить одной равнодействующей силой Φ , геометрически равной главному вектору Φ^* (рис. 224, в).

Линия действия этой силы отстоит от центра приведения O на расстоянии

$$h = \frac{M^\Phi}{\Phi}. \quad (109.5)$$

Таким образом, при вращении твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии, вокруг оси, перпендикулярной к этой плоскости, силы инерции точек тела приводятся к равнодействующей силе, лежащей в плоскости симметрии. Модуль и направление этой силы определяются формулой (109.3), а расстояние от ее линии действия до точки пересечения оси вращения с плоскостью симметрии — формулой (109.5).

Покажем, что линия действия равнодействующей сил инерции Φ проходит через центр качаний. Для этого продолжим линию действия этой силы до пересечения с прямой OC ; перенесем в точку их пересечения O_1 силу Φ и разложим ее на две составляющие Φ^b и Φ^a (рис. 224, г).

На основании теоремы о моменте равнодействующей силы (ч. I, «Статика», § 21)

$$M(\Phi)_{O_1} = M_{O_1}^\Phi = -J_z \varepsilon. \quad (a)$$

Так как линия действия Φ^H проходит через точку O , то

$$M(\Phi)_O = -\Phi^H \cdot OO_1. \quad (6)$$

Принимая $OC = d$, имеем

$$\Phi^H = m\omega_C^H = m \cdot OC \cdot \varepsilon = m \cdot d \cdot \varepsilon.$$

Поэтому на основании (а) и (б):

$$M(\Phi)_O = -J_z \varepsilon = -md \cdot \varepsilon \cdot OO_1,$$

откуда

$$OO_1 = \frac{J_z}{md}.$$

Из этого равенства на основании (81.3) следует, что точка O_1 , через которую проходит линия действия равнодействующей сил инерции Φ , является центром качаний.

3. Вращение твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии, вокруг центральной оси, перпендикулярной к этой плоскости

В этом случае ось вращения тела является главной центральной осью инерции тела, так как она проходит через центр масс тела перпендикулярно к плоскости симметрии (рис. 225). При неподвижном центре масс тела из формулы (109.3) следует

$$\Phi^* = m\omega_C = 0,$$

т. е. главный вектор сил инерции точек тела равен нулю.

Из формулы (109.4)

$$M^\Phi = -J_{Cz} \varepsilon, \quad (109.6)$$

где J_{Cz} — момент инерции тела относительно оси вращения.

Таким образом, если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, которая является его главной центральной осью инерции, то силы инерции точек тела приводятся к паре сил, лежащей в плоскости материальной симметрии тела, момент которой определяется по формуле (109.6).

4. Плоское движение твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии

Рассмотрим такое движение твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии, при котором все точки тела движутся параллельно этой плоскости (рис. 226). Это движение тела можно

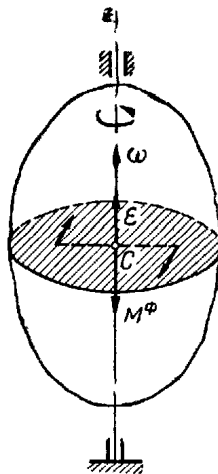


Рис. 225.

разложить на поступательное движение с центром масс тела C и вращение вокруг подвижной оси $C\xi$, проходящей через центр масс тела перпендикулярно к плоскости симметрии.

Как уже известно, силы инерции поступательного движения приводятся к силе, приложенной в центре масс и определяемой формулой (109.3):

$$\Phi^* = -m\omega_C.$$

Силы инерции вращательного движения в таком случае приводятся к паре сил, лежащей в плоскости симметрии и имеющей момент

$$M^\Phi = -J_\xi \varepsilon, \quad (109.7)$$

где J_ξ — момент инерции тела относительно главной центральной оси инерции $C\xi$.

Таким образом, если твердое тело, имеющее плоскость материальной симметрии, движется параллельно этой плоскости, то силы инерции

точек тела приводятся к силе, приложенной в центре масс и равной главному вектору сил инерции, и к паре сил, лежащей в плоскости симметрии, величина момента которой определяется формулой (109.7).

В более сложных случаях движения тела главный вектор и главный момент сил инерции относительно центра приведения находят аналитическим путем, т. е. по их проекциям на три координатные оси.

§ 110. Определение динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Вращение твердого тела вокруг его главной центральной оси инерции

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z под действием приложенных к нему внешних задаваемых сил $P_1^E, P_2^E, \dots, P_n^E$ (рис. 227, а). Положим, что в рассматриваемый момент тело имеет угловую скорость ω и угловое ускорение ε . Чтобы воспользоваться принципом Германа — Эйлера — Даламбера, приложим к каждой точке тела M_i силу инерции Φ_i .

При неравномерном вращении тела эта сила состоит из вращательной силы инерции Φ_i^H , направленной противоположно вращатель-

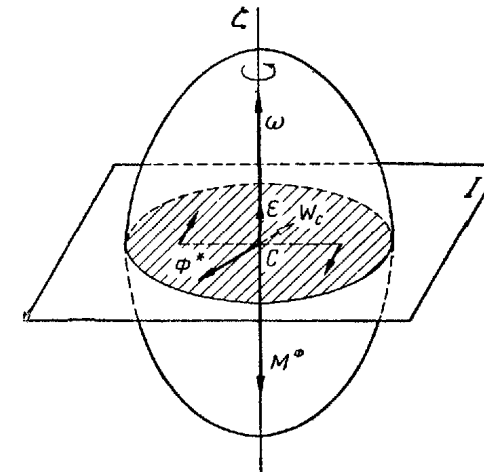


Рис. 226.

ному ускорению точки M_i и центробежной силы инерции Φ_i^n , направленной противоположно центростремительному ускорению этой точки. Применяя принцип освобождения от связей (§ 21), заменяем действие на тело подпятника A и подшипника B реакциями R_A и R_B , разложив их на составляющие X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B .

Расстояние AB между опорами тела обозначим h . На основании принципа Германа — Эйлера — Даламбера внешние задаваемые силы, реакции связей и силы инерции должны удовлетворять уравнениям (108.3) и (108.5), которые в данном случае принимают вид

$$\left. \begin{aligned} P^E + R_A + R_B + \Phi^* &= 0, \\ M_A^E + M_A^{R_A} + M_A^{R_B} + M_A^\Phi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (110.1)$$

но $M_A^{R_A} = 0$.

Первому уравнению (110.1) соответствуют три уравнения проекций внешних задаваемых сил, реакций связей и сил инерции на оси координат. Второму уравнению (110.1) соответствуют три уравнения моментов этих же сил относительно осей координат. Таким образом, всего имеем шесть следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i^E + X_A + X_B + \sum \Phi_{ix} &= 0, \\ \sum Y_i^E + Y_A + Y_B + \sum \Phi_{iy} &= 0, \\ \sum Z_i^E + Z_A &= 0, \\ \sum M_{ix}^E - Y_B h + \sum M_{ix}^\Phi &= 0, \\ \sum M_{iy}^E + X_B h + \sum M_{iy}^\Phi &= 0, \\ \sum M_{iz}^E + \sum M_{iz}^\Phi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (110.2)$$

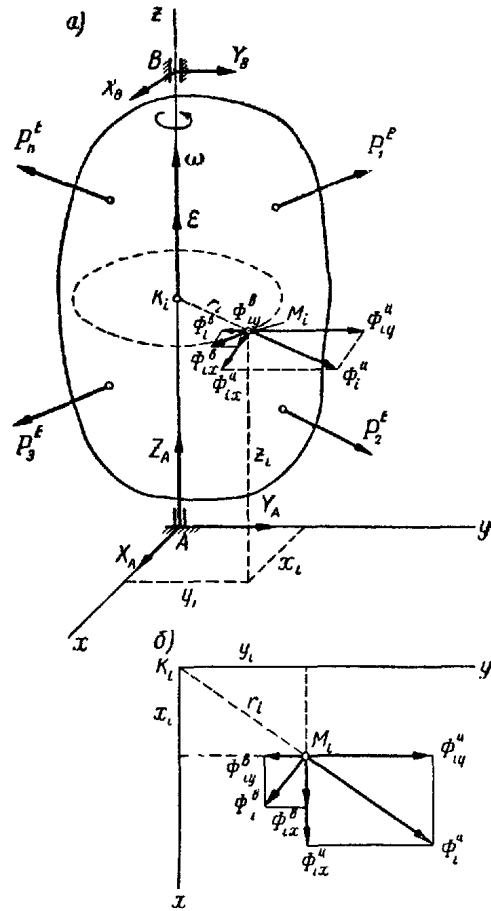


Рис. 227.

Установим формулы для вычисления сумм проекций сил инерции на оси координат и их моментов относительно этих осей.

Модули центробежной и вращательной сил инерции определим по формулам (2.10):

$$\Phi_i^n = m_i r_i \omega^2; \quad \Phi_i^b = m_i r_i |\varepsilon|.$$

где r_i — радиус окружности, описываемой точкой.

Разложим каждую из этих сил на составляющие, направленные по осям координат (рис. 227, а, б). Найдем алгебраические значения этих составляющих, т. е. проекции сил Φ_i^b и Φ_i^u на оси координат:

$$\Phi_{ix}^u = \Phi_i^u \cos(\Phi_i^u, i) = m_i r_i \omega^2 \frac{x_i}{r_i} = m_i x_i \omega^2;$$

$$\Phi_{iy}^u = \Phi_i^u \cos(\Phi_i^u, j) = m_i r_i \omega^2 \frac{y_i}{r_i} = m_i y_i \omega^2;$$

$$\Phi_{ix}^b = \Phi_i^b \cos(\Phi_i^b, i) = m_i r_i \varepsilon \frac{y_i}{r_i} = m_i y_i \varepsilon;$$

$$\Phi_{iy}^b = \Phi_i^b \cos(\Phi_i^b, j) = -m_i r_i \varepsilon \frac{x_i}{r_i} = -m_i x_i \varepsilon.$$

Найдем суммы проекций сил инерции на оси x и y , пользуясь равенствами $\sum m_i x_i = m x_C$, $\sum m_i y_i = m y_C$, полученными из формул (32.2):

$$\begin{aligned} \sum \Phi_{ix} &= \sum \Phi_{ix}^u + \sum \Phi_{ix}^b = \sum m_i x_i \omega^2 + \sum m_i y_i \varepsilon = \\ &= \omega^2 \sum m_i x_i + \varepsilon \sum m_i y_i = m x_C \omega^2 + m y_C \varepsilon; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum \Phi_{iy} &= \sum \Phi_{iy}^u + \sum \Phi_{iy}^b = \sum m_i y_i \omega^2 - \sum m_i x_i \varepsilon = \\ &= \omega^2 \sum m_i y_i - \varepsilon \sum m_i x_i = m y_C \omega^2 - m x_C \varepsilon. \end{aligned}$$

Найдем суммы моментов сил инерции относительно осей x и y как суммы моментов центробежных и вращательных сил инерции:

$$\begin{aligned} \sum M_{ix}^\Phi &= \sum M_{ix}^u + \sum M_{ix}^b = -\sum \Phi_{iy}^u z_i + \sum \Phi_{iy}^b z_i = \\ &= -\sum m_i y_i \omega^2 z_i + \sum m_i x_i \varepsilon z_i = -\omega^2 \sum m_i y_i z_i + \varepsilon \sum m_i z_i x_i = \\ &= -J_{yz} \omega^2 + J_{zx} \varepsilon, \end{aligned}$$

где $J_{yz} = \sum m_i y_i z_i$ и $J_{zx} = \sum m_i z_i x_i$ — центробежные моменты инерции тела относительно осей y, z и осей z, x :

$$\begin{aligned} \sum M_{iy}^\Phi &= \sum M_{iy}^u + \sum M_{iy}^b = \sum \Phi_{ix}^u z_i + \sum \Phi_{ix}^b z_i = \\ &= \sum m_i x_i \omega^2 z_i + \sum m_i y_i \varepsilon z_i = \omega^2 \sum m_i z_i x_i + \varepsilon \sum m_i y_i z_i = \\ &= J_{zx} \omega^2 + J_{yz} \varepsilon. \end{aligned}$$

Учитывая, что центробежные силы инерции пересекают ось z , найдем сумму моментов сил инерции относительно оси z как сумму моментов только вращательных сил инерции, не разложенных на составляющие:

$$\sum M_{iz}^{\Phi} = \sum M_{iz}^{\Phi^B} = -\sum m_i r_i \varepsilon r_i = -\varepsilon \sum m_i r_i^2 = -J_z \varepsilon.$$

Подставив найденные значения в уравнения (110.2), получим

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i^E + X_A + X_B + \boxed{m x_C \omega^2 + m y_C \varepsilon} &= 0, \\ \sum Y_i^E + Y_A + Y_B + \boxed{m y_C \omega^2 - m x_C \varepsilon} &= 0, \\ \sum Z_i^E + Z_A &= 0, \\ \sum M_{ix}^E - Y_B h \boxed{-J_{yz} \omega^2 + J_{zx} \varepsilon} &= 0, \\ \sum M_{iy}^E + X_B h \boxed{+J_{zx} \omega^2 + J_{yz} \varepsilon} &= 0, \\ \sum M_{iz}^E - J_z \varepsilon &= 0. \end{aligned} \right\} (110.3)$$

Последнее из уравнений (110.3) не содержит реакций опор. Это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение вращения тела (79.2).

Остальные пять уравнений позволяют определить пять составляющих реакций подпятника A и подшипника B .

В первое, второе, четвертое и пятое уравнения (110.3), из которых определяются составляющие реакций опор вдоль осей x и y , входят члены, зависящие как от внешних задаваемых сил, так и от сил инерции. Следовательно, каждая из этих реакций имеет статическую составляющую, вызываемую действием внешних задаваемых сил P_i^E , и динамическую составляющую, зависящую от сил инерции.

Члены уравнений (110.3), зависящие от сил инерции, отмечены рамками.

При быстром вращении тела динамические составляющие могут иметь большие значения.

Установим условия, при которых динамические составляющие реакций подпятника и подшипника равны нулю. Чтобы получить эти условия, приравняем нулю сумму членов, зависящих от сил инерции, в каждом из уравнений (110.3):

$$\left. \begin{aligned} m x_C \omega^2 + m y_C \varepsilon &= 0, \\ m y_C \omega^2 - m x_C \varepsilon &= 0, \end{aligned} \right\} (110.4)$$

$$\left. \begin{aligned} -J_{yz} \omega^2 + J_{zx} \varepsilon &= 0, \\ J_{zx} \omega^2 + J_{yz} \varepsilon &= 0. \end{aligned} \right\} (110.5)$$

Решая систему уравнений (110.4) относительно x_C и y_C , находим

$$x_C = 0, \quad y_C = 0,$$

т. е. устанавливаем, что центр тяжести тела должен находиться на оси его вращения.

Решая систему уравнений (110.5) относительно J_{yz} и J_{zx} , находим

$$J_{yz} = 0 \quad \text{и} \quad J_{zx} = 0.$$

Это означает, что ось вращения тела z должна быть главной осью инерции тела для начала координат.

Таким образом, установлено, что динамические составляющие реакций подпятника и подшипника равны нулю в том случае, если ось вращения тела является главной центральной осью инерции тела.

Для выполнения этого условия вращающимся частям машин обычно придают форму тел вращения с тем, чтобы это тело вращалось вокруг своей оси симметрии.

Если из-за неточности изготовления ось вращения тела не окажется главной центральной осью инерции, то эта погрешность устраняется специальными приемами.

§ 111. Примеры применения принципа Германа — Эйлера — Даламбера для механической системы

Пример 59. Бадья весом G поднимается при помощи лебедки весом Q с постоянным ускорением w (рис. 228, а). Лебедка установлена на однородной горизонтальной балке AB длиной l и весом P , заделанной концом A в стену. Расстояние от оси барабана лебедки до стены равно a . Определить реакции заделки.

Решение. Для определения реакций опор при помощи принципа Германа — Эйлера — Даламбера к точкам системы условно прикладывают их силы инерции и, освобождая систему от связей, прикладывают реакции этих связей. В зависимости от вида полученной системы сил составляют те или иные уравнения проекций сил на оси, соответствующие векторному уравнению (108.3), и уравнения моментов сил относительно осей, соответствующие векторному уравнению (108.5).

Обозначим:

r — радиус барабана;
 J_{Ox} — момент инерции барабана относительно его оси;
 M — момент, действующий на барабан лебедки, вызывающий подъем бадьи.

Сила инерции бадьи Φ направлена противоположно ускорению w и имеет модуль $\Phi = m w = \frac{G}{g} w$.

Положим, что барабан лебедки имеет плоскость симметрии, которая совмещена с плоскостью чертежа (рис. 228, б) и что центр тяжести барабана C находится на оси вращения.

В § 109 установлено, что в этом случае силы инерции точек вращающегося тела приводятся к паре сил, момент которой определяется по формуле (109.4). Пользуясь этой формулой, найдем абсолютную величину момента пары, составленной силами инерции точек барабана:

$$|M^\Phi| = J_{Ox} |\varepsilon|.$$

Угловое ускорение барабана можно определить по вращательному ускорению точек обода барабана, которое равно ускорению груза:

$$\varepsilon = \frac{w^B}{r} = \frac{w}{r}.$$

Следовательно,

$$|M^\Phi| = J_{Ox} \left| \frac{w}{r} \right|.$$

К механической системе, состоящей из балки, лебедки и бадьи, применяем принцип Германа — Эйлера — Даламбера.

Прикладываем условно к системе силу инерции бадьи Φ и пару с моментом M^Φ , составленную силами инерции точек барабана, направив момент этой пары противоположно вектору углового ускорения ε .

Заменяем действие заделки реакцией R_A , в данном случае вертикальной, и реактивной парой с моментом M_A .

Для полученной системы параллельных сил на плоскости составляем уравнение проекций на ось, параллельную силам (алгебраическую сумму сил, равную нулю), и уравнение моментов относительно точки A :

$$\sum P_i = 0; \quad R_A - P - Q - G - \Phi = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_{iA} = 0; \quad M_A + M - |M^\Phi| - P \cdot \frac{l}{2} - Qa - G(a+r) - \Phi(a+r) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) можно значительно упростить, так как из уравнения моментов сил, приложенных к барабану относительно его оси Ox , следует, что

$$M - |M^\Phi| - Gr - \Phi r = 0$$

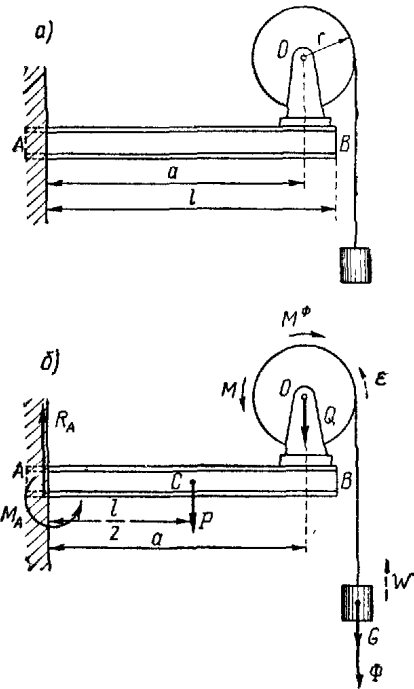


Рис. 228.

или

$$M = |M^\Phi| + Gr + \Phi r.$$

Подставляя это значение M в уравнение (2), найдем, что

$$M_A - P \cdot \frac{l}{2} - Qa - Ga - \Phi a = 0.$$

Таким образом,

$$R_A = P + Q + G \left(1 + \frac{w}{g} \right),$$

$$M_A = P \cdot \frac{l}{2} + \left[Q + G \left(1 + \frac{w}{g} \right) \right] a.$$

Пример 60. Однородный диск весом G и радиусом R может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через точку O его обода. Диск отпущен из

наивысшего положения без начальной угловой скорости. Определить реакцию оси диска в тот момент, когда центр тяжести диска и его ось вращения лежат в одной горизонтальной плоскости, и равнодействующую сил инерции в этот момент.

Решение. Чтобы воспользоваться принципом Германа — Эйлера — Даламбера, необходимо определить силы инерции точек диска. Для этого необходимо найти угловую скорость ω и угловое ускорение ε диска при горизонтальном положении отрезка OC_1 (рис. 229). Найдем сначала угловую скорость диска в момент, когда отрезок OC составляет с вертикалью угол φ . Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии механической системы в форме уравнения (70.2):

$$T - T_0 = \sum A_i^E,$$

где $T_0 = 0$, так как движение диска началось из состояния покоя. Кинетическую энергию вращающегося диска определим по формуле (69.2):

$$T = \frac{1}{2} J_x \omega^2.$$

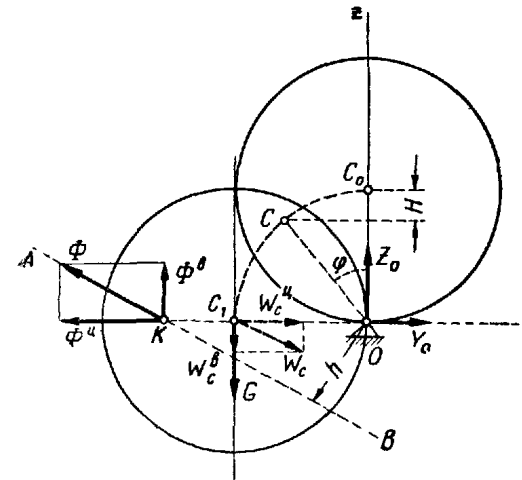


Рис. 229.

Момент инерции диска относительно оси вращения найдем по формулам (35.1) и (36.2):

$$J_x = J_{Cx} + mR^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2.$$

Подставив значение J_x , получим

$$T = \frac{3}{4} mR^2 \omega^2 = \frac{3}{4} \frac{G}{g} R^2 \omega^2.$$

Работу силы тяжести определим по формуле (61.1):

$$A_G = GH = GR(1 - \cos \varphi).$$

Подставив значения T и A_G в уравнение (70.2), будем иметь

$$\frac{3}{4} \frac{G}{g} R^2 \omega^2 = GR(1 - \cos \varphi),$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{4}{3} \frac{g}{R} (1 - \cos \varphi), \quad \text{или} \quad \omega = 2 \sqrt{\frac{g}{3R} (1 - \cos \varphi)}.$$

Продифференцировав по времени выражение, определяющее ω^2 , получим

$$2\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{4}{3} \cdot \frac{g}{R} \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Так как $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ и $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, то

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3} \frac{g}{R} \sin \varphi.$$

Определим угловую скорость диска ω и угловое ускорение ε при $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\cos \varphi = 0, \quad \sin \varphi = 1;$$

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{g}{3R}}, \quad \varepsilon = \frac{2}{3} \frac{g}{R}.$$

Рассматриваемый случай соответствует вращению тела, имеющего плоскость материальной симметрии, вокруг оси, перпендикулярной к этой плоскости. В § 109 установлено, что если центр тяжести такого тела не лежит на оси вращения, то силы инерции точек тела проводятся к равнодействующей. Определим модули равнодействующих вращательных и центробежных сил инерции точек диска, пользуясь формулами (109.3):

$$\Phi^B = m\omega_C^B = mR\varepsilon = \frac{G}{g} R \cdot \frac{2}{3} \frac{g}{R} = \frac{2}{3} G;$$

$$\Phi^U = m\omega_C^U = mR\omega^2 = \frac{G}{g} R \cdot \frac{4}{3} \frac{g}{R} = \frac{4}{3} G.$$

Силы Φ^B и Φ^U направлены противоположно вращательному и центростремительному ускорениям центра тяжести диска ω_C^B и ω_C^U .

Положим, что AB является линией действия равнодействующей сил инерции Φ и приложим эту силу в точке K этой прямой, находящейся на горизонтальном диаметре диска.

Приложим также к диску задаваемую силу G . Заменим действие шарнира O реакцией, разложив ее на составляющие Y_O и Z_O . Для определения этих составляющих по принципу Германа—Эйлера—Даламбера составим для плоской системы сил G , Y_O , Z_O , Φ^B , Φ^U уравнения проекций на оси y и z :

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_O - \Phi^U = 0, \quad \text{откуда} \quad Y_O = \Phi^U = \frac{4}{3} G;$$

$$\sum Z_i = 0; \quad -G + Z_O + \Phi^B = 0, \quad \text{откуда} \quad Z_O = G - \Phi^B = \frac{1}{3} G.$$

Модуль равнодействующей сил инерции $\Phi = \Phi^B + \Phi^U$

$$\Phi = \sqrt{\Phi^{B^2} + \Phi^{U^2}} = \sqrt{\frac{4}{9} G^2 + \frac{16}{9} G^2} = \frac{2}{3} G \sqrt{5}.$$

Найдем величину главного момента сил инерции относительно точки O по формуле (109.4):

$$M^\Phi = J_x \varepsilon = \frac{3}{2} \frac{G}{g} R^2 \cdot \frac{2}{3} \frac{g}{R} = GR,$$

что и очевидно, так как

$$M^\Phi + M_O(P^E) = 0.$$

откуда

$$|M^\Phi| = M_O(P^E) = GR.$$

Расстояние от точки O до линии действия силы Φ найдем по формуле (109.5):

$$h = \frac{|M^\Phi|}{\Phi} = \frac{GR}{\frac{2}{3} G \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10} R = 0,67R.$$

Пример 61. Однородная тонкая пластинка весом G имеет форму прямоугольного треугольника с катетами a и b . Пластинка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, совпадающей с катетом b . Определить реакции подпятника и подшипника, полагая, что они находятся в вершинах A и B треугольника.

Решение. Свяжем с пластинкой подвижную систему координат, направив ось z по оси вращения пластинки, ось y — по катету a и ось x — перпендикулярно к плоскости пластинки (рис. 230). Чтобы воспользоваться принципом Германа—Эйлера—Даламбера, определим силы инерции точек пластинки. Для этого разобьем пластинку

на элементарные площадки. При равномерном вращении пластинки сила инерции каждого элемента имеет только центробежную составляющую, модуль которой определится по формуле (3.5):

$$\Phi_i^n = m_i y_i \omega^2.$$

Направление силы Φ_i^n противоположно направлению центростремительного ускорения элемента w_i^n . Силы инерции элементов образуют систему параллельных сил, направленных в одну сторону и лежащих в плоскости пластинки yAz . Такая система сил приводится к равнодействующей Φ^n , равной главному вектору этих сил и, следовательно, определяемой по формуле (109.3):

$$\Phi^n = -m w_C^n.$$

Так как расстояние от центра тяжести треугольной пластинки C до оси вращения составляет $\frac{1}{3}a$, то центростремительное ускорение точки C равно:

$$w_C^n = \frac{1}{3} a \omega^2.$$

Модуль равнодействующей сил инерции

$$\Phi^n = \frac{1}{3} m a \omega^2 = \frac{1}{3} \frac{G}{g} a \omega^2.$$

Направление силы Φ^n противоположно направлению ускорения w_C^n .

Для определения линии действия силы Φ^n найдем главный момент сил инерции относительно точки A :

$$M_A^\Phi = -\sum \Phi_i^n z_i = -\sum m_i y_i z_i \omega^2 = -\omega^2 \sum m_i y_i z_i = -\omega^2 J_{yz},$$

где $J_{yz} = \frac{1}{12} mab$ — центробежный момент инерции треугольной пластинки относительно осей y, z , направленных по катетам треугольника (см. § 40).

Подставив значение J_{yz} , получим

$$M_A^\Phi = -\frac{1}{12} mab\omega^2 = -\frac{1}{12} \frac{G}{g} ab\omega^2.$$

Расстояние от линии действия равнодействующей Φ^n до точки A найдем по формуле (109.5):

$$h = \frac{|M_A^\Phi|}{\Phi} = \frac{\frac{1}{12} \frac{G}{g} ab\omega^2}{\frac{1}{3} \frac{G}{g} a\omega^2} = \frac{1}{4} b.$$

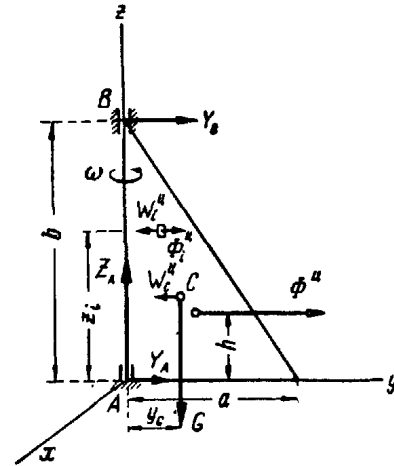


Рис. 230.

Приложим к пластинке задаваемую силу G и реакции подшипника B и подпятника A . Так как сила G и равнодействующая сил инерции Φ^n расположены в плоскости пластинки, то реакции опор лежат тоже в этой плоскости, имея составляющие Y_B, Y_A, Z_A .

Согласно принципу Германа — Эйлера — Даламбера составим для плоской системы сил G, Y_B, Y_A, Z_A и Φ^n уравнения, соответствующие уравнениям (108.3) и (108.5), в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum M_{iA} &= 0; & -Y_B b - G \frac{a}{3} - \Phi^n h &= 0, \\ \sum Y_i &= 0; & Y_B + Y_A + \Phi^n &= 0, \\ \sum Z_i &= 0; & -G + Z_A &= 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения

$$\begin{aligned} Y_B &= -\frac{G}{3} \frac{a}{b} - \Phi^n \cdot \frac{h}{b} = \\ &= -\frac{G}{3} \frac{a}{b} - \frac{1}{3} \frac{G}{g} a \omega^2 \frac{1}{4} b = -\frac{Ga(4g + b\omega^2)}{12bg}. \end{aligned}$$

Из второго уравнения

$$Y_A = -Y_B - \Phi^n = \frac{Ga(4g + b\omega^2)}{12bg} - \frac{Ga\omega^2}{3g} = \frac{Ga(4g - 3b\omega^2)}{12bg}.$$

Из третьего уравнения $Z_A = G$.

