METHUEN'S MONOGRAPHS ON PHYSICAL SUBJECTS

CLASSICAL MECHANICS

J. W. LEECH, BSc, PhD
Lecturer in physics, Queen Mary college,
University of London

LONDON: METHUEN AND CO LTD,
NEW YORK: WILEY AND SONS INC

1958

Дж. У. Лич

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Перевод с английского

Я. И. СЕКЕРЖ-ЗЕНЬКОВИЧА

Под редакцией

Л. Н. СРЕТЕНСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1961

АННОТАЦИЯ

Книга содержит весьма сжатое изложение основных понятий и методов аналитической механики. Автор стремится дать читателю представление и об аналитической механике непрерывных сред и познакомить его с тем «продолжением» аналитической механики, которое связано со специальной теорией относительности и с теорией поля. Поэтому книга представляет интерес не только для специалистов, работающих в различных областях механики, но и для математиков и физиков-теоретиков; по характеру изложения она доступна аспирантам и студентам старших курсов.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В современной научной и учебной литературе по теоретической механике можно указать достаточно большое число весьма обширных книг, излагающих свой предмет с самых его основ и подводящих читателя к тем задачам, которые стоят перед механикой в настоящее время; при этом такое изложение сопровождается большим числом пояснений в виде подробно и разносторонне решенных отдельных частных задач. К числу таких книг можно отнести известный курс теоретической механики Г. К. Суслова и вышедший на русском языке вторым изданием трактат П. Аппеля.

Предлагаемая вниманию читателя очень коротенькая книжка английского ученого Лича тоже посвящена теоретической механике. Но в ней нет ни подробного разбора частных задач, ни исследования каких-либо отдельных механических систем, примечательных по характеру их движения. В книге Лича содержится в достаточно лаконичном виде изложение самых основных вопросов и теорий аналитической механики, вызванных к жизни известными уравнениями Лагранжа и Гамильтона. И главная цель автора состояла в том, чтобы надлежащим изложением методов аналитической механики в их классическом виде привести читателя книги к пониманию аналитической механики непрерывных сред и особенно к знакомству с основными вопросами механики специальной теории относительности и началами теории поля. Этим последним вопросам отведена примерно треть книги.

Книга Лича едва ли может служить учебником по аналитической механике, так как в ней изложена лишь схема этой дисциплины, не заполненная исследованием задач, достойных большого внимания при начальном знакомстве с механикой как с учением о бесконечно разнообразных движениях материальных систем. Но читатель книги Лича, может, зная уже в известной мере предмет, восстановить в памяти основные этапы развития аналитической механики, не задерживаясь на деталях — как бы они важны ни были. Вместе с тем читатель получает возможность увидеть то «продолжение» аналитической механики, которое связано с теорией относительности и с теорией поля.

Л. Сретенский

ПРЕДИСЛОВИЕ

В истории нашего предмета имеется одна характерная особенность. При изучении атомной физики иногда частично пренебрегали классической механикой и это приводило к неудовлетворительному положению: предполагалось, что физик может усвоить элементы квантовой и статистической механики, не понимая классических основ, на которых построены эти дисциплины. В последние годы обстановка несколько улучшилась благодаря общему удлинению учебного курса; теперь аналитические методы механики обычно изучаются на последней стадии обучения. Этому предмету посвящено несколько превосходных книг, а его элементарное изложение можно найти во многих общих курсах физики. Однако до сих пор не было введения в этот предмет, которое давало бы начинающему необходимый широкий общий обзор и в то же время не затрудняло бы читателя многочисленными деталями. Мы надеемся, что данная книга может заполнить существующий пробел. Мы считаем, что она сообщит физикам-экспериментаторам основные сведения, достаточные для понимания теории, а у теоретиков вызовет интерес к изучению обстоятельных произведений по аналитическим методам механики.

Требования к математической подготовке читателя не превосходят знаний, необходимых для изучения углубленных курсов физики. Для понимания глав IX—XI нужно располагать элементарными сведениями об ортогональных тензорах. Предполагается, что читатель знает ньютоновскую механику и немного знаком со специальной теорией относительности, хотя книга и содержит краткое изложение соответствующих вопросов.

В этой книге мы наметили путь перехода к квантовой механике, так как без этого некоторые классические выводы казались бы только изящными, но бесцельными упражнениями для интеллекта. О статистической механике речь не будет идти, потому что ее основные положения не имеют непосредственной связи с тематикой книги. Мы сочли, однако, весьма желательным включить в книгу сведения о применении аналитических методов к изучению движения непрерывных сред и специально к теории поля. Теория поля является весьма важной частью современной физики, но систематические изложения ее классических основ недостаточно доступны.

Выражаю сердечную благодарность д-ру Р. О. Дейвису, д-ру А. Дж. Мануэлю и м-ру Н. А. Вулнеру за их критические замечания и за помощь, которую они оказали автору при подготовке рукописи.

Колледж королевы Марии,
март 1958 г.

Дж. У. Л.

ГЛАВА I

Введение

Классическая механика занимается в первую очередь описанием движений объектов, известных под названием *материальных точек*. Полное описание материальной точки в любой момент времени получается с помощью определения трех пространственных координат и указания скалярной постоянной, называемой массой точки. Понятие материальной точки нельзя строго отождествить с любой реальной частицей материи, однако движения тел макроскопических размеров можно весьма точно описать, рассматривая эти тела как совокупности материальных точек, понимаемых в указанном выше смысле.

Материальные точки движутся в соответствии с законами Ньютона, которые могут быть изложены в следующих словах.

1. *Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку на него не действует некоторая внешняя сила.*

2. *Изменение количества движения тела пропорционально величине внешней силы, приложенной к телу, и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.*

3. *Силы, с которыми два тела действуют одно на другое, равны по величине и противоположны по направлению.*

Применяемые понятия требуют некоторых дополнительных определений. Окончательную схему можно легко подвергнуть критике как логически недостаточную, так как эти законы содержат термины *масса*, *сила*, *прямая линия* и т. д., которым не было дано удовлетворительного независимого определения. Бриджмен, следуя Маху, предложил опытные определения массы и силы, которые, по-видимому, частично устраняют эти трудности, хотя задача определения прямой линии остается незатронутой. Коснувшись этого важнейшего основного вопроса, мы не собираемся обсуждать его здесь далее[1]). Вместо этого будем предполагать, что термины, о которых идет речь, имеют интуитивно понятный смысл и что законы Ньютона являются логическими формулировками, касающимися взаимоотношений соответствующих понятий.

Наша цель будет состоять в том, чтобы показать, что законы Ньютона можно заменить единым постулатом (*вариационным принципом*), который будет удобнее во многих отношениях. В механике материальной точки этот постулат равноценен допущению о справедливости законов Ньютона. Его достоинство состоит в той легкости, с какой его можно использовать для формулировки сложных задач.

Схему, основанную на законах Ньютона, можно назвать *векторной механикой*, так как она имеет дело с такими величинами, как сила, скорость и т. п., являющимися по существу векторными. Другая схема, введенная Лейбницем и связанная с именами Эйлера, Лагранжа и Гамильтона, может быть названа *аналитической механикой*. Основные величины будут теперь уже скалярными, а не векторными, и динамические соотношения получаются посредством систематического дифференцирования.

Применение этого аналитического метода к простейшим примерам можно сравнить с фрахтованием самолета для перехода улицы. В таких случаях надо понимать, что цель состоит в том, чтобы детально ознакомиться с новым методом. Как только такое ознакомление будет достигнуто, выясняется большее удобство аналитического метода при формулировке более сложных задач. Следующее достоинство этого метода состоит в том, что его можно распространять на такие области, как классическая теория поля и квантовая механика, в которых законы Ньютона неприменимы.

С эстетической точки зрения правильнее было бы сначала постулировать законы механики в их самой общей (аналитической) форме, а затем показать, как при некоторых ограничениях получаются законы Ньютона. Эта программа применима, если такие общие принципы усвоены, но это будет не лучший подход, если известны лишь законы Ньютона.

---

[1]) Полное обсуждение этого вопроса содержится в работах Маха, Бриджмена, а также Линдси и Маргенау, указанных в библиографии в конце книги.

Надо подчеркнуть, что если применяются оба метода — векторный и аналитический,— то разница между ними состоит в способе *представления* уравнений движения. Обычно это есть система дифференциальных уравнений, и в каждом случае окончательная стадия решения требует умения обращаться с такими уравнениями. Ввиду этого рассматриваемые нами примеры будут обычно разбираться только до той стадии, на которой появляются уравнения движения.

Такого рода предупреждение необходимо, чтобы избежать критики, которая иногда направлена против изучения векторного анализа. Очень часто создается ошибочное впечатление, что векторные методы можно использовать для разрешения всех вопросов во всех деталях; последующее разочарование может привести к представлению, что значение этого метода преувеличено. Истина, конечно, состоит в том, что использование векторов обычно приводит к значительному сохранению умственных усилий при переводе физических условий задачи на математический язык. Во всех случаях, кроме немногих элементарных, необходимо на некотором этапе раскладывать векторы на их компоненты; существо дела состоит тогда в том, чтобы наиболее удобным образом выбрать систему координат. Подобное положение дела имеет место и в аналитической механике.

ГЛАВА II

Основные понятия

В этой главе предполагается дать краткое изложение тех положений механики, которые непосредственно вытекают из законов Ньютона и которые будут особенно важны при дальнейшем изложении методов Лагранжа и Гамильтона.

Согласно законам Ньютона движение *системы* N материальных точек определится решением системы N векторных уравнений движения вида

$$\mathbf{F}_s = \frac{d}{dt}\mathbf{p}_s = \frac{d}{dt}(m_s\dot{\mathbf{r}}_s) \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots, N). \quad (2.1)$$

С другой стороны, определяя положение каждой материальной точки тремя декартовыми координатами x_i, можно записать эти уравнения в виде системы $3N$ скалярных уравнений

$$F_i = \frac{d}{dt}p_i = \frac{d}{dt}(m_i\dot{x}_i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, 3N), \quad (2.1')$$

в которых $\dot{x}_i \equiv dx_i/dt$. Обозначения выбраны здесь так, что три координаты каждой точки имеют индексы, которые пробегают последовательные значения. Первая материальная точка имеет координаты x_1, x_2 и x_3, и ее масса соответственно равна $m_1 = m_2 = m_3$. Сначала будет рассматриваться только декартова система координат.

Для определения движения системы необходимо задать компоненты силы и указать *начальные значения* или *граничные условия*. В общем случае силы могут зависеть произвольным образом от времени, координат и их производных любого порядка. Однако, как показывают наблюдения, в том случае, когда силы могут быть выражены аналитически, они зависят самое большее от координат и скоростей точек. Тогда уравнения движения являются дифференциальными уравнениями второго порядка и для их решения требуется указание двух начальных условий для каждого переменного x_i. Эти условия обычно задаются как значения x_i и $\dot{x}_i$ в некоторый данный момент времени; таким образом, они также могут быть взяты произвольным образом. Значительно реже они принимают другую форму, такую, как задание значений x_i для двух моментов времени t_1 и t_2; в этом случае требование совместности с заданными компонентами силы может помешать произвольному заданию таких начальных условий. Во всех случаях требуется, чтобы были заданы все $6N$ констант.

Законы сохранения

Часто бывает удобно предполагать, что силу, действующую на каждую материальную точку системы, можно рассматривать как сумму двух слагаемых

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_s^{(i)} + \mathbf{F}_s^{(e)}, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{F}_s^{(i)}$ — слагаемое, обусловленное другими материальными точками системы, а $\mathbf{F}_s^{(e)}$ — внешняя сила, возникающая помимо системы. Смысл такого разделения состоит в том, что, рассматривая систему как целое и применяя третий закон Ньютона, можно доказать, что внутренние силы попарно уничтожаются, т. е.

$$\mathbf{F} \equiv \sum_{s=1}^{N} \mathbf{F}_s = \sum_{s=1}^{N} \mathbf{F}_s^{(e)}. \tag{2.3}$$

Суммируя уравнения (2.1) и учитывая равенства (2.3), получаем уравнение

$$\sum_{s=1}^{N} \mathbf{F}_s^{(e)} = \sum_{s} \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_s) = \frac{d}{dt}\left[\sum_{s} \mathbf{p}_s\right] = \frac{d}{dt}\mathbf{P}, \tag{2.4}$$

где $\mathbf{P}$ — общее количество движения системы.

Если сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то отсюда следует, что $\mathbf{P} = \mathrm{const}$, т. е. *общее количество движения системы сохраняет постоянное значение.*

Другой интересной величиной является *момент количества движения системы*. Для s-й материальной точки момент количества движения относительно начала координат определяется так:

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{r}_s \times \mathbf{p}_s = \mathbf{r}_s \times m_s \dot{\mathbf{r}}_s. \tag{2.5}$$

Из уравнений (2.1) вытекают уравнения

$$\mathbf{r}_s \times \mathbf{F}_s = \mathbf{r}_s \times \frac{d}{dt}(m_s \dot{\mathbf{r}}_s) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_s \times m_s \dot{\mathbf{r}}_s) = \frac{d}{dt}\mathbf{M}_s, \tag{2.6}$$

откуда следует, что производная по времени от момента количества движения s-й материальной точки равна моменту приложенной к ней силы.

Суммируя по всем материальным точкам системы, находим

$$\sum_s \mathbf{r}_s \times \mathbf{F}_s = \sum_s \frac{d}{dt}\mathbf{M}_s = \frac{d}{dt}\sum_s \mathbf{M}_s = \frac{d}{dt}\mathbf{M}. \tag{2.7}$$

Таким образом, производная по времени от момента количества движения системы равна сумме моментов всех сил, действующих на систему, как внутренних, так и внешних. Действие внутренних сил больше не уничтожается на основе только третьего закона Ньютона. Вместо этого требуется более ограничительное условие, состоящее в том, чтобы внутренние силы были *центральными*, т. е. чтобы они были направлены вдоль линий, соединяющих материальные точки. При этом условии уравнение (2.7) принимает вид

$$\sum_s \mathbf{r}_s \times \mathbf{F}_s^{(e)} = \frac{d}{dt}\mathbf{M}. \tag{2.7'}$$

Далее, если главный момент внешних сил равен нулю, то отсюда будет следовать, что $\mathbf{M} = \text{const}$, т. е. *главный момент количества движения системы сохраняет постоянное значение*.

Отмеченные теоремы сохранения играют важную роль в механике. В некоторых случаях определение величин, сохраняющих постоянное значение, можно рассматривать как решение задачи.

Энергия

Для измерения полного действия силы представляется естественным рассмотреть интеграл, взятый от этой силы вдоль пути материальной точки, на которую действует сила. Из уравнений (2.1) мы имеем

$$\int_1^2 \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{r}_s = \int_1^2 \frac{d}{dt}(m_s\dot{\mathbf{r}}_s)\cdot d\mathbf{r}_s = \left[\frac{1}{2} m_s \dot{\mathbf{r}}_s^2\right]_1^2. \qquad (2.8)$$

Этот криволинейный интеграл является скалярной величиной и представляет собой *работу, совершаемую силой*. В соответствии с тем, что вообще желательно описывать движения при помощи величин, сохраняющих постоянное значение, предполагается, что эта работа накапливается в данной материальной точке как *кинетическая энергия движения*. Поэтому величина $^1/_2 m_s\dot{\mathbf{r}}_s^2$, появившаяся в правой части уравнений (2.8), определяется как кинетическая энергия T_s s-й материальной точки.

Суммируя по всем точкам системы, имеем теперь

$$\int_1^2 \sum_{s=1}^N \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{r}_s = \sum_s \int_1^2 \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{r}_s = \sum_s [T_s]_1^2 = T^{(2)} - T^{(1)}, \qquad (2.9)$$

где $T^{(2)}$ и $T^{(1)}$ обозначают конечное и начальное значения полной кинетической энергии системы.

В некоторых случаях сумма $\sum\limits_{s=1}^N \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{r}_s$ может быть выражена как полный дифференциал $-dV$, где $V = V(x_i)$ является функцией координат x_i. Тогда работа, совершаемая силами, не зависит от вида тех траекторий, по которым следуют материальные точки, а зависит только от начального и конечного положений этих точек. Такие силы и соответствующие системы называются *консервативными*. При таком ограничении уравнение (2.9) дает

$$V^{(1)} + T^{(1)} = V^{(2)} + T^{(2)}. \qquad (2.10)$$

Это соотношение устанавливает, что полная энергия $E = T + V$ системы сохраняется, хотя и возможен обмен между ее кинетической и потенциальной составляющими T и V.

Можно указать, что, в то время как в понятии кинетической энергии имеется некоторая «реальность», нельзя утверждать того же относительно потенциальной энергии. Последняя в известном смысле является некоторой фиктивной величиной, определяемой таким образом, что изменения ее значения в точности компенсируют любые изменения кинетической энергии. Поэтому то обстоятельство, что сумма этих двух величин сохраняет постоянное значение, не является неожиданным. Однако подобные возражения могут возникнуть и относительно реальности сил, так как их можно также рассматривать как уравновешивающие члены в математических уравнениях. Затруднение разрешается в обоих случаях благодаря пониманию того, что конечной целью механики является описание движения системы. Введение нового термина для каких-либо хорошо определенных величин, связанных с движением, является допустимым, если это каким-либо образом помогает в достижении указанной цели. В случае когда различные величины именуются энергией, не может быть сомнения в том, что это существенно помогает процессу описания.

Практическое значение понятия энергии состоит в том, что все механические свойства сложной системы можно описать при помощи установления математической формы ограниченного числа скалярных функций — энергий. Аналитическая механика дает общее развитие этой идеи.

Принцип минимума энергии

В предыдущем разделе консервативная система была определена как система, в которой компоненты силы задаются следующим образом:

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad \text{где } V = V(x_i). \tag{2.11}$$

Если эта система находится в равновесии, то

$$F_i = 0, \quad \text{т. е. } \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 3N). \tag{2.12}$$

Однако эти $3N$ условия являются требованиями того, чтобы функция V имела стационарное значение. Таким образом, при равновесии консервативной системы ее потенциальная энергия имеет стационарное значение. Выражение «принцип минимума энергии» связано с тем обстоятельством, что рассматриваемое состояние равновесия обычно является устойчивым, но, по существу, в этом нет необходимости.

Данный результат обычно называется «принципом», но, как было показано, он является непосредственным выводом из определения консервативной системы. Он представляет собой простейшую форму метода аналитической механики, применимую только к довольно ограниченному кругу задач, касающихся равновесия консервативных систем.

Связи

Движение системы может быть некоторым образом ограничено посредством *связей*, вносящих геометрические ограничения в движение системы. Элементарным примером является простой маятник, в котором движение ограничивается в том смысле, что маятниковая гиря (идеализируемая как материальная точка) остается на одном и том же расстоянии l от неподвижной точки подвеса $\mathbf{a}$. Это является примером *голономной связи*, которая может быть представлена *уравнением связи*

$$(\mathbf{r}-\mathbf{a})^2 = l^2,$$

где $\mathbf{r}$ является радиусом-вектором гири. Основным свойством голономных связей является существование одного или нескольких *конечных* соотношений, связывающих некоторые (или все) пространственные и временны́е координаты материальных точек системы. Другими примерами являются материальная точка, движущаяся по плоскости (не обязательно неподвижной в пространстве), и машина Атвуда, в которой две материальные точки связаны нитью постоянной длины. Твердое тело представляет собой особенно простой тип системы с голономными связями, в которой расстояние между всеми точками сохраняется постоянным.

Не все связи голономны. Например, диск, катящийся без скольжения по горизонтальной плоскости и имеющий горизонтальную ось вращения, также является неголономной системой, так как связь выражается посредством неинтегрируемого дифференциального соотношения, содержащего координаты точки соприкосновения диска с плоскостью. (Этот пример будет рассмотрен в гл. VI.) Существуют другие виды неголономных связей, которые совершенно невозможно представить в математической форме. Общие методы определения движения неголономной системы могут быть созданы только в том случае, если имеются дифференциальные уравнения связей. Другие случаи требуют самостоятельной трактовки и не всегда могут быть решены.

Если система подчинена m уравнениям связей, то в силу этого m из первоначальных $3N$ переменных, описывающих систему, становятся зависимыми. В этом случае говорят, что система имеет только *$3N-m$ степеней свободы*. Иногда возникают трудности, состоящие в том, что не очевидно, какие из переменных целесообразно взять в качестве зависимых; как будет видно позже, эти затруднения можно обойти с помощью неопределенных множителей, вносящих симметрию в рассмотрение задачи.

В общем случае для того, чтобы связи, наложенные на систему, сохранялись, требуются силы. Эти силы первоначально не известны. Знание их величины часто не является необходимым, и они обычно исключаются из уравнений движения на раннем же этапе, однако, в случае необходимости, должны быть разработаны методы для их определения (см. гл. VI). Если условия, выражающие связи, не зависят от времени, то соответствующие силы не будут производить работы, хотя они и не будут, вообще говоря, постоянными во время движения. В силу этого такие связи обычно называют *неработающими*. Связи, зависящие от времени, не являются неработающими.

Связи представляют собой идеализированные понятия, введенные для того, чтобы помочь решению задач механики. В общем случае они представляют весьма упрощенные формы сложных систем. Таков, например, случай движения материальной точки по горизонтальной плоскости. В реальном случае плоскость была бы поверхностью упругого твердого тела и слегка деформировалась бы под действием веса предмета. В процессе идеализации рассматривается геометрическая плоскость и непрерывные силы реакций заменяются разрывными силами — реакциями связей. Такие разрывные силы не предусматриваются в законах Ньютона, и необходим новый постулат [представленный неравенством (2.18)], прежде чем можно будет их включить в надлежащую математическую схему.

Обобщенные координаты

При решении большинства задач механики нельзя достигнуть успеха без специального выбора системы координат. Ввиду своей простоты декартова система используется наиболее часто, но она не всегда наиболее удобна. Например, при рассмотрении движения материальной точки под действием центральной силы полезнее использовать полярную систему координат.

Системы координат, отличные от декартовых, будут рассматриваться в общем виде, так что в дальнейшем их можно будет выбирать любым подходящим образом. Координатами обычно будут являться расстояния или углы, но могут быть и другие величины, особенно при последних обобщениях методов классической механики. Уравнения движения, записанные в обобщенных координатах, имеют такой же общий внешний вид, но содержат вместе с тем члены, относительно которых могут возникнуть некоторые споры: рассматривать ли их с полным правом как «силовые» члены или как члены, характеризующие «быстроту изменения количества движения». Примерами этого являются центробежная «сила» и «сила» Кориолиса; обе они связаны с вращающейся системой координат. Ни одна из них не связана ни с каким внешним воздействием; они представляют собой фиктивные силы, возникающие при данном методе описания как особенности используемой системы координат. При векторном подходе эти фиктивные силовые члены значительно усложняют выражение уравнений движения. При использовании аналитического метода эти силы появляются сами собой как результат систематически проводимых математических операций; в этом и состоит одно из значительных преимуществ аналитического метода.

Преимущество обобщенных систем координат состоит в том, что в большинстве случаев связи учитываются самим выбором этих систем. В силу этого устраняется необходимость написания отдельно $3N$ уравнений движения и m уравнений связи. Эти соображения могут быть хорошо пояснены рассмотрением твердого тела, движение которого определяется тремя координатами (возможно, все еще декартовыми) центра масс в совокупности с тремя углами.

Пространство конфигураций

Определение движения одной материальной точки является задачей механики в трех измерениях. Можно рассматривать две материальные точки; положение каждой точки определяется тремя координатами; иначе говоря, задачу о системе, состоящей из двух точек, можно рассматривать как задачу об одной точке, движущейся в шестимерном пространстве. Различие, в известном отношении, заключается только в терминологии; трудности философского характера легко устранить, обращаясь к шести переменным вместо шестимерного пространства. Тем не менее такое геометрическое представление может быть весьма наглядным и полезным, так как для пояснения доказательств можно использовать совершенно простые чертежи.

В общем случае задача о движении N материальных точек может рассматриваться как задача о движении одной материальной точки, перемещающейся вдоль некоторой *траектории* в $3N$-мерном пространстве. Это пространство называется *пространством конфигураций*. Говорят, что связи ограничивают движение *подпространством* соответственно меньшего числа измерений. Эту терминологию можно использовать при любой обобщенной системе координат.

Принцип возможных перемещений и принцип Даламбера

Возможно и часто желательно бывает представить произвольные мгновенные изменения радиусов-векторов, определяющих положение материальных точек систем. Цель рассмотрения таких изменений, известных как *возможные перемещения*, заключается в том, чтобы дать нечто вроде математического зонда для исследования свойств системы. Бесконечно малое возможное перемещение какой-нибудь s-й точки будет обозначаться через $\delta \mathbf{r}_s$.

Затем если система находится в равновесии, то по определению

$$\mathbf{F}_s = 0 \quad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ N); \tag{2.13}$$

отсюда следует, что

$$\mathbf{F}_s \cdot \delta \mathbf{r}_s = 0 \tag{2.14}$$

и также

$$\sum_s \mathbf{F}_s \cdot \delta \mathbf{r}_s = 0. \tag{2.15}$$

Результаты (2.14) и (2.15) являются тривиальными математическими выводами из определения равновесия. Однако если силы $\mathbf{F}_s$ являются непрерывными функциями координат, то уравнение (2.15) принимает новый физический смысл, который символически можно выразить так:

$$\delta W = 0. \tag{2.16}$$

Этот результат представляет математическую формулировку *принципа возможных перемещений*, который состоит в следующем:

Работа, совершаемая на любом бесконечно малом возможном перемещении системы из положения равновесия, равна нулю.

Если в системе имеются связи, то силы могут быть разделены на *активные*, или *действующие силы* ($\mathbf{F}_s^{(a)}$), и *силы реакций связей* ($\mathbf{F}_s^{(c)}$), так что

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_s^{(c)} + \mathbf{F}_s^{(a)}; \tag{2.17}$$

тогда уравнение (2.15) принимает вид

$$\sum_s \mathbf{F}_s^{(c)} \cdot \delta\mathbf{r}_s + \sum_s \mathbf{F}_s^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_s = 0. \tag{2.15'}$$

Уравнение (2.15′) нельзя рассматривать как утверждение, относящееся к работе на возможных перемещениях, так как разрывная природа реакций связей присуща самому понятию связей. Эта трудность преодолевается путем введения *нового постулата*, а именно

$$\mathbf{F}_s^{(c)} \cdot \delta\mathbf{r}_s \geqslant 0 \tag{2.18}$$

для всех $\delta\mathbf{r}_s$, совместимых со связями.

Это неравенство в действительности является утверждением, касающимся *направлений* допустимых возможных перемещений относительно сил реакций. Его справедливость может быть проверена путем рассмотрения элементарных примеров систем со связями, таких, как материальная точка, находящаяся в покое на горизонтальной плоскости; в этом случае единственными перемещениями материальной точки, совместимыми со связями, являются перемещения вдоль плоскости или вверх от нее.

Сопоставляя соотношения (2.15′) и (2.18), получаем

$$\sum_s \mathbf{F}_s^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_s \leqslant 0. \tag{2.19}$$

Теперь единственными силами, входящими в это выражение являются активные силы, которые действуют на систему и которые можно считать непрерывными функциями координат. Таким образом, этот результат снова можно рассматривать как утверждение, касающееся работы, произведенной силами во время перемещения, совместимого со связями,

$$\delta W \equiv \sum_s \mathbf{F}_s^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_s \leqslant 0. \tag{2.19′}$$

Если теперь ограничиться рассмотрением возможных перемещений, которые в геометрическом смысле являются обратимыми (такие перемещения мы обозначаем символом δ'), то неравенство (2.19) означает, что

$$\sum_s \mathbf{F}_s^{(a)} \cdot \delta' \mathbf{r}_s \leqslant 0$$

и

$$\sum_s \mathbf{F}_s^{(a)} \cdot (-\delta' \mathbf{r}_s) \leqslant 0.$$

Эти соотношения совместны только в том случае, когда

$$\sum_s \mathbf{F}_s^{(a)} \cdot \delta' \mathbf{r}_s = 0. \tag{2.20}$$

Это — *обобщенная форма принципа возможных перемещений*, которая утверждает:

Работа, совершаемая активными силами, приложенными к системе, при обратимых, совместимых со связями, бесконечно малых возможных перемещениях из положения равновесия, равна нулю.

Так как на систему наложены связи, то не все $\delta' \mathbf{r}_s$ будут независимы. Отсюда следует, что в отличие от результата, относящегося к уравнению (2.15), из уравнения (2.20) нельзя заключить, что $\mathbf{F}_s^{(a)} = 0$. Однако во многих случаях можно перейти к обобщенной системе координат (обозначаемых q_i), в которой уравнения связей учитываются автоматически. Тогда соотношение (2.20) может быть приведено к следующему:

$$\sum_i Q_i^{(a)}\,\delta' q_i = 0. \qquad (2.20')$$

В этом случае число обобщенных координат совпадает с числом степеней свободы системы, т. е. все обобщенные возможные перемещения $\delta' q_i$ могут быть сделаны независимыми. Тогда из соотношения (2.20′) вытекают следующие равенства:

$$Q_i^{(a)} = 0. \qquad (2.21)$$

Изложенные до сих пор соображения относились только к системам, находящимся в равновесии. Движущиеся системы могут быть включены в них путем обобщения доказательства. Ранее установленные уравнения движения имели вид

$$\mathbf{F}_s = \frac{d}{dt}(m_s\dot{\mathbf{r}}_s), \qquad (2.1)$$

т. е.

$$\mathbf{F}_s - \frac{d}{dt}(m_s\dot{\mathbf{r}}_s) = 0.$$

Как и прежде, для произвольного возможного перемещения имеем

$$\sum_s \left(\mathbf{F}_s - \frac{d}{dt}(m_s\dot{\mathbf{r}}_s)\right)\cdot\delta\mathbf{r}_s = 0. \qquad (2.22)$$

Силы $\mathbf{F}_s$ можно разделить на реакции связей и активные силы; тогда

$$\sum_s \mathbf{F}_s^{(c)}\cdot\delta\mathbf{r}_s + \sum_s \left(\mathbf{F}_s^{(a)} - \frac{d}{dt}(m_s\dot{\mathbf{r}}_s)\right)\cdot\delta\mathbf{r}_s = 0 \qquad (2.22')$$

и, ограничиваясь перемещениями, совместимыми со связями, снова можно *постулировать*, что

$$\mathbf{F}_s^{(c)}\cdot\delta\mathbf{r}_s \geqslant 0; \qquad (2.18)$$

отсюда и из уравнения (2.22′) имеем

$$\sum_s \left(\mathbf{F}_s^{(a)} - \frac{d}{dt}(m_s\dot{\mathbf{r}}_s)\right)\cdot\delta\mathbf{r}_s \leqslant 0. \qquad (2.23)$$

Дальнейшее ограничение, касающееся обратимости возможных перемещений, дает

$$\sum_s \left(\mathbf{F}_s^{(a)} - \frac{d}{dt}(m_s\dot{\mathbf{r}}_s)\right)\cdot\delta'\mathbf{r}_s = 0. \qquad (2.24)$$

Здесь снова нельзя непосредственно что-либо заключить относительно величин, заключенных в скобки, так как наличие связей не позволяет считать перемещения независимыми. Эту трудность в некоторых случаях можно опять-таки преодолеть, переходя к соответствующей системе обобщенных координат. Общий метод, которым можно это сделать, будет рассмотрен в следующей главе как существенная часть аналитического метода.

Первый член формулы (2.24) снова отождествляется с работой, совершенной во время возможного перемещения. Смысл второго члена является более спорным. Обычно вместо $-d(m_s\dot{\mathbf{r}}_s)/dt$ пишется величина $\mathbf{I}_s$, которая рассматривается как *сила инерции*. Тогда уравнение (2.24) принимает вид

$$\sum_s (\mathbf{F}_s^{(a)} + \mathbf{I}_s)\cdot\delta'\mathbf{r}_s = 0. \qquad (2.25)$$

Эту сумму активных сил и сил инерционных мы назовем *эффективными* силами. Пользуясь этими новыми определениями, можно утверждать следующее:

Полная работа, совершаемая эффективными силами, при обратимом, совместимом со связями, бесконечно малом возможном перемещении любой динамической системы, равна нулю.

Это утверждение известно как *принцип Даламбера*. Его словесная формулировка была подсказана несколько искусственным рассмотрением некоторых членов как сил инерции, и сомнительно, имеет ли здесь выражение «совершенная работа» какой-либо реальный смысл. Однако это является маловажной игрой слов. Утверждение этого принципа означает справедливость соотношения (2.24). Последнее, вероятно, является наиболее общим утверждением во всей механике материальных систем, и содержание всех последующих принципов, включая принцип Гамильтона, может быть получено из него.

Уравнения движения Ньютона также выводятся из уравнения (2.24), но, как видно из изложенного, обратный вывод этого принципа из уравнений движения требует принятия нового постулата, выражаемого формулой (2.18). Это расходится с тем мнением, что вся механика основывается на законах Ньютона. Трудность заключается в самой природе связей. Для вычислительных целей они идеализируются до такой степени, что приводят к существованию разрывных сил. Конечно, такие явления не существуют в природе, хотя реальные условия и могут к ним приближаться. Если такую идеализацию считать желательной, то для ее включения в общее описание[1]) необходим дополнительный постулат, лежащий вне ньютоновской схемы. Однако термин «ньютоновская механика» будет часто использоваться в широком смысле, чтобы включить принцип Даламбера так же, как и законы Ньютона.

Принцип Даламбера часто применяется как средство определения сил — реакций связей. Непосредственно это невозможно, так как содержание принципа специально исключает такие силы. Метод состоит в том, чтобы рассмотреть другую систему, в которой одна или несколько сил реакций связей заменяется приложенной силой. Затем можно вычислить последнюю, совершая возможное перемещение системы. Значение полученной таким образом силы представляет собой величину соответствующей силы реакции связи в первоначальной системе.

Следует обратить внимание на частный вид уравнения (2.24). Предположим, что возможные перемещения совпадают с действительным перемещением системы за время dt. Тогда

$$\delta'\mathbf{r}_s = \dot{\mathbf{r}}_s\,dt, \tag{2.26}$$

и соотношение (2.24) принимает вид

$$\sum_s \left(\mathbf{F}_s^{(a)} - \frac{d}{dt}(m_s\dot{\mathbf{r}}_s)\right)\cdot\dot{\mathbf{r}}_s\,dt = 0,$$

т. е.

$$\sum_s \mathbf{F}_s^{(a)}\cdot d\mathbf{r}_s - \frac{d}{dt}\left(\sum_s \frac{1}{2} m_s\dot{\mathbf{r}}_s^2\right)dt = 0. \tag{2.27}$$

---

[1]) Другая точка зрения такова, что соотношение (2.18) можно *вывести* из законов Ньютона, используя некоторую форму предельного процесса. В частных случаях это верно, но при отсутствии общего доказательства соотношение (2.18) лучше рассматривать как некоторый независимый постулат.

