

М.А.Павловський  
ТЕОРЕТИЧНА  
МЕХАНІКА



# Теоретична

---

СТАТИКА  
АБСОЛЮТНО  
ТВЕРДОГО  
ТІЛА

КІНЕМАТИКА

ДИНАМІКА

ОСНОВИ  
АНАЛІТИЧНОЇ  
МЕХАНІКИ

М. А. Павловський

---

# МЕХАНІКА

*Затверджено  
Міністерством освіти і науки України  
як підручник для студентів  
вищих навчальних закладів*

ензенти: *О. О. Рассказов*, засл. діяч науки і техніки України, проф.,  
*А. Ф. Улитко*, чл.-кор. НАН України, проф.

Підручник складається з чотирьох частин - "Статика", "Кінематика", "Динаміка" та "Основи аналітичної механіки". До підручника увійшли розділи, підготовлені автором, які раніше не входили до традиційного курсу "Теоретична механіка". Серед них "Особливості кінематики промислових роботів", "Рух штучних тіл землі", "Наближена теорія гіроскопів", "Динаміка тіла змінної маси", а також різні види стійкості, методи віброзахисту та віброізоляції. Докладно розглянуті електродинамічні аналогії, рівняння Лагранжа – велла, методи дослідження нелінійних коливань. Поряд із векторною формою викладення матеріалу широко застосовує матричну, що сприяє використанню комп'ютерних технологій, а також дає змогу ядати теоретичну механіку як основу моделювання процесів у природі, техніці та технології. Наведені нові результати наукових досліджень, отримані автором та його учнями. Теоретичний матеріал ілюструє оригінальні приклади.

Для студентів вищих технічних навчальних закладів, а також може використовуватися студентами різних факультетів університетів.

## 1. Предмет теоретичної механіки

*Механіка* – це наука про найпростіші форми руху матерії, що зводяться до простих переміщень або переходів фізичних тіл з одного положення чи стану у просторі й часі в інше внаслідок взаємодії між матеріальними тілами.

Механіка охоплює цілий комплекс дисциплін, що вивчають рух і взаємодію різних матеріальних тіл. Наприклад, *прикладна механіка*, яку ще називають теорією механізмів і машин, вивчає загальні питання руху та роботи механізмів і машин; *гідромеханіка* вивчає рух і взаємодію рідин і тіл; *теорія авіоматичного керування* – рух системи тіл, в яких формуються взаємодія через від'ємний зворотний зв'язок і інтелектуальні штучні закони керування; *аеромеханіка* – рух газів, рух твердих тіл у газовому середовищі; *небесна механіка* – рух небесних тіл; *електродинаміка* – рух і взаємодію тіл в електромагнітних полях; *біомеханіка* – рух і взаємодію біологічних об'єктів. До механіки також відносять опір матеріалів, будівельну механіку, деталі машин тощо.

Вивчення найбільш спільних властивостей руху і взаємодії будь-яких тіл є предметом спеціальної дисципліни, яку називають теоретична механіка.

Отже, *теоретична механіка* вивчає найбільш загальні закони руху і взаємодії тіл, вважаючи своїм головним завданням пізнання кількісних і якісних закономірностей, що спостерігаються у природі. Із визначен-

ня теоретичної механіки випливає, що вона належить до фундаментальних природничих наук, оскільки природознавство в цілому вивчає різні форми руху матерії.

Як писав Ф. Енгельс, “Рух, що розглядається в найзагальнішому розумінні слова, є формою буття матерії, як внутрішньо властивий матерії атрибут, обіймає собою всі зміни й процеси, що відбуваються у всесвіті, починаючи від простого переміщення і закінчуючи мисленням”<sup>1</sup>.

Історія розвитку теоретичної механіки переконує у тому, що вона є однією з наукових основ техніки і технології, оскільки існує взаємний зв'язок між проблемами теоретичної механіки і проблемами техніки та технології.

Значення теоретичної механіки сьогодні безупинно зростає. Найскладніші проблеми техніки і технології, що постійно виникають у зв'язку з розвитком нових видів виробництва і нових технічних засобів, які вже не можна розв'язати на основі одних тільки дослідних даних, потребують для свого розв'язання моделювання на основі попереднього точного розрахунку і наукового передбачення, що спирається на глибокі знання законів і методів теоретичної механіки.

При нових відкриттях, винаходах і удосконаленнях людина знаходить собі надійну опору в законах механіки. Логічна доскона-

---

<sup>1</sup>Енгельс Ф. Дialeктика природи. – М.: Политиздат, 1975. – С. 50

, механіки насамперед оцінюється тим, ільки теоретичні висновки допомага-розуміти явища, що спостерігаються, і дбачати закономірності нових явищ.

еоретична механіка широко застосовує ди абстракції, узагальнення, математичні ди. методи формальної логіки. Критерієм ності наших знань є досвід і практика. 'аким чином, теоретична механіка, 'ак ина природознавства, що використовує ракції і математичні методи, має справу самими матеріальними об'єктами, а з їх лями.

тже, правильний хід будь-якого науко-дослідження полягає в попередньому пиченні дослідних даних з наступним знанням цих даних на основі узагаль-чих висновків, пов'язаних з введенням их абстракції і перевіркою цих резуль-на практиці.

Ілях розвитку теоретичної механіки й самий, як і будь-якої науки: "від жи-споглядання до абстрактного мислення нього до практики – такий діалектич-шого пізнання істини, пізнання об'єк-ої реальності"<sup>1</sup>.

еоретична механіка має велике значен-підготовці інженерних кадрів. Вона є аментом для вивчення таких дисцип-як опір матеріалів, теорія коливань, гід-іка, теорія пружності, аеро- і гідромеха-електродинаміка, біомеханіка, теорія магичного керування рухомими об'єк-тв, теорія механізмів і машин, приладів, тів-маніпуляторів тощо. Знання зако-еоретичної механіки, що відображають стивно існуючі взаємозв'язки і взаємо-ювленості механічних рухів і пере-ення енергії, дає змогу науково перед-ти хід процесів у нових задачах, що ікають при розвитку науки, техніки і очогій.

Механіка формує, розвиває і спрямовує творчу інтуїцію вчених, інженерів та техно-логів, оскільки певною мірою є підсумком багатовікового досвіду людства.

Основою теоретичної механіки є закони І. Ньютона, тому вона називається ньютонівською, класичною механікою, на відміну від інших напрямів у механіці, що ґрунтуються на інших принципах, таких як реля-тивістська механіка.

З огляду на історичні традиції за харак-тером задач, що вивчаються, почасти з ме-тодичних міркувань теоретична механіка поділяється на статику, кінематику, динамі-ку та аналітичну механіку. Такий розподіл значною мірою полегшує вивчення механіч-ного руху тіл і перетворення енергії та по-в'язує вивчення теоретичної механіки з ін-шими дисциплінами технічних вузів.

Найвищого ступеня абстракції та уза-гальнення досягнуто в аналітичній механіці.

Центральне рівняння аналітичної меха-ніки – рівняння Лагранжа другого роду, в якому базовою величиною є енергія кінетич-на і потенціальна – слугує основою для пе-ренесення методів аналітичної механіки на електродинаміку у формі рівнянь Лагранжа – Максвелла, де замість кінетичної і потенці-альної енергії оперують енергією електрич-ного і магнітного полів.

Таким чином, теоретична механіка є єдиною наукою, яка дає спільний апарат – рівняння Лагранжа – Максвелла для скла-дання диференціальних рівнянь електромеханічних систем, що є основою сучасної техніки, бо сьогодні вже важко уявити собі той чи інший пристрій, прилад чи машину, які були б суто механічними. Такі поняття, як центр паралельних сил (центр ваги) і моменти інерції, які залежать від геометрії мас і характеризують динамічні властивості тіл, та відповідні їм аналітичні співвідно-шення, є повною аналогією математичного очікування, дисперсії, кореляційної матриці в теорії ймовірностей і випадкових функцій.

1. Ітши В. И. Конспект книги Гегеля "Наука логи-Поли. собр. соч., т. 29 – С. 152-153.

У теоретичній механіці вперше вводиться поняття стійкості положення рівноваги та руху механічної системи і системи керування, котре потім з урахуванням рефлексивності як особливості взаємодії мислячого суб'єкта з реальністю розповсюджується на економічну систему в такій науці, як макро-економіка.

Методи дослідження нелінійних коливань, що започатковані в механіці, з успіхом застосовуються в інших галузях техніки і науки – теорії автоматичного регулювання, радіотехніці, електроніці, біомеханіці, електродинаміці тощо.

Отже, теоретична механіка є основою моделювання різних природничих наук і це дає підстави вважати її фундаментальною наукою. Відмінністю у викладенні запропонованого курсу теоретичної механіки від базових курсів ХХ ст. є саме те, що акцент робиться на тих традиційних і нових розділах, що є основою моделювання складних систем. Тому поняття і, отже, предмет теоретичної механіки можна визначити ще так: *теоретична механіка – це наука, яка дає універсальні методи складання й аналізу рівнянь руху і рівноваги складних і матеріальних систем, що є основою їх моделювання.*

## **2. Основні поняття теоретичної механіки**

До основних понять теоретичної механіки насамперед належать поняття матеріальної точки й абсолютно твердого тіла, що є ідеальними моделями матеріальних тіл, з тим чи іншим ступенем абстракції конкретних властивостей реальних фізичних тіл.

Так, абстрагуючись від властивостей протяжності тіл, перейдемо до поняття матеріальної точки.

*Матеріальною точкою* називається геометрична точка, якій приписана певна маса. Наприклад, вивчаючи рух планет навколо

Сонця, їх розглядають як матеріальні точки, в кожній з яких зосереджена вся маса відповідної планети, абстрагуючись при цьому від розмірів планет.

З поняттям матеріальної точки тісно пов'язане поняття про систему матеріальних точок.

*Системою матеріальних точок* називається сукупність матеріальних точок, положення і рухи яких взаємопов'язані між собою. Окремим випадком системи матеріальних точок є абсолютно тверде тіло.

*Абсолютно твердим тілом* називається тіло, яке складається з системи матеріальних точок, що неперервно заповнюють певну частину простору так, що відстань між будь-якими двома його точками залишається незмінною.

Надалі абсолютно тверде тіло називати-  
мемо просто твердим тілом, або тілом.

Зазначимо, що абстракція абсолютно твердого тіла дає змогу вивчати механічний рух тіл, не пов'язаних з існуючою зміною їхньої форми, зокрема з деформацією. Вивчення механічних рухів тіл, що залежать від їх деформованості, а також руху рідини і газів, приводить до нової абстракції у вигляді поняття суцільного середовища.

Під *суцільним середовищем* розуміють систему матеріальних точок, що неперервно заповнюють певну частину простору, під час руху яких відстані між матеріальними точками змінюються.

## **3. Основні закони класичної механіки**

Як зазначалося, в основі класичної механіки лежать закони Ньютона (почасті відомі з курсу елементарної фізики), а також система аксіом, що становлять певні знання, накопичені людством у галузі механіки.

Система аксіом наводиться в частині “Статика абсолютно твердого тіла”, а доклад-

ний аналіз законів Ньютона – в частині “Динаміка”. Тут обмежимося лише формулюванням цих законів, що є фундаментом класичної механіки.

*Перший закон Ньютона. Ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прями́лінійного руху доки вплив з боку інших тіл не виведе її з цього стану.*

Перший закон називають *законом інерції*. Цей закон встановлює головну властивість реальних фізичних тіл зберігати свій стан: руху, якщо вони рухаються, або спокою, якщо вони перебувають у стані спокою.

*Другий закон Ньютона.* Перед тим як сформулювати цей закон, введемо поняття про кількість руху матеріальної точки за визначенням Ньютона, як величину, що дорівнює добутку маси на швидкість. Отже, другий закон можна сформулювати так.

*Швидкість зміни кількості руху матеріальної точки дорівнює прикладеній силі і відбувається за напрямом цієї прямої, по якій ця сила діє.*

Цей закон, що встановлює зв'язок між силою і прискоренням точки лише в окремому випадку для незмінної маси точки, є основним законом динаміки.

*Третій закон Ньютона. Дія завжди дорівнює протидії і протилежно напрямлена; або взаємодії двох тіл дорівнюють одна одній і напрямлені в протилежні боки.*

Як бачимо, закони Ньютона сформульовані для матеріальної точки, що рухається в інерціальній системі координат.

Розповсюдження законів Ньютона на систему матеріальних точок і тіл, на які діє довільна система сил, і пристосування їх до неінерціальних (рухомих) систем координат, а також розповсюдження методів теоретичної механіки на інші немеханічні системи і становить головний зміст курсу теоретичної механіки. Саме цим теоретична механіка відрізняється від розділу механіки в загальному курсі фізики і ні в якому разі не може бути ним замінена.

Вказані ідеальні абстракції теоретичної механіки – матеріальна точка і абсолютно тверде тіло – разом із методами поширення дії законів Ньютона на систему точок і тіл у довільних системах координат вдало поєднуються з таким математичним апаратом, як алгебричні та диференціальні рівняння, теорія матриць тощо, що уможливило без ускладнень застосовувати для моделювання сучасні аналітичні методи та комп'ютерні технології.

## Розділ 1 ВИЗНАЧЕННЯ, АКсіОМИ ТА НАЙПРОСТІШІ ТЕОРЕМИ СТАТИКИ

### § 1.1. Коротка історична довідка

Наукові основи статyki і гідростатyki закладені грецьким ученим Архімедом (287–212 рр. до н. е.). Він виклав теорію рівноваги важеля, що перебуває під дією паралельних сил, створив учення про центр ваги тіл, а також дослідив рівновагу тіл, що плавають у рідині.

У геометричну статистику значний внесок зробили французькі вчені П. Варіньон (1654–1722) і Л. Пуансо (1777–1859).

Основоположником аналітичної статyki є великий французький математик і механік Ж. Лагранж (1736–1813). Подальший розвиток аналітичної статyki пов'язаний з ім'ям великого російського математика і механіка М. В. Остроградського (1801–1861). В обґрунтуванні аксіоматики статyki значну роль відіграли Л. Ейлер (1707–1783), М. Є. Жуковський (1847–1921), С. О. Чаплигін (1869–1942), В. Г. Імшенецький (1832–1892), О. І. Сомов (1815–1876).

Значний внесок у розвиток графостатyki зробив В. Л. Кирпичов (1845–1913) – перший ректор НТУУ “КПІ”.

### § 1.2. Предмет статyki. Основи визначення і поняття

*Статикою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчають методи перетворення одних систем сил в інші, що еквівалентні їм, а також умови рівноваги різних систем сил, які діють на тверде тіло.*

Одним з основних понять у статикі, як і в усій механіці, а то й в усіх природничих науках, є поняття про силу.

Досвід показує, що коли рух матеріальної точки в інерціальній системі відліку<sup>1</sup> відхиляється від рівномірного і прямолінійного, то ця точка перебуває під дією фізичних сил, що оточують її.

Величина, що є мірою механічної взаємодії матеріальних тіл, називається *силою*. Взаємодія між тілами може відбуватися з допомогою безпосереднього контакту між фізичними тілами і з допомогою полів різної природи.

За спостереженнями, сила, що діє на тіло, є *вектором*. Вона характеризується точкою прикладення, напрямом і величиною. У теоретичній механіці силу прийнято позначати  $\vec{F}$ . На рис. 1.1  $\vec{F}$  – сила,  $A$  – точка прикладення сили, пряма  $AB$  – лінія дії сили.

У Міжнародній системі одиниць (СІ) за одиницю сили беруть один ньютон (1 Н), у технічній системі одиниць (МКГСС) – одну кілограм-силу (1 кг або 1 кге), у системі СГС – одну дину (1 дин).

У системі СІ основними є одиниці довжини, маси і часу. За одиницю довжини взято один метр (1 м). Метр дорівнює 1 650 763,73 довжини хвилі у вакуумі випромінювання, що відповідає переходу між рівнями  $2p_{10}$  і  $5d_5$  атома кріптон-86. За одиницю часу взято одну секунду (1 с). Секунда дорівнює  $9\,192\,631\,770$  періодам ви-

<sup>1</sup>Інерціальними системами відліку називаються такі системи, в яких справедливі закони Ньютона. Докладніше питання про системи відліку і моделі простору розглянуто в частинах “Кінематика” та “Динаміка”

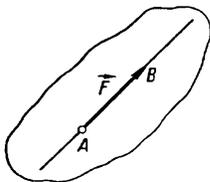


Рис. 1.1

промінювання відповідного переходу між двома надтонкими рівнями основного стану атома цезію-133. За одиницю маси беруть один кілограм (1 кг), який дорівнює масі міжнародного прототипу кілограма.

Ньютон – це така сила, яка масі в 1 кг надає прискорення в  $1 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$  ( $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^{-2}$ ). Дина це сила, яка масі в 1 г надає прискорення в  $1 \text{ см}\cdot\text{с}^{-2}$  ( $1 \text{ дин} = 1 \text{ г}\cdot\text{см}\cdot\text{с}^{-2}$ ). Один кілограм-сила – це сила, яка масі в 1 кг надає прискорення, що дорівнює прискоренню вільного падіння  $g = 9,81 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$  ( $1 \text{ кгс} \cong 1 \text{ кг} \cdot 9,81 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$ , або  $1 \text{ кгс} \cong 9,81 \text{ Н}$ ).

Наведемо деякі поняття і визначення, які знадобляться надалі. Розрізнятимемо три типи векторів: зв'язані (прикладені), що фізично прикладені до певної точки простору; ковзні, які можна переміщувати вздовж деяких прямих; вільні, що фізично не зв'язані з певною точкою простору.

Два ковзних вектори еквівалентні, якщо вони однакові за величиною, напрямлені в один бік уздовж однієї прямої.

Матеріальна точка перебуває в рівновазі, якщо вона перебуває в стані спокою або рівномірного прямолінійного руху.

Система матеріальних точок перебуває в рівновазі, якщо всі точки системи перебувають в спокої або рухаються рівномірно, прямолінійно з однаковою швидкістю за величиною і напрямком.

Зрівноваженою (або еквівалентною нулю) називається система сил, що залишає в рівновазі матеріальну точку, на яку вона діє

Дві системи сил еквівалентні, якщо, не порушуючи стану абсолютно твердого тіла, їх можна перетворити одна в одну.

Рівнодійною  $\vec{R}$  називається сила, еквівалентна заданій системі сил  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ , позначається  $\vec{R} \sim (\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ .

В основі статички лежить обмежена кількість істин, що називаються аксіомами, в яких відображені властивості сил, що діють на тіло або систему тіл. Ці властивості тіл установлені дослідом і численними спостереженнями.

У статичці розглянемо п'ять аксіом, яких досить для її обґрунтування, – аксіоми про сили, в'язі та аксіому про затвердіння.

### § 1.3. Аксіоми про дві сили

**Аксіома I (про дві сили).** Дві сили, прикладені до абсолютно твердого тіла, взаємно зрівноважуються (еквівалентні нулю) тільки тоді, коли вони однакові за величиною і діють уздовж однієї прямої в протилежних напрямках (рис. 1.2).

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \quad |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|. \quad (1.1)$$

Ця аксіома справедлива тільки для абсолютно твердого тіла. У разі деформівного твердого тіла вона не завжди справедлива.

**Аксіома II (про паралелограм сил).** Рівнодійна двох сил, прикладених до тіла в одній точці, дорівнює векторній сумі цих сил (рис. 1.3) і прикладена в тій самій точці. Сформульоване можна записати так:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i. \quad (1.2)$$

Модуль рівнодійної сили  $\vec{R}$  визначається за теоремою косинусів

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\widehat{F_1, F_2})}, \quad (1.3)$$

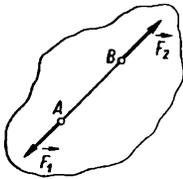


Рис. 1.2

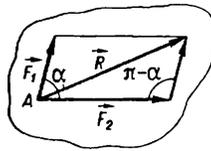


Рис. 1.3

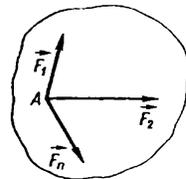


Рис. 1.4

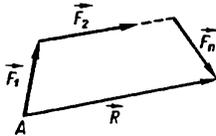


Рис. 1.5

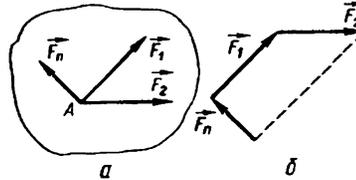


Рис. 1.6

напрямок рівнодійної двох сил визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах.

На основі аксіоми II прийдемо до правила многокутника сил, за яким будь-яке число сил, прикладених в одній точці, можна скласти геометрично. Рівнодійну сил (рис. 1.4) визначаємо як векторну суму цих сил. Для цього (рис. 1.5) з кінця вектора, що дорівнює першій силі  $\vec{F}_1$ , відкладаємо вектор, що дорівнює силі  $\vec{F}_2$ , і т. д. З'єднуючи початок першого вектора  $\vec{F}_1$  з кінцем останнього  $\vec{F}_n$ , знаходимо рівнодійну силу

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (1.4)$$

Одержаний таким чином многокутник називається *многокутником сил*, або *сило-вим многокутником*.

На основі викладеного можна встановити умову рівноваги сил, прикладених у певній точці. Дійсно, нехай у точці  $A$  прикладена зрівноважена система сил (еквівалентна нулю) (рис. 1.6, а). Побудувавши многокутник цих сил (рис. 1.6, б), бачимо, що початок

першого вектора  $\vec{F}_1$  і кінець останнього  $\vec{F}_n$  збігаються. Отже, рівнодійна  $R$  зрівноваженої системи сил дорівнює нулю:

$$\vec{R} = 0 \text{ або } \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (1.5)$$

Многокутник цих сил виявився замкненим. Останнє виражає умову рівноваги сил, прикладених до точки, у графічній формі.

## § 1.4. В'язі та їхні реакції. Аксіоми про в'язі

У теоретичній механіці розрізняють вільні і невільні системи матеріальних точок і, отже, вільні і невільні тверді тіла.

Система матеріальних точок називається *вільною*, якщо на рух цих точок не накладено обмежень. В іншому разі система матеріальних точок називається *невільною*. *Тіла або поля, що обмежують свободу руху системи матеріальних точок або твердого тіла, називаються в'язями*. Якщо система матеріальних точок або тіло невільні, то вважають, що на них накладено в'язі.

У статичі розглядаються найпростіші в'язі, здійснені у формі різних твердих або гнучких тіл.

*Реакцією в'язі називається сила, з якою в'язь діє на систему матеріальних точок або тверде тіло.*

У разі невільної системи або твердого тіла сили поділяються на активні і реакції в'язей. *Активними* називаються сили, що спричинюють своєю дією прискорення точок системи або реакції в'язей. Активні сили не залежать від в'язей. *Реакції в'язей* називають також пасивними силами, бо вони виникають лише тоді, коли на тіло діють активні сили. Розглянемо аксіоми про в'язі.

**Аксіома III (про звільнення від в'язей).** *Не змінюючи механічного стану (руху або рівноваги) системи матеріальних точок або твердого тіла, в'язь, накладену на систему або тверде тіло, можна відкинути, замінивши дію в'язі її реакцією, прикладеною до цього тіла або системи в точці взаємодії тіла і в'язі.*

Слід зазначити, що сили, з якими розглядувані тіла діють на в'язі, не зрівноважуються реакціями в'язей, оскільки сили і реакції в'язей прикладені до різних тіл, хоча за третім законом Ньютона вони однакові за величиною і протилежні за напрямом. Дію прикладено до тіл, що утворюють в'язі; протидію (реакції в'язей) прикладено до тіл, рух або рівновага яких вивчається.

З цієї аксіоми випливає, що невільні матеріальні точки, систему матеріальних точок або тверде тіло можна розглядати як вільні, якщо їх звільнити від в'язей, замінюючи дію останніх їхніми реакціями.

**Аксіома IV (про накладення нових в'язей).** *Рівновага системи матеріальних точок або твердого тіла не порушиться при накладенні на них нових в'язей.*

Наприклад, якщо стіл, який стоїть на підлозі, перебуває в рівновазі, то ця рівно-

вага не порушиться, якщо ніжки стола прикріпити до підлоги болтами.

**Аксіома V (про затверднення).** *Якщо деформівне тіло перебуває в рівновазі, то рівновага його не порушиться, якщо, не змінюючи його форми, розмірів, положення у просторі, подати його у вигляді відповідно-го абсолютно твердого тіла.*

Оскільки у цій аксіомі йдеться не про якість фізичне затверднення, а про накладення на частинку тіла нових в'язей, то її слід розглядати як окремий випадок аксіоми IV.

Аксіома про затверднення дасть змогу надалі розв'язувати найпростіші задачі статички деформівних тіл (пасова передача, ланцюг, нитка тощо), застосовуючи до них методи статички твердого тіла.

## § 1.5. Найпростіші теореми статички

**Теорема (про силу як ковзний вектор).**

*Дія сили на тверде тіло не зміниться, якщо перенести силу по лінії її дії в будь-яку точку.*

**Доведення.** Нехай у точці  $A$  прикладено до тіла силу  $\vec{F}$  (рис. 1.7). Виберемо на лінії дії цієї сили будь-яку точку  $B$  і прикладемо до неї дві зрівноважені сили  $\vec{F}$  і  $-\vec{F}$ . На основі аксіоми I сила  $\vec{F}$  у точці  $A$  і сила  $-\vec{F}$  у точці  $B$  взаємно зрівноважуються (система

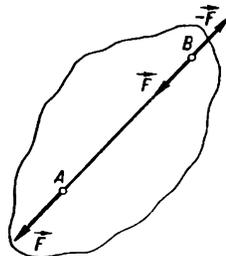


Рис. 1.7

сил  $(\vec{F}, -\vec{F})$  еквівалентна нулю). Залишається сила  $\vec{F}$ , прикладена в точці  $B$ , що і треба було довести.

З теореми випливає, що сила, прикладена до абсолютно твердого тіла, є ковзним вектором.

**Теорема (про три сили).** Якщо абсолютно тверде тіло перебуває в рівновазі під дією трьох непаралельних сил і лінії дії двох сил перетинаються, то всі сили лежать в одній площині і їхні лінії дії перетинаються в одній точці.

Доведення. Нехай тверде тіло перебуває в рівновазі під дією непаралельних сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  (рис. 1.8), з яких  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  лежать в одній площині. Продовжимо лінії дії сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  і знайдемо їхню точку перетину  $O$ , існування якої забезпечується умовою теореми. Перенесемо сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  уздовж їхніх ліній дії у точку  $O$  і знайдемо рівнодійну  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ . Замінивши  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  їх рівнодійною  $\vec{R}$ , одержимо нову систему сил  $(\vec{R}, \vec{F}_3)$ , еквівалентну заданій  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ , тобто  $(\vec{R}, \vec{F}_3) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ . Однак тепер можна припустити, що тіло перебуває в рівновазі під дією лише двох сил  $\vec{R}$  і  $\vec{F}_3$ . Це можливо з огляду на аксіому I, якщо  $\vec{R}$  і  $\vec{F}_3$  мають загальну лінію дії. Отже, всі три си-

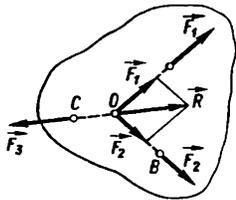


Рис. 1.8

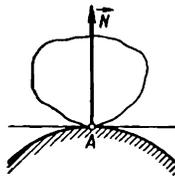


Рис. 1.9

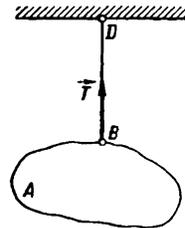


Рис. 1.10

ли  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  і  $\vec{F}_3$  лежать в одній площині і лінії дії сили  $\vec{F}_3$  проходить через точку  $O$ . Теорему доведено.

Таким чином, для рівноваги системи трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, необхідно (але не достатньо), щоб лінії дії цих сил перетиналися в одній точці.

## § 1.6. Види в'язей і їхні реакції

Розглянемо види в'язей, що найчастіше трапляються при розв'язанні задач, і зазначимо, як визначати напрям реакцій цих в'язей. Щодо величин цих реакцій, то їх можна знайти з умов рівноваги, оскільки вони залежать від активних сил.

1. Якщо в'язь є *ідеально гладенькою поверхнею*, то точка контакту тіла  $A$  з цією поверхнею може вільно ковзати по ній. Тому реакція ідеально гладенької поверхні напрямлена по нормалі від поверхні. Ця реакція позначається через  $\vec{N}$  або  $\vec{R}_n$  (рис. 1.9).

2. Якщо в'язь здійснюється *ниткою, мотузкою* або аналогічними тілами (*шнуром, тросом, ланцюгом*), то для спрощення постановки задач теоретичної механіки припускають, що нитка є невагомим, гнучким і нерозтяжним. Реакція нитки напрямлена вздовж нитки до точки її закріплення і позначається через  $\vec{T}$ . Наприклад, якщо тіло (рис. 1.10) підвішене до стелі за допомогою

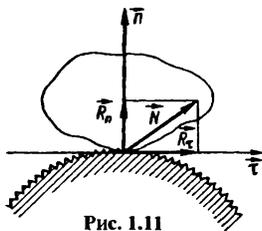


Рис. 1.11

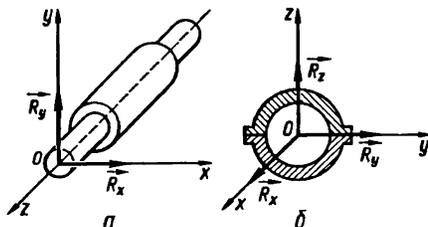


Рис. 1.12

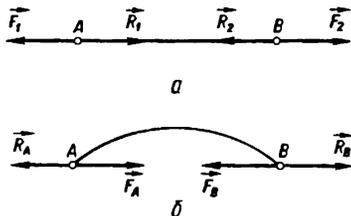


Рис. 1.13

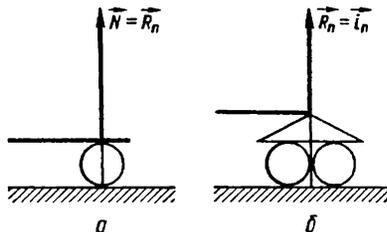


Рис. 1.14

нитки  $BD$ , то реакція нитки  $\vec{T}$  напрямлена вздовж нитки до точки її закріплення  $D$ .

3. Якщо в'язку є *шорстка поверхня*, то її реакція  $\vec{N}$  розкладається на дві складові:  $\vec{R}_n$  – нормальну і  $\vec{R}_t$  – дотичну (рис. 1.11), відповідно напрямлені по нормалі  $\vec{n}$  і по дотичній  $\vec{\tau}$  до поверхні.

У цьому разі дотична складова реакції  $\vec{R}_t$  є силою тертя. Найпростіші властивості тертя викладено в наступному параграфі.

4. В'язі можуть бути виконані у вигляді *шарнірів циліндричних і сферичних* (рис. 1.12). Напрями реакцій таких в'язей заздалегідь визначити не можна. Так, у разі циліндричного шарніра (*підшипника*) (рис. 1.12, а) реакція його розміщена в площині, перпендикулярній до його осі  $Oz$ . Невідомий вектор реакції в'язі в площині визначається двома складовими  $\vec{R}_x$  і  $\vec{R}_y$  по осях  $Ox$  і  $Oy$ , величини яких знаходять з умов рівноваги.

Напрям реакції *сферичного шарніра* (рис. 1.12, б) або *підп'ятника* розкладають за напрямом трьох взаємно перпендикулярних осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Модулі та їх напрями визначають з умов рівноваги відповідних систем сил.

В окремому випадку, коли можна знехтувати розмірами шарнірів і силами тертя, що виникають у них, шарніри називають ідеально точковими.

5. В'язь може здійснюватися у формі *ідеальних стрижнів*.

Вагою таких стрижнів нехтують і вважають, що на їхніх кінцях є точкові шарніри. Реакція такого ідеального стрижня напрямлена вздовж осі стрижня, у чому неважко переконатися. Дійсно, якщо знехтувати вагою стрижня, на кінцях якого точкові шарніри, то за аксіомою I стрижень перебуває в рівновазі під дією двох сил ( $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$ ), прикладених до шарнірів (рис. 1.13). Ці сили

рівні за величиною, діють по прямій, що з'єднує шарніри, і напрямлені в протилежні боки, тобто реакція ідеального стрижня також напрямляється по осі стрижня.

6. В'яз може здійснюватися у формі *котків (рухомих шарнірів)* (рис. 1.14). Реакція котка напрямлена перпендикулярно до опорної площини котка.

### § 1.7. Тертя ковзання

Припущення про ідеально гладеньку поверхню, застосоване нами в § 1.6, суперечить досліді. Дійсно, дотик двох тіл відбувається не в одній лише точці. Обидва тіла зазнають при цьому малі деформації, внаслідок яких вони дотикаються по певній поверхні. Дослід переконує в тому, що крім нормальної складової реакції  $\vec{R}_n$  виникає ще дотична  $\vec{R}_t$ , яка називається силою тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$  ковзання (рис. 1.15). Розрізняють тертя спокою, або статичне тертя, що відбувається при відносному спокої стичних тіл, і тертя руху, що відбувається при відносному русі цих тіл. Наближені закони тертя ковзання або тертя першого роду встановили Г. Амонтон (1663–1705) і Ш. Кулон (1736–1806). Ці закони відповідають простим дослідом, на основі яких вони встановлені. У теоретичній механіці тертям ковзання цікавляться лише у зв'язку з визначенням реакцій в'язей.

Найпростіші властивості тертя можна встановити, користуючись простим прила-

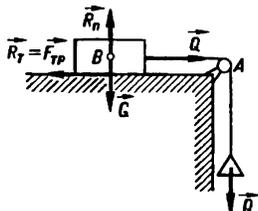


Рис. 1.15

дом, який називається трибометром. Прилад складається зі стола, по якому рухається тіло вагою  $\vec{G}$  (див. рис. 1.15). Це тіло приводиться в рух за допомогою нитки, перекинutoї через нерухоми блок  $A$ , до кінця якої підвішений вантаж вагою  $\vec{Q}$ . Нехай у початковий момент тіло перебувало у спокої. Якщо поступово збільшувати силу  $\vec{Q}$ , то тіло все одно залишатиметься у спокої. Отже, горизонтальна складова реакції стола  $\vec{R}_t = \vec{F}_{\text{тр}}$  зрівноважує прикладену силу  $\vec{Q}$  і зростає разом з нею доти, доки рівновага не порушиться. Це відбудеться тоді, коли сила тертя досягне свого максимального значення  $F_{\text{max}}$ .

Досліди показали, що максимальне значення сили тертя пропорційне нормальній реакції поверхні тіла:

$$F_{\text{max}} = kR_n. \quad (1.6)$$

Коефіцієнт пропорційності  $k$  називається *коефіцієнтом тертя ковзання* і визначається дослідним шляхом, значення його для різних матеріалів наведено у довідниках. У табл. 1.1 для порівняння наведені коефіцієнти сухого тертя і змащених поверхонь деяких матеріалів. Слід зазначити, що ці дані дають приблизну оцінку коефіцієнтів тертя і тому придатні лише для грубих підрахунків. В інших випадках доводиться ставити спеціальні досліди.

Механізм тертя є досить складним фізичним процесом. Як показують досліди, коефіцієнт тертя першого роду є сталою величиною лише в обмеженому діапазоні швидкостей відносного руху і сил стискання поверхонь тіл. При збільшенні відносної швидкості руху тіл коефіцієнт тертя спочатку зменшується, а потім починає зростати. У деяких аномальних випадках тертя руху може бути не меншим ніж тертя спокою (наприклад, матеріали з високою пружністю – гума тощо).

Коефіцієнти сухого тертя і змочених поверхонь деяких матеріалів

Матеріалн тіл, між якими виникає тертя	Коефіцієнти статичного тертя			Коефіцієнти тертя руху		
	Поверхні			Поверхні		
	сухі	змочені	змочені водою	сухі	змочені	змочені водою
Сталь по залізу	0,15	0,1	—	0,1	0,009	—
Лите залізо по чавуну або бронзі	0,18	0,1	—	0,16	0,01	—
Лите залізо по зварному залізу	0,5	0,13	0,65	0,44	—	0,22
Метал по дереву	0,6–0,5	0,1	—	0,5 0,2	0,08–0,02	0,26–0,22
Дерево по дереву	0,65	0,2	0,7	0,4–0,2	0,16–0,04	0,25
Шкіра по металу	0,6	0,25	0,62	0,25	0,12	0,36
Дерево по каменю	До 0,7	0,4	—	0,3	—	—

Коли сила тертя досягне значення  $F_{\max}$ , настане стан граничної рівноваги. Досить незначного приросту сили  $\vec{Q}$ , щоб тіло зрушилося з місця. Як тільки тіло почне рухатися, сила тертя відразу зменшиться. Численні досліди показали, що майже завжди тертя при взаємному русі тіл дещо менше за тертя при взаємному спокої:  $F_{\text{тр}} \leq F_{\max}$  (знак рівності відповідає граничній рівновазі). Важливо зазначити, що сила тертя завжди напрямлена у бік, протилежний напрямку відносної швидкості руху тіл.

Коефіцієнт тертя залежить від матеріалу стичних поверхонь, чистоти оброблення їх, фізичного стану. Він не залежить від площі стичних поверхонь тіл.

Зауважимо, що коли тіло перебуває на горизонтальній площині (рис. 1.16), то значення нормальної складової реакції  $R_n$  дорівнює вазі тіла  $G$  ( $R_n = G$ ). Якщо тіло перебуває на похилій площині (рис. 1.17), то  $R_n = G \cos \alpha$ .

Викладені питання про тертя ковзання стосуються тільки сухого тертя. Якщо є мастило, то існують свої закони тертя. Основоположимком теорії тертя при наявності мастила є російський учений М. П. Петров. Подальший розвиток ця теорія дістала у

працях М. Є. Жуковського та інших дослідників.

Залежно від взаємних рухів тертя між твердими тілами буває трьох видів:

1) тертя ковзання, що відповідає поступальному руху стичних тіл одне відносно одного;

2) тертя кочення (наприклад, колеса по рейці);

3) тертя крутіння (наприклад, у підп'ятнику), що має за своєю природою багато спільного з тертям ковзання.

Зазначимо, що при терті відбувається розсіювання енергії, тобто перетворення механічної енергії в теплову, тому у вузлах із тертям температура тіл підвищується.

Розглянемо рівновагу тіла при наявності тертя ковзання.

Припустимо, що сила  $\vec{Q}$  прикладена під кутом  $\alpha$  до нормалі, проведеної до поверхні стичних тіл (рис. 1.18, а). Тоді її можна

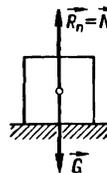


Рис. 1.16

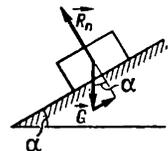


Рис. 1.17

розкласти на дві складові:  $Q_1 = Q \sin \alpha$  і  $Q_2 = Q \cos \alpha$ , одна з яких ( $Q_1$ ) намагається зрушити тіло з місця, а інша ( $Q_2$ ) – притиснути до площини. У разі граничної рівноваги  $Q_1 = F_{\max}$ . У той самий час  $F_{\max} = kR_n$ , а оскільки  $R_n = Q_2$ , то  $F_{\max} = kQ_2$ . Звідси випливає, що

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{F_{\max}}{R_n} = k. \quad (1.7)$$

Очевидно, що напрям активної сили  $\bar{Q}$  (рис. 1.18, а) по будь-якій (у загальному випадку паралельно) із твірних конуса з кутом розхилу, що дорівнює  $2\alpha$  ( $\operatorname{tg} \alpha = k$ ), відповідатиме випадку граничної рівноваги. Цей конус називається *конусом тертя*.

Якщо кут нахилу активної сили  $\bar{Q}$  до нормалі більший за  $\alpha$  (рис. 1.18, б), то тіло почне рухатися, тобто втратить рівновагу, а якщо менший за  $\alpha$ , то тіло завжди перебуватиме в рівновазі. Ця властивість тертя враховується при формуванні штучних укосів і має місце в природних укосах.

Конусом тертя пояснюється явище заклинювання вузлів машин, коли жодною прикладеною всередині конуса силою не вдасться зрушити з місця відповідну деталь.

Нарешті, скажемо декілька слів про роль тертя в механічних явищах.

У багатьох випадках сили тертя розглядають як джерела шкідливих опорів руху машин чи приладів. Проте в ряді інших випадків, навпаки, без сил тертя неможливий рух. Наприклад, саме така роль тертя при ходьбі людини, русі всіх видів колісних транспортних машин, прокатних станів. У всіх цих випадках рух неможливий по ідеально гладенькій поверхні.

В динаміці машин у багатьох випадках неможливо забезпечити їх стійкість руху, якщо в системі немає певних сил розсю-

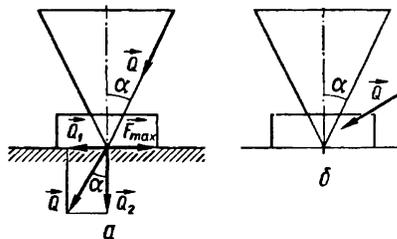


Рис. 1.18

вання енергії, або сил опору, які мають властивості тертя.

### § 1.8. Зовнішні та внутрішні сили. Метод перерізів

Крім наведеної в § 1.4 існує інша класифікація сил, що застосовується в теоретичній механіці.

Сили, прикладені до точок системи, можна поділити на зовнішні та внутрішні. Сили, що діють на точки системи, називаються *зовнішніми*, якщо вони спричинені дією тіл, які не входять у систему. *Внутрішніми* називаються сили взаємодії між матеріальними точками однієї і тієї самої системи. Розподіл сил на зовнішні та внутрішні – умовний. Якщо розглядати систему Сонце – Земля, то сили, що діють на цю систему з боку інших тіл Сонячної системи, наприклад, з боку Юпітера, є зовнішніми, а сили взаємодії між Сонцем і Землею – внутрішніми. Якщо розглядати систему Сонце – Земля – Юпітер, то сили, з якими Юпітер діє на Сонце і Землю, будуть внутрішніми. Звідси випливає, що внутрішні сили цієї системи матеріальних точок можна перевести в зовнішні відносно нової системи, яка є складовою частиною даної, котру можна одержати внаслідок відсікання її від цієї системи. Метод “переведення” внутрішніх сил у зовнішні називається *методом перерізів*. Цей метод є окремим випадком застосування аксіоми про звільнення від в’язей.

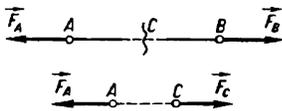


Рис. 1.19

Оскільки внутрішні сили в твердому тілі зрівноважуються, то для їх визначення застосовують метод перерізів. Наприклад, розглянемо рівновагу ідеального стрижня  $AB$  (рис. 1.19), до точкових шарнірів якого прикладені сили  $\vec{F}_A$  і  $\vec{F}_B$ . Модулі цих сил рівні, а напрями протилежні ( $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$ ).

Потрібно визначити силу взаємодії частин стрижня в деякій точці  $C$ , тобто  $\vec{F}_C$ . Ця сила внутрішня. Застосувавши метод перерізів, переведемо цю силу в зовнішню. Провівши в точці  $C$  переріз, розглянемо рівновагу, наприклад, частини  $AC$  стрижня і визначимо силу, з якою частина  $CB$  стрижня діє на  $AC$ . На основі аксіоми I рівновага  $AC$  під дією сил  $\vec{F}_A$  і  $\vec{F}_C$  можлива тоді, коли ці сили діють уздовж однієї прямої, рівні за модулем і протилежні за напрямом ( $\vec{F}_A = -\vec{F}_C$ ).

Отже, силу  $\vec{F}_C$ , що є зусиллям стрижня  $AB$  у точці  $C$ , визначено.

### Методичні вказівки

Починаючи вивчення статyki, слід глибоко засвоїти визначення основних понять і вивчити аксіому механіки. Треба звернути увагу на те, що аксіома про дві сили встановлює, під дією якої найменшої кількості сил можлива рівновага твердого тіла.

Аксіома про паралелограм сил дає змогу здійснити заміну двох сил, прикладених у певній точці твердого тіла, силою, що їм еквівалентна, тобто рівнодійною.

Теорема про три сили полегшує визначення напрямів тих реакцій в'язей, які задалегідь визначити не можна.

Застосування аксіоми III при розв'язанні конкретних задач, в яких розглядаються невільні тіла, дає можливість звільнити їх від в'язей і розглядати як вільні, але під дією не лише активних сил, а й реакцій в'язей.

Щоб краще засвоїти статику, слід набути навички в складанні й розкладанні сил за правилом паралелограма.

На закінчення сформулюємо дві основні задачі статyki твердого тіла:

- 1) задача про зведення заданої системи сил до іншої, зокрема простішої, що їй еквівалентна;
- 2) задача про рівновагу системи сил, прикладених до певного тіла.

Перша задача є основною, вона має важливе значення не лише в статикi, а й у динамікi.

Друга задача виникає тоді, коли задалегідь відомо, що рівновага є і забезпечується, наприклад, в'язями, накладеними на тіло. Тоді умови рівноваги, встановленню яких для різних систем присвячені наступні розділи, в багатьох випадках дають змогу визначити реакції в'язей або інші невідомі величини, що входять в умови рівноваги.

Для розв'язання другої задачі рекомендується така методика.

1. Прочитавши умову задачі та виписавши вихідні дані, слід визначити об'єкт дослідження, тобто те тіло, рівновагу якого треба розглянути.

2. Звільнити об'єкт дослідження від в'язей, замінивши їхню дію силами, що дорівнюють реакціям в'язей, і розглядати цей об'єкт як вільне тіло, що перебуває під дією активних сил і реакцій в'язей.

3. Залежно від характеру одержаної системи сил застосувати відповідні умови рівноваги.

**Приклад 1.** До балки  $AB$  у точці  $C$  прикладено силу  $F = 1200$  Н; опорами балки є шарнір  $A$  і коток  $B$  (рис. 1.20). Довжина балки  $AB = 10$  м,

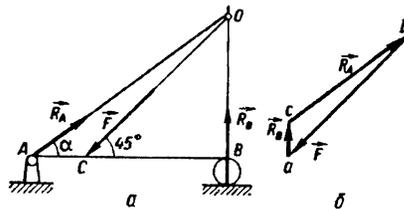


Рис. 1.20

$AC = 4$  м. Визначити напрям реакції шарніра  $A$  ( $\vec{R}_A$ ) і реакції  $R_A$  і  $R_B$ .

**Розв'язання.** Дотримуючись методичних вказівок, за тіло, рівновагу якого розглядатимемо, візьмемо балку  $AB$ .

Згідно з аксіомою III замінимо в'язі (шарнір  $A$  і коток  $B$ ) їхніми реакціями. Відповідно до § 1.6, п. 6, реакція котка  $B$  напрямлена перпендикулярно до його опорної площини. Напрямок реакції шарніра заздалегідь невідомий. Проте балка перебуває в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, лінії дії яких за теоремою про три сили перетинаються в точці  $O$  (рис. 1.20,  $a$ ). Отже, реакція шарніра  $A$  напрямлена по прямій  $OA$ . Побудувавши замкнений силовий трикутник (рис. 1.20,  $b$ ), знайдемо напрям реакції шарніра  $\vec{R}_A$ . Побудову починаємо з відомого вектора, що дорівнює силі  $\vec{F}$ . Потім з кінця цього вектора проводимо пряму  $ac$ , паралельну  $\vec{R}_B$ , а з початку вектора  $\vec{F}$  проводимо пряму  $bc$ , паралельну  $OA$ . Отже, визначимо напрям реакції шарніра  $\vec{R}_A$ . Нарешті, з трикутника  $abc$  знайдемо його сторони, тобто величини  $R_A$  і  $R_B$ . Ці обчислення пропонуємо провести самостійно.

Відповідь:  $R_A = 989,5$  Н,  $R_B = 339,4$  Н,  $\alpha = \arctg 0,6$ .

### § 1.9. Система збіжних сил.

#### Способи визначення рівнодійної системи збіжних сил

Системою збіжних сил називається система таких сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці.

Нехай задано довільну систему збіжних сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots)$ , прикладених до твердого тіла (див. рис. 1.4, 1.6,  $a$ ). Перенесемо ці сили, як ковзні вектори, у точку перетину ліній їх дії. Потім, користуючись аксіомою про паралелограм сил, знайдемо рівнодійну цих сил. Рівнодійну  $\vec{R}$  такої системи сил можна визначити графічно й аналітично.

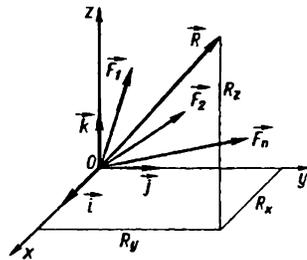


Рис. 1.21

Графічно рівнодійна сила визначається як замикальна сторона многокутника сил (див. рис. 1.5):

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (1.8)$$

Аналітично рівнодійну силу можна визначити за її проєкціями на осі прямокутної системи координат (рис. 1.21). Тут і надалі застосовуємо праву систему координат.

За теоремою про проєкції векторної (геометричної) суми на осі координат дістанемо

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}, \quad (1.9)$$

де  $F_{ix}$ ,  $F_{iy}$ ,  $F_{iz}$  – проєкції відповідних сил на осі координат.

Поламо рівнодійну  $\vec{R}$  у вигляді розкладення по ортах:

$$\vec{R} = \vec{i}R_x + \vec{j}R_y + \vec{k}R_z. \quad (1.10)$$

Тоді її модуль запишемо у вигляді

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad (1.11)$$

або

$$R = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iz}\right)^2}. \quad (1.12)$$

<sup>1</sup>Ця теорема відома з векторної алгебри і формулюється так: *проєкція векторної (геометричної) суми на вісь дорівнює алгебричній сумі проєкцій складових векторів на цю саму вісь.*

Напряг рівнодійної сили визначається такими напрямними косинусами:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{R}, \vec{i}}) &= \frac{R_x}{R}, & \cos(\widehat{\vec{R}, \vec{j}}) &= \frac{R_y}{R}, \\ \cos(\widehat{\vec{R}, \vec{k}}) &= \frac{R_z}{R}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

### § 1.10. Умови рівноваги системи збіжних сил

*Теорема.* Для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо<sup>1</sup>, щоб рівнодійна сила дорівнювала нулю:

$$\vec{R} = 0. \quad (1.14)$$

Умова (1.14) є геометричною умовою рівноваги системи збіжних сил. Необхідність умови рівноваги випливає з того, що задана система збіжних сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, еквівалентна одній силі – рівнодійній  $\vec{R}$ . Очевидно, що під дією однієї сили тіло перебуватиме в рівновазі лише тоді, коли ця сила дорівнюватиме нулю, що випливає з аксіоми про дві сили.

Доведемо достатність цієї умови. Для цього покажемо, що коли рівнодійна сила дорівнює нулю, то система збіжних сил перебуває у рівновазі. Задана система сил еквівалентна рівнодійній, яка дорівнює нулю. З визначення зрівноваженої (еквівалентної нулю) системи сил, її можна відкинути, не порушуючи стану системи. Тоді на тіло не діють ніякі сили і воно за першим законом Ньютона перебуває в рівновазі.

Оскільки  $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$ , то многокутник сил має бути замкненим, тобто кінець остан-

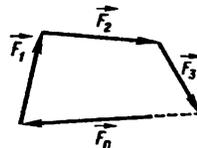


Рис. 1.22

ньої сили  $\vec{F}_n$  збігається з початком першої сили  $\vec{F}_1$  (рис. 1.22), що виражає умова рівноваги системи збіжних сил у графічній формі (ним зручно користуватись у разі плоскої системи сил).

Векторній рівності (1.14) відповідають три скалярні рівності:  $R_x = 0$ ,  $R_y = 0$ ,  $R_z = 0$ , які, з урахуванням формул (1.9), перепишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (1.15)$$

Умови (1.15) є умовами рівноваги системи збіжних сил в аналітичній формі і формулюються так: для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебричні суми проєкцій сил на три взаємно перпендикулярні осі дорівнювали нулю.

У разі рівноваги системи збіжних сил, що лежать в одній площині, наприклад  $Oxy$ , дістанемо

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0. \quad (1.16)$$

Отже, для рівноваги системи збіжних сил, що лежать у площині, необхідно і достатньо, щоб алгебричні суми проєкцій цих сил на дві взаємно перпендикулярні осі дорівнювали нулю.

Умови рівноваги (1.15) і (1.16) називаються також *рівняннями рівноваги*. З них визначаються невідомі величини при розв'язанні конкретних задач. Якщо невідомі

<sup>1</sup>Необхідна і достатня умова це як пряма й обернена теорема. Необхідність означає, що із фізичних умов випливають математичні, а достатність, навпаки, – із математичних умов випливають фізичні.

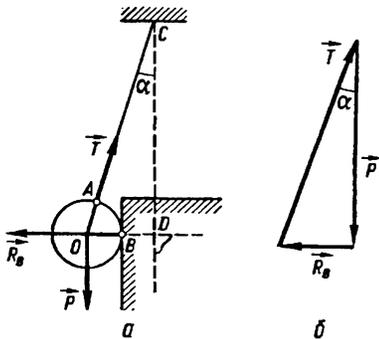


Рис. 1.23

ними силами є реакції в'язей, то їх кількість не повинна перевищувати числа рівнянь рівноваги, бо інакше задача буде статично невизначеною і розв'язати її методами теоретичної механіки не вдасться.

**Приклад 2.** Однорідна куля радіусом  $r = 0,2$  м і вагою  $P = 120$  Н, що дотикається у точці  $B$  до гладенької вертикальної стінки (рис. 1.23, а), утримується в рівновазі мотузкою  $AC$  завдовжки  $0,8$  м. Визначити натяг мотузки і тиск кулі на стінку, якщо відстань від точки  $B$  до вертикалі  $CD$  дорівнює  $0,4$  м.

**Розв'язання.** Оскільки відома сила  $\vec{P}$ , прикладена до кулі, то розглянемо рівновагу кулі. В'язями для кулі є стінка і мотузка  $AC$ . Оскільки стінка гладенька, то реакція  $\vec{R}_B$  буде перпендикулярною до стінки; реакція мотузки  $\vec{T}$  напрямлена по ній.

Оскільки сили  $\vec{P}$ ,  $\vec{T}$  і  $\vec{R}_B$  задовольняють теорему про три сили, то для рівноваги кулі необхідно і достатньо, щоб силловий трикутник, або трикутник сил, був замкнений (рис. 1.23, б).

Як бачимо з рис. 1.23, б, силловий трикутник – прямокутний. Кут між  $\vec{P}$  і  $\vec{T}$  позначимо через  $\alpha$ . Дістанемо

$$R_B = P \operatorname{tg} \alpha, \quad T = \frac{P}{\cos \alpha}.$$

Із трикутника  $OCD$  маємо

$$OD = r + BD = 0,6 \text{ м},$$

$$OC = r + AC = 1 \text{ м}.$$

Тоді

$$CD = \sqrt{(OC)^2 - (OD)^2} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8 \text{ м},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OD}{CD} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75, \quad \cos \alpha = \frac{CD}{OC} = \frac{0,8}{1} = 0,8.$$

Отже,

$$R_B = 120 \cdot 0,75 = 90 \text{ Н}, \quad T = \frac{120}{0,8} = 150 \text{ Н}.$$

### Питання для самоконтролю

1. Чи можете Ви дати визначення матеріальної точки й абсолютно твердого тіла?
2. Якими трьома параметрами визначається сила, що діє на тверде тіло?
3. Які дві системи сил називаються зрівноваженими?
4. Чому дія і протидія не є зрівноваженою системою сил?
5. Які класифікації сил застосовують у механіці?
6. За яких умов проекції сили на вісь і площину збігатимуться?
7. Чи можна, не порушуючи стану твердого тіла, перенести силу вздовж лінії її дії?
8. За яких умов тверде тіло буде знаходитися в рівновазі під дією однієї сили? двох сил? трьох сил?
9. Які операції над силами, що прикладені до твердого тіла, є еквівалентними?
10. Чому реакції в'язей називають пасивними силами?

## § 2.1. Момент сили відносно точки

Моментом сили  $\vec{F}$  відносно точки  $O$  (центра) (рис. 2.1) називається вектор, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора  $\vec{r}$ , проведеного з центра  $O$  в точку  $A$  прикладення сили, на вектор  $\vec{F}$ :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.1)$$

Модуль цього векторного добутку

$$M_O(\vec{F}) = rF \sin \alpha. \quad (2.2)$$

Опустимо перпендикуляр з точки  $O$  на лінію дії сили  $\vec{F}$ . Довжину цього перпендикуляра  $OD = h$  назвемо плечем сили  $\vec{F}$  відносно точки  $O$ . Тоді (2.2) запишемо у вигляді

$$M_O(\vec{F}) = hF. \quad (2.3)$$

Отже, момент сили відносно центра  $O$  чисельно дорівнює добутку модуля сили на плече і напрямлений перпендикулярно до площини, що проходить через точку  $O$  і лінію дії сили, в той бік, звідки “обертання” тіла під дією сили навколо точки (або найкоротший поворот вектора  $\vec{r}$  до напрямку вектора  $\vec{F}$ ) бачить спостерігач, який перебуває на кінці вектора-моменту, таким, що відбувається проти ходу годинникової стрілки (рис 2.2).

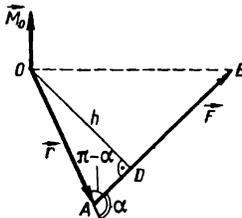


Рис. 2.1

Очевидно, момент сили відносно точки має всі властивості векторного добутку.

З формули (2.1) можна знайти проєкції вектора  $\vec{M}_O(\vec{F})$  на координатні осі. Як відомо з векторної алгебри,

$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

Розкриваючи цей визначник за елементами першого рядка і розкладаючи вектор  $\vec{M}_O(\vec{F})$  на складові  $M_{Ox}(\vec{F})$ ,  $M_{Oy}(\vec{F})$ ,  $M_{Oz}(\vec{F})$  по осях координат, одержимо

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}) &= M_{Ox}(\vec{F})\vec{i} + M_{Oy}(\vec{F})\vec{j} + \\ &+ M_{Oz}(\vec{F})\vec{k} = \vec{i}(yF_z - zF_y) + \\ &+ \vec{j}(zF_x - xF_z) + \vec{k}(xF_y - yF_x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Порівнюючи ліву і праву частини рівності (2.5), маємо

$$\begin{aligned} M_{Ox}(\vec{F}) &= yF_z - zF_y, \\ M_{Oy}(\vec{F}) &= zF_x - xF_z, \\ M_{Oz}(\vec{F}) &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \quad (2.6)$$

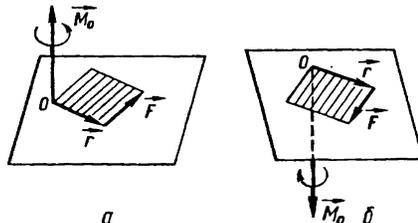


Рис. 2.2

Модуль і напрям моменту сили відносно точки можна визначити ще так:

$$M_O(\vec{F}) = \sqrt{M_{Ox}^2(\vec{F}) + M_{Oy}^2(\vec{F}) + M_{Oz}^2(\vec{F})},$$

$$\cos(\widehat{M_O, i}) = \frac{M_{Ox}}{M_O}, \quad \cos(\widehat{M_O, j}) = \frac{M_{Oy}}{M_O}, \quad (2.7)$$

$$\cos(\widehat{M_O, k}) = \frac{M_{Oz}}{M_O}.$$

Зауважимо, що формули (2.6) легко одержати, користуючись правилом циклічної

перестановки індексів .

Із визначення моменту сили відносно точки маємо:

1) якщо перемістити силу вздовж лінії її дії, то момент сили відносно точки не зміниться;

2) момент сили відносно точки завжди дорівнює нулю, коли лінія дії сили проходить через цю точку (у цьому випадку плече  $h$  дорівнює нулю);

3) момент сили відносно точки чисельно дорівнює подвоєній площі трикутника  $OAB$  (рис. 2.3), побудованого на силі ( $F = AB$ ) і центрі моменту ( $O$ ).

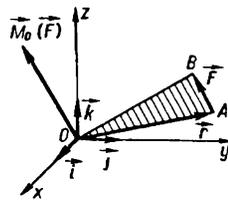


Рис. 2.3

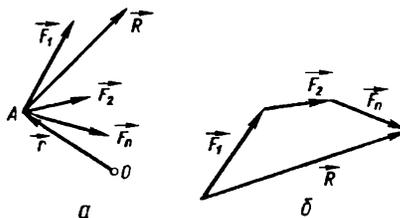


Рис. 2.4

радіус-вектор, проведений з точки  $O$  у точку  $A$ . Рівнодійну  $\vec{R}$  заданої системи знайдемо, побудувавши многокутник сил  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$  (рис. 2.4, б). Тоді з визначення моменту сили відносно точки  $O$  маємо

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{R}) &= \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) = \\ &= \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n = \\ &= \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i), \end{aligned} \quad (2.9)$$

що й треба було довести.

Якщо сили і точка  $O$  розміщені в одній площині, то їхні моменти перпендикулярні до цієї площини і лежать на одній прямій. Тому момент рівнодійної такої системи сил дорівнює алгебричній сумі моментів складових сил відносно цієї точки.

## § 2.2. Теорема про момент рівнодійної системи збіжних сил

**Теорема Варіньона.** Момент рівнодійної збіжної системи сил відносно довільного центра дорівнює векторній (геометричній) сумі моментів складових сил відносно того самого центра:

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i). \quad (2.8)$$

Доведення. Нехай у точці  $A$  перетинаються лінії дії системи збіжних сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  (рис. 2.4, а). Позначимо через  $\vec{r}$

### § 2.3. Момент сили відносно осі

Моментом сили відносно осі називається проекція на цю вісь моменту сили відносно будь-якої точки, що лежить на цій осі (рис. 2.5).

З цього визначення випливає, що моменти сил відносно координатних осей обчислюються за формулами (2.6). Ці формули, зокрема, показують, що момент сили відносно осі не залежить від вибору точки на осі.

При розв'язуванні конкретних задач моменти сил відносно осей зручно обчислювати більш наглядним способом (рис. 2.6) за таким правилом.

1. Проводимо довільну площину  $N$ , перпендикулярну до осі  $Oz$ , і знаходимо точку  $O$  перетину цієї площини з віссю.

2. Проектуємо силу  $\vec{F}$  на зазначену площину.

3. Обчислюємо момент проекції  $\vec{F}_1$  сили  $\vec{F}$  на цю площину відносно точки  $O$ :

$$\vec{M}_z(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}_1).$$

При цьому момент сили відносно осі вважається додатним, якщо спостерігач бачить з боку додатного напрямку осі  $Oz$ , що сила  $\vec{F}_1$  намагається повернути тіло навколо осі  $Oz$  проти ходу годинникової стрілки.

Як бачимо з рис. 2.6, чисельне значення моменту сили відносно осі  $Oz$  можна вира-

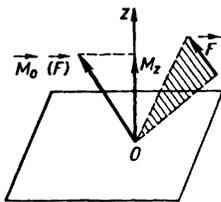


Рис. 2.5

зити подвоєною площею трикутника  $Oab$ , що лежить у площині  $N$ .

З визначення моменту сили відносно осі випливає, що він дорівнює нулю, якщо лінії дії сили і вісь лежать в одній площині.

**Приклад 1.** Сила  $F = 60$  Н прикладена у точці  $A$  з координатами  $(2; -3,4)$  і становить з віссю  $Ox$  кут  $\alpha$ , з віссю  $Oy$  – кут  $\beta$ , а з віссю  $Oz$  – кут  $\gamma$ . При цьому  $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ ,  $\cos\beta = \frac{3}{4}$ .

Обчислити момент цієї сили відносно осі  $Oy$ .

Розв'язання. Згідно з формулами (2.6), маємо

$$M_{Oy} = zF_x - xF_z.$$

$$\text{Тут } x = 2, z = 4, F_x = F \cos\alpha = 60 \cdot \frac{1}{4} = 15, \text{ а}$$

для визначення  $F_z$  треба попередньо знайти  $\cos\gamma$ .

Відомо, що

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

звідки

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1 - \frac{1}{16} - \frac{9}{16} = \frac{6}{16}$$

або

$$\cos\gamma = \pm \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Якщо  $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ , то  $\cos\gamma = \frac{\sqrt{6}}{4}$ . Тоді  $F_z =$

$$= 60 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} \approx 36,7 \text{ Н, а } M_{Oy} = -2 \cdot 36,7 + 4 \cdot 15 = -13,4 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

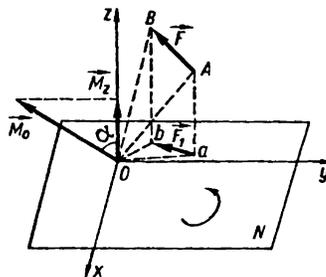


Рис. 2.6

$$\text{Якщо } \frac{\pi}{2} < \gamma < \pi, \text{ то } \cos \gamma = -\frac{\sqrt{6}}{4}. \text{ Тоді } F_2 = \\ = -60 \frac{\sqrt{6}}{4} \approx -36,7 \text{ Н, а } M_{Oy} = 2 \cdot 36,7 + 4 \cdot 15 = 133,4 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

## § 2.4. Момент пари сил і його властивості

Парою сил називається система двох рівних за величиною сил  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ , паралельних між собою, що напрямлені у протилежні боки уздовж незбіжних ліній дії і прикладені до одного тіла (рис. 2.7, а).

Площина  $N$  називається площиною дії пари сил, або площиною пари. Плечем пари  $h$  називається найкоротша відстань між лініями дії сил пари.

Визначимо, чому дорівнює сума моментів сил, що становлять пару відносно довільної точки.

Нехай  $O$  – довільна точка простору (рис. 2.7, б), а  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  – сили, що становлять пару і прикладені відповідно у точках  $A$  і  $B$ . Нехай  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}$ . З визначення моменту сили відносно точки маємо

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \\ = \vec{r}_1 \times (-\vec{F}_2) + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{F}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2 = \\ = -\vec{r}_1 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}; \quad \vec{r}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (2.10)$$

Одержана векторна сума не залежить від положення точки  $O$ , відносно якої обчислюються моменти, а визначається лише точками прикладення сил, що становлять пару. Векторний добуток  $\vec{r} \times \vec{F}$  називається моментом пари сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  і позначається  $\vec{M}(\vec{F}, -\vec{F})$ . Модуль моменту пари сил дорівнює добутку модуля однієї з сил пари на плече пари.

Як бачимо, момент пари напрямлений перпендикулярно до площини дії пари у той бік, звідки “обертання” пари відбувається проти ходу годинникової стрілки.

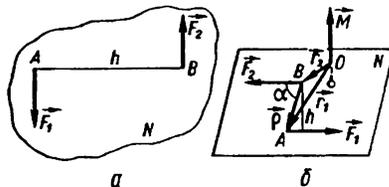


Рис. 2.7

Отже, момент пари сил – вектор вільний і математично визначений у вигляді

$$\vec{M}(\vec{F}, -\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.11)$$

Нижче показано, що момент пари цілком визначає статичну дію пари сил на тверде тіло, тобто є повною характеристикою механічної дії пари сил на це тіло. З визначення моменту пари сил і аксіоми I про дві сили випливає, що пара сил становить зрівноважену систему (систему сил, еквівалентну нулю) тоді і тільки тоді, коли момент пари дорівнює нулю. Інші властивості пари сил визначаються наступними теоремами.

**Теорема 1.** Не змінюючи дії пари сил на тверде тіло, її можна переносити і довільно повертати у площині дії, змінюючи величину сили, що входить у неї, і довжину плеча так, щоб момент пари залишався незмінним.

Доведення. Нехай задано пару сил  $\vec{F}$  і  $-\vec{F}$  з плечем  $ab = h$ . У площині дії цієї пари виберемо довільний відрізок  $cd = ab$  (рис. 2.8, а). У точках  $c$  і  $d$  цього відрізка на лініях, що перпендикулярні до нього, прикладемо відповідно дві системи сил  $(\vec{F}_1, -\vec{F}_1)$  і  $(\vec{F}_1', -\vec{F}_1')$ , кожна з яких еквівалентна нулю, причому  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_1'| = |\vec{F}|$ .

Продовжимо лінії дії сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_1'$  до перетину їх з лініями дії сил  $\vec{F}$  і  $-\vec{F}$ . Одержані точки перетину позначимо через  $e, l, k, f$ . Перенесемо тепер сили  $\vec{F}$  і  $-\vec{F}$ , а також сили  $-\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_1'$  як ковзні вектори у точки  $e$  та  $f$ . Нехай  $\vec{R}$  – рівнодійна збіжних сил  $\vec{F}$  і  $-\vec{F}_1$ , прикладених у точці  $e$ , а  $-\vec{R}'$  – рівно-

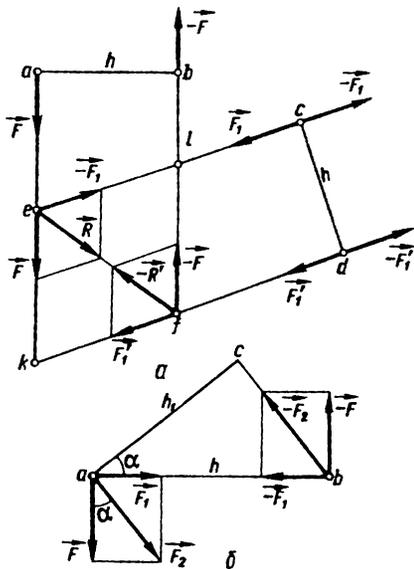


Рис. 2.8

дійна збіжних сил  $\vec{F}'_1$  і  $-\vec{F}$ , прикладених у точці  $f$ . Зрозуміло, що система сил  $(\vec{R}, -\vec{R}')$  еквівалентна нулю, оскільки за побудовою сили  $\vec{R}$  і  $-\vec{R}'$  рівні за величиною, напрямлені у протилежні боки і прикладені до кінців діагоналі паралелограма  $elfk$ . Отже, систему  $(\vec{R}, -\vec{R}')$  можна відкинути, не порушуючи стану тіла. Таким чином, пара сил  $(\vec{F}'_1, -\vec{F}'_1)$ , що залишилася, еквівалентна заданій парі сил  $(\vec{F}, -\vec{F})$ .

Покажемо, що при зазначеному переміщенні пари сил можна змінювати величину сили, що входить у неї, і довжину плеча, про що йдеться у теоремі. Для цього розглянемо вихідну пару сил  $(\vec{F}, -\vec{F})$  (рис. 2.8, б). Прикладемо до точок  $a$  і  $b$  систему сил  $(\vec{F}'_1, -\vec{F}'_1)$ , еквівалентну нулю. Нехай  $\vec{F}'_2$  і  $-\vec{F}'_2$  – рівнодійні збіжних систем сил  $(\vec{F}, \vec{F})$

і  $(-\vec{F}'_1, -\vec{F})$ , прикладених відповідно у точках  $a$  і  $b$ . Тоді система сил  $(\vec{F}'_2, -\vec{F}'_2)$  еквівалентна системі сил  $(\vec{F}, -\vec{F}; \vec{F}'_1, -\vec{F}'_1)$ , а отже, парі сил  $(\vec{F}, -\vec{F})$ . Момент пари сил  $(\vec{F}'_2, -\vec{F}'_2)$  дорівнює  $F_2 h \cos \alpha$ , а момент пари сил  $(\vec{F}, -\vec{F})$  дорівнює  $Fh$ . Легко переконатися, що алгебричні значення цих моментів однакові. Крім того, з рис. 2.8, а бачимо, що напрями обертань, створюваних парами, збігаються. Отже, моменти пар сил  $(\vec{F}, -\vec{F})$  і  $(\vec{F}'_2, -\vec{F}'_2)$  рівні між собою. Теорему доведено.

**Теорема 2.** Дві пари сил, що лежать в одній або паралельних площинах і мають однакові за величиною, але протилежні за напрямом моменти, становлять систему пар сил, еквівалентну нулю.

Доведення. Нехай у площині задано дві пари сил  $(\vec{F}'_1, -\vec{F}'_1)$  і  $(\vec{F}, -\vec{F})$ , в яких однакові алгебричні значення моментів, але протилежні напрями обертань, що створюються цими парами. За теоремою 1, перетворимо пару сил  $(\vec{F}'_1, -\vec{F}'_1)$  так, щоб ці пари мали спільні точки прикладення сил, які становлять пари (рис. 2.9). З рисунка і умови  $\vec{F}' = \vec{F}$  бачимо, що ми одержали систему сил  $(\vec{F}, -\vec{F}; \vec{F}', -\vec{F}')$ , еквівалентну нулю. Отже, система з двох пар  $(\vec{F}, -\vec{F})$  і  $(\vec{F}', -\vec{F}')$  еквівалентна нулю. Моменти цих пар відповідно дорівнюють

$$M(\vec{F}, -\vec{F}) = \vec{b}\vec{a} \times \vec{F}; \quad (2.12)$$

$$M'(\vec{F}', -\vec{F}') - \vec{b}\vec{a} \times \vec{F}' = \vec{b}\vec{a} \times (-\vec{F}').$$

З іншого боку, сума моментів усіх сил, що становлять ці пари, визначається виразом

$$\begin{aligned} M(\vec{F}, -\vec{F}) + M'(\vec{F}', -\vec{F}') = \\ = \vec{b}\vec{a} \times (\vec{F}, -\vec{F}') = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

який є сумою моментів складових пар, що дорівнює нулю. Отже, ця система двох пар сил еквівалентна нулю.

Оскільки момент пари сил – вектор вільний, то доведені теореми справедливі також для випадку пар сил, що лежать у паралельних площинах.

З доведених теорем випливає висновок про *еквівалентність* двох пар сил, що мають геометрично однакові моменти.

Крім того, ці теореми дають змогу встановити правило складання пар сил, що лежать не тільки в паралельних площинах, але і в тих, які перетинаються.

Так, якщо задано систему  $n$  пар  $(\vec{F}_i, -\vec{F}_i)$ ,  $i=1, \dots, n$ , то вона може бути замінена однією, еквівалентною заданій системі пар – результуючою парою. Причому момент результуючої пари  $(\vec{R}, -\vec{R})$  дорівнює векторній (геометричній) сумі моментів складових пар:

$$\vec{M}(\vec{R}, -\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i(\vec{F}_i, -\vec{F}_i). \quad (2.14)$$

Значимо, що пару сил не можна замінити однією силою, яка була б еквівалентною за дією на тверде тіло двом рівним за величиною, паралельним і протилежним напрямленим силам. Дійсно, якщо припустити, що пара сил еквівалентна деякій силі  $\vec{R}$ , то через їхню еквівалентність момент пари сил і момент сили  $\vec{R}$  відносно довільної точки мають бути однаковими. Вибравши цю точку на лінії дії сили  $\vec{R}$ , ми приходимо до суперечності, оскільки момент пари сил залишається без змін, він не залежить від вибору центра, а момент сили  $\vec{R}$  дорівнює нулю. Цим доводиться наведене твердження.

Отже, пара сил, що діють на тверде тіло, утворює новий самостійний елемент статички, який разом з силою становить важливе поняття механіки. Основні властивості цього елемента і основні перетворення, яким він підлягає, цілком встановлюються доведеними теоремами про парі.

Ці властивості й перетворення такі:

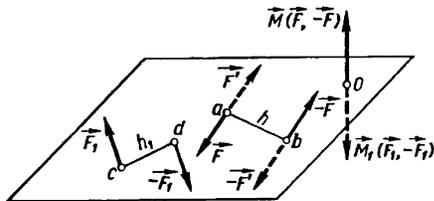


Рис. 2.9

- 1) пару сил можна переносити в площині її дії, у тому числі й повертати на будь-який кут;
- 2) пару сил можна переносити в будь-яку площину, паралельну площині дії цієї пари;
- 3) можна змінювати сили, що утворюють пару та її плече, не змінюючи моменту пари;
- 4) декілька пар сил, довільно розміщених у просторі, можна замінити однією парою, момент якої дорівнює геометричній сумі моментів складових пар.

З викладеного в розділах 1 і 2 приходимо до такого важливого висновку: *механічний вплив у статичці характеризується трьома типами векторів: силою – ковзним вектором, моментом сили відносно точки – прикладеним вектором і парою сил – вільним вектором.*

### Питання для самоконтролю

1. Як визначається напрям моменту сили відносно точки?
2. Коли момент сили відносно точки дорівнює нулю?
3. В яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
4. Чому проекція моменту сили на вісь не залежить від положення точки на цій осі?
5. Чому пара сил не має рівнодійної?
6. Які елементи статички є базовими або самостійними, незалежними?
7. Який вектор у статичці є прикладеним вектором, ковзним вектором або вільним вектором?
8. Які властивості має пара сил?
9. Чому момент сили відносно центра, або момент пари сил не змінюється при переміщенні сили вздовж лінії її дії?
10. При якому напрямі сили її момент відносно даної осі є найбільшим?

## ДОВІЛЬНА ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ І УМОВИ ЇЇ РІВНОВАГИ

## § 3.1. Лема про паралельне перенесення лінії дії сили

*Лема. Не змінюючи статичного стану твердого тіла, силу, прикладену до цього тіла, можна перенести в будь-яку його точку паралельно самій собі, додаючи при цьому приєднану пару. Момент приєднаної пари дорівнює моменту цієї сили відносно центра зведення.*

Доведення. Нехай до твердого тіла у точці  $A$  прикладено силу  $\vec{F}$  (рис. 3.1). У довільній точці  $O$  цього ж тіла прикладемо дві взаємно зрівноважені сили  $\vec{F}'$  і  $\vec{F}''$ , модулі яких  $|\vec{F}'| = |\vec{F}''| = |\vec{F}|$ , а лінії їх дії паралельні силі  $\vec{F}$ . Тоді сила  $\vec{F}$  еквівалентна системі сил  $(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$ . Проте сили  $(\vec{F}, \vec{F}'')$  становлять пару. Тому сила  $\vec{F}$  еквівалентна силі  $\vec{F}'$ , прикладеній у точці  $O$ , і парі сил  $(\vec{F}, \vec{F}'')$  з моментом, що дорівнює моменту сили  $\vec{F}$  відносно точки  $O$ . Одержану таким чином пару сил  $(\vec{F}, \vec{F}'')$  назвемо приєднаною парою. Лему доведено.

### § 3.2. Головний вектор і головний момент системи сил.

#### Основна теорема статики

Нехай задано довільну систему сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ , що діють на тверде тіло. Головним вектором  $\vec{F}$  цієї системи сил називається векторна сума всіх сил, які входять у систему:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (3.1)$$

Головним моментом такої системи сил відносно точки  $O$  (центра зведення) називається векторна сума моментів усіх сил, що входять у систему, відносно того самого центра:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i, \quad (3.2)$$

де  $\vec{r}_i$  – радіус-вектор, проведений з центра  $O$  в точку прикладання сили  $\vec{F}_i$ . Проектуючи ліві та праві частини виразів (3.1) і (3.2) на осі декартової системи координат  $Oxyz$ , легко встановити аналітичні вирази для головного вектора і головного моменту у вигляді

$$F_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad F_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad F_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}, \quad (3.3)$$

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^n M_{Ox}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}),$$

$$M_{Oy} = \sum_{i=1}^n M_{Oy}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}), \quad (3.4)$$

$$M_{Oz} = \sum_{i=1}^n M_{Oz}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}),$$

де  $F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}$  і  $M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz}$  – проєкції відповідно головного вектора  $\vec{F}$  і головного моменту  $\vec{M}_O$  на осі координат.

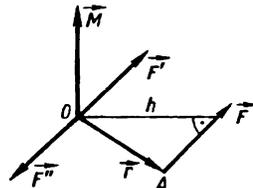


Рис. 3.1

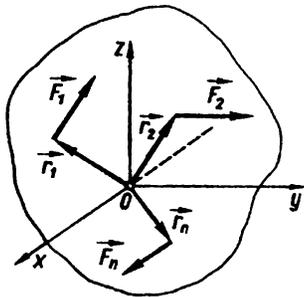


Рис. 3.2

Тоді модулі і напрямні косинуси відповідно головного вектора та головного моменту визначаються виразами

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

$$\cos(\widehat{\vec{F}, Ox}) = \frac{F_x}{F}; \cos(\widehat{\vec{F}, Oy}) = \frac{F_y}{F}; \quad (3.5)$$

$$\cos(\widehat{\vec{F}, Oz}) = \frac{F_z}{F},$$

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2},$$

$$\cos(\widehat{\vec{M}_O, Ox}) = \frac{M_{Ox}}{M_O}; \cos(\widehat{\vec{M}_O, Oy}) = \frac{M_{Oy}}{M_O}; \quad (3.6)$$

$$\cos(\widehat{\vec{M}_O, Oz}) = \frac{M_{Oz}}{M_O}.$$

Користуючись лемою про паралельне перенесення сили, доведемо основну теорему статки.

**Основна теорема статки.** Довільну систему сил, що діють на тверде тіло, можна замінити однією з еквівалентних систем, яка:

1) складається з однієї сили, що прикладена в довільно обраному центрі зведення і дорівнює головному вектору цієї системи сил, і приєднаної пари сил, момент якої дорівнює головному моменту всіх сил відносно обраного центра зведення;

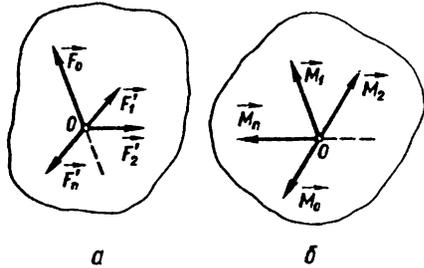


Рис. 3.3

2) складається з двох, у загальному випадку, мимобіжних сил, одна з яких прикладена в центрі зведення, а інша – в певній точці.

Якщо обмежитися першою частиною сформульованої теореми, то дійдемо до відомої теореми Пуансо.

Доведення. Для доведення першої частини теореми розглянемо довільну систему сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  (рис. 3.2).

Довільну точку  $O$  візьмемо за центр зведення. За доведеною в § 3.1 лемою перенесемо всі сили  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  у точку  $O$ . У результаті система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  виявиться еквівалентною системі сил  $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n)$ , прикладених у точці  $O$  (рис. 3.3, а), і приєднаним парам сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)$ ,  $(\vec{F}_2, \vec{F}'_2)$ , ...,  $(\vec{F}_n, \vec{F}'_n)$  (рис. 3.1), моменти яких  $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$  (рис. 3.3, б) мають вигляд

$$\vec{M}_1 = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{M}_O(\vec{F}_1),$$

$$\vec{M}_2 = \vec{M}(\vec{F}_2, \vec{F}'_2) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{M}_O(\vec{F}_2),$$

$$\dots$$

$$\vec{M}_n = \vec{M}(\vec{F}_n, \vec{F}'_n) = \vec{r}_n \times \vec{F}_n = \vec{M}_O(\vec{F}_n).$$
(3.7)

Визначаючи тепер рівнодійну одержаної збіжної системи сил у точці  $O$  (рис. 3.3),

а також результуючу пару для системи при-  
днаних пар, дістанемо вирази

$$\begin{aligned}\vec{F}_O &= \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \dots + \vec{F}_n' = \\ &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \\ \vec{M}_O &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \quad (3.8) \\ &= \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i,\end{aligned}$$

що, згідно з (3.1) і (3.2), є відповідно голов-  
ним вектором і головним моментом.

Для доведення другої частини теореми  
припустимо, що задана система сил еквіва-  
лентно перетворена відповідно до першого  
твердження теореми. Нехай  $\vec{F}_O$  – головний  
вектор системи, а  $\vec{M}_O$  – її головний момент  
у центрі зведення  $O$ . Подамо момент  $\vec{M}_O$   
відповідною парою сил  $(\vec{P}, \vec{P}')$  (рис. 3.4).  
Нехай  $h$  – довільно вибране плече цієї пари.  
Складаючи сили  $\vec{F}_O$  і  $\vec{P}$ , прикладені у то-  
чці  $O$ , за правилом паралелограма, дістанемо  
нову систему сил  $(\vec{Q}, \vec{P}')$ , еквівалентну сис-  
темі сил  $(\vec{F}_O, \vec{P}, \vec{P}')$ . Оскільки в загальному  
випадку сила  $\vec{F}_O$  не належить площині  $N$ ,  
то і сила  $\vec{Q}$  також їй не належить. Отже,

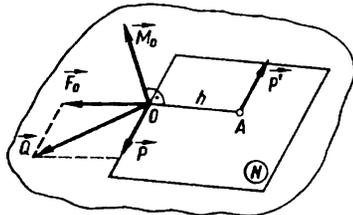


Рис. 3.4

сили  $\vec{Q}$  і  $\vec{P}'$  за побудовою є мимобіжними.  
Таким чином доведено, що задана система  
сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  може бути перетворена в  
еквівалентну їй систему з двох, у загально-  
му випадку, мимобіжних сил  $\vec{Q}$  і  $\vec{P}'$ , одна  
з яких ( $\vec{Q}$ ) прикладена в центрі зведення  $O$ ,  
а інша ( $\vec{P}'$ ) – у точці  $A$ , положення якої  
встановлюється вибором плеча  $h$  за рівніс-  
тю  $M_O = hP$ .

При наведених перетвореннях цієї сис-  
теми сил головний вектор і головний мо-  
мент мали формальне значення. Проте слід  
пам'ятати, що в ряді практичних застосу-  
вань ці величини можуть бути визначені  
експериментально. Відомо, наприклад, що  
при обертанні ротора електричної машини  
практично неможливо визначити сили, які  
виникають у шарикопідшипникових опо-  
рах, а також електромагнітні сили взаємодії  
між статором і ротором. У той самий час  
експериментальне визначення головного  
моменту таких сил на валу двигуна не ви-  
кликає утруднень. Саме тому в характерис-  
тику електродвигунів входять не сили, а  
обертальний момент.

### § 3.3. Умови рівноваги довільної просторової системи сил

Нехай задано довільну просторову сис-  
тему сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ , прикладених до  
твердого тіла. Доведемо таку теорему.

*Теорема.* Для того щоб довільна про-  
сторова система сил була в рівновазі (екві-  
валентна нулю), необхідно і достатньо,  
щоб головний вектор і головний момент цієї  
системи відносно довільного центра зведення  
дорівнювали нулю, тобто

$$\vec{F}_O = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = 0. \quad (3.9)$$

Доведення. *Необхідна умова.* Нехай задана система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  перебуває в рівновазі. Потрібно довести, що тоді виконуються математичні умови (3.9). За другим твердженням основної теореми статистики перетворюємо задану систему сил в еквівалентну їй систему, що складається з двох сил  $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ , які можуть бути мимобіжними. Оскільки система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  перебуває в рівновазі та еквівалентна системі сил  $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ , то ця система також має бути в рівновазі. Це, у свою чергу, можливо лише тоді, коли виконуються всі умови аксіоми про дві сили (сили  $\vec{Q}_1$  і  $\vec{Q}_2$  повинні бути однакові за величиною, протилежно напрямлені і мати загальну лінію дії). Проте для такої системи її головний вектор і головний момент щодо будь-якого центра зведення очевидно дорівнюватимуть нулю, що і треба було довести.

*Достатня умова.* Нехай задана система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  перетворена в еквівалентну систему  $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ , для якої умови (3.9) мають вигляд

$$\begin{aligned} \vec{F}_O &= \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = 0; \\ \vec{M}_O &= \vec{M}_O(\vec{Q}_1) + \vec{M}_O(\vec{Q}_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Виконання першої умови означає, що сили  $\vec{Q}_1$  і  $\vec{Q}_2$  рівні за величиною і протилежно напрямлені. Виконання другої умови покаже те, що ці сили мають спільну лінію дії, оскільки момент пари сил  $\vec{Q}_1$  і  $\vec{Q}_2$  дорівнює нулю. Отже, за аксіомою I про дві сили вихідна система сил еквівалентна нулю.

Умови (3.9) називаються умовами рівноваги довільної системи сил у векторній (геометричній) формі.

Проектуючи векторні рівності (3.9) на осі координат, дістаємо *умови рівноваги до-*

*вільної просторової системи сил* в аналітичній формі:

$$F_{Ox} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0,$$

$$F_{Oy} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0,$$

$$F_{Oz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0,$$

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= \sum_{i=1}^n M_{Ox}(\vec{F}_i) = M_{Ox}(\vec{F}_1) + \\ &+ M_{Ox}(\vec{F}_2) + \dots + M_{Ox}(\vec{F}_n) = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} M_{Oy} &= \sum_{i=1}^n M_{Oy}(\vec{F}_i) = M_{Oy}(\vec{F}_1) + \\ &+ M_{Oy}(\vec{F}_2) + \dots + M_{Oy}(\vec{F}_n) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{Oz} &= \sum_{i=1}^n M_{Oz}(\vec{F}_i) = M_{Oz}(\vec{F}_1) + \\ &+ M_{Oz}(\vec{F}_2) + \dots + M_{Oz}(\vec{F}_n) = 0. \end{aligned}$$

Отже, для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій усіх сил на координатні осі та суми моментів цих сил відносно осей координат дорівнювали нулю. Таким чином, при розв'язуванні задач про рівновагу просторової системи сил, прикладених до твердого тіла, з рівнянь (3.11) можна визначити шість невідомих величин.

Якщо на тверде тіло діє система пар сил, то необхідна і достатня умова рівноваги такої системи, як випливає з умови (3.9) і властивостей пар сил, набирас вигляду

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i(\vec{F}_i, -\vec{F}_i) = 0. \quad (3.12)$$

Отже, для рівноваги пар сил необхідно і достатньо, щоб геометрична сума моментів пар дорівнювала нулю:

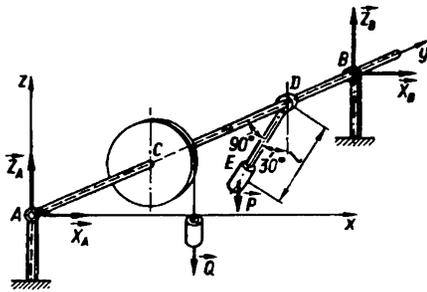


Рис. 3.5

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i(\vec{F}_i, -\vec{F}_i) = \vec{M}_1(\vec{F}_1, -\vec{F}_1) + \vec{M}_2(\vec{F}_2, -\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_n(\vec{F}_n, -\vec{F}_n) = 0.$$

**Приклад 1.** На горизонтальний вал (рис. 3.5), що лежить у підшипниках  $A$  і  $B$ , діє вантаж вагою  $Q = 25$  Н, прив'язаний тросом до шківка  $C$  радіусом  $r = 0,2$  м. Вантаж вагою  $P = 100$  Н, насаджений на стрижень  $ED$ , незмінно зв'язаний з валом  $AB$ . Дано розміри:  $AC = 0,2$  м,  $CD = 0,7$  м,  $BD = 0,1$  м. У стані рівноваги стрижень  $ED$  відхилений від вертикалі на кут  $30^\circ$ . Визначити відстань  $l$  центра ваги вантажу вагою  $P$  від осі вала  $AB$ , а також реакції підшипників  $A$  і  $B$ .

**Розв'язання.** Розглянемо рівновагу вала, на який діють активні сили  $\vec{P}$  і  $\vec{Q}$ . В'язями для нього є підшипники  $A$  і  $B$ . Згідно з аксіомою про в'язі, звільняємо вал від в'язей і замінюємо їх реакціями  $\vec{R}_A$  і  $\vec{R}_B$ , що лежать у площинах, перпендикулярних до осі підшипників  $A$  і  $B$ . Візьмемо систему координат, як показано на рис. 3.5. Невідомі реакції  $\vec{R}_A$  і  $\vec{R}_B$  подамо складовими  $\vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B$  (рис. 3.5), які треба визначити. Для розв'язання задачі скористаємось умовами рівноваги (3.11). У цьому разі друга умова виконується тотожно, оскільки проєкції всіх сил, у тому числі й реакцій в'язей, на вісь  $Ay$  дорівнюють нулю. З п'яти умов рівноваги, що залишилися, слід визначити п'ять невідомих величин:  $\vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B$ . І задача статично визначена.

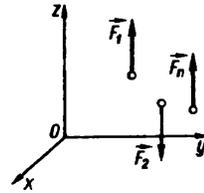


Рис. 3.6

Щодо заданої задачі умови рівноваги (3.11) мають вигляд

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} &= X_A + X_B = 0, \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} &= Z_A + Z_B - P - Q = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{Ox}(\vec{F}_i) &= -Q \cdot AC - P(AC + CD) + Z_B \cdot AB = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{Oy}(\vec{F}_i) &= -Pl \sin 30^\circ + Qr = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{Oz}(\vec{F}_i) &= -X_B \cdot AB = 0. \end{aligned}$$

Звідси

$$X_A = X_B = 0; \quad l = \frac{Q \cdot r}{P \sin 30^\circ} = \frac{25 \cdot 0,2}{100 \cdot 0,5} = 0,1 \text{ м};$$

$$\begin{aligned} Z_B &= \frac{1}{AB} [Q \cdot AC + P(AC + CD)] = \\ &= 25 \cdot 0,2 + 100 \cdot 0,9 = 95 \text{ Н}; \end{aligned}$$

$$Z_A - P + Q - Z_B = 100 + 25 - 95 = 30 \text{ Н}.$$

### § 3.4. Умови рівноваги системи сил в окремих випадках

**Умови рівноваги просторової системи паралельних сил.** Розглянемо окремий випадок, коли всі сили, що діють на тверде тіло, паралельні між собою (рис. 3.6). У цьому разі можна напрямити одну з координатних осей (наприклад, вісь  $Oz$ ) паралельно цим силам. Тоді з умов рівноваги

(3.11) залишаться лише три рівняння, а три перетворяться в тотожності. Дійсно, проекції сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  на осі  $Ox$  і  $Oy$  дорівнюють нулю. Оскільки сили паралельні осі  $Oz$ , то їхні моменти відносно осі  $Oz$  також дорівнюють нулю. Тоді з шести рівнянь (3.11) залишаються лише три:

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{Ox}(\vec{F}_i) = 0, \quad (3.13)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{Oy}(\vec{F}_i) = 0.$$

Отже, для рівноваги просторової системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебрична сума проекцій усіх сил на вісь, паралельну силам, дорівнювала нулю і алгебричні суми моментів цих сил відносно двох інших координатних осей дорівнювали нулю.

Зазначимо, що для статичної визначеності задач, які розв'язуються, число невідомих в рівняннях (3.13) не повинно перевищувати трьох.

**Умови рівноваги твердого тіла з нерухомою точкою.** Розглянемо тверде тіло, яке має нерухому точку  $O$  (рис. 3.7). Нехай до цього тіла прикладена просторова система активних сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ .

Точку  $O$  візьмемо за початок координат. Звінши систему активних (або заданих) сил до центра зведення  $O$ , знайдемо головний вектор

$$\vec{F}_O = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

і головний момент активних сил

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i).$$

Головний вектор активних сил зрівноважиться реакцією нерухомої точки  $O$ , а головний момент активних сил  $\vec{M}_O$  у разі рівноваги тіла має дорівнювати нулю:

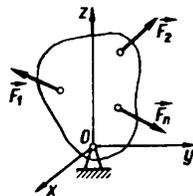


Рис. 3.7

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i). \quad (3.14)$$

У проекціях на осі координат ця умова набере вигляду

$$\sum_{i=1}^n M_{Ox}(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{Oy}(\vec{F}_i) = 0; \quad (3.15)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{Oz}(\vec{F}_i) = 0.$$

Ці рівняння не мають реакцій в'язей (нерухомої точки  $O$ ). Вони є умовами рівноваги твердого тіла з нерухомою точкою.

Отже, для рівноваги твердого тіла з нерухомою точкою потрібно, щоб алгебрична сума моментів активних сил відносно кожної з трьох взаємно перпендикулярних осей, що проходять через цю точку, дорівнювала нулю.

Якщо треба знайти реакцію опори, то, скориставшись аксіомою про звільнення від в'язей, замінимо в'язь реакцією  $i$ , записавши перші три рівняння (3.11), знайдемо проекції реакції на осі, а потім за формулами (3.5) – їх величину і напрям.

**Умови рівноваги твердого тіла, що має дві нерухомі точки або нерухому вісь.** Уявімо собі тверде тіло, дві точки якого  $O_1$  і  $O_2$  закріплені нерухомо. Нехай до цього тіла прикладені активні сили  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  (рис. 3.8). Потрібно знайти умови, яким би задоволь-

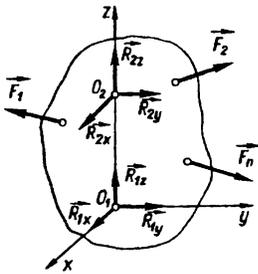


Рис. 3.8

няли прикладені сили  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , щоб тіло було в рівновазі.

Звільнивши тіло від в'язей, прикладемо до нього реакції  $\vec{R}_1, \vec{R}_2$  у нерухомих точках  $O_1$  і  $O_2$ . Оскільки напрями реакцій невідомі, то їх потрібно розкласти за напрямками трьох взаємно перпендикулярних осей (рис. 3.8). Під дією всіх цих сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{R}_1, \vec{R}_2$  тверде тіло залишатиметься в рівновазі, якщо вони задовольнятимуть шість рівнянь (3.11) рівноваги твердого тіла, які при  $O_1O_2 = a$  матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} + R_{1x} + R_{2x} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} + R_{1y} + R_{2y} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} + R_{1z} + R_{2z} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{Ox}(\vec{F}_i) - aR_{2y} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{Oy}(\vec{F}_i) + aR_{2x} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{Oz}(\vec{F}_i) &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

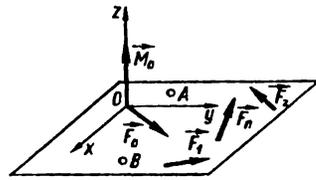


Рис. 3.9

Як бачимо, лише останнє рівняння не має реакції  $\vec{R}_1, \vec{R}_2$  точок закріплення тіла і, отже, є єдиною умовою, яку задовольняють активні сили  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , щоб тверде тіло, що розглядається, залишалося в рівновазі.

Отже, для рівноваги твердого тіла з двома нерухомими точками (або закріпленою віссю) потрібно, щоб алгебрична сума моментів активних сил відносно закріпленої осі або осі обертання дорівнювала нулю:

$$\sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i) = 0. \quad (3.17)$$

Для визначення реакцій в'язей у цьому разі залишилися п'ять рівнянь, а невідомих складових реакцій шість. З п'яти рівнянь не можна визначити шість невідомих. Тому задача про визначення реакцій двох закріплених точок тіла виявляється статично невизначеною. Ця невизначеність зникає, якщо, наприклад, в опорі  $O_1$  влаштувати підп'ятник, а в опорі  $O_2$  – підшипник, оскільки реакція підп'ятника визначається трьома складовими  $R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}$ , а реакція підшипника – двома складовими  $R_{2x}, R_{2y}$ .

**Умови рівноваги довільної плоскої системи сил.** Нехай система сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  задана у площині  $Oxy$  (рис. 3.9). За центр зведення візьмемо довільну точку  $O$ , що лежить у цій площині. Очевидно, що головний момент цієї системи сил перпендикуляр-

ний до площини, в якій лежать сили. Головний вектор заданої системи сил лежить у площині дії сил. Отже, з шести рівнянь рівноваги (3.11) залишається лише три:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{Oz}(\vec{F}_i) = 0. \quad (3.18)$$

Таким чином, для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебричні суми проекцій сил на дві взаємно перпендикулярні осі й алгебрична сума моментів сил відносно довільно вибраної точки дорівнювали нулю.

Оскільки умови рівноваги (3.18) у цьому разі записуються трьома рівняннями, то задача буде статично визначеною, якщо число невідомих у рівняннях рівноваги не перевищуватиме трьох. Рівняння рівноваги можна подати у вигляді

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad (3.19)$$

за умови, що вісь  $Ox$  не перпендикулярна до відрізка  $AB$ . Нарешті, всі три рівняння рівноваги можна подати у вигляді рівнянь моментів сил відносно трьох точок  $O$ ,  $A$  і  $B$  (рис. 3.9), що не лежать на одній прямій:

$$\sum_{i=1}^n M_O(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad (3.20)$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0.$$

Рівняннями (3.20) рівноваги плоскої системи сил користуються при визначенні зусиль у стрижнях ферми за способом Ріттера.

На закінчення цього розділу зазначимо, що за центр моментів доцільно взяти точку, в якій перетинається найбільша кількість ліній дії невідомих сил. Якщо дві невідомі сили взаємно перпендикулярні, то осі координат доцільно напрямляти по лініях дії цих сил.

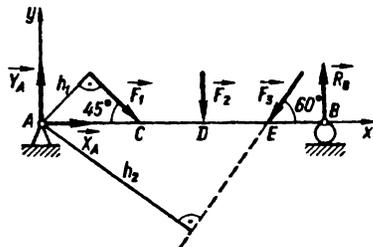


Рис. 3.10

**Приклад 2.** До балки  $AB$ , опорами якої є шарнір  $A$  і коток  $B$ , прикладені сили, як показано на рис. 3.10. Визначити реакцію шарніра  $A$  ( $\vec{R}_A$ )

і реакцію котка  $B$  ( $\vec{R}_B$ ), якщо  $F_1 = 40$  кН,  $F_2 = 100$  кН,  $F_3 = 200$  кН;  $AB = 20$  м,  $AC = 6$  м,  $CD = DE = 4$  м,  $BE = 6$  м.

**Розв'язання.** Розглянемо рівновагу балки. За аксіомою про звільнення від в'язей замінимо дію в'язей (шарніра  $A$  і котка  $B$ ) їх реакціями. Реакція  $\vec{R}_B$  котка напрямлена по нормалі до опорної площини. Напрямок реакції шарніра  $A$  невідомий. Розкладемо цю реакцію на складові  $\vec{X}_A$  і  $\vec{Y}_A$ . Точку  $A$  візьмемо за початок координат.

Рівняння рівноваги у цьому разі матимуть вигляд

$$\sum F_{ix} = X_A + F_1 \cos 45^\circ - F_3 \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum F_{iy} = Y_A - F_1 \cos 45^\circ - F_2 - F_3 \cos 30^\circ + R_B = 0;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = -F_1 \cdot AC \sin 45^\circ - F_2 \cdot AD - F_3 \cdot AE \sin 60^\circ + R_B \cdot AB = 0.$$

Звідси

$$X_A + 20\sqrt{2} - 100 = 0,$$

$$X_A = 100 - 20\sqrt{2} \approx 100 - 28 = 72 \text{ кН};$$

$$Y_A - 28 - 100 - 100\sqrt{3} + R_B = 0,$$

$$Y_A + R_B = 301 \text{ кН};$$

$$-40 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 100 \cdot 10 - 200 \cdot 14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 20R_B = 0,$$

$$-170 - 1000 - 2425 + 20R_B = 0.$$

Отстачно дістанемо  $R_B = 180$  кН,  $Y_A = 121$  кН.

**Умови рівноваги паралельних сил, що лежать у площині.** Нехай до твердого тіла прикладена система паралельних сил, що лежать в одній площині (рис. 3.11). Позначимо цю площину  $xOy$ .

Оскільки паралельні сили  $s$  окремим випадком довільної плоскої системи сил, то на основі (3.18) встановимо умови рівноваги паралельних сил, що лежать в одній площині та паралельні осі  $Oy$ .

У цьому випадку проекції всіх сил на вісь  $Ox$  дорівнюють нулю, тому з трьох умов (3.18) залишаються дві умови рівноваги

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{Oz}(\vec{F}_i) = 0. \quad (3.21)$$

Отже, для рівноваги паралельних сил, що лежать у площині, необхідно і достатньо, щоб алгебрична сума проекцій сил на вісь, яка паралельна їм, а також алгебрична сума моментів сил відносно деякої точки на площині дорівнювали нулю.

Значимо, що рівнянням рівноваги паралельних сил, які лежать у площині, можна надати іншої форми, склавши рівняння моментів сил відносно двох точок  $A$  і  $B$ :

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad (3.22)$$

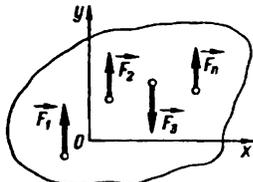


Рис. 3.11

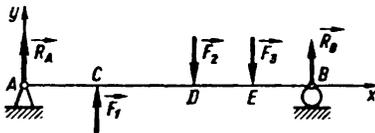


Рис. 3.12

причому точки  $A$  і  $B$  не повинні лежати на прямій, паралельній осі  $Oy$ .

Для статичної визначеності задачі число невідомих у разі дії на тверде тіло паралельних сил на площині не повинно перевищувати двох.

**Приклад 3.** До балки  $AB$  завдовжки 10 м прикладені паралельні сили, як показано на рис. 3.12;  $AC = CD = 3$  м,  $DE = BE = 2$  м, сили  $F_1 = 50$  кН,  $F_2 = 100$  кН,  $F_3 = 40$  кН. Визначити реакцію шарніра  $A$  ( $\vec{R}_A$ ) і реакцію котка  $B$  ( $\vec{R}_B$ ).

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки, звільнивши її від в'язей і замінивши їх дії реакціями в'язей. У котку  $B$  реакція напрямлена перпендикулярно до балки (рис. 3.12). Реакція шарніра в цьому разі, виходячи з рівноваги системи паралельних сил, буде паралельною цим силам. Точку  $A$  візьмемо за початок координат. З умов рівноваги (3.21) дістанемо

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = R_A + F_1 - F_2 - F_3 + R_B = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = F_1 \cdot AC - F_2 \cdot AD - F_3 \cdot AE + R_B \cdot AB = 0.$$

Звідси

$$R_A + R_B = 90, \quad 150 - 600 - 320 + 10R_B = 0,$$

$$R_B = 77 \text{ кН}, \quad R_A = 13 \text{ кН}.$$

Цю задачу можна розв'язати, склавши два рівняння моментів сил відносно точок  $A$  і  $B$ . Пропонуємо виконати це розв'язання самостійно.

**Третя кочення. Рівновага при наявності сил тертя.** Крім тертя ковзання, наведеного в § 1.7, розглянемо ще один вид тертя, що виникає при коченні тіл (тертя кочення). У теоретичній механіці тертям кочення цікавляться лише з точки зору визначення реакцій опори (більш повне його вивчення виходить за рамки механіки твердого тіла).

Нехай до котка радіусом  $r$  перпендикулярно до його осі  $Oz$  прикладена горизонтальна сила  $\vec{F}$  (рис. 3.13).

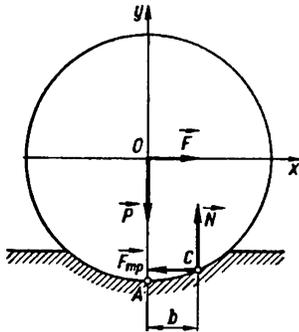


Рис. 3.13

Крім того, на коток діє сила тяжіння  $\vec{P}$ . Внаслідок деформацій котка і горизонтальної опори поверхні, на якій міститься коток, вони торкаються один одного не в одній точці, а по деякій ділянці контакту. Нормальна реакція опори  $\vec{N}$  зміститься на певну відстань  $b$ .

Сила тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$  виникає у тому місці, де коток торкається опорної поверхні, тобто в точці  $C$ . У разі рівноваги котка сила  $\vec{F}_{\text{тр}}$  дорівнює за модулем силі  $\vec{F}$ , але напрямлена у протилежний бік. Отже,  $\vec{F}$  і  $\vec{F}_{\text{тр}}$  утворюють пару сил, що зрівноважується парою сил  $\vec{N}$  і  $\vec{P}$  (рис. 3.13). Момент пари  $(\vec{N}, \vec{P})$  називається *моментом тертя кочення*. Плечем цієї пари є величина  $b$ , яка називається *коефіцієнтом тертя кочення*. На відміну від коефіцієнта тертя ковзання, який є безрозмірною величиною, коефіцієнт тертя кочення має розмірність довжини.

Прирівнявши моменти зазначених пар

$$Fr = Pb, \quad (3.23)$$

знайдемо вираз для визначення коефіцієнта тертя кочення  $b$ :

$$b = \frac{Fr}{P}. \quad (3.24)$$

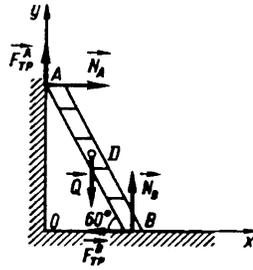


Рис. 3.14

Досвід показує, що величина  $b$  пропорційна радіусу циліндра (котка) і різна для різних матеріалів. Очевидно, тіло буде в рівновазі, якщо момент активної сили відносно точки  $C$  не більший від моменту тертя, тобто

$$Fr \leq Pb.$$

Наявність тертя не змінює методикку розв'язання задач статки. Реакції в'язей при наявності тертя ковзання визначають за формулами § 1.7, а у разі тертя кочення – за формулами (3.23), (3.24).

**Приклад 4.** Драбина  $AB$  спирається на шорстку стіну і шорстку підлогу, становлячи з підлогою кут  $60^\circ$  (рис. 3.14). На драбині у точці  $D$  міститься вантаж вагою  $\vec{Q}$ . Нехтуючи вагою драбини, визначити відстань  $BD$ , при якій драбина буде у рівновазі. Кут тертя для стіни і підлоги дорівнює  $15^\circ$ .

**Розв'язання.** Розглянемо рівновагу драбини, до якої в точці  $D$  прикладена сила  $\vec{Q}$ . Згідно з аксіомою III, звільняємося від в'язей, замінюючи їхні дії силами, що дорівнюють реакціям в'язей. Оскільки стіна і підлога шорсткі, то реакції в опорах  $A$  і  $B$  складаються із сил тертя і нормальних складових реакцій. Система сил, що розглядається, – плоска, тому складемо три рівняння рівноваги, взявши точку  $O$  за початок координат, а координатні осі  $Ox$  і  $Oy$  напрямимо так, як показано на рисунку:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = N_A - F_{\text{тр}}^B = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = F_{\text{тр}}^A - Q + N_B = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) - Q \cdot AD \sin 30^\circ - F_{\text{пр}}^B AB \sin 60^\circ + N_B AB \sin 30^\circ = 0.$$

Скориставшись співвідношеннями § 1.7, визначимо сили тертя  $F_{\text{пр}}^A$  і  $F_{\text{пр}}^B$  через нормальні реакції, враховуючи, що кут тертя  $\alpha = 15^\circ$ ,  $F_{\text{пр}}^A = kN_A = N_A \operatorname{tg} 15^\circ$ ,  $F_{\text{пр}}^B = kN_B = N_B \operatorname{tg} 15^\circ$

З урахуванням цих співвідношень умови рівноваги наберуть вигляду

$$N_A - N_B \operatorname{tg} 15^\circ = 0, \quad N_A \operatorname{tg} 15^\circ - Q + N_B = 0, \\ -\frac{1}{2}Q(AB - BD) - N_B AB \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} 15^\circ + \frac{1}{2}N_B AB = 0.$$

Розділивши третє рівняння на  $AB$ , дістанемо

$$-\frac{1}{2}Q\left(1 - \frac{BD}{AB}\right) - \operatorname{tg} 15^\circ N_B \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}N_B = 0.$$

Знаходимо шукану відстань  $BD$ .

## Питання для самоконтролю

1. Що мають спільного і чим відрізняються головний вектор сил та рівнодійна?
2. Що потрібно зробити, щоб при паралельному переносі сили в новий центр рівноваги твердого тіла не порушилась?
3. До яких двох параметрів можна звести довільну просторову систему сил?
4. У чому суть необхідних і достатніх умов рівноваги твердого тіла?
5. Чим відрізняються умови рівноваги вільного твердого тіла від умов рівноваги твердого тіла з в'язями?
6. Як саме спрощуються рівняння рівноваги твердого тіла під дією системи паралельних сил?
7. Чи зміняться умови рівноваги твердого тіла, до якого прикладена як довільна система сил, так і система моментів пар сил?
8. Чи змінює методику розв'язання задач статичної наявності в'язей із тертям?
9. За яких умов тіло буде в рівновазі при наявності моменту сил тертя кочення?
10. Чим відрізняється тертя кочення від тертя ковзання?

## Розділ 4

### ФЕРМИ. СПОСОБИ ВИЗНАЧЕННЯ ЗУСИЛЬ У СТРИЖНЯХ ФЕРМ

#### § 4.1. Найпростіші ферми

*Ферми* називаються конструкції, що складаються з прямолінійних стрижнів, які з'єднані між собою шарнірами і утворюють незмінну геометричну фігуру (рис. 4.1).

При розрахунку ферм вагою стрижнів нехтують і вважають, що шарніри розміщені тільки на кінцях стрижнів; навантаження, що діють на ферму, прикладені в шарнірах (тобто у вузлах ферми). У цьому разі кожен стрижень ферми знає зусиль, що діють уздовж осі стрижня, тобто буде розтягнутий або стиснутий.

З усього класу геометрично незмінних ферм без зайвих стрижнів виділимо прості ферми. Їх побудова відбувається так: розглядається основний трикутник, до нього двома стрижнями приєднується новий шарнір (вузол) і т. д. У подальшому вивчатиме-

мо прості, плоскі ферми, де їхні стрижні розміщені в одній площині.

За своїм призначенням найчастіше ферми поділяються на мостові, кроквяні й кранові (рис. 4.1). Встановимо залежність між кількістю ( $n$ ) стрижнів і кількістю ( $k$ ) шарнірів (вузлів) у простих фермах.

Міркуємо так: для утворення основного трикутника потрібно три стрижні і три шарніри. Для утворення кожного з решти  $k-3$  шарнірів (вузлів) необхідно два стрижні для незмінного сполучення з основою ферми. Отже, повна кількість стрижнів у найпростішій фермі з урахуванням трьох стрижнів основного трикутника визначається так:

$$n = 2(k-3) + 3 = 2k - 3. \quad (4.1)$$

Основною задачею розрахунку простих ферм є визначення зусиль у стрижнях фер-

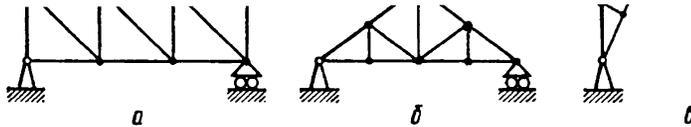


Рис. 4.1

ми, які є внутрішніми силами, що виникають у стрижнях під дією зовнішніх сил. Цю задачу можна розв'язати методами теоретичної механіки.

#### § 4.2. Визначення зусиль у стрижнях ферми

Обмежимося двома способами визначення зусиль у стрижнях простої ферми: способом вирізання вузлів (графічно-аналітичний метод) і способом Ріттера (аналітичний метод).

**Спосіб вирізання вузлів.** Цей спосіб полягає у тому, що кожен вузол вирізається з ферми і розглядається окремо як такий, що перебуває у рівновазі під дією прикладених до нього зовнішніх сил і зусиль розрізаних стрижнів. Система сил, що діє на вузол, є плоскою системою збіжних сил, яка перебуває у рівновазі; отже, силовий многокутник, побудований з цих сил, має бути замкненим. Побудову силових многокутників (трикутників) слід починати з вузла, в якому сходяться два стрижні. Тоді побудовою замкненого трикутника (третья сторона відповідає відомій заданій силі, прикладеній у вузлі) знайдуться зусилля в цих двох стрижнях. Після цього можна переходити до наступного вузла і т. д. Кожен наступний вузол вибирається так, щоб у ньому сходилось не більше ніж два стрижні з невідомими зусиллями. Так графічно будуть визначені зусилля в усіх стрижнях. Якщо зусилля розрізаних

стрижнів напрямлені по стрижням у бік вузла, то вони є стискальними, у противному разі – розтяжними.

Формально умови рівноваги вузлів ферми включають у себе умови рівноваги ферми в цілому, тобто дають змогу знайти і зовнішні реакції. Більше того, попереднє визначення зовнішніх реакцій ферми суттєво спрощує розв'язання задачі.

Розглянемо спосіб вирізання вузлів на прикладі розрахунку зусиль у стрижнях ферми, показаної на рис. 4.2.

**Приклад 1.** У вузлі  $B$  ферми прикладена сила  $F_1 = 800$  кН. Опорами ферми є шарнір  $A$  і коток  $C$ . Визначити: реакції опор  $\vec{R}_A, \vec{R}_C$ ; зусилля стрижнів у вузлах  $A$  і  $D$ .

Розв'язання. Розглянемо ферму як тверде тіло, що перебуває у рівновазі під дією плоскої системи паралельних сил  $(\vec{R}_A, \vec{R}_C, \vec{F}_1)$  (у цьому разі реакція шарніра  $\vec{R}_A$  паралельна силам  $\vec{R}_C$  і  $\vec{F}_1$ , бо інакше система сил  $(\vec{R}_A, \vec{R}_C, \vec{F}_1)$ , а отже, сама ферма не була б у рівновазі). Проведемо вісь  $Ay$  паралельно силам системи і складемо умови рівноваги у вигляді (3.21)

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = R_A + R_C - F_1 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^3 M_A(\vec{F}_i) = R_C AC - F_1 \frac{AC}{2} = 0,$$

звідки знайдемо  $R_A = R_C = 400$  кН.

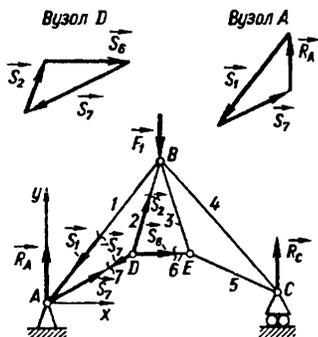


Рис. 4.2

Визначення зусиль у стрижнях почнемо з розгляду вузла  $A$ , в якому сходяться два стрижні:  $1$  і  $7$ . Будемо замкнений трикутник із сил  $\vec{R}_A$ ,  $\vec{S}_1$ ,  $\vec{S}_7$  (рис. 4.2). Для цього у відповідному масштабі будемо вектор, що дорівнює вектору реакції  $\vec{R}_A$ , з кінця якого проводимо пряму, паралельну стрижню  $AB$ , а з початку – пряму, паралельну стрижню  $AD$ . З побудованого трикутника знаходимо зусилля  $\vec{S}_1$  і  $\vec{S}_7$ . Зображуючи ці зусилля у вузлі  $A$ , бачимо, що  $\vec{S}_1$  напрямлене до вузла  $A$  по стрижню  $AB$ , отже, воно – стискальне, а зусилля  $\vec{S}_7$  напрямлене від вузла  $A$  по стрижню  $AD$ , тобто воно – розтяжне. Розтяжне зусилля позначається знаком плюс, а стискальне – знаком мінус.

Тепер розглянемо рівновагу сил у вузлі  $D$ , в якому залишаються тільки дві невідомі сили:  $\vec{S}_2$  і  $\vec{S}_6$ . Реакція стрижня  $7$ , що виходить з вузла  $D$ , дорівнює і протилежна за напрямом його ж реакції, але прикладена у вузлі  $A$ .

Знову будемо замкнений трикутник сил: відкладаємо силу  $\vec{S}_7$ , з її кінця проводимо пряму, паралельну стрижню  $2$ , з початку – пряму, паралельну стрижню  $6$ , і визначимо величини та напрями зусиль  $\vec{S}_2$  і  $\vec{S}_7$ . Аналогічно можна визначити інші зусилля:  $\vec{S}_3$ ,  $\vec{S}_4$ ,  $\vec{S}_5$ .

Незручність цього способу полягає у його громіздкості, оскільки доводиться буду-

вати стільки багатокутників, скільки вузлів у фермі. Об'єднання розрізаних багатокутників сил в одну діаграму здійснили незалежно один від одного англійський фізик Максвелл та італійський геометр Кремона, на честь яких цю діаграму названо діаграмою Максвелла – Кремони.

**Спосіб Пінтєра.** Цей спосіб дає змогу знайти зусилля у будь-якому стрижні ферми незалежно від зусиль в інших стрижнях. Проте попередньо треба визначити реакції опор ферми.

Спосіб Ріттера полягає у тому, що ферма розсікається на дві частини так, щоб у перерізі було не більше ніж три стрижні з невідомими зусиллями, які не сходяться в одному вузлі. Відкидаючи відсічену частину ферми і розглядаючи рівновагу тієї частини, що залишилася, під дією прикладених зовнішніх сил і зусиль, які замінюють дію розсічених стрижнів, дістанемо для цієї частини ферми три рівняння рівноваги з трьома невідомими зусиллями. Найчастіше ці рівняння є умовами рівності нулю алгебричних сум моментів сил відносно трьох різних центрів моментів, за які вибирають точки попарного перетину розсічених стрижнів з числа переріжаних. Ці точки називаються *точками Пінтєра*.

Якщо два стрижні з трьох розсічених паралельні, то одна точка Ріттера віддаляється у нескінченність. Тоді складають два рівняння моментів сил і одне рівняння проєкцій сил на вісь, перпендикулярну до паралельних стрижнів.

**Приклад 2.** Визначити зусилля в стрижнях  $1$ ,  $2$ ,  $3$  ферми, якщо  $F_1 = 45$  кН,  $F_2 = 20$  кН,  $KD = 2$  м, а інші розміри показано на рис. 4.3.

**Розв'язання.** Знайдемо реакції в опорах ферми  $R_A$  і  $R_B$ . Реакція котка  $B$  напрямлена по нормалю до опорної площини, а оскільки на ферму діє система паралельних сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $R_B$ , то і реакція  $\vec{R}_A$  шарніра  $A$  буде паралельною цим

$$\sum_{i=1}^4 r_{iy} = R_A - r_1 - r_2 + R_B = 0,$$

$$\sum_{i=1}^4 M_A(\bar{F}_i) = R_B \cdot AB - F_1 \cdot AE - F_2 \cdot AK = 0.$$

Звідси знаходимо  $R_A = 40$  кН і  $R_B = 25$  кН. Проведемо переріз через стрижні 1, 2, 3 і розглянемо рівновагу тієї частини розсічної ферми, в якій прикладено меншу кількість сил. У розглядуваному випадку – це права частина ферми. Зусилля в розсічених стрижнях умовно вважаємо розтяжними і напрямимо у бік частини, що відкидається. Отже, у відсіченій частині ферми зрівноважується плоска система сил  $\bar{R}_B$ ,  $\bar{S}_1$ ,  $\bar{S}_2$ ,  $\bar{S}_3$ .

Для визначення зусилля  $\bar{S}_1$  відповідною точкою Ріттера буде точка  $K$ , а рівняння рівноваги набере вигляду

$$\sum_{i=1}^4 M_K(\bar{F}_i) = R_B \cdot 6 + S_1 \cdot KL = 0.$$

Для визначення зусилля  $\bar{S}_2$  точкою Ріттера є точка  $B$ , для визначення зусилля  $\bar{S}_3$  – точка  $D$ , а відповідні рівняння рівноваги мають вигляд

$$\sum_{i=1}^4 M_B(\bar{F}_i) = -6 \cdot S_2 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^4 M_D(\bar{F}_i) = R_B \cdot 6 - S_3 \cdot KD = 0.$$

Підставляючи необхідні дані, знаходимо

$$S_3 = 3R_B = 75 \text{ кН}, \quad S_1 = -\frac{6R_B}{KL} = -79 \text{ кН}, \quad S_2 = 0.$$

Отже, зусилля  $S_3$  – розтяжне,  $S_1$  – стисальне,  $S_2$  – нульове (при заданому навантаженні стрижень 2 не працює, але з конструкції його вилучити не можна, оскільки порушиться жорсткість конструкції і не виконається умова (4.1)).

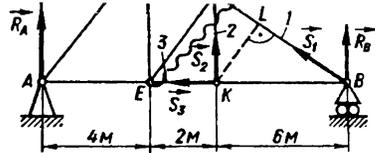


Рис. 4.3

На завершення порівняємо методи Максвелла – Кремони і Ріттера, незважаючи на їх відмінність, яка полягає в тому, що перший метод належить до графічних, а другий – до аналітичних.

Як видно із попереднього викладу, зусилля методом вирізання вузлів визначаються послідовно, переходячи від одного вузла до сусіднього. Тому неминуче накопичення похибок, пов'язаних з неточністю проведення паралельних прямих. Слід зазначити, що накопичення цих похибок можна уникнути при розв'язуванні задачі суто аналітичним способом, складаючи рівняння рівноваги для системи збіжних сил, прикладених у вузлах ферми.

Але, з іншого боку, взаємний зв'язок між побудовою нових вершин діаграми Максвелла – Кремони та положенням попередніх слід розглядати як певне обмеження похибок, що дає змогу уникнути грубих помилок.

Метод Ріттера на відміну від попереднього не призводить до накопичення похибок, бо всі зусилля визначаються незалежно одне від одного, але одночасно це не дає можливості помітити грубі помилки, що можуть трапитись при обчисленні.

Очевидно, найкраща методика визначення зусиль у стрижнях ферми полягатиме в поєднанні методів Максвелла – Кремони

та Ріттера. Наприклад, усі зусилля визначаються за методом Максвелла – Кремони і деякі з них перевіряються за методом Ріттера.

### Питання для самоконтролю

1. Які конструкції називають фермами?
2. Які припущення при розрахунках ферм застосовують у теоретичній механіці?
3. Які ферми називають простими?
4. Як зв'язані між собою кількість стрижнів та вузлів у простих фермах?
5. У чому полягає сутність методу вирізання вузлів при розрахунку зусиль у стрижнях ферм?
6. Чи потрібно визначати реакції опор при розрахунку зусиль у стрижнях ферм?
7. У чому полягає головна ідея методу Ріттера розрахунку ферм?
8. Чому неможливі грубі помилки в методі Максвелла – Кремони?
9. У чому головний недолік методу Ріттера?
10. Як найефективніше вести розрахунки ферм, щоб виключити грубі помилки при розрахунках?

## Розділ 5

### СТАТИЧНІ ІНВАНІАНТИ.

#### ЗВЕДЕННЯ ДОВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ СИЛ ДО НАЙПРОСТІШОГО ВИДУ

##### § 5.1. Змінення головного вектора і головного моменту при зміні центра зведення

Нехай задано довільну просторову систему сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , прикладених до твердого тіла (рис. 5.1). З'ясуємо, як змінюються головний вектор і головний момент цієї системи при перенесенні центра зведення з деякої довільно взятої точки  $O$  в іншу довільно взятую точку  $O_1$ .

При зведенні заданої системи сил до центра  $O$ , як відомо, отримуємо еквівалентну систему, яка характеризується головним вектором і головним моментом у вигляді

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (5.1)$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

Зведемо задану систему до нового центра зведення  $O_1$ . Очевидно, головний вектор системи при цьому не зміниться. А от головний момент зміниться, бо відносно нового центра зведення моменти кожної з сил системи стане іншим. Нехай  $\vec{r}_{i1}$  радіус-

вектор точки прикладення сили  $\vec{F}_i$ , проведений з центра  $O_1$ . Тоді

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{i1} \times \vec{F}_i. \quad (5.2)$$

З рис. 5.1 видно, що  $\vec{r}_{i1} = \vec{r}_i + \vec{\rho}$ . Підставляючи цей вираз у (5.2), дістанемо

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{\rho} \times \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (5.3)$$

або

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + \vec{\rho} \times \vec{F}. \quad (5.4)$$

Отже, при зміні центра зведення головний момент змінюється на величину, що дорівнює моменту головного вектора відносно нового центра зведення.

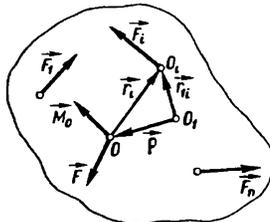


Рис. 5.1

Зазначимо, що із формули (5.4) легко отримати умову рівноваги твердого тіла ще й у такій формі: *для рівноваги твердого тіла необхідно і достатньо, щоб два головні вектори моментів сил, обчислені відносно різних центрів зведення, дорівнювали нулю:*

$$\vec{M}_O = 0, \vec{M}_{O_1} = 0. \quad (5.5)$$

Дійсно, при рівновазі твердого тіла  $\vec{F} = 0$  та  $\vec{M}_O = 0$ , тоді з формули (5.4) отримаємо співвідношення (5.5), до якого ми вже зверталися в § 3.4.

### § 5.2. Статичні інваріанти

У попередньому параграфі ми переконалися, що головний вектор не змінюється при зміні центра зведення, тобто він є статичним інваріантом  $I_1$  просторової системи щодо зміни центра зведення.

Покажемо, що другим статичним інваріантом  $I_2$  системи є скалярний добуток головного вектора на головний момент.

Дійсно, помножуючи обидві частини виразу (5.4) скалярно на  $\vec{F}$ , дістанемо

$$\vec{F} \cdot \vec{M}_{O_1} = \vec{F} \cdot \vec{M}_O + \vec{F} \cdot (\vec{\rho} \times \vec{F}). \quad (5.6)$$

Проте другий доданок у правій частині (5.6) дорівнює нулю, оскільки у змішаному добутку є два однакових множника, отже,

$$\vec{F} \cdot \vec{M}_{O_1} = \vec{F} \cdot \vec{M}_O. \quad (5.7)$$

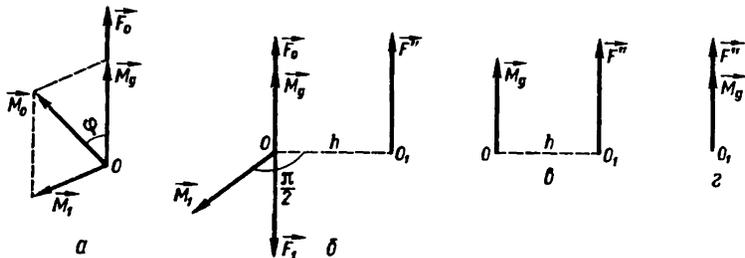


Рис. 5.2

Цьому співвідношенню можна надати іншого вигляду, враховуючи, що  $\vec{F} \cdot \vec{M}_O = F \cdot M_O \cos(\vec{F}, \vec{M}_O)$ , а  $F = \text{const}$ :

$$M_O \cos(\vec{F}, \vec{M}_O) = M_{O_1} \cos(\vec{F}, \vec{M}_{O_1}) = \text{const}. \quad (5.8)$$

Отже, скалярний добуток головного вектора на головний момент (5.2) або проєкції головного моменту на напрям головного вектора (5.8) є величиною сталою для заданої системи сил. Ця величина не залежить від вибору центра зведення, а тому є другим статичним інваріантом.

Косинус кута  $\varphi$  між головним вектором і головним моментом визначається за формулою, яка випливає безпосередньо з виразу (5.7):

$$\cos \varphi = \frac{F_x M_{Ox} + F_y M_{Oy} + F_z M_{Oz}}{M_O F}. \quad (5.9)$$

### § 5.3. Динамічний гвинт

Сукупність сили і пари сил з моментом, колінеарним силі, називається *динамічним (силовим) гвинтом*. Задача про зведення просторової системи сил до динамічного гвинта розв'язується за такою теоремою.

**Теорема.** Якщо другий статичний інваріант не дорівнює нулю, то просторову систему сил можна звести до динамічного гвинта.

Доведення. Нехай у точці  $O$  (рис. 5.2, а) просторова система сил зведена до сили, що дорівнює головному вектору  $\vec{F}_O$ , і пари сил з моментом, що дорівнює головному моменту  $\vec{M}_O$ , кут між якими не дорівнює  $\frac{\pi}{2}$  (за умовою теореми  $\vec{F}_O \cdot \vec{M}_O \neq 0$ ).

У цьому разі момент  $\vec{M}_O$  можна розкласти на дві складові, одна з яких ( $\vec{M}_g$ ) напрямлена по лінії дії головного вектора, а інша ( $\vec{M}_1$ ) перпендикулярна до нсї. Складову моменту  $\vec{M}_1$  подамо у вигляді пари сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}''$  (рис. 5.2, б), що за модулем дорівнюють головному вектору  $\vec{F}_O$ . Причому силу  $\vec{F}_1$  прикладемо у центрі зведення  $O$ . Система сил ( $\vec{F}_O, \vec{F}_1$ ) еквівалентна нулю, тому її можна відкинути (рис. 5.2, в). Оскільки момент  $\vec{M}_g$  – вільний вектор, то його можна перенести з точки  $O$  в точку  $O_1$  (рис. 5.2, з).

Отже, задана система сил зведена у точці  $O_1$  до сили  $F'' = \vec{F}_O$  і до пари сил з моментом  $\vec{M}_g$ , колінеарним силі, тобто одержано динамічний гвинт.

Теорему доведено.

Для центра зведення, в якому головний вектор і головний момент розміщені на одній прямій, модуль головного моменту найменший. Це випливає з того, що відповідно до виразу (5.8) проекція головного моменту на напрям головного вектора  $\vec{M}_g$  є незмінною, а складова моменту  $\vec{M}_1$  дорівнює нулю у точці  $O_1$ .

#### § 5.4. Зведення просторової системи сил до найпростішого вигляду

*Зведення системи сил до рівнодійної.*

У загальному випадку довільна система сил зводиться до динамічного гвинта. Якщо при

цьому головний момент виявився таким, що дорівнює нулю, то єдиною характеристикою системи буде головний вектор, що є у цьому разі рівнодійною. З'ясуємо, в яких випадках це можливо.

З рис. 5.2, а випливає, що момент  $\vec{M}_g$  дорівнює нулю, якщо  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , тобто якщо головний момент  $\vec{M}_O$  перпендикулярний до головного вектора.

Звідси випливає, що коли головний вектор  $\vec{F} \neq 0$  і головний момент  $\vec{M}_O \neq 0$ , а другий статичний інваріант  $\vec{F}_O \cdot \vec{M}_O = 0$ , то розглядувана система зводиться до рівнодійної.

*Зведення системи сил до пари.* Нехай центр зведення обрано так, що  $\vec{F} = 0$ ,  $\vec{M}_O \neq 0$ . Оскільки головний вектор є першим статичним інваріантом, тобто не залежить від вибору центра зведення, то він дорівнює нулю при будь-якому центрі зведення. У цьому разі, згідно з формулами (5.3) і (5.4), головний момент також не змінюватиметься при зміні центра зведення. Це означає, що головний момент у цьому разі є вільним вектором, тобто система сил зводиться до пари, момент якої, як відомо, – вільний вектор.

*Зведення до найпростішого виду плоскої системи сил і системи паралельних сил у просторі.* Покажемо, що плоска система сил і система паралельних сил у просторі не зводиться до динамічного гвинта. Дійсно, якщо всі сили лежать в одній площині, наприклад  $Oxy$ , то їхні проекції на вісь  $Oz$  і моменти відносно осей  $Ox$  і  $Oy$  дорівнюватимуть нулю:  $F_{Oz} = 0$ ,  $M_{Ox} = 0$ ,  $M_{Oy} = 0$ . Тоді, згідно з формулою (5.7), другий статичний інваріант плоскої системи сил також дорівнює нулю.

Для просторової системи паралельних сил другий інваріант також дорівнює нулю. Дійсно, нехай усі сили паралельні осі  $Ox$ , тоді їхні проекції на осі  $Oy$  та  $Oz$  і моменти

## Зведення довільної просторової системи сил до найпростішого виду

Перший інваріант (головний вектор) $\vec{F}$	Головний момент $\vec{M}_O$	Другий інваріант $\vec{F} \cdot \vec{M}_O$	До чого зводиться система сил
$\vec{F} = 0$	$\vec{M}_O \neq 0$	$\vec{F} \cdot \vec{M}_O = 0$	До пари сил з моментом $\vec{M}_O$
$\vec{F} \neq 0$	$\vec{M}_O = 0$	$\vec{F} \cdot \vec{M}_O = 0$	До рівнодійної сили $\vec{R} = \vec{F}$ , прикладеної у точці $O$
$\vec{F} \neq 0$	$\vec{M}_O \neq 0$ і перпендикулярний до $\vec{F}$	$\vec{F} \cdot \vec{M}_O = 0$	До рівнодійної сили $\vec{R} = \vec{F}$ , прикладеної у точці $O_1$ ( $OO_1 = \frac{M_O}{F}$ )
$\vec{F} \neq 0$	$\vec{M}_O \neq 0$ і не перпендикулярний до $\vec{F}$	$\vec{F} \cdot \vec{M}_O \neq 0$	До динамічного гвинта
$\vec{F} = 0$	$\vec{M}_O = 0$	$\vec{F} \cdot \vec{M}_O = 0$	До рівноваги цієї системи сил, тобто система сил еквівалентна нулю

відносно осі  $Ox$  дорівнюють нулю, тобто  $F_{Oy} = 0, F_{Oz} = 0, M_{Ox} = 0$ .

Складемо таблицю всіх можливих випадків зведення довільної просторової системи сил до найпростішого вигляду (табл. 5.1).

**Приклад 1.** Задано систему сил  $F_1 = 4$  Н,  $F_2 = 10$  Н,  $F_3 = 5$  Н,  $F_4 = 15$  Н, прикладених відповідно в точках  $A, B, C$  (рис. 5.3). Звести цю систему до найпростішого вигляду.

**Розв'язання.** Визначимо проєкції головного вектора  $\vec{F}$  на осі координат. Маємо

$$F_x = F_3 + F_4 = 20 \text{ Н}, \quad F_y = F_1 = 4 \text{ Н},$$

$$F_z = F_2 = 10 \text{ Н}.$$

Тоді

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{516} \approx 22,7 \text{ Н}.$$

Обчислюємо проєкції головного моменту  $\vec{M}_O$  на осі координат:

$$M_{Ox} = F_2 \cdot 0,5 = 5 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad M_{Oy} = F_4 \cdot 0,3 = 4,5 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{Oz} = F_1 \cdot 0,4 - F_3 \cdot 0,5 = 1,6 - 2,5 = -0,9 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Тоді

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = \sqrt{25 + 20,25 + 0,81} \approx 6,8 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

За формулою (5.9) знаходимо кут між головним вектором і головним моментом:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{5 \cdot 20 + 4 \cdot 4,5 - 10 \cdot 0,9}{22,7 \cdot 6,8} = \\ &= \frac{100 + 18 - 9}{154,4} \approx 0,7. \end{aligned}$$

Отже,  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ ,  $M_O \neq 0$ ,  $F \neq 0$ , тобто ця система сил зводиться до динамічного гвинта.

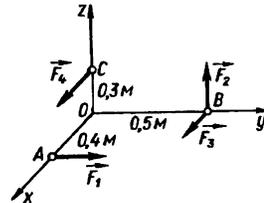


Рис. 5.3

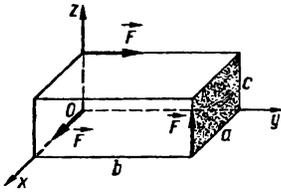


Рис. 5.4

**Приклад 2.** По трьох ребрах прямокутного паралелепіпеда діють три однакові за модулем сили  $F$ . Довжина ребер  $a, b, c$  (рис. 5.4). Як стівідношення має бути між довжинами ребер для того, щоб система сил зводилась до рівнодійної?

**Розв'язання.** Якщо просторова система сил зводиться до рівнодійної, то, згідно з табл. 5.1, головний момент  $\vec{M}_O$  перпендикулярний до головного вектора  $\vec{F}_O$  і, отже, кут  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  ( $\cos \varphi = 0$ ).

Визначаємо головний вектор  $\vec{F}_O$  і головний момент  $\vec{M}_O$  за їхніми проєкціями на осі координат. Маємо

$$\begin{aligned} F_x &= F, & M_{Ox} &= -Fc + Fb = F(b-c), \\ F_y &= F, & M_{Oy} &= -Fa, \\ F_z &= F, & M_{Oz} &= 0. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F^2 + F^2 + F^2} = F\sqrt{3}, \\ M_O &= \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = \\ &= \sqrt{F^2(b-c)^2 + F^2a^2} = \\ &= F\sqrt{(b-c)^2 + a^2}. \end{aligned}$$

Отже, щоб задана система сил зводилась до рівнодійної, потрібно, щоб виконувалась одна з таких умов:

- $\vec{F} \cdot \vec{M}_O = 0$  при  $F \neq 0, M_O \neq 0$ .
- $\vec{F} \cdot \vec{M}_O = 0$  при  $F \neq 0, M_O = 0$ .

У першому випадку

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{F^2(b-c) - F^2a}{F^2\sqrt{3}\sqrt{(b-c)^2 + a^2}} = \\ &= \frac{b-c-a}{\sqrt{3}\sqrt{(b-c)^2 + a^2}} = 0, \end{aligned}$$

звідки дістаємо шукану умову  $a = b - c$ ; у другому –

$$\begin{aligned} M_O &= F\sqrt{(b-c)^2 + a^2} = 0 \Rightarrow (b-c)^2 + a^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a = 0, b = c \quad \text{і} \quad a = b = c = 0, \end{aligned}$$

що відповідає виродженню паралелепіпеда у квадрат або точку.

### § 5.5. Теорема Варіньона (у загальному вигляді)

Узагальнимо теорему Варіньона на просторову систему сил, наведену в § 2.2 для системи збіжних сил.

**Теорема.** Якщо просторова система сил зводиться до рівнодійної, то момент рівнодійної відносно довільної точки дорівнює геометричній сумі моментів сил відносно тієї самої точки.

**Доведення.** Нехай просторова система сил має рівнодійну  $\vec{R}$ , прикладену в точці  $O$ . Це означає, що головний момент цієї системи сил відносно точки  $O$  дорівнює нулю, тобто  $\vec{M}_O = 0$ .

Перенесемо центр зведення в точку  $O_1$ , тоді за означенням головного моменту він дорівнює сумі моментів усіх сил відносно точки  $O_1$ :

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_i). \quad (5.10)$$

Крім того, скориставшись формулою (5.4), маємо

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_i) = \vec{M}_O + \vec{M}_{O_1}(\vec{F}). \quad (5.11)$$

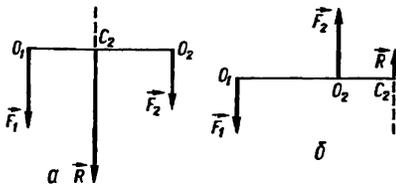


Рис. 5.5

Оскільки  $\vec{M}_O = 0$ ,  $\vec{F} = \vec{R}$ , то з наведених виразів випливає

$$\vec{M}_{O_1}(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_i). \quad (5.12)$$

Теорему доведено.

Для прикладу застосуємо цю теорему при складанні двох паралельних сил. Нехай задано дві паралельні сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , напрямлені в один (рис. 5.5, а) або різні боки (рис. 5.5, б). Як зазначалося в § 5.4, паралельні сили не зводяться до динамічного гвинта, а характеризуються лише одним параметром.

Очевидно, якщо  $\vec{F}_1 \neq -\vec{F}_2$  (тобто вони не утворюють пари сил), то вони зводяться до рівнодійної з певним центром зведення  $C_2$  (рис. 5.5). Положення точки  $C_2$  легко знайти, обчисливши відносно неї момент рівнодійної, який, очевидно, дорівнює нулю в кожному з наведених випадків:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad (5.13)$$

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{F}_1 \times \vec{O_1C_2} - \vec{F}_2 \times \vec{C_2O_2} = 0.$$

Звідси

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{O_1C_2}{C_2O_2}. \quad (5.14)$$

З цих формул випливає, що система двох паралельних сил, які не утворюють пари, має рівнодійну, паралельну цим силам, причому її модуль дорівнює сумі модулів цих

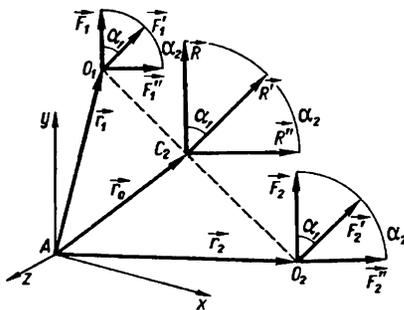


Рис. 5.6

сил, коли сили напрямлені в один бік, і різниці модулів складових сил, коли вони напрямлені в різні боки. Лінія дії рівнодійної поділяє відстань між точками  $O_1$ ,  $O_2$  прикладення сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  на частини, обернено пропорційні модулям цих сил внутрішнім способом, якщо сили напрямлені в один бік, і зовнішнім способом, якщо вони напрямлені в різні боки.

Неважно впевнитися в тому, що при повороті лінії дії заданих сил на один і той самий кут  $\alpha$  рівнодійна повертається на той самий кут. Причому, якщо точку  $C_2$  прикладення рівнодійної взяти як точку перетину лінії дії рівнодійної з лінією, що проходить через точки  $O_1$  і  $O_2$  прикладення сил, то в точці  $C_2$  перетинатимуться всі лінії дії рівнодійної при повороті заданих сил на будь-який кут навколо їхніх точок прикладення. Це твердження впливає з того, що в усіх випадках (на рис. 5.6 показано три випадки –  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_1'$ ,  $\vec{F}_1''$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_2'$ ,  $\vec{F}_2''$ ) виконуються такі рівності:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{O_1C_2}{C_2O_2}. \quad (5.15)$$

На закінчення зазначимо, що на основі теореми Варіньона може бути викладено

теорію рівноваги важеля, який перебуває під дією паралельних сил.

### Питання для самоконтролю

1. Які параметри статички є інваріантами?
2. Чому плоска система сил та система паралельних сил, що не утворюють пару сил, зводяться до рівнодійної?
3. Як знайти найменший головний момент заданої системи сил?
4. В яких випадках просторова система сил зводиться до рівнодійної?
5. Як зміниться головний момент системи сил при зміні центра зведення?

6. В яких двох формах у векторному вигляді можна записати умови рівноваги твердого тіла?
7. Чи можна дві мимобіжні сили звести до динамічного гвинта?
8. До якого найпростішого виду можна привести систему сил, якщо відомо, що головний момент цих сил відносно різних точок на площині має такі властивості:
  - а) різну величину;
  - б) постійну величину, відмінну від нуля;
  - в) дорівнює нулю?
9. В якому випадку умови рівноваги сил, що прикладені до твердого тіла, є одночасно умовами його рівноваги?
10. Як у техніці використовують той факт, що коефіцієнт тертя кочення менший за коефіцієнт тертя ковзання?

## Розділ 6 ЦЕНТР ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ І ЦЕНТР ВАГИ

### § 6.1. Центр паралельних сил. Координати центра паралельних сил

*Центром паралельних сил називається точка на лінії дії рівнодійної цих сил, яка не змінює свого положення при повороті всіх сил навколо точок їх прикладення на один і той самий кут в одному напрямі.*

З цього означення випливає, що взята точка  $C_2$  прикладення рівнодійної системи двох паралельних сил, розглянутої в попередньому параграфі, є їхнім центром. Надамо співвідношенню (5.13) іншого вигляду:

$$\frac{\vec{r}_{C_2} - \vec{r}_1}{F_2} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_{C_2}}{F_1}, \quad (6.1)$$

де  $\vec{r}_{C_2}$ ,  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  – відповідно радіуси-вектори точок  $C_2$ ,  $O_1$ ,  $O_2$  у взятій системі координат (рис. 5.6).

З цього виразу знаходимо

$$\vec{r}_{C_2} = \frac{F_1 \vec{r}_1 + F_2 \vec{r}_2}{F_1 + F_2} = \frac{\sum_{i=1}^2 F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^2 F_i}. \quad (6.2)$$

Перейдемо тепер до системи  $n$  паралельних сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_k, \dots, \vec{F}_n$ , які прикладені у точках  $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_n$  і визначаються у вибраній системі координат з центром  $O$  відповідно радіусами-векторами  $\vec{OA}_1, \vec{OA}_2, \dots, \vec{OA}_k, \dots, \vec{OA}_n$ , які позначимо через  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_k, \dots, \vec{r}_n$ . Нехай  $C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_n$  – відповідно центри двох, трьох і більше паралельних сил. Для випадку двох паралельних сил вираз для  $\vec{r}_{C_2}$  одержано у вигляді (6.2); у випадку трьох паралельних сил він має аналогічний вигляд:

$$\vec{r}_{C_1} = \frac{\sum_{i=1}^3 F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^3 F_i}.$$

Враховуючи загальний закон складання виразів для радіусів-векторів центрів  $C_2, C_3$ , за методом повної індукції переходимо від  $k$  сил до  $k+1$ -ї сили. Беручи до уваги, що

$$\begin{aligned}\overline{C_k C_{k+1}} &= \vec{r}_{C_{k+1}} - \vec{r}_{C_k}, \\ \overline{C_{k+1} A_{k+1}} &= \vec{r}_{A_{k+1}} - \vec{r}_{C_{k+1}},\end{aligned}\quad (6.3)$$

дістанемо

$$\vec{r}_{C_{k+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{k+1} F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{k+1} F_i}.\quad (6.4)$$

Отже, точка  $C$ , через яку проходить рівнодійна системи  $n$  паралельних сил, визначається за формулою

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i}{F},\quad (6.5)$$

$$\text{де } F = \sum_{i=1}^n F_i.$$

Ці міркування для виведення виразу (6.5) належали до системи паралельних сил, напрямлених в один бік. Проте, якщо задано систему паралельних сил, напрямлених у різні боки, то, поділивши сили на дві групи, кожна з яких включає тільки сили одного напрямку, і знаходячи рівнодійну кожної групи, а потім, використовуючи співвідношення (5.7), приходимо до вихідної формули.

Проектуючи обидві частини рівності (6.5) на координатні осі, дістанемо

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{F}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{F},\quad (6.6)$$

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i}{F}.$$

Із виразів (6.5) та (6.6) випливає, що положення центра паралельних сил не залежить від напрямку сил, а залежить тільки від їхніх модулів і їхніх точок прикладення. Це дає змогу узагальнити властивість системи

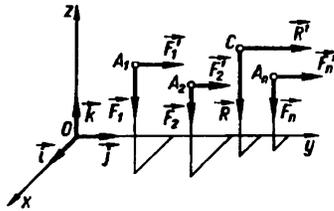


Рис. 6.1

паралельних сил, сформульовану в попередньому параграфі для випадку двох сил, на систему  $n$  сил, а саме: якщо всі сили заданої системи паралельних сил повернути на один і той самий кут, зберігаючи незмінними їхні точки прикладення, то і рівнодійна цих сил повернеться на той самий кут, причому положення центра паралельних сил не зміниться.

Покажемо, що формули (6.6) для координат центра  $C$  паралельних сил (рис. 6.1) можна отримати також за допомогою теореми Варіньона про момент рівнодійної відносно довільного центра (див. § 5.5). Згідно з теоремою Варіньона (5.12)

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i)\quad (6.7)$$

або

$$\vec{r}_C \times \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i,\quad (6.8)$$

$$\text{де } \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}.$$

Введемо одиничний вектор  $\vec{u}$ , паралельний лінійям дії сил  $\vec{F}_i$ . Тоді кожна із заданої системи сил може бути виражена через вектор  $\vec{u}$ :

$$\vec{F}_i = \vec{u} F_i^* \quad (i=1, \dots, n),\quad (6.9)$$

де  $F_i^* = |\vec{F}_i| = +F_i$ , коли напрямки векторів  $\vec{F}_i$  і  $\vec{u}$  збігаються, і  $F_i^* = -|\vec{F}_i| = -F_i$ , коли ці напрямки протилежні, тобто  $F_i^* = \pm F_i$ .

Підставивши співвідношення (6.9) у вираз (6.8), отримаємо

$$\vec{r}_C \times \vec{u} \sum_{i=1}^n F_i^* = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{u} F_i^* . \quad (6.10)$$

Оскільки вектор  $\vec{u}$  може мати будь-який напрям у просторі (лінійній дії сил  $\vec{F}_i$  можна повертати на довільний однаковий кут відносно точок їх прикладення), приходимо до висновку, що на цей вектор можна поділити обидві частини рівняння (6.10), яке після цього набуде вигляду

$$\vec{r}_C \sum_{i=1}^n F_i^* = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i F_i^* . \quad (6.11)$$

Звідси знаходимо векторну формулу (6.5), або еквівалентні їй три скалярні співвідношення (6.6). Величини  $\sum_{i=1}^n F_i x_i$ ,

$\sum_{i=1}^n F_i y_i$ ,  $\sum_{i=1}^n F_i z_i$  називають *статичними моментами* системи паралельних сил відносно координатних площин відповідно  $Oxy$ ,  $Oxz$ ,  $Oxy$ .

Якщо початок координат – точку  $O$  – сумістити з центром паралельних сил точкою  $C$ , то ці величини дорівнюватимуть нулю.

Якщо систему паралельних сил зв'язати з образом механічної системи матеріальних точок з масами  $m_i$ , що рухаються з однаковим прискоренням, і знаходяться під дією сил інерції, то поряд з поняттям центра паралельних сил вживають також термін центр мас, або центр інерції системи. У цьому випадку радіус-вектор центра мас визначається за формулою, яка аналогічна (6.5):

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} . \quad (6.12)$$

## § 6.2. Центр ваги твердого тіла

Якщо тверде тіло, розмірами якого можна знехтувати порівняно з розмірами Землі, знаходиться в полі сил тяжіння, наприклад, поблизу земної поверхні, то з великим ступенем точності можна вважати, що сили ваги  $\Delta \vec{P}_i$  окремих часток (рис. 6.2) тіла складають систему паралельних сил.

Ця гіпотеза про паралельність сил ваги є виправданою в багатьох задачах техніки. Наприклад, якщо увявити собі потяг завдовжки 1870 м, що складає 1 морську милю, то напрями сил ваги першого і останнього вагонів будуть відхилитись від паралельності лише на 1 дугову мінуту, бо радіус Землі в середньому дорівнює 6371 км. Рівнодійна таких паралельних сил ваги дорівнює вазі всього тіла чи системи тіл, а центр такої паралельної системи сил називають *центром ваги* тіла. Вказана гіпотеза еквівалентна гіпотезі про те, що поверхня Землі є плоскою і Земля не обертається. Зрозуміло, що в задачах небесної механіки, в задачах про рух штучних супутників Землі, в задачах про рух кораблів, літаків, ракет тощо сили ваги розглядають як центральні сили. У цьому випадку робочою гіпотезою, але теж наближеною, є гіпотеза про те, що поверхня Землі сферична і Земля рівномірно обертається навколо своєї осі.

Нехай  $\Delta V_i$  – об'єм елементарного паралелепіпеда з центром у точці  $M_i$ , а  $\Delta \vec{P}_i$  – сила ваги, що діє на цей елемент маси  $\Delta m_i$  (рис. 6.2). Тоді середнього густинного елемента цього об'єму називається відношення  $\Delta m_i / \Delta V_i$ . Стягуючи паралелепіпед у точку  $M_i$ , дістанемо густину  $\gamma(x_i, y_i, z_i)$  в цій точці тіла як і границю середньої густини

$$\gamma(x_i, y_i, z_i) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i} . \quad (6.13)$$

Припустимо, що в центрі кожного паралелепіпеда прикладена сила ваги  $\Delta \vec{P}_i$ , модуль якої  $\Delta P_i = g\gamma_i \Delta V_i$  ( $\gamma_i$  – густина у точці тіла, що збігається з центром паралелепіпеда). Тоді сила ваги  $\Delta \vec{P}_i$  утворює систему  $n$  паралельних сил, центр яких визначиться на основі формули (6.5) у вигляді

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta P_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n \Delta P_i}. \quad (6.14)$$

Переходячи у виразі (6.14) до границі при  $n \rightarrow \infty$  і припускаючи, що розміри всіх паралелепіпедів прямують до нуля, дістанемо

$$\vec{r}_C = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g\gamma_i \Delta V_i \vec{r}_i}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g\gamma_i \Delta V_i}. \quad (6.15)$$

Границі сум у цьому виразі є інтегралами, поширеними на об'єм  $V$  тіла, причому границя знаменника дорівнює вазі  $P$  тіла. У результаті отримаємо

$$\vec{r}_C = \frac{\int_{(V)} g\gamma(x, y, z) \vec{r} dV}{P} \quad (6.16)$$

або в проєкціях на координатні осі

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\int_{(V)} x\gamma g dV}{P}, \\ y_C &= \frac{\int_{(V)} y\gamma g dV}{P}, \\ z_C &= \frac{\int_{(V)} z\gamma g dV}{P}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

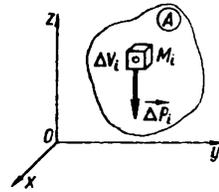


Рис. 6.2

Вирази (6.16) і (6.17) визначають центр ваги неоднорідного тіла.

**Центр ваги однорідного твердого тіла.**  
У разі однорідного твердого тіла його густина буде постійною ( $\gamma = \text{const}$ ), тому

$$P = g\gamma V; \quad dP = g\gamma dV. \quad (6.18)$$

Підставивши значення (6.18) у формули (6.17), знайдемо

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\int_{(V)} x dV}{V}, \\ y_C &= \frac{\int_{(V)} y dV}{V}, \\ z_C &= \frac{\int_{(V)} z dV}{V}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Із формул (6.19) видно, що положення центра ваги однорідного тіла залежить тільки від геометричної форми і розмірів твердого тіла. Тому *центр ваги однорідного твердого тіла можна назвати центром об'єму тіла*. Інтеграли, що стоять у чисельниках формул (6.19), називаються *статичними моментами об'єму тіла* відносно координатних площин, тобто  $\int_{(V)} x dV$  – ста-

тичний момент відносно площини  $yOz$ ,  $\int_{(V)} y dV$  – статичний момент відносно пло-

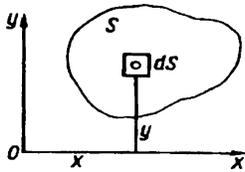


Рис. 6.3

щини  $xOz$ ,  $\int_V zdV$  – статичний момент відносно площини  $xOy$ . У разі, якщо паралельні сили неперервно розподілені по деякій однорідній ( $\gamma = \text{const}$ ) поверхні  $S$ , то  $P = \gamma S$ , а сила ваги  $dP$  елемента поверхні  $dS$  буде  $dP = \gamma g dS$ . За допомогою формул (6.17) у цьому разі дістанемо

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\int x dS}{S}, \\ y_C &= \frac{\int y dS}{S}, \\ z_C &= \frac{\int z dS}{S}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Формули (6.20) виражають координати центра ваги однорідної поверхні. Очевидно, вони застосовуються також в окремому випадку, коли фігура плоска.

**Центр ваги площини плоскої фігури.** Стосовно плоскої фігури інтеграли, що стоять у чисельниках формул (6.20), називаються *статичними моментами площі плоскої фігури* відносно координатних осей  $Oy$  і  $Ox$  (рис. 6.3):

$$M_y = \int (S) y dS; \quad M_x = \int (S) x dS. \quad (6.21)$$

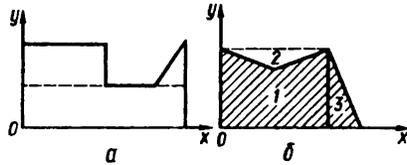


Рис. 6.4

З урахуванням позначень (6.21) формули (6.20) можна переписати у вигляді

$$x_C = \frac{M_y}{S}; \quad y_C = \frac{M_x}{S}. \quad (6.22)$$

Якщо плоска фігура може бути розбита на скінченне число елементарних фігур (наприклад, на рис. 6.4,  $a$  фігура складається з двох прямокутників і трикутника), то статичні моменти виражаються сумою добутків площ  $S_i$  елементарних фігур, на які розбито цю фігуру (прямокутник, трикутник та ін.), на відстані центра ваги кожної площі, що складають цю плоску фігуру, від відповідної осі координат:

$$M_x = \sum_{i=1}^n y_i S_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^n x_i S_i. \quad (6.23)$$

Підставляючи ці значення статичних моментів у формули (6.22), дістанемо

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i S_i}{S}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i S_i}{S}, \quad (6.24)$$

де  $x_i$ ,  $y_i$  – відповідні координати центра ваги і площ елементарних фігур;  $S_i$  – площі елементарних фігур.

Якщо плоска фігура, центр ваги якої потрібно визначити, має вирізи (рис. 6.4,  $b$ ), то площі вирізаних фігур у формулах (6.24) слід брати зі знаком мінус, а якщо вона обмежена криволінійним контуром, то застосовують формули (6.20).

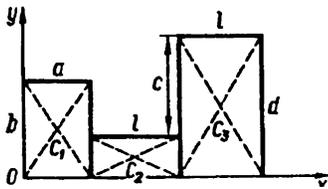


Рис. 6.5

**Приклад 1.** Визначити координати центра ваги площі фігури (рис. 6.5), якщо  $a=0,1$  м;  $b=0,6$  м;  $c=0,4$  м;  $d=1$  м;  $l=0,4$  м.

**Розв'язання.** Розіб'ємо фігуру на три прямокутники. Дані про площі елементарних фігур, а також координати їхніх центрів ваги запишемо в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

$i$	$S_i$	$x_i$	$y_i$
1	0,06	0,05	0,3
2	0,24	0,3	0,3
3	0,4	0,7	0,5

Координати центра ваги всієї фігури знайдемо за формулами (6.24)

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i S_i}{S} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{0,003 + 0,072 + 0,28}{0,7} = \frac{0,355}{0,7} = 0,5 \text{ (м);}$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i S_i}{S} = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{0,018 + 0,072 + 0,2}{0,7} = \frac{0,29}{0,7} = 0,4 \text{ (м).}$$

**Приклад 2.** Визначити координати центра ваги площі колового сектора  $AOB$  з центральним кутом  $\angle AOB = \alpha = \frac{\pi}{4}$  і радіусом  $r = 0,2$  м (рис. 6.6).

**Розв'язання.** Оскільки коловий сектор має вісь симетрії  $Ox$ , то центр ваги знаходимо на цій самій осі. Тому слід визначити лише

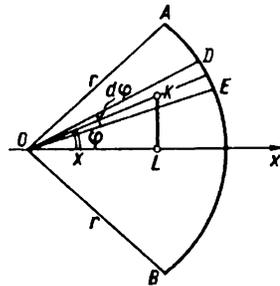


Рис. 6.6

координату  $x_C$ . За першою формулою (6.20) знайдемо

$$x_C = \frac{\int x dS}{S}.$$

Площа сектора буде  $S = \frac{1}{2} r^2 \alpha$ . Виділивши елементарний сектор  $ODE$ , знайдемо  $dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$ ;

$$\angle KOL = \varphi, \quad OK = \frac{2}{3} r, \quad x = OL = OK \cos \varphi = \frac{2}{3} r \cos \varphi.$$

Визначимо статичний момент

$$\int_{(s)} x dS = \frac{2}{3} r \cdot \frac{1}{2} r^2 \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{3} r^3 \sin \frac{\pi}{8}.$$

Остаточно дістанемо, м,

$$x_C = \frac{\frac{2}{3} r^3 \sin \frac{\pi}{8}}{\frac{1}{2} r^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{16}{3} r \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{\pi}.$$

**Центр ваги ліній.** Нехай однорідне тіло має форму тонкого криволінійного стрижня  $AB$  (рис. 6.7) з постійною площею  $S$  поперечного перерізу. Виділимо елемент тіла  $DK$  завдовжки  $dl$  і запишемо формулу для

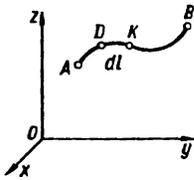


Рис. 6.7

його об'єму і об'єму всього тіла:  $dV = Sdl$ ;  $V = Sl$ , де  $S$  – площа поперечного перерізу стрижня,  $l$  – довжина стрижня. Тоді за формулами (6.19) дістанемо

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\int_A^B x dl}{l}, \\ y_C &= \frac{\int_A^B y dl}{l}, \\ z_C &= \frac{\int_A^B z dl}{l}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Криволінійні інтеграли, що стоять у чисельниках, є *статичними моментами лінії AB* відносно координатних площин. Центр ваги однорідного криволінійного стрижня називають *центром ваги лінії*.

### § 6.3. Теорема Паппа – Гульдіна<sup>1</sup>

З питаннями про визначення положення центрів ваги ліній і площ пов'язані дві елементарні теореми, які називаються теоремами Паппа Гульдіна.

**Теорема 1.** *Площа поверхні тіла, утвореного обертанням плоскої кривої навколо осі, що лежить в її площині та її не перетинає, дорівнює добутковій довжині цієї кривої на*

<sup>1</sup> Ці теореми були знайдені в різні часи геометром Паппа (III ст. н. е.) і Гульдіним (1577–1643).

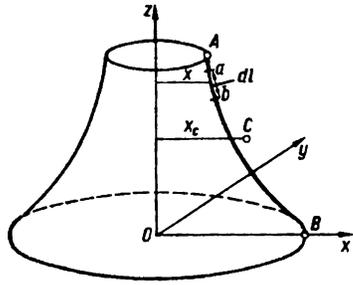


Рис. 6.8

*довжину дуги кола, описаного її центром ваги.*

Нехай  $AB$  (рис. 6.8) – дуга плоскої кривої, яка, обертаючись навколо осі  $Oz$ , утворює бічну поверхню тіла обертання.

Виділимо на кривій  $AB$  елемент  $ab = dl$ . Площа елемента бічної поверхні, що утворена обертанням елемента  $dl$ , може бути обчислена з точністю до величин другого порядку малюнки, як площа бічної поверхні зрізаного конуса.

Отже,

$$dS = 2\pi x dl, \quad (6.26)$$

де  $x$  – приближена координата центра ваги елемента  $dl$ .

Із формули (6.26) випливає, що

$$S = 2\pi \int_A^B x dl. \quad (6.27)$$

На підставі (6.25) матимемо

$$S = 2\pi x_C l. \quad (6.28)$$

Теорема доведена.

**Теорема 2.** *Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо осі, що лежить в її площині і не перетинається з її контуром, дорівнює добутковій площі цієї фігури на довжину кола, описаного її центром ваги.*

Нехай плоска фігура  $Q$  обертається навколо осі  $Oz$  (рис. 6.9). Виділимо елемент площі та розглянемо елемент об'єму тіла обертання, який опише цей елемент площі.

З точністю до нескінченно малих другого порядку малюнки цей елемент об'єму визначається за формулою

$$dV = 2\pi x ds, \quad (6.29)$$

де  $x$  – наближена координата центра ваги елемента  $ds$ .

На підставі формул (6.21) та (6.22) матимемо

$$V = 2\pi x_C S. \quad (6.30)$$

Ця формула виражає другу теорему Паппа – Гульдіна. Зазначимо, що ці теореми мають місце, коли повертати тіло на будь-який кут  $\varphi \leq 2\pi$ .

**Приклад 3.** Обчислити площу бічної поверхні та об'єм  $V$  тора. Тором називають тіло, утворене обертанням кола радіусом  $r$  навколо осі  $Oz$ . Центр кола знаходиться на відстані  $R$  від осі обертання,  $R > r$ .

**Розв'язання.** На підставі першої теореми Паппа Гульдіна матимемо

$$S_b = 2\pi x_C l = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr.$$

На підставі другої теореми

$$V = 2\pi x_C S = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 Rr^2.$$

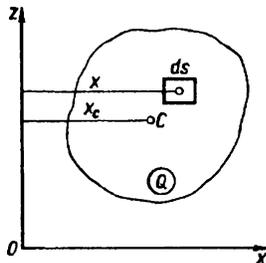


Рис. 6.9

## § 6.4. Центри ваги деяких фігур

**Центр ваги трикутника.** Скористаємося способом розбиття і розділимо трикутник  $ABD$  (рис. 6.10) на елементарні смужки, провівши лінії, паралельні стороні  $AD$ . Кожну таку смужку можна прийняти за прямокутник; центри ваги цих прямокутників знаходяться в їх серединах, тобто на медіані  $BK$  трикутника.

Розбиваючи погім трикутник на елементарні смужки лініями, паралельними стороні  $AB$ , приходимо до висновку, що центр ваги трикутника має лежати на медіані  $DL$ .

Отже, центр ваги трикутника  $C$  знаходиться в точці перетину його медіан. Як відомо, ця точка ділить кожну із медіан на відрізки у відношенні 1:2, тобто  $KC:CB = 1:2$ ,  $LC:CD = 1:2$  або  $KC:KB = 1:3$ ,  $LC:LD = 1:3$ .

**Центр ваги трапеції.** Аналогічно попередньому випадку розб'ємо трапецію  $ABDK$  (рис. 6.11) на елементарні смужки, паралельні основам  $BD$  і  $AK$ . Центри ваги цих смужок розташуються на прямій  $EL$ ,

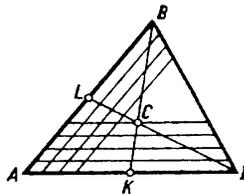


Рис. 6.10

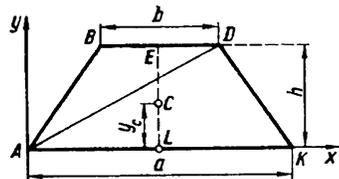


Рис. 6.11

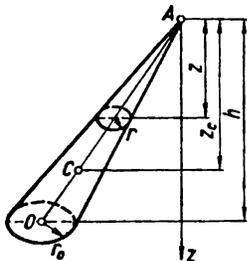


Рис. 6.12

що з'єднає середини основ трапеції. Отже, і центр ваги трапеції лежить на цій прямій.

Для того щоб знайти координату  $y_C$  як відстань від нижньої основи, розіб'ємо трапецію на два трикутники  $ABD$  і  $ADK$ . Для кожного з них відповідно маємо

$$y_1 = \frac{2}{3}h; S_1 = \frac{bh}{2}; y_2 = \frac{1}{3}h; S_2 = \frac{ah}{2}. \quad (6.31)$$

Скориставшись формулою (6.24), отримаємо

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{h}{3} \frac{(a+2b)}{(a+b)} = \\ &= \frac{h}{3} \left( 1 + \frac{b}{a+b} \right). \end{aligned} \quad (6.32)$$

**Центр ваги конуса і піраміди.** Нехай маємо конус, висота якого  $h$ . Потрібно знайти координату центра ваги точки  $C$  конуса (рис. 6.12).

На висоті  $z$  виділимо елементарний об'єм, що дорівнює добутковій площі перерізу  $P$  на  $dz$ , тобто

$$dV = Pdz = \pi r^2 dz. \quad (6.33)$$

Далі, скориставшись формулою (6.19), отримаємо

$$z_C = \frac{1}{V} \int (r) z dV = \frac{1}{V} \int_0^h z \pi r^2 dz. \quad (6.34)$$

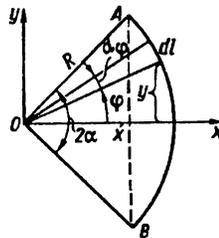


Рис. 6.13

Очевидно, що для конуса (рис. 6.12) має місце співвідношення

$$\frac{r}{z} = \frac{r_0}{h}. \quad (6.35)$$

Якщо врахувати, що об'єм конуса дорівнює  $V = \frac{1}{3} \pi r_0^2 h$ , то, підставивши його в (6.34) і у вираз для  $r$  із (6.35), отримаємо

$$z_C = \frac{1}{(\frac{1}{3}) \pi r_0^2 h} \int_0^h \pi z^3 \frac{r_0^2}{h^2} dz = \frac{3}{4} h. \quad (6.36)$$

Отже, центр ваги конуса лежить на лінії  $AO$ , що з'єднає вершину конуса із центром ваги основи і ділить її у відношенні 1:4, тобто  $OC : OA = 1:4$  або  $OC = \frac{1}{4} OA$ .

Очевидно, що таке саме співвідношення матиме місце і для піраміди.

**Центр ваги дуги кола.** Розглянемо дугу  $AB$  кола радіусом  $R$  з центральним кутом  $2\alpha$ . Виберемо початок координат у центрі кола і направимо вісь  $Ox$  перпендикулярно хорді  $AB$  (рис. 6.13).

Внаслідок симетрії фігури відносно осі  $Ox$  центр ваги її лежить на осі  $Ox$ , тобто  $y_C = 0$ , тому залишається знайти  $x_C$ .

Для цього скористаємось формулою (6.25) для центра ваги лінії, враховуючи, що  $x = R \cos \varphi$ ;  $l = 2R\alpha$ ;  $dl = R d\varphi$ :

$$x_C = \frac{A}{l} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \varphi R d\varphi}{2R\alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha} = \frac{R \cdot 2R \sin \alpha}{2R\alpha} = \frac{(\text{радіус}) \cdot (\text{хорда})}{(\text{дуга})}, \quad (6.37)$$

де  $\alpha$  – половина центрального кута в радіанах.

Зокрема, для центра ваги дуги півкола ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ) матимемо

$$x_C = \frac{2R}{\pi}. \quad (6.38)$$

Зауважимо, що останню формулу (6.38) для центра ваги дуги півкола легко отримати також за допомогою першої теореми Паппа – Гульдїна.

Нехай відстань центра ваги дуги півкола від діаметра буде  $x_C$ .

Якщо обертати дугу півкола навколо діаметра, на який вона спирається, то одержимо сферу. Тоді на підставі формули (6.28) матимемо

$$4\pi R^2 = 2\pi x_C \cdot \pi R. \quad (6.39)$$

Звідси

$$x_C = \frac{2R}{\pi}. \quad (6.40)$$

Ми знову одержали формулу (6.38).

**Центр ваги колового сектора.** Нехай задано коловий сектор з центральним кутом  $2\alpha$  і радіусом  $R$  (рис. 6.14). Виділимо в ньому елементарний сектор (заштрихований на рис. 6.14), який можна прийняти за рівнобедрений трикутник, в якому висота і медіана збігаються. Отже, центр ваги кожного елементарного трикутника лежить на відстані  $\frac{2}{3}R$  від початку координат. Відповідно геометричним місцем центрів ваги

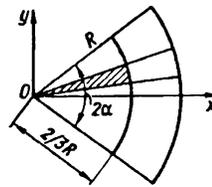


Рис. 6.14

всіх елементарних трикутників буде дуга кола радіусом  $\frac{2}{3}R$ . Це означає, що центр ваги площі колового сектора можемо шукати як центр ваги матеріальної лінії, по якій неперервно і рівномірно розподілена вага сектора. У цьому випадку можна застосувати формулу (6.37).

У результаті дістанемо

$$x_C = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (6.41)$$

де  $\alpha$  – половина центрального кута в радіанах.

Зокрема, для сектора у формі півкруга ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ) отримаємо

$$x_C = \frac{4R}{3\pi}. \quad (6.42)$$

Зауважимо, що для отримання формули (6.42) також ефективним є застосування другої теореми Паппа – Гульдїна.

Обертаючи півкруг навколо діаметра, на який він спирається, одержимо кулю. На підставі формули (6.30) матимемо

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi x_C \frac{1}{2}\pi R^2. \quad (6.43)$$

Звідси

$$x_C = \frac{4R}{3\pi}, \quad (6.44)$$

тобто ми знову прийшли до формули (6.42).

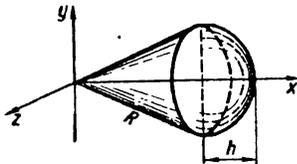


Рис. 6.15

**Центр ваги сегмента і сектора кулі.** Наведемо без виведення формули для центра ваги поверхні сегмента кулі заввишки  $h$  і радіусом  $R$  та відповідного об'єму сектора кулі (рис. 6.15).

Для поверхні сегмента кулі маємо

$$x_C = R - \frac{h}{2}. \quad (6.45)$$

Для сектора кулі

$$x_C = \frac{3}{4} \left( R - \frac{h}{2} \right). \quad (6.46)$$

### § 6.5. Статична стійкість положення рівноваги і твердого тіла

*Положення статичної рівноваги твердого тіла будемо називати статично стійким, якщо при невеликих відхиленнях тіла від цього положення момент, який повертає тіло в положення рівноваги, буде більшим за збурюючий момент, що відхилив тіло від цього положення.*

Зауважимо, що більш повне поняття стійкості рівноваги з урахуванням динаміки тіла дамо пізніше в розділі аналітичної механіки, там же введемо поняття стійкості руху системи.

Поняття стійкості статичної рівноваги тіла - це лише необхідна умова стійкості положення рівноваги, коли відсутній рух тіла, тобто без урахування його динаміки і збурення початкових умов.

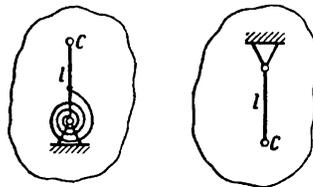


Рис. 6.16

Як буде показано нижче, незважаючи на вузькість самого поняття статичної стійкості, воно може бути корисним при розв'язуванні багатьох прикладних задач статички, що зводяться до схеми одноланкового механізму.

Більшість одноланкових механізмів або тіл зводяться до схеми фізичного маятника з верхнього чи нижнього маятниковістю (рис. 6.16).

Щоб тіло з верхньою маятниковістю зберігало вертикальне положення відносно опори тіла, потрібно створити момент сил, який утримував би його в цьому положенні.

Прикладами системи з верхньою маятниковістю є, зокрема, підймальні крани на рухомих основі (на шасі автомобіля чи іншого рухомого об'єкта) (рис. 6.17, а), або й самі об'єкти, що рухаються по поверхні Землі, у воді або в повітрі. Якщо жорсткість пружних опор (коліс чи упорів) позначити  $k$ , то при повороті на невеликий кут  $\alpha$  (рис. 6.17, б) в опорах  $A$  і  $B$  виникнуть сили  $(\vec{F}, -\vec{F})$ , що створять пару сил з моментом  $F l$ , який протилежно напрямлений моменту сили ваги  $P$  тіла  $Q$  відносно точки  $O$  (рис. 6.17, б). Очевидно, що тіло  $Q$  утримається у вертикальному положенні, якщо момент пари пружних опор буде більшим за момент сили ваги  $P$ , яка намагається перекинути (збурити) тіло  $Q$ . Знайдемо співвідношення між цими силами.

При повороті тіла на кут  $\alpha$ , згідно з законом Гюка, в пружних опорах виникнуть сили

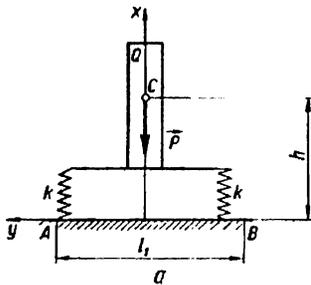


Рис. 6.17

$$F = k\Delta x, \quad (6.47)$$

або

де  $\Delta x = \frac{l_1}{2}\alpha$ ;  $k$  – коефіцієнт лінійної жорсткості опор.

Отже,

$$F = k\frac{l_1}{2}\alpha. \quad (6.48)$$

Момент пари сил пружних опор дорівнюватиме

$$M(\vec{F}, -\vec{F}) = k\frac{l_1}{2}\alpha l_1 = k\frac{l_1^2}{2}\alpha. \quad (6.49)$$

Тим часом момент сили ваги, що повертає тіло,

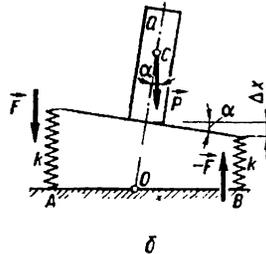
$$M_0(\vec{P}) = Ph\alpha. \quad (6.50)$$

Для стійкості системи потрібно, щоб момент пари пружних сил опор був більшим за момент повертаючої сили ваги, тобто

$$M(\vec{F}, -\vec{F}) > M_0(\vec{P}). \quad (6.51)$$

З урахуванням співвідношень (6.49) та (6.50), нерівність (6.51), скоротивши на  $\alpha$ , перепишемо у вигляді

$$k\frac{l_1^2}{2} > Ph, \quad (6.52)$$



б

$$k > \frac{2Ph}{l_1^2}. \quad (6.53)$$

Як видно з умови (6.53), стійкість системи забезпечити тим легше, чим більша жорсткість опор ( $k$ ) і більша відстань  $l_1$  між опорами.

Цей факт використовується на практиці. Наприклад, крани на автомобільних шасі ставлять на додаткові жорсткі металеві опори, які виносять за межі габаритів автомобіля, щоб збільшити  $l_1$ .

При русі автомобіля по кривій до збуджуючих сил слід додати ще збуджуючий момент від відцентрових сил.

Системи з нижньою маятниковістю реалізують, наприклад, у рухомих об'єктах, що переміщуються по воді або у воді – кораблі, підводні човни (рис. 6.18) тощо. Геометрію цих об'єктів і розташування мас у них вибирають так, щоб центр прикладення гідростатичних сил Архімеда (точка  $O$ ) був завжди вище центра ваги цієї конструкції (точка  $C$ ), тобто реалізують схему фізичного маятника.

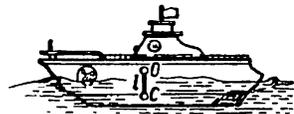


Рис. 6.18

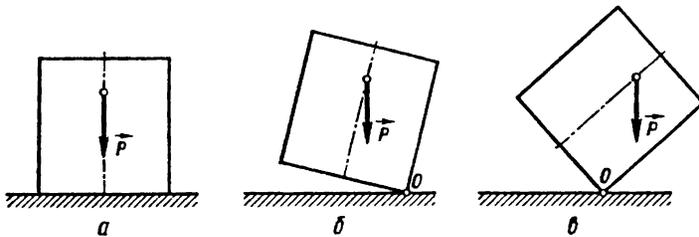


Рис. 6.19

Зауважимо, що визначення статичної стійкості щодо рухомих об'єктів в усталеному режимі їхнього руху інколи називають статичним балансуванням цих об'єктів.

До схеми з верхньою маятниковістю (див. рис. 6.17) зводяться також будівельні конструкції, що прикрішені до основи.

Якщо тверде тіло не прикрішене до основи, то умова його статичної рівноваги така, що сила ваги не повинна виходити за межі основи (рис. 6.19) і створювати момент сили ваги, який перекидає тіло.

У положенні *a* і *б* на рис. 6.19 конструкція є стійкою, а в положенні *в* — нестійкою.

Останнє положення про статичну стійкість реалізується у відомій іграшці “Іванпокиван”, в основі конструкції якої є те, що нижня частина виконана, як правило, у формі

мі півкулі (рис. 6.20), а верхня може мати будь-яку форму, наприклад конуса.

Очевидно, що точка *O* опори такої конструкції лежить на вертикальному радіусі *AO*.

Якщо центр ваги системи (точка  $C_1$ ) лежить нижче точки *A*, то система стійка, якщо вище (точка  $C_2$ ), то нестійка.

Покажемо, як розрахувати габарити цієї конструкції, щоб вона була стійкою. Для цього потрібно знайти формулу для координат центра ваги конструкції, як центра ваги об'ємів, якщо конус і півкуля виконані з одного і того самого матеріалу. Конусу присвоїмо індекс 1, а півкулі — 2.

Відлік будемо вести від точки *B*, тоді

$$y_C = \frac{y_1 V_1 + y_2 V_2}{V_1 + V_2}. \quad (6.54)$$

З урахуванням матеріалів § 6.4 матимемо:

$$y_1 = R + \frac{1}{4}h, V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 h \quad (\text{для конуса}); \quad (6.55)$$

$$y_2 = R - \frac{3}{8}R = \frac{5}{8}R, V_2 = \frac{2}{3}\pi R^3 \quad (\text{для півкулі}).$$

Підставивши (6.55) у (6.54), враховуючи, що  $y_C$  має бути меншим *R*, отримаємо

$$y_C = \frac{\left(R + \frac{1}{4}h\right) \frac{1}{3}\pi R^2 h + \frac{5}{8}R \frac{2}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi R^2 h + \frac{2}{3}\pi R^3} < R. \quad (6.56)$$

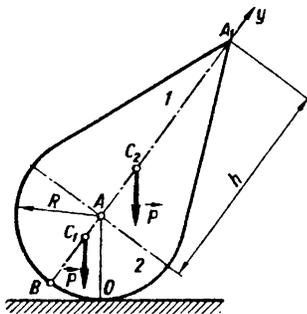


Рис. 6.20

Розділивши чисельник і знаменник на  $\frac{\pi R^2 h}{3}$ , матимемо

$$\frac{R + \frac{h}{4} + \frac{5 R^2}{4 h}}{1 + 2 \frac{R}{h}} < R \quad (6.57)$$

або

$$R + \frac{h}{4} + \frac{5 R^2}{4 h} < R + 2 \frac{R^2}{h}. \quad (6.58)$$

Звідси отримаємо

$$\frac{h^2}{R^2} < 3, \text{ або } h < 1,73R. \quad (6.59)$$

Зазначимо, що, як показано в § 30.3, введене тут поняття статичної стійкості системи – це, по суті, схема формування позиційного від'ємного зворотного зв'язку, якому відповідає в характеристичному рівнянні додатний вільний член.

Це означає, що коли система не має статичної стійкості, то не може бути її стійкості взагалі. Статична стійкість системи – необхідна умова будь-якої її стійкості.

### Питання для самоконтролю

1. Які властивості має центр паралельних сил?
2. Чому вектор сили, яка входить у систему паралельних сил, є вектором прикладеним?
3. За якими формулами визначаються координати центра паралельних сил і центра мас?
4. Що називають статичним моментом площі плоскої фігури відносно осі?
5. Як визначити положення центра ваги плоскої фігури з отворами?
6. Які припущення дають змогу віднести центральні сили тяжіння до категорії паралельних сил?
7. Як би Ви сформулювали теорему Паппа – Гульдіна при обертанні тіла на довільний кут?
8. Як формується поняття статичної стійкості твердого тіла?
9. Як має бути розташований центр ваги плаваючих засобів, щоб вони були статично стійкими?
10. Чому при поворотах мотоцикліст нахилється у бік угнутості дороги?

## Розділ 7 КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

### § 7.1. Короткі історичні відомості про розвиток кінематики

Поява перших досліджень з кінематики пов'язана з винаходом вогнепальної зброї. Увагу дослідників привертало питання визначення траєкторії польоту снаряда, уточнення понять про нерівномірний і криволінійний рух точки. Леоардо да Вінчі (1452–1519) першим вивчив питання про вільне вертикальне падіння важкого тіла. Проте лише завдяки працям Г. Галілея (1564–1642) розвиток механіки безпосередньо пов'язується із запитами тогочасної техніки. Г. Галілей увів поняття про прискорення і довів, що траєкторією руху снаряда, кинутого у пустоті під деяким кутом до горизонту, є парабола. Закони, встановлені Г. Галілеєм, знайшли свій подальший розвиток у працях Е. Торрічеллі (1608–1647), який отримав формулу для визначення швидкості падіння тіла. Й. Кеплер (1571–1630) встановив кінематичні закони руху планет. Х. Гюйгенс (1629–1695) уперше звернув увагу на можливість розкладання прискорення на дотичне та нормальне, строго доведеним якого дав Л. Ейлер (1707–1783). Л. Ейлсру належать основоположні дослідження з кінематики точки при природному способі задання руху, з кінематики обертового руху твердого тіла навколо нерухомої точки. Розвиток кінематики системи точок тісно пов'язаний з ім'ям Ж. Лагранжа (1736–1813).

Бурхливє зростання машинобудування у XIX ст. сприяло новому розвитку кінематики як науки.

Глибокі дослідження з кінематики твердого тіла належать французьким ученим М. Шалло (1793–1886), Л. Пуансо (1777–1859), Г. Коріолісу (1792–1843). У Росії засновником наукової школи з кінематики механізмів був видатний математик П. Л. Чебишов (1821–1894). Його наукові спадок у цьому напрямку розробляли радян-

ські вчені, серед яких відмітимо І. М. Мерцалова (1860–1948), І. І. Артоболевського (1905–1978), О. П. Котельникова (1865–1944), М. Б. Делоне (1856–1931), Л. В. Зернова (1860–1922), Л. В. Ассур (1878–1920) та ін.

М. Є. Жуковському (1847–1921) належить багато праць з теоретичної механіки, у тому числі й з кінематики, в яких широко використовуються геометричні методи доведення різних теорем. Глибокі дослідження з кінематики провів В. Н. Лигин (1846–1910).

У XX ст. розвиток авіації, суднобудування, ракетної та космічної техніки, створення роботів-маніпуляторів, гнучких автоматизованих виробництв дали новий поштовх у розвитку кінематики твердих тіл і просторових механізмів. Дослідження пов'язані з іменами О. М. Крилова, О. Ю. Ішлінського, В. М. Кошлякова, Пола, О. П. Бойчука та ін.

### § 7.2. Вступ до кінематики

*Кінематикою* називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух системи матеріальних точок з геометричної точки зору, зокрема рух абсолютно твердого тіла і матеріальної точки незалежно від діючих на них сил.

Кінематику називають також геометрією руху, оскільки в ній розглядаються геометричні властивості руху. Кінематика вивчає залежності між просторово-часовими характеристиками механічного руху.

Механічні рухи, що вивчаються у кінематиці, відбуваються у просторі та часі. Діалектичний матеріалізм розглядає простір і час як форми існування матерії. “Обидві ці

форми існування матерії без матерії є нічим, порожніми уявами, абстракціями, що існують тільки у нашій голові”<sup>1</sup>. Простір і час нерозривно пов’язані між собою, їх єдність виявляється в русі. В. І. Ленін писав: “У світі немає нічого, крім рухомої матерії, і рухома матерія не може рухатися інакше, ніж у просторі й часі”<sup>2</sup>. Поняття ж простору, часу і рухомої матерії в класичній механіці, яка ґрунтується на законах Ньютона, формально не пов’язані одне з одним і є лише першим наближенням до реальних об’єктивних форм існування матерії, що пізніше математично строго встановлено теорією відносності.

Зазначимо, що в теоретичній механіці простір, в якому відбувається рух тіл, розглядається як тривимірний, і всі вимірювання виконуються на підставі методів евклідової геометрії.

У теоретичній механіці час вважається однаковим у будь-яких системах відліку (системах координат) і не залежним від руху цих систем відносно одна одної. Час позначається буквою  $t$  і розглядається як неперервно змінна величина, що застосовується як аргумент.

У кінематиці при зміні часу розрізняють такі поняття, як проміжок часу і початковий момент часу.

*Проміжком часу* називають перебіг часу між двома фізичними явищами.

*Моментом часу* називають границю між двома суміжними проміжками часу.

*Початковим моментом часу* називають момент часу, з якого починається відлік.

Теорія відносності привела до нових уявлень про простір і час, які значною мірою відрізняються від уявлень класичної механіки. Разом з тим, для випадків руху

тіла зі швидкостями, значно меншими за швидкість світла, тривимірний евклідів простір і універсальний час є повноцінними і досить точними абстракціями реального часу та реального простору.

Отже, можна стверджувати, що теоретичне і практичне значення класичної механіки залишається величезним і в наш час, оскільки дозволяє знайти досить високе наближення до об’єктивно існуючих реальних форм буття, що підтверджується сучасним розвитком техніки, зокрема космонавтики, робототехніки тощо.

Вивчаючи рух тіла, завжди слід знати, відносно якого іншого тіла, що називається *тілом відліку*, розглядається цей рух.

Сукупність тіла відліку, з яким пов’язана система координат, і годинника називають *системою відліку*. Ця система може бути як рухомою, так і умовно нерухомою.

Точки тіла, що рухаються, здійснюють у загальному випадку різні рухи. Тому в першу чергу виникає потреба вивчити рух окремих точок тіла.

У кінематиці немає значення, який рух здійснює вибрана система координат відносно інших тіл, що не входять у межі розв’язуваної задачі, проте завжди слід звертати увагу на те, що характер спостереженого руху значною мірою залежить від вибору системи координат. Наприклад, поршень двигуна внутрішнього згорання здійснює відносно корпусу автомобіля прямолінійний коливальний рух, а відносно дороги, якою рухається автомобіль зі сталою швидкістю, – синусоїдальний.

У класичній механіці постулюється наявність системи відліку, відносно якої простір є однорідним та ізотропним, а час – однорідним.

У цій системі координат ізольована матеріальна точка може необмежено довго знаходитися у стані спокою чи рівномірного прямолінійного руху. Таку систему від-

<sup>1</sup> *Енгельс Ф.* Діалектика природи. Маркс К., Енгельс Ф. – Соч. 2-е изд., т. 20, с. 550.

<sup>2</sup> *Ленін В. І.* Полн. собр. соч., т. 18, с. 181.

ліку називають *інерціальною*. Системи відліку, що не мають вказаних властивостей, називають *неінерціальними*. Всі системи відліку, що знаходяться у стані спокою або рухаються поступально, рівномірно і прямолінійно відносно інерціальної системи відліку, є також інерціальними.

Рух геометричного образу тіла по відношенню до вибраної системи відліку вважається відомим, якщо можна визначити його положення відносно цієї системи в будь-який довільний момент часу.

Залежність параметрів, що характеризують положення геометричного образу відносно системи відліку, від часу визначається відповідними рівняннями, які називають *законом руху* тіла.

Оскільки рух геометричного образу тіла буде відомим, коли буде відомим закон руху всіх його точок, вивчення руху будь-якого геометричного образу передусім вивчення руху однієї його точки.

Ця логіка є основою поділу кінематики на такі розділи, як кінематика точки, кінематика твердого тіла та кінематика сукупності твердих тіл і точок.

### § 7.3. Три способи задання руху точки

Основним завданням кінематики точки є вивчення залежності між довільними положеннями рухомої точки в просторі та часі. Ця залежність визначає *закон руху* точки. Закон руху точки вважається відомим, якщо можна визначити положення точки в просторі у довільний момент часу. Для визначення положення точки у просторі вибирають деяку систему відліку (систему координат). Лінія, яку описує точка при своєму русі, називається *траєкторією*. Якщо траєкторією точки є пряма лінія, то рух точки називається *прямолінійним*, якщо траєкторія точки крива, то – *криволінійним*. Рух точки відносно вибраної системи відліку вважа-

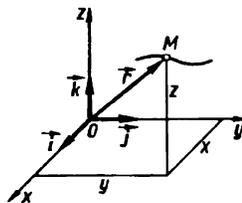


Рис. 7.1

ється заданим, якщо відомо, за допомогою якого способу можна визначити положення точки в будь-який момент часу. Основними просторово-часовими (кінематичними) характеристиками руху точки є її *положення*, *швидкість* і *прискорення*. Виходячи із цього, основна задача кінематики точки полягає в знаходженні способів задання її положення та методів визначення швидкості й прискорення. Рух точки можна визначити трьома способами: векторним, координатним і натуральним.

**Векторний спосіб.** Положення точки можна визначити за допомогою радіус-вектора  $\vec{r}$  (рис. 7.1), проведеного з деякої заданої нерухомої точки  $O$  в дану точку  $M$ . При русі точки радіус-вектор  $\vec{r}$  змінюється за величиною і напрямком. Кожному моменту часу  $t$  відповідає певне значення  $\vec{r}$ . Отже,  $\vec{r}$  є функцією часу  $t$ , тобто  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ .

Функцію  $\vec{r}(t)$  вважають однозначною, тому що розглядувана точка у даний момент часу може знаходитися лише в одному місці простору. Крім того,  $\vec{r}(t)$  має бути неперервною функцією. У більшості задач механіки ця функція є двічі диференційовною функцією часу  $t$ . Рівняння  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  називається *кінематичним рівнянням руху точки у векторній формі*. Це рівняння виражає закон руху точки, а також рівняння траєкторії точки у векторній формі.

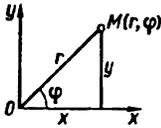


Рис. 7.2

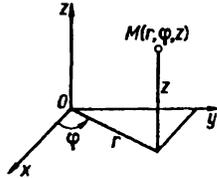


Рис. 7.3

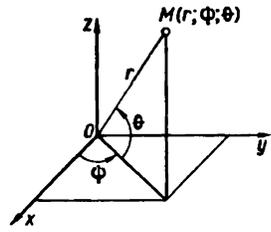


Рис. 7.4

Криву, яку описує кінець будь-якого вектора за умови, що початок його знаходиться весь час в одній і тій самій точці, називають *годографом* вектора. Отже, траєкторія точки є годографом радіуса-вектора  $\vec{r}$ .

**Координатний спосіб.** Цей спосіб визначення руху точки полягає в тому, що задаються координати точки як функції часу (рис. 7.1):

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (7.1)$$

Між векторним і координатним способами задання руху точки існує такий зв'язок:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z, \quad (7.2)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орти (одиничні вектори), відповідно напрямлені по осях координат  $Ox, Oy, Oz$  (рис. 7.1).

На тій же підставі, що й  $\vec{r}(t)$ , функції  $x(t), y(t), z(t)$  однозначні, неперервні і мають неперервні похідні.

Рівняння (7.1) є також рівнянням траєкторії точки у параметричній формі. Виключивши з рівняння (7.1) параметр  $t$ , одержимо рівняння траєкторії в явній формі. Зазначимо, що крім декартової системи координат можуть застосовуватися й інші – криволінійні системи координат, зокрема полярні, циліндричні, сферичні, тощо.

Якщо рух точки задано в полярних координатах (рис. 7.2), то у цьому разі слід задати як функції часу координати  $r$  і  $\varphi$ :

$$r = r(t), \varphi = \varphi(t), \quad (7.3)$$

де  $r$  – полярний радіус;  $\varphi$  – кут між полярною віссю та полярним радіусом.

Виключивши параметр  $t$  з рівнянь (7.3), дістанемо

$$r = r(\varphi). \quad (7.4)$$

У тривимірному просторі застосовуються також циліндричні (рис. 7.3) і сферичні (рис. 7.4) координати. Рівняння руху точки у циліндричних координатах мають вигляд

$$r = r(t), \varphi = \varphi(t), z = z(t). \quad (7.5)$$

У сферичних координатах положення точки визначається полярним радіусом  $r$ , кутами  $\psi$  та  $\theta$  (полісний кут), а рівняння руху точки мають вигляд

$$r = r(t), \psi = \psi(t), \theta = \theta(t). \quad (7.6)$$

Перехід від декартових координат до полярних, циліндричних, сферичних і навпаки матимуть вигляд (рис. 7.2–7.4):

$$\begin{aligned} &\text{полярні} \\ &x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = 0; \\ &r = \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, z = 0; \end{aligned} \quad (7.7)$$

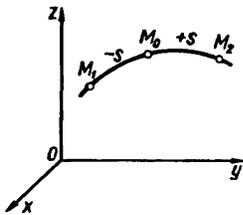


Рис. 7.5

циліндричні

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z(t);$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad z = z(t); \quad (7.8)$$

сферичні

$$x = r \cos \theta \cos \psi, \quad y = r \cos \theta \sin \psi, \quad z = r \sin \theta;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (7.9)$$

Зазначимо, що в усіх наведених тут криволинійних координатах

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

**Натуральний спосіб.** Якщо траєкторія точки відома наперед (наприклад, траєкторія руху потягу, трамвая, тролейбуса тощо), то для визначення закону її руху в просторі достатньо задати положення точки на траєкторії. Тому одну з точок  $M_0$  на траєкторії беруть за початок відліку дугових координат, оскільки положення рухомої точки  $M$  визначається її орієнтованою відстанню  $s$ , яка відлічується по дузі траєкторії від вибраної точки відліку (рис. 7.5). Отже,  $s$  є функцією часу:

$$s = s(t).$$

Наведене рівняння визначає закон руху точки по траєкторії. Функція  $s = s(t)$  має

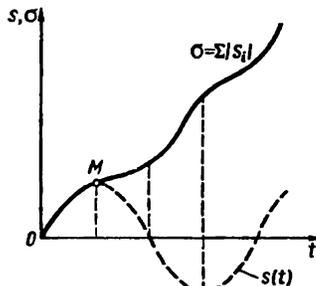


Рис. 7.6

бути однозначною, неперервною та диференційовною.

Зауважимо, що дугова координата точки  $s$  у загальному випадку відрізняється від шляху  $\sigma$ , що пройшла точка по траєкторії. Якщо проміжок часу  $[t_1, t_2]$ , протягом якого рухається точка, розбити на малі проміжки часу  $\Delta t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), в кожному з яких точка рухається в одному напрямку, то шлях  $\sigma$ , пройдений точкою, можна вирахувати за формулою

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |\Delta s_i| = \int_{t_1}^{t_2} |ds|. \quad (7.10)$$

Якщо рух точки заданий координатним способом, то пройдений шлях визначається за формулою<sup>1</sup>

$$\sigma = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt, \quad (7.11)$$

оскільки модуль диференціала дуги

$$d\sigma = |ds| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2},$$

$$dx = \dot{x}dt, \quad dy = \dot{y}dt, \quad dz = \dot{z}dt.$$

<sup>1</sup> $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  – позначення похідних за часом, запропоноване Ньютоном, тобто  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ ,  $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ .

Рівняння  $\sigma = \sigma(t)$  називають *рівнянням пройденого шляху*. Крива, побудована на площині  $(t, \sigma)$ , що виражає залежність  $\sigma = \sigma(t)$ , називається *графіком шляху*, а крива  $s = s(t)$  на площині  $(t, s)$  – *графіком руху* (рис. 7.6).

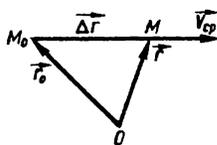


Рис. 7.7

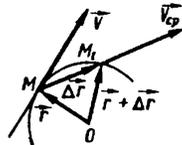


Рис. 7.8

### § 7.4. Швидкість руху точки

Важливою характеристикою руху точки є її швидкість. Поняття швидкості точки у рівномірному прямолінійному русі належить до елементарних понять.

Рух точки називається *рівномірним*, якщо прирости радіуса-вектора точки за однакові проміжки часу будуть рівними між собою.

Для рівномірного прямолінійного руху

$$\Delta \vec{r} = \vec{v}_{cp} \Delta t, \quad (7.12)$$

де  $\vec{v}_{cp}$  – постійний вектор, який називається *середньою швидкістю* руху точки за проміжок часу  $\Delta t$ . Із співвідношення (7.12) видно, що швидкість рівномірного прямолінійного руху є фізичною величиною, яка визначає переміщення точки за одиницю часу:  $\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ . Напрямок вектора  $\vec{v}_{cp}$  наведено на рис. 7.7.

Розглянемо тепер нерівномірний криволінійний рух точки.

Нехай точка  $M$  довільно рухається по деякій кривій і в момент часу  $t$  займає положення  $M$ , а через досить малий проміжок часу  $\Delta t$  вона займає положення  $M_1$  (рис. 7.8). Положення точки  $M$  визначається радіусом-вектором  $\vec{r}$ , а положення точки  $M_1$  – радіусом-вектором  $\vec{r} + \Delta \vec{r}$ . Вектор переміщення точки  $\Delta \vec{r}$  можна одержати також як результат деякого фіктивного рівномірного

прямолінійного руху точки із  $M$  до  $M_1$ , який характеризується середньою швидкістю:

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Напрямок вектора  $\vec{v}_{cp}$  збігається з напрямком вектора  $\Delta \vec{r}$  (рис. 7.8). Очевидно, що середня швидкість лише наближено відображає характер дійсного руху точки.

Щоб одержати швидкість  $\vec{v}$  у даній момент часу або в даній точці, слід перейти до границі:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (7.13)$$

Отже, *швидкість точки дорівнює першій похідній радіуса-вектора точки за часом*.

За одиницю швидкості беруть 1 м/с.

Швидкості точки можна дати й інше визначення. *Швидкістю точки в деякий момент часу  $t$  називається фізична величина, яка залежить від часу і дає змогу наближено визначити переміщення  $\Delta \vec{r}$  за досить малий проміжок часу як результат прямолінійного і рівномірного руху*.

Справді, якщо  $\Delta \vec{r}(t)$  розкласти в ряд Тейлора в точці  $M$ , одержимо

$$\Delta \vec{r} = \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_M \Delta t + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)_M (\Delta t)^2 + \dots \quad (7.14)$$

Звідси, обмежившись величинами першого порядку малювання та перейшовши до границі, дістанемо формулу (7.13) для швидкості.

### § 7.5. Швидкість точки у прямокутній декартовій системі координат

Якщо рух точки задано координатним способом  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , то швидкість точки визначається за її проєкціями на осі координат. Дійсно, розклавши вектор швидкості і радіус-вектор по ортах координатних осей (рис. 7.9), одержимо

$$\vec{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z, \quad \vec{v} = \bar{i}v_x + \bar{j}v_y + \bar{k}v_z, \quad (7.15)$$

де  $x, y, z$  – координати рухомої точки;  $v_x, v_y, v_z$  – проєкції швидкостей на осі координат.

За визначенням швидкості відповідно до формули (7.13) маємо

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \bar{i} \frac{dx}{dt} + \bar{j} \frac{dy}{dt} + \bar{k} \frac{dz}{dt}. \quad (7.16)$$

Підставивши до формули (7.16) значення  $\vec{v}$  із (7.15), одержимо

$$\bar{i}v_x + \bar{j}v_y + \bar{k}v_z = \bar{i} \frac{dx}{dt} + \bar{j} \frac{dy}{dt} + \bar{k} \frac{dz}{dt}, \quad (7.17)$$

звідки

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (7.18)$$

Отже, проєкції швидкості на осі координат дорівнюють першим похідним за часом від відповідних координат точки.

Модуль швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad (7.19)$$

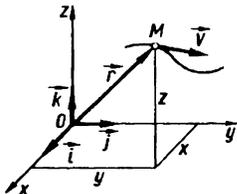


Рис. 7.9

або

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \quad (7.20)$$

Напрямок швидкості знаходиться за напрямними косинусами

$$\cos(\vec{v}, \bar{i}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\vec{v}, \bar{j}) = \frac{v_y}{v},$$

$$\cos(\vec{v}, \bar{k}) = \frac{v_z}{v}. \quad (7.21)$$

При русі точки її швидкість у загальному випадку змінюється в часі. Кожному моменту часу відповідає певний вектор швидкості, напрямлений по дотичній до траєкторії. Розглянемо ряд положень точки на траєкторії, позначивши відповідні значення її швидкості через  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  (рис. 7.10, а). Виберемо довільну нерухому точку  $O$  (рис. 7.10, б) і перенесемо всі вектори швидкості паралельно самим собі так, щоб їх початки збігалися з точкою  $O$ . Оскільки вектор  $\vec{v}$  змінюється з часом неперервно, то кінці перенесених векторів  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  утворюють суцільну криву, що називається годографом вектора швидкості.

Знаючи проєкції швидкості  $\vec{v}$  на осі декартової системи координат, які є координатами точок на годографі, тобто

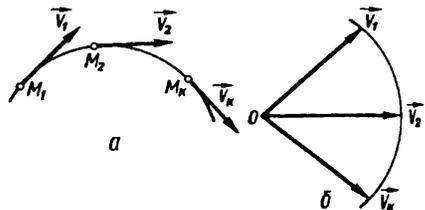


Рис. 7.10

$$x_1 = v_x = f_1(t), \quad y_1 = v_y = f_2(t),$$

$$z_1 = v_z = f_3(t),$$

одержимо в параметричній формі рівняння годографа вектора швидкості. Виключивши параметр  $t$  із цих рівнянь, знайдемо рівняння годографа вектора швидкості в явній формі.

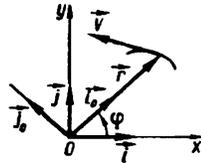


Рис. 7.11

### § 7.6. Швидкість точки у полярних координатах

Якщо рух точки у площині  $Oxy$  задано в полярних координатах  $r = r(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ , то, згідно з (7.7),

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (7.22)$$

Диференціюючи потім  $x$  і  $y$ , знайдемо проєкції швидкості  $\vec{v}$  на осі декартової системи координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \varphi - \frac{rd\varphi}{dt} \sin \varphi = v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi, \quad (7.23)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \varphi + \frac{rd\varphi}{dt} \cos \varphi = v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi,$$

де  $v_r = \frac{dr}{dt}$  – проєкція швидкості на радіальний напрям;  $v_\varphi = \frac{d\varphi}{dt} r$  – проєкція швидкості на трансверсальний напрям (рис. 7.11), перпендикулярний до радіального.

При цьому модуль швидкості

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}. \quad (7.24)$$

Вираз для швидкості в полярних координатах можна одержати й інакше – введенням ортів  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{i}_0$ ,  $\vec{j}_0$  (рис. 7.11). Радіус-

вектор  $\vec{r}$ , який визначає положення точки, може бути поданий у вигляді  $\vec{r} = \vec{i}_0 r$ . При русі змінюється як напрямок ( $\vec{i}_0$ ), так і величина радіуса-вектора  $\vec{r}$ , тому, за визначенням швидкості (7.13), маємо

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{i}_0 r) = \frac{dr}{dt} \vec{i}_0 + r \frac{d\vec{i}_0}{dt}. \quad (7.25)$$

Для визначення похідної одиничного вектора  $\frac{d\vec{i}_0}{dt}$  скористаємося виразами одиничних векторів  $\vec{i}_0$  та  $\vec{j}_0$  через одиничні вектори  $\vec{i}$  та  $\vec{j}$  нерухомих координатних осей (рис. 7.11):

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \vec{i}_0 \cos \varphi - \vec{j}_0 \sin \varphi, \\ \vec{j} &= \vec{i}_0 \sin \varphi + \vec{j}_0 \cos \varphi; \\ \vec{i}_0 &= \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi, \\ \vec{j}_0 &= -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Здиференціювавши співвідношення (7.26) та врахувавши, що  $\vec{i} = \text{const}$  і  $\vec{j} = \text{const}$ , знайдемо

$$\frac{d\vec{i}_0}{dt} = (-\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi) \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{j}_0, \quad (7.27)$$

$$\frac{d\vec{j}_0}{dt} = -(\vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi) \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \vec{i}_0.$$

Скориставшись співвідношенням (7.27), подамо вираз для швидкості у формі

$$\vec{v} = \vec{i}_0 \frac{dr}{dt} + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{j}_0 = \vec{i}_0 v_r + \vec{j}_0 v_\varphi. \quad (7.28)$$

Отже, знайдено проєкції швидкості на радіальний ( $\vec{i}_0$ ) і трансверсальний ( $\vec{j}_0$ ) напрямки.

Спроекувавши їх на координатні осі за допомогою двох співвідношень (7.26), одержимо вираз (7.23). Рекомендуємо самостійно знайти проєкції швидкостей  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  у циліндричній та сферичній системах координат, скориставшись виразами (7.8) і (7.9).

### § 7.7. Швидкість точки при натуральному способі задання руху

Як уже зазначалося, рух точки є заданим у натуральній формі, якщо відомі її траєкторія та закон (рівняння) руху по траєкторії  $s = s(t)$  (див. рис. 7.5). Кожній точці траєкторії відповідає певний радіус-вектор  $\vec{r}$  (рис. 7.12), який можна розглядати як складну функцію часу  $\vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{r}[s(t)]$ , тому формулу (7.13) для швидкості подамо у вигляді

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}[s(t)]}{dt} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}. \quad (7.29)$$

Розглянемо вектор  $\frac{d\vec{r}}{ds}$ . Оскільки

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = 1, \text{ то модуль } \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1.$$

Вектор  $\frac{d\vec{r}}{ds}$  (рис. 7.12) напрямлений по січній  $MM_1$ , граничне положення якої є дотичною до траєкторії досліджуваної точки.

Отже,

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}. \quad (7.30)$$

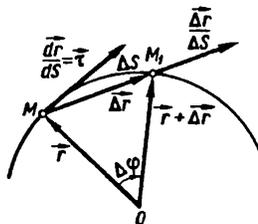


Рис. 7.12

З урахуванням (7.30) одержимо наступний вираз для швидкості при натуральному способі задання руху точки:

$$\vec{v} = \vec{\tau} \frac{ds}{dt} = \vec{\tau} \dot{s}. \quad (7.31)$$

Пмноживши скалярно обидві частини виразу (7.31) на орт  $\vec{\tau}$ , одержимо  $\vec{\tau} \cdot \vec{v} = \vec{\tau} \cdot \vec{\tau} \frac{ds}{dt}$ . Оскільки  $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$ , то  $\frac{ds}{dt} = \vec{\tau} \cdot \vec{v}$ . Скалярний добуток у правій частині цього виразу дорівнює проєкції швидкості на дотичну до траєкторії точки, тобто

$$v_{\tau} = \vec{\tau} \cdot \vec{v} = \frac{ds}{dt}. \quad (7.32)$$

Отже, вектор швидкості точки при натуральному способі задання руху точки матиме вигляд

$$\vec{v} = \vec{\tau} v_{\tau} = \vec{\tau} \frac{ds}{dt}. \quad (7.33)$$

Якщо  $v_{\tau} > 0$ , то точка рухається у додатному напрямку, якщо  $v_{\tau} < 0$ , то у від'ємному.

### § 7.8. Секторна швидкість

Секторна швидкість  $\dot{S}$  характеризує міру змінення у часі площі  $S$ , описаної радіусом-вектором  $\vec{r}$  рухомої точки (рис. 7.12). Нехай у момент часу  $t$  точка займає поло-

ження  $M$ , яке визначається радіусом-вектором  $\vec{r}$ , а через проміжок часу  $\Delta t$  – положення  $M_1$ , радіус-вектор якого дорівнює  $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ . Елементарна площа  $\Delta S$ , утворена при цьому, дорівнює модулю векторного добутку:

$$\Delta S = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \Delta\vec{r}|, \quad (7.34)$$

або

$$\Delta S = \frac{1}{2} |\vec{r}| |\Delta\vec{r}| \sin(\widehat{\vec{r}, \Delta\vec{r}}).$$

Якщо ввести вектор  $d\vec{S}$ , який дорівнює елементарній площі та напрямлений перпендикулярно до площини  $OMM_1$ , то очевидно, що

$$d\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r}, \quad (7.35)$$

звідки за означенням секторної швидкості  $\vec{v}_S$ , поділивши обидві частини виразу (7.35) на  $dt$ , матимемо

$$\vec{v}_S = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (7.36)$$

або, з урахуванням (7.13),

$$\vec{v}_S = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}. \quad (7.37)$$

Тоді величина секторної швидкості

$$v_S = \frac{1}{2} r v \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{v}}). \quad (7.38)$$

Поняття секторної швидкості вперше ввів І. Кеплер при виводі другого закону руху планет навколо Сонця. Другий закон Кеплера має місце і при русі штучних супутників навколо Землі. Згідно з цим законом радіуси-вектори планет, що проведені з центра Сонця, описують за рівні проміжки часу

рівні площі, тобто швидкість  $s$  величина стала.

Отже, *секторна швидкість дорівнює половині векторного добутку радіуса-вектора  $\vec{r}$  на швидкість  $\vec{v}$  рухомої точки*. Векторні рівності (7.37) відповідають три скалярні рівності в декартовій системі координат  $Oxyz$  (рис. 7.9):

$$v_{Sx} = \frac{1}{2} (y\dot{z} - z\dot{y}), \quad v_{Sy} = \frac{1}{2} (z\dot{x} - x\dot{z}), \\ v_{Sz} = \frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (7.39)$$

Площу сектора  $MOM_1$  (рис. 7.12) можна визначити інакше:

$$\Delta S = \frac{1}{2} |\vec{r}| |\vec{r} + \Delta\vec{r}| \sin \Delta\varphi, \quad (7.40)$$

де  $\Delta\varphi$  – малий кут між  $\vec{r}$  та  $\vec{r} + \Delta\vec{r}$  ( $\sin \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$ ).

Нехтуючи величинами другого порядку малізми, останній формулі надамо вигляду

$$\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi. \quad (7.41)$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на  $\Delta t$  і переходячи до границі, одержимо таке співвідношення для визначення секторної швидкості:

$$v_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \\ = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}. \quad (7.42)$$

Остання формула виражає секторну швидкість у полярних координатах і широко використовується в небесній механіці та при вивченні руху штучних супутників Землі.

### § 7.9. Прискорення точки

Прискоренням точки в інерціальній системі відліку називають ліру змінення швидкості точки, яка дорівнює похідній швидкості цієї точки за часом.

Розглянемо два будь-які близькі положення точки  $M$  і  $M_1$  на траєкторії. Швидкість у точці  $M$  позначимо через  $\vec{v}$ , а в точці  $M_1$  – через  $\vec{v} + \Delta\vec{v}$  (рис. 7.13). Геометричний приріст вектора швидкості  $\Delta\vec{v}$  за проміжок часу  $\Delta t$  знайдемо, побудувавши в точці  $M$  вектор, що дорівнює  $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ , та з'єднавши кінці векторів  $\vec{v}$  і  $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ . Відношення  $\Delta\vec{v}$  до  $\Delta t$  є середнім прискоренням  $\vec{w}_{cp}$  точки за проміжок часу  $\Delta t$ :

$$\vec{w}_{cp} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad (7.43)$$

Напрямок вектора  $\vec{w}_{cp}$  збігається з напрямком  $\Delta\vec{v}$  (рис. 7.13).

