

теоретична МЕХАНІКА

ЗБІРНИК
ЗАДАЧ



ББК 22.2я73
Т33
УДК 531/534(075.8)

Гриф надано Міністерством
освіти і науки України,
лист № 1.4/18-Г-515 від 19.07.2006 р.

Авторський колектив: О. С. Апостолюк, В. М. Воробйов, Д. І. Ільчишина, В. Ф. Кришталь, К. Г. Левчук, Л. М. Рижков, О. В. Чкалов, Л. М. Шальда, Н. І. Штефан

Рецензенти: *О. О. Рассказов*, засл. діяч науки і техніки України, лауреат Держ. премії України, чл.-кор. НАН України, проф.; *А. Ф. Улітко*, чл.-кор. НАН України, проф.; *Я. Ф. Каюк*, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Т33 **Теоретична механіка: Збірник задач /** О. С. Апостолюк, В. М. Воробйов, Д. І. Ільчишина та ін.; За ред. М. А. Павловського. — К.: Техніка, 2007. — 400 с.: іл.
ISBN 966-575-059-3

Наведено короткі теоретичні відомості, методику та приклади розв'язування задач, задачі для самостійного розв'язування та індивідуальні розрахункові завдання. Збірник містить розв'язок більше ста прикладів, десять індивідуальних розрахункових завдань і більше трьохсот задач для самостійного розв'язування.

Для студентів вищих навчальних закладів.

ББК 22.2я73

ISBN 966-575-059-3

© О. С. Апостолюк, В. М. Воробйов,
Д. І. Ільчишина, В. Ф. Кришталь,
К. Г. Левчук, Л. М. Рижков,
О. В. Чкалов, Л. М. Шальда,
Н. І. Штефан, 2007

ПЕРЕДМОВА

Теоретична механіка вивчає найбільш загальні закони руху і взаємодії тіл, її головне завдання — пізнання кількісних і якісних закономірностей, які спостерігаються у природі. З цього випливає, що теоретична механіка належить до фундаментальних природничих наук, оскільки природознавство в цілому вивчає різні форми руху матерії.

Значення теоретичної механіки як однієї з наукових основ техніки і технології безупинно зростає. Розвиток нових видів виробництва і нових технічних засобів висуває проблеми, які вже не можна вирішити на основі одних лише дослідних даних. Для розв'язання цих проблем потрібне моделювання, в основі якого лежить попередній точний розрахунок і наукове передбачення, що спирається на глибокі знання законів і методів теоретичної механіки.

Теоретична механіка широко застосовує певні абстракції, узагальнення, математичні методи, методи формальної логіки. Цінність теоретичної механіки полягає в її логічній досконалості.

Зрозуміло, що теоретична механіка є важливим елементом вищої освіти. Вона входить до навчальних планів багатьох технічних і природничих спеціальностей, є фундаментом для вивчення таких дисциплін, як прикладна механіка, опір матеріалів, теорія коливань, гідравліка, теорія пружності, електродинаміка, біомеханіка, теорія механізмів і машин, теорія керування рухомими об'єктами тощо. Це обумов-

лює наявність великої кількості навчальної літератури з теоретичної механіки, яку можна поділити на три групи. В першу чергу, — це підручники, в яких подається теоретичний матеріал. Невелика частина загальновідомих підручників подана в списку літератури [1–27]. Другу групу складають збірники задач з теоретичної механіки та посібники з розв'язання задач [28–33], [35], [37–27]. До третьої групи належить література, що містить типові розрахункові завдання [34], [36], [40], виконання яких потребує багато часу і виховує певні навички.

Даний посібник призначений для поглибленого вивчення теоретичної механіки. Він орієнтований, у першу чергу, на студентів вищих технічних навчальних закладів, але може бути використаний і студентами університетів при вивченні споріднених дисциплін.

На думку авторів, основний шлях вивчення будь-якої дисципліни — це самостійна робота над матеріалом, у тому числі набуття практичних навичок у розв'язанні задач. Особливістю задач з теоретичної механіки є те, що вони передбачають наявність знань із математики, фізики, креслення тощо. Для студентів молодших курсів, на яких викладається теоретична механіка, поєднання знань цих дисциплін із новою інформацією, яку містить теоретична механіка, становить певні труднощі. Мета цього посібника — допомога студенту в опануванні та система-

тизації знань завдяки засвоєнню методики розв'язання задач. Тому у кожній частині посібника наведено короткі теоретичні відомості, приклади розв'язування задач та задачі для самостійної роботи. Для більш поглибленого вивчення дисципліни у найбільш важливих розділах подано типові розрахункові завдання.

За своїм змістом посібник відповідає підручнику: Павловський М. А. Теоретична механіка. — К.: Техніка, 2002. — 512 с. Ці дві книжки разом можна розглядати як навчально-методичний комплекс з дисципліни “Теоретична механіка”.

У посібнику розділи 1, 4, § 15.2 і додатки написані К. Г. Левчук; розділи 2, 3 і 16 — Л. М. Шальдою; розділи 5, 6 і 7, крім § 7.4 — Н. І. Штефан; § 7.4 — Н. І. Штефан разом із В. Ф. Кришталем; розділи 8, 9 і 10 — Д. І. Ільчишиною; розділи 11, 17 і 18 — В. Ф. Кришталем; розділ 12 — В. М. Воробйовим; розділи 13, 14 і § 15.1 — О. С. Апостолом; розділ 19 — О. В. Чкаловим; розділ 20 — Л. М. Рижковим.

Автори висловлюють подяку рецензентам О. О. Рассказову, А. Ф. Улітку і Я. Ф. Каюку за критичні зауваження, надані під час підготовки даного навчального посібника до друку.

ЧАСТИНА I • СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

ВИЗНАЧЕННЯ, АКсіОМИ ТА НАЙПРОСТІШІ ТЕОРЕМИ

Сила — міра механічної взаємодії матеріальних тіл. Сила, що діє на тіло, є вектором: вона характеризується точкою прикладення, величиною і напрямом. Точку тіла, на яку діє сила, називають *точкою прикладення сили*. Пряму, вздовж якої спрямований вектор сили, називають *лінією дії сили*. На рис. 1.1: \vec{F} — сила, A — точка прикладення сили, пряма AB — лінія дії сили.

Дві системи сил називають *еквівалентними*, якщо, не порушуючи стану твердого тіла, одну з них можна замінити іншою.

Силу, еквівалентну даній системі сил, називають *рівнодійною* системи сил.

Вираз $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \vec{R}$ означає, що сила \vec{R} є рівнодійною системи сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$.

Система матеріальних точок (або її окремих випадок — тверде тіло) перебуває в *рівновазі* відносно нерухомої системи відліку, якщо відносно цієї системи всі її точки знаходяться у стані спокою або рухаються рівномірно й прямолінійно з однаковими за величиною і напрямом швидкостями.

Систему сил називають *зрівноваженою*, якщо тіло, до якого вона прикладена, перебуває в рівновазі.

Статика базується на першому і третьому законах Ньютона, а також аксіомах та теоремах, наведених далі.

Перший закон Ньютона. *Ізольована матеріальна точка перебуває в рівновазі (зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху) доти, доки інші тіла не виведуть її з цього стану.*

Третій закон Ньютона. *Дія завжди дорівнює протидії і протилежно напрямлена. Сили взаємодії двох тіл дорівнюють одна одній і напрямлені у протилежні сторони.*

Зауваження. Ці сили прикладені в точках взаємодії різних тіл і тому не утворюють систему сил, еквівалентну нулеві.

В основі статики лежать аксіоми, в яких відображені властивості сил. Ці властивості встановлені дослідами і спостереженнями. Розглянемо п'ять аксіом статики.

Аксіома I (про дві сили). *Дві сили, прикладені до абсолютно твердого тіла, взаємно зрівноважуються (еквівалентні нулю) тільки тоді, коли вони однакові за величиною і діють уздовж однієї прямої в протилежних напрямках.*

Аксіома II (про паралелограм сил). *Рівнодійна двох сил, прикладених до твердого тіла в одній точці, дорівнює векторній сумі цих сил і прикладена в тій самій точці:*

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1.1)$$

Правило додавання сил можна поширити на будь-яке число сил, прикладених у одній точці:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (1.2)$$

Тіла або поверхні, що обмежують рухи системи матеріальних точок або твердого тіла і

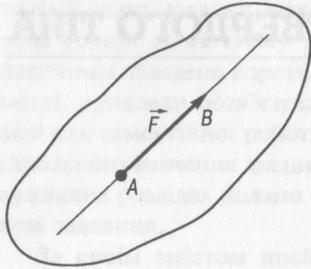


Рис. 1.1

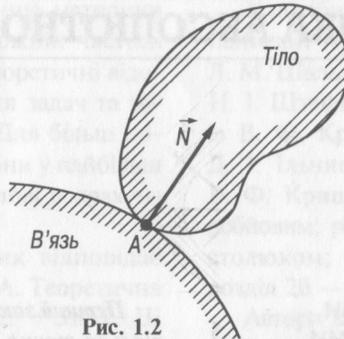


Рис. 1.2

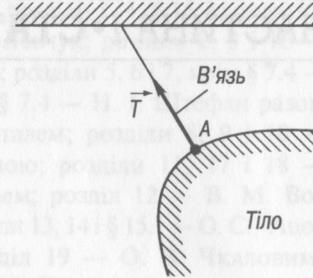


Рис. 1.3

не змінюються у разі дії сил, прикладених до них, називають *в'язями*. Дію в'язей на тіло або систему матеріальних точок характеризують силами, які називають *реакціями в'язей*.

Аксиома III (про звільнення від в'язей). Не змінюючи механічного стану (руху або рівноваги) системи матеріальних точок або твердого тіла, в'язь, накладену на систему або тверде тіло, можна відкинути, замінивши дію в'язі її реакцією, прикладеною до цього тіла або системи в точці взаємодії тіла і в'язі.

Аксиома IV (про накладення нових в'язей). Рівновага системи матеріальних точок або твердого тіла не порушиться при накладенні на них нових в'язей.

Аксиома V (про затверднення). Рівновага деформованого тіла не порушиться, якщо, не змінюючи його форми, розмірів, положення у просторі, подати його у вигляді відповідного абсолютно твердого тіла.

Зауваження. Аксиома дає змогу розв'язувати найпростіші задачі статички деформівних тіл (пас, ланцюг, нитка, трос тощо), застосовуючи до них методи статички твердого тіла.

Теорема про силу як ковзний вектор. Дія сили на тверде тіло не зміниться, якщо перенести силу вздовж лінії її дії в будь-яку точку.

Теорема про три сили. Якщо абсолютно тверде тіло перебуває в рівновазі під дією трьох непаралельних сил і лінії дії двох сил перетинаються, то всі сили лежать в одній

площині і їхні лінії дії перетинаються в одній точці.

Зауваження. Теорему використовують для визначення лінії дії третьої сили.

Характеристика в'язей та їх реакцій:

1) *ідеально гладенька поверхня* (рис. 1.2). Точка *A* контакту тіла з поверхнею може вільно ковзати вздовж неї, але не може переміститися в напрямі, протилежному нормалі до поверхні, тобто реакція ідеально гладенької поверхні \vec{N} напрямлена вздовж нормалі від поверхні;

2) *нитка, мотузка, шнур, трос, ланцюг, пас*. Їх вважають невагомими, гнучкими і нерозтяжними (рис. 1.3). Внаслідок того, що зазначені в'язі заважають тільки розтягуванню, їхні реакції напрямлені вздовж них так,

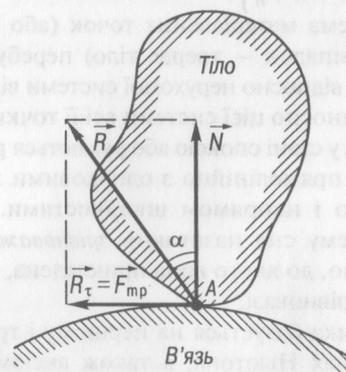


Рис. 1.4

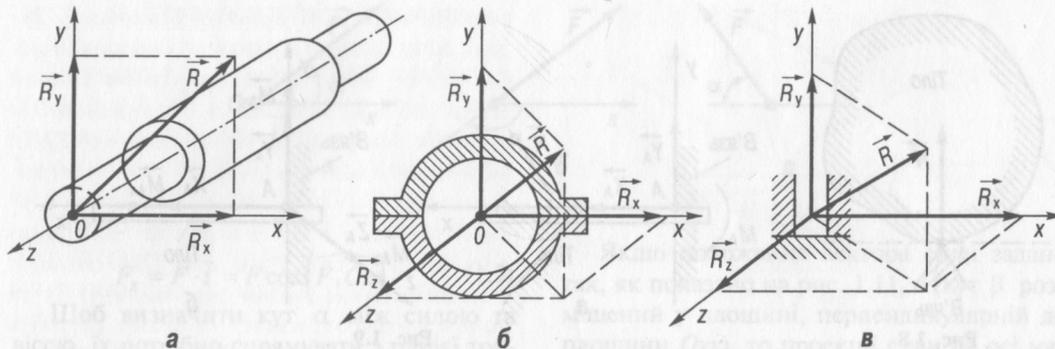


Рис. 1.5

як показано на рис. 1.3, — у бік, протилежний їх розтягуванню;

3) шорстка поверхня. На відміну від ідеально гладенької поверхні у цьому разі до \vec{N} додається дотична складова $\vec{R}_\tau = \vec{F}_{\text{тр}}$, яку називають силою тертя ковзання. Загальна реакція має дві складові: \vec{N} — нормальну і $\vec{R}_\tau = \vec{F}_{\text{тр}}$ — дотичну (рис. 1.4). Найпростіші властивості тертя викладено в § 1.4;

4) шарніри — циліндричні і сферичні (рис. 1.5). Розмірами шарнірів і силами тертя, що виникають у них, нехтують. Напрями реакцій таких в'язей заздалегідь визначити не можна. Так, у разі циліндричного шарніра (підшипника) (рис. 1.5, а), який обмежує рух тіла в площині, перпендикулярній до його осі Oz , виникає реакція, розміщена в площині Oxy . Невідомий вектор реакції

в'язі в цій площині визначають за двома складовими \vec{R}_x і \vec{R}_y . Напрям реакції сферичного шарніра (рис. 1.5, б) або під'ятника (рис. 1.5, в) невідомий. Тому його вектор реакції в'язі визначають трьома взаємно перпендикулярними складовими \vec{R}_x , \vec{R}_y і \vec{R}_z по осях Ox , Oy і Oz ;

5) ідеальний стрижень (рис. 1.6). Його вагою нехтують. Сферичні шарніри на кінцях стрижня вважають точковими. Реакція стрижня спрямована вздовж прямої, що з'єднає точкові шарніри. Наприклад, у точці A вона має напрям \vec{S} до тіла (рис. 1.6, а), якщо стрижень стиснуто, а якщо стрижень розтягнуто, то \vec{S}' — від тіла (рис. 1.6, б);

б) коток або рухомий шарнір (рис. 1.7). У місці закріплення тіла до котка тіло не може рухатися тільки в напрямі, протилежному нормалі до поверхні, на якій встанов-

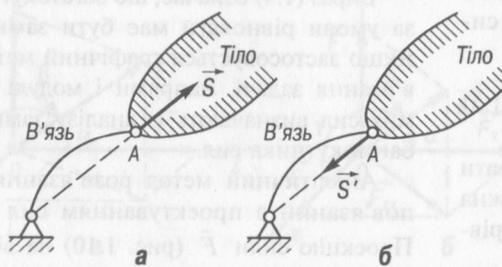


Рис. 1.6

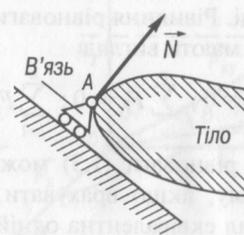


Рис. 1.7

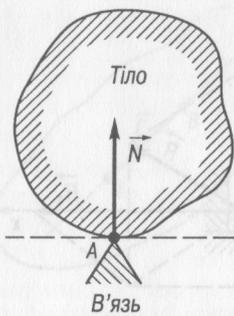
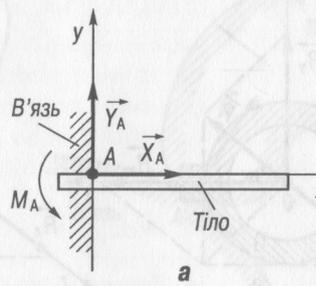


Рис. 1.8

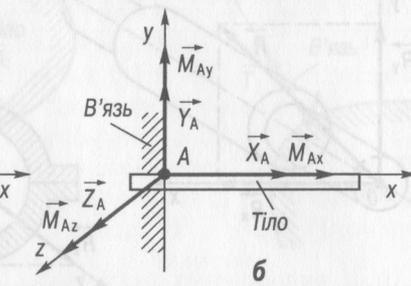
лено коток. Отже, реакція котка буде напрямлена перпендикулярно до опорної площини котка;

7) *вістря* (рис. 1.8). У цьому випадку реакція вістря \vec{N} напрямлена вздовж нормалі від поверхні тіла, оскільки поверхня тіла гладенька;

8) *жорстке заземлення або консольне закріплення* (рис. 1.9). Для плоскої задачі невідомі



а



б

Рис. 1.9

реакція у вигляді двох її складових \vec{X}_A, \vec{Y}_A та момент \vec{M}_A , що виникає в опорі внаслідок обмеження поступального руху в площині Oxy та обертального руху навколо осі Oz (рис. 1.9, а), для просторової — реакція у вигляді трьох її складових сил $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ та моментів $\vec{M}_{Ax}, \vec{M}_{Ay}, \vec{M}_{Az}$, які виникають в опорі за умови обмеження як поступального, так і обертального рухів тіла (рис. 1.9, б).

Розділ 1

СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

§ 1.1. РІВНОВАГА ЗБІЖНОЇ СИСТЕМИ СИЛ ТА МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Системою збіжних сил називають систему таких сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці. Рівняння рівноваги збіжної системи сил мають вигляд

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (1.3)$$

Умови рівноваги (1.3) можна записати і по-іншому, якщо врахувати, що збіжна система сил еквівалентна одній силі — рівнодійній $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$. У цьому разі умовою

рівноваги збіжної системи сил є рівність

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (1.4)$$

Вираз (1.4) означає, що багатокутник сил за умови рівноваги має бути замкненим. Якщо застосовується графічний метод розв'язання задачі, напрями і модулі невідомих сил визначають із аналізу замкненого багатокутника сил.

Аналітичний метод розв'язання задачі пов'язаний з проектуванням сил на осі. Проекцію сили \vec{F} (рис. 1.10) на вісь Ox з ортом \vec{i} визначають так:

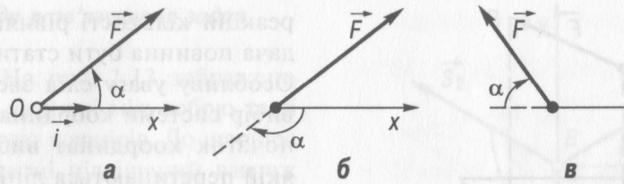


Рис. 1.10

$$F_x = \vec{F} \cdot \vec{i} = F \cos(\vec{F}, Ox). \quad (1.5)$$

Щоб визначити кут α між силою та віссю, їх потрібно спрямувати з однієї точки (рис. 1.10, а), тоді проекція сили на вісь

$$F_x = F \cos \alpha. \quad (1.6)$$

Проекція сили на вісь від'ємна, коли кут між силою й віссю тупий. Тому проектування сили на вісь можна дещо спростити. У випадках, яким відповідають рис. 1.10, б, в, знак проекції визначають безпосередньо з цих рисунків, тобто знак буде "мінус":

$$F_x = -F \cos \alpha. \quad (1.7)$$

Проекція сили на вісь дорівнює нулю, коли $\alpha = \pm 90^\circ$, тобто вектор \vec{F} перпендикулярний до осі.

У більш загальному випадку проекції сили на осі Ox , Oy , Oz (рис. 1.11, а, б) визначають так:

$$F_x = F \cos \alpha; \quad F_y = F \cos \beta; \\ F_z = F \cos \gamma. \quad (1.8)$$

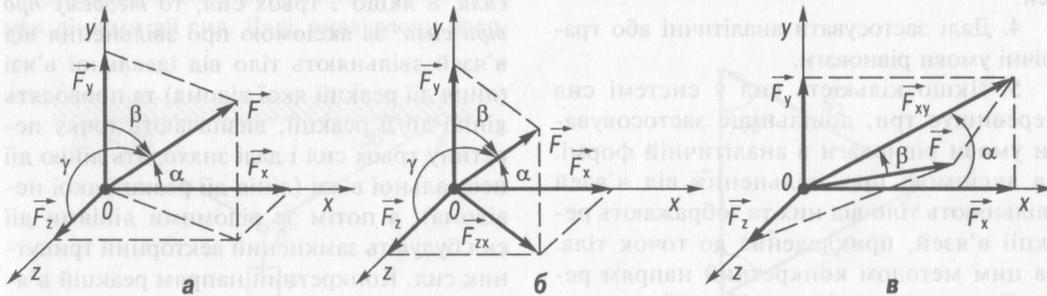


Рис. 1.11

Якщо положення вектора сили задано так, як показано на рис. 1.11, в (кут β розміщений у площині, перпендикулярній до площини Oxy), то проекції сили на осі мають вигляд

$$F_x = F \cos \beta \cos \alpha;$$

$$F_y = F \cos \beta \cos(90^\circ - \alpha) = F \cos \beta \sin \alpha;$$

$$F_z = F \cos(90^\circ - \beta) = F \sin \beta. \quad (1.9)$$

Отже, коли необхідно спроектувати силу на осі Ox та Oy , то спочатку проектують її на площину Oxy , а далі вектор, який отримують після проектування (\vec{F}_{xy}), ще раз проектують на осі в площині Oxy . Нагадаємо, що проекція вектора, у тому числі і вектора \vec{F} , на площину N (рис. 1.12) є вектором $\vec{A'B'}$ (тобто \vec{F}_N), початком і кінцем якого відповідно є проекції на площину N початку і кінця вектора \vec{F} .

Пропонуємо таку послідовність розв'язування задач.

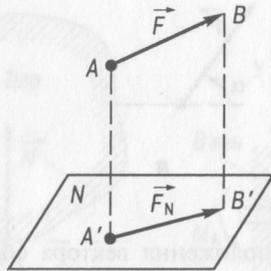


Рис. 1.12

1. Вибрати об'єкт дослідження (тіло або систему тіл), рівновагу якого будемо розглядати. Звичайно це об'єкт, до якого прикладені шукані та відомі сили.

2. Зобразити сили, які задані за умовою задачі. Для зображення користуються класифікацією, згідно з якою сили поділяють на внутрішні і зовнішні. *Внутрішні сили* — сили взаємодії між матеріальними точками даної механічної системи. *Зовнішні* — сили взаємодії між точками даної та іншої механічної системи.

При розв'язуванні задач на рівновагу зображають тільки зовнішні сили, що діють на вибраний об'єкт дослідження, оскільки внутрішні в твердому тілі утворюють зрівноважену систему сил, тобто систему сил, еквівалентну нулю.

3. Визначити кількість та тип в'язей. Згідно з аксіомою про звільнення від в'язей необхідно замінити їхню дію реакціями в'язей.

4. Далі застосувати аналітичні або графічні умови рівноваги.

5. Якщо кількість сил у системі сил перевищує три, доцільніше застосувати умови рівноваги в аналітичній формі. За аксіомою про звільнення від в'язей звільняють тіло від них та зображають реакції в'язей, прикладених до точок тіла. За цим методом конкретний напрям реакції задають довільно. Потрібно перевірити відповідність кількості невідомих

реакцій кількості рівнянь рівноваги. Задача повинна бути статично визначеною. Особливу увагу слід звернути на вдалий вибір системи координат. Як правило, за початок координат вибирають точку, в якій перетинаються лінії дії сил системи. Якщо до системи входять перпендикулярні сили, то осі координат доцільно спрямувати вздовж цих сил. Далі записують аналітичні умови рівноваги (1.3) та розв'язують отриману систему рівнянь відносно вказаних невідомих. Аналітичними методами визначають напрями та модулі невідомих сил. Якщо після розв'язування відповідна сила додатна, то зазначена сила має напрям, вказаний на рисунку. Якщо сила від'ємна, то її напрям протилежний зображеному.

§ 1.2. ПЛОСКА ЗБІЖНА СИСТЕМА СИЛ. РІВНОВАГА ПРОСТОЇ КОНСТРУКЦІЇ

1.2.1. Короткі теоретичні відомості

У разі плоскої системи збіжних сил, коли кількість невідомих сил, що до неї входять, не перевищує трьох, доцільно користуватись умовами рівноваги у графічній формі. Якщо система складається лише з двох сил, то застосовують аксіому I про дві сили, а якщо з трьох сил, то теорему про три сили: за аксіомою про звільнення від в'язей звільняють тіло від ідеальної в'язі (лінія дії реакції якої відома) та проводять лінію дії її реакції, визначають точку перетину трьох сил і далі знаходять лінію дії неідеальної в'язі (лінія дії реакції якої невідома), а потім за відомими лініями дії сил будують замкнений векторний трикутник сил. Конкретний напрям реакцій в'язей визначають у процесі побудови багатокутника сил.

1.2.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1.1. На рис. 1.13 зображено стрижні AB і BC , з'єднані між собою та зі стелею за допомогою шарнірів. До шарніра B на невагомій нитці підвішений вантаж вагою P . Знайти зусилля в стрижнях.

Графічний метод розв'язування. Розглянемо рівновагу системи тіл, що складається із шарніра B , нитки та вантажу P .

До неї прикладені сила ваги вантажу \vec{P} та зусилля у стрижнях AB та BC , які потрібно визначити. Реакції стрижнів напрямлені вздовж них. Отже, будемо розглядати систему, що складається з трьох сил: ваги вантажу \vec{P} , зусиль у стрижнях $\vec{S}_1 = \vec{S}_{AB}$ і $\vec{S}_2 = \vec{S}_{BC}$. Цю систему зображено на рис. 1.14.

Оскільки лінії дії сил збігаються у точці B , будемо замкнений трикутник: з деякої точки відкладаємо відому силу \vec{P} (рис. 1.15), далі з початку вектора \vec{P} відкладаємо пряму, паралельну лінії дії реакції стрижня BC , а з кінця вектора \vec{P} — пряму, паралельну лінії дії реакції стрижня AB . Отримуємо замкнений трикутник сил, де сили \vec{S}_1 та \vec{S}_2 є зусиллями в стрижнях AB та BC відповідно. Напрями векторів розставляємо по колу за правилом векторної суми. В процесі побудови трикутника визначаємо конкретний напрям цих сил.

З геометрії конструкції визначаємо кути між лініями дії сил. Далі, аналізуючи одер-

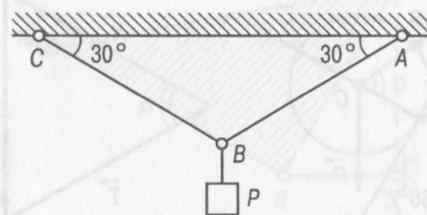


Рис. 1.13

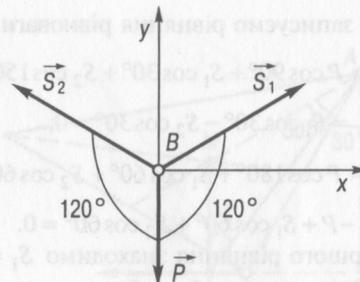


Рис. 1.14

жаний рівносторонній трикутник, знаходимо модулі сил:

$$S_1 = S_2 = P.$$

Аналітичний метод розв'язування. У цьому випадку реакції стрижнів \vec{S}_1 та \vec{S}_2 зображаємо відразу, оскільки далі проектуватимемо вектори на осі, а це потребує наявності вектора на рисунку. При цьому реакції \vec{S}_1 та \vec{S}_2 зображуємо напрямленими вздовж відповідних стрижнів у будь-якому напрямі. Приймемо, що сили \vec{S}_1 та \vec{S}_2 напрямлені так, як зображено на рис. 1.14. Вводимо систему координат. Система координат може бути розташована довільно, але доцільно її початок вибрати в точці перетину сил, а осі спрямувати так, щоб полегшити проектування сил. Усі сили розташовані в площині рисунка, тому достатньо ввести лише дві осі Bx та By , як зображено на рис. 1.14.

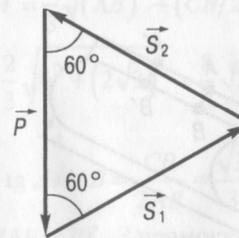


Рис. 1.15

Далі запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = P \cos 90^\circ + S_1 \cos 30^\circ + S_2 \cos 150^\circ = S_1 \cos 30^\circ - S_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = P \cos 180^\circ + S_1 \cos 60^\circ + S_2 \cos 60^\circ = -P + S_1 \cos 60^\circ + S_2 \cos 60^\circ = 0.$$

З першого рівняння знаходимо $S_1 = S_2$. Далі маємо

$$S_1 = S_2 = \frac{P}{2 \cos 60^\circ} = P.$$

Отриманий знак плюс означає, що напрямки сил \vec{S}_1 та \vec{S}_2 збігаються з зображеними. Стрижні AB і BC розтягнуті.

Приклад 1.2. Циліндр вагою 20 Н і радіусом 10 см спирається на гладеньку правильну трикутну призму і утримується в рівновазі за допомогою двох симетричних ниток AB і $A'B'$ довжиною $l = 15$ см (рис. 1.16). Визначити натяг ниток.

Графічний метод розв'язування. Розглянемо рівновагу циліндра. На нього діють сила ваги \vec{P} , прикладена в точці C — центрі мас і спрямована вертикально вниз, реакція гладенької опори \vec{N} , прикладена у точці D — місці контакту основи циліндра та призми й спрямована по взаємній нормалі цих тіл, і натяг ниток \vec{T} (рис. 1.17).

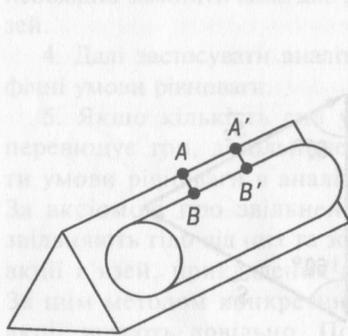


Рис. 1.16

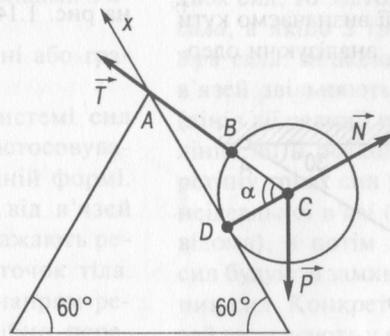


Рис. 1.17

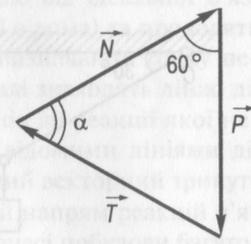


Рис. 1.18

Оскільки система складається з трьох не-паралельних сил, то за теоремою про три сили лінії дії цих сил мають перетинатися в одній точці. Лінії дії сил \vec{P} і \vec{N} перетинаються у точці C — точці перетину трьох сил. Отже, лінія дії сили \vec{T} пройде через точку C , тобто у стані рівноваги циліндр займе таке положення, при якому нитки будуть паралельні його радіусу.

Тоді сили \vec{N} , \vec{P} , \vec{T} утворюють замкнений векторний трикутник (рис. 1.18). За теоремою синусів маємо $P/\sin \alpha = T/\sin 60^\circ$. З прямокутного ΔACD

$$\cos \alpha = CD/AC = 2/5; \sin \alpha = \sqrt{21}/5.$$

Тоді $T = 5P\sqrt{7}/14 \approx 18,9$ Н. Отже, $T_{AB} = T_{A'B'} = T/2 = 9,45$ Н.

Аналітичний метод розв'язування. На рис. 1.17 зобразимо силу ваги \vec{P} , реакції в'язей \vec{N} та \vec{T} . Реакцію гладенької поверхні \vec{N} напрямляємо вздовж нормалі від поверхні призми, а загальний натяг симетричних ниток \vec{T} — паралельно лініям, які проходять через точку A кріплення до призми та центр C поперечного перерізу циліндра, як уже показано на рис. 1.18.

Вводимо систему координат. Її можна розташовувати довільно, але доцільно по-

чаток системи координат вибрати в точці D , а вісь Dx спрямувати вздовж похилої поверхні призми, як зображено на рис. 1.17, щоб позбавитись від другої невідомої \vec{N} . Далі записуємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = T \sin \alpha - P \sin 60^\circ = 0 \Rightarrow T_{AB} = T_{A'B'} = T/2 = 5P \frac{\sqrt{7}}{28} \approx 9,45 \text{ Н.}$$

Приклад 1.3. Трикутна пластинка зі сторонами $AB = 6 \text{ м}$, $CB = 4\sqrt{3} \text{ м}$, $AC = 2\sqrt{21} \text{ м}$ (рис. 1.19) шарнірно закріплена у вершині A , а вершина B підтримується за допомогою стрижня $BD = 3 \text{ м}$. Визначити реакцію шарніра A та зусилля у стрижні BD , якщо вага пластинки $P = 9 \text{ Н}$, а точки A і D знаходяться на одній вертикалі.

Графічний метод розв'язування. Об'єктом дослідження є пластинка. До неї прикладено: сила ваги \vec{P} (рис. 1.20) у точці M — центрі мас трикутника ΔABC , тобто у точці перетину медіан; зусилля \vec{S} у точці B стрижня BD ; реакція \vec{R}_A шарніра A . Отже, пластинка перебуває в рівновазі під дією трьох сил: сили ваги \vec{P} , реакції стрижня \vec{S} (напрявленої вздовж прямої BD , що сполучає шарніри) та реакції шарніра \vec{R}_A . Оскільки лінії дії сили \vec{P} і реакції стрижня

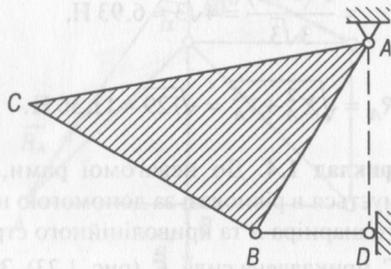


Рис. 1.19

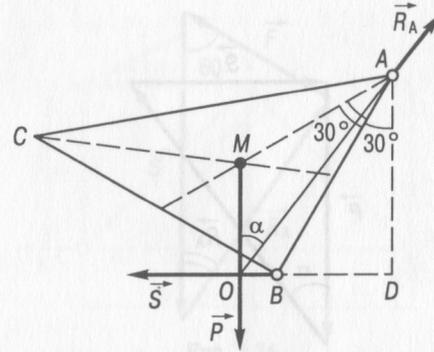


Рис. 1.20

перетинаються, то для розв'язання задачі застосуємо *теорему про три сили* (рис. 1.20).

Лінії дії реакції стрижня \vec{S} та сили \vec{P} перетинаються в точці O , тому і лінія дії реакції шарніра \vec{R}_A проходить через точку O перетину трьох сил та точку A — прикладення сили.

Розглянемо ΔABC , у якому $\angle B$ визначаємо за *теоремою косинусів*:

$$\cos B = \frac{CB^2 + AB^2 - AC^2}{2 \cdot CB \cdot AB} = \frac{(4\sqrt{3})^2 + 6^2 - (2\sqrt{21})^2}{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6} = 0,$$

тобто $\angle B = 90^\circ$.

Отже, ΔABC прямокутний. Оскільки M — точка перетину медіан, то

$$AM = \frac{2}{3} \sqrt{(AB)^2 + (CB/2)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \frac{8}{3} \sqrt{3} \text{ м;}$$

$$\text{tg } \angle MAB = \frac{CB}{2AB} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

тобто $\angle MAB = 30^\circ$. З прямокутного ΔABD : $\sin \angle BAD = BD/AB = 1/2 \Rightarrow \angle BAD = 30^\circ$.

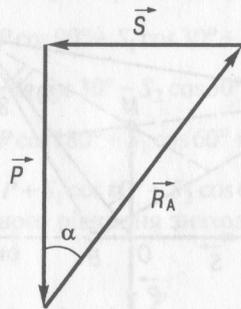


Рис. 1.21

Відстань $OD = AM \sin 60^\circ = 4$ м;

$$AD = AB \cos 30^\circ = 3\sqrt{3} \text{ м.}$$

Далі будемо силовий трикутник (рис. 1.21).

Знаходимо $R_A = P/\cos \alpha$; $S = P \operatorname{tg} \alpha$, а $\cos \alpha$ визначаємо за теоремою косинусів з ΔAMO :

$$\cos \alpha = \frac{MO^2 + AO^2 - AM^2}{2MO \cdot AO}.$$

Обчислюємо

$$MO = AD - AM \cos 60^\circ = 5 \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ м;}$$

$$AO = \sqrt{OD^2 + AD^2} = \sqrt{43} \text{ м.}$$

$$\text{Тоді } \cos \alpha = \frac{25/3 + 43 - 64/3}{2 \cdot 5/\sqrt{3} \cdot \sqrt{43}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}} = \frac{9}{\sqrt{129}}.$$

Далі визначаємо

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\sec^2 \alpha - 1} = \sqrt{43/27 - 1} = 4\sqrt{3}/9.$$

Остаточно знаходимо $R_A = P\sqrt{129}/9 \approx 11,36$ Н; $S = 4P\sqrt{3}/9 \approx 6,93$ Н.

Аналітичний метод розв'язування. Реакцію стрижня \vec{S} прикладаємо у точці B (рис. 1.22) і напрямляємо вздовж прямої, що проходить через нерухомі шарніри B і D , а реакцію нерухомого шарніра A прикладаємо у точці A і зображаємо у ви-

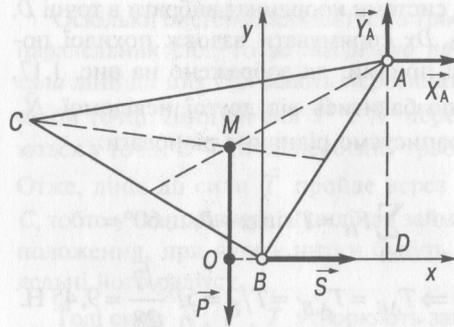


Рис. 1.22

гляді двох складових \vec{X}_A і \vec{Y}_A , оскільки напрямок його реакції невідомий.

Вводимо систему координат з початком у точці B . Вісь Bx спрямовуємо горизонтально вправо, а By — вертикально вгору.

Далі запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{x=1}^4 F_{ix} = X_A + S = 0 \Rightarrow X_A = -S,$$

$$\sum_{x=1}^4 F_{iy} = Y_A - P = 0 \Rightarrow Y_A = P = 9 \text{ Н,}$$

$$\sum_{x=1}^4 M_{iB} = -X_A \cdot AD + Y_A \cdot BD + P \cdot OB = 0.$$

З цього випливає, що

$$X_A = -S = \frac{(Y_A \cdot BD + P \cdot OB)}{AD} =$$

$$= \frac{P(3+1)}{3\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \approx 6,93 \text{ Н,}$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{129} \approx 11,36 \text{ Н.}$$

Приклад 1.4. До невагомої рами, яка утримується в рівновазі за допомогою нерухомого шарніра A та криволінійного стрижня BC , прикладена сила \vec{F} (рис. 1.23). Знайти силу, що діє на шарнір A .

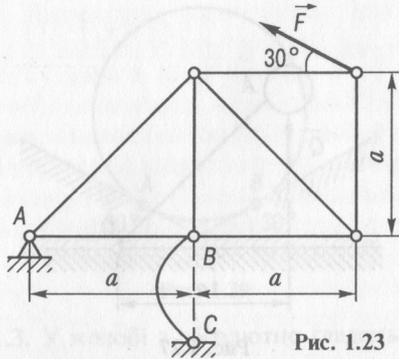


Рис. 1.23

Графічний метод розв'язування. Розглянемо рівновагу рами. Зауважимо, що сила, яка діє на шарнір A, — тиск рами (позначимо цю силу через \vec{R}'_A), — не прикладена до рами, тому її не можна знайти з умов рівноваги рами. До рами прикладено: силу \vec{F} , зусилля \vec{S} у стрижні BC та реакцію шарніра \vec{R}_A (сили \vec{R}_A і \vec{R}'_A — сили дії та протидії, тобто $\vec{R}_A = -\vec{R}'_A$). Тому спочатку знайдемо реакцію шарніра \vec{R}_A (рис. 1.24). Отже, рама перебуває в рівновазі під дією трьох сил: сили \vec{F} , реакції стрижня \vec{S} (напрявленої вздовж прямої BC, що сполучає шарніри) та реакції шарніра \vec{R}_A .

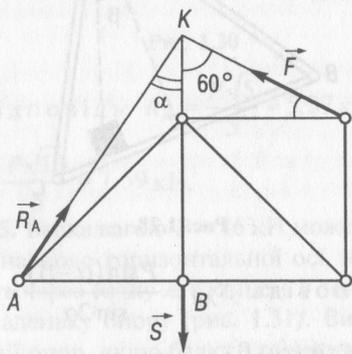


Рис. 1.24



Рис. 1.25

Оскільки лінії дії сили \vec{F} і реакції стрижня перетинаються, то для розв'язування задачі застосуємо *теорему про три сили* (рис. 1.24). Лінії дії реакції стрижня \vec{S} та сили \vec{F} перетинаються в точці K, тому і лінія дії реакції шарніра \vec{R}_A проходить через точку K (у ній перетинаються лінії дії трьох сил) та точку A прикладення сили.

Далі будемо силовий трикутник (рис. 1.25). За *теоремою синусів* знаходимо

$$R_A = \frac{F \sin 60^\circ}{\sin \alpha}.$$

Далі з прямокутного ΔABK визначаємо $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a(1+1/\sqrt{3})}{a} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}.$

Обчислюємо $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7+2\sqrt{3}}}.$

Реакція шарніра

$$R_A = \frac{F\sqrt{7+2\sqrt{3}}}{2} \approx 1,62F.$$

Розглянувши рівновагу шарніра A, за *аксіомою про дві сили* визначаємо R'_A . Сила,

що діє на шарнір, $R'_A = R_A = \frac{F\sqrt{7+2\sqrt{3}}}{2} \approx 1,62F.$ Напрямок сили \vec{R}'_A протилежний напрямку сили \vec{R}_A .

Аналітичний метод розв'язування. Реакцію стрижня \vec{S} прикладаємо у

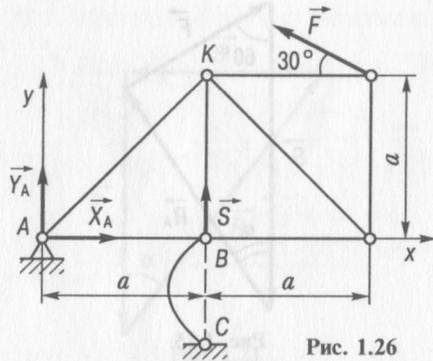


Рис. 1.26

точці B і напрямляємо вздовж прямої, що проходить через нерухомі шарніри B і C , а реакцію нерухомого шарніра \vec{R}_A прикладаємо у точці A і зображаємо у вигляді двох складових \vec{X}_A та \vec{Y}_A (рис. 1.26), оскільки напрямок його реакції невідомий. Вводимо систему координат з початком у точці A , вісь Ax спрямовуємо горизонтально вправо, а Ay — вертикально вгору. Далі записуємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^4 F_{ix} = X_A - F \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow X_A = F \sqrt{3}/2;$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = Y_A + S + F \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow Y_A = -S - F/2;$$

$$\sum_{i=1}^4 M_{iA} = aS + aF \cos 30^\circ + 2aF \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow S = -F(\sqrt{3}/2 + 1).$$

Отже, розрахуємо $Y_A = F(\sqrt{3} + 1)/2$,
 $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = F\sqrt{7 + 2\sqrt{3}}/2 \approx 1,62F = R'_A.$

1.2.3. Задачі для самостійного розв'язування

1.1. На повітряну кульку A діє підйомна сила $Q = 3$ Н. Кулька утримується невагомою ниткою OA довжиною $l = 5$ м (рис. 1.27). Сила

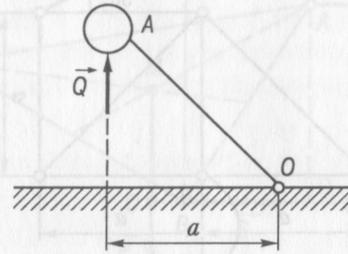


Рис. 1.27

вітру віднесла кульку на відстань $a = 4$ м. Визначити натяг нитки, якщо сила вітру напрямлена горизонтально. Вагою кульки знехтувати.

Відповідь: $T = Ql/\sqrt{l^2 - a^2} = 5$ Н.

1.2. Шарнірний стрижневий трикутник ABC може вільно обертатись навколо горизонтальної осі, яка проходить через точку A (рис. 1.28). На стрижні BC закріплено вантаж вагою $P = 10$ Н. Визначити зусилля в стрижнях AB і AC , якщо $AB = AC$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$.

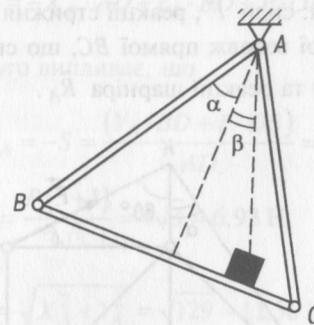


Рис. 1.28

Відповідь: $S_{AB} = \frac{P \sin(\alpha - \beta)}{\sin 2\alpha} = 5$ Н;

$S_{AC} = \frac{P \sin(\alpha + \beta)}{\sin 2\alpha} = 5\sqrt{3} \approx 8,66$ Н.

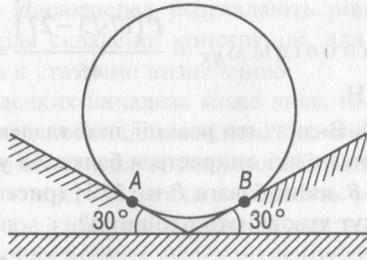


Рис. 1.29

1.3. У жолобі з абсолютно гладенькими стінками, які утворюють з горизонталлю кути по 30° , лежить циліндр вагою $P = 60$ Н (рис. 1.29). Визначити тиск циліндра на стінки жолоба.

Відповідь: $Q_A = Q_B = \frac{P}{2 \cos 30^\circ} = \frac{P\sqrt{3}}{3} \approx 34,64$ Н.

1.4. Визначити реакції нерухомого шарніра A і котка B , на які опирається невагомий важіль ADB , якщо перпендикулярно до AD у точці C прикладена сила $P = 12$ кН і $AC = 2CD = 2BD = 2$ м (рис. 1.30).

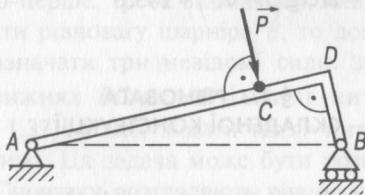


Рис. 1.30

Відповідь: $R_A = \frac{P\sqrt{5}}{5} \approx 5,37$ кН;

$R_B = \frac{P\sqrt{10}}{5} \approx 7,59$ кН.

1.5. Балка вагою $P = 16$ кН може обертатись навколо горизонтальної осі, яка проходить через точку A , а кінцем B опирається на гладеньку опору (рис. 1.31). Визначити реакції опор, якщо балка з горизонтальною поверхнею утворює кут 45° .