При вращении пластинки составляющие реакций опор Y_A и Y_B вращаются вместе с ней,

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается сущность принципа Германа — Эйлера — Даламбера для материальной точки?
2. Каким условиям удовлетворяют в любой момент времени главные векторы внешних задаваемых сил, реакций связей и сил инерции точек несвободной механической системы и главные моменты этих сил относительно любого центра?
3. Каковы модуль и направление главного вектора сил инерции механической системы?
4. К чему приводятся силы инерции точек твердого тела:
 - а) при поступательном движении тела;
 - б) при вращении тела, имеющего плоскость материальной симметрии, вокруг неподвижной оси, перпендикулярной к этой плоскости;
 - в) при плоском движении тела, имеющего плоскость материальной симметрии?
5. При каких условиях динамические давления вращающегося тела на опоры равны нулю?
6. Каково число и каков вид уравнений, выражающих принцип Германа — Эйлера — Даламбера для несвободной механической системы в проекциях на оси координат, в случаях, когда задаваемые внешние силы, реакции связей и силы инерции материальных точек твердого тела образуют:
 - а) плоскую систему параллельных сил;
 - б) систему сил, произвольно расположенных на плоскости;
 - в) систему параллельных сил в пространстве;
 - г) произвольную систему сил в пространстве?

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

§ 112. Обобщенные координаты и число степеней свободы

Перемещения точек несвободной механической системы не могут быть совершенно произвольными, так как они ограничены имеющимися связями. Это означает, что не все координаты точек независимы.

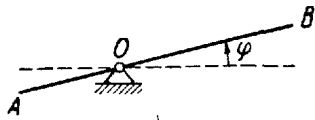


Рис. 231.

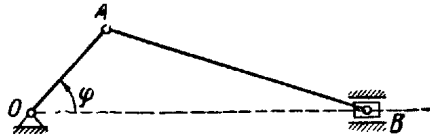


Рис. 232.

При таком условии положение точек системы определяется заданием только независимых координат. Остальные координаты определяются из уравнений связей (см. § 21).

Независимые величины, заданием которых однозначно определяется положение всех точек механической системы, называются обобщенными координатами этой системы. Для голономных систем число независимых обобщенных координат механической системы равно числу степеней свободы этой системы.

Так, например, положение рычага AB с осью вращения O (рис. 231) вполне определяется заданием его угла поворота phi. Угол phi можно рассматривать как обобщенную координату рычага.

Так как положение рычага определяется одной обобщенной координатой, то рычаг имеет одну степень свободы.

Положение всех точек кривошипного механизма (рис. 232) вполне определяется заданием только угла поворота кривошипа phi. Этот угол можно принять за обобщенную координату этой системы, имеющую также одну степень свободы.

Положение всех точек центробежного регулятора (рис. 233), вращающегося вокруг вертикальной оси, определяется заданием угла поворота регулятора phi и угла alpha, образованного каждой из стержней с вертикалью. Не зависящие друг от друга углы phi и alpha можно считать обобщенными координатами.

Так как положение регулятора определяется двумя обобщенными координатами, то он имеет две степени свободы.

Положение свободной материальной точки в пространстве определяется тремя декартовыми координатами, не зависящими друг от друга.

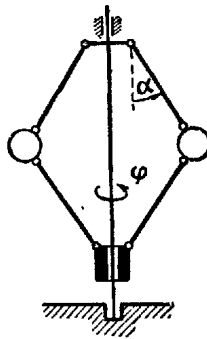


Рис. 233.

Поэтому свободная материальная точка имеет три степени свободы. Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет одну степень свободы, так как его положение определяется только углом поворота phi.

Тело, совершающее сферическое движение, имеет три степени свободы, так как его положение определяется тремя эйлеровыми углами psi, theta, phi.

Свободное твердое тело, движение которого определяется шестью уравнениями, имеет шесть степеней свободы.

Механическая система, положение которой определяют s обобщенных координат, имеет s степеней свободы.

Декартовы координаты любой точки M_i механической системы являются функциями обобщенных координат этой системы.

Так, например, зная длину кривошипа r и длину шатуна l кривошипно-шатунного механизма (рис. 234), можно выразить декартову координату ползуна B через обобщенную координату phi:

$$x_B = OK + KB,$$

или

$$x_B = r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}.$$

Таким же образом можно определить координату любой точки этого механизма.

Обозначим обобщенные координаты механической системы, имеющей s степеней свободы, через q_1, q_2, ..., q_s.

Декартовы координаты любой точки M_i этой системы при стационарных связях являются функциями s обобщенных координат:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_s), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_s), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_s). \end{aligned} \right\} (112.1)$$

При наличии нестационарных связей декартовы координаты всех точек механической системы являются функциями не только обобщенных координат, но и времени:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t). \end{aligned} \right\} (112.2)$$

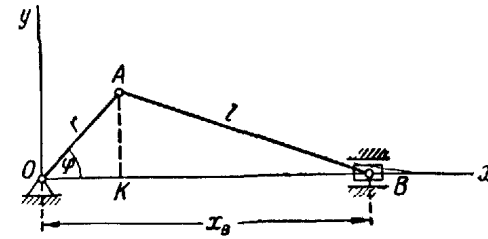


Рис. 234.

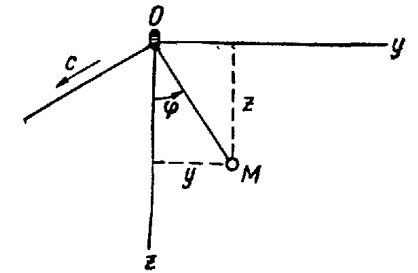


Рис. 235.

Например, при переменной длине нити маятника $OM = l = l_0 - ct$ (рис. 235) точка M имеет координаты

$$y = (l_0 - ct) \sin \varphi, \quad z = (l_0 - ct) \cos \varphi.$$

Эти координаты зависят не только от обобщенной координаты φ , но и от времени t .

§ 113. Возможные (виртуальные) перемещения механической системы. Идеальные связи

Возможными, или виртуальными, перемещениями несвободной механической системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения, допускаемые в данный момент наложенными на систему связями.

Возможные перемещения точек механической системы рассматривают как величины первого порядка малости, пренебрегая при этом величинами высших порядков малости.

Поэтому криволинейные перемещения точек заменяют прямолинейными отрезками, отложенными по касательным к траекториям точек, и обозначают δs . Так, например, возможным перемещением рычага AB (рис. 236) является его поворот на бесконечно малый

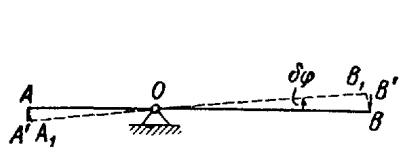


Рис. 236.

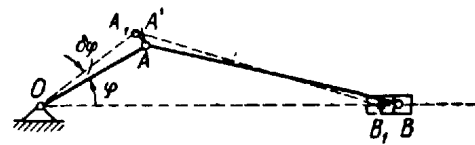


Рис. 237.

угол $\delta\varphi$ вокруг точки O . При этом повороте точки A и B должны переместиться по дугам окружностей AA_1 и BB_1 . С точностью до величин первого порядка малости эти перемещения заменяют возможными перемещениями $\delta s_A = \overline{AA'}$ и $\delta s_B = \overline{BB'}$ в виде прямолинейных отрезков, отложенных по касательным к траекториям точек, а по величине равных:

$$\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi; \quad \delta s_B = OB \cdot \delta\varphi.$$

Возможным перемещением кривошипного механизма, изображенного на рис. 237, является перемещение, соответствующее повороту кривошипа OA на бесконечно малый угол $\delta\varphi$ вокруг оси вала.

Возможное перемещение δs_A пальца кривошипа A представляет собой отрезок касательной AA' к дуге окружности с центром в точке O , равный по величине $\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi$.

Возможным перемещением δs_B ползуна B является бесконечно малый отрезок BB_1 прямолинейной траектории точки B .

Действительные перемещения несвободной механической системы, движущейся под действием приложенных к ней сил, входят в число

ее возможных перемещений, являясь их частным случаем. Однако это справедливо лишь для стационарных связей. В случае нестационарных связей действительные перемещения системы не относятся к числу ее возможных перемещений.

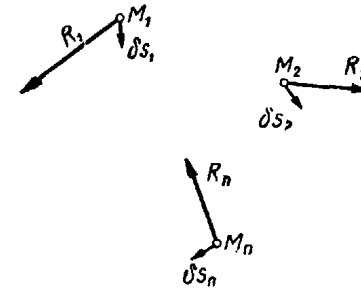


Рис. 238.

Все силы, действующие на несвободную материальную точку или несвободную механическую систему, делят на задаваемые силы и реакции связей.

Задаваемые силы выражают действие на механическую систему тел, вызывающих или стремящихся вызвать определенное ее движение.

Реакции связей выражают действие связей, ограничивающих движение механической системы или препятствующих ему.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек M_1, M_2, \dots, M_n , подчиненную связям; реакции связей обозначим R_1, R_2, \dots, R_n (рис. 238).

Дадим системе какое-либо возможное перемещение; возможные перемещения точек системы обозначим $\delta s_1, \delta s_2, \dots, \delta s_n$. Вычислим сумму работ реакций R_1, R_2, \dots, R_n на этих перемещениях.

Если сумма работ реакций связей на любом возможном перемещении системы равна нулю, то такие связи называются идеальными.

Согласно этому определению для идеальных связей

$$\sum R_i \delta s_i \cos(R_i, \delta s_i) = 0. \quad (113.1)$$

Положим, что тело может скользить между параллельными гладкими поверхностями (рис. 239, а). Сообщим телу возможное перемещение и вычислим работу реакций связи на этом перемещении.

Считая, что давление тела передается на нижнюю поверхность, приложим к телу нормальную реакцию этой поверхности N . Возможное перемещение точки приложения этой силы δs лежит в плоскости, касательной к опорной поверхности.

Работа силы N на перемещении δs равна:

$$N \delta s \cos(N, \delta s) = N \delta s \cos 90^\circ = 0.$$

Следовательно, рассматриваемая двусторонняя связь является идеальной, так как условие (113.1) выполнено.

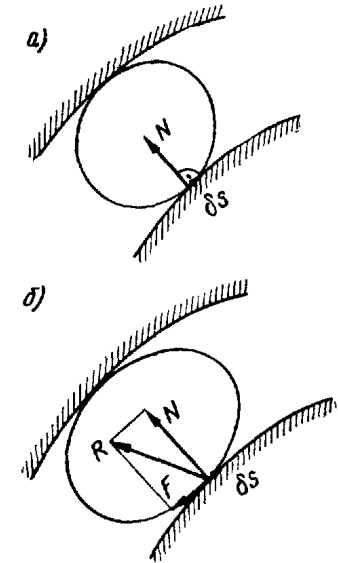


Рис. 239.

Положим теперь, что тело может скользить между параллельными шероховатыми поверхностями (рис. 239, б).

Тогда реакция плоскости \mathbf{R} состоит из нормальной реакции \mathbf{N} и силы трения \mathbf{F} . Найдем сумму работ этих составляющих реакции на возможном перемещении δs :

$$N \delta s \cos(\mathbf{N}, \delta s) + F \delta s \cos(\mathbf{F}, \delta s) = N \delta s \cos 90^\circ + F \delta s \cos 180^\circ = -F \delta s \neq 0.$$

Следовательно, рассматриваемая двусторонняя связь не является идеальной, так как условие (113.1) не выполнено.

Отметим, что, хотя связь, осуществленная с трением, не является идеальной, тем не менее такую связь можно условно рассматривать как идеальную. Для этого следует перевести силы трения из группы реакций связей в группу задаваемых сил. Тогда сумма работ реакций (без сил трения) на возможных перемещениях будет равна нулю, т. е. условие (113.1) будет выполнено.

В некоторых случаях и шероховатая поверхность является идеальной связью. Так, например, если тело катится по неподвижной шероховатой поверхности без скольжения, то линия соприкосновения тел является мгновенной осью вращения. Скорости точек соприкосновения тел равны нулю, а потому возможные перемещения этих точек равны нулю. В этом случае $\delta s = 0$ и работа реакции \mathbf{R} , являющейся геометрической суммой нормальной составляющей и силы сцепления на этом перемещении, равна нулю.

Таким образом, шероховатая поверхность, по которой катится без скольжения тело (рис. 240), также удовлетворяет условию (113.1).

Условие (113.1), при котором связь является идеальной, относится не только к двусторонним, но и к *односторонним связям*.

Однако в последнем случае должны рассматриваться лишь *неосвобождающие возможные перемещения*, которые оставались бы возможными и в случае, если бы данная связь была двусторонней.

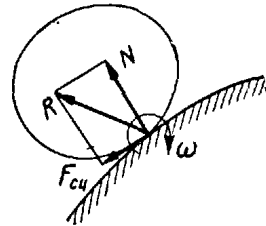


Рис. 240.

§ 114. Принцип возможных перемещений

Рассмотрим несвободную механическую систему M_1, M_2, \dots, M_n , находящуюся в состоянии покоя.

Если система находится в состоянии покоя, то действующие на нее силы взаимно уравновешиваются.

Разделим силы, приложенные к точкам системы, на задаваемые силы и реакции связей. Обозначим равнодействующие задаваемых сил, приложенных к каждой из точек системы, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$, а равнодействующие реакций связей, приложенных к тем же точкам $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_n$ (рис. 241).

Так как силы, приложенные к каждой из точек системы, взаимно уравновешиваются, то для каждой точки

$$\mathbf{P}_i + \mathbf{R}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

откуда $\mathbf{P}_i = -\mathbf{R}_i$, т. е. силы \mathbf{P}_i и \mathbf{R}_i равны и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

Мысленно сообщим рассматриваемой системе, находящейся в состоянии покоя, возможное перемещение из занимаемого ею положения. Обозначим $\delta s_1, \delta s_2, \dots, \delta s_n$ возможные перемещения точек системы M_1, M_2, \dots, M_n .

Вычислим сумму работ сил, приложенных к каждой из точек системы, на возможном перемещении этой точки.

Так как силы \mathbf{P}_i и \mathbf{R}_i равны и противоположны по направлению, то $\cos(\mathbf{P}_i, \delta s_i) = -\cos(\mathbf{R}_i, \delta s_i)$ и работы этих сил на перемещении δs_i равны по величине, но противоположны по знаку. Поэтому сумма работ этих сил равна нулю, т. е.

$$P_i \delta s_i \cos(\mathbf{P}_i, \delta s_i) + R_i \delta s_i \cos(\mathbf{R}_i, \delta s_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Просуммировав все n уравнений, составленных для сил, приложенных к каждой точке системы, получим

$$\sum P_i \delta s_i \cos(\mathbf{P}_i, \delta s_i) + \sum R_i \delta s_i \cos(\mathbf{R}_i, \delta s_i) = 0. \quad (114.1)$$

Будем предполагать, что в рассматриваемой механической системе все связи двусторонние и идеальные, относя силы трения, если они имеются, к задаваемым силам. Тогда сумма работ реакций связей на возможных перемещениях должна быть равна нулю, т. е.

$$\sum R_i \delta s_i \cos(\mathbf{R}_i, \delta s_i) = 0.$$

При этом условии уравнение (114.1) примет вид

$$\sum P_i \delta s_i \cos(\mathbf{P}_i, \delta s_i) = 0. \quad (114.2)$$

Уравнение (114.2), называемое *уравнением работ*, выражает одно из важнейших положений механики, называемое *принципом возможных перемещений*.

Принцип возможных перемещений формулируется так:

Если в некотором положении механической системы с двусторонними идеальными связями приложенные к ней силы уравновешиваются, то на любом возможном перемещении системы из этого положения сумма работ задаваемых сил равна нулю.

В случае односторонних связей уравнение (114.2) остается справедливым лишь в случае, когда возможные перемещения являются неосвобождающими. В общем же случае при односторонних связях

$$\sum P_i \delta s_i \cos(\mathbf{P}_i, \delta \mathbf{s}_i) \leq 0.$$

Если в каждую точку M_i системы из некоторого центра O провести вектор \mathbf{r}_i , то возможное перемещение этой точки $\delta \mathbf{s}_i$ будет соответствующим возможным приращением радиуса-вектора точки:

$$\delta \mathbf{s}_i = \delta \mathbf{r}_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Тогда уравнение работ (114.2) примет вид:

$$\sum \mathbf{P}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (114.3)$$

Обозначим проекции задаваемой силы \mathbf{P}_i на неподвижные оси декартовых координат X_i, Y_i, Z_i , а проекции возможного перемещения $\delta \mathbf{r}_i$ на те же оси $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$. Пользуясь аналитическим выражением элементарной работы (60.6), представим уравнение работ (114.2) в следующем виде:

$$\sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0. \quad (114.4)$$

Принцип возможных перемещений облегчает вывод условий равновесия задаваемых сил, приложенных к несвободным системам, состоящим из большого числа тел. Это объясняется тем, что уравнение работ, выражающее этот принцип, не содержит реакций связей. Применение же уравнений равновесия статики потребовало бы определения большого числа неизвестных реакций связей.

Если система, состоящая из большого числа тел, имеет одну степень свободы, то одно из равенств (114.2), (114.3) или (114.4) устанавливает сразу условие равновесия задаваемых сил, приложенных к системе. Если эта система имеет несколько степеней свободы, то уравнения работ составляются для каждого независимого перемещения системы в отдельности. Таким образом, получается столько условий равновесия системы, сколько степеней свободы она имеет.

§ 115. Применение принципа возможных перемещений к простейшим машинам

Простейшие машины являются системами с одной степенью свободы. На машины действуют: движущая сила \mathbf{P} или вращающий момент $M_{вр}$ и сила сопротивления \mathbf{R} или момент сопротивления $M_{сопр}$.

Положим, что силы (или моменты) и реакции имеющих связей взаимно уравновешиваются.

Для установления условий равновесия сил \mathbf{P} и \mathbf{R} машине сообщают возможное перемещение и составляют уравнение работ. На основании (114.3) условие равновесия сил \mathbf{P} и \mathbf{R} получает вид

$$\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{r}_P + \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r}_R = 0. \quad (115.1)$$

где $\delta \mathbf{r}_P$ — возможное приращение радиуса-вектора точки приложения силы \mathbf{P} , соответствующее ее возможному перемещению.

$\delta \mathbf{r}_R$ — возможное приращение радиуса-вектора точки приложения силы \mathbf{R} , соответствующее ее возможному перемещению.

Предположим, что возможное перемещение системы из состояния покоя происходит в течение ничтожно малого промежутка времени τ . Тогда точки приложения сил перемещаются со скоростями

$$\mathbf{v}_P = \frac{\delta \mathbf{r}_P}{\tau} \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_R = \frac{\delta \mathbf{r}_R}{\tau}. \quad (115.2)$$

Эти скорости называются возможными (виртуальными) скоростями точек.

Разделив уравнение работ (115.1) на величину τ , получим

$$\mathbf{P} \cdot \frac{\delta \mathbf{r}_P}{\tau} + \mathbf{R} \cdot \frac{\delta \mathbf{r}_R}{\tau} = 0.$$

Подставив значение возможных скоростей точек, будем иметь

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_P + \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_R = 0, \quad \text{или} \quad P v_P \cos(\mathbf{P}, \mathbf{v}_P) + R v_R \cos(\mathbf{R}, \mathbf{v}_R) = 0.$$

Обозначим проекции сил \mathbf{P} и \mathbf{R} на направление соответствующих скоростей P' и R' , т. е.

$$P' = P \cos(\mathbf{P}, \mathbf{v}_P); \quad R' = R \cos(\mathbf{R}, \mathbf{v}_R);$$

тогда

$$P' v_P + R' v_R = 0.$$

Если направления \mathbf{P}' и \mathbf{v}_P совпадают, то направления \mathbf{R}' и \mathbf{v}_R противоположны.

Пользуясь абсолютными величинами проекций, получим

$$|P'| v_P - |R'| v_R = 0,$$

отсюда

$$\frac{|P'|}{|R'|} = \frac{v_R}{v_P}. \quad (115.3)$$

Соотношение (115.3) можно выразить так: *то, что выигрывается в силе теряется в скорости.*

Это положение, установленное Галилеем, носит название *золотого правила механики.*

Рассмотрим некоторые простейшие машины.

1. Полиспасты

Полиспаст состоит из двух систем блоков, каждая из которых помещена в общей обойме (рис. 242). Одна обойма закреплена неподвижно, а другая движется.

Сила \mathbf{P} , приложенная к концу нити, является движущей силой, а вес поднимаемого груза \mathbf{G} — силой сопротивления.

Определим зависимость между силами P и G при помощи принципа возможных перемещений. Сообщим системе возможное перемещение, совпадающее с ее истинным перемещением при подъеме груза. Если точка приложения силы P получит перемещение δs_P , то каждая из шести частей нити между блоками уменьшится на $\frac{1}{6} \delta s_P$. Поэтому точка приложения силы G переместится вверх на $\delta s_G = \frac{1}{6} \delta s_P$.

Составим уравнение работ в виде (114.2):

$$P \delta s_P - G \delta s_G = 0$$

или

$$P \delta s_P - G \frac{1}{6} \delta s_P = 0.$$

Поделив уравнение на δs_P , найдем

$$P = \frac{1}{6} G.$$

т. е. движущая сила меньше веса поднимаемого груза во столько раз, сколько блоков имеет полиспаст.

2. Клиновидный пресс

Установим зависимость между движущей силой P , приложенной к клину, и силой сопротивления R сжимаемого тела при помощи принципа возможных перемещений. Для этого сообщим системе возможное перемещение, указанное пунктиром на рис. 243, и составим уравнение работ в виде (114.2):

$$P \delta s_P - R \delta s_R = 0.$$

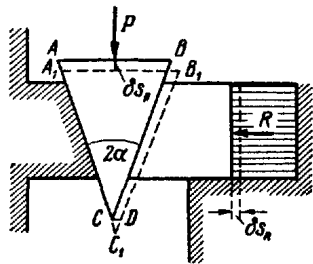


Рис. 243.

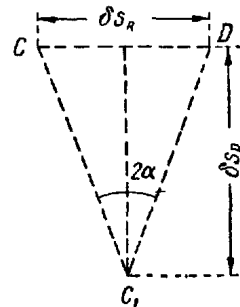


Рис. 244.

Зависимость между возможными перемещениями точек приложения сил P и R установим из треугольника перемещений CC_1D (рис. 244):

$$\delta s_R = 2 \delta s_P \operatorname{tg} \alpha.$$

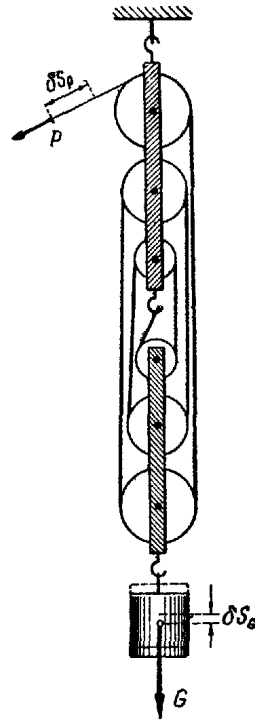


Рис. 242.

Подставив это значение δs_R в уравнение работ, получим

$$P \delta s_P - 2R \delta s_P \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Поделив уравнение на δs_P , найдем

$$P = 2R \operatorname{tg} \alpha.$$

3. Винтовой пресс

На рис. 245 изображена схема винтового пресса. Давление пресса на тело возникает под действием пары сил (P , P'), приложенной к его рукоятке.

Зависимость реакции N сжимаемого тела от момента приложенной пары сил установим, пользуясь принципом возможных перемещений. Сообщим частям пресса возможные перемещения, совпадающие с их истинными перемещениями при работе пресса. Повернем рукоятку AB на малый угол $\delta \varphi$ в сторону действия пары сил. Тогда точка приложения силы N получит возможное перемещение δs_N , направление которого противоположно направлению силы N . Составим уравнение работ в виде (114.2). Работу пары сил определим по формуле (65.7) как произведение ее момента на приращение угла поворота тела:

$$M \delta \varphi - N \delta s_N = 0,$$

где момент пары $M = 2Pl$.

При одном обороте рукоятки винт перемещается вдоль оси на величину h , называемую шагом винта. Для определения зависимости между $\delta \varphi$ и δs_N воспользуемся тем, что продольное перемещение винта δs_N составляет такую же часть шага винта h , какую угловое перемещение $\delta \varphi$ составляет от угла 2π , т. е.

$$\frac{\delta s_N}{h} = \frac{\delta \varphi}{2\pi}, \quad \text{откуда} \quad \delta s_N = \frac{h}{2\pi} \delta \varphi.$$

Подставив это значение δs_N в уравнение работ, получим

$$2P \cdot l \cdot \delta \varphi - N \frac{h}{2\pi} \delta \varphi = 0.$$

Поделив уравнение на $\delta \varphi$, найдем

$$N = 4\pi P \frac{l}{h}.$$

Сила, сжимающая тело, равна найденной реакции N .

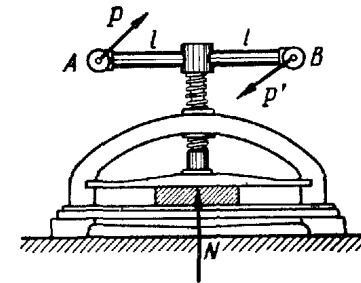


Рис. 245.

4. Стержневой пресс

Найдем соотношение между движущимися силами \mathbf{P} и \mathbf{P}' , приложенными к вершинам A и B ромбического четырехзвенника, и силой сопротивления \mathbf{R} , приложенной в точке D пресса, если $\mathbf{P} = -\mathbf{P}'$; длины стержней пресса указаны на рис. 246.

Для установления этой зависимости воспользуемся уравнением работ вида (114.4), которое для сил, параллельных оси y , будет иметь вид

$$P_y \delta y_A + P'_y \delta y_B + R_y \delta y_D = 0. \quad (a)$$

Проекции сил \mathbf{P} , \mathbf{P}' и \mathbf{R} на ось y

$$P_y = -P; \quad P'_y = P; \quad R_y = -R.$$

Координаты точек приложения этих сил по оси y :

$$\begin{aligned} y_A &= b \cos \beta + a \sin \alpha; \\ y_B &= b \cos \beta - a \sin \alpha; \\ y_D &= 2b \cos \beta. \end{aligned}$$

Проекции возможных перемещений этих точек на ось y находим, дифференцируя выражения, определяющие координаты этих точек:

$$\begin{aligned} \delta y_A &= -b \sin \beta \cdot \delta \beta + a \cos \alpha \cdot \delta \alpha; \\ \delta y_B &= -b \sin \beta \cdot \delta \beta - a \cos \alpha \cdot \delta \alpha; \\ \delta y_D &= -2b \sin \beta \cdot \delta \beta. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения в уравнение (a), получаем

$$Pb \sin \beta \cdot \delta \beta - Pa \cos \alpha \cdot \delta \alpha - Pb \sin \beta \cdot \delta \beta - Pa \cos \alpha \cdot \delta \alpha + R2b \sin \beta \cdot \delta \beta = 0,$$

откуда

$$R = P \frac{a \cos \alpha}{b \sin \beta} \frac{\delta \alpha}{\delta \beta}. \quad (б)$$

Для установления зависимости между элементарными приращениями углов α и β воспользуемся уравнением, характеризующим связь:

$$2d = 2a \cos \alpha - 2c + 2b \sin \beta.$$

Дифференцируя это выражение, получаем

$$0 = -2a \sin \alpha \delta \alpha + 2b \cos \beta \delta \beta,$$

откуда

$$\frac{\delta \alpha}{\delta \beta} = \frac{b \cos \beta}{a \sin \alpha}.$$

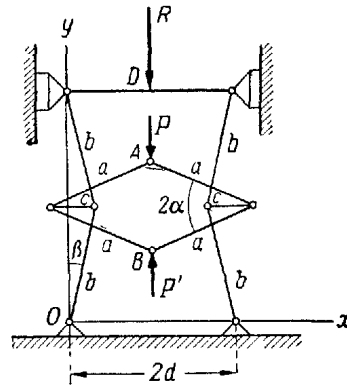


Рис. 246.

Подставляя это значение в выражение (б), находим

$$R = P \frac{a \cos \alpha}{b \sin \beta} \frac{b \cos \beta}{a \sin \alpha},$$

отсюда получаем зависимость между величинами сил R и P в виде

$$R = P \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta.$$

§ 116. Примеры применения принципа возможных перемещений к определению реакций связей

В статике обычно приходится определять реакции связей, действующие на систему, не обладающую ни одной степенью свободы.

Такой системой является каждое сооружение, несущее нагрузку, так как оно должно быть неизменяемым и неподвижно прикрепленным к земле.

В этом случае принцип освобожденности от связей используют следующим образом.

Отбрасывают ту связь, реакцию которой требуется определить. Действие связи заменяют ее реакцией, которая переходит в число задаваемых сил. При этом система, освобожденная от одной связи (если она статически определима), получает одну степень свободы.

Системе сообщают возможное перемещение, соответствующее этой степени свободы.