Переходячи в (7.43) до границі  $\Delta t \rightarrow 0$ , знайдемо прискорення  $\vec{w}$  точки в даний момент часу:

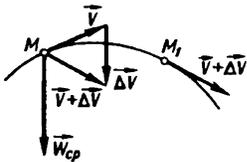


Рис. 7.13

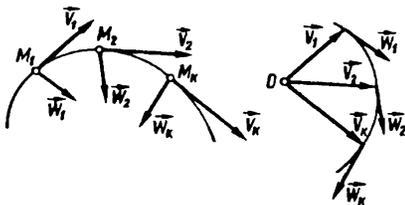


Рис. 7.14

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{w}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad (7.44)$$

З урахуванням виразу (7.13) формулу для прискорення запишемо у вигляді

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}. \quad (7.45)$$

Одиницею прискорення в СІ є  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Оскільки прискорення даної точки дорівнює першій похідній швидкості за часом, то воно напрямлене по дотичній до годографа швидкості (рис. 7.14).

### § 7.10. Визначення прискорення в прямокутній декартовій системі координат

Якщо рух точки задано координатним способом, тобто рівняннями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , то, розклавши вектори  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  та  $\vec{w}$  по ортах координатних осей, матимемо

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z, \\ \vec{v} &= \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z, \\ \vec{w} &= \vec{i}w_x + \vec{j}w_y + \vec{k}w_z, \end{aligned} \quad (7.46)$$

де  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $w_z$  – проекції прискорення на осі координат.

На підставі (7.45)

$$\begin{aligned} w &= \vec{i}w_x + \vec{j}w_y + \vec{k}w_z = \\ &= \vec{i} \frac{dv_x}{dt} + \vec{j} \frac{dv_y}{dt} + \vec{k} \frac{dv_z}{dt} = \\ &= \vec{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k} \frac{d^2z}{dt^2} = \\ &= \vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y} + \vec{k}\ddot{z}, \end{aligned} \quad (7.47)$$

звідки

$$\begin{aligned}
 w_x &= \frac{d v_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}, \\
 w_y &= \frac{d v_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}, \\
 w_z &= \frac{d v_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z}.
 \end{aligned}
 \quad (7.48)$$

Отже, проекції прискорення на нерухомі осі координат дорівнюють першим похідним відповідних проекцій швидкості за часом на ті самі осі або другим похідним відповідних координат рухомої точки за часом.

Модуль прискорення та його напрямні косинуси запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
 w &= \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{d v_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d v_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d v_z}{dt}\right)^2}; \quad (7.49) \\
 \cos(\widehat{w, i}) &= \frac{w_x}{w}, \\
 \cos(\widehat{w, j}) &= \frac{w_y}{w}, \\
 \cos(\widehat{w, k}) &= \frac{w_z}{w}.
 \end{aligned}
 \quad (7.50)$$

### § 7.11. Прискорення точки в полярних координатах

Нехай рух точки  $M$  у площині  $Oxy$  задано в полярних координатах  $r = r(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$  (рис. 7.15). Декартові координати виражаються через полярні за формулами  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Знайдемо проекції  $w_r$  та  $w_\varphi$  прискорення  $\vec{w}$  точки на радіальний і трансверсальний напрямки (рис. 7.15).

Виразимо спочатку проекції прискорення  $w_x$  та  $w_y$  на осі декартових координат

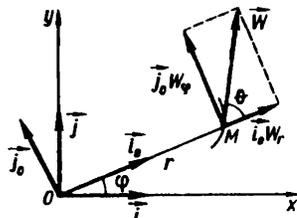


Рис. 7.15

через проекції прискорення на радіальний  $w_r$  та трансверсальний  $w_\varphi$  напрямки:

$$\begin{aligned}
 w_x &= w_r \cos \varphi - w_\varphi \sin \varphi, \\
 w_y &= w_r \sin \varphi + w_\varphi \cos \varphi.
 \end{aligned}
 \quad (7.51)$$

Ураховувавши залежність між полярними і декартовими координатами, одержимо

$$\begin{aligned}
 w_x &= \ddot{x} = \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \cos \varphi - \\
 &\quad - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \cos \varphi - \\
 &\quad - \left( 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right) \sin \varphi; \\
 w_y &= \ddot{y} = \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \\
 &\quad + r\ddot{\varphi} \cos \varphi = \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \sin \varphi + \\
 &\quad + \left( 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right) \cos \varphi.
 \end{aligned}
 \quad (7.52)$$

Порівнюючи відповідні вирази для  $w_x$  та  $w_y$ , знайдемо

$$\begin{aligned}
 w_r &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2; \\
 w_\varphi &= 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.
 \end{aligned}
 \quad (7.53)$$

Модуль прискорення визначимо за формулою

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_\varphi^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})^2}. \quad (7.54)$$

Позначивши через  $\theta$  кут, утворений прискоренням  $\ddot{w}$  з ортом  $\vec{i}_0$  (рис. 7.15), визначимо напрямок прискорення  $\ddot{w}$  точки за формулою

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{w_\varphi}{w_r} = \frac{2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}}{\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2}. \quad (7.55)$$

Зауважимо, що формули (7.53) можна також одержати безпосереднім диференціюванням виразу (7.28) для швидкості  $\vec{v}$ , скориставшись співвідношеннями (7.27).

Пропонуємо читачам виконати вказані перетворення самостійно, а також самостійно знайти прискорення в циліндричній та сферичній системах координат.

### § 7.12. Прискорення точки при натуральному способі задання руху

Попередньо наведемо деякі відомості з диференціальної геометрії.

**Натуральні осі та натуральний тригранник.** Кінематичні характеристики руху

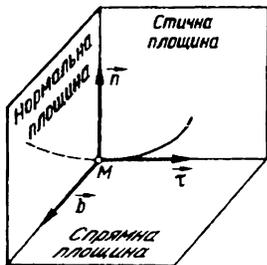


Рис. 7.16

точки тісно пов'язані з геометричними властивостями траєкторії. Як відомо з диференціальної геометрії, у кожній точці кривої є три взаємно перпендикулярні напрямки: *дотична, головна нормаль і біномаль*, одиничні вектори (або орти) яких позначимо відповідно  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$ . Орт  $\vec{\tau}$  напрямлений у бік додатного відліку дугової координати  $s$ , орт  $\vec{n}$  – у бік угнутості траєкторії, орт  $\vec{b}$  напрямлений так, щоб  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$  утворювали праву систему координат. Указані осі (дотична, головна нормаль і біномаль) називаються *натуральними*. Отже, натуральні осі – це рухомі осі, пов'язані з рухомою точкою  $M$ , що утворюють праву прямокутну систему координат (натуральний тригранник) (рис. 7.16).

Площина, що проходить через головну нормаль  $\vec{n}$  та біномаль  $\vec{b}$ , називається *нормальною*. Координатна площина, що проходить через дотичну  $\vec{\tau}$  та головну нормаль  $\vec{n}$ , називається *стичною*, а площина, що проходить через дотичну  $\vec{\tau}$  та біномаль  $\vec{b}$ , – *спрямою* (рис. 7.16).

Якщо розглядувана крива є плоскою, то вона розташована у стичній площині.

**Кривина кривої.** Кут, що стягує дугу  $\Delta s$  між двома дотичними у двох будь-яких точках  $M$  і  $M_1$  на кривій називається *кутом суміжності*. Позначимо його через  $\Delta\varphi$ . Відношення  $\Delta\varphi$  до елемента дуги  $\Delta s$  називається середньою кривиною кривої  $K_{\text{ср}}$  на відрізьку  $MM_1$  (рис. 7.12):

$$K_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}. \quad (7.56)$$

Границя цього відношення при  $\Delta s \rightarrow 0$  називається кривиною  $K$  у даній точці:

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (7.57)$$

У загальному випадку кривина кривої не є сталою величиною і змінюється від точки до точки. Величина  $\rho$ , обернена до кривини у даній точці  $M$ , називається *радіусом кривини кривої* у цій точці:

$$\rho = K^{-1}. \quad (7.58)$$

Очевидно, що

$$K = 1/\rho. \quad (7.59)$$

Прискорення точки при натуральному способі задання руху визначається за такою теоремою.

**Теорема.** Повне прискорення точки дорівнює векторній сумі дотичного (тангенціального) та нормального прискорень.

Доведення. Нехай рух точки задано натуральним способом. Тоді вектор швидкості подаємо у вигляді (7.33). Враховуючи це та дотримуючись визначення прискорення при векторному способі задання руху точки, одержимо

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v_{\tau} \vec{\tau})}{dt} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dt} v_{\tau}. \quad (7.60)$$

Перший доданок є вектором, напрямленим по дотичній  $\vec{\tau}$ ; він називається дотичною, або тангенціальною складовою прискорення і позначається  $\vec{w}_{\tau}$ . Отже,

$$\vec{w}_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \vec{\tau} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{\tau} = \ddot{s} \vec{\tau}. \quad (7.61)$$

Як випливає з (7.61), дотичне прискорення характеризує змінення швидкості за величиною і дорівнює першій похідній від проекції швидкості на дотичну або другій похідній від дугової координати за часом.

Щоб визначити другий доданок, подамо його у вигляді

$$\frac{d\vec{\tau}[s(t)]}{dt} v_{\tau} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} v_{\tau}. \quad (7.62)$$

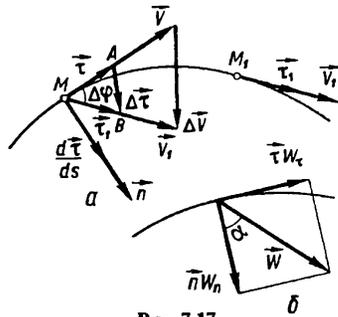


Рис. 7.17

Розглянемо попередню тотожність  $\vec{\tau}^2 = 1$  та диференціюємо її по  $s$ ; одержимо  $2 \frac{d\vec{\tau}}{ds} \vec{\tau} = 0$ . Із цього випливає, що вектори  $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$  і  $\vec{\tau}$  є перпендикулярними. Оскільки вектор  $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$  завжди напрямлений у бік угнутості траєкторії (рис. 7.17, а) і лежить у стичній площині, то вектор  $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$  також лежить у стичній площині, напрямлений в бік угнутості траєкторії та перпендикулярний до  $\vec{\tau}$ , тобто напрямлений по головній нормалі  $\vec{n}$  до центра кривини траєкторії.

Визначимо тепер модуль вектора  $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ . Із рівнобедреного трикутника  $MAB$  (рис. 7.17, а) випливає, що  $AB = |\Delta\vec{\tau}| = 2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$ , де  $\Delta\varphi$  – кут суміжності. Тоді

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \frac{\Delta\varphi}{|\Delta s|} = K = \frac{1}{\rho}.$$

Отже,

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho}. \quad (7.63)$$

Таким чином, з урахуванням (7.62) і (7.63) другий доданок виразу (7.60) набуває вигляду

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} v_{\tau} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} v_{\tau} = \frac{\bar{n}}{\rho} v_{\tau}^2 = \frac{\bar{n}}{\rho} v^2$$

і називається *нормальним прискоренням* та позначається  $\bar{w}_n$ , тобто

$$\bar{w}_n = \bar{n} \frac{v^2}{\rho}. \quad (7.64)$$

Звідси випливає, що *нормальне прискорення  $\bar{w}_n$  напрямлене в бік угнутості траєкторії до центра кривини і характеризує змінення швидкості за напрямком.*

Оскільки складові вектора  $\bar{w}_{\tau}$  і  $\bar{w}_n$  лежать у стичній площині, то й вектор  $\bar{w}$  також розташований у стичній площині. Тому проекція повного прискорення  $\bar{w}$  на бінормаль  $\bar{w}_b = 0$ .

Отже, на підставі (7.60), (7.61) і (7.64) (рис. 7.17, б) остаточно одержимо

$$\bar{w} = \bar{\tau} w_{\tau} + \bar{n} w_n = \bar{w}_{\tau} + \bar{w}_n, \quad (7.65)$$

що й треба було довести.

Модуль повного прискорення

$$w = \sqrt{w_{\tau}^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_{\tau}}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}. \quad (7.66)$$

Напрявлення вектора  $\bar{w}$  визначимо за кутом  $\alpha$ , що утворюється між вектором  $\bar{w}_n$  і вектором  $\bar{w}$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w_{\tau}}{w_n}.$$

Якщо рух точки задано координатним способом, то, скориставшись виразами (7.64) і (7.66), неважко одержати такий вираз для радіуса кривини:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{v^2}{w_n} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{\sqrt{w^2 - w_{\tau}^2}} = \\ &= \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - w_{\tau}^2}}. \end{aligned} \quad (7.67)$$

Зауважимо також, що виразу (7.61) для дотичного прискорення можна надати іншого вигляду:

$$\begin{aligned} w_{\tau} &= \bar{\tau} \cdot \bar{w} = \frac{\bar{v}}{v_{\tau}} \cdot \bar{w} = \\ &= \frac{\ddot{x}\bar{x} + \ddot{y}\bar{y} + \ddot{z}\bar{z}}{\pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \end{aligned}$$

З урахуванням останнього виразу формулі (7.67) для радіуса кривини можна надати вигляду:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{v^2}{\sqrt{w^2 - \frac{(\bar{v} \cdot \bar{w})^2}{v^2}}} = \\ &= \frac{v^3}{\sqrt{w^2 v^2 - (\bar{v} \cdot \bar{w})^2}}. \end{aligned} \quad (7.68)$$

У випадку плоского руху, коли, наприклад,  $\dot{z} = 0$  і  $\ddot{z} = 0$ , формула (7.68) набуде досить простої форми:

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}|}. \quad (7.69)$$

Якщо рух задано в полярній системі координат, то можна переконатись, що формулу для кривини траєкторії можна записати у вигляді

$$\rho = \frac{\left[ r^2 + \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| r^2 + 2 \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\varphi^2} \right|}. \quad (7.70)$$

Наведемо ще формулу для радіуса кривини у випадку, коли рівняння плоскої кривої задано в явній формі  $y = f(x)$ :

$$\rho = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}. \quad (7.71)$$

На завершення наведемо формули Френе, які дають змогу встановити зв'язки між ортами  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$  і  $\vec{b}$  та радіусом-вектором  $\vec{r}$ .

У § 7.7 вираз (7.30) (рис. 7.12) дає співвідношення

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}.$$

Із останньої формули і виразу (7.63) маємо

$$\vec{n} = \rho \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \rho \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}.$$

Оскільки бінормаль  $\vec{b}$  перпендикулярна до нормалі  $\vec{n}$  та дотичної  $\vec{\tau}$ , то очевидно

$$\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n} = \rho \left( \frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right).$$

Наведені співвідношення і є формулами Френе.

### § 7.13. Окремі випадки руху точки

**Прямолінійний рух.** Якщо під час руху точки нормальне прискорення  $\vec{w}_n$  дорівнює нулю, то рух точки є прямолінійним.

Справді, якщо  $\vec{w}_n = 0$ , то  $\frac{v^2}{\rho} = 0$  і  $\rho \rightarrow \infty$ ,

тобто траєкторією є пряма. У цьому разі повне прискорення дорівнює дотичному:  $\vec{w} = \vec{w}_\tau$ .

Якщо при криволінійному русі точки в даний момент часу нормальне прискорення дорівнює нулю ( $w_n = 0$ ), то точка в цей момент часу знаходиться в точці перегину траєкторії.

**Рівномірний криволінійний рух.** Якщо під час руху точки дотичне прискорення  $w_\tau$  дорівнює нулю ( $w_\tau = 0$ ), то проекція швидкості  $v_\tau$  не змінюється. Справді,

$$w_\tau = 0, \quad \frac{dv_\tau}{dt} = 0, \quad v_\tau = \text{const}.$$

У цьому разі точка рухається рівномірно по кривій, а повне прискорення точки дорівнює нормальному:  $\vec{w} = \vec{w}_n$ .

**Рівномірний прямолінійний рух.** Якщо під час руху точки її прискорення дорівнює нулю ( $\vec{w} = 0$ ), то рух є рівномірним і прямолінійним, оскільки швидкість у цьому разі не змінюється ні за величиною, ні за напрямком.

**Рівнозмінний криволінійний рух.** Якщо під час руху точки по деякій кривій дотичне прискорення буде постійним за величиною ( $w_\tau = \text{const}$ ), то рух точки називається рівнозмінним криволінійним рухом. Причому, якщо прискорення  $\vec{\tau} w_\tau$  збігається з напрямком швидкості, то рух точки називається рівноприскореним, якщо  $\vec{\tau} w_\tau$  направлено в бік, протилежний швидкості, – рівносповільненим.

Знайдемо швидкість і закон руху точки  $s = s(t)$  у разі рівнозмінного руху. Оскільки  $w_\tau = \text{const}$ , то  $v_\tau = w_\tau t + C_1$ . Постійну інтегрування визначимо з початкових умов руху: при  $t = 0$   $v_\tau = v_0$ . Отже,  $C_1 = v_0$ . Підставивши значення  $C_1$ , одержимо

$$v_\tau = v_0 + w_\tau t.$$

Оскільки  $v_t = \frac{ds}{dt}$ , то  $\frac{ds}{dt} = v_0 + w_t t \Rightarrow ds = v_0 dt + w_t t dt$ . Звідси шляхом інтегрування знайдемо закон руху точки:

$$s = v_0 t + \frac{w_t t^2}{2} + C_2.$$

Постійну інтегрування  $C_2$  визначимо з початкових умов руху: при  $t=0$ ,  $s = s_0$ . Отже,  $C_2 = s_0$ . Тому

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{w_t t^2}{2}.$$

**Прямолинійні гармонічні коливання точки.** Нехай точка рухається по прямій, наприклад по осі  $Ox$ , і її відстань від початку координат змінюється за законом

$$x = a \sin(\omega t + \alpha), \quad (7.72)$$

де  $a$ ,  $\omega$  – сталі.

Рух точки є коливальним між положеннями точки  $M_1(a)$  і  $M_2(-a)$ . Коливання, що визначаються законом (7.72), називаються гармонічними коливаннями. Величина  $a$  називається *амплітудою коливань* і є найбільшим відхиленням точки від центра коливань  $O$ . Проміжок часу  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , протягом якого точка здійснює повне коливання, називається *періодом коливань*; величина  $\omega$  – *куловою частотою* коливань (повніше теорію коливань викладено в частині IV);  $\omega t + \alpha = \varphi$  – *фазою коливань*,  $\alpha$  – *початковою фазою коливань*.

**Приклад 1.** Знайти рівняння траєкторії, швидкість, прискорення і радіус кривини в момент  $t=1$  с, якщо рівняння руху точки мають вигляд  $x = 4\sin \frac{\pi}{2} t$ ,  $y = 3\cos \frac{\pi}{2} t$ .

**Розв'язання.** Рівняння траєкторії задається у параметричній формі. Виключивши параметр  $t$ ,

знайдемо  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$ , що є рівнянням траєкторії в явній формі:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отже, траєкторією точки буде еліпс із повсякми  $a=4$ ,  $b=3$ . Оскільки рух точки задано координатним способом, то швидкість і прискорення знайдемо за їх проекціями на осі координат:

$$v_x = \dot{x} = 2\pi \cos \frac{\pi}{2} t, \quad v_y = \dot{y} = -\frac{3}{2}\pi \sin \frac{\pi}{2} t,$$

$$w_x = \ddot{x} = -\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t, \quad w_y = \ddot{y} = -\frac{3}{4}\pi^2 \cos \frac{\pi}{2} t.$$

Визначаємо модулі та напрямки швидкості і прискорення:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4\pi^2 \cos^2 \frac{\pi}{2} t + \frac{9}{4}\pi^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} t}.$$

$$\begin{aligned} \text{При } t=1 \text{ с } \quad v &= \sqrt{\frac{9}{4}\pi^2} = \frac{3}{2}\pi \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad \cos(\widehat{v, i}) = \\ &= \frac{v_x}{v} = 0, \quad \cos(\widehat{v, j}) = \frac{v_y}{v} = -\frac{3}{2} \frac{3}{\pi} = -1. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{\pi^4 \sin^2 \frac{\pi}{2} t + \frac{9}{16}\pi^4 \cos^2 \frac{\pi}{2} t}.$$

$$\begin{aligned} \text{При } t=1 \text{ с } \quad w &= \pi^2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \quad \cos(\widehat{w, i}) = \frac{w_x}{w} = \\ &= -\frac{\pi^2}{\pi^2} = -1, \quad \cos(\widehat{w, j}) = \frac{w_y}{w} = 0. \end{aligned}$$

Радіус кривини визначимо за формулою (7.67):

$$\rho = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - v^2}},$$

де

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \\ &= \frac{-2\pi^3 \sin \pi t + \frac{9}{8}\pi^3 \sin \pi t}{2\sqrt{4\pi^2 \cos^2 \frac{\pi}{2} t + \frac{9}{4}\pi^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} t}}. \end{aligned}$$

$$\text{При } t=1 \text{ с } \rho = \frac{\frac{9}{4}\pi^2}{\sqrt{\pi^4}} = \frac{9}{4} \text{ м.}$$

**Приклад 2.** Точка рухається по колу радіусом  $R=0,2$  м. Закон її руху по траєкторії  $s=20\cos\pi t$ . Знайти величину швидкості, дотичного, нормального і повного прискорень точки в момент часу  $t=2$  с.

**Розв'язання.** Оскільки рух точки задано натуральним способом, то швидкості точки визначаються у вигляді  $v_t = \dot{s} = -20\pi\sin\pi t$ , а при  $t=2$  с  $v_t = v = 0$ . Відповідно дотичне і нормаль-

не прискорення  $w_t = \dot{v} = -20\pi^2\cos\pi t$ ,  $w_n = \frac{v^2}{R}$ ;

при  $t=2$  с одержимо  $w_t = -20\pi^2 \text{ м/с}^2$ ,  $w_n = 0$ .

Повне прискорення точки  $w = \sqrt{w_t^2 + w_n^2} = 20\pi^2 \text{ м/с}^2$ .

**Приклад 3.** За заданими рівняннями руху точки знайти її траєкторію, швидкість, прискорення і радіус кривини.

$$x = a\cos\omega t; y = a\sin\omega t; z = 0; a > 0.$$

**Розв'язання.** Для знаходження траєкторії точки піднесемо  $x$  і  $y$  до квадрата і додамо їх, тоді матимемо

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Отже, траєкторією руху точки є коло (рис. 7.18).

Для знаходження швидкості і прискорення обчислимо спочатку їх проекції на осі:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -a\omega\sin\omega t;$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = a\omega\cos\omega t;$$

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2\cos\omega t = -\omega^2x;$$

$$w_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -a\omega^2\sin\omega t = -\omega^2y.$$

Тепер легко обчислити величини швидкості та прискорення:

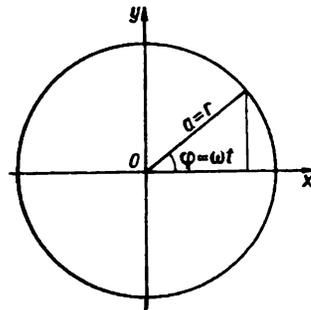


Рис. 7.18

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = a\omega; w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = a\omega^2.$$

Траєкторія точки показана на рис. 7.18. Очевидно, що радіус кривини дорівнює радіусу кола  $a$ , тобто  $\rho = a$ .

Переконаємося в цьому з допомогою формул. Використаємо формулу (7.70). У цьому випадку

$$r = a; \frac{dr}{d\varphi} = 0; \frac{d^2r}{d\varphi^2} = 0, \text{ отже}$$

$$\rho = \frac{(r^2)^{3/2}}{r^2} = r = a.$$

**Приклад 4.** Рухоме колесо радіусом  $r$  (рис. 7.19, а) котиться без ковзання з допомогою кривошипа  $OA$  всередині нерухомого колеса радіусом  $R$ . Скласти рівняння траєкторії точки  $M$  рухомого колеса. Для окремого випадку  $R=2r$  (рис. 7.19, б) визначити швидкість, прискорення та радіус кривини траєкторії точки  $M$ , якщо кривошип обертається рівномірно.

**Розв'язання.** Розташуємо в точці  $O$  початок нерухомих осей  $Ox$  і  $Oy$ . Позначимо через  $\varphi$  миттєве значення кута між кривошипом  $OA$  і віссю  $Ox$ . Оскільки за умовами задачі кочення відбувається без ковзання, то дуги  $BC$  і  $CM$  мають бути рівними.

Таким чином,

$$R\varphi = r\varphi_1, \quad (1)$$

де  $\varphi_1$  – кут повороту рухомого колеса.

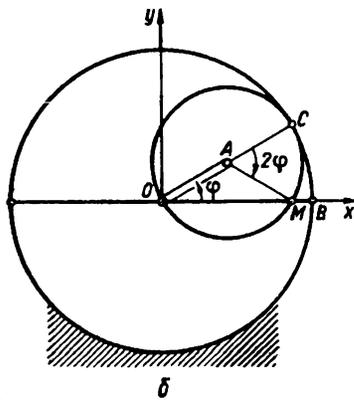
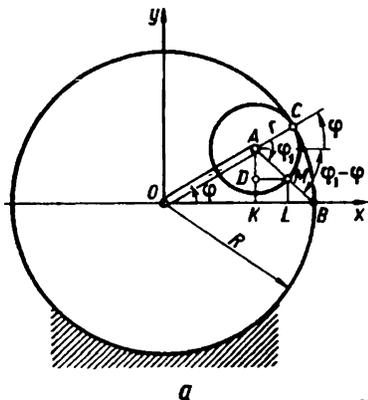


Рис. 7.19

Значимо, що кривошип  $OA$  і рухоме коло обертаються в протилежних напрямках.

Позначивши через  $x$  і  $y$  координати точки  $M$ , отримаємо

$$\begin{aligned} x &= OK + KL = (R-r)\cos\varphi + r\cos(\varphi_1 - \varphi); \\ y &= LM = AK - AD = (R-r)\sin\varphi - r\sin(\varphi_1 - \varphi). \end{aligned} \quad (2)$$

Підставивши в (2) із (1) вираз  $\varphi_1$  через  $\varphi$ , знайдемо потрібний нам закон руху точки  $M$ :

$$\begin{aligned} x &= (R-r)\cos\varphi + r\cos\frac{R-r}{r}\varphi, \\ y &= (R-r)\sin\varphi - r\sin\frac{R-r}{r}\varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Рівняння (3) являють собою в параметричній формі рівняння гіпоциклоїди – кривої, яка описується точкою кола, що котиться без ковзання всередині другого кола.

Подальше дослідження потрібно провести для випадку  $R = 2r$ , вважаючи, що кривошип  $OA$  обертається рівномірно, тобто  $\varphi = \omega t$ , де  $\omega$  – деяка постійна величина, яку називають коловою частотою.

У цьому випадку рівняння (3) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi + r\cos\varphi = 2r\cos\varphi = 2r\cos\omega t; \\ y &= r\sin\varphi - r\sin\varphi = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = -2r\omega\sin\omega t, \quad v_y = 0; \\ w_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = -2r\omega^2\cos\omega t = -\omega^2x, \\ w_y &= \frac{d^2y}{dt^2} = 0. \end{aligned}$$

Отже,  $v = v_x = -2r\omega\sin\omega t$ ;  $w = w_x = -\omega^2x = -2r\omega^2\cos\omega t$ . Радіус кривини знайдемо за формулою (7.69). Оскільки  $\dot{y} = 0$  та  $\ddot{y} = 0$ , знаменник формули (7.69) дорівнює нулю, отже,  $\rho = \infty$ . Це означає, що точка  $M$  у цьому випадку рухається по прямій  $OB$  (рис. 7.19, б).

## § 7.14. Криволінійні координати. Коефіцієнти Ляме

Криволінійними координатами точки називається система незалежних параметрів, що однозначно визначають її положення. Позначимо криволінійні координати через  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Прикладом можуть бути полярні, сферичні або циліндричні координати. Так, у разі сферичних координат  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \psi$ ,  $q_3 = \theta$ ; у разі циліндричних

координат  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = z$ , полярних координат  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = 0$ .

Рівняння руху точки в криволінійних координатах мають вигляд

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t). \quad (7.73)$$

Ці функції мають бути неперервними та однозначними і хоч би двічі диференційовними.

Нехай радіус-вектор, що визначає положення точки  $M$ , яка задана координатами  $q_1, q_2, q_3$ , проведено із довільно вибраного центра  $O$  (рис. 7.20). Тоді

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3). \quad (7.74)$$

Проекції радіуса-вектора на осі декартової системи координат також є функціями  $q_1, q_2, q_3$ , тобто

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3), \\ y &= y(q_1, q_2, q_3), \\ z &= z(q_1, q_2, q_3). \end{aligned} \quad (7.75)$$

Якщо у функціях (7.75) тільки одна координата  $q_1$  змінна, а дві інші мають фіксоване значення, то отримаємо рівняння координатної лінії, яке відповідає зміні координати  $q_1$  (рис. 7.20):

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_{02}, q_{03}), \\ y &= y(q_1, q_{02}, q_{03}), \\ z &= z(q_1, q_{02}, q_{03}). \end{aligned} \quad (7.76)$$

Аналогічно визначаються координатні лінії, що відповідають зміненню  $q_2$  і  $q_3$ .

У кожній точці простору перетинаються три координатні лінії, дотичні до яких в указаній точці, що проведені в бік зростання координат, називаються координатними осями  $[q_1], [q_2], [q_3]$ . Координатні осі у

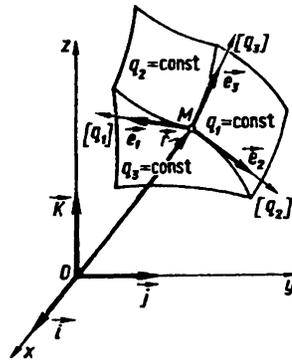


Рис. 7.20

загальному випадку визначають неортогональну криволінійну систему.

Якщо в рівняннях (7.75) змінювати дві координати при фіксованій третій, то одержані поверхні називаються координатними. Рівняння координатних поверхонь мають вигляд

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}(q_1, q_2, q_{03}), \\ \vec{r} &= \vec{r}(q_{01}, q_2, q_3), \\ \vec{r} &= \vec{r}(q_1, q_{02}, q_3). \end{aligned} \quad (7.77)$$

Кожне з цих рівнянь визначає відповідно поверхні  $(q_1, q_2)$ ,  $(q_2, q_3)$ ,  $(q_1, q_3)$ . Площини, які дотикаються у деякій точці  $M$  координатних площин, називаються координатними. Координатні осі лежать у відповідних координатних площинах.

Визначимо тепер орти  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  координатних осей. Для цього розглянемо рух точки по координатній лінії, що відповідає зміненню координати  $q_1$ . Нехай у момент часу  $t$  точка знаходиться в положенні  $M_0$

(рис. 7.21). Вектор  $\frac{d\vec{r}}{dq_1}$ , обчислений в точці  $M_0$ , напрямлений по дотичній до коор-

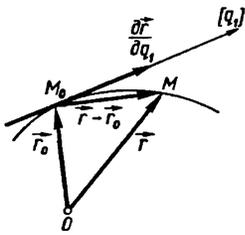


Рис. 7.21

динатної лінії  $q_2 = \text{const}$ ,  $q_3 = \text{const}$ , тобто він напрямлений по координатній осі  $[q_1]$  в бік зростання  $q_1$ . Оскільки

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \vec{k},$$

то

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2} = H_1.$$

Звідси одиничний вектор  $\vec{e}_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$ .

Аналогічно можна одержати формули для  $\vec{e}_2$  та  $\vec{e}_3$ . Отже, одиничні вектори криволінійної координатної системи  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$  визначаються за формулами

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \\ \vec{e}_3 &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}, \end{aligned} \quad (7.78)$$

де

$$\begin{aligned} H_j &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right| = \\ &= \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_j} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_j} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_j} \right)^2}, \\ & \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (7.79)$$

Як видно з формул (7.79),  $H_j$  є функціями криволінійних координат  $q_1, q_2, q_3$  і називаються коефіцієнтами Ляме або диференціальними параметрами Ляме.

Застосовуючи формули (7.78), можна визначити косинуси криволінійних координатних осей з осями декартових координат. Справді, ввівши одиничні вектори декартових координатних осей  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , дістанемо

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{e}_1, \vec{i}}) &= \vec{e}_1 \cdot \vec{i} = \\ &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \cdot \vec{i} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial x}{\partial q_1}, \\ \cos(\widehat{\vec{e}_2, \vec{j}}) &= \vec{e}_2 \cdot \vec{j} = \\ &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \cdot \vec{j} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial y}{\partial q_2}, \\ \cos(\widehat{\vec{e}_3, \vec{k}}) &= \vec{e}_3 \cdot \vec{k} = \\ &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \cdot \vec{k} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial z}{\partial q_3}. \end{aligned} \quad (7.80)$$

Розглядатимемо лише ортогональні криволінійні координати, координатні осі яких взаємно перпендикулярні. Умовами ортогональності є рівність нулеві скалярних добутків одиничних векторів, тобто  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$  або

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} &= 0, \\ i \neq j; i, j &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (7.81)$$

Покажемо, що коефіцієнти Ляме є множниками при диференціалах координат у виразах диференціалів дуг відповідних координатних ліній. Дійсно, знайдемо формулу, за якою визначається диференціал дуг кри-

вої в системі ортогональних координат. Для цього спочатку визначимо елементарне переміщення

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3. \quad (7.82)$$

Тоді

$$ds^2 = |d\vec{r}|^2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \right|^2$$

або, враховуючи ортогональність криволінійних координат (7.81), матимемо

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2, \quad (7.83)$$

оскільки  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = H_j \vec{e}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  згідно з (7.78).

На підставі одержаної формули легко перейти до визначення коефіцієнтів Ляме. Маємо

$$\begin{aligned} ds_1 &= H_1 dq_1, \\ ds_2 &= H_2 dq_2, \\ ds_3 &= H_3 dq_3. \end{aligned} \quad (7.84)$$

Останні вирази можна дістати, почергово припускаючи змінення тільки однієї криволінійної координати і вважаючи дві інші фіксованими.

**Приклад 5.** Визначити коефіцієнти Ляме, якщо рух точки заданий у циліндричній (рис. 7.3)  $r=r(t)$ ,  $\varphi=\varphi(t)$ ,  $z=z(t)$  або у сферичній (рис. 7.4)  $r=r(t)$ ,  $\psi=\psi(t)$ ,  $\theta=\theta(t)$  системах координат.

Розв'язання. У циліндричній системі координат одержимо  $ds_1 = dr$ ,  $ds_2 = r d\varphi$ ,  $ds_3 = dz$ . Отже,  $H_1 = 1$ ,  $H_2 = r$ ,  $H_3 = 1$ . Аналогічно у сферичній системі координат  $ds_1 = dr$ ,  $ds_2 = r \cos \theta d\psi$ ,  $ds_3 = r d\theta$ . Звідси  $H_1 = 1$ ,  $H_2 = r \cos \theta$ ,  $H_3 = r$ .

## § 7.15. Швидкість і прискорення точки у криволінійних координатах

На підставі (7.13) і з урахуванням залежності (7.74) одержимо такий вираз для швидкості в криволінійних координатах:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}(q_1, q_2, q_3)}{dt} = \\ &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3. \end{aligned} \quad (7.85)$$

Із формули (7.78) маємо

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = H_1 \vec{e}_1, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = H_2 \vec{e}_2, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = H_3 \vec{e}_3.$$

З урахуванням цих співвідношень отримаємо

$$\vec{v} = \dot{q}_1 H_1 \vec{e}_1 + \dot{q}_2 H_2 \vec{e}_2 + \dot{q}_3 H_3 \vec{e}_3. \quad (7.86)$$

Цю рівність можна розглядати як розкладання швидкості по одиничних ортах осей криволінійної системи координат, тобто

$$v_{q_1} = \dot{q}_1 H_1, \quad v_{q_2} = \dot{q}_2 H_2, \quad v_{q_3} = \dot{q}_3 H_3. \quad (7.87)$$

Оскільки розглядається випадок ортогональної криволінійної системи координат, то модуль швидкості знаходимо за формулою

$$v = \sqrt{\dot{q}_1^2 H_1^2 + \dot{q}_2^2 H_2^2 + \dot{q}_3^2 H_3^2}. \quad (7.88)$$

Для визначення прискорення точки у криволінійних координатах знайдемо спочатку проєкції вектора прискорення на координатні осі, врахувавши співвідношення (7.78):

$$\begin{aligned} w_{q_1} &= \vec{w} \cdot \vec{e}_1 = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{1}{H_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \\ w_{q_2} &= \vec{w} \cdot \vec{e}_2 = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{1}{H_2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \\ w_{q_3} &= \vec{w} \cdot \vec{e}_3 = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{1}{H_3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}. \end{aligned} \quad (7.89)$$

Неважко впевнитися, що праву частину цих рівностей можна подати у вигляді

$$H_j w_{q_j} = \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \left( \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \bar{v} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial \dot{q}_j} \right), \quad j=1,2,3. \quad (7.90)$$

Для подальшого перетворення формули (7.90) одержимо очевидні тотожності, що випливають із виразів (7.86) і (7.78):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_1} &= H_1 \bar{e}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_2} &= H_2 \bar{e}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2}, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_3} &= H_3 \bar{e}_3 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3}, \end{aligned}$$

або

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j}, \quad j=1,2,3. \quad (7.91)$$

Здиференціюємо за часом вираз  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j}$  як складну функцію змінних  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$ ,  $q_3(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_j} \right) &= \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_1 \partial q_j} \dot{q}_1 + \\ &+ \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_2 \partial q_j} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_3 \partial q_j} \dot{q}_3, \quad j=1,2,3. \quad (7.92) \end{aligned}$$

Визначивши потім із виразу (7.85) частинні похідні  $\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_j}$ ,  $j=1,2,3$  і порівнявши

їх з останнім співвідношенням (7.92), дістанемо такі тотожності:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_j}, \quad j=1,2,3. \quad (7.93)$$

Підставивши в (7.90) значення  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial \dot{q}_j}$

з тотожності (7.91) та  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial \dot{q}_j} \right)$  з (7.93),

одержимо

$$H_j w_{q_j} = \frac{d}{dt} \left( \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_j}, \quad j=1,2,3. \quad (7.94)$$

Перетворимо далі скалярні добутки  $\bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_j}$

та  $\bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_j}$  до вигляду

$$\begin{aligned} \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial \left( \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}}{2} \right)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \left( \frac{v^2}{2} \right)}{\partial \dot{q}_j}, \\ \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_j} &= \frac{\partial \left( \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}}{2} \right)}{\partial q_j} = \frac{\partial \left( \frac{v^2}{2} \right)}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (7.95)$$

Підставивши співвідношення (7.95) в (7.94), знайдемо проекції прискорення точки на осі криволінійної системи координат:

$$w_{q_j} = \frac{1}{H_j} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right], \quad j=1,2,3. \quad (7.96)$$

Ввівши скорочене позначення, згідно з (7.88),

$$T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2), \quad (7.97)$$

остаточно отримаємо

$$w_{q_j} = \frac{1}{H_j} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right], \quad j=1,2,3. \quad (7.98)$$

Зазначимо, що, як буде показано у динаміці, вираз  $T$  у даному випадку є кінетич-

ною енергією точки одиничної маси, а вираз  $\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right]$  – лівою частиною рівняння Лагранжа другого роду.

**Приклад 6.** Рух точки заданий у циліндричній системі координат  $r=r(t)$ ,  $\varphi=\varphi(t)$ ,  $z=z(t)$ . Знайти вираз для прискорення та швидкості точки.

**Розв'язання.** Врахувавши зв'язок декартових координат з циліндричними, одержимо  $x=r\cos\varphi$ ,  $y=r\sin\varphi$ . Введемо криволінійні координати  $q_1=r$ ,  $q_2=\varphi$ ,  $q_3=z$ . За формулами (7.84) знайдемо коефіцієнти Ляме. Дійсно, оскільки  $ds_1=H_1dq_1$ ,  $ds_2=H_2dq_2$ ,  $ds_3=H_3dq_3$ , то  $ds_1=dr$ ,  $ds_2=r d\varphi$ ,  $ds_3=dz$ . Отже,  $H_1=1$ ,  $H_2=r$ ,  $H_3=1$ . Тепер за формулами (7.87) знайдемо проєкції швидкості

$$\begin{aligned} v_{q_1} &= v_\rho = \dot{r}, & v_{q_2} &= v_\varphi = r\dot{\varphi}, \\ v_{q_3} &= v_z = \dot{z}, \end{aligned}$$

$$\text{звідки } v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}.$$

Потім визначимо прискорення точки. Для цього складемо вираз для функції

$$T = \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2).$$

Обчислимо  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$  та  $\frac{\partial T}{\partial q_j}$  для того, щоб скористатися формулою (7.98):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} &= \dot{r}, & \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= r^2\dot{\varphi}, & \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} &= \dot{z}, \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= r\dot{\varphi}^2, & \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Тепер за формулою (7.98) знайдемо проєкції прискорення на осі заданої криволінійної системи координат:

$$\begin{aligned} w_\rho &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, & w_\varphi &= r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}, \\ w_z &= \ddot{z}. \end{aligned}$$

**Приклад 7.** Знайти вираз для швидкості та прискорення точки, рух якої задано у сферичній системі координат (рис. 7.4).

**Розв'язання.** Криволінійними координатами в цьому випадку є  $q_1=r$ ,  $q_2=\psi$ ,  $q_3=\theta$ , які зв'язані наступними співвідношеннями з декартовими:

$$x = r \cos \theta \cos \psi, \quad y = r \cos \theta \sin \psi, \quad z = r \sin \theta.$$

Для визначення коефіцієнтів Ляме скористаємося виразами (7.79). Для цього знайдемо спочатку частинні похідні  $\frac{\partial x}{\partial q_j}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial q_j}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial q_j}$ ,  $j=1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta \cos \psi, & \frac{\partial x}{\partial \psi} &= -r \cos \theta \sin \psi, \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \cos \psi, & \frac{\partial y}{\partial r} &= \cos \theta \sin \psi, \\ \frac{\partial y}{\partial \psi} &= r \cos \theta \cos \psi, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \sin \psi, \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= \sin \theta, & \frac{\partial z}{\partial \psi} &= 0, & \frac{\partial z}{\partial \theta} &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

Підставивши ці похідні у формули (7.79), отримасмо:

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{(\cos \theta \cos \psi)^2 + (\cos \theta \sin \psi)^2 + \sin^2 \theta} = 1, \\ H_2 &= r \sqrt{\cos^2 \theta \sin^2 \psi + \cos^2 \theta \cos^2 \psi} = r \cos \theta, \\ H_3 &= r \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \psi + \sin^2 \theta \sin^2 \psi + \cos^2 \theta} = r. \end{aligned} \quad (1)$$

Далі за формулою (7.87) матимемо

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\psi = (r \cos \theta) \dot{\psi}, \quad v_\theta = r \dot{\theta}. \quad (2)$$

Для знаходження відповідних проєкцій прискорення обчислимо спочатку допоміжну функцію  $T$  за формулою (7.97), скориставшись (1):

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2) = \\ &= \frac{1}{2} [\dot{r}^2 + (r^2 \cos^2 \theta) \dot{\psi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2]. \end{aligned} \quad (3)$$

Зробимо допоміжні обчислення згідно з операціями формул (7.98):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r}; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = (r^2 \cos^2 \theta) \dot{\psi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta};$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = (r \cos^2 \theta) \dot{\psi}^2 + r \dot{\theta}^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -(r^2 \cos \theta \sin \theta) \dot{\psi}^2.$$

Підставивши вирази (4) в (7.98), отримаємо:

$$w_r = \ddot{r} - r \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta - r \dot{\theta}^2;$$

$$w_\psi = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\psi} \cos^2 \theta) =$$

$$= r \ddot{\psi} \cos \theta + 2 \dot{r} \dot{\psi} \cos \theta - 2 r \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta; \quad (5)$$

$$w_\theta = \frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) + r^2 \dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta \right] =$$

$$= r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} + r \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Вирази (2) та (5) і є розв'язками цієї задачі.

**Приклад 8.** Літак, який прийнято за точку, рухається відносно земної поверхні, що приймається за сферу радіусом  $R$ , зі швидкістю на заданій висоті  $h$  так, що її північна і східна складові відповідно дорівнюють  $v_N$  та  $v_O$  (рис. 7.22). Знайти прискорення літака відносно Землі, не враховуючи її власного обертання.

**Розв'язання.** Зазначимо, що ортогональна система криволінійних координат  $M_O[\psi][\theta][r]$

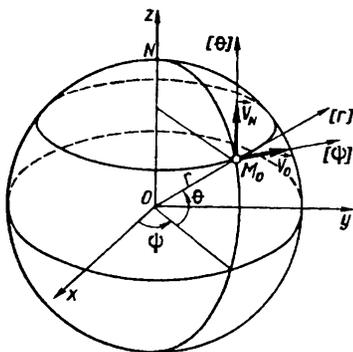


Рис. 7.22

є декартовою системою координат, що жорстко зв'язані із Землею і яку називають географічною.

Із умов задачі маємо

$$r = R + h = \text{const},$$

$$\dot{\psi} = \frac{v_O}{r \cos \theta} = \frac{v_O}{(R+h) \cos \theta}, \quad (1)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_N}{r} = \frac{v_N}{R+h}.$$

Оскільки літак летить на одній висоті, то, очевидно, що  $\dot{r} = 0$ ,  $\ddot{r} = 0$ .

Підставивши (1) у формули для  $w_r$ ,  $w_\psi$ ,  $w_\theta$  приклада 7, матимемо

$$w_r = -r \left( \frac{v_O^2}{r^2 \cos^2 \theta} \cos^2 \theta + \frac{v_N^2}{r^2} \right) =$$

$$= -\frac{v_O^2 + v_N^2}{R+h},$$

$$w_\psi = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{d}{dt} \left( \frac{r^2 v_O \cos^2 \theta}{r \cos \theta} \right) =$$

$$= \frac{1}{r \cos \theta} \frac{d}{dt} (v_O \cos \theta) = \frac{\dot{v}_O r \cos \theta}{r \cos \theta} \quad (2)$$

$$- \frac{v_O r \dot{\theta} \sin \theta}{r \cos \theta} = \dot{v}_O - \frac{v_O v_N}{r} \text{tg} \theta =$$

$$= \dot{v}_O - \frac{v_O v_N}{R+h} \text{tg} \theta;$$

$$w_\theta = r \frac{\dot{v}_N}{r} + r \frac{v_O^2 \sin \theta \cos \theta}{r^2 \cos^2 \theta} = \dot{v}_N + \frac{v_O^2}{R+h} \text{tg} \theta.$$

**Приклад 9.** При умовах задачі 8 знайти прискорення літака відносно нерухомої системи координат  $Oxyz$  з урахуванням добового обертання Землі з кутовою швидкістю  $\omega_3$ .

**Розв'язання.** Із рис. 7.23, б видно, що обертання Землі дасть додатково дві складові кутові швидкості

$$\omega_0 = \omega_3 \cos \theta, \quad \omega_1 = \omega_3 \sin \theta.$$

Що стосується кутових швидкостей, які характеризуються криволінійними координатами  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $r$ , то, як видно з рис. 7.23, кутова швидкість  $\omega_3$  напрямлена по тій самій осі, що і  $\psi$ , тому кутові швидкості, які характеризують зміни координат  $\theta$  та  $\psi$ , матимуть вигляд

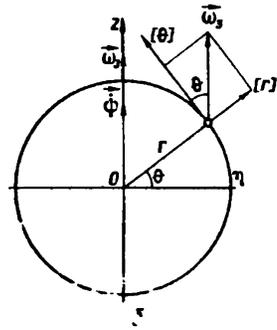
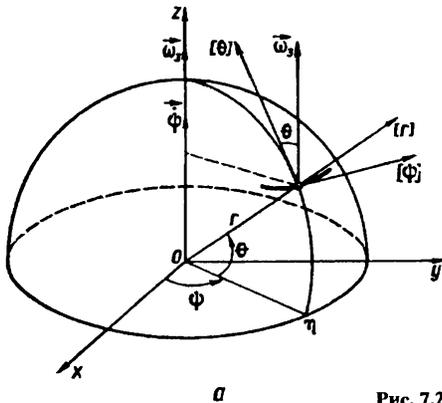


Рис. 7.23

$$\dot{\psi} = \frac{v_O}{r \cos \theta} + \omega_3 = \frac{v_O + \omega_3 r \cos \theta}{r \cos \theta} = \frac{v'_O}{r \cos \theta}, \quad (1)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_N}{r},$$

де

$$v'_O = v_O + \omega_3 r \cos \theta = v_O + \omega_3 (R+h) \cos \theta; \quad (2)$$

$$r = R+h.$$

Отже, для обчислення прискорення літака в нерухомій системі координат з урахуванням добового обертання Землі потрібно у формули прикладу 7 підставити значення  $\dot{\psi}$  і  $\dot{\theta}$ , що визначаються виразом (1).

У результаті отримаємо

$$w_r = -\frac{(v'_O)^2 + v_N^2}{R+h} =$$

$$= \frac{v_O^2 + v_N^2 + 2v_O\omega_3(R+h)\cos\theta + \omega_3^2(R+h)^2\cos^2\theta}{R+h} =$$

$$= \frac{v_O^2 + v_N^2}{R+h} - 2v_O\omega_3\cos\theta - \omega_3^2(R+h)\cos^2\theta; \quad (3)$$

$$w_\psi = \frac{d}{dt}(v'_O) - \frac{v'_O v_N}{R+h} \operatorname{tg} \theta =$$

$$= \dot{v}_O - \frac{v_O v_N}{R+h} \operatorname{tg} \theta - \omega_3 \dot{\theta} \sin \theta -$$

$$\frac{(\omega_3 r \cos \theta) v_N}{r} \operatorname{tg} \theta = \dot{v}_O - \frac{v_O v_N}{R+h} \operatorname{tg} \theta - 2\omega_3 v_N \sin \theta;$$

$$w_\theta = \dot{v}_N + \frac{(v'_O)^2}{R+h} \operatorname{tg} \theta = \dot{v}_N + \frac{v_O^2}{R+h} \operatorname{tg} \theta +$$

$$+ \frac{2v_O\omega_3 r \cos \theta + \omega_3^2 r^2 \cos^2 \theta}{R+h} \operatorname{tg} \theta = \quad (4)$$

$$= \dot{v}_N + \frac{v_O^2}{R+h} \operatorname{tg} \theta + 2v_O\omega_3 \sin \theta +$$

$$+ \omega_3^2 (R+h) \cos \theta \sin \theta.$$

Вирази (3) та (4) і є розв'язком задачі.

### Питання для самоконтролю

1. Які змінні в кінематиці розглядають як незалежні?
2. Чи залежить вид траєкторії від вибору системи координат?
3. У чому суть основної задачі кінематики точки?
4. Які існують способи задання положення точки у просторі?
5. Які обмеження накладаються на функції, що описують закон руху точки?
6. У чому полягає відмінність між дуговою координатою та проряденим шляхом точки? Коли вони збігаються?
7. Чи правильним є вираз для тангенціального прискорення  $w_\psi = \frac{d}{ds} \left( \frac{v^2}{2} \right)$ ?
8. Коли при криволінійному русі, навіть при  $v = \text{const}$ , вектор повного прискорення відмінний від нуля?
9. Чому дорівнює радіус кривини траєкторії в точці її перегину?
10. Чи можна зв'язати прискорення точки з відповідними змінними кінетичної енергії?

§ 8.1. Задання руху твердого тіла.  
Властивості твердого тіла

Руки твердого тіла в просторі можуть бути або вільними, або невільними – обмеженими в’язями (див. розділ 1). Якщо, наприклад, закріпити одну точку твердого тіла, то воно може обертатися тільки навколо цієї точки. Якщо закріпити дві точки твердого тіла, то це тіло може обертатися навколо нерухомої осі, що проходить через ці точки. Якщо ж закріпити ще одну (третю) точку, яка не лежить на осі обертання, то тіло буде нерухомим. Отже, три точки, які не лежать на одній прямій, повністю визначають положення твердого тіла і для визначення його руху достатньо знайти закон руху трьох точок твердого тіла, які не лежать на одній прямій.

Покажемо, що положення твердого тіла в загальному випадку визначається шістьма незалежними параметрами. Справді, якщо задати в твердому тілі три точки, що не лежать на одній прямій, і врахувати, що відстані між будь-якими двома точками залишаються незмінними (рис. 8.1), то одержимо

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 &= l_{12}^2; \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 &= l_{23}^2; \\ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 &= l_{13}^2, \end{aligned} \quad (8.1)$$

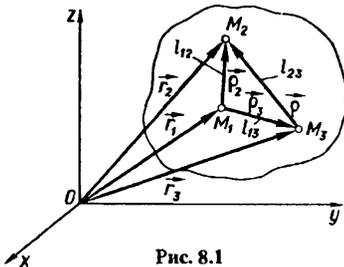


Рис. 8.1

де  $l_{12}$ ,  $l_{23}$ ,  $l_{13}$  – відповідні відстані між точками  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3, z_3)$ .

Із дев’яти координат наведених точок незалежними є шість, а інші три визначаються з наведених рівнянь. Зазначимо, що способів задання шести незалежних параметрів, які визначають положення твердого тіла в просторі, може бути багато. Деякі з них розглянемо далі.

Число незалежних параметрів, які однозначно визначають положення твердого тіла у просторі, називають числом степеней вільності.

Отже, вільне тверде тіло має шість степеней вільності.

Запишемо тепер у векторній формі основну властивість абсолютно твердого тіла – це незмінність відстаней між будь-якими точками тіла. Нехай положення точок тіла  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  в нерухомій системі координат задано векторами  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$ ,  $\vec{r}_3$ , а в системі, жорстко зв’язаній з тілом, –  $\vec{\rho}_2$  та  $\vec{\rho}_3$ , якщо початок цієї системи координат помістити в точку  $M_1$  (рис. 8.1).

Незмінність відстаней між двома точками однаково записується в будь-якій системі координат:

$$\begin{aligned} (M_3 M_2)^2 &= (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)^2 = \\ &= (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_3)^2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Незмінність відстаней між точками тіла має наслідком незмінність кутів між будь-якими прямими, проведеними в тілі.

Тому цю властивість аналітично запишемо через вектори  $\vec{\rho}_3$ ,  $\vec{\rho}_2$ , які задані у зв’язаній з тілом системі координат у формі

$$\vec{\rho}_3 \cdot \vec{\rho}_2 = \rho_3 \rho_2 \cos(\widehat{\vec{\rho}_3, \vec{\rho}_2}) = \text{const}. \quad (8.3)$$

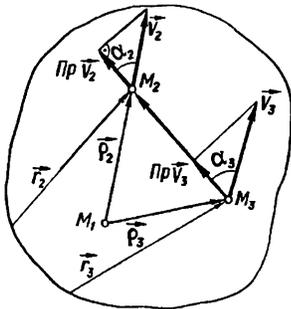


Рис. 8.2

Наслідком цієї властивості є *теорема Грасгофа*:

*Проекції швидкостей двох довільних точок (наприклад  $M_2, M_3$ ) на пряму  $M_2M_3$ , що їх з'єднує, однакові.*

Доведення. Наведемо два способи доведення цієї теореми – логічний і аналітичний.

*Логічний.* Уявімо собі, що проекції швидкостей  $\vec{v}_2$  і  $\vec{v}_3$  на пряму  $M_2M_3$  є різні (рис. 8.2). Це означає, що з часом відстані між цими точками змінюються, а це суперечить визначенню твердого тіла. Отже, в твердому тілі можливі лише такі швидкості  $\vec{v}_2$  і  $\vec{v}_3$ , проекції яких на відрізок  $M_2M_3$  є однаковими.

*Аналітичний.* Здиференціюємо вираз за часом (8.2), тоді отримаємо

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \left( \frac{d\vec{r}_2}{dt} - \frac{d\vec{r}_3}{dt} \right) = 0. \quad (8.4)$$

Оскільки  $\vec{r}_2 - \vec{r}_3 = \overline{M_3M_2}$ , то вираз (8.4), з врахуванням того, що  $\frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{v}_2$ ,  $\frac{d\vec{r}_3}{dt} = \vec{v}_3$ , запишемо у вигляді

$$\vec{v}_2 \cdot \overline{M_3M_2} = \vec{v}_3 \cdot \overline{M_3M_2}. \quad (8.5)$$

Останні скалярні добутки (8.5) являють собою проекції швидкостей точок  $M_2$  і  $M_3$  на відрізок  $\overline{M_3M_2}$ , що їх з'єднує:

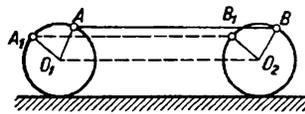


Рис. 8.3

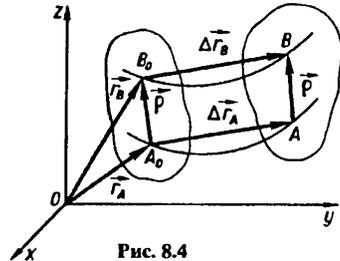


Рис. 8.4

$$\text{Пр}_{M_3M_2} \vec{v}_2 = \text{Пр}_{M_3M_2} \vec{v}_3, \quad (8.6)$$

що і потрібно було довести.

## § 8.2. Найпростіші рухи твердого тіла

До найпростіших рухів твердого тіла належать поступальний і обертальний рухи навколо нерухомої осі.

*Поступальний рух твердого тіла.* Поступальним називається такий рух тіла, при якому довільна пряма, проведена в тілі, рухається паралельно самій собі.

Прикладом такого руху може бути механізм, що складається з кривошипів  $O_1A$  і  $O_2B$  однакової довжини, насаджених на вали  $O_1$  та  $O_2$  (рис. 8.3) і з'єднаних спарником  $AB$ , довжина якого дорівнює відстані  $O_1O_2$ . Очевидно, що при всіх положеннях механізму  $O_1ABO_2$  залишається паралелограмом. Отже, спарник  $AB$  залишається паралельним прямій  $O_1O_2$ , і його рух є поступальним.

При поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії. Дійсно, розглянемо в твердому тілі пряму  $A_0B_0$  (рис. 8.4). Положення точки  $A_0$  ви-

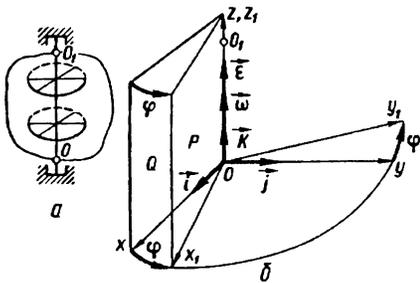


Рис. 8.5

значається радіусом-вектором  $\vec{r}_A$ , а положення точки  $B_0$  – радіусом-вектором  $\vec{r}_B$ ,  $\overline{A_0B_0} = \vec{\rho}$ . Між  $\vec{r}_B$ ,  $\vec{r}_A$  та  $\vec{\rho}$  існує залежність

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}. \quad (8.7)$$

При русі тіла  $\vec{r}_A$  та  $\vec{r}_B$  змінюються у часі, тобто  $\vec{r}_A = \vec{r}_A(t)$ ,  $\vec{r}_B = \vec{r}_B(t)$ . Вектор  $\vec{\rho}$  залишається сталим. Тоді  $\Delta\vec{r}_B = \Delta\vec{r}_A$  (рис. 8.4), отже, траєкторію точки  $A$  можна одержати паралельним переносом траєкторії точки  $B$ .

Доведемо таку теорему.

**Теорема.** При поступальному русі тіла всі точки рухаються з однаковими швидкостями та прискореннями.

Доведення. Здиференціювавши за часом рівняння (8.7), одержимо

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \quad (8.8)$$

Оскільки  $\vec{\rho} = \text{const}$ , то із (8.8) маємо

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}, \text{ або } \dot{\vec{v}}_B = \dot{\vec{v}}_A. \quad (8.9)$$

Здиференціювавши потім ще раз (8.9) за часом, матимемо

$$\frac{d\dot{\vec{v}}_B}{dt} = \frac{d\dot{\vec{v}}_A}{dt}, \text{ або } \ddot{\vec{w}}_B = \ddot{\vec{w}}_A. \quad (8.10)$$

Теорему доведено.

Із викладеного випливає, що вивчення поступального руху твердого тіла зводиться до вивчення руху будь-якої однієї його точки, тобто до задачі кінематики точки.

**Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі.** Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, при якому пряма, що проходить через які-небудь дві точки ( $O, O_1$ ) (рис. 8.5), під час руху тіла залишається нерухомою.

Ця пряма  $OO_1$  називається віссю обертання тіла.

Положення тіла при його обертанні навколо нерухомої осі визначається кутом повороту  $\varphi$ . Якщо провести в деякий момент часу через вісь обертання  $OO_1$  площину  $Q$  і зафіксувати її положення в нерухомому просторі, а через деякий проміжок часу провести іншу площину  $P$  (рис. 8.5), незмінно зв'язану з тілом, то отримаємо двограний кут з ребром  $OO_1$  на осі обертання. Лінійний кут  $\varphi$  цього двогранного кута називається кутом повороту тіла. Дововимося про вибір знака кута повороту  $\varphi$ . Якщо з боку додатного напрямку осі  $Oz$  перехід від однієї площини  $Q$  до іншої  $P$  відбувається проти ходу годинникової стрілки, то кут повороту  $\varphi$  вважатимемо додатним, а якщо за ходом годинникової стрілки – від'ємним.

Кут  $\varphi$  виміряється в радіанах і характеризує поворот осей  $Ox_1, y_1, z_1$ , незмінно зв'язаних із тілом, відносно початкової системи відліку  $Oxyz$  (рис. 8.5). При обертанні тіла кут повороту  $\varphi$  неперервно змінюється у часі. Отже,  $\varphi = \varphi(t)$ . Це рівняння називається кінематичним рівнянням обертального руху тіла навколо нерухомої осі.

**Кутова швидкість і кутове прискорення тіла, що обертається навколо нерухомої осі.** За досить малий проміжок часу  $\Delta t$  кут

$$\omega_{\text{сп}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (8.11)$$

Через граничний перехід у цьому виразі одержимо кутову швидкість тіла в даний момент часу:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (8.12)$$

Отже, кутова швидкість дорівнює першій похідній за часом від кута повороту  $\varphi$ . Кутова швидкість вимірюється в радіанах за секунду (рад/с або  $\text{с}^{-1}$ ). У техніці кутову швидкість часто задають числом  $n$  обертів за хвилину. Зв'язок між  $\omega$  та  $n$  визначається формулою

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}. \quad (8.13)$$

Якщо при обертанні тіла кутова швидкість є сталою, то обертання тіла називається *рівномірним*. При цьому кут повороту змінюється пропорційно часу:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad (8.14)$$

де  $\varphi_0$  – початковий кут повороту.

Рівняння (8.14) називається *рівнянням рівномірного обертання тіла навколо нерухомої осі*.

Кутова швидкість визначає також і напрям обертання. Так, якщо  $\omega > 0$ , то тіло обертається в напрямі зростання кута повороту – проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитися з боку вибраного додатного напрямку осі  $Oz$ , і в протилежному напрямі, якщо  $\omega < 0$ . Тому кутову швидкість зображують ковзним вектором  $\vec{\omega}$ , напрямленим

стрілки. Цей напрям  $\vec{\omega}$  вважається додатним у правій системі координат і від'ємним у лівій. Модуль вектора

$$\omega = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = |\dot{\varphi}|. \quad (8.15)$$

Кутове прискорення тіла характеризує швидкість змінення кутової швидкості у часі.

*Кутове прискорення в даний момент часу дорівнює першій похідній за часом від кутової швидкості або другій похідній за часом від кута повороту:*

$$\epsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (8.16)$$

Одиницею кутової прискорення є радіан за секунду в квадраті (рад/с<sup>2</sup> або с<sup>-2</sup>).

Кутове прискорення  $\vec{\epsilon}$ , як і кутову швидкість  $\vec{\omega}$ , зображують ковзним вектором, напрямленим у розглядуваному випадку вздовж осі обертання. Дійсно,  $\vec{\epsilon}$  є вектором, напрямленим по дотичній до годографа вектора  $\vec{\omega}$ . Годографом вектора  $\vec{\omega}$  є пряма, що збігається з віссю обертання  $Oz$ . Тому  $\vec{\epsilon}$  напрямлений по осі  $Oz$ . Модуль вектора  $|\vec{\epsilon}| = \left| \dot{\dot{\varphi}} \right| = \ddot{\varphi}$ . На підставі викладеного вектори кутової швидкості та кутового прискорення можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\varphi} \vec{k} = \omega_z \vec{k}, \\ \vec{\epsilon} &= \ddot{\varphi} \vec{k} = \epsilon_z \vec{k}, \end{aligned} \quad (8.17)$$

де  $\vec{k}$  – одиничний вектор осі  $Oz$ .

Якщо напрям вектора  $\vec{\epsilon}$  збігається з напрямом вектора  $\vec{\omega}$  (рис. 8.5), то обертання називається *прискореним*. Якщо напрям  $\vec{\epsilon}$  та  $\vec{\omega}$  протилежні, то обертання тіла назива-

стяться *сповільненням*. При  $\varepsilon = 0$ ,  $\omega = \text{const}$  обертання тіла буде *рівномірним*.

Якщо в процесі руху  $\varepsilon$  залишається величиною сталою, то таке обертання називається *рівнозмінним*. У цьому разі  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} =$

$$= \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \text{const}. \text{ Зінтегрувавши, одержимо}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon t + C_1, \text{ звідки } \varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  знайдемо з початкових умов. Якщо  $t = 0$ , то  $\omega = \omega_0$  і  $\varphi = \varphi_0$ . Тоді з виразів для  $\omega$  та  $\varphi$  визначимо  $C_1 = \omega_0$ ,  $C_2 = \varphi_0$ . Отже, для рівнозмінного обертання

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (8.18)$$

**Приклад 1.** Ротор електричної машини після вмикання обертається рівноприскорено з кутовим прискоренням  $\varepsilon = 5\pi \text{ c}^{-2}$ . Визначити кутову швидкість ротора на десятій секунді з початку руху і число обертів  $N$ , зроблених ротором за цей час.

**Розв'язання.** Оскільки за умовою задачі обертання ротора є рівноприскореним, то за формулою (8.18) маємо  $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ , причому  $\omega_0 = 0$ . Тому при  $t = 10 \text{ c}$   $\omega = 5\pi \cdot 10 = 50\pi \text{ c}^{-1}$ . Кут повороту  $\varphi = 2\pi N$ . Крім того, за формулою (8.18)  $\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2 + \varphi_0$ , але за умовою задачі  $\omega_0 = 0$ ;  $\varphi_0 = 0$ . Отже,  $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{5\pi \cdot 100}{2} = 250\pi = 2\pi N$ , звідки  $N = 125$  обертів.

Кут повороту, кутова швидкість і кутове прискорення є кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі. Перейдемо до розгляду кінематичних характеристик окремих точок цього тіла.

### § 8.3. Траєкторії, швидкості та прискорення точок тіла, яке обертається навколо нерухомої осі

Траєкторіями точок тіла при його обертанні навколо нерухомої осі, наприклад  $Oz$ , є кола, розташовані в площинах, перпендикулярних до осі обертання (рис. 8.6). Центри цих кіл знаходяться в точках перетину осі обертання з указаними площинами. Радіуси даних кіл називають також радіусами обертання точок тіла. При повороті тіла на кут  $\varphi$ , для точки з радіусом обертання  $R$  закон руху точки за траєкторією має вигляд

$$s = R\varphi, \quad (8.19)$$

де  $s$  — дугова координата, що відповідає куту повороту  $\varphi$ .

Швидкість будь-якої точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, називається *лінійною*. Швидкості точок на ободі маховика або диска, що обертається, називають також *кованими*.

Оскільки рух точки тіла у цьому русі заданий натуральним способом, то

$$v = \dot{s} = R\dot{\varphi} = R\omega. \quad (8.20)$$

Отже, лінійна швидкість точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, за величиною дорівнює добутку радіуса обертання на кутову швидкість. Лінійна швидкість напрямлена по дотичній до кола в бік обертання і, таким чином, перпендикулярна до радіуса обертання  $R$  (рис. 8.6).

Покажемо, що лінійна швидкість точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку кутової швидкості  $\vec{\omega}$  тіла на радіус-вектор  $\vec{r}$  точки  $M$ .

Нехай тіло обертається навколо нерухомої осі проти ходу годинникової стрілки. Тоді вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$  буде напрямлений у додатному напрямку осі обертання  $Oz$  (рис. 8.6). Положення розглядува-

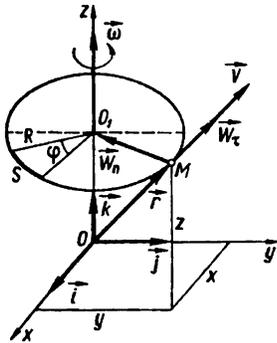


Рис. 8.6

ної точки тіла визначимо радіусом-вектором  $\vec{r}$ . При цьому  $R = r \sin(\widehat{\omega, \vec{r}})$ .

Підставивши у вираз (8.20) це значення  $R$ , одержимо

$$v = \omega r \sin(\widehat{\omega, \vec{r}}). \quad (8.21)$$

Отже, модуль лінійної швидкості дорівнюватиме модулю векторного добутку векторів  $\vec{\omega}$  та  $\vec{r}$ . Очевидно, що напрям лінійної швидкості точки  $M$  збігається з напрямом векторного добутку  $\vec{\omega} \times \vec{r}$ . Це безпосередньо випливає з визначення векторного добутку двох векторів  $\vec{\omega}$  та  $\vec{r}$ . Таким чином, лінійна швидкість точки дорівнює векторному добутку векторів  $\vec{\omega}$  та  $\vec{r}$ :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (8.22)$$

Ця формула називається *формулою Ейлера*. Водночас  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , звідки випливає, що коли вектор  $\vec{r}$  змінює за часом тільки свій напрям ( $|\vec{r}| = \text{const}$ ), то

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (8.23)$$

де  $\vec{\omega}$  – кутова швидкість повороту вектора  $\vec{r}$ .

Цією формулою зручно користуватися при обчисленні похідної вектора.

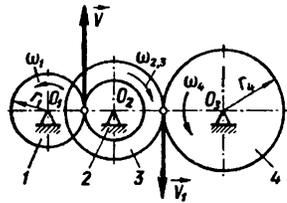


Рис. 8.7

Вибравши осі координат, як показано на рис. 8.6, знайдемо формули для проекції лінійної швидкості на осі координат:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x, \end{aligned} \quad (8.24)$$

де  $x, y, z$  – координати точки  $M$ .

З урахуванням того, що  $\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = \omega$ , остаточно маємо

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = 0. \quad (8.25)$$

**Приклад 2.** Шестірни (рис. 8.7) зчеплені між собою та обертаються навколо нерухомих паралельних осей, що проходять через точки  $O_1, O_2, O_3$ . Перша шестірна обертається з кутовою швидкістю  $\omega_1 = \frac{\pi}{2} \text{ c}^{-1}$ . Визначити кутову швидкість четвертої шестірни  $\omega_4, z_1 = 30, z_2 = 20, z_3 = 25, z_4 = 60$ , а третя шестірна насаджена на спільну вісь із другою шестірнюю.

**Розв'язання.** Розглянемо зчеплення першої та другої шестірни. Точка їх дотику має швидкість  $v = r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2$ . Звідси дістанемо  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}$ .

Враховуючи, що відношення радіусів шестерень дорівнює відношенню числа їх зубців, знайдемо

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2}; \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{30}{20}, \quad \text{звідки} \quad \omega_2 = \frac{3}{4} \pi \text{ c}^{-1}.$$

Третя шестірна насаджена на спільну вісь з другою шестірнюю.

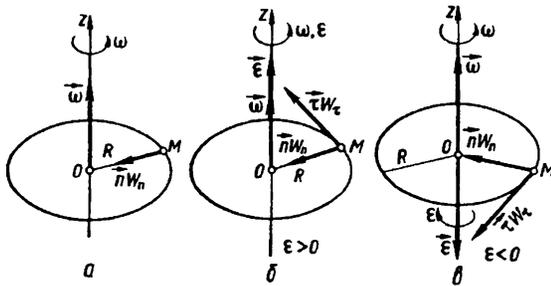


Рис. 8.8

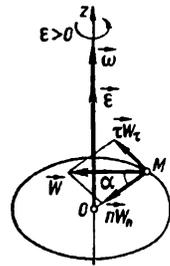


Рис. 8.9

тірною, тому  $\omega_3 = \omega_2 = \frac{3}{4} \pi \text{ c}^{-1}$ . Крім того, третя шестерня знаходиться у зачепленні з четвертою. Лінійна швидкість точки дотику -  $v_4$ , тому  $\frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{z_3}{z_4}$ , або  $\frac{\omega_4}{\frac{3}{4}\pi} = \frac{25}{60}$ , звідки  $\omega_4 = \frac{5}{16} \pi \text{ c}^{-1}$ . Напрям обертання шестерень показано на рисунку.

Для визначення прискорення точки  $M$  тіла скористасмося натуральним способом задання руху. При цьому повне прискорення точки можна вирахувати як векторну суму дотичного  $\vec{w}_\tau$  і нормального  $\vec{w}_n$  прискорень (рис. 8.6):

$$w_\tau = \dot{s}; w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R}. \quad (8.26)$$

Виразимо ці прискорення через кінематичні характеристики обертального руху тіла, тобто через  $\omega$  та  $s$ . При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі відповідно до формул (8.19) і (8.20)  $s = R\phi$  та  $v = R\omega$ . Підставивши вирази для  $v$  та  $s$  із цих формул у (8.26), одержимо

$$w_\tau = R\dot{\omega} = R\epsilon, \quad w_n = R\omega^2. \quad (8.27)$$

Отже, дотичне прискорення дорівнює добутку радіуса обертання на кутове прискорення. Нормальне прискорення точки тіла при обертанні його навколо нерухомої осі дорівнює добутку радіуса обертання  $R$  на квадрат кутової швидкості. Дотичне прискорення спрямоване вздовж дотичної до траєкторії в бік обертання, якщо рух прискорений ( $\epsilon > 0$ ), і в бік, протилежний обертанню, якщо рух сповільнений ( $\epsilon < 0$ ) (рис. 8.8, б, в). Нормальне прискорення спрямоване за нормаллю, котра в даному випадку спрямована вздовж радіуса обертання до центра обертання (рис. 8.8, а).

Повне прискорення дорівнює векторній сумі дотичного і нормального прискорень  $\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n$ . При цьому модуль повного прискорення точки визначимо за формулою

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = R\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}. \quad (8.28)$$

Напрямок одержаного прискорення знайдемо за тангенсом кута  $\alpha$ , утвореного між повним прискоренням з нормальним прискоренням (рис. 8.9),

$$\text{tg } \alpha = \frac{w_\tau}{w_n} = \frac{R\epsilon}{R\omega^2} = \frac{\epsilon}{\omega^2}. \quad (8.29)$$

**Приклад 3.** Диск обертається навколо нерухомої осі, що проходить перпендикулярно до його площини через центр диска. Знайти дотичне та повне прискорення точки  $M$  на ободі диска, якщо нормальне прискорення точки  $M$   $w_n = 0,9 \text{ м/с}^2$  і утворює з повним прискоренням  $\vec{w}$  кут  $\alpha = 30^\circ$ .

Розв'язання. Тангенс кута між  $\vec{w}_n$  та  $\vec{w}_\tau$  визначається за формулою (8.29)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w_\tau}{w_n}.$$

$$\text{Отже, } \operatorname{tg} 30 = \frac{w_\tau}{0,9}; \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{w_\tau}{0,9}; \quad w_\tau = 0,52 \text{ м/с}^2.$$

Повне прискорення точки  $M$  дорівнює

$$w_M = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}, \quad w_M = 1,04 \text{ м/с}^2.$$

Формулу для прискорення точки тіла при обертанні його навколо нерухомої осі можна отримати безпосереднім диференціюванням вектора швидкості точки  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ :

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \\ &= \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що  $|\vec{\epsilon} \times \vec{r}| = |\epsilon||r|\sin(\epsilon, r) = \epsilon R = w_\tau$ ,  $|\vec{\omega} \times \vec{v}| = |\omega||v|\sin \frac{\pi}{2} = \omega v = \omega^2 R = w_n$ , одержимо  $\vec{w} = \vec{\tau} w_\tau + \vec{n} w_n$ , що й треба було довести.

У загальному випадку руху твердого тіла, як буде показано далі,  $\vec{\epsilon} \times \vec{r} \neq \vec{\tau} w_\tau$ ;  $\vec{\omega} \times \vec{v} \neq \vec{n} w_n$ .

#### § 8.4. Механізми перетворення найпростіших рухів твердого тіла

На практиці зустрічаються чотири групи задач з перетворення найпростіших рухів твердого тіла:

- перетворення одного поступального руху в інший поступальний рух;

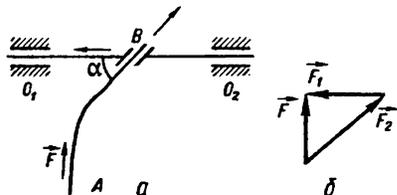


Рис. 8.10

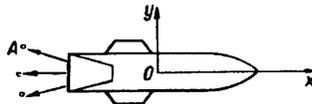


Рис. 8.11

- перетворення обертального руху відносно однієї осі в обертальний рух відносно іншої осі;

- перетворення поступального руху в обертальний і навпаки;

- комплексні перетворення рухів, наприклад перетворення поступального руху одного твердого тіла в обертальний рух іншого тіла, який викликає поступальний рух системи в будь-якому напрямку.

**1. Перетворення одного поступального руху в інший поступальний рух.** Прикладом такого перетворення може бути простий кулісний механізм (рис. 8.10).

Під дією сили  $\vec{F}$ , що прикладена в точці  $A$ , виникає поступальний рух криволінійного стрижня  $AB$  по напрямним, встановленим на осі  $O_1O_2$ . У результаті взаємодії виникає сила  $\vec{F}_1$  (рис. 8.10, б), яка перемістить вісь  $O_1O_2$  разом зі стрижнем  $AB$  у напрямку дії сили  $\vec{F}_1$ , звичайно, якщо сила  $\vec{F}_1$  більше сили тертя ковзання в опорах  $O_1O_2$ .

Інший приклад перетворення поступального руху частинок газу, що вилітають із реактивного двигуна, в поступальний рух реактивного снаряда (або ракети) в напрямку, протилежному осі  $Ox$ , показаний на рис. 8.11.

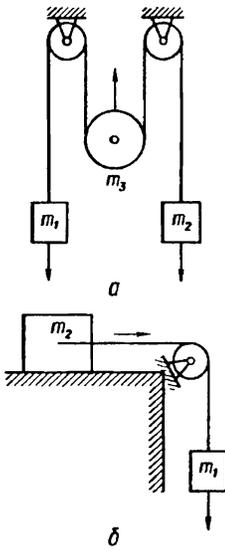


Рис. 8.12

Перетворення поступальних рухів у інші поступальні дають блочні механізми. На рис. 8.12, *а* за допомогою двох вантажів маси  $m_1$  та  $m_2$ , які рухаються наприклад вниз, третій вантаж масою  $m_3$  переміщується поступально вгору.

На рис. 8.12, *б* показаний приклад перетворення поступального руху тіла масою  $m_1$  у поступальний рух тіла масою  $m_2$  в напрямку, який перпендикулярний напрямку руху тіла масою  $m_1$ .

**2. Перетворення обертального руху відносно однієї осі в обертальний рух відносно іншої осі.** Таке перетворення обертальних рухів дуже широко розповсюджене в техніці. Якщо осі обертання паралельні чи перетинаються, то обертання можна передати за допомогою зубчатих або фрикційних передач. При цьому зчеплення може бути як зовнішнім (рис. 8.13, *а, в*), так і внутрішнім (рис. 8.13, *б, г*).

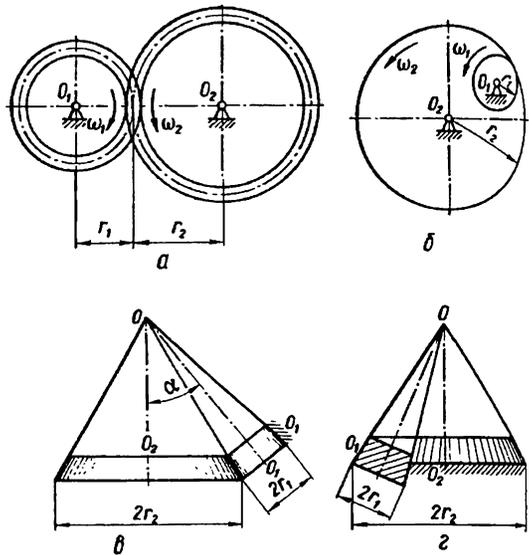
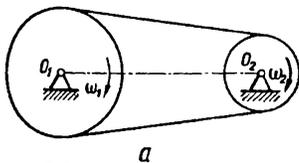


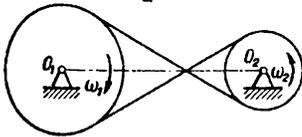
Рис. 8.13

Перетворення обертальних рухів з паралельними осями можна реалізувати також і за допомогою пасових або ланцюгових передач. При цьому пасова передача із неперехресним рухом паса (рис. 8.14, *а*) еквівалентна внутрішньому зубчатому або фрикційному зчепленню, а з перехресним рухом паса (рис. 8.14, *б*) – зовнішньому зчепленню. При передачі обертання від одного тіла до іншого перше тіло називають *привідним* або *ведучим*, друге – *веденим*, а весь механізм називають *передавальним*.

Основою для кінематичного розрахунку цих передач (рис. 8.13, 8.14.) є припущення, що в системі немає ковзання, зазорів між зубцями коліс, а паси, ланцюги тощо не деформуються. Це означає, що швидкості на ободі зубчатих коліс, які знаходяться в зчепленні, та швидкості на ободах шківів пасових і ланцюгових передач



a



б

Рис. 8.14

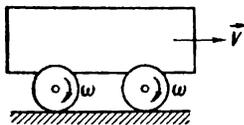


Рис. 8.17

однакові. Тобто в цих випадках має місце співвідношення

$$v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2. \quad (8.30)$$

Отже, кутові швидкості коліс зубчатих, фрикційних, а також пасових та ланцюгових передач обернено пропорційні радіусам коліс:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (8.31)$$

Відношення кутової швидкості ведучого колеса до кутової швидкості веденого колеса називають *передаточним числом*:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (8.32)$$

Якщо врахувати, що число зубців пропорційно довжинам кіл, а значить і радіусам, то передаточне число можна визначити через відповідне відношення числа зубців:

$$u = \frac{z_2}{z_1}. \quad (8.33)$$

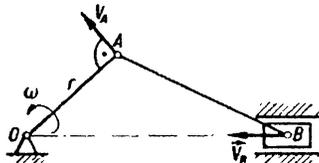


Рис. 8.15

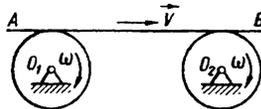


Рис. 8.16



Рис. 8.18

**3. Перетворення поступального руху в обертальний і навпаки.** Основою перетворення поступального руху в обертальний є кривошипно-шатунні механізми (рис. 8.15). Вироджені пасові передачі, коли стрічка *AB* не охоплює ободи всіх коліс, а лише дотикається до них, показані на рис. 8.16. На цьому принципі побудовані стрічкові транспортери, ескалатори тощо.

Класичним прикладом перетворення поступального руху в обертальний і навпаки є колісні транспортні засоби всіх видів (рис. 8.17).

Надзвичайно широко поширене перетворення обертального руху в поступальний і навпаки у гвинтових механізмах – це і звичайний шуруп, і шнекові механізми: в комбайнах, екструдерах, у м'ясорубках тощо (рис. 8.18). Обертальний рух гвинта електроприводу морського судна зумовлює його поступальний рух (рис. 8.19). Аналогічно в літальних апаратах гвинтові поверхні пропелерів, обертаючись, спричиняють їх по-

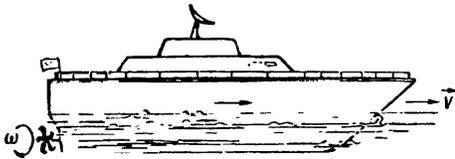


Рис. 8.19

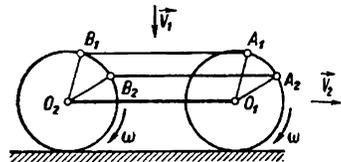


Рис. 8.20

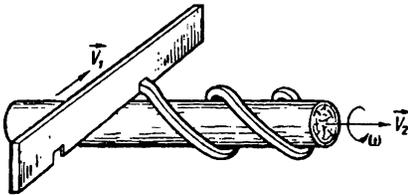


Рис. 8.21

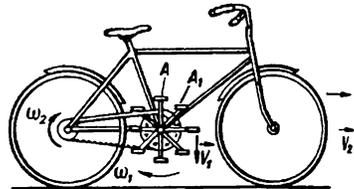


Рис. 8.22

ступальний рух. При розрахунку кривошипно-шатунних механізмів (рис. 8.15), для того, щоб установити зв'язок кутової швидкості  $\omega$  кривошипа  $OA$  і поступальної швидкості кулі точки  $B$ , можна скористатися теоремою Грасгофа щодо відрізка  $AB$ .

У механізмах типу ескалаторів (рис. 8.16), колісних рухомих засобів має місце кінематичне співвідношення

$$v = \omega r. \quad (8.34)$$

**4. Комплексні перетворення найпростіших рухів.** Комплексні перетворення найпростіших рухів охоплюють собою такі перетворення, які мають не менше трьох найпростіших рухів у будь-якій їх комбінації. Наприклад: поступальний рух  $\rightarrow$  обертання  $\rightarrow$  поступальний рух; обертання  $\rightarrow$  обертання  $\rightarrow$  поступальний рух; обертання  $\rightarrow$  обертання  $\rightarrow$  обертання і т. ін.

Наведемо декілька прикладів комплексних перетворень найпростіших рухів.

У спарнику (рис. 8.20) поступальний рух стрижня  $A_1B_1$  зі швидкістю  $v_1$  викликає обертальний рух коліс із кутовою швидкістю  $\omega$  і поступальний рух спарника зі швидкістю  $v_2$  в горизонтальному напрямі.

У дверних замках рейкового типу (рис. 8.21) поступальний рух ключа зі швидкістю  $v_1$  через гвинтову нарізку спричинює обертання валика із кутовою швидкістю  $\omega$  та лінійною швидкістю  $v_2$ .

У велосипеді (рис. 8.22) маємо таку схему перетворень найпростіших рухів: поступальний рух педалі велосипеда зі швидкістю  $v_1$  спричинює обертання ведучої шестірниці з кутовою швидкістю  $\omega_1$ , яка через ланцюгову передачу спричинює обертання веденої шестірниці та заднього колеса з кутовою швидкістю  $\omega_2$ , що спричинює поступальний рух велосипеда зі швидкістю  $v_2$ .

Отже, схема перетворень найпростіших рухів у велосипеді така:

$$v_1 \rightarrow \omega_1 \rightarrow \omega_2 \rightarrow v_2.$$

В автомобілі з двигуном внутрішнього згоряння (рис. 8.23) схема перетворення рухів буде

$$v_1 \rightarrow \omega_1 \rightarrow \omega_2 \rightarrow \omega_3 \rightarrow v_2.$$

Тут  $v_1$  – поступальна швидкість поршня в циліндрі, яка спочатку перетворюється у

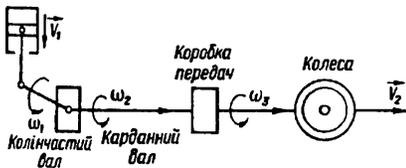


Рис. 8.23

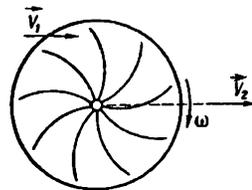


Рис. 8.24

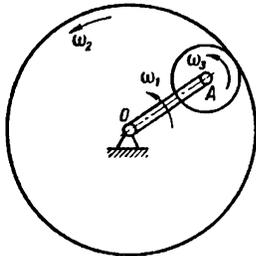


Рис. 8.25

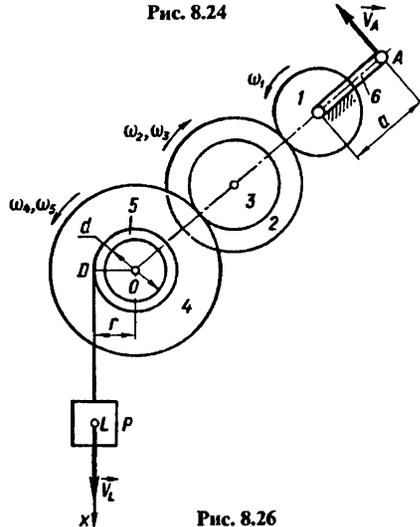


Рис. 8.26

кутову швидкість  $\omega_1$  колінчастого вала, а потім – у кутову швидкість  $\omega_2$  карданного вала, яка через коробку передач (багатоколісна система зубчатих зчеплень) перетворюється у кутову швидкість  $\omega_3$  ведучого вала коліс, що спричинює поступальний рух автомобіля зі швидкістю  $v_2$ .

У турбінних двигунах газ (повітря, пара), рухаючись зі швидкістю  $v_1$ , спричинює обертальний рух вихідного вала турбодвигуна зі швидкістю  $\omega$ , яка потім може перетворюватися в інші кутові швидкості привідних валів і в кінцевому результаті зумовити поступальний рух об'єкта зі швидкістю  $v_2$  (рис. 8.24). Прикладом комплексного перетворення обертальних рухів є редуктори – багатоосові зчеплення, до складу яких входять також так звані планетарні механізми (рис. 8.25).

Характерним для планетарних механізмів є наявність водила  $OA$ , що несе на своїй осі  $A$  колесо, яке називають сателітом.

Схема перетворення найпростіших рухів у цьому планетарному механізмі така:

$$\omega_1 \rightarrow \omega_2 \rightarrow \omega_3.$$

**Приклад 4.** Механізм, що показаний на рис. 8.26, переміщує вантаж  $P$ , завдяки обертанню рукоятки  $A$ . Через несправність лебідки вантаж  $P$  несподівано починає прискорено рухатися за законом  $x = 10t^2$  (см). Визначити лінійну швидкість кінця рукоятки  $A$  через 2 с та 10 с, якщо радіус барабана  $r = 0,1$  м, задано кількість зубців коліс, які знаходяться у зчепленні:  $z_1 = 13$ ,  $z_2 = 39$ ,  $z_3 = 11$ ,  $z_4 = 77$  і довжина рукоятки  $a = 0,4$  м.

Розв'язання. У даному випадку маємо таку схему комплексного перетворення найпростіших рухів:

$$v_L \rightarrow \omega_5, \omega_4 \rightarrow \omega_3, \omega_2 \rightarrow \omega_1 \rightarrow v_A.$$

Якщо задано закон руху точки  $L$ , то легко обчислити її швидкість:

$$v_L = \frac{dx}{dt} = 20t.$$

Після того, як знайдемо  $v_L$ , легко обчислити кутову швидкість барабана 5:

$$\omega_5 = \frac{v_L}{r}.$$

Оскільки колесо 4 жорстко з'єднано з барабаном, то  $\omega_4 = \omega_5$ .

Скориставшись співвідношеннями (8.31), матимемо

$$\omega_3 = \omega_4 \frac{z_4}{z_3} = \omega_5 \frac{z_4}{z_3}.$$

Далі  $\omega_2 = \omega_3$ , бо колесо 2 насаджено на одну вісь із колесом 3. Оскільки колесо 1 знаходиться у зчепленні з колесом 2, то

$$\omega_1 = \omega_2 \frac{z_2}{z_1} = \omega_3 \frac{z_2}{z_1} = \omega_5 \frac{z_4}{z_3} \frac{z_2}{z_1} = \frac{v_L}{r} \frac{z_4}{z_3} \frac{z_2}{z_1}.$$

Рукоятка 6 насаджена на одну вісь із колесом 1, тому  $\omega_6 = \omega_1$ . Звідси швидкість точки  $A$  кінця рукоятки буде

$$v_A = \omega_1 a = a \frac{v_L}{r} \frac{z_4}{z_3} \frac{z_2}{z_1} = a \frac{20t}{r} \frac{z_4}{z_3} \frac{z_2}{z_1}.$$

При числових даних отримаємо величину швидкості на 2-й та 10-й секундах руху:

$$v_A(2) = 33,6 \text{ м/с}; \quad v_A(10) = 168 \text{ м/с}.$$

Як бачимо, комплексні перетворення найпростіших рухів спричинюють складні рухи точок і ведених тіл, що потребує розгляду спеціальної методики вивчення складних рухів точки і тіла.

На завершення зазначимо, що з точки зору кінематики рухів усі апарати, машини, обладнання, прилади, роботи і, нарешті, живі істоти, включаючи людину, реалізують своє переміщення у просторі, або переміщення свого робочого органу (веденого механізму), як результат комплексного перетворення найпростіших рухів окремих елементів.

### Питання для самоконтролю

1. Чи можна звести кінематику поступального руху твердого тіла до кінематики точки?
2. Який вид траєкторії мають точки твердого тіла, що обертаються відносно нерухомої осі?
3. Чому вектор кутового прискорення при обертанні твердого тіла відносно нерухомої осі напрямлений по тій самій осі, що і вектор кутової швидкості тіла?
4. Чому у випадку обертання твердого тіла відносно нерухомої осі обертальна складова прискорення еквівалентна тангенціальному прискоренню, а нормальна – доосвоюому?
5. За якою формулою можна перейти при обчисленні кутової швидкості від обертів за хвилину до радіанів за секунду?
6. Чи можете Ви навести приклади принаймні двох типів механізмів, що перетворюють обертальний рух у поступальний?
7. Яке співвідношення між лінійними швидкостями має місце у механізмів із шестірнями?
8. Чому кількість зубів у шестірнях, що знаходяться в зчепленні, має бути пропорційна їх діаметрам?
9. Як у пасових передачах досягти того, щоб колеса обертались у протилежних напрямках?
10. За допомогою якої передачі можна передати обертання з однієї осі на іншу, якщо ці осі лежать в одній площині і непаралельні?

§ 9.1. Абсолютний, відносний і переносний рухи точки

У кінематиці точки розглядається рух точки відносно нерухомої системи координат (прямокутної декартової або відносно осей натурального тригранника). Проте часто доводиться досліджувати рух точки відносно двох і більше систем координат (тіл відліку), з яких одна система координат здійснює рух відносно іншої, яка умовно береться за нерухому. Наприклад, при вивченні роботів-маніпуляторів слід вводити кілька систем координат.

Отже, припустимо, що система координат  $Oxyz$ , незмінно зв'язана з деяким тілом, рухається відносно іншої системи координат  $A\xi\eta\zeta$ , що умовно взята за нерухому (рис. 9.1).

Рух точки  $M$  відносно нерухомої системи координат називається *абсолютним*, а відносно рухомої системи координат – *відносним*. Швидкості й прискорення точки, розглядувані відносно даних систем, відповідно називаються абсолютними та відносними.

Рух рухомої системи координат  $Oxyz$  (або незмінно зв'язаного з нею тіла  $G$ ) відносно нерухомої системи відліку  $A\xi\eta\zeta$  є для рухомої точки *переносним* рухом, тобто це рух тієї точки рухомої системи координат, з якою в даний момент часу збігається рухома точка  $M$ . Відповідно швидкості й прискорення точки, незмінно зв'язаної з рухомою системою координат, в якій у даний момент часу знаходиться рухома точка, називаються переносними.

Основною задачею складного руху точки є встановлення залежності між кінематичними характеристиками абсолютного, переносного та відносного рухів.

Рівняннями абсолютного руху точки  $s$ , наприклад, залежності координат точки  $M$ , задані в нерухомій системі координат як функції часу:

$$\xi = \xi(t), \eta = \eta(t), \zeta = \zeta(t). \quad (9.1)$$

Аналогічно для рівнянь відносного руху масо

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (9.2)$$

Рівняння (9.1) і (9.2) визначають у параметричній формі відповідно абсолютну та відносну траєкторії. Якщо рівняння (9.1) і (9.2) відомі, то проекції абсолютної та відносної швидкостей визначаються відповідно як перші похідні за часом наведених функцій; тоді другі похідні за часом від цих функцій визначають проекції абсолютного та відносного прискорень.

У подальшому введемо такі позначення:  $\vec{v}_a, \vec{v}_r, \vec{v}_e$  – відповідно абсолютна, відносна та переносна швидкості;  $w_a, w_r, w_e$  – абсолютне, відносне та переносне прискорення.

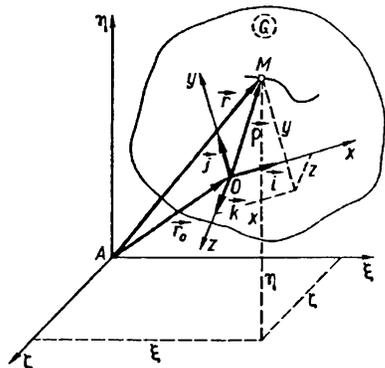


Рис. 9.1

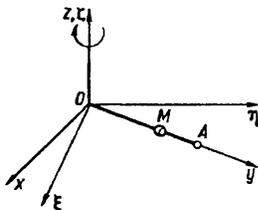


Рис. 9.2

**Приклад 1.** Нехай стрижень  $OA$  обертається навколо нерухомої осі  $O\xi$  (рис. 9.2). Уздовж стрижня рухається гладке кільце, розглядуване як матеріальна точка  $M$ . З'ясуйте характер відносного та переносного рухів.

Розв'язання. Виберемо в точці  $O$  початок нерухомої системи координат  $O\xi\eta\zeta$ . Рух точки  $M$  у цій системі координат називається абсолютним. Рухома система координат  $Oxyz$ , зв'язана зі стрижнем, наведена на рис. 9.2. Абсолютний рух точки  $M$  відбувається в площині  $\xi O\eta$ , а відносний уздовж рухомої осі  $Oy$ . Для встановлення характеру переносного руху з'ясуємо, який рух рухома система координат  $Oxyz$  здійснює по відношенню до нерухомої. Згідно з умовою задачі, вісь  $Oy$  обертається навколо осі  $O\xi$ . Отже, переносним рухом тут є обертальний рух стрижня навколо осі  $O\xi$ .

Отже, складний рух точки  $M$  (кільця) можна розглядати як сукупність прямолінійного відносного (вздовж стрижня  $OA$ ) і обертального переносного навколо нерухомої осі  $Oz$  разом зі стрижнем.

Установивши характер абсолютного, відносного та переносного рухів, можна розв'язувати, наприклад, такі задачі:

а) за заданими відносним і переносним рухами визначати складний (абсолютний) рух точки;

б) за заданим складним рухом точки визначати складові простих рухів.

## § 9.2. Центральна операція кінематики і динаміки. Абсолютна та відносна похідні за часом від вектора-функції

Нехай  $O\xi\eta\zeta$  – система координат, взята за нерухому, а  $Oxyz$  – рухома система координат, орти якої  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  (рис. 9.3, а).

Розглянемо довільну точку  $M$ , що рухається відносно як рухомої, так і нерухомої системи координат. Нехай положення цієї точки в рухомій системі координат визначається радіусом-вектором  $\vec{r}$  у вигляді

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z. \quad (9.3)$$

Встановимо зв'язок між похідними від функції, обчисленими в рухомій і нерухомій системах координат. Для цього спочатку знайдемо похідну за часом від вектора  $\vec{r}$  у нерухомій системі, котра називається абсолютною похідною від вектора  $\vec{r}$  за часом  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + \\ &+ x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Перші три члени цього виразу являють собою похідну від вектора  $\vec{r}$ , обчислену за припущенням, що орти рухомої системи координат за напрямом не змінюються, що відповідає обчисленню похідної в рухомій системі координат. Цей вираз називається локальною (відносною) похідною та позначається  $\frac{d'\vec{r}}{dt}$ ;

$$\frac{d'\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \quad (9.5)$$

Розглянемо тепер останні три доданки в (9.4), які позначимо через

$$\vec{v}^{\omega} = x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (9.6)$$

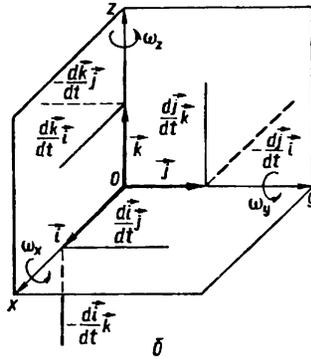
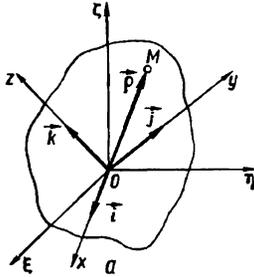


Рис. 9.3

Помноживши обидві частини (9.6) скалярно на  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ , одержимо

$$\begin{aligned}\vec{v}^\omega \cdot \vec{i} &= x \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{i} + y \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{i} + z \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{i}; \\ \vec{v}^\omega \cdot \vec{j} &= x \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j} + y \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{j} + z \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{j}; \\ \vec{v}^\omega \cdot \vec{k} &= x \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{k} + y \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{k} + z \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{k}.\end{aligned}\quad (9.7)$$

Праві частини цих виразів є проєкціями вектора  $\vec{v}^\omega$  на осі рухомої системи координат. Позначимо їх через  $v_x^\omega$ ,  $v_y^\omega$ ,  $v_z^\omega$ . Скористась очевидними співвідношеннями (рис. 9.3, б)

$$\begin{aligned}\vec{i}^2 = 1, \vec{j}^2 = 1, \vec{k}^2 = 1, \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.\end{aligned}\quad (9.8)$$

Диференціюючи їх за часом, отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{i} = 0, \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{j} = 0, \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{k} = 0, \\ \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j} = -\frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{i}, \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{k} = -\frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{j}, \\ \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{i} = -\frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{k}.\end{aligned}\quad (9.9)$$

Введемо позначення

$$\omega_x = \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{k}, \omega_y = \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{i}, \omega_z = \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j}.\quad (9.10)$$

Тоді вирази (9.7) з урахуванням співвідношень (9.8) – (9.10) можна записати у формі

$$\begin{aligned}v_x^\omega = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y^\omega = \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z^\omega = \omega_x y - \omega_y x.\end{aligned}\quad (9.11)$$

Якщо ввести до розгляду вектор

$$\vec{\omega} = \vec{i} \omega_x + \vec{j} \omega_y + \vec{k} \omega_z,\quad (9.12)$$

то вираз (9.6) можна подати у вигляді

$$\vec{v}^\omega = \vec{\omega} \times \vec{\rho}.\quad (9.13)$$

Підставивши (9.13) і (9.5) у вираз (9.4), одержимо формулу, яка встановлює зв'язок між похідною не лише вектора  $\vec{\rho}$ , а й довільного вектора  $\vec{A}$  за часом, обчисленою у нерухомій і рухомій системах координат:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d'\vec{\rho}}{dt} + \vec{v}^\omega = \frac{d'\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}; \\ \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\xi\eta\zeta} = \left( \frac{d'\vec{A}}{dt} \right)_{O\xi\eta\zeta} + \vec{\omega} \times \vec{A}.\end{aligned}\quad (9.14)$$

Зазначимо, що в другій формулі (9.14) вказана система координат, в якій обчислю-

ється відповідна похідна. Тут вектор  $\vec{\omega}$  можна розглядати як кутову швидкість обертання рухомої системи координат  $Ox_1y_1z_1$  відносно нерухомої  $A\xi\eta\zeta$ .

Формулу (9.14) називають формулою Бура. Вона має такий зміст: абсолютна похідна довільного вектора  $(\vec{p}, \vec{A})$  за часом

$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}, \frac{d\vec{A}}{dt}\right)$  дорівнює сумі локальної похідної

$\left(\frac{d'\vec{p}}{dt}, \frac{d'\vec{A}}{dt}\right)$  та векторного добутку векто-

ра  $\vec{\omega}$  обертання рухомої системи координат на диференційовний вектор  $(\vec{p}, \vec{A})$ .

Оскільки формула (9.14) може бути розповсюджена на будь-який вектор, то в подальшому будемо широко користуватися нею не лише в кінематиці, але й у динаміці.

Розглянемо тепер окремі випадки.

1. Якщо система  $Ox_1y_1z_1$  нерухома, то

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0, \text{ отже, } \vec{\omega} = 0, \text{ тобто}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d'\vec{p}}{dt}. \quad (9.15)$$

2. Якщо вектор  $\vec{p}$  нерухомий відносно нерухомих осей координат  $O\xi\eta\zeta$ , то

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \frac{d'\vec{p}}{dt} = -\vec{\omega} \times \vec{p}. \quad (9.16)$$

3. Якщо вектор  $\vec{p}$  незмінно зв'язаний з системою координат  $Ox_1y_1z_1$ , то

$$\frac{d'\vec{p}}{dt} = 0, \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{p}. \quad (9.17)$$

Зазначимо, що у формулі (9.14) не розкрито поки що фізичного змісту вектора  $\vec{\omega}$ . Повністю його буде встановлено в кінематиці у розділі "Рух вільного твердого тіла". Зараз обмежимося розглядом деяких випадків, які частково відповідають на це питання.

4. Розглянемо рух рухомої системи координат, вважаючи, що остання незмінно зв'язана з тілом, яке обертається навколо нерухомої осі, наприклад  $O\xi$ . Тоді  $\frac{d\vec{i}}{dt}$  та  $\frac{d\vec{j}}{dt}$

є швидкостями точок, які збігаються з кінцями векторів  $\vec{i}$  та  $\vec{j}$  і обчислені відносно нерухомої системи координат, тобто швидкостями точок незмінної системи, якою є система координат  $Ox_1y_1z_1$ . Причому ці швидкості мають напрями відповідно ортів  $\vec{j}$  та  $-\vec{i}$  (рис. 9.3, б). Отже, вираз для швидкостей точок, що збігаються з кінцями одиничних векторів  $\vec{i}$  та  $\vec{j}$ , можна записати у вигляді

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{k}\omega_z \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{k}\omega_z \times \vec{j}. \quad (9.18)$$

Порівнявши ці вирази з одержаною раніше формулою Ейлера, робимо висновок, що вектор  $\vec{k}\omega_z$  має реальний фізичний зміст. А саме – це є вектор кутової швидкості тіла, яке обертається навколо нерухомої осі  $O\xi$ . Цей висновок легко узагальнюється на випадок довільної точки  $M$ , положення якої в рухомій системі координат визначається радіусом-вектором  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . Тоді вектор  $\vec{v}^\omega$  у виразі (9.14) має зміст швидкості точки, незмінно зв'язаної з тілом, що обертається у нерухомій системі координат, тобто

$$\vec{v}^\omega = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_M, \quad (9.19)$$

що відповідає формулі (8.23).

5. Якщо скалярно помножити обидві частини виразу (9.18) відповідно на  $\vec{j}$  та  $\vec{i}$ , то одержимо

$$\vec{j} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{j} \cdot (\vec{k}\omega_z \times \vec{i});$$

$$\vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{i} \cdot (\vec{k}\omega_z \times \vec{j}). \quad (9.20)$$

Ліві частини цих виразів є відповідно проєкціями вектора  $\frac{d\vec{i}}{dt}$  на орт  $\vec{j}$  та  $\frac{d\vec{j}}{dt}$  на орт  $\vec{i}$ , а праві частини мають значення відповідно  $\omega_z$  та  $-\omega_z$ , оскільки  $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ ,  $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$ . Отже, проєкціями швидкостей одиничних векторів  $\vec{i}$  та  $\vec{j}$  є  $\omega_z$  та  $-\omega_z$  (рис. 9.3, б).

6. Розглянемо рухому систему координат та припустимо, що вона здійснює обертальний рух як тверде тіло навколо нерухомої осі  $Oz_1$ , який визначається кутом повороту  $\varphi$ , що задається відносно положення  $Ox_1y_1z_1$  (рис. 9.4). Тоді

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \vec{i}_1 \cos \varphi + \vec{j}_1 \sin \varphi, \\ \vec{j} &= -\vec{i}_1 \sin \varphi + \vec{j}_1 \cos \varphi, \end{aligned} \quad (9.21)$$

де  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  – орти осей  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$ .

Звідси отримуємо співвідношення, з якими вже зустрічались у полярній системі координат:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \dot{\varphi} \vec{j}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = -\dot{\varphi} \vec{i}. \quad (9.22)$$

Помноживши тепер скалярно обидві частини одержаних виразів відповідно на  $\vec{j}$  та  $\vec{i}$ , матимемо

$$\dot{\varphi} = \vec{j} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} = -\vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt}. \quad (9.23)$$

Як бачимо, похідна від кута повороту є нічим іншим, як кутовою швидкістю обертання рухомої системи координат. Таким чином, для однієї з компонент у (9.10) також установлено фізичний зміст.

7. Нехай рухома система відліку здійснює поступальний рух. Тоді  $\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$ .

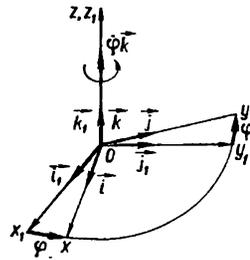


Рис. 9.4

Отже,  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$  і формула (9.14) має таку фізичну інтерпретацію: всі точки тіла рухаються з рівними за величиною та напрямом швидкостями, що було встановлено нами раніше при вивченні поступального руху тіла.

Таким чином, для окремих випадків руху рухомої системи координат  $Oxyz$  встановлено фізичний зміст вектора  $\vec{\omega}$  – це є вектор кутової швидкості тіла, або рухомої системи координат  $Oxyz$ . Далі буде наведено відповідне обґрунтування й для загального випадку рухів рухомої системи відліку, незмінно зв'язаної з рухом твердого тіла.

### § 9.3. Теорема про додавання швидкостей

**Теорема.** Абсолютна швидкість  $\vec{v}_a$  точки при складному русі дорівнює векторній сумі відносної  $\vec{v}_r$  та переносної  $\vec{v}_e$  швидкостей.

**Доведення.** Розглянемо рух точки  $M$  відносно деякого тіла  $G$  (рис. 9.1), з яким незмінно зв'язана рухома система координат  $Oxyz$ , яка, в свою чергу, рухається відносно умовно нерухомої системи координат  $O\xi\eta\zeta$ .

Нехай положення точки  $M$  у рухомій системі координат визначається радіусом-век-

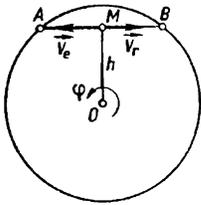


Рис. 9.5

тором  $\vec{\rho}$ , у нерухомій - радіусом-вектором  $\vec{r}$ , а положення початку  $O$  рухомої системи координат відносно нерухомої  $A\xi\eta\zeta$  - радіусом-вектором  $\vec{r}_0$ . Тоді

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}. \quad (9.24)$$

Здиференціюємо цей вираз відповідно до формули (9.14):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho} + \frac{d'\vec{\rho}}{dt}. \quad (9.25)$$

Тут індекс "e" відображає те, що вектор  $\vec{\omega}$  характеризує переносний рух. На підставі визначення абсолютної, відносної та переносної швидкостей маємо

$$\begin{aligned} \dot{\vec{v}}_a &= \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \dot{\vec{v}}_r = \frac{d'\vec{\rho}}{dt}, \\ \dot{\vec{v}}_e &= \dot{\vec{v}}_0 + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho}. \end{aligned} \quad (9.26)$$

З урахуванням цих позначень вираз (9.25) набуде вигляду

$$\dot{\vec{v}}_a = \dot{\vec{v}}_r + \dot{\vec{v}}_e, \quad (9.27)$$

який відображає теорему про розподіл швидкостей точок при складному русі. Очевидно, що формула (9.27) відбиває правило паралелограма для додавання швидкостей.

Модуль абсолютної швидкості  $\dot{v}_a$  на підставі теореми косинусів визначається у вигляді

$$\dot{v}_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2 v_e v_r \cos(\widehat{v_e, v_r})}. \quad (9.28)$$

**Приклад 2.** Уздовж хорди  $AB$  (рис. 9.5) обертового диска рухається точка  $M$  від точки  $A$  до точки  $B$  згідно з рівнянням  $s = 4t^2$ . Закон обертання диска  $\varphi = 8t$ . Визначити абсолютну швидкість точки в момент, коли вона знаходиться від осі обертання диска на відстані  $h = 0,2$  м.

**Розв'язання.** Рух точки  $M$  уздовж хорди рухомого диска відносний. Тому відносна швидкість і напрямлена по хорді  $AB$ :

$$v_r = \dot{s} = 8t \frac{M}{c}.$$

Диск обертається навколо осі, перпендикулярної до його площини. Отже, переносний рух диска буде обертальним, тому переносна швидкість точки  $M$  напрямлена перпендикулярно до  $OM$  у бік обертання диска.

За теоремою про додавання швидкостей абсолютна швидкість  $\dot{\vec{v}}_a = \dot{\vec{v}}_r + \dot{\vec{v}}_e$ . Оскільки  $\dot{v}_e = \omega h = \dot{\varphi} h = 8 \cdot 0,2 = 1,6 \frac{M}{c}$ , то  $\dot{v}_a = (8t - 1,6) \frac{M}{c}$ .

У деяких задачах кінематики складного руху точки потрібно визначити відносну швидкість  $\dot{\vec{v}}_r$ . Із формули (9.27) видно, що

$$\dot{\vec{v}}_r = \dot{\vec{v}}_a + (-\dot{\vec{v}}_e) = \dot{\vec{v}}_a - \dot{\vec{v}}_e.$$

Отже, щоб побудувати вектор відносної швидкості, слід додати вектор абсолютної швидкості до вектора, напрямленого протилежно переносній швидкості.

## § 9.4. Теорема про додавання прискорень

**Теорема Коріоліса.** Абсолютне прискорення точки при складному русі дорівнює векторній сумі відносного, переносного прискорень та прискорення Коріоліса.

**Доведення.** За визначенням прискорення точки, з урахуванням (9.27), маємо

$$\dot{\vec{w}} = \frac{d\dot{\vec{v}}_a}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{v}}_r + \dot{\vec{v}}_e) = \frac{d\dot{\vec{v}}_r}{dt} + \frac{d\dot{\vec{v}}_e}{dt}, \quad (9.29)$$

де

$$\vec{v}_e = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho}, \quad \vec{v}_r = \frac{d'\vec{\rho}}{dt}. \quad (9.30)$$

За допомогою формули (9.14) для абсолютної похідної, визначимо кожний доданок прискорення окремо, враховуючи, що вектори  $\vec{\rho}$  і  $\vec{v}_r$  задані в рухомій системі координат  $Oxyz$  і тому саме на них розповсюджуються формули (9.14):

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d'\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r, \quad (9.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_e}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{v}_0 + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho}) = \\ &= \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \\ &= \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{v}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho}). \end{aligned} \quad (9.32)$$

Введемо позначення

$$\frac{d\vec{\omega}_e}{dt} = \vec{\varepsilon}_e. \quad (9.33)$$

Тоді (9.32) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_e}{dt} &= \vec{w}_0 + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times \\ &\times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}) + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r, \end{aligned} \quad (9.34)$$

$$\text{де } \vec{w}_0 = \frac{d\vec{v}_0}{dt}.$$

Введемо позначення згідно з визначеннями абсолютного, відносного та переносного прискорень:

$$\vec{w}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt}, \quad \vec{w}_r = \frac{d'\vec{v}_r}{dt}, \quad (9.35)$$

$$\vec{w}_e = \vec{w}_0 + \varepsilon_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}).$$

Підставивши (9.31) та (9.34) у вираз (9.29), з урахуванням (9.35), одержимо

$$\vec{w}_a = \vec{w}_r + \vec{w}_e + 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r. \quad (9.36)$$

Останній доданок у цій формулі, який не входить ні до відносного, ні до переносного прискорення, називається *поворотним*, або *Коріолісовим прискоренням*  $\vec{w}_c$ :

$$\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r. \quad (9.37)$$

Остаточно одержимо

$$\vec{w}_a = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_c. \quad (9.38)$$

Теорема доведена.

Зауважимо, що у ряді випадків може стати корисною формула для визначення прискорення, що безпосередньо випливає з (9.14):

$$\vec{w}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d'\vec{v}_a}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_a. \quad (9.39)$$

Наголосимо, що коли переносний рух рухомої системи координат  $Oxyz$  є поступальним ( $\vec{\omega}_e = 0$ ), прискорення Коріоліса перетворюється на нуль. Тоді формула (9.38) набуває вигляду

$$\vec{w}_a = \vec{w}_r + \vec{w}_e, \quad (9.40)$$

тобто при поступальному русі абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі відносного та переносного прискорень. Отже, ця формула відображає правило паралелограма для додавання прискорень у даному випадку. В наступних розділах проаналізуємо вирази для кожної складової прискорення більш детально.

## § 9.5. Обертальне та доосьове прискорення у разі обертання тіла навколо нерухомої осі

Проаналізуємо дві складові переносного прискорення точки у виразі (9.35)  $\vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho}$  та  $\vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho})$ , які зумовлені рухом тіла відносно полюса  $O$ .

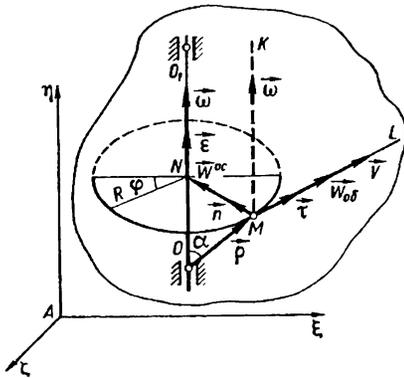


Рис. 9.6

Оскільки кінематичний зміст векторів  $\dot{\omega}_e$  та  $\dot{\epsilon}_e$  у загальному випадку руху тіла, а отже, рухомої системи координат ще до кінця не розкритий, поки що обмежимося розглядом тільки окремого випадку обертання тіла навколо нерухомої осі  $OO_1$  (рис. 9.6), для якого фізичний зміст векторів  $\vec{\omega}$  та  $\vec{\epsilon}$  повністю визначений.

Введемо такі позначення:

$$\dot{\omega}^{ob} = \dot{\epsilon}_e \times \vec{\rho}, \quad \dot{\omega}^{oc} = \dot{\omega}_e \times (\dot{\omega}_e \times \vec{\rho}) \quad (9.41)$$

і будемо називати прискорення  $\dot{\omega}^{ob}$  обер-тальним, а  $\dot{\omega}^{oc}$  доосьовим.

Розглянемо прискорення довільної точки  $M$ , незмінно зв'язаної з тілом, яке обертається навколо нерухомої осі (рис. 9.6). У цьому разі  $\dot{\omega}_0 = 0$ ,  $\dot{v}_r = 0 \Rightarrow \dot{w}_c = 0$ ,  $\dot{w}_t = 0$ , тому прискорення точки  $M$ , згідно з (9.38), запишемо у вигляді, опустивши індекс "e" при  $\omega$  та  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{w}_e = \dot{\omega}^{ob} + \dot{\omega}^{oc} = \\ &= \dot{\epsilon} \times \vec{\rho} + \dot{\omega} \times (\dot{\omega} \times \vec{\rho}). \end{aligned} \quad (9.42)$$

Крім того, прискорення цієї ж точки, згідно з § 8.3, можна подати у вигляді век-

торної суми нормального та тангенціально-го прискорення:

$$\vec{w} = \vec{n} w_n + \vec{\tau} w_\tau. \quad (9.43)$$

Встановимо зв'язок між складовими прискорення точки  $M$ , які є у виразах (9.42) та (9.43).

Передусім покажемо, що складова прискорення точки  $\dot{\omega}^{oc}$  напрямлена вздовж перпендикуляра  $MN$ , який опущено з точки  $M$  на вісь обертання  $OO_1$ . Для того, щоб підкреслити цю обставину, його називають доосьовим прискоренням.

Дійсно, якщо  $\vec{\rho}$  (рис. 9.6) – це радіус-вектор точки  $M$ , то вектор  $\vec{\rho}$  швидкості  $\vec{v} = \dot{\omega} \times \vec{\rho}$  напрямлений по дотичній до траєкторії (кола) точки, перпендикулярно до площини трикутника  $OMN$ . Тоді вектор доосьового прискорення

$$\dot{w}^{oc} = \dot{\omega} \times (\dot{\omega} \times \vec{\rho}) = \dot{\omega} \times \vec{v} \quad (9.44)$$

буде напрямлений перпендикулярно до площини  $KLM$ , яка містить пряму  $MK$ , паралельну осі обертання  $OO_1$  (рис. 9.6). Отже, вектор  $\dot{w}^{oc}$  напрямлений уздовж  $MN$ . Враховуючи, що

$$\begin{aligned} |\dot{\omega} \times \vec{v}| &= \omega v - \omega^2 \rho \sin \alpha = \\ &= \omega^2 MN = \omega^2 R, \end{aligned} \quad (9.45)$$

дістанемо

$$\dot{w}^{oc} = \dot{\omega} \times \vec{v} = -\omega^2 MN = -\omega^2 \vec{R}. \quad (9.46)$$

Порівнявши останній вираз із відповідним виразом (8.27) для нормального прискорення точки, яке завжди напрямлено по головній нормалі до абсолютної траєкторії з центром кривини в точці  $N$ , що лежить на осі обертання, отримаємо

$$\dot{w}^{oc} = \vec{n} w_n. \quad (9.47)$$

Розглянемо тепер другу складову прискорення  $\vec{w}^{ob}$ , яку називають *обертальним прискоренням*.

Оскільки виконується рівність (9.47), то, з урахуванням (9.42) і (9.43), одержимо

$$\vec{\tau} w_{\tau} = \vec{w}^{ob}. \quad (9.48)$$

Далі буде показано, що у загальному випадку рух твердого тіла  $\vec{w}^{oc} \neq \vec{\tau} w_{\tau}$ ,  $\vec{w}^{oc} \neq \vec{n} w_n$ . Якщо врахувати, що при обертанні тіла навколо нерухомої осі напрями векторів  $\vec{\omega}$  та  $\vec{\epsilon}$  завжди збігаються (і збігаються з віссю обертання), то в кожній точці вектори швидкості та дотичного прискорення направлені вздовж однієї прямої – дотичної до траєкторії. Модуль обертального прискорення запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} w^{ob} &= |\vec{\epsilon} \times \vec{\rho}| = \epsilon r \sin \alpha = \\ &= \epsilon R = \ddot{\phi} R. \end{aligned} \quad (9.49)$$

### § 9.6. Коріолісове прискорення

За формулою (9.37) коріолісове прискорення<sup>1</sup> з'являється тоді, коли переносний рух є обертальним:

$$\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r. \quad (9.50)$$

Як видно з наведеної формули, коріолісове прискорення дорівнює подвоєному векторному добутку вектора  $\vec{\omega}_e$  на відносну швидкість точки  $\vec{v}_r$ . Напрямок коріолісового прискорення визначається за правилом векторного добутку. Воно напрямлене вздовж нормалі до площини, в якій розташовані вектори  $\vec{\omega}_e$  та  $\vec{v}_r$ , до тієї частини простору, з якої, якщо дивитися з кінця вектора  $\vec{w}_c$ ,

видно поворот на найменший кут від вектора  $\vec{\omega}_e$  до вектора  $\vec{v}_r$ , проти ходу годинникової стрілки (у правій системі координат).

Модуль коріолісового прискорення знаходимо за формулою

$$w_c = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r}). \quad (9.51)$$

Спроекувавши обидві частини рівності (9.50) на рухомі осі координат, одержимо такі вирази для проекцій коріолісового прискорення:

$$\begin{aligned} w_{cx} &= 2(\omega_{ey}\dot{z} - \omega_{ez}\dot{y}), \\ w_{cy} &= 2(\omega_{ez}\dot{x} - \omega_{ex}\dot{z}), \\ w_{cz} &= 2(\omega_{ex}\dot{y} - \omega_{ey}\dot{x}), \end{aligned} \quad (9.52)$$

де  $\omega_{ex}$ ,  $\omega_{ey}$ ,  $\omega_{ez}$  – проекції кутової швидкості на осі рухомої системи координат;  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  – проекції відносної швидкості на ці самі осі.

Тоді модуль коріолісового прискорення

$$w_c = \sqrt{w_{cx}^2 + w_{cy}^2 + w_{cz}^2}. \quad (9.53)$$

Напрямок  $\vec{w}_c$  визначається за напрямними косинусами кутів, які вектор  $\vec{w}_c$  утворює відповідно з осями  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  рухомих осей:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{w}_c, \vec{i}}) &= \frac{w_{cx}}{w}, \\ \cos(\widehat{\vec{w}_c, \vec{j}}) &= \frac{w_{cy}}{w}, \\ \cos(\widehat{\vec{w}_c, \vec{k}}) &= \frac{w_{cz}}{w}. \end{aligned} \quad (9.54)$$

**Випадки перетворення на нуль коріолісового прискорення.** Як випливає з (9.51), коріолісове прискорення дорівнює нулю в ті моменти (або на тих проміжках часу), коли:

1) вектор  $\vec{\omega}_e$  дорівнює нулю, тобто переносний рух є поступальним;

<sup>1</sup>Теорема про коріолісове прискорення вперше була сформульована Л. Ейлером у 1765 р., а потім, без посилань на Л. Ейлера, доведена К. Гауссом у 1803 р. та Г. Коріолісом у 1833 р.

2) відносна швидкість  $\vec{v}_r$  дорівнює нулю, тобто немає відносного руху;

3)  $\sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 0$ , тобто вектори  $\vec{\omega}_e$  та  $\vec{v}_r$  є колінеарними.

Слід зазначити, що в ті моменти часу, коли коріолісове прискорення перетворюється на нуль, абсолютне прискорення точки визначається за правилом паралелограма. Тоді

$$\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r, \quad (9.55)$$

а модуль цього прискорення визначається за теоремою косинусів

$$w_a = \sqrt{w_e^2 + w_r^2 + 2 w_e w_r \cos(\vec{w}_e, \vec{w}_r)}. \quad (9.56)$$

**Фізичні причини виникнення коріолісового прискорення.** Покажемо, що коріолісове прискорення виникає внаслідок таких двох причин.

1. Уявімо собі два прямолінійних відрізки  $O_1A_1$  та  $O_2A_2$ , по яких рухаються точки  $M_1$  та  $M_2$  (рис. 9.7). Відрізок  $O_1A_1$  рухається поступально, а відрізок  $O_2A_2$  обертається навколо точки  $O_2$ . Позначимо через  $\vec{v}_{rM_1}$  та  $\vec{v}_{eM_1}$  відповідно відносну та переносну швидкості точки  $M_1$  (рис. 9.7, а) є поступальний рух, зумовлений рухом відрізка  $O_1A_1$ . Через елементарний проміжок часу відрізок  $O_1A_1$

займе положення  $O'_1A'_1$ . Оскільки переносний рух – поступальний, то переносні швидкості точки  $M_1$  і  $M'_1$  однакові.

Переносним рухом точки  $M_2$  (рис. 9.7, б) є обертальний рух, спричинений обертанням відрізка  $O_2A_2$  навколо точки  $O_2$ . Тому переносні швидкості точки  $M_2$  на відрізку  $O_2A_2$  та  $O_2A'_2$  різні:  $v_{eM_2} = O_2M_2\omega_e$ ;  $v'_{eM_2} = O_2M'_2\omega_e$ .

Отже, переносна швидкість точки  $M_2$  змінюється залежно від її відносного руху вздовж відрізка  $O_2A_2$ . При цьому швидкість змінення переносної швидкості  $\vec{v}_{eM_2}$  точки  $M_2$  у часі, яка створює додаткове прискорення, пропорційна відносній швидкості  $\vec{v}_{rM_2}$  та кутовій швидкості переносного руху  $\vec{\omega}_e$ . У цьому суть першої фізичної причини виникнення коріолісового прискорення.

2. Другою фізичною причиною виникнення коріолісового прискорення є така. Відносна швидкість точки  $M_2$ , тобто  $\vec{v}_{rM_2}$ , залежить від переносного обертального руху, оскільки при обертанні відрізка  $O_2A_2$  змінюється напрям відносної швидкості  $\vec{v}_{rM_2}$  (рис. 9.7, б).

Отже, швидкість змінення в часі відносної швидкості точки (тобто прискорення точки, яке залежить від наведеної вище причини) також буде пропорційною відносній швидкості  $\vec{v}_{rM_2}$  та кутовій швидкості  $\vec{\omega}_e$  переносного руху.

О. І. Сомов звернув увагу на те, що коріолісове прискорення наче повертає вектор відносної швидкості в напрямі переносного обертального руху, через що назвав коріолісове прискорення поворотним.

Підводячи підсумок викладеному та звертаючись до формули (9.34), бачимо, що

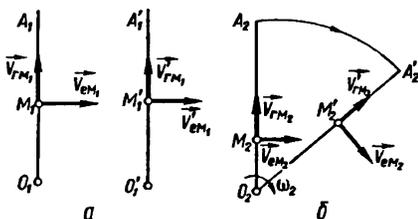


Рис. 9.7

змінення в часі переносної швидкості за умови, що переносний рух є не поступальним, спричинюється не лише переносним, але й відносним рухом точки. Додаткове прискорення дорівнює векторному добутку  $\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ . Так само з формули (9.31) випливає, що змінення відносної швидкості в часі спричинене не тільки відносним, а й переносним рухом точки. Додаткове прискорення і в цьому разі дорівнює  $\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ . Кориолісове прискорення  $\vec{w}_c$ , таким чином, дорівнює подвоєному векторному добутку векторів  $\vec{\omega}_e$  та  $\vec{v}_r$ , тобто  $\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ , і характеризує змінення в часі відносної швидкості через переносний не поступальний рух і переносної швидкості – через відносний рух точки.

**Приклад 3.** Визначити абсолютне прискорення точки в прикладі 2, наведеному в § 9.3.

Розв'язання. Оскільки переносний рух є обертовим, то абсолютне прискорення точки  $M$  (рис. 9.5) визначимо за теоремою Кориоліса:

$$\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_c.$$

Оскільки  $\vec{w}_0 = 0$  і переносна кутова швидкість – постійна ( $\omega_e = 8 \text{ c}^{-1}$ ), то  $\dot{\omega}_e = \ddot{\omega}_e = 0$  і  $w_e = 0$ . Отже,

$$w_e = w_e^{oc} = h\omega^2 = 0,2 \cdot 64 = 12,7 \text{ м/с}^2;$$

$$v_r = \dot{s} = 8t \text{ м/с}^2; \quad w_r = \ddot{s} = 8 \text{ м/с}^2;$$

$$w_c = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r}) =$$

$$= 2\omega_e v_r \sin \frac{\pi}{2} = 2\omega_e v_r = 16 \cdot 8t = 128t \text{ м/с}^2.$$

Відносний рух точки  $M$  відбувається вздовж прямої  $AB$ , тому відносне прискорення  $\vec{w}_r$  напрямлене вздовж  $AB$ , прискорення  $\vec{w}_e = \vec{w}_e^{oc}$  – вздовж  $OM$  до центра обертання. Напрямок кориолісового прискорення визначаємо за правилом векторного добутку  $\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ . Вектор  $\vec{\omega}_e$  напрямлений перпендикулярно до диска, а  $\vec{v}_r$  –

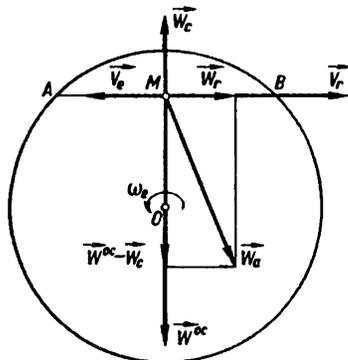


Рис. 9.8

вздовж хорди. Отже, кориолісове прискорення  $\vec{w}_c$  також напрямлене по  $OM$  від центра  $O$  обертання диска. Вектор абсолютного прискорення напрямлений по діагоналі прямокутника зі сторонами  $w_r$  та  $(w_e - w_c)$  (рис. 9.8), і

$$\vec{w}_a = \sqrt{w_r^2 + (w_e - w_c)^2} = \sqrt{64 + (12,8 - 128t)^2}.$$

**Приклад 4.** На рухомих об'єктах (літаках, кораблях тощо) використовуються гіроскопічні прилади маятникового типу<sup>1</sup> для визначення відхилення об'єктів від горизонталі. При русі відносно Землі в цих приладах виникають так звані швидкісні та балістичні девіації (похибки), які зумовлені тим, що ці об'єкти, рухаючись горизонтально по поверхні Землі (чи по сфері радіусом  $R+h$ , де  $h$  – висота польоту), насправді обертаються в інерціальному просторі й тому вони рухаються з прискоренням в інерціальній системі координат, якщо навіть їх швидкість відносно Землі є сталою. Тому необхідно знайти кутову швидкість обертання рухомого об'єкта та його прискорення в географічній системі координат, якщо складова відносної швидкості об'єкта на північ  $v_N$ , на схід –  $v_E$  (рис. 9.9), а кутова швидкість добового обертання Землі –  $\omega_3$ .

<sup>1</sup> Павловський М. А. Теорія гіроскопов: Учебник. – К.: Вища шк., Головное изд-во, 1986. – 303 с.

Розв'язання. Рух об'єкта (точку  $O$ ) зада-  
но в сферичній системі координат:  $\lambda$  – географічна довгота, що відраховується від меридіана Грінвіча;  $\varphi$  – географічна широта, що відраховується від екватора;  $R$  – радіус сфери, по якій рухається об'єкт:  $R = R_0 + h$ , де  $R_0$  – середній радіус Землі. Зазначимо, що лінійна швидкість точки на земній поверхні, яка розташована на екваторі, дорівнює 1852 км/год відносно нерухокої системи координат.

Вісь  $O\xi$  напрямлена на північ ( $N$ ) по дотичній до меридіана,  $O\zeta$  – на схід ( $E$ ) по дотичній до паралелі, а  $O\eta$  – по вертикалі вгору.

Очевидно, що рух об'єкта зі складовою швидкістю  $v_N$  спричинений зміною кута  $\varphi$  – географічної широти, а рух зі складовою швидкістю на схід  $v_E$  – географічної довготи  $\lambda$ .

Отже, кутова швидкість  $\dot{\lambda}$  напрямлена перпендикулярно до площини паралелі та паралельна кутовій швидкості обертання Землі  $\omega_3$ , а кутова швидкість  $\dot{\varphi}$  напрямлена в бік, протилежний напрямку осі  $O\zeta$ .

З урахуванням цього, очевидно, що

$$\dot{\varphi} = \frac{v_N}{R}, \quad \dot{\lambda} = \frac{v_E}{R \cos \varphi}. \quad (1)$$

Якщо тепер врахувати і кутову швидкість обертання Землі  $\omega_3$ , то проєкції кутової швидкості на осі географічної системи координат будуть

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= (\omega_3 + \dot{\lambda}) \cos \varphi = \omega_3 \cos \varphi + \\ &+ \frac{v_E}{R \cos \varphi} \cos \varphi = \omega_3 \cos \varphi + \frac{v_E}{R}; \\ \omega_\eta &= (\omega_3 + \dot{\lambda}) \sin \varphi = \omega_3 \sin \varphi + \\ &+ \frac{v_E}{R \cos \varphi} \sin \varphi = \omega_3 \sin \varphi + \frac{v_E}{R} \operatorname{tg} \varphi; \\ \omega_\zeta &= -\dot{\varphi} = -\frac{v_N}{R}. \end{aligned} \quad (2)$$

У даному випадку обертальний рух Землі є переносним, а рух об'єкта по поверхні відносним. З урахуванням цього і формул (2) наве-

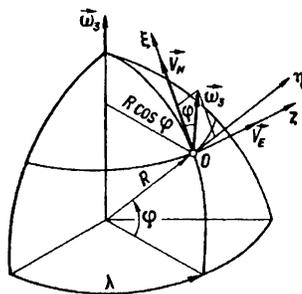


Рис. 9.9

демо формули для абсолютної швидкості об'єкта в проєкціях на осі географічної системи координат:

$$\begin{aligned} v_{a\xi} &= v_N; \\ v_{a\eta} &= \frac{dR}{dt}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$v_{a\zeta} = \omega_3 R \cos \varphi + v_E.$$

Використовуючи рівняння (3) вирази (2) можна переписати у формі

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \frac{\omega_3 R \cos \varphi + v_E}{R} = \frac{v_{a\zeta}}{R}; \\ \omega_\eta &= \frac{\omega_3 R \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} + v_E \operatorname{tg} \varphi}{R} = \\ &= \omega_\xi \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_{a\zeta}}{R} \operatorname{tg} \varphi; \\ \omega_\zeta &= \frac{-v_N}{R} = -\frac{v_{a\xi}}{R}. \end{aligned} \quad (4)$$

Знайдемо тепер абсолютне прискорення рухомого об'єкта, скориставшись формулою (9.39):

$$\dot{w}_a = \frac{d' \bar{v}_a}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_a. \quad (5)$$

Тут  $\bar{\omega}_e$  – це кутова швидкість обертання системи координат  $O\xi\eta\zeta$  відносно нерухокої системи координат, яка визначається виразами (2) або (4).

Вісь	Проекції переносного прискорення	Проекції відносного прискорення	Проекції коріолісово прискорення
$O\xi$	$\omega_3^2 R \cos \varphi \sin \varphi$	$\frac{d v_N}{dt} + \frac{v_E^2}{R} \operatorname{tg} \varphi$	$2 v_E \omega_3 \sin \varphi$
$O\eta$	$-\omega_3^2 R \cos^2 \varphi$	$-\frac{v_N^2 + v_E^2}{R}$	$-2 v_E \omega_3 \cos \varphi$
$O\zeta$	0	$\frac{d v_E}{dt} - \frac{v_N v_E}{dt} \operatorname{tg} \varphi$	$-2 v_N \omega_3 \sin \varphi$

Проектуючи (5) на осі  $O\xi$ ,  $O\eta$ ,  $O\zeta$ , матимемо

$$\begin{aligned} w_{a\xi} &= \frac{d v_{a\xi}}{dt} + \omega_3 v_{a\zeta} - \omega_3 v_{a\eta}, \\ w_{a\eta} &= \frac{d v_{a\eta}}{dt} + \omega_3 v_{a\xi} - \omega_3 v_{a\zeta}, \\ w_{a\zeta} &= \frac{d v_{a\zeta}}{dt} + \omega_3 v_{a\eta} - \omega_3 v_{a\xi}. \end{aligned} \quad (6)$$

Підставивши в (6) вирази (3) та (4), отримаємо

$$\begin{aligned} w_{a\xi} &= \frac{d v_N}{dt} + \frac{v_{a\zeta}^2}{R} \operatorname{tg} \varphi + \frac{v_N}{R} \frac{dR}{dt}, \\ w_{a\eta} &= \frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{v_N^2}{R} - \frac{v_{a\zeta}^2}{R}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$w_{a\zeta} = \frac{d}{dt} (v_E + \omega_3 R \cos \varphi) + \frac{dR}{dt} \frac{v_{a\zeta}}{R} - v_N \frac{v_{a\zeta}}{R} \operatorname{tg} \varphi.$$

При горизонтальному русі об'єкта  $v_{a\eta} = 0$ , тобто  $\dot{R} = 0$ ,  $\ddot{R} = 0$ , тому формули (7) дещо спрощуються:

$$\begin{aligned} w_{a\xi} &= \frac{d v_N}{dt} + \frac{(v_E + \omega_3 R \cos \varphi)^2}{R} \operatorname{tg} \varphi, \\ w_{a\eta} &= -\frac{v_N^2 + (v_E + \omega_3 R \cos \varphi)^2}{R}, \\ w_{a\zeta} &= -\frac{d v_E}{dt} + \frac{d}{dt} (\omega_3 R \cos \varphi) - \\ &\quad - \frac{v_N}{R} (v_E + \omega_3 R \cos \varphi) \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

У виразах (8) не видно явно прискорення Коріоліса, хоча зрозуміло, що воно мало би мати місце, бо переносний рух Землі є обертовим.

Для того, щоб виділити явно коріолісове прискорення, доосьове прискорення, обертальне та відносне, потрібно формули (8) записати в розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} w_{a\xi} &= \frac{d v_N}{dt} + \frac{v_E^2}{R} \operatorname{tg} \varphi + \\ &\quad + \omega_3^2 R \cos \varphi \sin \varphi + 2 v_E \omega_3 \sin \varphi, \\ w_{a\eta} &= -\frac{v_N^2 + v_E^2}{R} - \omega_3^2 R \cos^2 \varphi - \\ &\quad - 2 v_E \omega_3 \cos \varphi, \\ w_{a\zeta} &= \frac{d v_E}{dt} - \omega_3 v_N \sin \varphi - \\ &\quad - \frac{v_N v_E}{R} \operatorname{tg} \varphi - v_N \omega_3 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Перепишемо в кінцевому результаті формули (9) так, щоб на першому місці було переносне, далі відносне і наприкінці коріолісове прискорення (таблиця).

Таким чином, задача розв'язана.

**Приклад 5.** Точка  $M$  нерівномірно рухається по ободу колеса радіусом  $R$  з відносною швидкістю  $\vec{v}_r$  (рис. 9.10). При цьому диск також обертається зі змінною кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_c$ .

Знайти двома методами прискорення точки:

- 1) задаючи рух точки в натуральній системі координат;
- 2) використовуючи поняття складного руху точки.

Розв'язання. 1. При задаванні руху точки в натуральній системі координат потрібно врахувати, що прискорення в цьому випадку має дві

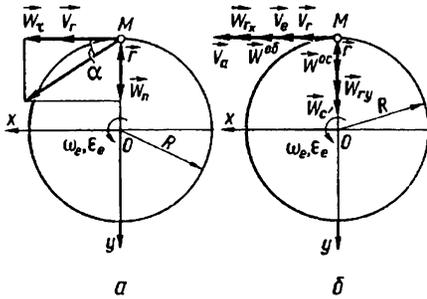


Рис. 9.10

складові – тангенціальне  $w_t$  та нормальне  $w_n$  прискорення:

$$w_t = \frac{dv_t}{dt}, w_n = \frac{v_t^2}{\rho}. \quad (1)$$

Отже, для визначення прискорень за формулами (1) потрібно знайти  $v_t$ .

Очевидно, що  $v_t$  – це по суті абсолютна швидкість точки, тому

$$v_t = v_r + \omega_c R. \quad (2)$$

Підставивши (2) в (1), отримаємо

$$w_t = \frac{d}{dt}(v_r + \omega_c R) = \frac{dv_r}{dt} + \varepsilon_c R, \quad (3)$$

$$w_n = \frac{v_t^2}{\rho} = \frac{(v_r + \omega_c R)^2}{R} = \frac{v_r^2}{R} + 2\omega_c v_r + \omega_c^2 R.$$

Якщо спроектувати ці прискорення на осі ортогональної системи координат  $Oxy$ , то матимемо

$$w_x = w_t, w_y = w_n,$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dv_r}{dt} + \varepsilon_c R\right)^2 + \left(\frac{v_r^2}{R} + 2\omega_c v_r + \omega_c^2 R\right)^2}; \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w_y}{w_x} = \frac{w_n}{w_t} = \frac{R}{\frac{dv_r}{dt} + \varepsilon_c R} \cdot \frac{v_r^2 + 2\omega_c v_r + \omega_c^2 R}{R}.$$

При  $v_r = \text{const}$  і  $v_r = 0$  матимемо відповідно

$$\operatorname{tg} \alpha \Big|_{v_r = \text{const}} = \frac{v_r^2 + \omega_c^2 R}{\varepsilon_c R}; \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \Big|_{v_r = 0} = \frac{\omega_c^2}{\varepsilon_c}.$$

2. Використання поняття складного руху точки. У цьому випадку (рис. 9.10, б)

$$v_a = v_{ax} = v_r + \omega_c R; v_{ay} = 0. \quad (6)$$

Переносне прискорення має дві складові:  $\bar{w}^{ob}$  і  $\bar{w}^{oc}$ . Обертальна складова прискорення  $\bar{w}^{ob}$  напрямлена в даному випадку по осі  $Ox$  і дорівнює

$$w^{ob} = \varepsilon_c R. \quad (7)$$

Доосьове прискорення буде напрямлене до осі обертання, яка проходить через точку  $O$  (рис. 9.10, б) і дорівнюватиме

$$w^{oc} = \omega^2 R. \quad (8)$$

Коріолісове прискорення в цьому випадку напрямлене по осі  $Oy$  і дорівнює

$$w_c = 2\omega_c v_r. \quad (9)$$

Відносне прискорення в цьому випадку визначається за формулою (9.31), в якій потрібно врахувати лише ту складову кутової швидкості  $\omega_r$ , яка обумовлена тільки відносним рухом, бо взаємодія обертального переносного руху і відносної швидкості врахована в коріолісовому прискоренні:

$$\bar{w}_r = \frac{d' \dot{v}_r}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v}_r. \quad (10)$$

Очевидно, що

$$\omega_r = \omega_{rz} = \frac{v_r}{R}. \quad (11)$$

Спроектувавши вираз (10) на осі  $Ox$  та  $Oy$  і врахувавши (11), матимемо

$$w_{rx} = \frac{dv_r}{dt}; \quad (12)$$

$$w_{ry} = \omega_{rz} v_r = \frac{v_r^2}{R}.$$

Знайдемо тепер проєкції абсолютного прискорення на осі  $Ox$  та  $Oy$ :

$$w_{ax} = \frac{d v_r}{dt} + \varepsilon_e R, \quad (13)$$

$$w_{ay} = \omega_e^2 R + \frac{v_r^2}{R} + 2\omega_e v_r.$$

Порівнюючи вирази (3), (4) і (13), бачимо, що проєкції прискорення на осі  $Ox$  та  $Oy$  збігаються. Причому в цьому випадку при будь-яких  $v_r$

$$\frac{w_{ax}^{об}}{w_{ay}^{об}} = \frac{\varepsilon_e}{\omega_e^2}. \quad (14)$$

Для порівняння знайдемо прискорення за формулою (9.39)

$$\vec{w}_a = \frac{d^2 \vec{v}_a}{dt^2} + \vec{\omega} \times \vec{v}_a. \quad (15)$$

Наголосимо, що в даному випадку у формулі (15) потрібно задати повну кутову швидкість обертання рухомої системи координат:

$$\omega = \omega_e + \omega_r = \omega_e + \frac{v_r}{R} = \omega_z. \quad (16)$$

У нашому випадку  $v_a$  визначається формулою (6),  $v_{ax} \neq 0$ ,  $v_{ay} = 0$ ,  $v_{az} = 0$ . Із формули (15), з урахуванням (6) та (16), маємо

$$w_{ax} = \frac{d v_{ax}}{dt}, \quad (17)$$

$$w_{ay} = \omega_z^2 v_{ax},$$

або

$$w_{ax} = \frac{d v_r}{dt} + \varepsilon_e R,$$

$$w_{ay} = \left( \omega_e + \frac{v_r}{R} \right) \left( v_r + \omega_e R \right) = \quad (18)$$

$$= \frac{1}{R} \left( v_r + \omega_e R \right)^2 = \omega_e^2 R + 2\omega_e v_r + \frac{v_r^2}{R}.$$

Неважко помітити, що вирази (3), (13) та (18) однакові, тобто наведений спосіб розв'язання задачі виявився досить ефективним.

Задача розв'язана.

### Питання для самоконтролю

1. В яких випадках рух точки потрібно розглядати як складний?
2. У чому полягає основна задача складного руху точки?
3. Як визначається абсолютна швидкість точки при складному русі?
4. Як зв'язані між собою абсолютна і відносна похідні від вектора функції?
5. Які фізичні причини виникнення коріолісового прискорення?
6. В яких випадках коріолісове прискорення дорівнює нулю?
7. Якими двома способами можна визначити абсолютне прискорення точки?
8. Чому при русі точки в напрямку до північного і південного полюсів Землі коріолісове прискорення буде напрямлене в різні боки?
9. Чим пояснити, що вертикальні осі атмосферних вихрів відхиляються у протилежні боки в північній та південній півкулі земної поверхні?
10. В якому випадку доосьове прискорення збігається з нормальним, а тангенціальне – з обертальним?

## Розділ 10

### РУХ ВІЛЬНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА. ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА ВІДНОСНО НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ

#### § 10.1. Визначення положення твердого тіла у просторі. Матриця перетворення координат. Кути Ейлера та Ейлера – Крилова

Як показано в § 8.1, положення вільного твердого тіла у просторі може задаватися за

допомогою шести незалежних величин (параметрів). Називатимемо незалежні параметри, що визначають положення твердого тіла у просторі, *степенями вільності*. Докладніше питання про степені вільності системи тіл розглядатимуться в аналітичній механіці.

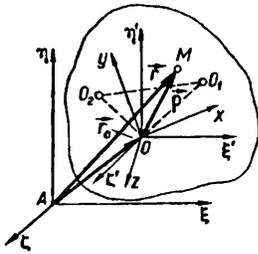


Рис. 10.1

Положення твердого тіла (рис. 10.1) можна визначити трьома точками, що не лежать на одній прямій (наприклад точки  $O, O_1, O_2$ ) і незмінно зв'язані з тілом. При цьому на дев'ять координат цих точок накладено три обмеження, що виражають незмінність відстаней між ними. Отже, незалежних параметрів буде шість.

Якщо при визначенні положення твердого тіла задати положення однієї його точки, наприклад точки  $O$ , яка називається полюсом і визначається трьома координатами  $\xi_O, \eta_O, \zeta_O$ , то для повної характеристики руху тіла слід вибрати ще три параметри, які характеризують обертання тіла навколо цієї точки (полюса). Позначимо ці параметри через  $\psi, \theta, \varphi$  (надалі покажемо, що за ці координати можна взяти кути Ейлера або Ейлера – Крилова).

Сукупність шести скалярних функцій часу, які однозначно визначають положення вільного твердого тіла у будь-який момент часу, є законом його руху:

$$\begin{aligned} \xi_O &= \xi_O(t), \eta_O = \eta_O(t), \zeta_O = \zeta_O(t), \\ \psi &= \psi(t), \theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t). \end{aligned} \quad (10.1)$$

Три перших рівняння визначають рух полюса і разом з ним поступальний рух твердого тіла. Наступні три рівняння визначають рух тіла відносно системи координат  $O\xi'\eta'\zeta'$  (тобто рух тіла відносно точки  $O$  як нерухомої).

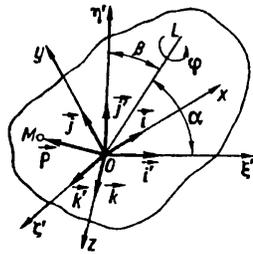


Рис. 10.2

Щоб задати положення твердого тіла, введемо такі системи координат:  $A\xi\eta\zeta$  – нерухома;  $O\xi'\eta'\zeta'$  – така, що поступально рухається разом з тілом, осі якої паралельні осям нерухомої системи координат, і  $Oxyz$  – система координат, незмінно зв'язана з тілом. При цьому радіус-вектор  $\vec{r}$  точки  $M$  у нерухомій системі координат зв'язаний з радіусом-вектором  $\vec{\rho}$ , що характеризує положення точки  $M$  у тілі (в рухомій системі координат  $Oxyz$ ), очевидним співвідношенням (див. рис. 10.1)

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho}, \quad (10.2)$$

де  $\vec{r}_O$  – радіус-вектор полюса  $O$ .

**Матриця перетворення координат.** Розглянемо тверде тіло (рис. 10.2) з нерухомою точкою  $O$ . Потрібно задати положення тіла або, що те саме, осей  $Oxyz$  відносно системи координат  $O\xi'\eta'\zeta'$ .

Як відомо з аналітичної геометрії, положення будь-яких прямих у просторі (у тому числі й осей) можна задати за допомогою косинусів кутів між цими прямими та осями системи координат. При цьому, щоб задати положення однієї прямої, наприклад осі  $Ox$ , потрібно знати три її напрямні косинуси з осями  $O\xi', O\eta', O\zeta'$ , які, очевидно, дорівнюють відповідним добуткам ортів  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  осей  $Oxyz$  та  $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$  осей  $O\xi'\eta'\zeta'$  (див. рис. 10.2):

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{Ox, O\xi'}) &= \vec{i} \cdot \vec{i}, \\ \cos(\widehat{Ox, O\eta'}) &= \vec{i} \cdot \vec{j}, \\ \cos(\widehat{Ox, O\zeta'}) &= \vec{i} \cdot \vec{k}.\end{aligned}\quad (10.3)$$

Аналогічно задається положення осей  $Oy$  і  $Oz$ . Напрямні косинуси зручно позначити буквою  $a_{ij}$  ( $i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$ ) і подати у вигляді табл. 10.1, де позначено

$$\begin{aligned}a_{11} &= \cos(\widehat{O\xi', Ox}) = \vec{i} \cdot \vec{i}, \\ a_{12} &= \cos(\widehat{O\xi', Oy}) = \vec{i} \cdot \vec{j}, \dots, \\ a_{32} &= \cos(\widehat{O\zeta', Oy}) = \vec{k} \cdot \vec{j}, \\ a_{33} &= \cos(\widehat{O\zeta', Oz}) = \vec{k} \cdot \vec{k}.\end{aligned}\quad (10.4)$$

Таблиця 10.1

Вісь	$Ox$	$Oy$	$Oz$
$O\xi'$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$O\eta'$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$O\zeta'$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$

Очевидно, що напрямні косинуси  $a_{ij}$  можна розглядати як проєкції ортів на відповідні осі. Наприклад,  $a_{11}$  дорівнює проєкції орта  $\vec{i}$  на вісь  $O\xi'$ , тобто  $i_\xi = a_{11}$  і т. д.

Як зазначалося, тверде тіло з однією нерухомою точкою має три степеня вільності, а в табл. 10.1 напрямних косинусів дев'ять, отже, з них незалежними можуть бути лише три. Шість співвідношень, що зв'язують напрямні косинуси, можна знайти, використовуючи властивості напрямних косинусів.

Із формул (9.8) для ортів  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , які з урахуванням того, що їхні проєкції на осі

$O\xi', O\eta', O\zeta'$  є напрямними косинусами, одержимо шукані співвідношення:

$$\begin{aligned}\vec{i}^2 &= \vec{i} \cdot \vec{i} = i_\xi i_\xi + i_\eta i_\eta + i_\zeta i_\zeta = \\ &= a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1, \\ \vec{j}^2 &= \vec{j} \cdot \vec{j} = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, \\ \vec{k}^2 &= \vec{k} \cdot \vec{k} = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1, \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= i_\xi j_\xi + i_\eta j_\eta + i_\zeta j_\zeta = \\ &= a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0, \\ \vec{i} \cdot \vec{k} &= a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0, \\ \vec{j} \cdot \vec{k} &= a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0.\end{aligned}\quad (10.5)$$

Аналогічні співвідношення можна виписати також для рядків табл. 10.1.

Таблицю напрямних косинусів (табл. 10.1) називають *матрицею перетворення координат* і записують у вигляді

$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (10.6)$$

або скорочено

$$\begin{aligned}[\xi', \eta', \zeta']^T &= \|a_{ij}\| [x, y, z]^T = \\ &= \bar{B}[x, y, z]^T, \quad i, j=1, 2, 3,\end{aligned}\quad (10.7)$$

де  $[\xi', \eta', \zeta']^T, [x, y, z]^T$  – матриці-стовпці з відповідними елементами;  $\|a_{ij}\| = \bar{B}$  – квадратна матриця.

Проєкції радіуса-вектора  $\vec{r}$  довільної точки тіла на осі  $O\xi', O\eta', O\zeta'$  і  $Ox, Oy, Oz$

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z = \vec{i}'\xi' + \vec{j}'\eta' + \vec{k}'\zeta' \quad (10.8)$$

зв'язані між собою співвідношеннями, які безпосередньо випливають з табл. 10.1 і виразу (10.6):

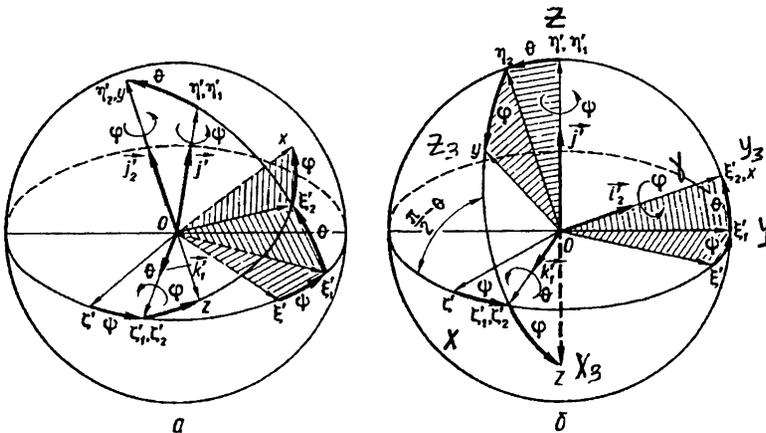


Рис. 10.3

$$\begin{aligned}
 \xi' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z; \\
 \eta' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z; \\
 \zeta' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z; \\
 x &= a_{11}\xi' + a_{21}\eta' + a_{31}\zeta'; \\
 y &= a_{12}\xi' + a_{22}\eta' + a_{32}\zeta'; \\
 z &= a_{13}\xi' + a_{23}\eta' + a_{33}\zeta'.
 \end{aligned}
 \quad (10.9)$$

**Кути Ейлера та Ейлера – Крилова.** Використовувати напрямні косинуси для визначення положення твердого тіла в просторі на практиці не зручно, оскільки треба задавати дев'ять напрямних косинусів і враховувати при цьому шість співвідношень між ними (10.5). Вникає запитання, чи не можна задати як незалежні параметри три певним чином вибрані кути, через які потім можна було б виразити всі дев'ять напрямних косинусів?

Зазначимо, що задача про рух твердого тіла має надзвичайно велике практичне значення, оскільки модель твердого тіла або сукупність їх лежить в основі розрахункових моделей багатьох машин, приладів і устаткування, зокрема, гіроскопічних приладів і систем, у динаміці рухомих об'єктів (літаків, ракет, космічних апаратів, назем-

ного транспорту), роботів-маніпуляторів, електричних машин, турбін, радіоантен супроводження чи виявлення цілей, технологічного обладнання тощо.

Потрібні три кути, які характеризують положення твердого тіла, можна вибрати так, щоб два з них, наприклад  $\alpha$  і  $\beta$  (див. рис. 10.2), визначали положення деякої прямої  $OL$ , жорстко зв'язаної з тілом, а третій кут  $\varphi$  задавати як кут повороту тіла навколо цієї осі.

Наведений метод задання кутів ускладнює визначення швидкостей і прискорень точок твердого тіла.

На практиці найбільше поширений вибір трьох кутів, запропонований Ейлером. Причому *метод Ейлера* припускає різноманітну комбінацію кутів і послідовностей поворотів. Опишемо два варіанти вибору кутів. Перший з них запропонував сам Л. Ейлер. Його застосовують у задачах небесної механіки. Другий варіант вибору кутів, який запропонував О. М. Крилов, використовують у технічних задачах – гіроскопії, динаміці рухомих об'єктів, роботів тощо. Тому в літературі зазначені кути називають також *кутами Ейлера – Крилова*.

Кути Ейлера вводять у такий спосіб. У вихідному положенні рухомі осі  $Ox_0z_0$ , що незмінно зв'язані з тілом, суміщують з нерухомими осями  $O\xi_0'\eta_0'\zeta_0'$  (рис. 10.3, а). Потім кути  $\psi$ ,  $\theta$  і  $\varphi$  треба вибрати так, щоб тіло з початкового положення ( $O\xi_0'\eta_0'\zeta_0'$ ) перевести у кінцеве –  $Ox_0z_0$ . Перший поворот на кут  $\psi$ , що називається *кутом прецесії*, здійснюють навколо осі  $O\eta_0'$  у площині осей  $O\xi_0'\zeta_0'$ . При цьому осі, зв'язані з тілом, позначимо  $O\xi_1'\eta_1'\zeta_1'$ , тобто ці осі характеризують положення тіла після першого повороту на кут  $\psi$ . Другий поворот на кут  $\theta$ , який називається *кутом нутації*, задають навколо так званої *лінії вузлів*  $ON$ , що збігається з віссю  $O\xi_1'$ . Поворот тіла на кут  $\theta$  відбувається в площині  $O\xi_1'\eta_1'$ , перпендикулярній до осі  $O\xi_1'$ . Нове положення осей (тіла) після другого повороту позначимо  $O\xi_2'\eta_2'\zeta_2'$ . І, нарешті, третій поворот на кут  $\varphi$  (кут *власного*, або *чистого обертання*) задають відносно осі  $O\eta_2'$  у площині  $O\xi_2'\xi_2'$ , що перпендикулярна до неї. Кінцеве положення осей (тіла) позначимо  $Ox_0z_0$ .

Як видно з рисунка, кут  $\psi$  задається у горизонтальній площині  $O\xi_0'\xi_0'$ , а кут  $\varphi$  – у похилій  $O\xi_2'\xi_2'$ . Якщо кут  $\theta=0$ , то площини відліку кутів  $\psi$  і  $\varphi$  збігаються, що ускладнює чітке уявлення про орієнтацію тіла. Такого недоліку не має послідовність задання кутів повороту, введена О. М. Криловим, в якій перших два кути  $\psi$  і  $\theta$  збігаються з кутами Ейлера, а третій задають не відносно осі  $O\eta_2'$ , а відносно перпендикулярної до неї осі  $O\xi_2'$  (рис. 10.3, б).

Особливістю кутів Крилова є те, що при малих кутах  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  вони задаються відносно майже ортогональних осей. У разі

малого відхилення тіла від початкового положення всі три кути Ейлера – Крилова залишаються малими. Якщо ж користуватися кутами Ейлера, то незначному відхиленню тіла від початкового положення відповідатиме мализна кута нутації  $\theta$  і суми кутів  $(\varphi + \psi)$ , хоча кожен із кутів може і не бути малим.

Послідовність поворотів Крилова добре моделюється кардановим підвісом. Стосовно до авіації кути  $\psi$ ,  $\theta$  і  $\varphi$  називаються так:  $\psi$  – *кут ристання*,  $\theta$  – *тангажа*,  $\varphi$  – *крену*. Стосовно до морських об'єктів кут  $\theta$  називають *диферентом*. Можна зазначити й інші варіанти кутів Ейлера – Крилова, які також застосовуються на практиці. Як уже згадувалось на початку цього розділу, важливим завданням є визначення таблиці напрямних косинусів або перетворювальної матриці.

Зазначимо, що в теорії скінченних обертань твердого тіла широко застосовують так звані параметри Родріга – Гамільтона<sup>1</sup>, які вводять у такий спосіб. Кожному повороту тіла на кут  $\varphi$  навколо деякої осі  $OL$  (рис. 10.2) з напрямними косинусами  $b_1, b_2, b_3$  у системі координат  $O\xi_0'\eta_0'\zeta_0'$  ставиться у відповідність чотири числа:

$$\begin{aligned} p_0 &= \cos \frac{\varphi}{2}, \quad p_1 = b_1 \sin \frac{\varphi}{2}, \\ p_2 &= b_2 \sin \frac{\varphi}{2}, \quad p_3 = b_3 \sin \frac{\varphi}{2}, \end{aligned} \quad (10.10)$$

що зв'язані очевидним співвідношенням

$$p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \quad (10.11)$$

Ці чотири числа  $p_j$  ( $j=0, 1, 2, 3$ ) і називаються *параметрами Родріга – Гамільтона*.

<sup>1</sup> Кошляков В. Н. Теория гироскопических компасов. – М.: Наука, 1972.

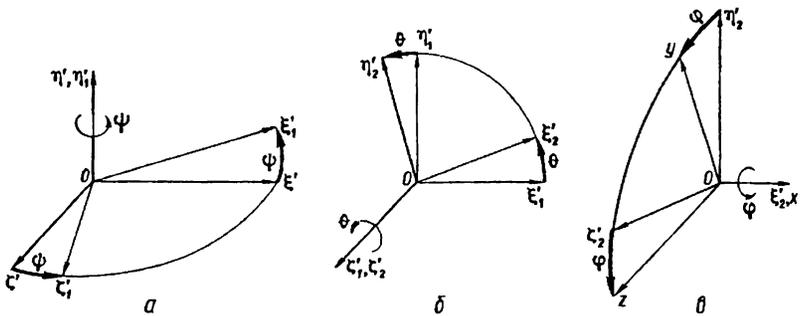


Рис. 10.4

У теорії гіроскопів уводять також параметри Кейлі – Клейна  $f_0, f_1, f_2, f_3$  як деякі комплекснозначні функції

$$\begin{aligned} f_0 &= p_0 + ip_3, & f_2 &= p_0 - ip_3, \\ f_1 &= -p_2 + ip_1, & f_3 &= p_2 + ip_1, \end{aligned} \quad (10.12)$$

де  $i = \sqrt{-1}$ .

Певну систематизацію щодо знаходження параметрів Родріга – Гамільтона дають кватерніони гіперкомплексні числа вигляду<sup>1</sup>

$$p = p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3 \quad (10.13)$$

з однією дійсною і трьома уявними одиницями  $i, j, k$ , які підлягають правилам

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1; & jk &= i, \\ kj &= -i, & ki &= j, & ik &= -j, \\ ij &= k, & ji &= -k. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Значення цих параметрів зростає у зв'язку з застосуванням числових методів та комп'ютерних технологій у динаміці твердого тіла.

<sup>1</sup> Бранец В. Н., Шмыглевский В. П. Применения кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.

## § 10.2. Визначення косинусів кутів між осями координат

Розглянемо два методи визначення напрямних косинусів між осями.

**1. Матричний метод визначення таблиці напрямних косинусів.** Цей метод ґрунтується на тому, що для кожного повороту виписується послідовно матриця  $\bar{B}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) перетворення координат, а потім перемноженням їх знаходимо матрицю перетворення.

Проведемо ці операції, наприклад, для кутів Ейлера – Крилова (рис. 10.3, б). Для складання простих матриць  $\bar{B}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) доцільно зображувати графічно окремо положення осей, що відповідає кожному повороту (рис. 10.4):

$$\begin{aligned} [\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1]^T &= \bar{B}_1 [\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1]^T; \\ [\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1]^T &= \bar{B}_2 [\xi'_2, \eta'_2, \zeta'_2]^T; \\ [\xi'_2, \eta'_2, \zeta'_2]^T &= \bar{B}_3 [x, y, z]^T. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Тут у прямокутні дужки взято матрицьові стовпці координат, а через  $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3$  позначено перетворювальні матриці, що відповідають першому, другому і третьому поворотам (рис. 10.4).

Вилучивши в (10.15) проміжні координати  $\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1$  і  $\xi'_2, \eta'_2, \zeta'_2$ , дістанемо

$$\begin{aligned} [\xi', \eta', \zeta']^T &= \bar{B}_1 [\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1]^T = \\ &= \bar{B}_1 \bar{B}_2 [\xi'_2, \eta'_2, \zeta'_2]^T = \bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 [x, y, z]^T. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Порівнюючи (10.16) і (10.7), бачимо, що

$$[\xi', \eta', \zeta']^T = \bar{B} [x, y, z]^T, \quad (10.17)$$

де  $\bar{B} = \bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3$ .

Безпосередньо з рис. 10.4 випливає, що кожному із поворотів відповідає визначена таблиця напрямних косинусів (табл. 10.2–10.4).

Таблиця 10.2

Вісь	$O\xi'_1$	$O\eta'_1$	$O\zeta'_1$
$O\xi'$	$\cos \psi$	0	$\sin \psi$
$O\eta'$	0	1	0
$O\zeta'$	$-\sin \psi$	0	$\cos \psi$

1-й поворот на кут  $\psi$

Таблиця 10.3

Вісь	$O\xi'_2$	$O\eta'_2$	$O\zeta'_2$
$O\xi'_1$	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0
$O\eta'_1$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	0
$O\zeta'_1$	0	0	1

2-й поворот на кут  $\theta$

Таблиця 10.4

Вісь	$Ox$	$Oy$	$Oz$
$O\xi'_2$	1	0	0
$O\eta'_2$	0	$\cos \varphi$	$-\sin \varphi$
$O\zeta'_2$	0	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$

3-й поворот на кут  $\varphi$

Отже, матрицю  $\bar{B}$  обчислимо, перемножуючи  $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3$ :

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 =$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Порядок перемноження матриць такий, що спочатку обчислюється матриця, яка дорівнює добутку  $\|\bar{b}_j\| = \bar{B}_1 \bar{B}_2$ , а потім  $(\bar{B}_1 \bar{B}_2) \bar{B}_3$ . Слід зазначити, що при перемноженні матриць елемент  $b_{ij}$  дорівнює сумі добутків відповідних елементів  $i$ -го рядка матриці  $\bar{B}_1$  на елементи  $j$ -го стовпця матриці  $\bar{B}_2$ :

$$\begin{aligned} \bar{B}_1 \bar{B}_2 &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\sin \theta \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta \sin \psi & \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Тепер неважко обчислити елементи матриці  $\bar{B} = \bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3$  (табл. 10.5). Аналогічно дістанемо таблицю напрямних косинусів для кутів Ейлера (табл. 10.6).

Таблиця 10.5

Вісь	$Ox$	$Oy$	$Oz$
$O\xi'$	$\cos \theta \cos \psi$	$\sin \psi \sin \varphi - \cos \psi \cos \varphi \sin \theta$	$\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \sin \theta$
$O\eta'$	$\sin \theta$	$\cos \theta \cos \varphi$	$-\cos \theta \sin \varphi$
$O\zeta'$	$-\cos \theta \sin \psi$	$\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \sin \theta$	$\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \sin \theta$

Таблиця 10.6

Вісь	$Ox$	$Oy$	$Oz$
$O\xi'$	$-\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta$	$-\cos \psi \sin \theta$	$\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta$
$O\eta'$	$\sin \theta \cos \varphi$	$\cos \theta$	$\sin \theta \sin \varphi$
$O\zeta'$	$-\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta$	$\sin \psi \sin \theta$	$\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta$

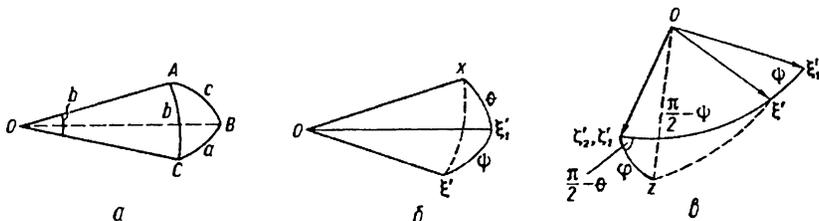


Рис. 10.5

**2. Застосування основної формули сферичної тригонометрії.** Сферичним називають трикутник, утворений дугами великого кола (рис. 10.5, а). Основна формула сферичної тригонометрії має вигляд

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \quad (10.20)$$

де  $a, b, c$  – сторони сферичного трикутника, що дорівнюють величинам відповідних плоских кутів;  $A$  – двогранный кут, протилежний однойменній стороні  $a$ .

Для застосування формули сферичної тригонометрії доцільно на рисунку, що відповідає заданим послідовності поворотів, визначити спочатку двогранный кут між перетинними площинами (на рис. 10.3 прями двогранный кут заштрихований).

На рис. 10.5, б, в зображено два сферичні трикутники для визначення напрямних косинусів  $a_{11} = \cos(\overline{O\xi'_1}, \overline{Ox})$  і  $a_{13} = \cos(\overline{O\xi'_1}, \overline{Oz})$  задання кутів Ейлера – Крилова (рис. 10.3, б). Пунктирною лінією показано кути, косинуси яких визначаємо. Із сферичних трикутників  $\xi'_1 \xi'_2 x$  і  $\xi'_1 \xi'_2 z$  з наведеної формули сферичної тригонометрії знаходимо

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos(\overline{O\xi'_1}, \overline{Ox}) = \cos \psi \cos \theta + \\ &+ \sin \psi \sin \theta \cos \frac{\pi}{2} = \cos \psi \cos \theta; \\ a_{13} &= \cos(\overline{O\xi'_1}, \overline{Oz}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \cos \varphi + \\ &+ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \sin \varphi \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \\ &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \sin \theta. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Аналогічно дістанемо шукані співвідношення у будь-якій системі кутів. Пропонуємо читачам самостійно визначити напрямні косинуси для кутів Ейлера (див. рис. 10.3, а) і порівняти їх з даними табл. 10.5. У дужках лише зазначимо сферичні трикутники, з яких знаходять відповідні напрямні косинуси

$$\begin{aligned} a_{11}(\xi'_2 \xi'_1 x), \quad a_{12}(\xi'_2 \xi'_1 y), \quad a_{13}(\xi'_2 \xi'_1 z), \\ a_{21}(\eta'_2 \xi'_2 x), \quad a_{22}(\eta'_2 \xi'_2 y), \quad a_{23}(\eta'_2 \xi'_2 z), \\ a_{31}(\zeta'_2 \xi'_2 x), \quad a_{32}(\zeta'_2 \xi'_1 y), \quad a_{33}(\zeta'_2 \xi'_2 z). \end{aligned} \quad (10.22)$$

Порівнюючи ці методи між собою, бачимо, що матричний метод більш формалізований, проте потребує більше записів. Другий метод дає змогу при певних навичках практично відразу записати таблицю напрямних косинусів. Для перевірки правильності складання таблиць напрямних косинусів доцільно звертатися до співвідношень (10.5).

### § 10.3. Розподіл швидкостей точок твердого тіла. Миттєва вісь обертання. Кінематичні рівняння Ейлера

Нехай тверде тіло довільно рухається у просторі. Виберемо системи координат, наведені на рис. 10.1, і визначимо положення довільної точки  $M$  твердого тіла в нерухомій  $A\xi\eta\zeta$  і рухомій  $Oxyz$  системах координат відповідно радіусами-векторами  $\vec{r}$  і  $\vec{\rho}$ , причому

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}. \quad (10.23)$$

Диференціюючи (10.23) з урахуванням формули (9.14), дістанемо

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\vec{r}_O + \vec{\rho})}{dt} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \quad (10.24)$$

Тут  $\vec{v}_O = \frac{d\vec{r}_O}{dt} = 0$ , оскільки точка  $M$  належить

тілу, тобто не рухається відносно нього (системи координат  $Oxyz$ ).

Порівнюючи тепер формулу Ейлера (8.22) з формулами (9.19) і другим доданком в (10.24), помічаємо, що цей доданок і є тією швидкістю, яку мала б точка  $M$ , якби тіло оберталося навколо деякої осі, що проходить через точку  $O$ . Вектор кутової швидкості в певний момент часу визначається компонентами (9.10), у відповідність до яких у § 9.2 введено деякий вектор  $\vec{\omega}$  на основі властивостей абсолютно твердого тіла. Тепер цьому вектору можна надати цілком визначеній фізичний зміст – *миттєвої кутової швидкості*. Нижче обґрунтуємо це твердження.

Отже, рух вільного твердого тіла можна розглядати як складання двох рухів: такого, в якому всі точки тіла малі у певний момент часу одну й ту саму швидкість  $\vec{v}_O$  (назвемо цей рух *миттєво-поступальним*), і обертання навколо деякої осі, що проходить через точку  $O$ , з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  (цей рух назвемо *миттєво-обертальним*).

Наголосимо на відмінність між поступальним рухом, що викладений в § 8.2, та миттєвим поступальним рухом. При поступальному русі має місце рівність швидкостей усіх точок і прискорень тіла на будь-якому кінцевому проміжку часу, тоді як при миттєво-поступальному русі мають місце рівності лише швидкостей точок тіла і тільки в заданий фіксований час, тобто лише в цю мить. Миттєвий рух – це рух, що ніби сфотографований у певну мить.

Формула (10.24) визначає розподіл швидкостей точок вільного твердого тіла

лише для певного фіксованого моменту часу, оскільки всі вектори, що входять у цю формулу, змінюються. Жодних інших миттєвих рухів вільне тверде тіло, як вишлювас з викладеного, не має.

Введемо загальне поняття *миттєво-обертального руху*, розуміючи під цим лише *розподіл швидкостей точок рухомого тіла у певний момент часу, що відповідає обертальному руху навколо миттєвої осі*.

Розглянемо більш докладно миттєво-обертальний рух твердого тіла сюдатку навколо нерухомої точки. Повертаючись до формули (10.24) і припускаючи, що  $\vec{v}_O$  дорівнює нулю, дістанемо

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \quad (10.25)$$

тобто розіоліл швидкостей точок тіла при обертанні навколо нерухомої точки.

**Миттєва вісь обертання.**<sup>1</sup> *Миттєвою віссю обертання тіла з нерухомою точкою називається пряма, зв'язана з тілом, усі точки якої мають у певний момент часу швидкості, що дорівнюють нулю*

Прискорення точок, що належать миттєвій осі, можуть відрізнятися від нуля.

Доведемо, що в тілі з нерухомою точкою є миттєва вісь обертання. Припускаючи, що у формулі (10.25)  $\vec{v} = 0$ , знайдемо

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho} = 0. \quad (10.26)$$

Умова (10.26) є умовою колінеарності векторів  $\vec{\omega}$  і  $\vec{\rho}$ . Векторному рівнянню (10.26) у системі координат  $Oxyz$  відповідають три скалярні, які подамо у формі

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \quad (10.27)$$

Отримані рівняння (10.27) визначають пряму, яка проходить через початок координат

<sup>1</sup> У кінці цього розділу дано поняття миттєвої осі обертання у випадку просторового руху твердого тіла, коли  $\vec{v}_O \neq 0$ .

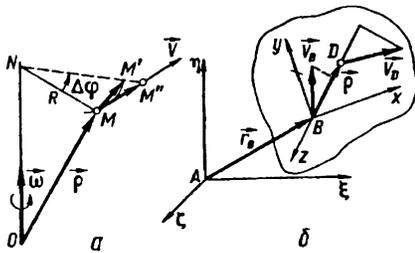


Рис. 10.6

нат Ця пряма є геометричним місцем точок, швидкість яких у певний момент часу дорівнює нулю, тобто вона є шуканою миттєвою віссю обертання. Рівняння (10.27) можна записати також у проєкціях на нерухомі осі  $O\xi\eta\zeta$ .

Покажемо, що миттєвий розподіл швидкостей для тіла з нерухомою точкою відповідає стану миттєвого обертання навколо осі, яка визначається рівнянням (10.27). Іншими словами, доведемо, що миттєвий розподіл швидкостей не відрізняється від розподілу швидкостей при обертанні тіла навколо нерухомої осі, з якою у певний момент часу збігається миттєва вісь. Насамперед зазначимо, що з рівнянь (10.26), (10.27) випливає, що вектор  $\vec{\omega}$  миттєвої кутової швидкості напрямлений уздовж миттєвої осі. Відповідно до (10.25) швидкість  $\vec{v}$  перпендикулярна до  $\vec{\omega}$  і лежить у площині, перпендикулярній до  $\vec{\omega}$ . При цьому

$$v = \omega R \sin \alpha = \omega R,$$

де  $R$  миттєвий радіус обертання.

Розглянемо переміщення тіла за досить малій проміжок часу  $\Delta t$ . Припустимо, що за цей час тіло повертається на малий кут  $\Delta\phi$  навколо миттєвої осі, а точка  $M$  переходить у положення  $M'$  (рис. 10.6, а). Нехтуючи величинами другого порядку малости, припустимо, що  $MM' = MM''$ , де  $MM'' = v\Delta t = \omega R\Delta t$ . Проте, крім того,  $MM' \approx R \operatorname{tg} |\Delta\phi| \approx R |\Delta\phi|$ . Оже,

$$\omega \Delta t \approx |\Delta\phi| \quad \text{або} \quad \omega = \frac{|\Delta\phi|}{\Delta t}. \quad (10.28)$$

Якщо  $\Delta t \rightarrow 0$ , то ця наближена рівність перейде в точну, що збігається з формулою (8.15). Це доводить, що миттєвий розподіл швидкостей у тілі відповідає стану миттєвого обертання навколо миттєвої осі.

Отже, приходимо до узагальнюючого висновку: *миттєва кутова швидкість тілько-ковзний вектор*.

Таким чином, при миттєвому обертальному русі тіла миттєвий розподіл швидкостей відповідає руху тіла навколо миттєвої осі. Для тіла, що здійснює сферичний рух, вираз “кутова швидкість” має умовний характер, оскільки змінення положення тіла на скінченному проміжку часу в цьому разі визначається не одним, а трьома кутами, тому не можна вказати один такий кут, швидкості змінення якого відповідав би розглядуваний вектор  $\vec{\omega}$ .

Як зазначалося, проєкції вектора кутової швидкості сферичного руху твердого тіла є функціями кутів Ейлера та їхніх перших похідних за часом, тому на практиці виникає задача, як знайти зазначені залежності  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  або  $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$  від  $\psi, \theta, \phi$ , які називають *кінематичними рівняннями Ейлера*.

На завершення вкажемо на відмінність обертання відносно миттєвої осі та нерухомої осі обертання. У випадку обертання відносно нерухомої осі вектор кутового прискорення  $\vec{\epsilon}$  напрямлений уздовж тієї самої лінії, що і вектор  $\vec{\omega}$ , бо в цьому випадку годограф вектора  $\vec{\omega}$  збігається з нерухомою віссю. Миттєва вісь обертання і, отже, вектор  $\vec{\omega}$  змінюють своє положення у просторі, тому вектор кутового прискорення не збігається з миттєвою віссю обертання. А це означає, що картини розподілу прискорень у твердому тілі, яке обертається відносно нерухомої осі та миттєвої осі обертання, будуть різні.

**Кінематичні рівняння Ейлера.** Для знаходження проєкцій кутових швидкостей, наприклад на осі  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , можна скористатися співвідношеннями (9.10), з яких маємо

$$\begin{aligned} \omega_x &= \bar{k} \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} = k_{\xi'} \left( \frac{d\bar{j}}{dt} \right)_{\xi'} + k_{\eta'} \left( \frac{d\bar{j}}{dt} \right)_{\eta'} + k_{\zeta'} \left( \frac{d\bar{j}}{dt} \right)_{\zeta'}, \\ \omega_y &= \bar{i} \cdot \frac{d\bar{k}}{dt} = i_{\xi'} \left( \frac{d\bar{k}}{dt} \right)_{\xi'} + i_{\eta'} \left( \frac{d\bar{k}}{dt} \right)_{\eta'} + i_{\zeta'} \left( \frac{d\bar{k}}{dt} \right)_{\zeta'}, \\ \omega_z &= \bar{j} \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} = j_{\xi'} \left( \frac{d\bar{i}}{dt} \right)_{\xi'} + j_{\eta'} \left( \frac{d\bar{i}}{dt} \right)_{\eta'} + j_{\zeta'} \left( \frac{d\bar{i}}{dt} \right)_{\zeta'}. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Якщо враховувати, що  $\left( \frac{d\bar{i}}{dt} \right)_{\xi} = \frac{d(\bar{i}_{\xi})}{dt}$  і т. д., то, скориставшись табл. 10.1, вираз (10.29) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \omega_x &= a_{13}\dot{a}_{12} + a_{23}\dot{a}_{22} + a_{33}\dot{a}_{32}, \\ \omega_y &= a_{11}\dot{a}_{13} + a_{21}\dot{a}_{23} + a_{31}\dot{a}_{33}, \\ \omega_z &= a_{12}\dot{a}_{11} + a_{22}\dot{a}_{21} + a_{32}\dot{a}_{31}. \end{aligned} \quad (10.30)$$

Підставляючи у формули (10.30) напрямні косинуси, наприклад для кутів Ейлера – Кривола (табл. 10.4), після елементарних, але громіздких перетворень, дістанемо

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi}, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_z &= -\dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (10.31)$$

Очевидно, що аналогічні співвідношення можна одержати також для проєкцій  $\omega_{\xi'}$ ,  $\omega_{\eta'}$ ,  $\omega_{\zeta'}$  вектора  $\bar{\omega}$  на нерухомі осі  $O\xi'$ ,  $O\eta'$ ,  $O\xi'$ .

У вираз (10.30) замість елементів стовпців табл. 10.1 будуть входити відповідні елементи рядків тієї самої таблиці, наприклад,

$\omega_{\xi'} = \bar{k}' \cdot \frac{d\bar{j}'}{dt} = a_{31}\dot{a}_{21} + a_{32}\dot{a}_{22} + a_{33}\dot{a}_{21}$  і т. д. Наведена методика визначення проєкцій кутових швидкостей потребує досить громіздких аналітичних перетворень, тому розглянемо іншу методику, яка полягає у наступному.

Кожному куту повороту тіла  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  (див. рис. 10.3, а) ставиться у відповідність вектор кутової швидкості  $\vec{j}'\dot{\psi}$ ,  $\vec{k}'\dot{\theta}$ ,  $\vec{j}'_2\dot{\phi}$ , якщо задаються кути Ейлера, і  $\vec{j}'\dot{\psi}$ ,  $\vec{k}'\dot{\theta}$  і  $\vec{j}'_2\dot{\phi}$  – у разі задання кутів Ейлера – Кривола (рис. 10.3, б). Тут  $\vec{j}'$ ,  $\vec{k}'$ ,  $\vec{j}'_2$ ,  $\vec{i}'_2$  – орти відповідних осей, по яких напрямлені кутові швидкості  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  у наведених випадках задання кутів повороту тіла.

Оскільки відповідно до аксіоми II, наведеної у статичці, коли ковзні вектори перетинаються в одній точці, то їх додають за правилом паралелограма, і вектор кутової швидкості, як ковзний вектор, при сферичному русі можна подати у вигляді

$$\bar{\omega} = \vec{j}'\dot{\psi} + \vec{k}'\dot{\theta} + \vec{j}'_2\dot{\phi}. \quad (10.32)$$

При будь-якому способі задання руху твердого тіла завжди є співвідношення вигляду

$$\begin{aligned} \omega &= \bar{i} \omega_x + \bar{j} \omega_y + \bar{k} \omega_z = \\ &= \bar{i}' \omega_{\xi'} + \bar{j}' \omega_{\eta'} + \bar{k}' \omega_{\zeta'}. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Проектуючи векторні рівняння (10.32) на осі системи координат  $xyz$  і використовуючи основну формулу сферичної тригонометрії (10.20), для кутів Ейлера одержимо такі співвідношення:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi, \\ \omega_y &= \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi.\end{aligned}\quad (10.34)$$

Для кутів Крилова безпосередньо з рис. 10.3, б відразу знайдемо вирази (10.31).

Якщо нас цікавлять проєкції кутових швидкостей на нерухомі осі, то, наприклад, для задання кутів Крилова (рис. 10.3, б) вони матимуть вигляд

$$\begin{aligned}\omega_x' &= \dot{\phi} \cos \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_y' &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \sin \theta, \\ \omega_z' &= -\dot{\phi} \cos \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi.\end{aligned}\quad (10.35)$$

Зазначимо, що одержання кінематичних рівнянь Ейлера є початковим етапом при складанні диференціальних рівнянь руху твердих тіл. Використовуючи формулу кінематики (10.24), доведемо такі дві теореми.

**Теорема 1 (теорема Грасгофа – кінематичне доведення).** *Проекції швидкостей двох точок вільного твердого тіла на пряму, що проходить через ці точки, рівні між собою.*

Доведення. Цю теорему ми вже довели в § 8.2. Тут наведемо нове її доведення. Виберемо в тілі (рис. 10.6, б) дві точки  $B$  і  $D$ . Згідно з рівністю (10.24) маємо

$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (10.36)$$

де  $\vec{r} = \vec{BD}$ .

Спроєкуємо це рівняння на пряму  $BD$ , помноживши скалярно обидві його частини на одиничний вектор  $\vec{\rho}$ , напрямлений по радіусу-вектору  $\vec{r}$ . Дістанемо

$$\dot{v}_D \cdot \frac{\vec{\rho}}{\rho} = \dot{v}_B \cdot \frac{\vec{\rho}}{\rho} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \frac{\vec{\rho}}{\rho}. \quad (10.37)$$

Оскільки вектор  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  перпендикулярний до вектора  $\vec{r}$ , то  $(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \frac{\vec{\rho}}{\rho} = 0$  і

$$\dot{v}_D \cdot \frac{\vec{\rho}}{\rho} = (\dot{v}_D)_{BD} = \dot{v}_B \cdot \frac{\vec{\rho}}{\rho} = (\dot{v}_B)_{BD}. \quad (10.38)$$

Теорему доведено.

**Теорема 2.** *Вектор кутової швидкості твердого тіла не залежить від вибору полюса.*

Доведення. Виберемо спочатку полюс у точці  $B$  (рис. 10.6, б). Тоді, позначивши вектор кутової швидкості тіла через  $\vec{\omega}_B$ , швидкість точки  $D$  запишемо у вигляді

$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{r}. \quad (10.39)$$

Потім перенесемо полюс у точку  $D$  і позначимо вектор кутової швидкості у цьому разі  $\vec{\omega}_D$ . Тоді швидкість точки  $B$  можна знайти за формулою

$$\vec{v}_B = \vec{v}_D + \vec{\omega}_D \times (-\vec{r}). \quad (10.40)$$

Додаючи ліві та праві частини цих рівнянь (10.39) і (10.40), дістанемо

$$\vec{v}_D + \vec{v}_B = \vec{v}_B + \vec{v}_D + (\vec{\omega}_B - \vec{\omega}_D) \times \vec{r}.$$

Звідси

$$(\vec{\omega}_B - \vec{\omega}_D) \times \vec{r} = 0. \quad (10.41)$$

Очевидно, якщо вектор  $\vec{\omega}$  не колінальний вектору  $\vec{r}$ , то  $\vec{\omega}_B - \vec{\omega}_D = 0$  і  $\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_D$ . Якщо вектор  $\vec{\omega}$  колінальний вектору  $\vec{r}$ , то точки  $B$  і  $D$  лежать на миттєвій осі обертання, швидкості всіх точок якого, у тому числі точок  $B$  і  $D$ , дорівнюють нулю. Отже, і в цьому разі  $\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_D$ . Теорему доведено.

Узагальнимо деякі висновки, що випливають з досліджень, проведених у § 10.2 і § 10.3. Насамперед зазначимо, що при змінненні положення у тілі полюса  $O$  не змінюються ні кути Ейлера, ні кутова швидкість обертання твердого тіла.

Дійсно, будь-яке зміннення положення в тілі полюса  $O$  можна зв'язати з деяким паралельним перенесенням координатних сис-

Отже, не змінюються і кути Ейлера.

Із кінематичних формул Ейлера (10.34) і (10.35), а також із теореми 2 випливає, що кутова швидкість обертання вільного твердого тіла не залежить від вибору полюса. Кінематичні ж характеристики поступального руху вільного тіла суттєво залежать від вибору полюса.

Обертальний рух вільного твердого тіла навколо полюса зводиться до миттєвого обертання навколо осі, що проходить через полюс. Дійсно, цю вісь також можна назвати миттєвою, якщо з цим терміном пов'язувати додаткову умову про те, що в тілі можна вказати геометричне місце точок, абсолютна швидкість яких у певний (фіксований) момент часу дорівнює швидкості полюса, тобто при просторовому русі тіла точки миттєвої осі обертання, що проходить через полюс, мають однакову поступальну швидкість, яка дорівнює швидкості полюса, що не впливає на картину розподілу швидкостей при обертальному русі тіла.

У цьому випадку можна говорити про миттєву вісь обертання стосовно лише обертального руху тіла. Формально при розв'язанні задач, не змінюючи картину розподілу швидкостей, можна застосовувати метод зупинки: ввести додаткову систему координат, яка рухалась би поступально зі швидкістю полюса  $\vec{v}_O$ , але в протилежному напрямі ( $-\vec{v}_O$ ), тоді нова абсолютна швидкість точок твердого тіла  $\vec{v}'_a = \vec{v}_O - \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$  буде визначатись лише обертальним рухом, бо в поступальному русі тіло буде зупинено.

Поступальний і обертальний рух тіла навколо полюса  $O$  можна розглядати як незалежні. Цей висновок можна було б зробити на підставі того, що в даному випадку абсолютна швидкість тіла задовольняє правилу

обертання – це така пряма в тілі яка проходить через полюс і другу точку в тілі, абсолютна швидкість котрої в даний момент часу дорівнює швидкості полюса  $\vec{v}_O$ .

Тоді

$$\vec{v}_a = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_O \Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{\rho} = 0, \quad (10.42)$$

що збігається з (10.26).

Теорему 1 можна розглядати як умову незмінності відстані між точками твердого тіла у кінематичній формі.

На закінчення зазначимо, що теореми 1 і 2 дають змогу математично строго ввести вектор кутової швидкості<sup>1</sup>.

#### § 10.4. Прискорення точок вільного твердого тіла

Формулу для прискорення точок твердого тіла можна одержати безпосередньо диференціюванням формули (10.24) або як окремий випадок формули (9.38) для прискорень точки при складному русі, порівнявши в них відносно прискорення  $\vec{w}_r$  і коріюлісове прискорення  $\vec{w}_c$  нулю. Тоді одержимо

$$\vec{w} = \vec{w}_e = \vec{w}_O + \vec{\epsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$

або

$$\vec{w} = \vec{w}_O + \vec{w}_{MO}^{ob} + \vec{w}_{MO}^{oc} = \vec{w}_O + \vec{w}_{MO}. \quad (10.43)$$

Тут  $\vec{w}_{MO} = \vec{w}_{MO}^{ob} + \vec{w}_{MO}^{oc}$  – прискорення точки  $M$  при обертанні тіла навколо полюса  $O$ , де  $\vec{w}_{MO}^{ob} = \vec{\epsilon} \times \vec{\rho}$  – обертальне прискорення точки  $M$ ,  $\vec{w}_{MO}^{oc} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$  – доосьове прискорення точки  $M$ . Формулу (10.43) можна прочитати так: *прискорення будь-якої точ-*

<sup>1</sup> Кильчевський Н. А. Курс теоретической механики. В 2 т. – Т. 1 М.: Наука, 1977.

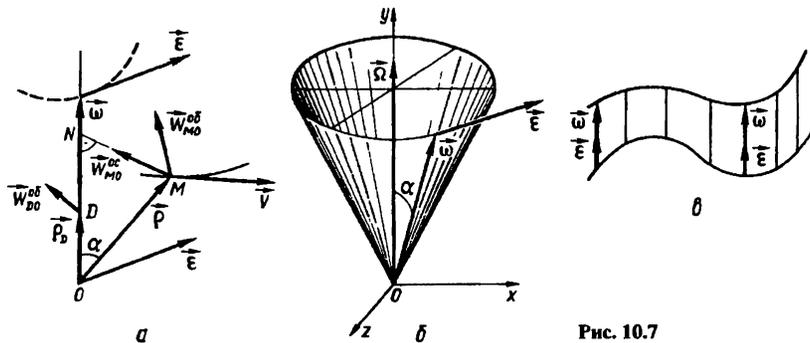


Рис. 10.7

ки  $M$  вільного твердого тіла дорівнює геометричній сумі прискорення полюса  $O$  і прискорення ( $\vec{w}_{MO}$ ) точки  $M$  в обертальному русі відносно полюса, що складається з обертального  $\vec{w}_{MO}^{об}$  і доосьового  $\vec{w}_{MO}^{до}$  прискорень.

Аналогічно тому, як ми це робили в § 9.5, розглянемо розподіл доосьового і обертального прискорень та їхній зв'язок з нормальним і тангенціальним прискореннями у разі руху вільного твердого тіла.

У § 10.3 встановлено, що миттєвий розподіл швидкостей для тіла з нерухою точкою не відрізняється від розподілу швидкостей при обертанні тіла навколо нерухої осі, з якою у певний момент часу збігається миттєва вісь. При цьому вектор миттєвої кутової швидкості напрямлений по миттєвій осі обертання, а кутове прискорення

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

напрявлене по дотичній до годографа вектора кутової швидкості, тому його напрям визначається законом змінення вектора  $\vec{\omega}$  (рис. 10.7,  $a$ ).

Оскільки у вираз доосьового прискорення входять вектори  $\vec{\omega}$  і  $\vec{\rho}$ , розподіл доосьового прискорення у певний момент часу буде однаковий як для миттєвої осі, так і для нерухої осі (рис. 10.7,  $a$ ; рис. 9.6). Щодо обер-

тальних прискорень, то в загальному випадку їх розподіл буде відрізнятися в тілі, що обертається відносно нерухої осі, і в тілі, що обертається навколо нерухої точки, бо в цих випадках будуть різними напрямки векторів кутових прискорень, через те, що різними є годографи, які описують вектор  $\vec{\omega}$ . Оскільки тангенціальне прискорення напрямлене по дотичній до траєкторії і збігається за напрямом з вектором швидкості, а обертальне прискорення не збігається з ним за напрямом через те, що вектор  $\vec{\epsilon}$  не колінеарний вектору  $\vec{\omega}$ , то обертальне прискорення не дорівнює тангенціальному. А через те, що

$$\vec{w}_n + \vec{w}_t = \vec{w}^{об} + \vec{w}^{до} + \vec{w}_O, \quad (10.44)$$

доосьове прискорення не дорівнює нормальному.

Зауважимо, що швидкості всіх точок осі миттєвого обертання при вільному русі твердого тіла однакові і дорівнюють швидкості полюса  $\vec{v}_O$ , а прискорення цих точок різні. Наприклад, якщо взяти довільну точку  $D$  на цій осі, то в усіх випадках, коли вектор  $\vec{\epsilon}$  не колінеарний  $\vec{\omega}$ , обертальне прискорення точки  $D$  відмінне від нуля ( $\vec{w}_D^{об} = \vec{\epsilon} \times \vec{\rho}_D$ ). Саме через ці прискорення зазначена вісь обертання переміщується в

тілі: швидкості точок осі дорівнюють  $\vec{v}_O$  у даний момент часу, а вже в наступний момент набувають швидкостей, відмінних від  $\vec{v}_O$ .

Знайдемо проєкції обертального і доосового прискорень на осі рухомої системи координат  $Oxyz$ :

$$\vec{w}^{ob} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}w_x^{ob} + \vec{j}w_y^{ob} + \vec{k}w_z^{ob}. \quad (10.45)$$

Звідси

$$\begin{aligned} w_x^{ob} &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y, \\ w_y^{ob} &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z, \\ w_z^{ob} &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x. \end{aligned} \quad (10.46)$$

В окремому випадку, коли вектор кутової швидкості (або миттєва вісь обертання) описує відносно нерухомої осі конус, обертаючись з кутовою швидкістю  $\vec{\Omega}$  (цю характерно, наприклад, для конічних зчеплень), кутове прискорення запишемо у вигляді

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{\omega}. \quad (10.47)$$

Якщо до того ж  $\omega_x = \text{const}$ ,  $\omega_y = \text{const}$ ,  $\omega_z = \text{const}$ , тобто кут  $\alpha$  є постійним (рис. 10.7, б), то  $\frac{d'\vec{\omega}}{dt} = 0$ . Якщо тверде тіло руха-

ється так, що вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$  залишається паралельним самому собі, то в цьому випадку годографом вектора  $\vec{\omega}$  буде пряма лінія і так само, як у випадку з нерухою віссю, вектор  $\vec{\varepsilon}$  кутового прискорення буде колінеарний  $\vec{\omega}$  (рис. 10.7, в). Звідси видно, що в разі такого руху, якщо до

того ж  $\vec{w}_O = 0$ , доосове та обертальне прискорення дорівнюватимуть відповідно тангенціальному і нормальному прискоренням.

Розглянемо детальніше доосове прискорення. Знайдемо проєкції прискорення  $\vec{w}^{oc}$  на осі вибраної системи координат, наприклад  $Oxyz$ . Використовуючи формулу для подвійного векторного добутку

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}), \quad (10.48)$$

дістанемо

$$\begin{aligned} \vec{w}^{oc} &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \\ &= \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}) - \vec{\rho}\omega^2 = \\ &= \vec{i}w_x^{oc} + \vec{j}w_y^{oc} + \vec{k}w_z^{oc}. \end{aligned} \quad (10.49)$$

Скористаємося такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z, \\ \vec{\rho} &= \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z, \\ \vec{\omega} \cdot \vec{\rho} &= \omega_x x + \omega_y y + \omega_z z, \\ \omega^2 &= \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2. \end{aligned} \quad (10.50)$$

Тоді (10.49) набере вигляду

$$\begin{aligned} \vec{w}^{oc} &= \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}) - \vec{\rho}\omega^2 = \\ &= (\vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z) \times \\ &\times (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \\ &- (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z)(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2). \end{aligned} \quad (10.51)$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових ортах у виразах (10.49) і (10.51), одержимо

$$\begin{aligned} w_x^{oc} &= -x(\omega_y^2 + \omega_z^2) + y\omega_x\omega_y + z\omega_x\omega_z, \\ w_y^{oc} &= x\omega_y\omega_x - y(\omega_x^2 + \omega_z^2) + z\omega_y\omega_z, \\ w_z^{oc} &= x\omega_z\omega_x + y\omega_z\omega_y - z(\omega_x^2 + \omega_y^2). \end{aligned} \quad (10.52)$$

Якщо ввести умовні позначення

$$\begin{aligned}\omega_{xx} &= \omega_y^2 + \omega_z^2, & \omega_{yy} &= \omega_x^2 + \omega_z^2, \\ \omega_{zz} &= \omega_x^2 + \omega_y^2, & \omega_{xy} &= \omega_x \omega_y, & (10.53) \\ \omega_{xz} &= \omega_x \omega_z, & \omega_{yz} &= \omega_y \omega_z,\end{aligned}$$

то вираз (10.51) можна записати у матричній формі

$$\begin{bmatrix} W_x^{oc} \\ W_y^{oc} \\ W_z^{oc} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \omega_{xx} & -\omega_{xy} & -\omega_{xz} \\ -\omega_{yx} & \omega_{yy} & -\omega_{yz} \\ -\omega_{zx} & -\omega_{zy} & \omega_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (10.54)$$

Покажемо, що при обертанні тіла відносно миттєвої осі, так само як і при обертанні навколо нерухомої осі, справедливим є вираз (рис. 10.7, а)

$$\vec{w}^{oc} = -\omega^2 \overline{MN}.$$

Дійсно, скориставшись формулою (10.49)

і враховуючи, що  $\frac{\dot{\omega}}{\omega}$  – орт, напрямлений

по миттєвій осі обертання, а  $\frac{\dot{\omega}}{\omega} \cdot \vec{\rho} = \rho \cos \alpha = ON$  (рис. 10.7, а), дістанемо

$$\begin{aligned}\vec{w}^{oc} &= \dot{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}) - \vec{\rho}\omega^2 = \\ &= \omega^2 \left[ \frac{\dot{\omega}}{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}) - \vec{\rho} \right] = \\ &= \omega^2 (\overline{ON} - \vec{\rho}) = -\omega^2 \overline{MN}. \quad (10.55)\end{aligned}$$

Розглядаючи розподіл швидкостей і прискорень при складному русі точки (§ 9.3–9.6), ми не охарактеризували повністю кінематичний зміст векторів кутової швидкості  $\vec{\omega}$  і кутового прискорення  $\vec{\epsilon}$ . На основі проведеного нами дослідження властивостей руху вільного твердого тіла можна стверджувати, що  $\vec{\omega}_e, \vec{\epsilon}_e$  у формулах § 8.3 і § 9.1–9.5 є відповідно миттєвою кутовою швидкістю та миттєвим кутовим прискоренням переносного руху.

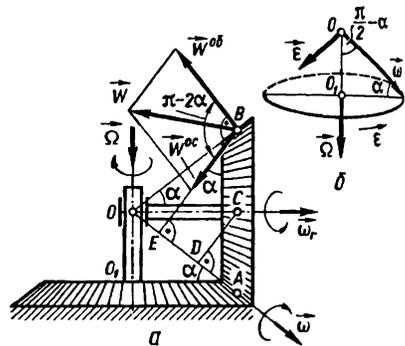


Рис. 10.8

**Приклад 1.** Знайти швидкість і прискорення точки  $B$  (рис. 10.8) рухомого колеса конічного зчеплення при  $OC=4$  см,  $r=CA=3$  см, якщо точка  $O$  нерухома, швидкість точки  $C$  (центра колеса)  $v_C = 4,8$  см/с.

Розв'язання. Оскільки колесо котиться без ковзання, то швидкість точки  $A$  дорівнює нулю в певний момент часу. Через те, що точка  $O$  є нерухомою, маємо дві точки  $O$  і  $A$ , швидкості яких дорівнюють нулю. Отже, миттєва вісь обертання збігатиметься з прямою  $OA$ , а швидкість точок  $C$  і  $B$  знайдемо із виразів

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \overline{OC}, \quad \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \overline{OB}.$$

Підставляючи числові значення, одержимо

$$v_C = \omega \cdot OC \cdot \sin \alpha = \omega \cdot CD,$$

$$v_B = \omega \cdot OB \cdot \sin 2\alpha = \omega \cdot BE = \omega \cdot 2CD,$$

тобто  $v_B = 2v_C = 9,6$  см/с. Звідси знайдемо ку-

тову швидкість  $\omega = \frac{v_C}{CD}$ . Оскільки задано відривки  $OC$  і  $CA$ , то кут  $\alpha$  визначимо із співвідношення

$$\sin \alpha = \frac{CA}{OA} = \frac{CA}{\sqrt{OC^2 + CA^2}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}.$$

Тоді  $CD = OC \cdot \sin \alpha = 4 \cdot \frac{3}{5} = 2,4$  см і  $\omega = \frac{4,8}{2,4} = 2$  с<sup>-1</sup>.

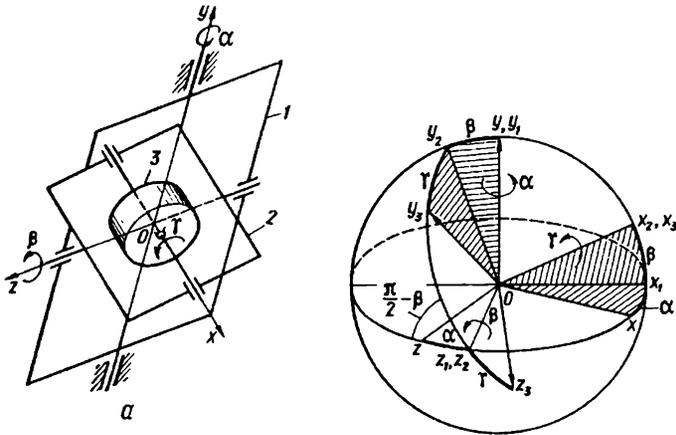


Рис. 10.9

Тепер знайдемо прискорення точки  $B$ .  
Маємо

$$\vec{w}_B = \vec{w}_B^{oc} + \vec{w}_B^{oc} = \vec{\epsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$

Тут  $\vec{\rho} = \vec{OB}$ ,  $BE = R = OB \cdot \sin 2\alpha = 2CD$ . У цій формулі невідомим є кутове прискорення  $\vec{\epsilon}$ . Знайдемо його. Вектор  $\vec{\omega}$  описує конус (рис. 10.8, б) з постійним кутом  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ , тому

$$\vec{\epsilon} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega},$$

де  $\vec{\Omega}$  – кутова швидкість обертання площини  $OSA$ , в якій розміщений вектор  $\vec{\omega}$  відносно вертикальної осі  $OQ_1$ :

$$\Omega = \frac{v_c}{OC} = \frac{4,8}{4} = 1,2 \text{ с}^{-1}.$$

З рис. 10.8 випливає, що  $\epsilon = \Omega \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \Omega \cos \alpha$ ,  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4}{5}$ ,  $\epsilon = 2 \cdot 1,2 \cdot 0,8 = 1,92 \text{ с}^{-2}$ .

Повернемося до формул для прискорень

$$w_B^{oc} = \omega^2 BE - \omega^2 \cdot 2CD = 4 \cdot 2 \cdot 2,4 = 19,2 \text{ см/с}^2,$$

$$w_B^{oc} = \epsilon \rho = \epsilon \cdot OB = 1,92 \cdot 5 = 9,6 \text{ см/с}^2.$$

Як показано на рис. 10.8, а вектор  $\vec{w}_B^{oc}$  напрямлений по прямій  $BE$ , а вектор  $\vec{w}_B^{oc}$  перпендикулярний до  $\vec{\rho} = \vec{OB}$ , тому кут між ними дорівнює  $(\pi - 2\alpha)$ . Тоді прискорення точки  $B$  за теоремою косинусів буде

$$w_B = \left[ (w_B^{oc})^2 + (w_B^{oc})^2 - 2w_B^{oc} w_B^{oc} \cos 2\alpha \right]^{1/2}$$

Підставивши у цю формулу значення  $w_B^{oc} = 9,6 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$ ,  $w_B^{oc} = 19,2 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$ ,  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 0,28$ , дістанемо  $w_B = 18,9 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$ .

**Приклад 2.** На рис. 10.9, а зображено гіроскоп в кардановому підвісі, який встановлено на рухомому об'єкті, з яким зв'язана система координат  $Oxyz$ . Знайти таблицю напрямних косинусів між осями об'єкта та осями, зв'язаними з ротором гіроскопа.

Розв'язання. Як видно з рис. 10.9, цей гіроскоп має три степеня вільності. Зовнішня рамка 1 може повертатись на кут  $\alpha$  відносно своєї осі обертання, внутрішня рамка 2 – на кут  $\beta$  і ротор 3 – на кут  $\gamma$ .

Зв'яжемо із зовнішньою рамкою систему координат  $Ox_1y_1z_1$ , з внутрішньою –  $Ox_2y_2z_2$  і ротором –  $Ox_3y_3z_3$ . Взаємне положення тіл і відповідних систем координат показано на рис. 10.9, б.

Неважко помітити, що кардановий підвіс моделює кути Ейлера – Крилова. Обчислимо таблицю напрямних косинусів матричним методом.

Відповідно до вказаних на рис. 10.9, б поворотів матриці перетворень матимуть вигляд

$$[x, y, z]^T = \bar{B}_1 [x_1, y_1, z_1]^T,$$

$$[x_1, y_1, z_1]^T = \bar{B}_2 [x_2, y_2, z_2]^T,$$

$$[x_2, y_2, z_2]^T = \bar{B}_3 [x_3, y_3, z_3]^T,$$

$$[x, y, z]^T = \bar{B} [x_3, y_3, z_3]^T$$

Тут

$$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_2 = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}.$$

Результуючу матрицю повороту  $\bar{B}$  знайдемо як добуток

$$\bar{B} = \bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma \\ -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma \sin \beta & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \sin \beta \end{bmatrix}.$$

## § 10.5. Елементи теорії скінченних поворотів

Вісь скінченного повороту – миттєва вісь обертання. До поняття про миттєву вісь обертання можна прийти й іншим шляхом. Для цього доведемо спочатку теорему Ейлера – Д'Аламбера.

**Теорема Ейлера – Д'Аламбера.** *Будь-який поворот твердого тіла, що має одну нерухому точку, можна отримати одним поворотом навколо осі, яка проходить через цю точку.*

Доведення. Скористаємось тим, що положення твердого тіла у просторі можна задати трьома його точками  $O, A, B$  (рис. 10.10).

Оскільки точка  $O$  є нерухомою, то опишемо сферу з центром у цій точці так, щоб точки  $A$  і  $B$  лежали на дузі великого кола цієї сфери.

Нехай тіло повернулося навколо точки  $O$  так, що дуга  $AB$  зайняла положення  $A_1B_1$ .

Очевидно, що  $\cup A_1B_1 = \cup AB$ , оскільки в твердому тілі відстані між точками незмінні.

З'єднаємо тепер точки  $A$  і  $A_1$ ,  $B$  і  $B_1$  тими ж дугами великого кола. Це можливо, бо через будь-які дві точки на сфері можна завжди провести дугу великого кола.

Тепер через середини дуг  $\cup AA_1$  (точку  $C$ ),  $\cup BB_1$  (точку  $D$ ) проведемо сферичні перпендикуляри – дуги великих кіл, площини яких перпендикулярні відповідно до площин  $OAA_1$  та  $OBB_1$ . Дуги цих сферичних перпендикулярів перетнуться на поверхні сфери в точці  $O_1$  (рис. 10.10).

З'єднаємо тепер точку  $O_1$  дугами великих кіл з точками  $A, A_1, B$  та  $B_1$ . При цьому сферичні трикутники  $ABO_1$  та  $A_1B_1O_1$  є рівними (за трьома сторонами).

Дійсно,  $\cup AB = \cup A_1B_1$  за визначенням твердого тіла – відстані між точками тіла не

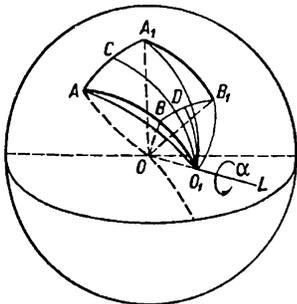


Рис. 10.10

змінюються при його русі.  $\cup AO_1 = \cup A_1O_1$  як дуги, що мають рівні проекції  $AC = A_1C$ , бо точка  $C$  лежить посередині дуги  $\cup AA_1$ .

З тієї самої причини  $\cup BO_1 = \cup B_1O_1$ , бо їх проекції рівні:  $BD = B_1D$ .

Із рівності сферичних трикутників  $ABO_1$  і  $A_1B_1O_1$  випливає, що при повороті навколо їх спільної вершини  $O_1$  зазначені трикутники сумістяться. При такому повороті точка  $O_1$  залишається нерухомою.

Таким чином, в тілі виявилось дві нерухомі точки – точка  $O$  і точка  $O_1$ . Отже, в цьому тілі через дві нерухомі точки  $O$  та  $O_1$  можна провести пряму  $OL$  (рис. 10.10), яка за визначенням є віссю обертання тіла.

Пряма  $OL$ , що проходить через точки  $O$  та  $O_1$ , і буде віссю обертання тіла. Теорема Ейлера – Д'Аламбера доведена.

**Миттєва вісь обертання.** У випадку скінченного повороту тіла з однією нерухомою точкою  $O$  пряма  $OL$  називається віссю скінченного повороту тіла.

Якщо положення дуг  $\cup AB$  та  $\cup A_1B_1$  відповідає малому повороту тіла за деякий проміжок часу  $\Delta t$ , то вісь  $OL$  буде віссю

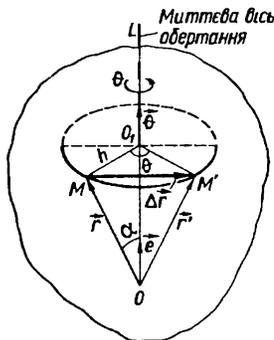


Рис. 10.11

малого повороту тіла. Граничне положення (при  $\Delta t \rightarrow 0$ ) осі малого повороту тіла називається *миттєвою віссю обертання*.

Таким чином, *миттєва вісь* визначається як деяка уявна пряма, поворотом навколо якої тіло, що має нерухому точку, повертається в положення, нескінченно близьке до даного.

Розглянемо тепер малий поворот тіла з нерухомою точкою  $O$  (рис. 10.11). Цьому повороту поставимо у відповідність вектор малого повороту  $\vec{\theta}$ , що рівний за величиною куту повороту  $\theta$  тіла навколо миттєвої осі повороту  $OL$ .

Переміщення довільної точки  $M$  при малому повороті тіла є теж малим і визначається вектором

$$\Delta \vec{r} = \vec{\theta} \times \vec{r}. \quad (10.56)$$

Модуль цього вектора, як видно з рис. 10.11, дорівнює

$$|\Delta \vec{r}| = 2h \sin \frac{\theta}{2} = 2r \sin \alpha \sin \frac{\theta}{2} \approx r \theta \sin \alpha. \quad (10.57)$$

Тепер уявімо собі, що тіло виконало два послідовних малих повороті: спочатку  $\vec{\theta}_1$ ,

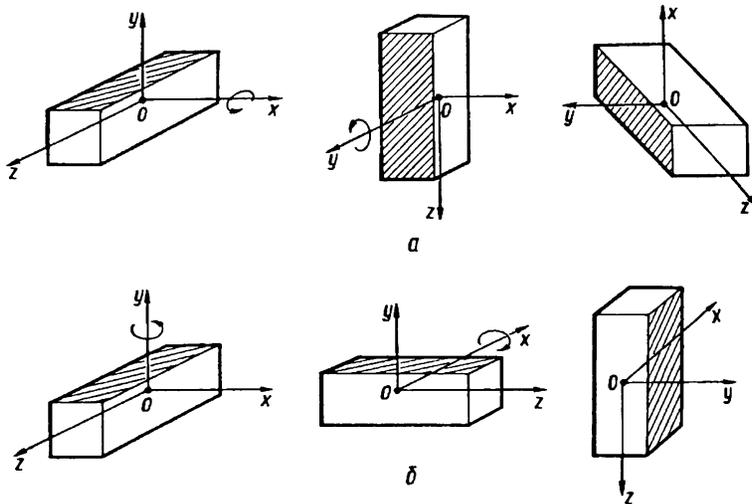


Рис. 10.12

а потім  $\vec{\theta}_2$ . Але, відповідно до теореми Ейлера - Д'Аламбера, будь-яке переміщення можна реалізувати за допомогою одного повороту  $\vec{\theta}$ . Питання полягає в тому, як цей один малий поворот  $\vec{\theta}$  зв'язати з двома послідовними  $\vec{\theta}_1$  та  $\vec{\theta}_2$ ?