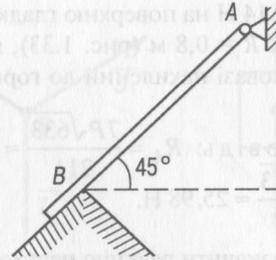


Рис. 1.31

Відповідь: $R_A = \frac{P\sqrt{10}}{4} \approx 12,65$ кН;

$N_B = \frac{P\sqrt{2}}{4} \approx 5,66$ кН.

1.6. Визначити реакцію стрижня BK , який підтримує у рівновазі плоский трикутник ABC вагою $P = 36$ Н, якщо його вершина A закріплена в нерухомому шарнірі (рис. 1.32).

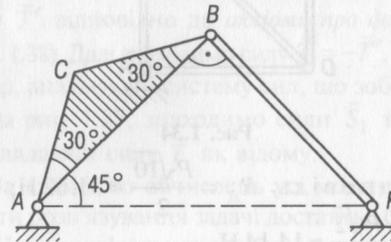


Рис. 1.32

Відповідь: $S_{BK} = \frac{P\sqrt{2}(9-\sqrt{3})}{36} \approx 10,25$ Н.

1.7. Визначити реакцію шарніра A і тиск однорідного бруска AB довжиною $l = 6$ м

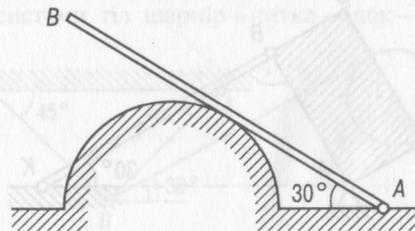


Рис. 1.33

вагою $P = 14$ Н на поверхню гладкої півсфери радіуса $R = 0,8$ м (рис. 1.33), якщо брусок у рівновазі нахилений до горизонту під кутом 30° .

Відповідь: $R_A = \frac{7P\sqrt{633}}{211} \approx 11,69$ Н;
 $N = \frac{15P\sqrt{3}}{14} \approx 25,98$ Н.

1.8. Визначити реакцію нерухомого шарніра A і зусилля у стрижні CK квадратної ферми $ABCD$, до якої у точці B прикладена сила $P = 20$ кН під кутом 45° до стрижня AB (рис. 1.34).

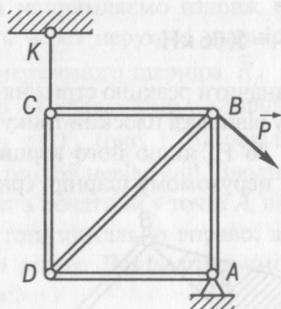


Рис. 1.34

Відповідь: $R_A = \frac{P\sqrt{10}}{2} \approx 31,62$ Н;
 $S_{CK} = \frac{P\sqrt{2}}{2} \approx 14,14$ Н.

1.9. Визначити реакцію стрижня BK , який підтримує у рівновазі прямокутник $ABCD$ вагою $P = 46$ Н, що може обертатись навколо точки A , якщо $AB = 2CB = 2$ м (рис. 1.35).

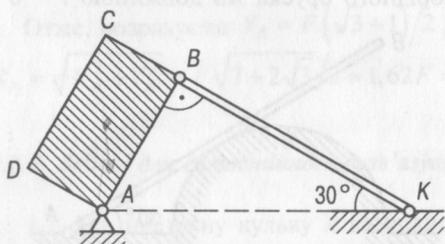


Рис. 1.35

Відповідь: $S_{BK} = \frac{P(17\sqrt{3} - 27)}{46} \approx 2,44$ Н.

1.10. Визначити реакції двох гладеньких площин, на які опирається балка AB у точках A і B , якщо її вага $P = 132$ Н (рис. 1.36). Який кут утворюють площини?

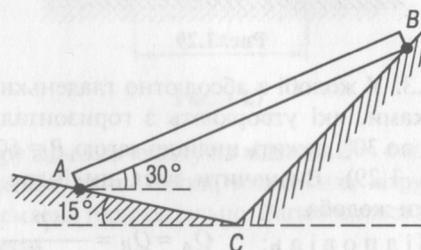


Рис. 1.36

Відповідь: $N_A = \frac{P\sqrt{6}}{4} \approx 80,83$ Н;
 $N_B = \frac{P\sqrt{2(5-2\sqrt{3})}}{4} \approx 57,84$ Н;
 $\angle ACB = \arctg(1-\sqrt{3}) \approx 143,8^\circ$.

§ 1.3. РІВНОВАГА СКЛАДЕНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

1.3.1. Короткі теоретичні відомості

Якщо конструкція складена, то потрібно скористатись методом перерізів, щоб звести систему сил до збіжної.

У такому випадку розглядають рівновагу кожного тіла окремо. При цьому інші тіла є внутрішніми в'язями для заданої системи тіл і зовнішніми для тіла, що розглядається. Зовнішні в'язі відкидають, замінивши їхню дію реакціями, прикладеними у точках контакту тіл. Проте слід пам'ятати, що внутрішні сили задовольняють третій закон Ньютона.

тона. Насамперед розглядають рівновагу того тіла складеної конструкції, для якого задача є статично визначеною.

У деяких випадках може виявитись, що задача рівноваги для кожного тіла системи є статично невизначеною, проте її розв'язання можливе, бо загальна кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих сил — внутрішні сили входять двічі у рівняння рівноваги різних тіл. Зазначимо також, що у разі розглядання рівноваги всієї конструкції потрібно користуватися аксіомою про затверднення.

1.3.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1.5. Розглянемо *приклад 1.1* у такій постановці: потрібно знайти зусилля в стрижнях та натяг нитки (рис. 1.13).

Розв'язування. Оскільки натяг нитки є внутрішньою силою, то доцільно застосувати метод перерізів, тобто нитку слід перерізати, але етап розв'язування задачі, на якому це треба зробити, можна вибрати по-різному.

По-перше, треба відзначити, якщо розглянути рівновагу шарніра B , то доведеться визначати три невідомі сили: зусилля в стрижнях BC та AB і натяг нитки \vec{T} (рис. 1.37). Отже, знайти натяг нитки неможливо. Ця задача може бути розв'язана так. Спочатку розглядають рівновагу шарніра B , нитки та вантажу P (рис. 1.15), знаходять сили \vec{S}_1 та \vec{S}_2 (рис. 1.37), а далі розглядають окремо рівновагу вантажу P і знаходять натяг нитки, що, в свою чергу, може бути виконано двома способами: розглядають рівновагу шарніра B , на який діють зусилля у стрижнях BC та AB і натяг нитки \vec{T} . Тобто зрівноважуються відомі сили \vec{S}_1 і \vec{S}_2 та невідома сила, яку треба визначити (натяг нитки \vec{T}). Силу \vec{T} можна знайти як графічно, так і аналітично.

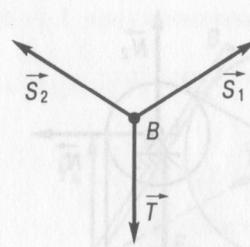


Рис. 1.37



Рис. 1.38

Простіше відразу розглянути рівновагу вантажу P , на який діють сили ваги \vec{P} та натягу нитки \vec{T}' (рис. 1.38), тобто рівновагу сили, з якою відкинута верхня частина нитки діє на нижню за *третьим законом Ньютона*. Сили \vec{T} та \vec{T}' є силами дії та протидії, тому $\vec{T} = -\vec{T}'$. Згідно з *аксіомою про дві сили* маємо $\vec{T}' = -\vec{P}$, тобто $T = P$; відразу розглядаємо рівновагу вантажу P і знаходимо силу \vec{T}' відповідно до *аксіоми про дві сили* (рис. 1.38). Далі знаходимо силу $\vec{T} = -\vec{T}'$. А вже тепер, аналізуючи систему сил, що зображена на рис. 1.37, знаходимо сили \vec{S}_1 та \vec{S}_2 , розглядаючи силу \vec{T} як відому.

За кількістю обчислень усі можливі варіанти розв'язування задачі достатньо близькі. Шлях розв'язування вибирають відповідно до постановки задачі.

Приклад 1.6. На рис. 1.39 зображено систему тіл, аналогічну системі, зображеній на рис. 1.13, але нитка перекинута через блок L , закріплений шарнірно. Треба знайти зусилля в стрижнях.

Розв'язування. Розглянемо рівновагу системи тіл шарнір—нитка—блок—ван-

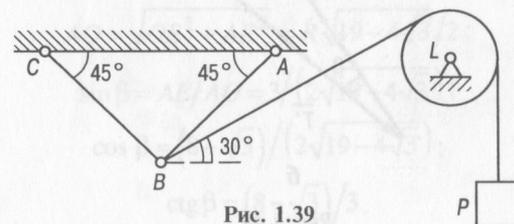


Рис. 1.39

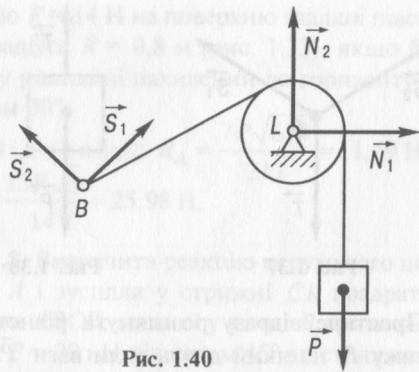


Рис. 1.40

таж, до якої прикладено систему сил: відому силу \vec{P} , зусилля \vec{S}_1 та \vec{S}_2 у стрижнях AB та BC , реакцію блока \vec{N} . Оскільки блок закріплений за допомо-

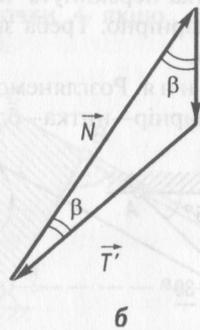
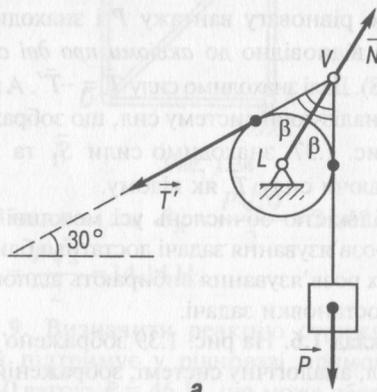


Рис. 1.41

гою нерухомого шарніра, розглянемо реакцію шарніра $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$ (рис. 1.40). Але за таких умов ми не матимемо збіжної системи сил. Крім того, кількість невідомих сил дорівнює чотирьом, що перевищує максимальну кількість рівнянь (три) для плоскої системи сил. Тому потрібно змінити систему тіл, рівновага якої буде розглядатися.

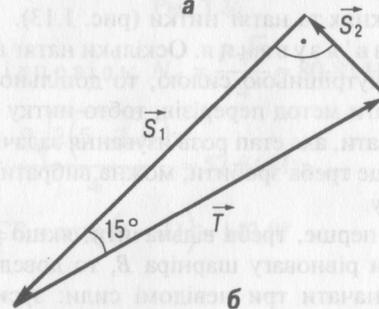
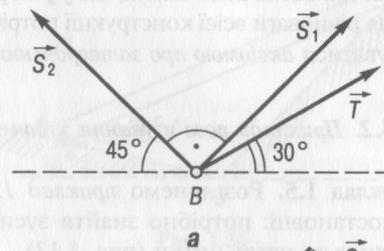


Рис. 1.42

Для виключення із розгляду реакцій \vec{N}_1 та \vec{N}_2 розглянемо рівновагу блока L і знайдемо спочатку натяг нитки \vec{T}' , тобто використаємо методику розв'язання, розглянуту в попередній задачі. На блок діють три сили: вага вантажу \vec{P} , натяг нитки $\vec{T}' = -\vec{T}$ та реакція шарніра $L - \vec{N}$ (рис. 1.41, а). Дві сили \vec{T}' , \vec{P} перетинаються в точці V , отже, згідно з теоремою про три сили реакція шарніра \vec{N} також буде проходити через точку V . Побудуємо трикутник сил (рис. 1.41, б). Оскільки він рівнобедрений, то $T' = P$. Далі розглянемо рівновагу шарніра B (рис. 1.42), до яко-

го прикладено натяг нитки \vec{T} , зусилля у стрижнях \vec{S}_1 і \vec{S}_2 . Тут відомою є сила \vec{T} , а невідомими — сили \vec{S}_1 та \vec{S}_2 . Методика розв'язання збігається з наведеною у прикладі 1. Запишемо

$$S_1 = T \cos 15^\circ = P \cos 15^\circ;$$

$$S_2 = T \sin 15^\circ = P \sin 15^\circ.$$

Таким чином, у цій задачі нитку розрізають у будь-якому разі, навіть тоді, коли за умовою задачі натяг нитки знаходити не треба. Це пояснюється тим, що потрібно виключення з розгляду реакції шарніра L .

Приклад 1.7. Однорідний брусок AB (рис. 1.43) довжиною $3R$ і вагою 16 Н , який може обертатись навколо горизонтальної осі, що проходить через точку A , опирається на поверхню гладенького циліндра радіусом R . Циліндр лежить на гладенькій горизонтальній площині і утримується нерозтяжною ниткою AC довжиною $2R$. Визначити натяг нитки T і силу тиску бруска на шарнір A .

Розв'язування. Розглянемо рівновагу системи тіл брусок—циліндр, до якої прикладено сили ваги бруска \vec{P} (відома) і циліндра \vec{G} (рис. 1.44), реакції гладенької площини \vec{N} , нерухомого шарніра $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$ (невідомі величина і напрям), натяг нитки \vec{T} . Ця система сил не збіжна. Крім того, кількість невідомих сил (п'ять) перевищує

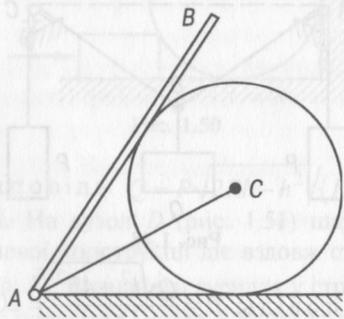


Рис. 1.43

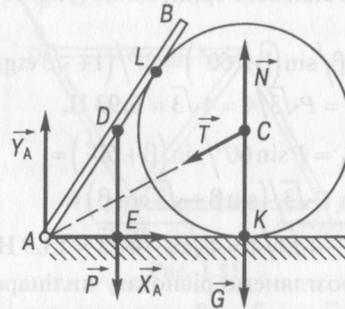


Рис. 1.44

максимальну кількість рівнянь (три) рівноваги для плоскої системи сил. Тому необхідно змінити систему тіл, рівновагу якої розглянемо.

На брусок AB (рис. 1.45, а) діють три сили: вага \vec{P} , реакція гладенької поверхні циліндра \vec{Q} та реакція шарніра A — \vec{R}_A . Дві сили \vec{P} і \vec{Q} перетинаються в точці O , отже, згідно з теоремою про три сили реакція шарніра \vec{R}_A також буде проходити через точку O . Будуємо трикутник сил (рис. 1.45, б). Оскільки з рис. 1.44 $\sin \angle LAC = R/(2R) = 0,5$, то $\angle LAC = \angle CAK = 30^\circ$, а $\angle LOD = 60^\circ$. Далі знаходимо

$$AL = AC \cos 30^\circ = R\sqrt{3};$$

$$AD = AB/2 = 1,5R;$$

$$AE = AD \cos 60^\circ = 0,75R;$$

$$OE = ED + OD = AD \sin 60^\circ + \frac{AL - AD}{\sin 60^\circ} =$$

$$= R(2 - \sqrt{3}/4);$$

$$AO = \sqrt{OE^2 + AE^2} = R\sqrt{19 - 4\sqrt{3}}/2;$$

$$\sin \beta = AE/AO = 3/(2\sqrt{19 - 4\sqrt{3}});$$

$$\cos \beta = (8 - \sqrt{3})/(2\sqrt{19 - 4\sqrt{3}});$$

$$\operatorname{ctg} \beta = (8 - \sqrt{3})/3.$$

Тоді із силового трикутника (рис. 1.45, б) маємо

$$Q = P \sin \beta / \sin(\beta + 60^\circ) = 2P / (1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \beta) = P\sqrt{3} / 4 = 4\sqrt{3} \approx 6,93 \text{ Н},$$

$$R_A = P \sin 60^\circ / \sin(\beta + 60^\circ) = P\sqrt{3} / (\sin \beta + \sqrt{3} \cos \beta) = P\sqrt{19 - 4\sqrt{3}} / 4 = 4\sqrt{19 - 4\sqrt{3}} \approx 13,9 \text{ Н}.$$

Далі розглянемо рівновагу циліндра. До нього прикладено чотири сили: вага \vec{G} (рис. 1.46, а), реакції гладеньких поверхонь бруска \vec{Q}' та площини \vec{N} , натяг нитки \vec{T} . Усі сили перетинаються в точці С. Отже,

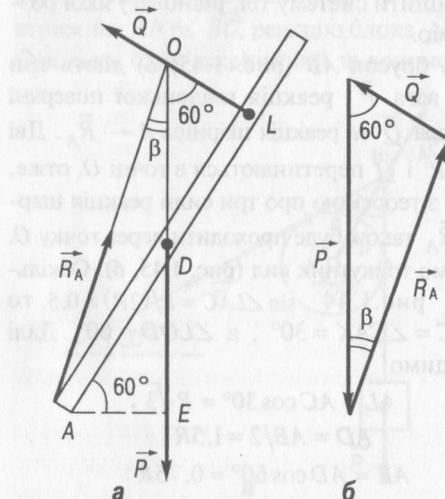


Рис. 1.45

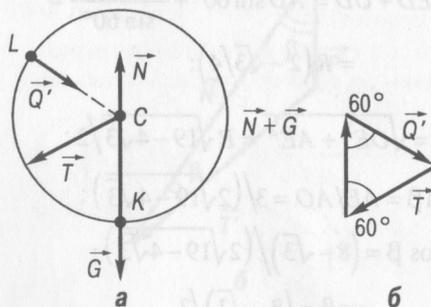


Рис. 1.46

будуємо силовий трикутник (рис. 1.46, б). Оскільки він рівносторонній, то

$$T = Q = P\sqrt{3} / 4 = 4\sqrt{3} \approx 6,93 \text{ Н}.$$

1.3.3. Задачі для самостійного розв'язування

1.11. Два невагомих стрижні AB і AC (рис 1.47) розміщені під кутами $\alpha = 30^\circ$ і $\beta = 60^\circ$ до горизонту та з'єднані між собою шарніром A . До цього шарніра прикріплено шнур, до кінця якого прив'язано вантаж вагою P . Визначити зусилля у стрижнях.

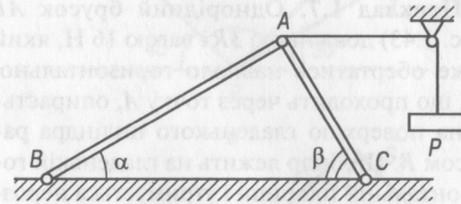


Рис. 1.47

$$\text{Відповідь: } S_{AB} = \frac{P \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = P\sqrt{3} / 2;$$

$$S_{AC} = \frac{P \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = P / 2.$$

1.12. Вантаж $Q = 20 \text{ Н}$ зрівноважено за допомогою тросів, перекинутих через нерухомі блоки A і C , до кінців яких підвішені дві однакові противаги (рис. 1.48). Визначити вагу противаг, якщо відстань між невагомими блоками $AC = l = 8 \text{ м}$, а трос провис на висоту $h = 3,5 \text{ м}$.

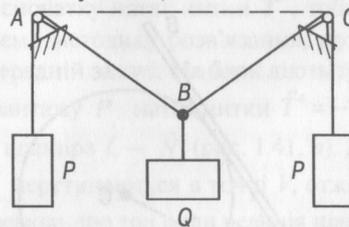


Рис. 1.48

$$\text{Відповідь: } P = \frac{Q\sqrt{l^2 - 4h^2}}{4h} = 20\sqrt{15} = 77,46 \text{ Н}.$$

1.13. Дві маленькі кульки A і B (рис. 1.49) вагою P і Q , з'єднані між собою невагомим жорстким стрижнем, знаходяться у стані рівноваги всередині гладенької сферичної нерухомої чаші радіусом R . Визначити тиск кульок на чашу та зусилля у стрижні, якщо довжина стрижня $AB = 2l$.

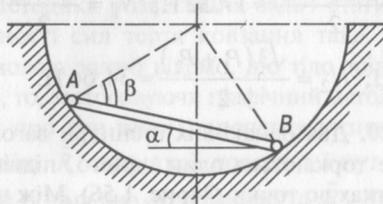


Рис. 1.49

Відповідь: $Q_A = Q_B = \frac{P \cos \alpha}{\sin \beta}$;

$$S = \frac{P \cos(\beta - \alpha)}{\sin \beta},$$

де $\operatorname{tg} \alpha = \frac{(Q - P)l}{(P + Q)\sqrt{R^2 - l^2}}$; $\cos \beta = \frac{l}{R}$.

1.14. Гладенька кулька A (рис. 1.50) радіуса R дотикається до гладеньких поверхонь стіни і підлоги. З якою силою Q необхідно притиснути до неї брусок висотою h ($h < R$), щоб кулька відірвалась від підлоги?

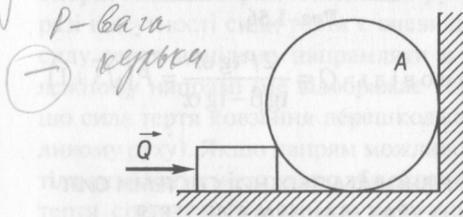


Рис. 1.50

Відповідь: $Q = P\sqrt{2Rh - h^2}/(R - h)$.

1.15. На вузол D (рис. 1.51) шарнірної стрижневої конструкції діє вздовж стрижня DB сила \vec{F} . Визначити зусилля у стрижнях, реакцію шарніра A і котка B , якщо всі стрижні невагомні і мають однакову довжину.

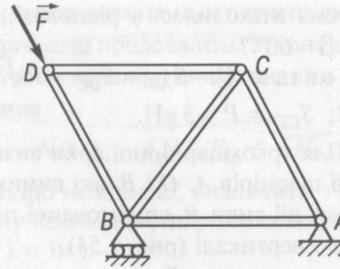


Рис. 1.51

Відповідь: $R_A = S_{AB} = F/2$; $R_B = F\sqrt{3}/2$; $S_{BD} = F$; $S_{CA} = S_{DC} = S_{CB} = 0$.

1.16. На вузол D (рис. 1.52) ферми діє горизонтальна сила \vec{F} . Визначити зусилля у стрижнях, реакцію шарніра A і котка B , якщо $AC = CB = 2CD$. Вагою стрижнів знехтувати.

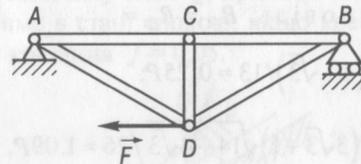


Рис. 1.52

Відповідь: $R_A = F/4$; $R_B = F\sqrt{17}/4$; $S_{BD} = S_{AD} = F\sqrt{5}/4$; $S_{CD} = 0$; $S_{AC} = S_{BC} = F/2$.

1.17. Механічна система з трьох стрижнів AB , BC і CD (рис. 1.53) закріплена шарнірно у нерухомих точках A і D . До вузла B прикладена вертикальна сила $P = 3$ кН. Яку вертикальну силу Q потрібно прикласти до вузла C ,

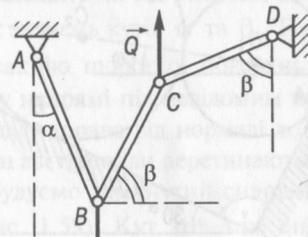


Рис. 1.53

щоб система знаходилась у рівновазі, якщо $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$?

Відповідь: $Q = S_{AB} = S_{BC} = P\sqrt{3}/3 \approx 1,73 \text{ кН}$; $S_{CD} = P = 3 \text{ кН}$.

1.18. Для трьохшарнірної арки визначити реакції шарнірів A , O і B , які виникають у результаті дії сили P , спрямованої під кутом 30° до вертикалі (рис. 1.54).

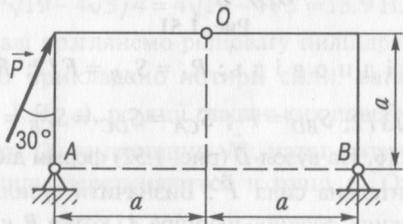


Рис. 1.54

Відповідь: $R_O = R_B = P\sqrt{2}(4 - \sqrt{3})/13 \approx 0,25P$;

$R_A = P(3\sqrt{3} + 1)\sqrt{14 + 4\sqrt{3}}/26 \approx 1,09P$.

1.19. Між двома взаємно перпендикулярними гладенькими площинами OA і OB (рис. 1.55) лежать два гладеньких однорідних циліндри, які дотикаються. Визначити кут φ , який утворює пряма, що проходить через центри циліндрів, із горизонталлю, а також сили взаємного тиску циліндрів та кожного

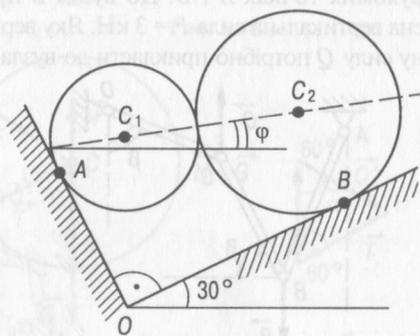


Рис. 1.55

з них на відповідні площини, якщо площина OB нахилена до горизонту під кутом 30° , а вага циліндрів $P_1 = 10 \text{ Н}$, $P_2 = 30 \text{ Н}$.

Відповідь: $\text{tg } \varphi = \frac{\sqrt{3}(3P_1 - P_2)}{3(P_1 + P_2)} = 0$;

$N = \frac{\sqrt{3P_1^2 + P_2^2}}{2} \approx 17,32 \text{ Н}$; $N_1 = \frac{P_1 + P_2}{2} = 20 \text{ Н}$; $N_2 = \frac{\sqrt{3}(P_1 + P_2)}{2} \approx 34,64 \text{ Н}$.

1.20. Два однакових циліндри вагою P , які не торкаються один одного, підвішені на нитках до точки O (рис. 1.56). Між ними лежить третій циліндр. Визначити вагу Q цього циліндра, якщо механічна система зрівноважена, а кути $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

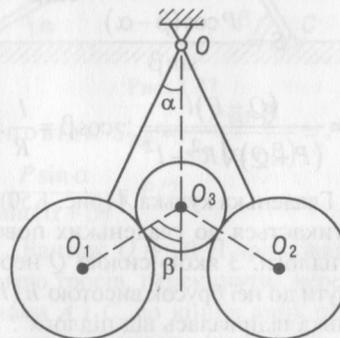


Рис. 1.56

Відповідь: $Q = \frac{2P \text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha} = P(\sqrt{3} + 1)$.

§ 1.4. РІВНОВАГА ЗБІЖНОЇ СИСТЕМИ СИЛ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ТЕРТЯ

1.4.1. Короткі теоретичні відомості

Коли тіло, що перебуває в рівновазі, утримується в'язями з тертям, то до рівнянь рівноваги необхідно приєднати додаткову умову, яку визначають за формулою

$$F_{\text{тр max}} = fN, \quad (1.10)$$

де f — коефіцієнт пропорційності, який характеризує ступінь шорсткості поверхонь контактних тіл і називається *коефіцієнтом тертя ковзання*; N — нормальна складова реакції, тобто

$$|\vec{F}_{\text{тр}}| \leq F_{\text{тр max}} = fN. \quad (1.11)$$

Методика розв'язання задач статки за наявності сил тертя ковзання така. Якщо за умовою задачі відомо, що тіло зрівноважене, то, застосовуючи графічний метод (теорему про три сили), спочатку визначають реакцію \vec{R} шорсткої поверхні і кут тертя α між нормаллю до поверхні та \vec{R} . Далі записують умову (1.11) у вигляді

$$|\operatorname{tg} \alpha| \leq f \quad \text{або} \quad -f \leq \operatorname{tg} \alpha \leq f \quad (1.12)$$

і визначають складові реакції шорсткої поверхні: нормальну \vec{N} та силу тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 1.4) з формул

$$F_{\text{тр}} = R \sin \alpha; \quad N = R \cos \alpha. \quad (1.13)$$

У разі застосування аналітичної форми запису рівнянь рівноваги нормальну складову реакції та силу тертя ковзання визначають з умов рівноваги. Для цього силу тертя зображають як дотичну складову реакції опори. Якщо напрям можливого руху тіла у разі відсутності сили тертя є очевидним, то силу тертя доцільно напрямляти в протилежному напрямі (це відображає той факт, що сила тертя ковзання перешкоджає можливому руху). Якщо напрям можливого руху тіла визначити неможливо або складно, силу тертя спрямовують вздовж дотичної у довільному напрямі (дійсний напрям сили тертя ковзання визначають у процесі розв'язання задачі).

Зауважимо, що на цьому етапі розв'язання задачі додаткову умову не використовують.

У разі, коли треба переконатися, що тіло перебуває в рівновазі, або тоді, коли мова

йде про порушення цього стану, розв'язання задачі слід продовжити. У випадку рівноваги треба перевірити виконання додаткових умов

$$N \geq 0; \quad -fN \leq F_{\text{тр}} \leq fN,$$

або, якщо необхідно, визначити з цих умов шукану величину (силу тертя ковзання, кут тертя і т. ін.).

1.4.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1.8. На шорсткій похилій поверхні (рис. 1.57) у стані спокою знаходиться тіло вагою $P = 10$ Н, на яке діє сила Q ($\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ$). Визначити:

- 1) силу тертя ковзання, якщо $Q = 7$ Н;
- 2) величину сили Q , при якій тіло перебуватиме в стані спокою, якщо коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,05$.

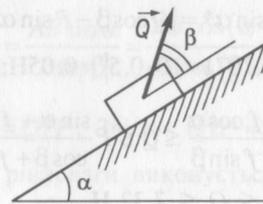


Рис. 1.57

Графічний метод розв'язування. Розглянемо рівновагу тіла, на яке діють сила \vec{Q} (рис. 1.58, а), сила ваги \vec{P} та реакція шорсткої поверхні \vec{R} . Відразу визначити напрям можливого руху тіла неможливо, бо він залежить як від величин сил \vec{Q} і \vec{P} , так і від значень кутів α та β . Тому зобразимо реакцію шорсткої поверхні \vec{R} у довільному напрямі під невідомим кутом α^* , наприклад, вправо від нормалі до поверхні. Оскільки всі три сили перетинаються в одній точці, будемо замкнутий силовий трикутник (рис. 1.59). Кут α^* між силою \vec{R} і нормаллю у стані рівноваги задовольняє нерівність $|\operatorname{tg} \alpha^*| \leq f$.

За теоремою синусів маємо $\frac{P}{\cos(\alpha^* + \beta)} = \frac{Q}{\sin(\alpha - \alpha^*)}$, звідки

$$\operatorname{tg} \alpha^* = \frac{P \sin \alpha - Q \cos \beta}{P \cos \alpha - Q \sin \beta}.$$

Для прийнятих даних отримаємо $\operatorname{tg} \alpha^* = 0,006$. Це означає, що сила \vec{R} напрямлена вправо від нормалі до похилої поверхні. Отже, тіло буде рухатись вгору, а в стані рівноваги згідно з умовою (1.12)

$$-f \leq \operatorname{tg} \alpha^* = \frac{P \sin \alpha - Q \cos \beta}{P \cos \alpha - Q \sin \beta} \leq f.$$

Отже, $\sin \alpha^* = \frac{|Q \cos \beta - P \sin \alpha|}{R}$, тоді для заданих величин відповідно до формули (1.13) маємо

$$F_{\text{тр}} = R \sin \alpha^* = |Q \cos \beta - P \sin \alpha| = |7 \cdot 0,7071 - 10 \cdot 0,5| \approx 0,05 \text{ Н};$$

$$P \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \beta - f \sin \beta} \leq Q \leq P \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \beta + f \sin \beta},$$

звідки $6,8 \text{ Н} \leq Q \leq 7,32 \text{ Н}$.

Аналітичний метод розв'язування. Реакцію шорсткої поверхні зображаємо у вигляді нормальної складової реакції опори \vec{N} та сили тертя ковзання $\vec{F}_{\text{тр}}$

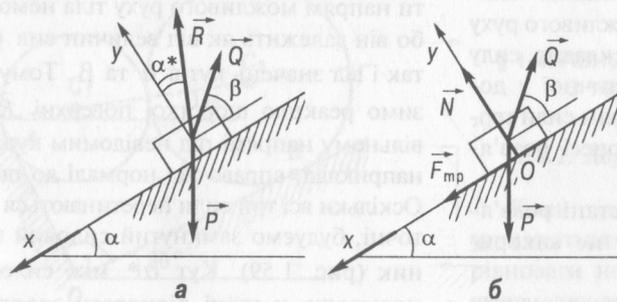


Рис. 1.58

(рис. 1.58, б). Як зазначалося, відразу визначити напрям можливого руху тіла неможливо, тому зображаємо силу тертя вздовж поверхні в довільному напрямі, наприклад донизу (рис. 1.58, б). Вводимо систему координат Oxy . Для визначення сили $\vec{F}_{\text{тр}}$ достатньо скористатись одним рівнянням рівноваги, а саме:

$$\sum_{i=1}^4 F_{xi} = P \sin \alpha - Q \cos \beta + F_{\text{тр}} = 0.$$

Звідси знаходимо $F_{\text{тр}} = Q \cos \beta - P \sin \alpha$. Для заданих величин маємо

$$F_{\text{тр}} = 7 \cdot 0,7071 - 10 \cdot 0,5 = -0,05 \text{ Н}.$$

Від'ємний знак величини $F_{\text{тр}}$ означає, що дійсний напрям сили $\vec{F}_{\text{тр}}$ протилежний зображеному на рис. 1.58, б. На цьому перший етап задачі завершено.

Для визначення сили \vec{Q} , при якій тіло перебуває в рівновазі, знайдемо нормальну складову реакції шорсткої поверхні \vec{N} з другого рівняння рівноваги

$$\sum_{i=1}^4 F_{yi} = -P \cos \alpha + Q \sin \beta + N = 0.$$

З нього знаходимо $N = P \cos \alpha - Q \sin \beta$. Згідно з (1.11) маємо

$$|F_{\text{тр}}| = 0,05 \text{ Н} \leq f N = f (P \cos \alpha - Q \sin \beta) = 0,05 (10 \cdot 0,866 - 7 \cdot 0,7071) = 0,19 \text{ Н}.$$

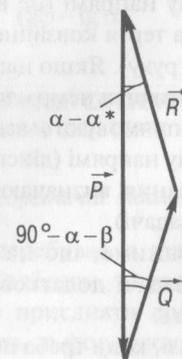


Рис. 1.59

Розглянемо другий етап розв'язування задачі. Оскільки мова йде про порушення стану спокою, то суть задачі полягає в дослідженні умови (1.11), тобто

$$|Q \cos \beta - P \sin \alpha| \leq f(P \cos \alpha - Q \sin \beta).$$

Цей вираз можна записати так:

$$-f(P \cos \alpha - Q \sin \beta) \leq P \sin \alpha - Q \cos \beta \leq f(P \cos \alpha - Q \sin \beta),$$

звідки

$$P \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \beta - f \sin \beta} \leq Q \leq P \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \beta + f \sin \beta}.$$

Для заданих параметрів отримаємо $6,8 \text{ Н} \leq Q \leq 7,32 \text{ Н}$.

Зауважимо, що аналогічною розглянутій є така постановка задачі: за відомою силою Q визначити значення кута α , при якому тіло починає рухатись.

Приклад 1.9. Визначити, при яких значеннях кута α балка вагою P , що спирається на гладеньку стіну та шорстку підлогу з

Рис. 1.60

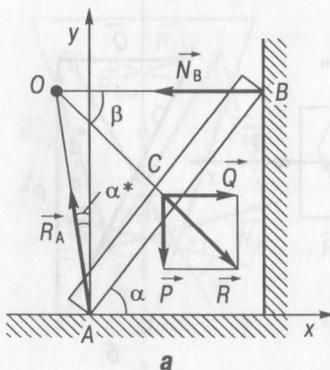
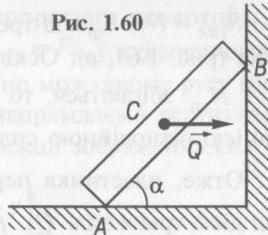
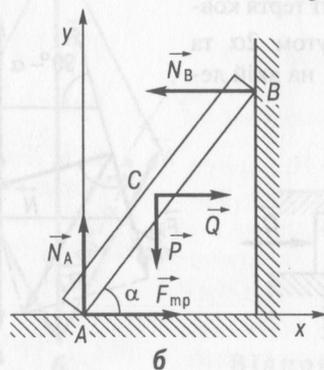


Рис. 1.61



коефіцієнтом тертя f , зрівноважена. До середини балки прикладено горизонтальну силу \vec{Q} (рис. 1.60).

Графічний метод розв'язування. Розглянемо рівновагу балки, на яку діють сила \vec{Q} , сила ваги \vec{P} та реакції гладенької стіни \vec{N}_B та шорсткої підлоги \vec{R}_A (рис. 1.61, а). Оскільки сили \vec{Q} і \vec{P} прикладені в одній точці, то за аксіомою II їх можна замінити рівнодійною \vec{R} .

Отже, балка перебуває в рівновазі під дією трьох сил \vec{N}_B , \vec{R}_A та \vec{R} . Точка перетину їх ліній дії знаходиться в точці O . Кут між реакцією шорсткої поверхні \vec{R}_A і нормаллю до підлоги позначимо α^* , наприклад, вліво від нормалі до поверхні (рис. 1.61, а). Далі будемо замкнутий силовий трикутник (рис. 1.62). За теоремою синусів з $\triangle OBC$ і $\triangle OAC$ маємо

$$OC = \frac{AB \sin \alpha}{2 \sin \beta} = \frac{AB \cos(\alpha - \alpha^*)}{2 \cos(\beta + \alpha^*)},$$

де $\text{ctg} \beta = Q/P$. Звідси $\text{tg} \alpha^* = \frac{\text{ctg} \beta - \text{ctg} \alpha}{2}$.

У стані рівноваги виконується нерівність $|\text{tg} \alpha^*| \leq f$. Отже,

$$-f \leq \frac{\text{ctg} \beta - \text{ctg} \alpha}{2} \leq f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ctg} \beta - 2f \leq \text{ctg} \alpha \leq \text{ctg} \beta + 2f$$

$$\text{або } Q/P - 2f \leq \text{ctg} \alpha \leq Q/P + 2f.$$

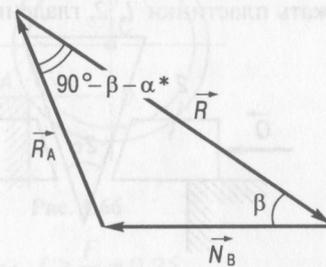


Рис. 1.62

Аналітичний метод розв'язування. Вводимо систему координат Ax (рис. 1.61, б). Зображаємо відомі сили \vec{P} , \vec{Q} , реакцію гладенької стіни \vec{N}_B та реакцію шорсткої поверхні у вигляді нормальної складової \vec{N}_A та сили тертя ковзання $\vec{F}_{\text{тр}}$, яку спрямуємо вздовж осі Ax .

Запишемо рівняння рівноваги балки

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 F_{xi} = F_{\text{тр}} + Q - N_B = 0, \\ \sum_{i=1}^5 F_{yi} = N_A - P = 0, \\ \sum_{i=1}^5 M_{Ai} = -P(AC \cos \alpha) - Q(AC \sin \alpha) + \\ + N_B(AB \sin \alpha) = 0. \end{cases}$$

Звідси $F_{\text{тр}} = \frac{1}{2} P \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{2} Q$; $N_A = P$.

На цьому завершено перший етап розв'язання задачі.

Переходимо до другого етапу. Розв'язуючи нерівність $|\vec{F}_{\text{тр}}| \leq f N_A$, одержуємо

$$\frac{Q}{P} - 2f \leq \operatorname{ctg} \alpha \leq \frac{Q}{P} + 2f.$$

Це і є розв'язок задачі.

Приклад 1.10. Визначити найменше значення сили \vec{Q} (рис. 1.63), при якому система зрівноважена, якщо коефіцієнт тертя ковзання між клином вагою P і кутом 2α та пластинками дорівнює f . Опора, на якій лежать пластинки 1, 2, гладенька.

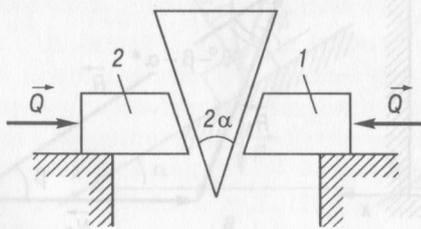


Рис. 1.63

Графічний метод розв'язування. Розглянемо рівновагу клина, на який діють три сили: сила ваги \vec{P} та реакції шорстких поверхонь тіл $\vec{R}_{1\text{пл}}$ і $\vec{R}_{2\text{пл}}$ (рис. 1.65, а). Згідно з теоремою про три сили, лінії дії всіх сил перетинаються в одній точці. Оскільки механічна система симетрична, поверхні тіл однакові, а реакції тіл рівні за величиною ($R_{1\text{пл}} = R_{2\text{пл}} = R_{\text{пл}}$), то їх можна замінити однією їм рівнодійною $\vec{R} = \vec{R}_{1\text{пл}} + \vec{R}_{2\text{пл}}$, спрямованою вздовж вертикалі (рис. 1.64, б). Отже, за аксіомою I $\vec{P} = -\vec{R}$.

З ромба (рис. 1.65, б) маємо

$$P = 2R_{\text{пл}} \sin(\alpha + \alpha^*),$$

де α^* — кут між реакцією шорсткої поверхні тіл і нормаллю до стінки клина. Далі розглянемо рівновагу правої пластинки, до якої прикладено силу \vec{Q} , силу ваги $\vec{P}_{\text{пл}}$, реакції гладенької опори $\vec{N}_{\text{оп}}$ та шорсткої поверхні клина $\vec{R}_к = -\vec{R}_{1\text{пл}} = N + F_{\text{тр}}$ за третім законом Ньютона (рис. 1.64, а). Оскільки лінії дії сил $\vec{P}_{\text{пл}}$ і $\vec{N}_{\text{оп}}$ збігаються, то їх можна замінити однією рівнодійною силою $\vec{R}^* = \vec{P}_{\text{пл}} + \vec{N}_{\text{оп}}$. Отже, пластинка перебуває в рівновазі під дією трьох сил: \vec{Q} , \vec{R}^* та $\vec{R}_к$.

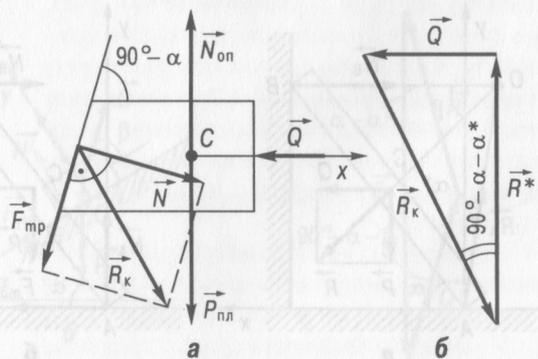


Рис. 1.64

Далі будемо замкнутий силовий трикутник (рис. 1.64, б), з якого $Q = R_{\kappa} \cos(\alpha + \alpha^*)$.

Отже, дістанемо $P(\cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha^* \sin \alpha) = 2Q(\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha^* \cos \alpha)$. Звідси

$$\operatorname{tg} \alpha^* = \frac{P - 2Q \operatorname{tg} \alpha}{P \operatorname{tg} \alpha + 2Q}.$$

У стані рівноваги виконується нерівність $|\operatorname{tg} \alpha^*| \leq f$. Тоді

$$-f \leq \frac{P - 2Q \operatorname{tg} \alpha}{P \operatorname{tg} \alpha + 2Q} \leq f \Rightarrow P \frac{1 - f \operatorname{tg} \alpha}{f + \operatorname{tg} \alpha} \leq 2Q \leq P \frac{1 + f \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - f}.$$

$$\text{Отже, } Q_{\min} = P \frac{1 - f \operatorname{tg} \alpha}{2(\operatorname{tg} \alpha + f)}.$$

Аналітичний метод розв'язування. Спочатку розглядаємо рівновагу клина. Зображаємо відомі сили: вагу клина \vec{P} , реакції пластинок \vec{N}_1, \vec{N}_2 ($N_1 = N_2 = N$) та їхніх шорстких поверхонь $\vec{F}_{\text{тр}1}, \vec{F}_{\text{тр}2}$ ($F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2} = F_{\text{тр}}$), які спрямовуємо вгору — протилежно можливому руху (рис. 1.65, а). Вісь Oy напрямляємо вертикально і запишемо проекції зображених сил на цю вісь:

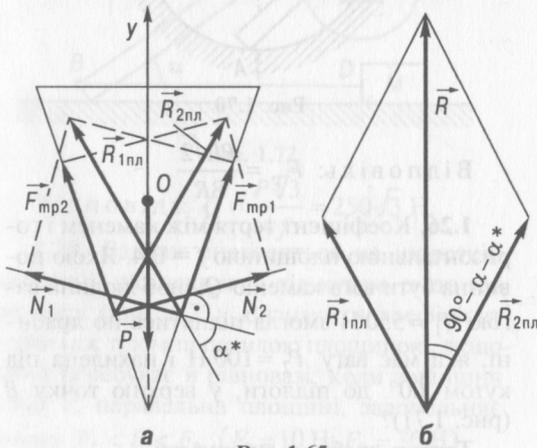


Рис. 1.65

$$\sum_{i=1}^5 F_{yi} = 2F_{\text{тр}} \cos \alpha + 2N \sin \alpha - P = 0.$$

Далі розглядаємо рівновагу правої пластинки (рис. 1.64, а) і запишемо рівняння рівноваги в проекції на вісь Sx :

$$\sum_{i=1}^5 F_{xi} = -F_{\text{тр}} \sin \alpha + N \cos \alpha - Q = 0.$$

Тоді сила тертя і реакція клина відповідно

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{2} P \cos \alpha - Q \sin \alpha,$$

$$N = \frac{1}{2} P \sin \alpha + Q \cos \alpha.$$

Розв'язуючи нерівність $|\vec{F}_{\text{тр}}| \leq f N$, одержуємо

$$\frac{1}{2} P \frac{1 - f \operatorname{tg} \alpha}{f + \operatorname{tg} \alpha} \leq Q \leq \frac{1}{2} P \frac{1 + f \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - f}.$$

Отриманий вираз є розв'язком задачі.

1.4.3. Задачі для самостійного розв'язування

1.21. Однорідна циліндрична труба вагою $P = 600$ Н спирається на шорсткий виступ A і утримується в рівновазі горизонтальною силою $F = 150$ Н, прикладеною до ободу труби (рис. 1.66). Визначити, при яких значеннях коефіцієнта тертя можлива рівновага.

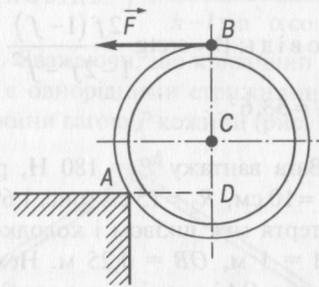


Рис. 1.66

$$\text{Відповідь: } f \geq \frac{F}{P} = 0,25.$$

1.22. Однорідна горизонтальна балка AB лежить на гладенькій площині CE і шорсткій CD (рис. 1.67). Визначити вагу балки, якщо вона утримується в рівновазі силою тертя $F_{\text{тр}} = 10\sqrt{3}$ Н.