Составляют уравнение работ в виде (114.2) или (114.4), в которое входят не только задаваемые силы но и реакция отброшенной связи. Из этого уравнения сразу определяют искомую реакцию.

Для определения реакций других связей поступают так же, отбрасывая снова только одну связь, т. е. сообщая системе одну степень свободы.

Пример 62. Конструкция, образованная стержнями, соединенными на концах шарнирами, удерживается в указанном на рис. 247, а положении нитью AB . Найти натяжение нити, вызываемое грузом G , подвешенным в точке D .

Решение. Чтобы определить натяжение нити AB , мысленно отбросим эту связь, заменив ее действие на рассматриваемую систему реакциями T и T' , приложенными в точках A и B (рис. 247, б). После отбрасывания связи система получит одну степень свободы.

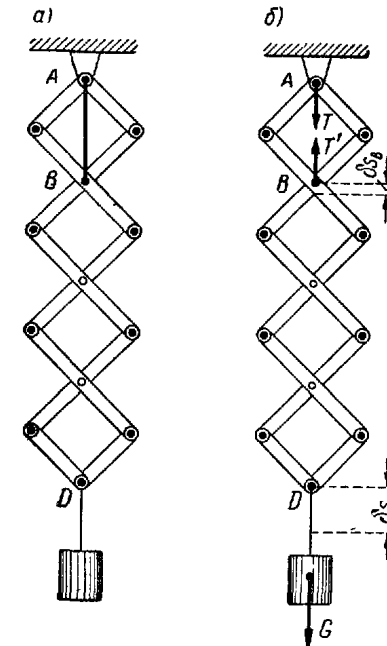


Рис. 247.

Сообщим этой системе возможное перемещение, переместив точку D вниз по вертикали. Тогда вертикальные диагонали образованных стержнями ромбов удлинятся на одну и ту же величину δs . Возможные перемещения точек A, B, D будут:

$$\delta s_A = 0; \quad \delta s_B = \delta s; \quad \delta s_D = 4\delta s.$$

Составим уравнение работ в виде (114.2):

$$-T' \cdot \delta s_B + G \cdot \delta s_D = 0,$$

отсюда найдем реакцию нити, равную ее натяжению:

$$T' = G \frac{\delta s_D}{\delta s_B} = 4G.$$

Пример 63. Пользуясь принципом возможных перемещений, определить усилия в стержнях 4, 5, 7, вертикальной фермы, изображенной на рис. 248, а.

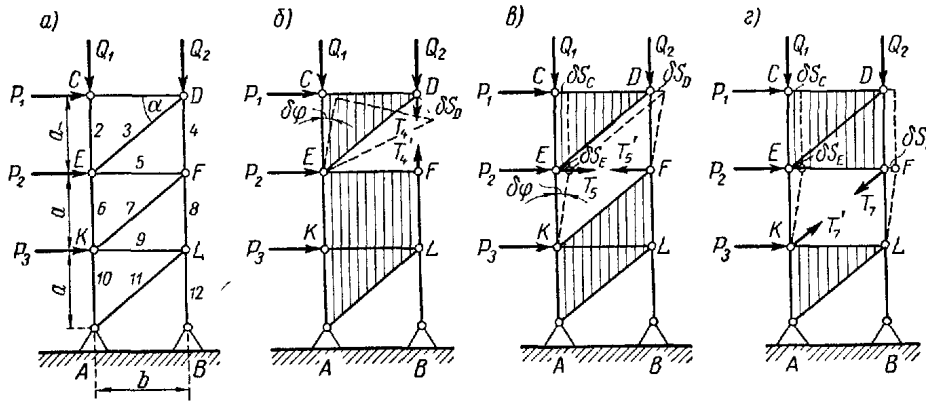


Рис. 248.

Решение. Как известно из статики, внутреннее усилие в каждом стержне равно по величине реакциям этого стержня, приложенным к узлам фермы.

При определении усилий в стержнях фермы при помощи принципа возможных перемещений все стержни фермы условно считают растянутыми, а истинный характер усилия определяют по знаку ответа.

Для определения усилия в каком-либо стержне фермы этот стержень мысленно отбрасывают. Действие стержня заменяют его реакциями, приложенными к соответствующим узлам фермы и направленными от узлов во внутрь стержня. Эти реакции переходят в группу задаваемых сил, действующих на ферму. После удаления одного стержня ферма получает одну степень свободы. Ферме сообщают возможное перемещение и составляют уравнение работ.

В уравнение работ, кроме задаваемых сил, входит реакция удаленного стержня, приложенная к узлу фермы, который получает возможное перемещение.

На рис. 248 б, в, г пунктиром показаны части фермы, получившие возможные перемещения после поочередного удаления стержней 4, 5, 7. Неизменяемые части фермы на этих рисунках заштрихованы.

1. После удаления стержня 4 (рис. 248, б) часть фермы CDE получает возможность поворачиваться вокруг точки E . Сообщаем этой части возможное перемещение — поворот на малый угол $\delta\varphi$ вокруг точки E по движению часовой стрелки (можно было бы сообщить поворот и в противоположную сторону).

Учитывая, что работа силы при повороте тела равна моменту силы относительно центра вращения, умноженному на угол поворота тела, и положительно, если направление момента совпадает с направлением угла поворота, составим уравнение работ задаваемых сил и силы T_4 в виде (114.2):

$$P_1 a \delta\varphi + Q_2 b \delta\varphi + T_4 b \delta\varphi = 0,$$

откуда

$$T_4 = -\frac{P_1 a + Q_2 b}{b}.$$

Знак минус показывает, что стержень 4 сжат.

2. После удаления стержня 5 (рис. 248, в) часть фермы $KECDF$ получает одну степень свободы. Параллелограмм $KEDF$ без диагонали EF становится изменяемой фигурой. Сообщаем части $KECDF$ возможное перемещение — изменение углов параллелограмма $KEDF$, т. е. поворот стержней KE и FD вокруг неподвижных точек K и F на один и тот же малый угол $\delta\varphi$.

Так как перемещения точек E и D при этом равны по величине и совпадают по направлению, то треугольник ECD перемещается поступательно.

Следовательно,

$$\delta s_E = \delta s_C = \delta s_D = \delta s.$$

Составляем уравнение работ задаваемых сил и силы T_5 в виде (114.2):

$$P_1 \delta s_C + P_2 \delta s_E + T_5 \delta s_F = 0$$

или

$$P_1 \delta s + P_2 \delta s + T_5 \delta s = 0,$$

откуда

$$T_5 = -P_1 - P_2$$

Стержень 5 сжат.

3. После удаления стержня 7 изменяемой фигурой становится параллелограмм $KEFL$. Сообщаем части фермы $KECDFL$ возможное перемещение, при котором прямоугольник $ECDL$ перемещается поступательно.

Составляем уравнение работ задаваемых сил и силы T_7 :

$$P_1 \delta s_C + P_2 \delta s_E - T_7 \delta s_F \cos \alpha = 0.$$

Здесь

$$\delta s_C = \delta s_E = \delta s_F = \delta s.$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Подставляя эти значения в уравнение работ, получаем

$$P_1 \delta s + P_2 \delta s - T_7 \delta s \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$$

Отсюда

$$T_7 = (P_1 + P_2) \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}.$$

Стержень 7 растянут.

Принцип возможных перемещений так же, как и способ Риттера (см. «Статику» § 26), позволяет усилие в каждом стержне фермы определять независимо от других усилий.

Пример 64. Определить при помощи принципа возможных перемещений реакции неподвижной шарнирной опоры A и подвижной шарнирной опоры B составной балки, изображенной на рис. 249а. Дано: $q = 25$ кн/м, $M = 100$ кн·м, $P_1 = 100$ кн, $P_2 = 160$ кн, $P_3 = 120$ кн.

Решение. Равномерно распределенную нагрузку заменим сосредоточенной силой $Q = 8q = 200$ кн, приложенной на расстоянии 4 м от центра опоры A .

Реакцию неподвижной шарнирной опоры A определим по горизонтальной и вертикальной составляющим.

1. Чтобы определить составляющую X_A , мысленно отбросим связь, препятствующую горизонтальному перемещению балки, т. е. заменим неподвижную шарнирную опору A шарнирной опорой на катках, приложив при этом к балке горизонтальную реакцию X_A (рис. 249, б). Получим составную балку, имеющую все опоры на катках.

Сообщим этой балке возможное перемещение — горизонтальное перемещение δs , направленное вправо (можно было бы направить его и влево). Работа всех вертикальных сил на горизонтальном перемещении δs равна нулю.

Работа пары сил согласно формуле (65.7) равна нулю, так как балка, к которой приложена пара, не получила поворота. На возможном перемещении работу совершают только силы X_A и P_2 .

Уравнение работ (114.2) имеет вид

$$X_A \cdot \delta s - P_2 \cos 30^\circ \cdot \delta s = 0;$$

отсюда

$$X_A = P_2 \cos 30^\circ = 138 \text{ кн.}$$

Знак плюс в ответе означает, что принятое направление силы X_A совпадает с действительным.

2. Чтобы определить вертикальную составляющую Y_A реакции опоры A , мысленно отбросим связь, препятствующую вертикальному перемещению конца A , приложив при этом к балке реакцию Y_A (рис. 249, в). Установим, какое перемещение можно сообщить полученной системе, не нарушая имеющихся связей.

Поступательному перемещению по горизонтальному направлению балки FD препятствует опора A , по вертикальному — опоры C и D .

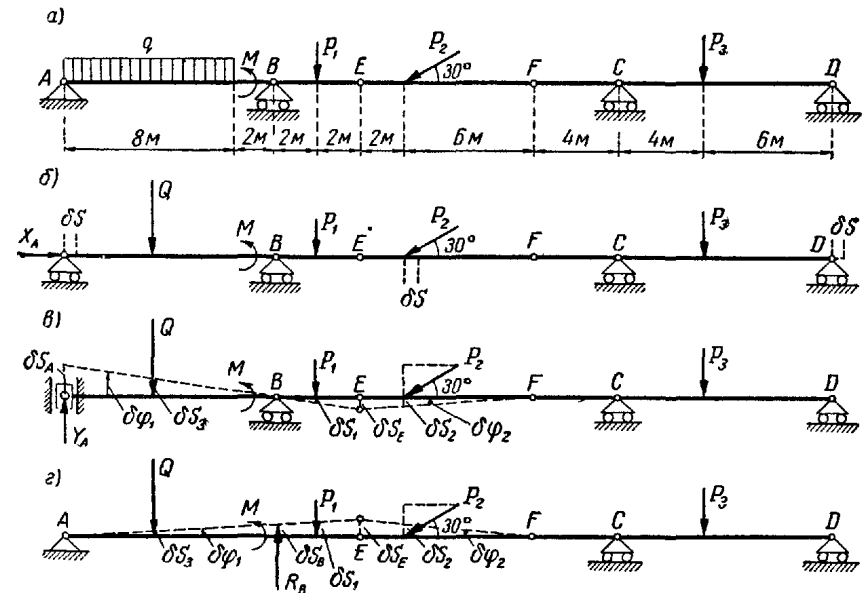


Рис 249

Поворот балки FD , лежащей на двух опорах C и D , невозможен. Балку EF можно повернуть на малый угол вокруг неподвижной точки F , тогда шарнир E переместится по вертикали. Так как точки A и E балки AE могут перемещаться по вертикали, а точка B не может, то балка AE повернется при этом вокруг точки B .

Повернем балку AE , например, по движению часовой стрелки на угол $\delta \varphi_1$; тогда балка EF повернется против движения часовой стрелки на некоторый угол $\delta \varphi_2$. Отметим возможные перемещения тех точек, где приложены силы.

При составлении уравнения работ определим работу пары сил по формуле (65.7) как произведение — $|M| \delta \varphi$, где знак минус обусловлен тем, что поворот произведен на угол $\delta \varphi_1$ по движению часовой стрелки, а пара стремится вращать плоскость в противоположную сторону.

Уравнение работ (114.2) для определения реакции Y_A будет иметь вид

$$Y_A \cdot \delta s_A - Q \cdot \delta s_3 - |M| \delta \varphi_1 + P_1 \cdot \delta s_1 + P_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \delta s_2 = 0.$$

Выразим перемещения всех точек через одну и ту же величину, например, $\delta \varphi_1$. Для этого представим перемещение каждой точки балки AE как произведение угла $\delta \varphi_1$ на расстояние от точки до центра вращения B , а перемещение каждой точки балки EF — как произведение угла $\delta \varphi_2$ на расстояние от точки до центра вращения F . Зависимость между углами $\delta \varphi_1$ и $\delta \varphi_2$ получим, имея в виду перемещение шарнира E :

$$\delta s_E = BE \cdot \delta \varphi_1 = FE \cdot \delta \varphi_2, \text{ откуда } 4 \delta \varphi_1 = 8 \delta \varphi_2, \text{ или } \delta \varphi_2 = 0,5 \delta \varphi_1,$$

$$\delta s_A = 10 \delta \varphi_1; \quad \delta s_3 = 6 \delta \varphi_1; \quad \delta s_1 = 2 \delta \varphi_1; \quad \delta s_2 = 6 \delta \varphi_2 = 3 \delta \varphi_1.$$

Подставим эти значения в уравнение работ:

$$Y_A \cdot 10 \delta \varphi_1 - Q \cdot 6 \delta \varphi_1 - |M| \delta \varphi_1 + P_1 \cdot 2 \delta \varphi_1 + P_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 3 \delta \varphi_1 = 0.$$

$$Y_A = 0,6 Q + 0,1 |M| - 0,2 P_1 - 0,3 P_2 \cos 60^\circ.$$

Подставив числовые значения, найдем Y_A :

$$Y_A = 0,6 \cdot 200 + 0,1 \cdot 1000 - 0,2 \cdot 100 - 0,3 \cdot 160 \cdot 0,5 = 176 \text{ кН.}$$

Знак плюс в ответе означает, что реакция Y_A направлена вверх.

3 Для определения реакции опоры B мысленно отбросим эту опору, приложив к балке ее реакцию R_B .

Сообщим полученной системе возможное перемещение, повернув балку AE вокруг неподвижной точки A , тогда балка EF повернется вокруг точки F (рис. 249, з).

Составим уравнение работ для определения R_B :

$$-Q \cdot \delta s_3 + |M| \delta \varphi_1 + R_B \cdot \delta s_B - P_1 \cdot \delta s_1 - P_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \delta s_2 = 0.$$

Выразим возможные перемещения всех точек через угол поворота $\delta \varphi_1$ бруска AE :

$$\delta s_E = 14 \delta \varphi_1 = 8 \delta \varphi_2; \quad \delta \varphi_2 = \frac{7}{4} \delta \varphi_1;$$

$$\delta s_3 = 4 \delta \varphi_1; \quad \delta s_E = 10 \delta \varphi_1; \quad \delta s_1 = 12 \delta \varphi_1; \quad \delta s_2 = 6 \delta \varphi_2 = \frac{21}{2} \delta \varphi_1.$$

Подставим эти значения в уравнение работ:

$$-Q \cdot 4 \delta \varphi_1 + |M| \delta \varphi_1 + R_B \cdot 10 \delta \varphi_1 - P_1 \cdot 12 \delta \varphi_1 - P_2 \cos 60^\circ \cdot \frac{21}{2} \delta \varphi_1 = 0,$$

отсюда

$$R_B = 0,4 Q - 0,1 |M| + 1,2 P_1 + \frac{21}{20} \cdot P_2 \cdot \cos 60^\circ.$$

Подставив числовые значения, найдем R_B :

$$R_B = 0,4 \cdot 200 - 0,1 \cdot 1000 + 1,2 \cdot 100 + \frac{21}{20} \cdot 160 \cdot 0,5 = 184 \text{ кН.}$$

Точно так же можно найти и реакции опор C и D балки.

Как видно, реакция каждой опоры входит лишь в одно уравнение работ. Таким образом, каждая реакция определяется из одного уравнения независимо от реакций других опор.

Пример 65. На левую часть трехшарнирной арки действует вертикальная нагрузка P . Линия действия силы P расположена на расстоянии a от центра левого пятового шарнира A . Пролет арки равен $2l$, а высота ее равна h . Определить горизонтальную составляющую реакции пятового шарнира B (рис. 250, а).

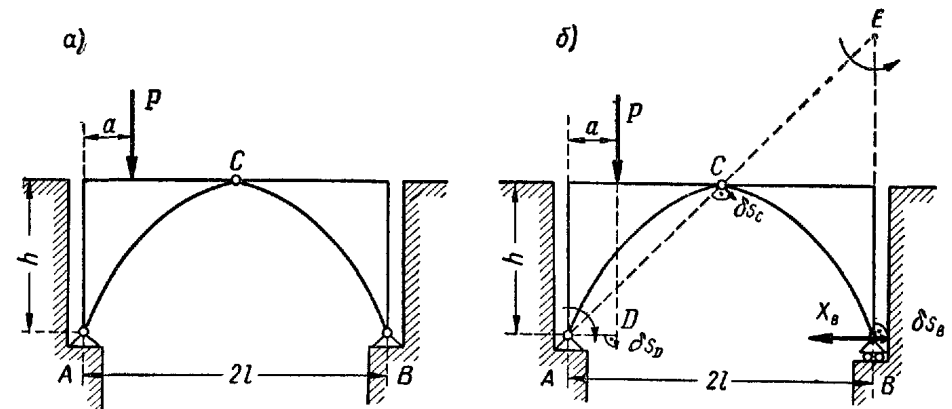


Рис 250

Решение. Мысленно отбросим связь, препятствующую горизонтальному перемещению точки B , превратив опору B в шарнирную опору на катках. Действие отброшенной связи заменим горизонтальной реакцией X_B (рис. 250, б), которая перейдет в группу задаваемых сил. При этом система получит одну степень свободы.

Установим, какие перемещения являются для этой системы возможными.

Левая часть системы имеет неподвижную точку A . Поэтому ее возможным перемещением является поворот на малый угол вокруг этой точки. Произведем этот поворот по движению часовой стрелки. Шарнир C получит перемещение δs_C , направленное перпендикулярно к отрезку AC .

Возможное перемещение правой части, не имеющей неподвижной точки, представляет собой ничтожно малое перемещение плоской фигуры в ее плоскости. Это перемещение можно рассматривать как

поворот на малый угол вокруг мгновенного центра вращения фигуры. Из кинематики известно, что мгновенный центр вращения фигуры находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках фигуры к направлениям скоростей этих точек. Возможные перемещения точек имеют направления возможных скоростей. Поэтому мгновенный центр вращения фигуры можно определить как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных в двух точках фигуры к направлениям возможных перемещений этих точек.

Восставим перпендикуляры в точке C к перемещению δs_C и в точке B к горизонтальному перемещению δs_B ; их пересечение определит точку E — мгновенный центр вращения правой части системы.

Для упрощения уравнения работ перенесем силу P по линии ее действия в точку D , возможное перемещение которой δs_D направлено по линии действия силы P .

Составим уравнение работ в виде (114.2):

$$P \delta s_D - X_B \delta s_B = 0.$$

Выразим перемещения точек D и B , принадлежащих разным частям системы, через перемещение шарнира C , связывающего обе части. Перемещения точек D и C левой части пропорциональны расстояниям этих точек от центра вращения левой части A :

$$\frac{\delta s_D}{\delta s_C} = \frac{AD}{AC} = \frac{a}{\sqrt{l^2 + h^2}}, \quad \text{откуда} \quad \delta s_D = \delta s_C \frac{a}{\sqrt{l^2 + h^2}}.$$

Перемещения точек B и C правой части пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра вращения этой части:

$$\frac{\delta s_B}{\delta s_C} = \frac{EB}{EC} = \frac{2h}{\sqrt{l^2 + h^2}}, \quad \text{откуда} \quad \delta s_B = \delta s_C \frac{2h}{\sqrt{l^2 + h^2}}.$$

Подставив эти значения δs_D и δs_B в уравнение работ, получим

$$P \delta s_C \frac{a}{\sqrt{l^2 + h^2}} - X_B \delta s_C \frac{2h}{\sqrt{l^2 + h^2}} = 0,$$

откуда найдем X_B :

$$X_B = P \frac{a}{2h}.$$

Знак плюс в ответе означает, что указанное на рис. 250, б направление X_B совпадает с действительным.

Аналогичным путем можно найти Y_B , а также X_A и Y_A .

Для системы, состоящей из нескольких тел, определять реакции опор при помощи принципа возможных перемещений особенно удобно в том случае, когда требуется определить реакции не всех опор, а лишь одну или несколько, так как в отличие от обычного метода статики уравнение работ (114.2) или (114.4) позволяет определять реакцию каждой связи сразу, независимо от других реакций.

Пример 66. Пользуясь принципом возможных перемещений, определить реакции составной рамы, изображенной вместе с заданной нагрузкой на рис. 251, если $P_1 = 10$ кн, $q = 5$ кн/м, $P_2 = 80$ кн и $M = 200$ кн·м.

Решение. Заменяем равномерно распределенную нагрузку сосредоточенной силой $Q = q \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$ кн, приложенной к середине загруженного участка, а силу P_2 разложим на горизонтальную и вертикальную составляющие:

$$P_2' = P_2 \cos 60^\circ = 80 \cdot 0,5 = 40 \text{ кн.}$$

$$P_2'' = P_2 \sin 30^\circ = 80 \frac{\sqrt{3}}{2} = 40 \sqrt{3} = 69,3 \text{ кн.}$$

Сперва определим реакцию заделки: реактивный момент M_A , горизонтальную составляющую X_A и вертикальную составляющую Y_A .

Для определения реактивного момента M_A отбросим связь, препятствующую повороту рамы, заменив заделку шарнирно-неподвижной опорой и приложим к раме реактивный момент M_A (рис. 252, а).

Сообщим системе возможное перемещение, повернув раму AC вокруг шарнира A на угол $\delta\varphi$, например, против движения часовой стрелки. Тогда рама CB будет совершать плоское движение.

Найдем мгновенный центр вращения O_1 и, выражая элементарное перемещение δs шарнира C через

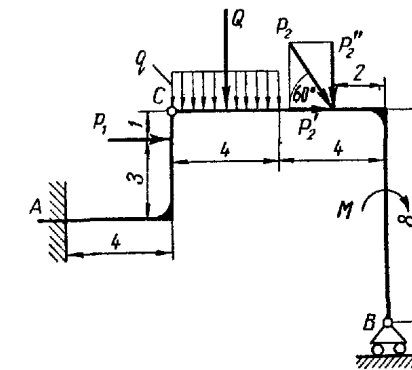


Рис. 251.

элементарные углы поворота $\delta\varphi$ рамы AC и $\delta\varphi_1$ рамы CB , найдем соотношение между ними:

$$\delta s = AC \cdot \delta\varphi = O_1C \cdot \delta\varphi_1; \quad \delta\varphi_1 = \frac{AC}{O_1C} \delta\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} \delta\varphi = 0,5 \delta\varphi.$$

Заметим, что поворот рамы CB вокруг мгновенного центра вращения O_1 на угол $\delta\varphi_1$ будет происходить по движению часовой стрелки.

Составим уравнение работ для определения реактивного момента M_A , учитывая, что работа силы при повороте тела равна моменту силы относительно центра вращения, умноженному на угол поворота тела, и положительна в случае, если направления момента и угла поворота совпадают.

$$M_A \delta\varphi - P_1 3 \delta\varphi - Q \cdot 6 \delta\varphi_1 - P_2' \cdot 8 \delta\varphi_1 - P_2'' 2 \delta\varphi_1 + M \delta\varphi_1 = 0.$$

Подставив значение $\delta\varphi_1$, получим

$$M_A \delta\varphi - P_1 \cdot 3 \delta\varphi - Q \cdot 6 \cdot 0,5 \delta\varphi - P_2' \cdot 8 \cdot 0,5 \delta\varphi - \\ - P_2'' \cdot 2 \cdot 0,5 \delta\varphi + M \cdot 0,5 \delta\varphi = 0.$$

Отсюда

$$M_A = 3P_1 + 3Q + 4P_2' + P_2'' - 0,5M = 219 \text{ кн} \cdot \text{м}.$$

Для определения горизонтальной составляющей заделки X_A представим опору в виде ползуна A в горизонтальных направляющих, жестко скрепленного с рамой AC , и приложим к нему реакцию X_A (рис. 252, б).

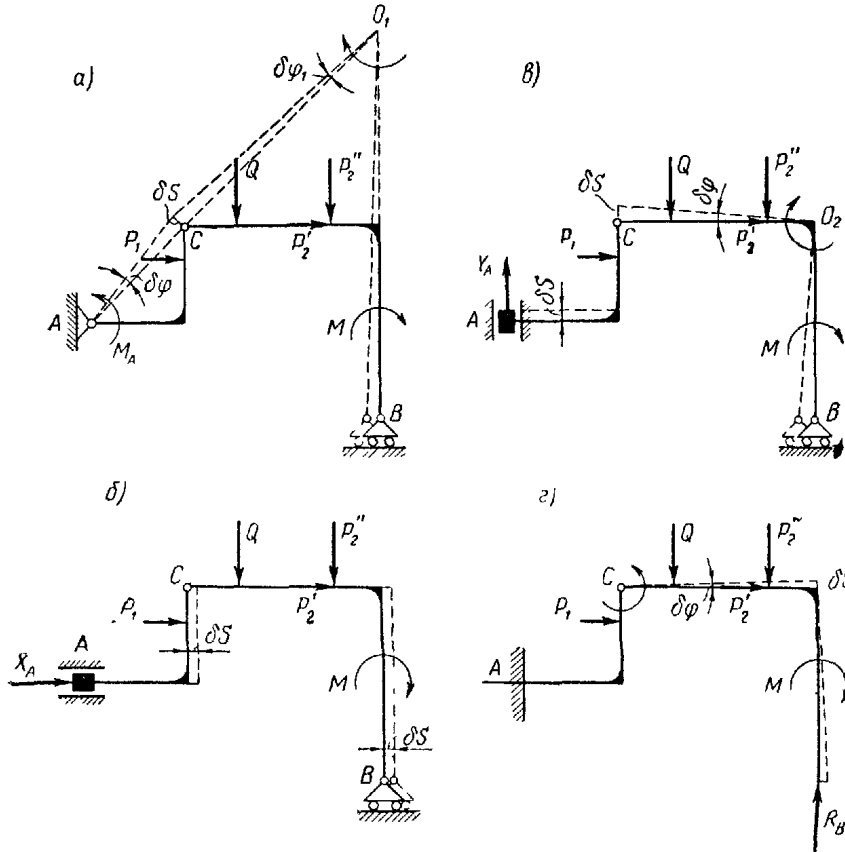


Рис. 252.

Сообщим всей системе возможное перемещение — поступательное перемещение δs , например, вправо, так как поворот ползуна в направляющих невозможен.

Составим уравнение работ для определения величины горизонтальной составляющей заделки X_A :

$$X_A \delta s + P_1 \delta s + P_2' \delta s = 0; \quad X_A = -P_1 - P_2' = -50 \text{ кн}.$$

Знак минус показывает, что горизонтальная составляющая заделки направлена в сторону, противоположную направлению, указанному на рис. 252, б.

Для определения вертикальной составляющей заделки Y_A отбросим связь, препятствующую вертикальному перемещению точки A , заменив заделку ползуном A в вертикальных направляющих, жестко скрепленным с рамой AC , и приложим к нему реакцию Y_A .

Сообщим раме AC возможное перемещение — поступательное перемещение δs , например, вверх. Тогда рама CB будет совершать плоское движение, а точка O_2 будет ее мгновенным центром вращения.

Составим уравнение работ для определения величины вертикальной составляющей заделки Y_A , выразив перемещение всех точек приложения сил через элементарный угол $\delta \varphi$ поворота рамы CB вокруг мгновенного центра вращения O_2 , учитывая, что возможное перемещение шарнира C равно поступательному перемещению рамы AC и $\delta s = 8 \delta \varphi$ (рис. 252, в).

$$Y_A 8 \delta \varphi - Q \cdot 6 \delta \varphi - P_2'' \cdot 2 \delta \varphi + M \delta \varphi = 0,$$

откуда

$$Y_A = \frac{3}{4} Q + \frac{1}{4} P_2'' - \frac{1}{8} M = 7,3 \text{ кн}.$$

Для определения реакции подвижной опоры B отбросим эту связь, заменив ее действие реакцией R_B (рис. 252, г).

Сообщим раме CB возможное перемещение — поворот на угол $\delta \varphi$ вокруг шарнира C , например, против движения часовой стрелки. Тогда $\delta s = 8 \delta \varphi$. Рама AC при этом остается неподвижной.

Составим уравнение работ для определения реакции R_B подвижной опоры B :

$$R_B 8 \delta \varphi - Q \cdot 2 \delta \varphi - P_2'' 6 \delta \varphi - M \delta \varphi = 0,$$

отсюда

$$R_B = \frac{2Q + 6P_2'' - M}{8} = 82 \text{ кн}.$$

Для проверки правильности решения задачи убедимся в том, что удовлетворяются уравнения равновесия

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum M_{i_A} = 0$$

для всей рассматриваемой системы.

Действительно,

$$\sum X_i = X_A + P_1 + P_2' = -50 + 10 + 40 = 0;$$

$$\sum Y_i = Y_A - Q - P_2'' + R_B = 7,3 - 20 - 69,3 + 82 = 0.$$

$$\begin{aligned} \sum M_{i_A} &= M_A - P_1 \cdot 3 - Q \cdot 6 - P_2' \cdot 4 - P_2'' \cdot 10 - M + R_B \cdot 12 = \\ &= 219 - 30 - 120 - 160 - 693 + 984 = 0. \end{aligned}$$

Сопоставляя решение этой задачи, полученное путем применения уравнения работ (114.2), с решением, которое могло бы быть получено при составлении уравнений равновесия рассматриваемой системы сил, еще раз отметим следующие основные особенности решения задач при помощи принципа возможных перемещений:

1) каждая составляющая любой реакции связи определяется независимо от других реактивных сил;

2) определение составляющих реакций внешних связей (в рассматриваемом случае опор A и B) не требует определения реакции внутренних связей (шарнира C).