Очевидно, що для кожного з цих поворотів (рис. 10.11) матимемо

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r}_1 &= \vec{\theta}_1 \times \vec{r}; \\ \Delta \vec{r}_2 &= \vec{\theta}_2 \times \vec{r}' = \vec{\theta}_2 \times (\vec{r} + \Delta \vec{r}_1) \approx \\ &\approx \vec{\theta}_2 \times \vec{r}, \\ \Delta \vec{r} &= \Delta \vec{r}_1 + \Delta \vec{r}_2 \approx \vec{\theta}_1 \times \vec{r} + \vec{\theta}_2 \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (10.58)$$

Крім того, потрібно врахувати, що радіус-вектор  $\Delta \vec{r}$  отримасмо і після результуючого повороту на малий вектор повороту  $\vec{\theta}$ :

$$\Delta \vec{r} = \vec{\theta} \times \vec{r}. \quad (10.59)$$

Порівнюючи рівність (10.58) та (10.59), одержимо

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 = \vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_1. \quad (10.60)$$

Отже, нескінченно малі повороти тіла підпорядковуються закону складання векторів (правило паралелограма) і їх послідовність можна міняти місцями.

Слід звернути увагу на те, що хоча малі повороти твердого тіла задовольняють правило комутативності, тобто їх можна міняти місцями, скінченні повороти твердого тіла залежать від послідовності поворотів. На рис. 10.12 показано на прикладі прямокутного паралелепіпеда, як послідовність поворотів впливає на кінцеве положення тіла.

Перша послідовність поворотів тіла на кут  $\frac{\pi}{2}$  є такою: перший поворот відносно осі  $Ox$ , другий - відносно  $Oy$  (рис. 10.12, а).

Друга послідовність: перший поворот відносно осі  $Oy$ , другий - відносно осі  $Ox$

(рис. 10.12, б). Як видно з рисунка, кінцеве положення тіла суттєво залежить від послідовності скінченних поворотів.

**Миттєво-обертальний рух тіла навколо нерухомої точки.** Визначимо швидкість довільної точки  $M$ , яка здійснює сферичний рух, як границю відношення малого переміщення  $\Delta \vec{r}$  до проміжку часу  $\Delta t$ , що прямує до нуля, з урахуванням співвідношення (10.59):

$$\begin{aligned} \vec{v}_M &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\vec{\theta}}{\Delta t} \times \vec{r} \right) = \\ &= \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\theta}}{\Delta t} \right) \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (10.61)$$

Якщо ввести вектор

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\theta}}{\Delta t}, \quad (10.62)$$

який напрямлений по миттєвій осі обертання (рис. 10.11), то формулу (10.61) запишемо у вигляді

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (10.63)$$

Покажемо, як вектор  $\vec{\omega}$  можна визначити через кути Ейлера – Крилова та їх похідні.

Користуючись законом складання нескінченно малих поворотів (10.60) та формулою (10.62), маємо

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\vec{\theta}_1}{\Delta t} + \frac{\vec{\theta}_2}{\Delta t} + \frac{\vec{\theta}_3}{\Delta t} \right) \quad (10.64)$$

або

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3.$$

Якщо скористатися рис. 10.3, а, то вектор  $\vec{\omega}$  повороту тіла (у випадку послідовності Ейлера) можна подати як складання наступних трьох малих поворотів тіла:  $\vec{\omega}_1$  – кутова швидкість малого повороту тіла від-

носно осі  $O\eta_1'$ ,  $\vec{\omega}_2$  – відносно лінії вузлів  $O\xi_1'$ ,  $\vec{\omega}_3$  –  $O\eta_2'$ .

Таким чином  $\vec{\omega}_1$  відповідає зміні кута  $\psi$  ( $\vec{\omega}_1 = \dot{\psi}$ ),  $\vec{\omega}_2$  – кута  $\theta$  ( $\vec{\omega}_2 = \dot{\theta}$ ),  $\vec{\omega}_3$  – кута  $\phi$  ( $\vec{\omega}_3 = \dot{\phi}$ ).

З урахуванням позначень ортів відповідних осей (рис. 10.3, а) матимемо для малих поворотів тіла

$$\vec{\omega} = \vec{j}'\dot{\psi} + \vec{k}'\dot{\theta} + \vec{j}_2'\dot{\phi}. \quad (10.65)$$

Звідси, проєктуючи вектор (10.65) на відповідні осі  $Ox_2z$  або  $O\xi_1'\eta_1'\zeta_1'$ , легко знайти відповідні кінематичні рівняння.

Зазначимо, що векторне співвідношення (10.65) має місце і для скінченних будь-яких поворотів твердого тіла на підставі того, що вектори кутової швидкості є ковзними векторами.

**Аксойди.** Рівняння миттєвої осі обертання можна знайти аналітично як у рухомій, так і в нерухомій системах координат, якщо врахувати, що лінійна швидкість усіх точок миттєвої осі обертання дорівнює нулю в задану мить. Отже, з формули (10.63) легко отримати рівняння миттєвої осі

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = 0. \quad (10.66)$$

Проектуючи це векторне рівняння на осі рухомої чи нерухомої системи координат, дістанемо рівняння миттєвої осі обертання тіла в скалярній формі

$$\begin{aligned} \frac{x}{\omega_x} &= \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}; \\ \frac{\xi'}{\omega_{\xi'}} &= \frac{\eta'}{\omega_{\eta'}} = \frac{\zeta'}{\omega_{\zeta'}}. \end{aligned} \quad (10.67)$$

Як видно з рівнянь (10.67), миттєва вісь змінює з часом своє положення як у

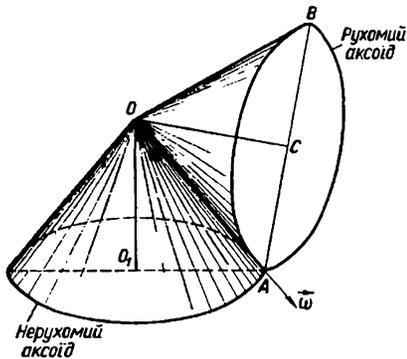


Рис. 10.13

рухомій системі координат (в тілі), так і в нерухомій. При цьому миттєва вісь обертання описує в просторі дві конічні поверхні: одну в рухомій системі координат, іншу – в нерухомій.

У кожний момент часу ці поверхні мають спільну твірну – миттєву вісь обертання.

Поверхні, які описує миттєва вісь обертання, називаються аксоїдами. Геометричне місце миттєвих осей обертання в нерухомій системі координат називається нерухомим аксоїдом, а в рухомій, що жорстко зв'язана з тілом, – рухомим аксоїдом.

Згідно з теоремою Пуансо, рух твердого тіла навколо нерухомої точки можна уявити як кочення без ковзання рухомого аксоїда по нерухомому.

На прикладі 1, який розглядався в § 10.4 (рис. 10.8), ми прийшли до цієї геометричної трактовки рухів. Аксоїди в цій задачі мають вигляд (рис. 10.13), на якому збережені ті самі позначення точок, що і на рис. 10.8. На практиці для знаходження миттєвої осі обертання корисною є наступ-

на рекомендація. Якщо рухоме тіло дотикається в будь-якій точці нерухомого аксоїда і при цьому він не ковзає, то миттєва вісь проходить через цю точку (точка  $A$  на рис. 10.8, 10.13) в даний момент часу.

З'єднуючи точку  $A$  (рис. 10.8) з нерухомою точкою  $O$  тіла, знаходимо миттєву вісь обертання твердого тіла.

Далі, якщо положення миттєвої осі обертання відоме, то модуль швидкості довільної точки  $M$  тіла можна знайти як добуток кутової швидкості на найкоротшу відстань від цієї точки до осі. (На рис. 10.8 це відстані  $CD$  і  $BE$  відповідно для точок  $C$  і  $B$ ).

На цьому обмежимося викладенням елементів теорії скінченних поворотів твердого тіла. Більш повно ця теорія викладена в монографії А. І. Лур'є<sup>1</sup>.

#### Питання для самоконтролю

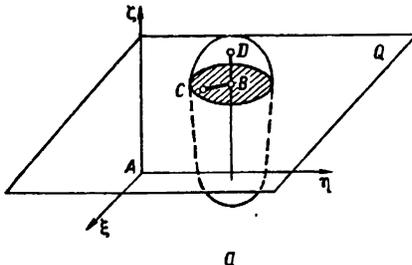
1. Чому обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої точки називають сферичним рухом?
2. Яким чином задають кути Ейлера та Ейлера – Крилова?
3. Чи залежить положення твердого тіла від послідовності кутів повороту?
4. У чому відмінність між кутами Ейлера та Ейлера – Крилова?
5. Що називають миттєвою віссю обертання твердого тіла з нерухомим і рухомим полюсом  $O$ ?
6. Чим відрізняється миттєвий поступальний рух від поступального руху твердого тіла?
7. Які є способи визначення миттєвої осі обертання твердого тіла?
8. Як виразити проєкції вектора кутового прискорення через кути Ейлера та їх похідні?
9. У чому полягає суть теорії скінченних поворотів твердого тіла?
10. У чому відмінність вектора кутової швидкості  $\omega$  при сферичному русі твердого тіла і при обертанні його навколо нерухомої осі?

<sup>1</sup> Лур'є А. И. Аналитическая механика. - М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961. - 824 с.

§ 11.1. Задання руху. Розподіл швидкостей і прискорень

Плоскопаралельним, або плоским, рухом твердого тіла називається такий рух, при якому всі точки його рухаються паралельно деякій нерухомій площині  $Q$  (рис. 11.1, *a*).

З означення плоского руху і з властивостей абсолютно твердого тіла (§ 8.1), які полягають у тому, що кути між прямими, фіксованими в твердому тілі, зберігаються незмінними, випливає, що будь-яка пряма  $DB$  (рис. 11.1, *a*), проведена в тілі перпендикулярно до площини  $A\xi\eta$ , перемішатиметься поступально, тобто траєкторії, швидкості та прискорення всіх точок цієї прямої будуть однаковими. Отже, для визначення руху тіла потрібно знати на кожній прямій, проведений перпендикулярно до площини  $A\xi\eta$ , рух лише однієї точки. Це дає підстави стверджувати, що плоский рух тіла цілком визначається рухом плоскої фігури, одержаної перетином тіла (рис. 11.1, *a*) будь-якою площиною  $Q$ , паралельною площині  $A\xi\eta$ . Отже, задання руху твердого тіла зводиться до задання руху одного його перерізу. У свою чергу, рух плоскої фігури в її площині визначається рухом відрізка прямої  $BC$  (рис. 11.1, *a*), що належить площині.



Оскільки відстань між точками  $B$  і  $C$  залишається незмінною, то з чотирьох координат точок  $B$  і  $C$  незалежними залишаються лише три. Отже, для опису плоского руху тіла потрібні три незалежні координати як функції часу.

Введені нами в § 10.1 системи координат у разі плоского руху, матимуть вигляд, показаний на рис. 11.1, *б*. При цьому положення полюса  $O$  в нерухомій системі координат  $A\xi\eta$  описується двома параметрами  $\xi_O$  і  $\eta_O$ , а третім параметром є кут  $\theta$  повороту тіла відносно осі  $O\xi$ . Положення довільної точки  $M$  в нерухомій системі координат описується радіусом-вектором

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho}. \quad (11.1)$$

Цій векторній рівності відповідають дві скалярні, які можна одержати, спроектувавши  $\vec{r}$  на осі  $A\xi$  і  $A\eta$ ,

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_O(t) + x \cos \theta - y \sin \theta, \\ \eta(t) &= \eta_O(t) + x \sin \theta + y \cos \theta. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Оскільки плоский рух є окремим випадком просторового руху тіла, то формули для швидкостей і прискорень (хоча у векторному вигляді вони і не змінюються) у скалярній формі запису будуть значно простіші,

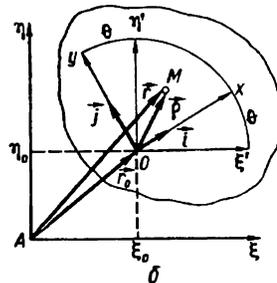


Рис. 11.1

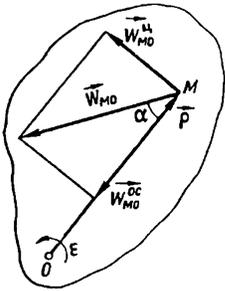


Рис. 11.2

бо за весь час руху  $\omega_x = 0$ ,  $\omega_y = 0$ ,  $\varepsilon_x = 0$ ,  $\varepsilon_y = 0$ ,  $\rho_z = 0$ ,  $\zeta_O = 0$ .

У загальному випадку плоского руху тіла відмінні від нуля ( $\omega_z \neq 0$ ,  $\varepsilon_z \neq 0$ ,  $\rho_x = x \neq 0$ ,  $\rho_y = y \neq 0$ ) і до того ж при плоскому русі завжди  $\vec{\varepsilon}$  і  $\vec{\omega}$  напрямлені по одній лінії. Тоді

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO}, \quad (11.3)$$

$$\vec{w} = \vec{w}_O + \vec{w}_{MO} = \vec{w}_O + \vec{w}_{MO}^{\text{об}} + \vec{w}_{MO}^{\text{у}}.$$

Отже, швидкість будь-якої точки  $M$  плоскої фігури геометрично складається зі швидкості полюса  $O$  і швидкості точки  $M$  при обертанні плоскої фігури навколо полюса  $O$ , яка перпендикулярна до радіуса-вектора  $\vec{r}$  ( $\vec{OM}$ ). Аналогічно, прискорення будь-якої точки  $M$  плоскої фігури геометрично складається з прискорення полюса  $O$  і прискорення  $\vec{w}_{MO}$  точки  $M$  в обертальному русі тіла навколо полюса  $O$ , що складається з доцентрового та обертального прискорень.

Із виразів (11.3) стосовно плоского руху одержимо

$$\begin{aligned} v_x &= v_{Ox} - \omega_z y, & v_y &= v_{Oy} + \omega_z x, \\ v_z &= v_{Oz}, \\ w_x &= w_{Ox} - \varepsilon_z y - \omega_z^2 x, \\ w_y &= w_{Oy} + \varepsilon_z x - \omega_z^2 y, \\ w_z &= w_{Oz}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Оскільки вектори  $\vec{\varepsilon}$  і  $\vec{\omega}$  напрямлені по одній прямій, перпендикулярній до площини, то при плоскому русі

$$w^u = \omega^2 \rho, \quad w^{\text{об}} = \varepsilon \rho. \quad (11.5)$$

Оскільки при плоскому русі  $\vec{w}^u$  і  $\vec{w}^{\text{об}}$  взаємно перпендикулярні (рис. 11.2), то з урахуванням (11.5) дістанемо

$$w_{MO} = \sqrt{(w^u)^2 + (w^{\text{об}})^2} = \rho \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (11.6)$$

При цьому кут  $\alpha$  (рис. 11.2) між радіусом-вектором і вектором прискорення будь-якої точки  $M$  тіла відносно точки  $O$  буде однаковим

$$\text{tg } \alpha = \frac{w^{\text{об}}}{w^u} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (11.7)$$

Зрозуміло, що при плоскому русі також справедливі доведені в § 10.3 дві теореми, з яких стосовно плоского руху випливає наступне:

- 1) вектор кутової швидкості не залежить від вибору полюса на площині;
- 2) проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що проходить через ці точки, рівні між собою.

При плоскому русі вісь обертання перетинає площину руху в точці  $O$ , яку називають центром обертання.

Ми розглянули основні питання кінематики плоского руху. Проте на практиці через надзвичайне поширення плоскопаралельного руху машин, приладів, механізмів і промислових роботів, наведемо деякі додаткові поняття і трактування вже відомих формул у зв'язку з розв'язанням прикладних задач.

## § 11.2. Миттєвий центр швидкостей і способи його знаходження

Миттєвим центром швидкостей називається точка плоскої фігури, швидкість якої в певний момент часу дорівнює нулю.

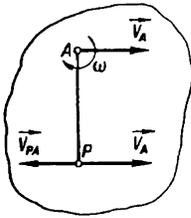


Рис. 11.3

Очевидно, що миттєвий центр швидкостей є точкою перетину миттєвої осі обертання з площиною руху.

Якщо позначити миттєвий центр швидкостей літерою  $P$ , то, за його означенням,  $\vec{v}_P = 0$ .

Розглянемо два способи знаходження миттєвого центра швидкостей.

І. Нехай задано швидкість деякої точки  $A$  плоскої фігури і миттєву кутову швидкість  $\omega$ , з якою плоска фігура обертається навколо полюса  $A$  (рис. 11.3). Потрібно визначити положення миттєвого центра швидкостей (МЦШ)  $P$ . Вибравши точку  $A$  за полюс, згідно з першою формулою (11.3), дістанемо для швидкості точки  $P$   $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}$ , але за означенням МЦШ маємо  $\vec{v}_P = 0$ . Отже,  $\vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = 0$ , звідки  $\vec{v}_A = -\vec{v}_{PA}$ . Очевидно, що  $\vec{v}_A = \omega \cdot AP$ . Звідси

$$AP = \frac{v_A}{\omega}. \quad (11.8)$$

Таким чином, МЦШ розміщений на перпендикулярі, проведеному з початку вектора швидкості точки  $A$  на відстані  $AP$  (рис. 11.3), що визначається за формулою (11.8).

II. Припустимо, що задано швидкості двох точок  $A$  і  $B$  рухомої плоскої фігури, тобто  $\vec{v}_A$  і  $\vec{v}_B$  (рис. 11.4).

Для знаходження миттєвого центра швидкостей потрібно знати лише напрям швидкостей двох точок фігури. Для встановлення картини швидкостей у плоскій фігурі в пев-

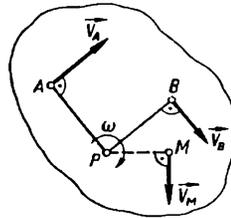


Рис. 11.4

ний момент часу треба знати швидкість однієї точки і напрям швидкості іншої точки плоскої фігури.

Потрібно визначити положення миттєвого центра швидкостей  $P$ . Для цього з початку векторів швидкості зазначених двох точок проводимо перпендикуляри. У точці перетину цих перпендикулярів і є миттєвий центр швидкостей (рис. 11.4). Застосувавши формулу (11.8), дістанемо

$$AP = \frac{v_A}{\omega}, \quad BP = \frac{v_B}{\omega}. \quad (11.9)$$

Звідси

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}. \quad (11.10)$$

Отже, відношення швидкостей двох точок дорівнює відношенню їхніх відстаней від миттєвого центра швидкостей. Формулу (11.10) можна записати інакше:

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \dots = \omega. \quad (11.11)$$

Установленими формулами широко користуються при розв'язуванні задач, у яких треба визначити швидкості точок тіла при плоскопаралельному русі (наприклад, точки  $M$  на рис. 11.4).

**Окремі випадки знаходження миттєвого центра швидкостей.**

1. Якщо швидкості двох точок плоскої фігури напрямлені в один бік і перпендикулярні до відрізка, що їх з'єднує (рис. 11.5, а), то миттєвий центр швидкостей лежить у

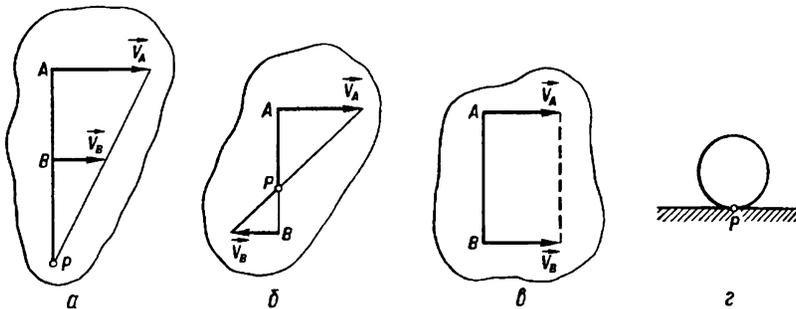


Рис. 11.5

точці перетину зазначеної перпендикулярної прямої з прямою, яка з'єднує кінці векторів швидкостей певних точок.

2. Якщо швидкості двох точок плоскої фігури напрямлені в різні боки і перпендикулярні до відрізка, що з'єднує ці точки, то миттєвий центр швидкостей лежить у точці перетину прямої, яка з'єднує кінці векторів швидкостей з наведеним вище відрізком (рис. 11.5, б).

3. Якщо швидкості двох точок плоскої фігури паралельні та рівні між собою, то миттєвий центр швидкостей віддаляється на нескінченно велику відстань (рис. 11.5, в). У цьому разі відбувається миттєво-поступальний рух тіла.

4. У разі кочення без ковзання рухомого контуру плоскої фігури по нерухомому миттєвий центр швидкостей лежить у точці дотику цих контурів (рис. 11.5, г).

Розглянуті випадки знаходження миттєвого центра швидкостей приводять до такого висновку: *плоска фігура, що рухається в своїй площині, в кожний момент здійснює або миттєво-обертальний, або миттєво-поступальний рух.*

### § 11.3. План швидкостей

У теорії механізмів і машин часто при визначенні швидкостей точок плоскої фігури користуються планом швидкостей.

*План швидкостей* – це графічне зображення векторів швидкостей точок плоскої фігури у фіксований момент часу її руху. Для побудови плану швидкостей треба знати величину і напрям швидкості однієї точки, а також напрям швидкості якої-небудь іншої точки плоскої фігури.

Нехай у деякий момент часу  $t$  задано швидкість точки  $A$  і напрям швидкості точки  $B$  рухомої плоскої фігури (рис. 11.6, а).

Потрібно визначити швидкість точки  $B$ , а також швидкість довільної точки  $C$  цієї фігури у той самий момент часу. Наведемо три способи побудови плану швидкостей.

1. Для визначення швидкості точки  $B$  виберемо полюс у точці  $A$  (рис. 11.6, а), оскільки швидкість цієї точки відома з умови задачі. Формулу (11.3) для визначення швидкості точки  $B$  перепишемо у вигляді

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}. \quad (11.12)$$

Отже, при плоскому русі твердого тіла швидкість будь-якої його точки (точки  $B$ ) визначається як геометрична сума швидкості полюса (точки  $A$ ) і швидкості  $\vec{v}_{BA}$  точки  $B$  в обертальному русі тіла навколо полюса  $A$ .

При цьому швидкість  $\vec{v}_{BA}$  завжди перпендикулярна до відрізка  $BA$ .

Для побудови вектора  $\vec{v}_B$ , згідно з (11.12), вибираємо поза плоскою фігурою довільну

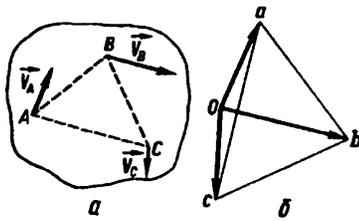


Рис. 11.6

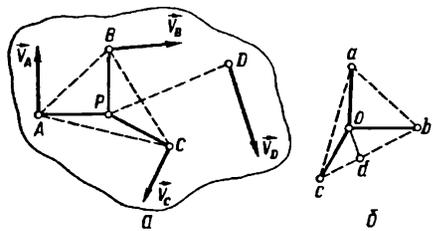


Рис. 11.7

точку – полюс  $O$ , з якої у вибраному масштабі відкладаємо вектор  $\vec{Oa} = k\vec{v}_A$  (рис. 11.6, б), де  $k$  – масштабний коефіцієнт. З кінця цього вектора, тобто з точки  $a$ , проводимо пряму  $ab$ , перпендикулярну до  $AB$  (бо вектор  $\vec{v}_{AB}$  перпендикулярний до  $AB$ ), до перетину її в точці  $b$  з прямою, проведеною з полюса  $O$  паралельно напрямку шуканої швидкості точки  $B$ . Вектор  $\vec{ab} = k\vec{v}_B$  є у вибраному масштабі швидкістю точки  $B$  при обертальному русі тіла навколо точки  $A$ , а вектор  $\vec{Ob} = k\vec{v}_B$ . Отже, швидкість точки  $B$  знайдено.

Переходимо до побудови вектора швидкості  $\vec{v}_C$  точки  $C$ . Запишемо

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}. \quad (11.13)$$

Напрямок вектора  $\vec{v}_{CA}$  знайдемо, якщо через точку  $a$  плану швидкостей проведемо пряму  $ac$ , перпендикулярну до  $AC$ . Щоб знайти положення точки  $C$  на плані швидкостей, виберемо полюс у точці  $B$ , тоді

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}. \quad (11.14)$$

Аналогічно попередньому випадку знайдемо напрям вектора  $\vec{v}_{CB}$ , для чого проведемо через точку  $b$  плану швидкостей пряму  $bc$ , перпендикулярну до  $BC$ . Точка  $c$  плану швидкостей є точкою перетину прямих  $ac$  і  $bc$ , відповідно перпендикулярних до  $AC$  і  $BC$ . Одержана фігура (рис. 11.6, б) і називається *планом швидкостей фігури* в

певний момент часу. Вектори  $\vec{Oa}$ ,  $\vec{Ob}$ ,  $\vec{Oc}$  відповідно дорівнюють у вибраному масштабі швидкостям точок  $A$ ,  $B$ ,  $C$  плоскої фігури. Вектори  $\vec{ab}$ ,  $\vec{ac}$ ,  $\vec{bc}$  відповідно дорівнюють відносним швидкостям точок  $B$  і  $C$  в обертальному русі тіла, наприклад, швидкостям точок  $B$  і  $C$  при обертанні тіла навколо точки  $A$  і точки  $C$  при обертанні тіла навколо  $B$ . Незавжди переконатися, що трикутник  $abc$  плану швидкостей подібний до трикутника  $ABC$  плоскої фігури, але повернутий на кут  $\frac{\pi}{2}$  у бік обертання плоскої фігури. При цьому коефіцієнт подібності значених фігур на плані швидкостей і плоскої фігури дорівнює кутовій швидкості обертання, бо

$$\begin{aligned} v_{BA} &= \omega AB, & v_{BC} &= \omega BC, \\ v_{AC} &= \omega AC, & (11.15) \\ \frac{ab}{AB} &= \frac{bc}{BC} = \frac{ac}{AC} = \omega. \end{aligned}$$

2. Скористаємось поняттям миттєвого центра швидкостей для побудови плану швидкостей.

Нехай, як у попередньому випадку, задана швидкість точки  $A$  і напрям швидкості  $B$  (рис. 11.7, а). Тоді, використовуючи ту властивість плоского руху, що миттєвий центр швидкостей лежить на перпендикулярі до напрямку швидкості, проведемо перпендикуляри в точках  $A$  і  $B$  до відповідних напрямів

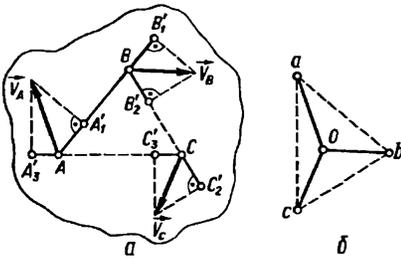


Рис. 11.8

швидкостей. Їх перетин дає точку  $P$ . Скориставшись співвідношенням (11.11), знайдемо

$$\omega = \frac{v_A}{AP}, \text{ тоді } v_B = BP \cdot \omega = \frac{BP}{AP} v_A.$$

З'єднаючи будь-яку точку  $C, D, \dots$  із МЦШ  $P$  і провівши до відповідних відрізків  $PC, PD$  перпендикуляри, знайдемо лінії та напрями швидкостей точок  $C, D$ . Користуючись співвідношенням (11.11), знайдемо величини швидкостей (рис. 11.7, а).

Далі вибираємо на площині довільну точку  $O$  (рис. 11.7, б) і з неї в певному масштабі відкладемо швидкості знайдених точок  $A, B, C, \dots$ , позначаючи їх малими буквами  $a, b, c, \dots$  З'єднаючи між собою точки  $a, b, c, \dots$  пунктирними лініями, визначимо відповідні відносні швидкості.

3. Третій метод побудови плану швидкостей заснований на теоремі Гросгофа про проєкції швидкостей двох точок на відрізок, що їх з'єднує. Пошук швидкостей точок показано на рис. 11.8, а.

Згідно з цією теоремою, якщо швидкість точки  $A$  має проєкцію  $AA'$  на відрізок  $AB$ , то таку саму проєкцію за величиною і напрямом  $BB'$  повинна мати і швидкість точки  $B$ , стосовно якої відомий тільки напрям. Тому, провівши із точки  $B'$  перпендикуляр до прямої  $AB$ , на перетині його з напрямом швидкості точки  $B$  знайдемо величину цієї швидкості.

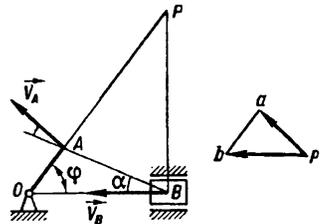


Рис. 11.9

Щоб знайти швидкість точки  $C$ , скористаємось тим, що відповідні проєкції (рис. 11.8, а)  $BB'_2 = CC'_2$  і  $AA'_3 = CC'_3$  однакові. Тоді, провівши перпендикуляри з точки  $C'_2$  до прямої  $BC$ , а з точки  $C'_3$  – до прямої  $AC$ , в точці їх перетину знайдемо швидкість точки  $C$ . Аналогічно діємо для інших точок тіла.

За методикою способу 2 будуємо план швидкостей (рис. 11.8, б).

**Приклад 1.** Кривошип  $OA$  (рис. 11.9) завдовжки 0,4 м обертається з кутовою швидкістю  $\omega = 4 \text{ с}^{-1}$ . Визначити швидкість повзуна  $B$  кривошипно-шатунного механізму в той момент, коли  $\varphi = 45^\circ$ , а  $\alpha = 30^\circ$ . Розв'язання навести декількома способами, включаючи план швидкостей.

**Розв'язання.** Аналізуючи рух кривошипно-шатунного механізму, бачимо, що кривошип  $OA$  обертається навколо нерухомої осі, що проходить через точку  $O$ . Отже, лінійна швидкість точки  $A$  (пальця кривошипа) перпендикулярна до радіуса  $OA$  і  $v_A = \omega OA = 1,6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Повзун  $B$  рухається поступально по прямій  $OB$ , отже, його швидкість напрямлена по  $OB$ , як показано на рисунку. Шатун  $AB$  одночасно бере участь в обертальному русі разом з кривошипом і в поступальному русі разом з повзуном  $B$ .

Для визначення швидкості точки  $B$  шатуна застосуємо методи, викладені в попередніх параграфах.

1. Оскільки швидкість одного кінця незмінного відрізка  $AB$   $\vec{v}_A$  відома, а треба визначити

швидкість іншого кінця відрізка, то за теоремою про рівність проєкцій швидкостей кінців незмінного відрізка на напрям цього відрізка, одержимо

$$v_A \cos 15^\circ = v_B \cos 30^\circ.$$

Звідси

$$v_B = \frac{v_A \cos 15^\circ}{\cos 30^\circ} \approx 1,79 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2. Знайдемо миттєвий центр швидкостей  $P$ , провівши для цього з початку векторів швидкостей  $\vec{v}_A$  і  $\vec{v}_B$ , тобто з точок  $A$  і  $B$ , перпендикуляри до цих швидкостей. Тоді дістанемо

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{BP}{AP}, \quad v_B = \frac{v_A BP}{AP}.$$

Як бачимо з рисунка, при  $\varphi = 45^\circ$   $BP = OB$ ,

$$AP = OP - OA = \frac{OB}{\cos 45^\circ} - 0,4.$$

Отже,

$$v_B = \frac{1,6OB}{\sqrt{2}OB - 0,4} \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

З трикутника  $OAB$  визначимо

$$OB = \frac{OA \sin(45^\circ + 30^\circ)}{\sin 45^\circ} = 0,2(1 + \sqrt{3})\sqrt{2} = 0,77 \text{ м}.$$

Підставивши у вираз для  $v_B$  значення  $OB$ , знайдемо те саме значення  $v_B$ , що і в попередньому випадку.

3. Визначимо швидкість точки  $B$  графічно, побудувавши план швидкостей. Виберемо такий масштаб: 1 см на плані швидкостей показує швидкість, що дорівнює 160 см/с. З довільної точки, наприклад  $p$  (рис. 11.9), відкладемо відрізок  $pa$ , який паралельний  $\vec{v}_A$  і за величиною дорівнює  $v_A$ , отже, у взятому масштабі відкладемо відрізок  $pa = 1$  см. Оскільки за теоремою про розподіл швидкостей у плоскопаралельному русі

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA},$$

де вектор  $\vec{v}_{BA}$  перпендикулярний до  $AB$ , то з кінця вектора  $pa$  проводимо пряму, перпендикулярну до  $AB$ . З полюса  $p$  проводимо пряму, паралельну  $\vec{v}_B$ ,

до перетину з попередньою прямою. Тоді дістанемо точку  $b$ . Промінь  $pb$  визначає швидкість точки  $B$ , тобто  $\vec{pb} = k\vec{v}_B$ . Вимірявши довжину вектора  $\vec{pb}$  у вибраному масштабі, знайдемо числове значення швидкості точки  $B$ . На плані швидкостей  $pab$  сторона  $ab$  є швидкістю точки  $B$  при обертальному русі тіла навколо точки  $A$ , тобто  $\vec{ab} = k\vec{v}_{BA}$ . Якщо б треба було визначити кутову швидкість обертання шатуна, то на основі попереднього

$$\omega = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{ab}{k \cdot AB}.$$

## § 11.4. Центроїди

*Центроїдою називається геометричне місце миттєвих центрів швидкостей.*

При плоскопаралельному русі утворюються дві центроїди, оскільки миттєвий центр швидкостей описує одну криву в нерухомій системі координат  $A\xi\eta$ , а другу – в рухомій  $Oxy$ . Таким чином, нерухома центроїда – це траєкторія миттєвого центра швидкостей на нерухомій площині  $A\xi\eta$ , а рухома – це траєкторія миттєвого центра швидкостей на рухомій площині  $Oxy$ .

Поняття про центроїди широко застосовуються в теорії механізмів і машин при профілюванні зубчатих коліс. Наведемо формулювання теореми Пуансо про кочення рухомої центроїди по нерухомій.

*Теорема. Будь-який неперервний рух плоскої фігури в її площині можна одержати, якщо побудувати рухому і нерухому центроїди, жорстко з'єднати першу з них з площею фігурою і кочити без ковзання рухому центроїду по нерухомій.*

Наприклад, при коченні циліндра по горизонтальній площині (рис. 11.5, з) нерухома центроїда – горизонтальна пряма, а рухома – коло. В кожний момент часу рухома і нерухома центроїди мають загальну точку дотику – миттєвий центр швидкостей  $P$ , тобто точку, швидкість якої дорівнює нулю.

**Приклад 2.** Знайти прискорення точки  $A$  на ободі колеса радіусом  $R = 0,5$  м, що котиться без ковзання по нерухомій рейці зі швидкістю  $v_O = 10$  м/с і прискоренням  $w_O = 1$  м/с<sup>2</sup>, а також визначити вигляд центрід для цього колеса (рис. 11.10).

Розв'язання. Рух колеса є плоскопаралельним. Причому вектор  $\vec{\omega}$  перпендикулярний до вектора швидкості  $\vec{v}_O$  полюса. Миттєва вісь обертання  $PK$  паралельна  $\vec{\omega}$  і проходить через миттєвий центр швидкостей  $P$ . Відповідно до формули (11.3), маємо

$$\vec{w}_A = \vec{w}_O + \vec{w}_{AO}^{ob} + \vec{w}_{AO}^u$$

Прискорення  $\vec{w}_O$  полюса точки  $O$  задано, а  $w_{AO}^{ob} = R\epsilon$ ,  $w_{AO}^u = \omega^2 R$ . Для визначення цих складових прискорень знайдемо  $\omega$  і  $\epsilon$ . Скориставшись (11.11), одержимо

$$\omega = \frac{v_O}{OP} = \frac{v_O}{R} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ с}^{-1}.$$

Здиференціювавши потім  $\omega$  і враховуючи, що  $OP = \text{const}$ , знайдемо

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_O}{OP} \right) = \frac{1}{OP} \frac{dv_O}{dt} = \\ &= \frac{w_O}{OP} = \frac{w_O}{R} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ с}^{-2}. \end{aligned}$$

Підставляючи значення  $\omega$  і  $\epsilon$  у вирази для  $w_{AO}^{ob}$  і  $w_{AO}^u$ , матимемо

$$w_{AO}^{ob} = 0,5 \cdot 2 = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \quad w_{AO}^u = 0,5 \cdot 400 = 200 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

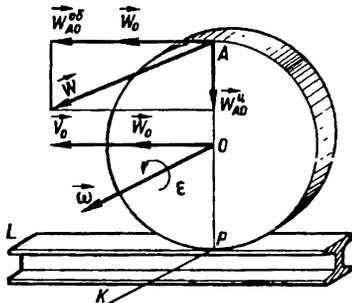


Рис. 11.10

Зобразимо складові вектора прискорення точки  $A$  (рис. 11.10). З рисунка випливає, що модуль  $w_A = \sqrt{(w_{AO}^u)^2 + (w_{AO}^{ob} + w_O)^2} = \sqrt{200^2 + (1+1)^2} \approx 200 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ . Центрідами тут будуть: пряма  $PL$ ,

напрявлена вздовж рейки – нерухома центрід; коло радіусом  $R$  – рухома, бо вона котиться без ковзання по прямій  $PL$ .

## § 11.5. Миттєвий центр прискорень і способи його знаходження

*Миттєвим центром прискорень  $Q$  називається точка плоскої фігури, прискорення якої в певний момент часу дорівнює нулю ( $\vec{w}_Q = 0$ ).*

Розглянемо два способи знаходження миттєвого центра прискорень (МЦП).

1. Аналітичний. Нехай у певний момент часу відоме прискорення  $\vec{w}_O$  будь-якої точки  $O$  плоскої фігури, а також кутова швидкість  $\vec{\omega}$  і кутове прискорення  $\vec{\epsilon}$  твердого тіла. Потрібно визначити положення миттєвого центра прискорень  $Q$ .

Оскільки за означенням  $\vec{w}_Q = 0$ , то, беручи точку  $O$  за полюс, за формулою (11.3) одержимо

$$\vec{w}_Q = \vec{w}_O + \vec{w}_{QO}$$

або

$$0 = \vec{w}_O + \vec{w}_{QO}. \quad (11.16)$$

Звідси  $\vec{w}_O = -\vec{w}_{QO}$ , де  $\vec{w}_{QO}$  – повне прискорення обертального руху навколо полюса  $O$  (рис. 11.11). Отже, за напрямком  $\vec{w}_{QO}$  протилежне  $\vec{w}_O$ , а за модулем, згідно з (11.6),

$$w_{QO} = w_O = OQ\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}. \quad (11.17)$$

На основі цього співвідношення визначимо відстань миттєвого центра прискорень від заданої точки  $O$ :

$$OQ = \frac{w_O}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}}. \quad (11.18)$$

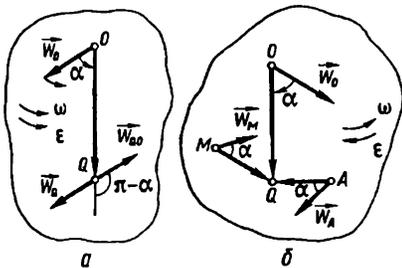


Рис. 11.11

З прискоренням точки  $O$  (тобто з вектором  $\vec{w}_O$ ) вектор  $\vec{OQ}$  утворює кут  $\alpha$ , який визначається за формулою (11.7). Радіус-вектор  $\vec{OQ}$  з вектором прискорення обертального руху  $\vec{w}_{QO}$  утворює кут  $\pi - \alpha$  (рис. 11.11, а).

Таким чином, для визначення положення миттєвого центра прискорень  $Q$  треба прискорення будь-якої точки плоскої фігури, наприклад  $O$ , повернути на кут  $\alpha$  і на одержаній прямій відкласти відрізок, довжина якого визначається за формулою (11.18).

Поворот прискорення  $\vec{w}_O$  навколо заданої точки  $O$  здійснюють у напрямі обертання фігури, якщо обертання її прискорене ( $\epsilon > 0$ ) (рис. 11.11, а), і в протилежному напрямі, якщо обертання сповільнене ( $\epsilon < 0$ ) (рис. 11.11, б).

Отже, в кожний момент часу, за винятком, коли  $\omega = 0$ , існує єдина точка фігури ( $Q$ ), прискорення якої дорівнює нулю; прискорення всіх інших точок такі, як коли б фігура оберталася навколо миттєвого центра прискорень  $Q$ . Тому модулі прискорень двох точок фігури відносяться між собою так, як їхні відстані від миттєвого центра прискорень. Наприклад, для точок  $A$  і  $M$  плоскої фігури (рис. 11.11, б) маємо

$$\frac{|\vec{w}_A|}{|\vec{w}_M|} = \frac{AQ}{MQ}. \quad (11.19)$$

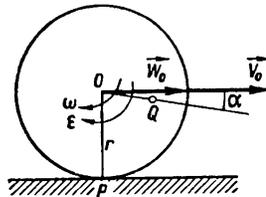


Рис. 11.12

Ці прискорення напрямлені під однаковим для всіх точок плоскої фігури кутом  $\alpha$  до радіусів-векторів, що з'єднують миттєвий центр прискорень з цими точками.

Зазначимо, що миттєвий центр прискорень  $Q$  в загальному випадку руху не збігається з миттєвим центром швидкостей  $P$ .

**Приклад 3.** Знайти положення миттєвого центра прискорень колеса радіусом  $r = 50$  см, що котиться без ковзання по нерухомій рейці зі швидкістю  $v_0 = 2$  м/с і прискоренням  $w_0 = 1$  м/с<sup>2</sup> (рис. 11.12).

Розв'язання. Згідно з умовою задачі за полюс потрібно вибрати центр колеса  $O$ . Тоді для визначення положення миттєвого центра прискорень  $Q$  слід повернути вектор  $\vec{w}_O$  на кут  $\alpha$  у бік обертання, тобто за ходом годинникової стрілки, оскільки тут рух прискорений ( $\epsilon > 0$ ), і відкласти на одержаній прямій відрізок

$$OQ = \frac{w_0}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}}.$$

Таким чином, для остаточного розв'язання задачі потрібно визначити  $\omega$  і  $\epsilon$ . За формулами (11.11) дістанемо

$$\omega = \frac{v_0}{OP} = \frac{v_0}{r}, \quad \epsilon = \frac{dv_0}{dt} = \frac{w_0}{r}.$$

У цьому випадку  $\epsilon > 0$ , бо  $\vec{\omega}$  і  $\vec{\epsilon}$  напрямлені в один бік. З урахуванням заданих значень  $v_0$ ,  $r$ ,  $w_0$ , знайдемо  $\omega = 4$  с<sup>-1</sup>,  $\epsilon = 2$  с<sup>-2</sup>. Тоді  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\epsilon}{\omega^2} = \frac{1}{8}$ ;  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{8}$ ,  $\alpha \approx 7^\circ$ ,  $OQ = \frac{1}{\sqrt{4 + 256}} \approx 0,06$  м = 6 см.

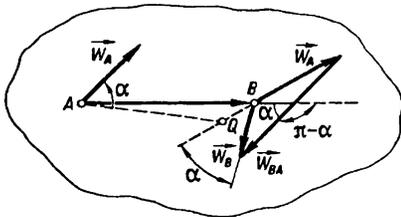


Рис. 11.13

2. Геометричний спосіб знаходження миттєвого центра прискорень ґрунтується на тому, що прискорення будь-яких точок плоскої фігури утворюють у кожний момент часу один і той самий кут  $\alpha$  з відрізками, що з'єднують ці точки з миттєвим центром прискорень.

Покажемо, як можна геометрично знайти миттєвий центр прискорень, якщо відомі прискорення будь-яких двох точок плоскої фігури, наприклад  $A$  і  $B$ . Між прискореннями точок  $A$  і  $B$ , показаними на рис. 11.13, на основі (11.3) існує така залежність:

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{BA},$$

якщо взяти за полюс точку  $A$ . Якщо полюсом є точка  $B$ , то

$$\vec{w}_A = \vec{w}_B + \vec{w}_{BA}.$$

Отже, взявши за полюс точку  $A$ , на основі першого рівняння для  $\vec{w}_{BA}$  знайдемо

$$\vec{w}_{BA} = \vec{w}_B - \vec{w}_A,$$

де  $\vec{w}_{BA}$  – повне прискорення точки  $B$  в обертальному русі її навколо точки  $A$ . Побудувавши у точці  $B$  зазначені вектори, знайдемо  $\vec{w}_{BA}$ , з'єднавши кінці векторів  $\vec{w}_A$  і  $\vec{w}_B$  і спрямувавши  $\vec{w}_{BA}$  у бік зменшеного вектора  $\vec{w}_B$ . Оскільки вектор  $\vec{AB}$  складає з  $\vec{w}_{BA}$  кут  $\pi - \alpha$ , то знайдемо

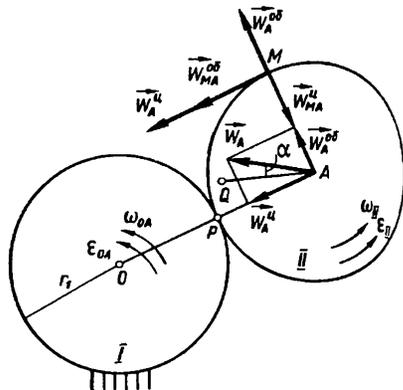


Рис. 11.14

цей кут з креслення, а отже, знайдемо і кут  $\alpha$ . Потім з точок  $A$  і  $B$  до їхніх прискорень проведемо прямі під кутом  $\alpha$  до взаємного перетину. У знайденій точці перетину розташований миттєвий центр прискорень  $Q$ .

**Приклад 4.** Шестірна  $II$  радіусом  $r_2 = 0,1$  м приводиться в рух кривошипом  $OA$ , що обертається навколо осі  $O$  нерухомої шестірни  $I$ . Кривошип  $OA$  обертається з кутовим прискоренням  $\epsilon_{OA} = 8 \text{ см}^{-2}$ , маючи в певний момент часу кутову швидкість  $\omega_{OA} = 2 \text{ с}^{-1}$ . Знайти прискорення точки  $M$  на ободі рухомої шестірни  $II$ , а також положення миттєвого центра прискорень  $Q$ , якщо  $OA = 0,2$  м. Вказати вигляд центроїд шестірни  $II$  (рис. 11.14), якщо відомо, що шестірна  $II$  котиться без ковзання по нерухомій шестірни  $I$ .

**Розв'язання.** Плоский механізм складається з нерухомої шестірни  $I$ , тому швидкості всіх точок на ободі цієї шестірни дорівнюють нулю. Кривошип  $OA$  обертається навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням  $\epsilon_{OA} = 8 \text{ с}^{-2}$  і кутовою швидкістю  $\omega_{OA} = 2 \text{ с}^{-1}$  у певний момент часу. Визначимо швидкість і прискорення точки  $A$ , яка належить кривошипу і колесу  $II$ ,  $v_A = OA \cdot \omega_{OA} = 0,2 \cdot 2 = 0,4 \text{ м/с}$ ,

$$\vec{w}_A = \vec{w}_A^{o6} + \vec{w}_A^u, \quad \text{де} \quad w_A^{o6} = OA \cdot \varepsilon = 0,2 \cdot 8 = 1,6 \text{ м/с}^2, \quad w_A^u = OA \cdot \omega_{OA}^2 = 0,2 \cdot 4 = 0,8 \text{ м/с}^2.$$

Тепер розглянемо рух шестірни *II*. Її рух складається з двох рухів: переносного обертального разом з кривошипом і відносного обертального навколо пальця кривошипа *OA*. Оскільки рух шестірни *II* є плоским, то, враховуючи, що миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці *P*, а  $AP = r_2 = \text{const}$ , дістанемо

$$\omega_{II} = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{r_2} = \frac{0,4}{0,1} = 4 \text{ с}^{-1},$$

$$\varepsilon_{II} = \frac{w_A^{o6}}{r_2} = \frac{1,6}{0,1} = 16 \text{ с}^{-2}.$$

Якщо поліс помістити в точку *A*, то за теоремою про розподіл прискорень у тілі при плоскому русі

$$\vec{w}_M = \vec{w}_A + \vec{w}_{MA}^{o6} + \vec{w}_{MA}^u.$$

Обертальне і доцентрове прискорення точки в її обертанні навколо точки *A* знайдемо за формулами

$$w_{MA}^{o6} = \varepsilon_{II} AM = \varepsilon_{II} r_2 = 16 \cdot 0,1 = 1,6 \text{ м/с}^2,$$

$$w_{MA}^u = AM \omega_{II}^2 = r_2 \omega_{II}^2 = 0,1 \cdot 16 = 1,6 \text{ м/с}^2.$$

Складові вектора прискорень точки *M* показано на рис. 11.14. При цьому модуль прискорення

$$w_M = \sqrt{\left(w_A^u + w_{MA}^{o6}\right)^2 + \left(w_A^{o6} - w_{MA}^u\right)^2} = \sqrt{2,4^2 + 0^2} = 2,4 \text{ м/с}.$$

Оскільки  $w_{AO}^{o6} - w_{MA}^u = 0$ , то прискорення точки *M* напрямлено по дотичній до шестірни *II*, проведений у точці *M*. Положення миттєвого центра прискорень *Q* визначаємо за формулою (11.18)

$$AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon_{II}^2 + \omega_{II}^4}},$$

де

$$w_A = \sqrt{\left(w_A^{o6}\right)^2 + \left(w_A^u\right)^2} = \sqrt{1,6^2 + 0,8^2} = 1,8\sqrt{5} = 1,8 \text{ м/с}^2,$$

$$AQ = \frac{1,8}{\sqrt{16^2 + 16^2}} = \frac{1,8}{16\sqrt{2}} = 0,08 \text{ м},$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{16}{16} = 1, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Точку *Q* показано на рис. 11.14. Центроїдами шестірни *II* є кола радіусом  $r_1$  (нерухома центроїда) і радіусом  $r_2$  (рухома центроїда).

### Питання для самоконтролю

1. Який рух твердого тіла називають плоскопаралельним, або плоским?
2. Скільки степенів вільності має тіло, що рухається плоскопаралельно?
3. Як визначається швидкість будь-якої точки плоскої фігури?
4. Чи однакові поняття  $\vec{w}_{OM}^{o6}$  і  $\vec{w}_{M\tau}$  у випадку плоского руху?
5. У чому відмінність понять нормальне і доцентрове, тангенціальне і обертальне прискорення точки при плоскому русі фігури?
6. Яку точку плоскої фігури називають миттєвим центром швидкостей?
7. Яка точка плоскої фігури називається миттєвим центром прискорень?
8. В яких випадках плоского руху збігаються миттєвий центр швидкостей та миттєвий центр прискорень?
9. Чи зможете Ви довести, що миттєвий центр швидкостей збігається з центром кривини абсолютної траєкторії?
10. Які є способи побудови плану швидкостей плоского руху тіла?

## Розділ 12 СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА (СИНТЕЗ РУХІВ)

У розділі 8 розглядалися найпростіші, або основні, рухи твердого тіла. Однак тверде тіло може одночасно брати участь у кількох рухах (поступальних, обертальних навколо перетинних або паралельних осей, у русі, що складається з поступального та обертального). Цим питанням присвячений даний розділ.

Головним завданням кінематики складного руху твердого тіла є знаходження у кожний момент часу залежностей між кінематичними характеристиками складного руху і складових рухів, які зводяться до встановленого зв'язку між лінійними та кутовими швидкостями. Тобто мова йтиме про синтез миттєвих поступальних і миттєвих обертальних рухів тіл. Випадки, коли рух розглядатиметься на скінченному проміжку часу, обговорюватимуться окремо.

Поняття про абсолютний, відносний і переносний рухи точки, розглянуті у попередньому розділі, можна поширити також на тверде тіло. Обмежимося в основному випадком, коли тверде тіло здійснює рух відносно двох систем координат (систем відліку), що рухаються одна відносно одної.

На закінчення розглянемо у цьому розділі способи задання руху скінченного чис-

ла твердих тіл, зв'язаних певним чином між собою. Це потрібно для вивчення маніпуляційних роботів, гіроскопічних приладів та інших машин і приладів.

### § 12.1. Складання поступальних рухів твердого тіла

*Теорема. При складанні поступальних рухів твердого тіла утворюється результуючий поступальний рух зі швидкістю, що дорівнює векторній сумі швидкостей складових рухів.*

Доведення. Нехай відносний рух твердого тіла  $II$  відносно тіла  $I$  буде поступальним зі швидкістю  $\vec{v}_2$ ; а переносний рух тіла  $I$ , тобто рух рухомої системи координат  $O_1x_1y_1z_1$  щодо нерухомої  $A\xi\eta\zeta$  буде також поступальним зі швидкістю  $\vec{v}_1$  (рис. 12.1).

Тоді абсолютна швидкість точки  $M$  твердого тіла  $II$  за теоремою про складання швидкостей буде

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{v}_1 + \vec{v}_2. \quad (12.1)$$

Оскільки абсолютні швидкості всіх точок тіла рівні між собою в кожний момент часу, то абсолютний рух твердого тіла буде поступальним, що і треба було довести.

Одержану рівність можна узагальнити на випадок складання кількох миттєвих поступальних рухів. Більше того, якщо поступальний рух є на скінченному проміжку часу, то так само просто вирішується питання про складання прискорень.

Оскільки при поступальному русі на скінченному проміжку часу  $[0, t_1]$   $\vec{\omega} = 0$ ,  $\vec{\epsilon} = 0$  і коріолісове прискорення дорівнює нулю, то дістанемо

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i, \quad \vec{w} = \sum_{i=1}^n \vec{w}_i. \quad (12.2)$$

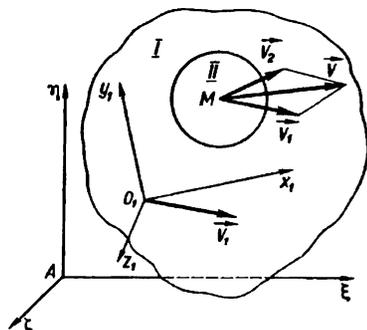


Рис. 12.1

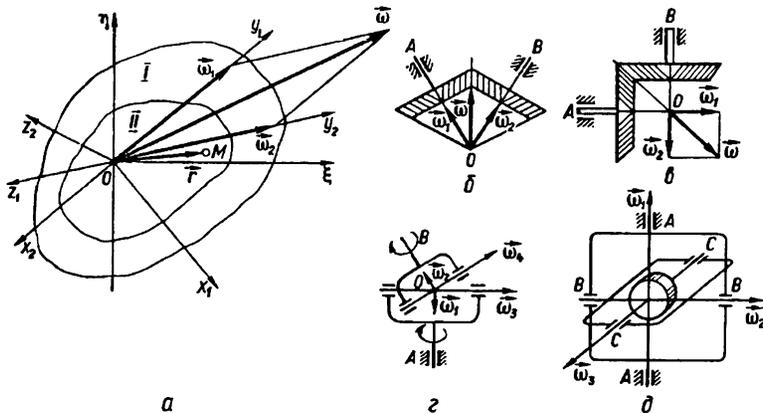


Рис. 12.2

Якщо швидкості всіх точок тіла виявляються рівними між собою лише у визначений момент часу, то рух є миттєво-поступальним. При цьому прискорення точок різні і їх не можна підсумовувати за приведеною формулою (12.2), бо у цьому разі, хоча кутова швидкість  $\vec{\omega}$  і дорівнює нулю, кутове прискорення може відрізнятись від нуля.

## § 12.2. Складання обертань твердого тіла навколо перетинних осей

**Теорема.** При складанні двох миттєвих обертань твердого тіла навколо перетинних осей утворюється результуюче обертання навколо миттєвої осі з кутовою швидкістю, що дорівнює векторній сумі кутових швидкостей складових обертань.

**Доведення.** Нехай тверде тіло II одночасно обертається навколо двох перетинних осей. Навколо осі  $Oy_1$  воно обертається разом з тілом I з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_1$  відносно нерухомої системи координат  $O\xi\eta\zeta$  (рис. 12.2, а). Цей рух є переносним. Навколо осі  $Oy_2$  тіло II обертається відносно

тіла I (системи координат  $Ox_1y_1z_1$ ) з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_2$ , тобто це обертання є відносним. Потрібно знайти рух тіла II відносно нерухомої системи координат  $O\xi\eta\zeta$ . Точка O залишається нерухомою, тому результуючий абсолютний рух тіла II буде сферичним з деякою кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ , яку треба знайти за відомими кутовими швидкостями  $\vec{\omega}_1$  і  $\vec{\omega}_2$  складових обертань.

Знайдемо абсолютну швидкість довільної точки M тіла, задану радіусом-вектором  $\vec{r} = \vec{OM}$ , користуючись формулою (12.1):

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{eM} + \vec{v}_{rM}.$$

Оскільки в кожній із введених систем координат радіус-вектор  $\vec{r}$  спільний, то з попередньої формули дістанемо

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{r} &= \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r} = \\ &= (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Оскільки точка M, а отже, і її радіус-вектор  $\vec{r}$  довільні, то

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \quad (12.4)$$



### § 12.3. Пара обертань. Паралельне перенесення вектора кутової швидкості

Тут  $\vec{\omega}_a$  – абсолютна кутова швидкість шестірни 3;  $\vec{\omega}$  – кутова швидкість вала I;  $\vec{\omega}_3$  – відносна кутова швидкість шестірни 3. Із подібних трикутників  $Oab$  і  $CBO$  (рис. 12.3) маємо

$$\frac{\omega_3}{\omega} = \frac{r_1}{r_3} \quad \text{або} \quad \frac{n_3}{n} = \frac{r_1}{r_3},$$

де  $n_3$  – число обертів за хвилину шестірни 3 у відносному русі;  $n$  – число обертів за хвилину вала I.

Звідси маємо

$$n_3 = \frac{r_1}{r_3} n = \frac{80}{60} \cdot 600 = 800 \text{ об/хв.}$$

Абсолютна кутова швидкість шестірни 3 дорівнює

$$\omega_a = \frac{2\pi n_a}{60} = \frac{\pi}{30} \sqrt{n^2 + n_3^2} \approx 105 \text{ с}^{-1},$$

де  $n_a$  – число обертів за хвилину шестірни 3 в абсолютному русі.

Далі в точці D відбувається зчеплення шестерень 2 і 3, тому швидкості точок шестерень 2 і 3 збігаються зі швидкістю точки D.

Оскільки OC – миттєва вісь обертання, то швидкість точок B і D знайдемо як швидкість обертання точок шестірни 3 відносно цієї осі.

З іншого боку, точка B обертається відносно вала I із кутовою швидкістю  $\omega = \frac{\pi n}{30}$ , тоді лінійна швидкість точки B дорівнює

$$v_B = \omega r_1 = \frac{\pi n}{30} r_1.$$

Очевидно, що швидкість точки D, яка належить шестірни 3, буде  $v_D = 2v_B$ .

Швидкість точки D шестірни 2 дорівнює

$$v_D = \frac{\pi n_2}{30} r_2.$$

Враховуючи, що  $r_1 = r_2$  і прирівнюючи швидкість точки D як швидкості точки дотику шестерень 3 і 2, матимемо

$$n_2 = 2n = 1200 \text{ об/хв.}$$

*Парою обертань* (рис. 12.4, а) називається сукупність двох обертань твердого тіла, що відбуваються відносно паралельних осей  $O_1x_1y_1z_1$  і  $O_2x_2y_2z_2$  з рівними за величиною, але протилежно напрямленими кутовими швидкостями ( $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2$ ).

**Теорема.** *Пара обертань еквівалентна миттєво-поступальному руху зі швидкістю, що дорівнює моменту пари кутових швидкостей.*

**Доведення.** Системи відліку вибираємо так само, як і в попередньому випадку. Нехай тіло I (система координат  $O_1x_1y_1z_1$ ) (рис. 12.4, а) обертається з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_1$ , а тіло II (система координат  $O_2x_2y_2z_2$ ) обертається відносно тіла I навколо паралельної осі з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_2$  і  $\vec{\omega}_2 = -\vec{\omega}_1$ . Знайдемо абсолютну швидкість довільної точки M у тілі II, радіус-вектор якої в системі координат  $O_1x_1y_1z_1$  позначимо  $\vec{r}_1$ , а в  $O_2x_2y_2z_2$  –  $\vec{r}_2$ . Позначимо  $\vec{\rho} = \vec{O_1O_2}$ . Тіло II здійснює складний рух, тоді за теоремою про складання швидкостей маємо

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{eM} + \vec{v}_{rM} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2. \quad (12.6)$$

Враховуючи, що  $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2$ ,  $\vec{v}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1$ ,  $\vec{v}_2 = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2$  і  $\vec{r}_1 = \vec{\rho} + \vec{r}_2$ , одержимо  $\vec{v}_M = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 = \vec{\omega}_1 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}$ , або

$$\vec{v}_M = \vec{\rho} \times \vec{\omega}_2 = \vec{O_1O_2} \times \vec{\omega}_2. \quad (12.7)$$

Із формули (12.7) випливає, що всі точки тіла в певний момент часу мають однакову швидкість, бо вектори  $\vec{\omega}_2$  і  $\vec{O_1O_2}$  не залежать від положення довільної точки M. Таку властивість має миттєво-поступальний рух.

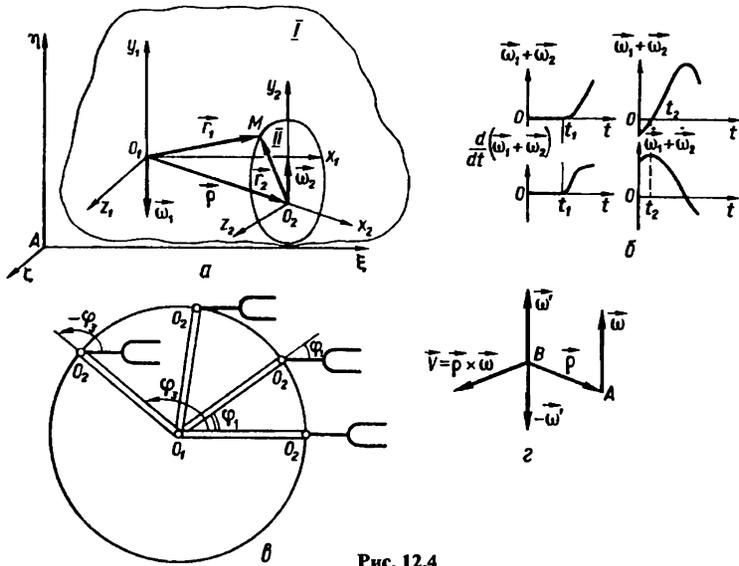


Рис. 12.4

Векторний добуток  $\overline{O_1O_2} \times \vec{\omega}_2$  називають *моментом пари обертань*. Момент пари обертань так само, як і момент пари сил, є вільним вектором, оскільки він не залежить від вибору точки  $M$ . Момент пари обертань зберігає всі властивості моменту пари сил, зазначені в § 2.4.

Очевидно, що сукупність  $n$  пар обертань еквівалентна одній парі, тобто миттєво-поступальному руху.

Покажемо, що коли пара обертань (тобто векторна сума  $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 0$ ) має місце на скінченному проміжку часу, то не тільки швидкості, а й прискорення всіх точок тіла  $\Pi$  на цьому проміжку часу будуть однаковими.

Для цього двічі здиференціюємо за часом співвідношення  $\vec{r}_1 = \vec{\rho} + \vec{r}_2$ , враховуючи, що вектор  $\vec{\rho}$  обертається відносно нерухомої системи координат з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_1$ ,

а  $\vec{r}_2$  – з кутовою швидкістю  $(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)$ .

Отримаємо

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho} + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}_2; \quad (12.8)$$

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_1 \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} + \frac{d(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)}{dt} \times \vec{r}_2 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \frac{d\vec{r}_2}{dt}. \quad (12.9)$$

Незалежно від того, в певний момент часу чи на скінченному проміжку часу розглядаємо рух,  $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 0$ . Проте, якщо ця сума справедлива на скінченному проміжку часу  $[0, t_1]$ , то завжди  $\frac{d(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)}{dt} = 0$  при

$t \in [0, t_1]$  (рис. 12.4, б); якщо  $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 0$  в певний момент часу  $t = t_2$ , то похідна  $\frac{d(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)}{dt}$  може відрізнятись від нуля.

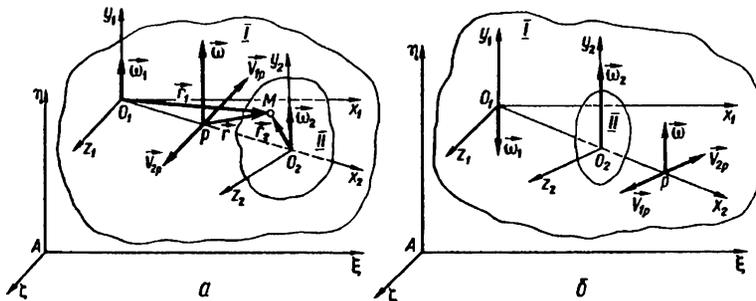


Рис. 12.5

Таким чином, якщо  $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 0$ , то з (12.8) випливає, що завжди  $\vec{v} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}$ , тобто картина розподілу швидкостей буде однакою як для миттєвої пари обертань, так і для пари обертань на скінченному проміжку часу.

У той самий час, якщо врахувати, що  $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ , то вираз (12.9) для прискорення в разі миттєвої пари обертань матиме вигляд

$$\begin{aligned} \vec{w} = & \vec{e}_1 \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}) + \\ & + (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \times \vec{r}_2 \text{ при } t = t_2, \end{aligned} \quad (12.10)$$

а для пари обертань на скінченному проміжку часу

$$\begin{aligned} \vec{w} = & \vec{e}_1 \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \\ & \text{при } t \in [0, t_1]. \end{aligned} \quad (12.11)$$

З останнього виразу видно, що коли пара обертань має місце на скінченному проміжку часу  $[0, t_1]$ , то всі точки тіла  $\Pi$  на цьому проміжку часу матимуть однакові прискорення, бо  $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = 0$ , хоча в загальному випадку  $\vec{e}_1 \neq 0$  і  $\vec{e}_2 \neq 0$  при  $t \in [0, t_1]$ . *Кутові прискорення  $\vec{e}_1$  і  $\vec{e}_2$  також утворюють у цьому випадку пару ( $\vec{e}_1 = -\vec{e}_2$ ).*

Пара обертань досить часто зустрічається на практиці. Наприклад, педаль велосипеда здійснює обернання, що становить пару

обертань. Іншим прикладом реалізації пари обертань є рух кліщів маніпуляційного робота, схему якого наведено на рис. 12.4, в.

Покажемо, як (рис. 12.4, з) можна перенести вектор кутової швидкості паралельно самому собі з однієї точки  $A$  простору в іншу точку  $B$ . Нехай задано вектор кутової швидкості в точці  $A$ . У точці  $B$  приєднаємо еквівалентну нулю сукупність обертань  $(\vec{\omega}', -\vec{\omega}')$  так, що  $|\vec{\omega}| = |\vec{\omega}'|$ . Тоді вектори  $\vec{\omega}$  і  $-\vec{\omega}'$  утворюють пару обертань, яку замінимо вільним вектором – моментом пари  $\vec{v} = \vec{\rho} \times \vec{\omega}$ . У результаті в точці  $B$  залишаться вектори  $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$  і  $\vec{v}$ .

Отже, не змінюючи руху твердого тіла, вектор кутової швидкості його обернання можна перенести паралельно самому собі в будь-яку точку тіла, приєднуючи при цьому відповідний момент пари обертань.

За своїм змістом це твердження аналогічне лемі про паралельне перенесення сили в статичі (§ 3.1).

## § 12.4. Складання обертань навколо паралельних осей

Розглянемо складання обертань тіла  $\Pi$  (рис. 12.5) навколо паралельних осей з різними кутовими швидкостями, напрямленими в один (рис. 12.5, а) або різні (рис. 12.5, б) боки.

**Теорема.** Сукупність двох миттєвих обертань твердого тіла навколо паралельних осей, що не утворюють пару обертань, еквівалентна одному обертанню навколо миттєвої осі з кутовою швидкістю, що дорівнює векторній сумі миттєвих швидкостей складових обертань. При цьому миттєва вісь поділяє внутрішньо або зовнішньо відстань між осями складових обертань на частини, обернено пропорційні модулям кутових швидкостей, залежно від того, в один чи різні боки напрямлені вектори складових обертань.

Доведення цієї теореми ґрунтується на теоремі про складання швидкостей. Якщо зберегти позначення, введені у попередньому параграфі, і позначити через  $\vec{\omega}$  – абсолютну кутову швидкість,  $P$  – миттєвий центр швидкостей,  $\vec{r}_1$  – вектор  $\overline{O_1M}$ , то

$$\begin{aligned}\vec{v}_M &= \vec{v}_{eM} + \vec{v}_{rM} = \\ &= \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2.\end{aligned}\quad (12.12)$$

Враховуючи, що  $\vec{r}_1 = \overline{O_1P} + \vec{r}$ ,  $\vec{r}_2 = \overline{O_2P} + \vec{r}$  і підставляючи ці вирази у формулу для  $\vec{v}_M$ , дістанемо

$$\begin{aligned}\vec{v}_M &= \vec{\omega}_1 \times \overline{O_1P} + \vec{\omega}_2 \times \overline{O_2P} + \\ &+ (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}.\end{aligned}\quad (12.13)$$

Оскільки перші два доданки є абсолютною швидкістю миттєвого центра швидкостей точки  $P$ , яка дорівнює нулю:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}_1 \times \overline{O_1P} + \vec{\omega}_2 \times \overline{O_2P} = 0, \quad (12.14)$$

то остаточно одержимо

$$\vec{v}_M = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (12.15)$$

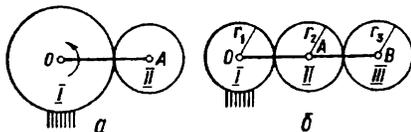


Рис. 12.6

де

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \quad (12.16)$$

Оскільки осі  $O_1y_1$  і  $O_2y_2$  паралельні, то складові швидкості  $\vec{v}_P$  ( $\vec{\omega}_1 \times \overline{O_1P}$ ;  $\vec{\omega}_2 \times \overline{O_2P}$ ) перпендикулярні до площини осей  $Oy_1$  і  $Oy_2$ , тобто тіло у цьому разі здійснює плоский рух. Таким чином, вектори  $\vec{v}_{1P}$  і  $\vec{v}_{2P}$  лежать на одній прямій, але напрямлені у різні боки (рис. 12.5). Звідси випливає рівність значень переносної і відносної швидкостей точки  $P$ , з якої знайдемо

$$\frac{O_1P}{O_2P} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (12.17)$$

Отже, теорему доведено.

Якщо кутові швидкості  $\vec{\omega}_1$  і  $\vec{\omega}_2$  напрямлені в один бік, то  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ , а якщо в різні, то  $\omega = |\omega_1 - \omega_2|$  і напрямлена у бік більшої з кутових швидкостей.

Миттєвий центр швидкостей, так само, як і центр паралельних сил, не змінює свого положення при повороті осей обертання (векторів  $\vec{\omega}_1$  і  $\vec{\omega}_2$ ) на один і той самий кут у просторі, якщо тільки точки їх прикладення  $O_1$  і  $O_2$  залишаються незмінними. Складання обертань навколо паралельних осей реалізується в різних механізмах, але найчастіше в редукторах (рис. 12.6), роботах (рис. 12.4, в) тощо.

## § 12.5. Метод зупинення

При розв'язуванні задач, у яких розглядаються внутрішні або зовнішні зачеплення зубчатих коліс планетарних механізмів, тобто коли відбувається складання обертань навколо паралельних або перетинних осей, зручно користуватися методом зупинення.

Планетарним, або епіциклічним, механізмом називають зачеплення двох або декіль-

кох коліс, із яких одне колесо нерухоме або обертається навколо нерухомої осі, а інші колеса обертаються навколо осей, закріплених на рухомому водилі  $OA$  (рис. 12.6, а, б). Колеса, з'єднані з обертальним водилом, називаються *сателітами* (рис. 12.6, б).

Метод зупинення полягає в тому, що явно надають усій системі такий додатковий миттєвий переносний рух, при якому одна з ланок стає нерухомою у певний момент часу. Ланкою, що "зупиняють", вибирають ту, після зупинення якої інші ланки не здійснюватимуть складного руху, а відбуватиметься обертання навколо нерухомих осей, яке зводиться, таким чином, до простих зовнішніх і внутрішніх зачеплень. Найчастіше такою ланкою є водило ( $OA$  або  $OB$  на рис. 12.6, а, б).

Для зручності складають таблицю значень миттєвих кутових швидкостей усіх ланок механізму до і після зупинення зазначеної ланки. У першому горизонтальному рядку таблиці записують абсолютні кутові швидкості ланок механізму до зупинення, а в другому – відносні кутові швидкості, які одержують після зупинення ведучого колеса. Оскільки переносний рух колесам задається водилом, то його кутова швидкість для колеса є переносною кутовою швидкістю ( $\omega_0$ ). Відносні кутові швидкості одержимо, вилучаючи з абсолютних кутових швидкостей переносну кутову швидкість.

Побудуємо табл. 12.1, наприклад, для механізму, показаного на рис. 12.6, б. Потім знаходимо залежність між відносними кутовими швидкостями кожних двох суміжних коліс. Із одержаних пропорцій визначають шукані абсолютні миттєві кутові швидкості коліс. При цьому слід урахувати, що в разі зовнішнього зачеплення коліс відношення відносних кутових швидкостей *від'ємне*, а у разі внутрішнього зачеплення – *додатне*. Як бачимо з рисунка, зачеплення коліс зовнішнє, тому

$$\frac{\omega_2 - \omega_{OB}}{-\omega_{OB}} = -\frac{r_1}{r_2}, \quad (12.18)$$

$$\frac{\omega_3 - \omega_{OB}}{\omega_2 - \omega_{OB}} = -\frac{r_2}{r_3},$$

звідки можна визначити кутові швидкості другого і третього коліс. Вказані формули для зовнішнього і внутрішнього зачеплень називаються *формулами Вілліса* і широко застосовуються при розрахунку багатьох механізмів.

Таблиця 12.1

Ланки механізму	$OB$	$I$	$II$	$III$
До зупинення	$\omega_{OB}$	0	$\omega_2$	$\omega_3$
Після зупинення	0	$-\omega_{OB}$	$\omega_2 - \omega_{OB}$	$\omega_3 - \omega_{OB}$

Таблиця 12.2

Ланки механізму	$OA$	$I$	$II$	$III$
До зупинення	$-\omega_0$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
Після зупинення	0	$\omega_1 + \omega_0$	$\omega_2 + \omega_0$	$\omega_3 + \omega_0$

**Приклад 2.** В епіциклічному механізмі (рис. 12.7), який застосовується в приводах молотарок, водило  $OA$  і колесо  $I$  радіусом  $r_1$  насаджені на вал  $O$  вільно, вісь  $O_1$  колеса  $II$  закріплена на водилі  $OA$ , а колесо радіусом  $r_3$  може вільно обертатися навколо осі  $O$  (на рис. 12.7 пунктирною лінією позначено рух колеса  $II$  і водила). Знайти кутову швидкість  $\omega_1$  колеса  $I$ , якщо водилу  $OA$  надати кутову швидкість  $\omega_0$ , а колесу

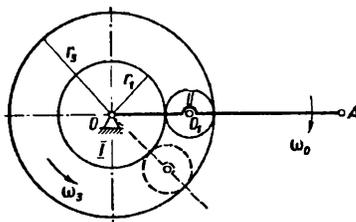


Рис. 12.7

III від іншого привода надати кутову швидкість  $\omega_3$  протилежного напрямку.

Розв'язання. Для розв'язання задачі застосуємо метод зупинення. Цей механізм приводиться у рух водилом. Отже, уявно потрібно зупинити водило. Оскільки водило обертається за ходом годинникової стрілки, то його кутова швидкість від'ємна. Склавши пропорції для кутових швидкостей попарно взятих коліс, одержимо (табл. 12.2):

$$\frac{\omega_1 + \omega_0}{\omega_2 + \omega_0} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\omega_2 + \omega_0}{\omega_3 + \omega_0} = \frac{r_3}{r_2}.$$

Перемноживши ліві і праві частини цих пропорцій, знайдемо

$$\frac{\omega_1 + \omega_0}{\omega_2 + \omega_0} = -\frac{r_3}{r_1},$$

звідки

$$\omega_1 r_1 + \omega_0 r_1 = -\omega_2 r_3 - \omega_0 r_3,$$

$$\omega_1 r_1 = -\omega_0 (r_1 + r_3) - \omega_2 r_3,$$

$$\omega_1 = -\left[ \omega_0 \left( 1 + \frac{r_3}{r_1} \right) + \omega_2 \frac{r_3}{r_1} \right].$$

**Приклад 3.** У планетарному механізмі, розміщеному в горизонтальній площині (рис. 12.8), колесо з віссю  $O$  нерухоме, водило  $OB$  обертається з кутовою швидкістю  $\omega_{OB} = 2 \text{ c}^{-1}$ . Визначити кутову швидкість  $\omega_3$  третього колеса. Радіуси коліс однакові ( $r = 10 \text{ см}$ ).

Розв'язання. Цю задачу розв'яжемо двома способами: методом миттєвих осей і методом зупинення.

1. Цей механізм складається з трьох коліс і водила. Розглянемо рух кожної ланки окремо.

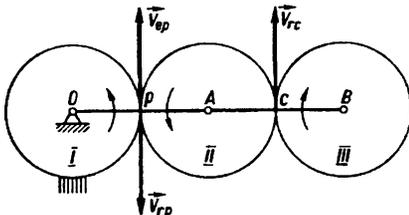


Рис. 12.8

Колесо  $I$  нерухоме, отже, швидкості всіх точок на його ободі дорівнюють нулю. Колесо  $II$  одночасно бере участь у двох обертаннях: навколо паралельних осей, що проходять через точки  $O$  і  $A$ . Миттєва вісь для колеса  $II$  паралельна цим осям і проходить через точку  $P$  – точку дотику колеса  $II$  з колесом  $I$ . Абсолютна швидкість точки  $P$  дорівнює нулю:  $\vec{v}_{cP} = -\vec{v}_{rP}$  (рис. 12.8), бо відносним рухом колеса  $II$  є обертання навколо точки  $A$ , а переносним рухом – обертання навколо точки  $O$  разом з водилом  $OA$ . Із рівності  $\vec{v}_{eP} = -\vec{v}_{rP}$  випливає рівність їхніх модулів  $v_{eP} = v_{rP}$  або  $\omega_e r_1 = \omega_{rII} r_2$ . Переносна кутова швидкість дорівнює кутовій швидкості обертання водила, тобто  $\omega_e = 2 \text{ c}^{-1}$ .

Отже,  $\omega_{rII} = 2 \text{ c}^{-1}$ . Абсолютна кутова швидкість колеса  $II$  буде  $\omega_2 = \omega_e + \omega_{rII} = 4 \text{ c}^{-1}$ . Колесо  $III$  зачеплено з колесом  $II$  (зовнішнє зачеплення) і в точці дотику коліс відносні швидкості однакові. Відносним рухом колеса  $II$  є обертальний навколо точки  $A$ , що лежить на водилі, яке обертається із кутовою швидкістю  $\omega_{OB}$ . Відносним рухом колеса  $III$  є обертальний навколо осі, яка проходить через точку  $B$  водила  $OB$ . Для точки  $C$  маємо  $v_{rIII} = v_{rIII} = v_{rC}$  або  $\omega_{rII} r_2 = \omega_{rIII} r_3$ , але  $r_2 = r_3$ . Отже,  $\omega_{rII} = \omega_{rIII}$ . Як бачимо з рис. 12.8, колесо  $III$  обертається навколо точки  $B$  за ходом годинникової стрілки. Тому

$$\omega_{rIII} = -2 \text{ c}^{-1}.$$

Таким чином, колесо  $III$  здійснює переносний рух – обертання навколо точки  $O$  проти ходу годинникової стрілки ( $\omega_e = 2 \text{ c}^{-1}$ ), а відносний рух – обертання навколо точки  $B$  за ходом годинникової стрілки ( $\omega_{rIII} = -2 \text{ c}^{-1}$ ). Отже, для колеса  $III$  має місце пара обертань. Відповідно до теореми про пару обертань, викладеної в § 12.3, абсолютна кутова швидкість колеса  $III$  дорівнює нулю ( $\omega_3 = 0$ ). Пара обертань еквівалентна миттєво-поступальному руху зі швидкістю, яка дорівнює моменту пари кутових швидкостей складових обертань, тобто

$$v = OB \cdot \omega_{OB} = 4r \omega_{OB} = 40 \cdot 2 = 80 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Як бачимо з наведеного розв'язування, метод миттєвих осей децю громіздкий. Значно простіше розв'язувати цю задачу за методом зупинення.

2. Застосуємо метод зупинення і складемо табл. 12.3. Механізм приводиться в рух водилом  $OB$ , тому уявно його зупинимо.

Таблиця 12.3

Ланки механізму	$OB$	$I$	$II$	$III$
До зупинення	2	0	$\omega_2$	$\omega_3$
Після зупинення	0	-2	$\omega_2 - 2$	$\omega_3 - 2$

Зачеплення коліс зовнішнє, тому відношення відносних кутових швидкостей буде від'ємною величиною:

$$\frac{-2}{\omega_2 - 2} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\omega_2 - 2}{\omega_3 - 2} = -\frac{r_3}{r_2}.$$

Помноживши ці пропорції, дістанемо  $\frac{-2}{\omega_3 - 2} = \frac{r_3}{r_1}$

або  $\frac{-2}{\omega_3 - 2} = 1, \quad -2 = \omega_3 - 2.$  Звідси  $\omega_3 = 0.$

Отже, для колеса  $III$  має місце пара обертань, еквівалентна миттєво-поступальному руху зі швидкістю  $v = v_B = OB \cdot \omega_{OB} = 80 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ . Як бачимо, одержано той самий результат, але коротшим шляхом.

### § 12.6. Складання миттєво-поступального і миттєво-обертального рухів твердого тіла. Кінематичний гвинт

При складанні миттєво-поступального і миттєво-обертального рухів можуть бути такі випадки: 1) коли швидкість поступального руху  $\vec{v}_0$  перпендикулярна до осі обертання тіла ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ); 2) коли швидкість поступального руху з віссю обертання тіла утворює кут, відмінний від прямого ( $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ ).

*Теорема.* В результаті складання миттєво-поступального і миттєво-обертального

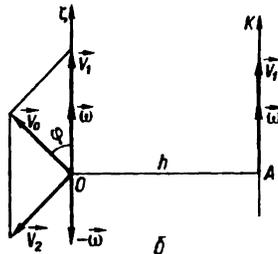
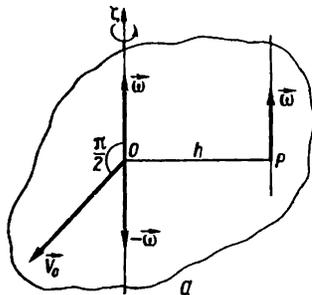


Рис. 12.9

рухів твердого тіла, коли швидкість поступального руху тіла перпендикулярна до кутової швидкості його обертального руху, утворюється миттєво-обертальний рух навколо миттєвої осі, паралельної осі заданого обертання, з тією самою кутовою швидкістю. Миттєва вісь знаходиться від цієї осі обертання на відстані (рис. 12.9, а)

$$h = \frac{v_0}{\omega}. \quad (12.19)$$

Доведення. Нехай тверде тіло обертається в певний момент часу з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  навколо осі  $Oz$ , яка рухається поступально зі швидкістю  $\vec{v}_0$ , перпендикулярною до вектора кутової швидкості  $\vec{\omega}$  ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ).

Точка  $O$ , яку назвемо полюсом, розміщена на осі  $Oz$  відносного обертання. Оскільки миттєво-поступальний рух еквівалентний парі

обертань (§ 12.3) з моментом, що дорівнює швидкості  $\vec{v}_0$ , то замінімо  $\vec{v}_0$  парюю куткових швидкостей  $(\vec{\omega}, -\vec{\omega})$ , розміщених у площині, перпендикулярній до  $\vec{v}_0$  (рис. 12.9, а).

Плече пари куткових швидкостей  $h = \frac{v_0}{\omega}$ .

У точці  $O$  векторна сума  $\vec{\omega}$  і  $-\vec{\omega}$  дорівнює нулю. Через точку  $P$  пройде миттєва вісь, що паралельна осі  $O\zeta$  і по якій буде напрямлена кутова швидкість, яка дорівнює  $\vec{\omega}$ .

Теорема доведена.

**Теорема.** В результаті складання миттєво-поступального і миттєво-обертального рухів, коли швидкість поступального руху  $\vec{v}_0$  не перпендикулярна до кутової швидкості  $\vec{\omega}$  руху тіла, утвориться миттєво-гвинтовий рух, або кінематичний гвинт.

Кінематичним гвинтом називається сукупність руху тіла з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  навколо миттєвої осі  $AK$  і миттєво-поступального руху вздовж цієї самої осі  $AK$  (рис. 12.9, б) зі швидкістю, що дорівнює проекції швидкості полюса  $O$  ( $\vec{v}_0$ ) на напрям вектора  $\vec{\omega}$ . Вісь  $AK$  називається миттєвою гвинтовою віссю.

Доведення. Нехай швидкість  $\vec{v}_0$  поступального руху твердого тіла напрямлена під кутом  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$  до осі обертання тіла  $O\zeta$ , тобто до  $\vec{\omega}$ . Розкладемо поступальний рух тіла зі швидкістю  $\vec{v}_0$  на два поступальні рухи зі швидкістю  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$ . Вектор  $\vec{v}_1$  напрямлений уздовж  $\vec{\omega}$ , а  $\vec{v}_2$  перпендикулярний до  $\vec{\omega}$  (рис. 12.9, б). Швидкість  $\vec{v}_2$  замінімо парюю куткових швидкостей  $(\vec{\omega}, -\vec{\omega})$  з плечем  $h = \frac{v_2}{\omega}$  (рис. 12.9, б). Векторна сума

$\vec{\omega}$  і  $-\vec{\omega}$  у точці  $O$  дорівнює нулю. Залишається вектор  $\vec{\omega}$ , прикладений у точці  $A$ , і

швидкість поступального руху  $\vec{v}_1$ . Оскільки при поступальному русі швидкості всіх точок твердого тіла рівні між собою, то  $\vec{v}_A = \vec{v}_1$ . Таким чином, у точці  $A$  вздовж осі  $AK$  розміщені вектори  $\vec{\omega}$  і  $\vec{v}_1$ , що утворюють кінематичний гвинт.

Гвинтовий рух реалізується в техніці в усіх нарізних з'єднаннях, у шнекових транспортерах, при просторовому русі роботів-маніпуляторів, літаків, що рухаються в штопорі, тощо.

## § 12.7. Аксиоїди при синтезі рухів

Як уже зазначалося в § 10.5, аксоїдом називається геометричне місце миттєвих осей обертання. Розрізняють рухомі та нерухомі аксоїди. Нерухомим аксоїдом називається геометричне місце миттєвих осей обертання, побудованих у нерухомій системі координат  $A\xi\eta\zeta$ . Рухомим аксоїдом називається геометричне місце миттєвих осей обертання, побудованих у рухомій системі координат  $Oxyz$ . Очевидно, що розглянуті нами у разі плоского руху центроїди є окремим випадком аксоїдів.

Для кожного випадку складного руху твердого тіла, розглянутого в цьому розділі, встановимо види аксоїдів.

1. Тверде тіло одночасно бере участь в обертальних рухах відносно двох перетинних осей  $Oy_1$  і  $Oy_2$  у разі обертання в різних напрямках (рис. 12.10, а) і в одному (рис. 12.10, б). У цих випадках аксоїдами є конічні поверхні, що торкаються одна одної вздовж миттєвої осі  $OP$ , тобто вздовж твірних конусів. Віссю нерухомого аксоїда є вісь  $Oy_1$ , навколо якої тверде тіло здійснює переносний обертальний рух, а віссю рухомого аксоїда – вісь  $Oy_2$ , навколо якої здійснюється відносний обертальний рух (рис. 12.10, а, б).

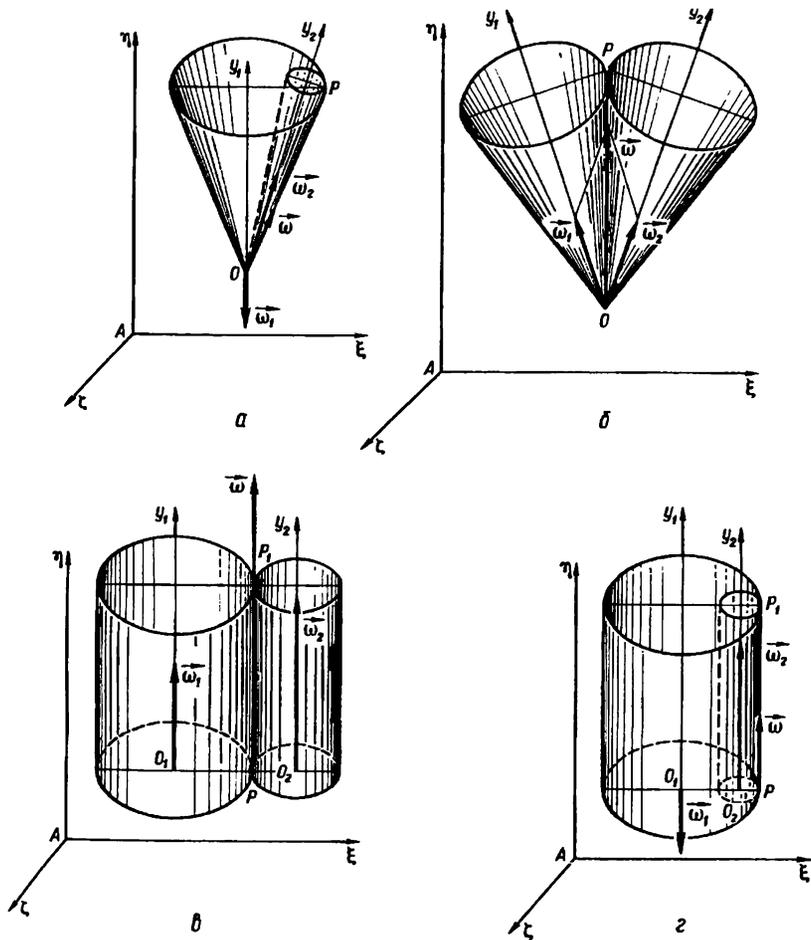


Рис. 12.10

Зазначимо, що різним моментам часу відповідають різні положення миттєвих осей.

2. Тверде тіло здійснює складний рух, що складається з двох обертань навколо паралельних осей  $O_1y_1$  і  $O_2y_2$  в одному (рис. 12.10, в) або в різних напрямках (рис. 12.10, з). При

цьому аксоїдами є циліндричні поверхні (рис. 12.10, в, з), що торкаються одна одної вздовж миттєвої осі  $PP_1$  відповідно зовнішнім або внутрішнім способом.

3. Якщо рух твердого тіла складається з поступального руху з деякою швидкістю  $\vec{v}_0$

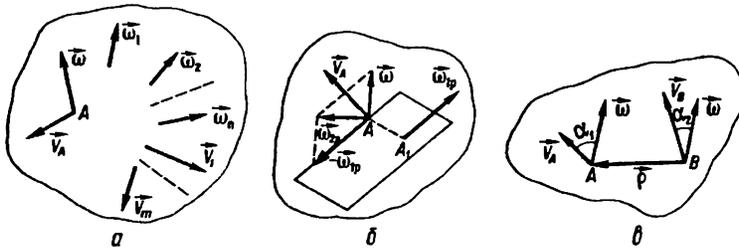


Рис. 12.11

і обертального руху навколо осі, що проходить через точку  $O$  з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ , не перпендикулярною до швидкості поступального руху, то відбувається миттєво-гвинтовий рух. Різним моментам часу відповідають миттєві гвинтові осі. Іншими словами, миттєва гвинтова вісь змінює своє положення з плином часу в нерухомому просторі, а також у рухомому твердому тілі. Нерухомим аксоїдом миттєвих гвинтових осей називають лінійчату поверхню, описану миттєвою гвинтовою віссю відносно нерухомої системи координат. Рухомим аксоїдом миттєвих гвинтових осей називають лінійчату поверхню, описану миттєвою гвинтовою віссю у рухомій системі координат, незмінно зв'язаною з тілом.

Для перших двох випадків (рис. 12.10, а, б) рухомий аксоїд котиться без ковзання по нерухомому, торкаючись його вздовж миттєвої осі. У зв'язку з тим, що поняття кочення тіл без ковзання досить часто зустрічається, уточнимо його.

Коченням без ковзання називається взаємний рух двох абсолютно твердих тіл, що є в контакті, при якому виконуються такі умови: 1) відносна швидкість точок контакту поверхонь тіла дорівнює нулю; 2) поверхні тіл геометрично торкаються в точках контакту. Для абсолютно твердих тіл перша умова визначає відсутність ковзання, друга – є висновком недеформованого абсолютно твердого тіла і властивості непроникності

тіла. Виконання цих умов про кочення рухомого аксоїда по нерухомому без ковзання є очевидним. Дійсно, в кожний момент часу точки дотику поверхонь аксоїдів розміщені на миттєвій осі обертання, тому швидкості точок контакту, розміщених на рухомому аксоїді, дорівнюють нулю.

### § 12.8. Загальний випадок складання рухів твердого тіла. Кінематичні інваріанти. Аналогії між статикою та кінематикою

Розглянемо найбільш загальний випадок, коли тверде тіло бере участь в  $n$  обертальних і  $m$  поступальних рухах (рис. 12.11). Уже наголошувалося на тому, що вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$  тіла, як і вектор сили, є ковзним, а лінійна швидкість будь-якої точки може бути подана як момент пари обертань і, так само як і момент пари, є вільним вектором. У § 12.3 наводилося правило паралельного перенесення вектора кутової швидкості з однієї точки в іншу, яке аналогічне відповідній лемі про паралельне перенесення вектора сили (§ 3.1).

За аналогією з головним вектором і головним моментом сил (пар сил) у статичі, в кінематиці результуючу кутову швидкість можна назвати головним вектором обертань, а результуючу швидкість поступального руху тіла – головним моментом кутових швидкостей (головним моментом пар обертань). Тому в цьому найбільш загально-

му випадку складання рухів має місце теорема, аналогічна основній теорії статички.

**Теорема.** Сукупність одночасних  $n$  миттєвих обертальних і  $m$  поступальних рухів твердого тіла еквівалентна сукупності двох результуючих рухів, якими можуть бути:

а) або сукупність одного результуючого обертання з миттєвою кутовою швидкістю, що дорівнює векторній сумі (головному вектору) складових кутових швидкостей

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \dots + \vec{\omega}_n = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i, \quad (12.20)$$

і одного результуючого миттєво-поступального руху зі швидкістю  $\vec{v}_A$ , яка дорівнює векторним сумам моментів кутових швидкостей  $\vec{\omega}_i$  відносно центра зведення (головному моменту) і швидкостей заданих поступальних рухів (головному моменту пар обертань)

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{M}_A(\vec{\omega}_1) + \dots + \vec{M}_A(\vec{\omega}_n) + \\ &+ \vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_m = \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{M}_A(\vec{\omega}_i) + \sum_{j=1}^m \vec{v}_j; \quad (12.21) \end{aligned}$$

б) або сукупність двох результуючих миттєвих обертальних рухів  $\vec{\omega}_{1P}$  і  $\vec{\omega}_{2P}$ , що відбуваються відносно мимобіжних осей, одна з яких проходить через центр зведення  $A$ , а інша – через точку  $A_1$  в тілі, положення якої визначається векторами  $\vec{v}_A$  і  $\vec{\omega}$ .

Доведення цієї теореми з урахуванням наведених аналогій між статикою і кінематикою досить просте. Виберемо центр зведення в точці  $A$  (рис. 12.11, а). Враховуючи, що вектори миттєвих кутових швидкостей  $\vec{\omega}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) є ковзними векторами, і керуючись правилом їх паралельного перенесення (§ 12.3) в центр зведення  $A$ , одержимо сукупність головного вектора обертань  $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i$  і головного моменту кутових

швидкостей  $\vec{\omega}_i$  відносно центра зведення  $A$

$$\vec{v}'_A = \sum_{i=1}^n \vec{M}_A(\vec{\omega}_i).$$

Вектори швидкостей  $\vec{v}_j$  ( $j=1, \dots, m$ ) поступальних рухів є вільними векторами, тому, паралельно перенісши їх у точку  $A$  і склавши, одержимо  $\vec{v}''_A = \sum_{j=1}^m \vec{v}_j$ . Складаючи вектори ( $\vec{v}'_A + \vec{v}''_A$ ), знайдемо швидкість результуючого поступального руху

$$\vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{v}''_A = \sum_{i=1}^n \vec{M}_A(\vec{\omega}_i) + \sum_{j=1}^m \vec{v}_j, \quad (12.22)$$

що й треба було довести.

Друге формулювання цієї теореми доводиться так само, як і друге формулювання основної теореми статички. Нехай у точці  $A$  (рис. 12.11, б) задано  $\vec{\omega}$  і  $\vec{v}_A$ . У площині, перпендикулярній до  $\vec{v}_A$ , замінимо вектор  $\vec{v}_A$  парою обертань  $\vec{\omega}_{1P}$  і  $-\vec{\omega}_{1P}$ . Далі вектори  $-\vec{\omega}_{1P}$  і  $\vec{\omega}$  замінимо вектором  $\vec{\omega}_{2P}$ , який не перетинається з вектором  $\vec{\omega}_{1P}$  і не є паралельним йому. Таким чином, вихідна система векторів еквівалентна двом векторам миттєвих кутових швидкостей  $\vec{\omega}_{1P}$  і  $\vec{\omega}_{2P}$ , які не перетинаються і не є паралельними, тобто відповідні їм осі обертання є мимобіжними прямими. При цьому одна з осей проходить через точку  $A$ .

Розвиваючи далі аналогію між статикою і кінематикою, позначимо два кінематичні інваріанти, тобто дві величини, які не залежать від вибору центра зведення.

Очевидно, що першим кінематичним інваріантом є головний вектор обертань

$$I_1 = \vec{\omega} = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i.$$

Ми довели, по суті, це твердження не за аналогією зі статикою, а у вигляді теореми про незалежність вектора кутової швидкості  $\vec{\omega}$  від вибору полюса

(див. § 10.3). Покажемо, що другим кінематичним інваріантом є скалярний добуток головного моменту (вектора результуючої швидкості  $\vec{v}$ ) на головний вектор обертань  $\vec{\omega}$ , тобто

$$I_2 = \vec{v}_B \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_A \cdot \vec{\omega} = \vec{v} \cdot \vec{\omega}, \quad (12.23)$$

де  $A$  і  $B$  – різні центри зведення (рис. 12.11, е).

Насправді, за формулою про зв'язок головного моменту при переході до нового центра або за формулою складання швидкостей із кінематики масо (рис. 12.11, е)

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\rho} \times \vec{\omega}. \quad (12.24)$$

Звідси

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\rho} \times \vec{\omega}. \quad (12.25)$$

Помноживши скалярно ліву і праву частини останнього рівняння на  $\vec{\omega}$  і враховуючи, що вектор  $\vec{\omega}$  перпендикулярний до вектора  $(\vec{\rho} \times \vec{\omega})$ , тобто  $\vec{\omega}(\vec{\rho} \times \vec{\omega}) = 0$ , одержимо  $\vec{v}_B \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_A \cdot \vec{\omega}$  – тотожність (12.23).

Зазначимо, що з формули (12.23) для другого інваріанта випливає, що проекція швидкості тіла на напрям кутової швидкості тіла не залежить від вибору точки (рис. 12.11, е). Дійсно,  $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_B \cdot \vec{\omega}$  або  $v_A \omega \cos \alpha_1 = v_B \omega \cos \alpha_2$ . Звідси

$$v_A \cos \alpha_1 = v_B \cos \alpha_2.$$

Очевидно, що так само, як і в статичі (§ 5.4), можна було б розглянути окремі випадки зведення просторового руху твердого тіла до найпростішого вигляду і побудувати відповідну таблицю.

Якщо другий кінематичний інваріант відрізняється від нуля ( $I_2 = \vec{v} \cdot \vec{\omega} \neq 0$ ), то в цьому разі масо кінематичний гвинт. Таким чином, у найбільш загальному випадку руху швидкості точок твердого тіла розподіляються так, немовби тіло здійснило миттєво-гвинтовий рух. Отже, *миттєво-гвинтовий рух твердого тіла є найбільш загальним його рухом*. Миттєва гвинтова вісь (вісь кінематичного гвинта) визначається за умови, що

в деякій точці  $P$  головний момент і головний вектор лежать на одній прямій, тобто

$$\vec{v}_P = k \vec{\omega} \quad (k = \text{const}). \quad (12.26)$$

Систематизуємо наведені аналогії між статикою і кінематикою у вигляді табл. 12.4.

Таблиця 12.4

Статика	Кінематика
Сила $\vec{F}$ , прикладена до твердого тіла, – ковзний вектор (§ 1.5)	Кутова швидкість $\vec{\omega}$ – ковзний вектор (§ 10.3)
Момент пари сил $\vec{M}(\vec{F}, -\vec{F})$ – вільний вектор $\vec{M} = \vec{\rho} \times \vec{F}$ (§ 2.4)	Момент пари обертань або швидкість миттєво-поступального руху $\vec{v}(\vec{\omega}, -\vec{\omega})$ – вільний вектор $\vec{v} = \vec{\rho} \times \vec{\omega}$ (§ 12.3)
Головний вектор і головний момент сил $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ , $\vec{M}_A = \sum_{i=1}^n \vec{M}_A(\vec{F}_i)$ (§ 3.2)	Головний вектор і головний момент обертань $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i$ ; $\vec{v}_A = \sum_{i=1}^n \vec{M}_A(\vec{\omega}_i)$ (§ 12.8)
Лема про паралельне перенесення сил $\vec{F}$ (§ 3.1)	Правло про паралельне перенесення вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ (§ 12.3)
Аксиома про паралелограм сил (§ 1.3)	Складання обертань твердого тіла навколо перетинних осей (§ 12.2)
Складання паралельних сил. Центр паралельних сил (§ 3.4, 6.1)	Складання обертань тіла навколо паралельних осей Миттєвий центр швидкостей (§ 12.4)
Теорема про зведення системи сил до динамічного гвинта (§ 5.3)	Складання поступального та обертального рухів твердого тіла. Кінематичний гвинт (§ 12.6)
Статичні інваріанти. Зведення просторової системи сил до найпростішого вигляду (§ 5.2, 5.4)	Кінематичні інваріанти. Зведення просторового руху тіла до найпростіших рухів (§ 12.8)
Основна теорема статичі (теорема Пуансо) (§ 3.2)	Теорема про складання скінченного числа обертальних і поступальних рухів твердого тіла (§ 12.8)
Обчислення головного моменту при зміні центра зведення $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{\rho} \times \vec{F}$ (§ 5.1)	Теорема про складання швидкостей $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\rho} \times \vec{\omega}$ або $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ (§ 10.3)

**§ 12.9. Задання положення у просторі скінченного числа зв'язаних твердих тіл. Одиорідні координати**

Ми вже розглянули у векторному вигляді складання швидкостей сукупності обертальних і поступальних рухів твердого тіла. Покажемо, як аналітично задати положення та описати рух кожного тіла із сукупності зв'язаних тіл. З таким завданням доводиться зустрічатися на практиці при описанні складних систем, таких як маніпуляційні роботи, гіроскопічні прилади та інші машини і прилади.

Введемо нерухому (або опорну) систему координат  $A\xi\eta\zeta$  (рис. 12.12). З кожним тілом жорстко зв'яжемо систему координат  $O_k x_k y_k z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Радіус-вектор точки  $O_k$  початку  $k$ -ї системи координат в  $(k-1)$ -й системі координат позначимо через  $\vec{r}_{Ok}$  (за винятком випадку  $k=1$ ).

Радіус-вектор початку цієї системи координат у нерухомій системі координат позначимо через  $\vec{r}_{O1}$ . Радіус-вектор довільної точки  $M_k$ , що належить  $k$ -му тілу, в рухомій системі координат, зв'язаної з цим тілом, позначимо через  $\vec{r}_k$ , а в нерухомій –  $\vec{r}_{Mk}$ . Випишемо ряд явних співвідношень (рис. 12.12):

$$\begin{aligned} \vec{r}_{O2} &= \vec{r}_{O1} + \vec{r}_{O2}, & \vec{r}_{M1} &= \vec{r}_{O1} + \vec{r}_1, \\ \vec{r}_{M2} &= \vec{r}_{O2} + \vec{r}_2 = \vec{r}_{O1} + \vec{r}_{O2} + \vec{r}_2, & (12.27) \\ \vec{r}_{Mk} &= \vec{r}_{Ok} + \vec{r}_k. \end{aligned}$$

Відповідно до формул (10.6), (10.9) і (12.27), координати  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  точки  $M_1$ , для якої  $\vec{r}_1 = \vec{i}_1 x_1 + \vec{j}_1 y_1 + \vec{k}_1 z_1$ , в системі координат  $A\xi\eta\zeta$  мають вигляд

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 a_{11}^{(1)} + y_1 a_{12}^{(1)} + z_1 a_{13}^{(1)} + \xi_{O1}, \\ \eta_1 &= x_1 a_{21}^{(1)} + y_1 a_{22}^{(1)} + z_1 a_{23}^{(1)} + \eta_{O1}, & (12.28) \\ \zeta_1 &= x_1 a_{31}^{(1)} + y_1 a_{32}^{(1)} + z_1 a_{33}^{(1)} + \zeta_{O1}. \end{aligned}$$

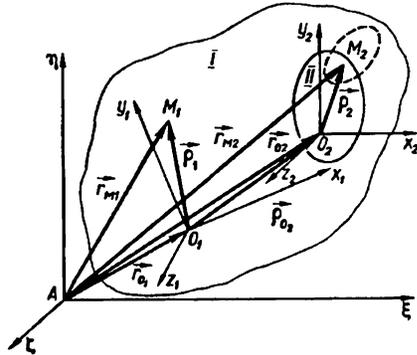


Рис. 12.12

Тут індекс (1) у напрямних косинусів показує належність їх до осей системи координат  $O_1 x_1 y_1 z_1$ . Аналогічно при визначенні координат точки  $M_k$  тіла в системі координат  $O_{k-1} x_{k-1} y_{k-1} z_{k-1}$

$$\begin{aligned} x_{k-1} &= x_k a_{11}^{(k)} + y_k a_{12}^{(k)} + z_k a_{13}^{(k)} + x_{Ok}, \\ y_{k-1} &= x_k a_{21}^{(k)} + y_k a_{22}^{(k)} + z_k a_{23}^{(k)} + y_{Ok}, & (12.29) \\ z_{k-1} &= x_k a_{31}^{(k)} + y_k a_{32}^{(k)} + z_k a_{33}^{(k)} + z_{Ok}. \end{aligned}$$

Як бачимо, наведена форма запису громіздка і не дає змоги застосувати більш компактну матричну форму запису, як це було зроблено в § 10.1 для випадку тіла з нерухомою точкою.

Завдання можна спростити, якщо формально до системи рівнянь (12.29) додати тотожність  $1 = 1$ , тоді їх можна записати в матричній формі

$$\begin{bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \\ z_{k-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} & x_{Ok} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} & y_{Ok} \\ a_{31}^{(k)} & a_{32}^{(k)} & a_{33}^{(k)} & z_{Ok} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (12.30)$$

Якщо одержану таким чином квадратну матрицю  $4 \times 4$  розбити на чотири блоки, то рівняння (12.30) перепишемо у вигляді

$$\begin{bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \\ z_{k-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B}_k & \bar{R}_{Ok} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (12.31)$$

Введена нами матриця  $\bar{B}_k$  – матриця повороту осей координат  $O_k x_k y_k z_k$  відносно осей  $O_{k-1} x_{k-1} y_{k-1} z_{k-1}$ ;  $\bar{R}_{Ok} = [x_{Ok}, y_{Ok}, z_{Ok}]^T$  – відповідна матриця перенесення.

Якщо матрицю  $4 \times 4$  позначити  $\bar{D}_k$ , то вираз (12.30) набере компактного вигляду

$$\begin{bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \\ z_{k-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{D}_k \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (12.32)$$

Скориставшись правилом перемноження матриць, як ми це робили в § 10.2, проєкції координат точки  $M_k$  на осі нерухомої системи координат визначаємо з рівняння

$$\begin{bmatrix} \xi_k \\ \eta_k \\ \zeta_k \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{D}_1 \bar{D}_2 \dots \bar{D}_k \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (12.33)$$

Зрозуміло, що тепер неважко вписати проєкції координат точки  $M_k$  на осі будь-якої іншої системи координат як з урахуванням матриць повороту  $\bar{B}_i$ , так і матриць перенесення  $\bar{R}_{Oi}$ . Рівняння (12.33) можна записати ще компактніше, якщо ввести так звані однорідні координати – чотири числа  $U_1, U_2, U_3, U_4$ , які зв'язані з декартовими координатами рівностями:

$$\begin{aligned} U_1^k &= x_k U_4^k; & U_2^k &= y_k U_4^k; \\ U_3^k &= z_k U_4^k; \\ U_{10}^k &= \xi_k U_{40}^k; & U_{20}^k &= \eta_k U_{40}^k; \\ U_{30}^k &= \zeta_k U_{40}^k, \end{aligned} \quad (12.34)$$

де  $U_4^k$  в загальному випадку може бути будь-яким числом.

Якщо взяти  $U_4^k = 1$ , то одержимо введені раніше однорідні координати  $x_k, y_k, z_k, 1$ . Якщо ввести тепер матрицю-стовпець  $\bar{U}_k = [U_1^k, U_2^k, U_3^k, U_4^k]^T$ , то рівняння (12.32) і (12.33) остаточно наберуть вигляду

$$\begin{aligned} \bar{U}_{k-1} &= \bar{D}_k \bar{U}_k, \\ \bar{U}_{k0} &= \bar{D}_1 \bar{D}_2 \dots \bar{D}_k \bar{U}_k = \bar{D} \bar{U}_k. \end{aligned} \quad (12.35)$$

Отже, перетворення перенесення і перетворення повороту визначаються однією матрицею  $\bar{D}$ .

Значимо, що наведені формули доцільно застосовувати при аналізі роботів і гіроприладів не стільки для аналітичних досліджень, скільки для числового аналізу за допомогою електронно-обчислювальних машин.

## § 12.10. Розподіл швидкостей і прискорень при складному русі твердого тіла

У розділі 9 одержані формули для розподілу швидкостей і прискорень при складному русі точки. Знайдемо тепер формули для обчислення швидкостей і прискорень при складному русі тіла.

Нехай тіло  $\Pi$  (система координат  $O_2 x_2 y_2 z_2$ ) здійснює просторовий рух відносно тіла  $I$ . Очевидно, що цей рух можна подати як поступальний рух разом з полюсом  $O_2$  відносно системи координат  $O_1 x_1 y_1 z_1$  і обертання навколо полюса. Якщо обертання тіла  $\Pi$  немає, то рух точки  $O_2$  розглядаємо як складний. Якщо немає поступально-го руху тіла  $\Pi$ , то одержимо окремий випадок складного руху тіла  $\Pi$ , зв'язаний лише з його обертанням. Цей випадок застосовується в роботах, гіроскопах і взагалі в будь-якій машині та обладнанні, у складі яких є обертові ротори або деталі.

Отже, відповідно до рівностей (12.27),  
масмо

$$\vec{r}_{M_2} = \vec{r}_{O_1} + \vec{\rho}_{O_2} + \vec{\rho}_2. \quad (12.36)$$

Нехай тіло  $I$  обертається з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_1$  відносно нерухомої системи координат  $A\xi\eta\zeta$ , а тіло  $II$  з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_2$  відносно тіла  $I$ . Отже, вектор  $\vec{r}_{O_1}$  не обертається,  $\vec{\rho}_{O_2}$  обертається з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_1$ , а  $\vec{\rho}_2$  – з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$  відносно нерухомої системи координат  $A\xi\eta\zeta$ . Застосовуючи формулу диференціювання вектора в рухомій системі координат, із співвідношення (9.14) дістанемо

$$\begin{aligned} \vec{v}_{M_2} &= \frac{d\vec{r}_{M_2}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} + \frac{d\vec{\rho}_{O_2}}{dt} + \frac{d\vec{\rho}_2}{dt} = \\ &= \vec{v}_{O_1} + \frac{d'\vec{\rho}_{O_2}}{dt} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{O_2} + \frac{d'\vec{\rho}_2}{dt} + \\ &\quad + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{\rho}_2. \end{aligned} \quad (12.37)$$

Оскільки  $\frac{d'\vec{\rho}_2}{dt} = 0$ , бо точка  $M_2$  не змінює свого положення в тілі  $II$ , то, позначаючи  $\frac{d'\vec{\rho}_{O_2}}{dt} = \vec{v}'_{O_2}$ , останню формулу перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{v}_{M_2} &= \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{O_2} + \vec{v}'_{O_2} + \\ &\quad + \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_2 \end{aligned} \quad (12.38)$$

або

$$\begin{aligned} \vec{v}_{M_2} &= \vec{v}_{O_2} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_2 = \\ &= \vec{v}_{O_2} + \vec{v}_{M_2O_2}, \end{aligned} \quad (12.39)$$

де  $\vec{v}_{O_2} = \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{O_2} + \vec{v}'_{O_2}$ ;  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ .  
Очевидно, що

$$\vec{v}_{M_i} = \vec{v}_{O_i} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i. \quad (12.40)$$

Формули (12.39), (12.40) для розподілу швидкостей за формою запису збігаються з

одержаними раніше формулами і читаються так: швидкість точки  $M_i$  дорівнює сумі швидкостей руху разом з полюсом  $O_i$  і швидкості її обертального руху відносно полюса.

Здиференціювавши вираз (12.39) з урахуванням того, що вектор  $\vec{\omega}_2$  обертається відносно системи координат  $O_1x_1y_1z_1$  з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_1$ , одержимо

$$\begin{aligned} \vec{w}_{M_2} &= \vec{w}_{O_2} + \left( \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} + \frac{d'\vec{\omega}_2}{dt} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \right) \times \vec{\rho}_2 + \\ &\quad + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \left[ \frac{d'\vec{\rho}_2}{dt} + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{\rho}_2 \right], \end{aligned} \quad (12.41)$$

де

$$\begin{aligned} \vec{w}_{O_2} &= \vec{w}_{O_1} + \vec{w}'_{O_2} + \vec{w}^{oc}_{O_2O_1} + \vec{w}^{oc}_{O_2O_1} + \vec{w}^c_{O_2}; \\ \vec{w}'_{O_2} &= \frac{d'\vec{v}'_{O_2}}{dt}; \quad \vec{w}^{oc}_{O_2O_1} = \vec{e}_1 \times \vec{\rho}_{O_2}; \\ \vec{w}^{oc}_{O_2O_1} &= \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{O_2}); \end{aligned} \quad (12.42)$$

$$\vec{e}_1 = \frac{d\vec{\omega}_1}{dt}; \quad \vec{w}^c_{O_2} = 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}'_{O_2}.$$

Позначивши  $\vec{e}'_2 = \frac{d'\vec{\omega}_2}{dt}$  і враховуючи, що  $\frac{d'\vec{\rho}_2}{dt} = 0$ , вираз для прискорення точки  $M_2$  перепишемо у формі

$$\begin{aligned} \vec{w}_{M_2} &= \vec{w}_{O_2} + \vec{e}_1 \times \vec{\rho}_2 + \vec{e}'_2 \times \vec{\rho}_2 + \\ &\quad + (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) \times \vec{\rho}_2 + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_2) + \\ &\quad + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_2) + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_2) + \\ &\quad + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_2). \end{aligned} \quad (12.43)$$

Скориставшись формулою для подвійного векторного добутку  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ , можна перекоонатися, що сума четвертого і сьомого доданків у формулі (12.43) дорівнює

$$\begin{aligned} & (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) \times \vec{\rho}_2 + \vec{\omega}_2 \times \\ & \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_2) = 2\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_2). \end{aligned} \quad (12.44)$$

З урахуванням цього співвідношення формулу (12.43) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{w}_{M_2} = & \vec{w}_{O_2} + \vec{e}_1 \times \vec{\rho}_2 + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_2) + \\ & + \vec{e}_2' \times \vec{\rho}_2 + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_2) + \\ & + 2\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_2). \end{aligned} \quad (12.45)$$

Останній доданок є прискоренням Коріоліса, що обумовлене тільки обертанням тіла  $II$  відносно тіла  $I$ , яке здійснює обертальний переносний рух з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_1$ . Повне прискорення Коріоліса з урахуванням відносно швидкості точки  $O_2$  мас два доданки – один включено до складу прискорення  $\vec{w}_{O_2}$ , а другий виписано явно, тому

$$\begin{aligned} \vec{w}_{M_2}^c = & 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{O_2}' + 2\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_2) = \\ = & 2\vec{\omega}_1 \times (\vec{v}_{O_2}' + \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_2) = 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{M_2}'. \end{aligned} \quad (12.46)$$

Звідси видно, що повне прискорення Коріоліса точки  $M_2$  можна звести до вигляду відомої формули. Якщо записати прискорення точки  $M_2$  в розгорнутому вигляді, то формулу (12.45) перепишемо у формі

$$\vec{w}_{M_2} = \vec{w}_{M_2}^e + \vec{w}_{M_2}' + \vec{w}_{M_2}^c, \quad (12.47)$$

де

$$\begin{aligned} \vec{w}_{M_2}^e = & \vec{w}_{O_1} + \vec{e}_1 \times \vec{\rho}_{O_2} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{O_2}) + \\ & + \vec{e}_1 \times \vec{\rho}_2 + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_2), \end{aligned} \quad (12.48)$$

$$\begin{aligned} \vec{w}_{M_2}' = & \vec{w}_{O_2}' + \vec{e}_2' \times \vec{\rho}_2 + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_2), \\ \vec{w}_{M_2}^c = & 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{M_2}' = 2\vec{\omega}_1 \times (\vec{v}_{O_2}' + \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_2). \end{aligned}$$

Формулі для прискорення можна надати ще й такого вигляду:

$$\begin{aligned} \vec{w}_{M_2} = & \vec{w}_{O_2} + \vec{w}_{M_2O_2}^{oc} + \\ & + \vec{w}_{M_2O_2}^{oc} + \vec{w}_{M_2O_2}^c, \end{aligned} \quad (12.49)$$

де

$$\begin{aligned} \vec{w}_{M_2O_2}^{oc} = & \vec{e} \times \vec{\rho}_2; \quad \vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2', \quad \vec{w}_{M_2O_2}^{oc} = \\ = & \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_2) + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_2), \\ \vec{w}_{M_2O_2}^c = & 2\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_2). \end{aligned} \quad (12.50)$$

Неважко впевнитися, що формула (12.45) не змінює свого вигляду, якщо обчислити прискорення для довільної точки  $i$ -го тіла

$$\begin{aligned} \vec{w}_{M_i} = & \vec{w}_{O_i} + \vec{e}_{i-1} \times \vec{\rho}_i + \\ & + \vec{\omega}_{i-1} \times (\vec{\omega}_{i-1} \times \vec{\rho}_i) + \vec{e}_i' \times \vec{\rho}_i + \\ & + \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i) + 2\vec{\omega}_{i-1} \times (\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i), \end{aligned} \quad (12.51)$$

$$\begin{aligned} \vec{w}_{O_i} = & \vec{w}_{O_{i-1}} + \frac{d' \vec{v}_{O_i}'}{dt} + \frac{d' \vec{v}_O'}{dt} + \vec{e}_{i-1} \times \vec{\rho}_{O_i} + \\ & + \vec{\omega}_{i-1} \times (\vec{\omega}_{i-1} \times \vec{\rho}_{O_i}) + 2\vec{\omega}_{i-1} \times \vec{v}_{O_i}', \end{aligned} \quad (12.52)$$

$$\text{де } \vec{e}_{i-1} = \frac{d \vec{\omega}_{i-1}}{dt}.$$

Наведені формули для розподілу швидкостей і прискорень можна використати при обчисленні сил інерції, а також при складанні диференціальних рівнянь руху складних пристроїв. При аналітичному дослідженні, як зазначалося, корисною може стати формула

$$\vec{w}_{M_2} = \frac{d' \vec{v}_{M_2}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{M_2}, \quad (12.53)$$

яку в загальному вигляді можна записати у формі

$$\vec{w}_{M_i} = \frac{d' \vec{v}_{M_i}}{dt} + \vec{\omega}_e' \times \vec{v}_{M_i}, \quad (12.54)$$

де

$$\begin{aligned} \vec{v}_{M_i} = & \vec{v}_{O_i} + \vec{\omega}_e' \times \vec{\rho}_i, \\ \vec{\omega}_e' = & \sum_{k=1}^i \vec{\omega}_k; \end{aligned} \quad (12.55)$$

$$\vec{v}_{O_i} = \vec{v}_{O_{i-1}} + \vec{\omega}_{e-1}' \times \vec{\rho}_{O_i} + \vec{v}_O'.$$

Формули (12.51), (12.52) та (12.54), (12.55) є алгоритмами обчислення прискорення

рень і швидкостей будь-якої системи твердих тіл; ці алгоритми легко перевести на комп'ютерні технології, якщо записати векторні, подвійні векторні, скалярні та змішані векторно-скалярні добутки у матричній формі.

### § 12.11. Особливості кінематики промислових роботів

Робототехніка як новий напрям науки і техніки пов'язана зі створенням та застосуванням роботів і робототехнічних систем.

Робототехніка сформувалась як науковий напрям у другій половині ХХ ст. Її бурхливий розвиток розпочався в 70-ті роки ХХ ст. Особливістю робототехніки є те, що вона вивчає кінематику і динаміку сукупності твердих тіл (найчастіше двох – п'яти).

Науковою базою робототехніки є теоретична механіка. В робототехніці, з одного боку, використовуються основні доробки всіх розділів теоретичної механіки, а з іншого боку, робототехніка як наука поспіває по суті теоретичну механіку, кібернетику та комп'ютерні технології.<sup>1</sup> Основою останніх, як відомо, є операції з матрицями.

Алгоритми, які виписані в § 12.9 та 12.10, є найбільш загальними і охоплюють найскладніші випадки з'єднання і взаємодії тіл. У промислових роботах з'єднання двох тіл або їх взаємодія характеризується не з допомогою шести координат, а, як правило, з допомогою однієї координати, тобто тіло II (рис. 12.12) може переміщатися відносно тіла I або за допомогою телескопічної (призматичної) пари, яка організовує лише поступальний рух тіла II відносно тіла I і лише по одній координаті, або за допомогою оберտальної пари, яка уможливує відносний

поворот тіл лише на один кут повороту (циліндричний шарнір).

Разом з тим у техніці розповсюджені й такі з'єднання або взаємодії тіл, що реалізуються через два кути повороту, наприклад карданна передача, або через усі три гіроскоп у кардановому підвісі.

Усі шість степенів вільності реалізуються при русі літальних та плавучих об'єктів (літаків, кораблів, підводних апаратів, ракет, космічних апаратів) у гіроскопічних приладах з так званими безконтактними підвісами гіроскопа – електромагнітними, асродинамічними, електростатичними – або в приладах із пружними підвісами тощо.<sup>2</sup>

Спільним для всіх цих систем є те, що взаємодіє велика кількість тіл, які створюють системи з багатьма (дві і більше) степенями вільності.

Розглянемо особливості кінематики маніпуляційних роботів, що складаються із  $n$  твердих тіл, які включають до свого складу з'єднання, що є телескопічними чи обертальними парами. Викладено цей матеріал за методикою проф. О. П. Бойчука<sup>3</sup>.

Нехай маємо маніпуляційний робот із  $n$  тіл або ланок. Зв'яжемо з  $k$ -ю ланкою систему координат  $O_k x_k y_k z_k$ .

Координати довільної точки (або її радіус-вектор)  $k$ -ї ланки в системі координат, зв'язаної з цією ланкою, описуються чотирикоординатним вектором

$$\vec{r}_k = [x_k; y_k; z_k; 1]^T \quad (12.56)$$

або однорідними координатами

$$\vec{u}_k = [u_k^1; u_k^2; u_k^3; u_k^4]^T. \quad (12.57)$$

<sup>2</sup>Павловський М. А. Теория гироскопов: Учеб. К. : Выща шк. Головное изд-во, 1986. – 303 с.

<sup>3</sup>Павловський М. А., Акишвіцелі Л. Ю., Бойчук О. Ф. Теоретическая механика. Кн. 1: Статика. Кинематика / Под ред. М. А. Павловского. К. : Выща шк. Головное изд-во, 1989. – 351 с.

<sup>1</sup>Механика промышленных роботов: Учеб. пособие для вузов: В 3 кн. Кн. 1: Кинематика и динамика. / Под ред. К. В. Фролова, Е. Н. Воробьева. М. : Высш. шк., 1988. – 304 с.

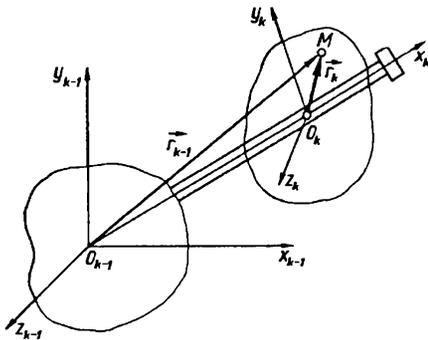


Рис. 12.13

При цьому результуюча матриця переходу  $4 \times 4$  дорівнює

$$\bar{B}_k = \bar{D}_1 \bar{D}_2 \dots \bar{D}_k. \quad (12.58)$$

Установимо правила, за якими можна було б отримати результуючу матрицю переходу  $\bar{B}_k$  у випадку наявності в системі вказаних кінематичних пар – телескопічної чи обертальної.

*Телескопічна пара* – відносний рух  $k$ -ї ланки пряmolінійний, поступальний.

Вісь  $O_k x_k$  системи координат  $O_k x_k y_k z_k$ , зв'язаної з  $k$ -ю ланкою, направимо по лінії переміщення (або паралельно йому) так, щоб вона проходила через точку  $O_{k-1}$ , тоді відстань  $O_{k-1} O_k = q_k$  прийемо за координату (рис. 12.13).

Матриця напрямних косинусів між вказаними системами координат має вигляд:

$$\begin{array}{c|ccc} & x_k & y_k & z_k \\ \hline x_{k-1} & a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} \\ y_{k-1} & a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} \\ z_{k-1} & a_{31}^{(k)} & a_{32}^{(k)} & a_{33}^{(k)} \end{array}. \quad (12.59)$$

Координати довільної точки  $M$   $k$ -ї ланки в системі координат  $O_{k-1} x_{k-1} y_{k-1} z_{k-1}$  (рис. 12.13) визначаються виразом

$$\begin{aligned} x_{k-1} &= (q_k + x_k) a_{11}^{(k)} + y_k a_{12}^{(k)} + z_k a_{13}^{(k)}, \\ y_{k-1} &= (q_k + x_k) a_{21}^{(k)} + y_k a_{22}^{(k)} + z_k a_{23}^{(k)}, \\ z_{k-1} &= (q_k + x_k) a_{31}^{(k)} + y_k a_{32}^{(k)} + z_k a_{33}^{(k)}. \end{aligned} \quad (12.60)$$

Чотирирівнірна матриця переходу  $\bar{D}_k$  від системи координат  $O_k x_k y_k z_k$ , зв'язаної з  $k$ -ю ланкою, до системи координат  $O_{k-1} x_{k-1} y_{k-1} z_{k-1}$ , зв'язаної з  $(k-1)$ -ю ланкою, що характеризує телескопічну (призматичну) в'язь, буде

$$\begin{aligned} \bar{D}_{kn} &= \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} & a_{11}^{(k)} q_k \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} & a_{21}^{(k)} q_k \\ a_{31}^{(k)} & a_{32}^{(k)} & a_{33}^{(k)} & a_{31}^{(k)} q_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \bar{A}_k & \bar{P}_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (12.61)$$

де індекс “п” матриці переходу  $\bar{D}_{kn}$  відображає поступальний рух;  $\bar{A}_k$  – матриця напрямних косинусів;  $\bar{P}_k$  – вектор-стовпець, що характеризує положення точки  $O_k$  в системі координат  $O_{k-1} x_{k-1} y_{k-1} z_{k-1}$ .

*Обертальна пара.* У цьому випадку систему координат  $O_k x_k y_k z_k$  вибирають так, щоб одна з осей координат, наприклад  $O_k z_k$ , збігалася б із віссю обертання, а положення точки  $O_k$  на осі  $z_k$  вибирають довільно (рис. 12.14).

За узагальнену координату прийемо кут ( $q_k = \varphi_k$ ) повороту ланки відносно початкового положення  $O_k x_k^0 y_k^0 z_k^0$  системи координат  $O_k x_k y_k z_k$ . Якщо початкове положення системи координат  $O_k x_k^0 y_k^0 z_k^0$  в системі координат  $O_{k-1} x_{k-1} y_{k-1} z_{k-1}$  характеризується матрицею напрямних косинусів

$$\begin{array}{c|ccc} & x_k^0 & y_k^0 & z_k^0 \\ \hline x_{k-1} & c_{11}^{(k)} & c_{12}^{(k)} & c_{13}^{(k)} \\ y_{k-1} & c_{21}^{(k)} & c_{22}^{(k)} & c_{23}^{(k)} \\ z_{k-1} & c_{31}^{(k)} & c_{32}^{(k)} & c_{33}^{(k)} \end{array}, \quad (12.62)$$

то координати довільної точки  $M$   $k$ -ї ланки в системі координат  $O_{k-1}x_{k-1}y_{k-1}z_{k-1}$  будуть

$$\begin{aligned} x_{k-1} &= x_0^{(k-1)} + c_{11}^{(k)} (x_k \cos q_k - y_k \sin q_k) + \\ &+ c_{12}^{(k)} (x_k \sin q_k + y_k \cos q_k) + c_{13}^{(k)} z_k; \\ y_{k-1} &= y_0^{(k-1)} + c_{21}^{(k)} (x_k \cos q_k - y_k \sin q_k) + \\ &+ c_{22}^{(k)} (x_k \sin q_k + y_k \cos q_k) + c_{23}^{(k)} z_k; \\ z_{k-1} &= z_0^{(k-1)} + c_{31}^{(k)} (x_k \cos q_k - y_k \sin q_k) + \\ &+ c_{32}^{(k)} (x_k \sin q_k + y_k \cos q_k) + c_{33}^{(k)} z_k. \end{aligned} \quad (12.63)$$

Тоді чотирирівнірна матриця переходу (обертання)

$$\bar{D}_k \text{ об} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11}^{(k)} \cos q_k + \\ + c_{12}^{(k)} \sin q_k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{12}^{(k)} \cos q_k - \\ - c_{11}^{(k)} \sin q_k \end{pmatrix} & c_{13}^{(k)} & x_0^{k-1} \\ \begin{pmatrix} c_{21}^{(k)} \cos q_k + \\ + c_{22}^{(k)} \sin q_k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{22}^{(k)} \cos q_k - \\ - c_{21}^{(k)} \sin q_k \end{pmatrix} & c_{23}^{(k)} & y_0^{k-1} \\ \begin{pmatrix} c_{31}^{(k)} \cos q_k + \\ + c_{32}^{(k)} \sin q_k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{32}^{(k)} \cos q_k - \\ - c_{31}^{(k)} \sin q_k \end{pmatrix} & c_{33}^{(k)} & z_0^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12.64)$$

Тут індекс "об" означає обертання;  $x_0^{k-1}$ ,  $y_0^{k-1}$ ,  $z_0^{k-1}$  – координати точки  $O_k$  в системі координат  $O_{k-1}x_{k-1}y_{k-1}z_{k-1}$  (рис. 12.14).

Тепер формули (12.60) та (12.63) можна записати так:

$$\text{для телескопічної пари} \quad \bar{r}_{k-1} = \bar{D}_{k1} \bar{r}_k, \quad (12.65)$$

$$\text{для обертальної пари} \quad \bar{r}_k = \bar{D}_{k06} \bar{r}_k. \quad (12.66)$$

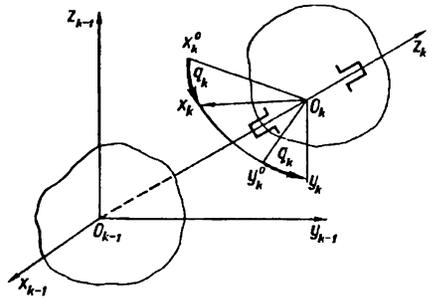


Рис. 12.14

Координати довільної точки  $M$   $k$ -ї ланки в системі координат, зв'язаній з основою механізму, матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{D}_1(q_1) \bar{D}_2(q_2) \dots \bar{D}_k(q_k) \cdot \bar{r}_k = \\ &= \bar{B}_k \bar{r}_k = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{P} \\ 0 & \bar{I} \end{bmatrix} \bar{r}_k. \end{aligned} \quad (12.67)$$

Визначимо тепер кінематичні характеристики маніпулятора і довільної точки  $M$   $k$ -ї ланки.

Для абсолютної швидкості точки  $M$  отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{d\bar{r}}{dt} = \left( \sum_{j=1}^k \frac{\partial \bar{B}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \bar{r}_k = \\ &= \left( \sum_{j=1}^k \bar{D}_1 \dots \bar{D}_{j-1} \frac{\partial \bar{D}_j}{\partial q_j} \dot{q}_j \bar{D}_{j+1} \dots \bar{D}_k \right) \bar{r}_k \end{aligned} \quad (12.68)$$

і відповідно для прискорення

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \left( \sum_{j=1}^k \frac{\partial \bar{B}_k}{\partial q_j} \ddot{q}_j \right) \bar{r}_k + \\ &+ \left( \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 \bar{B}_k}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_i \right) \bar{r}_k = \\ &= \left( \sum_{j=1}^k \bar{D}_1 \dots \frac{\partial \bar{D}_j}{\partial q_j} \ddot{q}_j \dots \bar{D}_k + \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \bar{D}_1 \dots \frac{\partial \bar{D}_j}{\partial q_j} \dot{q}_j \dots \frac{\partial \bar{D}_i}{\partial q_i} \dot{q}_i \dots \bar{D}_k \right) \bar{r}_k. \end{aligned} \quad (12.69)$$

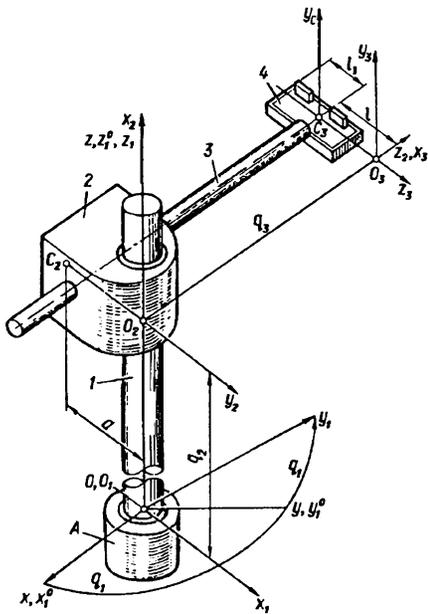


Рис. 12.15

**Приклад 4.** Манипулятор типу “Версатран” (рис. 12.15) складається з основи  $A$ , колони  $1$ , траверси  $2$ , висувної руки  $3$  і кліщів  $4$ . Колонна  $1$  може обертатися навколо вертикальної осі, траверса  $2$  може підніматися й опускатися по колоні  $1$ , а рука  $3$  може переміщатися горизонтально вздовж осі.

Знайти швидкості точок  $C_2$  та  $C_3$  (центра кліщів).

**Розв’язання.** Ця механічна система має три степеня вільності з такими з’єднаннями: колонна  $1$  з основою  $A$  – обертальна пара; траверса  $2$  з колоною  $1$  – призматичного (телескопічного) типу і рука (ланка  $3$ ,  $4$ ) з траверсою  $2$  – призматичного типу.

Введемо наступні системи координат (рис. 12.15): зв’язану з основою  $O_1x_1y_1z_1$ , з колоною –  $O_2x_2y_2z_2$ , з траверсою зв’язану з основою  $O_3x_3y_3z_3$ ; з траверсою зв’язану систему координат  $O_2x_2y_2z_2$ , з кліщами (рукою) систему координат  $O_3x_3y_3z_3$ . При цьому точка  $C_3$  зміщена відносно осі  $O_1O_2$  на величину  $l$  по осі  $O_3z_3$ .

Виберемо узагальнені координати:  $q_1$  – кут повороту колони,  $q_2 = O_1O_2$  – змінна, що характеризує висоту траверси;  $q_3 = O_2O_3$  – змінна, що характеризує переміщення кліщів по напрямній руки. Точка  $C_2$  знаходиться на відстані  $a$  від осі  $O_1O_2$ .

Складемо таблиці напрямних косинусів:

	$x_1^0$	$y_1^0$	$z_1^0$		$x_2$	$y_2$	$z_2$
$x$	1	0	0	$x_1$	0	1	0
$y$	0	1	0	$y_1$	0	0	1
$z$	0	0	1	$z_1$	1	0	0

	$x_3$	$y_3$	$z_3$
$x_2$	0	1	0
$y_2$	0	0	1
$z_2$	1	0	0

і за таблицями – матриці: для обертальної пари

$$\bar{D}_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

для двох телескопічних пар

$$\bar{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{D}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Визначимо координати точок  $C_2$  і  $C_3$  в системах координат  $O_2x_2y_2z_2$  та  $O_3x_3y_3z_3$  відповідно:

$$\vec{r}_{C_2}^{(2)} = [0, -a, 0, 1]^T; \quad \vec{r}_{C_3}^{(3)} = [0, 0, -l, 1]^T.$$

Далі за формулами (12.67) знайдемо вирази для координат точок  $C_2$  та  $C_3$  в нерухомій системі координат:

$$\begin{aligned}\bar{r}_{C_2} &= \bar{D}_1 \bar{D}_2 \bar{r}_{C_2}^{(2)} = [-a \cos q_1; -a \sin q_1; q_2; 1]^T; \\ \bar{r}_{C_3} &= \bar{D}_1 \bar{D}_2 \bar{D}_3 \bar{r}_{C_3}^{(3)} = \\ &= [-l \cos q_1 - q_3 \sin q_1; -l \sin q_1 + q_3 \cos q_1; q_2; 1]^T.\end{aligned}$$

Здиференціювавши за часом отримані вирази для  $\bar{r}_{C_2}$  та  $\bar{r}_{C_3}$ , знайдемо відповідні вирази для проєкцій лінійних швидкостей точок  $C_2$  і  $C_3$ :

$$\begin{aligned}\bar{v}_{C_2} &= \frac{d\bar{r}_{C_2}}{dt} = [a\dot{q}_1 \sin q_1; -a\dot{q}_1 \cos q_1; \dot{q}_2; 0]^T, \\ \bar{v}_{C_3} &= \frac{d\bar{r}_{C_3}}{dt} = [\dot{q}_1 (l \sin q_1 - q_3 \cos q_1) - \dot{q}_3 \sin q_1; \\ &\quad -\dot{q}_1 (l \cos q_1 + q_3 \sin q_1) + \dot{q}_3 \cos q_1; \dot{q}_2; 0]^T.\end{aligned}$$

Отже, проєкції швидкостей на осі  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  мають вигляд

$$\begin{aligned}v_{C_2x} &= a\dot{q}_1 \sin q_1; \\ v_{C_2y} &= -a\dot{q}_1 \cos q_1; \\ v_{C_2z} &= \dot{q}_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{C_3x} &= (l \sin q_1 - q_3 \cos q_1) \dot{q}_1 - \dot{q}_3 \sin q_1; \\ v_{C_3y} &= -(l \cos q_1 + q_3 \sin q_1) \dot{q}_1 + \dot{q}_3 \cos q_1; \\ v_{C_3z} &= \dot{q}_2.\end{aligned}$$

Задача розв'язана.

### Питання для самоконтролю

1. Як визначаються миттєво-поступальний та миттєво-обертальний рухи?
2. Чим є абсолютний рух твердого тіла, що бере участь у кількох миттєвих обертальних рухах навколо осей, які перетинаються?
3. Що називають парою обертань?
4. Коли може мати місце пара кутових прискорень твердого тіла?
5. Як формулюється правило паралельного переносу вектора кутової швидкості твердого тіла?
6. У чому суть методу зупинення і коли його доцільно застосовувати?
7. Як показати, що в загальному випадку просторовий рух твердого тіла зводиться до кінематичного гвинта?
8. Як є кінематичні інваріанти і чи мають вони аналоги в статиці?
9. Чи існує в кінематиці теорема про зведення системи до двох параметрів, аналогічна теоремі Пуансо, і як вона формулюється?
10. Що таке однорідні координати і де вони застосовуються?

## Розділ 13 ВСТУП ДО ДИНАМІКИ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ ТОЧКИ

### § 13.1. Короткі історичні відомості

Закони руху тіл завжди цікавили людину. Пізнання їх було повільним і не завжди вдалим. Наприклад, Арістотель (384–322 рр. до н. е.) вважав, що з припиненням дії сили тіла перестають рухатися. Лише внаслідок тривалих спостережень над рухами, що відбуваються в природі, були правильно сформульовані закони руху.

Розробка основ динаміки відноситься до XVI–XVII ст., коли суспільна практика (особливо судноплавство і військова справа) поставила перед ученими низку найважливіших проблем.

Важливу роль у розвитку динаміки відіграло відкриття М. Коперником (1473–1543) геліоцентричної системи, згідно з якою Земля та інші планети обертаються навколо Сонця. До Коперника загальноприйнятною вважалася геоцентрична система світу К. Птолемея (II ст. н. е.).

У дослідженнях з небесної механіки Й. Кеплер (1571–1630) узагальнив учення Коперника. Він установив, що орбіти планет є не колами, а еліпсами з незначним ексцентриситетом. Користуючись спостереженнями Тіхо Браге (1546–1601) над рухом планет, Кеплер відкрив закони їхнього руху.

Підготовчий період у розвитку динаміки пов'язаний з іменами Леонардо да Вінчі (1452–1519), Г. Галілея (1564–1642), Р. Декарта (1596–1650) і Х. Гюйгенса (1629–1695).

Леонардо да Вінчі належить ряд досліджень руху тіла по похилій площині, теорії механізмів, руху води в трубах тощо. Він уперше сформулював закон інерції. Цікаво, що більш пізні дослідження Г. Галілея щодо закону інерції є менш прогресивними порівняно з аналогічними дослідженнями Леонардо да Вінчі, оскільки Галілей

помилявся, коли під рухом за інерцією розумів рівномірний рух по колу, а не по прямій лінії.

Г. Галілей експериментально довів закон падіння тіл у пустоті, дослідивши рух снаряда без урахування сил опору, встановив закон пропорційності між вагою тіла і його масою, вперше сформулював принцип відносності класичної динаміки, а також дослідив рух математичного маятника.

Р. Декарт проводив систематичні досліді над рухом тіл, що стикаються, і ввів поняття про кількість руху як про міру механічного руху. Відкривши закон збереження кількості руху, Декарт неправильно розглядав його як універсальний закон природи: він вважав кількість руху величиною скалярною. Проте, незважаючи на цю помилку, ідея Декарта виявилась плідною і відіграла у розвитку динаміки велику роль.

Х. Гюйгенс розв'язав ряд задач про рух простого і складного фізичних маятників, про визначення центра коливань фізичного маятника. Він уперше використав у динаміці вирази для осьових моментів інерції матеріальної системи, а також кінстичної енергії, але не називав їх цими термінами.

У подальшому Г. Лейбніц (1646–1716) розвинув питання про міри механічного руху. Між прихильниками Декарта і Лейбніца виникла дискусія про справжню міру механічного руху, яка закінчилася в кінці XIX ст. Правильно з діалекто-матеріалістичних позицій висвітлив історію цієї дискусії та розкрив методологічну сутність питання про міри механічного руху Ф. Енгельс у своїй праці "Діалектика природи".

Засновником динаміки як цілісної науки є І. Ньютон (1643–1727). Він систематизував і узагальнив дослідження, пов'язані з динамікою, і показав шляхи її подальшого розвитку. Він упер-

ше сформулював основні закони динаміки, відомі в сучасній літературі як перший, другий і третій закони Ньютона, ввів поняття маси і загальний закон сили. Йому належить відкриття загального закону природи – закону всесвітнього тяжіння, який лежить в основі сучасної механіки і фізики. Користуючись цим законом, він розв'язав ряд задач теоретичної і небесної механіки. Головний твір Ньютона, в якому подано чітке і систематичне викладення класичної механіки, називається “Математичні начала натуральної філософії”. Цей твір написано латинською мовою і вперше видано в 1687 р. На російську мову її переклав О. М. Крилов, який зробив численні примітки (див.: *Крылов А. Н. Собрание трудов*, т. VII. – М.-Л., изд-во АН СССР, 1936).

Будучи одним із засновників математичного аналізу, Ньютон разом з тим виклав механіку синтетично. Вперше аналітично динаміку виклав Л. Ейлер (1707–1783) – академік Петербурзької Академії наук. Він уперше довів одну з основних теорем динаміки – теорему про зміну кінетичного моменту; побудував теорію моментів інерції; ввів поняття потенціального силового поля і відкрив один із загальних принципів механіки, який названо його ім'ям. Заслуги Ейлера в небесній механіці, застосуванні механіки в техніці (кораблебудуванні, турбобудуванні тощо), механіці суцільних середовищ, теорії стійкості надзвичайно великі.

Сучасник Ейлера М. В. Ломоносов (1711–1765) як енциклопедист не міг не зацікавитися механікою як основою природознавства в цілому. Йому належить відкриття загального закону природи – закону збереження матерії та руху. Всі закони збереження механіки і фізики (закон збереження кількості руху, закон збереження і перетворення енергії та ін.) є конкретними окремими випадками закону Ломоносова. Стверджуючи нестворюваність і незнищуваність матерії та руху, здатність рухомої матерії до різних перетворень, розглядаючи матерію в органічному зв'язку з рухом, загальний закон Ломоносова та всі його конкретні модифікації в різних галузях фізики і природознавства є доказом єдності світу і загальності руху, будучи, таким чином, природно-науковою основою матеріалізму.

Дослідження Л. Ейлера з динаміки твердого тіла набули подальшого розвитку в працях Ж. Ла-

гранжа, Л. Пуансо (1777–1859) і С. В. Ковалевської (1850–1891). Результати досліджень С. В. Ковалевської стали імпульсом до появи в галузі динаміки твердого тіла і її технічних застосувань цілої низки наукових досліджень вітчизняних і зарубіжних учених, серед яких О. М. Ляпунов (1857–1918), Н. Б. Делоне (1856–1931), М. С. Жуковський (1847–1921), С. О. Чаплигін (1869–1942). Сьогодні дослідження з динаміки твердого тіла розвивають П. В. Харламов, В. Г. Дьомін та ін. Ряд досліджень з динаміки твердого тіла пов'язаний з розвитком теорії гіроскопів та інерціальної навігації. До цього напрямку належать дослідження Шулера, О. М. Крилова (1863–1945), Б. В. Булгакова (1901–1952), В. А. Павлова, Г. Магнуса, Д. С. Пельпора, А. Ю. Ішлинського, Д. М. Климова, В. М. Кошлякова, О. П. Бойчука, Ю. А. Карпачова та ін.

Наприкінці XIX ст. зародилась механіка тіл змінної маси, засновником якої є І. В. Мещерський (1859–1935). Цей розділ механіки став основою теорії реактивного руху і міжпланетних польотів, яку створив К. Е. Ціолковський (1857–1935). Він набув подальшого розвитку і практичного втілення у працях творця ракетної і космічної техніки С. П. Корольова (1907–1966). У кінці XX ст. Україна стала світовим лідером в ракетобудуванні, яке очолив С. І. Конюхов (Дніпропетровськ).

У XX ст. було встановлено, що при швидкостях, близьких до швидкості світла (300 000 км/с), формули класичної механіки призводять до суттєвих помилок. У цьому разі потрібно застосовувати механіку великих швидкостей – релятивістську механіку.

У другій половині XX ст. з'явився новий напрям науки – робототехніка, основою якого стала теоретична механіка. Особливістю робототехніки є те, що вона синтезує й об'єднує такі науки, як механіка, кібернетика та комп'ютерні технології. Великий внесок у розвиток цього напрямку внесли: К. В. Фролов, Е. І. Воробйов, А. Г. Овакімов, Ф. Л. Черноусько, Р. Уікер, М. Вулкобратович, В. Б. Ларін, В. І. Костюк, М. З. Згуровський та ін.

XX століття можна назвати ще й століттям механіки нелінійних коливань. Особливий внесок у розвиток теорії нелінійних коливань належить українським ученим М. М. Боголюбову, Ю. О. Митропольському, В. О. Кононенко та ін.

В Україні у другій половині ХХ ст. особливо бурхливо розвивалась прикладна теорія гіроскопів, в якій сформувалось три школи: О. Ю. Ішлінського – В. М. Кошлякова (Інститут математики НАНУ), А. О. Олішова і М. А. Павловського (обидва з НТУУ “КПІ”). Саме в Україні виник новий напрям в інерціальній навігації – безплатформні системи, започатковані М. І. Захаріним (НТУУ “КПІ”).

У другій половині ХХ ст. в Україні бурхливий розвиток отримала теоретична механіка, яка є основою для побудови і розвитку механіки суцільного середовища (теорії пружності, теорії пластичності, гідроаеромеханіки та ін.). Дослідження вітчизняних учених (Г. М. Савіна, О. М. Кільчевського, О. М. Гузя, А. Ф. Улітки, В. Т. Грінченка та ін.) у зазначених галузях належать до золотого фонду світової науки і є провідними в розвитку багатьох фундаментальних проблем і методів сучасної механіки та її численних застосувань у природознавстві й техніці.

### § 13.2. Динаміка та її основні задачі

*Динамікою* називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух матеріальної точки, системи матеріальних точок і абсолютно твердого тіла з урахуванням сил, що діють на ці рухомі об’єкти. У динаміці синтезуються й узагальнюються положення, розглянуті в статичній та кінематиці, а також встановлюються найбільш загальні закони механічного руху. При цьому враховується взаємодія між тілами, мірою якої є сила. Статичне вимірювання сили ґрунтується на зрівноважуванні її іншою силою. За допомогою динамометра сила, що діє на тіло, визначається зрівноважувальною силою пружності пружини.

У динаміці серед основних розглядаються дві задачі. Перша з них (*пряма задача динаміки*) полягає в тому, що за заданими механічним рухом і масою тіла визначають сили, під дією яких здійснюється цей рух.

Друга задача (*обернена задача динаміки*) полягає у тому, що за заданими силами, прикладеними до тіла, його масою і початковими умовами визначають рух, який вони спричиняють.

Звичайно динаміку прийнято поділяти на динаміку матеріальної точки, динаміку системи матеріальних точок і динаміку твердого тіла. У цьому підручнику багато положень і теорем для точки і системи викладаються паралельно.

### § 13.3. Закони Ньютона

В основі динаміки лежать закони І. Ньютона, викладені в “Математичних началах натуральної філософії”.

Закони Ньютона є об’єктивними законами природи, встановленими на основі численних дослідів і спостережень Ньютона і його попередників. Ці закони істинні настільки, наскільки висновки, що випливають з них, узгоджуються з досвідом у межах точності спостережень.

*Системи координат, у яких справедливі закони Ньютона, називаються інерціальними.* Інерціальними (галілеєвими) є системи координат, що рухаються поступально, прямолінійно і рівномірно відносно нерухомих зірок.

З достатньою точністю інерціальною (основною) можна вважати геліоцентричну систему координат при вивченні рухів зі швидкостями, малими порівняно зі швидкістю світла. При розв’язанні багатьох задач з техніки основну систему координат (систему відліку) пов’язують із Землею. При розв’язанні задач з астрономії, навігації та керування рухомими об’єктами, де доводиться враховувати обертання Землі, за основну систему відліку беруть систему координат, пов’язану з зірками, тобто інерціальну систему координат.

### *Перший закон Ньютона (закон інерції).*

*Ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху доти, доки вплив з боку інших тіл не введе її з цього стану.*

Ізольованою називається матеріальна точка, взаємодією якої з навколишніми тілами нехтують. Властивість ізольованої матеріальної точки зберігати стан рівномірного і прямолінійного руху називається властивістю *інертності*.

Із закону інерції випливає, що спонтанна зміна руху матеріальної точки неможлива. Рух матеріальної точки може змінитися лише внаслідок її взаємодії з іншими тілами. Мірою цих взаємодій є сили. Глибокий аналіз внутрішнього змісту поняття про механічну силу зробив Ф. Енгельс<sup>1</sup>.

Введення поняття сили дало змогу встановити зв'язок між механічними і складнішими немеханічними формами руху матерії. Наприклад, якщо розглядати силу взаємодії наелектризованих частинок, то тут виявляється зв'язок між механічним рухом і більш складною формою руху, яке вивчається в теорії електрики.

Величину і напрям дії сили за спостережуваними відхиленнями руху матеріальної точки від рівномірного і прямолінійного руху подає другий закон Ньютона.

*Другий закон Ньютона (основний закон динаміки). Швидкість зміни кількості руху матеріальної точки дорівнює силі, що діє на цю точку.*

Математично цей закон виражається рівністю

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}, \quad (13.1)$$

де  $m\vec{v}$  – кількість руху матеріальної точки;  
 $m$  – маса точки.

<sup>1</sup>Енгельс Ф. Діалектика природи // Маркс К., Енгельс Ф. – Соч. – 2-е изд. – Т. 20. – С. 59-60.

У класичній механіці розглядають рух зі швидкостями, малими порівняно зі швидкостями світла. При русі з великими швидкостями, відповідно до формули Лоренца, маса залежатиме від швидкості руху:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (13.2)$$

де  $m_0$  – маса нерухомого об'єкта;  $v$  – швидкість руху;  $c$  – швидкість світла.

При малих швидкостях ( $v \ll c$ ) стосовно тіл постійного складу маємо

$$m = m_0 = \text{const}.$$

Вважаючи  $m = \text{const}$ , вираз (13.1) перепишемо у вигляді

$$m\vec{w} = \vec{F}, \quad (13.3)$$

де  $\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  – прискорення точки.

На основі (13.3) другий закон Ньютона можна сформулювати так: *прискорення матеріальної точки пропорційне прикладеній до неї силі і має однаковий з нею напрям.*

Зазначимо, що таке формулювання другого закону Ньютона непридатне у динаміці тіла змінної маси (див. розділ 24). Якби Ньютон сформулював цей закон у формі (13.3) (а саме вона застосовується в більшості підручників із загальної фізики), то була б неможливою теорія реактивного руху.

Рівняння (13.3) називається основним рівнянням динаміки вільної матеріальної точки, або рівнянням Ньютона. Другий закон Ньютона виражає кількісне співвідношення між трьома фізичними величинами: *силою, масою і прискоренням*. Поняття сили зустрічалося ще в статичці, поняття прискорення – в кінематиці.

*Масою* матеріальної точки називається фізична величина, яка є мірою її інертних і гравітаційних властивостей.

З фізики відомо, що силу можна виміряти за допомогою спеціального приладу – динамометра, прискорення – одним із способів, наведених у кінематиці. Масу можна визначити двома способами.

*Перший спосіб* визначення маси ґрунтується на законі всесвітнього тяжіння, згідно з яким сила взаємного тяжіння між тілами виражається формулою

$$F = \gamma \frac{mm_1}{r^2}, \quad (13.4)$$

де  $\gamma$  – гравітаційна стала, що дорівнює  $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$ ;  $r$  – відстань між тілами з масами  $m$  і  $m_1$ .

Ще Галілей встановив, що поблизу земної поверхні при вільному падінні всі тіла мають одне й те саме прискорення

$$g = \gamma \frac{m_1}{r^2}, \quad (13.5)$$

що дорівнює  $9,80665 \text{ м/с}^2$ . Отже, сила тяжіння тіла визначається за формулою

$$\vec{P} = m\vec{g}. \quad (13.6)$$

Таким чином, вимірявши силу тяжіння тіла за допомогою вагів, можна з формули (13.6) визначити його масу. Такий спосіб визначення маси називається *статичним*, а сама маса, визначена цим способом, – *гравітаційною*.

*Другий спосіб* визначення маси полягає у наступному. Нехай одна й та сама сила  $\vec{F}$ , діючи на два різних тіла з масами  $m$  і  $m_1$ , спричинює прискорення  $\vec{w}$  і  $\vec{w}_1$ . Тоді, за другим законом Ньютона,

$$m w = m_1 w_1. \quad (13.7)$$

Звідси

$$m_1 = \frac{w}{w_1} m. \quad (13.8)$$

Взявши масу першого тіла  $m$  за еталон, можна за цю формулою визначити масу другого тіла. Такий спосіб визначення маси називається *динамічним*, а сама маса, знайдена цим способом, – *інертною*.

Експериментально доведено, що гравітаційна та інертна маси чисельно дорівнюють одна одній (у результаті дослідів І. Ньютона, Ф. Бесселя, Л. Етвеша рівність гравітаційної й інертної мас встановлено з точністю до  $10^{-8}$ ). Цей факт, що відіграв велику роль у сучасній фізиці, становить основу загальної теорії відносності й називається *принципом еквівалентності* гравітаційної та інертної мас.

Встановлюючи зв'язок між основними характеристиками механічного руху, другий закон Ньютона є одним з методів для розв'язання задач механіки. З другого закону Ньютона, при оберненні на нуль діючої сили, випливає закон інерції ( $\vec{w} = 0$ ;  $\vec{v} = \text{const}$ ). Це означає, що між першим і другим законами Ньютона є повна відповідність, і вони не містять у собі внутрішніх логічних суперечностей.

*Третій закон Ньютона (закон рівності дії і протидії)*. Сили взаємодії двох матеріальних точок або двох тіл (дія і протидія) рівні за величиною, напрямлені в протилежні боки і мають загальну лінію дії.

Якщо перший і другий закони Ньютона належать до динаміки матеріальної точки, то третій закон Ньютона належить до динаміки системи матеріальних точок або тіл.

Слід зазначити, що дія і протидія прикладені до різних матеріальних точок або тіл, і що третій закон Ньютона, на відміну від перших двох, справедливий у будь-якій системі координат, а не тільки в інерціальній, бо він не містить кінематичних харак-

теристик руху матеріальних об'єктів. Зрештою, третій закон Ньютона дає змогу відрізнити реальні сили, прикладені до точок, від фіктивних, які можуть з'явитися при математичному розв'язанні задач механіки.

**Закон незалежності дії сил (принцип суперпозиції).** Прискорення матеріальної точки, що виникає при одночасній дії на неї декількох сил, дорівнює векторній сумі прискорень, яких надають точці окремі сили.

Цей закон впливає з аксіоми про паралелограм сил. Він не придатний при дії на матеріальну точку сил, що залежать від прискорення.

У вступі зазначалося, що закони Ньютона, як і всі положення теоретичної механіки, що ґрунтуються на них, носять обмежений характер і є лише першим наближенням до дійсності, добре узгоджується з нею лише при рухах з малими швидкостями. Ця обмеженість спричинюється тим, що в теоретичній механіці властивості рухомих матеріальних об'єктів вважають незалежними від властивостей простору і часу, які до того ж абсолютизують. Насправді ж простір і час є атрибутами рухомої матерії, вони накладають певний відбиток на механічні процеси, який є тим більшим, чим ближче швидкість руху тіл до швидкості світла. У межах своєї застосовуваності теоретична механіка займає провідне місце серед природничих наук і має велике значення при дослідженні механічних процесів і явищ, що зустрічаються на практиці.

Закони Ньютона мають також велике методологічне значення. Дійсно, перший закон Ньютона відбиває в динаміці принцип незнищуваності руху. Другий закон Ньютона встановлює залежність між силою, масою і прискоренням, дає змогу розв'язувати конкретні задачі механіки і тим самим значно збагачує поняття сили. Третій закон Ньютона дає можливість глибше проникнути в суть поняття сили. У ньому сила виступає

не односторонньо, не тільки як дія, а й двосторонньо як дія і протидія, як взаємодія між двома матеріальними об'єктами.

Таким чином, згідно з законами Ньютона, сила є матеріальною категорією, її джерелами є фізичні тіла, між якими відбувається взаємодія, що полягає в перенесенні механічного руху з одного тіла на інші, або в перетворенні енергії в рух.

### § 13.4. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Згідно з трьома способами задання руху точки (§ 7.3) встановимо диференціальне рівняння її руху. Якщо рух матеріальної точки масою  $m$  задано у векторній формі за допомогою радіуса-вектора  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , то рівняння (13.3) набере вигляду

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \quad (13.9)$$

У загальному випадку сила  $\vec{F}$  може бути функцією часу, координат і швидкості рухомої точки:  $\vec{F} = \vec{F}\left(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$ .

У природі рідко зустрічаються сили, що залежать від прискорення. Прикладом сили, яка залежить від прискорення точки, може бути електромагнітна сила тяжіння матеріальної точки до нерухомого центра, згідно з законом Вебера, що визначається виразом  $F = \frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{r^2}{c^2} \ddot{r}\right)$ ,

де  $r$  – відстань точки від нерухомого центра.

Зазначимо, що штучно, за допомогою обчислювачів, зворотних зв'язків і виконавчих пристроїв можна сформувати сили, які залежать від будь-якої похідної переміщення у часі.

Так, сили, що явно залежать від часу, зустрічаються при дослідженні роботи різного роду машин і механізмів.

До сил, що залежать від положення точки (позиційних сил), належать сили пружності, які виникають у пружних тілах при їх деформації, а також сили тяжіння або відштовхування, що виникають при взаємодії тіл, які мають електричні (магнітні) заряди. Сили, що залежать від швидкості, зустрічаються при дослідженні руху тіл у в'язкому середовищі (рідкому чи газоподібному). У разі потреби і ті, й інші сили можна сформулювати штучно за допомогою зворотних зв'язків. Отже, рівняння (13.9) набере вигляду

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \left( t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right). \quad (13.10)$$

Рівнянню (13.10) у векторній формі відповідають три скалярних диференціальних рівняння в координатній формі

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x \left( t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y \left( t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z \left( t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \end{aligned} \quad (13.11)$$

де  $\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2}$  – проєкції вектора прискорення на осі координат;  $x, y, z$  – координати точки;

$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  – проєкції швидкості;  $F_x, F_y, F_z$  – проєкції сили. Кожне з диференціальних рівнянь (13.11) є рівнянням другого порядку, система цих рівнянь має шостий порядок. Рівняння (13.11) називаються *динамічними рівняннями руху матеріальної точки в координатній формі*.

Якщо спроектувати обидві частини основного рівняння динаміки (13.3) на нату-

ральні осі (дотичну  $\vec{\tau}$ , головну нормаль  $\vec{n}$  і бінормаль  $\vec{b}$ ) (див. § 7.12), то одержимо

$$\begin{aligned} m \frac{dv_{\tau}}{dt} &= F_{\tau} \left( t, s, \frac{ds}{dt} \right); \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F_n \left( t, s, \frac{ds}{dt} \right); \\ 0 &= F_b. \end{aligned} \quad (13.12)$$

Ці рівняння називаються *динамічними рівняннями руху точки в натуральній формі, або у формі Ейлера*.

При розв'язанні задач механіки викликають інтерес динамічні рівняння руху матеріальної точки в проєкціях на осі полярної системи координат. Ці рівняння одержимо, проєктуючи основне рівняння динаміки (13.3) відповідно на радіальний  $r$  (уздовж радіуса-вектора) і трансверсальний  $\varphi$  (перпендикулярний до радіуса-вектора) напрями (7.53):

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_r(t, r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}), \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= \\ &= \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \\ &= F_{\varphi}(t, r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}). \end{aligned} \quad (13.13)$$

У випадку циліндричної системи координат (рис. 7.3) рівняння руху точки матимуть вигляд

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_r(t, r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}), \\ m \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) &= F_{\varphi}(t, r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} &= F_z(t, r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}). \end{aligned} \quad (13.14)$$

Нарешті, для сферичної системи координат (рис. 7.4), якщо скористатися виразами для прискорень, наведеними в прикладі 7 § 7.15, матимемо

$$\begin{aligned}
m(\ddot{r} - r\dot{\psi}^2 \cos^2 \theta - r\dot{\theta}^2) &= \\
&= F_r(t, \psi, \theta, r, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{r}), \\
m \frac{1}{r \cos \theta} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\psi} \cos^2 \theta) &= \\
&= F_\psi(t, \psi, \theta, r, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{r}), \\
m \frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) + r^2 \dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta \right] &= \\
&= F_\theta(t, \psi, \theta, r, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{r}).
\end{aligned} \tag{13.15}$$

### § 13.5. Дві основні задачі динаміки вільної матеріальної точки

При дослідженні руху матеріальної точки зустрічаються дві основні задачі динаміки (пряма та обернена).

**Пряма, або перша, основна задача.** Визначити рівнодійну сил  $\vec{F}$ , що діють на матеріальну точку, якщо задано її масу  $m$  і кінематичні рівняння руху.

Ця задача розв'язується так.

1. Якщо рух матеріальної точки масою  $m$  задано координатним способом

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \tag{13.16}$$

то двічі диференціюючи ці співвідношення за часом, одержимо проекції прискорення на осі координат, тобто

$$w_x = \frac{d^2 x}{dt^2}, w_y = \frac{d^2 y}{dt^2}, w_z = \frac{d^2 z}{dt^2}. \tag{13.17}$$

Тоді на основі рівняння (13.11) визначимо проекції сили

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}, F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2}, F_z = m \frac{d^2 z}{dt^2}. \tag{13.18}$$

Отже, модуль рівнодійної сили

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \tag{13.19}$$

Напрямок сили визначимо за напрямними косинусами

$$\begin{aligned}
\cos(\vec{F}, O_x) &= \frac{F_x}{F}, \cos(\vec{F}, O_y) = \frac{F_y}{F}, \\
\cos(\vec{F}, O_z) &= \frac{F_z}{F}.
\end{aligned} \tag{13.20}$$

2. Якщо рух матеріальної точки масою  $m$  задано в натуральній формі, то за рівняннями (13.12) знайдемо проекції рівнодійної сил, що діють на матеріальну точку, на натуральні осі. Модуль сили і напрям визначимо за формулами

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_n^2}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_\tau}{F_n} = \frac{w_\tau}{w_n}, \tag{13.21}$$

де  $\alpha$  – кут між силою  $\vec{F}$  і нормальною складовою сили  $\vec{F}_n$ .

3. Якщо рух матеріальної точки масою  $m$  задано в полярних, циліндричних або сферичних координатах, то на основі рівнянь (13.13) – (13.15) знайдемо модуль сили:

$$\begin{aligned}
F &= \sqrt{F_r^2 + F_\phi^2}; \\
F &= \sqrt{F_r^2 + F_\phi^2 + F_z^2}; \\
F &= \sqrt{F_\psi^2 + F_\theta^2 + F_r^2}.
\end{aligned} \tag{13.22}$$

**Обернена, або друга, основна задача.**

Визначити кінематичні рівняння руху вільної матеріальної точки, якщо задано її масу  $m$ , прикладену до неї силу  $\vec{F}$  і початкові умови руху. Розв'язання цієї задачі зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки. Знайдемо проекції сили  $\vec{F}$  на осі координат, тобто  $F_x, F_y, F_z$ , потім зінтегруємо систему диференціальних рівнянь (13.11). Розв'язання цієї системи буде функцією часу і шести сталих інтегрування  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ :

$$\begin{aligned}x &= x(t, C_1, \dots, C_6), \\y &= y(t, C_1, \dots, C_6), \\z &= z(t, C_1, \dots, C_6),\end{aligned}\quad (13.23)$$

бо порядок системи диференціальних рівнянь дорівнює шести.

Щоб розв'язати конкретну динамічну задачу, треба задати початкові умови руху для визначення зазначених сталих інтегрування. Під початковими умовами руху матеріальної точки слід розуміти значення координат точки і проекції її швидкості в початковий момент часу  $t = t_0$ , тобто

$$\begin{aligned}x(t_0) &= x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0, \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \quad \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0.\end{aligned}\quad (13.24)$$

Аналогічно початкові умови руху точки можна задати у векторній  $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ ,  $\dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0$  і в натуральній  $s(t_0) = s_0$ ,  $\dot{s}(t_0) = \dot{s}_0$  формах і т. ін. Диференціюючи (13.23) за часом, знайдемо ще три співвідношення

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, \dots, C_6), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, \dots, C_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, \dots, C_6),\end{aligned}\quad (13.25)$$

що мають сталі інтегрування. Якщо в (13.23) і в (13.25) підставити початкові умови руху точки (13.24), то одержимо систему шести алгебричних рівнянь з шістьма невідомими сталими інтегрування, розв'язуючи яку, знайдемо

$$C_i = C_i(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (13.26)$$

Нарешті, підставивши знайдені значення сталих інтегрування у співвідношення (13.23), що виражають загальне розв'язання систе-

ми диференціальних рівнянь (13.11), одержимо закон руху точки

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (13.27)$$

Розглядаючи рух у натуральній формі, для розв'язання оберненої задачі динаміки застосовують рівняння (13.12). Початковими умовами руху в цьому разі є значення дугової координати при  $t = 0$   $s(t_0) = s_0$  і початкової швидкості  $v_t(t_0) = \dot{s}_0$ .

Загальний інтеграл першого з рівнянь (13.12) має вигляд  $s = s(t, C_1, C_2)$ . На основі початкових умов руху знаходимо сталі інтегрування  $C_i = C_i(t_0, s_0, \dot{s}_0)$ ,  $i = 1, 2$ .

Обчислену таким чином дугову координату  $s = s(t)$  підставимо в друге рівняння (13.12) і одержимо значення радіуса кривини  $\rho$  траєкторії рухомої точки.

Отже, розв'язання оберненої задачі динаміки матеріальної точки включає такі операції: 1) складання динамічних рівнянь руху матеріальної точки згідно з умовою задачі; 2) інтегрування одержаної системи диференціальних рівнянь, тобто знаходження загального розв'язання цієї системи; 3) визначення відповідних значень сталих інтегрування; 4) знаходження закону руху.

**Приклад 1.** Визначити траєкторію руху снаряда, випущеного із дула гармати з початковою швидкістю  $\vec{v}_0$  під кутом  $\alpha$  до горизонту. Опором повітря можна знехтувати (рис. 13.1). Знайти дальність і найбільшу висоту польоту снаряда.

Розв'язання. У початковий момент ( $t = 0$ ) снаряд був на початку координат, тому  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ . Проекції початкової швидкості на осі координат запишемо у вигляді  $\dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha$ ,  $\dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha$ ,  $\dot{z}_0 = 0$ .

Щоб визначити траєкторію точки, знайдемо залежність координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  точки (снаряда) від часу. Для цього скористаємося диференціальни-

ми рівняннями руху (13.11) точки  $m\ddot{x}=0$ ,  $m\ddot{y}=-mg$ ,  $m\ddot{z}=0$  або, після скорочення на  $m$ , маємо:  $\ddot{x}=0$ ,  $\ddot{y}=-g$ ,  $\ddot{z}=0$ . Інтегруючи ці рівняння, одержимо  $\dot{x}=C_1$ ,  $\dot{y}=-gt+C_2$ ,  $\dot{z}=C_3$ . Сталі інтегрування знайдемо з початкових умов руху. При  $t=0$   $\dot{x}_0=v_0\cos\alpha$ ,  $\dot{y}_0=v_0\sin\alpha$ ,  $\dot{z}_0=0$ , тому  $C_1=v_0\cos\alpha$ ,  $C_2=v_0\sin\alpha$ ,  $C_3=0$ . Отже,  $\dot{x}=v_0\cos\alpha$ ,  $\dot{y}=-gt+v_0\sin\alpha$ ,  $\dot{z}=0$ . Звідси після інтегрування одержимо  $x=v_0t\cos\alpha+C_4$ ,

$$y=v_0t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}+C_5, \quad z=C_6.$$

Сталі інтегрування  $C_4$ ,  $C_5$  і  $C_6$  знаходимо з початкових умов руху. При  $t=0$   $x_0=0$ ,  $y_0=0$ ,  $z_0=0$ , тому  $C_4=C_5=C_6=0$ . Тоді закон руху снаряда матиме вигляд  $x=v_0t\cos\alpha$ ,  $y=v_0t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}$ ,  $z=0$ .

Ці вирази є також рівнянням траєкторії в параметричному вигляді. Вилучивши час із цих рівнянь, визначимо траєкторію у явному вигляді

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1)$$

Неважко побачити, що траєкторією снаряда є парабола, яка лежить у площині  $xOy$ .

Найбільшої відстані польоту  $l$  снаряд досягає тоді, коли  $y=0$  при  $x \neq 0$  (рис. 13.1). Тобто для знаходження  $l$  потрібно зрівняти з нулем вираз (1):

$$x \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) = 0.$$

Оскільки  $x \neq 0$  за умовою задачі, то розв'язком буде значення  $x$ , яке отримуємо зрівнявши з нулем вираз у дужках:

$$l = x(y=0) = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Найбільшої висоти польоту при заданому куті  $\alpha$  снаряд досягне в точці  $x=l/2$ , тобто

$$h_{\max} = y(l/2) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

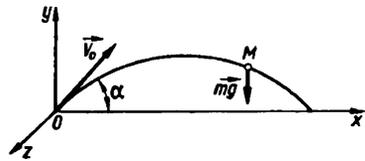


Рис. 13.1

Очевидно, що найбільшу відстань  $l_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$

снаряд пролетить при куті  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , а найбільшої

висоти  $h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$  досягне при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

**Приклад 2.** Знайти закон вільного падіння тіл (задача Галілея).

Розв'язання. Скористаємося системою координат  $Oxyz$  (рис. 13.1). У цьому випадку

$v_0=0$ ,  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ . Відповідні диференціальні рівняння руху будуть

$$m\ddot{x}=0, \quad m\ddot{y}=-mg, \quad m\ddot{z}=0.$$

При  $t=0$ :

$$x_0=0, \quad y_0=0, \quad z_0=0,$$

$$\dot{x}_0=0, \quad \dot{y}_0=0, \quad \dot{z}_0=0.$$

При таких початкових умовах отримаємо

$$x=0, \quad y = -\frac{gt^2}{2}, \quad z=0.$$

Оскільки тіло падає вниз, то висоту падіння потрібно брати зі знаком мінус, тобто

$$-h = -\frac{gt^2}{2}.$$

Звідси закон падіння тіл (за Галілеєм)

$$h = \frac{gt^2}{2}.$$

Час падіння визначатиметься за формулою

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Задача розв'язана.

**Приклад 3.** Торпеда, що випускається з підводного човна, який знаходиться на відстані  $h$  від морського дна, починає рухатися зі швидкістю  $v_0$  горизонтально. Вважаючи силу опору води пропорційною швидкості, знайти закон руху торпеди, якщо її двигун виключений.

**Розв'язання.** За координатну площину приймемо площину *Oxz* (рис. 13.1). За умовами задачі при  $t = 0$

$$x_0 = 0, y_0 = h, z_0 = 0, \\ \dot{x}(0) = v_0, \dot{y}(0) = 0, \dot{z}(0) = 0.$$

Силу опору позначимо  $\vec{R}$ ; вона дорівнює  $\vec{R} = -km\vec{v}$  і буде проєктуватися на всі осі координат. Крім того, на торпеду діє сила тяжіння  $F_y = -mg$ .

З урахуванням зазначених сил, рівняння руху (3.11) матимуть вигляд

$$m\ddot{x} = -km\dot{x}; \quad m\ddot{y} = -km\dot{y} - mg; \quad m\ddot{z} = -km\dot{z},$$

або

$$\ddot{x} + k\dot{x} = 0; \quad \ddot{y} + k\dot{y} = -g; \quad \ddot{z} + k\dot{z} = 0.$$

Система рівнянь руху розпадається на три незалежні рівняння, загальний розв'язок яких буде

$$x = C_1 + C_2 e^{-kt};$$

$$y = C_3 + C_4 e^{-kt} - \frac{g}{k}t; \quad z = C_5 + C_6 e^{-kt}.$$

Оскільки

$$\dot{x} = -C_2 k e^{-kt}; \quad \dot{y} = -C_4 k e^{-kt} - \frac{g}{k}; \quad \dot{z} = -C_6 k e^{-kt},$$

то, використовуючи задані початкові умови, отримаємо

$$C_1 = \frac{v_0}{k}, C_2 = -\frac{v_0}{k}, C_3 = h + \frac{g}{k^2},$$

$$C_4 = -\frac{g}{k^2}, C_5 = 0, C_6 = 0$$

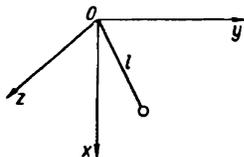


Рис. 13.2

і тоді розв'язком буде

$$x = v_0 \frac{1 - e^{-kt}}{k}; \quad y = h + g \frac{1 - e^{-kt} - kt}{k^2}; \quad z = 0.$$

Значимо, що з останніх рівнянь легко отримати закон руху при відсутності опору середовища (води). Для цього потрібно розглянути границю при  $t = 0$  і розкрити за допомогою правила Лопітала невизначеність типу  $\frac{0}{0}$ .

В результаті отримаємо

$$x = v_0 t, \quad y = h - \frac{gt^2}{2}, \quad z = 0.$$

### § 13.6. Рівняння руху невідільної матеріальної точки

При формулюванні основних задач динаміки вільної точки вважалось, що на рух точки не накладено ніяких обмежень. Відповідним вибором закону зміни сили  $\vec{F}$  і початкових умов можна примусити матеріальну точку рухатись по будь-якій траєкторії. Прикладом може бути рух літаків, підводних човнів, космічних апаратів тощо.

Якщо на рух точки накладені певні обмеження, то такий рух точки є невідільним. Наприклад, якщо матеріальна точка (рис. 13.2) знаходиться на кінці недеформованого стрижня завдовжки  $l$ , другий кінець якого шарнірно закріплений у точці  $O$ , то при будь-яких силах, що прикладені до точки, вона виконуватиме рух по поверхні сфери, радіус якої дорівнює довжині стрижня. Координати точки задовольнятимуть рівнянню сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0. \quad (13.28)$$

Вектор швидкості точки завжди лежить у площині, дотичній до сфери і побудованій у точці, яка збігається в даний момент з матеріальною точкою.

Рівняння (13.28), таким чином, є рівнянням сферичної поверхні, що утворює в'язь. Отже, це рівняння в'язі.

Як уже зазначалося на початку курсу в статичі, обмеження, які накладаються на рух матеріальної точки, називають в'язями.

Обмеження руху точки може бути не тільки за допомогою в'язі у формі поверхні, а й у формі ліній, що є наслідком перетину двох поверхонь. В'язі можуть змінюватися з часом, тоді їх називають нестационарними. Можна навести приклади, коли обмеження примушують точку рухатися лише в певній частині простору, тоді вони будуть записуватися у формі нерівності. При наявності цих обмежень, які називають в'язями, на рух точки, незалежно від діючих сил, координати точки певним чином зв'язані між собою і тому *вибір початкових умов не може бути довільним*.

Отже, будемо називати матеріальну точку *невільною*, а її рух – *невільним рухом*, якщо внаслідок тих чи інших обмежень при дії на неї будь-яких сил вона виконує рух або по строго фіксованій лінії, поверхні, або знаходиться в строго фіксованій частині простору.

При вивченні невільного руху точки застосовують відповідну аксіому про звільнення від в'язей, замінюючи їх дію відповідними силами, які називають реакціями в'язей. Тоді точку можна вважати вільною, але такою, на яку діють не тільки активні сили, але й пасивні – реакції в'язей.

Якщо позначити через  $\vec{F}$  рівнодійну всіх активних сил, що прикладені до точки, а через  $\vec{R}$  – рівнодійну всіх реакцій в'язей, то основне рівняння динаміки у векторній формі можна записати у вигляді

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{R}. \quad (13.29)$$

Векторному рівнянню (13.29) можна поставити у відповідність три скалярних у проєкціях на осі:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + R_x; \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + R_y; \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + R_z. \end{aligned} \quad (13.30)$$

Особливістю цих рівнянь є те, що в них реакції  $R_x, R_y, R_z$  є невідомими функціями часу, тому система рівнянь (13.30) є невизначеною або незамкненою. Тому потрібно скласти ще додаткові рівняння, які враховували б відповідні рівняння в'язей та їх властивості – ідеально гладкі поверхні (без тертя), шорсткі поверхні (з тертям) тощо.

Розглянемо методику розв'язання задач динаміки вільної точки в окремих випадках, коли точка рухається: 1) по ідеально гладкій нерухомій поверхні; 2) по ідеально гладкій нерухомій кривій.

**1. Рух точки по гладкій нерухомій поверхні.** Для вивчення руху матеріальної точки по поверхні використаємо рівняння (13.30):

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + R_x; \\ m\ddot{y} &= F_y + R_y; \\ m\ddot{z} &= F_z + R_z. \end{aligned} \quad (13.31)$$

Ці рівняння включають шість невідомих: три координати точки  $(x, y, z)$  і три невідомі проєкції  $(R_x, R_y, R_z)$  реакцій в'язей.

Як уже зазначалося, координати точки мають задовольняти рівнянню поверхні. Це дає четверте рівняння:

$$f(x, y, z) = 0. \quad (13.32)$$

Звичайно, що чотирьох рівнянь для визначення шести невідомих недостатньо. Для отримання двох рівнянь, яких не вистачає, використаємо властивість в'язей – їх ідеальність.

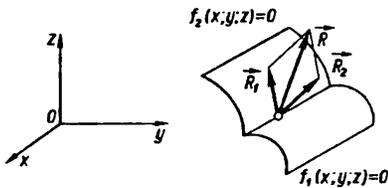


Рис. 13.3

Оскільки поверхня ідеально гладка, то це означає, що тертя відсутнє, і реакція напрямлена по нормалі  $\vec{n}$  до поверхні.

Як відомо, градієнт функції  $f$

$$\overline{\text{grad}}f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (13.33)$$

також є вектором, який напрямлений по нормалі  $\vec{n}$  до поверхні. Отже, вектори  $\vec{R}$  та  $\overline{\text{grad}}f$  колінеарні.

Вишишемо умови їх колінеарності:

$$\frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{R_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{R_z}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \quad (13.34)$$

Таким чином, рівняння (13.32) – (13.34) дають змогу в принципі розв'язати задачу про рух точки по гладкій поверхні.

Зауважимо, що із рівнянь (13.31) та (13.34) можна виключити реакції в'язей. Для цього позначимо рівні відношення (13.34) через  $\lambda$ , тобто

$$\frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{R_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{R_z}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \lambda, \quad (13.35)$$

тоді

$$R_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad R_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad R_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \quad (13.36)$$

і рівняння (13.31) наберуть вигляду:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}; \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (13.37)$$

Приєднуючи до цих трьох рівнянь четверте рівняння в'язі (13.32), отримаємо систему чотирьох рівнянь з чотирма невідомими –  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\lambda$ . Після знаходження цих невідомих за формулами (13.36) можна знайти проєкції реакції в'язі та їх модуль:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \\ &= |\lambda| \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \end{aligned} \quad (13.38)$$

Вектор реакції в'язей  $\vec{R}$  визначається виразом

$$\vec{R} = \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) = \lambda \overline{\text{grad}}f. \quad (13.39)$$

Рівняння (13.37) називаються *рівняннями Лагранжа першого роду*.

**2. Рух точки по гладкій нерухомій кривій.** Розглянемо ефективність у цьому випадку рівнянь Лагранжа першого роду та натуральних рівнянь.

2.1. Рівняння Лагранжа першого роду. При русі точки по кривій рівняння в'язей мають вигляд

$$f_1(x, y, z) = 0; \quad f_2(x, y, z) = 0, \quad (13.40)$$

оскільки крива утворюється внаслідок перетину двох поверхонь, рівняння яких  $f_1(x, y, z) = 0$ ,

$$f_2(x, y, z) = 0 \quad (\text{рис. 13.3}).$$

У цьому випадку в рівнянні (13.29) реакцію  $\vec{R}$  потрібно розглядати як суму реакцій, тобто

$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2, \quad (13.41)$$

де  $\vec{R}_1$  і  $\vec{R}_2$  – реакції, що замінюють відповідно дію першої та другої в'язі. Тому дифе-

рещіальні рівняння руху точки запишуться у формі

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x + R_{1x} + R_{2x}; \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y + R_{1y} + R_{2y}; \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z + R_{1z} + R_{2z}. \end{aligned} \quad (13.42)$$

Ці рівняння включають дев'ять невідомих: три координати точки і шість проєкцій реакцій в'язей.

Приєднуючи до рівнянь (13.42) два рівняння в'язей (13.40) та умови ідеальності в'язей

$$\frac{R_{1x}}{\frac{\partial f_1}{\partial x}} = \frac{R_{1y}}{\frac{\partial f_1}{\partial y}} = \frac{R_{1z}}{\frac{\partial f_1}{\partial z}}, \quad (13.43)$$

і

$$\frac{R_{2x}}{\frac{\partial f_2}{\partial x}} = \frac{R_{2y}}{\frac{\partial f_2}{\partial y}} = \frac{R_{2z}}{\frac{\partial f_2}{\partial z}}, \quad (13.44)$$

отримаємо дев'ять рівнянь з дев'ятьма невідомими. З цих рівнянь, як і у попередньому випадку, можна виключити проєкції в'язей. Для цього відношення у виразах (13.43) і (13.44) позначимо через  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ , тоді матимемо

$$\begin{aligned} R_{1x} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad R_{1y} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y}, \\ R_{1z} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z}, \\ R_{2x} &= \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad R_{2y} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ R_{2z} &= \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (13.45)$$

Таким чином, рівняння (13.42) наберуть вигляду

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}; \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}; \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (13.46)$$

Система (13.46) разом з рівняннями в'язей (13.40) утворює систему п'яти рівнянь з п'ятьма невідомими  $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$ .

Реакції  $\vec{R}_1$  і  $\vec{R}_2$  визначаються формулами

$$\begin{aligned} \vec{R}_1 &= \lambda_1 \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \vec{k} \right) = \\ &= \lambda_1 \overline{\text{grad}} f_1, \\ \vec{R}_2 &= \lambda_2 \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \vec{k} \right) = \\ &= \lambda_2 \overline{\text{grad}} f_2. \end{aligned} \quad (13.47)$$

Модулі цих реакцій відповідно дорівнюють

$$\begin{aligned} R_1 &= |\lambda_1| \sqrt{\left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} \right)^2}, \\ R_2 &= |\lambda_2| \sqrt{\left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial z} \right)^2}. \end{aligned} \quad (13.48)$$

**Приклад 4.** Розглянути рух важкої точки масою  $m$  по внутрішній поверхні циліндра радіусом  $r$ . Вісь циліндра горизонтальна (рис. 13.4).

Розв'язання. Сумістимо початок координат (точку  $O$ ) з будь-якою точкою осі циліндра, на-

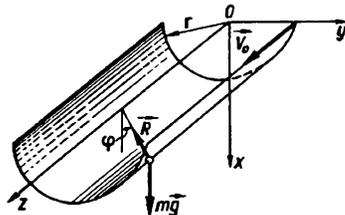


Рис. 13.4

прямо в'єс  $Ox$  вертикально, в'єс  $Oy$  горизонтально, а в'єс  $Oz$  – по осі циліндра.

Приймемо, що в початковий момент (при  $t = 0$ ) положення точки визначається координатами:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = r, \quad z(0) = 0,$$

$$\dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = v_0,$$

тобто початкова швидкість напрямлена паралельно осі  $Oz$ .

На матеріальну точку діють сила ваги  $m\vec{g}$  і реакція в'язі  $\vec{R}$ , яка напрямлена по радіусу (рис. 13.4).

Рівняння в'язі (циліндричної поверхні) має вигляд

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

звідки

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Проекції сили визначаються виразами:

$$F_x = mg, \quad F_y = F_z = 0;$$

$$R_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad R_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad R_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Підставивши ці вирази для сил в рівняння (13.31), матимемо

$$m\ddot{x} - mg + 2\lambda x, \quad m\ddot{y} = 2\lambda y, \quad m\ddot{z} = 0. \quad (1)$$

Із третього рівняння (1), після інтегрування при заданих початкових умовах, отримаємо

$$z = v_0 t,$$

тобто відстань від початкової площини  $Oxy$  зростає пропорційно часу.

Помноживши перше рівняння (1) на  $y$ , а друге – на  $x$  і віднімаючи із першого рівняння друге, знайдемо

$$m(\ddot{x}y - y\ddot{x}) = mgy. \quad (2)$$

Помноживши перше рівняння (1) на  $x$  і додавши його до другого, помноженого на  $y$ , матимемо

$$m(\ddot{x}x + \ddot{y}y) = mgx + 2\lambda(x^2 + y^2). \quad (3)$$

Перейдемо тепер до циліндричних координат за формулами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Оскільки

$$\dot{x} = -r\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = r\dot{\varphi} \cos \varphi;$$

$$\ddot{x} = -r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi, \quad \ddot{y} = r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi,$$

то рівняння (2) та (3) наберуть вигляду

$$mr^2\ddot{\varphi} - mgr \sin \varphi,$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{r} \sin \varphi = 0 \quad (4)$$

і

$$mr^2\dot{\varphi}^2 = mgr \cos \varphi + 2\lambda r^2. \quad (5)$$

Перепишемо рівняння (4) у формі

$$\dot{\varphi} d\dot{\varphi} = -\frac{g}{r} \sin \varphi d\varphi,$$

тоді після інтегрування отримаємо

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{r} \cos \varphi + C.$$

Оскільки при  $t = 0$   $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ , то  $C = 0$ , отже,

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{r} \cos \varphi. \quad (6)$$

Із цього рівняння видно, що при вибраних початкових умовах рух точки відбуватиметься в області, де  $\cos \varphi \geq 0$ , тобто при  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

Підставивши вираз (6) у рівняння (5), матимемо

$$\lambda = -\frac{3mg}{2r} \cos \varphi.$$

У відповідності до формул (13.36) отримаємо

$$R_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = -3mg \cos^2 \varphi,$$

$$R_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = -3mg \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$R_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Модуль реакції

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 3mg \cos \varphi.$$

Реакція дорівнює нулю при  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ . Максимальне значення реакції буде при  $\varphi = 0$  і дорівнюватиме  $R = 3mg$ . Для визначення закону зміни кута  $\varphi$  потрібно зінтегрувати рівняння (6) Це буде зроблено в наступному розділі.

2.2. *Натуральні рівняння руху по кривій*. Покажемо, що застосування натуральних рівнянь при русі точки по кривій є значно ефективнішим і не вимагає таких громіздких перетворень, які мають місце при застосуванні рівнянь Лагранжа першого роду.

Дійсно, рівняння руху точки по кривій є за визначенням невільним і в проєкціях на осі натурального тригранника мають вигляд

$$\begin{aligned} mw_{\tau} &= F_{\tau} + R_{\tau}, \\ mw_n &= F_n + R_n, \\ mw_b &= F_b + R_b. \end{aligned} \quad (13.49)$$

Підставивши в (13.49) вирази для проєкцій прискорення, матимемо

$$\begin{aligned} m \frac{dv_{\tau}}{dt} &= F_{\tau} + R_{\tau}, \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F_n + R_n, \\ 0 &= F_b + R_b. \end{aligned} \quad (13.50)$$

Рівняння (13.50) називаються *натуральними рівняннями руху*.

Із третього рівняння випливає, що біномальна складова реакції  $R_b$  визначається статично через біномальну складову активної сили і не залежить від закону руху точки. При заданих активних силах і відомих рівняннях в'язей (13.40) рівняння (13.49) дають змогу визначити закон руху точки та реакції в'язей. Зауважимо, що між проєкціями реакції  $R_{\tau}$ ,  $R_n$ ,  $R_b$  існує досить простий взаємозв'язок.

Так, при русі точки по шорсткій кривій проєкція  $R_{\tau}$  є силою тертя ковзання, модуль якої дорівнює

$$|\vec{R}_{\tau}| = k\sqrt{R_n^2 + R_b^2}, \quad (13.51)$$

де  $k$  – коефіцієнт тертя ковзання.

Сила тертя ковзання завжди націлена протилежно швидкості, тому

$$\vec{R}_{\tau} = -k\sqrt{R_n^2 + R_b^2} \frac{\vec{v}_{\tau}}{v}. \quad (13.52)$$

Якщо рух точки відбувається по ідеально гладкій поверхні, то  $R_{\tau} = 0$  і натуральні рівняння руху набирають вигляду

$$\begin{aligned} m \frac{dv_{\tau}}{dt} &= F_{\tau}, \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F_n + R_n, \\ 0 &= F_b + R_b. \end{aligned} \quad (13.53)$$

Як бачимо з рівнянь (13.53), в цьому випадку перше рівняння слугує для визначення закону руху, а друге і третє – для визначення реакції в'язі. При русі точки по плоскій, нерухомій шорсткій кривій рівняння (13.50) записується у формі

$$\begin{aligned} m \frac{dv_{\tau}}{dt} &= F_{\tau} + R_{\tau} = F_{\tau} - kR_n \frac{v_{\tau}}{v}, \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F_n + R_n. \end{aligned} \quad (13.54)$$

**Приклад 5.** Використовуючи рівняння (13.53), дослідити рух математичного маятника (рис. 13.5). *(Математичним маятником називається матеріальна точка, яка рухається під дією сили ваги по гладкому колу, що розташоване у вертикальній площині).*

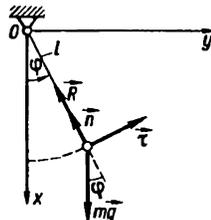


Рис. 13.5

Розв'язання. Реалізуємо заданий рух точки по гладкому колу, підвісивши матеріальну точку масою  $m$  на нитці, що не розтягується, а другий кінець нитки завдовжки  $l$  закріпимо в точці  $O$  (рис. 13.5) При цьому початкова швидкість підвищеної точки має розташовуватись у вертикальній площині  $Oxy$  перпендикулярно до радіуса. Така конструкція маятника реалізує рух точки по гладкому колу (бо тертя відсутнє).

Положення точки визначатимемо кутом  $\varphi$  між вертикаллю (віссю  $Ox$ ) та ниткою. Якщо маса точки  $m$ , то діюча на точку сила ваги дорівнює  $mg$  і напрямлена вертикально – паралельно осі  $Ox$ . Оскільки довжина нитки дорівнює  $l$ , то дуга координата  $s$  і швидкість  $v_t$  точки будуть

$$s = l\varphi, \quad v_t = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\varphi}{dt}.$$

Відповідні проєкції сили на напрям нормалі  $\vec{n}$  та дотичної  $\vec{\tau}$  будуть визначатись виразами

$$F_n = -mg \sin \varphi, \quad F_\tau = -mg \cos \varphi.$$

Реакція  $\vec{R}$  у цьому випадку буде напрямлена завжди вздовж нитки до точки її закріплення.

Радіус кривини  $\rho$  в цьому випадку дорівнює  $l$  ( $\rho = l$ ). З урахуванням викладеного рівняння (13.53) виглядатимуть так:

$$ml \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi,$$

$$ml \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -mg \cos \varphi + R,$$

оскільки  $R_t = 0$ .

Перепишемо ці рівняння в наступній формі:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (1)$$

$$R = ml \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mg \cos \varphi. \quad (2)$$

Як бачимо, рівняння (1) слугує для визначення закону руху маятника, а рівняння (2) – для визначення реакції нитки.

Нехай у початковий момент ( $t = 0$ ) нитка відхилена від вертикалі на кут  $\varphi = \varphi_0$  і відпущена з

кутовою швидкістю  $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$ . Визначимо реакцію в залежності від кута  $\varphi$ , а також закон руху точки  $\varphi = \varphi(t)$ .

Згідно з рівнянням (2) для визначення реакції  $R$  в залежності від кута  $\varphi$  потрібно виразити величину  $\dot{\varphi}^2$  через цей кут. Подамо  $\frac{d^2 \varphi}{dt^2}$  у рівнянні (1) у формі складної функції

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[ \dot{\varphi}(\varphi(t)) \right] = \\ &= \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi}; \end{aligned}$$

запишемо рівняння (1) у вигляді рівняння з роздільними змінними

$$\frac{1}{2} l d\dot{\varphi}^2 = -g \sin \varphi d\varphi.$$

Враховуючи початкові умови  $\varphi = \varphi_0, \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ , зінтегруємо це рівняння, тоді матимемо

$$\frac{1}{2} l \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\dot{\varphi}^2 = -g \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varphi d\varphi.$$

Звідси отримаємо

$$\frac{l}{2} (\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_0^2) = g (\cos \varphi - \cos \varphi_0). \quad (3)$$

Визначивши  $\dot{\varphi}^2$ , підставимо його в рівняння (2), матимемо

$$R = ml\dot{\varphi}_0^2 + mg(3\cos \varphi - 2\cos \varphi_0).$$

Якщо врахувати, що  $v_0 = l\dot{\varphi}_0$ , тоді останньому виразу можна надати форми

$$R = \frac{mv_0^2}{l} + mg(3\cos \varphi - 2\cos \varphi_0). \quad (4)$$

Дослідимо отриманий розв'язок (4). Знайдемо такі параметри руху, зокрема кут  $\varphi = \varphi_1$ . коли нитка зімнеться, тобто в'язь перестане бути утримуючою. Це настане тоді, коли  $R \leq 0$ . Із (4) отримаємо відповідну нерівність:

$$\frac{mv_0^2}{l} + mg(3\cos \varphi_1 - 2\cos \varphi_0) \leq 0.$$

Звідси маємо

$$\cos \varphi_1 \leq \frac{1}{3} \left( 2 \cos \varphi_0 - \frac{v_0^2}{gl} \right).$$

Якщо поставити умову, щоб в'язь була утримуючою при будь-якому куті, навіть при верхньому вертикальному положенні нитки ( $\varphi_1 = \pi$ ),

то початкова швидкість має бути

$$v_0 \geq \sqrt{(3 + 2 \cos \varphi_0)gl};$$

при цьому маятник виконуватиме коловий рух.

Зокрема, при  $\varphi_0 = 0$ , отримаємо  $v_0 \geq \sqrt{5gl}$ .

Якщо початкова швидкість  $v_0$  дорівнює нулю

$\dot{\varphi}_0 = 0$  ( $v_0 = 0$ ), то формула (3) набуде вигляду

$$l\ddot{\varphi}^2 = 2g(\cos \varphi - \cos \varphi_0). \quad (5)$$

Отже, протягом усього руху мають виконуватись нерівності  $\cos \varphi \geq \cos \varphi_0$  і  $\varphi \leq \varphi_0$ , фізичний зміст яких означає, що за цих умов маятник виконуватиме лише коливальний рух відносно вертикального положення з амплітудою, яка менше  $\varphi_0$ .

Перейдемо до визначення закону руху маятника  $\varphi = \varphi(t)$ .

Позначивши в рівнянні (1)  $k^2 = \frac{g}{l}$ , запишемо

його у формі  $\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = 0$ . Як бачимо, це диференціальне рівняння є нелінійним і зінтегрувати його досить важко, тому обмежимося випадком малих відхилень, коли можна прийняти  $\sin \varphi \approx \varphi$ . У цьому випадку диференціальні рівняння руху  $\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0$  збігаються за формою з диференціальними рівняннями вільних прямолінійних коливань, які ми розглядали в кінематиці найпростіших рухів.

Отже, кут  $\varphi$  буде змінюватися за гармонічним законом  $\varphi = \varphi_0 \cos kt + \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt$ . Період цих малих коливань маятника дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

а амплітуда коливань

$$a = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{\dot{\varphi}_0}{k}\right)^2}.$$

Як бачимо, при малих коливаннях період не залежить від початкового відхилення  $\varphi_0$  і початкової швидкості  $\dot{\varphi}_0$ , тобто від амплітуди коливань  $a = a(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ . Такі коливання називають ізохронними і їх період визначається формулою Гюйгенса.

У розділі нелінійних коливань покажемо, що насправді коливання математичного маятника не є ізохронними, бо їх період залежить від амплітуди коливань.

На цьому завершимо дослідження математичного маятника.

### Питання для самоконтролю

1. Чим відрізняється форма запису диференціальних рівнянь руху матеріальної точки від форми запису другого закону Ньютона?
2. У чому суть прямої та оберненої задач динаміки точки?
3. Що таке інертна та динамічна маси?
4. У чому суть принципу незалежності дії сил?
5. Чим відрізняються диференціальні рівняння невільної матеріальної точки від рівнянь руху вільної точки?
6. Як записуються рівняння Лагранжа першого роду?
7. Яку перевагу мають рівняння руху точки по гладкій кривій, записані у натуральній формі, по відношенню до рівнянь Лагранжа першого роду?
8. Як у рівняннях невільної точки врахувати сили тертя ковзання?
9. Що називають математичним маятником?
10. Сільки і які закони Ньютона лежать в основі динаміки?

## ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ ТОЧКИ ПІД ДІЄЮ ЦЕНТРАЛЬНОЇ СИЛИ ТА ЇХ АНАЛІЗ

### § 14.1. Рівняння руху точки під дією центральної сили

Нагадаємо, що сила, яка діє на матеріальну точку, називається центральною, якщо лінія її дії весь час проходить через нерухому точку – центр сили (рис. 14.1).

Частину простору, в якому діють центральні сили, називають *центральною силовою полем*.

У загальному випадку центральна сила є функцією радіуса  $\vec{F} = \vec{F}(r)$ .

Покажемо, що траєкторія матеріальної точки, яка рухається під дією центральної сили, є плоскою кривою.

Дійсно, рівняння руху матеріальної точки має вигляд

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(r). \quad (14.1)$$

Помноживши векторно обидві частини рівняння (14.1) на  $\vec{r}$  і враховуючи, що сила  $\vec{F}$  проходить через точку  $O$ , одержимо

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0 = 0. \quad (14.2)$$

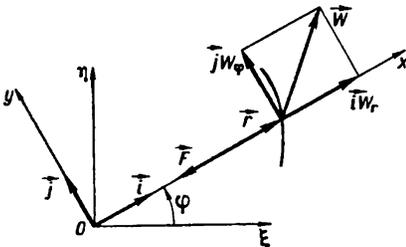


Рис. 14.1

Отже, звідси маємо

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = 0. \quad (14.3)$$

Із рівняння (14.3) отримавмо

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{C} = \overline{\text{const}}, \quad (14.4)$$

де  $\vec{C}$  – постійний вектор, який визначається з початкових умов.

Оскільки вектор  $\vec{C}$  перпендикулярний до площини, в якій розміщені вектори  $\vec{r}$  та  $\vec{v}$ , і ця площина не змінює свого напрямку під час руху точки, то траєкторією точки є плоска крива. Як показано в § 7.8,  $\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \vec{v}_s$  – це секторна швидкість. Із (14.4) випливає, що секторна швидкість – постійний вектор. Із (14.4) легко отримати інтеграл площ

$$S = v_s t + C_1. \quad (14.5)$$

Отже, під дією центральної сили матеріальна точка рухається так, що площі, які описуються радіусом-вектором точки, зростають пропорційно часу.

Співвідношення (14.5) відображає суцільно звану теорему площ.

Проектуючи обидві частини основного рівняння (14.1) на радіальний  $\vec{i} = \vec{r}/r$  і трансверсальний  $\vec{j}$  напрямки (рис. 14.1), дістанемо

$$m w_r = F_r, \quad m w_\varphi = F_\varphi. \quad (14.6)$$

Оскільки  $F_\varphi = 0$ , то  $w_\varphi = 0$ . Підставляючи вирази для  $w_r$  і  $w_\varphi$  (7.53), одержимо

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_r, \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0, \end{aligned} \quad (14.7)$$

тобто диференціальні рівняння руху матеріальної точки під дією центральної сили, що записані в полярних координатах.

Із другого рівняння (14.7) визначаємо інтеграл площ, тобто  $r^2\dot{\varphi} = C$  або  $r(r\dot{\varphi}) = rv_\varphi = 2v_s = C$ .

### § 14.2. Формули Біне

Як випливає з інтеграла площ, функція  $\varphi = \varphi(t)$  є монотонною, тому існує обернена до неї функція  $t = t(\varphi)$ . Це дає змогу виключити час із першого рівняння (14.7), взявши за незалежну змінну полярний кут  $\varphi$ . Враховуючи інтеграл площ

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = C/r^2,$$

маємо

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = \\ &= -C \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (14.8)$$

Диференціюючи це співвідношення за часом і знову скориставшись інтегралом площ, запишемо

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dr}{dt} \right) \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dr}{dt} \right) = \\ &= -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (14.9)$$

Підставляючи цей вираз у перше рівняння (14.7), отримаємо другу формулу Біне

$$F_r = -\frac{mC^2}{r^2} \left[ \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]. \quad (14.10)$$

Цей вираз є диференціальним рівнянням траєкторії матеріальної точки, що рухається під дією центральної сили. Воно дає можливість визначити центральну силу, якщо задана траєкторія точки в полярних координатах, або траєкторію точки, якщо задана центральна сила.

Скористаємося виразом квадрата модуля швидкості точки в полярних координатах (див. § 7.6), тоді

$$\begin{aligned} v^2 &= \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \\ &= C^2 \left[ \left( \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Це співвідношення називають *першою формулою Біне*.

Викладені в цьому розділі питання стосуються задач небесної механіки, що на сьогодні становлять особливий інтерес у зв'язку з розвитком космічних польотів.

### § 14.3. Закони Кеплера про рух планет

Йоганн Кеплер (1571–1630), опрацювавши численні спостереження за рухом планет, проведені Тіхо Браге, встановив три закони в кінематичній формі, що описують рух планет. Ці закони покладені в основу небесної механіки.

1. *Планети рухаються по еліптичних орбітах, в одному з фокусів яких розміщується Сонце.*

Позначаючи параметр еліпса через  $p$ , а ексцентриситет через  $e$  ( $e < 1$ ), рівняння траєкторії планети в полярних координатах набуде вигляду

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad (14.12)$$

де  $p = b^2/a$ ;  $a$  – велика піввісь еліпса;  $b$  – мала піввісь еліпса; ексцентриситет  $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ ;  $\sqrt{a^2 - b^2}$  – половина фокусної відстані.

2. Радіуси-вектори планет, проведені від Сонця, за однакової проміжки часу описують однакові площі.

3. Відношення кубів великих півосей орбіт до квадратів тривалості обертання для всіх планет Сонячної системи однакове:

$$\frac{T^2}{T_1^2} = \frac{a^3}{a_1^3} \text{ або } \frac{a^3}{T^2} = \text{const.} \quad (14.13)$$

#### § 14.4. Закон всесвітнього тяжіння Ньютона

На основі законів Кеплера можна вивести основний закон небесної механіки, тобто закон всесвітнього тяжіння Ньютона. Дійсно, за другим законом Кеплера планети рухаються під дією центральної сили, що визначається за формулою (14.10). Підставляючи у цю формулу вираз для  $r$  із (14.12), отримасмо

$$F = F_r = -\frac{mC^2}{r^2} \left[ \frac{d^2}{df^2} \left( \frac{1+e \cos \varphi}{p} \right) + \frac{1+e \cos \varphi}{p} \right] = -\frac{mC^2}{pr^2}. \quad (14.14)$$

Для подальшого перетворення виразу (14.14) врахуємо механічний зміст довільних сталих  $C$  і  $p$ .

Через постійну площ  $S$  виразимо період обертання планети, враховуючи, що  $S = 2v_s$ , тобто  $S$  дорівнює подвійній секторній швидкості. Площа еліпса дорівнює  $\pi ab$ , тому  $S = 2\pi ab/T$ , звідки  $T = 2\pi \frac{ab}{C}$ .

За третім законом Кеплера з урахуванням того, що  $p = b^2/a$ , дістанемо  $a^3/T^2 = \text{const}$  або  $C^2/p = \text{const} = \mu$ , де  $\mu$  називається сталою Гаусса і залежить тільки від параметрів Сонця. За виразом (14.14) остаточно визначимо

$$F_r = -\mu \frac{m}{r^2}. \quad (14.15)$$

Знак мінус показує, що планети рухаються під дією центральної притягальної сили. Ця сила прямо пропорційна масі планети та обернено пропорційна квадрату відстані планети від Сонця. Якщо в (14.14) позначити  $C^2/p = \gamma M$ , де  $M$  – маса Сонця,  $\gamma$  – гравітаційна стала, то

$$F_r = -\gamma \frac{mM}{r^2}. \quad (14.16)$$

З цієї залежності видно, що планети притягуються до Сонця із силою, що прямо пропорційна добутку мас планети і Сонця та обернено пропорційна квадрату відстані між ними. Отже, Сонце є центром поля тяжіння для планет. Формула (14.16) виражає закон зміни центральної сили  $\vec{F}$ . Цей закон справедливий не лише для Сонця і планет, а й для всіх тіл, у тому числі й мікротіл. Тому встановлений Ньютоном закон (14.16) називається *законом всесвітнього тяжіння* і формулюється так: *два тіла притягуються із силою, що прямо пропорційна добутку їхніх мас і обернено пропорційна квадрату відстані між ними:*

$$\vec{F}_r = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (14.17)$$

Зазначимо, що однакову структуру із законом всесвітнього тяжіння має закон взаємодії електричних зарядів

$$F = \epsilon \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (14.18)$$

де  $\epsilon$  – діелектрична стала;  $q_1, q_2$  – величини електричних зарядів.

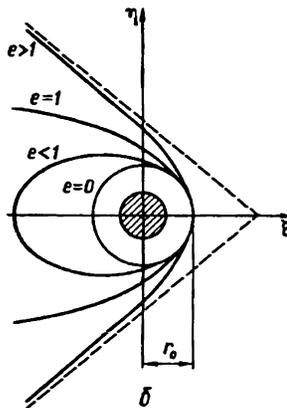
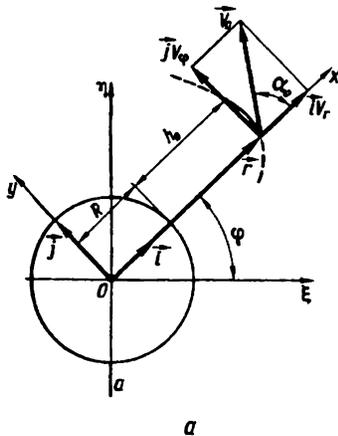


Рис. 14.2

Таку саму структуру маємо і в магнітному полі:

$$F = \mu \frac{B_1 B_2}{r^2}, \quad (14.19)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт пропорційності;  $B_1, B_2$  – індукції.

#### § 14.5. Рух штучних супутників Землі

У колишньому СРСР уперше в світі, 4 жовтня 1957 р., успішно здійснено запуск штучного супутника Землі, а 12 квітня 1961 р. виведено на орбіту навколо Землі космічний корабель-супутник “Восток” з космонавтом Ю. О. Гагарінін на борту. СРСР розпочав нову еру в історії людства – еру підкорення Космосу і міжпланетних сполучень, про які все життя мріяв основоположник космонавтики К. Е. Ціолковський.

Розглянемо рух супутника Землі, враховуючи лише дію сили земного тяжіння, яка, згідно з (14.17), обернено пропорційна квадрату відстані супутника від центра Землі, і

нехтуючи силою опору та несферичністю Землі. Визначимо форму орбіти супутника, якщо відомо, що в момент  $t = 0$  виведення супутника на орбіту на висоті  $h_0$  він мав швидкість  $\tilde{v}_0$ , яка з вертикаллю утворює кут  $\alpha_0$ . Радіус Землі  $R$ . Прискорення вільного падіння на поверхні Землі дорівнює  $g$  (рис. 14.2, а).

Отже, за відомою силою треба вивести рівняння траєкторії при заданих початкових умовах, тобто розв’язати другу основну задачу динаміки. Згідно з умовою поставленої задачі, на супутник діє центральна сила  $F = -km/r^2$ , де  $k$  – коефіцієнт пропорційності;  $m$  – маса супутника;  $r$  – відстань супутника від центра Землі  $O$ .

Як показано на початку розділу, орбітою супутника є плоска крива. Рух супутника розглянемо в полярній системі координат, початок якої розмістимо в центрі Землі (рис. 14.2, а).

Для визначення коефіцієнта пропорційності  $k$  у виразі для сили  $F$  скористаємось тим, що на поверхні Землі  $r = R$  і сила

$$F(R) = -\frac{km}{R^2} = mg. \quad (14.20)$$

Звідси  $k = -gR^2$ , тому

$$Fr^2 = -mgR^2. \quad (14.21)$$

Враховуючи, що поставлена задача про рух супутника відносно Землі є задачею про рух матеріальної точки під дією центральної сили, то виконуються наступні умови:

1) секторна швидкість постійна, тобто

$$2v_s(0) = C;$$

2) орбіта супутника – плоска крива. Це дає підстави для розв'язання цієї задачі застосувати другу формулу Біне (14.10)

$$-\frac{4mv_s^2(0)}{r^2} \left[ \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] = F. \quad (14.22)$$

Для розв'язання рівняння (14.22) потрібно задати початкові умови (рис. 14.2).

Враховуючи очевидні співвідношення

$$\begin{aligned} v_r &= v \cos \alpha, \quad v_\varphi = v \sin \alpha, \\ v_r &= \frac{dr}{dt}, \quad v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt}, \end{aligned} \quad (14.23)$$

а також те, що протягом усього руху виконується теорема площ

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C, \quad (14.24)$$

прийmemo при  $t = 0$ :

$$\varphi(0) = 0, \quad v(0) = v_0, \quad r(0) = r_0 = R + h_0,$$

$$\frac{dr}{dt}(0) = v_0 \cos \alpha,$$

$$\frac{d\varphi}{dt}(0) = \dot{\varphi}_0 = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{r_0},$$

$$2v_s(0) = 2v_{s0} = r_0^2 \dot{\varphi}_0 = v_0 r_0 \sin \alpha_0. \quad (14.25)$$

Підставивши початкове значення  $v_{s0}$  у формулу (14.22) і враховуючи (14.21), отримаємо

$$v_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0 \left[ \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] = gR^2. \quad (14.26)$$

Позначивши  $\frac{1}{r} = u$ , запишемо рівняння (14.26) у формі

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{gR^2}{v_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0}. \quad (14.27)$$

Це рівняння є диференціальним рівнянням другого порядку, лінійне, але неоднорідне. Його загальний розв'язок має вигляд

$$u = y + z, \quad (14.28)$$

де  $y$  – загальний розв'язок однорідного рівняння

$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 0$ ;  $z$  – окремий розв'язок

неоднорідного рівняння (14.27). Характеристичне рівняння (14.27) буде таким:

$$\lambda^2 + 1 = 0. \quad (14.29)$$

Звідси

$$\lambda = \pm \sqrt{-1} = \pm i.$$

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння можна подати у формі

$$y = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi = A \cos(\varphi + \epsilon), \quad (14.30)$$

де  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ;  $\text{tg } \epsilon = -\frac{C_2}{C_1}$ .