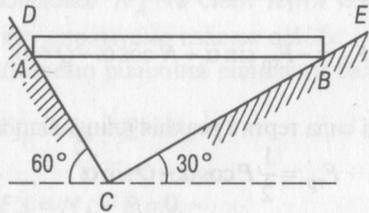


Рис. 1.67

Відповідь: $P = F_{\text{тр}} \cdot 2\sqrt{3} = 60$ Н.

1.23. Однорідна балка спирається на дві шорсткі площини: одним кінцем на горизонтальну, а іншим на нахилену під деяким кутом (рис. 1.68). Коефіцієнт тертя площин $f = 0,3$. Визначити кут нахилу β площини, якщо балка перебуває в рівновазі.

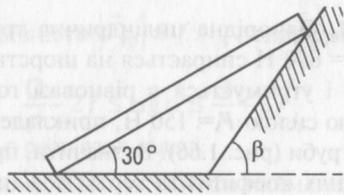


Рис. 1.68

Відповідь: $\beta = \arctg \frac{2f(1-f)}{1-2f-f^2} = \arctg \frac{42}{31} \approx 53,6^\circ$.

1.24. Вага вантажу $P = 180$ Н, радіуси шківів $R_1 = 10$ см, $R_2 = 15$ см (рис. 1.69). Коефіцієнт тертя між шківом і колодкою $f = 0,6$. $OA = 1$ м, $OB = 0,25$ м. Нехтуючи вагою важеля OA і розмірами колодки, визначити величину сили \vec{F} , яку необхідно прикласти перпендикулярно до важеля, щоб утримати вантаж в рівновазі.

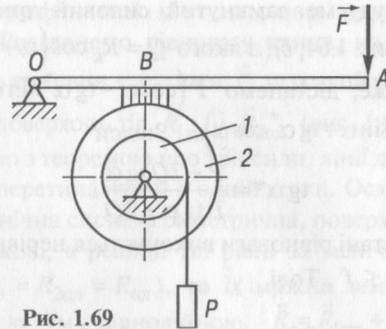


Рис. 1.69

Відповідь: $F \geq P \frac{OB}{OA} \cdot \frac{R_1}{fR_2} = 50$ Н.

1.25. Однорідний стрижень AB вагою P і довжиною l (рис. 1.70), що розміщений у вертикальній площині, своїм кінцем A спирається на шорстку поверхню у найнижчій точці півсфери. Радіус півсфери R . Вважаючи, що виступ у точці C гладенький, визначити силу тертя, якщо стрижень перебуває в рівновазі.

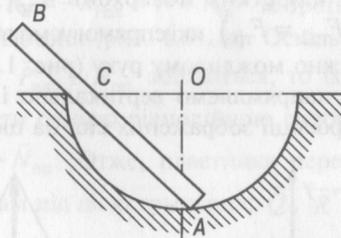


Рис. 1.70

Відповідь: $F_{\text{тр}} = \frac{Pl\sqrt{2}}{8R}$.

1.26. Коефіцієнт тертя між каменем і горизонтальною площиною $f = 0,4$. Якою повинна бути вага каменю Q , щоб людина вагою $P_1 = 550$ Н змогла піднятися по драбині, яка має вагу $P_2 = 100$ Н і нахилена під кутом 60° до підлоги, у верхню точку B (рис. 1.71)?

Тертям драбини знехтувати.

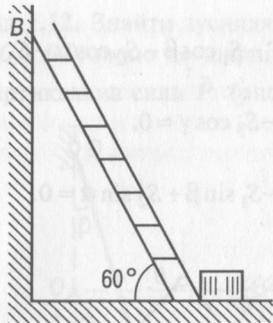


Рис. 1.71

Відповідь: $Q \geq \frac{P_2 + 2P_1}{2f\sqrt{3}} = 500\sqrt{3}$ Н.

1.27. Однорідна шорстка балка AB вагою $P = 600$ Н спирається точкою C на поверхню циліндричного барабана і утримується горизонтальною мотузкою BD , що прив'язана до вантажу M (рис. 1.72). Відомо, що $AC = 0,8$ м, $CB = 1,6$ м, $\alpha = 30^\circ$. Визначити найменшу вагу вантажу Q за умови, що система перебуватиме в рівновазі, якщо коефіцієнт тертя між ним і підлогою $f = 0,6$.

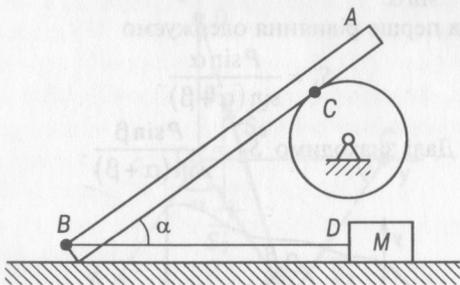


Рис. 1.72

Відповідь: $Q = \frac{P\sqrt{3}}{4f} = 250\sqrt{3}$ Н.

1.28. Вантаж знаходиться на шорсткій площині, що нахилена під кутом α до горизонту (рис. 1.73). Визначити коефіцієнт тертя між тілом та похилою площиною, якщо воно перебуває в рівновазі, коли зовнішня сила F , паралельна площині, задовольняє умову $F_1 < F < F_2$ ($F_1 = 10$ Н; $F_2 = 30$ Н).

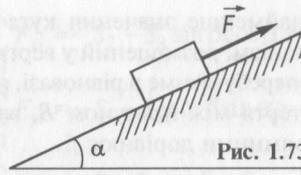


Рис. 1.73

Відповідь: $f = \frac{F_2 - F_1}{F_2 + F_1} \operatorname{tg} \alpha = 0,5 \operatorname{tg} \alpha$.

1.29. Однорідна тонка балка завдовжки $2l$ опирається на верхній кінець стовпа висотою h і на підлогу. Визначити коефіцієнт тертя між балкою і підлогою, якщо найбільший кут нахилу балки до вертикалі в положенні рівноваги дорівнює α (рис. 1.74). Тертя між балкою і стовпом знехтувати.

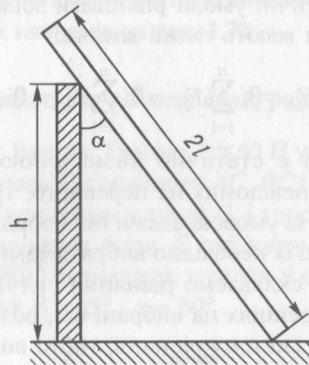


Рис. 1.74

Відповідь: $f = \frac{l \sin \alpha \cos^2 \alpha}{h - l \sin^2 \alpha \cos \alpha}$.

1.30. Вважаючи, що кривошип OA і шатун AB є однорідними стрижнями однакової довжини вагою P кожний (рис. 1.75), ви-

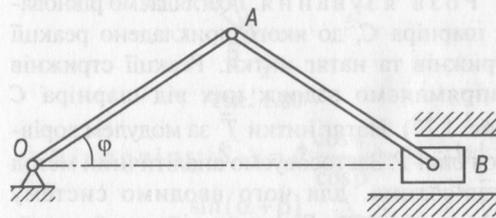


Рис. 1.75

значити найменше значення кута φ , при якому механізм, розміщений у вертикальній площині, перебуватиме в рівновазі, якщо коефіцієнт тертя між повзуном B , вагою Q і його напрямними дорівнює f .

$$\text{Відповідь: } \operatorname{tg} \varphi = \frac{P}{2f(P+Q)}.$$

§ 1.5. ПРОСТОРОВА ЗБІЖНА СИСТЕМА СИЛ

1.5.1. Короткі теоретичні відомості

Аналітичні умови рівноваги збіжної системи сил мають такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (1.14)$$

Задача є статично визначеною, якщо кількість невідомих не перевищує трьох.

Якщо за умовою задачі осі координат не вказані, то їх необхідно вибрати самостійно.

Потім складаємо рівняння (1.14) рівноваги в проєкціях на вибрані осі, розв'язуємо отриману систему рівнянь, тобто визначаємо невідомі.

1.5.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1.11. Знайти зусилля в стрижнях CA , CB , CD , якщо відома вага P вантажу (рис. 1.76). Площина ABC горизонтальна.

Розв'язування. Розглядаємо рівновагу шарніра C , до якого прикладено реакції стрижнів та натяг нитки. Реакції стрижнів напрямляємо вздовж них від шарніра C (рис. 1.77). Натяг нитки \vec{T} за модулем дорівнює силі P . Застосовуємо аналітичний метод розв'язання, для чого вводимо систему координат $Oxyz$. Рівняння рівноваги мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 F_{xi} = T - S_1 \cos \beta - S_2 \cos \alpha - S_3 \sin \gamma = 0, \\ \sum_{i=1}^4 F_{yi} = -S_3 \cos \gamma = 0, \\ \sum_{i=1}^4 F_{zi} = -S_1 \sin \beta + S_2 \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

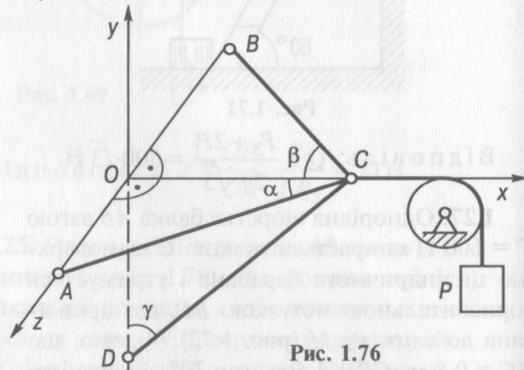


Рис. 1.76

З другого рівняння знаходимо $S_3 = 0$, з третього рівняння — залежність $S_2 = S_1 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$. Після підстановки цього виразу в перше рівняння одержуємо

$$S_1 = \frac{P \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Далі знаходимо $S_2 = \frac{P \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

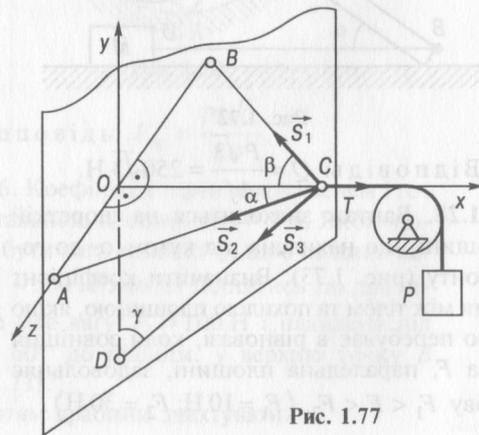


Рис. 1.77

Приклад 1.12. Знайти зусилля в стрижнях AB , BC і BD , якщо до шарніра B прикладена вертикальна сила \vec{P} (рис. 1.78).

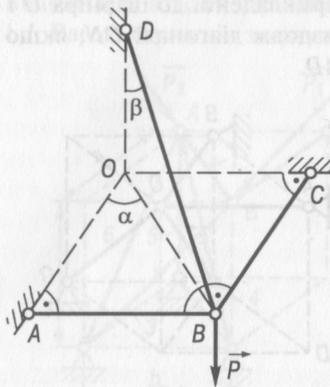


Рис. 1.78

Розв'язування. Розглядаємо рівновагу шарніра B під дією сили \vec{P} і реакцій стрижнів $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$ (рис. 1.79), які спрямо-

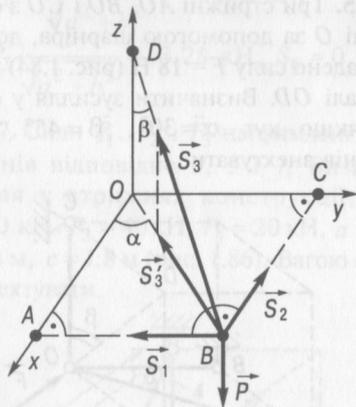


Рис. 1.79

вуємо вздовж відповідних стрижнів від шарніра B . Маємо збіжну систему сил з трьома невідомими силами, що відповідає кількості рівнянь рівноваги. Вводимо прямокутну систему координат $Oxyz$. Запишемо рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 F_{xi} = -S_2 - S_3 \sin \beta \cos \alpha = 0, \\ \sum_{i=1}^4 F_{yi} = -S_1 - S_3 \sin \beta \sin \alpha = 0, \\ \sum_{i=1}^4 F_{zi} = -P + S_3 \cos \beta = 0. \end{cases}$$

З третього рівняння знаходимо $S_3 = \frac{P}{\cos \beta}$.

Далі визначаємо

$$S_2 = -S_3 \sin \beta \cos \alpha = -P \operatorname{tg} \beta \cos \alpha;$$

$$S_1 = -S_3 \sin \beta \sin \alpha = -P \operatorname{tg} \beta \sin \alpha.$$

Те, що величини \vec{S}_1 та \vec{S}_2 є від'ємними, означає, що сили \vec{S}_1 та \vec{S}_2 насправді спрямовані в протилежний бік по відношенню до зображених напрямів на рис. 1.79.

1.5.3. Задачі для самостійного розв'язування

1.31. Вантаж 1 вагою $P = 60$ Н утримується в рівновазі стрижнями AC , BC і DC , шарнірно з'єднаними у точці C , і тросом, перекинутим через блок E під кутом $\alpha = 30^\circ$ (рис. 1.80). Визначити зусилля у стрижнях, якщо кут $\beta = 45^\circ$; $\gamma = 60^\circ$.

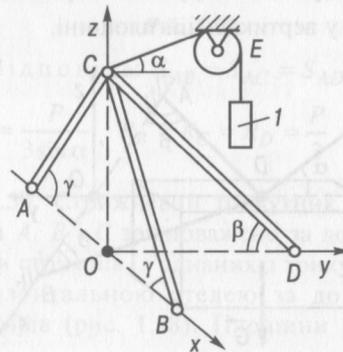


Рис. 1.80

$$\text{Відповідь: } S_{CD} = P \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \approx 73,5 \text{ Н,}$$

$$S_{AC} = S_{BC} = P \frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \cos \beta \sin \gamma} = 47,32 \text{ Н.}$$

1.32. Три стрижні AC , BC і DC з'єднані шарнірно у точці C (рис. 1.81). Визначити зусилля у стрижнях, якщо вони перебувають у рівновазі під дією сили $F = 50$ Н, яка розміщена у вертикальній площині Oxy . Кут $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$.

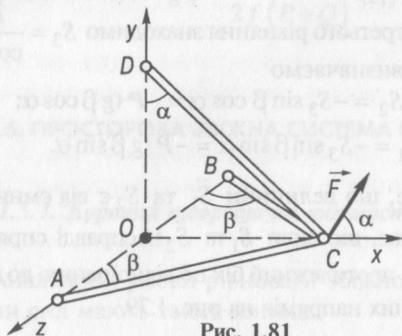


Рис. 1.81

Відповідь: $S_{CD} = F \operatorname{tg} \alpha = 86,6$ Н,

$$S_{AC} = S_{BC} = \frac{F}{2 \sin \beta \cos \alpha} = 100 \text{ Н.}$$

1.33. Однорідна плита вагою $G = 100$ Н утримується в рівновазі трьома тросами AD , BD і CD (рис. 1.82). Визначити натяги у тросах, якщо кут $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$. Трос CD розміщений у вертикальній площині.

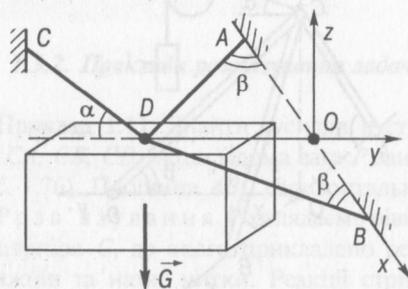


Рис. 1.82

Відповідь: $T_{CD} = \frac{G}{\sin \alpha} = 200$ Н,

$$T_{AD} = T_{BD} = \frac{G \operatorname{ctg} \alpha}{2 \sin \beta} = 100 \text{ Н.}$$

1.34. Три стрижні AO , BO і CO з'єднані в шарнірі O (рис. 1.83). Визначити їхні реакції, що виникають під дією сили $F = 12$ Н, прикладеної до шарніра O і спрямованої вздовж діагоналі ON , якщо $AB = AO = AD$.

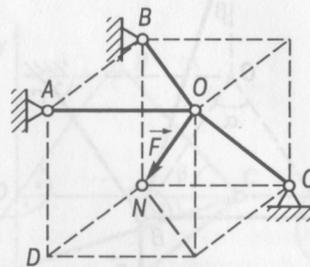


Рис. 1.83

Відповідь: $S_{AO} = \frac{F\sqrt{3}}{3} = 6,93$ Н,

$$S_{BO} = 0, \quad S_{CO} = F\sqrt{\frac{2}{3}} = 9,8 \text{ Н.}$$

1.35. Три стрижні AO , BO і CO з'єднані в точці O за допомогою шарніра, до якого прикладено силу $F = 18$ Н (рис. 1.84) вздовж діагоналі OD . Визначити зусилля у стрижнях, якщо кут $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$. Вагою стрижнів знехтувати.

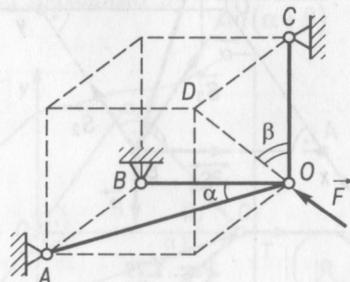


Рис. 1.84

Відповідь: $S_{AO} = \frac{F \sin \beta}{\sin \alpha} = 25,46$ Н,
 $S_{BO} = F \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha = 22,05$ Н,
 $S_{CO} = F \cos \beta = 12,73$ Н.

1.36. Визначити зусилля у стрижнях конструкції, якщо $P_1 = 15$ кН; $P_2 = 10,5$ кН; $a = 1$ м; $b = 3$ м; $c = 4$ м (рис. 1.85). Сили \vec{P}_1 і \vec{P}_2 напрямлені вздовж стрижнів відповідно 3 і 1. Вагою стрижнів знехтувати.

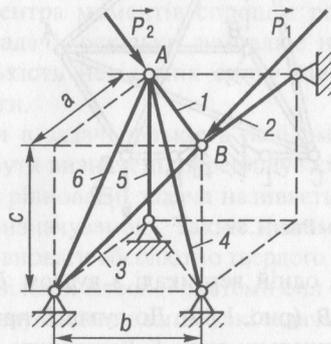


Рис. 1.85

Відповідь: $S_1 = S_2 = 0$,
 $S_3 = P_1 = 15$ кН,
 $S_4 = P_2 \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 16,93$ кН,
 $S_5 = P_2 \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 13,28$ кН, $S_6 = 0$.

1.37. Сили \vec{P}_1 , \vec{P}_2 і \vec{P}_3 напрямлені вздовж стрижнів відповідно 3, 5 і 1. Визначити зусилля у стрижнях конструкції, якщо $P_1 = 30$ кН, $P_2 = 40$ кН, $P_3 = 20$ кН, $a = 1,2$ м, $b = 1,4$ м, $c = 1,8$ м (рис. 1.86). Вагою стрижнів знехтувати.

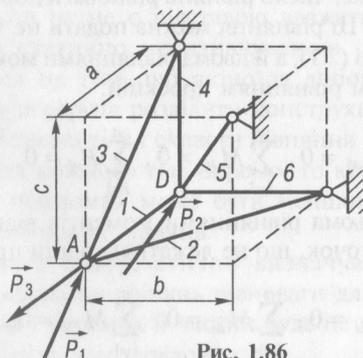


Рис. 1.86

Відповідь: $S_1 = P_3 = 20$ кН, $S_2 = 0$,

$$S_3 = P_1 = 30 \text{ кН}, S_4 = \frac{P_3 c}{a} = 30 \text{ кН},$$

$$S_5 = P_2 + \frac{P_3 \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a} \approx 82,95 \text{ кН},$$

$$S_6 = \frac{P_3 b}{a} \approx 23,33 \text{ кН}.$$

1.38. Визначити опорні реакції і зусилля в стрижнях шарнірної конструкції у вигляді правильної піраміди, ребра якої нахилені до основи під кутом α (рис. 1.87). Верхній вузол A навантажений вертикальною силою P , а вершини B, C, D знаходяться на рухомих шарнірах. Вагою стрижнів знехтувати.

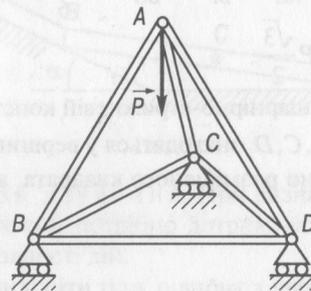


Рис. 1.87

Відповідь: $S_{AB} = S_{AC} = S_{AD} =$
 $= \frac{P}{3 \sin \alpha}$, $R_B = R_C = R_D = \frac{P}{3}$.

1.39. Стрижневий трикутник з шарнірами A, B і C зрівноважено за допомогою п'яти стрижнів, з'єднаних з трикутником і горизонтальною стелею за допомогою шарнірів (рис. 1.88). Площини рівносторонніх трикутників DAE і FBG перпендикулярні до площини трикутника ABC . До вузла C прикладена вертикальна сила P . Визначити зусилля в стрижнях, якщо $\angle BAC = \angle ABC = 30^\circ$. Вагою стрижнів знехтувати.

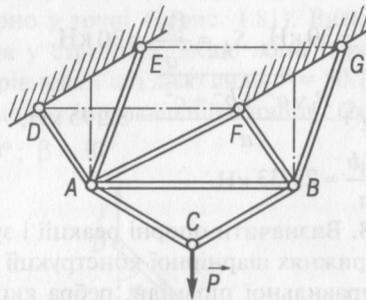


Рис. 1.88

Відповідь: $S_{AC} = S_{BC} = P$, $S_{AF} = 0$,
 $S_{AD} = S_{AE} = S_{BF} = S_{BG} = P \frac{\sqrt{3}}{6}$,
 $S_{AB} = P \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.40. У шарнірно-стрижневій конструкції вузли A, B, C, D знаходяться у вершинах горизонтально розміщеного квадрата, а вузол

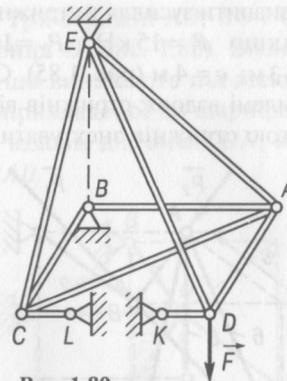


Рис. 1.89

E — на одній вертикалі з вузлом B , якщо $BE = AB$ (рис. 1.89). До вузла D прикладено вертикальну силу F . Визначити зусилля в стрижнях, нехтуючи їхньою вагою.

Відповідь: $S_{CB} = S_{BA} = S_{DA} = S_{KD} =$
 $= S_{CL} = -F$, $S_{DE} = F\sqrt{3}$, $S_{CA} = F\sqrt{2}$,
 $S_{CE} = S_{AE} = 0$.

Розділ 2

АБСОЛЮТНО ТВЕРДЕ ТІЛО ПІД ДІЄЮ ДОВІЛЬНОЇ ПЛОСКОЇ СИСТЕМИ СИЛ

§ 2.1. РІВНЯННЯ РІВНОВАГИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

Необхідною і достатньою умовою рівноваги абсолютно твердого тіла під дією системи сил, довільно розмішених у площині, є рівність нулеві алгебраїчної суми проєкцій всіх сил на дві взаємно перпендикулярні осі та алгебраїчної суми моментів усіх сил відносно будь-якої точки (центра моментів):

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{Oi} = 0. \quad (2.1)$$

Отже, число рівнянь рівноваги дорівнює трьом. Ці рівняння можна подати не тільки у формі (2.1), а й двома рівняннями моментів і одним рівнянням проєкцій:

$$\sum_{i=1}^n M_{Ai} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{Bi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{xi} = 0 \quad (2.2)$$

або трьома рівняннями моментів відносно трьох точок, що не лежать на одній прямій:

$$\sum_{i=1}^n M_{Ai} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{Bi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{Di} = 0. \quad (2.3)$$

У випадку (2.2) пряма AB і вісь Ox перпендикулярні.

Центр моментів доцільно вибрати в точці, в якій перетинаються лінії дії найбільшої кількості невідомих сил. Такий вибір центра моментів спрощує розв'язування задачі, оскільки зумовлює найменшу кількість невідомих сил у рівняннях рівноваги.

Коли в задачі кількість невідомих, які мають бути визначені, перевищує кількість рівнянь рівноваги, задача називається статично визначуваною. Таким чином, у випадку рівноваги абсолютно твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил статично визначуваними є лише такі задачі, в яких кількість невідомих не перевищує трьох.

§ 2.2. РІВНЯННЯ РІВНОВАГИ СКЛАДЕНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

Розв'язуючи задачі, в яких розглядається рівновага системи твердих тіл, недостатньо, як правило, розглядати рівновагу всієї системи в цілому, оскільки для неї можна скласти лише три рівняння рівноваги у випадку дії плоскої системи сил. У таких задачах кількість невідомих може перевищувати кількість згаданих вище рівнянь, оскільки невідомими будуть і сили взаємодії між окремими тілами конструкції.

Проте це не є підставою вважати таку задачу статично невизначуваною. Пояснюється це тим, що якщо за допомогою методу перерізів розділити конструкцію на окремі тверді тіла і скласти рівняння рівноваги для кожного тіла окремо, то кількість нових невідомих може бути меншою, ніж кількість нових рівнянь.

Задача буде статично визначуваною, якщо кількість рівнянь рівноваги для всієї системи і окремих її частин буде не менша за кількість усіх невідомих.

§ 2.3. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 2.1. Однорідна балка масою 10 кг спирається кінцем A на гладеньку горизонтальну підлогу, а кінцем B — на гладеньку похилу площину, яка утворює з горизонтом кут $\alpha = 30^\circ$ (рис. 2.1). Кінець B балки утримується ниткою, перекинутою через блок D , частина BD нитки паралельна похилій площині, а до другого кінця нитки підвішено тягар P .

Нехтуючи тертям, знайти вагу тягаря P і сили тиску N_A і N_B балки на підлогу і похилу площину за умови рівноваги балки.

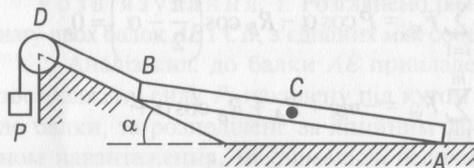


Рис. 2.1

Розв'язування. При визначенні невідомих сил потрібно дотримуватися такої послідовності дій.

1. Виділити тіло, рівновага якого розглядається. У даній задачі розглядаємо рівновагу балки AB (рис. 2.2), оскільки до неї прикладена активна сила $m\vec{g}$.

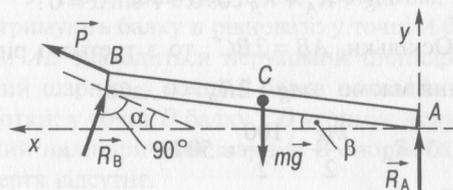


Рис. 2.2

2. Вказати задані сили. На балку діє сила ваги $m\vec{g}$, прикладена в її геометричному центрі C .

3. Визначити в'язі, накладені на тіло, і, застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, подумки відкинути в'язі, замінивши

їхню дію на тіло реакціями. Реакції гладеньких поверхонь у точках A і B перпендикулярні до цих поверхонь. Сила натягу нитки напрямлена вздовж неї і дорівнює P .

4. Провести аналіз системи сил і впевнитись у тому, що дана задача є статично визначуваною. Тут три невідомі сили: \vec{P} , \vec{R}_A і \vec{R}_B ; кількість рівнянь рівноваги теж три. Отже, задача є статично означуваною.

5. Вибрати прямокутну систему координат, скласти аналітичні рівняння рівноваги.

Вибираємо початок координат у точці A , осі показано на рис. 2.2:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{xi} = P \cos \alpha - R_B \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 0, \\ \sum_{i=1}^m F_{yi} = -mg + R_A + R_B \cos \alpha + \\ + P \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{Bi} = -mg \cdot BC \cos \beta + R_A \cdot BA \cos \beta = 0. \end{array} \right.$$

6. Розв'язати рівняння і обчислити невідомі величини:

$$P \cos \alpha - R_B \sin \alpha = 0,$$

$$-mg + R_A + R_B \cos \alpha + P \sin \alpha = 0.$$

Оскільки $AB = 2BC$, то з третього рівняння маємо $-mg + 2R_A = 0$, або

$$R_A = \frac{mg}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ Н.}$$

З першого рівняння знаходимо $R_B = P \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$.

Підставивши це значення у друге рівняння, отримаємо

$$-mg + \frac{mg}{2} + P \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + P \sin \alpha = 0$$

або

$$P \left(\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{mg}{2},$$

звідки $P = \frac{mg}{2} \sin \alpha = 25 \text{ Н.}$

І далі $R_B = P \operatorname{ctg} \alpha = 25 \operatorname{ctg} 30^\circ = 43,3 \text{ Н.}$

7. Проаналізувати одержаний розв'язок. Реакції \vec{R}_A і \vec{R}_B — це сили, з якими підлога і похила площина діють на балку. За третім законом Ньютона сили тиску балки на підлогу \vec{N}_A і на похилу площину \vec{N}_B дорівнюють \vec{R}_A і \vec{R}_B відповідно, але напрямлені протилежно цим реакціям.

Приклад 2.2. Визначити опорні реакції балки, зображеної на рис. 2.3, якщо $F_1 = 10 \text{ кН}$, $M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 2 \text{ кН/м}$, $\alpha = 60^\circ$, $EA = 2 \text{ м}$, $AB = 6 \text{ м}$, $BD = 3 \text{ м}$.

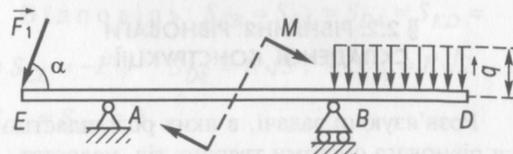


Рис. 2.3

Розв'язування. Розглянемо рівновагу балки ED . На неї діють сила \vec{F}_1 , пара сил з моментом \vec{M} і розподілене рівномірне навантаження, інтенсивність якого дорівнює \vec{q} . Замінімо це навантаження зосередженою силою \vec{Q} , статично еквівалентною цьому навантаженню. Величина сили \vec{Q} дорівнює площі прямокутника, який зображує розподілене навантаження, тобто $Q = q \cdot BD = 2 \cdot 3 = 6 \text{ кН}$. Сила \vec{Q} прикладена в центрі ваги розподіленого навантаження, тобто посередині відрізка BD . Відкинувши уявно в'язі (нерухомий шарнір A і коток B), замінімо їх дію на балку реакціями. Реакція котка \vec{R}_B перпендикулярна до площини його опори. Оскільки напрям і величина реакції шарніра A невідомі, розкладемо її на дві невідомі складові \vec{X}_A і \vec{Y}_A , напрямлені в додатний

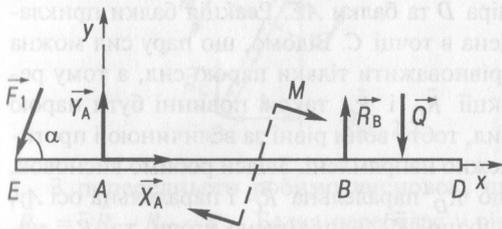


Рис. 2.4

бік осей координат Ax і Ay (рис. 2.4). Розглянемо тепер балку як вільне абсолютно тверде тіло, що знаходиться в рівновазі під дією довільної плоскої системи сил.

Невідомих сил три: \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{R}_B . Задача статично визначувана, оскільки рівнянь рівноваги можна скласти три:

$$\begin{cases} \sum F_{xi} = X_A - F_1 \cos \alpha = 0, \\ \sum F_{yi} = Y_A + R_B - Q - F_1 \sin \alpha = 0, \\ \sum M_{Ai} = F_1 \cdot EA \sin \alpha - M + R_B \cdot AB - \\ \quad - Q \left(AB + \frac{BD}{2} \right) = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши наведену систему рівнянь, знайдемо

$$\begin{aligned} X_A &= F_1 \cos \alpha = 5 \text{ кН}, \\ R_B &= \frac{1}{6} \left[Q \left(AB + \frac{1}{2} BD \right) + \right. \\ &\quad \left. + M - F_1 \cdot EA \sin \alpha \right] \approx 9,6 \text{ кН}, \\ Y_A &= Q + F_1 \sin \alpha - R_B \approx 5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Модуль \vec{R}_A обчислюємо за теоремою Піфагора:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 5\sqrt{2} \text{ кН}.$$

Приклад 2.3. Розглянемо приклад застосування аналітичних умов рівноваги при визначенні опорних реакцій конструкції, що складається з двох тіл. Треба знайти опорні реакції R_A , R_B , R_D і силу тиску в точці C

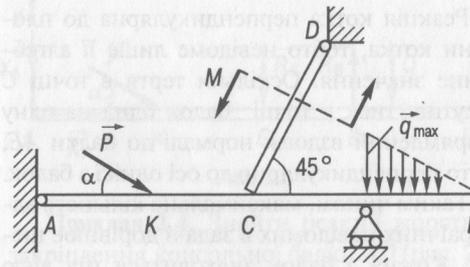


Рис. 2.5

балок одна на одну (рис. 2.5), якщо $AB = 4l$, $BC = BE = l$, $AK = KC$, $CD = 2l$, $P = 2 \text{ Н}$, $M = 4 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $\alpha = 30^\circ$, $l = 1 \text{ м}$, $q_{\max} = 1 \text{ Н/м}$.

Розв'язування. 1. Розглянемо рівновагу двох балок AE і CD , з'єднаних між собою.

2. Аналіз сил: до балки AE прикладено зосереджену силу P , нахилена під кутом α до балки, та розподілене за лінійним законом навантаження, максимальна величина якого $q_{\max} = 1 \text{ Н/м}$ прикладена в точці B .

У точці C на балку AE опирається балка CD , нахилена під кутом 45° до балки AE , яка утримується в точці D нерухомим циліндричним шарніром. До балки CD прикладено пару сил з моментом $M = 4 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що намагається повернути балку проти ходу годинникової стрілки.

3. Проаналізуємо в'язі, тобто тіла, що утримують балку в рівновазі: у точці A балки AE знаходиться нерухомий циліндричний шарнір; у точці B балка покладена на котки; у точці D балку CD утримує нерухомий циліндричний шарнір. В опорах балок тертя відсутнє.

4. З'ясуємо, чи є задача статично визначуваною. Реакції нерухомих шарнірів A і D невідомі за величиною та напрямом. Відомо тільки, що вони лежать у площині рисунка. Це означає, що кожна реакція визначається двома алгебраїчними невідомими, наприклад її складовими вздовж двох координатних осей.

Реакція котка перпендикулярна до площини котка, тобто невідоме лише її алгебраїчне значення. Оскільки тертя в точці C відсутнє, тиск у точці балок одна на одну напрямлений вздовж нормалі до балки AE , тобто перпендикулярно до осі однієї з балок.

Таким чином, максимальна кількість алгебраїчних невідомих в задачі дорівнює шести. Кожна з балок знаходиться під дією довільної плоскої системи сил, тому для кожної з них можна скласти три аналітичні умови (рівняння) рівноваги.

Отже, для двох балок можна скласти шість рівнянь. Оскільки кількість невідомих не перевищує кількості рівнянь, задача статично визначувана.

5. Застосувавши аксіому про звільнення від в'язей, подумки відкинемо в'язі, що накладені на систему балок, замінивши їх дію відповідними реакціями. Виберемо початок системи координат в точці A . Вісь Ax направимо вздовж балки AE , вісь Ay — по вертикалі вгору (рис. 2.6).

Представимо невідому реакцію в точці двома взаємно перпендикулярними складовими \vec{X}_A і \vec{Y}_A , напрямленими вздовж осей координат Ax і Ay . Реакція \vec{R}_B перпендикулярна до площини котка, тобто паралельна осі Ay .

Оскільки розглядається рівновага всієї системи в цілому, тиск у точці C дорівнює нулеві (згідно з третім законом Ньютона сили взаємодії балок AE і CD рівні та протилежно напрямлені). Проте якщо розглядати окремо балку CD , можна помітити, що вона знаходиться в рівновазі під дією лише

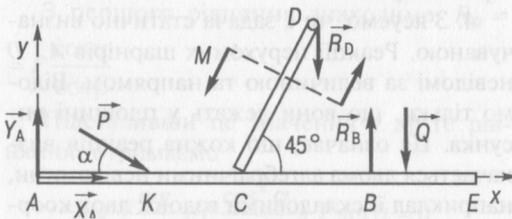


Рис. 2.6

пари сил з моментом M і двох реакцій: шарніра D та балки AE . Реакція балки прикладена в точці C . Відомо, що пару сил можна зрівноважити тільки парою сил, а тому реакції \vec{R}_D і \vec{R}_C також повинні бути парою сил, тобто вони рівні за величиною і протилежно напрямлені. Звідси робимо висновок, що \vec{R}_D паралельна \vec{R}_C і паралельна осі Ay , а якщо \vec{R}_C напрямлена вгору, то \vec{R}_D напрямлена вниз.

Замінімо розподілене по BE навантаження статично еквівалентною зосередженою силою \vec{Q} , прикладеною в центрі ваги розподіленого навантаження. Відомо, що центр ваги прямокутного трикутника знаходиться на відстані $1/3$ катетів від прямого кута. Сила \vec{Q} чисельно дорівнює площі трикутника, один катет якого BE , інший — q_{\max} :

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} BE.$$

Усі сили зображено на рис. 2.6.

6. Вважатимемо систему двох балок незмінною системою і складемо для неї три рівняння рівноваги у вигляді двох сум проєкцій сил на осі Ax та Ay і суми моментів сил відносно точки A :

$$\begin{cases} \sum F_{xi} = X_A + P \cos \alpha = 0, \\ \sum F_{yi} = Y_A - P \sin \alpha + R_B - Q - R_D = 0, \\ \sum M_{Ai} = -P \cdot AK \sin \alpha + R_B AB - \\ - Q \left(AB + \frac{1}{3} BE \right) + M - R_D (AC + CD \sin 45^\circ) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Ці три рівняння містять чотири невідомих \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{R}_B , \vec{R}_D . Для того щоб система рівнянь стала замкненою, треба скласти ще одне рівняння. Проте для системи двох балок можна скласти лише три незалежних між собою рівняння. Тому розглянемо тепер будь-яку з балок окремо. Для даного прикладу зручніше розглянути балку CD . До неї прикладені сила \vec{R}_D , пара сил з моментом M і реакція у точці C відкинутої балки AE (рис. 2.7).

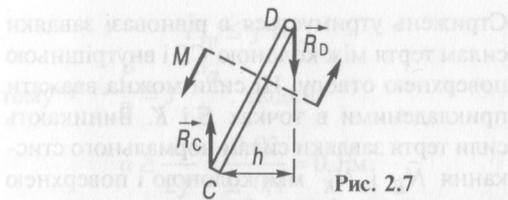


Рис. 2.7

З попереднього робимо висновок, що $\vec{R}_C = -\vec{R}_D$, $R_C = R_D$. Балка перебуває у рівновазі під дією пар сил. Умовою її рівноваги є рівність нулеві алгебраїчної суми моментів пар сил, тобто

$$\sum M_i = M - R_D CD \sin 45^\circ = 0. \quad (2.5)$$

Момент пари сил (\vec{R}_C, \vec{R}_D) чисельно дорівнює добутку величини однієї з сил на плече пари h , де $h = CD \sin 45^\circ$. Момент заданої пари сил $M > 0$, момент пари (\vec{R}_C, \vec{R}_D) від'ємний, бо намагається повернути балку CD за годинниковою стрілкою. З рівняння (2.5)

$$\text{маємо } R_C = R_D = \frac{M}{CD \sin 45^\circ} = \frac{4}{2l \cos 45^\circ} = 2\sqrt{2} \approx 2,82 \text{ Н.}$$

$$\text{З першого рівняння системи (2.4) } X_A = -P \cos \alpha = -2 \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \approx -1,73 \text{ Н.}$$

Невідомі Y_A і R_B знаходимо з другого і третього рівнянь системи (2.4):

$$R_B = \frac{1}{AB} \left[P \cdot AK \sin \alpha + Q \left(AB + \frac{1}{3} BE \right) - M + R_D (AC + CD \sin 45^\circ) \right] \approx 3 \text{ Н;}$$

$$Y_A = P \sin \alpha - R_B + Q + R_D \approx 1,3 \text{ Н.}$$

Зауваження. Дану задачу можна розв'язати, почавши з розчленування балок, тобто розглянути спочатку рівновагу балки AE , а потім CD , або навпаки. При цьому на балку AE діє система сил, зображена на рис. 2.8. Звернемо увагу на те, що сила \vec{R}_C , прикладена до AE , змінила напрям згідно з третім законом Ньютона. Отже, не можна вказати напрям \vec{R}_C , не з'ясувавши, про яке тіло йдеться.

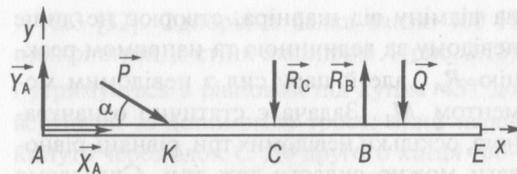


Рис. 2.8

Приклад 2.4. Знайти реакції жорсткого закріплення консольної балки AD (рис. 2.9), яка знаходиться під дією пари сил з моментом $M = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$ і зосередженої сили $F = 2 \text{ кН}$. Сила F прикладена в точці D , її лінія дії утворює кут 60° з AD , $AD = l = 2 \text{ м}$.

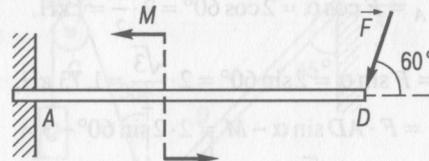


Рис. 2.9

Розв'язування. Розглянемо рівновагу балки AD , до якої прикладена пара сил з моментом M , яка намагається повернути балку проти ходу годинникової стрілки; в точці D прикладена зосереджена сила F .

На балку накладена в'язь – жорстке защемлення в точці A стіни.

На підставі аксіоми про звільнення від в'язей, відкинемо подумки жорстке защемлення в точці A , замінивши його дію відповідною реакцією: реакція защемлення має три невідомі складові – два компоненти реакції по осях координат і момент \vec{M}_1 пари сил, який називають моментом защемлення (рис. 2.10). Таким чином, защемлення,

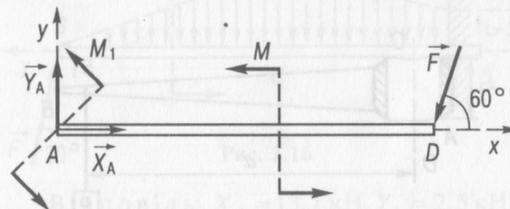


Рис. 2.10

на відміну від шарніра, створює не лише невідому за величиною та напрямом реакцію \vec{R}_A , але й пару сил з невідомим моментом \vec{M}_1 . Задача є статично означуваною, оскільки невідомих три, рівнянь рівноваги можна скласти теж три. Складаємо рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sum F_{xi} = X_A - F \cos \alpha = 0, \\ \sum F_{yi} = Y_A - F \sin \alpha = 0, \\ \sum M_{Ai} = M + M_1 - F \cdot AD \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо ці рівняння:

$$X_A = F \cos \alpha = 2 \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ кН},$$

$$Y_A = F \sin \alpha = 2 \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,73 \text{ кН},$$

$$M_1 = F \cdot AD \sin \alpha - M = 2 \cdot 2 \sin 60^\circ - 3 = 2\sqrt{3} - 3 \approx 0,47 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Приклад 2.5. Горизонтальний стрижень AB має на кінці A отвір, яким він насаджується на вертикальну круглу колоно CD . Довжина втулки $b = 2$ см, в точці B_1 на відстані a від осі CD до стрижня підвішено тягар P .

Визначити, нехтуючи вагою стрижня AB , мінімальну відстань a від тягара P до осі CD , щоб під дією його ваги стрижень залишався в рівновазі на колоні, якщо коефіцієнт тертя ковзання f між колоною і втулкою дорівнює $0,1$ (рис. 2.11).

Розв'язування. Розглянемо рівновагу стрижня AB , відкинувши подумки в'язь — колоно CD . На стрижень діє вертикальна сила \vec{P} — вага тягара, прикладена в точці B_1 .

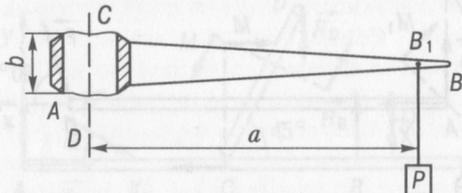


Рис. 2.11

Стрижень утримується в рівновазі завдяки силам тертя між колоною CD і внутрішньою поверхнею отвору. Ці сили можна вважати прикладеними в точках E і K . Виникають сили тертя завдяки силам нормального стискання \vec{N}_E і \vec{N}_K між колоною і поверхнею отвору (рис. 2.12). Складаємо рівняння рівноваги стрижня. Система координат зображена на рис. 2.12.

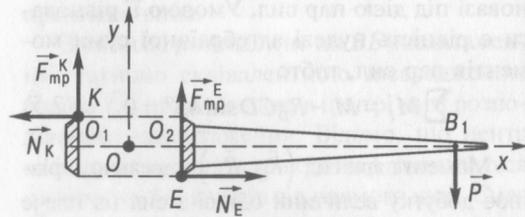


Рис. 2.12

$$\begin{cases} \sum F_{xi} = N_E - N_K = 0, \\ \sum F_{yi} = F_{тр}^E + F_{тр}^K - P = 0, \\ \sum M_{Oi} = -Pa + (N_E + N_K) \frac{b}{2} - F_{тр}^K \cdot O_1O + F_{тр}^E \cdot O_2O = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

З першого рівняння системи (2.6) робимо висновок, що $N_E = N_K = N$, тобто ці сили утворюють пару сил, а оскільки величина сили статичного тертя пропорційна силі нормального стискання між поверхнями тіл (коефіцієнт тертя f — коефіцієнт пропорційності — є однаковим у точках E і K),

то з цього випливає, що $F_{тр}^E = F_{тр}^K = F$. Друге і третє рівняння системи (2.6) перетворюються на такі:

$$\begin{cases} 2F - P = 0, \\ -Pa + Nb = 0. \end{cases}$$

$$\text{Звідси маємо } N = \frac{Pa}{b}, F = \frac{P}{2}.$$

Сила тертя спокою задовольняє нерівність

$$F_{\text{тр}} \leq f N,$$

тому $F = \frac{P}{2} \leq f \frac{Pa}{b}$, звідки

$$a \geq \frac{b}{2f} = \frac{0,02}{2 \cdot 0,1} = 0,1 \text{ м.}$$

§ 2.4. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

2.1 [32]. Однорідна балка вагою 600 Н завдовжки 4 м опирається кінцем C (рис. 2.13) на гладеньку підлогу, а проміжною точкою B — на стовп заввишки 3 м. Балка знаходиться в рівновазі, утворює із стовпом кут 30° , в точці C до балки прив'язана мотузка, яка закріплена в точці A . Нехтуючи тертям, знайти натяг мотузки T , реакції R_B і R_C відповідно стовпа і підлоги.

Відповідь: $T = 150 \text{ Н}$, $R_B \approx 173 \text{ Н}$, $R_C \approx 513 \text{ Н}$.