В выражении $\sum\limits_s {}^1/_2 m_s \dot{\mathbf{r}}_s^2$ можно узнать кинетическую энергию T системы; ограничиваясь, кроме того, случаем консервативной системы (т. е. полагая $\mathbf{F}_s^{(a)} = -\nabla_s V$), соотношение (2.27) можно переписать так:

$$d(V+T)=0. \tag{2.28}$$

Это соотношение утверждает, что полная энергия системы остается постоянной во все время движения, т. е. принцип сохранения энергии снова получается как частный случай принципа Даламбера.

ГЛАВА III

Уравнения Лагранжа

Цель настоящей главы будет состоять в том, чтобы дать метод составления уравнений движения, отличный от метода Ньютона. Мы будем руководствоваться следующим принципом: основывать рассуждения на выражениях энергии, насколько это возможно, и сделать все уравнения одинаково применимыми в любой системе обобщенных координат.

Консервативные системы при отсутствии связей

Для системы N материальных точек имеется $3N$ уравнений движения вида

$$F_i = \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i), \tag{3.1}$$

и кинетическая энергия системы определяется как

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2. \tag{3.2}$$

Из этих двух уравнений следует, что

$$F_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right). \tag{3.3}$$

По определению, консервативная система — это такая система, для которой компоненты силы F_i даются формулой

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \tag{3.4}$$

где $V = V(x_i)$ — потенциальная энергия системы. Следовательно, уравнения (3.3) теперь принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}. \tag{3.5}$$

Эти уравнения уже частично соответствуют установленным выше требованиям, чтобы уравнения движения были выражены с помощью двух скалярных функций T и V. Следующий этап состоит в замене декартовой системы координат системой обобщенных координат.

Пусть в такой системе характерная координата обозначается через q_i, причем в общем случае

$$q_i \equiv q_i(x_1, x_2, \ldots, x_{3N}, t) \equiv q_i(x_j, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 3N). \tag{3.6}$$

Включение зависимости q_i от t желательно, так как это может потребоваться при рассмотрении движущихся систем координат.

Форма уравнений (3.5) наводит на мысль об общем методе и о соответствующих производных в новой системе координат. Первым этапом являются формулы

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}. \tag{3.7}$$

Соотношения, являющиеся обращением[1]) соотношений (3.6), имеют вид

$$x_j = x_j(q_i, t); \tag{3.6'}$$

следовательно,

$$\dot{x}_j \equiv \frac{dx_j}{dt} = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_j}{\partial t},$$

откуда

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i}; \tag{3.8}$$

таким образом, равенства (3.7) принимают вид

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_j \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}. \tag{3.9}$$

[1]) Существование таких обратных соотношений является предположением. Математически оно не является необходимым, но во всех физически интересных случаях это предположение верно, за исключением, может быть, конечного числа особых точек.

Дифференцирование по времени этих последних соотношений дает[1])

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)=\sum_j\left[m_j\ddot{x}_j\frac{\partial x_j}{\partial q_i}+m_j\dot{x}_j\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right)\right]=$$
$$=\sum_j\left[F_j\frac{\partial x_j}{\partial q_i}+\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}m_j\dot{x}_j^2\right)\right]=Q_i+\frac{\partial T}{\partial q_i}, \tag{3.10}$$

где

$$Q_i\equiv\sum_j F_j\frac{\partial x_j}{\partial q_i}. \tag{3.11}$$

Величины Q_i можно назвать обобщенными компонентами силы. Если, кроме того, система консервативна, то

$$Q_i=-\sum_j\frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}=-\frac{\partial V}{\partial q_i} \tag{3.11'}$$

и уравнения (3.10) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)=\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{\partial V}{\partial q_i}; \tag{3.10'}$$

эти соотношения содержат только производные от скалярных величин T и V. При обобщении, кроме членов, входивших в уравнения (3.5), появились члены $\partial T/\partial q_i$. Это обобщенная форма таких членов, как центробежная сила и сила Кориолиса, обычно называемых фиктивными силами. Можно считать, что они возникают за счет кривизны координатных поверхностей; эти члены, конечно, тождественно равны нулю для любой декартовой системы координат.

Уравнения (3.10′) можно записать в более компактной форме с помощью введения новой функции L, называемой

---

[1]) Заметим, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right)=\sum_k\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_k\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial x_j}{\partial t}\right)=\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}.$$

функцией Лагранжа и определяемой формулой

$$L = T - V. \tag{3.12}$$

Уравнения (3.10′) теперь принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \tag{3.13}$$

так как, по определению, $\partial V/\partial \dot{q}_i = 0$.

Уравнения (3.13) можно все еще рассматривать как $3N$ уравнений движения системы, так как они представляют собой уравнения (3.1) в преобразованном виде. В настоящей форме они представляют собой очень изящное сжатое выражение свойств системы. Однако следует заметить, что ограничение консервативности системы еще имеет место. Общий случай представляется формулой (3.10), которая является известным усовершенствованием по отношению к первоначальной формулировке законов Ньютона, так как члены, вызывающие трудности при своем определении и выражающие фиктивные силы, определяются здесь простым вычислением производных $\partial T/\partial q_i$. Однако необходимо еще отдельно определить каждую компоненту остающихся сил.

Неконсервативные системы

Предположим, что обобщенные компоненты силы задаются так:

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial M}{\partial q_i}, \tag{3.14}$$

где $M = M(q_i, \dot{q}_i, t)$ является некоторой функцией времени, координат и их производных. Тогда уравнения (3.10) снова могут быть записаны в форме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \tag{3.13}$$

если

$$L = T - M. \tag{3.15}$$

Можно было бы предположить, что ограничение, которое накладывает уравнение (3.14) на вид функциональной зависимости компонент Q_i, является слишком сильным для того, чтобы оно могло служить какой-либо полезной цели. Однако в действительности при этом охватывается чрезвычайно важный случай движения заряженных частиц в электромагнитном поле. В векторном обозначении сила, действующая на частицу с зарядом e, дается (при использовании гауссовых единиц) формулой Лоренца

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right); \tag{3.16}$$

в этой форме выражение силы не имеет вида (3.14), но его можно привести к этому виду введением скалярного и векторного потенциалов φ и $\mathbf{A}$, дающих другое изображение поля, если положить

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

При помощи потенциалов φ и $\mathbf{A}$ компоненты силы Лоренца после некоторых преобразований выразятся так:

$$F_i = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\right) e\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right); \tag{3.18}$$

эти формулы имеют вид (3.14), но выражаются в декартовых координатах. Остается перейти к обобщенным координатам.

Подстановка $M = e\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right)$ в формулу (3.11) дает для обобщенной компоненты силы такое выражение:

$$Q_i = \sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \sum_j \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial M}{\partial x_j}\right)\frac{\partial x_j}{\partial q_i} =$$

$$= \sum \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial M}{\partial \dot{x}_j}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial M}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right];$$

отсюда, используя равенство (3.8), имеем

$$Q_i = \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} + \frac{\partial M}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right)\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{d\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial M}{\partial q_i}, \tag{3.19}$$

так как $M = M(\dot{x}_j, x_j)$ и $x_j = x_j(q_i, t)$.

Последний результат совпадает с требованием (3.14). Теперь сила Лоренца соответствует этому более общему условию, позволяющему включить ее таким образом в схему Лагранжа, и уравнения движения частицы (заряженной материальной точки), движущейся в электромагнитном поле, могут быть записаны в форме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{3.13}$$

где

$$L = T - M = T - e\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right). \tag{3.20}$$

Связи

До сих пор предполагалось, что все $3N$ координат, определяющих положение системы N материальных точек, являются независимыми переменными. Однако на систему могут быть наложены связи, так что число степеней свободы системы будет меньше, чем $3N$. Силы, необходимые для осуществления связей (реакции связей) изменяются при движении системы и не могут быть определены, пока само движение неизвестно. Ввиду этого затруднительно видеть, как можно включить их в потенциальную функцию, из которой, как предполагается в трактовке Лагранжа, выводятся силы.

Если связи голономны, то они могут быть рассмотрены методом Лагранжа. В этом случае следует использовать принцип Даламбера. Исходя из формулы (2.24), этот принцип можно выразить в форме

$$\sum_i \left[F_i^{(a)} - \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) \right] \delta x_i = 0, \tag{3.21}$$

где $F_i^{(a)}$ — компоненты активной силы (т. е. *исключить таким образом реакции связей*). Допущение относительно *обратимости* бесконечно малых перемещений здесь в явном виде не фигурирует, так как оно содержится в условии голономности связей.

Так как значения δx_i подчинены уравнениям связей, то не все они являются произвольными и нельзя каждый коэффициент равенства (3.21) приравнять нулю. Прежде всего необходимо перейти к таким координатам, которые могли бы все изменяться независимо одна от другой. Это можно осуществить следующим способом.

Пусть уравнениями связей (уже предполагаемых голономными) будут r уравнений вида

$$f_l(x_i, t) = 0 \qquad (l = 1, 2, 3, \ldots, r). \tag{3.22}$$

Любые $3N$ функций от x_i и t составят систему обобщенных координат при условии, что они могут быть разрешены единственным образом относительно x_i. Выберем в качестве r первых из них последовательность r функций $f_l(x_i, t)$ (3.22), а остальные $n = 3N - r$ возьмем любым подходящим образом, т. е. положим

$$q_l(x_i, t) = f_l(x_i, t)\,(= 0) \quad (l = 1, 2, 3, \ldots, r), \tag{3.23а}$$

$$q_l(x_i, t) = F_l(x_i, t) \qquad (l = r + 1,\ r + 2, \ldots, 3N), \tag{3.23б}$$

где $F_l(x_i, t)$ не равны тождественно нулю.

Если отвлечься от нулевых значений, то уравнения (3.23) определяют общее преобразование координат, устанавливающее соответствие между двумя системами $3N$ переменных. В любом физически интересном случае эти уравнения могут быть разрешены, что дает

$$x_i = x_i(q_j, t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, 3N). \tag{3.24}$$

Так как это преобразование координат в общем случае является не особым, то теперь можно использовать общее доказательство, проведенное в первом разделе этой главы, для преобразования уравнения (3.21) к виду

$$\sum_{i=1}^{3N} \left[Q_i^{(a)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0, \tag{3.25}$$

где

$$Q_i^{(a)} = \sum_j F_j^{(a)} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\,. \tag{3.25'}$$

Если теперь принять во внимание уравнения связей (3.22), то первые r членов суммы (3.25) будут тождественно равны нулю, так как соответствующие δq_i должны обратиться в нуль. Остается

$$\sum_{i=r+1}^{3N}\left[Q_i^{(a)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i}\right]\delta q_i = 0. \tag{3.26}$$

Хотя это соотношение внешне и похоже на уравнение (3.25), но на самом деле оно глубоко отлично от него, так как теперь все $n = 3N - r$ координат q_i являются независимыми переменными. Следовательно, коэффициенты при δq_i можно теперь приравнять к нулю. Отсюда

$$Q_i^{(a)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = r+1,\ r+2,\ \ldots,\ 3N). \tag{3.27}$$

Эти уравнения по форме тождественны уравнениям (3.10) и при наличии сходных ограничений могут быть записаны так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (i = r+1,\ r+2,\ \ldots,\ 3N). \tag{3.27'}$$

Таким образом, показано, что и при существовании связей (голономных) уравнения движения можно записать в форме Лагранжа. Дальнейшее обобщение возможно только применительно к таким неголономным системам, для которых связи выражаются как неинтегрируемые дифференциальные соотношения. Рассмотрение этого случая мы отложим до изучения вариационных принципов в гл. VI. Тогда можно будет изложить и способ (метод неопределенных множителей) для определения величин реакций связей.

Диссипативная функция Рэлея

Во многих системах имеются диссипативные силы. Этот термин относится к таким процессам, как трение, при которых энергия системы теряется. В принципе, достаточно подробное рассмотрение позволило бы определить эти силы в виде, доступном описанию посредством развиваемых до сих пор методов. Однако это повлекло бы к нежелательным осложнениям, и более удобно рассматривать эти силы с феноменологической точки зрения.

Экспериментально установлено, что диссипативные силы во многих случаях связаны с компонентами скорости следующим простым соотношением:

$$F_i^{(d)} = -k_i \dot{x}_i, \tag{3.28}$$

где k_i — постоянные. Эти силы могут быть включены в нашу аналитическую схему с помощью определения новой величины, *диссипативной функции Рэлея*, даваемой формулой

$$R = \frac{1}{2} \sum_i k_i \dot{x}_i^2, \tag{3.29}$$

откуда

$$F_i^{(d)} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i}. \tag{3.30}$$

Предполагая, что в остальном система может быть описана методом Лагранжа, уравнения движения в декартовой системе координат можно записать так:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} = 0. \tag{3.31}$$

После перехода к системе обобщенных координат обобщенные компоненты диссипативной силы будут определяться формулой

$$Q_i^{(d)} = \sum_j F_j^{(d)} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = -\sum_j {}_j\dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i};$$

из уравнений преобразования снова имеем

$$\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}, \tag{3.8}$$

следовательно,

$$Q_i^{(d)} = -\sum_j k_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left[\frac{1}{2}\sum_j k_j \dot{x}_j^2\right] = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}. \tag{3.32}$$

Этот результат совместно с результатом преобразования неизмененной формы уравнений движения (т. е. формы, полученной при отсутствии диссипативных сил) дает

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = 0. \tag{3.33}$$

Таким образом, видно, что диссипативная система при соответствующих обстоятельствах может быть описана обобщенными уравнениями Лагранжа.

ГЛАВА IV

Применение уравнений Лагранжа

В этой главе рассматривается методом Лагранжа несколько отдельных задач. Так как цель этого метода состоит в том, чтобы дать целесообразный путь вывода уравнений движения, то вообще не будет необходимости изучать все детали движения. Рассматриваемые задачи не исчерпывают, разумеется, все возможные случаи. Наша цель состоит в том, чтобы дать хорошее представление о применении метода Лагранжа путем изучения нескольких частных примеров, которые по справедливости можно считать весьма интересными.

Большие трудности при решении любой задачи механики связаны с выбором такой системы координат, в которой уравнения движения имели бы форму, наиболее удобную для дальнейших исследований. Это в равной степени применимо как к методу Лагранжа, так и к любому другому методу. Как правило, для выбора такой системы координат нет готового пути, и обычным является метод проб и ошибок. Из-за недостатка места мы должны избегать ошибок в выборе системы координат, и поэтому мы будем рассматривать только такие системы координат, которые после предварительного испытания оказались подходящими.

Необходимо отметить одну особенность, а именно существование во многих случаях *циклических* (или *игнорируемых*) координат, допускающее простое получение первых интегралов соответствующих уравнений движения. Это вводит важное усовершенствование, которое будет подробнее рассмотрено в следующей главе в связи с методом Гамильтона.

Сила Кориолиса и центробежная сила

Введение вращающейся системы координат часто скорее усложняет, чем упрощает механическую задачу, хотя иногда, как в случае движения тела в земной атмосфере, оно является необходимым.

Рассмотрим переход от неподвижной системы осей $Oxyz$ к системе $Ox'y'z'$, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг оси Oz. Уравнения преобразования имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\omega t - y'\sin\omega t, \\ y &= x'\sin\omega t + y'\cos\omega t, \\ z &= z'. \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

Кинетическая энергия материальной точки записывается так:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) =$$
$$= \frac{1}{2} m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) + m\omega(x'\dot{y}' - \dot{x}'y') + \frac{1}{2} m\omega^2(x'^2 + y'^2). \qquad (4.2)$$

Ранее было установлено, что член $\partial T/\partial q_i$, входящий в уравнения Лагранжа, можно рассматривать как фиктивную силу, возникающую от особенностей данной системы координат. В настоящем случае он принимает форму

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = m\omega\dot{y}' + m\omega^2 x' \qquad (4.3)$$

с соответствующим выражением для $\partial T/\partial y'$ ($\partial T/\partial z' = 0$).

Два члена выражения (4.3) соответственно отождествляются с компонентами половины силы Кориолиса и центробежной силы. Оставшаяся половина компоненты силы Кориолиса получается из члена $d(\partial T/\partial\dot{x})/dt$ уравнений Лагранжа.

Мы не собираемся рассматривать какую-либо частную задачу, касающуюся силы Кориолиса или центробежной силы; наша цель — только показать, как просто они получаются из уравнений Лагранжа. Это резко отличается от результатов применения другого, векторного, метода, который в принципе также пригоден, но который часто приводит к практическим трудностям, особенно при определении знака слагаемых.

Задача двух тел

Движение системы, состоящей из двух материальных точек, положение которых определяется радиусами-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ и на которые действуют только консервативные силы, можно описать с помощью следующей функции Лагранжа:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \tag{4.4}$$

Кинетическая энергия T иначе может быть представлена так:

$$T = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2, \tag{4.5}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \text{ — вектор, соединяющий материальные точки,}\\
&\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \text{ — радиус-вектор центра масс системы,}\\
&\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ — \textit{приведенная масса} системы,}\\
&M = m_1 + m_2.
\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Этот иной способ рассмотрения приводит нас к системе, состоящей из материальной точки, имеющей массу, равную сумме масс первоначальных материальных точек, и расположенной в центре их масс, и из материальной точки, имеющей приведенную массу системы и лежащей в точке $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Однако этот прием является искусственным. Его смысл состоит в том, что при обычно осуществляющихся ограничениях член функции Лагранжа, равный потенциальной энергии, разбивается на два слагаемых подобно тому, как это имеет место в равенстве (4.5). Тогда мы имеем

$$V = V_1(\mathbf{r}) + V_2(\mathbf{R}). \tag{4.7}$$

Предполагая это, можно функцию L записать так:

$$L = L_1 + L_2, \tag{4.8}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
L_1 &= \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - V_1(\mathbf{r}),\\
L_2 &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 - V_2(\mathbf{R}),
\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

и движение исходной системы из двух взаимодействующих материальных точек практически раскладывается на независимые движения двух независимых систем. Такое разбиение обычно упрощает решение задачи.

Разделение, представляемое соотношением (4.7), происходит как при отсутствии внешней силы, действующей на систему, так и в том случае, когда внешняя сила, отнесенная к единице массы, одинакова для каждой материальной точки. Как отмечалось выше, эти ограничения осуществляются достаточно часто для того, чтобы задачу имело смысл рассматривать в этой форме.

Дальнейшее рассмотрение части движения системы, представляемой посредством функции L_2, не представляет особого интереса. Однако целесообразно несколько больше сказать о другом слагаемом при следующем дополнительном ограничении:

$$V_1(\mathbf{r}) = V_1(r) \qquad (r = |\mathbf{r}|), \tag{4.10}$$

т. е. при предположении, что движение происходит под действием *центральной силы.*

Используя *сферические координаты*, определяемые обычным образом, получаем

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2), \tag{4.11}$$

откуда

$$L_1 = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) - V_1(r). \tag{4.12}$$

Отсюда видно, что величина φ является *циклической* координатой, т. е. не входит явно в функцию L_1. Вследствие этого соответствующее уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

имеет особенно простую форму

$$\frac{d}{dt}(\mu r^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi}) = 0. \tag{4.13}$$

Непосредственное интегрирование дает

$$\mu r^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi} = \text{const}. \tag{4.14}$$

Левую часть этого интеграла можно отождествить с моментом количества движения относительно полярной оси, и легко видеть, что она является постоянной для любого частного выбора этой оси. Если полярная ось выбрана так, что в начальный момент она располагается вдоль радиуса $\mathbf{r}$, то $\theta=0$, т. е. константа в соотношении (4.14) равна нулю. В течение последующего движения r и θ в общем случае будут принимать ненулевые значения. Отсюда следует, что, для того чтобы равенство (4.14) продолжало удовлетворяться, величина $\dot{\varphi}$ должна быть равна нулю. Это означает, что во все время движения полярная ось и направление движения остаются в одной плоскости. Вследствие этого данную задачу удобно решать в *плоской* полярной системе координат, причем рассматриваемая плоскость является плоскостью, содержащей векторы $\mathbf{r}$ и $\dot{\mathbf{r}}$. Таким образом, функция Лагранжа принимает вид

$$L_1 = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V_1(r). \tag{4.15}$$

Отсюда следует, что в этой новой записи θ является циклической координатой и решение соответствующего уравнения движения имеет вид

$$\mu r^2\dot{\theta} = \mathrm{const}\,(=l). \tag{4.16}$$

Это равенство можно истолковать как установление постоянства момента количества движения относительно оси, проходящей через начало координат и перпендикулярной к координатной плоскости. Данный результат по существу представляет собой второй закон Кеплера для движения планет и вытекает как следствие из предположения о том, что силы являются центральными.

Уравнение движения, относящееся к координате r, оказывается более сложным:

$$\mu\ddot{r} = \mu r\dot{\theta}^2 - \frac{\partial}{\partial r}V_1(r) = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{\partial}{\partial r}V_1(r) = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{l^2}{2\mu r^2} + V_1(r)\right]. \tag{4.17}$$

Это уравнение удобно истолковать как уравнение движения материальной точки по прямой под влиянием измененного потенциала сил, даваемого формулой

$$V_1'(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V_1(r). \tag{4.18}$$

Дальнейшее исследование требует предположений, касающихся конкретного вида функции $V_1(r)$.

Проведенные выше рассуждения показывают важность выбора системы координат для обнаружения тех особенностей задачи, которые можно назвать законами сохранения. Хотя эти законы не составляют полного решения задачи, они образуют тем не менее его существенную часть.

Теорема Лармора

Движение электрона в поле положительно заряженного ядра можно рассматривать как классическую задачу двух тел. Так как внешние силы равны нулю, то выполняются условия предыдущего примера и движение разделяется на две независимые составные части. Введение внешнего магнитного поля изменяет это положение дел, так как внешняя сила, отнесенная к единице массы, не будет уже одинакова для каждой материальной точки и невозможно будет выразить внешние силы как функции только от радиуса-вектора $\mathbf{R}$ центра масс двух материальных точек.

Однако, принимая во внимание значительно бóльшую величину массы ядра, можно с достаточной точностью считать ядро неподвижным и рассматривать только движение электрона. Тогда задача по существу является задачей о движении одного тела. На основании соображений, изложенных в предыдущей главе, действие магнитного поля на электрон определяется зависящим от скорости членом $-(e/c)\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}$, входящим в функцию Лагранжа, а кулоновское притяжение ядра выражается через функцию $V(r) = Ze^2/r$; таким образом,

$$L = T - V(r) - \frac{e}{c}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}. \tag{4.19}$$

Предположим, что магнитное поле параллельно оси z и имеет постоянную напряженность H_0; тогда возможной системой декартовых компонент вектора **A** будет

$$A_x = -\frac{1}{2}H_0 y, \quad A_y = \frac{1}{2}H_0 x, \quad A_z = 0. \tag{4.20}$$

Для решения этой задачи наиболее удобными оказываются цилиндрические координаты. Переходя к ним, имеем

$$A_\varrho = A_z = 0, \quad A_\theta = \frac{1}{2}H_0\varrho, \tag{4.20'}$$

и выражение (4.19) принимает вид

$$L = \frac{1}{2}m(\dot\varrho^2 + \varrho^2\dot\theta^2 + \dot z^2) - V(\varrho, z) - \frac{e}{c}\varrho\dot\theta\frac{1}{2}H_0\varrho. \tag{4.19'}$$

Отсюда вытекает, что θ является циклической координатой и интегрирование соответствующего уравнения движения дает

$$m\varrho^2\left(\dot\theta - \frac{eH_0}{2mc}\right) = \text{const}. \tag{4.21}$$

Как будет видно из последующих рассуждений, этот результат снова выражает сохранение момента количества движения, хотя здесь только один член $m\varrho^2\dot\theta$ может быть признан за величину такого рода. Для дальнейшего удобно выполнить следующее преобразование координат:

$$\varrho = \varrho', \quad z = z', \quad \theta = \alpha + \omega_0 t, \quad \text{где} \quad \omega_0 = \frac{eH_0}{2mc}. \tag{4.22}$$

Функция Лагранжа после преобразования принимает вид

$$L' = \frac{1}{2}m(\dot\varrho'^2 + \varrho'^2\dot\alpha^2 + \dot z'^2) - V(\varrho', z') - \frac{1}{2}m\varrho'^2\omega_0^2. \tag{4.23}$$

Кроме того, при отсутствии магнитного поля H_0 первоначальная функция Лагранжа принимает вид

$$L = \frac{1}{2}m(\dot\varrho^2 + \varrho^2\dot\theta^2 + \dot z^2) - V(\varrho, z). \tag{4.24}$$

Выражения (4.23) и (4.24) имеют одинаковую форму, за исключением члена $-{}^1/_2 m\varrho'^2\omega_0^2$. Уместно рассмотреть отношение величины этого члена к величине $^1/_2 m\varrho^2\dot{\theta}^2$; можно показать, что для H_0 порядка 10^4 *эрстед* оно имеет порядок 10^{-12}. Следовательно, с очень высокой точностью можно пренебречь этим членом и считать функции Лагранжа (4.23) и (4.24) тождественными. Отсюда следует, что движения систем, описываемые обеими функциями Лагранжа, одинаковы. Физически это означает, что движение электрона под действием постоянного магнитного поля относительно вращающейся системы координат одинаково с движением, которое было бы в неподвижной системе координат при отсутствии поля. Этот результат обычно выражают следующим утверждением: система под влиянием поля прецессирует с постоянной угловой скоростью ω_0.

Следует заметить, что в действительности было показано только, что возможные состояния движения двух систем одинаковы. Однако можно также доказать, что если стационарное магнитное поле создается *постепенно*, то система сохраняет свое состояние движения относительно системы координат, вращающейся с соответствующей угловой скоростью.

Этот результат может быть распространен на многоэлектронную систему, электроны которой движутся в поле центральных сил, вызванных одним ядром. Это имеет широкое применение в микроскопической теории магнитных свойств материи[1]).

Симметричный волчок

Вращение волчка является примером движения твердого тела. Твердое тело представляет собой одну из систем, для которых голономные, не зависящие от времени связи уменьшают число степеней свободы до шести; в рассматриваемом случае это число уменьшается до трех за счет требования, чтобы ножка волчка находилась в соприкосновении с землей в некоторой закрепленной точке. Если пренебречь силами трения, которые могут

---

[1]) Дальнейшее обсуждение этой теоремы см. в книге Розенфельда (Rosenfeld L., Theory of electrons, Amsterdam, 1951).

действовать на волчок, то систему можно считать консервативной; единственной активной силой является вес волчка, приложенный в его центре тяжести.

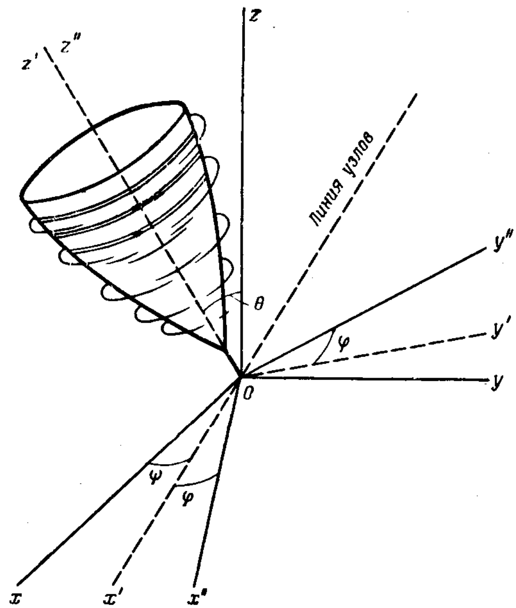

Рис. 1. Симметричный волчок.

Связи учитываются автоматически введением в уравнения движения осевых и центробежных моментов инерции волчка. Это — квазигеометрические величины, и если воспользоваться тем преимуществом, что волчок симметричен, то по его оси симметрии следует направить одну из осей декартовой системы координат. Тогда центробежные моменты инерции будут равны нулю и таким образом исключатся из рассмотрения. В общем случае ось симметрии будет двигаться в пространстве, и окажется необходимым установить связь подвижной системы с неподвижной. Подходящими параметрами для описания положения системы являются, как известно, *углы Эйлера* (см. рис. 1). Их три: угол θ между осью симметрии волчка Oz' и неподвижной вертикальной осью Oz, угол ψ между Ox (неподвижной в пространстве) и Ox', линией пересечения плоскости, перпендикулярной Oz', и горизонтальной плоскости (линия Ox' известна под названием *линии узлов*), и угол φ между Ox' и Ox''; эта последняя ось скреплена с волчком и перпендикулярна оси Oz' ($\equiv Oz''$).

Система координат $Ox'y'z'$ вращается относительно системы $Oxyz$ с мгновенной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}'$. В системе $Ox'y'z'$ эта скорость равна

$$\mathbf{\Omega}' = (\dot{\theta},\ \dot{\psi}\sin\theta,\ \dot{\psi}\cos\theta). \tag{4.25}$$

Система осей $Ox''y''z''$, относительно которой волчок неподвижен, вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ относительно $Ox'y'z'$. И снова измеренная в системе $Ox'y'z'$ эта скорость равна

$$\boldsymbol{\omega} = (0,\ 0,\ \dot{\varphi}). \tag{4.26}$$

Таким образом, волчок вращается относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ с угловой скоростью $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}' + \boldsymbol{\omega}$. В системе $Ox'y'z'$ эта угловая скорость равна

$$\mathbf{\Omega} = (\dot{\theta},\ \dot{\psi}\sin\theta,\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta). \tag{4.27}$$

В основной системе декартовых координат кинетическая энергия волчка выражается так:

$$T = \frac{1}{2}(A\Omega_x^2 + B\Omega_y^2 + C\Omega_z^2 - 2D\Omega_y\Omega_z - 2E\Omega_z\Omega_x - 2F\Omega_x\Omega_y), \tag{4.28}$$

где A, B, C являются осевыми моментами инерции, а D, E, F — центробежными моментами инерции. Волчок непрерывно меняет свою ориентацию относительно системы осей $Oxyz$; следовательно, если использовать последнюю систему как систему отсчета, то величины A, B, C, D, E и F будут меняться со временем, так же как и компоненты $\mathbf{\Omega}$. Это составит большие неудобства при вычислении, которых можно избежать, однако, отнеся движение к системе $Ox''y''z''$. Эти оси не только неподвижны относительно волчка, так что соответствующие величины

A'', B'', C'', D'', E'', F'' постоянны во времени, но и являются вместе с тем главными осями инерции волчка, благодаря чему центробежные моменты инерции D'', E'', F'' обращаются в нуль. В силу этого кинетическая энергия волчка может быть записана так:

$$T = \frac{1}{2}(A''\Omega_{x''}^2 + B''\Omega_{y''}^2 + C''\Omega_{z''}^2). \tag{4.29}$$

Наконец, так как Oz'' является осью симметрии, то система $Ox'y'z'$ также служит системой главных осей инерции волчка, хотя и движется относительно него. Это дает

$$T = \frac{1}{2}(A'\Omega_{x'}^2 + A'\Omega_{y'}^2 + C'\Omega_{z'}^2), \tag{4.29'}$$

где $A' = A'' = B''$, $C' = C''$.

Принимая во внимание равенство (4.27), это выражение можно записать также в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2}[A'\dot\theta^2 + A'\dot\psi^2 \sin^2\theta + C'(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)^2]. \tag{4.30}$$

Заметим, что это выражение дает кинетическую энергию движения волчка *относительно неподвижной системы отсчета*, выраженную через подвижную систему координат. Кинетическая энергия волчка *относительно подвижной системы отсчета* $Ox'y'z'$ равняется $^1/_2 C'\dot\varphi^2$.

Потенциальная энергия волчка равна

$$V = mgh\cos\theta, \tag{4.31}$$

где h есть расстояние центра тяжести от точки опоры волчка. Следовательно, движение волчка описывается такой функцией Лагранжа:

$$L = T - V =$$
$$= \frac{1}{2}[A'\dot\theta^2 + A'\dot\psi^2\sin^2\theta + C'(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)^2] - mgh\cos\theta. \tag{4.32}$$

Это завершает перевод физических условий задачи на математический язык. Теперь остается вывести уравнения движения в соответствии с обычными правилами составления уравнений Лагранжа. В качестве обобщенных координат выбраны, очевидно, параметры θ, ψ, φ, причем φ и ψ являются циклическими. Уравнения движения, соответствующие циклическим координатам, интегрируются немедленно и дают

$$\left.\begin{aligned} &\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi=\mathrm{const}=n,\\ &A'\dot\psi\sin^2\theta+C'\cos\theta\,(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)=\\ &\qquad\qquad=A'\dot\psi\sin^2\theta+C'n\cos\theta=\mathrm{const}=k.\end{aligned}\right\}\tag{4.33}$$

Оставшееся уравнение движения имеет вид

$$A'\ddot\theta=A'\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta-C'n\dot\psi\sin\theta+mgh\sin\theta.\tag{4.34}$$

Дальнейшее решение требует задания начальных условий, и здесь мы им заниматься не будем. Общее рассмотрение движения известно своей сложностью, но благодаря вышеуказанным соображениям задача была сформулирована с минимальными усилиями. Уравнения (4.33) снова выражают сохранение момента количества движения, хотя рассматриваемые компоненты с физической точки зрения не так важны, как в предыдущих случаях.

Главные колебания

Некоторые физические системы имеют ограниченное движение, состоящее из малых перемещений относительно положения устойчивого равновесия. Примером такого движения является механическое колебание атомной решетки, как это имеет место в кристалле. Это движение сложное, но может быть представлено в виде суммы конечного числа простых гармонических колебаний. В общем случае каждое слагаемое, т. е. простое гармоническое колебание, соответствует движению всей решетки. Эти простейшие слагаемые называются *главными* или *нормальными колебаниями* системы.

Рассмотрим систему взаимодействующих линейно колеблющихся материальных точек. Постулируя, что движение системы имеет малую амплитуду и происходит около положения устойчивого равновесия, можно представить потенциальную энергию системы в виде следующего ряда Тейлора:

$$V(q_i)=V(q_i^{(0)})+\sum_i \delta q_i\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0+$$
$$+\sum_i\sum_j \frac{1}{2}\delta q_i\delta q_j\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}\right)_0+\ldots, \qquad (4.35)$$

где q_i — обобщенные координаты материальных точек, а $q_i^{(0)}$ — значения этих координат при равновесии.