Оскільки в правій частині рівняння (14.27) стоїть постійна величина, то окремий розв'язок неоднорідного рівняння

$$z = \frac{gR^2}{v_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0} = B. \quad (14.31)$$

Беручи до уваги, що  $u = \frac{1}{r}$ , отримаємо з урахуванням (14.28)

$$\frac{1}{u} = r = \frac{1}{A \cos(\varphi + \epsilon) + B}. \quad (14.32)$$

Рівняння (14.32) і є рівнянням орбіти штучного супутника Землі в полярних координатах. Постійні інтегрування  $A$  і  $\epsilon$  знайдемо із початкових умов (14.25), тоді з (14.32) при  $t=0$  маємо

$$r_0 = R + h_0 = \frac{1}{A \cos \epsilon + B}. \quad (14.33)$$

Диференціюючи рівність (14.32) і враховуючи, що  $u = \frac{1}{r}$ , отримаємо

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = A \frac{d\varphi}{dt} \sin(\varphi + \epsilon). \quad (14.34)$$

Підставивши тепер в (14.34) початкові умови із (14.25) при  $t=0$ :  $\frac{d\varphi}{dt}(0) = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{r_0}$ ,

$\frac{dr}{dt}(0) = v_0 \cos \alpha_0$ ,  $r_0 = R + h_0$ ,  $\varphi(0) = 0$ , отримаємо

$$\frac{v_0 \cos \alpha_0}{(R + h_0)^2} = \frac{A v_0 \sin \alpha_0}{R + h_0} \sin \epsilon. \quad (14.35)$$

Із (14.33) і (14.35) маємо

$$\begin{aligned} A \cos \epsilon &= \frac{1}{R + h_0} - B, \\ A \sin \epsilon &= \frac{\text{ctg} \alpha_0}{R + h_0}. \end{aligned} \quad (14.36)$$

Піднесемо до квадрата обидві рівності (14.36), додамо їх і будемо квадратний корінь, тоді матимемо

$$A = \sqrt{\left( \frac{1}{R + h_0} - B \right)^2 + \frac{\text{ctg}^2 \alpha_0}{(R + h_0)^2}}. \quad (14.37)$$

Підставляючи сюди вираз (14.31) для  $B$ , після елементарних перетворень одержимо

$$\begin{aligned} A &= \frac{gR^2}{(R + h_0)^2 v_0^2 \sin^2 \alpha_0} \times \\ &\times \sqrt{1 - \frac{(R + h_0) v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{g^2 R^4 [2gR^2 - v_0^2 (R + h_0)]}}. \end{aligned} \quad (14.38)$$

Із співвідношень (14.36) знайдемо

$$\epsilon = \text{arctg} \frac{\cos \alpha_0 \sin \alpha_0 (R + h_0) v_0^2}{-gR^2 + (R + h_0) v_0^2 \sin^2 \alpha_0}. \quad (14.39)$$

Враховуючи постійні інтегрування  $A$  і  $\epsilon$ , рівняння орбіти супутника запишемо у формі

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi + \epsilon)}, \quad (14.40)$$

де  $p$  – параметр кривої;  $e$  – ексцентриситет, що визначається за формулою

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{B} = \frac{(R + h_0)^2 v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{gR^2}, \\ e &= \frac{A}{B} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{(R + h_0) v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{g^2 R^4 [2gR^2 - v_0^2 (R + h_0)]}}. \end{aligned} \quad (14.41)$$

Як відомо з аналітичної геометрії, залежно від значення параметра  $e$  рівняння (14.40) описуватиме різні криві другого порядку: при  $e=0$  – рівняння (14.40) є рівнянням кола; при  $e=1$  – параболи; при  $e < 1$  – еліпса; при  $e > 1$  – гіперболи (рис. 14.2, б).

Значимо, що форма орбіти супутника залежить від початкових умов під час запуску супутника. Наприклад, якщо  $e=0$ , то із (14.41) визначимо, що при  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$  по-

чаткова швидкість  $v_0 = R\sqrt{\frac{g}{R+h_0}}$  і  $\vec{v}_0 \perp \vec{r}_0$ .

У цьому разі орбітою супутника буде коло. При  $e < 1$  орбітою супутника буде еліпс. Із співвідношення (14.41), якщо  $e < 1$ , отримасмо умову реалізації еліптичної орбіти

$$2gR^2 - (R+h_0)v_0^2 > 0. \quad (14.42)$$

Із нерівності (14.42) легко визначити обмеження, що накладається на початкову швидкість для реалізації орбіти у вигляді еліпса:

$$v_0 < \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h_0}}. \quad (14.43)$$

Найменша відстань  $r_{\min}$  супутника від центра Землі має задовольняти умову

$$r_{\min} \geq R, \quad (14.44)$$

оскільки супутник не може бути всередині Землі. Для дослідження руху супутника широко користуються поняттям першої та другої космічних швидкостей.

*Першою космічною, або коловою, швидкістю називають найменшу швидкість, яку треба надати тілу в разі руху на невеликій висоті  $h_0$  ( $h_0 \ll R$ ) для того, щоб воно могло стати штучним супутником Землі (випадок колової орбіти).*

При цьому  $e=0$  і параметр  $p=r_0$  (рис. 14.2, б). Приймавши  $r_0 \approx R$ , визначимо першу космічну швидкість:  $v_1 = \sqrt{gR} = \sqrt{9,81 \cdot 6,37 \cdot 10^6} = 7910 \text{ м/с} = 7,9 \text{ км/с}$ .

*Другою космічною, або параболичною, швидкістю називають найменшу швидкість, яку треба надати тілу поблизу поверхні Землі для того, щоб воно могло покинути сферу тяжіння Землі й перетворитися на супутник Сонця. Для здійснення цієї умови треба, щоб орбіта була параболою ( $e=1$ ). Отже, при  $e=1$ ,  $r_0 \approx R$  із (14.41) визначимо*

$$v_2 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 6,37 \cdot 10^6} = 11170 \text{ м/с} = 11,2 \text{ км/с}.$$

**Приклад 1.** Супутник рухається по коловій орбіті на висоті  $h$  від поверхні Землі. Яку додаткову швидкість потрібно надати супутникові, щоб він перейшов на параболичну орбіту?

Розв'язання. Супутник, рухаючись по коловій орбіті, має швидкість, яку легко отримати із (14.41), поклавши  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $e=0$ ; тоді

$$1 - \frac{(R+h)v_0^2}{g^2R^4} [2gR^2 - v_0^2(R+h)] = 0$$

або

$$v_0^4(R+h)^2 - 2v_0^2(R+h)gR^2 + g^2R^4 = 0.$$

Очевидно, що цей вираз є повним квадратом різниці

$$[v_0^2(R+h) - gR^2]^2 = 0.$$

Звідси знайдемо швидкість супутника на коловій орбіті

$$v_0^2 = \frac{gR^2}{R+h}, \text{ або } v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}.$$

Для того, щоб супутник перейшов на параболичну орбіту (14.43), швидкість має бути не меншою

$$v_{02} = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}.$$

Отже, супутнику потрібно надати додаткову швидкість

$$\Delta v = v_{02} - v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} (\sqrt{2} - 1).$$

Нехай  $h = 200 \text{ км} = 2 \cdot 10^5 \text{ м}$ ; радіус Землі  $R = 6370 \text{ км} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$ ;  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ; тоді  
 $\Delta v = 3219 \text{ м/с} = 3,219 \text{ км/с}$ .

**Приклад 2.** На яку висоту  $h$  потрібно запустити супутник по коловій орбіті, щоб його період обертання дорівнював періоду обертання Землі навколо своєї осі (24 год)<sup>1</sup>?

Розв'язання. Знайдемо спочатку період  $T$  повного обертання супутника.

За час повного обертання супутник опише повну площу еліпса

$$S = \pi ab.$$

У той самий час має місце теорема площ, згідно з якою площа, що описується радіусом-вектором за час  $t$ , дорівнює

$$S = v_S t,$$

де  $v_S$  – секторна швидкість.

За час  $t = T$  матимемо рівність

$$\pi ab = v_S T.$$

Для колової орбіти  $a = b = R + h$  і ця формула набуде вигляду

$$\pi a^2 = v_S T.$$

Враховуючи те, що  $a = R + h$ , і згідно з (14.25)

$$\text{при } \alpha_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$v_S = \frac{v_0(R+h)}{2}$$

матимемо

$$\pi(R+h)^2 = \frac{v_0(R+h)T}{2}.$$

Звідси

$$T = 2\pi \frac{R+h}{v_0}.$$

<sup>1</sup>Якщо орбіта супутника лежить у площині екватора і напрям руху збігається з напрямом обертання Землі, то супутник буде весь час висіти над однією і тією самою точкою Землі. Такий супутник називають стаціонарним.

Якщо врахувати, що для колової орбіти

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}},$$

то, підставивши у формулу для періоду  $T$  це значення, матимемо

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{gR^2}}.$$

Звідси

$$(R+h)^3 = \frac{T^2 g R^2}{4\pi^2}.$$

Із цієї рівності знайдемо шукану висоту  $h$ :

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 g R^2}{4\pi^2}} - R.$$

Підставивши  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ,  $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$ ,  $T = 8,64 \cdot 10^4 \text{ с}$ , отримаємо

$$h \approx 35\,630 \text{ км}.$$

Задача розв'язана.

### Питання для самоконтролю

1. Яку силу називають центральною?
2. У чому суть теореми площ?
3. Як записується друга формула Біне?
4. Який вигляд має перша формула Біне для квадрата модуля швидкості?
5. Як формулюються три закони Кеплера?
6. Що спільного в законі всесвітнього тяжіння, взаємодії електричних і магнітних зарядів?
7. Чому орбіта штучних супутників Землі є плоскою кривою?
8. Чи рівномірно рухається супутник по еліптичній орбіті?
9. За якою формулою обчислюється перша космічна швидкість і чому вона дорівнює чисельно?
10. У скільки разів друга космічна швидкість більша за першу?

## ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК. ДИНАМІЧНІ РІВНЯННЯ РУХУ. ГЕОМЕТРІЯ МАС

### § 15.1. Основні поняття динаміки системи матеріальних точок

*Системою матеріальних точок* називається сукупність матеріальних точок, положення і рухи яких взаємозв'язані.

Розрізняють *вільні* та *невільні* системи. Якщо на рух точок системи не накладені наперед задані обмеження, що не залежать від закону руху, то система називається *вільною*. Іншими словами, якщо точки системи у будь-який момент часу можуть займати довільне положення і мати довільні швидкості, то така система матеріальних точок називається *вільною*. Прикладом вільної системи є Сонячна система, причому Сонце і планети розглядаються як матеріальні точки. Це пояснюється тим, що відстані між Сонцем і планетами дуже великі порівняно з їхніми розмірами.

*Невільною* називається така система матеріальних точок, на рух яких накладені в'язі. У задачах техніки зустрічаються в основному невідільні системи (невідільні тверді тіла).

Нагадаємо, що в'язі поділяються на *геометричні* та *кінематичні*. *Геометричні* в'язі накладають обмеження на координати точок системи, *кінематичні* – на швидкості точок системи.

Умови, що обмежують вільність руху матеріальних точок системи, виражаються деякими рівняннями, які називаються *рівняннями в'язей*. У загальному випадку ці рівняння встановлюють зв'язки між координатами матеріальних точок, проєкціями швидкостей цих точок і часом.

Рівняння геометричної в'язі мають вигляд

$$f_j(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad (15.1)$$

$$j = 1, 2, \dots, k_1.$$

Рівняння кінематичного зв'язку записують у формі

$$\Phi_j(t, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, \ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{z}_1, \dots, \ddot{x}_n, \ddot{y}_n, \ddot{z}_n) = 0, \quad (15.2)$$

$$j = 1, 2, \dots, k_2.$$

Якщо на систему матеріальних точок одночасно накладено геометричні та кінематичні в'язі, то загальна кількість в'язей буде  $k = k_1 + k_2$ , де  $k_1$  – кількість геометричних в'язей,  $k_2$  – кількість кінематичних в'язей.

Зазначимо, для того щоб рух відбувався, загальна кількість в'язей  $k$  не повинна перевищувати числа  $3n$  координат  $n$  матеріальних точок системи.

За класифікацією німецького фізика Г. Герца (1857-1894), в'язі поділяються на *голономні* та *неголономні*.

*Голономними* називаються в'язі, рівняння яких можуть бути зінтегровані. *Неголономними*, або *неінтегрованими*, називаються в'язі, у диференціальні рівняння яких явно входять швидкості так, що для цих рівнянь не існує інтегруючого множника.

Класичним прикладом системи з неголономними в'язями є кочення без ковзання абсолютно твердого кулі радіусом  $a$  по шорсткій поверхні.

Введемо нерухому систему координат  $A\xi\eta\zeta$  (рис. 15.1, а), зв'язану з нерухомою площиною, і рухому  $Sx_1y_1z_1$ , зв'язану з кулею

з полюсом  $C$  у центрі кулі. Положення кулі відносно системи координат  $A\xi\eta\zeta$  задамо за допомогою кутів Ейлера (див. рис. 10.3, *a*). Точка  $P$  є миттєвим центром швидкостей, тому

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r} = 0, \quad (15.3)$$

де  $\vec{v}_C$  – швидкість центра кулі;  $\vec{r}$  – радіус-вектор точки  $P$ ;  $\vec{\omega}$  – миттєва кутова швидкість кулі.

Проектуючи на осі нерухомої системи координат  $A\xi\eta\zeta$  обидві частини цього рівняння, одержимо

$$\begin{aligned} v_{C\xi} + \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta &= 0, \\ v_{C\eta} + \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta &= 0, \\ v_{C\xi} + \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi &= 0, \end{aligned} \quad (15.4)$$

де  $v_{C\xi} = \dot{\xi}_C$ ,  $v_{C\eta} = \dot{\eta}_C$ ,  $v_{C\zeta} = \dot{\zeta}_C$ ,  $\xi = 0$ ,  $\eta = a$ ,  $\zeta = 0$ .

З рис. 10.3, *a* за допомогою основної формули сферичної тригонометрії (10.20) знайдемо

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta, \\ \omega_\zeta &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi. \end{aligned} \quad (15.5)$$

З урахуванням співвідношень для  $\omega_\xi$ ,  $\omega_\eta$ ,  $\omega_\zeta$  вирази для проєкцій лінійної швидкості наберуть вигляду

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_C - a(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi) &= 0, \\ \dot{\eta}_C &= 0, \\ \dot{\zeta}_C + a(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi) &= 0. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Ці рівняння не мають інтегруючого множника, тому в'язь є неголономною.

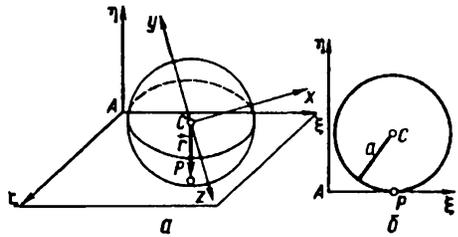


Рис. 15.1

Плоский диск, що котиться по прямій лінії (рис. 15.1, *b*), є системою з голономними в'язями. Рівняння в'язей у цьому випадку мають вигляд

$$\dot{\eta}_C = 0, \quad \dot{\xi}_C - a\dot{\theta} = 0. \quad (15.7)$$

Очевидно, ці рівняння інтегруються. Масмо

$$\eta_C = a, \quad \xi_C - a\theta = \text{const}. \quad (15.8)$$

Розрізняють також в'язі *неутримуючі* та *утримуючі*.

В'язь називається *утримуючою*, якщо вона обмежує рух як у певному напрямі, так і у протилежному. Утримуюча в'язь виражається рівнянням (15.2). В'язь називається *неутримуючою*, якщо вона обмежує рух у певному напрямі, але не обмежує у протилежному. Неутримуюча в'язь визначається нерівністю

$$\begin{aligned} \Phi_j(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \\ \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) \leq 0, \\ j = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (15.9)$$

У механіці найчастіше розглядають утримуючі в'язі. Розрізняють також в'язі *стаціонарні* і *нестационарні*. Якщо в рівняння в'язі явно час не входить, то в'язь називається *стаціонарною*. У протилежному випадку в'язь називається *нестационарною*.

## § 15.2. Сили. Їх класифікація та властивості

У динаміці, так само як і в статичі, використовують дві класифікації сил, прикладених до системи матеріальних точок, а саме: 1) *сили внутрішні і зовнішні*; 2) *активні сили і реакції в'язей*.

*Сили внутрішні і зовнішні.* Нагадаємо, що *внутрішніми називаються сили взаємодії між матеріальними точками однієї і тієї самої системи.* Внутрішні сили позначимо  $\vec{F}_i^{\text{вн}}$ . Вони мають такі властивості: *головний вектор і головний момент внутрішніх сил відносно деякої точки, наприклад  $O$ , дорівнюють нулю:*

$$\vec{F}^{\text{вн}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{вн}} = 0, \quad (15.10)$$

$$\vec{M}_O^{\text{вн}} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i^{\text{вн}}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Умову (15.10) одержуємо на основі третього закону Ньютона. Слід зазначити, що ці умови не можна розглядати як достатні умови рівноваги внутрішніх сил. При розгляді руху змінюваної системи матеріальних точок питання про рівновагу внутрішніх сил не має фізичного змісту, оскільки ці сили прикладені до різних тіл і до них не можна застосовувати аксіому I про дві сили, хоча внутрішні сили діють попарно, мають загальну лінію дії, рівні за модулем і протилежно напрямлені. Наприклад, між Сонцем і Землею діють внутрішні сили взаємного притягання, але одна з них прикладена до Землі, а інша – до Сонця, “рівновага” таких сил не має фізичного змісту.

Як показано в статичі, внутрішні сили зрівноважуються або утворюють нульову систему лише тоді, коли вони прикладені до абсолютно твердого тіла.

*Зовнішніми називаються сили взаємодії між матеріальними точками певної системи й іншими фізичними тілами, що не входять у систему.* Зовнішні сили позначимо  $\vec{F}_i^{\text{е}}$ . Ця класифікація сил застосовується в основному у разі вільної системи матеріальних точок. Залежно від складу системи одні й ті самі сили можуть бути або зовнішніми, або внутрішніми. Звернемося до такого прикладу. Потяг складається з вагонів і тепловоза. Внутрішніми силами тут є сили зчеплення між вагонами, зовнішніми – сили тяжіння, реакції рейок, сили опору повітря. Якщо в розглядувану систему ввести рейки, то реакції рейок будуть внутрішніми силами.

*Активні сили і реакції в'язей.* За другою класифікацією, сили поділяють на активні та реакції в'язей. Активну силу позначимо  $\vec{F}$ , а реакцію в'язі  $\vec{R}$ . Ця класифікація застосовується у разі невільної системи матеріальних точок. *Реакціями в'язей називають сили, з якими в'язі діють на систему матеріальних точок.*

*Реакції в'язей, на відміну від активних сил, с невідомими величинами, і в загальному випадку залежать від закону руху механічної системи.*

Розробка методів визначення реакцій в'язей є однією із задач динаміки невільної системи. Зазначимо, що реакції в'язей вводяться на основі аксіоми про звільнення від в'язей.

Таким чином, за допомогою аксіоми про звільнення від в'язей невільна система перетворюється у вільну, але на яку поряд із активними силами діють додаткові сили – реакції в'язей.

Слід зазначити, що введені класифікації сил є відносними. Так, залежно від того, що ми приймаємо за систему, одна й та сама сила може бути як внутрішньою, так і зовнішньою. Метод, за допомогою якого від-

бувається зміна складу системи і перекласифікація сил, є *методом перевірів*.

Для ілюстрації введених понять і умовності класифікації сил розглянемо, наприклад, сили, що прикладені до автомобіля, який рухається по горизонтальній дорозі (рис. 15.2). На автомобіль діє сила тяжіння  $\vec{G}$ . Ця сила зовнішня, оскільки вона викликана дією Землі – тіла, що не входить до даної матеріальної системи (автомобіля).

Одночасно ця сила  $\vec{G}$  є й активною силою, оскільки не залежить від в'язей. До активних зовнішніх сил відноситься також аеродинамічна сила опору повітря  $\vec{F}_{\text{оп}}$ . Вона теж не залежить від в'язей і зумовлена опором оточуючого середовища.

Застосуємо тепер принцип звільнення від в'язей і замінимо дію в'язі (дороги) її реакціями  $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{F}_1, \vec{F}_2$ . Перші дві сили  $\vec{N}_1$  і  $\vec{N}_2$  є рівнодійними нормальних складових реакцій дороги до передніх і задніх коліс, а сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  – рівнодійні сили тертя, які викликані обертанням ведучих і ведених коліс. Сили  $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  – зовнішні, оскільки вони зумовлені дією дороги, яка в систему не входить.

Таким чином, до автомобіля прикладено шість зовнішніх сил  $\vec{G}, \vec{F}_{\text{оп}}, \vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{F}_1, \vec{F}_2$ . Сила тиску газів на поршні двигуна, сили тиску поршнів на шатуни і шатунів на кривошипні колінчастого вала, сили тертя на осях коліс тощо – це все внутрішні сили системи.

Виникає запитання: як же тоді автомобіль рухається під дією внутрішніх сил? Виявляється, що причиною руху автомобіля є зовнішня сила  $\vec{F}_2$  – сила тертя ковзання між задніми ведучими колесами і дорогою. Але зовнішня сила тертя  $\vec{F}_2$  виникне лише тоді, коли двигуном будуть створені внут-

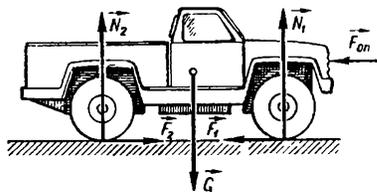


Рис. 15.2

рішні сили, які спричинюють цю зовнішню силу. Зрозуміло, що коли ця сила тертя недостатня або відсутня, то задні колеса пробуксовуватимуть і автомобіль не буде рухатися.

Точно такої самий механізм руху людини при ходьбі. Зовнішні сили тертя між підшвами взуття і підлогою чи дорогою не можуть виникнути без внутрішніх м'язових зусиль людини. Якщо не створювати м'язових зусиль, то відповідні зовнішні сили тертя не проявляють своєї дії.

### § 15.3. Диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок

*Диференціальні рівняння руху вільної системи матеріальних точок.* Як зазначалося в § 13.2, основною задачею динаміки системи матеріальних точок є дослідження її руху при заданих силах, що діють на систему. Розглянемо систему матеріальних точок, на які діють внутрішні  $\vec{F}_i^{\text{вн}}$  і зовнішні  $\vec{F}_i^e$  сили. Для довільної матеріальної точки системи рівняння руху має вигляд

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i^e + \vec{F}_i^{\text{вн}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (15.11)$$

Цим  $n$  рівнянням руху у векторній формі відповідають  $3n$  диференціальних рівняння в координатній формі

$$\begin{aligned}
m_i \ddot{x}_i &= X_i^e + X_i^{\text{вн}}, \\
m_i \ddot{y}_i &= Y_i^e + Y_i^{\text{вн}}, \\
m_i \ddot{z}_i &= Z_i^e + Z_i^{\text{вн}}, \\
i &= 1, 2, \dots, n.
\end{aligned}
\tag{15.12}$$

Рівняння (15.12) становлять систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. При інтегруванні цієї системи рівнянь одержимо *bn* сталих інтегрування, які визначимо з початкових умов руху. Знаходження невідомих функцій  $x_i, y_i, z_i$  із системи рівнянь (15.12), загалом, пов'язане зі значними, а інколи й нездоланими математичними труднощами, які пов'язані з тим, що в ці рівняння можуть виходити невідомі внутрішні сили, які попередньо потрібно визначити. Крім того, складності розв'язання системи рівнянь можуть виникати через її високій порядок і взаємозв'язок окремих рівнянь системи, бо сили, що входять у ці рівняння, можуть залежати від координат не тільки однієї матеріальної точки системи. Якщо припустити, що диференціальне рівняння руху хоча б однієї матеріальної точки системи, наприклад  $M_1$ , інтегрується незалежно від решти рівнянь, то це означатиме, що рух точки  $M_1$  не залежить від руху точок системи.

Тому, якщо матеріальна точка належить системі, то хоча б одна з проекцій сил, прикладена до цієї точки, буде функцією хоча б однієї з координат решти точок системи.

Подолати ці труднощі допомагають загальні теореми динаміки, які дають можливість одержати залежності між різними характеристиками руху точок системи, не інтегруючи диференціальні рівняння руху системи (15.12).

**Диференціальні рівняння руху невідільної системи матеріальних точок.** Якщо система матеріальних точок невідільна, то на неї діють активні сили  $\vec{F}_i$  і реакції в'язей  $\vec{R}_i$ . Нехай невідільна система складається з  $n$  ма-

теріальних точок, маси яких відповідно дорівнюють  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Збільшивши цю систему від в'язей, замінивши їх реакціями і формально перетворивши її у вільну, складемо диференціальне рівняння руху невідільної системи у векторній формі

$$m_i \ddot{\vec{w}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{15.13}$$

або

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \tag{15.14}$$

де  $\vec{F}_i$  – рівнодіяна активних сил, прикладених до  $i$ -ї точки системи;  $\vec{R}_i$  – рівнодіяна реакцій в'язей, прикладених в  $i$ -й точці системи.

Рівнянням (15.14) у векторній формі відповідають рівняння руху невідільної системи в координатній формі

$$\begin{aligned}
m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i + R_{ix}, \\
m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i + R_{iy}, \\
m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= Z_i + R_{iz}, \\
i &= 1, 2, \dots, n,
\end{aligned}
\tag{15.15}$$

де  $X_i, Y_i, Z_i$  – проекції рівнодіяної активних або заданих сил на осі декартових координат, а  $R_{ix}, R_{iy}, R_{iz}$  – проекції рівнодіяної реакцій  $\vec{R}_i$  на ті самі осі координат.

Аналогічно зазначеному в § 13.6, невідомих величин в (15.15) більше, ніж рівнянь. Це не дає змоги розв'язати другу основну задачу динаміки, тобто за відомими масами і силами, що діють на точки системи, визначити закон руху точок системи. Дійсно, як бачимо з (15.15), диференціальних рівнянь  $3n$ , а невідомих *bn*, тобто  $3n$  координат і  $3n$  проекцій реакцій в'язей, що діють на точки системи.

Отже, у загальному вигляді задачу про рух невільної системи матеріальних точок без додаткових співвідношень, яким задовольняють в'язі, розв'язати не можна. При цьому задача може бути розв'язана лише для ідеальних в'язей за допомогою рівнянь Лагранжа першого роду, які будуть наведені в частині IV ("Основи аналітичної механіки") і являють собою узагальнення рівнянь (§ 13.6).

#### § 15.4. Маса. Центр мас системи

*Масою системи*, що складається з  $n$  матеріальних точок, називається сума мас точок системи

$$m = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (15.16)$$

Припустимо, що всі точки системи рухаються з однаковими прискореннями  $\ddot{\vec{w}}$ , які за другим законом Ньютона можна вважати спричиненими дією прикладеної до них системи паралельних сил  $\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{w}}$ . *Центром мас* або центром інерції системи матеріальних точок називається центр паралельних сил  $\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{w}}$ , що надають рух точкам системи з однаковим прискоренням або поступальний рух незмінній системі. На основі формул (6.12) визначимо координати центра мас

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}, \quad (15.17)$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m},$$

де  $m_i$  – маса  $i$ -ї точки системи;  $x_i, y_i, z_i$  – координати  $i$ -ї точки системи. Оскільки

$x_C, y_C, z_C$  одночасно є проєкціями радіус-вектора  $\vec{r}_C$  центра мас, то одержимо

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}. \quad (15.18)$$

Диференціюючи співвідношення (15.18) за часом, знайдемо швидкість і прискорення центра мас в нерухомій системі координат

$$\dot{\vec{v}}_C = \dot{\vec{r}}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i}{m}, \quad (15.19)$$

$$\ddot{\vec{w}}_C = \dot{\vec{v}}_C = \ddot{\vec{r}}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{w}}_i}{m}. \quad (15.20)$$

Поняття центра мас більш широке, ніж поняття центра ваги системи. Геометрично центр ваги системи збігається з його центром мас, проте ототожнювати центр ваги з центром мас не можна, бо між ними є глибокі фізичні відмінності. Відомо, що поняття про центр ваги пов'язане з припущенням про однорідність поля сил ваги в незначних областях поблизу поверхні Землі. Насправді ж, сили ваги непаралельні. Отже, поняття центра ваги вводитьсь наближено на основі гіпотези про паралельність сил ваги. Поняття центра мас не залежить від такого роду припущень.

Введення поняття центра мас дає змогу у ряді випадків звести задачу про рух системи матеріальних точок до задачі про рух однієї точки – центра мас.

Як бачимо з формул (15.17), координати центра мас залежать тільки від розподілу мас. Зауважимо, що положення центра мас в тілі чи незмінній системі є незмінним і не залежить від вибору системи координат і закону її руху.

Якщо маси системи розміщені симетрично відносно деякої площини, то центр мас лежить у цій площині. Якщо маси точок системи розподілені симетрично відносно двох площин, то центр мас розміщений на лінії їх перетину. При симетричному розподілі мас відносно трьох площин центр мас знаходиться у точці перетину цих площин.

На завершення зазначимо, що для знаходження координат центра мас складної системи можна застосувати комп'ютерні технології. Для цього формули (15.17) і (15.18) доцільно записати в матричній формі

$$\bar{r}_C = \frac{1}{m} [\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n] [m_1, m_2, \dots, m_n]^T \quad (15.21)$$

або

$$\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_n \end{bmatrix}. \quad (15.22)$$

Якщо ці формули використовувати для визначення центра мас системи твердих тіл, то під  $x_1, y_1, \dots, z_n$  і т. д. потрібно розуміти координати центрів мас тіл механічної системи. При цьому

$$\bar{r}_i = \bar{r}_{Ci} = [x_{Ci}, y_{Ci}, z_{Ci}]^T. \quad (15.23)$$

### § 15.5. Моменти інерції механічної системи (геометрія мас)

У цьому параграфі наведено основні визначення і класифікацію моментів інерції<sup>1</sup>. Поняття моменту інерції тіла належить до основних і важливих понять у динаміці. Його ввів Л. Ейлер. Зауважимо, що в цьому

параграфі будемо вивчати не рух твердого тіла, а тільки характер розподілу мас. У теоретичній механіці приймається гіпотеза про те, що маса твердого тіла розподіляється неперервно. Наведемо такі означення.

1. *Моментом інерції матеріальної точки* відносно осі називають добуток маси цієї точки  $m$  на квадрат її відстані  $h$  до цієї осі, наприклад  $Oz$ :

$$I_z = mh^2. \quad (15.24)$$

2. *Моментом інерції системи*, яка складається з  $n$  матеріальних точок, відносно осі називають суму добутків мас точок системи на квадрати відстаней  $h_i$  від точок до осі:

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i h_i^2. \quad (15.25)$$

У разі неперервного розподілу маси замість суми буде інтеграл, що поширений на всю масу.

3. *Моментом інерції твердого тіла* відносно осі, наприклад  $Oz$ , називають інтеграл, що поширений на всю масу і має вигляд

$$I_z = \int_{(m)} r^2 dm. \quad (15.26)$$

У ряді випадків для обчислення моментів інерції користуються поняттям радіуса інерції, або плеча інерції. *Радіусом інерції*  $\rho$  називають відстань, на якій від осі обертання треба розмістити масу  $m$  тіла, що розглядається, зосередивши її в одній точці, щоб вона мала той самий момент інерції, що і розглядуване тіло:

$$\rho = \sqrt{I_z / m}. \quad (15.27)$$

Радіус, або плече, інерції – це радіус такого порожнистого колового циліндра, який, будучи описаний навколо осі, має момент інерції, однаковий з моментом

<sup>1</sup>Христіан Гюйгенс (1629–1695) у своїх роботах користувався виразом  $\sum_{i=1}^n m_i r_i^2$ , однак він не вживав термін “момент інерції”.

нерції даного тіла, якщо масу тіла рівномірно розподілити по бічній поверхні циліндра.

Розрізняють моменти інерції *осьові*, або *аксіальні*, *полярні*, *планарні* та *відцентрові*.

Для обчислення осьового моменту інерції точки її масу множать на квадрат відстані до осі, полярного – до заданої точки (полоса), планарного – до заданої площини.

*Осьовий момент інерції тіла* – це фізична величина, що характеризує міру інертності тіла під час обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі. У разі обертання твердого тіла навколо нерухомої точки мірою інертності цього тіла є момент інерції відносно миттєвої осі, що проходить через нерухому точку.

Виведемо формули для визначення перерахованих моментів інерції. Розглянемо точку  $M$  тіла, елементарна маса якої  $dm$  (рис. 15.3). Координати точки  $M$  позначимо  $x, y, z$ . Згідно з визначенням відповідних моментів інерції їх обчислюють за такими формулами:

осьові моменти інерції тіла

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm, \\ I_y &= \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm, \\ I_z &= \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm; \end{aligned} \quad (15.28)$$

полярний момент інерції тіла

$$I_O = \int_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2) dm; \quad (15.29)$$

планарні моменти інерції тіла відносно координатних площин

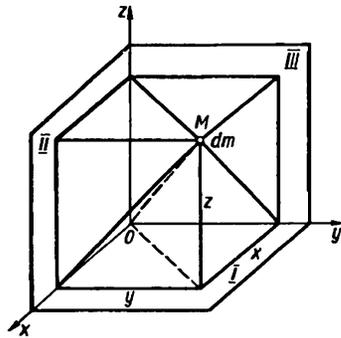


Рис. 15.3

$$\begin{aligned} I_I &= \int_{(m)} x^2 dm, \\ I_{II} &= \int_{(m)} y^2 dm, \\ I_{III} &= \int_{(m)} z^2 dm; \end{aligned} \quad (15.30)$$

відцентрові моменти інерції тіла

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_{(m)} xy dm, \\ I_{xz} &= \int_{(m)} xz dm, \\ I_{yz} &= \int_{(m)} yz dm. \end{aligned} \quad (15.31)$$

Відцентрові моменти інерції залежать від напрямку координатних осей і вибору початку координат. Тому, говорячи про відцентровий момент інерції у даній точці, розуміють, що початок координат збігається з цією точкою. Відцентрові моменти інерції можуть дорівнювати нулю і мати будь-який знак (плюс чи мінус).

Якщо відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, то осі називають *головними осями інерції тіла в даній точці*. Якщо ця точка розміщується в центрі мас, то осі є *головними і центральними осями інерції*.

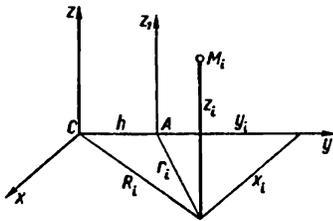


Рис. 15.4

Виведемо залежність між полярними, осьовими і планарними моментами інерції. Складаючи ліві й праві частини виразів (15.28) і враховуючи (15.29), дістанемо

$$I_x + I_y + I_z = 2I_O, \quad (15.32)$$

тобто сума осьових моментів інерції дорівнює подвоєному полярному моменту інерції. Складаємо ліві й праві частини виразів (15.30):

$$I_I + I_{II} + I_{III} = I_O, \quad (15.33)$$

тобто сума планарних моментів інерції дорівнює полярному моменту інерції.

Із виразів (15.28) – (15.31) випливає також ряд нерівностей. Наприклад,

$$\begin{aligned} I_x + I_y &\geq I_z; \\ I_x - I_y &\leq I_z; \\ I_x &> I_{yz}; \\ I_y &> I_{xz}; \\ I_z &> I_{xy}. \end{aligned} \quad (15.34)$$

Неважно помітити, що осьові моменти інерції задовольняють співвідношенням між сторонами трикутника. Тобто на осьових моментах інерції як на сторонах можна побудувати трикутник.

### § 15.6. Теорема Гюйгенса – Штейнера про моменти інерції

**Теорема 1 (про моменти інерції відносно паралельних осей).** Момент інерції системи матеріальних точок або твердого тіла

відносно деякої осі дорівнює моменту інерції відносно центральної осі, що паралельна даній, складеному з добутком маси системи (тіла) на квадрат відстані між осями.

Доведення. Нехай центр мас  $C$  є початком координат (рис. 15.4), вісь  $Az_1$  паралельна центральній осі  $Cz$ . Розглянемо довільну точку системи  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ , відстань якої від осі  $Cz$  дорівнює  $R_i$ , а від осі  $Az_1$  –  $r_i$ . Відстань між осями дорівнює  $h$ . Обчислимо момент інерції системи відносно осі  $Az_1$ :

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i \left[ (y_i - h)^2 + x_i^2 \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) + h^2 \sum_{i=1}^n m_i - \\ &\quad - 2h \sum_{i=1}^n m_i y_i. \end{aligned} \quad (15.35)$$

Проте, оскільки  $\sum_{i=1}^n m_i y_i = m y_C = 0$ , а  $x_i^2 +$

$$y_i^2 = R_i^2, \text{ то дістанемо } I_{z_1} = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 + m h^2,$$

де за означенням осьового моменту інерції  $\sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = I_z = I_C$ . Звідси

$$I_{z_1} = I_C + m h^2, \quad (15.36)$$

що і треба було довести.

Із (15.36) також видно, що вісь, яка проходить через центр інерції, є віссю найменшого моменту інерції серед усіх паралельних осей.

**Теорема 2 (про момент інерції відносно двох паралельних не центральних осей)** (рис. 15.5). Момент інерції тіла відносно довільної не центральної осі  $O_2z_2$  дорівнює моменту інерції відносно іншої паралельної їй не центральної осі  $O_1z_1$ , складеному з

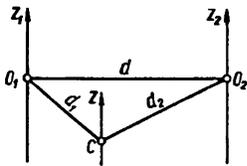


Рис. 15.5

добутком маси тіла на різницю квадратів відстаней від осей  $O_2z_2$  ( $d_2$ ) і  $O_1z_1$  ( $d_1$ ) до паралельної їм центральної осі  $Cz$ .

Якщо скористатися рис. 15.5, то математично ця теорема запишеться так:

$$I_{z_2} = I_{z_1} + m(d_2^2 - d_1^2). \quad (15.37)$$

Доведення. Нехай відносно центральної осі  $Cz$  тіло має момент інерції  $I_{Cz}$ . Вісь  $Cz$  паралельна заданим осям  $O_1z_1$  і  $O_2z_2$ , моменти відносно яких позначимо відповідно  $I_{z_1}$  і  $I_{z_2}$ . Позначимо відстані між віссю  $O_1z_1$  і  $Cz$  –  $d_1$ , а між  $Cz$  і  $O_2z_2$  –  $d_2$ .

Тоді, згідно з першою теоремою Гюйгенса – Штейнера, матимемо співвідношення

$$I_{z_2} = I_{z_C} + md_2^2, \quad (15.38)$$

$$I_{z_1} = I_{z_C} + md_1^2.$$

Віднявши від першої рівності другу, отримаємо співвідношення (15.37), що відображає зміст теореми 2.

Таким чином теорема доведена.

Зазначимо, що коли мова йде про паралельні осі систем координат – центральної системи координат  $Cx_Cy_Cz_C$  і системи координат з початком у довільній точці  $O$ , то на основі першої теореми Гюйгенса – Штейнера, враховуючи відстані між цими паралельними осями, маємо

$$\begin{aligned} I_x &= I_{C_x} + m(y_C^2 + z_C^2), \\ I_y &= I_{C_y} + m(x_C^2 + z_C^2), \end{aligned} \quad (15.39)$$

$$I_z = I_{C_z} + m(x_C^2 + y_C^2).$$

Очевидно, аналогічні залежності матимуть місце і між радіусами інерції

$$\begin{aligned} \rho_x^2 &= \rho_{C_x}^2 + y_C^2 + z_C^2, \\ \rho_y^2 &= \rho_{C_y}^2 + x_C^2 + z_C^2, \\ \rho_z^2 &= \rho_{C_z}^2 + x_C^2 + y_C^2. \end{aligned} \quad (15.40)$$

**Теорема 3 (про планарні моменти інерції).** Планарний момент інерції тіла відносно довільної площини дорівнює планарному моменту інерції відносно паралельної площини, яка проходить через центр мас, складеному з добутком мас тіла на квадрат відстані між площинами.

Якщо за такі площини взяти координатні площини, показані на рис. 15.6, то математично ця теорема запишеться так:

$$\begin{aligned} I_{I(Oxy)} &= I_{I(Cx_Cy_C)} + mz_C^2, \\ I_{II(Oxz)} &= I_{II(Cx_Cz_C)} + my_C^2, \\ I_{III(Oyz)} &= I_{III(Cy_Cz_C)} + mx_C^2. \end{aligned} \quad (15.41)$$

Доведення. Позначимо координати центра мас (точка  $C$ ) в системі координат  $Oxyz$  –  $x_C, y_C, z_C$  (рис. 15.6). Ці координати є постійними і вони характеризують відстань між паралельними площинами:  $x_C$  –

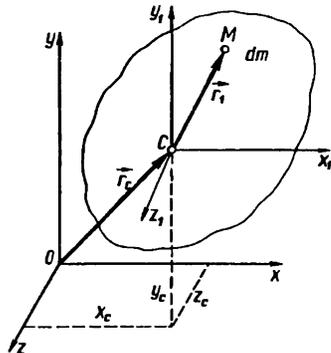


Рис. 15.6

відстань між площинами  $Oz_1$  і  $Cz_1y_1$ ;  $y_C - Ozx$  і  $Cz_Cx_C$ ;  $z_C - Oyx$  і  $Cy_Cx_C$ .

Координати довільної точки  $M$ , маса якої  $dm$  в системі координат  $Cx_1y_1z_1$ , будуть:  $x_1, y_1, z_1$ , а в системі координат  $Oxyz$  відповідно

$$x_C + x_1, y_C + y_1, z_C + z_1. \quad (15.42)$$

За визначенням, наприклад, планарний момент  $I_{I(Oxy)}$  буде

$$I_{I(Oxy)} = \int (z_C + z_1)^2 dm, \quad (15.43)$$

а планарний момент  $I_{I(Cx_1y_1)}$  дорівнює

$$I_{I(Cx_1y_1)} = \int z_1^2 dm. \quad (15.44)$$

Інтеграл у правій частині (15.43) можна зобразити у формі

$$\begin{aligned} & \int (z_C + z_1)^2 dm = \\ & = \int z_C^2 dm + 2 \int z_C z_1 dm + \int z_1^2 dm. \end{aligned} \quad (15.45)$$

Розглянемо кожний із інтегралів в (15.45) окремо.

Оскільки  $z_C = \text{const}$ , то

$$\int z_C^2 dm = z_C^2 \int dm = mz_C^2. \quad (15.46)$$

Далі

$$\int z_C z_1 dm = z_C \int z_1 dm = 0, \quad (15.47)$$

оскільки координата  $z_1$  центра мас (точка  $C$ ) тіла в системі координат  $Cx_1y_1z_1$  дорівнює нулю (початок координат поміщено саме в центр мас).

І нарешті

$$\int z_1^2 dm = I_{I(Cx_1y_1)}. \quad (15.48)$$

Підставивши значення виразів (15.46)–(15.48) в (15.43), отримаємо перше співвідношення теореми (15.41).

Аналогічно доводяться два інші співвідношення (15.41).

**Теорема 4 (про відцентрові моменти інерції).** Відцентрові моменти інерції тіла відносно заданих довільних осей координат дорівнюють відцентровим моментам інерції відносно центральних осей координат, які паралельні осям заданої системи координат, складеним із добутком маси тіла на відповідні координати центра мас у заданій системі координат.

Математично ця теорема (рис. 15.6) записується так:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{x_1y_1} + mx_C y_C, \\ I_{xz} &= I_{x_1z_1} + mx_C z_C, \\ I_{yz} &= I_{y_1z_1} + my_C z_C. \end{aligned} \quad (15.49)$$

Доведення. Скористаємось позначеннями, що наведені в теоремі 3, і співвідношеннями (15.42).

За визначенням відцентрових моментів інерції в цих системах координат (рис. 15.6) маємо

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int (x_C + x_1)(y_C + y_1) dm, \\ I_{x_C y_C} &= \int x_1 y_1 dm. \end{aligned} \quad (15.50)$$

Скориставшись співвідношеннями, які наведені при доведенні попередньої теореми, отримаємо рівності (15.49), що виражають зміст теореми 4.

## § 15.7. Обчислення моментів інерції деяких тіл найпростішої форми

Обчислимо моменти інерції однорідного тонкого стрижня, однорідного циліндра і кулі (рис. 15.7).

**Момент інерції однорідного тонкого стрижня** (довжина його  $l$ , постійний поперечний переріз  $\sigma$ ) відносно осі  $Oz$ , яка перпендикулярна до стрижня і проходить через його кінець  $O$ , дорівнює третині добутку маси на квадрат довжини стрижня (рис. 15.7, а). Для доведення цього виділимо на відстані  $x$  від осі  $Oz$  елемент стрижня  $dx$ . Тоді елементарна маса  $dm = \gamma\sigma dx$ , де  $\gamma$  – густина матеріалу стрижня, а  $\sigma$  – площа поперечного перерізу стрижня. Момент інерції стрижня

$$I_{Oz} = \int_{(m)} x^2 dm = \int_0^l \gamma\sigma x^2 dx = \gamma\sigma \int_0^l x^2 dx = \gamma\sigma \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{\gamma\sigma l^3}{3}. \quad (15.51)$$

Оскільки маса стрижня  $m = \gamma\sigma l$ , то

$$I_{Oz} = ml^2 / 3. \quad (15.52)$$

**Момент інерції однорідного циліндра** (висота його  $h$ , радіус основи  $R$ , густина матеріалу  $\gamma$ ) відносно поздовжньої центральної осі  $Cz$  (рис. 15.7, б), яка проходить через центр мас циліндра, дорівнює половині добутку маси циліндра на квадрат радіуса основи. За означенням осьового моменту інерції

$$I_z = \int_{(m)} r^2 dm. \quad (15.53)$$

Як елементарний об'єм циліндра виберемо співвісний з ним кільцевий циліндр такої самої висоти  $h$ , радіус якого  $r$  і товщина  $dr$ . Маса цього елементарного об'єму

$$dm = \gamma dV = \gamma 2\pi r (dr) h. \quad (15.54)$$

Підставивши  $dm$  у вираз (15.53), дістанемо

$$I_z = \gamma 2\pi h \int_0^R r^3 dr = 2\pi\gamma h R^2 \frac{R^2}{4}. \quad (15.55)$$

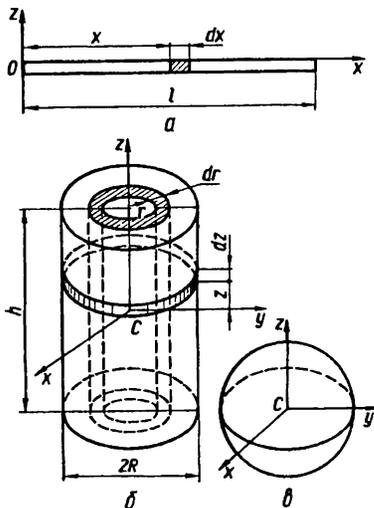


Рис. 15.7

Остаточно

$$I_z = mR^2 / 2.$$

Виведемо також вираз для моменту інерції цього циліндра відносно однієї з поперечних центральних осей, наприклад осі  $Cx$ . Оскільки осі  $Cx$  і  $Cy$  лежать у площині симетрії циліндра, то  $I_x = I_y$ . Очевидно, що

$$I_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm, \quad (15.56)$$

$$\begin{aligned} \int_{(m)} y^2 dm &= \int_{(m)} x^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm = \\ &= \frac{1}{2} I_z = \frac{mR^2}{4}. \end{aligned} \quad (15.57)$$

Обчислимо  $\int_{(m)} z^2 dm$ . Для цього розгля-

немо елемент циліндра у вигляді тонкого диска завтовшки  $dz$ , що віддалений від площини  $Sxy$  на відстань  $z$ . Маса цього диска  $dm = \gamma\pi R^2 dz$ . Отже,

$$\int_{(m)} z^2 dm = \gamma\pi R^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \gamma\pi R^2 \frac{h^3}{12} = \frac{mh^2}{12}. \quad (15.58)$$

Підставляючи вирази інтегралів (15.57) і (15.58) у (15.56), дістанемо

$$I_x = I_y = \frac{m}{4} \left( R^2 + \frac{h^2}{3} \right). \quad (15.59)$$

**Момент інерції кулі.** При обчисленні моменту інерції однорідної кулі радіусом  $R$  відносно однієї з центральних осей, які є осями симетрії, врахуємо, що  $I_x = I_y = I_z$ . Отже, момент інерції кулі відносно її центра  $C$  (рис. 15.7, в)

$$I_C = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) = \frac{3}{2}I_x, \quad (15.60)$$

звідки  $I_x = \frac{2}{3}I_C$ . Крім того, полярний момент інерції кулі

$$I_C = \int_{(m)} r^2 dm. \quad (15.61)$$

Як елемент кулі виділимо об'єм, що лежить між двома сферичними поверхнями радіусів  $r$  і  $r + dr$ . Маса цього елемента  $dm = \gamma 4\pi r^2 dr$ , отже,

$$I_C = \gamma 4\pi \int_0^R r^4 dr = \gamma 4\pi \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5}mR^2, \quad (15.62)$$

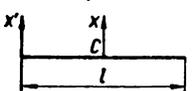
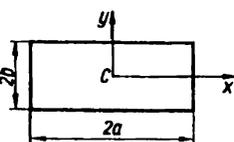
де  $m = \gamma \frac{4}{3}\pi R^3$  – маса кулі. Остаточно дістанемо

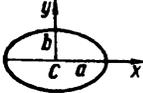
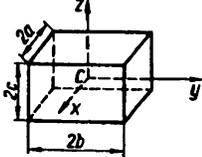
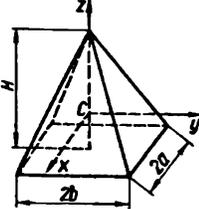
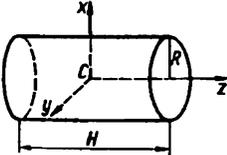
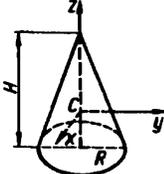
$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mR^2. \quad (15.63)$$

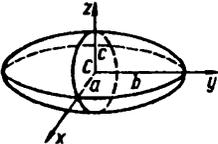
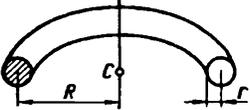
Вирази для моментів інерції інших тіл найпростішої форми можна знайти в довідковій літературі з механіки (табл. 15.1).

Таблиця 15.1

Момент інерції однорідних тіл

Тіло	Момент інерції
<p>Стрижень</p> 	$I_x = \frac{1}{12}ml^2, \quad I_{x'} = \frac{1}{3}ml^2$
<p>Прямокутник</p> 	$I_x = \frac{1}{3}mb^2, \quad I_y = \frac{1}{3}ma^2,$ $I_{Cx} = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$

Тіло	Момент інерції
<p data-bbox="189 110 238 130"><i>Еліпс</i></p> 	$I_x = \frac{1}{4}mb^2, \quad I_y = \frac{1}{4}ma^2,$ $I_z = \frac{1}{4}m(a^2 + b^2)$
<p data-bbox="157 265 277 306"><i>Прямокутний паралелепіпед</i></p> 	$I_x = \frac{1}{3}m(b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{1}{3}m(a^2 + c^2),$ $I_z = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$
<p data-bbox="136 490 320 512"><i>Прямокутна піраміда</i></p> 	$I_x = \frac{m}{20} \left( \frac{3}{4}H^2 + 4b^2 \right),$ $I_y = \frac{m}{20} \left( \frac{3}{4}H^2 + 4a^2 \right),$ $I_z = \frac{m}{5} (a^2 + b^2)$
<p data-bbox="128 754 327 776"><i>Прямий коловий циліндр</i></p> 	$I_x = I_y = \frac{1}{4}m \left( \frac{1}{3}H^2 + R^2 \right),$ $I_z = \frac{1}{2}mR^2$
<p data-bbox="142 967 323 989"><i>Прямий коловий конус</i></p> 	$I_x = I_y = \frac{3}{20}m \left( \frac{1}{4}H^2 + R^2 \right),$ $I_z = \frac{3}{10}mR^2$

Тіло	Момент інерції
<p style="text-align: center;"><b>Еліпсоїд</b></p> 	$I_x = \frac{m}{5}(b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{m}{5}(a^2 + c^2),$ $I_z = \frac{m}{5}(a^2 + b^2)$
<p style="text-align: center;"><b>Тор</b></p> 	$I_z = m \left( R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right)$

**§ 15.8. Момент інерції  
відносно довільної осі,  
що проходить через дану точку**

Установимо залежність між моментами інерції твердого тіла (матеріальної системи) відносно довільної осі  $Ou$ , що проходить через початок координат, і моментами інерції відносно координатних осей  $Ox, Oy, Oz$  (рис. 15.8).

Позначимо напрямні косинуси осі  $Ou$  через  $\lambda, \mu, \nu$ :

$$\lambda = \cos \alpha, \quad \mu = \cos \beta, \quad \nu = \cos \gamma.$$

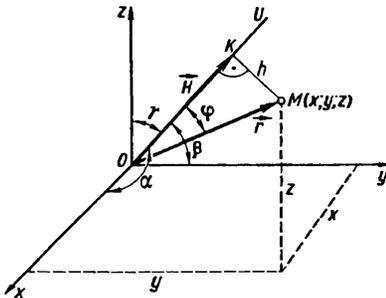


Рис. 15.8

Виберемо будь-яку точку тіла (системі  $M(x, y, z)$ ), опустимо з неї перпендикуляр  $MK$  на вісь  $Ou$  та позначимо  $\overline{OK} = \bar{h}$ ,  $\overline{OM} = \bar{r}$ ,  $MK = h$ ,  $\angle MOK = \varphi$ .

За означенням моменту інерції відносно осі

$$I_u = \int (h^2) dm. \quad (15.64)$$

Отже, треба виразити  $h$  через задані величини  $x, y, z, \lambda, \mu, \nu$ .

Враховуючи, що  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ ,  $\bar{H} \times \bar{r} = H_x x + H_y y + H_z z$ , звідки

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} \lambda + \frac{y}{r} \mu + \frac{z}{r} \nu. \quad \text{Оскільки } H =$$

$= r \cos \varphi$ , то  $H = \lambda x + \mu y + \nu z$ . Тоді

$$\begin{aligned} h^2 &= r^2 - H^2 = \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - \\ &- (\lambda x + \mu y + \nu z)^2 = \lambda^2 (y^2 + z^2) + \\ &+ \mu^2 (z^2 + x^2) + \nu^2 (x^2 + y^2) - \\ &- 2\lambda\mu xy - 2\mu\nu yz - 2\nu\lambda zx. \end{aligned} \quad (15.65)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} A &= I_x, B = I_y, C = I_z, \\ D &= I_{xy}, E = I_{yz}, F = I_{zx}. \end{aligned} \quad (15.66)$$

Підставляючи тепер у вираз (15.64) значення  $h$ , з урахуванням введених позначень (15.66), дістанемо рівність

$$\begin{aligned} I_u &= A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 - \\ &- 2D\lambda\mu - 2E\mu\nu - 2F\nu\lambda, \end{aligned} \quad (15.67)$$

яку можна подати також у вигляді

$$\begin{aligned} I_u &= I_x\lambda^2 + I_y\mu^2 + I_z\nu^2 - \\ &- 2I_{xy}\lambda\mu - 2I_{yz}\mu\nu - 2I_{zx}\nu\lambda \end{aligned} \quad (15.68)$$

або

$$\begin{aligned} I_u &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - \\ &- 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - \\ &- 2I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha. \end{aligned} \quad (15.69)$$

Теорема про моменти інерції відносно паралельних осей і тих, що перетинаються, характеризують зміну осьового моменту інерції залежно від положення осі. Отже, дев'ять величин – три статичних моменти інерції  $\sum_{i=1}^n m_i x_i$ ,  $\sum_{i=1}^n m_i y_i$ ,  $\sum_{i=1}^n m_i z_i$  (які визначають положення центра мас), три моменти інерції відносно координатних осей

$$\begin{aligned} I_x &= \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2), \\ I_y &= \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2), \\ I_z &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{aligned} \quad (15.70)$$

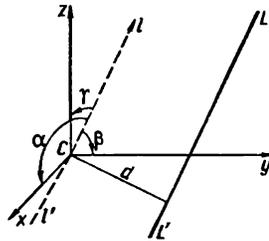


Рис. 15.9

і три відцентрових моменти інерції

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i, \\ I_{xz} &= \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i, \\ I_{xy} &= \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i \end{aligned} \quad (15.71)$$

повністю характеризують розподіл мас системи (твердого тіла).

Використаємо тепер комбінацію теорем Гюйгенса – Штейнера і вираз (15.69) для обчислення моментів інерції відносно довільної осі. Нехай маємо довільну вісь  $LL'$ , яка не є центральною і не проходить через точку  $C$ , в якій відомі моменти інерції (рис. 15.9). Виберемо головну систему координат, в якій вісь  $LL'$  віддалена від центра мас (точки  $C$ ) на відстань  $d$  і має з координатними осями кути  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Проведемо через центр мас пряму  $l'l'$ , що паралельна  $LL'$ . Тоді, використовуючи теорему Гюйгенса – Штейнера і останню теорему, отримуємо

$$\begin{aligned} I_L &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + \\ &+ I_z \cos^2 \gamma + md^2. \end{aligned} \quad (15.72)$$

## § 15.9. Еліпсоїд інерції

Закон змінення моменту інерції  $I_u$  (15.69) зі зміною параметрів  $\lambda, \mu, \nu$ , що визначають напрямок осі  $Ou$ , допускає просту геометричну інтерпретацію, на яку вказав французький учений О. Коші (1789–1857). Слід, однак, зауважити, що ідея про еліпсоїд інерції є в дослідженнях Л. Ейлера (1765 р.).

Виберемо на осі  $Ou$  (рис. 15.10) точку  $N$ , що розміщена на відстані  $ON = d = 1/\sqrt{I_u}$  від початку координат. Координати цієї точки  $x = \lambda d, y = \mu d, z = \nu d$ , звідки  $\lambda = x\sqrt{I_u}$ ,  $\mu = y\sqrt{I_u}$ ,  $\nu = z\sqrt{I_u}$ , отже, формула (15.69) набуде вигляду

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dxy - 2Eyz - 2Fzx = 1. \quad (15.73)$$

Таким чином, геометричне місце точок  $N(x, y, z)$  – це поверхня другого порядку, що виражена рівнянням (15.73).

Оскільки  $I_u > 0$  і відстані всіх точок  $N$  від початку координат скінченні, то рівняння (15.73) визначає еліпсоїд із центром на початку координат. Цей еліпсоїд називають *еліпсоїдом інерції*, його осі симетрії  $Ox'$ ,  $Oy'$ ,  $Oz'$  – головні осі інерції з початком у

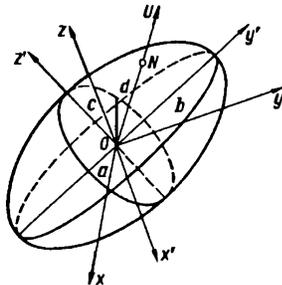


Рис. 15.10

точці  $O$ . Якщо початок координат розміщується в центрі інерції системи (тіла), то еліпсоїд інерції називають *центральним*, його осі симетрії – *головними центральними осями інерції*, а відповідні моменти інерції – *головними центральними моментами інерції*.

Якщо за координатні осі взяти головні осі інерції, то рівняння еліпсоїда інерції має вигляд

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 = 1, \quad (15.74)$$

в якому немає членів, що містять добуток координат. Головні моменти інерції системи (тіла) відповідно дорівнюють  $A', B', C'$ , а відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю:

$$\begin{aligned} I_{x'} &= A', I_{y'} = B', I_{z'} = C', \\ I_{y'z'} &= I_{z'x'} = I_{x'y'} = 0. \end{aligned} \quad (15.75)$$

Кожній точці  $O$  системи (тіла) відповідає певний еліпсоїд інерції. Якщо еліпсоїд інерції відомий, то формула (15.73) дає змогу визначити момент інерції  $I_u$  відносно будь-якої осі, що проходить через точку  $O$ .

Отже, необхідною і достатньою умовою того, щоб вісь  $Oz'$  була головною віссю інерції системи (тіла) в точці  $O$ , є рівність нулю відповідних відцентрових моментів інерції ( $I_{z'x'} = I_{z'y'} = 0$ ).

Знання головних осей інерції дає змогу спростити рівняння руху твердого тіла. Якщо осі координат є головними осями інерції, то формула (15.69) набуде вигляду

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma. \quad (15.76)$$

## § 15.10. Обчислення тензора інерції

При розв'язанні багатьох задач динаміки, зокрема при визначенні динамічних реакцій твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, при визначенні похибок п-

роскопів на рухомій основі, при розробці законів керування високоманевровими рухомими об'єктами – літаками, керованими снарядами тощо, необхідно знати не тільки осьові, але й відцентрові моменти інерції в системі координат, жорстко зв'язаній з тим чи іншим тілом.

Тобто виникає задача про вивчення спільних властивостей певних величин при перетвореннях координат. Величини, що мають спільні властивості щодо перетворення координат, називають *тензорами*<sup>1</sup>.

Рангом тензора називають закон, який є загальним для всіх тензорів, що належать до однієї категорії. Так, у законі перетворення компонент векторних величин при зміні координатних систем напрямні косинуси входять у перший степінь, тобто формули перетворення лінійні щодо напрямних косинусів нових осей, а у формули перетворення моментів інерції напрямні косинуси входять у другий степінь, тобто ці тензори – квадратичні щодо зазначених косинусів.

Звичайно при обчисленні тензора інерції можна користуватися висхідними формулами для моментів інерції та обчислювати кожен раз відповідні інтеграли в тій чи іншій системі координат. Але це досить трудомістка операція. Її можна значно спростити, якщо знати формули перетворення моментів інерції як тензорів.

Нехай потрібно визначити тензор інерції  $I$  тіла для прямокутної системи координат  $Ox_1y_1z_1$ . Будемо вважати, що нам відомі координати  $x_C, y_C, z_C$  центра мас (точка  $C$ ) в системі координат  $Ox_2y_2z_2$ , напрямні головних центральних осей інерції  $x_1, y_1, z_1$  і відповідні моменти інерції  $I_{x_1}, I_{y_1}, I_{z_1}$  (рис. 15.11).

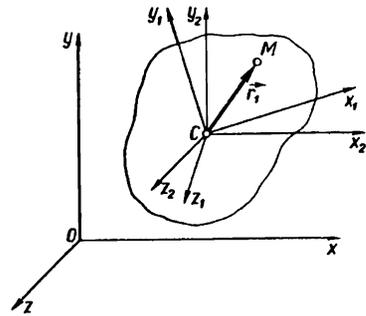


Рис. 15.11

Побудуємо допоміжну систему координат  $Cx_2y_2z_2$ , осі якої паралельні відповідним осям системи координат  $Ox_2y_2z_2$ . Тоді напрямні головних центральних осей  $Cx_1y_1z_1$  визначатимуться напрямними косинусами:

	$x_1$	$y_1$	$z_1$	
$x, x_2$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{13}$	
$y, y_2$	$\alpha_{21}$	$\alpha_{22}$	$\alpha_{23}$	. (15.77)
$z, z_2$	$\alpha_{31}$	$\alpha_{32}$	$\alpha_{33}$	

Моменти інерції  $I_{x_1}, I_{y_1}, I_{z_1}$  за формулою (15.76) дорівнюють

$$\begin{aligned}
 I_{x_2} &= I_{x_1} \alpha_{11}^2 + I_{y_1} \alpha_{12}^2 + I_{z_1} \alpha_{13}^2, \\
 I_{y_2} &= I_{x_1} \alpha_{21}^2 + I_{y_1} \alpha_{22}^2 + I_{z_1} \alpha_{23}^2, \\
 I_{z_2} &= I_{x_1} \alpha_{31}^2 + I_{y_1} \alpha_{32}^2 + I_{z_1} \alpha_{33}^2.
 \end{aligned}
 \quad (15.78)$$

Квадрат відстані між осями  $x$  і  $x_2$ , очевидно, дорівнює відстані точки  $C$  до осі  $x$ , тобто  $y_C^2 + z_C^2$ , аналогічні формули маємо для відстані між осями  $y$  і  $y_2$ ,  $z$  і  $z_2$ . Тоді, скориставшись співвідношеннями (15.39), що визначаються першою теоремою Гюйгенса – Штейнера, і співвідношеннями (15.78), отримасмо

<sup>1</sup> Детально про тензори можна дізнатись із підручника Кільцьєвського М. О. Курс теоретичної механіки. – М.: Наука. 1972. – Т. 1. – 456 с.; 1977. – Т. 2. – 544 с.

$$\begin{aligned}
I_x &= m(y_C^2 + z_C^2) + \alpha_{11}^2 I_{x_1} + \\
&\quad + \alpha_{12}^2 I_{y_1} + \alpha_{13}^2 I_{z_1}, \\
I_y &= m(x_C^2 + z_C^2) + \alpha_{21}^2 I_{x_1} + \\
&\quad + \alpha_{22}^2 I_{y_1} + \alpha_{23}^2 I_{z_1}, \\
I_z &= m(x_C^2 + y_C^2) + \alpha_{31}^2 I_{x_1} + \\
&\quad + \alpha_{32}^2 I_{y_1} + \alpha_{33}^2 I_{z_1}.
\end{aligned} \tag{15.79}$$

Перейдемо тепер до обчислення відцентрових моментів інерції тіла відносно осей  $x, y, z$ .

Розглянемо довільну точку  $M$  (рис. 15.11). Нехай її координати в системі  $Cx_1y_1z_1$  будуть  $x_1, y_1, z_1$ , а в системі координат  $Oxyz$  –  $x, y, z$ . Ці координати зв'язані наступними формулами перетворення:

$$\begin{aligned}
x &= x_C + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}y_1 + \alpha_{13}z_1, \\
y &= y_C + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}y_1 + \alpha_{23}z_1, \\
z &= z_C + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}y_1 + \alpha_{33}z_1.
\end{aligned} \tag{15.80}$$

Оскільки осі  $x_1, y_1, z_1$  є головними центральними моментами інерції, то всі відцентрові моменти інерції відносно цих осей і всі статичні моменти дорівнюють нулю:

$$\begin{aligned}
I_{x_1y_1} &= \int_{(m)} x_1 y_1 dm = 0, \\
I_{x_1z_1} &= \int_{(m)} x_1 z_1 dm = 0, \\
I_{y_1z_1} &= \int_{(m)} y_1 z_1 dm = 0, \\
\int_{(m)} x_1 dm &= 0, \\
\int_{(m)} y_1 dm &= 0, \\
\int_{(m)} z_1 dm &= 0.
\end{aligned} \tag{15.81}$$

За визначенням відцентрових моментів інерції відносно осей  $x, y, z$  матимемо

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= \int_{(m)} xy dm, \\
I_{xz} &= \int_{(m)} xz dm, \\
I_{yz} &= \int_{(m)} yz dm.
\end{aligned} \tag{15.82}$$

Підставивши сюди значення  $x, y, z$  в (15.80), (обмежимося розглядом лише  $I_{xy}$ ), отримаємо

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= \\
&= x_C y_C \int_{(m)} dm + (\alpha_{21} x_C + \alpha_{11} y_C) \int_{(m)} x_1 dm + \\
&\quad + (\alpha_{22} x_C + \alpha_{12} y_C) \int_{(m)} y_1 dm + \\
&\quad + (\alpha_{23} x_C + \alpha_{13} y_C) \int_{(m)} z_1 dm + \\
&\quad + \alpha_{11} \alpha_{21} \int_{(m)} x_1^2 dm + \alpha_{12} \alpha_{22} \int_{(m)} y_1^2 dm + \\
&\quad + \alpha_{13} \alpha_{23} \int_{(m)} z_1^2 dm + \\
&\quad + (\alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{12} \alpha_{21}) \int_{(m)} x_1 y_1 dm + \\
&\quad + (\alpha_{11} \alpha_{23} + \alpha_{13} \alpha_{21}) \int_{(m)} x_1 z_1 dm + \\
&\quad + (\alpha_{12} \alpha_{23} + \alpha_{13} \alpha_{22}) \int_{(m)} y_1 z_1 dm,
\end{aligned} \tag{15.83}$$

і, враховуючи рівності (15.81), матимемо

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= m x_C y_C + \alpha_{11} \alpha_{21} \int_{(m)} x_1^2 dm + \\
&\quad + \alpha_{12} \alpha_{22} \int_{(m)} y_1^2 dm + \\
&\quad + \alpha_{13} \alpha_{23} \int_{(m)} z_1^2 dm.
\end{aligned} \tag{15.84}$$

Оскільки осі  $x$  і  $y$  ортогональні, то  $\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23} = 0$ . Звідси

$$\alpha_{13}\alpha_{23} = -(\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22}). \quad (15.85)$$

Підставимо (15.85) в останній доданок (15.84) для  $I_{xy}$ , отримаємо

$$I_{xy} = mx_C y_C + \alpha_{11}\alpha_{21} \int (x_1^2 - z_1^2) dm + \alpha_{12}\alpha_{22} \int (y_1^2 - z_1^2) dm. \quad (15.86)$$

Додаючи і віднімаючи в інтегралі (15.86)  $y_1^2$ , де  $\epsilon$  різниця  $(x_1^2 - z_1^2)$ , і відповідно  $x_1^2$ , де  $\epsilon$  різниця  $(y_1^2 - z_1^2)$ , з урахуванням перегрупування, отримаємо

$$I_{xy} = mx_C y_C + \alpha_{11}\alpha_{21} \times \left[ \int (x_1^2 + y_1^2) dm - \int (z_1^2 + y_1^2) dm \right] + \alpha_{12}\alpha_{22} \times \left[ \int (y_1^2 + x_1^2) dm - \int (z_1^2 + x_1^2) dm \right]. \quad (15.87)$$

У результаті дістанемо наступні формули для відцентрових моментів інерції:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= mx_C y_C + \alpha_{11}\alpha_{21} (I_{z_1} - I_{x_1}) + \\ &\quad + \alpha_{12}\alpha_{22} (I_{z_1} - I_{y_1}), \\ I_{yz} &= my_C z_C + \alpha_{22}\alpha_{32} (I_{x_1} - I_{y_1}) + \\ &\quad + \alpha_{23}\alpha_{33} (I_{x_1} - I_{z_1}), \\ I_{zx} &= mz_C x_C + \alpha_{33}\alpha_{13} (I_{y_1} - I_{z_1}) + \\ &\quad + \alpha_{31}\alpha_{11} (I_{y_1} - I_{x_1}). \end{aligned} \quad (15.88)$$

Отже, формули (15.79) і (15.88) визначають елементи тензора інерції твердого тіла.

Формули (15.79) і (15.88) можна об'єднати і записати у формі такого матричного співвідношення

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} = m \times \\ &\times \left( \begin{bmatrix} \bar{r}_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{r}_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{r}_C^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_C^2 & x_C y_C & x_C z_C \\ y_C x_C & y_C^2 & y_C z_C \\ z_C x_C & z_C y_C & z_C^2 \end{bmatrix} \right) + \\ &+ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1} \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad (15.89) \end{aligned}$$

де  $\bar{r}_C^2 = r_C^2 = x_C^2 + y_C^2 + z_C^2$ .

**Приклад 1.** Знайти момент інерції  $I_{SB}$  прямого конусовидного тіла відносно твірної  $SB$  (рис. 15.12), якщо радіус основи конуса дорівнює  $R$ , а висота  $H$ .

**Розв'язання.** Побудуємо центральну систему координат  $Sxyz$ . Центр мас конуса знахо-

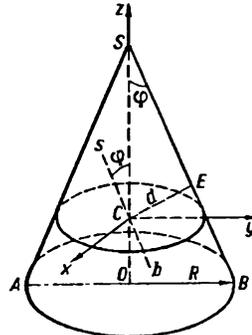


Рис. 15.12

дяться на його висоті  $OS$ , причому  $OC = \frac{1}{4}OS = \frac{1}{4}H$ . Вісь  $Cz$  напрямимо по осі конуса, вісь  $Cy$  –

паралельно основі так, щоб вона перетнула твірну  $SB$ , вісь  $Cx$  – перпендикулярно до площини  $Cyz$ . Координатні площини  $Cyz$  і  $Cxz$  є площинами симетрії, тому осі  $Cx$ ,  $Cy$ ,  $Cz$  – головні центральні осі інерції конуса. Проведемо в конусі пряму  $sb$  паралельно твірній  $SB$ , тоді ми зведемо задачу до схеми, що зображена на рис. 15.9.

Кути між прямою  $sb$  і осями  $Cx$ ,  $Cy$ ,  $Cz$  відповідно рівні:  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2} + \varphi$ ,  $\gamma = \varphi$ , де  $\varphi$  кут між твірною  $SB$  та висотою  $H$  конуса.

Підставляючи значення цих кутів  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  у формулу (15.76), отримуємо

$$I_{sb} = I_y \sin^2 \varphi + I_z \cos^2 \varphi.$$

За таблицею 15.1 моментів інерції знаходимо

$$I_y = \frac{3}{20}m \left( \frac{1}{4}H^2 + R^2 \right), \quad I_z = \frac{3}{10}mR^2.$$

Безпосередньо з рис. 15.12 визначимо

$$\sin \varphi = \frac{R}{\sqrt{H^2 + R^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}}.$$

Підставивши ці вирази у формулу для  $I_{sb}$ , отримуємо

$$I_{sb} = \frac{3}{20}m \frac{R^2}{H^2 + R^2} \left( \frac{9}{4}H^2 + R^2 \right).$$

Відстань  $d$  від центра мас  $C$  конуса до його твірної знайдемо із трикутника  $CES$ :

$$d = CS \sin \varphi = \frac{3}{4}H \frac{R}{\sqrt{H^2 + R^2}}.$$

Тепер за допомогою формули (15.38) знайдемо

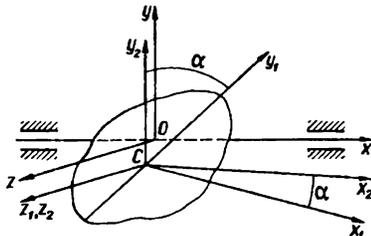


Рис. 15.13

$$I_{SB} = I_{sb} + md^2 = \frac{3}{20}m \frac{R^2}{H^2 + R^2} (6H^2 + R^2).$$

Пропонуємо самостійно розв'язати цю задачу, скориставшись формулами для перетворення тензора інерції.

**Приклад 2.** Ротор гіроскопа, виготовлений у формі тонкого диска радіусом  $R$ , виконаний з технологічними похибками так, що його центр мас  $C$  не збігається з віссю обертання  $Ox$  і зміщений відносно точки  $O$  в напрямі координат  $y$  і  $z$  на величини  $y_C$  та  $z_C$ . При цьому площина симетрії ротора  $Cy_1z_1$  не перпендикулярна осі обертання і нахилена до неї на невеликий кут  $\alpha$ .

Знайти компоненти моментів інерції ротора в системі координат  $Oxyz$ , що зв'язана з валом обертання ротора.

Розв'язання. За аналогією з рис. 15.11 введемо три системи координат:  $Oxyz$  – зв'язана з валом;  $Cx_1y_1z_1$  – система координат зв'язана з ротором так, що осі  $Cx_1$ ,  $Cy_1$ ,  $Cz_1$  є головними центральними осями інерції;  $Cx_2y_2z_2$  – система координат з полюсом у центрі мас, осі якої паралельні осям системи координат  $Oxyz$  (рис. 15.13).

Враховуючи, що ротор – це тонкий диск ( $h \ll R$ ) за формулами § 15.7 маємо

$$I_{x_1} = \frac{mR^2}{2}, \quad I_{y_1} = I_{z_1} = \frac{mR^2}{4}.$$

Матриця перетворення осей (15.77) матиме вигляд

	$x_1$	$y_1$	$z_1$
$x, x_2$	$\alpha_{11} = \cos \alpha$	$\alpha_{12} = \sin \alpha$	$\alpha_{13} = 0$
$y, y_2$	$\alpha_{21} = -\sin \alpha$	$\alpha_{22} = \cos \alpha$	$\alpha_{23} = 0$
$z, z_2$	$\alpha_{31} = 0$	$\alpha_{32} = 0$	$\alpha_{33} = 1$

Тоді за формулами (15.79) і (15.88) дістанемо

$$I_x = m(y_C^2 + z_C^2) + I_{x_1} \cos^2 \alpha + I_{y_1} \sin^2 \alpha,$$

$$I_y = mz_C^2 + I_{x_1} \sin^2 \alpha + I_{y_1} \cos^2 \alpha,$$

$$I_z = my_C^2 + I_{z_1}.$$

$$I_{xy} = -(I_{z_1} - I_{x_1}) \sin \alpha \cos \alpha + (I_{z_1} - I_{y_1}) \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$I_{yz} = my_C z_C, \quad I_{zx} = 0.$$

Відцентровий момент інерції  $I_{xy}$  запишемо у вигляді

$$I_{xy} = (I_{x_1} - I_{y_1}) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Підставивши в ці формули значення  $I_{x_1}, I_{y_1}, I_{z_1}$ , отримаємо

$$I_x = m(y_C^2 + z_C^2) + \frac{mR^2}{4}(1 + \cos^2 \alpha),$$

$$I_y = mz_C^2 + \frac{mR^2}{4}(1 + \sin^2 \alpha),$$

$$I_z = my_C^2 + \frac{mR^2}{4},$$

$$I_{xy} = -\frac{mR^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha, \quad I_{yz} = my_C z_C, \quad I_{xz} = 0.$$

Якщо врахувати, що кут  $\alpha$  малий, то  $\cos \alpha \approx 1$ ,  $\sin \alpha \approx \alpha$ , матимемо наближено

$$I_x = m(y_C^2 + z_C^2) + \frac{mR^2}{2},$$

$$I_y = mz_C^2 + \frac{mR^2}{4},$$

$$I_z = my_C^2 + \frac{mR^2}{4},$$

$$I_{xy} = \frac{mR^2}{4} \alpha, \quad I_{yz} = my_C z_C, \quad I_{xz} = 0.$$

### Питання для самоконтролю

1. Яку класифікацію в'язей запропонував німецький фізик Г. Герц?
2. Які дві класифікації сил застосовують у механіці? У чому їх умовність?
3. Що спільного і чим відрізняються диференціальні рівняння вільної і невільної систем матеріальних точок?
4. Як записуються рівняння Лагранжа першого роду для матеріальної точки?
5. Що називають центром мас системи і за якими формулами обчислюються його координати?
6. Як визначаються і класифікуються моменти інерції механічної системи?
7. Як формулюються чотири теореми Гюйгенса – Штейнера про моменти інерції?
8. Як обчислити момент інерції відносно осі, що проходить через початок координат, але не збігається ні з однією із координатних осей?
9. Які осі інерції тіла називають головними осями інерції?
10. Які властивості мають внутрішні сили? Чому дорівнює головний вектор і головний момент внутрішніх сил для твердого тіла?

## Розділ 16

### ОСНОВНІ (ЗАГАЛЬНІ) ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ

#### § 16.1. Основні теореми динаміки як методи дослідження механічного руху

Розв'язання диференціальних рівнянь пов'язане з великими труднощами, викликаними з визначенням внутрішніх сил, а також знаходженням загального інтеграла системи диференціальних рівнянь (15.12) високого порядку. Разом з тим існує багато задач динаміки, розв'язання яких не потребує повної інформації про всі властивості досліджуваного руху системи і застосування диференціаль-

них рівнянь (15.12). До таких задач належать, наприклад, задачі, пов'язані з визначенням зовнішніх сил, що діють на матеріальні точки системи, і задачі, що потребують визначення кінематичних рівнянь руху не всіх матеріальних точок системи, а тільки центра мас або визначення мір механічного руху системи (головного вектора кількості руху, головного моменту кількості руху, кінетичної енергії). Такі задачі часто виникають у техніці. До ефективних методів розв'язання цих задач належать загальні або основні теореми динаміки, що встановлюють співвідношення між

мірами механічного руху системи матеріальних точок (або однієї матеріальної точки) і силами, що характеризують динамічний ефект дії оточуючих тіл на кожну матеріальну точку системи.

Основні теореми динаміки характеризують окремі властивості механічного руху і надають часткову інформацію про цей рух. При розв'язанні динамічних задач, що потребують визначення окремих властивостей руху системи, основні теореми динаміки є найбільш ефективними методами дослідження.

У динаміці системи матеріальних точок розглядають чотири основні теореми – про рух центра мас, про зміну кількості руху, про зміну кінетичного моменту і про зміну кінетичної енергії. У динаміці матеріальної точки – три основні теореми (про зміну кількості руху, про зміну моменту кількості руху і про зміну кінетичної енергії).

Загальні, або основні, теореми динаміки можна подати як у диференціальній, так і в інтегральній формі.

## § 16.2. Міри механічного руху

До основних мір руху належать вектор кількості руху  $m\vec{v}$  і кінетична енергія  $\frac{mv^2}{2}$  (або “жива сила”). Коротко зупинимося на історії виникнення мір механічного руху.

На основі спостережень видатний французький учений Р. Декарт дійшов висновку, що при поступальному русі тіл їхні динамічні властивості визначаються кількістю руху  $m\vec{v}$ . Німецький учений Г. Лейбніц установив, що динамічні властивості тіл характеризуються величиною, пропорційною добутку маси на квадрат швидкості ( $mv^2$ ). Цю величину він назвав “живою силою”. При цьому Г. Лейбніц вважав, що кількість руху  $m\vec{v}$  може бути мірою лише статичних взаємодій

тіл, які він назвав “мертвими силами”. Р. Декарт запропонував свою міру руху в 1644 р., а Г. Лейбніц – у 1685 р.

Уперше Г. Лейбніц помітив, що декартова міра руху ( $m\vec{v}$ ) суперечить закону вільного падіння тіл. Він зазначав, що в багатьох випадках руху декартова міра правильна. У зв'язку з цим Г. Лейбніц поділив рушійні сили на “мертві” і “живі”. До перших він відносив сили тиску, сили тяжіння нерухомих тіл. За міру “мертвих” сил Г. Лейбніц взяв  $m\vec{v}$ , де  $\vec{v}$  – швидкість, з якою рухалося тіло, якби зі стану спокою воно перейшло у стан руху. За міру “живої сили” дійсного руху тіла Г. Лейбніц взяв  $mv^2$ . Цю нову міру він безпосередньо вивів із закону вільного падіння тіл. Г. Лейбніц помітив, що відстані, які пройшло тіло, пропорційні квадрату швидкості  $v^2$ . Тому що, якби тіло впало на 4 фути, то воно набуло б подвійної швидкості порівняно зі швидкістю падіння на 1 фут. Однак під час свого падіння тіла набирають силу, з якою вони можуть знову піднятися на ту саму висоту, з якої впали. Отже, сили пропорційні квадрату швидкості. Поряд з цим Г. Лейбніц довів, що міра руху суперечить положенню Р. Декарта про сталість  $m\vec{v}$ . Якби це відбувалося, то сила, тобто загальна кількість руху, постійно збільшувалася або зменшувалася б у природі. Г. Лейбніц зробив також ескізи проекту апарата, який, у разі, коли міра була би правильною, був би вічним двигуном який дає постійну нову силу, що абсурдно.

Цікаво зазначити, що Гельмгольд у XIX ст. неодноразово вдавався до цього аргументу. Прихильники Р. Декарта – картезіанці – були категорично проти. Саме тоді й зчинилася тривала суперечка, в якій брав участь І. Кант. Ця суперечка розколола вчених Європи на два табори, поки Д'Аламбер не поклав цьому край. Проте виникло питання, як узгодити, що механічний рух має дві суперечливі одна одній міри.

Питання про вимірювання механічного руху не могло бути розв'язане у XVII і XVIII ст., бо незрозумілим тоді було саме поняття сили.

Точку зору Д'Аламбера на те, що суперечка відбувається через слова, піддав критиці Ф. Енгельс у праці "Діалектика природи". Він наголоси́вав, що питання про вибір міри механічного руху пов'язане з виявленням одного з загальних законів природи – закону збереження енергії.

"Таким чином, ми знаходимо, що механічний рух справді має двояку міру, але упевнюємося також, що кожна з цих мір має силу для цілком певно відмежованого кола явищ. Коли механічний рух, який є вже в наявності, переноситься так, що він зберігається як механічний рух, то він передається згідно з формулою про добуток маси на швидкість. Коли ж він передається таким чином, що зникає як механічний рух, воскресаючи знов у формі потенціальної енергії, теплоти, електрики тощо, коли, одним словом, він перетворюється в яку-небудь іншу форму руху, то кількість цієї нової форми руху пропорційна добутку маси, що спершу рухалася, на квадрат швидкості. Одним словом:  $mv$  – це механічний рух, вимірюваний саме механічним рухом;  $\frac{mv^2}{2}$  – це механічний рух, вимірюваний його здатністю перетворюватись у певну кількість іншої форми руху. І ми бачили, що обидві ці міри все ж не суперечать одна одній, бо вони різного характеру.

Отже, ясно, що спір Лейбніца з картезіанцями ні в якому разі не був простою суперечкою про слова і що Д'Аламбер по суті нічого не розв'язав своїм "суверенним розв'язанням". Д'Аламбер міг би не утруднювати себе тирадами про неясність поглядів своїх попередників, бо його власні погляди були такі ж неясні. І дійсно, в цьому питанні повинна була залишатися неясність, доки

не знали, що стає з механічним рухом, який ніби знищується"<sup>1</sup>.

Теорема про зміну кількості руху правильно віддзеркалює внутрішній зміст механічного руху лише тоді, коли воно не пов'язане з перетворенням енергії. В інших випадках застосування цієї теореми не дає змоги проникнути у внутрішню природу механічного руху так, як це дає змогу зробити теорема про зміну кінетичної енергії.

Уперше Ф. Енгельс наприкінці XIX ст. правильно поставив питання про одночасне існування двох основних мір механічного руху. Проте лише в XX ст. в релятивістській механіці полеміка про дві міри механічного руху остаточно завершилась. З'ясувалося, що кількість руху і кінетична енергія є окремими мірами механічного руху, які слід об'єднати в одну загальну міру руху.

У релятивістській механіці користуються складною мірою руху – тензором енергії – імпульсом, який внутрішньо об'єднує обидві міри механічного руху – Декарта і Лейбніца.

Векторно-скалярна структура цієї міри руху зумовлена властивостями простору і часу, в яких відбувається рух матерії.

У теоретичній механіці скрізь проявляються положення діалектичного матеріалізму про взаємний зв'язок явищ природи. Закони і теореми механіки є ілюстраціями цього положення.

Закономірності, що є в механіці, так само як і закономірності, які характеризують більш складні форми руху матерії, підпорядковуються загальним положенням діалектичного матеріалізму. В теоретичній механіці міри руху є основою для встановлення загальних теорем динаміки.

<sup>1</sup>Енгельс Ф. Діалектика природи // Маркс К., Енгельс Ф. Соч. 2-е изд. – Т. 20. – С. 418.

### § 16.3. Теорема про рух центра мас

**Теорема.** Центр мас системи матеріальних точок рухається як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил.

Доведення. Нехай система складається з  $n$  матеріальних точок, на кожну з яких діють зовнішня  $\vec{F}_i^e$  і внутрішня  $\vec{F}_i^{вн}$  сили. Згідно з (15.11) рівняння руху  $i$ -ї точки системи має вигляд

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i^e + \vec{F}_i^{вн}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16.1)$$

Склавши ліві та праві частини цих рівнянь, одержимо

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{вн}. \quad (16.2)$$

Оскільки головний вектор внутрішніх сил

$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{вн}$  дорівнює нулю, то

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e. \quad (16.3)$$

На основі співвідношення (15.20)  $\sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i =$

$= m \vec{w}_C$ , сума  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e$  дорівнює головному вектору зовнішніх сил  $\vec{F}^e$ ; тоді остаточно отримаємо

$$m \vec{w}_C = \vec{F}^e, \quad (16.4)$$

що і потрібно було довести.

Векторні рівності (16.4) відповідають три диференціальні рівняння в координатній формі. Проектуючи обидві частини векторної рівності (16.4) на осі координат, одержимо

$$m \ddot{x}_C = F_x^e, \quad m \ddot{y}_C = F_y^e, \quad m \ddot{z}_C = F_z^e, \quad (16.5)$$

$$\text{де } F_x^e = \sum_{i=1}^n F_{ix}^e, \quad F_y^e = \sum_{i=1}^n F_{iy}^e, \quad F_z^e = \sum_{i=1}^n F_{iz}^e.$$

Із теореми випливає декілька наслідків

1. Одними лише внутрішніми силами не можна змінити характер руху центра мас системи матеріальних точок. Внутрішні сили можуть здійснювати непрямої вплив на рух центра мас лише через зовнішні сили. Наприклад, в автомобілі внутрішні сили, що розвиває двигун, впливають на рух його центра мас лише через сили тертя коліс з дорогою (рис. 15.2).

2. Якщо головний вектор  $\vec{F}^e$  зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то центр мас перебуває у спокої або рухається рівномірно і прямолінійно залежно від початкових умов.

Справді, якщо  $\vec{F}^e = 0$ , то з рівняння (16.4) маємо

$$\vec{w}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = 0. \quad (16.6)$$

Звідси, інтегруючи, одержимо

$$\vec{v}_C = \vec{v}_C(0) = \text{const}, \quad (16.7)$$

де  $\vec{v}_C(0)$  – початкова швидкість центра мас. Якщо  $\vec{v}_C(0) = 0$ , то  $\vec{r}_C = \text{const}$ .

Зазначимо, що пара сил, прикладена до твердого тіла, не може змінити характер руху його центра мас, бо головний вектор пари сил дорівнює нулю. Пара сил може спричинити лише обертання тіла.

3. Якщо одна з проєкцій головного вектора зовнішніх сил на вісь нерухомої системи координат дорівнює нулю, то проєкції швидкості центра мас на цю вісь не змінюється. Цей висновок випливає безпосередньо з рівнянь (16.5). Наприклад, якщо  $F_x^e = 0$ , то

$$m \frac{d^2 x_C}{dt^2} = m \frac{d v_{Cx}}{dt} = 0, \quad (16.8)$$

звідси  $v_{Cx} = \text{const} = v_{Cx}(0)$ . При  $v_{Cx}(0) = 0 \Rightarrow x_C = \text{const}$ .

Якщо в початковий момент часу швидкість центра мас або її проекція на вісь дорівнює нулю, то точки системи можуть рухатися тільки так, щоб радіус-вектор  $\vec{r}_C$  або відповідна координата залишалися незмінними.

Якщо система складається з двох матеріальних точок і рух однієї з них з яких-небудь додаткових міркувань задано, то при  $\vec{F}^e = 0$  теорема про рух центра мас дає змогу визначити рух другої матеріальної точки. Наприклад, розглядаючи рух поршневої машини на рухомій основі, розбиваємо всю систему на два тіла: 1) основа зі станиною машини, рух якої невідомий; 2) поршень, що здійснює коливальний рух. Визначивши рух центра мас зазначеної системи, знайдемо рух рухомої основи машини.

Якщо задано рух центра мас системи матеріальних точок, то теорема про рух центра мас дає змогу визначити головний вектор зовнішніх сил, що діють на точки системи.

**Приклад 1.** На одному кінці нерухомого човна, у точці  $A$ , стоїть людина. Нехтуючи опором води, визначити, на яку відстань  $s$  переміститься човен, коли людина перейде на інший кінець човна, в точку  $B$ . Вага людини  $P$ , вага човна  $Q$ , довжина човна  $AB = 2l$ .

Розв'язання. Наведена система складається з двох матеріальних точок, однією з яких є людина, а другою – човен. Нехай маса людини

$m_1 = \frac{P}{g}$ , маса човна  $m_2 = \frac{Q}{g}$ . По прямій  $AB$  на-

прямою вісь  $Ax$ , взявши за початок координат точку  $A$ . Зовнішніми силами тут є сили тяжіння  $\vec{P}$  і  $\vec{Q}$ , а також Архімедова сила  $\vec{N}$  води. Ці сили вертикальні, тому сума проекцій сил на

вісь  $Ax$  дорівнює нулю, тобто  $\sum_{i=1}^n F_{ix}^e = 0$ .

У цьому випадку, за першим рівнянням (16.5), маємо

$$m \frac{d^2 x_C}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 x_C}{dt^2} = 0, \quad \frac{dx_C}{dt} = C_1,$$

де  $m = m_1 + m_2$ ,  $x_C$  – координата центра мас системи. Стала  $C_1 = 0$ , оскільки на початку руху при  $t = 0$  система перебувала у спокої, отже, і  $\frac{dx_C}{dt}(0) = 0$ . Тому

$$\frac{dx_C}{dt} = 0.$$

Звідси

$$x_C = C_2 = x_C(0) = x_{0C}.$$

Таким чином, координата центра мас системи  $x$  не зміниться. Крім того, початкове значення  $x_{0C}$  координати центра мас системи виражається через координати центра мас точок системи за формулою

$$x_{0C} = \frac{m_1 x_{C_1} + m_2 x_{C_2}}{m_1 + m_2}.$$

Враховуючи, що  $x_{C_1} = x_A = 0$ ,  $x_{C_2} = l$ , знайдемо  $x_{0C} = \frac{Ql}{P+Q}$ . Коли човен переміститься на

відстань  $s$ , координати людини і човна відповідно будуть  $x_{C_1} = x_B = 2l - s$ ,  $x_{C_2} = l - s$ . Тоді із співвідношення для координати центра мас знайдемо

$$x_C = \frac{P(2l - s) + Q(l - s)}{P + Q}.$$

Враховуючи, що  $x_C = x_{0C}$ , неважко одержати рівність

$Ql = Q(l - s) + P(2l - s)$ ,

з якої отримаємо

$$s = \frac{2Pl}{P+Q}.$$

## § 16.4. Кількість руху системи матеріальних точок

Кількістю руху (мірою механічного руху) матеріальної точки  $\vec{q}$  називається век-

тор, який дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості

$$\vec{q} = m\vec{v}. \quad (16.9)$$

Кількістю руху  $\vec{Q}$  системи матеріальних точок називається головний вектор (вектор-сума) кількостей руху матеріальних точок, що входять у систему

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n \vec{q}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (16.10)$$

Виходячи з цього визначення кількості руху системи, доведемо наступну теорему.

**Теорема.** Кількість руху системи матеріальних точок (твердого тіла) дорівнює добутку маси системи (твердого тіла) на швидкість її (його) центра мас.

Доведення. На основі формули (15.19) маємо

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_C. \quad (16.11)$$

Підставивши це співвідношення в (16.10), одержимо

$$\vec{Q} = m\vec{v}_C, \quad (16.12)$$

що і треба було довести.

Векторній рівності (16.12) відповідають три рівності в координатній формі:

$$Q_x = m v_{Cx}, \quad Q_y = m v_{Cy}, \quad Q_z = m v_{Cz}. \quad (16.13)$$

Як бачимо з формули (16.12), кількість руху системи матеріальних точок дорівнює кількості руху однієї матеріальної точки, маса якої дорівнює масі системи, а швидкість дорівнює швидкості центра мас.

### § 16.5. Теорема про зміну кількості руху системи матеріальних точок у диференціальній та інтегральній формах

**Теорема.** Похідна за часом від кількості руху системи матеріальних точок дорівнює

головному вектору зовнішніх сил, прикладених до точок системи.

Доведення. Нехай система складається з  $n$  матеріальних точок. На довільну  $i$ -ту точку системи діють зовнішні й внутрішні сили  $\vec{F}_i^e$  і  $\vec{F}_i^{en}$ . Кількість руху цієї точки дорівнює  $m_i \vec{v}_i$ . За другим законом Ньютона маємо

$$\frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \vec{F}_i^e + \vec{F}_i^{en}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16.14)$$

Складаючи ліві та праві частини цих рівнянь, на основі формул (16.10), (16.12), і враховуючи, що  $\vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_C$ , дістаємо

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{en}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16.15)$$

Другий доданок у правій частині останнього рівняння, як головний вектор внутрішніх сил, дорівнює нулю, а  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e = \vec{F}^e$  – головний вектор зовнішніх сил. На основі цих співвідношень остаточно одержимо

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e, \quad (16.16)$$

що і треба було довести. Векторній рівності (16.16) відповідають три в координатній формі:

$$\frac{dQ_x}{dt} = F_x^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = F_y^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = F_z^e, \quad (16.17)$$

де  $F_x^e = \sum_{i=1}^n F_{ix}^e$ ,  $F_y^e = \sum_{i=1}^n F_{iy}^e$ ,  $F_z^e = \sum_{i=1}^n F_{iz}^e$  – проекції головного вектора зовнішніх сил на осі декартових координат. Неважко вгадати, що коли в (16.16) у випадку незмінної маси системи замість  $\vec{Q}$  підставити

його значення  $\bar{Q} = m\bar{v}_C$ , то одержимо теорему про рух центра мас

$$m\bar{w}_C = \bar{F}^e. \quad (16.18)$$

Значимо, що теорему про зміну кількості руху системи у формі рівняння (16.16) можна застосувати і до системи зі змінною масою, наприклад, у випадку реактивних мас, тим часом як теорему про центр мас – лише до систем незмінної маси.

Із теореми про зміну кількості руху системи, записаної у векторній (16.16) або скалярній (16.17) формах випливають три наслідки, аналогічні за змістом наслідкам з теореми про рух центра мас.

1. Одними внутрішніми силами не можна змінити кількість руху системи.

2. Якщо головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то кількість руху матеріальної системи залишається незмінною.

3. Якщо проекція головного вектора зовнішніх сил, прикладених до системи, на деяку нерухому в інерціальній системі координат вісь дорівнює нулю, то проекція кількості руху на цю вісь залишається незмінною.

Наведені другий і третій наслідки з теореми про зміну кількості руху системи називаються *законами збереження* кількості руху системи матеріальних точок.

Розглянемо застосування теореми про зміну кількості руху системи на явищі відкату гармати під час пострілу.

Гармата, що випускає снаряд, до пострілу мала кількість руху, яка дорівнювала нулю. Після пострілу снаряд за рахунок тиску порохових газів, що діють на нього, дістав певну кількість руху. Саме таку кількість руху у зворотному напрямі дістала і гармата. При цьому, якщо знехтувати силами опору,

$$m\bar{v} = M\bar{V}_1,$$

де  $m$  – маса снаряда;  $\bar{v}$  – його швидкість;  $M$  – маса гармати;  $\bar{V}_1$  – швидкість відкату гармати.

Звідси знайдемо співвідношення

$$\frac{v}{v_1} = \frac{M}{m},$$

яке виражає закон оберненої пропорційності швидкостей точок системи їхнім масам.

Доведемо теорему про зміну кількості руху системи матеріальних точок в інтегральній формі або, як ще її називають, теорему імпульсів для системи.

*Теорема.* Приріст кількості руху системи матеріальних точок за деякий проміжок часу  $[t_0, t]$  дорівнює повному імпульсу головного вектора зовнішніх сил, прикладених до точок системи за той самий проміжок часу.

Доведення. Перепишемо рівність (16.16) у вигляді

$$d\bar{Q} = \bar{F}^e dt. \quad (16.19)$$

Інтегруючи цю рівність у межах від  $t_0$  до  $t$ , одержимо

$$\bar{Q}(t) - \bar{Q}(t_0) = \int_{t_0}^t \bar{F}^e dt. \quad (16.20)$$

Добуток  $\bar{F}^e dt$  називається елементарним імпульсом сили і позначається  $d\bar{S}^e$ . Повний імпульс сили дорівнює

$$\bar{S}^e = \int_{t_0}^t \bar{F}^e dt. \quad (16.21)$$

Підставивши (16.21) у співвідношення (16.20), одержимо

$$\bar{Q}(t) - \bar{Q}(t_0) = \bar{S}^e, \quad (16.22)$$

або  $\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \bar{S}^e$ .

Рівність (16.22) виражає теорему про зміну кількості руху системи матеріальних точок в інтегральній формі. Одній векторній рівності (16.22) відповідають три в координатній формі:

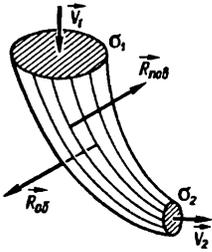


Рис. 16.1

$$\begin{aligned} Q_x - Q_{0x} &= S_x^e, \\ Q_y - Q_{0y} &= S_y^e, \\ Q_z - Q_{0z} &= S_z^e. \end{aligned} \quad (16.23)$$

Зазначимо, що теорема імпульсів застосовується в теорії удару, а також у гідродинаміці.

### § 16.6. Теорема Ейлера про рух рідини

Припустимо, система матеріальних точок становить собою суцільне середовище, наприклад рідину, що тече по трубі та заповнює у певний момент часу деякий об'єм між двома перерізами труби, площі яких  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  (рис. 16.1). Позначимо через  $v_1$  і  $v_2$  середні швидкості рідини у зазначених перерізах. Густину середовища в перерізах позначимо через  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$ . Тоді маси рідини, що протікає через зазначені перерізи за одиницю часу, відповідно дорівнюватимуть:  $\gamma_1 v_1 \sigma_1$ ,  $\gamma_2 v_2 \sigma_2$ . Якщо вважати, що течія рідини стала, то в цьому разі через кожен переріз за одиницю часу протікатиме однакова кількість рідини:

$$\mu = \gamma_1 v_1 \sigma_1 = \gamma_2 v_2 \sigma_2, \quad (16.24)$$

де через  $\mu$  позначена секундна маса рідини, що протікає через будь-який переріз труби.

Оскільки течія стала, то за час  $dt$  через перерізи  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  пройдуть маси  $\mu dt$ . Їхні кількості руху будуть  $\mu dt \bar{v}_1$  і  $\mu dt \bar{v}_2$ , а зміна кількості руху  $d\bar{Q}$  маси середовища, що розглядається, за той самий час визначиться співвідношенням

$$d\bar{Q} = \mu dt \bar{v}_2 - \mu dt \bar{v}_1. \quad (16.25)$$

Звідси

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \mu (\bar{v}_2 - \bar{v}_1). \quad (16.26)$$

Крім того, за теоремою про зміну кількості руху похідна за часом від кількості руху дорівнює головному вектору зовнішніх сил, що діють на систему. У даному випадку на середовище діють дві групи сил:

1. Сили масові, або об'ємні,  $\vec{F}_{об}$ , що діють на кожен частинку всередині виділеного об'єму. До таких сил належать насамперед сили тяжіння.

2. Сили поверхневі  $\vec{F}_{пов}$ , що діють лише на частинки, які лежать на поверхні об'єму. Це сили тиску стінок на середовище, сили тертя середовища і стінок.

Тоді, застосовуючи до середовища, що розглядається, теорему про зміну кількості руху і враховуючи рівність (16.26), одержимо

$$\mu (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = \vec{F}_{об} + \vec{F}_{пов}. \quad (16.27)$$

Перенісши всі члени цього виразу в один бік, запишемо його у формі

$$\mu \bar{v}_1 - \mu \bar{v}_2 + \vec{F}_{об} + \vec{F}_{пов} = 0. \quad (16.28)$$

Ця рівність є математичним записом теореми Ейлера, яка формулюється так: сума головних векторів об'ємних, поверхневих сил і напрямлених всередину певного об'єму

секундних кількостей рухів рідини, що протікає через два поперечні перерізи труби, дорівнює нулю.

Ця теорема застосовується в гідравліці.

### § 16.7. Момент кількості руху матеріальної точки.

**Теорема про зміну моменту кількості руху точки. Теорема площ**

Якщо перша міра механічного руху  $m\vec{v}$  характеризує поступальний рух тіла, то для характеристики обертального руху застосовується друга міра руху – момент кількості руху (або кінетичний момент).

Моментом кількості руху  $\vec{k}_O$  точки відносно центра  $O$  називається величина, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора  $\vec{r}$  матеріальної точки, проведеного з цього центра, на кількість її руху

$$\vec{k}_O = \vec{r} \times \vec{q} = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (16.29)$$

Співвідношення між моментом кількості руху (кінетичним моментом) і моментом сили встановлюється на основі теореми про зміну моменту кількості руху (кінетичного моменту).

**Теорема. Похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно нерухомого центра  $O$  (або осі) дорівнює моменту  $\vec{M}_O$  рівнодійної сил  $\vec{F}$ , прикладених до точки, відносно того самого центра (або осі).**

Доведення. Нехай матеріальна точка  $M$  масою  $m$  рухається зі швидкістю  $\vec{v}$  під дією сили  $\vec{F}$ . Кількість руху цієї точки дорівнює  $m\vec{v}$ . Радіус-вектор точки  $M$  позначимо  $\vec{r}$ . Точка  $O$  є центром моменту (рис. 16.2).

Із статки відомо, що момент рівнодійної сил  $\vec{F}$  відносно центра  $O$  дорівнює  $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$ . За визначенням, момент кіль-

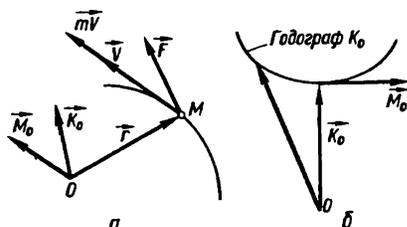


Рис. 16.2

кості руху матеріальної точки (кінетичний момент точки) відносно того самого центра  $O$  буде

$$\vec{k}_O = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (16.30)$$

Взявши першу похідну за часом від моменту кількості руху і враховуючи, що  $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$ , дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{k}_O}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{v} \times m\vec{v} + \\ &+ \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O, \end{aligned} \quad (16.31)$$

бо  $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ .

Остаточно одержимо

$$\frac{d\vec{k}_O}{dt} = \vec{M}_O, \quad (16.32)$$

що і треба було довести.

Векторні рівності (16.31) відповідають три рівності в координатній формі, якщо спроектувати її на осі деякої системи координат, наприклад,  $Oxyz$ :

$$m \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (16.33)$$

Звідси

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) &= yF_z - zF_y, \\ m \frac{d}{dt} \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) &= zF_x - xF_z, \quad (16.34) \\ m \frac{d}{dt} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= xF_y - yF_x, \end{aligned}$$

де  $x, y, z$  – координати матеріальної точки;  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  – проекції швидкості цієї точки на осі координат;  $F_x, F_y, F_z$  – проекції рівнодійної сил на ті самі осі координат.

Як випливає з рівності (16.32), момент сили відносно центра  $O$  напрямлений по дотичній до годографа моменту кількості руху точки (рис. 16.2).

Момент кількості руху можна ще виразити через секторну швидкість  $\bar{v}_S$  (7.37).

$$\bar{v}_S = \frac{1}{2}(\bar{r} \times \bar{v}) \text{ за формулою}$$

$$\bar{k}_O = \bar{r} \times m\bar{v} = 2m\bar{v}_S. \quad (16.35)$$

Отже, момент кількості руху матеріальної точки  $\bar{k}_O$  дорівнює подвоєному добутку маси цієї точки на секторну швидкість.

Як висновок з наведеної теореми про зміну моменту кількості руху точки наведемо закони збереження моменту кількості руху матеріальної точки, аналогічні законам збереження кількості руху точки.

1. Якщо момент  $\bar{M}_O$  рівнодійної сил  $\bar{F}$  відносно нерухомого центра  $O$  дорівнює нулю ( $\bar{M}_O = 0$ ), то, згідно з (16.32), момент кількості руху точки зберігається незмінним.

2. Якщо момент  $M_z$  рівнодійної сил  $\bar{F}$  відносно деякої осі, наприклад  $Oz$ , дорівнює нулю ( $M_z = 0$ ), то момент кількості руху точки відносно цієї осі буде незмінним.

**Теорема площ.** При русі матеріальної точки під дією центральної сили її радіус-вектор  $\bar{r}$  описує площу, яка змінюється пропорційно часу.

Доведення. Нехай матеріальна точка масою  $m$  рухається під дією центральної сили  $\bar{F}$ . Нагадаємо, центральною називається сила, лінія дії якої проходить через деякий нерухомий центр  $O$ . Момент цієї сили відносно центра  $O$  дорівнює нулю  $\bar{M}_O(\bar{F}) = 0$ . Отже,  $\bar{k}_O = \text{const}$ . Скориставшись тепер формулою (16.35), одержимо  $2m\bar{v}_S = \text{const}$ . Отже,  $\bar{v}_S = \text{const}$ . Це співвідношення називається інтегралом площ.

За означенням секторної швидкості (7.36)  $v_S = \frac{dS}{dt} = C$ , звідки  $dS = C dt$ . Інтегруючи, одержимо

$$S = Ct + C_1. \quad (16.36)$$

Теорему доведено.

Сталі інтегрування  $C$  і  $C_1$  визначаються з початкових умов. Наприклад, якщо при  $t = 0$   $v_S = 0$ , то  $C = 0$ , а  $S = S_0$ , тобто площа, описана радіусом-вектором точки, буде сталою. Зазначимо, що другий закон Кеплера про рух планет є окремим випадком теореми площ.

Сталість секторної швидкості ( $v_S = \text{const}$ ) рівнозначна тому, що момент кількості руху планети відносно Сонця є сталим і що сила, яка діє на планету, завжди напрямлена до Сонця. Інтеграл площ широко застосовується при дослідженні руху планет навколо Сонця, а також різних супутників, зокрема штучних супутників Землі.

## § 16.8. Коливання математичного маятника

Застосуємо теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки до складання рівняння руху математичного мая-

ника. Математичним маятником називається матеріальна точка  $M$  (рис. 16.3), підвішена шарнірно за допомогою невагомої нерозтяжної нитки або жорсткого стрижня до нерухомої осі, що проходить через точку  $O$  (рис. 16.3) і рухається під дією сили ваги.

Очевидно, математичний маятник є невільною матеріальною точкою, що рухається по дузі кола радіусом  $OM$ . Аналізуючи рух маятника, опором середовища нехтуватимемо. Застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, замінимо дію нитки або стрижня на точку  $M$  її реакцією. Розглянемо рух математичного маятника у вертикальній площині  $O\xi\eta$ .

Нехай довжина стрижня або нитки маятника дорівнює  $l$ , маса точки  $M$  дорівнює  $m$ . Позначимо відхилення маятника від вертикалі  $OM_1$  через  $\varphi$ . Нехай у початковий момент часу  $t_0$  маятник відхилився від вертикалі на кут  $\varphi_0$ . На точку  $M$  діє сила ваги

$m\vec{g}$  і реакція стрижня або нитки  $\vec{R}$ .

Оскільки обертання маятника відбувається навколо осі  $Oz$ , то знайдемо момент кількості руху цієї точки відносно осі  $Oz$

$k_z = mvl$ , де  $v = l\omega = l \frac{d\varphi}{dt}$ . Момент головного вектора сил ( $m\vec{g} + \vec{R}$ ) відносно тієї самої осі  $M_z = -mgl \sin \varphi$  (момент реакції нитки  $R$  дорівнює нулю, бо лінія її дії проходить через вісь  $Oz$ ), то на основі (16.32) одержимо

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi, \quad (16.37)$$

або

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (16.38)$$

де  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ .

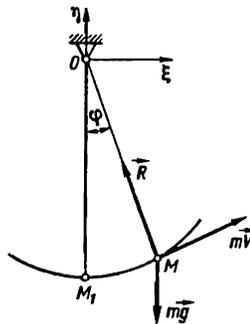


Рис. 16.3

Рівняння (16.38) є нелінійним диференціальним рівнянням руху математичного маятника. У разі малих коливань, коли  $\sin \varphi \approx \varphi$ , рівняння (16.38) набере вигляду

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (16.39)$$

Загальний інтеграл цього лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку запишемо у вигляді

$$\varphi = C \sin(\omega_0 t + \beta_0),$$

де  $C$  – амплітуда коливань;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  – коло-ва частота коливань;  $\beta_0$  – початкова фаза коливань математичного маятника.

Значення  $C$  і  $\beta_0$  визначаються з початкових умов  $\varphi(0) = \varphi_0$ ;  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Якщо врахувати, що  $\frac{d\varphi}{dt} = C\omega_0 \cos(\omega_0 t + \beta_0)$ , то, підставивши початкові умови у вираз для  $\varphi$  і

$$\frac{d\varphi}{dt}, \text{ одержимо } \varphi_0 = C \sin \beta_0; 0 = C\omega_0 \cos \beta_0.$$

Звідси знайдемо  $\cos \beta_0 = 0 \Rightarrow \beta_0 = \frac{\pi}{2}, C = \varphi_0$ .

Остаточно закон коливань математичного

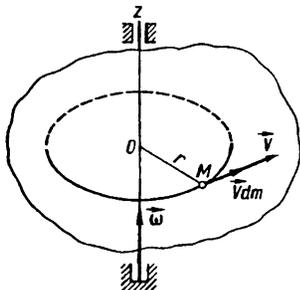


Рис. 16.4

маятника, відхиленого спочатку від вертикалі на кут  $\varphi_0$ , матиме вигляд

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega_0 t. \quad (16.40)$$

Як бачимо із (16.40), малі коливання математичного маятника є гармонічними з періодом

$$T_m = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (16.41)$$

що не залежать від початкових умов. Нагадаємо, що такі коливання називають *ізохронними*. Співвідношення (16.41) є відомою формулою Гюйгенса для періоду власних малих коливань математичного маятника.

Як видно з цього прикладу, теорема про зміну кінетичного моменту для точки дає можливість уникнути необхідності визначати реакцію в'язі.

### § 16.9. Кінетичний момент системи матеріальних точок відносно центра і відносно координатних осей.

#### Кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання

Кінетичним моментом  $\vec{K}_O$  матеріальної системи, або *головним моментом* кількості руху системи матеріальних точок відносно центра, називається векторна сума

моментів кількостей руху точок системи відносно того самого центра

$$\vec{K}_O = \sum_{i=1}^n \vec{k}_{O_i} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i, \quad (16.42)$$

де  $\vec{k}_{O_i}$  – момент кількості руху  $i$ -ї точки системи;  $m_i \vec{v}_i$  – кількість руху  $i$ -ї точки;  $\vec{r}_i$  – радіус-вектор, що з'єднує нерухомий центр  $O$  з  $i$ -ю точкою системи.

Проектуючи вектор  $\vec{K}_O$  на координатні осі  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , знайдемо вирази для визначення кінетичних моментів відносно координатних осей у вигляді

$$\begin{aligned} K_x &= \sum_{i=1}^n m_i \left( y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right); \\ K_y &= \sum_{i=1}^n m_i \left( z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right); \\ K_z &= \sum_{i=1}^n m_i \left( x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right), \end{aligned} \quad (16.43)$$

де  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  – координати  $i$ -ї точки системи;  $\frac{dx_i}{dt}$ ,  $\frac{dy_i}{dt}$ ,  $\frac{dz_i}{dt}$  – проекції швидкості цієї точки. Знайдемо кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання тіла наприклад  $Oz$ , тобто  $K_z$ .

Нехай тверде тіло обертається навколо осі  $Oz$  з кутовою швидкістю  $\omega$  (рис. 16.4) Розглянемо елементарний об'єм масою  $dm$ , віддалений від осі обертання на відстань  $r$  Швидкість цього об'єму становитиме  $v = r\omega$ , кількість руху –  $dQ = v dm = r\omega dm$ , а елементарний кінетичний момент відносно осі  $Oz$  –  $dK_z = r dQ = r v dm = r^2 \omega dm$ . Для всього тіла кінетичний момент буде  $K_z = \omega \int (r^2 dm)$ , де інтегрування поширено на масу  $m$  усього тіла.

Інтеграл  $\int_{(m)} r^2 dm$  за всією масою тіла,

який залежить лише від характеру розподілу маси в тілі, є моментом інерції тіла відносно осі обертання і позначається

$$I_z = \int_{(m)} r^2 dm. \quad (16.43)$$

Чення вираз для кінетичного моменту тіла  $K_z$  відносно осі  $Oz$  запишемо у вигляді

$$K_z = I_z \omega. \quad (16.44)$$

Отже, кінетичний момент твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно нерухомої осі обертання на кутову швидкість.

### § 16.10. Кінетичний момент системи матеріальних точок при складному русі

Установимо зв'язок між кінетичним моментом системи матеріальних точок при розгляді руху в умовно нерухомій  $A\xi\eta\zeta$  і в рухомій  $Oxyz$  системах координат, яка незмінно зв'язана з деяким тілом або системою матеріальних точок.

Радіус-вектор  $i$ -ї точки  $M$  в системі координат  $A\xi\eta\zeta$  (рис. 16.5) позначимо  $\vec{r}_i$ , а в системі координат  $Oxyz$  —  $\vec{\rho}_i$ ; радіус-вектор точки  $O$  позначимо  $\vec{r}_O$ . Очевидно, що для  $i$ -ї точки системи

$$\vec{r}_i = \vec{r}_O + \vec{\rho}_i. \quad (16.45)$$

Знайдемо формулу для визначення кінетичного моменту  $\vec{K}_A$  відносно початку  $A$  нерухомої системи координат  $A\xi\eta\zeta$ , якщо рухома система координат  $Oxyz$  здійснює поступальний рух разом з полюсом  $O$  і обертальний навколо нього. За визначенням кінетичного моменту системи відносно центра  $A$ , маємо

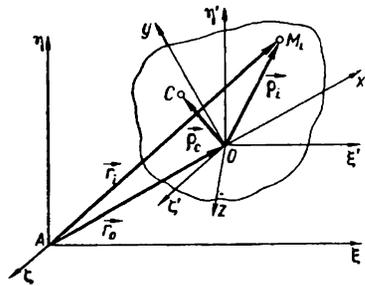


Рис. 16.5

$$\vec{K}_A = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i. \quad (16.46)$$

Підставивши вираз для  $\vec{r}_i$  у попередню формулу, одержимо

$$\vec{K}_A = \sum_{i=1}^n (\dot{\vec{r}}_O + \vec{\rho}_i) \times m_i \vec{v}_i. \quad (16.47)$$

Враховуючи, що  $\vec{r}_O$  не залежить від індексу підсумовування  $i$ , отже, його можна винести за знак суми, а також те, що з визначення центра мас випливає  $\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_C = \dot{Q}$  ( $m$  — маса;  $\vec{v}_C$  — швидкість центра мас;  $\dot{Q}$  — кількість руху системи), попередній формулі можна надати вигляду

$$\vec{K}_A = \vec{r}_O \times \dot{Q} + \vec{K}_O, \quad (16.48)$$

де  $\vec{K}_O = \sum_{i=1}^n \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i$  — кінетичний момент системи відносно центра  $O$ .

Зазначимо, що формула (16.48) збігається за формою з відомими зі статyki і кінематики формулами (§ 5.1, 12.8) для обчислення моменту сили або моменту кугової швидкості при зміні центра.

Розглянемо більш докладно кінетичний момент системи  $\vec{K}_O$  відносно рухомого

центра  $O$ , враховуючи, що швидкість  $i$ -ї точки тіла визначається відомим із кінематики співвідношенням

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_i + \frac{d'\vec{r}_i}{dt}, \quad (16.49)$$

яке легко одержати безпосередньо з виразу (16.45). Підставивши це співвідношення у вираз для  $\vec{K}_O$ , знайдемо

$$\dot{K}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \left( \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_i + \frac{d'\vec{r}_i}{dt} \right). \quad (16.50)$$

Враховуючи, що  $\vec{v}_O$  і  $\vec{\omega}$  не залежать від індексу підсумовування (їх можна внести за знак суми) і  $\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = m \vec{r}_C$ , формулу (16.50) остаточно можна переписати у вигляді

$$\dot{K}_O = m \vec{r}_C \times \vec{v}_O + \vec{K}_O^{\omega} + \vec{K}_O^{r'}. \quad (16.51)$$

Тут  $\vec{r}_C$  – радіус-вектор центра мас тіла в рухомій системі координат  $Oxzy$ ;

$$\vec{K}_O^{r'} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \frac{d'\vec{r}_i}{dt};$$

$$\dot{K}_O^{\omega} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i), \quad (16.52)$$

$\vec{K}_O^{\omega}$  – кінетичний момент, зумовлений лише обертанням системи відносно точки  $O$ . Цю особливість підкреслює індекс  $\omega$ .

Найбільший інтерес для практики має випадок, коли матеріальна система, що розглядається, незмінна, тобто випадок твердого тіла. Тоді

$$\frac{d'\vec{r}_i}{dt} = 0, \quad \vec{K}_O^{r'} = 0. \quad (16.53)$$

При цьому співвідношення (16.48) можна записати у вигляді

$$\vec{K}_A = \vec{r}_O \times \vec{Q} + \vec{r}_C \times m \vec{v}_O + \vec{K}_O^{\omega}. \quad (16.54)$$

В окремому випадку, якщо початок координат рухомої системи лежить у центрі мас  $C$ , то  $\vec{r}_C = 0$  і співвідношення (16.54) спрощується

$$\vec{K}_A = \vec{r}_C \times \vec{Q} + \vec{K}_C^{\omega}. \quad (16.55)$$

Одержані вирази (16.54) і (16.55) можна сформулювати у вигляді таких теорем для твердого тіла.

**1. Кінетичний момент тіла відносно нерухомого центра  $A$  дорівнює моменту кількості руху тіла, прикладеному в положі  $O$ , відносно того самого центра  $A$  ( $\vec{r}_O \times \vec{Q}$ ), складеному з векторним добутком  $\vec{r}_C \times m \vec{v}_O$ , а також з моментом кількості руху тіла в обертальному русі навколо полюса  $O$  ( $\vec{K}_O^{\omega}$ ).**

**2. Якщо початок рухомої системи координат збігається з центром мас, то кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомого центра  $A$  дорівнює сумі моменту кількості руху тіла відносно того самого центра  $A$  ( $\vec{r}_C \times \vec{Q}$ ) у припущенні, що вся маса тіла зосереджена в центрі мас і моменту кількості руху тіла в обертальному русі навколо центра мас  $C$  ( $\vec{K}_C^{\omega}$ ).**

Очевидно, що друга теорема є окремим випадком першої.

### § 16.11. Теорема про зміну кінетичного моменту системи в диференціальній та інтегральній формах. Теорема Резаля

Теорема про зміну кінетичного моменту системи матеріальних точок, так само як і теорема (16.16) про зміну кількості руху

системи, може записуватися як у диференціальній, так і в інтегральній формі (у формі моменту імпульсів зовнішніх сил).

У цьому параграфі наведено всі викладки для нерухомої системи координат.

Доведемо спочатку теорему в диференціальній формі.

*Теорема. Похідна за часом від кінетичного моменту системи відносно нерухомого центра  $O$  дорівнює головному моменту зовнішніх сил відносно того самого центра.*

Доведення. Нехай система складається з  $n$  матеріальних точок. На  $i$ -ту точку системи діють внутрішня  $\vec{F}_i^{\text{вн}}$  і зовнішня  $\vec{F}_i^e$  сили. Тоді вираз (16.32), що відображає теорему про зміну кінетичного моменту для точки, подамо у вигляді

$$\frac{d\vec{k}_{Oi}}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_i^e) + \vec{M}_O(\vec{F}_i^{\text{вн}}), \quad (16.56)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Підсумовуючи ліві та праві частини цієї рівності до  $n$ , одержимо

$$\frac{d \sum_{i=1}^n \vec{k}_{Oi}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i^e) + \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i^{\text{вн}}), \quad (16.57)$$

де  $\sum_{i=1}^n \vec{k}_{Oi} = \vec{K}_O$  – кінетичний момент системи або головний момент кількості руху. Враховуючи, що головний момент внутрішніх сил

$\sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i^{\text{вн}}) = 0$  і головний момент

зовнішніх сил  $\sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i^e) = \vec{M}_O$ , останньо-

му виразу надамо вигляду

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O, \quad (16.58)$$

що і треба було довести.

Цій векторній рівності відповідають три рівності в координатній формі:

$$\begin{aligned} \frac{dK_{Ox}}{dt} &= M_{Ox}, \\ \frac{dK_{Oy}}{dt} &= M_{Oy}, \\ \frac{dK_{Oz}}{dt} &= M_{Oz}. \end{aligned} \quad (16.59)$$

Доведемо теорему про зміну кінетичного моменту в інтегральній формі або у формі теорему моменту імпульсів зовнішніх сил.

*Теорема. Приріст кінетичного моменту матеріальної системи відносно нерухомого центра  $O$  за деякий проміжок часу  $[t_0, t]$  дорівнює головному моменту імпульсів зовнішніх сил, прикладених до точок системи, за той самий проміжок часу.*

Доведення. Рівність (16.58) перепишемо у вигляді

$$d\vec{K}_O = \vec{M}_O dt.$$

Інтегруючи це співвідношення у межах від  $t_0$  до  $t$ , одержимо

$$\vec{K}_O(t) - \vec{K}_O(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{M}_O dt. \quad (16.60)$$

Розглянемо докладніше праву частину з урахуванням виразів (16.20), (16.21) для повного та елементарного імпульсів сил. Оскільки головний момент

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e, \quad (16.61)$$

то, підставивши (16.61) у (16.60) і враховуючи вираз для  $d\vec{S}^e$ , дістанемо

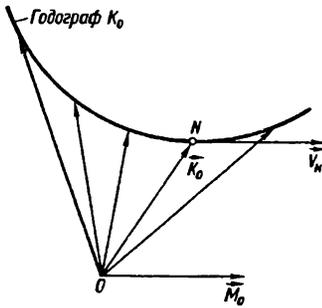


Рис. 16.6

$$\begin{aligned} \vec{K}_O(t) - \vec{K}_O(t_0) &= \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e dt = \\ &= \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times d\vec{S}_i^e = \vec{L}_O^e, \end{aligned} \quad (16.62)$$

де  $\vec{L}_O^e = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times d\vec{S}_i^e$  – головний момент імпульсів зовнішніх сил відносно центра  $O$ .

Отже, остаточно одержимо

$$\vec{K}_O(t) - \vec{K}_O(t_0) = \vec{L}_O^e, \quad (16.63)$$

що і треба було довести.

Зазначимо, що цю теорему скористаємося при вивченні елементарної теорії удару.

Ведемо теорему Резаля, яка є кінематичною інтерпретацією теореми про зміну кінетичного моменту системи.

**Теорема Резаля.** Швидкість кінця вектора кінетичного моменту системи відносно нерухомої точки  $O$  дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил відносно тієї самої точки.

Доведення. Із кінематики відомо, що перша похідна за часом від вектора є вектором, напрямленим по дотичній до голографа диференційованого вектора. Побудував-

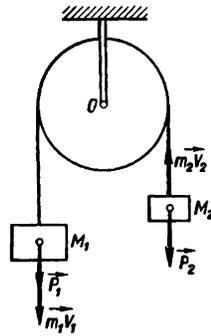


Рис. 16.7

ши на основі (16.58) годограф вектора  $\vec{K}_O$  і розглядаючи  $\vec{K}_O$  як радіус-вектор точки  $N$  годографа (рис. 16.6), дістанемо

$$\vec{v}_N = \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O. \quad (16.64)$$

Тоді  $\vec{v}_N = \vec{M}_O$ , що і треба було довести.

На цій теоремі ґрунтується наближена теорія гіроскопів.

**Приклад 2.** Через нерухомий блок перекинута гнучка, нерозтяжна нитка, до кінців якої підвішені вантажі  $M_1$  і  $M_2$  (рис. 16.7) вагою відповідно  $P_1$  і  $P_2$  ( $P_1 > P_2$ ). Тертям нитки об блок нехтуємо. Визначити прискорення  $\vec{w}$  рухомих вантажів.

**Розв'язання.** Ця система складається з двох матеріальних точок, маси яких  $m_1 = \frac{P_1}{g}$ ,  $m_2 = \frac{P_2}{g}$ .

Зовнішніми є сили ваги, внутрішніми – сили натягу нитки. Оскільки поступальний рух вантажів залежить від обертового руху блока, то застосуємо теорему про зміну кінетичного моменту відносно осі  $Oz$  обертання блока

$$\frac{dK_{Oz}}{dt} = M_{Oz},$$

або

$$\frac{dK_{Oz}}{dt} = P_1 r - P_2 r, \quad (1)$$

де  $r$  – радіус блока.

Враховуючи вектори кількості руху точок  $M_1$  і  $M_2$ , зазначені на рис. 16.7, обчислимо кінетичний момент системи

$$K_{Oz} = m_1 v r + m_2 v r = v r (m_1 + m_2) = \frac{v r}{g} (P_1 + P_2).$$

(Тут враховано, що  $|v_1| = |v_2| = v$ .) Підставляючи вираз для  $K_{Oz}$  у рівність (1), одержимо

$$\frac{r(P_1 + P_2)}{g} \frac{dv}{dt} = r(P_1 - P_2),$$

звідки

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{(P_1 - P_2)}{(P_1 + P_2)} g.$$

Насамкінець наведемо три наслідки, що випливають з останньої теореми, які за своїм змістом аналогічні відповідним наслідкам з теореми про зміну кількості руху системи.

1. Одними внутрішніми силами не можна змінити кінетичний момент системи.

2. Якщо головний момент  $\vec{M}_O$  зовнішніх сил відносно деякої нерухомої точки  $O$  дорівнює нулю, то кінетичний момент системи відносно тієї самої точки буде сталим як за величиною, так і за напрямом.

Справді, на основі (16.58) маємо  $\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O$ . Якщо  $\vec{M}_O = 0$ , то  $\vec{K}_O = \text{const}$ .

Цю властивість кінетичного моменту покладено в основу побудови гіроскопів.

3. Якщо головний момент зовнішніх сил відносно однієї з координатних осей дорівнює нулю, то відповідний кінетичний момент системи буде сталим. Наприклад,

$M_z = 0$ , тоді за (16.59)  $\frac{dK_z}{dt} = 0$  і  $K_z = \text{const}$ .

Другий і третій наслідки відображають закон збереження кінетичного моменту.

Цим законом пояснюється, зокрема, здатність кішки при падінні з висоти перевертатися в повітрі та приземлятися на лапи. У цьому випадку зовнішньою силою є сила ваги кішки, яка не створює моменту відносно

но центра ваги. Швидко обертаючи хвостом, кішка повертає своє тіло у прогиблений бік. Кінетичний момент відносно центра ваги залишається таким, що дорівнює нулю, як і на початку падіння кішки. На законі збереження кінетичного моменту ґрунтується побудова елементів у акробатиці, гімнастиці, фігурному катанні на льоду, в балеті тощо.

## § 16.12. Форми запису основних теорем динаміки в рухомих системах координат

Наведені форми запису основних теорем динаміки (16.16), (16.32) і (16.58) відповідають розгляду руху матеріальної точки або твердого тіла в інерціальній чи умовно нерухомій системі координат. Проте при розв'язанні багатьох практичних задач навігації, руху об'єктів (літаків, ракет, кораблів та ін.), приладобудування (гіроскопічні прилади, прилади точної механіки тощо), динаміки машин, багатоланкових пристроїв і механізмів, роботів-маніпуляторів тощо доцільно розглядати рух окремих елементів пристроїв та об'єктів відносно рухомих систем координат, які можуть рухатися як поступально, так і обертатися.

Отже, виникає потреба запису основних теорем динаміки в поступально рухомих та обертальних системах координат.

Розглянемо форми запису основних теорем динаміки в таких системах координат: нерухомій  $A\xi\eta\zeta$ , незмінно зв'язаній з тілом  $Ox_1y_1z_1$ , і системі координат  $O\xi'\eta'\zeta'$ , яка рухається поступально разом з полюсом  $O$  так, що її осі залишаються паралельними осями нерухомої системи координат  $A\xi\eta\zeta$ . У кожній з цих систем координат основні теореми записуються по-різному.

1. *Умовно-нерухома система координат  $A\xi\eta\zeta$*  (рис. 16.5). Скориставшись результа-

тами § 16.5 та 16.11, і вибравши за центр моментів початок координат  $A$ , матимемо

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = m\vec{w}_C = \vec{F}^e; \quad \frac{d\vec{K}_A}{dt} = \vec{M}_A. \quad (16.65)$$

**2. Поступально рухома система координат  $O\xi^e\eta^e\zeta^e$ .** Вибравши за полюс точку  $O$  (рис. 16.5) і підставивши в (16.65) вираз (16.48) для  $\vec{K}_A$ , після диференціювання, враховуючи, що  $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e$ , одержимо

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} + \vec{v}_O \times \vec{Q} + \vec{r}_O \times \vec{F}^e = \vec{M}_A. \quad (16.66)$$

Враховуючи, що головний момент внутрішніх сил дорівнює нулю, знайдемо

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e = \\ &= \sum_{i=1}^n (\vec{r}_O + \vec{p}_i) \times \vec{F}_i^e = \vec{r}_O \times \vec{F}^e + \vec{M}_O, \end{aligned} \quad (16.67)$$

де  $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \times \vec{F}_i^e$  – головний момент зовнішніх сил відносно полюса  $O$ .

Підставивши (16.67) в (16.66), остаточно матимемо

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Q}}{dt} &= m\vec{w}_C = \vec{F}^e; \\ \frac{d\vec{K}_O}{dt} + \vec{v}_O \times \vec{Q} &= \vec{M}_O. \end{aligned} \quad (16.68)$$

Отже, теорема про зміну головного вектора кількості руху системи однаково записується як в нерухомій, так і в поступально рухомій системах координат.

Якщо початок системи координат, що рухається поступально, помістити в центрі мас, тобто сумістити точку  $O$  з  $C$ , тоді

$$\vec{v}_O \times \vec{Q} = \vec{v}_C \times \vec{Q} = \dot{v}_C \times m\vec{v}_C \equiv 0 \quad (16.69)$$

і теорема про зміну кінетичного моменту в системі координат  $O\xi^e\eta^e\zeta^e$  набере такого самого вигляду, як і в нерухомій системі координат  $A\xi^e\eta^e\zeta^e$ :

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}_C^e. \quad (16.70)$$

**3. Обертальна система координат  $Ox^e$ , або система координат, незмінно зв'язана з тілом.** У цьому разі при диференціюванні векторів  $\vec{Q}$  і  $\vec{K}_O$  застосуємо формулу (9.14) для локальної похідної

$$\left( \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d'\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a} \right).$$

Тоді формули (16.68) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Q}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{Q} &= \vec{F}^e, \\ \frac{d'\vec{K}_O}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_O + \vec{v}_O \times \vec{Q} &= \vec{M}_O^e. \end{aligned} \quad (16.71)$$

Теорему про зміну кінетичного моменту можна подати компактніше. Підставляючи співвідношення (16.54) в (16.68) і застосовуючи вираз для локальної похідної, а також враховуючи, що

$$\vec{p}_C = \vec{r}_C - \vec{r}_O$$

і

$$\frac{d\vec{p}_C}{dt} = \vec{v}_C - \vec{v}_O, \quad (16.72)$$

звідки

$$\frac{d\vec{p}_C}{dt} \times \vec{v}_O = (\vec{v}_C - \vec{v}_O) \times \vec{v}_O = \vec{v}_C \times \vec{v}_O, \quad (16.73)$$

дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_O}{dt} + \vec{v}_O \times \vec{Q} &= \frac{d}{dt} (m\vec{p}_C \times \vec{v}_O + \vec{K}_O^\omega) + \\ &+ \vec{v}_O \times \vec{Q} = m\vec{v}_C \times \vec{v}_O + m\vec{p}_C \times \vec{w}_O + \\ &+ \frac{d'\vec{K}_O^\omega}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_O^\omega + \vec{v}_O \times m\vec{v}_C. \end{aligned} \quad (16.74)$$

Оскільки

$$m\vec{v}_C \times \vec{v}_O + m\vec{v}_O \times \vec{v}_C \equiv 0, \quad (16.75)$$

то остаточно одержимо

$$\frac{d\vec{K}_O^\omega}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_O^\omega = \vec{M}_O^e - m\vec{r}_C \times \vec{w}_O. \quad (16.76)$$

Ця форма запису теореми про зміну кінетичного моменту найбільш зручна для застосування на практиці. В окремому випадку, якщо початок координат  $O$  розміщений у центрі мас  $C$  ( $\vec{r}_C = 0$ ), то рівняння (16.76) спрощується:

$$\frac{d\vec{K}_C^\omega}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_C^\omega = \vec{M}_C^e. \quad (16.77)$$

Хоча теорема про зміну кінетичного моменту в рухомих осях має найпростіший вигляд з початком у центрі мас, проте в багатьох випадках початок координат у центрі мас вибирати недоцільно. Наприклад, у гіроскопах полюс вибирають у точці підвішування, тобто у точці перетину осей карданового підвісу. У ракетах, літаках, підводних човнах тощо – у точці прикладення головного вектора і головного моменту відповідно аеро- чи гідродинамічних сил, у роботах-маніпуляторах – на осях обертання ланок, бо при вивченні обертального руху нерухомою буде зазначена точка, а не центр мас.

Для практичного застосування наведених формул при розв'язанні конкретних задач їх необхідно записувати в проекціях на осі систем координат жорстко зв'язаних з тілами, рух яких вивчається, бо саме в цих системах координат їхні моменти інерції є незмінними.

Зазначимо, що, застосовуючи основні теореми динаміки до вивчення багатоланкових пристроїв або складних об'єктів, можна визначити не тільки їхній рух під

дією зовнішніх сил, а й внутрішні сили як сили взаємодії між ланками. Для цього потрібно, користуючись методом перерізу, послідовно застосувати основні теореми динаміки для всього пристрою в цілому і його складових. Ця методика широко застосовується в теорії гіроскопічних пристроїв<sup>1</sup>, а також може застосовуватися в робототехніці.

Для застосування наведених формул при складанні диференціальних рівнянь руху твердих тіл потрібно спочатку обчислити кількість руху і кінетичний момент тіл різної форми з урахуванням розподілу мас. Для цього слід скористатися попередніми розділами, що присвячені геометрії мас.

### § 16.13. Обчислення кінетичного моменту при обертанні тіла відносно полюса

Як видно із попереднього параграфа, головною величиною, що входить у рівняння руху твердого тіла і яка до кінця не досліджена, є момент кількості обертального руху відносно полюса  $\vec{K}_O^\omega$ .

Розглянемо його більш детально. Із формули (16.52) маємо

$$\vec{K}_O^\omega = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i). \quad (16.78)$$

Як бачимо, для того щоб дослідити вектор  $\vec{K}_O^\omega$ , потрібно розкрити подвійний векторний добуток. Для цього скористаємось матеріалами § 10.4, де аналізувався подвійний векторний добуток  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ . З урахуванням цього перепишемо вираз (16.78) у формі

<sup>1</sup>Павловский М. А. Теория гироскопов: Учеб. – К.: Выща шк. Головное изд-во, 1986. – 303 с.

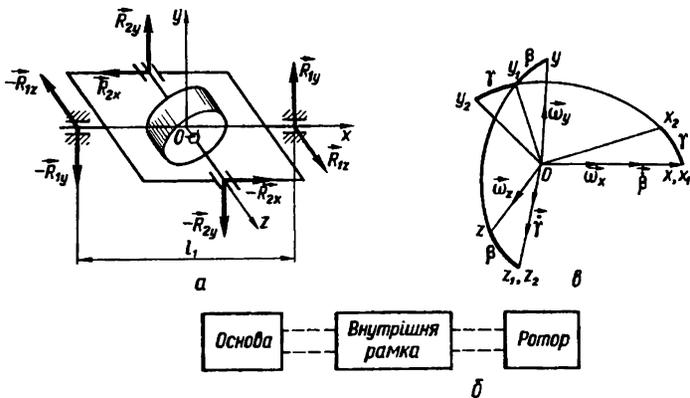


Рис. 16.8

$$\begin{aligned} \vec{K}_O^\omega &= i\vec{K}_{Ox}^\omega + j\vec{K}_{Oy}^\omega + k\vec{K}_{Oz}^\omega = \\ &= i \sum_{i=1}^n m_i \left[ \omega_x (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i \right] + \\ &+ j \sum_{i=1}^n m_i \left[ -\omega_x y_i x_i + \omega_y (x_i^2 + z_i^2) - \omega_z y_i z_i \right] + \\ &+ k \sum_{i=1}^n m_i \left[ -\omega_x z_i x_i - \omega_y z_i y_i + \omega_z (x_i^2 + y_i^2) \right]. \quad (16.79) \end{aligned}$$

У виразі (16.79) проєкції кутових швидкостей  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  не залежать від індексу підсумовування, тому їх можна винести за знак суми. Тоді під знаком суми залишаться вирази, які відповідають поняттю моментів інерції (15.28), (15.31), оскільки інтеграли – це граничні переходи від сум, коли матеріальні точки неперервно заповнюють простір.

З урахуванням цього із (16.79) отримаємо наступні вирази для проєкцій вектора  $\vec{K}_O^\omega$  кінетичного моменту обертання тіла відносно полюса O:

$$\begin{aligned} K_{Ox}^\omega &= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z, \\ K_{Oy}^\omega &= -I_{yx} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z, \quad (16.80) \\ K_{Oz}^\omega &= -I_{zx} \omega_x - I_{zy} \omega_y + I_z \omega_z \end{aligned}$$

або в матричній формі

$$\begin{bmatrix} K_{Ox}^\omega \\ K_{Oy}^\omega \\ K_{Oz}^\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \quad (16.81)$$

Осьові та відцентрові моменти інерції, що входять у прямокутну матрицю, є компонентами тензора інерції в даній точці O.

Якщо полюс O помістити в центр мас, то відповідні осі системи координат  $Sx_1z_1$  будуть у цьому випадку центральними осями інерції. Нагадаємо, коли осі  $Ox, Oy, Oz$  вибрані так, що відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, то їх називають головними осями інерції.

**Приклад 3.** Двоступеневий гіроскоп, що являє собою ротор, поміщено в карданову рамку (на практиці це кожух електричної машини), котра може вільно обертатися відносно осі  $Ox$  (рис. 16.8, a), і встановлено на рухому основу. Ця основа виконує обертальний рух, що має проєкції  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  на осі системи координат, жорстко зв'язаної з основою.

Скласти рівняння руху цього гіроскопа так, щоб можна було визначити нормальні сили реак-

ші в опорах ротора і внутрішньої рамки (рис. 16.8, а), які обумовлені взаємодією цієї системи з основою.

Розв'язання. Зазначимо, що згідно з класифікацією промислових роторів, зображених на рис. 16.8 двостепеневий гіроскоп є системою, що складається з двох обертальних пар.

За умовами задачі гіроскоп, як система двох тіл, виконує лише обертальний рух навколо нерухомої точки  $O$ . При цьому внутрішня рамка виконує лише обертання навколо осі  $Ox$ , а ротор у відносному русі може обертатися навколо осі  $Oz$ . Оскільки ці тіла виконують обертальний рух, то застосуємо до них теорему про зміну кінетичного моменту у формі (16.77).

Взаємодія між тілами відбувається через відповідні моменти сил, що прикладаються до цих тіл. Схема їх взаємодії показана на рис. 16.8, б.

Основа діє на внутрішню рамку через момент  $\vec{L}_O$ , а внутрішня рамка протидіє моменту  $(-\vec{L}_O)$ ; далі внутрішня рамка діє на ротор через момент  $\vec{M}_O$ , а ротор протидіє моменту  $(-\vec{M}_O)$ . Ці моменти викликають в опорах відповідні моменти пар сил. Наприклад, момент дії з боку основи  $\vec{L}_O$  викликає протидію з боку внутрішньої рамки через момент пари сил  $(\vec{R}_{1z}, -\vec{R}_{1z})$  і т. д. Ці сили реакції будуть залежати і, отже, визначатися законом руху основи і тіл, тому потрібно скласти відповідну систему диференціальних рівнянь. Коли знайдемо закон зміни моментів, то це означатиме, що знайдемо і реакції.

Запишемо рівняння, використовуючи теорему про зміну кінетичного моменту для внутрішньої рамки і ротора гіроскопа з урахуванням схеми їх взаємодії (рис. 16.8, б). Індекс  $\omega$  і позначення полюса  $O$  будемо опускати. Тоді

$$\frac{d\vec{K}^{(1)}}{dt} + \vec{\omega}_1 \times \vec{K}^{(1)} = \vec{L} - \vec{M}, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{K}^{(2)}}{dt} + \vec{\omega}_2 \times \vec{K}^{(2)} = \vec{M}. \quad (2)$$

Для подальшого аналізу рівнянь (1) і (2) потрібно записати їх у проєкціях на осі систем координат, що зв'язані з цими тілами, – рамки

і ротора. Тому потрібно зобразити кінематику гіроскопа, тобто задати послідовність його поворотів у просторі. Будемо задавати перший поворот рамки відносно осі  $x$  на кут  $\beta$  (рис. 16.8, в), а другий – на кут  $\gamma$  відносно  $Oz_1$  нового положення осі  $Oz$ , бо ротор повертається разом із рамкою.

З урахуванням, що рух основи задамо проєкціями кутової швидкості  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , матимемо проєкції кутової швидкості  $(\vec{\omega}_1)$  на осі  $Ox_1y_1z_1$ , зв'язані з внутрішньою рамкою:

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\beta} + \omega_x, \\ \omega_{y_1} &= \omega_y \cos \beta + \omega_z \sin \beta, \\ \omega_{z_1} &= -\omega_y \sin \beta + \omega_z \cos \beta, \end{aligned} \quad (3)$$

і відповідно проєкції кутової швидкості  $(\vec{\omega}_2)$  на осі  $Ox_2y_2z_2$ , зв'язані з ротором:

$$\begin{aligned} \omega_{x_2} &= \omega_{x_1} \cos \gamma + \omega_{y_1} \sin \gamma, \\ \omega_{y_2} &= -\omega_{x_1} \sin \gamma + \omega_{y_1} \cos \gamma, \\ \omega_{z_2} &= \dot{\gamma} + \omega_{z_1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тепер, коли є вирази (3) та (4), спроекуємо рівняння (1) і (2) на осі  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$  рамки і  $Ox_2, Oy_2, Oz_2$  ротора, вважаючи, що зазначені осі є головними, центральними осями інерції, тобто відцентрові моменти інерції цих тіл у зв'язаних системах координат відсутні. Тоді, з урахуванням (16.80), матимемо

$$\begin{aligned} I_{x_1} \frac{d\omega_{x_1}}{dt} + (I_{z_1} - I_{y_1})\omega_{y_1}\omega_{z_1} &= L_{x_1} - M_{x_1}; \\ I_{y_1} \frac{d\omega_{y_1}}{dt} + (I_{x_1} - I_{z_1})\omega_{x_1}\omega_{z_1} &= L_{y_1} - M_{y_1}; \\ I_{z_1} \frac{d\omega_{z_1}}{dt} + (I_{y_1} - I_{x_1})\omega_{x_1}\omega_{y_1} &= L_{z_1} - M_{z_1}; \\ I_{x_2} \frac{d\omega_{x_2}}{dt} + (I_{z_2} - I_{y_2})\omega_{y_2}\omega_{z_2} &= M_{x_2}; \\ I_{y_2} \frac{d\omega_{y_2}}{dt} + (I_{x_2} - I_{z_2})\omega_{x_2}\omega_{z_2} &= M_{y_2}; \\ I_{z_2} \frac{d\omega_{z_2}}{dt} + (I_{y_2} - I_{x_2})\omega_{x_2}\omega_{y_2} &= M_{z_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Рівняння (5) і є розв'язком цієї задачі.

Потрібно зазначити, що із кінематики гіроскопа (рис. 16.8, в) очевидними є співвідношення:

$$\begin{aligned}M_{x_1} &= M_{x_2} \cos \gamma - M_{y_2} \sin \gamma, \\M_{y_1} &= M_{x_2} \sin \gamma + M_{y_2} \cos \gamma, \\M_{z_1} &= M_{z_2}.\end{aligned}\quad (6)$$

При цьому, якщо не враховувати тертя ковзання, то задача дещо спрощується, бо тоді два моменти  $L_{x_1}$  і  $M_{z_2}$  є моментами сил тертя і вони дорівнюють нулю:

$$L_{x_1} = 0, \quad M_{z_2} = 0. \quad (7)$$

У цьому випадку в систему шести рівнянь входить шість невідомих:  $\beta, \gamma, M_{x_2}, M_{y_2}$  і  $L_{y_1}, L_{z_1}$ .

Отже, задача має розв'язок.

Зазначимо, що вперше стосовно гіроскопів цю методику застосував академік О. Ю. Ішлінський, тому співвідношення (5) називають рівняннями Ейлера – Ішлінського.

## Питання для самоконтролю

1. Які три величини називають динамічними параметрами механічної системи і які дві з них називають мірами механічного руху?
2. У чому суть теореми про рух центра мас системи і які наслідки випливають із неї?
3. Чим відрізняється теорема про зміну кількості руху системи від теореми про рух центра мас системи?
4. Що називають моментом кількості руху точки системи, і за якими формулами їх обчислюють?
5. Як саме і чому основні теореми динаміки дають змогу виключити з розгляду внутрішні сили системи?
6. У чому суть теореми Резаля?
7. Як записуються основні теореми динаміки в нерухомій і рухомій системах координат?
8. Як потрібно вибрати полюс, щоб теорема про зміну кінетичного моменту записувалась однаково в нерухомій системі координат і в системі координат, що рухається довільно поступально?
9. Чому дорівнює кінетичний момент твердого тіла, що обертається відносно нерухомої осі?
10. Як можна визначити реакції в системі за допомогою основних теорем динаміки?

## Розділ 17

### ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ І СИСТЕМИ

*Енергією* називають фізичну величину, яка є скалярною мірою руху матерії при переході однієї форми руху в іншу, наприклад механічної в теплову тощо. Отже, енергія характеризує різні форми руху матерії, у тому числі й механічний рух. Повна механічна енергія  $E$  дорівнює сумі кінетичної  $T$  і потенціальної  $\Pi$  енергій:

$$E = T + \Pi. \quad (17.1)$$

Як зазначалося в § 16.2, кінетична енергія  $T$  є другою мірою механічного руху. Ця міра, введена і названа Г. Лейбніцем “живою силою”, була позначена ним через  $mv^2$ .

Тільки у XIX ст. з появою поняття енергії

Г. Гельмгольц позначив другу міру як  $\frac{mv^2}{2}$ , назвавши її кінетичною енергією. Означення потенціальної енергії буде наведено далі.

#### § 17.1. Кінетична енергія матеріальної точки і системи матеріальних точок. Теорема Кеніга

*Кінетичною енергією* називають скалярну міру механічного руху в нерухомій системі координат, що дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості, тобто

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (17.2)$$

Залежно від способу задання руху точки вираз для кінетичної енергії буде різним.

1. Якщо рух матеріальної точки задано у векторній формі  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , то швидкість точки  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ . Отже,

$$T = \frac{m}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{m}{2} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (17.3)$$

2. Якщо рух точки задано в координатній формі  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , то швидкість  $\vec{v}$  визначається через її проєкції на осі координат. Отже,

$$T = \frac{1}{2} m \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right]. \quad (17.4)$$

3. Якщо рух точки задано в натуральній формі, то кінетична енергія

$$T = \frac{1}{2} m \left( \frac{ds}{dt} \right)^2, \quad (17.5)$$

де  $s = s(t)$  виражає закон руху точки по траєкторії в дугових координатах.

Кінетичною енергією системи матеріальних точок називають суму кінетичних енергій усіх точок, що входять у систему:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2. \quad (17.6)$$

Із наведених формул видно, що кінетична енергія є додатною величиною. При цьому швидкості  $\vec{v}_i$  точок матеріальної системи, що входять у вираз (17.6), визначаються відносно нерухомої інерціальної системи відліку.

Здебільшого рух матеріальної системи відносно інерціальних осей  $A\xi\eta\zeta$  (див. рис. 16.5) доцільно подати як складний і розкласти його на найпростіші рухи для спрощення обчислення кінетичної енергії системи.

Уведемо рухоми систему координат  $O\xi'\eta'\zeta'$ , що переміщується поступально відносно інерціальної системи координат  $A\xi\eta\zeta$ . Будемо розглядати рух матеріальної системи як відносно нерухомої системи координат  $A\xi\eta\zeta$ , так і відносно системи координат  $O\xi'\eta'\zeta'$ , що переміщується поступально. Нехай  $M_i$  – одна з точок матеріальної системи; маса точки –  $m_i$ . Позначимо через  $\vec{r}_O$  радіус-вектор початку рухомої системи координат  $O\xi'\eta'\zeta'$ , через  $\vec{\rho}_i$  – радіус-вектор точки  $M_i$ , що проведений з початку рухомої системи координат. Очевидно (див. рис. 16.5), що

$$\vec{r}_i = \vec{r}_O + \vec{\rho}_i, \quad \vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{v}_{ir}, \quad (17.7)$$

де  $\vec{v}_O$  – швидкість точки  $O$ ;  $\vec{v}_{ir}$  – швидкість точки відносно системи координат  $O\xi'\eta'\zeta'$ , що рухається поступально.

Підставивши вираз (17.7) для швидкості  $\vec{v}_i$  у співвідношення (17.6) і враховуючи, що  $\vec{v}_O^2 = v_O^2$ , дістанемо

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_O + \vec{v}_{ir}) \cdot (\vec{v}_O + \vec{v}_{ir}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v_O^2 + 2\vec{v}_O \cdot \vec{v}_{ir} + v_{ir}^2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_O^2 + \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_O \cdot \vec{v}_{ir} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{ir}^2. \end{aligned} \quad (17.8)$$

У цьому виразі  $\vec{v}_O$  не залежить від індексу підсумовування,  $\sum_{i=1}^n m_i$  дорівнює масі всієї системи  $m$ , а  $\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{ir} = m \vec{v}_{Cr}$  згідно з формулою (15.19). Тут  $\vec{v}_{Cr}$  – швидкість центра мас відносно системи координат, що рухається поступально. З урахуванням цих співвідношень вираз (17.8) для кінетичної енергії можна подати у формі

$$T = \frac{1}{2} m v_O^2 + m \vec{v}_O \cdot \vec{v}_{Cr} + T_{Or}, \quad (17.9)$$

де  $T_{Or} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{ir}^2$  – кінетична енергія відносно руху.

Отже, кінетична енергія матеріальної системи в її абсолютному русі має три складові: кінетичну енергію ( $\frac{1}{2} m v_O^2$ ) поступального (переносного) руху разом з полюсом; кінетичну енергію ( $T_{Or}$ ) системи в її русі відносно системи координат  $O\xi'\eta'\zeta'$ , що поступально рухається в інерціальному просторі, та взаємну кінетичну енергію ( $m \vec{v}_O \cdot \vec{v}_{Cr}$ ), що зумовлена як переносним рухом разом із системою координат  $O\xi'\eta'\zeta'$ , так і відносним рухом.

В окремому випадку, коли початок рухомої системи координат  $O$  збігається з центром мас (інерції)  $C$  системи, то  $\vec{v}_O = \vec{v}_C$ ,  $\vec{v}_{Cr} = 0$  і вираз (17.9) спрощується:

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + T_{Cr}. \quad (17.10)$$

Останнє рівняння дає змогу сформулювати *теорему Кеніга*: кінетична енергія системи матеріальних точок дорівнює сумі кінетичної енергії поступального (перенос-

ного) руху системи разом з центром мас і кінетичної енергії руху системи відносно центра мас.

У наступному параграфі розглянемо, як використовувати отримані формули для визначення кінетичної енергії в конкретних випадках.

## § 17.2. Кінетична енергія твердого тіла. Співвідношення між основними динамічними величинами

Розглянемо випадок, коли система матеріальних точок незмінна, тобто є твердим тілом. Уведемо на додаток до вже введених у § 17.1 ще одну систему координат  $Ox_2$  (див. рис. 16.5), яка незмінно зв'язана з твердим тілом і обертається разом з ним навколо точки  $O$  з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ . Тоді, враховуючи, що  $\vec{v}_{ir} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$ , вираз (17.7) набуде вигляду

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i, \quad (17.11)$$

Використовуючи вираз для  $T_{Or}$ , а також те, що  $\vec{v}_{Cr} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_C$ , рівність (17.9) можна записати так:

$$T = \frac{1}{2} m v_O^2 + m \vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_C) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)^2. \quad (17.12)$$

Тут

$$T_{Or} = T_O^{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)^2, \quad (17.13)$$

де індекс  $\omega$  вказує на те, що кінетична енергія відносного руху зумовлена обертанням твердого тіла відносно полюса  $O$ .

Стосовно твердого тіла теорему Кеніга (точка  $O$  збігається з центром мас,  $\vec{\rho}_C = 0$ ) можна записати у вигляді рівності

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}_O^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i)^2 = \frac{1}{2} m \bar{v}_C^2 + T_C^{\omega} \quad (17.14)$$

і сформулювати так: *кінетична енергія твердого тіла дорівнює сумі кінетичної енергії його поступального (переносного) руху разом із центром мас і кінетичної енергії обертального руху тіла навколо центра мас.*

Незважаючи на те, що формула для обчислення кінетичної енергії твердого тіла простіша тоді, коли полюс  $O$  збігається з центром мас, у практичних задачах, які виникають при дослідженні роботів-маніпуляторів, гіроскопічних приладів, рухомих об'єктів (кораблів, літаків, ракет, підводних човнів тощо), полюс доцільно вибирати не в центрі мас системи. У зв'язку з цим формули (17.9) і (17.12) мають велике практичне значення. Розглянемо, як можна вивести вираз для кількості руху  $\bar{Q}$  і кінетичного моменту  $\bar{K}_O$  системи, знаючи кінетичну енергію.

*Співвідношення між основними динамічними величинами  $\bar{Q}$ ,  $\bar{K}_O$ ,  $T$  (мірами механічного руху).* Покажемо, що основні динамічні величини задовольняють таке співвідношення:

$$2T = \bar{Q} \cdot \bar{v}_O + \bar{K}_O \cdot \bar{\omega}, \quad (17.15)$$

тобто сума скалярного добутку кількості руху системи на швидкість полюса  $\bar{v}_O$  і скалярного добутку її кінетичного моменту, обчисленого відносно полюса  $O$ , на кутову швидкість обертання системи  $\bar{\omega}$  дорівнює подвоєній кінетичній енергії.

Для доведення скористасмося виразами (16.12) для кількості руху, (16.51) – для кінетичного моменту твердого тіла і (17.11).

Тоді

$$\begin{aligned} \bar{Q} \cdot \bar{v}_O + \bar{K}_O \cdot \bar{\omega} &= (m \bar{v}_C) \cdot \bar{v}_O + \\ &+ (m \bar{\rho}_C \times \bar{v}_O + \bar{K}_O^{\omega}) \cdot \bar{\omega} = \\ &= m (\bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_C) \cdot \bar{v}_O + \\ &+ m (\bar{\rho}_C \times \bar{v}_O) \cdot \bar{\omega} + \bar{K}_O^{\omega} \cdot \bar{\omega}, \quad (17.16) \end{aligned}$$

$$\text{де } \bar{K}_O^{\omega} = \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \times m_i (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i).$$

Якщо врахувати, що  $(\bar{\rho}_C \times \bar{v}_O) \cdot \bar{\omega} = \bar{v}_O \cdot (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_C)$ , оскільки в скалярно-векторному добутку вектори можна міняти місцями за правилом циклічної перестановки  $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})$ , то вираз (17.16) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \bar{Q} \cdot \bar{v}_O + \bar{K}_O \cdot \bar{\omega} &= m \bar{v}_O^2 + \\ &+ 2m \bar{v}_O \cdot (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_C) + \bar{K}_O^{\omega} \cdot \bar{\omega}. \quad (17.17) \end{aligned}$$

Розглянемо детальніше останній скалярний добуток з урахуванням виразу для  $\bar{K}_O^{\omega}$ :

$$\begin{aligned} \bar{K}_O^{\omega} \cdot \bar{\omega} &= \left[ \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \times m_i (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i) \right] \cdot \bar{\omega} = \\ &= \sum_{i=1}^n [\bar{\rho}_i \times m_i (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i)] \cdot \bar{\omega} = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i [\bar{\rho}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i)] \cdot \bar{\omega}. \quad (17.18) \end{aligned}$$

Оскільки  $\bar{\omega}$  не залежить від індексу підсумовування, тому його можна вносити під знак суми або вносити з-під нього.

У виразі (17.18) маємо скалярно-векторний добуток трьох векторів:  $\bar{\rho}_i$ ;  $\bar{v}_{ir} = \bar{\omega} \times \bar{\rho}_i$ ;  $\bar{\omega}$ . Скориставшись наведеним правилом перестановки векторів у скалярно-векторному добутку, поміняємо місцями вектори  $\bar{\omega}$  і  $\bar{v}_{ir} = \bar{\omega} \times \bar{\rho}_i$ , тоді скалярному добутку, що розглядається, надамо вигляду

$$\begin{aligned}\dot{K}_O^\omega \cdot \dot{\omega} &= \sum_{i=1}^n m_i (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i) \cdot (\dot{\omega} \times \bar{\rho}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i)^2,\end{aligned}$$

або

$$\bar{K}_O^\omega \cdot \bar{\omega} = 2T_O^\omega. \quad (17.19)$$

Підставляючи (17.19) у вираз (17.17) і порівнюючи його з (17.12), дістанемо

$$\begin{aligned}\bar{Q} \cdot \bar{v}_O + \bar{K}_O \cdot \bar{\omega} &= m v_O^2 + \\ + 2m \bar{v}_O \cdot (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_C) + 2T_O^\omega &= 2T, \quad (17.20)\end{aligned}$$

що і треба було довести.

Зазначимо, що скалярний добуток  $\bar{Q} \cdot \bar{K}_A$  не залежить від вибору полюса:

$$\bar{Q} \cdot \bar{K}_A = \bar{Q} \cdot \bar{K}_B = \text{const}, \quad (17.21)$$

тобто є *динамічним інваріантом*. Дійсно, за формулою (16.48)

$$\bar{K}_B = \bar{r}_A \times \bar{Q} + \bar{K}_A. \quad (17.22)$$

Помноживши обидві частини останньої рівності скалярно на  $\bar{Q}$  і врахувавши, що  $(\bar{r}_A \times \bar{Q}) \cdot \bar{Q} = 0$ , дістанемо вираз (17.21).

Співвідношення (17.15) дає можливість охарактеризувати механічний рух твердого тіла. Дійсно, дві міри механічного руху: кількість руху і кінетична енергія у світли діалектичного матеріалізму є основними мірами механічного руху системи матеріальних точок. Як видно з формули (17.15), кількість руху  $\bar{Q}$  і кінетичний момент  $\bar{K}_O$  у своїй сукупності повністю характеризують механічний рух твердого тіла й однозначно пов'язані з кінетичною енергією тіла.

*Подання проекцій кількості руху і кінетичного моменту через кінетичну енергію.* Оскільки кінетична енергія є однорідною функцією швидкості зі ступенем однорідності, що дорівнює 2, то, скориставшись формулою Ейлера для однорідних функцій, можемо записати

$$\begin{aligned}2T(\omega_x, \omega_y, \omega_z, v_{Ox}, v_{Oy}, v_{Oz}) &= \\ &= \frac{\partial T}{\partial \omega_x} \omega_x + \frac{\partial T}{\partial \omega_y} \omega_y + \frac{\partial T}{\partial \omega_z} \omega_z + \\ &+ \frac{\partial T}{\partial v_{Ox}} v_{Ox} + \frac{\partial T}{\partial v_{Oy}} v_{Oy} + \frac{\partial T}{\partial v_{Oz}} v_{Oz}. \quad (17.23)\end{aligned}$$

Крім того, розкриваючи скалярні добутки у співвідношенні (17.15), дістанемо

$$\begin{aligned}2T &= K_{Ox} \omega_x + K_{Oy} \omega_y + K_{Oz} \omega_z + \\ &+ Q_x v_{Ox} + Q_y v_{Oy} + Q_z v_{Oz}. \quad (17.24)\end{aligned}$$

Порівнюючи праві частини (17.23) і (17.24), знайдемо шукані співвідношення:

$$K_{Ox} = \frac{\partial T}{\partial \omega_x}, K_{Oy} = \frac{\partial T}{\partial \omega_y}, K_{Oz} = \frac{\partial T}{\partial \omega_z}, \quad (17.25)$$

$$Q_x = \frac{\partial T}{\partial v_{Ox}}, Q_y = \frac{\partial T}{\partial v_{Oy}}, Q_z = \frac{\partial T}{\partial v_{Oz}}. \quad (17.26)$$

Із рівності (17.19) для окремого випадку обертального руху тіла відносно полюса дістанемо такі співвідношення:

$$K_{Ox}^\omega = \frac{\partial T_O^\omega}{\partial \omega_x}, K_{Oy}^\omega = \frac{\partial T_O^\omega}{\partial \omega_y}, K_{Oz}^\omega = \frac{\partial T_O^\omega}{\partial \omega_z}. \quad (17.27)$$

Зрозуміло, що наведені співвідношення (17.25) – (17.27) справедливі також тоді, коли сиректувати  $\bar{Q}$ ,  $\bar{K}_O$  на будь-які інші осі, наприклад на нерухомі  $A\xi\eta\zeta$ .

**§ 17.3. Обчислення кінетичної енергії для окремих випадків руху твердого тіла**

*Кінетична енергія твердого тіла, що рухається поступально.* При поступальному русі твердого тіла ( $\vec{\omega} = 0$ ) швидкості всіх його точок однакові:  $\vec{v}_O = \vec{v}$ . Для цього руху з виразу (17.12) одержимо

$$T = \frac{1}{2} m v_O^2 = \frac{1}{2} m v^2. \quad (17.28)$$

Отже, кінетична енергія твердого тіла, що рухається поступально, дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат його швидкості.

*Кінетична енергія твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки.* При обертанні тіла навколо нерухомої точки  $O$  (див. рис. 16.5)  $\vec{v}_O = 0$ . Тоді з виразів (17.12) і (17.19) визначимо

$$\begin{aligned} T &= T_O^0 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \frac{1}{2} \vec{K}_O^0 \cdot \vec{\omega} = \\ &= \frac{1}{2} (K_{Ox}^0 \omega_x + K_{Oy}^0 \omega_y + K_{Oz}^0 \omega_z). \end{aligned} \quad (17.29)$$

Враховуючи, що проекції кінетичного моменту  $\vec{K}_O^0$  визначаються виразом (16.80), матимемо

$$\begin{aligned} K_{Ox}^0 &= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z, \\ K_{Oy}^0 &= -I_{yx} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z, \\ K_{Oz}^0 &= -I_{zx} \omega_x - I_{zy} \omega_y + I_z \omega_z. \end{aligned} \quad (17.30)$$

Підставимо співвідношення (17.30) у (17.29), тоді

$$\begin{aligned} T_O^0 &= \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 - \\ &- I_{xy} \omega_x \omega_y - I_{xz} \omega_x \omega_z - I_{yz} \omega_y \omega_z. \end{aligned} \quad (17.31)$$

Якщо осі координат  $Oxuz$ , що зв'язані з тілом, є головними осями інерції ( $I_{xy} = 0, I_{xz} = 0, I_{yz} = 0$ ), то формула (17.31) набуде вигляду

$$T_O^0 = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2. \quad (17.32)$$

Вираз для кінетичної енергії не зміниться, якщо записати проекції кутової швидкості на нерухомі осі  $A\xi\eta\zeta$ , однак при цьому моменти інерції  $I_\xi, I_\eta, I_\zeta$  будуть величинами змінними, які залежатимуть від кутів повороту тіла у просторі.

Пропонуємо самостійно вивести формулу (17.31) по-іншому, виходячи з того, що обертання твердого тіла навколо нерухомої точки можна вважати обертанням навколо миттєвої осі. Тоді

$$T_O^0 = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2. \quad (17.33)$$

У цьому разі слід скористатися формулою (15.69) для моменту інерції відносно довільної осі та врахувати, що  $\omega_x = \omega \cos \alpha$ ,  $\omega_y = \omega \cos \beta$ ,  $\omega_z = \omega \cos \gamma$ .

*Кінетична енергія твердого тіла при обертанні його навколо нерухомої осі.* Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі, наприклад  $Oz$ , тоді  $\omega_x = \omega_y = 0$ ,  $\omega = \omega_z$  і з виразу (17.31) дістанемо

$$T_z^0 = \frac{1}{2} I_z \omega_z^2. \quad (17.34)$$

*Кінетична енергія твердого тіла при плоскому русі.* При цьому русі тіла вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$  перпендикулярний до площини руху. Нехай рух відбувається в площині  $A\xi\eta$ , тоді  $\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = \omega_z \neq 0$ ,  $v_{O\xi} = v_{O\eta} = 0, z_C = 0$ . Формула (17.12) з урахуванням (17.31) набуде вигляду

$$T = \frac{1}{2} m v_O^2 + m \vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_C) + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 = \frac{1}{2} m (v_{Ox}^2 + v_{Oy}^2) + m \begin{vmatrix} v_{Ox} & v_{Oy} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x_C & y_C & 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2. \quad (17.35)$$

В окремому випадку, коли полюс  $O$  розміщується в центрі мас, цей вираз спрощується:

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \omega_z^2. \quad (17.36)$$

**Кінетична енергія твердого тіла при просторовому русі.** У цьому разі застосовується загальну формулу (17.12), яка в розгорнутому вигляді набуває форми

$$T = \frac{1}{2} m (v_{Ox}^2 + v_{Oy}^2 + v_{Oz}^2) + m \begin{vmatrix} v_{Ox} & v_{Oy} & v_{Oz} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} + \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 - I_{xy} \omega_x \omega_y - I_{xz} \omega_x \omega_z - I_{yz} \omega_y \omega_z. \quad (17.37)$$

**Приклад 1.** Планетарний механізм (рис. 17.1) розміщений в горизонтальній площині й приводиться в рух воднілом  $OB = l$ , яке з'єднує осі трьох однакових коліс –  $I, II, III$ . Колесо  $I$  нерухоме, кутова швидкість водила  $\vec{\omega}$ . Вага кожного колеса  $P$ , радіуси коліс  $r$ ; вага водила  $Q$ . Визна-

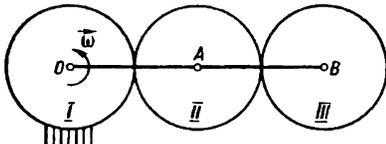


Рис. 17.1

чити кінетичну енергію системи, вважаючи колеса однорідними дисками, а кривошип – однорідним стрижнем.

Розв'язання. Для визначення кінетичної енергії всієї системи, тобто даного механізму, спочатку встановимо характер руху кожної ланки. Перше колесо нерухоме, водило обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ . Колесо  $II$  бере участь у двох обертаннях навколо вертикальних осей, які проходять через точки  $O$  та  $A$ , тобто здійснює плоскопаралельний рух. Колесо  $III$  бере участь у двох обертаннях навколо осей, які проходять через точки  $O$  і  $B$ , що паралельні між собою.

Кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій тіл, що входять до системи, тобто

$$T = T_I + T_{II} + T_{III} + T_{OB},$$

або

$$T = T_{II} + T_{III} + T_{OB}, \quad (1)$$

оскільки колесо  $I$  нерухоме, то  $T_I = 0$ .

Для обчислення  $T_{II}$  і  $T_{III}$  треба визначити кутові швидкості коліс, для чого застосуємо метод зупинки:

Елементи редуктора	Абсолютна кутова швидкість (до зупинки)	Відносна кутова швидкість (після зупинки)
$OB$	$\omega$	0
$I$	0	$-\omega$
$II$	$\omega_2$	$\omega_2 - \omega$
$III$	$\omega_3$	$\omega_3 - \omega$

Складемо пропорції, враховуючи зачеплення коліс:

$$\frac{-\omega}{\omega_2 - \omega} = -\frac{r_2}{r_1} \quad \text{або} \quad \frac{\omega}{\omega_2 - \omega} = 1; \quad (2)$$

$$\frac{\omega_2 - \omega}{\omega_3 - \omega} = -\frac{r_3}{r_2} \quad \text{або} \quad \frac{\omega_2 - \omega}{\omega_3 - \omega} = -1.$$

Із першої пропорції маємо  $\omega = \omega_2 - \omega$ ;  $\omega_2 = 2\omega$

Перемножуючи пропорції (2), дістанемо  $\frac{\omega}{\omega_3 - \omega} = -1$ , звідки  $\omega = -\omega_3 + \omega$ ;  $\omega_3 = 0$ .

Отже, колесо III здійснює миттєво-поступальний рух. Швидкості всіх його точок однакові й дорівнюють швидкості точки B, тому

$$T_{III} = mv_B^2 / 2.$$

Враховуючи, що  $v_B = OB \cdot \omega = 4r\omega$ , вираз для кінетичної енергії колеса III набуває вигляду

$$T_{III} = \frac{Pv_B^2}{2g} = \frac{8Pr^2\omega^2}{g}.$$

Далі, за теоремою Кеніга, обчислимо кінетичну енергію колеса II

$$T_{II} = \frac{mv_A^2}{2} + \frac{I_{II}\omega^2}{2}. \quad (3)$$

Тут  $m = P/g$ ,  $I_{II} = mr^2/2 = Pr^2/(2g)$ ,  $v_A = OA \cdot \omega = 2r\omega$ . Підставляючи  $m, I_{II}, v_A$  в рівняння (3), дістанемо

$$T_{II} = \frac{P \cdot 4r^2\omega^2}{2g} + \frac{Pr^2 \cdot 4\omega^2}{4g} = \frac{3Pr^2\omega^2}{g}.$$

Обчислимо кінетичну енергію водила OB, враховуючи, що  $l = 4r$ ,  $T_{OB} = I_O\omega^2/2$ , де  $I_O = m_{OB}l^2/3 = \frac{Q}{g} \frac{16}{3}r^2$ . Отже,  $T_{OB} = 8Qr^2\omega^2/(3g)$ .

Підставляючи вирази для  $T_{II}, T_{III}, T_{OB}$  в (1), отримаємо

$$\begin{aligned} T &= \frac{3Pr^2\omega^2}{g} + \frac{8Pr^2\omega^2}{g} + \frac{8Qr^2\omega^2}{3g} = \\ &= \frac{11Pr^2\omega^2}{g} + \frac{8Qr^2\omega^2}{3g} = \frac{r^2\omega^2}{3g} (8Q + 33P). \end{aligned}$$

**Приклад 2.** Тонкий диск масою  $m$  і радіусом  $r$  котиться по горизонтальній площині (рис. 17.2) так, що швидкість центра мас дорівнює  $v_C$ . Обчислити його кінетичну енергію двома методами: за допомогою теореми Кеніга і розглядаючи цей рух як обертання відносно миттєвої осі.

**Розв'язання.** 1. За теоремою Кеніга кінетична енергія тіла дорівнює сумі кінетичної енергії поступального руху разом з центром мас і кінетичної енергії руху тіла відносно центра мас, який є обертальним, тобто

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2.$$

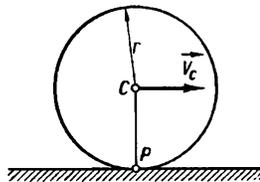


Рис. 17.2

У даному випадку  $\omega = \frac{v_C}{r}$ ;  $I_C = \frac{mr^2}{2}$  і тому вираз для кінетичної енергії набуває вигляду

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \frac{v_C^2}{r^2} = \frac{3}{4}mv_C^2.$$

2. Диск виконує миттєвий обертальний рух відносно осі, що проходить через миттєвий центр швидкостей, тому

$$T = \frac{1}{2}I_P\omega^2.$$

Кутова швидкість дорівнює

$$\omega = \frac{v_C}{r}.$$

За теоремою 1 Гюйгенса – Штейнера маємо

$$I_P = I_C + mr^2 = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2.$$

Підставивши значення моменту інерції  $I_P$  і кутової швидкості  $\omega$  у формулу для кінетичної енергії, матимемо

$$T = \frac{3}{4}mv_C^2,$$

що збігається з попереднім результатом.

**Приклад 3.** Підводний човен масою  $m$  зображений у формі моделі фізичного маятника, в якому центр мас зміщений униз по вертикалі (осі Oy, рис. 17.3) на величину  $h$  ( $y = -h$ ), виконує плоский рух у площині Oxy. Швидкість полюса  $\dot{\varphi}_O$

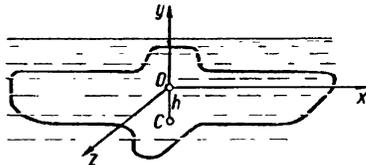


Рис. 17.3

має проекції  $v_{Ox}$  і  $v_{Oy}$ , кутова швидкість обертання відносно осі  $Oz$  –  $\omega_z$ . Момент інерції  $I_{Oz} = I_z$ . Знайти вирази для кінетичної енергії човна і виразити через неї кількість руху і момент кількості руху човна в проєкціях на осі  $Ox$ ,  $Oy$ .

Розв'язання. Кінетичну енергію обчислюємо за формулою (17.35) з урахуванням  $x_C = 0$ :

$$T = \frac{1}{2} m (v_{Ox}^2 + v_{Oy}^2) - m v_{Ox} \omega_z y_C + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2.$$

Враховуючи, що  $y_C = -h$ , отримаємо

$$T = \frac{1}{2} m (v_{Ox}^2 + v_{Oy}^2) + m v_{Ox} \omega_z h + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2.$$

Використовуючи тепер співвідношення (17.25) і (17.26), отримаємо

$$Q_x = \frac{\partial T}{\partial v_{Ox}} = m v_{Ox} + m \omega_z h;$$

$$Q_y = \frac{\partial T}{\partial v_{Oy}} = m v_{Oy}; \quad Q_z = \frac{\partial T}{\partial v_{Oz}} = 0.$$

$$K_{Ox} = \frac{\partial T}{\partial \omega_x} = 0; \quad K_{Oy} = \frac{\partial T}{\partial \omega_y} = 0;$$

$$K_{Oz} = \frac{\partial T}{\partial \omega_z} = I_z \omega_z + m v_{Ox} h.$$

#### § 17.4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

**Теорема.** Приріст кінетичної енергії матеріальної точки на деякому відрізку дуги її траєкторії дорівнює роботі сили, що прикладена до точки, на цьому самому відрізку дуги траєкторії.

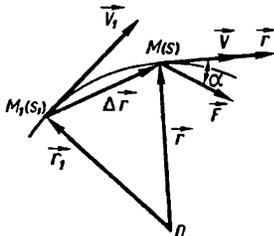


Рис. 17.4

Доведення. Нехай на матеріальну точку  $M$  діє сила  $\vec{F}$  (рис. 17.4), внаслідок чого матеріальна точка рухається по траєкторії з положення  $M_1$ , в якому швидкість точки  $\vec{v}_1$ , у кінцеве положення, де швидкість точки  $\vec{v}$ . За другим законом Ньютона

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}. \quad (17.38)$$

Щоб у це рівняння увійшла кінетична енергія  $mv^2/2$ , треба скалярно помножити обидві частини його на  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , тоді дістанемо

$$\vec{v} \cdot \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (17.39)$$

Звідси легко отримати

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (17.40)$$

Оскільки  $mv^2/2 = T$ , то останній вираз запишемо у вигляді

$$dT = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (17.41)$$

Зліва в рівності (17.41) записано елементарний приріст кінетичної енергії, а справа – фізична величина, що називається *елементарною роботою* і позначається  $d'A$ , тобто

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (17.42)$$

Отже, *елементарна робота дорівнює скалярному добутку сили на елементарне переміщення, що спричинене цією силою.*

Елементарна робота не завжди буде повним диференціалом деякої скалярної функції координат точки. Підставляючи  $d'A$  в (17.41), одержимо

$$dT = d'A. \quad (17.43)$$

Ця рівність виражає теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в дифе-

ренціальній формі: *диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі сил, що діють на точку.*

Інтегруючи обидві частини (17.43), дістанемо

$$T - T_0 = A \quad (17.44)$$

або

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A. \quad (17.45)$$

Теорема доведена.

Через  $T_0$  позначена кінетична енергія матеріальної точки на початку руху, а через  $T$  – кінетична енергія в кінцевому положенні матеріальної точки.

У виразі (17.45) через  $A$  позначена робота сили на кінцевому відрізку траєкторії, що визначається формулою

$$A = \int_{M_0}^M \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (17.46)$$

Як видно з доведеної теореми, зміна кінетичної енергії (другої міри механічного руху) дає нову фізичну величину, що називається роботою. Щоб мати можливість застосувати теорему про зміну кінетичної енергії до розв'язання задач, треба вивчити основні властивості роботи.

### § 17.5. Робота сили, що прикладена до матеріальної точки.

#### Теорема про роботу

Поняття роботи сили виникло у зв'язку зі зміною другої міри механічного руху (кінетичної енергії).

Елементарна робота сили є скалярною мірою дії сили, що дорівнює скалярному добутку (17.42) сили на елементарне переміщення точки її прикладення. У разі натурального способу задання руху  $d\vec{r} = \vec{\tau} ds$  (див. рис. 17.4). Елементарну роботу визначимо з виразу

$$\begin{aligned} d'A &= \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = F ds \cos(\widehat{\vec{F}}, \vec{\tau}) = \\ &= F ds \cos \alpha. \end{aligned} \quad (17.47)$$

Повна робота при цьому визначатиметься криволінійним інтегралом

$$A = \int_{s_0}^s F \cos \alpha ds, \quad (17.48)$$

де  $s_0$  і  $s$  – початкове і кінцеве значення дугової координати.

При координатному способі задання руху вираз (17.48) для повної роботи має вигляд

$$A = \int_{M_0}^M \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_0}^M (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (17.49)$$

Від криволінійного інтеграла (17.49) можна перейти до визначеного інтеграла, якщо врахувати, що  $dx = \dot{x} dt$ ,  $dy = \dot{y} dt$ ,  $dz = \dot{z} dt$ .

Тоді

$$A = \int_{t_0}^t \left( F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} \right) dt, \quad (17.50)$$

де  $t_0$  і  $t$  – моменти часу, в які точка проходить положення  $M_0$  і  $M$  (див. рис. 17.4).

Поряд з поняттям роботи вводять також поняття потужності:

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_v \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt}. \quad (17.51)$$

Очевидно, що потужність не можна розглядати як похідну від роботи, взяту за часом, оскільки  $d'A$  не є повним диференціалом деякої функції координат.

*Потужність  $N$  – це фізична величина, що характеризує швидкість виконання роботи силою, яка прикладена до матеріальної точки, і дорівнює скалярному добутку сили на швидкість точки.*

Розглянемо деякі елементарні теореми про роботу.

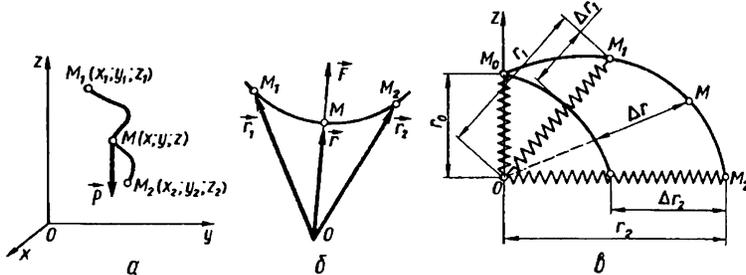


Рис. 17.5

**Теорема (про роботу рівнодійної).** Робота рівнодійної системи сил дорівнює алгебричній сумі робіт складових сил.

Доведення. Нехай на точку діє система, що складається з  $n$  сил. Рівнодійна їх

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad (17.52)$$

Помноживши обидві частини рівності скалярно на  $d\vec{r}$ , дістанемо

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \dots + \vec{F}_n \cdot d\vec{r}$$

або

$$d'A = d'A_1 + d'A_2 + \dots + d'A_n. \quad (17.53)$$

**Теорема (про роботу сил на послідовних переміщеннях).** Елементарна робота постійної сили  $\vec{F} = \text{const}$  на послідовних переміщеннях дорівнює роботі цієї сили на результуючому переміщенні.

Доведення цієї теореми формально аналогічне доведенню попередньої теореми.

На завершення розглянемо основні одиниці потужності та роботи. За одиницю потужності в СІ беруть ват ( $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с} = 1 \text{ Н}\cdot\text{м/с} \approx 0,102 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^3$ ), у CGS – ерг за секунду (ерг/с), в МКГСС – кілограм-силаметр за секунду ( $\text{кг}\cdot\text{с}\cdot\text{м}/\text{с}^2$ ). Роботу в СІ виражають у джоулях ( $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ), в МКГСС –  $1 \text{ кг}\cdot\text{с}\cdot\text{м}$ .

У техніці за одиницю роботи беруть кіловат-годину ( $1 \text{ кВт}\cdot\text{год} = 3600 \text{ Дж}$ ), за оди-

ницю потужності –  $1 \text{ Вт} = 1 \text{ В}\cdot\text{А}$  (вольт на ампер). Також уживаною одиницею потужності є кінська сила:  $1 \text{ к. с.} = 75 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^3 = 736 \text{ Вт}$ .

### § 17.6. Обчислення роботи в деяких окремих випадках руху точки і твердого тіла

**Робота, виконувана силою ваги.** Нехай матеріальна точка вагою  $\vec{P}$  (рис. 17.5, а) рухається по деякій траєкторії з положення  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  у положення  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ .

Проекції сили  $\vec{P}$ , прикладеної в точці  $M_i$  на координатні осі запишемо у вигляді

$$F_x = 0, F_y = 0, F_z = -P. \quad (17.54)$$

Елементарна робота цієї сили, згідно з (17.49),

$$d'A = F_z dz = -P dz. \quad (17.55)$$

Знак мінус означає, що сила (рис. 17.5, а) напрямлена в протилежний бік напрямку осі  $Oz$ .

Отже, робота, що виконана силою ваги під час переміщення точки  $M$  із положення  $M_1$  у положення  $M_2$ , дорівнює

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (-P) dz = -P(z_2 - z_1). \quad (17.56)$$

Оскільки різниця  $z_2 - z_1$  може бути додатною і від'ємною, то, позначивши  $z_2 - z_1 = \pm h$ , дістанемо

$$A = \pm Ph = \pm mgh. \quad (17.57)$$

Як бачимо з формули (17.57), робота сил ваги матеріальної точки дорівнює добутку сили ваги  $P$  на різницю висот початкового і кінцевого положення точки.

Зазначимо, що *робота, виконувана силою ваги  $\vec{P}$ , не залежить від форми траєкторії матеріальної точки, що рухається, а залежить тільки від крайніх її положень.*

**Робота, виконувана центральною силою.** Нагадаємо, що *центральною силою  $\vec{F}$*  називають силу, лінія дії якої під час руху матеріальної точки проходить через фіксовану точку простору.

Обчислимо роботу  $A$  центральної сили  $\vec{F}$  (рис. 17.5, б), враховуючи, що остання залежить лише від відстані  $r$  точки до нерухомого центра  $O$ , тобто

$$\vec{F} = \vec{F}(r). \quad (17.58)$$

Проекцію центральної сили на напрямок  $\vec{r}$  позначимо  $F_r$ . Тоді сила

$$\vec{F} = F_r(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (17.59)$$

де  $F_r(r)$  – проекція центральної сили на  $\vec{r}$ ;  $r$  – відстань матеріальної точки від центра  $O$ ;  $\vec{r}/r$  – одиничний вектор, що має напрямок радіуса-вектора  $\vec{r}$ .

Користуючись формулою (17.42), обчислимо елементарну роботу центральної сили

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_r(r) \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r}. \quad (17.60)$$

Проте, оскільки  $\vec{r} \cdot d\vec{r} = r dr$ , то елементарну роботу центральної сили запишемо у вигляді

$$d'A = F_r(r) dr. \quad (17.61)$$

Зінтегруємо останній вираз і дістанемо повну роботу центральної сили

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F_r(r) dr. \quad (17.62)$$

Із виразу (17.62) бачимо, що *і в разі центральної сили робота не залежить від форми траєкторії матеріальної точки, на яку діє центральна сила, а залежить тільки від початкового і кінцевого положень точки.* Формула (17.62) дає змогу визначати роботу центральної сили в окремих випадках, наприклад, сили всесвітнього тяжіння, сили взаємодії між електричними зарядами, тобто при конкретних значеннях  $F(r)$ .

**Робота, виконувана силою пружності.**

Обчислимо роботу, здійснену силою  $\vec{F}$ , що прикладена до точки  $M$  пружини (рис. 17.5, в) при її деформації на  $\Delta r$ . Початкове положення точки  $M_0$  відповідає недеформованій пружині завдовжки  $r_0$ . Сила  $\vec{F}$  при розтягненні пружини, очевидно, буде дорівнювати пружній силі пружини, яка, згідно із законом Гука, пропорційна подовженню  $\Delta r$ . Отже,

$$F = -c\Delta r = -c(r - r_0), \quad (17.63)$$

де  $c$  – коефіцієнт жорсткості пружини,  $\Delta r$  – подовження пружини, що відповідає точці  $M$ .

Обчислимо роботу при переході точки з положення  $M_1$  у положення  $M_2$ . Силу  $\vec{F}$  при цьому можна розглядати як центральну, що є функцією відстані  $OM = r$ . Застосовуючи формулу (17.62), дістанемо

$$A = -c \int_{r_1}^{r_2} (r - r_0) dr = -\frac{1}{2} c [(r_2 - r_0)^2 - (r_1 - r_0)^2]. \quad (17.64)$$

Як видно з цієї формули, *робота сили пружності не залежить від форми траєкторії точки M, а залежить тільки від крайніх положень точки*. В окремому випадку, коли траєкторією точки  $M_0$  є пряма, направлена вздовж осі  $Oz$ , тоді  $r_1 = r_0$  і маємо таку формулу для роботи сили пружності:

$$A = -ch^2 / 2, \quad (17.65)$$

де  $h$  - повне подовження пружини.

Як видно з останньої формули, робота сили пружності пружини в разі відхилення її від недеформованого стану пропорційна квадрату повного подовження пружини.

**Приклад 4.** Дві частинки заряджені позитивною електрикою. Заряд першої частинки дорівнює 100 абсолютним електростатичним одиницям (СГСЕ), заряд другої частинки - у 10 разів менше. Перша частинка нерухома, а друга рухається під дією сили відштовхування  $\vec{F}$ . Маса другої частинки дорівнює 1 г, початкова відстань від першої частинки 5 см, а початкова швидкість  $v_0 = 0$ . Визначити верхню межу для швидкості частинки, що рухається, враховуючи тільки дію сили відштовхування  $F = q_1 q_2 / r^2$ , де  $r$  - відстань між частинками;  $q_1, q_2$  - заряди відповідно першої і другої частинок.

Розв'язання. На матеріальні частинки діє сила  $F = q_1 q_2 / r^2 = 1000 / r^2$ . З віддаленням другої частинки від нерухомої частинки сила  $F$  на пройденій частинкою відстані виконає роботу. При цьому змінюється кінетична енергія дорівнюватиме виконаній роботі:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A. \quad (1)$$

Оскільки  $v_0 = 0$ , то

$$mv^2 / 2 = A. \quad (2)$$

Сила, що діє на матеріальну точку, змінюється тобто  $F = F(r)$ . Отже, елементарна робота

$$d'A = F dr = 1000 dr / r^2.$$

Повна робота

$$A = 1000 \int_5^{\infty} \frac{dr}{r^2},$$

$$A = -1000 \left. \frac{1}{r} \right|_5^{\infty} = \frac{1000}{5} = 200.$$

Підставляючи це значення в (2), дістанемо

$$\frac{v^2}{2} = 200 \left( \frac{\text{см}}{г} \right)^2, \quad v = 20 \text{ см/с}.$$

**Робота зовнішніх сил, що прикладені до твердого тіла.** Нехай до точок твердого тіла (див. рис. 16.5) прикладена сукупність зовнішніх сил  $\vec{F}_i^e$  у точках  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Елементарна робота цих сил

$$d'A = \vec{F}_1^e \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2^e \cdot d\vec{r}_2 + \dots + \vec{F}_n^e \cdot d\vec{r}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e \cdot d\vec{r}_i. \quad (17.66)$$

Оскільки  $\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{\rho}_i$  і  $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$ , то

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) dt. \quad (17.67)$$

Підставивши (17.67) у (17.66) і врахувавши, що  $d\vec{r}_0$  і  $\vec{\omega}$  не залежать від індексу підсумовування, дістанемо

$$d'A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e \cdot d\vec{r}_0 + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) dt = \vec{F} \cdot d\vec{r}_0 + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) dt, \quad (17.68)$$

де  $\vec{F}^e = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e$  – головний вектор зовнішніх сил.

Переставимо місцями  $\vec{\omega}$  і  $\vec{F}^e$  в скалярно-векторному добутку (17.68), тоді

$$d'A = \vec{F}^e \cdot d\vec{r}_0 + \sum_{i=1}^n (\vec{p}_i \times \vec{F}_i^e) \cdot \vec{\omega} dt,$$

або

$$d'A = \vec{F}^e \cdot d\vec{r}_0 + \vec{\omega} dt \cdot \sum_{i=1}^n (\vec{p}_i \times \vec{F}_i^e). \quad (17.69)$$

Оскільки  $\sum_{i=1}^n (\vec{p}_i \times \vec{F}_i^e) = \vec{M}_O^e$  є головним моментом зовнішніх сил відносно полюса  $O$ , а  $\vec{\omega} dt$  – вектором  $d\vec{\varphi}$  малого повороту, модуль якого дорівнює елементарному куту повороту, то остаточно вираз для елементарної роботи набуде вигляду

$$d'A = \vec{F}^e \cdot d\vec{r}_0 + \vec{M}_O^e \cdot d\vec{\varphi}. \quad (17.70)$$

Отже, елементарна робота зовнішніх сил, що прикладені до твердого тіла, дорівнює сумі роботи головного вектора зовнішніх сил, яка здійснюється на елементарному переміщенні полюса  $O$ , і роботи головного моменту цих сил, обчисленої відносно центра  $O$ , на елементарному обертальному переміщенні  $d\vec{\varphi}$  тіла навколо осі, що проходить через цей центр. Розділивши ліву і праву частини останньої рівності на  $dt$ , дістанемо вираз

$$N = \vec{F}^e \cdot \vec{v}_O + \vec{M}_O^e \cdot \vec{\omega} \quad (17.71)$$

для визначення потужності сил, що прикладені до тіла, тобто потужність зовнішніх сил, що прикладені до тіла, дорівнює сумі скалярного добутку головного вектора на швидкість полюса  $O$  і скалярного добутку головного моменту цих сил відносно даного полюса на кутову швидкість обертання тіла.

В окремому випадку, коли тіло здійснює обертання навколо нерухомої осі, наприклад  $Oz$ , і  $M_z = \text{const}$ , то потужність і робота зовнішніх сил визначаються за формулами

$$N = M_z \omega_z; \quad A = M_z (\varphi - \varphi_0), \quad (17.72)$$

де  $\varphi, \varphi_0$  – кінцеве і початкове значення кута повороту тіла.

## § 17.7. Теорема про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок

*Теорема. Приріст кінетичної енергії системи матеріальних точок за деякий проміжок часу дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на точки системи протягом розглядуваного проміжку часу.*

Доведення. Нехай система складається з  $n$  матеріальних точок. На довільну точку  $M_i$  масою  $m_i$  діють зовнішня  $\vec{F}_i^e$  і внутрішня  $\vec{F}_i^{\text{вн}}$  сили. За теоремою про зміну кінетичної енергії для матеріальної точки (17.45) маємо

$$\frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{m_i v_{i0}^2}{2} = A_i(\vec{F}_i^e) + A_i(\vec{F}_i^{\text{вн}}), \quad (17.73)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Виходячи з означення кінетичної енергії системи (17.6) і підсумовуючи, дістанемо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{i0}^2 = \\ & = \sum_{i=1}^n A_i(\vec{F}_i^e) + \sum_{i=1}^n A_i(\vec{F}_i^{\text{вн}}) \end{aligned} \quad (17.74)$$

або

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^n A_i, \quad (17.75)$$

де  $T_0, T$  – кінетична енергія системи відповідно в початковому і кінцевому її положеннях;  $\sum_{i=1}^n A_i$  – сума робіт зовнішніх і внутрішніх сил, тобто сума робіт усіх сил, що діють на систему. Отже, теорема доведена.

Примітки: 1. У випадку твердого тіла в правій частині рівності (17.75) буде сума робіт лише зовнішніх сил, оскільки внутрішні сили у твердому тілі зрівноважуються і їхня робота дорівнює нулю.

2. Аналіз основних, або загальних, чотирьох теорем динаміки системи переконує в тому, що тільки теорема про зміну кінетичної енергії системи містить внутрішні сили, які впливають на зміну кінетичної енергії, на відміну від трьох перших теорем, коли внутрішні сили не впливали на зміну кількості руху, на рух центра мас і зміну кінетичного моменту. Отже, кінетична енергія як друга міра механічного руху повніше відображає властивості цього руху системи матеріальних точок.

3. Усі доведені основні теореми динаміки вільної системи придатні і для невільної системи. Для цього треба спочатку застосувати аксіому про звільнення від в'язей і реакції в'язей зарахувати до активних сил.

Щоб підтвердити глибокі зв'язки між основними динамічними величинами, покажемо на прикладі твердого тіла, що теорему про зміну кінетичної енергії можна вивести із співвідношення (17.15).

Виберемо полюс у центрі мас, тоді співвідношення (17.15) набуде вигляду

$$2T = \bar{Q} \cdot \bar{v}_C + \bar{K}_C^\omega \cdot \bar{\omega}. \quad (17.76)$$

Здиференціюємо ліву і праву частини цієї рівності, тоді

$$2 \frac{dT}{dt} = \frac{d\bar{Q}}{dt} \cdot \bar{v}_C + \bar{Q} \cdot \frac{d\bar{v}_C}{dt} + \frac{d\bar{K}_C^\omega}{dt} \cdot \bar{\omega} + \bar{K}_C^\omega \cdot \frac{d\bar{\omega}}{dt}. \quad (17.77)$$

Згідно з (16.12) і (16.16),  $\bar{Q} = m\bar{v}_C$ ,  $\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{F}^e$ , отже, легко переконатися, що

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}}{dt} \cdot \bar{v}_C &= m \frac{d\bar{v}_C}{dt} \cdot \bar{v}_C = \\ &= \bar{Q} \cdot \frac{d\bar{v}_C}{dt} = \bar{F}^e \cdot \bar{v}_C. \end{aligned} \quad (17.78)$$

Із співвідношення (17.78) випливає

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} \cdot \bar{v}_C + \bar{Q} \cdot \frac{d\bar{v}_C}{dt} = 2\bar{F}^e \cdot \bar{v}_C. \quad (17.79)$$

Покажемо, що аналогічно до (17.79) мас місце таке саме співвідношення для кінетичного моменту:

$$\frac{d\bar{K}_C^\omega}{dt} \cdot \bar{\omega} + \bar{K}_C^\omega \cdot \frac{d\bar{\omega}}{dt} = 2\bar{M}_C^e \cdot \bar{\omega}. \quad (17.80)$$

Справді, згідно з теоремою про зміну кінетичного моменту системи (16.70),

$$\frac{d\bar{K}_C^\omega}{dt} = \bar{M}_C^e. \quad (17.81)$$

Тоді, помноживши рівність (17.81) скалярно на  $\bar{\omega}$ , дістанемо

$$\frac{d\bar{K}_C^\omega}{dt} \cdot \bar{\omega} = \bar{M}_C^e \cdot \bar{\omega}. \quad (17.82)$$

Залишається довести, що  $\bar{K}_C^\omega \cdot \frac{d\bar{\omega}}{dt}$  у виразі (17.80) також дорівнює  $\bar{M}_C^e \cdot \bar{\omega}$ .

Скалярний добуток  $\bar{K}_C^\omega \cdot \frac{d\bar{\omega}}{dt}$  подамо через суму добутоків відповідних проекцій:

$$\begin{aligned} \bar{K}_C^\omega \cdot \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= K_{C_x}^\omega \cdot \frac{d\omega_x}{dt} + \\ &+ K_{C_y}^\omega \cdot \frac{d\omega_y}{dt} + K_{C_z}^\omega \cdot \frac{d\omega_z}{dt}. \end{aligned} \quad (17.83)$$

Якщо осі  $Cx, Cy, Cz$  є головними осями інерції, то, згідно з (16.80),

$$K_{Cx}^{\omega} = I_x \omega_x, \quad K_{Cy}^{\omega} = I_y \omega_y, \quad K_{Cz}^{\omega} = I_z \omega_z. \quad (17.84)$$

Оскільки моменти інерції  $I_x, I_y, I_z$  відносно жорстко зв'язаних з тілом осей є постійними, то у виразі (17.83) їх можна внести під знак похідної. Тоді

$$\begin{aligned} \vec{K}_C^{\omega} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} &= \omega_x \frac{dK_{Cx}^{\omega}}{dt} + \\ &+ \omega_y \frac{dK_{Cy}^{\omega}}{dt} + \omega_z \frac{dK_{Cz}^{\omega}}{dt} = \\ &= \vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{K}_C^{\omega}}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{M}'_C = \vec{M}'_C \cdot \vec{\omega}, \quad (17.85) \end{aligned}$$

що і треба було довести.

Підставимо співвідношення (17.79) і (17.80) у (17.77), тоді

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = 2(\vec{F}^e \cdot \vec{v}_C + \vec{M}'_C \cdot \vec{\omega}). \quad (17.86)$$

Порівнюючи праву частину виразу (17.86) із (17.71), легко помітити, що вона дорівнює подвоєній потужності зовнішніх сил:

$$\vec{F}^e \cdot \vec{v}_C + \vec{M}'_C \cdot \vec{\omega} = 2N^e. \quad (17.87)$$

Отже,

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \vec{F}^e \cdot \vec{v}_C + \vec{M}'_C \cdot \vec{\omega} = N. \quad (17.88)$$

Помноживши ліву і праву частини на  $dt$  і врахувавши (17.51), отримаємо

$$d\vec{T} = N dt = d'A. \quad (17.89)$$

Зазначимо, що викладена методика доведення теореми про зміну кінетичної енергії із співвідношення між основними динамічними величинами показує безпредметність дискусії про міри руху, яка виникла у XIX ст.

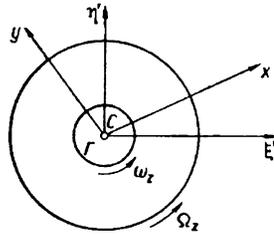


Рис. 17.6

**Приклад 5.** Космічний апарат, який складається з двох тіл – корпуса і маховичка  $\Gamma$  генератора, виконує плоский рух у площині  $C\xi\eta'$ , обертаючись відносно осі  $Cz$  з кутовою швидкістю  $\Omega_z$  (рис. 17.6). Маховичок  $\Gamma$ , обертаючись відносно тієї самої осі  $Cz$  з відносною кутовою швидкістю  $\omega_z$ , використовується для зміни орієнтації космічного апарата у просторі. Момент інерції космічного апарата відносно осі  $Cz$  дорівнює  $I_{Cz}$ , а маховичка –  $I_z$ . Потрібно знайти:

- 1) співвідношення між кутами повороту маховичка і космічного апарата;
- 2) кутову швидкість, яку потрібно надати маховичку, щоб зупинити обертання космічного апарата відносно осі  $Cz$ ;
- 3) роботу, яку потрібно затратити, щоб за допомогою обертань маховичка зупинити обертання космічного апарата.

Розв'язання. Розпочнемо розв'язання задачі з третього питання.

Скористаємося теоремою про зміну кінетичної енергії системи. Кінетична енергія системи складеться з кінетичних енергій двох тіл – корпусу апарата і маховичка. Зовнішні сили в даній задачі відсутні, а взаємодія маховичка і апарата відбувається під дією внутрішніх сил. Тому

$$T - T_0 = A'. \quad (1)$$

Внутрішні сили, що спричинюють обертання маховичка  $\Gamma$ , не можуть змінити рух його центра мас, тому при обчисленні кінетичної енергії можна обмежитись лише кінетичною енергією обертального руху, бо приріст кінетичної енергії поступального руху дорівнює нулю.

Система складеться з двох тіл, що обертаються відносно осі  $Cz$ . Будемо вважати, що обидві

кутові швидкості  $\Omega_z$  і  $\omega_z$  напрямлені в один бік уздовж осі Cz, тоді

$$T = \frac{1}{2} I_{Cz} \Omega_z^2 + \frac{1}{2} I_z (\Omega_z + \omega_z)^2, \quad (2)$$

де  $\Omega_z$  – кутова швидкість обертання апарата відносно інерціальної системи координат;  $\omega_z$  – кутова швидкість маховичка відносно апарата. Нехай у початковий момент часу при  $t = 0$

$$\Omega_z(0) = \Omega_{0z} \text{ і } \omega_z(0) = 0.$$

У момент припинення обертання космічного апарата  $\Omega_z = 0$ . Отже, в кінці руху

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega_z^2. \quad (3)$$

Підставивши вирази (3) і (2) в (1), отримаємо

$$\frac{1}{2} I_z \omega_z^2 - \left( \frac{1}{2} I_{Cz} \Omega_{0z}^2 + \frac{1}{2} I_z \Omega_{0z}^2 \right) = A'$$

або

$$\frac{1}{2} I_z \omega_z^2 - \frac{1}{2} (I_{Cz} + I_z) \Omega_{0z}^2 = A'. \quad (4)$$

Вираз (4) дає можливість визначити роботу внутрішніх сил  $A'$ , яку потрібно затратити, щоб зупинити обертання корпусу апарата, але для цього потрібно знати співвідношення між кутовими швидкостями маховичка  $\omega_z$  і корпусу  $\Omega_z$ .

Знайдемо це співвідношення, скориставшись тим, що в даному випадку кінстичний момент системи зберігається постійним, оскільки головний момент зовнішніх сил дорівнює нулю.

Для будь-якого моменту часу матимемо

$$K_{Cz}^w = I_{Cz} \Omega_z + I_z (\Omega_z + \omega_z).$$

Оскільки при  $t = 0$   $\omega_z(0) = 0$ ,  $\Omega_z = \Omega_{0z}$ , то

$$(I_{Cz} + I_z) \Omega_z + I_z \omega_z = (I_{Cz} + I_z) \Omega_{0z}. \quad (5)$$

Звідси

$$\omega_z = \frac{I_{Cz} + I_z}{I_z} (\Omega_{0z} - \Omega_z). \quad (6)$$

Із виразу (6) бачимо, що обертання апарата припиниться ( $\Omega_z = 0$ ), коли швидкість обертання маховичка досягне величини

$$\omega_z = \frac{I_{Cz} + I_z}{I_z} \Omega_{0z}. \quad (7)$$

Підставивши тепер співвідношення (7) у вираз (4), знайдемо роботу внутрішніх сил, яку потрібно затратити, щоб зупинити обертання апарата.

$$\begin{aligned} A' &= \frac{1}{2} I_z \left( \frac{I_{Cz} + I_z}{I_z} \right)^2 \Omega_{0z}^2 - \frac{1}{2} (I_{Cz} + I_z) \Omega_{0z}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{I_{Cz}}{I_z} (I_{Cz} + I_z) \Omega_{0z}^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Для того щоб знайти відповідь на перше запитання, будемо вважати, що апарат повертається на кут  $\theta$ , а маховичок – на кут  $\varphi$ , тобто

$\Omega_z = \frac{d\theta}{dt}$ , а  $\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}$ ; тоді з урахуванням початкових умов при  $t = 0$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)_0 = \omega_z(0) = 0,$$

$$\theta(0) = \theta_0, \Omega_z(0) = \Omega_{0z}$$

одержимо із співвідношення (6)

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{I_{Cz} + I_z}{I_z} [ -(\theta - \theta_0) + \Omega_{0z} t ]. \quad (9)$$

Вирази (9), (8), (6) і є розв'язком задачі.

Зазначимо, що коли  $\Omega_{0z} = 0$ , то, щоб повернути космічний апарат на кут  $(\theta - \theta_0)$ , потрібно маховичок повернути на кут  $\frac{I_z}{I_{Cz} + I_z} (\varphi - \varphi_0)$  у протилежному напрямку.

Звичайно, ця задача розглянута в спрощеній постановці. Насправді на космічному апараті встановлюють три маховички, і обертання апарата відносно трьох осей є взаємозв'язаним.

### Питання для самоконтролю

1. Що називають кінетичною енергією точки і в якій системі координат вона обчислюється?
2. Як формулюється теорема Кеніга?
3. Які три складові є у виразі для кінетичної енергії системи?
4. Яким співвідношенням зв'язані між собою основні динамічні величини?
5. Яка принципова відмінність кінетичної енергії від інших динамічних величин, або чому дискусія, що відбувалась у XIX ст., про те, яка міра руху є головною, є безпредметною?

6. За допомогою яких співвідношень можна виразити проекції кінетичного моменту і головного вектора кількості руху через кінетичну енергію?
7. Чи зможете Ви записати дві різні формули для кінетичної енергії твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки?

8. Чим принципово за змістом відрізняються теорема про зміну кінетичної енергії для точки і для механічної системи?
9. Що таке робота сили і за якими формулами її можна обчислити?
10. Як обчислюється робота сил, прикладених до твердого тіла при його просторовому русі?

## Розділ 18 ТЕОРІЯ ПОТЕНЦІАЛЬНОГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

### § 18.1. Силове поле. Потенціальне силове поле. Силова функція

Як уже було показано в § 13.4, у загальному випадку сила, що діє на матеріальну точку, може бути функцією координат, швидкості й часу.

Значення поширення мають сили, залежні лише від координат матеріальної точки, що рухається. Ці сили називають *позиційними*. До таких сил належать сили пружності, гравітації, електричного і магнітного полів та деякі інші.

*Силевим полем* називають частину простору, в якому на матеріальну точку, що рухається в ньому, діють сили, які залежать від координат і часу, але не залежать від швидкості:

$$\vec{F} = \vec{F}(t, x, y, z). \quad (18.1)$$

Якщо сила явно не залежить від часу, то силеве поле називають *стаціонарним*, якщо залежить – *нестабілітарним*.

Поняття силового поля поширюється також на систему матеріальних точок. У цьому разі *силевим полем* називають частину простору, в якому на матеріальні точки системи діють сили, залежні від координат точок системи, що рухаються, і від часу:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n). \quad (18.2)$$

Силевими полями є електричні, магнітні, електромагнітні поля, поле гравітації Землі, пружні середовища.

Стаціонарне силеве поле називають *потенціальним*, якщо робота сил поля, які діють на матеріальну точку, не залежить від форми її траєкторії, а є однозначною функцією координат початкового і кінцевого положень точки, що рухається. У цьому разі кожній точці такого поля відповідає певне значення роботи, яку виконують сили поля під час переходу матеріальної точки з початку координат у цю точку поля (рис. 18.1). Отже, можна вважати  $A_{OM} = U(x, y, z) = U(\vec{r})$ ; функцію  $U(\vec{r}) = U(x, y, z)$  називають *силовою*.

Фізичний зміст силової функції  $U(x, y, z)$  полягає в тому, що вона є роботою, виконаною силою поля під час переходу матеріальної точки із початкового положення в задане.

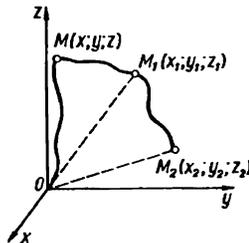


Рис. 18.1

Для зручності міркувань початкове положення точки сумісно з початком осей координат  $Oxyz$ .

**Теорема.** *Робота сили, що діє на матеріальну точку під час її руху в потенціальному полі, дорівнює різниці силових функцій в її кінцевому і початковому положеннях.*

Доведення. Нехай під дією сили матеріальна точка рухається по траєкторії з початкового положення  $M_1$  у кінцеве  $M_2$ . Позначимо силові функції, що відповідають цим положенням, через  $U_1(x_1, y_1, z_1)$  і  $U_2(x_2, y_2, z_2)$ . Враховуючи, що  $U_1$  відповідає роботі сил поля під час переходу матеріальної точки з початку координат у точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , а  $U_2$  – роботі сили поля під час переходу тієї самої матеріальної точки з початку координат у точку  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  (див. рис. 18.1), для обчислення роботи  $A_{M_1M_2}$  виберемо шлях від точки  $O$  до точки  $M_2$ , що проходить через точку  $M_1$ , розбиваючи  $OM_1M_2$  на дві ділянки –  $OM_1$  і  $M_1M_2$ . Тоді

$$A_{OM_2} = A_{OM_1} + A_{M_1M_2}$$

або

$$U_2 = U_1 + A_{M_1M_2}, \quad (18.3)$$

де  $A_{M_1M_2}$  – робота сили поля на відрізку траєкторії  $M_1M_2$ .

Із співвідношення (18.3) маємо

$$A_{M_1M_2} = U_2 - U_1, \quad (18.4)$$

що і треба було довести.

Якщо розглядати елементарне переміщення матеріальної точки по траєкторії, враховуючи, що нескінченно малий приріст функції з точністю до нескінченно малих величин другого порядку малізми збігається з диференціалом цієї функції, то очевидно, що елементарна робота сили в потенціальному

силловому полі дорівнює повному диференціалу силовій функції, тобто

$$d'A = dU. \quad (18.5)$$

Отже, приходимо до висновку, що *лише в потенціальному силовому полі елементарна робота є повним диференціалом деякої силовій функції*, тобто  $d'A = dU$ .

Із доведеної теореми випливає, що під час руху матеріальної точки по замкнених траєкторіях у потенціальному силовому полі робота сил на цих траєкторіях дорівнює нулю.

## § 18.2. Дві основні задачі в теорії потенціального силового поля

Дві основні задачі, що виникають в теорії потенціального силового поля, полягають у тому, щоб: 1) за заданою силою, яка діє на матеріальну точку, визначити силову функцію; 2) за відомою силовою функцією визначити силу.

Перша з цих задач розв'язується просто. Інтегруючи (18.5), визначаємо силову функцію

$$U = \int d'A + C \quad (18.6)$$

з точністю до адитивної сталої  $C$ .

Щоб розв'язати другу задачу, знову скористаємося співвідношенням (18.5). При цьому елементарну роботу виразимо за формулою (17.49), а повний диференціал силовій функції трьох змінних  $U(x, y, z)$  подамо у розгорнутому вигляді:

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

$$dU(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz. \quad (18.7)$$

Оскільки  $d'A = dU$ , то

$$\begin{aligned} F_x dx + F_y dy + F_z dz &= \\ = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (18.8)$$

Останню рівність перепишемо так:

$$\left(F_x - \frac{\partial U}{\partial x}\right) dx + \left(F_y - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dy + \left(F_z - \frac{\partial U}{\partial z}\right) dz = 0. \quad (18.9)$$

Оскільки диференціали  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  довільні та лінійно незалежні, то в цій рівності коефіцієнти при диференціалах мають дорівнювати нулю. Звідси

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (18.10)$$

Отже, проекції сили дорівнюють частинним похідним від силової функції за відповідними координатами.

Модуль сили

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad (18.11)$$

а її напрямком визначимо за напрямними косинусами

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{i}}) &= \frac{F_x}{F}, \\ \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{j}}) &= \frac{F_y}{F}, \\ \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{k}}) &= \frac{F_z}{F}, \end{aligned} \quad (18.12)$$

де  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – орти координатних осей.

Очевидно, що

$$\vec{F} = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (18.13)$$

Як відомо з векторного числення, вектор, проекції якого на осі координат виражаються частинними похідними від скалярної функції координат за координатами, називається *градієнтом* цієї функції, тому

$$\vec{F} = \overline{\text{grad}} U = \nabla U. \quad (18.14)$$

<sup>1</sup>Вектор  $\overline{\text{grad}}$  часто позначають за допомогою оператора  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ .

Якщо в потенціальному силовому полі рухається система із  $n$  матеріальних точок, то

$$F_{x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}; F_{y_i} = \frac{\partial U}{\partial y_i}; F_{z_i} = \frac{\partial U}{\partial z_i} \quad (18.15)$$

або у векторній формі

$$\vec{F}_i = \overline{\text{grad}}_i U = \nabla_i U, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (18.16)$$

За допомогою формул (18.10) легко встановити аналогічний критерій існування силової функції.

Користуючись властивістю других змішаних частинних похідних від силової функції  $U(x, y, z)$  за змінними  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \end{aligned} \quad (18.17)$$

або, враховуючи вирази (18.10), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial y} &= \frac{\partial F_y}{\partial x}; \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}; \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} &= \frac{\partial F_z}{\partial y}. \end{aligned} \quad (18.18)$$

У векторній формі умови (18.18) наберуть вигляду

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot}} F &= \vec{i} \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \\ &+ \vec{j} \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \\ &+ \vec{k} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (18.19)$$

Рівності (18.18) є необхідними і достатніми аналітичними умовами існування силової функції  $U(x, y, z)$ .

**Приклад 1.** Проекції сили  $F_x = 2xy$ ;  $F_y = xy^2$ . Чи є силоне поле, в якому діє сила, потенціальним?

Розв'язання. Користуючись аналітичним критерієм (18.18), визначимо частинні похідні від проекцій сили за відповідними координатами. Маємо  $\frac{\partial F_x}{\partial y} = 2x$ ;  $\frac{\partial F_y}{\partial x} = y^2$ . Як бачимо, зазначений критерій не виконується, оскільки  $\frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$ .

Отже, розглядуване силоне поле не є потенціальним.

**Приклад 2.** Знайти такі значення  $n$ , при яких силоне поле є потенціальним, якщо  $F_x = xy^n$ ,  $F_y = x^n y$ ,  $F_z = z^n$ .

Розв'язання. Згідно з критерієм потенціальності силового поля (18.18), знайдемо

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = nx^{n+1}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = nx^{n-1}y, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0.$$

Із аналізу частинних похідних бачимо, що рівності

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

можливі лише при  $n = 2$  і  $n = 0$ . Тоді

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 2xy \quad \text{і} \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0.$$

Отже, силоне поле, сили якого задовольняють умови задачі, буде потенціальним лише при  $n = 2$  і  $n = 0$ .

