

AN UNUSUAL
EXTRACELLULAR
CYSTOBLAST

W. H. HAYES

University of California

San Diego, California

Received 10/15/54

Accepted 11/15/54

Revised 12/15/54

Published 1/15/55

Volume 10, Number 1

Pages 1-10

Copyright © 1955

by the American Society

of Parasitology

and the American Microscopical Society

0003-7868/55/0010-0001\$01.00

Printed in the United States of America

Published by the American Society of Parasitology

and the American Microscopical Society

1955

Volume 10, Number 1

Pages 1-10

Copyright © 1955

by the American Society

of Parasitology

and the American Microscopical Society

0003-7868/55/0010-0001\$01.00

Printed in the United States of America

Published by the American Society of Parasitology

and the American Microscopical Society

1955

Volume 10, Number 1

Pages 1-10

Copyright © 1955

by the American Society

of Parasitology

and the American Microscopical Society

0003-7868/55/0010-0001\$01.00

Printed in the United States of America

Published by the American Society of Parasitology

and the American Microscopical Society

1955

Volume 10, Number 1

Pages 1-10

Copyright © 1955

by the American Society

of Parasitology

and the American Microscopical Society

0003-7868/55/0010-0001\$01.00

Printed in the United States of America

Published by the American Society of Parasitology

and the American Microscopical Society

1955

Volume 10, Number 1

Pages 1-10

Copyright © 1955

by the American Society

of Parasitology

and the American Microscopical Society

0003-7868/55/0010-0001\$01.00

and the American Microscopical Society

1955

Volume 10, Number 1

Pages 1-10

Copyright © 1955

by the American Society

of Parasitology

and the American Microscopical Society

0003-7868/55/0010-0001\$01.00

Printed in the United States of America

Published by the American Society of Parasitology

and the American Microscopical Society

1955

Volume 10, Number 1

Pages 1-10

Copyright © 1955

by the American Society

of Parasitology

and the American Microscopical Society

0003-7868/55/0010-0001\$01.00

Printed in the United States of America

Published by the American Society of Parasitology

and the American Microscopical Society

1955

Volume 10, Number 1

Pages 1-10

Copyright © 1955

by the American Society

of Parasitology

and the American Microscopical Society

0003-7868/55/0010-0001\$01.00

and the American Microscopical Society

1955

Volume 10, Number 1

Pages 1-10

Copyright © 1955

by the American Society

of Parasitology

and the American Microscopical Society

0003-7868/55/0010-0001\$01.00

Printed in the United States of America

Published by the American Society of Parasitology

and the American Microscopical Society

1955

Volume 10, Number 1

Pages 1-10

Copyright © 1955

by the American Society

of Parasitology

and the American Microscopical Society

0003-7868/55/0010-0001\$01.00

Printed in the United States of America

Published by the American Society of Parasitology

and the American Microscopical Society

1955

Volume 10, Number 1

Pages 1-10

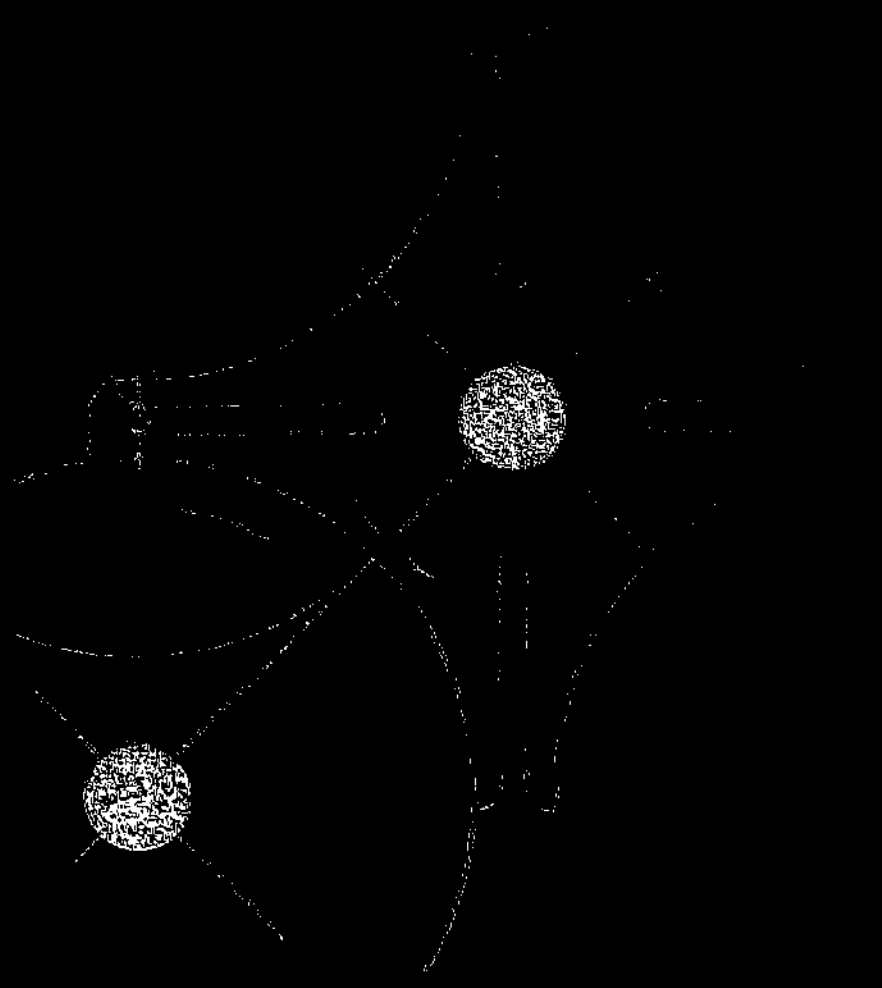
Copyright © 1955

by the American Society

of Parasitology

and the American Microscopical Society

0003-7868/55/0010-0001\$01.00



М.С. МОВНИН
А.Б. ИЗРАЕЛИТ
А.Г. РУБАШКИН

3221
М74

ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

3-е издание,
переработанное и дополненное

*Допущено
Государственным комитетом СССР
по народному образованию в качестве
учебника для технологических не-
машиностроительных специальностей
техникумов*

М884



Ленинград
«Машиностроение»
Ленинградское отделение
1990

ББК 30.12я7
М74
УДК 531.001.32 (07)

Рецензент А. И. Аркуша

Мовнин М. С. и др.

М74 Основы технической механики: Учебник для технологических немашиностроительных специальностей техникумов/ М. С. Мовнин, А. Б. Израелит, А. Г. Рубашкин. — 3-е изд., перераб. и доп. — Л.: Машиностроение. Ленингр. отделение, 1990. — 288 с.: ил.

ISBN 5-217-00902-0

Кратко изложены элементарные основы технической механики. Теоретические построения и выводы формул даны без использования аппарата высшей математики на основе единой методической системы, обеспечивающей наглядность и раскрытие физической сущности рассматриваемых явлений. Приведены примеры по всем вопросам курса, которые помогут учащимся при выполнении домашних заданий.

Третье издание (2-е изд. 1982 г.) дополнено примерами конструкций, применяемых в гибких производственных системах.

М $\frac{2004030000-137}{038(01)-90}$ 137—90

ББК 30.12я7

ISBN 5-217-00902-0

© Издательство «Машиностроение», 1978
© М. С. Мовнин, А. Б. Израелит,
А. Г. Рубашкин, 1990, с изменениями

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник «Основы технической механики» содержит комплекс важнейших общетехнических знаний и включает четыре раздела: статику; основы сопротивления материалов; элементы кинематики и динамики; детали механизмов и машин.

Изучение технической механики вырабатывает навыки для постановки и решения прикладных задач. Этим обусловлено особенно важное значение технической механики как основы для изучения специальных дисциплин. С другой стороны, явления, рассматриваемые в технической механике, являются иллюстрацией законов диалектического материализма. В связи с этим изучение технической механики способствует воспитанию передового мировоззрения и повышению общей культуры учащихся.

Настоящий учебник по предмету «Основы технической механики» предназначен для учащихся техникумов технологических и немашиностроительных специальностей и специальности эксплуатации транспорта. Он написан в соответствии с действующей программой для большинства средних специальных учебных заведений.

Характер изложения учебного материала в учебнике позволяет при необходимости изменять последовательность изучения разделов. Однако авторы считают более целесообразным построение, принятое в учебнике. В учебник включены некоторые элементы программированного контроля при сохранении традиционного изложения основного учебного материала. В конце каждой логически завершённой темы первых трех разделов учебника приведены упражнения, предназначенные для организации самостоятельной работы учащихся. К вопросам и упражнениям в конце книги даны ответы и консультации, позволяющие проверить правильность их выполнения и выяснить причину ошибок. Типовые примеры, приведенные во всех разделах предмета, могут оказать помощь учащимся вечерних и заочных отделений при выполнении домашних заданий.

Настоящее третье издание учебника незначительно отличается от предыдущего второго издания 1982 г. Исправлены обнаруженные опечатки и погрешности, проведена переработка ряда разделов, добавлены новые пояснения.

Авторский коллектив приносит глубокую благодарность всем приславшим замечания к предыдущим изданиям учебника. Авторы постарались их учесть при переработке учебника.

- F и F_x ; F_y — сила и проекции сил на оси;
 F_{Σ} — равнодействующая сила;
 R — реакция опоры;
 G — сила тяжести;
 $M_A(\vec{F})$, $M_O(\vec{F})$ — моменты сил относительно точек;
 $M_x(\vec{F})$; $M_y(\vec{F})$; $M_z(\vec{F})$ — моменты сил относительно осей;
 M — момент пары сил;
 $\vec{F}_{гл}$ — главный вектор;
 $M_{гл}$ — главный момент;
 C — центр тяжести;
 S_x ; S_y — статические моменты;
 J_p — полярный момент инерции;
 J_x ; J_y ; J_z — осевые моменты инерции;
 σ ; τ — нормальное и касательное напряжения;
 A — площадь сечения;
 V — объем тела;
 N — продольная сила;
 Q — поперечная сила;
 M_k ; $M_{вр}$; $M_{из}$ — крутящий, вращающий и изгибающий моменты;
 ϵ — продольная деформация;
 ϵ_{\perp} — поперечная деформация;
 ψ — угол сдвига;
 μ — коэффициент Пуассона;
 E — модуль продольной упругости;
 W_p , W — моменты сопротивления при кручении и изгибе;
 φ — угол поворота при кручении;
 y — прогиб балок;
 θ — угол поворота сечений бруса;
 σ_R ; σ_{-1} — пределы выносливости;
 s — расстояние;
 v — скорость;
 a — ускорение;
 ω и ϵ — угловые скорость и ускорение;
 n — частота вращения;
 m — масса точки;
 W — работа силы;
 P — мощность;
 R_f и M_f — сила трения и момент трения;
 f и f_k — коэффициенты трения скольжения и качения;
 η — к. п. д.

ГЛАВА I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИКИ

§ 1. Механическое движение. Равновесие

В механике изучают законы взаимодействия и движения материальных тел. *Механическим движением называют происходящее с течением времени изменение положения тел или точек в пространстве.*

Частным случаем движения является состояние покоя. Покой всегда имеет относительный характер, так как покоящееся тело рассматривается как неподвижное по отношению к некоторому другому телу, которое, в свою очередь, может перемещаться в пространстве. Абсолютно неподвижных тел в природе нет. Например, мы говорим, что станина машины или фундамент сооружения находится в покое. Они действительно неподвижны относительно Земли, но вместе с ней совершают сложное движение вокруг Солнца.

§ 2. Материальная точка. Абсолютно твердые и деформируемые тела

Понятия статики вошли в науку как результат многовековой практической деятельности человека. Они подтверждены опытами и наблюдениями над явлениями природы.

Тело можно рассматривать как материальную точку, т. е. его можно представить геометрической точкой, в которой сосредоточена вся масса тела, в том случае, когда размеры тела не имеют значения в рассматриваемой задаче. Например, при изучении движения планет и спутников их считают материальными точками, так как размеры планет и спутников пренебрежимо малы по сравнению с размерами их орбит. С другой стороны, изучая движение планеты (например, Земли) вокруг оси, ее уже нельзя считать материальной точкой.

Системой называется совокупность материальных точек, движения и положения которых взаимозависимы. Из приведенного определения следует, что любое физическое тело можно рассматривать как систему материальных точек.

Рассматривая равновесие тел, их считают *абсолютно твердыми* (или абсолютно жесткими), т. е. предполагают, что никакие внешние воздействия не вызывают изменения их размеров и формы и что расстояние между любыми двумя точками тела всегда остается неизменным.

В действительности все тела под влиянием силовых воздействий со стороны других тел деформируются и изменяют свои размеры или форму. Но материалы, форму и размеры элементов конструкций подбирают с таким расчетом, чтобы их деформации были минимальными, поэтому такими деформациями пренебрегают и рассматривают элементы конструкций как абсолютно твердые тела.

§ 3. Сила—вектор. Система сил. Эквивалентность сил

Абсолютно твердые тела могут вступать во взаимодействие, в результате которого изменяется характер их движения. Сила является мерой этого взаимодействия. Например, взаимодействие планет и Солнца определяется силами тяготения. Действие силы на тело определяется тремя факторами: численным значением, направлением и точкой приложения, т. е. сила является *векторной величиной*.

Вектор силы изображается отрезком, на конце которого ставится стрелка. Стрелка указывает направление вектора, длина отрезка — значение вектора, измеренное в выбранном масштабе. Вектор в тексте обозначают одной буквой со стрелкой наверху \vec{F} , \vec{a} , \vec{v} , а на схемах (рис. 1, а, б) стрелки не ставятся, так как само обозначение вектора в виде направленного отрезка достаточно наглядно характеризует его свойства.

Модуль или *численное значение силы* в СИ измеряется в ньютонах (Н). Применяют также и более крупные единицы измерения: 1 кильоньютон (1 кН = 10^3 Н), 1 меганьютон (1 МН = 10^6 Н).

Системой сил называют совокупность нескольких сил, приложенных к телу, точке или системе тел и точек.

Система сил, линии действия которых лежат в разных плоскостях, называется *пространственной*. Если же линии действия рассматриваемых сил лежат в одной плоскости, система называется *плоской*. Система сил с пересекающимися в одной точке линиями действия называется *сходящейся*. Сходящаяся система сил может быть как пространственной, так и плоской. Наконец, различают еще систему параллельных сил, которая аналогично сходящейся может быть пространственной или плоской.

Две системы сил *эквивалентны*, если взятые порознь они оказывают одинаковое механическое действие на тело. Из этого определения следует, что две системы сил, эквивалентные третьей, эквивалентны между собой. Любую сложную систему сил всегда можно за-

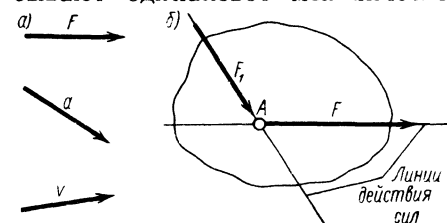


Рис. 1

менить более простой эквивалентной ей системой сил. Одну силу, эквивалентную данной системе сил, называют *равнодействующей* этой системы. Силу, равную по модулю равнодействующей и направленную по той же линии действия, но в противоположную сторону, называют *уравновешивающей* силой. Если к системе сил добавлена уравновешивающая сила, то полученная новая система находится в равновесии и соответственно эквивалентна нулю.

§ 4. Аксиомы статики

Статика основана на аксиомах, вытекающих из опыта и принимаемых без доказательств. Аксиомы статики устанавливают основные свойства сил, приложенных к абсолютно твердому телу.

Первая аксиома определяет уравновешенную систему сил. Система сил, приложенная к материальной точке, является *уравновешенной*, если под ее воздействием точка находится в состоянии относительного покоя или движется равномерно и прямолинейно.

Рассматривая первую аксиому, нетрудно установить, что уравновешенная система сил как причина механического движения эквивалентна нулю.

Тело (в отличие от точки) под действием уравновешенной системы не всегда находится в покое или движется равномерно и прямолинейно. Возможен случай, когда уравновешенная система сил, а точнее уравновешенная система пар сил (см. § 14) вызывает равномерное вращение тела вокруг некоторой неподвижной оси. Следовательно, если на тело действует уравновешенная система сил, то тело либо находится в состоянии относительного покоя, либо движется равномерно и прямолинейно, либо равномерно вращается вокруг неподвижной оси.

Вторая аксиома устанавливает условие равновесия двух сил. Две равные по модулю или численному значению силы ($F_1 = F_2$),

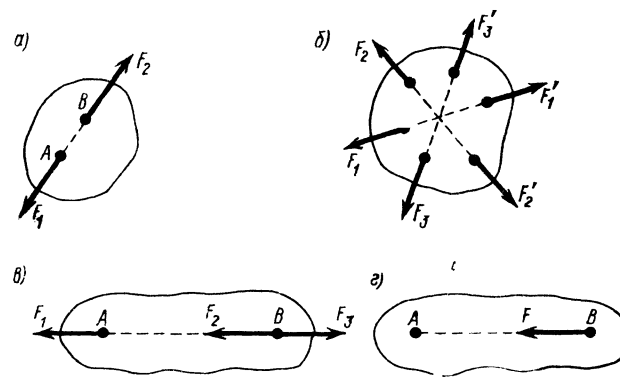


Рис. 2

приложенные к абсолютно твердому телу и направленные по одной прямой в противоположные стороны, взаимно уравновешиваются (рис. 2, а).

Третья аксиома служит основой для преобразования сил. Не нарушая механического состояния абсолютно твердого тела, в нему можно приложить или отбросить от него уравновешенную систему сил.

Тело (рис. 2, б) находится в состоянии равновесия. Если к нему приложить несколько взаимно уравновешенных сил ($F_1 = F'_1, F_2 = F'_2, F_3 = F'_3$), то равновесие не нарушится. Аналогичный эффект получится при отбрасывании этих уравновешенных сил.

Системы сил, показанные на рис. 2, а, б, эквивалентны, так как они дают одинаковый эффект: под действием каждой из них тело находится в равновесии.

Из аксиомы вытекает следствие, согласно которому всякую силу, действующую на абсолютно твердое тело, можно перенести вдоль линии ее действия в любую точку, не нарушив при этом его механического состояния.

Пусть на тело в точке А действует сила \vec{F}_1 (рис. 2, в). В произвольной точке В на линии действия силы \vec{F}_1 приложим две силы \vec{F}_2 и \vec{F}_3 , равные по модулю \vec{F}_1 и направленные в противоположные стороны. Состояние тела в этом случае не нарушится. Силы \vec{F}_1 и \vec{F}_3 , равные по модулю и противоположно направленные, можно отбросить. Таким образом, силу \vec{F}_1 можно заменить равной силой \vec{F}_2 , перенесенной по линии действия \vec{F}_1 из точки А в точку В (рис. 2, в).

Векторы, которые можно переносить по линии их действия, называют *скользящими*. Как показано выше, сила является *скользящим вектором*.

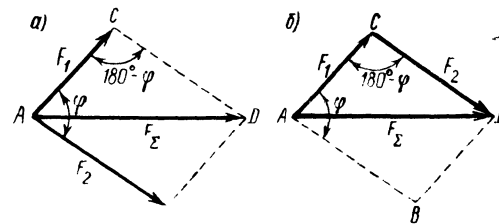
Четвертая аксиома определяет правило сложения двух сил. *Равнодействующая двух сил, приложенных к одной точке, приложена в этой точке и является диагональю параллелограмма, построенного на данных силах.*

Так, равнодействующей двух сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , приложенных к точке А (рис. 3, а), будет сила F_Σ представляющая собой диагональ параллелограмма $ACDB$, построенного на векторах заданных сил. Определение равнодействующей двух сил по правилу параллелограмма называется *векторным*, или *геометрическим*, сложением и выражается векторным равенством

$$\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1)$$

При графическом определении равнодействующей двух сил вместо правила параллелограмма можно пользоваться правилом треугольника. Из произвольной точки А (рис. 3, б) проводим,

Рис. 3



сохраняя масштаб и заданное направление, вектор первой составляющей силы \vec{F}_1 , из его конца проводим вектор, параллельный и равный второй составляющей силе \vec{F}_2 . Замыкающая сторона AD треугольника и будет искомой равнодействующей \vec{F}_Σ . Ее можно также представить как диагональ параллелограмма $ABDC$, построенного на заданных силах.

Модуль равнодействующей двух сил можно определить из треугольника ACD :

$$F_\Sigma^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - \varphi), \text{ где } \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi,$$

поэтому $F_\Sigma^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \varphi$, или

$$F_\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \varphi}. \quad (2)$$

На основании четвертой аксиомы одну силу \vec{F}_Σ можно заменять двумя составляющими силами \vec{F}_1 и \vec{F}_2 . Такую замену часто производят при решении задач статики.

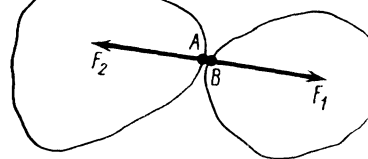


Рис. 4

Пятая аксиома устанавливает, что в природе не может быть одностороннего действия силы. При взаимодействии тел всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие. Так, если на тело

В (рис. 4) действует сила \vec{F}_1 со стороны материального тела А, то на тело А действует со стороны тела В такая же по численному значению сила \vec{F}_2 . Обе силы действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны. Действие и противодействие всегда приложены к различным телам, и именно поэтому они не могут уравновешиваться.

Упражнение 1

1. Даны две силы — одна равнодействующая данной системы сил, а другая уравновешивающая этой же системы. Как направлены эти силы относительно друг друга? Укажите правильный ответ.

А. Они направлены в одну сторону. Б. Они направлены по одной прямой в противоположные стороны. В. Их взаимное расположение может быть произвольным.

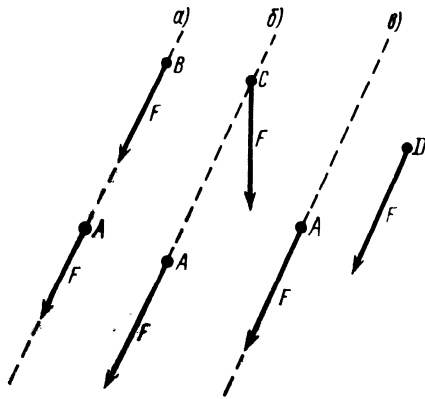


Рис. 5

2. Две системы сил уравновешивают друг друга. Можно ли утверждать, что их равнодействующие равны по модулю и направлены по одной прямой?

А. Да. Б. Нет.

3. Чему станет эквивалентна система сил, если к ней добавить уравновешивающую силу?

4. В каком из случаев, указанных на рис. 5, а, б, в, перенос силы из точки А в точки В, С или D не изменит механического состояния твердого тела?

А. Рис. 5, а. Б. Рис. 5, б. В. Рис. 5, в.

5. На рис. 5, б изображены две силы, линии действия которых лежат в одной плоскости. Можно ли найти их равнодействующую по правилу параллелограмма? А. Можно. Б. Нельзя.

6. При каком значении угла между линиями действия двух сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 их равнодействующая определяется по формуле: А. $F_\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$. Б. $F_\Sigma = F_1 + F_2$. В. $F_\Sigma = F_1 - F_2$.

§ 5. Связи и их реакции

Рассматриваемые в механике тела могут быть свободными и несвободными. *Свободным* называют тело, которое не испытывает никаких препятствий для перемещения в пространстве в любом направлении. Если же тело связано с другими телами, которые ограничивают его движение в одном или нескольких направлениях, то оно является *несвободным*. Тела, которые ограничивают движение рассматриваемого тела, называют *связями*.

При взаимодействии между телом и его связями возникают силы, противодействующие возможным движениям тела. Эти силы действуют на тело со стороны связей и называются *реакциями связей*.

Реакция связи всегда противоположна тому направлению, по которому связь препятствует движению тела. Существование реакций обосновывается аксиомой о действии и противодействии. Для определения реакций связей используют принцип освобождения от связей. *Не изменяя равновесия тела, каждую связь можно отбросить, заменив ее реакцией.* Определение реакций связей является одной из наиболее важных задач статики. Ниже приведены наиболее распространенные виды связей, встречающиеся в задачах.

1. *Связь в виде гладкой (т. е. без трения) плоскости или поверхности* (рис. 6, а). В этом случае реакция связи всегда направлена по нормали к опорной поверхности.

2. *Связь в виде контакта цилиндрической или шаровой поверхности с плоскостью.* В этом случае реакция связи направлена также по нормали к опорной поверхности (рис. 6, б).

3. *Связь в виде шероховатой плоскости* (рис. 6, в). Здесь возникают две составляющие реакции: нормальная \vec{R}_n , перпендикулярная плоскости, и касательная \vec{R}_t , лежащая в плоскости.

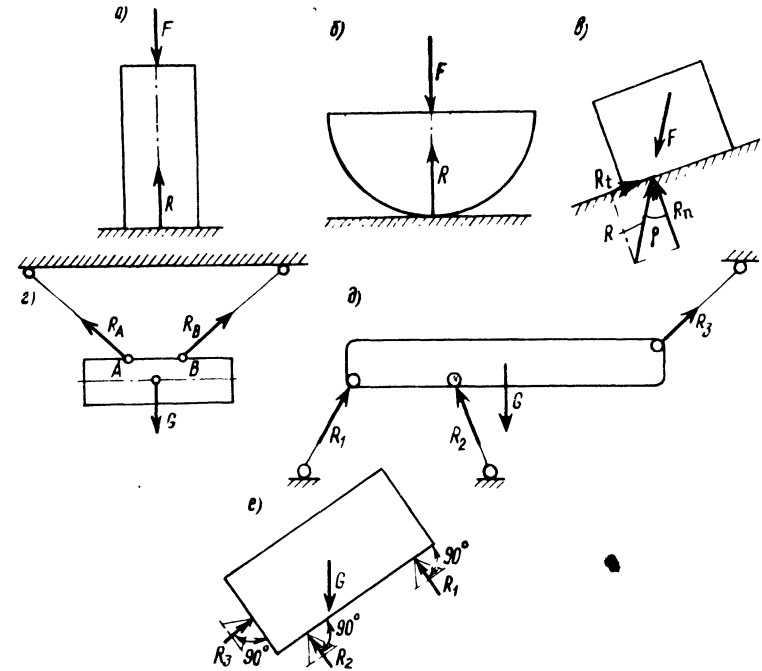


Рис. 6

Касательная реакция \vec{R}_t называется силой трения и всегда направлена в сторону, противоположную реальному или возможному движению тела.

Полная реакция \vec{R} , равная геометрической сумме нормальной и касательной составляющих $\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$, отклоняется от нормали к опорной поверхности на некоторый угол ρ .

При взаимодействии тела с реальными связями возникают силы трения. Однако во многих случаях силы трения незначительны и вследствие этого ими часто пренебрегают.

4. *Гибкая связь*, осуществляемая веревкой, тросом, цепью и т. п. (рис. 6, г). Реакции гибких связей \vec{R}_A и \vec{R}_B направлены вдоль связей, причем гибкая связь может работать только на растяжение.

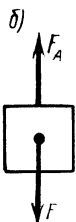


Рис. 7

5. Связь в виде жесткого прямого стержня с шарнирным закреплением концов (рис. 6, д). Здесь реакции \vec{R}_1 , \vec{R}_2 и \vec{R}_3 всегда направлены вдоль осей стержней. Стержни при этом могут быть как растянутыми, так и сжатыми.

6. Связь, осуществляемая ребром двугранного угла или точечной опорой (рис. 6, е). Реакция такой связи \vec{R}_1 или \vec{R}_2 направлена перпендикулярно к поверхности опирающегося тела.

Пример 1. Груз $F = 20$ кН подвешен на тросе АВ (рис. 7, а). Определить реакцию троса.

Решение. Рассмотрим равновесие груза. Действие связи (троса) на тело заменяем его реакцией. Так как нить препятствует перемещению груза вниз, то реакция \vec{F}_A направлена в противоположную сторону — вверх (рис. 7, б).

Груз находится в равновесии под действием двух сил, направленных по одной прямой в противоположные стороны, следовательно (на основании второй аксиомы статики), эти силы равны по модулю, т. е. $F_A = F = 20$ кН.

Упражнение 2

- В каких связях, перечисленных ниже, реакции всегда направлены по нормали к поверхности?
 - Гладкая плоскость.
 - Гибкая связь.
 - Жесткий стержень.
 - Шероховатая поверхность.
- К чему приложена реакция опоры?
 - К самой опоре.
 - К опирающемуся телу.

ГЛАВА II. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

§ 6. Геометрический метод сложения сил, приложенных в одной точке

Силы называют сходящимися, если их линии действия пересекаются в одной точке. Различают плоскую систему сходящихся сил, когда линии действия всех данных сил лежат в одной плоскости, и пространственную систему сходящихся сил, когда линии действия сил лежат в разных плоскостях.

На основании следствия из третьей аксиомы силу можно переносить по линии ее действия, поэтому сходящиеся силы всегда можно перенести в одну точку — в точку пересечения их линий действия. Выполнив перенос, на рис. 8, а получим четыре силы \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 , \vec{F}_4 , приложенные к точке К. Для определения их равнодействующей сложим последовательно все данные силы, используя правило треугольника (рис. 8, б).

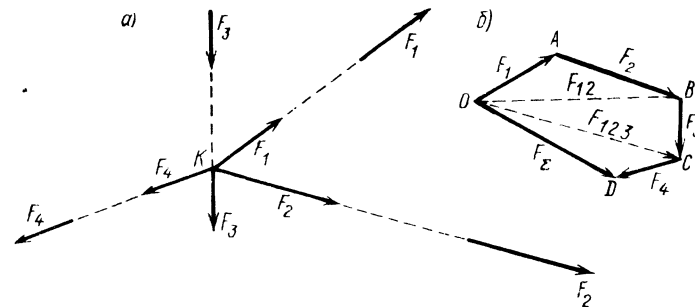


Рис. 8

Находим частичные равнодействующие:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2;$$

$$\vec{F}_{123} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

и, наконец, сложив все силы, определяем полную равнодействующую

$$\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (3)$$

Промежуточные векторы \vec{F}_{12} и \vec{F}_{123} можно не строить, а последовательно, в указанном выше порядке одну за другой отложить все заданные силы и начало первой соединить с концом последней. Фигура $OABCD$ (см. рис. 8, б) называется *силовым многоугольником*. Замыкающая сторона этого многоугольника представляет собой равнодействующую \vec{F}_Σ заданной системы сил, равную их геометрической сумме. Необходимо обратить внимание на то, что равнодействующая сила \vec{F}_Σ всегда направлена от начала первого слагаемого к концу последнего слагаемого. Иными словами, стрелка равнодействующей силы всегда направлена навстречу обходу многоугольника, соответствующему последовательному сложению заданных сил (см. рис. 8, б).

Когда при построении силового многоугольника конец последней слагаемой силы совместится с началом первой, равнодействующая \vec{F}_Σ системы сходящихся сил окажется равной нулю. В этом случае система сходящихся сил находится в равновесии.

Самозамыкание силового многоугольника данной системы сходящихся сил является геометрическим условием ее равновесия.

Пример 2. На рис. 9, а показана система четырех сил \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 и \vec{F}_4 , приложенных в точке А. Определить, уравновешена ли данная система сил?

Решение. Построение силового многоугольника выполним в последовательности, соответствующей рис. 9, б.

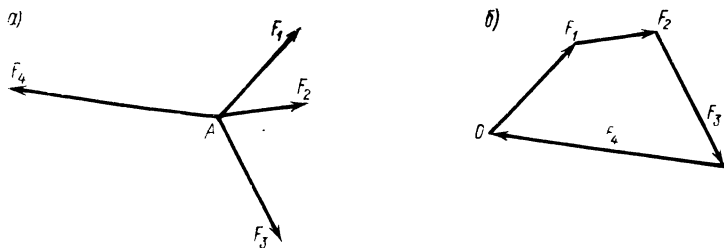


Рис. 9

Сохраняя масштаб и направление, из произвольной точки отложим вектор первой силы \vec{F}_1 . Из конца первого вектора силы отложим вектор второй силы \vec{F}_2 . Аналогично отложим остальные векторы сил \vec{F}_3, \vec{F}_4 . Конец вектора \vec{F}_4 совпадает с началом вектора \vec{F}_1 .

Силовой многоугольник замкнут, равнодействующая равна нулю ($\vec{F}_\Sigma = 0$); следовательно, система сил уравновешена.

Упражнение 3

- Укажите, какой вектор силового многоугольника (рис. 10) является равнодействующей силой.
А. ОА. Б. АВ. В. ВС. Г. СД. Д. OD.
- Какой из многоугольников, представленных на рис. 10 и 11, соответствует уравновешенной системе сходящихся сил?
А. Рис. 11. Б. Рис. 10.

§ 7. Проекция силы на ось

Решение задач на равновесие сходящихся сил с помощью построения замкнутых силовых многоугольников в большинстве случаев сопряжено с громоздкими построениями. Более общим и универсальным методом решения таких задач является переход к определению проекций заданных сил на координатные оси и оперирование с этими проекциями. *Осью называют прямую линию, которой приписано определенное направление.* Проекция вектора на ось является скалярной величиной, которая опреде-

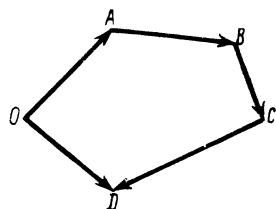


Рис. 10

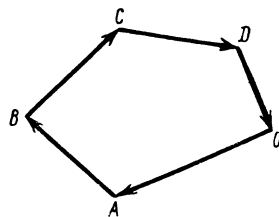


Рис. 11

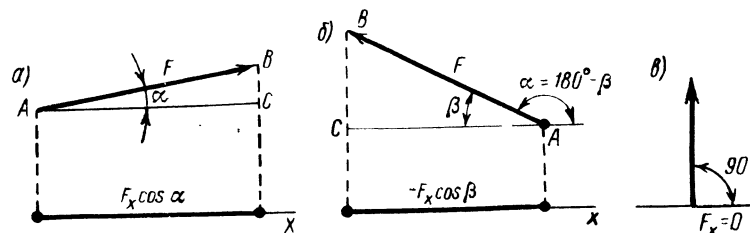


Рис. 12

ляется отрезком оси, отсекаемым перпендикулярами, опущенными на нее из начала и конца вектора.

Проекция вектора считается положительной (+), если направление от начала проекции к ее концу совпадает с положительным направлением оси. Проекция вектора считается отрицательной (-), если направление от начала проекции к ее концу противоположно положительному направлению оси.

Рассмотрим ряд случаев проецирования сил на ось:

1. Вектор силы \vec{F} (рис. 12, а) составляет с положительным направлением оси x острый угол α . Чтобы найти проекцию, из начала и конца вектора силы опускаем перпендикуляры на ось x ; получаем

$$F_x = F \cos \alpha. \quad (4)$$

Проекция вектора в данном случае положительна.

2. Сила \vec{F} (рис. 12, б) составляет с положительным направлением оси x тупой угол α . Тогда $F_x = F \cos \alpha$, но так как $\alpha = 180^\circ - \beta$,

$$F_x = F \cos \alpha = F \cos (180^\circ - \beta) = -F \cos \beta. \quad (5)$$

Проекция силы \vec{F} на оси x в данном случае отрицательна.

3. Сила \vec{F} (рис. 12, в) перпендикулярна к оси x . Проекция силы F на ось x равна нулю $F_x = F \cos 90^\circ = 0$.

Итак, проекция силы на ось координат равна произведению модуля силы на косинус угла между вектором силы и положительным направлением оси.

Силу, расположенную на плоскости xOy (рис. 13), можно спроецировать на две координатные оси Ox и Oy . На рисунке изображена сила \vec{F} и ее проекции F_x и F_y . Ввиду того что проек-

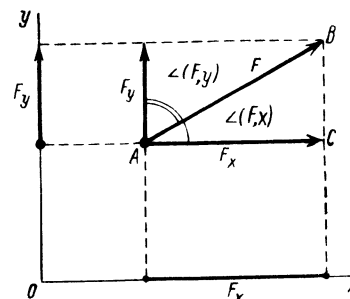


Рис. 13

ции образуют между собой прямой угол, из прямоугольного треугольника ACB следует:

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2}; \\ \cos(\widehat{F, x}) &= F_x/F; \\ \cos(\widehat{F, y}) &= F_y/F. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Этими формулами можно пользоваться для определения модуля и направления силы, когда известны ее проекции на координатные оси.

§ 8. Проекция векторной суммы на ось

Рассмотрим сходящиеся силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ (рис. 14, а). Геометрическая сумма, или равнодействующая, этих сил \vec{F}_Σ опре-

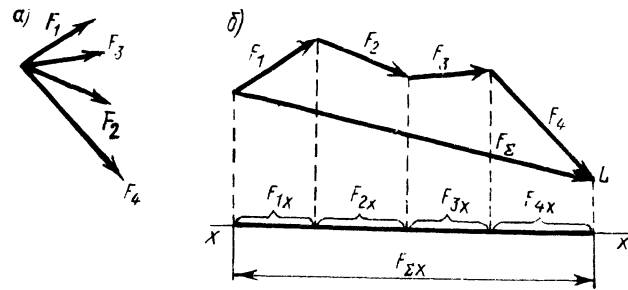


Рис. 14

деляется замыкающей стороной силового многоугольника (рис. 14, б)

$$\vec{F}_\Sigma = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4.$$

Опустим из вершин силового многоугольника на ось x перпендикуляры.

Рассматривая полученные проекции сил непосредственно из выполненного построения, имеем

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} \quad (7)$$

или

$$F_{\Sigma x} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad (7a)$$

где n — число слагаемых векторов. Их проекции входят в уравнение (7a) в соответствующим знаком.

Итак, проекция векторной суммы или равнодействующей на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось. В плоскости геометрическую сумму сил можно спроецировать на две координатные оси, а в пространстве — соответственно на три.

Упражнение 4

1. Определить модуль и направление силы, если известны ее проекции $F_x = 30$ Н; $F_y = 40$ Н.

2. При каком значении угла β между силой и осью проекция силы равна нулю?

А. $\beta = 0$. Б. $\beta = 90^\circ$. В. $\beta = 180^\circ$.

3. Определить проекцию равнодействующей силы на ось y , если известны проекции каждого из слагаемых векторов: $F_{1y} = 40$ Н; $F_{2y} = 60$ Н; $F_{3y} = -100$ Н; $F_{4y} = -120$ Н.

§ 9. Аналитическое определение значения и направления равнодействующей плоской системы сходящихся сил (метод проекций)

В системе сходящихся сил равнодействующая может быть найдена через проекции составляющих. Рассмотрим ее определение на примере системы сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, изображенной на рис. 15, а. Равнодействующая этих сходящихся сил построена на рис. 15, б:

$$\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Проецируя все силы на оси Ox и Oy и используя теорему о проекции векторной суммы (см. § 8), получаем:

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = \sum_{i=1}^{n=3} F_{ix};$$

$$F_{\Sigma y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = \sum_{i=1}^{n=3} F_{iy}.$$

Численное значение равнодействующей силы \vec{F}_Σ через ее проекции определяется по формуле

$$F_\Sigma = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}. \quad (8)$$

Подставив в уравнение (8) значение проекций $F_{\Sigma x}$ и $F_{\Sigma y}$, найдем

$$F_\Sigma = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2}. \quad (9)$$

4884

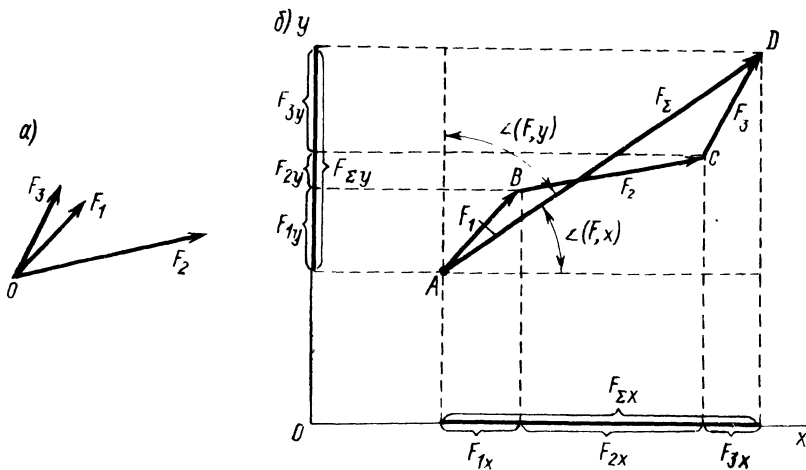


Рис. 15

Направление \vec{F}_Σ определим по косинусам углов, которые эта сила образует с координатными осями:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vec{F}_\Sigma, x) &= F_{\Sigma x} / F_\Sigma; \\ \cos(\vec{F}_\Sigma, y) &= F_{\Sigma y} / F_\Sigma. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

§ 10. Уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил

Как было показано в § 6, сходящаяся система сил находится в равновесии в случае замкнутости силового многоугольника. Равнодействующая при этом равна нулю ($F_\Sigma = 0$). Проекции равнодействующей системы сходящихся сил на координатные оси равны суммам проекций составляющих сил на те же оси (см. § 9):

$$\left. \begin{aligned} F_{\Sigma x} &= \sum_{i=1}^n F_{ix}; \\ F_{\Sigma y} &= \sum_{i=1}^n F_{iy}; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Значение равнодействующей определится по формуле (9). Оба слагаемых, стоящих под знаком корня, во всех случаях положительны как величины, возведенные в квадрат. Поэтому $F_\Sigma = 0$ только при выполнении условий:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Рассматриваемая система сходящихся сил находится в равновесии, когда алгебраические суммы проекций ее слагаемых на каждую из двух координатных осей равны нулю.

Зависимости (12) называют уравнениями равновесия плоской системы сходящихся сил и используют при аналитическом решении задач. В дальнейшем для упрощения записи уравнений равновесия будем опускать индексы у сумм.

§ 11. Решение задач на равновесие плоской системы сходящихся сил

Непосредственное применение условий равновесия в геометрической форме дает наиболее простое решение для системы трех сходящихся сил. При наличии в системе четырех и более сил рациональнее применять аналитический метод, который является универсальным и применяется чаще всего. При аналитическом методе решение этих задач выполняется на основе уравнений равновесия по следующему плану:

первый этап — выделяют объект равновесия — тело или точку, где пересекаются линии действия всех сил, т. е. точку, равновесие которой в данной задаче следует рассмотреть;

второй этап — к выделенному объекту равновесия прикладывают заданные силы;

третий этап — выделенную точку или тело освобождают от связей, их действие заменяют реакциями;

четвертый этап — выбирают координатные оси и составляют уравнения равновесия;

пятый этап — решают уравнения равновесия;

шестой этап — проверяют правильность решения.

Остановимся еще на одном важном вопросе. В задачах статики часто приходится определять реакции стержней. Необходимо установить, как действуют растягивающие и сжимающие силы в стержнях на точки крепления стержней или узлы. Когда стержень MN растянут (рис. 16, а), его реакции на точки крепления направлены от этих точек M и N внутрь стержня. Когда стержень сжат, его реакции направлены к точкам закрепления, т. е. наружу (рис. 16, б). Следовательно, можно сказать, что в растянутом стержне реакции направлены от узлов внутрь стержня, в сжатом — к узлам наружу от стержня, по аналогии с деформированной пружиной.

Часто при решении задач трудно заранее определить направление реакций стержней. В этих случаях удобно считать стержни растянутыми и их реакции направлять от узлов. Если решение

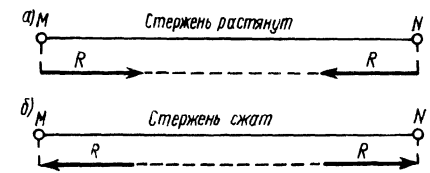


Рис. 16

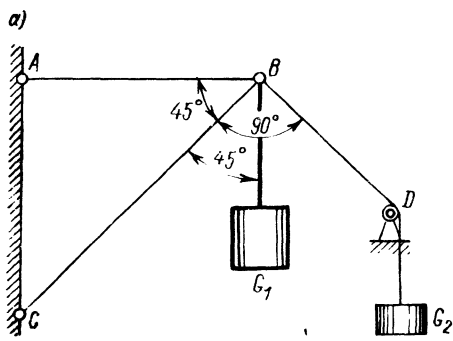
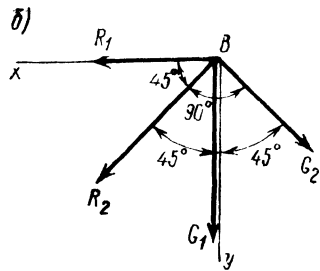


Рис. 17



задачи даст значение реакции со знаком минус, то в действительности имеет место не растяжение, а сжатие. Таким образом, реакции растянутых стержней будут положительными, а сжатых — отрицательными.

Пример 3. К кронштейну ABC в точке B подвешены два груза: груз $G_1 = 600$ Н непосредственно и груз $G_2 = 400$ Н через отводной блок D (рис. 17, а). Определить реакции стержней AB и BC кронштейна.

Решение. В точке B пересекаются линии действия заданных сил \vec{G}_1 и \vec{G}_2 и искомых реакций стержней AB и CB , поэтому выделяем узел B (рис. 17, б), который в данной задаче рассматривается как объект равновесия. Прикладываем к этому узлу заданные силы \vec{G}_1 , направленную вертикально, и \vec{G}_2 , направленную вдоль троса. При этом учитываем, что неподвижный блок D изменяет направление силы, но не влияет на ее значение. Освобождаем узел B от связей, которые осуществляются стержнями AB и BC . Прикладываем вместо них реакции стержней \vec{R}_1 и \vec{R}_2 , направляем их вдоль стержня от узла, т. е. полагаем, что оба стержня AB и BC растянуты. Выбираем координатные оси x и y (при выбранном направлении осей большинство проекций имеют знак плюс) и составляем уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad R_1 - G_2 \cos 45^\circ + R_2 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad G_1 + R_2 \cos 45^\circ + G_2 \cos 45^\circ = 0.$$

Решив уравнения равновесия, находим:

$$R_2 = -G_2 - \frac{G_1}{\cos 45^\circ} = -400 - \frac{600}{0,707} = -1249 \text{ Н};$$

$$R_1 = G_2 \cos 45^\circ - R_2 \cos 45^\circ = 400 \cdot 0,707 - (-1249) \cdot 0,707 = 1166 \text{ Н}.$$

Знак минус перед численным значением реакции R_2 показывает, что стержень BC не растянут, как предполагалось, а сжат.

Упражнение 5

1. Определить модуль равнодействующей системы сходящихся сил, если проекции слагаемых векторов равны: $F_{1x} = 50$ Н; $F_{2x} = -30$ Н; $F_{3x} = 60$ Н; $F_{4x} = 70$ Н; $F_{1y} = -70$ Н; $F_{2y} = 40$ Н; $F_{3y} = 80$ Н; $F_{4y} = -90$ Н.

2. В каком из указанных случаев плоская система сходящихся сил уравновешена?

А. $\sum F_{ix} = 40$ Н; $\sum F_{iy} = 40$ Н.

Б. $\sum F_{ix} = 30$ Н; $\sum F_{iy} = 0$.

В. $\sum F_{ix} = 0$; $\sum F_{iy} = 100$ Н.

Г. $\sum F_{ix} = 0$; $\sum F_{iy} = 0$.

3. Какая из приведенных ниже систем уравнений равновесия справедлива для изображенной на рис. 18 системы сходящихся сил?

А. $\sum F_{ix} = 0$; $F_3 \cos 60^\circ + F_4 \cos 30^\circ + F_2 = 0$; $\sum F_{iy} = 0$; $F_3 \cos 30^\circ - F_4 \cos 60^\circ + F_1 = 0$;

Б. $\sum F_{ix} = 0$; $-F_3 \cos 60^\circ - F_4 \cos 30^\circ + F_2 = 0$; $\sum F_{iy} = 0$; $F_3 \cos 30^\circ - F_4 \cos 60^\circ - F_1 = 0$.

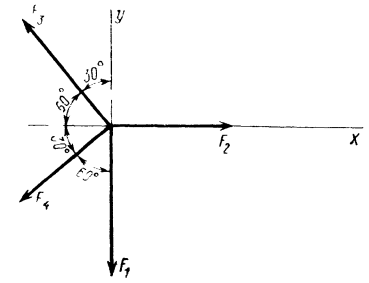


Рис. 18

ГЛАВА III. ПАРА СИЛ И МОМЕНТЫ СИЛ

§ 12. Пара сил и ее действие на тело

Две равные и параллельные силы, направленные в противоположные стороны и не лежащие на одной прямой, называются *парой сил*. Примером такой системы сил могут служить силы, передаваемые руками шофера на рулевое колесо автомобиля. Пара сил имеет большое значение в практике. Именно поэтому свойства пары как специфической меры механического взаимодействия тел изучаются отдельно.

Сумма проекций пары сил на ось x и на ось y равна нулю (рис. 19, а), поэтому *пара сил не имеет равнодействующей*. Несмотря на это тело под действием пары сил не находится в равновесии.

Действие пары сил на твердое тело, как показывает опыт, состоит в том, что она стремится вращать это тело. Способность пары сил производить вращение определяется моментом пары, равным произведению силы на кратчайшее расстояние (взятое по перпендикуляру к силам) между линиями действия сил. Обозначим момент пары M , а кратчайшее расстояние между силами a , тогда абсолютное значение момента (рис. 19, а)

$$M = Fa = F'a.$$

Кратчайшее расстояние между линиями действия сил называется *плечом пары*, поэтому можно сказать, что *момент пары сил по абсолютному значению равен произведению одной из сил на ее плечо*.

Эффект действия пары сил полностью определяется ее моментом. Поэтому момент пары сил можно показывать дугообразной

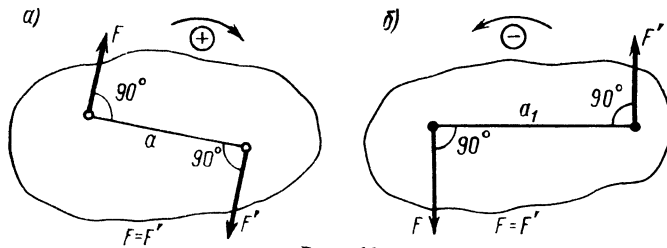


Рис. 19

стрелкой, указывающей направление вращения. Так как пара сил не имеет равнодействующей, ее нельзя уравновесить одной силой. Момент пары в СИ измеряется в ньютонметрах (Н·м) или в единицах, кратных ньютонметру: кН·м, МН·м и т. д.

Момент пары сил будем считать положительным, если пара стремится повернуть тело по направлению хода часовой стрелки (рис. 19, а), и отрицательным, если пара стремится вращать тело против хода часовой стрелки (рис. 19, б). Принятое правило знаков для моментов пар условно: можно было бы принять противоположное правило.

Упражнение 6

1. Определить, на каком рисунке изображена пара сил:
А. Рис. 20, а. Б. Рис. 20, б. В. Рис. 20, в. Г. Рис. 20, г.
2. Что определяет эффект действия пары сил?

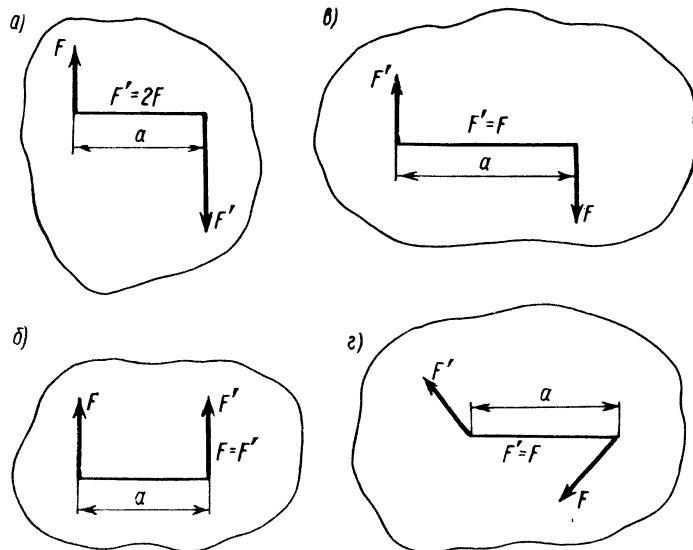


Рис. 20

1. Произведение силы на плечо. Б. Момент пары и направление поворота.
3. Чем можно уравновесить пару сил?
А. Одной силой. Б. Парой сил

§ 13. Эквивалентность пар

Две пары сил считаются эквивалентными в том случае, если после замены одной пары другой парой механическое состояние тела не изменяется, т. е. не изменяется движение тела или не нарушается его равновесие.

Эффект действия пары сил на твердое тело не зависит от ее положения в плоскости. Таким образом, пару сил можно перенести в плоскости ее действия в любое положение.

Рассмотрим еще одно свойство пары сил, которое является основой для сложения пар.

Не нарушая состояния тела, можно как угодно изменять модули сил и плечо пары, только бы момент пары оставался неизменным.

Заменим пару сил $\vec{F}_1\vec{F}'_1$ с плечом a (рис. 21, а) новой парой $\vec{F}_2\vec{F}'_2$ с плечом b (рис. 21, б) так, чтобы момент пары оставался тем же. Момент заданной пары сил $M_1 = F_1a$. Момент новой пары сил $M_2 = F_2b$. По определению пары сил эквивалентны, т. е. производят одинаковое действие, если их моменты равны.

Если изменив значения сил и плечо новой пары, мы сохраним равенство их моментов $M_1 = M_2$ или $F_1a = F_2b$, то состояние тела от такой замены не нарушится.

Итак, вместо заданной пары $\vec{F}_1\vec{F}'_1$ с плечом a мы получили эквивалентную пару $\vec{F}_2\vec{F}'_2$ с плечом b .

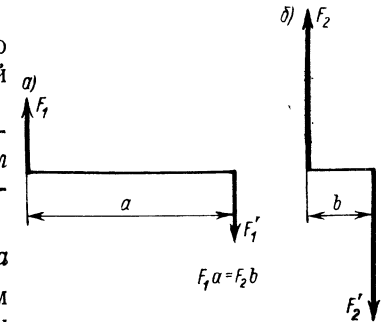


Рис. 21

Упражнение 7

1. Зависит ли эффект действия пары сил на тело от ее положения в плоскости?
А. Да. Б. Нет.
2. Какие из приведенных ниже пар эквивалентны?
А. а) сила пары 100 кН, плечо 0,5 м; б) сила пары 20 кН, плечо 2,5 м;
в) сила пары 1000 кН, плечо 0,05 м. Направление всех трех пар одинаково.
Б. а) $M_1 = -300$ Н·м; б) $M_2 = 300$ Н·м.
3. Момент пары сил равен 100 Н·м, плечо пары 0,2 м. Определить значение сил пары. Как изменится значение сил пары, если плечо увеличить в два раза при сохранении численного значения момента?

§ 14. Сложение и равновесие пар сил на плоскости

Подобно силам, пары можно складывать. Пара, заменяющая собой действие данных пар, называется *резльтирующей*.

Как показано выше, действие пары сил полностью определяется ее моментом и направлением вращения. Исходя из этого сложение пар производится алгебраическим суммированием их

моментов, т. е. момент результирующей пары равен алгебраической сумме моментов составляющих пар

Это применимо к любому числу пар, лежащих в одной плоскости. Поэтому при произвольном числе слагаемых пар, лежащих в одной плоскости или параллельных плоскостях, момент результирующей пары определится по формуле

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum M_i, \quad (13)$$

где моменты пар, вращающие по часовой стрелке, принимаются положительными, а против часовой стрелки — отрицательными.

На основании приведенного правила сложения пар устанавливается условие равновесия системы пар, лежащих в одной

плоскости, а именно: для равновесия системы пар необходимо и достаточно, чтобы момент результирующей пары равнялся нулю или чтобы алгебраическая сумма моментов пар равнялась нулю:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i = 0. \quad (14)$$

Пример 4. Определить момент результирующей пары, эквивалентной системе трех пар, лежащих

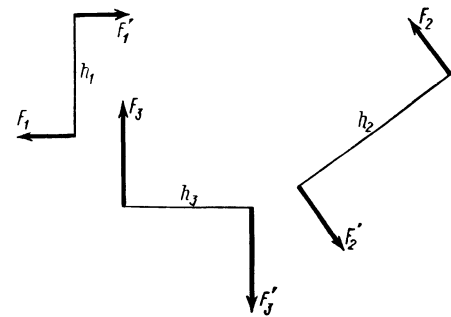


Рис. 22

в одной плоскости. Первая пара образована силами $F_1 = F_1' = 2$ кН, имеет плечо $h_1 = 1,25$ м и действует по часовой стрелке; вторая пара образована силами $F_2 = F_2' = 3$ кН, имеет плечо $h_2 = 2$ м и действует против часовой стрелки; третья пара образована силами $F_3 = F_3' = 4,5$ кН, имеет плечо $h_3 = 1,2$ м и действует по часовой стрелке (рис. 22).

Решение. Вычисляем моменты составляющих пар:

$$M_1 = F_1 h_1 = 2 \cdot 1,25 = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = -F_2 h_2 = -3 \cdot 2 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = F_3 h_3 = 4,5 \cdot 1,2 = 5,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для определения момента результирующей пары складываем алгебраически моменты заданных пар

$$M = \sum M_i = M_1 + M_2 + M_3 = 2,5 - 6 + 5,4 = 1,9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

§ 15. Момент силы относительно точки и оси

Момент силы относительно точки определяется произведением модуля силы на длину перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы (рис. 23, а).

При закреплении тела в точке O сила \vec{F} стремится поворачивать его вокруг этой точки. Точка O , относительно которой бе-

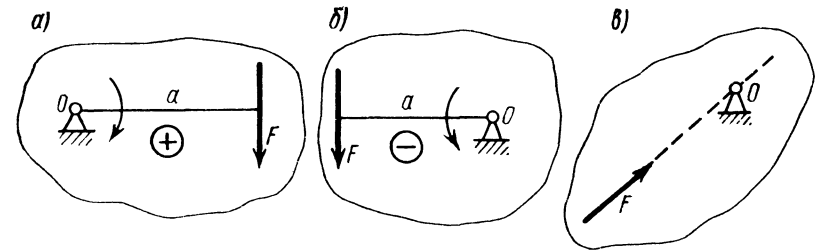


Рис. 23

рется момент, называется *центром момента*, а длина перпендикуляра a — *плечом силы* относительно центра момента.

Момент силы \vec{F} относительно O определяется произведением силы на плечо

$$M_O(\vec{F}) = Fa. \quad (15)$$

Измеряют моменты сил, как и моменты пар, в ньютонметрах (Н·м) или в соответствующих кратных и дольных единицах.

Момент принято считать положительным, если сила стремится вращать тело по часовой стрелке (рис. 23, а), а отрицательным — против часовой стрелки (рис. 23, б). Когда линия действия силы проходит через данную точку, момент силы относительно этой точки равен нулю, так как в рассматриваемом случае плечо $a = 0$ (рис. 23, в).

Между моментом пары и моментом силы есть одно существенное различие. Численное значение и направление момента пары сил не зависят от положения этой пары в плоскости. Значение и направление (знак) момента силы зависят от положения точки, относительно которой определяется момент.

Рассмотрим, как определяется момент силы относительно оси.

Из опыта известно, что ни сила \vec{F}_1 (рис. 24), линия действия которой пересекает ось Oz , ни сила \vec{F}_2 , параллельная оси, не смогут повернуть тело вокруг этой оси, т. е. не дают момента.

Пусть на тело в какой-то точке (рис. 25) действует сила \vec{F} . Проведем плоскость H , перпендикулярную оси Oz и проходящую через начало вектора силы. Разложим заданную силу \vec{F} на две составляющие: \vec{F}_1 , расположенную в плоскости H , и \vec{F}_2 , параллельную оси Oz .

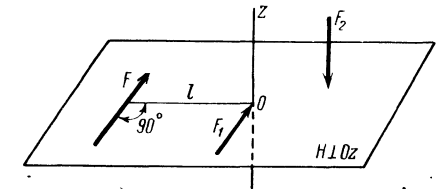


Рис. 24

Составляющая \vec{F}_2 , параллельная оси Oz , момента относительно этой оси не создает. Составляющая \vec{F}_1 , действующая в плоскости H , создает момент относительно оси Oz или, что то же самое, относительно точки O . Момент силы \vec{F}_1 измеряется произведением модуля самой силы на длину a перпендикуляра, опущенного из точки O на направление этой силы, т. е.

$$M_z(\vec{F}) = F_1 a.$$

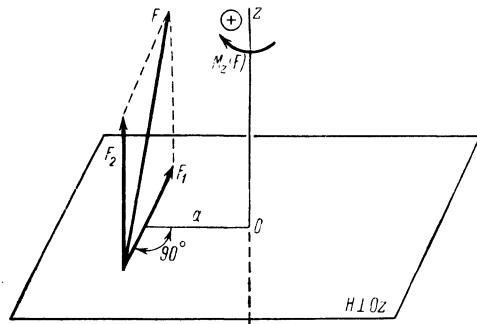


Рис. 25

Знак момента по общему правилу определяется направлением вращения тела: плюс (+) — при движении по часовой стрелке, минус (−) — при движении против часовой стрелки. Для определения знака момента наблюдатель должен непременно находиться со стороны положительного направления оси. На рис. 25 момент силы \vec{F} относительно оси Oz положителен, так как для наблюдателя, смотрящего со стороны положительного направления оси (сверху), тело под действием заданной силы представляется вращающимся вокруг оси по ходу часовой стрелки.

Если сила \vec{F} (рис. 24) расположена в плоскости H , перпендикулярной к оси Oz , момент этой силы определится произведением ее величины на плечо l относительно точки пересечения оси Oz и плоскости H :

$$M_z(\vec{F}) = Fl.$$

Следовательно, для определения момента силы относительно оси нужно спроектировать силу на плоскость, перпендикулярную оси, и найти момент проекции силы относительно точки пересечения оси с этой плоскостью.

Упражнение 8

1. Будет ли тело находиться в равновесии, если на него действуют три пары сил, приложенных в одной плоскости, и моменты этих пар имеют следующие значения: $M_1 = -600 \text{ Н}\cdot\text{м}$; $M_2 = 320 \text{ Н}\cdot\text{м}$ и $M_3 = 280 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

А. Тело будет находиться в равновесии. Б. Тело не будет находиться в равновесии.

2. Определить плечо силы \vec{F} относительно точки O (рис. 26).

А. Отрезок OB . Б. Отрезок OA . В. Отрезок OK .

3. Чему равен момент силы \vec{F} относительно точки K (рис. 26)?

А. $M_K(\vec{F}) = F \cdot AK$. Б. $M_K(\vec{F}) = F \cdot BK$. В. $M_K(\vec{F}) = 0$.

4. Зависят ли значение и направление момента силы относительно точки от взаимного расположения этой точки и линии действия силы?

А. Не зависят. Б. Зависят.

5. Когда момент силы относительно оси равен нулю?

А. Когда сила параллельна оси.

Б. Когда линия действия силы пересекает ось. В. Когда сила и ось расположены в одной плоскости.

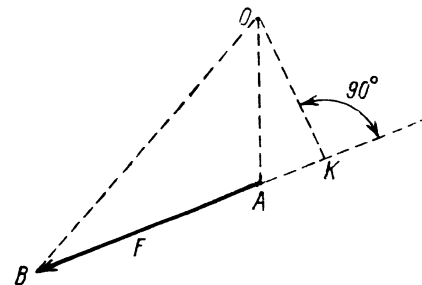


Рис. 26

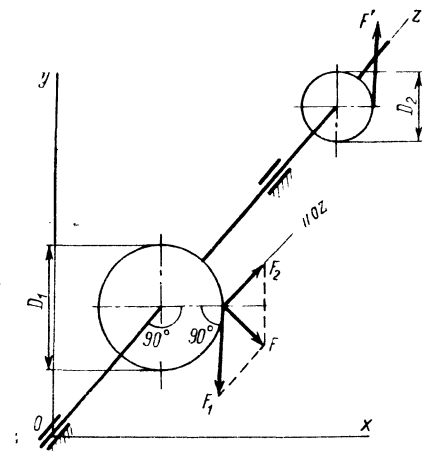


Рис. 27

6. Определить момент силы \vec{F} относительно оси z (рис. 27):

А. $M_z(\vec{F}) = F \frac{D_1}{2}$. Б. $M_z(\vec{F}) = -F_2 \frac{D_2}{2}$

В. $M_z(\vec{F}) = -F_1 \frac{D_1}{2}$. Г. $M_z(\vec{F}) = -F_1 D_1$.

7. Вычислить момент силы \vec{F}' относительно оси z (рис. 27), если задано: $D_2 = 1 \text{ м}$; $F' = 50 \text{ Н}$.

ГЛАВА IV. СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ

§ 16. Приведение силы к точке

Рассмотрим случай переноса силы в произвольную точку, не лежащую на линии действия силы (рис. 28).

Возьмем силу \vec{F} , приложенную в точке C . Требуется перенести эту силу параллельно самой себе в некоторую точку O .

Приложим в точке O две силы \vec{F}' и \vec{F}'' , противоположно направленные, равные по значению и параллельные заданной силе \vec{F} , т. е. $F' = F'' = F$. От приложения в точке O этих сил состояние тела не изменяется, так как они взаимно уравновешиваются. По-

лученную систему трех сил можно рассматривать как состоящую из силы \vec{F}' , приложенной в точке O , и пары сил $\vec{F}\vec{F}''$ с моментом $M = Fa$. Эту пару сил называют *присоединенной*, а ее плечо a равно плечу силы \vec{F} относительно точки O (рис. 28, а).

Таким образом, при приведении силы \vec{F} к точке, не лежащей на линии действия силы, получается эквивалентная система, состоящая из силы, такой же по модулю и направлению, как и сила \vec{F} , и присоединенной пары сил, момент которой равен моменту данной силы относительно точки приведения:

$$M_O(\vec{F}) = Fa.$$

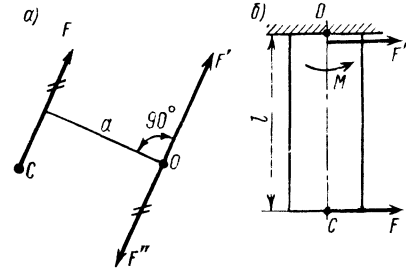


Рис. 28

В качестве примера приведения силы рассмотрим действие силы \vec{F} на конец C заземленного стержня (рис. 28, б). После приведения силы \vec{F} в точку O заземленного сечения обнаруживаем в нем силу \vec{F}_1 , равную и параллельную заданной, и присоединенный момент M , равный моменту заданной силы \vec{F} относительно точки приведения O ,

$$M = M_O(\vec{F}) = Fl.$$

Упражнение 9

1. Сравните три варианта сил, показанные на рис. 29, а, б, в, и решите, какое из приведенных утверждений правильно.

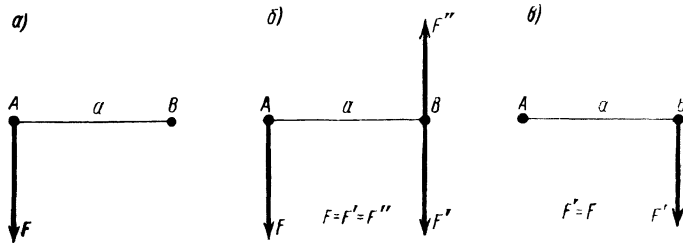


Рис. 29

А. Все три варианта сил эквивалентны. Б. Сила на рис. 29, а эквивалентна системе сил на рис. 29, б. В. Система сил на рис. 29, б эквивалентна силе на рис. 29, в.

2. Зависит ли момент присоединенной пары сил от расстояния точки приведения до линии действия силы?

А. Зависит. Б. Не зависит.

3. Вычислите момент присоединенной пары в точке В (рис. 29, б), если $F = 300$ Н; $a = 200$ мм.

17. Приведение плоской системы сил к данной точке

Описанный метод приведения одной силы к данной точке можно применить к какому угодно числу сил. Допустим, что в некоторых точках тела (рис. 30) приложены силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ и \vec{F}_4 . Требуется привести эти силы к точке O плоскости. Приведем сначала

силу \vec{F}_1 , приложенную в точке A . Приложим (см. § 16) в точке O две силы \vec{F}'_1 и \vec{F}''_1 , равные порознь по значению заданной силе \vec{F}_1 , параллельные ей и направленные в противоположные стороны. В результате приведения силы \vec{F}_1 получим силу \vec{F}'_1 , приложенную в точке O , и пару сил $\vec{F}'_1\vec{F}''_1$ с плечом a_1 . Поступив

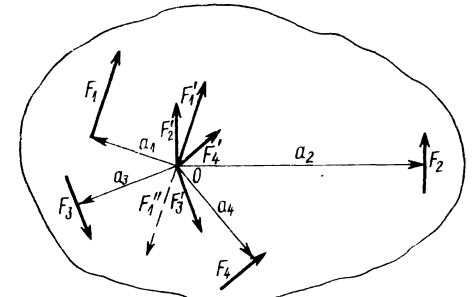


Рис. 30

таким же образом с силой \vec{F}_2 , приложенной в точке B , получим силу \vec{F}'_2 , приложенную в точке O , и пару сил с плечом a_2 и т. д.

Плоскую систему сил, приложенных в точках A, B, C и D , мы заменили сходящимися силами $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \vec{F}'_3$ и \vec{F}'_4 , приложенными в точке O , и парами сил с моментами, равными моментам заданных сил относительно точки O :

$$M_1 = F_1 a_1 = M_O(\vec{F}_1); \quad M_2 = -F_2 a_2 = M_O(\vec{F}_2);$$

$$M_3 = -F_3 a_3 = M_O(\vec{F}_3); \quad M_4 = -F_4 a_4 = M_O(\vec{F}_4).$$

Сходящиеся в точке силы можно заменить одной силой $\vec{F}'_{\text{гл}}$, равной геометрической сумме составляющих,

$$\vec{F}'_{\text{гл}} = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \vec{F}'_3 + \vec{F}'_4 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (16)$$

Эту силу, равную геометрической сумме заданных сил, называют *главным вектором системы сил* и обозначают $\vec{F}'_{\text{гл}}$.

На основании правила сложения пар сил их можно заменить результирующей парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов заданных сил относительно точки O и называется *главным моментом* относительно точки приведения

$$M_{\text{гл}} = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n M_O(\vec{F}_i). \quad (17)$$

Следовательно, в общем случае плоская система сил в результате приведения к данной точке O заменяется эквивалентной

ей системой, состоящей из одной силы (главного вектора) и одной пары (главного момента).

Необходимо усвоить, что главный вектор $\vec{F}'_{гл}$ не является равнодействующей данной системы сил, так как эта система не эквивалентна одной силе $\vec{F}'_{гл}$. Только в частном случае, когда главный момент обращается в нуль, главный вектор будет равнодействующей данной системы сил. Так как главный вектор равен геометрической сумме сил заданной системы, то ни модуль, ни направление его не зависят от выбора центра приведения. Значение и знак главного момента $M_{гл}$ зависят от положения центра приведения, так как плечи составляющих пар зависят от взаимного положения сил и точки (центра) относительно которой берутся моменты.

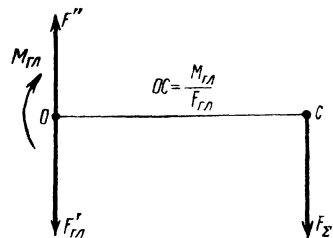


Рис. 31

Могут встретиться следующие случаи приведения системы сил:

1. $\vec{F}'_{гл} \neq 0$; $M_{гл} \neq 0$ — общий случай; система приводится к главному вектору и к главному моменту.
2. $\vec{F}'_{гл} \neq 0$; $M_{гл} = 0$; система приводится к одной равнодействующей, равной главному вектору системы.
3. $\vec{F}'_{гл} = 0$; $M_{гл} \neq 0$; система приводится к паре сил, момент которой равен главному моменту.
4. $\vec{F}'_{гл} = 0$; $M_{гл} = 0$; система находится в равновесии, т. е. для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы ее главный вектор и главный момент одновременно были равны нулю.

Можно доказать, что в общем случае, когда $F'_{гл} \neq 0$ и $M_{гл} \neq 0$, всегда есть точка, относительно которой главный момент сил равен нулю.

Рассмотрим плоскую систему сил, которая приведена к точке O , т. е. заменена главным вектором $\vec{F}'_{гл} \neq 0$, приложенным в точке O , и главным моментом $M_{гл} \neq 0$ (рис. 31). Для определенности примем, что главный момент направлен по часовой стрелке, т. е. $M_{гл} > 0$. Изобразим этот главный момент парой сил $\vec{F}\vec{F}''$, модуль которых выберем равным модулю главного вектора $F'_{гл}$, т. е. $F_{\Sigma} = F'' = F'_{гл}$. Одну из сил, составляющих пару (силу \vec{F}''), приложим в центре приведения O , другую силу (F_{Σ}) в точке C , положение которой определится из условия: $M_{гл} = OCF_{\Sigma}$. Следовательно

$$OC = M_{гл}/F_{\Sigma}. \quad (18)$$

Расположим пару сил $\vec{F}_{\Sigma}\vec{F}''$ так, чтобы сила \vec{F}'' была направлена в сторону, противоположную главному вектору $\vec{F}'_{гл}$. В точке O

(рис. 31) имеем две равные взаимно противоположные силы $\vec{F}'_{гл}$ и \vec{F}'' , направленные по одной прямой; их можно отбросить (согласно третьей аксиоме). Следовательно, относительно точки C главный момент рассматриваемой системы сил равен нулю, и система приводится к равнодействующей \vec{F}_{Σ} .

§ 18. Теорема о моменте равнодействующей (теорема Вариньона)

В общем случае (см. § 17) произвольная плоская система сил приводится к главному вектору $\vec{F}'_{гл}$ и к главному моменту $M_{гл}$ относительно выбранного центра приведения, причем главный момент равен алгебраической сумме моментов заданных сил относительно точки O :

$$M_{гл} = \sum_{i=1}^n M_O(\vec{F}_i). \quad (a)$$

Было показано, что можно выбрать центр приведения (рис. 31, точка C), относительно которого главный момент системы равен нулю, и система сил приведет к одной равнодействующей \vec{F}_{Σ} , равной по модулю главному вектору ($F_{\Sigma} = F'_{гл}$). Определим момент равнодействующей \vec{F}_{Σ} относительно точки O . Учитывая, что плечо OC силы \vec{F} равно $M_{гл}/F'_{гл}$, получаем

$$M_O(\vec{F}_{\Sigma}) = F_{\Sigma}(M_{гл}/F'_{гл}) = M_{гл}. \quad (б)$$

Две величины, порознь равные третьей, равны между собой, поэтому из уравнений (19а) и (19б) находим

$$M_O(\vec{F}_{\Sigma}) = \sum_{i=1}^n M_O(\vec{F}_i). \quad (19)$$

Полученное уравнение выражает теорему Вариньона: *момент равнодействующей плоской системы сил относительно произвольно взятой точки равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.*

Из теоремы Вариньона следует, что главный момент плоской системы сил относительно любой точки, лежащей на линии действия ее равнодействующей, равен нулю. Рассмотрим применение теоремы Вариньона на конкретных примерах.

Пример 5. Определить с помощью теоремы Вариньона положение линии действия равнодействующей двух параллельных сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , направленных в одну сторону (рис. 32).

Решение. Примем за центр моментов точку C и предположим, что он лежит на линии действия равнодействующей. На основе теоремы Вариньона имеем

$$M_C(\vec{F}_{\Sigma}) = M_C(\vec{F}_1) + M_C(\vec{F}_2). \quad (19a)$$

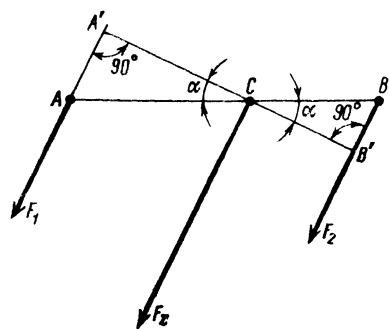


Рис. 32

Момент равнодействующей относительно точки C , лежащей на ее линии действия, равен нулю $M_C(\vec{F}_\Sigma) = 0$, и уравнение (а) принимает вид

$$M_C(\vec{F}_1) + M_C(\vec{F}_2) = 0. \quad (196)$$

Найдем плечи сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 относительно точки C . Для этого опустим из нее перпендикуляры $A'C$ и $B'C$ на линии действия сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 (см. рис. 32). Длины этих отрезков $A'C$ и $B'C$ определяются через расстояния AC и BC и угол α между линией и перпендикуляром к линии действия сил:

$$A'C = AC \cos \alpha; \quad B'C = BC \cos \alpha.$$

Выразим моменты сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 относительно точки C :

$$M_G(\vec{F}_1) = -F_1 A'C = -F_1 AC \cos \alpha;$$

$$M_G(\vec{F}_2) = F_2 B'C = F_2 BC \cos \alpha.$$

Подставив значения этих моментов в уравнение (б), получим $-F_1 AC \cos \alpha + F_2 BC \cos \alpha = 0$ или $F_1 AC = F_2 BC$, откуда $F_2/F_1 = AC/BC$, т. е. линия действия равнодействующей двух параллельных сил делит расстояние между составляющими силами на части, обратно пропорциональные их значениям.

Упражнение 10

1. Зависят ли значение и направление главного вектора от положения центра приведения?

А. Не зависят. Б. Зависят.

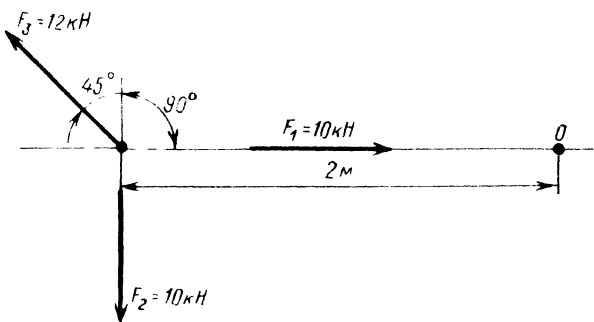


Рис. 33

2. Зависят ли значение и знак главного момента от положения центра приведения?

А. Не зависят. Б. Зависят.

3. Выполните построение, необходимое для приведения сил, показанных на рис. 33, к центру приведения (точке O). Определите значение и направления главного вектора и главного момента.

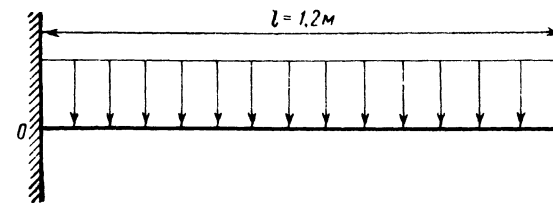


Рис. 34

4. Можно ли определить алгебраическую сумму моментов сил относительно некоторой точки O , если задана только равнодействующая этих сил \vec{F}_Σ и ее плечо a относительно этой точки?

А. Нельзя. Б. Можно.

5. Сила тяжести стержня равна 150 Н (рис. 34). Определите момент силы тяжести относительно закрепленного конца стержня — точки O .

А. $M_O = 180$ Н·м. Б. $M_O = 90$ Н·м.

§ 19. Уравнения равновесия плоской системы сил

Плоская система сил может быть приведена к главному вектору и главному моменту. Поэтому условия равновесия сил на плоскости, как показано выше, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} F'_{\text{гл}} &= 0; \\ M_{\text{гл}} &= \sum M_O(\vec{F}_i) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Итак, для равновесия системы сил, произвольно расположенных в плоскости, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этих сил относительно любого центра каждый в отдельности равнялся нулю.

Главный вектор $\vec{F}'_{\text{гл}}$ представляет собой геометрическую сумму всех сил, составляющих систему и перенесенных в центр приведения. Модуль главного вектора можно определить через проекции на координатные оси всех сил системы. Применив для сумм проекций всех сил на оси x и y обозначения $\sum F_{ix}$ и $\sum F_{iy}$, получим для значения главного вектора выражение

$$F'_{\text{гл}} = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2} = 0.$$

Главный вектор равен нулю, если оба слагаемых под корнем равны нулю, т. е.

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0.$$

Кроме того, для равновесия необходимо, чтобы главный момент также был равен нулю, т. е.

$$M_{\text{гл}} = \sum M_O(\vec{F}) = 0.$$

Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил могут быть представлены в трех формах. Первая (основная форма этих уравнений) выведена выше:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum M_O = 0. \quad (21)$$

Три уравнения равновесия для плоской системы сил соответствуют трем возможным степеням подвижности тела в плоскости —

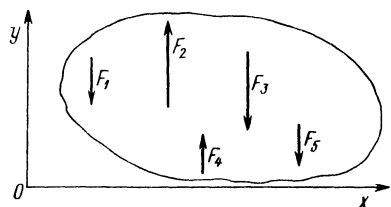


Рис. 35

двум перемещениям вдоль осей x и y и вращению вокруг произвольной точки плоскости.

При решении многих задач рациональнее пользоваться другими формами уравнений равновесия.

Так как при равновесии твердого тела сумма моментов всех приложенных к нему сил относительно любой точки равна нулю, то можно, выбрав три произвольные точки A , B , C и приравняв нулю сумму моментов относительно каждой из них, получить три следующих уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum M_C = 0. \quad (22)$$

Это вторая форма уравнений равновесия. Точки A , B , C не должны лежать на одной прямой.

Третья форма уравнений равновесия представляет собой равенство нулю сумм моментов относительно двух произвольных точек A и B и равенство нулю суммы проекций на некоторую ось x :

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum F_{ix} = 0. \quad (23)$$

При пользовании этой формой уравнений равновесия необходимо, чтобы ось x не была перпендикулярна линии, соединяющей точки A и B .

Для системы параллельных сил, выбрав одну из осей проекций, параллельной этим силам, а другую — перпендикулярной к ним, получим два уравнения равновесия (рис. 35).

Первая форма уравнений равновесия для плоской системы параллельных сил примет вид:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad \sum M_O = 0. \quad (24)$$

При этом первое уравнение равновесия можно трактовать как равенство нулю алгебраической суммы всех заданных параллельных сил, так как на параллельную ось они проектируются в натуральную величину.

Вторая и третья формы уравнений равновесия для плоской системы параллельных сил примут одинаковый вид:

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0. \quad (25)$$

Итак, для произвольной плоской системы сил имеем три уравнения равновесия, а для плоской системы параллельных сил — только два. Соответственно при решении задач на равновесие произвольной плоской системы сил можно найти три неизвестных, а при рассмотрении равновесия плоской системы параллельных сил — не более двух. Если количество неизвестных превышает число уравнений статики, задача становится статически неопределимой.

Методы решения таких задач рассматриваются в курсе сопротивления материалов.

§ 20. Опорные устройства балочных систем

Очень часто в машинах и конструкциях встречаются тела удлиненной формы, называемые балками (или балочными системами). Балки в основном предназначены для восприятия поперечных нагрузок. Балки имеют специальные опорные устройства для

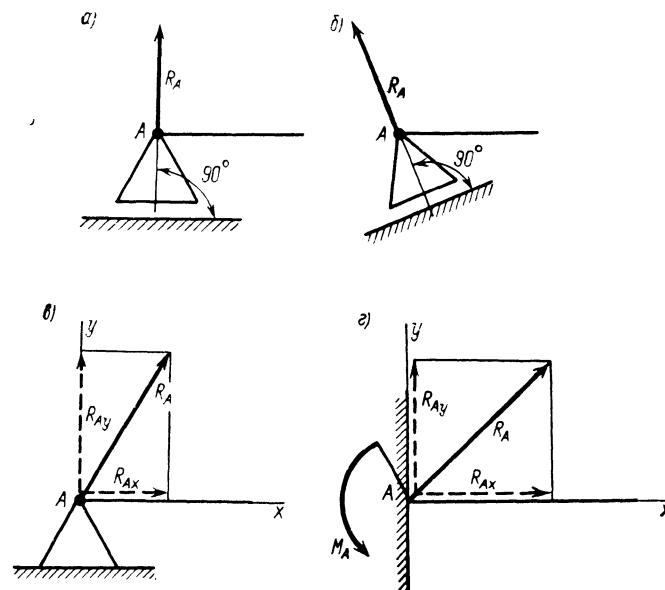


Рис. 36

сопряжения их с другими элементами и передачи на них усилий. Применяются следующие виды опор.

Шарнирно-подвижная опора (рис. 36, а). Эта опора допускает поворот вокруг оси шарнира и линейное перемещение параллельно опорной плоскости. В этой опоре известны точка приложения опорной реакции — центр шарнира и ее направление — перпендикуляр к опорной плоскости. Здесь остается неизвестным

числовое значение опорной реакции \vec{R}_A . Условное изображение опоры показано на рис. 36, а.

Следует отметить, что опорная поверхность шарнирно-подвижной опоры может быть непараллельна оси балки (рис. 36, б).

Реакция \vec{R}_A в этом случае не будет перпендикулярна оси балки, так как она перпендикулярна опорной поверхности.

Шарнирно-неподвижная форма (рис. 36, в). Эта опора допускает поворот вокруг оси шарнира, но не допускает никаких линейных перемещений. В данном случае известна только точка приложения опорной реакции — центр шарнира; направление и значение опорной реакции неизвестны. Обычно вместо определения значения и направления (полной) реакции \vec{R}_A находят ее составляющие \vec{R}_{Ax} и \vec{R}_{Ay} .

Жесткая заделка (защемление) (рис. 36, г). Такая опора не допускает ни линейных перемещений, ни поворота. Неизвестными в данном случае являются не только значение и направление реакции, но и точка ее приложения. Поэтому жесткую заделку заменяют силой реакции \vec{R}_A и парой сил с моментом M_A .

Для определения опорной реакции следует найти три неизвестных: составляющие \vec{R}_{Ax} и \vec{R}_{Ay} опорной реакции по осям координат и реактивный момент M_A .

§ 21. Решение задач на равновесие плоской системы сил

Для решения задач на равновесие плоской системы сил можно пользоваться любой формой уравнений равновесия, приведенной в § 19. Составляя уравнения равновесия, следует учитывать, что мы имеем полную свободу выбора координатных осей и центров моментов. Эту свободу выбора нужно разумно использовать для упрощения вычислений, связанных с решением уравнений равновесия.

Целесообразно составлять уравнения так, чтобы они могли быть решены наиболее просто и быстро. Просто решается система уравнений равновесия, каждое из которых содержит одну из неизвестных. К такой системе можно прийти при соответствующем выборе направления координатных осей и центра моментов.

В качестве центра моментов рекомендуется выбирать точку, где пересекаются две неизвестные силы; уравнение моментов относительно этой точки будет содержать только одну неизвестную. Направление координатных осей x и y следует выбирать так, чтобы оси были перпендикулярны некоторым неизвестным силам. При составлении уравнений проекций неизвестные, перпендикулярные соответствующей оси, в эти уравнения не войдут.

Определение неизвестных величин лучше начинать с уравнений моментов, а затем переходить к уравнениям проекций. При

этом можно избежать совместного решения уравнений и, следовательно, уменьшить вероятность ошибок.

