

В.А.Баженов, Г.М.Іванченко,
О.В.Шишов, С.О.Пискунов

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

**Розрахункові вправи. Задачі.
Комп'ютерне тестування**

Навчальний посібник

Київ – 2013

ЗМІСТ

1. Система сил на площині.....	5
1.1. Короткі теоретичні відомості	5
1.2. Довільна система сил	11
1.3. Задачі для самоконтролю	16
2. Кінематичний аналіз плоских систем і визначення реакцій у в'язях	17
2.1. Короткі відомості про кінематичний аналіз	17
2.2. Приклади кінематичного аналізу розрахункових моделей	27
2.3. Схеми задач для самостійного розв'язування	41
3. Розрахунок плоских статично визначуваних ферм	43
3.1. Короткі теоретичні відомості	43
3.2. Приклади визначення внутрішніх зусиль у стержнях простих ферм	47
3.3. Схеми задач для самостійного розв'язування	53
4. Статично визначувані просторові ферми.....	54
4.1. Короткі теоретичні відомості	54
4.2. Приклад розв'язування просторової ферми	60
4.3. Задачі для самостійного розв'язання	64
5. Розрахунок шарнірно-консольної балки	65
5.1. Основні теоретичні відомості	65
5.2. Приклад розрахунку шарнірно-консольної балки	67
5.3. Задачі для самостійного розв'язування	71
6. Розрахунок тришарнірних арок.....	72
6.1. Короткі теоретичні відомості	72
6.2. Приклади визначення внутрішніх зусиль	75
6.3. Схеми задач для самостійного розв'язування.....	85
7. Статично визначувані рами.....	86
7.1. Основні теоретичні відомості	86
7.2. Розрахунок простої рами.....	89
7.3. Розрахунок складеної рами	93
7.4. Розрахунок рами із замкненим контуром	99
7.5. Задачі для самостійного розв'язання	103
8. Розрахунок на рухоме навантаження	104
8.1 Короткі теоретичні відомості	104
8.2 Лінії впливу для двоопорної балки	104
8.3 Лінії впливу для консольної балки	108
8.4 Навантаження ліній впливу	110
8.5 Лінії впливу для шарнірно-консольної балки	114
8.6 Лінії впливу в фермах	116
8.7 Лінії впливу в шпренгельних фермах	123

8.8	Приклади визначення зусиль за допомогою ліній впливу	132
8.9	Задачі для самостійного розв'язування	142
9.	Обчислення переміщень у стержневих системах.....	143
9.1.	Короткі теоретичні відомості	143
9.2.	Визначення переміщення в рамі	143
9.3.	Визначення переміщення в фермі	149
9.4.	Визначення переміщення від дії температури	151
9.5.	Визначення переміщення від змушених переміщень опор	153
9.6.	Задачі для самостійного розв'язування	155
10.	Розрахунок статично невизначуваної рами методом сил..	157
10.1.	Короткі теоретичні відомості	157
10.2.	Розрахунок рами методом сил	165
10.3.	Розрахунок симетричної рами методом сил	172
10.4.	Задачі для самостійного опрацювання	178
11.	Статично невизначувані ферми.....	179
11.1.	Короткі теоретичні відомості	179
11.2.	Приклад розрахунку	184
11.3.	Задачі для самостійного опрацювання.....	194
12.	Нерозрізна балка	195
12.1	Основні теоретичні відомості	195
12.2	Розрахунок статично невизначуваної балки на постійне навантаження методом трьох моментів	202
12.3	Розрахунок нерозрізної балки на тимчасові навантаження методом моментних фокусів	206
12.4	Побудова ліній впливу.....	217
12.5	Задачі для самостійного опрацювання	225
13.	Метод переміщень	225
13.1.	Короткі відомості про метод переміщень	225
13.2.	Розрахунок несиметричної рами в канонічній формі	233
13.3.	Розрахунок несиметричної рами в розгорнутій формі	242
13.4.	Розрахунок симетричної рами на симетричне навантаження	246
13.5.	Розрахунок симетричної рами в розгорнутій формі	256
13.6.	Задачі для самостійного опрацювання	263
14.	Метод скінченних елементів для стержневих систем	264
14.1.	Основні положення методу скінченних елементів	264
14.2.	Приклад розрахунку плоскої рами	278
14.3.	Приклад розв'язування просторової рами методом скінченних елементів.	291
14.4.	Приклад розв'язування статично невизначуваної шарнірно-стержневої системи методом скінченних елементів	308
14.5.	Схеми для самостійного розв'язування	318
15.	Розрахунок рам на стійкість	319
15.1.	Короткі теоретичні відомості	319
15.2.	Приклад розрахунку рами на стійкість	324
15.3.	Розрахунок на стійкість симетричної рами	339
15.4.	Задачі для самостійного розв'язування	347
16.	Динамічний розрахунок рам	348
16.1.	Короткі відомості про розрахунок на динамічні дії	348
16.2.	Приклад динамічного розрахунку рами	354
16.3.	Виконання розрахунково-графічної роботи з використанням комп'ютерної програми	370
16.4.	Задачі для самостійного опрацювання	372

17. Навчальний програмний комплекс АСИСТЕНТ.....	373
17.1. Основні характеристики.....	373
17.2. Запуск комплексу АСИСТЕНТ.....	374
17.3. Керування роботою комплексу.....	374
17.4. Виконання розрахункових робіт.....	375
17.5. Статичні та динамічні розрахунки стержневих систем.....	378
18. Обчислювальний комплекс Structure CAD.....	386
18.1. Основні характеристики	386
18.2. Установлення ОК SCAD	389
18.3. Завантаження ОК SCAD і основні елементи керування	390
18.4. Основні етапи створення розрахункової схеми в ОК SCAD	397
18.5. Виконання розрахунку в ОК SCAD	426
18.6. Перегляд і документування результатів	429
Додатки	434
Література	440

1. Система сил на площині

1.1.Короткі теоретичні відомості

Сила – це фізична величина, яка визначає кількісну міру механічної взаємодії тіл. Сукупність сил, що діють на тіло, називається **системою сил**. Дія сил обумовлює механічний стан тіла, зміну з часом його положення у просторі відносно інших тіл та зміну його форми. Одиницею виміру сили в Міжнародній системі СІ є **ньютон** – $1Н$. Це досить мала величина для використання в інженерних розрахунках у будівельній справі. Зручніше працювати з тисячами ньютон (кілоньютон) $1кН=10^3Н$ та мільйонами ньютон (меганьютон) $1МН=10^6Н$.

Сила є векторною величиною. На площині її визначають декілька параметрів: абсолютна величина (модуль), напрямок та лінія дії. При вивченні деформацій тіл важливо знати також точку прикладання сили. Ідеалізовані тіла, які міняють свою форму лише за рахунок деформацій, називатимемо **дисками**. Сила на схемах і в текстах розрахунків позначається великою латинською літерою зі стрілочкою зверху. При потребі літерні позначення сил використовуються з нижніми цифровими індексами. Графічно вектор сили зображається відрізком зі стрілкою, спрямованою в бік дії сили. Такий відрізок у багатьох випадках має бути пов'язаним з точкою прикладання сили, наприклад сили \vec{F} та \vec{P} , які діють в точках A і B на диск D (рис.1.1).

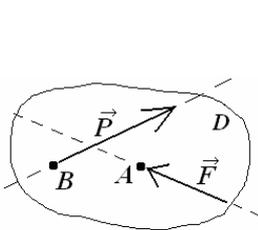


Рис.1.1

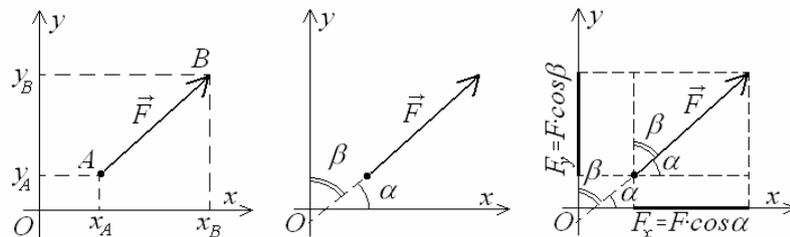


Рис.1.2

Довжина відрізка при аналітичному розв'язуванні задач довільна – схематична, а при графічному повинна в певному масштабі сил дорівнювати модулю сили $|\vec{F}| = F$, а напрямок має відповідати напрямку її дії на схемі. Запис $\vec{T} = -\vec{P}$ означає, що дві сили мають однаковий модуль, протилежні напрямки і діють вздовж однієї прямої або паралельних прямих. Аналітичне визначення сили передбачає **попередній вибір системи координат**, в якій задаються проекції сили на осі (рис. 1.2,а). Проекції вектора ще носять назву "координат вектора". Позначаються проекції вектора тією ж літерою, що й його модуль (але без стрілочки зверху), із назвою осі в нижньому індексі, наприклад F_x, F_y . Вони чисельно дорівнюють різниці координат кінцевої і початкової точок вектора на відповідній осі, проградуйованій в одиницях вимірювання сил. Також вважається що вектор зада-

но, якщо відомі його модуль і кути між додатними напрямками осей координат та напрямком вектора сили – направляючі кути (рис.1.2,б). На практиці проекцією сили на вісь визначатимемо як добуток модуля сили на косинус направляючого кута до відповідної осі (рис.1.2,в). Слід мати на увазі, що косинус прямого кута дорівнює нулю, а тупого кута – від’ємний. Тому проекція сили на вісь також може мати нульове значення (якщо лінія дії вектора сили перпендикулярна до цієї осі) або бути меншою за нуль.

Розділ механіки, в якому вивчаються загальні положення про сили та умови рівноваги тіл називається **статикою**. Під рівновагою розуміють стан спокою тіла по відношенню до інших тіл (відсутність прискорень у нерухомій системі координат). У статисти розглядають дві основні задачі: приведення системи сил, що діє на тіло, до найпростішого вигляду та визначення умов рівноваги сил. Тіла можуть бути вільними, переміщенню яких ніщо не перешкоджає. Ідеалізовані пристрої та інші тіла, які утримують тіло, механічний стан якого вивчається, від певних переміщень (кутових або лінійних) називаються **в’язями**, а саме тіло – не вільним. Сили взаємодії тіл, що виникають у в’язях, називаються **реакціями**.

В основі статички лежить низка аксіом, які узагальнюють життєвий досвід, численні експерименти та спостереження за рівновагою і рухом тіл.

Аксіома 1. Вільне абсолютно тверде тіло під дією двох сил може знаходитись у рівновазі лише тоді, коли ці сили мають однакові модулі, діють вздовж однієї прямої і мають протилежні напрями $\vec{F} = -\vec{P}$ (рис.1.3). Така система сил є зрівноваженою.

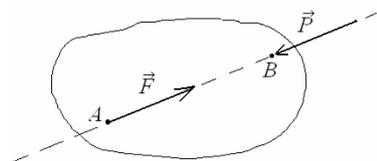


Рис.1.3

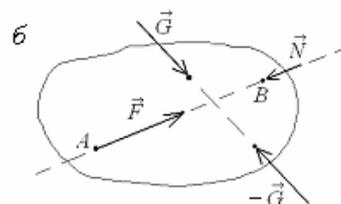
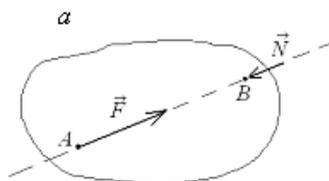


Рис.1.4

Під дією однієї сили тіло не може бути у рівновазі.

Аксіома 2. Дія заданої системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо до неї додати або від неї забрати зрівноважену систему сил (рис.1.4).

Не змінюючи механічного стану тіла силу можна переносити вздовж лінії дії.

Аксиома 3. Система двох сил, прикладених до точки A , має рівнодійну, яка зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах і має початок у точці A (рис.1.5).

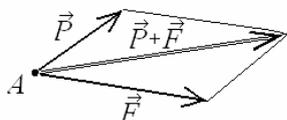
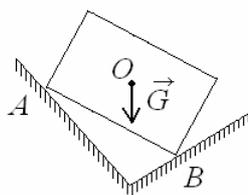
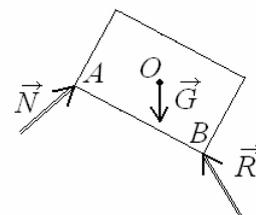


Рис.1.5



а



б

Рис.1.6

Ця аксіома ще називається додаванням векторів за **правилом паралелограма**.

Вектори-доданки називатимемо **компонентами** вектора-суми.

Аксиома 4. Сили взаємодії двох матеріальних тіл завжди рівні за модулем і протилежні за напрямом – **дії завжди відповідає рівна і протилежна протидія**.

Аксиома 5. Рівновага тіла, що може деформуватись, не порушиться, якщо тіло вважати абсолютно твердим.

Аксиома 6. Не вільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо всі в'язі замінити реакціями в них (рис.1.6).

Залежно від взаємного розміщення сил на площині система сил може бути збіжною або довільною.

Збіжна система сил

Збіжною називається система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці (рис.1.7). Така система приводиться до однієї сили, яка носить назву рівнодійної (еквівалентної) – сили, дія якої на абсолютно тверде тіло така ж, як і вихідної системи. Лінія дії рівнодійної сили також проходить через точку перетину всіх сил системи.

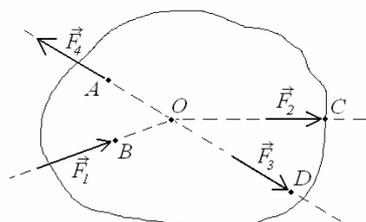


Рис. 1.7

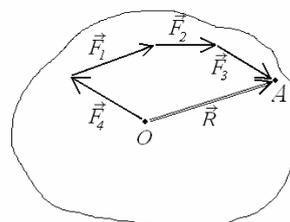


Рис.1.8

Графічно для пошуку вектора рівнодійної сили потрібно визначити геометричну суму векторів всіх сил-доданків. Для цього можна скористатись правилом трикутника (багатокутника) і створити ланцюжок вишикуваних в будь-якій послідовності сил, перша і остання точки якого визначають шуканий вектор (рис.1.8). Причому, початок цього вектора співпадає з першою точкою силового

ланцюжка – точкою O , а закінчення – з останньою – точкою A . Також можна декілька разів скористатись правилом паралелограма, додавши спочатку будь-які дві сили із системи і далі послідовно додавати до отриманого вектора-суми чергову силу (рис.1.9 *a-г*). Графічне розв’язування будь-якої задачі потрібно виконувати в оптимальному масштабі. Дрібні зображення приводять до втрати точності результату.

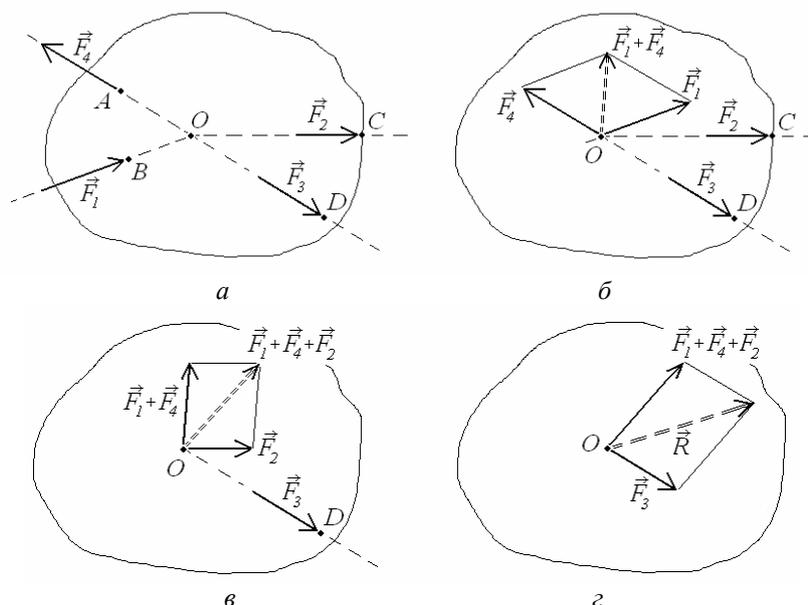


Рис. 1.9

Аналітичний пошук рівнодійного вектора збіжної системи сил полягає у визначенні проєкцій шуканого вектора на осі вибраної системи координат (зручніше працювати в прямокутній декартовій системі – системі координат з однаковими довжинами базисних векторів) з подальшим обчисленням модуля рівнодійного вектора та його направляючих кутів. Проєкції рівнодійної n сил на осі декартової системи координат дорівнюють сумі проєкцій усіх сил системи на ці осі:

$$R_x = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \alpha_i, \quad R_y = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \beta_i, \quad (1.1)$$

де R_x, R_y – проєкції вектора рівнодійної сили на осі системи координат, α_i, β_i – кути між напрямками вектора сили P_i і осями Ox та Oy відповідно.

Модуль вектора рівнодійної у прямокутній системі координат визначається співвідношенням

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad (1.2)$$

а величини направляючих кутів

$$\alpha = \arccos \frac{R_x}{R}, \quad \beta = \arccos \frac{R_y}{R}. \quad (1.3)$$

У достовірності результатів розв’язування задачі можна впевнитись після порівняння відповідей, отриманих аналітично і графічно. Для цього слід вимірюванням визначити проєкції графічно

отриманого вектора рівнодійної сили на осі прийнятої системи координат R_x та R_y та його направляючі кути.

Відносна похибка ε графічних результатів (аналітичні, очевидно, більш точні) визначається за формулою

$$\varepsilon = \frac{P_{ан} - P_{гр}}{P_{ан}} \cdot 100\% , \quad (1.4)$$

де $P_{ан}$, $P_{гр}$ – величини параметру, визначені аналітично і графічно.

Величина відносної похибки ε залежить не лише від якості розрахунку, а й від співвідношення величини, що перевіряється, до інших. Точність малих величин, визначених графічно, як правило, менша.

Приклад 1.

Дано: абсолютно тверде тіло D , збіжна система сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$

(рис.1.10):

$$P_1 = 40 \text{ кН}, P_2 = 20 \text{ кН}, P_3 = 30 \text{ кН}, P_4 = 25 \text{ кН},$$

$$\alpha_1 = 45^\circ, \beta_2 = 60^\circ.$$

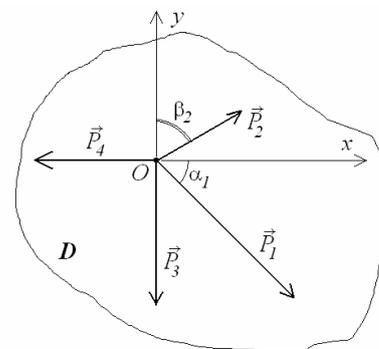


Рис. 1.10

Необхідно: привести систему сил до рівнодійної сили аналітично та графічно, порівняти результати.

Аналітичне розв'язування

Проекції вектора рівнодійної на осі системи координат Oxy :

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^4 P_{ix} = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + P_{4x} = 40 \cdot \cos 45^\circ + 20 \cdot \cos 30^\circ + 30 \cdot \cos 90^\circ + 25 \cdot \cos 180^\circ = \\ &= 40 \cdot 0,7071 + 20 \cdot 0,8660 + 30 \cdot 0 + 25 \cdot (-1) = 20,60 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y &= \sum_{i=1}^4 P_{iy} = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + P_{4y} = 40 \cdot \cos 135^\circ + 20 \cdot \cos 60^\circ + 30 \cdot \cos 180^\circ + 25 \cdot \cos 90^\circ = \\ &= 40 \cdot (-0,7071) + 20 \cdot 0,5 + 30 \cdot (-1) + 25 \cdot 0 = -48,28 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Модуль вектора рівнодійної сили:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{20,60^2 + (-48,28)^2} = 52,49 \text{ кН}.$$

Напрявні кути вектора рівнодійної сили:

$$\alpha = \arccos \frac{R_x}{R} = \arccos \frac{20,60}{52,49} = \arccos 0,3925 = 66,89^\circ;$$

$$\beta = \arccos \frac{R_y}{R} = \arccos \frac{-48,28}{52,49} = \arccos(-0,9198) = 156,89^\circ.$$

Графічне розв'язування

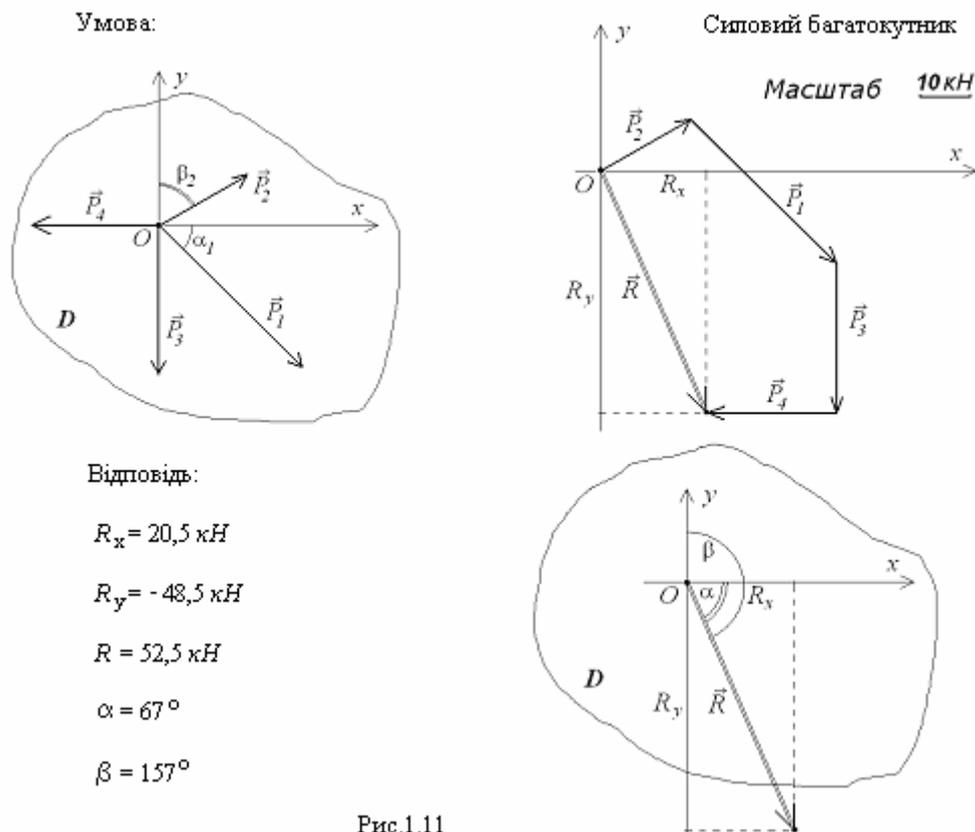


Рис.1.11

Порівняння результатів розв'язування двома способами наведено в табл.1.1 :

Таблиця 1.1.

Параметр	Графічний спосіб	Аналітичний спосіб	Відносна похибка (%)
R_x (кН)	20,5	20,60	0,5
R_y (кН)	-48,5	-48,28	0,5
R (кН)	52,5	52,49	0,1
α (град.)	67	66,89	0,2
β (град.)	157	156,89	0,1

1.2. Довільна система сил

Плоскою *довільною* називається система сил, лінії дії яких належать одній площині і не перетинаються в одній точці (рис.1.12). Еквівалентними перетвореннями така система сил може бути

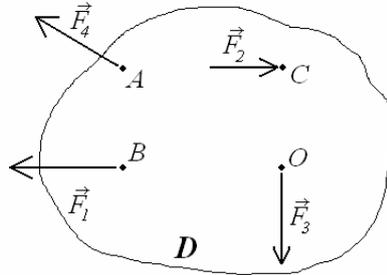


Рис. 1.12

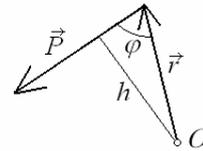


Рис. 1.13

заміненою рівнодійною силою або парою сил – двома силами, які мають однакові модулі і діють в протилежних напрямках вздовж паралельних прямих. У практичних задачах довільну систему сил зводять до вибраного центра, визначивши *головний вектор* – геометричну суму всіх сил системи, лінія дії якого проходить через центр приведення, та *головний момент* – суму моментів усіх сил відносно центра приведення. *Моментом* сили \vec{P} відносно точки (центра) O називається вектор, отриманий векторним множенням радіус-вектора \vec{r} (від центра O до точки прикладання сили) на вектор сили \vec{P} (рис. 1.13)

$$M_0(\vec{P}) = \vec{r} \times \vec{P}. \quad (1.5)$$

Згідно правил векторного добутку модуль M моменту сили відносно точки дорівнює добутку абсолютної величини сили P на відстань від точки O до лінії дії сили \vec{P} .

$$M_0(\vec{P}) = P \cdot r \cdot \sin \varphi = P \cdot h \quad (1.6)$$

(величину h називають плечем сили \vec{P} відносно точки O).

Вектор моменту перпендикулярний до площини, якій належать лінія дії сили \vec{P} і точка O . Він направлений в той бік, звідки найкоротшим поворотом \vec{r} до \vec{P} здійснюється назустріч рухові стрілки годинника. Тому в плоских задачах момент $M_0(\vec{P}_i)$ вважатимемо додатнім, якщо тверде тіло, уявно шарнірно закріплене в точці O , під дією сили \vec{P} обертатиметься назустріч годинниковій стрілці.

Момент рівнодійної сили, згідно теореми Варіньона, відносно будь-якої точки дорівнює сумі моментів всіх сил системи відносно цієї точки.

$$\text{Якщо, } \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i, \text{ то}$$

$$M_0(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n M_0(\vec{P}_i) = \sum_{i=1}^n P_i \cdot r_i \cdot \sin \varphi_i = \sum_{i=1}^n P_i \cdot h_i. \quad (1.7)$$

Приведення плоскої довільної системи сил до вибраного центра O можна виконати графічно або аналітично.

Графічне розв'язування полягає у визначенні вектора рівнодійної сили заданій системі сил та паралельного перенесення його до центра приведення. При цьому до тіла D потрібно прикласти момент, який рівнодієна утворювала відносно центра приведення до її перенесення. Рівнодійний вектор у загальному випадку можна побудувати послідовним геометричним додаванням усіх сил системи за правилом паралелограма. В часткових випадках, коли лінії дії сил паралельні, правило паралелограма не дозволяє визначити лінію дії сумарного вектора. Універсальним способом знаходження рівнодійної довільної системи сил на площині є побудова силового і мотузкового багатокутників. **Силовий багатокутник** (рис.1.14,б) – ланцюжок послідовно вишикуваних сил системи \vec{F}_i (в прийнятому масштабі сил), замкнений рівнодійним вектором \vec{R} , що поєднує першу точку цієї послідовності e з останньою – d . В околі силового багатокутника вибирається **довільна** точка

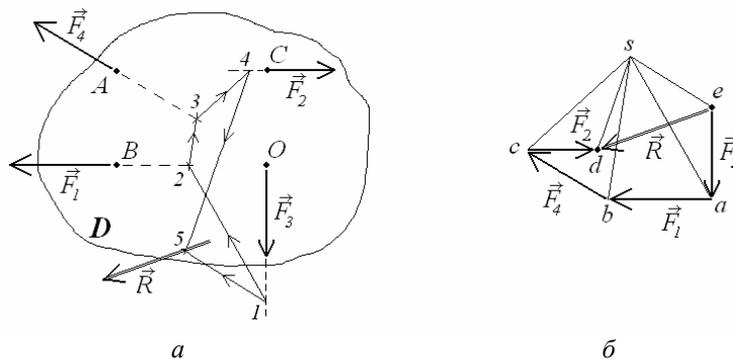


Рис. 1.14

– полюс s – яка поєднується відрізками (променями) з вершинами багатокутника. Мотузковий багатокутник створюють на кресленні диска, виконаному в певному масштабі (рис.1.14,а). Розпочинається побудова з вибору на лінії дії сили \vec{F}_3 , яка є першою ланкою силового багатокутника, довільної точки 1. Через цю точку проводиться промінь, паралельний відрізку sa , що поєднує полюс s з кінцевою точкою першого вектора силового ланцюжка (рис.1.14,б). Точка 2 на перетині променя sa з лінією дії \vec{F}_1 – наступної (другої) сили у ланцюжку, є початком чергового променя, побудованого паралельно прямій sb , що проходить через полюс і закінчення другої за раніше установленною послідовністю сили. Ці дії повторюються до визначення точки 4. Завершується побудова мотузкового багатокутника знаходженням точки 5 на перетині двох променів, проведених з першої (точки 1) та останньої (точки 4) точок паралельно відповідно se та sd у силовому багатокутнику. Ці промені спираються на вектор рівнодійної сили. Через відшукану точку 5 проходить лінія дії вектора рівнодійної сили (рис.1.14,а), напрямком якої і величина визначені в силовому багатоку-

тнику (рис.1.14,б). Для приведення системи сил до заданого центра O потрібно вектор рівнодійної сили перенести паралельно собі до точки O і при цьому, щоб не змінився механічний стан диску, доповнити головний вектор моментом, який рівнодійна сила створювала відносно вибраного центра до перенесення – головним моментом системи (рис.1.15,б). Модуль головного моменту можна порахувати, помноживши модуль головного вектора на плече – найкоротшу відстань від точки O до лінії дії рівнодійного вектора. Знак головного моменту визначається напрямком "обертання" вектора рівнодійної сили тіла D відносно "закріпленої" точки O .

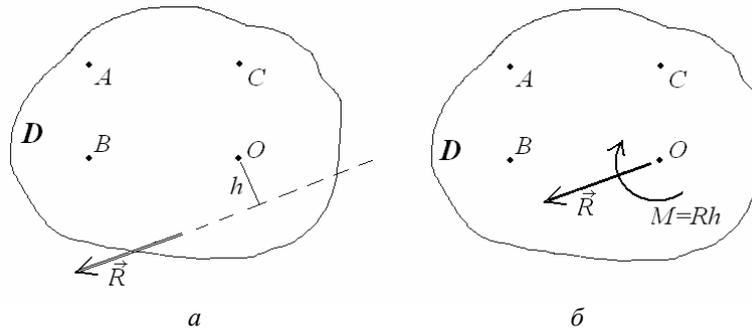


Рис. 1.15

Аналітичне приведення довільної системи сил до заданого центра полягає у визначенні проєкцій головного вектора на осі вибраної системи координат за формулами (1.1), його модуля (1.2) і направляючих кутів (1.3). Головний момент, згідно теореми Вариньона, дорівнює векторній сумі моментів всіх сил системи відносно точки O

$$\vec{M}_0(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_0(\vec{P}_i). \quad (1.5)$$

У проєкції на вісь, що перпендикулярна площині, в якій розв'язується задача,

$$M_0(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n M_0(\vec{P}_i). \quad (1.6)$$

Достовірність отриманих результатів підтверджується порівнянням величин проєкцій і модуля головного вектора та його направляючих кутів, а також величини головного моменту, визначених аналітично і графічно. Критерієм точності є відносна похибка, яка обчислюється за формулою (1.4).

Приклад 2.

Дано: абсолютно тверде тіло D ,

плошка довільна система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ (рис.1.16).

$$F_1 = 10 \text{ кН}, \quad F_2 = 15 \text{ кН},$$

$$F_3 = 10 \text{ кН}, \quad F_4 = 20 \text{ кН}.$$

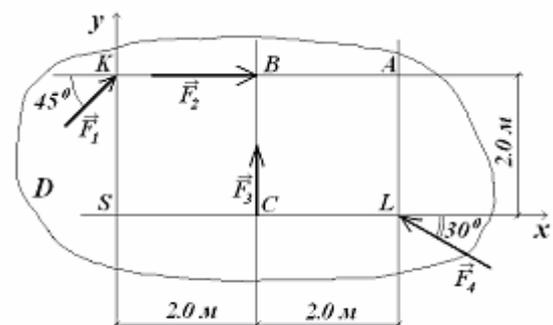


Рис.1.16

Необхідно: привести задану систему сил до центра A .

Аналітичне розв'язування:

Вибираємо систему координат Oxy (рис.1.16). Проекції головного вектора на осі системи координат:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^4 F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = \\ &= F_1 \cdot \cos 45^\circ + F_2 \cdot \cos 0^\circ + F_3 \cdot \cos 90^\circ + F_4 \cdot \cos 150^\circ = \\ &= 10 \cdot 0,7071 + 15 \cdot 1 + 10 \cdot 0 + 15 \cdot (-0,8660) = 9,08 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y &= \sum_{i=1}^4 F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = \\ &= F_1 \cdot \cos 45^\circ + F_2 \cdot \cos 90^\circ + F_3 \cdot \cos 0^\circ + F_4 \cdot \cos 30^\circ = \\ &= 10 \cdot 0,7071 + 15 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 15 \cdot 0,5 = 24,57 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Модуль головного вектора:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{9,08^2 + 24,57^2} = 26,19 \text{ кН}.$$

Напрявні кути:

$$\alpha = \arccos \frac{R_x}{R} = \arccos \frac{9,08}{26,19} = \arccos 0,3466 = 69,72^\circ;$$

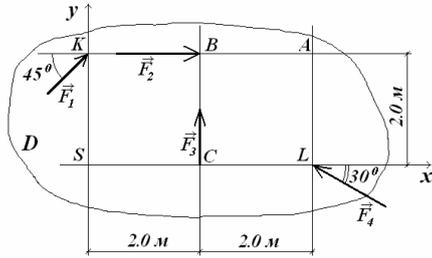
$$\beta = \arccos \frac{R_y}{R} = \arccos \frac{24,57}{26,19} = \arccos 0,9380 = 20,28^\circ.$$

Головний момент системи сил, приведеної до центру A

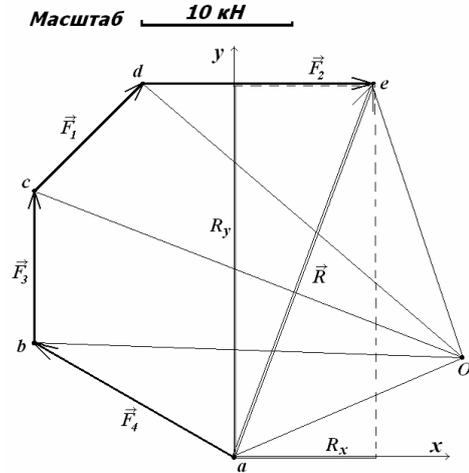
$$\begin{aligned} M_A(\vec{R}) &= \sum_{i=1}^4 M_A(\vec{F}_i) = \\ &= -F_1 \cdot \cos 45^\circ \cdot 4 + F_1 \cdot \cos 45^\circ \cdot 0 - F_3 \cdot 2 + F_2 \cdot 0 + F_4 \cdot \cos 60^\circ \cdot 0 - F_4 \cdot \cos 30^\circ \cdot 2 = \\ &= -10 \cdot 0,7071 \cdot 4 + 10 \cdot 0,7071 \cdot 0 - 10 \cdot 2 + 15 \cdot 0 - 20 \cdot 0,8660 \cdot 2 + 20 \cdot 0,5 \cdot 0 = \\ &= -82,93 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Графічне розв'язування

Умова:



Силовий багатокутник:



:

Мотузковий багатокутник

Відповідь:

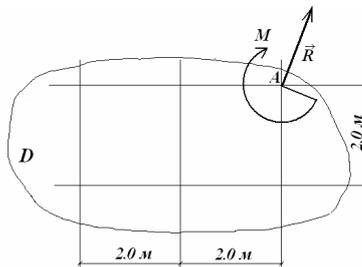
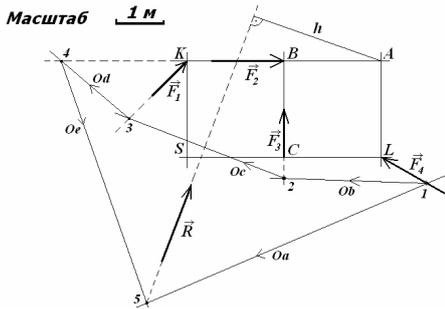


Рис.1.17

Порівняння результатів розв'язування двома способами виконується в таблиці 1.2:

Таблиця 1.2

Параметр	Аналітичний спосіб	Графічний спосіб	Відносна похибка (%)
R_x (кН)	9,08	9,0	0,8
R_y (кН)	24,57	24,5	0,3
R (кН)	26,19	26,0	0,9
α (град.)	69,72	69,5	0,3
β (град.)	20,28	20,5	1,1
M (кНм)	- 82,93	- 81,7	1,5

1.3. Задачі для самоконтролю

Привести систему сил (рис.1.18) до рівнодійної, якщо: $F_1=20$ кН, $F_2=20$ кН, $F_3=20 \cdot \sqrt{2}$ кН, $F_4=10$ кН, $F_5=30$ кН.

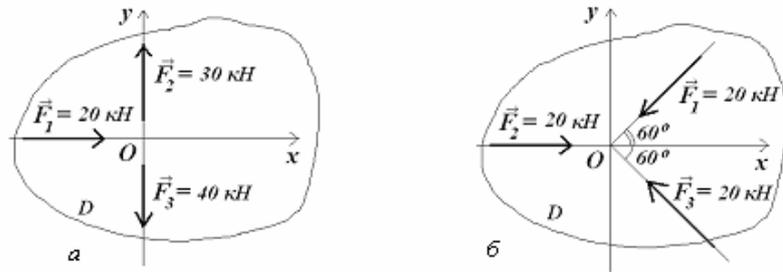


Рис.1.18

Привести систему сил (рис.1.19) до центра O , якщо: $F_1=20$ кН, $F_2=40$ кН, $F_3=20 \cdot \sqrt{2}$ кН, $F_4=30$ кН, $F_5=15$ кН.

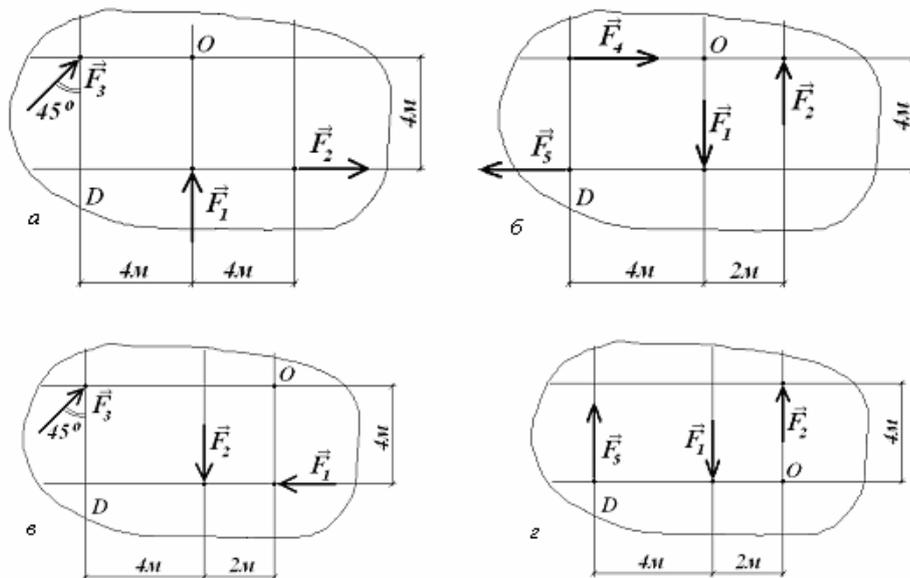


Рис.1.19

2. Кінематичний аналіз плоских систем і визначення реакцій з'єднань

2.1.Короткі відомості про кінематичний аналіз

Класифікація плоских розрахункових моделей

Дослідження напружено-деформованого стану (НДС) споруд та їх елементів виконується по розрахункових моделях, які є оптимально ідеалізованими зображеннями елементів споруди, поєднаних певним чином в систему тіл з конкретними геометричними і фізичними характеристиками, та навантажень. Розрахункова модель, як фізична модель споруди, мусить максимально точно відображати властивості реального об'єкта і водночас бути доступною для розв'язування існуючим розрахунковим апаратом конструктора.

Розрахункові моделі бувають просторовими і плоскими. Не зважаючи на те, що плоскі схеми, здебільшого, значно простіші, вони дозволяють у багатьох випадках отримувати результати з потрібною точністю. Існують різні типи плоских багатоеlementних і простих розрахункових моделей:

- прості балки та балкові системи;
- прості рами та рамні системи;
- криволінійно-стержневі та аркові системи;
- прості ферми та фермові системи;
- гнучкі нитки;
- пластинчасті системи;
- комбіновані системи.

Тип будь-якої розрахункової моделі визначається геометрією її складових, характером їх взаємного розташування і поєднання між собою та видом зовнішнього навантаження.

Складові розрахункових схем та їх характеристика

Перший етап досліджень напружено-деформованого стану (НДС) споруди чи конструкції полягає в *кінематичному аналізі розрахункової схеми*, який крім оцінки можливості зміни геометрії споруди (зміни взаєморозміщення її складових частин) дозволить вдало вибрати метод та раціональну послідовність подальшого розрахунку. На цьому етапі всі елементи розрахункової схеми вважаються абсолютно жорсткими, тобто тілами, які не деформуються, а навантаження, як складову розрахункової схеми, взагалі не використовують. Обмежимо розглядом плоских розрахункових схем, всі складові яких (елементи конструкцій та навантаження) належать одній площині.

Розрахункові схеми утворюються із сукупності жорстких елементів – простих дисків, поєднаних у замкнену систему за допомогою ідеалізованих з'єднувальних пристроїв – в'язей.

Простий диск – будь-якої конфігурації суцільні стержні або пластини, які не утворюють жодного внутрішнього ізольованого контуру.

Навколо простого диска, не перетинаючи його, завжди можна здійснити безперервний замкнений “обхід”. На схемах далі прості диски позначатимуться літерою D з нижніми числовими індексами знизу.

На рис.2.1 наведені приклади простих дисків, на яких пунктирними лініями показано замкнуті лінії “обходу” їхніх границь. Зокрема, простими дисками є довільної форми пластини (рис.2.1,*а,б*) прямолінійний (рис.2.1,*в*), криволінійний (рис.2.1,*г*) або складної конфігурації стержні (рис.2.1,*д,е*).

Диск нескінченно малих розмірів перетворюється на матеріальну точку (рис.2.1,*ж*), яку далі називатимемо **вузлом** (на схемах позначається B). На рис.2.2 зображено пластину, яку не можна вважати простим диском, оскільки вона утворює ізольований контур, і, як зазначено раніше, при “обході” її контурів виникає потреба перетнути фігуру не менше одного разу.

Ступінь вільності тіла та ступінь змінюваності системи

Кількість незалежних геометричних параметрів, які визначають положення диска або системи дисків в довільній системі координат, називається ступенем вільності. На площині положення диска зі скінченними розмірами однозначно можна зафіксувати трьома незалежними узагальненими координатами (лінійними або кутковими). Для диска D на рис.2.3,*а* такими координатами це x_A , y_A та φ_{AB} . Для матеріальної точки B не існує кутової координати φ , тому ступінь вільності вузла дорівнює двом (рис.2.3,*б*).

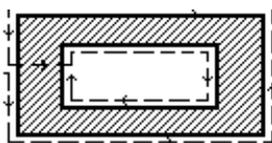


Рис. 2.2

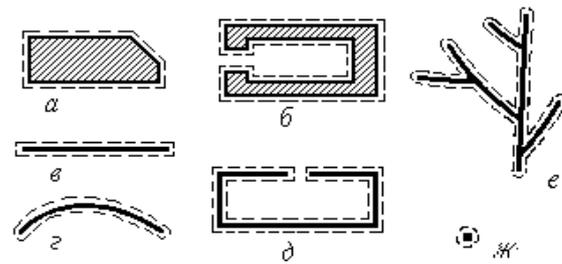


Рис. 2.1

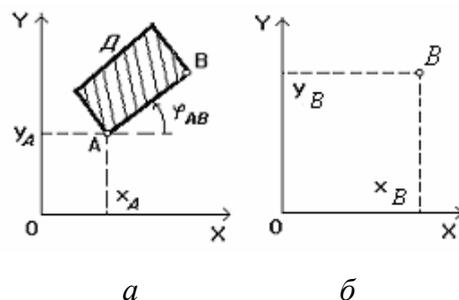


Рис. 2.3

Для системи дисків важливішою кінематичною характеристикою є ступінь змінюваності, яка чисельно дорівнює мінімальній кількості геометричних параметрів для визначення зміни взаємно-

го розміщення дисків, тобто положення всіх дисків в системі координат, пов'язаній з одним із дисків, який умовно вважатиметься нерухомим і називається «землею». Варіант вибору «землі» з усього загалу дисків замкненої системи не впливає на величину ступеня змінюваності системи, але інколи спрощуватиме хід кінематичного аналізу. Чисельно ступінь змінюваності замкненої плоскої системи завжди на три одиниці менший від її ступеня вільності.

Прості з'єднання

Ідеалізовані моделі пристроїв (без тертя та податливості) для поєднання окремих дисків та вузлів у систему (складений диск) з обмеженим взаємопереміщенням об'єктів, зменшуючи ступінь вільності складових та ступінь змінюваності системи називаються *з'єднаннями*. Кожне з'єднання характеризується кінематичними та статичними властивостями. Їх кінематичні властивості проявляються в незаперечності деяких узагальнених взаємопереміщень поєднаних ними дисків. Кількість таких переміщень дорівнює ступеню змінюваності системи. У подальшому на рисунках можливі переміщення будуть зображені контурними стрілками і позначені літерою Δ . Статичні властивості з'єднань визначаються узагальненими реакціями (силами та моментами), які виникають у з'єднаннях між дисками по напрямках взаємних переміщень, що усуваються зазначеними з'єднаннями. В ідеальних з'єднаннях по будь-якому напрямку реакція та можливе переміщення несумісні.

Обмежимося розглядом лише деяких ідеальних з'єднань: припайка, муфта, циліндричний шарнір і кінематична в'язь.

Слід мати на увазі, що з'єднання можуть поєднувати лише диски (вузли), але не самі поєднуючі пристрої.

Проста припайка (Π_i на рис.2.4,а) повністю виключає взаємні лінійні та кутові переміщення двох дисків, які з'єднуються нею. Це з'єднання зменшує кількість незалежних параметрів руху дисків на три, тобто усуває три ступеня вільності.

Реакція припайки – це сила R , лінія дії та ексцентриситет e якої щодо центра припайки O заздалегідь невідомі (рис.2.4,б). Цю реакцію зручно представити як три складові, віднесені до центра припайки O : двох сил V і H із зручними для дослідження заданими напрямками, але невідомими модулями, та моменту M (рис.2.4,в).

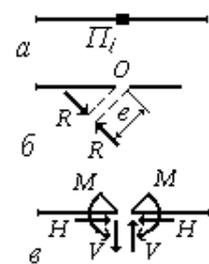


Рис. 2.4

Простий циліндричний шарнір ($Ш_i$ на рис.2.5,а) з'єднує два диски, виключаючи можливість їхніх взаємних поступальних переміщень. Але він допускає їх взаємний поворот Δ відносно осі, яка проходить через центр шарніра. Отже, це з'єднання зменшує кількість незалежних параметрів руху дисків на два, тобто усуває два ступеня вільності.

Реакція R (рис.2.5,б), яка виникає у циліндричному шарнірі, являє собою силу, що проходить через його геометричний центр, але крім своєї величини (модуля) має заздалегідь невідомий напрямок, які повинні бути визначені в подальшому розрахунку конструкції. При аналітичному розрахунку реактивну силу R звичайно замінюють на дві непаралельні складові V і H , які зручно обрати взаємно ортогональними (рис.2.5,в).

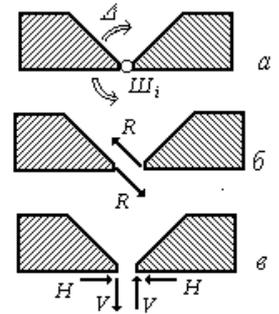


Рис. 2.5

Муфта (M_i на рис.2.6,а) допускає одне взаємне переміщення – поступальне переміщення Δ двох дисків, які з'єднуються, уздовж фіксованої прямої – осі муфти. Це з'єднання зменшує кількість незалежних параметрів руху дисків на два, тобто усуває два ступеня вільності.

Реакція муфти представляє силу R , нормальну до напрямку можливого взаємного поступального переміщення дисків і розміщену з ексцентриситетом e відносно центра муфти O (рис.2.6,б). Звичайно цю реакцію замінюють на дві складові – силу R_1 і момент M , відносячи їх до центра муфти O (рис.2.6,в).

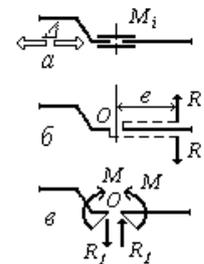


Рис. 2.6

Кінематична в'язь (в'язі C_1 і C_2 , зображені на рис.2.7,а,б), що з'єднує два диски, перешкоджає поступальному переміщенню одного диска відносно другого у напрямку осі, яка проходить через точки шарнірного приєднання в'язей до дисків. Така в'язь усуває один ступінь вільності та допускає взаємний поворот Δ_1 дисків і їх взаємне поступальне переміщення Δ_2 по нормалі до осі цієї в'язі. У кінематичній в'язі виникає реактивна сила R , лінії дії якої проходять вздовж осі в'язі (рис.2.7, в, г).

Між різними простими з'єднаннями існує взаємний зв'язок, який надає змогу, якщо це необхідно або зручно, замінювати одні з'єднання іншими, не змінюючи при цьому їх кінематичні та статичні властивості.

Так, простий циліндричний шарнір $Ш_{1,2}$ (рис.2.8,а), що усуває два взаємних поступальних переміщення дисків D_1 і D_2 , можна замінити двома кінематичними в'язями C_1 і C_2 (рис.2.8,б), які перетинаються у центрі шарніра, котрий вони замінюють.

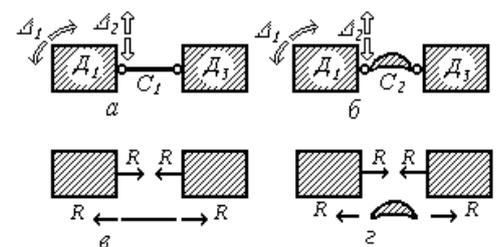


Рис. 2.7

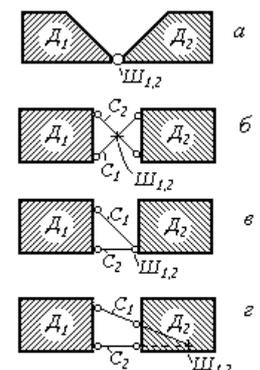


Рис. 2.8

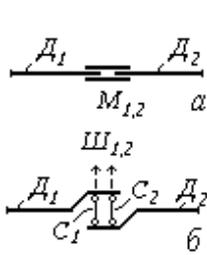


Рис. 2.9

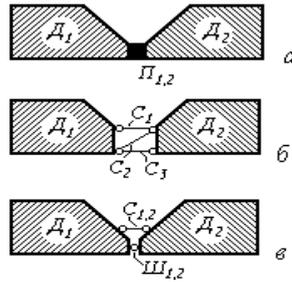


Рис. 2.10

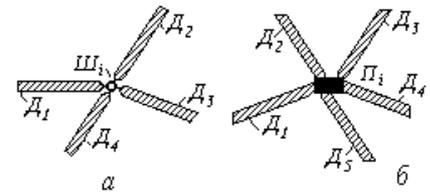


Рис. 2.11

Навпаки, будь-які дві кінематичні в'язі C_1 і C_2 , які з'єднують пару дисків D_1 і D_2 , можуть розглядатись як один циліндричний шарнір $Ш_{1,2}$, розташований в точці перетину осей цих в'язей (рис.2.8,в,г) з тими ж кінематичними і статичними властивостями. Такий уявний шарнір називають **фіктивним**. Муфту $M_{1,2}$ (рис.2.9,а) може бути замінено на дві паралельні в'язі C_1 і C_2 , осі яких перпендикулярні до можливого взаємного переміщення з'єднаних нею дисків D_1 і D_2 (рис.2.9,б). Очевидно, що це з'єднання також може розглядатись як фіктивний шарнір, розташований на перетині паралельних в'язей C_1 і C_2 , тобто на нескінченному віддаленні по напрямках обох кінематичних в'язей. Просту припайку $P_{1,2}$ (рис.2.10,а) можна замінити на три кінематичні в'язі C_1 , C_2 і C_3 , осі яких не паралельні та не перетинаються в одній точці (рис.2.10,б), або на шарнір $Ш_{1,2}$ і кінематичну в'язь $C_{1,2}$, що не проходить через центр шарніра $Ш_{1,2}$ (рис.2.10, в).

У розрахункових схемах споруд, окрім розглянутих простих з'єднувальних пристроїв, використовуються також складні шарніри і складні припайки. Складним (кратним) вважається шарнір, що з'єднує більш ніж два диски. Такий шарнір може бути замінено на прості шарніри (кожний з яких поєднує конкретні два диски). Кількість простих шарнірів на одиницю менша від кількості з'єднуваних дисків. Наприклад, складний шарнір $Ш_i$ на рис.2.11,а, що з'єднує чотири диски D_1 , D_2 , D_3 і D_4 , еквівалентний трьом простим шарнірам. Аналогічно визначається складна (кратна) припайка. Так, на рис.2.11,б зображено складну припайку P_i , що еквівалентна до чотирьох простих припайок.

Отже будь-який з'єднувальний пристрій можна подати у вигляді певної кількості кінематичних в'язей, тому всі пристрої можна скорочено умовно називати в'язями, а сили у таких пристроях – реакціями в'язей.

Кількісний етап кінематичного аналізу

Як уже зазначалось, з погляду кінематичного аналізу кожна розрахункова схема споруди складається з сукупності об'єктів (дисків і матеріальних точок, або вузлів). Кожний з них має певну кількість ступенів вільності. Поєднувальні пристрої обмежують взаємні переміщення складових, забираючи певну кількість ступенів вільності.

При виконання першого етапу кінематичного аналізу визначається кількісна характеристика її змінюваності – ступінь геометричної змінюваності. Для цього необхідно підсумувати ступені вільності окремих складових елементів системи та відняти від цього числа суму ступенів вільності, які усувають всі з'єднання.

Виходячи з викладених вище кінематичних властивостей елементів розрахункових схем, можна записати модифікацію формули Чебишова для визначення ступеня геометричної змінюваності Γ системи:

$$\Gamma = 3D + 2B - 3P - 2Ш - C - 3, \quad (2.1)$$

де: D – кількість простих дисків, включаючи опорний диск “землю”, якщо система прикріплена до неї; B – кількість матеріальних точок, тобто вузлів, в яких з'єднуються лише кінематичні в'язі; P – кількість простих припайок; $Ш$ – кількість простих шарнірів; C – кількість кінематичних в'язей; 3 (три) – число ступенів вільності всієї плоскої розрахункової схеми як одного геометрично незмінюваного складеного диска в своїй площині. Складні шарніри та припайки враховуються як сукупність відповідної кількості простих з'єднань.

Ступінь геометричної змінюваності розрахункової схеми, обчислений за формулою Чебишова, характеризує кінематичні властивості розрахункової схеми. Якщо $\Gamma > 0$, то розрахункова схема споруди є геометрично змінюваною. Вона суттєво змінюватиме свою геометрію навіть без урахування деформації своїх складових елементів. Для таких схем існують Γ незалежних можливих узагальнених переміщень (швидкостей) елементів розрахункової схеми. Геометрично змінювані розрахункові схеми для розрахунку конструкцій та споруд використовуються лише в особливих випадках (наприклад, для підвісних конструкцій). У більшості випадків такий результат сигналізує про недостатню кількість з'єднувальних пристроїв і вимагає зміну конструктивних рішень.

Рівність $\Gamma = 0$ свідчить, що виконується необхідна умова геометричної незмінюваності розрахункової схеми, а саме – кількість наявних з'єднувальних пристроїв є мінімально необхідною і при правильному розташуванні з'єднувальних пристроїв можна забезпечити нерухомість як усіх складових елементів так і системи в цілому.

У випадках, коли $\Gamma < 0$, система перенасичена з'єднаннями, тобто геометричну незмінюваність системи можна забезпечити і без деяких з них (**умовно зайвих в'язей**). Однак неправильне розміщення з'єднувальних пристроїв може привести до локальної геометричної змінюваності системи (між групою дисків розрахункової схеми кількість з'єднань надмірна, проте інші диски недостатньо розкріплені з'єднаннями).

Остаточно про геометричну незмінюваність розрахункової схеми при $\Gamma \leq 0$ можна стверджувати лише після виконання її якісного (структурного) аналізу.

Якісний (структурний) етап кінематичного аналізу

Якісний (структурний) аналіз розрахункової схеми полягає у визначенні послідовності та способів утворення системи зі складових елементів. З'єднання всієї системи або її фрагментів повинно виконуватись відповідно до способів правильного поєднання елементів у геометрично незмінювані системи – складені диски.

Далі розглянуто основні способи утворення найпростіших геометрично незмінюваних плоских систем при використанні мінімальної кількості з'єднувальних пристроїв. При їх поданні поруч з відповідною схемою поєднання простих дисків у складений використовуються умовні “формули”, що мають вигляд дроби, в чисельнику якого міститься перелік з'єднаних елементів, а у знаменнику – перелік з'єднувальних пристроїв. Після знака “ \Rightarrow ” записується назва укрупненого складеного диска, який позначається великою латинською літерою D з нижнім індексом. Якщо з'єднання виконано за допомогою фіктивного шарніра, та в знаменнику подається найменування двох в'язей, які утворюють цей шарнір, із символом “ \times ” між ними.