Для наших целей δq_i важнее, чем q_i. Таким образом, мы полагаем

$$\delta q_i=\eta_i \qquad (4.36)$$

и рассматриваем η_i как обобщенные координаты. Поскольку $\partial/\partial q_i\equiv\partial/\partial\eta_i$, выражение (4.35) может быть переписано так:

$$V(\eta_i)=V(0)+\sum_i \eta_i\left(\frac{\partial V}{\partial \eta_i}\right)_0+$$
$$+\sum_i\sum_j \frac{1}{2}\eta_i\eta_j\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta_i\,\partial \eta_j}\right)_0+\ldots; \qquad (4.35')$$

здесь $V(0)$ является произвольной постоянной, которую можно считать равной нулю; кроме того, $(\partial V/\partial\eta_i)_0=0$, так как точка $\eta_i=0$, по предположению, является положением равновесия. Таким образом, выражение (4.35′) принимает вид

$$V(\eta_i)=\sum_i\sum_j \frac{1}{2}\eta_i\eta_j V_{ij}+O(\eta^3), \qquad (4.35'')$$

где $V_{ij}\equiv(\partial^2 V/\partial\eta_i\,\partial\eta_j)_0$ не зависят от η_i.

В декартовой системе координат кинетическая энергия выражается так:

$$T=\sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2, \qquad (4.37)$$

где m_i — массы отдельных материальных точек. Переходя к обобщенным координатам посредством соотношений

$$q_i = q_i(x_j) \quad \text{или} \quad x_j = x_j(q_i), \tag{4.38}$$

которые *не зависят явно от времени*, и вспоминая, что $q_i = q_i^{(0)} + \eta_i$, получаем

$$\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j, \tag{4.39}$$

откуда

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_j \frac{\partial x_i}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j \right)^2 =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_j \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial \eta_j} \frac{\partial x_i}{\partial \eta_k} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k \right). \tag{4.40}$$

Снова считая амплитуды колебаний малыми, мы можем положить

$$\frac{\partial x_i}{\partial \eta_j} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \eta_j} \right)_0 + \sum_k \eta_k \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial \eta_k \, \partial \eta_j} \right)_0 + \ldots ; \tag{4.41}$$

таким образом,

$$T = \sum_j \sum_k \frac{1}{2} M_{jk} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k + O(\eta \dot{\eta}^2), \tag{4.42}$$

где

$$M_{jk} \equiv \sum_i m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial \eta_j} \right)_0 \left(\frac{\partial x_i}{\partial \eta_k} \right)_0 \tag{4.43}$$

и не зависят от η_i и t.

Пренебрегая членами высшего порядка, можно теперь записать функцию Лагранжа этой системы (предполагаемой консервативной) в виде

$$L = T - V = \sum_j \sum_k \frac{1}{2} (M_{jk} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k - V_{jk} \eta_j \eta_k); \tag{4.44}$$

уравнения движения будут записываться так:

$$\frac{d}{dt} \sum_k M_{jk} \dot{\eta}_k = - \sum_k V_{jk} \eta_k, \tag{4.45}$$

или

$$\sum_k M_{jk} \ddot{\eta}_k = - \sum_k V_{jk} \eta_k. \tag{4.46}$$

Отсюда видно, что имеется связь между движениями материальных точек. Сделаем теперь предположение, что движение системы периодическое, т. е. что

$$\eta_k = \eta_k^{(0)} e^{i\omega t}; \tag{4.47}$$

подстановка этих выражений для η_k в уравнения (4.46) дает

$$\sum_k (\omega^2 M_{jk} - V_{jk}) \eta_k^{(0)} = 0; \tag{4.48}$$

это есть система $3N$ уравнений, связывающих $3N$ величин $\eta_k^{(0)}$. Условием существования нетривиального решения этой системы является равенство

$$|\omega^2 M_{jk} - V_{jk}| = 0, \tag{4.49}$$

левая часть которого представляет собой детерминант; (j, k)-й элемент этого детерминанта равен $(\omega^2 M_{jk} - V_{jk})$.

Решение этого характеристического уравнения дает $3N$ значений ω^2, соответствующих $3N$ частотам главных колебаний системы. Эти $3N$ решений системы являются линейно независимыми, и общее движение системы описывается произвольной линейной комбинацией этих решений. Следует подчеркнуть, что отдельные виды движений, как правило, не связываются с индивидуальными материальными точками. В общем случае движение каждой материальной точки включает слагаемое с каждой из главных частот. Некоторые значения ω^2 могут быть отрицательны; тогда соответствующее чисто мнимое ω отвечает неустойчивому слагаемому движения. Такие апериодические слагаемые иногда рассматривают как виды колебаний в общем смысле, хотя их существование в действительности исключается начальным предположением, состоящим в том, что система движется около положения устойчивого равновесия.

Включение в функцию Лагранжа (4.44) членов более высокого порядка должно, строго говоря, устранить возможность разложения движения на независимые составляющие. Определение такого обобщенного ангармонического движения является сложной задачей. Однако обычно такие члены более высокого порядка рассматриваются как эффекты второго порядка, обусловленные взаимодействием между нормальными видами колебаний. Таким образом, общее движение системы может быть снова представлено как линейная комбинация $3N$ гармонических членов с произвольными в начале движения коэффициентами. Благодаря

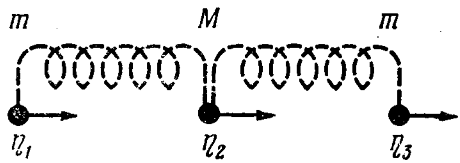

Рис. 2. Линейная модель трехатомной молекулы.

взаимодействию эти коэффициенты будут теперь изменяться со временем, и эти изменения будут определяться «ангармоническими» членами высшего порядка.

Общие особенности задачи определения главных колебаний хорошо объясняются на простой классической модели, которая дает полное представление о поведении линейной трехатомной молекулы. В этой модели материальная точка массы M упруго связана с двумя другими материальными точками, каждая из которых имеет массу m. В каждом случае упругая постоянная равна μ, и в положении равновесия точки находятся на одной прямой на одинаковых расстояниях одна от другой; при этом рассматривается движение только по прямой (см. рис. 2).

Если перемещения материальных точек от положения равновесия обозначить через η_1, η_2, η_3, то кинетическая энергия будет определяться формулой

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2+\dot{\eta}_3^2)+\frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2, \tag{4.50}$$

кроме того,

$$V=\frac{1}{2}\mu(\eta_3-\eta_2)^2+\frac{1}{2}\mu(\eta_2-\eta_1)^2; \tag{4.51}$$

следовательно,

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2+\dot{\eta}_3^2)+\frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2-\frac{1}{2}\mu(\eta_3-\eta_2)^2-\frac{1}{2}\mu(\eta_2-\eta_1)^2. \tag{4.52}$$

Таким образом, уравнения движения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\eta}_1 &= \mu(\eta_2-\eta_1),\\ M\ddot{\eta}_2 &= \mu(\eta_3-\eta_2)-\mu(\eta_2-\eta_1)=\mu(\eta_3+\eta_1-2\eta_2),\\ m\ddot{\eta}_3 &= -\mu(\eta_3-\eta_2). \end{aligned}\right\} \quad (4.53)$$

Предположение о том, что движение является простым гармоническим колебанием, дает

$$\left.\begin{aligned} (m\omega^2-\mu)\eta_1^0+\mu\eta_2^0=0,\\ (M\omega^2-2\mu)\eta_2^0+\mu(\eta_3^0+\eta_1^0)=0,\\ (m\omega^2-\mu)\eta_3^0+\mu\eta_2^0=0; \end{aligned}\right\} \quad (4.54)$$

поэтому характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} m\omega^2-\mu & \mu & 0\\ \mu & M\omega^2-2\mu & \mu\\ 0 & \mu & m\omega^2-\mu \end{vmatrix}=0. \quad (4.55)$$

Решение этого уравнения дает

$$\omega^2=0, \quad \omega^2=\frac{\mu}{m}, \quad \omega^2=\frac{\mu(2m+M)}{mM}; \quad (4.56)$$

таким образом, главные частоты равны

$$\omega_1=0, \quad \omega_2=\pm\sqrt{\mu/m}, \quad \omega_3=\pm\sqrt{\frac{\mu(2m+M)}{mM}}. \quad (4.57)$$

Здесь, как и в разложении Фурье, нет отрицательных частот. Принятое решение имело экспоненциальную форму. Комбинация пары таких решений с равными и противоположными значениями ω дает решение, содержащее только синус или косинус, причем две произвольные постоянные входят в него как произвольные значения амплитуды и фазы.

Решение $\omega_1=0$ соответствует физически возможному случаю, при котором три материальные точки одновременно совершают одинаковое поступательное движение. Решение $\omega_2=\sqrt{\mu/m}$ дает $\eta_2^0=0$ и $\eta_1^0=-\eta_3^0$, соответствуя движению, при котором средняя точка неподвижна, а крайние точки движутся в противофазах. Третье решение представляет собой движение, при котором крайние точки движутся в одинаковых фазах и в противофазе со средней точкой.

Как и в общем случае, можно будет определить явную форму преобразования $\eta'_i = \eta'_i(\eta_j)$ к новой системе координат, в которой каждый вид колебания будет связан только с одной координатой. Предположим пока, что физически важные сведения заключаются в знании главных частот, и не будем пытаться найти требуемое преобразование. Обычно это оказывается достаточным, хотя иногда бывает необходимо решать задачу полностью.

Изложенные соображения иллюстрируют возможности применения метода Лагранжа при рассмотрении в общем виде проблем, касающихся малых колебаний. Решение характеристического уравнения для системы, обладающей бо́льшим числом степеней свободы (как в случае кристаллической решетки), может быть очень трудным, но изложенный выше метод можно всегда использовать как исходный.

Электрические цепи

Интересно отметить, хотя с практической точки зрения это не представляет большой важности, что методом Лагранжа можно провести исследование электрических цепей. Рассмотрим функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j L_{ij}\dot{I}_i\dot{I}_j + \sum_i \dot{E}_i I_i - \frac{1}{2}\sum_i \frac{1}{C_i} I_i^2, \qquad (4.58)$$

где $L_{ij} = L_{ji} = \text{const}$.

Соответствующие уравнения движения будут

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_j L_{ij}\dot{I}_j\Big) = \dot{E}_i - I_i/C_i,$$

или

$$\dot{E}_i = I_i/C_i + \sum_j L_{ij}\ddot{I}_j. \qquad (4.59)$$

Если $L_{ij}\,(i \neq j)$ рассматривать как коэффициенты взаимоиндукции, $L_{ij}\,(i = j)$ — как коэффициенты самоиндукции, а C_i — как емкости, то эти уравнения являются соотношениями для электрической сети со взаимным реактивным импедансом, по которой течет система токов I_i, вызванных электродвижущими силами E_i. Ясно, что такие задачи можно сформулировать аналитически, применяя функцию Лагранжа, данную формулой (4.58), и взяв токи в ветвях сети в качестве обобщенных координат; используя диссипативную функцию Рэлея, можно включить в рассмотрение и омические сопротивления.

Аналогия между механической и электрической системами обычно проявляется в сходстве формы уравнений движения[1]). С этой точки зрения она имеет большое значение. Методы, разработанные для решения задач, относящихся специально к электрическим цепям, часто заимствуются и применяются к решению механических задач. Обратный процесс реже встречается на практике благодаря большим усилиям, которые в прошлом были направлены на исследование электрических систем. Сходство этих проблем в трактовке Лагранжа только отражает соответствие между уравнениями движения и само по себе вряд ли может привести к дальнейшим результатам. Польза метода Лагранжа, вообще говоря, состоит в том, что он представляет собой удобный метод составления уравнений движения, а это составление редко оказывается трудным при исследовании электрических цепей.

---

[1]) См., например, книгу Бриллюэна (Brillouin L., Wave propagation in periodic structures, Dover Publications Inc., 1953) или книгу Бриллюэна и Пароди (Brillouin L., Parodi M., Propagation des ondes dans les milieux périodiques, Paris, 1956; русский перевод: Бриллюэн Л., Пароди М., Распространение волн в периодических структурах, Издатинлит, 1960).

ГЛАВА V

Уравнения Гамильтона

Обобщенные импульсы

При рассмотрении приложений метода Лагранжа было видно, что существование циклических координат обусловливает постоянство величин, которые иногда, на основании предварительных сведений, можно отождествить с компонентами количества движения (компонентами импульсов). Однако надо особенно подчеркнуть, что выражение количества движения никогда не фигурирует в явном виде в связи с трактовкой Лагранжа. Основная черта метода Лагранжа состоит в том, что независимыми переменными являются время и обобщенные координаты. Производные по времени от обобщенных координат также явно *входят* в уравнения, но в конечном счете всегда будут зависимыми переменными. Это обстоятельство иллюстрируется использованием для представления движения системы понятия траектории в пространстве конфигураций.

В связи с использованием обобщенных координат можно ввести обобщенные количества движения. Однако их применение заставляет нас оставить теорию Лагранжа и приводит к новому способу описания движения, который связывается обычно с именем Гамильтона.

Компоненты обобщенного количества движения (*обобщенные импульсы*) определяются так:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{5.1}$$

следовательно, имеется один импульс для каждой обобщенной координаты, и говорят, что каждая комбинация q_i, p_i образует пару *сопряженных* переменных. Но пока нет оправдания для такого определения, если не считать того замечания, что в случае консервативной системы оно приводит к таким величинам, которые обычно являются компонентами количества движения и момента количества движения. С другой стороны, иное определение, а именно равенство $p_i = \partial T/\partial \dot{q}_i$, также привело бы к этому результату. Действительное оправдание выбранного нами определения заключается в общей логичности и плодотворности теории, которая основывается на данном определении.

В случае неконсервативной системы это общее определение может охватывать величины, которые обычно не считаются количествами движения (импульсами). Рассмотрим заряженную материальную точку, движущуюся в электромагнитном поле. Это пример неконсервативной системы, которая может быть описана методом Лагранжа. Как было указано в гл. III, функция Лагранжа имеет вид

$$L = T - e\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right). \tag{5.2}$$

Согласно определению (5.1), компоненты количества движения в декартовой системе координат получаются в виде

$$p_i = m\dot{x}_i + eA_i/c. \tag{5.3}$$

Эта формула содержит, кроме членов $m\dot{x}_i$, новый член eA_i/c, который обычно называют *электромагнитным импульсом.*

В переменных, определяемых формулами (5.1), уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} p_i; \tag{5.4}$$

они имеют некоторое сходство с первоначальной ньютоновской формой уравнений движения.

Циклические координаты

Определение обобщенных импульсов приводит к следующему результату: если

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{5.5}$$

то

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const}, \tag{5.6}$$

или

$$p_i = \text{const}. \tag{5.6'}$$

Таким образом, наличие циклических координат всегда обусловливает постоянство соответствующих импульсов. Сохранение количества движения и момента количества движения в консервативной системе является частным случаем этого общего правила. При рассмотрении теоремы Лармора было найдено, что результатом действия магнитного поля на одноатомную систему является общая прецессия системы относительно направления поля. Но можно сказать и иначе, а именно: обобщенный импульс, связанный с угловой координатой θ, сохраняется при наложении поля, причем увеличение электромагнитного импульса компенсируется уменьшением механической части импульса.

Фазовое пространство

Введение обобщенных импульсов полностью изменяет точку зрения. Как было установлено выше, метод Лагранжа рассматривает координаты системы как независимые величины, определяющие положение системы. Зависимость каждой из этих переменных от времени находится из решения системы дифференциальных уравнений второго порядка, известных под названием уравнений Лагранжа. Другой подход состоит в том, что в качестве независимых величин рассматриваются как координаты, так и импульсы. Тогда конечной целью любой задачи является нахождение всех этих величин в виде явных функций времени.

Преимущество этого метода не очевидно. Например, при решении какой-либо из задач, рассмотренных в гл. IV, не помогло бы, если бы вместо $\partial L/\partial \dot{q}_i$ был подставлен символ p_i. Но может быть развит метод для решения уравнений движения видоизмененной формы, получающихся при этом новом подходе, и он иногда имеет преимущество перед решением уравнений Лагранжа (см. гл. VII). Однако это, вероятно, встречается не часто, и мы должны допустить, что знания функции Лагранжа достаточно для того, чтобы предпринять решение большинства обычных задач механики.

Действительное преимущество нового метода состоит в том, что он дает соответствующую основу для развития квантовой механики и статистической механики. В этой книге будет идти речь только о квантовой механике, однако в последующем изложении многое будет являться кропотливой предварительной работой, необходимой для понимания методов, применяемых в обеих дисциплинах.

Пространство конфигураций было введено как описательная схема для изображения движения системы при использовании метода Лагранжа. Это понятие уже не будет достаточным, если в качестве независимых величин рассматривать компоненты обобщенных импульсов и пространственные координаты. Вместо этого можно считать, что история движения системы представляется траекторией в *фазовом пространстве* $6N$ измерений; каждая пространственная координата и каждая компонента импульса одной материальной точки дает по одному измерению в фазовом пространстве. Как было отмечено в связи с пространством конфигураций, геометрический язык является только иллюстративным; любые затруднения в его понимании можно сразу устранить, заменив слово «измерение» словом «переменное».

Много теоретических затруднений может встретиться при попытке согласовать понятия пространства конфигураций и фазового пространства. В этом вопросе можно достичь некоторой ясности, если учесть то обстоятельство, что траектория в пространстве конфигураций является существенно более произвольной, чем в фазовом пространстве. Определение вида функции Лагранжа (что эквивалентно установлению уравнений движения) является отправным пунктом в обоих случаях, но не устанавливает траекторию. Если, кроме функции Лагранжа, задать одну точку в фазовом пространстве, то вся траектория в нем определяется, так как, выбирая одну точку, в действительности задают шесть начальных значений для координат каждой материальной точки. С другой стороны, отдельная точка в пространстве конфигураций дает только три начальных значения для каждой материальной точки, и нужно указать другие данные, чтобы определить траекторию. Иначе говоря, если уравнения движения определены, то в пространстве конфигураций через любую точку проходит бесчисленное множество траекторий, а в фазовом пространстве возможна только одна траектория.

Функция Гамильтона

Функция Лагранжа в общем случае зависит от q_i, $\dot{q}_i$ и t. Поэтому ее полная производная по времени дается формулой

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{5.7}$$

Отсюда, применяя уравнения движения Лагранжа (3.13), имеем

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i+\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial t}=$$
$$=\sum_i \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial L}{\partial t}, \tag{5.8}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_i \dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L\right]=-\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{5.8'}$$

Если $\partial L/\partial t=0$, то

$$\left[\sum_i \dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L\right]=\text{const}, \tag{5.9}$$

или, с учетом определения (5.1),

$$\left[\sum_i p_i\dot{q}_i-L\right]=\text{const}. \tag{5.9'}$$

Введем теперь новую функцию H, называемую *функцией Гамильтона*, с помощью формулы

$$H=\sum_i p_i\dot{q}_i-L. \tag{5.10}$$

Эта функция, подобно L, имеет размерность энергии. Важность введения функции H частично следует из того обстоятельства, что, как было показано выше, эта функция сохраняет при движении постоянное значение, если t не входит явно в функцию Лагранжа. Далее окажется, что в большинстве физически интересных случаев H тождественно равняется полной энергии системы.

Возможность иной трактовки функции Гамильтона можно усмотреть из следующих рассуждений. Для некоторых целей лучше строить аналитическую механику, применяя переменные q_i, p_i и t, а не q_i, $\dot{q}_i$ и t. Подобное положение имеет место в термодинамике, где, желая перейти от энтропии S и объема V к температуре T и V в качестве независимых переменных, мы вводим новую энергетическую функцию F (свободную энергию по Гельмгольцу) вместо прежней функции U (внутренней энергии) по формуле

$$F = U - TS.$$

Затем F рассматривается как функция от T и V, тогда как U была функцией S и V. Это служит примером преобразования Лежандра. Определение (5.10) является другим примером того же преобразования, и, следовательно, функцию Гамильтона нужно в общем случае считать функцией координат, импульсов и времени, т. е.

$$H = H(q_i, p_i, t). \tag{5.11}$$

Из определения (5.10) и определения функции Лагранжа следует, что H является функцией от q_i, $\dot{q}_i$ и t. Однако ясно, что уравнения (5.1) надо разрешить относительно $\dot{q}_j$, выразив эти величины через q_i, p_i и t, и результат подставить в выражение (5.10) с тем, чтобы получить искомую функциональную зависимость.

Применяя функцию Гамильтона, можно вывести новые формы уравнений движения. Из формулы (5.11) следует, что

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \tag{5.12}$$

а из формулы (5.10)

$$dH = \sum_i \dot{q}_i \, dp_i + \sum_i p_i \, d\dot{q}_i - dL. \tag{5.13}$$

Однако $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$, поэтому

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

и, учитывая равенства (5.1), имеем

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \qquad (5.14)$$

Подставляя в формулу (5.13) выражение (5.14) и учитывая уравнения (5.4), находим

$$dH = -\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt =$$

$$= -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \qquad (5.15)$$

Сравнение коэффициентов в выражениях (5.12) и (5.15) теперь дает

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (5.16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (5.17)$$

Уравнения (5.16) называются *каноническими уравнениями движения*, или *уравнениями Гамильтона*. В принципе вывод этих уравнений представляется известным прогрессом, так как они являются дифференциальными уравнениями первого порядка, тогда как уравнения Лагранжа имеют второй порядок. На практике этот выигрыш оказывается в значительной степени иллюзорным. Простейшее условие для удобства интеграции какого-либо из этих уравнений состоит в том, чтобы некоторое q_i или некоторое p_i явно не входили в функцию H; тогда соответствующее сопряженное переменное сохраняет постоянное значение. Таким образом, решение уравнений приводит к задаче определения системы координат, в которой было бы достаточное число циклических переменных q_i и p_i. Это можно провести на основе некоторых правил (изложенных в гл. VII). К сожалению, однако, эти правила включают решение уравнения в частных производных первого порядка, которое может относиться к типу, представляющему большие трудности. В некоторых случаях это может быть сделано, но главная причина изучения уравнений Гамильтона, как ранее было указано, состоит в том, что они являются удобной основой для квантовой механики и статистической механики.

Физический смысл функции Гамильтона

У начинающего, впервые встречающегося с приложениями уравнений Гамильтона, часто создается впечатление, что функция Гамильтона является бесполезным синонимом для полной энергии рассматриваемой системы. Как ранее было отмечено, эта функция, подобно функции Лагранжа, имеет размерность энергии и в большинстве практически важных случаев она сводится к полной энергии; тем не менее она не при всех обстоятельствах будет тождественна этой величине. Исследуем теперь условия, которые должны выполняться в случае такого совпадения.

По определению консервативной системы $\partial V/\partial \dot{q}_i = 0$, следовательно,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\,; \qquad (5.18)$$

далее,

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2. \qquad (5.19)$$

Так как в общем случае

$$x_i = x_i(q_j,\ t), \qquad (5.20)$$

то

$$\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \qquad (5.21)$$

и

$$T = \sum_j \sum_k a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum b_j\dot{q}_j + c, \qquad (5.22)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_{jk} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \\ b_j &= \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial t}, \\ c &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

Отсюда следует, что T является однородной квадратичной формой относительно обобщенных скоростей, если t не входит явно в соотношения (5.20), определяющие преобразование, т. е. при этом условии

$$T = \sum_j \sum_k a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \tag{5.24}$$

и легко можно проверить[1]), что

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T; \tag{5.25}$$

в таком случае имеем

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = T + V = E \; (= \text{Полная энергия}). \tag{5.26}$$

Отметим, что нами были приняты следующие ограничения: а) система является консервативной, б) преобразование координат не зависит от времени, т. е. оси координат неподвижны в пространстве. Эти условия являются достаточными, но не необходимыми для равенства величин H и E. Другим случаем, когда это также справедливо, является движение заряженной частицы (мате-

---

[1]) Этот результат является частным случаем теоремы Эйлера, которая утверждает, что $\sum_i x_i (\partial f / \partial x_i) = nf$, если f есть однородная функция n-й степени относительно x_i.

риальной точки) в постоянном электромагнитном поле. Для такой системы ранее было найдено, что

$$L = T - e\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right), \tag{5.2}$$

$$p_i = m\dot{x}_i + eA_i/c; \tag{5.3}$$

следовательно,

$$\sum_i p_i\dot{q}_i = 2T + \frac{e}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} \tag{5.27}$$

и

$$H = T + e\varphi. \tag{5.28}$$

Последнюю величину можно также отождествить с полной энергией системы, рассматривая криволинейный интеграл от силы по траектории материальной точки, как это делалось в гл. II. В этом случае равенство величин H и E происходит частично благодаря, по-видимому, случайному сокращению членов, относящихся к векторному потенциалу. Можно далее усмотреть, что входящие в функцию Лагранжа члены потенциала, зависящие от скорости, образуют линейную однородную функцию от компонент скорости. Если эти члены обозначить через $L^{(v)}$, то из теоремы Эйлера следует, что

$$\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L^{(v)}}{\partial \dot{x}_i} - L^{(v)} = 0.$$

Если функция H представляет собой полную энергию, то в нее не должна входить величина $L^{(v)}$, так как силы, соответствующие зависящим от скорости слагаемым потенциала, не должны совершать работы при движении системы. Вообще здесь можно допустить, что величины H и E тождественны, хотя система координат движется относительно неподвижной системы отсчета. Нужно, конечно, признать главным достоинством функций Гамильтона то ее свойство, что она дает такой метод для определения энергии, при котором, как и во всей теории Лагранжа и Гамильтона, не требуется отдельного определения компонент силы.

Постоянство величины H во времени является особым вопросом. В силу равенства $H=H(p_i, q_i, t)$ и канонических уравнений (5.16) имеем

$$\frac{dH}{dt}=\sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (5.29)$$

Из совпадения этого результата со вторым уравнением (5.16) вытекает, что H находится в таком же соответствии с $-t$ как p_i с q_i, т. е. что H и $-t$ можно рассматривать как сопряженные переменные. Аналогия между равенством (5.29) и первым уравнением (5.16) приводит к другому соответствию, которое, однако, не подтверждается соображениями теории относительности (см. гл. X).

Соотношения (5.17) и (5.29) дают

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}. \qquad (5.30)$$

Условием постоянства H при движении является то, что t не входит явно в L. Это условие как необходимое, так и достаточное.

Наибольший интерес представляют системы, для которых полная энергия остается постоянной во время движения. Это предположение обычно влечет одновременное удовлетворение условий $E=H$ и $H=\text{const}$. Однако предположение о постоянстве энергии снова не является требованием, необходимым для выполнения этих условий, что показывает следующий пример.

Рассмотрим «спящий волчок» (т. е. волчок, вращающийся вокруг своей вертикальной оси симметрии и не подверженный трению). Это — пример системы, у которой величина E сохраняется. Пользуясь обозначениями из примера, разобранного в гл. IV, имеем

$$T=\frac{1}{2}c\dot{\varphi}^2, \quad V=mgh.$$

Следовательно,

$$L=T-V=\frac{1}{2}c\dot{\varphi}^2-mgh.$$

Переходя к новой координате α по формуле $\alpha = \varphi - \omega_0 t$, получаем

$$\dot{\alpha} = \dot{\varphi} - \omega_0, \quad L = \frac{1}{2} c (\dot{\alpha} + \omega_0)^2 - mgh$$

и

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = c (\dot{\alpha} + \omega_0);$$

поэтому

$$H = p_\alpha \dot{\alpha} - L = \frac{p_\alpha^2}{2c} - \omega_0 p_\alpha + mgh,$$

тогда как

$$E = T + V = \frac{p_\alpha^2}{2c} + mgh \neq H.$$

Этот случай несколько тривиален, но он служит для доказательства того, что величины H и E могут сохранять постоянное значение в течение движения, не будучи однако тождественными между собой. Здесь необычный характер величины H происходит из-за принятой системы координат, вращающейся относительно неподвижной системы отсчета, и эту величину нельзя отождествить с энергией ни относительно неподвижной, ни относительно подвижной систем координат.

Интегралы движения и симметрия

В предыдущем изложении были отмечены те условия, при которых функция Гамильтона и обобщенные импульсы остаются постоянными при движении системы. Согласно одной точке зрения, постоянство импульсов является следствием того обстоятельства, что координаты оказываются циклическими; главный результат здесь заключается в том, что соответствующие уравнения движения (Лагранжа или Гамильтона) можно сразу проинтегрировать. Согласно другой точке зрения, такое постоянство само по себе рассматривается как важное свойство системы. Последняя точка зрения широко распространена в наиболее важных приложениях данного метода к современной физике, и приемлемое решение задачи может состоять в определении всех интегралов движения. В общем смысле термин «интеграл движения» применяется к любой динамической переменной величине, а не только к функции Гамильтона и к импульсам. Метод определения этих интегралов в общем случае представит важную часть дальнейших рассмотрений (см. гл. VIII).

Если некоторая декартова координата является циклической, то функции Гамильтона и Лагранжа инвариантны по отношению к перемещению системы вдоль соответствующей оси. Наличие циклической угловой координаты аналогичным образом обусловливает инвариантность относительно вращения. Так как эти циклические координаты приводят к постоянству соответствующего импульса, то, следовательно, наличие интегралов движения связано со свойствами симметрии системы. В силу равенства (5.29) существует аналогичное соотношение симметрии между функцией Гамильтона и временно́й координатой. Вообще свойства сохранения и симметрии так связаны, что эти термины применяются почти как равнозначащие.

Диссипативные системы

В гл. III было показано, что диссипативные системы можно включить в измененную схему Лагранжа путем введения новой функции, диссипативной функции Рэлея, в дополнение к собственно функции Лагранжа.

Эта новая функция была определена так:

$$R=\frac{1}{2}\sum_j k_j\dot{x}_j^2, \tag{3.29}$$

а измененные уравнения движения в обобщенных координатах имели вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}+\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}=0. \tag{3.31}$$

Такое описание не приводит в теории Гамильтона к полезным окончательным заключениям, так как энергия системы не постоянна и никак не может быть определена с помощью функции Гамильтона. Есть другой способ, который в известной мере пригоден для преодоления этой трудности. Его основная идея состоит в расширении рассматриваемой диссипативной системы путем включения в рассмотрение наряду с основной системой другой, сходной, но гипотетической системы, в которой рассеиваемая энергия поглощается. Это чисто математический прием, но он дает составную систему, в которой полная энергия сохраняется. В качестве примера рассмотрим случай простого линейного гармонического осциллятора, обладающего затуханием; уравнение движения этого осциллятора имеет вид

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + \mu x = 0, \tag{5.31}$$

где k — коэффициент затухания.

Уравнением движения дополнительной системы (или «зеркального изображения») будет следующее:

$$m\ddot{x}' - k\dot{x}' + \mu x' = 0. \tag{5.32}$$

Рассмотрим функцию

$$L = m(\dot{x}\dot{x}') - \frac{1}{2}k(x'\dot{x} - \dot{x}'x) - \mu xx' - E_0, \tag{5.33}$$

где E_0 — начальная энергия, вычисленная по начальным условиям.

Функцию L можно рассматривать как функцию Лагранжа для составной системы, описываемой переменными x и x', так как уравнения (5.31) и (5.32) могут быть получены из функции Лагранжа (5.33) при помощи известных правил.

Соответствующими обобщенными импульсами будут

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}' - \frac{1}{2}kx', \\ p' &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = m\dot{x} + \frac{1}{2}kx, \end{aligned}\right\} \tag{5.34}$$

и функцией Гамильтона является

$$H = \sum_i p_i\dot{q}_i - L = m\dot{x}\dot{x}' + \mu xx' + E_0, \tag{5.35а}$$

или

$$H = \frac{1}{m}\left(p + \frac{1}{2}kx'\right)\left(p' - \frac{1}{2}kx\right) + \mu xx' + E_0. \tag{5.35б}$$

Так как $\partial H/\partial t = 0$, то, следовательно, $H = \mathrm{const}$. Это также видно из решений уравнений движения

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 e^{i\omega t} e^{-\alpha t}, \\ x' &= x'_0 e^{i\omega t} e^{+\alpha t}, \end{aligned}\right\} \tag{5.36}$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}, \qquad \alpha = \frac{k}{2m}.$$

Подстановка этих величин в выражение (5.35а) дает $H = E_0$; это подтверждает тождество функции Гамильтона и полной энергии. В случае систем отдельных точек польза этого математического способа не ясна, но его можно применить для рассмотрения непрерывных сред. Отметим, что при этом новом подходе сопряженные переменные p и p' потеряли всякий физический смысл.

ГЛАВА VI

Вариационные принципы

В физике были предложены разнообразные вариационные принципы. В некоторых случаях они были окутаны философским мистицизмом, что задержало оценку их значения. Главное значение таких принципов заключается в исключительной экономности их выражения. Здесь мы рассмотрим подробно только принцип Гамильтона и дадим краткое описание принципа наименьшего действия.

Сведения из вариационного исчисления

Предварительно рассмотрим чисто математическую задачу определения условий, при которых интегралы некоторого типа принимают стационарное (экстремальное) значение.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y,\ y',\ x)\, dx, \tag{6.1}$$

где $y' \equiv dy/dx$ и предполагается, что x является независимой, а y зависимой переменной, хотя вид зависимости y от x первоначально не устанавливается. Значения x и y на границах пути интегрирования заданы, и величина I зависит от точного выбора пути интегрирования между этими конечными точками. Задача состоит в определении условия, при котором I имеет стационарное значение.

Предположим, что кривая APB на рис. 3 будет путем, для которого I имеет стационарное значение, и рассмотрим соседнюю траекторию $AP'B$ с теми же конечными точками A и B. Соответствие между точками двух траекторий таково: $P \longrightarrow P'$, где $P = (x,\ y)$ и $P' = (x,\ y + \delta y)$; т. е. абсциссы x точек остаются неизменными. Это определяет так называемую δ-вариацию траектории. Подчиненная единственному ограничению

$$\delta y_1 = \delta y_2 = 0, \tag{6.2}$$

такая вариация является величиной произвольной, но малой. Она может быть выражена иначе так:

$$\delta y = \eta \delta \alpha, \tag{6.3}$$

где α — параметр, общий для всех точек траектории, а η —

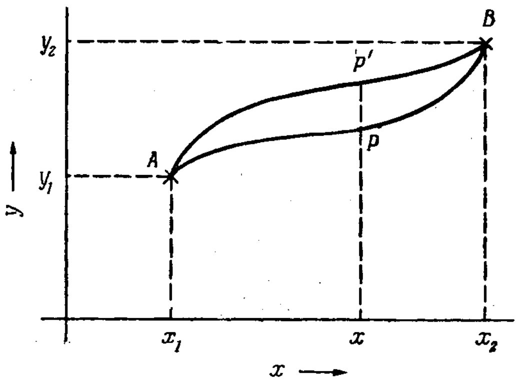

Рис. 3. Пример δ-вариации.