Следует отметить еще один важный момент. Для плоской системы сил можно выбрать любое число осей проекций и любое число центров моментов. Проецируя силы данной плоской системы на различные оси и составляя уравнения моментов относительно любых точек, можно написать сколько угодно уравнений равновесия, но только три из них будут независимыми. Остальные уравнения являются следствием этих трех уравнений и могут служить лишь для проверки решения.

Пример 6. Определить опорные реакции жесткой заделки (защемления) консольной балки (рис. 37). На конце балки подвешен груз $F = 1$ кН, длина балки $l = 8$ м, сила ее тяжести $G = 0,4$ кН приложена по середине балки.

Решение. Рассматриваем равновесие стержня AB , прикладываем к нему активные силы: силу тяжести $G = 0,4$ кН и груз $F = 1$ кН. Далее освобождаем балку AB от связей, т. е. отбрасываем заделку и заменяем ее действие реакциями. В данном случае для экономии места заделку не отбрасываем, а показываем ее реакции на том же исходном чертеже.

В заделке возникает реактивный момент M_A и две составляющие реакции \vec{R}_{Ax} и \vec{R}_{Ay} . Выбираем координатные оси, как показано на рис. 37, и составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Ay} - G - F = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M_A + Gl/2 + Fl = 0.$$

Решив уравнения, получим:

$$R_{Ay} = G + F = 0,4 + 1 = 1,4 \text{ кН};$$

$$M_A = Gl/2 + Fl = 0,4 \cdot 4 + 1 \cdot 8 = 9,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Из первого уравнения следует, что вертикальная нагрузка не вызывает горизонтальной составляющей опорной реакции.

Таким образом, в заделке рассматриваемой балки возникают только две составляющие реакции, третья обращается в нуль.

Проверяем полученные значения реакций, составляя уравнение моментов относительно точки B

$$\sum M_B = 0; \quad -M_A + R_{Ay}l - Gl/2 = 0;$$

$$-9,6 + 1,4 \cdot 8 - 0,4 \cdot 4 = 0; \quad -11,2 + 11,2 = 0.$$

Реакции найдены верно.

Пример 7. Определить опорные реакции балки, изображенной на рис. 38, нагруженной парой с моментом $M = 18$ кН·м и на участке CB распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 1,5$ кН/м; $AC = a = 3$ м; $CB = b = 6$ м.

Решение. Заменяем распределенную нагрузку на участке CB ее равнодействующей, которая равна qb и приложена по середине нагруженного участка.

Освобождаем балку от опор, а их действие заменяем реакциями \vec{R}_{Ay} , \vec{R}_{Ax} и \vec{R}_B .

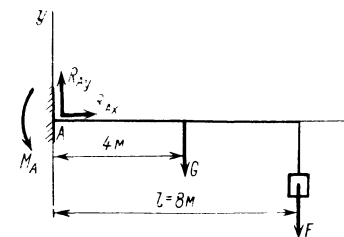


Рис. 37

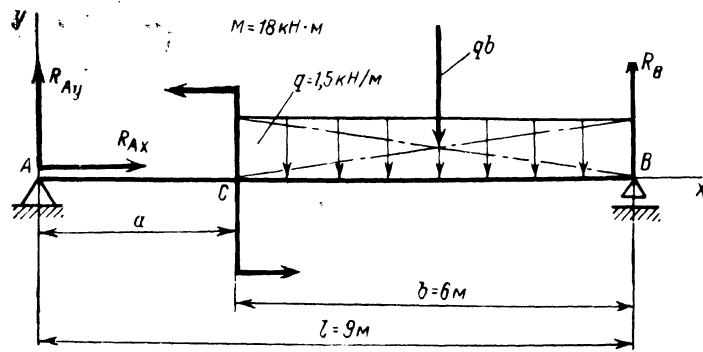


Рис. 38

Выбираем координатные оси и составляем уравнения равновесия. Как известно, сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю, поэтому

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Ay} + R_B - qb = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M + qb(l - b/2) - R_B l = 0.$$

Решая уравнение, получаем:

$$R_{Ax} = 0;$$

$$R_B = \frac{-M + qb(l - b/2)}{l} = \frac{-18 + 1,5 \cdot 6(9 - 3)}{9} = 4 \text{ кН};$$

$$R_{Ay} = qb - R_B = 1,5 \cdot 6 - 4 = 5 \text{ кН}.$$

Следует отметить, что под действием пары сил в шарнирно-неподвижной опоре не возникает горизонтальной составляющей реакции, если опорная поверхность шарнирно-подвижной опоры горизонтальна.

Проверим найденные значения реакций, используя уравнение моментов относительно опоры B,

$$\sum M_B = 0; \quad R_{Ay}l - M - qbb/2 = 0; \quad 5 \cdot 9 - 18 - 1,5 \cdot 6 \cdot 3 = 0; \quad 45 - 45 = 0.$$

Реакции найдены верно.

Пример 8. Симметричная стропильная ферма ABC (рис. 39) в точке A укреплена на шарнирно-неподвижной опоре, а в точке B — на шарнирно-подвижной. Сила тяжести фермы G = 10 кН. Сторона AC находится под равномерно распре-

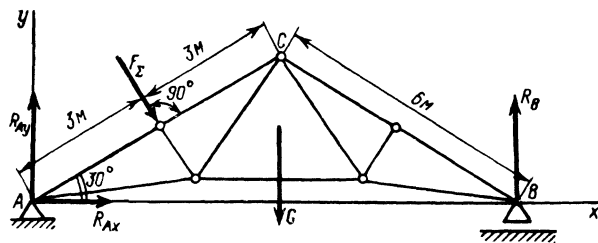


Рис. 39

деленным перпендикулярным к ней давлением ветра; сила ветра $F_{\Sigma} = 0,8$ кН и приложена посередине стороны AC. Длина AC = 6 м: $\angle CAB = \angle CBA = 30^\circ$. Определить опорные реакции.

Выделяя в качестве объекта равновесия ферму, прикладываем к ней заданные силы \vec{G} , \vec{F}_{Σ} . Затем освобождаем от связей и прикладываем их реакции.

Решение. Реакция подвижной опоры \vec{R}_B направлена вертикально, а опорная реакция шарнирно-неподвижной опоры \vec{A} неизвестна как по значению, так и по направлению; ее составляющие обозначим \vec{R}_{Ay} и \vec{R}_{Ax} . Имеем три неизвестные силы \vec{R}_B , \vec{R}_{Ax} и \vec{R}_{Ay} . Направление координатных осей указано на рис. 39. Составим уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 0; \quad -R_B AB + GAB/2 + F_{\Sigma} AC/2 = 0,$$

где $AB = 2AC \cos 30^\circ$;

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} + F_{\Sigma} \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Ay} + R_B - G - F_{\Sigma} \cos 30^\circ = 0.$$

Подставив значение AB в первое уравнение и, сократив почленно на AC, получим

$$R_B = \frac{GAC \cos 30^\circ + F_{\Sigma} AC/2}{2 \cdot AC \cos \alpha} = \frac{10 \cdot 0,866 + 0,8 \cdot 0,5}{2 \cdot 0,866} = 5,23 \text{ кН}.$$

Решив остальные уравнения, найдем:

$$R_{Ax} = -F_{\Sigma} \cos 50^\circ = -0,8 \cdot 0,5 = -0,4 \text{ кН};$$

$$R_{Ay} = -R_B + G + F_{\Sigma} \cos 30^\circ = -5,23 + 10 + 0,8 \cdot 0,866 = 5,47 \text{ кН}.$$

Проверить полученные значения реакций можно с помощью неиспользованного при решении уравнения моментов, например относительно точки C или B. Представляем учащимся самостоятельно выполнить проверку, предварительно установив, какое из уравнений моментов легче составить $\sum M_C = 0$ или $\sum M_B = 0$.

Упражнение 11

1. Главный вектор и главный момент системы сил равны нулю. Можно ли утверждать, что система сил находится в равновесии?

А. Можно. Б. Нельзя.

2. Сколько независимых уравнений равновесия можно составить для плоской системы параллельных сил?

А. Одно. Б. Два. В.

Три.

3. На рис. 40 показаны составляющие реакций опор балок. Указать, какой вид опоры соответствует каждому случаю, и изобразите эти опоры.

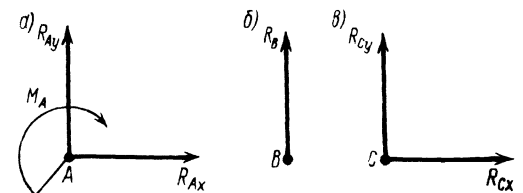


Рис. 40

§ 22 Пространственная система сил

Система сил называется *пространственной*, если линии действия сил, приложенных к телу, не лежат в одной плоскости. Подобно плоской системе пространственную систему сил можно привести к любой точке пространства. Порядок приведения тот же, что и для плоской системы сил, при этом от каждой силы в центре приведения получаем силу и пару сил.

Геометрическая сумма всех сил данной пространственной системы называется главным вектором. Модуль главного вектора определится через проекции на координатные оси x , y и z всех сил системы

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2 + (\sum F_{iz})^2}. \quad (26)$$

В отличие от плоской системы сил моменты сил пространственной системы относительно точки приведения действуют в разных плоскостях. Поэтому *главный момент пространственной системы сил определяется как геометрическая сумма моментов всех сил относительно точки приведения.*

Абсолютное значение главного момента заданной системы сил относительно некоторой точки определяется по формуле

$$M_{\text{гл}} = \sqrt{(\sum M_{ix})^2 + (\sum M_{iy})^2 + (\sum M_{iz})^2}, \quad (27)$$

где $\sum M_{ix}$, $\sum M_{iy}$, $\sum M_{iz}$ — алгебраические суммы моментов всех сил системы относительно осей x , y , z , проходящих через рассматриваемую точку.

Равновесие пространственной системы сил имеет место, когда главный вектор и главный момент равны нулю, т. е.

$$F_{\text{гл}} = 0; \quad M_{\text{гл}} = 0. \quad (28)$$

На этом основании можно написать шесть уравнений равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum F_{iz} = 0; \\ \sum M_{ix} = 0; \quad \sum M_{iy} = 0; \quad \sum M_{iz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Шесть уравнений равновесия для пространственной системы сил, соответствующих шести независимым возможным степеням подвижности тела в пространстве: трем перемещениям вдоль координатных осей и трем вращениям вокруг этих осей.

Пример 9. На горизонтальном валу AB (рис. 41) насажено зубчатое колесо C с радиусом $R = 1$ м и шестерня D с радиусом $r = 10$ см. Остальные размеры представлены на рисунке. К колесу C по касательной приложена горизонтальная сила $\vec{F}_1 = 10$ кН.

Определить силу \vec{F}_2 , приложенную по касательной вертикально к шестерне D , и реакции шарниров A и B в положении равновесия.

Решение. В шарнирах A и B (рис. 41) возникнут по две неизвестные со-

ставляющие реакций \vec{R}_{Ax} ; \vec{R}_{Az} ; \vec{R}_{Bx} ; \vec{R}_{Bz} , кроме того, неизвестна сила \vec{F}_2 . Всего пять неизвестных.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum M_{iy} = 0; \quad F_1 R - F_2 r = 0,$$

откуда

$$F_2 = F_1 R / r = 10 \cdot 100 / 10 = 100 \text{ кН};$$

$$\sum M_{iz} = 0;$$

$$F_1 AC + R_{Bx} AB = 0,$$

откуда

$$R_{Bx} = -F_1 AC / AB = -10 \cdot 90 / 100 = -9 \text{ кН};$$

$$\sum M_{ix} = 0; \quad -F_2 AD - R_{Bz} AB = 0,$$

откуда

$$R_{Bz} = -F_2 AD / AB = -100 \cdot 10 / 100 = -10 \text{ кН};$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} + R_{Bx} + F_1 = 0,$$

откуда

$$R_{Ax} = -F_1 - R_{Bx} = -10 - (-9) = -1 \text{ кН};$$

$$\sum F_{iz} = 0; \quad R_{Az} + R_{Bz} + F_2 = 0,$$

откуда

$$R_{Az} = -F_2 - R_{Bz} = -100 - (-10) = -90 \text{ кН}.$$

Знак минус перед значениями R_{Ax} , R_{Az} , R_{Bx} и R_{Bz} показывает, что эти реакции направлены в стороны, противоположные указанным на чертеже.

Шестое уравнение равновесия $\sum F_{iy} = 0$ в этой задаче обращается в тождество $0 = 0$, так как ни одна сила на ось y не проецируется.

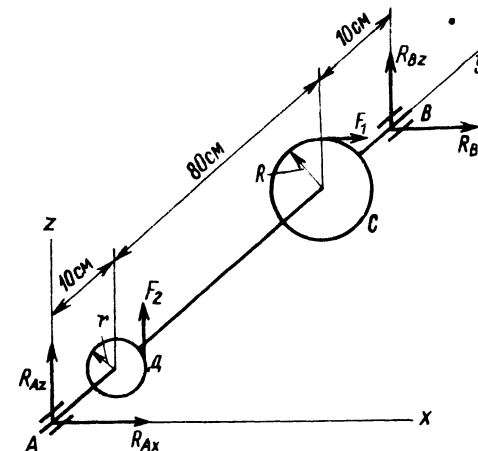


Рис. 41

ГЛАВА V. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

§ 23. Центр параллельных сил и его координаты

Установим одно важное свойство точки приложения равнодействующей двух параллельных сил.

Пусть в точках A и B на тело действуют параллельные силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 (рис. 42, а). *Равнодействующая этих сил равна их сумме, параллельна им, направлена в ту же сторону, а ее линия действия*

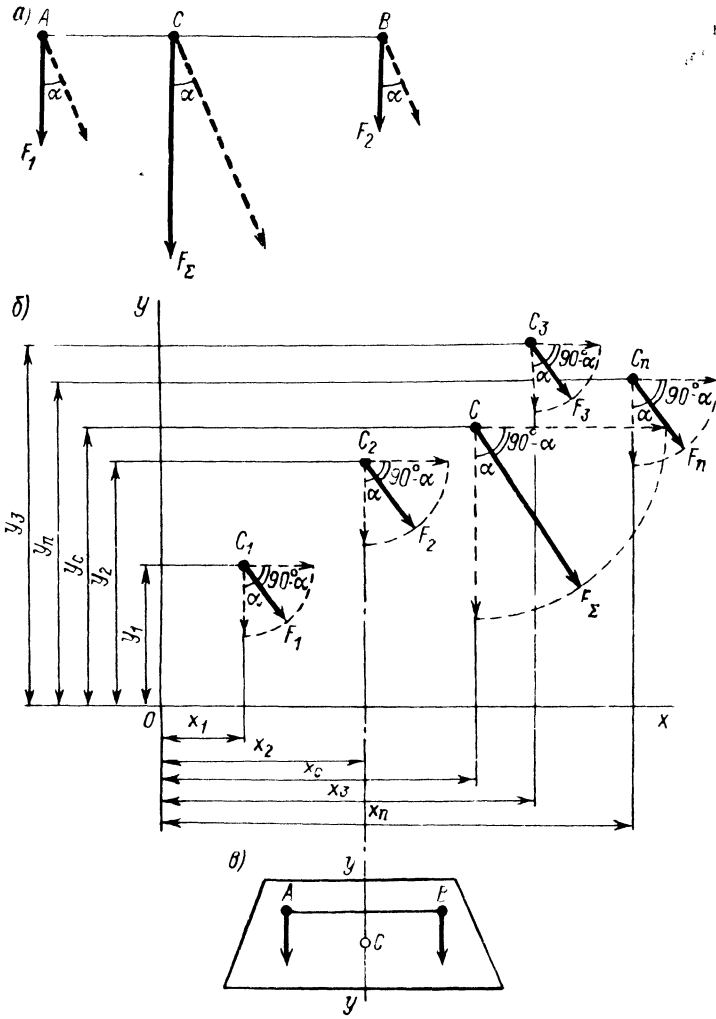


Рис. 42

делит прямую AB на части, обратно пропорциональные этим силам (см. § 18), т. е.

$$AC/BC = F_2/F_1.$$

Повернем силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 на произвольный угол α , т. е. изменим их направление, сохранив параллельность. При этом равнодействующая останется равной их сумме, параллельной им, направленной в ту же сторону, а линия ее действия опять разделит прямую AB на части, обратно пропорциональные значениям заданных сил. На рис. 42, а точкой C обозначено пересечение линии

действия равнодействующей с линией AB . Эта точка называется *центром параллельных сил*, и ее положение не зависит от направления слагаемых сил.

Любое тело можно рассматривать как состоящее из большого числа малых частиц, на которые действуют силы тяжести. Все эти силы направлены к центру Земли по радиусу. Так как размеры тел, с которыми приходится иметь дело в технике, ничтожно малы по сравнению с радиусом Земли (значение его около 6371 км), то можно считать, что приложенные к частицам силы тяжести параллельны и вертикальны. Следовательно, силы тяжести отдельных частиц тела образуют систему параллельных сил. Равнодействующую этих сил называют *силой тяжести*.

Центр параллельных сил тяжести, действующих на все частицы тела, называется *центром тяжести тела*. Центр тяжести тела не меняет своего положения при повороте тела.

Выведем формулы, позволяющие определять положение центра любой системы параллельных сил.

Пусть задана система параллельных сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$; координаты точек $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ приложения этих сил известны (рис. 42, б). Обозначим точку приложения равнодействующей \vec{F}_z буквой C , ее координаты обозначим x_C, y_C . Как известно из предыдущего,

$$F_z = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i. \quad (30)$$

Если среди заданных параллельных сил имеются силы противоположных направлений, то они имеют разные знаки. Иными словами нужно какое-либо направление принять за положительное и значения сил, совпадающих с этим направлением, подставлять в формулу (30) со знаком плюс, а значения сил противоположного направления — со знаком минус.

Так как положение центра параллельных сил не зависит от их направления, повернем все заданные силы на угол α по часовой стрелке так, чтобы они стали параллельны оси y (рис. 42, б). Равнодействующая при этом также повернется на угол α в ту же сторону.

Применим теорему о моменте равнодействующей (теорему Вариньона) относительно начала координат (точки O):

$$F_z x_C = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots + F_n x_n = \sum F_i x_i,$$

$$\text{откуда } x_C = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots + F_n x_n}{F_z} = \frac{\sum F_i x_i}{F_z},$$

но, так как

$$F_z = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = \sum F_i,$$

$$x_c = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots + F_n x_n}{F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n} = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}.$$

Поворачивая по аналогии заданные силы против часовой стрелки на угол ($90^\circ - \alpha$) так, чтобы они стали параллельны оси x , и пользуясь теоремой о моменте равнодействующей, получаем формулу для другой координаты центра параллельных сил:

$$y_c = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3 + \dots + F_n y_n}{F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n} = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}.$$

Положение (координаты) центра пространственной системы параллельных сил определяют по формулам:

$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}; \quad y_c = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}; \quad z_c = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}. \quad (31)$$

Выведенные формулы используются для вычисления координат центра тяжести тела, имеющего конечное число отдельных частей правильной формы (цилиндров, кубов, параллелепипедов и т. п.). Тогда вместо F_i подставляются значения G_i , под которыми подразумевают силы тяжести отдельных частей тела, а под x_i , y_i , z_i — координаты их центров тяжести.

Часто бывает, что тело нельзя разбить на конечное число отдельных частей, центры тяжести которых легко определяются. Тогда переходят от конечных сумм к интегрированию, и формулы для определения координат центра тяжести принимают вид:

$$x_c = \frac{\int dF \cdot x}{\int dF}; \quad y_c = \frac{\int dF \cdot y}{\int dF}; \quad z_c = \frac{\int dF \cdot z}{\int dF}, \quad (32)$$

где индекс V у интегралов показывает, что интегрирование происходит по всему объему тела.

Центр тяжести симметричного тела всегда лежит в плоскости симметрии. Плоскость симметрии разделяет тело так, что каждой материальной точке, находящейся по одну сторону плоскости, соответствует равная ей по массе точка по другую сторону, причем линия, соединяющая эти точки, перпендикулярна плоскости симметрии и делится ею пополам.

На этом основании центр тяжести отрезка прямой линии находится в его середине. Центр тяжести плоской симметричной фигуры (тонкой однородной пластинки) лежит на оси симметрии, т. е. на линии yy , делящей фигуру на две равные части (рис. 42, в).

В однородном теле сила тяжести dG каждой элементарной части пропорциональна ее объему dV , т. е.

$$dG = \gamma \cdot dV,$$

где γ — объемный вес (постоянная величина для однородного тела).

В общих формулах (32), вынося γ за знак суммы в числителе и знаменателе и производя сокращение, получаем формулы для определения координат центра тяжести однородного тела или, как принято говорить, центра тяжести объема:

$$x_c = \frac{\int dV \cdot x}{\int dV}; \quad y_c = \frac{\int dV \cdot y}{\int dV}; \quad z_c = \frac{\int dV \cdot z}{\int dV}, \quad (33)$$

где $\int dV = V$ — полный объем тела.

Наличие осей симметрии в однородном теле облегчают определение положения его центра тяжести. Например, центр тяжести призмы и цилиндра лежит на середине линии, соединяющей центры тяжести оснований. Центр тяжести шара совпадает с его геометрическим центром. Центр тяжести пирамиды лежит на прямой, соединяющей центр тяжести площади основания с противоположной вершиной на расстоянии $1/4$ высоты от основания (рис. 43, а). Центр тяжести конуса лежит на прямой, соединяющей центр основания с вершиной на расстоянии $1/4$ высоты от основания (рис. 43, б).

§ 24. Центры тяжести площадей. Статические моменты площадей

Очень часто приходится определять центры тяжести различных сочетаний тел, представляющих собой геометрические плоские фигуры иногда весьма сложной формы.

Для плоских тел интегрирование производят по их площади и соответственно центр тяжести определяется только двумя координатами:

$$x_c = \frac{\int_A dG \cdot x}{\int_A dG}; \quad y_c = \frac{\int_A dG \cdot y}{\int_A dG}. \quad (33a)$$

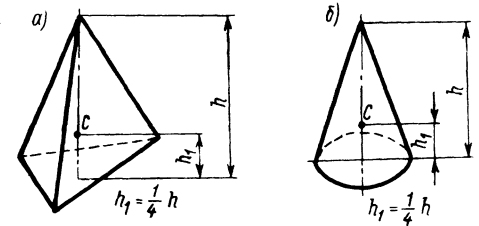


Рис. 43

Масса каждой элементарной части dA для однородного плоского тела (рис. 44) пропорциональна площади. Обозначим γ' массу 1 м^2 , тогда $dG = \gamma' dA$.

Разделив числитель и знаменатель в формулах (33а) на γ' , получим формулы для определения координат центра тяжести

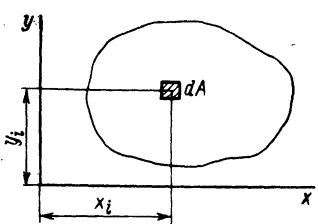


Рис. 44

$$x_c = \frac{\int_A dA \cdot x}{\int_A dA}; \quad y_c = \frac{\int_A dA \cdot y}{\int_A dA},$$

где $\int_A dA$ — полная площадь фигуры,

$$\int_A dA = A.$$

Произведение элементарной площади dA фигуры (рис. 44) на расстояние ее центра тяжести до какой-либо оси называется статическим моментом этой части площади относительно данной оси. Так, статический момент площади dA относительно оси x $dS_x = dA \cdot y$, а относительно оси y $dS_y = dA \cdot x$.

Сумма статических моментов всех частей фигуры называется статическим моментом площади фигуры относительно данной оси:

$$S_x = \int_A dS_x = \int_A dA \cdot y;$$

$$S_y = \int_A dS_y = \int_A dA \cdot x.$$

Статический момент площади выражается единицами длины в третьей степени (см^3 , мм^3 , м^3). Координаты центра тяжести плоской фигуры можно выразить через статические моменты площадей:

$$x_c = S_y/A; \quad y_c = S_x/A. \quad (34)$$

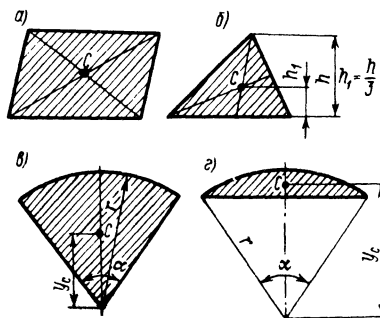


Рис. 45

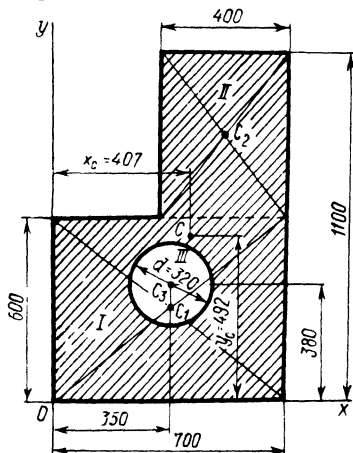


Рис. 46

Если начало координат расположить в центре тяжести площади, то статические моменты относительно осей x и y , проходящих через центр тяжести, будут равны нулю, так как в этом случае $y_c = 0$ и $x_c = 0$.

Следовательно, статический момент плоской фигуры относительно любой центральной оси равен нулю.

В заключение приведем (без выводов) сведения о координатах центров тяжести некоторых простых фигур, которые могут встретиться при решении задач. Центр тяжести параллелограмма, а также прямоугольника и квадрата совпадает с точкой C пересечения диагоналей (рис. 45, а). Центр тяжести треугольника лежит на пересечении медиан (рис. 45, б). Положение центра тяжести кругового сектора определяют по формуле (рис. 45, в)

$$y_c = \frac{4}{3} r \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha}, \quad (35)$$

где α — центральный угол сектора, рад.

Положение центра тяжести сегмента круга определяют по формуле (рис. 45, г)

$$y_c = \frac{4r \sin \frac{3\alpha}{2}}{3(\alpha - \sin \alpha)}. \quad (36)$$

Пример 10. Определить координаты центра тяжести плоской фигуры с круглым отверстием, изображенной на рис. 46. Размеры (мм) указаны на чертеже.

Решение. Разбиваем фигуру на три части: два прямоугольника I и II и круглое отверстие III . Вычисляем координаты центров тяжести и площади этих частей:

$$x_1 = 350 \text{ мм}; \quad y_1 = 300 \text{ мм};$$

$$A_1 = 600 \cdot 700 = 420\,000 \text{ мм}^2;$$

$$x_2 = 500 \text{ мм}; \quad y_2 = 850 \text{ мм};$$

$$A_2 = 400 \cdot 500 = 200\,000 \text{ мм}^2;$$

$$x_3 = 350 \text{ мм}; \quad y_3 = 380 \text{ мм};$$

$$A_3 = -\frac{3,14}{4} 320^2 = -80400 \text{ мм}^2.$$

Знак минус означает, что A_3 — площадь отверстия.

Вычисляем координаты центра тяжести всей фигуры:

$$x_c = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{(4200 \cdot 350 + 2000 \cdot 500 - 804 \cdot 350) 10^2}{(4200 + 2000 - 804) 10^2} = 407 \text{ мм};$$

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{(4200 \cdot 300 + 2000 \cdot 850 - 804 \cdot 380) 10^2}{(4200 + 2000 - 804) 10^2} = 492 \text{ мм}.$$

Упражнение 12

1. Вычислите значение равнодействующей \vec{F}_Σ и абсциссу x_G (рис. 47) центра параллельных сил.

2. Где располагается центр тяжести тела, имеющего ось симметрии?

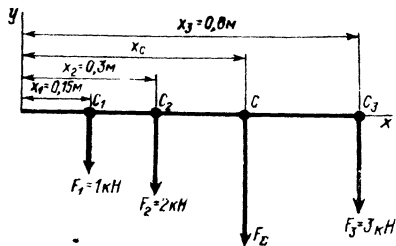


Рис. 47

А. На оси симметрии. Б. Положение центра тяжести нельзя определить.

3. Зависит ли статический момент площади от расположения площади относительно оси.

А. Зависит. Б. Не зависит.

4. Вычислите статические моменты площади прямоугольника относительно осей x и x_0 (рис. 48, а) при $a = 40$ мм.

5. Чему равен статический момент площади относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения?

А. $S_x > 0$. Б. $S_x = 0$. В. $S_x < 0$.

6. Определите координаты центра тяжести таврового сечения, размеры которого (мм) указаны на рис. 48, б.

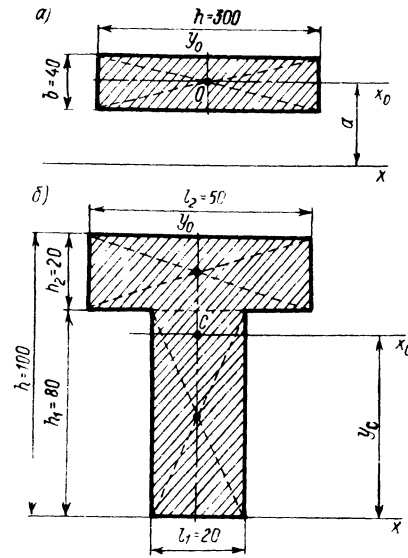


Рис. 48

§ 25. Полярный и осевые моменты инерции

В дальнейшем в расчетах на прочность мы будем встречаться еще с некоторыми геометрическими характеристиками сечений. Это так называемые моменты инерции сечений. Различают полярные и осевые моменты инерции. *Полярным моментом инерции сечения называется взятая по всему сечению сумма произведений или интеграл элементарных площадей на квадраты их расстояний до некоторой точки O сечения* (рис. 49, а):

$$J_p = \int_A dA \rho^2. \quad (37)$$

Для поперечных сечений в форме круга или кругового кольца полярный момент инерции характеризует способность сопротивляться кручению и используется как геометрическая характеристика поперечного сечения при расчетах на кручение. Полярный момент инерции измеряется в единицах длины в четвертой степени (см^4 , мм^4 , м^4).

Практический интерес представляет полярный момент инерции относительно центра тяжести сечения.

Полярный момент инерции круга определяется по следующей формуле

$$J_p = \pi d^4 / 32, \quad (38)$$

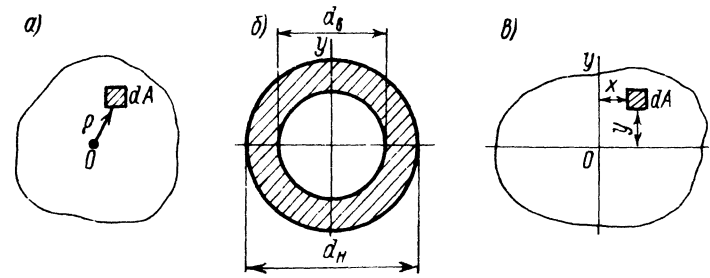


Рис. 49

или приближенно $J_p \approx 0,1d^4$.

Полярный момент инерции кольца равен разности полярных моментов инерции двух кругов диаметрами d_n и d_b (рис. 49, б):

$$J_p = \pi d_b^4 / 32 - \pi d_n^4 / 32 = \pi d_n^4 / 32 [1 - (d_b / d_n)^4] = (\pi d_n^4 / 32) (1 - \alpha^4), \quad (39)$$

где $\alpha = d_b / d_n$.

Приближенно для кольца $J_p \approx 0,1d_n^4 (1 - \alpha^4)$.

Осевым моментом инерции сечения называется взятая по всему сечению сумма произведений или интеграл элементарных площадок на квадраты их расстояний до некоторой оси, лежащей в плоскости рассматриваемого сечения. Так, относительно осей x и y (рис. 49, в) осевые моменты инерции определяются следующими выражениями:

$$J_x = \int_A dA y^2; \quad J_y = \int_A dA x^2. \quad (40)$$

Значение осевого момента инерции служит характеристикой способности балки сопротивляться изгибу. Осевые моменты инерции, так же как полярные, всегда положительны и измеряются в единицах длины в четвертой степени (см^4 , мм^4 , м^4).

В практических расчетах наибольший интерес представляют моменты инерции относительно так называемых главных осей, проходящих через центр тяжести сечения. В дальнейшем будем рассматривать только сечения, имеющие не менее одной оси симметрии.

Относительно одной из главных центральных осей момент инерции имеет наибольшее из всех возможных значений, а относительно другой — наименьшее. Ось симметрии сечения всегда является одной из главных центральных осей, а другая главная центральная ось ей перпендикулярна. В дальнейшем рассматриваются сечения, обладающие симметрией, что позволяет легко определять их главные центральные оси.

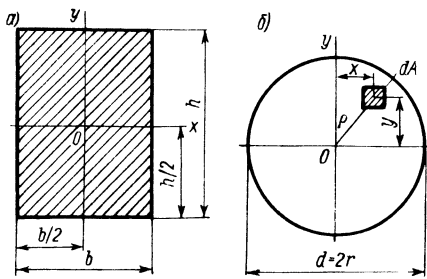


Рис. 50

Для прямоугольного сечения (рис. 50, а) осевой момент инерции определяется по формуле

$$J_x = bh^3/12 \quad (41)$$

Чтобы определить осевой момент инерции круглого сечения относительно центральной оси x (рис. 50, б), воспользуемся известным нам значением его полярного момента инерции

$$J_p = \int_A dA \rho^2 = \pi d^4/32 \approx 0,1d^4.$$

Согласно рис. 50 $\rho^2 = x^2 + y^2$, откуда

$$J_p = \int_A dA \rho^2 = \int_A (y^2 + x^2) dA = \int_A dA y^2 + \int_A dA x^2 = J_x + J_y,$$

так как $\int_A dA y^2 = J_x$; $\int_A dA x^2 = J_y$ — осевые моменты инерции для круглого сечения относительно осей x и y .

Для круга моменты инерции относительно любых осей, проходящих через его центр, равны между собой, т. е. $J_x = J_y$, поэтому

$$J_p = J_x + J_y = 2J_x = 2J_y,$$

откуда

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi d^4}{32 \cdot 2} = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4. \quad (42)$$

Аналогично для кольцевого сечения (см. рис. 49, б)

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi d_n^4 (1 - \alpha^4)}{32 \cdot 2} = \frac{\pi d_n^4 (1 - \alpha^4)}{64} \approx 0,05d_n^4 (1 - \alpha^4), \quad (43)$$

где $\alpha = d_v/d_n$.

§ 26. Осевые моменты инерции относительно параллельных осей

Для вычисления осевых моментов инерции сложных сечений часто приходится пользоваться теоремой о моментах инерции относительно параллельных осей. Момент инерции сечения относительно оси, не проходящей через его центр тяжести, равен сумме момента инерции сечения относительно его центральной оси, параллельной данной оси, и произведения площади сечения на квадрат расстояния между осями.

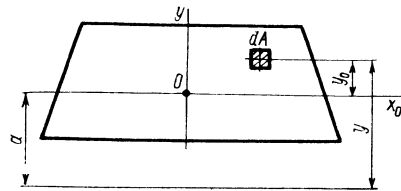


Рис. 51

Обозначим y расстояние элементарной площадки dA от оси x , а y_0 — расстояние от параллельной ей центральной оси x_0 ; расстояние между осями обозначим a ; очевидно, что $y = y_0 + a$ (рис. 51). Момент инерции рассматриваемого сечения относительно оси x

$$J_x = \int_A dA y^2 = \int_A dA (y_0 + a)^2 = \int_A dA y_0^2 + 2a \int_A dA y_0 + a^2 \int_A dA.$$

Первый интеграл в правой части $\int_A dA y_0^2$ представляет собой момент инерции относительно оси x_0 , т. е. $\int_A dA y_0^2 = J_{x_0}$. Второй интеграл — статический момент рассматриваемого сечения относительно той же оси x_0 , т. е. $\int_A dA y_0 = S_{x_0}$, а так как ось x_0 проходит через центр тяжести рассматриваемой части сечения, то $S_{x_0} = 0$ (см. § 24). Третий интеграл представляет собой площадь рассматриваемой части, т. е. $\int_A dA = A$. Таким образом, имеем

$$J_x = J_{x_0} + Aa^2, \quad (44)$$

что и требовалось доказать.

Вычислим момент инерции таврового сечения относительно центральной оси x_0 (см. рис. 48, б). Расстояние до центра тяжести сечения от нижней кромки y_c может быть определено по правилам, изложенным в § 24. Разобьем тавр на два прямоугольника, как показано на рисунке; расстояния их центров тяжести от оси x обозначим a_1 и a_2 . Моменты инерции прямоугольников относительно собственных центральных осей, параллельных оси x , согласно формуле (41) равны соответственно $l_1 h_1^3/12$ и $l_2 h_2^3/12$.

Момент инерции всего сечения относительно оси x вычисляем по формуле (44)

$$J_x = l_1 h_1^3/12 + l_1 h_1 a_1^2 + l_2 h_2^3/12 + l_2 h_2 a_2^2.$$

§ 27. Определение моментов инерции составных сечений с помощью таблиц нормального сортамента

Многие конструктивные элементы часто изготавливают из стандартного проката — уголков, двутавров, швеллеров и др. Все размеры, а также значения моментов инерции площадей и некоторых других геометрических характеристик прокатных профилей приведены в таблицах нормального сортамента (ГОСТ 8239—72, ГОСТ 8240—72).

В сортаменте указаны номера профилей, масса погонного метра, размеры и площадь поперечного сечения профиля, а также

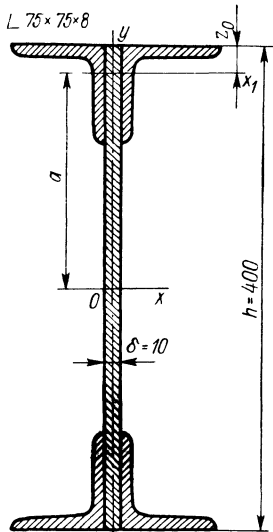


Рис. 52

значения моментов инерции сечения. Кроме осевых моментов инерции в сортаменте приводятся значения так называемых радиусов инерции. Радиус инерции сечения определяют по формуле

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}}, \quad (45)$$

где J — осевой момент инерции; A — площадь сечения.

Как будет показано ниже, радиусы инерции служат важными характеристиками сечения при расчетах на устойчивость. По известному радиусу инерции сечения и его площади можно вычислить соответствующий осевой момент инерции

$$J = i^2 A.$$

Рассмотрим пример определения моментов инерции составных сечений с помощью таблиц сортамента.

Пример 11. Определить момент инерции сечения, изображенного на рис. 52, относительно его центральной оси x . Сечение составлено из вертикального листа (стенки) $h = 400$ мм, $\delta = 10$ мм и четырех уголков $75 \times 75 \times 8$.

Решение. Момент инерции сечения складывается из момента инерции стенки и моментов инерции четырех уголков

$$J_x = J_{x \text{ ст}} + 4J_{x \text{ уг}}$$

Вычисляем момент инерции вертикального листа (стенки)

$$J_{x \text{ ст}} = \frac{\delta h^3}{12} = \frac{10 \cdot 400^3}{12} = 53,3 \cdot 10^6 \text{ мм}^4.$$

Определяем момент инерции уголка, пользуясь теоремой о моментах инерции относительно параллельных осей,

$$J_{x \text{ уг}} = J_{x_1 \text{ уг}} + A_{\text{уг}} a^2.$$

Значение $J_{x_1 \text{ уг}}$ берется из таблиц сортамента; это момент инерции уголка относительно собственной центральной оси, параллельной одной из его полок. Для уголка $75 \times 75 \times 8$ $J_{x_1 \text{ уг}} = 59,8 \text{ см}^4$.

Значение a находим из выражения

$$a = h/2 - z_0 = 400/2 - 21,5 = 178,5 \text{ мм},$$

где z_0 — расстояние центра тяжести уголка от обушка (см. рис. 52) также берем из таблиц сортамента.

Подставляя численные значения в формулу для момента инерции уголка и учитывая, что площадь сечения уголка $A_{\text{уг}} = 11,5 \text{ см}^2$ (из таблиц сортамента), получаем

$$\begin{aligned} J_{x \text{ уг}} &= 59,8 + 11,5 \cdot 17,85^2 = 59,8 + 3660 = \\ &= 3720 \text{ см}^4 = 37,2 \cdot 10^6 \text{ мм}^4. \end{aligned}$$

Окончательно вычисляем момент инерции всего сечения

$$J_x = J_{x \text{ ст}} + 4J_{x \text{ уг}} = 53,3 \cdot 10^6 + 4 \cdot 37,2 \cdot 10^6 = 202,1 \cdot 10^6 \text{ мм}^4.$$

Упражнение 13

1. Вычислите полярный момент инерции круга диаметром 80 мм.
2. Вычислите полярный момент инерции поперечного сечения трубы. Наружный диаметр трубы $d_H = 100$ мм, внутренний $d_B = 90$ мм.
3. Определите, на сколько процентов уменьшится полярный момент инерции кольца по сравнению с кругом, если наружный диаметр кольца d_H равен диаметру круга d . Отношение внутреннего диаметра кольца к наружному $\alpha = d_B/d_H = d_B/d = 0,5$.

4. Может ли осевой момент инерции быть отрицательной величиной?
 - А. Может. Б. Не может.
5. Укажите, для какой оси (см. рис. 48, а) осевой момент инерции прямоугольного сечения следует вычислять по формуле

$$J = hb^3/12 + bha^2.$$

- А. Для оси x_0 проходящей через центр тяжести сечения. Б. Для оси x .
6. Вычислите осевые моменты инерции относительно осей симметрии (x_0 и y_0) поперечного сечения доски толщиной 40 мм и шириной 300 мм (см. рис. 48, а). Во сколько раз осевой момент инерции относительно оси x_0 меньше осевого момента инерции относительно оси y_0 ?
 7. Вычислите осевой момент инерции сечения (см. рис. 48, а) относительно оси x , параллельной центральной; расстояние между осями $a = 40$ мм. Как влияет на величину осевого момента инерции удаление оси от центра тяжести сечения?
 8. Во сколько раз увеличится осевой момент инерции круга, если его диаметр увеличить в два раза?
 - А. В два раза. Б. В четыре раза. В. В шестнадцать раз.

ГЛАВА VI. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

§ 28. Понятие о деформации и упругом теле

Все элементы сооружений или машин должны работать без угрозы поломки или опасного изменения сечений и формы под действием внешних сил. Размеры этих элементов в большинстве случаев определяет расчет на прочность.

Элементы конструкции должны быть не только прочными, но и достаточно жесткими и устойчивыми.

При расчете на жесткость размеры детали определяются из условия, чтобы при действии рабочих нагрузок изменение ее формы и размеров происходило в пределах, не нарушающих нормальную эксплуатацию конструкции. Расчет на устойчивость должен обеспечить сохранение элементом конструкции первоначальной (расчетной) формы его равновесия. Чаще всего расчет на устойчивость выполняют для сжатых стержней.

Все реальные элементы конструкций и машин под действием на них внешних сил изменяют форму и размеры — деформируются. Способность деформироваться — одно из основных свойств всех твердых тел. Приложение внешних сил изменяет расстояние между молекулами, и тело деформируется. При этом изменяется межмолекулярное взаимодействие и внутри тела возникают силы, которые противодействуют деформации и стремятся вернуть частицы тела в прежнее положение. Эти внутренние силы называют *силами упругости*.

При малых значениях внешних сил твердое тело после загрузки обычно восстанавливает свои первоначальные размеры.

Такое свойство твердых тел называется *упругостью*. Если тело после снятия нагрузки полностью восстанавливает свою первоначальную форму и размеры, его называют *абсолютно упругим*, а исчезающие после снятия нагрузки деформации — *упругими деформациями*.

Опыты показывают, что упругая деформация наблюдается, пока действующие на тело силы не превысят определенного для каждого тела предела; при действии большей нагрузки тело наряду с упругой всегда получает и *остаточную деформацию*.

Нарушением прочности конструкции считают не только ее разрушение в буквальном смысле слова или появление трещин,

но и возникновение остаточных деформаций. Как правило, при проектировании размеры элементов конструкций назначают таким образом, чтобы возникновение остаточных деформаций было исключено.

§ 29. Основные допущения и гипотезы

Для упрощения расчетов элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость приходится прибегать к некоторым допущениям и гипотезам о свойствах материалов и характере деформаций. Основные допущения о свойствах материалов сводятся к тому, что материалы, из которых изготовляют конструкции, считают однородными, сплошными и имеющими одинаковые свойства во всех направлениях.

Основные допущения о характере деформаций сводятся к следующему.

1. Перемещения, возникающие в упругих телах под действием внешних сил, очень малы по сравнению с размерами рассматриваемых элементов. Это допущение позволяет во многих случаях не учитывать изменения размеров тел при деформации и связанного с этим изменения в расположении сил.

Рассмотрим упругое тело под действием некоторой системы сил (рис. 53). Вследствие деформации тела изменится взаимное расположение сил, точки их приложения переместятся: точка приложения силы F_1 перейдет из положения 1 в положение 1', а точка приложения силы F_2 — из положения 2 в 2'. Расстояния от точек приложения сил F_1 и F_2 до жесткой заделки на опоре уменьшатся¹.

Учитывая, что изменение расстояний весьма мало, можно принять $l_1 \approx l$ и $a_1 \approx a$.

2. Перемещения точек упругого тела пропорциональны действующим нагрузкам. Это справедливо в известных пределах нагружения. Элементы и конструкции, подчиняющиеся этому допущению, называют *линейно деформируемыми*.

Пример, поясняющий сущность прямо пропорциональной зависимости между нагрузками и перемещениями, приведен на

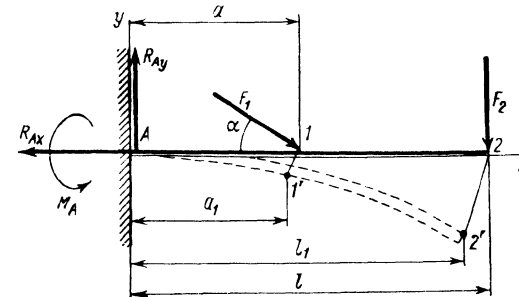


Рис. 53

¹ В разделе «Основы сопротивления материалов» стрелки над буквами, обозначающими векторы, не показаны.

рис. 54. Под действием силы F точка A стержня, изображенного на рис. 54, a , переместится на f , а под действием силы $3F$ перемещение этой точки будет в три раза большим (рис. 54, b).

3. Вследствие малости перемещений, возникающих при расчете деталей машин и конструкций, и прямо пропорциональной зависимости перемещений от нагрузок можно полагать, что внешние силы действуют независимо друг от друга. Это положение

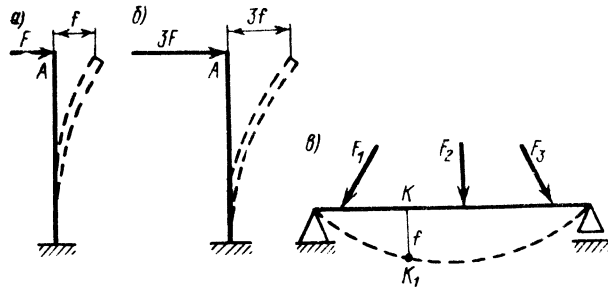


Рис. 54

известно под названием *принципа независимости действия сил* (или принципа суперпозиции). Разъясним его на примере. К телу, изображенному на рис. 54, $в$, приложена некоторая система сил F_1, F_2, F_3 . Под действием этих сил тело деформируется, и некоторая его точка K перемещается в положение K_1 . Заданная нагрузка может быть приложена самыми различными способами. Все три силы могут быть приложены одновременно или поочередно. Независимо от этого прогиб в точке K будет одинаковым и равным сумме прогибов от каждой из приложенных сил.

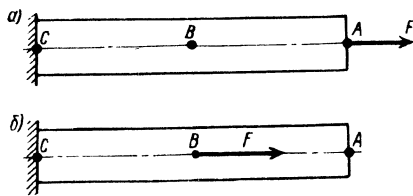


Рис. 55

Другие допущения и гипотезы применительно к отдельным видам деформаций изложены в соответствующих разделах курса. Многие положения статики, справедливые для абсолютно твердого тела, неприменимы при изучении деформации упругого тела. Так, в статике силу всегда можно было переносить по линии ее действия. Делать это в упругом теле нельзя, так как перенос силы может резко изменить картину нагружения. На рис. 55, $a, б$ это показано для частного случая: в первом варианте растяжение испытывает весь стержень AC , а во втором — растягивается только его часть BC . Аналогично не всегда возможна замена одной системы сил другой, статически эквивалентной. Так, в частности, нельзя заменять систему сил их равнодействующей.

1. Нормальная работа зубчатого механизма была нарушена из-за возникновения слишком больших упругих перемещений валов. Почему нарушилась нормальная работа передачи?

А. Из-за недостаточной прочности валов. Б. Из-за недостаточной жесткости валов. В. Из-за недостаточной устойчивости валов.

2. Велосипедная спица резко искривилась под действием сжимающей силы. Почему произошло изменение прямолинейной формы спицы?

А. Из-за недостаточной прочности. Б. Из-за недостаточной жесткости. В. Из-за недостаточной устойчивости.

3. При подъеме груза оборвался канат. Что послужило причиной обрыва?

А. Недостаточная прочность каната. Б. Недостаточная жесткость каната.

4. Для какой части стержня не изменится его деформированное состояние при переносе силы из точки A в точку B (см. рис. 55)?

А. Для участка CB . Б. Для участка CA . В. Для участка AB .

§ 30. Метод сечений. Виды нагружений

Стержнями (брусьями) называются такие элементы конструкций, длина которых значительно превышает их поперечные размеры. Кроме стержней (брусев) могут встречаться *пластины или оболочки*, у которых только один размер (толщина) мал по сравнению с двумя другими, и *массивные тела*, у которых все три размера примерно одинаковы. Расчеты на прочность пластин, оболочек и массивных тел значительно сложнее, чем расчеты стержней, и рассматриваются в специальных курсах.

Как отмечалось, внешние силы, действующие на тело, вызывают в нем дополнительные внутренние силы, стремящиеся противодействовать деформации. Обнаружить возникающие в нагруженном теле внутренние силы можно, применив метод сечений. Суть этого метода заключается в том, что внешние силы, приложенные к отсеченной части тела, уравниваются внутренними силами, возникающими в плоскости сечения и заменяющими действие отброшенной части тела на оставшуюся. Тело, находящееся в равновесии (рис. 56, a), рассечем на две части I и II (рис. 56, $б$). В сечении возникают внутренние силы, уравнивающие внешние силы, приложенные к оставленной части. Это позволяет применить к любой части тела I или II условия равновесия, дающие в общем случае пространственной системы сил шесть уравнений равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum F_{iz} = 0;$$

$$\sum M_{ix} = 0; \quad \sum M_{iy} = 0; \quad \sum M_{iz} = 0,$$

Эти уравнения позволяют отыскать составляющие главного вектора и главного момента внутренних сил.

При действии пространственной системы сил из уравнения равновесия можно найти возникающие в поперечном сечении три силы N_x, Q_x и Q_y — составляющие главного вектора внутренних сил, направленные по координатным осям, и три момента M_x, M_y, M_z — составляющие главного момента внутренних сил.

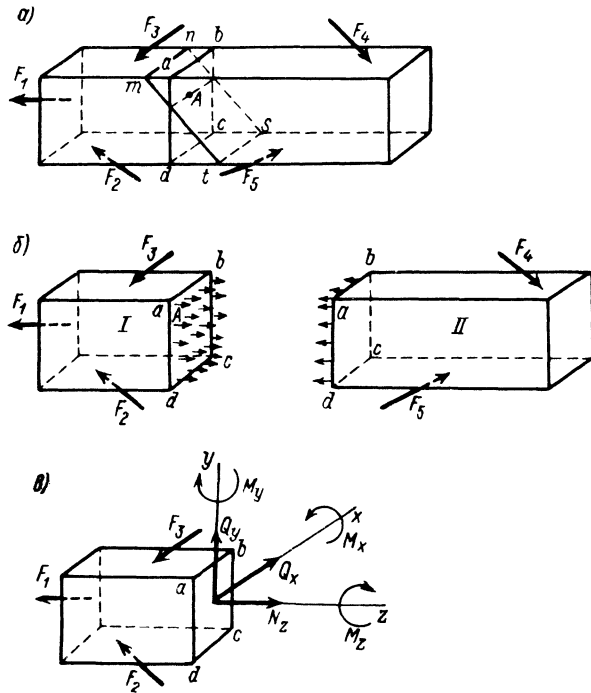


Рис. 56

Указанные силы и моменты, являющиеся внутренними силовыми факторами (рис. 56, б), соответственно называются: N_z — продольная сила; Q_x и Q_y — поперечные силы; M_x и M_y — изгибающие моменты; M_z — крутящий момент.

В частных случаях отдельные внутренние силовые факторы могут быть равны нулю.

Так, при действии на тело плоской системы сил (в продольной плоскости zy) в его сечениях могут возникнуть только три силовых фактора: изгибающий момент M_x и две составляющие главного вектора этой системы — поперечная сила Q_y и продольная сила N_z . Соответственно для этого случая можно составить три уравнения равновесия:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad \sum F_{iz} = 0; \quad \sum M_{ix} = 0.$$

Координатные оси всегда будем направлять следующим образом: ось z — вдоль длины тела, оси x и y — вдоль главных центральных осей его поперечного сечения, а начало координат в центре тяжести сечения.

Для определения внутренних силовых факторов необходимо руководствоваться следующей последовательностью действий:

1. Мысленно провести сечение в интересующей нас точке тела конструкции или стержня.
2. Отбросить одну из отсеченных частей и рассмотреть равновесие оставленной части.

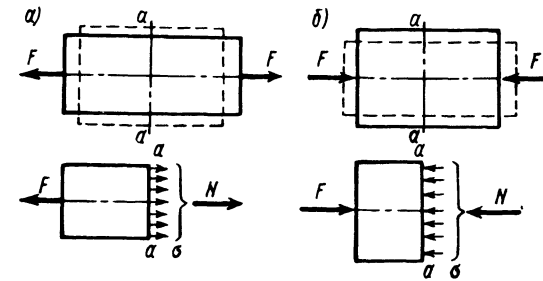


Рис. 57

3. Составить уравнения равновесия для оставленной части и определить из них значения и направления внутренних силовых факторов.

Внутренние силовые факторы, возникающие в поперечном сечении тела, определяют деформированное состояние.

При осевом растяжении и сжатии внутренние силы в поперечном сечении могут быть заменены одной силой, направленной вдоль оси (рис. 57) — продольной силой N (индекс z , как правило, будем опускать). В случае, если сила направлена к отброшенной части наружу, имеет место растяжение (рис. 57, а). Наоборот, если она направлена от отброшенной части внутрь (рис. 57, б), имеет место сжатие.

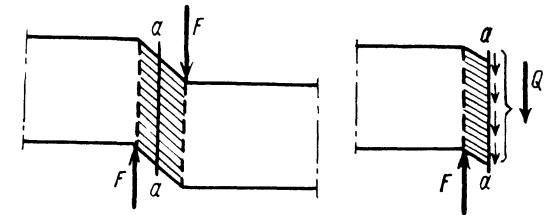


Рис. 58

Сдвиг возникает в том случае, когда в поперечном сечении балки внутренние силы приводятся к одной силе, расположенной в плоскости сечения (рис. 58), — к поперечной силе Q .

При кручении возникает один внутренний силовой фактор — крутящий момент $M_z = M_K$ (рис. 59).

Если в сечении возникает только изгибающий момент M_x или M_y (рис. 60), имеет место чистый изгиб. Если же кроме изгибающего момента в сечении стержня возникает еще поперечная сила, то изгиб называют поперечным. Обычно изгибаемые стержни называют балками. Случаи действия в поперечных сечениях стержня одновременно нескольких внутренних силовых факторов относят к сложным видам деформированного состояния.

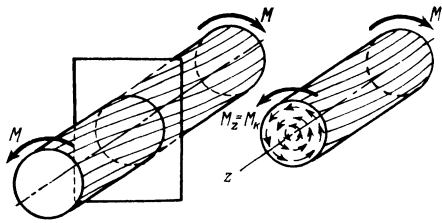


Рис. 59

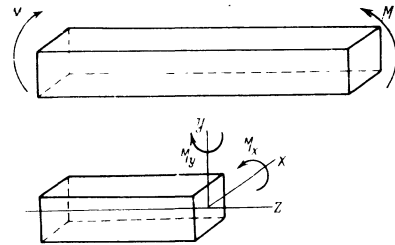


Рис. 60

Для расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость прежде всего необходимо с помощью метода сечений определить возникающие внутренние силовые факторы.

Пример 12. Конструкция, имеющая форму буквы Г, с защемленным нижним сечением (рис. 61, а) нагружена на свободном конце вертикальной силой F . Определить деформированное состояние горизонтального и вертикального участков бруса.

Решение. Расчетная схема конструкции изображена на рис. 61, а. Рассмотрим вначале его горизонтальный участок. Рассечем этот участок на произвольном расстоянии z от свободного конца плоскостью $I-I$ перпендикулярно оси. Отбросим левую, закрепленную часть бруса. К оставшейся части приложена

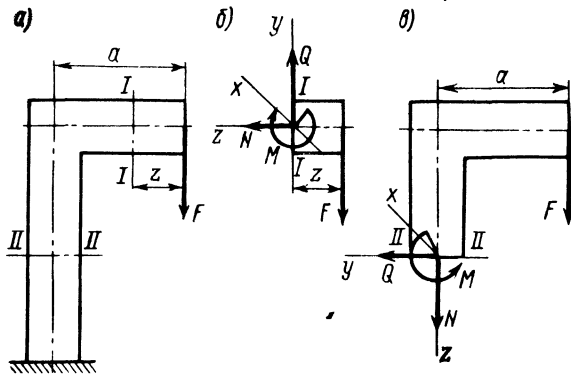


Рис. 61

внешняя сила F , а в проведенном сечении возникают внутренние силовые факторы. Так как сила F лежит в плоскости оси рассматриваемой части бруса, то внутренние силы образуют плоскую систему и могут дать лишь три составляющие: M — изгибающий момент, Q — поперечную силу, N — продольную силу (рис. 61, б). Составим три уравнения равновесия для отсеченной части бруса:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -F + P = 0,$$

откуда

$$Q = F;$$

$$\sum F_{iz} = 0; \quad N = 0;$$

$$\sum M_{ix} = 0; \quad M - Fz = 0,$$

откуда $M = Fz$.

Итак, в сечениях горизонтального участка возникают два внутренних силовых фактора: изгибающий момент и поперечная сила (продольная сила отсутствует: $N = 0$).

Устанавливаем, что горизонтальный участок бруса испытывает поперечный изгиб.

Определим теперь вид деформированного состояния вертикального участка бруса. Рассечем вертикальный участок плоскостью $II-II$ (рис. 61, а) и отбросим нижнюю закрепленную часть бруса. Рассмотрим оставленную часть. Проведем оси координат и изобразим внутренние силовые факторы (рис. 61, в). Так же как и для горизонтального участка, внутренние силы образуют плоскую систему, т. е. могут возникнуть три внутренних силовых фактора: M — изгибающий момент, Q — поперечная сила, N — продольная сила.

Составим три уравнения равновесия для отсеченной части бруса:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad Q = 0;$$

$$\sum F_{iz} = 0; \quad N + F = 0,$$

откуда

$$N = -F;$$

$$\sum M_{ix} = 0; \quad Fa - M = 0;$$

откуда

$$M = Fa.$$

Итак, в сечениях вертикального участка возникают два внутренних силовых фактора: изгибающий момент M и продольная сжимающая сила N (на самом деле сила N направлена к сечению). Это значит, что вертикальный участок стержня испытывает чистый изгиб и сжатие.

Упражнение 15

1. Изменится ли значение внутренних силовых факторов в зависимости от того, будут ли они вычислены по внешним силам, расположенным слева от сечения или справа от него?

А. Не изменится. Б. Изменится.

2. Определить вид деформированного состояния бруса, если в его поперечных сечениях возникают изгибающий момент M и растягивающая продольная сила N .

А. Чистый изгиб. Б. Растяжение. В. Чистый изгиб и растяжение.

3. На рис. 62 показан брус, состоящий из вертикального и горизонтального участков. Нижний торец бруса жестко закреплен, а к верхнему приложена горизонтально направленная сила F . Определить внутренние силовые факторы в сечениях $I-I$ и $II-II$, установите вид деформированного состояния горизонтального и вертикального участков стержня.

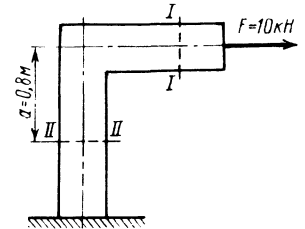


Рис. 62

§ 31. Напряжения

Метод сечений не позволяет установить закон распределения внутренних сил по сечению. Необходимы дополнительные допущения о характере деформации. Эти допущения вводят при изучении различных видов деформированного состояния

Так, считают, что внутренние силы действуют непрерывно по всему сечению (см. рис. 56, б). Значение внутренних сил, при-

ходящихся на единицу площади сечения $abcd$ у какой-либо его точки A , называется напряжением в этой точке по сечению $abcd$. Поскольку напряжение представляет собой отношение внутренней силы к некоторой площади, оно измеряется в единицах силы, отнесенных к единице площади.

Для измерения напряжений в Международной системе единиц (СИ) служит ньютон на квадратный метр, названный паскалем Па ($\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$). Так как эта единица очень мала и пользоваться ею неудобно, применяют кратные и внесистемные единицы ($\text{кН}/\text{м}^2$, $\text{МН}/\text{м}^2$ и $\text{Н}/\text{мм}^2$). Отметим, что $1 \text{ МН}/\text{м}^2 = 1 \text{ МПа} = 1 \text{ Н}/\text{мм}^2$. Эта единица наиболее удобна для практического использования.

В технической системе единиц (МКСГС) для измерения напряжений применяли килограмм-силу на квадратный сантиметр.

Проведем в теле через точку A другое сечение, например $mnst$ (см. рис. 56, а). Обнаружим, что по этому сечению действуют напряжения, отличные от напряжений по сечению $abcd$.

Через одну и ту же точку тела можно провести бесчисленное множество сечений, разделяющих тело на две части. Напряжения по разным сечениям, проведенным через одну и ту же точку тела, в общем случае будут различны. Таким образом, напряжение в данной точке зависит от ориентировки проведенного через точку сечения, поэтому нельзя говорить о напряжениях, не указывая положения сечения, в котором они возникают.

Напряжения характеризуются числовым значением и направлением, т. е. напряжение представляет собой вектор, наклоненный под тем или иным углом к рассматриваемому сечению.

Пусть в точке M какого-либо сечения тела по некоторой малой площадке ΔA действует сила ΔF под некоторым углом к площадке (рис. 63, а). Поделив эту силу ΔF на площадь ΔA , найдем возникающее в точке M среднее напряжение (рис. 63, б)

$$P_{\text{ср}} = \Delta F / (\Delta A).$$

Истинные напряжения в точке M определяются при переходе к пределу

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}.$$

Полное напряжение p можно разложить на составляющие: по нормали (перпендикуляру) к площадке ΔA и по касательной к ней (рис. 63, в). Составляющую напряжения по нормали называют *нормальным* напряжением в данной точке сечения и обозначают греческой буквой σ (сигма); составляющую по касательной называют касательным напряжением и обозначают греческой буквой τ (тау).

Напряжение, при котором происходит разрушение материала или возникают заметные пластические деформации, называют предельным и обозначают $\sigma_{\text{пред}}$, $\tau_{\text{пред}}$. Эти напряжения определяют опытным путем.

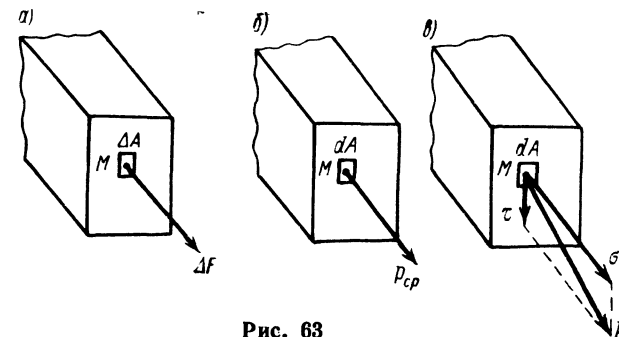


Рис. 63

Чтобы избежать разрушения элементов сооружений или машин, возникающие в них рабочие (расчетные) напряжения (σ , τ) не должны превышать *допускаемых напряжений*, которые обозначают в квадратных скобках: $[\sigma]$, $[\tau]$. Допускаемые напряжения — это максимальные значения напряжений, обеспечивающие безопасную работу материала. Допускаемые напряжения назначаются как некоторая часть экспериментально найденных предельных напряжений, определяющих исчерпание прочности материала (см. § 36):

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[n]}; \quad [\tau] = \frac{\tau_{\text{пред}}}{[n]}, \quad (46)$$

где $[n]$ — требуемый или допускаемый коэффициент запаса прочности, показывающий, во сколько раз допускаемое напряжение должно быть меньше предельного.

Коэффициент запаса прочности зависит от свойств материала, характера действующих нагрузок, точности применяемого метода расчета и условий работы элемента конструкции.

Упражнение 16

1. Можно ли с помощью метода сечений определить закон распределения внутренних сил по сечению?

А. Можно. Б. Нельзя.

2. Через любую точку бруса можно провести различные сечения, например перпендикулярно оси или под углом к ней. Изменяется ли значение и направление напряжения в данной точке при изменении направления плоскости сечения?

А. Не изменятся. Б. Изменяются.

ГЛАВА VII. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

§ 32. Продольные силы при растяжении и сжатии.

Построение эпюр продольных сил

Когда к стержню приложены по концам две равные противоположно направленные силы, действующие по его оси, стержень растянут или сжат (см. рис. 57, а, б). Собственная сила тяжести стержня в большинстве случаев невелика по сравнению с действующими на него силами и ею можно пренебречь при определении

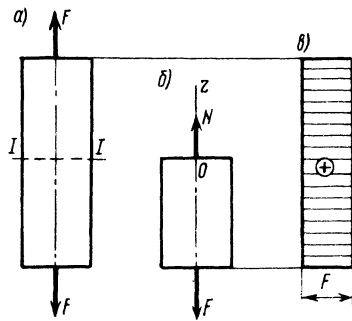


Рис. 64

напряжений и деформаций. Определим внутренние силовые факторы в поперечных сечениях стержня, растянутого двумя равными силами F (рис. 64, а). Разсечем стержень произвольным поперечным сечением $I-I$ и, рассматривая равновесие нижней части (рис. 64, б), найдем величину продольной силы:

$$\sum F_{iz} = 0; \quad N = F.$$

В случае растяжения продольную силу N будем считать положительной, при сжатии — отрицательной. Изменение продольной силы по длине стержня удобно представить в виде диаграммы, называемой *эпюрой продольных сил*.

Эпюра продольных сил для стержня, рассмотренного выше, построена на рис. 64, в. Она изображается прямоугольником, так как значение продольной силы одинаково во всех сечениях. Однако продольная сила может изменяться по длине стержня. Это имеет место, например, в случае, когда стержень подвергается действию системы внешних сил, приложенных не только к его торцам, но и в промежуточных сечениях.

Рассмотрим построение эпюры продольных сил на примере.

Пример 13. Стержень закреплен одним концом и нагружен приложенными вдоль оси силами F_1, F_2, F_3 (рис. 65, а). Построить для этого стержня эпюру продольных сил.

Решение. В защемленном сечении возникает реакция R , которую можно определить из уравнения равновесия:

$$\sum F_{iz} = 0; \quad R - F_3 - F_2 + F_1 = 0,$$

откуда

$$R = F_3 + F_2 - F_1.$$

Разделим стержень на участки, границы которых определяются точками приложения внешних сил. Всего таких участков три (рис. 65, а). Пользуясь методом сечений, определим продольные силы на каждом участке. Проведем сечение на первом участке и рассмотрим правую отсеченную часть стержня (рис. 65, б)

$$N_1 = F_1.$$

Рассматривая левую отсеченную часть стержня, найдем (рис. 65, в)

$$N_1 = F_2 + F_3 - R.$$

Но из уравнения равновесия $R = F_3 + F_2 - F_1$.

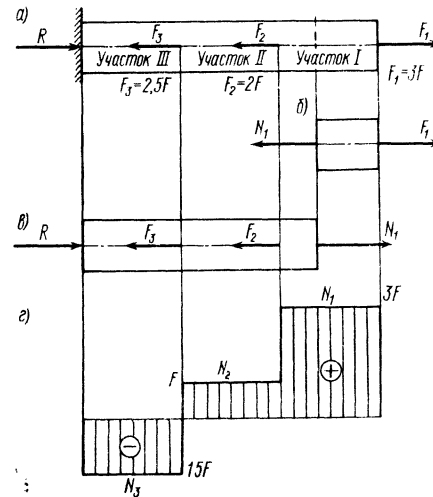


Рис. 65

Подставив значение R в выражение продольной силы, для первого участка стержня получим

$$N_1 = F_2 + F_3 - R = F_2 + F_3 - F_3 - F_2 + F_1 = F_1.$$

Значение продольной силы в пределах первого участка не зависит от того: какую из отсеченных частей мы рассматривали. Очевидно, что целесообразнее всегда рассматривать ту часть стержня, к которой приложено меньше сил. Проводя сечения в пределах второго и третьего участков, аналогично найдем:

$$N_2 = F_1 - F_2; \quad N_3 = F_1 - F_2 - F_3.$$

Эпюра продольных сил построена на рис. 65, г.

Упражнение 17

1. Различаются ли внутренние силовые факторы в поперечных сечениях брусьев, показанных на рис. 66, а и 66, б?

А. Продольная сила для стержня на рис. 66, а в два раза больше. Б. Продольные силы одинаковы.

2. На рис. 67 изображена схема нагруженного стержня и приведена соответствующая эпюра продольных сил. Укажите на эпюре значения продольных сил и их знаки для каждого участка стержня.

3. Какая из эпюр, приведенных на рис. 68, соответствует заданной нагрузке стержня?

А. На рис. 68, а. Б. На рис. 68, б. В. На рис. 68, в.

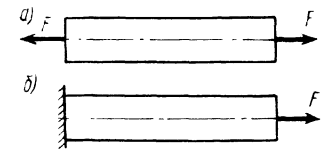


Рис. 66

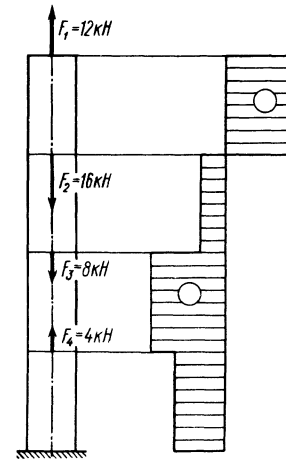


Рис. 67

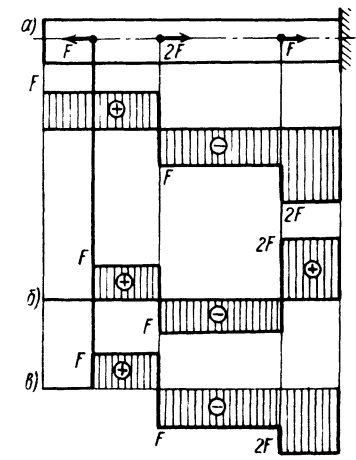


Рис. 68

§ 33. Напряжения в поперечных сечениях растянутого (сжатого) стержня

При растяжении или сжатии осевыми силами стержней из однородного материала поперечные сечения, достаточно удаленные от точек приложения внешних сил, остаются плоскими и перемещаются поступательно в направлении деформации. Это поло-

жение называют *гипотезой плоских сечений*. На основании сказанного можно заключить, что все точки какого-либо поперечного сечения стержня находятся в одинаковых условиях и, следовательно, напряжения распределяются по сечению равномерно (см. рис. 57). Эти напряжения перпендикулярны поперечному сечению, а значит, являются нормальными напряжениями. Их значения найдем, разделив продольную силу N на площадь A ,

$$\sigma = N/A. \quad (47)$$

Продольная сила N с помощью метода сечений всегда может быть выражена через внешние силы. В формулу (47) следует подставлять алгебраическое значение N , т. е. со знаком плюс в случае растяжения и со знаком минус в случае сжатия.

§ 34. Расчеты на прочность при растяжении и сжатии

Прочность стержня при осевом растяжении и сжатии обеспечена, если для каждого его поперечного сечения наибольшее расчетное (рабочее) напряжение σ не превосходит допускаемого $[\sigma]$,

$$\sigma = N/A \leq [\sigma], \quad (48)$$

где N — абсолютное значение продольной силы в сечении; A — площадь поперечного сечения; $[\sigma]$ — допускаемое напряжение при растяжении или сжатии для материала стержня.

С помощью формулы (48) решается три вида задач (выполняется три вида расчетов).

1. *Проверка прочности* (проверочный расчет). При заданных продольной силе N и площади поперечного сечения A определяют рабочее (расчетное) напряжение и сравнивают его с допускаемым непосредственно по формуле (48).

Превышение расчетного (рабочего) напряжения по сравнению с допускаемым не должно быть больше 5 %, иначе прочность рассматриваемой детали считается недостаточной.

В случаях, когда рабочие напряжения значительно ниже допускаемых $\sigma \ll [\sigma]$, получаются неэкономичные конструкции с чрезмерным, необоснованным расходом материала. Такие решения являются нерациональными. Следует стремиться к максимальному использованию прочности материала и снижению материалоемкости конструкций.

Проверочный расчет деталей машин часто проводят в другой форме. Определяют фактический (расчетный) коэффициент запаса, исходя из известных значений предельного (опасного) напряжения $\sigma_{\text{пред}}$ и вычисленного значения рабочего (расчетного) напряжения $\sigma = N/A$, и сравнивают его с требуемым коэффициентом запаса $[n]$, т. е. условие прочности выражают неравенством

$$n = \sigma_{\text{пред}}/\sigma \geq [n]. \quad (49)$$

2. *Подбор сечения* (проектный расчет). Исходя из условия (48), можно определить необходимые размеры сечения, зная продольную силу и допускаемое напряжение. Решив неравенство (48) относительно A , получим

$$A \geq N/[\sigma]. \quad (50)$$

3. *Определение допускаемой продольной силы*. Допускаемое значение продольной силы в поперечном сечении стержня можно найти по формуле

$$[N] \leq [\sigma] A. \quad (51)$$

Значения допускаемых напряжений для некоторых материалов приведены в табл. 1.

Допускаемые напряжения назначаются на основе результатов механических испытаний образцов соответствующих материалов.

Пример 14. Для заданного ступенчатого бруса, изготовленного из стали марки Ст3 (рис. 69, а) построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений по длине; проверить брус на прочность.

Допускаемое напряжение для материала бруса согласно табл. 1 $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение. Разобьем брус на отдельные участки, начиная от свободного конца. Границы участков определяются точками приложения внешних сил или местами изменения размеров поперечного сечения. Всего по длине бруса будет пять участков. Проводя сечения и отбрасывая левые части стержня, можно определить продольные силы в его поперечных сечениях без вычисления опорных реакций в заделке.

Проводим сечение в пределах первого участка, из условий равновесия выражаем продольную силу через внешние силы, приложенные к оставленной части, $N_1 = F_1 = 80$ кН. Аналогично для второго участка $N_2 = F_1 = 80$ кН.

На первом и втором участках брус растянут.

Проводим сечения на третьем и четвертом участках и находим

$$N_3 = N_4 = F_1 - F_2 = 80 - 120 = -40 \text{ кН.}$$

На третьем и четвертом участках брус сжат.

Наконец, для пятого участка имеем

$$N_5 = F_1 - F_2 + F_3 = 80 - 120 + 100 = 60 \text{ кН,}$$

т. е. на пятом участке брус растянут.

Эпюра продольных сил построена на рис. 69, б. Чтобы определить напряжения в поперечных сечениях бруса, нужно разделить числовые значения продольных сил на площади этих сечений.

Для первого участка (площадь сечения $A_1 = 2A = 1000 \text{ мм}^2 = 10^{-3} \text{ м}^2$)

$$\sigma_1 = N_1/A_1 = 80\,000/10^{-3} = 80 \cdot 10^6 \text{ Па} = 80 \text{ МПа};$$

для второго участка (площадь сечения $A_2 = A = 500 \text{ мм}^2 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$)

$$\sigma_2 = N_2/A_2 = 80\,000/(0,5 \cdot 10^{-3}) = 160 \cdot 10^6 \text{ Па} = 160 \text{ МПа};$$

Таблица 1. Допускаемые напряжения для некоторых материалов при статическом действии нагрузок

Материал	Допускаемые напряжения	
	при растяжении $[\sigma_p]$, МПа- (Н/мм ²)	при сжатии $[\sigma_c]$, МПа- (Н/мм ²)
Чугун Сч 21—40	35—55	150—200
Сталь Ст2	140	140
» Ст3 и Ст4	140—170	140—170
Сталь Ст5	175—210	175—210
» 45	180—210	180—210
Текстолит	30—40	50—80
Древесина вдоль волокон	10—15	10—12

для третьего участка (площадь сечения $A_3 = A = 500 \text{ мм}^2 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$)

$$\sigma_3 = N_3/A_3 = -40\,000/(0,5 \cdot 10^{-3}) = -80 \cdot 10^6 \text{ Па} = -80 \text{ МПа};$$

для четвертого участка (площадь сечения $A_4 = 1,6A = 800 \text{ мм}^2 = 0,8 \times 10^{-3} \text{ м}^2$)

$$\sigma_4 = N_4/A_4 = -40\,000/(0,8 \cdot 10^{-3}) = -50 \cdot 10^6 \text{ Па} = -50 \text{ МПа};$$

для пятого участка (площадь сечения $A_5 = 1,6A = 800 \text{ мм}^2 = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$)

$$\sigma_5 = N_5/A_5 = 60\,000/(0,8 \cdot 10^{-3}) = 75 \cdot 10^6 \text{ Па} = 75 \text{ МПа}.$$

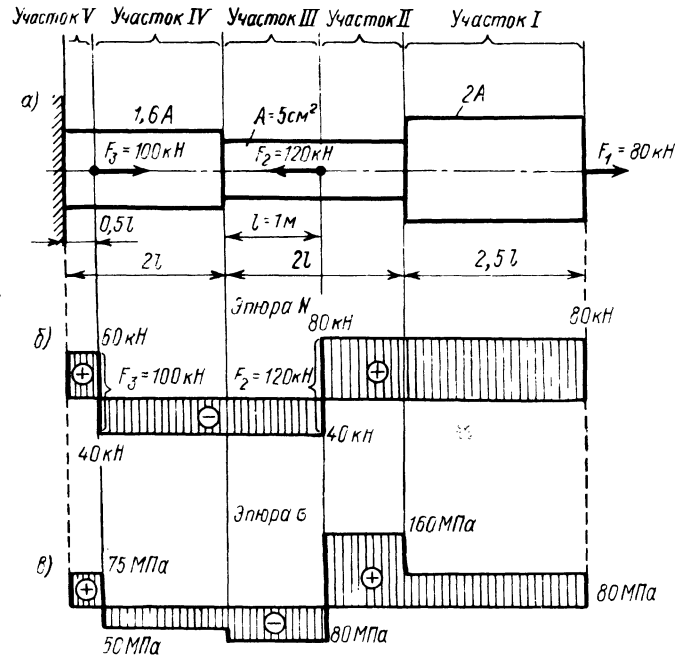


Рис. 69

Эпюра нормальных напряжений по длине бруса построена на рис. 69, в. Наибольшее рабочее напряжение возникает в пределах второго участка $\sigma_{\max} = 160 \text{ МПа}$. Сопоставив его с допускаемым напряжением, обнаруживаем, что они равны и прочность бруса гарантирована.

Упражнение 18

1. Образцы из стали и дерева с равной площадью поперечного сечения растягиваются одинаковыми силами. Будут ли равны возникающие в образцах напряжения?

А. В стальном образце возникнут большие напряжения, чем в деревянном. Б. В образцах возникнут равные напряжения.

2. Вычислите продольную силу, возникающую в поперечном сечении растянутого стержня, если нормальные напряжения в этом сечении равны 140 МПа , а его площадь составляет 100 мм^2 .

3. Рабочее напряжение, возникающее в детали, равно 160 МПа , а опасное (предельное) напряжение для материала детали $\sigma_{\text{пред}} = 320 \text{ МПа}$. Определить коэффициент запаса прочности.

4. Допускаемое напряжение при расчете на прочность было принято равным 180 МПа . После окончательного выбора размеров конструкции рабочее напряжение оказалось равным 185 МПа . Грозит ли конструкции опасность разрушения?

А. Да. Б. Нет.

5. Как изменится масса конструкции, если при подборе ее сечений уменьшить коэффициент запаса прочности?

А. Масса конструкции уменьшится. Б. Масса не изменится.

§ 35. Деформация при упругом растяжении и сжатии. Закон Гука. Коэффициент Пуассона

При растяжении стержня его первоначальная длина равна l (рис. 70), а длина после растяжения l_1 , приращение $\Delta l = l_1 - l$ является полным изменением длины стержня и называется *удлинением стержня*. Отношение удлинения к первоначальной длине стержня $\epsilon = \Delta l/l$ называется *продольной деформацией*; эта величина определяет удлинение каждой единицы первоначальной длины стержня. Так как величина ϵ равна частному от деления двух величин, каждая из которых имеет размерность длины, она выражается в отвлеченных числах или в процентах.

Из опыта установлено, что между продольной деформацией ϵ и нормальным напряжением существует прямо пропорциональная зависимость

$$\sigma = E\epsilon, \quad (52)$$

или

$$\epsilon = \sigma/E.$$

Приведенная зависимость называется *законом Гука* (по фамилии английского ученого, впервые установившего ее в 1660 г.) и является основным законом сопротивления материалов. Он может быть сформулирован следующим образом: *продольная деформация прямо пропорциональна соответствующему нормальному напряжению*.

Т а б л и ц а 2. Значения модуля продольной упругости F

Материал	E , МПа
Сталь	$(1,9 \div 2,2) \cdot 10^5$
Чугун	$(0,9 \div 1,6) \cdot 10^5$
Медь (техническая) и ее сплавы (латунь, бронза)	$(1,0 \div 1,3) \cdot 10^5$
Текстолит (ПТ, ПТК, ПТ-1)	$(6 \div 10) \cdot 10^6$
Капрон	$(1,4 \div 2,0) \cdot 10^8$
Каучук и резина	80

Величина E , которая входит в формулу, выражающую закон Гука, является одной из важнейших физических постоянных материала. Она характеризует его жесткость, т. е. способность сопротивляться упругому деформированию. Эта величина называется *модулем продольной упругости*.

Значения модуля упругости E для некоторых конструкционных материалов приведены в табл. 2.

Из формулы (52) следует

$$E = \sigma/\varepsilon. \quad (53)$$

Так как ε — величина отвлеченная (безразмерная), то E — измеряется в тех же единицах, что и напряжение σ , т. е. в Н/мм² (Па), Н/мм² (МПа).

Подставив в формулу (52) значения нормального напряжения $\sigma = N/A$ и продольной деформации $\varepsilon = \Delta l/l$, получим

$$N/A = E \Delta l/l, \quad (54)$$

откуда определим изменение длины стержня

$$\Delta l = Nl/(EA). \quad (55)$$

Выведенное соотношение показывает, что удлинение (укорочение) при растяжении (сжатии) зависит от величины продольной силы N , поперечного сечения A стержня, его длины l и модуля продольной упругости E . Произведение EA называется *жесткостью сечения стержня при растяжении (сжатии)*.

Закон Гука [см. формулу (52)] может быть представлен графически; если по оси абсцисс откладывать значения ε , а по оси ординат — значения σ , то зависимость $\sigma = E\varepsilon$ представится прямой линией (рис. 71). Прямая пропорциональность, т. е. линейная зависимость между σ и ε

имеет место не при всех значениях напряжения. Как показывают опыты, после того, как напряжение превысит некоторое значение, называемое *пределом пропорциональности* $\sigma_{пл}$ (рис. 71), зависимость между σ и ε начинает отклоняться от линейной.

Некоторые материалы — чугун, стекло, некоторые пластмассы имеют очень низкий предел пропорциональности и уже при небольших напряжениях обнаруживают значительные отклонения от закона Гука. Для стали и дерева (при растяжении и сжатии деревянных стержней вдоль волокон) предел пропорциональности достаточно высок.

При растяжении и сжатии изменяются и поперечные размеры стержня. Рассмотрим растянутый стержень (см. рис. 70). Поперечный размер, первоначально равный a , уменьшается до a_1 . Изменение поперечного размера $\Delta a = a - a_1$, а поперечная деформация ε_{\perp} равна

$$\varepsilon_{\perp} = \Delta a/a.$$

Экспериментально установлено, что отношение поперечной деформации ε_{\perp} к продольной деформации ε при упругом растяже-

нии (сжатии) для данного материала величина постоянная. Обозначив абсолютное значение данного отношения μ , получим

$$\mu = |\varepsilon_{\perp}/\varepsilon|. \quad (56)$$

Следует учитывать, что продольная и поперечная деформации всегда противоположны по знаку. Иными словами, при растяжении, когда продольный размер стержня увеличивается, его поперечный размер уменьшается, и, наоборот, при сжатии продольный размер уменьшается, а поперечный — увеличивается.

Величина μ называется *коэффициентом поперечной деформации, или коэффициентом Пуассона*.

Коэффициент поперечной деформации для некоторых материалов имеет следующие значения:

Сталь	0,24—0,32	Бронза	0,32—0,35
Медь	0,31—0,35	Резина, каучук	0,47

Упражнение 19

1. Полоса с площадью поперечного сечения 50 мм² растягивается силами 8000 Н, направленными вдоль ее оси. Специальным прибором (тензомером) установлено, что расстояние между двумя точками, расположенными на оси полосы, равное до деформации 10 мм, увеличилось на 0,008 мм. Вычислите нормальные напряжения, относительное удлинение и модуль продольной упругости материала. По данным табл. 2 определите, какому материалу соответствует полученное значение модуля упругости.

2. Грузы $G_1 = 40$ кН и $G_2 = 70$ кН поддерживаются стальными круглыми стержнями (рис. 72). Определите требуемый диаметр поперечного сечения этих стержней для каждого участка и вычислите, на сколько опустятся грузы вследствие удлинения тросов. Допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma] = 200$ МПа. Модуль продольной упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

3. Во сколько раз (примерно) поперечная деформация меньше продольной при осевом растяжении (сжатии) стальных стержней?

4. При проведении испытаний были получены различные значения коэффициента Пуассона для стали: 0,15; 0,28; 0,4. Укажите, какие значения ошибочны.

5. Укажите деформированное состояние стержня, нагруженного осевой силой, если его поперечные размеры увеличились.

А. Стержень растянут. Б. Стержень сжат.

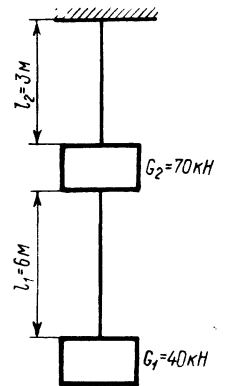


Рис. 72

§ 36. Механические испытания материалов

Физико-механические свойства материалов изучают в лабораторных условиях путем нагружения образца до разрушения. Применяемые в настоящее время механические испытания материалов весьма многообразны. По характеру приложения внешних сил они разделяются на статические, динамические (или испытания ударной нагрузкой) и испытания на выносливость (нагрузкой, вызывающей напряжения, переменные во времени).