### § 18.3. Еквіпотенціальні поверхні.

#### Потенціальна енергія. Теорема про зміну повної механічної енергії

*Еквіпотенціальними, або ізоповерхнями, або поверхнями рівня називають геометрич-*

*не місця точок, на якому силова функція залишається сталою:*

$$U(x, y, z) = \text{const}. \quad (18.20)$$

Рівняння (18.20) є рівнянням сім'ї еквіпотенціальних поверхонь. Якщо  $U(x, y, z) = 0$ , то еквіпотенціальну поверхню називають поверхнею нульового рівня.

Оскільки силова функція, згідно з (18.6), визначається з точністю до довільного постійного доданка, то за нульовий рівень можна взяти будь-яку еквіпотенціальну поверхню.

Доведемо, що сила, яка діє в потенціальному полі, напрямлена нормально до еквіпотенціальних поверхонь у бік зростання силової функції. Це полегшує визначення виду еквіпотенціальної поверхні.

Оскільки  $U = \text{const}$ , то повний диференціал її  $dU = 0$ . Отже,  $dA = dU = 0$ , або  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ , тоді  $|\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cos(\vec{F}, d\vec{r}) = 0$ . Звідси  $\cos(\vec{F}, d\vec{r}) = 0$ . Отже, сила  $\vec{F}$  перпенди-

кулярна до  $d\vec{r}$ , тобто до елементарного переміщення матеріальної точки вздовж еквіпотенціальної поверхні. Наприклад, якщо тягар підвісити до вертикальної пружини, то еквіпотенціальними поверхнями для сили пружності будуть горизонтальні, паралельні між собою площини.

Уведення поняття еквіпотенціальної поверхні поглиблює фізичний зміст силової функції, яку можна розглядати як *роботу, виконувану силами потенціального силового поля для переміщення матеріальної точки (і системи) з будь-якого положення на нульовій еквіпотенціальній поверхні у будь-яке положення на заданій еквіпотенціальній поверхні.*

Для характеристики властивостей механічного руху в потенціальному силовому полі вводять ще одну функцію. П, яка називається *потенціальною енергією* матері-

альної точки або системи матеріальних точок. Потенціальна енергія дорівнює силі в функції зі знаком мінус:

$$P = -U. \quad (18.21)$$

Отже, потенціальна енергія – це робота, виконувана силами потенціального поля під час руху матеріальної точки із заданого положення в її початкове положення. Згідно з формулою (18.6),

$$P = -\int d'A + C. \quad (18.22)$$

На основі рівності (18.5)

$$d'A = dA = dU = -dP. \quad (18.23)$$

Звідси випливає, що

$$A = P_0 - P, \quad (18.24)$$

тобто повна робота сили в потенціальному полі дорівнює різниці потенціальної енергії в початковому і кінцевому положеннях точки.

Скориставшись співвідношенням (18.10) і враховуючи (18.21), виразимо проекції сили через потенціальну енергію

$$F_x = -\frac{\partial P}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial P}{\partial y}; \quad (18.25)$$

$$F_z = -\frac{\partial P}{\partial z}.$$

У механіці розглядають суму кінетичної  $T$  і потенціальної  $P$  енергій, яку називають повною механічною енергією

$$E = T + P, \quad (18.26)$$

і різницю кінетичної та потенціальної енергій, яку називають кінетичним потенціалом або функцією Лагранжа

$$L = T - P. \quad (18.27)$$

Ця функція відіграє важливу роль в аналітичній механіці. Доведемо теорему про зміну повної механічної енергії.

**Теорема.** Приріст повної механічної енергії системи матеріальних точок на довільному переміщенні дорівнює роботі непотенціальних сил на цьому переміщенні.

Доведення. Нехай на матеріальні точки системи діють потенціальні та непотенціальні сили. Скористаємося теоремою про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі. Цю теорему, з урахуванням (18.23), можна подати у вигляді

$$dT = d'A^* - dP. \quad (18.28)$$

де  $A^*$  – робота непотенціальних сил.

Із цієї рівності маємо  $d(T + P) = d'A^*$  або, з урахуванням (18.26),

$$dE = d'A^*. \quad (18.29)$$

Інтегруючи цю рівність, дістанемо

$$E - E_0 = A^*. \quad (18.30)$$

Теорему доведено.

#### § 18.4. Закон збереження механічної енергії. Методологічне значення законів збереження в механіці

**Теорема.** Під час руху матеріальної точки або системи точок у потенціальному силовому полі повна механічна енергія залишається постійною.

Доведення. Відповідно до теореми про зміну кінетичної енергії (17.43), маємо  $d'A = dT$ . На основі рівності (18.23)  $d'A = -dP$ . Порівнюючи ці два вирази, дістанемо  $dT = -dP$ . Інтегруючи це співвідношення, матимемо

$$T + P = E = h, \quad (18.31)$$

де  $h$  – постійна інтеграла енергії, яка визначається з початкових умов.

Формула (18.31) виражає закон збереження механічної енергії. Цей закон є

окремим випадком загального закону збереження і перетворення енергії, що встановлений у середині XIX ст. дослідженнями Ю. Майєра (1814–1878), Д. Джоуля (1818–1889), Г. Гельмгольца (1821–1894), У. Ренкіна (1820–1872).

На основі закону збереження механічної енергії сили, що мають потенціал, називаються *консервативними*. Сили, що не мають потенціалу, тобто сили, які залежать від швидкості руху матеріальної точки (сили опору середовища), називаються *розсіювальними* або *дисипативними*. Для цих сил умови закону збереження механічної енергії не виконуються, оскільки частина її переходить в іншу форму енергії, наприклад у теплову, електричну та ін.

Неможливість побудови вічного двигуна випливає з теореми про зміну механічної енергії, а також із закону збереження механічної енергії.

Енергія є загальною мірою різних форм руху матерії. Закон збереження і перетворення енергії стосується всіх процесів, які відбуваються в природі, – фізичних, хімічних, біологічних та інших і полягає в тому, що енергія, як загальна міра руху матерії під час перетворення однієї форми її в іншу, не зникає і не з'являється, а переходить в еквівалентних кількісних співвідношеннях. У законі збереження механічної енергії йдеться про перетворення кінетичної енергії в потенціальну і навпаки. У загальному законі збереження енергії цей результат поширюється на будь-які форми руху матерії – електричну, теплову, хімічну та ін.

Однак не лише закон збереження, а й теорема про зміну повної механічної енергії – це окремі випадки загального закону збереження і перетворення енергії. Дійсно, якщо у співвідношенні (18.30) робота потенціальних сил додатна ( $A^* > 0$ ), то відбувається приплив механічної енергії внаслідок відповідного зменшення енергії інших не-

механічних форм (теплової, електричної та ін.). Якщо ж робота непотенціальних сил від'ємна ( $A^* < 0$ ), то відбувається розсіювання (дисипація) механічної енергії, яка переходить в енергію інших видів. Отже, "... робота – це змінення форми руху, яке розглядається з його кількісного боку".

Ще у кінці першої половини XVIII ст. М. В. Ломоносов установив один із загальних законів природи – закон збереження матерії і руху. "Усі зміни в природі, – писав він, – відбуваються так, що якщо до чогонебудь дещо додалося, то це віднімається від чогонебудь іншого. Так, скільки матерії додається до якого-небудь тіла, стільки ж втрачається в іншого... Оскільки це загальний закон природи, то він поширюється і на правила руху: тіло, яке своїм поштовхом спонукає інше тіло до руху, стільки ж втрачає від свого руху, скільки передає іншому, ним штовхнутому".

Очевидно, що всі закономірності, які характеризують процеси перетворення й збереження матерії і руху в різних формах, є конкретними проявами загального закону збереження матерії і руху. Зокрема, в теоретичній механіці розглядаються закони збереження різних мір механічного руху – кількості руху кінетичного моменту і механічної енергії.

Закон збереження матерії і руху має величезне наукове і методичне значення, оскільки є природничо-науковою основою матеріалізму. Стверджуючи, що матерія і рух не створюються і не знищуються, що матерія, яка рухається, здатна до різних перетворень, і розглядаючи матерію в органічному зв'язку з рухом, загальний закон збереження матерії і руху є доказом єдності світу і загальності руху. Закон збереження матерії і руху в усіх своїх конкретних проявах є теоретичною основою різних розра-

<sup>1</sup> Енгельс Ф. Діалектика природи // Маркс К., Енгельс Ф. Соч. 2-е изд. – Т. 20. – С. 419.

хунків у природознавстві й техніці; ці розрахунки пов'язані з перетворенням матерії і руху з однієї в іншу.

"Ми не лише можемо показати перетворення енергії з однієї форми в іншу, які постійно відбуваються в природі, — писав Ф. Енгельс, — а навіть можемо здійснювати їх у лабораторії та в промисловості й притому так, що даній кількості енергії в одній формі завжди відповідає певна кількість енергії в якійсь іншій формі. Так, ми можемо виразити одиницю теплоти в кілограмо-метрах, а одиниці або будь-які кількості електричної чи хімічної енергії — знову в одиницях теплоти, і навпаки; ми можемо так само виміряти кількість енергії, одержаної і спожитої яким-небудь живим організмом, і виразити її в будь-якій одиниці, наприклад в одиницях теплоти".

Слід зазначити, що загальний характер закону збереження маси й енергії чітко розумів М. В. Ломоносов ще у 1748 р., що видно з його листа до Л. Ейлера<sup>2</sup>.

**Приклад 3.** Тілу, що знаходиться на похилій площині, надається початкова швидкість  $\vec{v}_0$ , яка напрямлена вгору (рис. 18.2). Визначити, з якою швидкістю тіло повернеться в початкове положення, якщо кут тертя  $\varphi = \text{const}$ , а кут нахилу площини  $\alpha$ , причому  $\alpha > \varphi$ .

**Розв'язання.** Розглянемо спочатку рух тіла вгору із початкового положення 1 в кінцеве положення 2, яке відповідає зупинці тіла.

Застосовуючи теорему про зміну кінетичної енергії, маємо

$$T_2 - T_1 = A_{1,2}, \quad (1)$$

де  $T_2 = 0$ ,  $T_1 = \frac{mv_0^2}{2}$ . Робота  $A_{1,2}$  виконується

двома силами: силою ваги  $m\vec{g}$  і силою тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , яка протидіє рухові вгору.

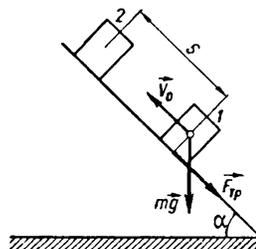


Рис. 18.2

Ця робота дорівнює

$$A_{1,2} = -(mg \sin \alpha + F_{\text{тр}})s, \quad (2)$$

де  $s$  — відстань між положеннями 1 і 2 тіла.

Відповідно із законом Амонтона Кулона сила тертя дорівнює

$$F_{\text{тр}} = kN = kmg \cos \alpha, \quad (3)$$

де  $k$  — коефіцієнт тертя, який дорівнює тангенсу кута тертя  $k = \text{tg} \varphi$ .

У результаті рівняння (1) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{v_0^2}{2} &= g(\sin \alpha + k \cos \alpha)s = \\ &= g(\sin \alpha + \text{tg} \varphi \cos \alpha)s = \\ &= \frac{gs}{\cos \varphi} \sin(\alpha + \varphi). \end{aligned} \quad (4)$$

Тепер розглянемо рух тіла вниз із положення 2 в початкове 1.

У рівняння (1) в цьому випадку потрібно

$$\text{підставити } T_1 = 0, \quad T_2 = \frac{mv^2}{2}.$$

Щодо роботи на цьому відрізку, то сила ваги і буде виконувати додатну роботу, а сила тертя, як і раніше, — від'ємну, тому

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= (mg \sin \alpha - F_{\text{тр}})s = \\ &= m(g \sin \alpha - g \cos \alpha \text{tg} \varphi)s = \\ &= \frac{mgs}{\cos \varphi} \sin(\alpha - \varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

Із виразів (4) і (5) знайдемо

<sup>1</sup>Енгельс Ф. Дialeктика природи // Маркс К., Енгельс Ф. Соч. — 2-е изд. — Т. 20. — С. 511—512.

<sup>2</sup>Ломоносов М. В. Полн. собр. соч.: В 5 т. — М.: Изд-во АН СССР, 1951. — Т. 2. — С. 183—185.

$$\frac{v_0^2}{v^2} = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\alpha - \varphi)}. \quad (6)$$

При відсутності тертя ( $\varphi = 0$ ) буде

$$\frac{v_0^2}{v^2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = 1, \quad (7)$$

тобто тіло повернулося б у початкове положення з тією самою швидкістю.

Навність тертя приводить до того, що  $v < v_0$ , бо  $\sin(\alpha - \varphi) < \sin(\alpha + \varphi)$ , а також зумовлює роботу непотенціальних сил, яка визначається загальною зміною кінетичної енергії, що виникла під дією сили тертя, як при русі тіла вверх, так і вниз

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \\ &= \frac{mgs}{\cos \varphi} [\sin(\alpha - \varphi) - \sin(\alpha + \varphi)] = \\ &= -2mgs \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi = \\ &= -2kmgs \cos \alpha = -2F_{\text{тр}} s. \end{aligned} \quad (8)$$

Цей результат природно узгоджується з теоремою про зміну повної енергії системи (18.30).

Дійсно, при поверненні тіла в початкове положення приріст потенціальної енергії  $(\Pi_2 - \Pi_1) = 0$

Залишається лише приріст кінетичної енергії, який визначається роботою  $A^* = A_{1,2}$  непотенціальних сил і який дорівнює  $A^* = -2F_{\text{тр}} s$

### Питання для самоконтролю

1. Які сили називають потвнціальними?
2. Що називають силовою функцією?
3. Яке силове поле називають потенціальним?
4. Як визначається потенціальна енергія і як вона зв'язана із силовою функцією?
5. Як формулюється теорема про роботу сил при переміщенні точки в потенціальному полі?
6. Як записується критерій потенціальності силового поля і чому поле сил тяжіння та електромагнітні поля є потенціальними?
7. Які поверхні називають еквіпотенціальними і які властивості вони мають?
8. Як формулюється теорема про зміну повної механічної енергії системи?
9. Як виразити проєкції сили, що діє на точку в потенціальному полі, через силову функцію і через потенціальну енергію?
10. Як виражається вектор сили через потенціальну енергію?

## Розділ 19 МЕТОД КІНЕТОСТАТИКИ

Для розв'язання першої основної задачі динаміки невільної матеріальної точки, коли задано рух і треба визначити силу, дуже ефективним є метод кінетостатики. Особливо зручний цей метод, коли треба визначити реакцію в'язі при заданих активних силах та законі руху точки.

Як відомо, закони, що встановлені І. Ньютоном, стосуються руху вільної матеріальної точки. Якщо додати до них аксіому про звільненість від в'язей, то питання про дослідження руху невільної матеріальної точки зведеться до питання про рух вільної матеріальної точки, на яку діють активні, або ті, що задаються, сили і реакції в'язей.

Принцип, про який буде мова, еквівалентний другому закону Ньютона та аксіомі про звільнення від в'язей. Згідно з прийнятою в теоретичній механіці термінологією, цей принцип називають принципом Д'Аламбера, хоча правильніше його треба було б назвати принципом Германа – Ейлера – Д'Аламбера. Петербурзькі академіки Я. Герман і Л. Ейлер установили цей принцип раніше, ніж Д'Аламбер: Я. Герман – у 1716 р., Л. Ейлер – у 1737 р., а Ж. Д'Аламбер – у 1743 р. Л. Ейлер узагальнив цей принцип, застосувавши його для визначення коливань гнучких тіл.

Ж. Д'Аламбер у праці "Трактат про динаміку" описав метод, за допомогою якого розв'язання задачі динаміки за формою зводилося до розв'язання задач статки.

### § 19.1. Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки.

Умова невагомості.

Умова незбурюваності математичного маятника

Нехай на матеріальну точку діє активна сила  $\vec{F}$  (рис. 19.1) і реакція в'язі  $\vec{R}$ . Тоді, згідно з рівнянням динаміки (13.29) для невільної матеріальної точки, маємо

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{R}, \quad (19.1)$$

звідки

$$\vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{w}) = 0. \quad (19.2)$$

Доданок  $(-m\vec{w})$  називають *даламберовою силою інерції* і позначають через  $\vec{\Phi}$ . З урахуванням цього позначення останню рівність перепишемо у вигляді

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0. \quad (19.3)$$

Це рівняння і виражає принцип Д'Аламбера: для невільної матеріальної точки в кожний момент часу сума активних сил, що прикладені до точки, реакцій в'язей і сил інерції дорівнює нулю.

Зазначимо, що поняття "сила інерції" є формальним і не пов'язане з реальними силами, якими є лише активні сили, реакції в'язей і сили протидії ( $\vec{F}_{\text{пр}}$ )<sup>1</sup>. Реальні фізичні сили виражають міру взаємодії тіл у природі й можуть бути різними за своїм характером. Якою мірою сума сил  $\vec{F} + \vec{R}$

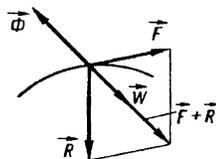


Рис. 19.1

(дія на точку або тіло) характеризується добутком  $m\vec{w}$ , такою ж мірою сила протидії  $\vec{F}_{\text{пр}}$  характеризується добутком  $(-m\vec{w})$ .

За третім законом Ньютона реальні сили (дія і протидія) існують в природі попарно, однакові за величиною і протилежно напрямлені. Хоч сума сил, що розглядаються, дорівнює нулю, тобто

$$\vec{F}_{\text{пр}} + \vec{F} + \vec{R} = 0, \quad (19.4)$$

однак ця рівність не є умовою рівноваги цих сил, оскільки вони прикладені до різних тіл: активна сила і реакція в'язі прикладені до матеріальної точки (тіла), а сила протидії до тіл, що зумовлюють прискорення точки (тіла) відносно абсолютної (інерціальної) системи координат.

Метод *кінестатики* є лише формальним способом зведення рівнянь динаміки до рівнянь статки, проте для розв'язання ряду практичних задач такий спосіб зручний.

Зазначимо, що сила інерції, яка дорівнює добутку маси точки на прискорення, завжди напрямлена в бік, протилежний прискоренню, тобто

$$\vec{\Phi} = -m\vec{w}, \quad (19.5)$$

але не руху. Так, у разі уповільненого пряминолінійного руху сила інерції збігатиметься з напрямком руху. Якщо матеріальна точка вільна, то реакція в'язі дорівнює нулю ( $\vec{R} = 0$ ) і рівність (19.3) ще більше спрощу-

<sup>1</sup> Гішинський А. Ю. Механіка относительного движения и силы инерции. - М.: Наука, 1981. - 191 с.

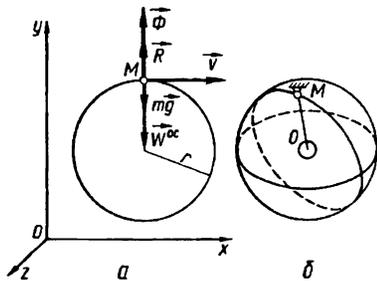


Рис. 19.2

ється:  $\vec{F} + \vec{\Phi} = 0$ . У проєкціях на осі координат ця рівність має вигляд

$$F_x - m\ddot{x} = 0; F_y - m\ddot{y} = 0; F_z - m\ddot{z} = 0.$$

**Умова невагомості.** Принцип Д'Аламбера найбільш раціонально застосовувати до розв'язання задач динаміки, в яких треба визначити реакції в'язей.

Із рівності (19.3) випливає, що

$$\vec{R} = -(\vec{F} + \vec{\Phi}) = m\vec{w} - \vec{F}. \quad (19.6)$$

З визначенням реакції в'язі пов'язане поняття невагомості, відчуття якої з'являється тоді, коли реакція основи, на якій стоїть людина, дорівнює нулю. Пояснимо це на прикладі визначення перевантажень, яких зазнає пілот під час руху літака по колу у вертикальній площині (рис. 19.2, а). Нехай літак рухається по колу радіусом  $r$  зі швидкістю  $\vec{v}$ . Визначити співвідношення між  $r$  та  $\vec{v}$ , при якому пілот, що перебуває в літаку, буде відчувати в даний момент часу стан невагомості. Якщо політ рівномірний горизонтальний, то свою вагу  $\vec{P}$  пілот відчуває, сприймаючи реакцію сидіння  $\vec{R} = -\vec{P}$ .

Під час руху літака по колу у вертикальній площині (див. рис. 19.2, а) в точці  $M$  на пілота діє сила притягання Землі – сила

тяжіння  $\vec{P} = m\vec{g}$  і реакція сидіння  $\vec{R}$ . При цьому сила інерції  $\vec{\Phi} = -m\vec{w}$ .

Враховуючи, що  $|\vec{\Phi}| = mv^2/r$ ,  $m = P/g$  і проєктуючи ці сили на вісь  $Oy$ , дістанемо

$$R - P + \frac{P v^2}{g r} = 0. \quad (19.7)$$

Звідси

$$R = P \left( 1 - \frac{v^2}{rg} \right). \quad (19.8)$$

Невагомість настає в той момент, коли

$$R = 0, \text{ тобто } 1 - \frac{v^2}{rg} = 0 \text{ або}$$

$$v^2 = rg. \quad (19.9)$$

Наприклад, при  $v = 900$  км/год = 250 м/с  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>

$$r = \frac{v^2}{g} = \frac{6,25 \cdot 10^4}{10} = 6,25 \cdot 10^3 \text{ м} = 6,25 \text{ км}.$$

Зазначимо, що кутова швидкість  $\omega$  обертання літака при цьому не залежить від швидкості  $v = \omega r$ , а визначається з рівності

$$1 - \frac{v^2}{rg} = 1 - \frac{\omega^2 r^2}{rg} = 1 - \frac{\omega^2 r}{g} = 0, \quad (19.10)$$

звідки

$$\omega = \sqrt{g/r}. \quad (19.11)$$

Період цього обертання

$$T = 2\pi\sqrt{r/g}. \quad (19.12)$$

Одержані умови невагомості придатні для пояснення невагомості космонавта на коловій орбіті. У цьому разі у вираз (19.11) або (19.12) треба підставити  $r = R_3 + h$ , де

$R_3$  – радіус Землі,  $h$  – висота польоту супутника. Звичайно  $h \ll R_3$ , тому  $r \approx R_3$ .

Підставляючи у вираз (19.12)  $R_3 \approx 6371$  км, дістанемо

$$T = 2\pi\sqrt{R_3/g} = 84,4 \text{ хв.} \quad (19.13)$$

Якщо у вираз (19.9) підставити  $R_3$ , то одержимо значення  $v_k$  – першої космічної швидкості:

$$\begin{aligned} v_k &= \sqrt{R_3 g} = \sqrt{6,37 \cdot 10^6 \cdot 9,8} \approx \\ &\approx 7,9 \cdot 10^3 \text{ м/с} = 7,9 \text{ км/с.} \end{aligned} \quad (19.14)$$

**Умова незбурюваності математичного маятника.** Період  $T$ , обчислений за формулою (19.13), дорівнює періоду коливань такого математичного маятника (рис. 19.2, б), довжина якого дорівнює радіусу Землі. Реалізувати такий математичний маятник не можна, однак, як буде показано далі, його можна змоделювати за допомогою гіроскопічного маятника або незрівноваженого гіроскопа. Особливістю такого математичного маятника є те, що з яким би прискоренням не рухалася точка його підвішування по поверхні Землі, він завжди буде напрямлений по вертикалі – до центра Землі. Отже, рівність (19.11) при  $r = R_3$  або (19.13) є умовою незбурюваності математичного маятника.

Технічна реалізація ідеї про незбурюваність маятника на рухомій основі дала можливість створити цілий клас незбурюваних гіроскопічних систем і породила такий напрям у технічній кібернетичі, як теорія інваріантності (незбурюваності)<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> *Ильинский А. Ю.* Механика гироскопических систем – М.: Наука, 1963. – 482 с.; *Кузнецов А. И.* Проблема инвариантности в автоматике. – К.: Гостехиздат УССР, 1963. – 376 с.

## § 19.2. Принцип Д'Аламбера для системи матеріальних точок

Нехай у довільній точці  $M_i$  системи матеріальних точок прикладені активна сила  $\vec{F}_i$  і реакція в'язі  $\vec{R}_i$ . Тоді для  $i$ -ї точки основне рівняння динаміки невідьної системи матиме вигляд

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (19.15)$$

Перепишемо його у формі

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + (-m_i \vec{w}_i) = 0,$$

або

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (19.16)$$

де сила інерції  $\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{w}_i$ . Підсумовуючи в (19.16) за індексом  $i$ , дістанемо

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i + \sum_{i=1}^n \vec{\Phi}_i = 0. \quad (19.17)$$

Позначивши головні вектори активних сил реакцій в'язей і сил інерції відповідно через  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ ,  $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i$ ,  $\vec{\Phi} = \sum_{i=1}^n \vec{\Phi}_i$ , вираз (19.17) запишемо у вигляді

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0. \quad (19.18)$$

Вибравши довільний центр  $O$ , проведемо в  $i$ -ту точку  $M_i$  системи радіус-вектор  $\vec{r}_i$  і, помноживши його векторно на сили, які входять у (19.16), визначимо їхні моменти відносно центра  $O$ . Потім, підсумовуючи за  $i$ , визначимо головні моменти активних сил, реакцій в'язей і сил інерції:

$$\vec{M}_O^{\text{акт}} + \vec{M}_O^{\text{Р}} + \vec{M}_O^{\text{ін}} = 0, \quad (19.19)$$

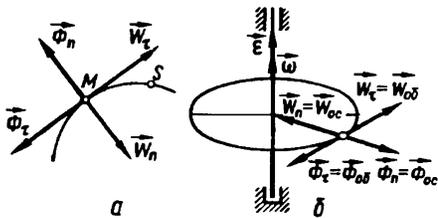


Рис. 19.3

де

$$\vec{M}_O^{\text{акт}} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i,$$

$$\vec{M}_O^p = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{R}_i,$$

$$\vec{M}_O^{\text{ин}} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{\Phi}_i.$$

Рівняння (19.18), (19.19) виражають принципи Д'Аламбера для системи: *в кожний момент часу векторна сума головних векторів активних, або заданих, сил, реакцій в'язей і сил інерції рухомої системи матеріальних точок дорівнює нулю. І разом з тим векторна сума головних моментів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції рухомої системи дорівнює нулю.*

Рівнянням (19.18) і (19.19) у векторній формі відповідають шість рівнянь у координатній формі:

$$\begin{aligned} F_x + R_x + \Phi_x &= 0, \\ M_x^{\text{акт}} + M_x^p + M_x^{\text{ин}} &= 0, \\ F_y + R_y + \Phi_y &= 0, \\ M_y^{\text{акт}} + M_y^p + M_y^{\text{ин}} &= 0, \\ F_z + R_z + \Phi_z &= 0, \\ M_z^{\text{акт}} + M_z^p + M_z^{\text{ин}} &= 0. \end{aligned} \quad (19.20)$$

Проектувати ці рівняння можна як на нерухомі, так і на рухомі осі координат. Рівняння (19.20) називають рівняннями кі-

нетостатики. Щоб використовувати їх, треба вміти обчислювати сили інерції системи матеріальних точок і, зокрема, твердого тіла.

### § 19.3. Обчислення сил інерції матеріальної точки

1. Якщо рух матеріальної точки (рис. 19.3, а) задано натуральним способом, то прискорення точки дорівнює векторній сумі дотичного (тангенціального) і нормального прискорень. Відповідно до цього введемо дотичну (тангенціальну)  $\vec{\Phi}_\tau$  і нормальну  $\vec{\Phi}_n$  сили інерції. Ці сили визначаються за такими формулами:

$$\Phi_\tau = m w_\tau = m \frac{dv_\tau}{dt} = m \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad (19.21)$$

$$\Phi_n = m w_n = m \frac{v^2}{\rho}.$$

2. Якщо матеріальна точка є однією з точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю  $\omega$  і з кутовим прискоренням  $\epsilon$  (рис. 19.3, б), то доосьове прискорення буде збігатися з нормальним, а обертальне – з тангенціальним. Відповідні до цих прискорень сили інерції визначимо з виразів

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{об}} = \Phi_\tau &= m w_\tau, \quad w_\tau = w_{\text{об}} = \epsilon r, \\ \Phi_{\text{ос}} = \Phi_n &= m w_n, \quad w_n = w_{\text{ос}} = \omega^2 r. \end{aligned} \quad (19.22)$$

Сили інерції напрямлені у протилежний прискоренням бік.

**Приклад 1.** Тягар  $M$  вагою  $P = 1\text{Н}$  підвішений на нитці завдовжки  $AM = 3\text{ м}$  й обертається навколо осі  $Oz$  (рис. 19.4). У горизонтальній площині матеріальна точка  $M$  описує коло. Нитка з вертикаллю утворює незмінний кут

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ . Визначити натяг  $\vec{T}$  нитки і швидкість  $v$  тягаря.

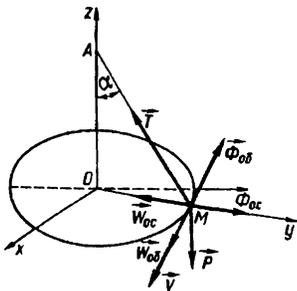


Рис. 19.4

Розв'язання. Розв'язувати задачі динаміки слід починати з аналізу сил і побудови схми сил; за умовою задачі треба визначити реакцію нитки, тому доцільно застосувати принцип Д'Аламбера. У нашому випадку на тягар діє сила ваги  $\vec{P}$ . Тягар  $M$  взаємодіє з ниткою, породжуючи її реакцію  $\vec{T}$ , що напрямлена по нитці до точки її закріплення. Опором повітря нехтуємо через мализну швидкості  $\vec{v}$  руху.

Обчислимо сили інерції, визначивши спочатку складові вектора прискорення. Оскільки точка  $M$  рухається по колу, то прискорення цієї точки можна розкласти на обертальне  $\vec{\omega}_{об}$  і доосовье  $\vec{\omega}_{ос}$ . Побудуємо вектори обертального і доосового прискорень, визначивши значення їх за формулами (19.22).

Спроектуємо всі сили на осі системи координат (див. рис. 19.4). Враховуючи, що  $v = \text{const}$  і, отже,  $\omega_{об} = 0$ , дістанемо

$$\Phi_{ос} - T \sin \alpha = 0, T \cos \alpha - P = 0.$$

Із другого рівняння маємо  $T = P / \cos \alpha = 2\text{H}$ , а з першого рівняння визначимо  $v$ . Оскільки

$$\Phi_{ос} = \frac{P v^2}{g r}, r = AM \sin \alpha,$$

то

$$\frac{P v^2}{g AM \sin \alpha} = T \sin \alpha \Rightarrow P v^2 = T g AM \sin^2 \alpha,$$

звідки

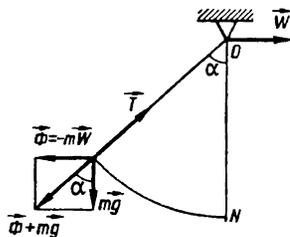


Рис. 19.5

$$v^2 = \frac{T g AM \sin^2 \alpha}{P} = 2 \cdot 9,8 \cdot 3 \cdot \frac{3}{4} \approx 44,1 \text{ м}^2/\text{с}^2 \Rightarrow v \approx 6,64 \text{ м/с}.$$

**Приклад 2.** Визначити кут  $\alpha$ , на який відхилиться маятник від вертикалі  $ON$  під час руху горизонтальної основи з прискоренням  $\vec{w}$ , що лежить у горизонтальній площині.

Розв'язання. Замінімо дію нитки на маятник її реакцією  $\vec{T}$ . При цьому задані: вага маятника  $m\vec{g}$ , реакція нитки  $\vec{T}$  і сила інерції  $\vec{\Phi} = -m\vec{w}$  (рис. 19.5).

У відхиленому положенні маятника на кут  $\alpha$  сума моментів усіх сил відносно точки підвішування  $O$  має дорівнювати нулю. Оскільки реакція нитки  $\vec{T}$  завжди проходить через центр  $O$ , то очевидно, що вектор  $\vec{\Phi} + m\vec{g}$  також має бути напрямлений по нитці (інакше момент сил не буде дорівнювати нулю). Безпосередньо з рис. 19.5 випливає

$$\text{tg} \alpha = \frac{w}{g}.$$

Звідси видно, що кут  $\alpha$  не залежить від маси маятника і його довжини, тобто всі маятники відхиляються на однакові кути від вертикалі в разі руху точок їх підвішування з однаковим прискоренням.

#### § 19.4. Обчислення головного вектора і головного моменту сил інерції для твердого тіла

Згідно з формулами (19.18) і (19.19), головний вектор і головний момент сил інер-

ції після очевидних перетворень запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}\bar{\Phi} &= -\sum_{i=1}^n m_i \bar{w}_i = -\sum_{i=1}^n \frac{d(m_i \bar{v}_i)}{dt} = \\ &= -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i, \\ \bar{M}_A^{in} &= -\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{\Phi}_i = \quad (19.23) \\ &= -\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \\ &= -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i,\end{aligned}$$

де  $A$  – центр моментів (див. рис. 16.5).

Якщо згадати вираз для кількості руху  $\bar{Q}$  (16.11) і кінетичного моменту системи  $\bar{K}_A$  (16.46), то вираз (19.23) можна записати у вигляді

$$\bar{\Phi} = -\frac{d\bar{Q}}{dt}, \quad \bar{M}_A^{in} = -\frac{d\bar{K}_A}{dt}. \quad (19.24)$$

Із рівності (19.24) стає зрозумілим, що для обчислення головного вектора і головного моменту сил інерції твердого тіла можна використовувати теорему про зміну кількості руху та головного моменту кількості руху (кінетичного моменту) тіла і, отже, застосовувати будь-яку форму їх запису в різних системах координат залежно від поставленої задачі.

Як випливає з виразів (16.68), (16.71), незалежно від системи координат головний вектор сил інерції твердого тіла дорівнює силі інерції його центра мас, якщо припустити, що в ньому зосереджена маса всього тіла:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi} &= -\frac{d\bar{Q}}{dt} = -m\bar{w}_C = \\ &= -m\left(\frac{d\bar{v}_C}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v}_C\right), \quad (19.25)\end{aligned}$$

а головний момент сил інерції, згідно з формулами (16.65), (16.68), (16.76), залежно від вибору системи координат (див. рис. 16.5) матиме вигляд

$$\begin{aligned}A\xi\eta\zeta: \bar{M}_A^{in} &= -\frac{d\bar{K}_A}{dt}, \\ O\xi'\eta'\zeta': \bar{M}_O^{in} &= -\left(\frac{d\bar{K}_O}{dt} + \bar{v}_O \times \bar{Q}\right), \quad (19.26) \\ Oxyz: \bar{M}_O^{in} &= \\ &= -\left(\frac{d\bar{K}_O^\omega}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O^\omega + m\bar{p}_C \times \bar{w}_O\right).\end{aligned}$$

Якщо полюс  $O$  помістити в центрі мас  $C$  тіла ( $\bar{p}_C = 0$ ), то два останніх вирази (19.26) можна записати в простішій формі

$$\begin{aligned}C\xi'\eta'\zeta': \bar{M}_C^{in} &= -\frac{d\bar{K}_C}{dt}, \\ Cxyz: \bar{M}_C^{in} &= -\left(\frac{d\bar{K}_C^\omega}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_C^\omega\right). \quad (19.27)\end{aligned}$$

Наведені формули значно спрощуються в окремих випадках руху твердого тіла. Знаючи, що обчислення головного вектора і головного моменту сил інерції тіла становить практичний інтерес для розв'язування важливих задач динаміки механізмів машин і приладів, роботів-маніпуляторів.

### Питання для самоконтролю

1. Як формулюється принцип Д'Аламбера для матеріальної точки?
2. Яка класифікація сил застосовується в кінестатичі?
3. Чим відрізняється формулювання принципу Д'Аламбера для твердого тіла від формулювання його для точки?
4. Як визначається стан невагомості?
5. Запишіть умову незбурюваності математичного маятника?
6. Як можна змоделювати невагомості у гітаку? Вкажіть два способи.

7. Чи залежить спосіб обчислення її, отже, вирази для сил інерції від характеру руху системи координат?
8. Який зв'язок між основними теоремами динаміки і силами інерції?

9. Як обчислити моменти сил інерції тіла, що обертається в системі координат, яка незмінно з ним зв'язана?
10. Як виразити силу інерції тіла через головний вектор його кількості руху?

## Розділ 20

### ДИНАМІКА ВІДНОСНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

#### § 20.1. Основне рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки

Розв'язання численних задач техніки потребує дослідження об'єктів відносно рухомої системи координат. У кінематиці викладено теорію складного руху точки. У цій теорії розглядається рух відносно рухомої системи координат. Цей розділ присвячений теорії відносного руху з урахуванням сил, що діють на матеріальну точку, і виведенню диференціальних рівнянь відносного руху матеріальної точки.

Уявімо інерціальну систему координат, яку вважатимемо нерухомою  $A\xi\eta\zeta$  (рис. 20.1). Відносно неї рухається система координат  $Oxzy$ , зв'язана з деяким тілом. Розглянемо рух матеріальної точки  $M$  масою  $m$ , на яку діє сила  $\vec{F}$ . Для невільної матеріальної точки треба задати активну силу  $\vec{F}$  і реакцію в'язі  $\vec{R}$ . Рух цієї матеріальної точки відносно нерухомої системи координат є абсолютним, а відносно рухомої системи координат – відносним. Характер переносного руху встановлюється рухом рухомої системи координат відносно нерухомої.

Згідно з (13.29), рівняння руху невільної матеріальної точки має вигляд

$$m\vec{w}_a = \vec{F} + \vec{R}. \quad (20.1)$$

Абсолютне прискорення точки  $\vec{w}_a$  визначимо за теоремою Коріоліса

$$\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_c. \quad (20.2)$$

Підставимо вираз  $\vec{w}_a$  у попередню формулу, тоді

$$m\vec{w}_e + m\vec{w}_r + m\vec{w}_c = \vec{F} + \vec{R}. \quad (20.3)$$

Оскільки нас цікавить рівняння відносного руху, то

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + (-m\vec{w}_e) + (-m\vec{w}_c) + \vec{R}. \quad (20.4)$$

Вектори

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{w}_e, \quad \vec{\Phi}_c = -m\vec{w}_c \quad (20.5)$$

називають відповідно переносною і коріолісовою силами інерції.

Якщо позначення (20.5) використати в рівнянні (20.4), то воно набуває звичної форми основного рівняння динаміки (другого закону Ньютона)

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c. \quad (20.6)$$

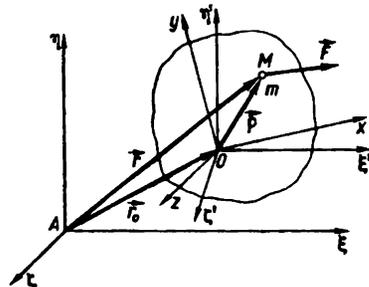


Рис. 20.1

Із рівняння (20.6) видно, що для складання диференціального рівняння руху матеріальної точки в неінерціальній системі координат у формі другого закону Ньютона треба до активних сил і реакцій в'язей, які діють на точку, додати умовно переносну і коріолісову сили інерції.

Рівняння (20.6) називають основним рівнянням динаміки відносного руху матеріальної точки. Згідно з цим рівнянням можна так сформулювати закон відносного руху: *добуток маси точки на прискорення її відносного руху дорівнює векторній сумі сил, що прикладені до точки, і двох сил інерції – переносної та коріолісової.*

Вектори переносної  $\vec{\Phi}_e$  і коріолісової  $\vec{\Phi}_c$  сил інерції – це поправки на неінерціальність рухомої системи координат. Це ті фіктивні сили, які треба прикласти до точок тіла (системи координат  $Oxuz$ ), щоб воно рухалося без прискорення. Тоді для опису відносного руху точки можна застосувати другий закон Ньютона. Ці сили фіктивні, оскільки вони не є силами взаємодії між тілами<sup>1</sup>.

Щоб обчислити переносну і коріолісову сили інерції, треба визначити спочатку переносне прискорення і прискорення Коріоліса. Нагадаємо формули для їх визначення (див. § 9.4–9.6, 10.4):

$$\begin{aligned}\vec{w}_e &= \vec{w}_O + \vec{w}_{MO}^{oc} + \vec{w}_{MO}^{ob} = \\ &= \vec{w}_O + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad (20.7) \\ \vec{w}_c &= 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r.\end{aligned}$$

Основному рівнянню (20.6) динаміки відносного руху матеріальної точки у векторній формі відповідають три рівняння в

скалярній формі, записані в проекціях на осі рухомої системи координат, наприклад  $Oxuz$  :

$$\begin{aligned}mw'_x &= F_x + R_x + \Phi_x^e + \Phi_x^c, \\ mw'_y &= F_y + R_y + \Phi_y^e + \Phi_y^c, \quad (20.8) \\ mw'_z &= F_z + R_z + \Phi_z^e + \Phi_z^c.\end{aligned}$$

Тут  $w'_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $w'_y = \frac{d^2y}{dt^2}$ ,  $w'_z = \frac{d^2z}{dt^2}$ . Проекції на осі векторів  $\vec{\Phi}_e$  і  $\vec{\Phi}_c$  визначаються за відповідними проекціями  $\vec{w}_e$  і  $\vec{w}_c$  із (20.7), які наведені в кінематиці.

## § 20.2. Окремі випадки відносного руху точки. Умови відносного спокою. Принцип відносності класичної динаміки

Аналізуючи рівняння (20.6), розглянемо такі окремі випадки.

1. Матеріальна точка відносно рухомої системи координат  $Oxuz$  здійснює рівномірний прямолінійний рух. Тоді відносна швидкість  $\vec{v}_r = \text{const}$ , а відносне прискорення  $\vec{w}_r = 0$ . Отже, на основі (20.6) дістанемо

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c = 0. \quad (20.9)$$

2. Якщо розглядувана точка перебуває у спокої відносно рухомої системи координат, то її відносна швидкість  $\vec{v}_r = 0$  і відносне прискорення  $\vec{w}_r = 0$ . Тоді на основі (20.6) запишемо

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e = 0. \quad (20.10)$$

Ця рівність виражає умову відносної рівноваги матеріальної точки, яка формулюється так: *при відносній рівновазі матеріальної точки векторна сума активних сил, що ді-*

<sup>1</sup>Переносні  $\vec{\Phi}_e$  і коріолісові  $\vec{\Phi}_c$  сили інерції називають ейлеровими силами інерції (див.: *Ильинский А. Ю. Механика относительного движения и силы инерции.* – М.: Наука, 1981. – 191 с.)

ють на матеріальну точку, реакцій в'язей і переносної сили інерції дорівнює нулю.

3. Якщо рухома система координат здійснює поступальний рух ( $\vec{\omega} = 0$ ), то прискорення Кориоліса  $\vec{w}_c = 0$  і кориолісова сила інерції  $\vec{\Phi}_c = 0$ . Тоді рівняння (20.6) набуває вигляду

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e. \quad (20.11)$$

4. Якщо рухома система координат  $Oxuz$  є інерціальною, тобто вона рухається рівномірно і прямолінійно ( $\vec{v}_e = \text{const}$ ,  $\vec{\omega}_e = 0$ ), здійснюючи поступальний рух, то на нуль обертаються обидві сили інерції:  $\vec{\Phi}_e = 0$  і  $\vec{\Phi}_c = 0$ . Тоді основне рівняння динаміки відносного руху набере вигляду

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + \vec{R}. \quad (20.12)$$

Порівнюючи вираз (20.12) з рівнянням (13.29) для невільної точки  $m\vec{w} = \vec{F} + \vec{R}$ , приходимо до висновку, що за формою вони збігаються. Отже, другий закон Ньютона справедливий у даному разі і для відносного руху матеріальної точки. Сказане виражає принцип відносності класичної динаміки, встановлений Г. Галілеєм у 1630 р. Цей принцип формулюється так: *за однакових початкових умов механічні рухи здійснюються однаково в нерухомих системах координат і в тих, що рухаються поступально, рівномірно та прямолінійно, тобто описуються однаковими рівняннями.* Отже, всі положення динаміки Ньютона справедливі для будь-якої інерціальної системи координат. Важливо зазначити, що принцип Галілея разом із третім законом Ньютона, законом незалежності дії сил, основними визначеннями і поняттями можна покласти в основу побудови динаміки.

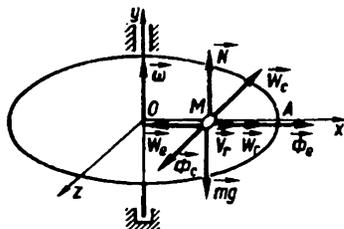


Рис. 20.2

**Приклад 1.** Встановити закон руху кільця  $M$ , що рухається вздовж гладенького стрижня  $OA$ , якщо маса кільця  $m = 2$  кг, довжина стрижня  $OA = 1$  м. Стрижень обертається навколо осі, що проходить через його кінець, з кутовою швидкістю  $\omega = 4$  с $^{-1}$ . У початковий момент часу ( $t = 0$ )  $OM = 0,6$  м,  $v_M(t = 0) = 0$ .

**Розв'язання.** Згідно з умовою задачі, розглядається відносний рух кільця – матеріальної точки  $M$  по стрижню  $OA$ , що обертається. Уздовж цього стрижня спрямуємо рухому вісь  $Ox$  (рис. 20.2). На точку  $M$  діє сила ваги  $\vec{P} = m\vec{g}$  і нормальна реакція стрижня  $\vec{N}$ . Відносна швидкість  $v_r = \frac{dx}{dt}$ ,  $w_r = \frac{d^2x}{dt^2}$ . Введемо сили інерції. Оскільки переносним є обертальний рух навколо осі  $Oy$  з постійною кутовою швидкістю  $\omega_e = \omega = 4$  с $^{-1}$ , то  $\epsilon_e = 0$ . Отже, переносна сила інерції  $\vec{\Phi}_e$  буде відцентровою силою (див. рис. 20.2), що дорівнює  $m\omega^2 x$ , оскільки радіусом обертання є  $r = OM = x$ . Прискорення Кориоліса  $\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ ; кориолісова сила інерції  $\vec{\Phi}_c = -m\vec{w}_c$ . Як видно з рисунка,  $\vec{\Phi}_c$  перпендикулярна до осі  $Ox$ , тому проекція  $\Phi_{cx} = 0$ . Спроектувавши всі сили на вісь  $Ox$ , матимемо  $m \frac{d^2x}{dt^2} = \Phi_e$ , оскільки проекції решти сил на вісь  $Ox$  дорівнюють нулю. Оскільки переносна сила інерції  $\Phi_e = m\omega^2 x$ , то

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m x \omega^2$$

або з урахуванням значення  $\omega$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 16x = 0. \quad (1)$$

Складемо характеристичне рівняння  $p^2 - 16 = 0$ , звідки  $p_{1,2} = \pm 4$ . Отже, загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-4t}. \quad (2)$$

Сталі  $C_1$  і  $C_2$  визначимо з початкових умов при  $t = 0$ :

$$x(0) = 0,6; \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Знайдемо похідну  $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = 4(C_1 e^{4t} - C_2 e^{-4t}). \quad (3)$$

Підставимо тепер початкові умови в рівності (1) та (3) і дістанемо систему рівнянь для визначення  $C_1$  і  $C_2$ :

$$C_1 + C_2 = 0,6; \quad C_1 - C_2 = 0.$$

Звідси  $C_1 = C_2 = 0,3$ . З урахуванням  $C_1$  і  $C_2$  закон руху кільця  $M$  уздовж стрижня, що обертається, матиме вигляд

$$x = 0,3(e^{4t} + e^{-4t}) = 0,6 \operatorname{ch} 4t.$$

### § 20.3. Теорема про зміну кінетичної енергії у відносному русі точки

Щоб вивести вираз, який відображає зміну кінетичної енергії у відносному русі точки, рівняння (20.6) перепишемо так:

$$m \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r). \quad (20.13)$$

Помноживши скалярно ліву і праву частини рівності (20.13) на відносну швидкість  $\vec{v}_r$ , дістанемо

$$m \vec{v}_r \cdot \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}_r + \vec{R} \cdot \vec{v}_r + \vec{\Phi}_e \cdot \vec{v}_r - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r) \cdot \vec{v}_r. \quad (20.14)$$

Останній доданок дорівнює нулю, оскільки вектор  $\vec{v}_r$  перпендикулярний до векторного добутку  $(\vec{\omega} \times \vec{v}_r)$ . Звідси, враховуючи, що  $m \vec{v}_r \cdot \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m \vec{v}_r^2) = \frac{d}{dt} T_r$ , і вираз для потужності сили, рівність (20.14) запишемо у вигляді

$$\frac{dT_r}{dt} = N^F + N^R + N^{\Phi_e}, \quad (20.15)$$

де  $T_r = m \vec{v}_r^2 / 2$  – кінетична енергія відносного руху;  $N^F$ ,  $N^R$ ,  $N^{\Phi_e}$  – відповідно потужності активних сил  $\vec{F}$ , реакції в'язі  $\vec{R}$  і формально обчислена потужність переносної сили інерції.

Як впливає безпосередньо з виразу (20.14), формально обчислена потужність і, отже, робота коріолісової сили інерції у відносному русі дорівнює нулю. У цьому й полягає особливість теореми про зміну кінетичної енергії у відносному русі точки. Інтегруючи вираз (20.15) від початкового часу  $t_0$  до поточного  $t$ , дістанемо

$$T_r(t) - T_r(t_0) = A^F + A^R + A^{\Phi_e}. \quad (20.16)$$

**Теорема.** *Зміна кінетичної енергії у відносному русі точки дорівнює сумі робіт сил, що діють на неї, – активних і реакцій в'язей, разом з формально обчисленою роботою переносної сили інерції.*

Розглянемо застосування теореми про зміну кінетичної енергії у відносному русі на прикладі обчислення роботи, потрібної для доставляння вантажу на стаціонарний

спутник (рис. 20.3). Стационарним називають супутник, який рухається по коловій орбіті в екваторіальній площині у напрямку обертання Землі з періодом, що дорівнює одній добі (24 год). Такий супутник “висить” над екваторіальною точкою Землі. Його застосовують для глобального зв’язку, зручний він також і як міжпланетна станція.

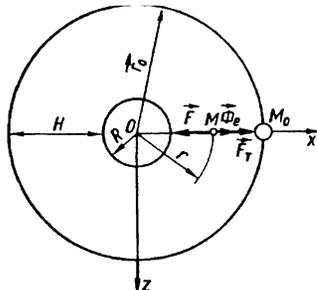


Рис. 20.3

**Приклад 2<sup>1</sup>.** Визначити роботу, яку потрібно затратити для доставляння вантажу  $M$  на стаціонарний супутник, що рухається по орбіті радіусом  $r_0 = 42000$  км, якщо радіус Землі  $R = 6371$  км.

Розв’язання. Зв’яжемо із Землею і супутником обертову систему координат  $Oxyz$ . Обертання відбувається навколо осі  $Oy$  з кутовою швидкістю  $\omega$ . У цій задачі слід врахувати такі сили: силу тяжіння  $\vec{F}$ , переносну силу інерції  $\vec{\Phi}_e$  і силу тяги  $\vec{F}_\tau$ . Будемо вважати, що в початковий і кінцевий моменти часу відносна швидкість  $\vec{v}_r = 0$ . Тоді на основі теореми про зміну кінетичної енергії у відносному русі (20.16) маємо

$$A^F + A^{\Phi_e} + A^{F_\tau} = 0,$$

звідки

$$A^{F_\tau} = -A^F - A^{\Phi_e}, \quad (1)$$

тобто робота сили тяги визначається роботою на подолання сили тяжіння і відцентрової сили. Обчислимо кожен з цих робіт окремо.

Формально роботу відцентрової сили можна обчислити так:

$$\begin{aligned} A^{\Phi_e} &= \int_R^{r_0} \Phi_e dr = \int_R^{r_0} m \omega^2 r dr = \\ &= m \frac{\omega^2}{2} (r_0^2 - R^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Сила тяжіння, як було показано в § 14.4,

$$F = \gamma m m_3 / r^2,$$

де  $m_3$  – маса Землі.

На поверхні Землі сила тяжіння дорівнює  $mg$ , тому

$$F(R) = \gamma \frac{m m_3}{R^2} = mg.$$

Звідси визначимо  $\gamma m_3 = g R^2$ , тоді  $F = \frac{g R^2}{r^2} m$ .

Робота цієї сили

$$\begin{aligned} A^F &= - \int_R^{r_0} F dr = - \int_R^{r_0} \frac{g R^2 m}{r^2} dr = \\ &= - m g R^2 \int_R^{r_0} r^{-2} dr = m g R^2 \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{R} \right) = \\ &= - m g R + m g \frac{R^2}{r_0}. \end{aligned} \quad (3)$$

Підставивши  $A^F$  і  $A^{\Phi_e}$  у вихідну формулу, визначимо роботу сили тяги при  $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \frac{1}{c}$ :

$$\begin{aligned} A^{F_\tau} &= m g R + \frac{m \omega^2}{2} R^2 - m g \frac{R^2}{r_0} - m \frac{\omega^2}{2} r_0^2 = \\ &= m g R \left[ 1 + \frac{\omega^2 R}{2g} - \frac{R}{r_0} - \frac{\omega^2 r_0^2}{2g R} \right], \\ A^{F_\tau} &= m g R [1 + 0,002 - 0,152 - 0,075] = \\ &= 0,775 m g R. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Див.: Бутенцин Н. В., Луцак Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Наука, 1979. – Т. 2. – С. 169, 170.

Для доставляння вантажу вагою  $mg = 9,81 \text{ Н}$  (1 кгс) треба виконати роботу

$$\begin{aligned} A^{F_i} &= 0,775 \cdot 9,81 \text{ Н} \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ м} = \\ &= 48,4 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м} = 4,94 \cdot 10^6 \text{ кгс} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

### Питання для самоконтролю

1. Як записується рівняння відносного руху матеріальної точки?
2. Що потрібно додати до активних сил, які діють на точку, аби записати рівняння її відносного руху у формі другого закону Ньютона?

3. Чи зможете Ви записати формули для обчислення переносної та коріолісової сил інерції для точки?
4. У чому суть відносного спокою точки?
5. Які потрібно виконати умови, щоб точка знаходилась у стані відносного спокою? Наведіть приклад.
6. Сформулюйте принцип відносності класичної механіки.
7. Як формулюється теорема про зміну кінетичної енергії у відносному русі точки?
8. Чому робота сил інерції прискорення Коріоліса завжди дорівнює нулю?
9. Яким ученим встановлено принцип відносності?
10. За яких умов при відносному спокої точки має місце невагомість ( $\vec{R} = 0$ ) ?

## Розділ 21

### ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

#### § 21.1. Основні задачі динаміки твердого тіла. Диференціальні рівняння руху тіла

У динаміці твердого тіла також виникають дві основні задачі: 1) за заданими кінематичними рівняннями руху твердого тіла і його масою визначити сили, що діють на тіло; 2) за заданими силами, що діють на тверде тіло, масою тіла і початковими умовами руху визначити закон руху тіла, тобто його кінематичні характеристики руху.

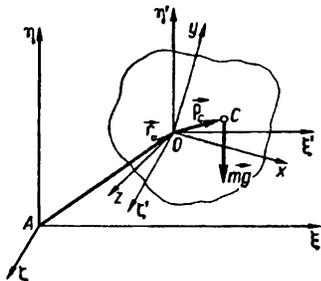


Рис. 21.1

У разі невільного твердого тіла треба також визначити реакції в'язей. Розв'язання цих задач пов'язане з аналізом диференціальних рівнянь руху твердого тіла, які будуть виведені в цьому розділі. Подібно до того, як це було в кінематиці твердого тіла, розглянемо поступальний, обертальний навколо нерухої осі, плоскопаралельний, обертальний навколо нерухої точки руху твердого тіла.

Аналізуючи сили, що діють на тверде тіло, слід пам'ятати, що внутрішні сили у твердому тілі зрівноважуються. Отже, сили, що діють на тверде тіло, є зовнішніми. Згідно з другою класифікацією, сили, що діють на тверде тіло, поділяють на активні та реакції в'язей. Цю класифікацію сил застосовують у разі невільного твердого тіла.

При вивченні динаміки твердого тіла звичайно вибирають такі системи координат (див. рис. 21.1):

$A\xi\eta\zeta$  – нерухома;

$O\xi'\eta'\zeta'$  – рухається поступально разом з полюсом, осі якої паралельні осям системи координат  $A\xi\eta\zeta$ ;

$Oxuz$  – незмінно зв'язана з тілом.

У системі координат  $Oxuz$  моменти інерції тіла є величинами постійними, а в системах координат  $O\xi'\eta'\zeta'$  і  $A\xi\eta\zeta$  – змінними.

Очевидно, що координати полюса  $O$  ( $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ ) і три кути Ейлера – Крилова або інші параметри (Родрига – Гамільтона, Кейлі – Клейна, кватерніони), про які йшлося в кінематиці і які характеризують положення системи координат  $Oxuz$  відносно системи координатних осей  $O\xi'\eta'\zeta'$ , повністю визначають положення твердого тіла. Щоб розв'язувати сформульовані задачі динаміки твердого тіла, треба записати рівняння, які зв'язують ці параметри із силами, що діють на тверде тіло. Цих рівнянь має бути шість, оскільки існує шість незалежних параметрів, що визначають положення твердого тіла в просторі.

Щоб вивести ці рівняння, скористасмося теоремами про змінення кількості руху тіла і його кінетичного моменту (моменту кількості руху), які в системі координат  $Oxuz$ , згідно з § 16.12, записуються у вигляді

$$m\ddot{\vec{Q}}_C = \frac{d'\vec{Q}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{Q} = \vec{F}^e, \quad (21.1)$$

$$\frac{d'\vec{K}_O^{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_O^{\omega} = \vec{M}_O^e - m\vec{r}_C \times \vec{\omega}_O.$$

Якщо полюс  $O$  помістити в центрі мас  $C$ , то  $\vec{r}_C = 0$  і рівняння (21.1) набуває вигляду

$$m\ddot{\vec{Q}}_C = \frac{d'\vec{Q}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{Q} = \vec{F}^e, \quad (21.2)$$

$$\frac{d'\vec{K}_C^{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_C^{\omega} = \vec{M}_C^e.$$

Цим двом векторним рівнянням – (21.1) або (21.2) – відповідають шість скалярних рівнянь у проєкціях на координатні осі, наприклад  $Ox, Oy, Oz$ .

Щоб наведена система рівнянь (21.1) або (21.2) була замкненою, до неї треба додати кінематичні рівняння, які дають можливість виразити проєкції кутових швидкостей  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  через кути Ейлера – Крилова  $\psi, \theta, \varphi$  (або інші параметри) та їхні похідні  $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ .

Складемо рівняння просторового керованого руху твердого тіла в середовищі, яке чинить опір, наприклад у рідині. Будемо вважати, що тіло рухається під дією сили тяги, створюваної двигуном, і до цього тіла за допомогою спеціальних пристроїв прикладаються керувальні моменти для стабілізації та керування його кутовим положенням.

1. Уведемо названі вище системи координат (рис. 21.1). Задамо положення тіла за допомогою шести параметрів: трьох координат полюса  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  і трьох кутів Ейлера – Крилова  $\psi, \theta, \varphi$ . Згідно з § 10.3, проєкції кутових швидкостей на осі системи координат  $Oxuz$  мають вигляд

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \theta + \dot{\varphi},$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi, \quad (21.3)$$

$$\omega_z = -\dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi.$$

2. Складемо вираз для кінетичної енергії тіла, а потім за допомогою співвідношень між основними динамічними величинами (див. § 17.2) обчислимо проєкції  $Q_x, Q_y, Q_z, K_{Ox}^{\omega}, K_{Oy}^{\omega}, K_{Oz}^{\omega}$  (далі будемо писати спрощено  $K_x, K_y, K_z$ ):

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial T}{\partial v_{Ox}}, & Q_y &= \frac{\partial T}{\partial v_{Oy}}, & Q_z &= \frac{\partial T}{\partial v_{Oz}}, \\ K_x &= \frac{\partial T^{\omega}}{\partial \omega_x}, & K_y &= \frac{\partial T^{\omega}}{\partial \omega_y}, & K_z &= \frac{\partial T^{\omega}}{\partial \omega_z}. \end{aligned} \quad (21.4)$$

Згідно з формулою (17.37), маємо

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} m v_O^2 + m \bar{v}_O \cdot (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_C) + T_O^{\text{в}} = \\
 &= \frac{1}{2} m \left( v_{Ox}^2 + v_{Oy}^2 + v_{Oz}^2 \right) + \\
 &+ m \left[ \begin{array}{ccc} v_{Ox} & v_{Oy} & v_{Oz} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_C & y_C & z_C \end{array} \right] + \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \\
 &+ \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 - I_{xy} \omega_x \omega_y - \\
 &- I_{xz} \omega_x \omega_z - I_{yz} \omega_y \omega_z. \quad (21.5)
 \end{aligned}$$

Звідси за допомогою наведених співвідношень між основними динамічними величинами знаходимо

$$\left. \begin{aligned}
 Q_x &= \frac{\partial T}{\partial v_{Ox}} = \\
 &= m v_{Ox} + m (\omega_y z_C - \omega_z y_C), \\
 Q_y &= \frac{\partial T}{\partial v_{Oy}} = \\
 &= m v_{Oy} - m (\omega_x z_C - \omega_z x_C), \\
 Q_z &= \frac{\partial T}{\partial v_{Oz}} = \\
 &= m v_{Oz} + m (\omega_x y_C - \omega_y x_C), \\
 K_x &= \frac{\partial T^{\text{в}}}{\partial \omega_x} = \\
 &= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z, \\
 K_y &= \frac{\partial T^{\text{в}}}{\partial \omega_y} = \\
 &= -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z, \\
 K_z &= \frac{\partial T^{\text{в}}}{\partial \omega_z} = \\
 &= -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_z \omega_z.
 \end{aligned} \right\} \quad (21.6)$$

3. Спроjektуємо рівняння (21.1) на осі системи координат  $Oxuz$ , враховуючи, що зовнішніми силами для тіла є сила ваги  $\bar{P} = m\bar{g}$ , головний вектор і головний момент гідродинамічних сил  $\bar{F}^r$ ,  $\bar{M}_O^r$ , сила тяги  $\bar{F}^t$  і керувальні моменти  $\bar{M}_O^{\text{кер}}$ :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dQ_x}{dt} + \omega_y Q_z - \omega_z Q_y &= \\
 &= P_x + F_x^r + F_x^t, \\
 \frac{dQ_y}{dt} + \omega_z Q_x - \omega_x Q_z &= \\
 &= P_y + F_y^r + F_y^t, \\
 \frac{dQ_z}{dt} + \omega_x Q_y - \omega_y Q_x &= \\
 &= P_z + F_z^r + F_z^t, \\
 \frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y &= \\
 &= M_x^r + m [y_C (g_z - w_{Oz}) - \\
 &- z_C (g_y - w_{Oy})] + M_x^{\text{кер}}, \\
 \frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z &= \\
 &= M_y^r + m [z_C (g_x - w_{Ox}) - \\
 &- x_C (g_z - w_{Oz})] + M_y^{\text{кер}}, \\
 \frac{dK_z}{dt} + \omega_x K_y - \omega_y K_x &= \\
 &= M_z^r + m [x_C (g_y - w_{Oy}) - \\
 &- y_C (g_x - w_{Ox})] + M_z^{\text{кер}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (21.7)$$

Доповнимо ці рівняння кінематичними співвідношеннями (21.3). Підставивши вирази  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$  і  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$  із (21.6) у (21.7), дістанемо рівняння руху тіла в загальному вигляді. До цих рівнянь треба додати ще закон формування керувальних сил (сила тяги) і керувальних моментів.

Якщо кероване тверде тіло  $\epsilon$ , наприклад, підводним човном, то для формування зазначених керувальних сил і моментів на борту човна мають бути прилади, які вимірюють його кінематичні параметри (лінійні та кутові), обчислювальні пристрої і виконавчі органи. Як буде показано далі, кути, кутові і лінійні швидкості човна та інших об'єктів можна вимірювати за допомогою гіроскопів. Зауважимо, що обчислення головного вектора і головного моменту гідродинамічних сил є самостійною задачею гідродинаміки.

Рівняння (21.7), як легко переконатися, нелінійні, тому інтегрувати їх у загальному випадку неможливо. На практиці їх спрощують, розглядаючи малі кутові відхилення тіла і розділяючи рухи в поздовжній  $O\xi\eta$  та поперечній  $O\xi\zeta$  площинах і обертання навколо осі  $Ox$ . Далі обмежимося розглядом найпростіших рухів некерованого твердого тіла ( $\vec{F}^i = 0$ ,  $\vec{M}_O^{кр} = 0$ ,  $\vec{F}^r = 0$ ,  $\vec{M}_O^r = 0$ ).

### § 21.2. Поступальний рух твердого тіла

Якщо тіло здійснює поступальний рух, то це означає, що відносно системи координат  $O\xi'\eta'\zeta'$  (див. рис. 21.1), яка рухається поступально, тіло перебуває у стані спокою. Отже, кутова швидкість і момент кількості руху відносно центра мас дорівнює нулю і, згідно з рівняннями (21.2),  $\vec{M}_C^e = 0$ .

Таким чином, для здійснення поступального руху тіла треба, щоб головний момент усіх зовнішніх сил відносно центра мас і початкова кутова швидкість обертання тіла дорівнювали нулю. При цьому рух тіла буде повністю визначатися першим рівнянням (21.2), яке у проєкціях на осі має вигляд

$$\begin{aligned} mW_{Ox} &= F_x^e, & mW_{Oy} &= F_y^e, \\ mW_{Oz} &= F_z^e. \end{aligned} \quad (21.8)$$

Ці рівняння дають змогу розв'язати першу і другу задачі динаміки тіла в разі поступального його руху.

На практиці здійснити поступальний рух некерованого твердого тіла досить складно через різного виду збурення і несиметрію тіл.

### § 21.3. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Рівняння для визначення реакцій підшипників

Тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі, наприклад  $Oy$  (рис. 21.2, а),  $\epsilon$  прикладом невільного твердого тіла, положення якого у просторі визначається одним параметром – кутом  $\varphi$ . Якщо нас не цікавлять реакції в'язей, то таке тіло буде описуватися одним рівнянням руху, яке впливає із (21.7). При  $\omega_x = 0$ ,  $\omega_z = 0$ ,  $\omega_y \neq 0$  маємо

$$\begin{aligned} \frac{dK_y}{dt} &= I_y \dot{\omega}_y = I_y \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \\ &= I_y \epsilon = M_y^e. \end{aligned} \quad (21.9)$$

Якщо ж нам треба визначити реакції в'язей у підшипниках  $A$  і  $B$  (рис. 21.2, а), то, застосовуючи аксіому про звільненість від в'язей, замінімо їх реакціями  $\vec{R}_A$  і  $\vec{R}_B$ . Тепер тіло можна розглядати як вільне і його рух буде описуватися шістьма рівняннями руху (21.7), в які треба підставити відповідні значення проєкцій кількості руху і кінетичного моменту (див. (21.6)).

Вважатимемо, що на тіло діють  $n$  активних сил  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ , головний вектор і головний момент яких відносно центра  $O$  позначимо через  $\vec{F}$  і  $\vec{M}_O$ . Введемо нерухому систему координат  $O\xi\eta\zeta$  і незмінно зв'язану з тілом систему  $Oxuz$  (рис. 21.2). Взаємне положення осей задамо кутом  $\varphi$ . Проєкції реакцій  $\vec{R}_A$  і  $\vec{R}_B$  на осі, зв'язані з

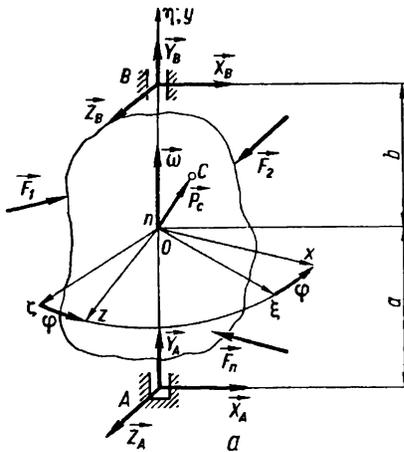


Рис. 21.2

тілом, позначимо  $X_A, Y_A, Z_A; X_B, Y_B, Z_B$ , координати точок прикладання  $A$  і  $B$  яких дорівнюють відповідно  $0, y_A, 0; 0, y_B, 0$  (рис. 21.2, а). Проекції кутової швидкості тіла на нерухомі осі запишемо у вигляді

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \omega_z = 0. \quad (21.10)$$

Центр мас у рухомій системі координат має координати  $x_C, y_C, z_C$ . У рівняннях (21.7) поряд з активними силами і моментами треба врахувати реакції в'язей та їхні моменти.

З урахуванням заданих параметрів, використовуючи співвідношення (21.6), дістанемо

$$\begin{aligned} Q_x &= m\omega z_C, \quad Q_y = 0, \\ Q_z &= -m\omega x_C, \\ K_x &= -I_{xy}\omega, \quad K_y = I_{yz}\omega, \\ K_z &= -I_{zy}\omega. \end{aligned} \quad (21.11)$$

Момент реакції  $\vec{R}_A$  в'язі відносно точки  $O$  буде

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(X_A, Y_A, Z_A) &= \vec{\rho}_A \times \vec{R}_A = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & y_A & 0 \\ X_A & Y_A & Z_A \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}y_A Z_A - \vec{j}0 - \vec{k}y_A X_A, \end{aligned} \quad (21.12)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орти рухомих осей.

Аналогічно записується момент реакції  $\vec{R}_B$  в'язі відносно того самого центра.

Враховуючи останній вираз, проєкції моментів реакцій на осі  $Ox, Oy, Oz$  набудуть вигляду

$$\begin{aligned} M_{Ox}(\vec{R}_A) &= y_A Z_A, \quad M_{Oy}(\vec{R}_A) = 0, \\ M_{Oz}(\vec{R}_A) &= -y_A X_A, \\ M_{Ox}(\vec{R}_B) &= y_B Z_B, \quad M_{Oy}(\vec{R}_B) = 0, \\ M_{Oz}(\vec{R}_B) &= -y_B X_B. \end{aligned} \quad (21.13)$$

Підставивши ці рівності і (21.11) у (21.7) і враховуючи, що  $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ , остаточно дістанемо

$$\begin{aligned}
 mz_C\varepsilon - m\omega^2 x_C &= \\
 &= F_x + X_A + X_B, \\
 0 &= F_y + Y_A + Y_B, \\
 -mx_C\varepsilon - m\omega^2 z_C &= \\
 &= F_z + Z_A + Z_B, \\
 -I_{xy}\varepsilon - I_{zy}\omega^2 &= \\
 &= M_x + y_A Z_A + y_B Z_B, \\
 I_y\varepsilon &= M_y, \\
 -I_{zy}\varepsilon + I_{xy}\omega^2 &= \\
 &= M_z - y_A X_A - y_B X_B.
 \end{aligned} \tag{21.14}$$

П'ять рівняння цієї системи збігається з рівнянням (21.9) і не містить реакцій в'язей. Тому із системи рівнянь (21.14) можна визначити тільки п'ять невідомих проекцій реакцій із шести. Із другого рівняння (21.14) можна визначити суму  $Y_A + Y_B$ , оскільки  $Y_A$  і  $Y_B$  в інші рівняння не входять. Радіальні складові реакцій підшипників  $X_A$ ,  $X_B$ ,  $Z_A$ ,  $Z_B$  визначають із чотирьох рівнянь, в які вони входять.

#### § 21.4. Додаткові динамічні реакції.

##### Статичне і динамічне зрівноважування тіла

Як видно з рівнянь (21.14), реакції в опорах  $A$  і  $B$  визначаються: активними силами  $\vec{F}$  та їхніми моментами  $\vec{M}_O$ , що прикладені до тіла; силами інерції та їхніми моментами, які записані у лівих частинах рівнянь. Тому, якщо кожен з проекцій опор подати у вигляді двох складових, одна з

яких визначається лише активними силами, а друга – так званий динамічний додатак реакцій  $\vec{R}_d$  – зумовлена силами інерції та їхніми моментами і перетворюється на нуль, як тільки тіло перестане обертатися ( $\omega = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ ), тобто

$$\vec{R}_A = \vec{R}_A^F + \vec{R}_A^d, \quad \vec{R}_B = \vec{R}_B^F + \vec{R}_B^d, \tag{21.15}$$

то першу складову реакцій  $\vec{R}_A^F$ ,  $\vec{R}_B^F$  можна визначити з рівнянь статички. Ці складові реакцій називають статичними.

Отже, статичні та динамічні складові реакцій в'язей визначаються з таких систем рівнянь:

$$\begin{aligned}
 0 &= F_x + X_A^F + X_B^F, \\
 0 &= M_x + y_A Z_A^F + y_B Z_B^F, \\
 0 &= F_y + Y_A^F + Y_B^F, \\
 0 &= M_z - y_A X_A^F - y_B X_B^F, \\
 0 &= F_z + Z_A^F + Z_B^F,
 \end{aligned} \tag{21.16}$$

$$\begin{aligned}
 mz_C\varepsilon - m\omega^2 x_C &= X_A^d + X_B^d, \\
 -mx_C\varepsilon - m\omega^2 z_C &= Z_A^d + Z_B^d, \\
 -I_{xy}\varepsilon - I_{zy}\omega^2 &= y_A Z_A^d + y_B Z_B^d, \\
 -I_{zy}\varepsilon + I_{xy}\omega^2 &= -y_A X_A^d - y_B X_B^d,
 \end{aligned} \tag{21.17}$$

де  $Y_A^F = Y_A$ ;  $Y_B^F = Y_B$ , оскільки  $Y_A^d = Y_B^d = 0$ . Рівняння (21.16) детально аналізували в статичці.

Розглянемо чотири рівняння (21.17). Легко помітити, що ці рівняння поділяються на дві групи незалежних рівнянь: відповідно перше і четверте, друге і третє, які можна аналізувати незалежно.

З'ясуємо, за яких умов додаткові динамічні реакції будуть дорівнювати нулю

( $X_A^a = 0$ ,  $Z_A^a = 0$ ,  $X_B^a = 0$ ,  $Z_B^a = 0$ ). Очевидно, що це буде тоді, коли ліві частини рівнянь (21.17) дорівнюватимуть нулю. Розглядаючи як невідомі  $x_C$ ,  $z_C$ ,  $I_{xy}$ ,  $I_{zy}$  та об'єднуючи перше і друге, третє і четверте рівняння системи (21.17), дістанемо дві незалежні системи рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon z_C - \omega^2 x_C &= 0, \\ \omega^2 z_C + \varepsilon x_C &= 0, \\ I_{xy} \varepsilon + I_{zy} \omega^2 &= 0, \\ I_{xy} \omega^2 - I_{zy} \varepsilon &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21.18)$$

Ці системи однорідних лінійних алгебричних рівнянь відносно  $x_C$ ,  $z_C$ ,  $I_{xy}$ ,  $I_{zy}$  мають однакові визначники, які не дорівнюють нулю:

$$\left| \begin{array}{cc} \varepsilon & -\omega \\ \omega^2 & \varepsilon \end{array} \right| = \varepsilon^2 + \omega^4 \neq 0, \quad (21.19)$$

оскільки під час обертання тіла  $\omega$  і  $\varepsilon$  одночасно на нуль не перетворюються.

Отже, рівняння (21.18) мають єдиний розв'язок

$$x_C = z_C = 0, \quad I_{xy} = I_{zy} = 0. \quad (21.20)$$

Перша умова (21.20) означає, що центр мас тіла лежить на осі обертання:  $x_C = z_C = 0$ . У цьому випадку тіло *статично зрівноважене* або *збалансоване*.

Друга умова  $I_{xy} = I_{zy} = 0$  означає, що вісь обертання  $Oy$  є головною віссю інерції, а оскільки виконується і перша умова (21.20), то ця вісь є також центральною віссю інерції. Якщо виконуються умови (21.20), то тіло *динамічно зрівноважене*. Це означає, що динамічні додатки реакції опору дорівнюють нулю.

Отже, для того щоб під час обертання твердого тіла навколо нерухомої осі не виникали додаткові динамічні реакції, тіло має бути динамічно зрівноважене, тобто вісь обертання тіла має бути головною центральною віссю інерції.

Якщо тіло зрівноважене динамічно, то воно зрівноважене і статично ( $x_C = 0$ ,  $z_C = 0$ ). Якщо тіло зрівноважене статично, то динамічно воно може бути і не зрівноважене.

Для того щоб показати, як визначати відцентрові моменти інерції стосовно роторів, розглянемо задачу про їх обчислення (рис. 21.2, б). Ротор статично збалансований, але посаджений на вал з *перекосом*  $\nu$ , тобто площина його симетрії не перпендикулярна до осі обертання. Оскільки вісь  $Oy_1$  є віссю симетрії тіла, а осі  $Ox_1$ ,  $Oz_1$  лежать у площині симетрії ротора, то можна впевнитися, аналізуючи вирази для відцентрових моментів інерції, що осі  $Ox_1$ ,  $Oy_1$ ,  $Oz_1$  є головними осями інерції.

Дійсно, кожній точці в тілі ротора, наприклад точці 1 (рис. 21.2, б), можна поставити у відповідність точку 2, що симетрично розміщена відносно площини симетрії  $Ox_1z_1$ , так що дві їх координати будуть однакові:  $x_1 = x_2$ ,  $z_1 = z_2$ , а треті – однакові за величиною, але протилежні за знаком  $y_1 = -y_2$ . Для точок 1 і 3, що симетрично розміщені відносно осі симетрії,  $y_1 = y_3$ ,  $x_1 = -x_3$ ,  $z_1 = z_3$  і т. д. Тому

$$\begin{aligned} I_{y_1y_1} &= \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i = 0; \\ I_{y_1z_1} &= 0; \quad I_{y_1x_1} = 0. \end{aligned} \quad (21.21)$$

Отже, осі  $Ox$  і  $Oy$  не будуть головними осями інерції. Визначимо для цього випадку відцентровий момент інерції  $I_{xy}$ , якщо

відомі  $I_{x_1}$  і  $I_{y_1}$ . Для цього скористаємося тим, що кінетична енергія не залежить від вибору системи відліку. Вважаючи, що проєкції  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  задані, визначимо проєкції кутових швидкостей на осі  $Ox_1$ ,  $Oy_1$ ,  $Oz_1$ :

$$\begin{aligned}\omega_{x_1} &= \omega_y \sin \nu + \omega_x \cos \nu, \\ \omega_{y_1} &= \omega_z, \\ \omega_{z_1} &= \omega_y \cos \nu - \omega_x \sin \nu.\end{aligned}\quad (21.22)$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} I_{x_1} \omega_{x_1}^2 + \frac{1}{2} I_{y_1} \omega_{y_1}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} I_{z_1} \omega_{z_1}^2 = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \\ &+ \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 - I_{xy} \omega_x \omega_y - \\ &- I_{xz} \omega_x \omega_z - I_{yz} \omega_y \omega_z.\end{aligned}\quad (21.23)$$

Підставивши у перший вираз для  $T$  вирази  $\omega_{x_1}$ ,  $\omega_{y_1}$ ,  $\omega_{z_1}$  із (21.22), дістанемо

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} I_{y_1} (\omega_y^2 \cos^2 \nu - \\ &- 2\omega_x \omega_y \cos \nu \sin \nu + \\ &+ \omega_x^2 \sin^2 \nu) + \frac{1}{2} I_{x_1} (\omega_z^2 \sin^2 \nu + \\ &+ 2\omega_x \omega_z \cos \nu \sin \nu + \\ &+ \omega_x^2 \cos^2 \nu) + \frac{1}{2} I_{z_1} \omega_z^2.\end{aligned}\quad (21.24)$$

Порівнюючи (21.24) з другим виразом (21.23), визначимо формули для обчислення моментів інерції в разі повороту осей на кут  $\nu$ :

$$\begin{aligned}I_{x_1} &= I_x \cos^2 \nu + I_{y_1} \sin^2 \nu, \\ I_{x_1 y_1} &= \frac{1}{2} (I_{x_1} - I_{y_1}) \sin 2\nu, \\ I_{y_1} &= I_{x_1} \sin^2 \nu + I_{y_1} \cos^2 \nu, \\ I_{x_1 z_1} &= 0, \quad I_{y_1 z_1} = 0, \quad I_{z_1} = I_z.\end{aligned}\quad (21.25)$$

Оскільки звичайно кут  $\nu$  малий, то  $\sin 2\nu \approx 2\nu$ , отже,

$$I_{x_1 y_1} \approx (I_{x_1} - I_{y_1}) \nu. \quad (21.26)$$

Слід зазначити, що отримані формули (21.25) є окремим випадком формул (15.79) і (15.88) перетворення тензора інерції, які наведені в § 15. Зауважимо також, що, обчислюючи у виразі для кінетичної енергії проєкції швидкостей у різних системах координат, можна знайти всі співвідношення і довести всі теореми Гюйгенса – Штейнера щодо перетворення тензора моментів інерції.

**Приклад 1.** Визначити додаткові динамічні реакції, що виникають у статично збалансованому плоскому роторі (рис. 21.2, б), якщо  $\nu = 0, 02$  ( $\approx 1^\circ$ ). Кутова швидкість обертання ротора  $\omega = 500$  рад/с =  $\text{const}$  ( $n = 30\omega/\pi \approx 10\omega = 5000$  об/хв), маса ротора 1 кг, радіус  $r = 0,1$  м,  $y_B = 0,2$  м,  $y_A = -0,2$  м.

Розв'язання. Оскільки  $\epsilon = 0$ ,  $x_C = 0$ ,  $z_C = 0$ ,  $I_{xz} = I_{yx} = 0$ , то  $Z_A = Z_B = 0$ ,  $Y_A = Y_B = -mg$ . Тому рівняння (21.17) набудуть вигляду

$$\begin{aligned}X_A^u + X_B^u &= 0, \\ I_{y_1} \omega^2 &= -y_A X_A^u - y_B X_B^u.\end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned}X_A^u &= -X_B^u, \\ I_{y_1} \omega^2 &= -y_A X_A^u + y_B X_A^u = 2 \cdot 0,2 X_A^u, \\ X_A^u &= \frac{I_{y_1} \omega^2}{0,4}.\end{aligned}$$

Обчислимо  $I_{y_1}$  за формулою (21.26)

$$I_{xy} \approx (I_{x_1} - I_{y_1})v = \left( \frac{mr^2}{4} - \frac{mr^2}{2} \right) v = -\frac{mr^2}{4} v,$$

$$I_{xy} = -\frac{1\text{кг} \cdot 10^{-2} \text{М}^2}{4} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = -0,5 \cdot 10^{-4} \text{кг} \cdot \text{М}^2.$$

Тепер визначимо

$$\begin{aligned} X_A^a &= \frac{0,5 \cdot 10^{-4}}{0,4} 25 \cdot 10^4 = \\ &= -31,25 \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2 = -31,25 \text{Н}. \end{aligned}$$

Водночас вага ротора дорівнює 9,8 Н. Як бачимо з цього прикладу, динамічний додаток реакції може значно перевищувати статичний.

### § 21.5. Фізичний маятник. Методи визначення моментів інерції тіл

Прикладом незрівноваженого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, є фізичний маятник. *Фізичним маятником* називають тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі під дією сили ваги. Найчастіше всім обертання маятника горизонтальна (рис. 21.3, а). Точку  $O$  перетину осі обертання  $Oz$  з площинною  $O\xi\eta$  руху маятника, яка проходить через центр його ваги  $C$ , називають *точкою підвішування* маятника.

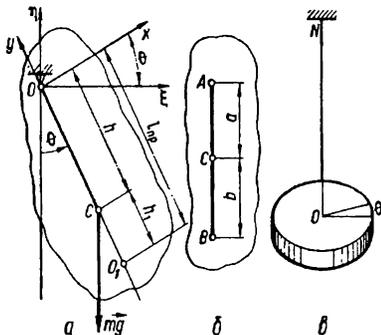


Рис. 21.3

Кут відхилення маятника від вертикалі позначимо  $\theta$ . Відповідне рівняння руху маятника, що перебуває під дією сили ваги  $m\vec{g}$ , дістанемо з (21.7):

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e$$

або

$$I_z \ddot{\theta} = -mgh \sin \theta, \quad (21.27)$$

де  $h$  – відстань від центра мас до точки підвішування  $O$  маятника;  $I_z$  – момент інерції маятника відносно осі  $Oz$ .

Диференціальне рівняння (21.27) є нелінійним і, як буде показано в частині IV, його розв'язок виражається за допомогою еліптичних інтегралів. Тут обмежимося розглядом малих коливань маятника, для яких можна прийняти  $\sin \theta \approx \theta$ . Тоді, розділивши обидві частини рівняння (21.27) на  $I_z$ , перепишемо його у вигляді

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (21.28)$$

де  $\omega_0^2 = mgh / I_z$  – квадрат частоти власних коливань маятника.

Як бачимо, рівняння (21.28) власних коливань фізичного маятника збігається з рівнянням власних коливань математичного маятника (див. § 16.8). Якщо прийняти початкові умови такі, як і для математичного маятника, при  $t = 0$   $\theta(0) = \theta_0$ ,  $\frac{d\theta(0)}{dt} = 0$ ,

то загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (21.28) матиме вигляд

$$\theta = \theta_0 \cos \omega_0 t. \quad (21.29)$$

Період коливань фізичного маятника визначається за формулою

$$T_\Phi = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{I_z / (mgh)} \quad (21.30)$$

і дорівнюватиме періоду  $T_{\text{м}} = 2\pi\sqrt{I_{\text{зв}}/g}$  такого математичного маятника, довжина якого

$$l_{\text{зв}} = I_z / (mh). \quad (21.31)$$

Величину  $l_{\text{зв}}$  називають зведеною довжиною фізичного маятника.

Хрiстан Гюйгенс установив, що коли від точки підвішування  $O$  по лінії  $OC$  відкласти зведену довжину  $l_{\text{зв}}$  фізичного маятника, то точка  $O_1$ , яка називається *центром коливання*, матиме властивість взаємності з точкою підвішування  $O$ . Ця властивість полягає в тому, що коли точку підвішування перенести в центр коливання  $O_1$ , то точка  $O$  теж стає центром коливання. Дійсно, за теоремою Гюйгенса – Штейнера (див. § 15.6) момент інерції тіла відносно осі  $Oz$  буде

$$I_z = I_C + mh^2. \quad (21.32)$$

Підставивши (21.32) в (21.31), визначимо

$$l_{\text{зв}} = \frac{I_C}{mh} + h. \quad (21.33)$$

При цьому очевидно, що  $h_1 = I_C / (mh)$ , а  $h = \frac{I_C}{mh_1}$ , оскільки  $l_{\text{зв}} = h_1 + h$  (рис. 21.3, а).

Якщо точку підвішування маятника помістити в точку  $O_1$ , то нова зведена довжина маятника буде

$$l'_{\text{зв}} = \frac{I_C}{mh_1} + h_1. \quad (21.34)$$

Тоді добуток

$$\begin{aligned} hh_1 &= \frac{I_C}{m} = \frac{mp_C^2}{m} = \\ &= \rho_{C_{\text{ін}}}^2 = \text{const} \end{aligned} \quad (21.35)$$

не залежить від вибору точок  $O$  і  $O_1$ . Тут  $\rho_{C_{\text{ін}}}$  – радіус інерції твердого тіла в разі обчислення моменту інерції в точці, що збігається з центром мас  $C$ .

Розглянемо питання про те, чи можна технічно реалізувати такий фізичний маятник, зведена довжина якого  $l_{\text{зв}}$  дорівнювала би довжині незбурюваного (див. § 19.1) математичного маятника, тобто радіусу Землі:  $l_{\text{зв}} = R_3 = 6,371 \cdot 10^3$  км.

Нехай маятник являє собою диск з радіусом інерції  $\rho_{C_{\text{ін}}}$ . Визначимо зміщення  $h$  центра мас відносно точки підвішування, при якому маятник буде незбурюваним. За визначенням радіуса інерції  $I_z = m\rho_{C_{\text{ін}}}^2$ , тоді за формулою (21.31) знайдемо

$$h = \frac{\rho_{C_{\text{ін}}}^2}{l_{\text{зв}}} = \frac{\rho_{C_{\text{ін}}}^2}{R_3}. \quad (21.36)$$

Наприклад, при  $\rho_{C_{\text{ін}}} = 0,637$  м (радіус диска при цьому  $r = \sqrt{2} \rho_{C_{\text{ін}}} \approx 1$  м, оскільки  $I_z = mr^2/2$ ) зміщення  $h = 10^{-7}$  м (0,1 мкм). Як видно з прикладу, технічно реалізувати таке мале зміщення центра мас у фізичному маятнику практично неможливо.

Отже, незбурюваний математичний маятник – це фантазія, а незбурюваний фізичний маятник реалізувати технічно надзвичайно важко. Однак, як буде показано далі, реалізація такого періоду коливань у гіроскопічних приладах цілком можлива.

**Методи визначення моментів інерції тіл.** Теорія коливань фізичного маятника набуває широкого застосування в техніці для експериментального визначення моментів інерції тіл складної геометричної форми, для яких визначити моменти інерції розрахунком складно. Таких методів багато, ми ж

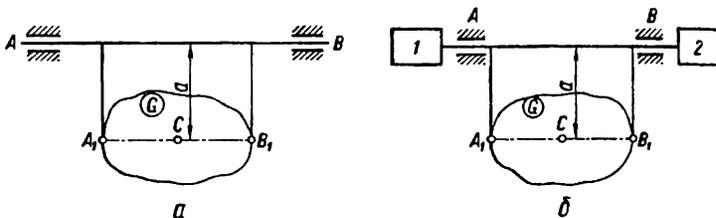


Рис. 21.4

обмежимося розглядом лише чотирьох із них: методом послідовного вимірювання періоду коливань маятника навколо двох паралельних осей, що проходять через точки  $A$  і  $B$  на прямій  $AB$ , яка проходить через центр мас (рис. 21.3, б), методом крутильних коливань (рис. 21.3, в), методом маятникових коливань (рис. 21.4) і методом падаючого тягарця (рис. 21.5).

**1. Метод послідовного вимірювання періоду коливань навколо двох паралельних осей.** За першим методом точку підвішування поміщають послідовно в точки  $A$  та  $B$  і

вимірюють період коливань маятника  $T_A$ ,  $T_B$  і відстань  $d$  між точками  $A$  й  $B$ :  $d = a + b$  (рис. 21.3, б). Отже, вимірних величин три, а невідомих – чотири:  $a$ ,  $b$ ,  $I_A$ ,  $I_B$ . Четверту умову отримують, користуючись формулою (21.32) та обчислюючи  $I_A - I_B$ . Потім, застосовуючи формулу (21.30), вписують систему чотирьох рівнянь з чотирма невідомими  $a$ ,  $b$ ,  $I_A$ ,  $I_B$ :

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \frac{I_A}{mg} &= T_A^2 a, & 4\pi^2 \frac{I_B}{mg} &= T_B^2 b, \\ d &= a + b, \\ I_A - I_B &= m(a^2 - b^2) = md(a - b). \end{aligned} \quad (21.37)$$

Розв'язання системи алгебричних рівнянь (21.37) дає кінцевий результат:

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{md^2(c_B - 1)}{c_A c_B - 1}, \\ I_B &= \frac{md^2(c_A - 1)}{c_A c_B - 1}, \end{aligned} \quad (21.38)$$

де через  $c_A$  і  $c_B$  позначені такі вирази:

$$c_A = \frac{8\pi^2 d}{gT_A^2} - 1, \quad c_B = \frac{8\pi^2 d}{gT_B^2} - 1. \quad (21.39)$$

З останніх формул видно, що коли заміряти відстань  $d$ , періоди коливань  $T_A$ ,  $T_B$  цього фізичного маятника в точках  $A$  та  $B$  і масу

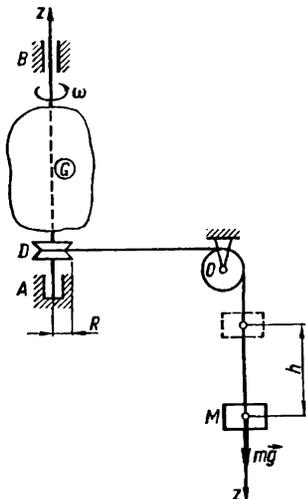


Рис. 21.5

тіла, то можна визначити експериментально  $I_A$  та  $I_B$ . Потім із першого рівняння (21.37) визначаємо  $a$  і за формулою

$$I_C = I_A - ma^2 \quad (21.40)$$

знаходимо осьовий момент інерції тіла відносно центра інерції  $I_C$ . Зазначимо, що незручність цього методу полягає в досить громіздких обчисленнях, але його перевагою є те, що він дає змогу одночасно знайти і положення центра мас.

**2. Метод крутильних коливань тіла.** За методом крутильних коливань тіло підвішують у точці  $O$  на струну  $ON$  (рис. 21.3, в) так, щоб вона збігалася з прямою, яка проходить через центр мас тіла. Закрутивши струну на малий кут  $\theta$ , вимірюють період крутильних коливань тіла на струні. Потім порівнюють цей період з періодом коливань іншого тіла, момент інерції якого відомий. Тоді розрахункові формули отримують так. Оскільки при малому куті закручування струни момент пружних сил реакції струни пропорційний куту закручування  $\theta$ , то рівняння коливань тіла мають вигляд

$$I\ddot{\theta} = -c_{кр}\theta, \quad (21.41)$$

де  $c_{кр}$  – постійний коефіцієнт, що називається *жорсткістю струни на кручення*.

Порівнюючи (21.41) з (21.28) і (21.30), отримуємо формулу для періоду крутильних коливань  $T_{кр}$ :

$$T_{кр} = 2\pi\sqrt{I/c_{кр}}. \quad (21.42)$$

Для еталона маємо

$$T_{ет} = 2\pi\sqrt{I_{ет}/c_{кр}}. \quad (21.43)$$

Із виразів (21.42) і (21.43) знайдемо розрахункову формулу

$$I = I_{ет} \left( \frac{T_{кр}}{T_{ет}} \right)^2. \quad (21.44)$$

### 3. Метод маятникових коливань тіла.

Нехай тіло вагою  $P = mg$  підвішено так, що може обертатися відносно горизонтальної осі  $AB$ , яка паралельна центральній осі тіла  $A_1B_1$  і віддалена від неї на відстань  $a$  (рис. 21.4, а).

Якщо невідомий момент інерції тіла відносно осі  $A_1B_1$  дорівнює  $I_{C_1}$ , то його момент інерції відносно осі  $AB$  буде

$$I_{AB} = I_{C_1} + ma^2, \quad (21.45)$$

тоді період коливань  $T$  тіла відносно осі  $AB$ , який можна заміряти, визначатиметься за формулою

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{AB}}{Pa}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{C_1} + ma^2}{Pa}}. \quad (21.46)$$

Із співвідношення (21.46) знайдемо

$$I_{C_1} = Pa \left( \frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{a}{g} \right). \quad (21.47)$$

Якщо відома відстань  $a$ , то, замірявши період коливань  $T$ , за формулою (21.47) визначається  $I_{C_1}$ .

У тих випадках, коли виникають труднощі з визначенням відстані  $a$  між осями  $AB$  і  $A_1B_1$ , то в цьому методі застосовують еталонні тіла, наприклад, циліндри з відомим осьовим моментом інерції  $I_{ц}$  (рис. 21.4, б).

Якщо циліндри закріплені на осі обертання  $AB$  (наприклад, за допомогою нарізного з'єднання), то період коливань такої системи трьох тіл (тіла  $G$  і циліндрів  $I$  і  $2$ ), які вважатимемо однаковими (можна вико-

ристовувати і один циліндр, але тоді система буде несиметричною), дорівнюватиме

$$T_{II} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{Cz} + 2I_{II}}{mga}}, \quad (21.48)$$

а період коливань тіла (який теж можна виміряти) без циліндрів

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{Cz}}{mga}}. \quad (21.49)$$

Із (21.48) і (21.49) отримуємо

$$I_{Cz} = \frac{2I_{II}T^2}{T_u^2 - T^2}. \quad (21.50)$$

Після того, як знайдено  $I_{Cz}$ , можна визначити і відстань  $a$ .

**4. Метод падаючого тягарця.** Тіло  $G$ , момент інерції  $I_z$  якого потрібно визначити, закріплюють на осі  $AB$ . На цій самій осі розташований шків  $D$  радіусом  $R$  і масою  $m$ , на який намотана нитка, перекинута через блок  $O$ . До кінця нитки підвішують тягарець масою  $M$ .

Позначимо через  $\varphi$  кут повороту тіла  $G$ , а через  $z$  – переміщення тягарця від початкового положення.

Скористасьмою теоремою про зміну кінетичної енергії системи, вважаючи, що в початковий момент часу система була нерухомою, тобто при  $t=0$   $\varphi=0$ ,  $z=0$ , і враховуючи, що робота внутрішніх сил дорівнює нулю, оскільки система незмінна. Тоді

$$d(T_G + T_M + T_D) = d'A^e, \quad (21.51)$$

де

$$\begin{aligned} T_G &= \frac{1}{2} I_z \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \\ T_D &= \frac{1}{2} m R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \\ T_M &= \frac{1}{2} M \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (21.52)$$

– відповідно кінетична енергія тіла  $G$ , шківів  $D$  і тягарця  $M$ . Робота зовнішніх сил, яка виконується тягарцем, дорівнює

$$A^e = Mgz. \quad (21.53)$$

Відповідно елементарна робота

$$d'A^e = Mgdz. \quad (21.54)$$

Оскільки

$$\frac{dz}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}, \quad (21.55)$$

то виразу (21.51), після того як поділити його ліву і праву частину на  $dt$  (тобто перейти до потужності), можна надати вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \left( \frac{I_z}{R^2} + \frac{m}{2} + M \right) \right] &= \\ &= Mg \frac{dz}{dt} \end{aligned} \quad (21.56)$$

або

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} \left( \frac{I_z}{R^2} + \frac{m}{2} + M \right) &= \\ &= Mg \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \quad (21.57)$$

Скоротивши (21.57) на  $\frac{dz}{dt}$ , отримаємо при заданих початкових умовах

$$z = \frac{Mgt^2}{2 \left( \frac{I_z}{R^2} + \frac{m}{2} + M \right)}. \quad (21.58)$$

Якщо за фіксований час  $t=t$ , тягарець переміщається на висоту  $h$ , яку теж можна виміряти, то із (21.58) знайдемо

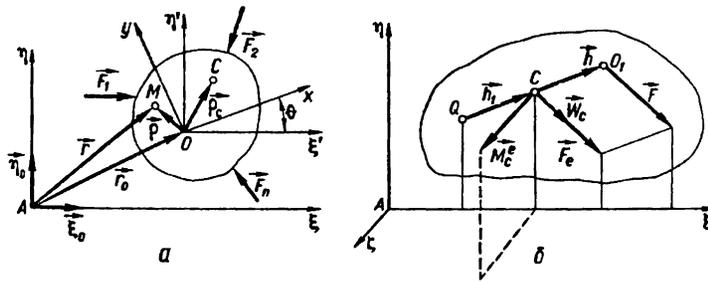


Рис. 21.6

$$h = \frac{Mgt_1^2}{2\left(\frac{I_x}{R^2} + M + \frac{m}{2}\right)}. \quad (21.59)$$

Звідси

$$I_x = MR^2 \left[ \frac{g_1^2}{2h} - \left(1 + \frac{m}{2M}\right) \right]. \quad (21.60)$$

### § 21.6. Плоскопаралельний рух твердого тіла

У кінематиці було показано, що плоскопаралельний (плоский) рух твердого тіла характеризується рухом плоскої фігури в її площині (див. § 11.1). Було також показано, що цей рух плоскої фігури можна розкласти на поступальний рух разом з полюсом і на миттєвий обертальний рух навколо полюса. Поступальний рух разом з полюсом визначається двома координатами полюса, а обертальний – кутом  $\theta$  повороту навколо полюса (рис. 21.6, а). У деяких задачах динаміки за полюс раціональніше вибрати центр мас  $C$  тіла. Отже, плоскопаралельний рух характеризується трьома незалежними між собою параметрами.

Рівняння некерованого плоского руху тіла легко отримати з рівнянь (21.7), поклавши в них

$$\begin{aligned} \omega_x = \omega_y = 0, \quad v_{Oz} = 0, \quad Q_z = 0, \\ \vec{F}^r = 0, \quad \vec{M}^r = 0, \quad \vec{F}^T = 0 \quad (21.61) \\ (\omega_z \neq 0, \quad v_{Ox} \neq 0, \quad v_{Oy} \neq 0), \end{aligned}$$

тоді

$$\begin{aligned} m\dot{w}_{Cx} &= \frac{dQ_x}{dt} - \omega_z Q_y = F_x^e, \\ m\dot{w}_{Cy} &= \frac{dQ_y}{dt} + \omega_z Q_x = F_y^e, \\ F_z^e &= 0, \\ -I_{xz}\dot{\omega}_z + I_{yz}\omega_z^2 &= M_{Ox}^e, \\ -I_{yz}\dot{\omega}_z - I_{xz}\omega_z^2 &= M_{Oy}^e, \\ \frac{dK_{Oz}^{\omega}}{dt} &= M_{Oz}^e. \end{aligned} \quad (21.62)$$

Тут (див. (21.6))

$$\begin{aligned} Q_x &= mv_{Ox} - m\omega_z y_C, \\ Q_y &= mv_{Oy} + m\omega_z x_C, \\ K_{Oz}^{\omega} &= I_z \omega_z, \end{aligned}$$

$F_x^e, F_y^e, F_z^e$  і  $M_{Ox}^e, M_{Oy}^e, M_{Oz}^e$  – відповідні проекції на осі  $Ox, Oy, Oz$  головного вектора і головного моменту зовнішніх сил, що діють на тіло.

Оскільки в разі плоского руху тіло має три незалежних параметри, то з шести рівнянь (21.62) три, а саме:

$$\begin{aligned}
 F_z^e &= 0, \\
 -I_{xz}\dot{\omega}_z + I_{yz}\omega_z^2 &= M_{Ox}^e, \quad (21.63) \\
 -I_{yz}\dot{\omega}_z - I_{xz}\omega_z^2 &= M_{Oy}^e
 \end{aligned}$$

виражають співвідношення, яким мають задовольняти зовнішні сили, щоб плоский рух був динамічно можливий. При цьому накладаються обмеження і на початкові умови. Якщо  $t = 0$ , то

$$\omega_x(0) = \omega_y(0) = 0, \quad v_{Ox}(0) = 0. \quad (21.64)$$

Співвідношення (21.63) свідчать про те, що при  $I_{xz} \neq 0$ ,  $I_{yz} \neq 0$  проєкції головного моменту зовнішніх сил  $M_{Ox}^e$ ,  $M_{Oy}^e$  залежать від кінематичних параметрів руху тіла. Це означає, що для здійснення у загальному випадку плоского руху тіло має бути або керованим, тобто моменти  $M_{Ox}^e$  і  $M_{Oy}^e$  мають формуватися штучно вимірюванням  $\omega_z$  і  $\frac{d\omega_z}{dt}$  та перетворенням їх, або на нього треба накласти відповідні в'язі, але тоді це буде вже не вільний рух тіла.

Звідси випливає, що для реалізації вільного плоского руху тіла треба на зовнішні сили накласти такі обмеження:

$$F_z^e = 0, \quad M_{Ox}^e = 0, \quad M_{Oy}^e = 0, \quad (21.65)$$

внаслідок чого одержимо, що головний вектор зовнішніх сил у цьому випадку лежить у площині руху  $O\xi'\eta'$ ; самі сили при цьому можуть розміщуватись у площинах, що паралельні площині  $O\xi'\eta'$ , а головний момент їх перпендикулярний до неї.

Оскільки при вільному плоскому русі тіла  $M_{Ox}^e = 0$ ,  $M_{Oy}^e = 0$ , то із співвідношень (21.63) визначимо тепер обмеження, які

потрібно накласти на моменти інерції  $I_{xz}$ ,  $I_{yz}$  тіла, тобто на розподіл його мас. Отже, маємо

$$\begin{aligned}
 -I_{xz}\epsilon + I_{yz}\omega^2 &= 0, \\
 I_{xz}\omega^2 + I_{yz}\epsilon &= 0. \quad (21.66)
 \end{aligned}$$

Оскільки, згідно з § 21.4,  $\epsilon^2 + \omega^4 \neq 0$ , то останні рівняння можливі лише тоді, коли відцентрові моменти інерції  $I_{xz}$ ,  $I_{yz}$  тіла дорівнюють нулю, тобто коли вісь  $Oz$  буде головною віссю інерції.

Таким чином, для здійснення вільного плоского руху тіла потрібно, щоб маса тіла була розподілена симетрично відносно площини руху  $O\xi'\eta'$ , яка проходить через центр мас  $C$  тіла (тоді  $I_{xz} = I_{yz} = 0$ ), початкові швидкості всіх точок тіла були розміщені в площинах, що паралельні площині руху, головний вектор зовнішніх сил лежав у цій площині, а головний момент був перпендикулярний до неї.

Надалі будемо вважати, що всі ці умови вільного плоского руху тіла виконані.

**Зведення до рівнодійної сил, що діють на тверде тіло, при вільному некерованому плоскому русі.** Оскільки в цьому випадку головний момент зовнішніх сил перпендикулярний до площини  $O\xi'\eta'$ , в якій задано сили, то він перпендикулярний і до їх головного вектора.

Як було встановлено в статичі (див. § 5.4), така система сил зводиться до рівнодійної, яка за величиною і напрямком дорівнює головному вектору зовнішніх сил:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e = \vec{F}^e, \quad \text{однак прикладена не в}$$

центрі мас, а в деякій точці  $O_1$ , місце якої нам треба визначити (рис. 21.6, б).

Перепишемо рівняння цього плоского руху тіла для випадку вибору полюса в центрі мас. Згідно з (21.2), матимемо

$$m\bar{\omega}_C = \bar{F}^e, \quad \frac{d\bar{K}_C}{dt} = \frac{d\bar{K}_C}{dt} = I_C \bar{k} \frac{d\omega_z}{dt} = \bar{M}_C^e, \quad (21.67)$$

де  $\bar{k}$  – орт осі  $Oz$ .

Оскільки в цьому випадку вектори  $\bar{\omega}$  і  $\bar{K}_C$  колінеарні, то  $\bar{\omega} \times \bar{K}_C = 0$ . Через те що сила  $\bar{F}$  (рис. 21.6, б) є ковзним вектором, то точку  $O_1$  можна вибрати у будь-якому місці на лінії її дії, яка лежить у площині  $O\xi'\eta'$ .

Виберемо точку  $O_1$  як точку перетину лінії дії рівнодійної сили  $\bar{F}$  і прямої  $QC$ , що проходить через миттєвий центр прискорень  $Q$ , який можемо визначити згідно з § 11.5. Позначимо радіуси-вектори  $\bar{QC} = \bar{h}_1$ , а  $\bar{CO}_1 = \bar{h}$ . Враховуючи, що  $\bar{k} \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\epsilon}$ , а  $\bar{M}_C^e = \bar{h} \times \bar{F}$ ,  $\bar{F} = \bar{F}^e$ , із системи рівнянь (21.67) дістанемо

$$I_C \bar{\epsilon} = \bar{M}_C^e = \bar{h} \times \bar{F} = \bar{h} \times m\bar{\omega}_C.$$

Момент інерції  $I_C$  виразимо через радіус інерції  $\rho_{C \text{ ин}}$  ( $I_C = m\rho_{C \text{ ин}}^2$ ). Тоді з останньої рівності визначимо

$$\rho_{C \text{ ин}}^2 \bar{\epsilon} = \bar{h} \times \bar{\omega}_C. \quad (21.68)$$

Для обчислення прискорення центра мас візьмемо за полюс миттєвий центр прискорень  $Q$ . Оскільки за визначенням миттєвого центра прискорень  $\bar{\omega}_Q = 0$ , а вектори  $\bar{\omega}$  і  $\bar{\epsilon}$  перпендикулярні до площини  $O\xi'\eta'$ , то доосьове прискорення буде  $\bar{\omega}_{QC}^{\text{oc}} = -\bar{h}_1 \omega^2$ , а

обертальне навколо полюса  $Q$  відповідно –  $\bar{\omega}_{QC}^{\text{ob}} = \bar{\epsilon} \times \bar{h}_1$ , тоді

$$\bar{\omega}_C = \bar{\epsilon} \times \bar{h}_1 - \bar{h}_1 \omega^2. \quad (21.69)$$

Підставивши (21.69) у (21.68) і врахувавши, що вектори  $\bar{h}$  та  $\bar{h}_1$  (рис. 21.6, б) колінеарні ( $\bar{h}_1 \times \bar{h} = 0$ ), одержимо

$$\begin{aligned} \rho_{C \text{ ин}}^2 \bar{\epsilon} &= \bar{h} \times (\bar{\epsilon} \times \bar{h}_1 - \bar{h}_1 \omega^2) = \\ &= \bar{h} \times (\bar{\epsilon} \times \bar{h}_1). \end{aligned} \quad (21.70)$$

Користуючись правилом розкриття подвійного векторного добутку  $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b})$ , і враховуючи, що  $\bar{\epsilon}$  перпендикулярне до  $\bar{h}_1$  і  $\bar{h}$  ( $\bar{\epsilon} \cdot \bar{h} = 0$ ), дістанемо

$$\begin{aligned} \rho_{C \text{ ин}}^2 \bar{\epsilon} &= \bar{\epsilon}(\bar{h} \cdot \bar{h}_1) - \bar{h}_1(\bar{h} \cdot \bar{\epsilon}) = \\ &= \bar{\epsilon}(\bar{h} \cdot \bar{h}_1). \end{aligned} \quad (21.71)$$

Звідси, оскільки  $\bar{h}$  і  $\bar{h}_1$  напрямлені по одній прямій в один бік (рис. 21.6, б),

$$hh_1 = \rho_{C \text{ ин}}^2, \quad h = \rho_{C \text{ ин}}^2 / h_1. \quad (21.72)$$

Отже, місце точки  $O_1$  прикладення рівнодійної сили при плоскому русі знайдено. Останній вираз збігається з відповідним виразом, виведеним у § 21.5 для фізичного маятника. Це означає, що миттєвий центр прискорень  $Q$  і точка  $O_1$ , так само як і точка підвішування та центр коливань фізичного маятника, мають властивість взаємності; більше того, якщо тіло підвісити в точці  $Q$ , то точка  $O_1$  буде центром коливання і навпаки. Якщо через миттєвий центр прискорень  $Q$  провести вісь обертання тіла перпендикулярно до площини руху, то додаткової динамічної реакції в опорах

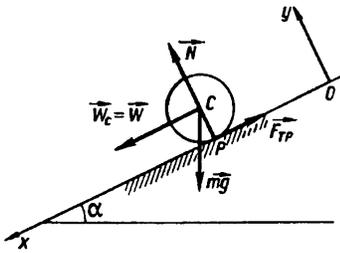


Рис. 21.7

цієї осі не буде, тому що абсолютні прискорення точки  $Q$ , а отже, і сили інерції дорівнюватимуть нулю.

Отримані в § 21.4 умови, за яких немає динамічних реакцій в опорах нерухомої осі обертання тіла, – це умови реалізації вільного плоского руху тіла. Оскільки вісь нерухома, то точки  $Q$ ,  $C$  і  $O_1$  (у цьому окремому випадку плоского руху) сумістяться.

**Приклад 2.** Однорідний циліндр з горизонтальною віссю скочується під дією власної ваги по похилій шорсткій площині. Коефіцієнт тертя ковзання під час рухання  $f$  (рис. 21.7). Визначити кут нахилу площини до горизонту ( $\alpha$ ), при якому циліндр котитиметься без ковзання, і прискорення осі циліндра.

**Розв'язання.** Проаналізуємо сили. На циліндр діє сила ваги  $m\vec{g}$ , нормальна складова реакції площини  $\vec{N}$  і сила тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . Осі нерухомої системи координат виберемо так, як це показано на рис. 21.7.

На основі рівнянь (21.62) дістанемо

$$\begin{aligned} I_C \ddot{\varphi} &= F_{\text{тр}} r, & m \ddot{x}_C &= mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \\ m \ddot{y}_C &= N - mg \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

У ці рівняння входять чотири невідомі:  $x_C$ ,  $\varphi$ ,  $N$  і  $F_{\text{тр}}$ . Щоб задача була визначеною, складемо ще одне рівняння. Оскільки циліндр котиться без ковзання, то  $P$  – миттєвий центр швидкостей, тоді

$$\omega = v_C / r,$$

$$\varepsilon = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dv_C}{dt} = \frac{w_C}{r} = \frac{1}{r} \frac{d^2 x_C}{dt^2}. \quad (2)$$

Позначимо  $\frac{d^2 x_C}{dt^2} = w_C = w$ . Тоді з урахуванням (2) і рівняння (1)

$$F_{\text{тр}} = I_C \frac{w}{r^2}. \quad (3)$$

Підставивши (3) у рівняння (1), дістанемо

$$mw = mg \sin \alpha - I_C \frac{w}{r^2},$$

звідки

$$w = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I_C}{r^2}}. \quad (4)$$

Для того щоб рух відбувався без ковзання, потрібно, щоб сила тертя  $F_{\text{тр}}$  при коченні, яка визначена за рівнянням (3), була меншою, ніж сила тертя під час рухання, що дорівнює  $fN$ , тобто  $F_{\text{тр}} \leq fmg \cos \alpha$  або з урахуванням (3) і (4)

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f \frac{mr^2 + I_C}{I_C}. \quad (5)$$

Оскільки для циліндра  $I_C = mr^2/2$ , то із (4) і (5) дістанемо

$$w = \frac{2}{3} g \sin \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha \leq 3f.$$

## § 21.7. Рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої точки

Динаміка обертального руху твердого тіла навколо нерухомої точки протягом століть привертала увагу вчених у галузі механіки і математики. Л. Ейлер у 1750 р. вперше вивів диференціальні рівняння руху тіла з нерухомою точкою для випадку, коли центр мас збігається з цією точкою. Ж. Лагранж у 1788 р. дослідив другий випадок руху важкого твердого тіла, коли центр мас і нерухома точка розміщені на осі симетрії тіла.

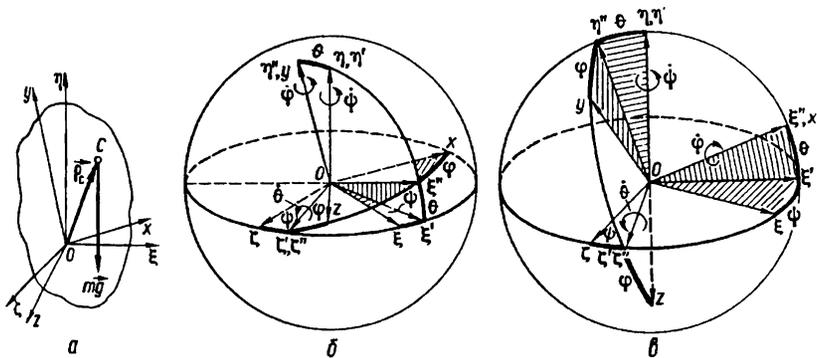


Рис. 21.8

У 1888 р. С. В. Ковалевська одержала нові важливі результати і була відзначена премією Паризької академії наук.

Дослідження динаміки твердого тіла з нерухомою точкою проводили видатні вчені М. Є. Жуковський, С. О. Чаплигін, Д. К. Бобильов, В. А. Стеклов, Г. Г. Аппельрот, Г. В. Колосов, О. М. Ляпунов, П. В. Воронєць та ін.

Розглянемо випадок, коли тверде тіло (див. рис. 21.1) закріплене в одній його точці  $O$ , яка нерухома. Якщо не враховувати реакції в'язей, то рух такого тіла буде описуватися тільки одним векторним рівнянням моментів (21.1). Якщо ж треба визначити реакцію  $\vec{R}$  нерухомої точки тіла, то слід виписати обидва рівняння (21.1) або (21.2), форми запису яких цілком однакові в розгляданому випадку, оскільки  $\vec{w}_O = 0$ :

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{Q} = m\vec{w}_C = \vec{F} + \vec{R}, \quad (21.73)$$

$$\frac{d\vec{K}_O^\omega}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_O^\omega = \vec{M}_O,$$

де  $\vec{K}_O^\omega$  – кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої точки;  $\vec{M}_O$  – головний момент активних сил;  $m$  – маса тіла;  $\vec{w}_C$  –

прискорення центра мас;  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  – головний

вектор активних сил;  $\vec{R}$  – реакція нерухомої точки.

Відмітимо, що момент реакції відносно нерухомої точки  $O$  дорівнює нулю, тому що лінія її дії проходить через цю точку.

Запишемо в розгорнутому вигляді рівняння обертального руху твердого тіла з нерухомою точкою  $O$  ( $\vec{v}_O = 0, \vec{w}_O = 0$ ), центр мас якого зміщений відносно неї (рис. 21.8, а).

Спроектувавши рівність (21.73) на осі системи координат  $Oxyz$ , що незмінно зв'язана з тілом, з урахуванням виразів (21.6) і правих частин (21.7), в яких вписано момент сили ваги  $m\vec{g}$  відносно точки опори, дістанемо

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= \\ = M_x + M_x^u + m(y_C g_z - z_C g_y), \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= \\ = M_y + M_y^u + m(z_C g_x - x_C g_z), \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= \\ = M_z + M_z^u + m(x_C g_y - y_C g_x), \end{aligned} \quad (21.74)$$

де  $M_x, M_y, M_z$  – проекції на відповідні осі моментів активних сил;  $g_x, g_y, g_z$  – проекції прискорення вільного падіння на осі  $Ox, Oy, Oz$ ;  $M_x^u, M_y^u, M_z^u$  – моменти сил інерції, що зумовлені відцентровими моментами інерції. Наприклад,

$$\begin{aligned} M_x^u &= I_{xy}\dot{\omega}_y + I_{xz}\dot{\omega}_z - \\ &- I_{yx}\omega_x\omega_z + I_{zx}\omega_y\omega_x + \\ &+ I_{zy}(\omega_y^2 - \omega_z^2). \end{aligned} \quad (21.75)$$

Рівняння (21.74) мають бути доповнені кінематичними співвідношеннями, які в разі задання кутів Ейлера (рис. 21.8, б) мають вигляд

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (21.76)$$

Кінематичні співвідношення (21.3) у разі задання положення тіла за допомогою кутів Крілова (рис. 21.8, в) наведені в § 21.1. Рівняння (21.74) і (21.76) називають відповідно динамічними і кінематичними рівняннями Ейлера.

Як уже зазначалося, зінтегрувати рівняння (21.74) дуже складно. Тому розглянемо найпростіші випадки, серед яких є так званий випадок Ейлера, коли центр мас збігається з точкою опори і не має моментів зовнішніх сил.

### § 21.8. Рух за інерцією твердого тіла з однією нерухомою точкою (випадок Ейлера)

Леонард Ейлер розглядав рух твердого тіла, що перебуває під дією сили ваги і рухається навколо закріпленої точки, яка збігається з центром мас. Оскільки при

цьому головний момент зовнішніх сил дорівнює нулю, то рух тіла у цьому випадку називають *рухом за інерцією*.

Розглянемо перші інтеграли диференціальних рівнянь руху, що відповідають випадку Ейлера, коли осі  $Oxyz$  є головними центральними осями інерції.

Рівняння (21.74) у цьому випадку набудуть вигляду

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= 0, \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= 0, \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= 0. \end{aligned} \quad (21.77)$$

Помноживши перше рівняння на  $I_x \omega_x$ , друге – на  $I_y \omega_y$ , третє – на  $I_z \omega_z$  і додавши потім ці рівняння, одержимо

$$I_x^2 \omega_x \dot{\omega}_x + I_y^2 \omega_y \dot{\omega}_y + I_z^2 \omega_z \dot{\omega}_z = 0 \quad (21.78)$$

або

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2) = 0.$$

Звідси після інтегрування дістанемо

$$\begin{aligned} I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2 &= \\ &= K_O^2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (21.79)$$

Це рівняння є *першим інтегралом* рівняння руху (21.77), згідно з яким *модуль кінетичного моменту не змінюється під час руху*.

Очевидно, що цей інтеграл можна дістати, зокрема, безпосередньо з теореми про зміння кінетичного моменту. Оскільки  $\vec{M}_O^e = 0$ , то

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = 0, \quad \vec{K}_O = \text{const} \quad (21.80)$$

і, отже, *кінетичний момент твердого тіла зберігає свою величину і напрямком незмін-*

ними в інерціальному просторі, якщо головний момент зовнішніх сил відносно нерухокої точки дорівнює нулю. Помножуючи рівняння (21.77) відповідно на  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  і виконуючи аналогічні перетворення, дістанемо ще один перший інтеграл

$$\begin{aligned} I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 &= \\ &= 2T = \text{const}, \end{aligned} \quad (21.81)$$

який показує, що під час руху тіла кінетична енергія його не змінюється.

Цей інтеграл можна було б отримати із закону збереження енергії, оскільки робота всіх сил у цьому разі дорівнює нулю. З інтегралів (21.80) і (21.81), користуючись співвідношенням (див. § 17.2) між кінетичною енергією і кінетичним моментом, одержимо

$$2T = \vec{K}_O \cdot \vec{\omega} = \text{const}. \quad (21.82)$$

Оскільки кінетичний момент постійний, то з останньої рівності випливає, що проекція вектора  $\vec{\omega}$  кутової швидкості обертання тіла на незмінний напрямок кінетичного моменту є величиною сталою.

Визначення кутів Ейлера навіть у цьому випадку є складним завданням. Тому ще більше спростимо його, вважаючи тверде тіло тілом обертання з віссю симетрії  $Oy$  ( $I_x = I_z$ ). Тоді друге рівняння системи (21.77) набуде вигляду

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} = 0. \quad (21.83)$$

Звідси  $K_y = I_y \omega_y = \text{const}$ ,  $\omega_y = \omega_y(0) = \text{const}$ .

Якщо при цьому в початковий момент часу кінетичний момент спрямувати вздовж осі  $Ox$ , то він зберігатиме цей напрямок протягом усього руху. Із рис. 21.8, б, використовуючи основну формулу сферичної триго-

нометрії (див. § 10.2), з урахуванням (21.83) отримасмо

$$\begin{aligned} K_x &= K_O \sin \theta \cos \varphi, \\ K_y &= K_O \cos \theta = \text{const}, \quad (21.84) \\ K_z &= K_O \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що оскільки  $K_O = \text{const}$ ,  $K_y = \text{const}$ , то і  $\theta = \theta_0 = \text{const}$ . З останніх рівностей можна також визначити

$$K_x^2 + K_z^2 = K_O^2 \sin^2 \theta_0 = \text{const}. \quad (21.85)$$

Крім того, враховуючи кінематичні співвідношення (21.76), оскільки  $\dot{\theta} = 0$ , маємо

$$\begin{aligned} K_x^2 + K_z^2 &= I_x^2 \omega_x^2 + I_z^2 \omega_z^2 = \\ &= I_x^2 (\omega_x^2 + \omega_z^2) = I_x^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta_0 = \\ &= K_O^2 \sin^2 \theta_0. \end{aligned} \quad (21.86)$$

Із цього рівняння знайдемо

$$\dot{\psi} = K_O / I_x = n = \text{const}, \quad (21.87)$$

отже,

$$\psi = nt + \psi_0, \quad (21.88)$$

де  $\psi_0 = \psi(t_0)$  – початкове значення кута  $\psi$ .

Із другого рівняння (21.76) з урахуванням  $\psi = nt + \psi_0$  визначимо

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega_{y0} - \dot{\psi} \cos \theta_0 = \\ &= \omega_{y0} - \frac{K_O}{I_x} \cos \theta_0 = n_1, \end{aligned} \quad (21.89)$$

тоді

$$\varphi = n_1 t + \varphi_0, \quad (21.90)$$

де  $\varphi_0 = \varphi(t_0)$  – початкове значення кута  $\varphi$ .

Отже, всі три кути Ейлера для симетричного тіла  $I_x = I_z \neq I_y$  визначені:

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0, \quad \varphi = n_1 t + \varphi_0, \\ \psi &= n t + \psi_0.\end{aligned}\quad (21.91)$$

Розв'язок (21.91) є загальним розв'язком рівнянь (21.77) для нашого окремого випадку  $I_x = I_z \neq I_y$ . Рух, що описується рівняннями (21.91), називають *регулярною прецесією*. При цьому русі *вісь симетрії тіла  $Oy$  описує конус із кутом розхилу  $2\theta_0$ , рівномірно обертаючись із кутовою швидкістю  $\dot{\psi} = n$  навколо вектора кінетичного моменту  $\vec{K}_O$ . Тіло рівномірно обертається навколо своєї осі симетрії  $Oy$  з кутовою швидкістю  $\dot{\varphi} = n_1$  (рис. 21.9).*

На закінчення зазначимо, що другим практично важливим випадком, для якого були зінтегровані рівняння Ейлера, є випадок Лагранжа, якому відповідають такі умови: 1) еліпсоїд інерції для нерухомої точки тіла є еліпсоїдом обертання ( $I_x = I_z$ ); 2) центр мас тіла лежить на осі  $Oy$ , яка є віссю симетрії еліпсоїда інерції.

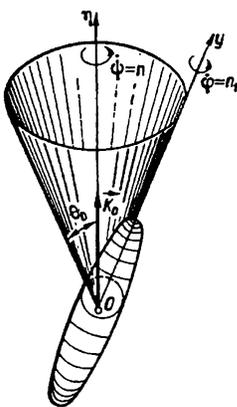


Рис. 21.9

## § 21.9. Стійкість обертання твердого тіла навколо головних осей інерції

Нехай тверде тіло, що має нерухому точку, обертається за інерцією зі сталою кутовою швидкістю  $\omega = \text{const}$  навколо осі, яка збігається з однією з головних осей інерції, наприклад з віссю  $Oy$ . У цьому разі  $\omega_x = 0$ ,  $\omega_z = 0$ ,  $\omega_y = \omega = \text{const}$  (див. рис. 21.8, а). Ці значення проєкцій кутових швидкостей можна розглядати як розв'язок динамічних рівнянь Ейлера. Потрібно з'ясувати, чи буде це обертання твердого тіла стійким<sup>1</sup>, тобто чи суттєво воно зміниться, якщо ледь змінити кутову швидкість  $\bar{\omega}$ , наприклад, завдаючи легкі удари по тілу, чи це обертання в основному збержеться, спрочинивши тільки незначні коливання осі обертання  $Oy$  навколо її початкового положення.

У загальному випадку стійкість руху визначають так: незбурений рух системи, що визначається її розв'язком, називають стійким по відношенню до його змінних, якщо при малих збуреннях початкових умов – відхиленні і швидкостей – збурений рух системи буде мало відрізнятися від незбуреного або відхилення лежатимуть у заданих межах.

Отже, дослідимо змінення кутової швидкості  $\bar{\omega}$ .

Нехай вектор цієї швидкості  $\bar{\omega}$  дістав мале збурення  $\Delta\bar{\omega}$ , при якому проєкції на осі  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  будуть

$$\begin{aligned}\omega_x &= 0 + \Delta\omega_x, \\ \omega_y &= \omega + \Delta\omega_y, \\ \omega_z &= 0 + \Delta\omega_z,\end{aligned}\quad (21.92)$$

де  $\Delta\omega_x$ ,  $\Delta\omega_y$ ,  $\Delta\omega_z$  – малі порівняно з  $\omega$  прирости кутових швидкостей.

<sup>1</sup> Строго і повне визначення стійкості дано в частині IV

Тоді динамічні рівняння Ейлера (21.77) після підставлення в них зазначених проєкцій кутових швидкостей, з урахуванням того, що  $\dot{\omega} = 0$ , набудуть вигляду

$$\begin{aligned} I_x \frac{d\Delta\omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \times \\ \times (\omega + \Delta\omega_y) \Delta\omega_z = 0, \\ I_y \frac{d\Delta\omega_y}{dt} + \\ + (I_x - I_z) \Delta\omega_x \Delta\omega_z = 0, \\ I_z \frac{d\Delta\omega_z}{dt} + (I_y - I_x) \times \\ \times (\omega + \Delta\omega_y) \Delta\omega_x = 0. \end{aligned} \quad (21.93)$$

Нехтуючи добутками  $\Delta\omega_x \Delta\omega_y$ ,  $\Delta\omega_y \Delta\omega_z$ ,  $\Delta\omega_x \Delta\omega_z$  як членами другого порядку мализни, дістанемо

$$\begin{aligned} I_x \frac{d\Delta\omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \omega \Delta\omega_z = 0, \\ I_y \frac{d\Delta\omega_y}{dt} = 0, \\ I_z \frac{d\Delta\omega_z}{dt} + (I_y - I_x) \omega \Delta\omega_x = 0. \end{aligned} \quad (21.94)$$

Із другого рівняння цієї системи визначимо  $\frac{d\Delta\omega_y}{dt} = 0$  ( $\Delta\omega_y = \text{const}$ ), а перше і третє рівняння, ввівши оператор диференціювання  $p = \frac{d}{dt}$ , запишемо у матричній формі

$$\begin{bmatrix} I_x p & (I_z - I_y) \omega \\ (I_y - I_x) \omega & I_z p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\omega_x \\ \Delta\omega_z \end{bmatrix} = 0. \quad (21.95)$$

Знайдемо характеристичне рівняння цієї системи, обчисливши визначник матриці коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} I_x I_z p^2 - (I_z - I_y) \times \\ \times (I_y - I_x) \omega^2 = 0. \end{aligned} \quad (21.96)$$

Залежно від вигляду коренів характеристичного рівняння (21.96) різною буде і поведінка пристроїв кутових швидкостей  $\Delta\omega_x$ ,  $\Delta\omega_z$ :

якщо добуток  $(I_z - I_y)(I_y - I_x) < 0$ , то  $p_{1,2} = \pm in$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) і  $\Delta\omega_x = \omega_x$ ,  $\Delta\omega_z = \omega_z$  виражаються через тригонометричні функції синуса та косинуса і під час руху залишаються малими через мализну їх початкових значень;

якщо  $(I_z - I_y)(I_y - I_x) > 0$ , то  $\Delta\omega_x = \omega_x$ ,  $\Delta\omega_z = \omega_z$  виражаються через показникові функції, які з часом можуть набувати яких завгодно великих значень, оскільки  $p_{1,2} = \pm n$ .

Отже, умова стійкості обертання тіла за інерцією набуває вигляду

$$(I_z - I_y)(I_y - I_x) < 0. \quad (21.97)$$

Ця нерівність виконується, якщо  $I_y > I_z$ ,  $I_y > I_x$  або  $I_y < I_z$ ,  $I_y < I_x$ .

Таким чином, *обертання твердого тіла буде стійким відносно тієї головної осі інерції, відносно якої значення моменту інерції буде або найбільшим, або найменшим.*

Умова стійкості (21.97) має обов'язково враховуватися при конструюванні рухомих об'єктів усіх типів.

### Питання для самоконтролю

1. Чи зможете Ви записати у векторній формі рівняння просторового руху твердого тіла двома способами?

- По відношенню до якої системи координат тверде тіло перебуває у стані спокою при його поступальному русі?
- Які умови потрібно виконати, щоб тіло, яке обертається відносно нерухомої осі (наприклад, колесо автомобіля на стенді для балансування), було статично і динамічно зрівноважене?
- Перерахуйте методи, за допомогою яких можна експериментально визначити осьові моменти інерції тіла.
- Як пояснити, що умови плоского руху тіла є умовами його динамічного зрівноваження?
- Скільки інтегралів і які саме мають місце при обертанні зрівноваженого твердого тіла відносно нерухомої точки?
- Відносно яких головних осей інерції обертання твердого тіла є стійким?
- В якій точці прикладена рівнодійна, до якої зводиться система сил при плоскому русі тіла?
- Яку властивість мають центр коливання і точка підвішування фізичного маятника?
- Що називають зведеною довжиною фізичного маятника і як її обчислити?

## Розділ 22 НАБЛИЖЕНА ТЕОРІЯ ГІРОСКОПІВ

### § 22.1. Основні поняття. Властивості гіроскопа

*Гіроскопом<sup>1</sup> називають тіло обертання, яке має вісь матеріальної симетрії, що називається головною віссю або віссю власного обертання гіроскопа, і яке обертається навколо цієї осі з кутовою швидкістю, що значно перевищує швидкість обертання самої осі симетрії.*

Тіло, що зображене на рис. 22.1, буде гіроскопом, якщо кутова швидкість обертання  $|\dot{\varphi}|$  набагато більша ніж  $|\dot{\theta}|$  і  $|\dot{\psi}|$ . Прикладами гіроскопів є штучні супутники Землі, що обертаються навколо власної осі, і сама Земля. Точку  $O$ , навколо якої обертається гіроскоп, називають точкою підвішування.

У техніці точка підвішування  $O$  гіроскопа реалізується по-різному: за допомогою внутрішнього (рис. 22.1, *a*) і зовнішнього (рис. 22.1, *б*) карданових підвісів або безконтактних підвісів (рис. 22.1, *в*), виконаних за допомогою аеродинамічних, електромагнітних, електростатичних та інших

сил. У всіх цих підвісах гіроскопом є тіло 4, що швидко обертається навколо осі власного обертання (вісь  $Ox$  (рис. 22.1, *a*, *б*) і вісь  $Oz$  (рис. 22.1, *в*)). Причому в техніці кутова швидкість  $\dot{\varphi}$  власного обертання гіроскопа досягає майже 6000 рад/с (приблизно 60 000 об/хв), тоді як швидкість обертання цього самого тіла навколо інших осей не перевищує значення порядку 1 рад/с.

У карданових підвісах гіроскопа кільця або рамки 5, 6 (рис. 22.1, *a*, *б*) призначені насамперед для вирішення суто кінематичного завдання – забезпечення гіроскопу можливості обертатися навколо трьох осей 1, 2, 3 (рис. 22.1, *a*, *б*), що перетинаються в одній точці  $O$ , а це еквівалентно, з погляду кінематики, тілу з однією нерухомою точкою (рис. 21.9, 22.1, *в*).

Зображені на рис. 22.1 гіроскопи називають *гіроскопами з трьома степенями вільності*, оскільки для опису їхнього руху потрібні три незалежних параметри. Якщо у такому гіроскопі закріпити зовнішнє кільце, то він матиме два степеня вільності.

При конструюванні та виготовленні підвісів гіроскопів намагаються, щоб моменти зовнішніх сил (сил тертя в осях підвісів, моментів через статичну незрівноваженість тіл та ін.) були по можливості малими, а в

<sup>1</sup>Слово "гіроскоп" складається з двох грецьких слів "гірос" – обертання і "скопсін" – дивитися, спостерігати. Цим терміном французький фізик Л. Фуко назвав свій прилад, який побудував у 1852 р для демонстрування обертання Землі.

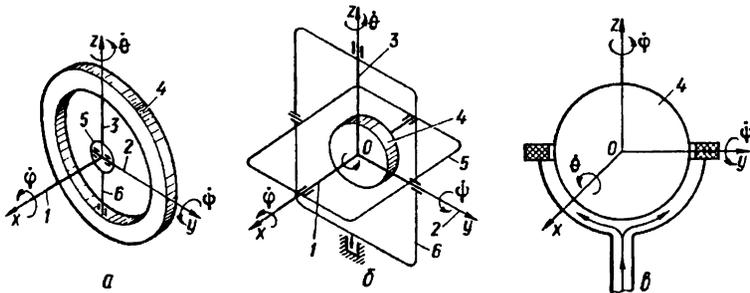


Рис. 22.1

ідеальному випадку – дорівнювали нулю. Якщо головний момент зовнішніх сил, що діють на гіроскоп, дорівнює нулю, то такий гіроскоп називають *вільним*.

Дві основні властивості гіроскопа:

1. *Властивість вектора кінетичного моменту вільного гіроскопа зберігати свій напрямок незмінним в інерціальній системі координат, тобто якщо вектор кінетичного моменту гіроскопа  $\vec{K}_O$  спрямувати на нерухому зірку (Сонце, Полярну зірку тощо), то під час руху він зберігатиме цей напрямок.* Дійсно, оскільки  $\vec{M}_O^e = 0$ , то за теоре-

мою про зміну кінетичного моменту

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = 0 \rightarrow \vec{K}_O = \text{const.} \quad (22.1)$$

2. *Якщо до гіроскопа, наприклад, із зовнішнім кардановим підвісом (рис. 22.1, б), прикласти момент відносно осі 2 обертання внутрішньої рамки 5, то його головна вісь буде обертатися ("прецесіювати") навколо осі 3 обертання зовнішньої рамки 6 карданового підвісу і навпаки. Ця властивість гіроскопа впливає безпосередньо з теореми Резаля (див. § 16.11), згідно з якою*

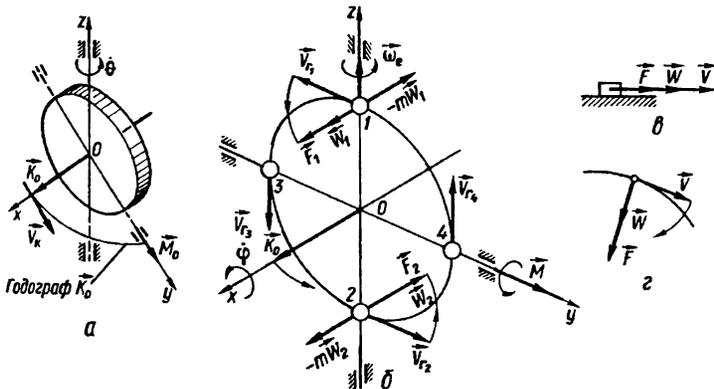


Рис. 22.2

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{v}_K, \quad (22.2)$$

тобто швидкість  $\vec{v}_K$  кінця вектора кінетичного моменту напрямлена по дотичній до голографа кінетичного моменту і дорівнює головному моменту зовнішніх сил. (На рис. 22.2, а, б рамки карданового підвісу не зображені, а показані лише їхні осі обертання). При цьому вектор кінетичного моменту  $\vec{K}_O$  практично напрямлений по осі  $Ox$ . Дійсно,

$$\begin{aligned} K_O^2 &= K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = \\ &= I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2. \end{aligned} \quad (22.3)$$

Оскільки з урахуванням наведених числових значень кутових швидкостей  $\omega_x \approx \phi$ , то із (22.3) маємо  $|\omega_x| \gg |\omega_y|$ ,  $|\omega_x| \gg |\omega_z|$ . Це означає, що  $|K_x| \gg |K_y|$ ,  $|K_x| \gg |K_z|$  і

$$K_O \approx K_x = I_x \omega_x. \quad (22.4)$$

Зазначену властивість гіроскопа можна пояснити також, використовуючи безпосередньо другий закон Ньютона, згідно з яким прискорення точки  $\dot{w}$  завжди пропорційне силі  $\vec{F}$ , що діє на точку, і збігається з нею за напрямком (рис. 22.2, в, з). У разі прямолінійного руху (рис. 22.2, в) швидкість напрямлена по одній прямій з прискоренням, а в разі криволінійного (рис. 22.2, з) руху вона напрямлена так, щоб найкоротшим шляхом суміститися з напрямком вектора сил  $\vec{F}$ .

Розглянемо гіроскоп (рис. 22.2, б), умовно зображений у вигляді чогирьох мас, що закріплені на невагомих спицях. Гіроскоп обертається відносно своєї головної осі з кутовою швидкістю  $\phi$ , маючи кінетичний момент  $K_O$ . Уздовж осі  $Oz$  обертання внут-

рішньої рамки (рамки вважаємо невагомими) прикладемо момент  $\vec{M}$  пари сил. Його можна подати у вигляді пари сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , що прикладені до точок 1 і 2, швидкості яких однакові:  $\vec{v}_{r1} = -\vec{v}_{r2}$ . Рух гіроскопа відбувається так, що швидкості  $\vec{v}_{r1}$  і  $\vec{v}_{r2}$  намагаються суміститися з векторами сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ . Тоді виникає обертання з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_e$  (рис. 22.2, б) навколо осі обертання зовнішньої рамки в такому напрямку, що вектор кінетичного моменту намагається суміститися найкоротшим шляхом з вектором моменту  $\vec{M}$  зовнішніх сил.

Далі, оскільки до точок 1 і 2 прикладені сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , то, згідно з другим законом Ньютона, вони спричинять їх прискорення  $\vec{w}_1$  і  $\vec{w}_2$ . Кінематично ці прискорення зумовлені наявністю інерсною кутової швидкості  $\vec{\omega}_e$  обертання гіроскопа разом із зовнішньою рамкою навколо її осі обертання і відносними швидкостями  $\vec{v}_{r1}$  і  $\vec{v}_{r2}$  точок 1 і 2. Як уже відомо з кінематики, такого типу прискорення є прискореннями Коріоліса. Дійсно, з рис. 22.2, б видно, що прискорення  $\vec{w}_1$  і  $\vec{w}_2$  відповідають напрямкам прискорень Коріоліса, які обчислюють за формулою  $\vec{w}_i = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_{ri}$ .

Скориставшись методом кінетостатики (див. § 19.2), покажемо, що в цьому разі сума головного моменту коріолісових сил інерції  $(-m_1 \vec{w}_1^c = m_2 \vec{w}_2^c)$  відносно осі  $Oz$  і моменту  $\vec{M}$  пари дорівнює нулю. Моментами сил інерції, що зумовлені обертаннями  $\vec{w}_i^{об}$  прискоренням, будемо нехтувати, вважаючи їх малими, оскільки, як уже підкреслювалось, обертання гіроскопа (прецесія) відносно осей обертання рамок є повільним.



власного обертання та модуль кінетичного моменту  $\vec{K}_O$  підтримують з високим ступенем точності (до 0,01 %) постійними за допомогою спеціальних електродвигунів, що називаються в техніці *гіромоторами*.

Використовуючи теорему про зміну кінетичного моменту в рухомій системі координат, для статично незрівноваженого гіроскопа ( $\vec{p}_C \neq 0$ ) випишемо такі рівняння руху гіроскопа, якщо точка підвішування рухається з прискоренням  $\vec{w}_O$  і до нього прикладено головний момент  $\vec{M}_O^e$  зовнішніх сил:

$$\frac{d\vec{K}_O^{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_O^{\omega} = \vec{M}_O^e - m\vec{p}_C \times \vec{w}_O, \quad (22.9)$$

які, користуючись припущеннями, спростимо так. Оскільки в наближеній теорії приймається  $K_x^{\omega} = K_y^{\omega} = \text{const}$ , то локальна похідна  $\frac{dK_O^{\omega}}{dt} \approx 0$ , тому що вона характеризує зміну вектора у зв'язаній системі координат.

Щоб перетворити рівняння (22.9) до вигляду, зручного для теорії гіроскопів, ці рівняння записують не в системі координат  $Oxuz$ , яка жорстко зв'язана з гіроскопом, а в системі координат  $O\xi_2^1 \eta_2^1 \zeta_2^1$ , вісь  $O\xi_2^1$  якої збігається з віссю  $Ox$ , але яка не бере участі у власному обертанні гіроскопа (див. рис. 22.3). Система координат  $O\xi_2^1 \eta_2^1 \zeta_2^1$  і розглядуване тіло мають різні складові кутової швидкості вздовж осі  $Ox$ . Цю систему координат називають *захоплюваною* або *супутньою*. Осі системи  $O\xi_2^1 \eta_2^1 \zeta_2^1$  називають також *осями Резаля*. Кутова швидкість обертання цієї системи координат є переносною для гіроскопа, тому позначимо її  $\vec{\omega}_e$ .

Рівняння руху гіроскопа в системі координат  $O\xi_2^1 \eta_2^1 \zeta_2^1$ , що обертається з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_e$ , запишемо у вигляді

$$\frac{d\vec{K}_O^{\omega}}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{K}_O^{\omega} = \vec{M}_O^e - m\vec{p}_C \times \vec{w}_O. \quad (22.10)$$

Користуючись припущеннями наближеної теорії, спростимо це рівняння. Враховуючи, що  $\frac{d\vec{K}_O^{\omega}}{dt} = 0$ , замінимо його таким наближенням:

$$\vec{\omega}_e \times \vec{K}_O^{\omega} = \vec{M}_O^e - m\vec{p}_C \times \vec{w}_O. \quad (22.11)$$

Це рівняння є основним рівнянням наближеної теорії гіроскопів. Його можна також вивести із теореми Резаля (див. § 16.11), якщо швидкість кінця вектора кінетичного моменту обчислити за формулою Ейлера

$$\vec{v}_k = \vec{\omega}_e \times \vec{K}_O^{\omega} = \vec{M}_O. \quad (22.12)$$

Застосовуючи метод кінестатики і користуючись результатами § 19.4, перепишемо рівняння (22.11), (22.12) у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{M}_O - \vec{\omega}_e \times \vec{K}_O^{\omega} &= \vec{M}_O + \vec{K}_O^{\omega} \times \vec{\omega}_e = \\ &= \vec{M}_O + \vec{M}_O'. \end{aligned} \quad (22.13)$$

Тут  $\vec{M}_O = \vec{M}_O^e - m\vec{p}_C \times \vec{w}_O$  – сума моментів зовнішніх сил, що діють на гіроскоп, включаючи сили ваги і момент сил інерції переносного руху разом з полюсом, які, якщо врахувати, що вектор прискорення вільного падіння та орт  $\vec{n}_0$  осі  $O\eta$  нерухомої системи координат  $O\xi\eta\zeta$  (див. рис. 21.6, а) напрямлені в протилежні боки ( $\vec{n}_0 = -\vec{g}/g$ ;  $\vec{n}_0 g = -\vec{g}$ ), можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(m\vec{g}) - m\vec{p}_C \times \vec{w}_O &= \\ &= m\vec{p}_C \times (\vec{g} - \vec{w}_O). \end{aligned} \quad (22.14)$$

Момент сил інерції гіроскопа  $\vec{M}_O^r$  називають *гіроскопічним моментом* і обчислюють його за формулою, що випливає з (22.13):

$$\vec{M}_O^r = \vec{K}_O^\omega \times \vec{\omega}_e,$$

$$|\vec{M}_O^r| = K_O^\omega \omega_e \sin(\vec{K}_O, \vec{\omega}_e). \quad (22.15)$$

Якщо нас цікавлять додаткові динамічні реакції  $\vec{R}$ , зумовлені рухом гіроскопа, то, застосовуючи аксіому про звільненість від в'язей і поділяючи сили на активні та реакції в'язей, у рівняння (22.13) треба включити момент реакцій в'язей відносно точки підвішування. Тоді

$$\vec{M}_O^a + \vec{M}_O(\vec{R}) + \vec{M}_O^r = 0. \quad (22.16)$$

Отже, сума моментів активних сил відносно точки підвішування гіроскопа, включаючи сили ваги і сили інерції переносного руху, реакцій в'язей і гіроскопічного моменту, дорівнює нулю.

З аналізу формули для гіроскопічного моменту (22.15) і формул § 22.1 випливає, що *гіроскопічний момент* – це головний момент коріолісових сил інерції.

Для зручності застосування на практиці рівнянь (22.9), (22.13) і (22.15) доцільно користуватися такими правилами Жуковського, які випливають із властивостей векторного добутку:

1. У разі прикладення до гіроскопа моменту  $\vec{M}_O$  зовнішніх сил (рис. 22.4), виникає прецесія гіроскопа, внаслідок якої вектор кінетичного моменту  $\vec{K}_O^\omega$  намагасться найкоротшим шляхом суміститися з моментом зовнішніх сил  $\vec{M}_O$ ; при цьому кутова швидкість прецесії  $\vec{\omega}_e$  напрямлена так, що спостерігач, який дивиться з кінця вектора  $\vec{\omega}_e$ , цей перехід буде бачити як

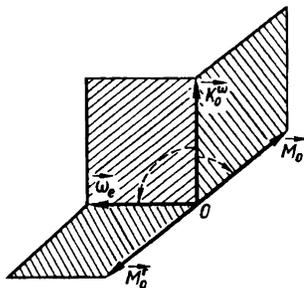


Рис. 22.4

такий, що відбувається проти ходу годинникової стрілки.

2. Якщо задано переносну кутову швидкість  $\vec{\omega}_e$  обертання гіроскопа (рис. 22.4), то завжди можна обчислити гіроскопічний момент  $\vec{M}_O^r$ , який буде напрямлений так, що коли дивитися з кінця вектора гіроскопічного моменту, то перехід найкоротшим шляхом від вектора кінетичного моменту  $\vec{K}_O^\omega$  до вектора переносної кутової швидкості  $\vec{\omega}_e$  буде відбуватися проти ходу годинникової стрілки.

Із формул (22.7), (22.12) випливає ще одна дуже важлива властивість гіроскопа: чим більша кутова швидкість власного обертання  $\omega_x = \phi$ , тим менша кутова швидкість прецесії  $\vec{\omega}_e$  гіроскопа під дією одного й того самого моменту зовнішніх сил.

Усі зазначені властивості гіроскопа безпосередньо випливають з основного рівняння наближеної теорії гіроскопів (22.13). Із наближених рівнянь гіроскопа випливає такий парадокс. Якщо, наприклад, момент зовнішніх сил  $\vec{M}_O$  діє відносно осі  $Oy$  внутрішньої рамки (див. рис. 22.2), то виникає прецесія з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_e$  відносно перпендикулярної до неї осі обертання зовнішньої рамки. Потужність

$N = \vec{M}_O \cdot \vec{\omega}_e = 0$ , а отже, і робота, виконувана зовнішніми силами на цьому переміщенні, дорівнює нулю. Робота внутрішніх сил також дорівнює нулю, оскільки тіло абсолютно тверде. Зауважимо, що цю думку треба розвивати далі не в напрямі побудови "вічного двигуна", а в припущеннях наближеної теорії гіроскопів. У цій теорії враховують лише коріолісові сили інерції, "робота" яких, як показано в § 20.3, дорівнює нулю. Розгляд енергетичних співвідношень за точними рівняннями руху (22.9) усуває цей парадокс. Насправді на повільну прецесію гіроскопа будуть накладатися високочастотні коливання його головної осі з дуже малою амплітудою. На підтримання цих коливань і витрачається енергія. Опис цих коливань виходить за рамки нашого курсу.

**Модифіковані рівняння Ейлера.** Модифікованими рівняннями Ейлера називають рівняння твердого тіла, гіроскопа зокрема, які записані в захоплюваній (супутній) системі координат,  $- O\xi_2' \eta_2' \zeta_2'$  (рис. 22.5).

З урахуванням позначень в (22.12) запишемо рівняння (22.10) у формі

$$\left( \frac{d\vec{K}_O^\omega}{dt} \right)_{O\xi_2' \eta_2' \zeta_2'} + \vec{\omega}_e \times \vec{K}_O^\omega = \vec{M}_O, \quad (22.17)$$

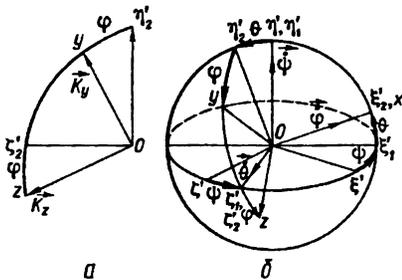


Рис. 22.5

де символ  $\left( \frac{d'}{dt} \right)_{O\xi_2' \eta_2' \zeta_2'}$  підкреслює, що локальна похідна обчислюється для вектора  $\vec{K}_O^\omega$  в системі координат  $O\xi_2' \eta_2' \zeta_2'$ , а  $\vec{\omega}_e$  — це кутова швидкість обертання цієї системи координат, яка є переносною для гіроскопа. У скалярній формі рівняння (22.17) матимуть вигляд

$$\frac{dK_{\xi_2'}^\omega}{dt} + \omega_{\eta_2'} K_{\xi_2'}^\omega - \omega_{\zeta_2'} K_{\eta_2'}^\omega = M_{\xi_2'};$$

$$\frac{dK_{\eta_2'}^\omega}{dt} + \omega_{\xi_2'} K_{\eta_2'}^\omega - \omega_{\zeta_2'} K_{\xi_2'}^\omega = M_{\eta_2'}; \quad (22.18)$$

$$\frac{dK_{\zeta_2'}^\omega}{dt} + \omega_{\xi_2'} K_{\zeta_2'}^\omega - \omega_{\eta_2'} K_{\xi_2'}^\omega = M_{\zeta_2'},$$

де  $\omega_{\xi_2'}$ ,  $\omega_{\eta_2'}$ ,  $\omega_{\zeta_2'}$  — проєкції переносної кутової швидкості (без  $\dot{\phi}$ ) на осі супутньої системи координат. Знайдемо проєкції векторів  $\vec{\omega}_e$  і  $\vec{K}_O^\omega$  на осі супутньої системи координат, враховуючи, що  $\vec{\omega}_e$  — це переносна кутова швидкість, а  $\vec{K}_O^\omega$  визначається абсолютною кутовою швидкістю.

Безпосередньо з рис. 22.5, б маємо

$$\omega_{\xi_2'} = \dot{\psi} \sin \theta, \quad \omega_{\eta_2'} = \dot{\psi} \cos \theta, \quad \omega_{\zeta_2'} = \dot{\theta}. \quad (22.19)$$

Кінетичний момент  $\vec{K}_O^\omega$  найпростіше обчислити в системі координат  $Ox_1y_1z_1$ , яка зв'язана з гіроскопом:

$$K_x^\omega = I_x \omega_x; \quad K_y^\omega = I_y \omega_y; \quad K_z^\omega = I_z \omega_z. \quad (22.20)$$

Тут

$$\omega_x = \dot{\phi} + \omega_{\xi_2'};$$

$$\omega_y = \omega_{\eta_2} \cos \varphi + \omega_{\xi_2} \sin \varphi ; \quad (22.21)$$

$$\omega_z = -\omega_{\eta_2} \sin \varphi + \omega_{\xi_2} \cos \varphi .$$

Скориставшись тепер рис. 22.5, а, б і тим, що внаслідок симетрії ротора  $I_y = I_z = I_e$ , отримаємо

$$K_{\xi_2}^{\omega} = K_x^{\omega} = I_x \omega_x = I_x (\dot{\varphi} + \omega_{\xi_2}) ;$$

$$\begin{aligned} K_{\eta_2}^{\omega} &= K_y^{\omega} \cos \varphi - K_z^{\omega} \sin \varphi = \\ &= I_e (\omega_y \cos \varphi - \omega_z \sin \varphi) ; \end{aligned} \quad (22.22)$$

$$\begin{aligned} K_{\xi_2}^{\omega} &= K_y^{\omega} \sin \varphi + K_z^{\omega} \cos \varphi = \\ &= I_e (\omega_y \sin \varphi + \omega_z \cos \varphi) . \end{aligned}$$

Враховавши очевидні співвідношення

$$\begin{aligned} \omega_{\eta_2} &= \omega_y \cos \varphi - \omega_z \sin \varphi , \\ \omega_{\xi_2} &= \omega_y \sin \varphi + \omega_z \cos \varphi , \end{aligned} \quad (22.23)$$

перепишемо (22.22) у формі

$$K_{\xi_2}^{\omega} = I_x (\dot{\varphi} + \omega_{\xi_2}) = H + I_x \omega_{\xi_2} ;$$

$$K_{\eta_2}^{\omega} = I_e \omega_{\eta_2} ; \quad (22.24)$$

$$K_{\xi_2}^{\omega} = I_e \omega_{\xi_2} .$$

Тут через

$$H = I_x \dot{\varphi} \quad (22.25)$$

позначено власний кінетичний момент гіроскопа, обумовлений обертанням гіроскопа навколо осі власного обертання.

Значимо, що вираз (22.24) можна отримати безпосередньо, якщо обчислити кінетичну енергію гіроскопа

$$T^{\omega} = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) . \quad (22.26)$$

Враховуючи, що  $I_y = I_z = I_e$  і співвідношення, які випливають із (22.23),

$$\omega_y^2 + \omega_z^2 = \omega_{\eta_2}^2 + \omega_{\xi_2}^2 ; \quad \omega_x = \dot{\varphi} + \omega_{\xi_2} ,$$

отримаємо

$$T^{\omega} = \frac{1}{2} I_x (\dot{\varphi} + \omega_{\xi_2})^2 + \frac{1}{2} I_e (\omega_{\eta_2}^2 + \omega_{\xi_2}^2) . \quad (22.27)$$

Використовуючи вирази проєкцій  $\bar{K}^{\omega}$  через кінетичну енергію, отримаємо

$$K_{\xi_2}^{\omega} = \frac{\partial T^{\omega}}{\partial \omega_{\xi_2}} = I_x (\dot{\varphi} + \omega_{\xi_2}) = H + I_x \omega_{\xi_2} ;$$

$$K_{\eta_2}^{\omega} = \frac{\partial T^{\omega}}{\partial \omega_{\eta_2}} = I_e \omega_{\eta_2} ; \quad (22.28)$$

$$K_{\xi_2}^{\omega} = \frac{\partial T^{\omega}}{\partial \omega_{\xi_2}} = I_e \omega_{\xi_2} .$$

Підставивши вирази (22.24) чи (22.28) в (22.18) і виділивши члени із  $H$ , матимемо

$$\begin{array}{l} I_e \frac{d\omega_{\xi_2}}{dt} \quad \Bigg| \quad + \frac{dH}{dt} = M_{\xi_2} ; \\ I_e \frac{d\omega_{\eta_2}}{dt} + (I_x - I_e) \omega_{\xi_2} \omega_{\xi_2} \quad \Bigg| \quad + H \omega_{\xi_2} = M_{\eta_2} ; \\ I_e \frac{d\omega_{\xi_2}}{dt} + (I_e - I_x) \omega_{\xi_2} \omega_{\eta_2} \quad \Bigg| \quad - H \omega_{\eta_2} = M_{\xi_2} . \end{array} \quad (22.29)$$

Рівняння (22.29) називають модифікованими рівняннями Ейлера. Їх особливість полягає в тому, що вони записані в супутній системі координат і виділені (справа від штрихової лінії) доданки, які включають до

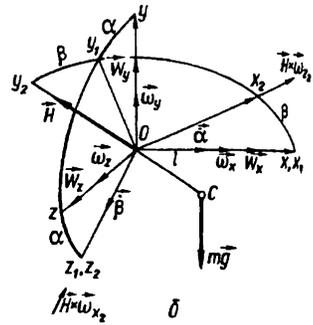
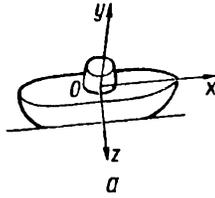


Рис. 22.6

свого складу власний кінетичний момент гіроскопа  $H = I_x \dot{\phi}$ .

Неважно переконатися, що всі ті доданки, які стоять зліва від штрихової лінії в (22.29), на декілька порядків малізи менші від гіроскопічних членів – тих, що стоять справа від штрихової лінії, якщо  $|\omega_e| \ll |\dot{\phi}|$  і

$$\left| \frac{d\omega_e}{dt} \right| \ll |\dot{\phi} \omega_e|. \quad \text{З урахуванням цього із (22.29)}$$

легко отримати так звані прецесійні чи укорочені рівняння руху гіроскопа, якщо знехтувати в (22.29) тими членами, що стоять зліва від штрихової лінії:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &\cong M_{\zeta_2}; \quad H\omega_{\zeta_2} = M_{\eta_2}; \\ -H\omega_{\eta_2} &\cong M_{\zeta_2}. \end{aligned} \quad (22.30)$$

Цим трьом скалярним рівнянням (22.30) можна поставити у відповідність одне векторне:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{H} = \vec{M}_O. \quad (22.31)$$

Зазначимо, що порядок прецесійних рівнянь (22.30) дорівнює чотирьом, тоді як порядок точних рівнянь дорівнює шести. Це означає, що при відповідній постановці задачі Коші потрібно задавати не шість початкових умов – три початкових значення кутів і три значення кутових швидкостей, а чотири. Прецесійні рівняння описують

тільки повільні рухи гіроскопа і не відображають швидких нутаційних коливань гіроскопа, які залежать від початкових значень кутових швидкостей.

Тим не менше в багатьох задачах технічного застосування гіроскопів, коли високочастотні вібрації основи незначні або вібрації основи низькочастотні, ці рівняння дають достатні для практики результати.

У багатьох випадках, коли спеціально не задається програма зміни  $\phi = \phi(t)$ , можна

прийняти  $\dot{\phi} = \text{const}$ ; тоді  $\frac{d^2 H}{dt^2} = 0$ , а це

означає, що достатньо обмежитись у прецесійній теорії двома останніми рівняннями в (22.30).

В останньому випадку рівняння прецесійного руху збагатимуться з рівняннями (22.11), (22.13), до яких ми прийшли з інших міркувань.

### § 22.3. Умови незбурюваності гіроскопічного маятника

Покажемо строго в межах прецесійної теорії, що з допомогою гіромаятника можна реалізувати умови незбурюваності, які отримані для математичного маятника в § 19.1. Гіромаятник – це такий гіроскоп, в якому кінетичний момент  $H$  напрямляють по вер-

тикалі, а центр ваги зміщують відносно точки підвішування на величину  $l$  в напрямі осі власного обертання.

Будемо вважати, що гіромаятник (див. приклад 2 § 10.4) встановлено на рухомому об'єкті (рис. 22.6, а), проекції кутових швидкостей обертання якого в інерціальному просторі є  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ , а прискорення полюса  $O$  дорівнюють  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $w_z$ . Центр мас гіромаятника зміщено на величину  $l$  по осі гіромаятника  $Oy_2$  (рис. 22.6, б), по якій напрямлено кінетичний момент  $\vec{H}$ . Якщо ввести системи координат  $Ox_1y_1z_1$  після першого повороту на кут  $\alpha$  гіромаятника відносно об'єкта і  $Ox_2y_2z_2$  – після другого повороту на кут  $\beta$ , то прецесійні рівняння (22.31) потрібно записувати в проекціях на ті осі, відносно яких задаються кутові швидкості  $\dot{\alpha}$  і  $\dot{\beta}$ , тобто відносно осей  $Ox_1$  і  $Oz_2$ .

У цьому випадку матимемо

$$\begin{aligned} H\omega_{x_2} &= M_{z_2}, \\ -H\omega_{z_2} \cos\beta &= M_{x_1}. \end{aligned} \quad (22.32)$$

Моменти  $M_{z_2}$  і  $M_{x_1}$  обумовлені силою ваги  $mg$  і силою інерції полюса  $O$ :  $-m\vec{w}_O$ , причому

$$-m\vec{w}_O - \vec{P} = -m(\vec{w}_O + \vec{g}) = -m\vec{w}'_O, \quad (22.33)$$

тому, з урахуванням (22.33), моменти  $M_{z_2}$  і  $M_{x_1}$  будуть

$$\begin{aligned} M_{z_2} &= m(y_2 w'_{x_2} - x_2 w'_{y_2}), \\ M_{x_1} &= m(z_1 w'_{y_1} - y_1 w'_{z_1}). \end{aligned} \quad (22.34)$$

Тут, з урахуванням мализни кута  $\beta$  ( $\cos\beta \approx 1$ ),

$$\begin{aligned} y_2 &= -l; \quad x_2 = 0; \\ y_1 &= y_2 \cos\beta \approx y_2 = -l; \quad z_1 = 0. \end{aligned}$$

Безпосередньо з рис. 22.6, б, вважаючи  $\cos\beta \approx 1$ ,  $\cos\alpha \approx 1$ ,  $\sin\alpha \approx \alpha$ ,  $\sin\beta \approx \beta$ , отримуємо:

$$\begin{aligned} \omega_{x_2} &= \dot{\alpha} + \omega_x + \omega_y\beta; \quad w'_{x_2} \approx w'_x + w'_y\beta; \\ \omega_{z_2} &= \dot{\beta} + \omega_z - \omega_y\alpha; \quad w'_{z_2} \approx w'_z - w'_y\alpha. \end{aligned} \quad (22.35)$$

Оскільки

$$w'_y = w_y + g, \quad w'_x = w_x, \quad w'_z = w_z, \quad (22.36)$$

то рівняння (22.32) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} H(\dot{\alpha} + \omega_x + \omega_y\beta) &= \\ &= -ml[w_x + (w_y + g)\beta]; \\ -H(\dot{\beta} + \omega_z - \omega_y\alpha) &= \\ &= ml[w_z - (w_y + g)\alpha]. \end{aligned} \quad (22.37)$$

Якщо ввести позначення

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{Pl}{H}, \quad n_y = \frac{w_y}{g}, \\ n_z &= \frac{w_z}{g}, \quad n_x = \frac{w_x}{g} \end{aligned} \quad (22.38)$$

і розділити рівняння (22.37) на  $H$ , то отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} + [\omega_y + \omega_n(1 + n_y)]\beta &= -\omega_x - \omega_n n_x; \\ \dot{\beta} - [\omega_y + \omega_n(1 + n_y)]\alpha &= -\omega_z - \omega_n n_z. \end{aligned} \quad (22.39)$$

Позначивши  $\mu = \omega_y + \omega_n(1 + n_y)$ , запишемо (22.39) у формі

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} + \mu\beta &= -\omega_x - \omega_n \frac{w_x}{g}; \\ \dot{\beta} - \mu\alpha &= -\omega_z - \omega_n \frac{w_z}{g}. \end{aligned} \quad (22.40)$$

Для подальшого аналізу рівнянь (22.40) потрібно визначити проекції прискорення  $w_x$  і  $w_z$  з урахуванням, що об'єкт рухається по земній поверхні, яку приймемо за сферу радіусом  $R_3$ .

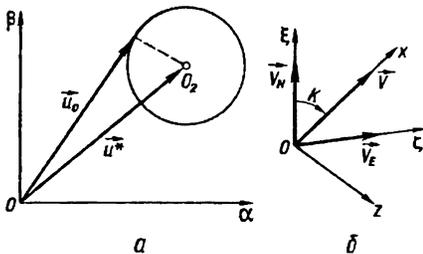


Рис. 22.7

Швидкість і прискорення визначимо за формулами

$$\begin{aligned}\bar{v}_O &= \frac{d\bar{R}_3}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{R}_3; \\ \bar{w}_O &= \frac{d'\bar{v}_O}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v}_O.\end{aligned}\quad (22.41)$$

Враховуючи, що

$$v_x = -\omega_z R_3, \quad v_y = \frac{dR_3}{dt}, \quad v_z = \omega_x R_3,$$

вирази для прискорення полюса  $O$  наберуть вигляду

$$\begin{aligned}w_x &= -R_3 \dot{\omega}_z + R_3 \omega_z \omega_x - 2\omega_z \dot{R}_3; \\ w_y &= -(\omega_x^2 + \omega_z^2) R_3 + \ddot{R}_3; \\ w_z &= R_3 \dot{\omega}_x + R_3 \omega_y \omega_z + 2\omega_x \dot{R}_3.\end{aligned}\quad (22.42)$$

Якщо рух об'єкта відбувається в горизонтальній площині, то  $\dot{R}_3 = 0$ ,  $\ddot{R}_3 = 0$  і рівняння (22.40) запишуться так:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} + \mu\beta &= -\omega_x - \frac{\omega_n R_3}{g} (-\dot{\omega}_z + \omega_y \omega_x); \\ \dot{\beta} - \mu\alpha &= -\omega_z - \frac{\omega_n R_3}{g} (\dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z).\end{aligned}\quad (22.43)$$

Якщо ввести комплексну змінну за формулами ( $j = \sqrt{-1}$ )

$$u = \alpha + j\beta; \quad v = \omega_x + j\omega_z,$$

то, склавши перше рівняння (22.43) з другим, матимемо

$$\dot{u} - j\mu u = -j \frac{\omega_n R_3}{g} \dot{v} - \left(1 + \frac{\omega_n R_3}{g} \omega_y\right) v. \quad (22.44)$$

Якщо об'єкт рухається прямолінійно і рівномірно, то  $\dot{v} = 0$  і тоді частинний розв'язок рівняння (22.44) матиме вигляд

$$u^* = \frac{1}{j\mu} \left(1 + \frac{\omega_n R_3}{g} \omega_y\right) v, \quad (22.45)$$

що являє собою так звану швидкісну девіацію гіромаятника, тобто похибку гіромаятника, яка обумовлена обертанням об'єкта в інерціальній системі координат. З урахуванням ненульових початкових умов у випадку рівномірного руху швидкісна девіація матиме вигляд

$$u = u^* + (u_O - u^*) e^{j\mu t}, \quad (22.46)$$

якому відповідає кінчна прецесія гіромаятника відносно частинного розв'язку  $u^*$  (рис. 22.7, а).

Розглянемо тепер випадок, коли рух об'єкта є прискореним, а параметри гіромаятника вибрані такими, що коефіцієнти в лівій і правій частинах пропорційні:

$$\frac{1}{-j\mu} = \frac{j\omega_n R_3/g}{1 + \omega_n \omega_y R_3/g}. \quad (22.47)$$

Тоді при виконанні умови (22.47), якою б не була функція  $v(t)$ , рівняння (22.44) весь час буде мати частинний розв'язок (22.45)  $u^*$ . Це означає, що при русі з прискоренням, якщо відкинути кінчну прецесію через початкові умови, гіромаятник матиме лише швидкісну похибку  $u^*$  і не буде додаткової похибки, сиринченої прискоренням. Але,

оскільки  $n^*$  при цьому буде змінюватись, бо змінюватиметься швидкість через наявність прискорення, то гіромаятник при зміні швидкості переходитиме в нове положення рівноваги  $u_1^*$  без коливань, тобто аперіодично. Тому інколи незбурювані гіромаятники називають *аперіодичними*. Проаналізуємо більш ретельно пропорцію (22.47), підставивши в неї значення коефіцієнтів; тоді матимемо

$$\frac{\omega_n R_3}{g} [\omega_n (1 + n_y) + \omega_y] = \frac{\omega_n R_3}{g} \omega_y + 1. \quad (22.48)$$

Якщо врахувати, що  $n_y = -(\omega_x^2 + \omega_z^2) R_3 / g$ , то (22.48) набуде вигляду

$$\omega_n^2 \frac{R_3}{g} \left[ 1 - \frac{(\omega_x^2 + \omega_z^2)}{g} R_3 \right] = 1. \quad (22.49)$$

Але, оскільки  $n_y \ll 1$ , то рівняння (22.49) матиме форму

$$\omega_n^2 \frac{R_3}{g} \approx 1. \quad (22.50)$$

Звідси знайдемо кутову швидкість і період прецесії незбурюваного гіромаятника:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{R_3}}; T_n = 2\pi \sqrt{\frac{R_3}{g}}. \quad (22.51)$$

Як уже було обчислено, цей період дорівнює  $T_n = 5064 \text{ с} = 84,4 \text{ хв}$ .

Враховуючи, що  $\omega_n = Pl/H$ , першій умові (22.51) можна надати форми

$$H = ml \sqrt{g R_3}.$$

Як уже відмічалось,  $\sqrt{g R_3} = 7,9 \text{ км/с}$  — це перша космічна швидкість.

Зазначимо, що швидкісна похибка гіромаятника в географічній системі координат матиме вигляд

$$\alpha^* \approx \frac{\omega_z}{\omega_n} = -\frac{\omega_z}{\omega_n} \cos \varphi \sin K - \frac{v}{\sqrt{g R_3}}, \quad (22.52)$$

$$\beta^* \approx -\frac{\omega_x}{\omega_n} = \frac{\omega_x}{\omega_n} \cos \varphi \cos K,$$

$$\text{tg } K = \frac{v_E}{v_N},$$

де  $K$  — курс;  $v_E$ ,  $v_N$  — відповідно східна та північна складові швидкості (рис. 22.7, б).

Таким чином, для незбурюваного гіромаятника добове обертання Землі впливає на швидкісну девіацію гіромаятника з коефіцієнтом

$$\frac{\omega_z}{\omega_n} = 5,87766 \cdot 10^{-2} = 3^\circ 22' 04'', \quad (22.53)$$

а швидкість об'єкта  $v$  через її відношення до першої космічної швидкості  $\sqrt{g R_3}$ . Наприклад, при  $v = 100 \text{ км/год}$  відповідна похибка буде

$$\frac{v}{\sqrt{g R_3}} = 12'. \quad (22.54)$$

Із викладеного матеріалу бачимо, що незбурюваний гіроскопічний маятник з періодом 84,4 хв ніяких інших похибок, крім швидкісних девіацій, не має. Хоча ці похибки і значні, але, оскільки відомий закон їх зміни, вони легко обчислюються та враховуються.

На завершення ще раз наголосимо, що ідеї, які виникали при розробці теорії незбурюваності гіромаятникових приладів — гіромаятника, гірокомпаса, — породили такий новий напрям у кібернетиці, як теорія інваріантності. Ці ідеї лягли в основу розробки сучасних інерціальних систем навігації, літаків, кораблів тощо.

## § 22.4. Застосування гіроскопів у техніці

Застосування гіроскопів у техніці ґрунтується на їхніх властивостях, а саме: зберігати з високим ступенем точності заданий напрямок головної осі в інерціальному просторі навіть при дії значних збурень (властивість пречесії). Зазначимо, якщо у 1852 р. Л. Фуко ставив за мету довести за допомогою гіроскопів факт обертання Землі, кутова швидкість якої становить 1 оберт за добу, то сучасні особливо точні гіроскопічні прилади вимірюють кутові швидкості обертання тіл в інерціальному просторі, що відповідають 1 оберту за 10 років.

Гіроскопи застосовують як: прилади для точних вимірювань кутів відхилення об'єктів від заданих напрямків у нерухомих чи рухомих системах координат, а також кутових і лінійних швидкостей руху об'єкта; стабілізатори окремих пристроїв на рухомих об'єктах і самих об'єктів, радіоантен, астрономічних приладів, гарматних дул на літаках, танках, кораблях тощо; виконавчі силові елементи керування положенням тіл, які потребують високої точності стабілізації в технологічних процесах, а також як виконавчі органи керування положенням супутників (маховичні виконавчі органи).

Гіроскопи використовують: на всіх рухомих керованих об'єктах – літаках, раке-

тах, штучних супутниках Землі, кораблях, підводних човнах та ін.; у будівництві шахт, тунелів, бурінні свердловин; у деяких технологічних процесах, для стабілізації кінофотоапаратури під час знімання з рухомої основи тощо.

Розглянемо принцип побудови гіроскопічних приладів деяких типів.

**1. Гіроскопи напрямку.** Це триступеневі гіроскопи, як правило, в кардановому підвісі (див. рис. 22.1, б), призначені для керування рухом об'єкта в заданому напрямку. Припустимо, що ракета має рухатися у напрямку на зірку *A* (рис. 22.8, а). Тоді головну вісь гіроскопа на початку руху орієнтуємо в указаному напрямку. Якщо внаслідок непередбачених причин вона відхилилася на кут  $\alpha$  (рис. 22.8, б) від заданого напрямку, то цей кут можна виміряти як кут відхилення зовнішньої рамки карданового підвісу (див. рис. 22.1, б) гіроскопа відносно ракети, оскільки головна вісь гіроскопа зберігає свій напрямок в інерціальному просторі (у нашому випадку на зірку *A*). Це непогодження (кут  $\alpha$ ) за допомогою спеціальних датчиків перетворюється в електричний сигнал, що подається на виконавчі органи, які прикладають до ракети керувальний момент доти, доки це непогодження не зменшиться до нуля. Внаслідок цього ракета займе початкове кутове положення. Отже, ракета рухатиметься у напрямку, який визначається напрямком головної осі гіроскопа. Цей же гіроскоп можна застосувати для здійснення запрограмованого розвороту ракети на заданий кут. Для цього до осі обертання внутрішньої рамки треба прикласти спеціально сформований момент, який змусить головну вісь гіроскопа обертатися разом із зовнішньою рамкою у заданому напрямку до досягнення рамкою повороту на заданий кут. Ракета під дією вищезазначених сил теж розвернеться на той самий кут.

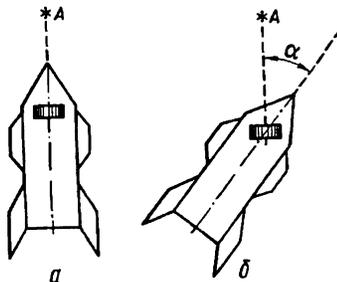


Рис. 22.8

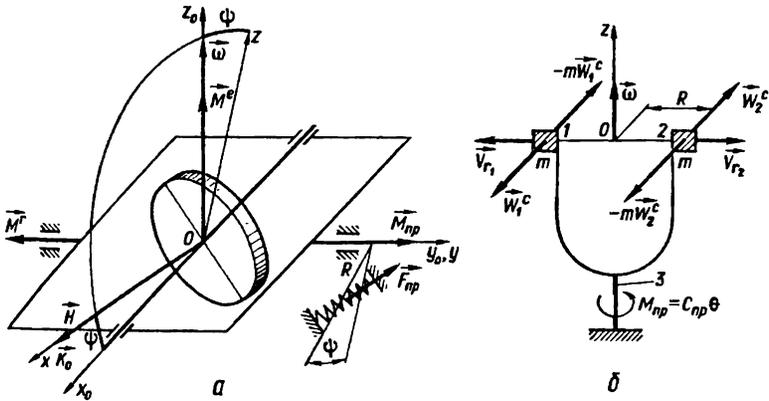


Рис. 22.9

2. *Гіроскопічні вимірники кутових швидкостей – гіротахметри.* Розглянемо принцип роботи двох гіроскопічних вимірників кутових швидкостей – роторного (рис. 22.9, а) і вібраційного (рис. 22.9, б).

*Роторний вимірник кутових швидкостей* – це двоступеневий гіроскоп, тобто гіроскоп з однією рамкою карданового підвісу (рис. 22.9, а), кут повороту якої обмежений пружиною. Під час обертання основи з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ , напрямленою по осі  $Oz_0$ , через опори рамки до гіроскопа буде прикладений деякий момент зовнішніх сил  $\vec{M}^e$ . (Обчислювати цей момент не треба, його ввели лише для розкриття механізму взаємодії гіл). Цей момент зумовить прецесію гіроскопа відносно осі обертання рамки. Як тільки рамка почне повертатися, пружина створюватиме момент  $\vec{M}_{np}$ , що перешкоджає повороту. Згідно з рівнянням (22.13), у кожний момент часу сума моментів пружини і гіроскопічного моменту має дорівнювати нулю:

$$\vec{M}_{np} + \vec{M}^r = 0. \quad (22.55)$$

Обчислимо ці моменти.

У разі повороту рамки на малий кут  $\psi$  пружина деформується на величину  $R\psi$ , при цьому за законом Гука вона розвиватиме силу  $F_{np} = cR\psi$ , де  $c$  – жорсткість пружини. Тоді момент

$$M_{np} = F_{np} R \cos \psi = cR^2 \psi \cos \psi. \quad (22.56)$$

Обчислимо гіроскопічний момент.

У разі повороту рамки на кут  $\psi$  разом з нею повернеться також вектор кінетичного моменту  $\vec{H}$ . Тоді кут між вектором  $\vec{H}$  і вектором кутової швидкості  $\vec{\omega}$  дорівнюватиме  $\frac{\pi}{2} - \psi$ . За формулою (22.15)

$$\begin{aligned} M^r &= H\omega \sin(\widehat{\vec{H}, \vec{\omega}}) = \\ &= H\omega \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = H\omega \cos \psi. \end{aligned} \quad (22.57)$$

Після очевидних перетворень дістанемо

$$H\omega \cos \psi = cR^2 \psi \cos \psi. \quad (22.58)$$

Звідси кут повороту рамки

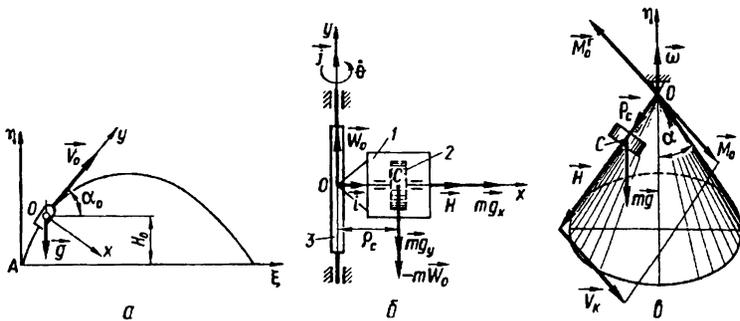


Рис. 22.10

$$\psi = \frac{H\omega}{cR^2} \quad (22.59)$$

пропорційний вимірюваній кутовій швидкості основи.

*Вібраційний вимірник* кутових швидкостей (рис. 22.9, б) побудований також на використанні моменту сил інерції Коріоліса. Дві однакові маси – 1 і 2, закріплені на пружних ніжках, змушують за допомогою спеціальних збуджувачів коливатися так, щоб їхні швидкості  $v_{r1}$  і  $v_{r2}$  були однакові за значенням, але напрямлені у протилежні боки. Тоді в разі обертання основи з кутовою швидкістю  $\dot{\omega}$  виникають прискорення Коріоліса  $\dot{w}_1^c$  і  $\dot{w}_2^c$ , внаслідок чого з'являються сили інерції, момент яких (гіроскопічний момент) відносно осі  $Oz$  буде

$$M_z^c = mR(w_1^c + w_2^c) = 2mR\omega(v_{r1} + v_{r2}) = 4mR\omega v_r. \quad (22.60)$$

Обертаючись, основа закручує нижній пружний торсіон 3, момент якого (так само, як і момент струни)  $M_{\text{пр}} = c_{\text{пр}}\theta$ , де  $c_{\text{пр}}$  – жорсткість торсіона на скручування;  $\theta$  – кут закручування торсіона.

За принципом Д'Аламбера, сума гіроскопічного моменту і моменту торсіона дорівнює нулю:

$$4mRv_r\omega = c_{\text{пр}}\theta. \quad (22.61)$$

Звідси кут закручування торсіона

$$\theta = \frac{4mRv_r}{c_{\text{пр}}}\omega \quad (22.62)$$

пропорційний кутовій швидкості обертання основи.

**3. Гіроскопічний вимірник швидкості балістичних ракет.** Балістичні ракети рухаються по траєкторіях (параболах), які має вільно кинуте в пустоті тіло (рис. 22.10, а). Дальність і висота польоту балістичної ракети (тіла) залежить від початкової швидкості  $\bar{v}_0$  і початкового значення кута  $\alpha_0$  нахилу цього вектора відносно горизонту. Ракета звичайно стартує вертикально, потім у польоті вона розвертається за допомогою гіроскопа і двигунів за програмою на кут  $\alpha_0$ , далі двигуни її вимикаються на певній висоті  $H_0$  після досягнення розрахункового значення швидкості  $v_0$ .

Швидкості ракети вимірюють за допомогою триступеневого гіроскопа (рис. 22.10, б) зі зміщеним ( $\bar{\rho}_c$ ) центром мас ротора 2 і внутрішньої рамки 1. Рамку звичайно виконують у формі циліндра, в якому оберта-

ється ротор 2. Кінематично ця схема гіроскопа така сама, як і гіроскопа, що зображений на рис. 22.1, б. У разі руху ракети з прискоренням  $\vec{w}_O$ , що напрямлене по осі  $Oy$ , у центрі мас будуть прикладені умовно сила інерції  $(-m\vec{w}_O)$  і сила ваги, які розкладемо (рис. 22.10, а, б) на дві складові:  $\vec{i}mg_x$  і  $\vec{j}mg_y$ , ( $\vec{i}$  і  $\vec{j}$  – орти осей  $Ox$  і  $Oy$ ). При цьому момент відносно точки  $O$  створює лише складова по осі  $Oy$ . Момент складової сили ваги  $\vec{j}mg_y$ , і сили інерції  $(-m\vec{w}_O)$  відносно осі  $Oz$  обертання внутрішньої рамки зумовить прецесію зовнішньої рамки  $Z$  навколо осі  $Oz$  з кутовою швидкістю  $\dot{\theta}$ . За правилом Жуковського (див. § 22.2) можна обчислити гіроскопічний момент  $M^r = H\dot{\theta}$ . Згідно з рівнянням (22.13), сума цих моментів дорівнює нулю, тобто

$$H\dot{\theta} = \rho_C m (g_y + w_O). \quad (22.63)$$

Враховуючи, що  $g_y = g \sin \alpha$ ,  $w_O = \frac{dv}{dt}$ ,  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$  і в початковий момент часу  $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $v(0) = 0$  (ракета стартує вертикально зі стану спокою), після інтегрування дістанемо

$$v = \frac{H}{m\rho_C} \theta - \int_0^t g \sin \alpha dt. \quad (22.64)$$

Звідси видно, що, знаючи кут повороту зовнішньої рамки карданового підвісу і закон змінення кута  $\alpha$  повороту ракети, можна визначити її швидкість.

**4. Гіроскопічний вимірник відхилення від площини горизонту – гіромаятник.**

Якщо гіроскопічний прилад зі зміщеним центром мас (рис. 22.10, б) розмістити так, щоб головна його вісь (вектор  $\vec{H}$ ) була напрямлена вертикально (рис. 22.10, в), то матимемо гіроскопічний маятник, який у разі відсутності обертання ротора ( $\dot{\varphi} = 0$ ) перетворюється у сферичний фізичний маятник. Щоб рамки не затіяли рис. 22.10, в, вони на ньому не наведені. Особливості руху фізичного маятника викладені в § 21.5, а гіромаятника – в § 22.3.

Розглянемо, як на нерухомій основі буде рухатися гіроскопічний маятник, центр мас якого зміщений на величину  $\vec{\rho}_C$ . У разі відхилення маятника на деякий кут  $\alpha$  від вертикалі  $O\eta$  сила ваги  $m\vec{g}$  створить відносно точки підвішування  $O$  (рис. 22.10, в) момент

$$|\vec{M}_O| = |\vec{\rho}_C \times m\vec{g}| = m g \rho_C \sin \alpha. \quad (22.65)$$

Під дією цього моменту виникає прецесія гіромаятника, кутова швидкість  $\dot{\omega}$  якої буде напрямлена так, що вектор  $\vec{H}$  намагається найкоротшим шляхом суміститися з вектором  $\vec{M}_O$ , маючи швидкість  $\vec{v}_k$ , що дорівнює  $\vec{M}_O$  (за теоремою Резаля). При цьому вектор  $\vec{H}$  опише коловий конус. Як видно з рис. 22.10, в, момент зовнішніх сил і гіроскопічний момент напрямлені у протилежні боки:

$$M^r = H\omega \sin(\pi - \alpha) = H\omega \sin \alpha.$$

Їхня сума, згідно з (22.13), дорівнює нулю, тобто вони однакові за значенням, тоді

$$H\omega \sin \alpha = m g \rho_C \sin \alpha. \quad (22.66)$$

Звідси кутова швидкість прецесії, яка є коловою частотою власних коливань гіромаят-

шика (оскільки задані лише початкові умови при  $t=0$ ,  $\alpha(0)=\alpha_0$ ), не залежить від величини кута  $\alpha$  і становитиме

$$|\ddot{\omega}| = \frac{mg\rho_C}{H} = \frac{mg\rho_C}{I_x\dot{\phi}}. \quad (22.67)$$

Період коливань гіроскопічного маятника в разі, якщо ротор являє собою циліндр радіусом  $r$  ( $I_x = mr^2/2$ ), визначимо за формулою

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{I_x\dot{\phi}}{mg\rho_C} \\ &= 2\pi \frac{mr^2\dot{\phi}}{2mg\rho_C} = \pi\dot{\phi} \frac{r^2}{g\rho_C}. \end{aligned} \quad (22.68)$$

З'ясуємо, чи можна технічно реалізувати такі параметри гіромаятника, щоб період його власних коливань дорівнював періоду (84,4 хв) коливань незбудурованого математичного маятника, довжина якого дорівнює радіусу Землі ( $T_M = 2\pi\sqrt{R_3/g}$ ). Нехай  $\dot{\phi} = 3 \cdot 10^3$  рад/с,  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>,  $r = 0,09$  м,  $T_r = 5064$  с (84,4 хв), тоді з останньої формули обчислимо зміщення центра мас гіромаятника:  $\rho_C \approx 1,5$  мм. Таке зміщення нині легко реалізується в приладобудуванні. Отже, параметри гіроскопічного маятника (див. § 22.3) можна вибрати так, що під час руху об'єкта з прискоренням маятник не буде додатково відхилятися від вертикали на відстані від фізичного маятника, який відхиляється від вертикали на кут  $\gamma$  згідно з рівнянням  $\text{tg}\gamma = w_0/g$

### § 22.5. Порівняння побудованих на різних принципах механічних вимірників кутів повороту і кутових швидкостей обертання твердих тіл

Розглянуті питання динаміки твердих тіл і гіроскопів дають змогу порівняти між со-

бою особливості й намітити можливі галузі застосування різних типів механічних (інерційних) вимірників кутів повороту і кутових швидкостей обертання твердих тіл (турбін, рухомих об'єктів, вихідних валів різних приводів тощо).

У техніці відомі механічні вимірники повороту тіл, що ґрунтуються на властивості вільного твердого тіла (за законом інерції) і вільного триступеневого гіроскопа зберігати напрямки своїх осей (зв'язаних з тілом) незмінними в інерціальній системі координат. Нс вдаючись у тонкощі технічної реалізації цих ідей, порівняємо їх між собою і з'ясуємо, коли перевагу слід віддавати приладам з вільним необертотним тілом і коли з вільним гіроскопом (обертотним тілом).

Уявімо собі, що у першому і другому випадках на чутливий елемент діє один і той самий постійний збурювальний момент - момент зовнішніх сил  $M_z$  відносно однієї тієї ж осі, наприклад  $Oz$ . Виведемо закон відхилення осей чутливих елементів від заданого напрямку при дії на них одного й того самого збурювального моменту.

У разі вільного твердого тіла

$$I_z \ddot{\theta}_{\tau} = M_z. \quad (22.69)$$

Для гіроскопа, згідно з рівнянням (22.31)

$$H \dot{\theta}_{\tau} = I_x \dot{\phi} \cdot \dot{\theta}_{\tau} = M_z. \quad (22.70)$$

Нехай  $I_z = I_x$ , тоді кут  $\theta_{\tau}$  відхилення твердого тіла і кут  $\theta$ , відхилення гіроскопа від заданого напрямку в інерціальному просторі при нульових початкових умовах, тобто при  $t \rightarrow 0$   $\theta_{\tau}(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}_{\tau}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = 0$ , змінюватимуться за законом

$$\theta_{\tau} = \frac{M_z t^2}{2I_x}; \quad \theta = \frac{M_z t}{I_x \dot{\phi}}. \quad (22.71)$$

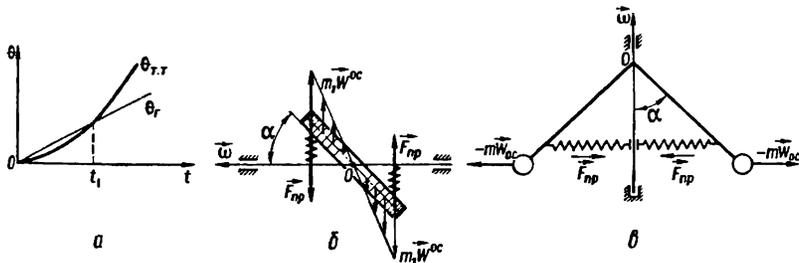


Рис. 22.11

Як видно з рис. 22.11, а, на проміжку часу  $[0, t_1]$  похибка вимірювання кута відхилення об'єкта за допомогою вільного твердого тіла менша, ніж за допомогою гіроскопа. Прийнявши  $\theta_{r,t} = \theta_r$ , визначимо цей час:  $t_1 = 2/\dot{\phi}$ . Наприклад, при  $\dot{\phi} = 2 \cdot 10^3$  рад/с  $t_1 = 10^{-3}$  с.

Наведені оцінки показують, що коли проміжок часу, *впродовж якого треба вимірювати кут повороту об'єкта, дуже малий (мілісекунди), то вільне тверде тіло має перевагу перед гіроскопом щодо точності вимірювання кута.*

Така мала тривалість дії збурення існує під час ударів, вибухів тощо. В інших випадках перевагу слід надавати гіроскопу.

Перейдемо до розгляду механічних (інерціальних) вимірників кутових швидкостей обертання тіл. На практиці відомі відцентрові вимірники кутових швидкостей (рис. 22.11, б, в) і розглянуті вже гіроскопічні. З рисунка стає зрозумілим принцип роботи відцентрових вимірників кутових швидкостей. Під час обертання вала з кутовою швидкістю  $\bar{\omega}$  (рис. 22.11, б, в) у першому випадку ротор, у другому – кульки будуть відхилятися на деякий кут  $\alpha$ , доки момент реакції пружини не дорівнюватиме головному моменту відцентрових сил, що пропорційний квадрату кутової швидкості. У гі-

роскопічних вимірниках кутових швидкостей (див. § 22.2) сума головного моменту сил інерції Кориоліса і моменту сил реакції пружин також дорівнює нулю. Якщо в гіроскопічному вимірнику кутових швидкостей і у відцентровому взяти однакові ротори (див. рис. 22.9, а і 22.11, б) або однакові маси і довжини (рис. 22.9, б і 22.11, в), то для порівняння цих вимірників досить зівставити між собою прискорення Кориоліса і доосьове прискорення для однієї точки, що розміщена однаково в обох вимірниках:

$$\begin{aligned} \bar{w}^c &= 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2\bar{\omega} \times (\bar{i}\dot{\phi} \times \bar{\rho}), \\ \bar{w}^{oc} &= \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}). \end{aligned} \quad (22.72)$$

Тут  $\dot{\phi}$  – кутова швидкість власного обертання гіроскопа. Для зручності порівняння складемо ці прискорення:

$$\begin{aligned} \bar{w}^c + \bar{w}^{oc} &= 2\bar{\omega} \times (\bar{i}\dot{\phi} \times \bar{\rho}) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) = \\ &= \bar{\omega} \times [(2\dot{\phi} + \bar{\omega}) \times \bar{\rho}]. \end{aligned} \quad (22.73)$$

Отже, задача звелась до аналізу суми  $2\dot{\phi} + \bar{\omega}$ , оскільки решта співмножників  $\bar{\omega}$  і  $\bar{\rho}$  спільні.

Порівнюючи між собою  $2\dot{\phi}$  і  $\bar{\omega}$ , можна стверджувати, що коли треба виміряти кутову швидкість  $\bar{\omega}$ , значення якої сумірне зі значенням кутової швидкості  $\dot{\phi}$  власного обертання гіроскопа (турбіни, вихідних ва-

лів обертання електродвигунів), то в цьому разі застосовувати гіроскопи теж можна, однак практично недоцільно, тому що вони складніші й дорожчі, ніж відцентрові вимірники. Якщо ж треба виміряти малі порівняно з  $\phi$  кутові швидкості обертання тіл, то в цьому разі перевага гіроскопів незаперечна. Тут кутова швидкість  $\phi$  виступає в ролі підсилювача малих швидкостей.

### Питання для самоконтролю

1. Яке тверде тіло називають гіроскопом?
2. Як довести, що кінетичний момент вільного гіроскопа зберігає свій напрям і величину незмінними в інерціальной системі координат?

3. Який момент називають гіроскопічним моментом, коли він виникає і як його обчислити?
4. Які рівняння руху гіроскопа називають модифікованими рівняннями Ейлера?
5. У чому суть правила Жуковського для гіроскопів?
6. Які параметри руху літака або ракети можна виміряти з допомогою гіроскопічних приладів?
7. Поясніть принцип роботи вібраційного гірометра.
8. При виконанні яких умов гіроскопічний маятник не буде збурюватись при русі об'єкта з прискоренням?
9. Чи збігається умова невагомості тіла з умовою незбурюваності гіроскопічного маятника?
10. В яких випадках гіроскопи матимуть перевагу перед іншими механічними вимірниками кутових параметрів руху тіла і чому?

## Розділ 23

### ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРІЯ УДАРУ

#### § 23.1. Основні визначення

*Ударом називають особливий вид взаємодії системи матеріальних точок, при якій за малий проміжок часу  $\tau$ , що називається тривалістю удару, кількості руху точок системи дістають скінченні прирости. У праці “Діалектика природи” Ф. Енгельс писав: “Механіка розглядає дію удару як таку, що відбувається в чистому вигляді. Однак у дійсності все відбувається інакше. При кожному ударі частина механічного руху перетворюється в теплоту, а третя є не що інше, як така форма удару, яка неперервно перетворює механічний рух у теплоту...”<sup>1</sup>*

При дослідженні удару гіпотеза про абсолютну твердість тіла не має місця. Під час удару основну роль відіграє фізична природа тіл. Процес удару можна поділити на дві фази. Під час *першої фази* тіла зближуються по лінії спільної нормалі. Реакції вико-

нують від'ємну роботу і кінетична енергія системи зменшується. Проекція відносної швидкості тіла в точці зіткнення на нормаль у момент удару зменшується до нуля. Цим визначається кінець першої фази удару. Потім починається *друга фаза* удару, коли тіла, що стикаються, починають віддалятися одне від одного і відновлюють свою форму. Проекція відносної швидкості на напрям нормалі, змінивши знак, зростає за абсолютним значенням. Після цього тіла віддаляються одне від одного. Цим закінчується другий етап удару. При цьому проекція відносної швидкості не досягає свого попереднього абсолютного значення.

Вивчаючи удар двох тіл, слід звернути увагу на характер сил, що діють при ударі. Звичайними силами (наприклад, силами ваги, силами опору тощо) при ударі нехтують, тому що за час удару  $\tau$  вони створюють дуже малі імпульси, якими можна знехтувати. При ударі враховують лише дію миттєвих сил, дуже великих за величиною,

<sup>1</sup>Енгельс Ф. Діалектика природи // Маркс К., Енгельс Ф. Соч. – 2-е изд. – Т. 20. – 594 с.

але таких, що створюють імпульси зі скінченними величинами.

Миттєві сили  $\vec{F}$  називають також *ударними силами*, які характеризуються їхніми імпульсами

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{F} dt, \quad (23.1)$$

де  $\tau$  – тривалість удару;  $t_0$  – початковий момент часу. (Під час зіткнення твердих тіл  $\tau$  має порядок  $10^{-3} \dots 10^{-4}$  с). Покажемо, що переміщення будь-якої точки системи під час удару мають порядок малюзи тривалості удару  $\tau$ . Дійсно, за другим законом Ньютона

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \quad d\vec{v} = \frac{1}{m} \vec{F} dt, \quad (23.2)$$

звідки

$$\vec{v} = \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{F} dt + \vec{v}_0 = \frac{1}{m} \vec{S} + \vec{v}_0. \quad (23.3)$$

Оскільки  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , то, інтегруючи останній вираз, дістанемо

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \tau + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{S} dt. \quad (23.4)$$

Згідно з теоремою про середнє значення,

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \left( \vec{v}_0 + \frac{1}{m} \vec{S}_{\text{cp}} \right) \tau, \quad (23.5)$$

що і треба було довести.

У курсі теоретичної механіки вивчається елементарна теорія удару, що ґрунтується на дослідженнях Ньютона. Слід зазначити, що глибоке дослідження удару пов'язане з визначенням деформацій, які виникають під час зіткнення твердих тіл, проте ця сфера

досліджень виходить за рамки курсу теоретичної механіки. В елементарній теорії удару розглядаються такі питання:

1. Визначення швидкостей  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$  після удару. (До удару швидкості тіл будемо позначати через  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$ ).

2. Визначення імпульсу  $\vec{S}$  миттєвих сил.

3. Втрати кінетичної енергії  $\Delta T$  під час удару.

### § 23.2. Гіпотеза Ньютона про коефіцієнт відновлення

Як показує досвід, швидкості тіл, що стикаються, після удару менші, ніж їхні швидкості до удару. Ньютон увів гіпотезу про те, що відношенням модуля проекції на нормаль до поверхні в точці удару відносно швидкості тіл після удару  $u_n$  до її значення до удару  $v_n$  є деяка фізична стала, що залежить від природи тіл, які стикаються, але не залежить від значень відносно швидкості та мас цих тіл. Цю сталу, яку позначимо через  $k$ , називають *коефіцієнтом відновлення*. Якщо  $k=0$ , то удар називають *абсолютно непружним* або *пластичним*. Якщо  $k=1$ , то удар називають *абсолютно пружним*. Якщо  $k$  – правильний дріб, тобто  $0 < k < 1$ , то удар називають *не зовсім пружним*.

Отже,

$$k = |u_n / v_n|, \quad 0 \leq k \leq 1. \quad (23.6)$$

При  $k=0$  весь процес удару відбувається в першій фазі удару. Форма тіл не відновлюється. Обидва тіла, що стикаються, після удару рухаються як одне ціле, втративши деяку частину кінетичної енергії. При  $k=1$  втрати кінетичної енергії не буде. У цьому випадку удару в другій його фазі форма тіла відновлюється.

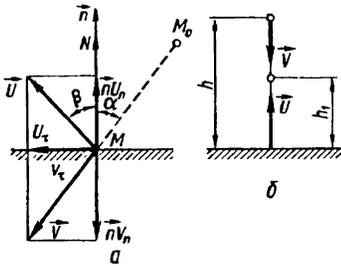


Рис. 23.1

Гіпотеза Ньютона про коефіцієнт відновлення є результатом оброблення та узагальнення дослідних даних.

Нехай об нерухому площину вдаряється тіло, яке будемо вважати матеріальною точкою. Позначимо швидкість падіння (до удару) через  $\vec{v}$ , а швидкість відбиття – через  $\vec{u}$ , кут падіння  $\alpha$ , кут відбиття  $\beta$  (рис. 23.1, а). Миттєвою силою є нормальна складова реакції  $\vec{N}$ . За теоремою імпульсів (див. § 3.14)

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \vec{S}, \quad (23.7)$$

де  $m$  – маса тіла;  $\vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{N} dt$  – імпульс миттєвої реакції за час удару  $\tau$ . Проектуючи обидві частини рівняння (23.7) на напрямок нормалі  $\vec{n}$  і дотичної  $\vec{\tau}$  (рис. 23.1, а), дістанемо

$$mu_n + mv_n = S; \quad u_t - v_t = 0. \quad (23.8)$$

Із другого рівняння маємо  $u_t = v_t$ . Отже, дотичні складові швидкостей точки  $M$  до і після удару рівні між собою. Як видно з рівностей (23.8), для визначення нормальних складових  $u_n$  і  $v_n$  маємо лише одне рівняння. Потрібне ще одне рівняння, в якому були б враховані фізичні властивості матеріалу тіла, що падає, і площини, об яку воно вдаряється. Це рівняння і дав Ньютон у вигляді (23.6).

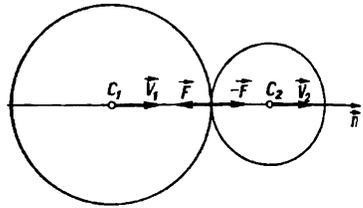


Рис. 23.2

Як видно з рис. 23.1, а, кути падіння  $\alpha$  і відбиття  $\beta$  задовольняють співвідношенню

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = k = u_n / v_n, \quad (23.9)$$

яким можна скористатися для дослідного визначення коефіцієнта відновлення.

Експериментально коефіцієнт  $k$  визначають ще й так. Виготовляють кульку з матеріалу, для якого треба визначити коефіцієнт відновлення  $k$ . Кульку опускають з деякої висоти  $h$  без початкової швидкості ( $v_0 = 0$ ) на масивну плиту з того самого матеріалу (рис. 23.1, б). Кулька вдаряється об плиту зі швидкістю  $v = \sqrt{2gh}$ . Після удару кулька відскочить на висоту  $h_1$  зі швидкістю  $u = \sqrt{2gh_1}$ . Оскільки ці швидкості нормальні до поверхні плити, то  $u_n = -u$ ,  $v_n = v$  і

$$k = \left| \frac{u_n}{v_n} \right| = \left| \frac{u}{v} \right| = \sqrt{\frac{2gh_1}{2gh}} = \sqrt{\frac{h_1}{h}}. \quad (23.10)$$

Наведемо значення коефіцієнта відновлення  $k$  для деяких матеріалів: дерево – 0,5; сталь – 0,56; слонова кістка – 0,89; скло – 0,94.

### § 23.3. Прямий центральний удар двох куль

Розглянемо удар двох куль, маси яких  $m_1$  і  $m_2$ , а швидкості до удару – відповідно  $v_1$  і  $v_2$ . Спільна нормаль до поверхні тіл, що стикаються, називається *лінією удару*, –  $\vec{n}$  (рис. 23.2). Удар називають *центральним*,

якщо центри мас  $C_1$  і  $C_2$  лежать на лінії удару. Центральний удар називають *прямим*, якщо швидкості центрів мас куль, що стикаються, на початку удару лежать на лінії удару. Отже, розглянемо прямий центральний удар куль. Нехай швидкості розглядуваних куль після удару будуть  $u_1$  і  $u_2$ . Миттєвими силами під час удару куль є сили тиску однієї кулі на другу, імпульси яких позначимо через  $\bar{S}$ . Для визначення швидкостей після удару, а також імпульсів миттєвих сил  $\bar{F}$  і  $-\bar{F}$  застосуємо теорему імпульсів (див. § 16.5) в проєкції на нормаль  $\bar{n}$

$$\begin{aligned} m_1(u_1 - v_1) &= -S; \\ m_2(u_2 - v_2) &= S. \end{aligned} \quad (23.11)$$

Складаючи ці рівняння, дістанемо основне рівняння Ньютона в теорії удару

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2. \quad (23.12)$$

Звідси видно, що кількість руху системи під час удару не змінюється, тому що діючі сили є внутрішніми силами цієї системи (див. § 16.5). У цьому рівнянні дві невідомі величини:  $u_1$  і  $u_2$ . Друге рівняння введемо на підставі гіпотези Ньютона про коефіцієнт відновлення

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}, \quad (23.13)$$

де  $u_2 - u_1$  і  $v_1 - v_2$  – проєкції відносних швидкостей на нормаль куль, що стикаються, відповідно до і після удару.

Визначивши з (23.12) і (23.13) швидкості після удару, дістанемо, наприклад, із другого рівняння (23.11) імпульс миттєвої сили  $\bar{F}$ . Після розв'язання зазначених рівнянь матимемо

$$u_1 = \frac{(m_1 - km_2)v_1 + m_2(1+k)v_2}{m_1 + m_2},$$

$$u_2 = \frac{m_1(1+k)v_1 + (m_2 - km_1)v_2}{m_1 + m_2}, \quad (23.14)$$

$$S = \frac{m_1 m_2 (1+k)(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}.$$

Як показав М. Є. Жуковський, результати, одержані при ударі куль, поширюються на удар тіл будь-якої форми. Для того щоб задача про удар куль була завершена, треба визначити втрати кінетичної енергії під час удару, які знаходять за теоремою Остроградського – Карно.

### § 23.4. Теорема Остроградського – Карно

Окремий випадок теореми про зміну кінетичної енергії під час удару розглянув французький математик Л. Карно (1753–1823). Він довів цю теорему, припускаючи, що коефіцієнт відновлення дорівнює нулю. Після Л. Карно цю теорему розглядав М. В. Остроградський, уперше поширивши на теорію удару методи аналітичної механіки.

**Теорема.** *Кінетична енергія, яку втрачає система під час пружного удару, дорівнює  $\frac{1-k}{1+k}$ -й частці кінетичної енергії системи, що відповідає втраченим швидкостям (втраченою швидкістю називають різницю швидкостей після і до удару, тобто  $u_2 - v_2$ ;  $u_1 - v_1$ ).*

Доведення. Як і раніше, розглянемо прямий центральний удар двох куль. Згідно з (23.11) і (23.13), маємо

$$\begin{aligned} m_1(u_1 - v_1) &= -S, \\ m_2(u_2 - v_2) &= S, \end{aligned} \quad (23.15)$$

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}.$$

Помноживши перше рівняння (23.15) на  $u_1 + kv_1$ , а друге – на  $u_2 + kv_2$ , дістанемо

$$\begin{aligned} m_1(u_1 - v_1)(u_1 + kv_1) &= -S(u_1 + kv_1), \\ m_2(u_2 - v_2)(u_2 + kv_2) &= S(u_2 + kv_2). \end{aligned} \quad (23.16)$$

Складемо ці рівняння:

$$\begin{aligned} m_1(u_1 - v_1)(u_1 + kv_1) + \\ + m_2(u_2 - v_2)(u_2 + kv_2) &= \\ = S[u_2 - u_1 - k(v_1 - v_2)]. \end{aligned} \quad (23.17)$$

Підставляючи вираз для  $k$  із (23.13), у правій частині останньої рівності отримаємо нуль. Отже,

$$\begin{aligned} m_1(u_1 - v_1)(u_1 + kv_1) + \\ + m_2(u_2 - v_2)(u_2 + kv_2) = 0. \end{aligned} \quad (23.18)$$

Подальше перетворення одержаного рівняння (23.18) ґрунтуються на таких чотирьох тотожностях:

$$\begin{aligned} (u_1 - v_1)u_1 &= \frac{1}{2}(u_1^2 - v_1^2) + \frac{1}{2}(u_1 - v_1)^2; \\ (u_1 - v_1)kv_1 &= \frac{1}{2}k(u_1^2 - v_1^2) - \frac{1}{2}k(u_1 - v_1)^2; \\ (u_2 - v_2)u_2 &= \frac{1}{2}(u_2^2 - v_2^2) + \frac{1}{2}(u_2 - v_2)^2; \\ (u_2 - v_2)kv_2 &= \frac{1}{2}k(u_2^2 - v_2^2) - \frac{1}{2}k(u_2 - v_2)^2. \end{aligned} \quad (23.19)$$

Використовуючи ці тотожності, вираз (23.18) можна звести до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1+k)[(m_1u_1^2 + m_2u_2^2) - \\ (m_1v_1^2 + m_2v_2^2)] + \\ + \frac{1}{2}(1-k)[m_1(u_1 - v_1)^2 + \\ + m_2(u_2 - v_2)^2] = 0. \end{aligned} \quad (23.20)$$

Запишемо вирази для кінетичних енергій тіл, що стикаються, до і після удару.

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}, \\ T_2 &= \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (23.21)$$

Після елементарних перетворень дістанемо

$$\begin{aligned} \Delta T = T_2 - T_1 = \\ = -\frac{1-k}{1+k} \left[ \frac{m_1}{2}(u_1 - v_1)^2 + \frac{m_2}{2}(u_2 - v_2)^2 \right]. \end{aligned} \quad (23.22)$$

Вираз у квадратних дужках – це кінетична енергія системи, що відповідає втраченим швидкостям. Це і треба було довести.

Розглянемо окремі випадки.

1. При непружному ударі  $k=0$ ,  $u_1 = u_2 = u$ , тоді

$$\Delta T = -\frac{1}{2} [m_1(u - v_1)^2 + m_2(u - v_2)^2]. \quad (23.23)$$

2. При абсолютно пружному ударі  $k=1$   $\Delta T = 0$ , тобто кінетична енергія не втрачається.

Слід зазначити, що кінетична енергія під час удару витрачається на утворення незворотних деформацій і на підвищення температури тіл, що стикаються. На теоремі Остроградського – Карно ґрунтуються розрахунок машин ударної дії, наприклад, для кування і штампування металів тощо.

### § 23.5. Дія удару на вісь тіла, що обертається. Центр удару

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі  $O_C$ , що проходить через нерухомі точки  $O_1$  і  $O_2$ , які розміщені на відстані відповідно  $a$  і  $b$  від початку координат. Припустимо далі, що в деякій точці  $D$



Кутова швидкість у цій задачі направлена по осі  $Oz$ , тобто

$$\omega_z = \omega_j; \omega_x = 0; \omega_y = 0, \quad j = 0, 1. \quad (23.26)$$

При цьому проекції лінійних швидкостей на осі системи координат  $Oxyz$  будуть

$$\begin{aligned} v_{Cx}(\omega_j) &= -\omega_j y_C, \quad v_{Cy}(\omega_j) = \omega_j x_C, \\ v_{Cz}(\omega_j) &= 0, \quad j = 0, 1. \end{aligned} \quad (23.27)$$

Враховуючи, що вісь  $Oz$  не головна, проекції кінетичного моменту на осі  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  запишемо, скориставшись формулами (16.80), у вигляді

$$\begin{aligned} K_x(\omega_j) &= -I_{xz}\omega_j, \quad K_y(\omega_j) = -I_{yz}\omega_j, \\ K_z(\omega_j) &= I_z\omega_j, \quad j = 0, 1. \end{aligned} \quad (23.28)$$

За допомогою наведених проекцій швидкості центра мас і кінетичного моменту, визначаючи проекції імпульсів і моментів імпульсів ударних сил та відповідних реакцій опор, дістанемо такі рівняння:

$$\begin{aligned} -m y_C (\omega_1 - \omega_0) &= S_{1x} + S_{2x} + S_x; \\ m x_C (\omega_1 - \omega_0) &= S_{1y} + S_{2y} + S_y; \\ 0 &= S_{1z} + S_{2z} + S_z; \\ -I_{xz} (\omega_1 - \omega_0) &= S_{1x} a - S_{2y} b; \\ -I_{yz} (\omega_1 - \omega_0) &= -S_{1x} a + S_{2x} b - S_z l; \\ I_z (\omega_1 - \omega_0) &= S_y l. \end{aligned} \quad (23.29)$$

Із цих рівнянь можна визначити  $S_{1x}$ ,  $S_{2x}$ ,  $S_{1y}$ ,  $S_{2y}$  і  $S_{1z} + S_{2z}$ .

Вивчаючи удар на тіло, що обертається відносно нерухомої осі, з'ясуємо, чи існують умови, у разі виконання яких ударні імпульси реакцій дорівнюють нулю, і визначимо обмеження, які ці умови накладають на решту величин, що входять у рів-

няння (23.29). При  $\bar{S}_1 = 0$  і  $\bar{S}_2 = 0$  рівняння (23.29) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} -m y_C (\omega_1 - \omega_0) &= S_x, \\ m x_C (\omega_1 - \omega_0) &= S_y, \\ 0 &= S_z, \\ I_{xz} (\omega_1 - \omega_0) &= 0, \\ I_{yz} (\omega_1 - \omega_0) &= S_z l, \\ I_z (\omega_1 - \omega_0) &= S_y l. \end{aligned} \quad (23.30)$$

Оскільки  $\omega_1 - \omega_0 \neq 0$ , то з другого і шостого рівнянь визначимо

$$l = \frac{I_z}{m x_C}. \quad (23.31)$$

Ця формула аналогічна формулі для зведеної довжини фізичного маятника (див. § 21.5). Оскільки  $S_z = 0$ , то з четвертого і п'ятого рівнянь випливає, що  $I_{xz} = 0$ ,  $I_{yz} = 0$ . Отже, вісь обертання тіла  $Oz$  має бути головною віссю інерції в точці  $O$ . Якщо помножити перше рівняння (23.30) на  $x_C$ , друге – на  $y_C$ , а третє – на  $z_C$  і скласти, то дістанемо

$$S_x x_C + S_y y_C + S_z z_C = \bar{p}_C \cdot \bar{S} = 0. \quad (23.32)$$

Це означає, що вектори  $\bar{p}_C$  і  $\bar{S}$  взаємно перпендикулярні.

Таким чином, для того щоб удар не передавався на опори осі обертання, мають виконуватися такі умови (рис. 23.3, б):

- 1) площина  $xOy$ , що містить ударний імпульс і перпендикулярна до осі обертання, має перетинатися з нею в точці  $O$ , для якої вісь обертання є головною віссю інерції;
- 2) лінія дії ударного імпульсу має бути перпендикулярною до площини, що містить центр мас тіла і вісь обертання;

3) лінія дії ударного імпульсу має бути віддалена від осі обертання на відстань  $l$ , згідно з умовою (23.31).

Точку  $D$ , в якій прикладено ударний імпульс, що задовольняє всі наведені умови, називають *центром удару*. У фізичному маятнику центр удару збігається з центром коливання, тому що у цьому разі його зведена довжина дорівнює відстані  $l$ .

Звернімо увагу на те, що наведені умови по суті збігаються з умовами (див. § 21.6) здійснення вільного плоского руху тіла. Більше того, точка  $D$  у цьому випадку збігається з точкою прикладання рівнодійної плоскої системи ударних сил (іншими силами нехтують), а вісь обертання проходить через миттєвий центр прискорення.

**Приклад 1.** Кругла мішень радіусом  $r$  підвішена до нерухомої горизонтальної осі обертання  $O$ , що збігається з дотичною до обода мішені. Визначити положення центра удару.

**Розв'язання.** Згідно з умовою задачі, це тіло є фізичним маятником. Отже, центр удару розміщується від осі підвішування на відстані зведеної довжини фізичного маятника.