любая функция от x, удовлетворяющая условию

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \tag{6.2'}$$

Соответствующая вариация для y' равна

$$\delta y' = \eta' \delta \alpha. \tag{6.4}$$

Так как эта вариация по условию мала, то интеграл по измененной траектории можно получить путем рассмотрения членов только первого порядка в разложении функции F в ряд Тейлора:

$$I' = \int_{x_1}^{x_2} \left[F(y, y', x) + \frac{\partial F}{\partial y} \eta \delta \alpha + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \delta \alpha \right] dx,$$

откуда

$$\delta I = \delta\alpha \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' \right] dx; \tag{6.5}$$

интегрируя по частям и используя условия (6.2′), получаем

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\, dx.$$

Следовательно,

$$\delta I = \delta\alpha \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right] \eta\, dx. \tag{6.6}$$

Условие стационарности I требует, чтобы вариация δI равнялась нулю. Так как функция η произвольна, то это в свою очередь означает, что подинтегральное выражение (6.6) должно обращаться в нуль, т. е. что

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0. \tag{6.7}$$

Этот результат можно легко обобщить на случай, когда имеется n зависимых переменных y_i. При этом получается n условий вида

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0. \tag{6.8}$$

Если n зависимых переменных y_i являются функциями m независимых переменных x_r, то эти n условий будут таковы:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \sum_{r=1}^{m} \frac{d}{dx_r}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{i,r}}\right) = 0, \tag{6.9}$$

где $y_{i,r} \equiv dy_i/dx_r$. Математическая формулировка принципа в этом случае принимает форму

$$\delta \int \ldots \int F\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m = 0. \tag{6.10}$$

Возможно также дальнейшее обобщение этого результата при предположении, что функция F зависит и от производных высшего порядка функций y_i, но здесь это не будет рассматриваться.

Приведенные результаты можно применять к широкому кругу физических задач. В большинстве случаев стационарное значение интеграла оказывается минимумом, хотя иногда оно является и максимумом. Самое раннее применение принципа было дано Бернулли при определении траектории, для которой время движения под действием силы тяжести материальной точки между двумя точками, расположенными не на одной вертикали, является минимальным.

При выводе, данном выше, было показано, что условия (6.7)—(6.9) являются следствиями предположения, что соответствующий интеграл имеет нулевую вариацию. Эти условия являются, таким образом, необходимыми; в дальнейшем можно будет показать, что они и достаточны; поэтому если эти условия выполняются, то вариация соответствующего интеграла должна равняться нулю.

Принцип Гамильтона

Выше было показано, что уравнения движения системы, описываемой функцией Лагранжа, имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0. \tag{3.13}$$

Как отмечено в конце предыдущего раздела, это значит, что

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\,dt=0. \tag{6.11}$$

Это — формулировка *принципа Гамильтона*. В нашем изложении этот результат является в конечном счете следствием законов Ньютона. Другая точка зрения состоит в том, чтобы рассматривать его как исходный принцип, и в этом случае уравнения движения Лагранжа и остальные законы механики выводятся из него.

Надо было бы особенно подчеркнуть, что принцип Гамильтона не добавляет новых сведений к тем, которыми мы уже располагаем. Он дает только более изящную и краткую формулировку законов движения, чем другие постулаты. Его преимущество заключается в том, что он может быть применен и к немеханическим системам, к которым, например, законы Ньютона не приложимы. Эта бóльшая общность принципа Гамильтона, которая является дополнительной причиной для принятия его в качестве основного постулата, будет исследована более подробно в дальнейших главах.

Интеграл

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L\,dt, \tag{6.12}$$

где интегрирование происходит по действительной траектории системы, известен как *главная функция Гамильтона*, или *действие по Гамильтону*. Для вычисления этой функции нужно знать как траекторию, так и функцию Лагранжа. Вариационный принцип дает возможность найти траекторию, но, конечно, необходимо постулировать аналитическую форму функции L. В этом отношении принцип Гамильтона является несколько искусственным. Его польза при новых обстоятельствах обусловлена тем, что функции Лагранжа часто являются совершенно простыми функциями возможных переменных.

Видоизмененный принцип Гамильтона

В гл. V было показано, что уравнения движения Лагранжа можно заменить системой дифференциальных уравнений первого порядка, а именно каноническими уравнениями Гамильтона. Эта эквивалентность подтверждается тем обстоятельством, что последние можно также вывести из принципа Гамильтона посредством небольшого изменения доказательства.

Из равенства (5.10) имеем

$$L=\sum_i p_i\dot{q}_i-H,$$

где

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{5.1}$$

Таким образом, видоизмененный вариант принципа Гамильтона утверждает, что

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Big[\sum_i p_i \dot{q}_i - H \Big] dt = 0. \tag{6.13}$$

В равенстве (6.11) при варьировании траектории принимались во внимание вариации q_i при постоянном t, причем вариации $\dot{q}_i$ зависели от вариаций q_i. В настоящем случае в соответствии с общим предположением относительно использования функции Гамильтона δ-вариация содержит независимые вариации переменных как q_i, так и p_i при постоянном t. Эти вариации можно выразить, как и прежде, через параметр α, общий для всех точек пути интегрирования (последний теперь является траекторией в фазовом пространстве, а не в пространстве конфигураций), т. е.

$$\delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\,\delta\alpha = \eta_i \delta\alpha, \qquad \delta p_i = \frac{\partial p_i}{\partial \alpha}\,\delta\alpha = \zeta_i \delta\alpha, \tag{6.14}$$

где η_i и ζ_i являются произвольными величинами, удовлетворяющими условиям

$$\eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = \zeta_i(t_1) = \zeta_i(t_2) = 0. \tag{6.14'}$$

Таким образом, вариация интеграла дается в виде

$$\delta S = \delta\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \Big[\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \dot{q}_i + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big] dt; \tag{6.15}$$

интегрируя по частям и используя соотношения (6.14) и (6.14'), получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right) dt = -\int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \eta_i\, dt. \tag{6.16}$$

Из равенств (6.15) и (6.16) получаем

$$\delta S = \delta\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \Big[\Big(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\Big)\zeta_i - \Big(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\Big)\eta_i \Big] dt. \tag{6.17}$$

Все величины η_i и ζ_i являются независимыми произвольными функциями, поэтому из условия равенства нулю вариации S вытекает, что коэффициенты при этих функциях равны нулю, т. е.

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{6.18}$$

Эти условия совпадают с уравнениями (5.16), т. е. с каноническими уравнениями движения.

Неголономные системы

В предыдущих выводах допускалось, что все обобщенные координаты q_i были независимы. Для этого необходимо предположить, что каждая связь, наложенная на систему, голономна и что координаты были выбраны в соответствии с числом степеней свободы и связи были тем самым учтены.

Уравнения движения для ограниченного класса неголономных систем можно также получить из принципа Гамильтона, используя *метод неопределенных множителей Лагранжа*. Этот класс включает системы, для которых связи заданы в виде неинтегрируемых дифференциальных соотношений, содержащих пространственные и временну́ю координаты.

Рассмотрим такую систему, в которой связи выражаются m уравнениями вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ri}\, dq_i + b_{rt}\, dt = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m), \tag{6.19}$$

где число обобщенных координат равно n, а число степеней свободы $n - m$. В общем случае a_{ri} и b_{rt} являются функциями от t и q_i.

Предполагается, что существует функция Лагранжа L, зависящая от времени t, всех n координат q_i и их производных по времени и такая, что при движении системы выполняется соотношение

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0.$$

Это допущение о справедливости принципа Гамильтона может быть, как и прежде, записано в развернутом виде

$$\delta\alpha \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \right] \eta_i \, dt = 0. \tag{6.20}$$

До сих пор мы не обращали внимания на связи. Их влияние заключается в том, что не все η_i являются независимыми; они в действительности стеснены условиями (6.19). Для того чтобы сделать дальнейшие выводы, необходимо свести число переменных к числу степеней свободы.

Вариации q_i, рассматриваемые в выражении (6.20), т. е. δ-вариации, должны вычисляться при постоянном t, поэтому ограничения, наложенные на эти вариации и обусловленные связями, даются m условиями

$$\sum_i a_{ri}\delta q_i = \sum_i a_{ri}\eta_i\delta\alpha = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m). \tag{6.19'}$$

Эти условия можно сочетать с равенством (6.20), умножая каждое из них на некоторую (пока неопределенную) величину λ_r, интегрируя по t в интервале $t_1 t_2$ и прибавляя результат к равенству (6.20). Допускается, что λ_r являются функциями от t, но не от других переменных. Равенства (6.19') представляют собой тождества; следовательно, каждый из новых интегралов в отдельности равен нулю и мы получаем

$$\delta\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \sum_{r=1}^{m} \lambda_r a_{ri} \right] \eta_i \, dt = 0. \tag{6.21}$$

До сих пор величины λ_r не определены. Поэтому их можно выбрать так, чтобы

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \sum_{r=1}^{m} \lambda_r a_{ri} = 0 \tag{6.22}$$

для $i = 1, 2, \ldots, m$.

Этот выбор приводит равенство (6.21) к виду

$$\delta\alpha\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=m+1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)+\sum_{r=1}^{m}\lambda_r a_{ri}\right]\eta_i\,dt=0, \qquad (6.21')$$

где теперь все η_i являются независимыми, так как имеется как раз $n-m$ степеней свободы. Поэтому коэффициенты при η_i могут быть приравнены к нулю, что дает результат, совпадающий с уравнениями (6.22), но примененный к $i=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n$. Комбинируя эти результаты, получаем, что уравнения (6.22) справедливы для всех q_i.

В этом методе действие связей учитывается в совершенно симметричной форме, которая не делает различия между координатами. Верно, что m уравнений были получены на основании одного соображения, а остальные — на основании другого, но результаты одинаковы по форме и, таким образом, между разными переменными q_i нет практического различия. Окончательное определение движения состоит в нахождении $n+m$ неизвестных величин q_i и λ_r как функций времени. Для этой цели используются n уравнений вида (6.22) и m уравнений связей (6.19). Обычно величины λ_r не представляют интереса; достаточно только исключить их из уравнений и определить q_i.

Определение λ_r полезно в том исключительном случае, когда требуется найти величины реакций связей.

Если убрать связи и заменить их обобщенными компонентами реакций связей Q_i, то движение системы будет описываться теми же n координатами q_i, теперь независимыми и удовлетворяющими n уравнениям движения

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=-Q_i. \qquad (6.23)$$

Если дальше поставить условие, чтобы это движение совпадало с движением при наличии связей, то уравнения (6.23) должны совпадать с уравнениями (6.22), т. е.

$$Q_i=\sum_{r=1}^{m}\lambda_r a_{ri}. \qquad (6.24)$$

Чтобы вызвать заданное движение, силы должны быть одинаковыми, независимо от того, как они называются — «активными силами» или «реакциями связей». Отсюда следует, что уравнения (6.24) дают величину реакций связей.

Надо также упомянуть, что метод неопределенных множителей Лагранжа в сочетании с принципом Даламбера может быть использован для вывода видоизмененных уравнений движения в ньютоновской форме.

Пример

Результаты, изложенные в предыдущем разделе, можно проиллюстрировать задачей об определении движения плоского однородного диска, который катится без скольжения по горизонтальной плоскости и плоскость которого остается все время вертикальной. Именно условие качения без скольжения требует наложения неголономных связей.

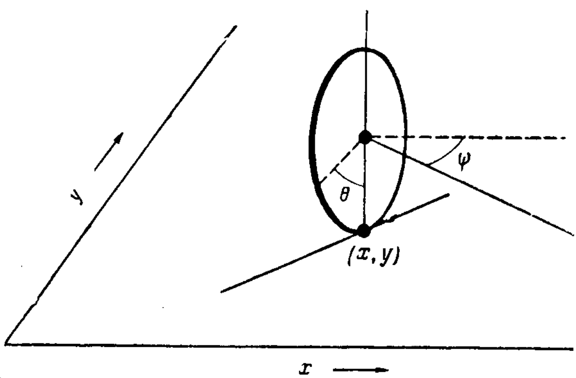

Рис. 4. Качение диска по плоскости.

Остальные связи (твердое тело, вертикальная плоскость диска и горизонтальная плоскость качения) можно автоматически учесть надлежащим выбором системы координат.

Если пренебречь неголономными связями, то система может быть описана заданием четырех независимых координат: декартовых координат x, y точки соприкосновения диска с горизонтальной плоскостью, угла ψ между осью диска и осью x и угла θ, представляющего собой угол между выбранным радиусом диска и вертикальным направлением (см. рис. 4). Функция Лагранжа, описывающая систему, имеет вид

$$L = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \dot{\psi}^2, \tag{6.25}$$

где M — масса диска, A и C — его моменты инерции соответственно относительно собственной оси и перпендикулярного к ней направления.

Неголономная связь может быть теперь представлена соотношениями

$$dx - a \sin\psi \, d\theta = 0, \qquad dy + a \cos\psi \, d\theta = 0, \tag{6.26}$$

где a — радиус диска.

Принцип Гамильтона

$$\delta \int L \, dt = 0$$

можно, как и прежде, записать в развернутом виде

$$\delta\alpha \int \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \eta_i \, dt = 0,$$

или

$$\delta\alpha \int [M\ddot{x}\eta_x + M\ddot{y}\eta_y + A\ddot{\theta}\eta_\theta + C\ddot{\psi}\eta_\psi] \, dt = 0; \tag{6.27}$$

учитывая связи путем использования неопределенных множителей, получаем отсюда

$$\delta\alpha \int [(M\ddot{x} + \lambda_1)\eta_x + (M\ddot{y} + \lambda_2)\eta_y +$$
$$+ (A\ddot{\theta} - \lambda_1 a \sin\psi + \lambda_2 a \cos\psi)\eta_\theta + C\ddot{\psi}\eta_\psi] \, dt = 0. \tag{6.28}$$

Два члена в подинтегральном выражении обращаются в нуль за счет надлежащего выбора λ_r. Теперь под знаком интеграла остаются только две из произвольных величин η; их можно рассматривать как независимые переменные, так как имеется как раз две степени свободы. Таким образом, из равенства нулю интеграла следует, что коэффициенты при этих величинах должны равняться нулю. Окончательный результат может быть записан так:

$$\left.\begin{aligned} &M\ddot{x}+\lambda_1=0,\\ &M\ddot{y}+\lambda_2=0,\\ &A\ddot{\theta}-\lambda_1 a\sin\psi+\lambda_2 a\cos\psi=0,\\ &C\ddot{\psi}=0. \end{aligned}\right\} \tag{6.29}$$

Теперь надо определить шесть величин: x, y, θ, ψ, λ_1, λ_2, для чего мы имеем шесть уравнений (6.26) и (6.29). Окончательное решение требует задания начальных значений любых двух переменных x, y, θ, ψ вместе с их производными по времени. Силы трения, обусловленные связями, можно найти из значений λ_1 и λ_2.

Этот пример не является вполне общим, так как члены с dt не входят в уравнения (6.26). Но это не вносит существенного изменения в способ решения. Однако надо помнить, что если такие члены имеются, то коэффициенты при них не входят в уравнение (6.28).

Принцип наименьшего действия

Введем теперь новый и более общий тип вариации траектории системы. Назовем ее Δ-вариацией и будем предполагать, что как время, так и пространственные координаты меняются. На концах траектории пространственные координаты оставляются неизменными, но могут рассматриваться, однако, для измененного значения времени. Теперь точка P на неизмененной траектории переходит в точку P' на измененной траектории при следующем соответствии координат:

$$q_i \to q_i' = q_i + \Delta q_i = q_i + \delta q_i + \dot{q}_i \Delta t, \tag{6.30}$$

где δ-вариация имеет тот же смысл, что прежде, и $\Delta q_i = 0$ в конечных точках траектории (см. рис. 5).

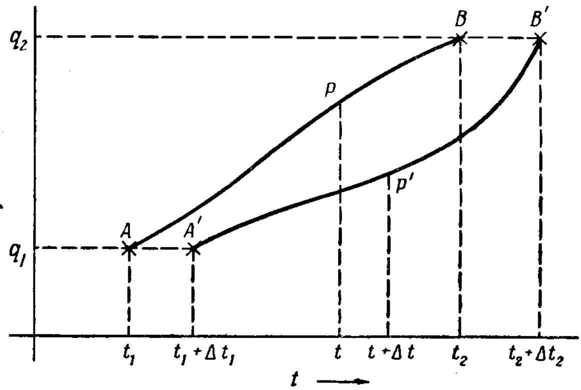

Рис. 5. Пример Δ-вариации.

Для любой функции $f = f(q_i, \dot{q}_i, t)$ Δ-вариация дается формулой

$$\Delta f = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \Delta \dot{q}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} (\delta q_i + \dot{q}_i \Delta t) + \\ + \sum_i \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} (\delta \dot{q}_i + \ddot{q}_i \Delta t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = \delta f + \frac{df}{dt} \Delta t; \qquad (6.31)$$

таким образом,

$$\Delta \equiv \delta + \Delta t \frac{d}{dt}\,. \qquad (6.31')$$

Рассмотрим Δ-вариацию главной функции Гамильтона

$$\Delta S = \Delta \int_1^2 L\,dt = \delta \int_1^2 L\,dt + [L\Delta t]_1^2 = \\ = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt + [L\Delta t]_1^2. \qquad (6.32)$$

Здесь $\delta \int_1^2 L\,dt$ не обращается в нуль, так как $\delta q_i \neq 0$ в конечных точках траектории. Из уравнений движения

Лагранжа и из соотношения $\delta\dot{q}_i = d(\delta q_i)/dt$ имеем

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) =$$
$$= \frac{d}{dt}(p_i\delta q_i) = \frac{d}{dt}(p_i\Delta q_i) - \frac{d}{dt}(p_i\dot{q}_i\Delta t). \tag{6.33}$$

Подставляя результат (6.33) в выражение (6.32) и учитывая обращение в нуль Δq_i в конечных точках, получаем

$$\Delta\int_1^2 L\,dt = \left[\left(L - \sum_i p_i\dot{q}_i\right)\Delta t\right]_1^2 = -[H\Delta t]_1^2. \tag{6.34}$$

Если ограничиться рассмотрением системы, для которой $\partial H/\partial t = 0$, и брать только такие вариации, для которых H остается постоянной, то

$$[H\Delta t]_1^2 = \Delta\int_1^2 H\,dt. \tag{6.35}$$

Подстановка этого результата в формулу (6.34) окончательно дает

$$\Delta\int_1^2 \sum_i p_i\dot{q}_i\,dt = 0. \tag{6.36}$$

Это есть *принцип наименьшего действия*. Величина

$$W = \int \sum_i p_i\dot{q}_i\,dt$$

обычно известна под названием *характеристической функции Гамильтона*. Вариации, входящие в выражение принципа, представляются формулами (6.30) с дополнительным ограничением, состоящим в том, чтобы функция Гамильтона не менялась во время движения и принимала одинаковое значение как на неизмененной, так и на измененной траектории. Этот принцип не используется в механике столь непосредственно, как принцип Гамильтона, хотя к нему и обращаются при гамильтоновском выводе уравнения Гамильтона — Якоби (см. гл. VII). Он интересен тем, что по существу является тождественным с исходным вариационным принципом Мопертюи, а также с более ранним принципом Лейбница, в котором рассматривается интеграл от «живой силы» системы. Следует указать, что существует известная путаница в терминологии, так как некоторые авторы применяют термин «принцип наименьшего действия» к тому, что в этой книге было названо «принципом Гамильтона».

Подробное исследование многих других вариационных принципов, высказанных в различное время, читатель может найти, например, в книге Ланцоша, указанной в списке литературы.

ГЛАВА VII

Теория преобразований

При выводе уравнений Лагранжа и Гамильтона значительное внимание было уделено тому, чтобы сделать одинаковой *форму* всех общих соотношений для всех систем координат. Любое преобразование координат, представленное уравнениями

$$q_i' = q_i'(q_1, q_2, \ldots q_n, t), \tag{7.1}$$

приводит к уравнениям того же самого вида, что и первоначальные уравнения, содержащие q_i. В более строгой формулировке это утверждение гласит, что «данные уравнения ковариантны относительно точечного преобразования». Здесь следует отметить предположение, что особые преобразования исключаются из рассмотрения.

В схеме Гамильтона в дополнение к пространственным координатам в качестве переменных были введены величины импульсов, определяемые формулами

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{5.1}$$

С первого взгляда кажется, что эти переменные являются понятием, совершенно отличным от координат, определяющих положения точек в пространстве. Однако исследование канонических уравнений Гамильтона показывает, что между этими семействами переменных существует некоторое подобие; в самом деле, если в уравнениях Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{5.16}$$

величины q_i и p_i заменить на $-p_i'$ и q_i' соответственно, то эти уравнения примут вид

$$\dot{q}_i' = \frac{\partial H}{\partial p_i'}, \quad \dot{p}_i' = -\frac{\partial H}{\partial q_i'}. \tag{7.2}$$

Уравнения (7.2) по форме не отличаются от уравнений (5.16), и на основе только уравнений (7.2) было бы естественно заключить, что q_i' представляют собой координаты положения, а p_i' — компоненты импульсов. На самом деле, в соответствии с первоначальными определениями этих величин известно, что это не так.

Этот результат является кажущимся парадоксом, который можно разрешить, только представив себе, что q_i и p_i считаются равноправными переменными. Первоначальный постулат теории Гамильтона о том, что все q_i и p_i должны трактоваться как независимые переменные, нужно дополнить тем требованием, что ни одно из этих семейств переменных нельзя считать более существенным, чем другое.

Естественным следствием этого рассуждения является исследование преобразований вида

$$\left.\begin{aligned} q_i' &= q_i'(q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n, t), \\ p_i' &= p_i'(q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n, t), \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

которые можно рассматривать как обобщения преобразований (7.1).

Рассматривая общую инвариантность уравнений, потребуем, чтобы оба семейства новых переменных были связаны соотношениями

$$\dot{p}_i' = -\frac{\partial H'}{\partial q_i'}, \quad \dot{q}_i' = \frac{\partial H'}{\partial p_i'},$$

где H' определяется как

$$H' = \sum_i p_i'\dot{q}_i' - L',$$

а L' — функция, которая, если к ней применить принцип Гамильтона

$$\delta \int L'\,dt = 0,$$

дает соответствующие уравнения движения в новых координатах q_i'.

Преобразованиям, удовлетворяющим этим условиям, дано название *канонических преобразований*, или *преобра-*

зований прикосновения[1]). Можно показать, что существуют преобразования вида (7.3), не удовлетворяющие таким требованиям, но они не представляют практического интереса.

При рассмотрении этого более общего вида преобразований наша точка зрения несколько отличается от той, которой мы придерживались в гл. III. Там при переходе к обобщенным координатам предполагалось, что новая форма функции L была получена из старой путем непосредственной подстановки формул преобразования. Это является частным случаем (называемым *точечным преобразованием*) преобразования более общего вида, рассматриваемого нами сейчас. Теперь уже нет прямого соотношения между двумя формами функции Лагранжа.

Из всех этих рассуждений следует, что видоизмененная форма принципа Гамильтона сохраняется как в первоначальной, так и в преобразованной системе, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \Big[\sum_i p_i\dot{q}_i - H \Big]\, dt = 0, \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} \Big[\sum_i p_i'\dot{q}_i' - H' \Big]\, dt = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.4)$$

Ранее не отмеченное свойство вариаций состоит в том, что условие $\delta \int f\, dt = 0$ в общем случае удовлетворяется при $f = dF/dt$, где F — некоторая произвольная функция. Это замечание не относится к предыдущим рассуждениям, где подинтегральное выражение было известной функцией. Здесь, однако, имеет место другое положение, так как из рассмотрения уравнений (7.4) мы получаем

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Big[\Big(\sum_i p_i\dot{q}_i - H \Big) - \Big(\sum_i p_i'\dot{q}_i' - H' \Big) \Big]\, dt = 0, \qquad (7.5)$$

и подинтегральное выражение является здесь до некоторой

[1]) Заметим, что эти два термина не всегда являются синонимами, но здесь они будут применяться в качестве равнозначных.

степени неизвестной величиной. Отсюда следует, что

$$\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H\right) - \left(\sum_i p_i' \dot{q}_i' - H'\right) = \frac{dF}{dt}. \qquad (7.6)$$

Величина, стоящая в первой скобке равенства (7.6), рассматривается как функция q_i, p_i и t, а во второй — как функция q_i', p_i' и t. Таким образом, функция F в общем случае зависит от $4n+1$ переменных q_i, p_i, q_i', p_i' и t. Однако эти переменные удовлетворяют уравнениям преобразования (7.3), и число независимых переменных, входящих в функцию F, уменьшается до $2n+1$ переменных, а именно t и какие-либо $2n$ переменных из q_i, p_i, q_i' и p_i'.

Рассмотрим частный случай

$$F = F_1(q_1, \ldots, q_n, q_1', \ldots, q_n', t); \qquad (7.7)$$

тогда

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i'} \dot{q}_i' + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \qquad (7.8)$$

Подстановка результата (7.8) в соотношение (7.6) дает

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\right) dq_i - \sum_i \left(p_i' + \frac{\partial F_1}{\partial q_i'}\right) dq_i' + \left(H' - H - \frac{\partial F_1}{\partial t}\right) dt = 0, \qquad (7.9)$$

и так как q_i, q_i' и t можно рассматривать как независимые переменные, то

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} F_1(q_i, q_i', t), \qquad (7.10)$$

$$p_i' = -\frac{\partial}{\partial q_i'} F_1(q_i, q_i', t), \qquad (7.11)$$

$$H' - H = \frac{\partial}{\partial t} F_1(q_i, q_i', t). \qquad (7.12)$$

Уравнения (7.10) можно в принципе решить и найти

$$q_i' = q_i'(q_i, p_i, t). \qquad (7.10')$$

Тогда подстановка этих выражений в уравнения (7.11) дает

$$p_i' = p_i'(q_i, p_i, t); \qquad (7.11')$$

это, конечно, уравнения преобразования вида (7.3). Отсюда следует, таким образом, что формулы преобразования можно вывести из известной функции F. На этом основании F называют *производящей функцией* такого преобразования.

Отметим как следствие равенства (7.12), что преобразованная функция Гамильтона будет совпадать с первоначальной, если производящая функция не содержит t явно.

Сначала может показаться, что каноническое преобразование устанавливается способом, равносильным выбору произвольной постоянной интегрирования. Более подробное исследование показывает, что это утверждение неверно. Если все q_i, p_i, q_i' и p_i' указаны предварительно, то произвола в выборе F нет; это есть вполне определенная функция, зависящая от уравнений преобразования; то обстоятельство, что эти последние можно вывести из нее, не должно вызывать удивления. Отсюда возникает неверное толкование, так как легче исходить из заданной функции F и вывести уравнения преобразования, чем осуществить обратный процесс.

Еще раз подчеркнем, что производящую функцию можно выразить через t и какие-либо $2n$ из $4n$ переменных q_i, p_i, q_i', p_i'. Любой другой случай, отличный от случая, представленного функцией (7.7), можно осуществить, выполняя преобразование Лежандра над данной функцией. Рассмотрим, например,

$$F_2 = F_1(q_1, \ldots, q_n, q_1', \ldots, q_n', t) + \sum_i p_i' q_i'. \tag{7.13}$$

Согласно общим свойствам преобразований Лежандра, здесь надо предположить, что система независимых переменных (q_i, q_i', t) заменена системой независимых переменных (q_i, p_i', t). Это означает, что

$$F_2 = F_2(q_1, \ldots, q_n, p_1', \ldots, p_n', t). \tag{7.13'}$$

Рассмотрим такое же преобразование, как и прежде,

$$\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H\right) - \left(\sum_i p_i' \dot{q}_i' - H'\right) = \frac{dF_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left(F_2 - \sum_i q_i' p_i'\right);$$

следовательно,

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\right) dq_i + \sum_i \left(q'_i - \frac{\partial F_2}{\partial p'_i}\right) dp'_i + \\ + \left(H' - H - \frac{\partial F_2}{\partial t}\right) dt = 0; \qquad (7.14)$$

отсюда имеем

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \qquad (7.15)$$

$$q'_i = \frac{\partial F_2}{\partial p'_i}, \qquad (7.16)$$

$$H' - H = \frac{\partial F_2}{\partial t}. \qquad (7.17)$$

Так как $\partial F_1/\partial t = \partial F_2/\partial t$ [1]), то соотношение (7.17) тождественно соотношению (7.12), как этого и следовало ожидать, потому что они относятся к одному и тому же преобразованию. Равенства (7.15) тождественны равенствам (7.10), так как $\partial F_1/\partial q_i = \partial F_2/\partial q_i$. На первый взгляд кажется, что уравнения (7.16) отличаются от уравнений (7.11), но на самом деле они являются результатом некоторого преобразования последних.

Соотношения, относящиеся к двум другим главным видам производящей функции, получаются подобным же образом. Они сводятся к следующим:

$$F_3(p_i,\ q'_i,\ t) = F_1(q_i,\ q'_i,\ t) - \sum_i q_i p_i, \qquad (7.18)$$

откуда получаем

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial F_3}{\partial q'_i}, \quad H' - H = \frac{\partial F_3}{\partial t}; \qquad (7.19)$$

и

$$F_4(p_i,\ p'_i,\ t) = F_1(q_i,\ q'_i,\ t) + \sum_i q'_i p'_i - \sum_i q_i p_i, \qquad (7.20)$$

что дает

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad q'_i = \frac{\partial F_4}{\partial p'_i}, \quad H' - H = \frac{\partial F_4}{\partial t}. \qquad (7.21)$$

---

[1]) Заметим, что $\partial q_i/\partial t$ и другие подобные производные равны нулю, так как все рассматриваемые переменные, по определению, независимы.

Примеры канонических преобразований

а. $F = \sum_i q_i p_i'$.

Эта функция, очевидно, является частным случаем производящей функции F_2; следовательно, применяя равенства (7.15) – (7.17), имеем

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i', \quad q_i' = \frac{\partial F_2}{\partial p_i'} = q_i, \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H,$$

т. е. порождаемое этой функцией преобразование является тривиальным тождественным преобразованием.

Функция $F = -\sum_i q_i p_i'$ порождает преобразование $q_i' = -q_i$, $p_i' = -p_i$, $H' = H$. Этот результат иллюстрирует то обстоятельство, что пространственная инверсия является частным видом канонического преобразования. Для простой инверсии по времени то же самое утверждение оказывается неверным.

б. $F_1 = \sum_i q_i q_i'$.

Из равенств (7.10) – (7.12) получаем

$$p_i = q_i', \quad p_i' = -q_i, \quad H = H';$$

такое преобразование было рассмотрено в начале этой главы.

в. $F_2 = \sum_j f_j(q_i) p_j'$ (f_j – произвольная функция).

Следовательно,

$$p_i = \sum_j p_j' \frac{\partial f_j}{\partial q_i}, \quad q_i' = f_i(q_k), \quad H' = H.$$

Это показывает, какой вид должна иметь производящая функция для того, чтобы порожденное ею преобразование было точечным преобразованием.

Разобранные примеры иллюстрируют только процесс, с помощью которого выводятся уравнения преобразования при задании производящей функции определенной формы. Они не претендуют на то, чтобы быть особо полезными сами по себе. В самом деле, на этом этапе неизбежно возникает вопрос «зачем нужно изучать канонические преобразования?». Цель этой книги состоит в том, чтобы дать известное представление о некотором классе методов для составления уравнений задач механики. Если задача уже представлена в виде канонических уравнений Гамильтона, то единственной целью канонического преобразования может быть приведение этих уравнений к виду, более удобному для решения. Возможность такого упрощения может быть разъяснена на частном примере.

Предположим, что требуется определить движение материальной точки, для которой функция Гамильтона дается в форме

$$H=\frac{1}{2}\left(\mu q^2+\frac{p^2}{m}\right). \tag{7.22}$$

Нетрудно, конечно, установить, что эта функция соответствует движению материальной точки, совершающей прямолинейное простое гармоническое колебание; но допустим, что мы этого не знаем.

Постулирование выражения (7.22) эквивалентно следующим уравнениям движения:

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{m}, \quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}=-\mu q. \tag{7.23}$$

Согласно заключению, сделанному в гл. V, решения этих уравнений не являются непосредственно очевидными. Простейший путь состоит в исключении p, что дает

$$m\ddot{q}=-\mu q. \tag{7.24}$$

Это соотношение на самом деле является уравнением Лагранжа для системы и обычно получается без введения функции Гамильтона.

В качестве другого метода исследования рассмотрим каноническое преобразование, порождаемое функцией

$$F_1=kq^2\operatorname{ctg}q'; \tag{7.25}$$

для этого преобразования, согласно равенствам (7.10)—(7.12), имеем

$$p=\frac{\partial F_1}{\partial q}=2kq\operatorname{ctg}q', \quad H=H',$$

$$p'=-\frac{\partial F_1}{\partial q'}=kq^2\operatorname{cosec}^2 q',$$

откуда

$$p=\sqrt{4kp'}\cos q', \quad q=\sqrt{\frac{p'}{k}}\sin q'. \tag{7.26}$$

Следовательно,

$$H'=\frac{1}{2}\left(\mu q^2+\frac{p^2}{m}\right)=\frac{1}{2}\left(\mu\frac{p'}{k}\sin^2 q'+\frac{4kp'}{m}\cos^2 q'\right)=$$

$$=\frac{\mu p'}{2k}\left(\sin^2 q'+\frac{4k^2}{m\mu}\cos^2 q'\right); \tag{7.27}$$

если $k=\frac{1}{2}\sqrt{m\mu}$, то этот результат сводится к выражению

$$H'=\frac{\mu p'}{2k}=p'\sqrt{\frac{\mu}{m}}, \tag{7.28}$$

которое является особенно простым. Так как q' — циклическая координата, то

$$\dot{p}'=-\frac{\partial H'}{\partial q'}=0$$

и, следовательно,

$$p'=\mathrm{const}=\alpha, \tag{7.29}$$

где α есть постоянная интегрирования; отсюда

$$\dot{q}'=\frac{\partial H'}{\partial p'}=\sqrt{\frac{\mu}{m}}\,(=\mathrm{const})$$

и поэтому

$$q'=\sqrt{\frac{\mu}{m}}\,t+\beta. \tag{7.30}$$

Теперь искомые выражения для p и q получаются подстановкой выражений (7.29) и (7.30) в уравнения (7.26).