Испытания материалов можно классифицировать также по видам деформированного состояния. Различают испытания образ-

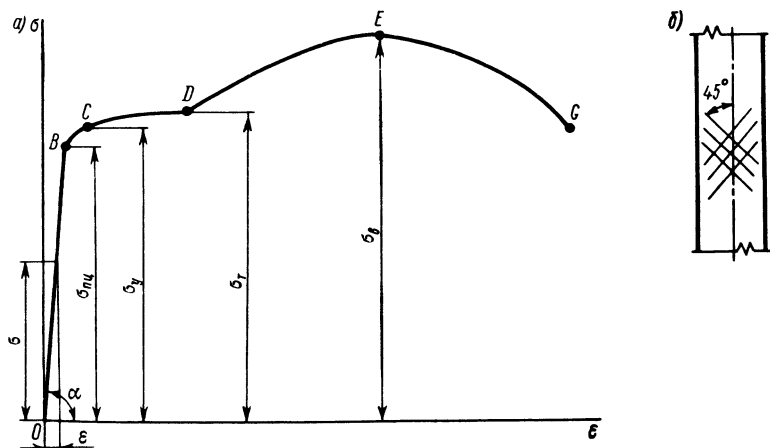


Рис. 73

цов на растяжение, сжатие, срез, кручение и изгиб. Наиболее широко применяют статические испытания материалов на растяжение. Объясняется это тем, что механические характеристики, получаемые при испытании на растяжение, позволяют сравнительно точно определить поведение материала при других видах нагружения. Кроме того, этот вид испытаний наиболее легко осуществить.

По механическим свойствам материалы могут быть разделены на две основные группы: пластичные и хрупкие. У первых разрушению предшествует возникновение значительных остаточных деформаций; вторые разрушаются при весьма малых остаточных деформациях. Пластичными материалами в обычных условиях являются малоуглеродистая сталь, бронза, медь; хрупкими — некоторые специальные сорта стали, чугун.

Для наглядного представления о поведении материала при растяжении или сжатии строят кривую зависимости между удлинением (укорочения) испытываемого образца и вызвавшими его силами, так называемую диаграмму растяжения или сжатия. Такая диаграмма может быть получена при испытании образца материала на специальных машинах, снабженных приборами, автоматически записывающими ход растяжения или сжатия образцов. По оси абсцисс на диаграмме откладывают абсолютное удлинение или укорочение Δl испытываемого образца, по оси ординат — соответствующее значение растягивающих или сжимающих сил F .

От диаграммы растяжения в координатах F и Δl можно, разделив все ее ординаты на A , а абсциссы на l , перейти к диаграмме в координатах σ и ϵ , где

$$\sigma = N/A = F/A; \epsilon = \Delta l/l.$$

Первоначальные площадь поперечного сечения A и длина расчетной части l образца являются постоянными, поэтому вид диаграммы растяжения в новых координатах (рис. 73, а) такой же, как и в координатах F и Δl , но масштабы ординат и абсцисс будут соответственно отличаться.

Диаграмма растяжения в координатах σ , ϵ (рис. 73, а) более удобна и лучше отражает физические свойства материала, так как она не зависит от геометрических размеров испытываемого образца: длины l и площади поперечного сечения A .

До значения напряжения, соответствующего точке B диаграммы, имеет место линейная зависимость (прямая пропорциональность) между величинами относительного удлинения ϵ и напряжения σ , т. е. соблюдается закон Гука. Напряжение, соответствующее точке B диаграммы, как уже говорилось, называется пределом пропорциональности материала и обозначается $\sigma_{пц}$. При переходе за точку B справедливость закона Гука нарушается: удлинение растет интенсивнее, чем сила; прямая OB переходит в кривую BC , обращенную выпуклостью кверху. До точки C диаграммы увеличение растягивающей силы практически не вызывает остаточных деформаций образца. Материал деформируется упруго, и напряжение, соответствующее точке C , называется *пределом упругости* σ_{γ} .

Предел пропорциональности $\sigma_{пц}$ и предел упругости σ_{γ} для многих материалов, например для стали, оказываются настолько близки, что зачастую их считают совпадающими и отождествляют несмотря на физическое различие этих пределов.

Угол наклона начального участка OB диаграммы растяжения пропорционален модулю продольной упругости материала

$$\operatorname{tg} \alpha = \sigma/\epsilon = E.$$

Чем круче этот участок, тем больше модуль упругости материала, тем он жестче.

Кривая BC от точки C переходит в горизонтальную или почти горизонтальную прямую CD , что указывает на значительное возрастание удлинения при постоянном значении силы; материал, как говорят, течет. Напряжение σ_T , определяемое ординатой горизонтального участка диаграммы, при котором наблюдается текучесть материала, называется *пределом текучести*. При этом напряжении происходит значительный рост пластической (остаточной) деформации. Когда напряжения в материале достигают предела текучести, полированная поверхность образца тускнеет и постепенно делается матовой. На ней появляются линии, наклоненные к оси образца под углом примерно 45° (рис. 73, б). Эти линии носят название линий Людерса—Чернова, их появление свидетельствует о сдвиге кристаллов образца. За площадкой текучести CD следует пологий криволинейный участок диаграммы DE . Материал вновь начинает сопротивляться росту деформаций, но, естественно, зависимость между деформацией и напряжением уже

не подчиняется закону Гука. Кроме упругого удлинения образец получает значительное остаточное удлинение. Участок DE диаграммы называют *зоной упрочнения*, материал здесь снова оказывает сопротивление деформациям.

Точка E диаграммы определяет наибольшее для данного испытания условное напряжение, отнесенное к первоначальной площади сечения образца. Это наибольшее напряжение называют *временным сопротивлением* σ_B (оно соответствует максимальной растягивающей силе для испытываемого образца $F_{max} = \sigma_B A$). На образце при этом значении силы образуется резкое местное сужение, так называемая шейка. Образец сильно удлиняется за счет пластической деформации шейки. Площадь сечения шейки уменьшается, и для доведения образца до разрушения требуется сила меньше F_{max} ; это отмечает участок диаграммы, отклоняющийся вниз к оси абсцисс. Действительные напряжения в сечении шейки не уменьшаются, а все время растут; площадь сечения шейки уменьшается более интенсивно, чем растягивающая сила F . Точка G соответствует разрушению образца.

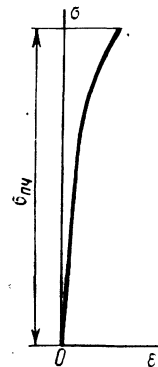


Рис. 74

Характеристикой прочности при растяжении пластичных материалов, к каким относится малоуглеродистая сталь, считают предел текучести σ_T , так как появление больших остаточных деформаций рассматривается как нарушение прочности элемента конструкции.

Многие пластичные материалы дают диаграмму растяжения, на которой нет площадки текучести. Для таких материалов, в частности для среднеуглеродистых конструкционных сталей, вводят понятие об *условном пределе текучести*, обозначаемом $\sigma_{0,2}$. Это напряжение, при котором относительное остаточное удлинение образца составляет 0,2 %. В технической литературе зачастую не разграничивают обозначения физического и условного пределов текучести, принимая для той и другой характеристики общее обозначение σ_T .

Диаграммы растяжения хрупких материалов значительно отличаются от приведенной выше диаграммы пластичного материала. В них разрушение образцов происходит при ничтожно малых остаточных деформациях без образования шейки. Хрупкие материалы плохо сопротивляются растяжению. Некоторые хрупкие материалы уже в начальной стадии нагружения, т. е. при малых напряжениях, обнаруживают отклонение от закона Гука. Однако в пределах тех напряжений, при которых хрупкий материал работает в конструкциях на растяжение, указанное отклонение невелико и при расчетах не учитывается. Пример диаграммы растяжения образца хрупкого материала — чугуна приведен на рис. 74.

За характеристику прочности хрупких материалов принимают наибольшее значение напряжения, соответствующее моменту

разрыва. Это напряжение для хрупких материалов называют *пределом прочности* и обозначают $\sigma_{пч}$ в отличие от временного сопротивления σ_B для пластичных материалов.

Учитывая, что для хрупких материалов пределы прочности при растяжении и сжатии различны, вводят дополнительный индекс и обозначают $\sigma_{пч.р}$ — предел прочности при растяжении, $\sigma_{пч.с}$ — то же при сжатии.

На основе вышеизложенного заключаем, что при статическом нагружении конструкции из пластичного материала в качестве предельного (опасного) напряжения следует принимать предел текучести ($\sigma_{пред} = \sigma_T$ или $\sigma_{пред} = \sigma_{0,2}$), а при тех же условиях для хрупкого материала — предел прочности ($\sigma_{пред} = \sigma_{пч.р}$ или $\sigma_{пред} = \sigma_{пч.с}$).

Как было показано выше в § 31, на основе экспериментально найденных предельных напряжений назначают допускаемые напряжения

$$[\sigma] = \sigma_{пред}/[n].$$

Для пластичных материалов допускаемое напряжение назначается как часть предела текучести

$$[\sigma]_{пл} = \sigma_T/[n_T], \quad (57)$$

а для хрупких как часть предела прочности

$$[\sigma]_{х} = \sigma_{пч}/[n_{пч}]. \quad (58)$$

Принимаемые при этом коэффициенты запаса $[n_T]$ и $[n_{пч}]$ должны учитывать характер исчерпания прочности. Для пластичных материалов достижение предела текучести менее опасно, чем достижение предела прочности для хрупких материалов. Поэтому, естественно, для пластичных материалов коэффициенты запаса принимаются ниже, чем для хрупких $[n_T] = 1,3 \div 1,2$; $[n_{пч}] = 2 \div 5$.

ГЛАВА VIII. РАСЧЕТЫ НА СРЕЗ И СМЯТИЕ

§ 37. Понятие о срезе и смятии.

Условия прочности

Сдвигом называется деформация, возникающая под действием двух близко расположенных противоположно направленных равных сил. При этом возникают касательные напряжения. Разрушение материала под их воздействием называют срезом.

Примером элемента металлических конструкций, работающего на срез, может служить заклепка (рис. 75, а). При некоторой величине действующих сил F стержень заклепки может быть срезан по сечению aa . Силы F (рис. 75, б) передаются путем давления стенок отверстия на стержень заклепки.

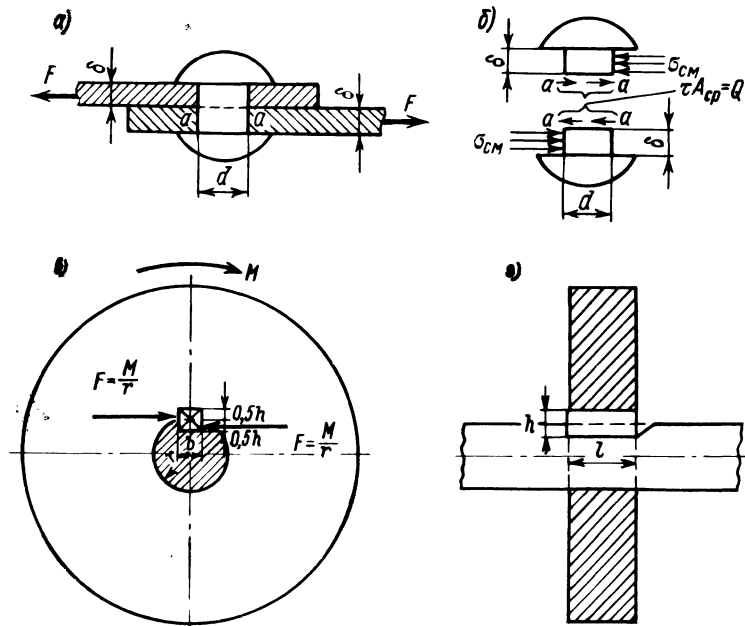


Рис. 75

Опасность среза возникает также в шпоночном соединении, схематично изображенном на рис. 75, а. Вращающий момент M от шкива передается на вал радиуса r с помощью сил $F = M/r$. Эти силы вызывают срез или сдвиг шпонки по ее среднему сечению. Частный случай среза — скалывание волокнистых материалов, в частности древесины, по плоскостям, параллельным волокнам. При большом давлении может произойти значительное смятие стенок отверстия или стержня заклепки по поверхности их соприкосновения. В шпоночном соединении смятие может произойти по площади контакта вала или шкива со шпонкой.

Смятием называется местное сжатие материалов соприкасающихся деталей по площадкам передачи давления. Возникающие нормальные напряжения смятия являются местными: они быстро убывают при удалении от площадки соприкосновения элементов.

Чтобы найти напряжения, возникающие в сечении aa стержня заклепки под действием сил F , применим метод сечений. Рассечем мысленно стержень заклепки на две части и рассмотрим условия равновесия одной из частей стержня (рис. 75, б).

Со стороны листа на нее передается внешняя сила F , а по сечению aa действуют внутренние силы. Поперечная сила Q , возникающая в сечении aa , уравнивает внешнюю силу F и численно равна ей $Q = F$.

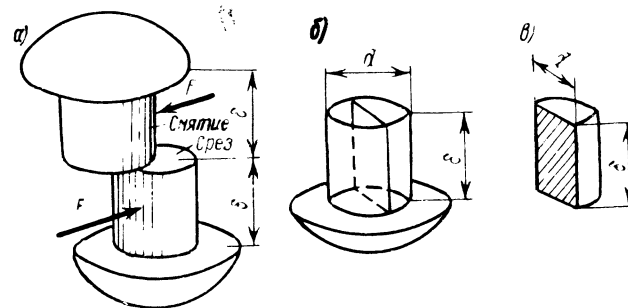


Рис. 76

Приближенно можно принять, что касательные напряжения разделяются по сечению равномерно

$$\tau = Q/A_{\text{ср}}.$$

Условие прочности элементов, работающих на срез, имеет вид

$$\tau = Q/A_{\text{ср}} \leq [\tau_{\text{ср}}], \quad (59)$$

где $A_{\text{ср}}$ — площадь среза; $[\tau_{\text{ср}}]$ — допускаемое касательное напряжение.

Допускаемое напряжение назначают на основании испытаний на срез. Обычно принимают $[\tau_{\text{ср}}] = (0,70 \div 0,80) [\sigma]$, где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение при растяжении (сжатии).

На стержень заклепки давление со стороны отверстия в листе передается по боковой поверхности полуцилиндра высотой, равной толщине листа δ (рис. 76, а, б).

Напряжения смятия распределены по поверхности неравномерно. Так как закон их распределения точно неизвестен, расчет ведут упрощенно, считая их постоянными по расчетной площади смятия.

Проверку элементов конструкции на смятие производят по формуле

$$\sigma_{\text{см}} = Q/A_{\text{см}} \leq [\sigma_{\text{см}}], \quad (60)$$

где $A_{\text{см}}$ — площадь смятия; $[\sigma_{\text{см}}]$ — допускаемое напряжение на смятие. Обычно принимают $[\sigma_{\text{см}}] = (1,7 \div 2,2) [\sigma]$. Расчетные площади среза и смятия, входящие в формулы (59) и (60), вычисляются в каждом конкретном случае в зависимости от вида соединения и характера передачи сил. Так, для заклепочного соединения, изображенного на рис. 75, а, б, площадь среза одной заклепки соответствует ее поперечному сечению $A_{\text{ср}} = \frac{\pi d^2}{4}$.

За площадь смятия заклепки условно принимают ее диаметрально-ное сечение под одним листом, т. е. прямоугольник (рис. 76, б, в)

$A_{см} = d\delta$. Для шпоночного соединения, изображенного на рис. 75, в, г, площади среза и смятия также нетрудно определить

$$A_{ср} = lb,$$

$$A_{см} = 10,5h.$$

Пример 15. Определить, исходя из условий прочности на срез и смятие, необходимый диаметр болта в соединении, показанном на рис. 77, если $\delta = 20$ мм; $\delta_1 = 12$ мм; допустимые напряжения: $[\tau_{ср}] = 100$ МПа; $[\sigma_{см}] = 240$ МПа, растягивающая сила $F = 120$ кН. Болт установлен в отверстие без зазора.

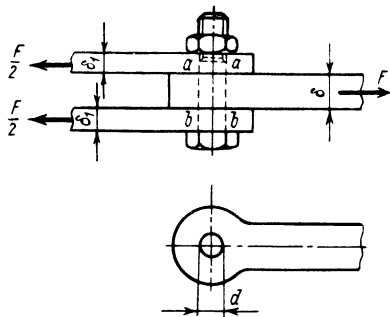


Рис. 77

Согласно данным задачи $2\delta_1 > \delta$, поэтому опасной в отношении смятия является внутренняя деталь площади смятия $A_{см} = d\delta$.

Из условия прочности на смятие

$$A_{см} = F/[\sigma_{см}],$$

или

$$d\delta \geq F/[\sigma_{см}],$$

откуда

$$d \geq \frac{F}{\delta[\sigma_{см}]} = \frac{120 \cdot 10^3}{20 \cdot 240} = 25 \text{ мм.}$$

Из двух значений диаметра d , найденных по условиям прочности на срез и смятие, следует принять большее, т. е. $d \geq 27,6$ мм; по ГОСТ это болт с диаметром ненарезанной части 28 мм и резьбой М27.

§ 38. Расчет сварных соединений

Сварка является наиболее механизированным и совершенным способом соединения элементов стальных конструкций. Соединение сваркой элементов конструкций осуществляется внахлестку и встык. Соединение внахлестку производится при помощи валиковых (угловых) швов.

Валиковые швы называются фланговыми, если они расположены параллельно направлению силы (рис. 78, а), лобовыми, если они расположены перпендикулярно направлению силы (рис. 78, б), и косыми, если они идут под углом к направлению действующей силы (рис. 78, в).

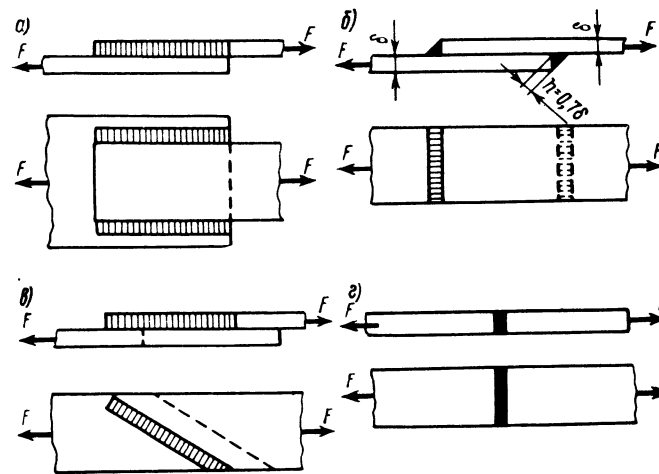


Рис. 78

Валиковые швы рассчитывают на срез. Расчетное сечение среза — площадь $A = lh$, где l — длина валикового шва; h — расчетная высота шва, связанная с толщиной свариваемых листов соотношением (рис. 78, б)

$$h = \delta \cos 45^\circ \approx 0,7\delta.$$

Когда сваривают листы различной толщины, то при вычислении высоты шва в расчет вводится минимальная толщина.

Условие прочности сварного шва имеет вид

$$\tau = \frac{F}{lh} = \frac{F}{10,7\delta} \leq [\tau_{ср}], \quad (61)$$

где $[\tau_{ср}]$ — допустимое напряжение на срез для сварного шва.

Чаще всего применяют сварное соединение листов встык (рис. 78, г), когда зазор между соединяемыми листами заполняется расплавленным металлом. При сравнительно большой толщине соединяемых элементов их кромки перед сваркой специально обрабатывают. Высоту шва обычно принимают равной толщине листов.

Прочность стыкового сварного шва, как правило, не уступает прочности свариваемого металла. Сварной шов в соединении встык работает на тот же вид нагружения, что и соединяемые элементы, наиболее часто — на растяжение или на сжатие.

Условие прочности шва в этом случае имеет вид

$$\sigma = \frac{F}{l\delta} = \frac{F}{1\delta} \leq [\sigma'], \quad (62)$$

где $[\sigma']$ — допустимое напряжение на растяжение или сжатие сварного шва.

Упражнение 20

1. Определите площади среза и смятия для заклепки по рис. 75 при $d = 20$ мм; $\delta = 16$ мм. Вычислите напряжения среза и смятия, если $F = 60$ кН.

2. Какую механическую характеристику материала листа надо знать, чтобы определить силу, необходимую для продавливания отверстий?

А. Предел текучести. Б. Предел прочности на растяжение. В. Предел прочности на срез.

3. Диаметр заклепки увеличился в два раза. Как изменится расчетное напряжение среза?

А. Уменьшится в два раза. Б. Уменьшится в четыре раза.

4. Во сколько раз изменится допускаемая нагрузка на сварное соединение, если толщина шва уменьшится вдвое (при прочих равных условиях)?

А. Уменьшится в четыре раза. Б. Уменьшится вдвое.

ГЛАВА IX. КРУЧЕНИЕ

§ 39. Чистый сдвиг

Чистым сдвигом называют нагружение, при котором возникают только касательные напряжения. Экспериментально чистый сдвиг может быть осуществлен при кручении тонкостенной трубы

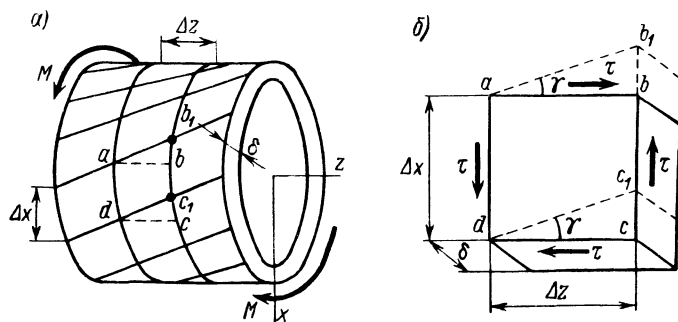


Рис. 79

(рис. 79, а), поэтому деформация чистого сдвига отнесена к теме «кручение».

Рассмотрим элемент $abcd$, вырезанный из тонкостенной трубы (рис. 79, б).

При возникновении касательных напряжений элемент перекашивается. Если считать грань ad закрепленной, то грань bc сместится в положение b_1c_1 . Прямые углы между гранями изменяются на угол γ , который называется *углом сдвига* или *относительным сдвигом*.

Касательные напряжения τ и угол сдвига связаны прямой пропорциональностью, т. е. законом Гука

$$\gamma = G\tau. \quad (63)$$

Входящая в эту формулу величина G называется *модулем сдвига*. Эта величина характеризует жесткость материала при деформации сдвига. Так как γ выражается отвлеченным числом, то модуль сдвига G , как и модуль продольной упругости E , имеет ту же единицу измерения, что и напряжение: МПа, Н/мм².

Между модулем упругости E и модулем сдвига G существует зависимость, которую приводим без вывода:

$$G = \frac{E}{2 + (1 + \mu)}, \quad (64)$$

где μ — коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона).

Для стали $\mu = 0,25$; $G = 0,4$; $E = 0,4 \cdot 2 \cdot 10^5 = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Приведенные соотношения между G и E подтверждаются опытами.

§ 40. Основные понятия. Эпюры крутящих моментов

На кручение обычно работают брусья круглого поперечного сечения, например валы и витки цилиндрических пружин.

Кручение возникает при нагружении бруса парами сил, расположенными в плоскостях, перпендикулярных продольной оси бруса (рис. 80).

Моменты этих пар $M_{вр}$ называют *вращающими моментами*. Их алгебраическая сумма равна нулю, если вал находится в равновесии и вращается равномерно. Вращающий момент $M_{вр}$ можно вычислить по передаваемой мощности P и частоте вращения n

$$M_{вр} = 9,55 \frac{P}{n}. \quad (65)$$

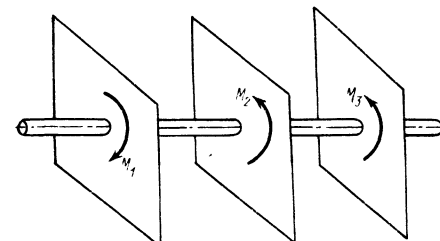


Рис. 80

Эта формула дает значение момента в Н·м, если мощность выражена в Вт, а частота в об/мин. О мощности при вращательном движении см. § 72.

Момент внутренних сил относительно продольной оси бруса называют *крутящим моментом* M_k . При кручении в поперечных сечениях бруса возникает один внутренний силовой фактор — *крутящий момент* M_k . Он определяется при помощи метода сечений (см. § 30).

Когда вращение от двигателя передается при помощи передаточного вала нескольким рабочим машинам, крутящий момент не остается постоянным по длине вала. Характер изменения крутящего момента по длине вала наиболее наглядно может быть представлен эпюрой крутящих моментов. Рассмотрим построение

такой эпюры для вала, на котором закреплено несколько шкивов (рис. 81, а): шкив I получает вращение от двигателя, шкивы II, III и IV передают его станкам. Моменты, передаваемые каждым шкивом на вал, вычисляются по формуле (65). Направление момента M_1 противоположно направлению моментов M_2 , M_3 и M_4 . При установившемся движении (равномерном вращении вала), пренебрегая трением в подшипниках, получаем из условия равновесия вала:

$$\sum M_{iz} = 0; \quad -M_2 + M_1 - M_3 - M_4 = 0.$$

Крутящий момент изменяется в сечениях вала, передающих внешние моменты от шкивов. Разделим вал на три участка (рис. 81, а) и определим крутящие моменты в поперечных сече-

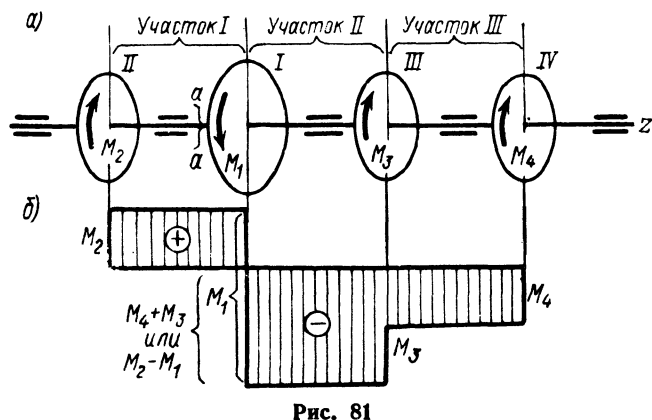


Рис. 81

ниях каждого из них. Крутящий момент в любом поперечном сечении первого участка между шкивами II и I уравнивает момент внешней пары M_2 , действующий на левую отсеченную часть, т. е.

$$M_{к1} = M_2.$$

При рассмотрении правой части из условия ее равновесия мы получили бы, естественно, тот же результат:

$$M_{к1} = M_1 - M_3 - M_4 = M_2.$$

Аналогично вычисляется крутящий момент в поперечных сечениях на втором участке вала между шкивами I и III

$$M_{к2} = M_2 - M_1 = -M_3 - M_4,$$

а на третьем участке между шкивами III и IV

$$M_{к3} = M_2 - M_1 + M_3 = -M_4.$$

Итак, крутящий момент в каком-либо поперечном сечении вала численно равен алгебраической сумме Моментов внешних пар, действующих на вал в плоскостях, перпендикулярных оси вала, и при-

ложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения. Эпюру крутящих моментов строят аналогично эпюре продольных сил, откладывая от горизонтали (рис. 81, б) ординаты, пропорциональные крутящим моментам в поперечных сечениях соответствующих участков вала.

Знак крутящего момента в поперечном сечении вала определяется исходя из направления внешних моментов. Крутящий момент положителен, когда внешние моменты вращают отсеченную часть по часовой стрелке, если смотреть со стороны проведенного сечения.

Положительные ординаты эпюры крутящих моментов откладывают вверх (рис. 82, б); отрицательные — вниз от горизонтальной линии, называемой осью, или базой, эпюры.

Пример 16. Построить эпюру крутящих моментов для вала по рис. 82, а, если шкив I получает от двигателя мощность $P_1 = 52$ кВт при частоте вращения

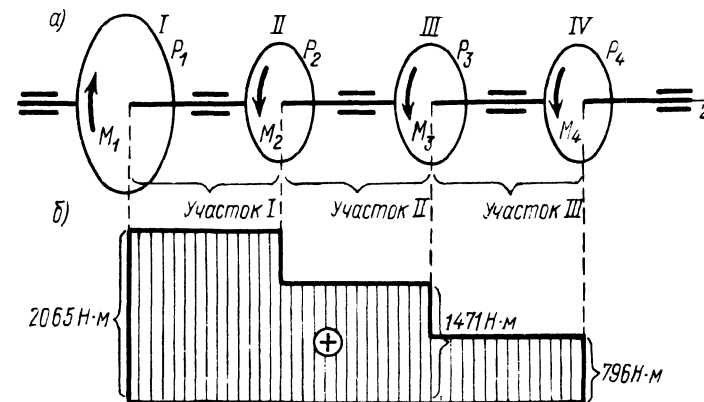


Рис. 82

вала $n = 240$ об/мин, а шкивы II, III и IV соответственно снимают мощности $P_2 = 15$ кВт, $P_3 = 17$ кВт, $P_4 = 20$ кВт.

Решение. По формуле (62) вычисляем значения моментов, передаваемых шкивами. Момент, передаваемый шкивом I,

$$M_1 = 9,55 \frac{P_1}{n} = 9,55 \frac{52 \cdot 10^3}{240} = 2067 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Моменты, передаваемые остальными шкивами:

$$M_2 = 9,55 \frac{P_2}{n} = 9,55 \frac{15 \cdot 10^3}{240} = 596 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = 9,55 \frac{P_3}{n} = 9,55 \frac{17 \cdot 10^3}{240} = 675 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = 9,55 \frac{P_4}{n} = 9,55 \frac{20 \cdot 10^3}{240} = 796 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Следует учесть, что согласно условию равновесия, пренебрегая трением в подшипниках, имеем:

$$\sum M_{iz} = 0; \quad M_1 = M_2 + M_3 + M_4.$$

или

$$2067 = 596 + 675 + 796.$$

Разобьем вал на три участка (рис. 82, а) и приступим к построению эпюры крутящих моментов. Проведем поперечное сечение на первом участке между шкивами I и II и рассмотрим действие правой отброшенной части на левую. Слева в проведенном сечении возникает крутящий момент $M_{KI} = M_1 = 2067 \text{ Н}\cdot\text{м}$, то же значение получим при рассмотрении действия левой части на правую. Аналогично находим крутящий момент на первом участке между шкивами II и III:

$$M_{K2} = M_1 - M_2 = 2067 - 596 = 1471 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

и на третьем участке между шкивами III и IV:

$$M_{K3} = M_1 - M_2 - M_3 = 2067 - 596 - 675 = 796 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

На рис. 82, б по вычисленным значениям M_K построена эпюра крутящих моментов.

Упражнение 21

1. Вал вращается равномерно (рис. 83), вращающий момент на ведущем шкиве $M_1 = 5000 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Определите значение и направление момента M_2 на ведомом шкиве. Постройте эпюру крутящих моментов.

2. Укажите, какие участки вала (рис. 83) испытывают деформацию кручения.

А. Все участки вала. Б. Только участок вала между шкивами.

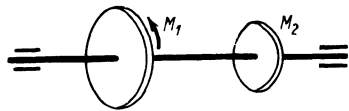


Рис. 83

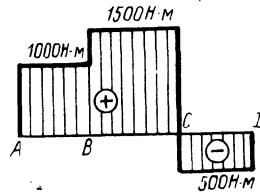


Рис. 84

3. На рис. 84 показана эпюра крутящих моментов. Чему равно максимальное значение крутящего момента, по которому нужно рассчитывать вал на прочность?

А. 2000 Н·м. Б. 1500 Н·м.

4. На эпюре крутящих моментов (рис. 84) отмечены точки А, В, С, D, соответствующие сечениям вала, где установлены шкивы. Укажите, какая точка соответствует сечению, где установлен ведущий шкив, и чему равен вращающий момент на этом шкиве?

А. В сечении В; максимальный вращающий момент 1500 Н·м. Б. В сечении С; максимальный вращающий момент 1500 Н·м. В. В сечении С; максимальный вращающий момент 2000 Н·м.

5. Какое расположение ведущего шкива более рационально; по схеме рис. 81, а или рис. 82, а?

А. Расположение ведущего шкива по схеме рис. 81, а. Б. Расположение ведущего шкива по схеме рис. 82, а.

§ 41. Напряжения и деформации при кручении вала

Выведем формулы для определения деформаций и напряжений, возникающих при кручении валов. Для наиболее часто встречающихся валов круглого и кольцевого сечения при кручении и

поперечные сечения сохраняют плоскую форму, а радиусы этих сечений, поворачиваясь, не искривляются.

Приведенный ниже вывод базируется на этих предположениях и справедлив, соответственно, только для валов круглого и кольцевого сечения. Рассмотрим элемент вала (рис. 85, а) длиной l , причем крайнее левое сечение этого элемента будем считать условно неподвижным, что эквивалентно определению перемещений относительно этого сечения. Нетрудно показать, что рассматриваемый элемент испытывает деформацию сдвига. Действительно, любая образующая наружная АВ или внутренняя ЕС смещается при кручении и возникают перекосы, определяемые

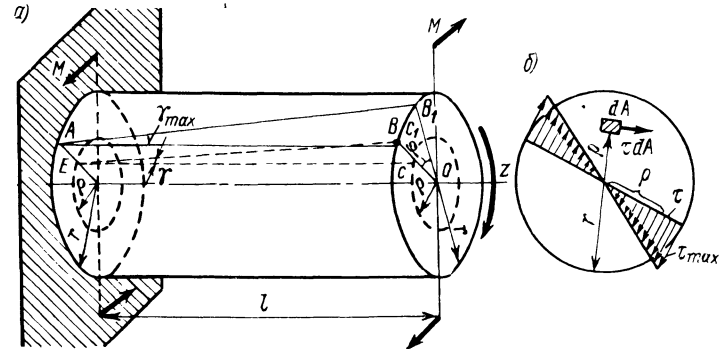


Рис. 85

углами сдвига γ_{\max} для образующей АВ или γ для образующей ЕС (рис. 85, а). При этом радиус крайнего правого сечения OB поворачивается в положение OB_1 на некоторый угол φ , называемый *углом закручивания*. Учитывая малость деформаций и выражая BB_1 и CC_1 как дуги окружностей, легко определить соотношения между углом сдвига γ_{\max} или γ и углом закручивания φ :

$$BB_1 = \gamma_{\max} l = \varphi r; \quad CC_1 = \gamma l = \varphi \rho,$$

откуда

$$\gamma_{\max} = \varphi r / l; \quad (66)$$

$$\gamma = \varphi \rho / l. \quad (67)$$

Выражая из уравнения (66) φ / l через γ_{\max} и подставляя это значение в уравнение (67), получаем:

$$\frac{\varphi}{l} = \gamma_{\max} / r; \quad \gamma = \gamma_{\max} \rho / r. \quad (68)$$

Таким образом, угол сдвига в поперечном сечении прямо пропорционален расстоянию от оси вала ρ . Величина φ / l , определяющая относительный угол закручивания или угол на единицу длины, для каждого сечения вала является постоянной, так как выражается через постоянную величину γ_{\max} и r .

Сдвиг отдельных элементов вала сопровождается возникновением в его поперечных сечениях касательных напряжений, которые могут быть определены по закону Гука для сдвига:

$$\tau = G\gamma = G\gamma_{\max}\rho/r \text{ и } \tau_{\max} = G\gamma_{\max} \text{ при } \rho = r$$

или

$$\tau = \tau_{\max}\rho/r,$$

т. е. касательные напряжения в поперечном сечении меняются по длине радиуса по линейному закону. Сдвиг в поперечных сечениях при кручении происходит по направлению касательных к окружностям, поэтому направление касательного напряжения в какой-либо точке сечения перпендикулярно к соответствующему радиусу (рис. 85, б).

Зная закон распределения касательных напряжений по поперечному сечению бруса, можно определить их значение в зависимости от крутящего момента, возникающего в данном поперечном сечении.

Если dA — площадь элементарной площадки (см. рис. 85, б), то элементарная внутренняя сила на этой площадке, расположенной на расстоянии ρ от оси бруса, τdA , а ее момент относительно оси бруса равен $\tau dA\rho$.

Сумма моментов всех элементарных внутренних касательных сил, возникающих в поперечном сечении, представляет собой крутящий момент M_K в данном сечении и определяется интегралом, взятым по всей площади

$$\int_A \tau dA\rho = M_K.$$

Выражая τ через τ_{\max} $\tau = \tau_{\max}\rho/r$ и вынося затем постоянный множитель τ_{\max}/r за знак интеграла, получаем

$$\frac{\tau_{\max}}{r} \int_A dA\rho^2 = M_K.$$

Интеграл $\int_A dA\rho^2$, как известно из предыдущего (см. § 25), представляет собой полярный момент инерции сечения

$$J_p = \int_A dA\rho^2.$$

Таким образом, $\frac{\tau_{\max}}{r} J_p = M_K$, откуда

$$\tau_{\max} = \frac{M_K r}{J_p} \quad (69)$$

и соответственно

$$\tau = \tau_{\max} \frac{\rho}{r} = \frac{M_K \rho}{J_p} \quad (70)$$

Выведенная формула определяет касательное напряжение в любой точке поперечного сечения при кручении вала круглого поперечного сечения. Напряжения в точках, близких к оси вала, малы, поэтому для уменьшения его массы иногда удаляют внутреннюю часть и делают его полым — с кольцевым сечением. Наибольшего значения достигают напряжения в поперечном сечении в точках у поверхности, т. е. в точках, наиболее удаленных от его оси.

Формулу (69) для τ_{\max} можно представить в виде

$$\tau_{\max} = M_K r / J_p = M_K \left/ \frac{J_p}{r} \right. = M_K / W_p. \quad (71)$$

Отношение $J_p/r = W_p$ называют полярным моментом сопротивления сечения.

Полярный момент сопротивления круга вычислим, разделив J_p на радиус $r = 0,5d$,

$$W_p = \frac{J_p}{0,5d} = \frac{\pi d^4}{32 \cdot 0,5d} = \pi d^3 / 16 \approx 0,2d^3. \quad (72)$$

Аналогично для кольцевого сечения

$$W_p = (\pi d_n^3 / 16) (1 - \alpha^4) \approx 0,2d_n^3 (1 - \alpha^4), \quad (73)$$

где $\alpha = d_b/d_n$.

Определим угол закручивания бруса, изображенного на рис. 85, а. Исходя из уравнений $\tau_{\max} = \varphi r / l$ и $\tau_{\max} = G\gamma_{\max}$, находим

$$\varphi = \frac{l\gamma_{\max}}{r} = \frac{l\tau_{\max}}{rG}.$$

Подставляя $\tau_{\max} = M_K r / J_p$, окончательно получаем

$$\varphi = \frac{l\tau_{\max}}{rG} = \frac{lM_K r}{rGJ_p} = \frac{M_K l}{GJ_p}. \quad (74)$$

Угол φ выражается в радианах. Угол поворота по формуле (74) можно определять лишь для участка бруса, имеющего постоянное поперечное сечение, при условии, что крутящий момент по длине этого участка не изменяется.

§ 42. Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Прочность при кручении бруса круглого сплошного или кольцевого поперечного сечения определяется условием

$$\tau = M_K / W_p \leq [\tau_K]. \quad (75)$$

Формула (75) может служить основой для трех видов расчетов.

1. Проверка прочности (проверочный расчет), когда известны наибольший крутящий момент и размеры поперечного сечения вала. Расчет производится непосредственно по формуле (75).

2. *Подбор сечения* (проектный расчет). Решив неравенство (75) относительно W_p , получим формулу для определения полярного момента сопротивления, а значит диаметра вала, исходя из условия прочности

$$W_p \geq M_K / [\tau_K]. \quad (76)$$

Требуемый диаметр вала при найденном значении W_p определяется из формулы (72) или (73).

3. *Определение допускаемого крутящего момента*, когда известны размеры сечения вала и задано допускаемое напряжение,

$$[M_K] = W_p [\tau_K]. \quad (77)$$

Допускаемое напряжение для валов из сталей марок сталь 40 и сталь 45 принимается в пределах $[\tau_K] = 30 \div 50$ МПа.

Кроме соблюдения условия прочности при проектировании валов требуется, чтобы вал обладал достаточной жесткостью, т. е. чтобы угол закручивания не превосходил некоторого заданного значения. Так, в зубчатых передачах при значительных углах закручивания валов зубья колес перекашиваются. Следствием может быть выкрашивание поверхностей зубьев и поломка передачи, поэтому необходимая жесткость валов практически всегда должна быть обеспечена. Обозначив через θ угол закручивания единичной длины вала, можно составить расчетную формулу для проверки вала на жесткость:

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_K}{GJ_p} \leq [\theta]. \quad (78)$$

В зависимости от назначения вала принимают $[\theta] = (0,45 \div 1,75) \cdot 10^{-2}$ рад/м, что соответствует $[\theta^\circ] = (0,25 \div 1,0)$ град/м.

Если вычислить относительный угол закручивания в градусах на 1 м длины вала, вместо формулы (78) получим

$$\theta^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{M_K}{GJ_p} \leq [\theta^\circ]. \quad (79)$$

С помощью формул (78) и (79) решаются три задачи, аналогичные задачам расчета на прочность.

1. *Проверка жесткости* (проверочный расчет), когда заданы крутящий момент, размеры и материал вала, а также допускаемый угол закручивания.

2. *Подбор сечения* по условию жесткости (проектный расчет). Из неравенства (78) получим формулу для определения полярного момента инерции сечения вала, по условию жесткости

$$J_p \geq \frac{M_K}{G[\theta]}. \quad (80)$$

При найденном значении J_p диаметр вала определяют из формул (38) и (39).

3. *Определение допускаемого крутящего момента* по условию жесткости

$$[M_K] = GJ_p [\theta]. \quad (81)$$

Пример 17. По данным примера 16 определить диаметр вала, удовлетворяющий условиям прочности и жесткости на наиболее напряженном участке. Материал вала — сталь 40. Допускаемое напряжение на кручение $[\tau_K] = 30$ МПа, допускаемый угол закручивания $[\theta] = 1 \cdot 10^{-2}$ рад/м $= 10^{-2}$ рад/мм; модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^4$ Н/мм².

Решение. По эпюре крутящих моментов (см. рис. 82) видно, что наибольший крутящий момент $M_K = 2067$ Н·м.

По условию прочности на кручение [см. формулу (76)] определяем:

$$W_p = M_K / [\tau_K] = 2067 \cdot 10^3 / 30 = 68,8 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

Выражая полярный момент сопротивления через диаметр вала $W_p \approx 0,2d^3$, находим его значение

$$d = \sqrt[3]{W_p / 0,2} = \sqrt[3]{68,8 \cdot 10^3 / 0,2} \approx 70 \text{ мм}.$$

По условию жесткости [см. формулу (80)] определяем полярный момент инерции

$$J_p = \frac{M_K}{G[\theta]} = \frac{2067 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 258 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

С другой стороны, выражая полярный момент инерции через диаметр вала $J_p \approx 0,1d^4$, находим его значение

$$d = \sqrt[4]{\frac{J_p}{0,1}} = \sqrt[4]{\frac{258 \cdot 10^4}{0,1}} = 71,8 \text{ мм} \approx 72 \text{ мм}.$$

Окончательно принимаем диаметр вала по условию жесткости

$$d = 72 \text{ мм}.$$

Пример 18. В поперечных сечениях стального вала возникает крутящий момент $M_K = 2000$ Н·м. Диаметр вала $d = 65$ мм, модуль сдвига $G = 0,8 \times 10^5$ Н/мм². Проверить прочность и жесткость вала, если допускаемое напряжение $[\tau_K] = 40$ МПа, а допускаемый угол закручивания $[\theta^\circ] = 0,85$ град/м.

Решение. Прочность вала проверяем по формуле (75)

$$\tau = \frac{M_K}{W_p} = \frac{2000 \cdot 10^3}{53,9 \cdot 10^3} = 37,2 \text{ МПа} < [\tau_K],$$

где

$$W_p \approx 0,2d^3 = 0,2 \cdot 65^3 = 53,9 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

Для проверки жесткости вычислим значение полярного момента инерции

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 65^4}{32} = 175 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Величину допускаемого угла закручивания переводим в радианы на 1 мм:

$$[\theta] = [\theta^\circ] \frac{\pi}{180 \cdot 1000} = \frac{0,85 \cdot 3,14}{180 \cdot 10^3} = 0,148 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{мм}}.$$

Подставив в формулу (78) значения J_p и $[\theta]$, получим

$$\theta = \frac{M_K}{GJ_p} = \frac{2000 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^6 \cdot 175 \cdot 10^4} = 0,143 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{мм}} < [\theta].$$

Следовательно, в этом примере диаметр вала удовлетворяет и условию прочности, и условию жесткости.

Упражнение 22

1. Справедлив ли закон Гука при кручении, если напряжение не превышает предела пропорциональности?

А. Справедлив. Б. Не справедлив.

2. Вычислите полярный момент сопротивления сечения круглого сплошного вала $d = 30$ мм.

3. Укажите, для какой точки поперечного сечения (рис. 86) можно вычислить напряжения по формуле

$$\tau = \frac{M_K}{W_p} = \frac{16M_K}{\pi d^3}.$$

А. Для точки А. Б. Для точки В. В. Для точки О.
4. Во сколько раз напряжение в точке А (рис. 86) меньше напряжения в точке В?

А. В четыре раза. Б. В два раза.

Изобразите эпюру касательных напряжений в поперечном сечении вала.

5. Зависят ли рабочие (расчетные) касательные напряжения от материала вала?

А. Зависят. Б. Не зависят.

6. Зависит ли угол поворота сечения вала от материала, из которого он изготовлен?

А. Зависит. Б. Не зависит.

7. Во сколько раз уменьшится максимальное напряжение в поперечных сечениях вала, если его диаметр увеличить в два раза?

А. В два раза. Б. В четыре раза. В. В восемь раз.

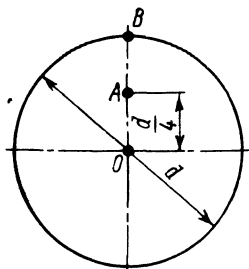


Рис. 86

ГЛАВА X. ИЗГИБ

§ 43. Основные понятия

Элементы конструкций, работающих на изгиб, называют балками. Чаще всего встречается поперечный изгиб, когда внешние силы, перпендикулярные к продольной оси балки, действуют в плоскости, проходящей через ось балки и одну из главных центральных осей ее поперечного сечения, в частности, в плоскости, совпадающей с плоскостью симметрии балки, например, сила F на рис. 87, а. Такой изгиб называют *прямым*. Если же силы, вызывающие деформацию изгиба, действуют в плоскости, проходящей через ось балки, но не проходящей через одну из главных центральных осей ее поперечного сечения, имеет место *косой изгиб* (рис. 87, б).

В поперечных сечениях балок при изгибе возникают два внутренних силовых фактора; изгибающий момент и поперечная сила. Однако возможен такой частный случай, когда в поперечных сечениях балки возникает только один силовой фактор — изгибающий момент, а поперечная сила равна нулю. В этом случае изгиб называют *чистым*. Он возникает, в частности, когда балка изгибается двумя противоположно направленными парами сил, приложенными к ее торцам (рис. 87, в). Чистый изгиб возникает при некоторых нагружениях сосредоточенными силами или распределенной нагрузкой.

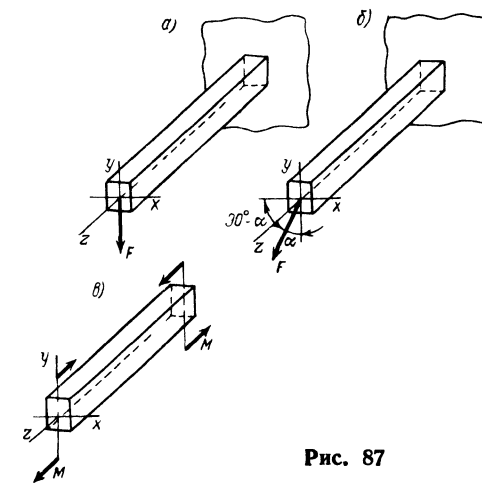


Рис. 87

Упражнение 23

1. В поперечном сечении балки возникли изгибающий момент и поперечная сила. Укажите вид изгиба.

А. Чистый изгиб. Б. Поперечный

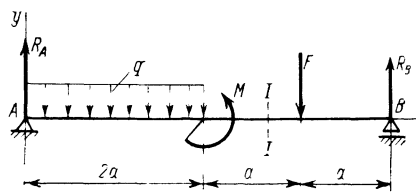


Рис. 88

3. Найдите ошибки в приведенных ниже уравнениях равновесия для балки, изображенной на рис. 88:

$$\sum M_A = 0; \quad q \cdot 2a \cdot a + F \cdot 3a - R_B \cdot 4a = 0;$$

$$\sum M_B = 0; \quad -F \cdot a - q \cdot 2a \cdot 3a + R_A \cdot 4a = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_A - F - q \cdot 2a + R_B = 0.$$

§ 44. Поперечные силы и изгибающие моменты в сечениях балок

Определим внутренние силовые факторы в сечениях балки AB (рис. 89, а), на которую действуют сосредоточенные силы F_1, F_2, F_3 , перпендикулярные к ее оси. Эти силы вызывают вертикальные реакции R_A и R_B опор балки. Горизонтальная состав-

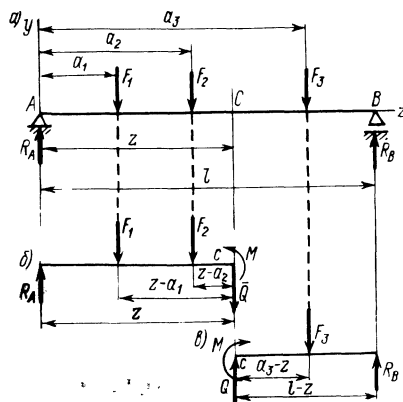


Рис. 89

ляющая реакции шарнирно-неподвижной опоры при действии только вертикальных сил, перпендикулярных к оси балки, очевидно, равна нулю. Опорные реакции R_A и R_B могут быть определены из уравнений равновесия, составленных для всех сил, действующих на балку. Проведем мысленно произвольное поперечное сечение C на расстоянии z от левой опоры и рассмотрим условия равновесия левой и правой отсеченных частей балки (рис. 89, б и в). Левая часть должна находиться в равновесии под действием внешних сил R_A , F_1 , F_2 и внутренних сил, возникающих в сечении C . Правая часть должна находиться в равновесии под действием внешних сил F_3 , R_B и внутренних сил в проведенном сечении C .

Согласно закону равенства действия и противодействия, внутренние силы по сечению C для левой и правой частей одинаковы, но направлены в противоположные стороны. Внутренние силы в любом сечении балки могут быть заменены силой Q и парой сил с моментом M . Сила Q называется *поперечной силой*, а момент M — *изгибающим моментом* в поперечном сечении балки.

Для сил, действующих на левую отсеченную часть балки (рис. 89, б), составим уравнение равновесия. Уравнение проекций на вертикальную ось y (рис. 89, б);

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_A - F_1 - F_2 - Q = 0;$$

уравнение моментов относительно точки C :

$$\sum M_C = 0; \quad R_A z - F_1(z - a_1) - F_2(z - a_2) - M = 0.$$

Решив первое из этих уравнений относительно Q , а второе относительно M , получим

$$Q = R_A - F_1 - F_2;$$

$$M = R_A z - F_1(z - a_1) - F_2(z - a_2).$$

Итак, поперечная сила и изгибающий момент в любом поперечном сечении балки могут быть определены по известным внешним силам, действующим на балку.

Поперечная сила в каком-либо поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на ось y внешних сил, действующих на балку по одну сторону от рассматриваемого сечения, а изгибающий момент — алгебраической сумме моментов сил, взятых относительно центра тяжести сечения.

Поперечная сила Q и момент пары M действуют на сечение левой и правой отсеченных частей балки в противоположных направлениях (рис. 89, б). Чтобы при вычислении изгибающего момента M и поперечной силы Q в каком-либо поперечном сечении балки по внешним силам, действующим слева или справа от этого сечения, получить значения, одинаковые не только по значению, но и по знаку, следует установить противоположные правила знаков для сил и их моментов слева и справа от сечения.

Установим правило знаков для изгибающих моментов и поперечных сил.

Когда внешняя сила, расположенная слева от сечения, вращает оставленную часть балки относительно центра тяжести сечения по ходу часовой стрелки, то изгибающий момент считают *положительным* (рис. 90, а). При противоположном направлении изгибающий момент считают *отрицательным* (рис. 90, б).

Для нагрузок, расположенных справа от сечения, направления положительного и отрицательного моментов противоположны соответствующим направлениям слева, так как правило знаков для изгибающих моментов связано с характером деформации балки. Изгибающий момент считается *положительным*, если балка изгибается *выпуклостью вниз* — растянутые волокна расположены *снизу* (рис. 90, а). При изгибе *выпуклостью вверх*, когда растянутые волокна находятся *сверху*, момент *отрицателен* (рис. 90, б).

Для поперечной силы знак также связан с характером деформации. Когда внешние силы действуют слева от сечения *вверх*, а справа — *вниз*, поперечная сила *положительна* (рис. 90, в). При противоположном действии внешних сил, т. е. слева от сечения *вниз*, а справа — *вверх*, поперечная сила *отрицательна* (рис. 90, г).

Внутренние силовые факторы в сечениях балок — поперечная сила Q и изгибающий момент M — зависят от внешней нагрузки и изменяются по длине балки. Законы их изменения представляются некоторыми уравнениями, где аргументами являются координаты z поперечных сечений балки, а функциями — Q или M . Эти уравнения удобно представлять в виде эпюр, ординаты которых для любых значений абсциссы z дают соответствующие значения изгибающего момента M или поперечной силы Q . Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил строятся аналогично эпюрам продольных сил (см. § 32) и крутящих моментов (см. § 39). При построении эпюр положительные значения поперечных

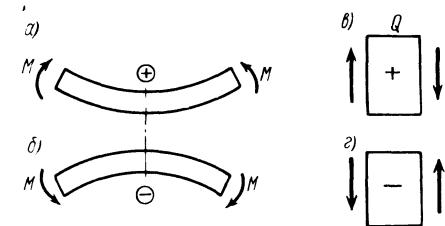


Рис. 90

сил и моментов откладывают вверх от оси, отрицательные — вниз; ось (или базу) эпюры проводят параллельно оси балки.

Упражнение 24

1. Какие нагрузки, расположенные слева от сечения $I-I$ балки (см. рис. 88), вызывают положительную поперечную силу в этом сечении?

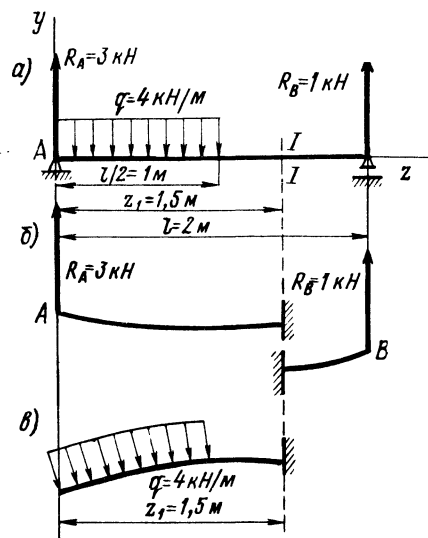


Рис. 91

А. Сила R_A . Б. Нагрузки $2aq$ и M . В. Силы F и R_B .

2. Какие нагрузки, расположенные слева от сечения $I-I$ балки (см. рис. 88) вызывают в нем положительный изгибающий момент?

А. Сила R_A . Б. Распределенная нагрузка $2aq$. В. Момент M .

3. На рис. 91, а показана балка. Определите значения поперечной силы и изгибающего момента M в сечении, проведенном на расстоянии $z = 1,5$ м от левой опоры. Вычислите произвести, отбросив сначала правую часть балки (рис. 91, б), а затем — левую (рис. 91, в).

4. Изменятся ли величина и знак поперечной силы и изгибающего момента, если они будут вычислены по внешним силам, расположенным слева или справа от сечения?

А. Изменятся. Б. Не изменятся.

§ 45. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Рассмотрим ряд типовых примеров, содержащих наиболее часто встречающиеся случаи нагружения. Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки с защемленным концом, нагруженной на свободном конце сосредоточенной парой сил с моментом M (рис. 92, а).

Для балок с одним защемленным концом при построении эпюр можно не определять опорные реакции. Проведя сечения, будем рассматривать равновесие той части балки, к которой приложены только внешние силы. Для балки, показанной на рис. 92, а, такой частью будет левая. В произвольном сечении балки на расстоянии z от свободного конца поперечная сила равна нулю ($Q = 0$), так как сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю. Изгибающий момент в любом сечении равен внешнему моменту на свободном конце; он положителен, так как внешний момент слева от сечения направлен по ходу часовой стрелки и балка изгибается выпуклостью вниз.

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов построены на рис. 92, б и в. Балка в рассмотренном примере испытывает

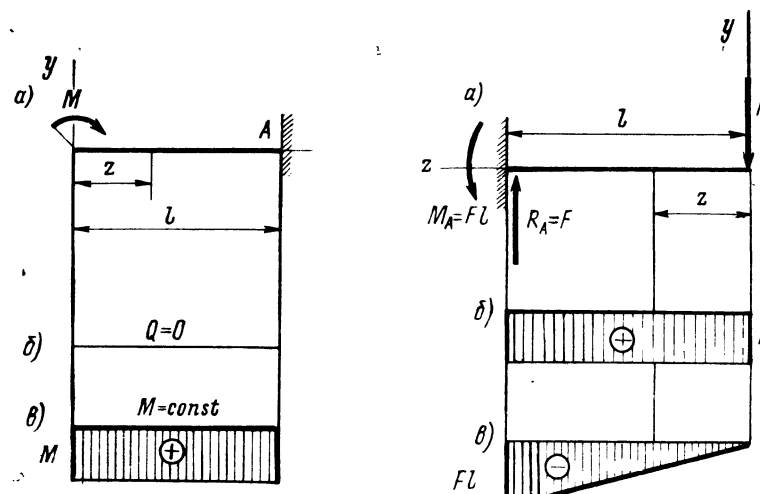


Рис. 92

Рис. 93

чистый изгиб, так как поперечная сила во всех ее поперечных сечениях равна нулю. Эпюра моментов при чистом изгибе ограничивается прямой линией, параллельной оси балки.

Построим эпюры для балки с защемленным концом, нагруженной сосредоточенной силой на свободном конце (рис. 93, а). Здесь можно не определять опорных реакций. Проведем сечение и будем рассматривать равновесие правой части балки, к которой приложены внешние силы (рис. 93, а). В любом сечении балки на расстоянии z от свободного конца поперечная сила постоянна, равна силе F и положительна, так как внешняя сила стремится опустить правую часть балки. Эпюра поперечных сил (рис. 93, б) ограничивается прямой, параллельной оси балки.

В произвольном поперечном сечении балки на расстоянии z от свободного конца изгибающий момент равен моменту внешней силы относительно центра этого сечения и отрицателен, так как эта сила изгибает балку выпуклостью вверх (стремится повернуть правую часть по часовой стрелке):

$$M = -Fz.$$

Эпюра изгибающих моментов изображается здесь треугольником (рис. 93, в). Наибольшего абсолютного значения изгибающий момент достигает в сечении заделки.

Поперечная сила в сечении заделки совпадает с опорной реакцией, а изгибающий момент в этом сечении равен реактивному моменту. Этими условиями можно пользоваться для проверки правильности построения эпюр в балках с одним защемленным концом.

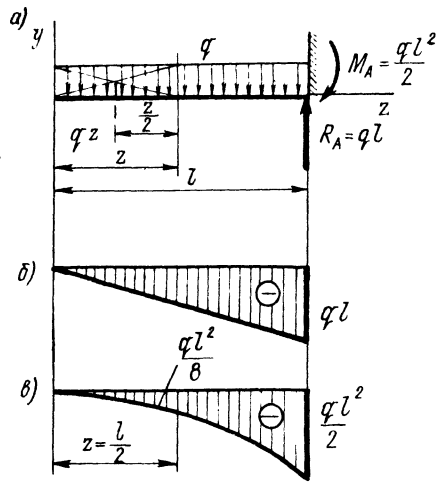


Рис. 94

Построим эпюры для балки с зашечленным концом, к которой приложена нагрузка, равномерно распределенная по всей длине l (рис. 94, а). Пусть на единицу длины приходится нагрузка q , тогда вся нагрузка, действующая на балку, равна ql . Для этой балки также нет надобности в определении опорных реакций, если рассматривать равновесие ее левой части, к которой приложены только внешние силы.

В любом поперечном сечении балки на расстоянии z от свободного конца поперечная сила равна алгебраической сумме всех сил, действующих

на левую часть, т. е. равнодействующей равномерно распределенной нагрузки q на участке длиной z ($Q = -qz$); она отрицательна, так как нагрузка направлена слева от сечения вниз.

Эпюра поперечных сил (рис. 94, б) представляет собой треугольник, который можно построить, зная две его точки. При $z = 0$ имеем $Q = 0$; при $z = l$ значение $Q = -ql$. Наибольшая по абсолютному значению поперечная сила в сечении зашечмления

$$|Q|_{\max} = ql. \quad (82)$$

В произвольном поперечном сечении, проведенном на расстоянии z от свободного конца, изгибающий момент равен алгебраической сумме моментов всех сил, действующих на левую часть балки, т. е. моменту равнодействующей равномерно распределенной нагрузки, равной qz . Эта равнодействующая приложена на половине расстояния z , и плечо ее относительно проведенного сечения равно $z/2$. Изгибающий момент в произвольном сечении

$$M = -qz(z/2) = -qz^2/2.$$

Так как сила qz изгибает балку выпуклостью вверх, изгибающий момент отрицателен.

Эпюра изгибающих моментов ограничена параболой (рис. 94, в). Давая различные значения абсциссе z , можно построить ее по точкам. При $z = 0$ $M = 0$, при $z = l/2$ $M = -(ql^2/8)$, при $z = l$ $M = -(ql^2/2)$.

Наибольший по абсолютному значению изгибающий момент достигает в сечении зашечмления

$$|M|_{\max} = ql^2/2.$$

Построим эпюры для балки (рис. 95, а), лежащей на двух опорах и нагруженной силой. Составим уравнения равновесия и найдем опорные реакции:

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; & \quad -Fb + R_A l = 0; \\ \sum M_A = 0; & \quad Fa - R_B l = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$R_A = Fb/l, \quad R_B = Fa/l.$$

Разделим балку на два участка: первый AC , второй CB , их границей является точка приложения силы F . Поперечная сила в любом сечении на первом участке равна реакции R_A ; она постоянна по всей длине участка и положительна, так как сила R_A , действующая на левую часть, направлена вверх

$$Q_1 = R_A = Fb/l.$$

Поперечная сила в любом сечении на втором участке равна разности сил R_A и F и также постоянна по всей длине участка, но отрицательна

$$\begin{aligned} Q_2 &= R_A - F = Fb/l - F = \\ &= F(b-l)/l = -Fa/l. \end{aligned}$$

Эпюра поперечных сил показана на рис. 95, б. В сечении C , где приложена сила F , поперечная сила имеет скачок, равный значению F , и меняет знак на противоположный.

Выражение изгибающего момента в любом сечении на участке I при изменении z в пределах от $z = 0$ до $z = a$ имеет вид

$$M_1 = R_A z = (Fb/l)z.$$

Этот момент положителен, так как сила R_A стремится повернуть левую часть вокруг сечения по часовой стрелке.

Полученное уравнение определяет прямую линию, которую можно построить по двум точкам: при $z = 0$, т. е. в сечении на левой опоре, $M = 0$; при $z = a$, т. е. в сечении под силой F , $M_1 = Fab/l$.

Изгибающий момент для любого поперечного сечения участка II при изменении z от $z = a$ до $z = l$

$$M_2 = R_A z - F(z - a) = (Fb/l)z - F(z - a).$$

Знаки моментов поставлены в соответствии с приведенным выше правилом.

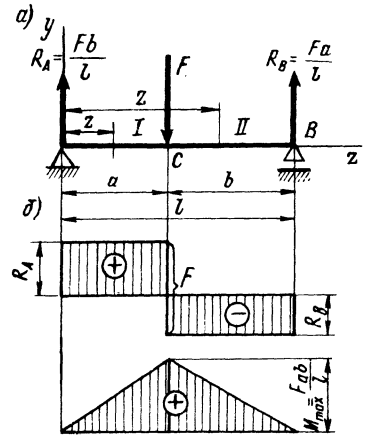


Рис. 95

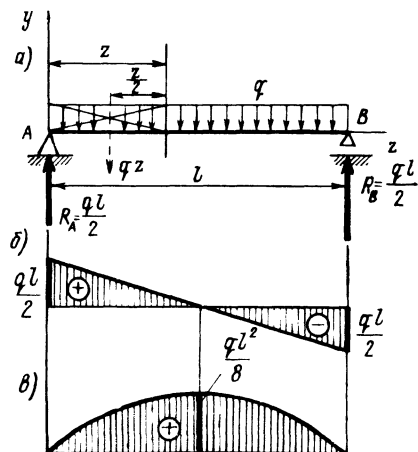


Рис. 96

определения опорных реакций не нужно решать уравнений равновесия, так как по симметрии нагружения балки сразу можно найти

$$R_A = R_B = ql/2.$$

В произвольном поперечном сечении на расстоянии z от опоры A , рассматривая левую отсеченную часть, определяем поперечную силу

$$Q = R_A - qz = ql/2 - qz;$$

при $z = 0$ $Q = ql/2$; при $z = l/2$ $Q = 0$; при $z = l$ $Q = -ql/2$.

Эпюра Q построена на рис. 96, б.

Изгибающий момент в проведенном сечении

$$M = R_A z - qz(z/2) = (ql/2)z - qz^2/2;$$

при $z = 0$ $M = 0$; при $z = l/2$ $M = ql^2/8$; при $z = l$ $M = 0$.

В это уравнение z входит во второй степени, поэтому эпюра M изобразится параболой (рис. 96, в). Посередине балки при $z = l/2$ поперечная сила изменяет знак, и изгибающий момент имеет наибольшее значение $M_{\max} = ql^2/8$.

Упражнение 25

1. Поперечные силы в сечениях на расстоянии z от концов балок выражены уравнениями: $Q_1 = -F$; $Q_2 = -F + qz$.

Какими линиями очерчены эпюры поперечных сил?

А. В обоих случаях наклонными прямыми линиями. Б. В первом случае — прямой, параллельной оси балки, во втором — прямой, наклоненной к оси балки.

2. Изгибающие моменты в сечениях на расстоянии z от концов балок выражены уравнениями: $M_1 = R_A z$; $M_2 = M$.

Какими линиями очерчены эпюры изгибающих моментов?

Изгибающий момент на участке II изменяется также по линейному закону; найдем две точки этой линии. При $z = a$, т. е. в сечении под грузом, $M_2 = Fab/l$; при $z = l$, т. е. в сечении на правой опоре, $M_2 = 0$.

Эпюра изгибающих моментов построена на рис. 95, б. Изгибающий момент имеет наибольшее значение ($M_{\max} = Fab/l$) в том сечении, в котором поперечная сила меняет знак.

Построим эпюры для двухопорной балки, к которой приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q (рис. 96, а). Здесь для

А. В обоих случаях наклонными прямыми линиями. Б. В первом случае — прямой, наклоненной к оси, во втором — прямой, параллельной оси.

3. Какой линией очерчена эпюра изгибающих моментов, если закон их изменения по длине балки выражается уравнением

$$M = R_A z - qz^2/2.$$

§ 46. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов по характерным точкам

На основе примеров, разобранных в предыдущем параграфе, можно сделать выводы о взаимосвязи между нагрузкой и очертаниями эпюр поперечных сил и изгибающих моментов. Ниже эти выводы сформулированы следующим образом.

1. На участках, где изгибающий момент постоянен (чистый изгиб, см. рис. 89), поперечная сила равна нулю.

2. На участках, свободных от загрузения равномерно-распределенной нагрузкой: поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону, т. е. по прямой (см. рис. 93 и 95).

3. На участках, загруженных равномерно-распределенной нагрузкой, поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент по параболе, выпуклость которой направлена навстречу нагрузке (см. рис. 94 и 96).

4. В точках приложения сосредоточенных сил на эпюре поперечных сил имеют место скачки, равные по значению силам, а на эпюре моментов — переломы, направленные навстречу силам (см. рис. 93 и 95).

5. В точках приложения сосредоточенных пар сил на эпюре моментов возникают скачки, равные моментам пар (см. рис. 92).

6. В точках, где поперечная сила равна нулю ($Q = 0$), значение момента принимает экстремальное значение — максимальное или минимальное на рассматриваемом участке.

Указанные закономерности позволяют упростить построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов (в сложнозагруженных балках) и обойтись без составления уравнений для каждого участка.

Достаточно вычислить ординаты эпюр для характерных сечений и соединить их линиями в соответствии с изложенными выше правилами. Характерными являются сечения балки, где приложены сосредоточенные силы и моменты (включая опорные сечения), а также сечения, ограничивающие участки с равномерно распределенной нагрузкой.

Для определения максимальных значений изгибающих моментов дополнительно подсчитываются моменты в сечениях, где поперечные силы равны нулю. Построение эпюр без составления уравнений дает особенно значительный эффект для балок, нагруженных сложной нагрузкой, имеющих много участков нагружения.

Изложенные в настоящем параграфе правила должны служить основным способом построения эпюр, так как трудоемкость вы-

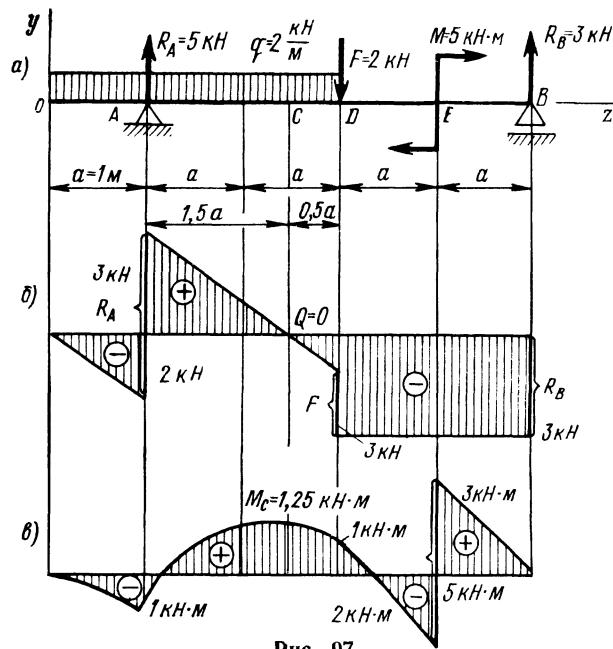


Рис. 97

числений при этом меньше по сравнению с построением эпюр по уравнениям.

Пример 19. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, изображенной на рис. 97, а.

Решение. Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; \quad q \cdot 3a \cdot 0,5a + F \cdot 2a + M - R_B \cdot 4a = 2 \cdot 3 \cdot 0,5 + 2 \cdot 2 + 5 - R_B \cdot 4 = 0;$$

$$\sum M_B = 0; \quad -q \cdot 3a \cdot 3,5a + R_A \cdot 4a - F \cdot 2a + M = -2 \cdot 3 \cdot 3,5 + R_A \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 5 = 0,$$

откуда

$$R_B = 12/4 = 3 \text{ кН}; \quad R_A = 20/4 = 5 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения опорных реакций составляем сумму проекций всех сил, приложенных к балке, на вертикальную ось y :

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -q \cdot 3a + R_A - F + R_B = 0; \quad -2 \cdot 3 + 5 - 2 + 3 = 0.$$

Опорные реакции найдены правильно.

Характерными являются крайняя точка O , опорные сечения A и B и точки приложения нагрузок D и E . Вычисляем значения поперечных сил в сечениях, проходящих через указанные точки (рис. 97, б).

В сечении O $Q = 0$.

В сечении A слева $Q_A^{\text{лев}} = -qa = -2 \text{ кН}$; на консоли эпюра поперечных сил ограничена наклонной прямой. В сечении A справа $Q_A^{\text{прав}} = -qa + R_A = -2 + 5 = 3 \text{ кН}$; здесь имеет место скачок, равный $R_A = 5 \text{ кН}$.

В сечении D слева $Q_D^{\text{лев}} = -3qa + R_A = -3 \cdot 2 + 5 = -1 \text{ кН}$. В сечении D справа $Q_D^{\text{прав}} = -3qa + R_A - F = -3 \cdot 2 + 5 - 2 = -3 \text{ кН}$. В сечении D эпюра Q имеет место скачок, равный приложенной силе $F = 2 \text{ кН}$.

На участке AD , как и на консоли OA , эпюра поперечных сил ограничивается наклонной прямой, так как на обоих участках действует равномерно распределенная нагрузка. Наклон прямых на участках OA и AD одинаков в связи с равной интенсивностью распределенной нагрузки. Поперечная сила в некоторой точке C принимает нулевое значение $Q = 0$. Это сечение также является характерным, так как здесь изгибающий момент должен принять экстремальное максимальное значение. Из подобия треугольных элементов эпюры на участке AD нетрудно определить, что точка C лежит на расстоянии $1,5a$ от опоры A или $0,5a$ от сечения D .

В сечении B поперечная сила отрицательна и численно равна $R_B = 3 \text{ кН}$. Эпюра поперечных сил построена на рис. 97, б.

Переходим к построению эпюры изгибающих моментов (рис. 97, в).

В сечении O $M = 0$. В сечении A $M_A = -qa^2/2 = 2 \cdot 1^2/2 = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}$; на консоли эпюра моментов изображается параболой, как на участке, нагруженном равномерно-распределенной нагрузкой.

В сечении C $M_C = -\frac{q(2,5a)^2}{2} + R_A \cdot 1,5a = -\frac{2 \cdot 2,5^2}{2} + 5 \cdot 1,5 = 1,25 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Это значение момента является максимальным на участке AD , на эпюре моментов в этом сечении имеет место перегиб. Эпюра моментов ограничена параболой.

В сечении D $M_D = -q \cdot 3a \cdot 1,5a + R_A \cdot 2a = -2 \cdot 3 \cdot 1,5 + 5 \cdot 2 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

В точке E , где приложена сосредоточенная пара сил, вычисляем моменты слева и справа от пары сил. В сечении E слева $M_E^{\text{лев}} = -q \cdot 3a \cdot 2,5a + R_A \cdot 3a - F \cdot a = -2 \cdot 3 \cdot 2,5 + 5 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м}$. В сечении E справа $M_E^{\text{прав}} = M_E^{\text{лев}} + M = -2 + 5 = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

В сечении B $M_B = 0$. На участках DE и EB , свободных от распределенной нагрузки, эпюра моментов ограничена прямыми наклонными линиями; в сечении E имеет место скачок, равный моменту приложенной пары $M = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Эпюра моментов построена на рис. 97, в. Наибольшее значение момент имеет в сечении E (справа): $M_{\text{max}} = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Упражнение 26

1. На рис. 98, а изображена балка, нагруженная сосредоточенными силами. На рис. 98, б и в приведены эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Вычислите значения ординат этих эпюр в характерных сечениях A , B , C , D , поставьте знаки.

2. Могут ли быть скачки на эпюре изгибающих моментов, если балка нагружена сосредоточенными силами и распределенной нагрузкой?

А. Могут. Б. Не могут.

3. На рис. 99, а изображена консольная балка, нагруженная сосредоточенной силой F и парой сил, момент которой равен M . Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 99, б. Вычислите значения изгибающих моментов в сечении A , справа и слева от сечения B и в сечении C . Определите значение скачка на эпюре изгибающих моментов в сечении B и постройте эпюру поперечных сил.

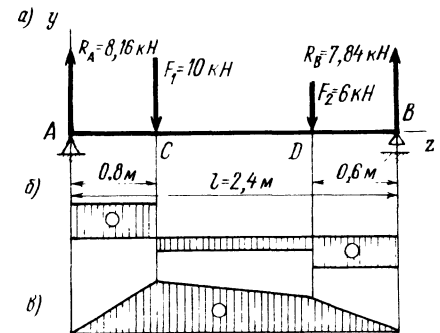


Рис. 98

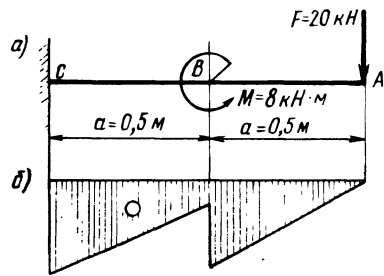


Рис. 99

4. На рис. 100, а изображена балка, нагруженная сосредоточенными силами. Определите, какая из приведенных на рисунке эпюр изгибающих моментов соответствует нагружению балки.

А. Эпюра на рис. 100, б. Б. Эпюра на рис. 100, в. В. Эпюра на рис. 100, г.

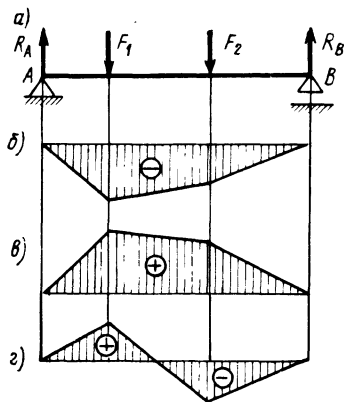


Рис. 100

§ 47. Нормальные напряжения при изгибе

Нанесем на боковую поверхность балки, испытывающей чистый изгиб (рис. 101, а), продольную линию OO_1 на половине высоты и ряд поперечных параллельных между собой линий. При нагружении двумя противоположно направленными парами сил, действующими в продольной плоскости симметрии (рис. 101, б), балка деформируется — изогнется выпуклостью вниз. Линии на боковой поверхности балки останутся прямыми, но параллельность их нарушится. Расстояния между концами этих линий на выпуклой стороне увеличатся, а на вогнутой уменьшатся. Расстояния между этими линиями на половине высоты балки останутся такими же, как до деформации. Из этого можно заключить, что при изгибе продольные волокна балки на выпуклой стороне удлиняются, а на вогнутой укорачиваются; слой волокон, лежащих на половине высоты балки, сохраняет, искривившись, неизменную длину.

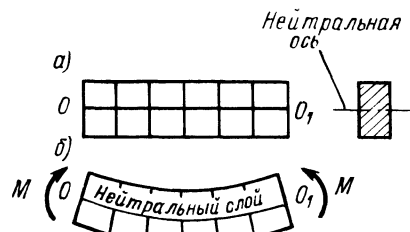


Рис. 101

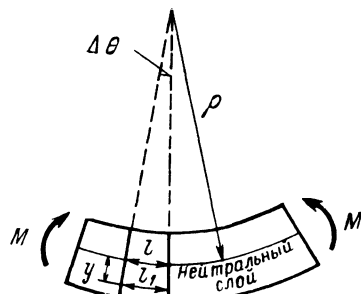


Рис. 102

Растягивающие и сжимающие напряжения в поперечных сечениях балки соответствуют удлинению и укорочению ее продольных волокон. Слой, длина которого не изменяется при изгибе, не испытывает напряжений и называется *нейтральным слоем*.

Итак, при изгибе поперечные сечения, оставаясь плоскими, поворачиваются одно относительно другого вокруг некоторых осей, лежащих в их плоскостях. Каждое поперечное сечение поворачивается вокруг линии его пересечения с нейтральным слоем. Эта линия называется *нейтральной осью поперечного сечения*.

Высказанное положение носит название *гипотезы плоских сечений*.

Деформации волокон не зависят от положения волокон по ширине балки. Следовательно, нормальные напряжения, изменяясь по высоте сечения, остаются одинаковыми по ширине балки.

Исходя из этих гипотез, найдем удлинение какого-либо волокна балки при чистом изгибе. Положим, что два близких поперечных сечения балки (рис. 102) повернулись одно относительно другого на угол $\Delta\theta$. Радиус кривизны нейтрального слоя балки, или ее изогнутой оси, обозначим ρ , а длину волокна, лежащего в нейтральном слое между рассматриваемыми сечениями, — l . Координату y условимся считать положительной в сторону выпуклости и отрицательной в сторону вогнутости. Удлинение рассматриваемого волокна $dl_1 = l_1 - l$, а относительное удлинение (продольная деформация)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l}.$$

Выражая длины дуг l и l_1 через соответствующие радиусы и центральный угол $\Delta\theta$, имеем:

$$l = \rho \Delta\theta; \quad l_1 = (\rho + y) \Delta\theta.$$

Подставив эти значения, получим

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y) \Delta\theta - \rho \Delta\theta}{\rho \Delta\theta} = \frac{y}{\rho}, \quad (83)$$

т. е. относительные удлинения волокон прямо пропорциональны их расстояниям y от нейтрального слоя.

Зная относительное удлинение, можно применить закон Гука для линейной деформации и выразить нормальное напряжение

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho}. \quad (84)$$

Эта зависимость определяет линейный закон распределения нормальных напряжений по сечению балки (рис. 103). По ширине балки (при определенном y) напряжения постоянны. Наибольшего значения нормальные напряжения достигают в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси, причем со сто-

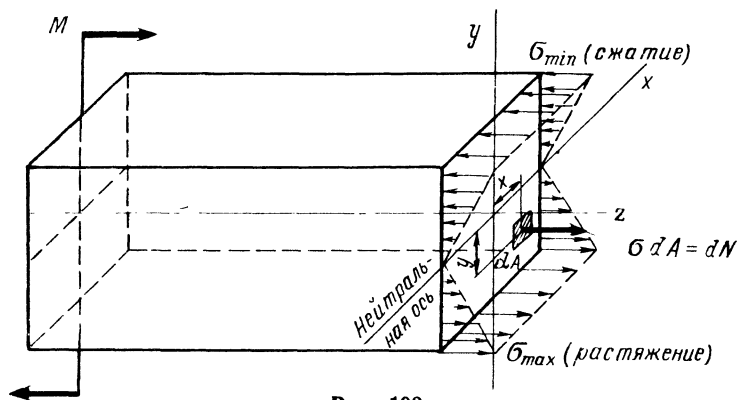


Рис. 103

роны выпуклости балки эти напряжения растягивающие σ_{\max} , а со стороны вогнутости — сжимающие σ_{\min} . В точках нейтральной оси x (при $y = 0$) напряжения равны нулю.

После того как установлен закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении балки при чистом изгибе, можно перейти к определению напряжений в зависимости от изгибающего момента в этом сечении. Мысленно рассечем балку некоторым поперечным сечением и выделим в нем произвольную элементарную площадку dA на расстоянии y от нейтральной оси x (рис. 103). Напряжение по этой площадке, согласно формуле (84), составит $\sigma = E \frac{y}{\rho}$. Элементарная сила, действующая на площадку,

$$dN = \sigma dA = E \frac{y}{\rho} dA.$$

Так как внутренние силы при чистом изгибе приводятся только к изгибающему моменту, то, интегрируя их по сечению, получаем:

$$\int_A dN = 0; \quad \int_A \sigma dA = 0, \quad (84a)$$

т. е. сумма проекций внутренних сил на ось балки равна нулю;

$$\int_A dM = M; \quad \int_A \sigma y dA = M, \quad (84b)$$

т. е. сумма моментов внутренних сил относительно нейтральной оси сечения равна изгибающему моменту.

Рассмотрим первое уравнение равновесия (84a) после подстановки в него значения $\sigma = E \frac{y}{\rho}$:

$$\int_A E \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = \frac{E}{\rho} S_x = 0. \quad (85)$$

Входящий в это уравнение интеграл $\int_A y dA = S_x$ представляет собой статический момент сечения относительно оси x (см. § 24).

Отношение E/ρ при изгибе балки не может быть равным нулю, так как $E \neq 0$ и $\rho \neq 0$ (ось балки не прямая), поэтому из выражения (85) следует, что статический момент сечения относительно оси x должен быть равен нулю. Это, как известно из предыдущего (см. § 24), будет лишь в случае, если ось проходит через центр тяжести поперечного сечения балки.

Рассмотрим второе уравнение равновесия (84b).

Подставляя значение σ из выражения (84) и вынося постоянные за знак суммы, получаем

$$\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M.$$

Входящий в эту формулу интеграл $\int_A y^2 dA$ представляет собой осевой момент инерции J_x поперечного сечения балки относительно нейтральной оси x (см. § 25).

Вводя это обозначение, можем представить последнее выражение в виде

$$\frac{E}{\rho} J_x = M,$$

или

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_x}. \quad (86)$$

Величина, обратная радиусу кривизны в какой-либо точке кривой, называется ее кривизной. Следовательно, формула (86) связывает кривизну нейтрального слоя, а значит кривизну изогнутой оси балки, со значением изгибающего момента M и жесткостью сечения балки EJ_x относительно нейтральной оси.

Жесткость сечения пропорциональна модулю упругости E и осевому моменту инерции J_x ; иными словами, она определяется материалом, формой и размерами поперечного сечения.

После подстановки полученного для $1/\rho$ значения в формулу (84), произведя сокращения, определим нормальное напряжение в любой точке поперечного сечения балки при чистом изгибе

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} = Ey \frac{M}{EJ_x} = \frac{My}{J_x}. \quad (87)$$

Если нейтральная ось сечения совпадает с осью симметрии, то

$$y_{\max} = 0,5h,$$

где h — высота сечения.

Подставив значения y_{\max} в формулу для наибольших напряжений, получим

$$\sigma_{\max/\min} = \pm \frac{M \cdot 0,5h}{J_x} = \pm \frac{M}{J_x / 0,5h}.$$

Отношение осевого момента инерции к расстоянию до наиболее удаленных от нейтральной оси волокон симметричного сечения называют *осевым моментом сопротивления*

$$W_x = J_x / (0,5h). \quad (88)$$

Наибольшее по абсолютному значению нормальное напряжение в симметричном сечении (растягивающее или сжимающее) может быть определено по формуле

$$|\sigma|_{\max} = M / W_x. \quad (89)$$

Формула (87) для определения нормальных напряжений выведена для чистого изгиба. Однако ею можно пользоваться и в общем случае прямого поперечного изгиба, когда в сечениях возникает не только изгибающий момент, но и поперечная сила. Поперечные силы, как показывают опыт и теоретические исследования, практически не влияют на нормальные напряжения. Опасным в отношении нормальных напряжений в балках с постоянным сечением будет сечение, в котором изгибающий момент имеет наибольшее абсолютное значение.

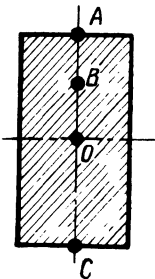


Рис. 104

Упражнение 27

1. В каких единицах измеряется осевой момент инерции сечения? А. m^4 . Б. m^3 . В. m^2 .
2. Зависят ли значения нормальных напряжений от формы поперечных сечений балки?
А. Зависят. Б. Не зависят.

3. В каких точках поперечного сечения балки возникают наибольшие нормальные напряжения (рис. 104)?

А. В точке О. Б. В точке А. В. В точке В.

4. Чему равен осевой момент сопротивления прямоугольника и круга?