Приєднання шарнірного вузла до диска (спосіб “*diadi*”). Шарнірний вузол B_1 можна приєднати до диска D_1 за допомогою двох простих кінематичних в'язей C_1 і C_2 , які не лежать на одній прямій (рис.2.12,а,б).

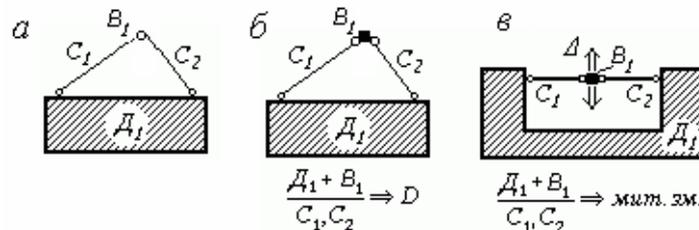


Рис.2.12

Якщо в'язі C_1 і C_2 розташовані вздовж однієї прямої (рис.2.12,в), то вони не перешкоджають малому можливому переміщенню вузла B_1 по напрямку, нормальному до кожної з них. При малому відхиленні вузла від проектного положення паралельність стержнів порушується, можливі переміщення, які допускаються кожним стержнем, не співпадають, тому система стає близькою до геометрично незмінюваної, але все ж вважається особливою і називається **миттєво змінюваною**.

З'єднання двох дисків. Зручно розглядати три способи приєднання одного диска до іншого, хоча використання відповідності між різними з'єднувальними пристроями дозволяє привести їх один до одного.

За **способом припайки** два диски D_1 і D_2 можуть бути з'єднані між собою за допомогою припайки Π_1 (рис.2.13). Таке з'єднання очевидне і в багатьох випадках взагалі обидва диски D_1 і D_2 одразу розглядаються як один простий диск.

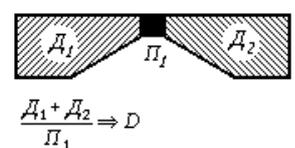


Рис. 2.13

Способом Шухова називається поєднання двох дисків D_1 і D_2 трьома кінематичними в'язями C_1, C_2 і C_3 , осі яких не перетинаються в одній точці і не паралельні між собою (рис.2.14,а).

Якщо осі всіх трьох в'язей C_1, C_2 і C_3 водночас перетинатимуться в одній точці O (рис.2.14,б),

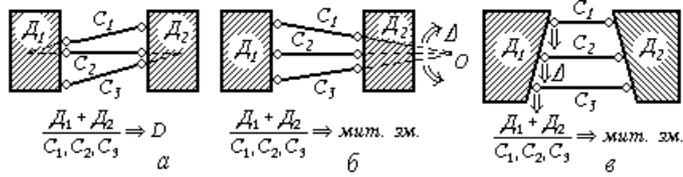


Рис. 2.14

то кожна із в'язей не усуватиме мале переміщення точок їх прикріплення до диска D_1 по напрямках нормальних стержню. Диск D_1 здійснюватиме обертальний рух навколо миттєвого центра швидкостей O і система буде миттєво змінюваною. Другим особливим випадком є паралельність осей трьох стержнів (рис.2.14,в) яке допускає миттєве або постійне (при певному розміщенні стержнів однакової довжини) поступальне зміщення одного диска відносно другого.

Способом Полонсо називається поєднання двох дисків D_1 і D_2 шарніром $Ш$ і кінематичною в'яззю C , вісь якої не проходить через центр шарніра $Ш$ (рис.2.15,а). Якщо шарніра $Ш$ лежить на осі в'язі C (рис.2.15,б), то система миттєво змінювана.

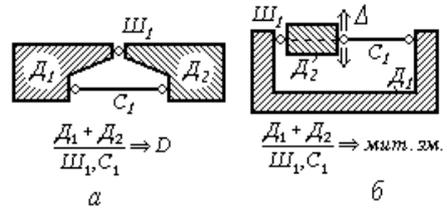


Рис. 2.15

З'єднання трьох дисків (спосіб шарнірного трикутника). Три диски D_1, D_2 і D_3 можна з'єднати за допомогою трьох шарнірів (реальних або фіктивних) $Ш_{1,2}, Ш_{1,3}$ і $Ш_{2,3}$, які не лежать на одній прямій. Причому фіктивні шарніри (але не більше двох) можуть бути і нескінченно віддаленими.

Так, усі три шарніри $Ш_{1,2}, Ш_{1,3}$ і $Ш_{2,3}$, які з'єднують три диски D_1, D_2 і D_3 на рис.2.16,а, є дійсними. На рис.2.16,б диски D_1 і D_3 поєднані дійсним шарніром $Ш_{1,3}$, диски D_1 і D_2 – фіктивним шарніром $Ш_{1,2}$, розташованим у точці перетину в'язей C_1 і C_2 , які його утворили, а між дисками D_2 і D_3 – фіктивний шарнір $Ш_{2,3}$, утворений в'язями C_3 і C_4 в точці перетину їх осей. До цього ж способу можна віднести з'єднання трьох шарнірних вузлів трьома кінематичними в'язями (рис.2.16,в).

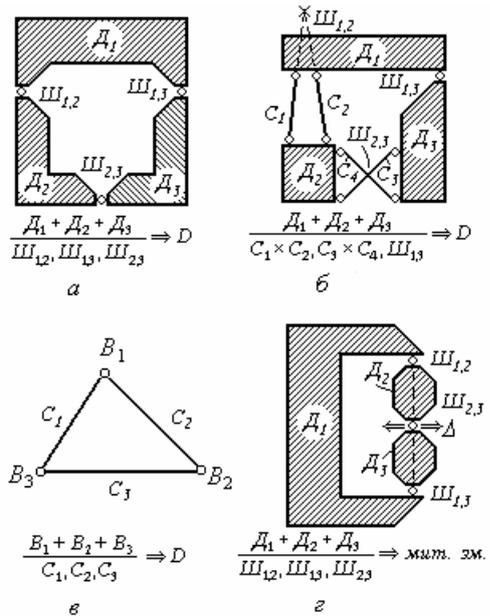


Рис. 2.16

в'язями (рис.2.16,в).

Якщо три шарніри $Ш_{1,2}$, $Ш_{1,3}$ і $Ш_{2,3}$, дійсні чи фіктивні, лежать на одній прямій (рис.2.16,2) або всі нескінченно віддалені, то кажуть, що система з трьох дисків $Д_1$, $Д_2$ і $Д_3$ є миттєво або геометрично змінюваною.

Правила поєднання існують лише для двох або трьох дисків. Для розрахункових схем, які складається з більшої кількості об'єктів, необхідно визначити послідовність її утворення. На кожному етапі має бути утворена геометрично незмінювана структура за відомими викладеними правилами. Кожний етап утворення системи називається "поверхом" розрахункової схеми споруди.

Послідовність виконання кінематичного аналізу

Кінематичний аналіз розрахункової схеми виконується в три етапи.

Кількісний аналіз. На цьому етапі за допомогою формули Чебишова обчислюють ступінь геометричної змінюваності розрахункової схеми споруди. Якщо одержано результат $\Gamma > 0$, то це свідчить про геометричну змінюваність розрахункової схеми внаслідок недостатньої кількості з'єднувальних пристроїв і другий етап аналізу можна не виконувати. Якщо $\Gamma \leq 0$, то можна зробити попередній висновок, що необхідна умова геометричної незмінюваності системи задовольняється, тобто система може бути геометрично незмінюваною – в'язей не менше мінімально необхідної кількості. В цьому випадку необхідно виконати наступний етап аналізу.

Якісний (структурний) аналіз полягає в дослідженні послідовності з'єднання елементів відповідно до викладених вище способів утворення найпростіших геометрично незмінюваних систем. Якщо встановлено, що якісь два чи три елементи поєднані правильно за одним із цих способів, такий фрагмент системи можна розглядати як новий укрупнений диск та використовувати сукупно з рештою елементів для утворення нових геометрично незмінюваних фрагментів. Цей процес потрібно продовжувати доти, поки не буде проаналізоване приєднання всіх елементів розрахункової схеми споруди. В статично невизначуваних системах ($\Gamma < 0$) при такій побудові мають залишитись не використаними умовно зайві в'язі. В багатьох випадках набір умовно зайвих в'язей може бути вибраним неоднозначно – багато варіантів.

Остаточний висновок про геометричну незмінюваність, геометричну або миттєву змінюваність розрахункової схеми споруди. Якщо доведено правильне приєднання всіх елементів системи, вся розрахункова схема може вважатись геометрично незмінюваною. Якщо виявляється, що для з'єднання одних елементів використані зайві пристрої, а для інших їх бракує, всю розрахункову схему вважають геометрично змінюваною. Якщо ж хоча б одне з'єднання виконується як у винятку з якогось способу, що відповідає миттєвій змінюваності фрагмента, схема є миттєво змінюваною.

Таким чином, для геометричної незмінюваності плоскої розрахункової схеми споруди необхідно додержання двох умов: необхідна умова – $G \leq 0$; достатня умова – правильність утворення системи.

Кінематичний аналіз необхідно проводити в лаконічній формі, виконуючи детальні схеми, користуючись умовними позначеннями та формулами. Завершується аналіз розрахункової схеми обов'язковими детальними висновками.

Визначення сил взаємодії дисків

Найбільш поширеним способом визначення сил взаємодії дисків є використання **методу перерізів**, який полягає в тому, що від розрахункової моделі споруди уявним наскрізним перерізом відокремлюється якийсь його фрагмент (диск або група дисків). Вплив „розрізаних” перерізом з'єднань замінюються силами – реакціями цих з'єднань. Таким чином, на відокремлений фрагмент діє система зовнішніх сил, яка складається з активного навантаження та реакціями в'язей.

Фрагмент споруди під дією системи зовнішніх сил відповідно до аксіоми статички розглядається як абсолютно тверде тіло. Тому до цієї системи сил можна застосувати умови її рівноваги, з яких визначаються невідомі реакції.

Для кожного із існуючих способів поєднання простих дисків у статично визначувану систему дисків існує алгоритм визначення сил у з'єднаннях, які забезпечують рівновагу кожного диска при дії зовнішнього силового навантаження.

Спосіб діад. При визначенні реакцій у двох в'язях (двох стержнях), що приєднують вузол до диска, вузол від диска „відокремлюється” замкненим перерізом 1-1. У кожному стержні діє реактивна сила вздовж його осі. Величини реакцій R_1 і R_2 у в'язях обчислюються з двох рівнянь рівноваги стосовно системи сил. При вдалому складанні рівнянь кожне з них буде мати одну невідому. Цього можна досягти проєцирую сили, що діють на вузол, на дві осі, кожна з яких перпендикулярна одній із сил

Якщо два диски з'єднуються **припайкою**, то після „відокремлення” одного із дисків замкненим перерізом в точці припайки реакцію подають у вигляді двох взаємно перпендикулярних сил та реактивного моменту. Визначаються величини цих реакцій з трьох рівнянь рівноваги всіх сил, що діють на відокремлений диск: суми моментів усіх сил стосовно припайки та сума проєкцій усіх сил на дві непаралельні осі координат.

У системах, утворених **способом Полонсо**, при відокремленні одного з дисків слід враховувати, крім активних сил, дію на диск реакції стержня, спрямованої вздовж стержня, та реакцію шарніра, лінія дії якої проходить під певним заздалегідь невідомим кутом через шарнір. Остання подається у вигляді двох складових – сил, лінії дії яких відомі (наприклад: горизонтальна і вертикальна), а величини невідомі. Пошук трьох невідомих величин реактивних сил виконується з трьох рі-

внянь рівноваги: із суми моментів усіх сил щодо точки перетину ліній дій будь-яких двох із трьох реакцій (точка Ріттера) та з проекцій усіх сил на осі прийнятої системи координат.

Для визначення реакцій у трьох в'язях, що з'єднують два диски системи, утвореної **за способом Шухова**, виконується уявний наскрізний замкнений переріз і розглядається рівновага будь-якого із дисків. В кожному із стержнів реактивна сила направлена вздовж стержня. Алгоритм визначення величин цих сил не відрізняється від попереднього методу поєднання дисків.

Дещо складніша послідовність визначення сил взаємодії дисків, поєднаних **шарнірним трикутником**. У такому випадку слід розділити три диска двома уявними замкненими перерізами, приклавши до кожного із дисків по дві сили в місці кожного із розрізаних шарнірів. Сили взаємодії двох дисків в будь-якому розрізаному шарнірі взаємно протилежні і рівні за модулем. Таким чином загальна кількість невідомих реакцій дорівнює шести, і, отже, для визначення реакцій необхідно скласти шість рівнянь рівноваги. Такі рівняння можна скласти для двох дисків. Для полегшення процесу розв'язування доцільно намагатись скласти рівняння так, щоб кожне з них містило одну невідому реакцію. Це можливо при наявності точок перетину ліній дії невідомих реакцій, що діють на один диск, проектування на вісь, перпендикулярну силам, тощо. Такий самий алгоритм має місце при поєднанні дисків фіктивними шарнірами.

Для систем, утворених у **декілька етапів** з використанням сформульованих методів, сили взаємодії дисків визначаються послідовно, починаючи з останнього етапу, потім передостаннього і послідовно до першого. На кожному етапі враховується дія на диск активних сил, раніше визначених сил взаємодії з вищерозташованими дисками та невідомих реакцій у з'єднаннях з нижчезміщеними дисками.

2.2. Приклади кінематичного аналізу розрахункових моделей

2.2.1. Кінематичний аналіз систем, утворених з двовимірних об'єктів.

Задача 1.

Дано: розрахункова модель (рис.2.17, а).

Необхідно: провести кінематичний аналіз та визначити сили взаємодії дисків.

Розв'язування:

1. Кінематичний аналіз системи.

а) Кількісний аналіз. Система має: дисків – 3, вузлів – 0, припайок – 0, простих шарнірів – 0, кінематичних в'язей – 6 (рис.2.17,б).

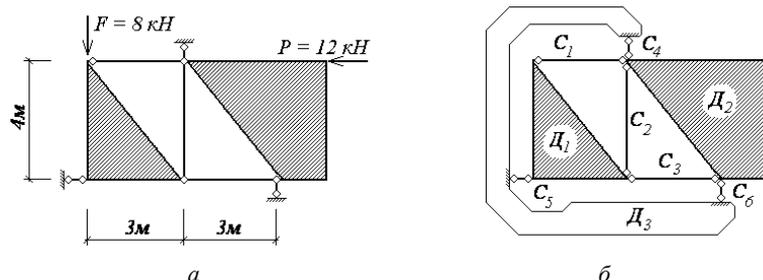


Рис. 2.17

За формулою Чебишова (2.1):

$$\Gamma = 3 \cdot D + 2B - 3П - 2Ш - C - 3 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 6 - 3 = 9 - 9 = 0,$$

система статично визначувана і може бути геометрично незмінюваною.

б) Якісний аналіз.

Розрахункова схема будується в два етапи:

На першому етапі поєднуються диски D_1 та D_2 методом Шухова $\frac{D_1 + D_2}{C_1, C_2, C_3} \Rightarrow D_1$, (рис.2.18,а).

Другий етап створення розрахункової моделі (рис.2.18,б) також використовує метод Шухова $\frac{D_1 + D_3}{C_4, C_5, C_6} \Rightarrow D_1$.

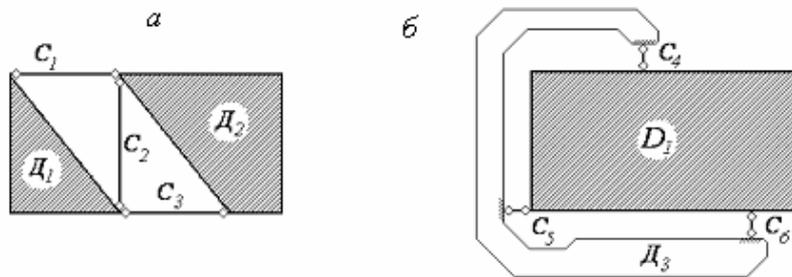


Рис.2.18

в) **Висновки:** Розрахункова модель статично визначувана і геометрично незмінювана.

2. Визначення сил взаємодії дисків.

3 умов рівноваги диску D_1 , поєданого із диском D_3 на останньому етапі збирання системи (рис.2.19), визначаються зусилля в стержнях C_4, C_5, C_6 .

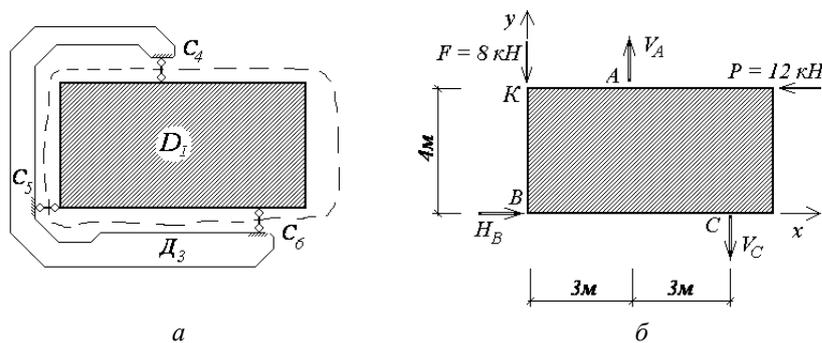


Рис. 2.19

$$\sum_{i=1}^3 M_C(\vec{F}_i) = 0: \quad 4P + 6F - 3V_A = 0; \quad V_A = \frac{4P + 6F}{3} = \frac{4 \cdot 12 + 6 \cdot 8}{3} = 32 \text{ кН};$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{xi} = 0: \quad -P + H_B = 0; \quad H_B = P = 12 \text{ кН};$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{yi} = 0: \quad -F - V_C + V_A = 0; \quad V_C = V_A - F = 32 - 8 = 24 \text{кН} .$$

Перевірка рівноваги:

$$\sum_{i=1}^3 M_K(\vec{F}_i) = 3V_A + 4H_B - 6V_C = 3 \cdot 32 + 4 \cdot 12 - 6 \cdot 24 = 144 - 144 = 0 .$$

Визначення реакцій у в'язях, використаних на першому етапі збирання моделі конструкції (рис.2.20):

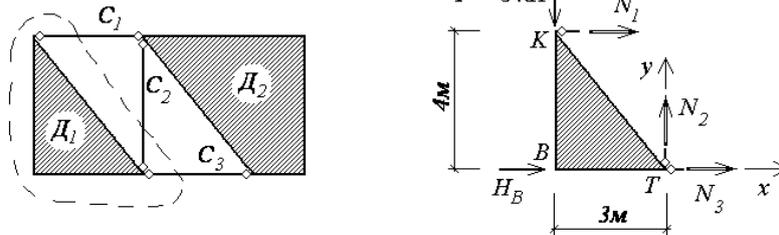


Рис. 2.20

$$\sum_{i=1}^2 M_T(\vec{F}_i) = 0: \quad 3 \cdot F - 4 \cdot N_1 = 0; \quad N_1 = \frac{3 \cdot F}{4} = \frac{3 \cdot 8}{4} = 6 \text{кН} .$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{xi} = 0: \quad N_1 + N_3 + H_B = 0; \quad N_3 = -H_B - N_1 = -12 - 6 = -18 \text{кН} .$$

$$\sum_{i=1}^2 F_{yi} = 0: \quad -F + N_2 = 0; \quad N_2 = F = 8 \text{кН} .$$

Перевірка рівноваги:

$$\sum_{i=1}^2 M_B(\vec{F}_i) = 3N_2 - 4N_1 = 3 \cdot 8 - 4 \cdot 6 = 24 - 24 = 0 .$$

Відповідь: $V_A = 32 \text{кН}$, $H_B = 12 \text{кН}$, $V_C = 24 \text{кН}$, $N_1 = 6 \text{кН}$, $N_2 = 8 \text{кН}$, $N_3 = -18 \text{кН}$.

Задача 2.

Дано: розрахункова модель (рис.2.21,а).

Необхідно: провести кінематичний аналіз та визначити сили взаємодії дисків.

Розв'язування:

1. Кінематичний аналіз системи.

а) Кількісний аналіз. Система має: дисків – 3, вузлів – 0, припайок – 0, простих шарнірів – 1, кінематичних в'язей (стержнів) – 4 (рис.2.21,б).

За формулою Чебишова (2.1):

$$\Gamma = 3D + 2B - 3П - 2Ш - C - 3 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 4 - 3 = 9 - 9 = 0 ,$$

система статично визначувана і може бути геометрично незмінною.

б) Якісний аналіз.

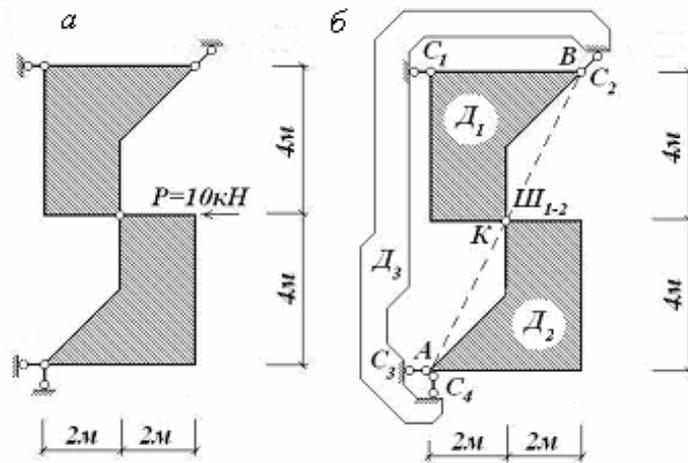


Рис. 2.21

Розрахункова схема будується в один етап: диски D_1 , D_2 та D_3 методом шарнірного трикутника за допомогою шарніра $Ш_{1-2}$ та двох фіктивних шарнірів, утворених парами стержнів C_1 , C_2 та C_3 , C_4 . Однак утворена система не може бути диском, т.я. три шарніри лежать на одній прямій – отже система миттєво визначувана (рис.2.21,б):

$$\frac{D_1 + D_2 + D_3}{\underbrace{Ш_{1-2}, C_1 \times C_2}_{Ш_{1-2}^{\phi}}, \underbrace{C_3 \times C_4}_{Ш_{3-4}^{\phi}}} \nrightarrow D.$$

в) **Висновок.** Розрахункова модель є миттєво змінюваною.

2.2.2. Аналіз шарнірно-стержневих систем

Задача 3.

Дано: розрахункова модель (рис.2.22,а).

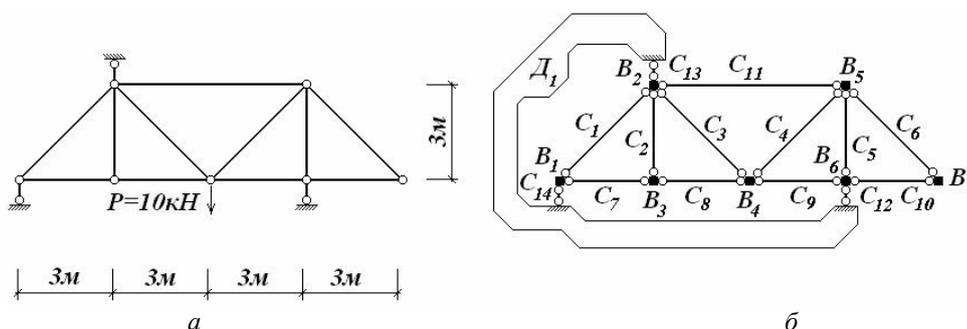


Рис. 2.22

Необхідно: провести кінематичний аналіз та визначити сили взаємодії дисків.

Розв'язування:

1. Кінематичний аналіз системи.

а) Кількісний аналіз. Система має: дисків – 1, вузлів – 7, припайок – 0, простих шарнірів – 0, кінематичних в'язей (стержнів) – 14 (рис.2.22,б).

За формулою Чебишова (2.1):

$$\Gamma = 3D + 2B - 3\Pi - 2Ш - C - 3 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 7 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 14 - 3 = 17 - 17 = 0.$$

Отже, система статично визначувана і може бути геометрично незмінюваною.

б) Якісний аналіз.

Розрахункова схеми створюється за шість етапів (рис.2.23,а-е):

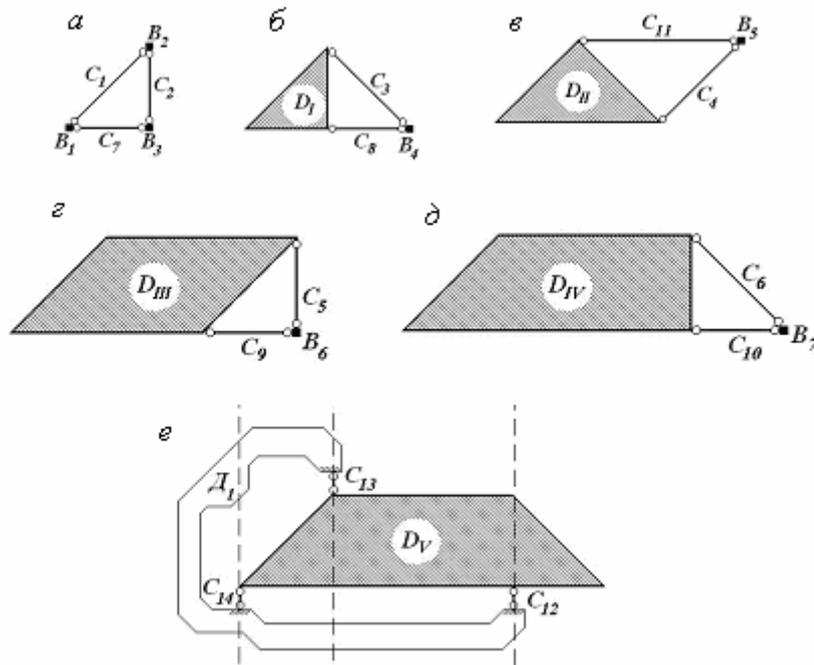


Рис.2.23

$$\frac{B_1 + B_2 + B_3}{C_1, C_2, C_7} \Rightarrow D_I, \text{ метод шарнірного трикутника,}$$

$$\frac{D_I + B_4}{C_3, C_8} \Rightarrow D_{II}, \text{ метод діади,}$$

$$\frac{D_{II} + B_5}{C_4, C_{11}} \Rightarrow D_{III}, \text{ метод діади,}$$

$$\frac{D_{III} + B_6}{C_5, C_9} \Rightarrow D_{IV}, \text{ метод діади,}$$

$$\frac{D_{IV} + B_7}{C_6, C_{10}} \Rightarrow D_V, \text{ метод діади,}$$

$$\frac{D_V + D_1}{C_{12}, C_{13}, C_{14}} \Rightarrow D - \text{осі всіх стержнів паралельні.}$$

в) **Висновок.** Розрахункова модель є геометрично змінюваною.

Задача 4.

Дано: розрахункова модель (рис.2.24,а).

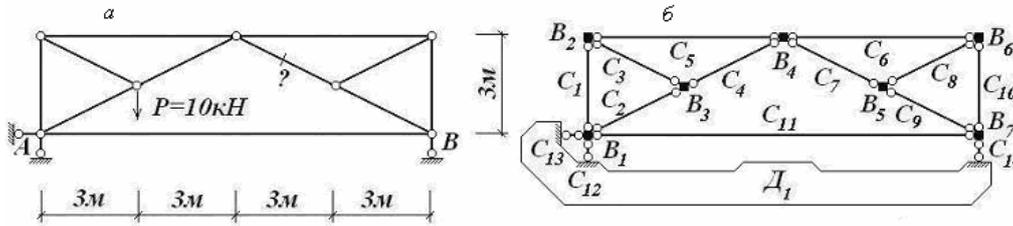


Рис.2.24

Необхідно: провести кінематичний аналіз та визначити зусилля у позначеному стержні.

Розв'язування:

1. Кінематичний аналіз системи.

а) Кількісний аналіз. Система має: дисків – 1, вузлів – 7, припайок – 0, простих шарнірів – 0, кінематичних в'язей (стержнів) – 14 (рис.2.24,б).

За формулою Чебишова (2.1):

$$\Gamma = 3D + 2B - 3\Pi - 2\text{Ш} - C - 3 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 7 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 14 - 3 = 17 - 17 = 0$$

Отже, система статично визначувана і може бути геометрично незмінюваною.

б) Якісний аналіз.

Розрахункова схеми бубується за п'ять етапів (рис.2.25,а-д):

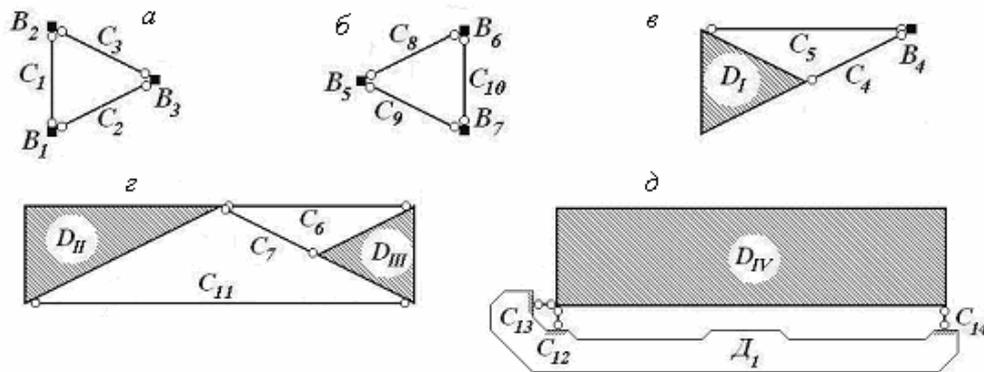


Рис.2.25

$$\frac{B_1 + B_2 + B_3}{C_1, C_2, C_3} \Rightarrow D_I, \text{ метод шарнірного трикутника,}$$

$$\frac{B_5 + B_6 + B_7}{C_8, C_9, C_{10}} \Rightarrow D_{II}, \text{ метод шарнірного трикутника,}$$

$$\frac{D_I + B_4}{C_4, C_5} \Rightarrow D_{III}, \text{ метод діади,}$$

$$\frac{D_{II} + D_{III}}{C_6, C_7, C_{11}} \Rightarrow D_{IV}, \text{ метод Шухова,}$$

$$\frac{D_{IV} + D_I}{C_{12}, C_{13}, C_{14}} \Rightarrow D - \text{осі всіх стержнів непаралельні.}$$

в) **Висновок.** Розрахункова модель є геометрично незмінюваною.

2. Визначення сил взаємодії дисків.

Звільнивши диск D_{IV} від в'язей, використаних на останньому етапі створення системи, вимагаємо виконання умов рівноваги (рис.2.26,а,б)

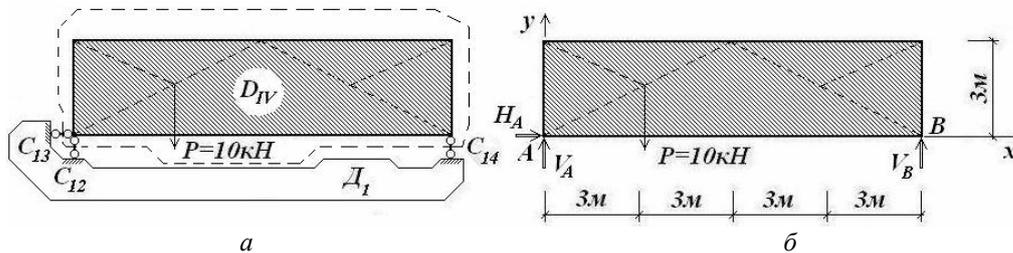


Рис. 2.26

$$\sum_{i=1}^2 M_B(\vec{F}_i) = 0: -3P + 12V_A = 0; \quad V_A = \frac{3P}{12} = \frac{3 \cdot 10}{12} = 2,5 \text{ кН};$$

$$\sum_{i=1}^1 F_{xi} = 0: \quad H_A = 0;$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{yi} = 0: \quad -F + V_A + V_B = 0; \quad V_B = F - V_A = 10 - 2,5 = 7,5 \text{ кН}.$$

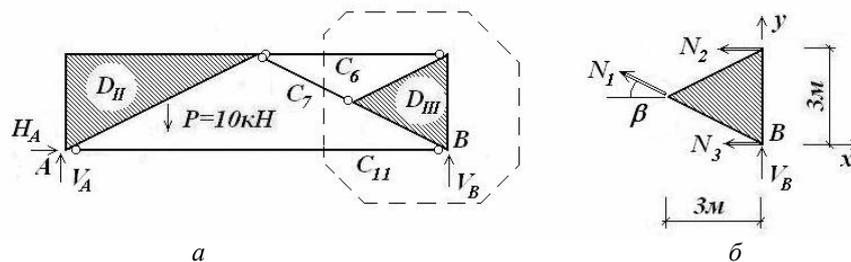


Рис. 2.27

Стержень C_7 , зусилля в якому необхідно визначити, використовується при створенні розрахункової схеми на передостанньому етапі. З умови рівноваги диска D_{III} для визначення N_1 потрібно вимагати рівність нулю суми моментів всіх сил відносно точки перетину ліній дії невідомих сил N_2 та N_3 , але (зважаючи що вони паралельні) складаємо рівняння суми проекцій всіх сил на вісь, перпендикулярну лініям дії цих сил.

$$\sum_{i=1}^4 F_{yi} = 0: -N_1 \cos \beta + V_B = 0; \quad N_1 = \frac{V_B}{\cos \beta} = \frac{2,5}{0,8944} = 2,80 \text{ кН}.$$

Отже, зазначений стержень розтягнутий зусиллям 2,80 кН.

2.2.3. Балкова система

Задача 5.

Дано: розрахункова модель балки (рис.2.28).

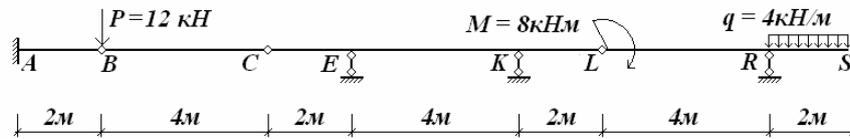


Рис.2.28

Необхідно: провести кінематичний аналіз та визначити сили взаємодії дисків.

Розв'язування:

1. Кінематичний аналіз системи.

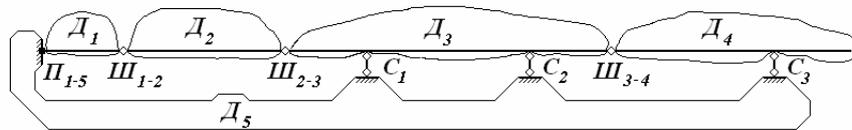


Рис. 2.29

а) Кількісний аналіз. Система має: дисків – 5, вузлів – 0, припайок – 1, простих шарнірів – 3, кінематичних в'язей (стержнів) – 3 (рис.2.29).

За формулою Чебишова (2.1):

$$\Gamma = 3D + 2B - 3П - 2Ш - C - 3 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 3 - 3 = 15 - 15 = 0,$$

система статично визначувана і може бути геометрично незмінюваною.

б) Якісний аналіз. На першому етапі (рис.2.30,а) поєднуються два диски за допомогою методу припайки $\frac{D_1 + D_5}{П_{1-5}} \Rightarrow D_I$. Отриманий складений диск D_I на другому етапі (рис.2.30,б) за допомогою

гою

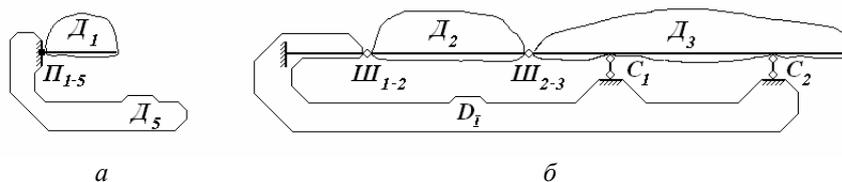


Рис.2.30

шарнірів $Ш_{1-2}$, $Ш_{2-3}$ та двох паралельних стержнів C_1 , C_2 , які еквівалентні фіктивному шарніру у

нескінченності, утворюють за допомогою методу шарнірного трикутника складений диск D_{II} . Останній, третій, етап створення розрахункової схеми полягає у приєднанні до складеного диску D_{II} простого диску D_4 методу Полонсо за допомогою шарніра III_{3-4} та кінематичної в'язі C_3 (рис.2.31)

Висновок: система статично визначувана і геометрично незмінювана.

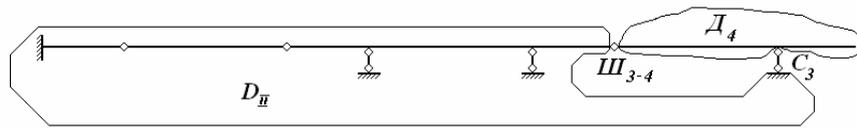


Рис.2.31

Сили взаємодії дисків (реакції у в'язях) розпочинаємо визначати з тих в'язей, які використані на останньому етапі створення системи. З умов рівноваги диска D_4 (рис.2.32)

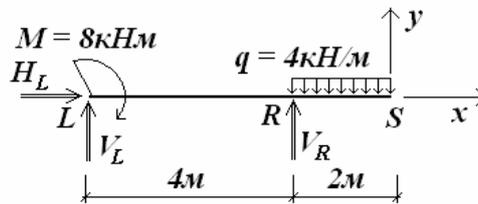


Рис.2.32

$$\sum M_L(\vec{F}) = 0: -M + 4V_R - 2 \cdot q \cdot 5 = 0; \quad V_R = \frac{M + 10q}{4} = \frac{8 + 10 \cdot 4}{4} = 12 \text{ кН.}$$

$$\sum F_x = 0: \quad H_L = 0.$$

$$\sum F_y = 0: \quad V_L + V_R - 2q = 0; \quad V_L = 2q - V_R = 2 \cdot 4 - 12 = -4 \text{ кН.}$$

На передостанньому етапові створення розрахункової схеми до раніше утвореного диска приєднувались методом шарнірного трикутника два диски. З умов рівноваги кожного з двох дисків (рис.2.33) під дією активних та реактивних сил, серед яких є раніше визначені реакції шарніра L :

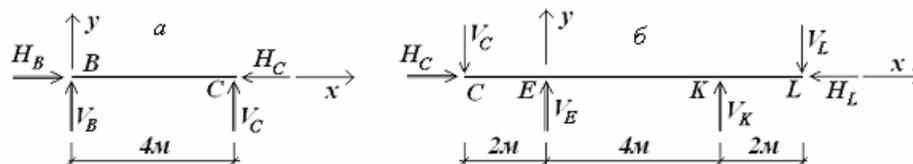


Рис.2.33

Рис.2.33, а: $\sum M_B(\vec{F}) = 0: 4 \cdot V_C = 0; \quad V_C = 0.$

$$\sum F_y = 0: \quad V_B + V_C = 0; \quad V_B = -V_C = 0.$$

Рис.2.33, б: $\sum M_K(\vec{F})=0: 6 \cdot V_C - 4 \cdot V_E - 2 \cdot V_L = 0;$

$$V_E = \frac{-2 \cdot V_L + 6 \cdot V_C}{4} = \frac{-2 \cdot (-4) + 6 \cdot 0}{4} = 2 \text{ кН}.$$

$$\sum F_y = 0: V_E + V_K - V_C - V_L = 0; \quad V_K = V_C + V_L - V_E = 0 + (-4) - 2 = -6 \text{ кН}.$$

$$\sum F_x = 0: H_C - H_L = 0; \quad H_C = H_L = 0.$$

Рис.2.33, а: $\sum F_x = 0: H_B - H_C = 0; \quad H_B = H_C = 0.$

Останніми визначаються реакції у в'язях, використаних на першому етапі побудови розрахункової схеми з умов рівноваги диска D_1 (рис.2.34)

$$\sum M_A(\vec{F})=0: M_A - 2 \cdot P - 2 \cdot V_B = 0;$$

$$M_A = 2 \cdot P + 2 \cdot V_B = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 0 = 24 \text{ кН}.$$

$$\sum F_y = 0: V_A - V_B - P = 0;$$

$$V_A = V_B + P = 0 + 12 = 12 \text{ кН}.$$

$$\sum F_x = 0: H_A - H_B = 0; \quad H_A = H_B = 0.$$

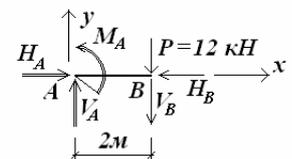


Рис.2.34

Достовірність отриманих результатів підтверджує статична перевірка (рис.2.35)

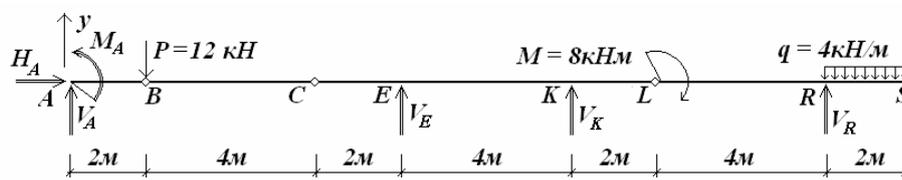


Рис.2.35

$$\begin{aligned} \sum M_C(\vec{F}) &= M_A - 2 \cdot P + 8 \cdot V_E + 12 \cdot V_K - M - 2 \cdot q \cdot 19 + 18 \cdot V_R = \\ &= 24 - 2 \cdot 12 + 8 \cdot 2 + 12 \cdot (-6) - 8 - 2 \cdot 4 \cdot 19 + 18 \cdot 12 = 256 - 256 = 0. \end{aligned}$$

Отже, $V_A = 12 \text{ кН}; \quad V_B = 0; \quad V_C = 0; \quad V_E = 2 \text{ кН};$
 $V_K = -6 \text{ кН}; \quad V_L = -4 \text{ кН}; \quad V_R = 12 \text{ кН}; \quad H_A = 0;$
 $M_A = 24 \text{ кНм}.$

2.2.4. Рамні системи

Задача 6.

Дано: розрахункова модель (рис.2.36, а).

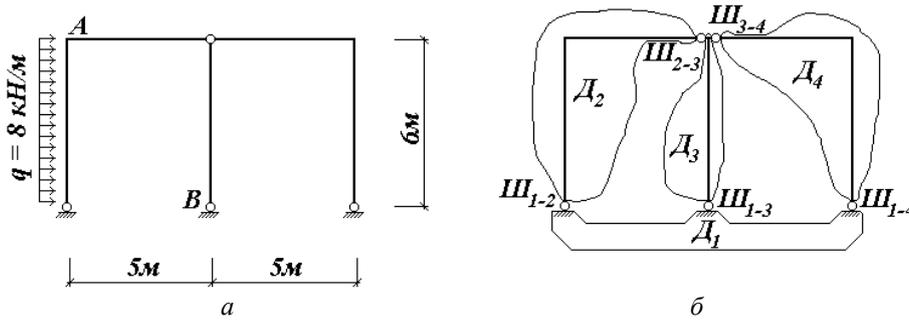


Рис.2.36

Необхідно: провести кінематичний аналіз та визначити сили взаємодії дисків.

Розв'язування:

1. Кінематичний аналіз системи.

а) Кількісний аналіз. Система має: дисків – 4, вузлів – 0, припайок – 0, простих шарнірів – 5, кінематичних в'язей (стержнів) – 0 (рис.2.36,б).

За формулою Чебишова (2.1):

$$\Gamma = 3D + 2B - 3П - 2Ш - C - 3 = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 5 - 0 - 3 = 12 - 13 = -1 < 0.$$

Система може бути геометрично незмінюваною і статично визначуваною. Вона характеризується однією зайвою в'яззю, без якої можна зібрати наявні диски в геометрично незмінювану розрахункову схему. Для розв'язування такої системи потрібно використовувати спеціальні методи, які розглядатимуться далі.

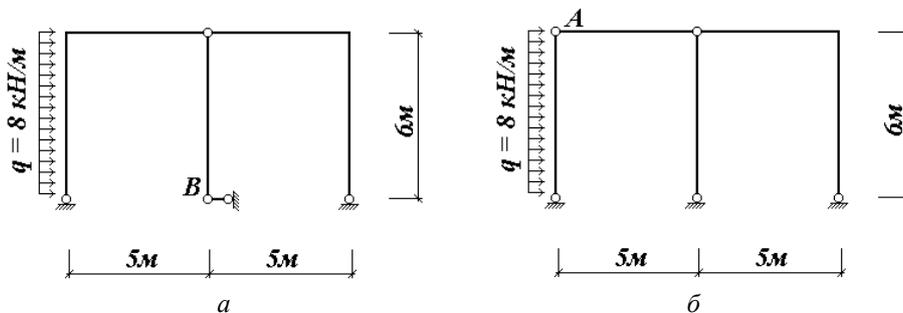


Рис.2.37

На рис.2.37,а,б показані дві статично визначувані і геометрично незмінювані рами, які похідні від заданої. Вони утворені шляхом знімання однієї „зайвої” в'язі: зменшення рангу в'язі у точці В – заміна шарніра стержнем (рис.2.37,а) та заміною припайки в точці А на простий циліндричний шарнір (рис.2.37,б).

Задача 7.

Дано: розрахункова модель (рис.2.38,а).

Необхідно: провести кінематичний аналіз та визначити реактивні сили в шарнірі С.

Розв'язування:

1. Кінематичний аналіз системи.

а) Кількісний аналіз. Система має: дисків – 4, вузлів – 0, припайок – 0, простих шарнірів – 4, стержнів – 1 (рис.2.38,б).

За формулою Чебишова (2.1):

$$\Gamma = 3D + 2B - 3П - 2Ш - C - 3 = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 4 - 1 - 3 = 12 - 12 = 0.$$

Висновок: система статично визначувана і може бути геометрично незмінною.

б) Якісний аналіз.

Розрахункова схеми будується за два етапи (рис.2.39,а,б)

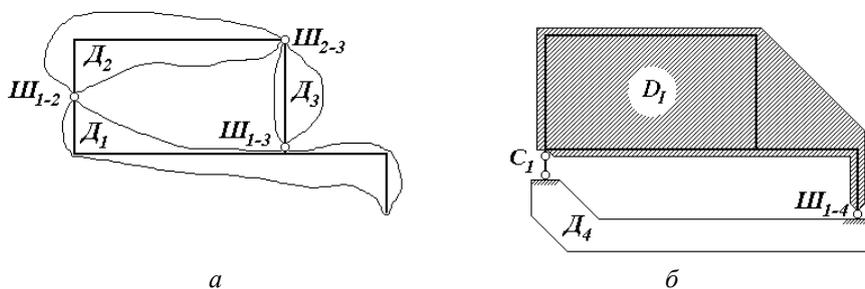


Рис. 2.39

$$\frac{D_1 + D_2 + D_3}{Ш_{1-2}, Ш_{2-3}, Ш_{1-3}} \Rightarrow D_1, \text{ метод шарнірного трикутника};$$

$$\frac{D_1 + D_4}{C_1, Ш_{1-4}} \Rightarrow D, \text{ метод Полонсо.}$$

Задану розрахункову схему можна створити і в іншій послідовності (рис.2.40,а,б):

$$\frac{D_1 + D_4}{C_1, Ш_{1-4}} \Rightarrow D_1, \text{ метод Полонсо};$$

$$\frac{D_1 + D_2 + D_3}{Ш_{1-2}, Ш_{2-3}, Ш_{1-3}} \Rightarrow D, \text{ метод шарнірного трикутника.}$$

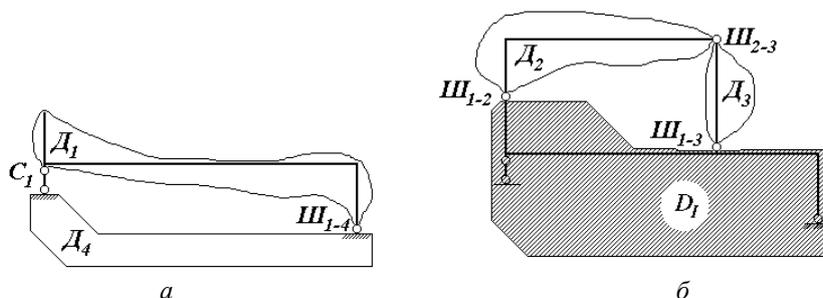


Рис.2.40

Другий варіант побудови розрахункової схеми більш приваблива для визначення реакцій шарніра С, оскільки цей шарнір використовується на останньому етапі створення системи.

Уявними замкненими перерізами відділяємо диски D_2 та D_3 (рис.2.41) і вимагаємо виконання умов їх рівноваги:

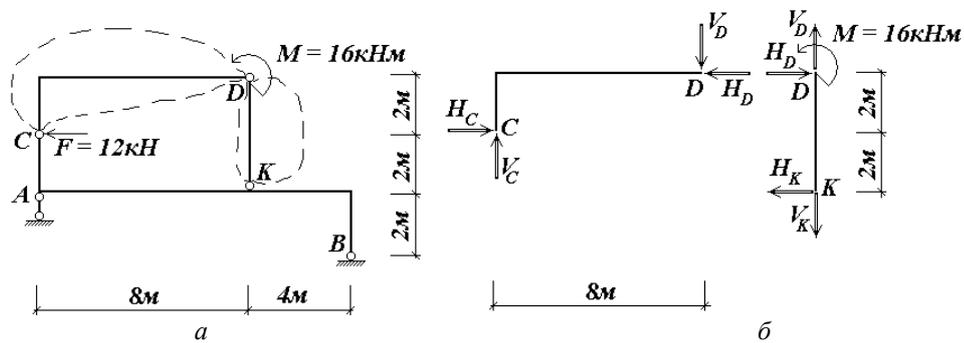


Рис. 2.41

Для диска D_3 :

$$\sum_{i=1}^2 M_D(\vec{F}_i) = 0; \quad M - 4 \cdot H_K = 0; \quad H_K = \frac{M}{4} = \frac{16}{4} = 4 \text{ кН}.$$

$$\sum_{i=1}^2 F_{xi} = 0; \quad H_D - H_K = 0; \quad H_D = H_K = 4 \text{ кН}.$$

Для диска D_2 :

$$\sum_{i=1}^2 M_C(\vec{F}_i) = 0; \quad 8V_D - 2H_D = 0; \quad V_D = \frac{2H_D}{8} = \frac{2 \cdot 4}{8} = 1 \text{ кН}.$$

$$\sum_{i=1}^2 F_{xi} = 0; \quad H_C - H_D = 0; \quad H_C = H_D = 4 \text{ кН}.$$

$$\sum_{i=1}^2 F_{yi} = 0; \quad V_C - V_D = 0; \quad V_C = V_D = 1 \text{ кН}.$$

Слід замітити, що силу F , яка діє в шарнірі C , доцільно прикладати до нижнього поверху разом з реакцією H_C .

Отже, $H_C = 4 \text{ кН}$, $V_C = 1 \text{ кН}$.

2.2.4. Аркові системи

Задача 8.

Дано: розрахункова модель (рис.2.43,а).

Необхідно: провести кінематичний аналіз та визначити зусилля в горизонтальному стержні затяжки.

Розв'язування:

1. Кінематичний аналіз системи.

а) Кількісний аналіз. Система має: дисків – 3, вузлів – 2, припайок – 0, простих шарнірів – 2, стержнів – 6 (рис.2.43,б).

За формулою Чебишова (2.1):

$$\Gamma = 3D + 2B - 3П - 2Ш - C - 3 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 2 - 6 - 3 = 13 - 13 = 0.$$

Висновок: система статично визначувана і може бути геометрично незмінною.

б) Якісний аналіз:

Розрахункова схеми бубується за чотири етапи (рис.2.44,а-г)

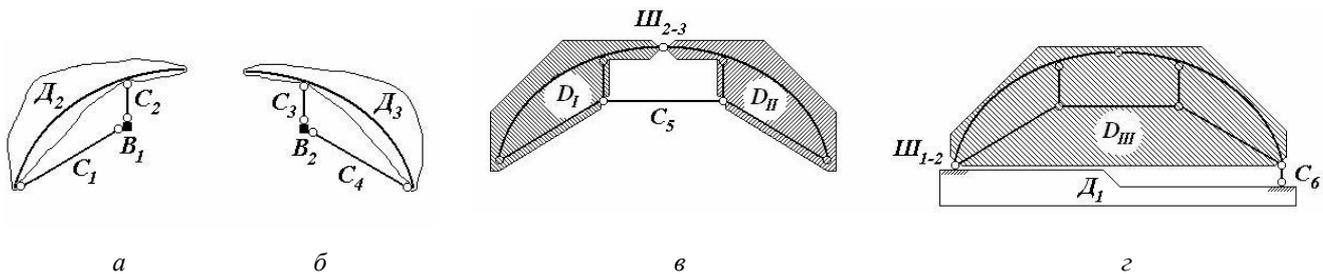


Рис.2.44

$$\frac{D_2 + B_1}{C_1, C_2} \Rightarrow D_I, \text{ метод діади;}$$

$$\frac{D_3 + B_2}{C_3, C_4} \Rightarrow D_{II}, \text{ метод діади;}$$

$$\frac{D_I + D_{II}}{Ш_{2-3}, C_5} \Rightarrow D_{III}, \text{ метод Полонсо;}$$

$$\frac{D_I + D_{III}}{Ш_{1-2}, C_6} \Rightarrow D_1, \text{ метод Полонсо.}$$

Висновок: система геометрично незмінювана.

2. Для визначення зусилля у горизонтальному стержні затяжки, який задіяний у створенні системи на передостанньому етапі, спочатку уявним замкненим перерізом звільняємо від в'язей диск D_{III} і вимагаємо виконання умов рівноваги сил, що діють на нього (рис.2.45,а,б)

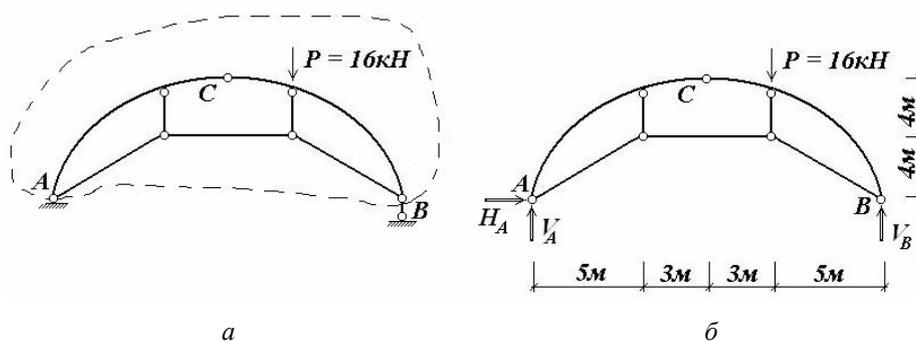


Рис.2.45

$$\sum_{i=1}^2 M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad 16V_B - 11P = 0; \quad V_B = \frac{11P}{16} = \frac{11 \cdot 16}{16} = 11 \text{ кН};$$

$$\sum_{i=1}^1 F_{xi} = 0; \quad H_A = 0;$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{yi} = 0; \quad V_A + V_B - P = 0; \quad V_A = P - V_B = 16 - 11 = 5 \text{ кН}.$$

Зусилля в зязяжці визначається з умов рівноваги диска D_1 (рис.2.46,а,б):

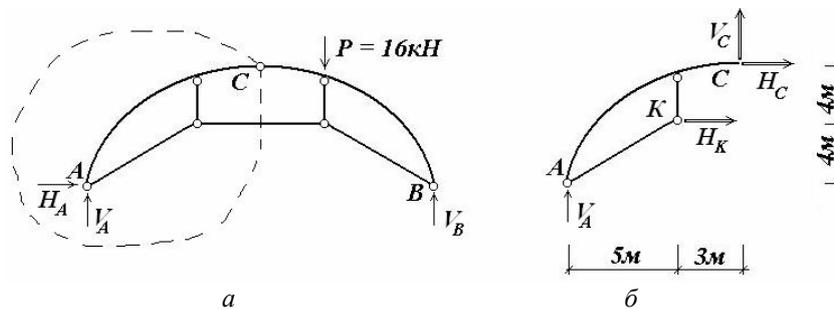


Рис. 2.46

$$\sum_{i=1}^2 M_C(\vec{F}_i) = 0; \quad 4H_K - 8V_A = 0; \quad H_K = \frac{8V_A}{4} = \frac{8 \cdot 5}{4} = 10 \text{ кН}.$$

Відповідь: горизонтальний стержень зязяжки розтягнутий зусиллям 10 кН.

2.3. Схеми задач для самостійного розв'язування

Для розрахункових моделей (рис.2.47,а,б – рис.2.51,а,б) виконати кінематичний аналіз і визначити реакції у в'язях. Якщо система статично невизначувана або геометрично змінювана, то попередньо перетворити її в статично визначувану і геометрично незмінювану.