За формулою (23.31) зведена довжина маятника

$$l_{\text{зв}} = I/(mh),$$

де  $h$  – відстань від точки підвішування до центра ваги:  $h=r$ . Момент інерції круга відносно поперечної центральної осі  $C$  буде  $I_C = mr^2/4$ . За теоремою Штейнера – Гюйгенса визначимо момент інерції круга відносно осі підвішування

$$I = I_C + mh^2 = \frac{mr^2}{4} + mr^2 = \frac{5}{4}mr^2.$$

Тоді

$$l_{\text{зв}} = \frac{\frac{5}{4}mr^2}{mr} = \frac{5}{4}r.$$

Отже, центр удару від осі підвішування віддалений на  $\frac{5}{4}r$ .

**Приклад 2.** Дві кульки зі слонової кістки однакової маси  $m = 1$  кг рухаються одна за одною зі швидкостями  $v_1 = 5$  м/с,  $v_2 = 10$  м/с так, що їхні центри переміщуються по одній прямій. Визначити швидкості  $u_2$ ,  $u_1$  кульок у кінці удару, а також втрату кінетичної енергії  $\Delta T$ , якщо коефіцієнт відновлення  $k = 8/9$ .

**Розв'язання.** За умовою задачі тут відбувається прямий центральний удар двох кульок. Згідно з основним рівнянням Ньютона в теорії удару (23.12) і виразом для коефіцієнта відновлення (23.13), дістанемо

$$mv_1 + mv_2 = mu_1 + mu_2,$$

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}.$$

З урахуванням заданих параметрів маємо

$$15 = u_1 + u_2, \quad \frac{8}{9} = \frac{u_2 - u_1}{-5},$$

звідки  $2u_2 = 95/9$ ;  $u_2 = 95/18 = 5,3$  м/с;  $u_1 = 9,7$  м/с.

За теоремою Остроградського – Карно (23.22) втрата кінетичної енергії

$$\begin{aligned} \Delta T &= -\frac{1-k}{1+k} \left[ \frac{1}{2}(u_2 - v_2)^2 + \frac{1}{2}(u_1 - v_1)^2 \right] = \\ &= -\frac{1/9}{17/9} \left[ \frac{1}{2} \cdot 4,7^2 + \frac{1}{2} \cdot 4,7^2 \right] = -1,3 \text{ Н} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

### Питання для самоконтролю

1. Який вид взаємодії тіл називають ударом?
2. У чому суть гіпотези Ньютона про коефіцієнт відновлення при ударі?
3. Яку з основних теорем механіки використовують у теорії удару?
4. Як формулюється теорема Остроградського – Карно?
5. Яку точку в тілі, що обертається навколо нерухомої осі, називають центром удару?

6. Поясніть, чому умови динамічного рівноваження тіла, що обертається навколо нерухомої осі, умови відсутності ударних імпульсів на вісь і умови плоского руху тіла збігаються?
7. Чим пояснити, що центр удару тіла при його обертанні навколо нерухомої осі та точка прикладення рівнодійної у випадку його плоского руху збігаються?
8. Чи можна результати, що одержані при ударі куль, поширити на удар тіл будь-якої форми?
9. За якою формулою обчислюється коефіцієнт відновлення при ударі під час експерименту?
10. Якій умові задовольняють кути падіння  $\alpha$  і відбиття  $\beta$  при косому ударі тіла об площину?

## Розділ 24 ДИНАМІКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ ТІЛА ЗМІННОЇ МАСИ

### § 24.1. Основні поняття. Рівняння І. В. Мещерського

Досі ми розглядали рух матеріальної точки і системи матеріальних точок (твердого тіла), маса яких під час руху залишається постійною. У сучасній техніці бувають випадки, коли маси об'єктів, що рухаються, змінюються в процесі руху. Прикладами тіл змінної маси можуть бути: ракета, оскільки при згорянні палива в процесі руху зменшується її маса; рулон газетного паперу під час розмотування його на валу друкарської машини; шахтовий підйомник, оскільки під час опускання чи підймання вантажу в шахту довжина підйимального каната і, отже, його маса змінюються. *Під тілом змінної маси розуміють механічну систему, маса якої неперервно змінюється внаслідок змінення складу системи через приєднання до неї або відокремлення від неї матеріальних частинок.*

У найпростішому випадку, коли тіло рухається поступально, його можна прийняти за матеріальну точку змінної маси. Основоположником механіки тіл змінної маси є І. В. Мещерський (1859–1935).

За основу досліджень І. В. Мещерський взяв гіпотезу близькодії частинок, що відокремлюються. При цьому він припускав, що під час відокремлення частинки від тіла відбувається удар, при якому за дуже малий

проміжок часу частинка, яка відокремлюється, дістає відносну швидкість і тоді подальша взаємодія цієї частинки з даним тілом припиняється. Користуючись цією гіпотезою, І. В. Мещерський вивів основне рівняння динаміки тіла змінної маси.

Своїми фундаментальними працями, що припадають на кінець XIX – початок XX ст, І. В. Мещерський створив новий розділ теоретичної механіки – теорію руху тіл змінної маси, наукову основу сучасної ракетодинаміки.

*Рівняння Мещерського.* Рівняння поступального руху тіла змінної маси дістанемо, застосувавши закон незалежності дії сил і теорему про зміну кількості руху системи. Під час руху тіла змінної маси, крім сили  $\vec{F}$ , що прикладена до тіла, також діють сили, зумовлені відокремленням або приєднанням нових частинок.

Приєднання або відокремлення частинок можливе лише тоді, коли швидкості цих частинок не дорівнюють швидкості тіла  $M$ , яке розглядається. У цьому разі змінюється кількість руху тіла.

Так, нехай у момент часу  $t$  маса тіла  $M$  дорівнює  $m$  і його абсолютна швидкість  $\vec{v}$ . Нехай до цього тіла приєднується частинка масою  $dm$  з абсолютною швидкістю  $\vec{u}$ . Через проміжок часу  $dt$ , коли частинка масою  $dm$  приєднується до тіла  $M$ , їх спільна

швидкість (якщо немає зовнішніх сил) буде  $\vec{v} + d\vec{v}$ . Кількість руху системи до приєднання частинки

$$\vec{Q} = m\vec{v} + \vec{u}dm. \quad (24.1)$$

Після приєднання частинки кількість руху

$$\begin{aligned} \vec{Q}_1 &= (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) = \\ &= m\vec{v} + \vec{v}dm + m d\vec{v} + dm d\vec{v}. \end{aligned} \quad (24.2)$$

Тоді елементарний приріст кількості руху тіла

$$\begin{aligned} d\vec{Q} &= \vec{Q}_1 - \vec{Q} = m\vec{v} + \vec{v}dm + m d\vec{v} + \\ &+ dm d\vec{v} - m\vec{v} - \vec{u}dm = \\ &= m d\vec{v} + dm d\vec{v} - (\vec{u} - \vec{v})dm. \end{aligned} \quad (24.3)$$

За теоремою імпульсів (див. § 16.5)

$$d\vec{Q} = \vec{F}dt. \quad (24.4)$$

Отже,

$$m d\vec{v} + dm d\vec{v} - dm(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{F}dt. \quad (24.5)$$

Звідси, нехтуючи добутком  $dm d\vec{v}$  як величиною другого порядку мализни, дістанемо, розділивши на  $dt$ :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{v}_r, \quad (24.6)$$

де  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{v}_r$  – відносна швидкість приєднуваної до тіла частинки. Вектор  $\frac{dm}{dt} \vec{v}_r = \vec{\Phi}$  називають *реактивною силою*. Остаточно запишемо

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{\Phi}. \quad (24.7)$$

Реактивна сила  $\vec{\Phi}$  пропорційна змінній маси тіла за одиницю часу і відносній швидкості частинок, що відокремлюються (або приєднуються). Отже, щоб збільшити

реактивну силу, треба збільшити швидкість змінення маси тіла і відносну швидкість частинок, що відокремлюються.

Важливо також зазначити, що тіло змінної маси може рухатися з прискоренням і тоді, коли немає зовнішніх сил. Якщо  $\vec{F} = 0$ , то, згідно з рівнянням (24.7), дістанемо  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\Phi}$ , тобто рух тіла буде прискореним.

Співвідношення (24.7) є основним законом руху тіла змінної маси, який формулюється так: *під час руху тіла змінної маси у будь-який момент часу добуток маси цього тіла на його прискорення дорівнює геометричній сумі зовнішньої сили  $\vec{F}$  і реактивної сили  $\vec{\Phi}$ , що діють на тіло.*

Здебільшого можна прийняти гіпотезу К. Е. Цюлковського про те, що *відносна швидкість  $\vec{v}_r$  частинок, що відокремлюються, постійна за величиною, напрямлена по дотичній до траєкторії руху тіла змінної маси в бік, протилежний швидкості  $\vec{v}$  руху тіла.*

З урахуванням цього рівняння (24.7) набуде вигляду

$$m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{v}_r \frac{dm}{dt}, \quad (24.8)$$

де  $\vec{t}$  – орт дотичної до траєкторії руху тіла. В окремому випадку, коли абсолютна швидкість частинок, що відокремлюються або приєднуються, дорівнює нулю ( $\vec{u} = 0$ ), рівняння Мещерського збігається з формою запису другого закону Ньютона

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{dm}{dt} \vec{v} \quad \text{або} \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}. \quad (24.9)$$

Якщо ж відносна швидкість  $\vec{v}_r$  частинок, що відокремлюються, дорівнює нулю, то

реактивна сила  $\vec{\Phi}$  також дорівнює нулю і рівняння (24.8) набуде вигляду основного рівняння руху матеріальної точки постійної маси

$$m\vec{w} = \vec{F}. \quad (24.10)$$

### § 24.2. Перша задача К. Е. Цюлковського

Розглянемо рух тіла змінної маси у безповітряному просторі, коли на нього не діють ніякі зовнішні сили, вважаючи при цьому, що відносна швидкість  $\vec{v}_r$  відокремлення частинок постійна за величиною ( $v_r = \text{const}$ ), колінеарна вектору швидкості  $\vec{v}$  тіла і напрямлена у протилежний від неї бік. Припустивши в рівнянні (24.7) або (24.8)  $\vec{F} = 0$ , дістанемо

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\Phi} \text{ або } m \frac{d\vec{v}}{dt} = -v_r \frac{dm}{dt}. \quad (24.11)$$

У проекції на дотичну до траєкторії це рівняння, після очевидних перетворень, набуде вигляду

$$dv = -v_r \frac{dm}{m}.$$

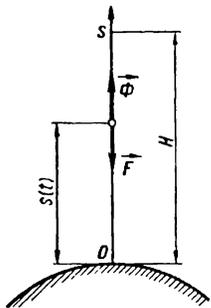


Рис. 24.1

Інтегруючи це рівняння за початкових умов ( $t=0$ )  $v(0)=0$  і  $m(0)=m_0$ , дістанемо

$$v = v_r \ln \frac{m_0}{m}. \quad (24.12)$$

Звідси випливає, що найбільшого значення швидкості  $\vec{v}$  тіло досягне в кінці процесу відкидання частинок. Якщо позначити через  $m_k$  масу тіла в кінці процесу відкидання, то

$$v_{\text{max}} = v_k = v_r \ln \frac{m_0}{m_k}. \quad (24.13)$$

Цю формулу вперше вивів К. Е. Цюлковський<sup>1</sup> і опублікував у 1903 р.

### § 24.3. Друга задача К. Е. Цюлковського

Припустимо, що тіло змінної маси рухається вертикально вгору (рис. 24.1) в однорідному полі сили ваги. Треба встановити закон руху цього тіла, тобто закон змінення швидкості та відстані  $s$  (висоти  $H$ ) тіла змінної маси у функції часу при різних законах змінення його маси.

Вважаємо, що відносна швидкість  $\vec{v}_r$  частинок, що відокремлюються, постійна за значенням і напрямлена вертикально вниз. Візьмемо пряму, по якій рухається точка змінної маси, за вісь  $OS$  (рис. 24.1). Проектуючи рівняння (24.8) на цю вісь і враховуючи, що  $\vec{F} = m(t)\vec{g}$ , дістанемо

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - v_r \frac{dm}{dt} \quad (24.14)$$

або

$$\frac{d}{dt}(v + gt) = -v_r \frac{1}{m} \frac{dm}{dt}. \quad (24.15)$$

<sup>1</sup>Цюлковский К. Э. Исследование мировых пространств реактивными приборами. Избр. тр.: В 5 т. - М.: Госмашметиздат, 1934. - Т. 2. - 453 с.

Інтегруючи це рівняння за початкових умов ( $t=0$ )  $v(0)=0$  і  $m(0)=m_0$ , одержимо

$$v = v_r \ln \frac{m_0}{m} - gt. \quad (24.16)$$

У кінці періоду відокремлення частинок, тобто при  $t=t_k$ , маса тіла  $m=m_k$ , а його швидкість буде

$$v_k = v_r \ln \frac{m_0}{m_k} - gt_k. \quad (24.17)$$

Порівнюючи формули (24.13) і (24.17), бачимо, що частина маси, яка відкидається, витрачається на “покриття” швидкості  $gt_k$ , зумовленої однорідним полем сили ваги.

Щоб тіло змінної маси почало рухатися вертикально вгору, реактивна сила має бути більша за силу ваги ( $\Phi \geq F$ ) або

$mg + v_r \frac{dm}{dt} \geq 0$ . Знак рівності відповідає стану рівноваги тіла змінної маси. Інтегруючи це рівняння для випадку рівноваги за умови, що  $m(0)=m_0$ , дістанемо

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\frac{g}{v_r} t$$

або

$$m = m_0 e^{-\frac{g}{v_r} t}. \quad (24.18)$$

Отже, якщо процес відокремлення частинок тіла здійснюється за законом (24.18), то це тіло перебуватиме у стані рівноваги. Для того щоб воно почало рухатися вгору, процес відокремлення частинок має бути інтенсивнішим.

Розглянемо цей процес за законом

$$m = m_0 e^{-n \frac{g}{v_r} t}, \quad (24.19)$$

де  $n$  – додатне число, більше за одиницю. Тоді

$$\Phi = -v_r \frac{dm}{dt} = nm_0 g e^{-n \frac{g}{v_r} t} = mng. \quad (24.20)$$

При цьому прискорення тіла змінної маси, зумовлене реактивною силою  $\Phi$ , визначимо з рівняння (24.7) при  $\vec{F} = 0$ :

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{\Phi}{m} = ng. \quad (24.21)$$

Звідси видно, що

$$n = w/g \quad (24.22)$$

є переваженням, спричиненим реактивною силою  $\Phi$ .

Виведемо формулу для визначення відстані  $s(t)$ , що пройдена тілом. Як видно із співвідношення (24.16), для визначення  $s(t)$  треба задати закон змінення маси  $m(t)$ . Припустимо, що маса точки змінюється за законом, який виражається співвідношенням (24.19); тоді, підставивши це співвідношення у формулу (24.16) для швидкості, дістанемо

$$v = \frac{ds}{dt} = (n-1)gt. \quad (24.23)$$

Інтегруючи це рівняння і враховуючи початкові умови ( $t=0, s(0)=0$ ), визначимо

$$s = \frac{g(n-1)}{2} t^2. \quad (24.24)$$

Із формули Ціолковського (24.17), яку зручно подати у формі

$$v_k^* = v_r \ln z, \quad (24.25)$$

де  $z = m_0/m_k$  – число Ціолковського, а  $v_k^* = v_k + gt_k$ , випливає важливий висновок

про те, що підвищення відносної швидкості відокремлення частинок  $v_r$  має більший вплив на значення кінцевої швидкості  $v_k$  руху тіла змінної маси, ніж збільшення числа Ціолковського  $z$ . У цьому можна переко-  
нати завдяки простим підрахункам. Із (24.17) бачимо, що підвищення відносної швидкості відокремлення частинок  $v_r$ , на-  
приклад удвічі, підвищує швидкість  $v_k = v_{\max}$  теж удвічі, тому що  $v_k^{(1)} = 2v_r \ln z$ , а збіль-  
шення числа Ціолковського вдвічі під-  
вищує  $v_k \left( v_k^{(2)} = v_r \ln 2 \approx 0,7v_r \right)$  лише у  $\ln 2 \approx 0,7$  раза.

На сьогодні для хімічних палив, що ви-  
користовуються в ракетах, ефективна швид-  
кість витікання газів  $v_r \approx 2500 \text{ м/с}$ . Знай-  
демо, яким має бути число  $z$ , щоб ракета  
на момент згоряння палива при  $v_r \approx$   
 $\approx 2400 \text{ м/с}$  досягла першої космічної швид-  
кості ( $7,9 \text{ км/с}$ ).

Потрібно врахувати, що на подолання  
аеродинамічного опору атмосфери та ін-  
ших причин втрати швидкості складають  
10–15 %. Тому розрахунок проведемо для

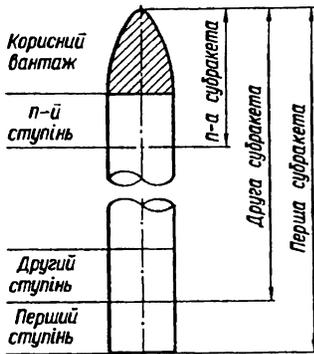


Рис. 24.2

$v_k^* = 9000 \text{ м/с}$ . Згідно з формулою (24.25),  
знайдемо

$$z = e^{\frac{v_k^*}{v_r}} = e^{3,75} \approx 42,5. \quad (24.26)$$

Це означає, що  $m_0 = 42,5 m_k$ , тобто стартова  
маса ракети має бути в 42,5 раза більша за  
масу ракети без палива. Інакше кажучи, вага  
палива буде складати 98 % від стартової  
ваги одноступеневої ракети. Для сучасних  
ракет число Ціолковського значно менше  
ніж 42,5. Це досягається застосуванням бага-  
тоступневих ракет.

#### § 24.4. Формула К. Е. Ціолковського для багатоступневих ракет

На рис. 24.2 наведена схема багатосту-  
пеневої ракети.

Багатоступенева ракета складається з де-  
кількох ступенів і корисного вантажу. Після  
витрати палива у відповідному ступені вона  
відокремлюється від конструкції.

Введемо поняття *субракети*.

Субракетою будемо називати сукул-  
ність працюючих ступенів, усіх непрацюю-  
чих ступенів і корисного вантажу. Причому  
для даної субракети всі непрацюючі ступені  
(вищого порядкового номера) і корисний  
вантаж є "корисним вантажем". Тобто кож-  
на субракета розраховується як одноступе-  
нева ракета (рис. 24.2).

Застосовуючи формулу Ціолковського  
(24.25) до кожної субракети, отримаємо

$$v_1 = v_r^{(1)} \ln z_1,$$

де  $v_r^{(1)}$  – ефективна швидкість витoku в  
першому ступені (відносна швидкість відок-  
ремлення частинок);  $z_1$  – число Ціолковсь-  
кого для першої субракети;

після відпрацювання другого ступеня швидкість третьої субракетки буде

$$v_2 = v_1 + v_r^{(2)} \ln z_2 = v_r^{(1)} \ln z_1 + v_r^{(2)} \ln z_2,$$

і нарешті після відпрацювання  $n$ -го ступеня швидкість корисного вантажу

$$v = v_r^{(1)} \ln z_1 + v_r^{(2)} \ln z_2 + \dots + v_r^{(n)} \ln z_n, \quad (24.27)$$

де  $v_r^{(n)}$  – ефективна швидкість вибою  $n$ -го ступеня,  $z_n$  – число Цюлковського для  $n$ -ї субракетки.

Якщо віднести відносні швидкості  $v_r^{(i)}$  ( $i = 2, \dots, n$ ) до  $v_r^{(1)}$  і ввести позначення

$$k_i = \frac{v_r^{(i)}}{v_r^{(1)}}, \text{ то формулі (24.27) можна надати}$$

вигляду

$$v = v_r^{(1)} \ln z_1 z_2^{k_2} z_3^{k_3} \dots z_n^{k_n} = v_r^{(1)} \ln Z, \quad (24.28)$$

де  $Z$  – результуюче число Цюлковського

$$Z = z_1 z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n}. \quad (24.29)$$

Якщо прийняти, що паливо на всіх ступенях однакове і однакова його швидкість витікання, тоді  $k_2 = k_3 = \dots = k_n = 1$  і

$$Z = z_1 z_2 z_3 \dots z_n. \quad (24.30)$$

Якщо до того ж прийняти

$$z_1 = z_2 = z_3 = \dots = z_n = z, \quad (24.31)$$

то формула (24.27) набуде найпростішого вигляду

$$v = n v_r^{(1)} \ln z. \quad (24.32)$$

Звідси видно, що кінцева швидкість  $v$  корисного вантажу пропорційна числу ступенів (коли  $v_r^{(i)}$  і  $z_i$  однакові).

Обчислімо для прикладу число  $z$ , яке повинна мати кожна ракета для досягнення корисним вантажем швидкості  $v = 9000 \text{ м/с}$

при  $v_r^{(1)} = 2400 \text{ м/с}$ .

При  $n = 1$  (одноступенева ракета)

$$z = e^{3.75} \approx 42,5;$$

при  $n = 2$  (двоступенева ракета)

$$z = e^{\frac{3.75}{2}} \approx 6,48;$$

при  $n = 3$  (триступенева ракета)

$$z = e^{\frac{3.75}{3}} \approx 3,49;$$

і, нарешті, нескінченноступенева ракета  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{3.75}{n}} = 1.$$

Із цих розрахунків видно, що при реальних числах Цюлковського космічних швидкостей можна досягнути лише при застосуванні багатоступеневих ракет.

Зазначимо, що неврахування опору атмосфери в цих задачах дає похибку у визначенні величин швидкості в межах 10–15%.

## § 24.5. Рівняння руху тіла змінної маси. Основні теореми динаміки

Для того щоб скласти рівняння руху тіла змінної маси, потрібно вивести основні теореми динаміки для випадку тіла, або системи змінної маси. Тому цей параграф так і побудуємо. Обмежимося записом теорем для випадку приєднання мас. Коли ж буде випадок від'єднання мас, то потрібно лише змінити знак перед відповідними членами.

**1. Теорема про зміну головного вектора кількості руху системи.**

Розглянемо рівняння І. В. Мещерського для окремої точки системи:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i^e + (\vec{u}_i - \vec{v}_i) \frac{dm_i}{dt}, \quad (24.33)$$

$i = 1, 2, \dots, n.$

Перенісши член  $\left(-\vec{v}_i \frac{dm_i}{dt}\right)$  в ліву частину рівняння (24.33), запишемо його у формі

$$\frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \vec{F}_i^e + \vec{u}_i \frac{dm_i}{dt} \quad (24.34)$$

або

$$\frac{d\vec{q}_i}{dt} = \vec{F}_i^e + \vec{u}_i \frac{dm_i}{dt}, \quad (24.35)$$

$i = 1, 2, \dots, n.$

Виконавши операцію підсумовування для всіх точок в (24.35), одержимо

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e + \sum_{i=1}^n \vec{u}_i \frac{dm_i}{dt}, \quad (24.36)$$

де  $\vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$  – головний вектор кількості руху системи.

**2. Теорема про зміну моменту кількості руху системи зі змінною масою.**

Скористасємось системами координат, зображеними на рис. 16.5, відповідними позначеннями і співвідношеннями § 16.10.

Знову звернемося до рівняння Мещерського, записаного у формі (24.34). Помноживши векторно його ліву і праву частини на  $\vec{r}_i$ , враховуючи, що для  $i$ -ї точки  $\vec{k}_{Ai} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$ , отримаємо

$$\frac{d\vec{k}_{Ai}}{dt} = \dot{r}_i \times \vec{F}_i^e + \vec{r}_i \times \vec{u}_i \frac{dm_i}{dt}, \quad (24.37)$$

$i = 1, 2, \dots, n.$

Виконавши операцію підсумовування по індексу  $i$ , матимемо

$$\frac{d\vec{K}_A}{dt} = \vec{M}_A^e + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{u}_i \frac{dm_i}{dt}. \quad (24.38)$$

Таким чином, отримали теорему про зміну кінетичного моменту матеріальної системи зі змінною масою в нерухомій системі координат. Для практичного її застосування потрібно в рівнянні (24.38) перейти до полюса  $O$  рухомої системи координат (рис. 16.5).

Для цього із § 16.10 випишемо потрібні нам співвідношення

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_i. \quad (24.39)$$

Позначимо  $\vec{u}_i$  абсолютну швидкість частинки, що приєднується до тіла. Вона дорівнює сумі швидкості  $i$ -ї точки і відносній швидкості  $\vec{u}_i$

$$\vec{u}_i = \vec{v}_i + \vec{u}_{ri}. \quad (24.40)$$

Кількість руху такої системи буде

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_C = \\ &= m \left( \vec{v}_O + \frac{d\vec{p}_C}{dt} \right). \end{aligned} \quad (24.41)$$

Тут  $\frac{d\vec{p}_C}{dt}$  – абсолютна похідна.

Момент кількості руху визначатиметься за формулами (16.48), (16.51), тобто

$$\vec{K}_A = \vec{r}_O \times \vec{Q} + m \vec{p}_C \times \vec{v}_O + \vec{K}_O^e + \vec{K}_O^r, \quad (24.42)$$

де  $\vec{K}_O^r$  – в нашому випадку дорівнюватиме

$$\vec{K}_O^r = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{u}_{ri}, \quad (24.43)$$

де  $\Delta m_i$  – приріст маси  $i$ -ї точки.

Підставимо вирази (24.42) в рівняння (24.38) і, обчислюючи абсолютні похідні, перейдемо в моменті  $\bar{M}_A^e$  до полюса  $O$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\bar{K}_O^{\omega} + \bar{r}_O \times \bar{Q} + m\bar{p}_C \times \bar{v}_O + \bar{K}_O^r) = \\ & = \bar{M}_O^e + \bar{r}_O \times \bar{F}^e + \sum_{i=1}^n (\bar{r}_O + \bar{\rho}_i) \times \bar{u}_i \frac{dm_i}{dt}. \end{aligned} \quad (24.44)$$

Здиференціювавши ліву частину рівності (24.44), з урахуванням (24.36), отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{d\bar{K}_O^{\omega}}{dt} + \bar{v}_O \times \bar{Q} + \bar{r}_O \times \frac{d\bar{Q}}{dt} + m \frac{d\bar{p}_C}{dt} \times \bar{v}_O + \\ & + m\bar{p}_C \times \frac{d\bar{v}_O}{dt} + \frac{d\bar{K}_O^r}{dt} = \frac{d\bar{K}_O^{\omega}}{dt} + \bar{v}_O \times \\ & \times m \left( \bar{v}_O + \frac{d\bar{p}_C}{dt} \right) + \frac{d\bar{K}_O^r}{dt} + \bar{r}_O \times \\ & \times \left( \bar{F}^e + \sum_{i=1}^n \bar{u}_i \frac{dm_i}{dt} \right) + \\ & + m \frac{d\bar{p}_C}{dt} \times \bar{v}_O + m\bar{p}_C \times \frac{d\bar{v}_O}{dt}. \end{aligned} \quad (24.45)$$

З урахуванням (24.45) рівняння (24.44) набере вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{d\bar{K}_O^{\omega}}{dt} + \frac{d\bar{K}_O^r}{dt} + m\bar{p}_C \times \bar{w}_O = \\ & = \bar{M}_O^e + \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \times \bar{u}_i \frac{dm_i}{dt}. \end{aligned} \quad (24.46)$$

Підставимо тепер в (24.46) значення  $\bar{K}_O^r$  п (24.43) і перейдемо від абсолютної похідної до похідної в рухомій системі координат  $Oxyz$ , враховуючи, що  $\frac{d\bar{\rho}_i}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{\rho}_i$ , залишаючи в похідній від маси абсолютну похідну

$$\begin{aligned} & \frac{d\bar{K}_O^{\omega}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O^{\omega} = \bar{M}_O^e - m\bar{p}_C \times \bar{w}_O - \\ & - \sum_{i=1}^n \left[ \bar{\rho}_i \times \bar{u}_{ri} \frac{dm_i}{dt} + \Delta m_i (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i) \times \bar{u}_{ri} \right] + \\ & + \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \times (\bar{v}_i + \bar{u}_{ri}) \frac{dm_i}{dt} = \bar{M}_O^e - m\bar{p}_C \times \bar{w}_O - \\ & - \sum_{i=1}^n \Delta m_i (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i) \times \bar{u}_{ri} + \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \times \bar{v}_i \frac{dm_i}{dt}. \end{aligned} \quad (24.47)$$

Якщо врахувати (24.39) і що

$$\bar{K}_O^{\omega} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{\rho}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i) = I_O \bar{\omega},$$

де  $I_O$  – матриця-тензор моменту інерції в точці  $O$ , то

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \times (\bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_i) \frac{dm_i}{dt} = \\ & = \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \times \bar{v}_O \frac{dm_i}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{dm_i}{dt} \bar{\rho}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i) = \\ & = \left( \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \frac{dm_i}{dt} \right) \times \bar{v}_O + \frac{dI_O}{dt} \bar{\omega}. \end{aligned} \quad (24.48)$$

Таким чином, в кінцевому результаті отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{d\bar{K}_O^{\omega}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O^{\omega} = \bar{M}_O^e - m\bar{p}_C \times \bar{w}_O + \\ & + \frac{dI_O}{dt} \bar{\omega} - \sum_{i=1}^n \Delta m_i (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i) \times \bar{u}_{ri} + \\ & + \left( \sum_{i=1}^n \frac{dm_i}{dt} \bar{\rho}_i \right) \times \bar{v}_O. \end{aligned} \quad (24.49)$$

Рівняння (24.49), з урахуванням виразу для  $\bar{K}_O^{\omega}$  через матрицю-тензор моменту інерції, можна записати у формі, оскільки

$$\frac{d\bar{K}_O^{\omega}}{dt} = I_O \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \frac{dI_O}{dt} \bar{\omega}, \text{ то}$$

$$I_O \frac{d\ddot{\omega}}{dt} + \ddot{\omega} \times \bar{K}_O^{\omega} = \bar{M}_O^e - m \bar{p}_C \times \ddot{\omega}_O - \sum_{i=1}^n \Delta m_i (\ddot{\omega} \times \bar{p}_i) \times \bar{u}_i + \left( \sum_{i=1}^n \frac{dm_i}{dt} \bar{p}_i \right) \times \ddot{v}_O. \quad (24.50)$$

Два останні члени в правій частині (24.50) відображають дію реактивного моменту на тіло змінної маси.

Зазначимо, що в конкретних випадках, коли реактивні сили обчислювати з урахуванням того, що вони створюються у соплах реактивних двигунів, то, як показано в монографії А. І. Лур'є<sup>1</sup>, процедура обчислення реактивного моменту є досить простою і зводиться до обчислення моменту сили реактивної тяги відносно полюса і моменту сил інерції Коріоліса, що виникають при цьому.

### 3. Теорема про зміну кінетичної енергії.

Знову звернемося до рівняння Мещерського (24.6) для окремої точки

$$m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \bar{F}_i^e + (\bar{u}_i - \bar{v}_i) \frac{dm_i}{dt}, \quad (24.51)$$

$i = 1, 2, \dots, n.$

Помножимо скалярно ліву і праву частини рівнянь (24.51) на вектор  $\bar{v}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt}$ . Тоді, враховуючи змінність маси точки  $m_i$ , отримаємо

$$d \left( \frac{m_i \bar{v}_i^2}{2} \right) = \bar{F}_i^e \cdot d\bar{r}_i + (\bar{u}_i \cdot \bar{v}_i - \bar{v}_i^2) dm_i + \frac{\bar{v}_i^2}{2} dm_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

або

$$d \left( \frac{m_i \bar{v}_i^2}{2} \right) + \frac{\bar{v}_i^2}{2} dm_i = \bar{F}_i^e \cdot d\bar{r}_i + (\bar{u}_i \cdot \bar{v}_i) dm_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (24.52)$$

<sup>1</sup>Лур'є А. И. Аналитическая механика. – М.: Гостехиздат, 1961. – 824 с.

Рівність (24.52) виражає в диференціальній формі теорему про зміну кінетичної енергії для однієї точки змінної маси.

Для отримання теореми про зміну кінетичної енергії для системи складемо почленно рівняння (24.52), тоді дістанемо

$$dT + \sum_{i=1}^n \frac{\bar{v}_i^2}{2} dm_i = \sum_{i=1}^n d'A_i^e + \sum_{i=1}^n (\bar{u}_i \cdot \bar{v}_i) dm_i. \quad (24.53)$$

Отже, сума зміни кінетичної енергії системи і кінетичної енергії приросту її маси дорівнює сумі елементарних робіт сил, прикладених до точок системи, і елементарній роботі сил, які залежать від зміни мас системи.

### Питання для самоконтролю

1. Як записується рівняння Мещерського для поступального руху тіла змінної маси?
2. Що називають реактивною силою і як її обчислюють?
3. За якою формулою обчислюється максимальна швидкість тіла в першій задачі Цюлковського?
4. Як впливає сила ваги на кінцеву швидкість тіла а другій задачі Цюлковського?
5. Чи можете Ви записати умову, при якій реактивна сила і сила ваги рівноважуються і тіло, що стартує вертикально, залишається у рівновазі?
6. Яке співвідношення в динаміці рухомих об'єктів називають переважанням?
7. Яку перевагу мають багатоступеневі ракети перед одноступневими?
8. Як записати рівняння Мещерського для системи матеріальних точок у випадку поступального руху?
9. Чи зможете Ви записати теорему про зміну моменту кількості руху системи зі змінною масою?
10. Як формулюється теорема про зміну кінетичної енергії для системи змінної маси?

Розділ 25

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ.

ПРИНЦИП МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ. ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА – ЛАГРАНЖА

§ 25.1. Короткі історичні відомості.

Предмет аналітичної механіки

У XVIII ст. з'являється ряд фундаментальних досліджень, що стосуються створення динаміки нівельної системи і загальних принципів механіки (Д. Бернуллі, Л. Ейлера, І. Ньютона, Ж. Д'Аламбера). Спираючись на ці дослідження, Ж. Лагранж (1736–1813) у кінці XVIII ст. створив основи аналітичної механіки як науки. Свої результати він опублікував у двотомному творі “Аналітична механіка” у 1788 р., який визначив основні напрями подальшого розвитку теоретичної механіки XIX ст. у працях М. В. Остроградського (1801–1862), К. Якобі (1804–1851), С. Пуассона (1781–1840), У. Гамільтона (1805–1865). У дослідженнях цих учених отримані результати, що стосуються виведення диференціальних рівнянь руху вільної системи і методів їх інтегрування, відкриття нових загальних принципів механіки у диференціальній та інтегральній формах.

За означенням Ж. Лагранжа, цей розділ механіки є сукупністю найбільш загальних аналітичних методів розв'язання задач механіки вільних і нівельних матеріальних систем, що не ґрунтуються на наочних геометричних уявленнях, які використовував ще І. Ньютон.

Зуважимо, що таке протиставлення значною мірою позбавлене змісту, оскільки в аналітичній механіці використовується ряд узагальнених геометричних уявлень: уявлення про багатовимірний простір, що відрізняється від евклідового; поняття про метричні співвідношення в просторі, що пов'язане з рухомою матеріальною системою, силами, які на неї діють, і накладеним в'язям. У сучасній аналітичній механіці аналітичні методи і геометричні образи настільки взаємозв'язані, що не може бути й мови про їх відокремлення.

Суттєву роль в аналітичній механіці та її численних застосуваннях у техніці відіграють теорії стійкості руху і малих коливань механічних систем. Основоположниками цих наукових напрямів є Л. Ейлер, Ж. Д'Аламбер і Ж. Лагранж. У XIX ст. теорія малих коливань і теорія стійкості набули розвитку в працях П. Діріхле (1805–1859), Е. Пауса (1831–1907), К. Вейерштрасса (1815–1897), М. С. Жуковського (1847–1921), А. Пуанкаре (1854–1912). Особливо важливий, визначальний внесок у розвиток теорії стійкості дав О. М. Ляпунов (1857–1918). Він побудував ряд загальних методів дослідження і розв'язав багато конкретних задач. У XX ст. дослідженнями у цій галузі займалась велика група вчених як вітчизняних, так і зарубіжних. Найзначніші результати в теорії стійкості після О. М. Ляпунова одержали такі механіки як М. Г. Четаєв (1902–1959), І. Г. Малкін (1907–1958), Г. В. Каменков (1908–1966), В. В. Румянцев, В. М. Матросов, А. А. Мартинов та ін.

Теорія коливань (лінійних і нелінійних) у XX ст. набула суттєвого розвитку переважно в працях М. М. Крилова (1879–1955), М. М. Боголюбова, Л. І. Мандельштама (1879–1944), М. Д. Палалексі (1880–1947), О. О. Андропова (1901–1952), В. В. Булгакова (1900–1952), В. О. Кононенка (1918–1975), М. В. Бутеніна, Ю. О. Митропольського та їх численних учнів.

На межі XIX і XX ст. з'явився і почав інтенсивно розвиватися новий розділ теоретичної механіки – динаміка неголономних систем. Основоположниками цього розділу динаміки є С. О. Чаплігін (1869–1942), В. Вольтерра (1860–1940), П. Апелль (1855–1930), П. В. Воронєць (1871–1923), Л. Больцман (1844–1906) і Г. Гамель (1877–1954).

У XX ст. аналітична механіка досягла високого ступеня розвитку, переважно завдяки дослі-

дженням Г. К. Сулова (1857–1931), М. О. Кільчевського (1909–1979), А. І. Лур'є (1901–1980), Г. М. Савіна (1907–1976), В. В. Румянцева, Е. Т. Уїттекера та ін.

Упродовж майже двохсотлітнього періоду існування аналітичної механіки були розроблені особливі методи дослідження, які виявилися настільки ефективними, що проникли в суміжні галузі: геометрію, прикладну математику, загальну теорію відносності, термодинаміку, електродинаміку, теорію оптимального керування, робототехніку, статистичну фізику і квантову механіку.

Основою аналітичної механіки є три групи фундаментальних положень<sup>1</sup>.

До першої групи слід віднести варіаційні принципи, які в простій інваріантній формі містять формулювання найбільш загальних закономірностей механіки. Із них назвемо розглядані тут диференціальні принципи можливих переміщень Д'Аламбера – Лагранжа, а також інтегральний принцип Гамільтона – Остроградського.

Друга група фундаментальних положень об'єднує диференціальні рівняння руху механічних систем, які є наслідком варіаційних принципів. Із них нижче будуть розглянуті рівняння Лагранжа другого роду в різних його формах, канонічні рівняння динаміки тощо.

Третя група фундаментальних положень аналітичної механіки об'єднує загальні методи інтегрування рівнянь динаміки. Центральне місце тут займає метод Гамільтона – Якобі, а також теорема Пуассона.

Основоположними поняттями цього розділу механіки є: уявлення про в'язі та їх класифікація (це ми розглянули раніше); поняття про дійсні й можливі переміщення системи.

## § 25.2. Дійсні і можливі переміщення

Розглянемо нескінченно малі переміщення точок системи, які сумісні з в'язями, накладеними на систему. Серед цих переміщень будемо розрізняти два види переміщень, що мають основне значення у подальшому, – дійсні і можливі.

<sup>1</sup>Кільчевский Н. А. Проблемы аналитической механики дискретных и непрерывных систем // Прикл. механика. – 1969. – Т. 5, вып. 2. – С. 13 22.

*Дійсними називають такі елементарні переміщення точок системи, що не суперечать в'язям і відбуваються під дією заданих сил. Із сказаного випливає, що ці переміщення відповідають дійсному закону руху системи.*

На відміну від дійсних, *можливі переміщення* розглядаються незалежно від діючих сил, закону руху системи і являють собою нескінченну сукупність уявних одночасних переміщень точок системи, сумісних із в'язями.

*Отже, можливими називають такі елементарні уявні переміщення точок системи, що не суперечать в'язям і відбуваються у фіксований момент часу.*

Слід підкреслити, що можливі переміщення – це деякий геометричний образ, не пов'язаний ні з рухом, ні зі зміною самих в'язей. Це сукупність елементарних переміщень, зумовлених лише структурою на мить “зупинених” в'язей. Сили, що прикладені до точок системи, якій надаються можливі переміщення, вважаються незмінними. Це пояснюється тим, що в загальному випадку сили є складними функціями часу, а час фіксується при розгляді можливих переміщень. Тому і нестационарні в'язі треба вважати “зупиненими”.

Згідно з викладеним, дійсні переміщення в разі векторного способу задання руху характеризуються нескінченно малими приростами радіусів-векторів  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(x_i, y_i, z_i, t)$ , точок системи в часі, які з точністю до малих другого порядку мализни визначаються їхніми диференціалами і математично виражаються так:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial z_i} dz_i + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt. \quad (25.1)$$

На відміну від дійсних переміщень, можливі переміщення – це нескінченно малі прирости радіуса-вектора точки, спричинені зміненням координат  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  незалежно від фіксованого часу  $t$ . Такого роду не-

скінченно малий приріст радіуса-вектора точки назвемо *варіацією* і позначимо

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial z_i} \delta z_i. \quad (25.2)$$

Звертаємо увагу, що *варіація часу дорівнює нулю* ( $\delta t = 0$ ). Надалі дійсні переміщення точок системи домовимося позначати  $d\vec{r}_i$ , а можливі –  $\delta \vec{r}_i$ .

Із сказаного можна зробити висновок, що *дійсні переміщення системи*  $d\vec{r}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) є одними з її *можливих переміщень*  $\delta \vec{r}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) *тільки в разі стаціонарних в'язей*. Для ілюстрації звернімося до простого прикладу про рух матеріальної точки по деякій кривій, що також рухається у просторі (рис. 25.1). На цьому рисунку показані можливі  $\delta \vec{r}_i$  і дійсне  $\overline{MM_1}$  переміщення матеріальної точки  $M$ .

Виведемо аналітичний вираз обмежень, що накладаються в'язями на можливі переміщення.

Припустимо, що на систему матеріальних точок накладено  $l$  геометричних або голономних в'язей

$$f_j(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad (25.3)$$

і  $m$  неголономних лінійних двосторонніх в'язей

$$\sum_{i=1}^n (A_{si} dx_i + B_{si} dy_i + C_{si} dz_i) + D_s dt = 0, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (25.4)$$

де коефіцієнти  $A_{si}, B_{si}, C_{si}, D_s$  є відомими функціями часу і координат.

Щоб дістати обмеження, які накладаються голономними в'язями на можливі переміщення, визначимо диференціали лівих і правих частин рівностей (25.3):

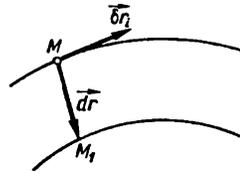


Рис. 25.1

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} dz_i \right) + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l. \quad (25.5)$$

У цьому співвідношенні замінимо  $dx_i, dy_i, dz_i$  на  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$  і відкинемо доданок із множником  $dt$ , оскільки  $\delta t = 0$ . Тоді

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l. \quad (25.6)$$

Застосувавши аналогічний прийом до рівностей (25.4), дістанемо

$$\sum_{i=1}^n (A_{si} \delta x_i + B_{si} \delta y_i + C_{si} \delta z_i) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (25.7)$$

Співвідношення (25.6) і (25.7) є аналітичними обмеженнями, що накладаються в'язями (25.3) і (25.4) на можливі переміщення точок системи.

Розглянемо приклад, який дає змогу глибше зрозуміти зміст можливих переміщень. Припустимо, що матеріальна точка  $M$  рухається по поверхні, рівняння якої

$$f(t, x, y, z) = 0. \quad (25.8)$$

Можливі переміщення  $\delta \vec{r} = \{\delta x, \delta y, \delta z\}$ , згідно з (25.6), мають задовольняти умову

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0. \quad (25.9)$$

Оскільки  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  є компонентами

вектора  $\overline{\text{grad}} f$ , що напрямлений по зовнішній нормалі  $\vec{n}$  до поверхні (25.8), то рівність (25.9) показує, що під час руху точки  $M$  по поверхні (25.8) можливі переміщення є сукупністю нескінченно малих векторів, які лежать у дотичній площині до “зупиненої” в даний момент часу поверхні, а тому має місце співвідношення

$$\overline{\text{grad}} f \cdot \delta \vec{r} = 0. \quad (25.10)$$

### § 25.3. Число степенів вільності системи

Із співвідношень (25.6) і (25.9), що визначають обмеження, накладені в'язями (25.3), (25.4) на можливі переміщення точок системи, впливають поняття та означення числа степенів вільності системи.

*Числом степенів вільності матеріальної системи називають кількість незалежних можливих переміщень, які можна надати її точкам у фіксований момент часу.*

Беручи до уваги, що  $l + m$  співвідношень (25.6) і (25.9) зв'язують  $3n$  проєкцій варіацій координат  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), число степенів вільності системи визначиться формулою

$$k = 3n - l - m. \quad (25.11)$$

Якщо система обмежена лише геометричними або голономними в'язями, то інколи користуються визначенням числа степенів вільності “за координатами”. У цьому разі  $k$  – кількість незалежних координат, що однозначно визначають положення матеріальної системи в просторі. Для таких задач користуються формулою

$$k = 3n - l. \quad (25.12)$$

Для голономних систем обидва визначення числа степенів вільності еквівалентні.

Розглянемо такі приклади.

Число степенів вільності матеріальної точки, що вільно рухається у просторі,  $k=3$ , по поверхні –  $k=2$ , по кривій –  $k=1$ . У загальному випадку руху вільного твердого тіла  $k=6$ . Куля, що котиться без ковзання по площині (див. § 15.1), має три степені вільності, хоча параметрів, які задають положення будь-якої її точки, – п'ять: три кути Ейлера і дві координати центра мас. Пояснюється це тим, що на кулю накладені дві неголономні в'язі. Важливо зазначити, що введення поняття про число степенів вільності системи матеріальних точок дає змогу глибше зрозуміти фізичний зміст аксіом про звільнення від в'язей (принципу звільнення). Дійсно, у разі звільнення системи від в'язей вводяться додаткові степені вільності. Для того щоб рух звільненої від в'язей системи збігався з її рухом у раз наявності в'язей, треба ввести додаткові сили – реакції в'язей. Інакше кажучи, принцип звільненості від в'язей породжує нову систему (вільну), що динамічно еквівалентна заданій (невільній), але кінематично їй не еквівалентна (в розумінні різного числа степенів вільності).

### § 25.4. Ідеальні в'язі. Аналітична умова

Поняття можливих переміщень дає змогу встановити аналітичну умову, що відображає фізичні особливості розглянутих раніше ідеальних в'язей.

Розв'язуючи задачі механіки, ми розглядали в'язі, фізично здійснювані у вигляді абсолютно гладенької поверхні, абсолютно твердого стрижня з нехтовно малою масою, який з'єднує дві матеріальні точки, нерозтяжної, невагомої та абсолютно гнучкої нитки, мотузки тощо. Такі в'язі, як уже зазначалося, внаслідок своїх фізичних властивостей визначають напрямки реакцій. Узагаль-

ноючи їхні властивості та використовуючи поняття про можливі переміщення точок системи, введені раніше, можна дати таке аналітичне визначення ідеальних в'язей.

Ідеальними називають в'язі, алгебрична сума елементарних робіт реакцій яких на будь-яких можливих переміщеннях точок системи дорівнює нулю (для утримувальних в'язей):

$$\sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (25.13)$$

Можна безпосередньо переконатися в тому, що ця умова виконується для відомих нам типів ідеальних в'язей. Наприклад, робота реакції стрижня на можливих переміщеннях точок  $M_1$  і  $M_2$  (рис. 25.2) буде

$$\begin{aligned} \delta A &= \vec{R}_1 \cdot \delta \vec{r}_{M_1} + \vec{R}_2 \cdot \delta \vec{r}_{M_2} = \\ &= \vec{R} \cdot (\delta \vec{r}_{M_1} - \delta \vec{r}_{M_2}). \end{aligned} \quad (25.14)$$

З умови нерозтяжності стрижня маємо  $M_1 M_2 = \text{const}$ , тоді

$$(\vec{r}_{M_1} - \vec{r}_{M_2})^2 = \overline{M_2 M_1}^2. \quad (25.15)$$

Варіюючи цей вираз, дістанемо

$$\begin{aligned} (\vec{r}_{M_1} - \vec{r}_{M_2}) \cdot (\delta \vec{r}_{M_1} - \delta \vec{r}_{M_2}) &= \\ = \overline{M_2 M_1} \cdot (\delta \vec{r}_{M_1} - \delta \vec{r}_{M_2}) &= 0. \end{aligned} \quad (25.16)$$

Звідси можна отримати теорему Грасгофа про проєкції швидкостей двох точок тіла на пряму, що їх з'єднує

$$\overline{M_2 M_1} \cdot \delta \vec{r}_{M_2} = \overline{M_2 M_1} \cdot \delta \vec{r}_{M_1}. \quad (25.17)$$

Оскільки реакція  $\vec{R}$  стрижня колінеарна вектору  $(\vec{r}_{M_1} - \vec{r}_{M_2})$ , то вектори  $\vec{R}$  і  $(\delta \vec{r}_{M_1} - \delta \vec{r}_{M_2})$  взаємно перпендикулярні. Звідси очевидно, що  $\delta A = 0$ .

Якщо сили тертя, що впливають на ідеальність в'язі, віднести до розряду активних

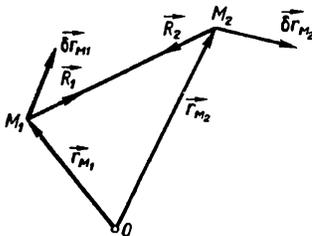


Рис. 25.2

сил і визначати їх на основі експериментальних законів тертя, то умова  $\sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$  залишається в силі.

## § 25.5. Принцип можливих переміщень

Принцип можливих переміщень – це найзагальніший принцип аналітичної статки. Із нього можна вивести умови рівноваги будь-якої конкретної механічної системи. Нагадаємо, що положенням рівноваги називають таке положення системи, в якому система перебуватиме весь час, якщо в початковий момент часу вона була в цьому положенні й швидкості всіх її точок дорівнювали нулю.

Принцип можливих переміщень встановив у 1788 р. Ж. Лагранж у результаті узагальнень теорії найпростіших механізмів машин (важеля, похилої площини, блоків, поліспаств тощо). Цей принцип стосовно похилої площини сформулював Г. Галілей, а стосовно блоків – С. Стевін. Й. Бернуллі в 1717 р. також сформулював принцип можливих переміщень. Його формулювання близьке до сучасного. Багато років це був саме принцип, тобто положення, застосоване без доведення. Нині вважають за краще, користуючись положеннями механіки Ньютона, всі твердження цього принципу строго доводити, тобто принцип стали розглядати як теорему.

**Принцип можливих переміщень** полягає в такому твердженні: для рівноваги системи матеріальних точок, що підпорядковуються утримувальним, ідеальним, стаціонарним в'язям, необхідно і достатньо, щоб до рівноваги нулю сума елементарних робіт активних сил на будь-якому можливому переміщенні системи з розгляданого положення рівноваги за умови, що в початковий момент система нерухома.

**Доведення. Необхідність.** Нехай система із  $n$  матеріальних точок перебуває в рівновазі та підпорядковується утримувальним стаціонарним ідеальним в'язям. Звільнимо систему від в'язей, тоді на неї діятимуть активні сили  $\vec{F}_i$  і реакції в'язей  $\vec{R}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Як показано в першій частині цього підручника, якщо система перебуває в рівновазі, то кожна її точка також перебуває в рівновазі. Отже, виконується умова

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (25.18)$$

Надамо системі довільне можливе переміщення  $\delta\vec{r}_i$ . Помножуючи скалярно рівність (25.18) на  $\delta\vec{r}_i$ , отримаємо

$$(\vec{R}_i + \vec{F}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \quad (25.19)$$

Підсумовуючи за індексом  $i$ , для всієї системи матимемо

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0, \quad (25.20)$$

або

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \quad (25.21)$$

За визначенням ідеальних в'язей (25.13), другий доданок у (25.21) дорівнює нулю, тому

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \delta A = 0, \quad (25.22)$$

що і треба було довести.

Рівняння (25.22) можна подати в скалярній формі

$$\sum_{i=1}^n (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = 0. \quad (25.23)$$

Рівняння (25.22) і (25.23) називають загальними рівняннями статички.

**Достатність.** Доведемо, що коли виконується умова (25.22), то система матеріальних точок, яка підпорядковується утримувальним ідеальним в'язям, перебуває в рівновазі. Застосуємо метод доведення від супротивного і припустимо, що система після моменту часу  $t$  почне рухатись. Якщо обмежитись розглядом лише стаціонарних в'язей, то дійсні переміщення входять до числа можливих. Застосувавши теорему про зміну кінетичної енергії системи і враховуючи, що  $\delta T > 0$ , тобто система рухатись, дістанемо

$$\delta T = \delta A = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot \delta\vec{r}_i > 0, \quad (25.24)$$

де  $\delta\vec{r}_i$  – можливі переміщення, з якими збігаються дійсні переміщення матеріальних точок системи.

Проте ця нерівність суперечить умові (25.22). Отже, умова (25.22) є не тільки необхідною, а й достатньою умовою рівноваги системи, що підпорядковується утримувальним в'язям.

На завершення наведемо друге доведення достатності принципу<sup>1</sup>.

Звільнимо систему від в'язей і додамо до заданих активних сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  реакції в'язей  $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_n$ . Для такої системи принцип можливих переміщень з урахуванням (25.21) запишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \quad (25.25)$$

<sup>1</sup>Старжинский В. М. Теоретическая механика. М.: Наука, 1980. -- 310 с.

Оскільки для вільної системи  $\delta \vec{r}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) можуть набувати різних значень, то припустимо, що

$$\delta \vec{r}_i = \alpha (\vec{F}_i + \vec{R}_i), \quad (25.26)$$

де  $\alpha$  – нескінченно мала величина. Підставимо цю рівність у (25.25) і дістанемо

$$\alpha \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{R}_i)^2 = 0. \quad (25.27)$$

Із рівності квадрата суми нулю випливає, що

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (25.28)$$

а це і є умова рівноваги всіх точок системи. Достатність принципу доведена.

### § 25.6. Застосування принципу можливих переміщень до виведення умов рівноваги твердого тіла

У § 17.6 виведено формулу для елементарної роботи сил, що діють на тверде тіло. На основі загального рівняння статички (25.22) маємо

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \\ &= \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_O + \vec{M}_O \cdot \delta \vec{\theta} = 0, \end{aligned} \quad (25.29)$$

де  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  – головний вектор системи сил;  $\vec{M}_O$  – головний момент системи сил, що прикладені до твердого тіла;  $\delta \vec{r}_O$  – можливе переміщення полюса;  $\delta \vec{\theta}$  – вектор малого можливого повороту тіла. Оскільки  $\delta \vec{r}_O$  і  $\delta \vec{\theta}$  є незалежними і довільними, то попередня рівність може виконуватися лише тоді, коли

$$\vec{F} = 0, \quad \vec{M}_O = 0. \quad (25.30)$$

Таким чином, отримали умови рівноваги вільного твердого тіла. Цим двом рівнянням у векторній формі відповідають шість рівнянь у скалярній формі:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i) = 0. \end{aligned} \quad (25.31)$$

Ці рівняння були виведені іншим способом у статичці (див. § 3.3). Важливо зазначити, що у рівняння (25.22) не входять реакції в'язей. Проте в ряді задач статички є потреба визначати реакції в'язей. Наприклад, при конструюванні машин, розрахунку балок, ферм треба знати реакції опор для обчислення міцності та стійкості цих опор. Щоб застосувати принцип можливих переміщень для визначення реакцій в'язей, необхідно зробити так: уявно відкинути в'язь і замінити її реакцію активною силою, що дорівнює реакції відкинутої в'язі. При цьому потрібно розглянути ті переміщення, яким перешкоджає в'язь, що нас цікавить.

**Приклад 1.** На середній шарнір  $B$  колінчастого преса  $ABC$  діє в його площині горизонтальна сила  $\vec{F}$  (рис. 25.3, *a*). Треба, нехтуючи вагою стрижнів, визначити силу  $Q$ , з якою стискається предмет, що пресується, якщо стрижень  $AB$  нахилений до горизонту під кутом  $\varphi$  і  $AB = BC = l$ .

**Розв'язання.** Точку  $A$  візьмемо за початок координат і введемо систему координат  $Ax$  (рис. 25.3, *a*). Можливими переміщеннями тут є такі: для точки  $B$  –  $\delta x_B$ , для точки  $C$  –  $\delta x_C$ . Як видно з рисунка,  $x_B = l \cos \varphi$ ,  $y_C = 2l \sin \varphi$ . Тоді  $\delta x_B = \delta x_B = -l \sin \varphi \delta \varphi$ ,  $\delta x_C = \delta x_C = 2l \cos \varphi \delta \varphi$ . Застосувавши для розв'язання задачі загальне рівняння статички (25.23), отримаємо

$$-F \delta x_B - Q \delta x_C = 0$$

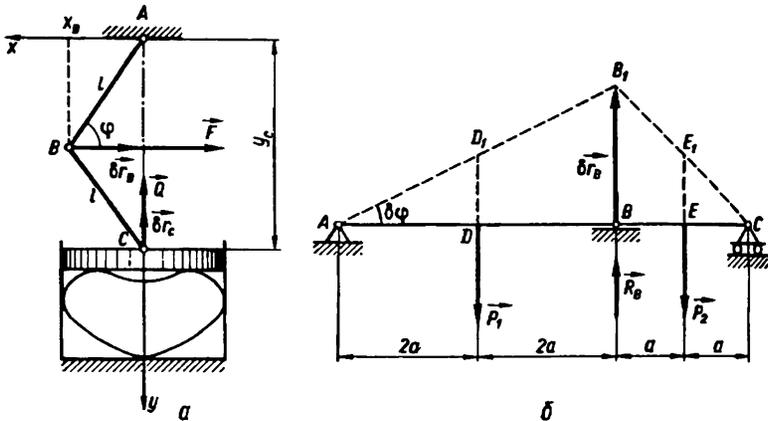


Рис. 25.3

або

$$Fl \sin \varphi \delta\varphi - Q \cdot 2l \cos \varphi \delta\varphi = \\ = (F \sin \varphi - 2Q \cos \varphi) l \delta\varphi = 0,$$

звідки

$$2Q \cos \varphi = F \sin \varphi, \\ Q - \frac{F \sin \varphi}{2 \cos \varphi} - \frac{1}{2} F \operatorname{tg} \varphi.$$

**Приклад 2.** Складена двопрогнова балка спирається на три опори в точках  $A, B, C$  (рис. 25.3, б). На балку діють вертикальні сили  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2$ . Визначити реакцію  $\vec{R}_B$  середньої опори, нехтуючи вагою балки, якщо  $AD = BD = 2BE = 2CE = 2a$ .

**Розв'язання.** Для розв'язання задачі на основі аксіоми про звільнення від в'язей треба відкинути опору  $B$ , замінивши її реакцією  $\vec{R}_B$ , яку необхідно визначити. Оскільки шарнір  $B$  лежить на опори, то вона є ідеальною в'яззю і її реакція напрямлена вертикально

Надаючи балці  $AC$  можливе переміщення у напрямку дії реакції  $\vec{R}_B$ , дістанемо конфігурацію балки, що показана штриховою лінією на рис. 25.3, б. При цьому загальне рівняння статички у формі (25.23) набуде вигляду

$$-P_1 \cdot DD_1 - P_2 \cdot EE_1 + R_B \cdot BB_1 = 0.$$

Оскільки можливе переміщення  $\delta\vec{r}_B$  мало, то  $DD_1 = EE_1 \approx 2a\delta\varphi$ ,  $BB_1 \approx 4a\delta\varphi$ . Тоді, враховуючи, що  $\delta\varphi$  є довільним можливим переміщенням  $\delta\varphi \neq 0$ , підставивши  $DD_1, EE_1, BB_1$  у вищевказане рівняння, дістанемо

$$2R_B - P_1 - P_2 = 0 \Rightarrow R_B = \frac{1}{2}(P_1 + P_2).$$

## § 25.7. Принцип Д'Аламбера – Лагранжа (загальне рівняння динаміки)

Загальне рівняння динаміки дістанемо, об'єднавши принцип Д'Аламбера з принципом можливих переміщень Лагранжа. Розглянемо невільну систему з  $n$  матеріальних точок, що підпорядковується ідеальним утримувальним в'язям. Згідно з принципом Д'Аламбера (див. § 19.2), маємо

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (25.32)$$

де  $\vec{F}_i$  – рівнодійна активних сил, що прикладені до  $i$ -ї точки системи;  $\vec{R}_i$  – рівнодійна реакцій в'язей;  $\vec{\Phi}_i$  – сила інерції  $i$ -ї точки ( $\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{w}_i$ ).

Із (25.32) виразимо рівнодійну реакцій в'язей через активну силу і силу інерції:

$$\vec{R}_i = -(\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i). \quad (25.33)$$

За означенням ідеальних в'язей (25.13)

$$\sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (25.34)$$

Тоді, надавши точкам системи можливі переміщення  $\delta \vec{r}_i$ , помноживши обидві частини рівняння (25.33) на  $\delta \vec{r}_i$ , підсумовуючи потім ліві й праві частини за індексом  $i$  та враховуючи (25.34), дістанемо

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0,$$

або

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \vec{w}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (25.35)$$

Рівняння (25.35), що називається загальним рівнянням динаміки, є математичним записом принципу Д'Аламбера – Лагранжа, який формулюється так: *під час руху системи матеріальних точок, що підпорядковуються утримувальним ідеальним в'язям, сума елементарних робіт активних сил і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю.*

Векторному рівнянню (25.35) відповідає таке рівняння в скалярній формі:

$$\sum_{i=1}^n [(F_{ix} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (F_{iy} - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (F_{iz} - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] = 0, \quad (25.36)$$

де  $F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}$  – проекції активних сил на осі декартових координат;  $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$  – проекції прискорення  $i$ -ї точки системи;  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$  – проекції можливих переміщень точки на ті самі осі координат.

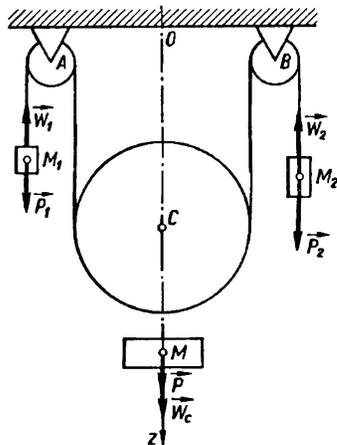


Рис. 25.4

Назва “загальне рівняння динаміки” зумовлена також і тим, що на основі цього рівняння можна вивести загальні теореми динаміки. Порівнюючи загальне рівняння динаміки із загальним рівнянням статки, бачимо, що перше з них відрізняється від другого наявністю сил інерції. Загальне рівняння динаміки можна безпосередньо використовувати для розв’язання конкретних задач.

**Приклад 3.** Через блоки  $A$  і  $B$  з нерухомими осями перекинута нитка, що підтримує рухомий блок  $C$ . Частини нитки, що не лежать на блоках, вертикальні. Блок  $C$  навантажений тягарем  $M$  вагою  $P$ . До кінців нитки прикріплені тягари  $M_1$  і  $M_2$  вагою  $P_1$  і  $P_2$  (рис. 25.4). Визначити прискорення тягарів, нехтуючи масами блоків і нитки, а також тертям в осях, якщо  $P = 4H$ ,  $P_1 = 2H$ ,  $P_2 = 3H$ .

**Розв’язання.** Розглянемо рух системи, що складається з трьох тягарів –  $M_1, M_2, M$ , нехтуючи силами тертя і вважаючи в’язі (блок, нитку) ідеальними. Ця система має два степеня вільності, отже, її положення визначається двома пара-

метрами, наприклад координатами  $z_1$  і  $z_C$ . Внаслідок нерозтяжності нитки між координатами  $z_C$ ,  $z_1$  і  $z_2$  існує залежність, що являє собою рівняння в'язі

$$z_1 + z_2 + 2z_C = \text{const.} \quad (1)$$

Звідси можливі переміщення мають задовольняти умову

$$\delta z_1 + \delta z_2 + 2\delta z_C = 0. \quad (2)$$

Позначивши прискорення точок  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M$  через  $\ddot{w}_1$ ,  $\ddot{w}_2$ ,  $\ddot{w}_C$  і здиференціювавши двічі рівняння в'язі (1), матимемо залежність між їхніми проекціями на вісь  $Oz$ :

$$w_1 + w_2 + 2w_C = 0. \quad (3)$$

Застосовуючи загальне рівняння динаміки (25.35)

і враховуючи, що  $m_i = \frac{P}{g}$ ,  $i = 1, 2$ , дістанемо

$$\left( P_1 - \frac{P_1}{g} w_1 \right) \delta z_1 + \left( P_2 - \frac{P_2}{g} w_2 \right) \delta z_2 + \left( P - \frac{P}{g} w_C \right) \delta z_C = 0.$$

Підставивши дані з умови задачі, одержимо

$$2(g - w_1)\delta z_1 + 3(g - w_2)\delta z_2 + 4(g - w_C)\delta z_C = 0. \quad (4)$$

Оскільки ця система має два степеня вільності, то серед можливих переміщень  $\delta z_1$ ,  $\delta z_2$ ,  $\delta z_C$  незалежних лише два. Якщо за такі взяти  $\delta z_2$  і  $\delta z_C$ , то  $\delta z_1$  дістанемо із співвідношення (2):

$$\delta z_1 = -\delta z_2 - 2\delta z_C. \quad (5)$$

Із рівності (3) випливає також аналогічний вираз для прискорення  $w_1$ :

$$w_1 = -w_2 - 2w_C. \quad (6)$$

Підставивши вирази (5) і (6) у співвідношення (4) і зібравши коефіцієнти при  $\delta z_2$  і  $\delta z_1$ , знайдемо

$$(g - 5w_2 - 4w_C)\delta z_2 + (-4w_2 - 12w_C)\delta z_C = 0.$$

Оскільки величини  $\delta z_2$  і  $\delta z_C$  незалежні й довільні, то остання рівність має зміст тоді і тільки тоді, коли вирази в круглих дужках дорівнюють нулю. Отже, приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} 5w_2 + 4w_C = g; \\ w_2 + 3w_C = 0, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, отримаємо

$$w_C = -\frac{1}{11}g; \quad w_2 = \frac{3}{11}g.$$

Нарешті, з рівності (6) визначимо прискорення

$$w_1 = -\frac{1}{11}g.$$

Знак мінус у виразах  $w_C$  і  $w_1$  означає, що прискорення тягарів  $M$  і  $M_1$  напрямлені у протилежний бік осі  $Oz$ .

### Питання для самоконтролю

1. Що спільного між дійсними та можливими переміщеннями і чим вони відрізняються?
2. Яка аналітична умова ідеальних в'язей і чи суперечить вона поняттю ідеальних в'язей, введеному в статті?
3. Для яких в'язей справедливий принцип можливих переміщень?
4. Як отримати із принципу можливих переміщень умови рівноваги твердого тіла?
5. Як формулюється принцип Д'Аламбера – Лагранжа?
6. Як із загального рівняння динаміки отримати принцип можливих переміщень?
7. У чому полягає суть методики складання рівнянь руху системи за допомогою загальних рівнянь динаміки?
8. Яка класифікація сил застосовується в принципі Д'Аламбера – Лагранжа?
9. Яким чином врахувати неідеальні в'язі, що обумовлені тертям у принципі можливих переміщень і в загальному рівнянні динаміки?
10. Як визначаються степені вільності механічної системи і коли число незалежних параметрів що визначають положення тіла, збігається з числом степенів вільності?

## УЗАГАЛЬНЕНІ КООРДИНАТИ, ШВИДКОСТІ, ПРИСКОРЕННЯ ТА УЗАГАЛЬНЕНІ СИЛИ. УМОВИ РІВНОВАГИ СИСТЕМИ В УЗАГАЛЬНЕНИХ КООРДИНАТАХ

## § 26.1. Узагальнені координати, швидкості та прискорення

Розв'язуючи задачі динаміки невіільних систем, Ж. Лагранж помітив суперечності та математичні труднощі, що виникають у разі використання декартових координат. Ці координати виявляються залежними. Згадавши суперечності полягають у тому, що зі зменшенням числа степенів вільності, тобто при спрощенні руху системи, задача з погляду математики не спрощується, а навпаки, стає складнішою: збільшується кількість невідомих величин, що підлягають визначенню (координат точок системи і реакцій в'язей), і кількість розв'язувальних рівнянь. Крім того, навіть при ідеальних в'язях не вдалося відокремити задачу про визначення закону руху системи від задачі про визначення невідомих сил – реакцій в'язей.

Детальний аналіз цих утруднень дав можливість Ж. Лагранжу зробити висновок, що для їх усунення суттєвим є вибір сукупності параметрів, які визначають положення системи у просторі. Саме за такі параметри Ж. Лагранж запропонував вибирати не три декартові координати, а систему незалежних, взагалі кажучи, недекартових координат. Ці незалежні координати Ж. Лагранж назвав узагальненими і позначив символами  $q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ).

*Узагальненими координатами називають сукупність незалежних між собою параметрів, що однозначно визначають положення матеріальної системи у просторі.*

Узагальнені координати можуть мати різні геометричний і механічний зміст. Наприклад, якщо матеріальна точка вільна, то за узагальнені координати можна вибрати три її декартові координати (див. рис. 7.1):  $q_1 = x$ ,

$q_2 = y$ ,  $q_3 = z$ , три сферичні (рис. 7.4):  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \theta$ ,  $q_3 = \varphi$  або три циліндричні (рис. 7.3):  $q_1 = \rho$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = z$  і т. д.

Якщо матеріальні системи невіільні, то за узагальнені координати можна вибрати змінні відстані, деякі незалежні декартові координати, кути повороту тощо. Сам спосіб уведення цих координат сприяв проникненню методів аналітичної механіки у суміжні розділи механіки, у фізику, біомеханіку, кібернетику, робототехніку тощо. Наприклад, у теорії пружності роль узагальнених координат виконують зміщення точок пружного тіла, деформації та напруження, прогин балок і пластин, у гідродинаміці – густина  $\rho(x, y, z, t)$ , температура  $T(x, y, z)$  або швидкості точок середовища  $v(x, y, z, t)$ , в електротехніці – сила струму, напруга і т. д. (У механіці суцільного середовища узагальнені координати дістали назву змінних поля). Єдиною вимогою до них є те, щоб вони були незалежними й однозначно задавали положення і стан системи у просторі.

За аналогією зі звичайними поняттями швидкості та прискорення введемо поняття узагальненої швидкості та узагальненого прискорення. Узагальненою швидкістю називають першу похідну за часом від узагальненої координати

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (26.1)$$

а узагальненим прискоренням – другу похідну

$$\ddot{q}_j = \frac{d^2q_j}{dt^2}. \quad (26.2)$$

Фізичний зміст  $\dot{q}_j$  і  $\ddot{q}_j$  легко встановити на конкретних прикладах. Якщо узагальнена

координата  $q$  – деяка змінна відстань, то  $\dot{q}$  і  $\ddot{q}$  – лінійна швидкість і лінійне прискорення; якщо  $q$  – кут повороту, то  $\dot{q}$  і  $\ddot{q}$  – відповідно кутова швидкість і кутове прискорення.

Установимо зв'язок між вектором  $\vec{v}_i$  швидкості  $i$ -ї матеріальної точки та узагальненими швидкостями  $\dot{q}_j$  ( $j=1, 2, \dots, k$ ).

Для цього зазначимо, що оскільки положення точок системи можна одночасно задати їхніми радіусами-векторами  $\vec{r}_i$  та узагальненими координатами, то, очевидно, існують співвідношення

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, q_1, \dots, q_k), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (26.3)$$

Диференціюючи цю рівність за часом, дістанемо

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (26.4)$$

Звідси видно, що швидкості  $\vec{v}_i$  точок системи через узагальнені швидкості виражаються лінійно.

## § 26.2. Узагальнені сили і способи їх обчислення

У цьому параграфі введемо поняття узагальненої сили і наведемо три способи її обчислення.

**Перший спосіб.** Розглянемо систему  $n$  матеріальних точок (або механічну систему), на яку діють активні сили  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , що прикладені в точках  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , можливі переміщення яких  $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \dots, \delta\vec{r}_n$ . Обчислимо елементарну роботу цієї системи сил на значених можливих переміщеннях:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i. \quad (26.5)$$

Оскільки  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, q_1, q_2, \dots, q_k)$ , то виразимо варіацію  $\delta\vec{r}_i$  радіуса-вектора  $\vec{r}$  через варіації узагальнених координат  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$ , беручи до уваги, що можливі переміщення визначаються при фіксованому часі  $t$  (тобто  $\delta t = 0$ ):

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Підставимо це співвідношення в (26.5), тоді

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (26.6)$$

Змінюючи порядок підсумовування у зв'язку з незалежністю підсумовування за індексами  $i$  та  $j$ , одержимо

$$\delta A = \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (26.7)$$

Величину

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (26.8)$$

називають *узагальненою силою*  $Q_j$ , що відповідає узагальненій координаті  $q_j$ .

Як видно з (26.7), *узагальнені сили є коефіцієнтами при варіаціях узагальнених координат у виразі елементарної роботи сил, що діють на матеріальну систему.* Сам термін “узагальнена сила” пов'язаний з геометричним змістом правор частини (26.8), що дорівнює узагальненій ортогональній проекції багатовимірного вектора сили  $\vec{F}$  на напрямок координатного вектора  $\vec{e}_j$  місцевого координатного базису криволінійної системи координат.

$$\text{Вектори } \vec{e}_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \quad \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2)$$

напрямлені по дотичній до координатних

ліній. Систему векторів  $\vec{e}_j$  у кожній точці поверхні  $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2)$  можна розглядати як місцевий координатний базис на поверхні.

Визначивши швидкість  $\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2$ ,

бачимо, що рівність можна розглядати як розклад вектора  $\vec{v}$  на вектори місцевого координатного базису. Узагальнені швидкості  $\dot{q}_1$  і  $\dot{q}_2$  можна розглядати як узагальнені косокутні проекції вектора  $\vec{v}$  на напрямки дотичних до координатних ліній (див. § 7.14, 7.15).

Підставляючи (26.8) у (26.7), дістанемо

$$\delta A = \sum_{j=1}^k Q_j \delta q_j. \quad (26.9)$$

На основі цієї формули неважко встановити фізичний зміст узагальної сили. Дійсно, якщо узагальнена координата має лінійну розмірність, тобто виражена в одиницях довжини, наприклад  $q = s$ , то узагальнена сила є силою у звичайному розумінні. Якщо ж узагальнена координата є кутом повороту  $q = \varphi$ , то узагальнена сила буде моментом сили відносно осі обертання. Повертаючись до способів обчислення узагальнених сил, бачимо, що основною є формула (26.8), яку можна подати в скалярній формі

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right), \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (26.10)$$

**Другий спосіб.** Узагальнену силу обчислюють також безпосередньо за формулою (26.9), враховуючи, що можливі переміщення довільні та незалежні. Наприклад, для визначення  $Q_j$  надамо системі таке можливе

переміщення, щоб тільки  $\delta q_j \neq 0$ , а всі інші  $\delta q_\nu = 0$ ,  $\nu \neq j$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, k$ . Тоді, обчислюючи елементарну роботу  $\delta A_j$  всіх активних сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  на переміщеннях  $\delta q_j$ , дістанемо  $\delta A_j = Q_j \delta q_j$ . Звідси

$$Q_j = \frac{\delta A_j}{\delta q_j} \quad (26.11)$$

при  $\delta q_\nu = 0$ ,  $\nu \neq j$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, k$ .

Із цієї формули видно, що розмірність узагальної сили залежить від розмірності узагальної координати.

**Третій спосіб.** Якщо система рухається в потенціальному силовому полі, тобто вона консервативна, то узагальнена сила виражається через силову функцію  $U = U(q_1, q_2, \dots, q_k)$ . Дійсно, елементарну роботу консервативних сил (див. § 18.2) на можливих переміщеннях можна подати у вигляді

$$\delta A = \delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{j=1}^k \frac{\partial U}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (26.12)$$

Отже, згідно з (26.9), дістанемо такий вираз для узагальної сили:

$$Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (26.13)$$

Виражаючи силову функцію  $U$  через потенціальну енергію  $\Pi$ , отримаємо

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (26.14)$$

Таким чином, одержали три формули – (26.10), (26.11) і (26.14) для обчислення узагальної сили, які відповідають трьом способам її визначення.

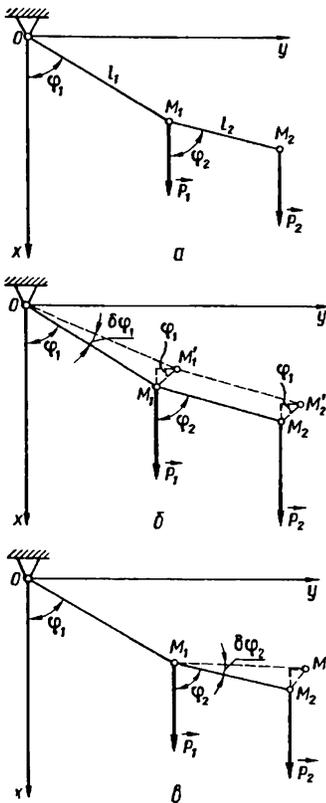


Рис. 26.1

**Приклад 1.** Обчислити узагальнені сили подвійного математичного маятника (рис. 26.1), що складається з двох невагомих стрижнів, на кінцях яких закріплені матеріальні точки  $M_1$  і  $M_2$  вагою  $P_1$  і  $P_2$  ( $P_i = m_i g$ ,  $i = 1, 2$ ). Маятник може рухатися лише у площині  $xOy$ .

Розв'язання. Положення подвійного математичного маятника визначається двома кутами  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  (рис. 26.1, а), які візьмемо за узагальнені координати  $q_1$  і  $q_2$ . Узагальнені сили обчислимо трьома способами

1. Скористаємося формулою (26.10). Визначимо проєкції сил  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2$  та координати точок їх прикладення. Безпосередньо з рис. 26.1, а впливає  $P_{1x} = m_1 g$ ,  $P_{1y} = 0$ ,  $P_{1z} = 0$ ,  $P_{2x} = m_2 g$ ,  $P_{2y} = 0$ ,  $P_{2z} = 0$ ,  $x_1 = l_1 \cos \varphi_1$ ,  $y_1 = l_1 \sin \varphi_1$ ,  $z_1 = 0$ ,  $x_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2$ ,  $y_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2$ ,  $z_2 = 0$ .

Формула (26.10) у цьому разі набуває вигляду

$$Q_j = P_{1x} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_j} + P_{1y} \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_j} + P_{1z} \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_j} + P_{2x} \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_j} + P_{2y} \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_j} + P_{2z} \frac{\partial z_2}{\partial \varphi_j}, \quad j = 1, 2.$$

Підставляючи сюди вирази для проєкцій сил і координат точок їх прикладення, дістанемо

$$Q_1 = -m_1 g l_1 \sin \varphi_1 - m_2 g l_1 \sin \varphi_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1, \quad Q_2 = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2.$$

2. Скористаємося формулою (26.11). Надамо системі можливе переміщення  $\delta \varphi_1$  так, щоб кут  $\varphi_2$  не змінювався (рис. 26.1, б); тоді  $\delta \varphi_2 = 0$ ,  $M_1 M_1' - M_2 M_2'$ . Елементарна робота буде  $\delta A_1 = P_{1x} \delta x_1 + P_{2x} \delta x_2$ . Тут  $\delta x_2 = \delta x_1 = M_1 M_1' \sin \varphi_1$ ,  $M_1 M_1' = l_1 \delta \varphi_1$ . Підставивши вирази для  $P_{1x}$  і  $P_{2x}$  у формулу для роботи, отримаємо

$$\delta A_1 = (m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1 \cdot \delta \varphi_1 = Q_1 \delta \varphi_1,$$

звідки

$$Q_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1.$$

Надамо тепер системі можливе переміщення  $\delta \varphi_2$  (рис. 26.1, в) так, щоб кут  $\varphi_1$  не змінювався. Тоді елементарну роботу здійснюватиме сила  $\vec{P}_2$ .

$$\delta A_2 = P_{2y} \delta y_2 = P_{2y} (M_2 M_2') \sin \varphi_2 = -P_2 l_2 \delta \varphi_2 \sin \varphi_2,$$

звідки

$$Q_2 = -P_2 l_2 \sin \varphi_2 = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2.$$

3. Активні сили  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2$  консервативні, тому можна скористатися формулою (26.14). Визначимо потенціальну енергію, обчисливши її як

роботу сил  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2$  при переміщенні системи із заданого положення у вертикальне, що збігається з віссю  $Ox$ :

$$\begin{aligned} \Pi &= m_1 g l_1 (1 - \cos \varphi_1) + \\ &+ m_2 g [l_1 (1 - \cos \varphi_1) + l_2 (1 - \cos \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Звідси за формулою (26.14) дістанемо

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = -m_1 g l_1 \sin \varphi_1 - m_2 g l_1 \sin \varphi_1 = \\ &= -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1; \\ Q_2 &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

**Приклад 2.** Знайти узагальнені сили для сферичного маятника (рис. 26.2), довжина якого  $l = \text{const}$ , а маса  $m$ .

Розв'язання. Положення сферичного маятника можна задати двома кутами  $\theta$  і  $\varphi$  (рис. 26.2), які й приймемо за узагальнені координати  $q_1 = \theta$ ,  $q_2 = \varphi$ .

Щоб скористатися формулою (26.10) для визначення узагальнених сил, потрібно знайти спочатку проєкції сил на осі  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  (в даному випадку на маятник діє сила ваги  $mg$ ) і виразити декартові координати маятника через узагальнені координати.

Безпосередньо з рис. 26.2 маємо

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = mg, \quad (1)$$

$$x = l \sin \theta \cos \varphi = l \sin q_1 \cos q_2; \quad (2)$$

$$y = l \sin \theta \sin \varphi = l \sin q_1 \sin q_2; \quad (2)$$

$$z = l \cos \theta = l \cos q_1.$$

Узагальнені сили визначаються за формулами (26.10):

$$Q_1 = F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1}; \quad (3)$$

$$Q_2 = F_x \frac{\partial x}{\partial q_2} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_2} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_2}.$$

Оскільки  $F_x = 0$  і  $F_y = 0$ , то можна обмежитись обчисленням лише  $\frac{\partial z}{\partial q_1} = \frac{\partial z}{\partial \theta}$  і  $\frac{\partial z}{\partial q_2} = \frac{\partial z}{\partial \varphi}$ .

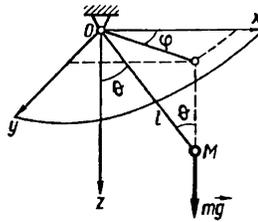


Рис. 26.2

Із виразів (2) знайдемо

$$\frac{\partial z}{\partial q_1} = \frac{\partial z}{\partial \theta} = -l \sin \theta; \quad \frac{\partial z}{\partial q_2} = \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0. \quad (4)$$

Підставивши (4) і (1) в (3), матимемо

$$Q_1 = -mgl \sin \theta; \quad Q_2 = 0. \quad (5)$$

Визначимо тепер узагальнену силу через можливу роботу:

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = mg \delta z. \quad (6)$$

Оскільки

$$\delta z = -l \sin \theta \delta \theta$$

і

$$\delta A = Q_1 \delta \theta + Q_2 \delta \varphi,$$

то

$$\delta A = -mgl \sin \theta \delta \theta.$$

Звідси

$$Q_1 = -mgl \sin \theta, \quad Q_2 = 0. \quad (7)$$

Порівнюючи (5) і (7), бачимо, що вирази для узагальнених сил збігаються.

**Приклад 3.** Знайти узагальнені сили для матеріальної системи, схему якої зображено на рис. 26.3. Вага тягарів  $A$ ,  $B$ ,  $C$  відповідно  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_2$ ,  $\vec{P}_3$ . Тягарі  $A$ ,  $B$  переміщуються по гладенькій горизонтальній поверхні. Стрижин невагомий і з'єднуються з тягарями  $A$ ,  $B$  і між собою (точка  $D$ ) ідеальними циліндричними шарнірами та мають довжину  $d$ . Жорсткості пружин  $c_1$  і  $c_2$ .

Розв'язання. Введемо систему координат  $Oxuz$  з початком у точці  $O$ , яка збігається з положенням рівноваги тягара  $A$ .

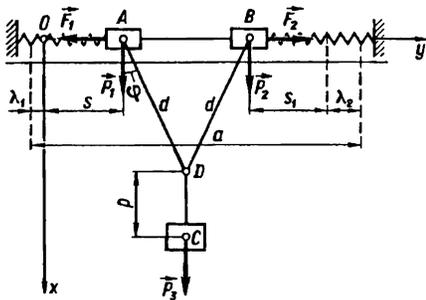


Рис. 26.3

Для визначення числа степенів вільності цієї механічної системи застосуємо формулу (25.12),  $k = 3n - l$ .

Нехай координати точок  $A, B, C$  будуть відповідно  $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ . Запишемо рівняння в'язей

$$\begin{aligned} x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0, \\ [(x_3 - p) - x_1]^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = d^2, \\ [(x_3 - p) - x_2]^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = d^2. \end{aligned}$$

Отже, число точок у системі три ( $n = 3$ ), число в'язей сім (сім рівнянь, що обмежують рух системи) ( $l = 7$ ), тоді число степенів вільності буде  $k = 3 \cdot 3 - 7 = 2$ .

За узагальнені координати прийемо  $q_1 = s$ ,  $q_2 = \varphi$  (див. рис. 26.3). У цьому випадку координати тягарів  $A, B, C$  будуть

$$\begin{aligned} x_1 = 0, \quad y_1 = s, \\ x_2 = 0, \quad y_2 = s + 2d \sin \varphi, \\ x_3 = d \cos \varphi + p, \quad y_3 = s + d \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Проекції активних сил тяжіння  $\vec{P}_1, \vec{P}_2$  і  $\vec{P}_3$ , сил пружності  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  дорівнюють

$$\begin{aligned} F_{1x} = P_1, \quad F_{1y} = -c_1(s + \lambda_1), \\ F_{2x} = P_2, \quad F_{2y} = c_2(s_1 + \lambda_2) = \\ = c_2(a - s - \lambda_1 - 2d \sin \varphi), \\ F_{3x} = P_3, \quad F_{3y} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Узагальнені сили визначимо за формулами (26.10):

$$\begin{aligned} Q_1 = F_{1x} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} + F_{1y} \frac{\partial y_1}{\partial q_1} + F_{2x} \frac{\partial x_2}{\partial q_1} + F_{2y} \frac{\partial y_2}{\partial q_1} + F_{3x} \frac{\partial x_3}{\partial q_1}, \\ Q_2 = F_{1x} \frac{\partial x_1}{\partial q_2} + F_{1y} \frac{\partial y_1}{\partial q_2} + F_{2x} \frac{\partial x_2}{\partial q_2} + F_{2y} \frac{\partial y_2}{\partial q_2} + F_{3x} \frac{\partial x_3}{\partial q_2} \quad (3) \end{aligned}$$

Знайдемо спочатку частинні похідні за узагальненими координатами  $q_1 = s$ ,  $q_2 = \varphi$ , що входить у формулу (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial x_2}{\partial s} = 0, \\ \frac{\partial y_2}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial x_3}{\partial s} = 0; \\ \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial \varphi} = 2d \cos \varphi, \quad \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} = -d \sin \varphi.$$

Підставивши (2) і (4) у формули (3), отримаємо

$$\begin{aligned} Q_1 = P_1 \cdot 0 - c_1(s + \lambda_1) + P_2 \cdot 0 + c_2(a - s - \lambda_1 - 2d \sin \varphi) + \\ + P_3 \cdot 0 = -c_1(s + \lambda_1) + c_2(a - s - \lambda_1 - 2d \sin \varphi), \\ Q_2 = P_1 \cdot 0 - c_1(s + \lambda_1) \cdot 0 + P_2 \cdot 0 + \\ + c_2(a - s - \lambda_1 - 2d \sin \varphi) 2d \cos \varphi + P_3(-d \sin \varphi) = \\ = c_2(a - s - \lambda_1 - 2d \sin \varphi) 2d \cos \varphi - P_3 d \sin \varphi. \end{aligned}$$

Узагальнені сили визначено.

### § 26.3. Умови рівноваги механічної системи в узагальнених координатах

У § 25.5 встановлено умову рівноваги невільної системи, що підпорядковується утримувальним ідеальним стаціонарним в'язям у формі загального рівняння статички (25.22). Скориставшись тепер виразом (26.9) для елементарної роботи і прирівнявши її до нуля, згідно з (25.22), матимемо

$$\sum_{j=1}^k Q_j \delta q_j = 0. \quad (26.15)$$

Отже, рівність (26.15) є загальним рівнянням статички в узагальнених координатах. Оскільки варіації узагальнених координат до-

вільні й незалежні при голономних в'язях, то коефіцієнти при  $\delta q_j$  мають дорівнювати нулю. Дійсно, припустимо, що  $\delta q_1 \neq 0$ , а решта варіацій узагальнених координат дорівнює нулю, тобто  $\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_k = 0$ , тоді з (26.15) випливає  $Q_1 \delta q_1 = 0$ . Оскільки  $\delta q_1 \neq 0$ , то дорівнює нулю коефіцієнт при  $\delta q_1$ , тобто  $Q_1 = 0$ . Аналогічно можна довести, що коефіцієнти при  $\delta q_2, \delta q_3, \dots, \delta q_k$  дорівнюють нулю. Отже, у стані рівноваги розглядуваної механічної системи всі узагальнені сили дорівнюють нулю:

$$Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (26.16)$$

Рівності (26.16) виражають в аналітичній формі умови рівноваги невільної системи із зазначеними вище в'язями. Отже, у разі *рівноваги невільної системи, що підпорядковується ідеальним, стаціонарним, голономним в'язям, усі узагальнені сили мають дорівнювати нулю.*

**Приклад 4.** При якому співвідношенні між вагами  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$  вантажів 1, 2, 3, 4 системи, що зображена на рис. 26.4, перебуватиме у рівновазі, якщо нитка невагома і нерозтяжна? Тертя, радіусами і масами блоків нехтуємо.

**Розв'язання.** Умова нерозтяжності нитки (тобто рівняння в'язі) має

$$s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4 = l = \text{const.}$$

Отже, ця система має три степеня вільності. За узагальнені координати візьмемо  $q_1 = s_1$ ,  $q_2 = s_2$ ,  $q_3 = s_4$ . Щоб визначити відповідні узагальнені сили, обчислимо потенціальну енергію системи як роботу сил ваги під час переміщення системи із заданого положення в положення, коли  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = 0$ ,  $s_4 = 0$ , враховуючи,

що  $s_3 = \frac{1}{2}(l - s_1 - s_4 - 2s_2)$ ,  $\Pi = -P_1 s_1 \sin \alpha - P_4 s_4 \sin \beta - P_2 s_2 - \frac{1}{2} P_3 (l - s_1 - s_4 - 2s_2)$ . Умови рівноваги (26.16) у даному разі набудуть вигляду

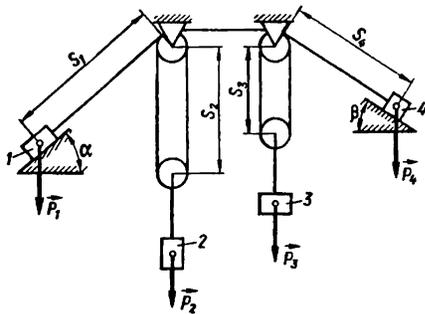


Рис. 26.4

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial s_1} = P_1 \sin \alpha - \frac{P_3}{2} = 0;$$

$$Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial s_2} = P_2 - P_3 = 0;$$

$$Q_3 = -\frac{\partial \Pi}{\partial s_4} = P_4 \sin \beta - \frac{P_3}{2} = 0.$$

Звідси

$$P_2 = P_3 = 2P_4 \sin \beta; \quad P_1 \sin \alpha = \frac{P_3}{2}.$$

**Приклад 5.** Дві матеріальні точки  $M_1$  і  $M_2$ , з'єднані між собою жорстким стрижнем завдовжки  $l$ , притягуються до нерухомого центра  $O$  за законом всесвітнього тяжіння. Нехтуючи масою стрижня, знайти узагальнені сили та умови рівноваги стрижня, вважаючи, що рух відбувається в одній площині (рис. 26.5).

**Розв'язання.** За узагальнені координати приймемо  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = \psi$ , оскільки стрижень виконує плоский рух, а тіло при плоскому русі має три степеня вільності.

Потенціальна енергія системи дорівнює

$$\Pi = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r'},$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  — сталі величини.

Оскільки з трикутника  $OM_1M_2$  за теоремою косинусів

$$r' = \sqrt{r^2 + l^2 + 2rl \cos(\varphi - \psi)},$$

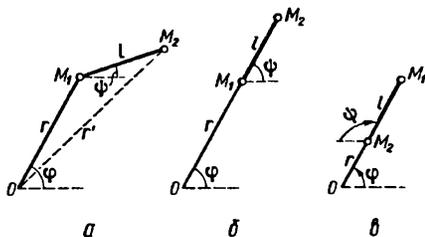


Рис. 26.5

то

$$\Pi = \frac{\alpha}{r} \frac{\beta}{\sqrt{r^2 + l^2 + 2rl \cos(\varphi - \psi)}}$$

Звідси

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\beta [r + l \cos(\varphi - \psi)]}{[r^2 + l^2 + 2rl \cos(\varphi - \psi)]^{3/2}};$$

$$Q_2 = \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{\beta r l \sin(\varphi - \psi)}{[r^2 + l^2 + 2rl \cos(\varphi - \psi)]^{3/2}}; \quad (1)$$

$$Q_3 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = -\frac{\beta r l \sin(\varphi - \psi)}{[r^2 + l^2 + 2rl \cos(\varphi - \psi)]^{3/2}}.$$

Оскільки умовою рівноваги цієї системи буде

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0, \quad (2)$$

то

$$\sin(\varphi - \psi) = 0.$$

Звідси

$$\varphi - \psi = 0 \quad \text{або} \quad \varphi - \psi = \pi. \quad (3)$$

У першому випадку рівності (3) матимемо

$$\cos(\varphi - \psi) = \cos 0 = 1,$$

у другому –

$$\cos(\varphi - \psi) = \cos \pi = -1.$$

Розглянемо тепер умову  $Q_1 = 0$  для кожного із випадків окремо:

1) коли  $\varphi - \psi = 0$ , тоді з умови  $Q_1 = 0$  маємо

$$-\frac{\alpha}{r^2} \frac{\beta(r+l)}{(r+l)^3} = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\beta}{(r+l)^2} = 0 \quad (4)$$

або

$$\frac{\alpha}{r^2} = -\frac{\beta}{(r+l)^2}; \quad (5)$$

2) коли  $\varphi - \psi = \pi$ , тоді з умови  $Q_1 = 0$  маємо

$$\frac{\alpha}{r^2} = -\frac{\beta}{(r-l)^2}. \quad (6)$$

Якщо  $r \gg l$ , то умови (5) і (6) збігаються і набувають вигляду

$$\alpha = -\beta. \quad (7)$$

Проаналізуємо умову (5) і (6) рівноваги стрижня.

Графічно ці умови рівноваги зображені відповідно на рис. 26.5, б, в.

Фізичний зміст цих умов такий: для того щоб стрижень був у рівновазі під дією центральних сил всесвітнього тяжіння, потрібно, щоб сили, які прикладені до точок  $M_1$  і  $M_2$ , були рівні за величиною та протилежно напрямлені, що відповідає визначенню у статичній рівновазі твердого тіла під дією двох сил. Питання тільки в тому, як ці сили реалізувати.

Можна запропонувати привнаймі два способи реалізації цих сил:

а) якщо тіло з електричними зарядами в точках  $M_1$  і  $M_2$  знаходиться, наприклад, в електричному полі, то заряди точок  $M_1$  і  $M_2$  мають бути різними,

б) якщо тіло є штучним супутником Землі, то в цьому випадку сила гравітації зрівноважується відцентровою силою обертання супутника згідно з умовою незбурюваності фізичного маятника.

### Питання для самоконтролю

1. Як зв'язані між собою узагальнені координати, швидкості та прискорення?
2. Наведіть три способи обчислення узагальненої сили.
3. Як записуються умови рівноваги в узагальнених координатах?
4. Як виразити швидкість точки через узагальнені координати?
5. Як записується диференціал радіуса-вектора через узагальнені координати?
6. Що спільного і чим відрізняється вираз варіації радіуса-вектора через варіації узагальнених координат від виразу для диференціала радіуса-вектора?
7. Коли вираз для диференціала радіуса-вектора через диференціал узагальнених координат збігається з формою запису з варіацією радіуса-вектора?
8. Що таке можлива робота?
9. Як виразити можливу роботу через варіації радіуса-вектора?
10. Як записується можлива робота через варіації узагальнених координат?

## Розділ 27

### РІВНЯННЯ РУХУ ГОЛОНОМНИХ СИСТЕМ

У цьому розділі наведемо шість типів диференціальних рівнянь систем, підпорядкованих ідеальним голономним в'язям:

- загальні рівняння динаміки, які виключають із розгляду невідомі реакції в'язей;
- рівняння Лагранжа першого роду, які включають і дають змогу визначити закон зміни реакцій в'язей;
- рівняння Лагранжа другого роду, які виключають реакції в'язей;
- змішані рівняння – рівняння Лагранжа другого роду з урахуванням реакцій додаткових і відкинутих в'язей;
- рівняння Лагранжа в квазікоординатах, або рівняння Ейлера – Лагранжа, що мають багато спільного з основними теоремами динаміки;
- рівняння Лагранжа другого роду в однорідних координатах.

#### § 27.1. Загальне рівняння динаміки системи

Основою для складання рівнянь невіільних систем є аксіома про звільнення від в'язей, яка переводить реакції в'язей у число таких активних сил, які залежать від закону руху системи. У той час, як задані активні сили не залежать від закону руху системи, вони впливають на формування цього закону. Тому першим кроком для складання рівнянь руху є запис другого закону Ньютона для  $i$ -ї невіільної точки

$$m \ddot{\mathbf{w}}_i = \bar{F}_i + \bar{R}_i \quad (27.1)$$

або в скалярній формі

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_i &= F_{xi} + R_{xi}, \\ m \ddot{y}_i &= F_{yi} + R_{yi}, \\ m \ddot{z}_i &= F_{zi} + R_{zi}. \end{aligned} \quad (27.2)$$

Наголосимо, що рівняння (27.1) і (27.2) є незамкненими, оскільки в них невідомих більше, ніж рівнянь, і реакції  $\bar{R}_i$  входять до числа невідомих. Якщо в'язі ідеальні, то, скориставшись аналітичною умовою ідеальності в'язей (25.13), принцип Д'Аламбера – Лагранжа (див. § 25.7) дає можливість виключити з розгляду невідомі реакції ідеальних голономних в'язей і записати загальне рівняння динаміки у векторній

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{w}}_i) \cdot \delta \bar{\mathbf{r}}_i = 0 \quad (27.3)$$

або скалярній формі

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [(F_{xi} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (F_{yi} - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + \\ + (F_{zi} - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] = 0. \end{aligned} \quad (27.4)$$

Приклад, наведений в § 25.7, демонструє методику застосування цих рівнянь для розв'язання конкретних задач.

Зазначимо, що рівняння (27.1) і (27.3) є базовими для отримання інших типів рівнянь.

Так, урахування властивостей в'язей дає можливість перейти від рівнянь (27.1) до рівнянь Лагранжа першого роду, а перехід у загальних рівняннях динаміки (27.3) від варіації декартових координат до узагальнених приведе до рівнянь Лагранжа другого роду.

#### § 27.2. Рівняння Лагранжа першого роду

Розглянемо систему  $n$  матеріальних точок, підпорядковану  $l$  голономним ідеальним в'язям. Диференціальні рівняння руху точок матеріальної системи в координатній

формі, в проекціях на осі декартової системи координат мають вигляд (27.2)

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= F_{xi} + R_{xi}, \\ m_i \ddot{y}_i &= F_{yi} + R_{yi}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ m_i \ddot{z}_i &= F_{zi} + R_{zi}, \end{aligned} \quad (27.5)$$

де  $m_i$  – маса  $i$ -ї точки,  $F_{xi}$ ,  $F_{yi}$ ,  $F_{zi}$  – проекції головного вектора активних сил, прикладених до  $i$ -ї точки,  $R_{xi}$ ,  $R_{yi}$ ,  $R_{zi}$  – проекції рівнодійних реакцій в'язей, діючих на  $i$ -ту точку.

Якщо активні сили задані, то система рівнянь (27.5) є системою  $3n$  рівнянь із  $6n$  невідомими, оскільки  $3n$  проекцій реакцій в'язей ( $R_{xi}$ ,  $R_{yi}$ ,  $R_{zi}$ ) також невідомі.

Приєднаємо до цих рівнянь  $l$  рівнянь в'язей

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad (27.6)$$

тоді матимемо  $3n + l$  рівнянь. Для отримання  $3n - l$  рівнянь потрібно врахувати властивості в'язей. Оскільки в'язі ідеальні, то проекції реакцій в'язей задовольняють умову

$$\sum_{i=1}^n (R_{xi} \delta x_i + R_{yi} \delta y_i + R_{zi} \delta z_i) = 0. \quad (27.7)$$

При цьому варіації координат  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$ ,  $\delta z_i$  мають задовольняти рівняння

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad (27.8)$$

яке легко отримати із рівнянь в'язей, проваріювавши (27.6).

Кожне з цих  $l$  рівнянь (27.8) помножимо відповідно на невизначені множники Лагранжа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ , які можуть бути функціями координат і часу:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_j \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l. \quad (27.9)$$

Знайдені вирази складемо:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left( \delta x_i \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \delta y_i \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} + \delta z_i \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \right) = 0. \end{aligned} \quad (27.10)$$

Якщо відняти від співвідношення (27.7) вираз (27.10), то отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[ \delta x_i \left( R_{xi} - \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) + \delta y_i \left( R_{yi} - \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \right) + \delta z_i \left( R_{zi} - \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (27.11)$$

Оскільки в силу рівнянь (27.8) незалежних варіацій координат  $3n - l$ , то виберемо множники Лагранжа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$  таким чином, щоб коефіцієнти при  $l$  варіацій координат дорівнювали нулю. Тоді ті, що залишилися у виразі (27.11)  $3n - l$  варіацій координат, будуть незалежні, і тому множники при них також повинні дорівнювати нулю.

Отже,

$$\begin{aligned} R_{xi} &= \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \\ R_{yi} &= \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}, \\ R_{zi} &= \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i}. \end{aligned} \quad (27.12)$$

Підставляючи тепер (27.12) в рівняння (27.5), отримаємо

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_i &= F_{xi} + \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \\ m\ddot{y}_i &= F_{yi} + \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}, \\ m\ddot{z}_i &= F_{zi} + \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i}, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (27.13)$$

Приєднуючи до цих  $3n$  рівнянь  $l$  рівнянь в'язей (27.6), матимемо  $3n+l$  рівнянь відносно  $3n+l$  невідомих координат  $(x, y, z - 3n)$  і множників Лагранжа  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ . Після розв'язання цієї системи реакції в'язей можуть бути знайдені за формулами (27.12).

Рівняння (27.13) називають *рівняннями Лагранжа першого роду*.

Зазначимо, що для аналітичних досліджень у системах з великою кількістю точок рівняння (27.13) малоефективні. Навіть дослідження руху однієї невідільної точки (див. § 13.6) створює значні труднощі. Тому рівняння Лагранжа першого роду для складних систем доцільно досліджувати чисельними методами з допомогою комп'ютерних технологій.

### § 27.3. Рівняння Лагранжа другого роду (рівняння руху в узагальнених координатах)

Розглянемо механічну систему  $n$  матеріальних точок, що обмежена  $l$  ідеальними голономними або геометричними в'язями (25.3), (27.6). Визначимо її положення у просторі  $k$  незалежними параметрами  $q_j$  – узагальненими координатами. Вибір їх як визначальних параметрів дає змогу усунути

ускладнення, що виникають під час розв'язування задач динаміки невідільних систем (див. § 27.2). Рівняння в'язей перетворюються на тотожності (тобто ідеальні голономні в'язі враховуються самим вибором величин  $q_j$ ) і, як наслідок, із рівнянь (27.5) зникають невідомі реакції ідеальних голономних в'язей. Унаслідок цього маємо систему диференціальних рівнянь, невідомими в якій є лише параметри  $q_j(t)$ , що визначають закон руху системи.

Для виведення цих рівнянь звернемося до загального рівняння динаміки (27.3) і перетворимо його до узагальнених координат. Елементарна робота активних сил виражається в узагальнених координатах згідно з формулою (26.9):

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^k Q_j \delta q_j. \quad (27.14)$$

Залишається перетворити решту доданків. У результаті одержимо

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \\ &= \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \end{aligned} \quad (27.15)$$

Розглянемо вираз у дужках і запишемо його так:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - \\ &- \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right). \end{aligned} \quad (27.16)$$

На основі тотожностей Лагранжа (див. § 7.15)

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}, \quad (27.17)$$

які впливають з того, що  $\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t)$ , і тоді

$$\begin{aligned} \bar{v}_i &= \frac{d}{dt} \bar{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t) = \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}, \end{aligned} \quad (27.18)$$

та визначення кінетичної енергії системи  $n$  матеріальних точок вираз (27.16) перетворює так:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_j} - \\ - \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} - \\ - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (27.19)$$

Отже, співвідношення (27.15) з урахуванням (27.19) набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{j=1}^k \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (27.20)$$

Використовуючи співвідношення (27.14) і (27.20), загальне рівняння динаміки (27.3) можна записати так:

$$\sum_{j=1}^k \left( Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \quad (27.21)$$

Остання рівність виконується лише тоді, коли коефіцієнти при довільних значеннях незалежних варіацій  $\delta q_j$  одночасно дорівнюють нулю, звідки

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (27.22)$$

Виведені співвідношення є диференціальними рівняннями руху голономних механіч-

них систем, складені в незалежних узагальнених координатах. Їх називають *рівняннями Лагранжа другого роду*.

Рівняння (27.22) – це система звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, відносно  $k$  невідомих функцій  $q_j(t)$ , що являють собою закон руху системи.

Відмітимо важливі особливості виведених рівнянь.

1. Кількість рівнянь (27.22) дорівнює числу степенів вільності, тобто їх найменшому можливому числу для голономних систем.

2. Форма запису цих рівнянь не залежить від конкретного вибору системи узагальнених координат.

3. Рівняння (27.22) не містять реакцій ідеальних в'язей. Це означає, що визначаючи незалежні координати, вдається відділити задачу встановлення закону руху невідомих системи від задачі визначення невідомих реакцій в'язей.

4. Рівняння Лагранжа другого роду дають можливість визначити єдину послідовність дій, які треба виконати для розв'язання будь-якої задачі динаміки.

## § 27. 4. Рівняння Лагранжа другого роду для консервативної системи

Складання та інтегрування диференціальних рівнянь руху системи матеріальних точок є основною задачею аналітичної механіки. Розв'язання цієї задачі спрощується, коли на матеріальні точки системи діють консервативні сили. Встановимо вигляд рівнянь Лагранжа другого роду для цього випадку. Як було показано в § 26.2, узагальнена сила в цьому випадку має вигляд (26.14), тобто  $Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$ . Підставивши цей

вираз узагальненої сили в рівняння Лагранжа другого роду (27.22), отримаємо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}. \quad (27.23)$$

Оскільки потенціальна енергія  $\Pi$  системи є функцією узагальнених координат, то частинна похідна від  $\Pi$  за узагальненими швидкостями  $\dot{q}_j$  дорівнює нулю, тому можна записати

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_j} = 0, \quad (27.24)$$

де  $T - \Pi = L$  – функція Лагранжа, або кінетичний потенціал системи.

З урахуванням функції Лагранжа остаточно маємо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (27.25)$$

Говорячи про інтегрування рівнянь (27.25), зазначимо, що коли одна з узагальнених координат, наприклад  $q_j$ , не входить у вираз функції Лагранжа  $L$ , тобто функція  $L$  явно не залежить від  $q_j$ , тоді  $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$  і з (27.25) ма-

тимемо перший інтеграл рівняння  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = C_1$ .

Детальніше про інтегрування рівнянь (27.25) буде сказано в розділі “Канонічні рівняння Гамільтона”.

Зазначимо, що функція Лагранжа  $L = L(q_1, q_2, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k, t)$  є функцією узагальнених координат, узагальнених швидкостей і часу, які називаються *змінними Лагранжа*. Функцію  $L$  називають також *лагранжіаном*.

**Методика застосування рівнянь Лагранжа другого роду до розв’язування задач динаміки.** Характерною особливістю методики розв’язування задач за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду є єдина загальна послідовність окремих етапів розв’язання та дослідження кожної задачі.

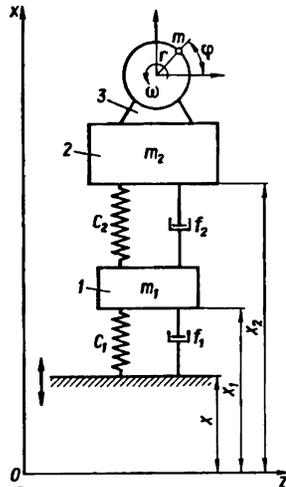


Рис. 27.1

Застосовуючи рівняння Лагранжа другого роду до розв’язування задач динаміки, треба дотримуватися такої послідовності дій:

1. Визначити число степенів вільності системи матеріальних точок, що рухаються.
2. Вибрати узагальнені координати.
3. Визначити узагальнені сили за однією з наведених у § 26.2 формул.
4. Обчислити кінетичну енергію системи.
5. Обчислити похідні  $\frac{\partial T}{\partial q_j}$  і  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ .
6. Скласти рівняння руху системи і інтегрувати їх, враховуючи початкові умови руху.
7. Відповідно до конкретних умов задачі проаналізувати знайдений розв’язок.

**Приклад 1.** Скласти за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду диференціальні рівняння руху двомасової коливальної системи. Тіло масою  $m_1$  за допомогою пружини, жорсткість якої  $c_1$ , з’єднане з масивною основою, що здійснює поступальні періодичні коливання відносно нерухомої системи координат  $Oxz$  (рис. 27.1). З тілом 1 за

допомогою пружини жорсткістю  $c_2$  з'єднане тіло 2 масою  $m_2$ , на якому встановлена електрична машина 3 з незрівноваженою масою  $m$  ротора. Ця маса створює періодичну силу, що діє на тіло масою  $m_2$ . Коефіцієнти в'язкого тертя в пружинах  $f_1$  і  $f_2$ .

Дію тіла 3 на коливальну систему називають силовим збудженням, а дію основи – кінематичним збудженням коливальних.

Розв'язання. 1. Розглядувана система має два степеня вільності, оскільки положення кожної маси в системі координат  $Oxz$  (рис. 27.1) характеризується однією незалежною координатою.

2. Заданий рух основи позначимо координатою  $x$ . Положення тіл масами  $m_1$  і  $m_2$  відносно нерухомої системи координат задамо відповідно координатами  $x_1$  і  $x_2$ . Отже, узагальнені координати  $q_1 = x_1$ ,  $q_2 = x_2$ .

3. Узагальнені сили у цій задачі зумовлені силовим збудженням електричної машини, дією пружинних сил і сил в'язкого тертя пружин на тіла 1 і 2.

Силове збудження машини 3 прикладене безпосередньо до тіла 2 і зумовлене проекцією відцентрової сили на вісь  $Ox$ , тобто

$$F_2^u = m\omega^2 r \sin \varphi,$$

де  $\omega$  – кутова швидкість обертання машини;  $r$  – радіус, на якому розміщена незрівноважена маса;  $\varphi = \omega t$  – кут повороту машини.

Отже,

$$F_2^u = m\omega^2 r \sin \varphi = m\omega^2 r \sin \omega t = H \sin \omega t,$$

де  $H = m\omega^2 r$  – амплітуда коливальних збуджуваних систем.

Пружинні сили пружин пропорційні: першій пружині – її зміщенню відносно основи, тобто  $(x_1 - x)$ , а другій –  $(x_2 - x_1)$ , тому потенціальна енергія систем

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 (x_1 - x)^2 + \frac{1}{2} c_2 (x_2 - x_1)^2.$$

Звідси

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = -c_1 (x_1 - x) + c_2 (x_2 - x_1),$$

$$Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = -c_2 (x_2 - x_1).$$

Тут  $c_1$ ,  $c_2$  – жорсткості пружин.

Сили в'язкого тертя пружини діють одночасно з силами пружності та пропорційні відповідним швидкостям  $(\dot{x}_1 - \dot{x})$ ,  $(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$ . Отже,

$$F_{1\text{тр}} = -f_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}) + f_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1),$$

$$F_{2\text{тр}} = -f_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1),$$

де  $f_1$ ,  $f_2$  – коефіцієнти сил тертя.

4. Кінетична енергія системи

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2.$$

5. Частинні похідні  $\frac{\partial T}{\partial q_j}$  і  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$  ( $j=1, 2$ )

мають вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2.$$

6. Підставивши всі ці величини в рівняння Лагранжа другого роду, дістанемо

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 (x_1 - x) - f_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}) + c_2 (x_2 - x_1) + f_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1),$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -c_2 (x_2 - x_1) - f_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + H \sin \omega t.$$

Якщо перенести в ліву частину невідомі  $\ddot{x}_1$  і  $\ddot{x}_2$ , а в правій залишити задані величини, то ш рівняння можна переписати так:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (f_2 + f_1) \dot{x}_1 + (c_1 + c_2) x_1 - c_2 x_2 - f_2 \dot{x}_2 = c_1 x + f_1 \dot{x},$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + f_2 \dot{x}_2 + c_2 x_2 - c_2 x_1 - f_2 \dot{x}_1 = H \sin \omega t.$$

**Приклад 2.** З допомогою рівнянь Лагранжа другого роду для консервативних систем скласти рівняння руху подвійного математичного маятника (рис. 27.2). Маса тягарів  $M_1$  і  $M_2$  дорівнюють відповідно  $m_1$  і  $m_2$ , а довжини стрижнів –  $l_1$ ,  $l_2$ .

Розв'язання. Число степенів вільності – два. Нехай  $q_1 = \varphi$ ,  $q_2 = \psi$ . Координати тягарів  $M_1$  і  $M_2$  виражаються через  $\varphi$  і  $\psi$  за формулами

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \cos \varphi, & y_1 &= l_1 \sin \varphi; \\x_2 &= l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \psi, & y_2 &= l_1 \sin \varphi + l_2 \sin \psi.\end{aligned}$$

Потрібно знайти функцію Лагранжа ( $L = T - \Pi$ ) і підставити її у вираз

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (1)$$

Кінетична енергія системи дорівнює

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \\&= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}^2 + \\&+ \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\psi}^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos(\varphi - \psi).\end{aligned} \quad (2)$$

Потенціальну енергію обчислимо як роботу сил ваги, які переміщують тягарі  $M_1$  і  $M_2$  в нижнє вертикальне положення

$$\begin{aligned}\Pi &= m_1 g l_1 (1 - \cos \varphi) + \\&+ m_2 g [l_1 (1 - \cos \varphi) + l_2 (1 - \cos \psi)].\end{aligned} \quad (3)$$

Отже, частинні похідні від  $T$  і  $\Pi$  за узагальненими координатами і швидкостями будуть

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi} + m_2 l_1 l_2 \dot{\psi} \cos(\varphi - \psi); \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\psi} \sin(\varphi - \psi); \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= m_2 l_2^2 \dot{\psi} + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi} \cos(\varphi - \psi); \\ \frac{\partial T}{\partial \psi} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi} \sin(\varphi - \psi); \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = 0; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= m_1 g l_1 \sin \varphi + m_2 g l_1 \sin \varphi = (m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \psi} &= m_2 g l_2 \sin \psi.\end{aligned} \quad (4)$$

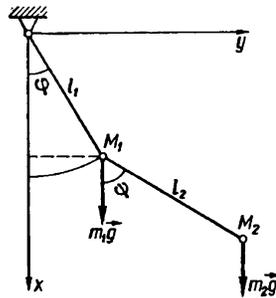


Рис. 27.2

Підставивши вирази (4) в (1), матимемо

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\psi} \cos(\varphi - \psi) + \\+ m_2 l_1 l_2 \dot{\psi}^2 \sin(\varphi - \psi) + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi = 0, \\m_2 l_2^2 \ddot{\psi} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi} \cos(\varphi - \psi) - \\- m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \psi) + m_2 g l_2 \sin \psi = 0.\end{aligned}$$

При малих кутах  $\varphi$  і  $\psi$ , нехтуючи величинами другого порядку маленні, отримаємо

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\psi} + (m_1 + m_2) g l_1 \varphi = 0, \\m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi} + m_2 l_2^2 \ddot{\psi} + m_2 g l_2 \psi = 0.\end{aligned}$$

## § 27.5. Рівняння Лагранжа другого роду з урахуванням додаткових і відкинутих в'язей

**1. Врахування додаткових в'язей.** Розглянемо питання про врахування додаткових в'язей, які можуть бути накладені на точки матеріальної системи.

Нехай на систему, підпорядковану  $l$  в'язям, додатково накладається ще  $r$  в'язей. У цьому випадку число раніше вибраних узагальнених координат  $s = 3n - l$  буде більше ніж число степенів вільності  $3n - l - r$ , які тепер має система, що розглядається. Тобто число степенів вільності системи зменшиться до  $s - r$ .

Додаткові в'язі будемо враховувати шляхом віднесення реакцій цих в'язей до числа активних сил.

Позначимо ці реакції через  $\bar{R}'_i$ . Можлива робота при цьому обчислюватиметься за формулою

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{i=1}^n (\bar{F}_i + \bar{R}'_i) \cdot \delta \bar{r}_i = \\ &= \sum_{m=1}^s (Q_m + Q'_m) \delta q_m, \end{aligned} \quad (27.26)$$

де  $s = 3n - l$ ;  $Q'_m$  – узагальнена сила, зумовлена реакціями додаткових в'язей  $\bar{R}'_i$ .

Таким чином, узагальнені сили в рівняннях Лагранжа складатимуться з двох частин відповідно до активних сил і реакцій нових в'язей, тобто

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} &= Q_m + Q'_m, \\ m &= 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (27.27)$$

Якщо нові в'язі ідеальні, то відповідно до формул (27.12) матимемо

$$\begin{aligned} R'_{xi} &= \sum_{\rho=1}^r \lambda_{\rho} \frac{\partial f_{\rho}}{\partial x_i}, \quad R'_{yi} = \sum_{\rho=1}^r \lambda_{\rho} \frac{\partial f_{\rho}}{\partial y_i}, \\ R'_{zi} &= \sum_{\rho=1}^r \lambda_{\rho} \frac{\partial f_{\rho}}{\partial z_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (27.28)$$

де  $\lambda_{\rho}$  – множники Лагранжа, а

$$f_{\rho}(x_i, y_i, z_i, t) = 0, \quad \rho = 1, 2, \dots, r \quad (27.29)$$

– рівняння додаткових в'язей.

Згідно з формулою (26.10) узагальнена сила  $Q'_m$  дорівнює

$$\begin{aligned} Q'_m &= \sum_{i=1}^n \left( R'_{xi} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + R'_{yi} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + R'_{zi} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right), \\ m &= 1, 2, \dots, s, \end{aligned}$$

або, враховуючи вирази (27.28), матимемо

$$\begin{aligned} Q'_m &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_m} \sum_{\rho=1}^r \lambda_{\rho} \frac{\partial f_{\rho}}{\partial x_i} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial y_i}{\partial q_m} \sum_{\rho=1}^r \lambda_{\rho} \frac{\partial f_{\rho}}{\partial y_i} + \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \sum_{\rho=1}^r \lambda_{\rho} \frac{\partial f_{\rho}}{\partial z_i} \right) = \\ &= \sum_{\rho=1}^r \lambda_{\rho} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_{\rho}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{\partial f_{\rho}}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{\partial f_{\rho}}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right) = \\ &= \sum_{\rho=1}^r \lambda_{\rho} \frac{\partial f_{\rho}}{\partial q_m}, \quad m = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (27.30)$$

Отже, враховуючи (27.30), рівняння (27.27) можуть бути записані у формі

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} &= Q_m + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_m} + \\ &+ \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial q_m} + \dots + \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial q_m} = \\ &= Q_m + \sum_{\rho=1}^r \lambda_{\rho} \frac{\partial f_{\rho}}{\partial q_m}, \quad m = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (27.31)$$

Для фактичного розв'язання цієї задачі до рівнянь (27.31) (їх кількість  $3n - l$ ) потрібно приєднати ще  $r$  рівнянь нових в'язей (27.29). Тоді отримаємо систему  $3n - l + r$  рівнянь з таким самим числом невідомих  $3n - l$  узагальнених координат і  $r$  множників Лагранжа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ .

**2. Узагальнені реакції відкинутих в'язей.** Розглянемо голономну систему із  $s$  степенями вільності. Нехай  $q_1, q_2, \dots, q_s$  – узагальнені координати, що визначають положення системи. Відкинемо тепер  $r$  в'язей. Тоді число степенів вільності збільшиться на  $r$  нових узагальнених координат  $q_{s+1}, q_{s+2}, \dots, q_{s+r}$ . При цьому потрібно брати до уваги, що при  $q_{s+\mu} = 0$  ( $\mu = 1, 2, \dots, r$ ) но-

ва матеріальна система переходити у попередню систему.

Можна уявити собі перехід від нової системи до старої як накладання на нову систему  $r$  додаткових в'язей вигляду

$$q_{s+\mu} = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, r. \quad (27.32)$$

Тоді, відповідно до рівняння (27.31), матимемо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m + \sum_{\mu=1}^r \lambda_{\mu} \frac{\partial f_{s+\mu}}{\partial q_m},$$

$$m = 1, 2, \dots, s+r, \quad (27.33)$$

але, оскільки

$$\frac{\partial f_{s+\mu}}{\partial q_m} = \begin{cases} 0 & \text{при } s+\mu \neq m \\ 1 & \text{при } s+\mu = m \end{cases} \quad \begin{matrix} (m = 1, 2, \dots, s+r), \\ (\mu = 1, 2, \dots, r), \end{matrix} \quad (27.34)$$

то рівняння (27.33) можна переписати у формі

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m$$

при  $m = 1, 2, \dots, s$ ;

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m + \lambda_m$$

при  $m = s+1, \dots, s+r. \quad (27.35)$

Рівняння (27.35) потрібно розглядати разом з рівнянням в'язей (27.32).

Таким чином, після складання отриманих рівнянь у них потрібно покласти

$$q_{s+\mu} = 0, \quad \dot{q}_{s+\mu} = 0,$$

$$\ddot{q}_{s+\mu} = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, r. \quad (27.36)$$

Отже, для знаходження узагальнених реакцій відкинутих в'язей маємо рівняння

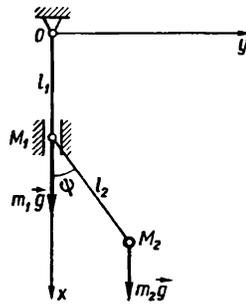


Рис. 27.3

$$\lambda_m = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} - Q_m,$$

$$m = s+1, \dots, s+r, \quad (27.37)$$

в яких після їх складання потрібно врахувати співвідношення (27.36).

**Приклад 3.** Знайти реакції, зумовлені введенням додаткової в'язі на подвійний математичний маятник (рис. 27.3). Маса тигарів  $M_1$  і  $M_2$  відповідно  $m_1$  і  $m_2$ , а довжини —  $l_1$  і  $l_2$ .

Розв'язання. Випишемо спочатку рівняння подвійного математичного маятника без додаткової в'язі, скориставшись результатами прикладу 2 § 27.4:

$$(m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\varphi} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\psi} \cos(\varphi - \psi) + m_2 l_1 l_2 \dot{\psi}^2 \sin(\varphi - \psi) = -(m_1 + m_2)g l_1 \sin \varphi,$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\psi} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi} \cos(\varphi - \psi) - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \psi) = -m_2 g l_2 \sin \psi. \quad (1)$$

Випишемо тепер рівняння додаткової в'язі (рис. 27.3)

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = y_1 = 0. \quad (2)$$

У цьому випадку (рис. 27.2)

$$y_1 = l_1 \sin \varphi = 0. \quad (3)$$

Із рівняння в'язі (3) випливає, що  $\varphi = 0$ , а отже,  $\dot{\varphi} = 0$ ,  $\ddot{\varphi} = 0$  (тобто точка  $M_1$  — нерухома).

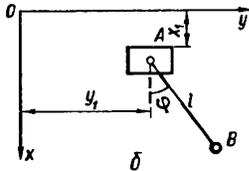
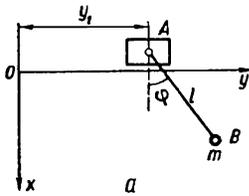


Рис. 27.4

З урахуванням рівняння в'язі (3) рівняння (27.31) після підстановки в них (1) будуть

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi} + m_2l_1l_2\ddot{\psi} \cos(\varphi - \psi) + \\ + m_2l_1l_2\dot{\psi}^2 \sin(\varphi - \psi) = \\ = -(m_1 + m_2)gl_1 \sin \varphi + \lambda l_1 \cos \varphi, \quad (4) \\ m_2l_2^2\ddot{\psi} + m_2l_1l_2\ddot{\varphi} \cos(\varphi - \psi) - \\ - m_2l_1l_2\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \psi) = -m_2gl_2 \sin \psi. \end{aligned}$$

Якщо до рівнянь (4) приєднати рівняння в'язі, з якого випливає

$$\varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \ddot{\varphi} = 0,$$

то друге рівняння (4) вироджується в рівняння коливань простого математичного маятника

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{l_2} \sin \psi = 0. \quad (5)$$

Із першого рівняння (4) знайдемо

$$\lambda = m_2l_2\ddot{\psi} \cos \psi - m_2l_2\dot{\psi}^2 \sin \psi. \quad (6)$$

Оскільки із (5) маємо

$$\ddot{\psi} = -\frac{g}{l_2} \sin \psi,$$

то при  $t = 0$ ,  $\psi = 0$ ,  $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$  знайдемо

$$\dot{\psi}^2 = \dot{\psi}_0^2 - \frac{2g}{l_2} (1 - \cos \psi).$$

Тоді, підставивши значення  $\ddot{\psi}$  і  $\dot{\psi}^2$  в (6), отримаємо

$$\lambda = -\left[ m_2l_2\dot{\psi}_0^2 - m_2g(2 - 3\cos \psi) \right] \sin \psi. \quad (7)$$

Якщо скористатися формулами для реакції в'язі (27.28), то матимемо

$$R'_x = 0,$$

$$R'_y = \lambda = -m_2l_2 \left[ \dot{\psi}_0^2 - \frac{g}{l_2} (2 - 3\cos \psi) \right] \sin \psi,$$

тобто додаткова сила реакції дорівнює проекції реакції, що діє на точку  $M_2$  в напрямку осі  $Oy$ .

**Приклад 4.** Тіло  $A$  масою  $M$  може рухатися по гладенькій горизонтальній напрямній поверхні. До нього на невагомому стрижні завдовжки  $l$  шарнірно приєднано тіло  $B$  масою  $m$  (рис. 27.4, а). Знайти реакцію напрямної поверхні, приймаючи тіла  $A$  і  $B$  за матеріальну точку.

Розв'язання. Приймемо за узагальнені координати відстань  $y_1$  точки  $A$  і кут  $\varphi$  відхилення стрижня від вертикалі

$$q_1 = y_1, \quad q_2 = \varphi.$$

Відкинемо в'язь, яка накладена на тіло  $A$ , тобто звільнимо тіло  $A$  від в'язі, тоді нова система матиме три степеня вільності і відповідно нову узагальнену координату  $q_3 = x_1$ .

При  $x_1 = 0$  нова система збігається з вихідною. Нехай координати точки  $A$  —  $x_1$  і  $y_1$ , а точки  $B$  —  $x_2$  і  $y_2$ ; тоді

$$x_2 = x_1 + l \cos \varphi, \quad y_2 = y_1 + l \sin \varphi.$$

Кінетична енергія нової системи буде

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} M (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \\ = \frac{1}{2} (M + m) (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \\ + \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\varphi}^2 - 2\dot{x}_1 l \dot{\varphi} \sin \varphi + 2\dot{y}_1 l \dot{\varphi} \cos \varphi). \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = (M + m) \dot{x}_1 - ml \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0$$

звідки

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = (M+m)\ddot{x}_1 - ml\ddot{\varphi} \sin \varphi - ml\dot{\varphi}^2 \cos \varphi.$$

Згідно з виразом (27.37), отримаємо

$$\lambda_3 = -ml\ddot{\varphi} \sin \varphi - ml\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - Q_3.$$

Знайдемо узагальнені сили. Оскільки

$$\begin{aligned} \delta A &= Mg\delta x_1 + mg\delta x_2 = \\ &= (M+m)g\delta x_1 - mgl\delta\varphi \sin \varphi = \\ &= Q_1\delta y_1 + Q_2\delta\varphi + Q_3\delta x_1, \end{aligned}$$

то

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = -mgl \sin \varphi, \quad Q_3 = (M+m)g$$

і, отже,

$$\lambda_3 = -ml\ddot{\varphi} \sin \varphi - ml\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - (M+m)g. \quad (1)$$

Значення  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  і  $\ddot{\varphi}$ , які потрібно підставити в цей вираз для  $\lambda_3$ , знаходяться з рівнянь Лагранжа другого роду, складених для координат  $y_1$  і  $\varphi$ , в яких враховано, що  $x_1 = \dot{x}_1 = \ddot{x}_1 = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(M+m)\dot{y}_1 + ml\dot{\varphi} \cos \varphi] &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \frac{\ddot{y}_1}{l} \cos \varphi + \frac{g}{l} \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В першого рівняння (2) при  $t = 0$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$ ,  $y_1 = 0$  знайдемо:

$$(M+m)\dot{y}_1 + ml\dot{\varphi} \cos \varphi = ml\dot{\varphi}_0.$$

Звідси

$$\dot{y}_1 = \frac{ml}{M+m} \dot{\varphi}_0 - \frac{ml}{M+m} \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\dot{y}_1 = -\frac{ml}{(M+m)} (\dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi).$$

Підставивши  $\dot{y}_1$  в друге рівняння (2), отримаємо

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} \left( 1 - \frac{m}{M+m} \cos^2 \varphi \right) + \\ + \frac{m}{M+m} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \end{aligned}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{M+m}{M+m \sin^2 \varphi} \left( \frac{m}{M+m} \dot{\varphi}^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{g}{l} \sin \varphi \right).$$

Підставивши вираз для  $\ddot{\varphi}$  в (1), матимемо

$$\begin{aligned} \lambda_3 = \dot{\varphi}^2 \left( \frac{m^2 l}{M+m \sin^2 \varphi} \sin^2 \varphi \cos \varphi - ml \cos \varphi \right) + \\ + mg \frac{M+m}{M+m \sin^2 \varphi} \sin^2 \varphi - (M+m)g. \end{aligned}$$

При малих кутах  $\varphi$ , коли  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1$ , нехтуючи величинами другого порядку мализни, отримаємо

$$\lambda_3 \approx -ml\dot{\varphi}^2 - (M+m)g.$$

Як бачимо, величина реакції визначається в основному статичною реакцією системи, до якої додається відцентрова сила.

## § 27.6. Диференціальні рівняння Ейлера – Лагранжа

Ці рівняння руху відрізняються від рівнянь Лагранжа тим, що замість узагальнених швидкостей вводяться так звані квазішвидкості. Прикладом квазішвидкостей можуть бути проекції кутових швидкостей на осі декартових систем координат. Наприклад, при заданні положення твердого тіла з нерухою точкою за допомогою кутів Ейлера кути  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  є узагальненими координатами, а  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\varphi}$  – узагальненими швидкостями. Тоді проекції кутових швидкостей  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ , що виражаються через узагальнені координати і швидкості, є квазішвидкостями (вісь  $Oz$  – вертикальна):

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (27.38)$$

Уводяться до розгляду величини  $d\pi_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, s$ ), якими позначають лінійні комбінації диференціалів узагальнених координат

$$d\pi_\lambda = \alpha_{\lambda 1} dq_1 + \alpha_{\lambda 2} dq_2 + \dots + \alpha_{\lambda s} dq_s = \sum_{m=1}^s \alpha_{\lambda m} dq_m, \quad (27.39)$$

де  $\alpha_{\lambda m}$  можуть бути функціями узагальнених координат.

Стосовно кутів Ейлера ці величини мають вигляд

$$\begin{aligned} d\pi_1 &= d\psi \sin \theta \sin \varphi + d\theta \cos \varphi = \omega_x dt, \\ d\pi_2 &= d\psi \sin \theta \cos \varphi - d\theta \sin \varphi = \omega_y dt, \\ d\pi_3 &= d\psi \cos \theta + d\varphi = \omega_z dt. \end{aligned} \quad (27.40)$$

Звідси величини  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  можна було б визначити за формулами

$$\pi_1 = \int_0^t \omega_x dt, \quad \pi_2 = \int_0^t \omega_y dt, \quad \pi_3 = \int_0^t \omega_z dt, \quad (27.41)$$

тобто величини  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  являти б собою кути повороту тіла відносно осей  $Ox, Oy$  і  $Oz$ . Зрозуміло, що ці кути не визначали б однозначно положення тіла, оскільки, повертаючи його на ці кути в різній послідовності, ми прийшли б до різних положень тіла. Не дивлячись на це, їх приймають за узагальнені координати і називають квазікоординатами (псевдокоординатами).

Величини

$$\frac{d\pi_\lambda}{dt} = \dot{\pi}_\lambda = \sum_{m=1}^s \alpha_{\lambda m} \dot{q}_m \quad (27.42)$$

називають квазішвидкостями.

Із співвідношень (27.42) можна знайти

$$\dot{q}_m = \sum_{\lambda=1}^s \beta_{m\lambda} \dot{\pi}_\lambda, \quad m = 1, 2, \dots, s \quad (27.43)$$

і відповідно

$$\delta q_m = \sum_{\lambda=1}^s \beta_{m\lambda} \delta \pi_\lambda, \quad m = 1, 2, \dots, s. \quad (27.44)$$

Підставивши  $\dot{\pi}_\lambda$  із (27.42) у вираз (27.43), отримаємо

$$\dot{q}_m = \sum_{\lambda=1}^s \sum_{\mu=1}^s \beta_{m\lambda} \alpha_{\lambda\mu} \dot{q}_\mu, \quad m = 1, 2, \dots, s. \quad (27.45)$$

Звідси випливає, що

$$\sum_{\lambda=1}^s \beta_{m\lambda} \alpha_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1, & m = \mu; \\ 0, & m \neq \mu. \end{cases} \quad (27.46)$$

Перейдемо тепер до виведення рівнянь Лагранжа в квазікоординатах. Кожне рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m, \quad m = 1, 2, \dots, s \quad (27.47)$$

помножимо на  $\beta_{m\lambda}$  і підсумуємо за  $m$ :

$$\sum_{m=1}^s \beta_{m\lambda} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} \right) = \sum_{m=1}^s \beta_{m\lambda} Q_m, \quad \lambda = 1, 2, \dots, s. \quad (27.48)$$

Можлива робота при цьому з урахуванням (27.44) буде

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{m=1}^s Q_m \delta q_m = \sum_{m=1}^s \sum_{\lambda=1}^s \beta_{m\lambda} Q_m \delta \pi_\lambda = \\ &= \sum_{\lambda=1}^s P_\lambda \delta \pi_\lambda, \end{aligned}$$

де

$$P_\lambda = \sum_{m=1}^s \beta_{m\lambda} Q_m, \quad \lambda = 1, 2, \dots, s. \quad (27.49)$$

Величини  $P_\lambda$  називаються квазіузагальненими силами.

<sup>1</sup>Бутенин Н. В. Введення в аналитическую механику. М.: Наука, 1971. – 264 с.

Замінивши у виразі (27.48) для кінетичної енергії узагальнені швидкості на квазішвидкості з допомогою формули (27.43) і виконавши ряд перетворень, що наведені, наприклад, у праці М. В. Бутеніна<sup>1</sup>, прийдемо до рівнянь вигляду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_\lambda} - \frac{\partial T'}{\partial q_\lambda} + \sum_{\mu=1}^s \sum_{j=1}^s \gamma_{\lambda\mu j} \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_\mu} \dot{q}_j = P_\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \dots, s, \quad (27.50)$$

які називають рівняннями Ейлера – Лагранжа. Тут

$$T'(q_m, \dot{q}_m) = T(q_m, \dot{q}_m), \quad m = 1, 2, \dots, s$$

– це вираз кінетичної енергії в квазішвидкостях, яким ми весь час користувались у розділі “Основні теореми динаміки”.

Зауважимо, що триіндексні коефіцієнти  $\gamma_{\lambda\mu j}$  не залежать від структури і руху механічної системи, а визначаються виключно з кінематичних співвідношень

$$\gamma_{\lambda\mu j} = \sum_{m=1}^s \sum_{v=1}^s \beta_{mj} \beta_{v\lambda} \left( \frac{\partial \alpha_{\mu m}}{\partial q_v} - \frac{\partial \alpha_{\mu v}}{\partial q_m} \right) = \sum_{v=1}^s \sum_{m=1}^s \beta_{m\lambda} \beta_{v\mu} \left( \frac{\partial \alpha_{\mu v}}{\partial q_m} - \frac{\partial \alpha_{\mu m}}{\partial q_v} \right). \quad (27.51)$$

Тут  $\lambda, \mu, j = 1, 2, \dots, s$ ;  $\gamma_{\lambda\mu j} = -\gamma_{j\mu\lambda}$ .

Значимо, що рівняння Ейлера – Лагранжа були отримані майже одночасно Больцманом (1902) і Гамелем (1903). У рівняннях руху, якими користувався П. В. Воронєць (1903), також розглядалися квазішвидкості.

Рівняння Ейлера – Лагранжа в основному застосовують у неголономних системах, проте вони значно полегшують складання рівнянь руху і голономних систем. Особливо вони ефективні в задачах динаміки системи твердих тіл. Пояснюється це тим, що структура кінетичної енергії в квазішвидкостях є досить простою.

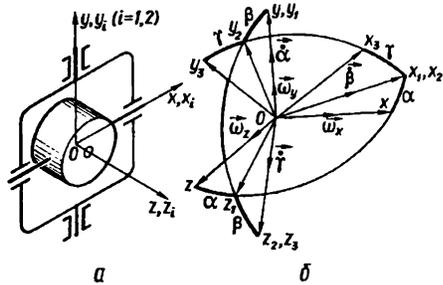


Рис. 27.5

Продемонструємо це на прикладі складання рівнянь руху гіроскопа в кардановому підвісі, як системи трьох тіл, що являють собою три обертальні пари.

**Приклад 5.** Скласти рівняння руху гіроскопа в кардановому підвісі на рухомій основі, що обертається з кутовими швидкостями  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  (рис. 27.5, а). Врахувати моменти інерції рамок карданового підвісу. Ротор і рамка динамічно збалансовані відносно осей їх обертання, тобто відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю.

**Розв’язання.** Введемо такі системні координат:  $Oxyz$  зв’язана з основою,  $Ox_1y_1z_1$  – системи координат жорстко зв’язані з зовнішньою рамкою ( $i=1$ ), внутрішньою ( $i=2$ ) у формі кожуха електричної машини і ротора ( $i=3$ ).

Кут повороту зовнішньої рамки відносно осей навколо осі  $Oy_1$  позначимо  $\alpha$ , внутрішньої рамки відносно зовнішньої навколо осі  $Ox_2$  –  $\beta$  і ротора відносно внутрішньої навколо осі  $Oz_3$  –  $\gamma$ .

Кінематика гіроскопа показана на рис. 27.5, б. Кутні  $\alpha, \beta, \gamma$  – узагальнені координати  $q_1 = \alpha$ ;  $q_2 = \beta$ ;  $q_3 = \gamma$ . Знайдемо тепер квазішвидкості кожного з цих трьох тіл як проєкції кутових швидкостей на осі, зв’язані з кожним із них: із зовнішньою рамкою

$$\begin{aligned} \omega_{\lambda 1} &= \omega_x \cos \alpha - \omega_z \sin \alpha; \\ \omega_{\lambda 2} &= \dot{\alpha} + \omega_y; \\ \omega_{\lambda 3} &= \omega_x \sin \alpha + \omega_z \cos \alpha; \end{aligned} \quad (1)$$

із внутрішньою рамкою

$$\begin{aligned}\omega_{x2} &= \dot{\beta} + \omega_{x1}; \\ \omega_{y2} &= \omega_{y1} \cos \beta + \omega_{z1} \sin \beta; \\ \omega_{z2} &= -\omega_{y1} \sin \beta + \omega_{z1} \cos \beta;\end{aligned}\quad (2)$$

з гіроскопом (ротором гіродвигуна)

$$\begin{aligned}\omega_{x3} &= \omega_{x2} \cos \gamma + \omega_{y2} \sin \gamma; \\ \omega_{y3} &= -\omega_{x2} \sin \gamma + \omega_{y2} \cos \gamma; \\ \omega_{z3} &= \dot{\gamma} + \omega_{z2}.\end{aligned}\quad (3)$$

Враховуючи, що осі  $Ox_i, y_i, z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) рамок і гіроскопа є головними центральними осями інерції, обчислимо кінетичну енергію через квазішвидкості:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (I_{xi} \omega_{xi}^2 + I_{yi} \omega_{yi}^2 + I_{zi} \omega_{zi}^2), \quad (4)$$

де  $I_{xi}, I_{yi}, I_{zi}$  – осьові моменти інерції  $i$ -го тіла ( $i = 1, 2, 3$ ).

Враховуючи симетрію ротора  $I_{x3} = I_{y3} = I_e$  і позначаючи  $I_{z3} = I$ , а також очевидне співвідношення між кутовими швидкостями

$$\omega_{x3}^2 + \omega_{y3}^2 = \omega_{x2}^2 + \omega_{y2}^2,$$

запишемо враз (4) для  $T$  у формі

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} I_{x1} \omega_{x1}^2 + \frac{1}{2} I_{y1} \omega_{y1}^2 + \frac{1}{2} I_{z1} \omega_{z1}^2 + \frac{1}{2} (I_{x2} + I_e) \omega_{x2}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} (I_{y2} + I_e) \omega_{y2}^2 + \frac{1}{2} I_{z2} \omega_{z2}^2 + \frac{1}{2} I \omega_{z3}^2.\end{aligned}\quad (5)$$

Із цього виразу видно, що кінетична енергія симетричного гіроскопа не залежить від кута  $\gamma$ , тобто ця координата є циклічною.

Тепер, згідно з рівняннями Лагранжа другого роду, маємо

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= M_{y1}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} &= M_{x2}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} - \frac{\partial T}{\partial \gamma} &= M_{z3}.\end{aligned}\quad (6)$$

У подальшому покажемо, як при обчисленні частинних похідних перейти до квазішвидкостей. Але для порівняння рівнянь Лагранжа другого роду і теореми про зміну кінетичного моменту випишемо останню в проєкціях на такі осі:  $Oy_1$  – відповідно вісь повороту зовнішньої рамки,  $Ox_2$  – внутрішньої рамки і  $Oz_3$  – ротора. Тоді

$$\begin{aligned}\frac{dK_{y1}}{dt} + \omega_{z1} K_{x1} - \omega_{x1} K_{z1} &= M_{y1}; \\ \frac{dK_{x2}}{dt} + \omega_{y2} K_{z2} - \omega_{z2} K_{y2} &= M_{x2}; \\ \frac{dK_{z3}}{dt} + \omega_{x3} K_{y3} - \omega_{y3} K_{x3} &= M_{z3},\end{aligned}\quad (7)$$

де  $K_{x1}, K_{y1}, K_{z1}$  – відповідно кінетичний момент усіх тіл відносно осей зовнішньої рамки,  $K_{x2}, K_{y2}, K_{z2}$  – внутрішньої рамки і ротора відносно осей внутрішньої рамки і  $K_{x3}, K_{y3}, K_{z3}$  – кінетичний момент лише ротора.

Тепер знайдемо відповідні проєкції кінетичного моменту, враховуючи такі кінематичні співвідношення:

$$\frac{\partial \omega_{x2}}{\partial \omega_{x1}} = 1; \quad \frac{\partial \omega_{x2}}{\partial \omega_{y1}} = \frac{\partial \omega_{x2}}{\partial \omega_{z1}} = 0;$$

$$\frac{\partial \omega_{z2}}{\partial \omega_{y1}} = -\sin \beta; \quad \frac{\partial \omega_{y2}}{\partial \omega_{y1}} = \cos \beta;$$

$$\frac{\partial \omega_{y2}}{\partial \omega_{z1}} = \sin \beta; \quad \frac{\partial \omega_{z3}}{\partial \omega_{z2}} = 1; \quad \frac{\partial \omega_{z2}}{\partial \omega_{z1}} = \cos \beta.$$

Із (4) маємо

$$K_{x3} = \frac{\partial T}{\partial \omega_{x3}} = I_e \omega_{x3};$$

$$K_{y3} = \frac{\partial T}{\partial \omega_{y3}} = I_e \omega_{y3};$$

$$K_{z3} = \frac{\partial T}{\partial \omega_{z3}} = I \omega_{z3} = I(\dot{\gamma} + \omega_{z2}) = H,$$

де  $H$  – власний кінетичний момент гіроскопа.

Решту проєкцій кінетичного моменту знайдемо із виразу (5):

$$K_{x2} = \frac{\partial T}{\partial \omega_{x2}} = (I_e + I_{x2})\omega_{x2} = B\omega_{x2};$$

$$K_{y2} = \frac{\partial T}{\partial \omega_{y2}} = (I_e + I_{y2})\omega_{y2};$$

$$K_{z2} = \frac{\partial T}{\partial \omega_{z2}} = \frac{DT}{D\omega_{z2}} + \frac{\partial T}{\partial \omega_{z3}} \frac{\partial \omega_{z3}}{\partial \omega_{z2}} = I_{z2}\omega_{z2} + H;$$

$$K_{x1} = \frac{\partial T}{\partial \omega_{x1}} = \frac{DT}{D\omega_{x1}} + \frac{\partial T}{\partial \omega_{x2}} \frac{\partial \omega_{x2}}{\partial \omega_{x1}} = I_{x1}\omega_{x1} + B\omega_{x2};$$

$$\begin{aligned} K_{y1} &= \frac{\partial T}{\partial \omega_{y1}} = \frac{DT}{D\omega_{y1}} + \frac{\partial T}{\partial \omega_{y2}} \frac{\partial \omega_{y2}}{\partial \omega_{y1}} + \\ &+ \frac{\partial T}{\partial \omega_{z2}} \frac{\partial \omega_{z2}}{\partial \omega_{y1}} + \frac{\partial T}{\partial \omega_{z3}} \frac{\partial \omega_{z2}}{\partial \omega_{y1}} \frac{\partial \omega_{z2}}{\partial \omega_{y1}} = \\ &= I_{y1}\omega_{y1} + K_{y2} \cos \beta - K_{z2} \sin \beta; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} K_{z1} &= \frac{\partial T}{\partial \omega_{z1}} = \frac{DT}{D\omega_{z1}} + \frac{\partial T}{\partial \omega_{y2}} \frac{\partial \omega_{y2}}{\partial \omega_{z1}} + \\ &+ \frac{\partial T}{\partial \omega_{z2}} \frac{\partial \omega_{z2}}{\partial \omega_{z1}} + \frac{\partial T}{\partial \omega_{z3}} \frac{\partial \omega_{z2}}{\partial \omega_{z1}} \frac{\partial \omega_{z2}}{\partial \omega_{z1}} = \\ &= I_{z1}\omega_{z1} + K_{y2} \sin \beta + K_{z2} \cos \beta, \end{aligned}$$

де  $B = I_e + I_{x2}$ ;  $\frac{D}{D\omega_i}$  – оператор диференціювання доданків у кінстичній енергії, що явно залежать від квазішвидкості  $\omega_i$ .

Для обчислення частинних похідних у рівняннях Лагранжа випишемо ще ряд очевидних кінематичних співвідношень:

$$\frac{\partial \omega_{x1}}{\partial \alpha} = -\omega_{z1}; \quad \frac{\partial \omega_{z1}}{\partial \alpha} = \omega_{x1}; \quad \frac{\partial \omega_{y1}}{\partial \alpha} = 1;$$

$$\frac{\partial \omega_{x2}}{\partial \beta} = 1; \quad \frac{\partial \omega_{y2}}{\partial \omega_{x1}} = 1; \quad \frac{\partial \omega_{y2}}{\partial \beta} = \omega_{z2};$$

$$\frac{\partial \omega_{x2}}{\partial \beta} = -\omega_{y2}; \quad \frac{\partial \omega_{y2}}{\partial \omega_{z1}} = \sin \beta;$$

$$\frac{\partial \omega_{y2}}{\partial \omega_{y1}} = \cos \beta \text{ і т. д.}$$

У результаті, з урахуванням виразу (8), знайдемо

$$\frac{\partial T}{\partial \gamma} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} = \frac{\partial T}{\partial \omega_{z3}} \frac{\partial \omega_{z3}}{\partial \dot{\gamma}} = K_{z3} = H;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \beta} &= \frac{\partial T}{\partial \omega_{y2}} \frac{\partial \omega_{y2}}{\partial \beta} + \left( \frac{DT}{D\omega_{z2}} + \frac{\partial T}{\partial \omega_{z3}} \frac{\partial \omega_{z3}}{\partial \omega_{z2}} \right) \frac{\partial \omega_{z2}}{\partial \beta} = \\ &= \omega_{z2}K_{y2} - \omega_{y2}K_{z2}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = \frac{\partial T}{\partial \omega_{x2}} \frac{\partial \omega_{x2}}{\partial \beta} = \frac{\partial T}{\partial \omega_{x2}} = K_{x2};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= \left( \frac{DT}{D\omega_{x1}} + \frac{\partial T}{\partial \omega_{x2}} \frac{\partial \omega_{x2}}{\partial \omega_{x1}} \right) \frac{\partial \omega_{x1}}{\partial \alpha} + \\ &+ \left( \frac{DT}{D\omega_{y1}} + \frac{\partial T}{\partial \omega_{y2}} \frac{\partial \omega_{y2}}{\partial \omega_{y1}} + \frac{\partial T}{\partial \omega_{z2}} \frac{\partial \omega_{z2}}{\partial \omega_{y1}} \right) \frac{\partial \omega_{y1}}{\partial \alpha} + \\ &+ \left( \frac{DT}{D\omega_{z1}} + \frac{\partial T}{\partial \omega_{z2}} \frac{\partial \omega_{z2}}{\partial \omega_{z1}} \right) \frac{\partial \omega_{z1}}{\partial \alpha} = -\omega_{z1}K_{x1} + \omega_{x1}K_{z1}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{\partial T}{\partial \omega_{y1}} \frac{\partial \omega_{y1}}{\partial \alpha} = \frac{\partial T}{\partial \omega_{y1}} = K_{y1}.$$

Підставивши вираз (9) в (6), отримаємо з рівнянь Лагранжа другого роду рівняння Ейлера

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= \frac{dK_{y1}}{dt} + \omega_{z1}K_{x1} - \omega_{x1}K_{z1}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} &= \frac{dK_{x2}}{dt} + \omega_{y2}K_{z2} - \omega_{z2}K_{y2}; \quad (10) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} - \frac{\partial T}{\partial \gamma} &= \frac{dH}{dt}. \end{aligned}$$

У результаті рівняння руху гіроскопа в кардановому підвісі на рухомій основі матимуть вигляд

$$\begin{aligned} I_{y1}\dot{\omega}_{y1} + (I_{x1} - I_{z1})\omega_{x1}\omega_{z1} + \\ + \frac{d}{dt}(K_{y2} \cos \beta - K_{z2} \sin \beta) + B\omega_{x2}\omega_{z1} - \\ - (K_{y2} \sin \beta + K_{z2} \cos \beta)\omega_{x1} = M_{y1}; \quad (11) \\ B\dot{\omega}_{x2} - F\omega_{y2}\omega_{z2} + H\omega_{y2} = M_{x2}; \\ \frac{dH}{dt} = M_{z3}. \end{aligned}$$

Якщо основа нерухома, тоді  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ ;

$$\omega_{x1} = \omega_{z1} = 0; \quad \omega_{y1} = \dot{\alpha}; \quad \omega_{x2} = \dot{\beta}; \quad \omega_{z2} = \dot{\alpha} \cos \beta; \quad \omega_{z2} = -\dot{\alpha} \sin \beta.$$

Далі

$$\begin{aligned} K_{x_2} &= B\dot{\beta}; \quad K_{y_2} = (I_e + I_{y_2})\dot{\alpha} \cos \beta; \\ K_{z_2} &= H - I_{z_2}\dot{\alpha} \sin \beta; \quad K_{x_1} = B\dot{\beta}; \\ K_{y_1} &= I_{y_1}\dot{\alpha} + (I_e + I_{y_2})\dot{\alpha} \cos^2 \beta + \\ &+ I_{z_2}\dot{\alpha} \sin^2 \beta - H \sin \beta; \\ K_{z_1} &= H \cos \beta + (I_e + I_{y_2})\dot{\alpha} \sin \beta \cos \beta - \\ &- I_{z_2}\dot{\alpha} \sin \beta \cos \beta. \end{aligned}$$

Після нескладних перетворень рівняння руху такого гіроскопа на нерухомій основі буде

$$A(\beta)\ddot{\alpha} - F\dot{\alpha}\beta \sin 2\beta - H\dot{\beta} \cos \beta - \dot{H} \sin \beta = M_{y_1};$$

$$B\dot{\beta} + \frac{F}{2}\dot{\alpha}^2 \sin 2\beta + H\dot{\alpha} \cos \beta = M_{x_2};$$

$$\frac{dH}{dt} = M_{z_3},$$

де  $A(\beta) = I_{y_1} + (I_{y_2} + I_e)\cos^2 \beta + I_{z_2}\sin^2 \beta$  – зведений момент інерції системи відносно осі  $Oy_1$  зовнішньої рамки;  $H = I(\dot{\gamma} - \dot{\alpha} \sin \beta)$ ;  $F = I_{y_2} + I_e - I_{z_2}$ ;  $B = I_e + I_{z_2}$  – момент інерції внутрішньої рамки і ротора відносно осі  $Ox_2$ .

### § 27.7. Рівняння Лагранжа другого роду в однорідних координатах

Розглянемо систему твердих тіл, що зв'язані між собою ідеальними голономними (геометричними) в'язями. Прикладом такої системи є маніпуляційні роботи, гіроскопічні прилади тощо, які складаються з окремих ланок, кожна з яких є твердим тілом, а в'язями є зчленування обертового чи призматичного (телескопічного) типу.

Узагальненими координатами  $q_i$  в цих системах є відносні переміщення (лінійні та кутові) твердих тіл (ланок) заданої механічної системи.

Введемо системи координат  $O_i x_i y_i z_i$ , кожна з яких незмінно зв'язана з відповідною ланкою. Позначимо  $x^i, y^i, z^i$  координа-

ти довільної точки  $i$ -ї ланки в системі координат  $O_i x_i y_i z_i$ . Радіус-вектор цієї точки в однорідних координатах запишеться так:

$$\vec{r}^i = [x^i, y^i, z^i, 1]^T, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (27.52)$$

де  $n$  – число ланок маніпулятора.

Відносне положення сусідніх ланок визначається блочною матрицею (див. кінематику) вигляду

$$\bar{D}_i = \begin{bmatrix} \bar{A}_i & | & \bar{P}_i \\ 0 & | & 1 \end{bmatrix}, \quad (27.53)$$

де  $\bar{A}_i$  – матриця напрямних косинусів між осями двох сусідніх систем координат, зв'язаних відповідно з  $(i-1)$ -ю та  $i$ -ю ланками;  $\bar{P}_i$  – вектор-стовпчик координат початку  $O_i$   $i$ -ї системи координат в системі координат, що зв'язана з  $(i-1)$ -ю ланкою.

Положення довільної точки  $i$ -ї ланки в системі координат  $O_0 x_0 y_0 z_0$ , зв'язаної з нерухомою основою, визначається радіусом-вектором

$$\vec{r} = \bar{D}_1 \bar{D}_2 \dots \bar{D}_i \vec{r}_i = \bar{B}_i \vec{r}_i, \quad (27.54)$$

де матриця  $\bar{B}_i = \bar{D}_1 \bar{D}_2 \dots \bar{D}_i$  має таку саму структуру, як і матриця  $D_i$ .

Знайдемо вираз кінетичної енергії цієї системи зв'язаних тіл. Для цього потрібно знайти швидкість довільної точки  $i$ -ї ланки відносно нерухомої системи координат.

Враховуючи вираз (27.54), знайдемо

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \left( \sum_{k=1}^i \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \vec{r}_i. \quad (27.55)$$

Тут потрібно зауважити, що матриця  $\bar{D}_k$  є функцією тільки однієї узагальненої координати  $q_k$ , а матриця  $\bar{B}_i$  є функцією  $i$  узагальнених координат  $q_1, q_2, \dots, q_i$ , тобто

$$\bar{B}_i = \bar{D}_1(q_1) \bar{D}_2(q_2) \dots \bar{D}_i(q_i). \quad (27.56)$$

Запишемо вираз квадрата швидкості довільної точки  $i$ -ї ланки, використовуючи подання скалярного добутку (див. додаток)

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a}^T \bar{b} = \text{tr}(\bar{a} \bar{b}^T), \quad (27.57)$$

де  $\text{tr}$  – слід матриці  $(\bar{a} \bar{b}^T)$ .

Матимемо

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 &= \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} \Rightarrow \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 = \text{tr}\left(\dot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}}^T\right) = \\ &= \text{tr}\left[\sum_{k=1}^i \left(\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt}\right) \bar{r}^i \left(\sum_{j=1}^i \left(\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt}\right) \bar{r}^i\right)^T\right] = \\ &= \text{tr}\left(\sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^i \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial q_j} \bar{r}^i \bar{r}^i{}^T \frac{\partial \bar{B}_i^T}{\partial q_k} \frac{dq_j}{dt} \frac{dq_k}{dt}\right). \end{aligned} \quad (27.58)$$

Виділимо тепер нескінченно малий елемент  $i$ -ї ланки масою  $dm$ , положення якого в нерухомій системі координат визначається радіусом-вектором  $\bar{r}$ , тоді кінетична енергія цього елемента масою  $dm$  з урахуванням (27.58) буде

$$\begin{aligned} dT_i &= \frac{1}{2} dm \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial q_j} \left(\bar{r}^i dm \bar{r}^i{}^T\right) \frac{\partial \bar{B}_i^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right], \end{aligned} \quad (27.59)$$

а кінетична енергія  $i$ -ї ланки масою  $m$  дорівнюватиме

$$\begin{aligned} T_i &= \int_{(m_i)} dT_i = \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial q_j} \left( \int \bar{r}^i \bar{r}^i{}^T dm \right) \frac{\partial \bar{B}_i^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right]. \end{aligned} \quad (27.60)$$

Інтеграл, що стоїть у круглих дужках у виразі (27.60), є матрицею інерції  $i$ -ї ланки, обчисленої в точці  $O_i$ .

У розгорнутому вигляді цей вираз буде

$$\begin{aligned} \bar{H}_i &= \int_{(m_i)} \bar{r}^i \bar{r}^i{}^T dm = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-I_x + I_y + I_z) & I_{xy} & I_{xz} & m x_c \\ I_{xy} & \frac{1}{2}(I_x - I_y + I_z) & I_{yz} & m y_c \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{1}{2}(I_x + I_y - I_z) & m z_c \\ m x_c & m y_c & m z_c & m \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (27.61)$$

Підсумовуючи отримані вирази для кінетичних енергій усіх ланок (тіл), знайдемо кінетичну енергію системи тіл

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^n T_i = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{tr} \left( \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial q_j} \bar{H}_i \frac{\partial \bar{B}_i^T}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k. \end{aligned} \quad (27.62)$$

Зазначимо, що у випадку маніпуляційного робота до виразу (27.62) потрібно додати ще кінетичну енергію обертальних частин керуючих двигунів ланок маніпулятора у вигляді

$$T_{\text{дв}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \dot{q}_i^2, \quad (27.63)$$

де  $I_i$  – приведений момент інерції двигуна  $i$ -ї ланки відносно осі обертання.

Отже, повна кінетична енергія маніпуляційного робота буде

$$T = \sum_{i=1}^n T_i + T_{\text{дв}}. \quad (27.64)$$

Визначимо тепер узагальнену силу. Розділимо сили на потенціальні та непотенціальні. Узагальнена сила потенціального поля

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad \text{а непотенціальна узагальнена сила} - \bar{Q}_j.$$

Для визначення потенціальної енергії потрібно врахувати положення центрів мас ланок.

Нехай центр мас  $i$ -ї ланки в нерухомій  $O_0x_0y_0z_0$  і рухомій  $O_ix_iy_iz_i$  системах координат буде

$$\bar{r}_{Ci} = [x_{Ci}, y_{Ci}, z_{Ci}, 1]^T \quad (27.65)$$

і в рухомій

$$\bar{r}_{Ci}^i = [{}^i x_{Ci}, {}^i y_{Ci}, {}^i z_{Ci}, 1]^T. \quad (27.66)$$

Визначимо потенціальну енергію як роботу сил ваги при переході центра мас  $i$ -ї ланки із положення, що визначається радіусом-вектором  $\bar{r}_{Ci}$  в нерухомій системі координат у положення, що збігається з початком координат  $O_i$  рухомої системи координат  $O_ix_iy_iz_i$ :

$$\Pi_i = -m_i \bar{g}^T \bar{r}_{Ci}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (27.67)$$

де  $\bar{g}^T = [0, 0, g, 0]$  – матриця прискорення вільного падіння.

Враховуючи, що

$$\bar{r}_{Ci} = \bar{B}_i \bar{r}_{Ci}^i, \quad (27.68)$$

отримаємо для  $i$ -ї ланки

$$\begin{aligned} \Pi_i &= -m_i \bar{g}^T \bar{B}_i \bar{r}_{Ci}^i = \\ &= -m_i [0, 0, g, 0] \bar{B}_i \begin{bmatrix} {}^i x_{Ci} \\ {}^i y_{Ci} \\ {}^i z_{Ci} \\ 1 \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (27.69)$$

Тоді потенціальна енергія всієї системи дорівнює

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i = -\sum_{i=1}^n m_i \bar{g}^T \bar{B}_i \bar{r}_{Ci}^i \quad (27.70)$$

Скористаємось рівнянням Лагранжа у формі

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tilde{Q}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (27.71)$$

де  $L = T - \Pi$  – кінетичний потенціал.

Підставивши в (27.71) вираз (27.70) з урахуванням (27.62) і (27.63), отримаємо

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \text{tr} \left( \frac{\partial \bar{B}_j}{\partial q_k} \bar{H}_j \frac{\partial \bar{B}_j^T}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k + I_i \ddot{q}_i + \\ & + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j \text{tr} \left( \frac{\partial^2 \bar{B}_j}{\partial q_k \partial q_m} \bar{H}_j \frac{\partial \bar{B}_j^T}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_m - \\ & - \sum_{j=1}^n m_j \bar{g}^T \frac{\partial \bar{B}_j}{\partial q_i} \bar{r}_{Cj}^j = \tilde{Q}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (27.72)$$

Рівняння (27.72) являє собою рівняння руху зв'язаної системи твердих тіл в одновимірних координатах.

Ці рівняння внаслідок їх громіздкості незручні для аналітичного дослідження, проте вони зручні для застосування комп'ютерних технологій.

## § 27.8. Кінетична і потенціальна енергії системи та дисипативна функція в узагальнених швидкостях і координатах

Щоб скласти диференціальні рівняння руху механічної системи, інколи доцільно вміти виражати кінетичну і потенціальну енергії через узагальнені швидкості та координати.

За визначенням *кінетичної енергії* системи, що складається з  $n$  матеріальних точок,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i,$$

де

$$\bar{v}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt}; \quad \bar{r}_i = \bar{r}_i(t, q_1, q_2, \dots, q_N), \quad (27.73)$$

де  $N$  – число степенів вільності для системи з голономними зв'язками. Враховуючи, що

$$\bar{v}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j,$$

дістанемо

$$\begin{aligned} \ddot{v}_i^2 = \dot{v}_i \cdot \dot{v}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + 2 \sum_{j=1}^N \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \\ + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k. \end{aligned} \quad (27.74)$$

Підставляючи це співвідношення у вираз для кінетичної енергії (27.73), запишемо його у формі

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{v}_i \cdot \dot{v}_i = T_0 + T_1 + T_2. \quad (27.75)$$

Тут  $T_0$  – функція нульового степеня відносно узагальнених швидкостей  $\dot{q}_j$ , що визначаються рівністю

$$T_0 = T_0(t, q_1, q_2, \dots, q_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}; \quad (27.76)$$

$$T_1 = \sum_{j=1}^N B_j \dot{q}_j \quad (27.77)$$

– лінійна функція узагальнених швидкостей;

$$\begin{aligned} B_j(t, q_1, q_2, \dots, q_N) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}, \\ T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \end{aligned} \quad (27.78)$$

– функція другого степеня від узагальнених швидкостей, в якій

$$A_{jk}(t, q_1, q_2, \dots, q_N) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}.$$

Звідси випливає, що  $A_{jk} = A_{kj}$ .

У разі стаціонарних в'язей  $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} = 0$  у виразі (27.74) перших два доданки дорівнюють нулю і залишається тільки останній член. Тому повна кінетична енергія системи у цьому випадку дорівнюватиме  $T_2$ , тобто

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (27.79)$$

Тут коефіцієнти явно не залежать від часу:

$$A_{jk} = A_{jk}(q_1, q_2, \dots, q_N).$$

Отже, в разі стаціонарних в'язей кінетична енергія системи є квадратичною формою узагальнених швидкостей. Зокрема, якщо система має один степінь вільності, тобто  $N = 1$ , то вираз для кінетичної енергії системи можна записати у вигляді

$$T_2 = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2.$$

Розкладаючи функцію  $A(q)$  в ряд Маклорена, отримаємо

$$A(q) = A(0) + \left( \frac{\partial A}{\partial q} \right)_0 q + \dots$$

Підставимо цей вираз у передостанню формулу  $T_2$ , тоді

$$T = \frac{1}{2} A(0) \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial q} \right)_0 q + \dots \right] \dot{q}^2. \quad (27.80)$$

Якщо вважати узагальнені координати та їхні швидкості малими, то, обмежившись величинами другого порядку мализни, дістанемо

$$T \approx \frac{1}{2} a \dot{q}^2,$$

де  $A(0) = a > 0$ .

Для системи з двома степенями вільності ( $N = 2$ ) на основі (27.79) запишемо

$$T_2 = \frac{1}{2} (A_{11} \dot{q}_1^2 + 2A_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + A_{22} \dot{q}_2^2), \quad (27.81)$$

де коефіцієнти  $A_{11}, A_{12}, A_{22}$  є функціями узагальнених координат  $q_1$  і  $q_2$ . Розкладаючи

ці коефіцієнти в ряд за степенями  $q_1$  і  $q_2$  та обмежуючись, як і в системі з одним степе-  
нем вільності, в коефіцієнтах  $A_{jk}$  першими  
членами ряду

$$A_{jk}(q_1, q_2) = A_{jk}(0, 0) + \left( \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_1} \right)_0 q_1 +$$

$$+ \left( \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_2} \right)_0 q_2 + \dots \approx A_{jk}(0, 0) = a_{jk} = \text{const},$$

і підставляючи їх в (27.81), наближений  
вираз для кінетичної енергії запишемо у  
вигляді

$$T_2 \approx \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2). \quad (27.82)$$

У загальному випадку для системи з  $N$   
степенями вільності

$$T_2 \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (27.83)$$

Коефіцієнти  $a_{jk}$  називають *коефіцієнтами інерції*. З їх визначення видно, що вони симетричні відносно індексів  $j$  і  $k$ :

$$a_{jk} = a_{kj}. \quad (27.84)$$

*Потенціальна енергія* системи є функцією узагальнених координат

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_N). \quad (27.85)$$

Розкладемо вираз потенціальної енергії в степневий ряд за узагальненими координатами в околі положення рівноваги. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що в положенні рівноваги системи всі узагальнені координати дорівнюють нулю ( $q_j = 0$ ). Тоді відповідний ряд Маклорена має вигляд

$$\Pi(q_1, q_2, \dots, q_N) = \Pi(0, 0, \dots, 0) +$$

$$+ \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} \right)_0 q_1^2 + \dots \right.$$

$$\dots + \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_N^2} \right)_0 q_N^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0 q_1 q_2 + \dots$$

$$\dots + 2 \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_{N-1} \partial q_N} \right)_0 q_{N-1} q_N \left. \right] + \dots \quad (27.86)$$

Оскільки потенціальна енергія визначається з точністю до адитивної сталої, то, не порушуючи загальності, можна вважати, що потенціальна енергія в положенні рівноваги системи дорівнює нулю ( $\Pi(0, 0, \dots, 0) = 0$ ). Перші частинні похідні потенціальної енергії за узагальненими координатами дорівнюють узагальненій силі:

$$\left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right)_0 = Q_j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (27.87)$$

а в положенні рівноваги всі узагальнені сили (див. § 26.3) дорівнюють нулю, тому

$$\left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \right)_0 = 0, \quad \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \right)_0 = 0, \quad \dots \quad (27.88)$$

Коефіцієнти при других степенях узагальнених координат  $q_1^2, q_2^2, \dots, q_N^2$  позначимо через  $c_{ij}$ :

$$c_{ij} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (27.89)$$

Ці коефіцієнти називають *узагальненими коефіцієнтами жорсткості*. Вони є постійними і симетричними величинами, тобто

$$c_{ij} = c_{ji} = \text{const}.$$

З урахуванням введених позначень  $c_{ij}$  і рівностей (27.88), вираз (27.86) перепишемо у вигляді

$$\Pi \approx \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + \dots + c_{NN}q_N^2 + 2c_{12}q_1q_2 + \dots + 2c_{(N-1)N}q_{N-1}q_N) + \dots$$

або

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N c_{kj} q_k q_j + \dots \quad (27.90)$$

У подальшому будемо розглядати випадки, коли відхилення узагальнених координат від положення рівноваги залишаються малими. Відповідь на запитання, коли ця умова виконується, буде дана при вивченні стійкості положення рівноваги. Якщо припущення про мализну  $q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) вважають виконаними, то з точністю до величин більш високого порядку мализни, ніж другий, вираз для потенціальної енергії можна подати наближено у вигляді квадратичної форми узагальнених координат.

*Функція розсіювання енергії.* Розглянемо випадок, коли сила опору середовища, що діє на  $i$ -ту точку системи, пропорційна першому степеню швидкості  $\vec{F}_i = -f_i \vec{v}_i$ . Тут  $f_i$  – коефіцієнт сил тертя, що визначається звичайно експериментально.

Скориставшись формулою (26.8), визначимо узагальнену силу опору середовища

$$Q_j^c = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = - \sum_{i=1}^n f_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j}. \quad (27.91)$$

У § 27.3 було показано, що  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}$ ,

тому

$$Q_j^c = - \sum_{i=1}^n f_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i. \quad (27.92)$$

Введемо у розгляд скалярну функцію

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i, \quad (27.93)$$

яку називають *функцією розсіювання* або *дисипативною функцією Релєя*.

Якщо обмежитися розглядом системи зі стаціонарними в'язями і скористатися виразом (27.74) для  $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$ , то вираз (27.93) можна записати так:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \beta_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (27.94)$$

де

$$\beta_{jk} = \beta_{kj} = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k}.$$

Якщо система має один степінь вільності, то

$$\Phi = \frac{1}{2} \beta(q) \dot{q}^2. \quad (27.95)$$

Отже, *функція розсіювання є однопорідною квадратичною функцією узагальнених швидкостей з коефіцієнтами, що залежать від узагальнених координат*. На основі (27.92) і (27.93)

$$Q_j^c = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (27.96)$$

Щоб встановити механічний зміст функції розсіювання, розглянемо теорему про зміну механічної енергії (див. § 18.3)

$$dE = d'A^*, \quad (27.97)$$

де  $d'A^*$  – елементарна робота непотенціальних сил.

За формулою (26.9), з урахуванням (27.96), маємо

$$d'A^* = \sum_{j=1}^N Q_j^c dq_j = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} dq_j. \quad (27.98)$$

Звідси, враховуючи (27.97) і поділивши обидві частини співвідношення на  $dt$ , дістаємо

$$\frac{dE}{dt} = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \frac{dq_j}{dt} = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j. \quad (27.99)$$

Скориставшись теоремою Ейлера про однорідні функції, останній вираз перепишемо у вигляді

$$\frac{dE}{dt} = -2\Phi. \quad (27.100)$$

Отже, розсіювання повної механічної енергії системи (яку вона мала б, якби була консервативною) за одиницю часу дорівнює подвоєному значенню дисипативної функції Релея.

### § 27.9. Узагальнений інтеграл енергії

Розглянемо механічну систему, для якої функція Лагранжа  $L = T - \Pi$  залежить від часу, узагальнених координат і швидкостей, тобто

$$L = L(t, q_m, \dot{q}_m), \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (27.101)$$

Диференціюючи за часом функцію (27.101), матимемо

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{m=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \ddot{q}_m \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (27.102)$$

Із рівняння Лагранжа (27.25) випливає

$$\frac{\partial L}{\partial q_m} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Тоді вираз у дужках в (27.102) набере вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \ddot{q}_m &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m \right), \quad m = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (27.103)$$

Підставивши (27.103) у вираз (27.102), його можна переписати у вигляді

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{m=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m + \frac{\partial L}{\partial t},$$

або

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{m=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (27.104)$$

Якщо  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , тобто функція Лагранжа

явно від часу не залежить, то

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{m=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m - L \right) = 0$$

і

$$\sum_{m=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m - L = h. \quad (27.105)$$

Вираз (27.105) називають *узагальненим інтегралом енергії (інтегралом Якобі)*. Згідно-

чи, що  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m$ , можемо записати

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m - L &= \\ &= \sum_{m=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m - T + \Pi. \end{aligned} \quad (27.106)$$

Для реономної системи кінетична енергія виражається формулою (27.75)

$$T = T_2 + T_1 + T_0. \quad (27.107)$$

Підставляючи це у формулу (27.106), отримасмо

$$\sum_{m=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m - L = \sum_{m=1}^N \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m \right) - T_2 - T_1 - T_0 + \Pi. \quad (27.108)$$

За теоремою Ейлера про однорідні функції маємо

$$\sum_{m=1}^N \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m = 2T_2; \quad (27.109)$$

$$\sum_{m=1}^N \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m = 2T_1.$$

Отже, з урахуванням (27.109) вираз (27.108) набуде вигляду

$$\sum_{m=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m - L = T_2 - T_0 + \Pi. \quad (27.110)$$

Значимо, що вираз (27.110) не збігається з повною енергією системи

$$E = T + \Pi = T_2 + T_1 + T_0 + \Pi. \quad (27.111)$$

Використовуючи (27.110), перепишемо загальний інтеграл енергії (27.105) у формі

$$T_2 - T_0 + \Pi = h. \quad (27.112)$$

Отже, *узагальнений інтеграл енергії має місце тоді, коли сили потенціальні, а функція Лагранжа явно від часу не залежить.*

Для склерономних консервативних систем, коли  $L$  явно від часу не залежить,  $T = T_2$  і узагальнений інтеграл буде звичайним інтегралом енергії

$$T + \Pi = T_2 + \Pi = h. \quad (27.113)$$

**Приклад 6.** Скласти диференціальні рівняння руху відцентрового регулятора (рис. 27.6) і показати, що при рівномірному обертанні регулятора має місце узагальнений інтеграл енергії.

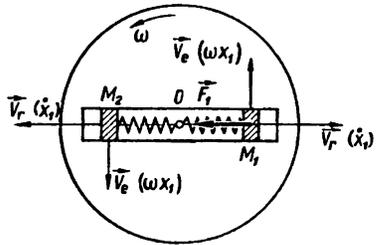


Рис. 27.6

Регулятор являє собою два однакових тягарці  $M_1$  і  $M_2$  (рис. 27.6) кожний масою  $m$ , які можуть переміщатися в пазу  $AB$ . Тягарці прикріплені до осі обертання пружинами жорсткості  $c$ .

Розв'язання. Зауважимо, що рухи тіл  $M_1$  і  $M_2$  незалежні, але в силу симетрії мають однаковий характер. Тому достатньо розглянути рух одного з цих тіл, наприклад  $M_1$ .

Положення тіла  $M_1$  визначається координатою  $x_1 = OM_1$ . Тіло бере участь у складному русі, його відносна швидкість  $v_r = \dot{x}_1$ , а переносна  $v_e = \omega x_1$ . Абсолютна швидкість  $v_1$  визначатиметься рівністю

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \omega^2 x_1^2 \quad (1)$$

і відповідно кінетична енергія буде

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x_1^2. \quad (2)$$

У даному випадку

$$T_2 = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2, \quad T_1 = 0, \quad T_0 = \frac{1}{2} m \omega^2 x_1^2.$$

При сталій кутовій швидкості  $\omega$  кінетична енергія явно від часу не залежить.

На тіло  $M_1$  діють дві активні консервативні сили: сила ваги  $mg$  і сила пружності пружини  $F_1$ , яка визначається за законом Гука:

$$F_1 = c_1(x_1 - l), \quad (3)$$

де  $l$  – довжина пружини в недеформованому стані.

Потенціальна енергія пружини буде

$$\Pi = \frac{1}{2} c(x_1 - l)^2 \quad (4)$$

і вона теж явно від часу не залежить, тому ця система задовольняє всі умови існування узагальненого інтеграла енергії

$$T_2 - T_0 + \Pi = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 x_1^2 + \frac{1}{2} c(x_1 - l)^2 = h. \quad (5)$$

Попередимо, що було б грубою помилкою вважати, що тут має місце інтеграл повної енергії системи, тобто

$$T + \Pi = T_2 + T_0 + \Pi = h_1.$$

Фізично несправедливість останнього пояснюється тим, що переносний рух відбувається за рахунок неврахованої нами енергії двигуна, який обертає регулятор.

Складемо тепер рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_1}.$$

Виконавши необхідні операції, отримаємо

$$m\ddot{x}_1 - m\omega^2 x_1 = -c(x_1 - l)$$

або

$$m\ddot{x}_1 = m\omega^2 x_1 - c(x_1 - l). \quad (6)$$

При  $\omega = \text{const}$  узагальнений інтеграл енергії легко отримати безпосередньо з рівняння (6), якщо помножити обидві частини рівняння (6) на  $dx_1$  і врахувати тотожність

$$\ddot{x}_1 dx_1 = \dot{x}_1 d\dot{x}_1.$$

### Питання для самоконтролю

1. Наведіть шість типів диференціальних рівнянь голономних систем, що розглянуті в цьому розділі.
2. Реакції яких в'язей виключаються з розгляду в узагальненому рівнянні динаміки і яким чинном?
3. Які властивості реакцій в'язей враховуються в рівнянні Лагранжа першого роду?
4. Що таке множники Лагранжа і як їх визначити?
5. Які кінематичні тотожності Лагранжа використовують при виведенні рівняння Лагранжа другого роду?
6. Як можна записати рівняння Лагранжа другого роду для консервативних систем?
7. У чому суть рівнянь Лагранжа другого роду з додатковими і відкинутими в'язями?
8. Чим відрізняються рівняння Ейлера – Лагранжа від рівнянь Лагранжа другого роду?
9. Що спільного за формою запису у виразах кінетичної, потенціальної енергії та функції розсіювання енергії для системи зі стаціонарними в'язями?
10. Чим відрізняється узагальнений інтеграл енергії (інтеграл Якобі) від звичайного інтеграла повної механічної енергії системи і що між ними спільного?

## Розділ 28

### КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ ГАМІЛЬТОНА

#### § 28.1. Канонічні змішні

Як було показано в § 27.3, рівняння Лагранжа другого роду, що описують рух механічної системи з голономними в'язями під дією потенціальних сил, являють собою систему  $k$  звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно узагальнених координат  $q_1, q_2, \dots, q_k$  як функції часу  $t$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, k$$

або

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (28.1)$$

де  $L = L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - \Pi$  – функція Лагранжа.

Оскільки гесіан лагранжевої функції (ви-значник матриці, що складений із коефіцієнтів інерції) відмінний від нуля, тобто

$$\det \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right] \equiv \det [A_{ij}] \neq 0, \quad (28.2)$$

$$i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, k,$$

то система (28.1) розв'язувана відносно дру-гих похідних  $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_k$  від невідомих функцій  $q_1(t), \dots, q_k(t)$ . Це дає змогу безліччю спо-собів замінити цю систему  $k$  рівнянь екві-валентною їй системою  $2k$  рівнянь першого порядку. Причому загальний розв'язок обох систем рівнянь має однакову кількість ( $2k$ ) довільних сталих. Достатньо, наприклад, взяти за нові невідомі функції, поряд з  $q_1, \dots, q_k$ , їхні перші похідні  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k$  або будь-яких незалежних між собою функцій від  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k$ , які можуть містити також координати  $q_1, \dots, q_k$  і час  $t$ .

Класичні рівняння Гамільтона, що роз-глядаються нижче, є важливим, але окре-ним випадком такої еквівалентної заміни рівнянь Лагранжа другого роду.

За незалежні змінні системи  $2k$  диферен-ціальних рівнянь першого порядку можна взяти узагальнені координати  $q_1, \dots, q_k$  і но-ві змінні

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (28.3)$$

що називаються *узагальненими імпульсами*. Цю назву вони дістали внаслідок меха-нічного тлумачення, яке можна дати в де-яких типових випадках руху механічної системи.

**Приклад 1.** Розглянемо рух матеріальної точ-ки масою  $m$  у потенціальному силовому полі.

За узагальнені візьмемо декартові координати точки  $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$ . Узагальнені швид-

кості  $\dot{q}_1 = \dot{x}, \dot{q}_2 = \dot{y}, \dot{q}_3 = \dot{z}$ . Кінетична енергія ма-теріальної точки  $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ . Потенці-альна енергія  $\Pi = \Pi(q_1, q_2, q_3) = \Pi(x, y, z)$ . Функ-ція Лагранжа, або кінетичний потенціал, має вигляд  $L = T - \Pi = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \Pi(x, y, z)$ .

Беручи частинні похідні від  $L$  за узагальненими швидкостями, дістанемо

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{x};$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m\dot{y};$$

$$p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = m\dot{z}.$$

Частинні похідні в даному разі мають про-стий фізичний зміст. Вони збігаються з проєкція-ми кількості руху (імпульсу) точки на осі коор-динат  $Ox, Oy, Oz$ . Тому в загальному випадку ці частинні похідні в (28.3) також називають узагальненими імпульсами і позначають через

$$p_i \left( p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right).$$

*Сукупність узагальнених координат і узагальнених швидкостей називають ла-гранжевими змінними деякої системи, а су-купність узагальнених координат та уза-гальнених імпульсів – її гамільтоновими змінними.*

За такого вибору змінних  $2k$  рівнянь руху консервативної системи записуються в симет-ричній формі канонічних рівнянь Гамільтона. Оскільки кінетична енергія  $T$  механічної сис-теми є квадратичною формою узагальнених швидкостей  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k$ , то узагальнені ім-пульси (28.3) будуть лінійними функціями узагальнених швидкостей вигляду

$$p_i = B_i + \sum_{\alpha=1}^k A_{\alpha i} \dot{q}_\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (28.4)$$

Система лінійних рівнянь (28.4) завжди розв'язувана відносно узагальнених швидкостей, тому що матриця коефіцієнтів інерції  $[A_{\alpha\beta}]$  невинроджена. Звідси

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k, t), \quad i = 1, \dots, k. \quad (28.5)$$

Це обернене перетворення можна записати у формі прямого перетворення (28.3), якщо ввести у розгляд так звану функцію Гамільтона

$$H(p, q, t) \equiv \sum_{i=1}^k p_i \dot{q}_i - L(\dot{q}, q, t),$$

або

$$H = \sum_{i=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L. \quad (28.6)$$

Тут узагальнені швидкості замінюються їх виразами (28.5). Дійсно, частинна похідна від цієї функції за узагальненими імпульсами має вигляд

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} p_j - \sum_{j=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Звідси, внаслідок виконання рівностей (28.3)

$$\left( p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right), \text{ отримаємо}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (28.7)$$

Співвідношення (28.3) і (28.7), що визначають пряму й обернену заміни узагальнених швидкостей та імпульсів, є окремим випадком перетворення Лежандра. Значимо, що узагальнені координати  $q_i$  і час  $t$  є параметрами цього перетворення.

## § 28.2. Виведення канонічних рівнянь

Якщо рух механічної системи задано в лагранжевих і гамільтонових змінних, то вони еквівалентні в тому розумінні, що завжди існує взаємно однозначний перехід від однієї системи змінних до другої. Отже якщо в деякий момент часу відомо узагальнені координати та узагальнені імпульси, то за формулами (28.7) можна обчислити узагальнені швидкості й навпаки, при відомих узагальнених координатах і швидкостях за формулами (28.3) можна обчислити узагальнені імпульси.

Співвідношення (28.7) визначають першу групу канонічних рівнянь Гамільтона. Однак за допомогою тієї самої функції  $H(p, q, t)$  утворюється також друга група канонічних рівнянь. На протилежності рівнянням першої групи друга група рівнянь впливає з рівнянь руху механічної системи.

Дійсно, з урахуванням співвідношення (28.3) рівняння Лагранжа другого роду (28.1) набувають вигляду

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (28.8)$$

Обчислюючи частинні похідні за узагальненими координатами від обох частин тожності (28.6), дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} &= \\ &= \sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \dot{q}_j + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} \right) - \sum_{j=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Оскільки  $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} = 0$  через незалежність

узагальнених швидкостей від узагальнених координат, а з урахуванням (28.7)

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^k \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_i},$$

то остаточно дістанемо

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (28.9)$$

Якщо підставити (28.9) у (28.8), то друга група канонічних рівнянь Гамільтона матиме вигляд

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (28.10)$$

Наведемо також класичний спосіб виведення системи канонічних рівнянь, що належить саме Гамільтону. Для цього розглянемо ізохронну варіацію функції  $H(p, q, t)$ , що породжується варіацією незалежних змінних  $q$  і  $p$ , припускаючи, що змінна  $q$  визначається співвідношенням (28.5). Варіюючи обидві частини тотожності (28.6), дістанемо

$$\sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right) \equiv \sum_{i=1}^k \left[ \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \left( p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta \dot{q}_i \right]. \quad (28.11)$$

Звідси, при довільних і незалежних варіаціях  $\delta p_i$ ,  $\delta q_i$ , одержимо такі співвідношення:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (28.12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (28.13)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (28.14)$$

Перша група рівнянь (28.12) збігається з (28.7). Беручи до уваги (28.13), друга група рівнянь (28.8) запишеться у вигляді (28.10), а (28.14) збігається з (28.3). Отже, дістали ту саму систему канонічних рівнянь, що і раніше.

Рівняння (28.7) і (28.10), записані разом,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad i = 1, \dots, k \quad (28.15)$$

являють собою систему  $2k$  диференціальних рівнянь першого порядку відносно узагальнених координат  $q_1, \dots, q_k$  та імпульсів  $p_1, \dots, p_k$  як функцій часу. Ці рівняння визначаються однією функцією Гамільтона  $H$  подібно до того, як рівняння Лагранжа визначаються однією функцією Лагранжа  $L$ .

Будь-яка система диференціальних рівнянь цього виду, яка б не була функція  $H = H(p, q, t)$ , називається *канонічною* або *гамільтоновою системою*.

Гамільтонові канонічні рівняння динаміки застосовані для консервативних систем з голономними (геометричними) в'язями.

Ці рівняння (28.15) були знайдені у 1834 р. Гамільтоном для окремого випадку, коли функція Лагранжа явно від часу не залежить. У 1848–1850 рр. наш співвітчизник М. В. Остроградський поширив ці рівняння на загальний випадок руху системи з функціями Лагранжа, що явно залежать від часу.

### § 28.3. Явний вираз функції Гамільтона, її фізичний зміст. Найпростіші інтеграли рівнянь Гамільтона

Для механічної системи з голономними в'язями, що перебуває під дією консервативних сил, функція Лагранжа має вигляд

$$L = T - P, \quad (28.16)$$

де  $T = T_2 + T_1 + T_0$  – кінетична енергія системи;  $T_2, T_1$  – відповідно квадратична і лінійна форми узагальнених швидкостей (див. § 27.8);  $P$  – потенціальна енергія системи.

За теоремою Ейлера про однорідні функції маємо

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^k \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j &= 2T_2; \\ \sum_{j=1}^k \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j &= T_1; \\ \sum_{j=1}^k \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j &= 0.\end{aligned}\quad (28.17)$$

Якщо врахувати (28.3) і (28.17), то дістанемо тотожність

$$\sum_{i=1}^k p_i \dot{q}_i \equiv \sum_{i=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T_2 + T_1. \quad (28.18)$$

З урахуванням цієї тотожності функцію Гамільтона (28.6) запишемо у вигляді

$$H = T_2 + (\Pi - T_0). \quad (28.19)$$

Якщо порівняти (28.19) з (27.112), то неважко помітити, що для реомної системи з потенціальними силами, коли функція Лагранжа явно від часу не залежить, функція Гамільтона збігається з узагальненим інтегралом енергії

$$H = T_2 + \Pi - T_0 = h. \quad (28.20)$$

В окремому випадку стаціонарних консервативних систем, коли  $T = T_2$ , функція Гамільтона збігається з повною енергією  $E$  механічної системи:

$$H = T + \Pi = E, \quad (28.21)$$

де  $E = E(q, p, t)$ .

Для канонічної системи рівнянь, як і для іншої системи диференціальних рівнянь першого порядку відносно змінних  $q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k$ , інтегралом називають співвідношення вигляду

$$f(q, p, t) = C = \text{const}, \quad (28.22)$$

яке тотожно задовольняється будь-яким рівнянням цієї системи. Сталій  $C$  у правій частині треба приписати відповідне значення, саме: якщо  $q_0, p_0, t_0$  – початкові значення  $q, p, t$  при  $t = t_0$ , то

$$C = f(q_0, p_0, t_0). \quad (28.23)$$

Покажемо, що коли функція Гамільтона явно не залежить від часу  $t$ , то вираз (28.20) є інтегралом канонічної системи. Дійсно, складаючи повну похідну функції Гамільтона  $H(q, p, t)$  за часом  $t$ , одержимо

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (28.24)$$

Беручи до уваги рівняння (28.15), переконуємося в тому, що для будь-якого їх рівнянню виконується тотожність

$$\frac{dH}{dt} \equiv \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Оскільки за умовою функція  $H$  явно не залежить від часу, то із (28.24) випливає, що для канонічної системи (28.15) існує узагальнений інтеграл енергії

$$H(q, p) = T_2 + \Pi - T_0 = h = \text{const}, \quad (28.25)$$

що виражає сталість узагальненої енергії механічної системи під час її руху.

Другий найпростіший тип інтеграла дістанемо тоді, коли функція  $H$  не залежить від будь-якої узагальненої координати  $q$ .

Таку координату, яка не входить у вираз гамільтоніану, називають циклічною. При

цьому  $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$ . Звідси, згідно з (28.15), дістаємо

немо  $p_i = \text{const}$ . Інтеграл цього типу називають *циклічним*. Якщо узагальнена координата  $q_i$  не входить у гамільтоніан  $H(q, p, t)$  канонічної системи, то вона не увійде й у

вираз узагальнених швидкостей (28.7), а отже, й у вираз узагальнених імпульсів (28.3). Тому відповідний лагранжіан  $L(p, q, t)$  також не залежить від  $q_i$ .

При відомих  $2k$  незалежних інтегралах рівнянь (28.15) із них можна визначити узагальнені координати та імпульси як функції часу  $t$  і  $2k$  довільних сталих інтегрування

$$q_i = q_i(t, C_1, \dots, C_{2k}), \\ p_i = p_i(t, C_1, \dots, C_{2k}), \quad i = 1, \dots, k.$$

Отже, задача про інтегрування канонічних рівнянь зводиться до пошуку  $2k$  інтегралів цих рівнянь.

Розглянемо найпростіші канонічні рівняння та їхні інтеграли на прикладі руху фізичного маятника.

Фізичний маятник є найпростішою консервативною системою зі стаціонарними голономними в'язями. Його положення визначається кутом повороту навколо осі підвішування  $\varphi$ . Нехай нульова екіпотенціальна поверхня поля сил ваги проходить через вісь підвішування маятника. Тоді потенціальна енергія

$$\Pi = -mgl \cos \varphi,$$

де  $m$  – маса маятника;  $l$  – відстань від центра мас до осі підвішування;  $g$  – прискорення вільного падіння.

Кінетичну енергію обчислимо за виразом

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2,$$

де  $I$  – момент інерції маятника відносно осі підвішування. Функція Лагранжа при цьому має вигляд

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi.$$

Скориставшись виразом (28.3), визначимо узагальнений імпульс  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I \dot{\varphi}$ ,

звідки  $\dot{\varphi} = p/I$ . Згідно з (28.25), побудуємо функцію Гамільтона, враховуючи, що  $T_0 = 0$  і  $T = T_2$ , тоді, згідно з (28.21), маємо

$$H(p, \varphi) = \frac{p^2}{2I} - mgl \cos \varphi = E.$$

На основі (28.15) дістанемо канонічне рівняння руху маятника  $\dot{\varphi} = p/I$ ,  $\dot{p} = -mgl \sin \varphi$ . Під час руху маятника функція  $H(p, \varphi)$  не змінюється, інакше кажучи, вона є інтегралом руху. Дійсно, обчислюючи похідну від  $H(p, \varphi)$  за часом  $t$ , з урахуванням рівняння руху маятника, дістанемо

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} = \\ = \frac{pmgl}{I} \sin \varphi - \frac{pmgl}{I} \sin \varphi = 0.$$

Якщо маятник “вироджений” у тверде тіло, центр мас якого збігається з віссю підвішування ( $l = 0$ ), тоді канонічні рівняння

набувають вигляду  $\dot{\varphi} = \frac{p}{I}$ ,  $\dot{p} = 0$ . Звідси  $p(t) = p_0$  – циклічний інтеграл, а  $\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{p_0}{I}(t - t_0)$ .

**Приклад 2.** Знайти функцію Гамільтона і скласти канонічні рівняння для математичного маятника завдовжки  $l$  і масою  $m$ , точка підвішування якого виконує рух по колу радіусом  $r$  у вертикальній площині (рис. 28.1) зі сталою швидкістю  $v_0$ .

**Розв'язання.** За узагальнену координату прийемо  $q = \varphi$ . При цьому кут  $\psi$  повороту радіусом  $r$  з урахуванням того, що  $v_0 = \text{const}$ , дорівнюватиме

$$\psi = \frac{v_0}{r} t. \quad (1)$$

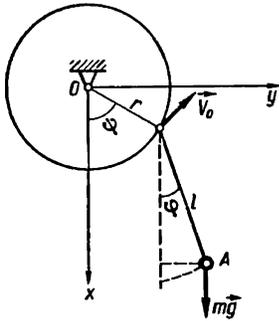


Рис. 28.1

Випишемо координати точки  $A$  в системі координат  $Oxy$ :

$$\begin{aligned} x_A &= r \cos \psi + l \cos \varphi, \\ y_A &= r \sin \psi + l \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

Кінетична енергія точки  $A$  з урахуванням того, що  $\dot{\psi} = v_0 / r$ ,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) = \\ &= \frac{1}{2} m \left[ (-r\dot{\psi} \sin \psi - l\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (r\dot{\psi} \cos \psi + l\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} m \left[ l^2 \dot{\varphi}^2 + 2v_0 l \dot{\varphi} \cos \left( \varphi - \frac{v_0}{r} t \right) + v_0^2 \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Оскільки при знаходженні узагальнених сил і потенціальної енергії в'язі вважалося миттєво зупиненими, то потенціальна енергія, коли за нульове положення прийняті нижче вертикальне, буде

$$\Pi = mg \left[ r(1 - \cos \psi) + l(1 - \cos \varphi) \right]. \quad (4)$$

Використовуючи вирази (3) і (4), з урахуванням (1), знайдемо функцію Лагранжа

$$\begin{aligned} L &= T - \Pi = \frac{1}{2} m \left[ l^2 \dot{\varphi}^2 + 2v_0 l \dot{\varphi} \cos \left( \varphi - \frac{v_0}{r} t \right) + v_0^2 \right] - \\ &- mgl \left[ 1 - \cos \varphi + \frac{r}{l} \left( 1 - \cos \frac{v_0}{r} t \right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

За формулою (28.3) знайдемо узагальнений імпульс  $p$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi} + mv_0 l \cos \left( \varphi - \frac{v_0}{r} t \right). \quad (6)$$

Звідси виразимо узагальнену швидкість  $\dot{\varphi}$  через імпульс  $p$ :

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{ml^2} - \frac{v_0}{l} \cos \left( \varphi - \frac{v_0}{r} t \right). \quad (7)$$

Користуючись виразом (28.6), з урахуванням (5) і (6), складемо функцію Гамільтона

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = p \dot{\varphi} - T + \Pi = \frac{1}{2} m \left( l^2 \dot{\varphi}^2 - v_0^2 \right) + \\ &+ mgl \left[ 1 - \cos \varphi + \frac{r}{l} \left( 1 - \cos \frac{v_0}{r} t \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Якщо в (8) підставити вираз (7) для  $\dot{\varphi}$ , то матимемо

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} m \left\{ l^2 \left[ \frac{p}{ml^2} - \frac{v_0}{l} \cos \left( \varphi - \frac{v_0}{r} t \right) \right]^2 - v_0^2 \right\} + \\ &+ mgl \left[ 1 - \cos \varphi + \frac{r}{l} \left( 1 - \cos \frac{v_0}{r} t \right) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Зазначимо, що коли  $v_0 = 0$ , то в'язі будуть стаціонарні,  $L$  не буде явно залежати від часу,  $T = T_1$  і, як наслідок, функція Гамільтона  $H$  буде інтегралом повної механічної енергії

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} ml^2 \left( \frac{p}{ml^2} \right)^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{ml^2} + \\ &+ mgl(1 - \cos \varphi) = E = \text{const} \end{aligned} \quad (10)$$

або з урахуванням (6) для  $p$  виразу (10) можна надати форми

$$H = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = T + \Pi = E = h,$$

або, враховуючи, що  $mgl = \text{const}$ , можна записати

$$H = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = h.$$

Канонічні рівняння в нашому випадку мають вигляд

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}.$$

Підставивши сюди вираз (10), отримаємо два диференціальні рівняння першого порядку

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{p}{ml^2}; \\ \dot{p} = -mgl \sin \varphi. \end{cases}$$

Якщо з останньої системи виключити  $p$ , то отримаємо відоме нам диференціальне рівняння коливань математичного маятника

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

### § 28.4. Теорема Пуассона

Покажемо, що інтеграл (28.22) системи канонічних рівнянь є розв'язком деякого рівняння в частинних похідних першого порядку. Дійсно, із рівності (28.22) з урахуванням рівнянь (28.6) випливає тотожність

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0. \quad (28.26)$$

Справедливе також і протилежне твердження: кожна функція, що задовольняє рівняння (28.26), є інтегралом канонічної системи (28.15).

Отже, для того щоб яка-небудь функція  $f(q, p, t)$  була інтегралом канонічної системи (28.15), необхідно і достатньо, щоб вона перетворювала диференціальне рівняння першого порядку (28.26) в тотожність. Запишемо цю умову в компактному вигляді, використовуючи поняття дужок Пуассона. Дужками Пуассона функцій  $\varphi$  і  $\psi$  від  $2k$  канонічних змінних  $p_i, q_i$  називають вираз вигляду

$$(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \right). \quad (28.27)$$

Ці вирази мають такі властивості, які наводимо без доведення:

1.  $(\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi)$ ;
2.  $(\varphi, d\psi) = d(\varphi, \psi)$ ;
3.  $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi, \psi) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi \right) + \left( \varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)$ ; (28.28)

4.  $(\varphi, a) = 0$ ;

5.  $(\theta, (\varphi, \psi)) + (\varphi, (\psi, \theta)) + (\psi, (\theta, \varphi)) = 0$

– тотожність Якобі – Пуассона. Тут  $a$  – довільна стала. (Пропонуємо читачеві перекоонатися в їхній справедливості самостійно).

З урахуванням (28.27) тотожність (28.26) набуває вигляду

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0. \quad (28.29)$$

В інтегруванні канонічних рівнянь важливе місце займає теорема Пуассона.

**Теорема.** Якщо  $f_1, f_2$  – два інтеграли системи, то їхня дужка Пуассона  $(f_1, f_2) = C$  також буде інтегралом.

Доведення. Згідно з рівнянням (28.29),

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + (f_1, H) = 0; \quad (28.30)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + (f_2, H) = 0.$$

Скористаємося тотожністю Якобі – Пуассона 5, застосувавши її до функцій  $H, f_1, f_2$ , де  $H$  – функція Гамільтона:

$$\begin{aligned} & ((f_1, f_2), H) + ((f_2, H), f_1) + \\ & + ((H, f_1), f_2) = 0. \end{aligned} \quad (28.31)$$

На основі рівностей (28.30) запишемо

$$((f_1, f_2), H) - \left( \frac{\partial f_2}{\partial t}, f_1 \right) + \left( \frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2 \right) = 0. \quad (28.32)$$

Використовуючи властивості 1 і 3 із (28.28), остаточно отримасмо

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_1, f_2) + ((f_1, f_2), H) = 0. \quad (28.33)$$

Теорема доведена.

Зауважимо, що новий інтеграл не буде обов'язково незалежним від двох інших, які припускаємо відомими. Він може виявитися сталою величиною і, зокрема, нулем.

**Приклад Якобі.** Розглянемо рух консервативної системи зі стаціонарними голономними в'язями та інтегралом енергії

$$H(q, p) = E.$$

Нехай відомо ще один інтеграл

$$f(t, q, p) = C.$$

Скористасмося теоремою Пуассона для побудови третього інтеграла за двома невідомими. З умови (28.29) масмо

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (H, f).$$

На основі теореми Пуассона встановлюємо, що  $\frac{\partial f}{\partial t} = C_1$  – новий інтеграл канонічної системи

диференціальних рівнянь. Якщо при цьому  $\frac{\partial f_1}{\partial t}$

явно залежить від часу, то також можна визначити інтеграл  $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = C_2$  і т. д. Якщо інтеграл

$f(t, q, p) = C$  не залежить явно від часу, то дужки  $(H, f)$  дорівнюють нулю. У цьому разі ніяких нових інтегралів за допомогою теореми Пуассона визначити не можна.

## § 28.5. Принцип

### Гамільтона – Остроградського

Цей принцип є інтегральним варіаційним принципом механіки. Розглядаючи його, будемо говорити виключно про системи з геометричними голономними в'язями. Вільям

Гамільтон установив цей принцип для консервативних, а М. В. Остроградський – для неконсервативних систем.

Із загального рівняння динаміки масмо

$$\sum_{i=1}^n \left( \bar{F}_i - m_i \frac{d}{dt} \bar{v}_i \right) \cdot \delta \bar{r}_i = 0. \quad (28.34)$$

Перетворимо другий доданок

$$-\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \bar{v}_i) \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \delta \bar{r}_i - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \cdot \delta \bar{r}_i, \quad (28.35)$$

де

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \delta \bar{r}_i &= \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \cdot \delta \frac{d \bar{r}_i}{dt} = \\ &= \delta \sum_{i=1}^n \frac{m_i \bar{v}_i \cdot \dot{\bar{v}}_i}{2} = \delta T; \end{aligned} \quad (28.36)$$

$\delta T$  – варіація кінетичної енергії системи. Перший доданок в (28.34) позначимо  $\delta A$ , оскільки він дорівнює елементарній роботі

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \delta A. \quad (28.37)$$

Тоді, підставивши (28.35), (28.36) і (28.37) в (28.34), отримасмо

$$\delta T + \delta A - \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \cdot \delta \bar{r}_i \right) = 0. \quad (28.38)$$

Цей вираз називають *центральним рівнянням Лагранжа*. Інтегруючи його за часом у межах від початкового моменту часу  $t_1$  до кінцевого  $t_2$  за умови, що  $(\delta \bar{r}_i)_{t=t_1} = (\delta \bar{r}_i)_{t=t_2} = 0$ , одержимо

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A) dt = 0. \quad (28.39)$$

Рівність (28.39) виражає принцип Остроградського, що полягає ось у чому: *дійсний рух матеріальної системи відрізняється від руху порівняння<sup>1</sup> тим, що інтеграл за часом  $t$ , взятий від суми елементарної роботи активних сил і варіації кінетичної енергії  $\delta T$ , що відповідають переходу точок системи з дійсних траєкторій на траєкторію порівняння, дорівнює нулю.*

Установимо принцип Гамільтона – Остроградського для консервативної системи. У цьому випадку  $\delta A = \delta \Pi$ , де  $\delta \Pi$  – варіація потенціальної енергії. Тому  $\delta T + \delta A = -\delta(T - \Pi) = \delta L$ , де  $L = T - \Pi$  – функція Лагранжа. Тоді (28.39) набуде простішого вигляду

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$$

бо

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (28.40)$$

$\int_{t_1}^{t_2} L dt = S$  – механічна дія консервативної системи за Гамільтоном – Остроградським.

Отже, (28.40) набуде остаточного вигляду

$$\delta S = 0. \quad (28.41)$$

**Принцип Гамільтона – Остроградського.** Дійсний рух системи з голономними зв'язками відрізняється від інших кінематич-

но можливих рухів тим, що для нього варіація дії за Гамільтоном – Остроградським, визначеної для довільного проміжку часу, дорівнює нулю.

Принцип Гамільтона – Остроградського називають також принципом стаціонарної дії.

Із принципу Гамільтона – Остроградського можна отримати рівняння руху, а з рівнянь руху принцип Гамільтона – Остроградського. Із зазначеного принципу можна отримати також канонічні рівняння Гамільтона. Цей принцип може бути покладений в основу голономних консервативних систем.

А. І. Лур'є розповсюдив принцип Гамільтона – Остроградського і на неголономні системи<sup>2</sup>.

### Питання для самоконтролю

1. Що називають узагальненим імпульсом?
2. Який вигляд мають канонічні рівняння руху системи?
3. Яким виразом визначається функція Гамільтона і який фізичний зміст вона має?
4. У чому суть теореми Пуассона?
5. Сформулюйте принцип Гамільтона – Остроградського?
6. Що являють собою канонічні змінні?
7. Для яких механічних систем застосовані канонічні рівняння Гамільтона?
8. У чому фізичний зміст інтегралів рівнянь Гамільтона?
9. Яка форма рівнянь Лагранжа другого роду є базовою для отримання канонічних рівнянь Гамільтона?
10. Чим відрізняються за формою канонічні рівняння Гамільтона від рівнянь Лагранжа другого роду?

<sup>1</sup>Траєкторію порівняння тут є допустима в'язями ліва траєкторія руху точки, що перетинається з траєкторією дійсного руху при  $t = t_1$  і  $t = t_2$ .

<sup>2</sup>Лур'є А. И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

## Розділ 29 РІВНЯННЯ РУХУ НЕГОЛОНОМНИХ СИСТЕМ

### § 29.1. Неголономні в'язі та число степенів вільності неголономних систем

У § 15.1, характеризуючи в'язі, ми навели приклади, коли обмеження на швидкості залишають в'язь геометричною (голономною) і коли обмеження на швидкості є такі, що відповідні кінематичні в'язі не мають інтегруючого множника і їх не можна звести до геометричних в'язей. Такі в'язі називають *неголономними* або *кінематичними*.

У § 25.2 виписані рівняння (25.3) і (25.4) відповідно нелінійних голономних в'язей і лінійних неголономних. Проте в загальному вигляді неголономні в'язі теж можуть бути нелінійними. Тоді, якщо на систему із  $n$  матеріальних точок одночасно накладено  $k$  голономних і  $d$  неголономних в'язей, то їх рівняння матимуть вигляд

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t) = 0,$$

$$j = 1, 2, \dots, k, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (29.1)$$

$$\Phi_v(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0,$$

$$v = 1, 2, \dots, d, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (29.2)$$

Як бачимо, нелінійні неголономні в'язі накладають обмеження, на відміну від лінійних (див. § 25.2), не лише на швидкості в степені вище першого, але й на координати точок, що значно ускладнює складання рівнянь руху таких систем.

Задача спрощується у випадку з нелінійними голономними в'язями, якщо заздалегідь прийняти додаткову умову, за якою можливі переміщення задовольняють умови М. Г. Чагаєва<sup>1</sup>

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Phi_v}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i + \frac{\partial \Phi_v}{\partial \dot{y}_i} \delta y_i + \frac{\partial \Phi_v}{\partial \dot{z}_i} \delta z_i \right) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, d. \quad (29.3)$$

Для порівняння нагадаємо, що для голономних в'язей варіації координат задовольняють умови:

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (29.4)$$

При цьому геометричні в'язі накладають такі обмеження на швидкості системи, я отримаємо із (29.1), якщо здиференціюємо рівняння в'язі за часом:

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \dot{z}_i \right) + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (29.5)$$

У більшості задач механіки обмежуються, як правило, розглядом лінійних неголономних в'язей, тобто такими в'язями, в рівняння яких проєкції швидкостей входять лінійно. Рівняння таких в'язей мають вигляд

$$\sum_{i=1}^n (A_{vi} \dot{x}_i + B_{vi} \dot{y}_i + C_{vi} \dot{z}_i) + D_v = 0, \quad v = 1, 2, \dots, d. \quad (29.6)$$

Якщо записати проєкції швидкостей через узагальнені координати  $q_1, q_2, \dots, q_s$ ,

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{d}{dt} x_i(q_1, \dots, q_s, t) = \sum_{m=1}^s \frac{\partial x_i}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial x_i}{\partial t}; \\ \dot{y}_i &= \sum_{m=1}^s \frac{\partial y_i}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial y_i}{\partial t}; \\ \dot{z}_i &= \sum_{m=1}^s \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial z_i}{\partial t}, \end{aligned} \quad (29.7)$$

то, підставивши (29.7) в (29.6), матимемо

$$\sum_{i=1}^n \left( A_{vi} \sum_{m=1}^s \frac{\partial x_i}{\partial q_m} \dot{q}_m + B_{vi} \sum_{m=1}^s \frac{\partial y_i}{\partial q_m} \dot{q}_m + \right.$$

<sup>1</sup>Павловський М. А., Залатиний В. І. Аналітична механіка. К. НМК ВО, 1990. 144 с.

$$+ C_{vi} \sum_{m=1}^s \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \dot{q}_m \Big) + D_v + \sum_{i=1}^n \left( A_{vi} \frac{\partial x_i}{\partial t} + B_{vi} \frac{\partial y_i}{\partial t} + C_{vi} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right) = 0. \quad (29.8)$$

Помінявши місцями порядок підсумовування в перших дужках, вираз (29.8) можна подати у формі

$$\sum_{m=1}^s a_{vm} \dot{q}_m + a_v = 0, \quad v = 1, 2, \dots, d, \quad (29.9)$$

а

$$a_{vm} = \sum_{i=1}^n \left( A_{vi} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + B_{vi} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + C_{vi} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right).$$

Число степенів вільності такої системи, як яку накладені одночасно голономні та неголономні в'язі, буде  $s = 3n - k - d$ .

### §29.2. Рівняння Лагранжа першого роду для неголономних систем

Виведемо рівняння Лагранжа першого роду для системи матеріальних точок, на яку накладено  $k$  голономних ідеальних в'язей і  $d$  неголономних ідеальних в'язей.

Оскільки структура можливих переміщень, що задовольняють голономні в'язі (29.4) і умови Четаєва (29.3) для неголономних нелінійних в'язей однакова, то, ввівши множники Лагранжа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  для голономних в'язей і  $d$  – для неголономних  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d$ , рівняння Лагранжа першого роду (27.13) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_i &= F_{xi} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \sum_{v=1}^d \mu_v \frac{\partial \Phi_v}{\partial x_i}; \\ m\ddot{y}_i &= F_{yi} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} + \sum_{v=1}^d \mu_v \frac{\partial \Phi_v}{\partial y_i}; \\ m\ddot{z}_i &= F_{zi} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} + \sum_{v=1}^d \mu_v \frac{\partial \Phi_v}{\partial z_i}; \end{aligned} \quad (29.10)$$

$i = 1, 2, \dots, n.$

У цій системі невідомих  $3n$  – координат точок,  $k$  – множників Лагранжа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  для голономних в'язей і  $d$  – множників Лагранжа  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d$  для неголономних в'язей.

Усього невідомих  $3n + k + d$ , а рівнянь (29.10) лише  $3n$ , тому для того щоб ця система рівнянь була замкненою, до неї потрібно додати  $k$  рівнянь голономних в'язей і  $d$  рівнянь неголономних відповідно (29.1) і (29.2)

$$\begin{aligned} f_j(x_i, y_i, z_i, t) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, k; \\ \Phi_v(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) &= 0, \\ v &= 1, 2, \dots, d. \end{aligned} \quad (29.11)$$

Реакції голономних  $\bar{R}^r$  і неголономних  $\bar{R}^n$  ідеальних в'язей визначатимуться за формулами

$$\begin{aligned} R_{xi}^r &= \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}; \quad R_{yi}^r = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}; \\ R_{zi}^r &= \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i}; \\ R_{xi}^n &= \sum_{v=1}^d \mu_v \frac{\partial \Phi_v}{\partial x_i}; \quad R_{yi}^n = \sum_{v=1}^d \mu_v \frac{\partial \Phi_v}{\partial y_i}; \\ R_{zi}^n &= \sum_{v=1}^d \mu_v \frac{\partial \Phi_v}{\partial z_i}. \end{aligned} \quad (29.12)$$

Якщо неголономні в'язі лінійні (§ 29.6), то рівняння руху матимуть вигляд

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_i &= F_{xi} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \sum_{v=1}^d \mu_v A_{vi}; \\ m\ddot{y}_i &= F_{yi} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} + \sum_{v=1}^d \mu_v B_{vi}; \\ m\ddot{z}_i &= F_{zi} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} + \sum_{v=1}^d \mu_v C_{vi}; \end{aligned} \quad (29.13)$$

відповідно реакції неголономних в'язей визначатимуться за формулами

$$R_{\alpha}^n = \sum_{v=1}^d \mu_v A_{\alpha v}; \quad R_{\beta i}^n = \sum_{v=1}^d \mu_v B_{\beta v i}; \quad (29.14)$$

$$R_{z i}^n = \sum_{v=1}^d \mu_v C_{v i}.$$

Для замкненості системи рівнянь (29.13) до них потрібно додати  $k$  перших рівнянь (29.11) і  $d$  рівнянь лінійних неголономних в'язей (29.6)

$$\sum_{i=1}^n (A_{v i} \dot{x}_i + B_{v i} \dot{y}_i + C_{v i} \dot{z}_i) + D_v = 0, \quad v = 1, 2, \dots, d. \quad (29.15)$$

### § 29.3. Рівняння Лагранжа другого роду з урахуванням неголономних додаткових в'язей

Нехай  $q_1, q_2, \dots, q_s$  будуть узагальненими координатами механічної системи. Нехай на систему накладено  $d$  лінійних неголономних ідеальних в'язей вигляду (29.9)

$$\sum_{m=1}^s a_{vm} \dot{q}_m + a_v = 0, \quad v = 1, 2, \dots, d. \quad (29.16)$$

Скористаємось прийомом, що був застосований у § 27.5, стосовно врахування додаткових голономних в'язей і який полягав у переведенні реакцій додаткових в'язей у число активних сил. Оскільки додаткові в'язі ідеальні, то їх можлива робота дорівнює нулю

$$\sum_{i=1}^n \vec{R}_i^n \delta \vec{r}_i = \sum_{m=1}^s Q_m^n \delta q_m = 0, \quad (29.17)$$

де  $\vec{R}_i^n$  - реакції неголономних в'язей;  $Q_m^n$  - узагальнені сили, відповідні цим реакціям.