5. Указать, для какой точки поперечного сечения балки (рис. 104) нормальные напряжения могут быть вычислены по формуле

$$\sigma = M / W_x.$$

А. Для точки О. Б. Для точки В. В. Для точек А и С.

§ 48. Расчеты на прочность при изгибе

Проверку прочности и подбор сечений изгибаемых балок обычно производят исходя из следующего условия: наибольшие нормальные напряжения в поперечных сечениях не должны превосходить допускаемых напряжений $[\sigma]$ на растяжение и сжатие, установленных нормами или опытом проектирования для материала балки.

Для балок из материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию (сталь, дерево), следует выбирать сечения, симметричные относительно нейтральной оси (прямоугольное, круглое, двутавровое), чтобы наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения были равны между собой. В этом случае условие прочности по нормальным напряжениям имеет вид

$$|\sigma|_{\max} = |M|_{\max} / W_x \leq [\sigma]. \quad (90)$$

Ниже приведены формулы для вычисления моментов сопротивления некоторых сечений.

Для прямоугольника (см. рис. 50, а)

$$W_x = J_x / (0,5h) = bh^2/6. \quad (91)$$

Для круга (см. рис. 50, б):

$$J_x = \pi d^4/64; \quad h = d; \quad W_x = J_x/0,5d = \pi d^3/32; \quad (92)$$

приближенно для круга можно считать $W_x \approx 0,1d^3$.

Для кольца (см. рис. 49, б)

$$W_x = \frac{\pi d_n^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1d_n^3 (1 - \alpha^4), \quad (92a)$$

где $\alpha = d_v/d_n$ — отношение внутреннего диаметра кольца к наружному.

Для балок, изготовленных из материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию (например, из чугуна), выгодны сечения, не симметричные относительно нейтральной оси. В этом случае прочность по нормальным напряжениям проверяют по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_p \max &= \frac{|M|_{\max} y_p}{J_x} \leq [\sigma_p]; \\ \sigma_c \max &= \frac{|M|_{\max} y_c}{J_x} \leq [\sigma_c], \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

где y_p и y_c — расстояния от нейтральной оси x до наиболее удаленных точек в растянутой и сжатой зонах сечения; $[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$ — допускаемые напряжения на растяжение и сжатие.

Использование материала будет наилучшим, когда $\sigma_p \max = [\sigma_p]$, а $\sigma_c \max = [\sigma_c]$; для этого необходимо условие

$$\frac{y_p}{y_c} = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}, \quad (94)$$

т. е. расстояния нейтральной оси от наиболее удаленных точек в растянутой и сжатой зонах сечения должны быть пропорциональны соответствующим допускаемым напряжениям.

Формула напряжений при изгибе выведена на основании закона Гука и потому справедлива только при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала балки.

С помощью условия прочности по нормальным напряжениям при изгибе можно решать следующие три задачи.

1. Проверка прочности (проверочный расчет) производится в том случае, когда известны размеры сечения балки, наибольший изгибающий момент и допускаемое напряжение $[\sigma]$. При этом непосредственно используется условие (90).

2. Подбор сечения (проектный расчет) производится в том случае, когда заданы действующие на балку нагрузки, т. е. можно определить наибольший изгибающий момент $|M|_{\max}$ и допускаемое напряжение $[\sigma]$.

Решая неравенство (90) относительно W_x , получаем

$$W_x \geq |M|_{\max} / [\sigma]. \quad (95)$$

По необходимому моменту сопротивления W_x , задавшись формой сечения, подбирают его размеры.

3. Определение наибольшего допускаемого изгибающего момента производится в том случае, когда заданы размеры сечения балки и допускаемое напряжение

$$|M|_{\max} \leq [\sigma] W_x. \quad (96)$$

Наиболее выгодны такие формы сечений, которые дают наибольший момент сопротивления при наименьшей площади. Такому условию в первую очередь удовлетворяет двутавровое сечение, у которого почти весь материал отнесен от нейтральной оси к верхней и нижней полкам, что увеличивает момент инерции J_x , а соответственно и момент сопротивления W_x . Менее выгодно прямоугольное сечение; круглое сечение еще менее выгодно, так как оно расширяется к нейтральной оси. Полые сечения всегда выгоднее равновеликих им сплошных сечений.

Целесообразно применять сечения балок из прокатных профилей: двутавров, швеллеров и т. п. В сортаменте для этих профилей приводятся числовые значения всех необходимых геометрических характеристик.

Различные варианты расчета балок на прочность показаны на примерах.

Пример 20. Наибольший изгибающий момент в поперечном сечении балки $M_{\max} = 37,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Подобрать сечение стальной балки в трех вариантах: а) прокатный двутавр; б) прямоугольник с отношением высоты к ширине $h : b = 4 : 3$; в) круг.

Определить отношение массы балок прямоугольного и круглого сечения к массе балки двутаврового сечения. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Решение. Требуемый момент сопротивления

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{37,5 \cdot 10^6}{160} = 234 \cdot 10^3 \text{ мм}^3 = 234 \text{ см}^3.$$

Подбираем сечение балки в трех вариантах.

1. Сечение — прокатный двутавр. По таблице ГОСТ 8239 — 72 подходит двутавровый профиль в № 20а. Его момент сопротивления $W_x = 237 \text{ см}^3$, площадь сечения $A = 35,5 \text{ см}^2$.

2. Сечение — прямоугольник с отношением сторон $h : b = 4 : 3$, для прямоугольника $W_x = bh^2/6$; подставив сюда $b = 0,75h$ и приняв равным требуемому значению, получим

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{0,75hh^2}{6} = \frac{h^3}{8} = 234 \text{ см}^3,$$

откуда

$$h = \sqrt[3]{234 \cdot 8} = 12,3 \text{ см}; \quad b = \frac{3}{4}h = 9,2 \text{ см}.$$

Площадь сечения прямоугольника $A_2 = bh = 12,3 \cdot 9,2 = 113 \text{ см}^2$. 3. Сечение — круг

$$W_x = 0,1d^3 = 234 \text{ см}^3,$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{234}{0,1}} = 13,4 \text{ см}.$$

Площадь круглого сечения

$$A_3 = \pi d^2/4 = 141 \text{ см}^2.$$

Отношение масс, равное отношению площадей сечений:

$$A_2/A_1 = 113/35,5 = 3,18; \quad A_3/A_1 = 141/35,5 = 3,97.$$

Следовательно, балка прямоугольного сечения тяжелее двутавровой балки в 3,18 раза, а балка круглого сечения тяжелее двутавровой в 3,97 раза.

Упражнение 28

1. В каком из двух вариантов нагружения (рис. 105) двутавровая балка сможет выдержать большую силу F ? Длина консолей l в обоих случаях одинакова. А. По рис. 105, а. Б. По рис. 105, б. В обоих случаях балка может выдержать одинаковую нагрузку.

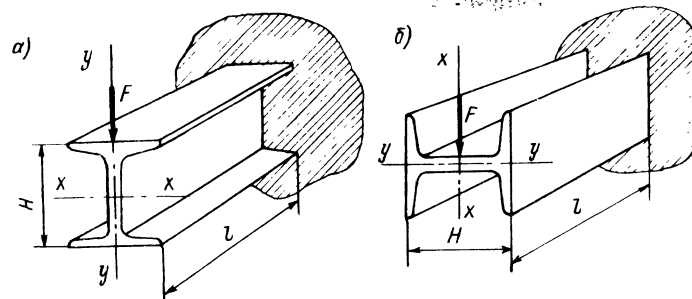


Рис. 105

2. Во сколько раз уменьшатся нормальные напряжения в прямоугольном сечении балки, если ее высота увеличится в два раза?

А. В два раза. Б. В четыре раза. В. В восемь раз.

3. По заданному изгибающему моменту при одинаковых допускаемых напряжениях были подобраны прямоугольные сечения балок в трех вариантах с разными соотношениями высоты h и ширины b ; вариант I $h : b = 2$; вариант II $h : b = 3$; вариант III $h : b = 2,5$. Какая из балок будет иметь наименьшую массу?

§ 49. Понятия о линейных и угловых перемещениях при изгибе

Сечения изгибаемой балки перемещаются перпендикулярно к оси балки и поворачиваются вокруг своих нейтральных осей (рис. 106).

Балки, удовлетворяя условию прочности, должны обладать достаточной жесткостью, т. е. прогибы и углы поворота сечений не должны превышать допускаемых значений. Допускаемый прогиб балок, применяемых в строительных конструкциях и машиностроении, очень невелик; обычно он назначается в долях от пролета между опорами балки и составляет 1/200—1/1000 пролета

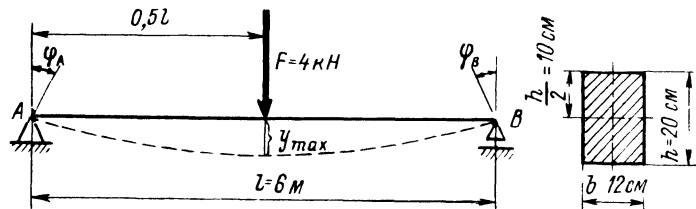


Рис. 106

(в зависимости от назначения балки). Прогибы и углы поворота для некоторых простейших случаев нагружения балок даны в табл. 3.

Прогибы считаются отрицательными, когда они направлены вниз, противоположно положительному направлению вертикальной оси y . Углы поворота сечений приняты положительными в том случае, если они направлены по часовой стрелке, и отрицательными, если направлены против часовой стрелки. Использование данных табл. 3 иллюстрируется приведенными ниже примерами.

Пример 21. Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения (рис. 106) нагружена сосредоточенной силой $F = 4$ кН посередине пролета. Определить максимальный прогиб балки, а также углы поворота опорных сечений. При расчете принять для древесины $E = 10^4$ МПа.

Решение. Из табл. 3 для схемы нагружения № 1, соответствующей рассматриваемому случаю, находим максимальный прогиб посередине пролета

$$y_{\max} = -\frac{Fl^3}{48EJ}$$

Знак минус перед значением прогиба показывает, что он направлен вниз, в сторону, противоположную положительному направлению оси y (см. рис. 103). Определяем момент инерции сечения относительно нейтральной оси

$$J = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 20^3}{12} = 8000 \text{ см}^4 = 8 \cdot 10^3 \text{ мм}^4.$$

Подставляя численные значения (Н и мм) в формулу для y_{\max} , получаем

$$y_{\max} = -\frac{Fl^3}{48EJ} = -\frac{4 \cdot 10^3 \cdot 6000^3}{48 \cdot 10^4 \cdot 8 \cdot 10^3} = -22,5 \text{ мм}.$$

Таблица 3. Прогибы и углы поворота однопролетных балок

Номер схемы	Схема нагружения	$ EJy_{\max} $	$EJ\theta_A$	$EJ\theta_B$
1		$\frac{Fl^3}{48}$	$-\frac{Fl^2}{16}$	$\frac{Fl^2}{16}$
2		$\frac{5ql^4}{384}$	$-\frac{ql^3}{24}$	$\frac{ql^3}{24}$
3		$\frac{Fl^3}{3}$	0	$-\frac{Fl^2}{2}$
4		$\frac{ql^4}{8}$	0	$-\frac{ql^3}{6}$
5		$\frac{Ml^2}{2}$	0	$-Ml$

Из той же таблицы находим выражения для углов поворота опорных сечений

$$\theta_B = |\theta_A| = \frac{Fl^2}{16EJ} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 6000^2}{16 \cdot 10^4 \cdot 8 \cdot 10^3} = 0,01125 \text{ рад}.$$

Упражнение 29

- Как изменится прогиб балки, если изгибающий момент уменьшится в три раза?
 - Уменьшится в три раза.
 - Уменьшится в шесть раз.
 - Уменьшится в девять раз.

2. Балки, изготовленные из стали и чугуна, имеющие одинаковые размеры и устройство опор, подвергаются действию одинаковых сил. Сравните величину максимальных прогибов этих балок.

А. У стальной балки прогиб больше. Б. У чугунной балки прогиб больше. В. Прогибы балок одинаковы.

ГЛАВА XI. СЛОЖНЫЕ ВИДЫ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

§ 50. Понятие о сложном деформированном состоянии

Сложное деформированное состояние возникает в тех случаях, когда элемент конструкции или машина подвергается одновременно нескольким простейшим нагружениям, рассмотренным в § 30.

В § 37 рассматривались заклепочные и шпоночные соединения, в которых одновременно возникает срез и смятие и соответственно действуют нормальные и касательные напряжения. В затянутых болтах также имеет место сложное деформирование, в них обнаруживается совместное действие растяжения от затяжки силой F и кручения от момента трения M_k . В связи с этим в болтах возникают нормальные напряжения от растяжения и касательные напряжения от кручения

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= F/A; \\ \tau &= M_k/W_p, \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

где $A = \pi d^2/4$ — площадь сечения болта; $W_p \approx 0,2d^3$ — полярный момент сопротивления.

Нормальные напряжения распределены по сечению равномерно, а касательные достигают максимальных значений у контура болта. Очевидно, периферийные точки болта находятся в наиболее опасном состоянии, особенно в связи с наличием концентрации напряжений в нарезке.

Другим примером сложного деформирования являются валы, которые работают на изгиб и кручение. При этом в поперечном сечении вала возникают нормальные и касательные напряжения. Возникающие от изгиба нормальные напряжения достигают максимального значения в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси:

$$\sigma = M_x/W, \quad (98)$$

где M_x — изгибающий момент; $W \approx 0,1d^3$ — осевой момент сопротивления сечения.

Максимальные касательные напряжения при кручении возникают в точках контура поперечного сечения

$$\tau = M_k/W_p,$$

где $W_p \approx 0,2d^3$ — полярный момент сопротивления.

Так как $W_p = 2W$, то

$$\tau = M_k/(2W). \quad (98a)$$

Следовательно, в наиболее напряженных точках вала при совместном действии изгиба и кручения возникают нормальные и касательные напряжения. Встает вопрос, какое же из этих напряжений или какая их комбинация определяет прочность вала. Ответ на этот вопрос дают так называемые *теории* (или гипотезы) *прочности*.

§ 51. Понятие о теориях прочности

Испытания материалов позволяют определить опасные, или предельные, напряжения при каких-то простейших деформированных состояниях.

Механические испытания материалов можно осуществлять и при сложных видах деформированного состояния, но в этом случае разрушение наступает при различных значениях силовых факторов в сечении и зависит от их соотношения. Действительно, при совместном действии изгиба и кручения вал может разрушиться при большом изгибающем и малом крутящем моментах или, наоборот, разрушение может произойти при малом изгибающем, но большом крутящем моментах. Каждому соотношению изгибающего и крутящего моментов соответствуют определенные значения напряжений, вызывающих разрушение вала. Определить опытным путем предельные или опасные напряжения для сложного напряженного состояния при всех возможных комбинациях силовых факторов невозможно из-за трудности постановки опытов и практически неограниченного объема испытаний.

Появляется необходимость найти способ составления условий прочности при сложном напряженном состоянии, пользуясь предельными напряжениями, полученными из опытов для простого напряженного состояния, например для растяжения. Эта задача может быть решена лишь на основании некоторых предположений (гипотез) о том, какой фактор вызывает появление опасного состояния.

Даже при осевом нагружении стержня таких факторов можно указать несколько. Можно полагать, что опасное состояние возникает при достижении нормальными напряжениями предела текучести или предела прочности. Можно также полагать, что опасное состояние возникает, когда наибольшее относительное удлинение достигает определенного значения. Возможно и третье предположение: появление опасного состояния связано с тем, что касательные напряжения достигают определенного значения. Возникновение опасного состояния можно связать также с достижением определенного значения энергии, накапливаемой в материале при деформации.

Для осевого растяжения или сжатия все высказанные гипотезы дают одинаковые результаты. Иначе обстоит дело в случае сложного напряженного состояния.

В зависимости от принятой гипотезы прочности определяют эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{ЭКВ}}$, которое можно сопоставить с напряжением при осевом нагружении. В соответствии с условием прочности эквивалентное напряжение не должно превышать допускаемого напряжения для материала

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} \leq [\sigma]. \quad (99)$$

На основе четырех указанных выше возможных критериев опасного состояния разработано четыре теории прочности. Подробное изложение этих теорий выходит за пределы данного учебника. Для расчета валов на совместное действие изгиба и кручения применяют третью или четвертую теорию прочности.

По третьей теории прочности эквивалентное напряжение вычисляют по формуле

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (100)$$

По четвертой теории прочности формула для эквивалентного напряжения имеет несколько иной вид

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (101)$$

В этих формулах σ и τ — нормальное и касательное напряжения в опасной точке поперечного сечения бруса.

При действии растяжения и кручения в болтах наибольшие значения напряжений определяют по формулам (97). Подставив эти значения в выражение эквивалентного напряжения, получим условия прочности в следующем виде:

по третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\frac{F^2}{A^2} + \frac{4M_{\text{К}}^2}{W_p^2}} \leq [\sigma]; \quad (102)$$

по четвертой теории прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\frac{F^2}{A^2} + \frac{3M_{\text{К}}^2}{W_p^2}} \leq [\sigma]. \quad (102a)$$

Как отмечалось выше, для валов при совместном действии изгиба и кручения наибольшие значения напряжений определяют по формуле (98) или (98a). Подставив эти значения в выражение эквивалентного напряжения, получим условия прочности в следующем виде:

по третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\frac{M_{\text{И}}^2 + M_{\text{К}}^2}{W}} \leq [\sigma]; \quad (103)$$

по четвертой теории прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\frac{M_{\text{И}}^2 + 0,75M_{\text{К}}^2}{W}} \leq [\sigma], \quad (103a)$$

где W — осевой момент сопротивления сечения.

Из приведенных условий прочности для вала вытекают следующие зависимости для определения требуемого момента сопротивления:

по третьей теории прочности

$$W \geq \frac{\sqrt{M_{\text{И}}^2 + M_{\text{К}}^2}}{[\sigma]}; \quad (104)$$

по четвертой теории прочности

$$W \geq \frac{\sqrt{M_{\text{И}}^2 + 0,75M_{\text{К}}^2}}{[\sigma]}. \quad (105)$$

По найденному значению W и принятому виду сечения (круг или кольцо) вычисляют необходимый диаметр вала. Стоящие в числителях формул (104) и (105) выражения носят название *эквивалентных моментов*. Формулы для вычисления эквивалентных моментов имеют вид:

по третьей теории прочности

$$M_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{M_{\text{И}}^2 + M_{\text{К}}^2}; \quad (106)$$

по четвертой теории прочности

$$M_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{M_{\text{И}}^2 + 0,75M_{\text{К}}^2}. \quad (107)$$

Расчетным, или опасным, сечением является то, в котором возникают максимальные изгибающий и крутящий моменты. Иногда приходится проводить расчет для нескольких сечений, так как в общем случае максимальные изгибающий и крутящий моменты возникают в различных поперечных сечениях вала.

§ 52. Пример расчета вала на совместное действие изгиба и кручения

Рассмотрим пример расчета вала на изгиб и кручение.

На вал, изображенный на рис. 107, а, насажены три зубчатых колеса. Зубчатые колеса нагружены силами: $F_1 = 2$ кН; $F_2 = 1,5$ кН; $F_3 = 1,2$ кН, причем силы F_1 и F_2 направлены горизонтально, а сила F_3 — вертикально. Диаметры колес соответственно: $D_1 = 300$ мм; $D_2 = 200$ мм; $D_3 = 250$ мм.

Построить эпюру крутящих моментов $M_{\text{К}}$ и эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях, пренебрегая массой колес и самого вала. Определить требуемый диаметр вала по третьей теории прочности. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 50$ МПа.

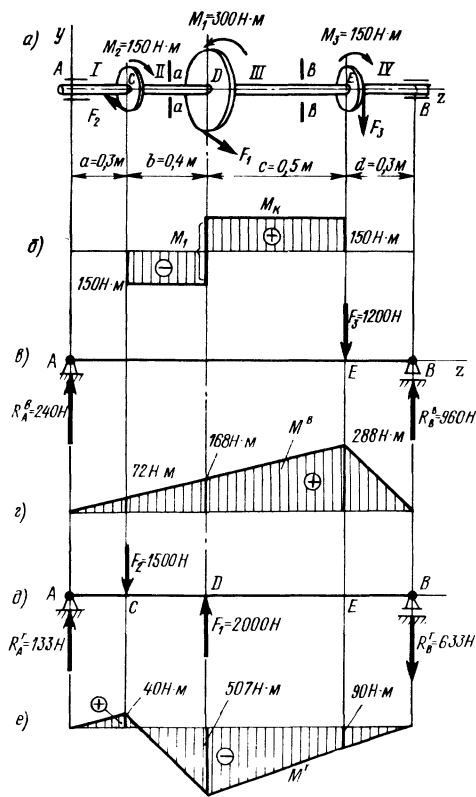


Рис. 107

На участке III проводим сечение $b-b$ и рассматриваем правую отсеченную часть

$$M_{кIII} = M_3 = 150 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

или, если рассматривать левую часть, то получится тот же результат

$$M_{кIII} = -M_2 + M_1 = -150 + 300 = 150 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

В поперечных сечениях участков I и IV крутящие моменты равны нулю (трением в подшипниках пренебрегаем). Эпюра крутящих моментов построена на рис. 107, б.

Сила F_3 вызывает изгиб в вертикальной плоскости. Изгибающая вертикальная нагрузка показана на рис. 107, в.

Определим вертикальные составляющие опорных реакций в точках A и B:

$$\sum M_A^B = 0; F_3(a+b+c) - R_B^B(a+b+c+d) = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; -F_3 + R_B^B + R_A^B = 0,$$

Решение. Вычисляем внешние моменты от сил F_1 , F_2 и F_3 , скручивающие вал:

$$M_1 = F_1 \frac{D_1}{2} = \frac{2000 \cdot 300}{2} =$$

$$= 300 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{мм} = 300 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_2 = F_2 \frac{D_2}{2} = \frac{1500 \cdot 200}{2} =$$

$$= 150 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{мм} = 150 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = F_3 \frac{D_3}{2} = \frac{1200 \cdot 250}{2} =$$

$$= 150 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{мм} = 150 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

На рис. 107, а показано нагружение вала этими моментами. На участке II проводим сечение $a-a$; рассматриваем левую отсеченную часть

$$M_{кII} = -M_2 = -150 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Знак минус показывает, что внешний момент, приложенный к левой части, вращает ее против часовой стрелки, если смотреть со стороны сечения.

откуда

$$R_B^B = \frac{F_3(a+b+c)}{a+b+c+d} = 960 \text{ Н}; R_A^B = F_3 - R_B^B = 240 \text{ Н}.$$

Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов в вертикальной плоскости:

в сечении A $M_A^B = 0$;

в сечении C $M_C^B = R_A^B a = 240 \cdot 0,3 = 72 \text{ Н}\cdot\text{м}$;

в сечении D $M_D^B = R_A^B(a+b) = 240 \cdot 0,7 = 168 \text{ Н}\cdot\text{м}$;

в сечении E $M_E^B = R_B^B d = 960 \cdot 0,3 = 288 \text{ Н}\cdot\text{м}$

(в сечении E рассматриваем равновесие правой части балки); в сечении B $M_B^B = 0$.

Эпюра изгибающих моментов в вертикальной плоскости построена на рис. 107, в.

Определяем горизонтальные составляющие опорных реакций от нагружения вала горизонтальными силами F_1 и F_2 (рис. 107, д):

$$\sum M_A^r = 0; F_2 a - F_1(a+b) + R_B^r(a+b+c+d) = 0;$$

$$\sum F_{ix} = 0; -R_A^r + F_2 - F_1 + R_B^r = 0,$$

откуда

$$R_B^r = \frac{F_1(a+b) - F_2 a}{a+b+c+d} = 633 \text{ Н}; R_A^r = -F_1 + F_2 + R_B^r = 133 \text{ Н}.$$

Определяем ординаты эпюры моментов в горизонтальной плоскости:

в сечении A $M_A^r = 0$;

в сечении C $M_C^r = R_A^r a = 133 \cdot 0,3 = 40 \text{ Н}\cdot\text{м}$;

в сечении D $M_D^r = R_A^r(a+b) - F_2 b = 133 \cdot 0,7 - 1500 \times 0,4 = -507 \text{ Н}\cdot\text{м}$;

в сечении E $M_E^r = -R_B^r d = -633 \cdot 0,3 = -190 \text{ Н}\cdot\text{м}$;

в сечении B $M_B^r = 0$.

Эпюра моментов в горизонтальной плоскости построена на рис. 107, е.

Так как изгибающие моменты M^B и M^r возникают во взаимно перпендикулярных плоскостях, то суммарный изгибающий момент, являющийся их геометрической суммой, определится по формуле

$$M_{\Sigma} = \sqrt{(M_{\Sigma}^B)^2 + (M_{\Sigma}^r)^2}.$$

Наибольший суммарный изгибающий момент в сечении D

$$M_{\Sigma D} = \sqrt{(M_{\Sigma}^B)^2 + (M_{\Sigma}^r)^2} = \sqrt{168^2 + 507^2} = 534 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Во всех сечениях участков II и III возникают крутящие моменты, равные по абсолютному значению $M_k = 150 \text{ Н}\cdot\text{м}$; слева от сечения D — отрицательные, справа — положительные. Очевидно, что сечение D является опасным.

Подставляем значение расчетных моментов в формулу (102) и определяем требуемый момент сопротивления сечения вала по третьей теории прочности

$$W \geq \frac{\sqrt{M_D^2 + M_k^2}}{[\sigma]} = \frac{(534 \cdot 10^3)^2 + (150 \cdot 10^3)^2}{50} = 11,1 \cdot 10^8 \text{ мм}^3.$$

Вычисляем диаметр вала, полагая $W \approx 0,1d^3$,

$$d \geq \sqrt[3]{10W} = \sqrt[3]{10 \cdot 11,1 \cdot 10^8} = 48,1 \text{ мм}.$$

Принимаем $d = 48 \text{ мм}$.

Упражнение 30

1. Возникает ли изгибающий момент в сечениях вала, если на валу закреплены зубчатые колеса (рис. 108)? К зубьям колес приложены окружные силы F_1 и F .

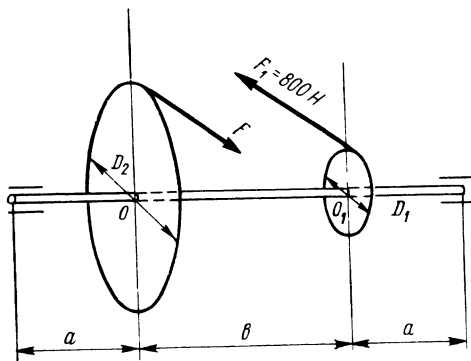


Рис. 108

А. Нет. Б. Да.

2. Вычислите эквивалентный момент по третьей теории прочности. Изгибающий момент в поперечном сечении вала $M_H = 4000 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Крутящий момент в том же сечении равен $M_k = 3000 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Определите диаметр вала, приняв допускаемое напряжение $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$.

3. Определите диаметр вала (по третьей теории прочности) по рис. 108. Силы F_1 и F расположены в параллельных плоскостях: $D_1 = 200 \text{ мм}$; $D_2 = 400 \text{ мм}$; $a = 300 \text{ мм}$; $b = 400 \text{ мм}$; материал вала — сталь 40; $[\sigma] = 60 \text{ МПа}$.

ГЛАВА XII. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

§ 53. Понятие о продольном изгибе

Вопрос об устойчивости приходится решать в случае сжатия стержня, размеры поперечного сечения которого малы по сравнению с длиной. При увеличении сжимающих сил прямолинейная форма равновесия стержня может оказаться неустойчивой, и стержень выпучится, ось его искривится. Это явление носит название продольного изгиба. Наибольшее значение сжимающей силы,

до достижения которого прямолинейная форма равновесия стержня является устойчивой, называют *критической силой*. При сжимающей силе меньше критической стержень работает на сжатие; при силе, равной критической, стержень работает на сжатие и изгиб. Даже при небольшом превышении сжимающей нагрузки критического значения прогибы стержня нарастают чрезвычайно быстро, и стержень или разрушается в буквальном смысле слова, или получает недопустимо большие деформации, выводящие конструкцию из строя. Поэтому критическая сила должна рассматриваться как разрушающая нагрузка.

Допускаемая сжимающая сила должна быть в несколько раз меньше критической. Это условие устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня можно представить в виде

$$[F] = F_{кр} / [n_\gamma], \quad (108)$$

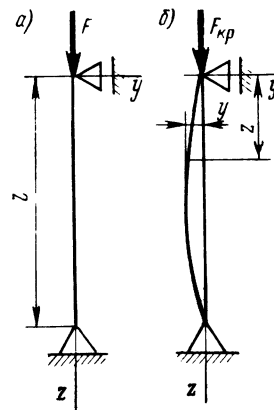


Рис. 109

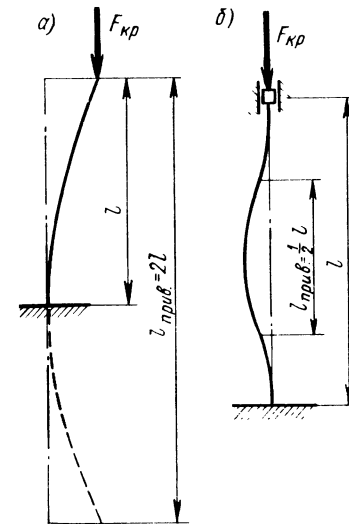


Рис. 110

где $[F]$ — допускаемое значение силы, сжимающей стержень, $F_{кр}$ — критическое значение сжимающей силы для рассчитываемого стержня; $[n_\gamma]$ — нормативный (требуемый) коэффициент запаса устойчивости.

Для стержня с шарнирно-закрепленными концами

$$F_{кр} = \pi^2 EJ_{\min} / l^2. \quad (109)$$

Очевидно, что при потере устойчивости стержень изгибается в плоскости наименьшей жесткости, т. е. каждое из его поперечных сечений поворачивается вокруг той из главных осей, относительно которой момент инерции минимален, поэтому в формулу Эйлера (109) входит величина J_{\min} .

Шарнирное закрепление обоих концов стержня принято называть *основным случаем продольного изгиба*. При других способах

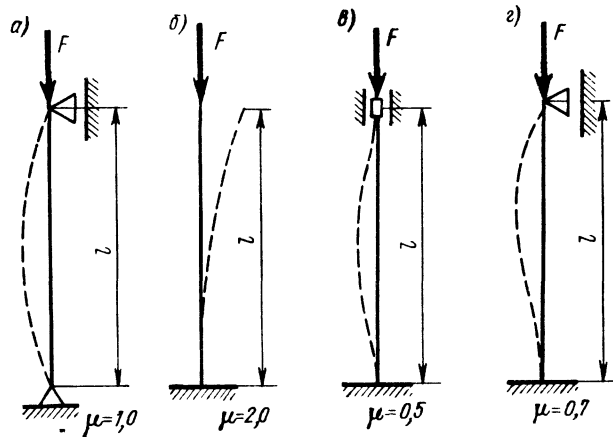


Рис. 111

закрепления концов стержня можно получить формулу для критической силы путем сопоставления формы изогнутой оси данного стержня с формой, которая получается у стержня с шарнирно-закрепленными концами.

Введем в формулу Эйлера приведенную длину стержня $l_{прив} = \mu l$, соответствующую картине деформирования (рис. 109 и 110), тогда она примет вид

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l_{прив}^2} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2}, \quad (110)$$

где μ — коэффициент приведения длины (рис. 111).

Нормальное напряжение в поперечном сечении сжатого стержня, соответствующее критическому значению сжимающей силы, также называется критическим.

Определим критическое напряжение $\sigma_{кр}$ исходя из формулы Эйлера

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2 A}.$$

В соответствии с данными § 27 отношение момента инерции к площади равно квадрату радиуса инерции: $J_{min}/A = i_{min}^2$. После подстановки этого значения формула критического напряжения может быть переписана в следующем виде:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{(\mu l)^2}$$

или

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l / i_{min})^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Отношение $\lambda = \mu l / i_{min}$ носит название *гибкости стержня*, как частное от деления двух величин, каждая из которых имеет размерность длины, гибкость выражается отвлеченным числом. Чем больше гибкость λ , тем меньше критическое напряжение, тем меньше критическая сила, которая вызовет продольный изгиб стержня.

§ 54. Предел применимости формулы Эйлера.

Эмпирические формулы для критических напряжений

Формула Эйлера справедлива лишь при больших гибкостях, превышающих некоторое предельное значение, при котором напряжения в стержне достигнут предела пропорциональности $\sigma_{пц}$:

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda_{пред}^2 = \sigma_{пц},$$

откуда

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \quad (111)$$

Для стержней из малоуглеродистой стали формула Эйлера справедлива при гибкостях более $\lambda_{пред} = 100$, для деревянных стержней $\lambda_{пред} = 75$, для чугунных стержней $\lambda_{пред} = 80$ и т. п.

На практике приходится иметь дело со сжатыми стержнями, гибкость которых меньше предельной. В таких случаях формулу Эйлера использовать нельзя.

Для расчета сжатых стержней, когда формула Эйлера оказывается неприменимой, приходится пользоваться эмпирическими формулами.

Ф. С. Ясинский, обработав опытные данные ряда исследователей, дал следующую формулу для вычисления критического напряжения в стальных стержнях:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (112)$$

где a и b — коэффициенты, характеризующие качество материала.

Значения этих коэффициентов приводятся в технических справочниках.

Для стали марки Ст3 при гибкости $60 \leq \lambda \leq 100$ формула Ясинского имеет вид

$$\sigma_{кр} = (304 - 1,2\lambda) \text{ Н/мм}^2.$$

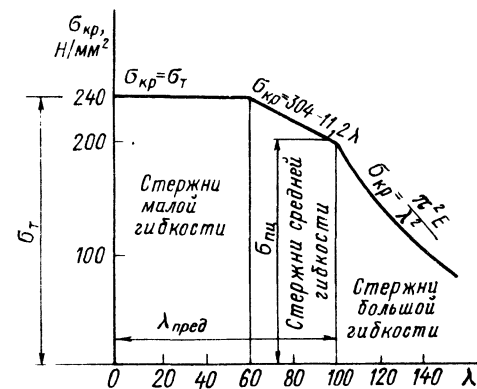


Рис. 112

Когда критическое напряжение, вычисленное по формуле (112), оказывается выше предела текучести σ_T , опасна не потеря устойчивости, а появление значительных остаточных деформаций. В этом случае под критическим напряжением следует понимать предел текучести, т. е. $\sigma_{кр} = \sigma_T$; это имеет место для стальных стержней малой гибкости при $\lambda < 60$.

На рис. 112 приведен график, характеризующий зависимость критического напряжения от гибкости для стержней из стали Ст3.

Стержни, для которых справедлива формула Эйлера, называют стержнями *большой гибкости*. Стержни, для которых справедлива формула Ясинского, называют стержнями *средней гибкости*. Наконец, в случае, когда критические напряжения, вычисленные по формуле Ясинского, превышают предел текучести, имеем стержни *малой гибкости*. Для них критические напряжения также приравнивают пределу текучести.

Для тех случаев, когда формула Эйлера неприменима и критическое напряжение определяют по эмпирическим зависимостям, допускаемую сжимающую силу вычисляют по формуле

$$[F] = \sigma_{кр} A / [n_y]. \quad (113)$$

Пример 22. Определить допускаемую сжимающую силу для чугунной колонны длиной $l = 3$ м с одним заземленным концом, а другим — свободным. Сечение колонны — кольцо, наружный диаметр $d_H = 200$ мм, внутренний $d_B = 160$ мм. Модуль продольной упругости для чугуна $E = 10^5$ Н/мм², требуемый коэффициент запаса устойчивости $[n_y] = 5$.

Решение. Вычислим осевой момент инерции поперечного сечения колонны

$$J \approx 0,05 d_H^4 (1 - \alpha^4) = 4700 \cdot 10^4 \text{ мм}^4,$$

где

$$\alpha = d_B/d_H = 160/200 = 0,8.$$

Площадь сечения колонны

$$A = \frac{\pi}{4} (d_H^2 - d_B^2) = 113 \cdot 10^2 \text{ мм}^2.$$

Радиус инерции сечения

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}} = \frac{4700 \cdot 10^4}{113 \cdot 10^2} = 64,2 \text{ мм}.$$

Расчетная длина колонны при $\mu = 2$ (см. рис. 109, б)

$$\mu l = 2 \cdot 3000 = 6000 \text{ мм}.$$

Гибкость колонны

$$\lambda = \mu l / i = 6000 / 64,2 = 93,5 > \lambda_{пред}.$$

Следовательно, расчет данной колонны можно вести по формуле Эйлера

$$[F] = \frac{F_{кр}}{[n_y]} = \frac{\pi^2 E J}{(\mu l)^2 [n_y]} = \frac{3,14^2 \cdot 10^5 \cdot 4700 \cdot 10^4}{6000^2 \cdot 5} = 254 \cdot 10^3 \text{ Н} = 254 \text{ кН}.$$

Упражнение 31

1. Какую форму принимает ось сжатого стержня, если сжимающая сила больше критической?

А. Прямолинейную. Б. Криволинейную.

2. Зависит ли критическая сила от упругих свойств материала стержня?
А. Зависит. Б. Не зависит.

3. Как изменится критическая сила, если длину стержня увеличить в два раза?

А. Уменьшится в два раза. Б. Уменьшится в четыре раза. В. Уменьшится в восемь раз.

4. Как изменится критическая сила, если шарнирные опоры концов стержня заменить опорами с жестким защемлением?

А. Увеличится в четыре раза. Б. Уменьшится в четыре раза.

5. Вычислите гибкость стержня круглого поперечного сечения диаметром $d = 6$ см. Длина стержня $l = 120$ см, концы закреплены шарнирно.

ГЛАВА XIII. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ НАПРЯЖЕНИЯХ, ПЕРЕМЕННЫХ ВО ВРЕМЕНИ

§ 55. Основные понятия об усталостном разрушении

Элементы конструкций и машин часто работают при периодически меняющихся (даже по знаку) напряжениях. В подобных условиях находятся, например, оси вагонов, рельсы, рессоры, поршневые штоки, валы и многие другие детали машин. При переменных напряжениях, как показывают практика и специальные исследования, прочность конструкций ниже, чем при статических напряжениях. Следует отметить, что переменные напряжения могут возникать от постоянных нагрузок при вращательном движении элементов машин. Так, постоянные изгибающие нагрузки, действующие на валы и оси, вызывают периодически меняющиеся напряжения в точках сечений в связи с их регулярными перемещениями из растянутой зоны в сжатую, и наоборот.

Снижение прочности материала при действии на него многократно меняющихся нагрузок носит название *усталости материала*.

Исследования процесса разрушения при переменных напряжениях показали, что при этом в материале возникает микротрещина, которая постепенно проникает вглубь изделия. Переменные напряжения способствуют быстрому развитию трещины, так как во время работы края ее то сближаются, то расходятся. По мере развития трещины усталости поперечное сечение уменьшается и в некоторый момент ослабление достигает такой величины, что случайный толчок или удар вызывает мгновенное хрупкое разрушение.

Трещины усталости в изделии, как правило, имеют местный характер. Тем не менее, во многих случаях развитие трещин усталости — очень опасное явление, которое может привести к серьезной катастрофе. Так, трещины усталости могут вызвать излом оси железнодорожного вагона и быть причиной железнодорожной катастрофы. Поэтому необходимо разработать такие методы расчета, которые обеспечивали бы безопасную работу при переменных напряжениях.

§ 56. Циклы напряжений.
Определение предела выносливости

Изменение напряжений от одного крайнего значения до другого и обратно называется *циклом напряжений*.

В зависимости от соотношения максимального и минимального напряжения цикла различают циклы симметричные и асимметричные (рис. 113). В случае симметричного цикла значения максимального и минимального напряжений равны по значению и противоположны по знаку (рис. 113, а). Асимметричный цикл можно

рассматривать как симметричный цикл, к которому добавлено некоторое постоянное напряжение σ_m . Максимальное и минимальное

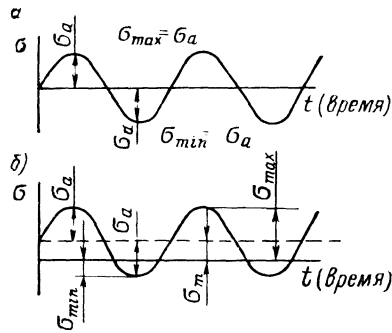


Рис. 113

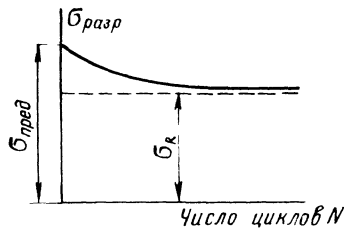


Рис. 114

значения напряжения при асимметричном цикле (рис. 113, б) определяют из выражений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sigma_m + \sigma_a; \\ \sigma_{\min} &= \sigma_m - \sigma_a. \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

Величина σ_m носит название *среднего напряжения цикла*. Величина σ_a называется *амплитудой цикла*; из уравнений (114) находим:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}; \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

Отношение минимального напряжения цикла к максимальному характеризует его асимметрию и называется *коэффициентом асимметрии цикла*

$$R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}. \quad (115)$$

При симметричном цикле $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$ и $R = -1$; при постоянном статическом напряжении $\sigma_{\max} = \sigma_{\min}$ и $R = +1$.

Если $\sigma_{\min} = 0$, то и $R = 0$. Такой цикл, когда одно из крайних напряжений равно нулю, называется *пульсирующим циклом*. Для асимметричных циклов значение R колеблется от -1 до $+1$. Например, при $\sigma_{\max} = 120 \text{ Н/мм}^2$ и $\sigma_{\min} = 40 \text{ Н/мм}^2$

$$R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} = 40 / 120 = 0,33.$$

Число циклов напряжений, необходимое для доведения элемента конструкции до разрушения, зависит от наибольшего переменного напряжения и от алгебраической разности между крайними значениями переменных напряжений, которым элемент подвергается. Чем больше эта разность, тем меньшее число циклов напряжений требуется для доведения материала до разрушения. Зависимость между числом циклов переменных напряжений и наибольшим напряжением изображается кривой гиперболического типа (рис. 114). Чем меньше напряжения, тем большее число циклов выдерживает образец. При напряжении, равном пределу выносливости, образец выдерживает неограниченное число циклов.

Опытным путем можно найти такое наибольшее значение переменного напряжения, при котором материал может выдерживать неограниченное число перемен напряжений. Наибольшее переменное напряжение, которое материал может выдержать, не разрушаясь при любом числе циклов нагружения, называется *пределом выносливости материала* и обозначается σ_R . Это напряжение существенно зависит как от вида нагружения (изгиб, осевое растяжение-сжатие, кручение), так и от характера цикла напряжений. Для симметричного цикла при $R = -1$ предел выносливости $\sigma_R = \sigma_{-1}$ имеет минимальное значение. Важной характеристикой материалов служит также предел выносливости при пульсирующем цикле $R = 0$, $\sigma_R = \sigma_0$. Предел выносливости при изгибе всегда больше, чем при осевом нагружении. Это объясняется тем, что при растяжении или сжатии все сечения подвергаются одинаковым напряжениям, а при изгибе наибольшие напряжения будут лишь в крайних точках сечения, остальная часть материала работает при меньших напряжениях. Это затрудняет образование трещин усталости. Если цикл напряжений асимметричен, то предел выносливости тем больше, чем ближе к $+1$ коэффициент асимметрии цикла R . При $R = +1$, т. е. при статическом нагружении, характеристикой прочности материала является предельное напряжение $\sigma_{\text{пред}}$ (предел прочности).

§ 57. Местные напряжения.
Коэффициент концентрации напряжений

В сечениях деталей, где имеются резкие изменения размеров, надрезы, острые углы, отверстия, возникают высокие местные напряжения (так называемая концентрация напряжений). В этих сечениях, как правило, развиваются трещины усталости, приводящие в итоге к разрушению детали.

Местные напряжения $\sigma_{\text{местн}}$ обычно значительно превышают те наибольшие напряжения, которые получились бы при отсутствии причин, вызывающих концентрацию. Зависимость между местными $\sigma_{\text{местн}}$ и так называемыми номинальными напряже-

ниями, т. е. вычисляемыми по формулам сопротивления материалов, имеет вид

$$\sigma_{\text{местн}} = k_{\sigma} \sigma, \quad (116)$$

где k_{σ} — коэффициент концентрации напряжений.

Местные напряжения очень уменьшают предел выносливости. Поэтому изделиям, работающим при напряжениях, переменных во времени, следует по возможности придавать форму, не имеющую резкого изменения сечения, ослаблений и выточек, вызывающих концентрацию напряжений.

Предел выносливости зависит также от размеров детали и качества обработки ее поверхности. При увеличении размеров детали предел выносливости понижается. Это явление учитывается так называемым масштабным фактором ϵ , значения которого для стальных образцов приведены ниже:

d , мм	10	20	30	40	50	100	150	200
ϵ	1	0,93	0,87	0,82	0,78	0,65	0,58	0,55

Характер обработки поверхности учитывается коэффициентом чистоты поверхности β , который изменяется от 0,6 до 1,0 при обычных методах обработки деталей. Если же поверхность детали подвергается специальному упрочнению (азотирование, цементация и т. п.), то коэффициент чистоты поверхности может быть больше единицы.

Если известны пределы выносливости образца σ_R , масштабный фактор ϵ , коэффициент чистоты поверхности β и эффективный коэффициент концентрации напряжений k_{σ} детали, то при заданном коэффициенте запаса прочности $[n]$ можно определить допускаемое напряжение изгиба при симметричном цикле для данной детали по формуле

$$[\sigma_{-1}] = \frac{\sigma_{-1R} \epsilon \beta}{k_{\sigma} [n]}. \quad (117)$$

При симметричном цикле растяжения-сжатия

$$[\sigma_{-1p}] = \frac{\sigma_{-1pR} \epsilon \beta}{k_{\sigma} [n]}, \quad (118)$$

где предел выносливости $\sigma_{-1p} \approx 0,8\sigma_{-1}$.

Аналогично в случае симметричного цикла кручения

$$[\tau_{-1}] = \frac{\tau_{-1R} \epsilon \beta}{k_{\tau} [n]}, \quad (119)$$

где $\tau_{-1} \approx 0,6\sigma_{-1}$ для стали; k_{τ} — коэффициент концентрации касательных напряжений.

1. Зависит ли прочность материала от характера изменения напряжений во времени?

А. Зависит. Б. Не зависит.

2. Может ли деталь разрушиться, если она работает при переменных напряжениях, которые меньше предела текучести?

А. Не может. Б. Может.

3. Как по внешнему виду излома установить, при каких напряжениях работала деталь, если излом имеет две зоны: одну гладкую притертую, другую — грубозернистую?

А. Деталь работала при постоянных напряжениях. Б. Деталь работала при переменных напряжениях.

4. Влияет ли форма детали на ее предел выносливости?

А. Влияет. Б. Не влияет.

ГЛАВА XIV. КИНЕМАТИКА

§ 58. Основные понятия

В кинематике изучается механическое движение материальных точек и твердых тел без учета причин, вызывающих эти движения. Кинематику часто называют геометрией движения.

Механическое движение происходит в пространстве и во времени. Пространство, в котором происходит движение тел, рассматривается как трехмерное, все свойства его подчиняются системе аксиом и теорем евклидовой геометрии. Время полагают ни с чем не связанным и протекающим равномерно.

Современное развитие физики привело к иным представлениям о пространстве и времени. Теория относительности, созданная величайшим ученым современности Эйнштейном, показала, что при скоростях, близких к скорости света (300 000 км/с), пространство и время зависят от скорости движения. При обычных скоростях указанная зависимость практически не обнаруживается и представления о пространстве и времени, установленные в классической механике, сохраняют силу.

В общем случае различные точки твердого тела совершают разные движения. Поэтому и возникает необходимость изучить в первую очередь движение отдельных точек тела. Чтобы определить положение точки в пространстве, нужно иметь какое-то неподвижное тело или связанную с ним систему координатных осей, которую называют *системой отсчета*. Движение заданного тела или точки обнаруживается только путем сравнения с системой отсчета.

В природе не существует неподвижных тел и, следовательно, не может быть абсолютно неподвижных систем отсчета. Обычно условно неподвижной системой отсчета считают систему координатных осей, связанную с Землей. Рассмотрим для примера движение точки в какой-то условно неподвижной системе координат *хуз* (рис. 115). Положение точки *М* в пространстве определяется тремя координатами. Эти координаты изменяются при переходе точки в другое положение. *Кривая, которую описывает точка при движении в пространстве относительно выбранной системы отсчета, называется ее траекторией.*

Траектории делятся на прямолинейные (например, движение точек поршня двигателя) и криволинейные (круговые — движение

точек шкива, круглой пилы; параболические — движение жидкости при истечении из отверстия в боковой стенке сосуда и др.).

Движение точки в пространстве прежде всего определяется скоростью, которая *характеризует быстроту и направление движения точки в данный момент времени.*

В зависимости от скорости движение точки может быть *равномерным* и *неравномерным*. При равномерном движении скорость постоянна по величине, при неравномерном — переменна. *Изменение направления и численного значения скорости во времени характеризуется ускорением.* Скорость и ускорение точки являются векторными величинами.

При изучении движения точки необходимо различать два важных понятия: *пройденный путь* (или перемещение) и *расстояние*. Расстояние определяет положение точки на ее траектории и отсчитывается от некоторого начала отсчета. Расстояние является алгебраической величиной, так как в зависимости от положения точки относительно начала отсчета и от принятого направления оси расстояний оно может быть и положительным, и отрицательным. В отличие от расстояния путь, пройденный точкой, всегда определяется положительным числом. Путь совпадает с абсолютным значением расстояния только в том случае, когда движение точки начинается от начала отсчета и совершается по траектории в одном направлении.

В общем случае движения точки путь равен сумме абсолютных значений пройденных точкой расстояний за данный промежуток времени

$$s = \sum_{i=1}^n |s_{pi}|.$$

§ 59. Уравнение движения точки

В общем случае точка может двигаться по криволинейной траектории. Для изучения криволинейного движения точки необходимо уметь определить ее положение в назначенной системе отсчета (системе координат) в любой момент времени.

Уравнения, определяющие положение движущейся точки в зависимости от времени, называются уравнениями движения. Наиболее удобный способ задания движения точки — естественный способ. При этом задается траектория точки (графически или аналитически) и закон движения точки по траектории.

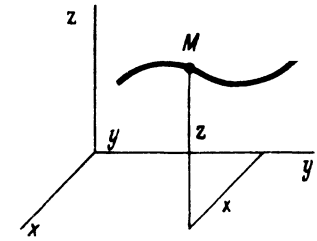


Рис. 115

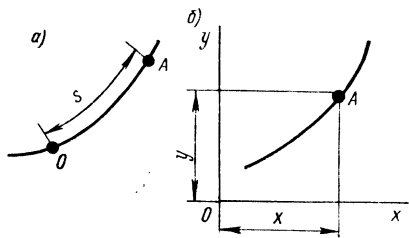


Рис. 116

Пусть произвольная точка A перемещается по заданной траектории (рис. 116, а). Принимая точку O за начало отсчета, уравнение движения можно представить в виде

$$s = f(t), \quad (120)$$

где s — расстояние точки A от начала отсчета; t — время.

Положение движущейся в плоскости точки (рис. 116, б)

можно определить, если известны ее координаты x и y относительно системы двух взаимно перпендикулярных координатных осей Ox и Oy . При движении точки ее координаты изменяются с течением времени, следовательно, x и y являются некоторыми функциями времени и определяют движение точки:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t). \quad (121)$$

Такой способ задания движения точки называется *координатным*. С помощью уравнений движения (121) можно найти траекторию точки. Для этого из них нужно исключить параметр — время t — и найти зависимость между координатами точки

$$y = f(x). \quad (122)$$

Пример 23. При движении точки ее координаты изменяются с течением времени и определяются уравнениями:

$$x = f_1(t) = 8t + 20 \text{ мм}; \quad (а)$$

$$y = f_2(t) = 5t \text{ мм}. \quad (б)$$

Найти уравнение траектории движения точки.

Решение. Из уравнения (б) находим $t = y/5 = 0,2y$. Подставляя значение t в уравнение (а), получим уравнение траектории

$$x = 8 \cdot 0,2y + 20 \text{ мм} = 1,6y + 20 \text{ мм}. \quad (в)$$

Уравнение (в) показывает, что траектория движения точки представляет собой прямую линию.

§ 60. Скорость точки

Рассмотрим некоторые основные определения, важные для последующего изложения. Если точка за равные промежутки времени проходит равные отрезки пути, то ее движение называется *равномерным*.

Скорость равномерного движения v измеряется отношением пути s , пройденного точкой за некоторый промежуток времени, к величине этого промежутка времени

$$v = s/t. \quad (123)$$

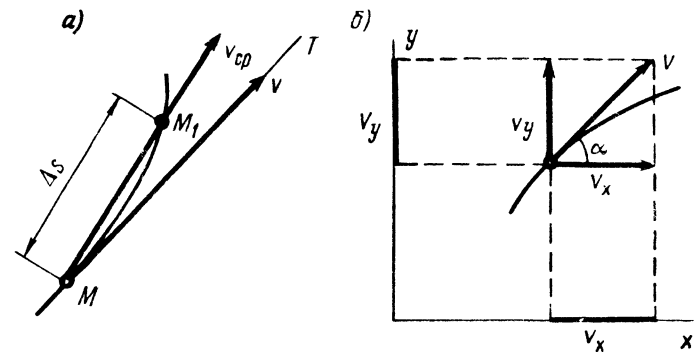


Рис. 117

Скорость измеряется в единицах длины, деленных на единицу времени: м/с, см/с, км/ч и т. д.; $1 \text{ км/ч} = 0,278 \text{ м/с}$, $1 \text{ м/с} = 3,6 \text{ км/ч}$.

Если точка за равные промежутки времени проходит неравные пути, то ее движение называется *неравномерным*.

Скорость неравномерного движения есть величина переменная и является функцией времени

$$v = f(t). \quad (124)$$

Рассмотрим точку M , которая перемещается по заданной траектории по некоторому закону $s = f(t)$ (рис. 117, а). За промежуток времени Δt точка M переместится в положение M_1 по дуге MM_1 . Если промежуток времени Δt мал, то дугу можно заменить ее хордой и найти в первом приближении среднюю скорость движения точки

$$v_{cp} = \Delta s / (\Delta t).$$

Средняя скорость направлена по хорде от точки M к точке M_1 . Скорость в данный момент времени найдем путем перехода к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (125)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ направление хорды в пределе совпадает с направлением касательной к траектории в точке M , т. е. значение скорости точки определяется как производная пути по времени, а направление ее совпадает с касательной к траектории в данной точке.

Если известны проекции скорости на оси координат, можно определить ее значение и направление (рис. 117, б):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \quad \text{tg } \alpha = v_y / v_x. \quad (126)$$

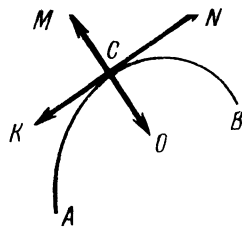


Рис. 118

Упражнение 33

1. Можно ли определить траекторию точки, если известны зависимости от времени ее координат (например, $x = at^2$; $y = bt^2$)?

А. Можно. Б. Нельзя.

2. Можно ли только по заданной траектории точки определить пройденный ею путь?

А. Можно. Б. Нельзя.

3. Точка движется из А в В по траектории, указанной на рис. 118. Укажите направление скорости точки С.

А. Скорость направлена по СК. Б. Скорость направлена по СМ. В. Скорость направлена по СN. Г. Скорость направлена по СО.

4. Определить модуль и направление полной скорости точки, если заданы проекции скорости на оси координат: $v_x = 3$ м/с, $v_y = 4$ м/с.

§ 61. Ускорение точки

При движении по криволинейной траектории скорость точки может изменяться и по направлению, и по величине. *Изменение скорости в единицу времени определяется ускорением.*

Пусть точка М (рис. 119, а) движется по какой-то криволинейной траектории и за время Δt переходит из положения М в положение M_1 . Расстояние, пройденное точкой, представляет собой дугу MM_1 ; ее длину обозначим Δs . В положении М точка имела скорость \vec{v} , в положении M_1 — скорость \vec{v}_1 . Геометрическую разность скоростей найдем, построив из точки М вектор \vec{v}_1 . На рис. 119, а приращение скорости изображается вектором $\vec{\Delta v}$.

Скорость точки при перемещении ее из положения М в положение M_1 изменилась и по величине, и по направлению. Среднее значение ускорения, характеризующего отмеченное изменение скорости, можно найти, разделив вектор приращения скорости $\vec{\Delta v}$ на соответствующее время движения:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим ускорение точки в данный момент как векторную производную от скорости

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (127)$$

Найденное ускорение характеризует изменение численного значения скорости и ее направления. Для удобства ускорение раскладывают на взаимно перпендикулярные составляющие по касательной и нормали к траектории движения (рис. 119, б)

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n. \quad (128)$$

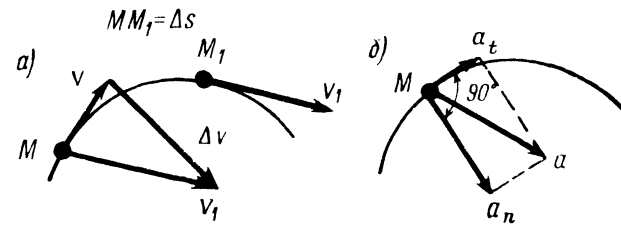


Рис. 119

Касательная составляющая \vec{a}_t совпадает по направлению со скоростью или противоположна ей. Она характеризует изменение модуля скорости и соответственно определяется как производная от функции скорости

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (129)$$

Нормальная составляющая \vec{a}_n перпендикулярна к направлению скорости точки. Она определяет изменение направления вектора скорости. Численное значение нормального ускорения определяется по формуле

$$a_n = v^2/r, \quad (130)$$

где r — радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке.

Составляющие \vec{a}_t и \vec{a}_n взаимно перпендикулярны, и поэтому значение полного ускорения определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \quad (131)$$

§ 62. Виды движения точки в зависимости от ускорения

Рассмотрим возможные случаи движения точки и проанализируем выведенные выше формулы для касательного и нормального ускорений.

Равномерное прямолинейное движение характеризуется тем, что скорость движения точки М постоянна по величине и направлению ($\vec{v} = \text{const}$), а радиус кривизны траектории ее движения равен бесконечности (рис. 120, а). В этом случае касательное ускорение равно нулю, так как модуль скорости не изменяется ($v = \text{const}$),

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0.$$

Нормальное ускорение также равно нулю ($r = \infty$)

$$a_n = v^2/r = 0.$$

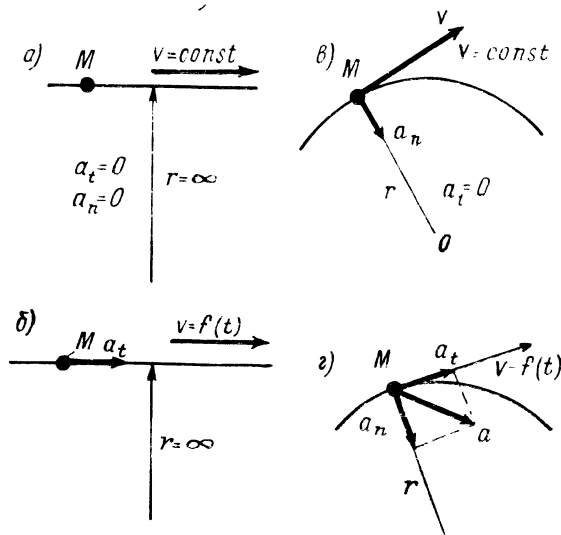


Рис. 120

Значит, и полное ускорение движения точки равно нулю $a = 0$.

Равномерное криволинейное движение характеризуется тем, что численное значение скорости постоянно ($v = \text{const}$), скорость меняется лишь по направлению. В этом случае касательное ускорение равно нулю, так как $v = \text{const}$ (рис. 120, в),

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0,$$

а нормальное ускорение не равно нулю ($a_n = v^2/r \neq 0$), так как r — конечная величина.

Полное ускорение при равномерном криволинейном движении равно нормальному ускорению, т. е. $a = a_n$.

Неравномерное прямолинейное движение характеризуется тем, что численное значение скорости движения точки (рис. 120, б) изменяется ($v \neq \text{const}$), а радиус кривизны траектории движения точки r равен бесконечности ($r = \infty$). Поэтому касательное ускорение здесь не равно нулю

$$a_t = \frac{dv}{dt} \neq 0,$$

а нормальное ускорение равно нулю

$$a_n = v^2/r = 0 \quad (r = \infty).$$

Следовательно, полное ускорение точки при неравномерном прямолинейном движении равно касательному ускорению, т. е.

$$a = a_t.$$

Неравномерное криволинейное движение (рис. 120, г) характеризуется тем, что численное значение скорости движения точки M изменяется ($v \neq \text{const}$), а радиус кривизны траектории ее движения — конечная величина. В этом случае касательное ускорение не равно нулю

$$a_t = \frac{dv}{dt} \neq 0$$

и нормальное ускорение также не равно нулю

$$a_n = \frac{v^2}{r} \neq 0.$$

Следовательно, полное ускорение при неравномерном криволинейном движении складывается геометрически из касательного и нормального ускорений, т. е.

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n.$$

Когда значение касательного ускорения постоянно ($a_t = \text{const}$), движение точки называется *равнопеременным*. Равнопеременное движение может быть равномерно-ускоренным и равномерно-замедленным в зависимости от того, увеличивается или уменьшается численное значение скорости. Ускорения можно определить через значения скорости в начале и в конце произвольного промежутка времени

$$a_t = (v - v_0)/t,$$

откуда

$$v = v_0 + a_t t. \quad (132)$$

При равномерно-ускоренном движении ускорение a_t считается положительным, а при равномерно-замедленном — отрицательным.

Перемещение точки при равнопеременном движении определяется по уравнению

$$s = v_{cp} t = \frac{v_0 + v}{2} t = \frac{v_0 + v_0 + a_t t}{2} t = v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}. \quad (133)$$

Примером равномерно-ускоренного движения может служить свободное падение тела. Ускорение свободного падения обозначается буквой g . Опытом установлено, что это ускорение составляет вблизи поверхности Земли в среднем $9,81 \text{ м/с}^2$.

Пример 24. Ускорение движения поезда $a = -0,16 \text{ м/с}^2$ (знак «минус» перед ускорением характеризует уменьшение скорости). Определить время за которое скорость поезда уменьшится с 50 до 25 км/ч .

Решение. Скорость равномерно-переменного движения

$$v = v_0 + a t,$$

откуда

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{\frac{25000}{3600} - \frac{50000}{3600}}{-0,16} = 43 \text{ с.}$$

Упражнение 34

1. Точка движется по прямой с постоянным ускорением, направленным противоположно скорости. Определить, как движется точка.

А. Равномерно. Б. Равномерно-ускоренно. В. Равномерно-замедленно.

2. Какая составляющая ускорения точки характеризует изменение величины скорости?

А. Нормальное ускорение. Б. Касательное ускорение.

3. Точка движется из A в B по траектории ACB (см. рис. 118) равномерно-замедленно. Укажите направление касательной и нормальной составляющих ускорения в точке C .

А. Составляющие ускорения направлены по CK и CM . Б. Составляющие ускорения направлены по CM и CN . В. Составляющие ускорения направлены по CN и CO . Г. Составляющие ускорения направлены по CO и CK .

§ 63. Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором всякая прямая, проведенная в этом теле, остается параллельной своему начальному положению.

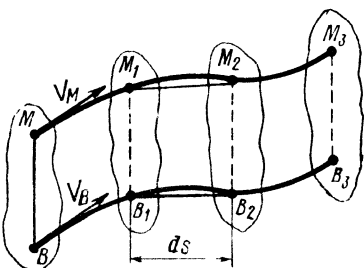


Рис. 121

Проведенная в теле прямая VM (рис. 121) во время движения перемещается параллельно своему начальному положению.

Рассмотрим перемещение тела за бесконечно малый промежуток времени dt . При этом можно считать, что точки M и B перемещаются по прямолинейным и параллельным траекториям. За время dt они пройдут

одинаковые пути ds . Следовательно, значения скорости этих точек будут одинаковы

$$v_M = v_B = v = \frac{ds}{dt} \quad (134)$$

и направлены в одну сторону, т. е.

$$\vec{v}_M = \vec{v}_B = \vec{v}. \quad (135)$$

Аналогично доказывается равенство ускорений точек тела при поступательном движении

$$\vec{a}_M = \vec{a}_B = \vec{a}. \quad (136)$$

Следовательно, при поступательном движении тела все его точки описывают одинаковые траектории и в любой момент времени имеют равные по модулю и параллельно направленные скорости и ускорения.

Поступательное движение тела вполне характеризуется движением одной его точки, которое может быть задано координатным или естественным способом. Однако поступательное движение

может совершать только твердое тело, а не отдельная точка. Примерами поступательного движения служат движение поршня двигателя, движение вагона на прямом участке пути и т. п. Поступательное движение может быть прямолинейным и криволинейным.

§ 64. Вращение тела вокруг неподвижной оси

При вращательном движении тела вокруг неподвижной оси все его точки, лежащие на оси вращения, остаются неподвижными. Остальные точки вращающегося тела описывают окружности вокруг неподвижной оси в плоскостях, перпендикулярных к оси, с центрами на этой оси.

Рассмотрим тело, которое вращается вокруг оси Oz (рис. 122). Плоскость вращающегося тела, проходящая через ось Oz и совпадающая в начальный момент времени с плоскостью чертежа I , займет через промежуток времени t положение II , и оба отмеченных положения плоскости составят угол φ .

Угол φ называется *углом поворота тела*. Угол поворота φ измеряется в радианах и соответствует определенному положению тела. Для определения положения вращающегося тела в каждый данный момент служит уравнение, выражающее угол поворота как функцию от времени

$$\varphi = f(t). \quad (137)$$

Изменение угла поворота в единицу времени определяется *угловой скоростью*. Средней угловой скоростью вращающегося тела называется отношение приращения угла поворота $\Delta\varphi$ ко времени Δt , в течение которого это приращение произошло:

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (138)$$

Угловая скорость вращательного движения тела в данный момент равна производной углового перемещения по времени

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (139)$$

Угловая скорость ω измеряется в радианах в секунду (рад/с). При вращательном движении тела иногда задают частоту вращения n (об/мин). Связь между угловой скоростью ω (рад/с) и частотой вращения n (об/мин) можно установить следующим образом. За один оборот вращающегося тела угол поворота составит 2π рад. За n оборотов в 1 мин угол поворота составит $2\pi n$.

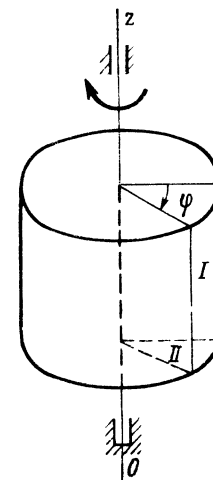


Рис. 122

Соответственно угловая скорость определится путем деления угла поворота за n оборотов на 60 с

$$\omega = 2\pi n/60 = \pi n/30. \quad (140)$$

Например, частота вращения вала электродвигателя $n = 1400$ об/мин, тогда угловая скорость

$$\omega = \frac{3,14 \cdot 1400}{30} = 150,7 \text{ рад/с.}$$

Когда угловая скорость тела постоянна ($\omega = \text{const}$), вращение равномерно. Угол поворота в этом случае определяется уравнением

$$\varphi = \omega t. \quad (141)$$

Когда угловая скорость переменна, тело вращается неравномерно.

Изменение угловой скорости в единицу времени определяется угловым ускорением, равным производной угловой скорости по времени,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \quad (142)$$

Угловое ускорение измеряется в радианах, деленных на секунду в квадрате, т. е. рад/с².

При вращении тела вокруг оси с постоянным угловым ускорением ($\varepsilon = \text{const}$) происходит *равнопеременное вращение*. Уравнения равнопеременного вращения аналогичны уравнениям равнопеременного прямолинейного движения точки, только вместо линейных величин в них входят угловые величины. Выводятся эти уравнения тем же путем:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}; \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (143)$$

где ω_0 — начальная угловая скорость (при $t = 0$).

Угловое ускорение ε — величина алгебраическая: при равнопеременном ускоренном вращении его считают положительным, поэтому абсолютное значение угловой скорости будет все время возрастать. При равномерно-замедленном движении угловое ускорение считают отрицательным, поэтому абсолютное значение угловой скорости уменьшается.

Пример 25. Тело начинает вращаться равномерно-ускоренно из состояния покоя, делает 7200 оборотов за первые 2 мин. Определить угловое ускорение.

Решение. Воспользуемся уравнением равнопеременного вращения

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2/2.$$

Так как тело начинает вращаться из состояния покоя, то $\omega_0 = 0$ и $\varphi = \varepsilon t^2/2$ откуда $\varepsilon = 2\varphi/t^2$.

Производя вычисления, угол поворота φ выразим в радианах (1 оборот = 2π рад), а время t выразим в секундах, тогда

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot 2\pi \cdot 7200}{120^2} \approx 2\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

Пример 26. Вал начинает вращаться равномерно-ускоренно из состояния покоя ($\omega_0 = 0$), в первые 5 с он совершает поворот на угол $\varphi = 25$ рад.

Какова его угловая скорость по истечении 10 с?

Решение. Определим угловое ускорение из уравнения для угла поворота $\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2/2$,

при $\omega_0 = 0$ $\varphi = \varepsilon t^2/2$, откуда

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{2 \cdot 25}{5^2} = 2 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

Вычисляем угловую скорость $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$; при $\omega_0 = 0$ и $t = 10$ с $\omega = \varepsilon t = 2 \cdot 10 = 20$ рад/с.

§ 65. Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Если тело вращается вокруг оси, то его точки перемещаются по окружностям (рис. 123, а), радиусы которых r равны расстояниям точек от оси вращения.

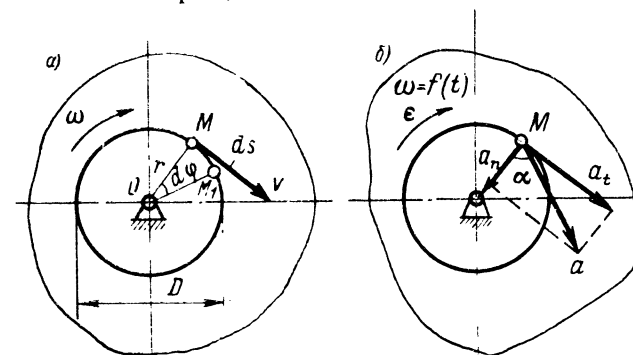


Рис. 123

Рассмотрим точку M , которая за время dt прошла путь $ds = MM_1$. В данном случае путь ds можно определить как произведение угла поворота на радиус окружности, т. е.

$$ds = r \cdot d\varphi. \quad (144)$$

Линейная скорость определится как производная пути по времени

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Подставив вместо ds его значение по (144), получим

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\varphi)}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega. \quad (145)$$

Подставив в формулу для линейной скорости точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, значение частоты вращения в оборотах в минуту (об/мин), получим

$$v = \frac{\pi n}{30} r = \frac{\pi D n}{60}.$$

Касательное ускорение точки вращающегося тела определяется из выражения

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon. \quad (146)$$

Нормальное ускорение точки равно отношению квадрата скорости к радиусу окружности

$$a_n = \frac{v^2}{r}.$$

Подставив в выражение нормального ускорения $a_n = v^2/r$ значение скорости $v = \omega r$, получим

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = r\omega^2. \quad (147)$$

Полное ускорение вычисляется как диагональ прямоугольника, построенного на составляющих ускорениях \vec{a}_t и \vec{a}_n (рис. 123, б). Подставив значения касательного и нормального ускорений в формулу для полного ускорения, получим

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(r\varepsilon)^2 + (r\omega^2)^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (148)$$

Направление вектора полного ускорения точки вращающегося тела можно определить по углу α , образованному этим вектором с радиусом

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_t}{a_n} = \frac{r\varepsilon}{r\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (149)$$

Пример 27. Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет в данный момент угловую скорость $\omega = 5$ рад/с и угловое ускорение $\varepsilon = 20$ рад/с².

Определить касательное, нормальное и полное ускорения точки тела, находящейся на расстоянии 250 мм от оси вращения.

Решение. Определяем касательное ускорение

$$a_t = \varepsilon r = 20 \cdot 0,25 = 5 \text{ м/с}^2;$$

нормальное ускорение

$$a_n = \omega^2 r = 5^2 \cdot 0,25 = 6,25 \text{ м/с}^2;$$

полное ускорение

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{5^2 + 6,25^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ м/с}^2.$$

§ 66. Кинематические графики и связь между ними

Часто для наглядного представления движения точки пользуются графиками перемещения, скорости и ускорения в функции от времени в прямоугольных координатных осях.

Рассмотрим кинематические графики для равномерного движения независимо от того, является оно прямолинейным или криволинейным, мы имеем для него следующие уравнения:

$$s = s_0 + vt; \quad v = \text{const}.$$

Из этих уравнений следует, что график перемещения равномерного движения является прямой, отсекающей на оси ординат величину s_0 , которая определяет расстояние точки в начале движения от начала отсчета (рис. 124, а).

График скорости изображается прямой линией, параллельной оси абсцисс, так как скорость равномерного движения точки постоянная величина $v = \text{const}$ (рис. 124, б).

Рассмотрим кинематические графики для равнопеременного движения. Каким бы ни было это движение — прямолинейным или криволинейным, — для него справедливы уравнения (132) и (133):

$$v = v_0 + a_t t;$$

$$s = v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}.$$

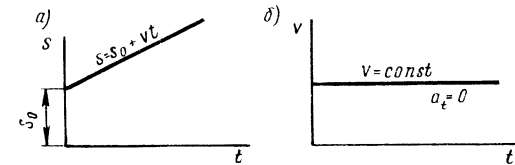


Рис. 124

График перемещения равнопеременного дви-

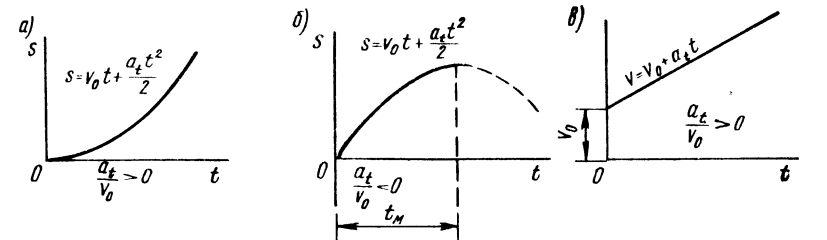


Рис. 125

жения является криволинейным — параболическим, так как он соответствует уравнению параболы (рис. 125, а, б). На оси ординат эти графики отсекают при $t = 0$ отрезки, соответствующие расстоянию в начале движения от начала отсчета s_0 .

График скорости изображается прямой, наклоненной к оси абсцисс (рис. 125, в, г), и отсекает на оси ординат (при $t = 0$) отрезок, соответствующий начальной скорости v_0 .

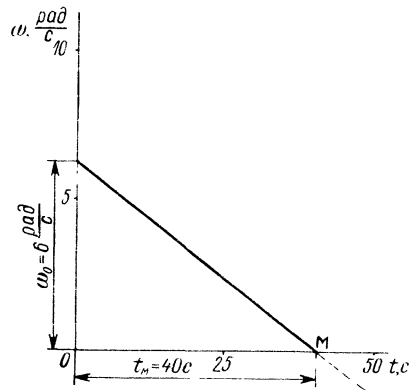


Рис. 126

График ускорения равномерно-переменного движения изображается линией, параллельной оси абсцисс (оси времени) — рис. 125, д, е. При равномерно-ускоренном движении график ускорения располагаем выше оси абсцисс. При равномерно-замедленном движении — ниже (рис. 125, е). При равномерно-замедленном движении значение скорости убывает. Это наглядно видно из рис. 125, г. Возможен случай, когда скорость, уменьшаясь, достигает нулевого значения (точка M на

рис. 125, г). Затем скорость изменяет свой знак и по абсолютному значению начинает увеличиваться. Здесь по существу происходит переход равномерно-замедленного движения в равномерно-ускоренное. Именно такое явление и происходит для случая, изображенного на рис. 125, б, г при $t = t_M$, т. е. при изменении алгебраического знака скорости.

Между кинематическими графиками существует определенная взаимосвязь. Так, для равномерного движения график скорости изображается линией, параллельной оси абсцисс, а график расстояния — прямой наклонной линией. Для равнопеременного движения график ускорения является прямой, параллельной оси абсцисс, график скорости — наклонная прямая, а график расстояний — параболическая кривая. Эта взаимосвязь графиков следует непосредственно из дифференциальных зависимостей, связывающих ускорение, скорость и расстояние:

$$v = \frac{ds}{dt}; \quad a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Учитывая аналогию в уравнениях движения точки и уравнениях вращения тела, графическую интерпретацию можно использовать при исследовании вращательного движения, являющегося основным в технике. Здесь вместо расстояния будет фигурировать угол поворота, вместо скорости — угловая скорость, вместо ускорения — угловое ускорение.

Пример 28. Вал вращался с угловой скоростью $\omega_0 = 6$ рад/с. После отключения двигателя его движение стало равномерно замедляться с угловым ускорением $\varepsilon = -0,15$ рад/с². Определить графически и аналитически время, через которое вал остановится.

Решение. Запишем уравнение для угловой скорости вала

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t = 6 - 0,15t.$$

На рис. 126 это уравнение изображено графически в принятых масштабах. Остановка вала соответствует пересечению графика угловой скорости с осью

абсцисс в точке M , где $\omega = 0$. Измеряя значение времени (абсциссы) в этой точке, получаем $t_M = 40$ с.

Аналитическое решение дает такой же результат:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t_M = 0,$$

откуда

$$t_M = -\frac{\omega_0}{\varepsilon} = -\frac{6}{-0,15} = 40 \text{ с.}$$

Упражнение 35

1. Определите характер вращения твердого тела вокруг неподвижной оси в следующих случаях:

А. $\varepsilon = 5$ рад/с². Б. $\varepsilon = 0$. В. $\omega = 150$ рад/с. Г. $\omega = 20t$ рад/с, где t — время.

2. Какая составляющая ускорения любой точки твердого тела равна нулю при равномерном вращении твердого тела вокруг неподвижной оси?

А. Нормальное ускорение. Б. Касательное ускорение. В. Полное ускорение.

3. Определите угловую скорость вращения вала электродвигателя (в рад/с), если $n = 1400$ об/мин. Вычислите скорость и ускорение точки на поверхности вала; диаметр вала $d = 100$ мм.

4. На валу электродвигателя закреплен шкив 1 (рис. 127). Диаметр шкива $D_1 = 200$ мм. Шкив 2 диаметром $D_2 = 400$ мм приводится во вращение ремнем 3. Частота вращения первого шкива $n_1 = 1440$ об/мин. Определите скорость ремня без учета проскальзывания и угловую скорость второго шкива.

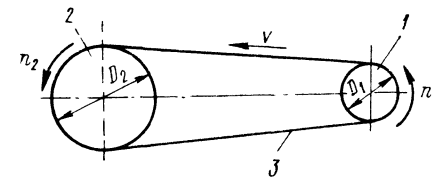


Рис. 127

§ 67. Понятие о плоскопараллельном движении твердого тела

В случае плоскопараллельного движения все точки тела, расположенные на прямой, перпендикулярной к определенной неподвижной плоскости I (рис. 128), совершают одинаковое движение.

Поэтому изучение плоскопараллельного движения твердого тела может быть сведено к изучению движения плоской фигуры, образованной сечением тела плоскостью II , параллельной неподвижной плоскости I , при условии, что расстояние между плоскостями I и II постоянно (рис. 128).

Примером плоскопараллельного движения могут служить движение шатуна кривошипно-ползунного механизма, движение колеса повозки на прямолинейном участке пути и др.

Рассмотрим перемещение плоской фигуры на рис. 129 из положения I в положение II .

Положение плоской фигуры на рис. 129, а определяется отрезком M_1B_1 . Этот отрезок можно переместить из положения I в положение II следующим образом: перенести его параллельно самому себе в положение M_2B_2 (при этом фигура совершит поступа-

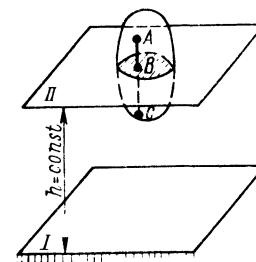


Рис. 128

тельное перемещение), а затем повернуть отрезок вокруг точки M_2 против часовой стрелки на угол φ (фигура при этом совершит вращательное движение и займет положение II). Можно поступить иначе: сначала сообщить фигуре поступательное перемещение до положения отрезка $B_2M'_2$, а затем повернуть вокруг точки B_2 против часовой стрелки опять на угол φ .

Точку, вокруг которой фигура совершает поворот, называют полюсом. В первом случае полюсом была точка M_2 , во вто-

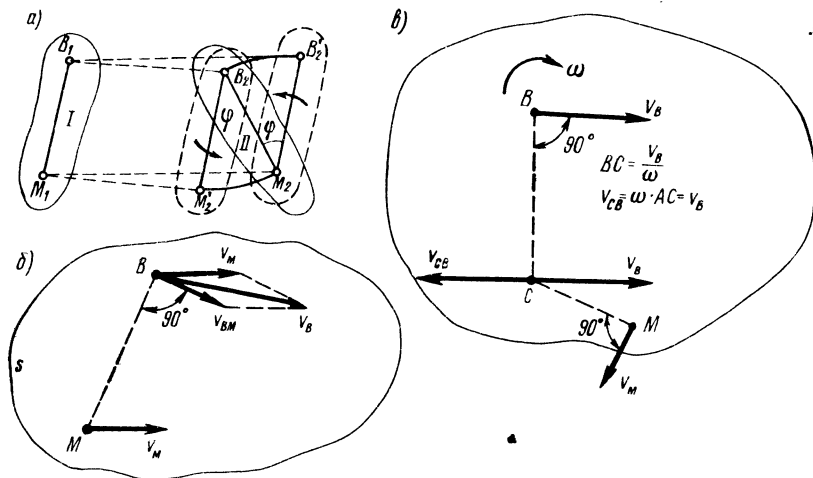


Рис. 129

ром — B_2 . Очевидно, что за полюс может быть принята произвольная точка фигуры.

Итак, плоскопараллельное движение можно разложить на два составляющих движения: поступательное вместе с некоторым полюсом и вращательное вокруг этого полюса. Поступательная часть плоскопараллельного движения зависит от выбора полюса. Как видно из рис. 129, а, поступательное перемещение M_1M_2 при выборе за полюс точки M_2 не равно поступательному перемещению B_1B_2 при выборе за полюс точки B_2 . Рассматривая вращательную часть плоскопараллельного движения, нетрудно установить, что угол поворота не зависит от выбора полюса.

Разложение плоскопараллельного движения можно использовать для определения скоростей точек тела. Так как плоскопараллельное движение фигуры может быть представлено как сумма двух движений — поступательного и вращательного, то скорость любой точки тела (рис. 129, б) равна геометрической сумме: скорости \vec{v}_M движения полюса M и скорости вращательного движения точки \vec{v}_{BM} вокруг полюса M

$$\vec{v}_B = \vec{v}_M + \vec{v}_{BM}.$$

Скорость вращательного движения точки определяется по формуле

$$v_B = \omega MB,$$

где ω — угловая скорость вращения; MB — радиус вращения точки B относительно полюса M .

Скорость вращательного движения точки \vec{v}_{BM} направлена перпендикулярно к радиусу вращения MB . Так как вращательная часть движения не зависит от выбора полюса, то угловая скорость ω называется угловой скоростью плоской фигуры.

В плоскости движущейся фигуры при плоскопараллельном движении в данный момент времени всегда есть точка, скорость которой равна нулю. Действительно, примем за полюс точку B (рис. 129, в), проведем из нее перпендикуляр к вектору скорости \vec{v}_B и отложим на этом перпендикуляре отрезок $BC = v_B/\omega$ в сторону, где относительные вращательные скорости направлены противоположно скорости выбранного полюса \vec{v}_B . Абсолютная скорость точки C определится как геометрическая сумма двух равных и противоположно направленных векторов: скорости поступательного движения \vec{v}_B и скорости вращательного движения \vec{v}_{CB} , причем

$$v_{CB} = \omega BC = \omega \frac{v_B}{\omega} = v_B.$$

Таким образом, абсолютная скорость точки C равна нулю. Эта точка C называется *мгновенным центром скорости* или *мгновенным центром вращения* плоской фигуры. Если эту точку C принять за полюс, то скорость произвольной точки M (рис. 129, в) определится по формуле

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{v}_{MC},$$

но $v_C = 0$ и $v_M = v_{MC}$, или $v_M = \omega MC$, т. е. скорость любой точки плоской фигуры определяется как вращательная относительно мгновенного центра скоростей.

ГЛАВА XV. ДИНАМИКА

§ 68. Аксиомы динамики

В динамике рассматривается движение материальных точек или тел под действием приложенных сил; устанавливается связь между приложенными силами и вызываемым ими движением. Динамика основывается на ряде вытекающих из опыта аксиом; некоторые из них были рассмотрены в статике.

Если на точку действует неуравновешенная система сил, точка имеет некоторое ускорение. Связь между действующей на точку силой и ускорением, вызываемым этой силой, устанавливается основной аксиомой динамики, которая заключается в следующем.

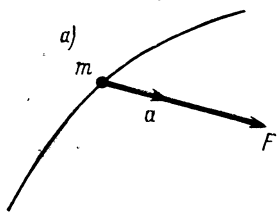
Ускорение \vec{a} , сообщаемое материальной точке приложенной к ней силой \vec{F} , имеет направление силы и по значению пропорционально ей (рис. 130, а)

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (150)$$

или в скалярной форме

$$ma = F.$$

Коэффициент m , входящий в основное уравнение динамики, имеет очень важное физическое значение. Он представляет собой массу материальной точки.



Если решить уравнение (150) относительно ускорения, получим

$$a = F/m, \quad (151)$$

т. е. чем больше масса, тем большая сила потребуется для сообщения определенного значения ускорения. Таким образом, масса материальной точки является мерой ее «инертности».

Из уравнения (150) находим массу

$$m = F/a. \quad (152)$$

Если это уравнение применить к материальной точке, находящейся под действием силы тяжести G , получим

$$m = G/g,$$

где g — ускорение свободного падения.

Масса пропорциональна силе тяжести и представляет собой постоянную скалярную величину, которая всегда положительна и не зависит от характера движения.

В динамике используют также аксиому независимости действия сил, устанавливающую, что при действии на материальную точку нескольких сил ускорение, получаемое точкой, будет таким же, как при действии одной силы, равной геометрической сумме этих сил (рис. 130, б), т. е.

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \vec{F}_\Sigma, \quad (153)$$

где $\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$ — равнодействующая системы сил, приложенных к рассматриваемой точке.

Рассмотрим системы единиц и их взаимосвязь. В Международной системе единиц (СИ) за основные единицы принимают единицу длины — метр (м), единицу времени — секунду (с) и единицу массы — килограмм (кг). Производной является единица силы. Если в формуле $F = ma$ принять $m = 1$ кг, $a = 1$ м/с², то получим единицу силы — ньютон (Н), который способен сообщить массе в 1 кг ускорение 1 м/с²,

$$[F] = [m][a] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

На основе аксиом динамики можно решить следующие две основные задачи.