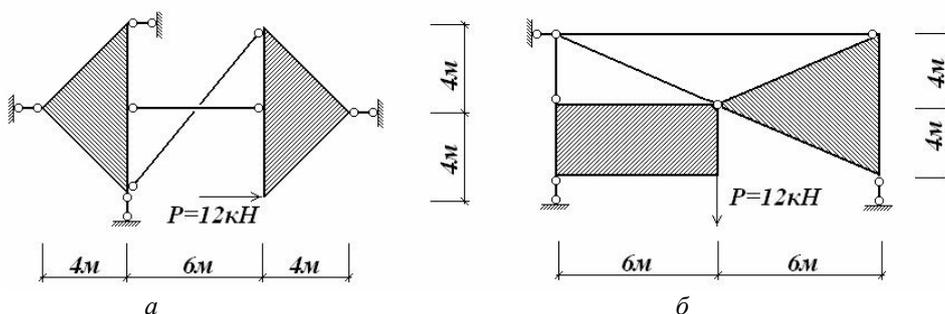


Рис.2.47

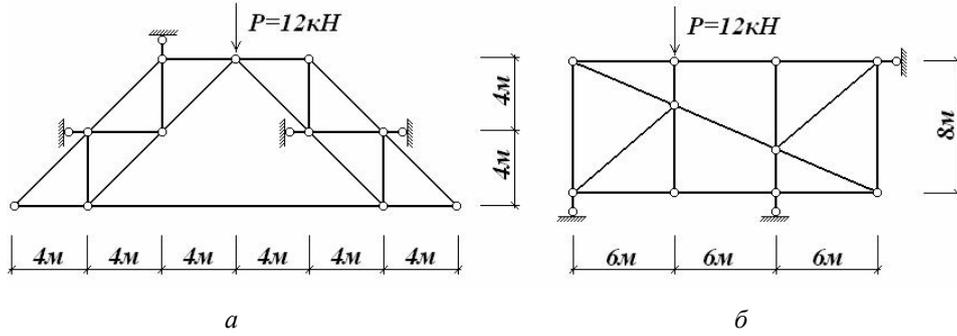


Рис.2.48

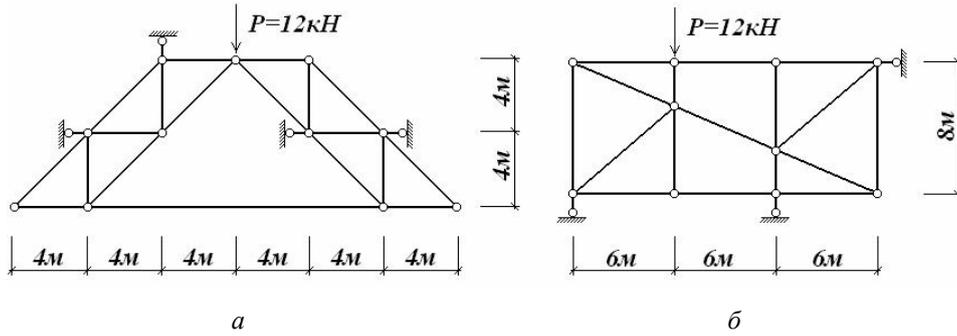


Рис.2.49

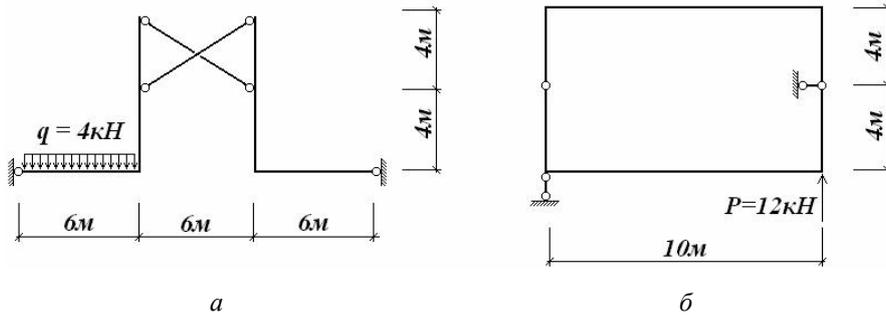


Рис.2.50

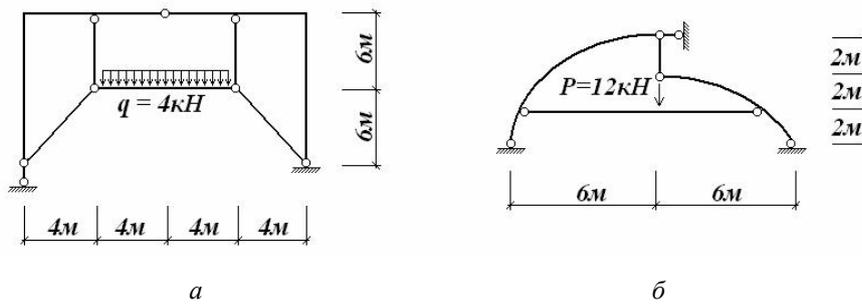


Рис.2.51

3. Розрахунок плоских статично визначуваних ферм

3.1.Короткі теоретичні відомості

Суцільні балки і колони при збільшенні їх прогонів трансформувались у наскрізні решітчасті конструкції, які більш раціональні з точки зору використання матеріалу. При розрахунку таких конструкцій їх моделюють фермами. **Фермами** називають геометрично незмінювані розрахункові моделі, утворені із прямолінійних стержнів, які на кінцях поєднані у шарнірні вузли, та з навантаженням у вигляді вузлових зосереджених сил. В елементах такої розрахункової схеми (ненавантажених стержневих дисках з двома шарнірними поєднаннями до інших об'єктів), виходячи із першої аксіоми статyki, виникає лише поздовжня сила. Така ідеалізація можлива завдяки великій гнучкості стержнів реальних решітчастих конструкцій та конструктивного вирішення передачі корисного навантаження у місця поєднання окремих стержнів. Прийнята ідеалізація значно спрощує розрахунок цього класу конструкцій без особливих втрат у достовірності отриманих результатів.

Розглянемо плоскі ферми, всі елементи яких належать одній площині, в якій діє навантаження на ферму. Просторові решітчасті конструкції також легко приводяться до плоских моделей. Основними елементами плоскої ферми (рис.3.1) є пояси – стержні, розміщені на зовнішньому контурі (CD – верхній та AB – нижній пояси), та решітка – сукупність стержнів, які поєднують пояси. Вертикальні стержні решітки називаються стійками (стиснуті) або підвісками (розтягнуті). Похилі стержні називають розкосами.

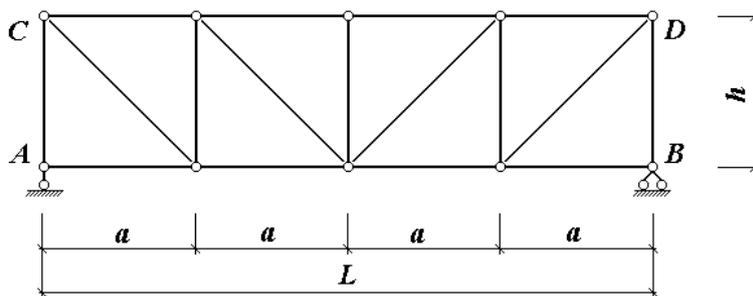


Рис.3.1

Відстань між осями опор ферми L називається її прогоном, а горизонтальна відстань між сусідніми вузлами a верхнього або нижнього поясів – панеллю ферми. Габаритний розмір ферми між поясами – її висота h .

Класифікуються ферми за геометрією поясів, за типом решітки, за способом спирання, за призначенням та за рівнем руху по фермі. На метод розрахунку ферми значний вплив має її місце в

класифікації за конструктивною схемою: балкова (прогонова або консольна), арочна (розпірна), та по типу решітки: трикутна, розкосна, напіврозкосна, багаторозкосна, ромбічна решітка тощо.

Розрахунок ферми полягає у визначенні поздовжніх зусиль в усіх її стержнях, які в подальшому будуть використовуватись у підборі (перевірці) поперечного перерізу її елементів. Існують аналітичні та графічні методи розрахунку плоских статично визначуваних ферм. Графічний метод менш точний, тому на ньому зупинятись не будемо.

Найпростіші статично визначувані ферми утворюються із шарнірного трикутника шляхом послідовного приєднання вузлів за допомогою двох непаралельних стержнів (метод діад). На останньому етапі створення розрахункової моделі побудований диск-ферма приєднується методами Полонсо або Шухова до диску „земля”. Для визначення внутрішніх зусиль в стержнях таких шарнірно-стержневих моделей використовується *метод перерізів*. Залежно від виду перерізу розрізняють *метод наскрізних перерізів* і *метод вирізання вузлів*.

За *методом вирізання вузлів* замкненим уявним перерізом може відділятися від ферми один вузол (рис.3.2,*а*), а за методом наскрізних перерізів – довільний фрагмент ферми (рис.3.3,*а*). В першому випадку система сил, які діють на один вузол, є збіжною (рис.3.2,*б*), умова рівноваги якої записується двома рівняннями проєкцій сил на координатні осі. З двох рівнянь можна визначити дві невідомі величини внутрішніх зусиль. На цьому базується алгоритм послідовного вирізання вузлів, при якому щоразу ”перерізаються” лише два стержня з невідомими зусиллями, значення яких визначаються способом проєкцій. Простота обчислення величин внутрішніх зусиль в стержнях досягається почерговим проєцируванням збіжної системи сил на осі, перпендикулярні кожній із двох невідомих (на рис.3.2,*б* осі x та y). Зусилля в інших „розрізаних” стержнях, що примикають до вирізаного вузла, мають бути відомими. За цим алгоритмом неможливо визначити внутрішнє зусилля в будь-якому стержні одразу – до нього потрібно „дійти”, послідовно вирізаючи ряд вузлів, починаючи з двостержневого (вузли E, C, A на рис.3.2,*б*).

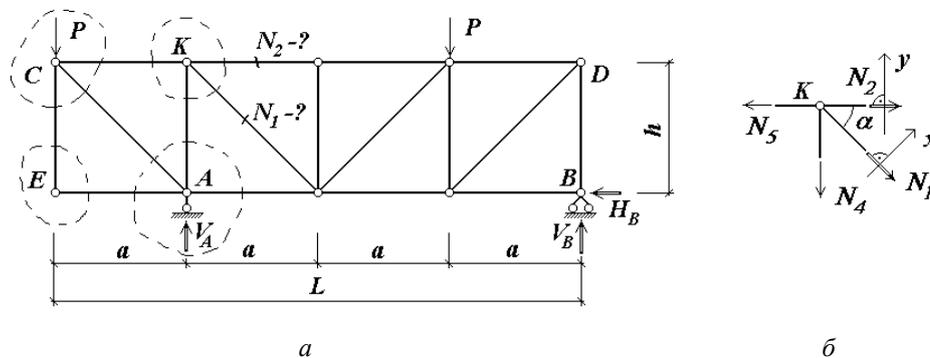


Рис.3.2

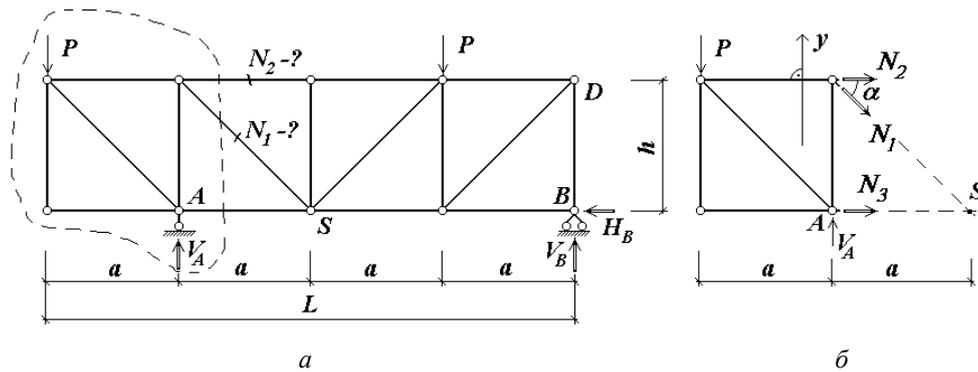


Рис.3.3

У методі наскрізних перерізів для виділеного фрагмента складаються рівняння моментів відносно моментних точок (точок Ріттера) або рівняння проекцій на координатні осі.

Моментні точки використовуються тоді, коли є змога розділити ферму на два диски, розрізавши при цьому три стержня, осі яких не перетинаються в одній точці (рис.3.3,а). З умов рівноваги одного із отриманих дисків можна визначити будь-яке із трьох невідомих зусиль у розрізаних стержнів. Для цього слід скористатись сумою моментів всіх сил, що діють на диск, відносно моментної точки (місця перетину осей двох інших розрізаних стержнів), як то S для визначення N_2 на рис.3.3,б. Якщо ж моментна точка розташована на нескінченності, то потрібно спроекувати всі сили на вісь перпендикулярну до цих двох стержнів – вісь y для визначення N_1 на рис.3.3,б.

У деяких простих фермах для визначення внутрішнього зусилля у стержні (N_1 , рис.3.4) потрібно скористатись двома перерізами: наскрізним перерізом і вирізати вузол. Такий алгоритм називається **способом сумісних перерізів**.

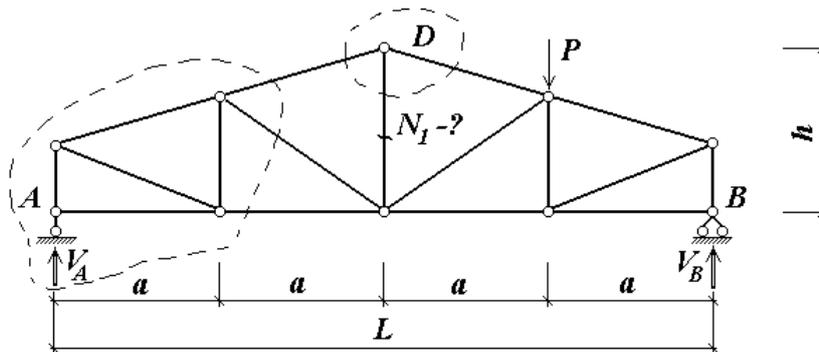


Рис.3.4

Виходячи з алгоритму вирізання вузлів зусилля в деяких стержнях ферми є очевидними. На рис.3.5,а-д деякі стержні мають нульові значення зусиль. Такі стержні позначені штриховою лінією. Це твердження доводиться у кожному випадку проектуванням збіжної системи сил, що діють на вузол, на осі x та y . З тих же умов можна стверджувати, що зусилля в стержнях, вздовж яких діють навантаження (рис.3.8,в,д), дорівнюють цьому навантаженню. Також окремим випадком рівноваги чотиристержневого не навантаженого вузла (рис.3.5,в) є рівність зусиль у стержнях, що належать окремим прямим.

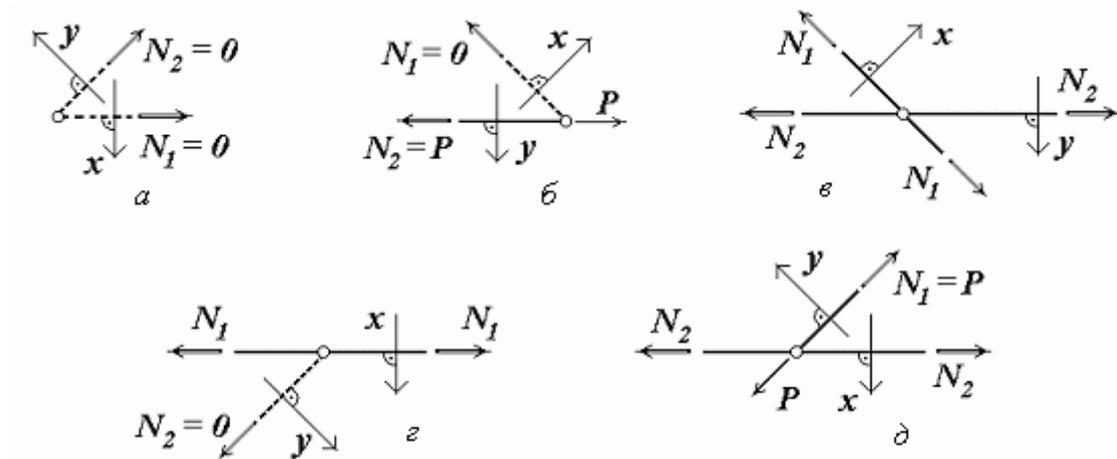


Рис.3.5

Крім простих ферм, утворених методом діад, існують ферми більш складної структури. Вони можуть бути утворені шляхом перестановки стержнів у простих фермах, при якій не порушується геометрична незмінюваність. Такі ферми називаються перетвореними (рис.3.6, а). Зусилля в стержнях перетворених ферм визначаються **способом заміни стержнів**.

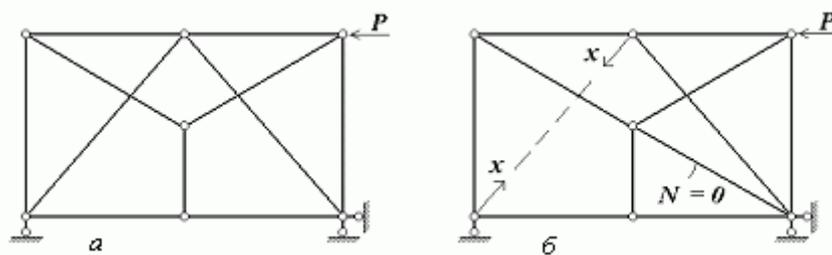


Рис.3.6

Цей спосіб полягає в тому, що не порушуючи геометричної незмінюваності розрахункової моделі, вона перестановкою одного стержня перетворюється на просту ферму. При цьому між вузлами, які в перетвореній фермі поєднував відкинутий стержень, підбирається величина сили x , яка разом із зовнішнім навантаженням на ферму повністю розвантажує новопоставлений стержень простої ферми (рис.3.6,б). Цей підбір реалізується за допомогою рівняння

$$N_p + x \cdot N_1 = 0, \quad (3.1)$$

де: N_p – зусилля у новому стержні простої ферми від дій зовнішнього навантаження, N_1 – зусилля в новому стержні від дії одиничної сили по напрямку сневідомих сил x . У такому стані зусилля у стержнях простої ферми будуть такі ж, як і у стержнях перетвореної ферми.

3.2. Приклади визначення внутрішніх зусиль у стержнях простих ферм

Задача 1.

Дано: розрахункова модель (рис. 3.7).

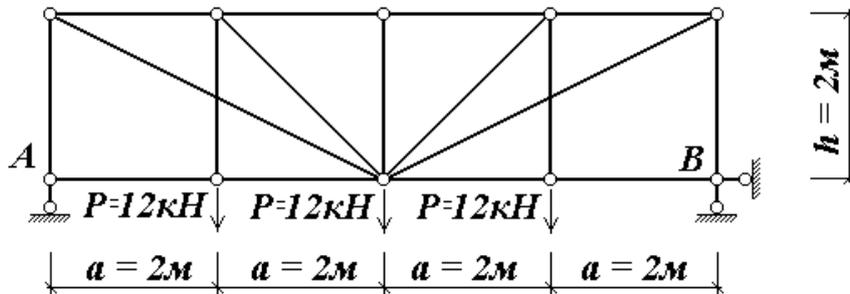


Рис.3.7

Необхідно: Визначити зусилля в стержнях ферми.

Розв'язування:

Розрахункова модель є плоскою простою статично визначуваною фермою, яку можна побудувати способом діад. Диск-ферма приєднується до „землі” методом Полонсо.

Визначення реактивних сил в опорних в'язях (рис.3.8):

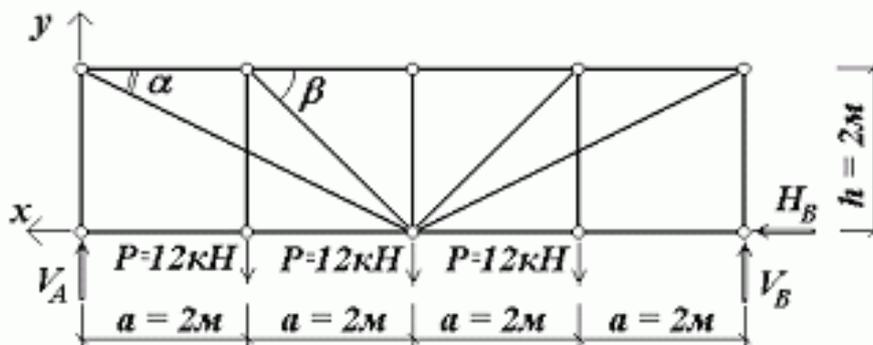


Рис.3.8

$$\sum_{i=1}^4 M_B(\vec{F}_i) = 0: \quad -2P - 4P - 6P + 8V_A = 0; \quad V_A = \frac{12P}{8} = \frac{12 \cdot 12}{8} = 18 \text{ кН};$$

$$\sum_{i=1}^4 M_A(\vec{F}_i) = 0: \quad 2P + 4P + 6P - 8V_B = 0; \quad V_B = \frac{12P}{8} = \frac{12 \cdot 12}{8} = 18 \text{ кН};$$

$$\sum_{i=1}^1 F_{xi} = 0: \quad H_B = 0.$$

Перевірка:

$$\sum_{i=1}^5 F_{yi} = V_A - P - P - P + V_B = 18 - 12 - 12 - 12 + 18 = 0.$$

За ознаками нульових стержнів нижній пояс та центральна стійка при заданному навантаженні не працюють (на рис.3.9). Тут і в подальшому нульові стержні зображатимуться штриховими лініями.

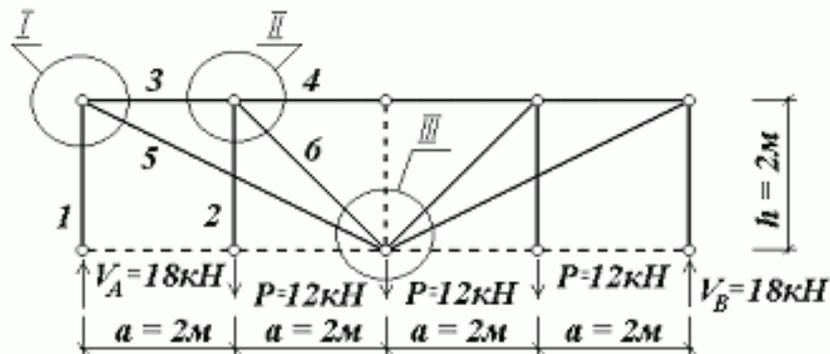


Рис.3.9

В стержнях 1 та 2 поздовжні сили дорівнюють навантаженню вздовж них $N_1 = -18кН$ (знак „-“ свідчить, що стержень стиснутий), $N_2 = 12кН$. Для розрахунку зусиль в інших стержнях почергово вирізаються вузли I та II, з рівноваги яких обчислюються по дві невідомі величини (рис.3.10). Куты α та β визначаються з геометрії стержневої конструкції

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{4} = 0,5; \quad \alpha = \arctg 0,5 = 26,57^\circ;$$

$$\cos 26,57^\circ = 0,8944; \quad \sin 26,57^\circ = 0,4472.$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{2} = 1; \quad \beta = \arctg 1 = 45^\circ; \quad \cos 45^\circ = 0,7071; \quad \sin 45^\circ = 0,7071.$$

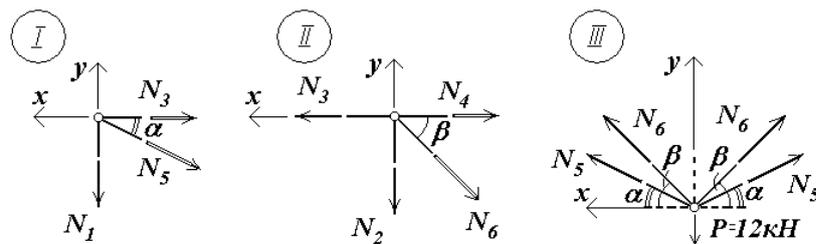


Рис.3.10

Вузол I

$$\sum_{i=1}^2 F_{yi} = 0: \quad -N_1 - N_5 \sin \alpha = 0; \quad N_5 = \frac{-N_1}{\sin \alpha} = \frac{-(-18)}{0,4472} = 40,25 \text{ кН}.$$

$$\sum_{i=1}^2 F_{xi} = 0: \quad N_3 + N_5 \cos \alpha = 0; \quad N_3 = -N_5 \cos \alpha = -40,25 \cdot 0,8944 = -36 \text{ кН}.$$

Вузол II:

$$\sum_{i=1}^2 F_{yi} = 0: \quad -N_2 - N_6 \sin \beta = 0; \quad N_6 = \frac{-N_2}{\sin \beta} = \frac{-12}{0,7071} = -16,97 \text{ кН}.$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{xi} = 0: N_3 - N_6 \cos \beta - N_4 = 0;$$

$$N_4 = N_3 - N_6 \cos \beta = -36 - 16,97 \cdot 0,7071 = -48 \text{ кН}.$$

Розрахункова схема і навантаження мають вісь симетрії, тому зусилля в симетричних стержнях будуть однакові.

Вузел III, в усіх стержнях якого зусилля знайдені з рівноваги інших вузлів, використовується для перевірки:

$$\sum_{i=1}^3 F_{yi} = -P + 2N_5 \sin \alpha + 2N_6 \sin \beta = -12 + 2 \cdot 40,25 \cdot 0,4472 + 2 \cdot (-16,97) \cdot 0,7071 = 36 - 36 = 0;$$

Сума проєкцій всіх сил на вісь x очевидна.

Отже, в стержнях ферми при заданому навантаженні виникають поздовжні сили:

$$N_1 = -18 \text{ кН}; \quad N_2 = 12 \text{ кН}; \quad N_3 = -36 \text{ кН}; \\ N_4 = -48 \text{ кН}; \quad N_5 = 40,25 \text{ кН}; \quad N_6 = -16,97 \text{ кН}.$$

Задача 2.

Дано: розрахункова модель (рис.3.11).

Необхідно: Визначити зусилля в стержнях 1 – 6 шарнірно-стержневої системи.

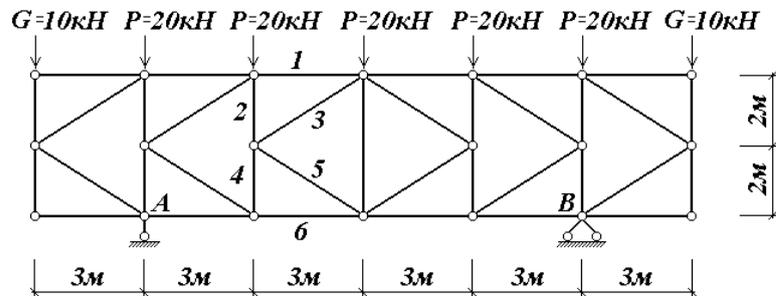


Рис.3.11

Розв'язування:

Вихідна розрахункова модель відноситься до плоских простих статично визначуваних ферм, які можна створити за допомогою методу діад. Ферма приєднується до диску „земля” методом Полонсо.

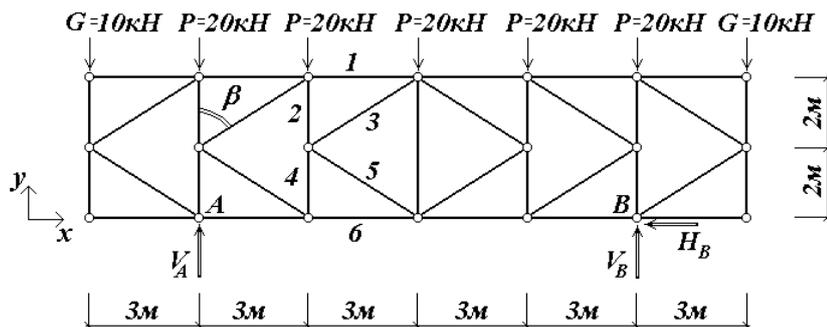


Рис. 3.12

Визначення реактивних сил в опорних в'язях (рис.3.12):

$$\sum_{i=1}^7 M_B(\vec{F}_i) = 0: \quad 3G - 3P - 6P - 9P - 12P + 12V_A - 15G = 0;$$

$$V_A = \frac{-3G + 3P + 6P + 9P + 12P + 15G}{12} = \frac{12 \cdot 10 + 30 \cdot 20}{12} = 60 \text{ кН};$$

$$\sum_{i=1}^1 F_{xi} = 0: \quad H_B = 0;$$

$$\sum_{i=1}^7 M_A(\vec{F}_i) = 0: \quad 15G + 12P - 12V_B + 9P + 6P + 3P - 3G = 0;$$

$$V_B = \frac{-15G - 12P - 9P - 6P - 3P + 3G}{12} = \frac{-12 \cdot 10 + 30 \cdot 20}{12} = 60 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum_{i=1}^9 F_{yi} = V_A - 5P - 2G + V_B = 0;$$

$$60 - 5 \cdot 20 - 2 \cdot 10 + 60 = 0.$$

За ознаками виявляються стержні із нульовими зусиллями (позначені на рис.3.13 штриховими лініями). Для знаходження величин внутрішніх зусиль у зазначених стержнях виконано два уявних перерізи ферми (рис.3.13) і розглянута умова рівноваги лівих частин ферми від дії зовнішніх активних і невідомих реактивних сил.

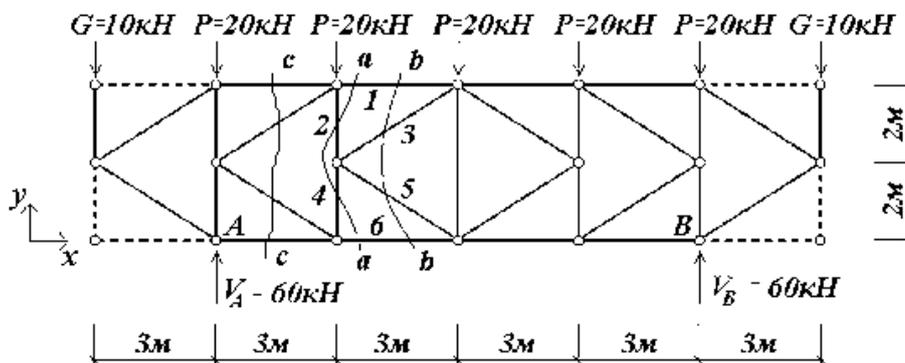


Рис.3.13

З умов рівноваги частини ферми, відрізаної перерізом *a-a* (рис.3.14,*a*)

$$\sum_{i=1}^4 M_C(\vec{F}_i) = 0: \quad 6G + 3P - 4N_1 - 3V_A = 0;$$

$$N_1 = \frac{6G + 3P - 3V_A}{4} = \frac{6 \cdot 10 + 3 \cdot 20 - 3 \cdot 60}{4} = -15 \text{ кН};$$

$$\sum_{i=1}^2 F_{xi} = 0: \quad N_1 + N_6 = 0; \quad N_6 = -N_1 = -(-15) = 15 \text{ кН}.$$

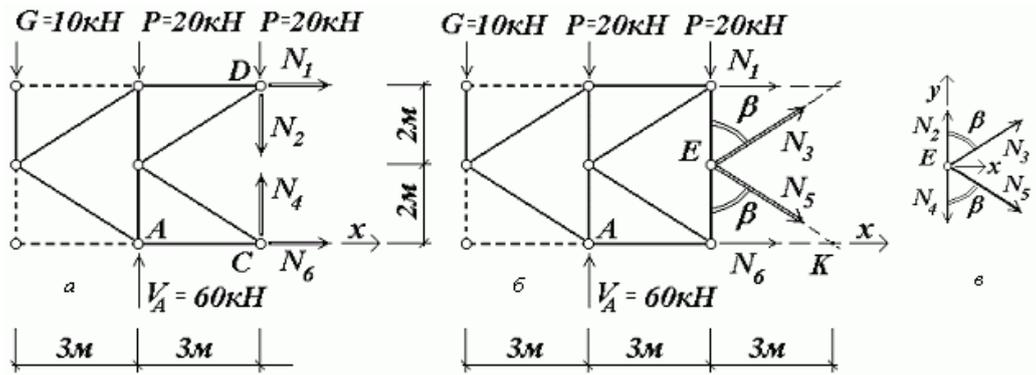


Рис.3.14

З умов рівноваги частини ферми, розміщеної ліворуч перерізу $b-b$ (рис.3.14,б)

$$\sum_{i=1}^6 F_{yi} = 0: -G - P - P + V_A + N_3 \cos \beta - N_5 \cos \beta = 0.$$

$$\text{Тут } \sin \beta = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 0,8321, \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 0,5547.$$

Зв'язок між зусиллями N_3 та N_5 Можна встановити з умови рівноваги вузла E (рис.3.14,в):

$$\sum_{i=1}^2 F_{xi} = 0: N_3 \sin \beta + N_5 \sin \beta = 0; \quad N_5 = -N_3.$$

За цієї умови попереднє рівняння набуває вигляду

$$-G - P - P + V_A + N_3 \cos \beta - (-N_3) \cos \beta = 0,$$

звідки

$$N_3 = \frac{G + P + P - V_A}{2 \cos \beta} = \frac{10 + 20 + 20 - 60}{2 \cdot 0,5547} = -9,01 \text{ кН}.$$

$$N_5 = -N_3 = 9,01 \text{ кН}.$$

В стержнях 2 і 4 (рис. 3.13) поздовжні сили діють вздовж однієї прямої, тому визначити їх можна лише окремо з умов рівноваги збіжних систем сил, що діють на вузли C та D . Але в цих системах по три невідомі, тому попередньо розглядається рівновага фрагменту ферми, обмеженого перерізом $c-c$ (рис.3.15,а):

$$\sum_{i=1}^5 F_{yi} = 0: -G - P + V_A + N_7 \cos \beta - N_8 \cos \beta = 0.$$

Зв'язок між зусиллями в розкосах N_7 та N_8 визначаємо з умов рівноваги вузла F (рис.3.15,б):

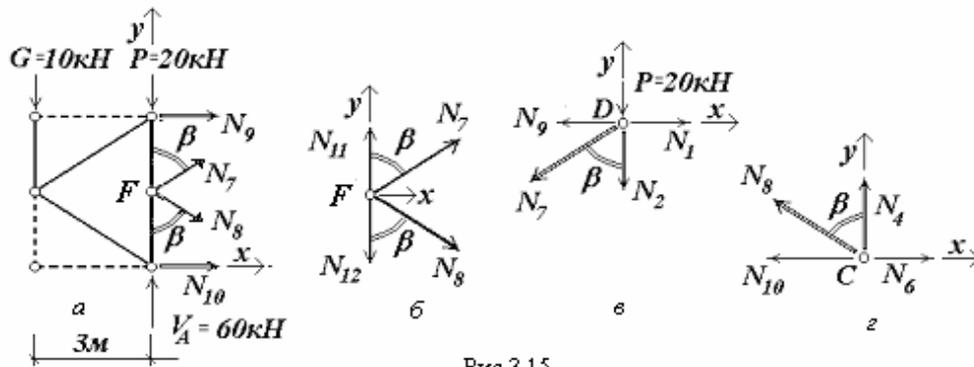


Рис.3.15

$$\sum_{i=1}^2 F_{xi} = 0: N_7 \sin \beta + N_8 \sin \beta = 0; \quad N_8 = -N_7.$$

З урахуванням отриманого співвідношення розв'язуємо попереднє рівняння рівноваги:

$$-G - P + V_A + N_7 \cos \beta - (-N_7) \cos \beta = 0;$$

$$N_7 = \frac{G + P - V_A}{2 \cos \beta} = \frac{10 + 20 - 60}{2 \cdot 0,5547} = -27,04 \text{ кН};$$

$$N_8 = -N_7 = 27,04 \text{ кН}.$$

Зусилля в стержнях 2 і 4 визначаються з рівноваги вузлів відповідно D (рис.3.15,в) і C (рис.3.15,г)

$$\sum_{i=1}^3 F_{yi} = 0: -N_2 - N_7 \cos \beta - P = 0;$$

$$N_2 = -N_7 \cos \beta - P = -(-27,04) \cdot 0,5547 - 20 = -5 \text{ кН}.$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{yi} = 0: N_4 + N_8 \cos \beta = 0; \quad N_4 = -N_8 \cos \beta = -27,04 \cdot 0,5547 = -15 \text{ кН}.$$

$$N_4 = -N_8 \cos \beta = 27,04 \cdot 0,5547 = 15 \text{ кН}.$$

Відповідь:

$$\begin{aligned} N_1 &= 15 \text{ кН}, & N_2 &= -5 \text{ кН}, \\ N_3 &= -9,01 \text{ кН}, & N_4 &= -15 \text{ кН}, \\ N_5 &= 9,01 \text{ кН}, & N_6 &= 15 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Знак „-“ свідчить про те, що стержень стиснутий.

3.3. Схеми задач для самостійного розв'язування

Визначити внутрішні зусилля в стержнях плоских розрахункових схем, зображених на рис.3.16,а-е.

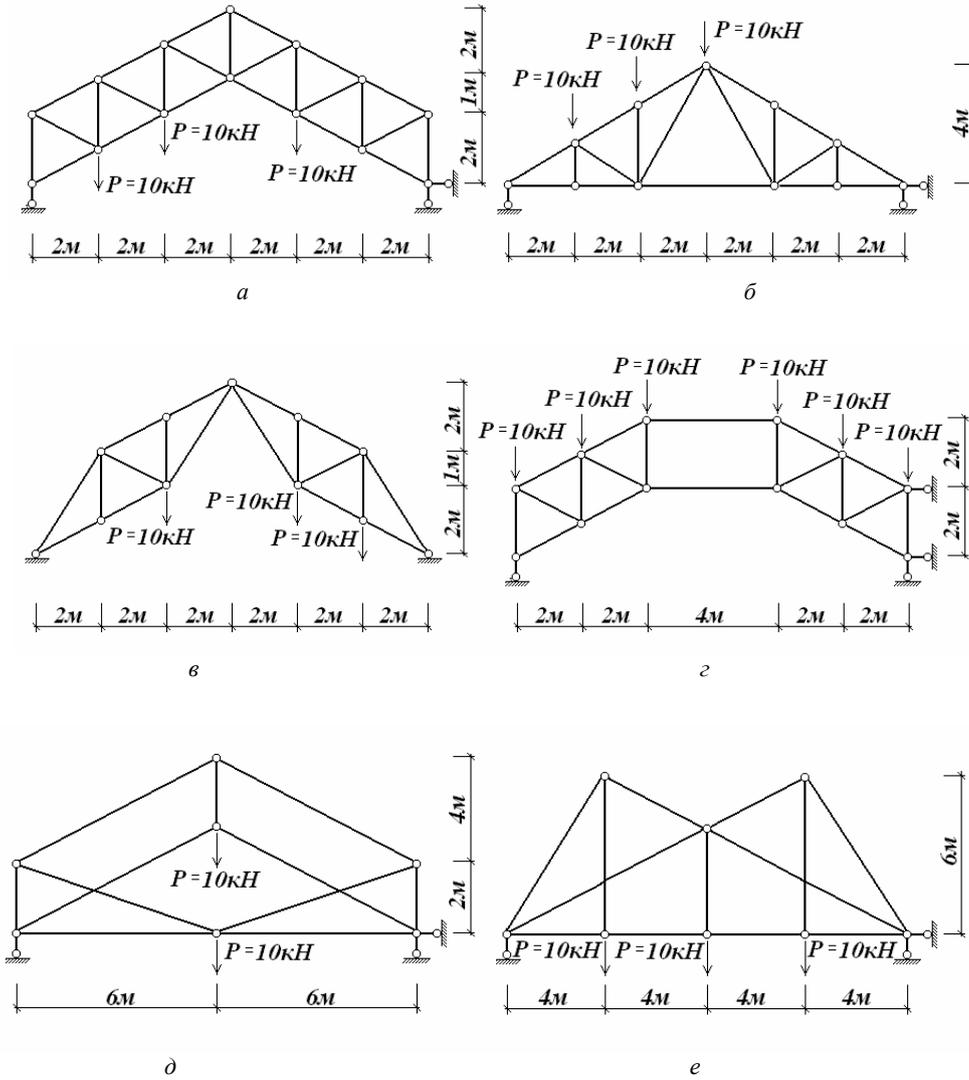


Рис.3.16

4. Статично визначувані просторові ферми

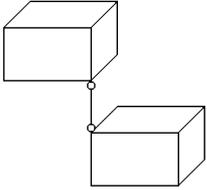
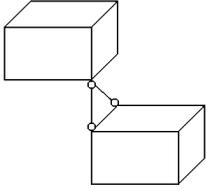
4.1. Короткі теоретичні відомості

Складовими просторових розрахункових моделей (систем тіл), як і плоских (див. п. 2.1), є диски (тіла), вузли (диски нульових розмірів) та в'язі, які перешкоджають взаємним переміщенням дисків та вузлів. Кількість в'язей та їх розташування визначають кінематичні властивості моделі, яка може бути геометрично незмінюваною, змінюваною або миттєво змінюваною. Геометрично незмінювані системи, котрі мають мінімально необхідний для їх створення набір в'язей, є статично визначуваними, а перенасичені в'язями системи – статично невизначуваними. При недостатній кількості в'язей утворена система тіл є механізмом (змінюваною системою).

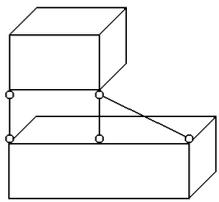
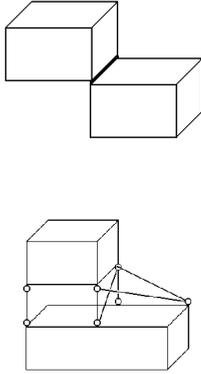
У просторі диск (окреме тіло, яке може міняти свою геометрію лише при навантаженні, або система тіл, достатньо розкріплених в'язями) має шість ступенів вільності, тобто його положення в просторовій системі координат визначають шість незалежних параметрів, наприклад: три лінійні і три кутові координати. Тому, щоб унеможливити взаємні переміщення двох вільних дисків, потрібно в'язями усунути між ними шість ступенів змінюваності, створивши при цьому складений диск. Під ступенем змінюваності системи двох дисків слід розуміти кількість незалежних координат, які визначають положення одного диска по відношенню до іншого (тобто переміщення одного диску в системі координат, пов'язаній з іншим диском). Положення вузла в просторі визначають три незалежні координати (лінійні), тому для приєднання одного вузла до диску достатньо усунути в'язями три ступеня вільності.

Найпростішою в'яззю в просторових моделях є стержень з двома кульовими шарнірами на кінцях – просторова *кінематична в'язь*. Як і раніше, в'язь ідеалізується: вважатимемо стержень абсолютно жорстким і нехтуватимемо тертям в шарнірах. Всі інші в'язі можуть бути представлені сукупністю декількох певним чином розміщених кінематичних в'язей. Найбільш вживані в'язі, їх схеми, кінематичні та статичні характеристики приведені в таблиці 4.1. При цьому слід зауважити, що кінематичні властивості в'язей визначатимуться нескінченно малими переміщеннями, які вони дозволятимуть, а статичні – реактивними силами взаємодії дисків (реакції), які можуть виникнути у в'язях при навантаженні дисків.

Таблиця 4.1

Назва	Модель з кінематичних в'язей	Кінематична характеристика	Статична характеристика
Рухома в'язь в площині з трьома поворотами (кінематична в'язь – К).	<p>Одна кінематична в'язь.</p> 	<p>Унеможлиблює одне поступальне переміщення вздовж стержня (<i>усуває один ступінь вільності</i>).</p> <p>Залишає можливість реалізуватись двом поступальним переміщенням в площині, перпендикулярній стержню, і трьом кутовим переміщенням (залишає п'ять ступенів вільності).</p>	<p>Може виникати реактивна сила вздовж стержня (<i>одна невідома</i>).</p>
Лінійно-рухома в'язь з трьома поворотами (лінійний каток – ЛК).	<p>Дві кінематичні в'язі зі спільним шарніром.</p> 	<p>Унеможлиблює лінійні переміщення в площині стержнів (<i>знімає два ступеня вільності</i>).</p> <p>Не заперечує поступальному переміщенню перпендикулярно площині стержнів і трьом поворотам (залишає чотири ступеня вільності).</p>	<p>Може виникати реактивна сила в площині стержнів, що проходить під невідомим кутом через спільний шарнір, яка визначається двома компонентами (<i>дві невідомі</i>).</p>
Рухома в'язь в площині з двома поворотами (плоский каток – ПК).	<p>Дві паралельні кінематичні в'язі.</p>	<p>Унеможлиблює лінійне переміщення вздовж стержнів та поворот в площині стержнів (<i>знімає два ступеня вільності</i>).</p>	<p>Може виникати реактивна сила в площині стержнів паралельна до них, котру можна перенести паралельно собі до зручного</p>

		Дозволяє поступальне переміщення перпендикулярно площині стержнів та два повороти (залишає чотири ступеня вільності).	центру на площині і визначати як силу паралельну стержням та момент пари в площині стержнів (<i>дві невідомі</i>)
Шарнірно нерухома в'язь з трьома поворотами (кульовий шарнір – Ш).	Три кінематичні в'язі, які не належать одній площині, зі спільним шарніром. 	Унеможлиблює всі лінійні переміщення (<i>знімає три ступеня вільності</i>). Не забороняє реалізуватись трьома поворотами (залишає три ступеня вільності).	Може виникати реактивна сила, яка проходить через спільний шарнір але має невизначену орієнтацію, тому шукати реакцію зручно через три проєкції на прийняті напрямки (<i>три невідомі</i>).
Рухома в'язь в площині з одним поворотом (плоский повзун – ПП).	Три паралельні кінематичні в'язі, які не належать одній площині. 	Унеможлиблює лінійне переміщення вздовж стержнів та два повороти (<i>знімає три ступеня вільності</i>). Залишає можливість поступальним переміщенням в площині, перпендикулярній стержням та повороту відносно осі, паралельній стержням (залишає три ступеня вільності).	Може виникати реактивна сила, лінія дії якої паралельна стержням. Така реакція переноситься паралельно лінії дії до зручного центру і визначається її величина і два моменти пар в координатних площинах (<i>три невідомі</i>).
Лінійно-рухома в'язь з двома поворотами (лінійний повзун – ЛП).	Три кінематичні в'язі, які належать одній площині (дві з них паралельні).	Унеможлиблює лінійні переміщення і поворот в площині стержнів (<i>знімає три ступеня вільності</i>).	Може виникати реактивна сила в площині стержнів, яку, перенісши паралельно до зручного центру та

		<p>Не перешкоджає поступальному переміщенню з площини стержнів, та двом поворотам (залишає три ступеня вільності).</p>	<p>розклавши на складові, зручно визначати через дві проекції та момент пари в площині стержнів (<i>три невідомі</i>).</p>
<p>Нерухома в'язь (припайка – П).</p>	<p>Жорстке закріплення або шість правильно установлених кінематичних в'язей.</p> 	<p>Унеможлиблює всі лінійні і всі кутові переміщення (<i>знімає всі шість ступенів вільності</i>).</p>	<p>Може виникати реактивна сила, вектор якої має загальне положення, котрий зручно перенести паралельно собі до довільного центру зведення та розкласти на три складових вектора і визначати три проекції реакції та три моменти пар сил в координатних площинах (<i>шість невідомих</i>).</p>

Крім в'язей, охарактеризованих в таблиці, для створення розрахункових моделей споруд можуть використовуватись інші поєднання дисків, які найповніше зберігають кінематичні властивості реальних поєднань. Моделі нових в'язей можна створити, додавши до приведених в таблиці додаткові стержні. Слід зазначити, що для кожної в'язі кількість невідомих реактивних величин співпадає з числом вільностей, які ця в'язь унеможлиблює.

На *кількісному етапі* кінематичного аналізу досліджується співвідношення між кількістю ступенів вільності системи окремих об'єктів (простих дисків та вузлів) та ступенів вільностей, які знімають в'язі, що поєднують об'єкти

$$Г = C_D - C_B - 6, \quad (4.1)$$

де Γ – ступінь геометричної змінюваності системи, яка відрізняється від ступеня вільності цієї системи на 6 (останній доданок у формулі); $C_D = 6D + 3B$ – ступінь вільності D (разом із диском «земля») не поєднаних дисків та B вузлів, з яких складається система; C_B – сумарна кількість ступенів вільностей, яку знімають в'язі. Для систем, в яких використовуються лише ті в'язі, що приведені в таблиці 4.1, ця величина шукатиметься за формулою

$$C_B = 6 \cdot П + 3 \cdot ЛП + 3 \cdot ПП + 3 \cdot Ш + 2 \cdot ПК + 2 \cdot ЛК + 1 \cdot К, \quad (4.2)$$

де літери – кількість в'язей (згідно позначень в першому стовпчику таблиці) в системі, а числа – ступені вільності, які знімає відповідна в'язь. Якщо в'язь одночасно поєднує декілька дисків, то вона кратна, де кількість простих в'язей на одиницю менша кількості дисків, які вона поєднує. Права частина цієї формули може бути доповненою новими доданками, створеними для інших в'язей.

Як і для плоских систем, розрахункова модель є статично визначуваною, якщо $\Gamma = 0$. При $\Gamma < 0$ система буде статично невизначуваною (в'язей більше мінімально необхідної кількості), якщо ж $\Gamma > 0$ – то система геометрично змінювана. При $\Gamma \leq 0$ перед дослідженням напружено-деформованого стану системи необхідно проводити якісний етап кінематичного аналізу, щоб впевнитись в її геометричній незмінюваності.

Просторовими фермами називаються геометрично незмінювані системи, утворені із прямолінійних стержнів, які не належать одній площині і поєднані між собою шарнірними вузлами. Навантаження на таку розрахункову схему моделюється зосередженими силами, які прикладені до вузлів. Такі ферми на стадії кінематичного аналізу можна розглядати, як систему вузлів, поєднаних кінематичними в'язями.

Просторові ферми створюються чотирма основними способами.

Перший спосіб – за допомогою тріад, аналогічній побудові плоских ферм способом діад. На першому кроці створюється плоска система трьох стержнів, які поєднуються шарнірними вузлами. Наступні кроки полягають у приєднанні до раніше створеного складеного диску вузла за допомогою трьох стержнів, які не належать одній площині. Утворена таким чином ферма на останньому кроці приєднується до диску «земля» за допомогою в'язей, які знімають шість ступенів вільності. Особливості такого поєднання будуть розглянуті далі.

Другий спосіб полягає у поєднанні двох раніше побудованих дисків (просторових або плоских частин ферми) за допомогою шести кінематичних в'язей, які знімають шість ступенів вільності одного диску по відношенню до іншого, утворюючи один складений диск.

Третій спосіб – спосіб заміни стержнів, полягає в тім, що в раніше створеній геометрично незмінюваній фермі знімається стержень (перетворюючи ферму на геометрично змінюваний меха-

нізм) і ним поєднуються інші вузли, відстань між якими в механізмі могла змінюватись. Новотворена ферма також буде геометрично незмінюваною.

Четвертий спосіб – спосіб збирання просторової шарнірно-стержневої системи із плоских ферм шляхом поєднання їх окремих стержнів та вузлів (такі ферми називають сітчаними). Доведено, що випукла сітчана ферма, зібрана із плоских геометрично незмінюваних ферм, також є геометрично незмінюваною.

Для забезпечення незмінюваності геометрії системи двох просторових дисків або системи диск-«земля», поєднаних за допомогою шести кінематичних в'язей (чи набором інших в'язей, еквівалентним шести стержням) необхідно уникати неправильного розташування стержнів, при якому система буде геометрично або миттєво змінюваною.

Першою ознакою змінюваності системи є перетин осей всіх шести кінематичних в'язей однією прямою, яка буде віссю миттєвого або скінченного взаємного повороту одного диску відносно іншого. Частковими випадками такого розміщення стержнів можуть вважатись:

- належність шести стержнів в будь-якому наборі до двох площин, лінія перетину яких є віссю взаємного повороту дисків (якщо ці площини паралельні, то диски матимуть можливість не повертатись, а нескінченно або скінченно зміщуватись перпендикулярно цим площинам);
- перетин осей стержнів в будь-якій комбінації в двох точках, через яку буде проходити вісь взаємного повороту дисків.

Другою ознакою змінюваності системи є перетин осей чотирьох або більше стержнів в одній точці, які зможуть зняти лише дві (якщо стержні належать одній площині) або три ступеня змінюваності. Решта стержнів зніме не більше двох ступенів вільності, тому такий набір шести в'язей не буде спроможним забезпечити геометричну незмінюваність системи. Паралельні стержні можна вважати такими, що перетинаються в нескінченності, тому вони також підлягають до цього правила.

Третім випадком не забезпечення незмінюваності системи є наявність серед шести кінематичних в'язей трьох, осі яких належать одній площині і перетинаються в одній точці. Такі три стержні знімають лише два ступеня вільності, а інші три стержня при будь-якому розташуванні будуть не в змозі зняти решту чотири ступеня вільності.

Для кожного із зазначених способів утворення просторової ферми існують свої алгоритми визначення реактивних сил.

1. Зусилля в стержнях, котрі утворюють тріаду, легко визначити із умови рівноваги збіжної системи сил: рівність нулю головного вектора, який діє на вузол. Це векторне рівняння трансформується в три скалярних рівняння рівності нулю сум проекцій всіх сил, що діють на вузол, на три осі координат, які не паралельні між собою. Такий алгоритм носить назву **способу вирізання вузлів**.

2. У шести стержнях, які поєднують два диски, внутрішні зусилля визначаються із умов рівноваги довільної системи сил, які діють на один із дисків: рівність нулю головного вектора і головного моменту системи, котрі шляхом проектування на координатні осі утворюють шість скалярних рівнянь: три рівняння рівності нулю сум проекцій всіх сил на три непаралельні осі і три рівняння рівності нулю сум моментів усіх сил стосовно трьох осей. Такі дії мають місце при реалізації **способу наскрізних перерізів** поверхнями.

3. При утворенні системи **способом заміни стержнів** потрібно використати однойменний спосіб пошуку внутрішніх зусиль в стержнях-в'язях, який полягає в перестановці одного чи декількох стержнів ферми, не порушуючи її геометричну незмінюваність, в зручне (для пошуку зусиль в усіх стержнях системи відомими способами) місце і визначенні величини двох протилежних зовнішніх сил, які діють на відповідні вузли по напрямку старого положення стержня, при якій у ново поставленому стержні зусилля дорівнюватиме нулю.

4. Якщо просторова ферма є збіраною із плоских геометрично незмінюваних ферм, то її розрахунок проводиться за **методом розкладання** просторових шарнірно-стержневих систем на плоскі.

4.2. Приклад розв'язування просторової ферми

Дано просторову шарнірно-стержневу систему, зображену на рис. 4.1.

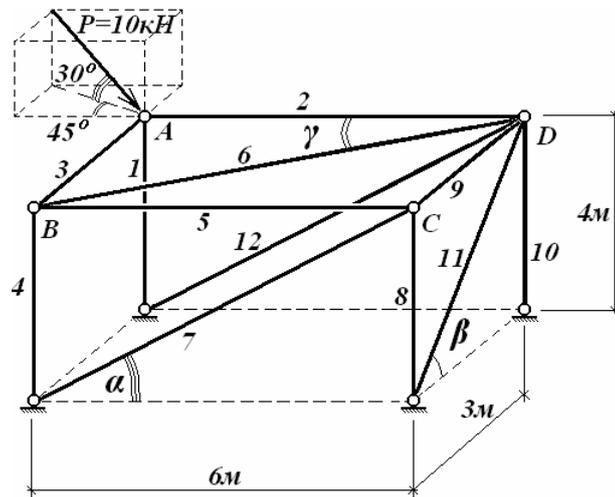


Рис.4.1

Необхідно визначити зусилля у всіх стержнях.

Розв'язування.

1. Кінематичний аналіз.

а) Кількісний аналіз.

Визначаємо кількість складових тіл системи: $D = 1, B = 4$; та в'язей між ними: $K = 12$.

Сумарний ступінь вільності незалежних об'єктів:

$$C_D = 6 \cdot D + 3 \cdot B = 6 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 18.$$

Кількість ступенів вільності, яку знімають наявні в'язі:

$$\begin{aligned} C_B &= 6 \cdot \Pi + 3 \cdot \text{ЛП} + 3 \cdot \text{ПП} + 3 \cdot \text{Ш} + 2 \cdot \text{ПК} + 2 \cdot \text{ЛК} + 1 \cdot K = \\ &= 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 12 = 12. \end{aligned}$$

Ступінь геометричної змінюваності системи поєднаних тіл:

$$\Gamma = C_D - C_B - 6 = 18 - 12 - 6 = 0,$$

тобто система є статично визначуваною і може бути геометрично незмінюваною.

б) Структурний аналіз.