Для системы, состоящей из нескольких тел, определять реакции опор при помощи принципа возможных перемещений особенно удобно в том случае, когда требуется определить реакции не всех опор, а лишь одну или несколько реакций.

Вопросы для самоконтроля

1. Что представляют собой обобщенные координаты механической системы?
2. Чему равно число степеней свободы механической системы?
3. В каком случае декартовы координаты точек системы зависят не только от обобщенных координат, но и от времени?
4. Что называют возможными перемещениями механической системы?
5. Зависят ли возможные перемещения от действующих на систему сил?
6. Какие связи механической системы называются идеальными?
7. Почему связь, осуществленная с трением, не является идеальной связью?
8. Как формулируется принцип возможных перемещений?
9. Какие виды может иметь уравнение работ?
10. Почему принцип возможных перемещений упрощает вывод условий равновесия сил, приложенных к несвободным системам, состоящим из большого числа тел?
11. Как составляются уравнения работ для сил, действующих на механическую систему с несколькими степенями свободы?
12. Какова зависимость между движущей силой и силой сопротивления в простейших машинах?
13. Как формулируется золотое правило механики?
14. Каким образом определяют реакции связей при помощи принципа возможных перемещений?

ГЛАВА XVIII

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

§ 117. Принцип возможных перемещений в случае движения системы. Общее уравнение динамики

Принцип возможных перемещений, дающий общий метод решения задач статики, можно применить и к решению задач динамики. На основании принципа Германа — Эйлера — Даламбера для несвободной механической системы (§ 109) в любой момент времени геометрическая сумма равнодействующей задаваемых сил, равнодействующей реакций связей и силы инерции для каждой точки M_i механической системы равна нулю:

$$\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_i + \Phi_i = 0, \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

Если система получает возможное перемещение, при котором каждая точка имеет возможное перемещение $\delta \mathbf{s}_i$ (рис. 253), то сумма работ этих сил на перемещении $\delta \mathbf{s}_i$ должна быть равна нулю:

$$P_i \delta s_i \cos(\mathbf{P}_i, \delta \mathbf{s}_i) + R_i \delta s_i \cos(\mathbf{R}_i, \delta \mathbf{s}_i) + \Phi_i \delta s_i \cos(\Phi_i, \delta \mathbf{s}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (117.1)$$

Суммируя все n уравнений (117.1), получаем

$$\sum P_i \delta s_i \cos(\mathbf{P}_i, \delta \mathbf{s}_i) + \sum R_i \delta s_i \cos(\mathbf{R}_i, \delta \mathbf{s}_i) + \sum \Phi_i \delta s_i \cos(\Phi_i, \delta \mathbf{s}_i) = 0. \quad (117.2)$$

Положим, что все связи в рассматриваемой механической системе двусторонние и идеальные (силы трения, если они имеются, отнесены к числу задаваемых сил). Тогда сумма работ реакций связей на возможных перемещениях системы равна нулю:

$$\sum R_i \delta s_i \cos(\mathbf{R}_i, \delta \mathbf{s}_i) = 0.$$

При этом условии уравнение (117.2) имеет вид

$$\sum P_i \delta s_i \cos(\mathbf{P}_i, \delta \mathbf{s}_i) + \sum \Phi_i \delta s_i \cos(\Phi_i, \delta \mathbf{s}_i) = 0. \quad (117.3)$$

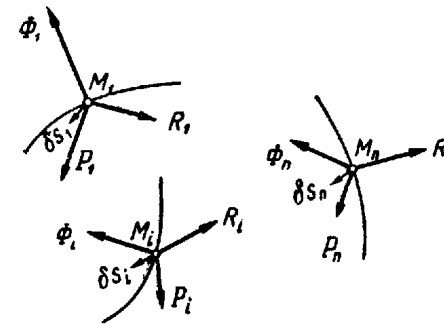


Рис. 253.

Уравнение (117.3) называемое *общим уравнением динамики*, показывает, что в любой момент времени сумма работ всех задаваемых сил и сил инерции материальных точек несвободной механической системы с двусторонними идеальными связями на любом возможном ее перемещении равна нулю.

Если в каждую точку M_i системы из некоторого центра O провести вектор \mathbf{r}_i , то возможное перемещение этой точки $\delta \mathbf{s}_i$ будет соответствующим приращением радиуса-вектора точки:

$$\delta \mathbf{s}_i = \delta \mathbf{r}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Так как возможное перемещение точки не обязательно направлено в сторону ее действительного движения, то возможное приращение радиуса-вектора $\delta \mathbf{r}_i$ не всегда равно действительному приращению радиуса-вектора точки $d\mathbf{r}_i$.

Работу задаваемых сил \mathbf{P}_i и сил инерции Φ_i на возможных перемещениях точек системы $\delta \mathbf{r}_i$ можно представить в виде скалярных произведений (60.5).

Тогда уравнение (117.3) примет вид

$$\sum \mathbf{P}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum \Phi_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

или

$$\sum (\mathbf{P}_i + \Phi_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (117.4)$$

Обозначим X_i, Y_i, Z_i проекции задаваемых сил \mathbf{P}_i на неподвижные оси декартовых координат, $\Phi_{ix}, \Phi_{iy}, \Phi_{iz}$ — проекции сил инерции Φ_i , а $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ — проекции векторов возможных перемещений $\delta \mathbf{r}_i$ на те же оси.

Пользуясь аналитическим выражением элементарной работы (60.6), уравнению (117.4) можно придать следующий вид

$$\sum [(X_i + \Phi_{ix})\delta x_i + (Y_i + \Phi_{iy})\delta y_i + (Z_i + \Phi_{iz})\delta z_i] = 0. \quad (117.5)$$

Выразим проекции силы инерции точки на оси координат через проекции ее ускорения:

$$\Phi_{ix} = -m_i \ddot{x}_i; \quad \Phi_{iy} = -m_i \ddot{y}_i; \quad \Phi_{iz} = -m_i \ddot{z}_i.$$

Подставив эти значения в уравнение (117.5), окончательно получим

$$\sum [(X_i - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i)\delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i)\delta z_i] = 0. \quad (117.6)$$

Общее уравнение динамики (117.6) позволяет составить дифференциальные уравнения движения любой механической системы. Если механическая система состоит из отдельных твердых тел, то силы инерции точек каждого тела можно привести к силе, приложенной в некоторой точке тела, и паре сил. Сила равна главному вектору сил инерции точек этого тела, а момент пары равен главному моменту этих сил относительно центра приведения (см. § 109). Чтобы воспользоваться принципом возможных перемещений, к каждому телу прикладывают действующие на него задаваемые силы, а также условно прикладывают силу и пару, составленные силами инерции точек тела. Затем системе сообщают возможное перемещение и для всей совокупности задаваемых сил и приведенных сил инерции составляют уравнение (117.3) или (117.6).

Если среди связей системы имеются односторонние связи, то для применения общего уравнения динамики необходимо, чтобы возможные перемещения системы не были освобождающими.

§ 118. Примеры применения общего уравнения динамики

Пример 67. На треугольной призме, боковые грани которой образуют с горизонтом углы α и β , помещены два груза A и B весом G_1 и G_2 , связанные между собой невесомой и нерастяжимой нитью, переброшенной через блок C (рис. 254, а). Зная, что коэффициент трения скольжения равен f , определить ускорение движения грузов w и натяжение нити; массой блока пренебречь.

Решение. Заданная механическая система состоит из двух грузов, движущихся поступательно. Нить и блок, массы которых не учитываются, являются связями. Система имеет одну степень свободы.

Предположим, что груз A движется вниз, а груз B вверх.

Покажем задаваемые силы — веса грузов G_1 и G_2 , нормальные реакции боковых граней призмы N_1 и N_2 и силы трения F_1 и F_2 (рис. 254, б).

Модули сил трения соответственно равны:

$$F_1 = fN_1 \quad \text{и} \quad F_2 = fN_2,$$

где

$$N_1 = G_1 \cos \alpha, \quad N_2 = G_2 \cos \beta.$$

Поэтому

$$F_1 = fG_1 \cos \alpha \quad \text{и} \quad F_2 = fG_2 \cos \beta.$$

Силы трения направлены в стороны, противоположные направлениям движения грузов.

Так как грузы движутся поступательно, то равнодействующие сил инерции приложены в центрах тяжести тел, а их модули

$$\Phi_1 = m_1 w = \frac{G_1}{g} w;$$

$$\Phi_2 = m_2 w = \frac{G_2}{g} w.$$

Приложим к грузам условно силы инерции Φ_1 и Φ_2 , направив их противоположно ускорению w .

Сообщим мысленно системе возможное поступательное перемещение δs , например, в сторону движения грузов.

Составим общее уравнение динамики, применяя (117.3), в которое не войдут нормальные реакции боковых граней призмы N_1 и N_2 , направления которых перпендикулярны к возможным перемещениям грузов.

$$G_1 \sin \alpha \delta s - G_1 f \cos \alpha \delta s - \Phi_1 \delta s - G_2 \sin \beta \delta s - G_2 f \cos \beta \delta s - \Phi_2 \delta s = 0.$$

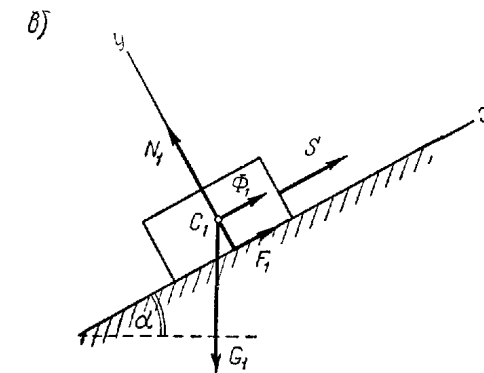
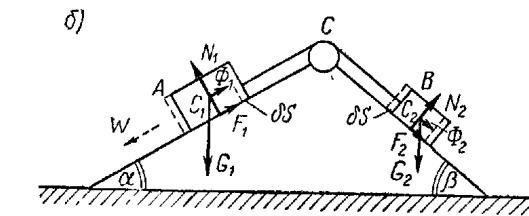
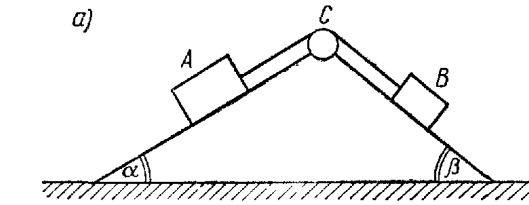


Рис. 254.

Подставляя в это уравнение значение сил инерции и деля его на δs , получаем

$$G_1 \sin \alpha - G_1 f \cos \alpha - \frac{G_1}{g} w - G_2 \sin \beta - G_2 f \cos \beta - \frac{G_2}{g} w = 0.$$

Из этого уравнения определяем ускорение грузов:

$$w = g \frac{G_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - G_2 (\sin \beta + f \cos \beta)}{G_1 + G_2}.$$

Если

$$G_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - G_2 (\sin \beta + f \cos \beta) > 0,$$

то грузы движутся в указанном выше направлении.

Для определения натяжения нити S на основании принципа Германа — Эйлера — Даламбера составим для сил, приложенных к телу, и его силы инерции уравнение проекций на ось x (рис. 254, в):

$$S - G_1 \sin \alpha + F_1 + \Phi_1 = 0$$

или

$$S = G_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{G_1}{g} w.$$

Подставив значение w , после соответствующих преобразований, получим

$$S = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} [\sin \alpha + \sin \beta + f (\cos \beta - \cos \alpha)].$$

Пример 68. Барабаны радиусами r_1 и r_2 , соединенные между собой жестко, могут вращаться вокруг горизонтальной оси. На барабаны намотаны нерастяжимые нити, к концам которых подвешены груз A весом G_1 и груз B весом G_2 . Система движется под действием сил тяжести грузов. Определить угловое ускорение барабанов, пренебрегая их массами и массой нитей (рис. 255, а).

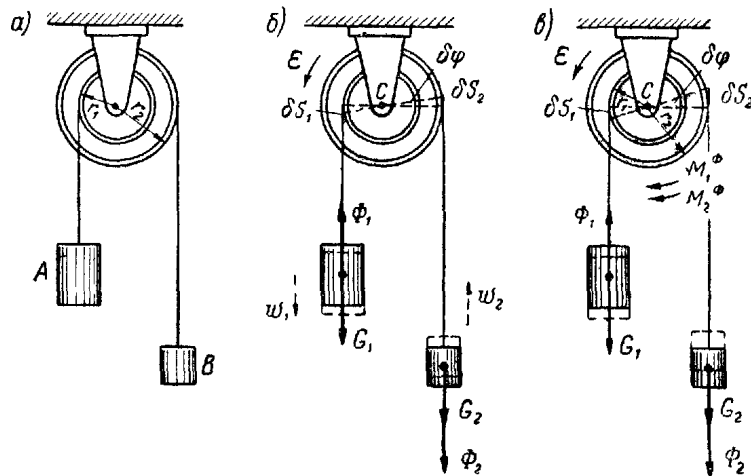


Рис. 255.

Решение. Предположим, что соотношение грузов таково, что барабаны вращаются с угловым ускорением ε в направлении, обратном движению часовой стрелки (рис. 255, б).

Заданная механическая система состоит из двух грузов, движущихся поступательно. Нити и барабаны, массы которых не учитываются, являются связями. Система имеет одну степень свободы.

Покажем задаваемые силы — веса грузов G_1 и G_2 . Силы инерции точек каждого груза, движущегося поступательно, приводятся к равнодействующей силе, приложенной в центре тяжести груза. Приложим к грузам условно силы инерции Φ_1 и Φ_2 , направив их противоположно ускорениям грузов w_1 и w_2 . Так как ускорения грузов равны вращательным ускорениям точек ободов барабанов то модули сил инерции

$$\Phi_1 = m_1 w_1 = m_1 w_1^B = \frac{G_1}{g} r_1 \varepsilon;$$

$$\Phi_2 = m_2 w_2 = m_2 w_2^B = \frac{G_2}{g} r_2 \varepsilon.$$

Сообщим мысленно системе возможное перемещение, повернув барабаны на угол $\delta\varphi$ по направлению их действительного вращения (за возможное перемещение можно было бы принять элементарное перемещение системы и в сторону, противоположную ее действительному движению).

Возможные перемещения грузов равны возможным перемещениям точек ободов барабанов, т. е.

$$\delta s_1 = r_1 \delta\varphi; \quad \delta s_2 = r_2 \delta\varphi.$$

Составим общее уравнение динамики в виде (117.3):

$$G_1 \delta s_1 - \Phi_1 \delta s_1 - G_2 \delta s_2 - \Phi_2 \delta s_2 = 0.$$

Подставим в это уравнение значения возможных перемещений и сил инерции:

$$G_1 r_1 \delta\varphi - \frac{G_1}{g} r_1 \varepsilon r_1 \delta\varphi - G_2 r_2 \delta\varphi - \frac{G_2}{g} r_2 \varepsilon r_2 \delta\varphi = 0.$$

Из этого уравнения определяем угловое ускорение барабанов:

$$\varepsilon = \frac{(G_1 r_1 - G_2 r_2) g}{G_1 r_1^2 + G_2 r_2^2}.$$

Ускорение вращения в принятом при решении задачи направлении имеет место при $\varepsilon > 0$, т. е. при условии

$$G_1 r_1 - G_2 r_2 > 0, \quad \text{или} \quad G_1 > G_2 \frac{r_2}{r_1}.$$

Пример 69. Решить пример 59, учитывая массы барабанов, равномерно распределенные по их поверхностям. Известно, что вес малого барабана равен Q_1 , а большого — Q_2 .

Решение. Так как центры тяжести барабанов находятся на оси вращения, то силы инерции их точек приводятся к парам сил (см. § 109). Пары направлены противоположно угловому ускорению барабанов ε (рис. 255, в), а величины их моментов определяются по формулам (109.6).

Учитывая, что массы барабанов равномерно распределены по их поверхностям, определяем моменты инерции барабанов относительно оси вращения Cx по формулам:

$$J_{1x} = m_1 r_1^2 = \frac{Q_1}{g} r_1^2; \quad J_{2x} = m_2 r_2^2 = \frac{Q_2}{g} r_2^2.$$

Абсолютные величины моментов пар, составленных силами инерции точек барабанов, полагая $\varepsilon > 0$, находим по формуле (109.6):

$$|M_1^\phi| = J_{1x} \varepsilon = \frac{Q_1}{g} r_1^2 \varepsilon,$$

$$|M_2^\phi| = J_{2x} \varepsilon = \frac{Q_2}{g} r_2^2 \varepsilon.$$

Сообщим системе возможное перемещение — поворот барабанов на угол $\delta\phi$ в сторону их действительного вращения, и составим общее уравнение динамики (117.3):

$$G_1 \delta s_1 - \Phi_1 \delta s_1 - G_2 \delta s_2 - \Phi_2 \delta s_2 - |M_1^\phi| \delta\phi - |M_2^\phi| \delta\phi = 0$$

Здесь работа пар, составленных силами инерции, отрицательна, так как направления пар и поворота барабанов на угол $\delta\phi$ противоположны.

Подставив в составленное уравнение (117.3) значения величин из примера 59 и значения моментов пар, получим

$$G_1 r_1 \cdot \delta\phi - \frac{G_1}{g} r_1 \varepsilon r_1 \cdot \delta\phi - G_2 r_2 \cdot \delta\phi - \frac{G_2}{g} r_2 \varepsilon r_2 \cdot \delta\phi - \frac{Q_1}{g} r_1^2 \varepsilon \cdot \delta\phi - \frac{Q_2}{g} r_2^2 \varepsilon \cdot \delta\phi = 0,$$

отсюда найдем угловое ускорение барабанов:

$$\varepsilon = \frac{(G_1 r_1 - G_2 r_2) g}{(G_1 + Q_1) r_1^2 + (G_2 + Q_2) r_2^2}.$$

Пример 70. Центробежный регулятор вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω . Вес каждого шара равен G_1 , а вес муфты G . Муфта отжимается вниз пружиной, закрепленной верхним концом на оси регулятора. При $\alpha = 0$ пружина не деформирована; коэффициент жесткости пружины равен c . Длина каждого стержня равна l ; оси подвеса стержней отстоят от оси регулятора на расстоянии a . Определить угловую скорость регулятора ω , которой соответствует угол α , пренебрегая весом стержней и пружины (рис. 256, а).

Решение. Центробежный регулятор представляет собой механическую систему, состоящую из трех тел — двух шаров и муфты, соединенных при помощи связей — стержней и пружины.

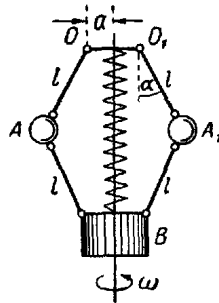


Рис. 256, а.

Покажем приложенные к регулятору задаваемые силы: веса шаров G_1 и вес муфты G . Так как пружина не является идеальной связью, то ее реакцию P отнесем к задаваемым силам (рис. 256, б).

Найдем укорочение пружины, соответствующее углу α :

$$h = 2l - 2l \cos \alpha = 2l(1 - \cos \alpha).$$

Модуль реакции пружины

$$P = ch = 2cl(1 - \cos \alpha).$$

Приложим к системе условно силы инерции ее точек. При равномерном вращении регулятора силы инерции шаров являются центробежными, направленными противоположно центростремительным ускорениям шаров. Их модули определим по формуле:

$$\Phi = \Phi^u = m_1 r \omega^2 = \frac{G_1}{g} (a + l \sin \alpha) \omega^2,$$

где $r = a + l \sin \alpha$ — расстояния центров тяжести шаров до оси вращения регулятора.

Рассмотрим возможное перемещение системы, при котором происходит изменение угла α . Проведем оси координат, как указано на рис. 256, б, и составим общее уравнение динамики в виде (117.5):

$$G_1 \delta y_A + G_1' \delta y_{A_1} + (G + P) \delta y_B - \Phi \delta x_A + \Phi' \delta x_{A_1} = 0.$$

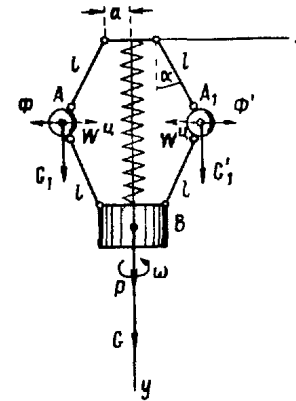


Рис. 256, б.

Определим координаты точек приложения сил в выбранной системе координат. Проекции возможных перемещений этих точек найдем, дифференцируя координаты по переменной α .

$$y_A = y_{A_1} = l \cos \alpha; \quad \delta y_A = \delta y_{A_1} = -l \sin \alpha \delta \alpha;$$

$$x_A = -(a + l \sin \alpha); \quad \delta x_A = -l \cos \alpha \delta \alpha.$$

$$x_{A_1} = a + l \sin \alpha; \quad \delta x_{A_1} = l \cos \alpha \delta \alpha.$$

$$y_B = 2l \cos \alpha; \quad \delta y_B = -2l \sin \alpha \delta \alpha.$$

Подставив эти значения в общее уравнение динамики, найдем

$$-2G_1 l \sin \alpha \delta \alpha - (G + P) 2l \sin \alpha \delta \alpha + 2\Phi l \cos \alpha \delta \alpha = 0,$$

или

$$\Phi \cos \alpha = [G_1 + G + 2cl(1 - \cos \alpha)] \sin \alpha.$$

Приравняем значение силы инерции полученному для нее выражению

$$\Phi = \frac{G_1}{g} (a + l \sin \alpha) \omega^2 = [G_1 + G + 2cl(1 - \cos \alpha)] \operatorname{tg} \alpha,$$

отсюда найдем угловую скорость регулятора, соответствующую некоторому углу α :

$$\omega = \sqrt{\frac{[G_1 + G + 2cl(1 - \cos \alpha)] g \operatorname{tg} \alpha}{G_1(a + l \sin \alpha)}}.$$

Пример 71. К концам нерастяжимой и невесомой нити прикреплены груз A весом G_1 , находящийся на горизонтальной плоскости, и груз B весом G_2 , расположенный на наклонной плоскости, которая

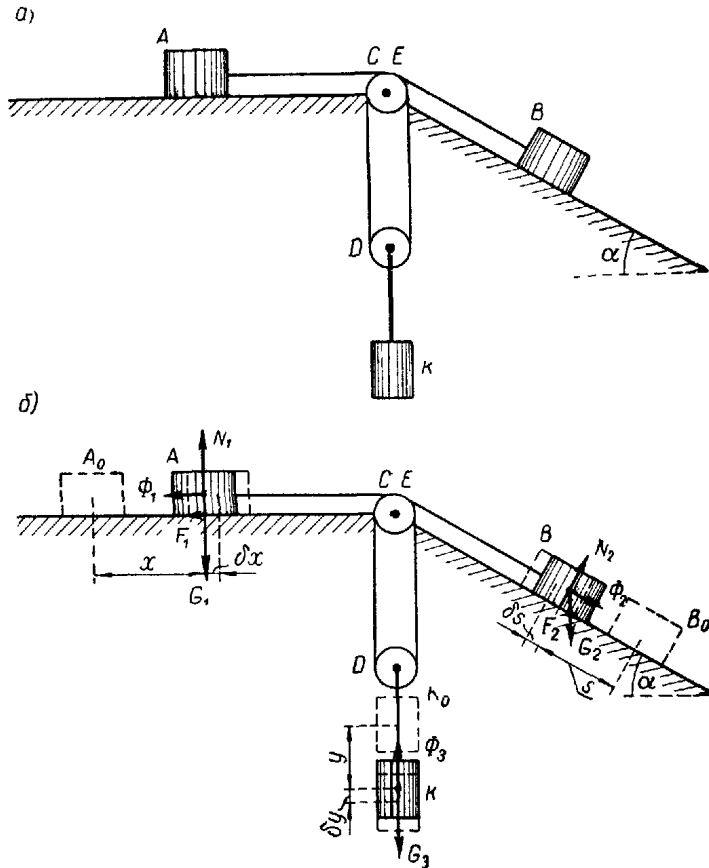


Рис. 257

составляет с горизонтом угол α (рис. 257, а). От груза A нить идет через неподвижный блок C , охватывает подвижной блок D , а затем через блок E , находящийся на одной оси с блоком C , идет к грузу B параллельно скату наклонной плоскости. К подвижному блоку D подвешен груз K весом G_3 . Коэффициенты трения груза A о горизонтальную плоскость и груза B о наклонную плоскость соответственно равны f_1 и f_2 . Определить, пренебрегая массами блоков,

ускорения грузов, предполагая, что груз K опускается, а грузы A и B движутся, приближаясь к блокам C и E .

Решение. Заданная механическая система состоит из трех грузов A , B и K , движущихся поступательно.

Условимся определять положение грузов A , B и K соответственно координатами их центров тяжести x , s и y , отсчитываемыми от начальных положений этих центров (рис. 257, б).

Нерастяжимая нить, связывающая грузы, накладывает на выбранные координаты следующее условие:

$$y = \frac{x + s}{2}. \quad (a)$$

Так как три координаты определяются одним уравнением, то независимыми являются из них две. Следовательно, рассматриваемая система имеет две степени свободы.

Примем координаты x и y за обобщенные координаты системы. Проинтегрировав равенство (а) два раза по времени, получим

$$\ddot{y} = \frac{\ddot{x} + \ddot{s}}{2},$$

т. е. алгебраические значения ускорений грузов связаны между собой зависимостью

$$\omega_3 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (б)$$

Здесь каждое из ускорений положительно, если его направление совпадает с направлением выбранной оси координат, и отрицательно — в противоположном случае.

Приложим к системе задаваемые силы: веса грузов G_1 , G_2 , G_3 , а также силы трения F_1 и F_2 , относим их к задаваемым силам. Величина каждой силы трения равна произведению коэффициента трения на нормальное давление между телами и плоскостью, т. е.

$$F_1 = f_1 G_1; \quad F_2 = f_2 G_2 \cos \alpha.$$

Условно приложим в центре тяжести каждого груза равнодействующую сил инерции его точек.

Направим эти силы противоположно ускорениям, имеющим условно направление осей координат.

Определим их значения:

$$\Phi_1 = m_1 \omega_1 = \frac{G_1}{g} \omega_1; \quad \Phi_2 = m_2 \omega_2 = \frac{G_2}{g} \omega_2; \quad \Phi_3 = m_3 \omega_3 = \frac{G_3}{g} \omega_3.$$

Сообщим системе возможное перемещение в сторону возрастания выбранных координат. Обозначим возможные перемещения грузов δx , δs и δy . Согласно условию (а) эти перемещения связаны между собой зависимостью:

$$\delta y = \frac{\delta x + \delta s}{2}; \quad \delta s = 2 \delta y - \delta x. \quad (в)$$

Составим общее уравнение динамики рассматриваемой механической системы в виде (117.3):

$$-(\Phi_1 + F_1)\delta x + (G_3 - \Phi_3)\delta y - (G_2 \sin \alpha + \Phi_2 + F_2)\delta s = 0.$$

Подставим в это уравнение значения сил инерции и сил трения, а также выразим δs через δx и δy по условию (в):

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{G_1}{g}\omega_1 + f_1 G_1\right)\delta x + \left(G_3 - \frac{G_3}{g}\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)\delta y - \\ & -\left(G_2 \sin \alpha + \frac{G_2}{g}\omega_2 + f_2 G_2 \cos \alpha\right)(2\delta y - \delta x) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{G_1}{g}\omega_1 - f_1 G_1 + G_2 \sin \alpha + \frac{G_2}{g}\omega_2 + f_2 G_2 \cos \alpha\right)\delta x + \\ & + \left[G_3 - \frac{G_3}{g}\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - 2G_2 \sin \alpha - \frac{2G_2}{g}\omega_2 - 2f_2 G_2 \cos \alpha\right]\delta y = 0. \end{aligned}$$

Так как это равенство справедливо при любых значениях δx и δy , то коэффициенты при этих приращениях обобщенных координат равняются нулю. Приравняв нулю коэффициенты при δx и δy , получим

$$\begin{aligned} G_1\omega_1 - G_2\omega_2 &= [G_2(\sin \alpha + f_2 \cos \alpha) - f_1 G_1]g, \\ G_3\omega_1 + (4G_2 + G_3)\omega_2 &= [2G_3 - 4G_2(\sin \alpha + f_2 \cos \alpha)]g. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений относительно ускорений ω_1 и ω_2 грузов A и B , найдем

$$\begin{aligned} \omega_1 &= g \frac{G_2 G_3 (2 + \sin \alpha + f_2 \cos \alpha) - f_1 G_1 (4G_2 + G_3)}{G_1 (4G_2 + G_3) + G_2 G_3}, \\ \omega_2 &= g \frac{G_1 G_3 (2 + f_1) - G_2 (4G_1 + G_3) (\sin \alpha + f_2 \cos \alpha)}{G_1 (4G_2 + G_3) + G_2 G_3}. \end{aligned}$$

Ускорение груза K определим по условию (б):

$$\omega_3 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = g \frac{G_3 (G_1 + G_2) - 2G_1 G_2 (f_1 + \sin \alpha + f_2 \sin \alpha)}{G_1 (4G_2 + G_3) + G_2 G_3}.$$

§ 119. Обобщенные силы и примеры их вычисления

Рассмотрим механическую систему из n материальных точек M_1, M_2, \dots, M_n , находящуюся под действием системы сил $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ (рис. 258).