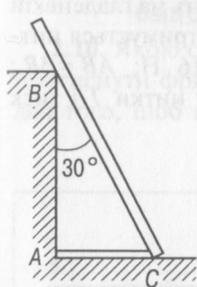


Рис. 2.13

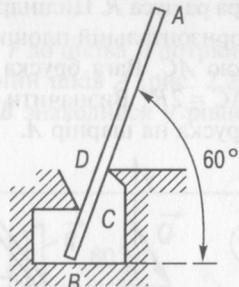


Рис. 2.14

2.2 [32]. Однорідна балка AB вагою 200 Н опирається на гладеньку горизонтальну підлогу в точці B (рис. 2.14) під кутом 60° . Крім того, в точках C і D вона підтримується опорами без тертя. Визначити реакції опор в точках B , C , D , якщо довжина $AB = 3 \text{ м}$, $CB = 0,5 \text{ м}$, $BD = 1 \text{ м}$.

Відповідь: $R_B = 200 \text{ Н}$, $R_C = R_D = 300 \text{ Н}$.

2.3 [32]. Однорідна балка вагою 100 Н прикріплена до стіни шарніром A (рис. 2.15) і утримується в рівновазі під кутом 45° до вертикалі за допомогою троса, який перекинута через блок C . До другого кінця троса прикріплено тягар G , трос BC утворює з вертикаллю кут 30° . У точці D до балки підвішено тягар Q вагою 200 Н. Визначити вагу тягара G і реакцію шарніра A , якщо $BD = 0,25AB$. Тертям знехтувати.

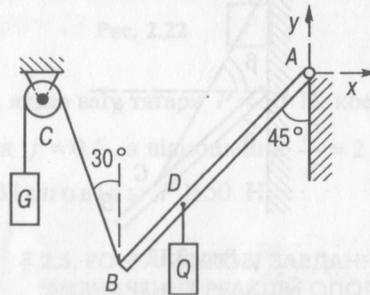


Рис. 2.15

Відповідь: $G \approx 146 \text{ Н}$, $X_A \approx 73 \text{ Н}$, $Y_A \approx 173 \text{ Н}$.

2.4 [32]. Визначити реакцію жорсткого защемлення A консольної балки AB , яка знаходиться під дією зосередженої сили F , пари сил з моментом M і розподіленого навантаження, що змінюється так, як показано на рис. 2.16. Дано: $F = 5 \text{ кН}$, $M = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 2 \text{ кН/м}$, $AC = 3 \text{ м}$, $CB = 4,5 \text{ м}$.

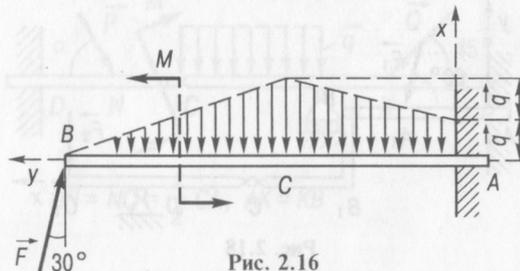


Рис. 2.16

Відповідь: $X_A \approx 13,7 \text{ кН}$, $Y_A = 2,5 \text{ кН}$, $M_A = -27,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

2.5. Однорідний стрижень завдовжки 0,4 м опирається кінцем A на жорстку стіну і підтримується у рівновазі за допомогою невагомої мотузки CD (рис. 2.17). Визначити коефіцієнт статичного тертя ковзання f між стіною і кінцем A стрижня, якщо $BC = 0,15$ м, $AD = 0,25$ м, а найменший кут α при рівновазі стрижня дорівнює 45° .

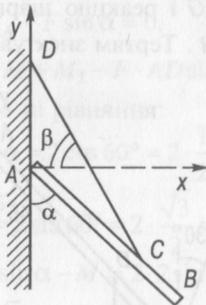


Рис. 2.17

Відповідь: $f = \frac{AB \sin \alpha \operatorname{tg} \beta - 2AD}{AB \sin \alpha} \approx 0,6$.

2.6. На горизонтальні балки AB і CC_1 шарнірно з'єднаної системи діють сили $F_1 = 4$ кН, $F_2 = 6$ кН (рис. 2.18); $AA_1 = 4$ м, $A_1B = 1$ м, $BB_1 = 2$ м, $B_1C = 1$ м, $CD = 3$ м, $DC_1 = 2$ м, $\angle BB_1C = 90^\circ$. У точках B і C розміщені шарніри. Нехтуючи вагою конструкції, знайти реакції жорсткого защемлення A і нерухомого шарніра D .

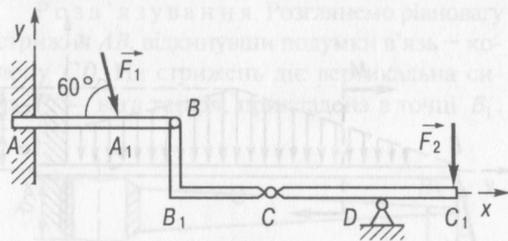


Рис. 2.18

Відповідь: $X_A = 0$, $Y_A \approx -0,536$ кН, $M_A \approx -6,144$ кН·м, $X_D = -2$ кН, $Y_D = 10$ кН.

2.7. Знайти момент пари сил M_1 (рис. 2.19), яку треба прикласти до кривошипа AB кривошипно-кулісного механізму при його рівновазі у положенні, коли $AB \perp AC$, якщо на кулісу CD діє пара сил з моментом M , $\angle ACD = \alpha$, $AB = a$. Тертям і вагою частин механізму нехтують. Знайти також величини реакцій шарнірів A і C .

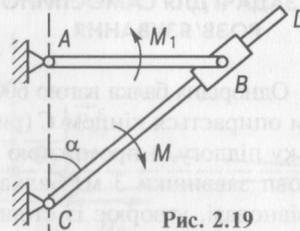


Рис. 2.19

Відповідь: $M_1 = M \sin^2 \alpha$,
 $R_A = R_C = \frac{M \sin \alpha}{a}$.

2.8 [32]. Брусок AB (рис. 2.20), який може обертатися навколо горизонтальної осі A , опирається на поверхню гладенького циліндра радіуса R . Циліндр лежить на гладенькій горизонтальній площині і утримується ниткою AC . Вага бруска $G = 16$ Н; $AB = 3R$; $AC = 2R$. Визначити натяг нитки T і тиск бруска на шарнір A .

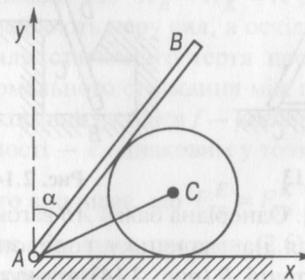


Рис. 2.20

Відповідь: $T \approx 6,9$ Н, $X_A = -6$ Н, $Y_A = -12,5$ Н.

2.9. Однорідна балка AB (рис. 2.21) вагою P завдовжки l жорстко защемлена у стінці і утворює з нею кут α . Однорідний

диск вагою Q лежить між стінкою і балкою, торкаючись їх у точках C і D . Знайти сили тиску N_C і N_D диска на стіну і балку, а також реакцію жорсткого защемлення,

якщо $BD = \frac{2l}{3}$.

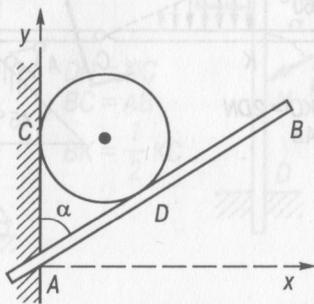


Рис. 2.21

Відповідь: $N_C = Q \operatorname{ctg} \alpha$, $N_D = \frac{Q}{\sin \alpha}$,
 $X_A = -Q \operatorname{ctg} \alpha$, $Y_A = P + Q$,
 $M_A = \frac{2Q + 3P \sin^2 \alpha}{6 \sin \alpha} l$.

2.10. Якою силою F до шків B потрібно притиснути фрикційний шків A (рис. 2.22) для того, щоб шків B знаходився у рівно-

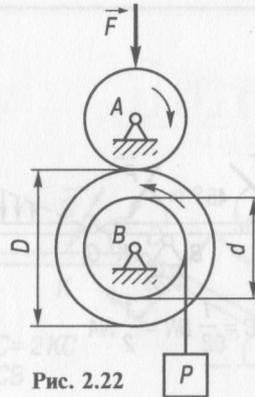


Рис. 2.22

вазі, якщо вага тягаря $P = 50$ Н, коефіцієнт тертя $f = 0,5$, а відношення $\frac{D}{d} = 2$?

Відповідь: $F \geq 50$ Н.

§ 2.5. РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ "ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР СКЛАДЕНОЇ КОНСТРУКЦІЇ"

Розміри та зовнішні навантаження складених конструкцій різних варіантів схем (рис. 2.23) вказано у табл. 2.1. Визначити реакції опор конструкцій наведених схем.

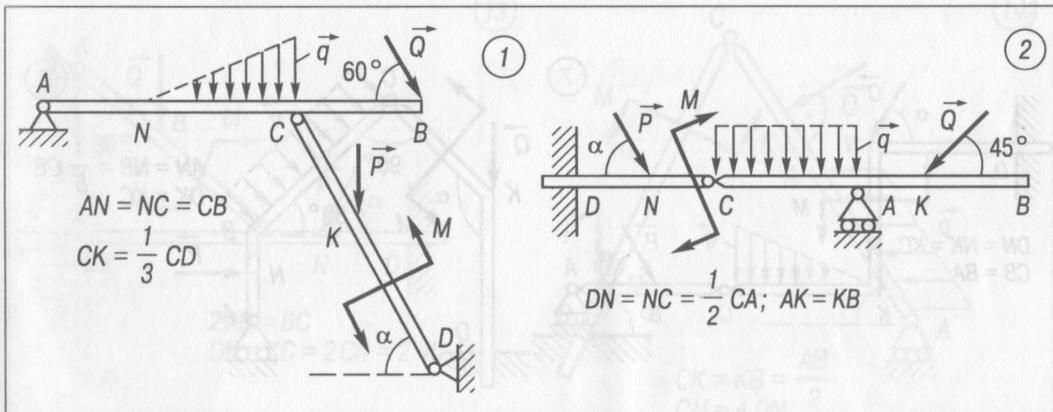


Рис. 2.23 (початок)

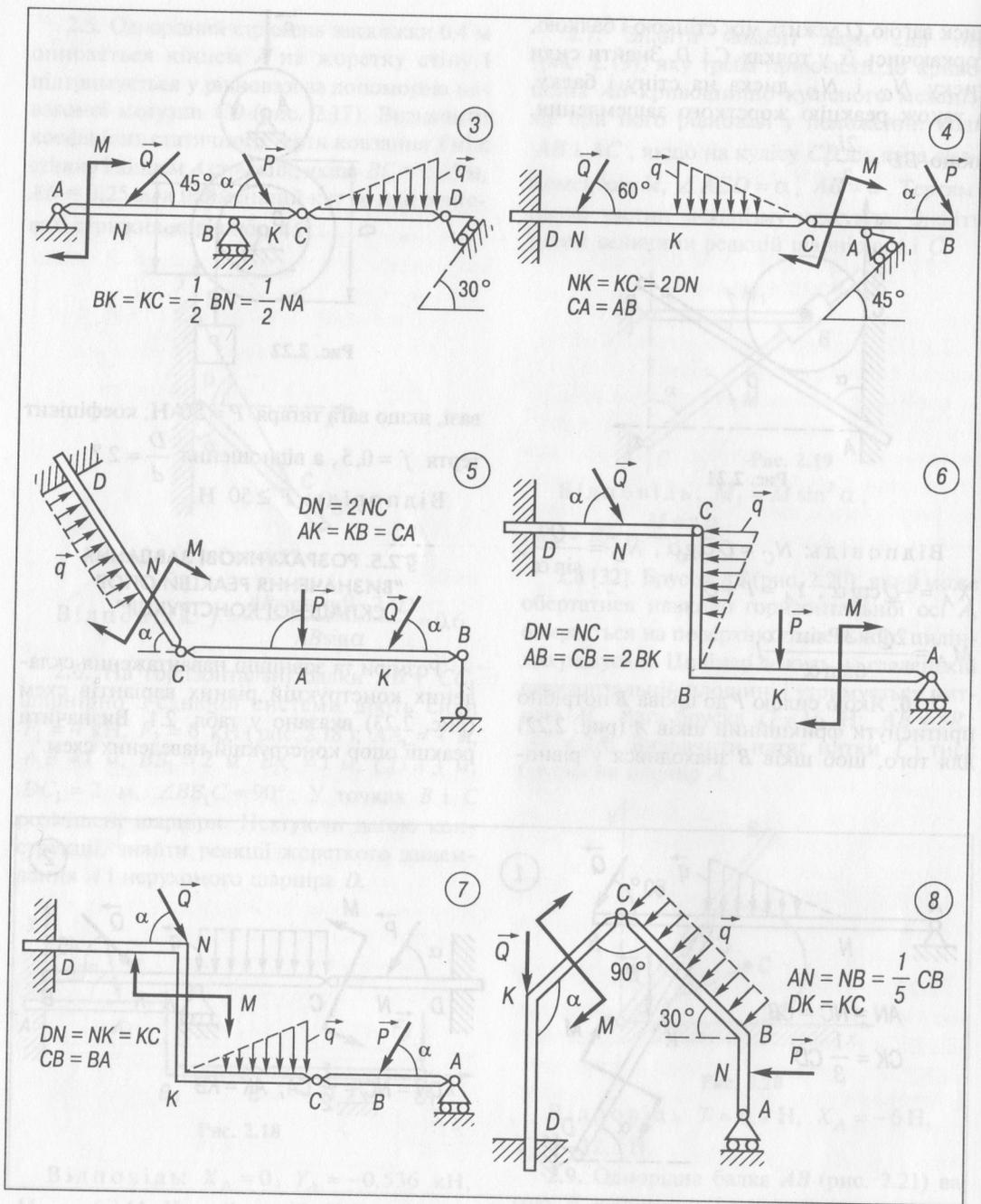


Рис. 2.23 (продовження)

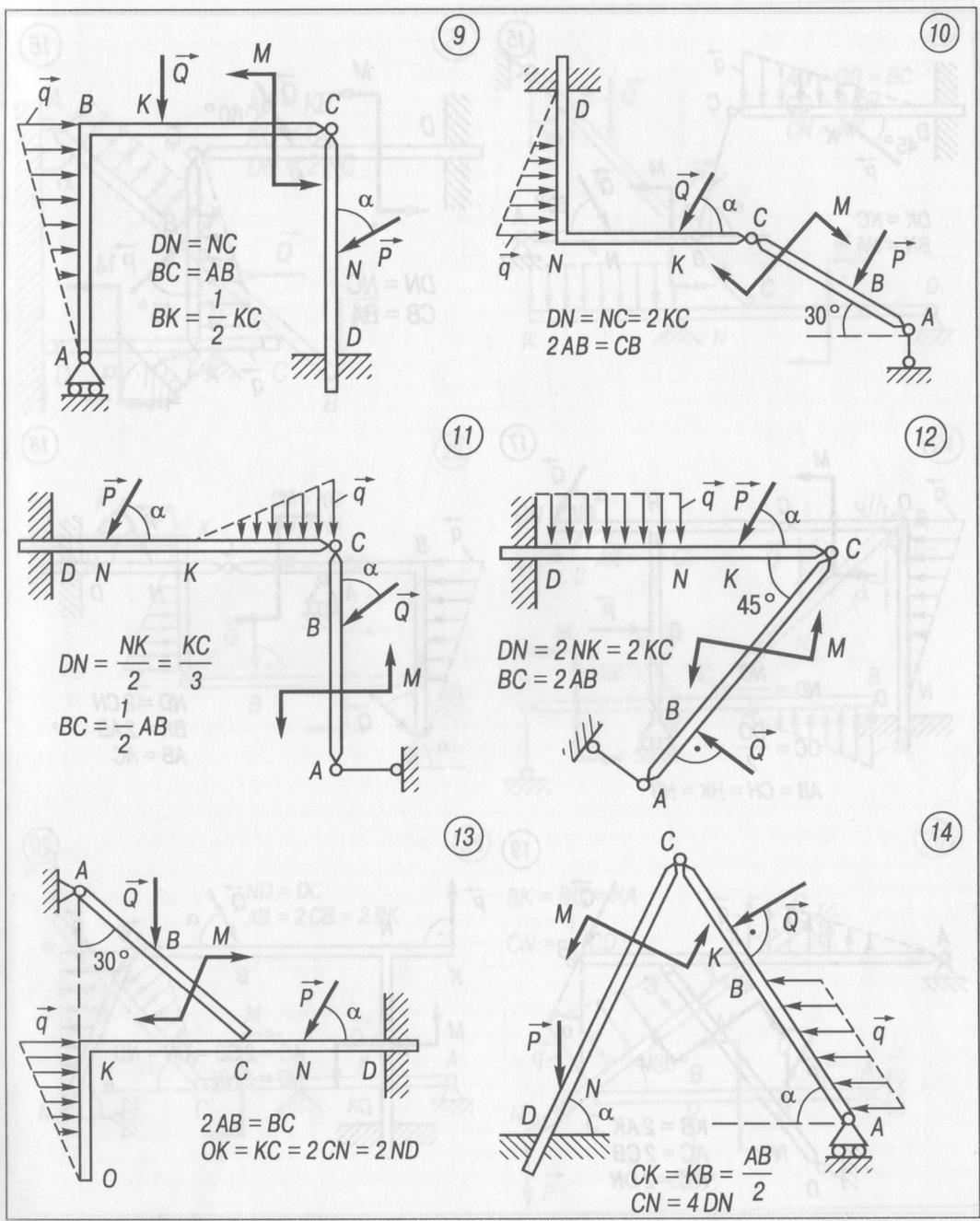


Рис. 2.23 (продовження)

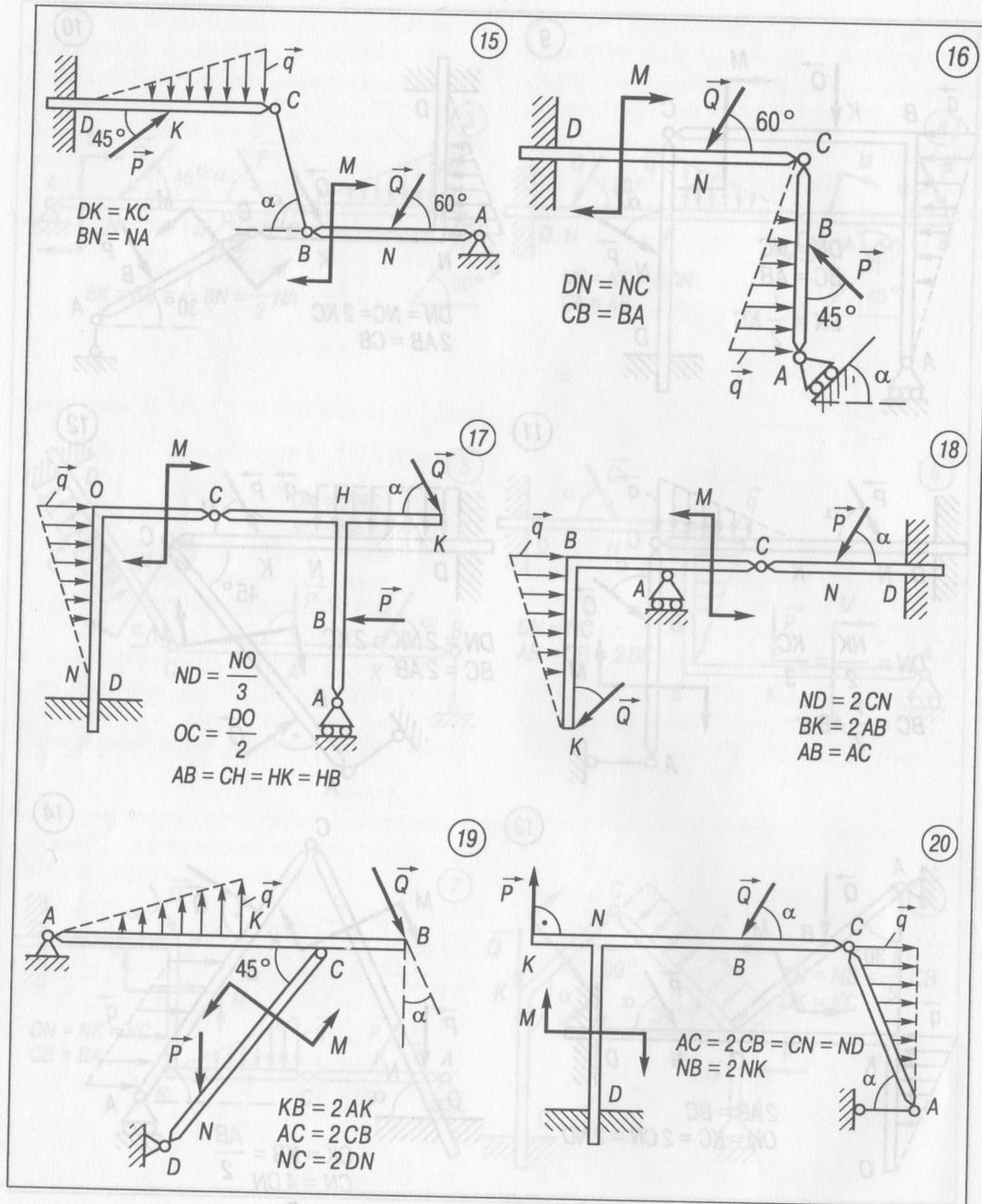


Рис. 2.23 (продовження)

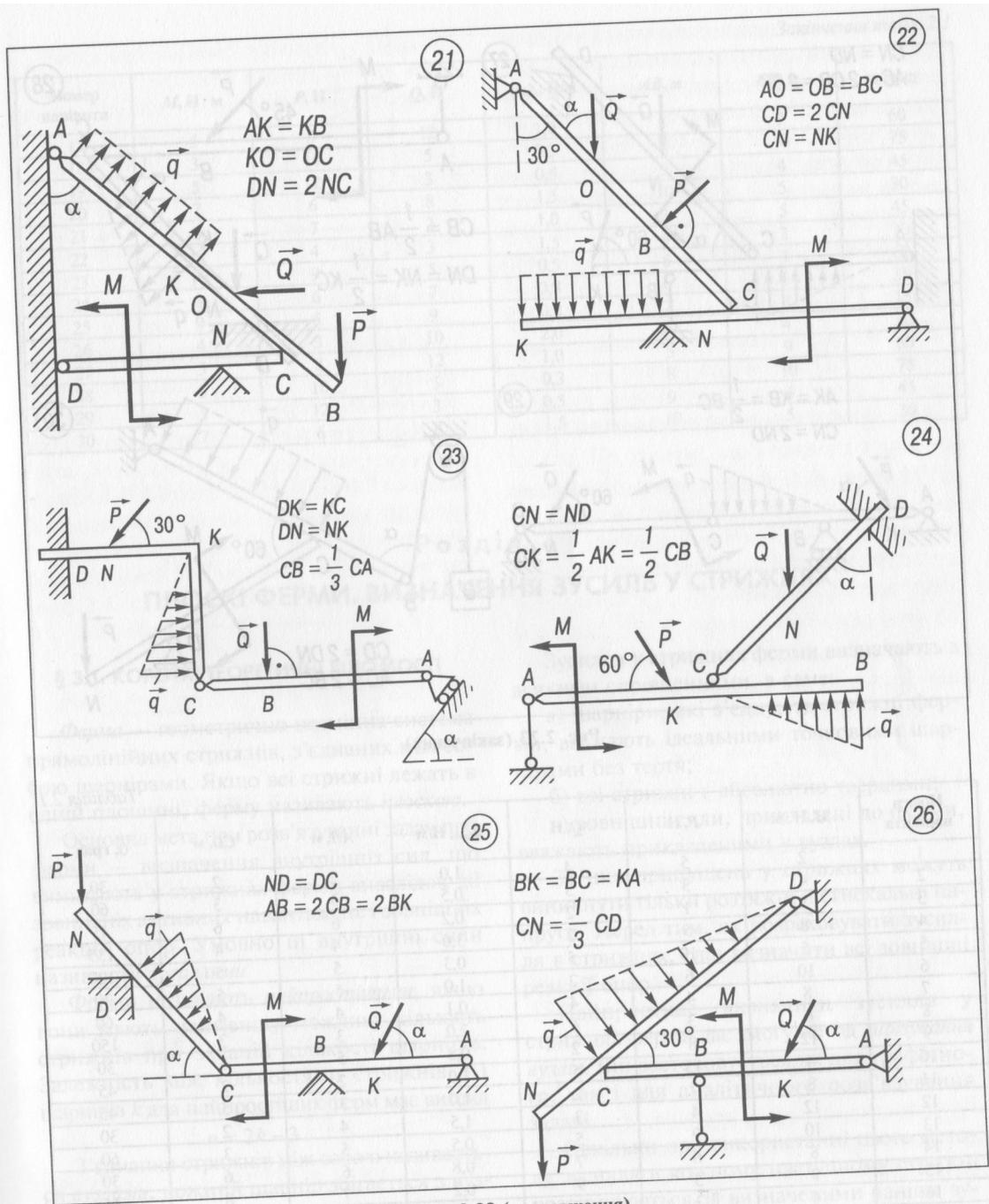


Рис. 2.23 (продолжения)

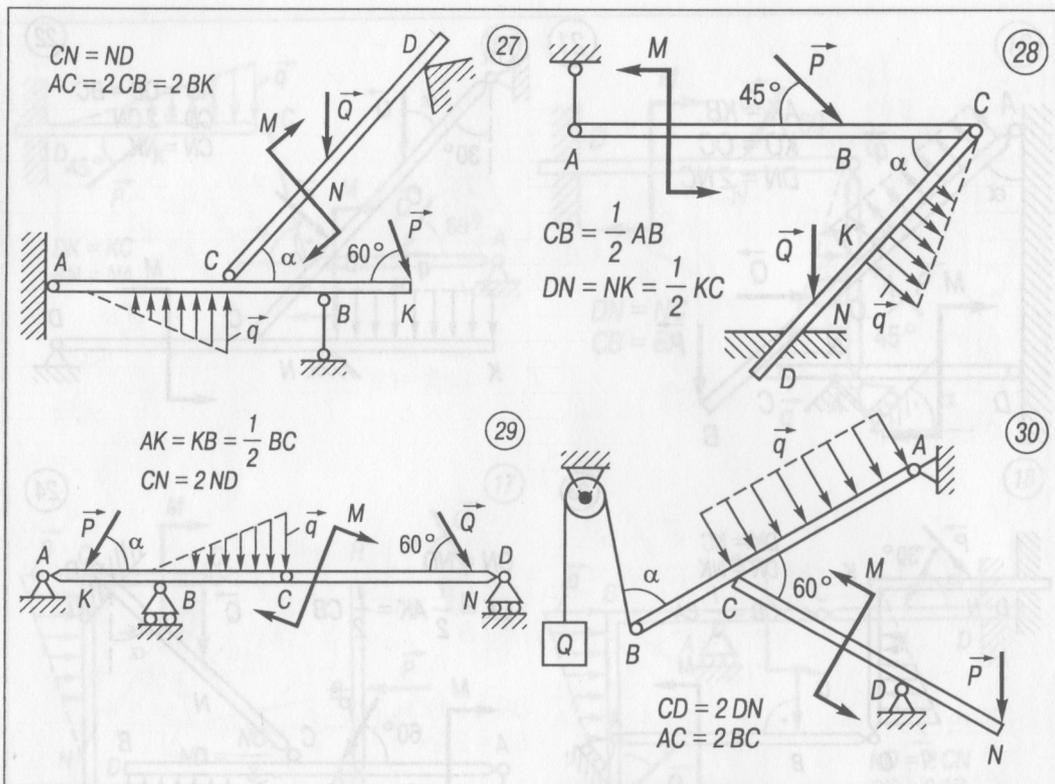


Рис. 2.23 (закінчення)

Таблиця 2.1

Номер варіанта	$M, \text{Н} \cdot \text{м}$	$P, \text{Н}$	$Q, \text{Н}$	$q_{\text{max}}, \text{Н/м}$	$AB, \text{м}$	$CD, \text{м}$	$\alpha, \text{град}$
1	2	5	4	1,0	2	2	30
2	4	3	3	0,5	3	3	60
3	3	1	2	0,2	6	6	45
4	8	5	2	3,0	4	4	135
5	5	10	5	0,3	5	5	120
6	10	6	2	1,0	5	5	30
7	8	4	4	0,1	4	4	60
8	6	3	6	2,0	3	3	150
9	12	8	2	0,3	5	5	30
10	4	15	5	1,0	2	2	45
11	8	7	2	1,0	3	5	45
12	12	4	3	1,5	4	2	30
13	10	9	5	0,5	5	3	60
14	8	6	7	0,8	6	6	30
15	9	5	9	0,2	7	8	15
16	4	3	10	2,0	5	4	30

Номер варіанта	$M, \text{Н} \cdot \text{м}$	$P, \text{Н}$	$Q, \text{Н}$	$q_{\text{max}}, \text{Н/м}$	$AB, \text{м}$	$CD, \text{м}$	$\alpha, \text{град}$
17	5	8	12	1,0	3	9	60
18	3	10	5	0,3	8	10	75
19	5	12	3	0,5	9	4	45
20	7	6	8	1,5	10	5	30
21	8	7	2	1,0	3	5	45
22	12	4	3	1,5	4	2	30
23	10	9	5	0,5	5	3	60
24	8	6	7	0,8	6	6	30
25	9	5	9	0,2	7	8	15
26	4	3	10	2,0	5	4	30
27	5	8	12	1,0	3	9	60
28	3	10	5	0,3	8	10	75
29	5	12	3	0,5	9	4	45
30	7	6	8	1,5	10	5	30

Розділ 3

ПЛОСКІ ФЕРМИ. ВИЗНАЧЕННЯ ЗУСИЛЬ У СТРИЖНЯХ

§ 3.1. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Ферма — геометрично незмінна система прямолінійних стрижнів, з'єднаних між собою шарнірами. Якщо всі стрижні лежать в одній площині, ферму називають *плоскою*.

Основна мета при розв'язуванні задач про ферми — визначення внутрішніх сил, що виникають у стрижнях ферми внаслідок дії зовнішніх активних навантажень і зовнішніх реакцій опор. Умовно ці внутрішні сили називають *зусиллями*.

Ферми називають *найпростішими*, якщо вони мають найменшу можливу кількість стрижнів при заданій кількості шарнірів. Залежність між кількостями стрижнів n і шарнірів k для найпростіших ферм має вигляд

$$n = 2k - 3.$$

З'єднання стрижнів між собою називається *вузлами*, кожний шарнір збігається з вузлом ферми.

Зусилля у стрижнях ферми визначають з деякими спрощеннями, а саме:

- шарніри, які з'єднують стрижні ферми, вважають ідеальними точковими шарнірами без тертя;
- всі стрижні є абсолютно твердими;
- зовнішні сили, прикладені до ферми, вважають прикладеними у вузлах.

За цих припущень у стрижнях можуть виникнути тільки розтяжні й стискальні напруги. Перед тим, як розраховувати зусилля в стрижнях, слід визначити всі зовнішні реакції опор.

Найпростіше визначити зусилля у стрижнях ферми дає змогу метод *вирізування вузлів*. Він застосовується як для графічного, так і для аналітичного розв'язування задачі.

Оскільки при використанні цього методу зусилля в кожному наступному стрижні розраховуються за визначеними раніше зу-

силлями у попередніх стрижнях, то допущена похибка при визначенні зусилля одного з стрижнів впливає на результати розрахунків зусиль усіх інших стрижнів.

Діаграма Максвелла—Кремони, що є значним вдосконаленням методу вирізування вузлів у графічній побудові, уможливує мінімізацію похибки названого методу. А найзручнішим аналітичним способом, який не призводить до накопичення похибок, є спосіб Риттера (спосіб трьох моментів).

§ 3.2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 3.1. Ферма, що зображена на рис. 3.1, перебуває у рівновазі під дією активних сил $P_1 = 30$ кН і $P_2 = 20$ кН. Розміри ферми вказані на рисунку в метрах. Знайти зусилля в стрижнях.

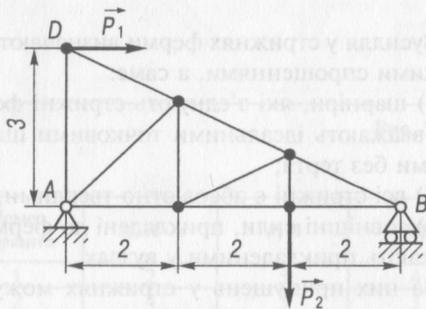


Рис. 3.1

Розв'язування. Ферма є статично означуваною, бо кількість стрижнів $n = 11$, вузлів $k = 7$, а $11 = 2 \cdot 7 - 3$.

Спочатку розглянемо ферму в цілому і знайдемо реакції зовнішніх в'язей \vec{R}_A і \vec{R}_B . Розкладемо невідому реакцію \vec{R}_A на дві складові \vec{X}_A і \vec{Y}_A (рис. 3.2), напрямки яких збігаються з додатними напрямками координат осей.

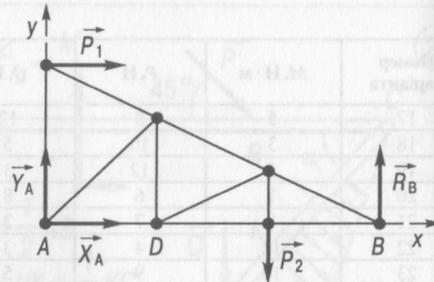


Рис. 3.2

Складемо систему рівнянь рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{xi} = X_A + P_1 = 0, \\ \sum F_{yi} = Y_A + R_B - P_2 = 0, \\ \sum M_{Ai} = -3 \cdot P_1 - 4 \cdot P_2 + 6 \cdot R_B = 0. \end{cases}$$

З неї знайдемо

$$X_A = -P_1 = -30 \text{ кН},$$

$$R_B = \frac{3 \cdot P_1 + 4 \cdot P_2}{6} = \frac{85}{3} \approx 28,33 \text{ кН},$$

$$Y_A = P_2 - R_B = 20 - \frac{85}{3} = -\frac{25}{3} \approx -8,33 \text{ кН},$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} \approx 31,1 \text{ кН}.$$

Знаки відповідей характеризують дійсні напрямки реакцій. Для перевірки правильності знайдених реакцій складемо рівняння моментів сил відносно, наприклад, точки D:

$$\sum M_{Di} = -2Y_A - 3P_1 - 2P_2 + 4R_B.$$

Підставивши в це рівняння знайдені вище значення $Y_A = -\frac{25}{3}$ кН і $R_B = \frac{85}{3}$ кН, дістанемо, що $\sum M_{Di} = 2 \cdot \frac{25}{3} - 90 - 40 + 4 \times \frac{85}{3} = 0$, тобто величини Y_A і R_B визначені вірно.

Тепер шукатимемо зусилля в стрижнях. Застосуємо графічний варіант методу вирізування вузлів, тобто побудуємо *діаграму Максвелла—Кремони*.

Зобразимо ферму в лінійному масштабі і прикладемо активні сили \vec{P}_1 і \vec{P}_2 та реакції в'язей.

Пронумеруємо поля, тобто частини площини, де розміщені сили, які відокремлюють лінії дії сил. Цю нумерацію показано на рис. 3.3. Поля 1–4 відповідають позначенням зовнішніх сил і тому називаються *зовнішніми* полями, поля 5–9 — *внутрішніми*. За допомогою їх номерів позначатимемо внутрішні (зусилля в стрижнях) і зовнішні сили. Зауважимо, що послідовність полів відповідає обходові контуру ферми за ходом годинникової стрілки. Насамперед побудуємо замкнений багатокутник зовнішніх сил, домовившись про масштаб зображення сил (рис. 3.4, а). Тут вектор $\vec{12}$ відповідає силі P_1 , $\vec{23}$ — реакції R_B і т. ін.

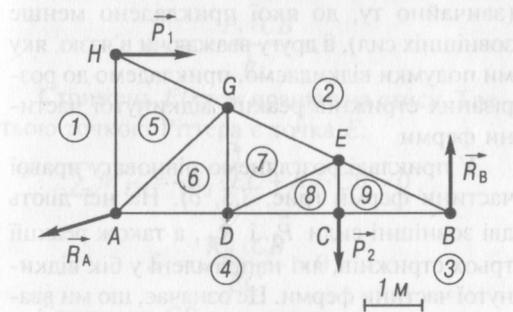


Рис. 3.3

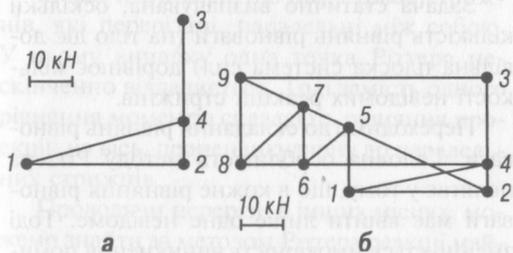


Рис. 3.4

Переходимо до визначення внутрішніх сил, застосовуючи *метод вирізування вузлів*, але всі багатокутники сил будуємо на спільній основі, якою є багатокутник зовнішніх сил.

Починаємо з вузла, в якому перетинаються не більш як два стрижні (вузол B або H). Обходячи вузол H (рис. 3.3) за ходом годинникової стрілки, натрапляємо на сили P_1 , реакцію $\vec{25}$ стрижня HG і реакцію $\vec{51}$ стрижня AH . Проводимо через вершину 1 (рис. 3.4, б) багатокутника зовнішніх сил пряму, паралельну реакції $\vec{51}$, а через вершину 2 — пряму, паралельну $\vec{25}$. На перетині цих прямих знаходиться точка 5. Реакція $\vec{25}$ напрямлена до вузла H вздовж стрижня GH . Це означає, що стрижень стиснуто. Реакція $\vec{51}$ напрямлена вздовж стрижня HA від вузла H . Стрижень HA розтягнуто.

Далі розглядаємо вузол A . Обходячи його за годинниковою стрілкою, ми натрапляємо на сили \vec{R}_A , $\vec{15}$ — реакцію стрижня AH , реакцію $\vec{56}$ стрижня AG і реакцію $\vec{64}$ стрижня AD . Реакція $\vec{15}$ уже відома, тому проводячи через вершину 5 пряму, паралельну $\vec{56}$ (або AG), а через вершину 4 пряму, паралельну $\vec{64}$ (або AD), знайдемо точку 6 — точку перетину цих прямих. Стрижень AG стиснутий, а AD — розтягнутий.

Тепер вирізаємо вузол G . Ми натрапляємо на такі реакції стрижнів: $\vec{65}$, $\vec{52}$, $\vec{27}$, $\vec{76}$. Реакції $\vec{65}$ і $\vec{52}$ відомі, тому проводимо пряму, паралельну стрижню GE , через вершину 2, а через точку 6 — пряму, паралельну стрижню GD . Дістаємо вершину 7 на перетині цих прямих. Стрижень GE стиснуто, а GD — розтягнуто.

Отже, замкнений багатокутник $\vec{65}-\vec{52}-\vec{27}-\vec{76}$ відповідає умові рівноваги вузла G ферми. Далі розглядаємо вузли D , E і т. д.

Після обходу всіх вузлів ферми одержимо замкнену діаграму, побудова якої вимагає великої точності й уваги.

Якщо не дотримано масштаб або лінії проведено не паралельно, то в кінці побудови діаграми може виникнути похибка, тобто діаграма не буде замкненою. Похибка вважається допустимою, якщо всі зусилля в стрижнях ферми відрізняються не більш як на 5 % від своєї середньої величини.

Існує зручний спосіб визначення напрямку реакції стрижня за діаграмою Максвелла—Кремони.

Припустимо, треба з'ясувати, стиснуто чи розтягнуто стрижень DG . Позначимо реакцію цифрами, наприклад, $\overline{76}$. Пригадавши, що вузли обходили за ходом годинникової стрілки, бачимо, що сила $\overline{76}$ відноситься до вузла G (якщо реакцію назвати $\overline{67}$, то вона буде пов'язана з вузлом D).

Поклавши олівець на вектор $\overline{76}$ діаграми вістря у напрямку вектора, тобто від 7 до 6 (зверху вниз), перенесемо олівець на стрижень GD ферми. Бачимо, що реакція напрямлена від вузла G , тобто стрижень розтягнуто.

При побудові діаграми Максвелла—Кремони може трапитися, що дві її вершини збігаються. Це означає, що відповідна реакція має нульове значення. Такі стрижні встановлюються у фермі лише з конструкційних міркувань.

Як зазначалося вище, метод вирізування вузлів уможливує застосування також аналітичного способу розв'язання задачі. В цьому разі потрібно скласти рівняння рівноваги системи сил, прикладених до кожного вузла (збіжна система сил).

Не зупиняючись докладно на цьому способі, розглянемо аналітичне визначення зусиль у стрижнях, тобто *метод Ріттера* (або *метод наскрізних перерізів*).

Знову візьмемо ферму, до якої було застосовано метод вирізування вузлів. Реакції зовнішніх в'язей уже відомі. Для визначення реакції стрижнів ферми застосуємо метод перерізів. Переріз має поділити ферму

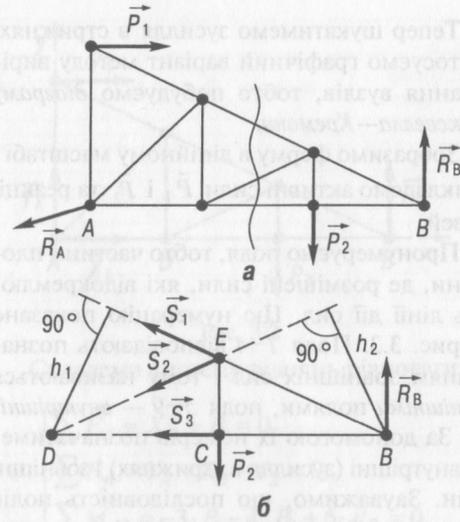


Рис. 3.5

на дві частини і проходити не більш як через три стрижні, які не виходять з одного вузла ферми. Один з можливих перерізів показано на рис. 3.5, а.

Розглядаючи лише одну з частин ферми (звичайно ту, до якої прикладено менше зовнішніх сил), а другу вважаючи в'яззю, яку ми подумки відкидаємо, прикладемо до розрізаних стрижнів реакції відкинutoї частини ферми.

У прикладі розглянемо рівновагу правої частини ферми (рис. 3.5, б). На неї діють дві зовнішні сили P_2 і R_B , а також реакції трьох стрижнів, які напрямлені у бік відкинutoї частини ферми. Це означає, що ми вважаємо всі стрижні розтягнутими.

Задача статично визначувана, оскільки кількість рівнянь рівноваги (на тіло діє довільна плоска система сил) дорівнює кількості невідомих реакцій стрижнів.

Переходимо до складання рівнянь рівноваги. Головна особливість методу Ріттера полягає у тому, що в кожне рівняння рівноваги має ввійти лише одне невідоме. Тоді зменшується ймовірність виникнення помилок, оскільки наявність помилки у визна-

ченні будь-якого невідомого ніяк не позначатиметься на інших.

Найчастіше рівняння рівноваги за цим методом складають у формі моментів сил відносно *точок Ріттера*, тобто тих точок, в яких перетинаються два з трьох перерізнаних стрижнів.

Так, для визначення реакції \bar{S}_1 складаємо суму моментів сил відносно точки Ріттера D :

$$\sum M_{Di} = S_1 \cdot h_1 - P_2 \cdot CD + R_B \cdot DB = 0,$$

звідки

$$S_1 = \frac{P_2 \cdot CD - R_B \cdot DB}{h_1} = -\frac{40}{3} \sqrt{5} \text{ кН.}$$

Оскільки $S_1 < 0$, то це означає, що стрижень стиснуто (ми попередньо вважали, що всі стрижні розтягнуто).

Для стрижня ED точкою Ріттера є точка B :

$$\sum M_{Bi} = S_2 h_2 + P_2 \cdot CB = 0,$$

$$S_2 = -\frac{P_2 \cdot CB}{h_2} < 0.$$

Стрижень ED теж працює на стиск. Третьою точкою Ріттера є точка E :

$$\sum M_{Ei} = -S_3 \cdot EC + R_B \cdot CB = 0,$$

$$S_3 = \frac{R_B \cdot CB}{EC} > 0.$$

Стрижень CD розтягнуто.

Може трапитись, що два з трьох стрижнів, які перерізані, паралельні між собою. У цьому випадку одна точка Ріттера нескінченно віддаляється. Тоді замість одного рівняння моментів складають рівняння проєкцій на вісь, перпендикулярну до паралельних стрижнів.

Проводячи перерізи в інших місцях, можемо знайти за методом Ріттера реакції майже всіх стрижнів.

Як видно з попереднього викладу, обидва методи мають окремі недоліки, тому найкраща методика визначення зусиль у стрижнях ферми полягає у поєднанні методів Максвелла—Кремони і Ріттера. Після побудови діаграми Максвелла—Кремони деякі зусилля перевіряють за методом Ріттера.

Приклад 3.2. Визначити опорні реакції і зусилля в стрижнях ферми, до якої прикладено сили $F_1 = 4$ кН, $F_2 = 1$ кН (рис. 3.6).

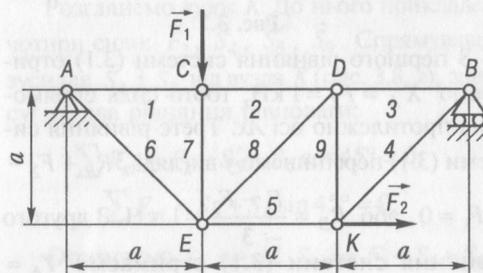


Рис. 3.6

Розв'язування. Насамперед перевіримо, чи є дана ферма статично означуваною. Кількість вузлів цієї ферми $k = 6$; тоді кількість стрижнів повинна дорівнювати $n = 2k - 3 = 9$, що відповідає даній фермі (див. рис. 3.6). Спочатку визначимо опорні реакції ферми, що зручно зробити аналітичним методом.

До ферми прикладено дві активні сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 , реакція в'язі \vec{R}_B у точці B (коток) та дві реакції \vec{X}_A, \vec{Y}_A у точці A (нерухомий шарнір), $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$ (рис. 3.7).

Запишемо систему з трьох рівнянь рівноваги, оскільки маємо плоску систему сил:

$$\begin{cases} \sum F_{xi} = -X_A + F_2 = 0, \\ \sum F_{yi} = Y_A - F_1 + R_B = 0, \\ \sum M_{zAi} = R_B \cdot 3a + F_2 a - F_1 a = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

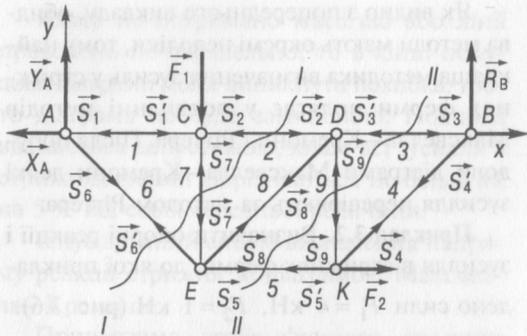


Рис. 3.7

З першого рівняння системи (3.1) отримуємо $X_A = F_2 = 1$ кН, тобто сила спрямована протилежно осі Ax . Третє рівняння системи (3.1) перепишемо у вигляді $3R_B + F_2 - F_1 = 0$, або $R_B = \frac{F_1 - F_2}{3} = 1$ кН. З другого рівняння системи (3.1) отримуємо $Y_A = F_1 - R_B = 3$ кН. Отже, опорні реакції $Y_A = 3$ кН, $X_A = R_B = 1$ кН.