В этом случае уравнения Гамильтона становятся разрешимыми после применения канонического преобразования, приводящего к новой системе, в которой пространственная координата является циклической. Так как ответ для этой задачи уже известен, то она может служить только иллюстрацией общего метода, с помощью которого все координаты делаются циклическими за счет надлежащего выбора производящей функции. На данном этапе не очевидно, что определение этой функции представляет собой что-либо иное, кроме догадки. Разработка некоторого рационального способа для ее определения является предметом исследования, которое будет проведено в следующем разделе.

Равенства (7.26), (7.29) и (7.30) дают в качестве побочного результата проведенного выше исследования частного примера следующую формулу:

$$J = \oint p\,dq = \int_0^{2\pi} 2p' \cos^2 q'\,dq' = 2\pi\alpha\,(=\mathrm{const}); \qquad (7.31)$$

величины J и q' известны под названиями действие и угол. На ранней стадии развития квантовой теории поведение системы, совершающей периодическое движение, описывалось путем постулирования возможных значений J, являющихся целыми кратными постоянной Планка $\hbar$.

Метод Гамильтона—Якоби

Здесь предлагается метод для явного определения производящей функции, из которой можно получить преобразование, позволяющее найти решения уравнений Гамильтона. Искомое преобразование должно быть частным видом ранее рассмотренного, ибо при этом будет требоваться, чтобы все пространственные координаты и импульсы были бы постоянными.

Предположим, что такое искомое преобразование существует и порождается функцией $S = S(q_1, \ldots, q_n, q_1', \ldots, q_n', t)$, которая должна быть частным случаем функции F_1, рассмотренной в предыдущем разделе. Из постановки задачи следует, что

$$q_i' = \mathrm{const} = \alpha_i, \qquad p_i' = \mathrm{const} = \beta_i, \qquad (7.32)$$

следовательно,

$$S = S(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t). \qquad (7.33)$$

Так как это преобразование каноническое, то

$$\dot{q}_i' = \frac{\partial H'}{\partial p_i'}, \qquad \dot{p}_i' = -\frac{\partial H'}{\partial q_i'},$$

откуда, принимая в расчет равенства (7.32), получаем

$$\frac{\partial H'}{\partial p_i'} = 0, \qquad \frac{\partial H'}{\partial q_i'} = 0. \qquad (7.34)$$

Можно наложить далее условие $\partial H'/\partial t = 0$. Тогда H' будет постоянной, которую можно считать равной нулю, так как, если преобразование S_0 приводит к преобразованной функции Гамильтона $H_0 = \text{const} = A$, то $S = S_0 - At$ дает $H' = 0$.

Из равенства (7.12) получаем

$$H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \tag{7.35}$$

а из равенств (7.10) —

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}; \tag{7.36}$$

отсюда

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{7.35'}$$

Уравнение (7.35′) является уравнением в частных производных первого порядка; оно называется *уравнением Гамильтона—Якоби*. Это уравнение может быть записано в явном виде для любой частной задачи, так как соответствующая функция Гамильтона будет для этой задачи известной функцией от q_i, p_i и t. Решение уравнения Гамильтона—Якоби представляет известные трудности, но в принципе предполагается возможным. Далее мы ограничим наше исследование лишь разъяснением общего хода решения.

Так как уравнение Гамильтона—Якоби содержит $n+1$ независимых переменных q_i и t, то в числе его решений будет решение, содержащее $n+1$ произвольную постоянную. Если S_0 — некоторое возможное решение, то из формы уравнения (7.35′) очевидно, что $S_1 = S_0 + \text{const}$ также является решением. Таким образом, одна из $n+1$ произвольных постоянных учтена, и ею можно будет пренебречь, так как в уравнение входят только производные от S. Общее решение может быть теперь записано в виде

$$S = S_0(q_1, \ldots, q_n, c_1, \ldots, c_n, t), \tag{7.37}$$

где произвольные постоянные обозначаются через c_i.

Однако первоначально было дано, что

$$S = S(q_1, \ldots, q_n, q_1', \ldots, q_n', t),$$

причем $q'_i = \alpha_i = \text{const}$. Следовательно, постоянные c_i связаны с постоянными α_i и в действительности могут быть отождествлены с ними. Это отождествление требует, чтобы равенства (7.32) — (7.34) удовлетворялись, если α_i заменить на c_i. Вывод показывает, что это так и будет, за исключением второго соотношения (7.32).

Согласно равенствам (7.11), производящая функция, определяемая формулой (7.37), приводит к следующим компонентам импульса:

$$p'_i = -\frac{\partial S_0}{\partial c_i}. \tag{7.38}$$

Следовательно, в силу формулы (7.37)

$$\frac{dp'_i}{dt} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial S_0}{\partial c_i} = -\left[\sum_j \frac{\partial^2 S_0}{\partial q_j\,\partial c_i}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 S_0}{\partial t\,\partial c_i}\right]; \tag{7.39}$$

поскольку функция S_0 является решением уравнения (7.35′), имеем также

$$\frac{\partial^2 S_0}{\partial t\,\partial c_i} = \frac{\partial}{\partial c_i}\left(\frac{\partial S_0}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial c_i}\left[H\left(q_i, \frac{\partial S_0}{\partial q_i}, t\right)\right]. \tag{7.40}$$

Из формулы (7.37) следует, что при частном дифференцировании по c_i переменные q_i и t должны оставаться постоянными; поэтому, используя равенства (7.36) и канонические уравнения $\dot{q}_j = \partial H/\partial p_j$, приводим равенство (7.40) к виду

$$\frac{\partial^2 S_0}{\partial t\,\partial c_i} = -\sum_j \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_j}\right)}\frac{\partial}{\partial c_i}\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_j}\right) =$$

$$= -\sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 S_0}{\partial c_i\,\partial q_j} = -\sum_j \dot{q}_j\frac{\partial^2 S_0}{\partial c_i\,\partial q_j}. \tag{7.41}$$

Подставляя, наконец, выражения (7.41) в равенства (7.39), получаем

$$\frac{dp'_i}{dt} = 0, \quad \text{т. е.} \quad p'_i = \text{const}.$$

Таким образом, отождествление c_i с α_i удовлетворяет всем первоначальным требованиям, предъявленным к искомому преобразованию.

Для полного определения производящей функции S необходимо знать значения постоянных $\alpha_i = c_i$. Они могут быть найдены подстановкой заданных начальных значений (т. е. значений q_i и p_i при $t = t_0$) в уравнения (7.36) и решением их относительно α_i. Далее, если требуются значения (постоянные) преобразованных импульсов $p_i' = \beta_i$, то они найдутся из уравнений (7.38).

Этим завершается решение задачи постольку, поскольку речь идет о преобразовании, но основной нашей целью является решение первоначальных уравнений Гамильтона, т. е. определение p_i и q_i как функций времени. Для этого α_i и β_i подставляются в уравнения общего вида (7.38), которые затем решаются относительно q_i в форме $q_i = q_i(\alpha_j, \beta_j, t)$; наконец, p_i находятся подстановкой α_i и q_i в уравнения (7.36), что дает $p_i = p_i(\alpha_j, \beta_j, t)$.

Хотя это и не помогает в процессе решения, тем не менее отметим одно важное свойство функции S, которое может быть установлено на основании следующих соображений.

Из равенства (7.6) имеем

$$\frac{dS}{dt} = \Big(\sum_i p_i\dot{q}_i - H\Big) - \Big(\sum_i p_i'\dot{q}_i' - H'\Big) = \\ = \Big(\sum_i p_i\dot{q}_i - H\Big) = L,$$

следовательно,

$$S = \int L\,dt, \tag{7.42}$$

т. е. функцию S можно отождествить с главной функцией Гамильтона (отсюда используемый символ). К сожалению, интегрирование не может быть осуществлено до тех пор, пока q_i и p_i являются неизвестными функциями времени, т. е. до тех пор, пока задача еще не решена. Тогда такое отождествление не принесет, конечно, никакой практической пользы.

Пример

Для иллюстрации метода Гамильтона—Якоби рассмотрим снова задачу о простом гармоническом осцилляторе. Для этой задачи

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}p^2+\mu q^2\right), \tag{7.43}$$

и соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2+\mu q^2\right]+\frac{\partial S}{\partial t}=0. \tag{7.44}$$

Во всех случаях, когда функция Гамильтона явно не содержит времени, решение уравнения Гамильтона—Якоби имеет вид

$$S(q,\ \alpha,\ t)=S'(q,\ \alpha)-c(\alpha)t.$$

В соответствии с общим случаем постоянная $c(\alpha)$ может быть отождествлена с самой постоянной α. Таким образом,

$$S(q,\ \alpha,\ t)=S'(q,\ \alpha)-\alpha t, \tag{7.45}$$

и уравнение (7.44) принимает вид

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{\partial S'}{\partial q}\right)^2+\mu q^2\right]-\alpha=0,$$

или

$$\frac{\partial S'}{\partial q}(=p)=\sqrt{m\mu}\left(\frac{2\alpha}{\mu}-q^2\right)^{1/2}. \tag{7.46}$$

Следовательно,

$$S=S'-\alpha t=\sqrt{m\mu}\int\left(\frac{2\alpha}{\mu}-q^2\right)^{1/2}dq+D(\alpha)-\alpha t, \tag{7.47}$$

где D — некоторая постоянная интегрирования, которой, как было указано ранее, можно без потери общности пренебречь.

В этом случае нет необходимости получать явную форму S путем интегрирования. Из равенства (7.47) имеем

$$\beta=-\frac{\partial S}{\partial \alpha}=t-\sqrt{m\mu}\int\frac{1}{\mu}\left(\frac{2\alpha}{\mu}-q^2\right)^{-1/2}dq=$$
$$=t-\sqrt{\frac{m}{\mu}}\arccos\left(q\sqrt{\frac{\mu}{2\alpha}}\right). \tag{7.48}$$

Взяв в качестве начальных условий $q=0$, $p=\sqrt{2mE_0}$ при $t=0$ и подставив их в уравнение (7.46), получим

$$\alpha = E_0, \tag{7.49}$$

т. е. преобразованная обобщенная координата отождествляется с полной энергией.

Итак, из уравнения (7.48) мы имеем

$$\beta = -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{\mu}}. \tag{7.50}$$

Теперь из уравнения (7.48) явное выражение q получается в виде

$$q = \sqrt{\frac{2E_0}{\mu}}\cos\left(t\sqrt{\frac{\mu}{m}}+\frac{\pi}{2}\right), \tag{7.51}$$

а из уравнения (7.46)

$$p = \sqrt{2mE_0}\sin\left(t\sqrt{\frac{\mu}{m}}+\frac{\pi}{2}\right). \tag{7.52}$$

Это, конечно, является обычным решением данной задачи.

Когда имеется более одной пары канонических переменных и t явно не входит в H, то решение уравнения Гамильтона — Якоби всегда имеет вид

$$S(q_i, \alpha_i, t) = S'(q_i, \alpha_i) - \alpha t, \tag{7.53}$$

где во всех интересующих нас случаях α можно отождествить с полной энергией [1]). Однако полное определение S возможно только в том случае, когда в уравнении Гамильтона — Якоби переменные q_i разделяются.

Бесконечно малые преобразования прикосновения

При рассмотрении примеров канонических преобразований было показано, что функция $F_2 = \sum_i q_i p_i'$ дает тождественное преобразование. Если ε — некоторый бесконечно малый параметр, не зависящий от q_i и p_i, то отсюда

[1]) См. раздел «Геометрическая механика и волновая механика».

следует, что бесконечно малое изменение переменных будет порождаться функцией

$$F=\sum_i q_i p_i'+\varepsilon G(q_i,\ p_i'), \tag{7.54}$$

где G — произвольная функция. В силу уравнений (7.15) и (7.16) новые переменные даются формулами

$$q_i'=\frac{\partial F}{\partial p_i'}=q_i+\varepsilon\frac{\partial G}{\partial p_i'},\qquad p_i=\frac{\partial F}{\partial q_i}=p_i'+\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_i}, \tag{7.55}$$

откуда

$$\delta q_i=\varepsilon\frac{\partial G}{\partial p_i'},\qquad \delta p_i=-\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_i}, \tag{7.56}$$

и так как разности $p_i'-p_i$ бесконечно малы, то в выражении функции G можно заменить p_i' на p_i; это дает

$$\delta q_i=\varepsilon\frac{\partial}{\partial p_i}G(q_i,\ p_i),\qquad \delta p_i=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial q_i}G(q_i,\ p_i). \tag{7.56'}$$

Первоначально производящей функцией была названа функция F, но в случае бесконечно малого преобразования прикосновения обычно это наименование присваивается функции G. Таким образом, уравнения (7.56′) определяют бесконечно малые изменения сопряженных переменных, которые порождаются произвольной производящей функцией G.

Как частный случай рассмотрим

$$\varepsilon=dt,\qquad G=H; \tag{7.57}$$

в этом случае, используя канонические уравнения, имеем

$$\delta q_i=dt\frac{\partial H}{\partial p_i}=dt\cdot\dot q_i,\quad \delta p_i=-dt\frac{\partial H}{\partial q_i}=dt\cdot\dot p_i; \tag{7.58}$$

т. е. изменения сопряженных переменных, вызванные использованием функции Гамильтона как производящей функции, являются такими, какие на самом деле происходят в системе во время движения. Изменения за конечный промежуток времени от t_0 до t можно рассматривать как результат последовательности таких бесконечно малых изменений, которые все порождены функцией H. Поэтому движение системы можно рассматривать как непрерывное выполнение преобразования прикосновения, порожденного функцией Гамильтона.

Геометрическая механика и волновая механика

В свете результатов, изложенных в предыдущем разделе, теперь можно несколько иначе описать метод Гамильтона — Якоби. Ранее этот метод рассматривался как средство для решения задач с помощью перехода к новым каноническим уравнениям, в которых все переменные являются интегралами движения. Такая интерпретация была дана Якоби. Другая точка зрения, которую впервые предложил Гамильтон, состоит в том, чтобы рассматривать S как функцию, которая преобразует начальные значения пространственных координат q_i' при $t=0$ в их значения q_i для момента t. Таким образом, она описывает изменение системы во времени.

По определению

$$L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H,$$

следовательно,

$$S = \int L\,dt = \int \sum_i p_i \dot{q}_i\,dt - \int H\,dt = W - \int H\,dt. \tag{7.59}$$

Согласно первоначальному предположению, $S = S(q_i, q_i', t)$. Отсюда, ограничиваясь системами, для которых $\partial H/\partial t = 0$ и $H = E$, и опуская величины q_i', так как они рассматриваются теперь как постоянные начальные значения, имеем

$$S(q_i, t) = W - Et. \tag{7.60}$$

Принцип наименьшего действия (6.36) утверждает, что $\Delta W = 0$. Из определения Δ-вариации, данного в гл. VI, ясно, что W может зависеть только от пространственных координат конечных точек траектории. Следовательно,

$$S(q_i, t) = W(q_i) - Et, \tag{7.60'}$$

как было указано ранее [см. формулу (7.53)].

Можно дать общую интерпретацию выражения (7.60′) в понятиях, связанных с волновым движением. Мы ограничимся простым частным случаем, который дает более ясное представление об используемых здесь соображениях.

Рассмотрим систему, состоящую из одной материальной точки, на которую действуют консервативные силы, и используем декартову систему координат. В общем случае уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \qquad (7.35')$$

Для нашего частного случая мы имеем из уравнений (7.36) и формулы (7.60′)

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad \text{т. е.} \quad \mathbf{p} = \nabla W, \qquad (7.61\text{а})$$

а также

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \qquad (7.61\text{б})$$

поэтому уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

$$\frac{1}{2m}(\nabla W)^2 + V = E, \qquad (7.62)$$

или

$$|\nabla W| = \sqrt{2m(E-V)}. \qquad (7.62')$$

Ранее мы уже указывали, что движение системы можно представить некоторой непрерывной кривой в пространстве конфигураций. В настоящем случае эта кривая будет действительной траекторией материальной точки в обычном пространстве. Уравнение $W = \text{const}$ представляет семейство поверхностей в этом пространстве, а условие (7.61а) означает, что траектория материальной точки всюду нормальна к таким поверхностям. Это напоминает соотношения между волновыми поверхностями и лучами в оптике. Предположим, что движение материальной точки на самом деле связано таким образом с некоторой формой волнового движения. Если этот волновой режим характеризуется волновой функцией ψ, удовлетворяющей уравнению, подобному скалярному волновому уравнению в оптике, то

$$\nabla^2\psi - \frac{\mu^2}{v_0^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0; \qquad (7.63)$$

здесь предусмотрено изменение волновой скорости от точки к точке с помощью введения «показателя преломления» μ, являющегося непрерывной функцией координат. Ограничиваясь рассмотрением лишь одной частоты ω, имеем

$$\nabla^2\psi - \frac{\mu^2\omega^2}{v_0^2}\psi = 0. \tag{7.63'}$$

Представим общее решение этого уравнения в следующем виде:

$$\psi = \psi_0(q_i)\, e^{i[k_0 f(q_i) - \omega t]}, \tag{7.64}$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega/v_0$ и ψ_0 действительно.

Если ограничиться случаями, когда изменение показателя преломления при перемещении, равном одной длине волны, мало, то, как можно показать, должно удовлетворяться уравнение

$$(\nabla f)^2 = \mu^2. \tag{7.65}$$

Поверхности постоянной фазы даются уравнением

$$k_0 f(q_i) - \omega t = \varphi(q_i,\ t) = \mathrm{const}. \tag{7.66}$$

Это уравнение аналогично уравнению (7.60′), и, таким образом, можно отождествить поверхности постоянных значений S (которые также можно изобразить в пространстве конфигураций и которые в каждый момент будут совпадать с различными поверхностями $W = \mathrm{const}$, как показано на рис. 6) с волновыми поверхностями постоянной фазы. Из этого отождествления имеем

$$S = a\varphi, \quad W = ak_0 f, \quad E = a\omega, \tag{7.67}$$

где a — некоторая постоянная. Выражения (7.65), (7.67) и (7.62′) дают теперь следующие значения для «показателя преломления»:

$$\mu = |\nabla f| = \frac{1}{ak_0}|\nabla W| = \frac{v_0}{\omega a}\sqrt{2m(E-V)}; \tag{7.68}$$

таким образом, волновое уравнение (7.63′) примет вид

$$\nabla^2\psi - \frac{2m(E-V)}{a^2}\psi = 0. \tag{7.69}$$

Если здесь положить $a = h/2\pi$, то это будет волновое уравнение Шредингера для одной материальной точки в консервативном поле. Таким образом, видно, что шредингеровская волновая механика находится в таком же отношении к обыч-

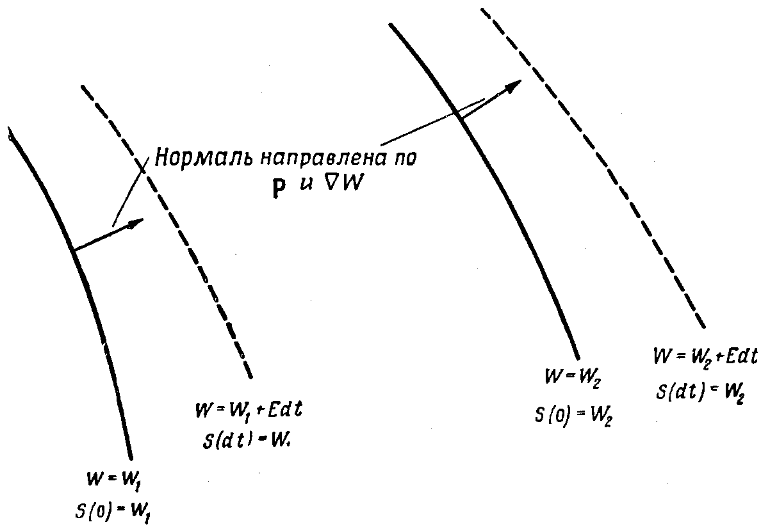

Рис. 6. Поверхности $S = \text{const}$ и поверхности $W = \text{const}$.

ной механике материальной точки, как физическая оптика к геометрической (или лучевой) оптике[1]. По этой причине механику материальной точки часто называют геометрической механикой.

Принцип Ферма

Аналогию, указанную в предыдущем разделе, можно провести и в обратном направлении. В случае материальной точки подстановка выражений (7.61a) и (7.68) в принцип наименьшего действия (6.36) дает

$$\Delta \int \mu\, ds = 0. \tag{7.70}$$

В применении к оптике этот результат выражает *принцип наикратчайшего оптического пути* (*принцип Ферма*).

[1]) Для ознакомления с современными работами в этой области можно рекомендовать книгу Синджа (Synge J. L., Geometrical mechanics and de Broglie waves, C.U.P., 1954).

ГЛАВА VIII

Скобки Пуассона

Определение

Пусть $F = F(q_i, p_i, t)$ будет некоторой переменной динамической характеристикой системы, зависящей от сопряженных переменных q_i, p_i.

Тогда

$$\dot{F} \equiv \frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{8.1}$$

В силу канонических уравнений Гамильтона (5.16) это выражение принимает вид

$$\dot{F} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{8.2}$$

Величина

$$\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

играет большую роль в развитии аналитической механики; она называется скобкой Пуассона от двух функций F и H. В общем случае скобка Пуассона от любых двух динамических переменных величин X и Y определяется как

$$[X, Y]_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i} \frac{\partial Y}{\partial q_i} \right). \tag{8.3}$$

Скобки Пуассона не облегчают существенным образом решения уравнений движения системы, но, как будет видно, оказываются полезными при рассмотрении интегралов движения. Они приводят к математическому аппарату, который при некоторой несложной интерпретации является удобным путем для введения правил квантования в гейзенберговской формулировке квантовой механики.

Из самого определения скобки Пуассона непосредственно вытекают следующие тождества:

$$\left.\begin{aligned} [X, Y] &= -[Y, X], \\ [X, X] &= 0, \\ [X, Y+Z] &= [X, Y] + [X, Z], \\ [X, YZ] &= Y[X, Z] + [X, Y]Z, \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

а также

$$\left.\begin{aligned} &[q_i, q_j]_{q,p} = 0 = [p_i, p_j]_{q,p}, \\ &[q_i, p_j]_{q,p} = \delta_{ij}, \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

где δ_{ij} является обычным дельта-символом, обладающим следующими свойствами:

$$\delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j,$$
$$\delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j.$$

Величины (8.5) называются *фундаментальными*, или *основными*, скобками Пуассона.

Инвариантность относительно канонических преобразований

Очень важным свойством скобок Пуассона является их инвариантность относительно канонических преобразований. Это означает, что

$$[X, Y]_{q,p} = [X, Y]_{q',p'},$$

где подразумевают, что в двух различных системах координат X и Y имеют одинаковые *значения*, но не обязательно одинаковую *форму*.

Доказательство вышеуказанного утверждения можно провести, используя идеи, развитые в предыдущей главе. Там было показано, что каноническое преобразование может быть образовано с помощью функции $F_1 = F_1(q_i, q'_i, t)$; в таком случае будут иметь место следующие соотношения:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \tag{7.10}$$

$$p'_i = -\frac{\partial F_1}{\partial q'_i}; \tag{7.11}$$

из них следует, что

$$\frac{\partial p_i}{\partial q'_j}=\frac{\partial^2 F_1}{\partial q'_j\,\partial p_i}=-\frac{\partial p'_j}{\partial q_i}. \tag{8.6}$$

Подобным же образом, используя другие типы производящих функций F_2, F_3, F_4, получаем

$$\frac{\partial q_i}{\partial q'_j}=\frac{\partial p'_j}{\partial p_i},\qquad \frac{\partial q_i}{\partial p'_j}=-\frac{\partial q'_j}{\partial p_i},\qquad \frac{\partial p_i}{\partial p'_j}=\frac{\partial q'_j}{\partial q_i}. \tag{8.6'}$$

Применяя эти результаты к основным скобкам Пуассона, находим

$$\begin{aligned}[q'_i,\ p'_j]_{q,\,p}&\equiv\sum_k\left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_k}\frac{\partial p'_j}{\partial p_k}-\frac{\partial q'_i}{\partial p_k}\frac{\partial p'_j}{\partial q_k}\right)=\\ &=\sum_k\left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial q'_j}+\frac{\partial q'_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial q'_j}\right)\equiv\\ &\equiv\frac{\partial q'_i}{\partial q'_j}=\delta_{ij}=[q'_i,\ p'_j]_{q',\,p'}\end{aligned}$$

и аналогично

$$\left.\begin{aligned}[q'_i,\ q'_j]_{q,\,p}&=0=[q'_i,\ q'_j]_{q',\,p'},\\ [p'_i,\ p'_j]_{q,\,p}&=0=[p'_i,\ p'_j]_{q',\,p'}.\end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

Таким образом, для основных скобок Пуассона утверждение доказано. Рассмотрим теперь общий случай

$$\begin{aligned}[X,\ Y]_{q',\,p'}&\equiv\sum_k\left(\frac{\partial X}{\partial q'_k}\frac{\partial Y}{\partial p'_k}-\frac{\partial X}{\partial p'_k}\frac{\partial Y}{\partial q'_k}\right)=\\ &=\sum_{j,\,k}\left[\frac{\partial X}{\partial q'_k}\left(\frac{\partial Y}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial p'_k}+\frac{\partial Y}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial p'_k}\right)-\right.\\ &\left.-\frac{\partial X}{\partial p'_k}\left(\frac{\partial Y}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial q'_k}+\frac{\partial Y}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q'_k}\right)\right]=\\ &=\sum_j\left\{\frac{\partial Y}{\partial q_j}[X,\ q_j]_{q',\,p'}+\frac{\partial Y}{\partial p_j}[X,\ p_j]_{q',\,p'}\right\}.\end{aligned} \tag{8.8}$$

Выражение $[q_j,\ X]_{q',\,p'}$ можно рассматривать как частный случай выражения (8.8), полученный подстановкой q_j вместо X и X вместо Y.

Следовательно,

$$[X,\ q_j]_{q',\,p'} = -[q_j,\ X]_{q',\,p'} = \\ = -\sum_k \left\{ \frac{\partial X}{\partial q_k}[q_j,\ q_k]_{q',\,p'} + \frac{\partial X}{\partial p_k}[q_j,\ p_k]_{q',\,p'} \right\};$$

отсюда, используя равенства (8.7), имеем

$$[X,\ q_j]_{q',\,p'} = -\sum_k \frac{\partial X}{\partial p_k}\delta_{jk} = -\frac{\partial X}{\partial p_j}; \tag{8.9}$$

аналогично

$$[X,\ p_j]_{q',\,p'} = \frac{\partial X}{\partial q_j}. \tag{8.10}$$

Подставляя выражения (8.9) и (8.10) в равенство (8.8), получаем

$$[X,\ Y]_{q',\,p'} = \sum_j \left(-\frac{\partial Y}{\partial q_j}\frac{\partial X}{\partial p_j} + \frac{\partial Y}{\partial p_j}\frac{\partial X}{\partial q_j} \right) \equiv [X,\ Y]_{q,\,p}. \tag{8.11}$$

Это и подтверждает правильность результата в общем случае. Так как величина скобки Пуассона не зависит от системы сопряженных переменных, относительно которых она вычисляется, то индексы у скобок не обязательны и мы будем теперь их опускать.

Момент количества движения

В частных случаях компоненты момента количества движения отождествляются с обобщенными компонентами импульса. В общем случае такое отождествление момента количества движения, связанного с некоторой угловой координатой, можно провести для простой механической системы, где отсутствуют, например, электромагнитные эффекты. Интересно исследовать скобку Пуассона от двух компонент момента количества движения. Для простоты рассмотрим материальную точку и используем декартову систему координат; тогда компоненты момента количества движения будут даваться формулами

$$l_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2, \quad l_2 = x_3 p_1 - x_1 p_3, \quad l_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1, \tag{8.12}$$

где $p_1 = m\dot{x}_1$ и т. д. Вычисление скобки Пуассона от l_1 и l_2 дает

$$[l_1, l_2] = p_2 x_1 - p_1 x_2 = l_3.$$

Подобные же результаты получаются и для других комбинаций, и в общем виде можно написать, что

$$[l_i, l_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} l_k, \qquad (8.13)$$

где

$\varepsilon_{ijk} = 1$, если (i, j, k) есть четная перестановка чисел (1, 2, 3),

$\varepsilon_{ijk} = -1$, если (i, j, k) есть нечетная перестановка чисел (1, 2, 3),

$\varepsilon_{ijk} = 0$ во всех других случаях.

Значение формулы (8.13) состоит в том, что не может быть двух компонент момента количества движения, которые могли бы быть одновременно принятыми за сопряженные переменные, так как все сопряженные переменные должны подчиняться законам, записанным равенствами (8.7) и относящимся к фундаментальным скобкам. Любая компонента момента количества движения, конечно, может быть выбрана как обобщенный импульс, но в любой частной рассматриваемой системе отсчета так можно выбрать не более одной компоненты.

Теперь рассмотрим $[l_i, l^2]$, где l^2 — квадрат модуля полного момента количества движения. Используя тождества (8.4) и результат (8.13), имеем

$$[l_i, l^2] = [l_i, \sum_j l_j^2] = \sum_j [l_i, l_j^2] = \sum_j \{2l_j [l_i, l_j]\} =$$

$$= \sum_{j,k} 2l_j \varepsilon_{ijk} l_k \equiv 0, \qquad (8.14)$$

т. е. l^2 и любую одну компоненту l можно одновременно рассматривать как сопряженные переменные. Результаты (8.13) и (8.14) очень важны при распространении этого метода на квантовую механику.

Другие, не менее важные результаты таковы:

$$[x_i,\ l_j]=\sum_k \varepsilon_{ijk}x_k, \qquad [p_i,\ l_j]=\sum_k \varepsilon_{ijk}p_k; \tag{8.15}$$

p_i в этом случае снова обозначают компоненты количества движения в декартовой системе координат.

Интегралы движения

Как было уже отмечено, в некоторых случаях решение задачи можно считать законченным, когда установлены интегралы движения и выяснен их смысл. Равенство (8.2), записанное при помощи скобок Пуассона, показывает, что изменение во времени любой динамической переменной F дается формулой

$$\dot{F}=[F,\ H]+\frac{\partial F}{\partial t}. \tag{8.2'}$$

Это показывает, что если такая переменная не содержит явно времени, то, для того чтобы она была интегралом движения, достаточно обращения в нуль скобки Пуассона от этой переменной и от H. Этот результат дает хороший способ определения интегралов движения вне зависимости от того, будет ли само H интегралом уравнений движения или нет.

Частными случаями формулы (8.2′) являются соотношения

$$\dot{q}_i=[q_i,\ H], \quad \dot{p}_i=[p_i,\ H]; \tag{8.16}$$

эти равенства тождественны каноническим уравнениям Гамильтона, и их можно назвать каноническими уравнениями, записанными в виде скобок Пуассона.

Другой частный случай таков:

$$\frac{dH}{dt}=[H,\ H]+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{8.17}$$

Это соотношение также было выведено ранее.

Тождество Якоби

Рассмотрим выражение

$$[X,\ [Y,\ Z]]-[Y,\ [X,\ Z]]=$$
$$=\left[X,\ \sum_i\left(\frac{\partial Y}{\partial q_i}\frac{\partial Z}{\partial p_i}-\frac{\partial Y}{\partial p_i}\frac{\partial Z}{\partial q_i}\right)\right]-$$
$$-\left[Y,\sum_i\left(\frac{\partial X}{\partial q_i}\frac{\partial Z}{\partial p_i}-\frac{\partial X}{\partial p_i}\frac{\partial Z}{\partial q_i}\right)\right];$$

используя тождества (8.4) и перегруппировывая, получаем

$$\sum_i\left\{-\frac{\partial Z}{\partial q_i}\left(\left[\frac{\partial X}{\partial p_i},\ Y\right]+\left[X,\ \frac{\partial Y}{\partial p_i}\right]\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial Z}{\partial p_i}\left(\left[\frac{\partial X}{\partial q_i},Y\right]+\left[X,\ \frac{\partial Y}{\partial q_i}\right]\right)\right\}+$$
$$+\sum_i\left\{\frac{\partial Y}{\partial q_i}\left[X,\ \frac{\partial Z}{\partial p_i}\right]-\frac{\partial Y}{\partial p_i}\left[X,\ \frac{\partial Z}{\partial q_i}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial X}{\partial q_i}\left[Y,\ \frac{\partial Z}{\partial p_i}\right]+\frac{\partial X}{\partial p_i}\left[Y,\ \frac{\partial Z}{\partial q_i}\right]\right\}.$$

Применяя тождества

$$\frac{\partial}{\partial x}[X,\ Y]\equiv\left[\frac{\partial X}{\partial x},\ Y\right]+\left[X,\ \frac{\partial Y}{\partial x}\right],\qquad(8.18)$$

приводим первое выражение к виду

$$\sum_i\left\{-\frac{\partial Z}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}[X,\ Y]+\frac{\partial Z}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}[X,\ Y]\right\}=-[Z,\ [X,\ Y]];$$

второе выражение, как можно показать, обращается в нуль. Отсюда

$$[X,\ [Y,\ Z]]-[Y,\ [X,\ Z]]=-[Z,\ [X,\ Y]],$$

или, в симметричной форме записи,

$$[X,\ [Y,\ Z]]+[Y,\ [Z,\ X]]+[Z,\ [X,\ Y]]=0.\qquad(8.19)$$

Этот результат известен как тождество Якоби. Дадим одно применение этого тождества. Пусть $Z=H$, тогда

$$[X,\ [Y,\ H]]+[Y,\ [H,\ X]]+[H,\ [X,\ Y]]=0;\qquad(8.20)$$

если величины X и Y являются интегралами уравнений движения, то

$$[Y, H]=0, \quad [X, H]=0, \tag{8.21}$$

откуда

$$[H, [X, Y]]=0, \tag{8.22}$$

т. е. динамическая переменная величина $[X, Y]$ также является интегралом уравнений движения. Польза этого результата заключается в возможности построения новых интегралов движения из известных. Однако не всегда эти новые интегралы имеют нетривиальные значения (например, использование $p_i=\text{const}$ и $p_j=\text{const}$ приводит только к равенству $0=\text{const}$).