Конструкція побудована за чотири етапи (рис. 4.2 *a-г*), послідовним приєднанням до диску «земля» вузлів *D, C, B* та *A* з використанням методу тріади (за допомогою трьох стержнів, які не належать одній площині):

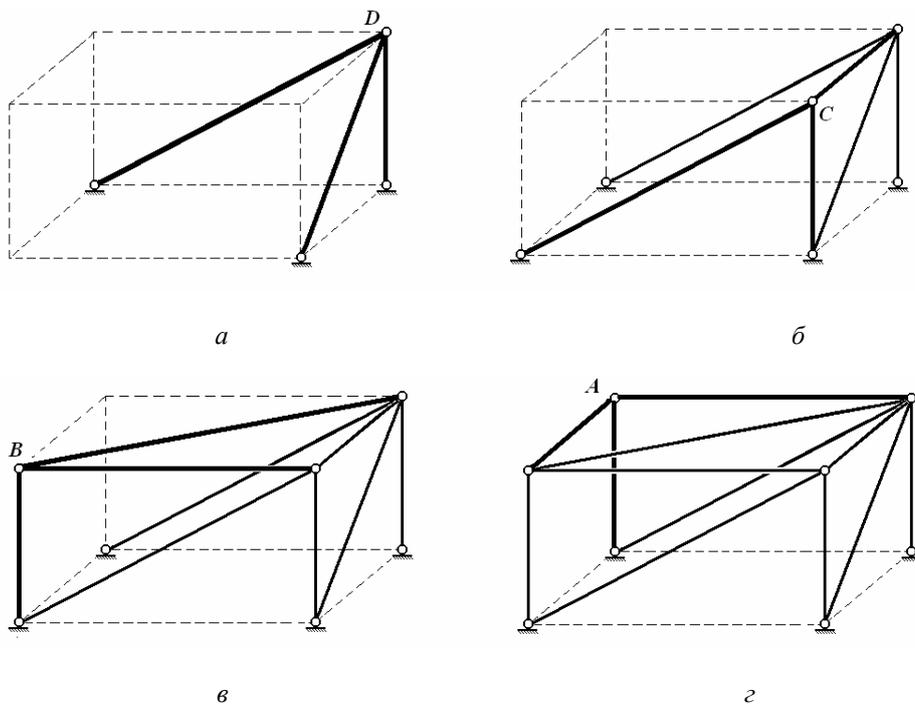


Рис. 4.2

в) Висновок: система статично визначувана і геометрично незмінювана.

2. Визначення геометричних характеристик ферми (тригонометричних функцій кутів нахилу стержнів):

$$\cos \gamma = \frac{6}{\sqrt{3^2 + 6^2}} = 0,8944; \quad \cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{4^2 + 6^2}} = 0,8321; \quad \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,6;$$

$$\sin \gamma = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 6^2}} = 0,4472; \quad \sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 6^2}} = 0,5547; \quad \cos \beta = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,8.$$

3. Розкладання зовнішніх сил на компоненти.

$$P_x = P \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = 10 \cdot 0,866 \cdot 0,707 = 6,124 \text{ кН},$$

$$P_y = P \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ = 10 \cdot 0,866 \cdot 0,707 = 6,124 \text{ кН},$$

$$P_z = P \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5,0 \text{ кН}.$$

4. Визначення внутрішніх зусиль в стержнях просторової ферми.

Для створеної ферми послідовним приєднанням вузлів трійками стержнів зусилля в стержнях можна шукати методом вирізання вузлів (рис. 4.3).

Спочатку зніmemo «верхній поверх» (вузол A , який був приєднаний останнім):

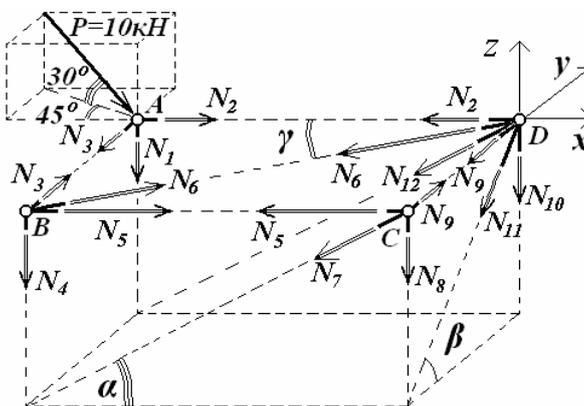


Рис.4.3

$$\sum F_y^A = 0: \quad N_3 + P_y = 0; \quad N_3 = -P_y = -6,124 \text{ кН}.$$

$$\sum F_x^A = 0: \quad N_2 + P_x = 0; \quad N_2 = -P_x = -6,124 \text{ кН}.$$

$$\sum F_z^A = 0: \quad -N_1 - P_z = 0; \quad N_1 = -P_z = -5,0 \text{ кН}.$$

Далі розглянемо рівновагу вузла B , який був приєднаний перед вузлом A :

$$\sum F_y^B = 0: N_3 + N_6 \sin \gamma = 0; \quad N_6 = -\frac{N_3}{\sin \gamma} = -\frac{-6,124}{0,4472} = 13,69 \text{ кН}.$$

$$\sum F_x^B = 0: N_5 + N_6 \cos \gamma = 0; \quad N_5 = -N_6 \cos \gamma = -13,69 \cdot 0,8944 = -12,25 \text{ кН};$$

$$\sum F_z^B = 0: N_4 = 0.$$

Потім будемо вимагати виконання умов рівноваги збіжної системи сил, що діють на вузол **C**, який приєднувався перед вузлом **B**:

$$\sum F_x^C = 0: N_5 + N_7 \cos \alpha = 0; \quad N_7 = -\frac{N_5}{\cos \alpha} = -\frac{-12,25}{0,8321} = 14,72 \text{ кН}.$$

$$\sum F_z^C = 0: -N_8 - N_7 \sin \alpha = 0; \quad N_8 = -N_7 \sin \alpha = -14,72 \cdot 0,5547 = -8,17 \text{ кН}.$$

$$\sum F_y^C = 0: N_9 = 0.$$

І, нарешті, забезпечимо рівновагу вузла **D**, який приєднаний до «землі» на першому етапі утворення системи:

$$\sum F_x^D = 0: -N_2 - N_{12} \cos \alpha - N_6 \cos \gamma = 0;$$

$$N_{12} = \frac{-N_2 - N_6 \cos \gamma}{\cos \alpha} = \frac{6,124 - 13,69 \cdot 0,8944}{0,8321} = -7,36 \text{ кН}.$$

$$\sum F_y^D = 0: -N_6 \sin \gamma - N_{11} \cos \beta - N_9 = 0;$$

$$N_{11} = \frac{-N_6 \sin \gamma - N_9}{\cos \beta} = -\frac{13,69 \cdot 0,4472 + 0}{0,6} = -10,20 \text{ кН}.$$

$$\sum F_z^D = 0: -N_{10} - N_{11} \sin \beta - N_{12} \sin \alpha = 0;$$

$$N_{10} = -N_{12} \sin \alpha - N_{11} \sin \beta = -(-7,36) \cdot 0,5547 - (-10,20) \cdot 0,8 = 12,24 \text{ кН}.$$

Одним із варіантів перевірки правильності визначення зусиль в стержнях просторової ферми може бути проєцирування на вертикальну вісь всіх зовнішніх сил, які діють на будь-яку частину системи, наприклад показану на рис. 4.4.

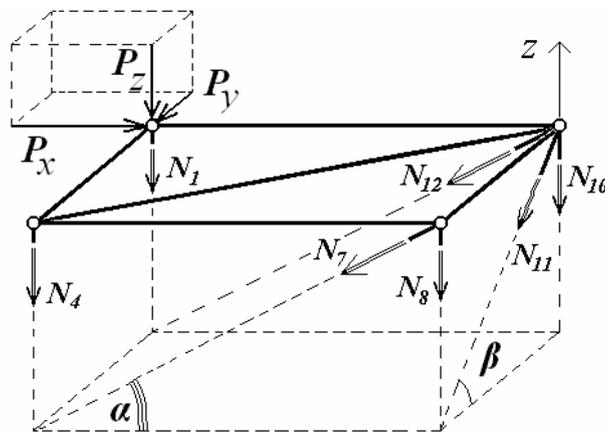


Рис.4.4

$$\sum F_z = P_z + N_{10} + N_8 + N_1 + N_4 + N_7 \sin \alpha + N_{12} \sin \alpha + N_{11} \sin \beta =$$

$$= 5 + 12,24 - 8,17 - 5,0 + 0 + 14,72 \cdot 0,5547 - 7,36 \cdot 0,5547 - 10,20 \cdot 0,8 =$$

$$= 25,41 - 25,41 = 0.$$

5. Відповідь:

Стержень	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Зусилля, кН	-5	-6,12	-6,12	0	-12,25	13,69	14,72	-8,17	0	12,24	-10,20	-7,36

4.3. Задачі для самостійного розв'язування

Визначити зусилля в стержнях просторових ферм, представлених на рис.4.5.

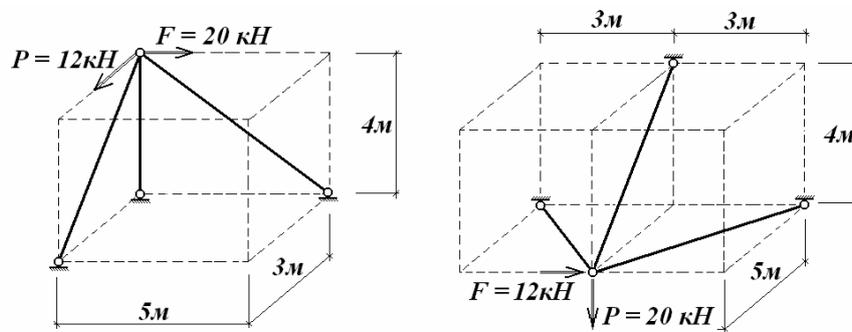


Рис.4.5

5. Розрахунок шарнірно-консольної балки на нерухоме навантаження

5.1. Основні теоретичні відомості

Шарнірно-консольними називають статично визначувані багатопрогонові балки.

Кількісний етап кінематичного аналізу шарнірно-консольних балок виконується за формулою Чебишова, а аналіз геометричної структури полягає у побудові “поверхової”, або монтажної схеми. Для цього кожен елемент багатопрогонової балки необхідно представити як однопрогонову балку, яка має або одну опору – затиснення, або дві шарнірні опори, одна з яких шарнірно-нерухома, а друга – шарнірно-рухома. Кожна з таких однопрогонових балок спирається або на основу, або на інші прості балки. Сукупність простих балок, які спираються одна на одну створює схему “поверхів”. Під час аналізу всі проміжні шарніри умовно замінюють шарнірно-нерухомими або шарнірно-рухомими опорами і простежують спирання балок одна на одну.

Так, багатопрогонову балку, представлену на рис.5.1,*а*, можна розглядати як сукупність трьох однопрогонових балок, що спираються одна на одну (рис.5.1,*б*). Елемент *AB*, що безпосередньо спирається на основу розглядається як перший “поверх” шарнірно-консольної балки. Елемент *BCD* становить балку на двох шарнірних опорах *C* і *D*, одна з яких спирається на перший “поверх” і є другим “поверхом” шарнірно-консольної балки. Нарешті елемент *DE* спирається на балку другого “поверху” і тому може розглядатись як третій “поверх”.

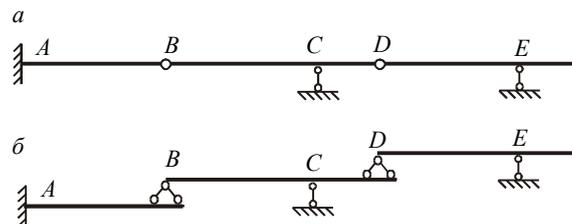


Рис.5.1

Балку на рис.5.2,*а* яка складається з трьох елементів *ABC*, *CD* і *DEF*, можна розглядати як таку що утворена з трьох однопрогонових балок. Балки *ABC* і *DEF*, які безпосередньо спираються на основу (рис.5.2,*б*) утворюють перший, а елемент *CD* – другий “поверх”.

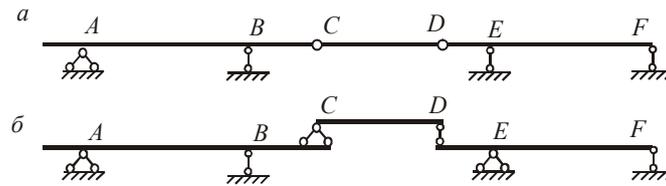


Рис.5.2

“Поверхова” (монтажна) схема може бути використана під час статичного розрахунку шарнірно-консольної балки. Так, опорні реакції визначаються для балки кожного “поверху” окремо, причому розрахунок розпочинається з балки найверхнього “поверху”. Знайдені опорні реакції прикладаються до балки нижнього “поверху” як відомі зовнішні сили, що дозволяє обчислити реакції опор балки нижнього “поверху”.

Так, шарнірно-консольна балка на рис.5.3,*a* має два “поверхи”. Її “поверхова” схема показана на рис.5.3,*б*. Визначення реакцій опор необхідно починати з балки другого “поверху” *AB*. У результаті будуть обчислені реакції опор *A* і *B*. Знайдена реакція V_B прикладається до балки першого “поверху” *BCD* разом з усіма зовнішніми силами як вже відома зовнішня сила, після чого обчислюються реакції опор *C* і *D*.

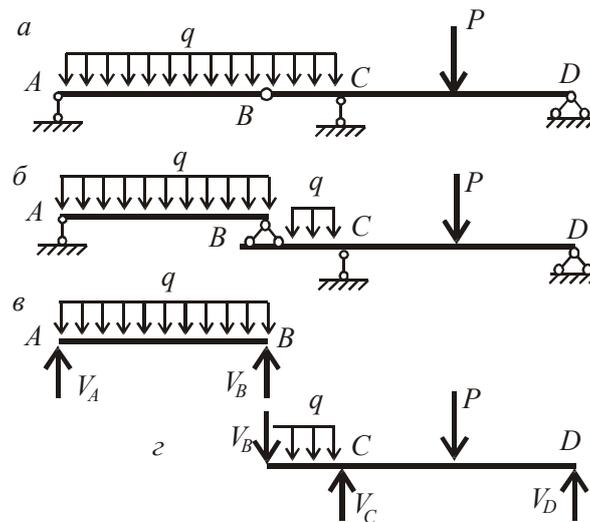


Рис.5.3

У перерізах шарнірно-консольної балки, що знаходиться під дією вертикальних силових і моментних навантажень, виникають згинальні моменти і поперечні сили, а поздовжні сили завідомо дорівнюють нулю. Розрахунок балки може бути зведений до розрахунку її окремих поверхів: обчислення опорних реакцій і внутрішніх зусиль може здійснюватись для балок кожного “поверху” окремо. Згинальний момент в будь-якому перерізі *k* обчислюється як алгебраїчна сума моментів всіх сил, що діють на балку відповідного “поверху” по один бік від перерізу, відносно його центру:

$$M_k = \sum M_k^{лів} \quad \text{або} \quad M_k = \sum M_k^{прав} .$$

Якщо сумарний момент односторонніх сил зумовлює розтягнення нижніх волокон, то згинальний момент вважається додатним.

Поперечна сила в будь-якому перерізі k обчислюється як сума проєкцій на вертикальну вісь всіх сил, що діють на балку відповідного “поверху” по один бік від перерізу:

$$Q_k = \sum F_y^{лів} \quad \text{або} \quad Q_k = \sum F_y^{прав} .$$

Додатною вважається поперечна сила, яка намагається повернути балку відносно перерізу за годинниковою стрілкою.

Для побудови епюр внутрішніх зусиль балка відповідного “поверху” поділяється на окремі ділянки, в межах яких зусилля характеризуються неперервними функціями. Границями ділянок беруться точки прикладення зовнішніх силових дій та опорних реакцій, а також перерізи, в яких починається або завершується прикладення розподілених навантажень.

На ділянках, де відсутнє розподілене навантаження, згинальні моменти змінюються за лінійним законом, а поперечна сила – постійна. Тому для побудови епюри згинальних моментів достатньо обчислити відповідні величини в будь-яких двох перерізах ділянки, а для побудови епюри поперечних сил – лише в одному. На епюрі згинальних моментів додатні величини відкладаються знизу, тобто з боку розтягнених волокон, а при побудові епюри поперечних сил – зверху. Як правило, зусилля, що визначались для балок окремих “поверхів”, кресляться на загальній схемі всієї шарнірно-консольної балки.

Між згинальними моментами і поперечними силами існує диференціальна залежність $Q = \frac{dM}{dx}$ (теорема Журавського). Виходячи з геометричного змісту похідної можна сказати, що поперечна сила в перерізі дорівнює тангенсу кута між віссю балки та дотичною до епюри згинальних моментів.

5.2. Приклад розрахунку шарнірно-консольної балки

Виконати розрахунок шарнірно-консольної балки, представленої на рис.5.4,а.

Кінематичний аналіз

Балка складається з чотирьох дисків (стержні AB , BCD , DE і “земля”), двох кінематичних в’язей (шарірно-рухомі опори A і C), двох простих шарнірів (B і D) та однієї припайки (затиснення на опорі E), вузлів в’язей немає. Тобто $D = 4$, $C = 2$, $III = 2$, $II = 1$, $B = 0$. За формулою Чебишова

$$\Gamma = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 2 - 3 = 0.$$

Виконуємо аналіз геометричної структури. Балка утворюється за три етапи:

1. $\frac{D_{DE} + D_{\text{земля}}}{\Pi_E} \Rightarrow D_I;$
2. $\frac{D_{BCD} + D_I}{\text{III}_{D, C_C}} \Rightarrow D_{II};$
3. $\frac{D_{AB} + D_{II}}{\text{III}_{B, C_A}} \Rightarrow D_{III}.$

Отже, шарнірно-консольну балку можна представити як таку, що складається з трьох поверхів: перший – консоль DE , другий – консольна балка BCD , третій – проста балка AB . Поверхова (монтажна) схема наведена на рис.5.4,б.

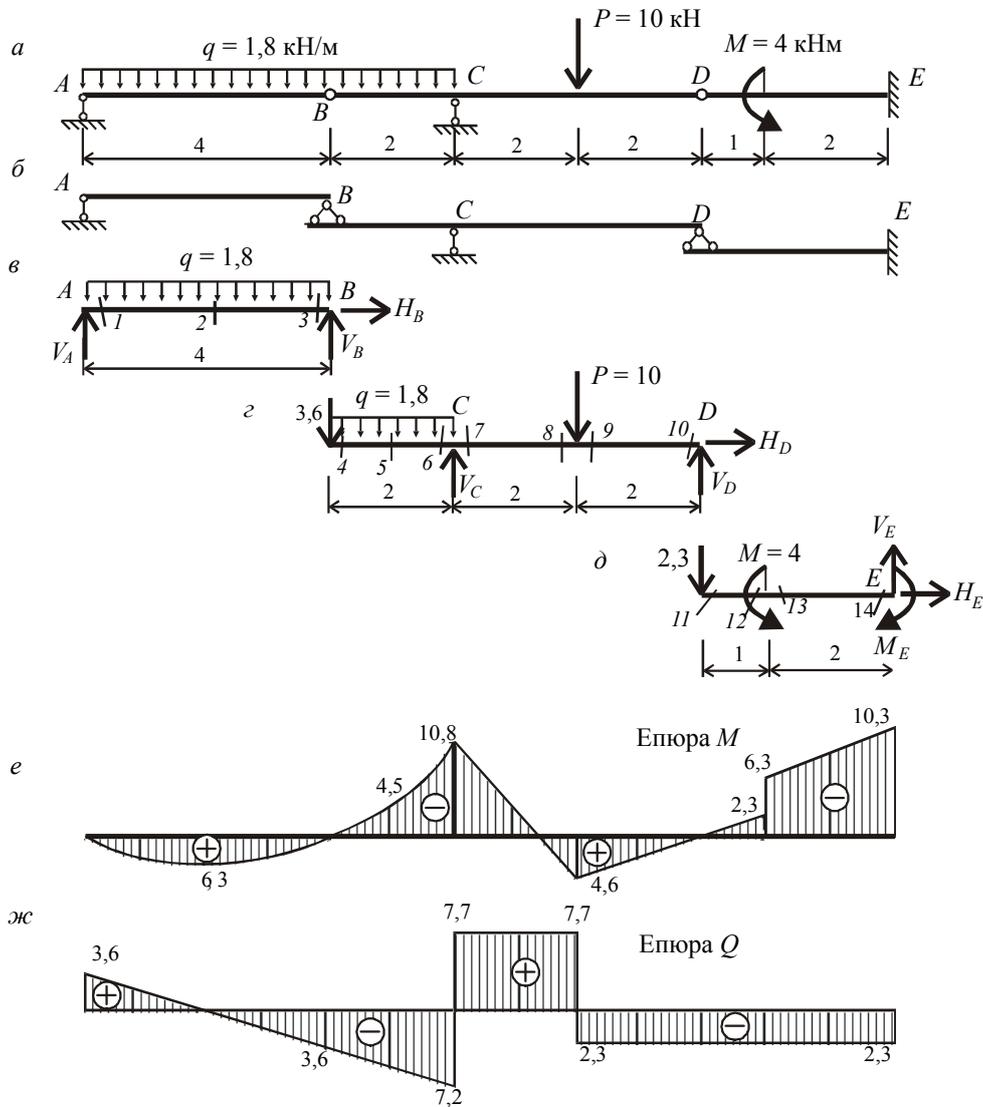


Рис.5.4

Розрахунок балок окремих поверхів

Розрахунок будемо вести окремо для балки кожного “поверху”, розпочинаючи з найверхнього. Для кожного з поверхів визначатимемо опорні реакції та внутрішні зусилля M і Q . Епюри відкладатимемо на загальній схемі шарнірно-консольної балки.

Третій “поверх” – проста балка AB (рис.5.4,в)

На балку діє задане рівномірне розподілене навантаження та невідомі реакції опор V_A , V_B та H_B . Визначаємо реакції опор з умов рівноваги балки AB :

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow H_B = 0; \\ \sum M_B = 0 &\Rightarrow V_A \cdot 4 - 1,8 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_A = 3,6 \text{ кН}; \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow -V_B \cdot 4 + 1,8 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_B = 3,6 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Будемо розглядати балку як одну ділянку. Для обчислення внутрішніх зусиль призначимо три перерізи, два з яких (1 і 3) розташовані нескінченно близько до опор, а переріз 2 – посередині прогону.

Знаходимо згинальні моменти в призначених перерізах:

$$\begin{aligned}M_1 &= \sum M_1^{лів} = 0; \\ M_2 &= \sum M_2^{лів} = 3,6 \cdot 2 - 1,8 \cdot 2 \cdot 1 = 3,6 \text{ кНм}; \\ M_3 &= \sum M_3^{прав} = 0.\end{aligned}$$

Поперечні сили:

$$\begin{aligned}Q_1 &= \sum F_y^{лів} = 3,6 \text{ кН}; \\ Q_3 &= \sum F_y^{прав} = -3,6 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Другий “поверх” – консольна балка BCD (рис.5.4,г)

В прогоні балки прикладено зовнішню зосереджену силу $P = 10 \text{ кН}$, а на консолі – рівномірно розподілене навантаження $q = 1,8 \text{ кН/м}$. До того ж на кінець консолі передається реакція V_B верхнього поверху AB у вигляді зосередженої сили, величиною $3,6 \text{ кН}$. До того ж на балку діють невідомі реакції опор V_C , V_D та H_D . Визначаємо реакції опор з умов рівноваги балки BCD :

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow H_D = 0; \\ \sum M_D = 0 &\Rightarrow V_C \cdot 4 - 3,6 \cdot 6 - 1,8 \cdot 2 \cdot (1+4) - 10 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_C = 14,9 \text{ кН}; \\ \sum M_C = 0 &\Rightarrow -V_D \cdot 4 - 3,6 \cdot 2 - 1,8 \cdot 2 \cdot 1 + 10 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_D = 2,3 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Для визначення внутрішніх зусиль необхідно поділити балку на три ділянки, межами яких будуть місця прикладення зосереджених силових дій.

Перша ділянка обмежена точками прикладення реакції V_B верхнього поверху і опорною реакцією V_C . На цій ділянці розташовано рівномірно розподілене навантаження $q = 1,8 \text{ кН/м}$. Для побудови епюр внутрішніх зусиль призначимо три перерізи, два з яких (перерізи 4 і 6) розташовані нескінченно близько від границь ділянки, а ще один (переріз 5) – посередині.

Друга ділянка обмежується точками прикладення опорної реакції V_C і зовнішньої сили P . На цій ділянці призначимо перерізи 7 і 8, розташовані по кінцях ділянки. Аналогічно, по кінцях третьої ділянки, яка обмежується точками прикладення сили P та опорної реакції V_D , призначаємо ще два перерізи (9 і 10).

Знаходимо згинальні моменти в призначених перерізах:

$$\begin{aligned} M_4 &= \sum M_4^{ліє} = 0; \\ M_5 &= \sum M_5^{ліє} = -3,6 \cdot 1 - 1,8 \cdot 1 \cdot 0,5 = -4,5 \text{ кНм}; \\ M_6 &= \sum M_6^{ліє} = -3,6 \cdot 2 - 1,8 \cdot 2 \cdot 1 = -10,8 \text{ кНм}; \\ M_7 &= \sum M_7^{ліє} = -3,6 \cdot 2 - 1,8 \cdot 2 \cdot 1 = -10,8 \text{ кНм}; \\ M_8 &= \sum M_8^{прає} = 3,6 \cdot 2 = 7,2 \text{ кНм}; \\ M_9 &= \sum M_9^{прає} = 3,6 \cdot 2 = 7,2 \text{ кНм}; \\ M_{10} &= \sum M_{10}^{прає} = 0. \end{aligned}$$

Знаходимо поперечні сили в призначених перерізах:

$$\begin{aligned} Q_4 &= \sum F_y^{ліє} = -3,6 \text{ кН}; \\ Q_6 &= \sum F_y^{ліє} = -3,6 - 1,8 \cdot 2 = -7,2 \text{ кН}; \\ Q_7 &= Q_8 = \sum F_y^{ліє} = -3,6 - 1,8 \cdot 2 + 14,9 = 7,7 \text{ кН}; \\ Q_9 &= Q_{10} = \sum F_y^{прає} = -2,3 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Перший “поверх” – консоль DE (рис.5.4,д)

Перший поверх знаходиться під дією зосередженого моменту $M = 4 \text{ кНм}$, реакції V_D верхнього “поверху”, яка прикладається до кінці консолі D як зосереджена сила, що дорівнює $2,3 \text{ кН}$, а також невідомих реакцій затиснення. Визначасмо реакції затиснення з умов рівноваги консолі:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \Rightarrow H_E = 0; \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow V_E = 2,3 \text{ кН}; \\ \sum M_E &= 0 \Rightarrow M_E - 2,3 \cdot 3 - 4 = 0 \Rightarrow M_E = 10,9 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

На консолі можна виділити дві ділянки. Перша – від кінця консолі до місця прикладення зосередженого моменту. На ділянці призначаємо два перерізи (11 і 12), розташовані нескінченно близько від кінців ділянки.

Друга ділянка має за кінці точку прикладення зосередженого моменту і опорне затиснення. Тут також призначаємо два перерізи (13 і 14) в безпосередній близькості від кінців ділянки.

Знаходимо згинальні моменти в призначених перерізах:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \sum M_{11}^{ліє} = 0; \\ M_{12} &= \sum M_{12}^{ліє} = -2,3 \cdot 1 = -2,3 \text{ кНм}; \\ M_{13} &= \sum M_{13}^{ліє} = -2,3 \cdot 1 - 4 = -7,3 \text{ кНм}; \\ M_{14} &= \sum M_{14}^{прає} = -10,9 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Поперечні сили:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= Q_{12} = \sum F_y^{ліє} = -2,3 \text{ кН}; \\ Q_{13} &= Q_{14} = \sum F_y^{ліє} = -2,3 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Епюри згинальних моментів і поперечних сил в шарнірно-консольній балці, побудовані згідно обчислених величин зусиль, представлено відповідно на рис.5.4,*е* та рис.5.4,*ж*.

5.3. Задачі для самостійного розв'язування

Побудувати епюри зусиль в шарнірно-консольних балках, представлених на рис.5.5.

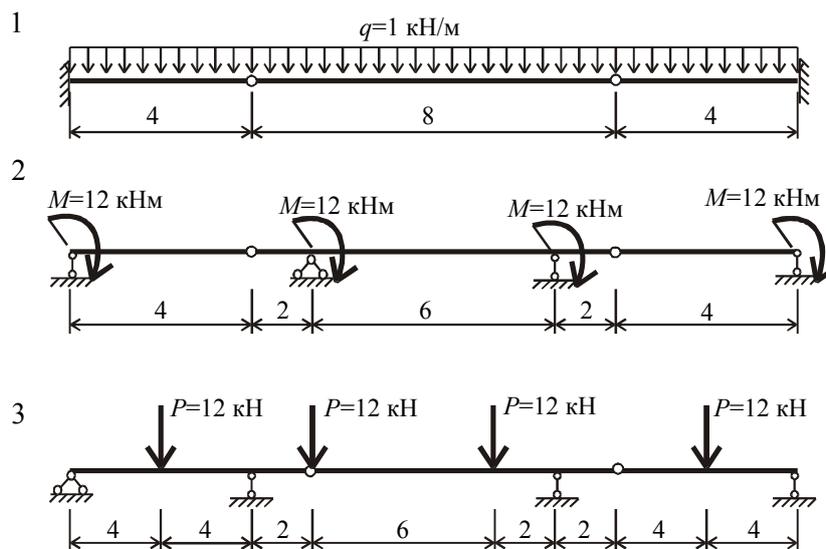


Рис.5.5

6. Розрахунок тришарнірних арок

6.1 Короткі теоретичні відомості

Плоска геометрично незмінювана стержнева система, утворена поєднанням двох криволінійних дисків і диску „земля” за допомогою трьох шарнірів, що не лежать на одній прямій, називається тришарнірною аркою (рис.6.1, а). Опорні шарніри називаються **п’ятами**, а шарнір між дисками арки – **замком**. Відстань між осями п’ят – прогон (l), а вертикальний габаритний розмір схеми – **стріла підйому арки** (f). Геометричне місце центрів тяжіння поперечних перерізів арки утворюють її вісь. При виборі геометрії осі арки враховують архітектурні вимоги а також раціональність форми для мінімізації згинального моменту в її перерізах. Вісь арки описується функцією $y = f(x)$, яка задається рівнянням, або дискретно в табличній формі. Для розрахунку арки потрібно знати не лише координати точок осі x_i, y_i , а й кути φ_i – нахилу дотичної до осі арки щодо координатної осі x (рис.6.1, б).

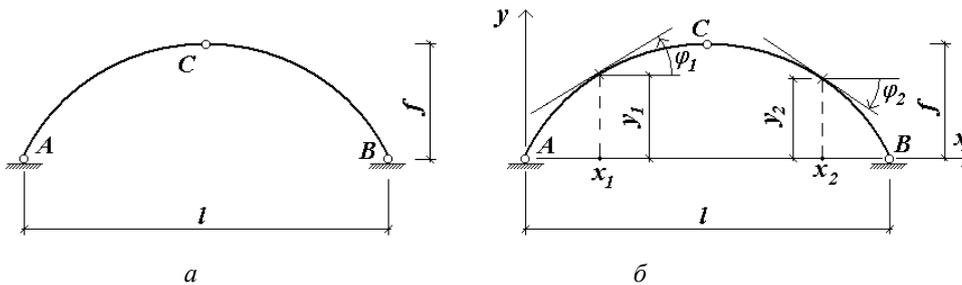


Рис.6.1

Найбільш вживаними функціями осі арки є (в системі координат, пов’язаній з лівою п’ятою):

парабола $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x), \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2}(l-2x);$

синусоїда $y = f \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{f\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l};$

коло $y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - R + f, \quad \varphi = \arcsin \frac{l-2x}{2R},$ де $R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}.$

Особливістю аровних розрахункових схем є те, що при дії вертикального навантаження в п’ятах, крім вертикальних, виникають й горизонтальні складові реакцій – **розпір**. Тому арки називають розпірними системами. Розпір передається на нижче розташовані конструкції та значно ускладнює їхню роботу. Тому для сприйняття розпору при можливості влаштовують затяжку – прямолінійний стержень або систему стержнів, шарнірно поєднаних між собою та з обома дисками арки (рис.6.2, а, б). Положення затяжки та її конфігурація приймається з урахуванням архі-

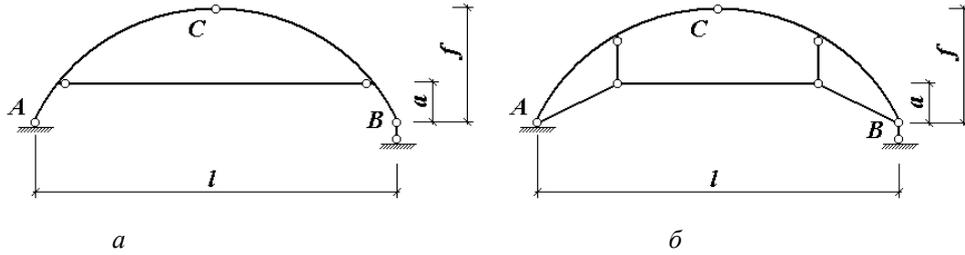


Рис. 6.2

тектурних або технологічних вимог. При наявності затяжки в статично визначуваних арках одну із опор влаштовують шарнірно рухомою.

Для визначення внутрішніх зусиль в арці потрібно попередньо відшукати сили взаємодії дисків – реакції у в'язях. Якщо розрахункова схема утворена за правилом шарнірного трикутника

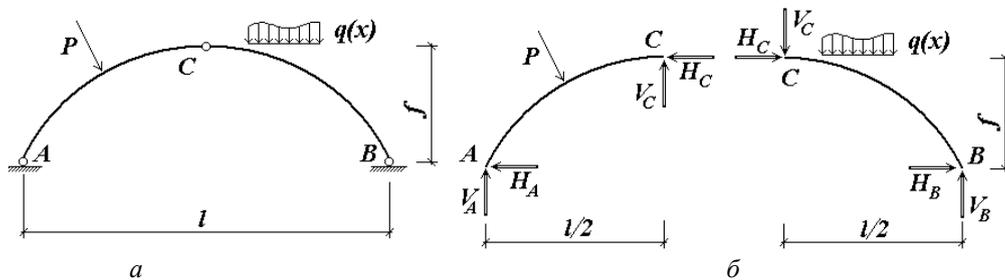


Рис. 6.3

(рис.6.3, a), то її зручно розділити на два окремих диски і, вимагаючи рівновагу кожного диска, із шести лінійних рівнянь визначити шість невідомих компонентів реакцій у трьох шарнірах (рис.6.3, б).

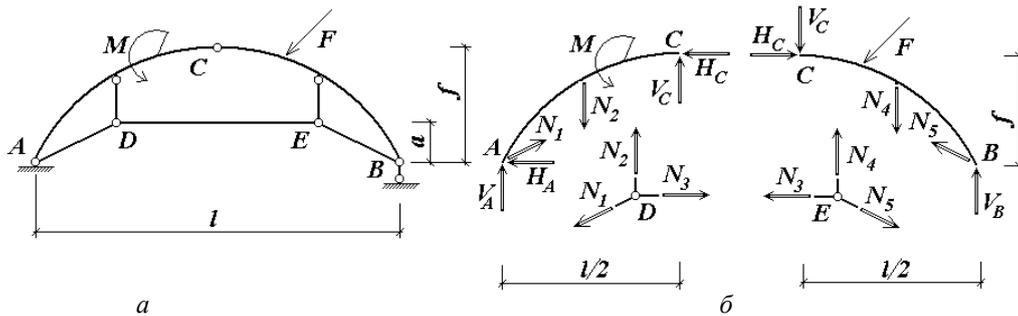


Рис.6.4

В арках із затяжкою, крім реакцій у замку та в опорах, необхідно визначити сили дії стержнів затяжки на диски арки. Для розрахункової схеми, зображеної на рис.6.4,а, яка має крім диску „земля” два диски-піварки та два вузли, потрібно відшукати величини реакцій у двох шарнірах A, C і зусилля у шести кінематичних в'язях (всього десять невідомих). Для реалізації цього пошуку є десять рівнянь рівноваги: по три рівняння для кожної піварки та по два для вузлів D і E (рис.6.4,б). Рациональний алгоритм знаходження невідомих величин вибудовується виходячи із структурного етапу кінематичного аналізу системи.

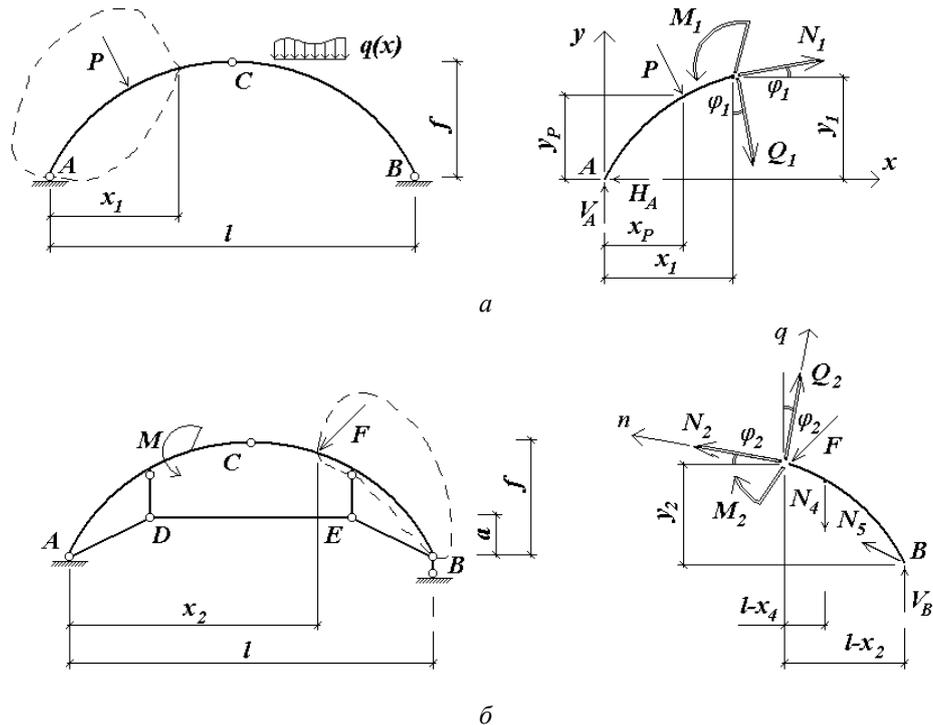


Рис.6.5

Внутрішні зусилля в будь-якому поперечному перерізі арки визначається з рівнянь рівноваги, складених для умовно відрізаної лівої (рис.6.5, а,б) або правої від перерізу частини арки. При цьому до частини арки, рівновага якої досліджується, крім активних і реактивних сил прикладається внутрішня сила – сила дії відкинutoї частини арки, яка приводиться до поздовжньої сили N (направлена дотично до осі арки), поперечної сили Q (перпендикулярна дотичній) та згинального моменту M в перерізі. Додатні напрями внутрішніх зусиль в залежності від положення перерізу відносно частини арки, що розглядається, зображені на рис.6.5,б. Для пошуку невідомих зручно користуватись сумою моментів всіх сил відносно центру тяжіння поперечного перерізу арки та сумою проєкцій всіх сил на осі глобальної системи координат (рис.6.5,а) або локальної системи, осі якої зорієнтовані по напрямку невідомих внутрішніх зусиль (рис.6.5,б). Звідси: **згинальний момент** у перерізі арки дорівнює сумі моментів усіх сил, що діють на арку з одного боку від перерізу відносно його центра тяжіння; **поздовжня сила** в перерізі арки – зрівноважуюча сила суми проєкцій всіх активних і реактивних сил, що діють з одного боку від перерізу, на вісь, дотичну до поздовжньої осі арки; **поперечна сила** в перерізі арки – сила, що зрівноважує суму всіх активних і реактивних сил з одного боку перерізу на вісь, перпендикулярну дотичній до осі арки в місці перерізу.

При вертикальному навантаженні на арку без затяжки внутрішні зусилля в її перерізах можна визначати за формулами, трансформованими з рівнянь рівноваги однієї з частин арки:

$$\begin{aligned}
 M_x^a &= M_x^{\bar{b}} - Hy_x; \\
 Q_x^a &= Q_x^{\bar{b}} \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x; \\
 N_x^a &= -(Q_x^{\bar{b}} \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x),
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

де позначено: M_x^a, Q_x^a, N_x^a – функції внутрішніх зусиль у поперечних перерізах арки від координати x ; $M_x^{\bar{b}}, Q_x^{\bar{b}}$ – функції внутрішніх зусиль у поперечних перерізах еквівалентної балки (простой статично визначуваної балки, яка має прогін і навантаження, як і арка, що розраховується); y_x, φ_x – функції, що описують геометрію осі арки; H – розпір арки (при вертикальному навантаженні на арку $H_A = H_B = H$).

Для арки із простою горизонтальною затяжкою на висоті a (рис.6.2,а) формули (6.1) мають видозміни. Нижче затяжки потрібно приймати $H = 0$, тому

$$\begin{aligned}
 M_x^a &= M_x^{\bar{b}}; \\
 Q_x^a &= Q_x^{\bar{b}} \cos \varphi_x; \\
 N_x^a &= -Q_x^{\bar{b}} \sin \varphi_x.
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

Над затяжкою:

$$\begin{aligned}
 M_x^a &= M_x^{\bar{b}} - H(y_x - a); \\
 Q_x^a &= Q_x^{\bar{b}} \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x; \\
 N_x^a &= -(Q_x^{\bar{b}} \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x),
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

де дві останні формули (6.1) не змінились.

6.2. Приклади визначення внутрішніх зусиль в арках

Задача 1.

Дано: Розрахункова модель (рис.6.6,а). Вісь арки – парабола.

Необхідно: Побудувати епюр внутрішніх зусиль.

Розв'язування:

Геометрія осі арки визначається за формулами

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) = \frac{4 \cdot 6}{16^2} x(16-x) = 1,5x - 0,09375x^2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l-2x) = \frac{4 \cdot 6}{16^2} (16-2x) = 1,5 - 0,1875x.$$

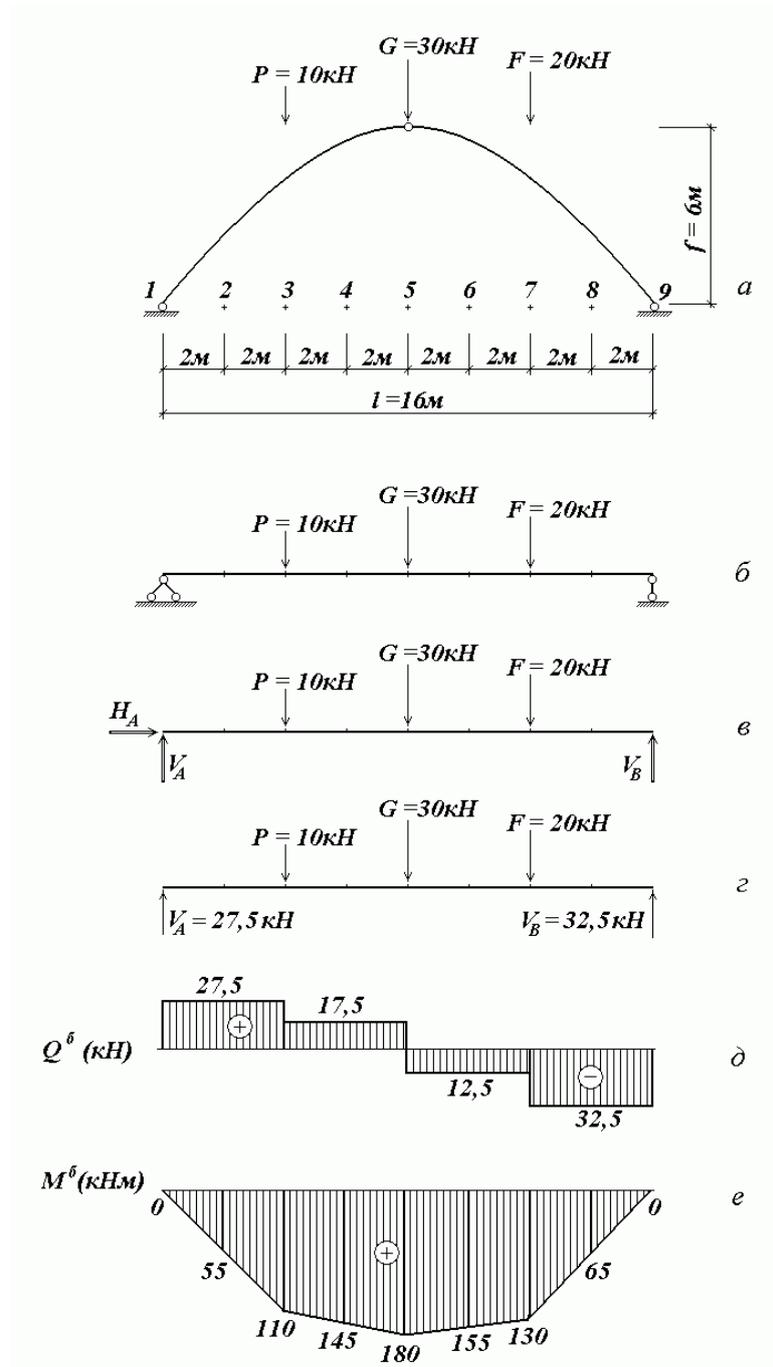


Рис.6.6

Результати обчислень координат точок на осі арки з кроком абсциси 2 м , кутів нахилу дотичної та їх тригонометричних функцій заносяться до таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

Переріз	x , $м$	y , $м$	$\text{tg}\varphi$	φ , град	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$
1	0	0	1,50	56,31	0,5547	0,8321
2	2	2,63	1,13	48,37	0,6644	0,7474

3	4	4,50	0,75	36,87	0,8000	0,6000
4	6	5,63	0,38	20,26	0,9363	0,3511
5	8	6,00	0	0	1	0
6	10	5,63	-0,38	-20,26	0,9363	-0,3511
7	12	4,50	-0,75	-36,87	0,8000	-0,6000
8	14	2,63	-1,13	-48,37	0,6644	-0,7474
9	16	0	-1,50	-56,31	0,5547	-0,8321

Обчислення реакцій в опорах еквівалентної балки (рис.6.6,б-г):

$$\sum_{i=1}^4 M_A(\vec{F}_i) = 0: -4P - 8G - 12F + 16V_B = 0;$$

$$V_B = \frac{4P + 8G + 12F}{16} = \frac{4 \cdot 10 + 8 \cdot 30 + 12 \cdot 20}{16} = 32,5 \text{ кН},$$

$$\sum_{i=1}^1 F_{xi} = 0: H_A = 0,$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{yi} = 0: V_A - P - G - F + V_B = 0;$$

$$V_A = P + G + F - V_B = 10 + 30 + 20 - 32,5 = 27,5 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 M_B(\vec{F}_i) &= 12P + 8G + 4F - 16V_A = \\ &= 12 \cdot 10 + 8 \cdot 30 + 4 \cdot 20 - 16 \cdot 27,5 = 440 - 440 = 0. \end{aligned}$$

Розпір арки визначається як відношення балкового моменту під замком арки (рис.6.6,д) до стріли підйому арки:

$$H = \frac{M_C^0}{6} = \frac{180}{6} = 30 \text{ кН}.$$

Внутрішні зусилля в перерізах арки визначаються через балкові функції (рис.6.6, д, е) за допомогою формул (6.1):

Результати розрахунку занесені до таблиці 6.2

Таблиця 6.2

Переріз	M^o	H_y	M^a	Q^o	$Q^o \cos \varphi$	$H \sin \varphi$	Q^a	$Q^o \sin \varphi$	$H \cos \varphi$	N^a
1	0	0	0	27,5	15,25	24,96	-9,71	22,88	16,64	-39,52
2	55	78,9	-23,9	27,5	18,27	22,42	-4,15	20,55	19,93	-40,48
3-	110	135,0	-25,0	27,5	22,00	18,00	4,00	16,5	24,00	-40,50
3+	110	135,0	-25,0	17,5	14,00	18,00	-4,00	10,5	24,00	-34,50
4	145	168,9	-23,9	17,5	16,39	10,53	5,86	6,14	28,09	-34,23
5-	180	180,0	0	17,5	17,50	0	17,50	0	30,00	-30,00
5+	180	180,0	0	-12,5	-12,50	0	-12,50	0	30,00	-30,00
6	155	168,9	-13,9	-12,5	-11,70	-10,53	-1,17	4,39	28,09	-32,48
7-	130	135,0	-5,0	-12,5	-10,00	-18,00	8,00	7,50	24,00	-31,50
7+	130	135,0	-5,0	-32,5	-26,00	-18,00	-8,00	19,50	24,00	-43,50
8	65	78,9	-13,9	-32,5	-21,59	-22,42	0,83	24,29	19,93	-44,22
9	0	0	0	-32,5	-18,03	-24,96	6,93	27,04	16,64	-43,68

Відповідь: епюри внутрішніх зусиль для арки зображені на рис.6.7,б-г.

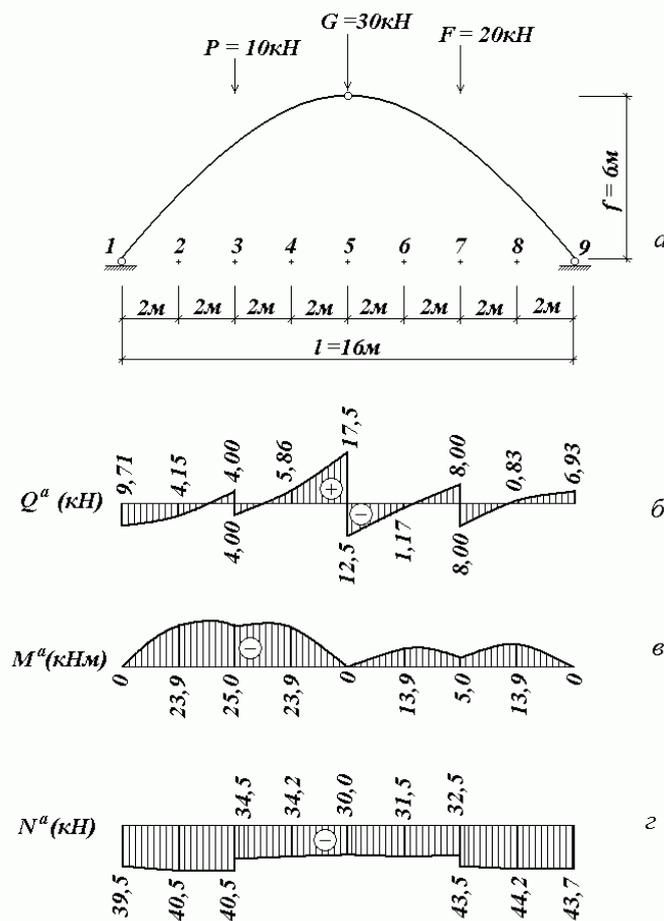


Рис.6.7

Задача 2.

Дано: Розрахункова модель (рис.6.8,*a*). Вісь арки – синусоїда.

Необхідно: Визначити внутрішні зусилля в поперечних перерізах арки, центри тяжіння яких мають абсцису $x_1=6\text{ м}$, $x_2=14\text{ м}$.

Розв’язування:

Геометрія осі арки визначається за формулами

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l} = 4,5 \sin \frac{\pi x}{16};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = f \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi x}{l} = 4,5 \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi x}{16}.$$

Горизонт затяжки при $x = 4\text{ м}$:

$$y_{\text{зат}} = 4,5 \sin \frac{\pi \cdot 4}{16} = 3,18 \text{ м}.$$

Висота арки та кути нахилу дотичних до її осі в точках, для яких визначаються внутрішні зусилля:

$$y_1 = 4,5 \sin \frac{\pi \cdot 6}{16} = 4,16 \text{ м}.$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = 4,5 \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi \cdot 6}{16} = 0,3381; \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg}(0,3381) = 18,68^\circ;$$

$$y_2 = 4,5 \sin \frac{\pi \cdot 14}{16} = 1,72 \text{ м}.$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = 4,5 \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi \cdot 14}{16} = -0,8163; \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}(-0,8163) = -39,23^\circ;$$

Визначення опорних реакцій еквівалентної балки (рис. 6.8, *б-г*):

$$\sum_{i=1}^2 M_A(\vec{F}_i) = 0: \quad -8q \cdot 12 + 16V_B = 0; \quad V_B = \frac{8q \cdot 12}{16} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 12}{16} = 24,0 \text{ кН},$$

$$\sum_{i=1}^1 F_{xi} = 0: \quad H_A = 0,$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{yi} = 0: \quad V_A - 8q + V_B = 0; \quad V_A = 8q - V_B = 8 \cdot 4 - 24,0 = 8,0 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum_{i=1}^2 M_B(\vec{F}_i) = 8q \cdot 4 - 16V_A = 8 \cdot 4 \cdot 4 - 16 \cdot 8 = 128 - 128 = 0.$$

Поздовжня сила в затяжці арки визначається як відношення балкового моменту під замком арки (рис.6.6, д) до відстані між замком та затяжкою:

$$H = \frac{M_C^b}{f - y_{\text{зат}}} = \frac{64}{4,5 - 3,18} = 48,48 \text{ кН}.$$

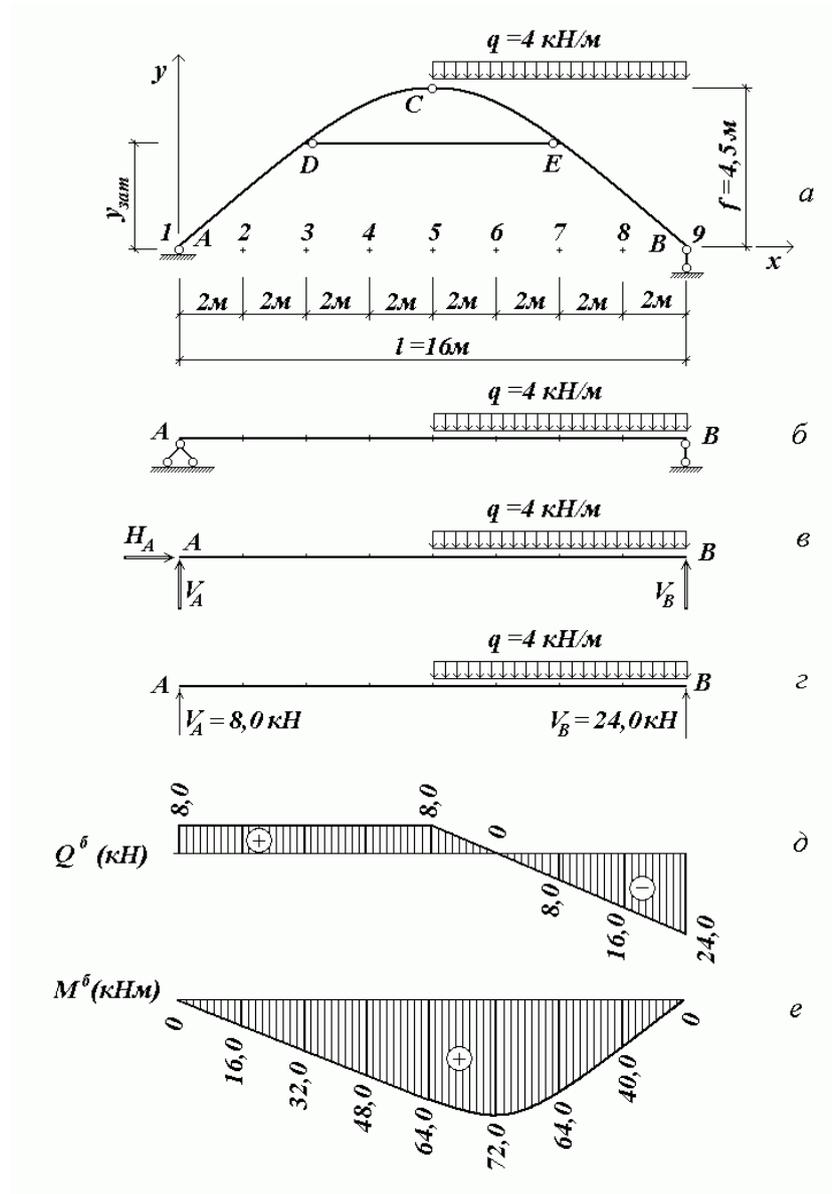


Рис.6.8

В перерізі $x_1 = 6\text{ м}$ внутрішні зусилля в арці визначаються через значення внутрішніх зусиль в еквівалентній балці (6.2):

$$M_1^a = M_1^b - H(y_6 - y_{\text{зат}}) = 48 - 48,48 \cdot (4,16 - 3,18) = 0,49 \text{ кН},$$

$$Q_1^a = Q_1^b \cos \varphi_1 - H \sin \varphi_1 = 8 \cos 18,68^\circ - 48,48 \sin 18,68^\circ = -7,95 \text{ кН},$$

$$N_1^a = -(Q_1^b \sin \varphi_1 + H \cos \varphi_1) = -(8 \sin 18,68^\circ + 48,48 \cos 18,68^\circ) = -48,49 \text{ кН}.$$

У другому перерізі арки, при $x_2 = 14\text{ м}$, внутрішні зусилля визначаються за формулами (6.3):

$$M_2^a = M_2^b = 40 \text{ кНм},$$

$$Q_2^a = Q_2^b \cos \varphi_2 = -16 \cdot \cos(-39,23^\circ) = -12,39 \text{ кН},$$

$$N_2^a = -Q_2^b \sin \varphi_2 = 16 \cdot \sin(-39,23^\circ) = -10,12 \text{ кН},$$

Відповідь: $M_1^a = 0,49 \text{ кНм}$, $Q_1^a = -7,95 \text{ кН}$, $N_1^a = -48,49 \text{ кН}$;

$M_2^a = 40,0 \text{ кНм}$, $Q_2^a = -12,39 \text{ кН}$, $N_2^a = -10,12 \text{ кН}$.