Предположим, что механическая система имеет s степеней свободы, т. е. ее положение определяется s обобщенными координатами q_1, q_2, \dots, q_s .

Дадим обобщенной координате q_j бесконечно малое приращение δq_j , не изменяя остальных обобщенных координат механической

системы. Тогда точки системы получат бесконечно малые перемещения $\delta \mathbf{s}_1, \delta \mathbf{s}_2, \dots, \delta \mathbf{s}_n$.

Так как эти перемещения допускаются связями, то совокупность этих перемещений будет одним из возможных перемещений системы. Силы $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ совершат на перемещениях $\delta \mathbf{s}_1, \delta \mathbf{s}_2, \dots, \delta \mathbf{s}_n$ элементарную работу:

$$\delta A_{q_j} = \sum \mathbf{P}_i \delta \mathbf{s}_i \cos(\mathbf{P}_i, \delta \mathbf{s}_i).$$

Отношение работы δA_{q_j} к приращению обобщенной координаты δq_j назовем обобщенной силой, соответствующей координате q_j , и обозначим Q_j :

$$Q_j = \frac{\delta A_{q_j}}{\delta q_j} = \frac{\sum P_i \delta s_i \cos(\mathbf{P}_i, \delta \mathbf{s}_i)}{\delta q_j}. \quad (119.1)$$

Обобщенной силой Q_j , соответствующей обобщенной координате q_j , называют скалярную величину, определяемую отношением элементарной работы действующих сил, на перемещении механической системы, вызванном элементарным приращением δq_j координаты q_j , к величине этого приращения.

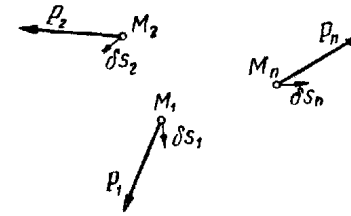


Рис. 258.

Равенство (119.1) можно представить в виде

$$Q_j \delta q_j = \sum P_i \delta s_i \cos(\mathbf{P}_i, \delta \mathbf{s}_i), \quad (119.2)$$

откуда следует, что произведение обобщенной силы, соответствующей координате q_j , на приращение этой координаты δq_j , равно элементарной работе приложенных к системе сил на перемещении системы, вызванном приращением этой координаты.

Из формулы (119.2) видно, что размерность обобщенной силы зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты:

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}.$$

Так, например, линейной обобщенной координате q соответствует обобщенная сила Q , измеряемая единицами силы.

Если за обобщенную координату q принят угол φ , измеряемый в радианах, то размерность обобщенной силы Q совпадает с размерностью момента. Так как каждой обобщенной координате соответствует обобщенная сила, то число обобщенных сил механической системы равно числу обобщенных координат, причем размерность каждой из обобщенных сил соответствует размерности соответствующей обобщенной координаты. Известно, что существует два способа группировки сил, действующих на механическую систему:

- 1) деление на внешние и внутренние силы;
- 2) деление на задаваемые силы и реакции связей.

Соответственно этому обобщенные силы разделяются или на *обобщенные внешние* и *обобщенные внутренние силы* или на *обобщенные задаваемые силы* и *обобщенные реакции связей*.

Покажем, что в случае стационарных связей обобщенные реакции идеальных связей равны нулю. Действительно, для нахождения обобщенной реакции, соответствующей координате q_j , следует вычислить сумму работ реакций связей на перемещении системы, соответствующем приращению δq_j этой координаты, а затем определить обобщенную реакцию связи по формуле:

$$Q_j^R = \frac{\sum R_i \delta s_i \cos(\mathbf{R}_i, \delta \mathbf{s}_i)}{\delta q_j}.$$

Как указывалось выше (§ 112), в случае стационарных связей описанное перемещение системы является одним из возможных перемещений этой системы, а потому сумма работ реакций идеальных связей на этом перемещении равна нулю:

$$\sum R_i \delta s_i \cos(\mathbf{R}_i, \delta \mathbf{s}_i) = 0,$$

отсюда следует, что

$$Q_j^R = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (119.3)$$

Таким образом, при определении обобщенных сил, реакции идеальных связей выпадают.

Рассмотрим примеры вычисления обобщенных сил.

Пример 72. Рычаг AB вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O , перпендикулярно к плоскости рисунка (рис. 259). К концам рычага приложены вертикальные силы P_1 и P_2 ; $OA = a$, $OB = b$. Приняв угол φ , определяющий положение рычага, за обобщенную координату, определить соответствующую ей обобщенную силу.

Решение. Для нахождения обобщенной силы Q_φ , соответствующей обобщенной координате φ , сообщаем координате φ приращение $\delta\varphi$ (рис. 259). Отмечаем перемещения, которые получают при этом точки приложения сил P_1 и P_2 . Эти перемещения направлены перпендикулярно к отрезкам OA и OB и равны:

$$\delta s_1 = a \delta\varphi \quad \text{и} \quad \delta s_2 = b \delta\varphi.$$

Составляем сумму работ сил P_1 и P_2 на перемещениях δs_1 и δs_2 , вызванных приращением угла поворота рычага φ :

$$\delta A_\varphi = P_1 \delta s_1 \sin \varphi - P_2 \delta s_2 \sin \varphi.$$

Подставляя значения перемещений δs_1 и δs_2 , получаем

$$\delta A_\varphi = (P_1 a - P_2 b) \delta\varphi \sin \varphi.$$

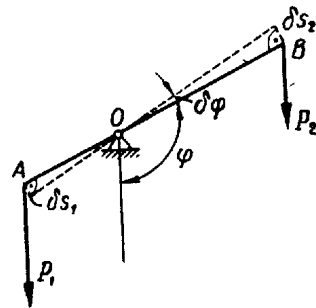


Рис. 259.

Обобщенную силу Q_φ определяем по формуле (119.1) как отношение работы δA_φ к приращению координаты $\delta\varphi$:

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi} = (P_1 a - P_2 b) \sin \varphi = M_O.$$

Полученный результат показывает, что обобщенная сила Q_φ , соответствующая углу φ , равна главному моменту сил, приложенных к рычагу, относительно опорной точки O .

Пример 73. Центробежный регулятор вращается вокруг вертикальной оси. Вес каждого шара регулятора равен G , вес остальных частей может не учитываться. Длины стержней равны l . Приняв за обобщенные координаты угол α , образованный стержнями регулятора с вертикалью, и угол поворота регулятора φ вокруг вертикальной оси, найти обобщенные силы, соответствующие этим обобщенным координатам.

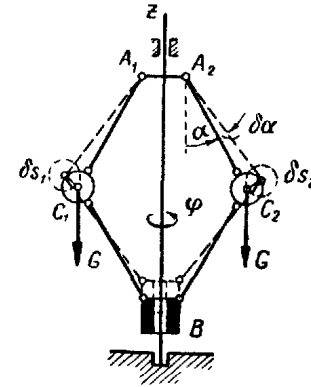


Рис. 260.

Решение. Для нахождения обобщенной силы Q_α , соответствующей обобщенной координате α (рис. 260), даем углу α приращение $\delta\alpha$, оставляя угол φ неизменным. Отмечаем перемещения, которые получают точки приложения весов шаров. Перемещения этих точек δs_1 и δs_2 направлены перпендикулярно к стержням $A_1 C_1$ и $A_2 C_2$ и равны

$$\delta s_1 = \delta s_2 = l \delta\alpha.$$

Составляем сумму работ задаваемых сил тяжести шаров на перемещениях δs_1 и δs_2 , вызванных приращением угла α :

$$\delta A_\alpha = -G \cdot \delta s_1 \cdot \sin \alpha - G \cdot \delta s_2 \cdot \sin \alpha = -2G \cdot l \cdot \delta\alpha \cdot \sin \alpha.$$

Определяем обобщенную силу Q_α по формуле (119.1):

$$Q_\alpha = \frac{\delta A_\alpha}{\delta\alpha} = -2G \cdot l \cdot \sin \alpha.$$

Для нахождения обобщенной силы Q_φ , соответствующей обобщенной координате φ , дадим углу φ приращение $\delta\varphi$, оставляя угол α неизменным.

Точки приложения весов шаров при повороте регулятора на угол $\delta\varphi$ перемещаются в плоскости, перпендикулярной к оси регулятора. Работа сил тяжести G на этих перемещениях равна нулю:

$$\delta A_\varphi = 0.$$

Обобщенная сила, соответствующая координате φ ,

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi} = 0.$$

§ 120. Выражение обобщенных сил через проекции сил на неподвижные оси декартовых координат.

Случай сил, имеющих потенциал

Рассмотрим механическую систему из n материальных точек, находящуюся под действием сил $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$.

Положим, что система имеет s степеней свободы, т. е. ее положение определяется s обобщенными координатами q_1, q_2, \dots, q_s . Найдем выражение обобщенной силы, соответствующей каждой обобщенной координате системы. Для этого проведем в каждую точку системы M_i из начала неподвижной системы декартовых координат радиус-вектор \mathbf{r}_i (рис. 261).

При наличии нестационарных связей радиус-вектор точки, так же как и ее декартовы координаты, является функцией всех обобщенных координат и времени:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Чтобы найти обобщенную силу Q_j , соответствующую обобщенной координате q_j , сообщим координате q_j элементарное приращение δq_j , тогда радиус-вектор каждой точки M_i получит приращение, обусловленное приращением только одного аргумента q_j :

$$\delta \mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (120.1)$$

Составим сумму работ всех сил, действующих на систему, на возможных перемещениях точек $\delta \mathbf{r}_{ij}$, вызванных приращением координаты δq_j . Воспользуемся для этого выражением элементарной работы силы в виде скалярного произведения (60.5):

$$\delta A_{q_j} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot \delta \mathbf{r}_{ij} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \delta q_j \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

Подставив это выражение в формулу (119.1):

$$Q_j = \frac{\delta A_{q_j}}{\delta q_j},$$

получим обобщенную силу Q_j в виде суммы скалярных произведений векторов:

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (120.2)$$

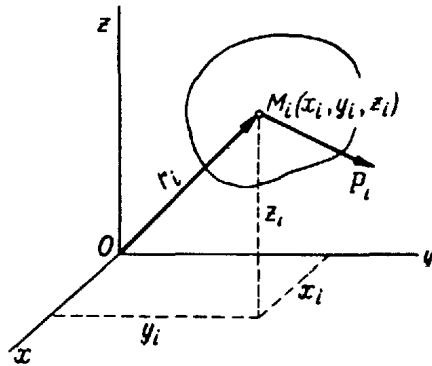


Рис. 261.

Выразив эти скалярные произведения через проекции векторов-сомножителей на неподвижные оси декартовых координат, получим обобщенную силу Q_j в следующем виде:

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right). \quad (120.3)$$

Аналогичное выражение можно получить и для обобщенной силы инерции (120.3):

$$\begin{aligned} Q_j^\Phi &= \sum_{i=1}^n \Phi_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{w}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \\ &= - \sum_{i=1}^n m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right). \end{aligned} \quad (120.4)$$

Рассмотрим теперь случай, когда силы, действующие на механическую систему, имеют потенциал. Тогда согласно (72.8) проекции этих сил на оси координат равны взятым с обратным знаком частным производным, от потенциальной энергии системы по соответствующим координатам точек:

$$X_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}; \quad Y_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial y_i}; \quad Z_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}.$$

Подставив эти значения проекций сил в формулу (120.3), получим

$$Q_j = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right). \quad (a)$$

Потенциальная энергия механической системы согласно (72.5) является функцией декартовых координат точек системы

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n).$$

Декартовы координаты точек системы являются функциями ее обобщенных координат и времени (112.2):

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t). \end{aligned}$$

Подставив в выражение (72.5) значение декартовых координат из (112.2), получим потенциальную энергию Π механической системы, как функцию обобщенных координат и времени:

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s, t). \quad (120.5)$$

В случае стационарных связей зависимость декартовых координат от обобщенных координат имеет вид (112.1)

$$\begin{aligned}x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_s), \\y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_s), \\z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_s).\end{aligned}$$

Потенциальная энергия системы в этом случае является функцией только обобщенных координат:

$$П = П(q_1, q_2, \dots, q_s). \quad (120.6)$$

Найдем частную производную от потенциальной энергии системы $П$ по обобщенной координате q_j , рассматривая $П$ как сложную функцию обобщенных координат, определяемую зависимостями (72.5) и (112.1).

Эта производная определяется суммой $3n$ слагаемых. Каждое слагаемое равно произведению частной производной от $П$ по одной из $3n$ декартовых координат точек $x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n$ на производную от этой декартовой координаты по выбранной обобщенной координате q_j :

$$\frac{\partial П}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial П}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial П}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial П}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right). \quad (6)$$

Сопоставляя выражения (а) и (б), устанавливаем:

$$Q_j = - \frac{\partial П}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (120.7)$$

Формулы (120.7) показывают, что в случае сил, имеющих потенциал, обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j , равна взятой со знаком минус частной производной от потенциальной энергии механической системы по этой координате.

§ 121. Общее уравнение динамики в обобщенных силах. Условия равновесия сил

Преобразуем общее уравнение динамики (117.4):

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{P}_i + \Phi_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Подставим в это уравнение наиболее общие возможные перемещения точек системы $\delta \mathbf{r}_i$, вызванные одновременными бесконечно малыми приращениями всех обобщенных координат системы. Эти

перемещения равны геометрической сумме возможных перемещений, вызванных приращениями отдельных обобщенных координат, т. е.

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{r}_i &= \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s} \delta q_s = \\ &= \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j.\end{aligned}$$

Общее уравнение динамики примет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{P}_i + \Phi_i) \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0. \quad (121.1)$$

Суммируя сначала по точкам системы ($i = 1, 2, \dots, n$), а затем по обобщенным координатам ($j = 1, 2, \dots, s$), получаем

$$\sum_{j=1}^s \delta q_j \sum_{i=1}^n (\mathbf{P}_i + \Phi_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^s \delta q_j \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^n \Phi_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = 0. \quad (121.2)$$

Здесь $\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = Q_j$ — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j .

Сумма $\sum_{i=1}^n \Phi_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$ является обобщенной силой инерции, соответствующей обобщенной координате q_j :

$$Q_j^\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (121.3)$$

Пользуясь выражениями (120.2) и (121.3), получим общее уравнение динамики (121.2) в виде

$$\sum_{j=1}^s (Q_j + Q_j^\Phi) \delta q_j = 0. \quad (121.4)$$

Приращения обобщенных координат δq_j произвольны и не зависят друг от друга.

Поэтому в полученном уравнении все коэффициенты при этих приращениях должны быть равны нулю.

Приравняв нулю эти коэффициенты, получим

$$Q_j + Q_j^\Phi = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (121.5)$$

Уравнения (121.5) эквивалентны общему уравнению динамики (121.4).

Если силы, действующие на механическую систему, уравновешиваются, т. е. механическая система находится в состоянии покоя, или все ее точки движутся прямолинейно и равномерно, то силы инерции ее точек равны нулю.

Следовательно, и обобщенные силы инерции системы равны нулю:

$$Q_j^\phi = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Тогда уравнения (121.5) принимают вид

$$Q_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (121.6)$$

Равенства (121.6) выражают условия равновесия сил в обобщенных силах.

Так, например, в примере 62 для рычага получено выражение обобщенной силы Q_φ , соответствующей обобщенной координате φ .

Рычаг имеет одну степень свободы. Если приложенные к нему силы уравновешиваются, то согласно (121.6)

$$Q_\varphi = (P_1 a - P_2 b) \sin \varphi = 0,$$

т. е. сумма моментов задаваемых сил P_1 и P_2 , действующих на рычаг, относительно опорной точки рычага равна нулю. Такое же условие равновесия сил установлено в § 27 курса статики.

Преобразуем условия равновесия (121.6) для консервативных сил, т. е. сил, имеющих потенциал. Для любой системы сил условия равновесия имеют вид

$$Q_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

В случае консервативных сил обобщенные силы определяются формулами (120.7):

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Следовательно, условия равновесия консервативной системы сил имеют вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (121.7)$$

§ 122. Примеры на применение условия равновесия консервативной системы сил

Пример 74. Прямолинейный однородный стержень AB длиной $2l$ упирается нижним концом A в гладкую вертикальную стену, составляя с ней угол φ , а в промежуточной точке D на гладкий горизонтальный цилиндрический стержень, параллельный стене, отстоящий от

нее на расстоянии a . Определить угол φ , при котором стержень находится в состоянии покоя (рис. 262, а).

Решение. Примем за обобщенную координату угол φ , образованный осью стержня с вертикальной стеной.

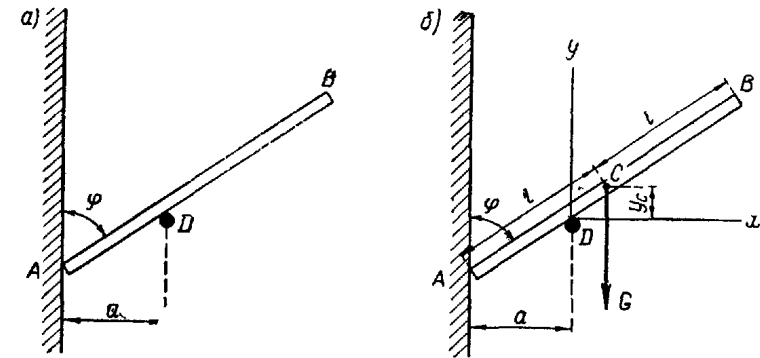


Рис. 262.

Проведем через точку D координатные оси Dx и Dy (рис. 262, б). Определим потенциальную энергию стержня в поле сил тяжести:

$$\Pi = G y_c.$$

Так как

$$y_c = l \cos \varphi - a \operatorname{ctg} \varphi,$$

то

$$\Pi = G (l \cos \varphi - a \operatorname{ctg} \varphi).$$

Найдем первую производную от потенциальной энергии по обобщенной координате φ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -G \left(l \sin \varphi - \frac{a}{\sin^2 \varphi} \right) = G \left(\frac{a}{\sin^2 \varphi} - l \sin \varphi \right).$$

В случае равновесия консервативной системы сил на основании (121.7)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0.$$

Поэтому

$$\frac{a}{\sin^2 \varphi} - l \sin \varphi = 0,$$

т. е.

$$\sin \varphi = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}.$$

По этой формуле определяется то значение угла φ , составленного осью стержня с вертикальной стеной, при котором он находится в состоянии покоя.

Пример 75. Пружина AB удерживает однородный стержень OB длиной l и весом G под углом φ к горизонту. Концы пружины A прикреплен к горизонтальной плоскости на расстоянии $AO=l$ (рис. 263). Определить коэффициент жесткости c этой пружины, если известно, что длина пружины в ненапряженном состоянии равна L .

Решение. Для определения коэффициента жесткости пружины c воспользуемся условием равновесия консервативных сил (121.7).

Примем за обобщенную координату угол φ , образованный осью стержня с горизонтом. Проведем через точку O координатные оси Ox и Oy .

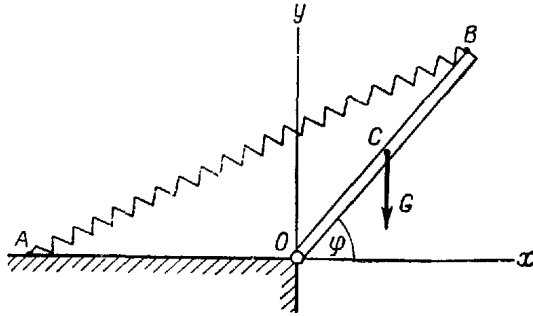


Рис. 263.

Потенциальную энергию рассматриваемой механической системы определим как сумму потенциальной энергии стержня в поле сил тяжести P_G и потенциальной энергии деформированной пружины P_P .

Здесь

$$P = P_G + P_P.$$

$$P_G = Gy_C = G \frac{l}{2} \sin \varphi;$$

$$P_P = \frac{ch^2}{2} = \frac{c(2l \cos \frac{\varphi}{2} - L)^2}{2}.$$

Поэтому

$$P = \frac{Gl}{2} \sin \varphi + \frac{c(2l \cos \frac{\varphi}{2} - L)^2}{2}.$$

Найдем первую производную от потенциальной энергии по обобщенной координате φ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \varphi} &= \frac{Gl}{2} \cos \varphi + \frac{2c(2l \cos \frac{\varphi}{2} - L) \left(-2l \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2}\right)}{2} = \\ &= \frac{Gl}{2} \cos \varphi - cl^2 \sin \varphi + cLl \sin \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Так как в рассматриваемом состоянии покоя системы $\frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0$, то

$$\frac{Gl}{2} \cos \varphi - cl^2 \sin \varphi + cLl \sin \frac{\varphi}{2} = 0.$$

Из этого равенства определяем, каким в рассматриваемом случае должен быть коэффициент жесткости пружины:

$$c = \frac{G \cos \varphi}{2 \left(l \sin \varphi - L \sin \frac{\varphi}{2} \right)}.$$

§ 123. Понятие об устойчивости состояния покоя механической системы с одной степенью свободы в консервативном силовом поле

Состояние покоя механической системы может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным.

Состояние покоя механической системы называется *устойчивым*, если эта система, выведенная из положения покоя, будет совершать колебания около этого положения.

Состояние покоя механической системы называется *неустойчивым*, если при сколь угодно малом отклонении системы из положения покоя она удаляется от этого положения и колебаний около этого положения не возникает.

Состояние покоя механической системы называется *безразличным*, если при отклонении ее из этого положения она и в новом положении может оставаться в состоянии покоя.

Критерий устойчивости состояния покоя для систем с голономными и стационарными связями, находящихся в консервативном силовом поле, устанавливается в зависимости от потенциальной энергии этих систем.

Представим себе механическую систему с голономными стационарными связями, находящуюся под действием сил, имеющих потенциал. Такую систему, как указывалось выше (§ 72), называют консервативной.

Для консервативной системы уравнения равновесия сил имеют вид (121.7):

$$\frac{\partial P}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Из уравнений (121.7) следует, что положениям покоя консервативной системы соответствуют экстремальные значения потенциальной энергии системы.

Однако по уравнениям равновесия сил (121.7) нельзя судить об устойчивости состояния покоя в этих положениях системы. Условие устойчивости состояния покоя механической системы содержится в теореме Лагранжа — Дирихле. Эта теорема устанавливает, что *те положения покоя консервативной системы, в которых потенциальная энергия системы достигает минимума, являются ее устойчивыми состояниями покоя.*

Для консервативной системы с одной степенью свободы положения покоя определяются одним уравнением:

$$\frac{\partial P}{\partial q} = 0 \tag{123.1}$$

Чтобы определить, устойчиво ли состояние покоя в рассматриваемом положении системы, необходимо выяснить имеет ли потен-

циальная энергия системы в этом положении минимум, т. е. выполняется ли условие

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} > 0. \quad (123.2)$$

Уравнением (123.2) и пользуются при решении задачи об устойчивости состояния покоя системы с одной степенью свободы.

Критерий Лагранжа — Дирихле является достаточным (но не необходимым) условием устойчивости состояния покоя системы в поле консервативных сил.

Остановимся теперь на вопросе о том, как оценить состояние покоя консервативной системы в положении, в котором она не имеет минимума потенциальной энергии.

Ответ на этот вопрос содержится в специальных теоремах А. М. Ляпунова*.

На рис. 264, а изображено положение покоя физического маятника, соответствующее наинижнему положению его центра тяжести. В этом положении потенциальная энергия маятника в поле силы тяжести имеет минимум и это состояние покоя является устойчивым.

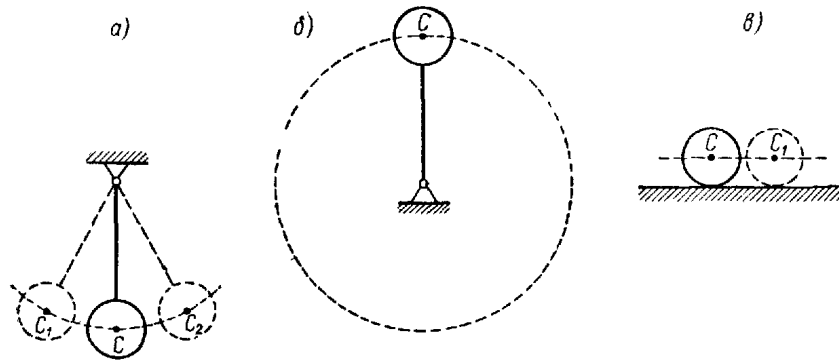


Рис. 264.

Если вывести маятник из этого положения, отклонив его на некоторый угол в вертикальной плоскости, то он начнет качаться вокруг оси привеса.

На рис. 264, б изображен маятник в том положении, при котором его центр тяжести занимает наивысшее положение. В этом положении потенциальная энергия маятника имеет максимум и это состояние покоя является неустойчивым.

Если вывести маятник из этого положения, то он не возвратится в первоначальное положение.

* Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.

На рис. 264, в изображен шарик, находящийся на горизонтальной плоскости. Состояние покоя шарика является безразличным. Потенциальная энергия шарика в любом положении на плоскости не имеет ни минимума, ни максимума, являясь постоянной величиной, не изменяющейся при изменении положения шарика.

§ 124. Примеры на определение условий устойчивости состояния покоя механической системы с одной степенью свободы

Пример 76. Определить условие устойчивости состояния покоя метронома, изображенного на рис. 265, представляющего собой маятник с двумя грузами А и В, если вес этих грузов G_1 и G_2 , а их расстояния от точки О соответственно равны l_1 и l_2 ; весом стержня пренебречь.

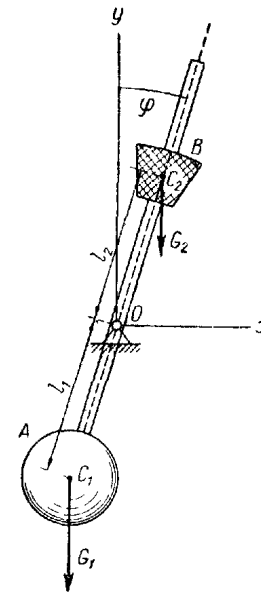


Рис. 265.

Решение. Примем за обобщенную координату угол φ , образованный осью метронома с вертикалью.

Проведем через точку О (ось метронома) координатные оси Ox и Oy .

Потенциальная энергия рассматриваемой системы в поле сил тяжести

$$\Pi = G_1 y_1 + G_2 y_2.$$

При расположении груза А внизу

$$y_1 = -l_1 \cos \varphi; \quad y_2 = l_2 \cos \varphi.$$

Поэтому

$$\Pi = (G_2 l_2 - G_1 l_1) \cos \varphi.$$

Найдем первую и вторую производные от потенциальной энергии по обобщенной координате φ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -(G_2 l_2 - G_1 l_1) \sin \varphi = (G_1 l_1 - G_2 l_2) \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = (G_1 l_1 - G_2 l_2) \cos \varphi.$$

В состоянии покоя $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0$.

Это будет в двух случаях:

- 1) если $G_1 l_1 - G_2 l_2 = 0$, т. е. $G_1 l_1 = G_2 l_2$;
- 2) если $\sin \varphi = 0$, т. е. $\varphi = 0$ или $\varphi = 180^\circ$.

При $G_1 l_1 = G_2 l_2$ нет ни максимума, ни минимума потенциальной энергии ($\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = 0$), а потому этому случаю соответствует безразличное равновесие.

Найдем соотношение между G_1 и G_2 , при котором при $\varphi = 0$ метроном находится в устойчивом состоянии покоя.

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = G_1 l_1 - G_2 l_2 > 0.$$

Поэтому состояние покоя метронома устойчиво, если

$$G_1 l_1 > G_2 l_2.$$

При $\varphi = 180^\circ$ и $G_1 l_1 > G_2 l_2$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} < 0,$$

т. е. это состояние покоя метронома неустойчиво.

Пример 77. По гладкому неподвижному проволочному кольцу радиусом r , расположенному в вертикальной плоскости, может скользить без трения гладкое кольцо B . К кольцу подвешен груз весом Q и привязана нить, перекинутая через ничтожно малый неподвижный блок A , находящийся в высшей точке кольца. К концу этой нити подвешен груз весом P (рис. 266)

Определить, при каких значениях центрального угла φ рассматриваемая механическая система будет находиться в состоянии покоя и установить, какие из этих состояний покоя устойчивы.

Решение. Примем за обобщенную координату системы центральный угол φ и проведем через центр блока A координатные оси Ax и Ay .

Потенциальная энергия рассматриваемой системы в поле сил тяжести равна:

$$\Pi = \Pi_P + \Pi_Q = P y_P + Q y_Q.$$

Обозначив L длину нити BAD , а l расстояние от центра кольца B до центра тяжести груза Q , получим

$$y_P = -(L - 2r \sin \frac{\varphi}{2}),$$

$$y_Q = -(AB \sin \frac{\varphi}{2} + l) = -(2r \sin^2 \frac{\varphi}{2} + l),$$

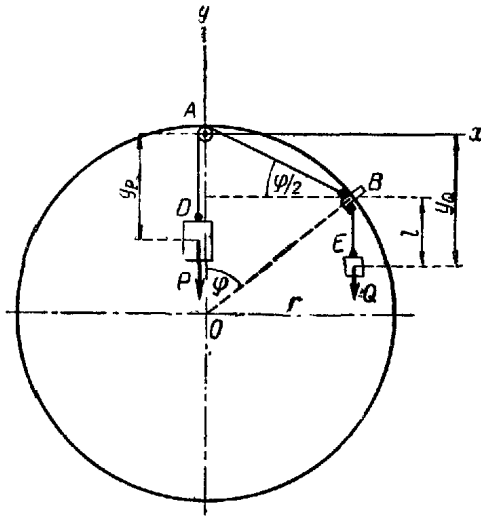


Рис. 266.