Із рівнянь (29.16) вишилася, що

$$\sum_{m=1}^s a_{vm} \delta q_m = 0, \quad v = 1, 2, \dots, d. \quad (29.18)$$

Помножимо кожне з цих співвідношень на відповідний множник Лагранжа  $\mu_v$  і складемо отримані вирази між собою:

$$\sum_{m=1}^s \delta q_m \sum_{v=1}^d \mu_v a_{vm} = 0. \quad (29.19)$$

Віднімаючи із виразу (29.17) співвідношення (29.19), отримаємо

$$\sum_{m=1}^s \delta q_m \left( Q_m^n - \sum_{v=1}^d \mu_v a_{vm} \right) = 0. \quad (29.20)$$

Незалежних варіацій узагальнених координат  $s - d$ . Виберемо тепер множники  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d$  таким чином, щоб множники в тих варіаціях, що залишилися, теж дорівнювали нулю. Тоді

$$Q_m^n = \sum_{v=1}^d \mu_v a_{vm}, \quad m = 1, 2, \dots, s \quad (29.21)$$

і, отже, рівняння руху при наявності  $d$  неголономних в'язей матимуть вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m + \sum_{v=1}^d \mu_v a_{vm}, \quad m = 1, 2, \dots, s. \quad (29.22)$$

Рівняння (29.22) разом з рівняннями в'язей (29.16) утворюють систему  $s + d$  рівнянь відносно  $s + d$  невідомих ( $q_1, q_2, \dots, q_s, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d$ ).

Якщо поряд із  $d$  неголономними в'язями на систему накладено ще  $r$  додаткових голономних в'язей, то з урахуванням § 27.2 рівняння Лагранжа другого роду разом з рівняннями відповідних в'язей матимуть вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m + \sum_{v=1}^d \mu_v a_{vm} + \sum_{p=1}^r \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_m}, \quad m = 1, 2, \dots, s;$$

$$\sum_{m=1}^s a_{vm} \dot{q}_m + a_v = 0, \quad v = 1, 2, \dots, d; \quad (29.23)$$

$$f_p(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, \quad p = 1, 2, \dots, r.$$

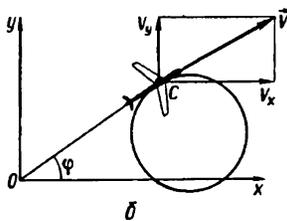
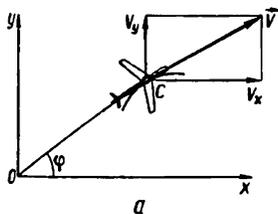


Рис. 29.1

Отже, система (29.23) має  $s + d + r$  рівнянь відповідно  $s + d + r$  невідомих ( $q_1, q_2, \dots, q_s, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ ), тому вона є замкненою і можна знайти її розв'язок.

**Приклад 1.** Скласти рівняння і знайти траєкторію руху по інерції планера, що рухається без бжового зміщення по траєкторії в горизонтальній площині (рис. 29.1, а).

Розв'язання. Нехай рух планера відбувається в площині  $Ox$ . Розглянемо поступальний рух його центра мас точки  $C$ .

Визначимо спочатку характер в'язі. Рух планера задовольняє умову

$$\frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg} \varphi,$$

тобто

$$\dot{y}_C = \dot{x}_C \operatorname{tg} \varphi$$

або

$$\dot{y}_C - \dot{x}_C \operatorname{tg} \varphi = 0. \quad (1)$$

Як бачимо, в'язь (1) є неголономною. Оскільки рух планера є плоским, то він визначається трьома узагальненими координатами

$$q_1 = x_C, \quad q_2 = y_C \quad \text{і} \quad q_3 = \varphi, \quad (2)$$

але має два степеня вільності.

Скористаємося рівняннями (29.23), які становно умов задачі будуть

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} &= Q_m + \mu_1 a_{1m}, \quad m = 1, 2, 3; \\ \sum_{m=1}^3 a_{1m} \dot{q}_m + a_1 &= a_{11} \dot{q}_1 + a_{12} \dot{q}_2 + a_{13} \dot{q}_3 + a_1 = \\ &= -\dot{x}_C \operatorname{tg} \varphi + \dot{y}_C = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Із другого рівняння (3) маємо

$$a_{11} = -\operatorname{tg} \varphi, \quad a_{12} = 1, \quad a_{13} = 0, \quad a_1 = 0. \quad (4)$$

Кінетична енергія плоского руху планера буде

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}_C^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC} \dot{\varphi}^2, \quad (5)$$

де  $M$  – маса планера;  $I_{zC}$  – осьовий момент інерції.

Підставивши вирази (4) і (5) в рівняння Лагранжа (3), враховуючи, що рух горизонтальний і проєкція сили ваги на осі  $Ox$  і  $Oy$  дорівнює нулю, отримаємо таку систему разом із рівнянням в'язі:

$$\begin{cases} m \ddot{x}_C = 0 - \mu_1 \operatorname{tg} \varphi; \\ m \ddot{y}_C = 0 + \mu_1; \\ I_{zC} \ddot{\varphi} = 0; \\ \dot{y}_C - \dot{x}_C \operatorname{tg} \varphi = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Із третього рівняння системи (6) маємо

$$\ddot{\varphi} = \omega = \operatorname{const} \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

Підставимо із другого рівняння (6) значення  $\mu_1$  в перше рівняння, тоді перше і четверте рівняння дадуть систему

$$\begin{cases} \dot{y}_C \sin \varphi + \dot{x}_C \cos \varphi = 0; \\ \dot{y}_C \cos \varphi - \dot{x}_C \sin \varphi = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Помноживши друге рівняння цієї системи на  $\dot{\varphi}$  і додавши до першого, матимемо

$$\dot{y}_C \sin \varphi + \dot{x}_C \cos \varphi + \dot{\varphi} \dot{y}_C \cos \varphi - \dot{\varphi} \dot{x}_C \sin \varphi = 0,$$

або

$$\frac{d}{dt} (\dot{y}_C \sin \varphi + \dot{x}_C \cos \varphi) = 0,$$

звідки

$$\dot{y}_C \sin \varphi + \dot{x}_C \cos \varphi = C, \quad (8)$$

де  $C$  – довільна стала.

Із рівнянь (7) і (8) знайдемо

$$\dot{x}_C = C \cos \varphi, \quad \dot{y}_C = C \sin \varphi.$$

Звідси після інтегрування, з урахуванням, що  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ , отримаємо

$$x_C - x_0 + \frac{C}{\omega} \sin \varphi_0 = \frac{C}{\omega} \sin \varphi;$$

$$y_C - y_0 - \frac{C}{\omega} \cos \varphi_0 = -\frac{C}{\omega} \cos \varphi,$$

де  $x_0, y_0$  – початкові значення координат.

Піднісши до квадрата обидві частини цих рівнянь і склавши їх, переконаємося, що траєкторією руху по інерції планера буде коло (рис. 29.1, б):

$$\left(x_C - x_0 + \frac{C}{\omega} \sin \varphi_0\right)^2 + \left(y_C - y_0 - \frac{C}{\omega} \cos \varphi_0\right)^2 = \frac{C^2}{\omega^2}.$$

Зазначимо, що такий самий розв'язок має задача про рух без зміщення ковзанів по льоду.

### § 29.4. Рівняння Ейлера – Лагранжа в квазікоординатах системи з неголономними в'язями

У випадку голономних стаціонарних в'язей рівняння руху (27.50) в квазікоординатах наведені в § 27.6.

Нехай тепер на механічну систему накладено  $d$  неголономних в'язей вигляду

$$\sum_{m=1}^s a_{vm} \dot{q}_m + a_v = 0, \quad v = 1, 2, \dots, d, \quad (29.24)$$

де  $a_{vm}, a_v$  залежать лише від узагальнених координат.

Як було показано в § 29.3, рівняння Лагранжа при врахуванні нових в'язей мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m + \sum_{v=1}^d \lambda_v a_{vm}. \quad (29.25)$$

Тут, на відміну від рівнянь (29.23), множники Лагранжа позначені не  $\mu_v$ , а  $\lambda_v$ .

Виконуючи з цими рівняннями ті самі операції, які були проведені в § 27.5, отримаємо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_\chi} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_\chi} + \sum_{\mu=1}^s \sum_{j=1}^s \gamma_{\chi\mu j} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_\mu} \dot{\pi}_j =$$

$$= P_\chi + \sum_{m=1}^s \sum_{v=1}^d \beta_{m\chi} a_{vm} \lambda_v,$$

$$\chi = 1, 2, \dots, s, \quad (29.26)$$

де  $T^*$  – вираз кінетичної енергії через квазішвидкості;

$$P_\chi = \sum_{m=1}^s \beta_{m\chi} Q_m, \quad \chi = 1, 2, \dots, s, \quad (29.27)$$

– узагальнена сила при квазікоординатах, а квазішвидкості виражаються через узагальнені швидкості і навпаки з допомогою співвідношень

$$\dot{\pi}_\chi = \sum_{m=1}^s \alpha_{\chi m} \dot{q}_m, \quad \chi = 1, 2, \dots, s; \quad (29.28)$$

$$\dot{q}_m = \sum_{\chi=1}^s \beta_{m\chi} \dot{\pi}_\chi. \quad (29.29)$$

Виберемо тепер в останніх  $d$  співвідношеннях (29.28) коефіцієнти  $\alpha_{\chi m}$  так, щоб

$$\alpha_{\chi m} = a_{vm}, \quad (29.30)$$

де  $\chi = s - d + v$ ,  $v = 1, 2, \dots, d$ .

За цих умов праві частини рівнянь (29.26) набудуть вигляду

$$P_\chi + \sum_{m=1}^s \sum_{v=1}^d \beta_{m\chi} \alpha_{s-d+v, m} \lambda_v,$$

або

$$P_\chi + \sum_{v=1}^d \lambda_v \sum_{m=1}^s \beta_{m\chi} \alpha_{s-d+v, m},$$

$$\chi = 1, 2, \dots, s. \quad (29.31)$$

На основі властивостей

$$\sum_{m=1}^s \beta_{m\chi} \alpha_{\mu m} = \begin{cases} 1, & \chi = \mu, \\ 0, & \chi \neq \mu \end{cases}$$

прийдемо до висновку, що

$$\sum_{m=1}^s \beta_{m\chi} \alpha_{s-d+\nu, m} = 0$$

для  $\chi = 1, 2, \dots, s-d$ .

Отже, рівняння Ейлера – Лагранжа при накладанні на систему неголономних в'язей матимуть вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\chi} - \frac{\partial T'}{\partial \pi_\chi} + \sum_{\mu=1}^s \sum_{j=1}^s \gamma_{\chi\mu} \frac{\partial T'}{\partial \pi_\mu} \dot{\pi}_j = P_\chi, \quad \chi = 1, 2, \dots, s-d; \quad (29.32)$$

$$\sum_{m=1}^s a_{\nu m} \dot{q}_m + a_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, d.$$

Таким чином, отримали  $s-d$  рівнянь Ейлера – Лагранжа другого роду і  $d$  рівнянь першого порядку для визначення невідомих  $q_1, q_2, \dots, q_s$  і  $\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \dots, \dot{\pi}_{s-d}$ .

Рівняння (29.24) можуть бути використані для визначення  $\lambda_\nu$ , тобто для визначення реакцій в'язей.

Триіндексні коефіцієнти  $\gamma_{\chi\mu\nu}$  обчислюються за формулою (27.51):

$$-\gamma_{\mu\chi} = \gamma_{\chi\mu} = \sum_{m=1}^s \sum_{\nu=1}^s \beta_{m\nu} \beta_{\nu\chi} \left( \frac{\partial \alpha_{\mu m}}{\partial q_\nu} - \frac{\partial \alpha_{\nu m}}{\partial q_\mu} \right). \quad (29.33)$$

Зазначимо, що найбільш громіздкі перетворення пов'язані саме з обчисленням триіндексних коефіцієнтів. Якщо перейти до квазікоординат, ці коефіцієнти краще обчислювати із співвідношення<sup>1</sup>

$$d(\delta\pi_\chi) - \delta(d\pi_\chi) = \sum_{\nu=1}^s \sum_{\mu=1}^s \gamma_{\mu\chi\nu} \delta\pi_\mu d\pi_\nu, \quad \chi = 1, 2, \dots, s. \quad (29.34)$$

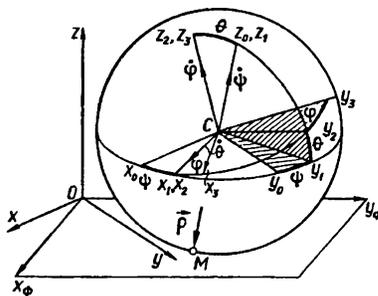


Рис. 29.2

**Приклад 2.** Скласти рівняння Ейлера – Лагранжа для вільного руху однієї кулі по поверхні.

**Розв'язання.** Положення кулі буде визначено, якщо задати п'ять координат  $x_c$  і  $y_c$  – координати центра мас точки  $C$  в системі координат  $Oxzy$  і три кути Ейлера (рис. 29.2)  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ . Умовою кочення без ковзання буде рівність

$$\bar{v}_M = \bar{v}_C + \bar{\omega} \times \bar{\rho} = 0, \quad (1)$$

де  $\omega$  – миттєва кутова швидкість кулі;  $\rho$  – радіус-вектор точки  $M$  дотику кулі до площини.

Із рівняння (1) знайдемо проекції швидкості на нерухомі осі  $Ox$  і  $Oy$  ( $v_z = 0$ )

$$\dot{x}_c - a\omega_y = 0; \quad \dot{y}_c + a\omega_x = 0, \quad (2)$$

де  $a$  – радіус кулі,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  – відповідні проекції кутової швидкості на осі  $Cx_0$  і  $Cy_0$ .

Оскільки (див. розділ 10)

$$\omega_x = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; \quad \omega_y = -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi, \quad (3)$$

то вираз (2) матиме вигляд

$$\dot{x}_c - a(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi) = 0; \quad \dot{y}_c + a(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi) = 0. \quad (4)$$

Рівняння (4) є рівняннями неголономних в'язей. Якщо за узагальнені координати прийняти

$$q_1 = x_c, \quad q_2 = y_c, \quad q_3 = \phi, \quad q_4 = \psi, \quad q_5 = \theta,$$

то рівняння в'язей (4) можна записати у формі

$$\dot{q}_1 + a\dot{q}_3 \sin q_5 \cos q_4 - a\dot{q}_5 \sin q_4 = 0; \quad \dot{q}_2 + a\dot{q}_3 \sin q_5 \sin q_4 + a\dot{q}_5 \cos q_4 = 0. \quad (5)$$

<sup>1</sup>Бутенин Н. В. Введение в аналитическую механику. – М.: Наука, 1971. – 264 с.

Запишемо тепер рівняння (5) у формі рівнянь (29.24)

$$\begin{aligned} a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + a_{13}\dot{q}_3 + a_{14}\dot{q}_4 + a_{15}\dot{q}_5 &= 0; \\ a_{21}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2 + a_{23}\dot{q}_3 + a_{24}\dot{q}_4 + a_{25}\dot{q}_5 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Порівнюючи (5) і (6), маємо

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1; a_{12} = 0; a_{13} = a \sin q_5 \cos q_4 = a \sin \theta \cos \psi; \\ a_{14} &= 0; a_{15} = -a \sin q_4 = -a \sin \psi; a_{21} = 0; \\ a_{22} &= 1; a_{23} = a \sin q_5 \sin q_4 = a \sin \theta \sin \psi; \\ a_{24} &= 0; a_{25} = a \cos q_4 = a \cos \psi. \end{aligned} \quad (7)$$

Оскільки куля однорідна, то  $I_x = I_y = I_z = I$ .

Тому кінетична енергія кулі буде

$$T' = T = \frac{1}{2} M (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} I (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2). \quad (8)$$

За квазішвидкості прийнемо

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_1 &= \omega_x = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; \\ \dot{\pi}_2 &= \omega_y = -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi; \\ \dot{\pi}_3 &= \omega_z = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}; \\ \dot{\pi}_4 &= a \dot{\theta} \sin \psi - a \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{x}_C; \\ \dot{\pi}_5 &= a \dot{\theta} \cos \psi + a \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{y}_C. \end{aligned} \quad (9)$$

Із цих рівнянь знайдемо узагальнені швидкості  $q_m$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= a \dot{\pi}_2 - \dot{\pi}_4; \quad \dot{y}_C = -a \dot{\pi}_1 + \dot{\pi}_5; \\ \dot{\varphi} &= \dot{\pi}_1 \frac{\sin \psi}{\sin \theta} - \dot{\pi}_2 \frac{\cos \psi}{\sin \theta}; \\ \dot{\psi} &= -\dot{\pi}_1 \frac{\sin \psi}{\sin \theta} \cos \theta + \dot{\pi}_2 \frac{\cos \psi}{\sin \theta} \cos \theta + \dot{\pi}_3; \\ \dot{\theta} &= \dot{\pi}_4 \cos \psi + \dot{\pi}_5 \sin \psi. \end{aligned} \quad (10)$$

Підставивши необхідні вирази із (9) і (10) у (8), одержимо

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} M \left[ (a \dot{\pi}_2 - \dot{\pi}_4)^2 + (-a \dot{\pi}_1 + \dot{\pi}_5)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} I (\dot{\pi}_1^2 + \dot{\pi}_2^2 + \dot{\pi}_3^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_1} &= -Ma(-a\dot{\pi}_1 + \dot{\pi}_5) + I\dot{\pi}_1 = (I + Ma^2)\dot{\pi}_1 - Ma\dot{\pi}_5; \\ \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_2} &= Ma(a\dot{\pi}_2 - \dot{\pi}_4) + I\dot{\pi}_2 = (I + Ma^2)\dot{\pi}_2 - Ma\dot{\pi}_4; \\ \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_3} &= I\dot{\pi}_3; \quad \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_4} = -M(a\dot{\pi}_2 - \dot{\pi}_4); \\ \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_5} &= M(-a\dot{\pi}_1 + \dot{\pi}_5). \end{aligned} \quad (12)$$

Оскільки узагальнені координати у вираз для кінетичної енергії не входять, то

$$\frac{\partial T'}{\partial \pi_\chi} = 0, \quad \chi = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Перейдемо тепер до обчислення триїндексних коефіцієнтів  $\gamma_{\mu\nu}$ . Для цього застосуємо формулу (29.34)

$$\begin{aligned} d(\delta\pi_\chi) - \delta(d\pi_\chi) &= \sum_{\nu=1}^r \sum_{\mu=1}^s \gamma_{\mu\nu\chi} \delta\pi_\nu d\pi_\mu, \\ \chi &= 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (14)$$

Користуючись співвідношеннями (9) і (10), матимемо

$$\begin{aligned} d\pi_1 &= d\varphi \sin \theta \sin \psi + d\theta \cos \psi; \\ d\pi_2 &= -d\varphi \sin \theta \cos \psi + d\theta \sin \psi; \\ d\pi_3 &= d\varphi \cos \theta + d\psi; \\ d\pi_4 &= -a d\varphi \sin \theta \cos \psi + a d\theta \sin \psi - dx_C; \\ d\pi_5 &= a d\varphi \sin \theta \sin \psi + a d\theta \cos \psi + dy_C; \\ \delta\pi_1 &= \delta\varphi \sin \theta \sin \psi + \delta\theta \cos \psi; \\ \delta\pi_2 &= -\delta\varphi \sin \theta \cos \psi + \delta\theta \sin \psi; \\ \delta\pi_3 &= \delta\varphi \cos \theta + \delta\psi; \\ \delta\pi_4 &= -a \delta\varphi \sin \theta \cos \psi + a \delta\theta \sin \psi - \delta x_C; \\ \delta\pi_5 &= a \delta\varphi \sin \theta \sin \psi + a \delta\theta \cos \psi + \delta y_C; \\ \delta x_C &= a d\pi_2 - d\pi_4; \quad \delta y_C = -a d\pi_1 + d\pi_5; \\ d\varphi &= \frac{\sin \psi}{\sin \theta} d\pi_1 - \frac{\cos \psi}{\sin \theta} d\pi_2; \\ d\psi &= -\frac{\sin \psi}{\sin \theta} \cos \theta d\pi_1 + \frac{\cos \psi}{\sin \theta} \cos \theta d\pi_2 + d\pi_3; \\ d\theta &= \cos \psi d\pi_4 + \sin \psi d\pi_5; \\ \delta x_C &= a \delta\pi_2 - \delta\pi_4; \quad \delta y_C = -a \delta\pi_1 + \delta\pi_5; \\ \delta\varphi &= \frac{\sin \psi}{\sin \theta} \delta\pi_1 - \frac{\cos \psi}{\sin \theta} \delta\pi_2; \\ \delta\psi &= -\frac{\sin \psi}{\sin \theta} \cos \theta \delta\pi_1 + \frac{\cos \psi}{\sin \theta} \cos \theta \delta\pi_2 + \delta\pi_3; \\ \delta\theta &= \cos \psi \delta\pi_4 + \sin \psi \delta\pi_5. \end{aligned} \quad (15)$$

Відповідно до формули (14), отримавмо

$$\begin{aligned} d(\delta\pi_1) - \delta(d\pi_1) &= -\delta\pi_2 d\pi_3 + \delta\pi_3 d\pi_2; \\ d(\delta\pi_2) - \delta(d\pi_2) &= \delta\pi_4 d\pi_3 - \delta\pi_3 d\pi_4; \\ d(\delta\pi_3) - \delta(d\pi_3) &= -\delta\pi_4 d\pi_2 + \delta\pi_5 d\pi_4; \\ d(\delta\pi_4) - \delta(d\pi_4) &= a \delta\pi_1 d\pi_3 - a \delta\pi_3 d\pi_1; \\ d(\delta\pi_5) - \delta(d\pi_5) &= -a \delta\pi_2 d\pi_3 + a \delta\pi_3 d\pi_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} \gamma_{213} &= -\gamma_{312} = -1; \quad \gamma_{123} = -\gamma_{321} = 1; \\ \gamma_{132} &= -\gamma_{231} = -1; \quad \gamma_{143} = -\gamma_{341} = a; \\ \gamma_{253} &= -\gamma_{352} = -a; \end{aligned}$$

інші  $\gamma_{ijk}$  дорівнюють нулю.

Пірахаємо тепер суми

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^s \sum_{j=1}^s \gamma_{j\mu} \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\mu} \dot{\pi}_j &= (I + Ma^2) \dot{\pi}_2 \dot{\pi}_3 - \\ &- Ma \dot{\pi}_3 \dot{\pi}_3 - Ma(a \dot{\pi}_2 - \dot{\pi}_4) \dot{\pi}_3 - I \dot{\pi}_3 \dot{\pi}_2 = 0; \\ \sum_{\mu=1}^s \sum_{j=1}^s \gamma_{2\mu} \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\mu} \dot{\pi}_j &= -(I + Ma^2) \dot{\pi}_1 \dot{\pi}_3 + \\ &+ Ma \dot{\pi}_3 \dot{\pi}_3 + I \dot{\pi}_3 \dot{\pi}_1 - Ma(-a \dot{\pi}_1 + \dot{\pi}_5) \dot{\pi}_3 = 0; \quad (17) \\ \sum_{\mu=1}^s \sum_{j=1}^s \gamma_{3\mu} \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\mu} \dot{\pi}_j &= (I + Ma^2) \dot{\pi}_1 \dot{\pi}_2 - \\ &- Ma \dot{\pi}_5 \dot{\pi}_2 + Ma \dot{\pi}_1 \dot{\pi}_4 - (Ma^2 + I) \dot{\pi}_2 \dot{\pi}_1 + \\ &+ Ma(a \dot{\pi}_2 - \dot{\pi}_4) \dot{\pi}_1 + Ma(-a \dot{\pi}_1 + \dot{\pi}_5) \dot{\pi}_2 = 0. \end{aligned}$$

Отже, рівняння Ейлера – Лагранжа (29.32) матиме вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_1} = 0; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_2} = 0; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_3} = 0. \quad (18)$$

Оскільки в силу неголономності в'язі

$$\dot{\pi}_4 = 0 \quad \text{і} \quad \dot{\pi}_5 = 0, \quad (19)$$

то із рівнянь (18) і (19) отримаємо

$$\dot{\pi}_1 = \omega_x = C_1; \quad \dot{\pi}_2 = \omega_y = C_2; \quad \dot{\pi}_3 = \omega_z = C_3, \quad (20)$$

де  $C_1, C_2, C_3$  – сталі інтегрування.

Із рівняння неголономних в'язей (19) випливає

$$\dot{x}_C = aC_2; \quad \dot{y}_C = -aC_1. \quad (21)$$

Таким чином, (20) і (21) дають перші інтеграл системи.

## § 29.5. Рівняння Аппеля

### 1. Рівняння Аппеля в квазішвидкостях.

Нехай на матеріальну систему, що складається із  $n$  матеріальних точок, накладено  $k$  голономних і  $d$  неголономних в'язей. Якщо узагальненими координатами  $s$  ( $q_1, q_2, \dots, q_s$ ), то  $s = 3n - k$  – це кількість незалежних узагаль-

нених координат. Число степенів вільності цієї системи буде  $s - d$ . Між декартовими та узагальненими координатами існує зв'язок

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, q_1, q_2, \dots, q_s), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (29.35)$$

Із формули (29.35) випливає, що

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{m=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (29.36)$$

і відповідно у варіаціях

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{m=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} \delta q_m, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (29.37)$$

Нехай рівняння неголономних в'язей мають вигляд

$$\sum_{\mu=1}^s a_{v\mu} \dot{q}_\mu + a_v = 0, \quad v = 1, 2, \dots, d. \quad (29.38)$$

Виберемо за  $s - d$  незалежних квазішвидкостей (за числом степенів вільності)  $s - d$  незалежних лінійних комбінацій узагальнених швидкостей

$$\dot{\pi}_\chi = \sum_{\mu=1}^s \alpha_{\chi\mu} \dot{q}_\mu, \quad \chi = 1, 2, \dots, s - d, \quad (29.39)$$

або

$$d\pi_\chi = \sum_{\mu=1}^s \alpha_{\chi\mu} dq_\mu, \quad \chi = 1, 2, \dots, s - d. \quad (29.40)$$

Із рівнянь (29.38) і (29.39) визначимо залежність узагальнених швидкостей від квазішвидкостей  $\dot{\pi}_\chi$ .

Очевидно, що це можливо зробити в тому випадку, коли визначник системи рівнянь (29.38) і (29.39) відмінний від нуля:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{s-d,1} & \alpha_{s-d,2} & \dots & \alpha_{s-d,s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{d1} & a_{d2} & \dots & a_{ds} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (29.41)$$

Нехай така залежність має вигляд

$$\dot{q}_m = \sum_{\mu=1}^{s-d} b_{m\mu} \dot{\pi}_\mu + b_m, \quad m = 1, 2, \dots, s, \quad (29.42)$$

де  $b_{m\mu}$  і  $b_m$  – відповідно функції часу та узагальнених координат.

Величини  $\dot{\pi}_\mu$  можуть набувати довільних значень, оскільки за формулами (29.42) завжди можна підібрати відповідні їм значення  $\dot{q}_m$ . Підставляючи значення  $\dot{q}_m$  із формули (29.42) у формулу (29.36), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}_i}{dr} &= \sum_{m=1}^s \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} \left( \sum_{\mu=1}^{s-d} b_{m\mu} \dot{\pi}_\mu + b_m \right) + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} = \\ &= \sum_{\mu=1}^{s-d} \dot{\pi}_\mu \sum_{m=1}^s \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} b_{m\mu} + \sum_{m=1}^s \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} b_m + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}. \end{aligned} \quad (29.43)$$

Якщо ввести позначення

$$\begin{aligned} \bar{e}_{i\mu} &= \sum_{m=1}^s \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} b_{m\mu}, \\ \bar{e}_i &= \sum_{m=1}^s \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} b_m + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}, \end{aligned} \quad (29.44)$$

то вираз (29.43) можна записати у формі

$$\dot{\bar{r}}_i = \sum_{\mu=1}^{s-d} \bar{e}_{i\mu} \dot{\pi}_\mu + \bar{e}_i. \quad (29.45)$$

Переходячи в (29.45) до варіації змінних, отримаємо

$$\delta \bar{r}_i = \sum_{\mu=1}^{s-d} \bar{e}_{i\mu} \delta \pi_\mu. \quad (29.46)$$

Обчислимо тепер похідну за часом від виразів (29.45):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} &= \sum_{\mu=1}^{s-d} \dot{\bar{e}}_{i\mu} \frac{d^2 \pi_\mu}{dt^2} + \\ &+ \sum_{\mu=1}^{s-d} \frac{d\pi_\mu}{dt} \frac{d\bar{e}_{i\mu}}{dt} + \frac{d}{dt} \bar{e}_i. \end{aligned} \quad (29.47)$$

Звідси видно, що частинна похідна від

$$\text{прискорення } \bar{w}_i = \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} \text{ } i\text{-ї точки за } \frac{d^2 \pi_\mu}{dt^2}$$

дорівнює вектору  $\bar{e}_{i\mu}$ , тобто

$$\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \dot{\pi}_\mu} = \bar{e}_{i\mu},$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad \mu = 1, 2, \dots, s-d. \quad (29.48)$$

Випишемо загальне рівняння динаміки

$$\sum_{i=1}^n (m_i \bar{w}_i - \bar{F}_i) \cdot \delta \bar{r}_i = 0 \quad (29.49)$$

і підставимо в нього  $\delta \bar{r}_i$  за формулою (29.46):

$$\sum_{i=1}^n (m_i \bar{w}_i - \bar{F}_i) \cdot \sum_{\mu=1}^{s-d} \bar{e}_{i\mu} \delta \pi_\mu = 0. \quad (29.50)$$

Вираз (29.50) перепишемо у вигляді

$$\sum_{\mu=1}^{s-d} \left( \sum_{i=1}^n m_i \bar{w}_i \cdot \bar{e}_{i\mu} - \Pi_\mu \right) \delta \pi_\mu = 0, \quad (29.51)$$

де  $\Pi_\mu$  – узагальнені сили, відповідні квазікоординатам, тобто має місце залежність

$$\delta A = \sum_{\mu=1}^{s-d} \Pi_\mu \delta \pi_\mu = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i, \quad (29.52)$$

в якій  $\Pi_\mu$  відповідно до виразу (29.51) визначається за формулою

$$\begin{aligned} \Pi_\mu &= \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \bar{e}_{i\mu} = \sum_{m=1}^s \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} b_{m\mu}, \\ &\mu = 1, 2, \dots, s-d. \end{aligned} \quad (29.53)$$

Оскільки величини варіації квазікоординат  $\delta \pi_\mu$  взаємно незалежні, то із виразу (29.51) випливає

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{w}_i \cdot \bar{e}_{i\mu} = \Pi_\mu, \quad \mu = 1, 2, \dots, s-d. \quad (29.54)$$

Використовуючи залежність (29.48), маємо

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{w}_i \cdot \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \dot{\pi}_\mu} = \Pi_\mu,$$

або

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\pi}_\mu} \sum_{i=1}^n \frac{m_i \bar{w}_i^2}{2} = \Pi_\mu. \quad (29.55)$$

Функцію

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \bar{w}_i^2}{2} \quad (29.56)$$

називають енергією прискорення (за аналогією з кінетичною енергією).

Таким чином, отримаємо  $s-d$  рівнянь

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\pi}_\mu} = \Pi_\mu, \quad \mu = 1, 2, \dots, s-d, \quad (29.57)$$

які називаються *рівняннями Аппеля*. Невідомих маємо  $3n$  декартових координат і  $s-d$  квазішвидкостей  $\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \dots, \dot{\pi}_{s-d}$ . Оскільки  $s=3n-k$ , то не вистачає  $k+d$  рівнянь, щоб система була замкненою. Тому до рівнянь (29.57) потрібно додати  $k$  рівнянь (29.1) голономних в'язей і  $d$  рівнянь (29.38) неголономних в'язей. Тоді замкнена система матиме вигляд

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\pi}_\mu} = \Pi_\mu, \quad \mu = 1, 2, \dots, s-d;$$

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\sum_{\mu=1}^s a_{\nu\mu} \dot{q}_\mu + a_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, d, \quad (29.58)$$

де  $\Pi_\mu$  – узагальнена сила, що обчислюється за формулою

$$\Pi_\mu = \sum_{m=1}^s \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} - b_{m\mu}, \quad \mu = 1, 2, \dots, s-d, \quad (29.59)$$

або з виразу для можливої роботи

$$\delta A = \sum_{\mu=1}^{s-d} \Pi_\mu \delta \pi_\mu. \quad (29.60)$$

Вирази (29.58) – (29.60) складають замкнену систему диференціальних рівнянь і дають змогу знайти всі величини, що входять у цю систему.

**2. Рівняння Аппеля в узагальнених швидкостях.** Виведемо тепер рівняння Аппеля для випадку, коли замість квазішвидкостей взяти  $s-d$  незалежних узагальнених швидкостей  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{s-d}$  і виразити за допомогою співвідношень (29.38) ті, що залишились  $d$  узагальнених швидкостей:

$$\dot{q}_{s-d+\nu} = \sum_{\mu=1}^{s-d} h_{s-d+\nu, \mu} \dot{q}_\mu, \quad \nu = 1, 2, \dots, d. \quad (29.61)$$

Звідси

$$\delta q_{s-d+\nu} = \sum_{\mu=1}^{s-d} h_{s-d+\nu, \mu} \delta q_\mu. \quad (29.62)$$

Замінімо тепер у виразі для можливої роботи

$$\delta A = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j \quad (29.63)$$

варіації  $\delta q_{s-d+\nu}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, d$ ) за допомогою формули (29.62), тоді отримаємо

$$\delta A = \sum_{\mu=1}^{s-d} Q_\mu^* \delta q_\mu, \quad (29.64)$$

де

$$Q_\mu^* = Q_\mu - \sum_{\nu=1}^d Q_{s-d+\nu} h_{s-d+\nu, \mu} \quad (29.65)$$

– узагальнені сили, що відповідають незалежним варіаціям  $\delta q_\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots, s-d$ ).

Рівняння Аппеля тепер наберуть вигляду

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_\mu} = Q_\mu^*, \quad \mu = 1, 2, \dots, s-d. \quad (29.66)$$

Тут функція  $S$  буде функцією часу  $t$ ,  $s$  узагальнених координат,  $s-d$  узагальнених швидкостей і  $s-d$  узагальнених прискорень, тобто

$$S = S(t, q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{s-d}, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_{s-d}).$$

Для голономної системи рівняння Аппеля набудуть вигляду

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_m} = Q_m, \quad m = 1, 2, \dots, s. \quad (29.67)$$

Рівняння Аппеля виглядає досить просто і привабливо, але головна складність у ньому полягає в процесі обчислення енергії прискорень. Розглянемо це питання окремо.

### § 29.6. Обчислення енергії прискорень

Для багатьох прикладних задач дуже важливо мати формули для обчислення енергії прискорень твердого тіла.

За формулою (10.43) прискорення  $i$ -ї точки твердого тіла (див. рис. 10.1) дорівнює

$$\ddot{\mathbf{w}}_i = \ddot{\mathbf{w}}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{\rho}}_i) + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \bar{\boldsymbol{\rho}}_i, \quad (29.68)$$

де  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{d\dot{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ .

Тоді енергія прискорень буде

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i w_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left\{ \ddot{\mathbf{w}}_O^2 + \right. \\ &+ \left[ \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{\rho}}_i) \right]^2 + (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \bar{\boldsymbol{\rho}}_i)^2 + \\ &+ 2\ddot{\mathbf{w}}_O \cdot \left[ \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{\rho}}_i) \right] + 2\ddot{\mathbf{w}}_O \cdot (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \bar{\boldsymbol{\rho}}_i) + \\ &+ 2 \left[ \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{\rho}}_i) \right] \cdot (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \bar{\boldsymbol{\rho}}_i) \left. \right\}. \quad (29.69) \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{\boldsymbol{\rho}}_i = m \bar{\boldsymbol{\rho}}_C; \quad \sum_{i=1}^n m_i = m, \quad (29.70)$$

перепишемо (29.69) у вигляді

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} m w_O^2 + m \ddot{\mathbf{w}}_O \cdot \left[ \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{\rho}}_C) \right] + \\ &+ m \dot{\boldsymbol{\omega}}_O \cdot (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \bar{\boldsymbol{\rho}}_C) + S_O^{\omega}, \quad (29.71) \end{aligned}$$

де через  $S_O^{\omega}$  позначена енергія прискорень, що обумовлена лише обертанням твердого тіла відносно полюса;

$$\begin{aligned} S_O^{\omega} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[ \bar{w}_{oci}^2 + \bar{w}_{obi}^2 + 2\bar{w}_{oci} \cdot \bar{w}_{obi} \right] = \\ &= S_{oc}^{\omega} + S_{ob}^{\omega} + S_{\omega 3}^{\omega}. \quad (29.72) \end{aligned}$$

Тут  $S_{oc}^{\omega}$ ,  $S_{ob}^{\omega}$ ,  $S_{\omega 3}^{\omega}$  – відповідно енергія прискорень доосьових, обертальних і взаємних доосьових і обертальних;

$$S_{oc}^{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[ \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{\rho}}_i) \right]^2; \quad (29.73)$$

$$\begin{aligned} S_{ob}^{\omega} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \bar{\boldsymbol{\rho}}_i)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{\rho}}_i)^2; \quad (29.74) \end{aligned}$$

$$S_{\omega 3}^{\omega} = \sum_{i=1}^n m_i (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \bar{\boldsymbol{\rho}}_i) \cdot \left[ \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{\rho}}_i) \right]. \quad (29.75)$$

Обчислимо кожну з величин квадратів прискорень, що стоять під знаком сум в (29.73) – (29.75), скориставшись правилом розкриття подвійного векторного добутку  $[\bar{\mathbf{a}} \times (\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{c}})] = \bar{\mathbf{b}}(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{c}}) - \bar{\mathbf{c}}(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}})$ :

$$\begin{aligned} \left[ \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{\rho}}_i) \right]^2 &= \left[ \dot{\boldsymbol{\omega}}(\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \bar{\boldsymbol{\rho}}_i) - \bar{\boldsymbol{\rho}}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}^2 \right]^2 = \\ &= \left[ \dot{\boldsymbol{\omega}}^2 (\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \bar{\boldsymbol{\rho}}_i)^2 - 2(\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \bar{\boldsymbol{\rho}}_i) \dot{\boldsymbol{\omega}}^2 (\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \bar{\boldsymbol{\rho}}_i) + \dot{\boldsymbol{\omega}}^4 \right]^2 = \\ &= 2\dot{\boldsymbol{\omega}}^4 \rho_i^2 - 2\dot{\boldsymbol{\omega}}^4 \rho_i^2 \equiv 0. \quad (29.76) \end{aligned}$$

Отже, з урахуванням тотожності (29.76), маємо

$$S_{oc}^{\omega} = 0. \quad (29.77)$$

Перейдемо до обчислення  $S_{oc}^{\omega}$ .

$$\begin{aligned} S_{oc}^{\omega} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_i)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i)^2; \end{aligned} \quad (29.78)$$

Якщо згадати, що кінетична енергія обертального руху  $T_O^{\omega}$  обчислюється за формулою (17.13)

$$T_O^{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i)^2, \quad (29.79)$$

то за аналогією з кінетичною енергією запишемо

$$\begin{aligned} S_{oc}^{\omega} &= \frac{1}{2} I_x \varepsilon_x^2 + \frac{1}{2} I_y \varepsilon_y^2 + \frac{1}{2} I_z \varepsilon_z^2 - \\ &- I_{xy} \varepsilon_x \varepsilon_y - I_{xz} \varepsilon_x \varepsilon_z - I_{yz} \varepsilon_y \varepsilon_z, \end{aligned} \quad (29.80)$$

або в матричній формі

$$S_{oc}^{\omega} = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^T \bar{I}_O \bar{\varepsilon}, \quad (29.81)$$

де  $\bar{I}_O$  – тензор інерції в точці  $O$ .

Залишилось обчислити  $S_{B_1}^{\omega}$  – взаємну енергію прискорень при обертанні твердого тіла відносно точки  $O$ :

$$\begin{aligned} &(\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_i) \cdot [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i)] = \\ &= (\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_i) \cdot [\bar{\omega} (\bar{\omega} \cdot \bar{\rho}_i) - \bar{\rho}_i \bar{\omega}^2] = \\ &= (\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_i) \cdot \bar{\omega} (\bar{\omega} \cdot \bar{\rho}_i) - (\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_i) \cdot \bar{\rho}_i \bar{\omega}^2. \end{aligned} \quad (29.82)$$

В останньому доданку  $(\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_i) \cdot \bar{\rho}_i \equiv 0$ , бо два однакових вектори присутні у векторно-скалярному добутку. Якщо в першому до-

данку поміняємо місцями  $\bar{\rho}_i$  і  $\bar{\omega}$  у векторно-скалярному добутку, тоді матимемо

$$(\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_i) \cdot \bar{\omega} (\bar{\omega} \cdot \bar{\rho}_i) = (\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon}) \cdot \bar{\rho}_i (\bar{\omega} \cdot \bar{\rho}_i). \quad (29.83)$$

Враховуючи, що  $(\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon}) \cdot \bar{\omega} (\bar{\rho}_i^2) \equiv 0$ , додамо цей вираз до виразу (29.83) і винесемо  $(\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon})$  за дужки. Тоді матимемо

$$\begin{aligned} &(\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon}) \cdot [\bar{\rho}_i (\bar{\omega} \cdot \bar{\rho}_i) - \bar{\omega} (\bar{\rho}_i^2)] = \\ &= (\bar{\varepsilon} \times \bar{\omega}) [\bar{\omega} (\bar{\rho}_i^2) - \bar{\rho}_i (\bar{\omega} \cdot \bar{\rho}_i)]. \end{aligned} \quad (29.84)$$

Неважко помітити, що вираз у квадратних дужках дорівнює

$$[\bar{\omega} (\bar{\rho}_i^2) - \bar{\rho}_i (\bar{\omega} \cdot \bar{\rho}_i)] = \bar{\rho}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i). \quad (29.85)$$

Підставивши (29.85) в (29.84), отримаємо

$$\begin{aligned} &(\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_i) \cdot [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i)] = \\ &= (\bar{\varepsilon} \times \bar{\omega}) \cdot [\bar{\rho}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i)]. \end{aligned} \quad (29.86)$$

Отже,

$$\begin{aligned} S_{B_1}^{\omega} &= \sum_{i=1}^n m_i (\bar{\varepsilon} \times \bar{\omega}) \cdot [\bar{\rho}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i)] = \\ &= (\bar{\varepsilon} \times \bar{\omega}) \cdot \sum_{i=1}^n m_i \bar{\rho}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i). \end{aligned} \quad (29.87)$$

Випишемо тепер для порівняння вираз для  $\bar{K}_O^{\omega}$  (16.52)

$$\bar{K}_O^{\omega} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{\rho}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i). \quad (29.88)$$

Таким чином,

$$S_{B_1}^{\omega} = (\bar{\varepsilon} \times \bar{\omega}) \cdot \bar{K}_O^{\omega} = \bar{\varepsilon} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{K}_O^{\omega}) \quad (29.89)$$

або в матричній формі (див. додаток)

$$S_{B_1}^{\omega} = \bar{\varepsilon}^T (\bar{\omega}^k \bar{K}_O^{\omega}) = \bar{\varepsilon}^T (\bar{\omega}^k \bar{I}_O \bar{\omega}). \quad (29.90)$$

Тут  $\bar{\epsilon}^T = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z]$  – матриця-рядок,

$$\bar{\omega}^k = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}.$$

Взаємну енергію прискорень можна обчислити і за формулою

$$S_{\text{вз}}^{\omega} = \det \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_y & \epsilon_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ K_x & K_y & K_z \end{bmatrix}. \quad (29.91)$$

Отже, підставивши вирази (29.81) і (29.90) в (29.72), отримаємо

$$S_O^{\omega} = S_{\text{об}}^{\omega} + S_{\text{вз}}^{\omega} = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^T (\bar{I}_O \bar{\epsilon}) + \bar{\epsilon}^T (\bar{\omega}^k \bar{I}_O \bar{\omega}), \quad (29.92)$$

або в розгорнутій формі

$$\begin{aligned} S_O^{\omega} = & \frac{1}{2} (I_x \epsilon_x^2 + I_y \epsilon_y^2 + I_z \epsilon_z^2 - 2I_{xy} \epsilon_x \epsilon_y - \\ & - 2I_{xz} \epsilon_x \epsilon_z - 2I_{yz} \epsilon_y \epsilon_z) + \\ & + (I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z) (\epsilon_y \omega_z - \epsilon_z \omega_y) + \\ & + (-I_{yx} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z) (\epsilon_z \omega_x - \epsilon_x \omega_z) + \\ & + (-I_{zx} \omega_x - I_{zy} \omega_y + I_z \omega_z) \times \\ & \times (\epsilon_x \omega_y - \epsilon_y \omega_x). \end{aligned} \quad (29.93)$$

Тут  $\epsilon_x = \dot{\omega}_x$ ,  $\epsilon_y = \dot{\omega}_y$ ,  $\epsilon_z = \dot{\omega}_z$ .

На завершення цього параграфу вкажемо на таку цікаву особливість. Якщо при обчисленні взаємної енергії прискорень обертального руху у виразі (29.84) не додавати нуль  $(\bar{\omega} \times \bar{\epsilon}) \cdot \bar{\omega} (\bar{\rho}_i^2) \equiv 0$ , а обчислювати безпосередньо вираз (29.83)

$$S_O^{\omega} = \sum_{i=1}^n m_i (\bar{\epsilon} \times \bar{\rho}_i) \cdot \bar{\omega} (\bar{\omega} \cdot \bar{\rho}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^n m_i (\bar{\omega} \times \bar{\epsilon}) \cdot \bar{\rho}_i (\bar{\omega} \cdot \bar{\rho}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^n m_i [x_i (\omega_y \epsilon_z - \omega_z \epsilon_y) + y_i (\omega_z \epsilon_x - \omega_x \epsilon_z) + z_i (\omega_x \epsilon_y - \omega_y \epsilon_x)] \cdot (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z),$$

то після нескладних перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} S_{\text{вз}}^{\omega} = & (-I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z) (\epsilon_y \omega_z - \epsilon_z \omega_y) + \\ & + (-I_{yx} \omega_x - I_{yy} \omega_y - I_{yz} \omega_z) (\epsilon_z \omega_x - \epsilon_x \omega_z) + \\ & + (-I_{zx} \omega_x - I_{zy} \omega_y - I_{zz} \omega_z) (\epsilon_x \omega_y - \epsilon_y \omega_x). \end{aligned} \quad (29.94)$$

Тут  $I_I$ ,  $I_{II}$ ,  $I_{III}$  – планарні моменти інерції, які відповідно (15.30) дорівнюють

$$I_I = \int_{(m)} x^2 dm; \quad I_{II} = \int_{(m)} y^2 dm; \quad I_{III} = \int_{(m)} z^2 dm.$$

Неважко переконатися, що вирази для  $S_{\text{вз}}^{\omega}$  в (29.93) і (29.94) тотожні.

Дійсно, якщо врахувати, що осьові моменти інерції можна виразити через полярний  $I_O$  момент інерції  $I_O = \int_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2) dm$  (15.29) і планарні:

$$I_x = I_O - I_I, \quad I_y = I_O - I_{II}, \quad I_z = I_O - I_{III},$$

а стосовно полярного моменту інерції має місце тотожність

$$I_O [\omega_x (\epsilon_y \omega_z - \epsilon_z \omega_y) + \omega_y (\epsilon_z \omega_x - \epsilon_x \omega_z) + \omega_z (\epsilon_x \omega_y - \epsilon_y \omega_x)] \equiv 0, \quad (29.95)$$

то, підставивши (29.94) і (29.95), отримаємо  $S_{\text{вз}}^{\omega}$ , яке записано в (29.93).

Виявляється, що нуль, який ми додали до виразу (29.83), і є вираз (29.95). Дійсно, якщо  $(\bar{\omega} \times \bar{\epsilon}) \cdot \bar{\omega} (\bar{\rho}_i^2)$  підставити у вираз для  $S_{\text{вз}}^{\omega}$ , то мали б

## § 29.7. Рівняння Аппеля та основні теореми динаміки

Скориставшись виразом (29.97), знайдемо співвідношення  $\frac{\partial S}{\partial \bar{\omega}_O}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \bar{\omega}_O} &= m[\bar{\omega}_O + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_C) + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_C] = \\ &= m\bar{\omega}_C = \frac{d}{dt}(m\bar{\omega}_C) = \frac{d\bar{Q}}{dt}. \end{aligned} \quad (29.102)$$

Тепер, скориставшись виразом (29.93), обчислимо  $\frac{\partial S}{\partial \dot{\omega}_x} = \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_x}$ ;  $\frac{\partial S}{\partial \dot{\omega}_y} = \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_y}$ ;  $\frac{\partial S}{\partial \dot{\omega}_z} = \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_z}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \dot{\omega}_x} &= \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_x} = I_x \varepsilon_x - I_{xy} \varepsilon_y - I_{xz} \varepsilon_z + \omega_y K_z - \\ &- \omega_z K_y = \frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y; \end{aligned} \quad (29.103)$$

аналогічно

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_y} &= \frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z; \\ \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_z} &= \frac{dK_z}{dt} + \omega_x K_y - \omega_y K_x. \end{aligned} \quad (29.104)$$

Очевидно, що для твердого тіла рівняння Аппеля (див. (29.102) – (29.104)) збігаються з основними теоремами динаміки, записаними в системі координат, що обертається разом з тілом з кутовою швидкістю  $\bar{\omega}$ .

Зазначимо, що в прикладі 5 § 27.6 для системи трьох тіл (гіроскопа в кардановому підвісі) було показано, що рівняння Ейлера – Лагранжа збігається з відповідними рівняннями про зміну кінетичного моменту, записаними в обертальній системі координат.

Ці приклади відображують тенденцію в рівняннях аналітичної механіки: намагання використати автоматизм і формалізм, але подавати рівняння руху в такій формі, яка

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n m_i (\bar{\varepsilon} \times \bar{\omega}) \cdot \bar{\omega} (\bar{\rho}_i^2) = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) (\bar{\varepsilon} \times \bar{\omega}) \cdot \bar{\omega} = \\ &= I_O (\bar{\varepsilon} \times \bar{\omega}) \cdot \bar{\omega}, \end{aligned} \quad (29.96)$$

що збігається з (29.95).

Таким чином, енергія прискорення твердого тіла може бути обчислена в загальному вигляді за формулою

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} m \bar{\omega}_O^2 + m \bar{\omega}_O [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_C)] + \\ &+ m \bar{\omega}_O \cdot (\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_C) + S_O^\omega, \end{aligned} \quad (29.97)$$

де

$$\begin{aligned} S_O^\omega &= S_{O6}^\omega + S_{O3}^\omega = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^T (I_O \bar{\varepsilon}) + \\ &+ \bar{\varepsilon}^T (\bar{\omega} \times \bar{K}_O^\omega). \end{aligned} \quad (29.98)$$

Якщо полюс помістити в центрі мас і осі інерції є головними, то вираз (29.97) значно спрощується і за своїм змістом аналогічний теоремі Кеніга:

$$S = \frac{1}{2} m \bar{\omega}_C^2 + S_C^\omega, \quad (29.99)$$

де

$$\begin{aligned} S_C^\omega &= S_{C6}^\omega + S_{C3}^\omega = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) + \\ &+ I_1 \omega_x (\dot{\omega}_y \omega_z - \dot{\omega}_z \omega_y) + I_1 \omega_y (\dot{\omega}_z \omega_x - \dot{\omega}_x \omega_z) + \\ &+ I_2 \omega_z (\dot{\omega}_x \omega_y - \dot{\omega}_y \omega_x), \end{aligned} \quad (29.100)$$

або

$$\begin{aligned} S_{O3}^\omega &= -I_1 \omega_x (\dot{\omega}_y \omega_z - \dot{\omega}_z \omega_y) - \\ - I_1 \omega_y (\dot{\omega}_z \omega_x - \dot{\omega}_x \omega_z) - I_{III} \omega_z (\dot{\omega}_x \omega_y - \dot{\omega}_y \omega_x) = \\ &= (I_O - I_I) \omega_x (\dot{\omega}_y \omega_z - \dot{\omega}_z \omega_y) + \\ &+ (I_O - I_{II}) \omega_y (\dot{\omega}_z \omega_x - \dot{\omega}_x \omega_z) + \\ &+ (I_O - I_{III}) \omega_z (\dot{\omega}_x \omega_y - \dot{\omega}_y \omega_x). \end{aligned} \quad (29.101)$$

була би більше наближена до вигляду основних теорем динаміки, записаних в неінерціальній, оберталній системі координат.

Далі, якщо врахувати форму рівнянь Ейлера – Шліньського основних теорем динаміки, які дають змогу визначити одним і тим самим методом реакції незалежно від їх типу, то можна говорити про перевагу основних теорем динаміки порівняно з різними типами рівнянь Лагранжа і рівняннями Аппеля.

Принаймні спільність між ними не дає підстав для переваги, наприклад, рівнянням Лагранжа другого роду порівняно з основними теоремами динаміки, як це роблять деякі автори в теорії гіроскопів.

Спільність між рівняннями аналітичної механіки та основними теоремами динаміки виникає тоді, коли основні динамічні величини – головний вектор кількості руху і момент кількості руху – виражають через кінетичну енергію.

**Приклад 3.** Скласти за допомогою рівнянь Аппеля та основних теорем динаміки рівняння руху для важкої однорідної кулі, що котиться без ковзання по площині, яка нахилена до горизонту під кутом  $\alpha$  (рис. 29.3).

Розв'язання.

1. Рівняння Аппеля.

За незалежні узагальнені координати приймемо (рис. 29.2)

$$q_1 = x_C, \quad q_2 = y_C, \quad q_3 = \varphi, \quad q_4 = \psi, \quad q_5 = \theta, \quad (1)$$

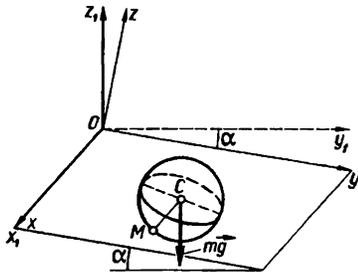


Рис. 29.3

де  $x_C, y_C$  – координати центра мас;  $\psi, \theta, \varphi$  – кути Ейлера.

Рівняння голономної в'язі

$$z_C = a, \quad (2)$$

де  $a$  – радіус кулі.

Рівняння неголономних в'язей ( $\dot{v}_M = 0$ )

$$\begin{aligned} \dot{x}_C - a\omega_y &= 0, \\ \dot{y}_C + a\omega_x &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут проекції кутової швидкості на осі  $Ox, Oy, Oz$ :

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; \\ \omega_y &= -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi; \\ \omega_z &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Приймемо за квазішвидкості

$$\tilde{\pi}_1 = \omega_x, \quad \tilde{\pi}_2 = \omega_y, \quad \tilde{\pi}_3 = \omega_z. \quad (5)$$

Із рівнянь (3)–(5) визначимо узагальнені швидкості через незалежні квазішвидкості:

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= a\tilde{\pi}_2 = a\omega_y; \\ \dot{y}_C &= -a\tilde{\pi}_1 = -a\omega_x; \\ \dot{\varphi} &= \frac{\sin \psi}{\sin \theta} \tilde{\pi}_1 - \frac{\cos \psi}{\sin \theta} \tilde{\pi}_2; \\ \dot{\psi} &= -\tilde{\pi}_1 \sin \psi \operatorname{ctg} \theta + \tilde{\pi}_2 \cos \psi \operatorname{ctg} \theta + \tilde{\pi}_3; \\ \dot{\theta} &= \tilde{\pi}_1 \cos \psi + \tilde{\pi}_2 \sin \psi. \end{aligned} \quad (6)$$

Знайдемо енергію прискорень за формулами (29.99) і (29.100), враховуючи, що оскільки для однорідної кулі  $I_{Cx} = I_{Cy} = I_{Cz} = I$ , то  $S_{06}^{\omega} = 0$  на основі співвідношення (29.101). Тоді

$$S = \frac{1}{2} m w_C^2 + S_{06}^{\omega}, \quad (7)$$

або в розгорнутому вигляді

$$S = \frac{1}{2} m (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} I (\dot{\omega}_x^2 + \dot{\omega}_y^2 + \dot{\omega}_z^2), \quad (8)$$

де  $m$  – маса кулі,  $I$  – осьовий момент інерції кулі. Підставивши вирази із (5) і (6) у формулу (8), матимемо

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} (I + ma^2) \tilde{\pi}_1^2 + \frac{1}{2} (I + ma^2) \tilde{\pi}_2^2 + \frac{1}{2} I \tilde{\pi}_3^2 = \\ &= \frac{1}{2} (I + ma^2) \dot{\omega}_x^2 + \frac{1}{2} (I + ma^2) \dot{\omega}_y^2 + \frac{1}{2} I \dot{\omega}_z^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Обчислимо можливу роботу

$$\delta A = F_x \delta x_C + F_y \delta y_C + F_z \delta z_C, \quad (10)$$

ає

$$F_x = 0, \quad F_y = mg \sin \alpha, \quad F_z = -mg \cos \alpha \quad (11)$$

і, згідно з формулами (2), (6), маємо

$$\begin{aligned} \delta x_C &= a \delta \pi_2 = a \delta \omega_y; \\ \delta y_C &= -a \delta \pi_1 = -a \delta \omega_x; \\ \delta z_C &= 0 \quad (\text{оскільки } z_C = a). \end{aligned} \quad (12)$$

Отже,

$$\delta A = F_y \delta y_C = -mg \sin \alpha \delta \pi_1 = -mg \sin \alpha \delta \omega_x. \quad (13)$$

Звідси

$$\Pi_1 = -mg \sin \alpha, \quad \Pi_2 = 0, \quad \Pi_3 = 0. \quad (14)$$

Випишемо тепер рівняння Аппеля (29.57)

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \dot{\pi}_1} = \frac{\partial S}{\partial \dot{\omega}_x} = \Pi_1; \quad \frac{\partial S}{\partial \dot{\pi}_2} = \frac{\partial S}{\partial \dot{\omega}_y} = \Pi_2; \\ \frac{\partial S}{\partial \dot{\pi}_3} = \frac{\partial S}{\partial \dot{\omega}_z} = \Pi_3. \end{aligned} \quad (15)$$

Підставивши сюди значення  $S$  із (9) і  $\Pi$  із (14), матимемо такі рівняння руху кулі по нахиленій площині:

$$\begin{aligned} (I + ma^2) \ddot{\pi}_1 &= (I + ma^2) \dot{\omega}_x = -mg \sin \alpha; \\ (I + ma^2) \ddot{\pi}_2 &= (I + ma^2) \dot{\omega}_y = 0; \\ I \ddot{\pi}_3 &= I \dot{\omega}_z = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Для замкненості системи (16) до неї потрібно додати рівняння в'язей (2) і (3).

2. Основні теореми динаміки.

Складемо кінетичну енергію за формулою про обертання кулі відносно миттєвого центра швидкостей (точки  $M$ )

$$T = \frac{1}{2} I_M \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_M \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_M \omega_z^2. \quad (17)$$

Тут за теоремою Гюйгенса – Штейнера

$$I_M = I_C + ma^2; \quad I_{M_y} = I_C + ma^2; \quad I_{M_z} = I_C,$$

бо

$$I_M = I + ma^2; \quad I_{M_y} = I + ma^2; \quad I_{M_z} = I. \quad (18)$$

З урахуванням (18) формула (17) для кінетичної енергії набуде вигляду

$$T = \frac{1}{2} (I + ma^2) \omega_x^2 + \frac{1}{2} (I + ma^2) \omega_y^2 + \frac{1}{2} I \omega_z^2. \quad (19)$$

Випишемо тепер співвідношення для проекцій векторів кількості руху і кінетичного моменту кулі:

$$Q_x = \frac{\partial T}{\partial v_{Cx}} = 0; \quad Q_y = \frac{\partial T}{\partial v_{Cy}} = 0; \quad (20)$$

$$Q_z = \frac{\partial T}{\partial v_{Cz}} = 0;$$

$$K_x = \frac{\partial T}{\partial \omega_x} = (I + ma^2) \omega_x;$$

$$K_y = \frac{\partial T}{\partial \omega_y} = (I + ma^2) \omega_y; \quad (21)$$

$$K_z = \frac{\partial T}{\partial \omega_z} = I \omega_z.$$

Зауважимо, що система координат  $Oxuz$  є нерухомою, але в силу симетрії кулі осьові моменти інерції її однакові як у рухомій, так і в нерухомій системах координат відносно полюса  $M$ . З урахуванням цього матимемо

$$\frac{dK_x}{dt} = M_{Mx}; \quad \frac{dK_y}{dt} = M_{My}; \quad \frac{dK_z}{dt} = M_{Mz}. \quad (22)$$

Тут

$$M_{Mx} = -mg \sin \alpha, \quad M_{My} = 0, \quad M_{Mz} = 0. \quad (23)$$

Підставивши в (22) вирази (21) і (23), матимемо

$$\begin{aligned} (I + ma^2) \dot{\omega}_x &= -mg \sin \alpha; \\ (I + ma^2) \dot{\omega}_y &= 0; \quad I \dot{\omega}_z = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Для замкненості рівняння (24) потрібно додати кінематичні співвідношення (2) – (4).

Як бачимо, система рівнянь (24) разом із кінематичним співвідношенням в'язей і повністю збігається з системою (16) рівнянь Аппеля.

Проаналізуємо тепер отримані рівняння, записані, наприклад, через квазішвидкості.

Із рівнянь (16) або (24) маємо:

$$\omega_x = \dot{\pi}_1 = -\frac{mga \sin \alpha}{I + ma^2} t + C_1; \quad (25)$$

$$\omega_y = \dot{\pi}_2 = C_2; \quad \omega_z = \dot{\pi}_3 = C_3, \quad (26)$$

де  $C_1, C_2, C_3$  – сталі інтегрування.

Для узагальнених швидкостей із (3) і (6) отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= aC_2; \\ \dot{y}_C &= \frac{mga^2 \sin \alpha}{I + ma^2} t - aC_1; \\ \dot{\varphi} &= -\frac{\sin \psi}{\sin \theta} \frac{mga \sin \alpha}{I + ma^2} t + C_1 \frac{\sin \psi}{\sin \theta} - C_2 \frac{\cos \psi}{\sin \theta}; \\ \dot{\psi} &= \sin \psi \operatorname{ctg} \theta \frac{mga \sin \alpha}{I + ma^2} t - C_1 \sin \psi \operatorname{ctg} \theta + \\ &\quad + C_2 \cos \psi \operatorname{ctg} \theta + C_3; \\ \dot{\theta} &= -\cos \psi \frac{mga \sin \alpha}{I + ma^2} t + C_1 \cos \psi + C_2 \sin \psi. \end{aligned} \quad (27)$$

Подальше інтегрування дає

$$\begin{aligned} x_C &= aC_2 t + C_4; \\ y_C &= \frac{mga^2 \sin \alpha}{I + ma^2} \frac{t^2}{2} - aC_1 t + C_5. \end{aligned} \quad (28)$$

Це означає, що в загальному вигляді центр мас кулі, відповідно до рівнянь (28), рухається по параболі, яка розташована в площині, що паралельна до нахиленої площини  $Ox_y$ .

### Питання для самоконтролю

1. Як записуються у варіаціях координат точок рівняння голономних і лінійних неголономних систем?
2. Чим відрізняються рівняння Лагранжа першого роду для голономних і неголономних систем лінійними в'язями?
3. Як можна за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду врахувати неголономні в'язі?
4. Чим відрізняються рівняння Ейлера – Лагранжа з неголономними в'язями від рівнянь Лагранжа другого роду з урахуванням додаткових неголономних в'язей?
5. В якому прикладі обчислені триіндексні коефіцієнти?
6. Як записуються рівняння Аппеля для неголономних і голономних систем?
7. За якими формулами обчислюється енергія прискорень для твердого тіла?
8. Як можна з рівнянь Аппеля отримати основні теореми динаміки?
9. Як визначається число степенів вільності для системи, на яку одночасно накладені голономні та неголономні в'язі?
10. Які рівняння дають змогу обчислити реакції неголономних в'язей?

## Розділ 30

### МАЛІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

#### § 30.1. Стійкість положення рівноваги.

**Теорема Лагранжа – Діріхле.**

**Критерій Сільвестра**

Теорія малих коливань механічної системи має велике значення у зв'язку з її практичним застосуванням в усіх галузях сучасної техніки і технології.

Вивчення коливань механічної системи органічно пов'язане з дослідженням стійкості її положення рівноваги, відносно якого відбуваються коливання. Розрізняють такі види стійкості: стійкість положення рівноваги, руху,

технічну стійкість тощо. Обмежимося розглядом поняття стійкості положення рівноваги для механічних систем за Ляпуновим, математичне формулювання якого наведено нижче.

Розглянемо механічну систему з голономними стаціонарними в'язями, положення якої визначається узагальненими координатами  $q_1, q_2, \dots, q_N$ . У цьому випадку кінетична енергія  $T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N A_{kj}(q) \dot{q}_k \dot{q}_j$  є до-

датно-визначеною квадратичною формою узагальнених швидкостей.

Вважаючи, що система рухається в консервативному силовому полі, виразимо узагальнену силу через потенціальну енергію:

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (30.1)$$

Рівняння руху такої системи запишемо у формі рівнянь Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}. \quad (30.2)$$

Розглядувана механічна система має положення рівноваги  $q_j = q_{j0} = q_j^*$ ,  $\dot{q}_j = \dot{q}_{j0} = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , коли узагальнені сили у цьому положенні дорівнюють нулю, тобто

$$(Q_j)_0 = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\right)_0 = 0. \quad (30.3)$$

Наведемо математичне і фізичне визначення стійкості положення рівноваги.

Математичне: положення рівноваги  $q_j^*$  називають стійким, якщо кожній парі як загодно малих додатних фіксованих чисел  $\epsilon$  і  $\epsilon'$  відповідають такі додатні числа  $\delta(\epsilon)$ ,  $\delta'(\epsilon')$ , що для будь-якого моменту часу  $t \geq t_0$  виконуються нерівності

$$\begin{aligned} |q_j(t) - q_j^*| < \epsilon, \quad |\dot{q}_j(t)| < \epsilon', \\ j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (30.4)$$

за умови, що початкові значення узагальнених координат і швидкостей задовольняють нерівності

$$\begin{aligned} |q_j(0) - q_j^*| < \delta(\epsilon), \quad |\dot{q}_j(0)| < \delta'(\epsilon'), \\ j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (30.5)$$

в іншому разі положення рівноваги  $q_j^*$  називають нестійким. Тут  $q_j(0)$  і  $\dot{q}_j(0)$  –

узагальнені координати і швидкості механічної системи в початковий момент часу  $t = t_0$ .

Якщо в стані стійкої рівноваги виконуються умови

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |q_j(t) - q_j^*| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{q}_j(t)| = 0, \quad (30.6)$$

то положення рівноваги називають асимптотично стійким.

Фізичне: положення рівноваги  $q_j = q_j^*$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  (або стан рівноваги  $q_j^*$ ) називається стійким, якщо при достатньо малих початкових ( $t = t_0$ ) відхиленнях  $q_j(0)$  і достатньо малих початкових швидкостях  $\dot{q}_j(0)$  система протягом усього руху не виходить за межі якого завгодно малою (наперед заданою) околу положення рівноваги, маючи при цьому як завгодно малі швидкості  $\dot{q}_j(t)$ .

Якщо при цьому з часом на нескінченності відхилення узагальнених координат від положення рівноваги і узагальнені швидкості наближаються до нуля, то таке положення рівноваги називають асимптотично стійким.

Розглянемо достатні умови стійкості рівноваги системи, що дає теорема Лагранжа – Діріхле. Не порушуючи загальності, будемо вважати, що в положенні рівноваги потенціальна енергія дорівнює нулю.

**Теорема Лагранжа – Діріхле.** Якщо в положенні рівноваги потенціальна енергія  $\Pi$  голономної стаціонарної системи, що перебуває в полі консервативних сил, має ізольований мінімум, то таке положення рівноваги стійке.

Доведення. Якщо в положенні рівноваги потенціальна енергія дорівнює нулю, то в досить малому околі положення рівноваги потенціальна енергія системи додатна. Оскільки в'язі, що накладені на систему, ідеальні, стаціонарні, а система консервативна, то має

місце закон збереження механічної енергії  $T + \Pi = h$ . Припустимо, що початкові швидкості точок системи під час руху з положення рівноваги досить малі, тому початкова кінетична енергія системи  $T_0$  настільки мала, що сума  $T_0 + \Pi_0$  дорівнює одному з тих малих додатних значень, які набуває потенціальна енергія в малому околі положення рівноваги.

За законом збереження енергії

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0, \quad (30.7)$$

де  $T$  і  $\Pi$  – відповідно кінетична і потенціальна енергії системи, що виведена зі стану рівноваги, під час її подальшого руху.

Із виразу (30.7) маємо

$$T = T_0 + \Pi_0 - \Pi > 0, \quad (30.8)$$

звідки

$$\Pi < T_0 + \Pi_0. \quad (30.9)$$

Ці нерівності показують, що рух системи після відхилення її від положення рівноваги за вказаних вище початкових умов відбувається в околі положення рівноваги. При малій початковій кінетичній енергії  $T_0$  системи зростання потенціальної енергії обмежене нерівністю (30.9) настільки, що навіть у разі досягнення своєї верхньої межі вона буде одним із значень потенціальної енергії в околі положення рівноваги. На основі (30.8) приходимо до висновку, що за вказаних початкових умов швидкості всіх точок системи обмежені за модулем. Із зменшенням  $T_0$  і  $\Pi_0$  до нуля,  $T$  і  $\Pi$  також наближаються до нуля. Останнє випливає із (30.8) і (30.9). Отже, теорема доведена.

Вирішення питання про нестійкість рівноваги консервативної системи ґрунтується на двох теоремах О. М. Ляпунова про нестійкість рівноваги<sup>1</sup>.

*Теорема 1. Рівновага консервативної системи нестійка, якщо потенціальна енергія не має мінімуму і цей факт можна встановити за членами другого порядку в розкладенні потенціальної енергії в ряд Маклорена без потреби розгляду членів вищих порядків.*

*Теорема 2. Рівновага консервативної системи нестійка, якщо потенціальна енергія системи має максимум і наявність цього максимуму може бути встановлено з розгляду членів нижчого порядку малізми, що входять у розкладення потенціальної енергії в ряд Маклорена в околі положення рівноваги.*

Теорема Лагранжа – Діріхле має лише достатні умови стійкості стану рівноваги. На основі цієї теореми не можна, наприклад, стверджувати, що відсутність мінімуму потенціальної енергії в положенні рівноваги системи означає нестійкість стану рівноваги. Також не можна на основі цієї теореми стверджувати, що положенню стійкої рівноваги завжди відповідає мінімум потенціальної енергії.

У тих випадках, коли деякі узагальнені координати не входять явно у вираз для потенціальної енергії, положення рівноваги системи відносно цих координат називають *байдужим*. Наприклад, нижнє положення рівноваги фізичного маятника є стійким, а верхнє – нестійким. Положення рівноваги кулі на ідеально гладкій горизонтальній площині є байдужим.

Як показано в § 27.7, для малих приростів узагальнених координат поблизу положення рівноваги потенціальну енергію можна наближено подати у вигляді квадратичної форми узагальнених координат (27.90):

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N c_{kj} q_k q_j. \quad (30.10)$$

Оскільки в положенні рівноваги потенціальна енергія дорівнює нулю ( $\Pi(0) = 0$ ),

<sup>1</sup>Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. – М.: ОНТИ, 1935. – С. 353–362.

то вона матиме мінімум у цьому положенні, якщо  $\Pi(q)$  буде явно додатною функцією.

Знак будь-якої квадратичної форми визначається **теоремою Сільвестра**: для того щоб квадратична форма була додатно-визначеною, необхідно і достатньо, щоб усі готові діагональні мінори матриці квадратичної форми були додатні<sup>1</sup>.

Звертаючись до виразу (30.10), випишемо матрицю і головні діагональні мінори цієї квадратичної форми:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2N} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{N1} & c_{N2} & c_{N3} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix}, \quad (30.11)$$

$$\Delta_1 = c_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

$$\Delta_N = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{N1} & \dots & c_{NN} \end{vmatrix}.$$

З урахуванням уведених позначень критерій додатно-визначеної квадратичної форми (30.10) має вигляд

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_N > 0. \quad (30.12)$$

**Приклад 1.** На рис. 30.1 зображено дволанковий робот-маніпулятор, що переміщується у вертикальній площині  $xOy$ . У точках  $O$  і  $O_1$  розміщені приводи ланок, закони керування якими вибрані так, що вони еквівалентні механічним спіральним пружинам із жорсткостями  $c_1$  і  $c_2$ .

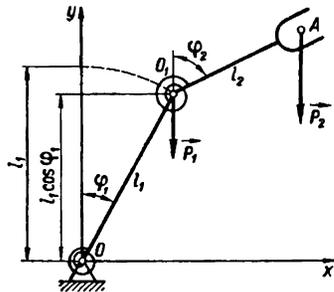


Рис. 30.1

Вважаючи, що важелі  $l_1$  і  $l_2$  невагомі, вся маса першої ланки зосереджена в точці  $O_1$ , другої, разом зі змінним вантажем, – у точці  $A$  клішів робота, відповідні сили ваги –  $\bar{P}_1$  і  $\bar{P}_2$ , виберіть параметри робота  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $l_1$  і  $l_2$  так, щоб при заданих силах  $\bar{P}_1$  і  $\bar{P}_2$  робот був стійким у вертикальному положенні  $Oy$ . Силами опору можна знехтувати.

**Розв'язання.** Розглядувана система має два степеня вільності. За узагальнені координати візьмемо кути  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  відхилення ланок від вертикального положення (рис. 30.1). Скористаємося теоремою Лагранжа – Діріхле і критерієм Сільвестра (30.12). Для цього треба визначити потенціальну енергію  $\Pi$  системи. Ця енергія складатиметься з потенціальної енергії пружин  $\Pi_{пр}$  і потенціальної енергії  $\Pi_v$  сил ваги  $\bar{P}_1$  і  $\bar{P}_2$ . Вважаємо, що в положенні рівноваги (у вертикальному верхньому положенні) потенціальна енергія дорівнює нулю, тоді потенціальна енергія сил ваги, як робота цих сил при переході з даного положення у вертикальне, визначається так:

$$\begin{aligned} \Pi_v = & -P_1 l_1 (1 - \cos \varphi_1) - \\ & -P_2 [l_1 (1 - \cos \varphi_1) + l_2 (1 - \cos \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Потенціальна енергія пружин визначається за формулою

$$\Pi_{пр} = \frac{1}{2} c_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2, \quad (2)$$

де  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  – кут закручування другої пружини.

<sup>1</sup>Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1971. – С. 180.

Запишемо вираз для потенціальної енергії, враховуючи, що  $1 - \cos \varphi_1 \approx \frac{\varphi_1^2}{2}$ ,

$$\Pi = \Pi_{\text{пр}} + \Pi_{\text{в}} \approx -P_1 l_1 \frac{\varphi_1^2}{2} - P_2 l_2 \frac{\varphi_1^2}{2} - P_2 l_2 \frac{\varphi_2^2}{2} + \frac{1}{2} c_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \varphi_2^2 - c_2 \varphi_1 \varphi_2 + \frac{1}{2} c_2 \varphi_1^2. \quad (3)$$

Після відповідних перетворень запишемо (3) у квадратичній формі

$$\Pi \approx \frac{1}{2} c_{11} \varphi_1^2 + c_{12} \varphi_1 \varphi_2 + \frac{1}{2} c_{22} \varphi_2^2,$$

де

$$c_{11} = c_1 + c_2 - (P_1 + P_2) l_1; \quad c_{12} = c_{21} = -c_2; \\ c_{22} = c_2 - P_2 l_2. \quad (4)$$

Критерій Сільвестра (30.12) для  $N=2$  дає нерівності

$$\Delta_1 = c_{11} > 0, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11} c_{22} - c_{12}^2 > 0. \quad (5)$$

Оскільки  $c_{11} > 0$ , то з другої нерівності випливає, що і  $c_{22} > 0$ .

Підставляючи вираз (4) для  $c_{ij}$  у ці нерівності, дістанемо

$$c_1 + c_2 - (P_1 + P_2) l_1 > 0, \quad c_2 - P_2 l_2 > 0, \\ [c_1 + c_2 - (P_1 + P_2) l_1] (c_2 - P_2 l_2) - c_2^2 > 0. \quad (6)$$

Розв'язуючи їх відносно  $c_1$ ,  $l_1$  і  $c_2$ , одержимо

$$c_1 > \frac{c_2 P_2 l_2}{c_2 - P_2 l_2} + (P_1 + P_2) l_1, \quad l_1 < \frac{c_1 + c_2}{P_1 + P_2}, \quad c_2 > P_2 l_2. \quad (7)$$

Отже, для забезпечення стійкості рівноваги робота у вертикальному положенні мають виконуватися одержані нерівності.

### § 30.2. Рівняння малих коливань системи зі скінченним числом степенів вільності за наявності розсіювання енергії. Критерій Гурвіца

Розглянемо механічну систему зі стаціонарними голономними в'язями, що складається з  $n$  матеріальних точок з  $N$  степеня-

ми вільності, на яку діють потенціальні сили і сили опору середовища. Ці сили пропорційні першому степеню швидкості.

Дослідимо малі коливання системи відносно положення рівноваги. Як було показано в розділі 27, кінетичну (27.83), потенціальну (27.90) енергії і дисипативну функцію (27.94) можна подати у вигляді відповідних квадратичних форм:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j; \\ \Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N c_{kj} q_k q_j; \quad (30.13) \\ \Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \beta_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j.$$

Враховуючи вираз (27.96) для узагальненої сили опору, рівняння Лагранжа другого роду (27.22) запишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}, \\ j = 1, 2, \dots, N. \quad (30.14)$$

Підставляючи вираз (30.13) у рівняння (30.14), дістанемо систему  $N$  лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами:

$$a_{11} \ddot{q}_1 + \beta_{11} \dot{q}_1 + c_{11} q_1 + \dots \\ \dots + a_{1N} \ddot{q}_N + \beta_{1N} \dot{q}_N + c_{1N} q_N = 0; \\ a_{21} \ddot{q}_1 + \beta_{21} \dot{q}_1 + c_{21} q_1 + \dots \\ \dots + a_{2N} \ddot{q}_N + \beta_{2N} \dot{q}_N + c_{2N} q_N = 0; \quad (30.15)$$

$$\dots \\ a_{N1} \ddot{q}_1 + \beta_{N1} \dot{q}_1 + c_{N1} q_1 + \dots \\ \dots + a_{NN} \ddot{q}_N + \beta_{NN} \dot{q}_N + c_{NN} q_N = 0,$$

або в компактній формі

$$\sum_{j=1}^N (a_{kj} \ddot{q}_j + \beta_{kj} \dot{q}_j + c_{kj} q_j) = 0, \\ k = 1, 2, \dots, N. \quad (30.16)$$

Щоб знайти нетривіальний розв'язок системи рівнянь (30.15) (тривіальним є розв'язок, коли  $q_1 = q_2 = \dots = q_N = 0$ ), треба задати ненульові початкові умови при  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} q_1(0) &= q_{10}, \quad q_2(0) = q_{20}, \quad \dots, \quad q_N(0) = q_{N0}, \\ \dot{q}_1(0) &= \dot{q}_{10}, \quad \dots, \quad \dot{q}_N(0) = \dot{q}_{N0}. \end{aligned} \quad (30.17)$$

Для розв'язання системи однорідних рівнянь (30.15) треба отримати її характеристичне рівняння. Якщо розв'язок шукати у вигляді

$$q_j = A_j e^{pt}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (30.18)$$

де  $A_j, p$  – сталі коефіцієнти, то очевидно, що

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= p A_j e^{pt} = p q_j, \\ \ddot{q}_j &= p^2 q_j. \end{aligned} \quad (30.19)$$

У (30.19) сталу  $p$  можна розглядати як оператор диференціювання  $p = \frac{d}{dt}$ . Підставивши вирази (30.18) і (30.19) у систему (30.16), дістанемо

$$\sum_{j=1}^N (a_{kj} p^2 + \beta_{kj} p + c_{kj}) q_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (30.20)$$

Система рівнянь має нетривіальний розв'язок, якщо визначник системи (30.20) дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}p^2 + \beta_{11}p + c_{11} & \dots & a_{1N}p^2 + \beta_{1N}p + c_{1N} \\ a_{21}p^2 + \beta_{21}p + c_{21} & \dots & a_{2N}p^2 + \beta_{2N}p + c_{2N} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{N1}p^2 + \beta_{N1}p + c_{N1} & \dots & a_{NN}p^2 + \beta_{NN}p + c_{NN} \end{vmatrix} = 0. \quad (30.21)$$

Це рівняння називають *характеристичним*. Корені його в загальному випадку комплекс-

ні. Оскільки порядок цього алгебричного рівняння відносно  $p$  дорівнює  $2N$ , то всього коренів буде  $2N$ . При цьому комплексні корені мають вигляд  $p_k = \lambda_k \pm i\omega_k$ , де  $\lambda_k$  – дійсна частина;  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\omega_k$  – колова частота коливань  $k = 1, \dots, N$ .

Якщо розсіювання енергії немає, тобто система консервативна, то  $\beta_{kj} = 0$ ,  $k, j = 1, 2, \dots, N$  і  $p = \pm i\omega(\lambda_k = 0)$ .

Використовуючи формулу Ейлера

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (30.22)$$

і враховуючи, що комплексно-спряжених коренів  $N$ , розв'язок системи (30.15) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} q_j &= \sum_{k=1}^N e^{\lambda_k t} (C_{jk} \cos \omega_k t + D_{jk} \sin \omega_k t), \\ j &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (30.23)$$

де  $C_{jk}, D_{jk}$  – сталі інтегрування.

Як видно зі структури розв'язку (30.23), для того щоб при  $t \rightarrow \infty$   $\lim_{t \rightarrow \infty} q_j = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_j = 0$ ,

треба, щоб дійсні частини  $\lambda_k$  коренів характеристичного рівняння були від'ємними. Тоді, за визначенням (див. § 30.1), положення рівноваги буде асимптотично стійким. Розв'язок цієї суто алгебричної задачі визначається критерієм Гурвіца. Якщо характеристичне рівняння має вигляд алгебричного рівняння будь-якого степеня  $m$

$$\begin{aligned} a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + a_{m-2} p^{m-2} + \dots \\ \dots + a_1 p + a_0 = 0 \end{aligned} \quad (30.24)$$

з дійсними коефіцієнтами  $a_0, \dots, a_m$ , то необхідні й достатні умови від'ємності дійсних частин коренів такого рівняння будуть визначатися *критерієм Гурвіца*: для того щоб усі корені рівняння (30.24) мали від'ємні дійсні

частини, необхідно і достатньо, щоб усі головні діагональні мінори матриці

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_m \end{bmatrix},$$

що складена з коефіцієнтів рівняння (30.24), були додатними, тобто

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \dots,$$

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_m \end{vmatrix} > 0. \quad (30.25)$$

Наприклад, для рівняння четвертого степеня

$$a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \quad (30.26)$$

матриця коефіцієнтів має вигляд

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{bmatrix} \quad (30.27)$$

і умову (30.25) можна записати так:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 > 0, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \\ \Delta_3 &= a_3 \Delta_2 - a_4 a_1^2 > 0, \quad (30.28) \\ \Delta_4 &= a_4 \Delta_3 > 0. \end{aligned}$$

Із нерівностей (30.28) і (30.25) безпосередньо випливає, що всі коефіцієнти  $a_1, \dots, \dots, a_m$  характеристичного рівняння мають бути додатними:  $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_m > 0$ .

Подальше дослідження малих коливань будемо проводити стосовно системи з одним і двома степенями вільності.

### § 30.3. Стійкість руху системи

У попередніх параграфах були розглянуті деякі положення, пов'язані з теорією стійкості стану рівноваги. У цьому параграфі розглянемо коротко більш складне питання стійкості руху. Наприклад, рухомих об'єкт (літак, корабель, ракета, що сама наводиться на ціль) виконує рух по заданій траєкторії або здійснює заданий рух (вібрація в технологічній машині). При цьому на нього діють збурення у формі невеликої зміни початкових умов, невеликого приросту параметрів (наприклад, через вигорання палива) зовнішніх збурень – пориви вітру, неоднорідність середовища тощо, недосконалість чутливих елементів і виконавчих органів системи керування, які спричинюють відхилення (збурення) від заданого, запрограмованого руху об'єкта.

Заданий, запрограмований рух системи називається основним рухом. Він визначається як частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, що відповідає їх правій частині

$$y_1^* = f_1(t), \quad y_2^* = f_2(t), \dots, y_N^* = f_N(t). \quad (30.29)$$

Тут  $y_j^*$  – змінні диференціальних рівнянь,  $j = 1, 2, \dots, N$ .

Вказані збурення викликають приріст  $x$  цих координат

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1^* - f_1(t), \quad x_2 = y_2^* - f_2(t), \dots \\ \dots, \quad x_N &= y_N^* - f_N(t) \quad (30.30) \end{aligned}$$

і цей рух називають збуренням.

М. Є. Жуковский замість терміну стійкість руху вживав термін – міцність руху

Ось його визначення стійкості руху як стійкості траєкторій:

“Якщо в процесі руху природи координат залишаються нескінченно малими, то рух є міцним (стійким); якщо ж деякі з цих функцій безмежно зростають, то рух неміцний (нестійкий)”<sup>1</sup>.

Математичне трактування стійкості руху, коли збурення викликається лише збуренням початкових умов, дав у 1882 р. український учений О. М. Ляпунов у класичній роботі “Общая задача об устойчивости движения”, яку він здійснив у Харківському політехнічному інституті.

Наведемо визначення стійкості за О. М. Ляпуновим. *Незбурений рух називається стійким по відношенню до змінних  $y_i$  системи диференціальних рівнянь, якщо для всіх збурених рухів, що спричинені малими збуреннями початкових умов, природи змінних  $x_i$ , будуть меншими будь-якого малого числа.*

У зв'язку з розвитком насамперед динаміки рухомих об'єктів – літаків, ракет, кораблів, систем керування технологічними процесами – були введені поняття технічної стійкості системи.

Поняття технічної стійкості руху можна сформулювати так:

*Заданий (основний) рух  $q_j = f_j(t)$  буде технічно стійким тоді, коли невеликі збурення початкових умов, параметрів системи або зовнішніх сил зумовляють такий збурений рух, який на заданому кінцевому проміжку часу лежить у наперед заданому околі основного руху.*

*Якщо з часом на нескінченності природні координат і швидкостей, що спричинені збуренням, наближуються до нуля, то такий рух називають асимптотично стійким.*

Зауважимо, що таке визначення стійкості руху є найбільш загальним, воно погли-

нає дане нами раніше визначення статичної стійкості тіла і стійкості положення рівноваги системи тіл.

О. М. Ляпунов розробив два методи розв'язання питання про стійкість руху на нескінченно великому проміжку часу при збуренні лише початкових умов.

Зазначимо, що умови стійкості за Ляпуновим досить часто є більш жорсткими, ніж умови технічної стійкості. Наприклад, якщо за Ляпуновим рух ракети по одному з кутів є нестійким, але за 100 с польоту приріст цього кута не вийде за межі допустимого, то умови технічної стійкості ракети виконані, хоча за Ляпуновим рух по цій координаті є нестійким.

У роботах І. Г. Малкіна доведено, що забезпечення умов асимптотичної стійкості за О. М. Ляпуновим, як правило, гарантує стійкість незбуреного руху і всіх видів збурень, окрім збурень початкових умов<sup>2</sup>.

Перший метод О. М. Ляпунова пов'язаний з аналізом і безпосереднім інтегруванням диференціальних рівнянь збуреного руху.

Другий метод О. М. Ляпунова характеризується тим, що він не пов'язується з інтегруванням диференціальних рівнянь збуреного руху, а побудований на пошуку спеціальної знаковизначеної функції  $V$ , яка залежить від координат системи і задовольняє певні умови.

Наведемо тут без доведення деякі загальні положення першого і другого методів О. М. Ляпунова.

**Перший метод О. М. Ляпунова.** Цей метод побудований на дослідженні лінеаризованих рівнянь збуреного руху або диференціальних рівнянь першого наближення. Такі рівняння ми вже неодноразово розглядали, коли, наприклад, при дослідженні коливань маятника приймали  $\sin \varphi \approx \varphi$  тощо.

<sup>1</sup>Жуковский М. Е. О прочности движений: Собр. соч. В 9 т. М.: ОГИЗ, 1948. – Т. 1. С. 69–70.

<sup>2</sup>Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 532 с.

О. М. Ляпунов довів, що розв'язати питання про стійкість руху частіше всього можна на основі диференціальних рівнянь першого наближення. Але в окремих особливих випадках рівняння першого наближення не дають можливості знайти правильну відповідь на питання про стійкість руху і доводиться розглядати вищі наближення.

О. М. Ляпунов розглянув випадки так званого стаціонарного незбуреного руху (коли лінеаризована система описується диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами) і періодичного незбуреного руху (лінійні диференціальні рівняння з періодичними коефіцієнтами).

Наведемо третю і четверту теореми О. М. Ляпунова.

**Теорема 3.** *Якщо характеристичне рівняння системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами має лише корені з від'ємними дійсними частинами, то збурений рух буде стійким і до того ж таким, що при достатньо малих збуреннях він асимптотично наближатиметься до незбуреного (основного) руху.*

**Теорема 4.** *Якщо між коренями характеристичного рівняння зустрічаються корені з додатними дійсними частинами, то збурений рух є нестійким.*

Зазначимо, що для лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами питання про знак дійсних частин коренів характеристичного рівняння вирішується за допомогою критерію Гурвіца, який наведено в попередньому параграфі.

О. М. Ляпунов довів також теорему про так звану умовну стійкість, коли серед коренів характеристичного рівняння є такі, що мають додатну дійсну частину, але початкові умови можна вибрати так, що члени в розв'язку системи, які обумовлені цими коренями, обертаються на нуль.

Наприклад, нехай система рівнянь для збурень має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + y. \quad (30.31)$$

При  $t = 0$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (30.32)$$

Характеристичне рівняння системи (30.31), якщо ввести оператор диференціювання

$p = \frac{d}{dt}$ , буде

$$\begin{vmatrix} p & -1 \\ -2 & p-1 \end{vmatrix} = p^2 - p - 2 = 0. \quad (30.33)$$

Звідси  $p_1 = 2$ ;  $p_2 = -1$ .

При заданих початкових умовах (30.32) розв'язок системи (30.31) матиме вигляд

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_0 + y_0}{3} e^{2t} + \frac{2x_0 - y_0}{3} e^{-t}, \\ y &= \frac{2(x_0 + y_0)}{3} e^{2t} - \frac{2x_0 - y_0}{3} e^{-t}. \end{aligned} \quad (30.34)$$

Як бачимо, незбурений рух – нестійкий. Але існує деяка умовна стійкість. Дійсно, якщо покласти

$$x_0 + y_0 = 0, \quad (30.35)$$

то при  $t \rightarrow \infty$   $x \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow 0$ .

Із наведених теорем видно, що при стаціонарному (усталеному) русі питання про його стійкість найчастіше вирішується дослідженням тільки першого наближення.

Питання залишається нез'ясованим тоді, коли характеристичне рівняння, не маючи коренів із дійсними частинами, має чисто уявні корені. З таким випадком ми зіткнулися в § 21.9 при розгляді питання про обертання твердого тіла відносно головних осей інерції.

При дослідженні питання про стійкість руху в особливих випадках необхідно розглядати наближення вищих порядків.

Загальних методів таких досліджень немає і тому кожну задачу потрібно розглядати окремо.

**Приклад 2.** Дослідити стійкість системи, збурений рух якої задовольняє систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -y + \alpha x^3; \quad \frac{dy}{dt} = x + \alpha y^3. \quad (1)$$

Розв'язання. Система рівнянь (1) нелінійна. Рівняння першого наближення мають вигляд

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = -y^{(1)}; \quad \frac{dy^{(1)}}{dt} = x^{(1)}.$$

Характеристичне рівняння цієї системи

$$\begin{vmatrix} p & 1 \\ -1 & p \end{vmatrix} = p^2 + 1 = 0 \Rightarrow p = \pm i, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Отже, характеристичне рівняння має суто уявні корені. За теоремами 3 і 4 неможливо зробити висновок про стійкість руху, хоча рух стійкий у першому наближенні.

Далі буде показано, що при  $\alpha > 0$  рух нестійкий, а при  $\alpha < 0$  – рух стійкий асимптотично, при  $\alpha = 0$  – рух стійкий, бо в цьому випадку  $x = x^{(1)}, y = y^{(1)}$ .

На завершення наголосимо на тому, що в ХХ ст. бурхливий розвиток отримала теорія автоматичного керування і технічна кібернетика, де розробки методів дослідження і забезпечення стійкості систем є однією з головних задач цих наук.

Крім критерію Гурвіца, широке застосування знайшли частотні, структурні методи і метод графів.

Структурні методи базуються на вивченні властивостей і побудові систем зі зворотним зв'язком, що забезпечує в першу чергу незалежність у системі позиційних сил, яким у характеристичному рівнянні (30.24) відповідає останній член  $a_0$ . Як формується цей член у рівняннях покажемо на прикладі керування літаком (рис. 30.2).

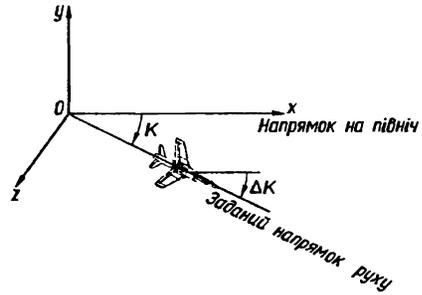


Рис. 30.2

Нехай траєкторія літака має заданий курс (кут, що відраховується в горизонтальній площині від напрямку на північ). Під впливом збурень поздовжня вісь літака відхилилась від заданого курсу на кут  $\Delta K$ . Щоб повернути літак на задану траєкторію, потрібно на борту мати прилади, які виміряють це відхилення  $\Delta K$  (таку функцію виконують гіроскопи (див. розділ 22), або радіолокаційні системи навігації, чи астрономічні). Потім цей сигнал треба підсилити і подати на приводи (електричні, гідравлічні тощо) керма, яке потрібно повернути так, щоб створений під дією аеродинамічних сил момент був напрямлений проти напрямку відхилення (збурення) літака, тобто цей момент має вигляд

$$M_y = -k\Delta K, \quad (30.36)$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності.

Лінійне рівняння обертального руху літака відносно осі  $Oy$  з урахуванням сил в'язкого тертя буде

$$I_y \Delta \ddot{K} + f_1 \Delta \dot{K} = M_y = -k\Delta K, \quad (30.37)$$

або

$$I_y \Delta \ddot{K} + f_1 \Delta \dot{K} + k\Delta K = 0. \quad (30.38)$$

Характеристичне рівняння в цьому випадку матиме вигляд

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0. \quad (30.39)$$

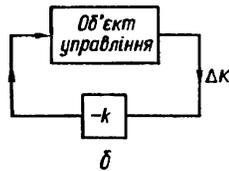
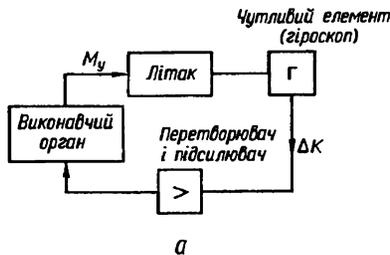


Рис. 30.3

Тут  $p = \frac{d}{dt}$  – оператор диференціювання.

Тобто ця система є стійкою.

Процес створення позиційного моменту сил (30.36) можна зобразити графічно як систему з від'ємним зворотним зв'язком.

На рис. 30.3, а показано розгорнуту схему системи зі зворотним зв'язком, а на рис. 30.3, б – спрощену.

Структурна схема (рис. 30.4, б) відповідає масі на пружині (рис. 30.4, а) жорсткості  $k$ . При відхиленні маси на величину  $\Delta x$  пружина розвиває силу  $-k\Delta x$ .

Очевидно, що згідно з рис. 30.4, б, механічну пружину можна замінити електричною, яка являла б собою вимірювач відхилень тіла масою  $m$  від положення рівноваги (це може бути потенціометр, оптичний вимірювач тощо) і виконавчий орган, що створює силу, пропорційну вказаному відхиленню зі знаком мінус.

Як бачимо, пружина і вказана система керування літаком (якщо це автоматична система, то її називають автопілотом) мають однакову структурну схему, що являє собою систему зі зворотним від'ємним зв'язком.

Цікаво зазначити, що аналогічну структурну схему має в макроekonomіці основна ланка ринку, яка визначається формулою К. Маркса: товар – гроші – товар (Т – Г – Т) (рис. 30.5). Це дало підстави автору ввести поняття стійкості економічної системи в макроekonomіку з урахуванням особливос-

тей зворотного зв'язку в суспільстві, де має місце так звана рефлексивність (як наслідок взаємодії мислячого суб'єкта з реальністю), і сформулювати необхідні й достатні умови такої системи та необхідні й достатні умови її нестійкості в термінах макроekonomіки<sup>1</sup>.

Зазначимо, що поняття статичної стійкості тіла (див. § 6.5) побудовано так, що воно формує від'ємний зворотний зв'язок і відповідні позиційні сили та моменти, які діють на тіло, і додатний вільний член  $a_0$  в характеристичному рівнянні.

*Другий (прямий) метод О. М. Ляпунова.*

Цей метод вказує на те, що міркування, якими користуються при доведенні відомої теореми Лагранжа – Діріхле про стійкість рівноваги, можна поширити на доведення інших теорем щодо питання стійкості руху

Другий (прямий) метод О. М. Ляпунова відрізняється тим, що при його застосуванні не потрібно інтегрувати диференціальні рівняння збудження руху. Цей метод пов'язаний з пошуком деяких функцій  $V$  змінних збудження  $t, x_1, x_2, \dots, x_N$ , ( $x_j = y_j - f_j(t)$  – збудження,  $y_j$  – частинний розв'язок збудженого руху,  $f_j(t)$  – частинний розв'язок незбудженого руху – запрограмований, основний рух).

<sup>1</sup>Павловський М. А. Макроекономіка перехідного періоду. Український контекст. – К.: Техніка, 1999. – 336 с.

Павловський М. А. Стратегія розвитку суспільства України і світу (економіка, політологія, соціологія). – К.: Техніка, 2001. – 312 с.

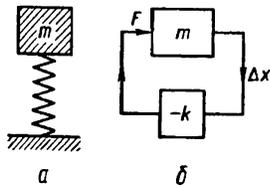


Рис. 30.4

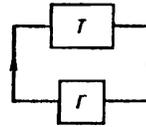


Рис. 30.5

а також з вивченням властивостей цих функцій та їх похідних.

Функції  $V$  називають функціями Ляпунова. В околі  $|x_j| < h$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ), де  $h$  – достатньо мале додатне число, будемо розглядати для простоти лише усталений (стационарний) рух, тобто  $V = V(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , вважаючи ці функції  $V$  безперервно диференційованими, однозначними і такими, що зберігаються на нуль на початку координат  $x_1 = x_2 = \dots = x_N = 0$ .

Похідна функції  $V$  визначається з виразу

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt}. \quad (30.40)$$

Крім цього, функції Ляпунова можуть мати спеціальні властивості. Введемо деякі додаткові визначення.

Функцію  $V$  називають *додатно-визначеною* в околі  $|x_j| < h$ , якщо в будь-якій точці цього околу, крім початку координат (де функція  $V$  дорівнює нулю) виконується умова  $V > 0$ .

Якщо  $V < 0$ , то функція  $V$  називається *від'ємно-визначеною*.

У тому й іншому випадку функція  $V$  називається *знаковизначеною*.

Якщо в цьому околі  $|x_j| < h$ , функція  $V$  набуває значення тільки одного знака ( $V \geq 0$  або  $V \leq 0$ ), але може обертається на нуль не тільки на початку координат, то вона називається *знакосталою* (додатною чи від'ємною); якщо ж функція  $V$  набуває як

додатного, так і від'ємного значення, то вона називається *знакозмінною* в цьому околі. Наприклад, при  $N=2$  функція  $V = x_1^2 - x_2^2$  – знакозмінна, а функція  $V = x_1^2 + x_2^2$  – додатно-визначена, функція ж  $V = x_1^2$  – знакостала, бо вона обертається на нуль на осі  $Ox_2$ , а поза межами цієї осі вона додатна.

Отже, якщо  $V$  є квадратичною формою, то знаковизначеність можна встановити за допомогою критерію Сильвестра (див. § 30.1). Якщо  $V$  – форма непарного степеня, то, очевидно, вона знакозмінна функція.

Наведемо тепер без доведення ряд теорем прямого методу Ляпунова щодо стійкості руху.

**Теорема про стійкість руху.** Якщо диференціальні рівняння збуреного руху такі, що існує знаковизначена функція  $V$ , похідна якої  $\dot{V}$  на основі цих рівнянь є або знакосталою протилежного із  $V$  знака, або можливо рівною нулю, то незбурений (основний) рух є стійким.

Ця теорема є безпосереднім узагальненням теореми Лагранжа – Діріхле про стійкість рівноваги.

**Теорема про асимптотичну стійкість руху.** Якщо диференціальні рівняння збуреного руху такі, що існує знаковизначена функція  $V(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , похідна якої  $\dot{V}$  на основі цих рівнянь є знаковизначеною функцією протилежного із  $V$  знака, то незбурений (основний) рух є асимптотично стійким.

Тепер наведемо теореми Ляпунова і Четаєва про нестійкість руху.

**Перша теорема Ляпунова про нестійкість руху.** Якщо диференціальні рівняння збуреного руху такі, що існує функція  $V$ , похідна від якої  $\dot{V}$  на основі цих рівнянь є знакосталою функцією, а сама функція  $V$  не є знакосталою протилежного із  $\dot{V}$  знака, то незбурений (основний) рух є нестійким.

**Теорема Четаєва про нестійкість руху.** Якщо диференціальні рівняння збуреного руху такі, що існує функція  $V(x_1, x_2, \dots, x_N)$  така, що в будь-якому малому околі  $|x_j| < h$  існує окіл  $V > 0$  і в усіх точках околу  $V > 0$  похідна  $\dot{V}$  на базі цих рівнянь набуває додатних значень, то незбурений рух є нестійким.

**Друга теорема Ляпунова про нестійкість руху.** Якщо диференціальні рівняння збуреного руху такі, що існує функція  $V$  така, що її похідна  $\dot{V}$  на основі цих рівнянь може бути подана у формі

$$\dot{V} = \chi V + W, \quad (30.41)$$

де  $\chi$  – додатна стала ( $\chi > 0$ ), а  $W$  тотожно обертається на нуль, або є знакосталою функцією, і якщо в останньому випадку функція  $V$  не є знакосталою, протилежного із  $W$  знака, то незбурений рух є нестійким.

Доведення цих теорем можна знайти у підручниках М. О. Кільчевського та О. П. Маркєєва<sup>1</sup>.

Розглянемо ряд прикладів.

**Приклад 3.** Дослідити прямим методом Ляпунова стійкість руху на базі рівнянь (1) із прикладу 2 збуреного руху

$$\frac{dx}{dt} = -y + \alpha x^3, \quad \frac{dy}{dt} = x + \alpha y^3. \quad (1)$$

Розв'язання. Дослідження цих рівнянь на базі першого наближення не дало змоги (див. приклад 2) зробити висновок щодо стійкості ру-

ху, бо корені характеристичного рівняння судо явні.

Застосуємо другий метод Ляпунова. Покладемо

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \quad (2)$$

Тоді, з урахуванням рівнянь (1), матимемо

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = x(-y + \alpha x^3) + \\ &+ y(x + \alpha y^3) = \alpha(x^4 + y^4). \end{aligned} \quad (3)$$

Отже, знак  $\dot{V}$  залежить від знака  $\alpha$ . Якщо  $\alpha < 0$ , то  $\dot{V}$  – від'ємно-визначена і, згідно з теоремою про стійкість руху, незбурений рух буде стійким. Якщо  $\alpha > 0$ , то  $\dot{V}$  – додатно-визначена і, згідно з теоремою про нестійкість руху, збурений рух є нестійким. При  $\alpha = 0$ , як уже було показано в прикладі 2, рух є стійким.

Таким чином, у цьому прикладі стійкість руху повністю визначається членами третього порядку мализни в правих частинах рівнянь збуреного руху.

Зазначимо, що отриманий висновок має силу для будь-якого непарного степеня членів у правих частинах  $\alpha x^m$ ,  $\alpha y^m$  ( $m = 1, 3, \dots, 2p + 1$ ). Якщо степені  $m$  парні ( $m > 0$ ), то похідна буде знакозмінною функцією і для всіх значень  $\alpha$  (крім  $\alpha = 0$ ) рух буде нестійким.

**Приклад 4.** Показати, що рух твердого тіла, яке обертається навколо нерухомого центра мас у в'язкому середовищі (рідині, газі) з опором, який пропорційний кутовій швидкості обертання, є завжди асимптотично стійким.

Розв'язання. За умовою задачі момент сил опору відносно осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  тіла буде

$$\vec{M}_c = -f(\omega)\vec{\omega} = -f(\omega)(\vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z). \quad (1)$$

Тоді рівняння руху твердого тіла за умови, що осі  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  є головними, буде

$$\begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z &= -f(\omega)\omega_x; \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z &= -f(\omega)\omega_y; \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y &= -f(\omega)\omega_z. \end{aligned} \quad (2)$$

<sup>1</sup>Кільчевский Н. А. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 544 с.

Маркєев А. П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 416 с.

Рівняння (2) має частинний розв'язок  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ , який відповідає стану рівноваги тіла.

Розглянемо стійкість цього окремого руху тіла по відношенню до змінних  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ .

Оскільки незбурений рух

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0, \quad (3)$$

то рівняння (2) є диференціальним рівнянням збуреного руху, бо  $\omega_x = 0 + \omega_x, \dots$

За функцію Ляпунова візьмемо кінетичну енергію тіла

$$V = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2). \quad (4)$$

Тоді для похідної  $\dot{V}$  отримаємо вираз

$$\frac{dV}{dt} = I_x \omega_x \frac{d\omega_x}{dt} + I_y \omega_y \frac{d\omega_y}{dt} + I_z \omega_z \frac{d\omega_z}{dt}. \quad (5)$$

Підставивши із (2) вирази для  $I_x \frac{d\omega_x}{dt}, I_y \frac{d\omega_y}{dt}$

та  $I_z \frac{d\omega_z}{dt}$  в (5), матимемо

$$\frac{dV}{dt} = -f(\omega) (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2). \quad (6)$$

Оскільки функція  $V$  – додатно-визначена, а  $\dot{V}$  – від'ємно-визначена, то, згідно з теоремою Ляпунова про стійкість руху, основний рух (рівновага) твердого тіла в середовищі з в'язким опором (1), є асимптотично стійким по відношенню до змінних  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ .

**Приклад 5.** У § 21.9 було показано в першому наближенні (за лінійними диференціальними рівняннями), що у випадку, коли корені характеристичного рівняння чисто уявні, то в першому наближенні обертання твердого тіла відносно головної осі інерції  $Oy$  буде стійким, коли відносно цієї осі момент інерції буде або найменшим, або найбільшим. Користуючись прямим методом Ляпунова, дослідити стійкість цього руху з урахуванням нелінійних членів рівняння.

**Розв'язання.** Якщо скористатись рівняннями (2) в прикладі 4 при  $f(\omega) = 0$ , то потрібно дослідити стійкість руху

$$\omega_y = \omega_{y0} = \text{const}, \quad \omega_x = 0, \quad \omega_z = 0. \quad (1)$$

Рух (1) відповідає обертанню тіла навколо нерухомої осі  $Oy$  з моментом інерції  $I_y$ . Як показано в § 21.8, динамічні рівняння Ейлера (рівняння (2) при  $f(\omega) = 0$  в прикладі 4) мають два перших інтегралів (21.79) і (21.81).

$$U_1 = 2T = I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2; \\ U_2 = (K_0^\omega)^2 = I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2. \quad (2)$$

Введемо збурення за формулами

$$\omega_y = \omega_{y0} + y, \quad \omega_x = x, \quad \omega_z = z. \quad (3)$$

Тоді рівняння збуреного руху матимуть вигляд

$$I_x \frac{dx}{dt} + (I_x - I_y)yz = -(I_x - I_y)\omega_{y0}z; \\ I_y \frac{dy}{dt} + (I_x - I_z)xz = 0; \quad (4)$$

$$I_x \frac{dz}{dt} + (I_y - I_x)yx = -(I_y - I_x)\omega_{y0}x.$$

Якщо підставити вираз (3) в інтеграл (2), то вони наберуть вигляду

$$U_1 = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 + 2I_y \omega_{y0} y + I_y \omega_{y0}^2; \\ U_2 = I_x^2 x^2 + I_y^2 y^2 + I_z^2 z^2 + 2I_y^2 \omega_{y0} y + I_y^2 \omega_{y0}^2. \quad (5)$$

Запишемо функцію Ляпунова у вигляді різниці

$$V = I_y U_1 - U_2. \quad (6)$$

Підставивши в (6) вирази (5), матимемо

$$V = I_x x^2 (I_y - I_x) + I_z z^2 (I_y - I_z). \quad (7)$$

Якщо  $I_y > I_x$  і  $I_y > I_z$ , тобто момент інерції відносно осі  $Oy$  є найбільшим, то  $V > 0$  і дорівнює нулю на осі  $Oy$ , тобто вона є знакосталою додатною функцією.

При  $I_y < I_x$  і  $I_y < I_z$ , тобто коли момент інерції відносно осі  $Oy$  є найменшим, то  $V < 0$  і до-

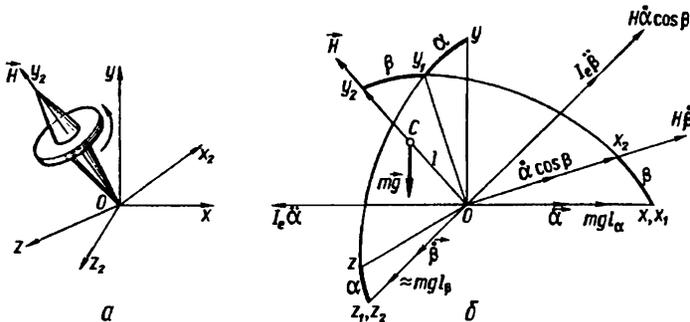


Рис. 30.6

рівнює нулю на осі  $Oy$ , тобто і в цьому випадку функція  $V$  є знакосталою від'ємною функцією.

Похідна за часом від цієї функції Ляпунова з урахуванням (4) буде

$$\dot{V} = 2xz(y + \omega_{y0}) \cdot [(I_y - I_x)(I_y - I_z) - (I_y - I_x)(I_y - I_z)] \equiv 0. \quad (8)$$

Покажемо, що функція Ляпунова є знакосталою лише при  $y = 0$ , а це означає, що вона знаковизначена і тоді задовольняються всі умови теореми про стійкість руху. Для цього достатньо показати, що при малих  $x, y, z$  система рівнянь

$$U_1 = 0 \text{ і } U_2 = 0 \quad (9)$$

має єдиний розв'язок  $x = y = z = 0$ , тобто початок координат збуреного руху.

Із системи (9) випливає, що тоді функція  $V$  Ляпунова

$$V = I_y U_1 - U_2 = I_x x^2 (I_y - I_x) + I_z z^2 (I_y - I_z) = 0. \quad (10)$$

Якщо  $I_y$  – найменший або найбільший момент інерції, то рівність (10) можлива, лише коли  $x = z = 0$ . Будь-яке значення  $y$ , в тому числі й  $y = 0$ , також є розв'язком цього рівняння.

Із (5) випливає, що

$$(y + \omega_{y0})^2 = 0 \Rightarrow y = -\omega_{y0}. \quad (11)$$

Тобто при достатньо малих  $x, y, z$  система (5) має єдиний розв'язок  $x = y = z = 0$ .

Отже, на основі теореми про стійкість руху незбурений рух тіла є стійким відносно головної осі інерції або з найбільшим чи з найменшим моментом інерції.

Якщо тіло обертається відносно осі з середнім моментом інерції, то таке стаціонарне обертання є нестійким, бо в цьому випадку функція Ляпунова (7) є знакозмінною, тобто не є знакосталою і тоді виконуються умови теорем Ляпунова про нестійкість руху.

**Приклад 6.** Відомо, що для фізичного маятника верхнє вертикальне положення рівноваги є нестійким. Показати, що коли замість фізичного маятника взяти гіроскопічний (див. розділ 22) то його параметри можна вибрати так, що рух буде стійким (рис. 30.6, а).

Розв'язання. Складемо рівняння руху гіромаятника. Із гіроскопом зв'яжемо систему координат  $Ox_1 y_2 z_2$ . Кінематику гіромаятника показано на рис. 30.6, б.

Складемо лінеаризовані рівняння руху гіромаятника за принципом Д'Аламбера. Тоді векторна сума гіроскопічних моментів, моментів активних сил і сил інерції обертального прискорення має дорівнювати нулю.

Спроєкуємо цю векторну суму на осі, відносно яких задані узагальнені координати – кути  $\alpha$  і  $\beta$ , тобто відносно осей  $Ox_1$  і  $Oz_2$ . Врахуємо, що кути малі, тоді  $\cos \alpha \approx 1$ ,  $\cos \beta \approx 1$ ,  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\sin \beta \approx \beta$ . Активною є сила ваги, що напрямлена по осі  $Oz$ . Напрямки всіх моментів показані на рис. 30.6, б.

Врахуємо також, що коли центральні моменти гіромаятника  $I_{Cx}$ ,  $I_{Cy}$  і  $I_{Cz}$ , то за теоремою Гюйгенса – Штейнера його моменти інерції відносно осей, які проходять через точку  $O$ , будуть

$$\begin{aligned} I_{x_2} &= I_{Cx_2} + ml^2, & I_{y_2} &= I_{Cy_2} = I, \\ I_{z_2} &= I_{Cz_2} + ml^2, & I_{Cx_2} &= I_{Cz_2} = I_C. \end{aligned} \quad (1)$$

Тоді рівняння руху гіромаятника матимуть вигляд

$$\begin{aligned} I_{x_2} \ddot{\beta} + H \dot{\alpha} - mgl\beta &= 0, \\ I_{z_2} \ddot{\alpha} - H \dot{\beta} - mgl\alpha &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $H = I\dot{\gamma}$ ,  $\dot{\gamma}$  – власна швидкість обертання ротора.

Введемо такі позначення:

$$\lambda = \frac{H}{\sqrt{I_{x_2} I_{z_2}}} = \frac{H}{I_C + ml^2} = \frac{I}{I_C + ml^2} \dot{\gamma} - \text{частота}$$

власних коливань гіроскопа;

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I_C + ml^2} - \text{частота власних коливань}$$

фізичного маятника.

Тоді, поділивши обидва рівняння на  $I_C + ml^2$ ,

запишемо їх у формі

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + \lambda \dot{\alpha} - \omega_0^2 \beta &= 0, \\ \ddot{\alpha} - \lambda \dot{\beta} - \omega_0^2 \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно, якщо гіроскоп не обертається, то  $\dot{\gamma} = 0 \Rightarrow \lambda = 0$  і рівняння по  $\beta$  і  $\alpha$  стають незалежними і рух по кожній із цих координат є нестійким.

Рівняння (3) допускають розв'язок  $\alpha = \beta = 0$  – це верхнє положення рівноваги гіромаятника.

Дослідимо його стійкість.

Оскільки рівняння (3) лінійні, то складемо їх характеристичне рівняння  $\left(p = \frac{d}{dt}\right)$ :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} p^2 - \omega_0^2 & \lambda p \\ -\lambda p & p^2 - \omega_0^2 \end{vmatrix} &= \\ = p^4 + (\lambda^2 - 2\omega_0^2) p^2 + \omega_0^4 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Для стійкості гіромаятника повинна виконуватись умова

$$\lambda^2 - 2\omega_0^2 > 0 \Rightarrow \lambda^2 > 2\omega_0^2 \text{ або } \lambda > \sqrt{2}\omega_0. \quad (5)$$

Технічно виконати цю умову досить просто.

Дійсно, підставивши значення  $\lambda$  і  $\omega_0$ ,

матимемо

$$\frac{I}{I_C + ml^2} \dot{\gamma} > \sqrt{I_C + ml^2}. \quad (6)$$

Зробимо чисельну оцінку.

Нехай гіроскоп є циліндром радіусом  $r$  і

$$r = l = 0,1 \text{ м. Тоді } I_C = \frac{1}{2} I = \frac{1}{4} mr^2 \text{ і}$$

$$\frac{I}{I_C + ml^2} = \frac{mr^2}{\frac{mr^2}{4} + mr^2} = \frac{2}{5} = 0,4;$$

$$\sqrt{I_C + ml^2} = \sqrt{\frac{2mgr}{5}} = \sqrt{\frac{8g}{5}} r \approx \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

Отже, матимемо

$$0,4\dot{\gamma} > \sqrt{0,4} \cdot 20 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\dot{\gamma} > 32 \frac{\text{рад}}{\text{с}} \approx 300 \frac{\text{об}}{\text{хв}}.$$

Забезпечити таку швидкість дуже легко, бо в сучасних гіроскопах  $\dot{\gamma}$  сягає  $20\,000 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$ .

З цього прикладу випливає, що за допомогою гіроскопічних сил можна нестійкий рух перетворити на стійкий.

**Приклад 7.** Показати, що в гіромаятнику з верхньою маятниковістю сили в'язкого тертя, які пропорційні кутовій швидкості в першому степені, спричиняють його нестійкість.

Розв'язання. При складанні рівняння руху гіромаятника із в'язким тертям врахуємо, що сили тертя завжди напрямлені проти кутових швидкостей  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ , тому рівняння руху гіромаятника (3) у прикладі 6 з урахуванням в'язкого тертя за умови, що в силу симетрії коефіцієнти тертя по обох координатах будуть однакові, можна записати у формі

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + h\dot{\beta} - \omega_0^2 \beta + \lambda \dot{\alpha} &= 0, \\ -\lambda \dot{\beta} + \ddot{\alpha} + h\dot{\alpha} - \omega_0^2 \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Звідси характеристичне рівняння буде

$$\begin{vmatrix} p^2 + hp - \omega_0^2 & \lambda p \\ -\lambda p & p^2 + hp - \omega_0^2 \end{vmatrix} = p^4 + 2hp^3 + \\ + (\lambda^2 - 2\omega_0^2 + h^2)p^2 - 2h\omega_0^2 p + \omega_0^4 = \\ = a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0. \quad (2)$$

Очевидно, що оскільки

$$a_1 = -2h\omega_0^2 < 0, \text{ бо } h > 0 \text{ і } \omega_0^2 > 0, \quad (3)$$

то в'язке тертя робить рух гіромаятника з верхньою маятниковістю нестійким.

Зауважимо, що для гіромаятника з нижньою маятниковістю в рівняннях (1) змінюється знак перед позиційними членами, пропорційними  $\alpha$  і  $\beta$ . Замість  $(-\omega_0^2\alpha, -\omega_0^2\beta)$  буде відповідно  $(+\omega_0^2\alpha, +\omega_0^2\beta)$ , бо змінюється  $l$  на  $(-l)$ .

За цих умов характеристичне рівняння набере вигляду

$$\Delta = p^4 + 2hp^3 + (\lambda^2 + 2\omega_0^2 + h^2)p^2 + \\ + 2h\omega_0^2 p + \omega_0^4 = 0. \quad (4)$$

Не важко переконатися, що гіромаятник із нижньою маятниковістю при наявності в'язкого тертя буде асимптотично стійким.

Додамо, що сили сухого тертя теж спричинюють нестійкість гіромаятника з верхньою маятниковістю. До речі, нестійкість гіромаятника з верхньою маятниковістю, зумовлена дією тертя, є головною перешкодою того, що не знайшли застосування проекти безпосередніх гіроскопічних стабілізаторів качки кораблів та двоколісних вагонів (екіпажів), які пропонувались на початку ХХ ст.

### § 30.4. Вільні (власні) коливання механічної системи з одним ступенем вільності

*Вільними, або власними, коливаннями механічної системи називають її коливання під дією консервативних сил, зумовлені початко-*

*вим відхиленням точки чи точок системи від положення рівноваги або наданням їм початкової швидкості, наприклад за допомогою удару.*

Для системи з одним ступенем вільності рівняння власних коливань мають вигляд

$$a\ddot{q} + c\dot{q} = Q, \quad (30.42)$$

де  $a$  – коефіцієнт інерції;  $c$  – узагальнений коефіцієнт жорсткості. Для того щоб рівняння (30.42) мало нетривіальний розв'язок ( $q \neq 0$ ), треба задати ненульові початкові умови при  $t = 0$ :

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0. \quad (30.43)$$

Розділимо всі члени в (30.42) на  $a$  і перепишемо його у формі

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (30.44)$$

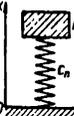
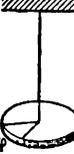
де

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a}, \quad (30.45)$$

$\omega_0$  – колова частота коливань.

Нагадаємо, що рівняння вигляду (30.42), (30.44) вже неодноразово розглядали при вивченні коливань математичного (§ 16.8), фізичного маятників, крутильних коливань тіла на струні (§ 21.5), при дослідженні стійкості обертання твердого тіла навколо головних осей інерції (§ 21.9). Ці приклади показують, що в тому разі, коли узагальнена координата  $q$  є лінійним переміщенням, коефіцієнт  $a$  дорівнює масі матеріальної точки чи тіла, а узагальнений коефіцієнт жорсткості  $c$  – лінійній жорсткості пружини або коефіцієнту пропорційності відновлювальної сили.

Якщо  $q$  – кут, то коефіцієнт інерції  $a$  дорівнює моменту інерції, а узагальнений коефіцієнт жорсткості  $c$  – жорсткості на кручення пружини, торсіона, струни або коефіцієнту пропорційності відновлювального моменту (наприклад,  $c = mgl$  для математичного або фізичного маятника).

Механічна система	Диференціальні рівняння руху малих коливань	Частота власних коливань	Період власних коливань
Математичний маятник 	$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0,$ $a = ml^2,$ $c = mgl$	$\omega_M = \sqrt{\frac{g}{l}}$	$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
Фізичний маятник 	$I\ddot{\varphi} + mgl_C\varphi = 0,$ $a = I,$ $c = mgl_C$	$\omega_\Phi = \sqrt{\frac{mgl_C}{I}}$	$T_\Phi = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl_C}}$
Гіроскопічний маятник 	$\begin{cases} I\dot{\varphi} = H, \\ I\dot{\alpha}\dot{\beta} - mgl_C\beta = 0, \\ I\dot{\beta}\dot{\alpha} + mgl_C\alpha = 0, \end{cases}$ $a = (I\dot{\varphi})^2, \quad c = (mgl_C)^2, \quad \dot{\varphi} = \text{const},$ $\alpha, \beta \text{ — кути повороту гіроскопа відносно зовнішньої і внутрішньої рамок}$	$\omega_r = \frac{mgl_C}{H}$	$T_r = 2\pi\frac{H}{mgl_C}$
Тіло на пружині 	$m\ddot{x} + c_n x = 0,$ $a = m, \quad c = c_n$	$\omega_n = \sqrt{\frac{c_n}{m}}$	$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c_n}}$
Тіло на струні або торсіоні 	$I\ddot{\varphi} + c_{kp}\varphi = 0,$ $a = I, \quad c = c_{kp}$	$\omega_{kp} = \sqrt{\frac{c_{kp}}{I}}$	$T_{kp} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c_{kp}}}$

Диференціальні рівняння руху, формули для частоти власних коливань математичного  $\omega_M$ , фізичного  $\omega_\Phi$ , гіроскопічного  $\omega_r$  маятників (див. § 22.4), тіла на пружині жорст-

кості  $c_n$ , що здійснює поступальні коливання  $\omega_n$ , і тіла, яке підвішене на струні або торсіоні та здійснює крутильні коливання  $\omega_{kp}$ , наведені в табл. 30.1.

Оскільки корені характеристичного рівняння, що відповідають рівнянню (30.44), є уявними ( $p = \pm i\omega_0$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ), то загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (30.44) запишемо в рівноцінних формулах з урахуванням (30.18), (30.22) і (30.23)

$$q = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t} = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t = A \cos(\omega_0 t - \alpha), \quad (30.46)$$

де  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $A$ ,  $\alpha$  – сталі інтегрування, що зв'язані такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1 + A_2; \quad C_2 = i(A_1 - A_2); \\ A &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{C_2}{C_1}. \end{aligned} \quad (30.47)$$

Вираз (30.46) показує, що коефіцієнт  $A$  визначає найбільше відхилення точки від положення статичної рівноваги при коливальному русі й називається *амплітудою коливань*. Кут  $\psi(t) = (\omega_0 t - \alpha)$  називається *фазою коливань*, а  $\alpha$  – *початковою фазою*, тому що  $\alpha = \psi(0)$ . *Періодом коливань*  $T_k$  називають проміжок часу між двома послідовними проходженнями точки через положення статичної рівноваги в певному фіксованому напрямку. Оскільки коливання описуються косинусоїдою, а найменший період косинуса  $2\pi$ , то

$$2\pi = \omega_0 T_k; \quad T_k = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (30.48)$$

Як видно з формул (30.48) і (30.45), колова частота власних коливань та їх період не залежать для лінійної системи від початкових умов і амплітуди коливань. Визначимо амплітуду  $A$  коливань за заданих початкових умов (30.43). На основі формул (30.46) одержимо

$$\begin{aligned} q &= C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \\ \dot{q} &= \omega_0 (-C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t). \end{aligned}$$

Підставляючи в ці вирази початкові умови (30.43) при  $t = 0$ , дістанемо

$$C_1 = q_0, \quad \omega_0 C_2 = \dot{q}_0.$$

З урахуванням значень  $C_1$  і  $C_2$  рівняння коливань точки подамо у вигляді

$$\begin{aligned} q &= q_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t = \\ &= \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{\omega_0^2}} \cos(\omega_0 t - \alpha), \quad (30.49) \\ \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{\dot{q}_0}{\omega_0 q_0}. \end{aligned}$$

Із (30.49) видно, що коли одночасно  $q_0 = 0$  і  $\dot{q}_0 = 0$ , то  $q = 0$ , тобто вільні коливання не виникають.

На закінчення покажемо, як вивести формули для амплітуди і частоти коливань, не складаючи диференціальних рівнянь руху.

Розглядувані коливання є незгасаючими, оскільки вони зумовлені дією консервативних сил, а тому має місце закон збереження енергії, яку надаємо точці початковими умовами. У разі відхилення точки від положення рівноваги на величину, що дорівнює амплітуді, вся енергія поля перетворюється в потенціальну  $\Pi_{\max}$ , а в разі проходження точкою положення рівноваги – в кінетичну  $T_{\max}$ . При цьому виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} T + \Pi &= T_0 + \Pi_0, \\ T_{\max} &= T_0 + \Pi_0 = \Pi_{\max}. \end{aligned} \quad (30.50)$$

Оскільки

$$T_0 + \Pi_0 = \frac{1}{2} a \dot{q}_0^2 + \frac{1}{2} c q_0^2 \quad (30.51)$$

і з урахуванням (30.46)

$$T_{\max} = \frac{a}{2} (A\omega_0)^2, \quad \Pi_{\max} = \frac{c}{2} A^2, \quad (30.52)$$

то, підставляючи (30.52), (30.51) в (30.50) і розв'язуючи систему одержаних двох рівнянь з невідомими  $A^2$  і  $\omega_0^2$ , дістанемо

$$A^2 = q_0^2 + \dot{q}_0^2 \frac{a}{c}; \quad \omega_0^2 = \frac{c}{a}. \quad (30.53)$$

Розглянутий енергетичний метод визначення амплітуди і частоти власних коливань часто застосовують при дослідженні вільних коливань консервативних систем.

### § 30.5. Вплив сили опору, що лінійно залежить від швидкості, на коливання механічної системи з одним ступенем вільності

Розглянемо характер коливань механічної системи з одним ступенем вільності, якщо під дією початкових умов збудені її коливання, а на неї діє сила опору, пропорційна першому ступеню швидкості. Таку силу опору називають *силою в'язкого тертя*. При цьому, як показано в § 27.8, енергія системи, яку вона набула в початковий момент часу, зменшуватиметься (розсіюватиметься), тому, природно, амплітуда коливань теж зменшуватиметься і з часом коливання згаснуть. Диференціальні рівняння руху системи в цьому разі легко одержати з (30.16)

$$a\ddot{q} + \beta\dot{q} + cq = 0, \quad (30.54)$$

де при  $t=0$   $q(0) = q_0$ ,  $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ . Розділивши всі члени рівняння (30.54) на коефіцієнт  $a$ , дістанемо

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (30.55)$$

де  $\omega_0^2 = \frac{c}{a}$ ,  $h = \frac{\beta}{2a}$  — відносний коефіцієнт демпфірування коливань, що має розмірність колової частоти  $\omega_0$  коливань

$$\left[ h \right] = \frac{\text{рад}}{c}.$$

Характеристичне рівняння для (30.55) має вигляд

$$p^2 + 2hp + \omega_0^2 = 0,$$

звідки

$$p_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}. \quad (30.56)$$

Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (30.55) запишемо у вигляді

$$q = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (30.57)$$

Із (30.56) видно, що коли  $h > \omega_0$ , то обидва корені характеристичного рівняння дійсні й різні, тому коливального руху не буде, оскільки координата  $q$  змінюється по експоненті. При  $h = \omega_0$   $p_1 = p_2 = p$  і розв'язок рівняння (30.55) також буде аперіодичним:

$$q = (C_1 + C_2 t) e^{-ht}. \quad (30.58)$$

Для виникнення коливального руху має виконуватись умова  $h < \omega_0$ . Оскільки в цьому випадку корені характеристичного рівняння комплексні, то, згідно з формулою Ейлера (30.22), у розв'язок (30.57) увійдуть періодичні функції.

Найважливішим є випадок коливального руху, тобто коли  $h < \omega_0$ . Позначивши  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$ , запишемо розв'язок (30.57) у вигляді

$$\begin{aligned} q &= e^{-ht} \left( A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_1 t} \right) = \\ &= e^{-ht} \left( C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t \right) = \\ &= A e^{-ht} \cos(\omega_1 t - \alpha). \end{aligned} \quad (30.59)$$

Тоді

$$\dot{q} = e^{-ht} \omega_1 (-C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t) - hq. \quad (30.60)$$

Підставивши у вирази (30.59) і (30.60) початкові умови, після елементарних перетворень одержимо

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{1}{\omega_1} (\dot{q}_0 + hq_0). \quad (30.61)$$

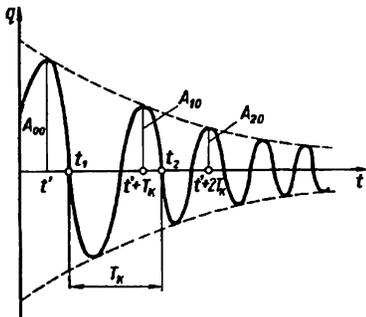


Рис. 30.7

Звідси, скориставшись (30.47), отримаємо

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{1}{\omega_1^2} (\dot{q}_0 + hq_0)^2}; \quad (30.62)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{q}_0 + hq_0}{\omega_1 q_0}.$$

Залежність  $q(t)$  показана на рис. 30.7.

Рух точки є коливальним, але не періодичним, оскільки  $q(t) \neq q(t + T_k)$ . Тому умовно введемо поняття періоду  $T_k$  такого руху.

Періодом  $T_k$  згасаючих коливань (рис. 30.7) називають проміжок часу  $[t_1, t_2]$  між двома послідовними проходженнями точки (тіла) через положення статичної рівноваги в певному фіксованому напрямку.

Із рівняння (30.59) випливає, що у положеннях статичної рівноваги ( $t_1, t_2, \dots, t_s$  на рис. 30.7)  $\cos(\omega_1 t - \alpha) = 0$ . Оскільки  $\omega_1 T_k = 2\pi$ , то

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - h^2 / \omega_0^2}} \approx$$

$$\approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{\omega_0^2} + \dots \right). \quad (30.63)$$

Звідси видно, що період згасаючих коливань більший за період незгасаючих коли-

вань, тобто *опір середовища, що пропорційний швидкості в першому степені, збільшує період коливань.*

Дослідимо максимальні відхилення  $A_{00}, A_{10}, A_{20}$ , що відповідають моментам часу  $t', t' + T_k, t' + 2T_k, \dots$  на рис. 30.7. Оскільки  $\omega_1 T_k = 2\pi$ , то  $\cos[\omega_1(t' + sT_k) - \alpha] = \cos(\omega_1 t' - \alpha)$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$ , отже, на основі (30.59) одержимо

$$\frac{A_{10}}{A_{00}} = \frac{A_{20}}{A_{10}} = \dots = \frac{A_{s0}}{A_{s-1,0}} = e^{-hT_k} = \eta. \quad (30.64)$$

Таким чином, *амплітуда згасаючих коливань у разі в'язкого тертя спадає за геометричною прогресією.* Величину  $\eta$  (знаменник геометричної прогресії) називають *декрементом згасання* (або *фактором згасання*), а модуль натурального логарифма цієї величини

$$|\ln \eta| = hT_k \quad (30.65)$$

— *логарифмічним декрементом згасаючих коливань.*

Поняття про декремент згасаючих коливань використовують при експериментальному визначенні коефіцієнта опору середовища.

На завершення зазначимо, що при силі опору у вигляді тертя ковзання або "сухого" тертя амплітуди згасаючих коливань спадають за арифметичною прогресією.

### § 30.6. Змушені коливання системи з одним ступенем вільності без урахування сил опору

Змушені коливання відбуваються за умови, що на матеріальну точку, крім відновлювальної сили, діє збурювальна сила  $Q$ , що змінюється за гармонічним законом, тобто  $Q = H_0 \sin \omega t$ , де  $H_0$  — максимальне значення збурювальної сили;  $\omega$  — колова

частота збурювальної сили. На основі (30.13), (30.14) диференціальне рівняння руху такої системи, що має один степінь вільності, набуде вигляду

$$a\ddot{q} + cq = H_0 \sin \omega t,$$

або після ділення на  $a$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = H \sin \omega t, \quad (30.66)$$

де

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a}; \quad H = \frac{H_0}{a}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (30.66) подамо у вигляді

$$q = q_1 + q_2, \quad (30.67)$$

де  $q_1$  – загальний розв'язок однорідного рівняння;  $q_2$  – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок однорідного рівняння шукаємо у формі

$$q_1 = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t. \quad (30.68)$$

При визначенні частинного розв'язку розглянемо три випадки:

$$\omega_0 \neq \omega; \quad \omega_0 \approx \omega; \quad \omega_0 = \omega.$$

1. Частота вільних коливань не дорівнює частоті збурювальної сили ( $\omega_0 \neq \omega$ ). У цьому випадку частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$q_2 = A^* \sin \omega t. \quad (30.69)$$

Підставляючи вираз (30.69) у (30.66), одержимо рівняння для визначення  $A^*$

$$A^* (\omega_0^2 - \omega^2) = H. \quad (30.70)$$

Звідси

$$A^* = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (30.71)$$

Тут очевидна необхідність припущення  $\omega_0 \neq \omega$ , оскільки при  $\omega_0 = \omega$  рівність (30.70) втрачає зміст. Підставляючи (30.71) в (30.69), а (30.68) і (30.69) у (30.67), шуканий розв'язок набуде вигляду

$$q = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (30.72)$$

Для визначення сталих інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  покладемо при  $t = 0$   $q(0) = q_0$ ,  $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ . Здиференціювавши (30.72), отримаємо

$$\dot{q} = \omega_0 (-C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t) + \frac{H\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (30.73)$$

Підставляючи в рівності (30.72) і (30.73) початкові умови, визначимо

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \frac{1}{\omega_0} \left[ \dot{q}_0 - \frac{H\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right].$$

Враховуючи ці вирази, остаточно одержимо

$$q = q_0 \cos \omega_0 t + \left( \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} - \frac{\omega}{\omega_0} \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \times \sin \omega_0 t + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (30.74)$$

Із (30.74) очевидно, що *коливальний рух розглядуваної системи з одним ступенем вільності складається з вільних коливань з частотою  $\omega_0$  і змущених коливань з частотою  $\omega$  збурювальної сили*. Причому на відміну від вільних коливань (§ 30.4), що описуються однорідними диференціальними рівняннями, вільні коливання за наявності збурювальної періодичної сили збуджуються також за нульових початкових умов ( $q_0 = 0, \dot{q}_0 = 0$ ).

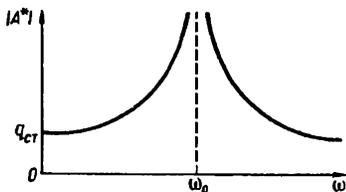


Рис. 30.8

Як видно із (30.74), при  $\omega \rightarrow \omega_0$  амплітуда  $A^*$  змущених коливань (30.71) необмежено зростає (рис. 30.8).

2. Розглянемо випадок, коли  $\omega_0 \approx \omega$ , якщо при  $t=0$   $q_0=0$ ,  $\dot{q}_0=0$ . Тоді з виразу (30.74), поклавши  $\omega/\omega_0 \approx 1$ , але  $\omega_0^2 - \omega^2 \neq 0$ , і  $\omega_0 + \omega \approx 2\omega$ , отримуємо

$$\begin{aligned} q_2 &\approx \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} (\sin \omega t - \sin \omega_0 t) \approx \\ &\approx 2 \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t \cdot \cos \omega t = \\ &= A^* \cos \omega t. \end{aligned} \quad (30.75)$$

Графік цієї залежності наведено на рис. 30.9, а. Причому коливальний рух відбувається з частотою збурювальної сили, амплітуда якої повільно змінюється з частотою,

що відповідає половині різниці частот  $\omega_0$  та  $\omega$ . Такий рух називають *биттям*.

3. Покажемо, що при  $\omega_0 = \omega$  якісно змінюється характер коливань. У цьому випадку виникає *резонанс*, який настає тоді, коли частота збурювальної сили дорівнює частоті вільних коливань.

Коливання розглядуваної системи при резонансі можна дослідити двома способами. Наприклад, частинний розв'язок шукають при  $\omega_0 = \omega$  не у вигляді  $q_2 = A^* \sin \omega t$ , а у формі

$$q_2 = t A^* \sin(\omega t + \sigma), \quad (30.76)$$

де  $\sigma$  — стала величина.

Підставляючи цей вираз у вихідне рівняння (30.66), добирають коефіцієнт  $A^*$  так, щоб функція  $q_2$  була розв'язком цього рівняння. Подальші обчислення виконують за схемою, яку вже неодноразово застосовували.

Зупинимося на визначенні частинного розв'язку в разі резонансу іншим способом.

Розглядаючи рівність (30.74), легко переконатися, що при  $\omega_0 = \omega$  два останніх члени в правій частині дають невизначеність типу  $0:0$ . Тому дослідимо резонанс як граничний випадок змущених коливань при  $\omega \rightarrow \omega_0$ . Не порушуючи загальності дослі-

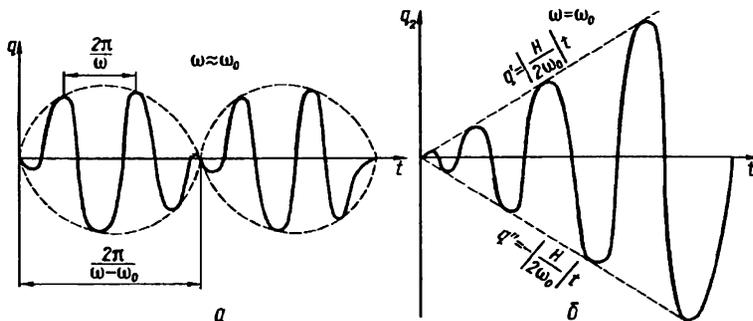


Рис. 30.9

дження, припустимо, що  $q_0 = 0$ ,  $\dot{q}_0 = 0$ . Оскільки в (30.74) члени з такими коефіцієнтами не залежать від різниці  $\omega - \omega_0$ , значену невизначеність розкриємо за правилом Лопітала

$$\begin{aligned} q_2 &= H \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2} = \\ &= H \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\frac{d}{d\omega} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)}{\frac{d}{d\omega} (\omega_0^2 - \omega^2)} = \\ &= H \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{t \cos \omega t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t}{-2\omega} = \\ &= -\frac{Ht}{2\omega_0} \cos \omega_0 t + \frac{H}{2\omega_0^2} \sin \omega_0 t. \quad (30.77) \end{aligned}$$

Отже, при резонансі ( $\omega_0 = \omega$ ) загальний розв'язок рівняння (30.66) за нульових початкових умов має вигляд

$$q = \frac{H}{2\omega_0^2} \sin \omega_0 t - \frac{H}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t. \quad (30.78)$$

У разі ненульових початкових умов у (30.78) треба дописати такі самі два перших члени, як і в (30.74).

Безпосередньо перевіркою можна переконатися, що останній член в (30.78) – це частинний розв'язок рівняння. Порівнюючи (30.74) і (30.78), бачимо, що при резонансі в частинному розв'язку початкова фаза  $\sigma = -\pi/2$ . Тому говорять, що *при резонансі відбувається відставання за фазою на  $\pi/2$  змушених коливань порівняно з фазою коливань збурювальної сили*.

В останній доданок правої частини рівняння (30.78) входить час поза знаком тригонометричної функції. Такого роду вирази називають *секлярними* або *віковими членами*.

Ця назва пов'язана з деякими задачами неабсолютної механіки.

Як неважко помітити, амплітуда змушених коливань  $q_2$ , що визначаються членом

$$-\frac{H}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t,$$

збільшується прямо пропорційно часу і при  $t \rightarrow \infty$  необмежено зростає. Закон змінення амплітуди показано на рис. 30.9, б, де штриховими лініями зображено

$$\text{графіки функцій } q' = \left| \frac{H}{2\omega_0} \right| t \text{ і } q'' = - \left| \frac{H}{2\omega_0} \right| t$$

(амплітудні криві). Насправді через різного роду тертя в конструкціях і нелінійні фактори амплітуда змушених коливань при резонансі не зростає пропорційно часу, але все-таки може досягати недопустимо великих значень.

У зв'язку з важливістю цих питань розглянемо вплив сил опору середовища на змушені коливання.

### § 30.7. Змушені коливання механічної системи з одним ступенем вільності з урахуванням сили опору середовища, що пропорційна першому ступеню швидкості

На основі рівностей (30.13) і (30.14) диференціальне рівняння руху механічної системи з одним ступенем вільності за наявності періодичної збурювальної сили і сили опору середовища має вигляд

$$a\ddot{q} + \beta\dot{q} + cq = H_0 \cos \omega t. \quad (30.79)$$

Розділивши всі члени рівняння (30.79) на коефіцієнт  $a$ , запишемо його так:

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_0^2 q = H \cos \omega t, \quad (30.80)$$

де

$$2h = \frac{\beta}{a}, \quad \omega_0^2 = \frac{c}{a}, \quad H = \frac{H_0}{a}.$$

Рівняння (30.80) будемо розв'язувати за таких початкових умов:  $t = 0$ ,  $q(0) = q_0$ ,  $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ . Як і в попередньому параграфі,

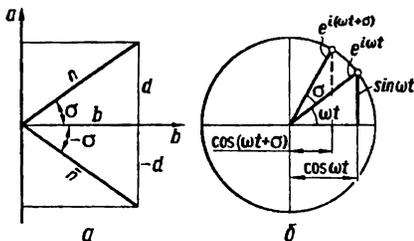


Рис. 30.10

загальний розв'язок рівняння (30.80) подамо у вигляді суми загального розв'язку  $q_1$  однорідного рівняння і частинного розв'язку  $q_2$ :

$$q = q_1 + q_2.$$

Характеристичне рівняння (30.80) і його корені вже були детально проаналізовані в § 30.5, тому на побудові загального розв'язку  $q_1$  однорідного рівняння зупинятися не будемо. Перейдемо одразу до пошуку частинного розв'язку рівняння (30.80), який будемо шукати у вигляді

$$q_2 = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t = B \cos(\omega t + \sigma), \quad (30.81)$$

де  $B_1, B_2, B, \sigma$  – сталі, що зв'язані між собою співвідношеннями  $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$ ,  $\operatorname{tg} \sigma = -\frac{B_2}{B_1}$ . Потім треба, як і в попередньому

випадку (§ 30.6), підставити (30.81) в рівняння (30.80) і, прирівнявши коефіцієнти при  $\cos \omega t$  і  $\sin \omega t$  зліва і справа скласти два рівняння для визначення двох невідомих сталих –  $B_1$  і  $B_2$  (або  $B$  і  $\sigma$ ).

Пропонуємо виконати ці перетворення самостійно, а тут побудуємо розв'язання так званим *методом комплексних амплітуд*.

Праву частину рівняння (30.80) запишемо так:

$$H \cos \omega t = \frac{H}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (30.82)$$

і знайдемо послідовно реакцію системи  $q_2^{(1)}$  на  $\frac{H}{2} e^{i\omega t}$  і  $q_2^{(2)}$  на  $\frac{H}{2} e^{-i\omega t}$ . Розв'язок  $q_2^{(1)}$  будемо шукати у формі

$$q_2^{(1)} = A_1 e^{i\omega t}. \quad (30.83)$$

Оскільки  $\dot{q}_2^{(1)} = A_1 i\omega e^{i\omega t}$ ,  $\ddot{q}_2^{(1)} = A_1 (i\omega)^2 e^{i\omega t}$ , то, підставивши в (30.80) шуканий розв'язок (30.83), з урахуванням (30.82), матимемо

$$A_1 = \frac{H/2}{(i\omega)^2 + 2hi\omega + \omega_0^2} = \frac{H/2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2hi\omega}. \quad (30.84)$$

Для подальших перетворень нагадаємо деякі співвідношення між комплексними числами. Якщо  $n$  і  $\bar{n}$  – комплексно-спржені числа ( $n = b + id$ ;  $\bar{n} = b - id$ ), то виконуються такі співвідношення (рис. 30.10):

$$\begin{aligned} n\bar{n} &= (b + id)(b - id) = b^2 + d^2, \\ n &= b + id = \sqrt{b^2 + d^2} e^{i\sigma} = \\ &= \sqrt{b^2 + d^2} (\cos \sigma + i \sin \sigma), \\ \operatorname{tg} \sigma &= \frac{d}{b}, \\ \bar{n} &= b - id = \sqrt{b^2 + d^2} e^{-i\sigma}. \end{aligned} \quad (30.85)$$

Геометричну інтерпретацію комплексних чисел показано на рис. 30.10, а, формул Ейлера – на рис. 30.10, б. З урахуванням наведених формул (30.85) вираз (30.84) перетворимо до вигляду

$$A_1 = A_0 e^{i\sigma}, \quad (30.86)$$

де

$$A_0 = \frac{H}{2} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2}}; \\ \sigma = \operatorname{arctg} \frac{-2h\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Аналогічно знайдемо розв'язок рівняння (30.80), коли в його правій частині стоїть

$$\text{вираз } \frac{H}{2} e^{-i\omega t};$$

$$q_2^{(2)} = A_2 e^{-i\omega t} = A_0 e^{-i\sigma} e^{-i\omega t}. \quad (30.87)$$

Складаючи  $q_2^{(1)}$  і  $q_2^{(2)}$ , остаточно дістаємо

$$\begin{aligned} q_2 &= q_2^{(1)} + q_2^{(2)} = A_0 e^{i\omega t} e^{i\sigma} + A_0 e^{-i\omega t} e^{-i\sigma} = \\ &= A_0 \left( e^{i(\omega t + \sigma)} + e^{-i(\omega t + \sigma)} \right) = \\ &= 2A_0 \cos(\omega t + \sigma), \end{aligned} \quad (30.88)$$

де

$$\begin{aligned} B &= 2A_0 = \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}, \quad (30.89) \\ \text{tg } \sigma &= -\frac{2h\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \end{aligned}$$

Розв'язок рівняння (30.80) остаточно запишемо так

$$\begin{aligned} q &= q_1 + q_2 = e^{-ht} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t) + \\ &+ \frac{H \cos(\omega t + \sigma)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}, \end{aligned} \quad (30.90)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – сталі, що визначаються з початкових умов;  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$  – частота згасаючих коливань.

Отже, за наявності в'язкого тертя коливання розглядуваної системи складаються із згасаючих коливань, що відбуваються з частотою  $\omega_1$ , і змушених коливань з частотою збурювальної сили. Причому згасаючі коливання з частотою  $\omega_1$  збурюються також за нульових початкових умов (при  $t=0$ ,  $q_0=0$ ,  $\dot{q}_0=0$ ).

Оскільки амплітуда згасаючих коливань через скінченний проміжок часу стає малою порівняно з амплітудою змушених, то прак-

тичний інтерес становить розгляд змушених коливань.

Вираз (30.89) для амплітуди  $B$  і зсуву фази  $\sigma$  змушених коливань запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} B &= \frac{H}{\omega_0^2 \sqrt{(1-z^2)^2 + 4z^2\nu^2}}, \quad (30.91) \\ \text{tg } \sigma &= -\frac{2z\nu}{1-z^2}, \end{aligned}$$

де  $z = \frac{\omega}{\omega_0}$  – безрозмірна частота коливань;

$\nu = \frac{h}{\omega_0}$  – безрозмірний коефіцієнт демпфів-

рування. Якщо  $h \ll \omega_0$ , то  $\nu \approx \frac{|\ln \eta|}{2\pi}$  (див. (30.65)).

Побудуємо графік функцій  $B(\omega)$  і  $\sigma(\omega)$ ,

обчисливши їх при трьох значеннях  $z = \frac{\omega}{\omega_0}$ :

$z = 0, 1, \infty$ . При цих значеннях  $B(\omega)$  і  $\sigma(\omega)$

відповідно дорівнюють:  $B_1(0) = \frac{H}{2}$ ;  $B_2(\omega_0) =$

$$= \frac{B_1(0)}{2\nu}; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} B(\omega) = 0; \quad \sigma_1(0) = 0; \quad \sigma_2(\omega_0) =$$

$$= -\frac{\pi}{2}; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sigma = -\pi. \quad \text{Графіки функцій } B(\omega) \text{ і}$$

$\sigma(\omega)$ , які називають відповідно *амплітудно-частотною* і *фазово-частотною характеристиками*, показані на рис. 30.11.

Розглянемо детальніше залежність резонансних значень амплітуди від параметрів  $z$  і  $\nu$ . З цієї метою дослідимо на екстремум функцію

$$f(z) = (1-z^2)^2 + 4z^2\nu^2. \quad (30.92)$$

Визначимо похідну  $\frac{\partial f(z)}{\partial z}$  і прирівняємо її до нуля:

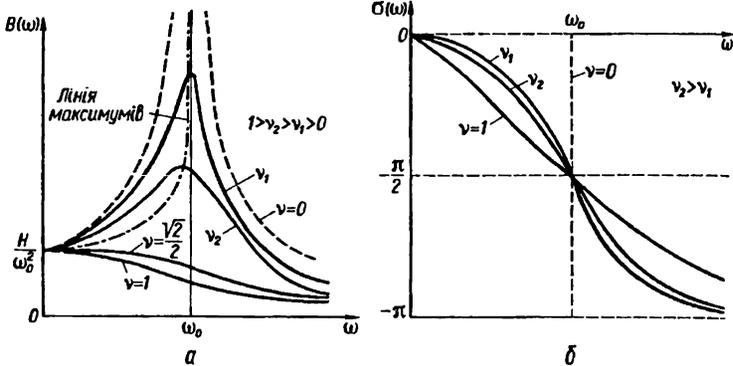


Рис. 30.11

$$\frac{df(z)}{dz} = 4z(-1+z^2+2\nu^2) = 0. \quad (30.93)$$

Звідси  $z_1 = 0$ ;  $z_2 = \sqrt{1-2\nu^2}$ .

Визначимо другу похідну  $\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = 4(3z^2 - 1 + 2\nu^2)$ . У точках  $z_1 = 0$  і  $z_2^2 = 1 - 2\nu^2$  друга похідна  $\left(\frac{d^2 f(z)}{dz^2}\right)_{z_1} = 4(-1 + 2\nu^2) < 0$ ,  $\left(\frac{d^2 f(z)}{dz^2}\right)_{z_2} = 8(1 - 2\nu^2) > 0$

при  $\nu < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Тобто при  $\nu < \frac{\sqrt{2}}{2}$  функція  $f(z)$  має в точці  $z_1 = 0$  максимум, а в точці  $z_2 = \sqrt{1-2\nu^2}$  — мінімум.

Отже, амплітуда коливань  $B = \frac{B_1(0)}{\sqrt{f(z)}}$

при  $\nu < \frac{\sqrt{2}}{2}$  у точці  $z_1 = 0$  має мінімум, а в точці  $z_2$  — максимум.

Якщо  $\nu = \frac{h}{\omega_0} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , то амплітуда коливань  $B$  у точці  $z_1 = 0$  має максимум, а при

резонансі  $\omega_0 = \omega$ , тоді підсилення коливань не буде. На рис. 30.11, а, б штриховою лінією показані амплітудно-і фазово-частотні характеристики змущених коливань за умов, що розсіювання енергії немає, тобто при  $h=0$ . На цьому рисунку штрих-пунктирною лінією показано вплив величини демпфування ( $\nu$ ) на зсув максимуму амплітуди вліво від лінії  $\omega = \omega_0 (z = 1)$ .

Із рис. 30.11, б випливає, що незалежно від значення коефіцієнта демпфування  $\nu$  при резонансі  $\omega = \omega_0 (z = 1)$  завжди зсув

фаз  $\sigma = -\frac{\pi}{2}$ . Зазначимо, що коефіцієнт

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{B}{H/\omega_0} = \frac{B}{H_0/c} = \frac{1}{\sqrt{f(z)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4\nu^2 z^2}} \end{aligned} \quad (30.94)$$

називають *коефіцієнтом динамічності*. Цей коефіцієнт показує, у скільки разів амплітуда змущених коливань на частоті  $\omega$  перевищує амплітуду  $B_1(0)$  змущених коливань при  $\omega \rightarrow 0$ , тобто відхилення системи від положення рівноваги під дією постій-

ної сили, що дорівнює амплітуді збурення,

$$F_1(0) = \frac{H_0}{c}$$

Поняття коефіцієнта динамічності широко використовується при розв'язуванні прикладних задач теорії коливань і, зокрема, задач віброзахисту.

На завершення зазначимо, що метод пошуку частинного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, права частина яких є гармонічною функцією, можна ще більше спростити, якщо в рівняння (30.80) замість оператора диференціювання підставити  $p = i\omega$ . Тоді з рівняння (30.80) знайдемо

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{H \cos \omega t}{p^2 + 2hp + \omega_0^2} = \\ &= \frac{H \cos \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2hi\omega} \end{aligned} \quad (30.95)$$

Беручи до уваги, що

$$\begin{aligned} \omega_0^2 - \omega^2 + 2hi\omega &= \\ = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} e^{-i\sigma}, \\ \operatorname{tg} \sigma &= \frac{-2h\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \end{aligned} \quad (30.96)$$

і покладаючи  $e^{i\sigma} \cos \omega t = \cos(\omega t + \sigma)$ , неважко впевнитися, що розв'язок (30.95) повністю збігається зі знайденим раніше. Цей метод пошуку частинного розв'язку будемо застосовувати і в подальшому. Він широко використовується в теоретичних основах електротехніки.

### § 30.8. Основи віброзахисту і віброізоляції

Задачу віброзахисту і віброізоляції розглянемо на найпростіших прикладах систем, що мають один степінь вільності та здійснюють змущені коливання. Ця задача виникає у двох випадках: 1) коли треба ізолювати фунда-

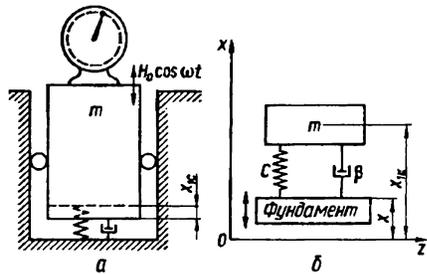


Рис. 30.12

мент (рис. 30.12, а) від шкідливих вібрацій машин, зумовлених, наприклад, їхньою динамічною незрівноваженістю; 2) коли якій-небудь пристрій (рис. 30.12, б) (машину, обладнання, електронну апаратуру тощо) треба захистити від шкідливої дії вібрації, що може виникнути під час транспортування, від коливань машин, які працюють поряд, і т. д. В обох випадках треба дослідити коливання тіла масою  $m$ . При цьому в першому випадку (рис. 30.12, а) збурювальна сила прикладена безпосередньо до тіла. У зв'язку з цим таке збудження коливань називають *силовим*. У другому випадку збудження коливань тіла масою  $m$  відбувається через коливання основи (рис. 30.12, б), тобто її рух відносно нерухомої системи координат  $Ox_2z$ . Таке збудження коливань називають *кінематичним*.

У разі силового збудження коливань потрібно, щоб реакція фундаменту була якомога меншою. Дія тіла (рис. 30.12, а) на фундамент передається через пружину жорсткістю  $c$  із коефіцієнтом демпфірування  $\beta$ . Застосовуючи аксіому про звільненість від в'язей, замінимо дію фундаменту його реакцією

$$R = c\dot{x}_{1c} + \beta\dot{x}_{1c}, \quad (30.97)$$

де  $x_{1c}$ ,  $\dot{x}_{1c}$  – деформація та швидкість руху пружини. Рівняння руху тіла в обох випадках найпростіше скласти методом кінестатики. Позначимо через  $x_{1c}$ ,  $x_{1c}$  відхи-

лення від положення рівноваги тіла масою  $m$  відповідно для силового і кінематичного збуджень (рис. 30.12, *a*, *б*). Переміщення основи відносно нерухомої системи координат (рис. 30.12, *б*) при кінематичному збудженні позначимо через  $x$ .

Рівняння руху тіла масою  $m$  матимуть вигляд:

при силовому збудженні коливань

$$m\ddot{x}_{1c} + \beta\dot{x}_{1c} + cx_{1c} = H_0 \cos \omega t = Q_0(t), \quad (30.98)$$

при кінематичному

$$m\ddot{x}_{1к} + \beta(\dot{x}_{1к} - \dot{x}) + c(x_{1к} - x) = 0. \quad (30.99)$$

Останнє рівняння перепишемо у формі

$$m\ddot{x}_{1к} + \beta\dot{x}_{1к} + cx_{1к} = cx + \beta\dot{x}. \quad (30.100)$$

При кінематичному збудженні коливань задача полягає в тому, щоб амплітуда абсолютного коливання  $x_{1к}$  тіла була б якомога меншою, а в граничному випадку  $x_{1к} \rightarrow 0$ .

Розділимо всі члени рівнянь (30.98) і (30.100) на  $m$  і, ввівши оператор диференціювання  $p = \frac{d}{dt}$ , отримаємо відповідно

$$\begin{aligned} (p^2 + 2hp + \omega_0^2)x_{1c} &= Q(t), \\ (p^2 + 2hp + \omega_0^2)x_{1к} &= \\ &= (2hp + \omega_0^2)x(t). \end{aligned} \quad (30.101)$$

Визначимо частинний розв'язок цих рівнянь:

$$x_{1c} = \frac{Q(t)}{p^2 + 2hp + \omega_0^2}; \quad (30.102)$$

$$x_{1к} = \frac{2hp + \omega_0^2}{p^2 + 2hp + \omega_0^2} x(t). \quad (30.103)$$

Як уже зазначалось, при силовому збудженні коливань задача полягає в тому, щоб реакція  $R$  (30.97) фундаменту була якомога меншою.

Таким чином, із (30.97), розділивши попередньо в ній усі члени на  $m$ , використовуючи рівності (30.102) і (30.103), дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{R}{m} &= (2hp + \omega_0^2)x_{1c} = \\ &= \frac{2hp + \omega_0^2}{p^2 + 2hp + \omega_0^2} Q(t), \quad (30.104) \\ x_{1к} &= \frac{2hp + \omega_0^2}{p^2 + 2hp + \omega_0^2} x(t). \end{aligned}$$

Якщо при силовому і кінематичному збудженнях збурення  $Q(t)$  і  $x(t)$  мають однаковий характер, то задачі віброзахисту або віброізоляції в обох випадках зводяться до дослідження коефіцієнта динамічності

$$\mu = \frac{x_{1к}}{x(t)} = \frac{R}{Q_0(t)} = \frac{2hp + \omega_0^2}{p^2 + 2hp + \omega_0^2}. \quad (30.105)$$

Очевидно, що після розв'язання поставленої задачі коефіцієнт  $\mu$  має бути меншим за одиницю, тобто  $|\mu| < 1$ . Розв'яжемо цю нерівність, враховуючи, що в разі змушених коливань  $p = i\omega$ , де  $\omega$  – колова частота збурення. Отже,

$$\mu = \frac{\omega_0^2 + 2hi\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2hi\omega}. \quad (30.106)$$

Використовуючи співвідношення між комплексними числами (30.85), одержимо

$$\mu = \frac{\sqrt{\omega_0^4 + 4h^2\omega^2} e^{i\sigma_1}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} e^{i\sigma_2}}, \quad (30.107)$$

де

$$\operatorname{tg} \sigma_1 = \frac{2h\omega}{\omega_0^2}; \quad \operatorname{tg} \sigma_2 = \frac{2h\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Оскільки нас цікавить нерівність  $|\mu| < 1$ , а  $|e^{i\sigma_s}| = 1$  ( $s = 1, 2$ ), то із (30.107), вводячи

які в § 30.7, безрозмірні величини  $z = \frac{\omega}{\omega_0}$ ;

$v = \frac{h}{\omega_0}$ , одержимо

$$|\mu| = \frac{\sqrt{1+4v^2z^2}}{\sqrt{(1-z^2)^2+4v^2z^2}} < 1. \quad (30.108)$$

Звідси

$$(1-z^2)^2+4v^2z^2 > 1+4v^2z^2, \\ \Downarrow \\ z^2(z^2-2) > 0. \quad (30.109)$$

Ця нерівність має розв'язок  $z > \sqrt{2}$  або  $\omega > \sqrt{2}\omega_0$ .

Отже, для того щоб розв'язати задачу віброзахисту або віброізоляції незалежно від того, яке збудження коливаний  $\epsilon$  (силове чи кінематичне), параметри системи віброзахисту або віброізоляції мають бути вибрані так, щоб частота власних коливань системи була набагато меншою за частоту збурення. Дія вібрації на тіло або фундамент зменшиться, якщо частота  $\omega$  вібрації більше в  $\sqrt{2}$  разів від частоти  $\omega_0$  вільних коливань тіла.

Причому, якщо  $\omega > \sqrt{2}\omega_0$ , то чим менше демпфірування в системі, тим ефект віброзахисту або віброізоляції більший (рис. 30.13). Цей висновок має обмежений характер і його рідко враховують на практиці, оскільки, по-перше, при малому демпфіруванні будуть більшими амплітуди коливань при резонансі і, по-друге, при врахуванні нелінійних факторів цей висновок часто не має сили.

### § 30.9. Вільні (власні) коливання механічної системи з двома степенями вільності

Розглянемо коливання механічної системи, що має два степеня вільності ( $k = 2$ ).

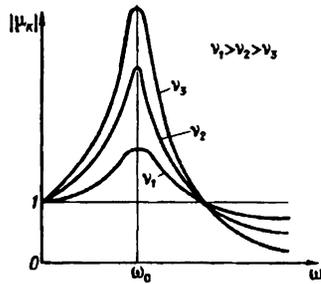


Рис. 30.13

Рівняння руху такої системи дістанемо, скориставшись системою рівнянь (30.15):

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + c_{21}q_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{22}q_2 = 0. \end{cases} \quad (30.110)$$

Запишемо ці рівняння в операторному вигляді, позначивши через  $p = \frac{d}{dt}$  оператор диференціювання:

$$\begin{cases} (a_{11}p^2 + c_{11})q_1 + (a_{12}p^2 + c_{12})q_2 = 0, \\ (a_{21}p^2 + c_{21})q_1 + (a_{22}p^2 + c_{22})q_2 = 0. \end{cases} \quad (30.111)$$

Ці рівняння можна записати також у матричній формі

$$\begin{bmatrix} a_{11}p^2 + c_{11} & a_{12}p^2 + c_{12} \\ a_{21}p^2 + c_{21} & a_{22}p^2 + c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (30.112)$$

Оскільки при таких коливаннях немає розсіювання енергії, то вільні коливання будуть незгасаючими і тому (див. § 30.2) можемо покласти  $p = i\omega$  ( $i = \sqrt{-1}$ ). Для того щоб рівняння (30.112) мало нетривіальний розв'язок  $q_1 \neq 0$ ,  $q_2 \neq 0$ , треба, щоб визначник матриці коефіцієнтів дорівнював нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\omega^2 & c_{12} - a_{12}\omega^2 \\ c_{21} - a_{21}\omega^2 & c_{22} - a_{22}\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (30.113)$$

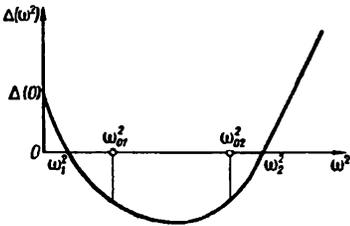


Рис. 30.14

Розкриваючи цей визначник і враховуючи, що  $c_{12} = c_{21}$ ;  $a_{12} = a_{21}$ , отримаємо рівняння частот або вікове рівняння:

$$\Delta = (c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - (c_{12} - a_{12}\omega^2)^2 = 0 \quad (30.114)$$

або

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\omega^4 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12})\omega^2 + (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) = 0. \quad (30.115)$$

Покажемо, що корені рівняння (30.115) відносно  $\omega^2$  дійсні та додатні.

Оскільки розглядаємо коливання системи відносно стійкого положення рівноваги, то потенціальна енергія – додатно-визначена квадратична форма узагальнених координат. Кінетична енергія – також додатно-визначена квадратична форма узагальнених швидкостей. Тому за критерієм Сільвестра коефіцієнти в (30.115) при  $\omega^4$  і  $\omega^0$  додатні, тобто

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} - a_{12}^2 &> 0, \\ c_{11}c_{22} - c_{12}^2 &> 0. \end{aligned} \quad (30.116)$$

Це означає, що графік функції  $\Delta(\omega^2)$  є параболою, гілки якої напрямлені вгору (рис. 30.14). При  $\omega^2 = 0$   $\Delta(0) = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$ , при  $\omega^2 \rightarrow \infty$   $\Delta(\infty) = \infty$ .

Якщо частота  $\omega^2$  дорівнює квадрату однієї з парціальних частот  $\omega_{01}^2$ ,  $\omega_{02}^2$  власних коливань,  $\omega_{0s}^2 = \frac{c_{ss}}{a_{ss}}$  ( $s=1,2$ ), то  $\Delta(\omega_{0s}^2) < 0$ .

(Парціальними називають частоти таких коливань системи, коли коливання за кожною з координат незалежні (незв'язані), тобто коли  $a_{12} = 0$ ,  $c_{12} = 0$ ).

Із графіка  $\Delta(\omega^2)$  (рис. 30.14) випливає, що обидва корені  $-\omega_1^2$  і  $\omega_2^2$  – характеристичного рівняння дійсні та додатні. Цей графік ілюструє також *теорему Релея* про частоти власних коливань системи, згідно з якою: *нижча частота  $\omega_1$  власних коливань системи завжди менша за найменшу парціальну частоту  $\omega_{01}$ , а вища частота  $\omega_2$  завжди більша за найбільшу парціальну частоту  $\omega_{02}$ .*

Таким чином, у системі з двома степенями вільності вільні коливання відбуваються з частотами  $\omega_1$  і  $\omega_2$  власних коливань, тому розв'язок однорідної системи рівнянь (30.111) дорівнюватиме їх лінійній комбінації:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1^{(1)} + q_1^{(2)}, \\ q_2 &= q_2^{(1)} + q_2^{(2)} \end{aligned} \quad (30.117)$$

або

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2), \\ q_2 &= B_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (30.118)$$

Якщо підставити вирази (30.118) у (30.111), поклавши в ньому  $p_s = \pm i\omega_s$  ( $s=1,2$ ), то визначник цієї системи (30.113) обернеться на нуль. Це означає, що з двох рівнянь системи (30.111) незалежне лише одне. Кожному кореню  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  характеристичного рівняння (30.115) відповідають значення амплітуд

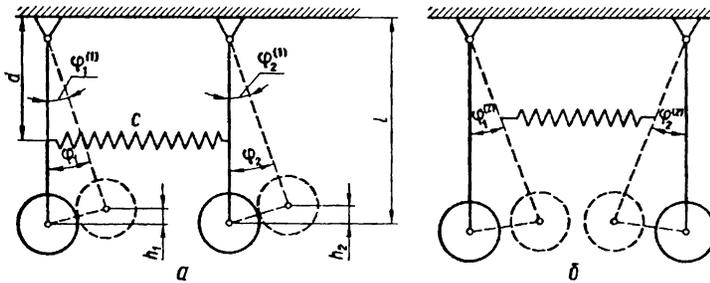


Рис. 30.15

фаз коливань за координатами  $q_1$  і  $q_2$ .  
розв'язки лінійно незалежні.

Якщо взяти, наприклад, перше рівняння (30.111), то з нього легко визначити відношення ( $p_s = i\omega_s$ )

$$\frac{q_2^{(s)}}{q_1^{(s)}} = \frac{B_s}{A_s} = -\frac{c_{11} - a_{11}\omega_s^2}{c_{12} - a_{12}\omega_s^2} = \mu_s, \quad s = 1, 2. \quad (30.119)$$

Отже, кожному значенню частот  $\omega_1$  і  $\omega_2$  відповідають значення  $\mu_1$  і  $\mu_2$ . Обчисливши їх за формулою (30.119), визначимо

$$B_1 = \mu_1 A_1, \quad B_2 = \mu_2 A_2. \quad (30.120)$$

Тепер загальний розв'язок набуде вигляду

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2); \\ q_2 &= \mu_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + \mu_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (30.121)$$

У рівнянні (30.121) частоти  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  і коефіцієнти форм  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  — відомі числа, а  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$  — довільні сталі, що визначаються з початкових умов. Із формул (30.118) і (30.121) видно, що рух системи з двома степенями вільності складається з двох незалежних коливань:

$$\begin{aligned} q_1^{(1)} &= A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1), \\ q_1^{(2)} &= A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2); \\ q_2^{(1)} &= \mu_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1), \\ q_2^{(2)} &= \mu_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (30.122)$$

Ці коливання ( $q_1^{(1)}$  і  $q_2^{(1)}$ ;  $q_1^{(2)}$  і  $q_2^{(2)}$ ), що відбуваються відповідно з частотою  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , називають *головними коливаннями*. Коефіцієнти  $\mu_1$  і  $\mu_2$  визначають *форми коливань*. Вони показують, у скільки разів амплітуда відповідного головного коливання в одній з координат більша (або менша) від амплітуди другої координати.

Колові частоти власних коливань  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , а також коефіцієнти форм  $\mu_1$  і  $\mu_2$  коливань є основними характеристиками малих коливань систем з двома степенями вільності.

**Приклад 8.** Два однакових маятники (рис. 30.15, а), довжини яких  $l$  і маси  $m$ , на висоті  $d$  з'єднані пружиною, що має коефіцієнт жорсткості  $c$ . Довжина пружини в положенні рівноваги дорівнює відстані між точкам підвішування маятників. Нехтуючи опором руху, масами стрижнів маятників і масою пружини, визначити: 1) частоти головних коливань і коефіцієнти форм малих коливань маятників; 2) малі коливання системи після того, як перший маятник відхилено на кут  $\varphi_{10}$  від положення рівноваги, тобто при  $t = 0$   $\varphi_1(0) = \varphi_{10}$ ;  $\varphi_2(0) = 0$ ;  $\dot{\varphi}_1(0) = 0$ ;  $\dot{\varphi}_2(0) = 0$ .

Розв'язання. Розглядувана система має два степеня вільності. За узагальнені координати візьмемо кути відхилення  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  маятників від вертикалі.

$$\text{Кінетична енергія системи } T = \frac{1}{2} m (\dot{v}_1^2 + \dot{v}_2^2).$$

Оскільки  $v_i = l\dot{\varphi}_i$  ( $i = 1, 2$ ), то

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2). \quad (1)$$

Потенціальна енергія складається з потенціальної енергії  $\Pi_1$  маятників у полі сили ваги і потенціальної енергії  $\Pi_2$  пружини.

При обчисленні  $\Pi_1$  за нульове положення візьмемо положення рівноваги маятників (рис. 30.15, а), тоді

$$\Pi_1 = mgh_1 + mgh_2 = mgl(1 - \cos \varphi_1) + mgl(1 - \cos \varphi_2). \quad (2)$$

При визначенні  $\Pi_2$  треба врахувати, що деформація пружини дорівнює  $d(\varphi_2 - \varphi_1)$ . Тоді

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} cd^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2. \quad (3)$$

Враховуючи, що для малих кутів  $1 - \cos \varphi_i \approx \frac{\varphi_i^2}{2}$  ( $s = 1, 2$ ), вираз для потенціальної енергії системи запишемо у вигляді

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{mgl}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{1}{2} cd^2 (\varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2). \quad (4)$$

У загальному випадку вирази для  $T$  і  $\Pi$  запишемо так:

$$T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{q}_2^2, \quad (5)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{11} q_1^2 + c_{12} q_1 q_2 + \frac{1}{2} c_{22} q_2^2.$$

Приймаючи  $q_1 = \varphi_1$ ,  $q_2 = \varphi_2$ , визначимо коефіцієнти інерції та узагальнені коефіцієнти жорсткості:  $a_{11} = a_{22} = ml^2$ ;  $a_{12} = 0$ ;  $c_{11} = c_{22} = mgl + cd^2$ ;  $c_{12} = -cd^2$ . Підставляючи ці коефіцієнти у рівняння частот (30.114), маємо

$$(mgl + cd^2 - ml^2\omega^2)^2 - c^2 d^4 = 0. \quad (6)$$

Звідси

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}; \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2cd^2}{ml^2}. \quad (7)$$

Коефіцієнти форм визначимо з відношення (30.119)

$$\mu_1 = -\frac{c_{11} - a_{11}\omega_1^2}{c_{12} - a_{12}\omega_1^2} = +1;$$

$$\mu_2 = -\frac{c_{11} - a_{11}\omega_2^2}{c_{12} - a_{12}\omega_2^2} = -1. \quad (8)$$

Згідно з (30.122), з урахуванням цих коефіцієнтів  $\varphi_1^{(1)} = \varphi_2^{(1)}$ ;  $\varphi_1^{(2)} = -\varphi_2^{(2)}$  (рис. 30.15, б). Це означає, що в першому головному коливанні маятників пружина, яка їх з'єднує, залишається недеформованою і, отже, не впливає на їх рух, тому не випадково колова частота  $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$  дорівнює частоті математичного маятника. У другій головній формі пружина весь час деформується, тому  $\omega_2 > \omega_1$ .

Загальний розв'язок (30.121) з урахуванням того, що  $\mu_1 = 1$ ;  $\mu_2 = -1$ , має вигляд

$$\varphi_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2),$$

$$\varphi_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2). \quad (9)$$

Відповідні похідні

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1) + \omega_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2),$$

$$\dot{\varphi}_2 = \omega_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1) - \omega_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2). \quad (10)$$

Оскільки при  $t = 0$   $\varphi_1(0) = \varphi_{10}$ ,  $\varphi_2(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ , то для визначення сталих інтегрування  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  отримаємо таку систему рівнянь:

$$A_1 \sin \varepsilon_1 + A_2 \sin \varepsilon_2 = \varphi_{10};$$

$$\omega_1 A_1 \cos \varepsilon_1 + \omega_2 A_2 \cos \varepsilon_2 = 0;$$

$$A_1 \sin \varepsilon_1 - A_2 \sin \varepsilon_2 = 0;$$

$$\omega_1 A_1 \cos \varepsilon_1 - \omega_2 A_2 \cos \varepsilon_2 = 0. \quad (11)$$

Звідси  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\pi}{2}$ ;  $A_1 = A_2 = \frac{\varphi_{10}}{2}$ . Отже,

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_{10}}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t),$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_{10}}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t). \quad (12)$$

### §30.10. Нормальні (головні) координати

Нормальними (головними) координатами механічної системи називають такі узагальнені координати, які вибрані так, що кінетична енергія системи містить лише квадрати узагальнених швидкостей, а потенціальна енергія – квадрати узагальнених координат.

Якщо позначити нормальні координати через  $\theta_1$  і  $\theta_2$ , то

$$T = \frac{1}{2}(a_1\dot{\theta}_1^2 + a_2\dot{\theta}_2^2); \quad (30.123)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_1\theta_1^2 + c_2\theta_2^2),$$

де  $a_1, a_2$  – коефіцієнти інерції;  $c_1, c_2$  – узагальнені коефіцієнти жорсткості.

Застосувавши рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_s} - \frac{\partial T}{\partial \theta_s} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_s}, \quad s = 1, 2, \quad (30.124)$$

одержимо два незалежних диференціальних рівняння

$$a_1\ddot{\theta}_1 + c_1\theta_1 = 0; \quad a_2\ddot{\theta}_2 + c_2\theta_2 = 0. \quad (30.125)$$

Як було показано раніше, загальний розв'язок цих рівнянь має вигляд

$$\theta_1 = B_1 \sin(\omega_1 t + \epsilon_1); \quad (30.126)$$

$$\theta_2 = B_2 \sin(\omega_2 t + \epsilon_2),$$

де  $\omega_1 = \sqrt{c_1/a_1}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{c_2/a_2}$  – частоти головних коливань системи. Сталі  $B_1, B_2, \epsilon_1, \epsilon_2$  визначають із початкових умов руху системи.

Зв'язок між узагальненими координатами системи і нормальними координатами позамо у вигляді рівностей

$$q_1 = \theta_1 + \theta_2; \quad (30.127)$$

$$q_2 = \lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2,$$

де  $\lambda_1, \lambda_2$  – сталі коефіцієнти форм, які треба визначити. На основі виразів (30.13) запишемо кінетичну  $T$  і потенціальну  $\Pi$  енергію системи через узагальнені координати:

$$T = \frac{1}{2} \left\{ (a_{11} + 2a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_1^2) \dot{\theta}_1^2 + 2[a_{11} + a_{12}(\lambda_1 + \lambda_2) + a_{22}\lambda_1\lambda_2] \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + (a_{11} + 2a_{12}\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2) \dot{\theta}_2^2 \right\}; \quad (30.128)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \left\{ (c_{11} + 2c_{12}\lambda_1 + c_{22}\lambda_1^2) \theta_1^2 + 2[c_{11} + c_{12}(\lambda_1 + \lambda_2) + c_{22}\lambda_1\lambda_2] \theta_1\theta_2 + (c_{11} + 2c_{12}\lambda_2 + c_{22}\lambda_2^2) \theta_2^2 \right\}.$$

За означенням головних, або нормальних, координат коефіцієнти при добутку  $\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$  у виразі для  $T$  і при добутку  $\theta_1\theta_2$  у виразі для  $\Pi$  мають дорівнювати нулю. Тоді

$$a_{11} + a_{12}(\lambda_1 + \lambda_2) + a_{22}\lambda_1\lambda_2 = 0; \quad (30.129)$$

$$c_{11} + c_{12}(\lambda_1 + \lambda_2) + c_{22}\lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Звідси

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{a_{22}c_{11} - a_{11}c_{22}}{a_{12}c_{22} - a_{22}c_{12}}; \quad (30.130)$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11}}{a_{12}c_{22} - a_{22}c_{12}}.$$

Порівнюючи вирази для  $T$  і  $\Pi$  в рівностях (30.123) і (30.128), визначимо інерційні члени  $a_1$  і  $a_2$ , а також коефіцієнти жорсткості  $c_1$  і  $c_2$ :

$$a_1 = a_{11} + 2a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_1^2; \quad (30.131)$$

$$c_1 = c_{11} + 2c_{12}\lambda_1 + c_{22}\lambda_1^2;$$

$$a_2 = a_{11} + 2a_{12}\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2;$$

$$c_2 = c_{11} + 2c_{12}\lambda_2 + c_{22}\lambda_2^2.$$

Зауважимо, що нормальні координати мають переважно теоретичне значення для доведення різних положень теорії коливань.

**§ 30.11. Змушені коливання механічної системи з двома степенями вільності.**

**Динамічний гаситель коливань**

Змушені коливання системи з двома степенями вільності дослідимо на конкретному прикладі руху двомасової системи за наявності одночасно силового і кінематичного збуджень (див. рис. 27.1).

Поставимо задачу: чи можна вибрати параметри двомасової системи такими, щоб одна з мас була нерухомою під час дії збудження?

Звернімося до аналізу рівнянь руху цієї системи, що були складені в § 27.4 (приклад 1):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (f_2 + f_1) \dot{x}_1 + (c_2 + c_1) x_1 - \\ - c_2 x_2 - f_2 \dot{x}_2 = c_1 x + f_1 \dot{x}, \quad (30.132) \\ m_2 \ddot{x}_2 + f_2 \dot{x}_2 + c_2 x_2 - c_2 x_1 - f_2 \dot{x}_1 = Q_0. \end{aligned}$$

Тут  $Q_0 = Q \sin \omega t$ , а решта позначень такі самі, як і в § 27.4. Оскільки в цій системі є розсіювання енергії, то її власні коливання з часом згаснуть. Тому розглядаємо тільки змушені коливання, тобто шукаємо частинний розв'язок системи (30.132), вважаючи, що записані в правій частині збудження ( $x$  – кінематичне,  $Q_0$  – силове) задані.

Розділивши всі частини першого рівняння системи (30.132) на  $m_1$ , а другого – на  $m_2$

і ввівши оператор диференціювання  $p = \frac{d}{dt}$ , дістанемо

$$\begin{aligned} (p^2 + 2h_{11}p + \omega_{01}^2) x_1 - (2\mu_m h_2 p + \\ + \mu_c \omega_{01}^2) x_2 = (\omega_{01}^2 + 2h_1 p) x, \\ - (2h_2 p + \omega_{02}^2) x_1 + (p^2 + \\ + 2h_2 p + \omega_{02}^2) x_2 = Q, \quad (30.133) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \omega_{01}^2 = \frac{c_1}{m_1}; \quad \omega_{02}^2 = \frac{c_2}{m_2}; \quad \omega_{01}^2 = \omega_{01}^2 (1 + \mu_c); \\ \mu_m = \frac{m_2}{m_1}; \quad \mu_c = \frac{c_2}{c_1} = \frac{m_2 \omega_{02}^2}{m_1 \omega_{01}^2}; \quad \mu_f = \frac{f_2}{f_1}; \\ 2h_1 = \frac{f_1}{m_1}; \quad 2h_2 = \frac{f_2}{m_2}; \\ h_{11} = h_1 (1 + \mu_f); \quad Q = \frac{Q_0}{m_2}. \end{aligned}$$

Розв'язуючи рівняння (30.133) відносно  $x_1$  і  $x_2$ , одержимо

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{1}{\Delta(p)} \times \\ \times \begin{vmatrix} (\omega_{01}^2 + 2h_1 p) x & - (2\mu_m h_2 p + \mu_c \omega_{01}^2) \\ Q & (p^2 + 2h_2 p + \omega_{02}^2) \end{vmatrix}, \\ x_2 = \frac{1}{\Delta(p)} \times \quad (30.134) \end{aligned}$$

$$\times \begin{vmatrix} (p^2 + 2h_{11} p + \omega_{01}^2) & (\omega_{01}^2 + 2h_1 p) x \\ - (2h_2 p + \omega_{02}^2) & Q \end{vmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} \Delta(p) = \\ = \begin{vmatrix} p^2 + 2h_{11} p + \omega_{01}^2 & - (2\mu_m h_2 p + \mu_c \omega_{01}^2) \\ - (2h_2 p + \omega_{02}^2) & p^2 + 2h_2 p + \omega_{02}^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Запишемо  $x_1$  і  $x_2$  у більш розгорнутому вигляді, вважаючи, що збудження  $x$  і  $Q$  – гармонічні функції, які мають однакову частоту  $\omega$ . У цьому разі замість  $p$  можна записати  $p = i\omega (i = \sqrt{-1})$ . Тоді

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{1}{\Delta(i\omega)} \left[ (\omega_{02}^2 - \omega^2 + 2h_2 i\omega) (\omega_{01}^2 + \right. \\ \left. + 2h_1 i\omega) x + (\mu_c \omega_{01}^2 + 2\mu_m h_2 i\omega) Q \right], \quad (30.135) \end{aligned}$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta(i\omega)} \left[ (\omega_{01}^2 - \omega^2 + 2h_{11}i\omega) Q + (2h_2i\omega + \omega_{02}^2) (\omega_{01}^2 + 2h_1i\omega) x \right], \quad (30.136)$$

$$\Delta(i\omega) = (\omega_{01}^2 - \omega^2 + 2h_1i\omega) (\omega_{02}^2 - \omega^2 + 2h_2i\omega) - (2h_2i\omega + \omega_{02}^2) (\mu_c \omega_{01}^2 + 2\mu_m h_2i\omega). \quad (30.137)$$

Проаналізуємо вирази (30.135) і (30.136) для змушених коливань тіл 1 ( $x_1$ ) і 2 ( $x_2$ ).

З аналізу чисельника (30.135) і (30.136) видно, що коли одночасно діють силоне  $Q$  і кінематичне  $x$  збудження, то ні при якому співвідношенні між парціальними частотами  $\omega_{01}$ ,  $\omega_{02}$  і частотою збурення  $\omega$  ні  $x_1$ , ні  $x_2$  на нуль не перетворюються, тобто коливання жодного з тіл не можуть бути погашені.

Розглянемо випадки, коли на систему має одне зі збурень.

1. Нехай задано лише кінематичне збурення коливань  $x$ , а  $Q=0$ . Тоді з рівнянь (30.135) і (30.137) видно, що ні при яких співвідношеннях між  $\omega_{01}$ ,  $\omega_{02}$  і  $\omega$  змушені коливання першого тіла не можуть бути погашені. Якщо  $\omega = \omega_{02}$  і  $h_2 = 0$ , то

$$x_1 = 0, \\ x_2 = -\frac{\omega_{01}^2 + 2h_1i\omega_{02}}{\mu_c \omega_{01}^2} x. \quad (30.138)$$

Це означає, що при такому співвідношенні параметрів тіло масою  $m_1$  нерухоме, а тіло масою  $m_2$  здійснює коливання згідно з виразом (30.138).

Якщо врахувати, що  $|h_1\omega_{02}| \ll \omega_{01}^2$  і  $\mu_c = \frac{m_2}{m_1} \frac{\omega_{02}^2}{\omega_{01}^2} = \frac{c_2}{c_1}$ , то наближено дістанемо

$$x_2 \approx -\frac{x}{\mu_c} = -\frac{m_1}{m_2} \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{02}^2} x. \quad (30.139)$$

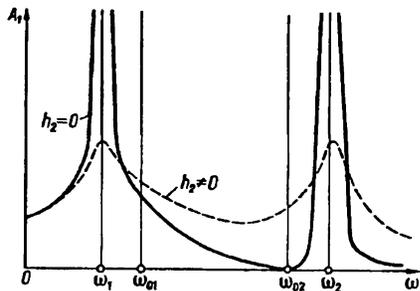
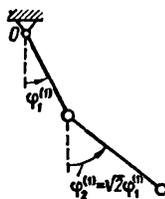
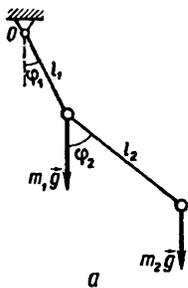


Рис. 30.16

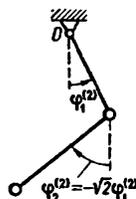
Звичайно масу  $m_2$  вибирають на порядок меншою за масу  $m_1$  ( $m_2 \approx 0,1m_1$ ). Тоді з (30.139) випливає, що оскільки  $\omega_{01}^2$  і  $\omega_{02}^2$  сумірні, то мале тіло масою  $m_2$  має амплітуду коливань приблизно в  $\frac{m_1}{m_2}$  рази більшу за амплітуду збурення.

Фізично ефект динамічного гасіння коливань пояснюється так. На тіло масою  $m_1$  з одного боку через пружину  $c_1$  передається кінематичне збурення, а з другого – через пружину  $c_2$  діє тіло масою  $m_2$ . Якщо ці сили однакові за величиною і протилежно напрямлені, то головний вектор сил, прикладених до тіла масою  $m_1$ , дорівнює нулю. Напрямок дії сили можна змінити відповідним зсувом фаз коливань.

При  $h_2 \neq 0$  і  $\omega = \omega_{02}$   $x_1 \neq 0$ , але, як і раніше, буде залишатися малим, при цьому амплітуда коливань другого тіла також зменшиться ((30.136) і (30.137)). Характер змінення амплітуди коливань  $A_1$  тіла масою  $m_1$  залежно від частоти збурення зображено на рис. 30.16. На рисунку показані парціальні частоти  $\omega_{01}$ ,  $\omega_{02}$  і частоти головних коливань  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , що розміщені на осі  $\omega$  згідно з теоремою Релея (§ 30.9). Залеж-



Перше головне коливання



Друге головне коливання

Рис. 30.17

ність  $A_1(\omega)$  зображена суцільною лінією при  $h_2 = 0$  і штриховою при  $h_2 \neq 0$ .

2. Розглянемо другий випадок, коли  $x = 0$ , а  $Q \neq 0$ , тобто задано силове збудження розглядуваної двомасової системи. Із виразів (30.135) і (30.136) бачимо, що в цьому випадку  $x_1 \neq 0$  ні при яких співвідношеннях параметрів  $\omega_{01}$ ,  $\omega_{02}$  і  $\omega$ , а  $x_2 = 0$  при  $\omega_{11} = \omega$  і  $h_{11} = 0$ . Отже, коливання описуються виразами

$$x_1 = \frac{\mu_c \omega_{01}^2 + 2\mu_m h_2 i \omega_{11}}{-(2h_2 i \omega_{11} + \omega_{02}^2)(\mu_c \omega_{01}^2 + 2\mu_m h_2 i \omega_{11})} Q = -\frac{1}{2h_2 i \omega_{11} + \omega_{02}^2} Q, \quad x_2 = 0$$

або враховуючи, що  $|h_2 \omega_{11}| \ll \omega_{02}^2$ ,

$$x_1 = -\frac{Q_0}{c_2}, \quad x_2 = 0. \quad (30.140)$$

Як видно з виразу (30.140), тіла 1 і 2 наче міняються ролями. Зауважимо, що одержані тут результати поширюються на коливальні системи з двома степенями вільності будь-якої фізичної природи, наприклад на електричні коливання кола тощо.

**Приклад 9.** Дослідити малі коливання подвійного математичного маятника з параметрами, що вказані на рис. 30.17, а.

Розв'язання. Вирази для кінетичної та потенціальної енергії були отримані раніше (§ 27.4). З урахуванням введених тут позначень маємо

$$T = \frac{1}{2}[(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2], \quad (1)$$

$$\Pi = (m_1 + m_2)gl_1(1 - \cos \varphi_1) + mgl_2(1 - \cos \varphi_2).$$

Оскільки вивчаються малі коливання відносно положення рівноваги, то в кінетичній енергії замінимо коефіцієнт  $a_{12} = m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  на його значення в положенні рівноваги  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , тобто покладемо наближено

$$a_{12} = m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \approx m_2 l_1 l_2.$$

Вираз для потенціальної енергії розкладемо в ряд по степеням  $\varphi_1$  та  $\varphi_2$  і обмежимося величинами другого порядку мализни. Маємо

$$\cos \varphi_1 = 1 - \frac{\varphi_1^2}{2}, \quad \cos \varphi_2 = 1 - \frac{\varphi_2^2}{2}.$$

Отже, вирази для кінетичної та потенціальної енергії матимуть вигляд

$$T = \frac{1}{2}[(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2], \quad (2)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2}m_2 gl_2 \varphi_2^2.$$

Підставивши вираз (2) для  $T$  і  $\Pi$  в рівняння Лагранжа другого роду, отримаємо рівняння

матик коливань подвійного математичного маятника, які подамо у формі, скоротивши всі члени в першому рівнянні на  $l_1$ , а в другому – на  $m_2 l_2$ :

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + (m_1 + m_2) g \varphi_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 &= 0, \\ l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Будемо шукати розв'язок у формі

$$\varphi_1 = A \sin(\omega t + \varepsilon), \quad \varphi_2 = B \sin(\omega t + \varepsilon).$$

Звідси

$$\ddot{\varphi}_1 = -\omega^2 \varphi_1, \quad \ddot{\varphi}_2 = -\omega^2 \varphi_2.$$

Підставивши  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\ddot{\varphi}_1$  і  $\ddot{\varphi}_2$  в рівняння (3), матимемо

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)(g - l_1 \omega^2) A - m_2 l_2 \omega^2 B = 0, \\ -l_1 \omega^2 A + (g - l_2 \omega^2) B = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Оскільки  $A$  і  $B$  не дорівнюють нулю, то характеристичне рівняння цієї системи дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)(g - l_1 \omega^2) & -m_2 l_2 \omega^2 \\ -l_1 \omega^2 & g - l_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Розкриваючи визначник (5), отримаємо

$$\begin{aligned} m_1 l_1 l_2 \omega^4 - (m_1 + m_2)(l_1 + l_2) g \omega^2 + \\ + (m_1 + m_2) g^2 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Із биквадратного рівняння (6) відносно  $\omega^2$  знайдемо вирази для частот  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , які набудуть досить простого вигляду, коли покласти  $l = l_2$ ,  $m_1 = m_2 = m$ , тоді

$$\omega_1 = \sqrt{(2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{(2 + \sqrt{2}) \frac{g}{l}}. \quad (7)$$

Зазначимо, що парціальна частота коливань кожного з цих маятників була б  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Вираз

(7) наочно підтверджує теорему Релєя.

Знайдемо тепер відношення амплітуд (коєфіцієнти форми), користуючись другим рівнянням (4)

$$\begin{aligned} \mu_s = \frac{B_s}{A_s} = \frac{l_1 \omega_s^2}{g - l_2 \omega_s^2} = \frac{l \omega_s^2}{g - l \omega_s^2} = \frac{\omega_s^2}{\omega_{II}^2 - \omega_s^2}, \\ s = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Підставивши сюди вирази  $\omega_1$  і  $\omega_2$  із (7), матимемо

$$\mu_1 = \frac{B_1}{A_1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2}, \quad (9)$$

$$\mu_2 = \frac{B_2}{A_2} = \frac{-2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

Отже,

$$B_1 = \sqrt{2} A_1, \quad B_2 = -\sqrt{2} A_2. \quad (10)$$

Тепер можемо записати загальний розв'язок диференціальних рівнянь (3):

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(2)} = A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + \\ &+ A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2), \\ \varphi_2 &= \varphi_2^{(1)} + \varphi_2^{(2)} = \sqrt{2} A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) - \\ &- \sqrt{2} A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (11)$$

Сталі інтегрування знаходяться із початкових умов.

Нехай, наприклад, при  $t_1 = 0$

$$\varphi_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = 0, \quad \varphi_2 = \varphi_{20}, \quad \dot{\varphi}_2 = 0, \quad (12)$$

тобто в початковий момент перший маятник займав крайнє нижнє положення, а другий був відхилений на кут  $\varphi_{20}$ . Тоді, здиференціювавши (11) і підставивши значення початкових умов в (11) і вирази для похідних, знайдемо

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \varphi_{20}, \quad A_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4} \varphi_{20}, \\ \varepsilon_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

З урахуванням (13) вираз (11) набере вигляду

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\sqrt{2}}{4} \varphi_{20} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t), \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \varphi_{20} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t). \end{aligned} \quad (14)$$

Головні коливання визначатимуться із співвідношень:

перше головне коливання

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)} &= A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1), \\ \varphi_2^{(1)} &= \sqrt{2} A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1); \end{aligned} \quad (15)$$

друге головне коливання

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(2)} &= A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2), \\ \varphi_2^{(2)} &= -\sqrt{2} A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2).\end{aligned}\quad (16)$$

Форми коливань зображені на рис. 30.17, б.

Якщо в першому головному коливанні перший маятник відхилиться від вертикалі на кут  $\varphi_1^{(1)}$ , а другий відхилиться у той самий бік, але на кут  $\varphi_2^{(1)} = \sqrt{2}\varphi_1^{(1)}$ , то в другому головному коливанні при відхиленні першого маятника на кут  $\varphi_1^{(2)}$  другий маятник відхилиться в протилежному напрямку на кут  $\varphi_2^{(2)} = -\sqrt{2}\varphi_1^{(2)}$ .

### Питання для самоконтролю

1. Чим відрізняється поняття стійкості руху від поняття стійкості рівноваги системи?
2. Як формулюється, як записується і що визначає критерій Сільвестра і критерій Гурвіца?
3. У чому суть першого і другого методів О. М. Ляпунова, які застосовуються для дослідження стійкості руху системи?
4. Як впливають гірскопічні сили (гірскопічний ефект) на стійкість твердого тіла з нерухомою точкою?
5. У чому суть енергетичного методу дослідження коливань?
6. У чому суть теореми Релея про частоти власних коливань зв'язаної системи?
7. Що називають резонансом у лінійній системі і як впливають сили в'язкого тертя на амплітуду резонансних коливань, крім того, що обмежують її величину?
8. Що спільного і чим відрізняється постановка задачі про віброзахист і віброізоляцію?
9. У чому суть ефекту динамічного гасіння або поглинача коливань і чи можливий цей ефект у системі з одним ступенем вільності?
10. Що називають формами головних коливань у системі з декількома ступенями вільності?

## Розділ 31 ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНІ АНАЛОГІ. РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА – МАКСВЕЛЛА

Мета цього розділу – показати універсальність методів аналітичної механіки та їх ефективність при розв'язанні багатьох задач електротехніки, починаючи зі складання контурних рівнянь електричних кіл і завершуючи моделюванням на аналогових та аналого-цифрових обчислювальних комплексах; підкреслити роль теоретичної механіки як фундаментальної науки, методи якої застосовуються в дослідженнях процесів різної фізичної природи.

В історії фізики прийнято розрізняти три фізичні картини світу: механічну, електродинамічну і квантово-польову. Відповідно до цих трьох фізичних картин світу виникли і три основні теорії: механіка Ньютона; електродинаміка Максвелла і теорія відносності Ейнштейна; квантова механіка Шредингера – Гейзенберга. Всі інші теорії приносять до цих трьох або знаходяться на

порубіжжі цих теорій, зв'язуючи їх водночас. І лише аналітична механіка є наукою, що своїми методами наскрізь пронизує всі три картини світу.

Закони і теореми класичної механіки є фундаментом для всіх розділів прикладної механіки. Для спеціалістів немеханічного профілю (радіотехніки, акустики та ін.) основними є методи механіки при дослідженні лінійних і нелінійних коливань.

### § 31.1. Аналогії у фізиці

У фізиці вивчається множина складних і точних законів – закони гравітації, закони електрики і магнетизму, закони ядерних взаємодій тощо – і весь цей багатогвид окремих законів має деякі спільні принципи. Прикладами можуть слугувати закони збереження енергії, деякі властивості енер-

ті, а також той факт, що різні явища описуються аналогічними рівняннями та виразами. Наприклад, структура другого закону Ньютона, закону Гука і Ома є однаковою:

другий закон Ньютона

$$m\ddot{w} = \vec{F}; \quad (31.1)$$

закон Гука

$$cx = F;$$

закон Ома

$$Ri = U.$$

Спільним у цих законах є те, що в них входять лише три величини, кожна з яких визначається незалежно.

Або візьмемо закон всесвітнього тяжіння (закон гравітації), відкритий Ньютоном:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (31.2)$$

де  $\gamma$  – гравітаційна стала,  $m_1, m_2$  – маси тіл;  $r$  – відстань між тілами.

Цьому закону в електриці є аналог – закон Кулона про взаємодію двох електричних зарядів  $q_1^e$  і  $q_2^e$ :

$$F = \epsilon \frac{q_1^e q_2^e}{r^2}, \quad (31.3)$$

де  $\epsilon$  – відносна діелектрична проникність;  $q_1^e, q_2^e$  – взаємодіючі електричні заряди;  $r$  – відстань між ними.

І, нарешті, аналогічний закон взаємодії має місце і для магнітних полів:

$$F = \mu \frac{B_1 B_2}{r^2}, \quad (31.4)$$

де  $\mu$  – магнітна проникність;  $B_1, B_2$  – індукція;  $r$  – відстань між джерелами магнітного поля.

Вирази (31.1) та (31.2) – (31.4) формально повністю аналогічні, але фізична природа у них різна.

Спільність аналітичних залежностей у тих чи інших законах дає змогу застосовувати при дослідженні складних систем, по-

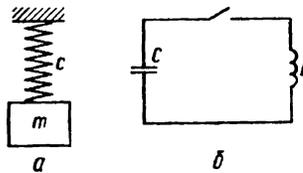


Рис. 31.1

будованих на ланках, що задовольняють ці закони, спільний математичний апарат. А оскільки механіка історично завжди за часом випереджала інші галузі, то і її методи стали базовими для цих систем-аналогів.

Розглянемо приклад коливання тягаря масою  $m$ , підвішеного на пружині жорсткістю  $c$ .

Рівняння коливання тягаря на пружині має відомий нам вигляд

$$m\ddot{x} + cx = 0, \quad (31.5)$$

де  $x$  – переміщення тягаря.

Далі розглянемо ідеалізований коливальний контур, що складається з котушки індуктивності  $L$  і конденсатора ємності  $C$  (рис. 31.1).

Ідеалізація цієї механічної моделі полягає в тому, що в дійсності є безперервна послідовність елементів пружини, які мають як масу, так і жорсткість. У точній постановці модель системи “маса на пружині” (рис. 31.1, а) описується рівняннями з частинними похідними.

У випадку електричного коливального контуру закон зміни заряду  $q^e$  конденсатора задовольняє умову

$$q^e = \int_0^t i dt, \quad (31.6)$$

де  $i$  – сила струму в колі.

При цьому напруга на обкладках конденсатора

$$U_c = \frac{q^e}{C}, \quad (31.7)$$

а на котушці індуктивності

$$U_L = L \frac{di}{dt}. \quad (31.8)$$

Оскільки напруга на затискачах контуру відсутня, то за другим законом Кірхгофа

$$U_L + U_C = 0. \quad (31.9)$$

З урахуванням співвідношень (31.6) – (31.8) рівняння (31.9) переписемо у формі

$$L \frac{d^2 q^e}{dt^2} + \frac{q^e}{C} = 0 \quad (31.10)$$

або

$$L \ddot{q}^e + \frac{1}{C} q^e = 0. \quad (31.11)$$

Рівняння (31.11) за формою таке саме, як і (31.5). Аналогічні також припущення або ідеалізація, що мають місце при виведенні рівнянь (31.11) і (31.5).

Наприклад, якщо взяти ланку лінії електропередачі або лінії зв'язку, то в них індуктивність і ємність розподілені по довжині безперервно, і процеси в такій системі описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних аналогічно тому, як у випадку з реальною механічною пружиною. Це дає підстави стверджувати, що кожному параметру механічної системи можна поставити у відповідність параметр електричної системи і навпаки. Наприклад, інерційні властивості речовини в механічній системі залежать від маси і моментів інерції. В електричних системах існують аналоги цих понять – індуктивність і ємність.

Продовжимо аналогію. У геометрії мас механічної системи вводять такі поняття як центр мас і тензор інерції. Повним аналогом за структурою цих залежностей в теорії ймовірностей або випадкових функцій є такі поняття як математичне очікування і кореляційна матриця.

Звернемося тепер до закону електромагнітної індукції, закону Фарадея, згідно з

яким електрорушійна сила (ЕРС) у провіднику, що індукується в ньому, пропорційна швидкості зміни сили струму:

$$U_L = L \frac{di}{dt}. \quad (31.12)$$

З іншого боку, згідно з другим законом Ньютона, сила пропорційна швидкості зміни кількості руху точки

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (31.13)$$

Отже, рівняння (31.12) – електричний аналог другого закону Ньютона:  $U_L$  – відповідає силі  $\vec{F}$ ,  $L$  – масі  $m$ , сила струму  $i$  – швидкості  $\vec{v}$ .

Виходячи з поняття електроємності системи двох заряджених тіл і співвідношення, яке зв'яже величину їх зарядів з різницею потенціалів

$$q^e = CU_C, \quad (31.14)$$

неважко встановити зв'язок між силою струму заряду зі змінною різницею потенціалів, враховуючи, що

$$i = \frac{dq^e}{dt}; \quad (31.15)$$

тоді

$$i = C \frac{dU_C}{dt}. \quad (31.16)$$

Вираз (31.16) теж аналогічний другому закону Ньютона, але тут силі  $\vec{F}$  відповідає сила струму  $i$ , масі  $m$  – ємність  $C$ , швидкості  $\vec{v}$  – різниця потенціалів  $U_C$ .

Усі наступні рівняння, що описують обидві системи, виводяться однаково, тобто можна просто міняти букви в рівняннях для однієї системи і отримувати рівняння для іншої.

Будь-який висновок, отриманий для однієї системи щодо стійкості, резонансу тощо, буде справедливим і для іншої системи-аналога. Наскільки це важливо на

практиці, підтвердимо словами відомого фізика Р. Фейнмана:

“Припустимо, що ми наштоткнулися на дуже складну механічну систему, в якій багато мас на багатьох пружинах, і все це з’єднано. Що нам робити? Розв’язувати рівняння? Можна і так. Але спробуємо зібрати електричне коло, в якому індуктивність пропорційна масі,  $\frac{1}{C}$  – пропорційна жорст-

кості  $s$ . Тоді електричне коло, звичайно, буде точним аналогом механічного пристрою в тому сенсі, що будь-який відклик  $q^e$  на  $U$  ( $U$  відповідає діючій силі) в точності відповідає відклику  $x$  на силу. З’єднавши в колі велику множину опорів, індуктивностей і ємностей, можна отримати коло, що має найскладнішу механічну систему. Що в цьому корисного? Кожна задача, механічна чи електрична, настільки важка (або легка), як і інша, бо вони еквівалентні.

Відкриття електрики не допомогло у розв’язуванні математичних рівнянь, але річ у тому, що завжди легше зібрати електричне коло і виміряти його параметри.

Припустимо, що ми побудували автомобіль і хочемо дізнатися, чи сильно його буде трясти на вибоїнах. Зберемо електричне коло, в якому індуктивності дадуть нам інформацію про інерцію коліс, ємності – про пружність коліс, опір – про амортизатори і т. д.

Врешті-решт ми замінимо елементами кола всі частини автомобіля. Тепер справа – за вибоїнами. Подамо на схему напругу від генератора – він зможе відобразити будь-яку вибоїну; заміряючи заряд на відповідному конденсаторі, ми отримаємо уявлення про розкитування коліс. Замірявши заряд (це зробити легко), ми вирішимо, що автомобіль трясє занадто сильно. Потрібно щось зробити. Чи то послабити амортизатори, чи то їх підсилити. Невже доведеться переробляти автомобіль, знову перевіряти, як його трясє, а потім знову переробляти? Ні! Просто потрібно повернути ручку опору:

опір номер 10 – це амортизатор номер 3; так можна підсилити амортизацію. Трясе ще сильніше – не страшно, ми послабимо амортизатори. Все одно трясє. Змінимо жорсткість пружини (ручка номер 17). Отже, налагодження виконаємо з допомогою електрики, багатократним поворотом ручок” (Фейнмановские лекции по физике: [Пер. с англ.] / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – 3-е изд. – М.: Мир, 1976. – Вып. 2. – С. 163–164).

Ця думка Фейнмана знайшла широке втілення у розв’язанні багатьох задач техніки за допомогою моделювання їх на аналогових та аналого-цифрових обчислювальних машинах.

### § 31.2. Електродинамічні аналогії в системі з одним ступенем вільності

У попередньому параграфі другому закону Ньютона (31.1) було поставлено у відповідність аж три співвідношення з електрики – закон Ома, закон Фарадея про електромагнітну індукцію (31.12) і співвідношення (31.16), що зв’язує електричний струм із різницею потенціалів на обкладках конденсатора. Виникає запитання, чи можна всі ці співвідношення об’єднати? Чи є суперечності між ними? Покажемо, що вказані співвідношення є окремим випадком співвідношень, що мають місце в замкнених електричних коливальних ланках.

Складні електричні ланки є поєднанням елементарних коливальних із послідовним і паралельним з’єднанням таких базових елементів електротехніки: активних елементів – джерел напруги і струму; пасивних елементів – омичних опорів (резисторів); конденсаторів і котушок індуктивності.

*1. Електричний коливальний контур із послідовним з’єднанням елементів.* У контурі з послідовним з’єднанням елементів (рис. 31.2, а) пасивні елементи – резистор  $R$ , котушка індуктивності  $L$ , конденсатор ємності  $C$  і активний елемент  $e$  (зовнішне

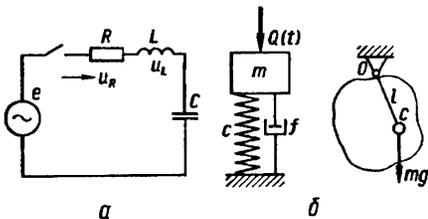


Рис. 31.2

джерело електрорушійної сили) з'єднані послідовно.

Згідно з другим законом Кірхгофа, сума падіннь напруги на окремих ділянках кола дорівнює різниці потенціалів на кінцях застискачів, тобто електрорушійній силі  $e(t)$  джерела напруги:

$$e(t) = U_R + U_L + U_C. \quad (31.17)$$

Таким чином, для цього кола другий закон Кірхгофа об'єднав усі три аналогії з другим законом Ньютона, про які йшла мова в § 31.1.

Розкрисмо тепер вирази  $U_R$ ,  $U_L$  і  $U_C$  в (31.17).

Якщо силу струму в цьому колі позначити через  $i(t)$ , то падіння напруги на резисторі  $R$  визначатиметься згідно з законом Ома  $U_R = Ri$ ; на індуктивності – згідно з законом Фарадея  $U_L = L \frac{di}{dt}$  і на конденсаторі  $U_C = \frac{q^e}{C}$ , де  $q^e$  – заряд конденсатора, який зв'язаний із силою струму  $i$  залежністю

$$i = \frac{dq^e}{dt}. \quad (31.18)$$

Отже, вираз (31.17) згідно з другим законом Кірхгофа запишемо у формі

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q^e = e(t), \quad (31.19)$$

або, з урахуванням виразу (31.18), матимемо

$$L \frac{d^2 q^e}{dt^2} + R \frac{dq^e}{dt} + \frac{q^e}{C} = e(t). \quad (31.20)$$

Якщо вираз (31.19) один раз здиференціювати за часом, то він, з урахуванням (31.18), набуде вигляду

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{de}{dt}. \quad (31.21)$$

Як бачимо, рівняння (31.20) і (31.21) є рівняннями коливального руху системи з одним ступенем вільності. Узагальненою координатою в (31.20) виступає заряд конденсатора ( $q = q^e$ ), а в (31.21) – сила струму в контурі ( $q = i$ ). Рівняння коливального руху механічних систем з одним ступенем вільності (рис. 31.2, б та ін.) має вигляд

$$a\ddot{q} + \beta\dot{q} + cq = Q(t). \quad (31.22)$$

Очевидно, що рівняння (31.20) – (31.22) мають однакову структуру, тобто вони аналогічні.

Порівнюючи ці рівняння між собою, бачимо, що узагальненому коефіцієнту інерції  $a$  (маса, осьовий момент інерції) механічної системи відповідає індуктивність  $L$ ; узагальненому коефіцієнту розсіювання енергії  $\beta$  (коефіцієнту демпфірування) – опір  $R$ , на якому електрична енергія аналогічно механічній перетворюється на теплоту; узагальненій жорсткості  $c$  механічної системи відповідає інверсна (обернена) ємність конденсатора  $\frac{1}{C}$ .

Узагальненій силі механічної системи  $Q(t)$  в рівнянні (31.20) відповідає електрорушійна сила  $e(t)$  джерела напруги, а в рівнянні (31.21) – похідна за часом від  $e(t)$  –  $\frac{de}{dt}$ . Тому в цьому випадку говорять про аналогію “сила – напруга”.

Якщо кінетична  $T$  і потенціальна  $\Pi$  енергії та функція розсіювання  $\Phi$  механічної системи з одним ступенем вільності визначаються виразами

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c q^2, \quad \Phi = \frac{1}{2} \beta \dot{q}^2, \quad (31.23)$$

то для електричного контуру з послідовним з'єднанням елементів, в якому струм, що протікає в контурі, однаковий на всіх елементах і тому може бути узагальненою координатою; відповідно кінетична (електромагнітна) і потенціальна (електростатична) енергії електричного поля та функція розсіювання енергії мають вигляд

$$\begin{aligned} T_1^e &= \frac{1}{2} L (\dot{q}^e)^2 = \frac{1}{2} L i^2; \\ \Pi_1^e &= \frac{1}{2} C (q^e)^2 = \frac{1}{2} C \left( \int i dt \right)^2; \\ \Phi_1^e &= \frac{1}{2} R (\dot{q}^e)^2 = \frac{1}{2} R i^2. \end{aligned} \quad (31.24)$$

Узагальнена сила

$$Q_1^e(t) = e(t). \quad (31.25)$$

**2. Електричний коливальний контур з паралельним з'єднанням елементів.** В електричному контурі з паралельним з'єднанням активний елемент – джерело струму  $i(t)$  і п'єсамі, що й при послідовному з'єднанні, пасивні елементи –  $R$ ,  $L$  і  $C$  (рис. 31.3).

При паралельному з'єднанні елементів має місце перший закон Кірхгофа: алгебрична сума струмів у вузлі дорівнює нулю (течію струму можна порівнювати з течією рідини, газу). Наприклад, у вузлі  $A$  (рис. 31.3) збігаються всі струми: струм джерела  $i$ , струм, що протікає відповідно через резистор  $i_R$ , через котушку  $i_L$  та через конденсатор  $i_C$ , тому

$$i_R + i_L + i_C = i. \quad (31.26)$$

При цьому напруга на затискачах  $AB$ ,  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  буде однаковою:  $U_R = U_L = U_C = U$ .

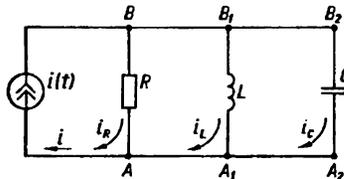


Рис. 31.3

На основі законів і співвідношень, що були виписані для кожного з пасивних елементів при послідовному з'єднанні, матимемо

$$i_R = \frac{U}{R}; \quad i_L = \int_0^t \frac{U}{L} dt, \quad (31.27)$$

$$i_C = \frac{dq^e}{dt} = \frac{d(CU)}{dt}.$$

Підставивши співвідношення (31.27) в (31.26) і здиференціювавши за часом, матимемо при  $L = \text{const}$  і  $C = \text{const}$

$$C \frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dU}{dt} + \frac{U}{L} = \frac{di}{dt}. \quad (31.28)$$

Тут узагальнена координата одна ( $q = U$ ) і тому цей контур теж має один ступінь вільності.

Порівнюючи рівняння коливального контуру (31.28) з рівнянням коливань механічної системи (31.22) з одним ступенем вільності, бачимо таку аналогію: узагальненому коефіцієнту інерції  $a$  відповідає ємність конденсатора  $C$ ; узагальненому коефіцієнту демпфірування  $\beta$  – інверсний омичний опір  $\frac{1}{R}$  (провідність); узагальненій жорсткості  $c$  – інверсна індуктивність  $\frac{1}{L}$ ; узагальненій силі

$Q(t)$  – похідна від сили струму  $\frac{di}{dt}$ ; тому в

цьому випадку говорять про аналогію “сила – струм”. Кінетична (електростатична), потенціальна (електромагнітна) енергії та функція розсіювання і узагальнена сила електрично-

Аналогові величини в електромеханічних системах з одним степенем вільності

Система	Узагальнена координата	Коефіцієнти диференціальних рівнянь			Кінетична енергія	Потенціальна енергія	Функція розштовання	Узагальнена сила
		$a$	$\beta$	$c$				
Механічна	$q$	$a$	$\beta$	$c$	$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2$	$\Pi = \frac{1}{2} c q^2$	$\Phi = \frac{1}{2} \beta \dot{q}^2$	$Q(t)$
Аналогія "сила – напруга"	$q^e$	$L$	$R$	$\frac{1}{C}$	$T_1^e = \frac{L}{2} (\dot{q}^e)^2$	$\Pi_1^e = \frac{1}{2C} (q^e)^2$	$\Phi_1^e = \frac{R}{2} (\dot{q}^e)^2$	$e(t)$
Аналогія "сила – струм"	$U$	$C$	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{L}$	$T_2^e = \frac{C}{2} U^2$	$\Pi_2^e = \frac{1}{2L} U^2$	$\Phi_2^e = \frac{1}{2R} U^2$	$\frac{di}{dt}$

го контуру з паралельним з'єднанням елементів будуть

$$T_2^e = \frac{1}{2} C \dot{U}^2; \quad \Pi_2^e = \frac{1}{2} \frac{1}{L} U^2; \\ \Phi_2^e = \frac{1}{2} \frac{1}{R} U^2; \quad Q_2^e(t) = \frac{di}{dt}. \quad (31.29)$$

Аналогові величини для систем з одним степенем вільності узагальнені в табл. 31.1.