Далі зусилля в стрижнях ферми можна визначити трьома способами.

Графічно-аналітичний метод (вирізання вузлів). Будемо послідовно розглядати рівновагу кожного вузла (шарніра) ферми окремо. Зауважимо, що вузли ферми являють собою невідільні матеріальні точки, на які можуть діяти прикладені до них відомі сили: активні \vec{F}_1, \vec{F}_2 і пасивні (реакції в'язей) $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B$. В'язями для вузлів є стрижні, що з'єднуються в них. Наприклад, вузол B обмежений двома в'язями-стрижнями 3 і 4 та перебуває під дією відомої опорної реакції \vec{R}_B , вузол C обмежений трьома в'язями-стрижнями 1, 2 і 7 та перебуває під дією відомої сили \vec{F}_1 .

На підставі аксіоми про звільнення від в'язей можемо кожний з цих вузлів розглядати як вільну матеріальну точку, до якої прикладено відомі сили і реакції стрижнів.

Причому завжди матимемо збіжну плоску систему сил, для якої можна записати лише два рівняння рівноваги. Тому розгляд рівноваги вузлів ферми слід починати з того вузла, до якого прикладена хоча б одна відома сила (вузли A, B, C, K) та не більше двох невідомих реакцій стрижнів (вузли A, B). Отже, таким умовам відповідають у нашому прикладі лише вузли A і B .

Аналітичний метод. Виріжемо вузол A . До нього прикладено чотири сили: \vec{X}_A, \vec{Y}_A — реакції нерухомого шарніра у точці A , а також \vec{S}_1, \vec{S}_6 — зусилля в стрижнях 1 і 6 відповідно (рис. 3.8, а).

Будемо послідовно записувати по два рівняння рівноваги для кожного вузла. Оскільки невідомо, розтягнутий стрижень чи стиснутий, то спочатку вважатимемо, що всі стрижні розтягнуті. Якщо в результаті розв'язку цих рівнянь отримаємо знак *плюс*, то це означатиме, що стрижень розтягнутий, а якщо *мінус*, то навпаки, — стиснутий. Зусилля в стрижнях 1 і 6 спрямуємо від вузла A , тобто вважатимемо, що обидва стрижні розтягуються (рис. 3.8, а). Матимемо збіжну плоску систему сил, а отже, два рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum F_{xi} &= S_1 - X_A + S_6 \cos 45^\circ = 0, \\ \sum F_{yi} &= Y_A - S_6 \sin 45^\circ = 0, \end{aligned}$$

звідки отримуємо

$$S_6 = Y_A \sqrt{2} = 3\sqrt{2} = 4,24 \text{ кН},$$

$$S_1 = X_A - S_6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 3 = -2 \text{ кН}.$$

Отже, стрижень 1 стиснутий, і його зусилля спрямоване до вузла A , а стрижень 6 розтягнутий — зусилля спрямоване від вузла B , як і припускалося (рис. 3.8, а).

Оскільки зусилля в стрижнях 1 і 6 відомі, то виріжемо наступний вузол C (можна B), до якого прикладено лише два невідомих зу-

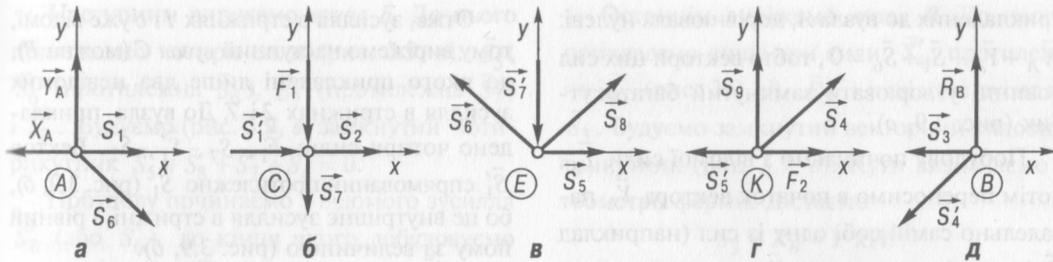


Рис. 3.8

сили в стрижнях 2 і 7. Спрямуємо зусилля від цього вузла (рис. 3.8, б). Отже, до вузла С прикладено сили \vec{F}_1 , \vec{S}_7 , \vec{S}_1' , \vec{S}_2 . Вектор сили \vec{S}_1' спрямований протилежно вектору \vec{S}_1 (рис. 3.8, б) і рівний йому за величиною, бо це внутрішнє зусилля в стрижні 1.

Матимемо збіжну плоску систему сил, тобто два рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum F_{xi} &= S_1' + S_2 = 0, \\ \sum F_{yi} &= -S_7 - F_1 = 0,\end{aligned}$$

звідки визначимо

$$S_2 = -S_1' = -2 \text{ кН}, \quad S_7 = -F_1 = -4 \text{ кН}.$$

Отже, стрижні 2 і 7 стиснуті і їх зусилля спрямовані до вузла С (рис. 3.8, б).

Наступним виріжемо вузол Е. До нього прикладено чотири сили: \vec{S}_5 , \vec{S}_6' (протилежна \vec{S}_6) і \vec{S}_7' (протилежна \vec{S}_7), \vec{S}_8 (рис. 3.8, в). Спрямувавши зусилля \vec{S}_5 і \vec{S}_8 від вузла Е (рис. 3.8, в), запишемо два рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum F_{xi} &= S_5 + S_8 \cos 45^\circ - S_6' \cos 45^\circ = 0, \\ \sum F_{yi} &= -S_7' + S_8 \sin 45^\circ + S_6' \sin 45^\circ = 0,\end{aligned}$$

тому

$$S_8 = S_7' \sqrt{2} - S_6' = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2} = 1,41 \text{ кН},$$

$$S_5 = S_6' \frac{\sqrt{2}}{2} - S_8 \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 - 1 = 2 \text{ кН}.$$

Отже, стрижні 5 і 8 розтягнуті (рис. 3.8, в).

Розглянемо вузол К. До нього прикладено чотири сили: \vec{F}_2 , \vec{S}_4 , \vec{S}_5' , \vec{S}_9 . Спрямувавши зусилля \vec{S}_4 і \vec{S}_9 від вузла К (рис. 3.8, г), запишемо два рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum F_{xi} &= F_2 - S_5' + S_4 \cos 45^\circ = 0, \\ \sum F_{yi} &= S_9 + S_4 \sin 45^\circ = 0.\end{aligned}$$

Отримаємо $S_4 = -\sqrt{2} \cdot S_9 \Rightarrow F_2 - S_5 - S_9 = 0$, звідки $S_9 = F_2 - S_5 = -1 \text{ кН}$. Сила $S_4 = \sqrt{2} = 1,41 \text{ кН}$.

Стрижень 4 розтягнутий, а 9 — стиснутий (рис. 3.8, г).

Останнім виріжемо вузол В. До нього прикладено лише три сили: \vec{S}_4' , протилежна \vec{S}_4 (рис. 3.8, д), \vec{R}_B і невідоме зусилля \vec{S}_3 . Зусилля \vec{S}_3 спрямуємо від вузла В (рис. 3.8, д) і запишемо рівняння рівноваги в проекції на вісь Вх, тому що невідоме тільки \vec{S}_3 :

$$\begin{aligned}\sum F_{xi} &= -S_3 - S_4' \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow S_3 = \\ &= -\frac{S_4}{\sqrt{2}} = -1 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Отже, стрижень 3 стиснутий (рис. 3.8, д).

Графічний метод. Виріжемо вузол А. До нього прикладено чотири сили: \vec{X}_A і \vec{Y}_A — реакції нерухомого шарніра в точці А, а також \vec{S}_1 , \vec{S}_6 — зусилля в стрижнях 1 і 6 відповідно. Для рівноваги збіжної системи сил достатньо, щоб векторна сума всіх сил,

прикладених до вузла A , дорівнювала нулеві: $\vec{X}_A + \vec{Y}_A + \vec{S}_1 + \vec{S}_6 = 0$, тобто вектори цих сил повинні утворювати замкнутий багатокутник (рис. 3.9, *а*).

Побудову починаємо з відомої сили \vec{Y}_A , потім переносимо в початок вектора \vec{Y}_A паралельно самій собі одну із сил (наприклад \vec{S}_6), а в кінець вектора \vec{Y}_A — останню силу $\vec{X}_A + \vec{S}_1$, тому що \vec{X}_A і \vec{S}_1 спрямовані вздовж однієї прямої. Побудувавши багатокутник, стрілочки векторів розставляємо по колу так, щоб в жодній із вершин вони не збігались, тобто трикутник був замкнутим. Кути в отриманому трикутнику визначаємо з геометрії ферми (якщо це зробити важко, то силу \vec{Y}_A будемо в масштабі, а зусилля \vec{S}_1 і \vec{S}_6 визначаємо вимірюванням).

З словового трикутника (рис. 3.9, *а*) отримуємо

$$S_6 = \frac{Y_A}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2} \cdot Y_A = 4,24 \text{ кН},$$

$$X_A + S_1 = Y_A \Rightarrow S_1 = Y_A - X_A = 3 - 1 = 2 \text{ кН}.$$

Напрямки зусиль \vec{S}_1 (стрижень 1 стискається, оскільки \vec{S}_1 спрямовано до вузла, див. рис. 3.9, *а*) і \vec{S}_6 (стрижень 6 розтягується, бо \vec{S}_6 спрямовано від вузла, див. рис. 3.9, *а*) визначають у процесі побудови багатокутника.

Отже, зусилля в стрижнях 1 і 6 уже відомі, тому виріжемо наступний вузол C (можна B), до якого прикладені лише два невідомих зусилля в стрижнях 2 і 7. До вузла прикладено чотири сили: \vec{F}_1 , \vec{S}_7 , \vec{S}'_1 , \vec{S}_2 . Вектор \vec{S}'_1 спрямований протилежно \vec{S}_1 (рис. 3.9, *б*), бо це внутрішнє зусилля в стрижні, і рівний йому за величиною (рис. 3.9, *б*).

Оскільки \vec{F}_1 і \vec{S}_7 спрямовані вздовж однієї прямої, то їх можна замінити однією силою $\vec{F}_1 + \vec{S}_7$. Аналогічно сили \vec{S}'_1 і \vec{S}_2 , що теж діють вздовж однієї прямої, замінюємо однією силою $\vec{S}'_1 + \vec{S}_2$.

Можна вважати, що до вузла C прикладено лише дві сили ($\vec{F}_1 + \vec{S}_7$ і $\vec{S}'_1 + \vec{S}_2$), лінії дії яких не збігаються. Тобто, щоб вузол C знаходився в рівновазі, за аксіомою про абсолютно тверде тіло обидві сили повинні дорівнювати нулеві. Запишемо

$$\vec{F}_1 + \vec{S}_7 = 0,$$

звідки $\vec{S}_7 = -\vec{F}_1$. Вектор \vec{S}_7 спрямований назустріч \vec{F}_1 , тобто до вузла, отже, стрижень 7 стискається (рис. 3.9, *б*). Аналогічно маємо $\vec{S}'_1 + \vec{S}_2 = 0$, тому $\vec{S}_2 = -\vec{S}'_1$. Вектор \vec{S}_2 спрямований назустріч \vec{S}'_1 , тобто до вузла, отже, стрижень 2 теж стискається (рис. 3.9, *б*).

Зусилля $S_7 = F_1 = 4$ кН, $S_2 = S_1 = 2$ кН.

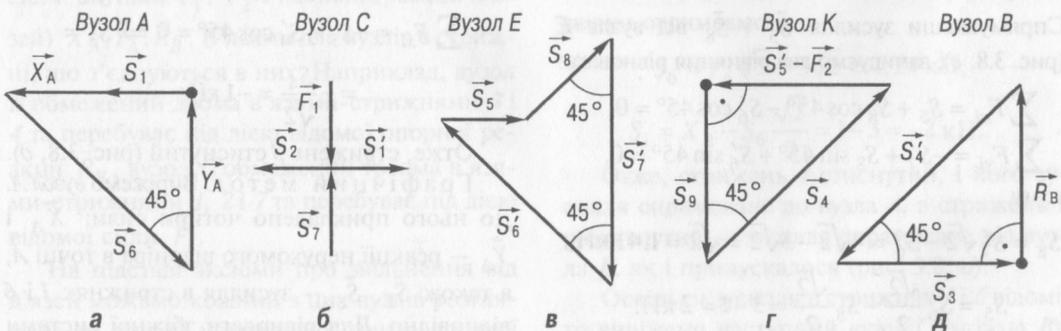


Рис. 3.9

Наступним виріжемо вузол E . До нього прикладено чотири сили (рис. 3.9, θ): \bar{S}_5 , \bar{S}'_6 (протилежна \bar{S}_6), \bar{S}'_7 (протилежна \bar{S}_7) і \bar{S}_8 . Будуємо (рис. 3.9, θ) замкнутий чотирикутник $\bar{S}_5 + \bar{S}_8 + \bar{S}'_7 + \bar{S}'_6 = 0$.

Побудову починаємо з відомого зусилля \bar{S}'_7 (або \bar{S}'_6), до кінця якого добудовуємо вектор зусилля \bar{S}'_6 . Далі в початок \bar{S}'_7 переносимо паралельно зусилля \bar{S}_8 , а в кінець \bar{S}'_6 — вектор \bar{S}_5 . Розставляємо стрілки по колу, а кути визначаємо з геометрії ферми. Згідно з рис. 3.9, θ запишемо $S_7 = S_8 \cos 45^\circ + S_6 \cos 45^\circ$, звідки $S_8 = \sqrt{2} \cdot S_7 - S_6 = \sqrt{2} = 1,41$ кН, $S_6 \sin 45^\circ = S_5 + S_8 \sin 45^\circ$; отже, $S_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}(S_6 - S_8) = 2$ кН.

Зусилля \bar{S}_5 і \bar{S}_8 спрямовані від вузла, отже, стрижні 5 і 8 розтягнуті (рис. 3.9, θ).

Наступним виріжемо вузол K . До нього прикладено чотири сили: \bar{F}_2 , \bar{S}_4 , \bar{S}'_5 і \bar{S}_9 . Зусилля \bar{S}'_5 (рис. 3.9, ϵ) протилежне \bar{S}_5 на рис. 3.9, θ . Сили \bar{F}_2 і \bar{S}'_5 протилежні за напрямом і діють вздовж однієї лінії; тому їх можна замінити однією силою $\bar{F}_2 - \bar{S}'_5$. Будуємо замкнутий векторний силовий трикутник (рис. 3.9, ϵ).

Вектор $\bar{F}_2 - \bar{S}'_5$ спрямовуємо в бік більшої сили \bar{S}'_5 . Починаємо побудову з вектора $\bar{S}'_5 - \bar{F}_2$, бо він відомий. Вектори \bar{S}_9 і \bar{S}_4 добудовуємо до $\bar{S}'_5 - \bar{F}_2$ паралельно стрижням 4 і 9 відповідно. Стрілки розставляємо по колу. З побудованого трикутника маємо $S_9 = S_5 - F_2 = 1$ кН, $S_4 = \sqrt{2} \cdot S_9 = 1,41$ кН.

Зусилля \bar{S}_4 спрямоване від вузла K , тобто стрижень 4 розтягнутий, а \bar{S}_9 — до вузла K , отже, стрижень 9 стиснутий (рис. 3.9, ϵ).

Останнім виріжемо вузол B . До нього прикладено лише три сили: \bar{S}'_4 , протилежна \bar{S}_4 (рис. 3.9, δ), \bar{R}_B і невідоме зусилля \bar{S}_3 . Будуємо замкнутий векторний силовий трикутник (рис. 3.9, δ). Кути визначаємо з геометрії ферми. Дістаємо

$$S_3 = R_B = 1 \text{ кН.}$$

Зусилля \bar{S}_3 спрямоване до вузла B , тому стрижень 3 стиснутий (рис. 3.9, δ).

Сили в стрижнях 2, 3, 8, 9, що збігаються в шарнірі D , вже визначені. Рівновагу вузла D використовуємо для перевірки виконаних розрахунків:

$$\begin{aligned} \sum F_{xi} &= S'_2 - S'_3 - S'_8 \cos 45^\circ = \\ &= 2 - 1 - \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \end{aligned}$$

$$\sum F_{yi} = S'_9 - S'_8 \sin 45^\circ = 1 - \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Внутрішні зусилля у всіх стрижнях ферми врівноважені, тому розрахунки виконано вірно. Зведемо їх результати.

Зовнішні (опорні реакції), кН

X_A	1
Y_A	3
R_B	1

Внутрішні (зусилля в стрижнях), кН

S_1	-2
S_2	-2
S_3	-1
S_4	1,41
S_5	2
S_6	4,24
S_7	-4
S_8	+1,41
S_9	-1

Знак “+” вказує на те, що стрижень розтягнутий, а “-”, що стиснутий.

У разі визначення зусиль у багатьох стрижнях складних ферм точність проведен-

ня прямих, паралельних напрямку стрижнів, знижується, оскільки кожен внутрішню силу відкладають двічі. Уникнути цього недоліку дає змогу графічна побудова діаграми Максвелла—Кремони.

Графічний метод із застосуванням діаграми Максвелла—Кремони. За цим методом потрібно ввести позначення сил відповідно до полів. За поля вибирають частини площини, що обмежені зовнішніми контурами ферми та лініями дії двох суміжних зовнішніх сил. Введемо поля, межами яких є: лінії дії реакцій опори A — знизу \vec{X}_A , справа \vec{Y}_A ; зліва реакція \vec{Y}_A , знизу лінія AB , справа — лінія дії зовнішньої сили \vec{F}_1 ; лінія дії сили \vec{F}_1 (зліва), пряма AB (знизу) та лінія дії реакції \vec{R}_B (справа); зліва лінія дії реакції \vec{R}_B , лінія BK , а знизу лінія дії сили \vec{F}_2 ; зверху лінії дії реакції \vec{X}_A , сили \vec{F}_2 та контур ферми — лінія AE . Вибрані поля дають можливість позначати кожен зовнішню силу, яка ці поля відмежовує. Наприклад, сила \vec{Y}_A позначатиметься $\overline{1-2}$, сила \vec{F}_1 — $\overline{2-3}$, \vec{F}_2 — $\overline{4-5}$ і т. д. (рис. 3.10).

Далі будують замкнутий силовий багатокутник $\overline{1-2-3-4-5}$ зовнішніх сил (рис. 3.11) за вже відомими опорними реакціями в'язей у вибраному масштабі: від точки 1 відкладаємо вгору реакцію $Y_A = 3$ кН (отримуємо точку 2), від точки 2 — вниз силу $F_1 = 4$ кН (точка 3), від точки 3 — вгору силу $R_B = 1$ кН (отримуємо точку 4 , яка

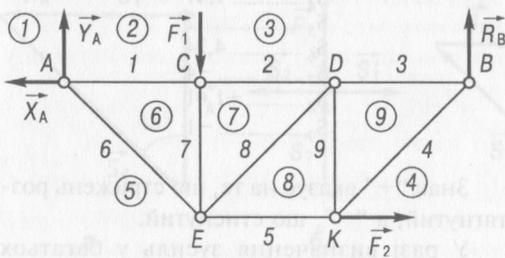


Рис. 3.10

збігається з точкою 1), далі від точки 4 — вправо силу $F_2 = 1$ кН (отримуємо точку 5). В результаті побудови повинні отримати останню зовнішню силу $\overline{5-1} = \vec{X}_A$. Одержана діаграма зовнішніх сил (заданих та реакцій в'язей) показана на рис. 3.11.

Приступимо до визначення зусиль у стрижнях ферми. Для позначення внутрішніх сил (зусиль у стрижнях), що діють вздовж стрижнів ферми, вказуємо додаткові поля $6, 7, 8$ і 9 (рис. 3.10), за які візьмемо окремі трикутники ферми. Таким чином, ми ввели єдині позначення для всіх внутрішніх сил за допомогою полів (аналогічно, як ми це робили із зовнішніми силами). На рис. 3.10 номери полів вказано в кружечках.

За третім законом Ньютона внутрішні сили діють попарно.

Наприклад, вздовж першого стрижня діють дві внутрішні сили — сили взаємодії між вузлами A і C . Силу, прикладену до вузла C з боку вузла A , позначимо $\overline{6-2}$, а силу, прикладену до вузла A з боку вузла C , — $\overline{2-6}$.

Продовжимо побудову діаграми Максвелла—Кремони. До побудованої діаграми зовнішніх сил (рис. 3.11) $\overline{1-2-3-4-5}$ будовуємо діаграму внутрішніх сил. Щоб отримати точку 6 від точки 2 проводимо пря-

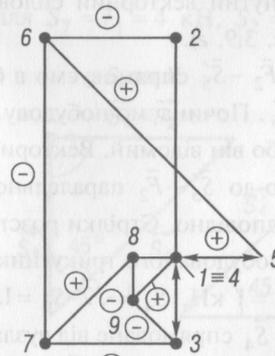


Рис. 3.11

му, паралельну стрижню AC (це сила $\overline{2-6}$), а від точки 5 — пряму, паралельну стрижню AE (сила $\overline{5-6}$). На перетині цих прямих отримуємо точку 6 . Аналогічно будуємо точку 7 : від точки 3 проводимо пряму, паралельну стрижню CD (сила $\overline{3-7}$), а від точки 6 — пряму, паралельну стрижню CE (сила $\overline{6-7}$). На перетині побудованих прямих отримуємо точку 7 . Для знаходження точки 8 проводимо прями: лінії дії сили $\overline{7-8}$ паралельно стрижню DE і сили $\overline{5-8}$ паралельно стрижню EK . Вони перетинаються в точці 8 . І, нарешті, отримуємо точку 9 на перетині прямої $\overline{8-9}$, паралельної стрижню DK , і прямої $\overline{4-9}$, паралельної стрижню BK .

Побудована діаграма (рис. 3.11) дає наочну картину стану стрижнів ферми. За її допомогою легко проаналізувати інтенсивність і характер зусиль у стрижнях та відповідно до цього зробити висновок про найнавантаженіші ділянки ферми. Це стрижні $CE(\overline{6-7})$ та $AE(\overline{5-6})$, які потребують посилення міцності.

На діаграмі розтягнуті стрижні позначають знаком плюс "+", а стиснуті — знаком мінус "-" (рис. 3.11).

З а у в а ж е н н я. Іноді дві вершини діаграми збігаються. Це означає, що стрижень, який відповідає даному позначенню, має *нульове* зусилля. Такі стрижні встановлюють у фермі лише з конструктивних міркувань. Відзначимо також, що *нульові* стрижні можна визначити без побудови діаграми. Нульовими стрижні є у трьох випадках:

1) до вузла, що з'єднує тільки два стрижні, які не знаходяться на одній прямій, не прикладено

зовнішні сили (за аксіомою про абсолютно тверде тіло) (рис. 3.12, а);

2) до вузла, що з'єднує два стрижні ферми, не розміщені на одній прямій, прикладено зовнішню силу в напрямі одного з цих стрижнів (рис. 3.12, б). У даному випадку другий стрижень — нульовий, а зусилля у першому дорівнює зовнішній силі;

3) на вузол, що з'єднує три стрижні ферми, не діють ніякі зовнішні сили, причому два з трьох стрижнів розташовані на одній прямій (рис. 3.12, в). Маємо $S_2 = 0$ (другий стрижень нульовий), а $S_1 = S_3$.

Аналітичний метод — метод Ріттера (за трьома моментами). Цей метод дуже зручний, коли потрібно визначити внутрішнє зусилля в одному, двох або трьох строго визначених стрижнях, оскільки дає можливість не обходити всю ферму аналогічно попереднім методам.

Для реалізації методу Ріттера застосовують переріз ферми. Слід пам'ятати, що кількість аналітичних умов рівноваги плоскої системи сил дорівнює трьом, тому переріз проводиться через три стрижні, які не виходять з одного вузла ферми. Оскільки зусилля в стрижнях ферми є внутрішніми силами, то, застосовуючи метод перерізів, переводимо їх у категорію зовнішніх.

Проведемо переріз $I-I$ (рис. 3.7) через стрижні 2, 6 і 7. Далі розглянемо рівновагу правої частини ферми, оскільки до неї прикладено лише дві зовнішні сили (\vec{F}_2 і \vec{R}_B), а до лівої три (\vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{F}_1). Ліву частину ферми відкидаємо і вважаємо її в'яззю відносно правої, яка залишилась (рис. 3.13).

Замінюємо дію лівої частини реакціями, спрямованими вздовж розрізаних стрижнів. Вважатимемо, що стрижні 2, 6 і 7 розтягнуті, тому їх реакції направляємо від вузлів

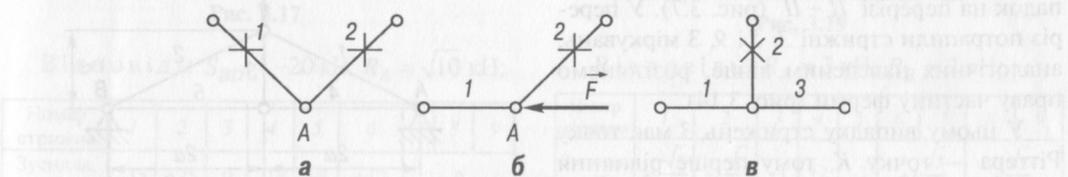


Рис. 3.12

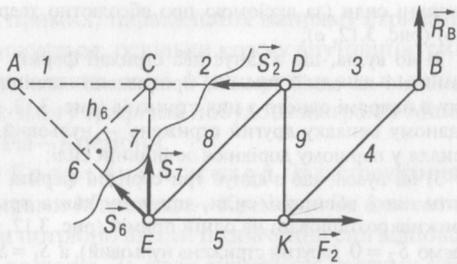


Рис. 3.13

Д та Е. Рівняння рівноваги за методом Ріттера — це три рівняння моментів відносно трьох точок Ріттера — точок перетину лінії дії попарно двох стрижнів.

Для стрижня 2 точкою Ріттера є точка перетину стрижнів 6 і 7 — точка Е. Запишемо рівняння моментів відносно цієї точки: $\sum M_{Ei} = R_B \cdot 2a + S_2 a = 0 \Rightarrow S_2 = -2R_B = -2 \text{ кН}$. Отже, стрижень 2 стиснутий.

Для стрижня 6 точкою Ріттера є точка перетину стрижнів 2 і 7, тобто точка С. Тоді

$$\sum M_{Ci} = R_B \cdot 2a + F_2 a - S_6 h_6 = 0,$$

де $h_6 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, звідки

$$S_6 = \sqrt{2}(2R_B + F_2) = 3\sqrt{2} = 4,24 \text{ кН}.$$

Отже, стрижень 6 розтягнутий.

Для стрижня 7 точкою Ріттера є точка перетину стрижнів 2 і 6, це точка А:

$$\sum M_{Ai} = R_B \cdot 3a + F_2 a + S_7 a = 0 \Rightarrow S_7 = -3R_B - F_2 = -4 \text{ кН}.$$

Отже, стрижень 7 стиснутий.

Може трапитися, що два з трьох стрижнів паралельні між собою. Розглянемо цей випадок на перерізі II-II (рис. 3.7). У переріз потрапили стрижні 3, 5 і 9. З міркувань, аналогічних наведеним вище, розглянемо праву частину ферми (рис. 3.14).

У цьому випадку стрижень 3 має точку Ріттера — точку К, тому перше рівняння рівноваги таке:

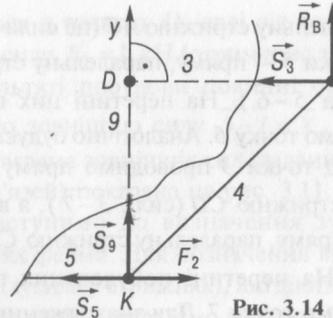


Рис. 3.14

$$\sum M_{Ki} = R_B a + S_3 a = 0,$$

звідки $S_3 = -R_B = -1 \text{ кН}$.

Стрижень 3 стиснутий. Для визначення S_5 маємо точку Ріттера — точку D, для якої

$$\sum M_{Di} = R_B a + F_2 a - S_5 a = 0,$$

тому $S_5 = R_B + F_2 = 2 \text{ кН}$.

Стрижень 5 розтягнутий. А для визначення S_9 точка Ріттера нескінченно віддалена, тому що стрижні 3 і 5 — паралельні.

Тоді складаємо рівняння проекцій сил на вісь Dy, перпендикулярну до паралельних стрижнів 3 і 5:

$$\sum F_{yi} = R_B + S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = -R_B = -1 \text{ кН}.$$

Стрижень 9 стиснутий.

§ 3.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

3.1. Визначити опорні реакції і, застосовуючи метод вирізання вузлів, розрахувати зусилля в стрижнях ферми, зображеної на рис. 3.15, при навантаженні P. Вагою стрижнів знехтувати.

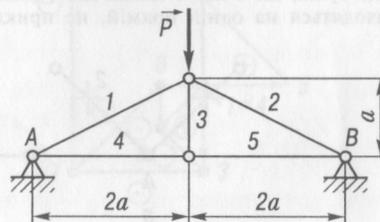


Рис. 3.15

Відповідь: $R_A = R_B = \frac{P}{2}$;

$$S_1 = S_2 = -P \frac{\sqrt{5}}{2}; S_3 = 0; S_4 = S_5 = P.$$

3.2. Визначити опорні реакції і, використовуючи метод Ріттера, обчислити зусилля в стрижнях ферми (рис. 3.16) при навантаженні P . Вагою стрижнів знехтувати.

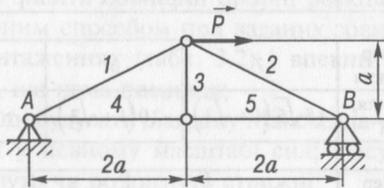


Рис. 3.16

Відповідь: $R_A = \frac{\sqrt{17}}{4} P$; $R_B = \frac{1}{4} P$;

$$S_1 = -S_2 = P \frac{\sqrt{5}}{4}; S_3 = 0; S_4 = S_5 = \frac{P}{2}.$$

3.3. Розрахувати опорні реакції і визначити методом вирізання вузлів зусилля в стрижнях ферми, зображеної разом з прикладеними до неї силами на рис. 3.17, якщо навантаження $P = 12$ кН, а довжина стрижнів 1 і 4 — 3l, 8 і 9 — 4l. Вагу стрижнів не враховувати.

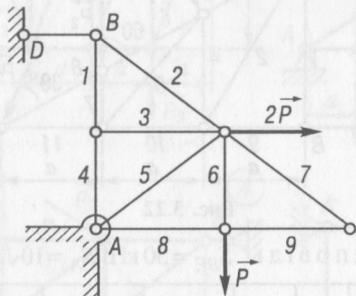


Рис. 3.17

Відповідь: $S_{BD} = -20$ кН; $R_A = \sqrt{10}$ кН;

Номер стрижня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зусилля, кН	-15	+25	0	-15	+5	+12			0

3.4. Обчислити опорні реакції, методом Ріттера визначити зусилля в стрижнях 2, 3, 4, 6, 7, 8, а методом вирізання вузлів — зусилля в стрижнях 1, 5, 9 ферми (рис. 3.18), якщо $P = 6$ кН, а довжина стрижнів 1 і 4 — 3l, 8 і 9 — 4l. Вагою стрижнів знехтувати.

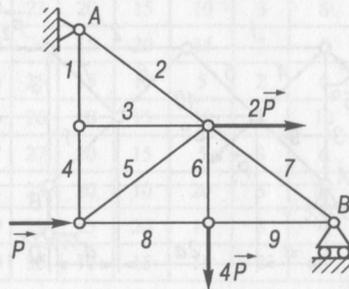


Рис. 3.18

Відповідь: $R_A = 3\sqrt{85}$ кН; $R_B = 3$ кН;

Номер стрижня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зусилля, кН	+7,5	+22,5	0	+7,5	-12,5	+24	-20		+4

3.5. Розрахувати опорні реакції, методом Ріттера визначити зусилля в стрижнях 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, методом вирізання вузлів — зусилля в стрижнях 2, 9 ферми (рис. 3.19), якщо $P_1 = 2\sqrt{3}$ кН, $P_2 = 2$ кН, $P_3 = 1$ кН. Вагу стрижнів не враховувати.

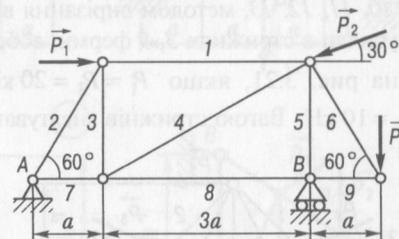


Рис. 3.19

Відповідь: $R_A = 3$ кН; $R_B = 2$ кН;

Номер стрижня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зусилля, кН	$+5\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+2\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	+2	-3	$+2\frac{\sqrt{3}}{3}$			$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3.6. Визначити опорні реакції, методом Ріттера розрахувати зусилля в стрижнях 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, методом вирізання вузлів — зусилля в стрижнях 3, 8 ферми (рис. 3.20), якщо $P_1 = P_3 = 20\sqrt{2}$ кН, $P_2 = 40$ кН. Вагою стрижнів знехтувати.

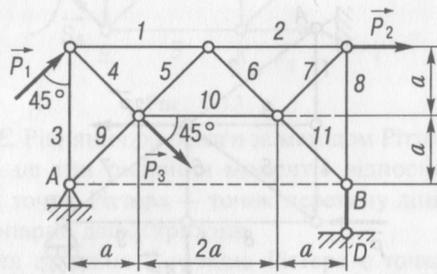


Рис. 3.20

Відповідь: $S_{BD} = 40$ кН; $R_A = 40\sqrt{5}$ кН;

Номер стрижня	1	2	3	4	5
Зусилля, кН	-80	0	-40	$+60\sqrt{2}$	$+40\sqrt{2}$

Номер стрижня	6	7	8	9	10	11
Зусилля, кН	$-40\sqrt{2}$	$+40\sqrt{2}$	-40	$+80\sqrt{2}$	+80	0

3.7. Обчислити опорні реакції, методом Ріттера визначити зусилля в стрижнях 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, методом вирізання вузлів — зусилля в стрижнях 3, 9 ферми, зображеної на рис. 3.21, якщо $P_1 = P_3 = 20$ кН, $P_2 = P_4 = 10$ кН. Вагою стрижнів знехтувати.

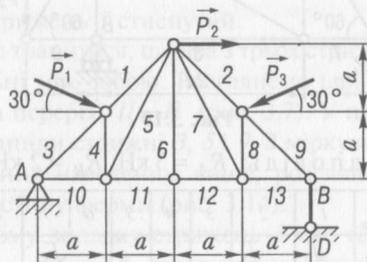


Рис. 3.21

Відповідь: $S_{BD} = 20$ кН; $R_A = 10\sqrt{2}$ кН.

Номер стрижня	1	2	3
Зусилля, кН	$-10\sqrt{2}(\sqrt{3}+2)$	$-10\sqrt{2}$	$-10\sqrt{2}$

Номер стрижня	4	5	6
Зусилля, кН	$-10\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$	$+5\sqrt{5}(1+\sqrt{3})$	+10

Номер стрижня	7	8	9
Зусилля, кН	$+5\sqrt{5}(1+\sqrt{3})$	$-10(1+\sqrt{3})$	$-20\sqrt{2}$

Номер стрижня	10	11	12	13
Зусилля, кН	+20	$+5\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)$	+20	

3.8. Визначити опорні реакції, методом Ріттера розрахувати зусилля в стрижнях 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, методом вирізання вузлів — зусилля в стрижнях 1, 8 ферми (рис. 3.22), якщо $P_1 = 30$ кН, $P_2 = 10\sqrt{3}$ кН, $P_3 = 10$ кН. Вагу стрижнів не враховувати.

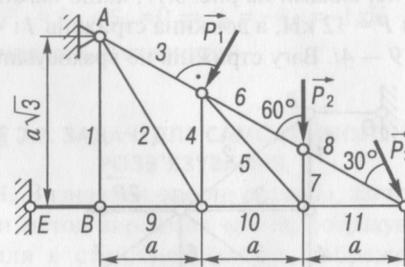


Рис. 3.22

Відповідь: $S_{BE} = 50$ кН; $R_A = 10\sqrt{43}$ кН;

Номер стрижня	1	2	3	4	5
Зусилля, кН	0	+50	$+10\sqrt{3}$	$-25\sqrt{3}$	$+5\sqrt{21}$

Номер стрижня	6	7	8	9	10	11
Зусилля, кН	$+10\sqrt{3}$	$-10\sqrt{3}$	$+10\sqrt{3}$	-50	-25	-10

§ 3.4. РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ
 “ВИЗНАЧЕННЯ ЗУСИЛЬ У СТРИЖНЯХ
 ПЛОСКОЇ ФЕРМИ”

Таблиця 3.2

Номер варіанта		$P_1, \text{Н}$	$P_2, \text{Н}$	$P_3, \text{Н}$	$a^*, \text{м}$	$h^{**}, \text{м}$	$\alpha, \text{град}$	
1	11	21	15	10	20	5	10	135
2	12	22	20	10	15	2	4	150
3	13	23	20	15	10	3	8	45
4	14	24	15	20	15	5	6	120
5	15	25	15	10	5	2	6	60
6	16	26	10	15	10	4	10	30
7	17	27	10	15	5	3	6	45
8	18	28	20	10	20	5	8	30
9	19	29	15	20	10	3	4	60
10	20	30	10	15	15	2	6	135

Послідовність виконання роботи:
 а) відповідно до варіанта завдання зобразити ферму у певному масштабі із заданим навантаженням (рис. 3.23);

б) знайти зовнішні опорні реакції аналітичним способом при заданих зовнішніх навантаженнях (табл. 3.2) і впевнитись у тому, що нема помилок;

в) побудувати діаграму Максвелла—Кремони у певному масштабі сил; з'ясувати, стиснуто чи розтягнуто стрижні;

г) знайти за методом Ріттера зусилля стрижнів в одному перерізі; порівняти ці значення із знайденими графічним способом Максвелла—Кремони і обчислити помилку останнього.

* Не використовується у розв'язуванні варіантів 1, 2, 11, 16, 22, 23 і 24.

** Не використовується у розв'язуванні варіантів 23, 27 і 29.

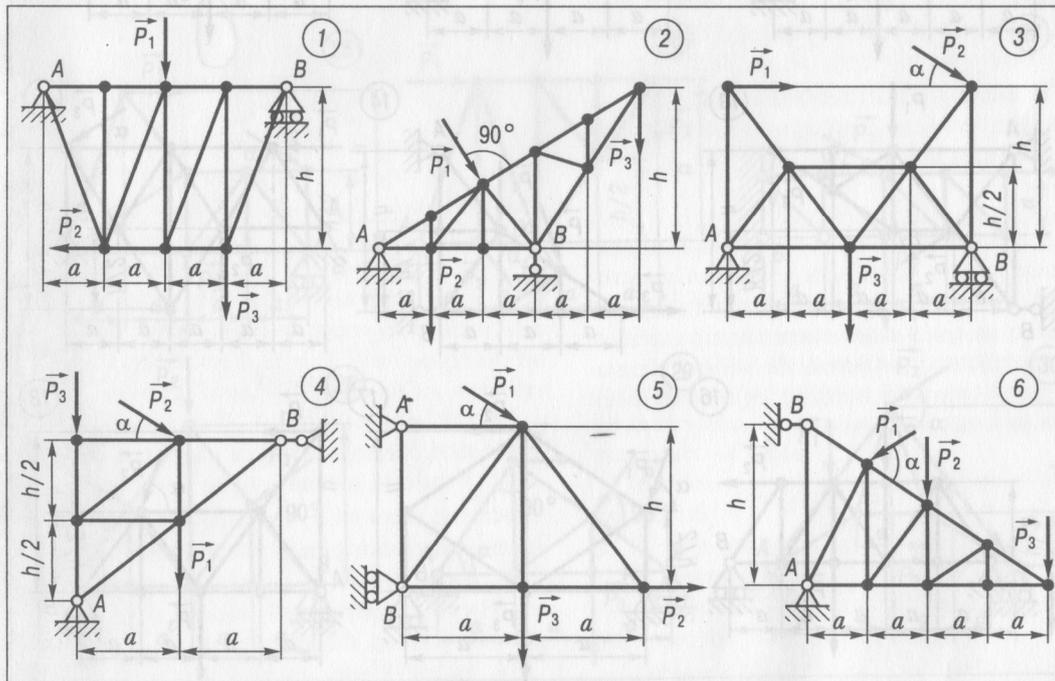


Рис. 3.23 (початок)

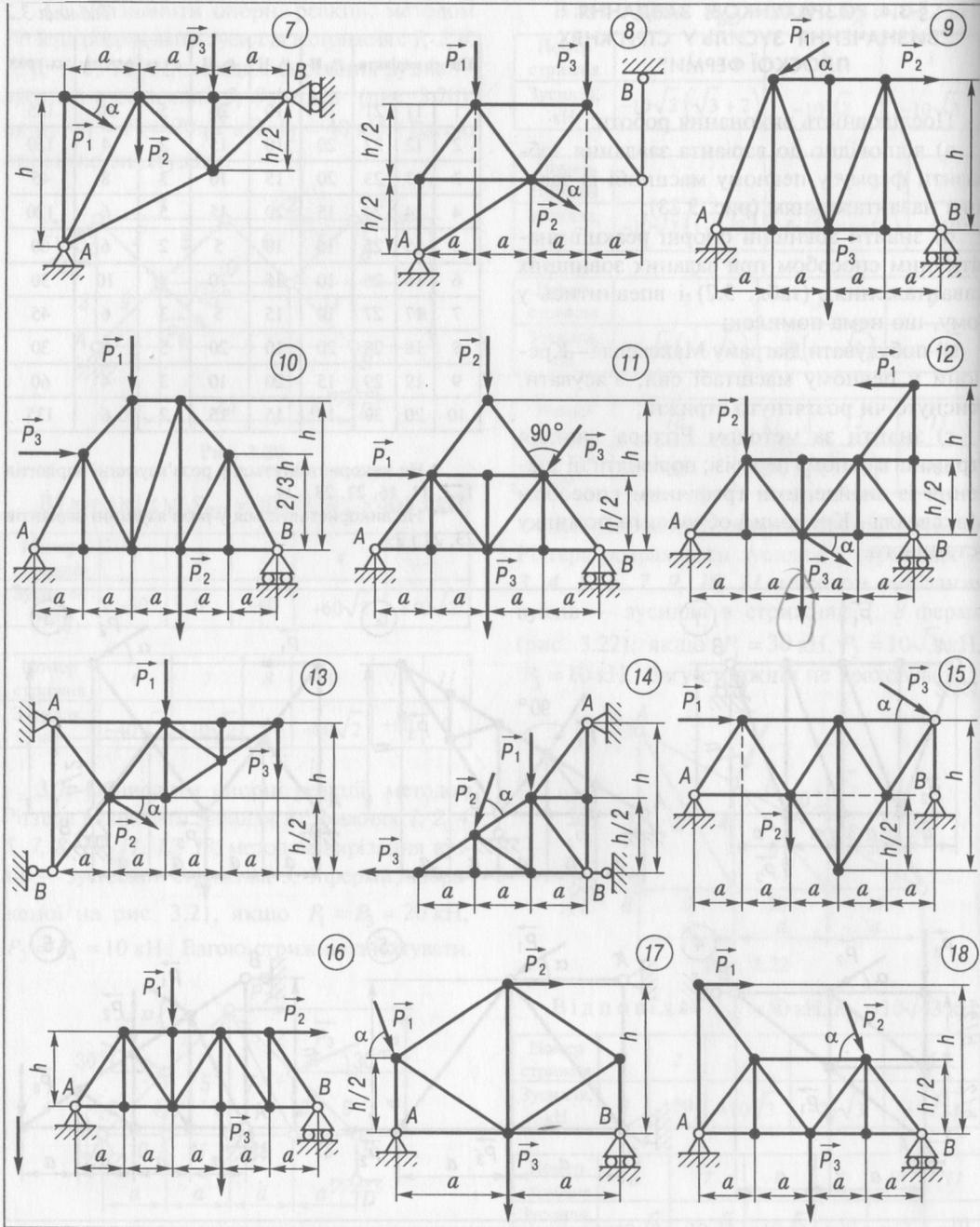


Рис. 3.23 (продовження)

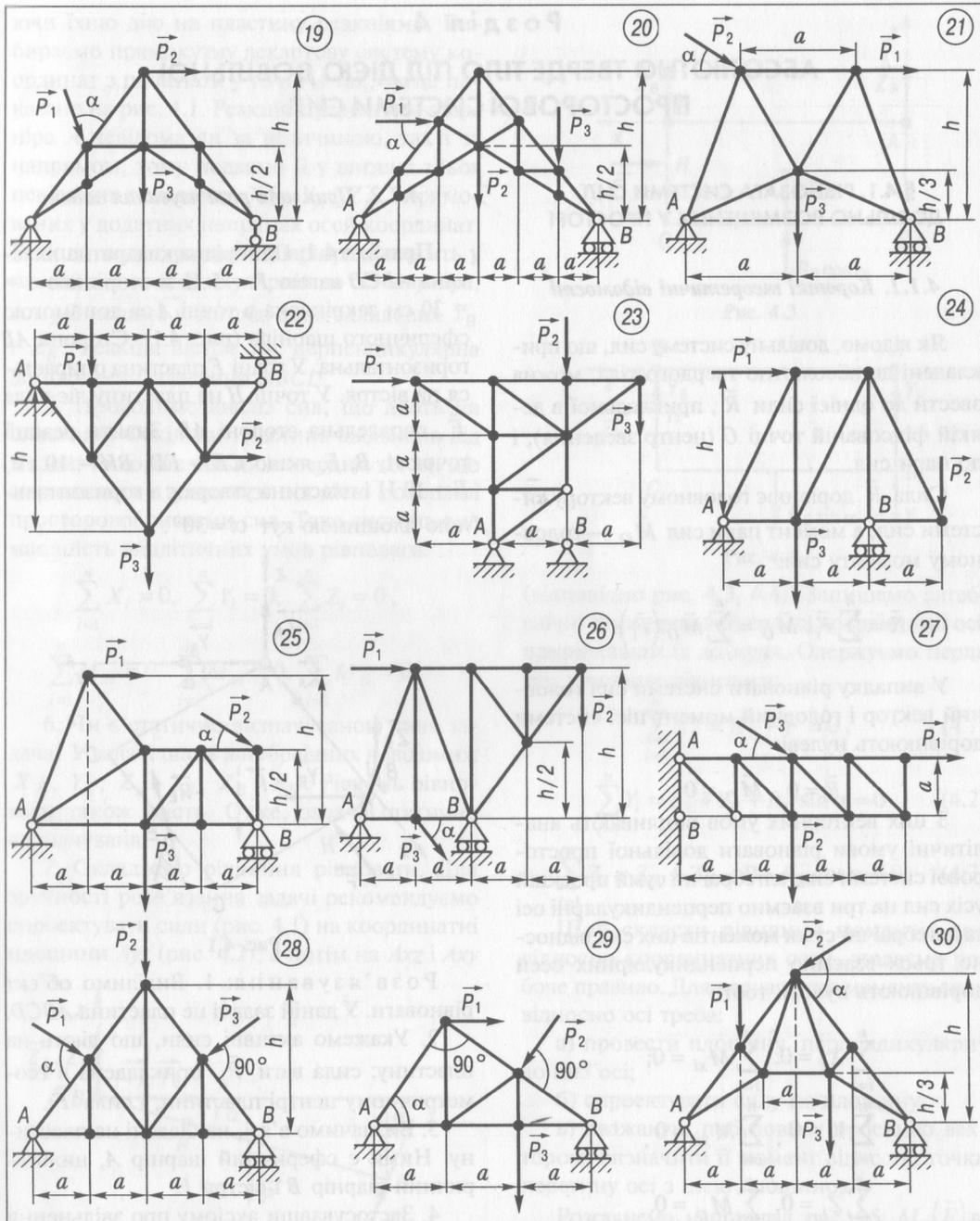


Рис. 3.23 (закінчення)

Розділ 4

АБСОЛЮТНО ТВЕРДЕ ТІЛО ПІД ДІЄЮ ДОВІЛЬНОЇ ПРОСТОРОВОЇ СИСТЕМИ СИЛ

§ 4.1. РІВНОВАГА СИСТЕМИ СИЛ, ДОВІЛЬНО РОЗМІЩЕНИХ У ПРОСТОРИ

4.1.1. Короткі теоретичні відомості

Як відомо, довільну систему сил, що прикладені до абсолютно твердого тіла, можна звести до однієї сили \vec{R} , прикладеної в деякій фіксованій точці O (центр зведення), і до пари сил.