Задача 3.

Дано: Розрахункова модель (рис.6.9,а). Вісь арки – коло.

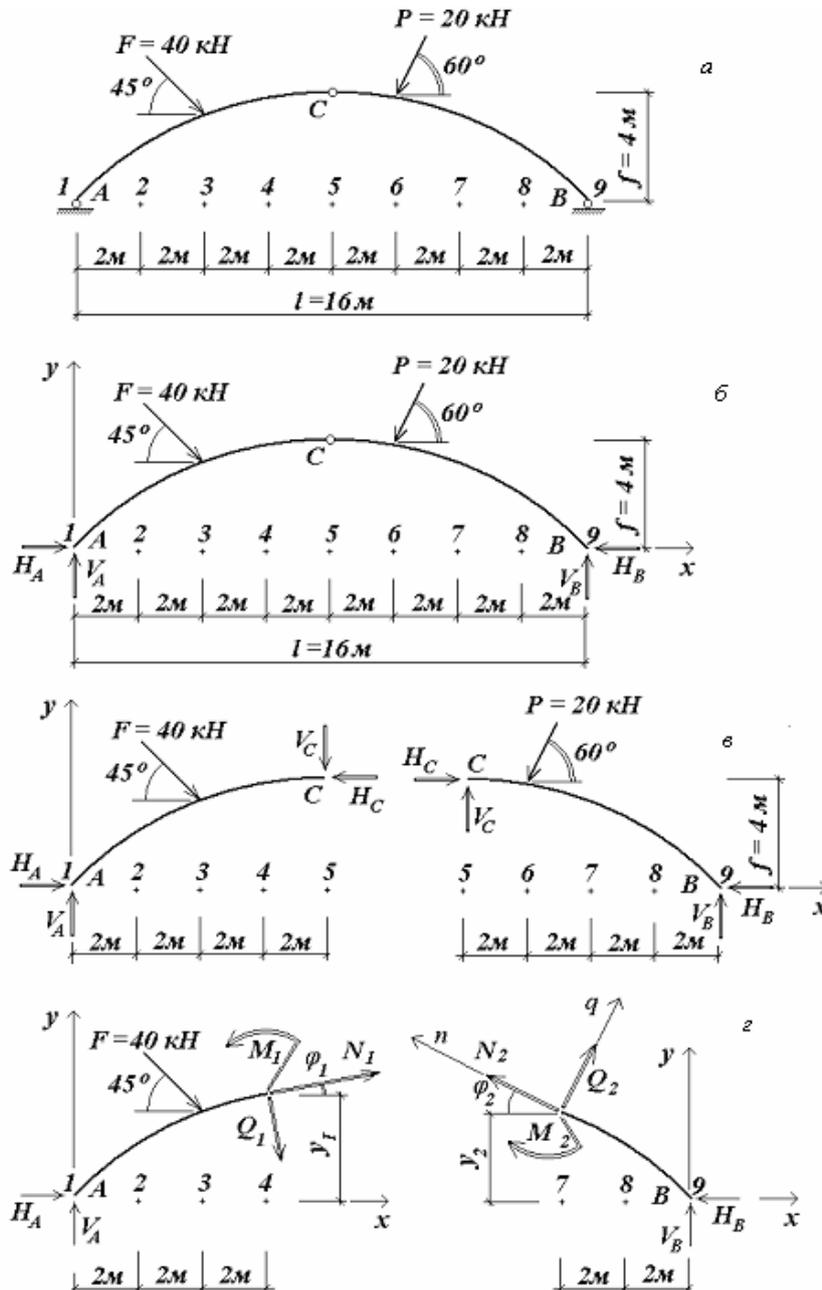


Рис.6.9

Необхідно: Визначити внутрішні зусилля в поперечних перерізах арки, центри тяжіння яких мають абсцису $x_1 = 6\text{ м}$, $x_2 = 14\text{ м}$.

Розв'язування:

Визначення ординат точок прикладання навантаження на арку:

$$R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} = \frac{4}{2} + \frac{16^2}{8 \cdot 4} = 10\text{ м.}$$

При $x_1 = 4\text{ м}$:

$$y_1 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - 4\right)^2} - R + f = \sqrt{10^2 - \left(\frac{16}{2} - 4\right)^2} - 10 + 4 = 3,17\text{ м.}$$

При $x_2 = 10\text{ м}$:

$$y_2 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - 10\right)^2} - R + f = \sqrt{10^2 - \left(\frac{16}{2} - 10\right)^2} - 10 + 4 = 3,80\text{ м.}$$

Обчислення реакцій у п'ятах арки (рис.6.9, б):

$$\sum_{i=1}^5 M_A(\vec{F}_i) = 0:$$

$$-4F \cos 45^\circ - 3,17F \sin 45^\circ - 10P \sin 60^\circ + 3,80P \cos 60^\circ + 16V_B = 0;$$

$$V_B = \frac{4F \cos 45^\circ + 3,17F \sin 45^\circ + 10P \sin 60^\circ - 3,80 \cos 60^\circ}{16} =$$

$$= \frac{4 \cdot 40 \cdot \cos 45^\circ + 3,17 \cdot 40 \cdot \sin 45^\circ + 10 \cdot 20 \cdot \sin 60^\circ - 3,80 \cdot 20 \cdot \cos 60^\circ}{16} = 21,13\text{ кН.}$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{yi} = 0: \quad V_A - F \cos 45^\circ - P \cos 60^\circ + V_B = 0;$$

$$V_B = F \cos 45^\circ + P \sin 60^\circ - P \cos 60^\circ - V_B =$$

$$= 40 \cdot 0,7071 + 20 \cdot 0,866 - 21,13 = 24,47\text{ кН.}$$

Горизонтальні реакції можна відшукати з рівнянь рівноваги лівої піварки (рис.6.9, в):

$$\sum_{i=1}^4 M_C(\vec{F}_i) = 0: \quad 4F \sin 45^\circ + 0,83F \cos 45^\circ + 4H_A - 8V_A = 0;$$

$$H_A = \frac{-4F \sin 45^\circ - 0,83F \cos 45^\circ + 8V_A}{4} =$$

$$= \frac{-4 \cdot 40 \cdot 0,7071 - 0,83 \cdot 40 \cdot 0,7071 + 8 \cdot 24,47}{4} = 14,79\text{ кН}$$

та правої піварки (рис.6.9, г):

$$\sum_{i=1}^4 M_C(\vec{F}_i) = 0: \quad -2P \sin 60^\circ - 0,2P \cos 60^\circ - 4H_B + 8V_B = 0;$$

$$H_B = \frac{-2P\sin 60^\circ - 0,2P\cos 60^\circ + 8V_B}{4} =$$

$$= \frac{-2 \cdot 20 \cdot 0,8660 - 0,2 \cdot 20 \cdot 0,5 + 8 \cdot 21,13}{4} = 33,10 \text{ кН}.$$

Перевірка правильності визначення реакцій (рис.6.9,б):

$$\sum_{i=1}^4 F_x = H_A + F\cos 45^\circ - P\cos 60^\circ - H_B =$$

$$= 14,79 + 40 \cdot 0,7071 - 20 \cdot 0,5 - 33,10 = 43,07 - 43,10 = -0,03 \approx 0.$$

Для обчислення внутрішніх зусиль у двох перерізах арки визначаються ординати точок арки з відповідними абсцисами та кути нахилу дотичних до осі арки:

При $x_1 = 6\text{ м}$:

$$y_1 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x_1\right)^2} - R + f = \sqrt{10^2 - \left(\frac{16}{2} - 6\right)^2} - 10 + 4 = 3,80 \text{ м},$$

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{l - 2x_1}{2R} = \arcsin \frac{16 - 2 \cdot 6}{2 \cdot 10} = 11,54^\circ.$$

При $x_2 = 12\text{ м}$:

$$y_2 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x_2\right)^2} - R + f = \sqrt{10^2 - \left(\frac{16}{2} - 12\right)^2} - 10 + 4 = 3,17 \text{ м},$$

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{l - 2x_2}{2R} = \arcsin \frac{16 - 2 \cdot 12}{2 \cdot 10} = -23,56^\circ.$$

В перерізі арки при $x_1 = 6\text{ м}$ внутрішні зусилля визначаються з умов рівноваги лівої частини арки, шляхом проєціювання всіх сил на осі глобальної системи координат:

$$\sum_{i=1}^4 F_{xi} = 0: \quad H_A + F\cos 45^\circ + N_1\cos \varphi_1 + Q_1\sin \varphi_1 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{yi} = 0: \quad V_A - F\sin 45^\circ + N_1\sin \varphi_1 - Q_1\cos \varphi_1 = 0.$$

Одержано систему рівнянь відносно шуканих поздовжньої та поперечної сил у перерізі арки:

$$\begin{cases} 14,79 + 40\cos 45^\circ + N_1\cos 11,54^\circ + Q_1\sin 11,54^\circ = 0; \\ 24,47 - 40\sin 45^\circ + N_1\sin 11,54^\circ - Q_1\cos 11,54^\circ = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,9798N_1 + 0,2Q_1 = -43,07; \\ 0,2N_1 - 0,9798Q_1 = 3,81. \end{cases}$$

Звідси $N_1 = -43,96 \text{ кН}$; $Q_1 = -0,001 \text{ кН}$.

Згинальний момент в перерізі арки при $x_1 = 6\text{ м}$:

$$\sum_{i=1}^4 M_1(\vec{F}_i) = 0: \quad M_1 + 2F\sin 45^\circ - 0,63F\cos 45^\circ + 3,8H_A - 6V_A = 0;$$

$$M_1 = -2F\sin 45^\circ + 0,63F\cos 45^\circ - 3,8H_A + 6V_A =$$

$$= -2 \cdot 40 \cdot 0,7071 + 0,63 \cdot 40 \cdot 0,7071 - 3,8 \cdot 14,79 + 6 \cdot 24,47 = 165,01 \text{ кНм}.$$

У перерізі арки при $x_2 = 12\text{ м}$ внутрішні зусилля визначаються з умов рівноваги правої частини арки, проєцируючи всі сили на осі локальної системи координат:

$$\sum_{i=1}^3 F_{ni} = 0: \quad N_2 + H_B \cos \varphi_2 + V_B \sin \varphi_2 = 0;$$

$$N_2 = -H_B \cos \varphi_2 - V_B \sin \varphi_2 = -33,10 \cos 23,56^\circ - 21,13 \sin 23,56^\circ = -38,79 \text{ кН}.$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{qi} = 0: \quad Q_2 - H_B \sin \varphi_2 + V_B \cos \varphi_2 = 0;$$

$$Q_2 = H_B \sin \varphi_2 - V_B \cos \varphi_2 = 33,1 \sin 23,56^\circ - 21,13 \cos 23,56^\circ = -6,14 \text{ кН}.$$

Пошук згинального моменту в перерізі арки при $x_2 = 12\text{ м}$:

$$\sum_{i=1}^4 M_2(\vec{F}_i) = 0: \quad -M_2 - 3,17H_B + 4V_B = 0;$$

$$M_2 = +4V_B - 3,17H_B = 4 \cdot 24,47 - 3,17 \cdot 14,79 = 51,0 \text{ кНм}.$$

Відповідь: $M_1 = 165,01 \text{ кНм}$; $N_1 = -43,96 \text{ кН}$; $Q_1 = -0,001 \text{ кН}$;

$M_2 = 51,0 \text{ кНм}$; $N_2 = -38,79 \text{ кН}$; $Q_2 = -6,14 \text{ кН}$.

Знаки "-" свідчать, що напрямок дії сили протилежний зображеному на рисунку.

6.3. Схеми задач для самостійного розв'язування

Побудувати епюри внутрішніх зусиль для арок, зображених на рис.6.10,а-г, прийнявши функцію осі параболою (рис.6.10,з), синусоїдою (рис.6.10,б) та колом (рис.6.10,а,в).

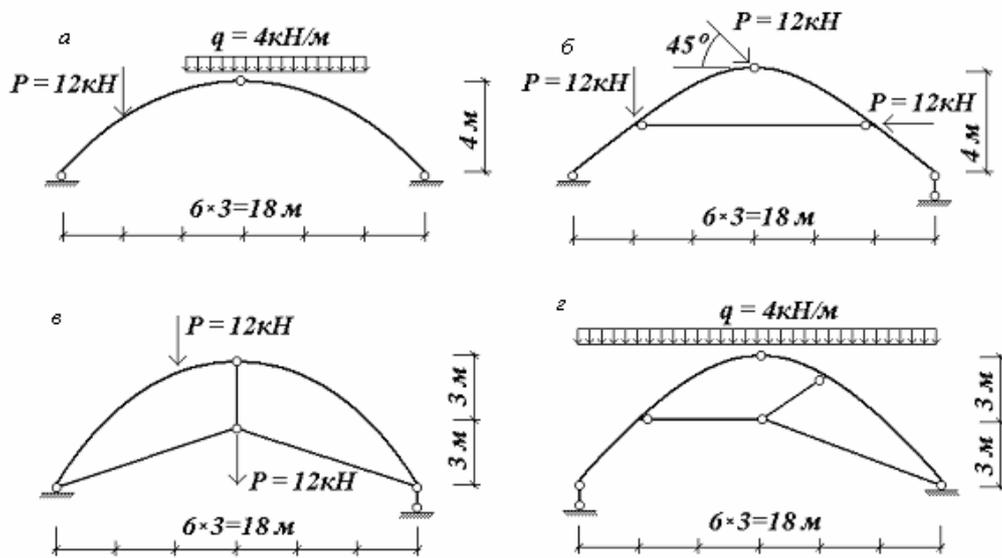


Рис.6.10

7. Статично визначувані рами

7.1. Короткі теоретичні відомості

Рамою називають систему, що складається з прямолінійних стержнів, які поєднуються між собою у вузлах, причому принаймні деякі з вузлів є жорсткими. Вертикальні стержні або такі, що наближаються до вертикальних, називають **стояками (стійками)**, а горизонтальні або майже горизонтальні – **ригелями** (рис.7.1).

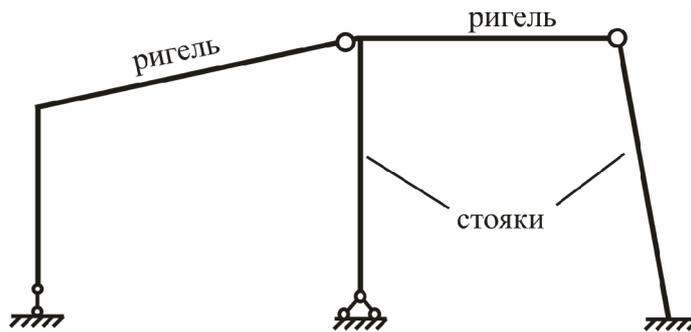


Рис.7.1

Всю сукупність статично визначуваних плоских рам можна розподілити на прості і складені. До простих можна віднести рами, для яких структурний (якісний) етап кінематичного аналізу здійснюється за один крок, тобто такі, що утворюються з двох або трьох дисків (включно з диском–“земля”) за допомогою звичайних засобів з’єднання дисків (див. главу 2).

До складених можна віднести рами, для яких структурний (якісний) етап кінематичного аналізу здійснюється більше, ніж за один крок. Частину складеної рами, що відповідає одному кроку, умовно називатимемо “поверхом”. Кожен “поверх” може розглядатись як проста рама, і тому складену раму можна розглядати як сукупність кількох простих рам.

Опорні реакції в рамах визначаються методом перерізів. При цьому рама або її “поверх” відокремлюється від опор. Замість розсічених в’язей прикладаються реакції, після чого для відокремленої частини складаються рівняння рівноваги, розв’язок яких визначає величини опорних реакцій.

При розрахунку складених рам необхідно обчислювати не тільки опорні реакції всієї складеної рами, а й опорні реакції рам кожного “поверху”. Ці реакції визначаються для кожного “поверху” окремо. Обчислення опорних реакцій слід розпочинати з рами найвищого “поверху”, після чого можна переходити до наступного нижнього “поверху” тощо. До “поверху”, що розраховується, крім заданих зовнішніх навантажень, необхідно прикласти опорні реакції верхнього “поверху” як вже відомі зовнішні сили.

Внаслідок дії зовнішніх навантажень у перерізах плоских рам виникають внутрішні зусилля: згинальні моменти, поздовжні сили і поперечні сили. Розрахунок рам полягає в обчисленні зусиль і в побудові графіків їх розподілу в стержнях. Означені графіки називають **епюрами** внутрішніх зусиль.

Згинальний момент у перерізі стержня рами обчислюється як сума моментів усіх сил, що прикладені до рами по один бік від перерізу, відносно центра тяжіння перерізу. Правило обчислення згинального моменту в перерізі стержня рами $k-k$ можна записати у вигляді формули $M_{k-k} = \sum M_{k-k}$, де знак суми поширюється на одну з частин, на які переріз поділяє раму.

Знаки згинальних моментів для рам не визначені. При побудові епюри ординати на стержнях рам прийнято відкладати від розтягнутих волокон.

Поперечна сила в перерізі $k-k$ стержня рами обчислюється як сума проєкцій усіх сил, розташованих по один бік від перерізу, на нормаль n до осі стержня в цьому перерізі: $Q_{k-k} = \sum F_{n,k-k}$. За цією формулою підсумовуються всі сили, що прикладені до однієї з частин рами. Поперечна сила вважається додатною, якщо вона намагається повернути відповідну частину стержня відносно перерізу за годинниковою стрілкою.

Поздовжня сила в перерізі $k-k$ стержня рами обчислюється як сума проєкцій всіх сил, розташованих по один бік від перерізу, на напрям t осі стержня в цьому перерізі: $N_{k-k} = \sum F_{t,k-k}$. Тут також беруть до уваги всі сили, які діють на одну з частин рами. Поздовжня сила вважається додатною, якщо вона розтягує переріз.

У разі, якщо опорні реакції задовольняють умовам рівноваги, внутрішні зусилля, обчислені із розгляду лівої й правої частин рами, матимуть ті ж самі величини. На цій підставі при виконанні практичних розрахунків слід розглядати ту частину рами, на яку діє менша кількість зовнішніх сил, тобто ту, для якої простіше виконувати обчислення.

Зазначений спосіб визначення внутрішніх зусиль застосовується при розрахунку простих рам. Такий підхід дає можливість іноді, але не завжди, обчислити зусилля і для деяких складених рам. Загальний спосіб розрахунку полягає в розкладенні складених рам на окремі “поверхи”. В такому разі розрахунки внутрішніх зусиль виконуються для кожного “поверху” окремо.

При побудові епюр виникає необхідність обчислювати зусилля у великій кількості перерізів. Істотне скорочення перерізів може бути одержано за рахунок використання правил побудови епюр у стержнях, відомих з курсу опору матеріалів:

- Якщо на ділянці стержня відсутнє будь-яке зовнішнє навантаження, то епюра згинальних моментів змінюється за лінійним законом, а поперечні й поздовжні сили є постійними. Тому для побудови епюри M достатньо обчислити згинальні моменти в двох перерізах ділянки, а для побудови епюр Q і N – величини поперечних і поздовжніх сил лише в одному перерізі.
- Якщо на ділянці стержня розташоване розподілене навантаження, то згинальні моменти змінюються за нелінійним законом (у випадку, коли навантаження розподілене рівномірно – за законом квадратної параболи), і тому для побудови епюри M необхідно обчислити згинальні моменти принаймні в трьох перерізах ділянки. Епюри Q і N при дії рівномірно розподіленого навантаження змінюються за лінійним законом, і тому необхідно обчислювати відповідні величини в двох перерізах. Якщо ж навантаження розподілене нерівномірно, то величини Q і N змінюються за нелінійним законом і для побудови їхніх епюр необхідно обчислювати відповідні величини не менш ніж у трьох перерізах ділянки.

Отже, для побудови епюр необхідно насамперед розбити раму на окремі ділянки. Межами ділянок можуть бути:

- місця поєднання двох або більше стержнів;
- перерізи, в яких прикладено зовнішні зосереджені сили або моменти;
- місця початку і закінчення розподілених навантажень.

Далі для кожної ділянки треба призначити перерізи для обчислення згинальних моментів, поперечних і поздовжніх сил, визначити відповідні величини і побудувати їхні епюри.

Перевіряються побудовані епюри шляхом аналізу рівноваги вузлів або будь-яких фрагментів розрахункової схеми, до яких прикладаються зовнішні навантаження, а також внутрішні зусилля, які вибираються з побудованих епюр. До того ж перевіряється відповідність між епюрами згинальних моментів і поперечних сил

$$Q = \frac{dM}{dx}. \quad (7.1)$$

Тут x – координата перерізу, яка вимірюється вздовж стержня (координата абсцис локальної системи координат стержня). Виходячи з геометричного змісту похідної можна вважати, що поперечна сила в перерізі стержня дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до епюри M в даному перерізі до стержня. Якщо дотична відхиляється від стержня за годинниковою стрілкою, то поперечна сила в перерізі буде додатною. Крім того, нульова точка на епюрі Q відповідатиме екстремуму на епюрі M .

7.2. Розрахунок простої рами

Розрахункова схема рами представлена на рис.7.2,а. Необхідно виконати статичний розрахунок рами, тобто побудувати епюри згинальних моментів M , поперечних сил Q і поздовжніх сил N .

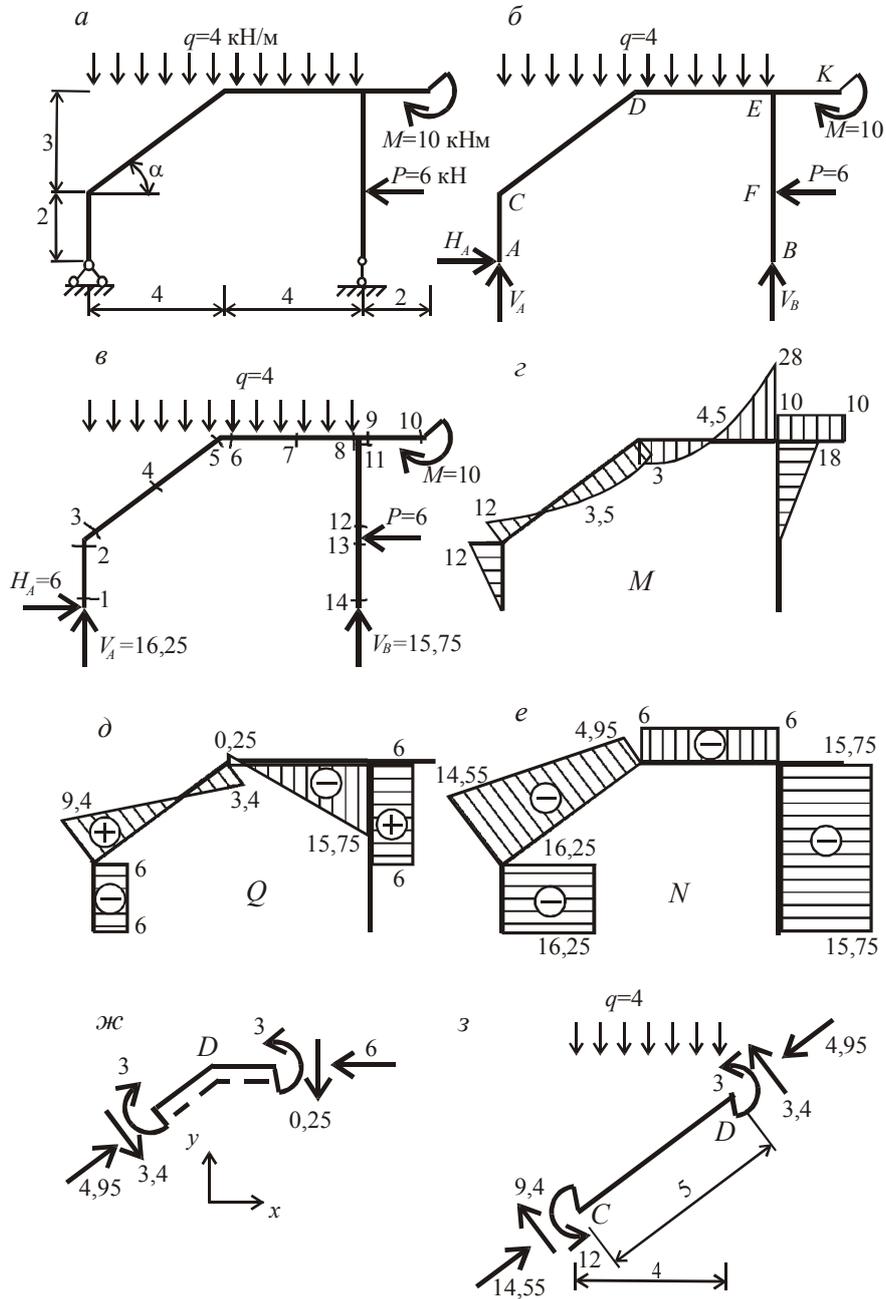


Рис.7.2

Кінематичний аналіз

Система складається з двох дисків: суцільний ламаний стержень, що уособлює власне раму, і диск основи (“земля”), які з’єднуються трьома кінематичними в’язями, тобто $D = 2$, $C = 3$, $\Pi = 0$, $B = 0$, $\text{III} = 0$. Отже, за формулою Чебишова (2.1) геометрична змінюваність становить

$$G = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 3 - 3 = 0.$$

Геометрична структура: система складається з двох дисків, поєднаних трьома стержнями, які всі водночас не паралельні й не перетинаються в одній точці.

Висновок: рама геометрично незмінювана, статично визначувана і утворена за один “крок”, тобто є простою.

Визначення опорних реакцій

Для визначення опорних реакцій проводимо переріз через опорні з’єднання і замість розрізаних опорних стержнів прикладаємо реакції V_A, H_A, V_B як зовнішні сили невідомої величини (рис.7.2,б). Знаходимо їх величини з рівнянь рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow -V_B \cdot 8 + 10 - 6 \cdot 2 + 2 \cdot 8 \cdot 4 = 0 \Rightarrow V_B = 15,75 \text{ кН}, \\ \sum M_B = 0 &\Rightarrow V_A \cdot 8 + 10 + 6 \cdot 2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 = 0 \Rightarrow V_A = 16,25 \text{ кН}, \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_A - 6 = 0 \Rightarrow H_A = 6 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Обчислення внутрішніх зусиль і побудова епюр

Розбивку рами на окремі ділянки AC, CD, ED, EK, EF, FB зображено на рис.7.2,б. Залежно від виду навантаження на кожній ділянці призначаються два або три перерізи (рис.7.2,в).

Визначаємо згинальні моменти в обраних перерізах.

$$M_1 = \sum M_1^{\text{ниж}} = 0,$$

$$M_2 = \sum M_2^{\text{ниж}} = -6 \cdot 2 = -12 \text{ кНм (розтяг зліва)},$$

$$M_3 = \sum M_3^{\text{ліє}} = -6 \cdot 2 = -12 \text{ кНм (розтяг зверху)},$$

$$M_4 = \sum M_4^{\text{ліє}} = 16,25 \cdot 2 - 6 \cdot 3,5 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 3,5 \text{ кНм (розтяг знизу)},$$

$$M_5 = \sum M_5^{\text{ліє}} = 16,25 \cdot 4 - 6 \cdot 5 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 3 \text{ кНм (розтяг знизу)},$$

$$M_6 = \sum M_6^{\text{ліє}} = 16,25 \cdot 4 - 6 \cdot 5 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 3 \text{ кНм (розтяг знизу)},$$

$$M_7 = \sum M_7^{\text{ліє}} = 16,25 \cdot 6 - 6 \cdot 3,5 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = -4,5 \text{ кНм (розтяг зверху)},$$

$$M_8 = \sum M_8^{\text{прає}} = 6 \cdot 3 + 10 = 28 \text{ кНм (розтяг зверху)},$$

$$M_9 = \sum M_9^{npa6} = 10 \text{ кНм (розтяг зверху)},$$

$$M_{10} = \sum M_{10}^{npa6} = 10 \text{ кНм (розтяг зверху)},$$

$$M_{11} = \sum M_{10}^{ниж} = 6 \cdot 3 = 18 \text{ кНм (розтяг праворуч)},$$

$$M_{12} = \sum M_{12}^{ниж} = 0,$$

$$M_{13} = \sum M_{13}^{ниж} = 0,$$

$$M_{14} = \sum M_{14}^{ниж} = 0.$$

Епюра згинальних моменті побудована на рис.7.2,з.

Поперечні сили в перерізах рами.

$$Q_1 = Q_2 = \sum F_{n,1}^{ниж} = -6 \text{ кН},$$

$$Q_3 = \sum F_{n,3}^{лиг} = V_A \cos \alpha - H_A \sin \alpha = 16,25 \cdot 0,8 - 6 \cdot 0,6 = 9,4 \text{ кН}$$

$$Q_5 = \sum F_{n,5}^{лиг} = V_A \cos \alpha - q \cdot 4 \cos \alpha - H_A \sin \alpha = \\ = 16,25 \cdot 0,8 - 4 \cdot 4 \cdot 0,8 - 6 \cdot 0,6 = -3,4 \text{ кН},$$

$$Q_6 = \sum F_{n,6}^{лиг} = V_A - q \cdot 4 = 16,25 - 4 \cdot 4 = 0,25 \text{ кН},$$

$$Q_8 = \sum F_{n,8}^{npa6} = -V_B = -15,75 \text{ кН},$$

$$Q_9 = Q_{10} = \sum F_{n,9}^{npa6} = 0,$$

$$Q_{11} = Q_{12} = \sum F_{n,8}^{npa6} = P = 6 \text{ кН},$$

$$Q_{13} = Q_{14} = \sum F_{n,13}^{ниж} = 0.$$

Епюра поперечних сил побудована на рис.7.2,д.

Поздовжні сили в перерізах рами.

$$N_1 = N_2 = \sum F_{t,8}^{ниж} = -V_A = -16,25 \text{ кН}$$

$$N_3 = \sum F_{t,3}^{лиг} = -V_A \sin \alpha - H_A \cos \alpha = 16,25 \cdot 0,6 - 6 \cdot 0,8 = -14,55 \text{ кН},$$

$$N_5 = \sum F_{t,5}^{ни6} = -V_A \sin \alpha - H_A \cos \alpha + q \cdot 4 \cdot \sin \alpha =$$

$$= 16,25 \cdot 0,6 - 6 \cdot 0,8 + 4 \cdot 4 \cdot 0,6 = -4,95 \text{ кН},$$

$$N_6 = N_8 = \sum F_{t,6}^{пра6} = -P = -6 \text{ кН},$$

$$N_9 = N_{10} = \sum F_{t,9}^{пра6} = 0,$$

$$N_{11} = N_{12} = \sum F_{t,11}^{ниж} = -V_B = -15,75 \text{ кН}$$

$$N_{13} = N_{14} = \sum F_{t,13}^{ниж} = -V_B = -15,75 \text{ кН}.$$

Епюра поздовжніх сил побудована на рис.7.2,*е*.

Перевірки епюр

Перевіримо рівновагу одного з вузлів, наприклад вузла *D*. Вирізаний вузол зображено на рис.7.2.,*ж*. До вузла в місцях розрізів прикладено внутрішні зусилля, які вибираються з епюр. Згинальні моменти, які на епюрі *M* відкладено знизу, прикладаються так, щоб зумовлювати розтяг нижніх волокон. Додатні поперечні сили прикладено так, що вони намагаються повернути вузол за годинниковою стрілкою. Від'ємні поздовжні сили спрямовані так, щоби викликати стиск в перерізах. Складаючи для вузла рівняння рівноваги маємо:

$$\sum F_x = 4,95 \cdot 0,8 + 3,4 \cdot 0,6 - 6 = 0;$$

$$\sum F_y = 4,95 \cdot 0,6 - 3,4 \cdot 0,8 - 0,25 = 0;$$

$$\sum M = 3 - 3 = 0.$$

Перевіримо відповідність між епюрами *M* і *Q* на ділянках, де епюра *M* прямолінійна:

$$Q_{AC} = -\frac{12}{2} = -6 \text{ кН},$$

$$Q_{EF} = \frac{18}{3} = 6 \text{ кН}.$$

На ділянках, де епюра *M* криволінійна, необхідно розглянути рівновагу всього елемента. Так стержень *CD*, вирізаний зі схеми, представлено на рис.7.2,*з*. До стержня, довжина якого складає 5 м., прикладено зовнішнє рівномірно розподілене навантаження, а також внутрішні зусилля, які вибираються з епюр *M*, *Q* і *N*. Далі для стержня складаються рівняння рівноваги: рівняння проєкцій на локальні вісі координат *x'* і *y'* стержня, а також рівняння моментів відносно будь-якої точки площини, наприклад точки *C*.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 14,55 - 4,95 - 4 \cdot 4 \cdot 0,6 = 0. \\ \sum F_y &= 9,4 + 3,4 - 4 \cdot 4 \cdot 0,8 = 0. \\ \sum M_C &= -3,4 \cdot 5 - 3 - 12 + 4 \cdot 4 \cdot 2 = 0.\end{aligned}$$

7.3. Розрахунок складеної рами

Схема рами, на яку діє рівномірно розподілене навантаження і зосереджений момент, представлено на рис.7.3,а. Необхідно виконати статичний розрахунок рами, тобто побудувати епюри згинальних моментів M , поперечних сил Q і поздовжніх сил N

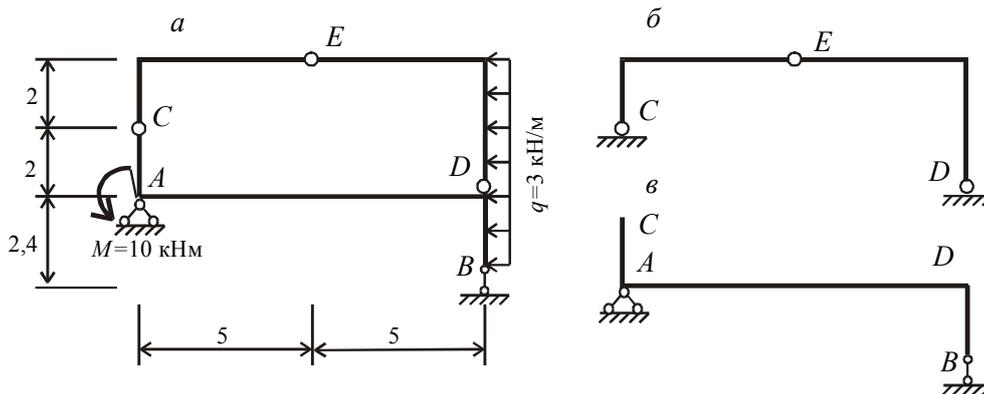


Рис.7.3

Кінематичний аналіз

Рама складається з чотирьох дисків (CAB , CE , ED і основа), які з'єднані між собою шарнірами C , E , D і кінематичними в'язями в опорах A і B . Таким чином, для проведення кількісного етапу кінематичного аналізу рами маємо:

- кількість простих дисків $D = 4$;
- кількість вузлів в'язей $B = 0$;
- кількість простих припайок $\Pi = 0$;
- кількість простих шарнірів $\text{Ш} = 3$;
- кількість кінематичних в'язей $C = 3$.

Ступінь геометричної змінюваності

$$G = 3 \cdot 4 + 0 - 0 - 2 \cdot 3 - 3 - 3 = 0.$$

З точки зору геометричної структури доходимо висновку, що рама є складеною. Дійсно, процес її утворення має два етапи: на першому етапі диск AB приєднується до основи трьома кінематичними в'язями, які не перетинаються в спільній точці і водночас всі три не паралельні між собою. Таке поєднання дисків утворює новий диск – диск першого “поверху”. На другому етапі до диску першого “поверху” приєднуються диски CE і ED таким чином, що три

зазначені диски утворюють шарнірний трикутник, в якому всі три шарніри не розташовані на одній прямій. Отже зазначена схема утворює собою єдиний диск і є геометрично незмінюваною. Процес утворення схеми можна записати у вигляді послідовності формул:

1. $\frac{D_{AB} + D_{\text{земля}}}{C_{A1}, C_{A2}, C_B} \Rightarrow D_I.$
2. $\frac{D_{CE} + D_{DE} + D_I}{Ш_C, Ш_D, Ш_E} \Rightarrow D_{II}.$

Перший "поверх" заданої рами показано на рис.7.3,в, другий – на рис.7.3,б.

Розрахунок складеної рами, тобто визначення реакцій і обчислення внутрішніх зусиль будемо виконувати для кожного "поверху" окремо, починаючи з другого "поверху". Згодом знайдені зусилля відкладемо на повній схемі складеної рами.

Розрахунок рами другого "поверху"

Схема рами другого "поверху" наведено на рис.7.4,а.

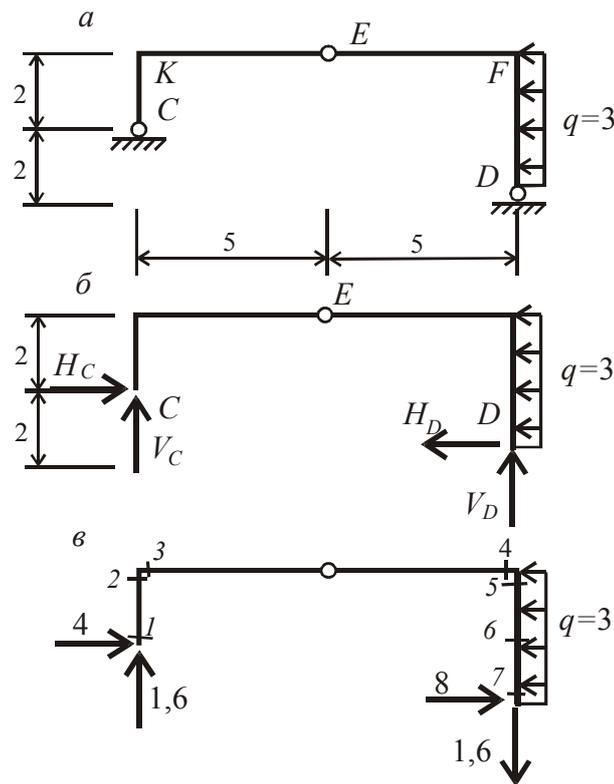


Рис.7.4

Визначимо реакції опор другого "поверху" (рис.7.4,б) з умов його рівноваги.

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow V_C \cdot 10 + H_C \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow 10V_C + 2H_C - 24 = 0,$$

$$\sum M_E^{ліє} = 0 \Rightarrow V_C \cdot 5 - H_C \cdot 2 = 0 \Rightarrow 5V_C - 2H_C = 0.$$

Розв'язавши систему двох рівнянь знаходимо:

$$V_C = 1,6 \text{ кН}, \quad H_C = 4 \text{ кН}.$$

Аналогічно:

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 &\Rightarrow -V_D \cdot 10 + H_D \cdot 2 = 0 \Rightarrow -10V_D + 2H_D = 0, \\ \sum M_E^{прав} = 0 &\Rightarrow -V_D \cdot 5 + H_D \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow -5V_D + 4H_D + 24 = 0. \end{aligned}$$

Розв'язання отриманої системи двох рівнянь дає

$$V_D = -1,6 \text{ кН}, \quad H_D = -8 \text{ кН}.$$

Перевірка рівноваги рами CED :

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 4 + 8 - 3 \cdot 4 \equiv 0, \\ \sum F_y &= 1,6 - 1,6 \equiv 0. \end{aligned}$$

Розіб'ємо схему поверху на три ділянки (незважаючи на наявність шарніра ригель розглядаємо як одну ділянку) і позначимо перерізи для обчислення зусиль (рис.7.4,в).

Обчислимо згинальні моменти:

$$M_1 = \sum M_1^{ниж} = 0,$$

$$M_2 = \sum M_2^{ниж} = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кНм}, \quad (\text{розтяг ліворуч})$$

$$M_3 = \sum M_3^{лів} = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кНм}, \quad (\text{розтяг зверху})$$

$$M_4 = \sum M_4^{лів} = -4 \cdot 2 + 1,6 \cdot 10 = 8 \text{ кНм}, \quad (\text{розтяг знизу})$$

$$M_5 = \sum M_5^{ниж} = -8 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 2 = -8 \text{ кНм}, \quad (\text{розтяг ліворуч})$$

$$M_6 = \sum M_6^{ниж} = -8 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = -10 \text{ кНм}, \quad (\text{розтяг ліворуч})$$

$$M_7 = \sum M_7^{ниж} = 0.$$

Поперечні сили:

$$Q_1 = Q_2 = \sum F_{n,1}^{ниж} = -4 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = \sum F_{n,3}^{лів} = 1,6 \text{ кН},$$

$$Q_5 = \sum F_{n,5}^{ниж} = -8 + 3 \cdot 4 = 1,6 \text{ кН},$$

$$Q_7 = \sum F_{n,7}^{ниж} = -8 \text{ кН}.$$

Поздовжні сили:

$$N_1 = N_2 = \sum F_{t,1}^{ниж} = -1,6 \text{ кН},$$

$$N_3 = N_4 = \sum F_{t,2}^{лів} = -4 \text{ кН},$$

$$N_5 = N_7 = \sum F_{t,5}^{ниж} = 1,6 \text{ кН}.$$

Розрахунок рами першого "поверху"

Схема рами першого "поверху" показана на рис.7.5,а. Опорні реакції другого "поверху" прикладено як вже відомі зовнішні сили.

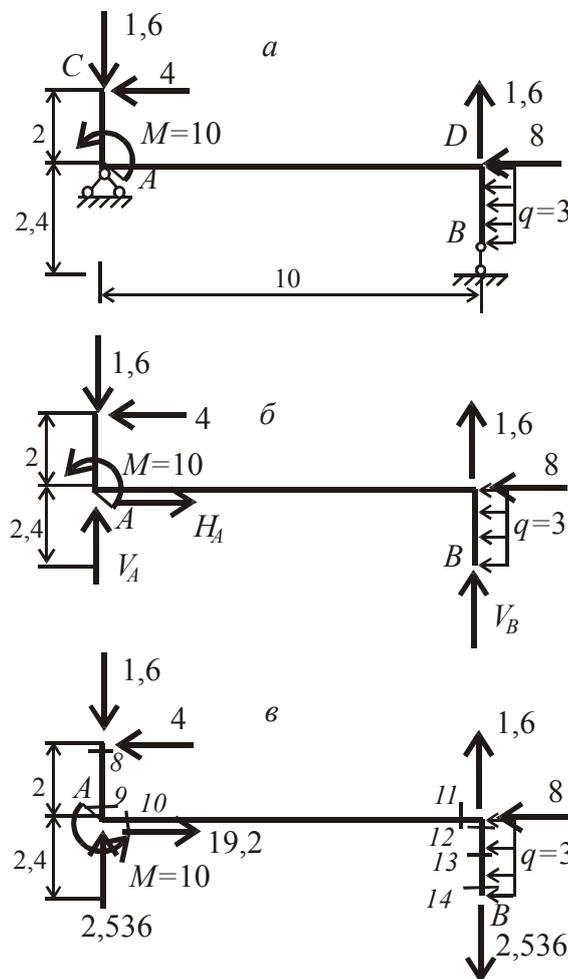


Рис.7.5

Визначимо реакції опор першого "поверху" (рис.7.5,б) з умов його рівноваги.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A - 4 - 8 - 3 \cdot 2,4 = 0 \Rightarrow H_A = 19,2 \text{ кН},$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -V_B \cdot 10 - 4 \cdot 2 - 1,6 \cdot 10 + 3 \cdot 2,4 \cdot 1,2 - 10 = 0 \Rightarrow V_B = -2,536 \text{ кН},$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - 2,536 + 1,6 - 1,6 = 0 \Rightarrow V_A = 2,536 \text{ кН}.$$

Розіб'ємо схему поверху на три ділянки і позначимо перерізи для обчислення зусиль (рис.7.5,в).

Обчислимо згинальні моменти:

$$M_8 = \sum M_8^{\text{вєрх}} = 0,$$

$$M_9 = \sum M_9^{\text{вєрх}} = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кНм}, \quad (\text{розтяг праворуч})$$

$$M_{10} = \sum M_{10}^{\text{ліє}} = -4 \cdot 2 - 10 = -18 \text{ кНм}, \quad (\text{розтяг зверху})$$

$$M_{11} = \sum M_{11}^{\text{прає}} = 3 \cdot 2,4 \cdot 1,2 = 8,64 \text{ кНм}, \quad (\text{розтяг зверху})$$

$$M_{12} = \sum M_{12}^{\text{ліє}} = 3 \cdot 2,4 \cdot 1,2 = 8,64 \text{ кНм}, \quad (\text{розтяг праворуч})$$

$$M_{13} = \sum M_{13}^{\text{нижє}} = 3 \cdot 2,4 \cdot 1,2 = 8,64 \text{ кНм}, \quad (\text{розтяг зверху})$$

$$M_{14} = \sum M_{14}^{\text{нижє}} = 0.$$

Поперечні сили:

$$Q_8 = Q_9 = \sum F_{n,8}^{\text{вєрх}} = -4 \text{ кН}.$$

$$Q_{10} = Q_{11} = \sum F_{n,10}^{\text{ліє}} = 2,536 - 1,6 = 0,936 \text{ кН}.$$

$$Q_{12} = \sum F_{n,12}^{\text{нижє}} = 3 \cdot 2,4 = 7,2 \text{ кН}.$$

$$Q_{14} = \sum F_{n,14}^{\text{нижє}} = 0.$$

Поздовжні сили:

$$N_8 = N_9 = \sum F_{t,8}^{\text{вєрх}} = -1,6 \text{ кН}.$$

$$N_{10} = N_{11} = \sum F_{t,10}^{\text{ліє}} = 4 - 19,2 = -15,2 \text{ кН}.$$

$$N_{12} = N_{14} = \sum F_{t,12}^{\text{нижє}} = 4 - 19,2 = -15,2 \text{ кН}.$$

Епюри згинальних моментів M , поперечних сил Q і поздовжніх сил N побудовано на рис.7.7.

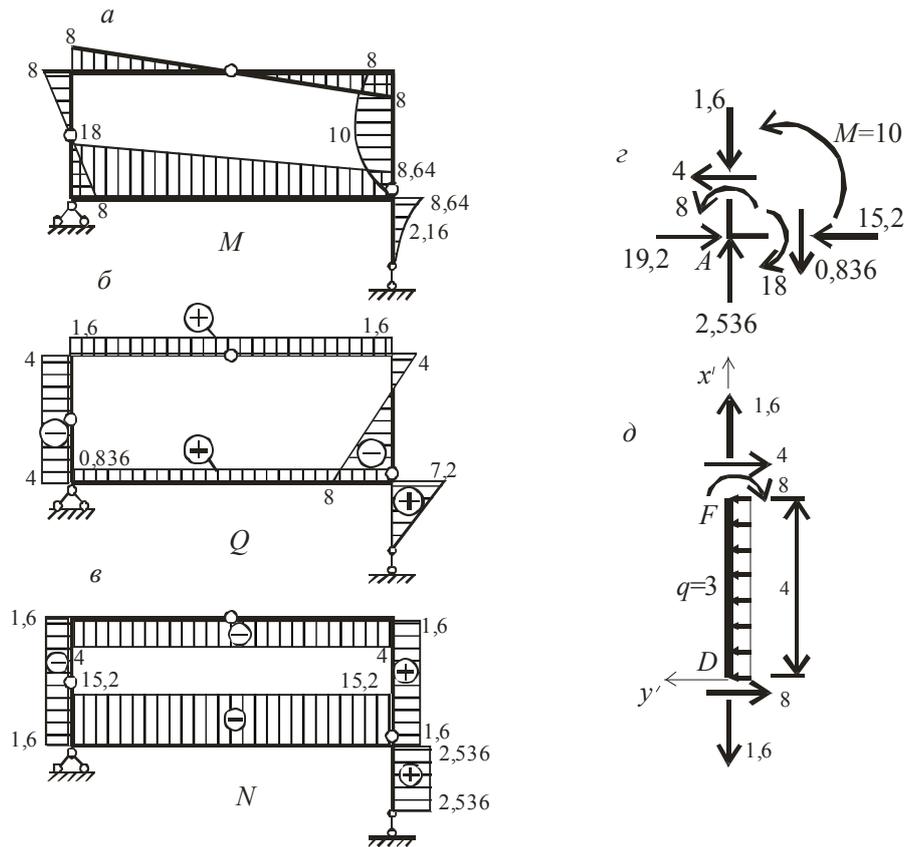


Рис.7.6

Перевірки епюр

Перевіримо рівновагу одного з вузлів, наприклад вузла A . Вирізаний вузол зображено на рис.7.7., z . До вузла в місцях розрізів прикладено внутрішні зусилля, які вибираються з епюр. Згинальні моменти, які на епюрі M відкладено зверху, прикладаються так, щоб зумовлювати розтяг верхніх волокон. Додатну поперечну силу на ригелі прикладено так, що вона намагається повернути вузол за годинниковою стрілкою, а від'ємна поперечна сила на стояку – проти годинникової стрілки. Від'ємні поздовжні сили спрямовані так, щоби викликати стиск в перерізах. До того у вузлі діють вертикальна й горизонтальна опорні реакції, а також зовнішній зосереджений момент. Складаючи для вузла рівняння рівноваги маємо:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 19,2 - 4 - 15,2 \equiv 0, \\ \sum F_y &= 2,536 - 1,6 - 0,836 \equiv 0, \\ \sum M_A &= 18 - 8 - 10 \equiv 0. \end{aligned}$$

Перевіримо відповідність між епюрами M і Q на ділянках, де епюра M прямолінійна:

$$Q_{AK} = -\frac{8+8}{4} = -4 \text{ кН},$$

$$Q_{KF} = +\frac{8+8}{10} = 1,6 \text{ кН},$$

$$Q_{AD} = +\frac{18-8,64}{10} = 0,836 \text{ кН}.$$

На ділянках, де еюра M криволінійна, необхідно розглянути рівновагу всього елемента. Так стержень FD , вирізаний зі схеми, представлено на рис.7.6,д. До стержня, довжина якого складає 4 м., прикладено зовнішнє рівномірне розподілене навантаження, а також внутрішні зусилля, які вибираються з еюр M , Q і N . Далі для стержня складаються рівняння рівноваги: рівняння проєкцій на локальні вісі координат x' і y' стержня, а також рівняння моментів відносно будь-якої точки площини, наприклад точки D .

$$\sum F_{x'} = -4 - 8 + 3 \cdot 4 \equiv 0,$$

$$\sum F_{y'} = 1,6 - 1,6 \equiv 0,$$

$$\sum M_D = 4 \cdot 4 + 8 - 3 \cdot 4 \cdot 2 \equiv 0.$$

7.4. Розрахунок рами із замкненим контуром

Виконати статичний розрахунок рами, представленої на рис.7.7,а.

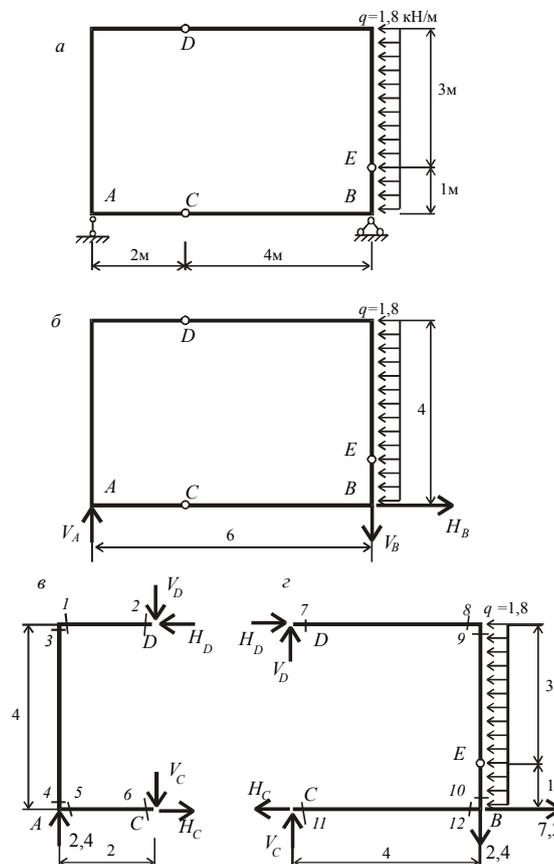


Рис.7.7

Кінематичний аналіз

Рама складається з чотирьох дисків (CAD , DE , CBE і основа), які з'єднані між собою шарнірами C , E , D і кінематичними в'язями в опорах A і B . Таким чином, для проведення кількісного етапу кінематичного аналізу рами маємо:

- кількість простих дисків $D = 4$;
- кількість вузлів в'язей $B = 0$;
- кількість простих припайок $П = 0$;
- кількість простих шарнірів $Ш = 3$;
- кількість кінематичних в'язей $C = 3$.

Ступінь геометричної змінюваності

$$Г = 3 \cdot 4 + 0 - 0 - 2 \cdot 3 - 3 - 3 = 0.$$

З точки зору геометричної структури доходимо висновку, що рама є складеною. Дійсно, процес її утворення має два етапи: на першому етапі диски CAD , DE та CBE з'єднуються між собою попарно за допомогою трьох шарнірів E , D і C , тобто за способом шарнірного трикутника, причому всі три шарніри не розташовані на одній прямій. Таке поєднання дисків утворює новий диск – диск першого “поверху”. На другому етапі диск першого “поверху” приєднуються до диску “земля” трьома кінематичними в'язями, які не паралельні і не перетинаються в одній точці. Отже зазначена схема утворює собою єдиний диск і є геометрично незмінюваною.

Процес утворення схеми можна записати у вигляді послідовності формул:

$$1. \frac{D_{CAD} + D_{DE} + D_{CBE}}{Ш_E, Ш_D, Ш_C} \Rightarrow D_I;$$

$$2. \frac{D_I + D_{\text{земля}}}{C_A, C_{Bx}, C_{By}} \Rightarrow D_{II}.$$

Розрахунок складеної рами, тобто визначення реакцій і обчислення внутрішніх зусиль будемо виконувати для кожного “поверху” окремо, починаючи з другого “поверху”. Згодом знайдені зусилля відкладемо на повній схемі складеної рами.

Розрахунок реакцій другого "поверху" рами

Схема рами другого "поверху" наведено на рис.7.7,б. Визначимо реакції опор другого "поверху" з умов його рівноваги.

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\Rightarrow V_A \cdot 6 - 1,8 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_A = 2,4 \text{ кН}; \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow V_B \cdot 6 - 1,8 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_B = 2,4 \text{ кН}; \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_B - 1,8 \cdot 4 = 0 \Rightarrow H_B = 7,2 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Розрахунок реакцій першого "поверху" рами

Реакціями першого "поверху" є сили взаємодії між елементами рами, які виникають в з'єднувальних шарнірах. Для обчислення внутрішніх зусиль достатньо визначити реакції в будь-яких двох шарнірах. Для цього проведемо розріз через шарніри D і C , який поділяє раму першого поверху на дві половини. Одна з них – це суцільний елемент рами (рис.7.7,в), а інша – система двох елементів (рис.7.7,г). Саме з умов рівноваги цієї системи визначаємо реакції шарнірів D і C :

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 &\Rightarrow H_D \cdot 4 + 2,4 \cdot 4 - 1,8 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow H_D = 1,2 \text{ кН}; \\ \sum M_D = 0 &\Rightarrow H_C \cdot 4 + 2,4 \cdot 4 + 1,8 \cdot 4 \cdot 2 - 7,2 \cdot 4 = 0 \Rightarrow H_C = 1,2 \text{ кН}; \\ \sum M_E^{верх} = 0 &\Rightarrow V_D \cdot 4 + 1,2 \cdot 3 - 1,8 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0 \Rightarrow V_D = 1,125 \text{ кН}; \\ \sum M_E^{ниж} = 0 &\Rightarrow V_C \cdot 4 + 1,2 \cdot 1 - 7,2 \cdot 1 + 1,8 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0 \Rightarrow V_C = 1,275 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Визначення внутрішніх зусиль

У кожній з двох половин першого "поверху" розглядаємо по три ділянки. На кожній з них призначаємо по два перерізи, розташовані нескінченно близько до їх кінців. На ділянці, де прикладено розподілене навантаження, призначаємо додатковий переріз в шарнірі C , де згинальний момент завідомо дорівнює нулю. Призначені перерізи зображено на рис.7.7, в і г.