Скобки Пуассона и коммутаторы

В квантовой механике динамические переменные представляются операторами, которые не подчиняются переместительным законам обычной алгебры. Для этих операторов нельзя определить скобки Пуассона, но универсальный характер и общая польза этих скобок в классической механике наводят на мысль, что могут существовать аналогичные величины, связанные и с операторами.

Равенства (8.4) дают основные свойства скобок Пуассона. Допустим, что эти равенства представляют также и свойства величин, связанных с соответствующими операторами квантовой механики. (Заметим, что это предположение не является необходимым и что в действительности оно не будет верным для всех типов операторов.) Согласно этому предположению, для любых трех операторов X, Y, Z мы имеем

$$[X, YZ]=Y[X, Z]+[X, Y]Z$$

и

$$[XY, Z]=X[Y, Z]+[X, Z]Y,$$

где для удобства мы обозначаем неизвестный квантовый аналог скобки Пуассона тем же символом, что и самое скобку. Здесь было обращено внимание на то, чтобы сохранить порядок операторов ввиду их некоммутативности.

Отсюда следует, что для любых четырех операторов W, X, Y, Z имеем

$$[WX, YZ] = W[X, YZ] + [X, YZ]W = \\ = W[X, Y]Z + WY[X, Z] + Y[X, Z]W + [X, Y]ZW,$$

или

$$[WX, YZ] = [WX, Y]Z + Y[WX, Z] = \\ = W[X, Y]Z + [W, Y]XZ + YW[X, Z] + Y[W, Z]X.$$

Комбинируя эти результаты, получаем

$$(WY - YW)[X, Z] = [W, Y](XZ - ZX). \qquad (8.23)$$

Мы предполагали, что эти четыре оператора произвольны. Отсюда следует, что тождество (8.23) может быть удовлетворено только в том случае, когда для любых двух операторов A и B мы имеем

$$AB - BA = \alpha[A, B], \qquad (8.24)$$

где α — некоторая постоянная, т. е. квантовый аналог скобки Пуассона является кратным коммутатора двух рассматриваемых операторов. Если предположить, что операторы, соответствующие сопряженным переменным q_i, p_i, играют такую же фундаментальную роль, как и эти классические переменные, то

$$q_i p_j - p_j q_i = \alpha\delta_{ij}. \qquad (8.25)$$

Постулируя далее, что $\alpha = ih/2\pi$, мы приходим к правилам квантования в гейзенберговской формулировке квантовой механики.

Бесконечно малые преобразования прикосновения

Эти преобразования были кратко описаны в предыдущей главе, и при этом было показано, что производящая функция

$$F = \sum_i q_i p_i' + \varepsilon G(q_i, p_i'), \qquad (7.54)$$

где G — произвольная функция, вызывает изменения сопряженных переменных, определяемые формулами

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}, \qquad \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}; \tag{7.56'}$$

здесь предположение о том, что преобразование является бесконечно малым, используется при подстановке p_i вместо p_i' в G.

В соответствии с этими изменениями значений q_i и p_i любая динамическая переменная $X = X(q_i, p_i, t)$ претерпевает изменение, определяемое формулой

$$\delta X = \sum_i \frac{\partial X}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial X}{\partial p_i} \delta p_i; \tag{8.26}$$

отсюда в силу равенств (7.56′) имеем

$$\delta X = \varepsilon \sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) = \varepsilon [X, G]. \tag{8.27}$$

Если $G = H$ и $\varepsilon = dt$, то равенство (8.27) принимает вид

$$\delta X = dt\,[X, H]. \tag{8.28}$$

В случае $X = q_i$ это дает

$$\delta q_i = dt\,[q_i, H] = \dot{q}_i\,dt.$$

Полученную формулу можно истолковать в том смысле, что бесконечно малое преобразование, порожденное функцией H, соответствует действительному движению системы. То же самое рассуждение применимо и в том случае, когда X отождествляется с любой сопряженной переменной p_i. Однако нужно проявить осторожность при рассмотрении общего случая, так как, согласно равенству (8.2′),

$$[X, H] = \frac{dX}{dt} - \frac{\partial X}{\partial t}$$

и равенство (8.28) принимает вид

$$\delta X = \left(\frac{dX}{dt} - \frac{\partial X}{\partial t} \right) dt; \tag{8.28'}$$

отсюда следует, что если $\partial X / \partial t \neq 0$, то изменение δX, вызванное этим преобразованием, не является действительным изменением X, происходящим в процессе движения.

Общий смысл формулы (8.28) таков: если речь идет о любых динамических переменных величинах, явно не зависящих от t, то движение системы эквивалентно некоторой последовательности бесконечно малых преобразований прикосновения, порожденных функцией Гамильтона.

Другое следствие формулы (8.27) получается после подстановки в нее вместо X функции H:

$$\delta H = \varepsilon [H, G]. \tag{8.29}$$

Отсюда следует, что интеграл уравнений движения G (для которого $[H, G] = 0$) порождает бесконечно малое преобразование, относительно которого H является инвариантом. В том частном случае, когда $G = p_x = \mathrm{const}$, рассматриваемое преобразование является бесконечно малым переносом вдоль оси x. Это можно видеть, используя формулы (7.56′), которые дают

$$\delta x = \varepsilon, \quad \delta y = \delta z = 0, \quad \delta p_x = \delta p_y = \delta p_z = 0.$$

Следовательно, функция Гамильтона является инвариантом переноса в том направлении, для которого соответствующая компонента импульса не изменяется. Это просто другой способ выражения того обстоятельства, что некоторой циклической координате соответствует постоянная компонента импульса. Подобный результат получается и при рассмотрении бесконечно малых вращений, порожденных функцией G, и соответствующих им компонент момента количества движения.

Эти последние соображения возвращают нас к рассуждениям, проведенным в гл. V, где рассматривалась связь между симметрией и интегралами движения. Введение аргументации, основанной на свойствах скобок Пуассона, позволило расширить область применения этих соображений и включить в нее все интегралы движения, а не только интегралы количества движения, как это имело место ранее. Теперь показано, что функция Гамильтона является инвариантом (а следовательно, система симметрична) относительно любого бесконечно малого преобразования, порожденного некоторым интегралом движения. Обратное утверждение также верно, и оно дает возможность находить интегралы движения при внимательном рассмотрении любой симметрии, которая обнаруживается в функции Гамильтона.

ГЛАВА IX

Непрерывные среды

До сих пор методы Лагранжа и Гамильтона излагались применительно к системам, имеющим конечное число степеней свободы. Целью настоящей главы является распространение этих методов на непрерывные системы, в которых число степеней свободы бесконечно велико. Это нетрудно сделать, если выбрана подходящая функция Лагранжа; однако в отношении формы параметров, от которых зависят различные функции, имеется известный элемент неожиданности.

Метод Лагранжа

Для того чтобы понять необходимые видоизменения метода, следует развить соображения, изложенные в предыдущих разделах. Частным случаем непрерывной среды является непрерывное одномерное упругое тело, которое можно рассматривать как предельный случай линейной цепи взаимодействующих материальных точек. Для удобства будем считать, что взаимодействие осуществляется пружинами, связывающими каждую пару соседних материальных точек (см. рис. 7).

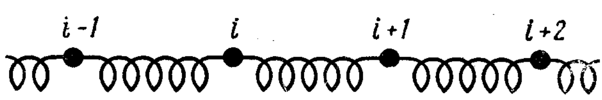

Рис. 7. Цепь точек, заменяющих упругое тело.

Пусть все частицы имеют одну и ту же массу m, расположены на расстоянии a одна от другой и связаны посредством пружин с одинаковым коэффициентом упругости k. Обозначим, как и прежде, перемещение i-й материальной точки через η_i. Тогда уравнение ее движения запишется в виде

$$m\ddot{\eta}_i = k[(\eta_{i+1} - \eta_i) - (\eta_i - \eta_{i-1})]. \tag{9.1}$$

Рассматриваемая система консервативна, и силы могут быть выведены из следующего скалярного потенциала[1]):

$$V = \sum_i \frac{1}{2} k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2. \tag{9.2}$$

Кинетическая энергия системы равна

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m\dot{\eta}_i^2; \tag{9.3}$$

следовательно, функция Лагранжа имеет вид

$$L = T - V = \sum_i \left[\frac{1}{2} m\dot{\eta}_i^2 - \frac{1}{2} k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2\right] = \sum_i aL_i. \tag{9.4}$$

Простая проверка показывает, что уравнения Лагранжа, полученные дифференцированием этой функции обычным путем, совпадают с уравнениями (9.1).

От этой системы отдельных точек можно перейти к непрерывной среде с помощью следующего соответствия:

$$\left.\begin{array}{c} a \to dx, \quad \sum (\quad) a \to \int (\quad) dx, \\ \frac{m}{a} \to \varrho \ (\text{плотность}), \quad ka \to E \ (\text{модуль Юнга}), \\ \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \to \frac{d\eta}{dx}; \end{array}\right\} \tag{9.5}$$

отсюда

$$L \to \int \mathscr{L}\, dx, \tag{9.6}$$

1) При составлении уравнений рассматриваемой задачи возникает известная трудность, вызванная тем, что все материальные точки подчиняются уравнению движения одного и того же вида. Когда цепь имеет конечную длину, необходимо предположить существование дополнительных граничных сил. Когда же ее длина бесконечна, такие функции, как V, будут расходиться, если не принять периодических граничных условий; при этом необходимо считать, что длина занимает только один период. В дальнейшем будет предполагаться, что задача решается при одном из этих предположений.

где[1])

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left[\varrho\dot{\eta}^2-E\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]. \qquad (9.7)$$

Таким образом, оказывается, что функцию Лагранжа, относящуюся ко всей данной системе, можно рассматривать как интеграл от другой функции. Эту последнюю функцию $\mathcal{L}$ называют *плотностью функции Лагранжа.*

Если применять принцип Гамильтона, то мы должны написать

$$\delta\int L\,dt=0. \qquad (9.8)$$

В силу соответствия (9.6) это равенство преобразуется так:

$$\delta\int\int\mathcal{L}\,dx\,dt=0. \qquad (9.9)$$

Конечно, нет гарантии того, что принцип Гамильтона на самом деле будет применим, и единственным критерием его справедливости будет совпадение уравнений движения, выведенных из принятого принципа, с уравнениями, выведенными другим методом.

Принцип Гамильтона в форме (9.9) нам ранее не встречался, но сама эта форма подсказывает, что x и t надо рассматривать как равноправные переменные. Следовательно, вариация этого интеграла осуществляется посред-

---

[1]) Отметим, что здесь применяются символы полных дифференциалов в условиях, в которых обычно используются символы частного дифференцирования. Основой этого метода является трактовка x и t как независимых переменных, и нет необходимости отмечать это обстоятельство каким-либо специальным образом.

Впоследствии необходимо будет дифференцировать функции, зависящие от x и t, учитывая их явную зависимость от функции η и ее производных. Тогда обычно будет применяться формула

$$\frac{d}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\frac{d\eta}{dt}\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{d\eta_{,x}}{dt}\frac{\partial}{\partial\eta_{,x}}+\frac{d\dot{\eta}}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\eta}},$$

где $\eta_{,x}\equiv d\eta/dx$, и аналогичная формула для d/dx. Обобщения этих формул на случай трех пространственных координат и большего числа переменных величин η являются очевидными.

Применение таких формул обеспечивает согласованность обозначений и позволяет избежать введения новых символов.

ством изменения пути интегрирования таким образом, чтобы сохранять закрепленными конечные точки (η_1, x_1, t_1 и η_2, x_2, t_2) траектории, а во всех других точках изменять значения η, сохраняя значения x и t неизменными.

Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы при таком варьировании интеграл принимал стационарные значения, были приведены в гл. VI [уравнения (6.9)]; в настоящих обозначениях они принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\eta}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{,x}} = 0, \tag{9.10}$$

где

$$\eta_{,x} \equiv \frac{d\eta}{dx}.$$

Применение уравнения (9.10) к рассматриваемому случаю дает

$$\frac{d}{dt}(\varrho\dot{\eta}) - E\frac{d^2\eta}{dx^2} = 0,$$

или

$$\varrho\ddot{\eta} = E\frac{d^2\eta}{dx^2}. \tag{9.11}$$

В этом уравнении легко узнать уравнение, описывающее распространение волн в одномерном упругом теле и обычно получаемое как предельная форма уравнения (9.1). Таким образом, предположение, что принцип Гамильтона можно применять к непрерывным средам, в рассматриваемом частном случае приводит к согласованным результатам.

Во всех случаях, которые допускают такую проверку, имеет место подобная согласованность, и мы делаем вывод о том, что уравнения движения непрерывной среды могут быть выражены в следующей математической форме:

$$\delta\int L\,dt = \delta\int\int\int\int \mathscr{L}\,dt\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \equiv \delta\int\int \mathscr{L}\,dV\,dt = 0; \tag{9.12}$$

при этом предполагается, что можно найти плотность функции Лагранжа

$$\mathscr{L} \equiv \mathscr{L}\left(\eta^{(r)}, \frac{d\eta^{(r)}}{dt}, \frac{d\eta^{(r)}}{dx_j}, x_j, t\right),$$

из которой можно вывести уравнения, описывающие движение среды. Здесь были приняты во внимание три пространственные (декартовы) координаты и n переменных величин $\eta^{(r)}$. В общем случае класс этих переменных величин, обычно называемых *переменными поля*, не ограничивается перемещениями, как в рассмотренной задаче теории упругости. Оказывается, например, что этот метод пригоден для описания электромагнитного поля, в котором имеется не менее четырех переменных поля, соответствующих скалярному потенциалу φ и трем компонентам векторного потенциала **A**. Этот вопрос будет подробнее освещен в гл. XI после рассмотрения в гл. X элементарных основ теории относительности.

Условие (9.12) будет выполняться, если удовлетворяются n уравнений вида

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta^{(r)}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} - \sum_j \frac{d}{dx_j}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{,j}^{(r)}} = 0, \tag{9.13}$$

где

$$\eta_{,j}^{(r)} = \frac{d\eta^{(r)}}{dx_j}.$$

Величину

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta} - \sum_j \frac{d}{dx_j}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{,j}}$$

часто записывают как $\delta L/\delta\eta$ и называют *функциональной производной* от L. Единственным достоинством этого обозначения является, по-видимому, его краткость.

Так как постулируется, что вторые производные не должны входить в плотность функции Лагранжа, то $\partial\mathscr{L}/\partial\dot{\eta}_{,j} \equiv 0$, откуда

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\eta}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\eta}} - \sum_j \frac{d}{dx_j}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\eta}_{,j}} \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}};$$

таким образом, уравнения (9.13) могут быть записаны так:

$$\frac{\delta L}{\delta \eta^{(r)}} = \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}^{(r)}}. \tag{9.13'}$$

Эти соотношения по своей внешней форме совпадают с соответствующими уравнениями движения системы отдельных материальных точек, но они не дают ничего нового по сравнению с уравнениями (9.13).

Общий результат этих рассуждений заключается в том, что в случае непрерывных сред переменные поля $\eta^{(r)}$ играют ту же роль, что и пространственные координаты в случае системы отдельных точек. Пространственные координаты также входят в формулы, но они вместе с переменным времени t являются независимыми параметрами. Снова предваряя содержание следующих глав, надо отметить, что это совместное рассмотрение временно́й и пространственных координат подготавливает путь для введения постулатов теории относительности.

Метод Гамильтона

Этот метод развивается почти так же, как и для случая системы отдельных точек; получаются результаты такого же вида, как и ранее, за исключением того, что используется плотность функции Лагранжа и вместо обычных частных производных применяются функциональные производные.

В случае системы отдельных точек переменное p_i, сопряженное с переменным η_i, определяется формулой

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i}. \tag{9.14}$$

При переходе к непрерывным средам мы имеем

$$L = \sum_i a L_i \to \int \mathscr{L}\, dx, \tag{9.6}$$

следовательно,

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i} \to \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\eta}}\, dx; \tag{9.15}$$

т. е. определение сопряженного импульса для случая непрерывной среды, аналогичное определению для системы отдельных точек, приводит к бесконечно малой величине.

Чтобы избежать этого, введем новое понятие — *плотность импульса* — с помощью формулы

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}}; \tag{9.16}$$

это, разумеется, конечная величина.

В общем случае будет n переменных поля $\eta^{(r)}$ и n соответствующих *сопряженных переменных* (или *канонических плотностей импульсов*) $\pi^{(r)} = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\eta}^{(r)}$. В соответствии с предыдущими рассуждениями *плотность функции Гамильтона* определяется так:

$$\mathcal{H} = \sum_r \pi^{(r)} \dot{\eta}^{(r)} - \mathcal{L}, \tag{9.17}$$

а сама функция Гамильтона дается формулой

$$H = \int \mathcal{H} \, dV. \tag{9.18}$$

Надо заметить, что

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(\eta^{(r)}, \frac{d\eta^{(r)}}{dx_j}, \pi^{(r)}, x_j, t\right), \tag{9.19}$$

так как здесь зависимость от $\dot{\eta}^{(r)}$ считается исключенной. В теории Гамильтона все величины $\eta^{(r)}$ и $\pi^{(r)}$ рассматриваются как независимо изменяющиеся функции от x_i и t. Это составляет противоположность теории Лагранжа, где независимыми переменными считаются только $\eta^{(r)}$. Такое положение, конечно, аналогично положению в механике материальной точки. Общей целью является определение обобщенных переменных поля как явных функций пространственных координат и времени таким же путем, как в механике материальной точки обобщенные координаты определяются как функции t.

В рассмотренном частном примере $L=T-V$, и $H=T+V$ является полной энергией. Однако трудно формулировать общие условия для отождествления функции Гамильтона с полной энергией системы. Что касается выводимых из нее уравнений движения, то любую функцию Лагранжа можно умножить на произвольную постоянную, не изменив при этом ее свойств; следовательно, первое требование при отождествлении функции Гамильтона с энергией состоит в определении этого постоянного множителя так, чтобы один или несколько членов функции Лагранжа можно было бы считать слагаемым, соответствующим некоторому виду энергии. В случае системы отдельных точек это осуществляется само собой, если хотя бы один член в уравнениях движения представляет компоненту истинной силы в ньютоновском смысле.

Второе условие состоит в том, что оси координат должны находиться в покое относительно системы отсчета. Это условие не является серьезным ограничением, так как движущиеся оси редко применяются для исследования движения непрерывных сред, однако его следует отметить ввиду примера, указанного при рассмотрении этого вопроса в гл. V.

Если выполнены вышеуказанные ограничения и система не диссипативна, то обычно предполагается, что функция Гамильтона и полная энергия тождественны. Случаи, отличные от тех, которые касаются чисто консервативных систем, должны, строго говоря, исследоваться отдельно, как и случай движения материальной точки в электромагнитном поле. Такое отождествление весьма важно, так как значение функции Гамильтона заключается в измерении полной энергии, которая при этом может быть вычислена без определения компонент силы, как в ньютоновской схеме.

Канонические уравнения Гамильтона

Рассмотрим теперь полный дифференциал от $\mathscr{H}$

$$d\mathscr{H} = \sum_r \left[\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \eta^{(r)}} d\eta^{(r)} + \sum_j \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \eta_{,j}^{(r)}} d\eta_{,j}^{(r)} + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi^{(r)}} d\pi^{(r)} \right] + $$
$$+ \sum \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} dt. \qquad (9.20)$$

Из формулы (9.17) мы находим

$$d\mathscr{H} = \sum_r [\dot{\eta}^{(r)} d\pi^{(r)} + \pi^{(r)} d\dot{\eta}^{(r)}] - d\mathscr{L} =$$
$$= \sum_r \left[\dot{\eta}^{(r)} d\pi^{(r)} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} d\dot{\eta}^{(r)} \right] -$$

$$-\sum_r\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^{(r)}}d\eta^{(r)}+\sum_j\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^{(r)}_{,j}}d\eta^{(r)}_{,j}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\eta^{(r)}}d\dot\eta^{(r)}\right]-$$

$$-\sum_j\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_j}dx_j-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}dt=\sum_r\left[\dot\eta^{(r)}d\pi^{(r)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^{(r)}}d\eta^{(r)}-\right.$$

$$\left.-\sum_j\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^{(r)}_{,j}}d\eta^{(r)}_{,j}\right]-\sum_j\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_j}dx_j-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}dt. \qquad (9.21)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых дифференциалах в выражениях (9.20) и (9.21), получаем

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\eta^{(r)}}=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^{(r)}},\quad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\eta^{(r)}_{,j}}=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^{(r)}_{,j}},\quad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi^{(r)}}=\dot\eta^{(r)},\\&\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t},\quad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_j}=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_j};\end{aligned}\right\} \qquad (9.22)$$

первые три из этих соотношений могут быть названы уравнениями Гамильтона, хотя еще и не в классической форме. Из уравнений (9.13), (9.16) и (9.22) находим

$$\left.\begin{aligned}\dot\pi^{(r)}&\equiv\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\eta^{(r)}}\right)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^{(r)}}-\sum_j\frac{d}{dx_j}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^{(r)}_{,j}}=\\&=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\eta^{(r)}}+\sum_j\frac{d}{dx_j}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\eta^{(r)}_{,j}}\equiv-\frac{\delta H}{\delta\eta^{(r)}},\\\dot\eta^{(r)}&=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi^{(r)}}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi^{(r)}}-\sum_j\frac{d}{dx_j}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi^{(r)}_{,j}}\equiv\frac{\delta H}{\delta\pi^{(r)}},\end{aligned}\right\} \qquad (9.23)$$

так как производные от $\pi^{(r)}$ не входят в $\mathcal{H}$.

Соотношения, аналогичные первоначальным каноническим уравнениям, таковы:

$$\frac{\delta H}{\delta\pi^{(r)}}=\dot\eta^{(r)},\quad \frac{\delta H}{\delta\eta^{(r)}}=-\dot\pi^{(r)}. \qquad (9.23')$$

Можно также заметить, что

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_i}=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i},\quad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}, \qquad (9.24)$$

хотя явная зависимость от времени и пространственных координат редко имеет место.

Законы сохранения плотности

Интересно исследовать изменение во времени плотности функции Гамильтона. Из уравнений (9.21) и (9.22) мы получаем, имея в виду, что t и x_j являются независимыми переменными,

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt}=\sum_r\left[\left(\dot{\pi}^{(r)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^{(r)}}\right)\dot{\eta}^{(r)}-\sum_j\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^{(r)}_{,j}}\dot{\eta}^{(r)}_{,j}\right]+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}. \qquad (9.21')$$

Запишем уравнения движения в форме Лагранжа

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^{(r)}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}^{(r)}}-\sum_j\frac{d}{dx_j}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^{(r)}_{,j}}=0, \qquad (9.13)$$

или

$$\dot{\pi}^{(r)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^{(r)}}=-\sum_j\frac{d}{dx_j}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^{(r)}_{,j}}.$$

Подставляя этот результат в формулу (9.21′), находим

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt}=-\sum_j\sum_r\left[\frac{d}{dx_j}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^{(r)}_{,j}}\right)\dot{\eta}^{(r)}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^{(r)}_{,j}}\dot{\eta}^{(r)}_{,j}\right]+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}=$$

$$=-\sum_j\frac{dS_j}{dx_j}+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}, \qquad (9.25)$$

где

$$S_j=\sum_r\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^{(r)}_{,j}}\dot{\eta}^{(r)}. \qquad (9.26)$$

В интересующем нас случае $\partial\mathcal{H}/\partial t=0$ и формула (9.25) принимает вид

$$\nabla\cdot\mathbf{S}+\frac{d\mathcal{H}}{dt}=0. \qquad (9.25')$$

Отождествляя $\mathcal{H}$ с плотностью полной энергии, мы можем рассматривать это уравнение как уравнение непрерывности для энергии, или *закон сохранения энергии*, причем $\mathbf{S}$ есть вектор, представляющий поток энергии. Вектор $\mathbf{S}$ не является единственным, так как уравнение (9.25′) справедливо для любого вектора $\mathbf{S}'=\mathbf{S}+\nabla\times\mathbf{X}$, где $\mathbf{X}$ — произвольный вектор, а $\mathbf{S}$ дается формулой (9.26). Обычно, однако, рассуждения можно упростить, рассматривая частный случай, когда $\nabla \times \mathbf{X} = 0$.

Вид величин плотностей $\mathscr{H}$ и S наводит на мысль об исследовании величин типа плотности, определяемых формулами

$$\mathscr{G}_j = -\sum_r \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} \eta^{(r)}_{,j}. \tag{9.27}$$

Единственным очевидным свойством таких величин является то, что независимо от природы $\eta^{(r)}$ они имеют

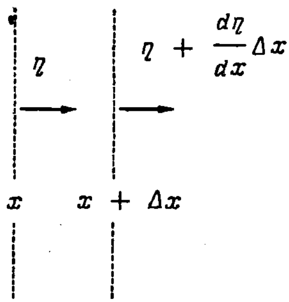

Рис. 8. Элементарный слой.

размерность обычных импульсов. В самом деле, их можно отождествить с особыми величинами такого рода, как можно видеть, снова обращаясь к простому случаю одномерного упругого тела.

Рассмотрим внутри этого тела слой толщины Δx (см. рис. 8); предположим, что плоскости, ограничивающие слой, неподвижны относительно системы отсчета, и, следовательно, перемещения, представляемые переменными поля η, будут состоять в движении среды через плоскости. Рассмотрим единичные площадки этих плоскостей. Масса среды, входящая в слой через грань x, равна $\varrho\eta$, а масса среды, выходящая через вторую грань $x+\Delta x$, равна $\varrho[\eta + (d\eta/dx)\Delta x]$. Таким образом, общая масса, вошедшая в слой, равна $-\varrho(d\eta/dx)\Delta x$.

Это дает изменение количества движения слоя, равное по величине $-\varrho(d\eta/dx)\dot{\eta}\Delta x$ на единицу площади, т. е. изменение плотности количества движения слоя равно

$-\varrho\dot{\eta}\, d\eta/dx$. Эту величину не надо смешивать с $\varrho\dot{\eta}$, действительной *плотностью количества движения среды*. Она является новой «*дифференциальной*» величиной, которую можно назвать *плотностью волнового количества движения* (*плотностью волнового импульса*), так как она отлична от нуля только для волнового движения, при котором $d\eta/dx \neq 0$.

Напомним, что плотность функции Лагранжа, удобная для описания свойств одномерного упругого тела, имела вид

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\varrho\dot{\eta}^2 - E\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]. \tag{9.7}$$

Легко видеть, что в этом одномерном случае единственной величиной, определяемой формулой (9.27), была бы $\mathscr{G} = -\varrho\dot{\eta}\, d\eta/dx$, которая совпадает с только что исследованной величиной, названной плотностью волнового импульса. Подобное отождествление можно сделать и в других случаях, когда переменными поля являются перемещения материальной среды. В общем случае формула (9.27) служит для определения плотности волнового импульса (или импульса поля).

Теперь возникает вопрос, существуют ли законы сохранения для волнового импульса (или импульса поля). Рассмотрим производную по времени от $\mathscr{G}_j$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathscr{G}_j}{dt} &= -\frac{d}{dt}\left[\sum_r \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}^{(r)}}\eta^{(r)}_{,j}\right] = \\
&= -\sum_r\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}^{(r)}}\right)\eta^{(r)}_{,j} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}^{(r)}}\frac{d}{dt}(\eta^{(r)}_{,j})\right] = \\
&= -\sum_r\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta^{(r)}}\frac{d\eta^{(r)}}{dx_j} - \sum_i\frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta^{(r)}_{,i}}\right)\frac{d\eta^{(r)}}{dx_j} + \frac{d\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}^{(r)}}\frac{d\dot{\eta}^{(r)}}{dx_j}\right];
\end{aligned}$$

отсюда в силу уравнений (9.13) имеем

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathscr{G}_j}{dt} &= -\frac{d\mathscr{L}}{dx_j} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_j} + \sum_r\sum_i\frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta^{(r)}_{,i}}\frac{d\eta^{(r)}}{dx_j}\right) = \\
&= \sum_i\frac{d}{dx_i}\sum_r\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta^{(r)}_{,i}}\frac{d\eta^{(r)}}{dx_j} - \delta_{ij}\mathscr{L}\right] + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_j}.
\end{aligned} \tag{9.28}$$

Если x_j явно не входит в $\mathscr{L}$, то $\partial\mathscr{L}/\partial x_j = 0$. При этом не очень сильном ограничении компоненты плотности волнового импульса подчиняются, как легко видеть, закону сохранения, который записывается в виде

$$\frac{d\mathscr{G}_j}{dt} = \sum_i \frac{dT_{ij}}{dx_i}. \tag{9.29}$$

Величины

$$T_{ij} = \sum_r \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta^{(r)}_{,i}} \frac{d\eta^{(r)}}{dx_j} - \delta_{ij}\mathscr{L} \right)$$

являются компонентами тензора второго ранга, отождествляемого с тензором напряжений. Отметим, однако, что система напряжений, о которых идет речь, действует на плоскости, связанные с осями координат и не перемещающиеся вместе со средой. Можно было бы рассматривать эти величины как компоненты вектора, изображающего поток импульса, по аналогии с вектором $\dot{\mathbf{S}}$ — потоком энергии.

Интегральные законы сохранения и скобки Пуассона

Предположим снова, что $\mathscr{L}$ и $\mathscr{H}$ не зависят явно от времени; тогда из формулы (9.25) имеем

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}\int \mathscr{H}\,dV = \int \frac{d\mathscr{H}}{dt}\,dV = -\int \nabla\cdot\mathbf{S}\,dV = -\int \mathbf{S}\cdot d\boldsymbol{\sigma}, \tag{9.30}$$

где последний интеграл вычисляется по поверхности, ограничивающей область интегрирования. Этот интеграл обращается в нуль, если система имеет конечные размеры и расположена внутри области интегрирования. Можно также показать, что он обращается в нуль для системы бесконечных размеров при периодических граничных условиях. Таким образом, в каждом из этих случаев полная энергия является интегралом движения.

Подобные рассуждения справедливы и для полного волнового импульса, или полного импульса поля

$\mathbf{G}=\int \mathcal{G}\,dV$, так как из формулы (9.28) мы получаем

$$\frac{dG_j}{dt}=\int \frac{d\mathcal{G}_j}{dt}dV=\int \sum_i \frac{dT_{ij}}{dx_i}dV+\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j}dV. \qquad (9.31)$$

Во всех практически интересных случаях

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j}\left(=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j}\right)=0;$$

интеграл от дивергенции обращается в нуль при тех же условиях, как и раньше. Следовательно, величина $\mathbf{G}$ является интегралом движения при тех же по существу ограничениях, которые были приняты для функции H.

Плотность $\mathcal{M}_{ij}$ момента волнового импульса можно определить формулой

$$\mathcal{M}_{ij}=x_i\mathcal{G}_j-x_j\mathcal{G}_i.$$

Это определение согласуется с предыдущим применением термина момента количества движения. Полная производная по времени от компонент полного момента волнового импульса дается формулой

$$\frac{dM_{ij}}{dt}=\frac{d}{dt}\int \mathcal{M}_{ij}\,dV=\int\left(x_i\frac{d\mathcal{G}_j}{dt}-x_j\frac{d\mathcal{G}_i}{dt}\right)dV;$$

отсюда в силу равенств (9.29) имеем

$$\frac{dM_{ij}}{dt}=\int \sum_k \left(x_i\frac{dT_{kj}}{dx_k}-x_j\frac{dT_{ki}}{dx_k}\right)dV=$$

$$=\int \sum_k \frac{d}{dx_k}(x_iT_{kj}-x_jT_{ki})\,dV-\int (T_{ij}-T_{ji})\,dV. \qquad (9.32)$$

Член, содержащий дивергенцию, обращается в нуль при тех же предположениях, что и прежде, и остается

$$\frac{dM_{ij}}{dt}=\int (T_{ji}-T_{ij})\,dV. \qquad (9.32')$$

Обычно постулируется, что полный момент количества движения системы является интегралом движения. Как видно из равенств (9.32′), это означает, что тензор напряжений T_{ij} является симметричным. Для механических систем такое требование обычно удовлетворяется автоматически. В исключительных случаях можно произвести симметризацию этого тензора, добавив соответствующие члены к плотности функции Лагранжа. Такая возможность связана с известной степенью произвола, уже отмеченной при рассмотрении вектора S — потока энергии. Этот вопрос при более общих условиях будет снова рассмотрен в гл. XI.

Как и в механике материальной точки, определение интегралов движения играет важную роль; представляет интерес вычисление производной по времени от общей интегральной динамической переменной величины, даваемой формулой

$$Y=\int \mathcal{Y}\, dV, \tag{9.33}$$

где

$$\mathcal{Y}=\mathcal{Y}\left(\eta^{(r)},\ \eta^{(r)}_{,i},\ \pi^{(r)},\ x_i,\ t\right). \tag{9.34}$$

Искомая производная выражается так:

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt}=\int \frac{d\mathcal{Y}}{dt}\, dV=\int\Big[\sum_r\Big(\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \eta^{(r)}}\dot{\eta}^{(r)}+\sum_i \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \eta^{(r)}_{,i}}\frac{d}{dt}\eta^{(r)}_{,i}+{}\\ +\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \pi^{(r)}}\dot{\pi}^{(r)}\Big)+\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial t}\Big]\, dV={}\\ =\int\Big[\sum_r\Big(\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \eta^{(r)}}-\sum_i \frac{d}{dx_i}\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \eta^{(r)}_{,i}}\Big)\dot{\eta}^{(r)}+\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \pi^{(r)}}\dot{\pi}^{(r)}\Big]\, dV+{}\\ +\int \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial t}\, dV.\end{aligned} \tag{9.35}$$

Здесь второй член проинтегрирован по частям, и предполагается, как прежде, что или $\dot{\eta}^{(r)}$ равно нулю на границах, или имеются периодические граничные условия.