Сила \vec{R} дорівнює головному вектору системи сил, а момент пари сил \vec{M}_O — головному моменту сил:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i).$$

У випадку рівноваги системи сил головний вектор і головний момент цієї системи дорівнюють нулеві:

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_O = 0.$$

З цих векторних умов випливають аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил: алгебраїчні суми проєкцій усіх сил на три взаємно перпендикулярні осі та алгебраїчні суми моментів цих сил відносно трьох взаємно перпендикулярних осей дорівнюють нулеві, тобто

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i &= 0, & \sum_{i=1}^n M_{xi} &= 0; \\ \sum_{i=1}^n Y_i &= 0, & \sum_{i=1}^n M_{yi} &= 0; \\ \sum_{i=1}^n Z_i &= 0, & \sum_{i=1}^n M_{zi} &= 0. \end{aligned}$$

4.1.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 4.1. Однорідна квадратна пластина $ABCD$ вагою $P = 5 \text{ Н}$ зі стороною $a = 30 \text{ см}$ закріплена в точці A за допомогою сферичного шарніра (рис. 4.1). Сторона AB горизонтальна. У точці E пластина опирається на вістря. У точці H на пластину діє сила \vec{F} , паралельна стороні AB . Знайти реакції точок A , B , E , якщо $CE = ED$, $BH = 10 \text{ см}$, $F = 10 \text{ Н}$ і пластина утворює з горизонтальною площиною кут $\alpha = 30^\circ$.

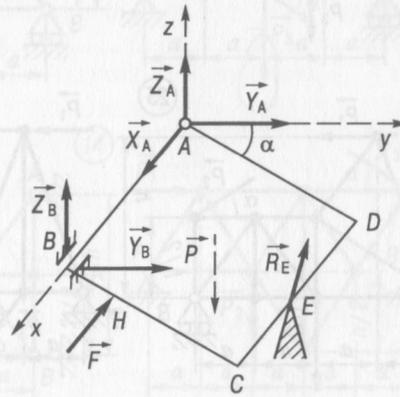


Рис. 4.1

Розв'язування: 1. Виділимо об'єкт рівноваги. У даній задачі це пластина $ABCD$.

2. Укажемо активні сили, що діють на пластину: сила ваги \vec{P} , прикладена в геометричному центрі пластини, і сила \vec{F} .

3. Визначимо в'язі, накладені на пластину. Ними є сферичний шарнір A , циліндричний шарнір B і вістря E .

4. Застосувавши аксіому про звільнення від в'язей, умовно в'язі відкидаємо, заміню-

ючи їхню дію на пластину реакціями. Вибираємо прямокутну декартову систему координат з початком у точці A так, як це показано на рис. 4.1. Реакція сферичного шарніра A невідома як за величиною, так і за напрямом, тому подаємо її у вигляді трьох невідомих складових X_A, Y_A, Z_A , спрямованих у додатних напрямках осей координат. Реакція циліндричного шарніра B лежить у площині, перпендикулярній до осі шарніра, тому її подамо у вигляді двох складових Y_B і Z_B . Реакція вістря \vec{R}_E перпендикулярна до площини пластини $ABCD$.

5. Проводимо аналіз сил, що діють на пластину. Оскільки пластина звільнена від в'язей, то вона є вільним твердим тілом, що знаходиться в рівновазі під дією довільної просторової системи сил. Така система сил має шість аналітичних умов рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Z_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_{xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{yi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{zi} = 0.$$

6. Чи є статично визначуваною дана задача? У задачі шість алгебраїчних невідомих: $X_A, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B, R_E$. Рівнянь рівноваги також шість. Отже, задача статично визначувана.

7. Складаємо рівняння рівноваги. Для зручності розв'язання задачі рекомендуємо спроектувати сили (рис. 4.1) на координатні площини Ayz (рис. 4.2), а потім на Axz і Axy

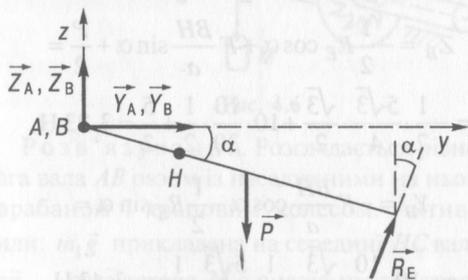


Рис. 4.2

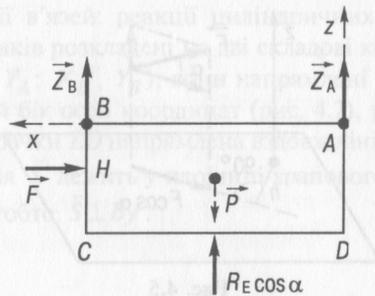


Рис. 4.3

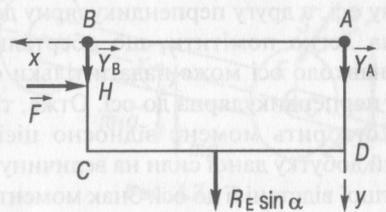


Рис. 4.4

(відповідно рис. 4.3, 4.4). Запишемо алгебраїчні суми проєкцій сил на координатні осі, прирівнявши їх до нуля. Одержуємо перші три рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n X_i = X_A - F = 0, \quad (4.1)$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = Y_A + Y_B + R_E \sin \alpha = 0, \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^n Z_i = Z_A + Z_B - P + R_E \cos \alpha = 0. \quad (4.3)$$

Щоб скласти рівняння моментів сил відносно координатних осей, згадаємо робоче правило. Для визначення моменту сили відносно осі треба:

- провести площину, перпендикулярну до цієї осі;
- спроектувати силу на площину;
- вважаючи побудовану проєкцію вектором, визначити її момент відносно точки перетину осі з цією площиною.

Розглянемо, наприклад, рис. 4.5: $M_z(\vec{F}) = -F \cos \alpha \cdot h$. Пояснити це можна так: якщо

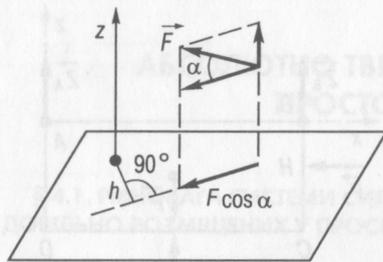


Рис. 4.5

розкласти силу на дві складові — одну паралельну осі, а другу перпендикулярну до неї, можна легко помітити, що обертового руху навколо осі може надати тільки складова, перпендикулярна до осі. Отже, тільки вона створить момент відносно цієї осі, рівний добутку даної сили на величину найкоротшої відстані її до осі. Знак моменту визначається напрямом наданого обертання: якщо з додатного напрямку осі Az обертання, спричинене силою, видно таким, що відбувається проти руху годинникової стрілки, то знак моменту додатний, якщо за годинниковою стрілкою, — то від'ємний. Якщо сила і вісь лежать в одній площині (паралельні чи перетинаються), момент сили відносно осі дорівнює нулеві.

Складемо рівняння моментів сил відносно осей координат. Відносно осі Ax створюють момент тільки сили \vec{P} і \vec{R}_E , тому що \vec{F} паралельна осі, а реакції \vec{R}_A , \vec{R}_B перетинають вісь (див. рис. 4.2). Скористаємося робочим правилом: проведемо через середину AB площину, перпендикулярну до осі Ax . Сили \vec{P} , \vec{R}_E виявляються такими, що лежать у цій площині. При цьому плече сили \vec{R}_E дорівнює довжині a сторони пластини, а сили $\vec{P} - \frac{a}{2} \cos \alpha$. Маємо рівняння

$$\sum_{i=1}^n M_{xi} = R_E a - P \frac{a}{2} \cos \alpha = 0. \quad (4.4)$$

Складемо рівняння моментів сил відносно осі Ay . Щоб визначити момент сили \vec{R}_E відносно осі Ay , спроектуємо силу на площину, перпендикулярну до цієї осі, $R_{Ey} = R_E \cos \alpha$ (див. рис. 4.3), і помножимо її на найкоротшу відстань до осі $\frac{a}{2}$:

$$M_y(R_E) = -R_E \frac{a}{2} \cos \alpha.$$

Сила \vec{F} перпендикулярна до осі Ay , а плече її дорівнює $BH \cdot \sin \alpha$. Момент сили \vec{P} дорівнює $P \frac{a}{2}$, а $M_y(Z_B) = -Z_B a$. Моменти сил \vec{R}_A , \vec{R}_B відносно осі Ay дорівнюють нулеві. Отже, маємо

$$\sum_{i=1}^n M_{yi} = -R_E \frac{a}{2} \cos \alpha + F \cdot BH \cdot \sin \alpha + P \frac{a}{2} - Z_B a = 0. \quad (4.5)$$

Спроектувавши всі сили на площину Axy (рис. 4.4), складемо останнє рівняння:

$$\sum_{i=1}^n M_{zi} = Y_B a + F \cdot BH \cdot \cos \alpha + R_E \frac{a}{2} \sin \alpha = 0. \quad (4.6)$$

З шести складених рівнянь (4.1), (4.4), (4.5), (4.6), (4.2) і (4.3) знайдемо шість невідомих:

$$\begin{aligned} X_A &= F = 10 \text{ Н}, \\ R_E &= \frac{1}{2} P \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 2,17 \text{ Н}, \\ Z_B &= -\frac{1}{2} R_E \cos \alpha + F \frac{BH}{a} \sin \alpha + \frac{P}{2} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 10 \cdot \frac{10}{30} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \approx 3,23 \text{ Н}, \\ Y_B &= -F \frac{BH}{a} \cos \alpha - \frac{1}{2} R_E \sin \alpha = \\ &= -10 \cdot \frac{10}{30} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} \approx -3,43 \text{ Н}, \end{aligned}$$

$$Y_A = -Y_B - R_E \sin \alpha = 3,43 - 2,17 \cdot \frac{1}{2} \approx 2,35 \text{ Н},$$

$$Z_A = -Z_B + P - R_E \cos \alpha = -3,23 +$$

$$+ 5 - \frac{5\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,11 \text{ Н}.$$

Відповідь: $X_A = 10 \text{ Н}$, $Y_A = 2,35 \text{ Н}$,
 $Z_A = -0,11 \text{ Н}$, $Y_B = -3,43 \text{ Н}$, $Z_B = 3,23 \text{ Н}$,
 $R_E = 2,17 \text{ Н}$.

Від'ємні знаки показують, що відповідні складові сил напрямлені протилежно до вказаних на рис. 4.1.

Приклад 4.2. Храпове колесо 1 і барабан 2 лебідки жорстко насаджені на вал AB завдовжки 0,8 м. Тягар M масою $m = 300 \text{ кг}$ підвішено на тросі, який намотано на барабан.

Визначити опорні реакції підшипників A і B, а також зусилля \vec{S} у стопорній собачці ED, яка нахилена до горизонту під кутом $\alpha = 60^\circ$. Радіус барабана 2 дорівнює 0,1 м, радіус храпового колеса 1 дорівнює 0,2 м. Маса барабана разом із валом AB $m_1 = 200 \text{ кг}$, $CA = BH = 0,1 \text{ м}$, $HK = KC$, EC паралельна Bz (рис. 4.6).

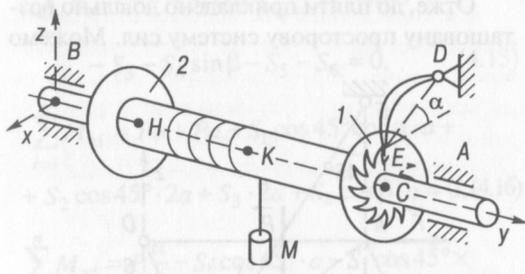


Рис. 4.6

Розв'язування. Розглядається рівновага вала AB разом із насадженими на нього барабаном і храповим колесом. Активні сили: $m_1 \vec{g}$ прикладена на середині HC вала, $m\vec{g}$ — вага тягаря M є силою натягу троса.

Реакції в'язей: реакції циліндричних підшипників розкладені на дві складові кожна ($X_A, Y_A; X_B, Y_B$), вони напрямлені у додатний бік осей координат (рис. 4.7), реакція собачки ED напрямлена вздовж лінії ED. Реакція \vec{S} лежить у площині храпового колеса, тобто $\vec{S} \perp By$.

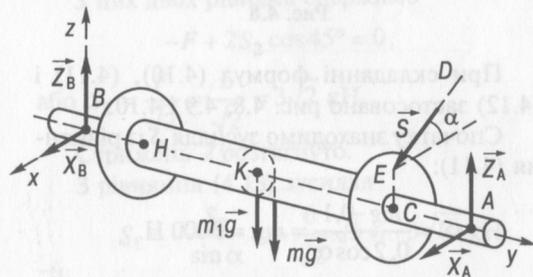


Рис. 4.7

Маємо п'ять алгебраїчних невідомих. Для просторової довільної системи сил можна скласти шість рівнянь рівноваги. Задача є статично означуваною.

Запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = X_A + X_B + S \cos \alpha = 0, \quad (4.7)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{yi} = 0, \quad (4.8)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{zi} = Z_A + Z_B - m_1 g - mg - S \sin \alpha = 0, \quad (4.9)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{xi} = -(m_1 + m)g \cdot BK -$$

$$- S \sin \alpha \cdot BC + Z_A \cdot AB = 0, \quad (4.10)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{yi} = S \cos \alpha \cdot CE - mg \cdot 0,1 = 0, \quad (4.11)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{zi} = -S \cos \alpha \cdot BC - X_A \cdot AB = 0. \quad (4.12)$$

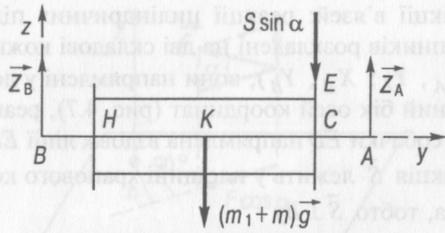


Рис. 4.8

При складанні формул (4.10), (4.11) і (4.12) застосовано рис. 4.8, 4.9 і 4.10.

Спочатку знаходимо зусилля S із рівняння (4.11):

$$S = \frac{mg \cdot 0,1}{0,2 \cos \alpha} = mg \approx 3000 \text{ Н.}$$

З рівняння (4.12) маємо

$$X_A = -\frac{S \cos \alpha \cdot BC}{AB} = -\frac{3000 \cdot 0,5 \cdot 0,7}{0,8} \approx -1312,5 \text{ Н,}$$

з рівняння (4.10)

$$Z_A = \frac{1}{AB} (S \sin \alpha \cdot BC + (m_1 + m)g \cdot BK) \approx 4773 \text{ Н.}$$

Далі $Z_B \approx 2825 \text{ Н}$, $X_B \approx -187,5 \text{ Н}$.

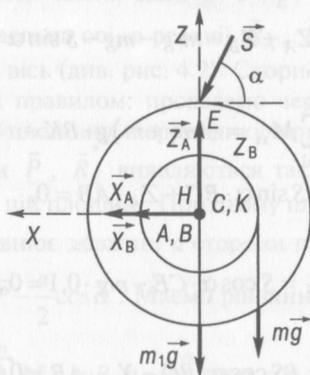


Рис. 4.9

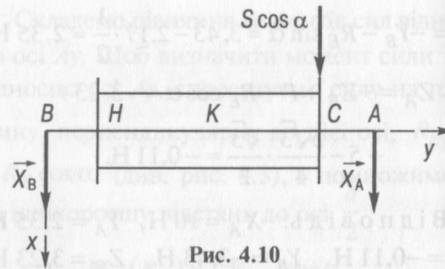


Рис. 4.10

Приклад 4.3. Прямокутна плита $ABCD$ вагою P утримується в горизонтальному положенні за допомогою шістьох стрижнів 1, 2, 3, 4, 5, 6 і знаходиться в рівновазі. На плиту діє горизонтальна сила \vec{F} . Визначити реакції стрижнів, якщо $P = 2 \text{ кН}$, $F = 6 \text{ кН}$, $a = 1 \text{ м}$, стрижні невагомі, $AB = DC = a$, $OD = a$, $BC = AD = 2a$ (рис. 4.11).

Розв'язування. Розглянемо рівновагу плити $ABCD$. На неї діють активні сили \vec{P} і \vec{F} . Звільнимось від в'язей, тобто подумки відкинемо стрижні, замінивши їх дію на плиту реакціями, кожна з яких напрямлена вздовж стрижня, оскільки стрижні ідеальні. Вважаємо всі стрижні розтягнутими, тобто всі реакції напрямлені в бік відкинутих стрижнів (рис. 4.12).

Отже, до плити прикладено довільно розташовану просторову систему сил. Можемо

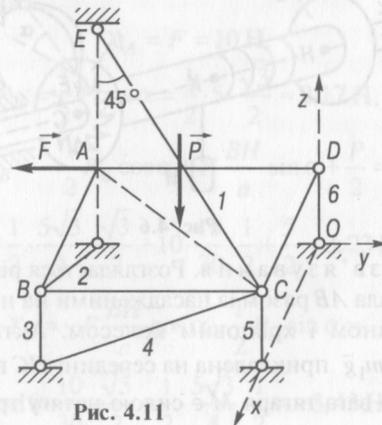


Рис. 4.11

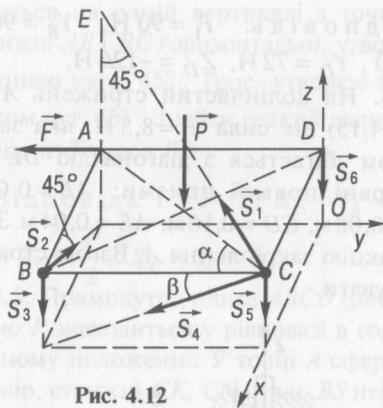


Рис. 4.12

скласти в цьому випадку шість рівнянь рівноваги; в задачі шість невідомих, тому задача статично визначувана. Система координат вказана на рис. 4.11 і 4.12, для зручності введено два кути α і β . Запишемо

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = -S_2 \cos 45^\circ - S_1 \cos 45^\circ \sin \alpha = 0, \quad (4.13)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{yi} = -S_1 \cos 45^\circ \cos \alpha - S_4 \cos \beta - F = 0, \quad (4.14)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{zi} = -P + S_1 \cos 45^\circ - S_2 \cos 45^\circ - S_3 - S_4 \sin \beta - S_5 - S_6 = 0, \quad (4.15)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{xi} = Fa + Pa + S_1 \cos 45^\circ \cos \alpha \cdot a + S_2 \cos 45^\circ \cdot 2a + S_3 \cdot 2a + S_4 \cos \beta \cdot a = 0, \quad (4.16)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{yi} = P \frac{a}{2} - S_1 \cos 45^\circ \cdot a - S_1 \cos 45^\circ \times \sin \alpha \cdot a + S_3 \cdot a + S_4 \sin \beta \cdot a + S_5 \cdot a = 0, \quad (4.17)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{zi} = -S_1 \cos 45^\circ \cos \alpha \cdot a - S_2 \cos 45^\circ \cdot 2a - S_4 \cdot \cos \beta \cdot a = 0. \quad (4.18)$$

Згідно з рис. 4.12 $\alpha = \beta$, $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

З рівнянь (4.14) і (4.18) маємо:

$$-S_1 \cos 45^\circ \cos \alpha - S_4 \cos \beta - F = 0,$$

$$-S_1 \cos 45^\circ \cos \alpha - S_4 \cos \beta - 2S_2 \cos 45^\circ = 0.$$

З цих двох рівнянь одержимо

$$-F + 2S_2 \cos 45^\circ = 0,$$

$$\text{або } S_2 = \frac{F}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \text{ кН.}$$

Стрижень 2 розтягнуто.

З рівняння (4.13) зусилля

$$S_1 = -\frac{S_2}{\sin \alpha} = -\frac{6}{\sqrt{2}} \sqrt{5} = -3\sqrt{10} \text{ кН.}$$

Стрижень 1 стиснуто, оскільки $S_1 < 0$.

З рівняння (4.14) отримаємо

$$S_4 = -\frac{1}{\cos \beta} (F + S_1 \cos 45^\circ \cos \alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{2} \left(6 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = 0,$$

з рівняння (4.16) –

$$S_3 = -\frac{1}{2} (F + P + S_1 \cos 45^\circ \cos \alpha + 2S_2 \cos 45^\circ) = -\frac{8}{2} = -4 \text{ кН.}$$

Стрижень 3 стиснуто.

З рівняння (4.17) знаходимо

$$S_5 = -S_3 - \frac{P}{2} + S_1 \cos 45^\circ (1 + \sin \alpha) = -3\sqrt{5} \text{ кН.}$$

Стрижень 5 стиснуто.

З рівняння (4.15) зусилля

$$S_6 = -P + S_1 \cos 45^\circ - S_2 \cos 45^\circ - S_3 - S_5 = -1 \text{ кН.}$$

Стрижень 6 стиснуто.

4.1.3. Задачі для самостійного розв'язування

4.1. Однорідна кришка ящика вагою 100 Н утримується в рівновазі за допомогою вертикального мотузка EF (рис. 4.13). Знайти реакції завісів A і B , якщо $CE = 0,2$ м, $DE = 0,8$ м.

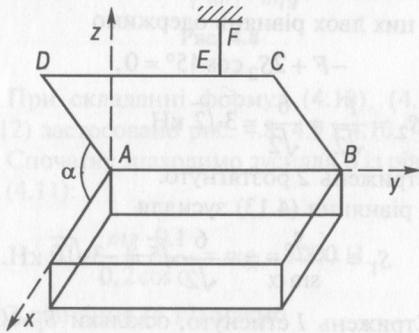


Рис. 4.13

Відповідь: $R_A = 40$ Н, $R_B = 10$ Н.

4.2. Мотузок сходить зі шківу C по дотичній, що утворює з вертикаллю кут $\alpha = \arcsin 0,6$ (рис. 4.14). Радіус шківу $R = 0,2$ м, $AB = 0,3$ м, $CD = 0,5$ м, $AE = 0,6$ м, $BC = 0,4$ м. Тертя знехтувати. Знайти вагу тягара P_1 і реакції підшипників B і D , якщо вага тягара $P_2 = 270$ Н. Система знаходиться в рівновазі.

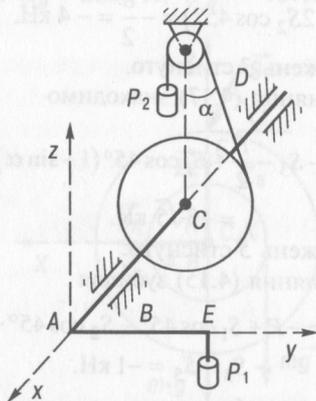


Рис. 4.14

Відповідь: $P_1 = 90$ Н, $Y_B = 90$ Н, $Z_B = 0$, $Y_D = 72$ Н, $Z_D = -126$ Н.

4.3. На колінчастий стрижень $ABCD$ (рис. 4.15) діє сила $P = 8,5$ Н, яка за напрямом збігається з діагоналлю DE бічної грані прямої призми: $AB = 0,09$ м, $BC = 0,08$ м, $CD = 0,16$ м, $AE = 0,04$ м. Знайти реакцію закріплення A . Вагою стрижня знехтувати.

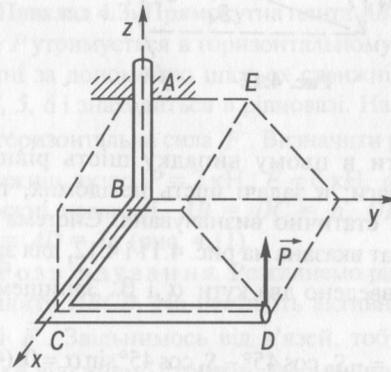


Рис. 4.15

Відповідь: $X_A = 4$ Н, $Y_A = 6$ Н, $Z_A = -4,5$ Н, $M_{Ax} = -0,18$ Н · м, $M_{Ay} = 0$, $M_{Az} = -0,16$ Н · м.

4.4. Стижні AB і BC однакової довжини і однакової ваги P (рис. 4.16) з'єднані шарніром в точці B під прямим кутом і знаходяться в рівновазі. Стижні прикріплені до стіни в точках A і C також шарнірами. Трос BD прикріплено до стіни в точці D , яка зна-

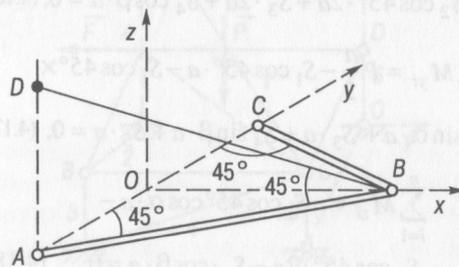


Рис. 4.16

ходить на одній вертикалі з точкою A . Стрижні AB і BC горизонтальні, утворюють із стіною кути 45° . Трос утворює з горизонтом кут 45° . Знайти реакції шарнірів A , C і натяг T троса BD .

Відповідь: $T = P\sqrt{2}$, $X_A = Y_A = \frac{P\sqrt{2}}{2}$,
 $Z_A = Z_C = \frac{P}{2}$, $X_C = Y_C = 0$.

4.5. Прямокутна плита $ABCD$ (рис. 4.17) вагою P знаходиться у рівновазі в горизонтальному положенні. У точці A сферичний шарнір, стрижні CK , CN і трос BS невагомі. Знайти реакцію R_A шарніра A , зусилля T_1 , T_2 у стрижнях CN і CK , натяг T_3 троса. У точці B підвішено тягар M вагою Q . $CD = 3a$, $CB = 4a$, $CE = 5a$. Систему координат зображено на рис. 4.17.

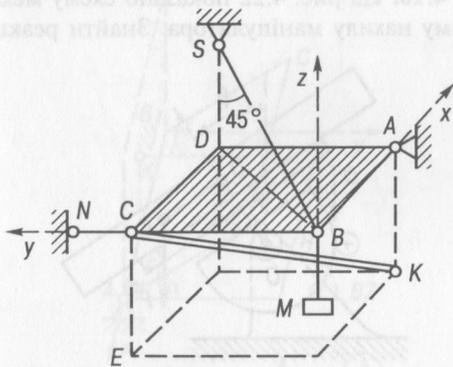


Рис. 4.17

Відповідь: $T_1 = -\frac{4}{5}Q$, $T_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}P$,
 $T_3 = Q\sqrt{2}$, $X_A = -\frac{3}{5}Q + \frac{3}{10}P$, $Y_A = -\frac{2}{5}P$,
 $Z_A = \frac{P}{2}$. Стрижні CN і CK стиснуті.

4.6. Колінчастий вал може обертатись навколо осі Ax у підшипниках A і B (рис. 4.18). На коліно $DEGF$ діє сила $P = 3000$ Н, яка утворює з вертикаллю кут $\alpha = 10^\circ$. Сила розташована в площині, перпендикулярній до осі Ax . Знайти момент M пари сил, яку по-

трібно прикласти до вала, щоб він знаходився у рівновазі, а також реакції підшипників A і B , якщо $\varphi = 60^\circ$, $DE = 0,2$ м, $AD = DF = FB = 0,4$ м, $EC = CG$.

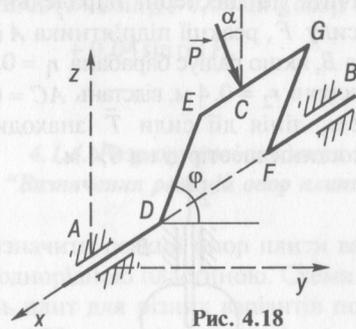


Рис. 4.18

Відповідь: $M = 386$ Н·м,
 $Y_A = Y_B = -261$ Н, $Z_A = Z_B = 1480$ Н.

4.7. Однорідна пластина вагою 900 Н (рис. 4.19) у формі рівностороннього трикутника закріплена за допомогою петель A і B на горизонтальній осі, а точкою C опирається на гладеньку вертикальну стіну, розміщену в площині Oxz . Пластина утворює з горизонтом кут 30° . Знайти реакції петель A і B та стіни в точці C . Центр ваги пластини знаходиться в точці, де перетинаються медіани трикутника.

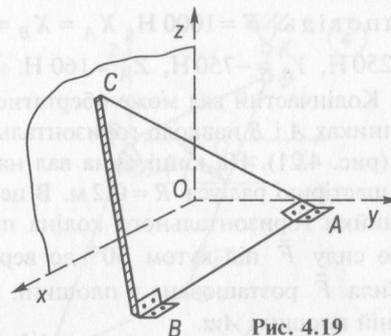


Рис. 4.19

Відповідь: $N_C = 520$ Н, $Y_A = Y_B = -200$ Н, $Z_A = Z_B = 450$ Н.

4.8. На барабан вагою 160 Н намотано явірний ланцюг, натяг якого $T = 2000$ Н (рис. 4.20). Система зрівноважена силою \vec{F} , яка прикладена до шестірні C і напрямлена по дотичній до шестерні паралельно \vec{T} . Знайти силу \vec{F} , реакції під'ятника A і підшипника B , якщо радіус барабана $r_1 = 0,2$ м, радіус шестірні $r_2 = 0,4$ м, відстань $AC = 0,1$ м, $AB = 1,2$ м, лінія дії сили \vec{T} знаходиться вище площини шестірні на $0,4$ м.

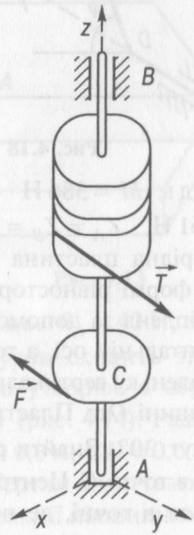


Рис. 4.20

Відповідь: $F = 1000$ Н, $X_A = X_B = 0$, $Y_A = -250$ Н, $Y_B = -750$ Н, $Z_A = 160$ Н.

4.9. Колінчастий вал може обертатись у підшипниках A і B навколо горизонтальної осі Ax (рис. 4.21). На кінці C на вал насаджено шестірню радіуса $R = 0,2$ м. В центрі D шийки горизонтального коліна прикладено силу \vec{F} під кутом 30° до вертикалі. Сила \vec{F} розташована в площині, паралельній площині Ayz .

Знайти силу Q , яка паралельна Ay і діє на шестірню, а також реакції підшипників, якщо $F = 2000$ Н, $ED = 0,15$ м, $a = 0,15$ м, $b = 0,2$ м, $c = 0,25$ м.

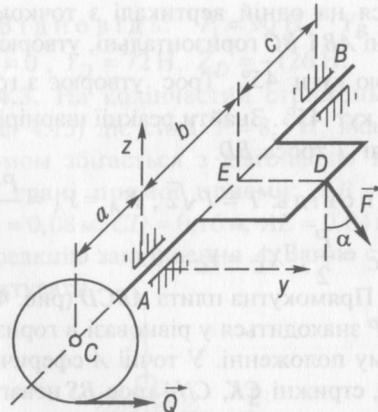
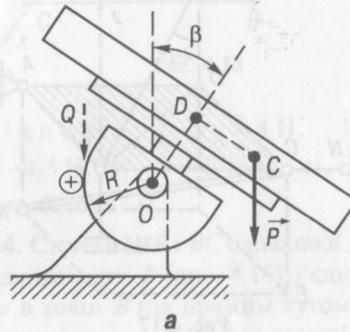


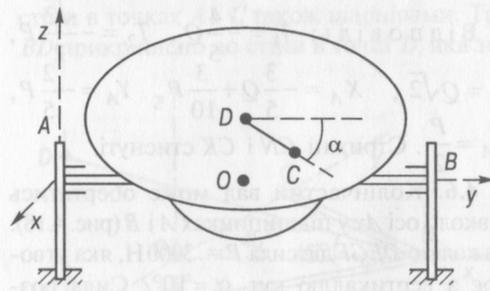
Рис. 4.21

Відповідь: $Q = 1298$ Н, $Y_A = -2290$ Н, $Z_A = 962$ Н, $Y_B = -8$ Н, $Z_B = 768$ Н.

4.10. На рис. 4.22 показано схему механізму нахилу маніпулятора. Знайти реакції



а



б

Рис. 4.22

опорних цапф* A і B обертальної траверси**, а також потрібне для рівноваги системи колове зусилля Q ведучої шестірні, яка розміщена на одному горизонтальному рівні з цапфами у вертикальній площині і ділить відстань навпіл. Вага виробу P . Реакції опор A і B та зусилля Q визначити як функції кутів α і β , якщо $P = 5000$ Н, $AB = 1$ м, $OD = 0,6$ м, $DC = l = 0,02$ м, $R = 0,3$ м.

Відповідь: $X_A = X_B = 0$,

$$Q = \frac{10^4}{3} (30 \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \text{ Н,}$$

* Цапфа — опорна частина осі або вала. Цапфу, розміщену на кінці вала, називають шипом, а посередині — шийкою.

** Траверса — горизонтальна балка, яка опирається на вертикальні стовпи.

$$Z_A = 2500(1 + 2 \sin \beta + 0,06 \sin \alpha \cos \beta - 0,04 \sin \alpha) \text{ Н,}$$

$$Z_B = 2500(1 + 2 \sin \beta + 0,06 \sin \alpha \cos \beta + 0,04 \sin \alpha) \text{ Н.}$$

4.1.4. Розрахункові завдання “Визначення реакцій опор плит”

Визначити реакції опор плит вагою P , яка є однорідною пластиною. Схеми навантажень плит для різних варіантів показано на рис. 4.23, а розміри та зовнішні навантаження вказано у табл. 4.1.

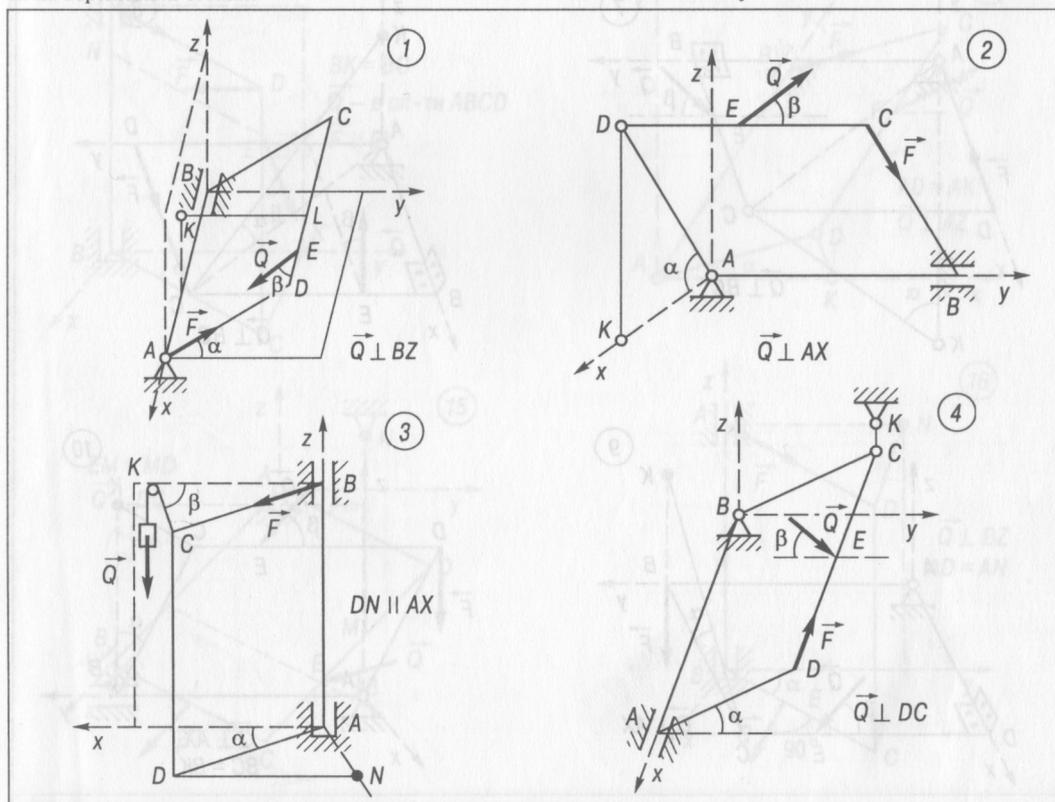


Рис. 4.23 (початок)

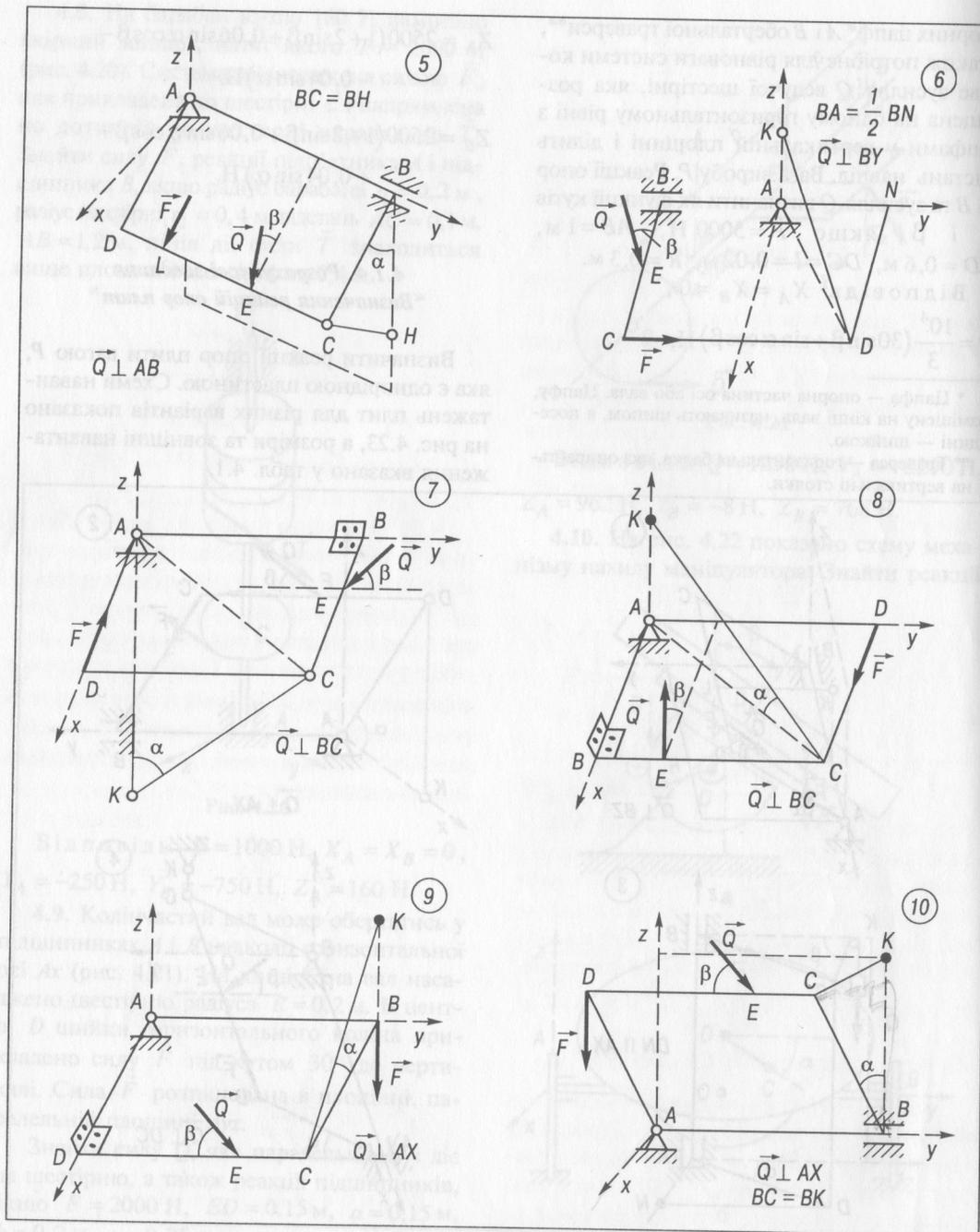


Рис. 4.23 (продолжения)

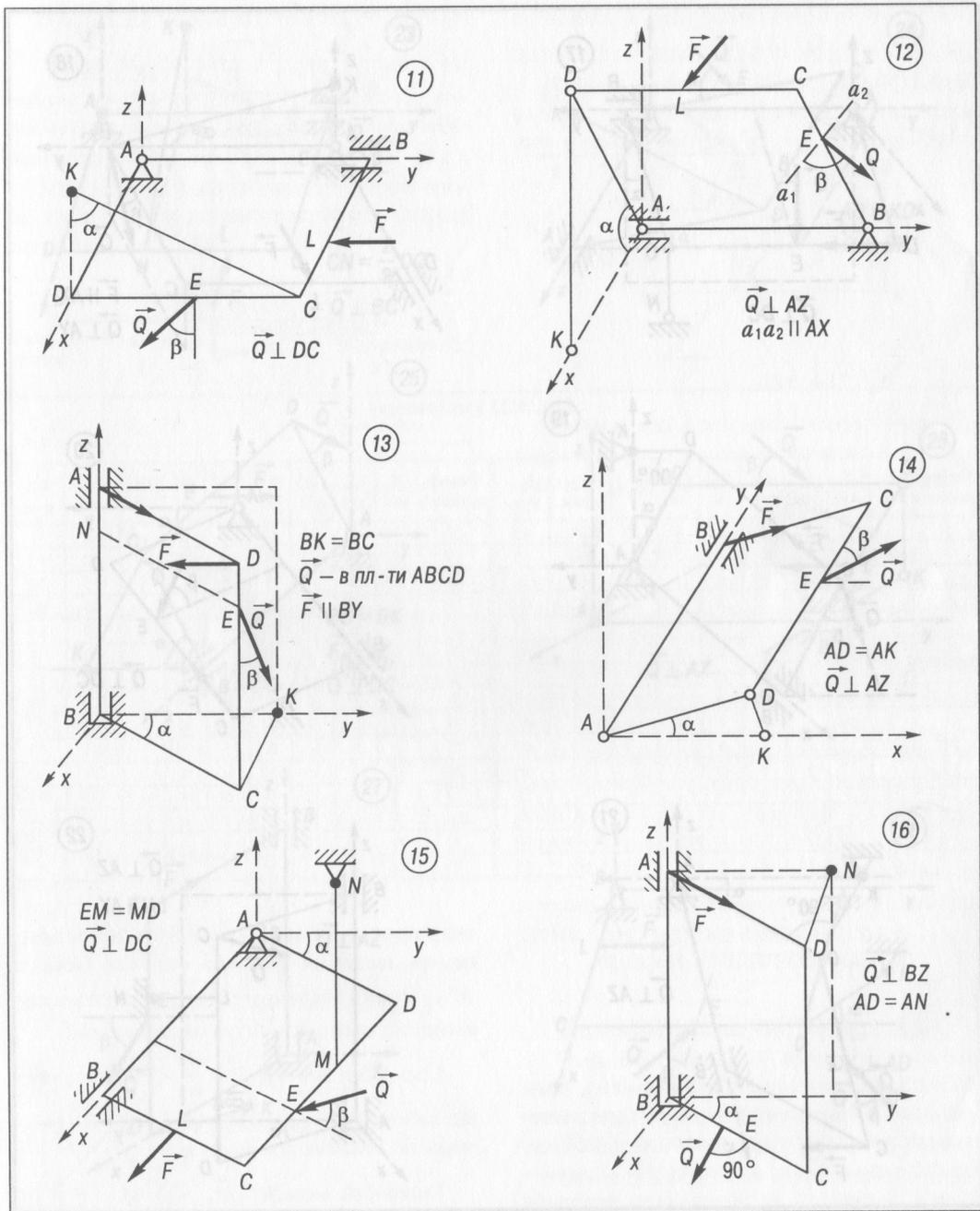


Рис. 4.23 (продовження)

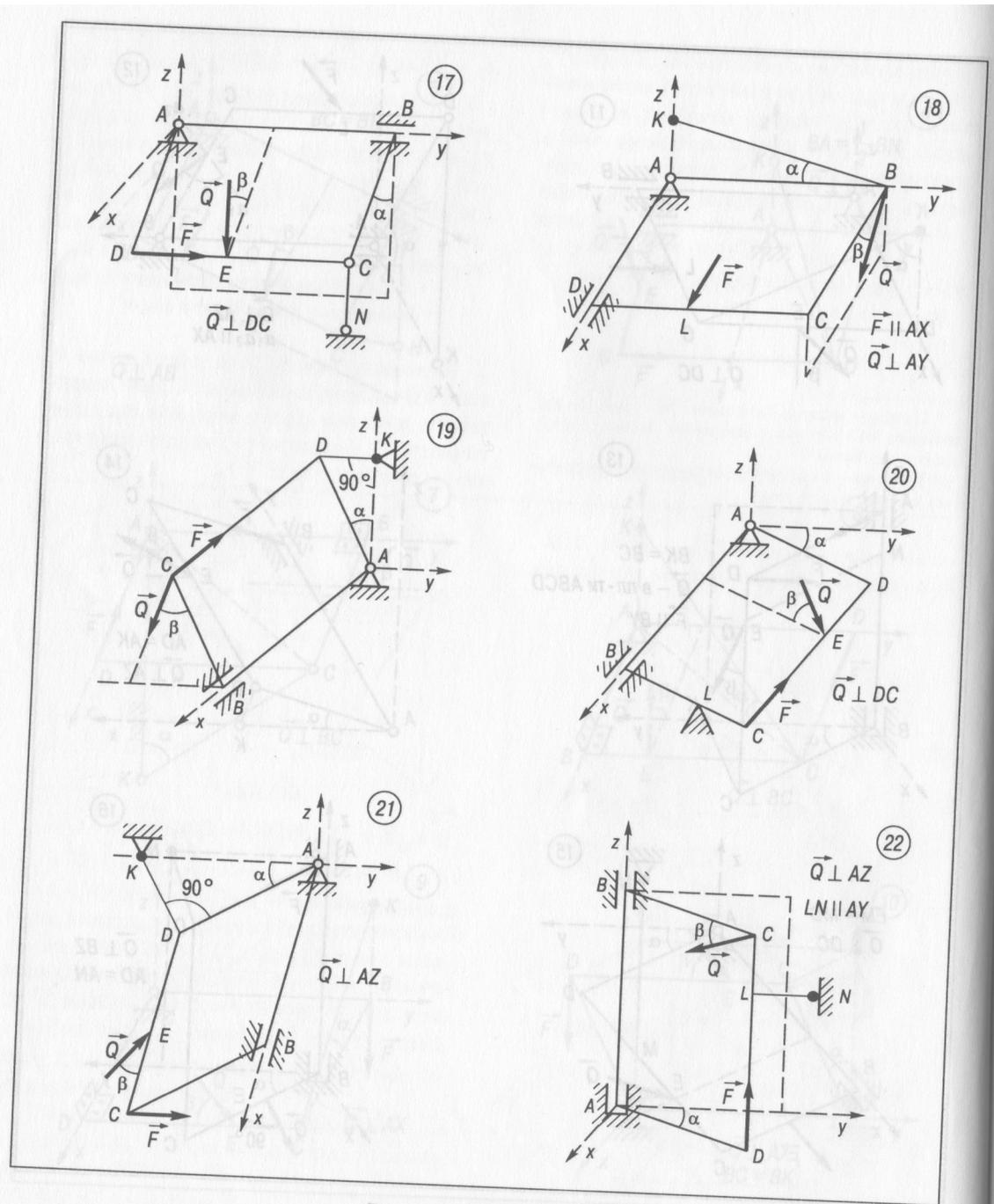


Рис. 4.23 (продолжения)

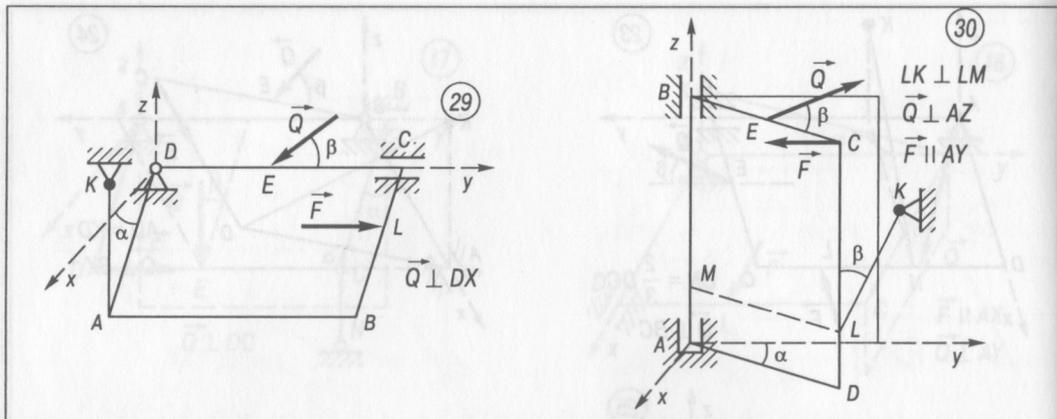


Рис. 4.23 (закінчення)

Таблиця 4.1

Номер варіанта	P, кН	F, кН	Q, кН	AB, м	BC, м	CE, м	CL, м	α , град	β , град	Номер варіанта	P, кН	F, кН	Q, кН	AB, м	BC, м	CE, м	CL, м	α , град	β , град
1	6	12	10	8	6	4	2	30	45	16	15	8	10	10	6	4	-	60	-
2	10	8	14	6	4	1	-	60	15	17	8	6	12	9	6	5	-	30	45
3	12	6	9	10	8	-	-	45	30	18	12	9	16	8	5	-	6	15	30
4	5	10	8	12	8	3	-	75	60	19	9	10	12	6	4	-	-	45	60
5	7	9	15	7	5	3	6	60	15	20	10	12	15	9	6	6	2	60	45
6	15	8	10	10	6	4	-	-	60	21	6	12	10	8	6	4	-	30	45
7	8	6	12	9	6	4	-	30	45	22	10	8	14	6	4	-	2	60	15
8	12	9	16	5	8	6	-	15	30	23	12	6	9	9	8	6	2	45	30
9	9	10	12	6	4	1	-	45	60	24	5	10	8	12	15	8	-	15	60
10	10	12	15	9	6	3	-	60	45	25	7	9	15	7	5	3	-	60	15
11	6	12	10	8	6	4	2	30	45	26	15	8	10	10	6	4	4	30	60
12	10	8	14	6	4	2	-	60	15	27	8	6	12	9	6	4	-	30	45
13	12	6	9	10	8	8	-	45	30	28	12	9	16	8	5	6	4	15	30
14	5	10	8	12	8	3	-	75	60	29	9	10	12	6	4	3	1	45	60
15	7	9	15	7	5	3	2	60	15	30	10	12	15	9	6	3	8	30	45

§ 4.2. ЗВЕДЕННЯ СИСТЕМ СИЛ ДО НАЙПРОСТІШОГО ВИГЛЯДУ

4.2.1. Короткі теоретичні відомості

Зведення просторової системи сил, прикладених до твердого тіла, до найпростішого вигляду полягає у знаходженні однієї сили і однієї пари сил, які є статично еквівалентними цій системі. Шукана сила дорівнює головному вектору \vec{F} просторової системи

сил, прикладеному в довільно вибраному центрі зведення O . Пара сил має момент \vec{M}_O , рівний головному моменту системи сил відносно цього ж центра зведення O .