тогда:

$$\Pi_P = -P(L - 2r \sin \frac{\varphi}{2});$$

$$\Pi_Q = -Q(2r \sin^2 \frac{\varphi}{2} + l);$$

$$\begin{aligned} \Pi = \Pi_P + \Pi_Q &= -P(L - 2r \sin \frac{\varphi}{2}) - Q(2r \sin^2 \frac{\varphi}{2} + l) = \\ &= -PL + 2Pr \sin \frac{\varphi}{2} - 2Qr \sin^2 \frac{\varphi}{2} - Ql. \end{aligned}$$

Найдем первую и вторую производные от потенциальной энергии по обобщенной координате φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= 2Pr \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - 2Qr \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \\ &= Pr \cos \frac{\varphi}{2} - 2Qr \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} = r \cos \frac{\varphi}{2} (P - 2Q \sin \frac{\varphi}{2}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} &= -\frac{1}{2} r \sin \frac{\varphi}{2} (P - 2Q \sin \frac{\varphi}{2}) + \\ &+ r \cos \frac{\varphi}{2} (-2Q \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2}) = -\frac{1}{2} Pr \sin \frac{\varphi}{2} + Qr \sin^2 \frac{\varphi}{2} - \\ &- Qr \cos^2 \frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{2} Pr \sin \frac{\varphi}{2} + 2Qr \sin^2 \frac{\varphi}{2} - Qr. \end{aligned}$$

Рассматриваемая механическая система находится в состоянии покоя, т. е. приложенные к ней консервативные силы уравниваются в том случае, если

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0,$$

т. е.

$$r \cos \frac{\varphi}{2} (P - 2Q \sin \frac{\varphi}{2}) = 0.$$

Из этого равенства устанавливаем два условия возможного состояния покоя системы:

$$\cos \frac{\varphi_1}{2} = 0; \quad \frac{\varphi_1}{2} = \frac{\pi}{2}; \quad \varphi_1 = \pi;$$

$$P - 2Q \sin \frac{\varphi_2}{2} = 0; \quad \sin \frac{\varphi_2}{2} = \frac{P}{2Q}.$$

Для того, чтобы состояние покоя было устойчивым, необходимо выполнение условия (123.2), т. е.

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} > 0.$$

1) При $\varphi_1 = \pi$

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_1} = -\frac{1}{2} Pr + 2Qr - Qr = Qr - \frac{1}{2} Pr.$$

Состояние покоя устойчиво, если

$$Qr - \frac{1}{2} Pr > 0,$$

г. е.

$$2Q > P \text{ или } Q > \frac{P}{2}.$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ При } \sin \frac{\varphi_2}{2} &= \frac{P}{2Q} \\ \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_2} &= -\frac{1}{2} Pr \frac{P}{2Q} + 2Qr \frac{P^2}{4Q^2} - Qr = \\ &= -\frac{P^2 r}{4Q} + \frac{P^2 r}{2Q} - Qr = \frac{P^2 r}{4Q} - Qr = r \left(\frac{P^2}{4Q} - Q \right). \end{aligned}$$

Так как

$$\sin \frac{\varphi_2}{2} = \frac{P}{2Q} \leq 1,$$

то

$$2Q \geq P.$$

Поэтому

$$r \left(\frac{P^2}{4Q} - Q \right) = r \frac{P^2 - 4Q^2}{4Q} < 0,$$

т. е. в этом положении тело находится в неустойчивом состоянии покоя.

Результаты исследования показывают, что при $\varphi_1 = \pi$ система находится в устойчивом состоянии покоя, если $Q > \frac{P}{2}$, а при $\sin \frac{\varphi_2}{2} = \frac{P}{2Q}$ состояние покоя системы неустойчиво.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой вид имеет общее уравнение динамики?
2. Какая величина называется обобщенной силой, соответствующей некоторой обобщенной координате системы, и какую размерность она имеет?
3. Чему равны обобщенные реакции идеальных связей?
4. В какой последовательности вычисляется обобщенная сила?
5. Выведите общее уравнение динамики в обобщенных силах.
6. Какой вид имеют условия равновесия сил, приложенных к системе, полученные из общего уравнения динамики?
7. Какими формулами выражаются обобщенные силы через проекции сил на неподвижные оси декартовых координат?
8. Как определяются обобщенные силы в случае сил, имеющих потенциал?
9. Каков вид условий равновесия сил, имеющих потенциал?
10. Каким может быть состояние покоя механической системы?
11. Каков критерий устойчивости состояния покоя механической системы с одной степенью свободы?

ГЛАВА XIX

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ

§ 125. Уравнения Лагранжа второго рода

Положим, что механическая система из n материальных точек имеет s степеней свободы. В случае голономных, нестационарных, связей радиус-вектор \mathbf{r}_i любой точки M_i этой системы является

функцией обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_s и времени t :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t). \quad (125.1)$$

Обобщенные координаты системы q_1, q_2, \dots, q_s являются функциями времени. Поэтому радиус-вектор \mathbf{r}_i является сложной функцией времени и вектор скорости точки \mathbf{v}_i определяется по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}, \quad (a)$$

или

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \quad (125.2)$$

В случае стационарных связей

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j. \quad (125.3)$$

Производные от обобщенных координат по времени \dot{q}_j называются *обобщенными скоростями*.

Из выражения (a) следует, что частная производная от \mathbf{v}_i по какой-либо обобщенной скорости \dot{q}_j равна коэффициенту при \dot{q}_j в правой части этого выражения, т. е. равна частной производной от \mathbf{r}_i по координате q_j :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (b)$$

Кинетическая энергия механической системы, как известно, определяется по формуле

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i. \quad (125.4)$$

Из выражения (125.2) следует, что вектор скорости точки \mathbf{v}_i в случае голономных, нестационарных связей является функцией обобщенных координат, содержащихся в выражениях $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$, обобщенных скоростей и времени. Поэтому кинетическая энергия механической системы является функцией тех же переменных:

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t). \quad (125.5)$$

Найдем частные производные кинетической энергии по обобщенной координате q_j и обобщенной скорости \dot{q}_j , дифференцируя выра-

жение (125.4) как сложную функцию:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j}.$$

Преобразуем последнее выражение на основании равенства (б)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \\ &+ \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right). \quad (\text{в}) \end{aligned}$$

Рассмотрим две суммы, входящие в правую часть полученного равенства (в), учитывая, что для несвободной точки

$$m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{P}_i + \mathbf{R}_i.$$

1. С помощью равенства (120.2), определяющего обобщенную силу, находим

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{w}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{P}_i + \mathbf{R}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = Q_j + Q_j^R.$$

2. Для установления значения второй суммы рассмотрим выражение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right).$$

Частная производная $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$ является функцией тех же переменных, от которых согласно (125.1) зависит радиус-вектор точки \mathbf{r}_i . Дифференцируя $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$ как сложную функцию времени, получаем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}. \quad (\text{г})$$

Найдем частную производную $\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j}$, дифференцируя по q_j выражение (а):

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_1 \partial q_j} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_2 \partial q_j} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_s \partial q_j} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j}. \quad (\text{д})$$

Правые части выражений (г) и (д) отличаются только последовательностью дифференцирования, которая при непрерывных функциях не имеет значения, следовательно:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j}.$$

Пользуясь этой зависимостью, преобразуем вторую сумму в правой части равенства (в):

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

Подставив найденные значения обеих сумм в равенство (в) и рассматривая механическую систему со стационарными идеальными связями, для которой $Q_j^R = 0$, получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j},$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (125.6)$$

Систему s дифференциальных уравнений (125.6) называют *уравнениями Лагранжа второго рода*. Эти уравнения представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка относительно обобщенных координат системы q_1, q_2, \dots, q_s . Интегрируя эти дифференциальные уравнения и определяя по начальным условиям постоянные интегрирования, получаем s уравнений движения механической системы в обобщенных координатах:

$$q_j = q_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (125.7)$$

Уравнения Лагранжа второго рода сыграли решающую роль в развитии динамики системы и широко используются для решения многих задач механики.

§ 126. Кинетический потенциал. Уравнения Лагранжа второго рода для консервативной системы

Положим, что на рассматриваемую систему, наряду с силами, имеющими потенциал (консервативными силами), действуют силы, не имеющие потенциала (неконсервативные силы). При этом условии обобщенную силу Q_j удобно представить в виде суммы обобщенной силы Q_j^P , соответствующей консервативным силам \mathbf{P}_i и обобщенной силы Q_j^F , соответствующей неконсервативным силам \mathbf{F}_i :

$$Q_j = Q_j^P + Q_j^F.$$

Если на рассматриваемую систему действуют только консервативные силы, то обобщенная сила определится формулой (120.7):

$$Q_j = Q_j^p = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

В этом случае уравнения Лагранжа второго рода принимают следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (126.1)$$

Уравнения (126.1) можно преобразовать путем введения функции Лагранжа $L = T - \Pi$, называемой кинетическим потенциалом. Согласно (125.5)

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t).$$

Согласно (120.5)

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s, t).$$

Следовательно, кинетический потенциал L является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени:

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t). \quad (126.2)$$

Потенциальная энергия является функцией только обобщенных координат и времени, а потому

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Пользуясь этим условием, получим

$$\begin{aligned} T &= L + \Pi, \\ \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \end{aligned}$$

Подставив эти частные производные в уравнения Лагранжа (126.1), будем иметь

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j},$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (126.3)$$

Уравнения (126.3) называются уравнениями Лагранжа второго рода для консервативной системы.

Уравнения Лагранжа широко используют при изучении свободных колебаний механических систем во многих областях техники. Применение уравнений Лагранжа второго рода к определению частоты

и периода свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы показано в примерах § 128.

Применение уравнений Лагранжа к изучению свободных и вынужденных колебаний механических систем с конечным числом степеней свободы можно найти в ряде специальных курсов*.

§ 127. Циклические координаты, циклические интегралы

Обобщенные координаты, которые не входят явно в выражение кинетического потенциала L , называются циклическими координатами.

Предположим, что среди s обобщенных координат системы координаты q_1, q_2, \dots, q_k ($k < s$) являются циклическими.

Тогда по определению циклических координат производные от кинетического потенциала по этим координатам равны нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (127.1)$$

В этом случае k уравнений (126.3) принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (127.2)$$

откуда

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = C_j = \text{const} \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (127.3)$$

Равенства (127.3) называются циклическими интегралами.

Рассмотрим некоторые примеры циклических координат.

Положение точки в пространстве определяется тремя координатами. Примем декартовы координаты свободной материальной точки x, y, z , за обобщенные координаты. Тогда кинетическая и потенциальная энергии точки, движущейся в поле силы тяжести определяются следующими выражениями:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad \Pi = Gz = mgz.$$

Кинетический потенциал точки

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

Координаты x и y не входят в выражение кинетического потенциала L , т. е. являются циклическими координатами. Циклические интегралы имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = \text{const}, \quad \text{или} \quad \dot{x} = \text{const};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = \text{const}, \quad \text{или} \quad \dot{y} = \text{const}.$$

* А. А. Яблонский и С. С. Норейко. Курс теории колебаний. Изд-во «Высшая школа». 1961 и последующие издания.

Эти выражения показывают, что проекции скорости точки на горизонтальные оси координат постоянны, т. е. движение проекции точки на горизонтальную плоскость происходит равномерно и прямолинейно, или при $\dot{x}=0$ и $\dot{y}=0$ проекция точки на горизонтальную плоскость неподвижна, т. е. точка движется по вертикали. Под действием силы тяжести изменяется только вертикальная составляющая скорости точки.

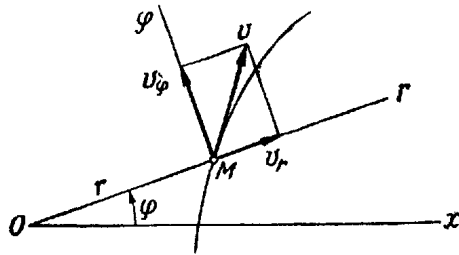


Рис. 267.

В качестве второго примера рассмотрим движение материальной точки массой m под действием центральной силы.

Центральная сила направлена к некоторому центру, а ее модуль является функцией расстояния от точки до центра.

Вспользуемся полярными координатами, принимая их за обобщенные координаты (рис. 267). Определим кинетическую энергию точки, выражая модуль скорости точки v через ее проекции на оси полярных координат v_r и v_φ (см. ч. I, «Кинематика», § 128):

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_r^2 + v_\varphi^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

В § 73 показано, что потенциальная энергия материальной точки, находящейся в поле ньютоновой силы притяжения, является функцией расстояния от точки до центра притяжения. Это положение справедливо и при другом законе изменения центральной силы, т. е.

$$\Pi = f(r).$$

Кинетический потенциал точки

$$L = T - \Pi = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - f(r).$$

Так как угловая координата φ не входит явно в выражение кинетического потенциала L , то она является циклической. Соответствующий ей циклический интеграл имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}, \text{ или } mrv_\varphi = \text{const}.$$

Это равенство выражает закон сохранения момента количества движения материальной точки относительно центра (54.4)

§ 128. Примеры применения уравнений Лагранжа второго рода

Пример 78. В эпициклическом механизме кривошип с противовесом вращается под действием приложенного к нему момента M (рис. 268, а). Момент инерции кривошипа с противовесом относи-

тельно оси его вращения равен J_O . Центр тяжести бегущей шестерни и кривошипа с противовесом находится на оси вращения кривошипа. Расстояние между осями шестерен равно l . Бегущая шестерня имеет радиус r_1 , массу m_1 и момент инерции относительно ее оси J_1 . Определить пренебрегая трением угловое ускорение кривошипа и окружное усилие в точке соприкосновения шестерен.

Решение. Рассматриваемая механическая система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату системы примем угол поворота кривошипа φ , отсчитанный от горизонтали.

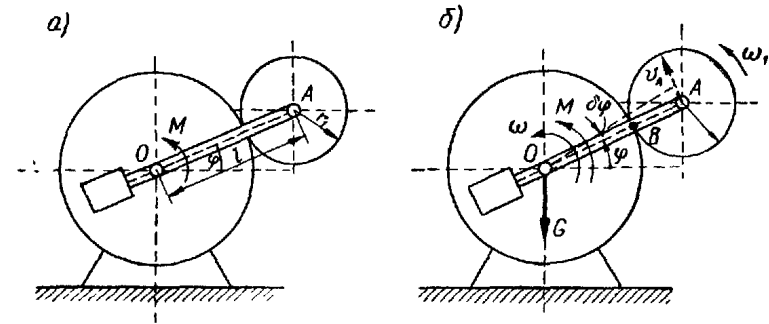


Рис 268

Для определения углового ускорения кривошипа с противовесом $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ применим уравнение Лагранжа второго рода (125.6):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

Чтобы воспользоваться этим уравнением, определим кинетическую энергию системы как функцию обобщенной координаты φ и обобщенной скорости $\dot{\varphi}$, равной угловой скорости кривошипа ω .

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии T_I кривошипа с противовесом, вращающегося вокруг неподвижной оси, и кинетической энергии T_{II} бегущей шестерни, совершающей плоское движение.

По формуле (69.2)

$$T_I = \frac{1}{2} J_O \omega^2 = \frac{1}{2} J_O \dot{\varphi}^2.$$

По формуле (69.3)

$$T_{II} = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2.$$

Скорость центра тяжести шестерни

$$v_A = OA \cdot \omega = l\dot{\varphi}.$$

Угловую скорость бегающей шестерни ω_1 определим при помощи мгновенного центра скоростей, находящегося в точке B соприкасания шестерен (рис. 268, б):

$$\omega_1 = \frac{v_A}{r_1} = \frac{l}{r_1} \dot{\varphi}.$$

Подставив значения v_A и ω_1 , получим

$$T_{II} = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_1 \frac{l^2}{r_1^2} \dot{\varphi}^2.$$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_I + T_{II} = \frac{1}{2} \left(J_O + m_1 l^2 + J_1 \frac{l^2}{r_1^2} \right) \dot{\varphi}^2.$$

Из этого выражения следует, что кинетическая энергия системы зависит от обобщенной скорости $\dot{\varphi}$ и не зависит от обобщенной координаты φ , т. е. от положения механизма. Найдем производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad (a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \left(J_O + m_1 l^2 + J_1 \frac{l^2}{r_1^2} \right) \dot{\varphi};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \left(J_O + m_1 l^2 + J_1 \frac{l^2}{r_1^2} \right) \ddot{\varphi}. \quad (б)$$

На механизм действуют задаваемые силы: вес движущихся частей G , приложенный в точке O и вращающий момент M , приложенный к кривошипу.

Чтобы найти обобщенную силу Q_φ , соответствующую обобщенной координате φ , дадим системе возможное перемещение, сообщив углу φ приращение $\delta\varphi$.

Составим сумму элементарных работ задаваемых сил на этом возможном перемещении. В эту сумму войдет только работа вращающего момента, определенная по формуле (65.7):

$$\delta A_\varphi = M \delta\varphi.$$

Обобщенную силу получим согласно (119.1):

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi} = M. \quad (в)$$

Подставив найденные значения (а), (б) и (в) в уравнение Лагранжа, получим

$$\left(J_O + m_1 l^2 + J_1 \frac{l^2}{r_1^2} \right) \ddot{\varphi} = M,$$

откуда

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{M}{J_O + m_1 l^2 + J_1 \frac{l^2}{r_1^2}}.$$

Для определения окружного усилия в точке касания шестерен рассмотрим плоское движение бегающей шестерни. Составим дифференциальное уравнение вращения шестерни вокруг оси ζ , проходящей через центр тяжести A (рис. 269). К шестерне приложены силы: ее вес G_1 , составляющие реакции кривошипа R_1 и R_2 и составляющие реакции неподвижной шестерни S_1 и S_2 .

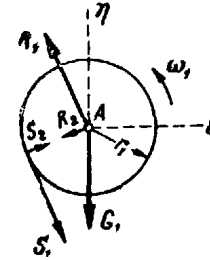


Рис. 269.

Реакция S_1 представляет собой окружное усилие. Направление вращения шестерни примем положительным. Тогда уравнение $J_\zeta \varepsilon = M_\zeta^E$ будет иметь вид

$$J_1 \varepsilon_1 = S_1 r_1, \quad \text{откуда} \quad S_1 = \frac{J_1}{r_1} \varepsilon_1.$$

Чтобы найти угловое ускорение шестерни ε_1 , продифференцируем по времени выражение

$$\omega_1 = \frac{l}{r_1} \omega.$$

Получим $\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{l}{r_1} \frac{d\omega}{dt}$, т. е. $\varepsilon_1 = \frac{l}{r_1} \varepsilon$. Подставляя это значение ε_1 , найдем окружное усилие:

$$S_1 = \frac{J_1 l}{r_1^2} \varepsilon.$$

Пример 79. Редуктор скоростей, используемый в электродвигателе, изображенный на рис. 270, имеет колесо I , насаженное на ведущий вал I редуктора, с числом зубьев z_1 , сателлиты 2 с числом зубьев z_2 , опоры которых помещаются в звене, называемом водилом, принадлежащем валу II , а оси находятся от оси этого вала на расстоянии H , и закрепленное в корпусе колесо 3 с числом зубьев z_3 .

Момент инерции масс, связанных с ведущим валом, относительно оси вала равен J_1 ; масса каждого сателлита m_2 , а его момент инерции относительно собственной оси J_2 ; момент инерции масс, связанных с ведомым валом, относительно его оси J_{II} .

Полагая, что к ведущему валу I приложен постоянный вращающий момент $M_{вр}$, а к ведомому валу II постоянный момент сил сопротивления $M_{сопр}$, определить угловые ускорения ведущего и ведомого валов редуктора, а также угловые ускорения сателлитов.

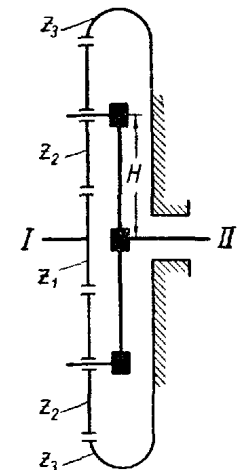


Рис. 270.

Решение. Рассматриваемая механическая система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату системы примем угол поворота ведущего вала φ_1 .

Для определения угловых ускорений всех звеньев редуктора применим уравнение Лагранжа второго рода (125.6).

Чтобы воспользоваться этим уравнением, определим кинетическую энергию системы как функцию обобщенной скорости $\dot{\Phi}_I$, равной угловой скорости ведущего вала ω_I .

Для вычисления кинетической энергии рассматриваемой системы необходимо знать угловые скорости всех звеньев редуктора: ведущего вала (колеса I) ω_I , ведомого вала (водила) ω_{II} , сателлита ω_2 .

Определим эти угловые скорости способом Виллиса, содержание которого заключается в следующем.

Предположим, что вращение всех звеньев механизма происходит в направлении, противоположном движению часовой стрелки, а истинное направление вращения звена установим по знаку его угловой скорости, полученному в результате вычисления. Знак плюс покажет, что вращение звена происходит в направлении, противоположном движению часовой стрелки, а знак минус — что вращение звена происходит в направлении движения часовой стрелки.

Каждое колесо (звено) механизма участвует в двух вращениях: 1) в относительном (по отношению к водилу) вращении вокруг собственной оси и 2) в переносном вращении вместе с водилом вокруг его оси.

Поэтому, абсолютная угловая скорость каждого колеса 1, 2, ..., K ($\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$) равна алгебраической сумме его относительной и переносной угловых скоростей, причем для каждого колеса переносной угловой скоростью является угловая скорость водила ($\omega_{1e} = \omega_{2e} = \dots = \omega_{ke} = \omega_0$).

Мысленно остановив водило, лишаем все колеса их переносного вращения.

Зная абсолютные и переносные угловые скорости колес, определяем их относительные угловые скорости:

$$\begin{aligned}\omega_{1r} &= \omega_1 - \omega_{1e} = \omega_1 - \omega_0; \\ \omega_{2r} &= \omega_2 - \omega_{2e} = \omega_2 - \omega_0; \\ &\dots \dots \dots \\ \omega_{kr} &= \omega_k - \omega_{ke} = \omega_k - \omega_0.\end{aligned}$$

Так как при остановленном водиле оси всех колес неподвижны, то соотношение между относительными угловыми скоростями, колес такое же как и в обычной зубчатой передаче:

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{kr}} = (-1)^m i_{(1-k)r} \quad \text{или} \quad \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_k - \omega_0} = (-1)^m i_{(1-k)r}.$$

Это соотношение носит название *формулы Виллиса*; в ней:

$i_{(1-k)r}$ — передаточное отношение от колеса 1 к колесу k;
m — число внешних зацеплений от колеса 1 к колесу k.

Переходя к решению рассматриваемого примера, приведем формулы Виллиса, устанавливающие зависимости между относительными

угловыми скоростями колес 1 и 2, а также 2 и 3:

$$\frac{\omega_1 - \omega_{II}}{\omega_2 - \omega_{II}} = (-1)^m i_{(1-2)r}; \quad \text{где } m=1 \quad \text{и} \quad i_{(1-2)r} = \frac{z_2}{z_1} \quad (a)$$

$$\frac{\omega_2 - \omega_{II}}{\omega_3 - \omega_{II}} = (-1)^m i_{(2-3)r}, \quad \text{где } m=0 \quad \text{и} \quad i_{(2-3)r} = \frac{z_3}{z_2}. \quad (b)$$

В этом примере от абсолютных угловых скоростей отнимается угловая скорость ω_{II} , являющаяся переносной угловой скоростью для каждого колеса данного редуктора, поскольку водило в этом редукторе связано с ведущим валом II.

Перемножая левые и правые части равенств (a) и (б), получаем;

$$\frac{\omega_1 - \omega_{II}}{\omega_3 - \omega_{II}} = -\frac{z_3}{z_1}.$$

Так как $\omega_1 = \omega_I$ и $\omega_3 = 0$, то

$$\frac{\omega_I - \omega_{II}}{\omega_{II}} = \frac{z_3}{z_1},$$

откуда

$$\omega_{II} = \frac{z_1}{z_1 + z_3} \omega_I. \quad (в)$$

Из равенств (a) и (в) находим

$$\omega_2 = -\frac{z_1}{z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_1 + z_3} \omega_I.$$

Знаки полученных значений ω_{II} и ω_2 показывают, что вал II вращается в направлении, противоположном движению часовой стрелки, а сателлит 2 вращается в направлении движения часовой стрелки.

Составим выражение кинетической энергии всех движущихся частей редуктора.

$$T = \frac{J_I \omega_I^2}{2} + 2 \left(\frac{m_2 v_{C2}^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} \right) + \frac{J_{II} \omega_{II}^2}{2},$$

где

$$v_{C2} = H \omega_{II} = \frac{z_1}{z_1 + z_3} H \omega_I.$$

Выразив все линейные и угловые скорости через угловую скорость ведущего вала ω_I , получим

$$T = \frac{1}{2} \left[J_I + 2m_2 \frac{z_1^2 H^2}{(z_1 + z_3)^2} + 2J_2 \left(\frac{z_1}{z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_1 + z_3} \right)^2 + J_{II} \frac{z_1^2}{(z_1 + z_3)^2} \right] \omega_I^2.$$

Из полученного выражения кинетической энергии всех движущихся частей редуктора находим выражение приведенного к оси ведущего вала момента инерции:

$$J_{пр} = J_I + 2m_2 \frac{z_1^2 H^2}{(z_1 + z_3)^2} + 2J_2 \left(\frac{z_1}{z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_1 + z_3} \right)^2 + J_{II} \frac{z_1^2}{(z_1 + z_3)^2}.$$

Для определения углового ускорения ведущего вала $\epsilon_I = \ddot{\varphi}_I$ применим уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_I} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_I} = Q_{\varphi_I}.$$

Найдем производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_I} = 0; \quad (г)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_I} = J_{\text{пр}} \dot{\varphi}_I,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_I} \right) = J_{\text{пр}} \ddot{\varphi}_I. \quad (д)$$

На механизм действуют задаваемые силы: вес движущихся частей, приложенный в точке, находящейся на прямой, совпадающей с осями ведущего и ведомого валов; вращающий момент $M_{\text{вр}}$, приложенный к ведущему валу, и момент сил сопротивления $M_{\text{сопр}}$, приложенный к ведомому валу.

Чтобы найти обобщенную силу Q_{φ_I} , соответствующую обобщенной координате φ_I , добавим к углу φ_I приращение $\delta\varphi_I$.

Составим сумму элементарных работ задаваемых сил на этом возможном перемещении. В эту сумму войдет работа вращающего момента $M_{\text{вр}}$ и момента сил сопротивления $M_{\text{сопр}}$, которая отрицательна

$$\delta A_{\varphi_I} = M_{\text{вр}} \delta\varphi_I - M_{\text{сопр}} \delta\varphi_{II}.$$

Зависимость между угловыми перемещениями ведущего и ведомого валов равна зависимости между их угловыми скоростями. Поэтому

$$\delta\varphi_{II} = \frac{z_1}{z_1 + z_3} \delta\varphi_I.$$

Тогда

$$\delta A_{\varphi_I} = \left(M_{\text{вр}} - M_{\text{сопр}} \frac{z_1}{z_1 + z_3} \right) \delta\varphi_I.$$

Обобщенную силу получим согласно (119.1)

$$Q_{\varphi_I} = \frac{\delta A_{\varphi_I}}{\delta\varphi_I} = M_{\text{вр}} - M_{\text{сопр}} \frac{z_1}{z_1 + z_3}. \quad (е)$$

Подставив найденные значения (г), (д) и (е) в уравнение Лагранжа, получим

$$J_{\text{пр}} \ddot{\varphi}_I = M_{\text{вр}} - M_{\text{сопр}} \frac{z_1}{z_1 + z_3},$$

откуда

$$\epsilon_I = \ddot{\varphi}_I = \frac{M_{\text{вр}} - M_{\text{сопр}} \frac{z_1}{z_1 + z_3}}{J_I + 2m_2 \frac{z_1^2 H^2}{(z_1 + z_3)^2} + 2J_2 \left(\frac{z_1}{z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_1 + z_3} \right)^2 + J_{II} \frac{z_1^2}{(z_1 + z_3)^2}}.$$

Очевидно,

$$\epsilon_2 = \ddot{\varphi}_2 = - \frac{z_1}{z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_1 + z_2} \epsilon_I;$$

$$\epsilon_{II} = \ddot{\varphi}_{II} = \frac{z_1}{z_1 + z_3} \epsilon_I.$$

Так как

$$M_{\text{вр}} > M_{\text{сопр}} \frac{z_1}{z_1 + z_3},$$

то знаки угловых ускорений всех звеньев редуктора совпадают со знаками угловых скоростей этих звеньев. Это значит, что все звенья редуктора вращаются ускоренно.

Пример 80. Маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной l и массой m , несущий на своем конце груз A , принимаемый за материальную точку массой m_1 (рис. 271, а).