Визначаємо згинальні моменти в призначених перерізах.

$$\begin{aligned} M_1 = \sum M_1^{прав} &= 1,125 \cdot 2 = 2,25 \text{ кНм}; & M_7 = \sum M_7^{лів} &= 0; \\ M_2 = \sum M_2^{прав} &= 0; & M_8 = \sum M_8^{прав} &= 1,125 \cdot 4 = 4,5 \text{ кНм}; \\ M_3 = \sum M_3^{верх} &= 1,125 \cdot 2 = 2,25 \text{ кНм}; & M_9 = \sum M_9^{верх} &= 1,125 \cdot 4 = 4,5 \text{ кНм}; \\ M_4 = \sum M_4^{ниж} &= 1,275 \cdot 2 = 2,55 \text{ кНм}; & M_E &= 0; \\ M_5 = \sum M_5^{прав} &= 1,275 \cdot 2 = 2,55 \text{ кНм}; & M_{10} = \sum M_{10}^{ниж} &= 1,275 \cdot 4 = 5,1 \text{ кНм}; \\ M_6 = \sum M_6^{прав} &= 0; & M_{11} = \sum M_{11}^{лів} &= 0; \\ & & M_{12} = \sum M_{12}^{лів} &= 1,275 \cdot 4 = 5,1 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Визначаємо поперечні сили в призначених перерізах.

$$\begin{aligned}
 Q_1 = Q_2 &= \sum F_{n,1}^{npa6} = 1,125 \text{ кН}; & Q_7 = Q_8 &= \sum F_{n,7}^{ли6} = 1,125 \text{ кН}; \\
 Q_3 = Q_4 &= \sum F_{n,3}^{вєpx} = -1,2 \text{ кН}; & Q_9 &= \sum F_{n,9}^{вєpx} = 1,2 \text{ кН}; \\
 Q_5 = Q_6 &= \sum F_{n,5}^{npa6} = 1,275 \text{ кН}; & Q_{10} &= \sum F_{n,10}^{ниж} = 1,2 - 7,2 = -6 \text{ кН}; \\
 & & Q_{11} = Q_{12} &= \sum F_{n,11}^{ли6} = 1,275 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

Визначаємо поздовжні сили в призначених перерізах.

$$\begin{aligned}
 N_1 = N_2 &= \sum F_{t,1}^{npa6} = -1,2 \text{ кН}; & N_7 = N_8 &= \sum F_{t,7}^{npa6} = -1,2 \text{ кН}; \\
 N_3 = N_4 &= \sum F_{t,3}^{вєpx} = -1,125 \text{ кН}; & N_9 = N_{10} &= \sum F_{t,9}^{вєpx} = 1,125 \text{ кН}; \\
 N_5 = N_6 &= \sum F_{t,5}^{npa6} = 1,2 \text{ кН}; & N_{11} = N_{12} &= \sum F_{t,11}^{npa6} = 1,2 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

Епюри згинальних моментів M , поперечних сил Q і поздовжніх сил N побудовано на рис.7.8.

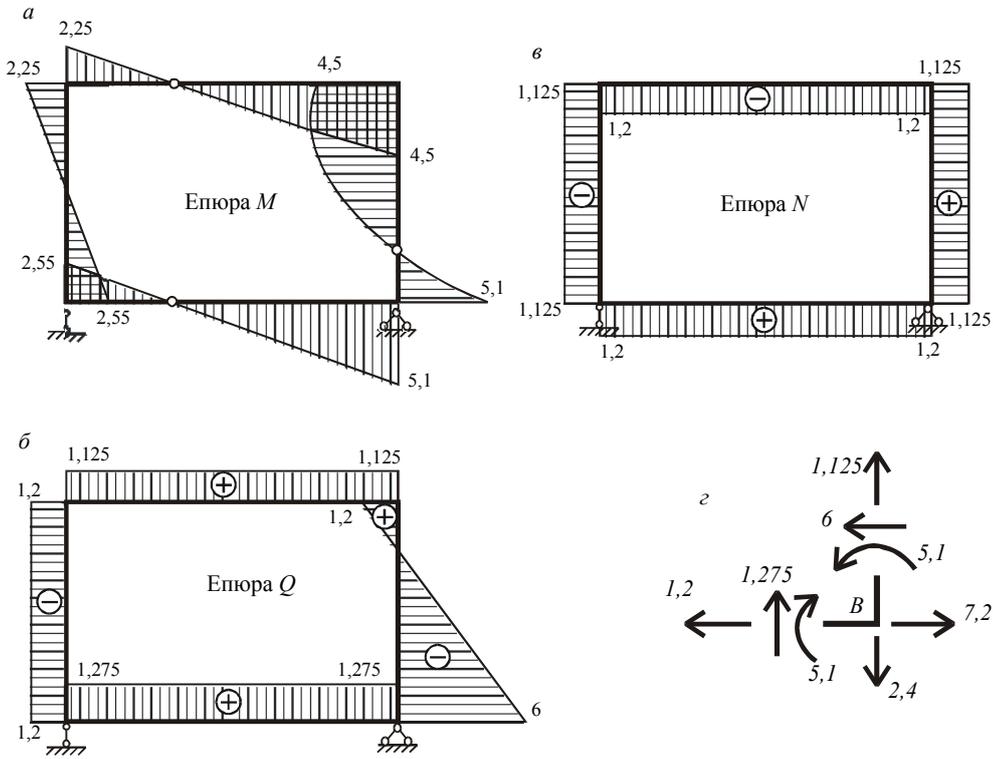


Рис.7.8

Перевірки епюр

Перевіримо рівновагу одного з вузлів, наприклад вузла *B*. Вирізаний вузол зображено на рис.7.8.,*г*. До вузла в місцях розрізів прикладено внутрішні зусилля, які вибираються з епюр. Згинальні моменти, прикладаються так, щоб зумовлювати розтяг нижніх волокон на ригелі і правих – на стояку. Додатну поперечну силу на ригелі прикладено так, що вона намагається повернути вузол за годинниковою стрілкою, а від’ємна поперечна сила на стояку – проти годинникової стрілки. Додатні поздовжні сили спрямовані так, щоби викликати розтяг в перерізах. До того ж у вузлі діють вертикальна й горизонтальна опорні реакції. Складаючи для вузла рівняння рівноваги маємо:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 7,2 - 6 - 1,2 \equiv 0; \\ \sum F_y &= 1,125 + 1,275 - 2,4 \equiv 0; \\ \sum M_B &= 5,1 - 5,1 \equiv 0. \end{aligned}$$

7.5. Задачі для самостійного розв’язання

Для рам, представлених на рис 7.9 побудувати епюри згинальних моментів, поперечних сил і поздовжніх сил.

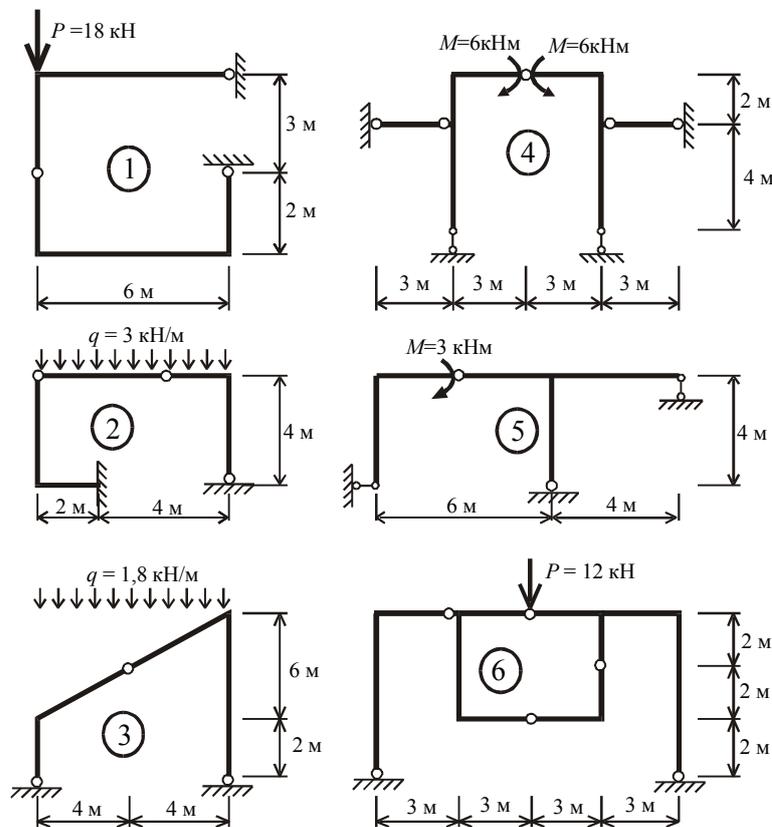


Рис.7.9

8. Розрахунок на рухоме навантаження

8.1. Короткі теоретичні відомості

Рухомими називають навантаження, які переміщуються по конструкції. До таких навантажень відносять автомашини, потяги, трактори, які переміщуються по мостовим переходам, кранові навантаження на підкранові балки, навантаження від підвісних кранів, які рухаються по фермам покриття, тощо. Від дії таких навантажень усі параметри, що визначають напружено-деформований стан споруди (опорні реакції, згинальні моменти, поперечні та поздовжні сили, напруження, переміщення тощо), змінюються і залежать від місця, де розташоване навантаження в кожний поточний момент часу. Задача розрахунку на рухоме навантаження полягає у визначенні найбільших за величиною зазначених параметрів, які можуть виникнути в елементах споруди під час його руху.

Одним із найбільш поширених методів розрахунку на рухоме навантаження є метод ліній впливу, який дозволяє аналізувати зусилля і переміщення в будь-яких перерізах будь-яких споруд. Метод полягає в побудові, так званих, **ліній впливу** – графіків, які показують, як змінюється той чи інший фактор, коли по споруді переміщується вертикальна одинична сила. За допомогою цих графіків можна визначати величини згаданих факторів від будь-яких зовнішніх силових навантажень, як рухомих, так і нерухомих.

8.2. Лінії впливу для двоопорної балки

Розглянемо побудову ліній впливу для опорних реакцій та внутрішніх зусиль для однопрогонової двоопорної балки. Нехай однопрогонова балка AB перебуває під дією вертикальної зосередженої сили $P = 1$ (рис.8.1,*a*). Сила може перебувати в будь-якій точці балки (зона можливого розташування сили, тобто зона руху показана на рисунку штриховою лінією). Розташування сили визначається координатою x (початок системи координат взято на лівій опорі A). Таким чином, у процесі руху одиничної сили координата x змінюється в межах $-c_1 \leq x \leq l + c_2$.

Лінії впливу опорних реакцій

В опорах балки виникають вертикальні опорні реакції V_A та V_B . Горизонтальна складова H_A в шарнірно-нерухомій опорі A дорівнює нулю. Це випливає з рівняння рівноваги балки:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

Для обчислення опорної реакції V_A складемо рівняння рівноваги

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A l - 1 \cdot (l - x) = 0 \Rightarrow V_A = \frac{l - x}{l}.$$

Отже, реакція V_A є лінійною функцією координати x

$$V_A = V_A(x).$$

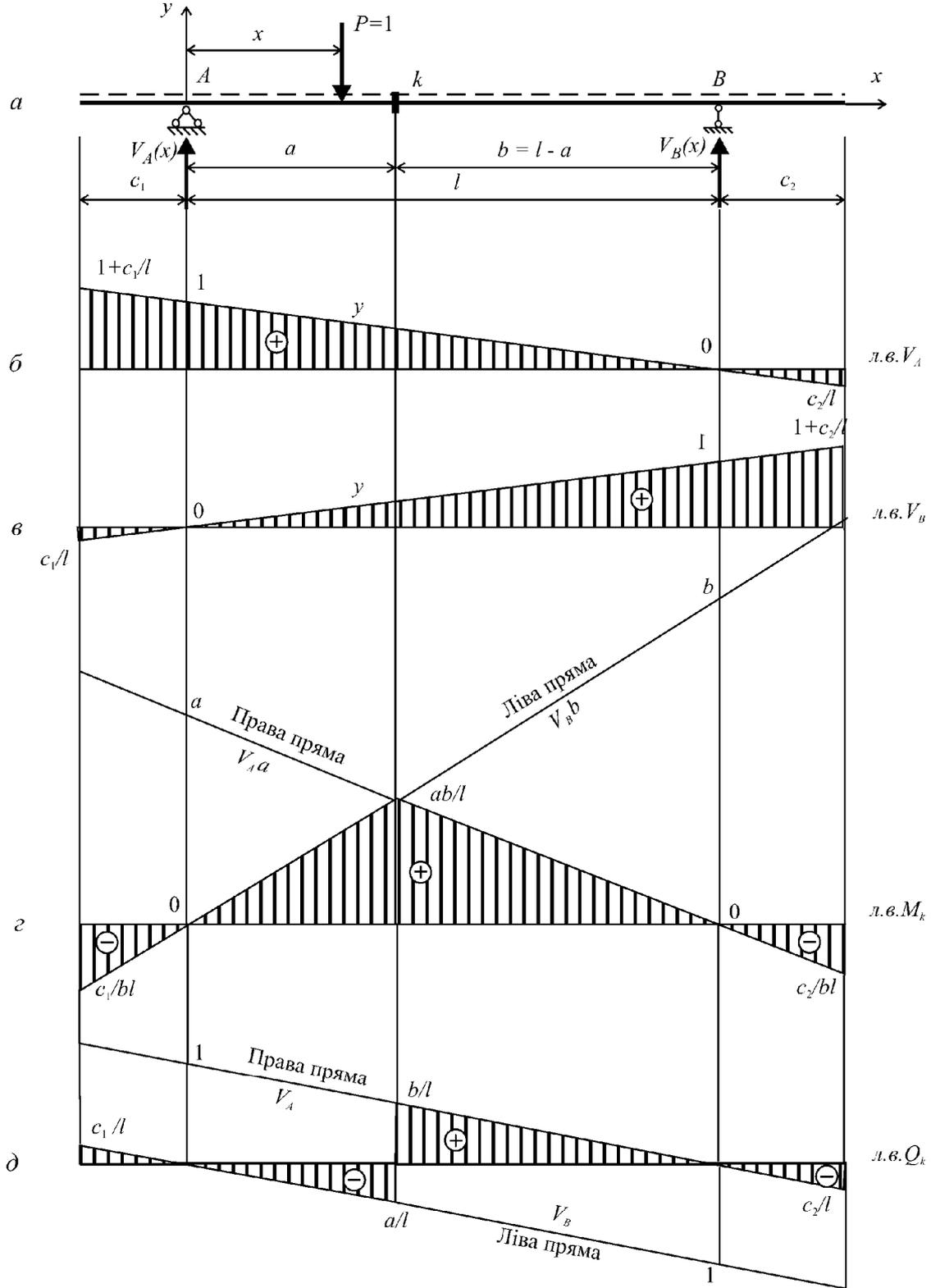


Рис.8.1

Графік зазначеної функції є прямою. Для побудови прямої надамо координаті x двох будь-яких значень (наприклад, $x = 0$ та $x = l$). У результаті маємо

$$x = 0 \Rightarrow V_A(0) = \frac{l-0}{l} = 1;$$

$$x = l \Rightarrow V_A(l) = \frac{l-l}{l} = 0.$$

Графік функції $V_A = V_A(x)$ представлено на рис.8.1,б. Він називається лінією впливу опорної реакції V_A . Графік показує, як змінюється опорна реакція V_A , коли по балці рухається одинична вертикальна сила $P = 1$. Будь-яка ордината у графіка характеризує величину опорної реакції V_A , коли сила розташована на балці над цією ординатою.

Аналогічно побудуємо лінію впливу опорної реакції V_B .

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -V_B l + 1 \cdot x = 0 \Rightarrow V_B = \frac{x}{l}.$$

Отже, реакція V_B також є лінійною функцією координати x

$$V_B = V_B(x)$$

Графік цієї функції – пряма. Надамо координаті x двох будь-яких значень (наприклад, $x = 0$ та $x = l$). У результаті маємо:

$$x = 0 \Rightarrow V_B(0) = \frac{0}{l} = 0;$$

$$x = l \Rightarrow V_B(l) = \frac{l}{l} = 1.$$

Лінія впливу опорної реакції V_B побудована на рис.8.1,в. Отже, побудовано графік, який показує закон зміни опорної реакції V_B залежно від розташування одиничної сили $P = 1$. Будь-яка ордината у графіка характеризує величину опорної реакції V_B , коли на балці над цією ординатою розташована сила.

Таким чином, для балки на двох опорах лінія впливу опорної реакції V_A – це пряма, яка має одиницю на опорі A і нуль на опорі B , а лінія впливу опорної реакції V_B – пряма, яка має одиницю на опорі B і нуль на опорі A . Графіки розповсюджуються на всю балку.

Лінія впливу згинального моменту

Визначимо згинальний момент в перерізі k , розташованого в прогоні двоопорної балки (рис.8.1,а) на відстані a від опори A і на відстані $b = l - a$ від опори B . Скористаємось правилом, викладеним у п.5.1: згинальний момент в будь-якому перерізі k обчислюється як алгебраїчна сума моментів всіх сил, що діють на балку по один бік від перерізу, стосовно його центру:

$$M_k = \sum M_k^{ліє} \quad \text{або} \quad M_k = \sum M_k^{прає}. \quad (8.1)$$

Для обчислення згинального моменту при дії рухомої сили доцільно вибирати ту формулу, яка має меншу кількість доданків. Так, при розташуванні сили ліворуч перерізу k слід вибирати другу, а при розташуванні сили праворуч перерізу – першу формулу.

Отже, розглянемо два випадки розташування одиничної сили.

Сила $P=1$ ліворуч перерізу k	Сила $P=1$ праворуч перерізу k
<p style="text-align: center;">$M_k = \sum M_k^{npas} = V_B(x)b.$</p>	<p style="text-align: center;">$M_k = \sum M_k^{nie} = V_A(x)a.$</p>

Таким чином, ліворуч перерізу k лінію впливу згинального моменту в перерізі k можна отримати множенням лінії впливу опорної реакції V_B на множник b (див.рис.8.1,з). Цей графік називається лівою прямою. Він справедливий і, відповідно, штрихується ліворуч перерізу k .

Аналогічно, праворуч перерізу k лінію впливу згинального моменту в перерізі k можна отримати множенням лінії впливу опорної реакції V_A на множник a (рис.8.1,з). Цей графік називається правою прямою. Він штрихується праворуч перерізу k .

Таким чином, лінія впливу згинального моменту в перерізі k складається з двох прямих, які перетинаються під перерізом k :

- ліва пряма проходить через нуль лівій опорі і штрихується ліворуч перерізу;
- права пряма проходить через нуль правій опорі і штрихується праворуч перерізу.

Проміжні ординати лінії впливу можна обчислити з умов подібності трикутників.

Остаточна лінія впливу згинального моменту в перерізі k представлена на рис.8.1,з.

Лінія впливу поперечної сили

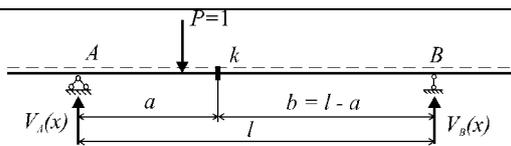
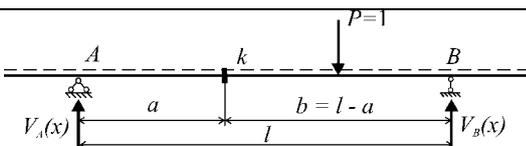
Як було зазначено в п.5.1, поперечна сила в перерізі k обчислюється як сума проекцій на вертикальну вісь всіх сил, що діють на балку по один бік від перерізу:

$$Q_k = \sum F_y^{nie} \quad \text{або} \quad Q_k = \sum F_y^{npas}. \quad (8.2)$$

Додатною вважається поперечна сила, яка намагається повернути балку відносно перерізу за годинниковою стрілкою.

При дії рухомої сили доцільно вибирати ту формулу, яка має меншу кількість доданків. Так, при розташуванні рухомої сили ліворуч перерізу k слід вибирати другу формулу, а при розташуванні сили праворуч перерізу – першу.

Отже, розглянемо два випадки розташування одиничної сили.

Сила $P=1$ ліворуч перерізу k	Сила $P=1$ праворуч перерізу k
	
$Q_k = \sum F_y^{npas} = -V_B(x).$	$Q_k = \sum F_y^{pis} = V_A(x).$

Таким чином, ліворуч перерізу k лінія впливу поперечної сили в перерізі k еквівалентна від'ємній лінії впливу опорної реакції V_B (див.рис.8.1,д). Цей графік називається лівою прямою. Він справедливий і, відповідно, штрихується ліворуч перерізу k .

Аналогічно, праворуч перерізу k лінія впливу поперечної сили в перерізі k еквівалентна лінії впливу опорної реакції V_A (рис.8.1,д). Цей графік називається правою прямою. Він штрихується праворуч перерізу k .

Таким чином, лінія впливу поперечної сили в перерізі k складається з двох паралельних прямих:

- ліва пряма проходить через нуль лівій опорі і штрихується ліворуч перерізу;
- права пряма проходить через нуль правій опорі і штрихується праворуч перерізу.

Проміжні ординати лінії впливу можна обчислити з умов подібності трикутників.

Остаточна лінія впливу поперечної сили в перерізі k представлена на рис.8.1,д.

8.3. Лінії впливу для консольної балки

Розглянемо консольну балку AC , по якій переміщується одинична вертикальна сила $P=1$ (рис.8.2,а).

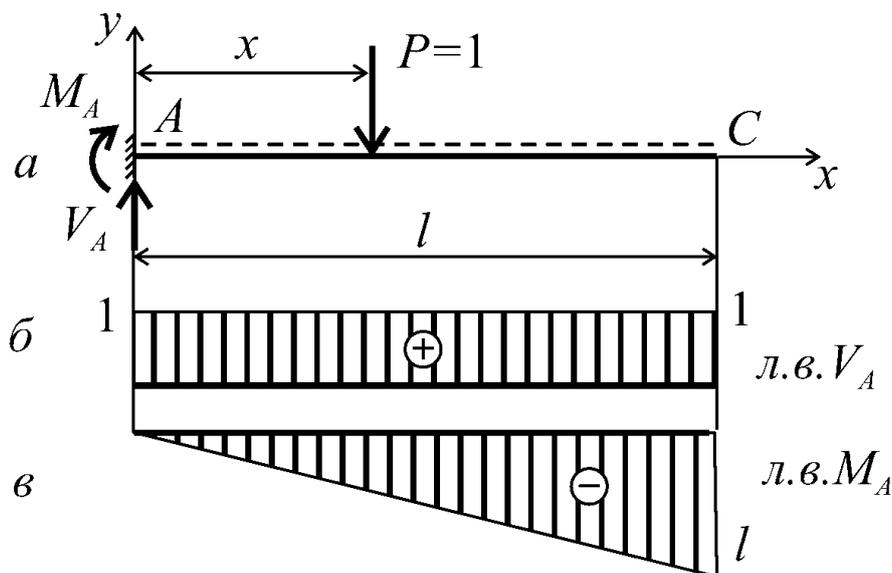


Рис.8.2

Лінії впливу опорних реакцій

У затиснені A виникає вертикальна опорна реакція V_A та реактивний момент M_A . Щодо горизонтальної опорної реакції затиснення, то вона дорівнює нулю. Це випливає з умови рівноваги $\sum F_x = 0$.

Визначаємо опорну реакцію V_A :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - 1 = 0 \Rightarrow V_A = 1.$$

Таким чином, опорна реакція V_A є константою, яка не залежить від місцезнаходження сили. Лінія впливу опорної реакції V_A показана на рис.8.2,б.

Для визначення реактивного моменту M_A складаємо рівняння моментів стосовно точки A :

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + 1 \cdot x = 0 \Rightarrow M_A = -x.$$

Отже, опорний момент M_A змінюється за лінійним законом. Для побудови прямої, яка характеризує зміну моменту залежно від розташування сили $P=1$, тобто для побудови лінії впливу, достатньо визначити значення функції M_A в двох довільних точках:

$$x = 0 \Rightarrow M_A(0) = 0;$$

$$x = l \Rightarrow M_A(l) = -l.$$

Лінія впливу опорного моменту M_A побудована на рис.8.2,в.

Лінії впливу внутрішніх зусиль

Згинальні моменти і поперечні сили в довільному перерізі k консольної балки, що перебуває під дією рухомої сили (рис.8.3,а), можна обчислювати за формулами (8.1) та (8.2) відповідно. Причому незалежно від розташування сили доцільно завжди аналізувати рівновагу консольної частини.

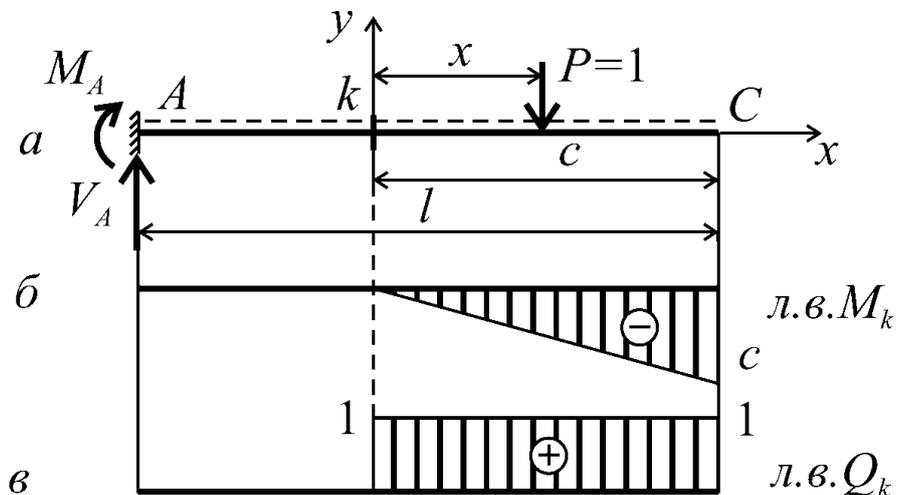
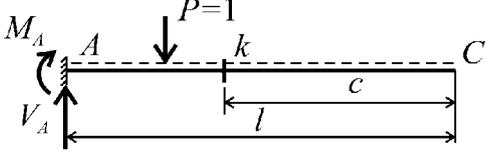
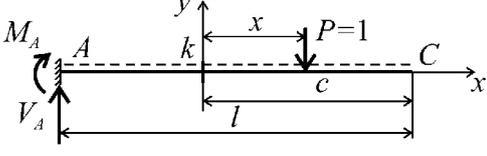


Рис.8.3

Сила $P=1$ ліворуч перерізу k	Сила $P=1$ праворуч перерізу k
 $M_k = \sum M_k^{npas} = 0.$ $Q_k = \sum F_y^{npas} = 0.$	 $M_k = \sum M_k^{npas} = -1 \cdot x.$ $Q_k = \sum F_y^{npas} = 1.$

Лінії впливу згинального моменту M_k та поперечної сили Q_k побудовано на рис.8.3,б та 8.3,в.

8.4. Навантаження ліній впливу

Лінії впливу є графіками зміни величини тих чи інших параметрів, що визначають напружено-деформований стан будь-яких конструкцій чи споруд, від дії одиничної рухомої сили. За допомогою ліній впливу можна обчислювати величини зазначених параметрів, від різноманітних силових дій. Причому силові дії можуть бути як нерухомими, так і рухомими. Така процедура називається навантаженням ліній впливу.

Навантаження нерухомими силовими діями

Нехай для якоїсь конструкції (наприклад, для двоопорної балки) побудовано лінію впливу якогось фактора S_k . Цим фактором може бути опорна реакція, згинальний момент в певному перерізі, прогин деякої точки осі балки тощо). Визначимо величину зазначеного фактора S_k від деяких силових дій за допомогою його лінії впливу.

Якщо на конструкцію діє нерухома сила P (рис.8.4,а), то величина фактора S_k може бути обчислена за формулою

$$S_k = Py. \quad (8.3)$$

У цій формулі сила, що спрямована вниз, вважається додатною.

Величина фактора S_k при дії зосередженої вертикальної сили дорівнює добутку величини цієї сили на ординату лінії впливу фактора, в точці прикладення сили.

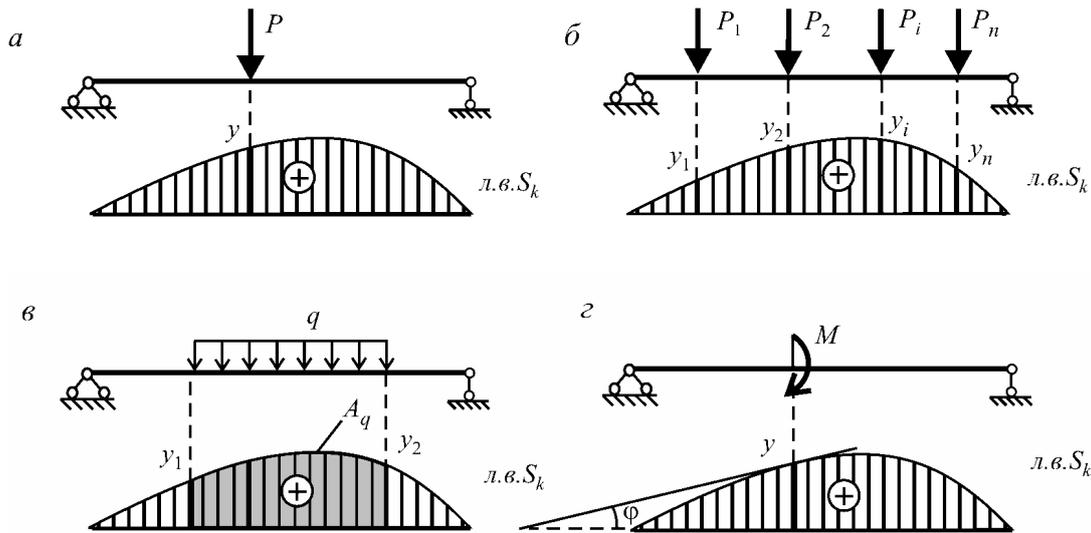


Рис.8.4

Якщо на конструкцію діє система нерухомих вертикальних сил (рис.8.4,б), то величина фактора S_k може бути обчислена за формулою

$$S_k = \sum_{i=1}^n P_i y_i . \quad (8.4)$$

Величина фактора S_k від дії системи зосереджених вертикальних сил дорівнює сумі добутків величин сил на ординати лінії впливу цього фактора в точках прикладення відповідних сил.

Якщо на конструкцію діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q (рис.8.4,в), то величина фактора S_k може бути обчислена за формулою

$$S_k = q A_q . \quad (8.5)$$

Величина фактора S_k від дії вертикального рівномірно розподіленого навантаження дорівнює добутку інтенсивності навантаження q на площу A_q лінії впливу цього фактора в межах навантаження.

При навантаженні конструкції зосередженим моментом M (рис.8.4,г), величина фактора S_k може бути обчислена за формулою

$$S_k = M \operatorname{tg} \varphi . \quad (8.6)$$

Величина фактора S_k від дії зосередженого моменту дорівнює добутку величини моменту M на тангенс нахилу дотичної до лінії впливу фактора в точці прикладення моменту. Момент, який обертається за годинниковою стрілкою вважається додатним. Тангенс вважається додатним для кута, розташованого в першій або третій чверті.

І нарешті, у разі, якщо на систему водночас діє сукупність n зосереджених сил, k – рівномірно розподілених навантажень та m – зосереджених моментів, то величина фактора S_k може бути обчислена за формулою

$$S_k = \sum_{i=1}^n P_i y_i + \sum_{i=1}^k q_i A_{q_i} + \sum_{i=1}^m M_i \operatorname{tg} \varphi_i . \quad (8.7)$$

Отже, для обчислення величини будь-якого фактора від нерухомого навантаження за допомогою лінії впливу необхідно:

- усунути задане нерухоме навантаження;
- побудувати лінію впливу фактора, вважаючи, що по конструкції рухається одинична вертикальна сила;
- завантажити побудовану лінію впливу заданим нерухомим навантаженням за формулами (8.3) – (8.7).

Навантаження рухомими силами

Мета навантаження лінії впливу рухомими силами полягає в обчисленні найбільшої величини того чи іншого фактора, коли по конструкції переміщується система сил.

Нехай по однопрогоновій балці рухається система вертикальних зосереджених сил (рис.8.5,а), відстані між яким в процесі руху не змінюються. На рис.8.5,б показана лінія впливу якогось фактора S_k , побудована від руху одиничної сили.

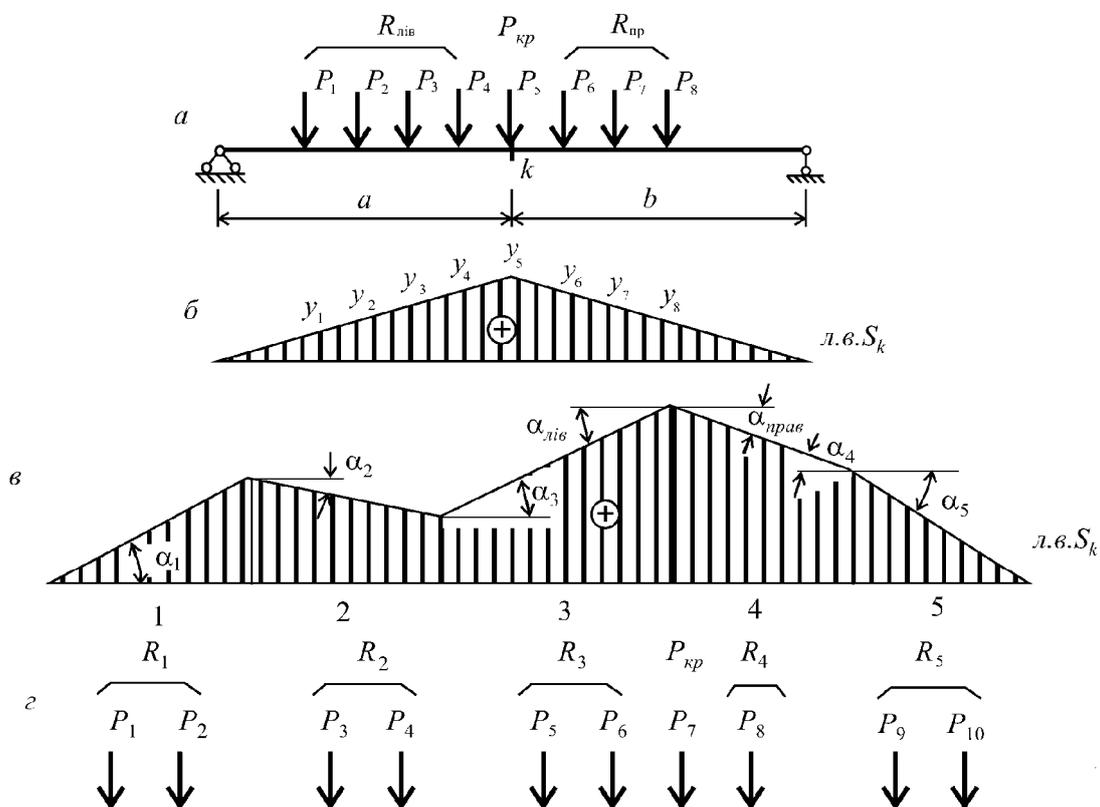


Рис.8.5

Процес навантаження системою рухомих сил має два етапи.

Перший етап. Визначення розташування системи рухомих сил, при якому шуканий фактор матиме найбільше за величиною значення. Положення буде небезпечним за двох умов:

1. Одна з сил має бути розташована над вершиною лінії впливу. Така сила називається критичним вантажем. У нашому випадку $P_{кр} = P_5$ (рис.8.5,а).
2. Має виконуватись система двох нерівностей, яка для трикутної лінії впливу має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{R_{лів} + P_{кр}}{a} &\geq \frac{R_{прав}}{b}; \\ \frac{R_{лів}}{a} &\leq \frac{R_{прав} + P_{кр}}{b}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Тут $R_{лів}$ – сума сил, розташованих ліворуч вершини лінії впливу. В даному випадку

$$R_{лів} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4.$$

$R_{прав}$ – сума сил, розташованих праворуч вершини лінії впливу. В даному випадку

$$R_{прав} = P_6 + P_7 + P_8.$$

Якщо хоча б одна з нерівностей (8.9) не виконується, необхідно пересунути систему сил в інше положення, встановивши над вершиною іншу силу, і повторити перевірку.

У випадку полігональної ліній впливу (рис.8.5,в) умову небезпечного розташування вантажів можна записати у вигляді

$$S_L \cdot S_R \leq 0. \quad (8.10)$$

У співвідношенні (8.10)

$$S_L = \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i + P_{кр} \operatorname{tg} \alpha_{лів}. \quad (8.11)$$

$$S_R = \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i + P_{кр} \operatorname{tg} \alpha_{прав}.$$

Тут позначено: $P_{кр}$ – критична сила (величина вантажу, встановленого в місці найбільшої випуклої ординати лінії впливу); $\operatorname{tg} \alpha_i$ – тангенси кутів нахилу прямолінійних ділянок лінії впливу (додатні, якщо кути знаходяться в I або III чверті, і від'ємні, якщо кути розташовані в II або IV чвертях); R_i – рівнодійні сил, розташованих у межах відповідних прямолінійних ділянок лінії впливу (рис.8.5,з).

Другий етап. Для встановленої в небезпечне положення системи сил обчислюється величина шуканого фактора S_k за формулою (8.4). Це й буде його найбільше за величиною значення.

8.5. Лінії впливу для шарнірно–консольної балки

Для побудови ліній впливу шарнірно–консольну балку доцільно представити у вигляді сукупності однопрогонових балок, які мають або одну опору – затиснення, або дві шарнірні опори, одна з яких шарнірно-нерухома, а друга – шарнірно-рухома. Кожна з таких однопрогонових балок спирається або на основу, або на інші прості балки. Утворена схема називається "поверховою", де кожна однопрогонова балка розглядається як окремий "поверх" конструкції. Більш докладно утворення "поверхових" схем балок розглядається в главі 4.

Побудова ліній впливу будь яких факторів, які виникають в шарнірно-консольній балці виконується за два етапи:

1. За звичайними правилами будується лінія впливу лише для однопрогонової балки, до якої відноситься фактор, що аналізується.
2. Побудована лінія впливу послідовно продовжується на однопрогонові балки сусідніх "поверхів" в такий спосіб, щоб на кожному поверсі вона, по–перше, була прямолінійною, і, по–друге, перетинала вісь балки на віддаленій опорі "поверху".

Розглянемо побудову ліній впливу для шарнірно–консольної балки, представленої на рис.8.6,а.

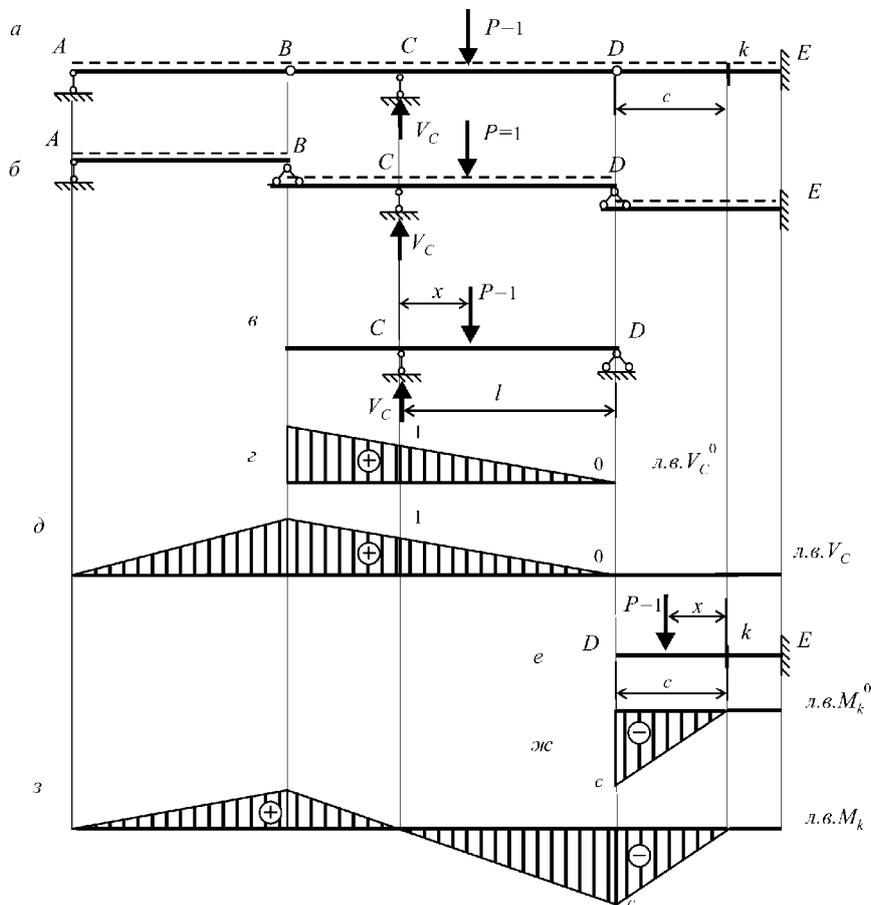


Рис.8.6

Побудова "поверхової" схеми шарнірно–консольної балки

Шарнірно-консольну балку $ABCDE$ можна представити як сукупність трьох однопрогонових балок AB , BCD і DE , які спираються одна на одну. Перший "поверх" – це консольна балка DE , яка безпосередньо спирається на основу. Другий "поверх" – це двоопорна балка BCD , яка спирається на "поверх" DE . Третій – це двоопорна балка AB , яка спирається на балку другого "поверху". "Поверхова" схема зображена на рис.8.6,б.

Побудова лінії впливу опорної реакції V_C

Реакція відноситься для двоопорної балки "поверху" BCD (рис.8.6,в) . Тому на першому етапі будемо лінію впливу опорної реакції V_C саме для цієї балки:

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow V_C l - 1 \cdot (l - x) = 0 \Rightarrow V_C = \frac{l - x}{l} = V_C(x).$$

Прямолінійний графік функції $V_C(x)$ (лінію впливу опорної реакції V_C^0 для двоопорної балки "поверху" BCD) проведемо через значення функції в двох довільних точках

$$x = 0 \Rightarrow V_C(0) = \frac{l}{l} = 1;$$

$$x = l \Rightarrow V_C(l) = \frac{l - l}{l} = 0.$$

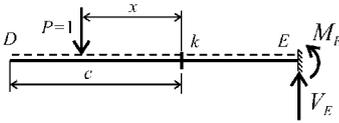
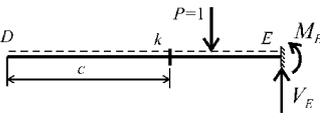
Лінія впливу опорної реакції V_C для двоопорної балки "поверху" BCD побудована на рис.8.6,г.

Другий етап. Подовжуємо лінію впливу на "поверх" AB по прямій, яка перетинає вісь на опорі A . Надалі продовжимо лінію впливу опорної реакції V_C на "поверх" DE по прямій, яка перетинає вісь на опорі E . Остаточна лінія впливу опорної реакції V_C представлена на рис.8.6,д.

Побудова лінії впливу згинального моменту M_k

Переріз k шарнірно–консольної балки розташований на консольній балці першого "поверху" DE (рис.8.6,е).

Перший етап. Визначаємо згинальний момент M_k у перерізі k балки DE , розглядаючи два випадки розташування сили: ліворуч і праворуч перерізу k .

Сила $P=1$ ліворуч перерізу k	Сила $P=1$ праворуч перерізу k
 $M_k = \sum M_k^{лів} = -1 \cdot x.$ <p>(при $x=0$ $M_k(0)=0$ при $x=c$ $M_k(c)=-c$)</p>	 $M_k = \sum M_k^{прав} = 0.$

Графік функції $M_k(x)$ для балки першого "поверху" DE побудовано на рис.8.6,ж.

Другий етап. Подовжуємо побудований графік на балку другого "поверху" BCD . На протязі всього "поверху" проводимо прямолінійний відрізок, який перетинає вісь балки на опорі C . Далі подовжимо графік на перший "поверх" AB , як прямий відрізок, який має нульову ординату на опорі A . Остаточна лінія впливу згинального моменту M_k наведена на рис.8.6,з.

8.6. Лінії впливу в фермах

Лінії впливу опорних реакцій в фермах аналогічні лініям впливу опорних реакцій в балках. Так, для ферми, представленої на рис.8.7,а, лінії впливу опорних реакцій наведено на рис.8.7,б та 8.7,в.

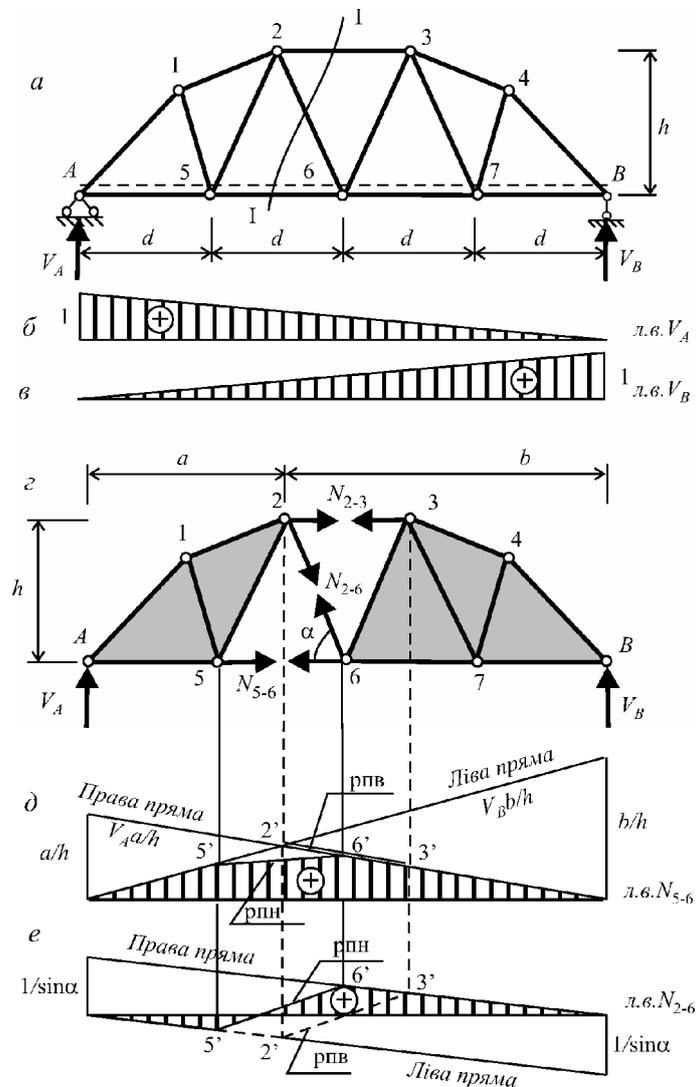


Рис.8.7

Для визначення поздовжніх сил в стержнях ферми використовуються ті ж самі методи, що й для дії нерухомих сил. Проте, на відміну від балки, необхідно заздалегідь визначити, по якому

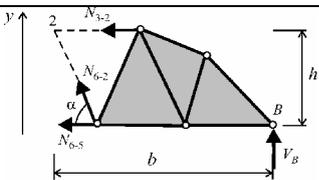
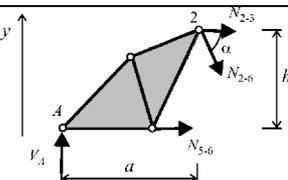
поясу ферми рухається одинична сила. Це пов'язано з тим, що для деяких стержнів лінії впливу зусиль при русі сили по верхньому і по нижньому поясу ферми відрізняються одна від одної.

Метод наскрізних перерізів

Застосуємо метод наскрізних перерізів для аналізу поведінки зусиль в стержнях N_{5-6} та N_{2-6} . Переріз I–I, який перетинає обидва зазначені стержні, поділяє ферму на два окремі диски (рис.8.7,з). Замість розрізаних стержнів прикладаємо поздовжні сили $N_{5-6}, N_{2-6}, N_{2-3}$, які спрямовуються в додатних напрямках, тобто від відповідних вузлів. Будемо вважати, що одинична сила переміщується по нижньому поясу ферми ("рух по низу"). В опорах виникають вертикальні опорні реакції $V_A(x), V_B(x)$, графіки зміни яких (лінії впливу) побудовано на рис.8.7,б та 8.7,в.

Для зусилля N_{5-6} існує моментна точка (точка Ріттера), яка розташована у місці перетину двох інших зусиль, тобто у вузлі 2. Тому для визначення зусилля N_{5-6} необхідно скласти рівняння моментів щодо цього вузла. Що стосується зусилля N_{2-6} , то тут моментної точки не існує, бо два інші зусилля паралельні між собою. Тому для визначення зусилля N_{2-6} необхідно скласти рівняння проекцій на вертикальну вісь.

Як для визначення зусилля N_{5-6} , так і для визначення зусилля N_{2-6} необхідно розглядати рівновагу того диска, на який діє менша кількість сил. Зважаючи на те, що одинична сила рухається і в процесі руху може перебувати як на лівому, так і на правому дисках, будемо розглядати обидва можливі випадки. Причому, якщо сила перебуває на лівому диску, будемо аналізувати рівновагу правого диска, а якщо перебуває на правому диску, то – рівновагу лівого.

Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
	
$\sum M_2 = 0 \Rightarrow N_{6-5}h - V_B b = 0,$ $N_{6-5} = \frac{b}{h} V_B$	$\sum M_2 = 0 \Rightarrow N_{5-6}h - V_A a = 0,$ $N_{5-6} = \frac{a}{h} V_A.$
$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{6-2} \sin \alpha + V_B = 0,$ $N_{6-2} = -\frac{1}{\sin \alpha} V_B.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{2-6} \sin \alpha + V_A = 0,$ $N_{2-6} = \frac{1}{\sin \alpha} V_A.$

Отже, в межах лівого диска лінія впливу зусилля N_{5-6} може бути побудована множенням лінії впливу опорної реакції V_B на коефіцієнт $\frac{b}{h}$ (це буде, так звана, ліва пряма), а в межах правого диска – множенням лінії впливу опорної реакції V_A на коефіцієнт $\frac{a}{h}$ (права пряма).

Ліва пряма штрихується в межах лівого, а права – в межах правого диска (рис.8.7,д). Якщо одинична сила перебуває на нижньому поясі, ліва пряма штрихується на ділянці $A-5$, а права – на ділянці $6-B$. У межах розрізаної панелі нижнього поясу ферми 5–6 ліва і права прямі з'єднуються прямим відрізком, який називається **передатною прямою, або зрізкою**. Якщо ж рух здійснюється по верхньому поясу, то ліва пряма штрихується на ділянці $A-2$, а права – на ділянці $3-B$. Аналогічно, ліва й права прямі в межах розрізаної панелі верхнього поясу ферми 2–3 з'єднуються передатною прямою. Таким чином, лінія впливу має дві передатні прямі, одна для руху по верхньому, а інша – для руху по нижньому поясу ферми. Слід звернути увагу на те, що ліва й права прямі перетинаються під моментною точкою.

Так само будується лінія впливу зусилля N_{2-6} . У межах лівого диска лінія впливу опорної реакції V_B множиться на коефіцієнт $-\frac{1}{\sin \alpha}$ (це буде ліва пряма), а в межах правого диска – множенням лінії впливу опорної реакції V_A на коефіцієнт $\frac{1}{\sin \alpha}$ (права пряма). Ліва і права прямі паралельні. Вони не перетинаються, що відповідає відсутності моментної точки.

Ліва пряма штрихується в межах лівого, а права – в межах правого вантажного поясу диска (рис.8.7,е). Так, якщо одинична сила перебуває на нижньому поясі, ліва пряма штрихується на ділянці $A-5$, а права – на ділянці $6-B$. У межах розрізаної панелі нижнього поясу ферми 5–6 ліва і права прямі з'єднуються передатною прямою. Якщо ж рух здійснюється по верхньому поясу, то ліва пряма штрихується на ділянці $A-2$, а права – на ділянці $3-B$. Аналогічно, ліва і права прямі в межах розрізаної панелі верхнього поясу ферми 2–3 з'єднуються передатною прямою. Отже, лінія впливу також має дві передатні прямі, одна для руху по верхньому, а інша – для руху по верхньому поясу ферми.

Для визначення зусиль в стержнях консольних систем опорні реакції визначати не обов'язково, бо при розрахунку зусиль методом наскрізних перерізів можна завжди обмежитись аналізом рівноваги консольної частини. Побудуємо, наприклад, лінії впливу зусиль в стержнях 1–2 та 2–5 консольної ферми (рис.8.8,а).

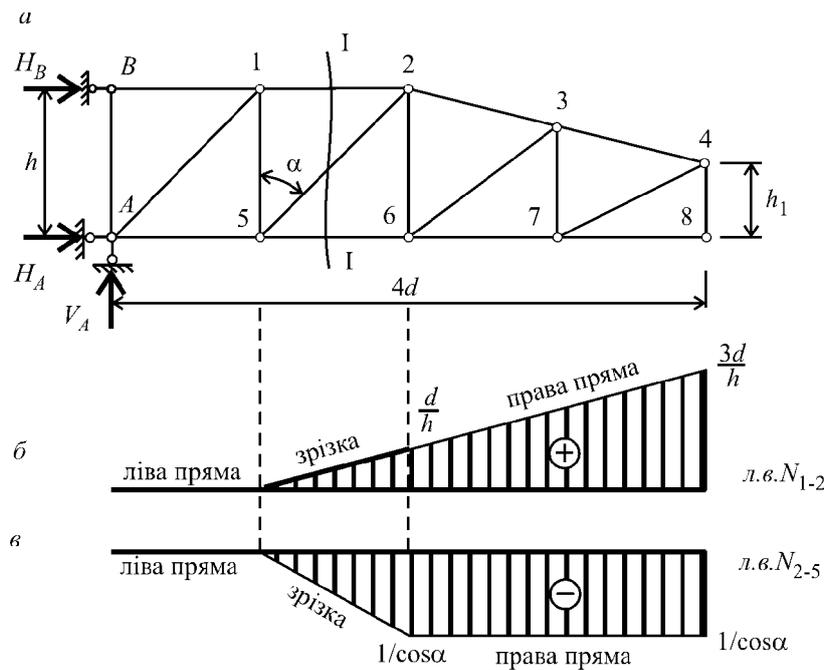


Рис.8.8

Проводимо переріз I–I, який поділяє ферму на два диска, і розглянемо рівновагу правого диска для обох випадків розташування рухомої сили: сила на лівому диску та сила на правому диску.

Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
$\sum M_5 = 0 \Rightarrow -N_{2-1}h = 0 \Rightarrow N_{2-1} = 0.$	$\sum M_5 = 0 \Rightarrow -N_{2-1}h + 1 \cdot x = 0 \Rightarrow N_{2-1} = \frac{x}{h}.$ <p>При $x = d \Rightarrow N_{2-1}(d) = \frac{d}{h}.$</p> <p>При $x = 3d \Rightarrow N_{2-1}(3d) = \frac{3d}{h}.$</p>
$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{5-2} \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_{5-2} = 0.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{5-2} \cos \alpha - 1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{5-2} = -\frac{1}{\cos \alpha}.$

Для обох ліній впливу ліві прямі (прямі в межах лівих дисків) збігаються з базовою лінією. Права пряма лінії впливу N_{2-1} є похилою прямою, а на лінії впливу зусилля N_{5-2} – права пряма паралельна базовій лінії. Як і раніше, зрізки (передатні прямі), з'єднують ліві і праві прямі в

межах розрізаної панелі вантажного поясу ферми. Остаточні лінії впливу побудовано на рис.8.8,б та 8.8,в.

Таким чином, лінія впливу, побудована способом наскрізних перерізів, складається з трьох прямих:

1. Ліва пряма, яка перетинає вісь на лівій опорі і штрихується в межах вантажного поясу лівого диска.
2. Права пряма, що перетинає вісь на правій опорі і штрихується в межах вантажного поясу правого диска. Ліва й права прямі завжди перетинаються під моментною точкою.
3. Передатна пряма з'єднує ліву й праву прямі в межах розрізаної панелі вантажного поясу ферми. Іноді передатна пряма може збігатися з лівою чи правою прямою.

Метод вирізання вузлів

Метод застосовується у випадку, коли можна замкненим перерізом вирізати вузол ферми і скласти для нього рівняння проєкцій, яке міститиме лише одну невідому величину – зусилля в стержні, що аналізується. Рівняння проєкцій складається для двох випадків розташування одиничної сили: сила розташована поза вузлом, тобто за межами панелей, які розсікаються при вирізанні вузла, і сила знаходиться у вузлі.

Для прикладу побудуємо лінії впливу зазначеним методом для стержнів 2–2' та 3–3' (рис.8.9,а).