Прямая задача динамики заключается в том, чтобы по заданному движению материальной точки определить силы, действующие на нее. Для ее решения прежде всего необходимо определить ускорение точки из условий кинематики. Определив ускорение точки, нужно затем воспользоваться основным законом динамики и найти действующую силу. Если на точку действует несколько сил и неизвестны лишь некоторые из них, то для их определения приходится использовать аксиому независимости действия сил.

Обратная задача динамики заключается в том, чтобы по заданным силам определить движение точки. Здесь также приходится использовать основной закон динамики. Из этого закона ускорение определяется через действующую силу и заданную массу точки.

§ 69. Понятие о силах инерции. Метод кинестатики

Пусть на материальную точку M действует некоторая система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ (рис. 131). Среди сил могут быть активные силы и реакции связей.

На основании аксиомы независимости действия сил точка M под действием этих сил получит такое же ускорение, как если бы на нее действовала лишь одна сила, равная геометрической сумме заданных сил,

$$m\vec{a} = \vec{F}_\Sigma = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n,$$

где a — ускорение точки M ; m — масса точки M ; F_Σ — равнодействующая системы сил.

Перенесем вектор, стоящий в левой части уравнения, в правую часть. После этого получим сумму векторов, равную нулю,

$$-m\vec{a} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = 0.$$

Введем обозначение $-m\vec{a} = \vec{F}_{ин}$, тогда приведенное уравнение можно представить в виде

$$\vec{F}_{ин} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = 0. \quad (154)$$

Рис. 130

Таким образом, все силы, включая силу $\vec{F}_{ин}$, должны уравновешиваться, так как силы $\vec{F}_{ин}$ и \vec{F}_Z равны между собой и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Сила $\vec{F}_{ин}$, равная произведению массы точки на ее ускорение, но направленная в сторону, противоположную ускорению, называется силой инерции.

Из последнего уравнения следует, что в каждый данный момент времени силы, приложенные к материальной точке, уравновешиваются силами инерции. Приведенный вывод называют началом Д'Аламбера. Он может быть применен не только к материальной точке, но и к твердому телу или к системе тел. В послед-

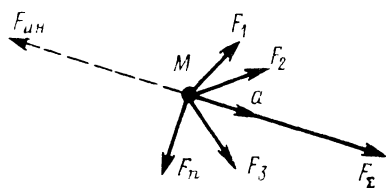


Рис. 131

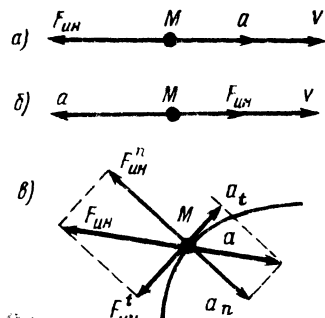


Рис. 132

нем случае он формулируется следующим образом: *если ко всем действующим силам, приложенным к движущемуся телу или системе тел, приложить силы инерции, то полученную систему сил можно рассматривать как находящуюся в равновесии.*

Следует подчеркнуть, что силы инерции действительно существуют, но приложены не к движущемуся телу, а к тем телам, которые вызывают ускоренное движение.

Применение начала Д'Аламбера позволяет при решении динамических задач использовать уравнения равновесия. Такой прием решения задач динамики носит название *метода кинестатики*.

Рассмотрим, как определяется сила инерции материальной точки в различных случаях ее движения.

1. Точка M массой m движется прямолинейно с ускорением (рис. 132, а, б). При прямолинейном движении направление ускорения совпадает с траекторией. Сила инерции направлена в сторону, противоположную ускорению, и численное значение ее определяется по формуле

$$F_{ин} = ma. \quad (155)$$

При ускоренном движении (рис. 132, а) направления ускорения и скорости совпадают и сила инерции направлена в сторону, противоположную движению. При замедленном движении

(рис. 132, б), когда ускорение направлено в сторону, обратную скорости, сила инерции действует по направлению движения.

2. Точка M движется криволинейно и неравномерно (рис. 132, в). При этом, как известно из предыдущего, ее ускорение может быть разложено на нормальную \vec{a}_n и касательную \vec{a}_t составляющие. Аналогично сила инерции точки $\vec{F}_{ин}$ также складывается из двух составляющих: нормальной и касательной.

Нормальная составляющая силы инерции равна произведению массы точки на нормальное ускорение и направлена противоположно этому ускорению

$$F_{ин}^n = ma_n. \quad (156)$$

Касательная составляющая силы инерции равна произведению массы точки на касательное ускорение и направлена противоположно этому ускорению

$$F_{ин}^t = ma_t. \quad (157)$$

Очевидно, что полная сила инерции точки M равна геометрической сумме нормальной и касательной составляющих, т. е.

$$\vec{F}_{ин} = \vec{F}_{ин}^n + \vec{F}_{ин}^t. \quad (158)$$

Учитывая, что касательная и нормальная составляющие взаимно перпендикулярны, полная сила инерции

$$F_{ин} = \sqrt{(F_{ин}^n)^2 + (F_{ин}^t)^2} = m \sqrt{a_n^2 + a_t^2}. \quad (159)$$

Пример 29. На симметричной ферме установлена лебедка, поднимающая массу $m_1 = 2000$ кг (рис. 133). Масса фермы $m_2 = 1200$ кг; масса лебедки $m_3 = 300$ кг. Определить опорные реакции фермы с учетом динамической нагрузки при подъеме груза с ускорением $a = 1,8$ м/с².

Решение. Воспользуемся методом кинестатики. Определим силу инерции поднимаемого груза

$$F_{ин} = m_1 a = 2000 \cdot 1,8 = 3600 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2 = 3600 \text{ Н}.$$

Приложим к рассматриваемой ферме все заданные силы, включая и силу инерции $\vec{F}_{ин}$ (рис. 133). Эта сила направлена вниз, в сторону, противоположную ускорению (на рис. 133 сила $\vec{F}_{ин}$ для ясности чертежа несколько смещена).

Заданными являются силы тяжести груза фермы и лебедки. Их легко вычислить через известные массы.

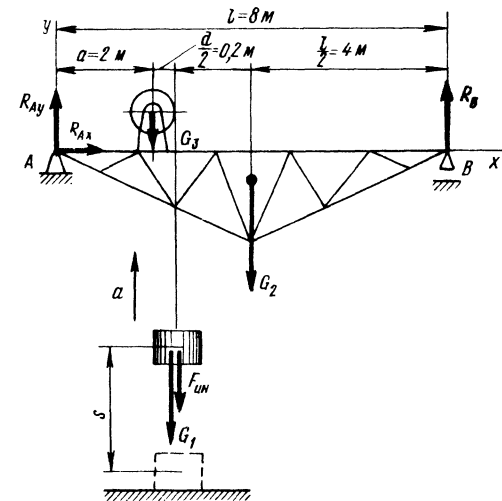


Рис. 133

Сила тяжести груза $G_1 = m_1g = 2000 \cdot 9,81 = 19\,620$ Н;

» » фермы $G_2 = m_2g = 1200 \cdot 9,81 = 11\,770$ Н;

» » лебедки $G_3 = m_3g = 300 \cdot 9,81 = 2943$ Н.

Отбросив опоры A и B , приложим там опорные реакции. В шарнирно-неподвижной опоре A могут возникнуть две составляющие реакции: \vec{R}_{Ay} и \vec{R}_{Ax} , а в шарнирно-подвижной опоре B — одна реакция \vec{R}_B .

Составим уравнения равновесия:

$$1) \sum F_{ix} = 0; \text{ следовательно, } R_{Ax} = 0;$$

$$2) \sum F_{iy} = 0; R_{Ay} - G_1 - G_2 - G_3 - F_{\text{ин}} + R_B = 0;$$

$$3) \sum M_A = 0; G_3c + (G_1 + F_{\text{ин}}) \left(c + \frac{d}{2} \right) + G_2 \frac{l}{2} - R_B l = G_3 \cdot 2 + (G_1 + F_{\text{ин}}) (2 + 0,2) + G_2 \cdot 4 - R_B \cdot 8 = 0.$$

Из первого уравнения следует, что горизонтальная составляющая реакции опоры A равна нулю.

Решив второе и третье уравнения, найдем:

$$R_B = \frac{G_3 \cdot 2 + (G_1 + F_{\text{ин}}) 2,2 + G_2 \cdot 4}{8} = \frac{2943 \cdot 2 + (19\,620 + 3600) 2,2 + 11\,770 \cdot 4}{8} = 13\,000 \text{ Н};$$

$$R_{Ay} = G_1 + G_2 + G_3 + F_{\text{ин}} - R_B = 19\,620 + 11\,770 + 2943 + 3600 - 13\,000 = 24\,930 \text{ Н}.$$

Упражнение 36

1. Две материальные точки движутся по прямой с постоянными скоростями 10 и 100 м/с. Можно ли утверждать, что к этим точкам приложены эквивалентные системы сил?

А. Нельзя. Б. Можно.

2. К двум материальным точкам массой 5 и 15 кг приложены одинаковые силы. Сравните численные значения ускорений этих точек.

А. Ускорения одинаковы. Б. Ускорения точки массой 15 кг в три раза меньше, чем ускорение точки массой 5 кг.

3. Можно ли задачи динамики решать с помощью уравнений равновесия?

А. Нельзя. Б. Можно.

4. В шахту опускается бадья с ускорением $a = 4$ м/с². Сила тяжести бадьи = 2 кН. Определите силу натяжения каната, поддерживающего бадью.

§ 70. Работа постоянной силы на прямолинейном перемещении

Определим работу для случая, когда действующая сила постоянна по величине и направлению, а точка ее приложения перемещается по прямолинейной траектории. Рассмотрим материальную точку C , к которой приложена постоянная по значению и направ-

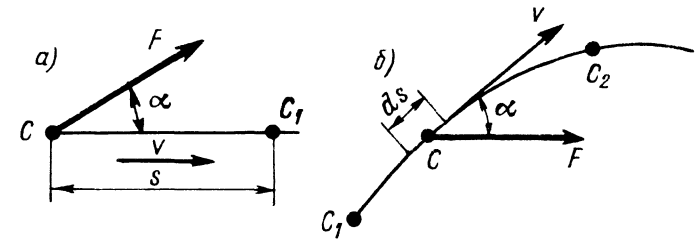


Рис. 134

лению сила \vec{F} (рис. 134, а). За некоторый промежуток времени t точка C переместилась в положение C_1 по прямолинейной траектории на расстояние s .

Работа W постоянной силы \vec{F} при прямолинейном движении точки ее приложения равна произведению модуля силы F на расстояние s и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения, т. е.

$$W = Fs \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{s}}) = Fs \cos \alpha. \quad (160)$$

Угол α между направлением силы и направлением движения может меняться в пределах от 0 до 180° . При $\alpha < 90^\circ$ работа положительна, при $\alpha > 90^\circ$ — отрицательна, при $\alpha = 90^\circ$ $W = 0$ (работа равна нулю).

Если сила составляет с направлением движения острый угол, она называется движущей силой, ее работа всегда положительна. Если угол между направлениями силы и перемещения тупой, сила оказывает сопротивление движению, совершает отрицательную работу и носит название силы сопротивления. Примерами сил сопротивления могут служить силы резания, трения, сопротивления воздуха и другие, которые всегда направлены в сторону, противоположную движению.

Когда $\alpha = 0$, т. е. когда направление силы совпадает с направлением скорости, $W = Fs$, так как $\cos \alpha = 1$. Произведение $F \cos \alpha$ есть проекция силы \vec{F} на направление движения материальной точки. Следовательно, работу силы можно определить как произведение перемещения s и проекции силы \vec{F} на направление движения точки.

За единицу работы в Международной системе единиц (СИ) принят джоуль (Дж), равный работе силы в один ньютон (Н) на перемещении по направлению силы длиной в один метр (м): $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$. Применяется также более крупная единица работы — килоджоуль (кДж), $1 \text{ кДж} = 1000 \text{ Дж} = 10^3 \text{ Дж}$.

§ 71. Работа силы на криволинейном перемещении

При криволинейном движении формулой (160) пользоваться нельзя. В этом случае пользуются понятием элементарной работы на бесконечно малом участке пути ds (рис. 134, б), который можно считать прямолинейным,

$$dW = F ds \cos(\vec{F}, \vec{v}),$$

где \vec{v} — скорость точки, совпадающая по направлению с элементарным перемещением.

Интегрируя или суммируя элементарные работы на конечном отрезке пути, получаем полную работу

$$W = \int_{C_1}^{C_2} F ds \cos(\vec{F}, \vec{v}). \quad (161)$$

Используем эту формулу для вычисления работы силы тяжести. Пусть некоторая точка, сила тяжести которой \vec{G} , переместилась по криволинейной траектории из точки C_1 в точку C_2 , опустившись на высоту H (рис. 135). Из ри-

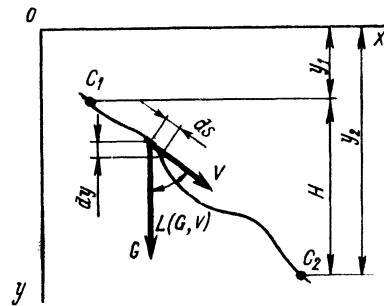


Рис. 135

сунка следует, что $ds \cos(\vec{G}, \vec{v})$ представляет собой проекцию элементарного перемещения на направление силы \vec{G} , т. е.

$$ds \cos(\vec{G}, \vec{v}) = dy.$$

Формула для работы принимает вид

$$W = \int_{y_1}^{y_2} G dy.$$

Вынося из-под знака суммы постоянную величину — силу тяжести тела G — и учитывая, что сумма элементарных перемещений вдоль оси y равна полной высоте перемещения тела $\int_{y_1}^{y_2} dy = H$, получаем

$$W = G \int_{y_1}^{y_2} dy = GH, \quad (162)$$

т. е. работа силы тяжести равна произведению силы тяжести на вертикальное перемещение ее точки приложения. Таким образом, работа силы тяжести не зависит от траектории, по которой перемещается центр тяжести тела.

§ 72. Мощность

Мощностью называется работа, совершаемая силой в единицу времени. Средняя мощность P_{cp} силы F за время Δt на перемещении Δs , с которым сила образует угол α , определяется по формуле (см. § 70)

$$P_{cp} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F \Delta s \cos \alpha}{\Delta t}. \quad (163)$$

Переходя к пределу при стремлении рассматриваемого промежутка времени к нулю, получаем истинную мощность

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F \Delta s \cos \alpha}{\Delta t} = F \frac{ds}{dt} \cos \alpha. \quad (163a)$$

Как было указано, $F \cos \alpha$ является проекцией силы на направление движения материальной точки. Обозначив $F \cos \alpha$ через F_v , получим

$$P = F_v \frac{ds}{dt} = F_v v,$$

так как

$$\frac{ds}{dt} = v.$$

Мощность измеряется в единицах работы, отнесенных к единице времени. За единицу мощности принят ватт (Вт) — мощность, соответствующая работе в один джоуль в секунду,

$$1 \text{ Вт} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 1 \text{ Н} \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Упражнение 37

- Чему равна работа силы тяжести при горизонтальном перемещении тела?
 - Произведению силы тяжести на перемещение.
 - Работа силы тяжести равна нулю.
- Работа постоянной силы при прямолинейном перемещении $W = -10$ Дж. Какой угол составляет направление силы с направлением перемещения?
 - Острый угол.
 - Прямой угол.
 - Тупой угол.
- Сравните между собой численные значения работы силы тяжести, если центр тяжести тела перемещали из положения C_1 в положение C_2 по траекториям I, II и III (рис. 136).
 - Работа силы тяжести по траектории II наименьшая.
 - Работа силы тяжести по всем трем траекториям одинакова.

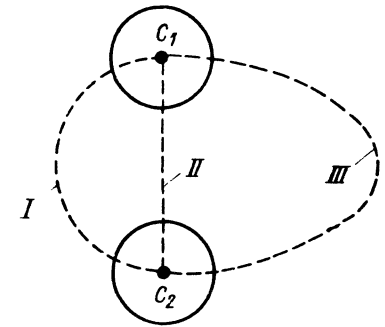


Рис. 136

§ 73. Работа и мощность при вращательном движении

Часто встречаются детали машин, вращающиеся вокруг неподвижных осей. Причиной вращения является приложенный к телу вращающий момент относительно оси, который создается парой

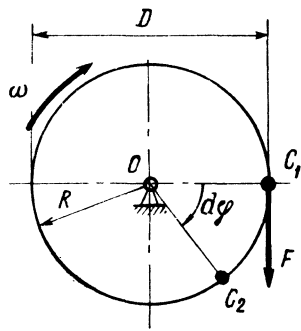


Рис. 137

сил или силой F , линия действия которой не пересекает ось вращения (рис. 137) и определяется по формуле

$$M = F \frac{D}{2}.$$

При повороте тела (рис. 137) на малый угол $d\varphi$ работа совершается силой \vec{F} , точка приложения которой перемещается из положения C_1 в положение C_2 . Полное перемещение точки приложения силы равно длине дуги радиусом R

$$ds = R d\varphi.$$

Так как сила \vec{F} все время направлена по касательной к перемещению s , то совершаемая ею работа определится как произведение силы на перемещение

$$dW = F ds = FR d\varphi = F \frac{D}{2} d\varphi.$$

Произведение силы на радиус определяет вращающий момент, т. е. $F \frac{D}{2} = M$. Учитывая это, окончательно находим $dW = M d\varphi$. Интегрируя, получим

$$W = M\varphi. \quad (164)$$

Работа вращающего момента равна произведению момента на угол поворота.

Определим мощность при вращательном движении

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{M d\varphi}{dt} = M\omega. \quad (165)$$

Мощность при вращательном движении тела равна произведению вращающего момента (момента пары) на угловую скорость.

Подставив в выражение мощности значение угловой скорости, выраженной через частоту вращения (об/мин) $\omega = \frac{\pi n}{30}$, получим

$$P = M \frac{\pi n}{30} = M \frac{n}{9,55},$$

откуда

$$M = \frac{30}{\pi} \frac{P}{n} = 9,55 \frac{P}{n}. \quad (166)$$

При данной мощности двигателя максимальный вращающий момент, который двигатель способен развить, можно изменить путем варьирования частоты вращения. Уменьшая частоту вращения, увеличивают вращающий момент и, наоборот, увеличивая частоту вращения, вращающий момент уменьшают.

Пример 30. Определить численное значение силы, приложенной к ободу шкива (рис. 137), если она передает мощность $P = 4$ кВт при частоте вращения $n = 60$ об/мин, диаметр шкива $D = 0,5$ м.

Решение. На основании уравнения (166) находим вращающий момент $M_{вр} = 9,55 \frac{P}{n}$, кроме того, $M_{вр} = F \frac{D}{2}$.

Приравняв значения моментов, находим силу F

$$F = \frac{2M_{вр}}{D} = 9,55 \frac{P}{n} \frac{2}{D} = 9,55 \frac{4000 \cdot 2}{60 \cdot 0,5} = 2547 \text{ Н.}$$

§ 74. Понятие о трении

При движении друг относительно друга двух соприкасающихся тел (рис. 138) по поверхности их соприкосновения возникает касательная реакция, препятствующая движению. Она называется

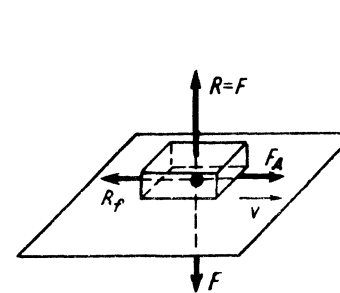


Рис. 138

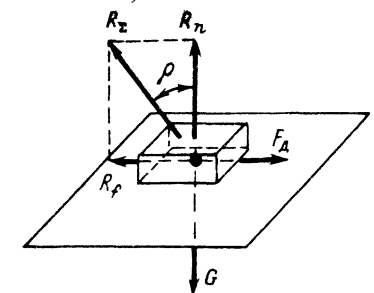


Рис. 139

силой трения R_f и направлена в сторону, противоположную движению.

Трение в машинах играет существенную роль. В передаточных механизмах — фрикционных, канатных, ременных и др. — передача движения от ведущего звена к ведомому осуществляется трением. В других случаях трение препятствует движению, поглощая значительную часть работы движущих сил.

В зависимости от вида относительного движения соприкасающихся тел различают трение скольжения и трение качения.

Основную зависимость для силы трения скольжения можно выразить формулой

$$R_f = fF, \quad (167)$$

где f — коэффициент пропорциональности, или коэффициент трения скольжения, зависящий от рода трущихся тел и физического состояния контактирующих поверхностей; F — сила нормального давления, прижимающая трущиеся поверхности друг к другу.

Таким образом, сила трения прямо пропорциональна нормальному давлению и направлена в сторону, противоположную относительной скорости движения.

Из формулы (167) находим значение коэффициента трения скольжения

$$f = R_f/F = R_f/R_n,$$

где R_n — нормальная реакция.

Коэффициент трения скольжения f является безразмерной величиной.

Обозначив суммарную реакцию сил R_n и R_f через R_Σ (рис. 139) и угол между суммарной и нормальной реакцией через ρ , находим, что коэффициент трения скольжения f является отношением

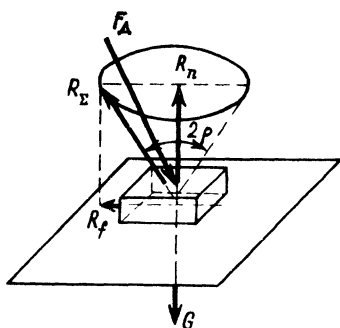


Рис. 140

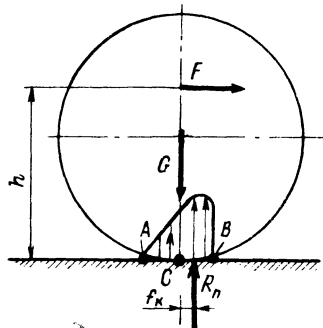


Рис. 141

противолежащего катета R_f к прилежащему R_n в прямоугольном треугольнике и определяется как тангенс угла ρ , т. е.

$$f = R_f/R_n = \operatorname{tg} \rho. \quad (168)$$

Угол ρ называется углом трения, следовательно, коэффициент трения скольжения численно равен тангенсу угла трения.

Если вокруг оси, перпендикулярной к опорной плоскости, путем вращения вектора полной реакции R_Σ образовать поверхность кругового конуса (рис. 140), то получим так называемый конус трения с углом при вершине, равным двойному углу трения 2ρ .

Если воздействовать на тело силой F_n , расположенной внутри конуса трения, то как бы ни была велика эта сила, она не сможет вывести тело из состояния равновесия. Это явление носит название *самоторможения*.

Сопротивление трения качения возникает при перекаtywании криволинейных поверхностей контактирующих тел.

При перекаtywании цилиндра по горизонтальной опорной поверхности (рис. 141) в зоне их контакта создаются силы реакции. Эти силы распределены неравномерно. Они больше там, где происходит смятие при перекаtywании цилиндра (участок CB) и меньше в зоне разъединения (участок AC). Вследствие этого

нормальная реакция \vec{R}_n , являющаяся равнодействующей всех сил реакций, смещается в сторону движения катящегося тела.

Смещение k от линии действия силы тяжести цилиндра численно определяет коэффициент трения качения, который обозначается через f_k и измеряется в миллиметрах.

Представим себе, что к цилиндру на некотором расстоянии h над плоскостью качения приложена сила \vec{F} , под действием которой цилиндр равномерно катится по опорной плоскости. Составим сумму моментов относительно точки C всех сил, действующих на цилиндр,

$$\sum M_C(\vec{F}) = 0; Fh - R_n f_k = 0$$

(где f_k — коэффициент трения качения), откуда при $R_n = G$

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{f_k R_n}{h} = \frac{f_k G}{h}; \\ f_k &= \frac{hF}{R_n} = \frac{hF}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

§ 75. Коэффициент полезного действия

Создавая машину, важно не только обеспечить движение рабочих органов машины, удовлетворяющих заданному технологическому процессу, но необходимо, чтобы машина обладала достаточно высоким коэффициентом полезного действия (КПД).

При наличии сил трения и сопротивления воздуха не вся затраченная работа W_3 используется в машинах или механических устройствах. Полезная работа W_n всегда меньше затраченной, т. е. $W_n < W_3$ и их отношение определяет важнейшую технико-экономическую характеристику — КПД

$$\eta = W_n/W_3. \quad (170)$$

Как видно из формулы (170), КПД — число отвлеченное.

При установившемся движении рабочих органов машины сумма работ всех сил, приложенных к ним, будет равна нулю, т. е.

$$\sum W = W_3 - W_n - W_{в.с}$$

(где $W_{в.с}$ — работа вредных сопротивлений), откуда

$$W_3 = W_n + W_{в.с}; W_n = W_3 - W_{в.с}.$$

Подставляя в формулу (170) значение W_n , получим

$$\eta = \frac{W_n}{W_3} = \frac{W_3 - W_{в.с}}{W_3} = 1 - \frac{W_{в.с}}{W_3}. \quad (171)$$

Так как работа вредных сопротивлений в машине $W_{в.с}$ никогда не может быть равна нулю, то $W_{в.с}/W_3 > 0$ и $\eta < 1$.

Следовательно, для увеличения КПД необходимо стремиться к уменьшению вредных сопротивлений, тогда КПД будет стремиться к единице.

§ 76. Закон изменения количества движения

Количеством движения материальной точки называется векторная величина, равная произведению массы точки на ее скорость,

$$\vec{q} = m\vec{v}. \quad (172)$$

Вектор количества движения по направлению совпадает со скоростью. Количество движения материальной точки можно спроецировать на координатные оси. Проекцией на ось x будет mv_x , проекцией на ось y — mv_y , проекцией на ось z — mv_z .

Единица измерения количества движения в Международной системе единиц (СИ)

$$[q] = [mv] = [m][v] = \text{кг} \cdot \text{м/с}.$$

Импульсом постоянной силы называется вектор, равный произведению силы на время ее действия и имеющий направление силы

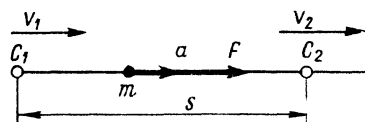


Рис. 142

$$\vec{S} = \vec{F}(t_2 - t_1), \quad (173)$$

где t_2 и t_1 — конечный и начальный моменты времени.

Единица измерения импульса силы в Международной системе единиц (СИ) равна единице количества движения

$$[S] = [Ft] = [F][t] = \text{Н} \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м/с}.$$

Установим закон изменения количества движения для случая, когда точка C движется прямолинейно под действием постоянной силы (рис. 142). Согласно основному уравнению динамики, ускорение точки при этом — постоянно, и точка движется равномерно.

Скорость точки C в произвольный момент времени определяем по формуле равнопеременного движения

$$v_2 = v_1 + at,$$

откуда

$$a = (v_2 - v_1)/t.$$

Подставим найденное значение ускорения в основной закон динамики

$$F = ma = m(v_2 - v_1)/t$$

или

$$Ft = mv_2 - mv_1.$$

Учитывая, что произведение Ft является импульсом действующей силы, окончательно имеем

$$S = F(t_2 - t_1) = mv_2 - mv_1. \quad (174)$$

Следовательно, алгебраическое приращение количества движения материальной точки при прямолинейном движении за время $t = t_2 - t_1$ равно импульсу действующей силы за тот же промежуток времени.

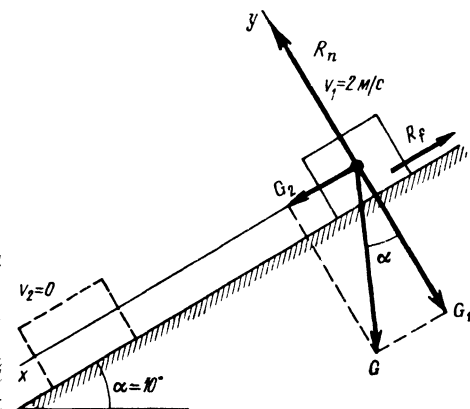


Рис. 143

Пример 31. Ящик, скользящий по наклонной плоскости, имел в начальный момент скорость $v_1 = 2$ м/с (рис. 143). Через $t = 5$ с он остановился ($v_2 = 0$) вследствие трения. Определить коэффициент трения ящика о плоскость при угле наклона плоскости $\alpha = 10^\circ$.

Решение. Разложив силу тяжести ящика \vec{G} вдоль наклонной плоскости и по нормали к ней, получим:

$$G_1 = G \cos \alpha; \quad G_2 = G \sin \alpha.$$

Составив уравнение проекций всех сил на ось y , найдем:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_n - G_1 = 0,$$

откуда

$$R_n = G_1 = G \cos \alpha.$$

Сила трения R_f пропорциональна силе нормального давления

$$R_f = fR_n = fG \cos \alpha.$$

Импульс сил, действующих вдоль оси x с учетом сил G_2 и R_f ,

$$S = (G_2 - R_f)t = (G \sin \alpha - fG \cos \alpha)t = G(\sin \alpha - f \cos \alpha)t.$$

Изменение количества движения равно импульсу сил $mv_2 - mv_1 = S$, а масса $m = G/g$, следовательно,

$$\frac{G}{g}v_2 - \frac{G}{g}v_1 = G(\sin \alpha - f \cos \alpha)t.$$

Сократив уравнение на G и учтя, что $v_2 = 0$, получим

$$-v_1/g = t \sin \alpha - ft \cos \alpha.$$

Решим получившееся уравнение относительно неизвестного коэффициента трения

$$f = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{v_1}{gt \cos \alpha} = \text{tg } \alpha + \frac{v_1}{gt \cos \alpha} = \text{tg } 10^\circ + \frac{2}{9,81 \cdot 5 \cdot \cos 10^\circ} = 0,176 + 0,042 = 0,218.$$

§ 77. Потенциальная и кинетическая энергия

Существуют две основные формы механической энергии: *потенциальная энергия*, или *энергия положения*, и *кинетическая энергия*, или *энергия движения*. Чаще всего приходится иметь дело с потенциальной энергией сил тяжести. *Потенциальной энергией силы тяжести материальной точки или тела в механике называется способность этого тела или точки совершать работу при опускании с некоторой высоты до уровня моря (до какого-то уровня). Потенциальная энергия численно равна работе силы тяжести, произведенной при перемещении с нулевого уровня до заданного положения.* Обозначив потенциальную энергию $E_{\text{п}}$, получим

$$E_{\text{п}} = GH, \quad (175)$$

где G — сила тяжести точки (или тела); H — высота центра тяжести от нулевого уровня.

Кинетическая энергия определяется способностью движущегося тела (или точки) совершать работу. Для материальной точки кинетическая энергия численно равна полупроизведению ее массы на квадрат скорости, т. е. $mv^2/2$.

Потенциальная и кинетическая энергия также измеряются в единицах работы:

$$\left[\frac{mv^2}{2} \right] = [m] [v^2] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Всякое твердое тело или механическая система состоит из множества отдельных материальных точек. Поэтому кинетическую энергию твердого тела или какой-либо механической системы можно представить как сумму кинетических энергий всех точек, образующих тело или систему. Обозначив кинетическую энергию тела или системы $E_{\text{к}}$, получим

$$E_{\text{к}} = \int \frac{dmv^2}{2}, \quad (176)$$

где dm — элементарная масса точки; v — скорость этой точки.

§ 78. Кинетическая энергия тела в разных случаях его движения

Найдем кинетическую энергию твердого тела при *поступательном движении* (см. рис. 121). Поступательное движение тела характеризуется тем, что скорости движения всех его точек равны между собой и имеют одинаковое направление, т. е.

$$v = v_A = v_B = \dots = v_C,$$

где v_C — скорость центра тяжести тела или любой другой точки тела.

Кинетическая энергия тела для рассматриваемого случая

$$E_{\text{к}} = \int \frac{dmv_C^2}{2} = \frac{v_C^2}{2} \int dm = \frac{mv_C^2}{2}, \quad (177)$$

где m — масса всего твердого тела.

Следовательно, *кинетическая энергия поступательно движущегося тела равна половине произведения квадрата скорости любой точки тела на массу тела.*

Найдем кинетическую энергию тела, *вращающегося вокруг неподвижной оси.* Если тело вращается вокруг оси y с угловой скоростью ω (см. рис. 122 и 123, а), то скорость произвольной точки тела пропорциональна расстоянию этой точки до оси вращения

$$v = r\omega,$$

где r — расстояние точки от оси вращения — величина переменная; ω — угловая скорость (для всех точек тела имеет одинаковое значение).

Подставив значение v в формулу кинетической энергии и вынеся постоянные величины за знак суммы, получим

$$E_{\text{к}} = \int \frac{dmv^2}{2} = \int \frac{dm(r\omega)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \int dm r^2.$$

Численное значение интеграла $\int dm r^2$, представляющее сумму произведений массы каждой частицы на квадрат ее расстояния до оси вращения z , называется *моментом инерции массы тела относительно этой оси* и обозначается J_z . Момент инерции массы тела играет очень большую роль в динамике твердого тела.

Следовательно, *кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения квадрата угловой скорости на момент инерции массы тела относительно оси его вращения*

$$E_{\text{к}} = J_z \frac{\omega^2}{2}. \quad (178)$$

Плоскопараллельное движение, как было показано в кинематике, можно разложить на два движения: поступательное вместе с некоторым полюсом и вращательное вокруг полюса. Соответственно и *кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении складывается из кинетической энергии поступательного движения вместе с некоторым полюсом и кинетической энергии вращательного движения вокруг полюса*

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \quad (179)$$

где v — скорость поступательного движения полюса; ω — угловая скорость вращения тела, не зависящая от выбора полюса.

§ 79. Моменты инерции некоторых однородных тел

Момент инерции массы любого тела

$$J = \sum m_i r_i^2. \quad (180)$$

Установим единицу измерения момента инерции

$$[J] = [m] [r^2] = \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Приведем формулы (без выводов) для вычисления моментов инерции простейших тел относительно некоторых осей.

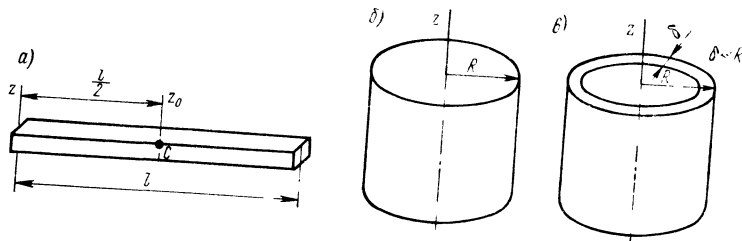


Рис. 144

1. Для однородного стержня относительно оси z , перпендикулярной к оси стержня и проходящей через его конец (рис. 144, а),

$$J_z = ml^2/3,$$

где m — масса стержня; l — длина стержня.

Для однородного стержня относительно оси z_0 (рис. 144, а), проходящей через его центр тяжести,

$$J_{z_0} = ml^2/12.$$

2. Для однородного цилиндра (рис. 144, б)

$$J_z = mD^2/8,$$

где m — масса цилиндра; D — диаметр цилиндра.

3. Для окружности или тонкого кольца, если пренебречь его толщиной (рис. 144, в),

$$J_z = mD^2/4.$$

§ 80. Закон изменения кинетической энергии

Пусть на материальную точку массой m действует постоянная сила \vec{F} . В этом случае точка имеет постоянное ускорение $\vec{a} = \vec{F}/m$; движение ее будет равномерно-ускоренным.

Рассмотрим случай, когда направление движения совпадает с направлением силы \vec{F} (см. рис. 142). Пусть точка под действием силы \vec{F} переместится из положения C_1 в положение C_2 . Если обо-

значить начальную и конечную скорости точки соответственно через v_1 и v_2 , то ускорение движения можно определить по формуле

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t},$$

где t — время движения.

Перемещение точки приложения силы

$$s = \frac{v_2 + v_1}{2} t.$$

Работа силы \vec{F} , учитывая, что ее направление совпадает с перемещением, такова:

$$W = Fs = F \frac{v_2 + v_1}{2} t.$$

Подставив в выражение работы значение силы \vec{F} , по основному закону динамики $F = ma = m \frac{v_2 - v_1}{t}$ получим

$$W = mas.$$

В последнем уравнении заменим значение ускорения a и перемещения s их выражениями (см. выше)

$$W = m \frac{v_2 - v_1}{t} \frac{v_2 + v_1}{2} t = m \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (181)$$

Это уравнение показывает, что *изменение кинетической энергии материальной точки равно работе силы, действующей на точку.*

Для системы материальных точек, например для твердого тела, закон кинетической энергии имеет аналогичный вид

$$E_2 - E_1 = \sum W, \quad (182)$$

т. е. *изменение кинетической энергии системы материальных точек равно сумме работ, действующих на систему сил.*

§ 81. Основное уравнение динамики для вращательного движения твердого тела

Определим зависимость между приложенными к вращающемуся телу силами и сообщаемым ему угловым ускорением ϵ (рис. 145).

Рассмотрим элементарную частицу тела dm и приложим к ней нормальную и касательную составляющие силы инерции. Приложив силы инерции ко всем частицам тела, получим уравновешенную систему сил. Применим к этой системе уравнения равновесия. Алгебраическую сумму вращающихся моментов внешних сил $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ относительно оси вращения y обозначим M_y^e .

Нормальные силы инерции пересекают ось вращения и не создают относительно нее момента. Касательные силы инерции

создают моменты относительно оси вращения. Плечом касательной силы инерции $\vec{F}_{ин}^t$ каждой точки является соответствующий радиус r .

Направление суммарного момента этих сил противоположно направлению углового ускорения ε и вращающего момента M_y^e , так как касательная сила инерции любой точки направлена противоположно ее касательному ускорению. Значение касательной силы инерции точек вращающегося тела определяется по формуле

$$dF_{ин}^t = dma_t = dm r \varepsilon.$$

Составим уравнение моментов относительно оси вращения y :

$$\sum M_{iy} = 0; M - \int dF_{ин}^t r = 0,$$

откуда

$$\int dF_{ин}^t r = M.$$

Подставив значение $dF_{ин}^t$, получим

$$\int dm r^2 \varepsilon = M.$$

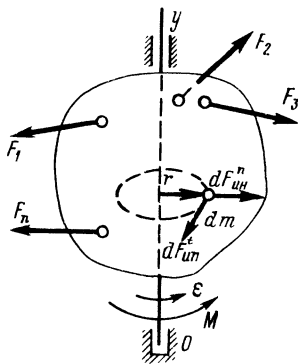


Рис. 145

Вынесем значение углового ускорения ε за знак суммы как величину, одинаковую для всех точек тела, получим

$$\varepsilon \int dm r^2 = M.$$

Множитель при ε — знакомая нам величина; это момент инерции тела относительно оси y

$$\int dm r^2 = J_y.$$

Окончательно получим

$$\varepsilon J_y = M. \quad (183)$$

Это основное уравнение динамики для вращательного движения твердого тела. Произведение момента инерции тела на его угловое ускорение равно сумме моментов всех сил относительно оси вращения.

Из уравнения (183) следует, что

$$\varepsilon = M/J_y.$$

Чем больше момент инерции тела, тем больший вращающий момент следует приложить для сообщения телу определенного углового ускорения ε . Поэтому момент инерции массы можно рассматривать как меру инертности твердого тела во вращатель-

ном движении аналогично тому, как масса служит мерой инертности материальной точки или тела при поступательном движении.

Упражнение 38

1. Вычислить изменение кинетической энергии точки массой 20 кг, если ее скорость увеличилась с 10 до 20 м/с.
2. Как изменится кинетическая энергия прямолинейно движущейся точки, если ее скорость увеличится в два раза?
 - А. Увеличится в два раза.
 - Б. Увеличится в четыре раза.
3. Чему равна работа силы, приложенной к прямолинейно движущемуся телу массой 100 кг, если скорость тела увеличилась с 5 до 25 м/с?

ГЛАВА XVI. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 82. Классификация машин

Машиной называется устройство, создаваемое человеком, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации с целью полной замены или облегчения физического и умственного труда человека, увеличения его производительности. Под материалами понимаются обрабатываемые предметы, перемещаемые грузы и т. д.

Машина, в которой все преобразования энергии, материалов и информации выполняются без непосредственного участия человека, называется *автоматом*.

Машину характеризуют следующие признаки:

преобразование энергии в механическую работу или преобразование механической работы в другой вид энергии;

определенность движения всех ее частей при заданном движении одной части;

искусственность происхождения в результате труда человека.

Все многообразие машин можно разделить по характеру рабочего процесса на классы: *машины-двигатели* — энергетические машины, предназначенные для преобразования энергии любого вида (электрической, тепловой и т. д.) в механическую энергию (твердого тела); *машины-преобразователи* — энергетические машины, предназначенные для преобразования механической энергии в энергию любого вида (электрические генераторы, воздушные и гидравлические насосы и т. д.); *транспортные машины*, преобразующие механическую энергию двигателя в энергию перемещения масс и предназначенные для перемещения людей и грузов; *технологические машины*, предназначенные для преобразования обрабатываемого предмета, состоящего в изменении его размеров, формы, свойств или состояния; *информационные машины*, предназначенные для получения и преобразования информации.

Совокупность машин-автоматов, соединенных между собой автоматическими транспортными устройствами и предназначенных для выполнения определенного технологического процесса, называется *автоматической линией*.

В машине можно выделить следующие основные части: *приемник*, непосредственно воспринимающий действие внешних сил,

приводящих машину в движение (например, поршень в двигателе); *исполнительные механизмы*, производящие работу, для получения которой предназначена машина (например, шпиндель станка); *передаточные механизмы*, или *приводы*, служащие для передачи и преобразования движения от приемника к исполнительному механизму (например, кривошипный механизм, редуктор и др.). Кроме указанных основных частей машина имеет части для управления и регулирования движения, а также неподвижную часть (станину, фундамент), служащую для поддержания движущихся звеньев машины.

§ 83. Кинематические пары и цепи

Кинематической парой называется подвижное соединение двух соприкасающихся тел, например поршень и цилиндр, вал и подшипник и др. Тела, составляющие кинематическую пару, назы-

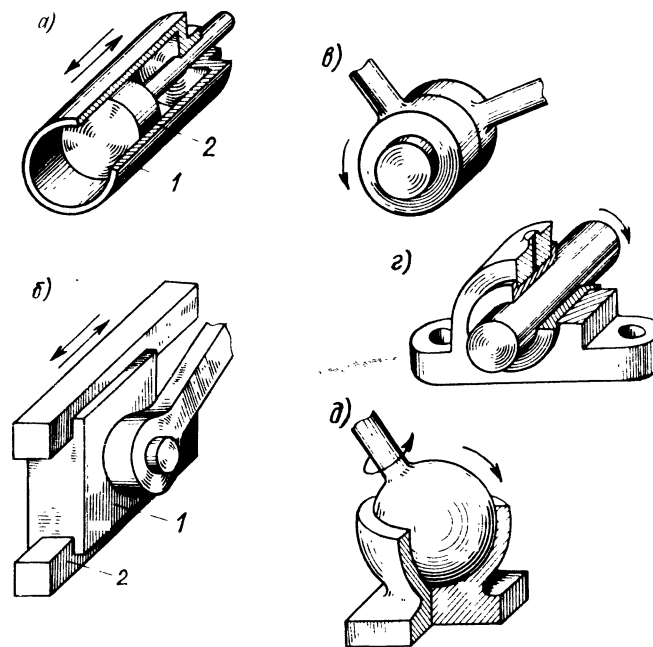


Рис. 146

ваются *звеньями*. Звено механизма может состоять из нескольких деталей (отдельно изготовляемых частей механизма), не имеющих между собой относительного движения.

По характеру соприкосновения элементов кинематические пары делятся на два основных класса: *низшие* и *высшие*. У низших кинематических пар соприкосновение звеньев происходит по по-

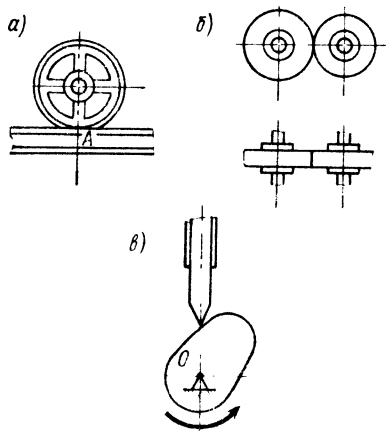


Рис. 147

верхностям, а у высших — по линиям или точкам.

Низшие кинематические пары:

1) поступательные (рис. 146, а, б): а — цилиндр 1 и поршень со штоком 2; б — ползун 1 и прямолинейные направляющие 2; 2) вращательные (рис. 146, в, г, д): в — плоский шарнир; г — вал и подшипник; д — шаровой шарнир.

Высшие кинематические пары:
1) колесо и рельс — соприкосновение по линии (рис. 147, а);
2) фрикционные катки — соприкосновение по линии (рис. 147, б);
3) кулачковая пара с острым толкателем — соприкосновение в точке (рис. 147, в).

Низшие пары более износостойки, так как сила давления

одного звена на другое у них распределяется по поверхности соприкосновения, тогда как у высших пар соприкосновение звеньев происходит в точках или по линиям.

Кинематической цепью называется связанная система звеньев, образующих между собой кинематические пары.

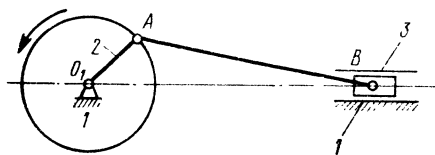


Рис. 148

Система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких твердых тел в требуемое движение других твердых тел, называется механизмом. Механизм обязательно имеет неподвижные 1, 5, ведущее 2 и ведомые 3, 4 звенья (рис. 148).

Неподвижное звено называют также *стойкой*. *Ведущим* называется звено, которое передает заданное движение. *Ведомым* называется звено, воспринимающее движение.

Наличие стойки и других наложенных связей в виде кинематических пар делает возможным получение в механизме определенных движений ведомых звеньев при заданном законе движения ведущего.

§ 84. Основные требования к машинам и деталям машин. Характеристики некоторых машиностроительных материалов

Основные тенденции в развитии советского машиностроения: увеличение производительности и мощности машин, скоростей, давлений и других показателей интенсивности технологических процессов, повышение КПД машин, уменьшение их массы и габаритных размеров, широкая автоматизация управления машинами, повышение их надежности и долговечности, снижение стоимости изготовления, повышение экономической эффективности эксплуатации, удобства и безопасности обслуживания.

С этими тенденциями непосредственно связаны общие требования, предъявляемые к машинам независимо от их назначения: высокая производительность; высокий КПД; удобство и простота сборки, разборки, обслуживания и управления; низкая стоимость изготовления; надежность; долговечность и безопасность в работе; малые габариты и масса. Отсюда вытекают следующие основные требования к деталям любой машины:

прочность — деталь не должна разрушаться или получать остаточные деформации под влиянием действующих на нее сил в течение заданного срока службы;

жесткость — упругие перемещения, возникающие в детали под влиянием действующих на нее сил, не должны превышать некоторых допустимых заранее заданных значений;

износостойкость — износ детали в течение заданного срока службы не должен вызывать нарушения характера сопряжения ее с другими деталями и приводить к недопустимому уменьшению ее прочности;

малая масса и минимальные габариты — деталь должна иметь достаточные прочность, жесткость и износостойкость при минимально возможных габаритах и массе;

недефицитность материалов — удовлетворение всех предыдущих требований не должно осуществляться за счет применения дефицитных материалов, так как использование таких материалов приводит к резкому увеличению стоимости детали;

технологичность — форму и материал детали желательно выбирать такими, чтобы изготовление ее требовало наименьших затрат труда и времени;

безопасность — форма и размеры детали должны обеспечивать безопасность обслуживающего персонала при изготовлении и эксплуатации машины;

соответствие государственным стандартам — деталь должна удовлетворять действующим стандартам на формы, размеры, сорта и марки материала.

Наиболее распространенными материалами в машиностроении являются стали различных марок, чугуны, бронза, пластмассы, древесина, резина и др. В табл. 4 и 5 приведены характеристики некоторых машиностроительных материалов.

Т а б л и ц а 4. Характеристики некоторых машиностроительных материалов

Материал	Марка	$\sigma_{пч} (\sigma_B)$	$\sigma_T (\sigma_{0,2})$	σ_{-1}	Ориентировочное применение
		МПа			
Сталь углеродистая обыкновенного качества (ГОСТ 380—71*)	Ст3	380—470	240	180	Заклепки, болты, гайки Валы, оси, зубчатые колеса Шпонки, валы, зубчатые колеса
	Ст5	500—620	280	240	
	Ст6	600—720	310	280	
Сталь углеродистая качественная конструкционная (ГОСТ 1050—74**)	Сталь 15	350	210	160	Для цементируемых деталей: зубчатых колес, кулачковых механизмов Болты, гайки, оси, валы Зубчатые колеса, муфты, валы, фрикционные диски Детали, подвергающиеся истиранию
	Сталь 35	520	300	230	
	Сталь 45 и 50	600	340	260	
	Сталь 50Г	650	370	290	
Сталь легированная конструкционная (ГОСТ 4543—71*)	Сталь 20Х	800	600	350	Для цементируемых деталей: зубчатых колес, кулачковых муфт Зубчатые колеса, катки, оси, валы
	Сталь 40Х	1000	800	420	
Чугун с пластинчатым графитом для отливок (ГОСТ 1412—85)	СЧ 10	100	—	—	Кожухи, корпуса Станины, тихоходные зубчатые колеса Зубчатые колеса, рычаги, маховики
	СЧ 15	150	—	—	
	СЧ 20	200	—	—	
Бронзы оловянные литейные (ГОСТ 613—79)	БрОЦС5-5-5	180—220	80—100	—	Вкладыши подшипников Ответственные подшипники, втулки, зубчатые венцы к червячным колесам, гайки ходовых винтов
	БрОФ10-1	200—350	200	—	
Бронзы безоловянные (ГОСТ 493—79)	БрАЖ9-4	500—550	350	—	Подшипниковые втулки (при закаленных поверхностях вала), червячные колеса, шестерни, крупные отливки

Т а б л и ц а 5. Характеристика некоторых пластических масс

Материал	Марка	Прочность, МПа			Ориентировочное применение
		$\sigma_{пчр}$	$\sigma_{пчс}$	$\sigma_{пчи}$	
Текстолит конструкционный (ГОСТ 5—78)	ПТ; ПТК; ПТМ-1	42—63	83—204	83—110	Шестерни, червячные колеса, шайбы, втулки, подшипники скольжения, вкладыши подшипников прокатных станов Детали и изделия, работающие на трение
	ПТГ-1				
Фенопласты (ГОСТ 5689—79)	03-010-02	22—40	—	—	Болты, заглушки, колпачки, маховики, поршни, пробки, рукоятки
Фторопласт-2 (ТУ 6-05-041-646—82)	Ф-2-ЛД	34—44	—	—	Подшипники, детали насосов, вентиляей, трубопроводов
Полистиролы высокой ударпрочности (ОСТ 6-05-406—80)	УПС; УПМ	37—48	90—100	65—105	Детали холодильников, корпуса телевизоров и другие крупногабаритные детали, тара, бачки, панели крышки
Стеклопластики (ГОСТ 13077—77)	АБС	70—90	140	30—100	Конструкционные изделия с повышенной жесткостью, теплоустойчивостью и ударной прочностью
Древесные слоистые пластики (ГОСТ 13913—78)	ДСП	80—90	120—130	100—120	Конструкционный и антифрикционный материал в машиностроении, судостроении (подшипники, втулки, зубчатые колеса, амортизационные прокладки), детали текстильных машин

§ 85. Краткие сведения о стандартизации и взаимозаменяемости деталей машин

Стандартизацией называется установление обязательных норм, которым должны соответствовать типы, сорта (марки), параметры (в частности, размеры), качественные характеристики, методы испытаний, правила маркировки, упаковки, хранения продукции (сырья, полуфабрикатов, изделий).

Для обеспечения единых норм и технических требований к продукции, обязательных для всех отраслей народного хозяйства СССР, установлены Государственные общесоюзные стандарты — ГОСТы.

В машиностроении, например, стандартизованы: обозначения общетехнических величин, правила оформления чертежей: ряды чисел, распространяемые на линейные размеры; точность и качество поверхностей деталей;

материалы, их химический состав, основные механические свойства и термообработки; форма и размеры деталей и узлов наиболее массового применения: болтов, винтов, шпилек, гаек, шайб, шплинтов, заклепок, штифтов, шпонок, ремней, цепей, муфт, подшипников качения; конструктивные элементы большинства деталей машин: модули зубчатых и червячных колес, диаметры и ширина шкивов, конструктивные формы и размеры шлицевых соединений и т. п.

Кроме общесоюзной существует также ведомственная стандартизация, которую принято называть *нормализацией*. Нормализация проводится в пределах какой-либо одной отрасли производства или даже одного завода. Со стандартизацией тесно связана унификация деталей и узлов машин.

Унификацией называется устранение излишнего многообразия изготавливаемых изделий, сортамента материалов и т. п. путем сокращения их номенклатуры, а также использования в разных (по размерам и назначению) машинах общих узлов и деталей. Таким образом, узлы и детали, спроектированные однажды для какой-либо машины, без изменений используются в других машинах.

Широкое внедрение стандартизации обеспечивает возможность массового производства деталей на специализированных заводах, приводит к уменьшению трудоемкости и стоимости их изготовления.

Важнейшей чертой современного машиностроения является *взаимозаменяемость*, без которой невозможно было бы серийное и массовое производство машин

Взаимозаменяемостью называется свойство деталей или узлов машин, обеспечивающее возможность их использования при сборке без дополнительной обработки (пригонки) при соблюдении технических требований, предъявляемых к работе данного узла, механизма, машины.

Для стран — членов Социалистического Экономического Содружества предусмотрена комплексная программа по стандартизации. Разработана единая для этих стран система допусков и посадок (ЕСДП СЭВ) и установлен ряд стандартов, соблюдение которых обязательно.

Реализация Комплексной программы СЭВ по стандартизации повышает эффективность экономического и научно-технического сотрудничества стран — членов СЭВ (взаимозаменяемость, единство технической документации) для успешного сотрудничества стран — членов СЭВ в области машиностроения и приборостроения.

ГЛАВА XVII. СОЕДИНЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ

§ 86. Заклепочные и сварные соединения

Соединения деталей машин бывают *неразъемными* и *разъемными*. Разъемные соединения (болтовые, шлицевые и др.) могут быть разобраны и вновь собраны без разрушения деталей. Неразъемные соединения (заклепочные, сварные и др.) могут быть разобраны лишь путем разрушения элементов соединения.

До недавнего времени заклепочные соединения широко применяли в различных инженерных сооружениях: судах, котлах, кранах, мостах и др. В настоящее время область применения таких соединений в общем машиностроении резко сузилась в связи с развитием методов сварки. Заклепочные соединения остаются еще распространенным видом неразъемного соединения при изготовлении металлических конструкций из легких сплавов (дюралюминия).

Заклепка (рис. 149, а) — цилиндрический стержень 1 круглого поперечного сечения, на конце которого имеется закладная головка 2. В процессе клепки выступающая часть цилиндрического стержня превращается обжимкой 3 в замыкающую головку 4 (рис. 149, б).

Основные типы заклепок показаны на рис. 150. Они различаются по форме головок. Наиболее распространены заклепки

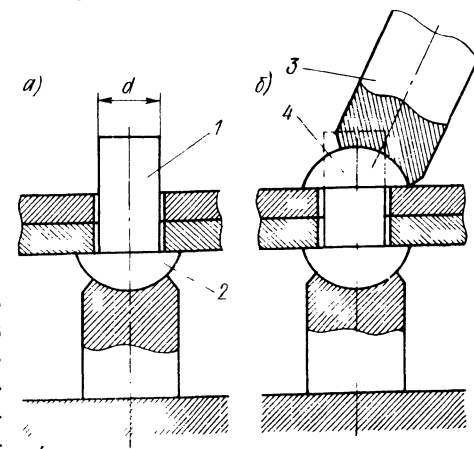


Рис. 149

с полукруглой головкой (рис. 150, а). В тех случаях, когда выступающие из деталей головки недопустимы, применяют заклепки с потайными головками (рис. 150, б). Кроме этих заклепок в самолетостроении и некоторых других отраслях промышленности применяют специальные типы заклепок, например шпильки (рис. 150, в).

В качестве материала для заклепок используют малоуглеродистую сталь (марок Ст2, Ст3), медь, алюминий и др. в зависимости от назначения шва и материала склепываемых деталей.

Место соединения листов (или каких-либо деталей) с помощью заклепок называется *заклепочным швом*.

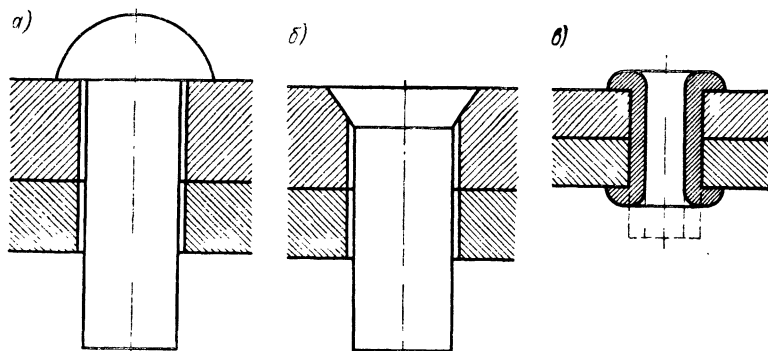


Рис. 150

По назначению различают заклепочные швы:

прочные, от которых требуется только прочность (балки, фермы и другие инженерные сооружения);

плотные, которые помимо прочности должны обеспечивать герметичность конструкции (резервуары, паровые котлы, цистерны).

Для достижения полной герметичности производят подчеканку шва: ударами по специальному инструменту — чекану — осаживают часть кромки склепываемого листа для плотного прижима одного листа к другому.

По взаимному расположению листов различают заклепочные швы *внахлестку* и *встык* с одной или двумя накладками. В зависимости от расположения заклепок швы делятся на *однорядные* и *многорядные*. Заклепки могут располагаться в шахматном порядке или параллельными рядами.

В современном машиностроении и строительстве широкое применение получили неразъемные соединения, осуществляемые при помощи *сварки*.

Сварка — процесс соединения металлических частей путем применения местного нагрева с доведением свариваемых участков до тестообразного пластического или жидкого состояния. В пер-

вом случае соединение свариваемых частей достигается при их сдавливании.

Основные преимущества сварки по сравнению с заклепочными соединениями:

1) экономия материала и облегчение конструкции в сварном соединении благодаря: а) лучшему использованию материала соединяемых элементов (листов, угольников), так как их рабочие сечения не ослабляются отверстиями под заклепки и при тех же действующих силах для свариваемых элементов можно принимать меньшие сечения, чем для склепываемых; б) возможности применения стыковых швов, не требующих накладок; в) меньшей массе соединительных элементов при сварке (масса заклепок больше массы сварных швов);

2) уменьшение трудоемкости в связи с исключением операций разметки и сверления (пробивки) отверстий; склепывание значительно более трудоемко, чем сварка; сварка может быть автоматизирована;

3) возможность соединения деталей с криволинейным профилем;

4) плотность и непроницаемость соединения;

5) бесшумность технологического процесса.

Основными видами сварки являются: электродуговая, электрохимическая (контактная), химическая (газовая).

Электродуговая сварка. При этом методе сварки металл расплавляется теплом электрической дуги, образуемой в месте сварки между металлическим электродом и свариваемыми деталями. Металл электрода (присадочный металл), расплавляясь, заполняет промежуток между свариваемыми деталями.

В качестве присадочного материала используют стальную электродную проволоку. Сварочную проволоку (электрод) покрывают специальным составом, который при расплавлении электрода образует на металле шва тонкий слой шлака, защищающий металл от окисления и тем повышающий его прочность.

В электрической дуге температура доходит до 3900 °С. Эта температура обеспечивает сварку деталей больших поперечных размеров. Для питания дуги необходим электрический ток низкого напряжения, но большой силы. Электрическая дуговая сварка может производиться вручную и на специальных высокопроизводительных автоматах, обеспечивающих высокое качество шва.

Сварные швы, выполняемые электродуговой сваркой, можно разделить на *стыковые* и *угловые* (*валиковые*). Стыковыми называют швы, которые соединяют торцы деталей, находящихся в одной плоскости. Перед сваркой кромки стыкуемых торцов должны быть обработаны для облегчения доступа электрода к поверхностям, которые подлежат оплавлению. Соединения *внахлестку* выполняют угловыми (*валиковыми*) швами: *лобовыми* (см. рис. 78, б) или *фланговыми* (см. рис. 78, а).

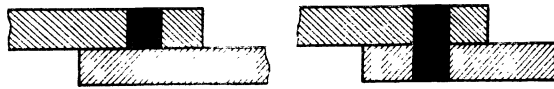


Рис. 151

Кроме соединений сплошным сварным швом часто применяют прерывистый шов, а также электрозаклепки (рис. 151).

Сварка широко используется в машиностроении не только взамен клепки, но и при изготовлении деталей сложной конфигурации.

Электромеханическая (контактная) сварка. Металл разогревается теплом, выделяющимся при прохождении тока через стык соединяемых элементов, до тестообразного состояния и сдавливается. Методом электромеханической сварки соединяют встык листовую и круглую материалы (стыковая сварка) и внахлестку тонколистовой материал (точечная и роликовая сварки).

Химическая (газовая) сварка. Свариваемый металл доводится до плавления. Необходимая для этого температура получается при сжигании горючих газов (ацетилена, водорода) в струе кислорода. Ацетилен дает высокую температуру, что позволяет сваривать толстые металлические части (до 40 мм).

Химическую сварку применяют для сваривания элементов из малоуглеродистых сталей, тонких стальных листов, чугуна, цветных металлов и сплавов. Исключительную роль при производстве сварных конструкций играют процессы газовой резки металла. Прорезы получаются за счет сгорания металла в струе кислорода.

Ультразвуковая сварка металлов и пластмасс. Для соединения металлических и пластмассовых деталей, а также деталей из разнородных материалов (пластмасса и металл) применяют ультразвуковую сварку. Соединяемые детали прижимают друг к другу и подвергают действию ультразвука. Ультразвуковая сварка позволяет производить соединение деталей значительной толщины и сложной формы.

§ 87. Клеевые и другие неразъемные соединения

Клеевые соединения. Одним из современных видов неразъемных соединений является соединение с помощью клея элементов из металла, металла и неметаллического материала (текстолита, пенопласта и др.), неметаллических материалов между собой.

Клеевое соединение имеет следующие основные преимущества по сравнению со сварными и заклепочными соединениями:

возможность надежного соединения деталей из очень тонких листовых материалов;

возможность скрепления разнородных материалов;

отсутствие (или сравнительно небольшие) концентрации напряжений;

отсутствие ослабляющих конструкцию отверстий, необходимых при заклепочных соединениях;
герметичность;
стойкость против коррозии.

Недостатками клеевого соединения являются сравнительно низкая теплостойкость, невысокое сопротивление «отдиранию», снижение прочности некоторых видов клеев с течением времени (старение).

Соединение пайкой. В некоторых случаях для создания неразъемного соединения применяют пайку (например, для соединения тонкостенных деталей, элементов электрических схем и др.).

Пайка осуществляется при помощи припоя. Расплавленный припой заполняет зазор между соединяемыми деталями и при затвердевании припоя образует неразъемное соединение. Соприкасающиеся поверхности соединяемых деталей перед пайкой очищают при помощи флюсов. В качестве флюсов применяют канифоль, буру, хлористый цинк. Припои разделяют на легкоплавкие и тугоплавкие (в зависимости от температуры плавления припоя).

Соединения запрессовкой. Для неподвижного соединения деталей цилиндрической формы может применяться прессовая посадка (соединение зубчатого колеса с валом, втулки с валом). При прессовой посадке вал изготавливают большего диаметра, чем отверстие детали, поэтому посадка вала в отверстие осуществляется прессом, создающим необходимую силу давления.

Соединение заформовкой. Заформовкой соединяют металлическую деталь 1 с пластмассой 2, для чего металлическую деталь погружают в жидкую или тестообразную пластмассу, которая затвердевает при остывании и образует неразъемное соединение (рис. 152).

§ 88. Резьбовые соединения

Общие сведения о резьбах. Широко применяемые резьбовые соединения осуществляются с помощью болтов, винтов, шпилек, стяжек, резьбовых муфт и т. п. Основным элементом резьбового соединения является винтовая пара.

Винтовая пара образуется соединением винта 1 и гайки 2 (рис. 153), которые соприкасаются друг с другом по винтовым поверхностям.

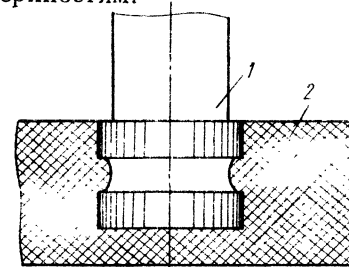


Рис. 152

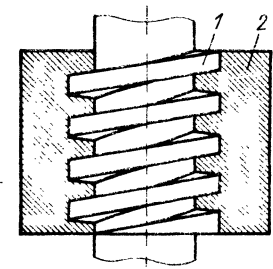


Рис. 153

Рассмотрим образование винтовых поверхностей. Возьмем прямой круговой цилиндр (рис. 154). Навернем на него прямоугольный треугольник с катетом AA_1 , равным по длине окружности основания цилиндра πd_2 и высотой $A_1B_1 = p_h$. Тогда гипотенуза AB_1 образует на поверхности цилиндра линию, которая называется *винтовой*. Расстояние A_1B_1 между двумя соседними точ-

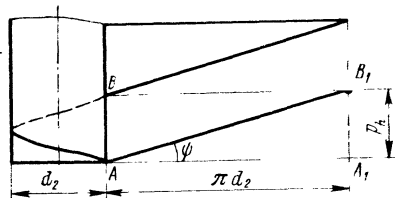


Рис. 154

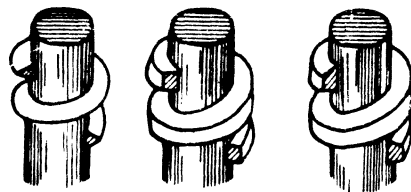


Рис. 155

ками одной и той же винтовой линии, измеренное по образующей цилиндра, называется *шагом винтовой линии* p_h . Угол ψ между основанием треугольника и гипотенузой называется *углом подъема винтовой линии*.

Из рис. 154 следует, что

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{p_h}{\pi d_2}. \quad (184)$$

Винтовая линия, поднимающаяся на видимой части цилиндра при вертикальном расположении его оси слева направо, назы-

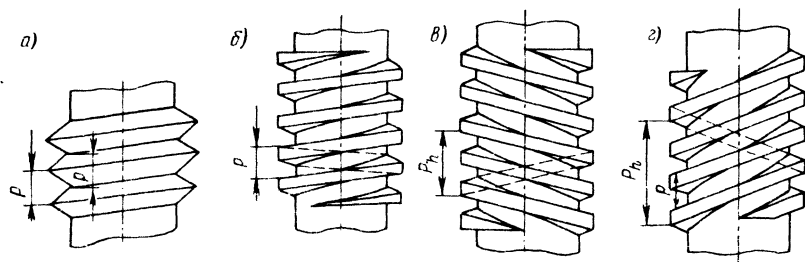


Рис. 156

вается правой (рис. 155). На рис. 154 показана левая винтовая линия.

Если к образующей цилиндра приставить плоскую фигуру (треугольник, прямоугольник, трапецию), как показано на рис. 155, затем перемещать ее так, чтобы вершины двигались по винтовым линиям, а сама она прилегала к поверхности цилиндра, оставаясь в плоскости его осевого сечения, то стороны фигуры опишут в пространстве *винтовые поверхности*.

Цилиндрическое тело (стержень), на котором образованы винтовые поверхности, называется винтом.

Часть тела, ограниченная винтовыми поверхностями, называется *резьбой*. В соответствии с формой плоской фигуры, образующей ее профиль, различают винты с *треугольной* (рис. 156, а), *прямоугольной* (рис. 156, б), *трапецидальной резьбой* и т. д. Профиль резьбы выбирается в зависимости от назначения резьбового соединения.

Один оборот резьбы на теле цилиндра называется *витком* (ниткой). Если между витками одной винтовой линии нарезать витки еще одной или двух винтовых линий, получится винт с *двухзаходной* (рис. 156, в) или *трехзаходной* (рис. 156, г) резьбой и т. д. Все винты более чем с одним заходом называются *многозаходными*.

Охватывающее винт тело, отверстие которого имеет резьбу, входящую выступами во впадины резьбы винта, называется *гайкой*.

Винтовая резьба может быть правой или левой. Винты с правой резьбой заворачиваются при вращении по часовой стрелке, а вывинчиваются против часовой стрелки.

Шагом резьбы p называется измеренное вдоль образующей цилиндра расстояние между одноименными точками двух соседних витков.

Для многозаходных резьб вводят дополнительное понятие — *ход*, обозначая им продольное перемещение гайки вдоль оси неподвижного винта за один ее оборот.

Между ходом p_h и шагом p существует соотношение

$$p_h = np, \quad (185)$$

где n — число заходов.

Очевидно, что для однозаходной резьбы численные значения шага и хода совпадают.

У резьб различают диаметры: наружный d , внутренний d_1 и средний $d_{cp} = d_2 = (d + d_1)/2$.

Под углом подъема резьбы принято понимать угол подъема винтовой линии на цилиндре с диаметром, равным среднему диаметру d_2 .

Угол подъема резьбы многозаходных винтов (гаек)

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{p_h}{\pi d_2} = \frac{np}{\pi d_2}.$$

Все применяемые в машиностроении резьбы разделяются на *крепёжные* (предназначенные для скрепления деталей), *ходовые* (для передачи движения) и *специальные*.

Самой распространенной крепёжной резьбой в Советском Союзе является *метрическая резьба* (ГОСТ 3150—81, СТ СЭВ 180—75 и СТ СЭВ 181—75). Профиль метрической резьбы — равносторонний треугольник с углом профиля $\alpha = 60^\circ$, с основанием, равным шагу, и с притупленной вершиной (рис. 157, а). Метрические резьбы делятся на резьбы с крупными

и мелкими шагами. Так, на стержне диаметром 24 мм можно нарезать метрическую резьбу с крупным шагом $p = 3$ мм, которая обозначается $M24$, и несколько метрических резьб с мелкими шагами: 2; 1,5; 1 и 0,75 мм, — которым соответствуют обозначения $M24 \times 2$; $M24 \times 1,5$; $M24 \times 1$ и $M24 \times 0,75$. Резьбы с мелкими шагами по сравнению с резьбой с крупным шагом более надежны в отношении самоторможения. Поэтому их следует применять там, где действуют знакопеременные нагрузки или возникают вибрации, а также для тонкостенных деталей.

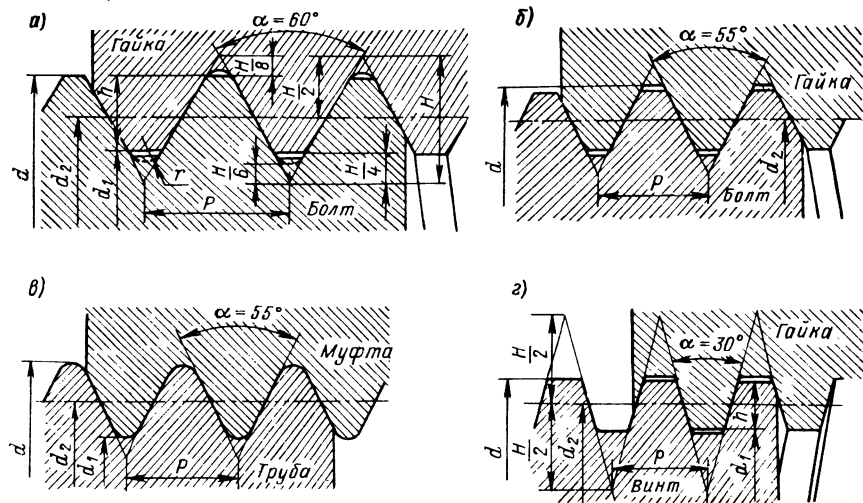


Рис. 157

Из других крепежных резьб встречается дюймовая резьба (рис. 157, б), у которой угол профиля $\alpha = 55^\circ$. Дюймовая резьба применяется только при замене изношенных частей имеющегося старого или импортного оборудования. Использовать ее во вновь изготавливаемых машинах не разрешается. Коническая резьба (ГОСТ 6211—81) создает большую плотность соединения.

К специальным резьбам относится *трубная резьба* треугольного профиля (ГОСТ 6357—81); применяется для соединения труб, арматуры трубопровода и фитингов (рис. 157, в). Пример обозначения трубной резьбы: *Труба 3"*, что означает трубную резьбу на трубе с внутренним диаметром 3 дюйма (около 76 мм).

Для осуществления передачи движения применяется *трапецидальная резьба*. Профиль резьбы — равнобокая трапеция с углом профиля $\alpha = 30^\circ$ (ГОСТ 9484—81); применяется для силовых винтов, передающих движение вдоль оси в обе стороны. Пример обозначения трапецидальной резьбы: *Трап. 40 × 8 ГОСТ 9484—81* (рис. 157, г).

Упорная резьба (ГОСТ 10177—82), СТ СЭВ 1781—79 предназначена для винтов с большим односторонним усилием (домкраты, тиски).

Для грузовых винтов (домкратов, прессов и т. п.) применяется также прямоугольная резьба (см. рис. 153).

Конструкции резьбовых соединений. Резьбовые соединения осуществляются с помощью резьбовых крепежных изделий, которые чрезвычайно разнообразны по своей форме и назначению.

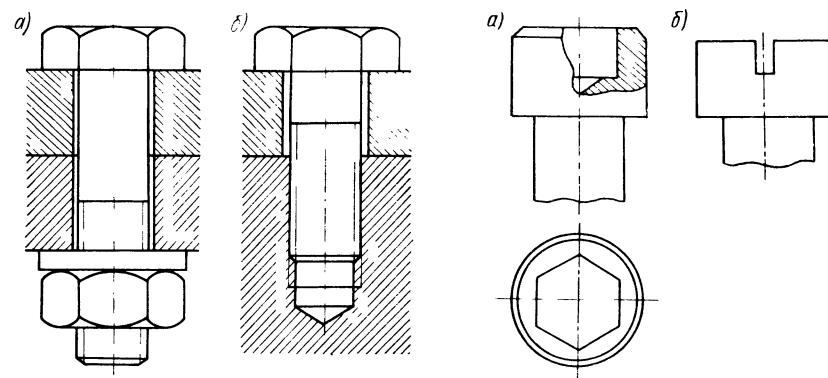


Рис. 158

Рис. 159

К ним относятся болты, винты, шпильки, гайки, детали трубопроводов.

Болтом называется цилиндрический стержень с резьбой, имеющий головку. За головку болт вращают или, наоборот, удерживают от вращения при соединении деталей. Нарезной частью стержня болт ввинчивается в гайку.

Другой тип резьбового крепежного изделия — *винт* — отличается от болта только тем, что ввинчивается не в гайку, в резьбовое отверстие одной из соединяемых деталей.

На рис. 158, а показано болтовое соединение двух деталей, состоящее из болта, гайки и шайбы. Головка болта, как правило, имеет форму шестигранной призмы. Стержень болта входит в отверстие соединяемых деталей с зазором. На стержень болта навинчивается гайка. Между гайкой и соединяемыми деталями во избежание повреждения детали вращающейся гайкой ставят кольцевую пластинку — *шайбу*. При монтаже соединения болт удерживается от вращения гаечным ключом, надетым на головку. При вращении гайки другим ключом соединяемые детали сжимаются между гайкой и головкой болта. Болтовое соединение применяется для соединения деталей относительно небольшой толщины и при наличии места для размещения головки болта и гайки.

Соединение винтом, ввинчиваемым в одну из скрепляемых деталей, изображено на рис. 158, б.

В зависимости от размеров и назначения болты и винты имеют различные головки: шестигранные (рис. 158); цилиндрические с внутренним шестигранником (рис. 159, а); цилиндрические со шлицем (прорезью) под отвертку (рис. 159, б) и др.

Соединение деталей посредством шпильки представлено на рис. 160, а. Шпилька — цилиндрический стержень, имеющий винтовую нарезку с обоих концов. При соединении шпилькой ее ввертывают в одну из скрепляемых деталей, а на другой конец шпильки навинчивают гайку.

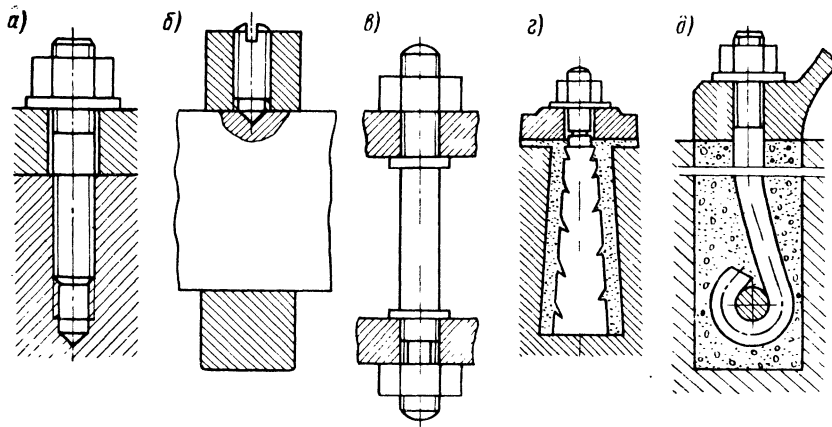


Рис. 160

Шпильчатое соединение применяют взамен болтового в следующих случаях:

когда болты нельзя пропустить через соединяемые детали либо потому, что они имеют чрезмерно большую суммарную толщину, либо потому, что болт при соединении деталей пересекает и другие детали;

если механизм подвергается частой разборке и многократное ввертывание винта в одну из соединяемых деталей, изготовленную из чугуна или легких сплавов, приводит к повышенному износу или разрушению резьбы.

Для закрепления на валу установочных колец, небольших шкивов, указателей и т. п., для предотвращения смещения вдоль оси вала зубчатых колес, шкивов и других деталей при относительно небольших осевых нагрузках используют *установочные винты* (рис. 160, б).

Кроме стандартных крепежных винтов в машиностроении сравнительно широко применяют специальные винты и гайки. Так, для сохранения постоянного расстояния между соединяемыми деталями служат *распорные болты* (рис. 160, в).

Для соединения машин с фундаментами служат *фундаментные болты*. Пирамидальный стержень болта завершен или изготов-

лен в форме скрученной винтом или изогнутой стальной полосы (рис. 160, г и д). Болт закладывают в отверстие фундамента и заливают цементным раствором

Гайки имеют различную форму. большей частью их изготовляют шестигранными. Размеры гаек согласуют с размерами болтов.

Несмотря на то что все крепежные резьбы удовлетворяют условию самоторможения при ударах и сотрясениях, испытываемых соединением, возможны случаи самоотвинчивания. Во избежание самоотвинчивания применяют гаечные замки. Рассмотрим некоторые из них.

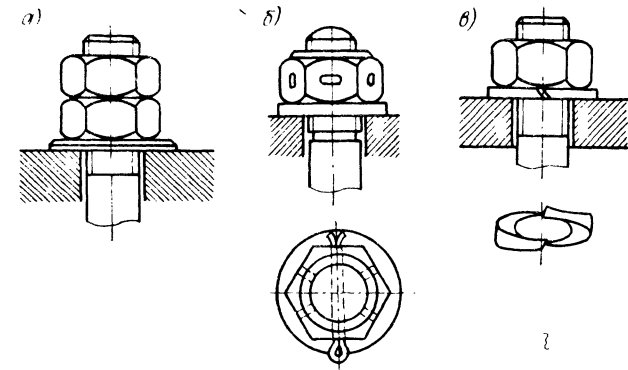


Рис. 161

Контргайка (рис. 161, а) — вторая гайка, навертываемая поверх основной гайки и создающая в резьбе дополнительную силу трения.

Шплинт — проволока полукруглого поперечного сечения, сложенная вдвое и пропущенная через гайку и болт (рис. 161, б) или только через болт. Концы шплинта разводят (отгибают).

Пружинная шайба (рис. 161, в) — специальная шайба, подкладываемая под гайку. Отвертыванию гайки препятствуют острые края концов шайбы, упирающиеся в торец гайки и в прижимаемую деталь. Кроме того, при ослаблении осевой силы в болте сила упругости шайбы поддерживает соединения в напряженном состоянии и препятствует самоотвинчиванию гайки.

§ 89. Расчет резьбовых соединений

Крепежные резьбовые детали изготовляют из углеродистых сталей Ст3 и Ст4, а также марок 10, 20, 30, 35. Резьбовые детали из этого материала можно изготовлять холодной штамповкой с последующей нарезкой или накаткой резьбы. Для ответственных резьбовых деталей применяют легированные стали марок 35Х, 30ХГСА.

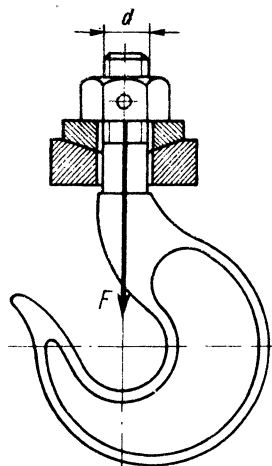


Рис. 162

Для болтов, винтов и шпилек из углеродистых и легированных сталей по ГОСТ 1759—70* предусмотрены 12 классов прочности. Они обозначаются двумя цифрами: 3.6; 4.6; 4.8; 5.6; 5.8; 6.6; 6.8; 6.9; 8.8; 10.9; 12.9; 14.9. В табл. 6 приведены механические свойства наиболее распространенных сталей для резьбовых деталей.

Все стандартные резьбы изготавливают равнопрочными на разрыв стержня, срез и смятие витков, поэтому при расчете на прочность определяют требуемый диаметр резьбового стержня.

Расчет незатянутых резьбовых соединений. Характерным примером такого соединения является резьбовой конец грузового крюка (рис. 162). В этом соединении гайка свободно навинчивается на стержень и фиксируется шплинтом. Стержень болта нагружается при приложении внешней нагрузки и работает только на растяжение.

Опасным в резьбовом стержне является сечение нарезанной части с расчетным диаметром $d_p \approx d - 0,94p$, где d и p — наружный диаметр и шаг резьбы.

Условие прочности для этого случая

$$\sigma_p = \frac{4F}{\pi d_p^2} \leq [\sigma_p], \quad (186)$$

где F — осевая нагрузка; d_p — расчетный диаметр резьбы; $[\sigma_p]$ — допускаемое напряжение на растяжение. Для болтов из углеродистой стали $[\sigma_p] = 0,6\sigma_T$ (табл. 6).

Из формулы (186) определяем расчетный диаметр резьбы

$$d_p \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi [\sigma_p]}}. \quad (187)$$

Зная d_p , остальные размеры резьбы можно определить по ГОСТу.

Расчет затянутого резьбового соединения, не нагруженного внешней осевой силой. Примером такого соединения может служить крепление люков, крышек, к герметичности которых не предъявляются особые требования. Другим примером является клеммовое соединение (рис. 163).

Под действием момента, создаваемого силой, приложенной к рукоятке ключа, резьбовое соединение получает затяжку. Стержень с резьбой растягивается силой затяжки и скручивается моментом в резьбе. При одновременно действующих осевой силе и скручивающем моменте, возникающем в процессе затяжки болта, болт следует рассчитывать на прочность по приведенному

(эквивалентному) напряжению (см. § 51). В среднем для метрических резьб приведенное напряжение больше напряжения растяжения σ_p примерно на 30 %.

Таким образом, вместо расчета резьбового соединения на растяжение и кручение можно произвести расчет только на растяжение, принимая не заданную силу затяжки, а в 1,3 раза больше, т. е.

$$\sigma_p = \frac{4F_0}{\pi d_p^2} \leq [\sigma_p], \quad (188)$$

где F_0 — расчетная (эквивалентная) нагрузка,

$$F_0 = 1,3F. \quad (189)$$

Из условия прочности определяется расчетный диаметр резьбы по формуле

$$d_p \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 1,3F}{\pi [\sigma_p]}} = \sqrt{\frac{5,2F}{\pi [\sigma_p]}}. \quad (190)$$

Расчет напряженного болтового соединения, к которому после затяжки приложена внешняя осевая нагрузка. Рассматриваемый случай расчета характерен для большинства соединений (крепление крышек, фланцев). Такие соединения должны быть предельно плотными (крышки цилиндров), должны не допускать раскрытия стыка — появления зазора между соединяемыми деталями при приложении внешней нагрузки. Для выполнения данного требования предварительная затяжка болтов должна быть такой, чтобы после приложения рабочей нагрузки не произошло раскрытия стыка или нарушения плотности.

В зависимости от упругих свойств болтов и стягиваемых деталей, а также от назначения соединения расчетную осевую нагрузку F_0 с учетом влияния кручения при затяжке принимают в пределах $F_0 = (1,4 \div 1,8) F$.

Приняв $F_0 = 1,8F$, получим следующую формулу для определения расчетного диаметра резьбы:

$$d_p = \sqrt{\frac{7,2F}{\pi [\sigma_p]}}. \quad (191)$$

Резьбовое соединение, несущее поперечную нагрузку. На рис. 164

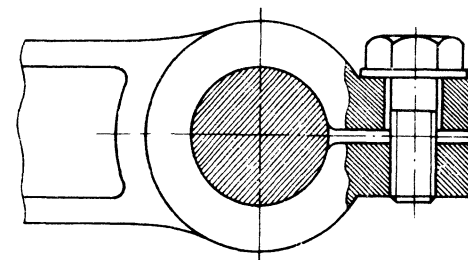


Рис. 163

Т а б л и ц а 6. Механические свойства сталей для резьбовых деталей

Класс прочности	Предел прочности σ_B , МПа	Предел текучести σ_T , МПа	Марка стали
3.6	300—490	200	Ст3; 10
4.6	400—550	240	20
5.6	500—700	300	30; 35
8.8	800—1000	640	35Х; 38ХА; 45Г

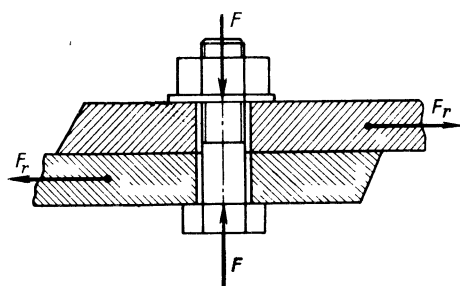


Рис. 164

показано соединение деталей болтом, вставленным в отверстие с зазором. Поперечная нагрузка F_r , стремящаяся сдвинуть детали относительно друг друга, должна восприниматься силой трения R_f на стыке соединяемых деталей. При этом необходимо затянуть болт с такой силой F_r , чтобы вызванная ею сила трения R_f на стыке деталей

была несколько больше силы F_r , стремящейся сдвинуть детали относительно друг друга:

$$R_f = fF_r \approx (1,2 \div 1,3) F_r$$

откуда

$$F_r \geq (1,2 \div 1,3) F/f$$

В рассматриваемом случае также происходит растяжение и скручивание болта при его затяжке, поэтому при z болтах

$$d_p \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 1,3 \cdot 1,2 F}{\pi f z [\sigma_p]}} \approx 1,4 \sqrt{\frac{F}{f z [\sigma_p]}} \quad (192)$$

После того как расчетом определен внутренний диаметр болта, по таблицам стандартных резьб выбирают ближайшее большее его значение и соответствующий ему наружный диаметр резьбы

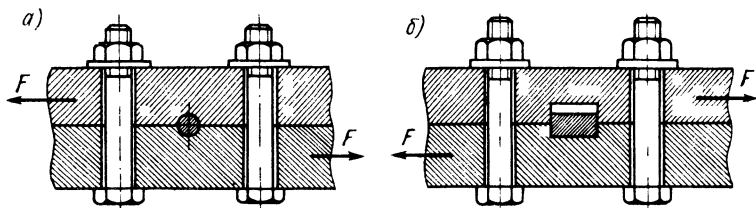


Рис. 165

Условия работы затянутого болта под действием внешней нагрузки, перпендикулярной к его оси, неблагоприятны. Поэтому стремятся разгрузить болт от поперечных нагрузок, устанавливая в соединяемых деталях шпонки круглого (рис. 165, а) или прямоугольного сечения (рис. 165, б).