Воспользовавшись обозначением функциональных производных и каноническими уравнениями (9.23), представляем равенство (9.35) в виде

$$\frac{dY}{dt}=\int\sum_r\left(\frac{\delta Y}{\delta \eta^{(r)}}\frac{\delta H}{\delta \pi^{(r)}}-\frac{\delta Y}{\delta \pi^{(r)}}\frac{\delta H}{\delta \eta^{(r)}}\right)dV+\int \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial t}\, dV. \tag{9.36}$$

В этой форме результат имеет некоторое сходство с соответствующим результатом, полученным для системы отдельных точек. Это можно подчеркнуть, введя определение обобщенных скобок Пуассона с помощью формулы

$$[X, Y] \equiv \int \sum_r \left(\frac{\delta X}{\delta \eta^{(r)}} \frac{\delta Y}{\delta \pi^{(r)}} - \frac{\delta X}{\delta \pi^{(r)}} \frac{\delta Y}{\delta \eta^{(r)}} \right) dV; \qquad (9.37)$$

тогда равенство (9.36) примет вид

$$\frac{dY}{dt} = [Y, H] + \frac{\partial Y}{\partial t}; \qquad (9.38)$$

данное выражение формально совпадает с соответствующим результатом для системы отдельных точек.

Это новое определение не дает чего-либо нового в смысле интеграции, но вместе с тем можно показать, что рассматриваемые выражения совершенно аналогичны скобкам Пуассона, рассмотренным в гл. VIII, и имеют такое же универсальное значение, как и эти скобки. Данное определение касается лишь интегральных величин; в нем, в частности, нет величин, соответствующих основным скобкам, которые имелись в случае системы отдельных точек.

Переход к квантовой механике

Отсутствие основных скобок Пуассона для непрерывных сред означает, что переход к квантовой механике нельзя провести в точности так, как это было сделано в случае системы отдельных точек. Метод преодоления этой трудности указывается здесь снова на нашем элементарном примере. В случае отдельных материальных точек, упруго связанных между собой, импульсы даются формулами

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}. \qquad (9.15)$$

Здесь применимо первоначальное определение скобок Пуассона, и мы имеем

$$[\eta_i, p_j] = \delta_{ij}, \qquad (9.39)$$

или

$$\sum_j [\eta_i, p_j] = \sum_j \delta_{ij} = 1. \qquad (9.39')$$

При переходе к квантовой механике это приводит, как было указано в гл. VIII, к соответствующему соотношению для коммутаторов от *операторов* η_i и p_j

$$\sum_j (\eta_i p_j - p_j \eta_i) = \alpha \, (= ih/2\pi). \tag{9.40}$$

Предположим, что при переходе к континууму имеет место соответствие операторов такое же, как и для классических динамических переменных, т. е. что

$$\eta_i \to \eta(x), \quad p_j \to \pi(x')\,dx'. \tag{9.41}$$

Тогда равенство (9.40) принимает вид

$$\int [\eta(x)\pi(x') - \pi(x')\eta(x)]\,dx' = \alpha. \tag{9.42}$$

Это соотношение можно интерпретировать так:

$$\eta(x)\pi(x') - \pi(x')\eta(x) = \alpha \cdot \delta(x - x'); \tag{9.43}$$

здесь $\delta(x - x')$ является дельта-функцией Дирака, определенной равенствами

$$\left.\begin{aligned} &\delta(x - x') = 0 \quad x \neq x', \\ &\int f(x)\,\delta(x - x')\,dx = f(x'), \end{aligned}\right\} \tag{9.44}$$

причем предполагается, что значение x' находится внутри интервала интегрирования.

Этот результат можно, кроме того, обобщить на случай n операторов поля $\eta^{(r)}$ вместе со связанными с ними сопряженными операторами количества движения $\pi^{(r)}$, а также для трехмерного пространства, полагая, что

$$\eta^{(r)}(\mathbf{r})\,\pi^{(s)}(\mathbf{r}') - \pi^{(s)}(\mathbf{r}')\,\eta^{(r)}(\mathbf{r}) = \alpha\delta_{rs}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{9.45}$$

где

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x_1 - x_1')\,\delta(x_2 - x_2')\,\delta(x_3 - x_3').$$

Постулируя $\alpha = ih/2\pi$, получим обычный способ квантового описания поведения непрерывной среды.

Приложения

В этой главе был разработан несколько устрашающий аппарат для распространения методов Лагранжа и Гамильтона на непрерывные среды. Оказалось, что можно без труда обобщить многие характерные черты системы отдельных точек. Можно продолжить эти рассуждения и показать существование прежнего соответствия между интегралами движения и свойствами симметрии системы [1]).

Данный метод был изложен применительно к простой материальной системе, однако оказывается, что его можно применить и к целому классу более сложных систем [2]). Таким путем можно вывести общие уравнения распространения упругих волн в изотропном твердом теле, взяв плотность функции Лагранжа в виде

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\sum_i\left[(\lambda+\mu)\sum_j\frac{d\eta_i}{dx_j}\frac{d\eta_j}{dx_i}+\mu\sum_j\left(\frac{d\eta_i}{dx_j}\right)^2-\varrho\left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2\right],$$

где η — вектор перемещения любой точки, μ — модуль сдвига среды, а $(\lambda+2\mu/3)$ — ее объемный модуль. Переменными поля не являются обязательно перемещения. Безвихревое движение сжимаемой невязкой жидкости в так называемом акустическом приближении получается из плотности функции Лагранжа вида

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\varrho\left[(\nabla\psi)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right].$$

В случае этой упрощенной системы единственное переменное поля, функция ψ, является потенциалом скорости, определяемым формулой $\mathbf{v}=\nabla\psi$.

Для сплошных материальных систем польза данного аналитического метода заключается главным образом в той легкости, с какой можно сделать переход к системе координат, отличной от декартовой и удобной для решения конкретных задач. Это, конечно, привлекает внимание к методу Лагранжа. Известное применение получил и метод Гамильтона в связи, главным образом, с исследованием квантовых свойств непрерывных материальных сред. Примечательным является пример из гидродинамики, когда удалось добиться некоторого успеха при описании движения невязкой жид-

---

[1]) Разбор этого вопроса содержится, в частности, в работе Хилла (Hill E. L., *Rev. Mod. Phys.*, **23** (1951), 253—260).

[2]) Обоснование см. в книге Морса и Фешбаха, указанной в списке литературы.

кости путем квантования колебательных движений (введения фононов) и квантования вращательных движений (введения ротонов).

Процессы диссипации, такие, как диффузия и трение, играют важную роль при изучении непрерывных сред. Как и для систем отдельных точек, такие процессы нелегко включить в аналитическое описание, но метод введения дополнительных систем «зеркальных изображений», кратко описанный в гл. V, может быть принят и для непрерывных сред и, по-видимому, открывает интересные возможности[1]. В том случае когда нужно только облегчить переход к обобщенным координатам в уравнениях движения, может быть использована и диссипативная функция Рэлея.

Наиболее замечательные результаты применения методов Лагранжа и Гамильтона к непрерывным средам получаются при изучении идеализированных сред, называемых *полями*. Еще одной особенностью, которая должна быть здесь отмечена, является релятивистская инвариантность. Оказалось, однако, что изложенную здесь теорию можно принять в сущности без изменений. Этому вопросу будет посвящена гл. XI.

---

[1]) См. книгу Морса и Фешбаха, указанную в списке литературы.

ГЛАВА X

Релятивистская механика

Общая схема

Ньютоновская система механики обычно принимается как приближение, пригодное только в том случае, когда скорости материальных точек системы малы по сравнению со скоростью света. Более общее исследование проводится в специальной теории относительности. Поставим себе следующую задачу: показать, как требования теории относительности могут быть приспособлены к описаниям Лагранжа и Гамильтона. Так как основы специальной теории относительности рассматриваются также в двух других работах данной серии[1]), здесь будет дано только краткое описание этой теории.

В специальной теории относительности постулируется, что законы природы имеют одну и ту же форму во всех системах отсчета при равномерном относительном движении. Это требование удовлетворяется в ньютоновской схеме, если рассматривать лишь чисто механические системы, но если включить электромагнитные явления, то потребуются некоторые изменения.

Следствием вышеуказанного постулата теории относительности является отсутствие единого масштаба времени, общего для всех систем отсчета. Некоторая точка в обычном пространстве в некоторый момент рассматривается как *событие* и может быть точно определена четырьмя координатами x_1, x_2, x_3 и t. То же самое событие может быть определено в другой системе отсчета координатами x'_1, x'_2, x'_3, t. Если вторая система S' движется относительно первой системы S с постоянной скоростью V, то соотношение

---

[1]) См. книги Дингла и Мак-Кри, указанные в списке литературы.

между обеими системами отсчета дается линейным преобразованием

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1, \qquad x_2' = x_2, \\ x_3' &= \frac{x_3 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{10.1}$$

где $\beta = V/c$, а c — скорость света.

Предполагается, что в исходный момент времени начала координат двух систем совпадают, что их оси имеют одинаковую ориентацию в пространстве и что относительное движение происходит в направлении оси x_3. Соотношения (10.1) известны как *формулы преобразования Лоренца.*

При более изящном методе описания, принадлежащем Минковскому, событие определяется четырьмя координатами x_1, x_2, x_3, $x_4 = ict$. Четыре величины x_μ образуют компоненты четырехмерного тензора первого ранга в декартовой системе координат или четырехмерного вектора[1]), и формулы преобразования Лоренца представляют ортогональное, т. е. сохраняющее длины, преобразование таких компонент. Отсюда следует, что

$$\sum_\mu x_\mu{}^2 = \sum_\mu x_\mu'^2. \tag{10.2}$$

Интервал собственного времени между двумя событиями x и y определяется как

$$\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-\sum_\mu (x_\mu - y_\mu)^2}\,; \tag{10.3}$$

τ является инвариантной величиной или скаляром, так как оно представляет длину четырехмерного вектора. Движение материальной точки можно рассматривать как непрерывную последовательность событий, образующую в четырехмерном пространстве Минковского некоторую кривую.

---

[1]) Греческими буквами будут обозначаться индексы, которые могут иметь значения 1, 2, 3, 4. Индексы, обозначенные латинскими буквами, принимают значения 1, 2, 3.

Инвариантный бесконечно малый интервал между соседними событиями на этой кривой равен

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-\sum_{\mu}(dx_{\mu})^2} = dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\sum_{i}\dot{x}_i^2} = dt\sqrt{1-\beta^2}, \qquad (10.4)$$

где

$$\beta c = \sqrt{\sum_{i}\dot{x}_i^2} = v$$

обозначает обычную скорость материальной точки.

В противоположность тому, что имеет место в механике Ньютона, величины $\dot{x}_i = dx_i/dt$ не являются больше компонентами вектора. Это происходит потому, что само t в сущности является компонентой вектора, а не скаляром. (В действительности величины $\dot{x}_i$ представляют собой три из шестнадцати компонент тензора второго ранга.) Настоящий четырехмерный вектор может быть определен как

$$u_{\mu} = \frac{dx_{\mu}}{d\tau}. \qquad (10.5)$$

Так как

$$\frac{dx_{\mu}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dx_{\mu}}{dt},$$

то очевидно, что пространственные компоненты этого вектора совпадают с компонентами обычной скорости в нерелятивистском пределе при $\beta \to 0$. Вектор выбран так для того, чтобы оправдать трактовку u_{μ} как действительного обобщения вектора скорости. Временна́я компонента такова:

$$u_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (10.6)$$

а инвариант — длина четырехмерного вектора скорости — равен

$$\sum_{\mu} u_{\mu}^2 = -c^2. \qquad (10.7)$$

В качестве постулата принимается, что с каждой материальной точкой связана некоторая инвариантная величина m, называемая ее массой (массой покоя). Если это так, то вполне естественно рассматривать величину

$$p_\mu = mu_\mu \tag{10.8}$$

как компоненту четырехмерного вектора, являющегося обобщением обычного вектора количества движения (вектора импульса). Это подтверждается аргументами, основанными на предположении, что законы сохранения массы и количества движения в нерелятивистской механике являются частным видом более общих законов сохранения. В более общей форме эти законы устанавливают, что все четыре компоненты обобщенного импульса сохраняются. Три пространственные компоненты соответствуют компонентам обычного импульса, а временну́ю компоненту

$$p_4 = \frac{imc}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{10.9}$$

можно отождествить с энергией, как мы увидим далее.

Законы Ньютона

Использование тензорных обозначений должно прежде всего упростить переход от одной системы координат к другой. В какой-либо системе отсчета не имеет смысла полностью заменять используемые до сих пор более привычные обозначения, для того чтобы согласовать факты наблюдений. В частности, по-видимому, нет причин отвергать законы Ньютона как основу динамического поведения материальных точек. О силах до сих пор не говорилось в связи с теорией относительности, но теперь мы предположим, что их можно *определить* так:

Сила=Производная по времени от количества движения; (10.10)

используя более общее определение импульса, даваемое формулой (10.8), уравнение (10.10) можно записать в следующем виде:

$$F_\mu = \frac{d}{dt}(p_\mu) = \frac{d}{dt}(mu_\mu). \tag{10.10$'$}$$

Как и в случае величин $\dot{x}_\mu = dx_\mu/dt$, эта новая величина не является истинным четырехмерным вектором. Имеется четыре величины F_μ, но в основном будут рассматриваться три пространственные компоненты, определяемые формулами

$$F_i = \frac{d}{dt}(p_i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right). \tag{10.11}$$

Легко видеть, что при малых скоростях эти выражения в пределе сводятся к более привычным компонентам нерелятивистских сил. Кинетическая энергия определяется, как и прежде, соотношением

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = \sum_i F_i\dot{x}_i. \tag{10.12}$$

Записывая это соотношение в развернутой форме, находим

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i u_i\sqrt{1-\beta^2}\frac{d}{dt}(mu_i) =$$

$$= \sqrt{1-\beta^2}\left[\sum_\mu u_\mu \frac{d}{dt}(mu_\mu) - u_4\frac{d}{dt}p_4\right] =$$

$$= \sqrt{1-\beta^2}\frac{d}{dt}\left[\sum_\mu \frac{1}{2}mu_\mu^2\right] - ic\frac{dp_4}{dt} = -ic\frac{dp_4}{dt}. \tag{10.13}$$

Отсюда получаем для p_4 следующее выражение:

$$p_4 = \frac{i}{c}(T + \text{const}). \tag{10.14}$$

Возвращаясь снова к формуле (10.9) и постулируя равенство нулю кинетической энергии материальной точки, находящейся в покое, мы видим, что значение константы, входящей в эту формулу, равно mc^2. Следовательно, формула (10.14) принимает вид

$$p_4 = \frac{i}{c}(T + mc^2) = \frac{iE}{c}, \tag{10.15}$$

где величина E — *полная энергия* — является суммой кинетической энергии T и *энергии покоя* mc^2.

Отсюда следует соотношение

$$-m^2c^2 = \sum_\mu p_\mu^2 = \sum_i p_i^2 + p_4^2 = \mathbf{p}^2 - E^2/c^2,$$

или соотношение

$$(T + mc^2)^2 = E^2 = m^2c^4 + \mathrm{p}^2c^2 = \frac{m^2c^4}{1-\beta^2}, \qquad (10.16)$$

устанавливающее общий вид связи между энергией и трехмерным импульсом.

Метод Лагранжа

Если полученные выше результаты должны находиться в соответствии с методом Лагранжа, развитым в нерелятивистском случае, то надо потребовать, чтобы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i},$$

т. е. чтобы

$$\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}. \qquad (10.17)$$

Так как $c^2\beta^2 = \sum_i \dot{x}_i^2$, то интегрирование дает

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - V(x_i), \qquad (10.18)$$

где в силу очевидных причин постоянная интегрирования записана как $V(x_i)$. Соответствующие уравнения Лагранжа тогда должны принять вид

$$-\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\left(= \frac{d}{dt}p_i\right). \qquad (10.19)$$

Сравнение этих уравнений с формулами (10.11) показывает, что уравнения (10.19) действительно являются уравнениями движения, если $F_i = -\partial V/\partial x_i$. К сожалению, трудно провести какое-либо дальнейшее сопоставление, так как представить какие-либо реальные силы в такой форме нелегко. Подобное отождествление с частными производными, очевидно, можно было бы провести для гравитационных сил, но эти силы требуют описания, выходящего за пределы соображений специальной теории относительности.

Такое отождествление имеет место в частном случае свободной частицы, на которую не действуют силы. В этом случае движение частицы можно описать методом

Лагранжа, взяв функцию Лагранжа в виде (10.18) при $V=0$. Можно также распространить такое описание и на систему свободных частиц, но не на твердое тело. Последнее понятие несовместимо с постулатами специальной теории относительности, так как надо было бы потребовать существования мгновенно распространяющегося взаимодействия между частицами.

Так как специальная теория относительности была сформулирована так, что она включает электромагнитные явления в общую инвариантную схему, то можно надеяться, что описание Лагранжа также можно обобщить, чтобы включить эти явления, как это было в нерелятивистском случае.

Сила, действующая на частицу с зарядом e, дается формулой Лоренца

$$\mathbf{F}=e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right), \tag{3.16}$$

и ранее было показано, что этой формуле можно придать другой вид, а именно

$$F_i=e\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{x}_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\varphi-\frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right). \tag{3.18}$$

Эти формулы основываются на наблюдениях, сделанных при малых скоростях материальных точек, и нет гарантии, что они будут применимы в общем случае. Если они справедливы при всех скоростях, то релятивистские уравнения движения материальной точки в электромагнитном поле должны иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=e\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{x}_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\varphi-\frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right). \tag{10.20}$$

Дальнейшие наблюдения частиц, обладающих высокой энергией, показывают хорошее соответствие между действительным движением частицы и предсказаниями, основанными на уравнениях (10.20) при $v_i=\dot{x}_i$. Таким образом, мы приходим к выводу, что уравнения (10.20) являются правильными уравнениями движения, и на основании предыдущих соображений нетрудно видеть, что их можно вывести, предполагая справедливым принцип Гамильтона

$$\delta \int L\,dt = 0,$$

где

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - e\left(\varphi - \frac{1}{c}\sum_i \dot{x}_i A_i\right). \qquad (10.21)$$

Распространение этого метода на систему заряженных частиц представляет трудности, обусловленные необходимостью учета электромагнитного взаимодействия между такими частицами.

Метод Гамильтона

Пользуясь определением $p_i = \partial L/\partial \dot{x}_i$, где L дается формулой (10.21), мы можем записать пространственные компоненты импульса заряженной частицы в электромагнитном поле следующим образом:

$$p_i = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e}{c} A_i. \qquad (10.22)$$

Однако непосредственно ничего нельзя сказать относительно временно́й компоненты, так как в схеме Лагранжа она не рассматривалась. Функция Гамильтона H имеет вид

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \sum_i p_i \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m}\left(p_i - \frac{e}{c} A_i\right) +$$
$$+ mc^2\sqrt{1-\beta^2} + e\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right) =$$
$$= e\sqrt{m^2c^2 + \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2} + e\varphi, \qquad (10.23)$$

или

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + e\varphi. \qquad (10.23')$$

Как и прежде, скорость увеличения кинетической энергии заряженной частицы дается формулой

$$\frac{dT}{dt}=\sum_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} p_i=\sum_i \dot{x}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right). \tag{10.24}$$

Отсюда, снова полагая, что $T=0$ при $\dot{x}_i=0$, получаем

$$T=mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right). \tag{10.24'}$$

Из уравнений (10.20) и (10.24) имеем

$$\frac{dT}{dt}=\sum_i e\dot{x}_i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\varphi-\frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right)=$$

$$=e\mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)=e\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}. \tag{10.25}$$

По определению скалярного и векторного потенциалов

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},$$

следовательно,

$$\frac{dT}{dt}=-e\mathbf{v}\cdot\left(\nabla\varphi+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=-\frac{d}{dt}(e\varphi)+e\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{e}{c}\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},$$

или

$$\frac{d}{dt}(T+e\varphi)=e\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{dt}\right),$$

и окончательно

$$\frac{d}{dt}(mc^2+T+e\varphi)=e\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right). \tag{10.26}$$

Величину $mc^2+T+e\varphi=E$ можно истолковывать как полную энергию заряженной частицы. Тогда смысл членов, стоящих в правой части уравнения (10.26), состоит в том, что они представляют увеличение полной энергии заряженной частицы, обусловленное действием зарядов и токов, которые являются причиной того, что напряженность поля изменяется со временем. При таком истолковании функция Гамильтона тождественна с полной энергией, что можно усмотреть из выражений

(10.23′) и (10.24′). Однако заметим, что функцию Лагранжа нельзя приравнивать к выражению типа $T+mc^2-e\varphi$, что можно было бы предположить по аналогии с нерелятивистским случаем.

Формула (10.23), дающая функцию Гамильтона в ее канонической форме, служит исходным пунктом для релятивистской квантовой механики электрона, предложенной Дираком.

Теперь мы показали, что уравнения, описывающие движение одной заряженной частицы в электромагнитном поле, могут быть выведены как методом Лагранжа, так и методом Гамильтона. Как ранее упоминалось, применение этих методов к системе заряженных частиц или к случаю движения под влиянием каких-либо других факторов, таких, как гравитационное поле, никоим образом не является простым.

Ковариантная запись уравнений движения

Используя тензорное исчисление в большей степени, чем это делалось до сих пор, можно записать полученные результаты в форме, отличной от той, которая была приведена в предыдущем разделе. Исходным пунктом служит здесь то обстоятельство, что скалярную величину τ, т. е. собственное время, можно рассматривать как обобщение переменного t, потому что последнее является скаляром в нерелятивистской механике. Тогда обобщенный принцип Гамильтона примет вид

$$\delta \int L\, d\tau = 0; \tag{10.27}$$

если L является скаляром, то этот принцип выражается одинаково во всех системах отсчета. Такая форма записи называется *ковариантной*. 17

Нетрудно видеть, что функция L, взятая в виде

$$L = \sum_{\mu} \frac{1}{2} m u_{\mu}^2, \tag{10.28}$$

имеет требуемую форму и удовлетворяет всем условиям, которым должна удовлетворять функция Лагранжа, применяемая для описания движения свободной с массой m.

Теперь предположим, что существуют четыре переменные x_μ, которые при таком подходе равноправны, и потому должны иметь место четыре уравнения движения вида

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial x'_\mu}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_\mu}=0, \tag{10.29}$$

где $x'_\mu \equiv dx_\mu/d\tau$. В силу равенств (10.28) эти уравнения перепишутся так:

$$\frac{d}{d\tau}(mu_\mu)=0; \tag{10.30}$$

три уравнения, соответствующие обычным пространственным координатам, сводятся к уравнениям

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=0, \tag{10.31}$$

справедливость которых уже была допущена ранее. Четвертое уравнение принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{imc}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=0 \tag{10.32}$$

и выражает постоянство полной энергии.

Теперь обобщенный импульс имеет четыре компоненты

$$p_\mu=\frac{\partial L}{\partial x'_\mu}=mu_\mu; \tag{10.33}$$

эти соотношения опять-таки тождественны с ранее установленными результатами.

Определим теперь функцию Гамильтона следующим образом:

$$H=\sum_\mu p_\mu x'_\mu-L; \tag{10.34}$$

здесь сумма содержит четыре, а не три члена. Отсюда находим

$$H=\sum_\mu \frac{p_\mu^2}{2m}=-\frac{1}{2}mc^2\sqrt{1-\beta^2}; \tag{10.35}$$

эта величина *не совпадает* с полной энергией

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

однако канонические уравнения

$$\frac{d}{d\tau}(p_\mu) = -\frac{\partial H}{\partial x_\mu} \quad \text{и} \quad \frac{d}{d\tau}(x_\mu) = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}$$

приводят к правильным соотношениям.

Можно было бы подумать, что нетождественность функции Гамильтона и полной энергии вызовет серьезные возражения против такой формы записи. Однако это не так, потому что эту запись можно получить также, исходя и из четырехкомпонентного импульса и пользуясь следующим принятым в этой главе определением:

$$p_4 = \frac{iE}{c}. \tag{10.15}$$

При ковариантной записи уравнений движения в отличие от той, которая была дана в предыдущем разделе, энергия определяется как производная от функции Лагранжа.

Возвращаясь к рассмотрению заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле, надо теперь отметить ограничения, которые нужно наложить на потенциалы **A** и φ. При определении этих величин имеется известный произвол, который можно устранить различными путями. При релятивистской трактовке удобно выбрать следующее соотношение:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{10.36}$$

Было бы излишне вводить это соотношение в наши предыдущие рассуждения, но теперь оно дает возможность определить новый четырехмерный вектор. Соотношение (10.36) можно переписать в виде

$$\sum \frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{\partial (i\varphi)}{\partial x_4} = 0; \tag{10.36'}$$

отсюда можно вывести, что величины A_1, A_2, A_3, $A_4 = i\varphi$ являются компонентами четырехмерного вектора. Соотношение (10.36′) устанавливает, что дивергенция такого вектора равна нулю.

Вводя в рассмотрение этот новый вектор и возвращаясь к нековариантной функции Лагранжа для заряженной частицы в электромагнитном поле, можно предположить, что подходящая для данного случая ковариантная форма функции Лагранжа может иметь вид

$$L = \sum_{\mu} \left[\frac{1}{2} m u_{\mu}^2 + \frac{e}{c} A_{\mu} u_{\mu} \right]. \tag{10.37}$$

Это — скалярная величина; таким образом, первое требование выполнено. Соответствующими уравнениями движения будут уравнения

$$\frac{d}{d\tau}\left(m u_{\mu} + \frac{e}{c} A_{\mu}\right) = \sum_{\nu} \frac{e}{c} u_{\nu} \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\mu}}; \tag{10.38}$$

их можно привести к двум следующим:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) \tag{10.39}$$

и

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = e\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}. \tag{10.40}$$

Уравнения (10.39) были уже приведены ранее как правильные уравнения. Уравнение (10.40), соответствующее временно́й координате x_4, совпадает с уравнением (10.25). Таким образом, предложенная функция Лагранжа дает правильную систему уравнений движения.

Компоненты импульса, получаемые из выражения (10.37), определяются формулами

$$p_{\mu} = m u_{\mu} + \frac{e}{c} A_{\mu}. \tag{10.41}$$

Первые три из этих формул совпадают с формулами (10.22) и поэтому приемлемы; четвертая из них не вводилась ранее и имеет вид

$$p_4 = m u_4 + \frac{e}{c} A_4 = \frac{i}{c}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + e\varphi\right). \tag{10.42}$$

Выражение, заключенное в скобки, было ранее отождествлено с полной энергией частицы [см. абзац, следующий за формулой (10.26)]; следовательно, будет справедливо то же равенство, что и в случае свободной частицы, а именно

$$p_4 = iE/c. \tag{10.43}$$

Функция Гамильтона имеет здесь такой вид:

$$H \equiv \sum_{\mu} p_\mu x'_\mu - L = \sum_{\mu} \frac{1}{2m}\left(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu\right)^2 = \\ = \sum_{\mu} \frac{1}{2} m u_\mu^2 = -\frac{1}{2} mc^2. \tag{10.44}$$

Данное выражение опять нельзя отождествить с полной энергией. Однако в силу равенства (10.43) это обстоятельство не имеет большого значения. Таким образом, ковариантная форма записи дает исключительно изящный метод для определения физически интересных величин (импульса и энергии) и равным образом уравнений движения. Если ее принять, то схема Ньютона почти полностью нарушается, так как понятие силы теперь совсем исчезает. Можно, конечно, определить компоненты силы, снова возвращаясь к уравнениям движения в обычных пространственно-временных обозначениях, но простых тензорных величин, которым эти компоненты соответствуют, нет.

Результаты, изложенные в этом разделе с помощью методов Лагранжа и Гамильтона, в своей сущности тождественны результатам, приведенным в предыдущих разделах. Следует, однако, отметить, что при такой ковариантной форме записи требуются значительно более простые исходные выражения. Функция Лагранжа, определенная формулой (10.37), является одним из наиболее простых скалярных выражений, которые можно составить; при этом мы предполагаем, что данная функция зависит от таких величин, как x_μ, u_μ и A_μ. Такая точка зрения оказалась весьма полезной при изучении более сложных систем. В следующей главе в связи с этим будут рассмотрены элементы теории поля.

ГЛАВА XI

Поля

Современная физика установила существование большого числа *элементарных частиц* различных типов; эти частицы наблюдались и были идентифицированы. Кроме хорошо известных электронов, протонов, нейтронов и фотонов, теперь имеется обширный перечень мезонов и гиперонов[1]). Остается провести большое число исследований, прежде чем будут удовлетворительно классифицированы даже уже известные виды частиц; тем не менее в разработке теоретических методов исследования уже достигнут значительный прогресс.

Наиболее замечательным свойством всех до сих пор открытых частиц является то, что в одном отношении они ведут себя как частицы в классическом смысле, а в другом отношении представляются связанными с некоторым видом волнового движения. Исторически они сначала рассматривались как обычные материальные частицы; волновые свойства, описываемые квантовой теорией, были исследованы значительно позже. Для фотонов развитие теории происходило в обратном порядке: сначала была разработана теория электромагнитного поля, а затем выяснилось, что некоторые свойства электромагнитных волн можно объяснить только при постулировании существования дискретных объектов, подобных материальным частицам и называемых фотонами.

Такой корпускулярно-волновой дуализм принят теперь как общее характерное свойство всех типов элементарных частиц. При теоретическом описании оказывается более целесообразным сначала рассматривать процесс как волновой, а затем перейти к корпускулярной точке зрения. Волновая трактовка требует развития *теории поля* в классическом виде. На некоторой стадии в это описание вводятся правила квантования, и тогда становится возможным интер-

---

[1]) См., например, статью Шапиро [Shapiro A. M., *Rev. Mod. Phys.*, 28 (1956), 164].

претировать некоторые выводы при помощи корпускулярной концепции.

Теория поля строилась как логическое продолжение теории сплошных материальных сред. В этой главе предполагается дать краткое изложение основных черт этих теорий. Квантовая трактовка, разумеется, останется вне нашего поля зрения, хотя метод введения правил квантования в основном совпадает с методом, указанным в гл. IX.

Наиболее известным примером систем рассматриваемого типа является электромагнитное поле. Его можно описать или при помощи напряженностей электрического и магнитного поля или при помощи функций, являющихся векторными и скалярными потенциалами; в обоих случаях рассматриваемые величины являются непрерывными функциями координат и времени. Эта форма описания в конце концов основана на наблюдении за движением обычных материальных частиц, по предположению несущих электрические заряды. Концепция непрерывного *поля* вводится для того, чтобы избежать понятия о «взаимодействии частиц на расстоянии» (дальнодействии). Источниками поля служат заряды, связанные с частицами. Такое представление совершенствуется и идеализируется настолько, что поле считается существующим в некоторой форме даже при отсутствии частиц. Свойства таких электромагнитных полей выражаются системой дифференциальных соотношений, известных как уравнения Максвелла. Они обычно будут упоминаться как *уравнения поля*.

Предполагается, что, подобно тому как электромагнитное поле сопоставляется с фотонами, другие поля сопоставляются с другими видами элементарных частиц. Эти поля не всегда столь сложны, как электромагнитные; и действительно, некоторые из них значительно проще. При этом основное допущение состоит в том, что волнообразное поведение любых частиц можно выразить с помощью системы уравнений поля, содержащих одну или несколько переменных поля. Предполагается также, что эти уравнения должны быть инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца[1]) и таким образом согласуются

[1]) В этом упрощенном изложении рассматриваются только собственные преобразования Лоренца.

с релятивистским требованием, чтобы все основные законы природы имели одинаковую форму во всех системах отсчета. Это уже имеет место для уравнений Максвелла, хотя развитие теории электромагнитного поля предшествовало возникновению специальной теории относительности.

Переменные поля не поддаются непосредственному наблюдению, но их значения могут быть получены из наблюдения над материальными системами, как это имеет место для электромагнитного поля. Это обстоятельство позволяет обойти вопрос о *природе* этих переменных. Они в такой же мере реальны, как векторы напряженности электрического или магнитного полей или потенциалы в классической механике. Их лучше всего рассматривать как математические объекты, значение которых заключается в возможности их применения для описания и предсказания доступных наблюдению изменений в поведении материальных систем.

Теория поля, описывающая релятивистские волновые свойства обычной материи, содержит сравнительно сложные понятия, известные под названием *спиноров*. Любое исследование спинорных полей вывело бы нас за рамки данной книги, и для иллюстрации наших рассуждений необходимо использовать значительно более простые системы. Несмотря на опасность оказаться в области нереального, лучше исследовать элементарные, иногда даже гипотетические примеры, которые проще выражают рассматриваемые принципы, чем пытаться провести значительно более сложный анализ, в котором эти принципы могли бы утонуть. Таким образом мы надеемся в общих чертах познакомить читателя с основными направлениями, в которых развивается теория поля. Для детального изучения предмета читатель может обратиться к исследованиям, перечисленным в списке литературы.

Метод Лагранжа

Этот метод, изложенный в гл. IX, хотя и предназначен специально для непрерывных материальных сред, является таким удобным описанием, какое могло бы быть принято и для успешного исследования полей. На природу переменных поля не накладывается никаких ограничений, и они могут быть как потенциалами электромагнитного поля, так и перемещениями в упругих телах или потенциалами скоростей течений жидкости. Почти несомненно, что можно найти функции типа плотности, выражающие свойства полей, но нужно выяснить, приведут ли эти функции к сколько-нибудь существенному упрощению.

Общее положение в теории поля несколько отличается от того, какое имеет место в теории непрерывных материальных сред. Обычно поведение систем последнего типа достаточно хорошо понятно в своих основных чертах, и аналитический метод применяется для упрощения способа записи уравнений движения в форме, удобной для решения конкретных задач. В теории поля предварительные сведения об основных свойствах процесса обычно отсутствуют, и аналитический метод применяется как исходный пункт теоретического описания. Рассмотрение различных простейших видов плотности функции Лагранжа позволяет надеяться на успешное объяснение некоторых наблюдаемых явлений. Аналитический метод является эмпирическим в той же степени, что и метод, при котором делаются непосредственные предположения относительно формы уравнений поля, но при его использовании область возможностей значительно сужена.

Было установлено, что свойства непрерывных сред можно суммарно выразить в форме обобщенного принципа Гамильтона

$$\delta \iint \mathscr{L}\, dV\, dt = 0, \tag{9.12}$$

где в общем случае $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\eta^{(r)}, \dot{\eta}^{(r)}, \eta^{(r)}_{,i}, x_i, t)$.