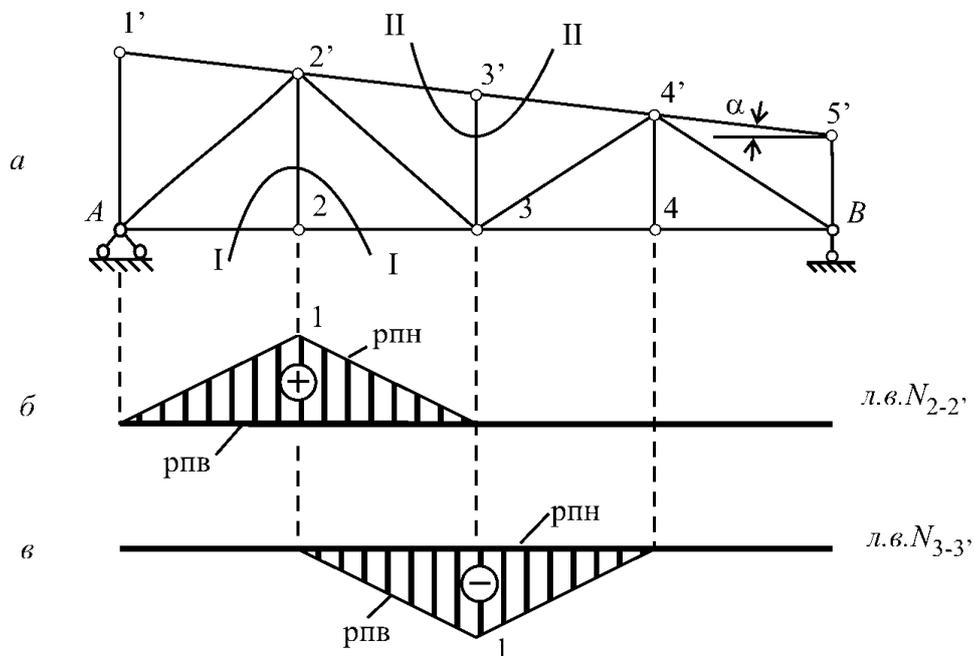


Рис.8.9

Перерізами I–I і II–II вирізаємо вузли 2 та 3' відповідно. Далі для кожного вузла складаємо рівняння проєкцій, вибираючи для проєцирування вісь в такий спосіб, щоби на неї проєцирувалось лише одне невідоме – зусилля в стержні, що аналізується.

Сила $P=1$ поза вузлом 2	Сила $P=1$ у вузлі 2
$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{2-2}' = 0.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{2-2}' - 1 = 0 \Rightarrow N_{2-2}' = 1.$
Сила $P=1$ поза вузлом 3'	Сила $P=1$ у вузлі 3'
$\sum F_u = 0 \Rightarrow N_{3-3}' = 0.$	$\sum F_u = 0 \Rightarrow -N_{3-3}' \cos \alpha - 1 \cdot \cos \alpha = 0.$ $N_{3-3}' = -1.$

Як впливає з розрахунку, зусилля N_{2-2}' поза вирізаним вузлом 2, тобто за межами розрізаних панелей А-2 та 2-3, дорівнює нулю, а в самому вузлі дорівнює одиниці. Тому на розрізаних панелях необхідно провести передатні прямі, що з'єднують одиничну ординату у вузлі 2 з нулями у вузлах А та 3. Це й буде лінія впливу зусилля N_{2-2}' . Причому, оскільки в процесі розрахунку розглядалось розташування одиничної сили у вузлі нижнього поясу, це графік для руху "по низу". Якщо ж сила рухається по верхньому поясу, то вона не може потрапити у вузол 2. Тому лінія впливу зусилля N_{2-2}' буде нульовою (рис.8.9,б).

Аналогічно будується лінія впливу зусилля N_{3-3}' (рис.8.9,в). Проте в цьому випадку одиничне значення у вирізаному вузлі відповідає руху сили по верхньому, а нульове – по нижньому поясу.

Метод сумісних перерізів

Метод застосовують для визначення зусиль у стержнях, які неможливо обчислити за способами вирізання вузлів і наскрізних перерізів. Ідея методу полягає в тому, що шукане зусилля виражається через інше, яке можна знайти способом вирізання вузлів або способом наскрізних перерізів.

Побудуємо, наприклад, лінію впливу зусилля в стержні N_{3-6} (рис.8.10,а).

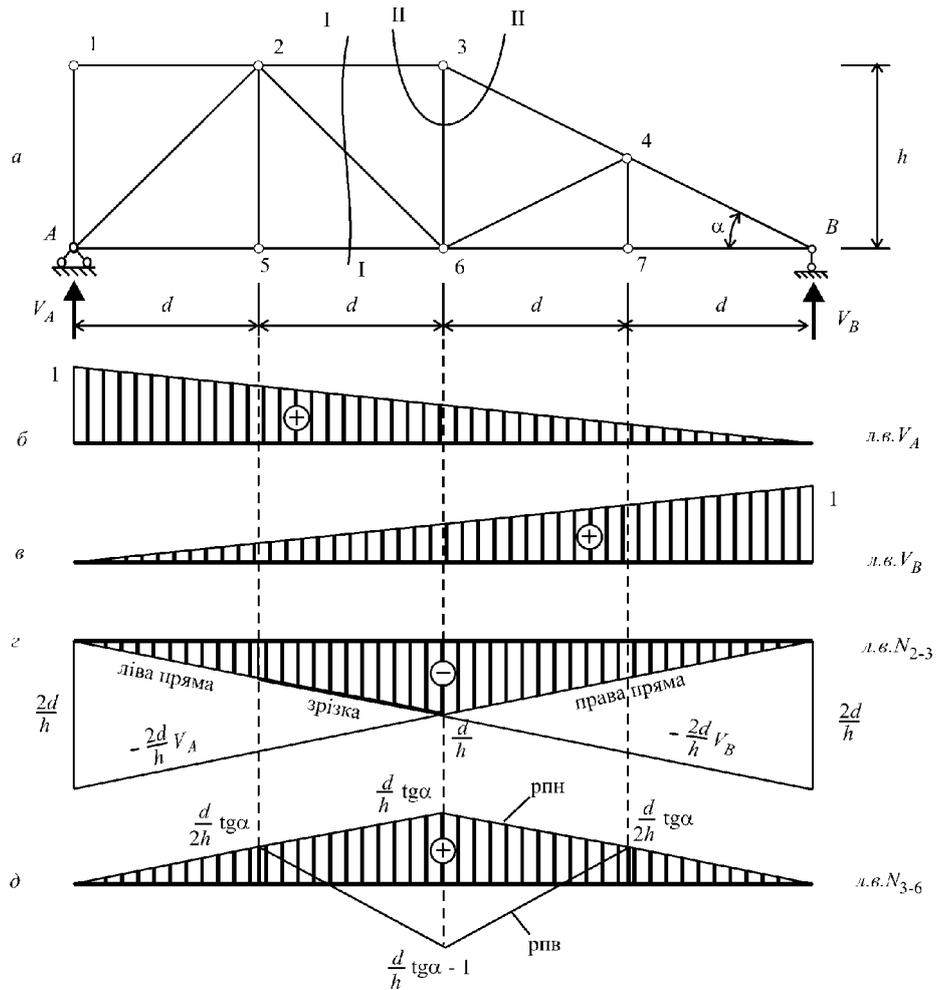


Рис.8.10

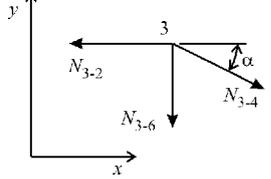
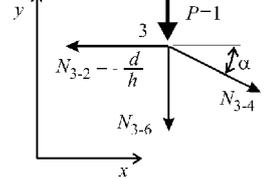
Лінії впливу опорних реакцій показано на рис.8.10,б та рис.8.10,в.

Як допоміжну побудуємо лінію впливу зусилля N_{2-3} , використовуючи метод наскрізних перерізів. Переріз I–I поділяє ферму на два незалежних диска. Визначимо зусилля N_{2-3} для двох випадків розташування одиничної сили: сила на лівому і сила на правому диску.

Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
$\sum M_6 = 0 \Rightarrow -N_{3-2}h - V_B \cdot 2d = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{3-2} = -\frac{2d}{h} V_B.$	$\sum M_6 = 0 \Rightarrow N_{2-3}h + V_A \cdot 2d = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{2-3} = -\frac{2d}{h} V_A.$

Лінія впливу зусилля в стержні N_{3-6} будується шляхом множення ліній впливу опорних реакцій на коефіцієнт $-\frac{2d}{h}$ (рис.8.10,з). Ліва пряма штрихується в межах лівого, а права – в межах правого диска. Зрізка (передатна пряма), яка в межах розрізаної панелі з'єднує ліву та праву прямі, розташована на лівій прямій.

Далі проводимо переріз II–II, який виокремлює вузол 3, і складаємо рівняння рівноваги для двох випадків: сила $P=1$ поза вузлом, тобто за межами розрізаних стержнів 2–3 та 3–4, та сила $P=1$ у вузлі.

Сила $P=1$ поза вузлом 3	Сила $P=1$ у вузлі 3
 $\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{3-4} \cos \alpha - N_{3-2} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{3-4} = \frac{1}{\cos \alpha} N_{3-2}.$ $\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{3-6} - N_{3-4} \sin \alpha = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{3-6} = -N_{3-4} \sin \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{3-6} = -N_{3-2} \operatorname{tg} \alpha.$	 $\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{3-4} \cos \alpha - N_{3-2} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{3-4} = \frac{1}{\cos \alpha} N_{3-2}.$ $\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{3-6} - N_{3-4} \sin \alpha - 1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{3-6} = -N_{3-4} \sin \alpha - 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{3-6} = -N_{3-2} \operatorname{tg} \alpha - 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{3-6} = \frac{d}{h} \operatorname{tg} \alpha - 1.$

Отже, у випадку розташування одиничної сили поза вузлом 3, що належить верхньому поясу ферми, лінія впливу зусилля N_{3-6} може бути отримана множенням лінії впливу зусилля N_{3-2} на коефіцієнт $(-\operatorname{tg} \alpha)$. Таке розташування відповідає руху одиничної сили по нижньому поясу ферми. Тому заштрихований на рис.8.10,д графік являє собою лінію впливу зусилля N_{3-6} при пересуванні сили по нижньому поясу.

Розташування сили у вузлі 3 можливе лише за умови руху по верхньому поясу ферми. До того ж слід врахувати, що у разі розташування сили у вузлі 3 всі зусилля мають певні значення. Зокрема, $N_{3-2} = -\frac{d}{h}$ (див.рис.8.10,з). Так само, величина $N_{3-6} = \frac{d}{h} \operatorname{tg} \alpha - 1$ являє собою ординату лінії впливу N_{3-6} у вузлі 3. Провівши в межах розрізаних панелей прямолінійні відрізки від цієї ординати до лівої і до правої прямої, маємо передатні прямі для руху "по верху" (рис.8.10,д).

8.7. Лінії впливу в шпренгельних фермах

У ферми, що мають великі відстані між вузлами вантажного поясу, часто вводять додаткові вузли, на які спиратимуться поперечні балки, що несуть навантаження від покриття або від проїжджої частини мостів. Для збереження геометричної незмінюваності водночас із вузлами вводять додаткові стержні, які називаються **шпренгельними стержнями**. Ферми, які містять додаткові вузли вантажного поясу та відповідні ним додаткові стержні, називають **шпренгельними фермами**.

З точки зору геометричної структури шпренгельну ферму можна розглядати як таку, що складається з основної ферми, в панелі якої введено додаткові трикутні ферми, які спираються на вузли основної ферми. Такі додаткові однопанельні ферми називаються **шпренгелями**. Навантаження на шпренгелі здійснюється силами, прикладеними в додаткових вузлах поясу. Якщо ці вузли не навантажені, то зусилля у відповідному шпренгелі відсутні. Таким чином, шпренгелі працюють лише на локальне навантаження панелей основної ферми.

Деякі типові види шпренгелів розглянемо на прикладі шпренгельної ферми (рис.8.11,*а*).

Ферму можна розглядати як основну ферму з паралельними поясами 1–2–3–4–5–6 та 1'-2'-3'-4'-5'-6', в панелі якої вставлено додаткові вузли, трикутні шпренгелі та додаткові стійки, через які навантаження передається на шпренгелі (рис.8.11,*б*). Схеми шпренгелів представлено на рис.8.11,*в*.

Шпренгель, який введено у першу панель, спирається на вузли 1 і 2 основної ферми. Завантажується шпренгель через додаткову стійку 7–7'. Навантаження з додаткового вузла 7 верхнього поясу через опорні реакції шпренгеля передаються на вузли 1 і 2 знов–таки верхнього поясу. Такого типу шпренгелі називаються **одноярусними**.

Шпренгель, введений в другу панель, спирається на вузли 2' і 3' нижнього поясу. Через стійку 8–8' навантаження з додаткового вузла 8, який розташовано в верхньому поясі, через шпренгель передається на вузли нижнього поясу основної ферми. Шпренгелі такого типу називаються **двоярусними**.

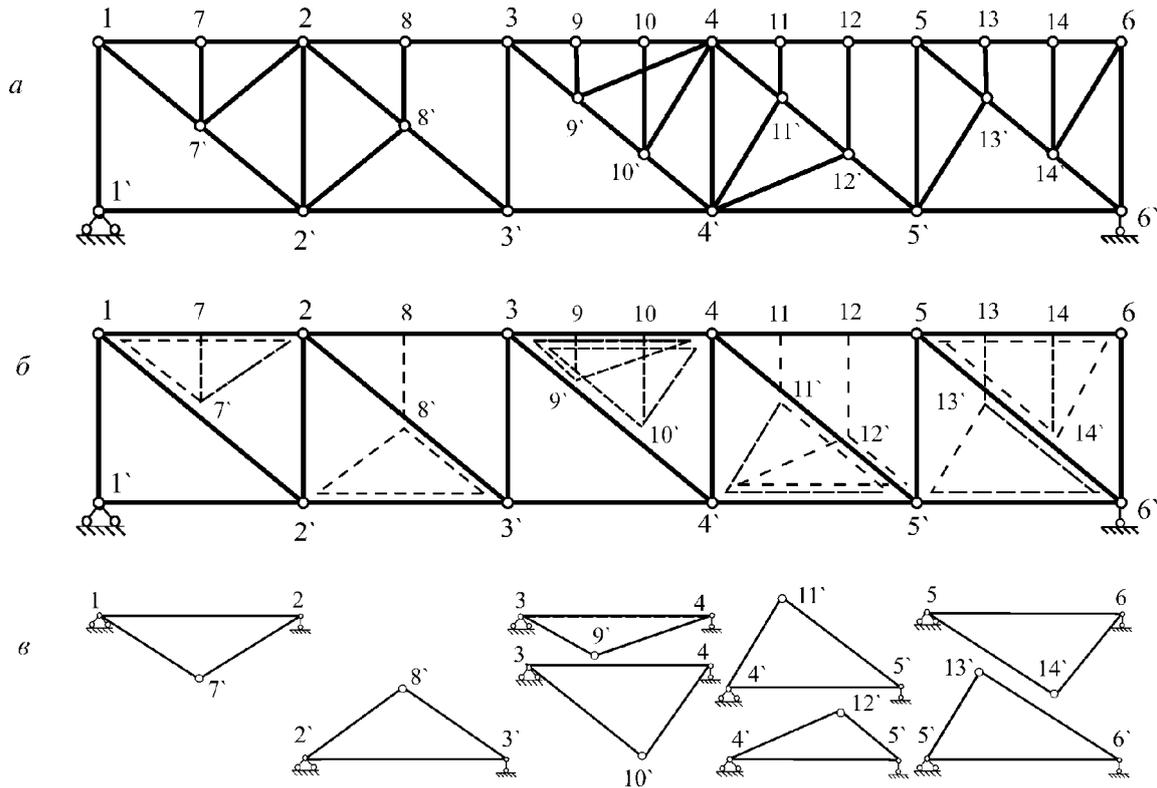


Рис.8.11

У третій панелі основної ферми показано два трикутні одноярусні шпренгелі 3–4–9', який навантажується через додаткову стійку 9–9', та шпренгель 3–4–10'. Останній навантажується через додаткову стійку 10–10'.

Аналогічно, в четверту панель введено два двоярусних шпренгеля 4–5–11' і 4–5–12', які через додаткові стійки 11–11' та 12–12' відповідно передають навантаження з додаткових вузлів верхнього поясу 11 та 12 на вузли 4' і 5' основної ферми.

П'ята панель містить два шпренгеля, причому шпренгель 5–6–13' є двоярусним, а шпренгель 5–6–14' – одноярусним.

Усі стержні шпренгельної ферми можна поділити на 4 категорії (рис.8.11а):

1. Стержні які відносяться лише до основної ферми. Наприклад, 2–8, 8–3, 2–8', 3'–4' тощо.
2. Стержні, які належать лише шпренгелям та додаткові стійки, через які шпренгелі навантажуються (2–7', 7–7', 2'–8', 8–8' тощо).
3. Стержні, які водночас належать як основній фермі, так і шпренгелю (1–7, 7–2, 2'–3', 9'–10' тощо).
4. Стійки основної ферми, якщо принаймні в одній, суміжній зі стійкою, панелі введено двоярусний шпренгель. Наприклад, 2–2', 3–3', 4–4', 5–5', але не стійка 1–1', бо в першій панелі, з якою межує зазначений стержень, немає двоярусного шпренгеля. Це стержень першої категорії.

8.7.1. Метод перерізів

Для побудови ліній впливу в стержнях шпренгельних ферм можна безпосередньо використовувати метод перерізів та метод вирізання вузлів. Так, якщо можна розділити шпренгельну ферму перерізом на два окремих диска, провівши розріз через три стержня, то використовується спосіб наскрізних перерізів. Якщо ж можна вирізати вузол шпренгельної ферми, провівши розріз через три стержня, так щоби два стержня були розташовані вздовж прямої, то використовується спосіб вирізання вузлів.

Побудуємо для ферми (рис.8.12,а) лінії впливу зусиль в стержнях 4'-7', 6'-7', 6-7 та 9-9'.

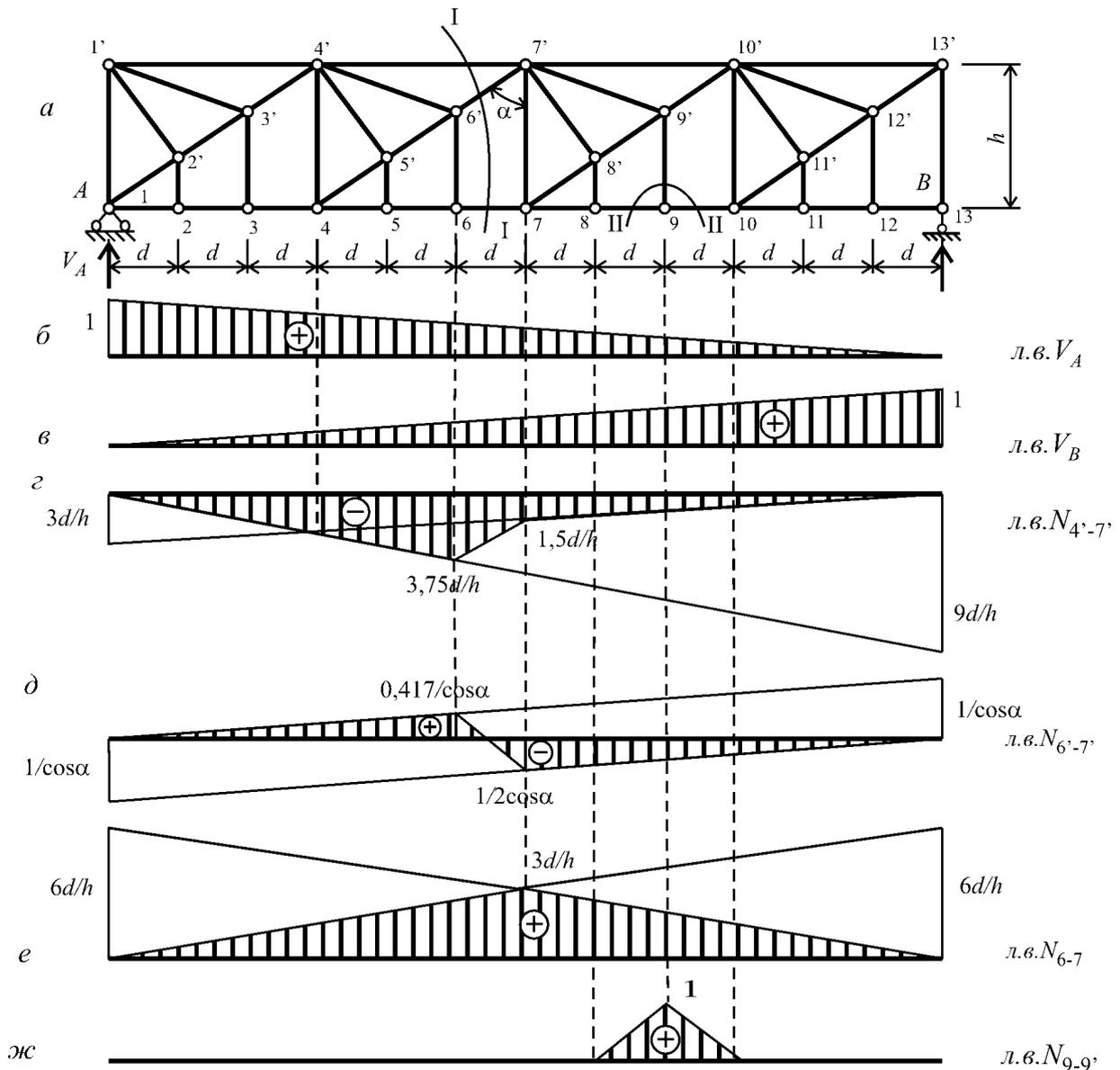
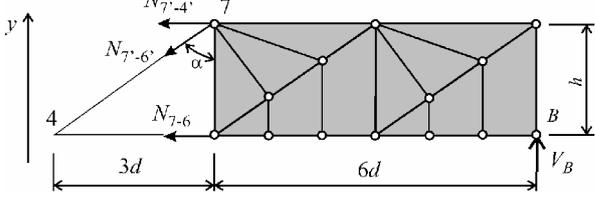
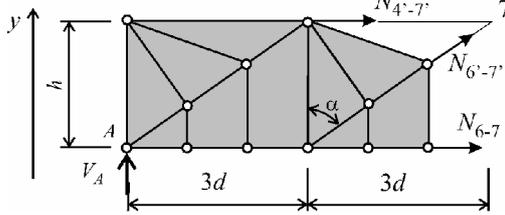


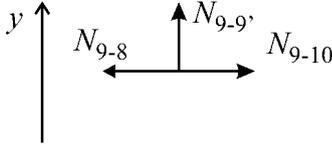
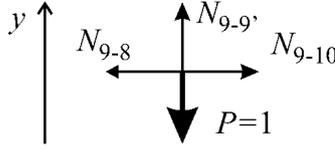
Рис.8.12

Лінії впливу опорних реакцій побудовано на рис.8.12,б та рис.8.12,в. Для визначення зусиль в стержнях 4'-7', 6'-7', 6-7 проводимо переріз I-I і розглядаємо рівновагу дисків при різних розташуваннях одиничної сили.

Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
	
$\sum M_4 = 0 \Rightarrow -N_{7-4} \cdot h - V_B \cdot 9d = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{7-4} = -\frac{9d}{h} V_B.$	$\sum M_4 = 0 \Rightarrow N_{4'-7} \cdot h + V_A \cdot 3d = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{4'-7} = -\frac{3d}{h} V_A.$
$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{7-6} \cdot \cos \alpha + V_B = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{7-6} = \frac{1}{\cos \alpha} V_B.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{6'-7} \cdot \cos \alpha - V_A = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{7'-6} = -\frac{1}{\cos \alpha} V_A.$
$\sum M_7 = 0 \Rightarrow N_{7-6} \cdot h - V_B \cdot 6d = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{7-6} = \frac{6d}{h} V_B.$	$\sum M_7 = 0 \Rightarrow -N_{6-7} \cdot h + V_A \cdot 6d = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{6-7} = \frac{6d}{h} V_A.$

Лінії впливу, згідно до наведених розрахунків, побудовано на рис.8.12,в – 8.12,е. Слід звернути увагу, що на лініях впливу $N_{4'-7}$, $N_{6'-7}$ передатна пряма проведена в межах розрізаної панелі вантажного поясу (між вузлами 6 і 7), а на лінії впливу N_{6-7} – збігається з лівою прямою.

Для побудови лінії впливу зусилля в стержні 9–9' проводимо переріз II–II, який вирізає вузол 9 і розглядаємо два положення рухомої сили: сила поза вузлом і сила у вузлі.

Сила $P=1$ поза вузлом 9	Сила $P=1$ у вузлі 9
 $\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{9-9'} = 0.$	 $\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{9-9'} - 1 = 0 \Rightarrow N_{9-9'} = 1.$

Лінія впливу зусилля в стержні 9–9' побудовано на рис.8.12,ж.

8.7.2. Практичні прийоми побудови ліній впливу в шпренгельних фермах

Якщо для побудови ліній впливу в шпренгельних фермах метод перерізів використати неможливо або надто складно, то можна застосовувати спеціальні прийоми, які базуються на представленні шпренгельної ферми як сукупності основної ферми та шпренгелів.

Розглянемо побудову ліній впливу в таких стержнях на прикладі шпренгельної ферми, представленої на рис.8.13,а.

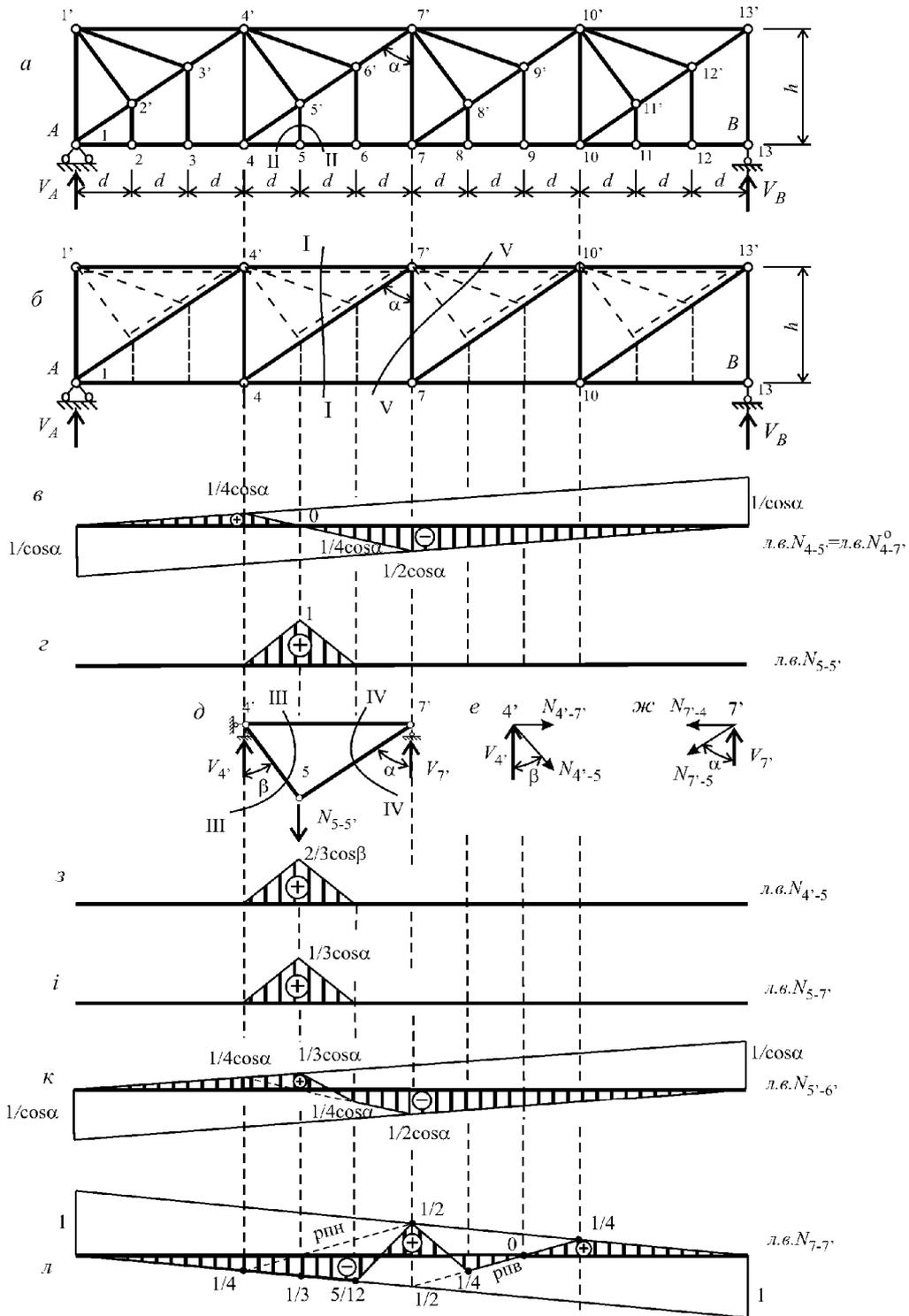


Рис.8.13

Стержні I категорії

До першої категорії відносять стержні, які належать виключно основній фермі. Зусилля в таких стержнях можна визначати як зусилля в лише в основній фермі, яка залишається після вилучення шпренгельних вузлів і стержнів (рис.8.13,б).

Так, стержень 4-5' шпренгельної ферми (рис.8.13,а) відноситься до першої категорії. Тому лінія впливу $N_{4-5'}$ еквівалентна лінії впливу $N_{4-7'}^0$ основної ферми:

$$\text{л.в. } N_{4-5'} = \text{л.в. } N_{4-7'}^0.$$

Отже, замість лінії впливу зусилля $N_{4-5'}$ будемо лінію впливу зусилля $N_{4-7'}^0$ для основної ферми (рис.8.13,б). Проводимо переріз I-I, який поділяє основну ферму на два диска і аналізуємо рівновагу при розташуванні одиничної сили на лівій і на правій половині ферми: якщо сила розташована на лівій половині ферми – рівновагу правого диска, а якщо на правій – лівого диска.

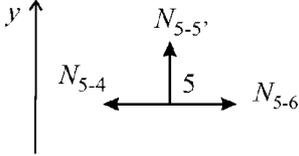
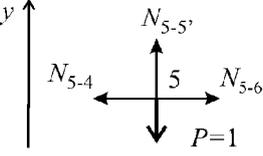
Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{7'-4} \cos \alpha + V_B = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{7'-4} = \frac{1}{\cos \alpha} V_B.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{4'-7'} \cos \alpha + V_A = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{4-7'} = -\frac{1}{\cos \alpha} V_A.$

Ліва пряма лінії впливу будується множенням лінії впливу опорної реакції V_B на коефіцієнт $\frac{1}{\cos \alpha}$, а права – лінії впливу опорної реакції V_A на коефіцієнт $\left(-\frac{1}{\cos \alpha}\right)$. Ліва пряма заштрихована в межах лівого, а права – в межах правого диска. Обидві прямі в межах розрізаної панелі з'єднуються передатною прямою (рис.8.13,в).

Стержні II категорії

До II категорії відносяться стержні, які належать лише шпренгелю. Наприклад, до цієї категорії відноситься стержень $N_{4'-5'}$ (рис.8.13,а), який входить до складу шпренгеля 4'-5'-7'. Навантаження на зазначений шпренгель передається через підвіску 5-5'. Тому перш ніж аналізувати зусилля $N_{4'-5'}$, слід побудувати лінію впливу зусилля в підвісці $N_{5-5'}$. Це можна

зробити, вирізавши перерізом II–II вузол 5 шпренгельної ферми (рис.8.13,а) і розглянувши два положення одиничної сили: сила поза вузлом 5 та сили у вузлі.

Сила $P=1$ поза вузлом 5	Сила $P=1$ у вузлі 5
	
$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{5-5'} = 0.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{5-5'} - 1 = 0 \Rightarrow N_{5-5'} = 1.$

Лінія впливу зусилля всюди за межами розрізаних панелей 4–5–6 шпренгельної ферми збігається з базовою прямою і дорівнює одиниці у вузлі 5 (рис.8.13,з).

Далі розглянемо лише самий шпренгель 4'–5'–7', який спирається на вузли 4' і 7' основної ферми та навантажується зусиллям $N_{5-5'}$ (рис.8.13,д).

Визначаємо опорну реакцію $V_{4'}$:

$$\sum M_{7'} = 0 \Rightarrow V_{4'} \cdot 3d - N_{5-5'} \cdot 2d = 0 \Rightarrow V_{4'} = \frac{2}{3} N_{5-5'}.$$

Тоді з рівноваги вузла 4' (переріз III–III) визначаємо зусилля $N_{4'-5'}$ (рис.8.13,е):

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{4'-5'} \cos \beta + V_{4'} = 0, \\ N_{4'-5'} &= \frac{1}{\cos \beta} V_{4'} = \frac{2}{3 \cos \beta} N_{5-5'}. \end{aligned}$$

На рис.8.13,з показано лінію впливу зусилля $N_{4'-5'}$, яку одержано множенням раніше побудованої лінії впливу зусилля $N_{5-5'}$ на коефіцієнт $\frac{2}{3 \cos \beta}$.

Стержні III категорії

До III категорії належать стержні, що водночас входять до складу як основної ферми, так і шпренгеля. Наприклад, стержень 5'–6' (рис.8.13,а) можна трактувати як поєднання елемента 4–7' основної ферми та елемента 5'–7' шпренгеля (рис.8.13,д). Лінії впливу зусиль в таких стержнях можна отримати додаванням ліній впливу зусиль у стержнях основної ферми та у відповідних стержнях шпренгеля. Так, для зазначеного стержня

$$л.в. N_{5'-6'} = л.в. N_{4-7'}^0 + л.в. N_{5'-7'}^m.$$

Лінія впливу зусилля в основній фермі N_{4-7}^0 уже побудована на рис.8.13,в. Побудуємо тепер лінію впливу зусилля $N_{5'-7'}^{\text{III}}$, яке виникає в стержні, що входить до складу шпренгеля 4'-5'-7' (рис.8.13,д).

Опорну реакцію у вузлі 7' обчислимо з умов рівноваги шпренгеля (рис.8.13,д):

$$\sum M_{4'} = 0 \Rightarrow V_{7'} \cdot 3d - N_{5-5'} \cdot d = 0 \Rightarrow V_{7'} = \frac{1}{3} N_{5-5'}$$

Визначимо зусилля $N_{5'-7'}$ із умов рівноваги опорного вузла 7' шпренгеля (рис.8.13,ж):

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{4'-7'} \cos \alpha + V_{7'} = 0, \\ N_{4'-7'} &= \frac{1}{\cos \alpha} V_{7'} = \frac{1}{3 \cos \alpha} N_{5-5'}. \end{aligned}$$

Отже, лінію впливу зусилля $N_{5'-7'}$ (рис.13.7,і) отримаємо, помноживши графік (рис.13.7,з) на числовий коефіцієнт $\frac{1}{3 \cos \alpha}$.

Сума лінії впливу зусилля N_{4-7}^0 в основній фермі та лінії впливу зусилля $N_{5'-7'}$ у шпренгелі представлена на рис.8.13,к. Це й буде остаточна лінія впливу в стержні III категорії 5'-6'.

Стержні IV категорії

До таких стержнів відносять стійки основної ферми, в яку введено двоярусні шпренгелі. Наприклад, стержень 7'-7 (рис.8.13,а).

Утворення ліній впливу зусилля в таких стержнях можна здійснити за два етапа:

1. Побудувати лінію впливу лише для основної ферми, показавши на ній дві передатні прямі (зрізки) – для руху одиничної сили по верхньому і по нижньому поясах. За межами розрізаних панелей лінія впливу має вже остаточний вигляд.
2. У межах розрізаних панелей необхідно передатні прямі, проведені для основної ферми, перетворити на зрізки для шпренгельної ферми. З цією метою одиничну силу у межах розрізаних панелей послідовно встановлюють у вузли вантажного поясу шпренгельної ферми і аналізують, на який пояс ферми передається навантаження через відповідний шпренгель. Якщо навантаження передається на верхній пояс, то вузлову точку проєцирують на передатну пряму для "руху по верху", якщо на нижній – то на передатну пряму для "руху по низу". Точки, які отримано на передатних прямих, з'єднують прямими відрізками.

Отже, побудуємо лінію впливу зусилля $N_{7-7'}$.

Починаємо з лінії впливу для основної ферми. Переріз V-V поділяє ферму на два диска (рис.8.13,б). З умов рівноваги визначаємо зусилля $N_{7-7'}$ для двох випадків розташування одиничної сили: сила на лівому і сила на правому диску.

Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{7-7} + V_B = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{7-7} = -V_B.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{7-7} + V_A = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{7-7} = V_A.$

Ліва і права прямі заштриховано на рис.8.13,*л* між вузлами 1-4 та 10-13 відповідно. Передатна пряма для руху "по низу" з'єднує ліву й праву прямі на ділянці 4-7, а для руху "по верху" – на ділянці 7'-10' (рис.8.13,*б*).

Далі визначаємо передатні прямі для шпренгельної ферми в межах розрізаних панелей, тобто між вузлом 4 нижнього і вузлом 10' верхнього поясу. Очевидно, розташована у вузлах 5, 6, 8 та 9 сила через відповідні шпренгелі передається на вузли верхнього поясу. Тому ці вузли проєцируємо на передатну пряму для руху "по верху". Нарешті, якщо сила перебуває у вузлі 7, який розташовано на нижньому поясі основної ферми, то шпренгелі не працюють, і тому вузол 7 необхідно спроектувати на передатну пряму для руху "по низу".

Проводимо відрізки, які з'єднують заштриховані ділянки лівої і правої прямих з отриманими точками на зрізках, і маємо остаточну лінію впливу N_{7-7} , (рис.8.13,*л*).

8.8. Приклади визначення зусиль за допомогою ліній впливу

8.8.1. Шарнірно-консольна балка

Обчислити величини вертикальних реакцій на опорах A та E , а також внутрішні зусилля в перерізах 1–1 та 2–2 балки від заданого нерухомого навантаження (рис.8.14,*а*).

Поверхова схема шарнірно–консольної балки представлена на рис.8.14,*б*.

Лінія впливу опорної реакції V_A

Обчислимо вертикальну реакцію V_A з умови рівноваги консольної балки AB (рис.8.14,*в*):

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - 1 = 0 \Rightarrow V_A = 1.$$

Таким чином, у межах балки AB лінія впливу V_A паралельна базовій лінії. Послідовно продовжуємо графік на балки сусідніх "поверхів" в такий спосіб, щоби в межах кожного "поверху" лінія впливу була прямолінійною і перетинала базову лінію, тобто мала нульову точку, на віддаленій опорі (рис.8.14,*г*).

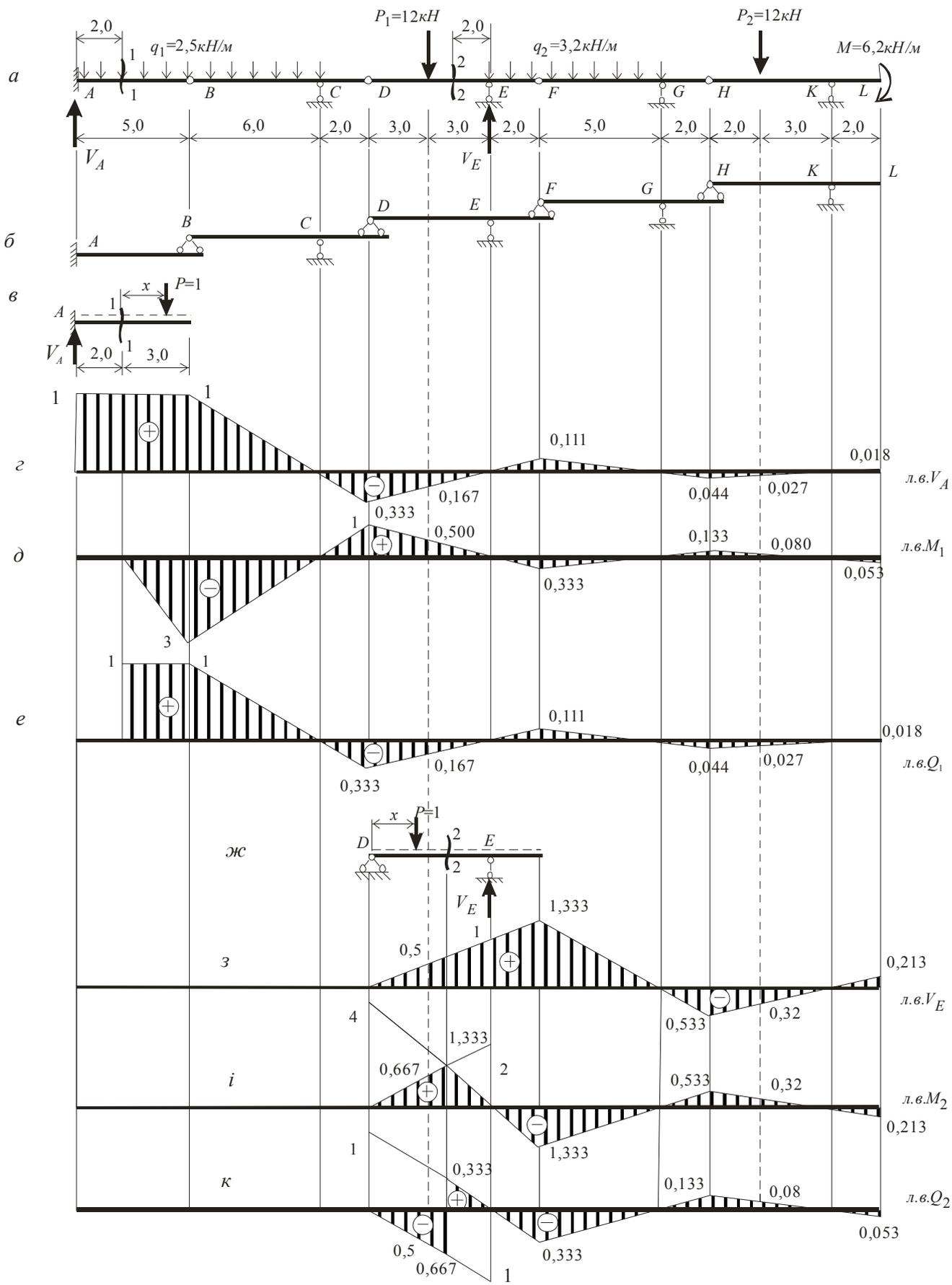


Рис. 8.14

Лінії впливу внутрішніх зусиль в перерізі I-I (рис.8.14,в)

Сила $P=1$ ліворуч перерізу 1-1	Сила $P=1$ праворуч перерізу 1-1
$M_1 = \sum M_{1-1}^{npas} = 0.$	$M_{1-1} = \sum M_{1-1}^{npas} = -1 \cdot x.$ При $x = 0 \quad M_1(0) = 0,$ $x = 3 \quad M_1(3) = -3.$
$Q_1 = \sum F_y^{npas} = 0.$	$Q_1 = \sum F_y^{npas} = 1.$

У межах балки AB лінії впливу зусиль M_1, Q_1 побудовано відповідно до результатів розрахунку і подовжено на балки сусідніх "поверхів" (відповідно рис.8.14,д та рис.18.14,е).

Лінія впливу опорної реакції V_E

Визначаємо опорну реакцію V_E з умов рівноваги балки DEF (рис.8.14,ж):

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -V_E \cdot 6 + 1 \cdot x = 0 \Rightarrow V_E = \frac{x}{6}.$$

$$x = 0 \Rightarrow V_E(0) = \frac{0}{6} = 0;$$

$$x = l \Rightarrow V_E(l) = \frac{6}{6} = 1.$$

У межах балки DEF лінія впливу V_E побудована відповідно до результатів розрахунку і подовжена на сусідні "поверхи" (рис.8.14,з).

Лінії впливу внутрішніх зусиль в перерізі II-II (рис.8.14,ж)

Сила $P=1$ ліворуч перерізу 2-2	Сила $P=1$ праворуч перерізу 2-2

$M_2 = \sum M_{2-2}^{npas} = 2V_E.$	$M_2 = \sum M_{2-2}^{liv} = 4V_D.$
$Q_2 = \sum F_y^{npas} = -V_E.$	$Q_2 = \sum F_y^{liv} = V_D.$

У межах балки DEF лінії впливу зусиль M_2, Q_2 побудовано відповідно до результатів розрахунку і подовжено на балки сусідніх "поверхів" (відповідно рис.8.14,*i* та рис.18.14,*к*).

Визначення опорних реакцій і внутрішніх зусиль

За допомогою побудованих ліній впливу обчислюємо опорні реакції та внутрішні зусилля від заданого нерухомого навантаження (рис.8.14,*a*), використовуючи формулу (8.7). Усі проміжні ординати ліній впливу визначено з умов подібності трикутників.

$$V_A = 12 \cdot (-0,167) + 12 \cdot (-0,027) + 2,5 \cdot \left(1,5 + \frac{1}{2} \cdot 1,6\right) + 3,2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 0,111 \cdot 7\right) + 6,2 \cdot \frac{0,118}{2} = 19,281 \text{ кН.}$$

$$M_1 = 12 \cdot 0,5 + 12 \cdot 0,08 + 2,5 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9\right) + 3,2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 0,333 \cdot 7\right) + 6,2 \cdot \left(-\frac{0,053}{2}\right) = 30,684 \text{ кНм.}$$

$$Q_1 = 12 \cdot (-0,167) + 12 \cdot 0,08 + 2,5 \cdot \left(1 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6\right) + 3,2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 0,111 \cdot 7\right) + 6,2 \cdot \frac{0,018}{2} = 15,255 \text{ кН.}$$

$$V_E = 12 \cdot 0,5 - 12 \cdot 0,32 + 3,2 \cdot \left(\frac{1+1,333}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1,333 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 0,533 \cdot 2\right) + 6,2 \cdot \frac{0,213}{2} = 19,242 \text{ кН.}$$

$$M_2 = 12 \cdot 0,667 + 12 \cdot 0,32 + 3,2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 1,333 \cdot 7\right) + 6,2 \cdot \left(-\frac{0,213}{2}\right) = -3,75 \text{ кН.}$$

$$Q_2 = 12 \cdot (-0,5) + 12 \cdot 0,08 + 3,2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 0,333 \cdot 7\right) + 6,2 \cdot \left(-\frac{0,053}{2}\right) = -8,934 \text{ кН.}$$

8.8.2. Ферма

Визначити зусилля в позначених стержнях ферми (рис.8.15) від заданого нерухомого навантаження за допомогою ліній впливу.

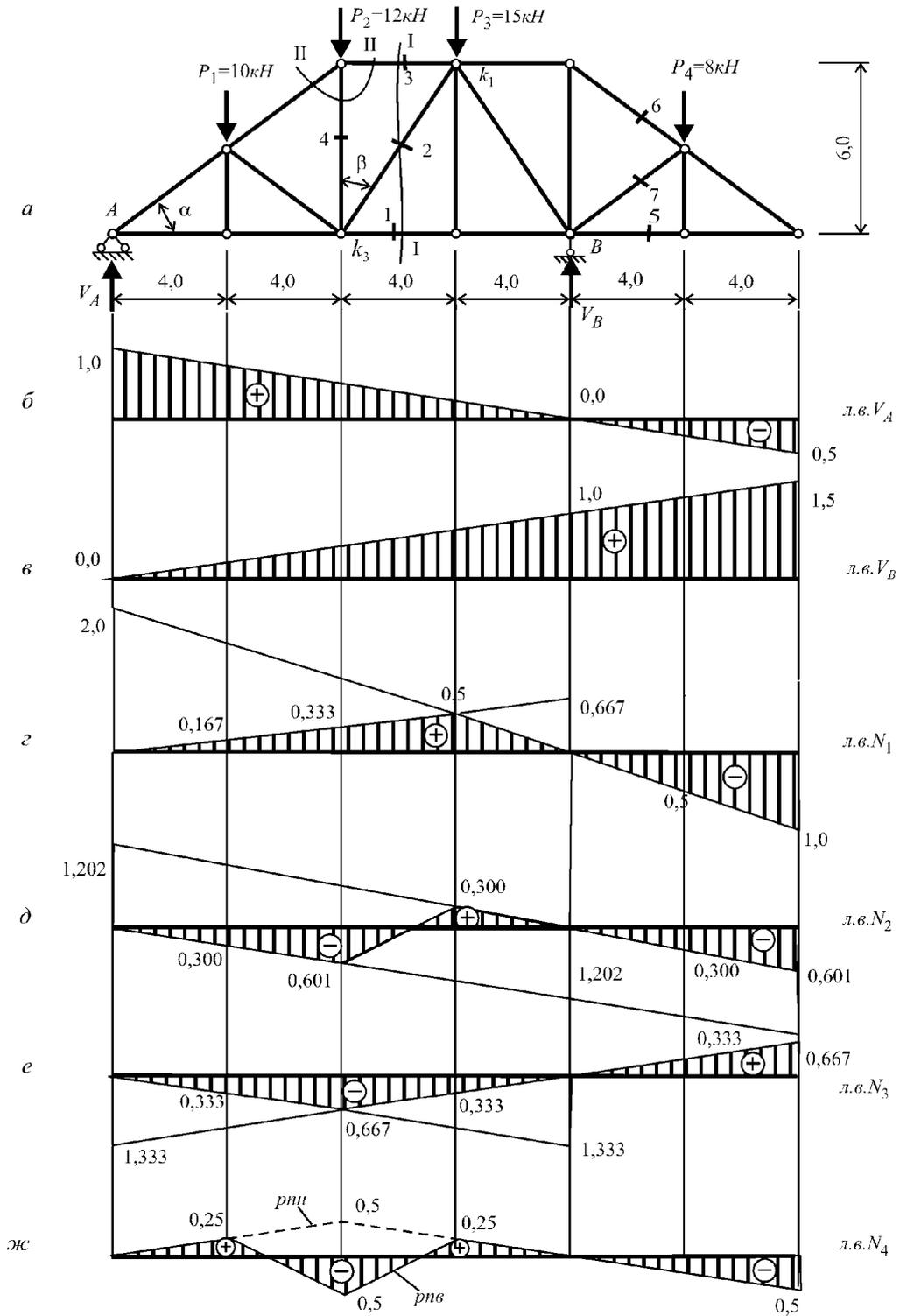


Рис.8.15

Побудова ліній впливу

Переріз I-I (рис.8.15,a)	
Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
$\sum M_{k_1} = 0 \Rightarrow N_1 \cdot 6 - V_B \cdot 4 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_1 = 0,667 V_B.$	$\sum M_{k_1} = 0 \Rightarrow -N_1 \cdot 6 - V_A \cdot 12 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_1 = 2 V_A.$
$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_2 \cos \beta + V_B = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_2 = \frac{1}{\cos \beta} V_B.$ $\cos \beta = 0,8320 \Rightarrow N_2 = 1,202 V_B.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_2 \cos \beta + V_A = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_2 = -\frac{1}{\cos \beta} V_A \Rightarrow$ $\Rightarrow N_2 = -1,202 V_A.$
$\sum M_{k_3} = 0 \Rightarrow -N_3 \cdot 6 - V_B \cdot 8 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_3 = -1,333 V_B.$	$\sum M_{k_3} = 0 \Rightarrow N_3 \cdot 6 + V_A \cdot 8 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_3 = -1,333 V_A.$
Переріз II-II (рис.8.15,a)	
Сила $P=1$ поза вузлом	Сила $P=1$ у вузлі
$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_3 - N_8 \cos \alpha = 0 \Rightarrow$ $N_8 = \frac{1}{\cos \alpha} N_3.$ $\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_4 - N_8 \sin \alpha = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_4 = -N_8 \sin \alpha = -N_3 \operatorname{tg} \alpha.$ $\Rightarrow N_4 = -0,75 N_3.$	$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_3 - N_8 \cos \alpha = 0 \Rightarrow$ $N_8 = \frac{1}{\cos \alpha} N_3.$ $\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_4 - N_8 \sin \alpha - 1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_4 = -N_8 \sin \alpha - 1 = -N_3 \operatorname{tg} \alpha - 1.$ $\Rightarrow N_4 = -0,75 N_3 - 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_4 = -0,75(-0,667) - 1 = -0,5.$

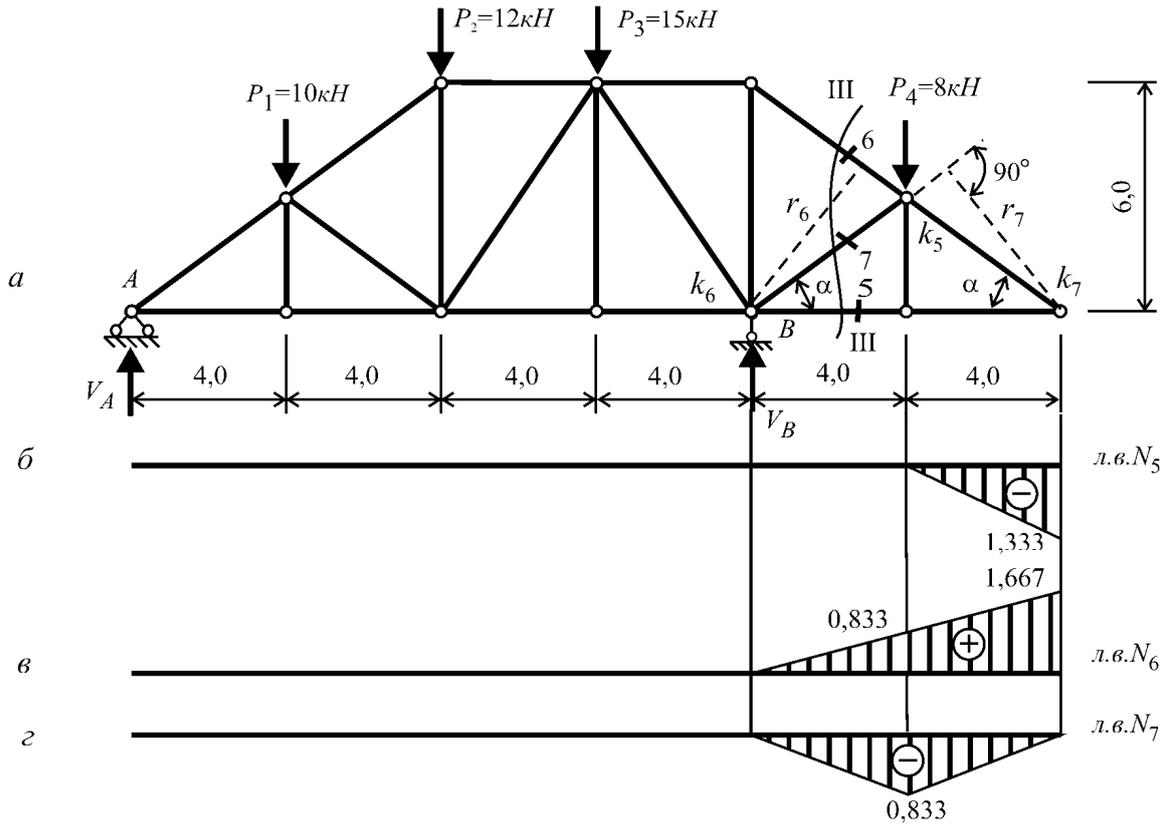


Рис.8.16

Переріз III–III (рис.8.16,a)	
Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
<p>$\alpha=36,87^\circ$ $r_6=4,8$ $r_7=4,8$</p>	<p>$\alpha=36,87^\circ$ $r_6=4,8$ $r_7=4,8$</p>
$\sum M_{k_5} = 0 \Rightarrow N_5 \cdot 3 = 0 \Rightarrow N_5 = 0.$	$\sum M_{k_5} = 0 \Rightarrow N_5 \cdot 3 + 1 \cdot (4 - x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_5(x) = -\frac{4-x}{3}.$ При $x = 0$ $N_5(0) = -1,333.$ При $x = 4$ $N_5(4) = 0.$
$\sum M_{k_6} = 0 \Rightarrow -N_6 \cdot r_6 = 0 \Rightarrow N_6 = 0.$	$\sum M_{k_6} = 0 \Rightarrow -N_6 \cdot r_6 + 1 \cdot (8 - x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_6(x) = \frac{8-x}{r_6} = \frac{8-x}{4,8}.$ При $x = 0$ $N_6(0) = 1,667.$ При $x = 4$ $N_6(4) = 0,833.$

$\sum M_{k7} = 0 \Rightarrow -N_7 \cdot r_7 = 0 \Rightarrow N_7 = 0.$	$\sum M_{k7} = 0 \Rightarrow -N_7 \cdot r_7 - 1 \cdot x = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_7(x) = -\frac{x}{r_7} = -\frac{x}{4,8}.$ <p>При $x = 0$ $N_7(0) = 0.$ При $x = 4$ $N_7(0) = -0,833.$</p>
---	---

Навантаження ліній впливу

Визначаємо навантаження в позначених стержнях ферми від заданих нерухомих сил за допомогою побудованих ліній впливу. Для навантаження ліній впливу скористаємось формулою (8.4).

$$N_1 = 10 \cdot 0,167 + 12 \cdot 0,333 + 15 \cdot 0,5 + 8 \cdot (-0,5) = 9,17 \text{ кН};$$

$$N_2 = 10 \cdot (-0,3) + 12 \cdot (0,601) + 15 \cdot 0,3 + 8 \cdot (-0,3) = -8,1 \text{ кН};$$

$$N_3 = 10 \cdot (-0,333) + 12 \cdot (-0,667) + 15 \cdot (-0,333) + 8 \cdot (-0,3) = -13,67 \text{ кН};$$

$$N_4 = 10 \cdot 0,25 + 12 \cdot (-0,5) + 15 \cdot 0,25 + 8 \cdot (-0,25) = -1,75 \text{ кН};$$

$$N_5 = 8 \cdot 0 = 0;$$

$$N_6 = 8 \cdot 0,833 = 6,664 \text{ кН};$$

$$N_7 = 8 \cdot (-0,833) = -6,664 \text{ кН}.$$

8.8.3. Шпренгельна ферма

Визначити найбільше за абсолютною величиною зусилля в стержні 8–9 шпренгельної ферми (рис.8.17,а), яке спричиняється рухом системи сил (колони вантажівок), представленої на рис.8.17,б).