Головний вектор $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ не залежить від вибору центра зведення і є першим (векторним) статичним інваріантом $I_1 = \vec{F}$.

Головний момент $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i)$ залежить від вибору центра зведення O , але

його проекція на напрям головного вектора \vec{F} , тобто $M_O \cos(\widehat{\vec{M}_O, \vec{F}})$, не залежить від вибору центра зведення. Цю проекцію називають *другим (скалярним) статичним інваріантом* даної системи сил (або $I_2 = \vec{F} \cdot \vec{M}_O$).

Можливі результати зведення просторової системи сил до найпростішого вигляду наведено в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Головний вектор \vec{F}	Головний момент \vec{M}_O	Другий статичний інваріант $I_2 = \vec{F} \cdot \vec{M}_O$	Вид зведення
$\vec{F} \neq 0$	$\vec{M}_O = 0$	$\vec{F} \cdot \vec{M}_O = 0$	Рівнодійна \vec{F}
$\vec{F} = 0$	$\vec{M}_O \neq 0$		Пара сил з моментом \vec{M}_O
$\vec{F} = 0$	$\vec{M}_O = 0$		Рівновага
$\vec{F} \neq 0$	$\vec{M}_O \neq 0$	$\vec{F} \cdot \vec{M}_O = 0$	Рівнодійна, яка паралельна \vec{F} і прикладена в точці O_1
$\vec{F} \neq 0$	$\vec{M}_O \neq 0$	$\vec{F} \cdot \vec{M}_O \neq 0$	Динама (силовий гвинт) з силою \vec{F} і парєю сил з моментом \vec{M}_{O_1}

У табл. 4.2 $M_{O_1} = M_O \cos(\widehat{\vec{M}_O, \vec{F}})$; O_1 — новий центр зведення, положення якого визначає довжина відрізка $OO_1 = M_O \times \frac{\sin(\widehat{\vec{M}_O, \vec{F}})}{F}$. Він перпендикулярний до

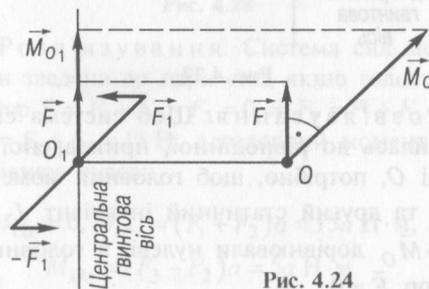


Рис. 4.24

площини, в якій розміщено головний вектор \vec{F} і головний момент \vec{M}_O (рис. 4.24).

Динама — це сукупність сили \vec{F} і пари сил $(\vec{F}_1 - \vec{F}_1)$, момент якої \vec{M}_{O_1} спрямований вздовж лінії дії цієї сили (рис. 4.25).

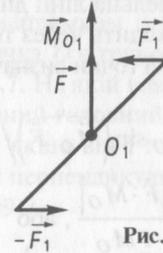


Рис. 4.25

Пряму, що проходить через точку O_1 , вздовж якої спрямовані вектори \vec{F} і \vec{M}_{O_1} , називають *центральною гвинтовою віссю*.

4.2.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 4.4. До якого найпростішого вигляду зводиться система сил, якщо її головний вектор $\vec{F} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ (Н), а головний момент відносно початку координат $\vec{M}_O = 8\vec{j} + 10\vec{k}$ (Н · м)?

Розв'язування. За умовою задачі відомі проекції на осі координат головного вектора ($F_x = 4$ Н; $F_y = 3$ Н; $F_z = 0$) і головного моменту ($M_{Ox} = 0$; $M_{Oy} = 8$ Н · м; $M_{Oz} = 10$ Н · м), тому можна визначити головний вектор і головний момент даної системи сил:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 5 \text{ Н} \neq 0;$$

$$M_O = \sqrt{M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = 2\sqrt{41} \text{ Н} \cdot \text{м} \neq 0.$$

Оскільки головний вектор і головний момент відмінні від нуля, то потрібно обчислити другий статичний інваріант:

$$\vec{F} \cdot \vec{M}_O = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 8 + 0 \cdot 10 = 24 \text{ Н}^2 \cdot \text{м} \neq 0.$$

Отже, дана система сил зводиться до динами (силового гвинта) з головним вектором $F = 5$ Н і головним моментом

$$M_{O_1} = M_O \cos(\widehat{\vec{M}_O, \vec{F}}) = \frac{\vec{F} \cdot \vec{M}_O}{F} =$$

$$= \frac{24}{5} = 4,8 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

спрямованими вздовж центральної гвинтової осі, яка паралельна лінії дії головного вектора \vec{F} і проходить через точку O_1 .

Положення цієї точки визначають за довжиною відрізка

$$OO_1 = M_O \sin(\widehat{\vec{M}_O, \vec{F}}) / F,$$

де $\sin(\widehat{\vec{M}_O, \vec{F}}) = \frac{|\vec{F} \cdot \vec{M}_O|}{FM_O}$, або

$$\cos(\widehat{\vec{M}_O, \vec{F}}) = \frac{\vec{F} \cdot \vec{M}_O}{FM_O} = \frac{24}{5 \cdot 2\sqrt{41}} =$$

$$= \frac{2,4}{\sqrt{41}} \Rightarrow \sin(\widehat{\vec{M}_O, \vec{F}}) = \sqrt{1 - \frac{2,4^2}{41}};$$

$$OO_1 = \frac{2\sqrt{41} \cdot 2\sqrt{8,81}}{5\sqrt{41}} = 0,8\sqrt{8,81} = 2,37 \text{ м}.$$

Запишемо рівняння центральної гвинтової осі. Оскільки \vec{F} і \vec{M}_{O_1} паралельні, то $\vec{M}_{O_1} = a\vec{F} = M_O - \vec{OO}_1 \times \vec{F}$, де $a = \text{const}$. Тоді в скалярно-аналітичній формі

$$M_{O_1x} = aF_x, \quad M_{O_1y} = aF_y, \quad M_{O_1z} = aF_z,$$

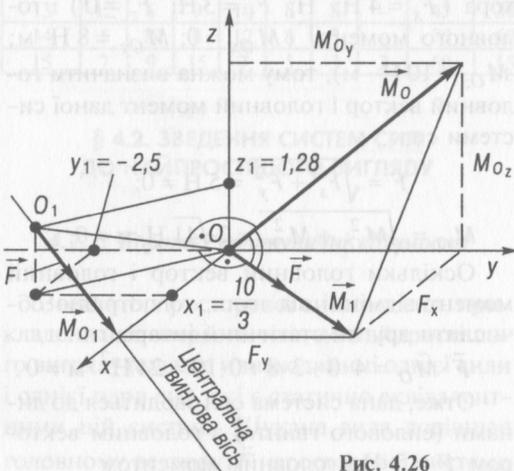


Рис. 4.26

або

$$\frac{M_{Ox} - (yF_z - zF_y)}{F_x} = \frac{M_{Oy} - (zF_x - xF_z)}{F_y} =$$

$$= \frac{M_{Oz} - (xF_y - yF_x)}{F_z} \Rightarrow \frac{3z}{4} = \frac{8-4z}{3} =$$

$$= \frac{10-3x+4y}{0} \Rightarrow 25z = 32; \quad 3x-4y = 10.$$

Отже, центральна гвинтова вісь — це пряма, яку отримуємо внаслідок перетину площин $z = 1,28$ і $y = 0,75x - 2,5$ (рис. 4.26).

Приклад 4.5. До невагомій пластини $AOBD$ (рис. 4.27) прикладено сили \vec{F}_1 , \vec{F}_2 і \vec{F}_3 паралельно осі Oz , причому $F_3 = 2F_1 = 4F_2 = 2$ Н. Визначити відстань a , при якій система сил зводиться до рівнодійної сили, прикладеної у точці O , якщо відстань $b = 2$ м; $c = 1$ м.

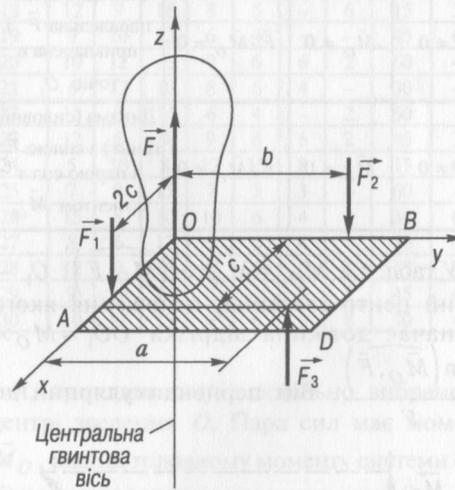


Рис. 4.27

Розв'язування. Щоб система сил зводилась до рівнодійної, прикладеної у точці O , потрібно, щоб головний момент \vec{M}_O та другий статичний інваріант $I_2 = \vec{F} \cdot \vec{M}_O$ дорівнювали нулеві, а головний вектор $\vec{F} \neq 0$.

Визначимо проекції головного вектора \vec{F} і головного моменту \vec{M}_O на осі. Оскільки $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ паралельні осі Oz , то $F_x = 0, F_y = 0, F_z = F_3 - F_1 - F_2 = (2 - 1 - 0,5) = 0,5 \text{ Н}$, $M_x = F_3 a - F_2 b = (2a - 0,5 \cdot 2) \text{ Н} \cdot \text{м}$; $M_y = F_1 \cdot 2c - F_3 c = (1 \cdot 2 - 2 \cdot 1) = 0, M_z = 0$. Тоді головний вектор $F = F_z = 0,5 \text{ Н} \neq 0$; головний момент $M = M_x = (2a - 1) = 0 \Rightarrow a = 0,5 \text{ м}$, а другий статичний інваріант $I_2 = \vec{F} \cdot \vec{M}_O = F_x M_x + F_y M_y + F_z M_z = 0$.

Отже, система сил зводиться до рівнодійної $0,5 \text{ Н}$ (рис. 4.27), прикладеної у точці O , якщо сила \vec{F}_3 знаходиться на відстані $0,5 \text{ м}$ від осі Ox .

Приклад 4.6. Визначити модуль сили \vec{F}_3 , за якого система трьох сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$, що прикладена до куба, зводиться до пари сил, у разі, коли відомо, що $F_2 = 2F_1 = 10 \text{ Н}$ (рис. 4.28).

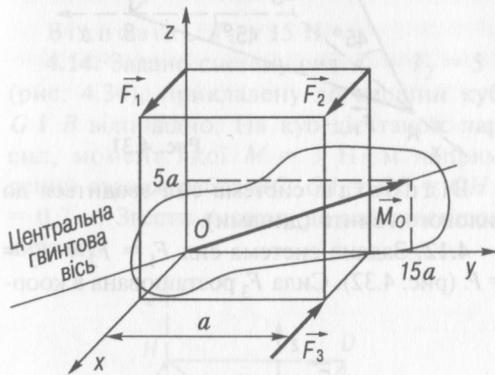


Рис. 4.28

Розв'язування. Система сил може бути зведена до пари сил, якщо головний вектор $F = F_1 + F_2 - F_3 = 0 \Rightarrow F_3 = F_1 + F_2$ або $F_3 = F_1 + F_2 = 15 \text{ Н}$, а головний момент не дорівнює нулеві:

$$M_{Ox} = 0, M_{Oy} = (F_1 + F_2)a = 15a \text{ Н} \cdot \text{м}, \\ M_{Oz} = (F_3 - F_2)a = 5a \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Тоді $M_O = \sqrt{M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = 5a\sqrt{10} \text{ Н} \cdot \text{м} \neq 0$. Отже, дану систему сил можна звести до пари сил, якщо сила $F_3 = 15 \text{ Н}$, а момент $M_O = 5a\sqrt{10} \text{ Н} \cdot \text{м}$ і розміщений у площині Oyz (рис. 4.28). Напрямок моменту пари збігається з напрямком центральної гвинтової осі, а точка O є точкою зведення.

Приклад 4.7. На якій відстані OA від точки O розміщений головний вектор системи сил $F = 8 \text{ Н}$, якщо він і головний момент $M_O = 26 \text{ Н} \cdot \text{м}$ перпендикулярні один до одного (рис. 4.29)?



Рис. 4.29

Розв'язування. Дана система сил зводиться до рівнодійної, тому що сила $F = 8 \text{ Н} \neq 0$ — головний вектор, $M_O = 26 \text{ Н} \cdot \text{м} \neq 0$ — головний момент, а другий статичний інваріант $\vec{F} \cdot \vec{M}_O = FM_O \times \cos(\widehat{M_O, F}) = 8 \cdot 26 \cos 90^\circ = 0$. При цьому центральна гвинтова вісь паралельна головному вектору \vec{F} і знаходиться на відстані

$$OA = \frac{M_O \sin(\widehat{M_O, F})}{F} = \frac{26 \sin 90^\circ}{8} = 3,25 \text{ м},$$

перпендикулярній до площини, в якій розміщені головний вектор \vec{F}_O і головний мо-

мент \vec{M}_O , і зміщена вправо, оскільки головний вектор \vec{F} повинен повертатись відносно старого центра зведення (точки O) проти ходу годинникової стрілки, бо \vec{M}_O спрямований на нас (додатний напрям осі Ox).

Приклад 4.8. Головний вектор \vec{F} і головний момент \vec{M}_O системи сил розміщені у площині Oxz . Визначити відстань OA до центральної гвинтової осі, якщо відомі $F = 6$ Н, $M_O = 7,2$ Н·м, а кут між \vec{M}_O і віссю Ox дорівнює 60° (рис. 4.30).



Рис. 4.30

Розв'язування. Відрізок OA перпендикулярний до головного вектора \vec{F} і головного моменту \vec{M}_O , які лежать у площині Oxz . Отже, відрізок OA лежить на осі Oy і спрямований вправо, тому що складова $M_{Ox} = M_O \cos 60^\circ = 7,2 \cdot 0,5 = 3,6$ Н·м направлена на нас, тобто повертає головний вектор \vec{F} , прикладений у точці A , проти ходу годинникової стрілки.

Момент зведеної пари сил

$$M_A = M_O \sin 60^\circ = 7,2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 3,6\sqrt{3} \text{ Н}\cdot\text{м},$$

а відстань

$$OA = \frac{M_{Ox}}{F} = \frac{3,6}{6} = 0,6 \text{ м}.$$

Центральна гвинтова лінія паралельна головному вектору \vec{F} , тобто осі Oz , і проходить через точку A (рис. 4.30).

4.2.3. Задачі для самостійного розв'язування

4.11. Задана система трьох сил $F_1 = F_2 = F_3 = F$. Сила F_2 паралельна осі Oz , сила F_3 паралельна Ox , $OA = a$ (рис. 4.31). До якого найпростішого вигляду зводиться задана система сил?

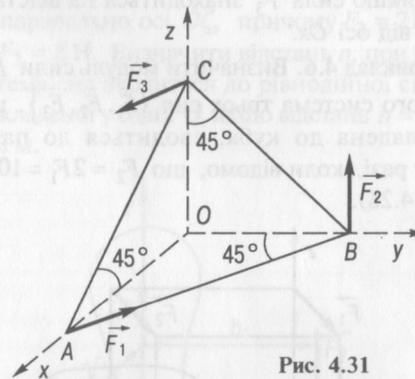


Рис. 4.31

Відповідь: система сил зводиться до силового гвинта (динами).

4.12. Задана система сил $F_1 = F_2 = F_3 = F$ (рис. 4.32). Сила F_3 розташована в коор-

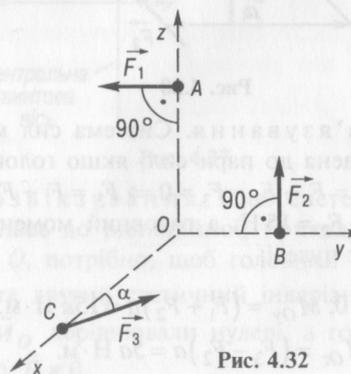


Рис. 4.32

динатній площині Oxz . Знайти значення кута α , при якому система сил зводиться до рівнодійної.

Відповідь: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b-a}{c}$.

4.13. Знайти значення сили F_3 (рис. 4.33), при якому система сил F_1, F_2, F_3 зводиться до пари сил, якщо $a = 1$ м, $F_2 = 2F_1 = 10$ Н.

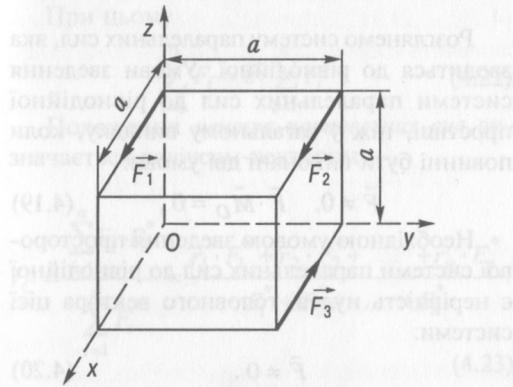


Рис. 4.33

Відповідь: $F_3 = 15$ Н.

4.14. Задано систему сил $F_1 = F_2 = 5$ Н (рис. 4.34), прикладену до вершин куба G і B відповідно. На куб діє також пара сил, момент якої $M = 3$ Н·м напрямлений вздовж ребра BC ; $OA = OB = OH = 0,2$ м. Звести систему до найпростішого вигляду.

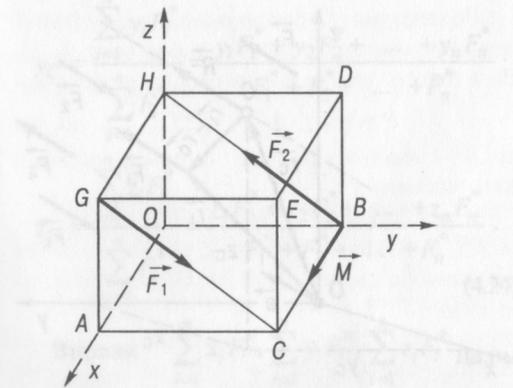


Рис. 4.34

Відповідь: система зводиться до пари сил, проекції її моменту на осі координат $M_x = 3$ Н·м, $M_y = M_z = 0,5\sqrt{2}$ Н·м.

4.15. Яка має бути залежність між відстанями a, b, d точок прикладення $F_1 = F_2 = F_3 = F$ для того, щоб система сил зводилася до рівнодійної? $OA = a$, $OB = b$, $OD = d$. Сила F_1 паралельна осі Oy , сила F_2 — осі Oz , сила F_3 — осі Ox (рис. 4.35).

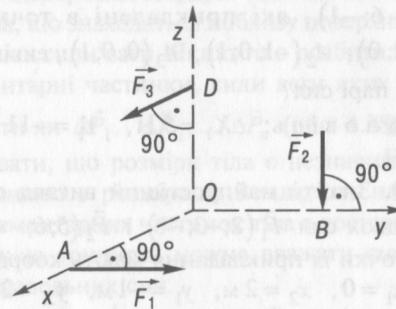


Рис. 4.35

Відповідь: $d = a + b$.

4.16. Визначити, до якого вигляду зводиться система трьох сил

$$\vec{F}_1 = -5\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} \text{ (Н)}, \vec{F}_2 = 4\vec{i} - \vec{j} \text{ (Н)},$$

$$\vec{F}_3 = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \text{ (Н)},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орти осей Ox, Oy, Oz декартової системи координат, якщо радіуси-вектори точок, в яких прикладено сили, мають вигляд відповідно

$$\vec{r}_1 = -\vec{i} + \vec{k} \text{ (м)}, \vec{r}_2 = \vec{i} - \vec{j} \text{ (м)},$$

$$\vec{r}_3 = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \text{ (м)}.$$

Відповідь: система еквівалентна парі сил, проекції моменту якої на осі координат $M_x = 1$ Н·м, $M_y = -1$ Н·м, $M_z = -2$ Н·м.

4.17. Систему сил задано їхніми складовими в декартовій системі координат: $X_1 = -5$ Н, $X_2 = 4$ Н, $X_3 = 1$ Н, $Y_1 = 3$ Н, $Y_2 = -1$ Н, $Y_3 = -2$ Н, $Z_1 = 1$ Н, $Z_2 = 0$, $Z_3 = -1$ Н. Координати точок, в яких прикладено сили, $x_1 = -1$ м, $x_2 = 1$ м, $x_3 = 2$ м,

$y_1 = 0, y_2 = -1 \text{ м}, y_3 = -2 \text{ м}, z_1 = 1 \text{ м}, z_2 = 0, z_3 = 1 \text{ м}$. До якого найпростішого вигляду зводиться система сил?

Відповідь: система зводиться до пари сил, момент якої має складові $M_x = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}, M_y = -1 \text{ Н} \cdot \text{м}, M_z = 0$.

4.18. Якими мають бути величини X_1, Y_1, Z_1 — складові сили $\vec{F}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ за умови, що система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2(3; 5; 0), \vec{F}_3(-8; 6; -1)$, які прикладені в точках $A_1(0; 2; 0), A_2(-1; 0; 1), A_3(0; 0; 1)$, еквівалентна парі сил?

Відповідь: $X_1 = 5 \text{ Н}, Y_1 = -11 \text{ Н}, Z_1 = 1 \text{ Н}$.

4.19. Знайти найпростіший вигляд системи двох сил $\vec{F}_1(2; -3; -1)$ і $\vec{F}_2(5; 6; -4)$, якщо точки їх прикладання мають координати $x_1 = 0, x_2 = 2 \text{ м}, y_1 = -1 \text{ м}, y_2 = 2 \text{ м}, z_1 = \frac{1}{3} \text{ м}, z_2 = -\frac{4}{3} \text{ м}$.

Відповідь: система еквівалентна рівнодійній, складові якої $R_x = 7 \text{ Н}, R_y = 3 \text{ Н}, R_z = -5 \text{ Н}$.

4.20. Звести систему сил до найпростішого вигляду, якщо $OA = OB = OE = l = 10 \text{ см}, F_1 = F_2 = 4 \text{ Н}, M = 3 \text{ Н} \cdot \text{м}$ — момент пари, яка розташована в площині $EGHD$ (рис. 4.36).

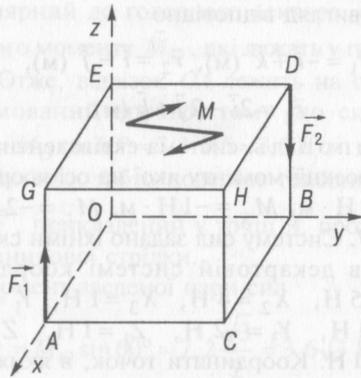


Рис. 4.36

Відповідь: система еквівалентна парі сил, складові моменту якої $M_x = M_y = -0,4 \text{ Н} \cdot \text{м}, M_z = -3 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

§ 4.3. ЦЕНТР СИСТЕМИ ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ

4.3.1. Короткі теоретичні відомості

Розглянемо систему паралельних сил, яка зводиться до рівнодійної. Умови зведення системи паралельних сил до рівнодійної простіші, ніж у загальному випадку, коли повинні бути виконані дві умови:

$$\vec{F} \neq 0, \quad \vec{F} \cdot \vec{M}_O = 0. \quad (4.19)$$

Необхідною умовою зведення просторової системи паралельних сил до рівнодійної є нерівність нулеві головного вектора цієї системи:

$$\vec{F} \neq 0. \quad (4.20)$$

Якщо умова (4.20) виконується при одночасному повороті всіх сил на однаковий кут відносно паралельних осей і якщо точки прикладання сил не змінюються, то рівнодійна \vec{R} заданої системи сил також повертається на згаданий вище кут. Причому поворот проходить навколо деякої фіксованої точки, яку називають *центром паралельних сил* (рис. 4.37).

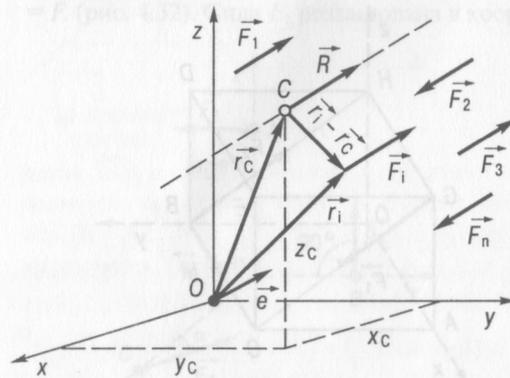


Рис. 4.37

Введемо одиничний вектор \vec{e} , паралельний лінійм дії сил, тоді довільна сила \vec{F}_i може бути подана у вигляді

$$\vec{F}_i = F_i^* \cdot \vec{e}, \quad (4.21)$$

де $F_i^* = F_i$, якщо напрямки сили \vec{F}_i і вектора \vec{e} збігаються, і $F_i^* = -F_i$, якщо \vec{F}_i і \vec{e} напрямлені протилежно.

При цьому

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{e} \cdot \sum_{i=1}^n F_i^*. \quad (4.22)$$

Положення центра паралельних сил визначається радіусом-вектором

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot F_i^*}{\sum_{i=1}^n F_i^*} = \frac{\vec{r}_1 \cdot F_1^* + \vec{r}_2 \cdot F_2^* + \dots + \vec{r}_n \cdot F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \dots + F_n^*}. \quad (4.23)$$

Якщо x_i, y_i, z_i — координати прикладення довільної сили \vec{F}_i , то координати центра паралельних сил знаходять за формулами

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i F_i^*}{\sum_{i=1}^n F_i^*} = \frac{x_1 F_1^* + x_2 F_2^* + \dots + x_n F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \dots + F_n^*};$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i F_i^*}{\sum_{i=1}^n F_i^*} = \frac{y_1 F_1^* + y_2 F_2^* + \dots + y_n F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \dots + F_n^*};$$

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i F_i^*}{\sum_{i=1}^n F_i^*} = \frac{z_1 F_1^* + z_2 F_2^* + \dots + z_n F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \dots + F_n^*}. \quad (4.24)$$

Вирази $\sum_{i=1}^n x_i F_i^*$, $\sum_{i=1}^n y_i F_i^*$, $\sum_{i=1}^n z_i F_i^*$ називають статичними моментами заданої сис-

теми сил відносно координатних площин yOz, xOz, xOy відповідно.

Якщо початок координат вибрано в центрі паралельних сил, то

$$x_C = y_C = z_C = 0$$

і статичні моменти заданої системи сил відносно осей цієї системи координат дорівнюють нулеві.

Центр ваги твердого тіла. На всі частини тіла, що знаходяться поблизу поверхні Землі, діють сили ваги. Якщо тіло розбити на елементарні частинки, сили ваги яких позначити як $\Delta \vec{P}_1, \Delta \vec{P}_2, \dots, \Delta \vec{P}_n$ (рис. 4.38), і врахувати, що розміри тіла є незначними порівняно з розмірами Землі, то сили ваги елементарних частинок тіла з достатньо високою точністю можна вважати системою паралельних сил.

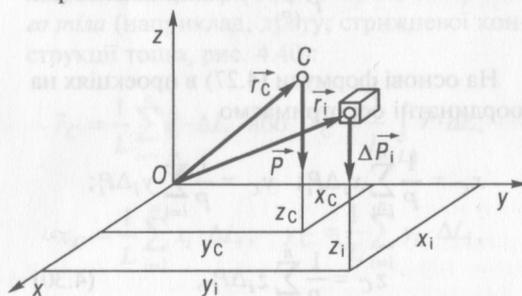


Рис. 4.38

Рівнодійну сил ваги окремих частин тіла називають силою ваги тіла:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \Delta \vec{P}_i. \quad (4.25)$$

Сили ваги окремих частинок тіла $\Delta \vec{P}_i$ паралельні і спрямовані в один бік, тому вираз (4.25) запишемо так:

$$P = \sum_{i=1}^n \Delta P_i. \quad (4.26)$$

Отже, вага тіла дорівнює сумі сил ваги окремих його частинок.

Центр паралельних сил ваги окремих частин тіла називають *центром ваги тіла*. На рис. 4.38 центр ваги тіла позначено буквою C .

Згідно з формулою (4.23) радіус-вектор центра ваги

$$\vec{r}_C = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \Delta P_i. \quad (4.27)$$

Після переходу у виразі (4.27) до границі при $n \rightarrow \infty$, припустивши, що $\Delta P_i \rightarrow 0$, дістанемо

$$\vec{r}_C = \frac{1}{P} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \Delta P_i. \quad (4.28)$$

Границя суми в цьому виразі є інтегралом:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{P} \int_{(P)} \vec{r} \cdot dP. \quad (4.29)$$

На основі формули (4.27) в проєкціях на координатні осі отримаємо

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n x_i \Delta P_i; & y_C &= \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n y_i \Delta P_i; \\ z_C &= \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n z_i \Delta P_i, \end{aligned} \quad (4.30)$$

де x_i, y_i, z_i — координати центра ваги i -ї частинки.

Відповідно до (4.29) дістанемо

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{P} \int_{(P)} x dP; & y_C &= \frac{1}{P} \int_{(P)} y dP; \\ z_C &= \frac{1}{P} \int_{(P)} z dP. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Розглянемо деякі окремі випадки.

Центр ваги однорідного твердого тіла. Для однорідних тіл питома вага γ є величиною сталою по об'єму.

Вага тіла

$$P = \gamma V, \quad (4.32)$$

де V — об'єм всього тіла. Вага i -ї частинки тіла

$$\Delta P_i = \gamma \Delta V_i, \quad (4.33)$$

де ΔV_i — об'єм i -ї частинки тіла.

Підставивши (4.32), (4.33) в (4.27) і (4.29) — (4.31), отримаємо формули, які визначають *координати центра ваги однорідного тіла*:

$$\begin{aligned} \vec{r}_C &= \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \Delta V_i}{V}; & \vec{r}_C &= \frac{1}{V} \int_{(V)} \vec{r} \cdot dV; \\ x_C &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \Delta V_i}{V}; & y_C &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta V_i}{V}; \\ z_C &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot \Delta V_i}{V}; \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{V} \int_{(V)} x \cdot dV; & y_C &= \frac{1}{V} \int_{(V)} y \cdot dV; \\ z_C &= \frac{1}{V} \int_{(V)} z \cdot dV. \end{aligned}$$

Розглянемо *однорідне плоске тіло* завтовшки h , розміщене в площині Oxy (рис. 4.39). Вага такого тіла і вага окремих його частинок

$$P = \gamma h S; \quad \Delta P_i = \gamma h \Delta S_i, \quad (4.35)$$

де S — площа тіла; ΔS_i — площа окремої його частинки.

Підставивши (4.35) в (4.27) і (4.29) — (4.31), отримаємо формули, які визначають *координати центра ваги однорідного плоского тіла*:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \Delta S_i \quad \text{або} \quad \vec{r}_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} \vec{r} \cdot dS,$$

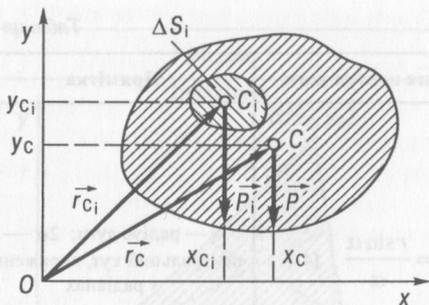


Рис. 4.39

$$x_C = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n x_i \Delta S_i, \quad y_C = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n y_i \Delta S_i$$

або $x_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} x dS, \quad y_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} y dS, \quad (4.36)$

де x, y — координати центра ваги ΔS_i частинки.

Суму добутоків площі кожного елемента плоскої фігури на відстань від нього до деякої осі, яка лежить у площині фігури, називають *статичним моментом плоскої фігури відносно цієї осі*.

Статичні моменти (M_x і M_y) плоскої фігури (рис. 4.39) відносно осей Ox і Oy відповідно

$$M_x = \sum_{i=1}^n \Delta S_i y_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^n \Delta S_i x_i. \quad (4.37)$$

Підставивши вирази (4.37) в (4.36), отримуємо для координат центра ваги плоскої фігури такі формули:

$$x_C = \frac{M_y}{S}, \quad y_C = \frac{M_x}{S}. \quad (4.38)$$

За цими формулами обчислюють координати центра ваги плоскої фігури, якщо відомі її статичні моменти M_x і M_y .

Якщо позначити через γ вагу одиниці довжини однорідного лінійного тіла, то його вагу і вагу його i -ї частинки визначають за формулами

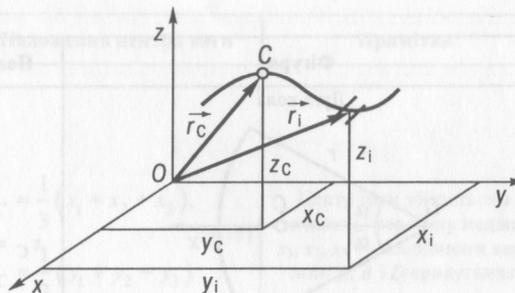


Рис. 4.40

$$P = \gamma L; \quad \Delta P_i = \gamma \Delta L_i, \quad (4.39)$$

де L — довжина тіла; ΔL_i — довжина i -ї частинки.

Підставивши (4.39) у вирази (4.27), (4.29)–(4.31), отримуємо формули, які визначають координати центра ваги лінійного однорідного тіла (наприклад, дроту, стрижневої конструкції тощо, рис. 4.40):

$$\vec{r}_C = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \Delta L_i \quad \text{або} \quad \vec{r}_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} \vec{r} \cdot dL,$$

$$x_C = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Delta L_i, \quad y_C = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta L_i,$$

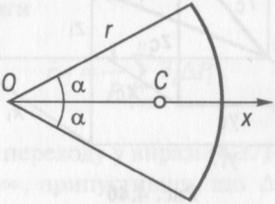
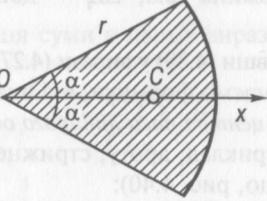
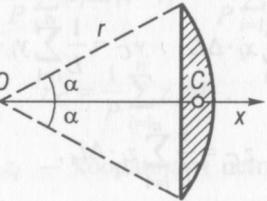
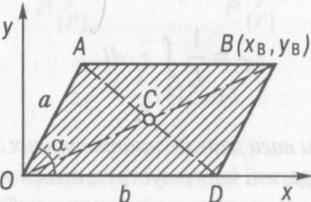
$$z_C = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n z_i \cdot \Delta L_i, \quad (4.40)$$

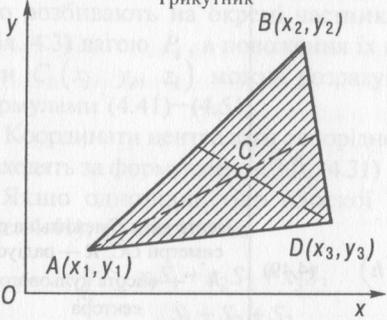
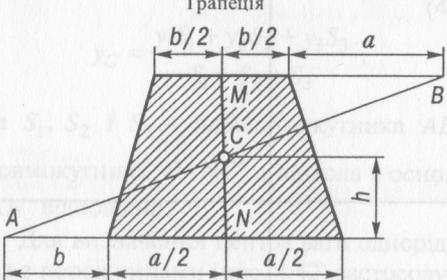
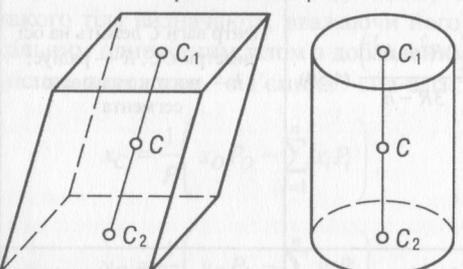
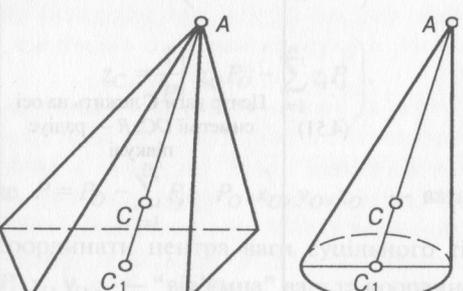
або $x_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} x \cdot dL, \quad y_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} y \cdot dL,$

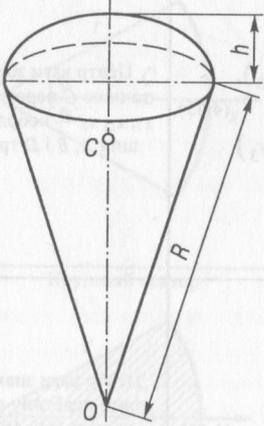
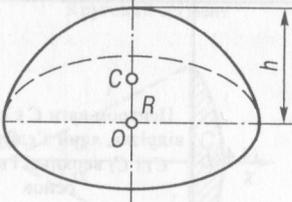
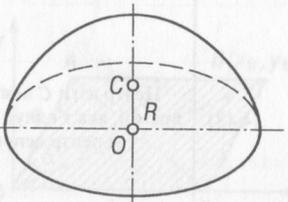
$$z_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} z \cdot dL.$$

Центри ваги деяких найпростіших геометричних фігур, які часто зустрічаються на практиці і за допомогою яких можна побудувати складніші фігури, зведено до табл. 4.3.

Таблиця 4.3

Фігура	Положення центра ваги	Примітка
<p>Дуга кола</p> 	$x_C = OC = \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \quad (4.41)$	<p>r — радіус дуги; 2α — центральний кут, виражений у радіанах</p>
<p>Круговий сектор</p> 	$x_C = OC = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \quad (4.42)$	<p>r — радіус сектора; 2α — центральний кут у радіанах</p>
<p>Круговий сегмент</p> 	$x_C = OC = \frac{4}{3} \cdot \frac{r \sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \quad (4.43)$	<p>r — радіус сегмента; 2α — центральний кут у радіанах</p>
<p>Паралелограм</p> 	$OC = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} \quad (4.44)$	<p>Центр ваги збігається з точкою перетину діагоналей;</p> $x_C = \frac{1}{2} x_B, \quad y_C = \frac{1}{2} y_B$

Фігура	Положення центра ваги	Примітка
<p>Трикутник</p> 	$x_C = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3),$ $y_C = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$ <p>(4.45)</p>	<p>Центр ваги збігається з точкою C перетину медіан; x_1, x_2, x_3 — координати вершин A, B і D трикутника</p>
<p>Трапеція</p> 	$h = \frac{H}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$ <p>(4.46)</p>	<p>Центр ваги знаходиться у точці перетину прямої AB і прямої MN; H — висота трапеції; a, b — основи трапеції</p>
<p>Призма і циліндр</p> 	$C = \frac{C_1 C_2}{2}$ <p>(4.47)</p>	<p>Центром ваги C є середина відрізка, який з'єднує центри C_1 і C_2 верхньої і нижньої основ</p>
<p>Піраміда і конус</p> 	$CC_1 = \frac{1}{4} AC_1$ <p>(4.48)</p>	<p>Центр ваги C лежить на прямій, яка з'єднує вершину і центр основи</p>

Фігура	Положення центра ваги	Примітка
<p data-bbox="427 495 587 521">Кульовий сектор</p> 	$OC = \frac{3}{8}(2R - h) \quad (4.49)$	<p data-bbox="1058 719 1305 824">Центр ваги C лежить на осі симетрії OC; R — радіус; h — висота кульового сектора</p>
<p data-bbox="419 1037 595 1064">Кульовий сегмент</p> 	$OC = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2R^2 - h^2)}{3R - h} \quad (4.50)$	<p data-bbox="1058 1171 1305 1272">Центр ваги C лежить на осі симетрії OC; R — радіус; h — висота кульового сегмента</p>
<p data-bbox="459 1400 555 1426">Півкуля</p> 	$OC = \frac{3}{8}R \quad (4.51)$	<p data-bbox="1058 1552 1305 1619">Центр ваги C лежить на осі симетрії OC; R — радіус півкулі</p>

Методи визначення центра ваги тіла. Якщо однорідне тіло складної форми, то використовують метод розбиття. За цим методом тіло розбивають на окремі частинки (див. табл. 4.3) вагою P_i , а положення їх центрів ваги $C_i(x_i, y_i, z_i)$ можна розрахувати за формулами (4.41)–(4.51).

Координати центра ваги однорідного тіла знаходять за формулами (4.30), (4.31) і (4.34).

Якщо однорідне тіло плоскої форми (рис. 4.41), то матимемо

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3}; \quad (4.52)$$

$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3},$$

де S_1, S_2 і S_3 — площі трикутника ABC' , прямокутника $DKNC'$ і півкола з основою KN відповідно.

Для визначення центра ваги однорідних тіл з порожнинами (рис. 4.42) застосовують метод “від’ємної” ваги (площі). Центр ваги такого тіла визначають, вважаючи його суцільним однорідним тілом з добавленими в місцях порожнин “від’ємних” сил ваги:

$$x_C = \frac{1}{P} \left(x_O P_O - \sum_{i=1}^n x_i P_i \right),$$

$$y_C = \frac{1}{P} \left(y_O P_O - \sum_{i=1}^n y_i P_i \right), \quad (4.53)$$

$$z_C = \frac{1}{P} \left(z_O P_O - \sum_{i=1}^n z_i P_i \right),$$

де $P = P_O - \sum_{i=1}^n P_i$; P_O, x_O, y_O, z_O — вага та координати центра ваги суцільного тіла; P_i, x_i, y_i, z_i — “від’ємна” вага та координати

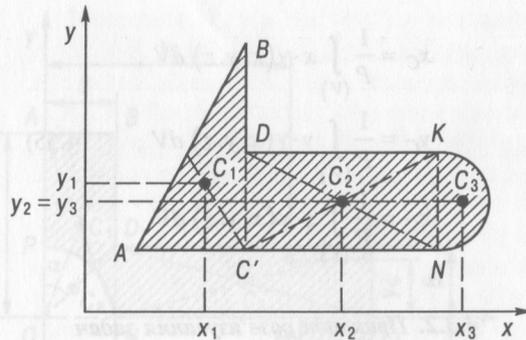


Рис. 4.41

центра ваги i -ї порожнини, “заповненої” матеріалом тіла.

Наприклад, для плоскої фігури, зображеної на рис. 4.42, матимемо:

$$x_C = \frac{x_O S_O - x_1 S_1}{S_O - S_1}, \quad (4.54)$$

$$y_C = \frac{y_O S_O - y_1 S_1}{S_O - S_1}.$$

де S_O, x_O, y_O — площа суцільного прямокутника та координати його центра ваги; S_1, x_1, y_1 — від’ємна площа круглої порожнини та координати її центра ваги.