Допускаемое напряжение $[\sigma_p]$ определяют следующим образом:

$$[\sigma_p] = \sigma_T / [n_T],$$

где σ_T выбирают по табл. 6, а допускаемый коэффициент запаса прочности $[n_T]$ выбирают по табл. 7 в зависимости от диаметра резьбы.

Таблица 7. Коэффициенты запаса прочности для резьбовых соединений

	Постоянная нагрузка			Переменная нагрузка		
	Диаметр резьбы d , мм			Диаметр резьбы d , мм		
Сталь	от 6 до 16	св. 16 до 30	св. 30 до 60	от 6 до 16	св. 16 до 30	св. 30 до 60
	5—4	4—2,5	2,5—1,6	10—6,5	6,5	6,5—5
	5	3,3	3,3	7,5—5	5	5—4
Углеродистая	5—4	4—2,5	2,5—1,6	10—6,5	6,5	6,5—5
Легированная	6,6—5	5—3,3	3,3	7,5—5	5	5—4

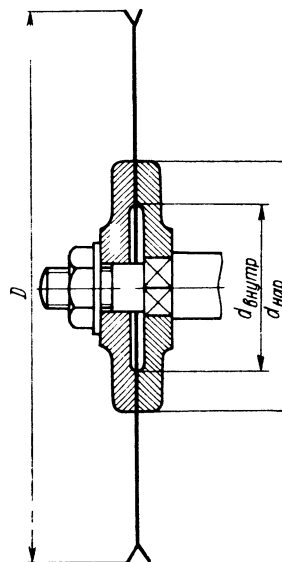


Рис. 166

Болты, подвергающиеся затяжке, должны быть диаметром больше 8 мм, так как при меньшем диаметре их легко разрушить при сборке.

Пример 32. Круглая пила диаметром $D = 500$ мм (рис. 166) закреплена на валу между двумя шайбами и удерживается от проворачивания за счет сил трения, возникновение которых обеспечивается затягиванием гайки на конце вала. Определить диаметр нарезанной части вала, если коэффициент трения между пилой и шайбами $f = 0,1$; внутренний диаметр шайбы $d_{\text{внутр}} = 100$ мм; наружный диаметр $d_{\text{нар}} = 140$ мм. Сопротивление резанию $F = 350$ Н.

Решение 1. Для надежной передачи пиле вращения необходимо, чтобы момент трения был больше момента сил резания на 20—25 %, т. е.

$$M_{\text{тр}} \geq 1,25 M_{\text{рез}}$$

или

$$R_f d_{\text{ср}} / 2 \geq 1,25 F D / 2,$$

но

$$d_{\text{ср}} = (d_{\text{внутр}} + d_{\text{нар}}) / 2 = (0,1 + 0,14) / 2 = 0,12 \text{ м},$$

тогда

$$R_f \geq \frac{1,25 F D}{d_{\text{ср}}} = \frac{1,25 \cdot 350 \cdot 0,5 / 2}{0,12 / 2} = 1823 \text{ Н}.$$

2. Сила, с которой должна быть зажата пила,

$$F_1 = R_f / f = 1823 / 0,1 = 18230 \text{ Н}.$$

По этой силе рассчитывается диаметр нарезанной части вала пилы.

3. В рассматриваемом случае нарезанная часть вала и гайки работают в условиях напряженного резьбового соединения с затяжкой без внешней осевой нагрузки. Принимаем материал вала сталь 35, класс прочности 5.6 (см. табл. 6),

$\sigma_T = 300$ МПа. Для выбора допускаемого напряжения предварительно задаемся диаметром резьбы $d = 20$ мм. По этому диаметру для углеродистой стали по табл. 7 выбираем коэффициент запаса прочности $[n_T] = 4$, тогда

$$[\sigma_p] = \sigma_T / [n_T] = 300 / 4 = 75 \text{ МПа.}$$

Применив формулу (190), определяем расчетный диаметр резьбы

$$d_p = \sqrt{\frac{5,2F_1}{\pi [\sigma_p]}} = \sqrt{\frac{5,2 \cdot 18 \cdot 300}{3,14 \cdot 75}} = 20,1 \text{ мм.}$$

По ГОСТ 9150—81 и СТ СЭВ 181—75 и найденному d_p принимаем резьбу М24, шаг $p = 3$ мм. Тогда расчетный диаметр резьбы

$$d_p = d - 0,94p = 24 - 0,94 \cdot 3 = 21,18 \text{ мм,}$$

что несколько больше требуемого расчетного диаметра. Следовательно, прочность резьбы гарантирована.

ГЛАВА XVIII. ВИНТОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ

§ 90. Общие сведения.

Кинематические и силовые соотношения

Передача винт—гайка предназначена для преобразования вращательного движения одного из элементов пары в поступательное перемещение другого. При этом как винт, так и гайка могут иметь либо одно из названных движений, либо оба движения вместе.

К достоинствам винтовых механизмов относятся: простота получения медленного поступательного движения и возможность большого выигрыша в силе, плавность, бесшумность, способность воспринимать большие нагрузки, возможность осуществления перемещений с высокой точностью, простота конструкций.

Недостатками винтовых механизмов являются: большие потери на трение и, как следствие, низкий КПД.

Винты в винтовых механизмах в зависимости от назначения разделяют на грузовые (домкраты, прессы) и ходовые (служащие для точной передачи движения в станках, измерительных устройствах). Определим кинематические соотношения в винтовой паре. На рис. 167 показана схема винтового механизма. Винт вращается вокруг продольной оси и перемещается вдоль нее. Поступательное перемещение винта s определяется ходом резьбы p_h и углом поворота φ

$$s = p_h \frac{\varphi}{2\pi}.$$

Скорость поступательного движения $v = ds/dt$ и угловая скорость вращения винта $\omega = d\varphi/dt$ равны производным от соответствующих перемещений по времени. Отсюда находим

$$v = p_h \frac{\omega}{2\pi},$$

где v — в мм/с; ω — в рад/с.

Отношение линейного перемещения точки K обода колеса (рукоятки) (рис. 167) за один полный оборот πD к ходу резьбы p_h условно называют передаточным отношением винтовой пары $i = \pi D / p_h$. Например, для трапецеидальной резьбы *Трап. 50×3* ГОСТ 9484—81 ход резьбы $p_h = 3$ мм. При диаметре штурвала $D = 600$ мм условное передаточное отношение

$$i = \pi D / p_h = 3,14 \cdot 600 / 3 = 628.$$

Рассмотрим силовые соотношения в винтовой кинематической паре с прямоугольной резьбой (рис. 168, а). Обозначим: F — осевая сила, действующая на винт; R_n — реакция со стороны гайки на нарезку винта; R_f (по касательной к поверхности нарезки) — сила трения. Развернем один виток нарезки на плоскость (рис. 168).

Напишем уравнения равновесия:

$$1. \sum F_y = 0; F - R_n \cos \psi + R_f \sin \psi = 0. \quad (192a)$$

Известно, что $R_f = f R_n$, где $f = \tan \rho = \sin \rho / \cos \rho$; ρ — угол трения.

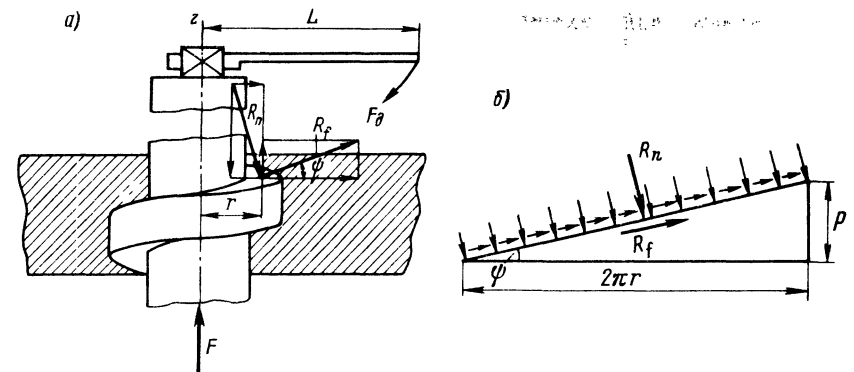


Рис. 168

Решая уравнение (а), получим:

$$R_n = \frac{F \cos \rho}{\cos (\varphi + \rho)}; \quad R_f = \frac{F \sin \rho}{\cos (\varphi + \rho)}.$$

$$2. \sum M_y = 0; F_n L - (R_n \sin \psi) r - (R_f \cos \psi) r = 0. \quad (192b)$$

Подставив значения R_n и R_f , получим

$$F_{дL} = r \left[\frac{F \cos \rho \sin \psi}{\cos(\psi + \rho)} + \frac{F \sin \rho \cos \psi}{\cos(\psi + \rho)} \right],$$

откуда

$$M_y = F_{дL} = rF \operatorname{tg}(\psi + \rho), \quad (193)$$

где r — средний радиус нарезки винта; $F_{д}$ — движущая сила, приложенная к рукоятке.

Коэффициент полезного действия винтовой пары $\eta = W_{п}/W_{в}$.
Для одного витка

$$W_{п} = Fp_h = F2\pi r \operatorname{tg} \psi;$$

$$W_{в} = F_{д}2\pi L,$$

тогда

$$\eta = \frac{F2\pi r \operatorname{tg} \psi}{F_{д}2\pi L}.$$

Сокращая на 2π и подставляя значение момента $F_{дL}$ из формулы (193), получим

$$\eta = \frac{Fr \operatorname{tg} \psi}{Fr \operatorname{tg}(\psi + \rho)} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg}(\psi + \rho)}. \quad (194)$$

Результаты не изменятся, если сделать неподвижной гайку и вращать винт. КПД зависит от соотношения углов ψ и ρ : с увеличением ψ КПД возрастает, достигая максимума при $\psi = 45^\circ - \rho/2$.

Если винтовой механизм обладает свойством самоторможения, то $\psi \leq \rho$ и КПД меньше 50 %.

Самотормозящие винтовые пары применяются довольно часто, так как они гарантируют отсутствие движения под действием осевой силы. Например, в самотормозящих грузовых винтах (домкраты) поднятый груз не будет самопроизвольно опускаться.

§ 91. Грузовой винтовой механизм

Примером конструкции грузового винтового механизма может служить домкрат (рис. 169, а). Гайка запрессована в чугунный корпус. Винт вращается и перемещается поступательно. Вращение винта обеспечивается силой одного или двух рабочих. Рукоятка, к которой прикладывается сила, проходит через отверстие в головке винта. На головке укреплен чашка, упирающаяся в груз. Для уменьшения трения между головкой винта и чашкой по кольцевой опорной поверхности уменьшают радиус опорной поверхности чашки или заменяют трение скольжения трением качения, вводя упорный шарикоподшипник (рис. 169, б). На конце винта укреплен шайба, препятствующая полному вывинчиванию винта из гайки.

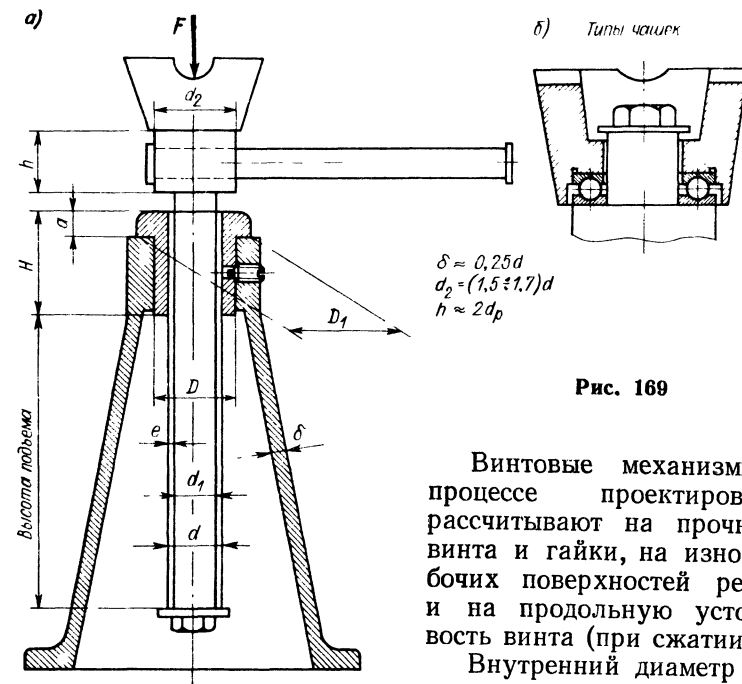


Рис. 169

Винтовые механизмы в процессе проектирования рассчитывают на прочность винта и гайки, на износ рабочих поверхностей резьбы и на продольную устойчивость винта (при сжатии).

Внутренний диаметр винта домкрата определяется из условия прочности

$$d_1 = \sqrt{\frac{4\beta F}{\pi [\sigma_{сж}]}} \quad (195)$$

где $\beta = 1,25 \div 1,3$.

По значению d_1 выбирают ближайший больший стандартный размер резьбы.

Винтовые передачи чаще всего выходят из строя вследствие износа скользящих друг по другу поверхностей витков резьбы.

Износостойкость винтовой передачи зависит от среднего давления на поверхностях витков, поэтому оно не должно превышать допустимого

$$p_{ср} = \frac{4F}{\pi (d^2 - d_1^2) z} \leq [p_{изн}], \quad (196)$$

где $(\pi/4)(d^2 - d_1^2)$ — кольцевая рабочая поверхность одного витка; z — число витков гайки; F — осевая сила.

Допускаемое давление $[p_{изн}]$ в резьбе для пары сталь—чугун 6—10 МПа, для пары сталь—бронза 8—15 МПа.

Высоту гайки определяют из расчета на износостойкость согласно условию (196). Определив число витков гайки

$$z \geq \frac{4F}{\pi (d^2 - d_1^2) [p_{изн}]},$$

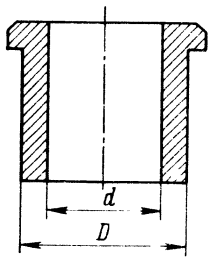


Рис. 170

находят высоту гайки

$$H = pz, \quad (197)$$

где p — шаг резьбы.

Иногда этот расчет называют также расчетом на невыдавливание смазки.

По исследованиям Н. Е. Жуковского о распределении нагрузки на витки гайки число витков гайки не должно превышать 10, т. е. $z \leq 10$.

Кроме того, гайку рассчитывают на растяжение по кольцевому сечению (рис. 170)

$$\sigma_p = \frac{\beta F}{\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)} \leq [\sigma_p]. \quad (198)$$

Помимо растяжения происходит кручение тела гайки, его приближенно учитывают, вводя коэффициент β .

Пример 33. Рассчитать винтовой механизм домкрата (рис. 169, а) грузоподъемностью $F = 100$ кН с высотой подъема $l_0 = 0,5$ м.

Решение 1. Предварительно определим внутренний диаметр винта из условия прочности на сжатие (с учетом кручения).

Для стали Ст5 $[\sigma_{сж}] = 80$ МПа

$$d_1 = \sqrt{\frac{4\beta F}{\pi[\sigma_{сж}]} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,25 \cdot 100 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 80}} = 44,5 \text{ мм.}}$$

2. По ГОСТ 9484—81 находим резьбу с ближайшим большим d_1 : $d = 60$ мм; $d_1 = 51$ мм; $d_2 = 56$ мм; $p = 8$ мм.

3. Определим необходимую высоту гайки из расчета резьбы на износостойкость

$$z \geq \frac{4F}{\pi(d^2 - d_1^2)[p]}.$$

Примем для пары стальной винт — гайка из бронзы БрОЦС5—5—5 допускаемое давление $[p] = 12$ МПа. Тогда

$$z = \frac{4 \cdot 100 \cdot 10^3}{3,14(60^2 - 51^2)12} \approx 10.$$

При отношении свободной длины винта l к внутреннему диаметру резьбы d_1 больше 10 следует произвести проверку винта на устойчивость.

ГЛАВА XIX. ПЕРЕДАЧИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 92. Классификация передач и их назначение

Наиболее распространенными являются передачи вращательного движения. Это объясняется существенным преимуществом вращательного движения по сравнению с движением возвратно-поступательным. В последнем случае имеют место потери времени на холостые ходы (вперед — рабочий ход, назад — холо-

стой), а также большие динамические нагрузки, связанные с изменениями направления движения, что ограничивает увеличение рабочих скоростей машин.

Нецелесообразность, а иногда невозможность прямого соединения двигателя и машины объясняется следующими факторами: несовпадением их скоростей (двигатели обычно имеют большие угловые скорости, что позволяет делать их компактными, в рабочих же органах машин-орудий часто требуется большой момент при относительно небольших скоростях);

необходимостью изменять скорость машины при постоянной скорости выбранного двигателя;

необходимостью в ряде случаев одним двигателем приводить в движение несколько механизмов.

В современных машинах применяют механические, гидравлические, пневматические и электрические передачи. В данном разделе рассматриваются только детали механических передач.

Механические передачи классифицируют по следующим признакам:

по физическим условиям передачи движения: трением (фрикционные, ременные, канатные); сцеплением одного звена с другим (зубчатые, червячные, цепные);

по способу соединения ведущего и ведомого звеньев: передачи с непосредственным касанием ведущего и ведомого звеньев (рис. 171, а) — фрикционные, зубчатые, червячные; передачи с промежуточным звеном, соединяющим ведущее и ведомое звенья (рис. 171, б) — ременные, канатные, цепные.

В каждом передаточном механизме различают два основных звена: ведущее и ведомое. Между ведущим и ведомым звеньями в многоступенчатых передачах размещаются промежуточные звенья.

§ 93. Кинематические и силовые соотношения в передаточных механизмах

Окружная скорость ведущего звена (рис. 171)

$$v_1 = \omega_1 D_1 / 2.$$

Окружная скорость ведомого звена

$$v_2 = \omega_2 D_2 / 2.$$

Окружные скорости обоих звеньев при отсутствии проскальзывания должны быть равны $v_1 = v_2$, т. е.

$$\omega_1 D_1 / 2 = \omega_2 D_2 / 2 \text{ или } \pi D_1 n_1 / 60 = \pi D_2 n_2 / 60,$$

отсюда

$$\omega_1 / \omega_2 = n_1 / n_2 = D_2 / D_1,$$

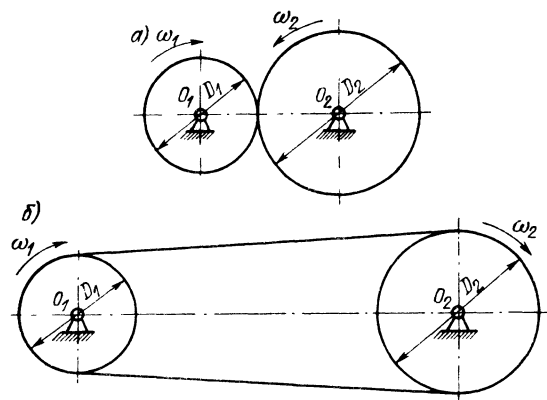


Рис. 171

где ω_1 , ω_2 и n_1 , n_2 — угловая скорость (рад/с) и частота вращения (об/м) ведущего и ведомого звеньев; D_1 и D_2 — диаметры ведущего и ведомого звеньев.

Отношение угловой скорости ведущего звена к угловой скорости ведомого или частоты вращения ведущего звена к частоте вращения ведомого называется *передаточным отношением*

$$i = \omega_1/\omega_2 = n_1/n_2 = D_2/D_1. \quad (199)$$

Если мощность P_1 на ведущем валу, то мощность P_2 на ведомом валу

$$P_2 = P_1 \eta, \quad (200)$$

где η — КПД передачи. Известно, что мощность $P = M\omega$, где M — вращающий момент; ω — угловая скорость. Тогда можно написать $M_2\omega_2 = M_1\omega_1\eta$, откуда

$$M_2 = M_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} \eta = M_1 i \eta. \quad (201)$$

Значения КПД отдельных видов передачи приведены в справочной литературе.

В многоступенчатой передаче общее передаточное отношение определяется по формуле

$$i_{1n} = i_1 i_2 i_3 \dots i_n; \quad (202)$$

общее значение КПД (при последовательном соединении элементов передачи)

$$\eta_{1n} = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n. \quad (203)$$

Пример 34. Определить моменты и мощности на каждом из валов двухступенчатой передачи, изображенной на рис. 172.

КПД каждой передачи $\eta = 0,98$; КПД, учитывающий потери в опорах одного вала, $\eta_{оп} = 0,99$; полезная мощность на первом валу $P_1 = 10$ кВт; частота

вращения первого вала $n_1 = 100$ об/мин; передаточные отношения $i_{12} = 2$; $i_{23} = 2,5$.
Решение. Определяем угловые скорости и частоты вращения валов:

$$\begin{aligned} n_1 &= 100 \text{ об/мин}; \\ \omega_1 &= \pi n_1 / 30 = 0,105 n_1 = 10,5 \text{ рад/с}; \\ n_2 &= \frac{n_1}{i_{12}} = \frac{100}{2} = 50 \text{ об/мин}; \\ \omega_2 &= 5,25 \text{ рад/с}; \\ n_3 &= \frac{n_1}{i_{13}} = \frac{n_1}{i_{12} i_{23}} = \frac{100}{2 \cdot 2,5} = 20 \text{ об/мин}; \\ \omega_3 &= 2,1 \text{ рад/с}. \end{aligned}$$

КПД передачи от первого вала ко второму и третьему:

$$\begin{aligned} \eta_{12} &= 0,99 \cdot 0,98 = 0,97; \\ \eta_{13} &= 0,99^2 \cdot 0,98^2 = 0,958. \end{aligned}$$

Мощности, подводимые ко второму и третьему валам:

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 \eta_{12} = 10 \cdot 0,97 = 9,7 \text{ кВт}; \\ P_3 &= P_1 \eta_{13} = 10 \cdot 0,958 = 9,58 \text{ кВт}. \end{aligned}$$

Моменты на валах:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{P_1}{\omega_1} = \frac{10 \cdot 10^3}{10,5} = 953 \text{ Н}\cdot\text{м}; \\ M_2 &= \frac{P_2}{\omega_2} = \frac{9,7 \cdot 10^3}{5,25} = 1850 \text{ Н}\cdot\text{м}; \\ M_3 &= \frac{P_3}{\omega_3} = \frac{9,58 \cdot 10^3}{2,1} = 4560 \text{ Н}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

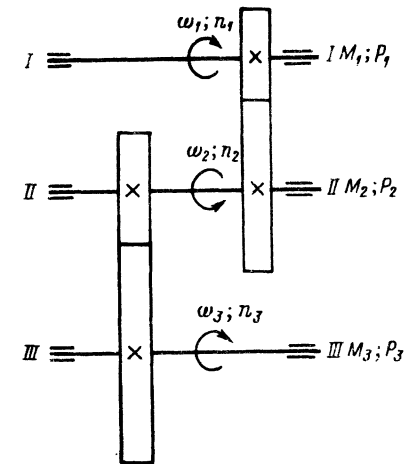


Рис. 172

ГЛАВА XX. ФРИКЦИОННЫЕ ПЕРЕДАЧИ

§ 94. Назначение и особенности фрикционных передач

Фрикционная передача основана на использовании силы трения R_f , возникающей в месте контакта фрикционных катков 1 и 2 (рис. 173) в результате прижатия их друг к другу силой F_0 и приложения к ведущему катку 1 момента M_1 .

Фрикционные механизмы в зависимости от относительного расположения геометрических осей валов делятся на передачи: с параллельными осями — с цилиндрическими катками (рис. 174, а), с коническими катками (рис. 174, б);

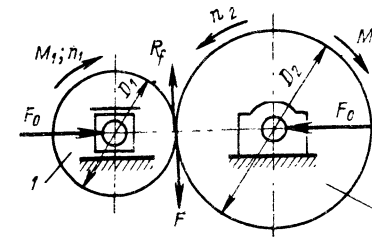


Рис. 173

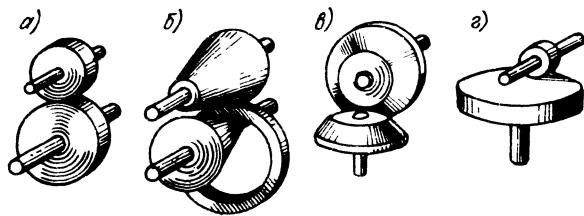


Рис. 174

с пересекающимися осями — с коническими катками (рис. 174, в), с цилиндрическими катками — лобовая передача (рис. 174, г).

Достоинства фрикционных передач: простота конструкции; плавность, бесшумность работы; возможность осуществления передач с плавным (бесступенчатым) изменением передаточного отношения, возможность проскальзывания фрикционных катков при перегрузках, что предохраняет от поломок детали приво-димого в движение механизма.

Недостатки фрикционных передач: небольшая передаваемая мощность (для цилиндрической фрикционной передачи обычно до 10 кВт); большая нагрузка на валы и опоры валов; непостоянство передаточного отношения, являющееся следствием вза-имного проскальзывания катков; повышенный износ катков, вследствие которого передача начинает работать со значитель-ным шумом; сравнительно низкий к. п. д. (для передач обычного типа $\eta = 0,8 \div 0,9$).

§ 95. Кинематические соотношения во фрикционных передачах

При отсутствии проскальзывания между ведущим и ведомым звеньями передаточное отношение передачи (см. рис. 173)

$$i = \omega_1 / \omega_2 = n_1 / n_2 = D_2 / D_1. \quad (205a)$$

Однако при работе фрикционной передачи всегда имеется проскальзывание, выражающееся в некотором уменьшении ско-рости ведомого катка по сравнению со значением ω_2 , полученным из соотношения (205a).

Происходящее за счет проскальзывания уменьшение угловой скорости ω_2 учитывается коэффициент скольжения ε :

$$\varepsilon = \frac{\omega'_2 - \omega_2}{\omega'_2} = \frac{n'_2 - n_2}{n'_2}. \quad (204)$$

С учетом скольжения передаточное отношение принимает вид

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{D_2}{D_1(1 - \varepsilon)}. \quad (205)$$

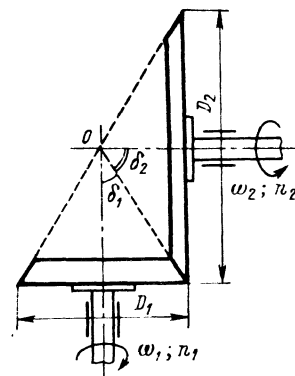


Рис. 175

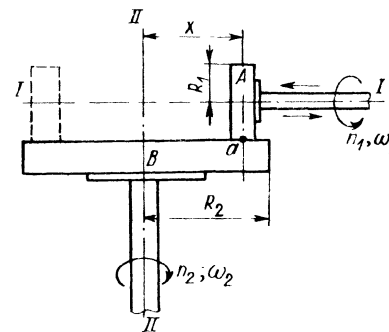


Рис. 176

Коэффициент скольжения зависит от конструкции передачи, нагрузки, а также других факторов и колеблется в пределах от 0,005 до 0,03.

Фрикционная передача с коническими катками применяется при пересекающихся осях (рис. 175). Передаточное отношение (при отсутствии скольжения)

$$i = \omega_1 / \omega_2 = n_1 / n_2 = D_2 / D_1.$$

Так как для передачи при $\delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$ справедливы соотно-шения:

$$D_1 / D_2 = \operatorname{tg} \delta_1 \text{ и } D_2 / D_1 = \operatorname{tg} \delta_2,$$

то

$$i = \omega_1 / \omega_2 = D_2 / D_1 = \operatorname{tg} \delta_2 = 1 / \operatorname{tg} \delta_1 = \operatorname{ctg} \delta_1. \quad (206)$$

§ 96. Понятие о вариаторах

Фрикционные передачи могут осуществляться с постоянным или переменным передаточным отношением. Фрикционные пере-дачи, обеспечивающие бесступенчатое изменение угловой скорости ведомого вала, называют *вариаторами* (рис. 176). Широкое рас-пространение получили фрикционные вариаторы, применяемые в станках, кузнечно-прессовом оборудовании, в механизмах приборов и т. д.

ГЛАВА XXI. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

§ 97. Виды зубчатых передач. Передаточное отношение

Зубчатые передачи наиболее распространены в современном машиностроении. Основные их достоинства — высокий КПД, компактность, надежность работы, простота эксплуатации, по-стоянство передаточного отношения, большой диапазон переда-ваемых мощностей (от тысячных долей до десятков тысяч кило-

ватт). К основным недостаткам зубчатых передач относятся сравнительная сложность их изготовления (необходимость в специальном оборудовании и инструментах) и шум при неточном изготовлении и высоких окружных скоростях. При больших расстояниях между осями ведущего и ведомого валов зубчатые передачи получаются громоздкими и применение их в этих случаях неадекватно.

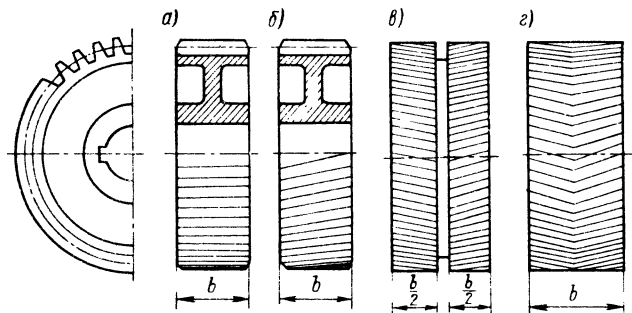


Рис. 177

В зависимости от относительного положения геометрических осей ведущего и ведомого валов различают:

- зубчатые передачи с цилиндрическими колесами, применяемые при параллельных осях валов;
- передачи с коническими колесами, применяемые при пересекающихся осях валов;
- передачи с винтовыми и гипоидными колесами и червячные — при скрещивающихся в пространстве осях валов.

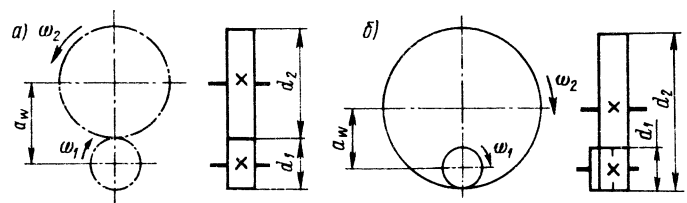


Рис. 178

Наибольшее распространение имеют передачи с цилиндрическими зубчатыми колесами.

По расположению зубьев относительно образующей цилиндрические зубчатые колеса бывают: прямозубые (рис. 177, а), косозубые (рис. 177, б) и шевронные (рис. 177, в, г).

В зависимости от применяемого зуборезного оборудования и инструмента шевронные зубчатые колеса выполняют либо с проточкой (рис. 177, в), либо с жестким углом шеврона (рис. 177, г).

Цилиндрические зубчатые колеса могут быть с *внешним* (рис. 178, а) и *внутренним* зацеплениями (рис. 178, б).

Конические колеса изготавливают с прямыми (рис. 179, а), косыми (рис. 179, б) и криволинейными (рис. 179, в) зубьями.

По конструктивному оформлению различают зубчатые передачи:

открытые, т. е. не заключенные в непроницаемый корпус и подверженные действию пыли и грязи;

закрытые, т. е. размещенные в специальном корпусе, защищенные от проникновения пыли извне и обеспеченные постоянной смазкой из масляной ванны корпуса (окунанием) или смазкой, поступающей на места зацепления зубьев (циркулирующая смазка).

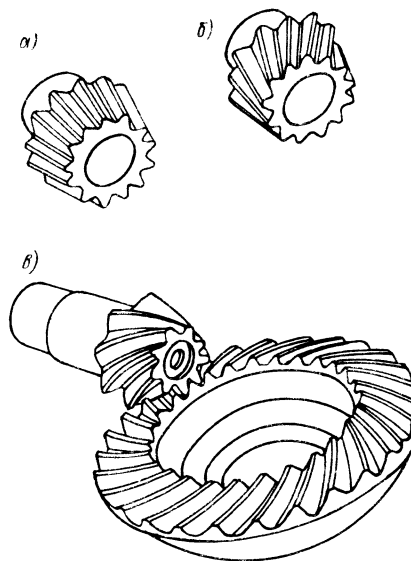


Рис. 179

При недостаточной точности и высокой скорости зубчатая передача работает со значительным шумом, а зубья испытывают дополнительные динамические нагрузки. Поэтому чем больше окружная скорость, тем выше должна быть точность изготовления зубчатых колес.

Рассмотрим кинематику зубчатой передачи. На рис. 178, а, б изображены схемы цилиндрической зубчатой передачи. Зубья одного из колес, насаженного на ведущий вал, входят во впадины парного колеса. Зуб вращающегося ведущего колеса заставляет ведомое колесо повернуться на некоторый угол, после чего в зацепление входит вторая, третья и т. д. пары зубьев. Ведомое колесо приводится таким образом в непрерывное вращение.

Зубчатое колесо передачи с меньшим числом зубьев называется *шестерней*, а с большим — *колесом*.

По ГОСТ 16530—83 передаточным числом зубчатой передачи называется отношение чисел зубьев колеса z_2 к числу зубьев шестерни z_1

$$u = z_2/z_1 \geq 1.$$

При одинаковом числе зубьев зубчатых колес передачи шестерней называется *ведущее зубчатое колесо*, а колесом — *ведомое*. Передаточное число может быть больше или равным единице.

По этому же ГОСТу передаточное отношение зубчатой передачи называется отношением угловых скоростей зубчатых колес

$$i = \pm (\omega_1/\omega_2).$$

Знак плюс (+) указывает одинаковое направление угловых скоростей; знак минус (—) — противоположное направление.

Численное значение отношения угловой скорости шестерни к угловой скорости колеса равно передаточному числу

$$[i] = \omega_1/\omega_2 = z_2/z_1 = u. \quad (208)$$

§ 98. Элементы теории зубчатого зацепления

Кривые, которыми очерчены профили зубьев, должны обеспечивать постоянство передаточного отношения. Для этого необходимо, чтобы выполнялся основной закон зацепления. Он формулируется следующим образом: для сохранения постоянства

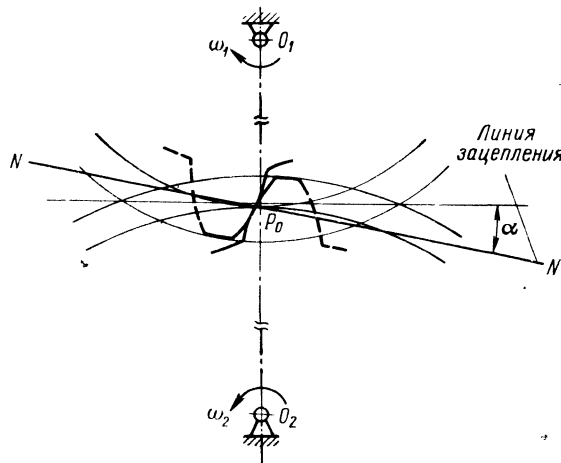


Рис. 180

передаточного отношения необходимо и достаточно, чтобы нормаль NN к профилям в точке их соприкосновения всегда пересекала линию центров O_1O_2 в одной и той же точке P_0 , называемой полюсом зацепления. Эта точка делит линию центров в отношении, равном передаточному числу (рис. 180).

Основному закону зацепления удовлетворяет множество кривых, но практически (за исключением специальных случаев) зубья профилируют по кривой, называемой эвольвентой.

Линия NN , неподвижная относительно O_1O_2 , по которой перемещается точка касания сопряженных профилей, называется линией зацепления. Линия зацепления образует с перпендикуляром к линии O_1O_2 угол α , называемый углом зацепления. В соответствии с принятым в СССР стандартом этот угол равен 20° .

Размеры зубчатой передачи могут быть уменьшены при заданном передаточном отношении путем уменьшения числа зубьев меньшего колеса.

При изготовлении колеса с малым числом зубьев может происходить подрезание зубьев, т. е. врезание головки зуба стандартного инструмента — рейки, червячной фрезы или долбяка — в ножку зуба колеса как выше, так и ниже основной окружности (рис. 181). При этом значительно снижается прочность зуба.

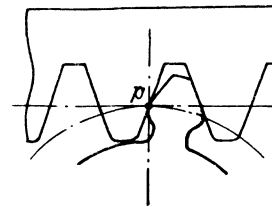


Рис. 181

При проектировании зубчатых передач не следует принимать число зубьев колеса меньше z_{\min} , значение которого для приводных передач рекомендуется $z_{\min} \geq 17$.

§ 99. Геометрия стандартного эвольвентного зубчатого зацепления

Соприкасающиеся друг с другом окружности на ведущем и ведомом колесах, которые имеют общие оси с зубчатыми колесами и катятся друг по другу без скольжения, называются начальными (рис. 182). Диаметры начальных окружностей обозначаются d_{w1} и d_{w2} .

Окружность, на которой расстояние между одноименными сторонами двух соседних зубьев равно шагу зуборезного инструмента, называется делительной. Делительные окружности совпадают с начальными в том случае, когда межцентровое расстояние a_w пары зубчатых колес равно сумме радиусов делительных окружностей. У данного колеса существует только одна делительная окружность; она выбирается в качестве базы для определения основных размеров зубчатого колеса.

Окружной шаг зубчатого зацепления p есть расстояние между одноименными сторонами двух соседних зубьев колеса, измеренное по дуге делительной окружности.

Из определения шага следует, что длина делительной окружности равна $\pi d = pz$. Отсюда диаметр делительной окружности

$$d = \frac{p}{\pi} z. \quad (209)$$

Частное от деления p/π называется модулем зубьев и обозначается буквой m

$$p/\pi = m. \quad (210)$$

Подставив значение модуля в формулу (209), получим

$$d = mz, \quad (211)$$

откуда

$$m = d/z. \quad (212)$$

Таким образом, модуль зубьев m можно определить как часть диаметра делительной окружности, приходящуюся на один зуб

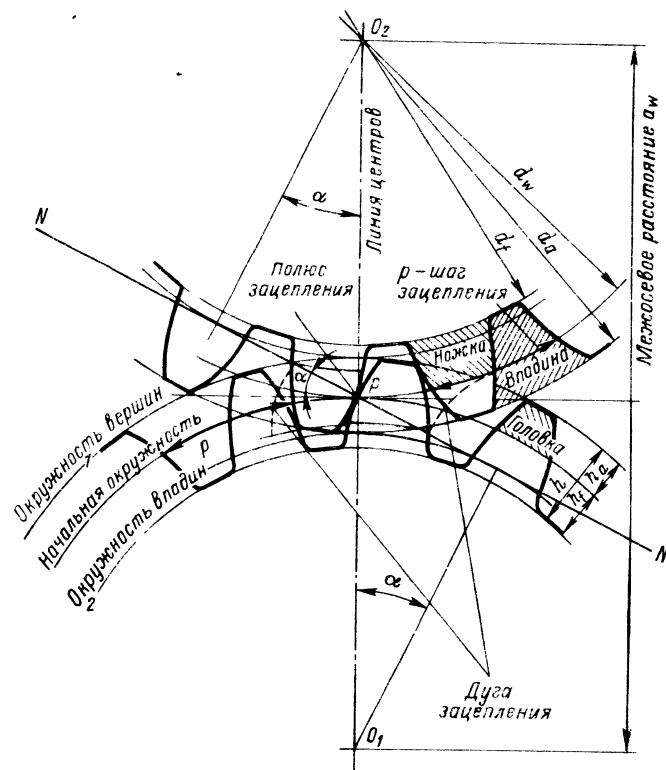


Рис. 182

колеса. Поэтому модуль называется иногда *диаметральным шагом*.

Для унификации зуборезного инструмента и взаимозаменяемости зубчатых колес значение модулей зубьев следует выбирать по ГОСТ 9563—60 и СТ СЭВ 310—76. Этими стандартами дан ряд значений от 0,05 до 100 мм. Приводим значение модулей зубьев от 1 до 25 мм:

1-й ряд (предпочтительный): 1; 1,25; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 16; 20; 25;

2-й ряд: 1,125; 1,375; 1,75; 2,25; 2,75; 3,5; 4,5; 5,5; 7; 9; 11; 14; 18; 22; 28.

Окружность 1 (см. рис. 182), описанная из центра колеса и ограничивающая вершины его головок, называется *окружностью вершин*.

Окружность 2, описанная из центра колеса и ограничивающая его впадины со стороны тела колеса, называется *окружностью впадин*.

Высотой зуба h называется радиальное расстояние между окружностью выступов и окружностью впадин.

Согласно ГОСТ 13755—81 высота головки зуба принимается равной модулю

$$h_a = m. \quad (213)$$

Высота ножки зуба принимается равной 1,25 модуля

$$h_f = 1,25m. \quad (214)$$

Высота зуба

$$h = h_a + h_f = m + 1,25m = 2,25m. \quad (215)$$

Разница в высоте ножки зуба одного колеса и высоте головки зуба другого необходима для образования радиального зазора

$$e = h_f - h_a = 0,25m. \quad (216)$$

Диаметр окружности выступов

$$d_a = d + 2h_a = zm + 2m = m(z + 2). \quad (217)$$

Диаметр окружности впадин

$$d_f = d - 2h_f = zm - 2,5m = m(z - 2,5). \quad (218)$$

Модуль зацепления можно определить, зная диаметр окружности выступов. Из формулы (217) следует

$$m = \frac{d_a}{z + 2}. \quad (219)$$

Теоретическая толщина зуба s и ширина впадины s_b по делительной окружности равны между собой

$$s = s_b = p/2 = \pi m/2 = 1,57m.$$

Однако, чтобы создать боковой зазор, необходимый для нормальной работы зубчатой пары, зуб делается несколько тоньше, вследствие чего он входит во впадину свободно.

Межцентровое (межосевое) расстояние двух сцепляющихся зубчатых колес определяется по формуле

$$a_w = r_1 + r_2 = z_1 m/2 + z_2 m/2 = m(z_1 + z_2)/2. \quad (220)$$

Дугой зацепления называют путь, проходимый профилем зуба по начальной окружности за время фактического его зацепления. Дуга зацепления обозначается буквой S .

Необходимым условием непрерывности зацепления является требование, чтобы дуга зацепления была больше шага зацепления, т. е. чтобы $S > p$.

Отношение длины дуги зацепления к шагу зацепления называется *коэффициентом перекрытия*

$$\epsilon = S/p. \quad (221)$$

Коэффициент перекрытия характеризует среднее число пар зубьев, одновременно находящихся в зацеплении. Для цилиндрических зубчатых передач принимают $\epsilon \geq 1,2$.

§ 100. Передаточные отношения серии зубчатых колес¹

В том случае, когда ведущий и ведомый валы находятся на значительном расстоянии друг от друга, передача движения при помощи только двух зубчатых колес оказывается невыгодной, так как габаритные размеры передачи получаются большими (рис. 183). Передачу с требуемым передаточным отношением i целесообразнее осуществить так, как показано на рис. 183, т. е. при помощи нескольких зубчатых колес, насаженных на параллельные валы. На ведущий вал насажено зубчатое колесо с диаметром d_1 и числом зубьев z_1 , на ведомый вал — колесо диаметром d_4 и числом зубьев z_4 . Колеса с диаметрами d_2 и d_3 и числом зубьев z_2 и z_3 , имеющие тот же шаг, называют *промежуточными* или «паразитными».

Передаточное отношение первой пары

$$i_{12} = \omega_1/\omega_2 = z_2/z_1;$$

второй пары

$$i_{23} = \omega_2/\omega_3 = z_3/z_2;$$

третьей пары

$$i_{34} = \omega_3/\omega_4 = z_4/z_3.$$

Перемножив частные передаточные отношения, найдем общее передаточное отношение зубчатой передачи

$$i_{14} = i_{12}i_{23}i_{34} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_3} \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_2}{z_1} \frac{z_3}{z_2} \frac{z_4}{z_3} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_1}. \quad (222)$$

Из изложенного следует, что общее передаточное отношение последовательного ряда зубчатых колес с промежуточными колесами равно отношению числа зубьев ведомого колеса к числу зубьев ведущего.

Промежуточные колеса не изменяют общего передаточного отношения, но влияют на направление вращения ведомого вала: при их четном числе направления вращения ведущего и ведомого колес противоположны, при нечетном — одинаковы.

Включение серии малых зубчатых колес вместо двух колес больших габаритных размеров и массы при сохранении заданного передаточного отношения снижает металлоемкость передачи, уменьшает ее габариты и дает возможность изменить направление вращения ведомого колеса.

Одной парой зубчатых колес невозможно осуществить передачу с большим передаточным отношением (обычно $i_{\max} \leq 10$). Для получения больших передаточных отношений применяют так называемую многоступенчатую передачу (рис. 184).

Передаточное отношение передачи определяется из следующих соотношений:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}; \quad i_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{z_3}{z_2}; \quad i_{34} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_3}.$$

После перемножения этих равенств получим

$$i_{14} = i_{12}i_{23}i_{34} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_2z_3z_4}{z_1z_2z_3}. \quad (223)$$

Таким образом, *общее передаточное отношение многоступенчатой передачи равно произведению передаточных отношений всех ступеней*. В том случае, если числа зубьев малых колес равны между собой, т. е. $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = z_5 = z_6 = z$, и числа зубьев боль-

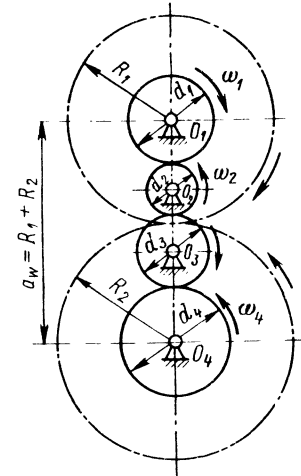


Рис. 183

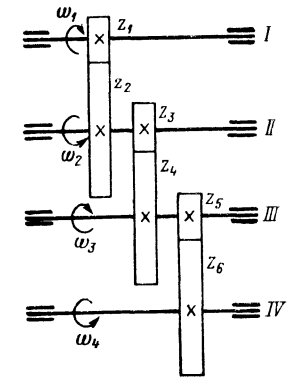


Рис. 184

ших колес тоже равны между собой, т. е. $Z_2 = Z_4 = Z_6 = Z$, общее передаточное число будет $i = (Z/z)^3$.

Если число одинаковых пар зубчатых колес n ,

$$i = (Z/z)^n. \quad (223a)$$

§ 101. Краткие сведения о методах изготовления зубчатых колес

Для тихоходных передач иногда применяют колеса с литыми (без последующей механической обработки) зубьями. Существует также метод горячей накатки зубьев (также без последующей их обработки). В большинстве случаев колеса имеют зубья, полученные в процессе механической обработки. Различают две стадии обработки зубьев: нарезные и отделочные операции. Основными способами нарезания зубьев являются копирование и обкатка.

¹ Здесь и далее под передаточными отношениями подразумеваются их численные значения.

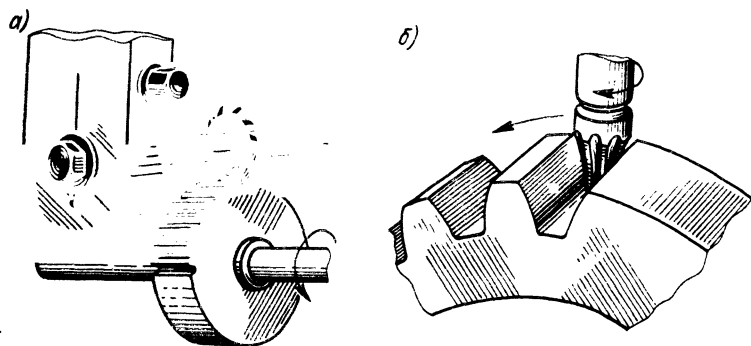


Рис. 185

Копирование заключается в прорезании впадин между зубьями при помощи *дисковой* (рис. 185, а) или *пальцевой* (рис. 185, б) фрез, имеющих то же очертание режущей части, что и впадина между зубьями. После прорезания одной впадины колесо пово-

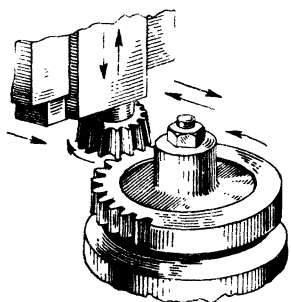


Рис. 186

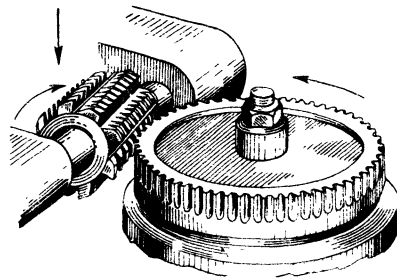


Рис. 187

рачивается на угол, соответствующий шагу колеса, и процесс повторяется.

Обкатка производится режущим инструментом — *долбяком* (рис. 186).

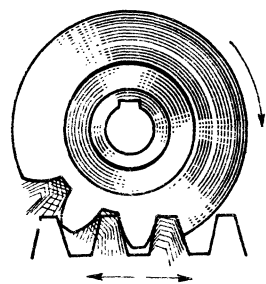


Рис. 188

Долбяку и нарезаемой заготовке сообщают такое относительное движение (вращение), как если бы они были парными зубчатыми колесами. Кроме вращения долбяк совершает возвратно-поступательное движение вдоль своей оси и режущими кромками зубьев вырезает впадины на заготовке.

Для обработки зубьев по способу обкатки используют также *червячную фрезу* (рис. 187), имеющую в сечении, перпенди-

кулярном к витку, форму зубчатой рейки. Режущие кромки фрезы вырезают впадины на колесе. Кроме того, для нарезания зубьев методом обкатки применяют режущий инструмент, называемый *инструментальной рейкой* или *гребенкой* (рис. 188). Отличие от нарезания червячной фрезой состоит лишь в том, что инструмент имеет только возвратно-поступательное движение.

Для достижения высокой точности и чистоты поверхности производится отделка зубьев специальными инструментами (шлифовальным кругом, шевером и притиром).

§ 102. Виды разрушения зубьев

Наблюдаются следующие основные виды разрушения зубьев: поломка, износ и выкрашивание.

В начале зацепления к вершине зуба прикладывается нагрузка, в результате которой возникают напряжения изгиба. Эти напряжения имеют наибольшее значение, если нагрузка

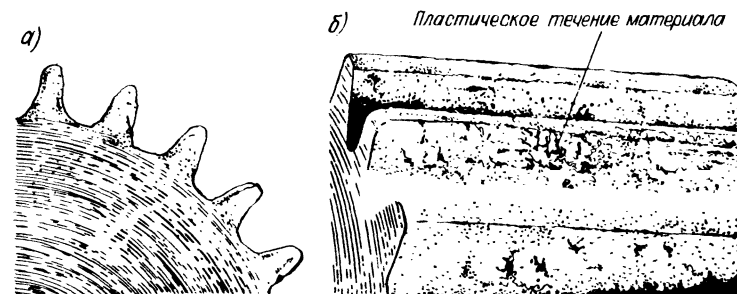


Рис. 189

приложена к вершине зуба. Поломка зуба возможна в результате значительной кратковременной пиковой перегрузки, при которой статическая прочность окажется недостаточной, или из-за повторно-переменных напряжений.

Напряжения изгиба, возникающие в зубьях, переменны во времени, так как зубья не все время находятся в зацеплении. Под влиянием переменных напряжений при недостаточной усталостной прочности зубьев возможно возникновение трещин у их оснований. Развитие усталостной трещины приводит к излому зубьев.

Износ зубьев, происходящий вследствие истирания поверхностей зубьев попадающими в зону зацепления металлическими частицами, пылью, грязью, называется *абразивным*. В результате такого износа происходит ослабление зубьев, уменьшение размеров их сечений, возрастание напряжений и поломка зубьев. Износ может происходить и из-за большой шероховатости поверхности зубьев. На рис. 189 показаны изношенные зубья. Абразивный износ характерен для открытых зубчатых передач.



Рис. 190

Разрушаются зубья и вследствие выкрашивания рабочих поверхностей. При давлении зуба одного парного колеса на зуб другого в зоне их соприкосновения возникают контактные напряжения, значение которых в процессе зацепления изменяется от нуля до максимума. Опыт показывает, что у передач, работающих со смазкой, вследствие действия достаточно больших повторных

контактных напряжений на зубьях могут появиться мелкие усталостные трещины, которые развиваются в мелкие оспинки (ниже полюсной линии). При дальнейшей работе края оспинок обламываются и образуются ямки выкрашивания, захватывающие всю ширину зуба (рис. 190). Этот вид разрушения характерен для закрытых передач, работающих со смазкой.

Материалы, точность изготовления, смазка и размеры зубчатых передач должны быть выбраны и рассчитаны таким образом, чтобы зубья не разрушались под действием нагрузки.

§ 103. Расчет зубьев прямозубых цилиндрических колес на изгиб

Открытые зубчатые передачи рассчитывают по напряжениям изгиба с учетом их износа в процессе работы.

Зацепление одной пары зубьев цилиндрической прямозубой передачи заканчивается в точке, лежащей на окружности выступов зуба ведущей шестерни. При этом сила F_n воздействия зуба шестерни на зуб колеса приложена к линии, наиболее удаленной от основания зуба, что делает такое положение нагрузки наиболее опасным.

Сила F_n , передаваемая зубом одного колеса на зуб другого, направлена (в предположении отсутствия трения между зубьями) по общей нормали к соприкасающимся профилям, т. е. по линии зацепления (рис. 191).

Силу F_n переносим в точку O , лежащую на оси зуба, и раскладываем по двум направлениям: по касательной к окружности (окружная сила F_t) и по нормали к ней (радиальная сила F_r):

$$F_t = F_n \cos \alpha; F_r = F_n \sin \alpha.$$

Окружная сила F_t изгибает зуб, радиальное усилие F_r сжимает его. Пренебрегая относительно небольшими напряжениями сжатия зуба, рассмотрим условие прочности зуба при изгибе.

Зуб можно рассматривать как консольную балку с нагрузкой на свободном конце. Тогда условие прочности зуба на изгиб имеет вид

$$\sigma_F = M_x k_\sigma / W_x \leq [\sigma_F],$$

где σ_F — напряжение изгиба; M_x — изгибающий момент в сечении у основания ножки зуба, $M_x = F_t l$; k_σ — теоретический коэффициент концентрации напряжений; W_x — осевой момент сопротивления сечения ножки зуба, $W_x = bS^2/6$.

Плечо l и толщину зуба S в опасном сечении выразим через модуль зубьев: $l = \mu m$; $S = \gamma m$, где μ и γ — коэффициенты, зависящие от формы зуба.

Тогда условие прочности примет вид

$$\sigma_F = \frac{6F_t \mu m k_\sigma}{b \gamma^2 m^2} \leq [\sigma_F].$$

Выражение $6\mu k_\sigma / \gamma^2$, обозначаемое через Y_F , называют коэффициентом формы зубьев или коэффициентом прочности зубьев по местным напряжениям. Он зависит от числа зубьев. Значения Y_F по ГОСТ 21354—75* следующие:

$z = 17$...	20	22	24	28	35	40	50	80	100	150	Рейка
$Y_F = 4,26$...	4,07	3,98	3,92	3,81	3,75	3,70	3,65	3,60	3,60	3,60	3,63

Окончательно получаем формулу проверочного расчета на изгиб прямозубых передач:

$$\sigma_F = \frac{Y_F F_t K_F}{b m} \leq [\sigma_F]. \quad (224)$$

Коэффициент K_F , введенный в формулу (224), учитывает неравномерность распределения нагрузки по длине зуба и ее динамическое действие. Приближенно можно принять $K_F \approx 1,25 \div 2$ в зависимости от расположения колес относительно опор (симметричное, несимметричное, консольное), степени точности, окружной скорости и твердости рабочих поверхностей зубьев.

Из формулы (224) определим требуемый модуль зубьев:

$$m = \frac{Y_F F_t K_F}{b [\sigma_F]} \quad (225)$$

Длину зубьев (ширину венца) b выразим через модуль m

$$b = \psi_b m,$$

где ψ_b — коэффициент ширины колеса ($\psi_b = 6 \div 25$). Его наибольшее значение зависит от степени точности изготовления колеса.

Для литых зубьев (без механической обработки) $\psi_b = 6 \div 8$;

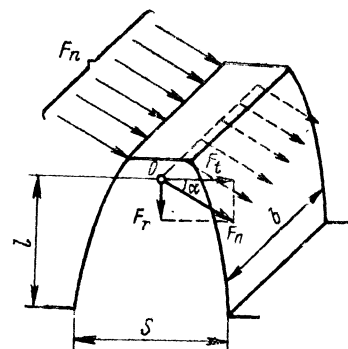


Рис. 191

для фрезерованных — $\psi_b = 8 \div 15$; для шлифованных и полированных — $\psi_b = 15 \div 25$.

Окружную силу выразим через вращающий момент

$$F_t = 2M_1/d_1 = 2M_1/(mz_1).$$

Подставляя значения b и F_t в формулу (225), получим

$$m = \sqrt[3]{\frac{Y_F 2M_1 K_F}{\psi_b z_1 [\sigma_F]}}, \quad (226)$$

где $[\sigma_F]$ — допускаемое напряжение изгиба.

Расчет на прочность стальных цилиндрических зубчатых передач внешнего зацепления стандартизован (ГОСТ 21354—75*). Этим же стандартом определяется выбор $[\sigma_F]$ в зависимости от механических свойств материала (предела выносливости), срока службы передачи, коэффициента запаса прочности, способа получения заготовки и технологии изготовления зубьев. Все необходимые справочные данные для расчета зубчатых передач см. в работе [3].

§ 104. Расчет зубьев на контактную прочность

Закрытые зубчатые передачи, работающие в масляной ванне, должны обладать достаточной контактной прочностью, с тем чтобы не происходило осповидного выкрашивания боковой поверхности зубьев. Контактные напряжения зависят от нагрузки на единицу длины линии контакта зубьев, упругих свойств материала зубьев шестерни и колеса и радиусов кривизны профилей зубьев.

Условие контактной прочности выполняется, если расчетные напряжения σ_H не превышают допускаемых: $\sigma_H \leq [\sigma_H]$.

Расчет на контактную прочность также определяется ГОСТ 21354—75*. По этому стандарту максимальные контактные напряжения σ_H вычисляются по формуле

$$\sigma_H = z_m z_H z_E \sqrt{\frac{2M_2 K_H (u+1)}{d_2^2 b}}, \quad (227)$$

где z_m , z_H и z_E — коэффициенты, учитывающие механические свойства материалов сопряженных зубчатых колес, форму зубьев в полюсе зацепления и степень перекрытия соответственно; M_2 — вращающий момент на зубчатом колесе; d_2 — делительный диаметр колеса; b — ширина венца колеса; u — передаточное число, $u = z_2/z_1$; K_H — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки между зубьями по ширине венца, а также окружную скорость колес и степень точности их изготовления.

Для стальных прямозубых цилиндрических передач после подстановки в формулу (227) числовых значений ряда коэф-

фициентов и замены d_2 межосевым расстоянием a_w получаем условие проверочного расчета по контактной выносливости в следующем виде:

$$\sigma_H = \frac{310}{a_w} \sqrt{\frac{K_H M_2 (u+1)^3}{b z u^2}} \leq [\sigma_H]. \quad (228)$$

Допускаемое контактное напряжение $[\sigma_H]$ определяют по формуле

$$[\sigma_H] = \frac{\sigma_{H \text{ lim}} b K_{HL}}{[n_H]}, \quad (229)$$

где $\sigma_{H \text{ lim}} b$ — предел контактной прочности при базовом числе циклов. Для углеродистых и легированных сталей при твердости поверхностей зубьев меньше $HV 350$ $\sigma_{H \text{ lim}} b = 2HV + 70$ МПа; K_{HL} — коэффициент долговечности, при числе циклов нагружения зубьев больше базового принимают $K_{HL} = 1$; $[n_H]$ — коэффициент безопасности, $[n_H] = 1,1 \div 1,3$.

Преобразуем условие (229) в формулу для вычисления требуемого межосевого расстояния a_w .

Предварительно выражаем ширину венца колеса b через a_w ; $b = \psi_{ba} a_w$, тогда

$$a_w = (u+1) \sqrt[3]{\left(\frac{310}{[\sigma_H] u}\right)^2 \frac{M_2 K_H}{\psi_{ba}}}. \quad (230)$$

Для прямозубых передач коэффициент ширины зубчатого венца принимают $\psi_{ba} = 0,125 \div 0,25$. Коэффициент $K_H = 1,1 \div 1,7$.

Рекомендации по выбору основных параметров цилиндрической прямозубой передачи следующие.

1. Передаточное отношение не следует принимать более 6 и лишь в виде исключения — до 12,5.

2. Число зубьев меньшего колеса (шестерни) рекомендуется выбирать в пределах 17—30. Большие числа зубьев обеспечивают более плавную работу и большую долговечность колес.

Пример 35. Определить основные размеры цилиндрической прямозубой передачи, работающей в масляной ванне (рис. 192). Передача нерезервная, предназначена для длительной эксплуатации. Мощность на валу шестерни $P_1 = 5,5$ кВт; угловые скорости: шестерни $\omega_1 = 100$ рад/с; колеса $\omega_2 = 20$ рад/с.

Решение. Выбираем материалы: для шестерни сталь 45, термообработка — улучшение, твердость $HV 210$; для колеса — сталь 45, термообработка — нормальная, твердость $HV 190$.

Допускаемые контактные напряжения:

$$[\sigma_H] = \frac{\sigma_{H \text{ lim}} b K_{HL}}{[n_H]}.$$

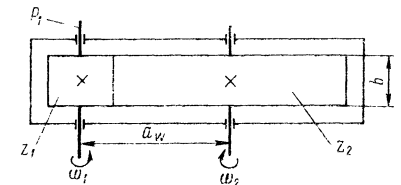


Рис. 192

Предел контактной выносливости

$$\sigma_{H \text{ lim } b} = 2HB + 70 = 2 \cdot 190 + 70 = 450 \text{ МПа.}$$

При длительной эксплуатации коэффициент долговечности $K_{HL} = 1$; коэффициент безопасности $[n_H] = 1,2$.

Определяем допускаемое контактное напряжение по колесу

$$[\sigma_H] = 450 / 1,2 = 375 \text{ МПа.}$$

Определяем передаточное отношение $i = \omega_1 / \omega_2 = 100 / 20 = 5$. Оно равно передаточному числу $i = u = z_2 / z_1$.

Вращающий момент на валу шестерни

$$M_1 = P_1 / \omega_1 = 5,5 \cdot 10^3 / 100 = 55 \text{ Н·м} = 55 \cdot 10^3 \text{ Н·мм.}$$

Вращающий момент на валу колеса

$$M_2 = M_1 u = 55 \cdot 10^3 \cdot 5 = 275 \cdot 10^3 \text{ Н·мм.}$$

Коэффициент нагрузки $K_H = 1,2$. Коэффициент ширины венца по межосевому расстоянию $\psi_{ba} = 0,2$.

Вычисляем межосевое расстояние по условию контактной выносливости поверхностей зубьев по формуле (230)

$$a_w = (u + 1) \sqrt[3]{\left(\frac{310}{[\sigma_H] u}\right)^2 \frac{M_2 K_H}{\psi_{ba}}} =$$

$$= (5 + 1) \sqrt[3]{\left(\frac{310}{375 \cdot 5}\right)^2 \frac{275 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{0,2}} = 212 \text{ мм.}$$

Окружной модуль зубьев

$$m = (0,01 \div 0,02) a_w = (0,01 \div 0,02) 212 = 2,12 \div 4,24 \text{ мм;}$$

по ГОСТ 9563—60* принимаем $m = 3$ мм.

Определяем число зубьев шестерни z_1 и колеса z_2 :

$$z_1 = \frac{2a_w}{(u + 1)m} = \frac{2 \cdot 212}{(5 + 1)3} = 23,6,$$

принимаем $z_1 = 24$:

$$z_2 = z_1 u = 24 \cdot 5 = 120.$$

Фактическое межосевое расстояние

$$a_w = m (z_1 + z_2) / 2 = 3 (24 + 120) / 2 = 216 \text{ мм.}$$

Основные размеры шестерни и колеса:

диаметры делительных окружностей:

$$d_1 = m z_1 = 3 \cdot 24 = 72 \text{ мм;}$$

$$d_2 = m z_2 = 3 \cdot 120 = 360 \text{ мм;}$$

диаметры окружностей вершин зубьев:

$$d_{a1} = d_1 + 2m = 72 + 2 \cdot 3 = 78 \text{ мм;}$$

$$d_{a2} = d_2 + 2m = 360 + 2 \cdot 3 = 366 \text{ мм;}$$

ширина колеса $b_2 = a_w \psi_{ba} = 216 \cdot 0,2 = 43,2$ мм, принимаем $b_2 = 45$ мм;

ширина шестерни $b_1 = b_2 + 5 = 50$ мм.

Проверяем контактные напряжения по формуле (229)

$$\sigma_H = \frac{310}{a_w} \sqrt{\frac{K_H M_2 (u + 1)^3}{b_2 u^2}} = \frac{310}{216} \sqrt{\frac{1,2 \cdot 275 \cdot 10^3 (5 + 1)^3}{45 \cdot 5^2}} = 373 \text{ МПа.}$$

Расчетное контактное напряжение σ_H меньше допускаемого $[\sigma_H]$. Условие контактной прочности выполнено.

Проверяем зубья на выносливость по напряжениям изгиба по формуле (224). Вычисляем окружную силу

$$F_t = 2M_1 / d_1 = 2 \cdot 55 \cdot 10^3 / 72 = 1,53 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Коэффициенты формы зубьев $Y_{F_1} = 3,92$; $Y_{F_2} = 3,60$.

Допускаемое напряжение на изгиб можно принять для шестерни $[\sigma_{F_1}] = 230$ МПа; для колеса $[\sigma_{F_2}] = 200$ МПа.

Прочность на изгиб шестерни и колеса зависит от отношения $[\sigma_F] / Y_F$:

для шестерни $230 / 3,92 = 58,7$ МПа;

для колеса $200 / 3,6 = 57,5$ МПа.

Расчет на изгиб следует вести для зубьев колеса, так как для них найденное отношение меньше. Коэффициент нагрузки принимаем $K_F = 2$.

Вычисляем напряжение изгиба

$$\sigma_{F_1} = \frac{Y_{F_1} F_t K_F}{b m} = \frac{3,60 \cdot 1,53 \cdot 10^3 \cdot 2}{45 \cdot 3} = 81,5 \text{ МПа} < [\sigma_{F_1}] = 200 \text{ МПа.}$$

Условие прочности выполнено.

§ 105. Цилиндрические косозубые и шевронные колеса

Зуб прямоугольного колеса входит в зацепление сразу по всей длине. Неточности изготовления приводят к появлению толчков при входе зуба в зацепление, интенсивность которых тем больше, чем выше скорость. Плавность передачи снижается, шум возрастает. Во избежание этого применяют косозубые и шевронные цилиндрические колеса. При окружных скоростях $v > 6$ м/с рекомендуется применять косозубые (рис. 193, а) или шевронные

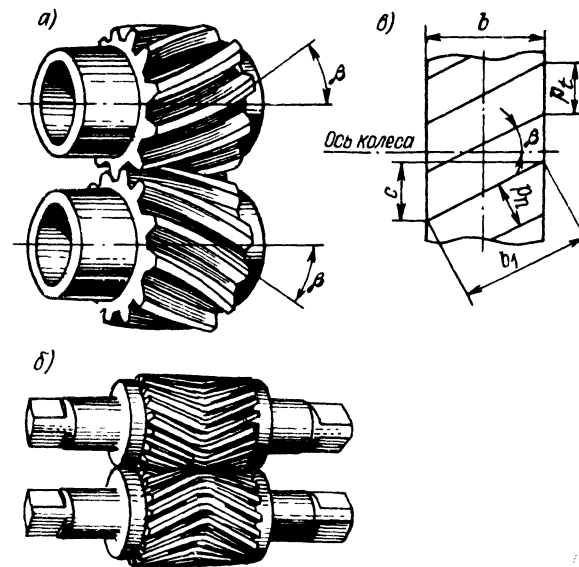


Рис. 193

колеса (рис. 193, б), так как прямозубые при таких скоростях работают удовлетворительно лишь при высокой точности их изготовления.

Образующие зубьев косозубых колес расположены по винтовой линии. На рис. 193, в дано схематическое изображение части косозубого колеса. На нем показаны окружной шаг p_t , нормальный шаг p_n , смещение зуба c , ширина венца b , длина зуба b_1 и угол β наклона зубьев к оси колеса. Из рисунка видно, что

$$p_t = p_n / \cos \beta.$$

Соответственно различают окружной и нормальный модули m_t и m_n , связанные между собой зависимостями:

$$m_t = m_n / \cos \beta \text{ и } m_n = m_t \cos \beta. \quad (231)$$

При проектировании колес с косыми зубьями нормальный модуль должен быть выбран по СТ СЭВ 310—76. Угол зацепления в нормальном сечении α_n принимают равным 20° . Профили зубьев очерчивают по эвольвенте.

В косозубых передачах с внешним зацеплением одно из колес имеет зубья с правым направлением винтовой линии, а зубья другого колеса — с левым направлением; углы наклона зубьев у обоих колес одинаковы.

Передаточное отношение в косозубых колесах определяется так же, как и в прямозубых,

$$i = \omega_1 / \omega_2 = n_1 / n_2 = d_2 / d_1 = z_2 / z_1 = u.$$

Диаметры начального и делительного цилиндров колес с заданными числами зубьев z_1 и z_2 равны:

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= m_t z_1 = m_n z_1 / \cos \beta; \\ d_2 &= m_t z_2 = m_n z_2 / \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (232)$$

Межцентровое расстояние

$$a_w = m_t \frac{z_1 + z_2}{2} = m_n \frac{z_1 + z_2}{2 \cos \beta}. \quad (233)$$

Диаметры окружностей вершин и впадин:

$$\left. \begin{aligned} d_a &= m_t z + 2m_n = m_n \left(\frac{z}{\cos \beta} + 2 \right); \\ d_f &= m_t z - 2,5m_n = m_n \left(\frac{z}{\cos \beta} - 2,5 \right). \end{aligned} \right\} \quad (234)$$

Ширину венца колеса выбирают так, чтобы смещение c зуба было равно или больше его окружного шага:

$$c = b \operatorname{tg} \beta \geq p_t = \frac{p_n}{\cos \beta} = \frac{\pi m_n}{\cos \beta},$$

или

$$b \geq \frac{\pi m_n}{\sin \beta}.$$

Наименьшее число зубьев z'_{\min} , допускаемое для косозубых колес по условию отсутствия подрезания, определяют по формуле

$$z'_{\min} = z_{\min} \cos^3 \beta, \quad (235)$$

где z_{\min} — минимальное число зубьев прямозубого колеса, при котором отсутствует подрезание (напомним, что при нарезании зубьев инструментом реечного типа $z_{\min} = 17$).

Профили косых зубьев постепенно вступают в соприкосновение по контактной линии не только по высоте зуба, но и по ширине колеса. Коэффициент перекрытия в косозубых передачах в значительно больше, чем у прямозубых передач, доходит до 10 и выше. При помощи таких колес передаются мощности, доходящие до нескольких десятков тысяч киловатт при окружных скоростях до 60—70 м/с (и даже до 100 м/с).

В косозубых передачах сила взаимодействия между зубьями дает не только окружную и радиальную составляющие, как в прямозубых колесах, но и осевую силу.

Во избежание большой осевой нагрузки на опоры вала не рекомендуется применять колеса с большими углами β (как правило, $\beta \leq 15^\circ$). Вместе с тем углы β менее 8° не дают эффекта ожидаемого от применения косозубых передач.

Для устранения осевых сил применяют шевронные колеса. Угол наклона зубьев β у шевронных колес колеблется в зависимости от межцентрового расстояния a_w в пределах 25 — 38° (в виде исключения до 45°).

Расчет косозубых и шевронных передач на прочность производят по формулам, аналогичным формулам для прямозубых колес.

§ 106. Конические зубчатые передачи

При пересекающихся под некоторым углом осей ведущего и ведомого звеньев применяются конические зубчатые передачи.

На рис. 194 показана коническая зубчатая передача. Колеса представляют собой конусы, вершины которых находятся в точке пересечения осей валов. На боковых поверхностях конусов имеются зубья, размеры которых (толщина и высота) уменьшаются по направлению к вершинам конусов.

Наибольшее распространение имеют конические передачи с углом между осями зубчатых колес, равным 90° . Рассмотр-

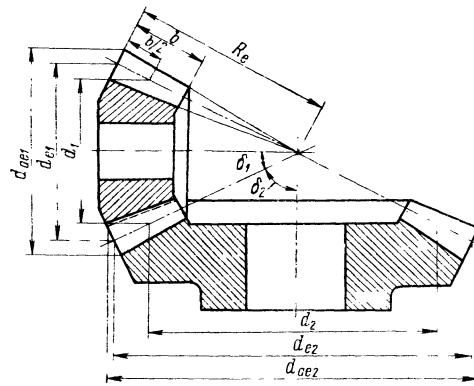


Рис. 194

рим такую передачу. Передаточное отношение i конической зубчатой передачи находят так же, как и для конических фрикционных катков и цилиндрических зубчатых передач (рис. 194):

$$i = \omega_1/\omega_2 = n_1/n_2 = z_2/z_1 = u = \operatorname{tg} \delta_2 = \operatorname{ctg} \delta_1, \quad (236)$$

где δ_1 и δ_2 — углы делительных конусов.

В конических зубчатых передачах делительные и начальные конусы всегда совпадают. Начальные конусы в процессе зацепления перекатываются без скольжения друг по другу.

Зубья конических колес профилируются по эвольвенте так же, как и зубья цилиндрических колес.

Поскольку размеры зуба переменны по длине, различают максимальный (производственный) модуль m_e и средний модуль m (по середине длины зуба). Максимальный модуль обычно выбирают из стандартного ряда модулей по СТ СЭВ 310—76.

Найдем соотношение между средним и максимальным модулями конического зубчатого колеса (см. рис. 194). Модуль и диаметр делительной окружности связаны между собой теми же соотношениями, что и у цилиндрических колес:

$$d_{e1} = m_e z_1; \quad d_{e2} = m_e z_2,$$

но согласно рис. 194

$$d_{e1}/2 = d_1/2 + (b/2) \sin \delta_1$$

или

$$m_e z_1 = m z_1 + b \sin \delta_1.$$

Разделив обе части равенства на z , получим искомую зависимость между m_e и m :

$$m_e = m + (b/z_1) \sin \delta_1. \quad (237)$$

Остальные размеры конического колеса определяют из формул: внешний диаметр вершин зубьев

$$d_{av} = d_e + 2m_e \cos \delta_1;$$

внешнее конусное расстояние

$$R_e = \frac{d_{e1}}{2 \sin \delta_1} = \frac{m_e z_1}{2 \sin \delta_1}.$$

Конические зубчатые колеса с криволинейными зубьями работают почти бесшумно и со значительно меньшей вибрацией, чем колеса с прямолинейными зубьями. Коэффициент перекрытия у таких колес выше, чем у колес с прямолинейными зубьями.

Недостатками этого вида передачи являются сложность изготовления и значительные осевые силы.

Расчет на прочность конических зубчатых передач производят аналогично расчету цилиндрических зубчатых передач.

ГЛАВА XXII. ЧЕРВЯЧНЫЕ ПЕРЕДАЧИ

§ 107. Общие сведения. Передаточное отношение и КПД

Для передачи движения между валами, оси которых перекрещиваются, применяются червячные передачи. Угол перекрещивания осей обычно $\theta = 90^\circ$. Червячная передача показана на рис. 195. Червяк 1, насаженный на вал или (что чаще) изготовленный заодно с валом, вращает червячное колесо 2.

Червячная передача относится к числу так называемых зубчато-винтовых, т. е. имеющих признаки, характерные и для зубчатых, и для винтовых передач.

Червяк, как и винт, характеризуется шагом, обозначаемым p , и ходом p_z (для многозаходных червяков), причем

$$p_z = p z_1, \quad (238)$$

где z_1 — число витков (заходов) червяка.

Определим передаточное отношение червячной пары. Линейная скорость червячного выступа вдоль его оси при вращении червяка

$$v_1 = p_z \omega_1 / (2\pi) \quad (v_1 = p_z n_1 / 60),$$

где ω_1 — угловая скорость червяка (n_1 — частота вращения червяка).

Линейная скорость на начальной окружности червячного колеса

$$v_2 = d_2 \omega_2 / 2 \quad (v_2 = \pi d_2 n_2 / 60),$$

где d_2 — диаметр начальной окружности колеса; ω_2 — угловая скорость колеса (n_2 — частота вращения колеса). Так как найденные скорости по условию зацепления равны, т. е. $v_1 = v_2$, то $p_z \omega_1 = \pi d_2 \omega_2$ ($p_z n_1 = \pi d_2 n_2$) и передаточное отношение

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\pi d_2}{p_z}.$$

Подставив в это выражение значения длины окружности колеса $\pi d_2 = z_2 p$ и хода $p_z = z_1 p$, получим передаточное отношение

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2 p}{z_1 p} = \frac{z_2}{z_1}, \quad (239)$$

где z_1 — число витков (заходов) червяка; z_2 — число зубьев колеса; i — передаточное отношение червячной пары.

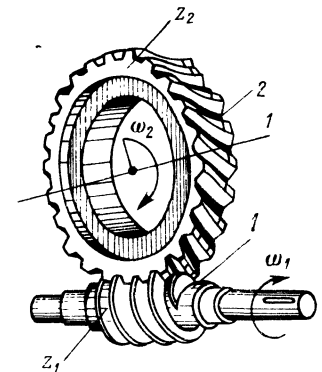
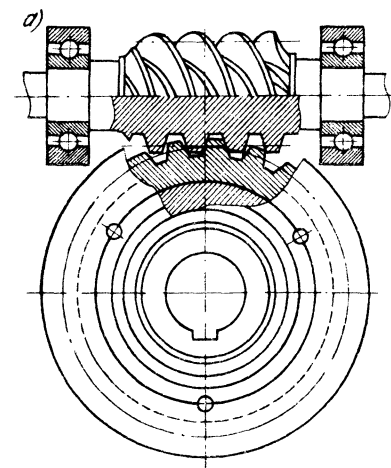


Рис. 195

Основные достоинства червячной передачи, обусловившие ее широкое распространение, заключаются в следующем:

1. Плавность и бесшумность работы.
2. Возможность получения больших передаточных отношений при сравнительно небольших габаритах передачи. Червячные передачи применяются с передаточными числами от $u = 5$ до $u = 500$. Диапазон передаточных чисел, применяемых в силовых передачах, $u = 10 \div 80$ (в редких случаях до 120).



3. Компактность. Как было показано выше, передаточное отношение червячной передачи $u = z_2/z_1$. Таким образом, передаточное число $u = 100$ можно получить при однозаходном чер-

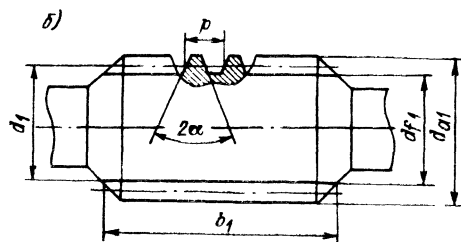


Рис. 196

вяке и колесе с $z = 100$ (для получения такого же передаточного числа потребовалась бы трехступенчатая зубчатая передача). Из этого примера видно, что червячная передача с большим передаточным отношением значительно компактнее соответствующей зубчатой передачи.

4. Возможность выполнения передачи, обладающей свойством *самоторможения*. Это свойство заключается в том, что движение может передаваться только от червяка к червячному колесу, что очень важно в грузоподъемных устройствах, так как позволяет обходиться без тормоза при выключении приводного двигателя. Груз остается при этом висеть на тросе, намотанном на барабан, скрепленный с червячным колесом.

Недостатки червячной передачи:

1. Сравнительно невысокий КПД.
2. Сильный нагрев передачи вследствие перехода потерь на трение в тепловую энергию. Для уменьшения нагрева в червячной передаче применяют масляные резервуары с ребристыми стенками с целью более интенсивной теплоотдачи в окружающий воздух, обдув корпуса и другие способы охлаждения.

3. Ограниченная возможность передачи значительных мощностей, обычно до 50 кВт.

Червячные передачи различают по числу витков (заходов) червяка — одно-, двух-, трех- и многозаходные; по расположению вала червяка — относительно червячного колеса с верхним, нижним и боковым расположениями.

Наибольшее распространение имеют червячные передачи с цилиндрическим червяком (рис. 196, а).

Потери в червячной передаче обусловлены потерями в зацеплении, в опорах валов червяка и колеса и потерями на размешивание и разбрызгивание масла. Таким образом, КПД передачи может быть представлен как произведение трех частных коэффициентов

$$\eta = \eta_{\text{ч}} \eta_{\text{п}} \eta_{\text{р}}$$

где $\eta_{\text{ч}} = \frac{\text{tg } \gamma}{\text{tg } (\gamma + \rho)}$ — коэффициент полезного действия, учитывающий потери в винтовой кинематической паре (см. § 90); $\eta_{\text{п}} = 0,98 \div 0,99$ — коэффициент, учитывающий потери в опорах валов; $\eta_{\text{р}} = 0,99 \div 0,96$ — коэффициент, учитывающий потери на размешивание и разбрызгивание масла.

Ориентировочно значение полного КПД червячной передачи для предварительных расчетов можно принимать по следующим данным:

Червяк однозаходный	0,7—0,75
• двухзаходный	0,75—0,82

Венец червячного колеса для тихоходных передач изготавливают из чугуна. Материалом для венцов колес быстроходных и тяжело нагруженных передач служат бронзы различных марок.

Обычно только венец червячного колеса изготавливают из высококачественного антифрикционного металла, а остальную часть колеса — из чугуна.

Червяки изготавливают из стали. Червяки быстроходных передач термически обрабатывают до твердости $HRC \geq 45$ и шлифуют.

§ 108. Геометрические соотношения в червячной передаче

Витки червяка в осевом сечении имеют форму рейки с углом профиля $2\alpha = 40^\circ$ (см. рис. 196, б). Зависимость между осевым шагом, модулем и ходом витка выражается формулой

$$p = \pi m = p_z/z_1.$$

Диаметр делительной окружности червяка рекомендуется выбирать кратным осевому модулю

$$d_1 = qm,$$

где q — число модулей в делительном диаметре червяка (или коэффициент диаметра червяка), принимаемое по стандартному ряду (ГОСТ 19672—74, 1-й ряд: 8; 10; 12,5; 16; 20; 25).

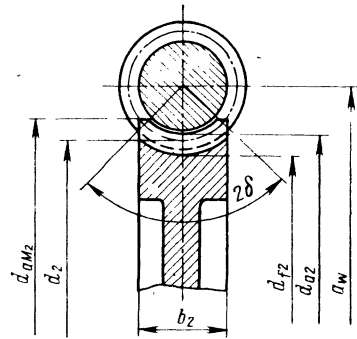


Рис. 197

Диаметр окружности вершин витков червяка

$$d_{a1} = d_1 + 2m.$$

Диаметр окружности впадин червяка

$$d_{f1} = d_1 - 2,4m.$$

Указанная зависимость соответствует радиальному зазору 0,2m. Иногда принимают радиальный зазор равным 0,25m, тогда

$$d_{f1} = d_1 - 2,5m.$$

Число витков (заходов) червяка выбирают в пределах $z = 1 \div 4$.

Делительный угол подъема витков червяка

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{z_1 p}{\pi d_1}.$$

Подставив в эту зависимость значения $p/\pi = m$ и $d_1 = qm$, получим

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{z_1 \pi m}{\pi q m} = \frac{z_1}{q}. \quad (240)$$

Длину (мм) нарезаемой части червяка (см. рис. 196) подбирают по соотношениям:

при $z_1 = 1 \div 2$ $b_1 \geq (11 + 0,06z_2) m$; при $z_1 = 4$ $b_1 \geq (12,5 + 0,09z_2) m$.

По ГОСТ 19036—81 (СТ СЭВ 266—76) червяк с $z_1 = 3$ не применяется.

Окружной шаг червячного колеса равен осевому шагу червяка, соответственно и модуль m_t равен модулю m .

Червячное колесо имеет размеры (рис. 197), определяемые по формулам:

$$d_2 = z_2 m;$$

$$d_{a2} = z_2 m + 2m;$$

$$d_{f2} = z_2 m - 2,4m$$

$$(\text{или } d_{f2} = z_2 m - 2,5m).$$

Так как венцы колеса охватывают червяк, то наружный диаметр колеса больше, чем диаметр окружности выступов,

$$d_{aM2} \geq d_{a2} + \frac{6m}{z_1 + 2}.$$

Ширину венца колеса рекомендуется принимать: при $z_1 = 1 \div 2$ $b_2 \leq 0,75d_{a1}$; при $z_1 = 4$ $b_2 \leq 0,67d_{a1}$.

Центральный угол 2δ , характеризующий полноту охвата червяка венцом колеса, определяется из формулы

$$\sin \delta = \frac{b_2}{d_{a1} - 0,5m};$$

практически принимают $2\delta = 90 \div 110^\circ$.

Расстояние a_w между осями валов червяка и колеса определяют из соотношения

$$a_w = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} = \frac{mq}{2} + \frac{mz_2}{2} = \frac{m}{2} (q + z_2).$$

ГЛАВА XXIII. РЕМЕННЫЕ ПЕРЕДАЧИ

§ 109. Устройство ременных передач.