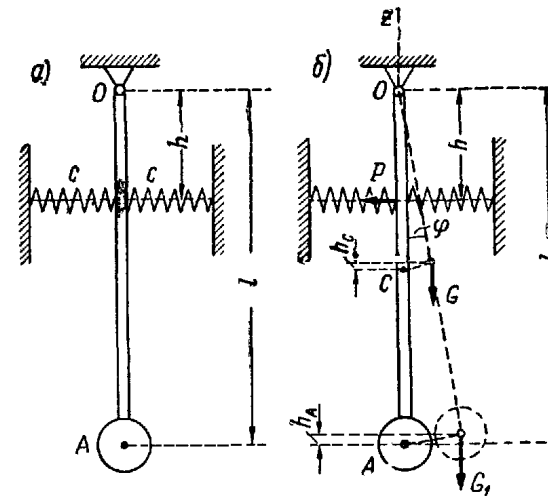


Рис 271.

К стержню прикреплены две пружины с коэффициентами жесткости c на расстоянии h от его верхнего конца; противоположные концы пружин закреплены. Найти циклическую частоту и период малых свободных колебаний маятника.

Решение. Рассматриваемая механическая система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату системы примем угол φ , образованный осью маятника с вертикалью (рис. 271, б).

Система находится под действием консервативных сил — сил тяжести и сил упругости. Для получения дифференциального уравнения качаний маятника воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода для консервативной системы в форме (126.1):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}.$$

Кинетическую энергию системы определим как сумму кинетической энергии T_I стержня, вращающегося вокруг оси Ox , и кинетической энергии T_{II} груза A .

По формуле (69.2)

$$T_1 = \frac{1}{2} J_x \omega^2.$$

Подставив значение момента инерции стержня $J_x = \frac{1}{3} ml^2$, получим

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} ml^2 \omega^2 = \frac{1}{6} ml^2 \dot{\varphi}^2.$$

Кинетическая энергия груза A

$$T_{II} = \frac{m_1 v_A^2}{2} = \frac{1}{2} m_1 l^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\varphi}^2.$$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_{II} = \frac{1}{6} (m + 3m_1) l^2 \dot{\varphi}^2,$$

отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad (a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3} (m + 3m_1) l^2 \dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{1}{3} (m + 3m_1) l^2 \ddot{\varphi}. \quad (б)$$

Определим потенциальную энергию маятника, отклоненного от вертикального положения на малый угол φ как сумму потенциальной энергии Π_1 , соответствующей силам тяжести, и Π_{II} , соответствующей силам упругости. Положим, что потенциальная энергия маятника в вертикальном положении равна нулю. При повороте маятника на угол φ центры тяжести его частей получают вертикальные перемещения вверх:

$$h_C = \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos \varphi = \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi); ,$$

$$h_A = l - l \cos \varphi = l(1 - \cos \varphi).$$

Потенциальная энергия Π_1 при отклонении на угол φ определяется согласно (73.2):

$$\Pi_1 = Gh_C + G_1 h_A = mg \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi) + m_1 gl (1 - \cos \varphi).$$

При повороте маятника на угол φ одна из пружин укорачивается, а другая удлиняется на величину y , которая с точностью до величин первого порядка малости равна:

$$y = h\varphi.$$

Потенциальная энергия Π_{II} определяется как работа суммарной реакции пружин \mathbf{P} при перемещении маятника в вертикальное (нулевое) положение (см. § 72).

По формуле (61.4)

$$\Pi_{II} = 2 \frac{cy^2}{2} = ch^2 \varphi^2.$$

Суммарная потенциальная энергия системы

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_{II} = gl \left(\frac{m}{2} + m_1 \right) (1 - \cos \varphi) + ch^2 \varphi^2.$$

Ограничиваясь малыми величинами второго порядка, имеем

$$1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \approx 2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)^2 = \frac{\varphi^2}{2},$$

тогда

$$\Pi = \frac{gl}{2} \left(\frac{m}{2} + m_1 \right) \varphi^2 + ch^2 \varphi^2 = \left[\frac{gl}{2} \left(\frac{m}{2} + m_1 \right) + ch^2 \right] \varphi^2.$$

Найдем производную Π по обобщенной координате φ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \left[gl \left(\frac{m}{2} + m_1 \right) + 2ch^2 \right] \varphi. \quad (в)$$

Подставив найденные значения (а), (б), (в) в уравнение Лагранжа (123.1), получим

$$\frac{1}{3} (m + 3m_1) l^2 \ddot{\varphi} = - \left[gl \left(\frac{m}{2} + m_1 \right) + 2ch^2 \right] \varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{3 \left[gl \left(\frac{m}{2} + m_1 \right) + 2ch^2 \right]}{(m + 3m_1) l^2} \varphi = 0.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением малых свободных колебаний системы вида (11.2) $\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0$. Поэтому циклическая частота свободных колебаний рассматриваемой системы

$$k = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{3 \left[gl \left(\frac{m}{2} + m_1 \right) + 2ch^2 \right]}{m + 3m_1}}.$$

Период свободных колебаний этой системы

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi l \sqrt{\frac{m + 3m_1}{3 \left[gl \left(\frac{m}{2} + m_1 \right) + 2ch^2 \right]}}.$$

Пример 81. Блок, представляющий собой однородный диск радиусом R и массой m , может вращаться вокруг горизонтальной оси O (рис. 272, а). Через блок перекинута нерастяжимая нить. Конец A нити прикреплен к пружине с коэффициентом жесткости c , а к другому ее концу B прикреплен груз массой m_1 . Определить движение груза,

которое возникает, если в положении покоя системы ему сообщить начальную скорость v_0 , направленную вниз. Массами пружины и нити, а также трением пренебречь; скольжение нити отсутствует.

Решение. Примем за обобщенную координату системы вертикальное отклонение z груза от положения покоя (рис. 272, б). Рассматриваемая система находится под действием консервативных сил — сил тяжести и силы упругости.

Воспользуемся уравнением Лагранжа в виде (126.1):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Кинетическая энергия системы определится как сумма кинетической энергии груза, совершающего поступательное движение,

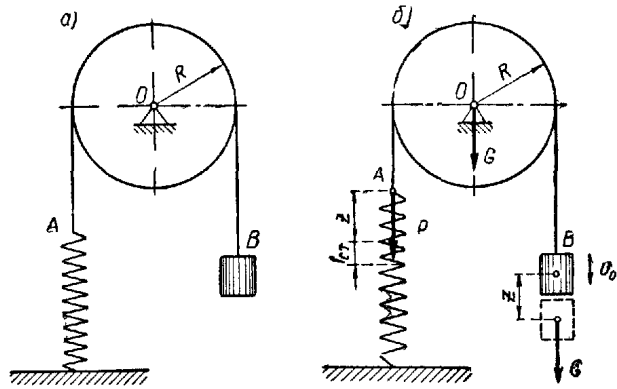


Рис. 272.

и кинетической энергии блока, вращающегося вокруг неподвижной оси O . Пользуясь формулами (69.1) и (69.2), получим

$$T = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} J_O \omega^2.$$

Здесь, $v = \dot{z}$; $\omega = \frac{v}{R} = \frac{\dot{z}}{R}$; $J_O = \frac{mR^2}{2}$.

Следовательно, $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \frac{\dot{z}^2}{R^2} = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{m}{2} \right) \dot{z}^2$,

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad (a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = \left(m_1 + \frac{m}{2} \right) \dot{z}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) = \left(m_1 + \frac{m}{2} \right) \ddot{z}. \quad (б)$$

Потенциальную энергию системы определим как сумму потенциальной энергии Π_1 , соответствующей силам тяжести, и потенциальной энергии Π_{II} , соответствующей силам упругости.

За нулевое положение примем положение покоя системы. Потенциальную энергию системы в положении, определяемом координатой z , найдем как работу, совершаемую силами тяжести G_1 и G и силой упругости P при переходе системы из рассматриваемого положения в нулевое.

Для сил тяжести

$$\Pi_1 = - G_1 z.$$

В положении покоя удлинение пружины от веса груза G_1

$$f_{ct} = \frac{G_1}{c}.$$

При отклонении груза вниз от положения покоя на величину z удлинение пружины

$$f_{ct} + z.$$

Потенциальная энергия Π_{II} определится как работа силы P при переходе системы в нулевое положение.

По формуле (61.4)

$$\Pi_{II} = \frac{c(f_{ct} + z)^2}{2} - \frac{cf_{ct}^2}{2} = cf_{ct}z + \frac{cz^2}{2}.$$

Суммарная потенциальная энергия

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_{II} = - G_1 z + cf_{ct}z + \frac{cz^2}{2}.$$

Так как $G_1 = cf_{ct}$, то окончательно

$$\Pi = \frac{cz^2}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = cz. \quad (в)$$

Подставив значения (а), (б), (в) в уравнения Лагранжа, получим

$$\left(m_1 + \frac{m}{2} \right) \ddot{z} = - cz,$$

или

$$\ddot{z} + \frac{c}{m_1 + \frac{m}{2}} z = 0.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением малых свободных колебаний системы:

$$\ddot{z} + k^2 z = 0.$$

Поэтому циклическая частота свободных колебаний системы

$$k = \sqrt{\frac{c}{m_1 + \frac{m}{2}}}.$$

Период свободных колебаний системы

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + \frac{m}{2}}{c}}.$$

Решение полученного дифференциального уравнения имеет вид (11.3):

$$z = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Дифференцируя это выражение по t , получаем

$$\dot{z} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt.$$

Подставляя в эти уравнения $t = 0$, $z_0 = 0$, $\dot{z}_0 = v_0$, находим постоянные интегрирования:

$$0 = C_1; \quad v_0 = kC_2, \quad \text{откуда} \quad C_2 = \frac{v_0}{k}.$$

При найденных значениях C_1 и C_2 уравнение движения груза получает вид

$$z = \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

Пример 82. Определить циклическую частоту и период малых свободных колебаний груза весом G , лежащего на двухопорной балке (рис. 273). Расстояния груза от опор балки равны a и b .

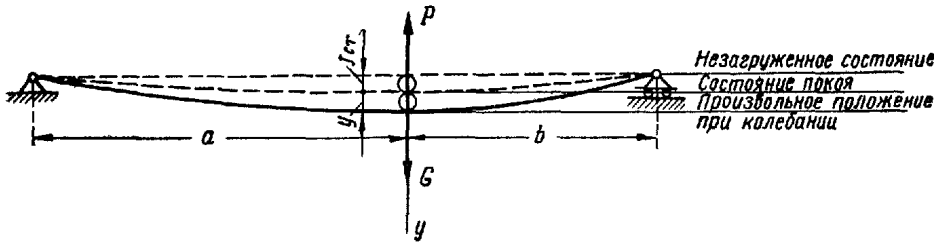


Рис. 273.

Модуль упругости материала балки равен E , момент инерции поперечного сечения — J . Весом балки пренебречь.

Решение. Совместим начало координат O с положением покоя груза и направим ось y вертикально вниз.

За обобщенную координату системы примем координату груза y . На груз действуют консервативные силы — сила тяжести G и реакция упругой балки P . Циклическую частоту колебаний груза, лежащего на упругой балке, определим по уравнению Лагранжа (123.1):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\partial \Pi}{\partial y}.$$

Кинетическая энергия груза (материальной точки)

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{y}^2.$$

Найдем необходимые для уравнения Лагранжа производные:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad (a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m \dot{y}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = m \ddot{y}. \quad (б)$$

Потенциальную энергию системы определим как сумму потенциальной энергии Π_I , соответствующей силе тяжести, и потенциальной энергии Π_{II} , соответствующей силе упругости.

За нулевое положение примем положение покоя груза на балке, имеющей прогиб $f_{ст}$. Потенциальную энергию найдем как работу сил G и P при перемещении груза, имеющего координату y , в нулевое положение.

Потенциальная энергия, соответствующая силе тяжести,

$$\Pi_I = -Gy.$$

Потенциальная энергия, соответствующая силе упругости, определится при помощи формулы (61.4) как работа силы P при изменении координаты груза от y до 0 , т. е. при изменении прогиба балки от $f_{ст} + y$ до $f_{ст}$:

$$\Pi_{II} = \frac{1}{2} c (f_{ст} + y)^2 - \frac{1}{2} c f_{ст}^2 = c f_{ст} y + \frac{1}{2} c y^2.$$

Суммарная потенциальная энергия

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II} = -Gy + c f_{ст} y + \frac{1}{2} c y^2.$$

Так как в состоянии покоя $G = c f_{ст}$, то

$$\Pi = \frac{1}{2} c y^2.$$

Подставив значения (а), (б), (в) в уравнение Лагранжа, получим

$$m \ddot{y} = -cy,$$

или

$$\ddot{y} + \frac{c}{m} y = 0.$$

Полученное уравнение имеет вид (11.2), т. е. является дифференциальным уравнением свободных колебаний груза.

Поэтому циклическая частота свободных колебаний груза, лежащего на упругой балке

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Коэффициент жесткости c для балки с шарнирными опорами и расположением груза, указанным на рис. 273, известен из курса сопротивления материалов:

$$c = \frac{3EJ(a+b)}{a^2b^2},$$

где E — модуль упругости материала, а J — момент инерции поперечного сечения балки.

Подставляя значение c , получаем циклическую частоту малых свободных колебаний груза:

$$k = \frac{1}{ab} \sqrt{\frac{3EJg(a+b)}{G}}.$$

Период колебаний груза

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi ab \sqrt{\frac{G}{3EJg(a+b)}}.$$

Пример 83. Определить циклическую частоту и период малых свободных колебаний механической системы, изображенной на рис. 274, состоящей из груза A массой

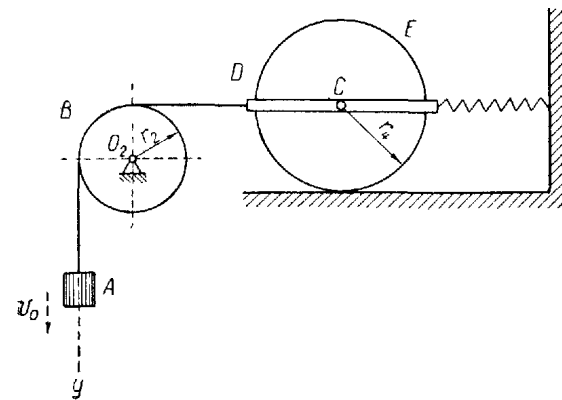


Рис. 274.

массой $m_1 = 1$ кг, блока B массой $m_2 = 0,2$ кг, радиус которого $r_2 = 2$ см, ободы D массой $m_3 = 0,1$ кг, сплошного однородного диска E массой $m_4 = 4$ кг, радиус которого $r_4 = 4$ см, и горизонтальной пружины с коэффициентом жесткости $c = 10$ н/см, прикрепленной к вертикальной плоскости. Трением, массами нити и пружины пренебречь.

Получить также уравнение малых свободных колебаний груза A и определить амплитуду этих колебаний, если в начальный момент при $t = 0$: $y_0 = 1$ см, а $\dot{y}_0 = 8$ см/сек.

Решение. Рассматриваемая механическая система имеет одну степень свободы. Примем за обобщенную координату этой системы вертикальное отклонение y груза A от положения покоя.

1. Вычислим кинетическую энергию каждого из элементов системы и кинетическую энергию всей системы.

Кинетическая энергия груза A , движущегося поступательно со скоростью $v = \dot{y}$

$$T_{гр} = \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 \dot{y}^2}{2}.$$

Кинетическая энергия блока B , вращающегося вокруг неподвижной оси O_{2x}

$$T_{бл} = \frac{J_{2x} \omega_2^2}{2}.$$

Так как блок представляет собой однородный круглый диск массой m_2 , радиус которого r_2 ,

$$J_{2x} = \frac{m_2 r_2^2}{2}.$$

Учитывая, что $\dot{y} = r_2 \omega_2$, т. е. $\omega_2 = \frac{\dot{y}}{r_2}$, получаем

$$T_{бл} = \frac{1}{2} \frac{m_2 r_2^2}{2} \cdot \frac{\dot{y}^2}{r_2^2} = \frac{m_2 \dot{y}^2}{2}.$$

Кинетическая энергия ободы D , движущейся поступательно

$$T_{об} = \frac{m_3 v_C^2}{2} = \frac{m_3 \dot{y}^2}{2}.$$

Кинетическая энергия диска E , совершающего плоское движение

$$T_{д} = \frac{m_4 v_C^2}{2} + \frac{J_{C\xi} \omega_4^2}{2}.$$

Так как диск катится без скольжения, то мгновенный центр скоростей диска находится в точке соприкосновения диска с плоскостью. Поэтому

$$v_C = r_4 \omega_4 = \dot{y} \quad \text{и} \quad \omega_4 = \frac{\dot{y}}{r_4}.$$

Для сплошного однородного круглого диска

$$J_{C\xi} = \frac{m_4 r_4^2}{2}.$$

Подставляя найденные значения v_C , ω_4 и $J_{C\xi}$, получаем

$$T_{д} = \frac{m_4 \dot{y}^2}{2} + \frac{m_4 r_4^2 \dot{y}^2}{4 r_4^2} = \frac{3}{4} m_4 \dot{y}^2.$$

Кинетическая энергия всей механической системы

$$T = T_{гр} + T_{бл} + T_{об} + T_{д},$$

т. е.

$$T = \frac{m_1 \dot{y}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{y}^2}{4} + \frac{m_3 \dot{y}^2}{2} + \frac{3}{4} m_4 \dot{y}^2$$

или

$$T = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3 + \frac{3}{2} m_4 \right) \dot{y}^2.$$

2. Вычислим потенциальную энергию механической системы как сумму потенциальной энергии системы в поле сил тяжести Π_I и потенциальной энергии деформированной пружины Π_{II} :

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II}.$$

Потенциальная энергия системы Π_I определяется работой, совершаемой силой тяжести G груза A , так как центры тяжести блока B , обоймы D и диска E на рассматриваемом перемещении системы не изменяют высоты своего расположения

$$\Pi_I = -Gy.$$

Потенциальную энергию деформированной пружины Π_{II} в положении, определяемом координатой y , найдем как работу, совершаемую силой упругости пружины P при переходе системы из рассматриваемого положения в положение покоя.

В положении покоя удлинение пружины от веса G груза A равно

$$f_{ст} = \frac{G}{c}.$$

При отклонении груза A вниз от положения покоя на расстояние y удлинение пружины равно $(f_{ст} + y)$.

Потенциальная энергия Π_{II} определится как работа силы P при переходе системы из рассматриваемого положения в положение покоя:

$$\Pi_{II} = \frac{c(f_{ст} + y)^2}{2} - \frac{cf_{ст}^2}{2} = cf_{ст}y + \frac{cy^2}{2}.$$

Суммарная потенциальная энергия системы

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II} = -Gy + cf_{ст}y + \frac{cy^2}{2},$$

Так как в состоянии покоя системы

$$G = P_0 = cf_{ст},$$

то

$$\Pi = \frac{cy^2}{2}.$$

3. Подставим найденные значения T и Π в уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y = - \frac{\partial \Pi}{\partial y}.$$

Так как

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = \left(m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3 + \frac{3}{2} m_4 \right) \ddot{y},$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = cy,$$

получаем

$$\left(m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3 + \frac{3m_4}{2} \right) \ddot{y} = -cy,$$

откуда

$$\ddot{y} + \frac{c}{m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3 + \frac{3}{2} m_4} y = 0.$$

Это выражение есть дифференциальное уравнение малых свободных колебаний механической системы:

$$\ddot{y} + k^2 y = 0.$$

Циклическая частота этих колебаний

$$k = \sqrt{\frac{c}{m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3 + \frac{3}{2} m_4}} = \sqrt{\frac{1000}{1 + 0,1 + 0,1 + \frac{3}{2} \cdot 4}} \approx 11,8 \text{ сек}^{-1}.$$

Период колебаний механической системы

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{11,8} \approx 0,53 \text{ сек}.$$

4. Пользуясь заданными начальными условиями, найдем уравнение движения груза A :

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

$$\dot{y} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt.$$

При $t = 0$

$$y_0 = C_1, \quad \dot{y}_0 = kC_2 = v_0,$$

откуда

$$C_2 = \frac{v_0}{k}.$$

Подставляя значения C_1 и C_2 , получаем

$$y = y_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt$$

или

$$y = 1 \cos 11,8t + \frac{8}{11,8} \sin 11,8t,$$

$$y = \cos 11,8t + 0,68 \sin 11,8t \text{ (см)}.$$

Амплитуда колебаний груза A находится по следующей формуле:

$$a = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{k} \right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{8}{11,8} \right)^2} = \sqrt{1,46} \approx 1,21 \text{ см}.$$

Пример 84. Определить малые свободные колебания подпрыгивания и продольной качки головного пассажирского вагона электропоезда, имеющего две тележки (рис. 275), если известно, что масса вагона при нормальном заполнении его пассажирами равна 31,5 т, расстояние от центра тяжести подрессоренной части вагона до вертикальных плоскостей,

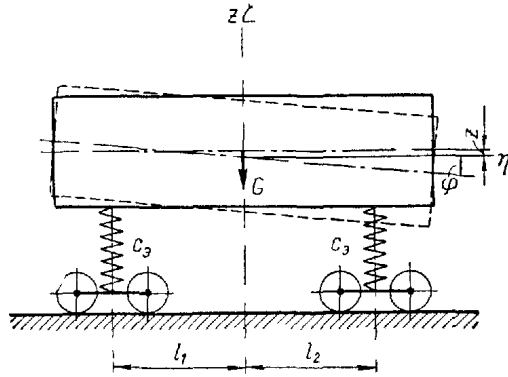


Рис 275

проведенных через оси тележек, $l_1 = l_2 = l = 6,65$ м, момент инерции подрессоренной части — кузова вагона с пассажирами относительно центральной оси $C\xi$, перпендикулярной к оси пути $J_{C\xi} = 11,5 \cdot 10^5$ кгм², а эквивалентная жесткость двойного рессорного подвешивания каждой тележки $c_3 = 1580$ кн/м.

Решение. Малые свободные колебания подпрыгивания подрессоренной части вагона характеризуются

уравнением $z = f_1(t)$, а малые свободные колебания продольной качки уравнением $\varphi = f_2(t)$, где z и φ — обобщенные координаты рассматриваемой системы.

Кинетическая энергия подрессоренной части вагона определится по формуле для вычисления кинетической энергии твердого тела в плоском движении:

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{C\xi} \omega^2.$$

Так как $v_C = \dot{z}$, а $\omega = \dot{\varphi}$, то

$$T = \frac{1}{2} (m \dot{z}^2 + J_{C\xi} \dot{\varphi}^2).$$

Потенциальную энергию системы найдем как сумму потенциальной энергии подрессоренной части вагона в поле сил тяжести Π_I и потенциальной энергии деформированных рессор тележек Π_{II} :

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II}.$$

Здесь

$$\Pi_I = -Gz.$$

$$\begin{aligned} \Pi_{II} = \frac{1}{2} c_3 (z + l\varphi + f_{ct})^2 - \frac{1}{2} c_3 f_{ct}^2 + \frac{1}{2} c_3 (z - l\varphi + f_{ct})^2 - \\ - \frac{1}{2} c_3 f_{ct}^2 = c_3 (z^2 + l^2 \varphi^2 + 2z f_{ct}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\Pi = -Gz + c_3 z^2 + c_3 l^2 \varphi^2 + 2c_3 f_{ct} z.$$

Так как

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0,$$

то

$$-G + 2c_3 z = 0$$

и

$$\Pi = c_3 z^2 + c_3 l^2 \varphi^2.$$

Уравнения Лагранжа второго рода для рассматриваемой механической системы будут следующими:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{\partial \Pi}{\partial z};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}.$$

Вычислим значения производных:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m \dot{z}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) = m \ddot{z}; \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = 2c_3 z;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_{C\xi} \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = J_{C\xi} \ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 2c_3 l^2 \varphi.$$

Подставив эти значения в уравнения Лагранжа, получим

$$m \ddot{z} = -2c_3 z; \quad \ddot{z} + \frac{2c_3}{m} z = 0; \quad (a)$$

$$J_{C\xi} \ddot{\varphi} = -2c_3 l^2 \varphi; \quad \ddot{\varphi} + \frac{2c_3 l^2}{J_{C\xi}} \varphi = 0. \quad (б)$$

Эти дифференциальные уравнения представляют собой два независимых линейных дифференциальных уравнения второго порядка; каждое из них содержит лишь одну неизвестную функцию.

Уравнение колебательного движения — подпрыгивания подрессоренной части вагона, соответствующее дифференциальному уравнению (а), имеет вид

$$z = C_1 \sin(k_1 t + \alpha_1).$$

Уравнение колебательного движения — продольной качки подрессоренной части вагона, соответствующее дифференциальному уравнению (б), имеет вид

$$\varphi = C_2 \sin(k_2 t + \alpha_2).$$

Здесь C_1 , C_2 , α_1 и α_2 — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий движения.

Вычислим циклические частоты этих колебаний:

$$k_1 = \sqrt{\frac{2c_3}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1580 \cdot 1000}{31500}} = \sqrt{100,32} \approx 10 \text{ сек}^{-1};$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{2c_3 l^2}{J_{C\xi}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1580 \cdot 1000}{11,5 \cdot 10^5}} = \sqrt{118,76} \approx 11,7 \text{ сек}^{-1}.$$

Пример 85. Эллиптический маятник состоит из ползуна массой m_1 , скользящего по гладкой горизонтальной плоскости, и шарика массой m_2 , соединенного с ползуном стержнем длиной l (рис. 276). Найти уравнение движения ползуна и период качаний маятника при условии, что в начальный момент маятник отклонен на угол φ_0 от вертикали и вся система находится в состоянии покоя. Вертикальную ось провести через начальное положение центра тяжести системы; массой стержня пренебречь.

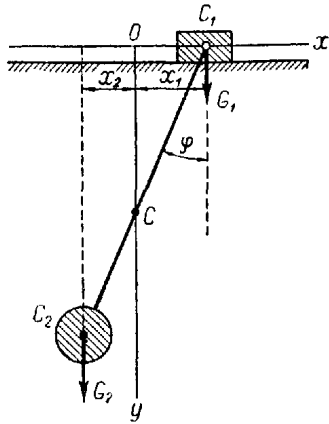


Рис. 276.

Решение. Проведем оси координат так, как указано на рис. 276, полагая, что ось Oy проходит через начальное положение центра тяжести системы. Положение системы по отношению к неподвижным осям xOy можно определить координатой центра тяжести ползуна x_1 и углом поворота маятника φ , отсчитанным от вертикали, т. е. рассматриваемая система имеет две степени свободы.

Примем координату x_1 и угол φ за обобщенные координаты. Тогда зависимость координаты x_2 центра тяжести шарика от обобщенных координат будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 - l \sin \varphi, \\ y_2 &= l \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Чтобы воспользоваться уравнениями Лагранжа, выразим кинетическую энергию системы в зависимости от обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Кинетическая энергия ползуна, движущегося поступательно вдоль оси Ox

$$T_I = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2.$$

Кинетическая энергия шарика, движущегося в вертикальной плоскости:

$$T_{II} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2).$$

Кинетическая энергия всей системы:

$$T = T_I + T_{II} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2).$$

Продифференцировав по времени равенства (а), получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 - l \dot{\varphi} \cos \varphi; \\ \dot{y}_2 &= -l \dot{\varphi} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Пользуясь этими значениями, получим кинетическую энергию системы в виде:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1^2 - 2l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 - m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Так как система находится под действием консервативных сил — сил тяжести, то воспользуемся уравнениями Лагранжа для консервативной системы.

Для этого найдем потенциальную энергию системы, пользуясь формулой (73.2), приняв плоскость движения ползуна за нулевую плоскость:

$$\Pi = -G_2 y_2 = -m_2 g l \cos \varphi.$$

Кинетический потенциал системы

$$\begin{aligned} L = T - \Pi &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 - \\ &- m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi + m_2 g l \cos \varphi. \end{aligned}$$

Так как обобщенная координата x_1 не входит в выражение кинетического потенциала L , то она является циклической координатой.

Уравнение Лагранжа второго рода, соответствующее этой координате, имеет вид (124.2):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = 0.$$

Ему соответствует циклический интеграл:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = C_1,$$

т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2) \dot{x}_1 - m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi = C_1.$$

Это уравнение можно проинтегрировать по времени и получить второй интеграл уравнения Лагранжа:

$$(m_1 + m_2) x_1 - m_2 l \sin \varphi = C_1 t + C_2.$$

Постоянные интегрирования следует определить по начальным условиям движения системы. Установим начальные значения обобщенных скоростей и обобщенных координат.

Так как в начальный момент $t=0$ система находилась в покое, то начальные значения обобщенных скоростей

$$\dot{x}_{10} = 0; \quad \dot{\varphi}_0 = 0.$$

Угол поворота маятника имеет начальное значение φ_0 , заданное в условии.

Установим начальное значение координаты x_1 в выбранной системе координат. Воспользуемся тем, что в начальный момент центр тяжести маятника находился на оси y .