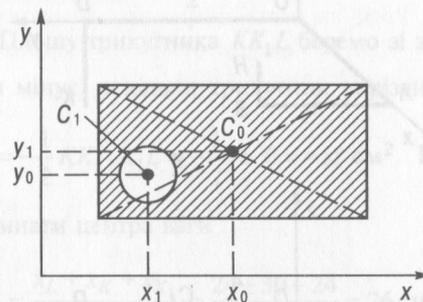


Рис. 4.42

Центр ваги тіла складної форми, якщо його не можна розбити на прості фігури, а також неоднорідного тіла, питома вага якого є змінною $[\gamma = \gamma(x, y, z)]$, знаходять методом інтегрування. У цьому випадку

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{P} \int_V x \cdot \gamma(x, y, z) dV, \\ y_C &= \frac{1}{P} \int_V y \cdot \gamma(x, y, z) dV, \\ z_C &= \frac{1}{P} \int_V z \cdot \gamma(x, y, z) dV. \end{aligned} \quad (4.55)$$

4.3.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 4.9. Знайти координати центра ваги конструкції, яка складається із однорідних стрижнів (рис. 4.43, а), якщо $OA = 0,6$ м, $AB = 0,6$ м, $BH = 0,3$ м, $OD = 0,9$ м, $DK = 0,4$ м.

Розв'язування. Застосуємо метод розбиття конструкції на окремі частини OA , AB , BH , OD , DK , центри ваги яких розміщені на осях їхньої симетрії.

Координати центрів ваги цих частин такі: $C_1(0,3; 0; 0)$, $C_2(0,6; 0,3; 0)$, $C_3(0,6; 0,6; 0,15)$,

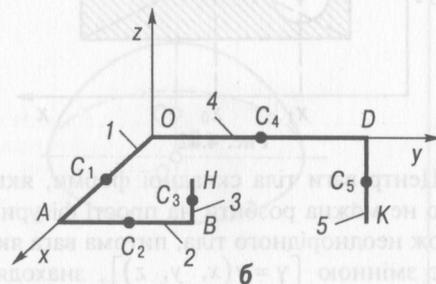
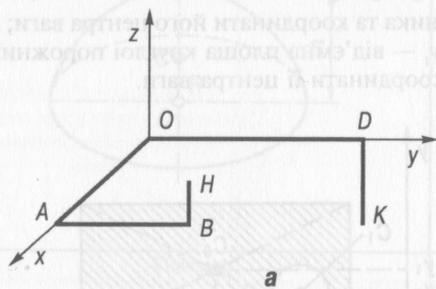


Рис. 4.43

$C_4(0; 0,45; 0)$, $C_5(0; 0,9; -0,2)$ (рис. 4.43, б). Довжини окремих частин конструкції: $L_1 = 0,6$ м; $L_2 = 0,6$ м; $L_3 = 0,3$ м; $L_4 = 0,9$ м; $L_5 = 0,4$ м.

Координати центра ваги конструкції, складеної із однорідних стрижнів, знаходимо за формулами (4.40):

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i L_i}{L} = \\ &= \frac{0,3 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,9 + 0 \cdot 0,4}{0,6 + 0,6 + 0,3 + 0,9 + 0,4} \approx \\ &\approx 0,26 \text{ м,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i L_i}{L} = \\ &= \frac{0 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,3 + 0,45 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,4}{0,6 + 0,6 + 0,3 + 0,9 + 0,4} \approx \\ &\approx 0,4 \text{ м,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i L_i}{L} = \\ &= \frac{0 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,6 + 0,15 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,9 - 0,2 \cdot 0,4}{0,6 + 0,6 + 0,3 + 0,9 + 0,4} = \\ &= -0,0125 \text{ м.} \end{aligned}$$

Отже, координати центра ваги конструкції такі: $x_C \approx 0,26$ м; $y_C \approx 0,4$ м; $z_C \approx -0,013$ м.

Приклад 4.10. Знайти координати центра ваги плоскої фігури, що зображена на рис. 4.44, а (розміри наведено в сантиметрах).

Розв'язування. Для розв'язання використаємо метод розбиття в поєднанні з методом від'ємних площ. Виділимо в даній фігурі такі п'ять простих фігур (рис. 4.44, б): прямокутник $OABN$, круговий сектор ONP , прямокутники DEE_1N , E_1KK_1M та трикутник KK_1L .

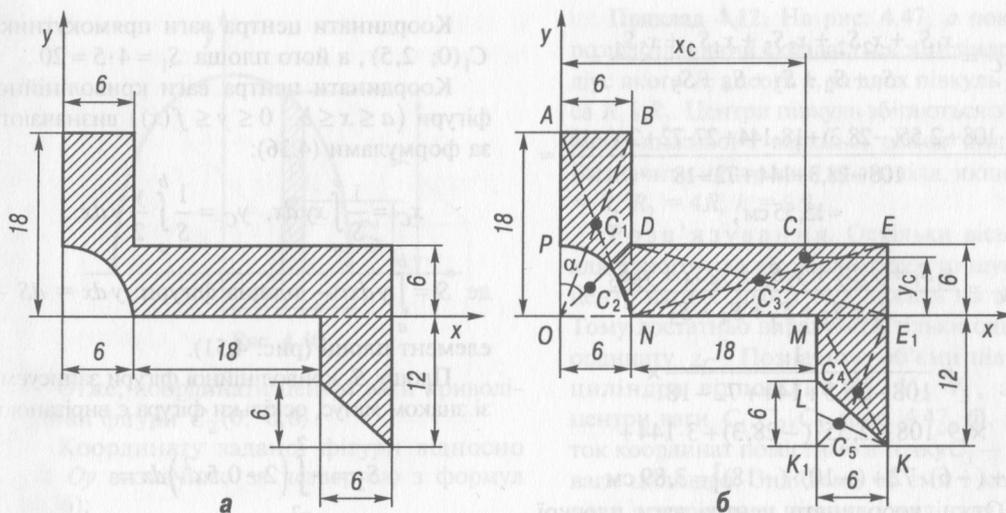


Рис. 4.44

Площа прямокутника $OABN$: $S_1 = OA \times AB = 18 \cdot 6 = 108 \text{ см}^2$; координати його центра ваги

$$x_1 = \frac{AB}{2} = 3 \text{ см}, \quad y_1 = \frac{OA}{2} = 9 \text{ см}.$$

Площу кругового сектора ONP ($R = 6 \text{ см}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$) записуємо зі знаком мінус, оскільки сектор вирізаний із заданої фігури: $S_2 = -\alpha \cdot R^2 = -\frac{\pi}{4} R^2 \approx -28,3 \text{ см}^2$; довжина відрізка OC_2

дорівнює $OC_2 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \approx 3,6 \text{ см}$, а координати центра ваги

$$x_2 = OC_2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 2,55 \text{ см},$$

$$y_2 = OC_2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 2,55 \text{ см}.$$

Площа прямокутника DEE_1N $S_3 = DE \times EE_1 = 24 \cdot 6 = 144 \text{ см}^2$; координати центра ваги

$$x_3 = ON + \frac{NE_1}{2} = 6 + 12 = 18 \text{ см}, \quad y_3 =$$

$$= \frac{EE_1}{2} = 3 \text{ см}.$$

Прямокутник E_1KK_1M має площу $S_4 = E_1K \cdot KK_1 = 12 \cdot 6 = 72 \text{ см}^2$; координати центра ваги

$$x_4 = OM + \frac{ME_1}{2} = 24 + 3 = 27 \text{ см},$$

$$y_4 = -\frac{E_1K}{2} = -6 \text{ см}.$$

Площу трикутника KK_1L беремо зі знаком мінус, оскільки трикутник вирізаний:

$$S_5 = -\frac{1}{2} KK_1 \cdot K_1L = -\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = -18 \text{ см}^2. \text{ Ко-}$$

ординати центра ваги

$$x_5 = \frac{x_L + x_K + x_{K_1}}{3} = \frac{24 + 30 + 24}{3} = 26 \text{ см},$$

$$y_5 = \frac{y_L + y_K + y_{K_1}}{3} = \frac{-6 - 12 - 12}{3} = -10 \text{ см}.$$

Координати центра ваги заданої плоскої фігури знаходимо за формулами (4.36):

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3 + x_4 S_4 + x_5 S_5}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5} =$$

$$= \frac{3 \cdot 108 + 2,55(-28,3) + 18 \cdot 144 + 27 \cdot 72 + 26(-18)}{108 - 28,3 + 144 + 72 - 18} \approx$$

$$\approx 15,55 \text{ см,}$$

$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3 + y_4 S_4 + y_5 S_5}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5} =$$

$$= \frac{1}{108 - 28,3 + 144 + 72 - 18} \times$$

$$\times [9 \cdot 108 + 2,55 \cdot (-28,3) + 3 \cdot 144 +$$

$$+ (-6) \cdot 72 + (-10) \cdot (-18)] \approx 3,89 \text{ см.}$$

Отже, координати центра ваги плоскої фігури такі: $x_C \approx 15,55$ см, $y_C \approx 3,89$ см.

Приклад 4.11. Знайти координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої кривою $y(x) = -0,5x^2 + 2$ і прямими $x = \pm 2$ та $y = 5$ (рис. 4.45, а).

Розв'язування. Для розв'язання цієї задачі застосуємо метод симетрії і метод розбиття. Наведена фігура має вісь симетрії $x = 0$. Згідно з методом симетрії центр ваги тіла знаходиться на осі симетрії, тому $x_C = 0$. Розіб'ємо дану фігуру на прямокутник (рис. 4.50, б) і фігуру, обмежену параболою та віссю Ox (рис. 4.45, в).

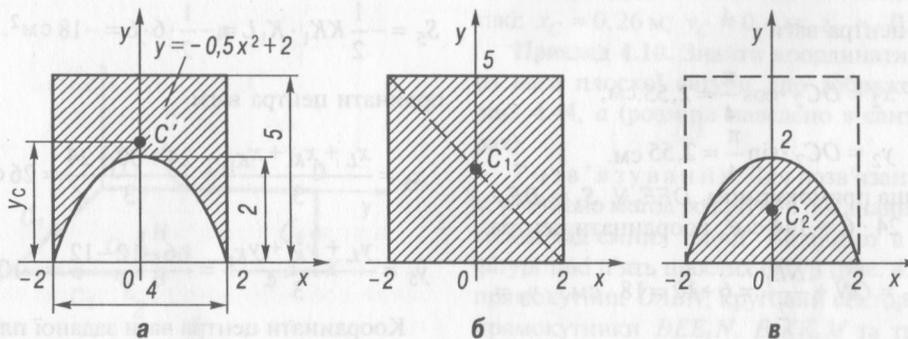


Рис. 4.45

Координати центра ваги прямокутника $C_1(0; 2,5)$, а його площа $S_1 = 4 \cdot 5 = 20$.

Координати центра ваги криволінійної фігури ($a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$) визначають за формулами (4.36):

$$x_C = \frac{1}{S} \int_a^b xy dx, \quad y_C = \frac{1}{S} \int_a^b \frac{y}{2} y dx,$$

де $S = \int_a^b y dx$ — площа фігури; $y dx = dS$ — елемент площі (рис. 4.51).

Площу S_2 криволінійної фігури записуємо зі знаком мінус, оскільки фігура є вирізаною:

$$S_2 = - \int_{-2}^2 (2 - 0,5x^2) dx =$$

$$= -2 \cdot \left(2x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^2 = -2 \cdot \left(4 - \frac{4}{3} \right) = -\frac{16}{3}.$$

Координата центра ваги y_{C_2} фігури, обмеженої параболою і віссю Ox ,

$$y_2 = \frac{\frac{1}{2} \int_{-2}^2 (2 - 0,5x^2)^2 dx}{S_2} = \frac{\int_0^2 \left(4 - 2x^2 + \frac{x^4}{4} \right) dx}{\frac{16}{3}} =$$

$$= \frac{3 \cdot \left(8 - \frac{16}{3} + 1,6 \right)}{16} = \frac{12,8}{16} = 0,8.$$

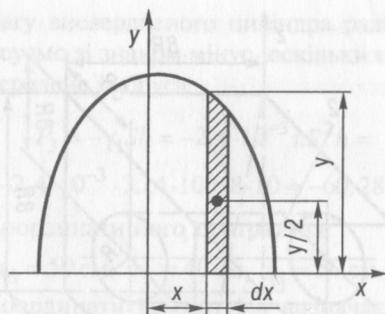


Рис. 4.46

Отже, координати центра ваги криволінійної фігури $C_2(0; 0,8)$.

Координату заданої фігури відносно осі Oy визначимо за четвертою з формул (4.36):

$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{2,5 \cdot 20 + 0,8 \left(-\frac{16}{3} \right)}{20 - \frac{16}{3}} = \frac{150 - 12,8}{44} = \frac{34,3}{11} \approx 3,12.$$

Отже, координати центра ваги $x_C = 0$, $y_C = 3,12$.

Приклад 4.12. На рис. 4.47, а показано розріз тіла, який складається з циліндра, радіус якого R , висота h , та двох півкуль радіуса R_1 і R_2 . Центри півкуль збігаються з центрами нижньої і верхньої основ циліндра. Визначити центр ваги цього тіла, якщо $R_1 = R$, $R_2 = 4R$, $h = 6R_2$.

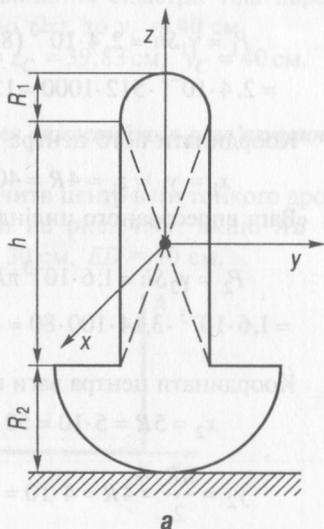
Розв'язування. Оскільки вісь Oz є для даного тіла віссю симетрії, то шуканий центр ваги C цього тіла лежить на осі Oz . Тому достатньо вирахувати тільки одну координату z_C . Позначимо об'єми півкуль і циліндра відповідно V_1, V_2, V_3 , а їхні центри ваги C_1, C_2, C_3 (рис. 4.47, б). Початок координат помістимо в точку C_3 — центр ваги циліндра. Знайдемо об'єми і координати центрів ваги півкуль і циліндра.

Параметри першої півкулі:

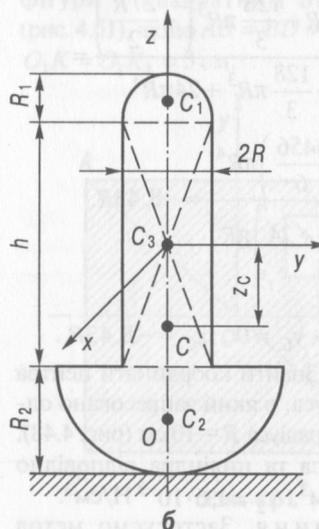
$$V_1 = \frac{2}{3} \pi R_1^3 = \frac{2}{3} \pi R^3,$$

$$z_1 = \frac{h}{2} + \frac{3}{8} R_1 = \frac{6R_2}{2} + \frac{3}{8} R_1 =$$

$$= \frac{6 \cdot 4R}{2} + \frac{3}{8} R = \frac{99}{8} R.$$



а



б

Рис. 4.47

Зауваження. Відстань від центра ваги півкулі радіуса R до її основи згідно з (4.51) дорівнює $\frac{3}{8}R$.

Для другої півкулі:

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi R_2^3 = \frac{2}{3}\pi(4R)^3 = \frac{128}{3}\pi R^3;$$

$$z_2 = -\left(\frac{h}{2} + \frac{3}{8}R_2\right) = -\left(\frac{6R_2}{2} + \frac{3}{8}R_2\right) = \\ = -\left(\frac{6 \cdot 4R}{2} + \frac{3 \cdot 4R}{8}\right) = -\frac{27R}{2}.$$

Об'єм циліндра і координата центра рівноваги:

$$V_3 = \pi R^2 h = \pi R^2 \cdot 6R_2 = \pi R^2 \cdot 6 \cdot 4R = 24\pi R^3, \\ z_3 = 0.$$

Шукану координату z_C центра ваги даного тіла обчислюємо за п'ятою формулою із (4.34):

$$z_C = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2 + V_3 z_3}{V_1 + V_2 + V_3} = \\ = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3 \cdot \frac{99}{8}R + \frac{128}{3}\pi R^3 \left(-\frac{27R}{2}\right)}{\frac{2}{3}\pi R^3 + \frac{128}{3}\pi R^3 + 24\pi R^3} = \\ = \frac{\left(\frac{198}{24} - \frac{3456}{6}\right)\pi R^4}{\left(\frac{2}{3} + \frac{128}{3} + 24\right)\pi R^3} \approx -8,43R.$$

Отже, $x_C = 0$, $y_C = 0$, $z_C \approx -8,43R$.

Приклад 4.13. Знайти координати центра ваги кубічного бруса, в який запресовано однорідний циліндр радіуса $R = 10$ см (рис. 4.48). Питома вага бруса та циліндра відповідно $\gamma_1 = 2,4 \cdot 10^{-3}$ Н/см³, $\gamma_2 = 1,6 \cdot 10^{-3}$ Н/см³.

Розв'язування. Застосуємо метод розбиття та метод симетрії. Виділимо три

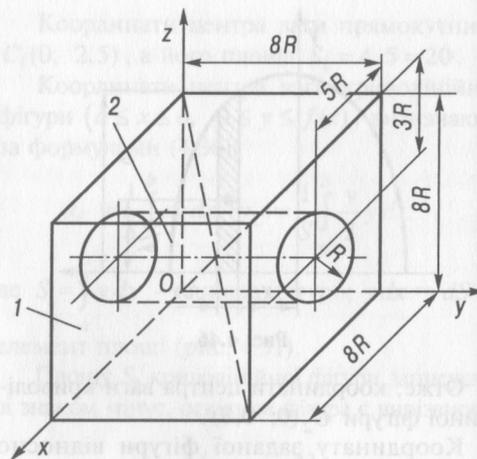


Рис. 4.48

тіла: кубічний брус і висвердлений циліндр питомої ваги γ_1 та впресований циліндр питомої ваги γ_2 . Позначимо вагу бруса, впресованого і висвердленого циліндрів відповідно P_1 , P_2 і P_3 , а центри їх ваги — x_1 , y_1 , z_1 ; x_2 , y_2 , z_2 ; x_3 , y_3 , z_3 відповідно.

Вага суцільного бруса

$$P_1 = \gamma_1 Sh = 2,4 \cdot 10^{-3} (8R)^3 = \\ = 2,4 \cdot 10^{-3} \cdot 512 \cdot 1000 = 1228,8 \text{ Н.}$$

Координати його центра ваги

$$x_1 = y_1 = z_1 = 4R = 40 \text{ см.}$$

Вага впресованого циліндра

$$P_2 = \gamma_2 Sh = 1,6 \cdot 10^{-3} \pi R^2 h = \\ = 1,6 \cdot 10^{-3} \cdot 3,14 \cdot 100 \cdot 80 \approx 40,192 \text{ Н.}$$

Координати центра ваги цього циліндра

$$x_2 = 5R = 5 \cdot 10 = 50 \text{ см,}$$

$$y_2 = \frac{8R}{2} = 4R = 4 \cdot 10 = 40 \text{ см,}$$

$$z_2 = 8R - 3R = 5R = 5 \cdot 10 = 50 \text{ см.}$$

Вагу висвердленого циліндра радіуса R запишемо зі знаком мінус, оскільки це тіло висвердлене із бруса:

$$P_3 = -\gamma_1 Sh = -2,4 \cdot 10^{-3} \pi R^2 h = -2,4 \cdot 10^{-3} \cdot 3,14 \cdot 100 \cdot 8 \cdot 10 \approx -60,288 \text{ Н.}$$

Координати його центра ваги

$$x_3 = 50 \text{ см, } y_3 = 40 \text{ см, } z_3 = 50 \text{ см.}$$

Координати всього тіла визначаємо за формулами

$$x_C = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{1228,8 \cdot 40 + 40,192 \cdot 50 - 60,288 \cdot 50}{1228,8 + 40,192 - 60,288} = 39,83 \text{ см,}$$

$$z_C = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{1228,8 \cdot 40 + 40,192 \cdot 50 - 60,288 \cdot 50}{1228,8 + 40,192 - 60,288} = 39,83 \text{ см.}$$

Оскільки площина симетрії тіла паралельна площині Oxz , то $y_C = 40$ см.

Отже, $x_C = z_C = 39,83$ см; $y_C = 40$ см.

4.3.3. Задачі для самостійного розв'язування

4.21. Визначити центр ваги тонкого дроту, показаного на рис. 4.49, якщо $AB = 40$ см, $BD = 30$ см, $ED = 10$ см.

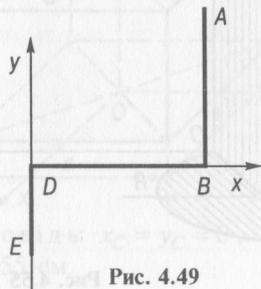


Рис. 4.49

Відповідь: $x_C = 20,625$ см;

$y_C = 9,375$ см.

4.22. Знайти координати центра ваги конструкції, яка складається з однорідних стрижнів, зображених на рис. 4.50, якщо $AB = 0,8$ м, $OA = OB$, $BD = 0,6$ м, $ED = 0,4$ м, $AK = 0,4$ м, $KF = 0,2$ м.

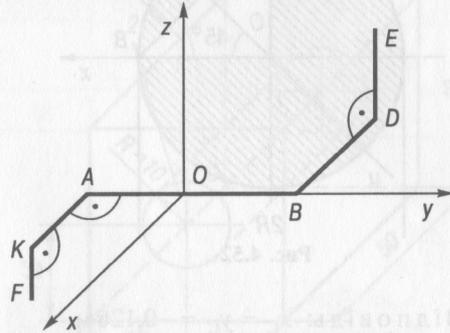


Рис. 4.50

Відповідь: $x_C = -0,108$ м;

$y_C = 0,667$ м; $z_C = 0,025$ м.

4.23. Визначити центр ваги плоскої фігури з квадратним отвором $A_1B_1D_1E_1$ (рис. 4.51), якщо $AB = BD = 10$ см; $A_1B_1 = 2$ см; $O_1K = O_1K_1 = 3$ см.

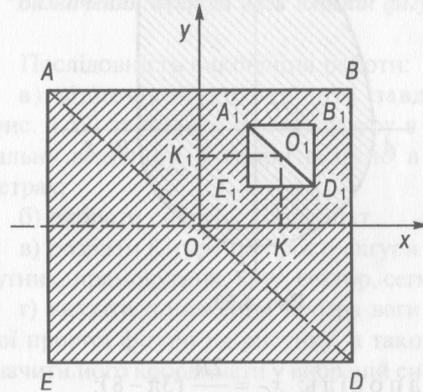


Рис. 4.51

Відповідь: $x_C = y_C = -0,125$ см.

4.24. Знайти координати центра ваги заштрихованої однорідної фігури, зображеної на рис. 4.52, якщо $R = 2$ м.

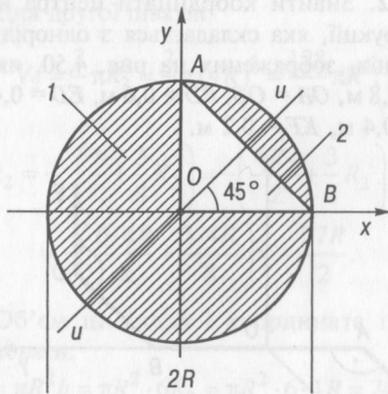


Рис. 4.52

Відповідь: $x_C = y_C = -0,126$ м.

4.25. Знайти координати центра ваги плоскої фігури, обмеженої півколом ABE і четвертиною круга ADB , якщо $AO = OB = R$. Осі координат вказані на рис. 4.53.

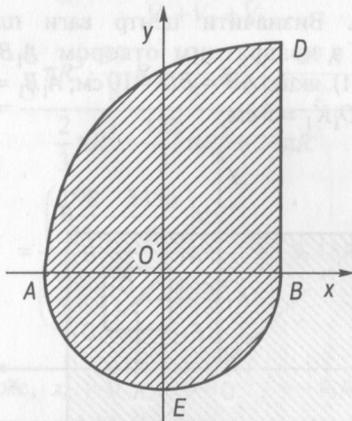


Рис. 4.53

Відповідь: $x_C = \frac{2R}{9\pi} (3\pi - 8)$;

$$y_C = \frac{4R}{3\pi} \cdot \left(\frac{20R}{9\pi} \right)$$

4.26. Знайти координати центра ваги однорідної пластини. Розміри в сантиметрах вказані на рис. 4.54.

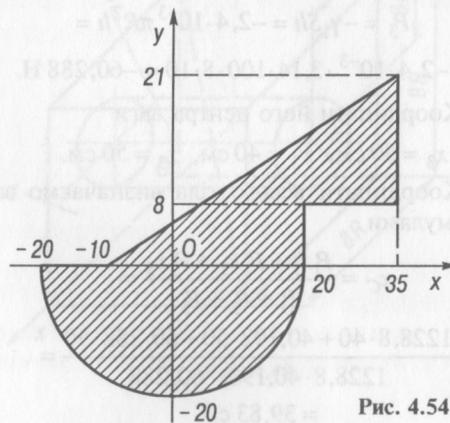


Рис. 4.54

Відповідь: $x_C = 6,27$ см;
 $y_C = -2,56$ см.

4.27. Знайти координати центра ваги однорідного зігнутого листка, який складається з трикутника BCD , прямокутника $ABCO$ і півкруга AEO радіуса $R = 2$ м. Півкруг AEO знаходиться у площині Oxy , трикутник BCD — у площині, паралельній площині Oxy (рис. 4.55).

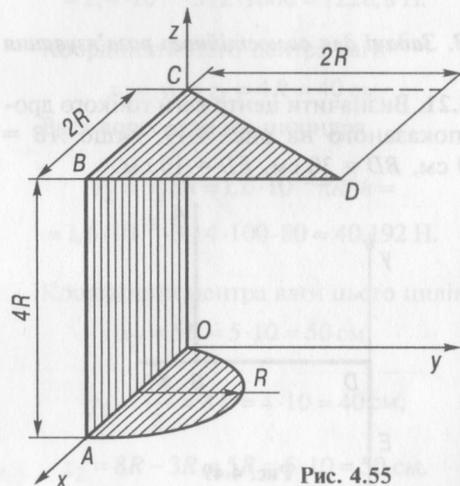


Рис. 4.55

Відповідь: $x_C = 2,12$ м, $y_C = 0,35$ м, $z_C = 4,15$ м.

4.28. Знайти координати центра ваги однорідної плоскої фігури, обмеженої гіперболою $xy = \frac{a^2}{4}$ і прямими $x = a$ та $y = a$ (рис. 4.56).

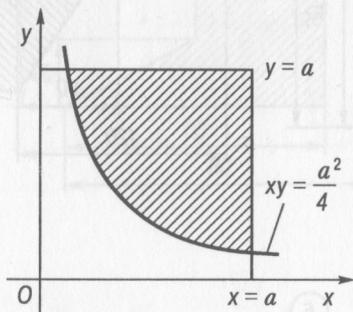


Рис. 4.56

Відповідь: $x_C = y_C = \frac{9a}{8(3 - \ln 4)} \approx 0,697a$.

4.29. Визначити положення центра ваги дерев'яного молотка (рис. 4.57), якщо $a = 8$ см, $l = 30$ см, $R = 2$ см.

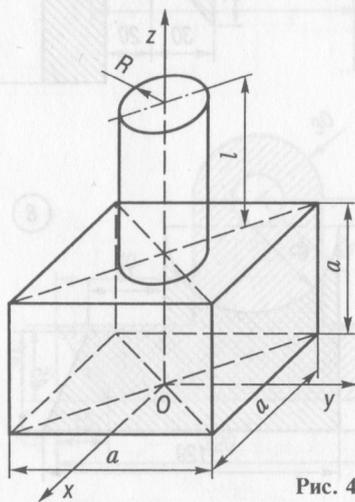


Рис. 4.57

Відповідь: $x_C = y_C = 0$, $z_C = 12,055$ см.

4.30. Знайти координати центра ваги однорідного бруска, розмір якого $40 \times 50 \times 60$ см. У бруску висвердлено циліндричний отвір радіуса $R = 10$ см (рис. 4.58). Розміри на рисунку вказано в сантиметрах.

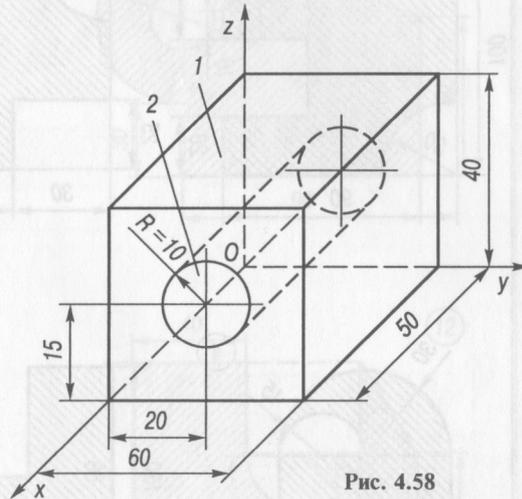


Рис. 4.58

Відповідь: $x_C \approx 25$ см, $y_C \approx 31,505$ см, $z_C \approx 20,75$ см.

4.3.4. Розрахункові завдання "Визначення центра ваги плоскої фігури"

Послідовність виконання роботи:

а) відповідно до варіанта завдання (рис. 4.59) зобразити плоску фігуру в натуральну величину. Розміри вказано в міліметрах;

б) вибрати систему координат;

в) розбити фігуру на прості фігури (трикутник, прямокутник, круг, сектор, сегмент);

г) вказати положення центра ваги кожної простої фігури на рисунку, а також визначити його координати у вибраній системі;

д) визначити положення центра ваги заданої плоскої фігури і вказати його на рисунку.

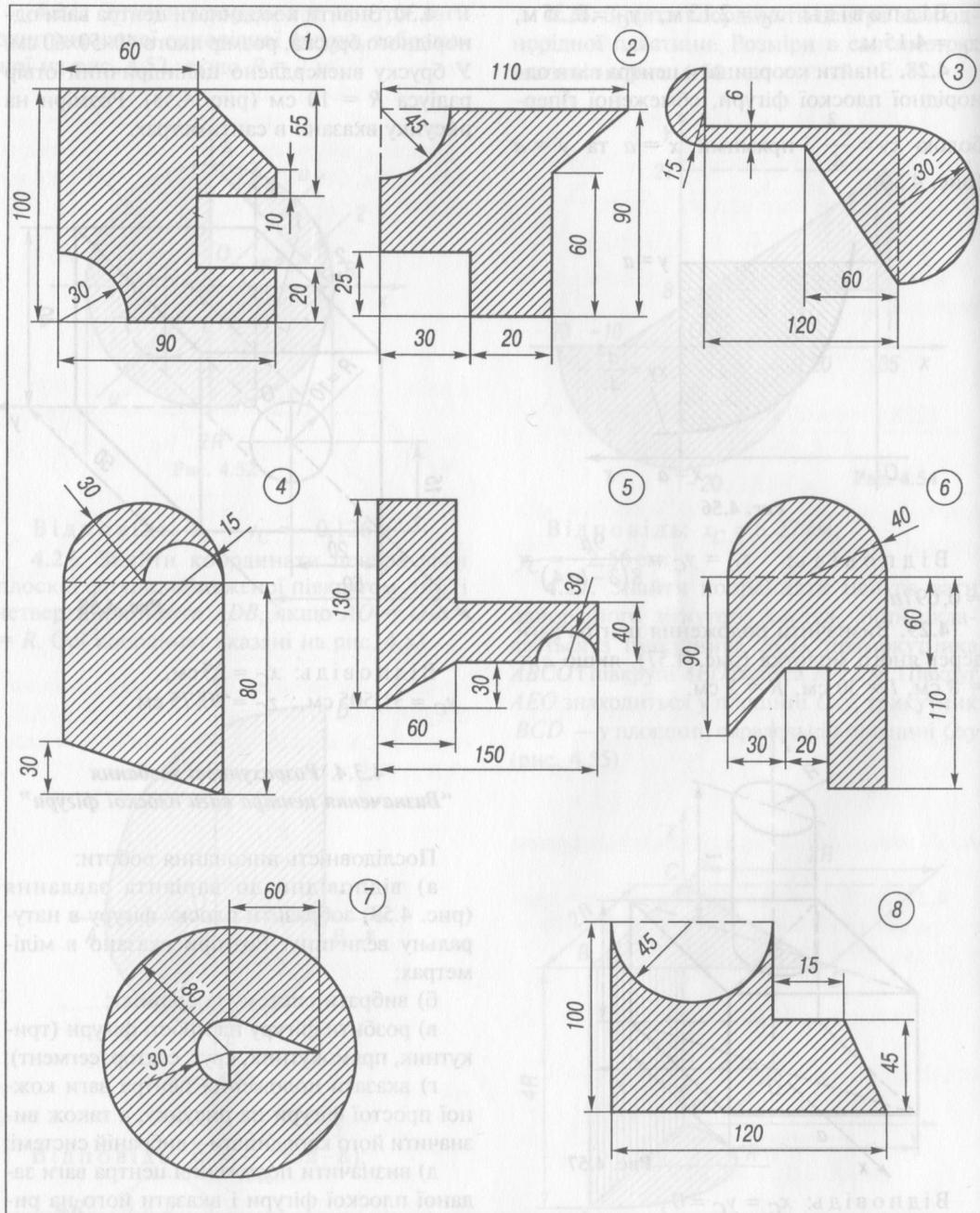


Рис. 4.59 (початок)

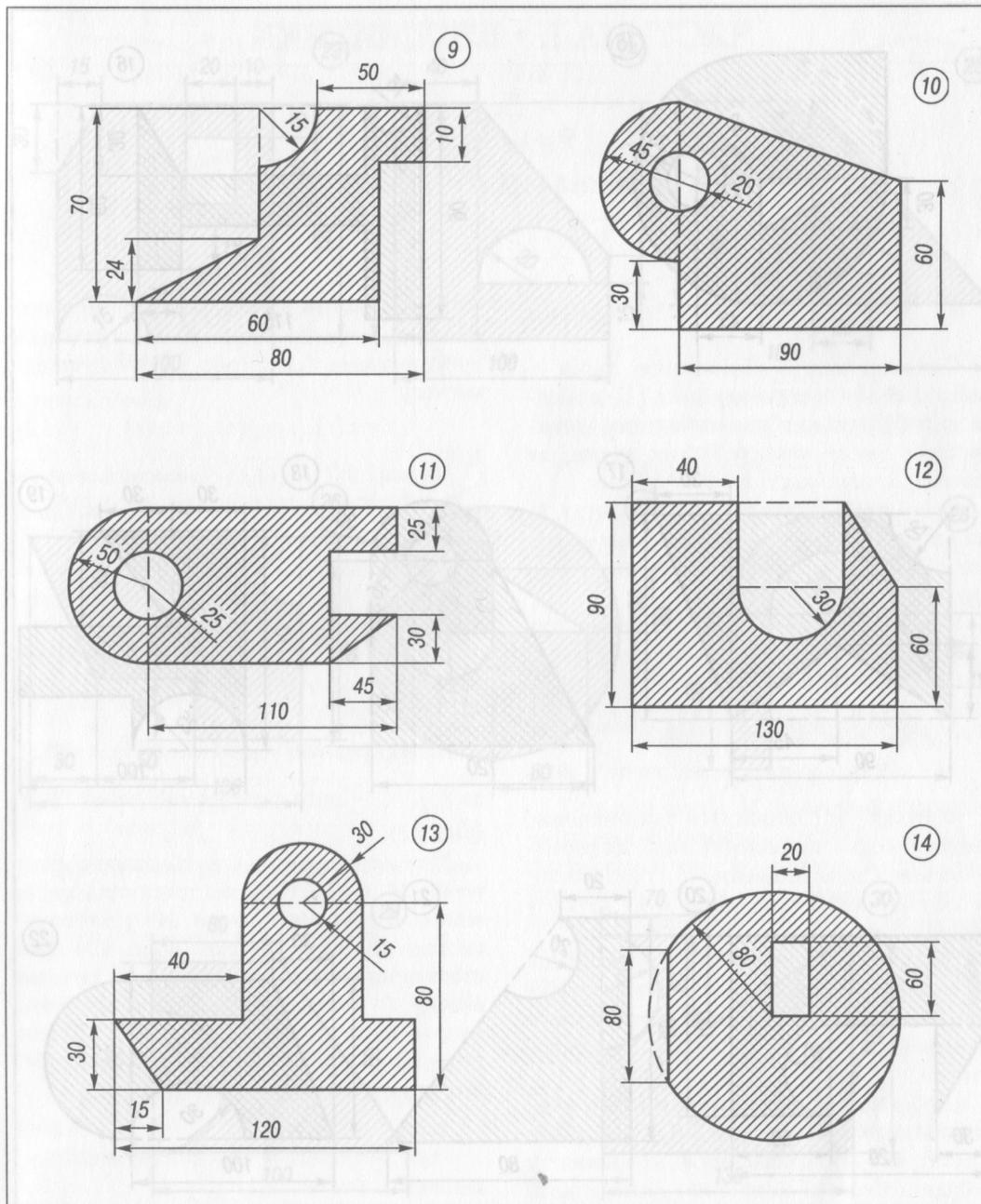


Рис. 4.59 (продовження)

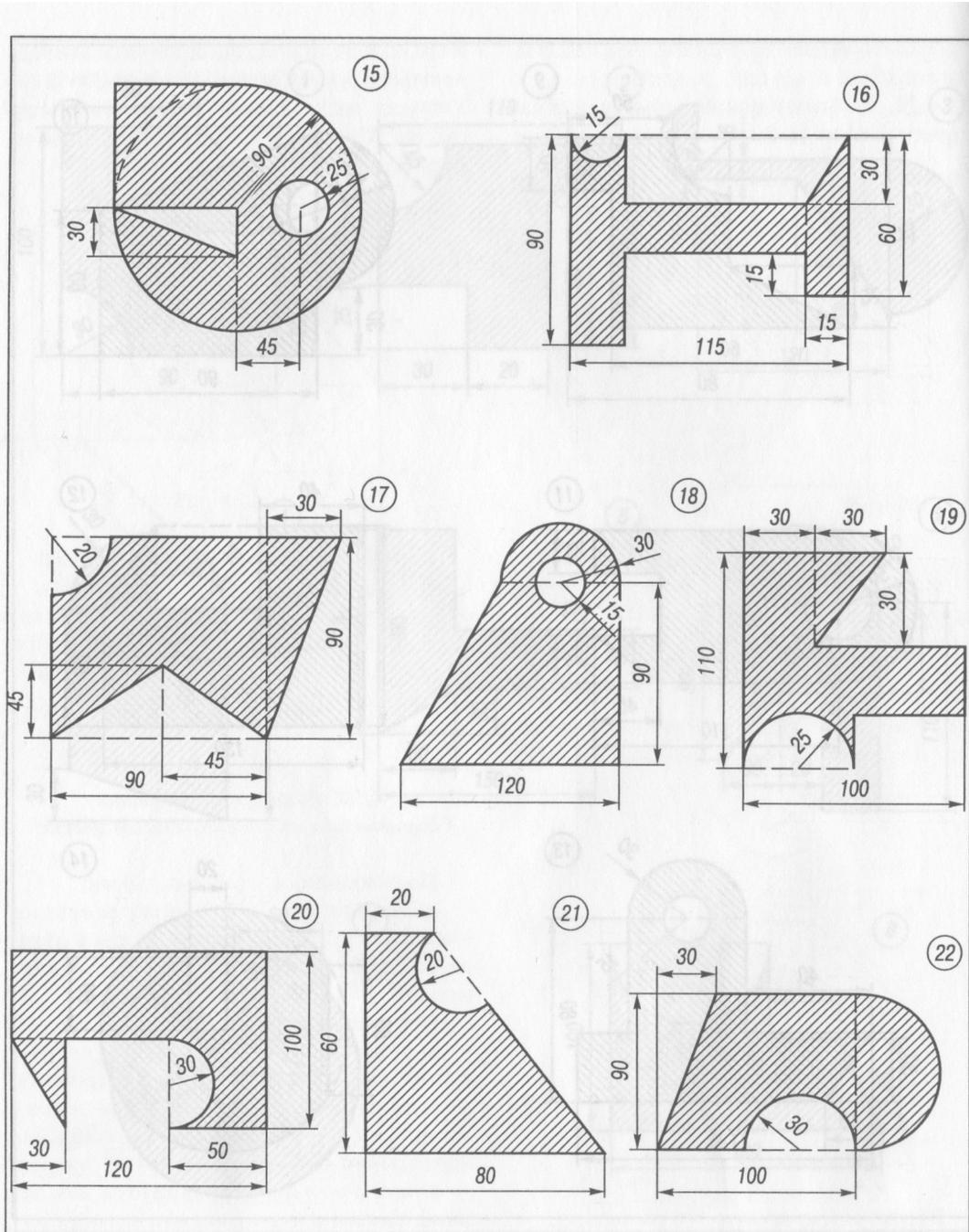


Рис. 4.59 (продовження)

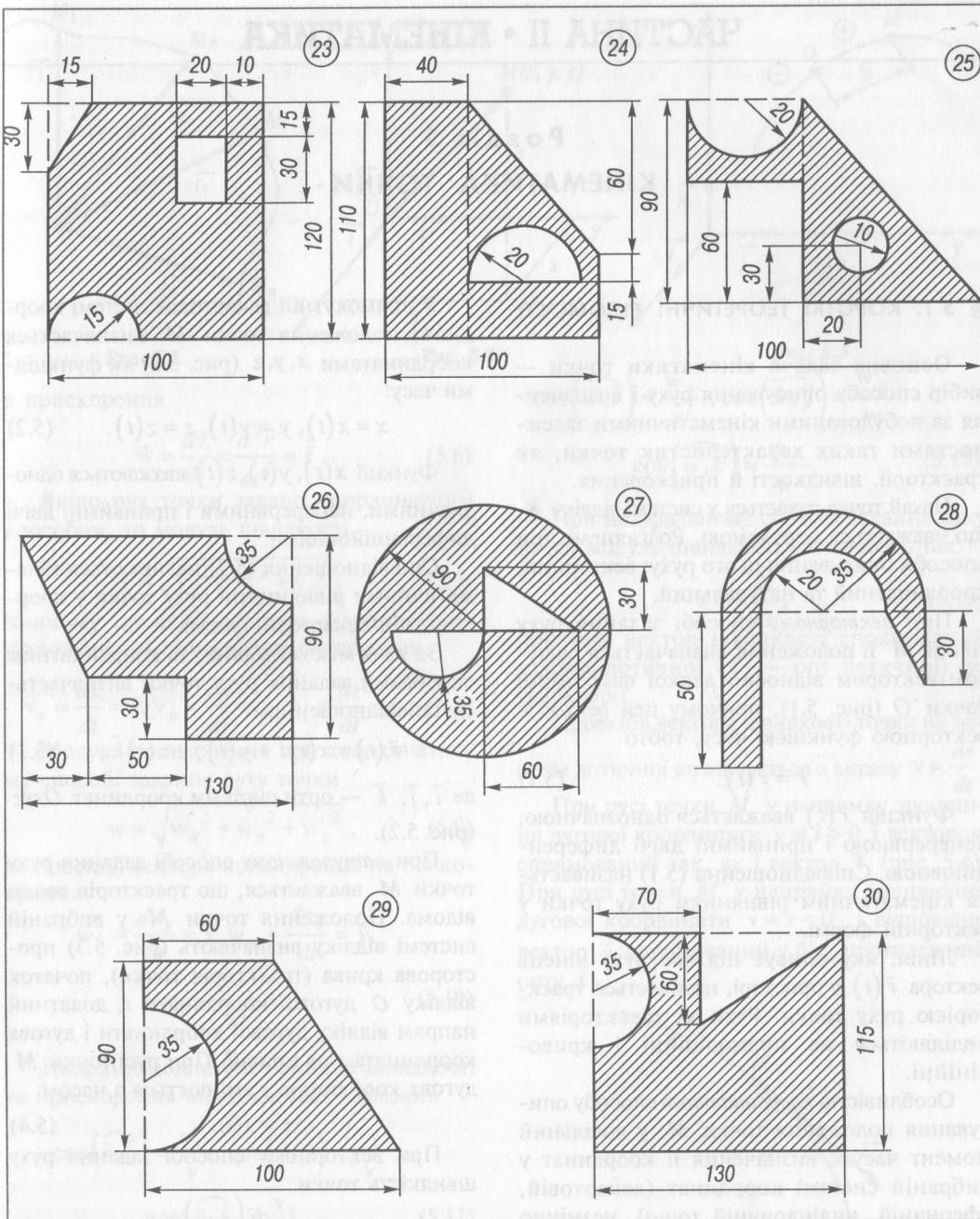


Рис. 4.59 (закінчення)

ЗМІСТ

Передмова	3
ЧАСТИНА I. СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА	5
Визначення, аксіоми та найпростіші теореми	5
Розділ 1. Система збіжних сил	8
§ 1.1. Рівновага збіжної системи сил та методика розв'язування задач	8
§ 1.2. Плоска збіжна система сил. Рівновага простої конструкції	10
1.2.1. Короткі теоретичні відомості	10
1.2.2. Приклади розв'язування задач	11
1.2.3. Задачі для самостійного розв'язування	16
§ 1.3. Рівновага складеної конструкції	18
1.3.1. Короткі теоретичні відомості	18
1.3.2. Приклади розв'язування задач	19
1.3.3. Задачі для самостійного розв'язування	22
§ 1.4. Рівновага збіжної системи сил з урахуванням сил тертя	24
1.4.1. Короткі теоретичні відомості	24
1.4.2. Приклади розв'язування задач	25
1.4.3. Задачі для самостійного розв'язування	29
§ 1.5. Просторова збіжна система сил	32
1.5.1. Короткі теоретичні відомості	32
1.5.2. Приклади розв'язування задач	32
1.5.3. Задачі для самостійного розв'язування	33
Розділ 2. Абсолютно тверде тіло під дією довільної плоскої системи сил	36
§ 2.1. Рівняння рівноваги абсолютно твердого тіла	36
§ 2.2. Рівняння рівноваги складеної конструкції	37
§ 2.3. Приклади розв'язування задач	37
§ 2.4. Задачі для самостійного розв'язування	43
§ 2.5. Розрахункові завдання "Визначення реакцій опор складеної конструкції"	45
Розділ 3. Плоскі ферми. Визначення зусиль у стрижнях	51
§ 3.1. Короткі теоретичні відомості	51
§ 3.2. Приклади розв'язування задач	52
§ 3.3. Задачі для самостійного розв'язування	62
§ 3.4. Розрахункові завдання "Визначення зусиль у стрижнях плоскої ферми"	65
Розділ 4. Абсолютно тверде тіло під дією довільної просторової системи сил	68
§ 4.1. Рівновага системи сил, довільно розміщених у просторі	68
4.1.1. Короткі теоретичні відомості	68
4.1.2. Приклади розв'язування задач	68
4.1.3. Задачі для самостійного розв'язування	74
4.1.4. Розрахункові завдання "Визначення реакцій опор плит"	77
§ 4.2. Зведення системи сил до найпростішого вигляду	82

4.2.1. Короткі теоретичні відомості	82
4.2.2. Приклади розв'язування задач	83
4.2.3. Задачі для самостійного розв'язування	86
§ 4.3. Центр системи паралельних сил	88
4.3.1. Короткі теоретичні відомості	88
4.3.2. Приклади розв'язування задач	96
4.3.3. Задачі для самостійного розв'язування	101
4.3.4. Розрахункові завдання “Визначення центра ваги плоскої фігури”	103