Виды приводных ремней

Передачу вращательного движения с одного вала на другой при значительных расстояниях между ними можно осуществить гибкой связью, используя силу трения между поверхностью шкива и гибким телом. Гибкой связью служат ремни. В зависимости от формы поперечного сечения ремня (рис. 198) передачи

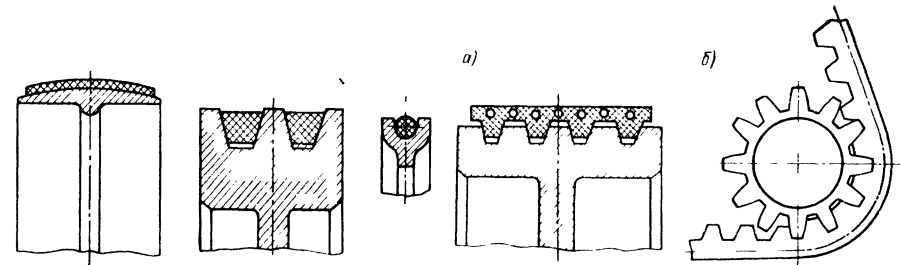


Рис. 198

Рис. 199

делятся на плоскоремennую, клиноремennую, круглоремennую. В последнее время все больше применяются передачи с монолитными поликлиновыми ремнями (рис. 199, а) и передачи зубчато-ремennые (рис. 199, б).

Ремennая передача (рис. 200) состоит из двух колес (ведущего

и ведомого), называемых шкивами, и бесконечного ремня, охватывающего их. Вращающийся ведущий шкив благодаря силе трения увлекает за собой ремень, а последний по той же причине заставляет вращаться ведомый шкив. Сила трения на поверх-

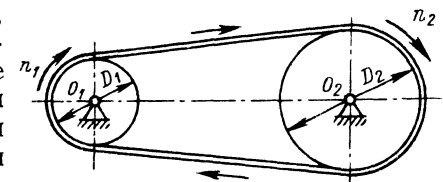


Рис. 200

ностях соприкосновения шкивов и ремня возникает при соответствующем прижатии ремня к ободам шкивов, т. е. при натяжении ремня.

При применении плоских ремней возможно осуществление передач с большими межцентровыми расстояниями (до 15 м, а в исключительных случаях даже больше). Плоские ремни изготовляют кожаными, хлопчатобумажными цельноткаными и шитыми, прорезиненными, шерстяными, шелковыми и из синтетического волокна, а клинсовые — кордотканевыми и кордошнуровыми.

Кожаные ремни бывают одинарными и двойными. Размеры кожаных ремней принимаются по ГОСТ 18679—75.

Наибольшее распространение получили плоские приводные резино-тканевые ремни (ГОСТ 23831—79). Эти ремни состоят из нескольких слоев специальной хлопчатобумажной ткани — прокладок, связанных вулканизированной резиной. Ткань передает нагрузку, а резина предохраняет ткань от повреждений и повышает коэффициент трения между ремнем и ободом шкива.

Прорезиненные ремни применимы как для передачи малых, так и больших мощностей. Они пригодны для работы в условиях повышенной влажности, а при двусторонних обкладках могут работать при наличии паров кислот. Их нельзя применять в среде, содержащей пары нефтепродуктов.

Хлопчатобумажные цельнотканые ремни, пропитанные специальным составом, увеличивающим срок их работы (ГОСТ 6982—75), используют при малых и средних мощностях.

Плоские ремни можно соединять склеиванием, сшиванием или металлическими скрепками. Передачи плоскими ремнями бывают с постоянным (неизменным) и с переменным (регулируемым) межцентровыми расстояниями. В первом случае для поддержания необходимого натяжения либо периодически перешивают ремень по мере его вытяжки (простые передачи) с таким расчетом, чтобы при надевании ремня на шкивы создавалось предварительное натяжение, либо вводят дополнительные шкивы, осуществляющие нажим на ремень (передача с натяжным роликом).

К достоинствам плоскоременной передачи относятся следующие:

- простота и низкая стоимость конструкции;
- плавность хода, способность смягчать удары (благодаря эластичности ремня) и предохранять приводимые в движение механизмы от поломки при внезапных перегрузках (за счет пробуксовывания ремня);
- возможность передачи мощности при значительных расстояниях между осями ведущего и ведомого валов;
- бесшумность работы (по сравнению с зубчатой передачей);
- простота ухода и обслуживания.

Недостатками передачи являются непостоянство передаточного отношения; сравнительно большие габаритные размеры; вытяги-

вание ремня, что вызывает необходимость перешивки его при постоянном межцентровом расстоянии или применения натяжного приспособления.

Предельная окружная скорость в ременных передачах: для кожаных ремней установлена до 40 м/с, для прорезиненных — до 20—40 м/с, для хлопчатобумажных — до 25 м/с и для шерстяных — до 30 м/с.

Плоскоременные передачи делятся на следующие виды: открытые — с параллельными валами; перекрестные — с параллельными валами; полуперекрестные, угловые и др.

§ 110. Кинематические и силовые соотношения в ременных передачах

На рис. 200 представлена схема открытой передачи, состоящей из двух шкивов и бесконечного плоского ремня. Ветвь ремня, набегающая на ведущий шкив (на рисунке нижняя), называется *ведущей*, а ветвь, набегающая на ведомый шкив, — *ведомой*.

Длина ремня (длина гибкой нерастяжимой нити, охватывающей шкивы) определяется по формуле

$$L \approx 2a + \frac{\pi}{2} (D_2 + D_1) + \frac{(D_2 - D_1)^2}{4a}. \quad (241)$$

Чем короче ремень, тем чаще при данной скорости он подвергается дополнительным напряжениям изгиба при огибании шкивов и тем скорее выйдет из строя из-за усталости. Поэтому межцентровое расстояние выбирают из условия долговечности ремня по одной из следующих формул:

$$a \approx (0,1 \div 0,07) v \quad (242)$$

или

$$a \geq (1,5 \div 2,0) (D_1 + D_2). \quad (243)$$

Для определения передаточного отношения нужно знать окружные скорости ведущего и ведомого шкивов. Окружная скорость ведущего шкива

$$v_1 = R_1 \omega_1 = D_1 \omega_1 / 2.$$

Окружная скорость ведомого шкива

$$v_2 = D_2 \omega_2 / 2.$$

Если не учитывать скольжения ремня по шкиву, т. е. полагать приближенно окружную скорость шкива равной линейной скорости ремня, скорости v_1 и v_2 будут равны между собой.

Следовательно,

$$i = \omega_1 / \omega_2 = n_1 / n_2 = D_2 / D_1.$$

Практически скорости $v_1 \neq v_2$, так как всегда имеется так называемое упругое скольжение ремня по ободу шкива.

Численно упругое скольжение характеризуется относительной потерей скорости ведомого шкива — коэффициентом скольжения

$$\epsilon = (\omega'_2 - \omega_2)/\omega'_2, \quad (244)$$

где ω'_2 — теоретическая угловая скорость ведомого шкива; ω_2 — фактическая угловая скорость ведомого шкива.

Учитывая скольжение, получим

$$v_2 = (1 - \epsilon) v_1,$$

где $\epsilon = 0,01 + 0,03$.

Следовательно,

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{D_2}{(1 - \epsilon) D_1}. \quad (245)$$

Упругое скольжение неизбежно при работе ременной передачи под нагрузкой. Его нельзя смешивать с вредным скольжением, называемым буксованием, появляющимся при перегрузке передачи.

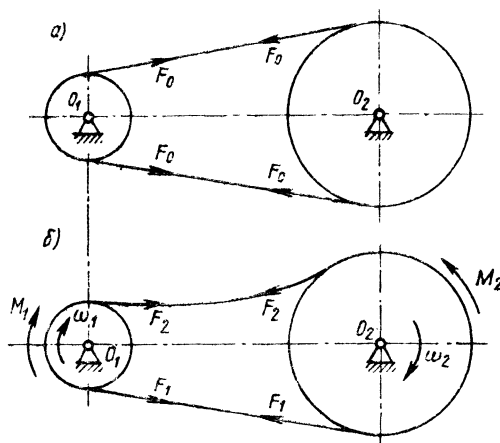


Рис. 201

На рис. 201 представлена ременная передача, на шкивы которой надет с предварительным натяжением плоский ремень. Если передача не нагружена, т. е. шкивы не вращаются или вращаются вхолостую, то напряжения обеих ветвей ремня одинаковы и равны F_0 (рис. 201, а). При нагружении передачи, т. е. при приложении к ведущему валу вращающего момента M_1 , а к ведомому валу момента сопротивления M_2 , направленного в сторону, противоположную вращению, натяжение ведущей ветви возрастает до F_1 , а в ведомой ветви уменьшается до F_2 (рис. 201, б). При этом

$$F_1 + F_2 = 2F_0. \quad (246)$$

Разность

$$F_1 - F_2 = F_t, \quad (247)$$

где F_t — окружная сила, которая прикладывается к ободу ведомого шкива для преодоления момента сопротивления.

Из последних двух равенств получаем натяжения ведущей F_1 и ведомой F_2 ветвей ременной передачи:

$$F_1 = F_0 + \frac{F_t}{2}; \quad F_2 = F_0 - \frac{F_t}{2}. \quad (248)$$

§ 111. Расчет плоскоремной передачи по тяговой способности

Напряжения в работающем ремне обусловлены натяжением ведущей F_1 ветви ремня. Помимо этого, в ремне возникают напряжения от его изгиба при огибании шкивов и от центробежных сил инерции.

Можно считать, что нормальные напряжения от растяжения ремня равномерно распределены по его сечению, следовательно,

$$\sigma_1 = F_1/A = F_1/(b\delta),$$

где A — площадь поперечного сечения ремня; b — ширина ремня; δ — толщина ремня.

Если приблизительно принять, что материал ремня при деформации подчиняется закону Гука, то напряжения изгиба в местах набегания ремня на малом шкиве

$$\sigma_{\text{и}} = E\delta/D_1.$$

Напряжения от центробежных сил инерции

$$\sigma_0 = qv^2.$$

В приведенных формулах E — модуль продольной упругости ремня; q — масса 1 м ремня с сечением 1 м².

За каждый пробег ремень дважды изгибается вокруг шкивов и вновь разгибается. При этом чем меньше диаметр шкива и чем толще ремень, тем больше напряжения изгиба. Многократное действие изгибающих напряжений может быть причиной усталостного разрушения ремня. Центробежные силы, действующие на ремень, кроме дополнительных напряжений вызывают уменьшение угла обхвата и тяговой способности ременной передачи.

Наибольшие напряжения возникают в месте набегания ремня на шкив меньшего диаметра и составляют

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_1 + \sigma_{\text{и}} + \sigma_0 = \frac{F_1}{\delta b} + \frac{E\delta}{D_1} + q_0 v^2. \quad (249)$$

На практике, однако, чаще пользуются расчетом ременных передач по так называемой *тяговой способности*. При этом исходят из того, что ременная передача должна передавать возможно большее окружное усилие F_t без буксования. Но с увеличением F_t ($F_t = F_1 - F_2$) растет скольжение. Производя замеры F_t и ϵ , можно изобразить графически их зависимость друг от друга.

Обозначим через $k_{\text{п}}$ так называемое полезное напряжение, или удельное окружное усилие, т. е. окружное усилие F_t , отнесенное к площади сечения ремня,

$$k_{\text{п}} = F_t/A. \quad (250)$$

Зависимость между ϵ и $k_{\text{п}}$ называется *кривой скольжения* (рис. 202). Такие кривые получены опытным путем для различных ремней.

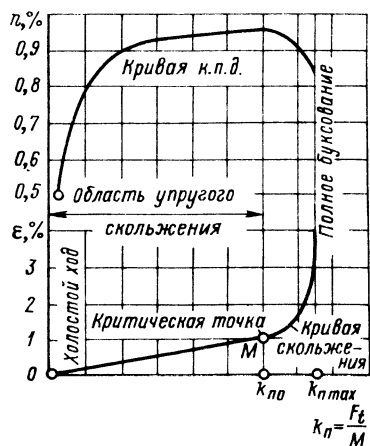


Рис. 202

До точки M , где $k_{п} = k_{по}$, нарастание нагрузки сопровождается медленным увеличением скольжения, затем кривая скольжения резко идет вверх. При $k_{п} < k_{по}$ возникает только упругое скольжение, при $k_{п} > k_{по}$ ремень начинает буксовать.

Таким образом, пределом использования передачи следует считать $k_{п} = k_{по}$. Величину $k_{по}$ называют *приведенным полезным напряжением*.

Значения $k_{по}$ соответствуют стандартным условиям эксперимента: окружной скорости $v = 10$ м/с, углу обхвата $\alpha = 180^\circ$, отношению $D/\delta = 33 \div 37$ и напряжению предварительного натяжения $\sigma_0 = 1,8$ МПа.

Однако условия работы проектируемой передачи могут существенно

отличаться от условий эксперимента, при котором определялось $k_{по}$. Поэтому для необходимой тяговой способности передач требуется

$$k_{п} \leq [k_{п}], \quad (251)$$

где $[k_{п}]$ — допускаемое полезное напряжение для заданных условий работы передачи.

Значение $[k_{п}]$ можно получить, умножив $k_{по}$ на поправочные коэффициенты, учитывающие влияние отклонений α , v и режима работы передачи.

Расчет ременной передачи ведется в такой последовательности:

1. Выбирают тип ремня (в зависимости от условий работы).
2. Определяют диаметр меньшего шкива в миллиметрах по эмпирической формуле

$$D_1 = D_{\min} = (525 \div 630) \sqrt[3]{\frac{P_1}{\omega_{\max}}}, \quad (252)$$

где P_1 — мощность на валу меньшего шкива, Вт.

3. Диаметр ведомого шкива

$$D_2 = i(1 - \varepsilon) D_1.$$

Полученные диаметры шкивов округляют до ближайших больших значений по ГОСТ 17383—73*.

4. Толщину ремня δ находят, учитывая неравенство

$$D_{\min}/\delta \geq [D_{\min}/\delta]_{\min},$$

откуда

$$\delta \leq \frac{D_{\min}}{[D_{\min}/\delta]_{\min}}. \quad (253)$$

Таблица 8. Минимальные отношения $[D_{\min}/\delta]$ и приведенные полезные напряжения $k_{по}$ для плоских ремней при различных значениях D_{\min}/δ

Тип ремня	Минимальное допускаемое отношение $[D_{\min}/\delta]_{\min}$	Приведенное полезное напряжение, МПа, при D_{\min}/δ				
		25	30	40	60	100
Кожаный	25	1,7	1,9	2,1	2,4	2,6
Прорезиненный	30	—	2,0	2,1	2,2	2,2
Хлопчатобумажный тканый	25	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
Шерстяной тканый	20	1,2	1,3	1,5	1,6	1,7

Отношение D_{\min}/δ определяет изгибающие напряжения в ремне, появляющиеся при огибании малого шкива. При малых значениях этого отношения резко сокращается долговечность ремня, поэтому D_{\min}/δ ограничивают значениями, приведенными в табл. 8.

Полученную толщину ремня округляют до стандартных значений.

5. Скорость ремня

$$v = \frac{D_1}{2} \omega \left(v = \frac{\pi D_1 n_1}{60} \right).$$

Желательно, чтобы $v = 10 \div 20$ м/с. При меньшей скорости следует увеличить диаметры шкивов.

6. Межцентровое расстояние

$$a \geq a_{\min} = (0,1 \div 0,07) v,$$

или

$$a \geq a_{\min} = (1,5 \div 2) (D_1 + D_2).$$

7. Длина ремня определяется по следующей формуле:

$$L \approx 2a + \frac{\pi}{2} (D_2 + D_1) + \frac{(D_2 - D_1)^2}{4a}.$$

8. Угол обхвата α ремнем малого шкива

$$\alpha = \pi - (D_2 - D_1)/a.$$

Значение α должно быть не меньше 150° ; если это условие не соблюдается, следует увеличить межцентровое расстояние.

9. В зависимости от фактического отношения D_1/δ выбирают приведенное полезное напряжение $k_{по}$ (см. табл. 8).

10. Требуемая площадь поперечного сечения ремня

$$A = b\delta = F_t/[k_{п}] = F_t/(k_{по}C_1C_2C_3C_4), \quad (254)$$

где b — ширина ремня, мм; δ — толщина ремня, мм; F_t — окружная сила, $F_t = P/v$; $[k_{п}]$ — допускаемое полезное напряжение, соответствующее условиям работы рассчитываемой передачи; $[k_{п}] = k_{по}C_1C_2C_3C_4$; C_1 — коэффициент, учитывающий угол об-

Таблица 9. Значения коэффициента C_4

Передача	Наклон к горизонту, α		
	0—60	60—80	80—90
Открытая с периодическим регулированием натяжения	1,0	0,9	0,8
Перекрестная	0,9	0,8	0,7
Полуперекрестная	0,8	0,7	0,6

$= 0,8 \div 0,7$; при очень неравномерной нагрузке $C_3 = 0,7 \div 0,6$); C_4 — коэффициент, зависящий от рода передачи и угла наклона ее к горизонту; значения C_4 приведены в табл. 9.

По найденному значению F_t определяют ширину ремня и округляют до стандартного значения.

§ 112. Клиноремennая передача

Клиновой ремень в поперечном сечении представляет собой трапецию (рис. 203). Нагрузку воспринимает корд из химических волокон, изготовленный из нескольких слоев кордоткани 2 (см. рис. 204) или шнура 3, завулканизированных в специальную резину 4, обернутую слоями прорезиненной ткани 1.

Передача клиновыми ремнями (рис. 204) имеет следующие преимущества по сравнению с плоскоремennыми передачами:

возможность осуществления более высоких передаточных отношений (до 7 и даже до 10);

возможность применения при малых межцентровых расстояниях a , если в случае плоскоремennой передачи $a_{\min} = 2(D_1 + D_2)$, то в клиноремennой передаче $a_{\min} \approx D_2$;

надежность работы при любом расположении передачи и даже при вертикально расположенных валах;

возможность одной передачей осуществлять вращение нескольких ведомых валов без применения натяжных роликов;

возможность создания передачи с бесступенчатым регулированием угловой скорости ведомого вала;

большая плавность работы за счет отсутствия креплений ремней;

компактность передачи, позволяющая более просто осуществить ее ограждение;

сохранение работоспособности при обрыве одного из ремней.

Ряд достоинств клиноремennой передачи обусловлен возникновением на клинчатых поверхностях ремня (шкива) сил трения, больших, чем в плоскоремennой передаче при том же натяжении. В настоящее время клиноремennая передача имеет наиболее широкое распространение после зубчатых передач.

хвата, $C_1 = 1 \div 0,003$ ($180^\circ - \alpha$); C_2 — коэффициент, учитывающий скорость ремня, $C_2 = 1,04 \div \div 0,0004v^2$; C_3 — коэффициент режима работы ременной передачи (если рабочая нагрузка постоянна, $C_3 = 1 \div 0,9$; при незначительных ее колебаниях $C_3 = 0,9 \div 0,8$; при значительных колебаниях $C_3 =$

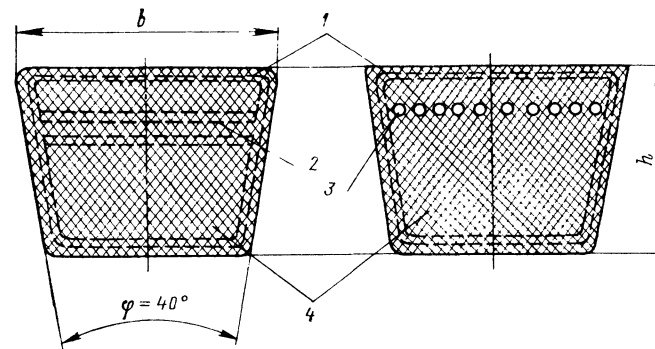


Рис. 203

Размеры клиновых ремней принимают по ГОСТ 1284—68 семи сечений (0, А, Б, В, Г, Д, Е) в виде бесконечных колец. Угол профиля φ (рис. 203) равен 40° . Диаметры шкивов для клиноремennой передачи выбираются по табл. 10.

Каждый ремень клиноремennой передачи представляет собой бесконечную ленту. Для более удобного надевания и снятия ремня, а также для регулирования его натяжения (по мере вытяжки) один шкив устанавливают так, чтобы он имел возможность перемещаться перпендикулярно к оси вала.

Правильно установленный ремень должен плотно прилегать к боковым граням желоба шкива, не выдаваясь за пределы обода и не касаясь дна желоба (рис. 205).

Клиноремennая передача применяется при мощности привода до 200 кВт и окружных скоростях до 25—30 м/с.

Расчет передачи сводится к выбору ремня стандартных профиля и длины и определению числа z ремней, необходимых для передачи заданной мощности P .

Для выполнения расчета должны быть известны: a — желательное межцентровое расстояние; P — передаваемая мощность; ω_1 — угловая скорость ведущего шкива; ω_2 — угловая скорость ведомого шкива.

Расчет клиноремennой передачи рекомендуется вести в такой последовательности:

1. Выбрать по заданной мощности подходящий профиль ремня (табл. 11).

2. Определить передаточное отношение

$$i = \omega_1 / \omega_2 = n_1 / n_2. \quad (255)$$

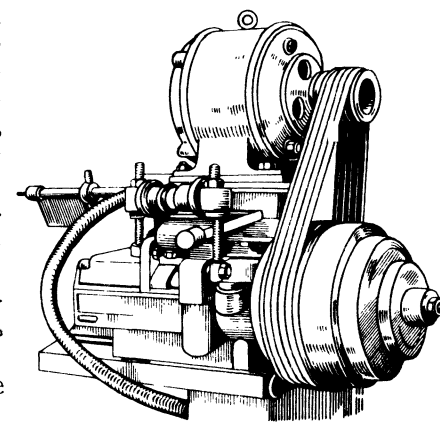


Рис. 204

Т а б л и ц а 10. Диаметры шкивов для клиновых ремней (ГОСТ 1284,3—80)

Диаметры шкива для сечений ремня, мм ²						
0	А	Б	В	Г	Д	Е
63	90	125	200	315	500	800
71	100	140	224	355	560	900
80	125	160	250	400	630	1000
90	140	180	280	450	710	1120
100	160	224	315	500	800	1250
122	180	250	355	560	900	1400
140	200	280	400	630	1000	1600

и более

минимальных значений, приведенных в таблице, принимать не следует, т. е. должно быть

$$5 \leq v \leq 30 \text{ м/с}; D_1 \geq D_{\text{мин.}}$$

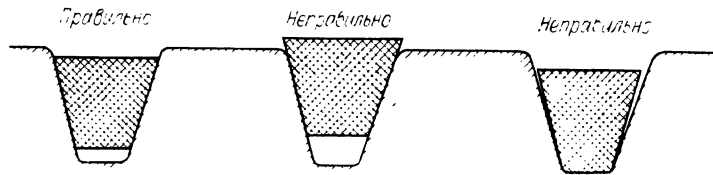


Рис. 205

4. Определить диаметр большего (ведомого) шкива по формуле

$$D_2 = D_1 (1 - \epsilon) i, \quad (256)$$

где ϵ — коэффициент, учитывающий скольжение ремня, $\epsilon = 0,01 \div 0,03$.

Расчетный диаметр D_2 следует округлить до стандартных значений по ГОСТ 1284.3—80 (см. табл. 10).

5. Определить расчетную длину ремня по формуле

$$L = 2a + \frac{\pi}{2} (D_1 + D_2) + \frac{(D_2 - D_1)^2}{4a}. \quad (257)$$

По вычисленной таким образом длине L выбирают по ГОСТ 1284.3—80 стандартную длину ремня L_0 и уточняют межцентровое расстояние

$$a = a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2}, \quad (258)$$

3. Выбрать расчетный диаметр меньшего шкива (см. табл. 10). Для увеличения срока службы ремня необходимо выбирать большие диаметры шкивов, учитывая конструктивные особенности передачи и рекомендуемые пределы скорости ремня 15—25 м/с. Значения скорости ниже 5 и более 30 м/с, а также диаметры шкивов меньше

Т а б л и ц а 11. Сечение ремня в зависимости от мощности и скорости

Передаваемая мощность P , кВт	Рекомендуемые сечения ремня при скорости, м/с		
	до 5	более 5 до 10	более 10
$\leq 0,75$	0, А	0	0
0,8—2	0, А, Б	0, А	0, А
2,1—4	А, Б	0, А, Б	0, А
4,1—7,4	Б, В	А, Б	А, Б
7,5—15	В	В, Б	Б, В
15,5—30	—	В, Г	В, Г
31—60	—	Г, Д	В, Г

где

$$a_1 = \frac{1}{4} \left[L_0 - \frac{\pi}{4} (D_1 + D_2) \right]; \quad a_2 = \frac{(D_2 - D_1)^2}{8}.$$

6. Определить окружную силу

$$F = P/v.$$

7. Определить число ремней

$$z \geq \frac{F}{[k_{\text{п}}] A_{\text{с.р}}}, \quad (259)$$

где $[k_{\text{п}}]$ — допускаемое полезное напряжение, МПа; $A_{\text{с.р}}$ — площадь поперечного сечения ремня выбранного профиля.

Допускаемое полезное напряжение выбирается на основании опытов по определению тяговой способности клиноременной передачи и связано с допускаемым приведенным полезным напряжением $k_{\text{по}}$, выбираемым по табл. 12, следующим соотношением:

$$[k_{\text{п}}] = k_{\text{по}} C_1 C_2 C_3, \quad (260)$$

где C_1 — поправочный коэффициент, учитывающий влияние угла обхвата:

α , рад	3,14	2,95	2,8	2,6	2,44
C_1	1	0,98	0,96	0,93	0,9
α , град	2,25	2,1	1,9	1,73	1,57
C_1	0,87	0,83	0,79	0,74	0,68

C_2 — поправочный коэффициент, учитывающий влияние скорости:

v , м/с	1	5	10	15	20	25	30
C_2	1,05	1,04	1	0,94	0,85	0,74	0,60

C_3 — коэффициент режима работы:

Характер установки	C_3
Генераторы, вентиляторы, легкие быстроходные станки, ленточные транспортеры и другие машины с плавным безударным ходом	1,0
Машины, рассчитанные на легкие толчки (токарные, сверлильные станки, торцовые пилы)	0,9
Тяжелые лесопильные установки, строгальные станки, насосы	0,8
Машины, работающие с грубыми толчками (дробилки, мельницы)	0,75
Экспедиторы, прессы, корчевальные машины	0,7

Число ремней z не должно превышать 8—12; в противном случае следует перейти на большее сечение ремня.

Ограничение числа ремней объясняется тем, что при большом их числе трудно рассчитывать на равномерность распределения нагрузки между ними вследствие колебаний фактических длин ремней и отклонений в размерах отдельных канавок шкивов.

Пример 36. Рассчитать клиноременную передачу от электродвигателя к лесопильной раме.

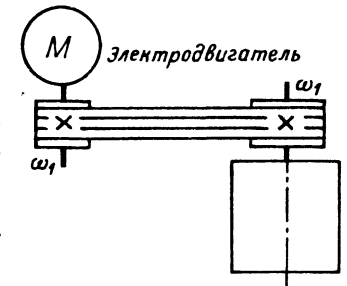


Рис. 206

Т а б л и ц а 12. Значение приведенного полезного напряжения при $\sigma_0 = 1,5$ МПа

Диаметр малого шкива, мм	Профиль ремня	$k_{\Pi 0}$, МПа	Диаметр малого шкива, мм	Профиль ремня	$k_{\Pi 0}$, МПа
63	0	(1,35)	315	Г	1,67
71		1,62	355		1,93
80		1,74	400		2,16
90		1,86	450		2,24
90	А	(1,35)	450	Д	(1,32)
100		1,67	500		1,67
112		1,80	560		1,93
125		1,91	630		2,24
125	Б	(1,35)	710	Е	(1,30)
140		1,67	800		1,67
160		1,88	900		1,95
180		2,05	1000		2,24
180	В	(1,35)	—	—	—
200		1,67	—		—
224		1,89	—		—
250		2,07	—		—
280		2,24	—		—

Примечание. В скобках указаны значения, соответствующие $\sigma_0 = 1,2$ МПа.

Мощность двигателя $P = 55$ кВт; диаметр шкива на раме $D_2 = 900$ мм; угловая скорость вала двигателя $\omega_1 = 75$ рад/с; угловая скорость ведомого шкива $\omega_2 = 30$ рад/с (рис. 206).

Решение. 1. Выбираем профиль ремня. Для мощности $P = 55$ кВт при скорости $v > 10$ м/с рекомендуются профили В или Г (см. табл. 11). Принимаем профиль Г.

2. Передаточное отношение

$$i = \omega_1 / \omega_2 = 75 / 30 = 2,5.$$

3. Диаметр меньшего (ведущего) шкива при $\epsilon = 0,02$

$$D_1 = \frac{D_2}{(1 - \epsilon)i} = \frac{900}{(1 - 0,02)2,5} = 367 \text{ мм.}$$

По табл. 12 для профиля Г $D_{\min} = 315$ мм и, следовательно, $D_1 > D_{\min}$. Принимаем согласно ГОСТ 1284.3—80 $D_1 = 355$ мм. При этом фактическое передаточное отношение

$$i_{\text{факт}} = \frac{D_2}{D_1(1 - \epsilon)} = \frac{900}{355(1 - 0,02)} = 2,58,$$

т. е. отличается от заданного примерно на 3 %, что допустимо.

4. Межцентровое расстояние принимаем предварительно

$$a_{\min} = D_2 = 0,9 \text{ м.}$$

5. Длина ремня

$$L = 2a + \frac{\pi}{2}(D_2 + D_1) + \frac{(D_2 - D_1)^2}{4a} = 2 \cdot 0,9 + 1,57(0,9 + 0,355) + \frac{(0,9 - 0,355)^2}{4 \cdot 0,9} = 1,8 + 1,97 + 0,0082 = 3,852 \text{ м.}$$

По ГОСТ 1284.3—80 ближайшая расчетная длина ремня для профиля Г $L_0 = 4000$ мм. В соответствии с принятой длиной ремня уточняем межцентровое расстояние

$$a = a_1 + \sqrt{a_1^2 - a_2},$$

где

$$a_1 = \frac{1}{4} \left[L_0 - \frac{\pi}{2}(D_1 + D_2) \right] = \frac{1}{4} [4 - 1,57(0,355 + 0,9)] = 0,507;$$

$$a_2 = \frac{(D_2 - D_1)^2}{8} = \frac{(0,9 - 0,355)^2}{8} = 0,0372.$$

Тогда

$$a = 0,507 + \sqrt{0,507^2 - 0,0372} \approx 0,977 \text{ м} = 977 \text{ мм.}$$

6. Скорость ремня

$$v = D_1 \omega_1 / 2 = 0,355 \cdot 75 / 2 = 13,3 \text{ м/с.}$$

7. Окружная сила

$$F_t = P / v = 1000 \cdot 55 / 13,3 = 4120 \text{ Н.}$$

8. Число ремней

$$z \geq \frac{F_t}{[k_{\Pi}]A}; \quad k_{\Pi 0} = 1,93 \text{ МПа (см. табл. 12);}$$

$$\alpha = 3,14 \frac{D_2 - D_1}{a} = 3,14 \frac{0,9 - 0,355}{0,977} = 2,6 \text{ рад.}$$

По приведенным ранее данным [см. ф-лу (260)], $C_1 \approx 0,93$; $C_2 = 0,95$; $C_3 = 0,8$; $[k_{\Pi}] = k_{\Pi 0} C_1 C_2 C_3 = 1,93 \cdot 0,93 \cdot 0,95 \cdot 0,8 = 1,33$ МПа.

По ГОСТ 1284.3—80 $A = 4,76 \text{ см}^2 = 476 \text{ мм}^2$; $z \geq \frac{4120}{1,33 \cdot 476} \approx 6,5$. Принимаем семь ремней.

§ 113. Передача зубчатым ремнем

Передача и преобразование движения с помощью зубчатого ремня осуществляются за счет геометрического взаимодействия зубчатых ремней с ведущим и ведомым зубчатыми колесами (рис. 207).

Эти передачи обладают следующими достоинствами: работа передачи без проскальзывания, т. е. передаточное отношение $i = \omega_1 / \omega_2 = \text{const}$;

бесшумность, компактность, передача не требует периодического регулирования;

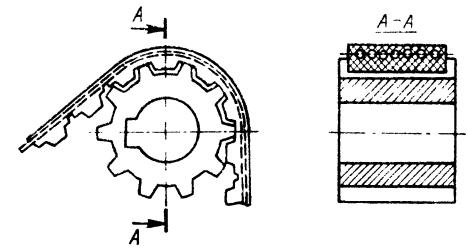


Рис. 207

стабильность и высокая несущая способность.

Зубчатый ремень состоит из скрученных кордных нитей, имеющих высокую разрывную прочность по всей ширине ремня.

Зубчатая поверхность ремня облицована тканью на основе нейлона.

Ремень имеет высокую усталостную выносливость, стойкость против воздействия масла, тепла и влаги.

ГЛАВА XXIV. ЦЕПНЫЕ ПЕРЕДАЧИ

§ 114. Особенности и область применения цепных передач

Цепная передача относится к числу передач с промежуточным звеном (гибкой связью). Цепная передача (рис. 208) осуществляется при помощи бесконечной цепи, охватывающей две (или более) звездочки — колеса с зубьями специального профиля. Она служит для передачи движения только между параллель-

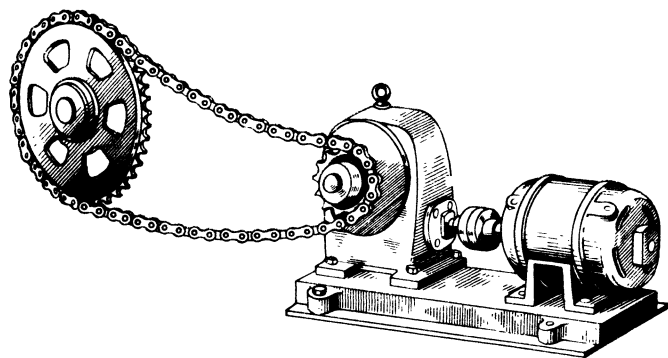


Рис. 208

ными валами. В отличие от ременной цепная передача работает подобно зубчатой без проскальзывания.

Основные достоинства цепной передачи:

компактность;

меньшая, чем в ременных передачах, нагрузка на валы;

возможность передачи движения на значительные расстояния (до 5—8 м);

возможность передачи движения одной цепью нескольким валам (рис. 209);

сравнительно высокий КПД передачи (до 0,98).

Недостатки цепной передачи:

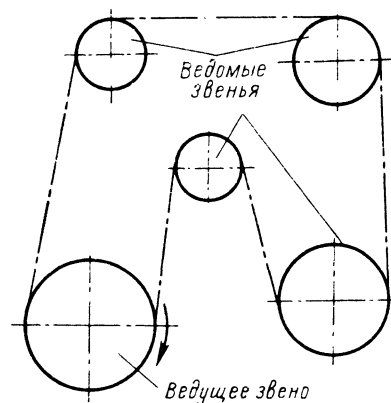


Рис. 209

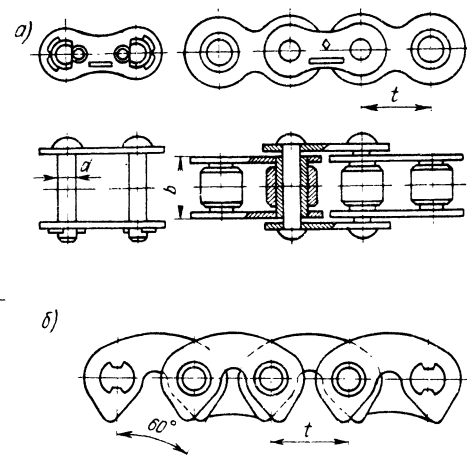


Рис. 210

увеличение шага цепи (цепь вытягивается) вследствие износа шарниров, что требует применения натяжных устройств;

более сложный уход по сравнению с ременными передачами (смазка, регулировка, устранение перекаса валов);

повышенный шум.

Цепные передачи широко применяются в станках для обработки металла и дерева, в транспортных устройствах и др. Современные цепные передачи используются при передаточных отношениях $i < 10$, при скоростях цепи до $v = 25$ м/с и для передачи мощности до 150 кВт. Они, как зубчатые, бывают открытыми и закрытыми.

По характеру выполняемой работы цепи делятся на три основные группы: приводные, грузовые и тяговые. Каждая группа, в свою очередь, по конструктивным признакам делится на различные типы. В дальнейшем рассматриваются только приводные цепи; из них наиболее распространены роликовые, втулочные и зубчатые (так называемые бесшумные) цепи.

Роликовые цепи (рис. 210, а) состоят из двух рядов внутренних и внешних пластин. В наружные пластины заделаны оси, которые пропущены через втулки, запрессованные во внутренние пластины. На втулки насажены рабочие ролики, катящиеся в процессе зацепления по зубьям звездочки. Втулочные цепи имеют сходную конструкцию, но без роликов. Втулочные и роликовые цепи бывают однорядными и многорядными. Их предельная скорость $v \leq 15$ м/с.

Зубчатые цепи имеют пластины особого профиля, соответствующего профилю зубьев звездочек (рис. 210, б).

Все приводные цепи стандартизованы: роликовые и втулочные по ГОСТ 13568—75, зубчатые цепи по ГОСТ 13552—81.

§ 115. Выбор приводных цепей и звездочек

Передаточное отношение цепной передачи

$$i = \omega_1/\omega_2 = n_1/n_2 = z_2/z_1,$$

где ω_1 , ω_2 и n_1 , n_2 — угловые скорости и частоты вращения ведущего и ведомого валов; z_1 , z_2 — число зубьев ведущей и ведомой звездочек.

Необходимо отметить, что передаточное отношение цепной передачи за один оборот ведущей звездочки не остается постоянным, т. е. происходит колебание угловой скорости ведомой звездочки. Постоянно только среднее передаточное число цепной передачи.

С увеличением угла обхвата увеличивается число зубьев звездочки, находящихся в зацеплении с цепью (рис. 211).

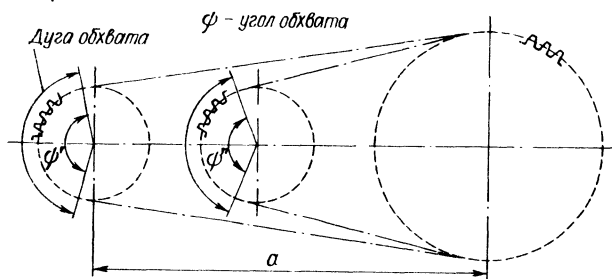


Рис. 211

Т а б л и ц а 13. Допускаемое давление в шарнирах

Частота вращения меньшей звездочки, об/мин	[p], МПа, при шаге цепи t, мм					
	12,5—15,87		19,05—25,4		30—38,1	
	1	2	1	2	1	2
50	34,3	19,6	34,3	19,6	34,3	19,6
200	30,9	17,6	29,4	16,7	28,1	16,1
400	28,1	16,1	25,7	14,7	23,7	13,1
800	23,7	13,7	20,6	11,8	18,1	10,3

Примечание. 1 — значения [p] для втулочно-роликовых цепей ($z_1 = 15 \div 30$); 2 — значения [p] для зубчатых цепей ($z_1 = 17 \div 35$).

Основным размером цепи является ее шаг t , определяемый из расчета цепи на износостойкость по величине давления в шарнирах цепи. Предварительно шаг (в мм) определяют по формулам:

Т а б л и ц а 14. Предельные угловые скорости малой звездочки

Число зубьев	[ω_{1max}], рад/с, при шаге t, мм		
	12	19,05	30
15	230	135	100
23	250	150	110
30	260	155	110

Для роликовых и втулочных цепей

15	230	135	100
23	250	150	110
30	260	155	110

Для зубчатых цепей

17—35	330	220	130
-------	-----	-----	-----

для роликовых и втулочных цепей

$$t = 2,8 \sqrt[3]{\frac{M_1 k}{z_1 [p] m}}; \quad (261)$$

для зубчатых цепей

$$t = 3,3 \sqrt[3]{\frac{M_1 k}{z_1 [p] \psi_t}}; \quad (262)$$

где M_1 — вращающий момент на меньшей звездочке, Н·мм; k — коэффициент нагрузки; z_1 — число зубьев меньшей звездочки; $[p]$ — допускаемое давление в шарнирах, МПа (табл. 13); m — число рядов цепи; ψ_t — коэффициент ширины цепи (b — ширина цепи), $\psi_t = b/t$.

Коэффициент нагрузки k равен произведению трех коэффициентов

$$k = k_1 k_2 k_3,$$

где k_1 ($k_1 = 1 \div 1,4$), k_2 ($k_2 = 1 \div 1,5$), k_3 ($k_3 = 1 \div 1,45$) — коэффициенты, учитывающие характер нагрузки, влияние способа смазки и соответственно продолжительность работы (одно-, двух- и трехсменная).

Линейная скорость (м/с) цепи определяется по формуле

$$v = \frac{tzn}{60 \cdot 1000},$$

где t — шаг, мм; n — частота вращения звездочки, об/мин.

Полученный по формулам (2.61) и (2.62) результат следует округлить до ближайшего стандартного значения для данного типа приводной цепи.

Межцентровое расстояние a передачи выбирают в пределах $a = (30 \div 50)t$; максимальное межцентровое расстояние $a_{max} = 80t$.

Число звеньев цепи (длина цепи, выраженная в шагах) определяется из выражения

$$L_t = 2 \frac{a}{t} + \frac{z_1 + z_2}{2} + \left(\frac{z_2 - z_1}{2\pi} \right)^2 \frac{t}{a}. \quad (263)$$

Чем меньше число зубьев звездочки, тем больше износ цепи, так как при этом увеличивается угол поворота шарнира. Наименьшее число зубьев звездочки рекомендуется принимать для роликовых и втулочных цепей ($z_{min} = 13$) и для зубчатых цепей ($z_{min} = 17$). Обычно применяют звездочки с числом зубьев в 1,5—2 раза (в зависимости от передаточного отношения) больше z_{min} .

После определения шага следует проверить, не превышает ли угловая скорость ω_1 предельно допускаемой (ω_{1max}) (табл. 14).

Выбранную цепь проверяют на износостойкость по формуле

$$p = F/A \leq [p]. \quad (264)$$

Проекция опорной поверхности шарнира:

для втулочно-роликовой цепи

$$A = md(c - 2s);$$

для зубчатых цепей

$$A = 0,76db,$$

где d — диаметр оси шарнира; c — расстояние между внутренними пластинами цепи; s — толщина пластины; b — ширина цепи.

Затем определяют фактический коэффициент запаса прочности и сравнивают его с допускаемым

$$n = F_p/F_0 \geq [n]. \quad (265)$$

Здесь F_p — разрушающая нагрузка; F_0 — расчетное усилие в ведущей ветви цепи,

$$F_0 = F_t K_f + F_{\text{ц}} + F_f, \quad (266)$$

где F_t — окружное усилие; $F_{\text{ц}}$ — натяжение от центробежных сил инерции, $F_{\text{ц}} = qv^2$; q — масса 1 м цепи; v — скорость цепи, м/с, $v = r_1 t \omega_1 / (2\pi)$; F_f — натяжение от провисания цепи, $F_f = K_f q a$; K_f — коэффициент, учитывающий влияние расположения цепной передачи; при угле наклона к горизонту $\psi < 40^\circ$ $K_f = 2 \div 6$; при $\psi > 40^\circ$ $K_f = 1 \div 1,5$; a — расстояние между осями звездочек; $[n]$ — нормативный коэффициент запаса прочности приводных роликовых цепей, $[n] = 7 \div 15$.

Долговечность цепи зависит от рационального устройства смазки. При недостаточной смазке в шарнирах цепи и вследствие этого трения цепь быстро срабатывается и вытягивается.

КПД правильно смонтированных передач колеблется в пределах 0,96—0,97.

ГЛАВА XXV. МЕХАНИЗМЫ ВОЗВРАТНО-ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ

§ 116. Кривошипно-ползунный механизм

В современных приборах и машинах широкое распространение получили рычажные механизмы и в первую очередь кривошипно-ползунный механизм (рис. 212), состоящий из стойки 1, кривошипа 2, шатуна 3 и ползуна 4, движущегося в направляющих 5.

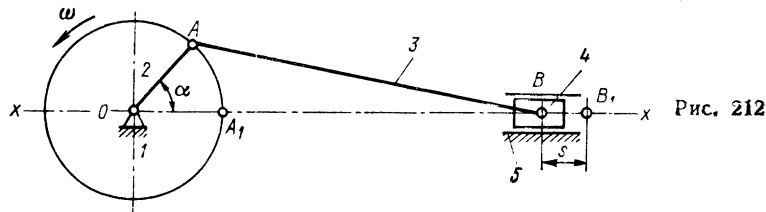


Рис. 212

Кривошипно-ползунный механизм служит для преобразования вращательного движения кривошипа в возвратно-поступательное прямолинейное движение ползуна. Наоборот, когда ведущим звеном является ползун, возвратно-поступательное прямолинейное движение ползуна преобразовывается во вращательное движение кривошипа и связанного с ним вала.

Кривошипно-ползунные механизмы широко применяют в поршневых двигателях, компрессорах, прессах, насосах и т. д.

Если прямая, по которой движется центр шарнира, проходит через ось вращения кривошипа O_1 , то механизм носит название *центрального*. Если эта прямая не проходит через точку O , то полученный кривошипно-ползунный механизм называется *дезаксиальным* или *нецентральным*.

В некоторых случаях необходимо найти аналитические зависимости перемещения, скорости и ускорения ползуна кривошипно-ползунного механизма от угла поворота кривошипа $OA = r$ (рис. 212).

Перемещение ползуна в зависимости от угла поворота кривошипа

$$s = r(1 - \cos \alpha). \quad (267)$$

Скорость ползуна $v = ds/dt$ умножим и разделим на $d\alpha$, тогда

$$v = \frac{ds}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt},$$

где $ds/d\alpha = r \sin \alpha$; $d\alpha/dt = \omega$.

В таком случае

$$v = \omega r \sin \alpha. \quad (268)$$

Ускорение ползуна $a = dv/dt$ умножим и разделим на $d\alpha$, тогда

$$a = \frac{dv}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt},$$

где

$$dv/d\alpha = \omega r \cos \alpha; \quad d\alpha/dt = \omega.$$

В таком случае

$$a = \omega^2 r \cos \alpha. \quad (269)$$

§ 117. Кулачковые механизмы

Кулачковые механизмы применяют в тех случаях, когда перемещение, скорость и ускорение ведомого звена должны изменяться по заранее заданному закону, в частности, когда ведомое звено должно периодически останавливаться при непрерывном движении ведущего звена.

Чаще всего кулачковый механизм состоит из трех звеньев (рис. 213, а): кулачка 1, толкателя 2 и стойки 3. На рис. 213, б представлен четырехзвенный кулачковый механизм (четвертое звено — ролик 4).

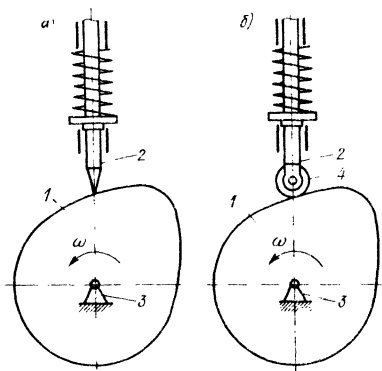


Рис. 213

Для увеличения стойкости кулачки изготавливают из высококачественной стали с рабочей поверхностью высокой твердости. С целью уменьшения трения и износа на толкателе устанавливают ролик, который вращается на оси и катится без скольжения по рабочей поверхности кулачка (рис. 213, б).

Кроме износа звеньев недостатком кулачковых механизмов является необходимость обеспечивать постоянное соприкосновение (замыкание) между звеньями. В процессе работы кулачкового механизма могут возникать большие силы, главным образом инерционные, направленные на отрыв рабочей поверхности толкателя от кулачка. Для восприятия этих сил применяется либо геометрическое (кинематическое), либо силовое замыкание кинематической цепи.

Геометрическое (кинематическое) замыкание применено в представленном на рис. 214 и 215 механизме с пазовым кулачком. Толкатель движется поступательно. При вращении кулачка ролик толкателя соприкасается с боковыми сторонами паза, прорезанного на кулачке. Паз создает два рабочих профиля кулачка, которые перемещают ролик толкателя в обоих направлениях.

При силовом замыкании толкатель во всех положениях прижат к кулачку с силой, которая больше силы, стремя-

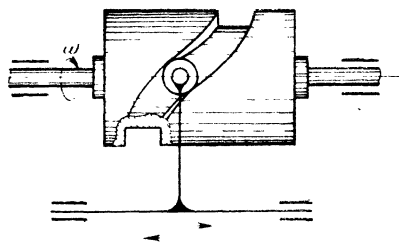


Рис. 214

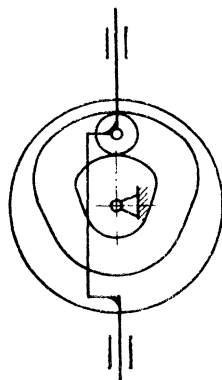


Рис. 215

Кулачковые механизмы подразделяются на плоские и пространственные. Плоскими называют такие кулачковые механизмы, у которых кулачок и толкатель перемещаются в одной или параллельных плоскостях; пространственными — такие, у которых кулачок и толкатель перемещаются в непараллельных плоскостях.

На рис. 214 представлена схема пространственного цилиндрического кулачкового механизма с профильным пазом на боковой поверхности.

щейся оторвать толкатель от кулачка. Замыкающая сила в подавляющем большинстве случаев создается пружиной (см. рис. 213).

К числу недостатков кулачковых механизмов следует отнести сложность изготовления профиля кулачка, от которого требуется большая точность.

В тех случаях, когда толкатель должен перемещаться с периодическими остановками, участки профиля кулачка, соответствующие этим периодам, должны быть очерчены дугами окружности, проведенными из центра вращения кулачка.

ГЛАВА XXVI. МЕХАНИЗМЫ ПЕРЫВИСТОГО ОДНОСТОРОННЕГО ДВИЖЕНИЯ

§ 118. Храповые механизмы

Перывистое движение в одну сторону чаще всего осуществляется при помощи храповых и мальтийских механизмов.

Храповые механизмы применяют для осуществления движений подачи инструмента и обрабатываемого материала в различных станках. Кроме того, их используют в качестве тормозных уст-

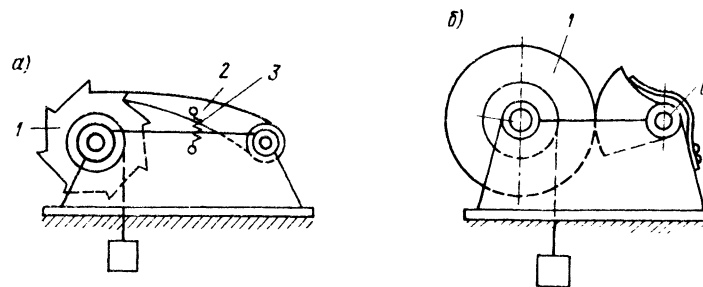


Рис. 216

ройств, препятствующих обратному ходу. Так, храповой механизм в грузоподъемных лебедках предотвращает падение поднятого груза.

Основой храпового механизма служит храповая пара (рис. 216, а), состоящая из звена 1, называемого храповиком, и звена 2, называемого собачкой или щеколдой. Замыкая оба звена пружиной 3, получаем храповой механизм.

Храповые механизмы делятся на два основных класса:

1. Механизмы, в которых храповик задерживается собачкой только в одном направлении, а в другом направлении может двигаться и приподнимать собачку. К этому классу относятся механизмы, имеющие храповики с острыми зубьями (рис. 216, а).

2. Механизмы, в которых храповик затормаживается в двух направлениях. К этому классу относятся механизмы, имеющие

храповики с симметричными зубьями. Действие такого храповика соответствует работе двух противоположно действующих храповых механизмов.

Широкое распространение получили фрикционные храповые механизмы (рис. 216, б). Их можно рассматривать как зубчатые с бесконечно малым шагом. Центр вращения кулачка O_1 и центр дуги, по которой он очерчен, не совпадают, поэтому торможение происходит только при вращении звена 1 в одном направлении.

§ 119. Мальтийские механизмы

Мальтийские механизмы (рис. 217) применяют для преобразования непрерывного вращения ведущего звена 1 в прерывистое движение ведомого звена 3. Палец 2, закрепленный на ведущем звене 1, последовательно входит в прорези ведомого звена (креста 3).

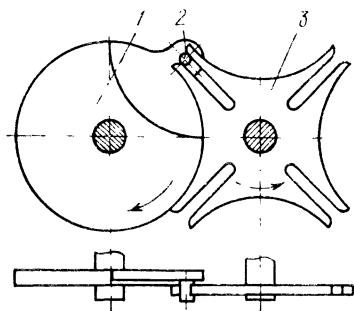


Рис. 217

На рисунке показан момент начала движения креста 3. Палец 2 находится в начале прорези. При вращении звена 1 по часовой стрелке палец входит внутрь прорези, приближаясь к оси вращения креста, а затем начинает удаляться от оси и выходит из прорези. Пока палец перемещается по прорези, крест поворачивается, а после выхода пальца из прорези крест останавливается. Палец, продолжая вращаться, через некоторое время входит в следующую прорезь креста, и движение креста

снова повторяется. Если крест имеет четыре прорези, как показано на рис. 217, то при одном полном повороте пальца крест поворачивается на четверть поворота. Чтобы крест во время остановки не поворачивался самопроизвольно, поверхность между его прорезями делается вогнутой, а поверхность ведущего диска — выпуклой.

Мальтийские механизмы изготовляют с тремя, четырьмя, пятью, шестью и восемью прорезями креста, что соответствует 1/3, 1/4, 1/6 и 1/8 оборотам ведомого звена за один полный оборот ведущего звена.

ГЛАВА XXVII. ВАЛЫ И ОСИ. ОПОРЫ И МУФТЫ

§ 120. Конструктивные формы осей и валов

Детали, на которые насажены вращающиеся части (шкивы, зубчатые колеса и т. п.), называются осями или валами. Оси и валы различаются между собой по условиям работы. Оси, несущие на себе вращающиеся части, не передают моментов и подвергаются только изгибу; валы, являясь, как и оси, поддерживающими дета-

лями, помимо того, передают момент и работают не только на изгиб, но и на кручение.

Поддерживая детали передач, оси и валы, в свою очередь, сами опираются на неподвижные опорные части — подшипники и подпятники. Участки осей и валов, лежащие в опорах, носят

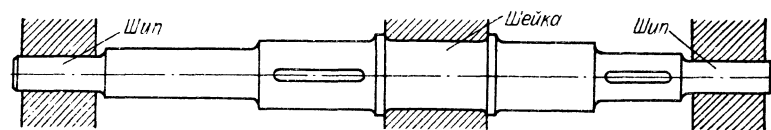


Рис. 218

название *цапф*. Концевые цапфы именуются *шипями*, а промежуточные — *шейками* (рис. 218).

Торцовые части (или уступы) вала или оси, упирающиеся в неподвижную опору и препятствующие осевому смещению, называются *пятями*. Пяты могут иметь плоскую, шаровую или коническую форму.

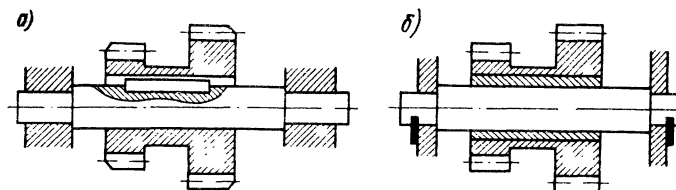


Рис. 219

По конструкции оси можно разделить на две основные группы: оси, вращающиеся в опорах вместе с насаженными на них деталями (рис. 219, а);

неподвижные оси, являющиеся опорой вращающихся на них деталей (рис. 219, б).

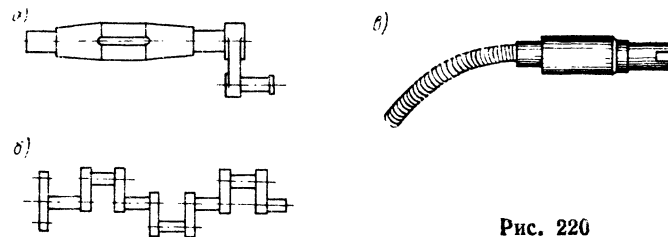


Рис. 220

По конструкции валы делятся на сплошные и полые с прямой осью (см. рис. 218) и коленчатые (рис. 220, а и б) с изменяемой формой геометрической оси (гибкие — рис. 220, в).

Оси и валы конструируют обычно в виде брусьев, состоящих из ряда цилиндрических участков различных диаметров.

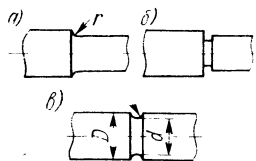


Рис. 221

Соединение оси или вала с деталями передач, насаживаемыми на них, производится при помощи шпонок, шлицев и т. п. С этой целью на валу делают шпоночные канавки или шлицы. Насаживаемые на вал детали удерживаются от сдвига в осевом направлении с помощью специальных установочных колец, клиновых шпонок (редко), распорных втулок, а также благодаря наличию на валах буртиков или уступов. Для удобства сборки валы приходится делать ступенчатыми, чтобы не протаскивать с силой деталь через предшествующий месту посадки участок вала.

Сопряжение участков вала различных диаметров желательно осуществлять плавным переходом (галтелью), очерченным дугой с возможно бóльшим радиусом (рис. 221, а). Таким образом удается значительно снизить концентрацию напряжений в месте перехода, особенно опасную в связи с тем, что вал и вращающаяся ось испытывают переменные напряжения. Еще больше концентрацию напряжений можно снизить, применяя галтели, очерченные по дуге эллипса или дугами двух различных радиусов. Переход от одного диаметра вала (оси) к другому, выполненный, как показано на рис. 221, б, нерационален, так как выточка является острым концентратором напряжений. Влияние выточки можно несколько смягчить, если сделать ее закругленной (рис. 221, в).

Для повышения прочности — объемной для вала в целом и поверхностной для цапф, работающих на истирание, — валы подвергают объемной (сплошной или местной) или поверхностной термической обработке.

Длинные валы выполняют составными. Для облегчения вала или оси их иногда делают полыми. Оси и валы изготавливают из углеродистой стали марок Ст5 (без термообработки), 35, 40, 45 (с термообработкой) и легированной стали марок 40Х, 30ХГТ и др.

Один или два бурта (выступа) на шипе предназначены для восприятия небольших осевых нагрузок, действующих соответственно на одном или двух противоположных направлениях.

На рис. 222 показана шейка вала. Уменьшение диаметра шейки по отношению к диаметрам соседних участков вала недопустимо, так как в ее поперечных сечениях возникают крутящие и изгибающие моменты, не меньшие, чем в прилегающих участках вала.

Оси и валы рассчитывают на прочность и жесткость как брусья круглого поперечного сечения, работающие на изгиб или изгиб и кручение (см. гл. IX и XI).

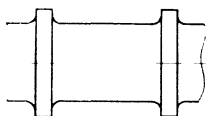


Рис. 222

§ 121. Шпоночные и зубчатые (шлицевые) соединения

Шпонкой называют стальной стержень, вводимый между валом и посаженной на него деталью — зубчатым колесом, шкивом, муфтой — для взаимного соединения и передачи вращающего момента от вала к детали или от детали к валу.

Шпонки делятся на две основные группы:

клиновые (с уклоном), дающие напряженные соединения;

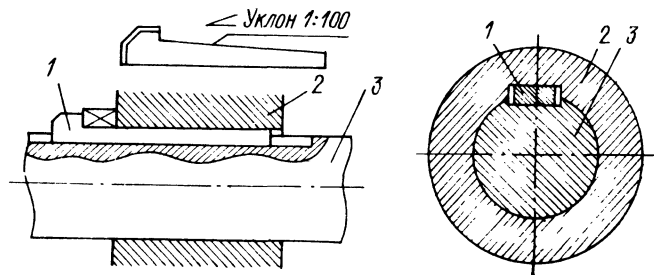


Рис. 223

призматические (без уклонов), при применении которых получаются ненапряженные соединения.

Напряженными называют соединения, в деталях которых возникают напряжения в процессе монтажа, т. е. до приложения внешних сил.

Клиновую шпонку, имеющую уклон верхней грани 1 : 100, загоняют между валом и деталью легкими ударами молотка, что и обеспечивает напряженное соединение. Применяют также *закладные клиновые шпонки*: такую шпонку закладывают на паз вала, а затем напрессовывают шкив, цепную звездочку и т. п.

К клиновым шпонкам относятся *врезные, на лыске и фрикционные*. Канавки для клиновых врезных шпонок 1 выполняют и в детали 2, и на валу 3 (рис. 223). При клиновых шпонках на лыске канавка делается только в детали, а на валу образуется плоский срез — лыска (рис. 224, а); при клиновых фрикционных шпонках (рис. 224, б) лыски на валу нет.

По форме торцов различают клиновые шпонки с *головкой*, и *без головки*. Головка используется для выбивания шпонки при разборке с помощью клина. На вращающемся валу во избежание несчастных случаев головка шпонки должна быть закрыта. У клиновых шпонок рабочими являются широкие грани; по боковым граням имеется зазор.

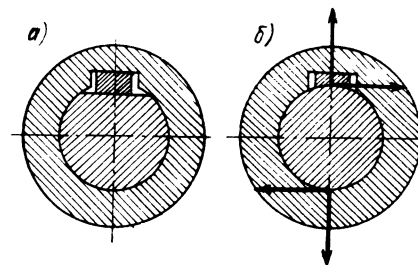


Рис. 224

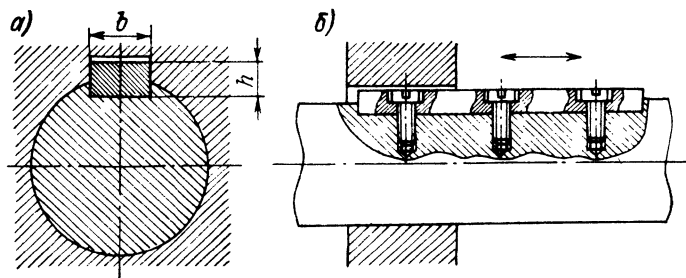


Рис. 225

Основной недостаток соединения деталей при помощи клиновых шпонок — наличие радиального смещения оси насаживаемой детали по отношению к оси вала, что вызывает дополнительное биение. Поэтому они применяются сравнительно редко — в основном в тихоходных передачах.

Призматические шпонки не имеют уклона. Их закладывают в паз на валу (рис. 225, а). Такие шпонки не удерживают деталь от осевого смещения по валу; с этой целью используют заплечики на валу, установочные кольца, стопорные винты и т. п. Призматические шпонки применяют в неподвижных и подвижных шпоночных соединениях. В последнем случае шпонку крепят к валу винтами (рис. 225, б); такая шпонка называется *направляющей*. По форме торцов различают призматические шпонки со скругленными и плоскими торцами.

Кроме перечисленных шпонки имеют широкое распространение — шпонки *сегментные, тангенциальные и специальной конструкции*. Сегментная шпонка (рис. 226) представляет собой сегментную пластинку, заложённую закруглённой стороной в паз соответствующей формы, профрезерованный на валу. Эти шпонки удобны при сборке и раз-

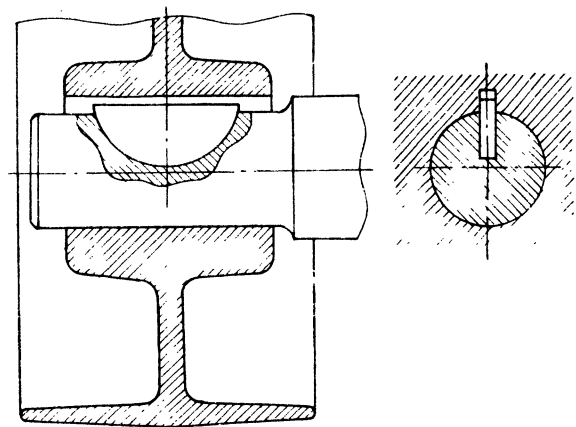


Рис. 226

борке, просты в изготовлении, но применимы при сравнительно небольших вращающих моментах. В отличие от клиновых, у призматических шпонок рабочими являются узкие грани.

Размеры шпонок должны обеспечивать передачу определенного вращающего момента. Размеры вала также зависят от передаваемого момента, поэтому размеры сечения шпонок и диаметров валов должны быть увязаны. Клиновые врезные, призматические и сегментные шпонки стандартизованы.

Таким образом, если задан диаметр вала, размеры сечения шпонки определяют по ГОСТ 24068—80 (СТ СЭВ 645—77) и ГОСТ 24069—80 (СТ СЭВ 646—77) (шпонки клиновые), по ГОСТ 23360—78 и СТ СЭВ 189—75 (шпонки призматические), по ГОСТ 24071—80 (СТ СЭВ 647—77) (шпонки сегментные), а затем проверяют на прочность. Длину шпонки обычно принимают равной $l \leq 1,5d$ (d — диаметр вала), но не больше длины ступицы детали (шкива, шестерни), соединяемой с валом.

Шпонки изготовляют из стали, имеющей предел прочности (временное сопротивление) $\sigma_b \geq 500$ МПа (сталь 45 и др.).

Канавки для шпонок вызывают существенное ослабление валов, так как создают значительную концентрацию напряжений. Для снижения концентрации напряжений, а также для лучшего центрирования деталей на валу и уменьшения напряжений смятия в шпоночном соединении (что особенно важно для подвижных соединений) применяют шлицевое (или зубчатое) соединение деталей с валом. Этот вид соединений получил в последнее время большое распространение.

Зубчатые соединения образуются выступами на валу и соответствующими впадинами насаживаемой детали. Вал и деталь с отверстиями обрабатывают так, чтобы боковые поверхности шлицев или участки цилиндрических поверхностей (по внутреннему или наружному диаметру шлицев) плотно прилегали друг к другу. Соответственно различают шлицевые соединения с центрированием по внутреннему или наружному диаметру или по боковым

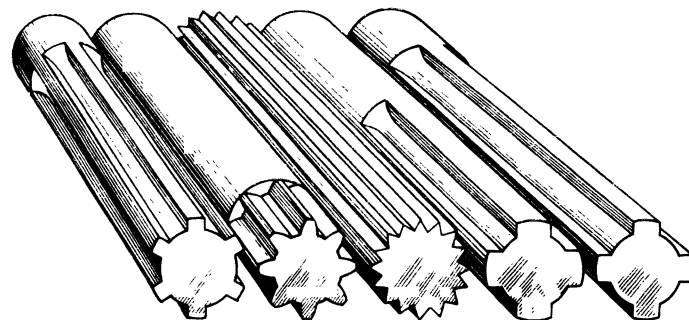


Рис. 227

поверхностям. Между цилиндрическими поверхностями, не являющимися центрирующими, оставляют зазор.

В зависимости от формы выступов и впадин различают: прямобочное соединение по ГОСТ 1139—80* (СТ СЭВ 188—75) с центрированием по наружному или внутреннему диаметру, а также по боковым поверхностям с четырьмя, шестью, восемью или десятью шлицами, треугольное и эвольвентное шлицевые соединения, при последнем боковые поверхности шлицев очерчены по эвольвенте. Общий вид шлицевых валов с различными типами шлицев представлен на рис. 227.

§ 122. Подшипники скольжения

Для поддержания осей и валов с насаженными на них деталями и восприятия действующих на них усилий служат специальные опоры: подшипники, нагружаемые радиальными силами, и подпятники, нагружаемые осевыми силами. По характеру трения рабочих элементов опоры разделяют на опоры *скольжения* и опоры *качения* (шариковые и роликовые подшипники). Выбор вида опоры зависит от большого числа конструктивных и эксплуатационных факторов.

В опорах качения потери на трение обычно меньше, чем в опорах скольжения. Обеспечение в опорах скольжения жидкостного трения, при котором потери на трение соизмеримы с потерями в опорах качения, не всегда возможно.

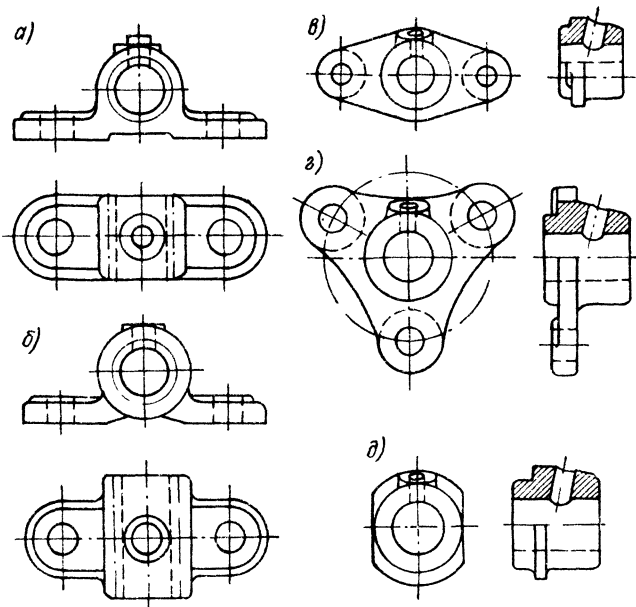


Рис. 228

Подшипники скольжения используют в современном машиностроении значительно реже подшипников качения. Однако имеется ряд областей, где их применение является предпочтительным. Например, для подшипников особо тяжелых валов (для которых подшипники качения не изготавливают), для подшипников, подвергающихся ударной или вибрационной нагрузке, если необходимо иметь разъемные подшипники (для коленчатых валов) и тому подобное.

Подшипник скольжения состоит из двух основных элементов: корпуса и вкладыша.

Вкладыш, являющийся рабочим элементом опоры, может быть неподвижным относительно корпуса, подвижным и самоустанавливающимся; тип вкладышей выбирают в зависимости от отношения ϕ длины цапфы l к ее диаметру d , т. е. $\phi = l/d$, и режима работы данной цапфы.

Неразъемные подшипники делятся на несколько типов: узкие (рис. 228, а), широкие (рис. 228, б), фланцевые (рис. 228, в, г), гнездовые (рис. 228, д).

Наиболее прост неразъемный подшипник, представляющий собой бобышку станины или рамы машины с расточкой цилиндрического отверстия для вала.

Более удобны неразъемные подшипники, но выполненные отдельно и соединяемые со станиной болтами (рис. 229). Подшипники подобного типа изготавливают с вкладышем и без вкладыша.

Вкладыш представляет собой втулку (из чугуна, бронзы, древесного пластика или другого антифрикционного материала), запрессованную в отверстие. Часто металлические вкладыши заливают тонким слоем антифрикционного сплава (баббита и др.).

Недостаток опор такого типа — отсутствие возможности компенсации износа рабочей поверхности отверстия путем сближения одной его части с другой.

Неразъемные опоры скольжения можно применять для сравнительно жестких осей и валов.

На рис. 230 показан разъемный подшипник. Подшипники этой группы состоят из корпуса 5, разрезного вкладыша 4, крышки 3 и болтов 1. Вкладыш неподвижен относительно корпуса и крышки.

Смазочный материал поступает на трущиеся поверхности через отверстие в крышке из смазочного резервуара — масленки 2. Износ вкладыша компенсируется поджатием крышки с верхней половиной вкладыша. При значительном износе вкладыш заменяют новым.

При сравнительно длинных цапфах ($\phi = l/d > 1,5$) нагрузка по длине неподвижного вкладыша распределяется неравномерно, что приводит к интенсивному износу вкладыша у его торцов. Это объясняется тем, что вкладыш не может следовать за отклоне-

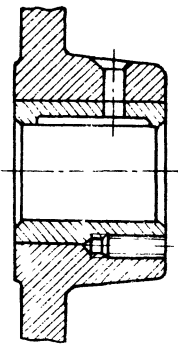


Рис. 229

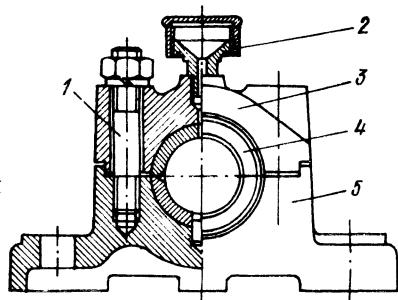


Рис. 230

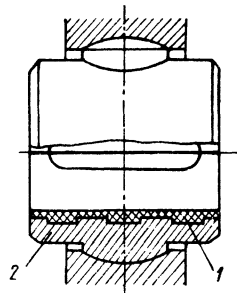


Рис. 231

ниями оси цапфы, вызванными деформацией вала под действием нагрузки. В указанных случаях следует применять подшипники с самоустанавливающимися вкладышами 1 и 2 (рис. 231). Вкладыш 2 сферической поверхностью соприкасается с корпусом и может поворачиваться относительно него.

Вкладыши в подшипниках скольжения изготавливают из чугуна (при малой скорости и умеренном давлении), бронзы (для более нагруженных подшипников и большой скорости), чугуна или стального литья с заливкой баббитом, древесины (бакаута, березы, акации и др.), прессованной древесины, цельнопрессованного древесного пластика, различных пластмасс (текстолита, капрона и др.).

Корпуса крышки подшипников скольжения обычно отливают из чугуна (при больших нагрузках — из стали) или делают сварными.

Для нормальной работы подшипника трущиеся поверхности цапфы и вкладыша должны смазываться. Смазочный материал вводится в зазор между цапфой и вкладышем для уменьшения потерь работы на трение, уменьшения износа, отвода теплоты, в которую переходит работа трения, и предохранения подшипника от коррозии.

В качестве смазочных материалов применяют жидкие масла и густые (консистентные) мази.

Смазывание подшипников производится периодически или непрерывно. Смазочный материал подается либо под давлением, либо без давления. Для механизмов, работающих периодически на малых скоростях и при небольшой нагрузке, используют индивидуальный смазочный материал без давления.

Для периодической подачи жидкого смазочного материала применяют пресс-масленки, запрессовываемые или ввертываемые в корпус подшипника.

На рис. 232, а показана игольчатая масленка для подачи жидкой смазки. Масло находится в резервуаре 1, закрытом конической пробкой 2; другой конец пробки, также конической, встав-

лен в отверстие крышки подшипника. Сквозь пробку проходит игла 3, опирающаяся на поверхность цапфы. При вращении вала игла вследствие неровностей на поверхности цапфы колеблется, и масло из резервуара проходит через зазор между иглой и отверстием в пробке. При неподвижном вале подача масла не происходит.

Фитильные масленки (рис. 232, б) обеспечивают равномерную подачу масла к трущимся поверхностям. Недостаток фитильных масленок заключается в том, что масло из них подается в подшипник и тогда, когда вал не вращается. Широкое распространение получило кольцевое смазывание подшипников скольжения (рис. 232, в). На цапфе помещается кольцо, диаметр которого больше диаметра цапфы. При вращении вала цапфа увлекает за собой кольцо, которое при движении проходит через масляную ванну. Масло с кольца стекает на цапфу и смазывает ее.

Для смазывания подшипника густыми мазями применяют колпачковые масленки (рис. 232, г). Мазь набивают в полость корпуса масленки и крышку, после чего крышку наворачивают на корпус на несколько оборотов. Поворачивая крышку на один-два оборота, выжимают мазь из масленки к трущимся поверхностям через центральное отверстие.

Распределение масла в подшипнике осуществляется с помощью смазочных канавок. Смазочные канавки должны располагаться по образующей вкладыша на ненагруженной стороне подшипника. Края канавки должны иметь плавные закругления.

§ 123. Подшипники качения

Подшипники качения — стандартные изделия, которые изготавливаются в массовом количестве на специализированных заводах.

Подшипники качения классифицируются по направлению действия нагрузки, форме и числу рядов тел качения.

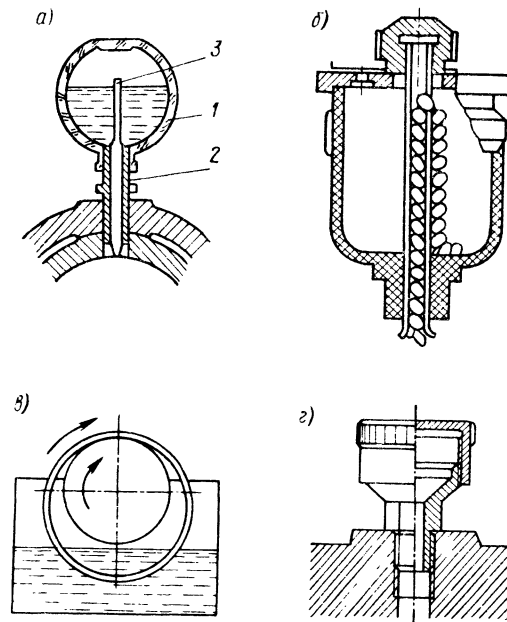


Рис. 232

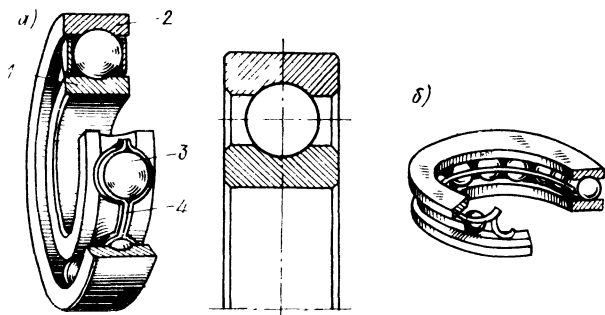


Рис. 233

По направлению действия нагрузки подшипники качения делятся на следующие виды:

1) *радиальные* подшипники воспринимают преимущественно радиальную нагрузку, действующую перпендикулярно оси вращения подшипников (рис. 233, а);

2) *упорные* подшипники воспринимают преимущественно осевую нагрузку, действующую вдоль оси вращения (рис. 233, б);

3) *радиально-упорные* подшипники воспринимают комбинированную нагрузку, одновременно действующую на подшипник в радиальном и осевом направлениях.

По форме тел качения подшипники делятся на *шариковые* (рис. 234, а) и *роликовые* (рис. 234, б). Роликоподшипники в зависимости от формы роликов разделяются на следующие группы: с короткими цилиндрическими роликами, с длинными цилиндрическими роликами, с витыми роликами, с игольчатыми роликами, с коническими и со сферическими роликами.

По числу рядов тел качения подшипники делятся на *однорядные* (см. рис. 233, а), *двухрядные* (рис. 235), *четырёх-* и *многорядные*.

По основным конструктивным признакам подшипники делятся на самоустанавливающиеся и несамоустанавливающиеся; с цилиндрическим или конусным отверстием внутреннего кольца.

Подшипники качения (см. рис. 233) состоят из двух колец — внутреннего 1 и наружного 2 (внутреннее кольцо насаживается

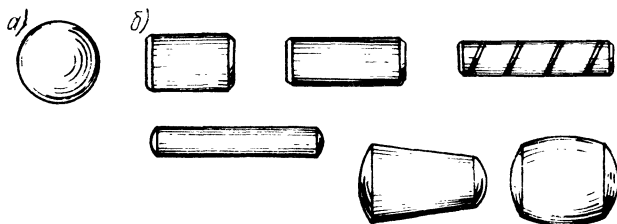


Рис. 234

на вал, а наружное закрепляется в корпусе подшипника); тел качения — шариков 3 или роликов, катящихся по беговым дорожкам колец на некотором расстоянии один от другого, и сепаратора 4 — специальной детали, удерживающей тела качения на постоянном расстоянии друг от друга. Тела качения и кольца изготовляют из высокопрочной закаленной термически обработанной стали.

Подшипники качения смазываются жидкими и консистентными материалами. Жидкое смазывание часто осуществляется мелкими каплями масла, разбрызгиваемого быстроходными зубчатыми колесами (в корпусе передачи образуется «масляный туман»).

Консистентный смазочный материал закладывают в опору при сборке узла и заменяют (с обязательной промывкой керосином) в зависимости от условий работы опоры раз в 2—12 мес.

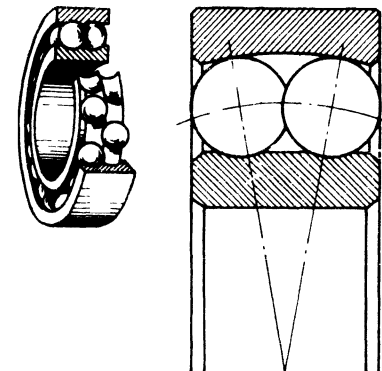


Рис. 235

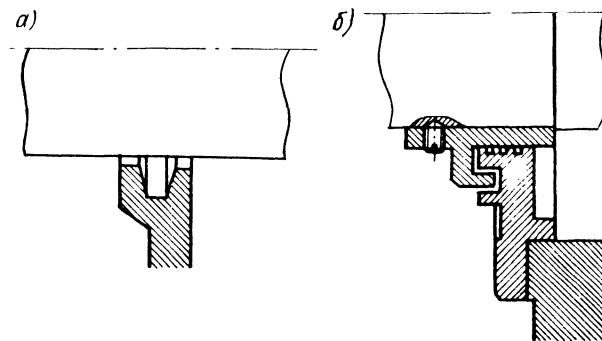


Рис. 236

Защита подшипникового узла от попадания влаги и пыли извне, а также от вытекания смазочного материала достигается при помощи уплотнений, отделяющих подшипник как от внутренней части корпуса, так и от внешнего пространства.

Варианты уплотнений показаны на рис. 236, а (войлочное уплотнение) и на рис. 236, б (лабиринтное уплотнение).

Подшипники качения изготовляют различных классов точности. В общем машиностроении применяется в основном нормальный класс точности Н

§ 124. Выбор подшипников качения

Подшипники качения — первая группа деталей, для которых введен расчет на долговечность. Срок службы подшипников качения ограничивается усталостным выкрашиванием поверхностных слоев дорожек качения.

Подшипники качения подбирают по статической или динамической грузоподъемности.

По статической грузоподъемности подбирают подшипники при условии, что вращающееся кольцо подшипника имеет частоту вращения $n \leq 1$ об/мин. Выбор подшипников производят по условию: $F_0 \leq C_0$, где F_0 — требуемая статическая грузоподъемность; C_0 — табличное значение, указанное в таблицах каталога на подшипники качения.

При частоте вращения подшипника более 1 об/мин подбор подшипников производят по динамической грузоподъемности.

Согласно ГОСТ 18855—82 динамическая грузоподъемность радиальных и радиально-упорных подшипников — это постоянная радиальная нагрузка, при которой группа идентичных подшипников с неподвижным наружным кольцом может выдержать 1 млн оборотов внутреннего кольца.

Для упорных и упорно-радиальных подшипников динамическая грузоподъемность — это постоянная осевая нагрузка, при которой группа идентичных подшипников может выдержать 1 млн оборотов одного из колец.

При подборе подшипников задаются их долговечностью в часах или в миллионах оборотов. Гарантированная долговечность — это также число часов работы, в течение которых не менее 90 % из данной группы подшипников должны отработать без появления признаков усталости металла.

Исследования работы подшипников качения позволили установить зависимость между нагрузкой F_0 , динамической грузоподъемностью C и долговечностью подшипников

$$(C/F_0)^\alpha = L, \quad (270)$$

где α — показатель степени, равный для шарикоподшипников 3, а для роликоподшипников 3,33; C — динамическая грузоподъемность, указанная в каталогах на подшипники качения.

Приведенная (эквивалентная) нагрузка F_0 учитывает ряд факторов, влияющих на работоспособность подшипников; совместное действие радиальной и осевой нагрузок, возникающие толчки и удары, вращения внутреннего или внешнего кольца, а также изменение температуры. Для шариковых радиальных и радиально-упорных и роликовых радиально-упорных подшипников эквивалентную нагрузку вычисляют по формуле

$$F_0 = (XK_K F_r + YF_0) K_B K_T, \quad (271)$$

где K_K — коэффициент вращения (при вращении внутреннего кольца $K_K = 1$, при вращении наружного кольца $K_K = 1.2$);

F_r — радиальная нагрузка; F_0 — осевая нагрузка; X и Y — коэффициенты радиальной и осевой нагрузок; определяются для каждого типа подшипников качения в зависимости от соотношения радиальной и осевой нагрузок; K_B — коэффициент безопасности, учитывающий динамичность действующей нагрузки; K_T — температурный коэффициент, вводимый при повышенной рабочей температуре (более 100 °С).

По вычисленной приведенной нагрузке и расчетной долговечности определяют требуемую динамическую грузоподъемность подшипника по формуле

$$C_{\text{треб}} = L^\alpha F_0. \quad (272)$$

Подшипник качения выбирают по таблицам каталога, где указаны все необходимые справочные данные.

§ 125. Направляющие поступательного движения

Основные требования, предъявляемые к направляющим поступательного движения: легкость хода, точность перемещения и отсутствие заклинивания.

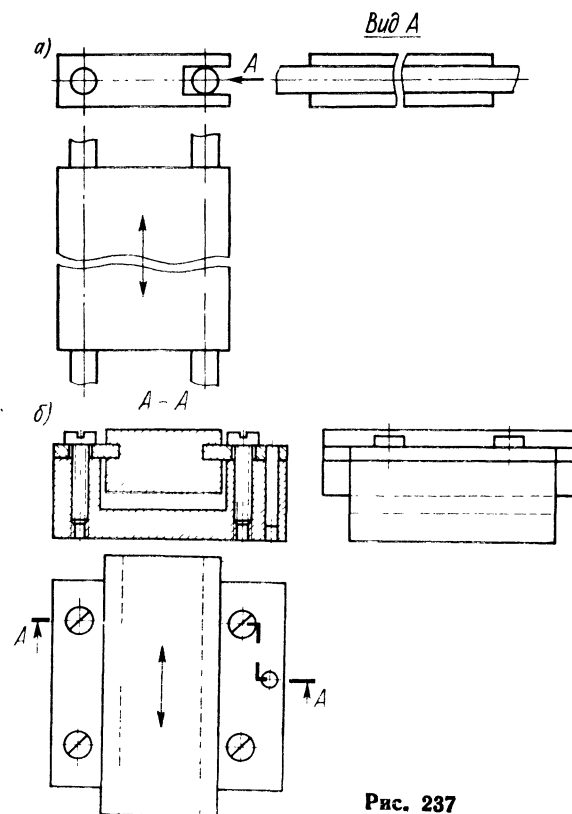


Рис. 237

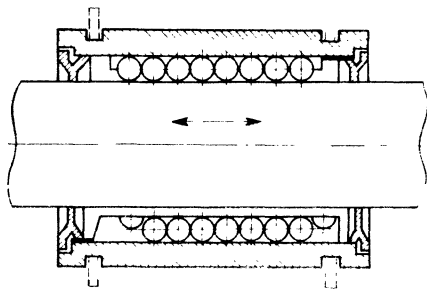


Рис. 238

шпиндели сверлильных станков и др. На рис. 237, а показано устройство цилиндрических направляющих, а на рис. 237, б — призматических направляющих. Направляющие поступательного движения должны иметь устройство, предохраняющее звенья механизмов от проворачивания.

Для уменьшения трения в ответственных конструкциях применяют направляющие с трением качения. На рис. 238 показано такое устройство.

§ 126. Назначение и классификация муфт

Муфтами называют устройства, служащие для соединения валов между собой или с деталями, свободно насаженными на валы (зубчатые колеса, шкивы), с целью передачи вращающего момента. Муфты делятся на *постоянные* и *сцепные*.

Постоянные муфты: *глухие*, требующие строгой соосности соединяемых валов; *компенсирующие*, допускающие параллельное смещение, взаимный перекос осей, осевое перемещение вследствие температурных изменений длины соединяемых валов.