По формуле, определяющей координату центра тяжести, получим

$$x_{C_0} = \frac{m_1 x_{10} + m_2 x_{20}}{m_1 + m_2} = 0$$

или

$$m_1 x_{10} + m_2 (x_{10} - l \sin \varphi_0) = 0,$$

откуда

$$x_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin \varphi_0.$$

Подставляя начальные значения $\dot{x}_{10} = 0$ и $\dot{\varphi}_0 = 0$ в первый интеграл, находим:

$$C_1 = 0.$$

Подставляя значения $t = 0$, $x_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_0$ во второй интеграл, получаем:

$$(m_1 + m_2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin \varphi_0 - m_2 l \sin \varphi_0 = C_2,$$

откуда

$$C_2 = 0.$$

При этих значениях C_1 и C_2 второй интеграл принимает вид:

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin \varphi. \quad (1)$$

Уравнение (1) представляет собой одно из двух уравнений движения системы. При помощи этого уравнения найдем координату центра тяжести маятника в любой момент времени t :

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 (x_1 - l \sin \varphi)}{m_1 + m_2} = \\ &= x_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin \varphi = x_1 - x_1 = 0, \end{aligned}$$

т. е. центр тяжести системы движется по оси y .

Это обусловлено отсутствием горизонтальных внешних сил и начальной скорости центра масс системы по оси x .

Воспользуемся уравнением Лагранжа, соответствующим координате φ , которая не является циклической.

Находим производные:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} - m_2 l \dot{x}_1 \cos \varphi;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 g l \sin \varphi = m_2 l (\dot{x}_1 \dot{\varphi} - g) \sin \varphi.$$

Продифференцировав по времени первое уравнение движения системы, получим

$$\dot{x}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Пользуясь этим выражением и полагая для малых углов

$$\sin \varphi \approx \varphi, \quad \cos \varphi \approx 1,$$

имеем:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} - \frac{m_2^2 l^2}{m_1 + m_2} \dot{\varphi} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 \dot{\varphi};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 \ddot{\varphi};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2 l \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \dot{\varphi}^2 - g \right) \varphi.$$

После подстановки этих выражений уравнение Лагранжа примет вид

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 \ddot{\varphi} - m_2 l \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \dot{\varphi}^2 - g \right) \varphi = 0.$$

Оставляя в дифференциальном уравнении лишь величины первого порядка малости, получаем:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 \ddot{\varphi} + m_2 g l \varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Полученное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид (11.3):

$$\varphi = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt.$$

Продифференцировав это выражение по t , получим

$$\dot{\varphi} = -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt.$$

Подставив в эти уравнения начальные условия: $t = 0$; $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, найдем:

$$C_3 = \varphi_0, \quad C_4 = 0.$$

Таким образом, второе уравнение движения системы, т. е. уравнение малых колебаний маятника, примет вид:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt, \quad (2)$$

где частота колебаний маятника

$$k = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}}.$$

Период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

При $m_1 \gg m_2$ перемещения ползуна, определяемые уравнением (1), малы, а период колебаний маятника приближается к периоду колебаний T^* математического маятника длиной l :

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Уменьшая массу ползуна m_1 без изменения длины маятника, можно уменьшить период его колебаний T .

Рассмотренная механическая система называется эллиптическим маятником потому, что при движении ползуна по оси x , а центра тяжести системы по оси y , центр шарика движется по эллипсу.

Вопросы для самоконтроля

1. Функцией каких аргументов является вектор скорости точки, принадлежащей механической системе с s степенями свободы?
2. Чему равна частная производная от вектора скорости точки системы по какой-либо обобщенной скорости?
3. Функцией каких аргументов является кинетическая энергия системы, подчиненной голономным нестационарным связям?
4. Какой вид имеют уравнения Лагранжа второго рода? Чему равно число этих уравнений для каждой механической системы?
5. Какой вид принимают уравнения Лагранжа в случае, когда на систему действуют одновременно консервативные и неконсервативные силы?
6. Что представляет собой функция Лагранжа, или кинетический потенциал?
7. Какой вид имеют уравнения Лагранжа второго рода для консервативной системы?
8. В зависимости от каких переменных величин должна быть выражена кинетическая энергия механической системы при составлении уравнений Лагранжа?
9. Как определяется потенциальная энергия механической системы, находящейся под действием сил упругости?
10. Какие обобщенные координаты называют циклическими и какой вид имеют циклические интегралы?

Механические величины и единицы их изме

Физическая величина		Формулы размерностей		Система единиц МКС	
название	обозначение	в системе	в системе	единица измерения	сокращенное обозначение
		LMT (МКС и СГС)	LPT (МКГСС)		
Длина	l	L		метр	$м$
Масса	m	M	$L^{-1}PT^2$	килограмм	$кг$
Время	t	T		секунда	$сек$
Сила	P	LMT^{-2}	P	ньютон (килограмм — метр на секунду в квадрате)	$\frac{н}{кг \cdot м/сек^2}$
Вес	G				
Плоский угол	Φ	1		радиан	$рад$
Угловая скорость	ω	T^{-1}		радиан в секунду	$сек^{-1}$
Угловое ускорение	ε	T^{-2}		радиан на секунду в квадрате	$сек^{-2}$
Скорость	v	LT^{-1}		метр в секунду	$м/сек$
Ускорение	w	LT^{-2}		метр на секунду в квадрате	$м/сек^2$
Площадь	F	L^2		квадратный метр	$м^2$
Объем	V	L^3		кубический метр	$м^3$
Удельный вес	γ	$L^{-2}MT^{-2}$	$L^{-3}P$	ньютон на кубический метр	$\frac{н/м^3}{кг/м^3 \cdot сек^2}$
Плотность	ρ	$L^{-3}M$	$L^{-4}PT^2$	килограмм на кубический метр	$кг/м^3$
Механическое напряжение, давление	p	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}P$	ньютон на квадратный метр	$\frac{н/м^2}{кг/м \cdot сек^2}$
Импульс	S	LMT^{-1}	PT	ньютон — секунда	$\frac{н \cdot сек}{кг \cdot м/сек}$
Количество движения	K			килограмм — метр в секунду	$кг \cdot м/сек$
Момент силы	M	L^2MT^{-2}	LP	ньютон — метр	$\frac{н \cdot м}{кг \cdot м^2/сек^2}$
Момент инерции (динамический)	J	L^2M	LPT^2	килограмм — метр в квадрате	$кг \cdot м^2$
Момент количества движения	L	L^2MT^{-1}	LPT	килограмм — метр в квадрате в секунду	$кг \cdot м^2/сек$
Работа	A	L^2MT^{-2}	LP	джоуль	$\frac{дж}{кг \cdot м^2/сек^2}$
Энергия	E				
Мощность	N	L^2MT^{-3}	LPT^{-1}	ватт	$\frac{вт}{кг \cdot м^2/сек^3}$

Таблица 1

рения в системах СИ (МКС), СГС и МКГСС

Система единиц СГС		Система единиц МКГСС	
единица измерения	сокращенное обозначение	единица измерения	сокращенное обозначение
сантиметр	<i>см</i>	метр	<i>м</i>
грамм	<i>г</i>	техническая единица массы (килограмм — сила — секунда в квадрате на метр)	<i>т. е. м. (кгс·сек²/м)</i>
секунда	<i>сек</i>	секунда	<i>сек</i>
дина (грамм — сантиметр на секунду в квадрате)	<i>дин (г·см/сек²)</i>	килограмм — сила	<i>кгс</i>
радиан	<i>рад</i>	радиан	<i>рад</i>
радиан в секунду	<i>сек⁻¹</i>	радиан в секунду	<i>сек⁻¹</i>
радиан на секунду в квадрате	<i>сек⁻²</i>	радиан на секунду в квадрате	<i>сек⁻²</i>
сантиметр в секунду	<i>см/сек</i>	метр в секунду	<i>м/сек</i>
сантиметр на секунду в квадрате	<i>см/сек²</i>	метр на секунду в квадрате	<i>м/сек²</i>
квадратный сантиметр	<i>см²</i>	квадратный метр	<i>м²</i>
кубический сантиметр	<i>см³</i>	кубический метр	<i>м³</i>
дина на кубический сантиметр	<i>дин/см³ (г/см²·сек²)</i>	килограмм — сила на кубический метр	<i>кгс/м³</i>
грамм на кубический сантиметр	<i>г/см³</i>	килограмм — сила — секунда в квадрате на метр в четвертой степени	<i>кгс·сек²/м⁴</i>
дина на квадратный сантиметр	<i>дин/см² (г/см·сек²)</i>	килограмм — сила — на квадратный метр	<i>кгс/м²</i>
дина — секунда	<i>дин·сек (г·см/сек)</i>	килограмм — сила — секунда	<i>кгс·сек</i>
грамм — сантиметр в секунду	<i>г·см/сек</i>	т. е. м. — метр в секунду	
дина — сантиметр	<i>дин·см (г·см²/сек²)</i>	килограмм — сила — метр	<i>кгс·м</i>
грамм — сантиметр в квадрате	<i>г·см²</i>	килограмм — сила — метр — секунда в квадрате	<i>кгс·м·сек²</i>
грамм — сантиметр в квадрате в секунду	<i>г·см²/сек</i>	килограмм — сила — метр — секунда	<i>кгс·м·сек</i>
эрг	<i>эрг (г·см²/сек²)</i>	килограмм — сила — метр	<i>кгс·м</i>
эрг в секунду	<i>эрг/сек (г·см²/сек³)</i>	килограмм — сила — метр в секунду	<i>кгс·м/сек</i>

Соотношения между единицами механических величин

Название механической величины	Основные единицы измерения и соотношения между единицами различных систем
Масса	1 килограмм (<i>кг</i>) = 0,102 т. е. м. 1 техническая единица массы (т. е. м.) = 9,81 <i>кг</i>
Сила	1 ньютон (<i>н</i>) = 10 ⁵ <i>дин</i> = 0,102 <i>кгс</i> 1 килограмм — сила (<i>кгс</i>) = 9,81 <i>н</i>
Работа	1 джоуль (<i>дж</i>) = 10 ⁷ эргов (<i>эрг</i>) = 0,102 <i>кгс·м</i> 1 килограмм — сила — метр (<i>кгс·м</i>) = 9,81 <i>дж</i> 1 ватт-час (<i>вт·ч</i>) = 3600 <i>вт·сек</i> = 3600 <i>дж</i> 1 киловатт-час (<i>квт·ч</i>) = 36·10 ⁵ <i>дж</i>
Мощность	1 ватт (<i>вт</i>) = 1 <i>дж/сек</i> = 10 ⁷ <i>эрг/сек</i> = 0,102 <i>кгс·м/сек</i> 1 <i>кгс·м/сек</i> = 9,81 <i>вт</i> 1 киловатт (<i>квт</i>) = 10 ³ <i>вт</i> = 102 <i>кгс·м/сек</i> = 1,36 <i>л. с.</i> 1 лошадиная сила (<i>л. с.</i>) = 75 <i>кгс·м/сек</i> = 736 <i>вт</i> = 0,736 <i>квт</i>

ИМЕННОЙ И ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Амплитуда**
— вынужденных колебаний 51, 65
— затухающих колебаний 43
— свободных колебаний 31
Апериодическое движение 44
Афелий 217
- Бериулли Даинил 6**
Бернуллн Иван 6
- Вектор главный**
— внешних сил 126
— внутренних сил 99
— количества движения 141
— сил инерции 305
Виртуальные перемещения 323
- Гагарин Ю. А. 8**
Галилей 6, 8
Герман Яков 6, 299
Гелиоцентрическая система осей координат 11
Гироскоп 261
— с двумя степенями свободы 266
— с тремя степенями свободы 263
Гироскопический
— момент 268
— эффект 269
Главный момент внутренних сил системы 100
Главные оси инерции 113
Грамм массы 10
Гюйгенс 5, 230
- Даламбер 6, 299**
Декарт 5, 167
Декремент 43
— логарифмический 44
Джоуль 173
Дина 10
Динамика 5
— относительного движения материальной точки 83
— свободной материальной точки 14
— тела переменной массы 148
- Динамические реакции подшипников 310**
- Жуковский Н. Е. 7**
- Задача динамики вторая 17**
— первая 16
Закон
— инерции 8
— независимости действия сил 8
— площадей 212
— пропорциональности силы и ускорения 8
— равенства действия и противодействия 8
Заков сохранения
— движения центра масс 127
— кинетического момента 163
— количества движения 142
— механической энергии 210
Законы Кеплера 218
- Импульс**
— равнодействующей 137
— силы 135
— ударный 277
— элементарный 135
Инертность 9
Инерциальные системы отсчета 11, 87
Искусственные спутники Земли 218
- Кавендиш 218**
Карно 287
Кениг 189
Кеплер 218
Киловатт 174
Килограммометр 174
Кинетический потенциал 372
Классификация сил 99
Ковалевская С. В. 261
Колебания материальной точки
— вынужденные 47
— затухающие 39
— свободные 29

403

- Колесо ведомое 128**
— ведущее 128
Количество движения 137, 141
Коэффициент
— динамичности 52, 65
— жесткости 30
— затухания 44
— трения качения 188
Критерий устойчивого состояния покой системы 364
Крылов А. Н. 5, 8
- Лагранж 6**
Лагранжа функция 373
Лаплас 248
Лейбниц 167
Лошадиная сила 174
Ляпунов А. М. 7, 365
- Малые колебания консервативной системы**
— с двумя степенями свободы 393, 395
— с одной степенью свободы 382, 387, 392
Масса 9
Маятник
— математический 78
— физический 228
— эллиптический 395
Меры механического движения 166
Механика
— классическая 6
— релятивистская 6
Механический коэффициент полезного действия машины 194
Мецнерский И. В. 7, 148
Мультипликатор Лагранжа 74
Момент
— главный сил инерции 305
— инерции 102
— кинетической системы 161
— кинетический твердого тела 223
— центробежный 112
Мощность 174
- Несвободная материальная точка 70**
Неуравновешиваемость динамическая 313
Ньютон 5
Ньютон (единица силы) 10
- Обобщенная координата 321**
Определение моментов инерции
— способом качаний 233
— способом крутильных колебаний 234
— способом падающего груза 236
Остроградский М. В. 7

- Ось**
— инерции главная 113
— инерции главная центральная 114
— качаний физического маятника 230
— привеса физического маятника 228
Отклонение падающих тел к востоку 89
Относительный покой материальной точки 88
- Падение тела**
— без учета сопротивления воздуха 18
— с учетом сопротивления воздуха 22
Перемещение
— возможное 323
— элементарное 171
Перигелий 217
Период
— вынужденных колебаний 50, 64
— затухающих колебаний 43
— свободных колебаний 32
Период качаний
— математического маятника 79
— физического маятника 231
Поле
— потенциальное 203
— силовое 203
— силы тяжести 207
— стационарное 203
— центральной силы 209
Полиспаст 329
Постоянная тяготения 218
Постоянные интегрирования 18
Потенциальная энергия 204
Правило механики, золотое 328
Пресс
— винтовой 330
— клиновый 329
— стержневой 331
Прецессия оси гироскопа 266
Приведение сил инерции 305
Приведенная длина физического маятника 229
Принцип
— возможных перемещений 325
— Германа — Эйлера — Даламбера 299, 304
— относительности классической механики 88
— освобождаемости от связей 304
Пуассон 6
- Работа**
— внутренних сил в твердом теле 183
— постоянной силы 168
— равнодействующей силы 171

- сил в потенциальном поле 204, 205
- сил, приложенных к вращающемуся твердому телу 185
- сил, приложенных к твердому телу, движущемуся поступательно 184
- силы тяготения 174
- силы тяжести 174
- силы упругости 175
- силы элементарная 169
- Радиус инерции 103
- Реакции
 - динамические подшипников при вращении твердого тела 310
 - идеальных связей 324
- Риттера способ 335

- Связь
 - голономная 71
 - двусторонняя (удерживающая) 71
 - идеальная 324
 - неголономная 71
 - нестационарная 70
- Связь
 - односторонняя (неудерживающая) 71
 - стационарная 70
 - с трением 74
- Сдвиг фазы колебаний 64
- Сила
 - возмущающая гармоническая 47
 - восстанавливающая 29
 - задаваемая 72
 - инерции 12
 - инерции вращательная 13
 - инерции касательная 12
 - инерции кориолисова 84
 - инерции нормальная 12
 - инерции переносная 84
 - инерции центробежная 13
 - консервативная 203
 - обобщенная 353
 - полезного сопротивления 194
 - тяжести 88
 - ударная 275
 - упругости 175
 - центральная 156
- Системы механических единиц измерения 10
- Скамейка Жуковского 228
- Скорость
 - обобщенная 370
 - относительная присоединяющейся массы 150
- Сопротивление
 - вредное 194
 - качению 187
 - полезное 194
- Сопротивление пропорциональное скорости 40
- Состояние покоя
 - безразличное 364
 - неустойчивое 364
 - устойчивое 364
- Стевин 6

- Твердое тело 101
- Тело переменной массы 148
- Т. е. м. (техническая единица массы) 10
- Теорема
 - импульсов 139, 143
 - импульсов при ударе 276
 - Карно 287
 - Кенига 190
 - Лагранжа — Дирихле 365
 - о движении центра масс 125
 - о моментах инерции относительно параллельных осей 104
 - об изменении кинетического момента механической системы 162
- Теорема
 - об изменении кинетической энергии материальной точки и механической системы 177, 193
 - об изменении количества движения материальной точки и механической системы 137, 141
 - об изменении момента количества движения материальной точки 155
- Резаля 165
- Теоремы Ляпунова 365
- Теория удара 275
- Траектории искусственных спутников Земли 218

- Удар
 - неупругий 281
 - прямой, центральный 281
 - упругий 281
- Уравнение
 - Бине 211
 - Мещерского 150
 - общее динамики 341
 - основное динамики материальной точки 9
- Уравнения движения естественные материальной точки 15
- Уравнения
 - Лагранжа второго рода 369
 - Эйлера динамические 259
- Условия равновесия консервативной системы сил 361
- Устойчивость состояния покоя 365
- Уравновешивание сил инерции 314
- Фаза колебаний
 - вынужденных 48
- вынужденных при наличии сопротивления 64
- начальная 31
- свободных колебаний 31
- Физический маятник 228
- Формула
 - Виллиса 379
 - Циолковского 152
- Функция
 - Лагранжа 373
 - слывовая 203
- Фурье 6

- Центр качаний физического маятника 230
- Центр масс 100
- Центр удара 294
- Центральный эллипсоид инерции 114
- Циклический интеграл 374
- Циклические координаты 374
- Циолковский К. Э. 7, 152

- Чаплыгин С. А. 7

- Частота циклическая
 - вынужденных колебаний 50
 - затухающих колебаний 42
 - изменения возмущающей силы 48
 - свободных колебаний 32

- Эйлер 6
- Эйнштейн 6
- Эквипотенциальная поверхность 206
- Эллипсоид инерции 112
- Энгельс 167, 168
- Энергия
 - кинетическая материальной точки 167
 - кинетическая механической системы 189
 - кинетическая твердого тела 190
 - механическая полная 210
 - потенциальная 204
 - потерянная при неупругом ударе 285

- Явление
 - биений 54
 - резонанса 55

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.	Стр.
Предисловие		3
Глава I. Введение в динамику		
§ 1. Предмет динамики. Краткий исторический обзор развития динамики	5	
§ 2. Основные законы механики (законы Галилея—Ньютона)	8	
Вопросы для самоконтроля	11	
Глава II. Динамика свободной материальной точки		
§ 3. Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки в декартовых координатах	14	
§ 4. Естественные уравнения движения материальной точки	15	
§ 5. Две основные задачи динамики точки	16	
§ 6. Свободное падение тела без учета сопротивления воздуха	18	
§ 7. Движение тела, брошенного под углом к горизонту, без учета сопротивления воздуха	19	
§ 8. Движение падающего тела с учетом сопротивления воздуха	22	
§ 9. Пример интегрирования дифференциальных уравнений движения точки для случая силы, зависящей от времени	24	
§ 10. Пример интегрирования дифференциального уравнения движения точки для случая силы, зависящей от положения точки	26	
Вопросы для самоконтроля	29	
Глава III. Колебательное движение материальной точки		
§ 11. Виды колебательных движений материальной точки. Свободные колебания материальной точки	29	
§ 12. Свободные колебания груза, подвешенного к пружине	33	
§ 13. Примеры на свободные колебания	35	
§ 14. Затухающие колебания материальной точки	39	
§ 15. Аперiodическое движение точки	44	
§ 16. Вынужденные колебания материальной точки	47	
§ 17. Явление биений	54	
§ 18. Явление резонанса	55	
§ 19. Примеры на вынужденные колебания	56	
§ 20. Влияние сопротивления движению на вынужденные колебания	60	
Вопросы для самоконтроля	69	
Глава IV. Динамика несвободной материальной точки		
§ 21. Несвободная материальная точка. Связи и динамические реакции связей	70	
§ 22. Дифференциальные уравнения движения материальной точки по заданной неподвижной поверхности	73	
§ 23. Дифференциальные уравнения движения материальной точки по заданной плоской неподвижной линии	75	
		408
§ 24. Математический маятник и его малые колебания	78	
§ 25. Примеры на движение несвободной материальной точки	80	
Вопросы для самоконтроля	82	
Глава V. Динамика относительного движения материальной точки		
§ 26. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки. Переносная и кориолисова силы инерции	83	
§ 27. Принцип относительности классической механики. Инерциальные системы отсчета	87	
§ 28. Случай относительного покоя. Сила тяжести	88	
§ 29. Отклонение падающих тел к востоку	89	
§ 30. Примеры на относительное движение материальной точки	92	
Вопросы для самоконтроля	98	
Глава VI. Система материальных точек. Твердое тело. Моменты инерции твердого тела		
§ 31. Силы, действующие на точки механической системы	98	
§ 32. Центр масс системы материальных точек и его координаты	100	
§ 33. Твердое тело	101	
§ 34. Моменты инерции твердого тела. Радиус инерции	102	
§ 35. Теорема о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей (теорема Штейнера)	104	
§ 36. Вычисление моментов инерции однородных тел относительно осей, проходящих через их центры тяжести и являющихся осями симметрии	105	
§ 37. Формула для вычисления момента инерции твердого тела относительно любой оси, проходящей через начало координат. Центробежные моменты инерции	111	
§ 38. Эллипсоид инерции. Главные оси и главные моменты инерции	112	
§ 39. Свойства главных и главных центральных осей инерции	114	
§ 40. Вычисление моментов инерции твердого тела относительно произвольных осей	117	
§ 41. Примеры вычисления моментов инерции однородных тел относительно произвольных осей	118	
Вопросы для самоконтроля	124	
Глава VII. Теорема о движении центра масс механической системы		
§ 42. Дифференциальные уравнения движения механической системы	124	
§ 43. Теорема о движении центра масс механической системы	125	
§ 44. Иллюстрация теоремы о движении центра масс механической системы	127	
§ 45. Примеры применения теоремы о движении центра масс механической системы	129	
Вопросы для самоконтроля	134	
Глава VIII. Теоремы об изменении количества движения материальной точки и количества движения механической системы		
§ 46. Импульс силы и его проекции на координатные оси	135	
§ 47. Импульс равнодействующей	137	
§ 48. Теорема об изменении количества движения материальной точки	137	
§ 49. Примеры применения теоремы об изменении количества движения материальной точки	139	
§ 50. Теорема об изменении количества движения механической системы	141	
§ 51. Примеры применения теоремы об изменении количества движения механической системы	144	
§ 52. Понятие о теле переменной массы. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского	148	
Вопросы для самоконтроля	153	

Глава IX. Теоремы об изменении момента количества движения материальной точки и об изменении кинетического момента механической системы	
§ 53. Моменты количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси	153
§ 54. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки	155
§ 55. Кинетический момент механической системы относительно центра и оси	161
§ 56. Теорема об изменении кинетического момента механической системы	162
§ 57. Кинематическая интерпретация теоремы об изменении кинетического момента механической системы относительно центра. Теорема Рэзала	165
Вопросы для самоконтроля	166
Глава X. Работа. Теорема об изменении кинетической энергии	
§ 58. Две меры механического движения	166
§ 59. Работа постоянной силы	168
§ 60. Элементарная работа. Работа силы на конечном пути. Теоремы о работе силы. Изображение работы в виде площади	169
§ 61. Работа силы тяжести, силы упругости и силы тяготения	174
§ 62. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки	177
§ 63. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в относительном движении	179
§ 64. Примеры применения теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки	180
§ 65. Работа сил, приложенных к твердому телу	183
§ 66. Сопротивление качению	187
§ 67. Теорема о кинетической энергии механической системы в общем случае ее движения (теорема Кенига)	189
§ 68. Кинетическая энергия твердого тела	190
§ 69. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы	193
§ 70. Механический коэффициент полезного действия машины	194
§ 71. Примеры применения теоремы об изменении кинетической энергии механической системы	195
Вопросы для самоконтроля	202
Глава XI. Потенциальное силовое поле	
§ 72. Силовое поле. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Потенциальная энергия	203
§ 73. Примеры потенциальных силовых полей	207
§ 74. Закон сохранения механической энергии	210
§ 75. Движение точки под действием центральной силы. Закон площадей. Уравнение Бине	211
§ 76. Поле ньютоновой силы притяжения. Вид траектории точки в зависимости от начальных условий движения. Законы Кеплера	214
§ 77. Понятие о траекториях искусственных спутников Земли	218
Вопросы для самоконтроля	221
Глава XII. Динамика поступательного и вращательного движений твердого тела	
§ 78. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела	222
§ 79. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси	223
§ 80. Сохранение кинетического момента вращающейся системы. Скалярная Жукковского	227

§ 81. Физический маятник и его малые колебания	228
§ 82. Опытное определение моментов инерции тел	233
§ 83. Примеры на применение теоремы об изменении кинетического момента механической системы	238
Вопросы для самоконтроля	241
Глава XIII. Динамика плоского движения твердого тела	
§ 84. Теорема о зависимости между кинетическими моментами механической системы относительно неподвижного центра и относительно центра масс системы	242
§ 85. Теорема об изменении кинетического момента механической системы в относительном движении по отношению к центру масс	247
§ 86. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела	249
§ 87. Примеры на плоское движение твердого тела	251
Вопросы для самоконтроля	257
Глава XIV. Динамика сферического и свободного движений твердого тела	
§ 88. Кинетические моменты твердого тела относительно неподвижной точки и координатных осей при его сферическом движении	257
§ 89. Дифференциальные уравнения сферического движения твердого тела. (Динамические уравнения Эйлера)	259
§ 90. Понятие о гироскопе. Кинетический момент быстро вращающегося гироскопа	261
§ 91. Гироскоп с тремя степенями свободы	263
§ 92. Случай регулярной прецессии	265
§ 93. Гироскоп с двумя степенями свободы. Гироскопический момент	266
§ 94. Примеры гироскопических явлений	270
§ 95. Дифференциальные уравнения движения свободного твердого тела	272
Вопросы для самоконтроля	274
Глава XV. Теория удара	
§ 96. Явление удара	275
§ 97. Действие ударной силы на материальную точку	275
§ 98. Теорема об изменении количества движения механической системы при ударе	276
§ 99. Удар шара о неподвижную поверхность. Коэффициент восстановления при ударе	278
§ 100. Прямой центральный удар двух тел	281
§ 101. Потеря кинетической энергии при ударе двух тел. Теорема Карно	285
§ 102. Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ударе	288
§ 103. Действие ударных сил на твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, и на твердое тело, совершающее плоское движение	289
§ 104. Центр удара твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси	290
§ 105. Примеры действия ударных сил	294
Вопросы для самоконтроля	299
Глава XVI. Принцип Германа — Эйлера — Даламбера для материальной точки и для механической системы	
§ 106. Принцип Германа — Эйлера — Даламбера для материальной точки	299
§ 107. Примеры применения принципа Германа — Эйлера — Даламбера	300
§ 108. Принцип Германа — Эйлера — Даламбера для несвободной механической системы	304
§ 109. Приведение сил инерции точек твердого тела к простейшему виду	305

	Стр.
§ 110. Определение динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Вращение твердого тела вокруг его главной центральной оси инерции	310
§ 111. Примеры применения принципа Германа — Эйлера — Даламбера для механической системы	314
Вопросы для самоконтроля	320

Глава XVII. Принцип возможных перемещений

§ 112. Обобщенные координаты и число степеней свободы	321
§ 113. Возможные (виртуальные) перемещения механической системы Идеальные связи	323
§ 114. Принцип возможных перемещений	325
§ 115. Применение принципа возможных перемещений к простейшим машинам	327
§ 116. Примеры применения принципа возможных перемещений к определению реакций связей	332
Вопросы для самоконтроля	343

Глава XVIII. Общее уравнение динамики

§ 117. Принцип возможных перемещений в случае движения системы. Общее уравнение динамики	343
§ 118. Примеры применения общего уравнения динамики	345
§ 119. Обобщенные силы и примеры их вычисления	353
§ 120. Выражение обобщенных сил через проекции сил на неподвижные оси декартовых координат. Случай сил, имеющих потенциал	357
§ 121. Общее уравнение динамики в обобщенных силах. Условия равновесия сил	359
§ 122. Примеры на применение условия равновесия консервативной системы сил	361
§ 123. Понятие об устойчивости состояния покоя механической системы с одной степенью свободы в консервативном силовом поле	364
§ 124. Примеры на определение условий устойчивости состояния покоя механической системы с одной степенью свободы	366
Вопросы для самоконтроля	369

Глава XIX. Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах

§ 125. Уравнения Лагранжа второго рода	369
§ 126. Кинетический потенциал. Уравнения Лагранжа второго рода для консервативной системы	372
§ 127. Циклические координаты, циклические интегралы	374
§ 128. Примеры применения уравнений Лагранжа второго рода	375
Вопросы для самоконтроля	399

Приложения

Таблица 1. Механические величины и единицы их измерения в системах СИ (МКС), СГС и МКГСС	401
Таблица 2. Соотношения между единицами механических величин	402
Именной и предметный указатель	403