Уже было указано, что теории поля должны обладать достаточной общностью, чтобы содержать в себе постулаты специальной теории относительности. В связи с изучением движения материальной точки с аналитической точки зрения в гл. X было сочтено возможным включить релятивистские закономерности двумя способами. Из них ковариантный способ, несомненно, был проще. Он и принимается как руководящий принцип для представления процесса в случае полей. Нельзя принять ковариантную запись точно в таком же виде, как в гл. X; однако исследование соотношения (9.12) наводит на мысль о новом варианте. Так как

$dV = dx_1 dx_2 dx_3$ ($\equiv d^3x$) и $x_4 = ict$, то это соотношение можно представить в виде

$$\delta \int \mathcal{L}\, d^4x \equiv \delta \int\int\int\int \mathcal{L}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = 0; \qquad (11.1)$$

здесь постоянный множитель ic включен в $\mathcal{L}$.

Бесконечно малое произведение $d^4x \equiv dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ представляет элементарный объем в четырехмерном пространстве Минковского и как таковой является инвариантом по отношению к преобразованиям Лоренца. Следовательно, само выражение принципа (11.1) инвариантно при условии, что $\mathcal{L}$ является скалярной величиной. Эта форма принципа Гамильтона принимается как отправной пункт для описания полей. Так как эта форма является только новым вариантом записи использованного ранее принципа, то все полученные прежде следствия и здесь остаются в силе. В частности, уравнения движения (написанные в новых обозначениях) примут вид

$$\sum_{\mu} \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^{(r)}_{,\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^{(r)}} = 0. \qquad (11.2)$$

Эти уравнения будут теперь называться уравнениями поля. Инвариантность их формы по отношению к преобразованию Лоренца обеспечена инвариантностью принципа Гамильтона в виде (11.1).

Виды полей

а. *Скалярные поля.* Простейшим из всех возможных было бы поле с одной скалярной действительной переменной поля φ. Если ограничиться производными от φ порядка не выше первого, то скалярными величинами, которые можно образовать из них, являются целые степени от φ и от $\sum_\mu (d\varphi/dx_\mu)^2$. Простейшей формой плотности функции Лагранжа, составленной из этих величин, могла бы быть функция[1])

$$\mathcal{L} = \alpha \left[\sum_{\mu} \left(\frac{d\varphi}{dx_\mu} \right)^2 + k^2 \varphi^2 \right]. \qquad (11.3)$$

[1]) Относительно соглашения, принятого при использовании символов дифференцирования, см. примечание на стр. 119.

Из уравнений (11.2) следует, что соответствующее уравнение поля приняло бы вид

$$\sum_{\mu} \frac{d^2\varphi}{dx_\mu^2} - k^2\varphi = 0,$$

или

$$(\Box - k^2)\,\varphi = 0, \tag{11.4}$$

где

$$\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}$$

является оператором Даламбера.

Исходя из общих положений квантовой теории, можно показать, что такое поле описывает волновые свойства незаряженных материальных частиц, имеющих массу покоя $m = kh/2\pi c$. Эксперимент показывает, что такие частицы существуют; они называются π-мезонами [1]).

Были исследованы также другие возможные виды скалярных полей. Например, можно показать, что комплексное скалярное поле $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ связано с электрически заряженными частицами.

б. *Векторные поля.* Более сложный вид поля должен иметь в качестве переменных поля компоненты четырехмерного вектора. Электромагнитное поле и является примером поля такого вида.

Электромагнитное поле при отсутствии материи описывается уравнениями Максвелла для свободного пространства с плотностями зарядов и токов, всюду равными нулю, т. е. уравнениями

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{B}}{dt}, \tag{11.5а}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{E}}{dt}. \tag{11.5б}$$

Векторный и скалярный потенциалы определяются соотношениями

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{A}}{dt}. \tag{11.6}$$

На основании этих определений соотношения (11.5а) являются простыми тождествами и в дальнейшем не будут рас-

[1]) В действительности π-мезоны соответствуют псевдоскалярному полю.—*Прим. ред.*

сматриваться. Таким образом, собственно уравнениями поля являются уравнения (11.5б).

Как было указано в гл. X, четыре величины A_1, A_2, A_3, $A_4 = i\varphi$ можно отождествить с компонентами четырехмерного вектора при помощи соотношения

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{d\varphi}{dt} = 0;$$

это уменьшает произвол в определениях (11.6)[1]) и сосредоточивает внимание на так называемом условии Лоренца. Применяя это условие калибровки, можно представить уравнения (11.5б) в инвариантной релятивистской форме

$$\sum_{\mu} \frac{d}{dx_{\mu}}\left(\frac{dA_{\mu}}{dx_{\nu}} - \frac{dA_{\nu}}{dx_{\mu}}\right) = 0. \qquad (11.7)$$

С другой стороны, если ввести антисимметрический тензор второго ранга $F_{\mu\nu}$, положив

$$F_{\mu\nu} = \frac{dA_{\mu}}{dx_{\nu}} - \frac{dA_{\nu}}{dx_{\mu}}, \qquad (11.8)$$

то уравнения поля принимают вид

$$\sum_{\mu} \frac{dF_{\mu\nu}}{dx_{\mu}} = 0. \qquad (11.7')$$

Нетрудно видеть, что эти уравнения можно вывести, приняв принцип Гамильтона в форме (11.1), где

$$\mathcal{L} = \alpha \sum_{\mu} \sum_{\nu} (F_{\mu\nu})^2 = \alpha \sum_{\mu,\nu} \left(\frac{dA_{\mu}}{dx_{\nu}} - \frac{dA_{\nu}}{dx_{\mu}}\right)^2. \qquad (11.9)$$

Здесь необходимо предупредить читателя, что, хотя эта простая форма функции Лагранжа дает правильные уравнения поля, она неудовлетворительна по другим причинам. Однако ее изменения представляются необходимыми только при выходе за пределы метода Лагранжа и здесь рассматриваться не будут.

---

[1]) Величины A_{μ} остаются произвольными с точностью до аддитивных величин $d\Lambda/dx_{\mu}$, где Λ удовлетворяет уравнению $\Box\Lambda = 0$; это добавление несущественно. Однако величины $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ требуют полного своего определения.

Были исследованы также и другие типы векторных полей. В частности, было показано, как и в случае скалярного поля, что комплексные компоненты поля означают наличие электрического заряда у соответствующих частиц. Дальнейшее обобщение, основанное на неклассических соображениях, состоит в предположении, что частицы, связанные с каким-либо векторным полем, обладают моментом количества движения, по модулю равным $h/2\pi$ (спин 1). Это положение противоположно тому, что имеет место для скалярных полей, которые связаны с частицами, имеющими нулевые спины.

в. *Спинорные поля.* Волновые свойства обычной материи также были описаны в теории поля. Это описание включает в качестве переменных поля особые величины, известные под названием спиноров. Мы не предполагаем рассматривать их далее, но заметим, что соответствующие частицы обладают полуцелыми значениями спинов. Это, конечно, согласуется с данными наблюдения.

В любой теории поля тип переменных поля всегда определяется значениями спина соответствующих частиц. В любом частном случае это снова сужает область возможных форм плотности функции Лагранжа. Некоторое внимание было уделено полям с частицами, имеющими спины, отличные от 0, $^1/_2$ и 1, но наиболее важными являются поля, рассмотренные выше. При построении плотности функции Лагранжа обычно ограничиваются рассмотрением функций, которые содержат различные переменные поля не выше чем во второй степени. Это согласуется с тем, что в обычной практике уравнения поля являются дифференциальными уравнениями самое большее второго порядка.

Взаимодействие полей

До сих пор мы рассматривали только отдельные «свободные» поля. Это составляет лишь часть общей задачи, так как поля взаимодействуют между собой. Данное обстоятельство подтверждается появлением в уравнениях Максвелла, взятых в наиболее общем виде, членов, которые содержат плотности токов и зарядов и в конечном итоге описывают взаимодействие между электромагнитным полем и спинорным полем, соответствующим обычной материи. Действительно, без такого взаимодействия с полем материи нельзя было бы наблюдать никаких свойств других типов полей.

Чтобы описание включало в себя взаимодействие, предположим, что два взаимодействующих поля A и B можно описать с помощью плотности функции Лагранжа вида

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^{(A)} + \mathscr{L}^{(B)} + \mathscr{L}^{(\text{вз})},$$

где $\mathscr{L}^{(A)}$ и $\mathscr{L}^{(B)}$ относятся к изолированным «свободным» полям, а $\mathscr{L}^{(\text{вз})}$ описывает взаимодействие полей. Функция $\mathscr{L}^{(\text{вз})}$ в общем случае является скалярной функцией от обеих систем переменных поля. Такой общий случай можно проиллюстрировать следующим чисто гипотетическим примером.

Пусть A является скалярным полем с одной переменной φ, свойства которого можно вывести из плотности функции Лагранжа

$$\mathscr{L}^{(A)} = \sum_{\mu} \left(\frac{d\varphi}{dx_\mu}\right)^2 + k^2\varphi^2,$$

а B — векторным полем с плотностью функции Лагранжа

$$\mathscr{L}^{(B)} = \sum_{\nu,\,\mu} \left(\frac{d\psi_\nu}{dx_\mu}\right)^2 .$$

Тогда свойства полной системы можно описать выражением

$$\mathscr{L} = \sum_{\mu} \left(\frac{d\varphi}{dx_\mu}\right)^2 + k^2\varphi^2 + \sum_{\nu,\,\mu} \left(\frac{d\psi_\nu}{dx_\mu}\right)^2 + \mathscr{L}^{(\text{вз})}; \qquad (11.10)$$

здесь $\mathscr{L}^{(\text{вз})}$ — скалярная функция от φ и ψ_ν. Имеются две простые возможности:

$$\mathscr{L}^{(\text{вз})} = g \sum_{\mu} \psi_\mu \frac{d\varphi}{dx_\mu} \qquad (11.11\text{а})$$

и

$$\mathscr{L}^{(\text{вз})} = g'\varphi \sum_{\mu} (\psi_\mu)^2, \qquad (11.11\text{б})$$

где g и g' не зависят от переменных поля и называются *константами связи*. Говорят, что соотношение (11.11а) дает градиентную связь между полями, а соотношение (11.11б) — прямую связь между полями.

Предполагая, что имеет место изображаемая функцией (11.11а) градиентная связь, представим плотность функции Лагранжа в следующем виде:

$$\mathscr{L}=\sum_{\mu}\left(\frac{d\varphi}{dx_{\mu}}\right)^{2}+k^{2}\varphi^{2}+\sum_{\nu,\,\mu}\left(\frac{d\psi_{\nu}}{dx_{\mu}}\right)^{2}+g\sum_{\mu}\psi_{\mu}\frac{d\varphi}{dx_{\mu}}. \tag{11.10'}$$

Обычным способом получаем соответствующие уравнения движения, а именно

$$2\sum_{\mu}\frac{d^{2}\varphi}{dx_{\mu}^{2}}-2k^{2}\varphi=-g\sum_{\mu}\frac{d\psi_{\mu}}{dx_{\mu}},\qquad \sum_{\mu}\frac{d^{2}\psi_{\nu}}{dx_{\mu}^{2}}=g\frac{d\varphi}{dx_{\nu}}. \tag{11.12}$$

Таким образом, учет взаимодействия между полями приводит к появлению соответствующих членов, которые представлены правыми частями уравнений (11.12) и которых раньше волновые уравнения не содержали.

Опять нужно подчеркнуть, что рассмотренный пример является чисто гипотетическим, но служит для иллюстрации общего случая. В общем случае точные решения можно найти только для уравнений, относящихся к независимым полям. Более сложные уравнения для взаимодействующих систем обычно рассматриваются с помощью некоторых методов теории возмущений, при применении которых члены взаимодействия предполагаются малыми. Этот метод приемлем для случая взаимодействия между электромагнитным полем и обычной материей, но в некоторых известных случаях константы связи столь велики, что метод становится неприменимым. Разработка новых методов решения таких задач составляет одну из основных проблем современной теоретической физики.

Теоретические исследования взаимодействия между элементарными частицами в значительной степени сводятся к проверке наиболее простых видов функций $\mathscr{L}^{(\text{вз})}$, и этот подход в целом оказался плодотворным. К числу более сложных возможностей относится случай взаимодействия между несколькими полями.

В вышепроведенных рассуждениях предполагалось, что все переменные, входящие в плотность функции Лагранжа взаимодействия, относятся к одной и той же точке поля, или, иначе говоря, что взаимодействие является локальным. Однако эти соображения можно расширить с тем, чтобы охватить более общий вид уже нелокального взаимодействия. Все эти обобщения требуют внимательного исследования, так как, несмотря на достигнутые теоретические успехи, пока что получено сравнительно мало результатов. Простые теории привлекательны, но нет логических оснований предполагать, что все явления можно описать с помощью простых функций Лагранжа.

Взаимодействие между магнитным полем и материей

Как было подчеркнуто ранее, полное описание спинорных полей, связанных с материей, выходит за пределы нашей книги. Соответственно нецелесообразно рассматривать взаимодействие между электромагнитным и спинорным полями. Тем не менее в этот вопрос можно внести известную ясность, рассматривая такое взаимодействие другим путем.

Было установлено, что уравнения, справедливые для «свободного» электромагнитного поля, могут быть выведены из принципа Гамильтона, записанного в следующем виде:

$$\delta \int\int\int\int \sum_{\mu,\nu} a \left(\frac{dA_\mu}{dx_\nu} - \frac{dA_\nu}{dx_\mu} \right)^2 dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = 0. \qquad (11.13)$$

Кроме того, в гл. X было найдено, что правильные релятивистские уравнения движения заряженной материальной точки в электромагнитном поле могут быть выведены из такой формы принципа Гамильтона:

$$\delta \int \left[-mc^2 \sqrt{1-\beta^2} + \sum_{\mu} \frac{e}{c} \dot{x}_\mu A_\mu \right] dt = 0. \qquad (11.14)$$

Можно соединить оба этих принципа и установить один принцип, описывающий поведение объединенной системы, положив

$$\delta \int \left[\frac{1}{ic} \left(-mc^2 \sqrt{1-\beta^2} + \sum_{\mu} \frac{e}{c} \dot{x}_\mu A_\mu \right) + \right.$$
$$\left. + \int \alpha \sum_{\mu,\nu} \left(\frac{dA_\mu}{dx_\nu} - \frac{dA_\nu}{dx_\mu} \right)^2 d^3x \right] dx_4 = 0. \qquad (11.15)$$

Этот новый принцип, конечно, приводит к правильным уравнениям движения материальной точки; чтобы получить эти уравнения, надо провести варьирование по координатам точки. Результат варьирования функций A_μ можно получить только после предварительного преобразования равенства (11.15) таким образом, чтобы все члены, содержащие A_μ, вошли под один общий знак интеграла. С этой целью полагаем

$$\frac{e}{c} \dot{x}_\mu A_\mu = \int \frac{e}{c} \dot{x}_\mu A_\mu \delta (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\, d^3x, \qquad (11.16)$$

где $\delta (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \equiv \delta (x_1 - x_1^{(0)})\, \delta (x_2 - x_2^{(0)})\, \delta (x_3 - x_3^{(0)})$, причем $\mathbf{r}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ — радиус-вектор материальной точки, а $\delta (x - x_0)$ — дельта-функция Дирака, определяемая так:

$$\delta (x - x_0) = 0 \quad \text{при } x \neq x_0 \quad \text{и} \quad \int f(x)\, \delta (x - x_0)\, dx = f(x_0), \qquad (11.17)$$

если область интегрирования содержит x_0.

Далее мы отождествляем $e\delta (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ с плотностью заряда ϱ (в точном соответствии с предыдущим она бесконечна при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ и равна нулю в других точках); отсюда

$$\int \varrho\, d^3x = \int e\delta (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\, d^3x = e. \qquad (11.18)$$

Затем полагаем $\varrho \dot{x}_\mu = j_\mu$, где j_i — три компоненты нормального вектора тока и $j_4 = ic\varrho$. После таких изменений равенство (11.15) принимает вид

$$\delta \int \left\{ -mc^2 \sqrt{1-\beta^2} + \right.$$
$$\left. + \int \left[\frac{1}{c} \sum_{\mu} j_\mu A_\mu + ic\alpha \sum_{\mu,\nu} \left(\frac{dA_\mu}{dx_\nu} - \frac{dA_\nu}{dx_\mu} \right)^2 \right] d^3x \right\} dx_4 = 0. \qquad (11.15')$$

Величины A_μ можно теперь варьировать, и это дает

$$4ic^2\alpha \sum_\nu \frac{d}{dx_\nu}\left(\frac{dA_\mu}{dx_\nu}-\frac{dA_\nu}{dx_\mu}\right)=j_\mu. \tag{11.19}$$

В более привычных обозначениях эти уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{E}}{dt}&=-\frac{1}{4\alpha ic^2}\mathbf{j},\\ \nabla\cdot\mathbf{E}&=-\varrho/4\alpha ic.\end{aligned}\right\} \tag{11.20}$$

Если $\alpha=-1/16\pi ic$, то эти уравнения можно отождествить с наиболее общей формой уравнений Максвелла, которая справедлива при отличных от нуля плотностях токов и зарядов.

Так как все соответствующие уравнения движения можно вывести из принципа Гамильтона в его объединенной форме (11.15), то, следовательно, могут быть представлены и взаимодействующие системы. В результате установления соответствия между выведенной и принятой формой уравнений было найдено значение постоянной α, которое иначе было бы произвольным. Так получилось потому, что все выражение было записано как однородная функция и все члены подинтегральной функции в равенстве (11.15′) соответствовали энергии или плотности энергии. Это можно усмотреть из равенства

$$ic\alpha\sum_{\mu,\nu}\left(\frac{dA_\mu}{dx_\nu}-\frac{dA_\nu}{dx_\mu}\right)^2=-\frac{1}{8\pi}(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2), \tag{11.21}$$

где легко узнать известные выражения для плотностей энергии электрического и магнитного полей.

Член $\sum_\mu(1/c)j_\mu A_\mu$ можно отождествить с плотностью функции Лагранжа взаимодействия полей в рассматриваемом случае. Он имеет тот же вид, что и соответствующий член при исследовании более общего случая, в котором взаимодействие осуществляется между электромагнитным и спинорным полями.

Метод Гамильтона

Исходным пунктом изложения метода Гамильтона, как и в гл. X, служит определение сопряженного импульса посредством формулы

$$\pi^{(r)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} = \frac{1}{ic}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta,_4^{(r)}}\,. \tag{11.22}$$

Это название здесь еще сохранено, но сами величины потеряли теперь значение импульсов в первоначальном смысле. Некоторое затруднение вызывает то, что так определенные величины не являются релятивистскими, поскольку они выделяют специальным образом временну́ю координату. Путь обхода этой трудности будет указан в последнем разделе. Во многих случаях ею можно пренебречь, и в данный момент мы будем довольствоваться определением (11.22) и переведем формулы, полученные методом Гамильтона в гл. IX, в обозначения, принятые для четырехмерных тензоров.

Плотность функции Гамильтона $\mathcal{H}$ определяется как

$$\mathcal{H} = \sum_r \dot{\eta}^{(r)}\pi^{(r)} - \mathcal{L} = \sum_r \eta,_4^{(r)}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta,_4^{(r)}} - \mathcal{L}. \tag{11.23}$$

Канонические уравнения получаются, как и раньше, т. е.

$$\dot{\pi}^{(r)} = -\frac{\delta H}{\delta \eta^{(r)}}\,, \quad \dot{\eta}^{(r)} = \frac{\delta H}{\delta \pi^{(r)}}\,. \tag{9.23$'$}$$

Нет, однако, смысла представлять эти уравнения в новых обозначениях ввиду их существенно неинвариантного характера.

Плотность функции Лагранжа, представляющая все свойства любого данного поля, всегда определяется с точностью до аддитивной дивергенции четырехмерной векторфункции от различных переменных поля.

Это происходит потому, что уравнения поля и интегральные функции, подобные функции H и имеющие определенный физический смысл, не меняются при таких добавлениях[1]). С другой стороны, эти добавления изменяют функциональную зависимость в функции Гамильтона и в других функциях типа плотности. Получающаяся степень свободы используется для того, чтобы обеспечить симметричность тензора натяжений — энергии — импульсов, как это разъясняется в следующем разделе.

Первоначально энергия была определена в связи с изучением систем обычных материальных частиц; поэтому этот термин не имеет смысла, если только его нельзя будет снова отнести к таким системам. С логической точки зрения отсюда следует, что нельзя ссылаться на энергию поля, пока не будет учтено взаимодействие между рассматриваемым полем и полем, связанным с обычной материей. В сущности речь идет о том же соотношении, которое было установлено в предыдущем разделе, где было найдено значение произвольной постоянной, входящей в плотность функции Лагранжа для электромагнитного поля.

Законы сохранения

Можно показать, что одновременно с остальными результатами законы сохранения плотностей, изложенные в гл. IX, применимы при тех же ограничениях и к полям, т. е.

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt}+\sum_{j}\frac{dS_j}{dx_j}=0, \tag{9.25'}$$

$$\frac{d\mathcal{G}_j}{dt}-\sum_{i}\frac{dT_{ij}}{dx_i}=0. \tag{9.29}$$

Рассматриваемые величины, однако, можно объединить с помощью одного общего определения, положив

$$T_{\mu\nu}=\sum_{r}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{,\mu}^{(r)}}\eta_{,\nu}^{(r)}-\delta_{\mu\nu}\mathcal{L}\,, \tag{11.24}$$

[1]) Вариация дополнительных членов, появляющихся под знаком интеграла в принципе Гамильтона, равна нулю. Эти члены при интеграции дают нуль, как это имело место и при рассмотрении законов сохранения в гл. IX.

так как

$$\left.\begin{aligned} T_{4j} &= ic \sum_r \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} \eta_{,j}^{(r)} = -ic\mathscr{G}_j, \\ T_{i4} &= \frac{1}{ic} \sum_r \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{,i}^{(r)}} \dot{\eta}^{(r)} = \frac{1}{ic} S_i, \\ T_{44} &= \sum_r \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} \dot{\eta}^{(r)} - \mathscr{L} = \mathscr{H} \end{aligned}\right\} \qquad (11.24')$$

и компоненты (ij) тождественны с теми, которые имели те же обозначения в гл. IX.

Величину $T_{\mu\nu}$ можно определить как четырехмерный тензор второго ранга, который обычно называют *тензором натяжений — энергии — импульсов*. Легко видеть, что четыре закона сохранения можно теперь выразить с помощью одного общего соотношения для дивергенции

$$\sum_\mu \frac{dT_{\mu\nu}}{dx_\mu} = 0. \qquad (11.25)$$

Дивергенция тензора второго ранга является вектором. Соотношение (11.25) утверждает, что в данном частном случае этот вектор равен нулю.

Так как $T_{\mu\nu}$ есть тензор, то четыре интеграла

$$\int T_{4\mu}\, d^3x \equiv \int\int\int T_{4\mu}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

являются компонентами четырехмерного вектора. Из равенств (11.24′) имеем

$$\left.\begin{aligned} \int T_{4j}\, d^3x &= -ic \int \mathscr{G}_j\, d^3x = -icG_j, \\ \int T_{44}\, d^3x &= \int \mathscr{H}\, d^3x = H; \end{aligned}\right\} \qquad (11.26)$$

эти величины можно отождествить с компонентами вектора

$$P_\mu = \left(G_1,\ G_2,\ G_3,\ \frac{iH}{c}\right). \qquad (11.27)$$

Это аналогично результату для релятивистской материальной точки и связанного с ней вектора, называемого обобщенным четырехмерным импульсом поля. Его можно рассматривать как полный обобщенный четырехмерный импульс материальных точек, связанных с полем.

Следует отметить, что условия, установленные в гл. IX для постоянства величины P_μ во времени, еще применимы, т. е. независимые переменные x_μ не должны явно входить в функцию $\mathcal{L}$, каждая система должна иметь конечную протяженность и ее физические границы должны лежать в пределах области интегрирования или должно существовать некоторое периодическое граничное условие.

Мы предполагаем, что, кроме сохранения количества движения, имеет место и сохранение обобщенного волнового момента количества движения. Можно показать, что для этого требуется симметричность тензора $T_{\mu\nu}$. Это является обобщением результата, полученного в гл. IX, и обычно считается, что поле удовлетворяет данному условию. Во многих случаях сама форма, в которой берется плотность функции Лагранжа, приводит к тензору, который уже симметричен. В других случаях тензор оказывается несимметричным, но это всегда можно исправить путем дополнительного определения, состоящего в прибавлении к первоначальному тензору $T_{\mu\nu}$ другого тензора $T'_{\mu\nu}$, удовлетворяющего соотношениям

$$\left.\begin{aligned} & T_{\mu\nu}+T'_{\mu\nu}=T_{\nu\mu}+T'_{\nu\mu}, \qquad \sum_{\mu}\frac{dT'_{\mu\nu}}{dx_\mu}=0, \\ & \int T'_{4\mu}\,d^3x=0. \end{aligned}\right\} \tag{11.28}$$

Эти условия согласуются с той степенью неопределенности в задании функции $\mathcal{L}$, о которой говорилось в предыдущем разделе.

Можно определить интегралы движения и более удобным приемом, чем указанный здесь прием, а именно получить их систематическим путем из принципа Гамильтона.

Ковариантная формулировка

Желательность ковариантной формулировки была уже отмечена ранее, и метод Лагранжа, развитый в этой главе, умышленно излагался в соответствующем виде. Это оказывается неверным для метода Гамильтона, который основан на определении канонического импульса в виде

$$\pi^{(r)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} = \frac{1}{ic} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{,4}^{(r)}} . \qquad (11.22)$$

Так определенные величины, очевидно, не являются инвариантами преобразования Лоренца. Это создает принципиальную трудность в связи с переходом к квантовой теории. Как уже было указано в связи с механикой сплошных сред, правила квантования обычно вводятся определением значений коммутаторов для операторов, изображающих сопряженные переменные[1]). Если квантовое поведение нужно описать в релятивистских понятиях, то эти коммутаторы должны быть инвариантными; в понятиях же, связанных с выбранным нами определением, они не будут таковыми.

Чтобы разрешить это затруднение, надо принять более общее определение величины $\pi^{(r)}$, а именно

$$\pi^{(r)} = \sum_{\mu} n_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{,\mu}^{(r)}} , \qquad (11.29)$$

где n_{μ} изображает произвольное времени-подобное направление в четырехмерном пространстве Минковского, т. е.

$$\sum_{\mu} n_{\mu}^2 = -1. \qquad (11.30)$$

Ограничение, обязывающее рассматривать лишь времени-подобные направления, связано с тем требованием, чтобы допускалось распространение возмущений поля только между событиями, разделенными во времени.

Этот способ может дать при своем развитии соответствующий ковариантный метод; но здесь мы ограничиваемся тем, что указываем возникающую при этом трудность и общий путь ее преодоления.

---

[1]) Это справедливо только для полей, связанных с частицами, подчиняющимися статистике Бозе, т. е. с частицами, обладающими целыми значениями спина. Для тех же полей, которые подчиняются статистике Ферми—Дирака, т. е. для частиц с полуцелыми значениями спина, квантование вводится путем определения значения некоторого *антикоммутатора*.

Резюме

Приведенный в этой главе краткий очерк лагранжевой и гамильтоновой формулировок теории поля может служить лишь введением к предмету. Наша цель состояла в том, чтобы подчеркнуть общность методов аналитической механики, которые первоначально были развиты как замена законов Ньютона при описании движения материальных точек. Подробная разработка теорий поля является длинным и сложным процессом, но формулировка задач этих теорий сравнительно проста и изящна. Естественно, что в таком упрощенном описании многие трудности не были отмечены, но основная структура теории должна быть достаточно ясна.

ЛИТЕРАТУРА[1])

В этом списке помещены лишь избранные работы. Ссылки на ряд статей более специального характера даны в подстрочных примечаниях в тексте книги.

а. Работы, содержащие критическое исследование основ механики.

д'Абро (D' Abro A.)
The evolution of scientific thought, Dover Press, New York, 1950.

Банах (Banach S.)
Mechanics, Polish math. soc., Warsaw, 1951.

Бриджмен (Bridgman P. W.)
The logic of modern physics, Macmillan, 1927.

* Вариационные принципы, сборник статей под редакцией Л. С. Полака, Физматгиз, 1959.

Дюга (Dugas R.)
Histoire de la mécanique, Griffon, Neuchâtel, 1950.

Йорграу, Манделстам (Yourgrau W., Mandelstam S.) Variational principles in dynamics and quantum theory, Pitman, 1955.

Линдси, Маргенау (Lindsay R. B., Margenau H.)
Foundations of physics, Dover Press, New York, 1957.

Мах (Mach E.)
Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt, Leipzig, 1883.

Синдж, Гриффит (Synge J. L., Griffith B. A.)
Principles of mechanics, McGraw-Hill, New York, 1942.

б. Курсы, охватывающие приблизительно тот же круг вопросов, что и настоящая книга, но содержащие подробное и развитое изложение предмета.

* Аппель П.
Теоретическая механика, т. I, II, Физматгиз, 1960.

---

[1]) Звездочкой отмечены работы, дополнительно включенные в список литературы редактором перевода.— *Прим. ред.*

* Валле Пуссен Ш. Ж.
Лекции по теоретической механике, Издатинлит, т. I, 1948, т. II, 1949.

* Гантмахер Ф. Р.
Лекции по аналитической механике, Физматгиз, 1960.

Голдстейн (Goldstein H.)
Classical mechanics, Addison-Wesley, Camb., Mass., 1950; русский перевод: Голдстейн Г., Классическая механика, Гостехиздат, М., 1957.

Корбен, Стил (Corben H. C., Stehle P.)
Classical mechanics, Wiley, New York, 1950.

* Ламб Г.
Теоретическая механика, ОНТИ, т. II, 1935, т. III, 1936.

Ланцош (Lanczos C.)
The variational principles of mechanics, Univ. Toronto Press, 1949.

* Леви-Чивита Т., Амальди А.
Курс теоретической механики, Издатинлит, т. I, 1952, т. II, 1951.

* Розе Н. В.
Лекции по аналитической механике, ч. I, Изд. ЛГУ, 1938.

* Суслов Г. К.
Теоретическая механика, Гостехиздат, 1946.

Уиттекер (Whittaker E. T.)
Analytical dynamics, Dover Press, New York, 1944; русский перевод: Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937.

в. Более обширные работы, содержащие ряд интересных разделов.

Бриллюэн (Brillouin L.)
Les tenseurs en mécanique et en élasticité, Masson, Paris, 1949.

Зоммерфельд (Sommerfeld A.)
Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. I, II, III, Leipzig, 1945—1949; русские переводы: Зоммерфельд А., Механика, Издатинлит, 1947; Зоммерфельд А., Механика деформируемых сред, Издатинлит, 1954; Зоммерфельд А., Электродинамика, Издатинлит, 1958.

Иоос (Joos G.)
Theoretical physics, Blackie, 1951.

Линдси (Lindsay R. B.)
Concepts and methods of theoretical physics, Nostrand, New York, 1951.

Менцел (Menzel D. H.)
Mathematical physics, Prentice Hall, New York, 1953.

Морс, Фешбах (Morse P. M., Fesbach H.)
Methods of theoretical physics, vol. I, McGraw-Hill, New York, 1953; русский перевод: Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, т. I, Издатинлит, 1958.

Толмен (Tolman R. C.),
The principles of statistical mechanics, O. U. P., 1950.

г. Математическое изложение вариационного исчисления с его приложениями на уровне, необходимом для дальнейшего чтения.

* Гурса Э.
Курс математического анализа, т. III, ч. II, Интегральные уравнения, Вариационное исчисление, ГТТИ, 1934.

Кимболл (Kimball W. S.)
Calculus of variations, Butterworth, 1952.

Фокс (Fox C.)
An introduction to the calculus of variations, O. U. P., 1950.

д. Работы, полностью или частично посвященные специальной теории относительности.

Бергман (Bergmann P. G.)
An introduction to the theory of relativity, Prentice Hall, New York, 1942; русский перевод: Бергман П., Введение в теорию относительности, Издатинлит, 1947.

Дингл (Dingle H.)
The special theory of relativity, Methuen, 1946.

Мак-Кри (McCrea W. H.)
Relativity physics, Methuen, 1949.

Мёллер С. (Møller C.)
The theory of relativity, O. U. P., 1952.

* Фок В. А.
Теория пространства, времени и тяготения, ГТТИ, 1955.

* Эддингтон А. С.
Теория относительности, ОНТИ, 1934.

е. Работы, посвященные классической теории поля.

* Иваненко Д. Д., Соколов А. А.
Классическая теория поля, ГИТТЛ, 1949.

Кахана, Коиш (Kahana S., Coish H. R.)
Classical meson theory, *Am. J. Phys.*, **24** (1956), 225—239; 390—399.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.
Теория поля, Физматгиз, 1960.

Пановский, Филлипс (Panofsky W. K. H., Phillips M.)
Classical electricity and magnetism, Addison-Wesley, Camb., Mass., 1955.

ж. Курсы по квантовой теории поля с изложением ее классических основ.

Вентцель (Wentzel G.)
Quantum theory of fields, Interscience Publishers, New York, 1949[1].

Ганн (Gunn J. G.)
Theory of radiation, Rep. on progr. in physics, vol. 18, Phys. Soc., London, 1955.

Корсон (Corson E. M.)
Introduction to tensors, spinors and relativistic wave equations, Blackie, 1953.

Швебер, Бете, Гофман (Schweber S. S., Bethe H. A., De Hoffman F.)
Mesons and fields, vol. I, Row, Peterson and Co., New York, 1955; русский перевод: Швебер С., Бете Г., Гофман Ф., Мезоны и поля, т. I. Поля, Издатинлит, 1957.

Яух, Рорлих (Jauch J. M., Rohrlich F.)
The theory of photons and electrons, Addison-Wesley, Camb., Mass., 1955.

---

[1]) Эта книга представляет собой значительно расширенное переиздание книги, вышедшей первоначально на немецком языке (Wentzel G., Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder, Wienn, 1943) и имеющейся в русском переводе (Вентцель Г., Введение в квантовую теорию волновых полей, ГИТТЛ, 1947).— *Прим. ред.*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Дж. У. Лич

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Редактор *Г. М. Ильичева*
Переплет художника *В. П. Заикина*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технические редакторы *Н. В. Зотова* и *Ю. И. Коротеева*
Корректор *А. Ф. Рыбальченко*

Сдано в производство 5/I 1961 г. Подписано к печати 10/V 1961 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$=2,8 бум. л., 9,0 печ. л. Уч.-изд. л. 7,5. Изд. № 1/0392. Цена 73 к. Зак. 802.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ. Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 5 Мосгорсовнархоза. Москва, Трехпрудный пер., 9.