Компенсирующие муфты, в свою очередь, подразделяются на *жесткие*, т. е. не имеющие эластичных элементов и передающие вместе с моментом возможные толчки и удары, и *упругие*, смягчающие толчки и удары.

Сцепные муфты: *фрикционные* (т. е. осуществляющие сцепление за счет сил трения) и *кулачковые*.

Кроме муфт, назначением которых является постоянное или управляемое соединение валов, применяют *предохранительные муфты*, предназначенные не только для соединения валов, но и для предохранения машины от поломки при аварийной перегрузке.

Число известных типов муфт велико. Ниже рассмотрены только некоторые наиболее употребительные конструкции.

§ 127. Глухие жесткие и упругие компенсирующие муфты

Втулочные муфты (рис. 239) — простейшая из глухих постоянных муфт. Это стальная или чугунная втулка, установленная с натягом на концы соединяемых валов. Муфта закрепляется на

Направляющие поступательного движения бывают двух видов: трения скольжения, трения качения.

Направляющие с трением скольжения наиболее распространены и применяются в различных механизмах, где имеются поступательно перемещающиеся звенья: игловодители швейных машин, каретки пишущих машин,

валах и передает момент при помощи призматических, клиновых или сегментных шпонок или конических штифтов. Конструкция и изготовление муфты несложны.

Недостатки втулочной муфты: трудность разборки, необходимость очень точного совмещения осей валов.

Поперечно-свертная муфта (рис. 240) также применяется для соединения строго соосных валов. Муфта состоит из двух полумуфт, имеющих форму фланцев. Полумуфты насаживают на концы соединяемых валов и стягивают болтами.

Продольно-свертная (или продольно-разъемная) глухая муфта

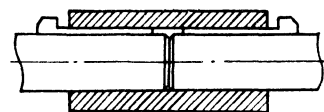


Рис. 239

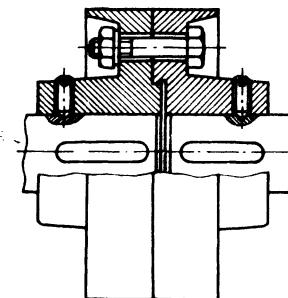


Рис. 240

состоит из двух половин, соединенных болтами (рис. 241). Для создания давления между поверхностью вала и муфтой в плоскости разреза муфты имеется небольшой зазор. Давление, создающееся при затягивании болтов, вызывает на поверхности вала силы трения.

Достоинства продольно-свертных муфт: простота сборки и разборки, малый габарит по диаметру и возможность снятия муфты без осевого перемещения валов.

Жесткие и упругие компенсирующие муфты применяют для компенсации погрешностей в относительном положении и соединяемых валов; смещения центров; взаимного наклона осей; осевого смещения.

Возможность компенсировать тот или иной вид отклонений зависит от конструкции муфты. Так, *кулачковая расширительная муфта* (рис. 242) компенсирует только осевое смещение. Для компенсации параллельного смещения осей валов (до $0,05d_v$), а также небольших осевых смещений применяют *крестовую муфту* или *муфту Ольдгема* (рис. 243). Она состоит из двух полумуфт с пазами на торцовой поверхности и среднего диска с двумя взаимно перпендикулярными выступами, входящими в пазы полумуфт.

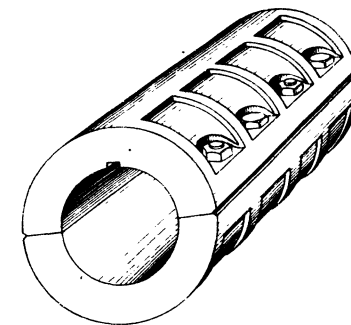


Рис. 241

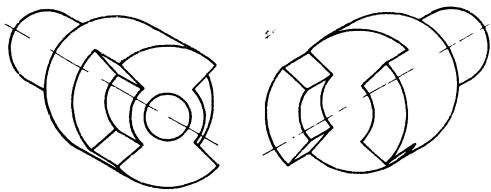


Рис. 242



Рис. 243

При вращении соединенных муфтой валов, оси которых смещены, но параллельны, выступы среднего диска скользят по впадинам полумуфт.

К жестким компенсирующим муфтам относится также *крестово-шарнирная муфта* (универсальный шарнир, муфта Кардана — Гука), широко применяемая в автостроении, приборостроении и других отраслях промышленности.

Муфта (рис. 244) состоит из двух вилок и крестовины. Вилки насаживаются на соединяемые концы валов, а крестовина шарнирно соединяет вилки.

Упругими называются *постоянные компенсирующие муфты*, которые не только допускают некоторое смещение и взаимный наклон осей валов, но и смягчают толчки и удары при передаче вращающего момента.

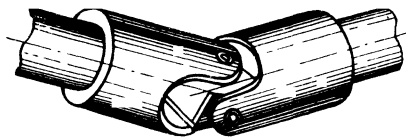


Рис. 244

Наиболее проста и распространена *упругая втулочно-пальцевая муфта*, изображенная на рис. 245 (ГОСТ 21424—75). По конструкции она схожа с поперечно-вертной муфтой (полумуфты-фланцы также насажены на концы валов), но вместо болтов в одной полумуфте закреплены стальные пальцы, на которые надеты резиновые втулки. В диске второй полумуфты имеются отверстия в которые входят пальцы с втулками. Толчки и удары при передаче момента смягчаются вследствие деформации резиновых втулок. В качестве упругих элементов в различных конструкциях упругих муфт применяют резину, кожу, пружины разнообразных форм и жесткости.

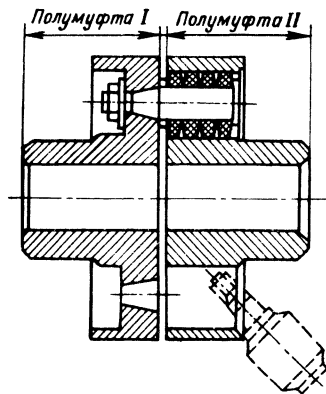


Рис. 245

§ 128. Сцепные и предохранительные муфты

Сцепные муфты предназначены для соединения и разъединения валов во время вращения (на ходу) или во время остановки (в покое).

Кулачковая сцепная муфта (рис. 246) состоит из двух частей, насаженных на соединяемые концы валов. Одна полумуфта поса-

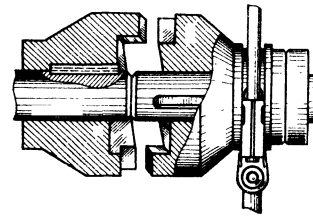


Рис. 246

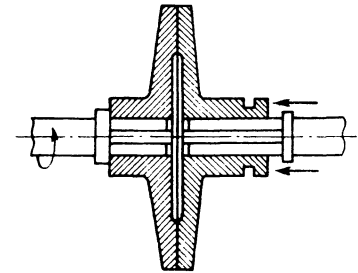


Рис. 247

жена наглухо, вторая может перемещаться вдоль вала по призматической направляющей шпонке при помощи рычага управления. На внутренних торцах обеих полумуфт имеются выступы (кулачки) и впадины между ними. При сцеплении кулачки подвижной

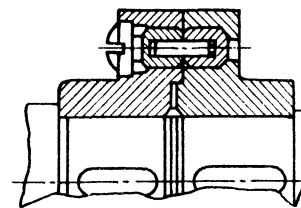


Рис. 248

полумуфты входят во впадины неподвижной полумуфты.

Фрикционные муфты обеспечивают плавное сцепление ведомого и ведущего валов и пуск в ход неподвижного вала от вращающегося ведущего. Передача момента осуществляется за счет силы трения между ведущей и ведомой частями муфты. При перегрузках фрикционные муфты проскальзывают, что предохраняет машину или механизм от поломки.

В зависимости от формы и числа рабочих поверхностей трения фрикционные муфты делятся на *дисковые* (рис. 247), *многодисковые*, *конические*, *барabanные* (с колодками, разжимными кольцами, обтяжными лентами или пружинами).

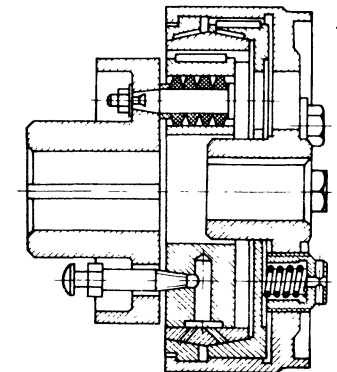


Рис. 249

Предохранительные муфты применяют в механизмах для ограничения передаваемого момента и предохранения частей машины от поломок при значительных перегрузках, превышающих расчетную и могущих возникнуть в процессе работы и при пуске или резком торможении машины.

Наиболее простой предохранительной муфтой является *муфта со срезным штифтом*. Стальной штифт (рис. 248), вставленный в закаленные стальные втулки, соединяет полумуфты. Таким образом, момент передается от одной полумуфты к другой только штифтом, работающим в данном случае на срез. При перегрузке штифт срезается.

Широко распространены *фрикционные предохранительные муфты*. По конструкции они сходны со сцепными, но имеют устройства для выключения. Эти муфты постоянно замкнуты. На рис. 249 показана подобная муфта.

ГЛАВА XXVIII. РЕДУКТОРЫ

§ 129. Общие сведения о редукторах

Обширный класс машин составляют производственные машины, которые преобразуют механическую работу, получаемую от двигателя, в работу, связанную с выполнением определенных технологических процессов. К ним, в частности, относятся машины по обработке металлов, древесины, почвы и др.

В производственных машинах необходим большой вращающий момент при угловой скорости, меньшей, чем у двигателя.

Для передачи движения от двигателя к производственной машине и изменения при этом угловой скорости и вращающего момента служат различные передаточные механизмы.

Зубчатый, или червячный, передаточный механизм, предназначенный для уменьшения угловых скоростей и представляющий систему зубчатых колес в отдельном закрытом корпусе, непроницаемом для масла и пыли и одновременно являющемся масляной ванной для механизма, называется редуктором.

Размещение опор валов редуктора в одном общем жестком корпусе обеспечивает постоянство относительного расположения осей валов, а это позволяет применять широкие колеса с малым модулем. Применение малых модулей, в свою очередь, приводит к увеличению точности и уменьшению шума при работе передачи, к снижению стоимости ее изготовления. Обильное смазывание способствует малому износу и повышает КПД редукторной передачи. Наличие корпуса обеспечивает безопасность работы редукторов. Этими достоинствами редукторов объясняется их вытеснение ими открытых передач.

В современном машиностроении существует большое разнообразие кинематических схем редукторов, их форм и конструкций.

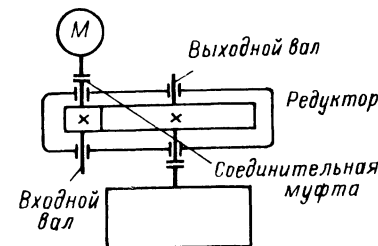


Рис. 250

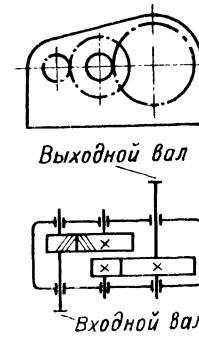


Рис. 251

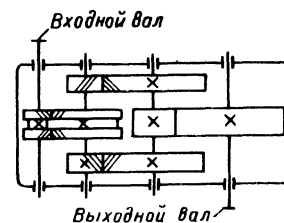


Рис. 252

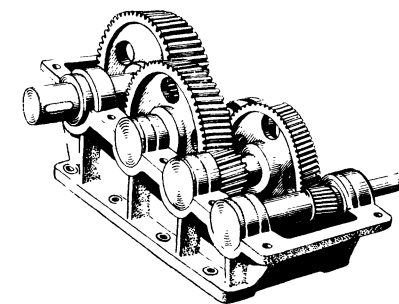


Рис. 253

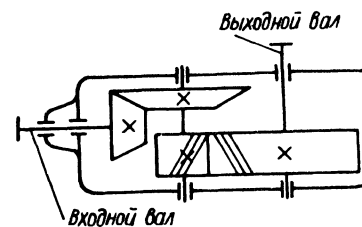


Рис. 254

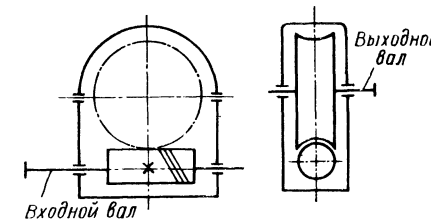


Рис. 255

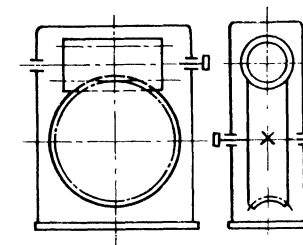


Рис. 256

По виду звеньев передачи редукторы делятся на *цилиндрические* (оси ведущего и ведомого валов параллельны), *конические* (оси валов пересекаются), *червячные* (оси валов перекрещиваются в пространстве). Встречаются и комбинированные редукторы, представляющие сочетание зубчатых (цилиндрических и конических) и червячных передач.

По числу пар передач редукторы делятся на *одноступенчатые* и *многоступенчатые*.

Ниже рассматриваются некоторые из основных схем редукторов.

Одноступенчатый цилиндрический редуктор (рис. 250) обычно применяют при передаточном числе $u \leq 7$. Одноступенчатый редуктор наиболее прост и надежен в работе. Применяется для мощностей до 40 000 кВт.

Двухступенчатые цилиндрические редукторы (рис. 251) обычно применяются при передаточных числах $u \leq 40$. Первая (быстроходная) ступень редуктора во многих случаях имеет косозубые колеса; тихоходная ступень может быть выполнена с прямозубыми колесами. Не менее часто применяют редукторы, у которых обе ступени имеют колеса одинакового типа (прямозубые, косозубые и шевронные).

Трехступенчатый цилиндрический редуктор (рис. 252) обеспечивает передаточное число $u \leq 150$ и выше. Достоинство данной схемы — симметричное расположение зубчатых колес всех ступеней.

На рис. 253 показан *трехступенчатый цилиндрический редуктор с несимметричным расположением зубчатых колес и наклонным разъемом корпуса*.

Коническо-цилиндрический двухступенчатый редуктор (рис. 254) применяют при пересекающихся осях ведущего и ведомого валов. Передаточное число такого редуктора обычно не выше 25.

Червячный редуктор (рис. 255) применяют при перекрещивающихся в пространстве осях ведущего и ведомого валов и передаточном числе u (обычно в пределах 10—70).

По относительному расположению червяка и червячного колеса различают схемы с нижним червяком (рис. 255) и с верхним червяком (рис. 256).

Червячные редукторы благодаря малым габаритам, бесшумности и плавности работы широко применяются в современном машиностроении. Недосток их (при цилиндрическом червяке) — сравнительно низкий КПД.

Иногда необходимо получить различные угловые скорости выходного вала. Для этого в корпусе размещают несколько пар зубчатых колес с различными передаточными числами и специальный механизм переключения, который может включать по мере надобности ту или иную пару зубчатых колес. Такие передаточные механизмы называют *коробками передач*.

§ 130. Конструкции основных деталей редукторов

На рис. 257 изображены корпус и крышка трехосного двухступенчатого редуктора. Корпус служит основанием для установки зубчатых колес и обеспечивает правильное взаимное расположение их осей. Корпус 2 и крышка 3 редуктора отливаются из серого чугуна (марок СЧ10 и СЧ15), в редких случаях — из алюминиевых сплавов. Для увеличения жесткости редуктора служат внешние ребра 1. При единичном изготовлении редуктора корпус может быть сварным из листовой стали.

Боковые стенки 6 корпуса имеют цилиндрические приливы 5, в гнезда которых укладывают подшипниковые узлы с заранее

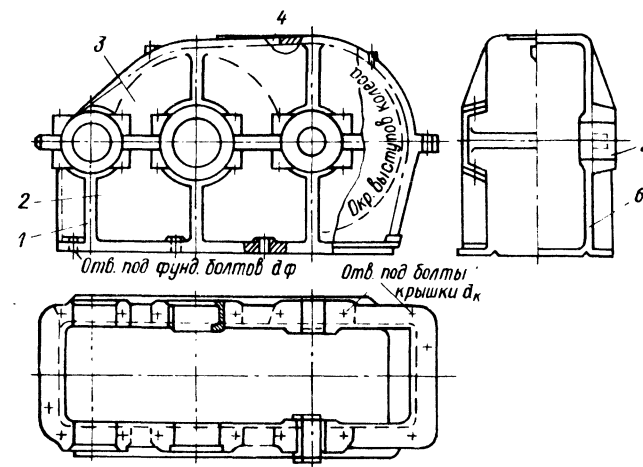


Рис. 257

собранным валом. Для удобства монтажа деталей передачи плоскость разъема корпуса проходит через оси валов. В редукторах расточка гнезд для установки подшипников производится с большой точностью. Растачивают одновременно обе части корпуса, предварительно собранные, скрепленные болтами и фиксированные один относительно другого коническими штифтами. Во избежание перекосов необходима строгая соосность противоположных гнезд.

Для заливки масла в редуктор и его осмотра имеется специальное отверстие 4, которое закрывается крышкой или резьбовой пробкой; в нижней части корпуса — отверстие для слива масла, закрываемое пробкой, и устройство для контроля уровня смазки. Для подъема крышки редуктора, а также легкого редуктора в сборе служат специальные рым-болты, ввертываемые в крышку.

Применяемые в редукторах зубчатые колеса весьма разнообразны по конструкции и методам изготовления. Наибольшее распространение имеют стальные зубчатые колеса — литые и кованные. Диаметры кованных колес меньше 500 мм. Колеса больших

диаметров отливают из чугуна, а поверх надевают стальные зубчатые бандажки.

Литые стальные колеса применяют преимущественно при диаметрах свыше 500 мм. Зубчатые (или червячные) колеса, а также полумуфты на входном и выходном валах редуктора крепятся к валам шпоночными или шлицевыми соединениями. Для устранения осевого перемещения колес на валу делают уступы или буртики. Высота буртика устанавливается по формуле $a = 0,7d + 3$ мм, где d — диаметр вала. Ширина буртика $b = 1,4a$.

В связи с тем, что вращающийся вал испытывает знакопеременные напряжения, при которых концентрация напряжений особенно опасна, переходы от одного сечения к другому делают плавными. Рекомендуются радиусы закруглений у запечиков $r = 0,1d$.

Наиболее часто в редукторах используют подшипники качения. Подшипники скольжения применяют лишь в тяжелых редукторах и иногда в высокоскоростных передачах.

Конструкция опорных узлов должна обеспечивать фиксацию положения вала в осевом направлении: точную соосность противоположных гнезд подшипников; возможность теплового удлинения вала; удобный монтаж и демонтаж подшипников; надежное предохранение подшипников от пыли и грязи; удобную смену или подвод смазочного материала и надежное удержание его. Некоторые конструкции подшипниковых узлов редукторов приведены в §§ 122 и 123.

§ 131. Смазка редукторов

Смазка зубчатых (червячных) зацеплений и подшипников уменьшает потери мощности на трение, износ и нагрев деталей редуктора.

В редукторах с небольшой мощностью и скоростью зацепления смазываются из масляной ванны окунанием или разбрызгиванием. С этой целью зубчатое (червячное) колесо, червяк или вспомогательная деталь (разбрызгивающее кольцо) частично погружают в масло, заливаемое в корпус редуктора.

Редукторы большой мощности и быстросходные смазывают путем подачи масла насосом из ванны в зону зацепления. Подшипники смазывают разбрызгиванием жидкого масла из общей масляной ванны или густыми (консистентными) смазками, периодически закладываемыми в пространство подшипникового узла, защищенное от ванны редуктора и внешней среды уплотнениями.

Для смазывания зубчатых и червячных редукторов применяют жидкие масла: «Индустриальное 20» (веретенное), «Индустриальное 45» (машинное Л) и более вязкие. При выборе сорта масла исходят из того, что при больших скоростях требуется масло меньшей вязкости. Подшипники смазывают либо тем же маслом, что и зацепления, либо консистентными смазками (мазями) — консталином, солидолами Л, М и Т.

1.1.А. Неправильно. Равнодействующая и уравновешивающая направлены в противоположные стороны.

1.1.В. Неправильно. Взаимное расположение равнодействующей и уравновешивающей не может быть произвольным.

1.2.Б. Неправильно. Если две системы сил уравновешиваются, то их равнодействующие равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны (см. вторую аксиому).

1.3. Нулю.

1.4.Б, В. Неправильно, так как изменились направления действия сил.

1.5.Б. Неправильно. Хотя эти силы приложены не в одной точке, на основании следствия из второй аксиомы статики силы можно переносить вдоль линии их действия в точку пересечения линий действия этих сил и применять правила параллелограмма для сложения двух сил, приложенных в одной точке.

1.6. Равнодействующая определяется: А — при угле между линиями действия сил, равном 90° ; Б — если силы направлены по одной прямой в одну сторону (угол равен 0); В — если силы направлены по одной прямой в противоположные стороны (угол равен 180°).

2.1.Б, В, Д. Неправильно. Реакция гибкой нити всегда направлена вдоль нити. Если связь — жесткий прямой стержень, то реакция направлена по оси стержня. Сила трения шероховатой плоскости отклоняет реакцию плоскости от нормали.

2.2.А. Неправильно. Реакция связи — сила, с которой опора действует на опирающееся тело.

3.1.А, Б, В, Г. Неправильно. Равнодействующая в силовом многоугольнике всегда направлена от начала первого слагаемого вектора к концу последнего. Векторы \vec{OA} , \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{CD} направлены последовательно один за другим, поэтому ни один из них не может быть равнодействующей силой.

3.2.Б. Неправильно. Многоугольник сил на рис. 10 замкнут вектором \vec{OD} . Система сил приводится к равнодействующей, такая система сил не уравновешена.

$$4.1. F = 50 \text{ Н}; \cos(\vec{F}, x) = \frac{F_x}{F} = \frac{30}{50} = 0,6; \vec{F}, x = 53^\circ 10'.$$

4.2.А, В. При $\beta = 0$ сила параллельна оси, ее проекция равна модулю силы. При $\beta = 180^\circ$ проекция силы имеет знак минус.

$$4.3. F_{xy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = -120 \text{ Н}.$$

5.1. Модуль равнодействующей $F_\Sigma = 155 \text{ Н}$.

5.2. А, Б, Г. Проекция равнодействующей на ось x или y не равна нулю; это значит, что и сама равнодействующая не равна нулю, следовательно, система сил не уравновешена.

5.3.А. В первом уравнении первое и второе слагаемые включены с неверными знаками, а во втором уравнении неверен знак у третьего слагаемого.

6.1.А. Неправильно. В системе на рис. 20, а силы не равны по модулю.

6.1.Б. Силы, показанные на рис. 20, б, направлены в одну сторону, следовательно, это не пара сил.

6.1.Г. Неправильно. Линии действия сил на рис. 20, г пересекаются, следовательно, они не образуют пару сил.

6.2.А. Неточно. Эффект действия пары сил определяется и направлением вращения.

6.3.А. Неправильно. Пара сил не имеет равнодействующей, т. е. она не может быть заменена одной силой, поэтому пара сил не может быть уравновешена одной силой.

* Если выбранный номер ответа в консультациях отсутствует — ответ правильный.

7.1.А. Неправильно. Эффект действия пары сил не зависит от расположения в данной плоскости, поэтому пару сил можно переносить в плоскости ее действия.

7.2.А. Все три пары сил эквивалентны, их моменты равны по 50 кН·м.

7.2.Б. Знаки моментов заданных пар сил разные, следовательно, моменты стремятся вращать тела в разные стороны, и эти пары сил не эквивалентны.

7.3. Модуль силы $100 : 0,2 = 500$ Н. При увеличении плеча пары в два раза модуль сил уменьшится в два раза.

8.1. Если алгебраическая сумма моментов пар сил равна нулю, то такая система пар уравновешена. В этом примере: $M = -600 + 320 + 280 = 0$. Следовательно, система пар сил уравновешена.

8.2.А. Неправильно. Плечо силы относительно точки — длина перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы.

8.2.Б. Неправильно. Смотрите определение плеча силы.

8.3.А, Б. Это грубая ошибка. Точка K находится на линии действия силы \vec{F} .

8.4.А. Неправильно. От расположения точки относительно линии действия силы зависит не только длина плеча, но и знак момента.

8.5.А, Б. Правильно, но не полно. Если сила и ось расположены в одной плоскости, могут быть два случая: а) сила параллельна оси; б) линия действия сил пересекает ось. В обоих случаях момент силы относительно оси равен нулю.

8.6.А. Неправильно. В выражение момента относительно оси входит численное значение не всей силы, а только ее проекции на плоскость, перпендикулярно к оси.

8.6.Б. Неправильно. Составляющая \vec{F}_2 параллельна оси Oz , следовательно, ее момент относительно этой оси равен нулю.

8.6.Г. Неправильно взята длина плеча составляющей \vec{F}_1 .

8.7. 25 Н·м.

9.1.А. Неправильно. Действие силы \vec{F}' , приложенной в точке B , не эквивалентно действию силы \vec{F} , приложенной в точке A .

9.1.В. Неправильно, \vec{F}' и \vec{F}'' взаимно уравновешиваются и их можно отбросить. Действие силы \vec{F} , приложенной в точке A , не эквивалентно действию силы \vec{F}' , приложенной в точке B , так как точка B не лежит на линии действия силы \vec{F} .

9.2.Б. Неправильно. Момент присоединенной пары равен произведению модуля силы на плечо.

9.3. $M = -Fa = -60$ Н·м.

10.1.Б. Неправильно. Очевидно, что геометрическая сумма сил, приложенных в центре приведения, не зависит от его положения.

10.2.А. Неправильно. Момент каждой силы зависит от положения центра приведения, так как с изменением его расположения в плоскости меняется плечо каждой силы. Следовательно, главный момент, равный алгебраической сумме моментов всех сил данной системы, также зависит от положения центра приведения.

10.3. $F_{\text{ГЛ}} = 2,1$ кН; $\angle(\vec{F}_1, \vec{F}_{\text{ГЛ}}) = 45^\circ$; $M_{\text{ГЛ}} = -3,1$ кН·м. Знак минус показывает, что главный момент направлен против хода часовой стрелки.

10.4.А. Неправильно. Вы плохо усвоили зависимость между моментом равнодействующей и суммой моментов составляющих сил относительно одной и той же точки (теорема Вариньона).

10.5.А. Неправильно. Вы не учли, что сила тяжести — равнодействующая равномерно распределенных параллельных сил. В этом случае точка приложения равнодействующей находится посередине длины стержня, плечо равно $l/2 = 0,6$ м.

11.1.Б. Неправильно. Если главный вектор и главный момент равны нулю, то вся система сил эквивалентна нулю, а это и есть условие равновесия системы сил.

11.2.Б. Неправильно. При соблюдении одного уравнения равновесия система сил не обязательно находится в равновесии. Если это уравнение суммы

проекции на некоторую ось, то система может иметь равнодействующую, перпендикулярную к этой оси. Если же это единственное уравнение выбрано в виде уравнения моментов, то система может иметь равнодействующую, линия действия которой проходит через центр моментов.

11.2.В. Неправильно. Для плоской системы параллельных сил одно из трех уравнений равновесия, которое можно составить для произвольной плоской системы сил, либо обращается в тождество, либо является следствием одного из двух других.

11.3. Рис. 40, a — жесткая заделка; рис. 40, b , $в$ — шарнирно-подвижная и неподвижная опоры.

12.1. $F_x = 6$ кН; $x_C = 0,525$ м.

12.2.Б. Центр тяжести располагается на оси симметрии.

12.3.Б. Неправильно. Статический момент равен произведению площади на расстояние центра тяжести до оси; следовательно, величина и знак статического момента зависят от расположения оси относительно площади.

12.4. $S_x = 480$ см³, $S_{x_0} = 0$.

12.5.А, В. Неправильно. Если ось проходит через центр тяжести, то сумма произведений площадок на расстояния их центров тяжести до оси равна нулю.

12.6. $y_C = 59,2$ мм.

13.1. $J_p = 402$ см⁴.

13.2. $J_p = 339$ см⁴.

13.3. На 6,3 %.

13.4. А. Неправильно. При определении осевых моментов инерции расстояние площадок до оси возводят в квадрат, поэтому осевые моменты инерции — всегда положительные величины.

13.5.А. Неправильно. Если ось проходит через центр тяжести, то $a = 0$, и осевой момент инерции равен первому слагаемому приведенной формулы.

13.6. $J_{x_0} = 160$ см⁴, $J_{y_0} = 9000$ см⁴.

13.7. $J_x = 2080$ см⁴.

13.8.А, Б. Неправильно, чтобы определить изменение осевого момента инерции, вызванное изменением диаметра, надо учесть, что осевой момент пропорционален четвертой степени диаметра ($J_x = \pi d^4/64$).

14.1.А. Неправильно. Валы не разрушились и в них не возникло пластических деформаций, а лишь эти явления рассматриваются как нарушение прочности.

14.1.В. Неправильно. При упругом прогибе валов устойчивость первоначальной формы равновесия сохраняется, поэтому нормальная работа здесь нарушилась не из-за недостаточной устойчивости валов.

14.2.А. Неправильно. Ведь спица не разрушилась, она лишь не сохранила своей первоначальной прямолинейной формы равновесия.

14.2.Б. Неправильно. При сжатии стержни недостаточной жесткости укорачиваются, но сохраняют прямолинейную форму.

14.3.Б. Неправильно. Жесткость характеризует сопротивление тела упругому деформированию. Если бы канат был только недостаточно жестким, он бы чрезмерно удлинился, но не оборвался.

14.4.Б. Неправильно. При переносе силы F из точки A в точку B участок AB не будет растягиваться, поэтому ясно, что удлинение всего стержня при переносе силы уменьшится.

14.4.В. Неправильно. При переносе силы из точки A в точку B участок AB не деформируется, а когда сила была приложена в точке A , участок AB был растянут.

15.1.Б. Неправильно. Внешние силы, приложенные к телу, уравновешены, т. е. действие сил, расположенных справа от сечения, эквивалентно действию сил, расположенных слева. Поэтому внутренние силовые факторы, возникающие в сечениях, не могут зависеть от того, какая часть тела отбрасывается.

15.2.А., Б. Неполно. В сечении одновременно возникают изгибающий момент и продольная сила — вид деформации сложный.

15.3. В сечении $I-I$ (см. рис. 62) возникает продольная сила $N_z = 10$ кН, в сечении $II-II$ — поперечная сила $Q_x = 10$ кН и изгибающий момент $M_y =$

= 8 кН·м. Горизонтальный участок растянут. Вертикальный участок работает на изгиб.

16.1.А. Неправильно. С помощью метода сечений можно определить составляющие главного вектора и главного момента внутренних сил, но нельзя установить, как распределены внутренние силы по сечению.

16.2.А. Напряжения в данной точке нельзя считать одинаковыми при различных направлениях плоскости сечения. Напряжение определяют через внутренние силовые факторы и геометрические характеристики сечения, а с изменением направления плоскости сечения меняются и внутренние силовые факторы, и геометрические характеристики сечения.

17.1.А. Неправильно. Примените метод сечений и вы обнаружите, что продольная сила в поперечных сечениях стержня (см. рис. 66, а) равна F .

17.2. На участке I $N_1 = 12$ кН; на участке II $N_2 = -4$ кН; на участке III $N_3 = -12$ кН; на участке IV $N_4 = -8$ кН.

17.3.А. Неправильно. В поперечных сечениях участка АВ бруса продольные силы равны нулю, в чем проще убедиться, проведя сечение на этом участке (см. рис. 68, б) и рассматривая равновесие левой оставленной части.

17.3.Б. Неправильно. Участок ED, примыкающий к заделке, испытывает сжатие — продольная сила $N = F - 2F - F = -2F$, а на эпюре (см. рис. 68, в) для рассматриваемого участка показано, что продольная сила положительна.

18.1.А. Неправильно. Расчетные (рабочие) напряжения равны продольной силе, деленной на площадь поперечного сечения ($\sigma = N/A$), следовательно, оно не зависит от их материала. От механических свойств материала зависит прочность стержня, т. е. его способность выдержать возникающее напряжение.

18.2. $N = 14\,000$ Н = 14 кН.

18.3. $n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma} = \frac{320}{160} = 2$.

18.4.А. Неправильно. Если рабочее напряжение незначительно превышает допускаемое, то конструкции не грозит опасность разрушения.

18.5.Б. Неправильно. Чем меньше коэффициент запаса прочности, тем больше допускаемое напряжение. С увеличением допускаемых напряжений уменьшается требуемая площадь поперечного сечения $A = N/[\sigma]$. Так как масса конструкции пропорциональна площади поперечного сечения, то, следовательно, она уменьшится.

19.1. $\sigma = 160$ МПа; линейная деформация $\varepsilon = 0,0008$; материал — сталь ($E = 2 \cdot 10^6$ МПа).

19.2. $d_1 = 16$ мм; $d_2 = 26$ мм. Верхний груз опустится на 2,86 мм, нижний груз — на 8,56 мм.

19.3. Примерно в 3,2—4 раза.

19.4. $\mu = 0,15$ и $\mu = 0,4$ определены ошибочно (см. стр. 72 — значения μ).

19.5.А. Неправильно. При растяжении размеры поперечного сечения уменьшаются.

20.1. $\tau_{\text{ср}} = 191$ МПа; $\sigma_{\text{см}} = 187$ МПа.

20.2.А. Неправильно. При выдавливании отверстий происходит разрушение материала. По пределу текучести нельзя определить разрушающую силу, так как при напряжениях, равных пределу текучести, происходит лишь пластическая деформация материала.

20.2.Б. Неправильно. При выдавливании отверстий происходит срез материала, а не разрыв.

20.3.А. Неправильно. При увеличении диаметра в два раза площадь среза увеличится в четыре раза.

20.4.А. Неправильно. Уменьшение толщины шва вызывает прямо пропорциональное уменьшение площади среза. Поэтому допускаемая нагрузка уменьшится в два раза.

21.1. Крутящий момент в сечениях между шкивами $M_{\text{к}} = 5000$ Н·м.

21.2.А. Неправильно. Участки вала от шкивов до опор свободны от действия вращающих моментов, следовательно, эти участки не скручиваются.

21.3.А. Неправильно. 2000 Н·м — это вращающий момент на ведущем шкиве, т. е. внешний момент, а вал рассчитывают на прочность по максимальному крутящему моменту, возникающему в поперечных сечениях вала, т. е. по внутреннему моменту.

21.4.А, Б. Неправильно. Величина вращающего момента равна скачку на эпюре крутящих моментов, получающемуся в месте приложения внешнего момента.

21.5.Б. Неправильно. Если ведущий шкив на конце вала, как показано на рис. 81, а, максимальный крутящий момент будет равен вращающему моменту на ведущем шкиве, т. е. максимальный крутящий момент будет больше, чем при расположении ведущего шкива между ведомыми шкивами (см. рис. 80, а).

22.1.Б. Неправильно. Предел пропорциональности — это и есть напряжение, до которого существует прямо пропорциональная зависимость между напряжением и деформацией. Следовательно, если при кручении напряжения не превысили предела пропорциональности, то закон Гука справедлив.

22.2. $W_p = 5300$ мм³.

22.3.А. Неправильно. Приведенная формула справедлива только для точек, наиболее удаленных от центра поперечного сечения, т. е. при $\rho = d/2$.

22.3.В. Неправильно. В этой точке $\tau = 0$.

22.4.А. Неправильно. Точка А в два раза ближе к центру поперечного сечения, чем точка В, а напряжение в точке при кручении пропорционально ее расстоянию от центра.

22.5.А. Неправильно. Рабочие напряжения при кручении определяются крутящим моментом и полярным моментом сопротивления поперечного сечения.

22.6.Б. Неправильно. Угол поворота сечения вала зависит от жесткости материала; чем больше модуль сдвига, тем меньше угол поворота.

22.7.А, Б. Неправильно. Напряжение при кручении обратно пропорционально полярному моменту сопротивления: $W_p \approx 0,2d^3$, т. е. кубу диаметра.

23.1.А. Неправильно. При чистом изгибе возникает только один внутренний силовой фактор — изгибающий момент.

23.2.А. Два указанных уравнения позволяют определить реакцию опор, но если будет допущена ошибка в определении одной реакции, это неизбежно вызовет ошибку в определении другой реакции. Этого можно избежать, если воспользоваться другими уравнениями равновесия.

23.3. Ошибка заключается в том, что в первые два уравнения равновесия не включен момент пары сил (уравнение $\sum F_{iy} = 0$ составлено верно). Например, уравнение $\sum M_A = 0$ должно иметь вид: $q \cdot 2a - M + F3a - R_B \cdot 4a = 0$.

24.1.Б. Неправильно. Нагрузка $2aq$ стремится опустить левую часть балки относительно правой, поэтому поперечной силе, вызванной этой нагрузкой, приписывают знак минус. Внешний момент M не вызывает поперечной силы.

24.1.В. Неправильно. Силы F и R_B расположены справа от сечения I—I, поэтому при рассмотрении равновесия левой части балки они отбрасываются.

24.2.Б, В. Неправильно. Момент силы $2aq$ и пара сил с моментом M стремятся изогнуть балку вогнутостью вниз, поэтому изгибающему моменту, вызванному этой силой, приписывают знак минус. При определении характера изгиба балки от данной силы необходимо мысленно отбросить опоры балки, а сечение, в котором определяют изгибающий момент, считать жестко закрепленным.

24.3. Поперечная сила $Q = -1$ кН; изгибающий момент $M = 0,5$ кН·м.

24.4.А. Неправильно. При рассмотрении метода сечений было разъяснено, что внутренние силы, возникающие в данном сечении, принадлежащем левой части бруса, и в том же сечении, но принадлежащем его правой части, как силы действия и противодействия одинаковы по величине и противоположны по направлению. В то же время правила знаков приняты таким образом, что знак поперечной силы и изгибающего момента не будет зависеть от того, какая часть балки рассматривается.

25.1.А. Ответ неполный, так как линии действительно прямые, но их расположение относительно оси различно.

25.2.А. Неточно — линии прямые, но они по-разному расположены относительно оси.

25.3. Эпюра изгибающих моментов — парабола.

26.1. Поперечные силы на участке AC $Q_1 = 8,16$ кН, на участке CD $Q_2 = -1,84$ кН, на участке DB $Q_3 = 7,84$ кН. Изгибающие моменты: $M_A = 0$; $M_C = 6,53$ кН·м; $M_D = 4,70$ кН·м; $M_B = 0$.

26.2.А. Неправильно. Скачки в эпюре изгибающих моментов могут быть только под сечениями, где приложены пары сил.

26.3. Изгибающие моменты: $M_A = 0$; $M_B^{пр} = -10$ кН·м; $M_B^{лев} = -2$ кН·м; $M_C = -12$ кН·м. Скачок на эпюре изгибающих моментов равен моменту пары сил, приложенной в этом сечении. Поперечная сила $Q = F = 20$ кН (одинакова по всей длине балки).

26.4.А. Неправильно. Балка деформируется вогнутостью вверх, поэтому изгибающие моменты не могут иметь отрицательный знак (см. правило знаков для изгибающих моментов).

26.4.В. Неправильно. Все участки балки деформируются вогнутостью вверх; следовательно, знак изгибающих моментов должен быть на протяжении всей балки одинаковым.

27.1.Б, В. Неправильно. Осевой момент инерции измеряется единицей длины в четвертой степени.

27.2.Б. Неправильно. Нормальные напряжения обратно пропорциональны осевому моменту инерции поперечного сечения балки, который зависит от формы и размеров поперечного сечения. Следовательно, и напряжения зависят от формы поперечного сечения балки.

27.3.А. Неправильно. Точка O — пересечение осей симметрии поперечного сечения балки; следовательно, через эту точку проходит нейтральная ось. Нормальные напряжения на нейтральной оси равны нулю.

27.3.В. Неправильно. Чем дальше удалена точка от нейтральной оси, тем больше нормальные напряжения.

27.5.А, Б. Неправильно. Эта формула справедлива только для крайних точек поперечного сечения.

28.1.Б. Момент сопротивления двутавра относительно оси y значительно меньше момента сопротивления относительно оси x , поэтому сопротивление изгибу для двутавра в положении, показанном на рис. 105, б, будет меньше.

28.1.В. Неправильно. Моменты сопротивления двутавра относительно осей x и y неодинаковы, следовательно, и допускаемая нагрузка различна.

28.2.А. Неправильно. Увеличение высоты в два раза увеличивает момент сопротивления в четыре раза, соответственно уменьшаются напряжения.

28.2.В. Неправильно. Момент сопротивления прямоугольника пропорционален квадрату, а не кубу высоты.

28.3. $W_x = bh^2/6 = Ah/6$, отсюда $A = 6W_x/h$, следовательно, при одном и том же значении W_x площадь сечения A уменьшается с увеличением высоты h . Пропорционально площади уменьшается и масса балки, поэтому наименьшую массу имеет балка большей высоты.

29.1.А, В. Неправильно. При уменьшении изгибающего момента пропорционально уменьшается прогиб балки.

29.2.А, Б. Неправильно. Прогиб балки обратно пропорционален модулю упругости. Модуль упругости чугуна примерно в два раза меньше стали.

30.1.А. Неправильно. Силы F_1 и F_2 будут вызывать не только кручение, но и изгиб вала. В этом легко убедиться, если привести эти силы к точкам, расположенным по оси вала (см. приведение сил в точке, § 16).

30.2. $M_{дв} = 5000$ Н·м; $d = 80$ мм.

30.3. $d = 38$ мм.

31.1.А. Неправильно. Прямолинейная форма стержня устойчива только при сжимающей силе, которая меньше критической. Сила потому и названа критической, что с превышением ее нарушается устойчивость прямолинейной формы.

31.2.Б. Неправильно. Чем больше модуль упругости, тем материал жестче и тем более устойчива прямолинейная форма стержня. Следовательно, величина критической силы зависит от упругих свойств материала. Из формулы Эйлера

видно, что критическая сила прямо пропорциональна модулю продольной упругости.

31.3.А. Неправильно. Критическая сила обратно пропорциональна квадрату длины стержня (см. формулу Эйлера).

31.3.В. Неправильно. Критическая сила обратно пропорциональна квадрату, а не кубу длины стержня.

31.4.Б. Неправильно. Жесткое закрепление концов стержня препятствует повороту концевых сечений и тем самым делает его прямолинейную форму более устойчивой, следовательно, величина критической силы возрастает.

31.5. Гибкость стержня $\lambda = 80$.

32.1.Б. Неправильно. Прочность в значительной степени зависит от характера изменения напряжений во времени. Периодически изменяющиеся во времени напряжения могут привести к разрушению материала при напряжениях, которые не только меньше предела прочности, но даже меньше предела текучести.

32.2.А. Неправильно. Прочность при переменных напряжениях значительно меньше, чем при постоянных, и разрушение может происходить при напряжениях, которые даже меньше предела текучести.

32.3.А. Неправильно. При постоянных напряжениях излом будет однородным; при разрушении от отрыва поверхность излома будет крупнозернистой, а при разрушении от среза — гладкой.

32.4.Б. Неправильно. Предел выносливости зависит от формы детали. При резком переходе от одного поперечного сечения к другому концентрация напряжений будет острее и предел выносливости снизится.

33.1.Б. Неправильно. Если исключить из этих уравнений время t , станет ясно, что точка движется по прямой $y = \frac{b}{a}x$. Следовательно, траекторию точки можно определить, если известны ее координаты как функции времени.

33.2.А. Для определения пройденного пути недостаточно знать только траекторию, необходимо еще иметь начальное положение точки и закон движения.

33.3.А. Неправильно. По условию точка перемещается от A к B , а скорость направлена в сторону движения точки.

33.3.Б, Г. Неправильно. Скорость не может быть направлена по нормали к траектории точки.

33.4. Полная скорость точки $v = 5$ м/с. Угол между осью x и направлением скорости \vec{v} $\alpha = 53^\circ$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{4}{3}$.

34.1.А. Неправильно. При равномерном движении точки по прямой ускорение равно нулю.

34.1.Б. Неправильно. Ускорение направлено в сторону, противоположную скорости точки, поэтому движение точки не может быть ускоренным.

34.2.А. Неправильно. Нормальное ускорение характеризует изменение направления вектора скорости.

34.3.А, Б. Неправильно. Нормальная составляющая ускорения всегда направлена к центру кривизны траектории точки.

34.3.В. Неправильно. Направление составляющих ускорения по CN и CO соответствует равноускоренному движению, так как в этом случае касательная составляющая ускорения направлена по CN , т. е. совпадает с направлением движения точки (от A к B).

35.1. A и Γ — равноускоренное вращение, B и B — равномерное вращение.

35.2.А. Неправильно. При равномерном вращении твердого тела вокруг неподвижной оси изменяется направление вектора скорости любой точки, а это изменение связано с возникновением нормального ускорения.

35.2.В. Неправильно. При равномерном вращении твердого тела вокруг неподвижной оси нормальное ускорение не равно нулю. Следовательно, не может быть равным нулю и полное ускорение.

35.3. $\omega = 150,7$ рад/с; $v = 7,54$ м/с; $a = 1130$ м/с².

35.4. $v = 15$ м/с; $\omega_2 = 75,3$ рад/с.

36.1.А. Неправильно. Материальные точки движутся с постоянными скоростями по прямым линиям, следовательно, под действием уравновешенных систем сил (эквивалентных нулю).

36.2.А. Неправильно. Сила сообщает материальной точке ускорение, обратно пропорциональное ее массе.

36.3.А. Неправильно. Силы инерции прикладывают к движущимся точкам лишь для того, чтобы задачу динамики привести к задаче статики.

36.4. Сила натяжения каната 1,185 кН.

37.1.А. Неправильно. Сила тяжести направлена перпендикулярно к горизонтальному направлению, следовательно, работа равна нулю.

37.2.А. Неправильно. Работа отрицательная, поэтому косинус угла между направлением силы и перемещением также имеет отрицательную величину, т. е. угол не может быть острым.

37.2.Б. Неправильно. Если бы между направлением силы и перемещением был прямой угол, то величина работы была бы равна нулю.

37.3.А. Неправильно. Работа сил тяжести не зависит от траектории движения центра тяжести тела, а зависит только от изменения высоты центра тяжести.

$$38.1. \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2) = \frac{20}{2} (400 - 100) = 3000 \text{ Дж.}$$

38.2.А. Кинетическая энергия прямо пропорциональна квадрату скорости и при увеличении скорости в два раза возрастает в четыре раза.

$$38.3 \ W = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2) = \frac{100}{2} (25^2 - 5^2) =$$

$$= 30\ 000 \text{ Дж} = 30 \text{ кДж.}$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И НЕКОТОРЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Последовательность действий при определении координат центра тяжести сложной фигуры

1. Заданную сложную фигуру разделить на минимально возможное число простых частей.
2. Вычислить площади простых частей, а также площадь всей фигуры.
3. Выбрать координатные оси и определить координаты центров тяжести всех простых частей фигуры.
4. Определить статические моменты площади заданной фигуры:

$$S_x = \int_A dAy; \quad S_y = \int_A dAx$$

5. Вычислить координаты центра тяжести:

$$x_c = S_y/A; \quad y_c = S_x/A.$$

Последовательность решения задач на движение материальной точки

1. Установить способ задания движения точки и вид движения. При координатном способе задания движения найти траекторию и закон движения точки по ней, а также скорость и ускорение ($x = ct^2$; $y = bt$). При естественном способе задания движения найти при $t = 2$ с полное ускорение точки, которая движется по дуге окружности радиусом r по закону $s = ct^3$.
2. Наметить путь решения исходя из данных условий задачи. При координатном способе задания движения для определения траектории нужно исключить из уравнений t . Для определения $s = f(t)$ нужно найти скорость. При естественном способе задания движения для определения полного ускорения точки необходимо определить ее скорость, а затем составляющие ускорения и полное ускорение (по величине и направлению).
3. Уравнения движения решить относительно неизвестных величин. При координатном способе задания движения: ($x = ct^2$; $y = bt$) $v_x = dx/dt$; $v_y = dy/dt$; $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$; $a_x = d^2x/dt^2$; $a_y = d^2y/dt^2$. При естественном способе задания движения: $v = ds/dt$; $a_t = dv/dt$; $a_n = v^2/r$; $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.

Последовательность действий при решении задач на вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

1. Установить вид вращательного движения тела.
2. Наметить путь решения исходя из данных условий задачи. Найти угловую скорость и угловое ускорение, а затем перейти к определению линейных скоростей и ускорений.
3. Записать уравнения для вращательного движения, связывающие заданные и искомые величины:

$$\omega = d\varphi/dt; \quad \epsilon = d\omega/dt; \quad v = \omega R; \quad a_t = \epsilon R;$$

$$a_n^r = \omega^2 R; \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

4. Полученные уравнения решить относительно неизвестных величин.

Последовательность решения задач на определение скоростей при плоскопараллельном движении тела

1. Определить положение мгновенного центра скоростей.
2. Вычислить мгновенную угловую скорость вращения тела $\omega = v_0/OC$.
3. Определить величины скоростей заданных точек путем умножения мгновенной угловой скорости на расстояние до мгновенного центра скоростей:

$$v_1 = \omega CM_1; v_2 = \omega CM_2; v_3 = \omega CM_3.$$

4. Определить направление скоростей заданных точек. Эти скорости перпендикулярны линиям, соединяющим точки с мгновенным центром скоростей.

Последовательность действий при определении вида деформации

1. Изобразить расчетную схему бруса.
2. Мысленно провести сечение и отбросить одну из частей бруса.
3. Выбрать систему координат с началом в центре тяжести сечения и изобразить внутренние силовые факторы.
4. Составить и решить (относительно внутренних силовых факторов) уравнения равновесия для всех внешних и внутренних сил, приложенных к рассматриваемой части бруса:

$$\sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0; \sum F_{iz} = 0; \sum M_{ix} = 0; \sum M_{iy} = 0; \sum M_{iz} = 0.$$

5. Исходя из найденных внутренних силовых факторов определить вид деформации.

Последовательность построения эпюр продольных сил

1. Изобразить расчетную схему бруса и приложить заданные силы. При необходимости определить опорную реакцию из уравнения равновесия.
2. Брус разбить на участки соответственно точкам приложения сил.
3. Определить по методу сечений продольную силу для каждого участка.
4. Найденные величины продольных сил отложить в масштабе в виде ординат, перпендикулярных оси стержня. Через концы ординат провести линии; поставить знаки и заштриховать эпюру параллельно ординатам.

Последовательность построения эпюр крутящих моментов

1. Изобразить расчетную схему вала и приложить к нему заданные внешние моменты. Если какой-либо из внешних моментов неизвестен, то он определяется из уравнения равновесия.
2. Вал разбить на участки согласно сечениям, в которых приложены внешние моменты.
3. Определить по методу сечений крутящий момент для каждого участка по величине и знаку.
4. Найденные величины крутящих моментов отложить в масштабе в виде ординат, перпендикулярных к оси вала. Через концы ординат провести линии, параллельные оси вала, нанести знаки крутящих моментов и заштриховать эпюру.

Последовательность построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов по уравнениям

1. Определить опорные реакции и проверить найденные значения: $\sum F_{iy} = 0; \sum F_{ix} = 0; \sum M = 0$.
2. Балку разделить на участки, границы которых совпадают с точками приложения сил, пар сил или с точками начала и конца распределенной нагрузки.
3. На каждом участке провести сечение и, рассматривая равновесие отсечен-

ной части балки (левой или правой), составить уравнения, выражающие поперечную силу и изгибающий момент.

4. Подставляя в найденные уравнения значения абсцисс на каждом участке, вычислить в ряде сечений величины поперечных сил и изгибающих моментов.

5. По вычисленным значениям поперечных сил и изгибающих моментов построить в масштабе соответствующие эпюры.

Последовательность построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов по характерным точкам

1. Определить опорные реакции и найденные их значения проверить.
2. Балку разделить на участки, границы которых совпадают с характерными точками, т. е. с точками приложения сил, пар сил или с точками начала и конца распределенной нагрузки.
3. Определить вид эпюры поперечных сил на каждом участке в зависимости от внешней нагрузки.
4. Вычислить поперечные силы в характерных сечениях и построить эпюру.
5. Определить вид эпюры изгибающих моментов на каждом участке в зависимости от внешней нагрузки.
6. Вычислить изгибающие моменты в характерных сечениях и построить эпюру.

Т а б л и ц а 15. Допускаемые напряжения для прочных швов при сверленных отверстиях под заклепки

Элемент шва	Род напряжения	Допускаемые напряжения, МПа	
		Ст2	Ст3
Заклепка Основной материал (соединяемые листы, уголки и т. п.)	Срез $[\tau_{ср}]$	100	140
	Растяжение $[\sigma_p]$	140	160
Заклепка и соединяемые листы	Срез $[\tau'_{ср}]$	90	100
	Смятие $[\sigma_{см}]$	280	320

Т а б л и ц а 16. Параметры метрической резьбы по ГОСТ 9150—81

Диаметр резьбы					Диаметр резьбы				
наружный d	средний d_s	внутренний d_i	Шаг резьбы p_h	Рабочая высота профиля h	наружный d	средний d_s	внутренний d_i	Шаг резьбы p_h	Рабочая высота профиля h
7	6,350	5,988	1	0,541	22	20,376	19,294	2,5	1,353
8	7,188	6,647	1,25	0,676	24	22,051	20,752	3	1,624
9	8,188	7,647	1,25	0,676	27	25,051	23,752	3	1,624
10	9,026	8,376	1,5	0,812	30	27,727	26,211	3,5	1,894
11	10,026	9,376	1,5	0,812	33	30,727	29,211	3,5	1,894
12	10,863	10,106	1,75	0,947	36	33,402	31,670	4	2,165
14	12,701	11,835	2	1,082	39	36,402	34,670	4	2,165
16	14,701	13,835	2	1,082	42	39,077	37,129	4,5	2,435
18	16,376	15,294	2,5	1,353	45	42,077	40,128	4,5	2,435
					48	44,752	42,587	5	2,706

Т а б л и ц а 17. Допускаемые осевые нагрузки (усилия затяжки) для болтов, кН

Болт с резьбой	Марка стали		Болт с резьбой	Марка стали	
	Ст3	45		Ст3	45
M8	1,45	2,50	M24	23,5	40,0
M10	2,55	4,40	M30	45,0	77,0
M12	3,70	6,40	M36	73,0	125,0
M16	7,90	13,50	M42	100,0	170,0
M20	14,00	24,00	M48	130,0	255,0

Последовательность расчета шпоночных и шлицевых (зубчатых) соединений

1. В зависимости от требований, предъявляемых к соединению, и характера производства (массовое, мелкосерийное, единичное) выбрать тип шпоночного или зубчатого соединения.

2. По диаметру вала d определить размеры поперечного сечения шпонок или размеры и число зубьев шлицевого соединения.

Назначить длину рабочей части l_p шпонок или зубьев: $l_p \approx (1,5 \div 2) d$.

3. Проверить прочность соединения:

а) призматические и сегментные шпонки рассчитывают по условию прочности соединения на смятие:

призматические

$$\sigma_{см} \approx \frac{4,4M}{dh l_p} \leq [\sigma_{см}];$$

сегментные

$$\sigma_{см} \approx \frac{2M}{d l_p (h - t)} \leq [\sigma_{см}],$$

где M — передаваемый момент; d — диаметр вала; h — высота шпонки; t — глубина шпоночного паза вала; $[\sigma_{см}]$ — допускаемые напряжения смятия,

$[\sigma_{см}] = 100 \div 120 \frac{Н}{мм^2}$ при стальных ступицах и $[\sigma_{см}] = 70 \div 80 \frac{Н}{мм^2}$ при

чугунных ступицах;

б) иногда шпонки проверяются на срез:

$$\tau_{ср} \approx \frac{2M}{db l_p} \leq [\tau_{ср}],$$

где b — ширина шпонки; допускаемое напряжение на срез $[\tau_{ср}] = 60 \div 90 \frac{Н}{мм^2}$;

в) соединения клиновыми врезными шпонками рассчитывают на смятие:

$$\sigma_{см} = \frac{12M}{b l_p (b + 6fd)} \leq [\sigma_{см}],$$

где f — коэффициент трения, $f \approx 0,1 \div 0,15$.

Последовательность расчета фрикционной передачи

1. Задать окружную скорость v .

2. По окружной скорости v и заданной угловой скорости ведущего катка ω_1 определить его диаметр D_1 .

3. Определить передаточное число i .

4. Определить диаметр ведомого катка D_2 .

5. По заданной передаваемой мощности N (кВт) и выбранной окружной скорости v определить окружное усилие F .

6. По коэффициенту трения катков f и коэффициенту запаса сцепления β определяют силу давления между катками (требуемую силу нажатия). Значения коэффициентов трения f следующие:

Материал катков

Сталь по стали без смазки	0,15—0,20
Чугун по чугуну без смазки	0,10—0,22
» или сталь по коже	0,25—0,35
» » » по фибре или текстолиту	0,20—0,25
» по древесине	0,36—0,54
» или сталь по резине	0,45—0,60
Сталь по стали со смазкой	0,05
Чугун по чугуну	0,05

7. Определить допускаемое контактное напряжение $[\sigma_K]$.

8. Определить ширину катков из условия контактной прочности.

9. Для катков, материалы которых при деформировании не подчиняются закону Гука (кожа по стали, резина по стали и др.), ширину катков определяют по допускаемой нагрузке на единицу ширины катка.

Последовательность расчета цилиндрической прямозубой передачи

1. Определить угловую скорость тихоходного или быстроходного вала в зависимости от известной угловой скорости и заданного передаточного числа. Во избежание получения больших габаритов передачи не следует применять $u > 6$ для механических передач и $u > 10 \div 12$ для ручных. При необходимости создания передачи с большими значениями u следует применять двух- или трехступенчатые передачи.

2. Выбрать материал шестерни и колеса. Определить σ_B , σ_T , σ_{-1} и твердость $HВ$.

3. Определить допускаемые контактные напряжения для колеса (материал колеса менее прочен, чем материал шестерни).

4. Выбрать коэффициент ширины венца колеса: $\psi_H = b/a_w$.

5. Выбрать (предварительно) коэффициент нагрузки K_H . В начале расчета можно принимать $K_H \approx 1,3$ при симметричном расположении зубчатых колес и $K_H \approx 1,5$ — при несимметричном или консольном расположении колес относительно опор. После определения размеров зубчатых колес следует уточнить коэффициент нагрузки:

коэффициент динамичности определяется в зависимости от степени точности зацепления, твердости поверхности зубьев колеса и окружной скорости;

коэффициент концентрации нагрузки определяется в зависимости от степени точности зацепления, расположения зубчатых колес относительно опор, относительной ширины зубчатых колес, характера нагрузки и твердости поверхности зубьев.

6. Определить вращающий момент на валу колеса в зависимости от передаваемой мощности и угловой скорости.

7. Определить межосевое расстояние a_w .

8. Определить ширину венца зубчатых колес: $b = \psi_{ba} a_w$.

9. Задать модуль зубьев: $m = (0,01 \div 0,02) a_w$.

10. Определить:

суммарное число зубьев передачи $z_0 = 2a_w/m$;

число зубьев шестерни $z_1 = z_0/(u + 1)$;

число зубьев колеса $z_2 = uz_1$.

Число зубьев шестерни в некорригированной передаче должно быть не менее — $z_{мин} \geq 17$. Большие числа зубьев обеспечивают более плавную работу передачи.

11. Уточнить межосевое расстояние: $a_w = m(z_1 + z_2)/2$.
12. Сравнить прочность на изгиб зубьев шестерни и колеса.
13. Произвести проверочный расчет зубчатой передачи: на контактную выносливость по формуле (228):

$$\sigma_H = \frac{310}{a_w} \sqrt{\frac{K_H M_2 (u+1)^3}{b u^2}} \leq [\sigma_H];$$

на изгиб по формуле (224):

$$\sigma_F = \frac{Y_F F_t K_F}{b m} \leq [\sigma_F].$$

14. Определить основные размеры шестерни и колеса:

$$\begin{aligned} d_1 &= m z_1; \quad d_2 = m z_2; \\ d_{a1} &= m(z_1 + 2); \quad d_{a2} = m(z_2 + 2); \\ d_{f1} &= m(z_1 - 2,5); \quad d_{f2} = m(z_2 - 2,5). \end{aligned}$$

Последовательность проектного расчета цилиндрической косозубой передачи

1. Определить передаточное число при заданных ω_1 и ω_2 либо ω_1 (если заданы ω_2 и u), либо ω_2 (если заданы ω_1 и u): $u = \omega_1/\omega_2$.
2. Выбрать материал шестерни и колеса. Определить σ_B , σ_T , σ_{-1} и твердость НВ.
3. Определить допускаемое нормальное контактное напряжение $[\sigma_H]$.
4. Определить расчетный момент на валу шестерни.
5. Из условия контактной прочности определить межосевое расстояние, кото-

рое затем округляют до целого числа миллиметров: $a_w = 44,3(u+1) \sqrt[3]{\frac{M_2 K_H}{[\sigma_H]_K \psi_{ba}}}$, где ψ_{ba} — коэффициент ширины венца колеса; для косозубых колес $\psi_{ba} = 0,2 \div 0,6$, для шевронных — $\psi_{ba} = 0,4 \div 1,2$.

6. Выбрать нормальный модуль зубьев: $m_n = 0,01 \div 0,02 a_w$. Принять ближайшее стандартное значение m_n .
7. Принять предварительно угол наклона линии зуба β ; для косозубых колес $\beta = 8 \div 15^\circ$, для шевронных $\beta = 25 \div 40^\circ$.
8. Определить суммарное число зубьев:

$$z_c = z_1 + z_2 = 2a_w \cos \beta / m_n.$$

9. Определить число зубьев: шестерни $z_1 = z_c/(u+1)$; колеса $z_2 = z_c - z_1$.
10. Определить фактическое передаточное число: $u = z_2/z_1$.
11. Определить уточненное значение угла наклона линии зуба β : $\cos \beta = z_c m_n / 2a_w$.
12. Определить диаметры делительных окружностей и проверить межосевое расстояние:

$$d_1 = m_n z_1 / \cos \beta; \quad d_2 = m_n z_2 / \cos \beta; \quad a_w = (d_1 + d_2) / 2.$$

13. Определить ширину венцов зубчатых колес: $b = \psi_{ba} a_w$.
14. Уточнить коэффициент нагрузки $K = K_{H\text{нд}} K_{д\text{ин}}$.
15. Проверить расчетные контактные напряжения.
16. Найти эквивалентные числа зубьев: шестерни $z_{\text{э}1} = z_1 / \cos^3 \beta$; колеса $z_{\text{э}2} = z_2 / \cos^3 \beta$. Определить исходя из этих величин коэффициенты формы зубьев Y_1 и Y_2 .
17. Определить окружное усилие в зацеплении: номинальное $F = 2M/d_1$; расчетное $F_p = K_F F$.

18. Определить допускаемые напряжения изгиба для зубьев шестерни и колеса (так же, как для прямозубых колес).

19. Сравнить прочность зубьев шестерни и колеса на изгиб. Проверку прочности вести для менее прочных зубьев.

20. Проверить прочность зубьев на изгиб.

21. Определить диаметры вершин и впадин зубьев:

$$d_{a1} = d_1 + 2m_n; \quad d_{a2} = d_2 + 2m_n; \quad d_{f1} = d_1 - 2,5m_n; \quad d_{f2} = d_2 - 2,5m_n.$$

Последовательность расчета червячных передач

1. Исходя из требований компактности и заданного передаточного числа и выбрать число заходов червяка z_1 .

2. В зависимости от передаточного числа u и числа заходов червяка z_1 определить число зубьев колеса $z_2 = uz_1$.

3. Определить угловую скорость червячного колеса $\omega_2 = \omega_1/u$.

4. В зависимости от условий работы передачи выбрать материалы червячного колеса (венца) и червяка.

5. Определить допускаемые контактные напряжения $[\sigma_H]$ и напряжение изгиба $[\sigma_{\text{из}}]$ или $[\sigma_{-1\text{из}}]$.

6. Определить расчетный момент на колесе $M_{p,к} = FK_H/\omega_2$, где K_H — коэффициент нагрузки, $K_H = 1,05 \div 1,4$.

7. Из расчета на контактную прочность определить межосевое расстояние червячной передачи. Задаться предварительно значением q — коэффициентом диаметра червяка, $q = d_1/m = 8 \div 12$.

8. В зависимости от межосевого расстояния a_w , числа зубьев червячного колеса и значения q определить расчетный модуль m : $m = 2a_w/(z_2 + q)$.

9. Полученное значение модуля округлить до ближайшего стандартного значения m , для которого принимается уточненная величина q .

10. Определить угол подъема линии витка γ : $\gamma = \text{arctg}(z_2/q)$.

11. Уточнить межосевое расстояние: $a_w = m(z_2 + q)/2$.

12. Определить размеры червяка:

$$\text{делительный диаметр червяка } d_1 = m q;$$

$$\text{диаметр вершин витков червяка } d_{a1} = d_1 + 2m;$$

$$\text{диаметр впадин червяка } d_{f1} = d_1 - 2,4m;$$

$$\text{длину нарезанной части нешлифованного червяка } b_1 \geq (11 + 0,06z_2) m.$$

13. Определить размеры червячного колеса:

$$\text{делительный диаметр червячного колеса } d_2 = m z_2;$$

$$\text{диаметр вершин червячного колеса } d_{a2} = d_2 + 2m = m(z_2 + 2);$$

$$\text{диаметр впадин червячного колеса } d_{f2} = d_2 - 2,4m = m(z_2 - 2,4);$$

$$\text{наибольший диаметр червячного колеса } d_{aM_2} = d_{a2} + 1,5m;$$

$$\text{ширину венца червячного колеса } b_2 \leq 0,75d_{a1}.$$

14. Определить КПД червячной передачи:

$$\eta = (0,95 \div 0,96) \frac{\text{tg } \gamma}{\text{tg } (\gamma + \rho')}.$$

15. Приведенный угол трения ρ' принять в зависимости от скорости скольжения $v_{\text{ск}} = d_1 \omega_1 / (2 \cos \gamma)$.

16. Проверить прочность зубьев по напряжениям изгиба.

17. Рассчитать червяк на прочность:

$$\text{осевая сила червяка (окружная сила для червячного колеса) } F_K = 2M_K/d_2;$$

$$\text{момент на валу червяка } M_K = M_q = M_K/(u\eta);$$

$$\text{окружная сила червяка } F_{\text{окр}} = 2M_q/d_1;$$

$$\text{радиальная сила червяка } F_p = F_K \text{ tg } \gamma.$$

18. Определить результирующий изгибающий момент M_F в опасном сечении червяка:

$$\text{наибольшее номинальное напряжение изгиба } \sigma_F = M_F / (0,1d_{f1}^3);$$

$$\text{напряжение сжатия } \sigma_{\text{сж}} = 4F_K / (\pi d_{f1}^2);$$

наибольшее номинальное напряжение кручения $\tau_k = M_n / (0,2d_{f1}^3)$; эквивалентное напряжение по гипотезе энергии формоизменения $\sigma_{эkv} = \sqrt{(\sigma_F + \sigma_c)^2 + 3\tau_k^2}$; проверить червяк на прочность $\sigma_{эkv} \leq [\sigma_F]$.

19. Проверить червяк на жесткость.

Последовательность расчета плоскоремненной передачи

1. Выбрать тип ремня (в зависимости от условий работы).
2. Определить диаметр меньшего шкива:

$$D_1 = D_{\min} = (525 \div 630) \sqrt[3]{\frac{P}{\omega_{\max}}},$$

где P — мощность, кВт; ω_{\max} — угловая скорость, рад/с; D_1 — диаметр меньшего шкива, мм.

3. Определить диаметр ведомого шкива: $D_2 = i(1 - \varepsilon)D_1$, где ε — коэффициент скольжения. Полученные диаметры шкивов D_1 и D_2 округлить до ближайших больших стандартных значений.

4. Определить скорость ремня (желательно, чтобы скорость находилась в пределах 10—20 м/с).

5. Определить толщину ремня исходя из отношения D_{\min}/δ . Полученную толщину ремня δ округлить до стандартного значения.

6. Выбрать межосевое расстояние: $a \geq a_{\min} = (0,1 \div 0,07) v$.

7. Определить длину ремня:

$$L \approx 2a + \frac{\pi(D_2 + D_1)}{2} + \frac{(D_2 - D_1)^2}{4a}.$$

8. Определить угол обхвата α ремнем малого шкива:

$$\alpha = \pi - (D_2 - D_1)/a.$$

9. Определить допускаемое полезное напряжение (допускаемое удельное окружное усилие $[k_n]$).

10. Определить требуемую площадь поперечного сечения ремня $A = \delta b = F/[k_n]$, где b — ширина ремня; F — окружное усилие, $F = P/v$.

11. Определить нагрузку на валы передачи.

12. Определить основные размеры шкива:

ширину обода $B = 1,1b + (0,01 \div 0,015)$;

толщину обода у края $\delta_1 = 0,005D_1 + 0,003$;

диаметр ступицы $D_0 = (1,7 \div 2,0) d$;

длину ступицы $l_{ст} = (1,5 \div 2,0) d$, где d — диаметр вала; определить число спиц шкива:

$$z = (9 \div 10) \sqrt{D}/2.$$

Последовательность расчета клиноремненной передачи

1. Выбрать по заданной мощности подходящий профиль ремня. Учитывая, что каждому значению передаваемой мощности соответствует два или даже три рекомендуемых профиля ремня, расчет передачи целесообразно вести в двух (или трех) вариантах. Окончательно следует принять вариант, дающий меньшие габариты и большую долговечность.

2. Определить передаточное число: $u = \omega_1/\omega_2$.

3. Выбрать расчетный диаметр D_1 меньшего шкива и определить скорость ремня. При этом необходимо, чтобы $5 < v < 30$ м/с. Рекомендуется $v = 15 \div 25$ м/с.

4. Определить диаметр ведомого (большого) шкива. Расчетный диаметр D_2 следует округлить до стандартного: $D_2 = D_1(1 - \varepsilon) i$.

5. Выбрать предварительно межосевое расстояние: $a_{\min} = 0,55(D_1 + D_2) + h$.

6. Определить расчетную длину ремня:

$$L = 2a + \frac{\pi(D_1 + D_2)}{2} + \frac{(D_2 - D_1)^2}{4a}.$$

По вычисленной длине L выбирают стандартную длину ремня L_0 .

7. Уточнить межосевое расстояние a_0 : $a_0 = a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, где

$$a_1 = \left[a_0 - \frac{\pi(D_1 + D_2)}{4} \right] / 4; \quad a_2 = (D_2 - D_1)^2 / 8.$$

8. Проверить длину ремня на долговечность по числу пробегов в секунду. Если условие не удовлетворяется, следует увеличить a (и, следовательно, L).

9. Определить окружное усилие: $F = P/v$.

10. Определить допускаемое полезное напряжение.

11. Определить число ремней. Число ремней z не должно превышать 8—12, в противном случае следует перейти на большее сечение ремня: $z \geq F/([k_n] A)$.

12. Определить силу давления на вал от натяжения ремней: $Q = 2 [k_n] \times \times Az \sin(\alpha/2)$.

Последовательность расчета цепной передачи

1. Выбрать тип приводной цепи в зависимости от технических условий на проектируемый привод.

Наибольшее распространение получили роликовые и втулочные цепи.

По сравнению с роликовыми зубчатые цепи могут работать с большими скоростями, производят меньше шума, обладают большей долговечностью, но они тяжелее, сложнее в изготовлении и дороже.

2. Назначить число зубьев меньшей звездочки в зависимости от передаточного числа и типа цепи.

3. Определить число зубьев второй звездочки: $z_2 = z_1 i$.

4. Выбрать коэффициенты, учитывающие условия эксплуатации передачи, и вычислить K_0 — коэффициент эксплуатации. Если коэффициент эксплуатации $K_0 \geq 3$, то следует улучшить условия работы передачи.

5. Предварительно выбрать шаг цепи:

если задано межосевое расстояние a , то применить эмпирическое соотношение $t = a/(30 \div 50)$;

если межосевое расстояние не задано, то шаг определяют из условия износоустойчивости.

Величина шага должна быть округлена по ГОСТ.

6. Проверить, допустим ли выбранный шаг при заданной угловой скорости.

7. Вычислить среднюю скорость цепи (м/с)

$$v = \frac{z_1 t n_1}{1000 \cdot 60}.$$

8. Определить окружное усилие: $F = P/v$.

9. Определить расчетное давление в шарнирах и сравнить с допускаемым $[p]$. При $p \leq [p]$ работоспособность цепи обеспечена; если $p > [p]$, необходимо выбрать другую цепь.

10. Подсчитать усилия в ветвях цепи:

натяжение от центробежных сил инерции $F_0 = qv^2$, где q — масса 1 м длины цепи, кг;

натяжение от провисания цепи;

полное натяжение ведущей ветви;

натяжение ведомой ветви.

11. Определить расчетный коэффициент запаса прочности.

12. Произвести геометрический расчет передачи:

вычислить делительный диаметр звездочки:

$$d_0 = \frac{l}{\sin(180^\circ/z)};$$

уточнить межосевое расстояние: $l = (30 \div 50) t$;
 вычислить длину замкнутой цепи, выраженную в шагах;
 округлить величину L_t до целого числа (желательно до целого четного)
 и уточнить межосевое расстояние;
 назначить монтажное межосевое расстояние для обеспечения провисания ветвей цепи.

Последовательность проверки оси на прочность

1. На основе конструктивного чертежа оси составить ее расчетную схему и построить эпюру изгибающих моментов.
2. Вычислить наибольшие напряжения изгиба в предположительно опасных сечениях оси: $\sigma_{\max} = M_n/W$.
3. Определить коэффициенты запаса прочности для предположительно опасных сечений.
4. Сопоставить наименьший расчетный коэффициент запаса прочности с требуемым: $n_{\min} \geq [n]$, где $[n]$ — требуемый коэффициент запаса прочности, $[n] = 1,5 \div 2,5$.

Последовательность проверки вала на прочность

1. Составить расчетную схему вала на основе конструктивной разработки.
2. Построить эпюры крутящих и изгибающих моментов.
3. Определить наибольшие номинальные касательные и нормальные напряжения для предположительно опасных сечений вала: $\tau_{\max} = M_n/W_p$; $\sigma_{\max} = M_n/W$.
4. Определить коэффициенты запаса прочности по нормальным и касательным напряжениям для предположительно опасных сечений вала: по нормальным напряжениям в предположении их изменения по симметричному циклу; по касательным напряжениям в предположении их изменения по отнулевому циклу.
5. Определить общий (результатирующий) коэффициент запаса прочности:

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}$$

6. Сопоставить расчетный коэффициент запаса прочности для опасного сечения с требуемым и проверить соблюдение условия прочности: $n_{\min} \geq [n]$, где требуемый запас прочности $[n] = 1,5 \div 3,0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ануриев В. И. Справочник конструктора-машиностроителя. — М.: Машиностроение. — 1978. — 284 с.
2. Аркуша А. И. Руководство к решению задач по теоретической механике. — М.: Высш. шк. — 1976. — 285 с.
3. Аркуша А. И., Фролов М. И. Техническая механика. — М.: Высш. шк. — 1983. — 447 с.
4. Гузенков П. Г. Детали машин. — М.: Высш. шк. — 1986. — 359 с.
5. Дубейковский Е. Н., Савушкин Е. С., Цейтлин Л. А. Техническая механика. — М.: Машиностроение. — 1980. — 344 с.
6. Ицкович Г. М. Сопrotивление материалов. — М.: Высш. шк. — 1986. — 360 с.
7. Кудрявцев В. Н. Детали машин. — Л.: Машиностроение. — 1980. — 464 с.
8. Кушлин Н. Г., Кушлина Г. С. Детали машин. — М.: Высш. шк. — 1987. — 334 с.
9. Мовнин М. С., Израелит А. Б., Рубашкин А. Г. Руководство к решению задач по технической механике. — М.: Высш. шк. — 1977. — 400 с.
10. Мовнин М. С., Израелит А. Б. Теоретическая механика. — Л.: Судостроение. — 1972. — 344 с.
11. Мовнин М. С., Израелит А. Б. Сопrotивление материалов. — Л.: Судостроение. — 1971. — 328 с.
12. Мовнин М. С., Гольцикер Д. Г. Детали машин. — Л.: Судостроение. — 1971. — 360 с.
13. Мовнин М. С., Израелит А. Б., Рубашкин А. Г. Основы технической механики. — Л.: Судостроение. — 1973. — 576 с.
14. Мовнин М. С., Израелит А. Б., Рубашкин А. Г. Основы технической механики. — Л.: Машиностроение. — 1978. — 288 с.
15. Народецкая М. Э., Торбан Б. А., Аркуша А. И. Техническая механика и детали машин и приборов. — М.: Машиностроение. — 1982. — 455 с.
16. Рубашкин А. Г., Чернилевский Д. В. Лабораторно-практические работы по технической механике. — М.: Высш. шк. — 1975. — 250 с.
17. Сборник задач по технической механике/В. В. Багреев, А. И. Винокуров, А. А. Киселев, Б. Б. Аанич, Г. М. Ицкович. — Л.: Судостроение. — 1973. — 496 с.
18. Устюгов И. И. Детали машин. — М.: Высш. шк. — 1981. — 399 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Принятые обозначения	4
Раздел первый. СТАТИКА	
Глава I. Основные понятия и определения статики	5
§ 1. Механическое движение. Равновесие	—
§ 2. Материальная точка. Абсолютно твердые и деформируемые тела	—
§ 3. Сила — вектор. Система сил. Эквивалентность сил	6
§ 4. Аксиомы статики	7
§ 5. Связи и их реакции	10
Глава II. Плоская система сходящихся сил	12
§ 6. Геометрический метод сложения сил, приложенных в одной точке	—
§ 7. Проекция силы на ось	14
§ 8. Проекция векторной суммы на ось	16
§ 9. Аналитическое определение значения и направления равнодействующей плоской системы сходящихся сил (метод проекций)	17
§ 10. Уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил	18
§ 11. Решение задач на равновесие плоской системы сходящихся сил	19
Глава III. Пара сил и моменты сил	21
§ 12. Пара сил и ее действие на тело	—
§ 13. Эквивалентность пар	23
§ 14. Сложение и равновесие пар сил на плоскости	—
§ 15. Момент силы относительно точки и оси	24
Глава IV. Система произвольно расположенных сил	27
§ 16. Приведение силы к точке	—
§ 17. Приведение плоской системы сил к данной точке	29
§ 18. Теорема о моменте равнодействующей (теорема Вариньона)	31
§ 19. Уравнения равновесия плоской системы сил	33
§ 20. Опорные устройства балочных систем	35
§ 21. Решение задач на равновесие плоской системы сил	36
§ 22. Пространственная система сил	40
Глава V. Центр тяжести. Геометрические характеристики плоских сечений	41
§ 23. Центр параллельных сил и его координаты	—
§ 24. Центры тяжести площадей. Статические моменты площадей	45
§ 25. Полярный и осевые моменты инерции	48
§ 26. Осевые моменты инерции относительно параллельных осей	50
§ 27. Определение моментов инерции составных сечений с помощью таблиц нормального сортамента	51

Раздел второй. ОСНОВЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Глава VI. Основные задачи сопротивления материалов	54
§ 28. Понятие о деформации и упругом теле	—
§ 29. Основные допущения и гипотезы	55
§ 30. Метод сечений. Виды нагружений	57
§ 31. Напряжения	61
Глава VII. Растяжение и сжатие	63
§ 32. Продольные силы при растяжении и сжатии. Построение эпюр продольных сил	—
§ 33. Напряжения в поперечных сечениях растянутого (сжатого) стержня	65
§ 34. Расчеты на прочность при растяжении и сжатии	66
§ 35. Деформация при упругом растяжении и сжатии. Закон Гука. Коэффициент Пуассона	69
§ 36. Механические испытания материалов	71
Глава VIII. Расчеты на срез и смятие	75
§ 37. Понятие о срезе и смятии. Условия прочности	—
§ 38. Расчет сварных соединений	78
Глава IX. Кручение	80
§ 39. Чистый сдвиг	—
§ 40. Основные понятия. Эпюры крутящих моментов	81
§ 41. Напряжения и деформации при кручении вала	84
§ 42. Расчеты на прочность и жесткость при кручении	87
Глава X. Изгиб	90
§ 43. Основные понятия	—
§ 44. Поперечные силы и изгибающие моменты в сечениях балок	91
§ 45. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов	94
§ 46. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов по характерным точкам	99
§ 47. Нормальные напряжения при изгибе	102
§ 48. Расчеты на прочность при изгибе	106
§ 49. Понятия о линейных и угловых перемещениях при изгибе	110
Глава XI. Сложные виды деформированного состояния	112
§ 50. Понятие о сложном деформированном состоянии	—
§ 51. Понятие о теориях прочности	113
§ 52. Пример расчета вала на совместное действие изгиба и кручения	115
Глава XII. Устойчивость сжатых стержней	118
§ 53. Понятие о продольном изгибе	—
§ 54. Предел применимости формулы Эйлера. Эмпирические формулы для критических напряжений	121
Глава XIII. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени	123
§ 55. Основные понятия об усталостном разрушении	—

§ 56. Циклы напряжений. Определение предела выносливости	124
§ 57. Местные напряжения. Коэффициент концентрации напряжений	125
Раздел третий. ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ	
Глава XIV. Кинематика	128
§ 58. Основные понятия	—
§ 59. Уравнение движения точки	129
§ 60. Скорость точки	130
§ 61. Ускорение точки	132
§ 62. Виды движения точки в зависимости от ускорения	133
§ 63. Поступательное движение твердого тела	136
§ 64. Вращение тела вокруг неподвижной оси	137
§ 65. Скорости и ускорения точек вращающегося тела	139
§ 66. Кинематические графики и связь между ними	140
§ 67. Понятие о плоскопараллельном движении твердого тела	143
Глава XV. Динамика	145
§ 68. Аксиомы динамики	—
§ 69. Понятие о силах инерции. Метод кинестатики	147
§ 70. Работа постоянной силы на прямолинейном перемещении	150
§ 71. Работа силы на криволинейном перемещении	152
§ 72. Мощность	153
§ 73. Работа и мощность при вращательном движении	—
§ 74. Понятие о трении	155
§ 75. Коэффициент полезного действия	157
§ 76. Закон изменения количества движения	158
§ 77. Потенциальная и кинетическая энергия	160
§ 78. Кинетическая энергия тела в разных случаях его движения	—
§ 79. Моменты инерции некоторых однородных тел	162
§ 80. Закон изменения кинетической энергии	—
§ 81. Основное уравнение динамики для вращательного движения твердого тела	163
Раздел четвертый. ДЕТАЛИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН	
Глава XVI. Основные понятия и определения	166
§ 82. Классификация машин	—
§ 83. Кинематические пары и цепи	167
§ 84. Основные требования к машинам и деталям машин. Характеристики некоторых машиностроительных материалов	169
§ 85. Краткие сведения о стандартизации и взаимозаменяемости деталей машин	172
Глава XVII. Соединения деталей	173
§ 86. Заклепочные и сварные соединения	—
§ 87. Клеевые и другие неразъемные соединения	176
§ 88. Резьбовые соединения	177
§ 89. Расчет резьбовых соединений	183
Глава XVIII. Винтовые механизмы	188
§ 90. Общие сведения. Кинематические и силовые соотношения	—

§ 91. Грузовой винтовой механизм	190
Глава XIX. Передачи вращательного движения	192
§ 92. Классификация передач и их назначение	—
§ 93. Кинематические и силовые соотношения в передаточных механизмах	193
Глава XX. Фрикционные передачи	195
§ 94. Назначение и особенности фрикционных передач	—
§ 95. Кинематические соотношения во фрикционных передачах	196
§ 96. Понятие о вариаторах	197
Глава XXI. Зубчатые передачи	—
§ 97. Виды зубчатых передач. Передаточное отношение	—
§ 98. Элементы теории зубчатого зацепления	200
§ 99. Геометрия стандартного эвольвентного зубчатого зацепления	201
§ 100. Передаточные отношения серии зубчатых колес	204
§ 101. Краткие сведения о методах изготовления зубчатых колес	205
§ 102. Виды разрушения зубьев	207
§ 103. Расчет зубьев прямозубых цилиндрических колес на изгиб	208
§ 104. Расчет зубьев на контактную прочность	210
§ 105. Цилиндрическое косозубые и шевронные колеса	213
§ 106. Конические зубчатые передачи	215
Глава XXII. Червячные передачи	217
§ 107. Общие сведения. Передаточное отношение и КПД	—
§ 108. Геометрические соотношения в червячной передаче	219
Глава XXIII. Ременные передачи	221
§ 109. Устройство ременных передач. Виды приводных ремней	—
§ 110. Кинематические и силовые соотношения в ременных передачах	223
§ 111. Расчет плоскоременной передачи по тяговой способности	225
§ 112. Клиноременная передача	228
§ 113. Передача зубчатым ремнем	233
Глава XXIV. Цепные передачи	234
§ 114. Особенности и область применения цепных передач	—
§ 115. Выбор приводных цепей и звездочек	236
Глава XXV. Механизмы возвратно-поступательного и колебательного движений	238
§ 116. Кривошипно-ползунный механизм	—
§ 117. Кулачковые механизмы	239
Глава XXVI. Механизмы прерывистого одностороннего движения	241
§ 118. Храповые механизмы	—
§ 119. Мальтийские механизмы	242
Глава XXVII. Валы и оси. Опоры и муфты	—
§ 120. Конструктивные формы осей и валов	—

§ 121. Шпоночные и зубчатые (шлицевые) соединения	245
§ 122. Подшипники скольжения	248
§ 123. Подшипники качения	251
§ 124. Выбор подшипников качения	254
§ 125. Направляющие поступательного движения	255
§ 126. Назначение и классификация муфт	256
§ 127. Глухие жесткие и упругие компенсирующие муфты	—
§ 128. Сцепные и предохранительные муфты	259
Г л а в а XXVIII. Редукторы	260
§ 129. Общие сведения о редукторах	—
§ 130. Конструкции основных деталей редукторов	263
§ 131. Смазка редукторов	264
Ответы и консультации к упражнениям	265
Методические указания по последовательности решения задач и некото- рые справочные сведения	273
Список литературы	283

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

**Мовнин Михаил Савельевич,
Израелит Арон Борисович,
Рубашкин Абрам Гилькович**

ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Редактор *Н. С. Аникиева*
Переплет художника *А. А. Парушкина*
Художественный редактор *С. С. Венедиктов*
Технический редактор *П. В. Шиканова*
Корректор *Н. Б. Старостина*

ИБ № 5946

Сдано в набор 7.06.89. Подписано в печать 12.12.89. М-21859. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага офсетная № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 18,0. Усл. кр.-отт. 18,0. Уч.-изд. л. 17,97. Тираж 40 000 экз. Заказ 787. Цена 85 коп.

Ленинградское отделение ордена Трудового Красного Знамени издательства «Машиностроение». 191065, Ленинград, ул. Дзержинского, 10.

Типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени издательства «Машиностроение» при Государственном комитете СССР по печати. 193144, г. Ленинград, ул. Моисеевко, 10.