### § 31.3. Рівняння Лагранжа – Максвелла

При дослідженні механічних систем найчастіше застосовують рівняння Лагранжа другого роду.

На практиці досить часто зустрічаються електромеханічні системи, механічний рух яких визначається силами електромагнітної природи. Максвелл у праці про електрику і магнетизм<sup>1</sup> застосував рівняння Лагранжа другого роду для дослідження системи, що містила механічні елементи і провідники зі струмом; ці провідники можуть створювати декілька індуктивно і кондуктивно зв'язаних контурів. Між тілами є сили, обумовлені механічною та електромагнітною взаємодією.

У загальному вигляді рівняння руху електромеханічної системи (рівняння Лаг-

ранжа – Максвелла) можна отримати на основі таких міркувань.

Нехай  $q_1, q_2, \dots, q_s$  – геометричні узагальнені координати,  $L_m$  – кінетичний потенціал механічної системи. Приймемо за Максвеллом як електричні координати  $q_{s+1}, q_{s+2}, \dots, q_{s+N}$  – кількість електрики (заряди), що протікає з деякого початкового моменту через поперечний переріз провідників, створюючи систему замкнених контурів. Тоді відповідні узагальнені швидкості будуть представляти контурні струми

$$i_j = \dot{q}_j, \quad j = s+1, s+2, \dots, N. \quad (31.30)$$

Електромагнітна і електростатична енергії системи відповідно

$$T_1^e = \frac{1}{2} \sum_{j,k=s+1}^N L_{jk} i_j i_k, \\ \Pi_1^e = \frac{1}{2} \sum_{j,k=s+1}^N b_{jk} q_j q_k, \quad (31.31)$$

де  $L_{jk}$  і  $b_{jk}$  – електромагнітні та електростатичні коефіцієнти індукції.

Рух системи визначається  $N$  рівняннями, з яких  $s$  рівнянь є звичайними рівняннями Лагранжа другого роду, складеними за загальним правилом для  $j = 1, 2, \dots, s$ . До цих рівнянь можуть входити і неконсервативні узагальнені сили  $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ . У цьому

<sup>1</sup>Maxwell. A Treatise on Electricity and Magnetism. – Oxford, 1873.

випадку рівняння Лагранжа другого роду матимуть вигляд

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_m}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L_m}{\partial q_j} = Q_j, \quad j=1, 2, \dots, s. \quad (31.32)$$

Необхідно скласти ще  $N-s$  електричних рівнянь. Для цього скористаємось тим, що  $\frac{\partial T_1^e}{\partial i_j}$  і  $\frac{\partial \Pi_1^e}{\partial q_j^e}$  дорівнюють відповідно потокам індукції через контури струмів  $i_j$  та напругам в їх ємностях  $U_j$ , тобто

$$\frac{\partial T_1^e}{\partial i_j} = \sum_{k=s+1}^N L_k i_k; \quad \frac{\partial \Pi_1^e}{\partial q_j^e} = U_j. \quad (31.33)$$

Позначивши через  $R_{jk}$  і  $e_j$  ( $j, k = s+1, s+2, \dots, N$ ) омичні опори і прикладені напруги (електрорушійні сили), знайдемо співвідношення, яке визначатиме втрати енергії на джоулеве тепло і роботу напруг  $e_j$ :

$$\begin{aligned} - \sum_{j,k=s+1}^N R_{jk} i_j i_k dt + \sum_{j=s+1}^N e_j i_j dt &= \\ &= \sum_{j=s+1}^N Q_{ij}^e dq_j, \end{aligned} \quad (31.34)$$

звідки, враховуючи, що  $dq_j^e = i_j dt$ , отримаємо

$$\begin{aligned} Q_{ij}^e &= - \sum_{k=s+1}^N R_{jk} i_k + e_j, \\ j &= s+1, s+2, \dots, N. \end{aligned} \quad (31.35)$$

Величини  $Q_{i(s+1)}^e, Q_{i(s+2)}^e, \dots, Q_{iN}^e$  приймемо за електричні неконсервативні сили.

Тоді рівняння Лагранжа другого роду, складені за загальним правилом для  $j = s+1, s+2, \dots, N$ , матимуть вигляд

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_1^e}{\partial i_j} \right) - \frac{\partial T_1^e}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_1^e}{\partial q_j} = Q_{ij}^e, \quad j = s+1, s+2, \dots, N$$

або, враховуючи (31.35) і те, що  $\frac{\partial T_1^e}{\partial q_j} = 0$ ,

отримаємо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_1^e}{\partial i_j} + \sum_{k=s+1}^N R_{jk} i_k + \frac{\partial \Pi_1^e}{\partial q_j^e} = e_j, \quad j = s+1, s+2, \dots, N. \quad (31.36)$$

Рівняння Лагранжа – Максвелла електро-механічної системи отримаємо тоді, коли об'єднаємо систему рівнянь (31.32) і (31.36):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_m}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L_m}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (31.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1^e}{\partial i_v} + \sum_{k=s+1}^N R_{vk} i_k + \frac{\partial \Pi_1^e}{\partial q_v^e} &= e_v, \\ v &= s+1, s+2, \dots, N. \end{aligned}$$

Неважко помітити, що в своїх міркуваннях Максвелл застосував аналогію “сила – напруга”. Очевидно, що аналогічний вигляд матимуть рівняння у випадку аналогії “сила – струм”:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_m}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L_m}{\partial q_j} = Q_j, \quad j=1, 2, \dots, s,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_2^e}{\partial U_v} + \sum_{k=s+1}^N \frac{1}{R_{vk}} \dot{U}_k + \frac{\partial \Pi_2^e}{\partial U_v} &= \frac{di_v}{dt}, \\ v &= s+1, s+2, \dots, N. \end{aligned} \quad (31.38)$$

#### § 31.4. Застосування аналогій “сила – напруга” і “сила – струм” для складання рівнянь електричних контурів з багатьма степенями вільності

**1. “Сила – напруга”.** Нехай маємо  $N$  електричних контурів, струми яких позначимо  $i_j$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ). Елементами електричного кола є: активні елементи – джерела напруги і струму; пасивні елементи – омичні опори,

катушки, конденсатори. Узагальнені координати – кількість електрики (заряди)  $q_1^e, q_2^e, \dots, q_N^e$ , узагальнені швидкості – струми  $i_1, i_2, \dots, i_N$ .

Оскільки  $i = \frac{dq^e}{dt} = \dot{q}^e$ , де  $q^e$  – кількість

електрики, що пройшла через поперечний переріз провідника з деякого початкового часу, то енергія магнітного поля такого кола визначається виразом

$$T_1^e = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N L_{jk} i_j i_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N L_{jk} \dot{q}_j^e \dot{q}_k^e, \quad (31.39)$$

де  $L_{jk}$  – індуктивності відповідних елементів кола.

Енергія електричного поля кола визначається формулою

$$\Pi_1^e = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N \frac{1}{C_{jk}} q_j^e q_k^e. \quad (31.40)$$

Втрати енергії на джоулеве тепло в колі визначаються функцією розсіювання

$$\Phi_1^e = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N R_{jk} i_j i_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N R_{jk} \dot{q}_j^e \dot{q}_k^e. \quad (31.41)$$

Узагальнена сила, що визначається дією активного елемента – джерела напруги

$$Q_1^e = \sum_{j=1}^N \delta A_j = \sum_{j=1}^N e_j i_j dt = \sum_{j=1}^N e_j dq_j^e. \quad (31.42)$$

Нагадаємо, що для механічної системи з  $N$  степенями вільності та голономними в'язями потенціальна енергія і функція розсіювання енергії мають вигляд

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k; \\ \Pi &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N c_{jk} q_j q_k; \\ \Phi &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N \beta_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \end{aligned} \quad (31.43)$$

де  $a_{jk}$  – узагальнені коефіцієнти інерції;  $c_{jk}$  – узагальнені коефіцієнти жорсткості системи;  $\beta_{jk}$  – узагальнені коефіцієнти розсіювання енергії.

Для механічної системи елементарна робота

$$\delta A = \sum_{j=1}^N Q_j \delta q_j. \quad (31.44)$$

Як відомо, рівняння механічної системи з  $N$  степенями вільності має вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} + Q_j, \\ j = 1, 2, \dots, N,$$

або з урахуванням (31.43)

$$\sum_{k=1}^N (a_{jk} \ddot{q}_k + \beta_{jk} \dot{q}_k + c_{jk} q_k) = Q_j, \\ j = 1, 2, \dots, N. \quad (31.45)$$

Для електричної системи матимемо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi_1^e}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \Pi_1^e}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Phi_1^e}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi_1^e}{\partial \dot{q}_j} + e_j, \\ j = 1, 2, \dots, N,$$

а з урахуванням (31.39), (31.40) і (31.41) отримаємо

$$\sum_{k=1}^N \left( L_{jk} \ddot{q}_k + R_{jk} \dot{q}_k + \frac{1}{C_{jk}} q_k \right) = e_j, \\ j = 1, 2, \dots, N. \quad (31.46)$$

Рівняння (31.45) описує механічну систему з  $N$  степенями вільності, а (31.46) – коливання  $N$ -контурної електричної системи і виражає другий закон Кірхгофа: алгебрична сума електрорушійної сили ( $e_j$ ) в будь-якому контурі кола дорівнює алгебричній сумі падінь напруг на елементах цього контуру.

У системах (31.45) і (31.46) коефіцієнтам інерції  $a_{jk}$  відповідають індуктивності  $L_{jk}$ ;

коефіцієнтам розсіювання енергії  $\beta_{jk}$  – омичні опори  $R_{jk}$ ; коефіцієнтам жорсткості  $c_{jk}$  – обернені ємності  $\frac{1}{C_{jk}}$ ; узагальненим силам  $Q_j$  – електрорушійні сили  $e_j$ ; узагальненим координатам  $q_j$  – кількість електрики (заряди)  $q_j^e$ .

2. “Сила – струм”. Ця аналогія побудована на використанні першого закону Кірхгофа: *алгебрична сума струмів, що збігаються у вузлі, дорівнює нулю*.

Розглянемо лінійне електричне коло з  $N$  парами вузлів. За узагальнену електричну координату приймемо напругу  $U$ . В цьому випадку, згідно з § 31.2 для системи з одним степенем вільності, вирази (31.29) для електростатичної ( $T_2^e$ ) та електромагнітної енергії ( $\Phi_2^e$ ) і функції розсіювання ( $\Phi_2^e$ ) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} T_2^e &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N C_{jk} \dot{U}_j \dot{U}_k; \\ \Phi_2^e &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N \frac{1}{L_{jk}} U_j U_k; \\ \Phi_2^e &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N \frac{1}{R_{jk}} \dot{U}_j \dot{U}_k. \end{aligned} \quad (31.47)$$

Узагальненою силою є похідна  $\frac{di}{dt}$ . У цьому випадку рівняння Лагранжа – Максвелла для електричного кола з  $N$  парами вузлів набуде вигляду

$$\sum_{k=1}^N \left( C_{jk} \ddot{U}_k + \frac{1}{R_{jk}} \dot{U}_k + \frac{1}{L_{jk}} U_k \right) = \frac{di_j}{dt}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (31.48)$$

Порівнюючи рівняння (31.48) і (31.45), бачимо, що при аналогії “сила – струм” коефіцієнтами інерції  $a_{jk}$  відповідають коефі-

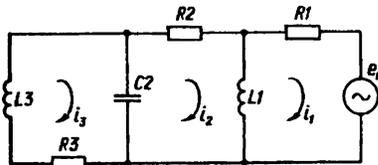


Рис. 31.4

цієнти ємності конденсатора  $C_{jk}$ ; коефіцієнтам розсіювання енергії  $\beta_{jk}$  – обернені опори  $\frac{1}{R_{jk}}$  (провідності); коефіцієнтам жорсткості  $c_{jk}$  – обернені індуктивності  $\frac{1}{L_{jk}}$ ; узагальненим силам  $Q_j$  – похідні  $\frac{di_j}{dt}$  (швидкості зміни сили струмів).

Як бачимо, електричні кола з послідовним з’єднанням елементів (рис. 31.2) і паралельним з’єднанням елементів (рис. 31.3) є аналогом однієї й тієї самої механічної системи. Це означає, що кожній ланці з паралельним з’єднанням елементів можна поставити у відповідність ланку з послідовним з’єднанням відповідних елементів.

Такі електричні ланки, які є аналогом однієї й тієї самої механічної системи, називають *дуальними*.

**Приклад 1.** Застосовуючи рівняння Лагранжа – Максвелла, скласти контурні рівняння для електричного кола за аналогією “сила – напруга”. Усі дані наведені на рис. 31.4;  $e_1 = A \sin \omega t$ .

Розв’язання. Розглядуване коло має три контури – три степеня вільності. За узагальнені координати приймемо кількості електрики  $q_1^e, q_2^e, q_3^e$  і відповідні їм узагальнені швидкості  $i_1, i_2, i_3$ . Складемо рівняння цього кола у вигляді

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_1^e}{\partial \dot{q}_j^e} - \frac{\partial T_1^e}{\partial q_j^e} = - \frac{\partial \Phi_1^e}{\partial q_j^e} - \frac{\partial \Phi_2^e}{\partial q_j^e} + e_j(t), \quad j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

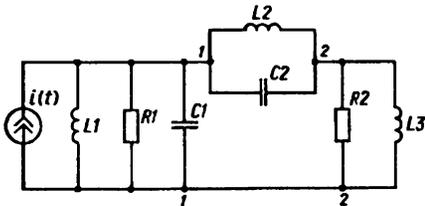


Рис. 31.5

У даному випадку маємо

$$e_1 = A \sin \omega t, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 0;$$

$$T_1^e = \frac{1}{2} L_1 (\dot{q}_1^e - \dot{q}_2^e)^2 + \frac{1}{2} (\dot{q}_3^e)^2;$$

$$\Pi_1^e = \frac{1}{2} C_2 (q_2^e - q_3^e)^2;$$

$$\Phi_1^e = \frac{1}{2} R_1 (\dot{q}_1^e)^2 + \frac{1}{2} R_2 (\dot{q}_2^e)^2 + \frac{1}{2} R_3 (\dot{q}_3^e)^2. \quad (2)$$

Підставивши (2) в (1), отримаємо три диференціальні рівняння - контурні рівняння даного кола:

$$L_1 \ddot{q}_1^e - L_1 \ddot{q}_2^e + R_1 \dot{q}_1^e = A \sin \omega t,$$

$$-L_1 \ddot{q}_1^e + L_1 \ddot{q}_2^e + R_2 \dot{q}_2^e + \frac{1}{C_2} q_2^e - \frac{1}{C_2} q_3^e = 0,$$

$$L_3 \ddot{q}_3^e + R_3 \dot{q}_3^e - \frac{1}{C_2} q_2^e + \frac{1}{C_2} q_3^e = 0. \quad (3)$$

Ці самі рівняння можуть бути отримані за допомогою застосування другого закону Кірхгофа (методом контурних струмів), як це прийнято в курсі "Теоретичні основи електротехніки" (ТОЕ).

**Приклад 2.** Застосовуючи аналогію "сила - струм", на основі рівнянь Лагранжа - Максвелла скласти контурні рівняння для електричного кола, зображеного на рис. 31.5.

**Розв'язання.** Це коло має дві пари вузлів 1-1, 2-2, тобто два степеня вільності.

За узагальнені координати приймемо напруги  $U_1$  і  $U_2$ . Рівняння Лагранжа - Максвелла для цього кола мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_2^e}{\partial U_j} - \frac{\partial T_2^e}{\partial U_j} = - \frac{\partial \Pi_2^e}{\partial U_j} - \frac{\partial \Phi_2^e}{\partial U_j} + \frac{d i_j}{dt}, \quad j=1, 2. \quad (1)$$

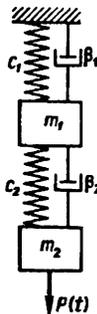


Рис. 31.6

Енергія електричного поля  $T_2^e$ , магнітного поля  $\Pi_2^e$  і функція розсіювання енергії відповідно дорівнюють

$$T_2^e = \frac{1}{2} C_1 \dot{U}_1^2 + \frac{1}{2} C_2 (\dot{U}_1 - \dot{U}_2)^2;$$

$$\Pi_2^e = \frac{1}{2} \frac{1}{L_1} U_1^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{L_2} (U_1 - U_2)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{L_3} U_2^2;$$

$$\Phi_2^e = \frac{1}{2} \frac{1}{R_1} \dot{U}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{R_2} \dot{U}_2^2. \quad (2)$$

Підставивши (2) в (1), матимемо

$$\begin{aligned} & (C_1 + C_2) \ddot{U}_1 - C_2 \ddot{U}_2 + \frac{1}{R_1} \dot{U}_1 + \\ & + \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) U_1 - \frac{1}{L_2} U_2 = \frac{d i_1}{dt}; \\ & -C_2 \ddot{U}_1 + C_2 \ddot{U}_2 + \frac{1}{R_2} \dot{U}_2 - \frac{1}{L_2} U_1 + \\ & + \left( \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \right) U_2 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Ці самі рівняння (3) можна отримати, застосовуючи прийнятий в ТОЕ метод вузлових потенціалів, який є наслідком закону Ома і першого закону Кірхгофа.

**Приклад 3.** Скласти рівняння коливань двох тягарів масами  $m_1$  і  $m_2$ , що з'єднані між собою так, як показано на рис. 31.6. До маси  $m_2$  прикладена сила збурення  $P(t)$ . Жорсткості пружин

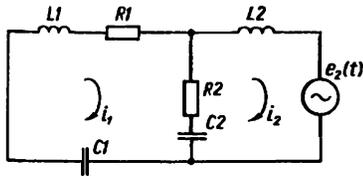


Рис. 31.7

$c_1$  і  $c_2$ , а коефіцієнти демпфування  $\beta_1$  і  $\beta_2$ . Потім, застосовуючи аналогії “сила – напруга” і “сила – струм”, отримаємо диференціальні рівняння електричних кіл – аналогів цієї механічної системи.

**Розв’язання.** Ця механічна система має два степеня вільності. За узагальнені координати приймемо відхилення  $x_1$  і  $x_2$  тягарів від положення рівноваги.

Кінетична і потенціальна енергії та функція розсіювання відповідно

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2; \\ \Pi &= \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (x_1 - x_2)^2; \\ \Phi &= \frac{1}{2} \beta_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \beta_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Рівняння Лагранжа мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_1} &= 0; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_2} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Підставивши (1) в (2), маємо

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (\beta_1 + \beta_2) \dot{x}_1 + (c_1 + c_2) x_1 - \beta_2 \dot{x}_2 - c_2 x_2 &= 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + \beta_2 \dot{x}_2 + c_2 x_2 - \beta_2 \dot{x}_1 - c_2 x_1 &= F(t). \end{aligned} \quad (3)$$

За аналогією “сила – напруга”, користуючись табл. 31.1, отримаємо такі диференціальні рівняння електричних коливальних:

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{q}_1 + (R_1 + R_2) \dot{q}_1 + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) q_1 - R_2 \dot{q}_2 - \frac{1}{C_2} q_2 &= 0; \\ L_2 \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{C_2} q_2 - R_2 \dot{q}_1 - \frac{1}{C_2} q_1 &= e_2(t), \end{aligned} \quad (4)$$

де  $q_1^e$ ,  $q_2^e$  – кількості електрики,  $\dot{q}_1^e = i_1$ ,  $\dot{q}_2^e = i_2$ .

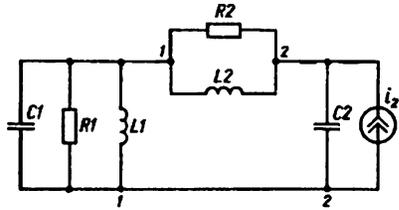


Рис. 31.8

Неважко переконатися, що рівняння (4) описують коливальне коло, зображеного на рис. 31.7.

Значимо, що це електричне коло зручніше будувати не за допомогою рівнянь (4), а за виразами для енергії магнітного  $T_1^e$ , електростатичного  $\Pi_1^e$  поля і функції розсіювання:

$$T_1^e = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2, \text{ звідки знаходимо індуктивності в кожному контурі;}$$

$$\Pi_1^e = \frac{1}{2} C_1 (q_1^e)^2 + \frac{1}{2} C_2 (q_2^e - q_1^e)^2, \text{ звідки маємо ємність } C_1 \text{ першого контуру і ємність } C_2,$$

що є спільною для обох контурів;

$$\Phi_1^e = \frac{1}{2} R_1 i_1^2 + \frac{1}{2} R_2 (i_1 - i_2)^2, \text{ звідки отримаємо опір } R_1 \text{ першого контуру і } R_2 - \text{спільний опір}$$

для обох контурів.

За аналогією “сила – струм” матимемо такі вирази  $T_2^e$ ,  $\Pi_2^e$ ,  $\Phi_2^e$ ,  $\mathcal{Q}_2^e$ :

$$\begin{aligned} T_2^e &= \frac{1}{2} C_1 \dot{U}_1^2 + \frac{1}{2} C_2 \dot{U}_2^2; \\ \Pi_2^e &= \frac{1}{2} L_1 U_1^2 + \frac{1}{2} L_2 (U_1 - U_2)^2; \\ \Phi_2^e &= \frac{1}{2} R_1 \dot{U}_1^2 + \frac{1}{2} R_2 (\dot{U}_1 - \dot{U}_2)^2; \\ \mathcal{Q}_2^e &= \frac{d}{dt} i(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Виразу (5) можна поставити у відповідність таке електричне коло (рис. 31.8) з двома парами вузлів 1–1 і 2–2.

**Приклад 4.** Скласти рівняння і побудувати аналогове електричне коло за схемою “сила – напруга” для механічної системи, що складається з двох паралельних валів з насадженими на них

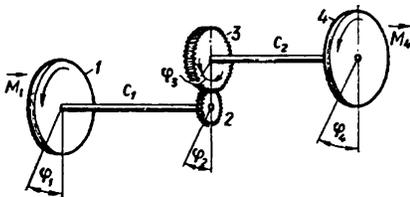


Рис. 31.9

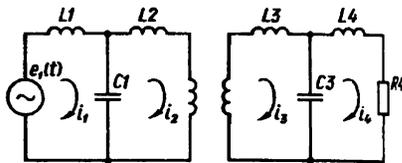


Рис. 31.10

шківми 1, 4 (рис. 31.9). Вали з'єднані між собою зубчастою передачею за допомогою коліс 2 і 3 з передаточним числом  $i_{32} = \frac{z_3}{z_2}$ , де  $z_2, z_3$  – кількість зубців. До шківа 1 прикладено обертальний момент  $M_1 = \text{const}$ , а до шківа 4 – момент опору  $M_4 = \beta_4 \phi_4$ . Жорсткість валів на скручування  $c_1$  і  $c_2$ . Осьові моменти інерції шківів і коліс зубчастої передачі відносно осі обертання відповідно дорівнюють  $I_1, I_2, I_3, I_4$ . Масамаи валів знехтувати.

Розв'язання. За узагальнені координати механічної системи приймемо кути поворотів шківів і зубчастих коліс  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ .

Кінетична і потенціальна енергії та функція розсіювання для цієї механічної системи відповідно

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \dot{\phi}_1^2 + I_2 \dot{\phi}_2^2 + I_3 \dot{\phi}_3^2 + I_4 \dot{\phi}_4^2);$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 (\phi_1 - \phi_2)^2 + \frac{1}{2} c_2 (\phi_3 - \phi_4)^2; \quad (1)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \beta_4 \phi_4^2.$$

Узагальнені сили – скручувальні моменти

$$Q_1 = M_1, \quad Q_2 = -M_2, \quad Q_3 = M_3, \quad Q_4 = 0, \quad (2)$$

де  $M_2$  і  $M_3$  – скручувальні моменти, що діють на відповідні шестірні коліс 2 та 3 і, оскільки колове зусилля в точці дотику однакове і дорівнює силі  $F_3$ , то

$$M_2 = F_3 R_2 \quad \text{і} \quad M_3 = F_3 R_3. \quad (3)$$

Звідси

$$\frac{M_3}{M_2} = \frac{R_3}{R_2} = \frac{z_3}{z_2} = i_{32}. \quad (4)$$

З урахуванням цього, рівняння механічної системи такі:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\phi}_1 + c_1 (\phi_1 - \phi_2) &= M_1; \\ I_2 \ddot{\phi}_2 - c_1 (\phi_1 - \phi_2) &= -M_2; \\ I_3 \ddot{\phi}_3 + c_2 (\phi_3 - \phi_4) &= M_3; \\ I_4 \ddot{\phi}_4 + \beta_4 \phi_4 - c_2 (\phi_3 - \phi_4) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

У системі рівнянь (5) наявність редуктора (зубчастого зчеплення коліс 2 і 3) потрібно враховувати, доповнивши її співвідношенням

$$\frac{\ddot{\phi}_2}{\dot{\phi}_3} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{z_3}{z_2} = -i_{32}. \quad (6)$$

Складемо тепер аналогове рівняння. Але спочатку потрібно знайти аналог зубчастої передачі. Таким аналогом є ідеальний трансформатор, який має такі властивості: відношення первинної напруги до вторинної на записках трансформатора дорівнює відношенню сили вторинного струму до первинної і визначається коефіцієнтом трансформання. Ідеальний трансформатор не має втрат і при розімкненій вторинній обмотці через її первинну обмотку струм не проходить.

За системою аналогій “сила – напруга”

$$\frac{M_3}{M_2} = \frac{e_3}{e_2} = i_{32}. \quad (7)$$

Враховуючи, що за цією аналогією моментам інерції відповідають індуктивності, коефіцієнтам жорсткості на скручування – інверсні смності, узагальненим координатам – кількість електрики, контурні рівняння матимуть вигляд

$$L_1 \ddot{q}_1^e + \frac{1}{C_1} (q_1^e - q_2^e) = e_1;$$

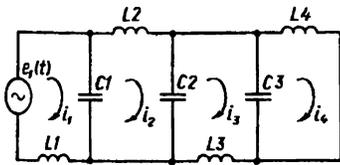


Рис. 31.11

$$L_2 \ddot{q}_2^e - \frac{1}{C_1} (q_1^e - q_2^e) = -e_2;$$

$$L_3 \ddot{q}_3^e + \frac{1}{C_2} (q_2^e - q_3^e) = e_3; \quad (8)$$

$$L_4 \ddot{q}_4^e + R_4 \dot{q}_4^e - \frac{1}{C_2} (q_3^e - q_4^e) = 0.$$

Якщо врахувати вираз (7), то система рівнянь (8) описує коливання електричного кола, показаного на рис. 31.10.

**Приклад 5.** Для заданого електричного кола (рис. 31.11) побудувати механічні системи, які є аналогами електричної.

**Розв'язання.** Розглядуване електричне коло має чотири степеня вільності; за узагальнені координати візьмемо кількості електрики (заряди)  $q_1^e, q_2^e, q_3^e, q_4^e$ , тоді узагальненими швидкостями будуть сили струмів  $i_1, i_2, i_3, i_4$  в контурах.

Обчислимо енергію магнітного поля  $T_1^e$  і енергію електричного поля  $\Pi_1^e$  (функція розсіювання енергії  $\Phi_1^e$  дорівнює нулю, бо в схемі немає омичних опорів):

$$\begin{aligned} T_1^e &= \frac{1}{2} \left[ L_1 (\dot{q}_1^e)^2 + L_2 (\dot{q}_2^e)^2 + L_3 (\dot{q}_3^e)^2 + L_4 (\dot{q}_4^e)^2 \right]; \\ \Pi_1^e &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{C_1} (q_1^e - q_2^e)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{C_2} (q_2^e - q_3^e)^2 + \frac{1}{C_3} (q_3^e - q_4^e)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Відповідні рівняння Лагранжа – Максвелла після підстановки в них (1) будуть

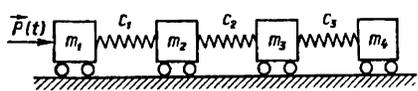


Рис. 31.12

$$M_1 \ddot{q}_1^e + \frac{1}{C_1} (q_1^e - q_2^e) = e_1(t);$$

$$M_2 \ddot{q}_2^e - \frac{1}{C_1} (q_1^e - q_2^e) + \frac{1}{C_2} (q_2^e - q_3^e) = 0; \quad (2)$$

$$M_3 \ddot{q}_3^e - \frac{1}{C_2} (q_2^e - q_3^e) + \frac{1}{C_3} (q_3^e - q_4^e) = 0;$$

$$M_4 \ddot{q}_4^e - \frac{1}{C_3} (q_3^e - q_4^e) = 0.$$

Враховуючи, що індуктивності  $L$  (див. табл. 31.1) відповідає узагальнений коефіцієнт інерції  $a$ , який може бути масою при поступальних коливаннях або моментом інерції при кутових коливаннях, інверсійній смістості – узагальнена жорсткість (лінійна чи жорсткість на скручування), отримасмо дві системи рівнянь коливання – поступальних і кутових.

Отже, рівняння поступальних коливань матимуть вигляд

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 (x_1 - x_2) = P_1(t);$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_1 (x_1 - x_2) + c_2 (x_2 - x_3) = 0;$$

$$m_3 \ddot{x}_3 - c_2 (x_2 - x_3) + c_3 (x_3 - x_4) = 0;$$

$$m_4 \ddot{x}_4 - c_3 (x_3 - x_4) = 0, \quad (3)$$

а рівняння крутильних коливань дисків в пружному валу –

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1^{\text{кр}} (\varphi_1 - \varphi_2) = M_1(t);$$

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 - c_1^{\text{кр}} (\varphi_1 - \varphi_2) + c_2^{\text{кр}} (\varphi_2 - \varphi_3) = 0;$$

$$I_3 \ddot{\varphi}_3 - c_2^{\text{кр}} (\varphi_2 - \varphi_3) + c_3^{\text{кр}} (\varphi_3 - \varphi_4) = 0;$$

$$I_4 \ddot{\varphi}_4 - c_3^{\text{кр}} (\varphi_3 - \varphi_4) = 0, \quad (4)$$

де  $c_1^{\text{кр}}, c_2^{\text{кр}}, c_3^{\text{кр}}$  – жорсткості на скручування.

Системі рівнянь (3) відповідає така механічна система (зв'язка вагонів – потяг) (рис. 31.12) або система крутильних коливань, що зображена на рис. 31.13.

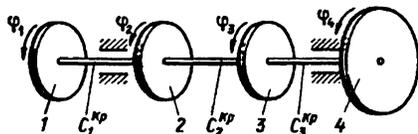


Рис. 31.13

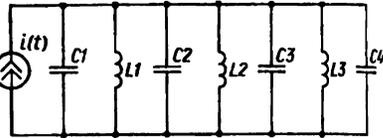


Рис. 31.14

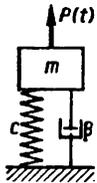


Рис. 31.15

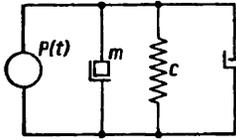


Рис. 31.16

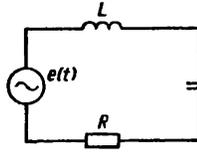


Рис. 31.17

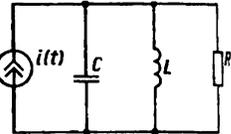


Рис. 31.18

Для обох механічних систем (рис. 31.12, 31.13) можна навести аналог електричного кола за схемою “сила – струм”. Відповідні рівняння руху має вигляд

$$C_1 \ddot{U}_1 + \frac{1}{L_1}(U_1 - U_2) = \frac{di}{dt};$$

$$C_2 \ddot{U}_2 - \frac{1}{L_1}(U_1 - U_2) + \frac{1}{L_2}(U_2 - U_3) = 0;$$

$$C_3 \ddot{U}_3 - \frac{1}{L_2}(U_2 - U_3) + \frac{1}{L_3}(U_3 - U_4) = 0;$$

$$C_4 \ddot{U}_4 - \frac{1}{L_3}(U_3 - U_4) = 0$$

і схема цього кола показана на рис. 31.14.

Очевидно, що схема кола (рис. 31.10, 31.14) еквівалентні з точки зору диференціальних рівнянь і коливальних процесів. Перше коло (рис. 31.10) – це коло з активним елементом – електрорушійною силою  $e_1(t)$ , а друге (рис. 31.14) – це коло з активним елементом – джерелом струму  $i(t)$ .

Як бачимо, з допомогою табл. 31.1 і виразів для енергії електромагнітного та електростатичного полів і функції розсіювання зручно розв'язувати задачі про еквівалентні перетворення електричних схем з активними елементами – джерелами електрорушійних сил  $e(t)$  до схем кіл з активними елементами – джерелами струмів  $i(t)$ .

### § 31.5. Побудова електричних моделей-аналогів механічних систем

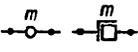
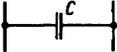
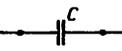
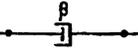
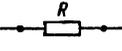
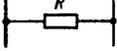
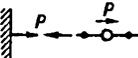
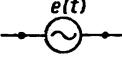
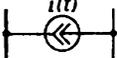
Для побудови електричних кіл – аналогів механічних систем і навпаки зручно ввести поняття механічних ланок і всі елементи електричних і механічних систем подати у вигляді двополосників.

У табл. 31.2 наведено електричні двополосники механічної системи і відповідні їм двополосники електричних кіл за аналогією “сила – напруга” і “сила – струм”.

Представляючи механічну систему у формі механічної ланки, полюси двополосників, що рухаються разом, з'єднують у спільні вузли, а полюси, що залишаються нерухомими відносно системи відліку, приєднують до землі або нерухомої опори. Наприклад, для механічної системи з одним ступенем вільності (рис. 31.15) механічна ланка показана на рис. 31.16.

Користуючись табл. 31.2 і застосовуючи аналогію “сила – напруга”, модель-аналог зображено на рис. 31.17, а модель-аналог “сила – струм” – на рис. 31.18. Кола, що зображені на рис. 31.17 і 31.18, є дуальними.

У цьому прикладі механічна система є найпростішою, бо це система з одним сте-

Механічні двополюсники	Електричні двополюсники	
	аналогії "сила – напруга" (послідовне з'єднання)	аналогії "сила – струм" (паралельне з'єднання)
		
		
		
		

пенем вільності, але вона є основою для побудови більш складних систем.

На рис. 31.19, а, б показана механічна система з двома степенями вільності та відповідна їй механічна ланка (рис. 31.19, б).

Відповідні даній механічній системі електричні моделі-аналогії за схемою "сила – напруга" і "сила – струм" показані відповідно на рис. 31.20, а, б.

Зрозуміло, що ця методика дає можливість без будь-яких труднощів з допомогою табл. 31.2 виконувати й обернену задачу – від електричних кіл переходити до механічних.

Зазначимо, що за структурою графічного зображення механічна ланка і модель-аналог "сила – струм" повністю збігаються.

### § 31.6. Електромеханічні системи з двома і більше степенями вільності

У цьому розділі розглянемо електромеханічні системи, в яких є механічні та електричні степені вільності. Зрозуміло, що електромеханічна система має найменше число степенів вільності – це два степеня вільності: електричний і механічний.

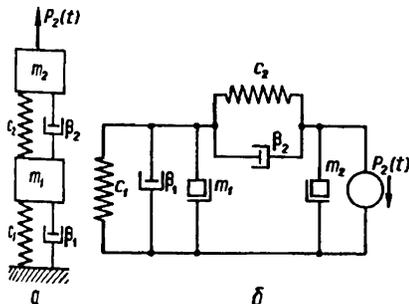


Рис. 31.19

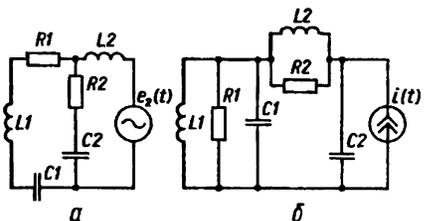


Рис. 31.20

Взаємозв'язок між механічною і електричною ланками відбувається, як правило, через залежність електричної ланки (струм у контурі, потенціал вузла тощо) від механічних переміщень (лінійних переміщень, кутів повороту) тих чи інших рухомих елементів системи.

Для розв'язання конкретних задач доцільно вписати деякі залежності електродинаміки.

Сила, що діє на заряджену матеріальну точку, яка рухається в електромагнітному полі, залежить від величини заряду  $q^e$ , швидкості точки  $\vec{v}$ , напруженості  $\vec{E}$  електричного та індукції  $\vec{B}$  магнітного полів.

При позитивному заряді

$$\vec{F} = q^e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (31.49)$$

Якщо поле створюється точковим зарядом  $q^e$ , то його напруженість  $E$  визначається в СІ на основі закону Кулона

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q^e}{r^2}, \quad (31.50)$$

де  $\epsilon$  – відносна діелектрична проникність середовища.

Електричні поля точкових зарядів є сферично симетричними і задовольняють принцип суперпозиції (ефект від суми дорівнює сумі ефектів). Напруженість поля, що створюється кількома зарядами, дорівнює сумі напруженостей, які створюються кожним зарядом окремо.

Електричне поле між двома зарядженими паралельними пластинками є однорідним, тобто напруженість у будь-якій точці між пластинками дорівнює

$$E = \frac{U}{d}, \quad (31.51)$$

де  $U$  – різниця потенціалів;  $d$  – відстань між пластинками.

Основним елементом електромеханічних систем є провідники зі струмом, що

рухаються в електромагнітному полі. При цьому сила, що діє на рухомий провідник зі струмом у магнітному полі, визначається законом Ампера, який для рівномірного поля ( $\vec{B} = \overline{\text{const}}$ ) має вигляд

$$\vec{F} = (\vec{i} \times \vec{B})l. \quad (31.52)$$

Як бачимо, напрямок цієї сили визначається за правилом лівої руки (або за правилом гвинта, або за правилом Жуковського, як для гіроскопія).

У системах магнітоелектричного типу важливу роль відіграє слектрорушійна сила (ЕРС) індукції. Якщо провідник завдовжки  $l$  переміщується в рівномірному магнітному полі перпендикулярно до вектора індукції  $\vec{B}$ , то наведена ЕРС індукції визначається за формулою

$$E_{\text{инд}} = Blv. \quad (31.53)$$

Напрямок  $E_{\text{инд}}$  визначається за правилом правої руки.

Перетворення енергії коливальних процесів в електромеханічних системах відбувається відповідно до першого принципу термодинаміки, який є узагальненим законом збереження енергії.

Між механічними та електричними змінними системи встановлюються залежності, які є рівняннями в'язей.

Для визначення залежності між параметрами електромеханічної системи та отримання диференціальних рівнянь руху такої системи використовують рівняння Лагранжа – Максвелла, що мають енергетичну основу. Зрозуміло, що ці рівняння можна записувати у формі рівнянь Лагранжа з додатковими в'язями.

Приступаючи до складання рівнянь Лагранжа – Максвелла, потрібно встановити спочатку кількість степенів вільності та вибрати узагальнені координати як механічної, так і електричної частини системи.

Кінетичну і потенціальну енергії та функцію розсіювання потрібно визначати як суми енергії і функцій розсіювання механічної та електричної частин системи.

Неконсервативні узагальнені сили потрібно визначати, обчислюючи елементарну роботу, що виконується ньютонівськими й електрорушійними силами, що діють на систему.

Підставивши в рівняння Лагранжа – Максвелла значення всіх частинних похідних, а також усі узагальнені сили, отримаємо диференціальні рівняння руху електро-механічної системи. Число диференціальних рівнянь другого порядку дорівнює числу степенів вільності.

Покажемо на прикладах методику застосування рівнянь Лагранжа – Максвелла для складання рівнянь руху електромеханічних систем.

**Приклад 6.** Якір масою  $m$  з'єднується з корпусом магніту двома пружинами жорсткості  $c$ . Індуктивність котушки  $L = L(x)$  залежить від переміщення якоря  $x$  від положення рівноваги. До котушки прислано електричне коло, яке складається з омичного опору  $R$  і джерела ЕРС  $e$ . Скласти рівняння руху електромагнітного вимірювача прискорення, схема якого показана на рис. 31.21.

Розв'язання. Застосуємо рівняння Лагранжа – Максвелла. Система має два степені вільності. За узагальнені координати приймемо переміщення якоря  $x$  і заряд  $q^e$ , якому відповідає узагальнена швидкість – струм  $i$  в колі (аналогія "сила – напрута").

Обчислимо кінетичну і потенціальну енергії системи. Кінетична енергія системи  $T$  дорівнює сумі кінетичної енергії якоря  $T_M$  і енергії  $T_1^e$  магнітного поля, тобто

$$T = T_M + T_1^e = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L(x) (\dot{q}^e)^2. \quad (1)$$

Потенціальна енергія теж дорівнює сумі енергій

$$\Pi = \Pi_M + \Pi_1^e = 2 \frac{cx^2}{2} - mgx, \quad (2)$$

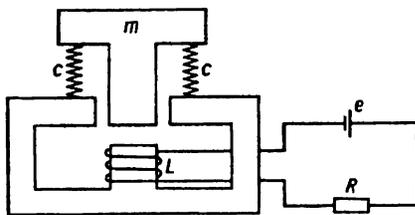


Рис. 31.21

де  $\Pi_1^e = 0$ , оскільки в системі немає конденсаторів.

Функція розсіювання в системі визначається тільки розсіюванням енергії на омичному опорі  $R$ :

$$\Phi = \Phi_1^e = \frac{1}{2} Ri^2 = \frac{1}{2} R (\dot{q}^e)^2. \quad (3)$$

Узагальнені неконсервативні сили

$$Q_x = 0, \quad Q_{q^e} = e. \quad (4)$$

Рівняння Лагранжа – Максвелла мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} + Q_x, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^e} - \frac{\partial T}{\partial q^e} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial q^e} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}^e} + Q_{q^e}. \end{aligned} \quad (5)$$

Підставляючи співвідношення (1) – (4) в рівняння (5), отримаємо

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial x} (\dot{q}^e)^2 + 2cx &= mg, \\ L(x)\ddot{q}^e + \dot{q}^e \dot{x} \frac{\partial L}{\partial x} + R\dot{q}^e &= e. \end{aligned} \quad (6)$$

**Приклад 7.** Конденсаторний мікрофон складається з послідовно з'єднаних котушки індуктивності  $L$ , резистора  $R$  і конденсатора  $C$  (рис. 31.22). Ланка прислана до джерела з постійною ЕРС –  $e$ . Одна з пластин конденсатора є нерухомою, а на рухому діє змінна сила тиску  $P(t)$ . Рухомі пластини масою  $m$  з'єднані з нерухомою за допомогою двох пружин жорсткості  $c$ . Ємність конденсатора в положенні рівноваги  $C_0$ , а відстань між пластинами в цьому положенні  $a$ . Скласти рів-

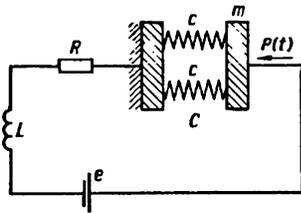


Рис. 31.22

няння руху цієї електромеханічної системи на базі рівнянь Лагранжа – Максвелла і дослідити стійкість системи.

Розв'язання. За узагальнені координати прийемо заряд  $q^e$  і переміщення рухомої пластини  $x$  із положення рівноваги.

У положенні рівноваги діють дві рівні за величиною, але протилежно напрямлені сили. Одна – це сила, з якою притягується рухома пластина конденсатора до нерухомої, а друга сила, яка її врівноважує – це сила пружин, що здеформовані на величину  $x_0$ . Тому ця сила має величину  $2cx_0$ . У положенні рівноваги, коли відстань між пластинами дорівнює  $a$ , ємність конденсатора  $C_0$  буде

$$C_0 = \frac{\epsilon S}{a},$$

де  $\epsilon$  – діелектрична проникність,  $S$  – площа пластин.

Якщо  $x$  задати таким чином, що  $x > 0$ , коли пластини зближуються, то поточне значення ємності  $C$  дорівнюватиме

$$C = \frac{\epsilon S}{a-x} = \frac{\epsilon S}{a\left(1-\frac{x}{a}\right)} = \frac{C_0}{1-\frac{x}{a}} = \frac{C_0 a}{a-x}. \quad (1)$$

У положенні рівноваги, якщо  $x = 0$ , заряд  $q^e = q_0^e$ , а поточне значення повного заряду  $q^e$  позначимо так:

$$q^e = q_0^e + y. \quad (2)$$

Тоді кінетична і потенціальна енергії системи та функція розсіювання енергії, з урахуванням (1) і (2), відповідно дорівнюватимуть

$$T = T_m + T_1^e = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L (\dot{q}^e)^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L \dot{y}^2,$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_m + \Pi_1^e = 2 \frac{1}{2} c (x+x_0)^2 + \frac{1}{2C} (q^e)^2 = \\ &= c (x+x_0)^2 + \frac{1}{2C_0 a} (q_0^e + y)^2 (a-x), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Phi = \Phi_1^e = \frac{1}{2} R (\dot{q}^e)^2 = \frac{1}{2} R \dot{y}^2.$$

Узагальнені сили

$$Q_x = P(t), \quad Q_{q^e} = e. \quad (4)$$

Рівняння Лагранжа – Максвелла для цієї системи мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q_x, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^e} - \frac{\partial T}{\partial q^e} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial q^e} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}^e} + Q_{q^e}. \end{aligned} \quad (5)$$

Урахувавши співвідношення (2) – (4) і те, що  $\dot{q}^e = \dot{y}$ , матимемо

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m \dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x} &= 2c(x+x_0) - \frac{(q_0^e + y)^2}{2C_0 a}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^e} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = L \dot{q}^e = L \dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial q^e} = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial q^e} &= \frac{q_0^e + y}{C_0 a} (a-x), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}^e} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}} = R \dot{q}^e = R \dot{y}. \end{aligned} \quad (6)$$

Перш ніж підставити співвідношення (6) в рівняння Лагранжа – Максвелла (5), потрібно врахувати, що в положенні рівноваги при  $t=0$   $x=0$ ,  $y=0$ ,  $C=C_0$ ,  $(Q_x)_0 = P(0) = 0$ ,  $(Q_{q^e})_0 = e$  і узагальнені сили дорівнюють нулю:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)_0 + (Q_x)_0 &= 0, \\ \left(-\frac{\partial \Pi}{\partial q^e}\right)_0 + (Q_{q^e})_0 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Отже, рівняння (7) мають вигляд

$$\begin{aligned} -2cx_0 + \frac{(q_0^e)^2}{2C_0a} &= 0, \\ -\frac{q_0^e}{C_0} + e &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Звідси

$$\begin{aligned} e &= \frac{q_0^e}{C_0}, \\ 2cx_0 &= \frac{(q_0^e)^2}{2C_0a} = \frac{q_0^e}{2a} e. \end{aligned} \quad (9)$$

З урахуванням співвідношень (8) і (3) праві частини рівнянь (5) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q_x &= -2cx + \frac{2q_0^e y + y^2}{2C_0a} + P(t), \\ -\frac{\partial \Pi}{\partial q^e} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}^e} + Q_{q^e} &= \frac{q_0^e x - ay + xy}{C_0a} - R\dot{y}. \end{aligned} \quad (10)$$

Підставивши тепер (6) в рівняння (5), з урахуванням (10), отримаємо

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -2cx + \frac{q_0^e}{C_0a} y + \frac{y^2}{2C_0a} + P(t), \\ L\ddot{y} &= -\frac{y}{C_0} + \frac{q_0^e}{C_0a} x + \frac{xy}{C_0a} - R\dot{y}. \end{aligned} \quad (11)$$

Оскільки  $e = \frac{q_0^e}{C_0}$ , то рівняння (11) можна переписати у формі

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + 2cx - \frac{e}{a} y - \frac{y^2}{2C_0a} &= P(t), \\ L\ddot{y} + R\dot{y} + \frac{y}{C_0} - \frac{e}{a} x - \frac{xy}{C_0a} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Нелінійні рівняння (12) описують коливання в цій електромеханічній системі.

Для дослідження стійкості лінеаризуємо це рівняння (12), враховуючи що  $x$  і  $y$  є малими

величинами  $x \ll a$ , а  $y \ll q_0^e$ . Лінеаризовані рівняння матимуть вигляд

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + 2cx - \frac{e}{a} y &= P(t), \\ -\frac{e}{a} x + L\ddot{y} + R\dot{y} + \frac{y}{C_0} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Звідси характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} m(p^2 + \omega_{10}^2) & -\frac{e}{a} \\ -\frac{e}{a} & L(p^2 + 2h_R p + \omega_{20}^2) \end{vmatrix} = 0, \quad (14)$$

де  $\omega_{10} = \sqrt{\frac{2c}{m}}$  – парціальна частота власних коливань механічної системи;

$\omega_{20} = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$  – парціальна частота власних коливань електричного кола;

$2h_R = \frac{R}{L}$ . Звідси

$$a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0, \quad (11)$$

де

$$a_4 = mL;$$

$$a_3 = mL \cdot 2h_R;$$

$$a_2 = mL(\omega_{20}^2 + \omega_{10}^2);$$

$$a_1 = mL\omega_{10}^2 \cdot 2h_R;$$

$$a_0 = mL\omega_{10}^2\omega_{20}^2 - \frac{e^2}{a^2}.$$

За критерієм Гурвіца потрібно, щоб усі коефіцієнти були додативними. Очевидно, що завжди  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$ ,  $a_4 > 0$ , а  $a_0$  буде більшим від нуля, коли

$$mL\omega_{10}^2\omega_{20}^2 - \frac{e^2}{a^2} > 0. \quad (16)$$

З урахуванням значень  $\omega_{10}^2$ ,  $\omega_{20}^2$  і співвідношень (9) нерівність (16) перепишемо у формі

$$\begin{aligned} \frac{2c}{C_0} - \frac{(q_0^e)^2}{C_0^2 a} &= \frac{1}{C_0 a} \left( 2ca - \frac{e q_0^e}{a} \right) = \\ &= \frac{1}{C_0 a} \left( 2ca - 2 \frac{q_0^e}{2a} e \right) = \\ &= \frac{1}{C_0 a} (2ca - 4cx_0) = \\ &= \frac{2c}{C_0 a} (a - 2x_0) > 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Очевидно, що нерівність (17) виконується тоді, коли  $a > 2x_0$ , що не викликає ускладнень, бо, як правило,  $x_0 \gg a$ .

Інші умови Гурвіца мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \\ \Delta_3 &= a_3 \Delta_2 - a_1^2 a_4 > 0; \\ \Delta_2 &= a_1 a_2 - a_0 a_3 = \\ &= m^2 L^2 \cdot 2h_R \left[ \omega_{10}^2 (\omega_{20}^2 + \omega_{10}^2) - \omega_{10}^2 \omega_{20}^2 + \frac{e^2}{a^2 mL} \right] = \\ &= m^2 L^2 \cdot 2h_R \left( \omega_{10}^4 + \frac{e^2}{a^2 mL} \right) > 0; \quad (18) \\ \Delta_3 &= m^3 L^3 \cdot 4h_R^2 \left( \omega_{10}^4 + \frac{e^2}{a^2 mL} \right) - \\ &- m^3 L^3 \omega_{10}^4 \cdot 4h_R^2 = m^2 L^2 \cdot 4h_R^2 \frac{e^2}{a^2} > 0. \end{aligned}$$

Отже, конденсаторний мікрофон є стійкою системою.

На завершення цього розділу зауважимо, що електромеханічні системи мають якнайменше два степеня вільності, тому в них можна підібрати параметри так, щоб отримати ефект динамічного гасіння (поглинання) коливань, коли вся енергія, наприклад, джерела періодичного струму чи напруги піде на підтримання механічних коливань, а амплітуда коливань в електричній системі буде мінімальною. І навпаки, можна створити такі параметри, коли вся енергія в системі піде на підтримання коливань електричної системи, а механічна буде коливатися з мінімальною амплітудою.

### Питання для самоконтролю

1. Чи можете ви записати закони фізики, які аналогічні за структурою?
2. У чому суть аналогій "сила – напруга" і "сила – струм"?
3. Які співвідношення (кінематичні, динамічні чи енергетичні) є основою для електродинамічних аналогій?
4. Як записуються рівняння Лагранжа – Максвелла для аналогій "сила – напруга" і "сила – струм"?
5. Чи може електромеханічна система мати менше двох степенів вільності?
6. Що в електротехніці є аналогом зубчастого, фрикційного зчеплення і пасової передачі?
7. Наведіть відповідність механічним узагальненим коефіцієнтам інерції, жорсткості та демпфування аналогу в електричному колі за схемою "сила – напруга" і "сила – струм".
8. Що є основою побудови електричних моделей аналогів механічних систем і навпаки?
9. Які особливості дослідження стійкості електромеханічних систем?
10. Як за допомогою електромеханічної системи побудувати динамічний поглинач коливань?

Простота основних принципів теорії лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами зумовила велику розробку теорії лінійних коливань. Такі основні поняття, як власна частота, декремент втрати коливань, резонанс, нормальні модальності застосовуються в усіх розділах науки і техніки.

Розвиток машино- і приладобудування, особливо зародження радіотехніки на початку XX ст., зумовили надзвичайну актуальність дослідження нелінійних коливань, тобто коливань, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Основні методи розв'язання задач теорії нелінійних коливань створювались і розвивались в спеціальній розділі механіки, який в М. Крилов і М. М. Боголюбов назвали лінійною механікою.

Зуважимо, що навіть малі нелінійності в коливальних системах можуть зумовити не лише кількісну, а й якісну відмінність їх властивостей від властивостей лінійної системи.

В історичному аспекті цікаво зазначити, що приклади нелінійних коливань системи виявились ще наприкінці XVIII ст. у небезпечній механіці. Йдеться про знамениту задачу в'язу тіл. Проте перші математичні методи в теорії нелінійних коливань з'явилися лише наприкінці XIX ст. Основоположниками теорії нелінійних коливань є О. М. Ляпунов і А. Пуанкаре. Їхні методи у загальній формі застосовані для дослідження періодичних розв'язувань диференціальних рівнянь. Величезна роль у створенні нових методів у нелінійній механіці належить академікам М. М. Крилову, М. М. Боголюбову, О. О. Андронову, Ю. О. Митропольському, В. О. Кононенку.

Наведемо деякі відмінні особливості неперіодичних коливань від лінійних.

1. Через нелінійність порушується принцип суперпозиції, окремі гармоніки коливань взаємодіють між собою, внаслідок чого неможливо розглядати поведінку кожного гармонічного доданку коливань окремо.

2. Частоти власних коливань нелінійних систем залежать від амплітуди коливань.

3. Одній і тій самій частоті коливань можуть відповідати кілька амплітуд стаціонарних коливань. Не всі теоретично можливі амплітуди коливань можна реалізувати, тобто не всі стаціонарні стани можуть бути стійкими.

4. У разі просторових нелінійних резонансних коливань, відкритих у 70-х роках XX ст. В. О. Кононенком, дія збурювальної періодичної сили в напрямку однієї якої-небудь координати може спричинити інтенсивні коливання в напрямку не цієї координати, а координат, вільних від дії збурювальної сили.

5. Особливі властивості нелінійних систем породжують взаємодію коливальних систем із збуджувачами коливань обмеженої потужності, виключаючи так званий ефект гістерезису Зоммерфельда – Кононенка.

6. Певний клас серед нелінійних (механічних, електромеханічних, радіотехнічних тощо) систем становлять так звані автоколивальні системи, під якими розуміють неконсервативні нелінійні системи, що здійснюють незгасаючі періодичні коливання і містять такі складові частини: джерело енергії; коливальну систему; пристрій, що регулює надходження енергії в коливальну систему від джерела енергії за допомогою кола зворотного зв'язку.

Прикладами автоколивальних систем є годинниковий механізм, генератори коливань у радіотехніці тощо.

Для опису поведінки нелінійних систем розроблено безліч геометричних, аналітичних

і чисельних методів. Найбільшого розвитку набули так звані методи малого параметра, коли нелінійність у системі є малою і розв'язання відповідних диференціальних рівнянь будується за допомогою розкладання його в ряди за степенями малого параметра. Розроблення цих методів пов'язане з іменами М. В. Остроградського, А. Пуанкаре, О. М. Ляпунова, О. М. Крилова, М. М. Крилова, М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольського, В. О. Кононенка та ін.

Опишемо лише деякі з названих методів і властивостей нелінійних коливань.

### § 32.1. Метод фазової площини. Траєкторії на фазовій площині. Особливі точки

Одним із поширених якісних методів дослідження нелінійних систем є метод фазової площини. Цей метод розроблений в основному Л. І. Мандельштамом, М. Д. Папалексі, О. О. Андроновим. Він широко застосовується не тільки в механіці, а й у радіотехніці, теорії автоматичного регулювання.

Викладемо основи цього методу на прикладі системи з одним ступенем вільності.

Нехай рівняння, що описує коливання матеріальної системи з одним ступенем вільності, має вигляд

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0, \quad (32.1)$$

де  $f(x, \dot{x})$  – нелінійна функція  $x$  і  $\dot{x}$ .

Якщо ввести змінну  $y = \dot{x}$ , то рівняння (32.1) можна подати у вигляді двох рівнянь першого порядку

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -f(x, y). \end{aligned} \quad (32.2)$$

Ця система є окремим випадком системи більш загального вигляду

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (32.3)$$

Системи вигляду (32.3), в яких функції  $P$  і  $Q$  не містять явно часу, називають *автономними*.

Щоб якісно дослідити розв'язання рівнянь (32.2) і (32.3), доцільно розглядати  $x$  і  $y = \frac{dx}{dt}$  як координати точки на площині змінних  $x$  і  $y$ . Цю площину називають *фазовою*. Кожному стану системи на фазовій площині відповідає одна точка, яку називають *зображальною (фазовою)*. У разі змінення координат  $x = x(t)$  і  $y = y(t)$  зображальна точка переміщується по фазовій площині. Траєкторію зображальної точки називають *фазовою траєкторією*.

Фазова площина зі змінюваними на ній фазовими траєкторіями дає змогу відразу побачити всю сукупність рухів, що можуть виникнути в розглядуваній системі.

Для побудови фазових траєкторій треба знайти розв'язок системи рівнянь (32.3)  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , що є рівняннями фазової траєкторії в параметричній формі, або знайти інтегральні криві рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad (32.4)$$

які дають безпосередньо залежність між  $x$  і  $y$ .

Зупинимось спочатку на найпростіших випадках. Розглянемо лінійне рівняння з одним ступенем вільності

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (32.5)$$

Покладаючи, що  $\dot{x} = y$ , зводимо рівняння (32.5) до вигляду

$$\dot{y} = -2hy - \omega_0^2 x. \quad (32.6)$$

Якщо в'язке тертя невелике ( $h < \omega_0$ ), то розв'язок системи (32.6) запишемо так:

$$\begin{aligned} x &= ae^{-ht} \cos(\omega_1 t + \alpha), \\ y &= -a\omega_1 e^{-ht} \sin(\omega_1 t + \alpha + \sigma), \end{aligned} \quad (32.7)$$

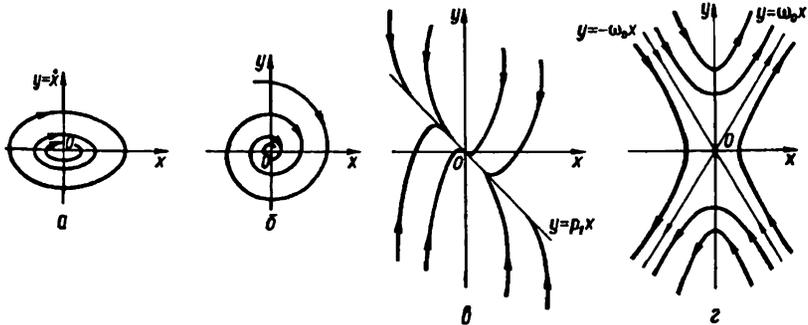


Рис. 32.1

де  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} \approx \omega_0$ ;  $a$ ,  $\alpha$ ,  $\sigma$  – довільні стали, що визначаються із початкових умов.

Вираз (32.7) є рівнянням фазової траєкторії в параметричній формі. Зауважимо, що рівняння (32.7) визначають у кожній точці фазової площини єдину дотичну до інтегральної кривої, за винятком точки  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

Нахил дотичної визначається виразом

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - \omega_0^2 x}{y}. \quad (32.8)$$

У точці  $x = 0$ ,  $y = 0$  напрямок дотичної стає невизначеним. Такі точки називають *критичними* або *особливими*.

Далі, на конкретних прикладах покажемо, що через найпростішу особливу точку (першого порядку) або не проходить жодної, або проходить більше ніж одна інтегральна крива. Нехай в окремому випадку  $h = 0$ . Тоді розв'язок (32.7) набуде вигляду

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\omega_0 t + \alpha); \\ y &= -a \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \end{aligned} \quad (32.9)$$

На фазовій площині утворюється сім'я подібних еліпсів (рис. 32.1, а), причому через кожну точку фазової площини проходить

один еліпс, що відповідає певним початковим умовам.

Виключаючи з виразів (32.9) час  $t$ , дістанемо рівняння сім'ї еліпсів

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 \omega_0^2} = 1. \quad (32.10)$$

У цьому випадку через початок координат не проходить жодна інтегральна крива. Особливу точку, біля якої інтегральні криві замкнені й охоплюють її, називають *центром*. Оскільки в цьому випадку всі фазові траєкторії є замкненими кривими (за винятком траєкторії, що виродилася в точку  $x = 0$ ,  $y = 0$ ), то рух буде періодичним.

Особливій точці  $x = 0$ ,  $y = 0$  відповідає положення рівноваги, коли одночасно  $\frac{dx}{dt} = 0$ ,

$\frac{dy}{dt} = 0$ . Неважко помітити, що згідно з поняттям стійкості положення рівноваги (див. розділ 30) стан рівноваги типу центра є стійким.

Рівняння інтегральних кривих (32.10) виражає закон збереження механічної енергії для консервативної системи. Із (32.10) дістанемо

$$\omega_0^2 x^2 + y^2 = a^2,$$

оскільки  $\omega_0^2 = c/m$ ,  $y = \dot{x}$ , або

$$cx^2 + m\dot{x}^2 = 2(\Pi + T) = a^2 m = \text{const}. \quad (32.11)$$

Нехай тепер  $h > 0$ , що відповідає згасаючому коливальному процесу. У цьому випадку утворюється, згідно з виразом (32.8), сім'я спіралей, що навиваються на початок координат (рис. 32.1, б). Таку особливу точку називають *стійким фокусом*. Отже, можна зробити висновок, що за будь-яких початкових умов матеріальна точка здійснює згасаючі коливання, асимптотично наближаючись до положення рівноваги.

При  $h < 0$  знову матимемо сім'ю спіралей, однак зображальна точка з часом буде віддалятися від початку координат. У цьому випадку положення рівноваги ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ) нестійке.

Розглянемо випадок, коли  $h > \omega_0$ , що при  $h > 0$  відповідає згасаючому аперіодичному процесу. Розв'язок системи (32.6) матиме вигляд

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{-p_1 t} + c_2 e^{-p_2 t}, \\ y &= -c_1 p_1 e^{-p_1 t} - c_2 p_2 e^{-p_2 t}. \end{aligned} \quad (32.12)$$

Щоб одержати картину на фазовій площині, помножимо перше рівняння спочатку на  $p_1$ , потім на  $p_2$  і складемо з другим рівнянням (32.12). Підносячи знайдені результати відповідно до степенів  $p_1$  і  $p_2$ , матимемо рівняння інтегральних кривих

$$y + p_1 x = c(y + p_2 x)^{p_2/p_1}. \quad (32.13)$$

На фазовій площині утворюється сім'я деформованих парабол (рис. 32.1, в), що торкаються прямої  $y = -p_1 x$  на початку координат. Оскільки положення рівноваги ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ) у цьому випадку асимптотично стійке, то неважко встановити напрямок

руху зображальної точки по інтегральних кривих.

Точка  $x = 0$ ,  $y = 0$  – особлива точка, причому всі інтегральні криві проходять через неї. Особливу точку такого типу називають *вузлом*. У даному випадку маємо стійкий вузол. Якщо  $h > \omega_0$ , але  $h < 0$ , то матимемо сім'ю параболічних кривих з особливою точкою типу вузла. Положення рівноваги в цьому випадку нестійке і зображальна точка буде віддалятися від початку координат.

Нарешті розглянемо випадок, коли корені характеристичного рівняння системи (32.6) дійсні, але різні за знаком ( $p_1 > 0$  і  $p_2 < 0$ ), що відповідає, наприклад, рівнянню руху математичного маятника в разі відхилення його від верхнього нестійкого положення рівноваги:

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0. \quad (32.14)$$

Розв'язок рівняння (32.14) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{\omega_0 t} + c_2 e^{-\omega_0 t}, \\ y &= c_1 \omega_0 e^{\omega_0 t} - c_2 \omega_0 e^{-\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (32.15)$$

Із (32.15) неважко дістати рівняння інтегральних кривих

$$x^2 - \frac{y^2}{\omega_0^2} = 4c_1 c_2 = \text{const}, \quad (32.16)$$

що є рівнянням сім'ї гіпербол (рис. 32.1, г) з асимптотами  $y = \omega_0 x$  і  $y = -\omega_0 x$ , що проходять через початок координат, який є єдиною особливою точкою, причому жодна інтегральна крива, крім асимптот, не проходить через початок координат. Таку точку називають особливою точкою типу *сіда*. Положення рівноваги у цьому випадку нестійке.

Розглянемо загальний випадок, що описується рівняннями (32.3). В особливих точках

$$P(x, y) = 0; \quad Q(x, y) = 0. \quad (32.17)$$

$(b-c)^2 + 4ad < 0$	$b+c \neq 0$ – фокус; $b+c = 0$ – центр	$b+c < 0$ – стійкий фокус; $b+c > 0$ – нестійкий фокус
$(b-c)^2 + 4ad = 0$	вузол	$b+c < 0$ – стійкий вузол; $b+c > 0$ – нестійкий вузол
$(b-c)^2 + 4ad > 0$	$ad - bc < 0$ – вузол; $ad - bc > 0$ – сідло	$b+c < 0$ – стійкий вузол; $b+c > 0$ – нестійкий вузол

Нехай  $P(x, y)$  і  $Q(x, y)$  – дійсні аналітичні функції. Припустимо, що точки рівноваги, тобто розв'язки системи (32.17), ізольовані, отже, кількість особливих точок у будь-якому обмеженому околі скінченна. Тоді в околі особливої точки  $x = x_0$  і  $y = y_0$  покладемо

$$x = x_0 + \delta x; \quad y = y_0 + \delta y. \quad (32.18)$$

Підставляючи вирази (32.18) в (32.3) і розкладаючи потім функції  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  в ряд Тейлора в околі точки  $(x_0, y_0)$ , після нехтування величинами другого порядку малювання дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{d\delta x}{dt} &= c\delta x + d\delta y, \\ \frac{d\delta y}{dt} &= a\delta x + b\delta y \end{aligned} \quad (32.19)$$

– лінійні диференціальні рівняння у варіаціях. У них коефіцієнти  $a$ ,  $b$ ,  $c$  і  $d$  визначаються з виразів

$$\begin{aligned} a &= \left. \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}; \\ b &= \left. \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}; \\ c &= \left. \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}; \\ d &= \left. \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}. \end{aligned} \quad (32.20)$$

Характеристичне рівняння системи (32.19) має вигляд

$$p^2 - (b+c)p - (ad - bc) = 0. \quad (32.21)$$

О. М. Ляпунов довів, що в разі, коли обидва корені рівняння (32.21) мають від'ємні дійсні частини, то стан рівноваги (особлива точка) системи рівнянь (32.3) асимптотично стійкий; якщо хоча б одна дійсна частина додатна, то стан рівноваги нестійкий. Якщо дійсні частини коренів характеристичного рівняння (32.21) дорівнюють нулю або ж один з коренів дорівнює нулю, а другий від'ємний, то рівняння першого наближення (32.19) не дають відповіді про стійкість положення рівноваги.

Характер поведінки фазових траєкторій поблизу простих особливих точок, тобто точок, для яких обидва корені характеристичного рівняння мають відмінну від нуля дійсну частину, також визначаються рівняннями першого наближення. Для лінійного рівняння у варіаціях (32.19) можна провести такі самі дослідження, як і для рівнянь (32.3). Отримані результати наведені в табл. 32.1.

### § 32.2. Нелінійні вільні коливання математичного маятника

Розглянемо вільні коливання математичного маятника, що описуються нелінійним диференціальним рівнянням

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (32.22)$$

У цьому параграфі знайдемо точний розв'язок рівняння (32.22) і скористаємося ним

у подальшому для оцінювання ефективності наближених методів.

Рівняння (32.22) описує коливання консервативної системи, для якої виконується закон збереження енергії. Інтегруючи це рівняння (або зразу випишуючи закон збереження енергії у цьому випадку) і враховуючи, що  $\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}^2) = 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}$  і  $d(\varphi^2) = 2\dot{\varphi}d\varphi$ , дістаємо

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{l} \cos \varphi + h, \quad (32.23)$$

де  $h$  – довільна стала, що визначається з початкових умов і пропорційна механічній енергії системи.

Якщо при  $t = 0$   $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ , то

$$h = -\frac{g}{l} \cos \varphi_0.$$

Тоді

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0),$$

звідки

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{2 \frac{g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}. \quad (32.24)$$

Із цього рівняння виразимо  $t$  через кут  $\varphi$ :

$$dt = \pm \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}}. \quad (32.25)$$

Вираз під знаком кореня має бути додатним, тобто  $\cos \varphi > \cos \varphi_0$ , отже, кут  $\varphi$  під час руху за абсолютним значенням залишається меншим, ніж кут початкового відхилення:  $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$ .

Виведемо тепер формулу для періоду коливань. Для того щоб з'ясувати, який знак – плюс чи мінус – брати перед радикалом, треба врахувати, що в разі руху маятника від положення рівноваги  $\dot{\varphi} < 0$ , а в разі руху до положення рівноваги  $\dot{\varphi} > 0$ , незалежно від того,  $\varphi > 0$ , чи  $\varphi < 0$ . Це

означає, що період коливань складається із суми чотирьох однакових інтервалів часу. В результаті одержимо

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}}. \quad (32.26)$$

Цей вираз можна перетворити у зручніший, якщо врахувати, що  $\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ ;

$\cos \varphi_0 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$ , і зробити заміну змінних:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = u \sin \frac{\varphi_0}{2} = ku, \quad k = \sin \frac{\varphi_0}{2}. \quad (32.27)$$

Звідси

$$d\varphi = \frac{2kdu}{\sqrt{1-k^2u^2}}. \quad (32.28)$$

Після підстановок і елементарних перетворень формулі (32.26) можна надати вигляду

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}. \quad (32.29)$$

Застосовують також іншу заміну змінних:  $u = \sin \psi$ , тоді співвідношення (32.29) набуває вигляду

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}. \quad (32.30)$$

Обидва інтеграли, що входять у формули (32.29) і (32.30), рівноцінні і є лише різними формами запису повного еліптичного інтеграла першого роду. Із (32.29) або (32.30) неважко отримати наближені формули для періоду коливань. Для цього треба розкласти підінтегральний вираз у степеневий ряд. Наприклад,

$$\begin{aligned} (1 - k^2 \sin^2 \psi) \frac{1}{2} \approx 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \psi + \\ + \frac{3}{8} k^4 \sin^4 \psi + \dots \end{aligned} \quad (32.31)$$

Після інтегрування з урахуванням (32.31) дістанемо

$$\begin{aligned} T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \right. \\ \left. + \left( \frac{3}{8} \right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (32.32)$$

Звідси добре видно залежність періоду коливань від початкового відхилення до амплітуди  $\varphi_0$  коливань маятника.

При малих значеннях початкового відхилення із (32.32) дістанемо відому формулу Гюйгенса для періоду лінійних коливань математичного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (32.33)$$

При  $\varphi_0 \leq 20^\circ$  похибка, яку допускаємо, вважаючи коливання ізохронними (тобто такими, в яких період є сталим і таким, що не залежить від амплітуди коливань), не перевищує 0,8 %. Формулі (32.32) після розкладання  $\sin \frac{\varphi_0}{2}$  в ряд можна надати вигляду

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{\varphi_0^2}{16} + \dots \right). \quad (32.34)$$

### § 32.3. Метод малого параметра А. Пуанкаре

Основоположником класичного методу розкладання шуканого розв'язку за степенями малого параметра є А. Пуанкаре; О. М. Крилов і О. М. Ляпунов удосконалили цей метод (О. М. Крилов виклав його в праці "Вибра-

ція судов"). Вони розглянули два основних методи, з якими стикаються в теорії коливань: 1) диференціальне рівняння коливань містить малий параметр; 2) диференціальне рівняння коливань містить малий параметр, що входить у початкові умови. Суть цього методу полягає, за словами О. М. Крилова, "у сумісному й одночасному розкладанні для шуканої функції  $x(t)$  і квадрата шуканої частоти". Розглянемо перший випадок на прикладі диференціального рівняння другого порядку.

1. Нехай диференціальне рівняння коливань має вигляд

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon x^3 = G(t). \quad (32.35)$$

У рівнянні (32.35)  $\varepsilon$  – малий параметр. Початкові умови руху такі: при  $t = 0$

$$x(0) = a; \quad \dot{x}(0) = b. \quad (32.36)$$

Визначимо  $x(t)$  і невідому частоту  $p$ , розклавши  $x(t)$  і  $\omega^2$  за степенями малого параметра  $\varepsilon$ . Дістанемо

$$x = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \varepsilon^3 \varphi_3 + \dots; \quad (32.37)$$

$$\omega^2 = p^2 + \varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \varepsilon^3 C_3 + \dots \quad (32.38)$$

Підставляючи ряди (32.37) і (32.38) в рівняння (32.35) і пріврівнюючи потім до нуля коефіцієнти при  $\varepsilon^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), одержимо систему лінійних диференціальних рівнянь для визначення функцій  $\varphi_i$  і коефіцієнтів  $C_i$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_0 + p^2 \varphi_0 &= G(t); \\ \ddot{\varphi}_1 + p^2 \varphi_1 &= -C_1 \varphi_0 - \varphi_0^3; \\ \ddot{\varphi}_2 + p^2 \varphi_2 &= -C_2 \varphi_0 - C_1 \varphi_1 - 3\varphi_0^2 \varphi_1. \\ \dots \end{aligned} \quad (32.39)$$

Звідси на основі початкових умов (32.36) дістанемо

$$\begin{aligned}\varphi_0(0) &= a; \quad \dot{\varphi}_0(0) = b; \\ \varphi_1(0) &= 0; \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0; \\ \varphi_2(0) &= 0; \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0.\end{aligned}\quad (32.40)$$

Із структури рівнянь (32.39) видно, що коли визначимо  $\varphi_0$ , то з другого рівняння одразу обчислимо  $\varphi_1$ , потім, знаючи  $\varphi_0$  і  $\varphi_1$ , знайдемо  $\varphi_2$  і т. д. Отже, треба спочатку побудувати розв'язання першого рівняння (32.39) з довільною правою частиною

$$\ddot{\varphi}_0 + p^2\varphi_0 = G(t). \quad (32.41)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння  $\ddot{\varphi}_0 + p^2\varphi_0 = 0$  запишемо у вигляді

$$\varphi_0^{(1)} = A_1 \cos pt + A_2 \sin pt. \quad (32.42)$$

Частинний розв'язок рівняння (32.41) знайдемо методом варіації довільних сталих у формі

$$\varphi_0^{(2)} = B_1(t) \cos pt + B_2(t) \sin pt. \quad (32.43)$$

При цьому для визначення двох невідомих  $B_1(t)$  і  $B_2(t)$  – є одне рівняння (32.41), яке має задовольняти співвідношенням (32.43). Тому на  $B_1(t)$  і  $B_2(t)$  треба накласти деяку додаткову умову.

Визначимо похідну

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_0^{(2)} &= p(-B_1 \sin pt + B_2 \cos pt) + \\ &+ \dot{B}_1 \cos pt + \dot{B}_2 \sin pt.\end{aligned}\quad (32.44)$$

Прирівняємо суму двох останніх доданків у правій частині рівняння (32.44) до нуля:

$$\dot{B}_1 \cos pt + \dot{B}_2 \sin pt = 0. \quad (32.45)$$

Тоді, диференціюючи ще раз за часом рівність (32.44), з урахуванням (32.45) і (32.43), одержимо

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_0^{(2)} &= -p^2\varphi_0^{(2)} - p\dot{B}_1 \sin pt + \\ &+ p\dot{B}_2 \cos pt.\end{aligned}\quad (32.46)$$

Підставляючи співвідношення (32.46) і (32.43) у рівняння (32.41), дістанемо разом з (32.45) таку систему двох рівнянь для визначення двох невідомих  $B_1(t)$  і  $B_2(t)$ :

$$\begin{cases} \dot{B}_1 \cos pt + \dot{B}_2 \sin pt = 0, \\ -p\dot{B}_1 \sin pt + p\dot{B}_2 \cos pt = G(t). \end{cases}\quad (32.47)$$

Розв'язавши систему (32.47), знайдемо

$$\begin{aligned}\dot{B}_1 &= -\frac{1}{p}G(t) \sin pt; \\ \dot{B}_2 &= \frac{1}{p}G(t) \cos pt.\end{aligned}\quad (32.48)$$

Звідси, інтегруючи, отримаємо

$$B_1 = -\frac{1}{p} \int_0^t G(t) \sin pt dt; \quad (32.49)$$

$$B_2 = \frac{1}{p} \int_0^t G(t) \cos pt dt.$$

Позначаючи змінну інтегрування через  $\tau$ , запишемо розв'язок рівняння (32.41) з урахуванням виразів (32.42), (32.43) і (32.49) у такому вигляді:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= A \cos(pt + \sigma) - \frac{\cos pt}{p} \times \\ &\times \int_0^t G(\tau) \sin p\tau d\tau + \\ &+ \frac{1}{p} \sin pt \int_0^t G(\tau) \cos p\tau d\tau,\end{aligned}\quad (32.50)$$

де  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ ,  $\operatorname{tg} \sigma = -\frac{A_2}{A_1}$ .

Параметри  $A$  і  $\sigma$  визначаються з початкових умов (32.40). Оскільки функції  $\cos pt$  і  $\sin pt$  не залежать від змінної інтегрування  $\tau$ , то їх можна внести під знак інтегрування:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= A \cos(pt + \sigma) + \frac{1}{p} \int_0^t G(\tau) \times \\ &\times [\cos pt \sin p\tau + \sin pt \cos p\tau] d\tau.\end{aligned}$$

Звідси остаточно знайдемо

$$\varphi_0 = A \cos(pt + \sigma) + \frac{1}{p} \int_0^t G(\tau) \sin p(t - \tau) d\tau. \quad (32.51)$$

Підставивши (32.51) у друге рівняння (32.39), дістанемо

$$\ddot{\varphi}_1 + p^2 \varphi_1 = -C_1 A \cos(pt + \sigma) - A^3 \cos^3(pt + \sigma) + G_1(t), \quad (32.52)$$

де  $G_1(t)$  – відома функція часу.

Після тригонометричних перетворень одержимо з (32.52)

$$\ddot{\varphi}_1 + p^2 \varphi_1 = -\left(AC_1 + \frac{3}{4}A^3\right) \times \cos(pt + \sigma) - \frac{1}{4}A^3 \cos 3(pt + \sigma) + G_1(t). \quad (32.53)$$

Коефіцієнт  $C_1$  вибирають так, щоб виконувалась рівність

$$AC_1 + \frac{3}{4}A^3 = 0 \text{ або } C_1 = -\frac{3}{4}A^2 \quad (32.54)$$

для того, щоб виключити резонанс, який породжує члени вигляду  $t \sin(pt + \sigma)$ . Ці члени називають *віковими членами*<sup>1</sup>. У цьому основна особливість методу О. М. Крилова і О. М. Ляпунова.

Скориставшись початковими умовами, із (32.53) з урахуванням (32.54) і (32.37), (32.38) визначимо

$$\varphi_1 = \frac{A^3}{32p^2} [\cos 3(pt + \sigma) - \cos(pt + \sigma)] + \frac{1}{p} \int_0^t G_1(\tau) \sin p(t - \tau) d\tau, \quad \omega^2 = p^2 - \frac{3}{4}A^2$$

<sup>1</sup>Термін віковий член взято з небесної механіки. Він є членом, що описує вікові збурення руху планет, залежні від їх взаємодії.

або

$$p^2 = \omega^2 + \frac{3}{4}A^2. \quad (32.55)$$

Зауважимо, що  $A$  є функцією  $p$ . Цей алгоритм продовжують доти, доки не отримають у рядах (32.37) і (32.38) члени з потрібною точністю.

2. Розглянемо випадок, коли малий параметр  $\beta$  входить у початкові умови руху. Припустимо, що диференціальне рівняння руху має вигляд

$$\ddot{x} + \omega^2 x + kx^3 = 0. \quad (32.56)$$

Початкові умови руху при  $t = 0$

$$x(0) = \beta; \quad \dot{x}(0) = \mu\beta, \quad (32.57)$$

де  $\beta$  – мала величина, відмінна від нуля;  $\mu$  – скінченне число.

Розв'язок рівняння (32.56) і частоту коливань  $p$  визначимо, скориставшись розкладанням за степенями малого параметра  $\beta$

$$x = \varphi_0 + \beta\varphi_1 + \beta^2\varphi_2 + \beta^3\varphi_3 + \dots, \quad \omega^2 = p^2 + \beta C_1 + \beta^2 C_2 + \dots \quad (32.58)$$

Проводячи операції, аналогічні операціям у першому випадку, дістанемо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\ddot{\varphi}_0 + p^2 \varphi_0 = 0, \quad \ddot{\varphi}_1 + p^2 \varphi_1 = -C_1 \varphi_0, \quad (32.59)$$

$$\ddot{\varphi}_2 + p^2 \varphi_2 = -C_1 \varphi_1 - C_2 \varphi_0 - k\varphi_0^3.$$

Тут функції  $\varphi_n$ ,  $\dot{\varphi}_n$ ,  $n = 0, 1, 2$  мають задовольняти початкові умови

$$\begin{aligned} \varphi_0(0) &= 1; \quad \dot{\varphi}_0(0) = \mu; \\ \varphi_1(0) &= 0; \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0; \\ \varphi_2(0) &= 0; \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0. \end{aligned} \quad (32.60)$$

Розв'язок першого рівняння (32.59) запишемо так:

$$\varphi_0 = A \cos(pt + \sigma), \quad (32.61)$$

де довільні сталі  $A$  та  $\sigma$  мають задовольняти початкову умову (32.60)

$$A \cos \sigma = 1; \quad -pA \sin \sigma = \mu. \quad (32.62)$$

Далі з (32.59) визначимо  $\varphi_1$  як розв'язок рівняння

$$\ddot{\varphi}_1 + p^2 \varphi_1 = -C_1 A \cos(pt + \sigma). \quad (32.63)$$

Щоб у розв'язок рівняння (32.63) не увійшли вікові члени, припускають, що  $C_1 = 0$ . Тоді  $\varphi_1 = 0$ .

Функцію  $\varphi_2$  визначимо з третього рівняння (32.59)

$$\ddot{\varphi}_2 + p^2 \varphi_2 = -C_2 A \cos(pt + \sigma) - A^3 k \cos^3(pt + \sigma) \quad (32.64)$$

або

$$\ddot{\varphi}_2 + p^2 \varphi_2 = -\left(C_2 A + \frac{3}{4} A^3 k\right) \times \cos(pt + \sigma) - \frac{1}{4} A^3 k \cos 3(pt + \sigma). \quad (32.65)$$

Щоб уникнути вікових членів, припускають, що

$$C_2 = -\frac{3}{4} A^2 k. \quad (32.66)$$

Тоді розв'язок рівняння (32.65), якщо скористатися результатами § 30.6, можна записати так:

$$\varphi_2 = C' \cos pt + C'' \sin pt + \frac{A^3 k}{32p^2} \cos 3(pt + \sigma),$$

де, згідно з початковими умовами,

$$C' = -\frac{A^3 k}{32p^2} \cos 3\sigma; \quad C'' = \frac{3A^3 k}{32p^2} \sin 3\sigma.$$

Остаточно дістанемо

$$\varphi_2 = \frac{A^3 k}{32p^2} \left[ \cos 3(pt + \sigma) - \cos 3\sigma \times \cos pt + 3 \sin 3\sigma \sin pt \right]. \quad (32.67)$$

У результаті на основі рядів (32.58) для розв'язку  $x(t)$  і  $p(t)$  одержимо вирази

$$x = A \cos(pt + \sigma) + \frac{A^3 \beta^2 k}{32p^2} \times \left[ \cos 3(pt + \sigma) - \cos 3\sigma \cos pt + 3 \sin 3\sigma \sin pt \right] + \dots, \\ p^2 = \omega^2 + \frac{3}{4} A^2 k \beta^2 + \dots \quad (32.68)$$

Аналогічно можна продовжити обчислення інших коефіцієнтів у виразах для  $x$  і частоти  $p(t)$ . Слід зазначити, що цей метод можна легко поширити на рівняння загальнішого вигляду, а саме:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + f(x) = 0, \quad (32.69)$$

якщо  $f(x)$  буде цілою раціональною функцією, а початкові умови матимуть вигляд (32.57).

**Приклад 1.** Дослідити методом малого параметра коливання математичного маятника, що описуються нелінійним диференціальним рівнянням

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (1)$$

Розв'язання. Розкладемо  $\sin \varphi$  в ряд Маклорена, обмежившись другим членом ряду

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \dots \quad (2)$$

З урахуванням виразу (2) диференціальне рівняння (1) набуде вигляду

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi - \frac{g}{6l} \varphi^3 = 0. \quad (3)$$

Нехай початкові умови  $\varphi(0) = \varphi_0$ ;  $\dot{\varphi}(0) = 0$ , де  $\varphi_0$  – мала величина. На основі рівностей (32.68), (32.60), враховуючи, що  $x = \varphi$ , дістанемо

$$\varphi = \varphi_0 \cos pt - \frac{g\varphi_0^3}{192p^2} (\cos 3pt - \cos pt) + \dots, \\ p^2 = \frac{g}{l} - \frac{g}{8l} \varphi_0^2 + \dots$$

Отже,

$$p = \sqrt{\frac{g}{l} \left( 1 - \frac{\varphi_0^2}{8} + \dots \right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left( 1 - \frac{\varphi_0^2}{8} + \dots \right)^{-\frac{1}{2}}} \approx$$

$$\approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left( 1 + \frac{\varphi_0^2}{16} + \dots \right)}. \quad (4)$$

Порівнюючи цю формулу для періоду коливань математичного маятника з формулою (32.34), неважко помітити, що вони збігаються.

### § 32.4. Основи асимптотичних методів. Метод усереднення

У цьому параграфі викладемо основи асимптотичних методів нелінійної механіки, що розроблені М. М. Криловим і М. М. Боголюбовим. Розглянемо ці методи стосовно квазілінійних систем з одним степенем вільності та викладемо методику побудови асимптотичних наближень. Нехай коливання системи описуються диференціальними рівняннями вигляду

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, y), \quad (32.70)$$

де  $\varepsilon$  – малий параметр;  $\omega$  – стала.

Якщо немає збурення ( $\varepsilon = 0$ ), то коливання будуть гармонічними. Загальний розв'язок такого рівняння

$$x = a \cos \varphi,$$

де  $a$  – стала амплітуда;  $\varphi$  – фазовий кут, що рівномірно змінюється. При цьому  $\frac{da}{dt} = 0$ ,

$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ , оскільки  $\varphi = \omega t + \alpha$ . Нагадаємо, що амплітуда коливань  $a$  і початкова фаза  $\alpha$  залежать від початкових умов.

Якщо  $\varepsilon \neq 0$ , тобто є нелінійне збурення, то в розв'язку рівняння (32.70) з'являються обертони, що зумовлюють залежність мит-

тєвої частоти  $\frac{d\varphi}{dt}$  від амплітуди. У цьому разі загальний розв'язок рівняння (32.70) дістанемо у вигляді розкладання за степенями малого параметра

$$x = a \cos \varphi + \varepsilon u_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 u_2(a, \varphi) + \dots, \quad (32.71)$$

де  $u_1(a, \varphi)$ ,  $u_2(a, \varphi)$  – періодичні функції кута  $\varphi$  з періодом  $2\pi$ .

У розглядуваному випадку  $a = a(t)$  і  $\varphi = \varphi(t)$  є функціями часу. Вони визначаються диференціальними рівняннями

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots + \varepsilon^m A_m(a),$$

$$(32.72)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots + \varepsilon^m B_m(a).$$

Отже, виникає задача: знайти такі функції  $u_1(a, \varphi)$ ,  $u_2(a, \varphi)$ ,  $A_1(a)$ ,  $B_1(a)$ ,  $A_2(a)$ ,  $B_2(a)$ , ..., які б на основі рівнянь (32.72) перетворювали ряд (32.71) у розв'язок рівняння (32.70). Визначення коефіцієнтів цих розкладань не викликає принципових труднощів. Достатньо знайти лише два чи три перших члени.

Практична цінність цього методу визначається не властивостями збіжності сум (32.71) і (32.72), а їх асимптотичними властивостями для даного фіксованого значення  $m$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Питання про інтегрування рівняння (32.70) зводиться, таким чином, до простішого питання про інтегрування рівнянь (32.72) з роздільними змінними. На функції  $u_i(a, \varphi)$  накладаються додаткові умови

$$\int_0^{2\pi} u_i(a, \varphi) \cos \varphi d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} u_i(a, \varphi) \sin \varphi d\varphi = 0, \quad (32.73)$$

$$i = 1, 2, \dots$$

З фізичної точки зору умови (32.73) відповідають вибору величини  $a$  як повної амплітуди першої основної гармоніки коливання. Умови (32.73) мають бути враховані при визначенні  $u_i(a, \varphi)$ ,  $A_i(a)$ ,  $B_i(a)$ . Надалі обмежимося виписуванням явних виразів лише для членів при  $\varepsilon$  у першому степені. Диференціюючи праву частину виразу (32.71), дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{da}{dt} \cos \varphi - a \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi + \\ &+ \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} \frac{da}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \dots = \\ &= \frac{da}{dt} \left( \cos \varphi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \dots \right) + \\ &+ \frac{d\varphi}{dt} \left( -a \sin \varphi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \dots \right); \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d^2 a}{dt^2} \left( \cos \varphi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \dots \right) + \\ &+ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \left( -a \sin \varphi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \dots \right) + \\ &+ \frac{da}{dt} \left( -\frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} \frac{da}{dt} + \right. \\ &+ \left. \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \dots \right) + \frac{d\varphi}{dt} \left( -\frac{da}{dt} \sin \varphi - \right. \\ &- a \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \varphi} \frac{da}{dt} + \\ &+ \left. \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} \frac{d\varphi}{dt} + \dots \right). \end{aligned} \quad (32.74)$$

Враховуючи рівняння (32.72), визначимо такі величини, що входять у (32.74):

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \varepsilon \frac{dA_1}{da} \frac{da}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dA_2}{da} \frac{da}{dt} + \dots,$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= \varepsilon \frac{dB_1}{da} \frac{da}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dB_2}{da} \frac{da}{dt} + \dots, \\ \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 &= \varepsilon^2 A_1^2 + \dots, \quad (32.75) \\ \frac{da}{dt} \frac{d\varphi}{dt} &= \varepsilon A_1 \omega + \dots, \\ \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 &= \omega^2 + 2\varepsilon \omega B_1 + \dots \end{aligned}$$

Підставляючи (32.72) і (32.75) у (32.74), одержимо

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a\omega \sin \varphi + \varepsilon \left( A_1 \cos \varphi - \right. \\ &- \left. aB_1 \sin \varphi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right) + \dots, \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= -a\omega^2 \cos \varphi + \varepsilon \left( -2a\omega B_1 \cos \varphi - \right. \\ &- \left. 2\omega A_1 \sin \varphi + \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (32.76)$$

З урахуванням (32.76) ліву частину рівняння (32.70) запишемо у формі

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x &= \varepsilon \left( -2a\omega B_1 \cos \varphi - \right. \\ &- \left. 2\omega A_1 \sin \varphi + \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} + \omega^2 u_1 \right) + \dots \end{aligned} \quad (32.77)$$

Праву частину рівняння (32.70), враховуючи (32.71), запишемо так:

$$\begin{aligned} \varepsilon f \left( x, \frac{dx}{dt} \right) &= \varepsilon f \left( a \cos \varphi, -a\omega \sin \varphi \right) + \\ &+ \varepsilon^2 \dots = \varepsilon f_0(a, \varphi) + \varepsilon^2 \dots \end{aligned} \quad (32.78)$$

Для того щоб вираз (32.71) задовольняв вихідне рівняння (32.70) з точністю до  $\varepsilon^{m+1}$ , треба прирівняти коефіцієнти при однакових степенях  $\varepsilon$  у правих частинах (32.77) і (32.78)

до членів  $m$ -го порядку включно. У результаті дістанемо

$$\omega^2 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} + u_1 \right) = f_0(a, \varphi) + 2\omega A_1 \sin \varphi + 2a\omega B_1 \cos \varphi, \dots \quad (32.79)$$

$$\omega^2 \left( \frac{\partial^2 u_m}{\partial \varphi^2} + u_m \right) = f_m(a, \varphi) + 2\omega A_m \sin \varphi + 2a\omega B_m \cos \varphi.$$

Очевидно, що функція  $f_k(a, \varphi)$  є періодичною функцією змінної  $\varphi$  з періодом  $2\pi$ , залежною від  $a$ . Щоб визначити  $A_1(a)$ ,  $B_1(a)$ ,  $u_1(a, \varphi)$  з першого рівняння системи (32.79), треба розкласти функції  $f_0(a, \varphi)$  і  $u_1(a, \varphi)$  в ряди Фур'є і прирівняти коефіцієнти при однакових гармоніках. Необхідно врахувати додаткову умову (32.73): першої гармоніки в розкладенні  $u_1(a, \varphi)$  в ряд немає. Формули для  $A_1$  і  $B_1$  мають вигляд

$$A_1(a) = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_0(a, \varphi) \sin \varphi \, d\varphi; \quad (32.80)$$

$$B_1(a) = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_0(a, \varphi) \cos \varphi \, d\varphi.$$

Якщо обмежитися тільки першим наближенням, то, з урахуванням (32.73), розв'язок буде

$$x = a \cos \varphi, \quad (32.81)$$

де  $a$  і  $\varphi$  визначаються з рівнянь

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a); \quad (32.82)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a),$$

причому

$$\varepsilon A_1(a) = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_0(x, \dot{x}) \sin \varphi \, d\varphi; \quad (32.83)$$

$$\varepsilon B_1(a) = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_0(x, \dot{x}) \cos \varphi \, d\varphi.$$

При розв'язанні багатьох практичних задач найчастіше обмежуються розглядом саме першого наближення. Рівняння першого наближення можна вивести ще й інакше – методом усереднення.

Для розв'язування задач нелінійних коливань зручно подавати розв'язок не у дійсній формі (32.81), а в комплексній, користуючись формулою Ейлера. Проліюструємо це на розв'язанні конкретної задачі з дослідження резонансу, що виникає при нелінійних коливаннях фізичного маятника, який розміщено на основі, що здійснює вібрацію в горизонтальному напрямку з прискоренням  $w = w_0 \cos \omega t$ . Рівняння руху фізичного маятника у цьому випадку

$$I\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = mlw. \quad (32.84)$$

Подамо  $\sin \varphi$  у вигляді степеневого ряду, враховуючи в ньому лише перші два члени, вважаючи відхилення  $\varphi$  невеликим, а тертя і збурення слабкими.

Розділивши всі члени рівняння (32.84) на  $I$  та ввівши формально символ  $\varepsilon$  для характеристики малювання цих членів, дістанемо

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \varepsilon \left( b \cos \omega t - 2h\dot{\varphi} + \omega_0^2 \frac{\varphi^3}{6} \right). \quad (32.85)$$

Тут позначено

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}; \quad \varepsilon \cdot 2h = \frac{k}{I}; \quad \varepsilon b = \frac{mlw_0}{I}.$$

Розглянемо резонанс, коли частота  $\omega$  мало відрізняється від частоти власних коливань  $\omega_0$  згідно з рівністю

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \varepsilon \Delta\omega, \quad (32.86)$$

де  $\varepsilon \Delta\omega$  – розлад частот.

При  $\varepsilon = 0$  рівняння (32.85) допускає розв'язок

$$\begin{aligned} \varphi &= C e^{i\omega t} + D e^{-i\omega t} = a \cos(\omega t + \theta), \\ \dot{\varphi} &= i\omega (C e^{i\omega t} - D e^{-i\omega t}), \end{aligned} \quad (32.87)$$

де  $i = \sqrt{-1}$ ;  $C$  і  $D$  – сталі.

Користуючись формулами Ейлера

$$\begin{aligned} e^{i\omega t} &= \cos \omega t + i \sin \omega t, \\ e^{-i\omega t} &= \cos \omega t - i \sin \omega t, \end{aligned}$$

неважко встановити такі допоміжні співвідношення:

$$\begin{aligned} \cos \omega t &= \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}; \\ \sin \omega t &= \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}; \end{aligned}$$

$$C = \frac{a}{2} e^{i\theta}; \quad D = \frac{a}{2} e^{-i\theta}; \quad CD = \frac{a^2}{4}; \quad (32.88)$$

$$C + D = a \cos \theta; \quad C - D = ai \sin \theta;$$

$$\varphi^3 = C^3 e^{i3\omega t} + D^3 e^{-i3\omega t} + 3CD\varphi.$$

З огляду на викладене вище, вирази (32.87) можна розглядати як розв'язок рівняння (32.85) і при  $\varepsilon \neq 0$ , якщо величини  $C$  і  $D$  ( $a$  і  $\theta$ ) розглядати не як сталі, а як деякі функції часу.

Будемо розглядати (32.87) як деяку заміну змінних, а  $C$  і  $D$  візьмемо за нові невідомі функції часу.

Щоб скласти диференціальні рівняння для  $C$  і  $D$ , здиференціюємо обидві частини першої формули (32.87), тоді дістанемо

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \dot{C} e^{i\omega t} + \dot{D} e^{-i\omega t} + \\ &+ i\omega (C e^{i\omega t} - D e^{-i\omega t}). \end{aligned} \quad (32.89)$$

Звідси, беручи до уваги друге співвідношення (32.87), матимемо

$$\dot{C} e^{i\omega t} + \dot{D} e^{-i\omega t} = 0. \quad (32.90)$$

З урахуванням (32.90) і (32.87) знайдемо

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi + i\omega (\dot{C} e^{i\omega t} - \dot{D} e^{-i\omega t}). \quad (32.91)$$

Підставляючи в рівняння (32.85) замість  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\ddot{\varphi}$  відповідні їм вирази (32.87) і (32.91), з урахуванням співвідношення (32.86), з якого випливає, що  $\omega^2 = \omega_0^2 - \varepsilon \Delta\omega$ , дістанемо

$$i\omega (\dot{C} e^{i\omega t} - \dot{D} e^{-i\omega t}) = \varepsilon F(\varphi, \dot{\varphi}, \omega t). \quad (32.92)$$

Тут позначено

$$\begin{aligned} \varepsilon F(\varphi, \dot{\varphi}, \omega t) &= \\ &= \varepsilon \left( -\Delta\omega \varphi + b \cos \omega t - 2h\dot{\varphi} + \omega_0^2 \frac{\varphi^3}{6} \right). \end{aligned} \quad (32.93)$$

Отже, для визначення двох невідомих  $C$  і  $D$  маємо систему двох рівнянь – (32.90) і (32.92):

$$\begin{aligned} \dot{C} e^{i\omega t} + \dot{D} e^{-i\omega t} &= 0, \\ \dot{C} e^{i\omega t} - \dot{D} e^{-i\omega t} &= \frac{\varepsilon F(\varphi, \dot{\varphi}, \omega t)}{i\omega}. \end{aligned} \quad (32.94)$$

Розв'язуючи цю систему відносно  $\dot{C}$  і  $\dot{D}$ , одержимо

$$\begin{aligned} \dot{C} &= \frac{dC}{dt} = \frac{\varepsilon}{2i\omega} F e^{-i\omega t}, \\ \dot{D} &= \frac{dD}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2i\omega} F e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (32.95)$$

Як видно з (32.95),  $\dot{C}$  і  $\dot{D}$  пропорційні малому параметру, тому вони будуть повільно змінними функціями часу. Диференціальні

рівняння, зведені до вигляду (32.95), називають *рівняннями в стандартній формі*.

Із структури рівняння (32.95) випливає, що поряд з повільно змінними складовими, які описуються членами з  $e^{i0} = 1$  у добутках  $Fe^{\pm i\omega t}$ , в нього входять також малі вібраційні члени з  $e^{\pm i\omega t}$  ( $i=1, 2, \dots$ ). Вважаємо, що ці синусоїдальні коливальні складові не впливають на систематичні зміни  $C$  і  $D$  (відповідно  $a$  і  $\theta$ ). Коливальні складові в (32.95) можна виключити, усереднюючи співвідношення (32.95) за часом, тобто інтегруючи їх за період коливань. Оператор усереднення функції  $\Phi$  будемо позначати символом  $\langle \cdot \rangle$ :

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi dt. \quad (32.96)$$

Отже, враховуючи (32.96), остаточно дістанемо

$$\begin{aligned} \langle \dot{C} \rangle &= \left\langle \frac{\varepsilon}{2i\omega} Fe^{-i\omega t} \right\rangle, \\ \langle \dot{D} \rangle &= -\left\langle \frac{\varepsilon}{2i\omega} Fe^{i\omega t} \right\rangle. \end{aligned} \quad (32.97)$$

Ці рівняння збігаються з рівняннями (32.82), але записані в іншій формі.

Побудова розв'язання в такому вигляді є побудовою першого наближення так званого *методу усереднення*, що широко застосовується в задачах нелінійної механіки. Надалі домовимося  $C$  та  $D$  до і після усереднення позначати однаково.

Перш ніж виконати операцію усереднення в (32.97), підставимо у вираз (32.93) для  $F(\varphi, \dot{\varphi}, \omega t)$  доданки, що входять туди, з урахуванням допоміжних співвідношень (32.87), (32.88). Тоді

$$F = \left( -\Delta\omega + \frac{1}{2} \omega_0^2 CD \right) (Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t}) +$$

$$\begin{aligned} + \frac{b}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - 2i\hbar\omega (Ce^{i\omega t} - De^{-i\omega t}) + \\ + \frac{\omega_0^2}{6} (C^3 e^{i3\omega t} + D^3 e^{-i3\omega t}). \end{aligned} \quad (32.98)$$

Підставивши вираз (32.98) в (32.97), після усереднення дістанемо

$$\begin{aligned} \langle \dot{C} \rangle &= \frac{\varepsilon}{2i\omega} \left[ \left( -\Delta\omega + \frac{1}{2} \omega_0^2 CD - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2i\hbar\omega \right) C + \frac{b}{2} \right], \\ \langle \dot{D} \rangle &= -\frac{\varepsilon}{2i\omega} \left[ \left( -\Delta\omega + \frac{1}{2} \omega_0^2 CD + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2i\hbar\omega \right) D + \frac{b}{2} \right]. \end{aligned} \quad (32.99)$$

Якщо нас цікавлять стаціонарні значення змінних  $C$  і  $D$ , то треба покласти  $\langle \dot{C} \rangle = 0$ ,  $\langle \dot{D} \rangle = 0$ . У цьому випадку рівняння (32.99) з урахуванням того, що  $CD = a^2/4$ , набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \left( -\Delta\omega + \frac{\omega_0^2}{8} a^2 - 2i\hbar\omega \right) C = -\frac{b}{2}; \\ \left( -\Delta\omega + \frac{\omega_0^2}{8} a^2 + 2i\hbar\omega \right) D = -\frac{b}{2}. \end{aligned} \quad (32.100)$$

Перемноживши обидві частини першого і другого рівнянь (32.100), дістанемо

$$a^2 \left[ \left( \Delta\omega - \frac{\omega_0^2}{8} a^2 \right)^2 + 4\hbar^2 \omega^2 \right] = b^2. \quad (32.101)$$

Або, враховуючи, що  $\varepsilon\Delta\omega = \omega_0^2 - \omega^2$ , а  $\varepsilon$  – символ, що відображає мализну членів, вираз (32.101) запишемо у вигляді

$$a = \frac{b}{\sqrt{\left( \omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega_0^2}{8} a^2 \right)^2 + 4\hbar^2 \omega^2}}.$$

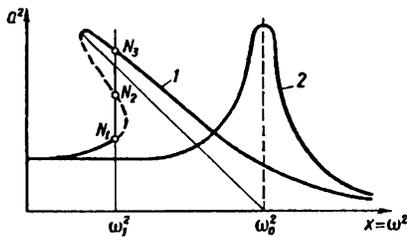


Рис. 32.2

Причому вираз для зсуву фаз  $\theta$  з (32.100) можна звести до вигляду

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2h\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega_0^2}{8} a^2}, \quad (32.102)$$

якщо ліву частину рівняння (32.100) записати так:  $a^2 e^{i(\theta+x)}$ .

Побудуємо графічно залежність квадрата амплітуди  $a^2$  від квадрата частоти  $\omega^2$ . Зобразимо спочатку так звану *скелетну криву*, що відповідає в системі узагальненому розладу частот, тобто рівності

$$\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega_0^2}{8} a^2 = 0. \quad (32.103)$$

Якщо позначити  $a^2 = y$ ;  $\omega^2 = x$ , то

$$\frac{\omega_0^2}{8} y = -x + \omega_0^2, \quad (32.104)$$

тобто скелетна крива на площині  $(a^2, \omega^2)$  є прямою лінією з від'ємним кутовим коефіцієнтом. Якби система була лінійною, то в рівнянні (32.104) скелетна крива була б вертикальною лінією, що проходить через точку  $\omega^2 = \omega_0^2$  (рис. 32.2). Вигляд амплітудно-частотної кривої показано на цьому самому рисунку – крива 1 для нелінійної моделі, крива 2 для лінійної моделі маятника.

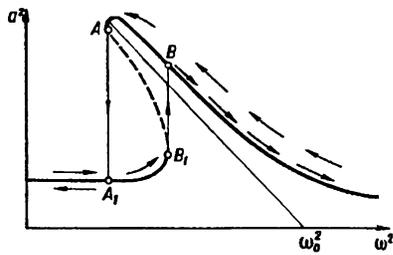


Рис. 32.3

Як видно з рисунка, частоті  $\omega_1^2$  відповідає одне значення амплітуди  $a^2$  в лінійній моделі та три значення (точки  $N_1, N_2, N_3$ ) – в нелінійній моделі. Для того щоб відповіді на запитання, яка з цих амплітуд коливань може бути реалізована, треба дослідити стійкість незбуреного руху, або, що те саме, – стійкість відповідних стаціонарних розв'язків рівняння (32.99). Для цього дають дорівільні малі прирости величинам  $C$  і  $D$ , припускаючи  $C = C_0 + \delta C$ ,  $D = D_0 + \delta D$ . Підставляючи  $C$  і  $D$  в (32.99) і враховуючи лише лінійні члени з  $\delta C$  і  $\delta D$ , лінеаризують це рівняння. Потім за характеристичним рівнянням лінійної системи за допомогою критерію Гурвіца визначають, які знаки мають дійсні частини його коренів. Якщо вони від'ємні, то це означає, що при  $t \rightarrow \infty$   $\delta C \rightarrow 0$  і  $\delta D \rightarrow 0$ , отже, стаціонарні розв'язки  $C_0$  і  $D_0$  асимптотично стійкі. Якщо знаки додатні, то – нестійкі, отже, реалізувати їх неможливо.

Як показують дослідження, середні точки ( $N_2$ ) на амплітудно-частотних характеристиках відповідають нестійким стаціонарним розв'язкам. Це означає, що частина амплітудно-частотної кривої (зображеної штриховою лінією на кривій 1) не відтворюється в досліді. На практиці (рис. 32.3) це спричинює стрибки амплітуд (із точки  $A$

в  $A_1$  і з точки  $B_1$  у  $B$ ) під час проведення частотних випробувань. Експериментально з підвищенням або зниженням частоти реалізуються криві, показані на рис. 32.3 відповідними стрілками.

Зуважимо, що аналогічний характер залежності амплітуди змущених коливань від частоти типу петлі гістерезису  $A_1ABB_1$  (рис. 32.3) експериментально отримують також у дослідах навіть з лінійними системами через те, що збуджувачі коливань – вібростенди – мають обмежену потужність. Це явище в теорії коливань дістало назву *ефекта Зоммерфельда – Кононенка* за прізвищами німецького та українського вчених, які це явище найбільш повно дослідили<sup>1</sup>.

### § 32.5. Метод послідовних наближень.

#### Задача стійкості гіроскопа в кардановому підвісі

Поряд з математично обґрунтованими методами дослідження нелінійних коливань, викладеними у попередніх параграфах (метод фазової площини, метод малого параметра А. Пуанкаре, асимптотичні методи, метод усереднення), в нелінійних задачах, особливо в складних електромеханічних системах, часто застосовують метод послідовних наближень Лікара – Пеано і метод гармонічного балансу, в яких не завжди є потреба явно виділяти малий параметр і досліджувати умови відсутності секулярних (вікових) членів.

Викладемо основні ідеї методу послідовних наближень на прикладі дослідження стійкості гіроскопа в кардановому підвісі на нерухомій основі.

У § 27.5, приклад 5, виписані диференціальні рівняння руху гіроскопа в кардановому підвісі на нерухомій основі.

Якщо в цих рівняннях покласти  $H = I(\dot{\gamma} - \dot{\alpha} \sin \beta) = \text{const}$ , то їх можна записати у формі

$$\begin{aligned} A(\beta)\ddot{\alpha} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \dot{\alpha} \dot{\beta} - H\dot{\beta} \cos \beta &= 0, \\ B\ddot{\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \dot{\alpha}^2 + H\dot{\alpha} \cos \beta &= 0, \end{aligned} \quad (32.105)$$

де

$$A(\beta) = I_{y1} + I_{y2} + I_e \cos^2 \beta + I_{z2} \sin^2 \beta,$$

$$B = I_{x2} + I_e, \quad \frac{\partial A}{\partial \beta} = I_{y1} + I_{z2} + D \cos^2 \beta,$$

$$D = I_{y2} + I_e - I_{z2}.$$

Рівняння (32.105) допускають стаціонарний розв'язок (незбурений рух)  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\beta = \beta_0$ , який відповідає першій властивості гіроскопа: кінетичний момент гіроскопа  $\vec{H}$  зберігає свій напрям, заданий кутами  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ , незмінним в інерціальній системі координат.

Дослідимо стійкість за Ляпуновим цього стаціонарного розв'язку при збуренні початкових умов. Нехай при  $t = 0$

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0,$$

$$\dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0, \quad \dot{\beta}(0) = \dot{\beta}_0. \quad (32.106)$$

Відповідно до теорії стійкості визначимо спочатку стійкість за лінеаризованими рівняннями руху.

Лінеаризуємо рівняння (32.105) в околі точки  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \beta_0$ ,  $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_1$ ,  $\dot{\beta} = \dot{\beta}_1$ . Тоді лінеаризовані рівняння матимуть вигляд

$$\begin{aligned} A(\beta_0)\ddot{\alpha}_1 - H\dot{\beta}_1 \cos \beta_0 &= 0, \\ B\ddot{\beta}_1 + H\dot{\alpha}_1 \cos \beta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (32.107)$$

Звідси характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} A_0 p^2 & -H p \cos \beta_0 \\ H p \cos \beta_0 & B p^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (32.108)$$

<sup>1</sup> Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. – М.: Наука, 1964. – 254 с.

або

$$p^2(A_0 B p^2 + H^2 \cos^2 \beta_0) = 0, \quad (32.109)$$

де  $A_0 = A(\beta_0)$ ;  $p = \frac{d}{dt}$  – оператор диференціювання.

Корні рівняння (32.109) такі:

$$p_{1,2} = 0, \quad p_{3,4} = \pm j\lambda, \quad (32.110)$$

де  $j = \sqrt{-1}$ ;  $\lambda = \frac{H \cos \beta_0}{\sqrt{A_0 B}}$  – частота власних (нутаційних) коливань гіроскопа.

Із розв'язку (32.110) випливає: два нульових кореня  $p_{1,2} = 0$  підкреслюють, що в цій задачі потрібно вести мову про стійкість гіроскопа за кутовими швидкостями  $\dot{\alpha}$  і  $\dot{\beta}$ , а чисто уявні корені  $p_{3,4}$  показують, що ця система знаходиться на межі стійкості; про стійкість чи нестійкість гіроскопа нічого не можна сказати із рівнянь першого наближення, а потрібно розглядати розв'язки рівнянь з урахуванням нелінійних членів.

Побудуємо розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь (32.105) методом послідовних наближень.

Будемо шукати розв'язок системи у формі рядів:

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_{(0)} + \beta_1 + \beta_2 + \dots = \beta_0 + \Delta\beta, \\ \dot{\beta} &= \dot{\beta}_{(0)} + \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 + \dots, \\ \dot{\alpha} &= \dot{\alpha}_{(0)} + \dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 + \dots, \end{aligned} \quad (32.111)$$

де  $\beta_{(0)}, \alpha_{(0)}$  – наближення нульове, таке, що  $\beta_{(0)} = \beta_0$ ;  $\alpha_{(0)} = \alpha_0$ , тоді  $\dot{\beta}_{(0)} = 0$ ,  $\dot{\alpha}_{(0)} = 0$ ,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots$  – перше, друге і т. д. наближення по координатах  $\beta$  і  $\alpha$  і відповідних швидкостях  $\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dots, \dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dots$

Підставимо ряди (32.111) в рівняння (32.105) і розкладемо в них коефіцієнти  $A(\beta)$  і  $H \cos \beta$  у відповідні ряди Тейлора в околі точки  $\beta_0$ ; тоді матимемо

$$\begin{aligned} & \left[ A(\beta_0) + \left( \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)_{\beta_0} \Delta\beta + \dots \right] \ddot{\alpha}_1 + \\ & + \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)_{\beta_0} + \left( \frac{\partial^2 A}{\partial \beta^2} \right)_{\beta_0} \Delta\beta + \dots \right] \times \\ & \times (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 + \dots) (\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 + \dots) - \\ & - H (\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 + \dots) \left[ \cos \beta_0 - \Delta\beta \sin \beta_0 - \right. \\ & \left. - (\Delta\beta)^2 \cos \beta_0 + \dots \right] = 0; \quad (32.112) \\ & B (\ddot{\beta}_1 + \ddot{\beta}_2 + \dots) - \\ & - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)_{\beta_0} + \left( \frac{\partial^2 A}{\partial \beta^2} \right)_{\beta_0} \Delta\beta + \dots \right] \times \\ & \times (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 + \dots)^2 + H (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 + \dots) \times \\ & \times (\cos \beta_0 - \Delta\beta \sin \beta_0 + \dots) = 0. \end{aligned}$$

Якщо врахувати, що величини з індексом "1" ( $\alpha_1, \beta_1, \dot{\alpha}_1, \dot{\beta}_1$ ) – це величини першого порядку мализни, а з індексом "2" і добуток величин першого порядку – це величини другого порядку мализни, то із системи (32.112) отримасмо такі рівняння першого наближення:

$$\begin{aligned} A_0 \dot{\alpha}_1 - H \dot{\beta}_1 \cos \beta_0 &= 0, \\ B \ddot{\beta}_1 + H \dot{\alpha}_1 \cos \beta_0 &= 0, \end{aligned} \quad (32.113)$$

для яких, щоб їх розв'язок був відмінним від тривіального  $\dot{\alpha}_1 = 0$ ;  $\dot{\beta}_1 = 0$ , приймемо такі початкові умови:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, \quad \beta_1 = 0, \\ \dot{\alpha}_1 &= \dot{\alpha}_0, \quad \dot{\beta}_1 = \dot{\beta}_0. \end{aligned} \quad (32.114)$$

При початкових умовах (32.114), з урахуванням коренів характеристичного рівняння (32.110), розв'язок матиме вигляд

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= a \sin(\lambda t + \delta), \\ \dot{\beta}_1 &= b \cos(\lambda t + \delta),\end{aligned}\quad (32.115)$$

де  $\delta$  – зсув фаз;  $a$  і  $b$  – амплітуди коливань, що визначаються з початкових умов і дорівнюють

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{\frac{A_0 \dot{\alpha}_0^2 + B \dot{\beta}_0^2}{A_0}} = \sqrt{\frac{2T_0}{A_0}}, \\ b &= a \sqrt{\frac{A_0}{B}} = \sqrt{\frac{2T_0}{B}}.\end{aligned}\quad (32.116)$$

Тут  $2T_0 = A_0 \dot{\alpha}_0^2 + B \dot{\beta}_0^2$  – кінетична енергія, яка задається гіроскопу початковим ударним імпульсом.

Для визначення рівнянь другого наближення випишемо з (32.112) величини другого порядку мализни:

$$\begin{aligned}A_0 \ddot{\alpha}_2 - H \dot{\beta}_2 \cos \beta_0 &= \\ = - \left( \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)_{\beta_0} (\dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 + \beta_1 \ddot{\alpha}_1) - H \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_1 \sin \beta_0, \\ B \ddot{\beta}_2 + H \dot{\alpha}_2 \cos \beta_0 &= \\ = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)_{\beta_0} \dot{\alpha}_1^2 + H \dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 \sin \beta_0.\end{aligned}\quad (32.117)$$

Як видно із системи (32.117), друге наближення  $\dot{\alpha}_2, \dot{\beta}_2$  визначається першим за допомогою членів, що стоять у правій частині.

У подальшому будемо розглядати лише сталу складову в правих частинах (32.117), бо саме вона впливає на стійкість гіроскопа. Якщо в правій частині рівнянь (32.117) виділяється стала складова моменту, то це означає, що виникає відповідна прецесія гіроскопа і він відхиляється від заданого напрямку в просторі, тобто він буде нестій-

ким. Якщо немає сталої складової, то гіроскоп стійкий.

Для перевірки на стійкість виконаємо операцію усереднення згідно з формулою (32.96). Тоді, враховуючи розв'язок (32.115) для першого наближення, матимемо

$$\begin{aligned}-H (\dot{\beta}_2) \cos \beta_0 &= 0, \\ H (\dot{\alpha}_2) \cos \beta_0 &= \end{aligned}\quad (32.118)$$

$$= \left\langle \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)_{\beta_0} \dot{\alpha}_1^2 + H \dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 \sin \beta_0 \right\rangle.$$

При подальших перетвореннях врахуємо такі очевидні співвідношення:

$$\begin{aligned}H \dot{\alpha}_1 \cos \beta_0 &= -B \dot{\beta}_1; \\ \langle H \dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 \sin \beta_0 \rangle &= \frac{1}{2} B b^2 \text{tg } \beta_0 = \\ &= \frac{1}{2} a^2 A_0 \text{tg } \beta_0; \\ \frac{\partial A}{\partial \beta} &= -D \sin 2\beta,\end{aligned}\quad (32.119)$$

тоді, з урахуванням (32.105), матимемо

$$\begin{aligned}\langle \dot{\beta}_2 \rangle &= 0, \\ H (\dot{\alpha}_2) \cos \beta_0 &= \frac{a^2}{2} (I_{y1} + I_{z2}) \text{tg } \beta_0.\end{aligned}\quad (32.120)$$

Звідси середня швидкість відхилення гіроскопа від заданого напрямку в інерціальному просторі за кутом повороту зовнішньої рамки буде

$$\langle \dot{\alpha}_2 \rangle = \frac{a^2 (I_{y1} + I_{z2})}{2H \cos \beta_0} \text{tg } \beta_0.\quad (32.121)$$

При  $\dot{\alpha}_0 = 0$  із формули (32.121) отримаємо формулу для відходу гіроскопа

$$\langle \dot{\alpha}_2 \rangle = \frac{B}{A_0} \dot{\beta}_0^2 \frac{I_{y1} + I_{z2}}{2H \cos \beta_0} \text{tg } \beta_0,\quad (32.122)$$

яку вперше отримав у 1955 р. Магнус, і тому її називають *формулою Магнуса*.

Зазначимо, що формулі (32.121), з урахуванням (32.116), можна надати вигляду

$$\langle \dot{\alpha}_2 \rangle = \frac{T_0(I_{z1} + I_{z2})}{HA_0 \cos \beta_0} \text{tg } \beta_0. \quad (32.123)$$

з якого видно, що відхід Магнуса пропорційний кінетичній енергії початкового ударного імпульсу, що наноситься по гіроскопу, або енергії збурення початкових умов і величини неперпендикулярності рамок карданового підвісу ( $\beta_0$ ).

Оскільки за теоремою Ляпунова про нестійкість по членах другого порядку мализни виявлена нестійкість гіроскопа, то його незбурений рух (заданий напрямком у просторі) є нестійким.

Якщо врахувати хоча б одне джерело розсіювання енергії в гіроскопі (тертя в осях підвісу, асинхронний тип двигуна), то гіроскоп стає стійким за Ляпуновим у першому наближенні. Тому відхід Магнуса не має місця, бо вільні коливання гіроскопа затухають. Але коли в гіроскопі збудити змушені коливання шляхом кутової вібрації основи, динамічної незрівноваженості ротора, зміни його параметрів через пружні деформації елементів конструкції, люфти тощо, то члени другого порядку мализни спричиняють систематичний відхід гіроскопа і, отже, нестійкість через збурення не початкових умов, а параметрів системи і зовнішніх сил<sup>1</sup>.

Як бачимо, гіроскоп є прикладом приладу, стосовно якого не виконуються висновки досліджень Малкіна про *стійкість руху* при збуренні інших параметрів, окрім початкових умов, бо якщо навіть незбурений рух гіроскопа є асимптотично стійким за Ляпуновим (стосовно збурення початкових умов),

то при збуренні його параметрів і зовнішніх сил він стає нестійким. Хоча при цьому залежно від технічних вимог він може бути технічно стійким.

Зауважимо, що замість методу послідовних наближень для розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь (32.105) без особливих ускладнень можна застосовувати метод малого параметра Пуанкаре, асимптотичні методи, метод усереднення. Надаємо читачам можливість переконатись у цьому самостійно.

На завершення цього параграфа цікаво зазначити, що академік НАН України Кошляков В. М. отримав формулу Магнуса при дослідженні руху гіроскопа в параметрах Родріга – Гамільтона<sup>2</sup>.

### § 32.6. Порівняння методів усереднення, гармонічного балансу і послідовних наближень

У § 32.5 показана ефективність дослідження гіроскопів методом послідовних наближень Пікара – Пеано, що рівноцінно розкладанню по степенях малого параметра, згідно з методом Пуассона<sup>3</sup>.

Ці методи досить широко застосовуються при дослідженні систем маятникового типу. За умови вібруючої основи в маятникових чутливих елементах вимірювальних приладів багато авторів визначають сталу складову сигналу маятника, яка для малих рівнів вібрації виявляється пропорційною добутку амплітуд прискорень, які діють по двох відповідних осях.

Порівняємо між собою ефективність трьох методів дослідження нелінійних рівнянь

<sup>2</sup>Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. Аналитические методы. – М.: Наука, 1985. – 288 с.

<sup>3</sup>Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1958.

<sup>1</sup>Усебічно проблема стійкості гіроскопів у кардановому підвісі викладена в підручнику: Павловський М. А. Теорія гіроскопов. К.: Вища шк., 1986. – 303 с.

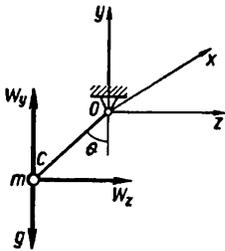


Рис. 32.4

маятникового чутливого елемента<sup>1</sup>: методом усереднення, гармонічного балансу та послідовних наближень і покажемо, що вказана залежність сталої складової сигналу від рівня вібрації є значно складнішою, ніж та, яку отримують методом послідовних наближень.

Розглянемо рух плоского маятникового чутливого елемента при просторовій вібрації основи (рис. 32.4), яка задана лінійними прискореннями  $w_y$  і  $w_z$ :

$$w_y = w_{ya} \sin \omega t,$$

$$w_z = w_{za} \sin(\omega t + \delta).$$

Якщо узагальнену координату позначити  $\theta$ , то рівняння маятникового чутливого елемента на віброуючій основі можна записати у формі

$$\ddot{\theta} + 2h\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = -\omega_0^2 n_y \sin \omega t \sin \theta + \omega_0^2 n_z \sin(\omega t + \sigma) \cos \theta. \quad (32.124)$$

Тут  $2h$  – відносний коефіцієнт демпфування маятника;  $\omega_0$  – частота власних коливань маятника;  $n_y$ ,  $n_z$  – вібраційні переваження по відповідних осях, які дорівнюють  $n_y = \frac{w_{ya}}{g}$ ,  $n_z = \frac{w_{za}}{g}$ , тобто по від-

ношенню амплітуд прискорень вібрації до прискорення вільного падіння  $g$ ;  $\omega$  – частота вібрації;  $\sigma$  – зсув фаз.

Зазначимо, що така форма запису рівняння (32.124) є однаковою і для фізичного, і для математичного маятників.

Рівняння (32.124) є нелінійним диференціальним рівнянням з періодичними коефіцієнтами.

**1. Метод усереднення.** Для розв'язання рівняння (32.124) цим методом введемо безрозмірний час  $\tau = \omega t$ . Візьмемо за малий параметр  $\varepsilon$  відношення частоти власних коливань маятника  $\omega_0$  до частоти вібрації

$\varepsilon = \frac{\omega_0}{\omega}$ , тоді рівняння (32.124) перепишемо у формі

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \varepsilon \cdot 2\alpha \frac{d\theta}{d\tau} + \varepsilon^2 (1 + n_y \sin \tau) \sin \theta - \varepsilon^2 n_z \sin(\tau + \sigma) \cos \theta = 0, \quad (32.125)$$

де  $\alpha = \frac{h}{\omega_0}$ .

Відповідно до методу усереднення шляхом заміни змінних рівняння (32.125) перетворимо до двох рівнянь першого порядку в стандартній формі. Для цього введемо дві нові невідомі функції  $\varphi$  і  $\gamma$  з допомогою наступних формул, які впливають із рівняння (32.125),

$$\begin{aligned} \theta &= \varphi + \varepsilon^2 n_y \sin \tau \sin \varphi - \\ &- \varepsilon^2 n_z \sin(\tau + \sigma) \cos \varphi; \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \varepsilon \gamma + \varepsilon^2 n_y \cos \tau \sin \varphi - \\ &- \varepsilon^2 n_z \cos(\tau + \sigma) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (32.126)$$

Виконаємо тепер перетворення за методикою, що викладена в § 32.4, і, усереднивши по  $\tau$ , отримаємо наступні рівняння першого наближення:

<sup>1</sup>Павловский М. А. О постоянной составляющей сигнала маятников при вибрации // Прикладная механика. – 1971. – Вып. 4. – С. 105–109.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon\gamma;$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -2\alpha\varepsilon\gamma - \varepsilon \sin \varphi \left[ 1 + \varepsilon^2 (n_y^2 - n_z^2) \cos \varphi \right] + \varepsilon^3 n_y n_z \cos \sigma \cos 2\varphi, \quad (32.127)$$

які еквівалентні одному рівнянню другого порядку

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\varepsilon\alpha \frac{d\varphi}{dt} + \\ & + \varepsilon^2 \sin \varphi \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} (n_y^2 - n_z^2) \cos \varphi \right] - \\ & - \frac{\varepsilon^4}{2} n_y n_z \cos \sigma \cos 2\varphi = 0. \quad (32.128) \end{aligned}$$

Зазначимо, що коли для одновісної вертикальної вібрації ( $n_y \neq 0, n_z = 0$ ) частота власних коливань маятника збільшується, то для одновісної поперечної ( $n_y = 0, n_z \neq 0$ ) вона зменшується, а при просторовій усе залежить від співвідношення  $n_y$  і  $n_z$ , якщо  $n_y > n_z$  – збільшується, а якщо  $n_y < n_z$  – зменшується, при  $n_y = n_z$  – не змінюється.

Якщо кут  $\varphi$  вважати малим, то рівняння (32.128) допускає квазістатичний розв'язок:

$$\varphi = \langle \theta \rangle = \frac{1}{2} \frac{n_y n_z \cos \sigma}{\omega_0^2 + \frac{n_y^2 - n_z^2}{2}}. \quad (32.129)$$

Коли  $(n_y^2 - n_z^2) \ll \frac{\omega_0^2}{2}$ , то рівняння набуде вигляду відомої формули, отриманої методом послідовних наближень:

$$\begin{aligned} \langle \theta \rangle &= \frac{1}{2} n_y n_z \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cos \sigma = \\ &= \frac{1}{2} \frac{w_{ya} w_{za} \omega_0^2}{g^2 \omega^2} \cos \sigma. \quad (32.130) \end{aligned}$$

**2. Метод гармонічного балансу.** Метод гармонічного балансу побудований на тому, що розв'язок рівняння подають у формі ряду Фур'є і прирівнюють потім коефіцієнти при однакових гармоніках зліва і справа в рівняннях руху.

Подамо розв'язок рівняння (32.124) у формі ряду Фур'є

$$\begin{aligned} \theta &= a_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\omega t + \\ &+ b_k \cos k\omega t), \quad (32.131) \end{aligned}$$

де  $a_0(t)$  – повільнозмінна функція часу.

Враховуючи, що  $\omega \gg \omega_0$ , тобто маятник має фільтруючі властивості, обмежимося лише першою гармонікою. За цих умов мають місце співвідношення

$$\begin{aligned} \sin \theta &\approx \sin a_0 + \\ &+ \cos a_0 (a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t); \\ \cos \theta &\approx \cos a_0 - \\ &- \sin a_0 (a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t). \end{aligned} \quad (32.132)$$

Підставивши в (32.125) вираз (32.131) з урахуванням (32.132) і прирівнявши коефіцієнти при однакових гармоніках, отримаємо

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2 a_0}{dt^2} + 2\varepsilon\alpha \frac{da_0}{dt} + \varepsilon^2 \sin a_0 = \\ &= -\frac{n_y \omega_0^2}{2} a_1 \cos a_0 - \\ & - \frac{n_z \omega_0^2}{2} \sin a_0 (a_1 \cos \sigma + b_1 \sin \sigma); \\ & (\omega_0^2 - \omega^2) a_1 - 2h\omega b_1 = \\ &= n_z \omega_0^2 \cos \sigma \cos a_0 - n_y \omega_0^2 \sin a_0; \\ & 2h\omega a_1 + (\omega_0^2 - \omega^2) b_1 = \\ &= n_z \omega_0^2 \sin \sigma \cos a_0. \end{aligned} \right. \quad (32.133)$$

Беручи до уваги нерівності  $\omega^{\prime} \gg h^{\prime}$ ,  $\omega^{\prime} \gg \omega_0^2$  і виключаючи із системи (32.133) невідомі  $a_1$  і  $b_1$ , матимемо

$$\frac{d^2 a_0}{d\tau^2} + 2\varepsilon\alpha \frac{da_0}{d\tau} + \varepsilon^2 \sin a_0 \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} (n_y^2 - n_z^2) \cos a_0 \right] - \frac{\varepsilon^4}{2} n_y n_z \cos \sigma \cos 2a_0 = 0. \quad (32.134)$$

Неважко помітити, що рівняння (32.134) збігається з рівнянням (32.128). Отже, за цих умов ( $h^2 \ll \omega^2$ )

$$a_0 = \varphi = \langle \theta \rangle. \quad (32.135)$$

Система рівнянь (32.133) за умов мализ-ни  $\alpha = \frac{h}{\omega_0}$  має квазістатичний розв'язок:

$$a_0 = \langle \theta \rangle = \frac{n_y n_z \left( \cos \sigma - \frac{2h}{\omega_0} \sin \sigma \right)}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{n_y^2 - n_z^2}{2} + 4 \frac{h^2}{\omega_0^2}}. \quad (32.136)$$

Порівняння формул (32.136) і (32.129) показує, що метод гармонічного балансу дає більш точний розв'язок, ніж метод усереднення при врахуванні лише першої гармоніки.

**3. Метод послідовних наближень.** Подамо  $\theta$  у формі ряду

$$\theta = \theta^{(1)} + \theta^{(2)} + \dots, \quad (32.137)$$

де  $\theta$  визначається виразом (32.131).

При малих значеннях  $a_0$  викладена в § 32.5 методика послідовних наближень дає систему рівнянь

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) a_1^{(1)} - 2h\omega b_1^{(1)} &= -n_z \omega_0^2 \cos \sigma; \\ 2h\omega a_1^{(1)} + (\omega_0^2 - \omega^2) b_1^{(1)} &= n_y \omega_0^2 \sin \sigma; \end{aligned} \quad (32.138)$$

$$\omega_0^2 a_0^{(1)} = -\frac{n_y}{2} \omega_0^2 a_1^{(1)}.$$

Звідси вираз для  $a_0$  при  $\omega^2 \gg \omega_0^2$  набу-де вигляду

$$a_0 = \frac{n_y n_z}{2} \frac{\left( \cos \sigma - \frac{2h}{\omega_0} \sin \sigma \right)}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 4 \frac{h^2}{\omega_0^2}} \times \left( 1 + d_1 n_y^2 + d_2 n_z^2 + \dots \right). \quad (32.139)$$

Якщо розглянути чотири наближення, тоді одержимо члени  $d_1 n_y^2$  і  $d_2 n_z^2$ . Зазначимо, що виразу (32.136) можна надати форми співвідношення (32.139), якщо розкласти (32.136) в біномний ряд знаменник у мінус першому степені.

Порівняння між собою цих методів показує, що для рівнянь другого порядку з періодичними коефіцієнтами найбільшу ефективність має метод гармонічного балансу, а найменшу – метод послідовних наближень.

Проаналізуємо тепер залежність  $\langle \theta \rangle$  (32.136) як функцію двох змінних  $n_y$  і  $h$ . Необхідні умови існування екстремуму складної функції  $\langle \theta \rangle (n_y, h)$  мають вигляд

$$\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial n_y} = 0, \quad \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial h} = 0, \quad (32.140)$$

що дає співвідношення

$$\frac{n_y^2}{2} = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{n_z^2}{2} + 4\alpha^2;$$

$$\alpha^2 \sin \sigma - \alpha \cos \sigma - \frac{\sin \sigma}{4} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{n_y^2 - n_z^2}{2} \right) = 0. \quad (32.141)$$

Звідси

$$\alpha = \frac{h}{\omega_0} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \sigma \left( \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{n_z^2}{2} \right);$$

$$\frac{n_y^2}{2} = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{n_z^2}{2} + \operatorname{tg}^2 \sigma \left( \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{n_z^2}{2} \right)^2. \quad (32.142)$$

При цьому на параметри маятника мають бути накладені такі обмеження, щоб виконувались нерівності  $\alpha > 0$  і  $|\langle \theta \rangle_{\max}| < 1$ .

Це можливо при  $\frac{n_z^2}{2} \ll \frac{1}{\varepsilon^2}$  і  $\frac{\pi}{2} < \sigma < \pi$  або

$$-\frac{\pi}{2} < \sigma < 0.$$

Вираз  $\langle \theta \rangle_{\max}$  з урахуванням обмежень на  $n_z$  подамо у формі

$$\langle \theta \rangle_{\max} = \frac{\varepsilon n_z}{2\sqrt{2}} \cos \sigma \sqrt{\frac{2}{2 - \varepsilon^2 n_z^2} + \operatorname{tg}^2 \sigma} \approx$$

$$\approx \frac{\varepsilon n_z}{2\sqrt{2}}. \quad (32.143)$$

Рельєф функції  $\langle \theta \rangle (n_y, h)$  для  $\sigma_1 = 0$ ,

$|\sigma_2| < |\sigma_3| < \frac{\pi}{2}$  показано на рис. 32.5.

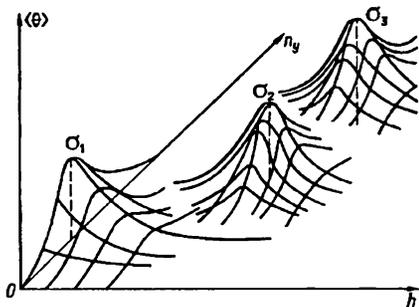


Рис. 32.5

## § 32.7. Автоколивання в нелінійних системах

У нелінійних системах виникає специфічний вид коливань, який не має місця в лінійних системах, а саме незгасаючі коливання, які збуджуються в системі під дією постійних сил. Такі коливання називають автоколиваннями за термінологією О. О. Андрюнова.

Особливістю автоколивань є те, що частота їх не нав'язується зовнішньою періодичною силою, а визначається властивостями самої системи, тобто збігається з частотою власних коливань системи. Іншою характерною особливістю автоколивань є те, що їх амплітуда у широкому діапазоні параметрів не залежить від початкових умов.

З фізичної точки зору автономні автоколивальні системи можна охарактеризувати як системи, що здатні виконувати незгасаючі коливання за рахунок постійних джерел енергії, причому надходження енергії, яка йде на здолення опору, регулюється самою системою.

Інакше кажучи, автоколивання – це такі вільні коливання системи, які збуджуються і підтримуються в нелінійній системі в процесі взаємодії постійних зовнішніх сил і сил опору.

Найпростішим прикладом автоколивань є так званий маятник Фруда (рис. 32.6). Якщо фізичний маятник підвішений на осі  $Ox$ , яка повільно обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ , то під дією сил сухого тертя, яке є в опорах осі, маятник буде відхилятися від вертикального положення на кут  $\varphi$ ,

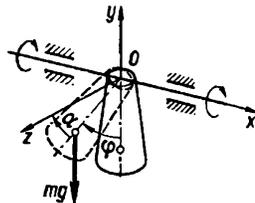


Рис. 32.6

поки момент сили ваги  $mg\sin\phi$  не стане більшим за момент сил сухого тертя  $M_T$ :

$$mg\sin\phi > M_T. \quad (32.144)$$

Співвідношення (32.144) можливе, бо коли досягається рівність  $mg\sin\phi = M_T$ , то під дією сил інерції  $I\ddot{\phi}$  маятник продовжуватиме рухатись у тому самому напрямку, що приведе до виникнення нерівності; тоді маятник зупиниться і почне рухатись у напрямку до положення рівноваги, тобто в напрямку, протилежному обертанню вала. У той момент часу, коли кутова швидкість маятника відносно вала  $\dot{\phi}$  буде за величиною більшою, ніж  $\omega$ , момент сил сухого тертя, який завжди напрямлений у бік, протилежний відносній швидкості, гальмуватиме рух маятника. Як тільки маятник зупиниться, він знову буде “захоплений” моментом сил сухого тертя і все повториться з початку.

Отже, частота автоколивань визначається параметрами фізичного маятника, а амплітуда – тим відхиленням від положення рівноваги, яке залежить від співвідношення відновлювального моменту  $mg\ell$ , моменту сил сухого тертя і співвідношення кутової швидкості обертання вала  $\omega$  і колової частоти  $\omega_0$  – власних коливань маятника. Від останнього співвідношення ( $\omega$  і  $\omega_0$ ) залежить проміжок часу, впродовж якого момент сил сухого тертя відхиляє маятник від положення рівноваги.

Зазначимо, що маятник Фроуда кожен із читачів може досить просто сконструювати сам. Для цього потрібно взяти круглий стрижень (палицю, олівець, ручку) і на нього помістити маятник (наприклад, зігнутий параболою дріт) і пальцями обох рук обертати стрижень в один бік. Досить швидко ви зможете так підібрати швидкість обертання стрижня, що переконаєтесь у тому, що описані автоколивання мають місце.

З автоколиваннями ми досить часто стикаємось у побуті, коли через неміцно закріплену прокладку в крані ми чуємо гуркотіння в трубі водопроводу.

Кожен, хто мав справу з різанням металу (точінням, фрезеруванням), знає, що є такі параметри різання, коли різець під дією постійної сили починає коливатись, а оброблена поверхня має форму хвиль на воді.

Усі добре знають, що коли рукою або пальцями, щільно притиснутими до скла, провести в одному напрямку, то можна навіть почути звук автоколивань.

У цьому параграфі наведемо математичне описання автоколивань гіровертикалей з електролітичними маятниками, які були відкриті та досліджені автором у 1967 р. Причиною таких автоколивань виявились моменти сил сухого тертя в осях рамок карданового підвісу гіроскопа та інерційність вказаних електролітичних бульбашкових маятників<sup>1</sup> (якісно глибинна причина і цих автоколивань така сама, як і в маятнику Фроуда).

Особливістю цих автоколивань є досить мала амплітуда (декілька кутових мінут) і досить великий період (десятьки секунд).

Гіровертикаль являє собою гіроскоп у кардановому підвісі з вертикально напрямленим кінетичним моментом (як і в гіромаятнику). Замість фізичного маятника, що приєднується до гіроскопа у гіромаятнику, у гіровертикалі до гіроскопа приєднується маятник з електричним виходом і момент створюється спеціальними електричними машинами – датчиками моментів, що розташовані на осях обертання карданового підвісу.

<sup>1</sup>Електролітичні бульбашкові маятники побудовані за тим самим принципом, що й звичайні рідинні бульбашкові рівні, які застосовуються в будівництві, але вони заповнюються рідиною, яка є електропровідною (електролітом). Це дає можливість організувати знімання електричного сигналу, що пропорційний відхиленню бульбашки від вертикалі (чи горизонталі).

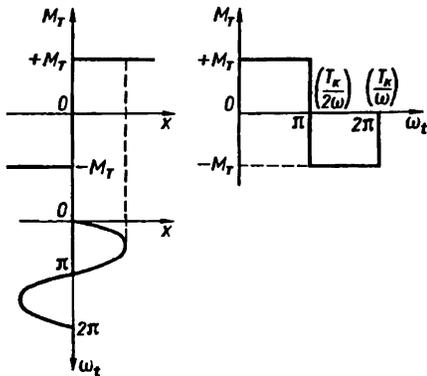


Рис. 32.7

При відхиленні зовнішньої рамки у гіромаятника момент маятника прикладається до цієї самої рамки, а в гіровертикалі – до внутрішньої, і навпаки.

Якщо скористатись матеріалами § 22.3, то рівняння гіровертикалі можна записати у вигляді рівнянь руху гіроскопа

$$\begin{aligned} H\ddot{\alpha} - K_1 v_\alpha + M_{2T} \text{sign} \beta &= 0, \\ -H\ddot{\beta} + K_2 v_\beta + M_{1T} \text{sign} \alpha &= 0, \end{aligned} \quad (32.145)$$

де  $v_\alpha, v_\beta$  – кути відхилення електролітичного маятника відносно гіроскопа в напрямку відхилення зовнішньої ( $v_\alpha$ ) і внутрішньої ( $v_\beta$ ) рамок;  $K_1, K_2$  – коефіцієнти пропорційності;  $M_{1T}, M_{2T}$  – моменти сил сухого тертя відповідно в осі зовнішньої та внутрішньої рамок;  $\text{sign} \dot{\alpha}, \text{sign} \dot{\beta}$  – функції, які задовольняють умови

$$\text{sign} x = \begin{cases} +1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

де  $x = \dot{\alpha}, \dot{\beta}$ .

Система рівнянь (32.145) є незамкненою, до неї потрібно додати ще рівняння

руху електролітичного маятника, вважаючи його симетричним, які зобразимо у формі

$$\begin{aligned} I(\ddot{\alpha} + \ddot{v}_\alpha) + f \dot{v}_\alpha + mgl(\alpha + v_\alpha) &= 0, \\ I(\ddot{\beta} + \ddot{v}_\beta) + f \dot{v}_\beta + mgl(\beta + v_\beta) &= 0, \end{aligned} \quad (32.146)$$

де  $I$  – еквівалентний осьовий момент інерції;  $f$  – коефіцієнт демпфірування маятника.

Якщо припустити, що в такій системі виникають періодичні коливання, тоді нелінійні функції тертя  $M_{1T}(\dot{\alpha}), M_{2T}(\dot{\beta})$  можна розкласти в ряд Фур'є і, якщо обмежитись лише першою гармонікою, матимемо співвідношення

$$M_T \text{sign} x = qx, \quad (32.147)$$

яке називають гармонічною лінеаризацією нелінійності, а коефіцієнт  $q$  – коефіцієнтом гармонічної лінеаризації<sup>1</sup>. Знайдемо  $q$ .

Якщо  $x$  є гармонічною функцією

$$x = c \sin \omega t, \quad (32.148)$$

то функція  $M_T \text{sign} x$  матиме вигляд, показаний на рис. 32.7.

Якщо рівність (32.147) помножити на  $x$  і застосувати операцію усереднення, то матимемо

$$\frac{1}{T_K} \int_0^{T_K} qx^2 dt = \frac{1}{T_K} \int_0^{T_K} M_T x \text{sign} x dt, \quad (32.149)$$

де  $T_K$  – період коливань,  $T_K = 2\pi\omega$ .

Враховуючи, що

$$x^2 = c^2 \sin^2 \omega t = c^2 \frac{1 - \cos 2\omega t}{2},$$

а

$$\int_0^{T_K} \cos 2\omega t dt = 0,$$

<sup>1</sup>Детальніше див.: *Полов Е. П., Пальтов И. П.* Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. – 792 с.

то із (32.149) одержимо

$$\frac{qc^2}{2} = \frac{1}{T_k} \int_0^{T_k} M_T x \operatorname{sign} x dt.$$

Звідси

$$q = \frac{2}{c^2 T_k} \int_0^{T_k} M_T x \operatorname{sign} x dt. \quad (32.150)$$

Якщо скористатись рис. 32.7, то очевидно, що

$$\begin{aligned} \int_0^{T_k} M_T x \operatorname{sign} x dt &= \int_0^{\frac{T_k}{2}} M_T c \sin \omega t dt - \\ - \int_{\frac{T_k}{2}}^{T_k} (-M_T) c \sin \omega t dt &= 2 \int_0^{\frac{T_k}{2}} M_T c \sin \omega t \frac{d(\omega t)}{\omega} = \\ = -2 \frac{M_T c}{\omega} \cos \omega t \Big|_0^{\frac{T_k}{2}} &= -2 \frac{M_T c}{\omega} (\cos \pi - \cos 0) = \\ &= 4 \frac{M_T c}{\omega}. \end{aligned} \quad (32.151)$$

Підставивши (32.151) в (32.150), отримаємо формулу для коефіцієнта лінеаризації виразу (32.147):

$$q = \frac{2}{c^2 T_k} \frac{4 M_T c}{\omega} = \frac{4 M_T}{\pi c}. \quad (32.152)$$

Якщо тепер ввести позначення

$$\begin{aligned} \omega_{1T} &= \frac{M_{1T}}{H}; \quad \omega_{2T} = \frac{M_{2T}}{H}; \quad k_{1,2} = \frac{K_{1,2}}{H}; \\ T^2 &= \frac{I}{mgI}; \quad 2\xi T = \frac{f}{mgI}, \end{aligned}$$

де  $T$  – часова стала,  $\xi$  – відносний коефіцієнт демпфірування маятника, і врахувавши, що

$$\begin{aligned} \omega_{1T} \operatorname{sign} \dot{\alpha} &= q_1 \dot{\alpha}, \\ \omega_{2T} \operatorname{sign} \dot{\beta} &= q_2 \dot{\beta}, \end{aligned} \quad (32.153)$$

то рівняння гіровертикалі можна записати у формі

$$\begin{aligned} p\alpha - k_1 v_\alpha + q_2 p\beta &= 0, \\ -p\beta + k_2 v_\beta + q_1 p\alpha &= 0, \end{aligned} \quad (32.154)$$

$$\begin{aligned} (T^2 p^2 + 1)\alpha + (T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)v_\alpha &= 0, \\ (T^2 p^2 + 1)\beta + (T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)v_\beta &= 0. \end{aligned}$$

Тут  $p = \frac{d}{dt}$  – оператор диференціювання;

$q_1 = \frac{4M_{1T}}{\pi a \omega H}$ ,  $q_2 = \frac{4M_{2T}}{\pi b \omega H}$ ;  $a, b$  – амплітуди автоколивань відповідно по зовнішній і внутрішній рамках гіроскопа;  $\omega$  – частота автоколивань;  $\alpha = a \sin \omega t$ ,  $\beta = b \sin(\omega t + \sigma)$ .

Система лінеаризованих рівнянь (32.154) має таке характеристичне рівняння:

$$\begin{aligned} a_6 p^6 + a_5 p^5 + a_4 p^4 + a_3 p^3 + \\ + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 &= 0, \end{aligned} \quad (32.155)$$

де

$$\begin{aligned} a_6 &= T^4 d, \\ a_5 &= 4\xi T^3 d + (k_1 + k_2) T^4, \\ a_4 &= 2\xi T^3 (k_1 + k_2) + \\ &+ T^4 k_1 k_2 + 2T^2 d (1 + 2\xi^2), \\ a_3 &= 4\xi T d + 2(k_1 + k_2) T^2, \quad (32.156) \\ a_2 &= d + 2k_1 k_2 T^2 + 2\xi T (k_1 + k_2), \\ a_1 &= k_1 + k_2, \\ a_0 &= k_1 k_2, \\ d &= 1 + q_1 q_2. \end{aligned}$$

Зазначимо, що коефіцієнти, до яких входить величина  $d$ , залежать від амплітуди автоколивань  $a$  і  $b$ , бо вона входить в коефіцієнти лінеаризації  $q_1$  і  $q_2$  (32.153).

Оскільки частота автоколивань визначається як частота власних коливань, то по-

трібно покласти  $p = j\omega$ ,  $j = \sqrt{-1}$  (процес коливальний) і зрівняти з нулем дійсну та уявну частини характеристичного рівняння, тому що комплексне число дорівнює нулю, коли його дійсна та уявна частини дорівнюють нулю. Тоді отримаємо такі два рівняння для визначення трьох невідомих  $\omega$ ,  $a$  і  $b$ :

$$\begin{aligned} a_5\omega^5 - a_3\omega^3 + a_1\omega &= 0, \\ -a_6\omega^6 + a_4\omega^4 - a_2\omega^2 + a_0 &= 0. \end{aligned} \quad (32.157)$$

Для того щоб ця система була замкненою, покладемо, виходячи з фізичних міркувань,

$$\frac{a}{b} = \frac{\omega_{2T}}{\omega_{1T}}. \quad (32.158)$$

Із першого рівняння (32.157) знайдемо вирази для частоти автоколивань

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{a_3}{2a_5} \pm \sqrt{\left(\frac{a_3}{2a_5}\right)^2 - \frac{a_1}{a_5}}. \quad (32.159)$$

Експериментально було встановлено, що  $T = 0,4$  с, а  $\xi = 6$ , тоді

$$(k_1 + k_2)T^4 < 4\xi T d$$

і наближені формули для частоти матимуть вигляд

$$\omega_1^2 \approx \frac{1}{T^2}, \quad \omega_2^2 \approx \frac{k_1 + k_2}{4\xi T d}. \quad (32.160)$$

Підставляючи вирази для частот (32.160) в друге рівняння (32.157), можна переконатися, що для частоти  $\omega_1$   $d = 0$ , а це не має фізичного змісту.

Отже, якщо автоколивання можливі, то лише з частотою  $\omega_2$ .

Для частоти  $\omega_2$  із другого рівняння (32.157) отримаємо наступне рівняння:

$$b_0 d^2 + b_1 d + b_2 = 0, \quad (32.161)$$

де

$$\begin{aligned} b_0 &= a_6 z^2 - z, \\ b_1 &= 2T^2(1 + 2\xi^2) - z(a_2 - d), \\ b_2 &= a_4 - 2T^2 d(1 + 2\xi^2) - \frac{T^4}{z}, \\ z &= \frac{4\xi T}{k_1 + k_2}. \end{aligned}$$

Для вказаних параметрів маятника

$$b_1 > 0, \quad b_2 < 0.$$

Тому необхідною умовою існування автоколивань є умова  $d > 1$ , оскільки  $d = 1 + q_1 q_2$ , яка виконується як при  $b_0 > 0$ , так і при  $b_0 < 0$ .

Умова  $c > 1$  зводиться до нерівностей

$$\begin{aligned} |b_2| > (b_0 + b_1) > 0 \quad \text{при } b_0 > 0, \\ |b_2| < |b_0 + b_1| \quad \text{при } b_0 < 0, \end{aligned}$$

які виконуються в досить широкому діапазоні параметрів гіровертикалей.

Якщо у вихідних рівняннях (32.154) знехтувати членами з коефіцієнтом  $T^2 p^2$  і позначити  $T_2 = 2\xi T$ , то можна отримати наступні формули для частоти й амплітуд коливань:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{1}{2\xi T} \sqrt{4\xi T \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}} - 1, \\ a &= \frac{4}{\pi} \omega_{2T} \Delta, \\ b &= \frac{4}{\pi} \omega_{1T} \Delta, \end{aligned} \quad (32.162)$$

де

$$\Delta = \sqrt{\frac{2T_2^2 (k_1 + k_2)}{(k_1 + k_2)^2 T_2 - 4T_2 k_1 k_2 + 2(k_1 + k_2)}}.$$

Для числових оцінок візьмемо:

$$\omega_{1T} = 8 \cdot 10^{-4} \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad \omega_{2T} = \omega_{1T},$$

$$k_1 = k_2 = 0,62 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad T = 0,4 \text{ с},$$

$$\xi = 6 \Rightarrow T_2 = 4,8 \text{ с}.$$

Підставивши ці значення у формули, маємо

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_2} = 20 \text{ с}, \quad a = 4,9 \cdot 10^{-4} \text{ рад},$$

$$b = 49 \cdot 10^{-4} \text{ рад (17')}.$$

В експерименті були отримані дані для цієї провертикалі:  $T_k = 14 \text{ с}$ ,  $b = 36 \cdot 10^{-4} \text{ рад (13')}$ .

### § 32.8. Резонанси при просторовому русі твердого тіла

Якщо уявити, що тверде тіло підвішено на пружних елементах, які мають лінійні пружні характеристики, або підвішено за допомогою сил електромагнітної природи, які створюються скінченням числом електродів, то його просторовий рух буде завжди описуватись нелінійними диференціальними рівняннями в силу двох обставин: перша – це нелінійність кінематичних співвідношень, або квазікоординат, які описують рух тіла, бо в них входять тригонометричні функції кутів, і друга – це нелінійна залежність від усіх узагальнених координат деформації реальних пружних елементів, які мають скінченну довжину.

Наприклад, тіло масою  $m$  (рис. 32.8) закріплено на двох пружинах завдовжки  $l_1$  і  $l_2$  в точках 1, 2 і 3, 4. При просторовому русі точки закріплення пружин 2 і 4 перемістяться в положення 2' і 4', яке залежить від усіх координат, що задають положення тіла. Сила  $F_1$ , що розвивається першою пружиною, буде пропорційна її деформації:

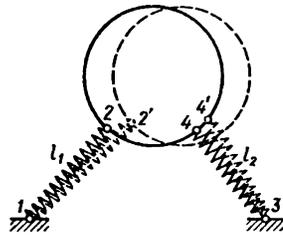


Рис. 32.8

$$F_1 = k_1 \Delta l_1, \quad (32.163)$$

а

$$\Delta l_1 = l_1 - \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Із кінематики відомо, що

$$x_2 = x_2(x, y, z, \psi, \theta, \varphi),$$

$$y_2 = y_2(x, y, z, \psi, \theta, \varphi),$$

$$z_2 = z_2(x, y, z, \psi, \theta, \varphi).$$

Якщо розкласти вираз для  $\Delta l_1$  у степеневий ряд, то отримаємо степеневі залежності від усіх координат.

Якщо ж те чи інше тіло має як опору шарикопідшипники, то пружні сили, що виникають у такій опорі, напрямлені по лінії контакту, а сила пружності пов'язана з деформацією  $w$  нелінійною залежністю Герца

$$F = k w^{\frac{3}{2}}, \quad (32.164)$$

де  $w = w(x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$ .

Розкладаючи залежність (32.164) в степеневі ряди по координатах руху тіла, ми знову отримаємо нелінійні залежності між координатами у формі їх степеневих членів. Структура нелінійностей при будь-якій опорі є аналогічною, але коефіцієнти при відповідних добутках будуть різні.

У всіх випадках структура рівнянь, якщо утримати члени другого порядку мализни і найбільш суттєві третього, матиме вигляд

$$\begin{aligned} \ddot{x}_v + \lambda_v^2 x_v + \mu \left[ h_v \dot{x}_v + F_v(t) x_v + \right. \\ \left. + S_v x_v^3 + \sum_{i,j} S_{vij} x_i x_j \right] = \frac{N_v(t)}{m_v}, \\ \ddot{x}_r + \lambda_r^2 x_r + \mu \left[ h_r \dot{x}_r + M_r(t) x_r + S_r x_r^3 + \right. \\ \left. + \sum_{i,j} S_{rij} x_i x_j + L_r(x_p, \dot{x}_p, \ddot{x}_p, x_r, \dot{x}_r, \ddot{x}_r) \right] = \\ = \frac{N_z(t)}{I_v} \end{aligned} \quad (32.165)$$

( $v=1,2,3$ ;  $i,j=1,\dots,6$ ;  $z=4,5,6$ ;  $p,r=4,5,6$ );  
 $x_1 = \xi$ ,  $x_2 = \eta$ ,  $x_3 = \zeta$ ,  $x_4 = \psi$ ,  $x_5 = \theta$ ,  $x_6 = \varphi$ ;  
 $F_v(t)$ ;  $N_v(t)$ ;  $M_r(t)$ ;  $N_r(t)$  – збурення, що діють по лінійних і кутových координатах.

У системах, які описуються такими рівняннями, можлива ціла сукупність нелінійних резонансів.

При розгляді простого (головного) резонансу в лінійній системі з постійними коефіцієнтами резонансом називали такі коливання, які мали місце в системі при збігу частоти періодичної збуджуючої сили із частотою власних коливань. У загальному випадку доцільно під резонансом розуміти наступне: *резонанс по тій чи іншій координаті – це такі власні коливання системи в напрямку певної координати, коли її вільні коливання підтримуються нелінійними силами таким чином, що останні компенсують сили опору і формують періодичне збурення із частотою власних коливань по цій координаті.*

Наприклад, добуток збуджуючої сили на координату породжують коливання з такою частотою:

$$\begin{aligned} F(\omega) x_v \Rightarrow \omega \pm \lambda_v = \lambda_v \Rightarrow 2\lambda_v = \omega; \\ x^3(\omega) \Rightarrow \omega, 3\omega; \\ x^2(\omega) \Rightarrow 2\omega; \quad (32.166) \\ x_1(\lambda_1) x_2(\lambda_2) \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned}$$

і т. д. Тому, з урахуванням (32.166), можливі такі групи резонансних співвідношень частот:

$$\begin{aligned} 2\lambda_r = \omega_r; \quad 2\lambda_v = \omega_v; \quad \lambda_r \pm \lambda_p = \omega_r; \\ \lambda_r = 2\omega_r; \quad \lambda_v = 2\omega_v; \quad (32.167) \\ \lambda_r = \omega_r \pm \omega_v; \quad \lambda_v = \omega_r \pm \omega_v. \end{aligned}$$

Резонанси типу  $2\lambda_r = \omega_r \Rightarrow \lambda_r = \frac{\omega_r}{2}$  називаються резонансами на обертоні власної частоти, або субгармонічним резонансом, а резонанси типу  $\lambda_r = 2\omega_r \Rightarrow \omega_r = \frac{\lambda_r}{2}$  називаються резонансами на обертоні зовнішньої частоти, інші резонанси називаються комбінаційними.

Зазначимо, що субгармонічний резонанс типу  $\lambda_r = \frac{\omega_r}{2}$  можливий тоді, коли в рівнянні є лінійні члени, але з періодичними коефіцієнтами.

При просторових коливаннях можливі так звані невластні резонанси, коли збурення має місце по одній координаті, а резонанс відбувається по іншій.

Так, автор разом з д-ром техн. наук В. Є. Петренком у 1975 р. виявили експериментально такого типу резонанс у гіромоторі<sup>1</sup>, коли коливання збуджувались на вібростенді по поперечній осі, а резонанс відбувався вздовж осі ротора. Тобто вся енергія коливань перейшла з однієї лінійної координати на іншу, її ортогональну, хоча

<sup>1</sup>Павловский М. А., Петренко В. Е. Исследование колебаний ротора гиromотора при главном резонансе в осевом направлении // Машиноведение. – 1977. – № 1. – С. 40–45.

в першому наближенні рух по цих координатах є незалежним.

Нагадаємо, що в цілому нелінійні просторові коливання вперше почав досліджувати В. О. Кононенко (з 1954 р.), але резонанс інтересу до них був отриманий лише після публікації його статті в журналі “Прикладна механіка” в 1969 р.<sup>1</sup>

На завершення зазначимо, що найефективнішим методом дослідження нелінійних просторових коливань виявився метод усереднення при зображенні коливань у комплексній формі.

Детальніше з конкретними результатами дослідження нелінійних просторових коливань можна ознайомитись у монографіях, наведених у списку додаткової літератури [5, 26–28].

### **Питання для самоконтролю**

1. У чому полягає суть методу фазової площини?
2. Яким чином у методі малого параметра А. Пуанкаре виключаються секулярні члени?
3. Як можна трактувати метод осереднення?
4. Яким методом отримана формула К. Магнуса про нестійкість гіроскопа в кардановому підвісі?
5. Яку особливість вносить просторова вібрація в залежність сталої складової відхилення маятника від вертикалі при вібрації?
6. Які коливання називають автоколиваннями і чому вони неможливі в лінійній системі?
7. Чому неможливо просторовий рух твердого тіла описати лінійними диференціальними рівняннями?
8. Чим відрізняються нелінійні коливання від лінійних?
9. Які особливі точки мають місце на фазовій площині?
10. Які методи дослідження нелінійних коливань розглянуті в цьому розділі?

---

<sup>1</sup>Кононенко В. О. Пространственные нелинейные колебания твердых тел // Прикл. механика. – 1969. – Т. V, вып. 2.

## МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Для зручності застосування комп'ютерних технологій доцільно векторну форму запису зобразити у матричній формі. Наведемо лише ті співвідношення, які найчастіше зустрічаються в курсі теоретичної механіки.

Зобразимо вектор  $\vec{a}$  тривимірного евклідового простору впорядкованим стовпцем (матрицею розміром  $3 \times 1$ ) його компонент  $a_1, a_2, a_3$  і позначимо його  $\vec{a}$ :

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [a_1, a_2, a_3]^T. \quad (1)$$

Звертаємо увагу на те, що над вектором  $\vec{a}$  ставиться стрілка, а при його матричному запису лише риска над ним –  $\vec{a}$ .

З урахуванням цих позначень скалярний добуток двох векторів матиме вигляд

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{a}^T \vec{b} = [a_1, a_2, a_3] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Неважко помітити, що перехід від відомої векторної форми запису до матричної виконується заміною  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  на  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  і переставленням знака скалярного добутку на знак транспонування.

Зрозуміло, що замість позначень  $a_1, a_2, a_3$  можна застосувати позначення компонент у формі проєкцій вектора на ті чи інші ортогональні осі, наприклад  $a_x, a_y, a_z$ . У цьому випадку

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b} = [a_x, a_y, a_z] \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} =$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (3)$$

Величину вектора  $a = |\vec{a}|$  і косинус кута між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  у матричній формі визначають за очевидними формулами

$$a = \sqrt{\vec{a}^T \vec{a}}; \quad \cos(\widehat{a, b}) = \frac{\vec{a}^T \vec{b}}{ab}. \quad (4)$$

Якщо кожному вектору  $\vec{a}$  поставити у відповідність кососиметричну матрицю

$$\vec{a}^* = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

складену з його компонент, то векторному добутку  $\vec{a} \times \vec{b}$  можна поставити у відповідність так співвідношення у матричній формі:

$$\vec{a}^* \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

або, якщо за компоненти вектора взяти його проєкції на осі  $Ox, Oy, Oz$ , то

$$\begin{aligned} \vec{a}^* \vec{b} &= \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Коли с матрична форма запису скалярного і векторного добутків, то неважко отримати вираз

для змішаних векторно-скалярних добутоків трьох векторів:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}), \quad (8)$$

яким відповідають наступні матричні записи:

$$\vec{a}^T (\vec{b}^* \vec{c}) = \vec{b}^T (\vec{c}^* \vec{a}) = \vec{c}^T (\vec{a}^* \vec{b}). \quad (9)$$

Подвійному векторному добутку

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (10)$$

ставиться у відповідність така матрична форма запису:

$$\vec{a}^* (\vec{b}^* \vec{c}) = \vec{b} (\vec{c}^T \vec{a}) - \vec{c} (\vec{a}^T \vec{b}). \quad (11)$$

Співвідношення між векторними і матричними формами запису для добутоків мають вигляд

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}^* \vec{b})^T (\vec{c}^* \vec{d}); \quad (12)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = \vec{a}^T \vec{a}.$$

Векторному добутку

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$$

ставиться у відповідність матрична форма запису

$$(\vec{a}^* \vec{b})^* (\vec{c}^* \vec{d}).$$

Значимо, що крім виразів (2) і (3) існують у матричних операціях й інші форми запису скалярного добутку – це слід (*tr*) матриці, що дорівнює сумі її діагональних елементів:

$$\text{tr} (\vec{a} \vec{b}^T) = \text{tr} \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} =$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (13)$$

або

$$\text{tr} (\vec{b} \vec{a}^T) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (14)$$

Розглянемо тепер лінійні функції проєкції  $a_1, a_2, a_3$  вектора  $\vec{a}$ :

$$\begin{aligned} c_1 &= I_{11} a_1 + I_{12} a_2 + I_{13} a_3, \\ c_2 &= I_{21} a_1 + I_{22} a_2 + I_{23} a_3, \\ c_3 &= I_{31} a_1 + I_{32} a_2 + I_{33} a_3. \end{aligned} \quad (15)$$

Якщо при довільному векторі  $\vec{a}$  величини  $c_1, c_2, c_3$  також можна розглядати як проєкції на ті самі осі деякого вектора  $\vec{c}$ , то говорять, що сукупність дев'яти величин

$$\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} = \vec{I} \quad (16)$$

визначає тензор  $\vec{I}$ , причому  $I_{ik}$  є його складовими в цих осях ( $i, k = 1, 2, 3$ ).

Вектор  $\vec{c}$  називається добутком тензора  $\vec{I}$  на вектор  $\vec{a}$  справа і записується у формі

$$\vec{c} = \vec{I} \vec{a}. \quad (17)$$

Матричне зображення цього співвідношення має вигляд

$$\vec{c} = \vec{I} \vec{a}, \quad (18)$$

де  $\vec{I}$  позначає (3×3)-матрицю (16), а  $\vec{c}$  і  $\vec{a}$  – (3×1)-стовпці, що поставлені у відповідність векторам  $\vec{c}$  і  $\vec{a}$ .

Транспонуванню співвідношення (18)

$$\vec{c}^T = \vec{a}^T \vec{I}^T \quad (19)$$

відповідає операція множення транспонованого тензора  $\vec{I}^T$  на  $\vec{a}$  зліва:

$$\vec{c} = \vec{a} \vec{I}^T. \quad (20)$$

На завершення наведемо формули диференціювання матриці.

Якщо  $A$  – матриця, що має компоненти  $a_{ik}$ , тобто

$$A = \| a_{ik} \| \quad (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n), \quad (21)$$

то похідна за часом від матриці  $A$  буде

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A} = \|\dot{a}_{ik}\| \quad (i=1, \dots, m; k=1, \dots, n). \quad (22)$$

Наприклад, радіусу-вектору  $\vec{r}$  ставимо у від-

повідність стовпець  $\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  (або рядок  $\vec{r}^T$ ) і

після диференціювання отримаємо стовпець  $\vec{v}$  (чи рядок  $\vec{v}^T$ ), який відповідає вектору швидкості  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , тоді

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{v}^T = \dot{\vec{r}}^T. \quad (23)$$

Якщо  $\vec{r}$  явно залежить від часу  $t$  та узагальнених координат  $q_1, q_2, \dots, q_n$ ,

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, \dots, q_n, t) \quad (24)$$

або

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, \dots, q_n, t),$$

то вектор швидкості визначається стовпцем

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}. \quad (25)$$

Рівності (25) можна надати вигляду

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \dot{\vec{q}} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}, \quad (26)$$

де  $\dot{\vec{q}}$  – стовпець елементів  $\dot{q}_s$  ( $s=1, 2, \dots, n$ ), а  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}$  зобразує  $(3 \times n)$ -матрицю

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial q_n} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_3}{\partial q_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}. \quad (27)$$

Із (26) впливає співвідношення

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}, \quad (28)$$

що є матричною формою запису однієї з тотожностей Лагранжа

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_s}. \quad (29)$$

XX століття відкрило світу нові наукові досягнення в галузі механіки, техніки та технології. У другій половині XX ст. бурхливо розвивалися ракетна й авіаційна техніка, робототехніка та автоматизація виробничих процесів. Але, незважаючи на розвиток комп'ютерних технологій, більшість підручників із теоретичної механіки продовжували традиції, закладені класиками механіки в першій половині XX ст.

Автор зробив спробу написати підручник нового типу, який відобразив досягнення теоретичної механіки, а саме: глибоке проникнення у фізичну суть механічних явищ та їх математичний аналіз, характерні для підручників першої половини XX ст., із поєднанням нових методів і підходів, народжених комп'ютерними технологіями, що передбачають матричну форму запису, і застосування їх для розв'язання задач сучасної техніки, яка являє собою, як правило, електромеханічні системи.

Особливістю цього підручника є те, що в ньому багато нових розділів, зокрема одинірідні координати, електродинамічні аналогії, елементи теорії нелінійних коливань, рівняння неголономної механіки тощо, а в традиційних розділах глибше і ширше використовуються аналогії і розкривається взаємозв'язок основних теорем динаміки з рівняннями аналітичної механіки для голономних і неголономних систем. Такий підхід дав змогу в порівняно невеликій за обсягом книжці вмістити інформації більше, ніж у традиційних підручниках. Багато з наведених у підручнику прикладів мають самостійне значення.

Автор висловлює щиру вдячність рецензентам – професорам О. О. Рассказову та А. Ф. Улітку за внесені до рукопису зауваження і рекомендації, а також доцентам кафедри теоретичної механіки Національного технічного університету України “КПІ” К. Г. Левчук і В. М. Воробйову за допомогу в підготовці підручника до друку.

## ПІДРУЧНИКИ І НАВЧАЛЬНІ ПОСІБНИКИ

1. Айзерман М. А. Классическая механика. – М.: Наука, 1974. – 357 с.
2. Бутенин Н. В., Луцц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Наука, 1976–1979. – Т. 1. – 240 с.; Т. 2. – 461 с.
3. Бутенин Н. В. Введение в аналитическую механику. М.: Наука, 1971. 264 с.
4. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики: В 2 ч. – М.: Наука, 1967. – Ч. 1. – 468 с.; Ч. 2. – 332 с.
5. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. – 300 с.
6. Гернет М. М. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1981. – 303 с.
7. Голубева О. В. Теоретическая механика. – М.: Высш. шк., 1976. – 283 с.
8. Добронравов В. В., Никитин Н. Н., Дворников А. Л. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1974. – 528 с.
9. Добронравов В. В. Основы аналитической механики. – М.: Высш. шк., 1976. – 262 с.
10. Ишлинский А. Ю. Механика относительного движения и силы инерции. – М.: Наука, 1981. – 191 с.
11. Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Наука, 1972–1977. – Т. 1. – 456 с.; Т. 2. 462 с.
12. Кильчевский Н. А., Ремизова Н. И., Шенелевская Н. Н. Основы теоретической механики. – К.: Техника, 1968. – 260 с.
13. Кошляков В. Н. Краткий курс теоретической механики Кинематика. Кинетика: Учеб. К.: Вища шк., 1993. 312 с.
14. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Наука, 1984. Т. 1. 352 с.; Т. 2. 640 с.
15. Маркеев А. П. Теоретическая механика: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1990. – 416 с.
16. Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков. – М.: Наука, 1970. – 447 с.
17. Павловский М. А., Акинфиева Л. Ю., Бойчук О. Ф. Теоретическая механика. Статика. Кинематика. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1989. – 351 с.
18. Павловский М. А., Акинфиева Л. Ю., Бойчук О. Ф. Теоретическая механика. Динамика. – К.: Вища шк., 1990. – 480 с.
19. Павловський М. А. та ін. Кінематика та динаміка точки: Комп'ютерний курс: Підруч. / М. А. Павловський, Л. Ю. Акініфіва, А. І. Юрокіч, С. Я. Свістунов. – К.: Либіль, 1993. 248 с. + дискета.
20. Павловський М. А., Заплатний В. І. Аналітична механіка: Навч. посібник. – К.: НМК ВШ, 1990. 144 с.
21. Павловский М. А., Путьята Т. В. Теоретическая механика. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1985. – 327 с.
22. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1971. – 239 с.
23. Писарев А., Парасков Ц., Бычваров С. Курс по теоретичній механіці. II ч. Динаміка: Учеб. – Софія: Техніка, 1988. – 502 с.
24. Савин Г. Н., Путьята Т. В., Фрадлин Б. Н. Курс теоретической механики. – К.: Вища шк., 1973. – 359 с.
25. Старжинский В. М. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1980. – 464 с.
26. Тарз С. М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1974. 400 с.
27. Яблонский А. А. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Высш. шк., 1977. – Т. 2. – 430 с.
28. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики: В 2 т. М.: Высш. шк., 1977. Т. 1. – 431 с.; Т. 2. – 532 с.
29. Яблонский А. А., Норейко С. С. Курс теории колебаний. – М.: Высш. шк., 1966. – 255 с.

## ЛІТЕРАТУРА ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І ВИКОНАННЯ КУРСОВИХ РОБІТ

1. *Айзенберг Т. Б., Воронков И. М., Осецкий В. М.* Руководство к решению задач по теоретической механике. – М.: Высш. шк., 1968. – 436 с.
2. *Акинфиева Л. Ю., Ризиков Л. М.* Теоретична механіка. Статика твердого тіла: Комп'ютерні аспекти тестування: Навч. посібник. – К.: КПІ, 1997. – 88 с.
3. *Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С.* Теоретическая механика в примерах и задачах: В 3 т. – М.: Наука, 1971–1973. – Т. 1. – 512 с.; Т. 2. – 624 с.; Т. 3. – 487 с.
4. *Березова О. В., Друшляк Г. Е., Солодовников Р. В.* Теоретическая механика: Сб. задач. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1980. – 324 с.
5. *Бражниченко Н. А. и др.* Сборник задач по теоретической механике / Н. А. Бражниченко, И. Л. Кац, Б. Л. Минцберг, В. И. Морозов. – М.: Судпромгиз, 1963. – 562 с.
6. *Мецкерский И. В.* Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1980. – 446 с.
7. *Мисурев М. Л.* Методика решения задач по теоретической механике. – М.: Высш. шк., 1962. – 308 с.
8. *Новожилов И. В., Зацепин М. Ф.* Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ. – М.: Высш. шк., 1986. – 134 с.
9. *Павловский М. А., Ильчишина Д. И.* Методические указания к составлению уравнений контурных токов электрических цепей с помощью уравнений Лагранжа – Максвелла. – К.: КПИ, 1985. – 32 с.
10. *Пулята Т. В., Фрадлин Б. М.* Методика розв'язування задач з теоретичної механіки. – К.: Рад. шк., 1955. – 368 с.
11. *Сборник задач по теоретической механике /* Под ред. К. С. Колесникова. – М.: Наука, 1983. – 320 с.
12. *Яблонский А. А. и др.* Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. – М.: Высш. шк., 1978. – 240 с.

## ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 503 с.
2. *Вейц В. Л., Коловский М. З., Кочура А. Е.* Динамика управляемых машинных агрегатов. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
3. *Воробьев Е. И., Попов С. А., Шевелева Г. Н.* Механика промышленных роботов: Учеб. пособие / Под ред. К. В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1988. – 304 с.
4. *Вульфсон Н. Н., Коловский М. З.* Нелинейные задачи динамики машин. – Л.: Машиностроение, 1968. – 284 с.
5. *Ганцев Р. Ф., Кононенко В. О.* Колебания твердых тел. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
6. *Герасюта Н. Ф., Новоиков А. В., Белуцкая Н. Г.* Динамика полета. Основные задачи динамического проектирования ракет. – Днепропетровск, 1998. – 366 с.
7. *Ден-Гартог Дж. П.* Механические колебания. – М.: Физматгиз, 1960. – 580 с.
8. *Ишлинский А. Ю.* Классическая механика и силы инерции. – М.: Наука 1987. – 320 с.
9. *Ишлинский А. Ю., Борзов В. И., Степаненко Н. П.* Лекции по теории гироскопов. – М.: Изд-во при Моск. ун-те, 1983. – 248 с.
10. *Карпушин В. Б.* Вибрации и удары в радиоаппаратуре. – М.: Сов. радио, 1971. – 344 с.
11. *Кононенко В. О.* Колебательные системы с ограниченным возбуждением. – М.: Наука, 1964. – 254 с.
12. *Кононенко В. О.* Пространственные нелинейные колебания твердых тел // Прикл. механика. – 1969. – Т. V, вып. 2.
13. *Кононенко В. О., Павловский М. А.* О погрешностях амортизированных гироскопов, вызванных пространственными колебаниями // Изв. АН СССР, МТТ. – 1977. – № 4. – С. 9–19.
14. *Конторович М. И.* Нелинейные колебания в радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1973. – 320 с.
15. *Косляков В. Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. Аналитические методы. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
16. *Лагранж Ж. Л.* Аналитическая механика: В 2 т. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – Т. 1. – 594 с.; Т. 2. – 440 с.

17. *Ларин В. Б.* Статистические задачи виброзащиты. – К.: Наук. думка, 1974. – 128 с.
18. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. – М.: Госиздат физ.-мат. литературы, 1961. – 824 с.
19. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.
20. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 532 с.
21. *Нейман Л. Р., Демирчян К. С.* Теоретические основы электротехники: В 2 т. – Л.: Энергоиздат, 1981. – Т. 1. – 536 с.; Т. 2. – 416 с. – 3-е изд., перераб. и доп.
22. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии: Собр. тр. / А. Н. Крылов. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. – Т. VII. – 696 с.
23. *Павловский М. А.* Влияние погрешностей изготовления и сборки giroприборов на их точность. – К.: Изд-во КГУ, 1973. – 192 с.
24. *Павловский М. А.* О постоянной составляющей сигнала маятников при вибрации // Прикл. механика. – 1971. – Вып. 4. – С. 105–109.
25. *Павловский М. А.* Теория гироскопов. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986. – 304 с.
26. *Павловский М. А., Збруцкий А. В.* Динамика роторных вибрационных гироскопов. – К.: Вища шк. Изд-во при КГУ, 1984. – 191 с.
27. *Павловский М. А., Петренко В. Е.* Виброустойчивость giroприборов. – К.: Вища шк. Изд-во при КГУ, 1982. – 172 с.
28. *Павловский М. А., Рыжков Л. М., Яковенко В. Б., Дусматов О. М.* Нелинейные задачи динамики виброзащитных систем. – К.: Техніка, 1997. – 204 с.
29. *Павловский М. А., Яковенко В. Б., Дусматов О. М.* Моделирование систем управления методами графов связи. – Ташкент: Фан, 1997. – 76 с.
30. *Попов Е. П., Пальтов И. П.* Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 792 с.
31. *Тюлина И. А.* История и методология механики. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. – 282 с.

# ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Абсолютно тверде тіло 7, 88  
Автоколивання 482  
Аеромеханіка 5  
Аксиома про дві сили 10  
— про затвердіння 12  
— про звільнення від в'язей 12  
— про накладення нових в'язей 12  
— про паралелограм сил 10  
Аксoids 135, 158  
Амплітуда коливань 418  
— — вільних 418  
— — згасаючих 420  
— — змушених 421, 425  
Аналогії між статикою і кінематикою 160  
— електродинамічні 441  
— у фізиці 438  
  
Биття 422  
Біномаль 74  
Біомеханіка 5  
  
Варіація радіуса-вектора 335  
— часу 335  
Вектор вільний 10  
— головного моменту системи сил 28  
— зв'язаний (прикладений) 10  
— кількості руху 223, 224  
— ковзний 10  
— кутової швидкості тіла 91  
— кутового прискорення тіла 91  
— моменту пари сил 25  
— моменту сили відносно точки 22  
— рівнодійної сили 10  
— сил інерції головний 268  
— системи сил головний 28  
— швидкості 67  
Види в'язей 13–15  
Вирази вікові (секулярні) 423  
Віброзахист 427  
Віброізоляція 427  
Вісь інерції головна 205  
— — центральна 205  
— миттєва гвинтова 157  
— обертання 90  
— — миттєва 123, 133  
— — нерухома 90  
В'язі 11  
— геометричні 198, 384  
— голономні (інтегровні) 198, 384  
— ідеальні 337  
— кінематичні 198, 384  
— неголономні (неінтегровні) 198, 384  
— нестационарні 199  
— неутримуючі 199  
— стационарні 199  
— утримуючі 199  
  
Гаситель коливань динамічний 434  
Гвинт динамічний 43  
— кінематичний 158  
Геометрія мас 198  
Гідромеханіка 5  
Гіпотеза Ньютона 317  
Гіромаятник 309, 313, 314  
Гіроскоп 298  
— вібраційний 312

— вільний 299  
— зрівноважений 299  
— напрямку 310  
— точка підвішування 298  
— у кардановому підвісі 298  
Гіроскопічний вимірник швидкості  
ракет 312, 314  
Гіртахометр 311, 314  
Годограф 65

Декремент згасаючих коливань 420  
— логарифмічний 420  
Динаміка 174  
Динамічний гвинт 43  
Добуток векторний 22  
— подвійний векторний 491  
— скалярний 490  
— скалярно-векторний (змішаний) 491  
Довжина фізичного маятника (зведена) 285

Електричні моделі-аналогі механічних  
систем 452–455  
Електродинаміка 5  
Еліпсоїд інерції 214  
Енергія кінетична 240, 241  
— в узагальнених координатах 369  
— механічна 261  
— потенціальна 261  
— в узагальнених координатах 370  
— прискорень 394–397  
Ефект Зоммерфельда – Кононенка 475

Задача динаміки перша 179  
— друга 179, 180  
— Ціолковського перша 326  
— друга 326–328  
Закон Гука 251, 439  
— всесвітнього тяжіння Ньютона 176, 192  
— динаміки основний 175  
— Ньютона перший 8, 175  
— другий 8, 175  
— третій 8, 176

— руху точки 64  
Закони Кеплера 191  
— Кірхгофа 440  
Збудження коливань кінематичне 427  
— — силове 427  
Зрівноважене тіло динамічно 282  
— — статично 282  
Зсув фаз 426

Імпульс сили 225  
— — елементарний 225  
— ударний 317  
— узагальнений 375  
Інваріанти кінематичні 160  
— статичні (системи сил) 42  
Інтеграл енергії (Якобі) 372  
Інтеграли рівнянь Гамільтона 378

Канонічні (гамільтонові) змінні 375  
— перетворення (Лежандра) 376  
— рівняння динаміки (Гамільтона) 377  
Кількість руху системи 224  
— — точки 223  
Кінематика 62  
Класифікація сил 200  
Коефіцієнт відновлення 317  
— демпфірування 426  
— динамічності 426  
— тертя ковзання 15  
— тертя кочення 37  
Коефіцієнти жорсткості узагальнені 370  
— інерції 370  
— Ляме 82  
Колівання власні 416, 429  
— гармонічні 78  
— гіроскопічного маятника 417  
— головні 431  
— згасаючі 419  
— змушені 420  
— ізохронні 228  
— математичного маятника 228  
— нелінійні 463–465

- резонансні 422
- тіла на струні 417
- фізичного маятника 284
- Конус тертя 17
- Координати декартові прямокутні 65
  - дугові 66
  - криволінійні 80
  - нормальні (головні) 433
  - однорідні 163
  - полярні 65
  - сферичні 65
  - узагальнені 343
  - циліндричні 65
- Кочення без ковзання 36, 37
- Кривина кривої 75
- Критерій Гурвіца 405, 406
  - Сільвестра 403
- Кут власного обертання 119
  - диференту 119
  - крену 119
  - нутації 119
  - повороту 116
  - прецесії 119
  - рискання 119
  - тангажа 119
  - тертя 17
- Кути Ейлера 116, 118
  - Ейлера – Крилова 116, 118
- Лінія дії сили 9
  - удару 318
- Маса гравітаційна 176
  - інертна 176
  - системи 203
  - точки 176
- Матриця перетворення координат 116–118
- Маятник математичний 267, 463
  - незбурюваний 267
  - фізичний 284
  - Фуко 310
- Метод зупинення 154
  - кінестатистики 264
  - комплексних амплітуд 424
  - Ляпунова перший 407
  - — другий (прямий) 410
  - малого параметра А. Пуанкаре 465
  - перерізів 17, 200
  - послідовних наближень 475
  - усереднення 469
- Методи визначення моментів інерції 285–289
- Механіка 5
  - аналітична 333
  - класична 6
  - небесна 5
  - прикладна 5
  - теоретична 5, 7
- Миттєва вісь обертання 123, 133
  - кутова швидкість 124
- Миттєвий центр прискорень 144, 145
  - — швидкостей 138–140
- Міри механічного руху 220
- Момент гіроскопічний 303
  - інерції аксіальний 205
  - — відносно довільної осі 212
  - — відцентровий 205
  - — кулі 210
  - — матеріальної точки 204
  - — однорідного тонкого стрижня 209
  - — однорідного циліндра 209
  - — осьовий 205
  - — планарний 205
  - — полярний 205
  - — системи 204
  - — тіла відносно осі 204
  - кількості руху точки 227
  - кінетичний тіла 230
  - кінетичний системи точок 230, 231
  - пари сил 25
  - сили відносно осі 22–24
  - — — центра (точки) 22

Невагомість 266

Орт біномалі 74

— головної нормалі 74

— дотичної 74

Орти координатних осей 68

Осі інерції 204

— — головні 205

— — центральні 205

— натуральні 74

Пара обертань 151

— сил 25

— — еквівалентна нулю 26

Параметри Родріга – Гамільтона 119

Переміщення дійсні 334

— можливі 334

Період вільних коливань 418

— згасаючих коливань 419

План швидкостей 140–142

Плече 22

Площина нормальна 74

— спрямна 74

— стична 74

— фазова 460

Поверхні еквіпотенціальні (рівня) 260

Поле силове 257

— — нестационарне 257

— — потенціальне 257

— — стаціонарне 257

Положення рівноваги асимптотично  
нестійке 401

— — — стійке 401

Потужність сили 249

Початковий момент часу 63

Початкові умови руху 63, 183

Похідна вектора абсолютна 102

— — відносна (локальна) 102

Правила Жуковського 303

Прецесія 299

Прилади гіроскопічні 309–315

Принципи можливих переміщень 338

— відносності класичної динаміки

(Галілея) 272, 273

— Гамільтона – Остроградського 383

— Д'Аламбера для точки 265

— — — системи точок 268

— Д'Аламбера – Лагранжа (загальне рівняння  
динаміки) 341

— звільнення від в'язей 12

— суперпозиції (закон незалежності дії  
сил) 177

Прискорення точки 72

— відносне 107

— доосьове 108

— дотичне (тангенціальне) 75

— доцентрове 138

— кінестатистики 265

— Коріоліса (поворотне) 107

— кутове 91

— нормальне 76

— обертальне 108

— переносне 107

— у полярних координатах 73, 74

Радіус-вектор 64

Радіус інерції твердого тіла 204

— кривини траєкторії 75

— обертання 92

Реакція в'язі 12, 200

— додаткові динамічні 281

Резонанс 422

— при просторовому русі тіла 487

Рівновага збіжної системи сил 20

— матеріальної точки 10

— плоскої системи сил 34, 35

— просторової системи сил 30, 31

— системи паралельних сил 31, 32

— — пар сил 27

- твердого тіла вільного 33, 34, 339
- — — невільного 33
- Рівнодійна сила 10
- Рівняння Аппеля 391–394, 398
  - для визначення реакцій підшипників 281
  - Ейлера – Лагранжа 363
  - — в квазікоординатах 388, 389
  - Ейлера модифіковані 304
  - Ейлера кінематичні 124
  - Лагранжа центральне 382
  - Лагранжа першого роду 353
  - — — для неголономних систем 385
  - Лагранжа другого роду 354
  - — — з урахуванням неголономних в'язей 386
  - — — для консервативної системи 355
  - — — з урахуванням в'язей 358
  - миттєвої осі обертання 123
  - Лагранжа – Максвелла 444, 445
  - Мещерського 325
  - обертального руху тіла навколо нерухомої осі 279
  - обертального руху тіла навколо нерухомої точки 293, 294
  - плоскопаралельного руху тіла 289, 290
  - поступального руху тіла 279
  - рівноваги вільного твердого тіла 33
  - — збіжної системи сил 20
  - — плоскої системи сил 35
  - — просторової системи сил 30
  - руху вільної матеріальної точки 64, 177–179
  - — невільної матеріальної точки 183
  - — тіла змінної маси 329–332
- Робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла 253
  - сили постійної 249
  - — ваги 250
  - — елементарна 249
  - — змінної 249
  - — пружності 251
  - — у потенціальному силовому полі 258
  - рівнодійної системи сил 250
- центральної сили 251
- Роботи промислові 167–171
- Розсіювання енергії 372
- Рух аперіодичний 419
  - вільний 183
  - за інерцією тіла (випадок Ейлера) 294, 295
  - точки складний 101
- Рухи твердого тіла поступальний 89
  - обертальний навколо нерухомої осі 90
  - обертальний навколо нерухомої точки 115
  - плоскопаралельний 137
- Середовище суцільне 7
- Сила 9
  - активна 12, 200
  - ваги 50
  - внутрішня 17, 200
  - дисипативна 371
  - збурювальна 421
  - зовнішня 17, 200
  - інерції 268
  - — дотична (тангенціальна) 268
  - — коріюлісова 271
  - — нормальна 268
  - — переносна 271
  - масова 226
  - об'ємна 226
  - опору 419
  - пасивна 12, 200
  - поверхнева 226
  - позиційна 257
  - потенціальна 257
  - реактивна 325
  - рівнодійна 10
  - тертя ковзання 15
  - — кочення 36, 37
  - ударна 317
  - узагальнена 344
  - центральна 190
- Силувий многокутник 11, 19
- Синтез (додавання) рухів 148–150
- Система автономна 460
  - відліку 63

- вільна 11, 198
- збіжних сил 19
- координат 65
- — зв'язана з тілом 63, 236
- — інерціальна (нерухома) 64, 174
- — неінерціальна 64
- — рухома поступально 236
- матеріальних точок 7, 198
- невільна 11, 198
- паралельних сил 32–34
- Сонячна 17, 174
- Сідло 462
- Спосіб вирізання вузлів 39
- Ріттера 40
- Стала гравітаційна 176
- Статика 9
- Степені вільності 88, 115
- Стійкість асимптотична 401
- гіроскопа у кардановому підвісі 475–478
- обертання тіла 296
- руху 406
- статична положення рівноваги 58, 401
- Стрижні ідеальні 14
- розтягнуті 15
- стиснуті 15
- Субракета 328
- Супутник штучний 193
- — стаціонарний 193
  
- Тензор інерції 214–218
- Теорема Варіньона 23, 46
- Грасгофа 89, 126
- Гюйгенса – Штейнера відносно паралельних осей 206
- — — — не центральних осей 206, 207
- — — — про планарні моменти інерції 207
- — — — відцентрові моменти інерції 208
- Ейлера про рух рідин 226
- імпульсів 225
- Кеніга 242
- Коріоліса 106
- Лагранжа – Діріхле 401
- Ляпунова про нестійкість руху перша 412
- — — — — друга 412
- — — — про стійкість руху перша і друга 402
- — — — — третя і четверта 408
- Остроградського – Карно 319, 320
- Паппа – Гульдіна 54
- площ 228
- про асимптотичну стійкість руху 411
- — додавання швидкостей 105
- — — — прискорень (Коріоліса) 106
- — — — зміну кінетичної енергії точки 248
- — — — — системи 253
- — — — — у відносному русі 274
- — — — кількості руху 224
- — — — кінетичного моменту 232–234
- — — — моменту кількості руху точки 227
- — — — механічної енергії 261
- — — — роботу рівнодійної 250
- — — — сил на послідовних переміщеннях 250
- — рух центра мас 222
- — силу як ковзний вектор 12
- — стійкість руху 411
- — три сили 13
- Пуассона 381
- Резаля 234
- Релея 430
- Сільвестра 403
- Четаєва 412
- Теорія автоматичного керування 5
- відносності (Галілея) 272, 273
- гіроскопів наближена 298
- коливань 416
- малих коливань 416
- скінченних поворотів 132
- удару 316
- Тертя ковзання 15
- кочення 36, 37
- Тіло абсолютно тверде 7, 88
- відліку 63
- динамічно зрівноважене 282
- змінної маси 324
- статично зрівноважене (збалансоване) 58, 282

Точка ізольована 8, 175  
— критична (особлива) 461  
— — сідло 462  
— — стійкий фокус 462  
— — центр 461  
— матеріальна 7, 175  
— підвішування 298  
Траєкторія точки 64  
— фазова 460  
Тригранник натуральний 74

Удар 316  
— абсолютно пружний 317  
— куль прямиий центральний 318  
— — непружний 317  
— — пластичний 317  
— — пружний 317  
— — центральний 318, 319  
Узагальнені імпульси 375  
— координати 343  
— прискорення 343  
— реакції відкинутих в'язей 359  
— сили 344  
— швидкості 343  
Умова незбурюваності маятника гіроскопічного 306  
— — — математичного 267

Фаза коливань 418  
Фазова площина 460  
Ферма 38  
Форма коливань 431  
Формула Ейлера 93  
Формули Біне 191  
Функція Гамільтона 376

— дисипативна 370  
— Лагранжа 261  
— силова 257

Характеристика амплітудно-частотна 425  
— фазово-частотна 425

Центр ваги 50–54  
— коливання маятника 285  
— мас системи 203  
— паралельних сил 48, 49  
— удару 322, 323  
Центроїди рухомі 143  
— нерухомі 143

Частота коливань колова 418  
— — власна 418  
— — парціальна 430  
Число степенів вільності 336  
— Цюлковського 329

Швидкість абсолютна 105  
— відносна 106  
— втрачена 319  
— космічна перша 196  
— — друга 196  
— кутова 91  
— лінійна 67  
— переносна 106  
— прецесії 299, 300  
— секторна 70, 71  
— точки 67–70  
— узагальнена 343  
— у полярних координатах 69  
— фазова 462

<b>Вступ</b> .....	<b>5</b>
1. Предмет теоретичної механіки .....	5
2. Основні поняття теоретичної механіки .....	7
3. Основні закони класичної механіки .....	7

## Частина I. СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

<b>Розділ 1. Визначення, аксіоми та найпростіші теореми статички</b> .....	<b>9</b>
§ 1.1. Коротка історична довідка .....	9
§ 1.2. Предмет статички. Основні визначення і поняття .....	9
§ 1.3. Аксіоми про дві сили .....	10
§ 1.4. В'язі та їхні реакції. Аксіоми про в'язі .....	11
§ 1.5. Найпростіші теореми статички .....	12
§ 1.6. Види в'язей і їхні реакції .....	13
§ 1.7. Тертя ковзання .....	15
§ 1.8. Зовнішні та внутрішні сили. Метод перерізів .....	17
§ 1.9. Система збіжних сил. Способи визначення рівнодійної системи збіжних сил .....	19
§ 1.10. Умови рівноваги системи збіжних сил .....	20
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	21
<b>Розділ 2. Момент сили відносно точки та осі. Момент пари сил</b> .....	<b>22</b>
§ 2.1. Момент сил відносно точки .....	22
§ 2.2. Теорема про момент рівнодійної системи збіжних сил .....	23
§ 2.3. Момент сили відносно осі .....	24
§ 2.4. Момент пари сил і його властивості .....	25
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	27
<b>Розділ 3. Довільна просторова система сил і умови її рівноваги</b> .....	<b>28</b>
§ 3.1. Лема про паралельне перенесення лінії дії сили .....	28
§ 3.2. Головний вектор і головний момент системи сил. Основна теорема статички .....	28
§ 3.3. Умови рівноваги довільної просторової системи сил .....	30
§ 3.4. Умови рівноваги системи сил в окремих випадках .....	32
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	38
<b>Розділ 4. Ферми. Способи визначення зусиль у стрижнях ферм</b> .....	<b>38</b>
§ 4.1. Найпростіші ферми .....	38
§ 4.2. Визначення зусиль у стрижнях ферм .....	39
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	42

<b>Розділ 5. Статичні інваріанти. Зведення довільної системи сил до найпростішого виду</b> .....	42
§ 5.1. Змінення головного вектора і головного моменту при зміні центра зведення .....	42
§ 5.2. Статичні інваріанти .....	43
§ 5.3. Динамічний гвинт .....	43
§ 5.4. Зведення просторової системи до найпростішого виду .....	44
§ 5.5. Теорема Варіньона (у загальному випадку) .....	46
<b>Питання для самоконтролю</b> .....	48

<b>Розділ 6. Центр паралельних сил і центр ваги</b> .....	48
§ 6.1. Центр паралельних сил. Координати центра паралельних сил .....	48
§ 6.2. Центр ваги твердого тіла .....	50
§ 6.3. Теорема Паппа – Гюльдіна .....	54
§ 6.4. Центр ваги деяких фігур .....	55
§ 6.5. Статична стійкість положення рівноваги твердого тіла .....	58
<b>Питання для самоконтролю</b> .....	61

## Частина II. КІНЕМАТИКА

<b>Розділ 7. Кінематика точки</b> .....	62
§ 7.1. Короткі історичні відомості про розвиток кінематики .....	62
§ 7.2. Вступ до кінематики .....	62
§ 7.3. Три способи задання руху точки .....	64
§ 7.4. Швидкість руху точки .....	67
§ 7.5. Швидкість точки у прямокутній декартовій системі координат .....	68
§ 7.6. Швидкість точки у полярних координатах .....	69
§ 7.7. Швидкість точки при натуральному способі задання руху .....	70
§ 7.8. Секторна швидкість .....	70
§ 7.9. Прискорення точки .....	72
§ 7.10. Визначення прискорення в прямокутній декартовій системі координат .....	72
§ 7.11. Прискорення точки в полярних координатах .....	73
§ 7.12. Прискорення точки при натуральному способі задання руху .....	74
§ 7.13. Окремі випадки руху точки .....	77
§ 7.14. Криволінійні координати. Коефіцієнти Ляме .....	80
§ 7.15. Швидкість і прискорення точки у криволінійних координатах .....	83
<b>Питання для самоконтролю</b> .....	87

<b>Розділ 8. Кінематика найпростіших рухів твердого тіла</b> .....	88
§ 8.1. Задання руху твердого тіла. Властивості твердого тіла .....	88
§ 8.2. Найпростіші рухи твердого тіла .....	89
§ 8.3. Траскторії, швидкості та прискорення точок тіла, яке обертається навколо нерухомої осі .....	92
§ 8.4. Механізми перетворення найпростіших рухів твердого тіла .....	95
<b>Питання для самоконтролю</b> .....	100

<b>Розділ 9. Складний рух точки</b> .....	101
§ 9.1. Абсолютний, відносний і переносний рухи точки .....	101
§ 9.2. Центральна операція кінематики і динаміки. Абсолютна та відносна похідні за часом від вектора-функції .....	102
§ 9.3. Теорема про додавання швидкостей .....	105
§ 9.4. Теорема про додавання прискорень .....	106
§ 9.5. Обертальне та доосьове прискорення у разі обертання тіла навколо нерухомої осі .....	107
§ 9.6. Коріолісове прискорення .....	109
<b>Питання для самоконтролю</b> .....	115

<b>Розділ 10. Рух вільного твердого тіла. Обертання твердого тіла відносно нерухомої точки.....</b>	<b>115</b>
§ 10.1. Визначення положення твердого тіла у просторі. Матриця перетворення координат.	
Кутн Ейлера та Ейлера – Крилова .....	115
§ 10.2. Визначення косинусів кутів між осями координат .....	120
§ 10.3. Розподіл швидкостей точок твердого тіла. Миттєва вісь обертання. Кінематичні рівняння Ейлера .....	122
§ 10.4. Прискорення точок вільного твердого тіла .....	127
§ 10.5. Елементи теорії скінченних поворотів .....	132
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	136
<b>Розділ 11. Плоскопаралельний рух твердого тіла .....</b>	<b>137</b>
§ 11.1. Задання руху. Розподіл швидкостей і прискорень .....	137
§ 11.2. Миттєвий центр швидкостей і способи його знаходження .....	138
§ 11.3. План швидкостей .....	140
§ 11.4. Центроїди .....	143
§ 11.5. Миттєвий центр прискорень і способи його знаходження .....	144
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	147
<b>Розділ 12. Складний рух твердого тіла (синтез рухів) .....</b>	<b>148</b>
§ 12.1. Складання поступальних рухів твердого тіла .....	148
§ 12.2. Складання обертань твердого тіла навколо перетинних осей .....	149
§ 12.3. Пара обертань. Паралельне перенесення вектора кутової швидкості .....	151
§ 12.4. Складання обертань навколо паралельних осей .....	153
§ 12.5. Метод зупинення .....	154
§ 12.6. Складання миттєво-поступального і миттєво-обертального рухів твердого тіла. Кінематичний гвинт .....	157
§ 12.7. Аксиоди при синтезі рухів .....	158
§ 12.8. Загальний випадок складання рухів твердого тіла. Кінематичні інваріанти. Аналогії між статикою та кінематикою .....	160
§ 12.9. Задання положення у просторі скінченного числа зв'язаних твердих тіл. Однорідні координати .....	163
§ 12.10. Розподіл швидкостей і прискорень при складному русі твердого тіла .....	164
§ 12.11. Особливості кінематики промислових роботів .....	167
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	171

### Частина III. ДИНАМІКА

<b>Розділ 13. Вступ до динаміки. Диференціальні рівняння динаміки точки .....</b>	<b>172</b>
§ 13.1. Короткі історичні відомості .....	172
§ 13.2. Динаміка та її основні задачі .....	174
§ 13.3. Закони Ньютона .....	174
§ 13.4. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки .....	177
§ 13.5. Дві основні задачі динаміки вільної матеріальної точки .....	179
§ 13.6. Рівняння руху невільної матеріальної точки .....	182
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	189
<b>Розділ 14. Диференціальні рівняння руху точки під дією центральної сили та їх аналіз .....</b>	<b>190</b>
§ 14.1. Рівняння руху точки під дією центральної сили .....	190
§ 14.2. Формули Біне .....	191
§ 14.3. Закони Кеплера про рух планет .....	191
§ 14.4. Закон всесвітнього тяжіння Ньютона .....	192

§ 14.5. Рух штучних супутників Землі .....	193
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	197
<b>Розділ 15. Загальні відомості про системи матеріальних точок. Динамічні рівняння руху.</b>	
<b>Геометрія мас</b> .....	198
§ 15.1. Основні поняття динаміки систем матеріальних точок .....	198
§ 15.2. Сили. Їх класифікація та властивості .....	200
§ 15.3. Диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок .....	201
§ 15.4. Маса. Центр мас системи .....	203
§ 15.5. Моменти інерції механічної системи (геометрія мас) .....	204
§ 15.6. Теореми Гюйгеаса – Штейнера про моменти інерції .....	206
§ 15.7. Обчислення моментів інерції деяких тіл найпростішої форми .....	208
§ 15.8. Момент інерції відносно довільної осі, що проходить через дану точку .....	212
§ 15.9. Еліпсоїд інерції .....	214
§ 15.10. Обчислення тензора інерції .....	214
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	219
<b>Розділ 16. Основні (загальні) теореми динаміки</b> .....	
§ 16.1. Основні теореми динаміки як методи дослідження механічного руху .....	219
§ 16.2. Міри механічного руху .....	220
§ 16.3. Теорема про рух центра мас .....	222
§ 16.4. Кількість руху системи матеріальних точок .....	223
§ 16.5. Теорема про зміну кількості руху систем матеріальних точок у диференціальній та інтегральній формах .....	224
§ 16.6. Теорема Ейлера про рух рідини .....	226
§ 16.7. Момент кількості руху матеріальної точки. Теорема про зміну моменту кількості руху точки. Теорема площ .....	227
§ 16.8. Коливання математичного маятника .....	228
§ 16.9. Кінетичний момент системи матеріальних точок відносно центра і відносно координатних осей. Кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання .....	230
§ 16.10. Кінетичний момент системи матеріальних точок при складному русі .....	231
§ 16.11. Теорема про зміну кінетичного моменту системи в диференціальній та інтегральній формах. Теорема Резаля .....	232
§ 16.12. Форми запису основних теорем динаміки в рухомих системах координат .....	235
§ 16.13. Обчислення кінетичного моменту при обертанні тіла відносно полюса .....	237
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	240
<b>Розділ 17. Теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки і системи</b> .....	
§ 17.1. Кінетична енергія матеріальної точки і системи матеріальних точок. Теорема Кеніга .....	240
§ 17.2. Кінетична енергія твердого тіла. Співвідношення між основними динамічними величинами .....	242
§ 17.3. Обчислення кінетичної енергії для окремих випадків руху твердого тіла .....	245
§ 17.4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки .....	248
§ 17.5. Робота сили, що прикладена до матеріальної точки. Теорема про роботу .....	249
§ 17.6. Обчислення роботи в деяких окремих випадках руху точки і твердого тіла .....	250
§ 17.7. Теорема про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок .....	253
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	256
<b>Розділ 18. Теорія потенціального силового поля</b> .....	
§ 18.1. Силове поле. Потенціальне силове поле. Силлова функція .....	257
§ 18.2. Дві основні задачі в теорії потенціального силового поля .....	258
§ 18.3. Еквіпотенціальні поверхні. Потенціальна енергія. Теорема про зміну повної механічної енергії .....	260

§ 18.4. Закон збереження механічної енергії. Методологічне значення законів збереження в механіці .....	261
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	264
<b>Розділ 19. Метод кінетостатики</b> .....	264
§ 19.1. Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки. Умова невагомості. Умова незбурюваності математичного маятника .....	265
§ 19.2. Принцип Д'Аламбера для системн матеріальних точок .....	267
§ 19.3. Обчислення сил інерції матеріальної точки .....	268
§ 19.4. Обчислення головного вектора і головного моменту сил інерції для твердого тіла .....	269
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	270
<b>Розділ 20. Динаміка відносного руху матеріальної точки</b> .....	271
§ 20.1. Основне рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки .....	271
§ 20.2. Окремі випадки відносного руху точки. Умовн відносного спокою. Принцип відносності класичної динаміки .....	272
§ 20.3. Теорема про зміну кінетичної енергії у відносному русі точки .....	274
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	276
<b>Розділ 21. Динаміка твердого тіла</b> .....	276
§ 21.1. Основні задачі динаміки твердого тіла. Диференціальні рівняння руху тіла .....	276
§ 21.2. Поступальний рух твердого тіла .....	279
§ 21.3. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Рівняння для визначення реакції підшипників .....	279
§ 21.4. Додаткові динамічні реакції. Статичне і динамічне врівноважування тіла .....	281
§ 21.5. Фізичний маятник. Методи визначення моментів інерції тіл .....	284
§ 21.6. Плоскопаралельний рух твердого тіла .....	289
§ 21.7. Рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої точки .....	292
§ 21.8. Рух за інерцією твердого тіла з однією нерухомою точкою (випадок Ейлера) .....	294
§ 21.9. Стійкість обертання твердого тіла навколо головних осей інерції .....	296
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	297
<b>Розділ 22. Наближена теорія гіроскопів</b> .....	298
§ 22.1. Основні поняття. Властивості гіроскопа .....	298
§ 22.2. Наблжена теорія гіроскопів. Гіроскопічний момент. Модифіковані рівняння Ейлера .....	301
§ 22.3. Умови незбурюваності гіроскопічного маятника .....	306
§ 22.4. Застосування гіроскопів у техніці .....	310
§ 22.5. Порівняння побудованих на різних принципах механічних вимірників кутів повороту і кутівих швидкостей обертання твердих тіл .....	314
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	316
<b>Розділ 23. Елементарна теорія удару</b> .....	316
§ 23.1. Основні визначення .....	316
§ 23.2. Гіпотеза Ньютона про коефіцієнт відновлення .....	317
§ 23.3. Прямий центральний удар двох куль .....	318
§ 23.4. Теорема Остроградського – Карно .....	319
§ 23.5. Дія удару на вісь тіла, що обертається. Центр удару .....	320
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	323
<b>Розділ 24. Динаміка поступального руху тіла змінної маси</b> .....	324
§ 24.1. Основні поняття. Рівняння І. В. Мещерського .....	324
§ 24.2. Перша задача К. Е. Цюлковського .....	326

§ 24.3. Друга задача К. Е. Цюлковського .....	326
§ 24.4. Формула К. Е. Цюлковського для багатоступеневих ракет .....	328
§ 24.5. Рівняння руху тіла змінної маси. Основні теореми динаміки .....	329
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	332

## Частина IV. ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

<b>Розділ 25. Основні поняття аналітичної механіки. Принцип можливих переміщень.</b>	
<b>Принцип Д'Аламбера – Лагранжа</b> .....	333
§ 25.1. Короткі історичні відомості. Предмет аналітичної механіки .....	333
§ 25.2. Дійсні і можливі переміщення .....	334
§ 25.3. Число степенів вільності системи .....	336
§ 25.4. Ідеальні в'язі. Аналітична умова .....	336
§ 25.5. Принцип можливих переміщень .....	337
§ 25.6. Застосування принципу можливих переміщень до виведення умов рівноваги твердого тіла .....	339
§ 25.7. Принцип Д'Аламбера – Лагранжа (загальне рівняння динаміки) .....	340
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	342
<b>Розділ 26. Узагальнені координати, швидкості, прискорення та узагальнені сили.</b>	
<b>Умови рівноваги системи в узагальнених координатах</b> .....	343
§ 26.1. Узагальнені координати, швидкості та прискорення .....	343
§ 26.2. Узагальнені сили і способи їх обчислення .....	344
§ 26.3. Умови рівноваги механічної системи в узагальнених координатах .....	348
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	350
<b>Розділ 27. Рівняння руху голономних систем</b> .....	351
§ 27.1. Загальне рівняння динаміки системи .....	351
§ 27.2. Рівняння Лагранжа першого роду .....	351
§ 27.3. Рівняння Лагранжа другого роду (рівняння руху в узагальнених координатах) .....	353
§ 27.4. Рівняння Лагранжа другого роду для консервативної системи .....	354
§ 27.5. Рівняння Лагранжа другого роду з урахуванням додаткових і відкинутих в'язей .....	357
§ 27.6. Диференціальні рівняння Ейлера – Лагранжа .....	361
§ 27.7. Рівняння Лагранжа другого роду в однорідних координатах .....	366
§ 27.8. Кінетична і потенціальна енергії системи та дисипативна функція в узагальнених швидкостях і координатах .....	368
§ 27.9. Узагальнений інтеграл енергії .....	372
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	374
<b>Розділ 28. Канонічні рівняння Гамільтона</b> .....	374
§ 28.1. Канонічні змінні .....	374
§ 28.2. Виведення канонічних рівнянь .....	376
§ 28.3. Явний вираз функції Гамільтона, її фізичний зміст. Найпростіші інтеграли рівнянь Гамільтона .....	377
§ 28.4. Теорема Пуассона .....	381
§ 28.5. Принцип Гамільтона – Остроградського .....	382
<i>Питання для самоконтролю</i> .....	383
<b>Розділ 29. Рівняння руху неголономних систем</b> .....	384
§ 29.1. Неголономні в'язі та число степенів вільності неголономних систем .....	384
§ 29.2. Рівняння Лагранжа першого роду для неголономних систем .....	385
§ 29.3. Рівняння Лагранжа другого роду з урахуванням неголономних додаткових в'язей .....	386

§ 29.4. Рівняння Ейлера – Лагранжа в квазікоординатах системи з неголономними в'язями	388
§ 29.5. Рівняння Аппеля	391
§ 29.6. Обчислення енергії прискорень	394
§ 29.7. Рівняння Аппеля та основні теореми динаміки	397
<i>Питання для самоконтролю</i>	400
<b>Розділ 30. Малі коливання механічної системи</b>	400
§ 30.1. Стійкість положення рівноваги. Теорема Лагранжа – Діріхле. Критерій Сільвестра	400
§ 30.2. Рівняння малих коливань системи зі скінченним числом степенів вільності за наявності розсіювання енергії. Критерій Гурвіца	404
§ 30.3. Стійкість руху системи	406
§ 30.4. Вільні (власні) коливання механічної системи з одним ступенем вільності	416
§ 30.5. Вплив сили опору, що лінійно залежить від швидкості, на коливання механічної системи з одним ступенем вільності	419
§ 30.6. Змушені коливання системи з одним ступенем вільності без урахування сил опору	420
§ 30.7. Змушені коливання механічної системи з одним ступенем вільності з урахуванням сили опору середовища, що пропорційна першому ступеню швидкості	423
§ 30.8. Основні вібродіагностика і віброізоляція	427
§ 30.9. Вільні (власні) коливання механічної системи з двома ступенями вільності	429
§ 30.10. Нормальні (головні) координати	433
§ 30.11. Змушені коливання механічної системи з двома ступенями вільності.	
Динамічний гаситель коливань	434
<i>Питання для самоконтролю</i>	438
<b>Розділ 31. Електродинамічні аналогії. Рівняння Лагранжа – Максвелла</b>	438
§ 31.1. Аналогії у фізиці	438
§ 31.2. Електродинамічні аналогії в системі з одним ступенем вільності	441
§ 31.3. Рівняння Лагранжа – Максвелла	444
§ 31.4. Застосування аналогій “сила – напруга” і “сила – струм” для складання рівнянь електричних контурів з багатьма ступенями вільності	445
§ 31.5. Побудова електричних моделей-аналогів механічних систем	452
§ 31.6. Електромеханічні системи з двома і більше ступенями вільності	453
<i>Питання для самоконтролю</i>	458
<b>Розділ 32. Елементи теорії нелінійних коливань</b>	459
§ 32.1. Метод фазової площини. Траєкторії на фазовій площині. Особливі точки	460
§ 32.2. Нелінійні вільні коливання математичного маятника	463
§ 32.3. Метод малого параметра А. Пуанкаре	465
§ 32.4. Основні асимптотичні методів. Метод усереднення	469
§ 32.5. Метод послідовних наближень. Задача стійкості гіроскопа в кардановому підвісі	475
§ 32.6. Порівняння методів усереднення, гармонічного балансу і послідовних наближень	478
§ 32.7. Автоколивання в нелінійних системах	482
§ 32.8. Резонанс при просторовому русі твердого тіла	487
<i>Питання для самоконтролю</i>	489
<b>Додаток. Матричні зображення операцій векторної алгебри</b>	490
<b>Післямова</b>	493
<b>Список рекомендованої літератури</b>	494
<b>Предметний покажчик</b>	497

Навчальне видання

**Павловський Михайло Антонович**

## **ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА**

Редактор *Л. Ю. Степанчук*

Оформлення художника *В. О. Гурлева*

Художній редактор *С. В. Анненков*

Комп'ютерна верстка *Г. Г. Пузиренка, В. Й. Єрмака*

Коректори *Н. М. Мірошніченко, І. В. Іванюсь*

Підписано до друку 21.06.2002. Формат 70×90 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 37,44.  
Обл.-вид. арк. 37,84. Додат. наклад 7500 прим. Зам. № 2-181.

Видавництво «Техніка», 04053 Київ, вул. Обсерваторна, 25.  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру України  
суб'єктів видавничої справи ДК № 357 від 12.03.2001 р.

Віддруковано на Білоцерківській книжковій фабриці  
09117 м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4