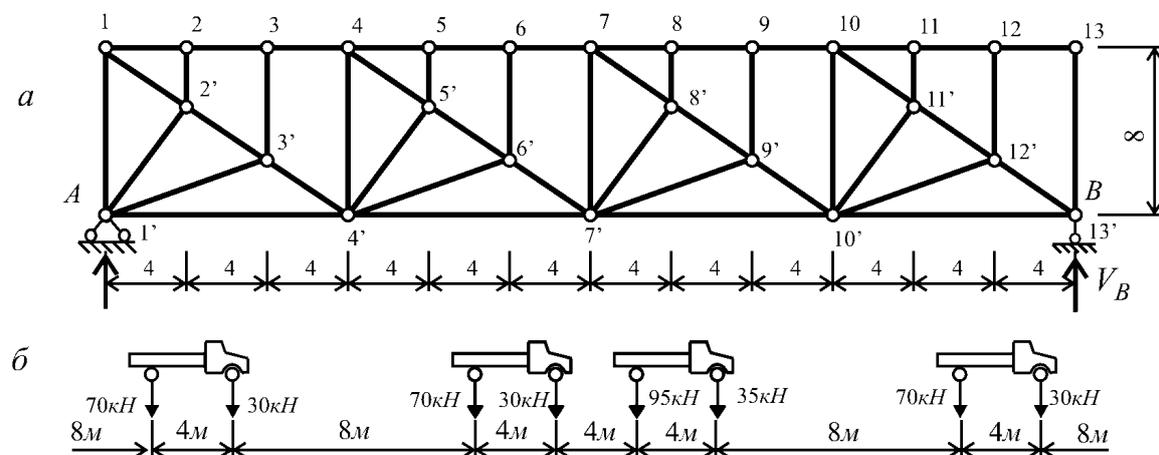


Рис.8.17

Побудова лінії впливу

Стержень 8–9 шпренгельної ферми (рис.8.18,*a*) є стержнем першої категорій, зусилля в якому дорівнює зусиллю в стержні 7–10 основної ферми (рис.8.18,*б*). Тому можна вважати, що лінію впливу N_{8-9} можна побудувати як лінію впливу зусилля N_{7-10} основної ферми.

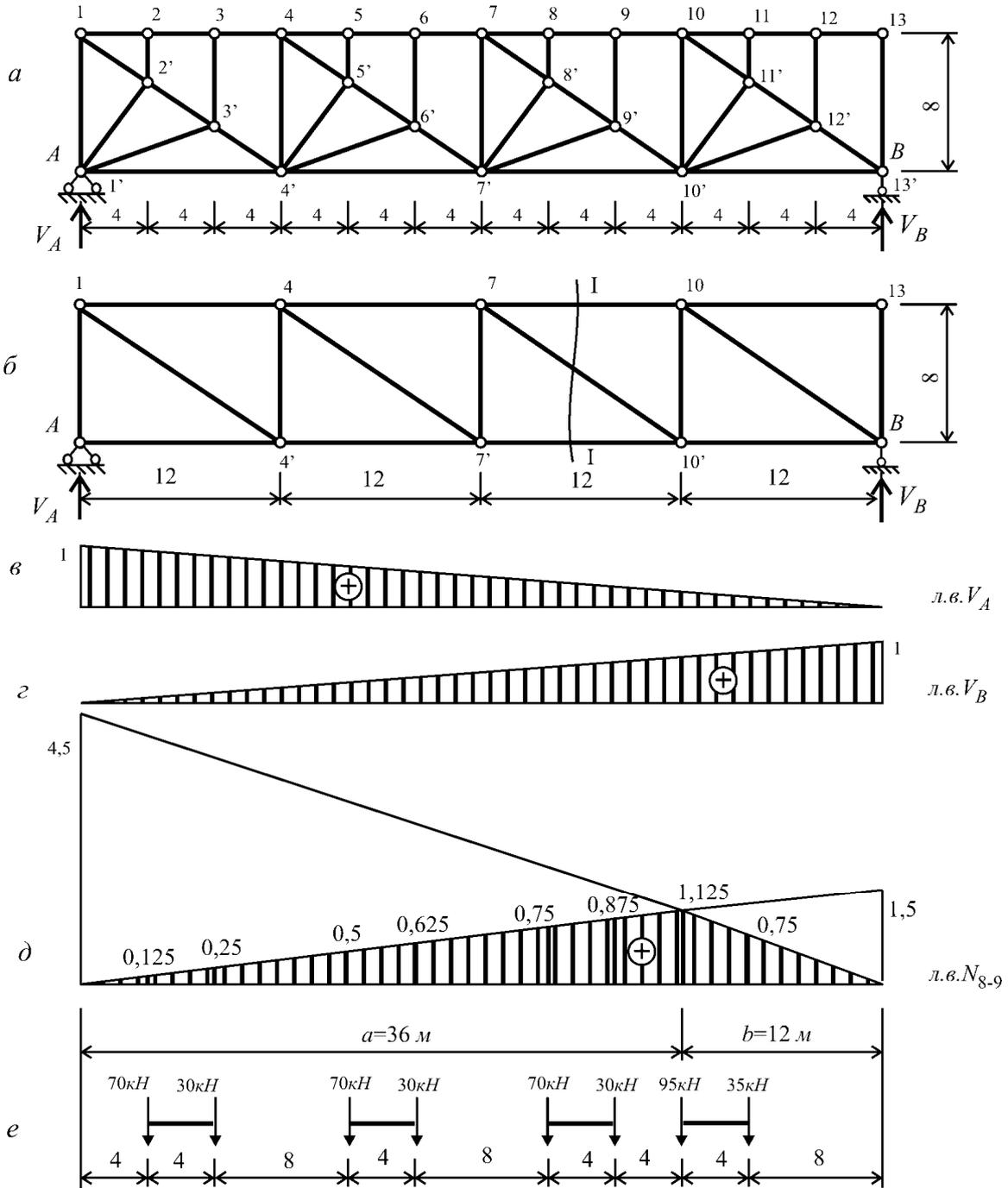


Рис.8.18

Лінії впливу опорних реакцій V_A і V_B представлені відповідно на рис.8.18,*в* та 8.18,*г*.

Переріз I–I поділяє основну ферму на два диска, з умов рівноваги яких визначимо зусилля N_{7-10} для двох випадків розташування одиничної рухомої сили: сила в межах лівого та сила в межах правого диска.

Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
$\sum M_7 = 0 \Rightarrow N_{10-7'} \cdot 8 - V_B \cdot 24 = 0 \Rightarrow N_{10-7'} = 3V_B.$	$\sum M_7 = 0 \Rightarrow N_{7'-10'} \cdot 8 - V_A \cdot 24 = 0 \Rightarrow N_{7'-10'} = 3V_A.$

Лінія впливу побудована на рис.8.18,д.

Визначення найбільшого за величиною зусилля N_{8-9}

Установимо систему рухомих сил в положення, при якому найбільша за величиною сила розташована під найбільшою ординатою лінії впливу. Перевіримо, чи виконується система нерівностей (8.9).

Згідно до рис.8.18,е можна записати:

$$a = 36 \text{ м}, \quad b = 12 \text{ м};$$

$$R_{\text{лів}} = 300 \text{ кН}, \quad R_{\text{прав}} = 35 \text{ кН}, \quad P_{\text{кр}} = 95 \text{ кН}.$$

Отже, маємо

$$\frac{300 + 95}{36} = 10,972 > \frac{35}{12} = 2,917.$$

$$\frac{300}{36} = 8,333 < \frac{35 + 95}{12} = 10,833.$$

Обидві нерівності справедливі. Таким чином, прийняте положення системи сил є таким, коли зусилля N_{8-9} сягає найбільшої за модулем величини:

$$N_{8-9}^{\text{max}} = 70 \cdot 0,125 + 30 \cdot 0,25 + 70 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,625 + 70 \cdot 0,75 + 30 \cdot 0,875 + 95 \cdot 1,125 + 35 \cdot 0,75 = 281,875 \text{ кН}.$$

8.9. Задачі для самостійного розв'язування

Побудувати лінії впливу зусиль в позначених стержнях.

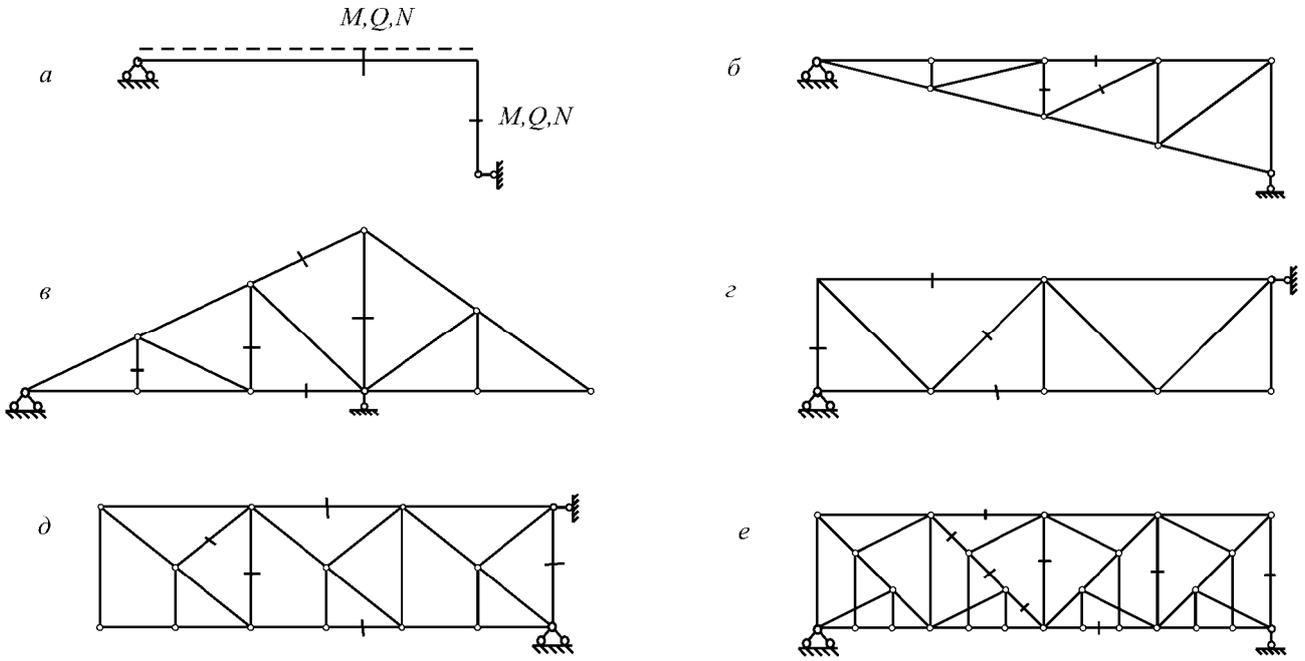


Рис.8.19

9. Обчислення переміщень у стержневих системах

9.1. Короткі теоретичні відомості

Основним методом обчислення переміщень у стержневих системах є метод Мора, що дозволяє визначати переміщення точок системи через зусилля в двох її станах. Перший стан (вантажний) зумовлюється дією заданих зовнішніх навантажень, другий (допоміжний) – дією штучно прикладеного навантаження, яке відповідає переміщенню. Таким штучним навантаженням є узагальнена одинична силова дія (зосереджені сили, моменти або система зосереджених сил чи моментів, які здійснюють роботу на шуканому переміщенні).

Для обчислення будь-якого переміщення за означеним методом необхідно:

- Визначити зусилля M_p, N_p, Q_p від зовнішнього навантаження (вантажний стан p).
- Обрати допоміжний стан i , відкинувши зовнішні навантаження і приклавши одиничну узагальнену силу, що відповідає переміщенню.
- Визначити зусилля $\bar{M}_i, \bar{N}_i, \bar{Q}_i$ у допоміжному стані.
- Обчислити переміщення за формулою Максвела-Мора

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{N}_i N_p}{EA} dx + \sum \int_l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx + \sum \int_l \frac{\eta \bar{Q}_i Q_p}{GA} dx, \quad (9.1)$$

де сумування ведеться по всім стержням системи. Тут позначено: Δ_{ip} – переміщення в напрямі узагальненої одиничної сили допоміжного стану i від навантаження стану p ; EA, EI, GA – жорсткості елементів відповідно на поздовжні деформації, на деформації згину і на зсув; η – коефіцієнт форми перерізу.

Величини кожного з трьох доданків у формулі Максвела-Мора характеризують внесок того чи іншого виду внутрішніх зусиль у переміщення, що розшукується. Для різного виду конструкцій нехтування деякими видами зусиль мало позначається на величині переміщення. Так, для балок і рам, деформування яких відбувається переважно за рахунок згину, можна знехтувати впливом поздовжніх і поперечних сил. У такому разі інтеграл Мора матиме вигляд:

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx. \quad (9.2)$$

Для ферм, в стержнях яких існують переважно поздовжні деформації, можна записати:

$$\Delta_{ip} = \sum \frac{\bar{N}_i N_p}{EA} l. \quad (9.3)$$

Для арок

$$\Delta_{ip} = \sum_i \int \frac{\bar{N}_i N_p}{EA} dx + \sum_i \int \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx. \quad (9.4)$$

Інтеграл Мора може бути обчислений або безпосереднім інтегруванням, або за допомогою прийомів чисельного інтегрування. Процедуру обчислення інтеграла Мора називають множенням епюр. В практичних задачах, як правило, використовують **правило Верещагіна і формулу Сімпсона-Корноухова**.

За правилом Верещагіна для обчислення інтеграла $\int_0^l \bar{M}_i M_p dx$ достатньо помножити площу епюри вантажного стану M_p на ординату епюри допоміжного стану \bar{M}_i , що береться під центром тяжіння епюри M_p (рис.9.1):

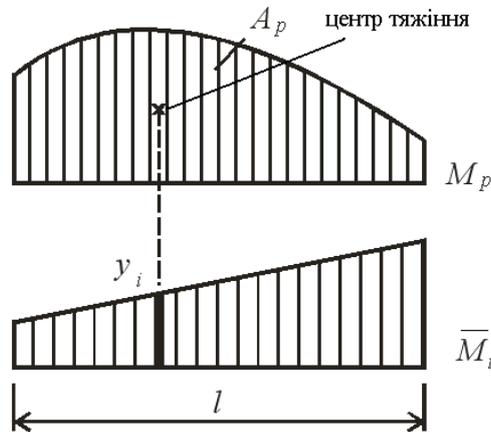


Рис.9.1

$$\int_0^l \bar{M}_i M_p dx = A_p y_i. \quad (9.5)$$

Якщо ордината y_i і площа A_p розташовані по один і той самий бік стержня, добуток береться зі знаком “плюс”.

При застосування правила Верещагіна необхідно звернути увагу на те, що принаймні одна з перемножуваних епюр має бути прямолінійною. Крім того, ордината y_i повинна бути взята на прямолінійній епюрі.

За правилом Сімпсона-Корноухова інтеграл Мора обчислюється через добутки відповідних ординат епюр на кінцях і всередині ділянки інтегрування (рис.9.2):

$$\int_0^l M_i M_p dx = \frac{l}{6} (a_i a_p + 4c_i c_p + b_i b_p). \quad (9.6)$$

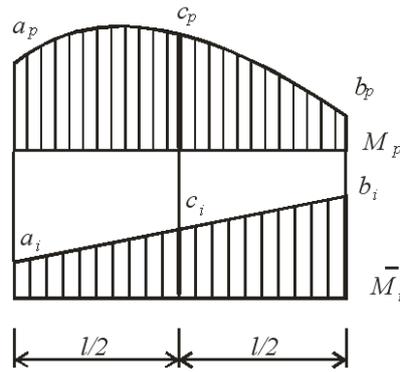


Рис.9.2

Формулу Сімпсона–Корноухова можна використовувати, якщо обидві епюри не мають зламів, розривів і точок перегину. Якщо такі точки існують, інтервал інтегрування треба розкласти на окремі підінтервали.

Формула Мора у вигляді (9.1) непридатна для обчислення температурних переміщень і виникає потреба мати ще один варіант формули, призначений для розрахунків на дію температури. Якщо елементи системи мають симетричні перерізи, можна використовувати формулу

$$\Delta_{it} = \sum \alpha \frac{|t_1 - t_2|}{h} A_{\bar{M}_i} + \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} A_{\bar{N}_i}. \quad (9.7)$$

Тут α – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу (для бетону і для сталі $\alpha \approx 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ град}^{-1}$); h – висота поперечного перерізу елемента; $A_{\bar{M}_i}, A_{\bar{N}_i}$ – площі епюр згинальних моментів і поздовжніх сил у допоміжному стані; t_1 і t_2 – температура з двох боків елемента.

Перший доданок формули (9.7) характеризує внесок в повне переміщення згинальних моментів. Він береться зі знаком плюс, якщо розтягнені волокна на стержні в допоміжному стані збігаються з розтягненими волокнами від дії температури. Другий доданок характеризує внесок поздовжніх сил. Його знак залежить від знаків епюри поздовжніх сил допоміжного стану.

Якщо опори споруди зміщуються, то в статично визначуваних системах опорні реакції, внутрішні зусилля і деформації елементів дорівнюють нулю. Проте точки споруди одержують переміщення. Зазначені переміщення можна обчислити як від'ємну суму добутків опорних реакцій допоміжного стану на відповідні вимушені зміщення опор:

$$\Delta_{ic} = -\sum R_{ji} c_j. \quad (9.8)$$

У цьому виразі R_{ji} – опорна реакція R_j допоміжного стану i , c_j – відповідне вимушене зміщення опори у стані C .

9.2. Визначення переміщення в рамі

Визначити кут повороту стержня EF в шарнірі F рами від заданого навантаження (рис.9.3,а).

Кінематичний аналіз рами

Рама складається з чотирьох дисків ($ACBF$, CDE , EF і “земля”), які з’єднуються між собою чотирма простими шарнірами (A , C , E і F) і кінематичною в’яззю у вузлі B . Таким чином, $D = 4$, $\text{III} = 4$, $C = 1$, $\text{II} = 0$, $B = 0$. За формулою Чебишова (2.1)

$$\Gamma = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 4 - 1 - 3 = 0.$$

Аналізуємо геометричну структуру рами:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{D_{ACBF} + D_{\text{земля}}}{\text{III}_{A, C, B}} \Rightarrow D_I; \\ 2. \quad & \frac{D_{CDE} + D_{EF} + D_I}{\text{III}_{A, \text{III}_E, \text{III}_F}} \Rightarrow D_{II}. \end{aligned}$$

Отже, рама має два “поверхи” і є геометрично незмінюваною та статично визначуваною.

Статичний розрахунок рами у вантажному стані

Визначаємо опорні реакції другого поверху (рис.9.3,б):

$$\begin{aligned} \sum M_E^{права} = 0 & \Rightarrow -V_F \cdot 4 + 1 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_F = 2 \text{ кН}; \\ \sum M_C = 0 & \Rightarrow -H_F \cdot 5 + 1 \cdot 6 \cdot 3 - 2 \cdot 6 = 0 \Rightarrow H_F = 1,2 \text{ кН}; \\ \sum F_x = 0 & \Rightarrow H_C - 1,2 = 0 \Rightarrow H_C = 0; \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow V_C - 1 \cdot 6 + 2 = 0 \Rightarrow V_C = 4 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Визначаємо опорні реакції першого поверху (рис.9.3,в):

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 & \Rightarrow -H_B \cdot 3 + 2 \cdot 6 - 1,2 \cdot 8 + 1,2 \cdot 3 = 0 \Rightarrow H_B = 6 \text{ кН}; \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow V_A - 4 - 2 = 0 \Rightarrow V_A = 6 \text{ кН}; \\ \sum F_x = 0 & \Rightarrow H_A + 1,2 - 1,2 - 6 = 0 \Rightarrow H_A = 6 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Епюру згинальних моментів M_p у вантажному стані побудовано на рис.9.3,г.

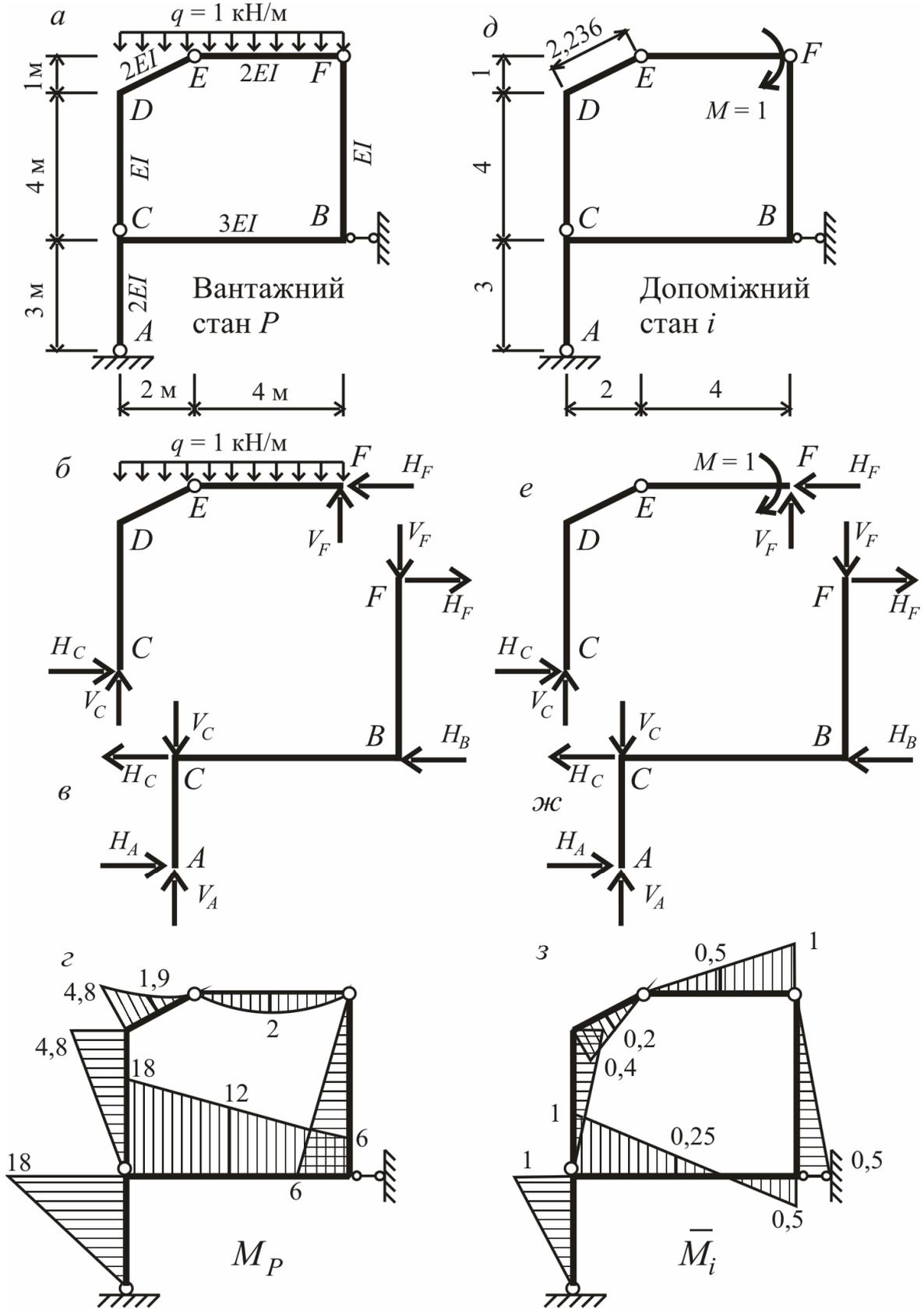


Рис.9.3

Призначення допоміжного стану

Для визначення кута повороту стержня EF у шарнірі F відкидаємо задане навантаження і прикладаємо до стержня EF у зазначеному шарнірі зосереджений момент, що дорівнює одиниці (рис.9.3,д).

Статичний розрахунок рами в допоміжному стані

Визначаємо опорні реакції другого поверху (рис.9.3,е):

$$\begin{aligned} \sum M_E^{npas} = 0 &\Rightarrow -V_F \cdot 4 + 1 = 0 \Rightarrow V_F = 0,25 \text{ м}^{-1}; \\ \sum M_C = 0 &\Rightarrow -H_F \cdot 5 + 1 - 0,25 \cdot 6 = 0 \Rightarrow H_F = 0,1 \text{ м}^{-1}; \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow -H_C + 0,1 = 0 \Rightarrow H_C = 0,1 \text{ м}^{-1}; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -V_C + 0,25 = 0 \Rightarrow V_C = 0,25 \text{ м}^{-1}. \end{aligned}$$

Опорні реакції першого поверху (рис.9.3,ж):

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow -H_B \cdot 3 + 0,25 \cdot 6 - 0,1 \cdot 8 + 0,1 \cdot 3 = 0 \Rightarrow H_B = 0,333 \text{ м}^{-1}; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_A - 0,25 - 0,25 = 0 \Rightarrow V_A = 0; \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_A + 0,1 - 0,1 - 0,333 = 0 \Rightarrow H_A = 0,333 \text{ м}^{-1}. \end{aligned}$$

Епюру згинальних моментів \bar{M}_i у допоміжному стані побудовано на рис.9.3,з.

Обчислення переміщення (кут повороту ригеля EF в шарнірі F)

$$\begin{aligned} \Delta_{ip} &= \sum \int \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} dx = \int_A^C \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} dx + \int_C^D \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} dx + \int_B^F \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} dx + \int_C^B \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} dx + \\ &+ \int_D^E \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} dx + \int_E^F \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4,8 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,4 - \\ &- \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{6}{6 \cdot 3EI} (18 \cdot 1 + 4 \cdot 12 \cdot 0,25 - 6 \cdot 0,5) + \\ &+ \frac{2,236}{6 \cdot 2EI} (-4,8 \cdot 0,4 - 4 \cdot 1,9 \cdot 0,2) + \frac{4}{6 \cdot 2EI} (0 - 4 \cdot 0,5 \cdot 2 + 0) = \frac{8,466}{EI}. \end{aligned}$$

9.3. Визначення переміщення в фермі

Визначити прогин вузла 5 ферми, представленої на рис.9.4,а.

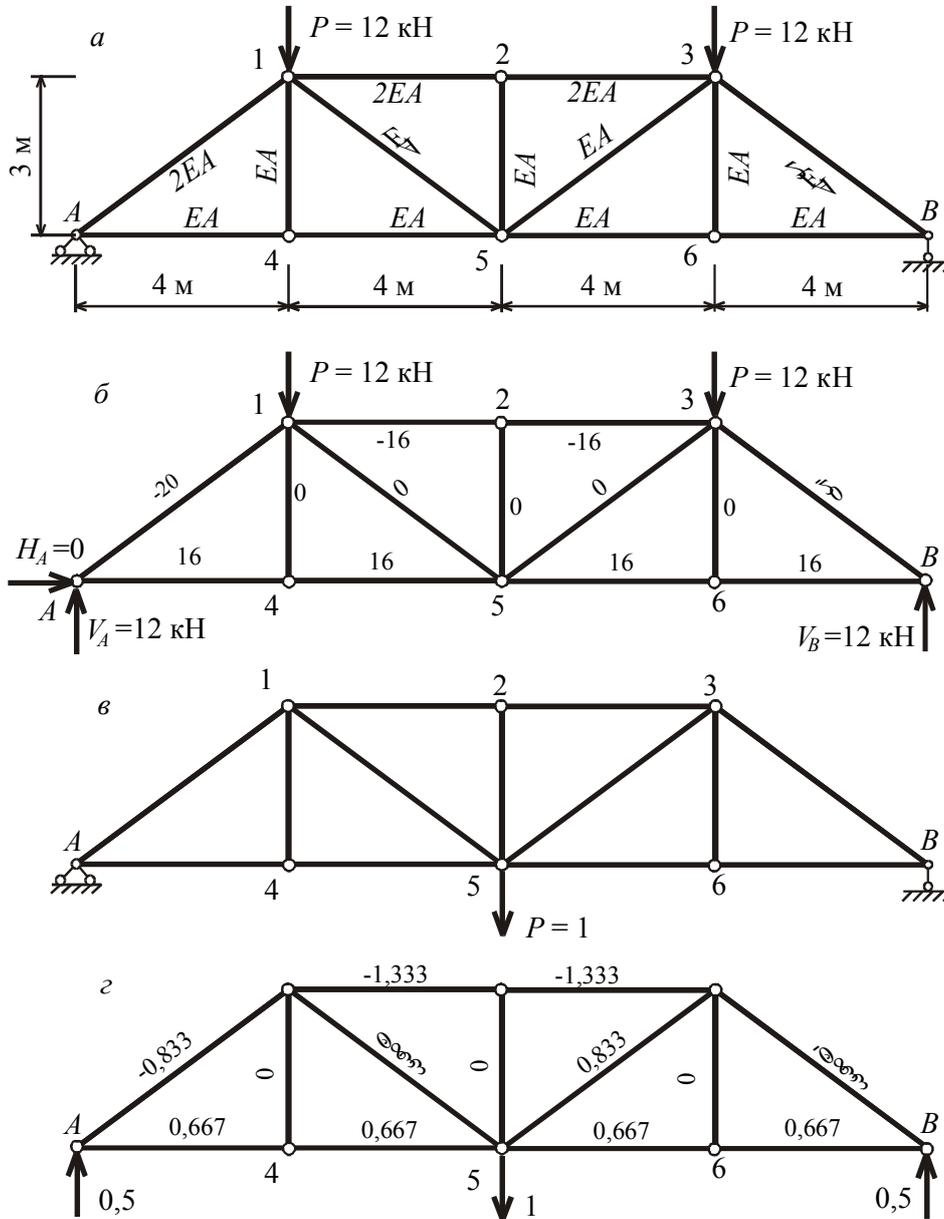


Рис.9.4

Кінематичний аналіз ферми

Задана ферма містить 8 вузлів і 16 стержнів (разом зі стержнями опор). Ступінь геометричної змінюваності

$$\Gamma = 2 \cdot 8 - 16 = 0.$$

Ферма утворена за способом “діад”. Дійсно, якщо прийняти будь-який стержень за основу, то можна утворити диск ферми шляхом послідовного приєднання вузлів за допомогою двох

стержнів. Утворений диск ферми приєднується до диску “земля” трьома опорними в’язями, які всі три водночас не паралельні між собою і не перетинаються в одній точці. Отже, ферма статично визначувана і геометрично незмінювана.

Статичний розрахунок ферми у вантажному стані

Визначаємо опорні реакції (рис.9.4,б).

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_A = 0; \\ \sum M_B = 0 &\Rightarrow V_A \cdot 16 - 12 \cdot 12 - 12 \cdot 4 = 0 \Rightarrow V_A = 12 \text{ кН}; \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow -V_B \cdot 16 + 12 \cdot 12 + 12 \cdot 4 = 0 \Rightarrow V_B = 12 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Зусилля в стержнях можна визначити будь-яким способом: вирізанням вузлів, способом наскрізних перерізів, способом сумісних перерізів або будь-яким сполученням згаданих способів. Величини зусиль показано на стержнях ферми.

Призначення допоміжного стану

Допоміжний стан ферми представлено на рис.9.4,в. Тут відкинуто задані навантаження, а у вузлі 5 прикладено вертикальну одиничну силу $P=1$.

Статичний розрахунок ферми в допоміжному стані

Опорні реакції і зусилля в допоміжному стані ферми показано на рис.9.4,г.

Обчислення переміщення

Переміщення визначаємо за формулою (9.3):

$$\Delta_{ip} = \sum \frac{\bar{N}_i N_P}{EA} l.$$

Довжини стержнів визначаються з геометричної схеми ферми (рис.9.4,г.). Тут також наведено жорсткості стержнів ферми на поздовжні деформації. Обчислення виконуються в таблиці 9.1. Шукане переміщення (прогин вузла 5) визначається сумою елементів шостого стовпця таблиці.

Таблиця 9.1

Ст.	l (м)	EA	N_p (кН)	N_i	$\frac{N_i N_p l}{EA}$
1	2	3	4	5	6
A-1	5.000	2.000	-20.000	-0.833	41.650
1-2	4.000	2.000	-16.000	-1.333	42.656
2-3	4.000	2.000	-16.000	-1.333	42.656
3-B	5.000	2.000	-20.000	-0.833	41.650
A-4	4.000	1.000	16.000	0.667	42.688
4-5	4.000	1.000	16.000	0.667	42.688
5-6	4.000	1.000	16.000	0.667	42.688
6-B	4.000	1.000	16.000	0.667	42.688
1-4	3.000	1.000	0.000	0.000	0.000
2-5	3.000	1.000	0.000	0.000	0.000
3-6	3.000	1.000	1.000	0.000	0.000
4-5	5.000	1.000	0.000	0.833	0.000
3-5	5.000	1.000	0.000	0.833	0.000
Усього:					339,364

Отже, шукане переміщення $\Delta_{ip} = \frac{339,364}{EA}$.

9.4. Визначення переміщення від дії температури

Визначити горизонтальне переміщення опори C рами (рис.9.5,а), що спричиняється представленим на рисунку температурним полем. Всі стержні мають прямокутний переріз (рис.9.5,б). Коефіцієнт лінійного розширення матеріалу $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ град}^{-1}$.

Кінематичний аналіз рами

Рама являє собою ламаний стержень ABC , який приєднується до основи трьома шарнірно-рухомим опорами. Таким чином, можна вважати, що рама має два диска і три кінематичні в'язі, тобто $D = 2$, $C = 3$, $III = 0$, $II = 0$, $B = 0$. За формулою Чебишова (2.1)

$$\Gamma = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 3 - 3 = 0.$$

Структурно рама утворена з'єднанням двох дисків трьома кінематичними в'язями:

$$\frac{D_{ABC} + D_{\text{земля}}}{C_A, C_B, C_C} \Rightarrow D.$$

Таким чином, рама геометрично незмінювана і статично визначувана.

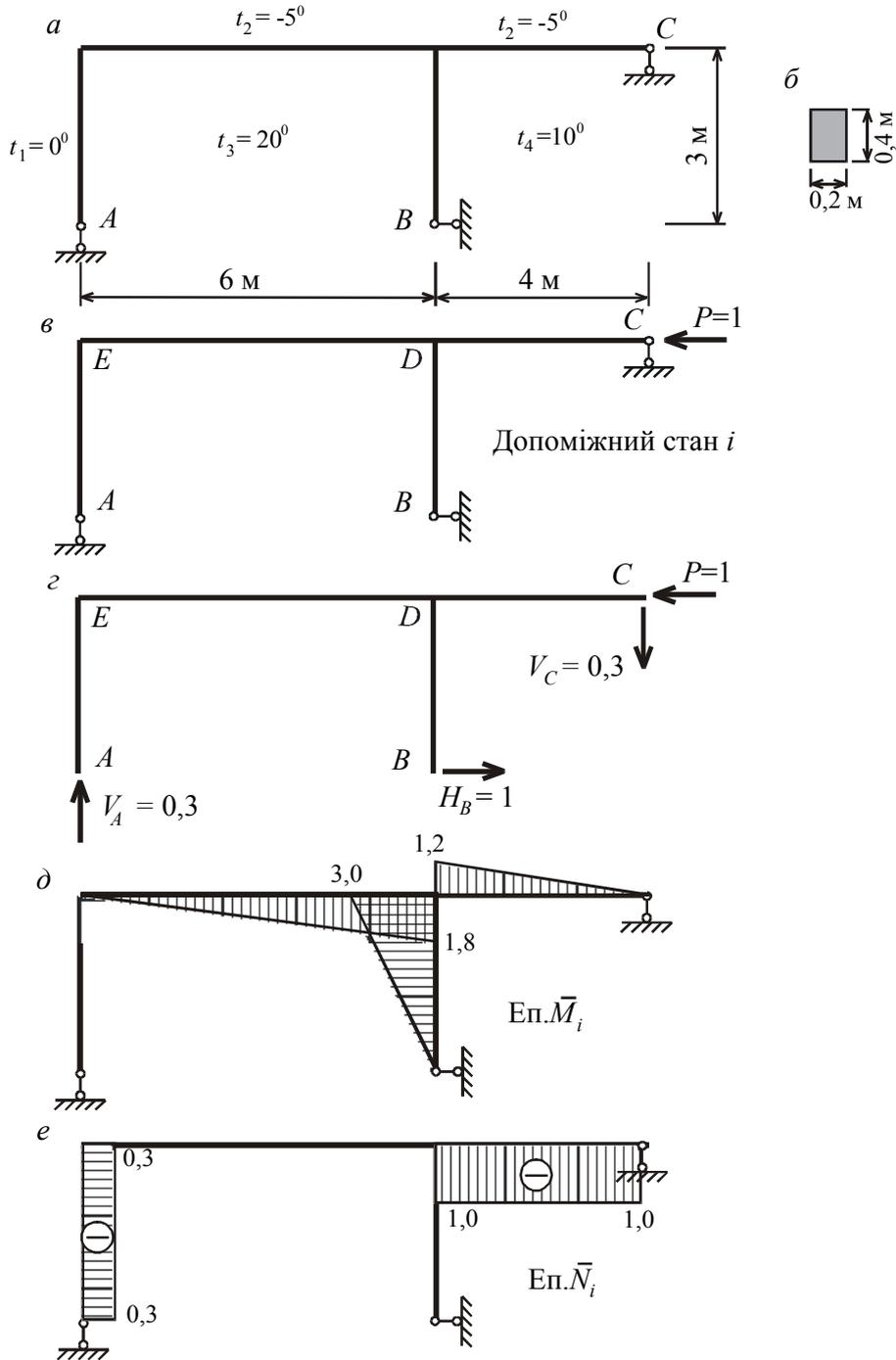


Рис.9.5

Призначення допоміжного стану

Допоміжний стан *i* для визначення горизонтального переміщення опори C утворюється прикладенням в опорі C горизонтальної безрозмірної сили, яка дорівнює одиниці (рис.9.5,в).

Статичний розрахунок рами в допоміжному стані

Реакції опор в допоміжному стані i показано на рис.9.5,г. Для їх обчислення складаються і розв'язуються рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow V_C \cdot 10 - 1 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_C = 0,3; \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_B - 1 = 0 \Rightarrow H_B = 1; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_A - 0,3 = 0 \Rightarrow V_A = 0,3. \end{aligned}$$

Епюра згинальних моментів M_i і поздовжніх сил N_i у допоміжному стані побудовано на рис.9.5,д і 9.5,е відповідно.

Обчислення переміщення

Обчислення виконуємо за формулою (9.7):

$$\begin{aligned} \Delta_{ii} &= \left[\alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,8 \text{ м} \cdot 6 \text{ м} \cdot \frac{|-5^0 - 20^0|}{0,4 \text{ м}} - \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,2 \text{ м} \cdot 4 \text{ м} \cdot \frac{|-5^0 - 10^0|}{0,4 \text{ м}} + \right. \\ &\quad \left. + \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ м} \cdot 3 \text{ м} \cdot \frac{|20^0 - 10^0|}{0,2 \text{ м}} \right] + \left[\alpha \cdot (-0,3) \cdot 3 \text{ м} \cdot \frac{0^0 + 20^0}{2} + \alpha \cdot (-1) \cdot 4 \text{ м} \cdot \frac{-5^0 + 10^0}{2} \right] = \\ &= (453,5 \cdot \alpha) \frac{\text{град}}{\text{м}} = 453,5 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,5442 \cdot 10^{-2} \text{ м}. \end{aligned}$$

9.5. Визначення переміщення від змушених переміщень опор

Визначити вертикальне переміщення вузла D рами (рис.9.6,а), яке визначається змушеними переміщеннями опор. Переміщення показано на рисунку подвійними стрілками.

Кінематичний аналіз

Рама складається з двох дисків і основи, які поєднуються за допомогою припайки в опорі A , шарніру у вузлі C та кінематичної в'язі у шарнірно нерухомій опорі B . Отже, рама має таку кількість елементів: $D = 3$, $B = 0$, $\Pi = 1$, $\text{Ш} = 1$, $C = 1$. Ступінь геометричної змінюваності

$$\Gamma = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 1 - 3 = 0.$$

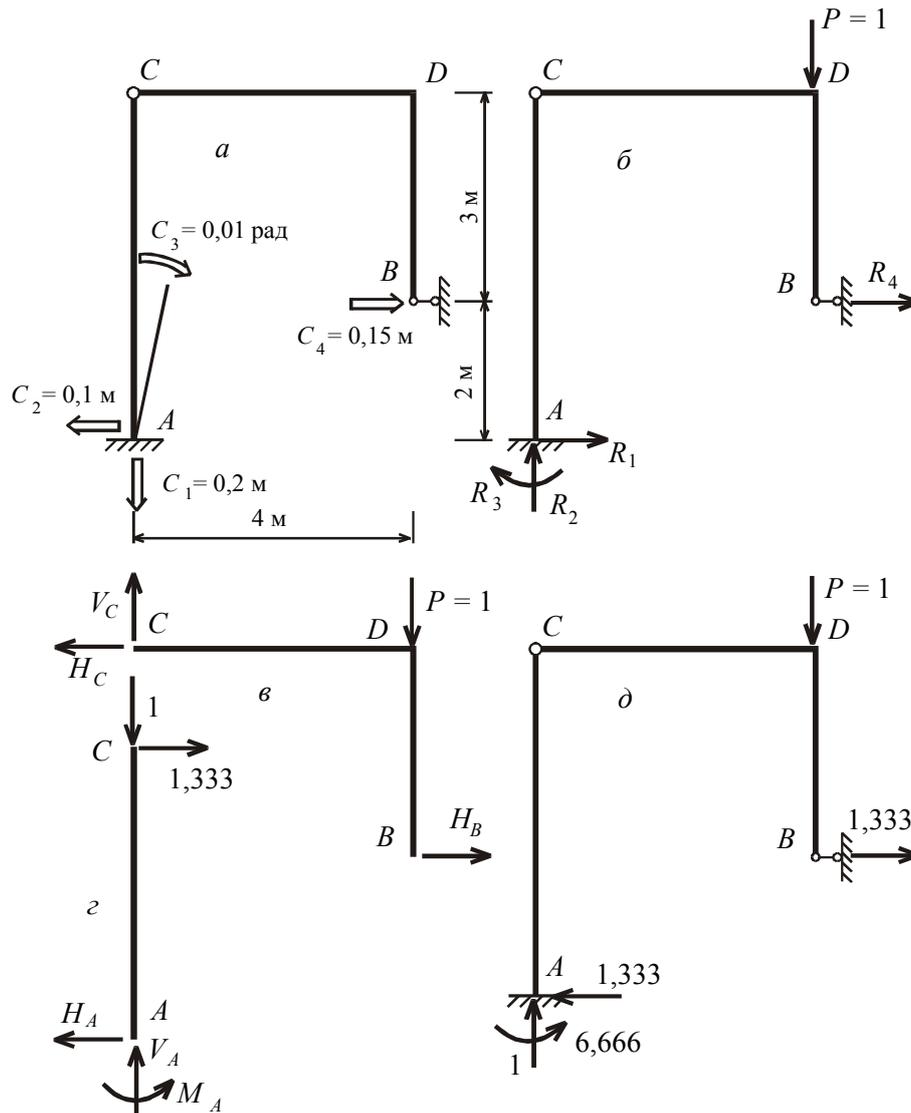


Рис.9.6

Схема рами утворюється за два кроки:

1. $\frac{D_{AC} + D_{\text{земля}}}{\Pi_A} = D_I;$
2. $\frac{D_I + D_{CDB}}{\Sigma C_C, C_B} = D_{II}.$

Таким чином, рама геометрично незмінювана і статично визначувана.

Призначення допоміжного стану

Для визначення вертикального переміщення вузла D прикладаємо до нього вертикальну силу, яка дорівнює одиниці (рис.9.6,б). Тут також позначено ті реакції опор, які відповідають змушеним переміщенням.

Статичний розрахунок рами в допоміжному стані

Визначаємо опорні реакції другого поверху (рис.9.6,в).

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\Rightarrow V_C - 1 = 0 \Rightarrow V_C = 1; \\ \sum M_C = 0 &\Rightarrow -H_B \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 0 \Rightarrow H_B = 1,333; \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow -H_C + 1,333 = 0 \Rightarrow H_C = 1,333.\end{aligned}$$

Опорні реакції першого поверху (рис.9.6,г).

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow -H_A + 1,333 = 0 \Rightarrow H_A = 1,333; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_A - 1 = 0 \Rightarrow V_A = 1; \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow -M_A + 1,333 \cdot 5 = 0 \Rightarrow M_A = 6,666.\end{aligned}$$

Обчислення переміщення

Шукане переміщення визначаємо за формулою (9.8):

$$\Delta_{ic} = -\sum R_{ji} c_j = -(1,333 \cdot 0,1 \text{ м} - 0,1 \cdot 0,2 \text{ м} - 6,666 \text{ м} \cdot 0,01 + 1,333 \cdot 0,15 \text{ м}) = 0,353 \text{ м}.$$

9.6. Задачі для самостійного розв'язування

- 9.6.1. Визначити наближення перерізів C і B рами (рис.9.7,а).
- 9.6.2. Визначити за абсолютною величиною взаємний кут повороту стояків рами на опорах A і B (рис.9.7,а).
- 9.6.3. Визначити за абсолютною величиною вертикальне переміщення опори A (рис.9.7,б).
- 9.6.4. Визначити за абсолютною величиною взаємний кут повороту стержнів рами в шарнірі C (рис.9.7,б).
- 9.6.5. Визначити взаємне розходження шарнірів C і D від дії температури (рис.9.7,в). Поперечні перерізи всіх стержнів мають висоту 0,4 м.
- 9.6.6. Визначити за абсолютною величиною вертикальне переміщення шарніра C від примусового зміщення опор рами (рис.9.7,г).

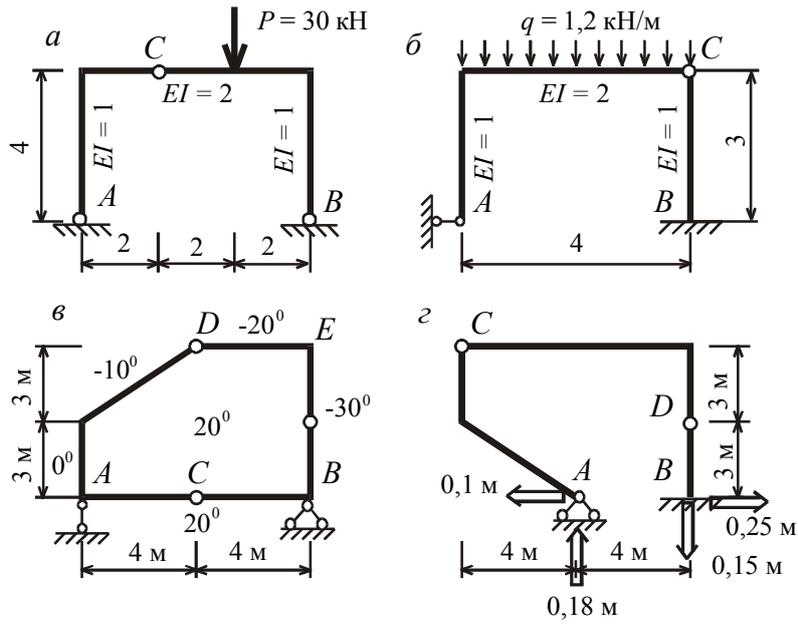


Рис.9.7

10. Розрахунок статично невизначуваної рами МЕТОДОМ СИЛ

10.1. Короткі теоретичні відомості

Несучі елементи будов та інженерних споруд, які при розрахунку моделюються рамами, повинні зберігати надану їм форму та положення, тобто їх розрахункова схема має бути геометрично незмінюваною і нерухомою. Для виконання цих вимог поєднання окремих дисків конструкції між собою та із “землею” необхідно здійснювати кінематичними в’язями (будь-яка в’язь еквівалентна певній кількості кінематичних в’язей – стержнів), кількість яких не менша суми ступенів вільності окремих складових дисків споруди.

Дослідження співвідношення між кількістю в’язей та дисків проводиться на кількісному етапі кінематичного аналізу. Якщо ступінь геометричної змінюваності, підрахована по формулі Чебишова

$$\Gamma = 3D + 2B - 3П - 2Ш - C - 3 \quad (10.1)$$

менша за нуль, то система дисків має умовно “зайві” в’язі.

Наявність “зайвих” в’язей забезпечує більшу жорсткість рами та перерозподіл внутрішніх зусиль між її елементами, тому руйнування однієї чи декількох із в’язей не спричинює руйнування конструкції в цілому. Негативним аспектом перенасичення системи дисків в’язями є неможливість визначення внутрішніх зусиль в елементах конструкції, виходячи лише з умов рівноваги. Система із “зайвими” в’язями статично невизначувана. Число, від’ємне щодо ступеня геометричної змінюваності системи ($n = -\Gamma$), визначає **ступінь статичної невизначуваності**.

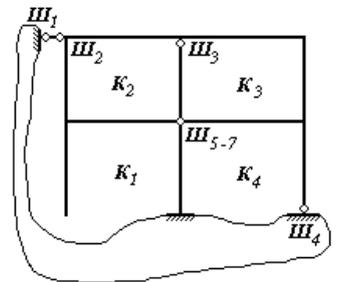


Рис. 10.1

Для обчислення ступеня статичної невизначуваності рам використовують більш просту формулу.

$$n = 3K - Ш, \quad (10.2)$$

де K – кількість ізольованих контурів рами, яка для плоских стержневих систем визначається кількістю площин, обмежених стержнями рами або стержнями рами і “землею” (“землю” слід вважати одним простим диском); $Ш$ – загальна кількість простих шарнірів, які входять в замкнені контури (разом з опорними та шарнірами, що входять до складу кінематичних в’язей). Один простий шарнір поєднує лише два диски. Шарнір, що поєднує m дисків, еквівалентний $m-1$ простим шарнірам. Шарнірно нерухому опору можна розглядати як один простий шарнір, а шарнірно рухому – як два простих шарніри.

Наприклад, на рис.10.1 зображена рама, що має чотири ізольованих контури K_1, K_2, K_3, K_4 . Для поєднання елементів рами між собою та приєднання її до “землі” використано сім простих шарнірів $Ш_1, Ш_2, Ш_3, Ш_4, Ш_5, Ш_6, Ш_7$. Таким чином, ступінь статичної невизначуваності системи, що розглядається, дорівнює $n = 3K - Ш = 3 \cdot 4 - 7 = 5$.

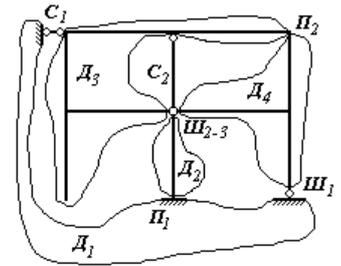


Рис. 10.2

Отже, зображена на рис.10.1 рама є п'ять разів статично невизначуваною.

Цю задачу можна розв'язати, використовуючи формулу Чебишова (10.1). Задану стержневу систему можна моделювати, як сукупність чотирьох простих дисків (рис.10.2), поєднаних двома простими припайками $П_1$ і $П_2$, трьома простими шарнірами $Ш_1, Ш_2, Ш_3$ та двома кінематичними в'язями C_1, C_2 . Вузли, як місця поєднання лише кінематичних в'язей, в цій розрахунковій схемі відсутні. Тому:

$$\Gamma = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 2 - 3 = -5.$$

Висновок: $n = -\Gamma = -(-5) = 5$, рама п'ять разів статично невизначувана.

Як інший приклад, розглянуто систему, зображену на рис.10.3,а, яка має три ізольованих контури K_1, K_2, K_3 .

Шарнірно-рухома опора D еквівалентна двом простим шарнірам; шарнірне поєднання трьох дисків в точці C еквівалентне двом простим шарнірам; в опорах A та B – по одному простому шарніру. Загальна кількість простих шарнірів $Ш = 7$. Ступінь статичної невизначуваності рами дорівнює

$$n = 3K - Ш = 3 \cdot 3 - 7 = 2.$$

Отже, рама двічі статично невизначувана.

Метод сил відноситься до класичних методів розрахунку статично невизначуваних систем. Основна ідея методу полягає у тім, що задана статично невизначувана рама замінюється статично визначуваною шляхом вилучення “зайвих” в'язей. Отримана таким чином система називається **основною системою методу сил**. Основна система повинна задовольняти певні вимоги, зокрема вона має бути

- статично визначуваною;
- геометрично незмінюваною;

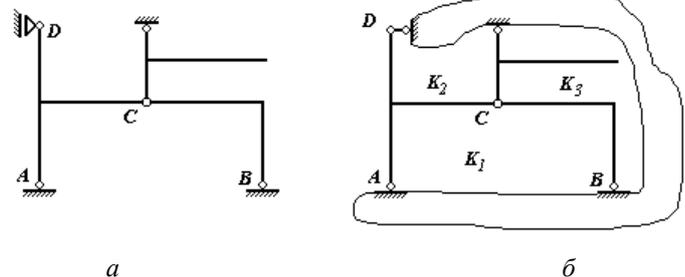


Рис. 10.3

- раціональною.

В статично невизначуваних системах розрізняють в'язі **абсолютно необхідні** та **умовно зайві**. Абсолютно необхідною є така в'язь, вилучення якої перетворює раму в геометрично змінювану систему. Вилучення абсолютно необхідних в'язей при побудові основної системи методу сил **недопустимо**. В'язі, вилучення яких не порушує геометричної незмінюваності рами, називаються умовно зайвими.

Слід мати на увазі, що вилучення одного стержня з шарнірами на кінцях еквівалентне вилученню однієї кінематичної в'язі. Врізання одного простого шарніра також еквівалентне вилученню однієї простої в'язі. Додатковий кратний шарнір, яким позначається m простих шарнірів, еквівалентний вилученню m простих в'язей. Наскрізний переріз стержня рами еквівалентний видаленню трьох кінематичних в'язей.

Під еквівалентністю основної і заданої систем потрібно розуміти наступне: в елементах основної системи переміщення і зусилля повинні бути такими ж, як і у заданій.

Виходячи з положень аксіоми про звільнення від в'язей, в основній системі в напрямку вилучених в'язей слід прикласти реактивні зусилля, які разом з активним навантаженням забезпечать однаковість напружено-деформованих станів основної та заданої систем. Зусилля у вилучених в'язях є **основними невідомими методу сил**.

Для будь-якої статично невизначуваної рами існує багато варіантів основних систем, які відповідають переліченим вимогам. Більш раціональним варіантом основної системи є той, який забезпечує найменшу трудомісткість обчислень, пов'язаних з визначенням невідомих методу сил.

Кількість основних невідомих методу сил дорівнює ступеню статичної невизначуваності розрахункової схеми. В практичних розрахунках перевага надається основним системам, отриманим шляхом постановки шарнірів. Для симетричних статично невизначуваних рам потрібно вибирати симетричну основну систему.

Вибір основної системи методу сил проілюстровано на декілька прикладах. Рама, що зображена на рис.10.4,*a* тричі статично невизначувана ($n = 3K - Ш = 3 \cdot 3 - 6 = 3$).

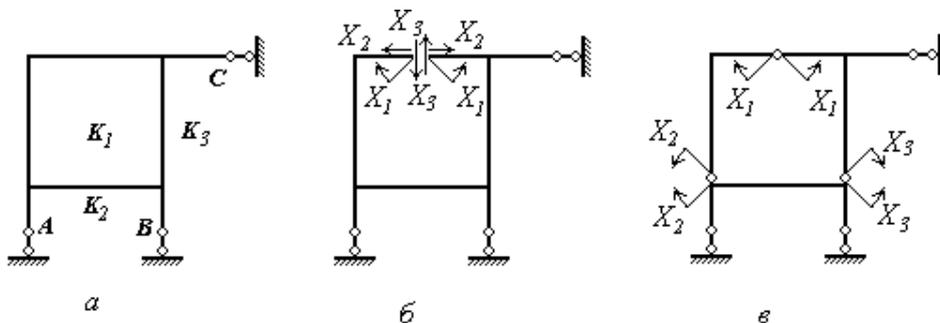


Рис.10.4

В'язі в точках A , B і C абсолютно необхідні, і тому їх вилучати не можна. На рис.10.4,б показано варіант основної системи, отриманої шляхом наскрізного перерізу ригеля. Рис.10.4,в ілюструє варіант основної системи, утвореної врізанням трьох простих шарнірів.

Ступінь статичної невизначуваності рами, показаної на рис.10.5,а дорівнює $n = 3K - Ш = 3 \cdot 2 - 3 = 3$. На рис.10.5,б та рис.10.5,в приведені приклади основних систем методу сил для заданої рами.

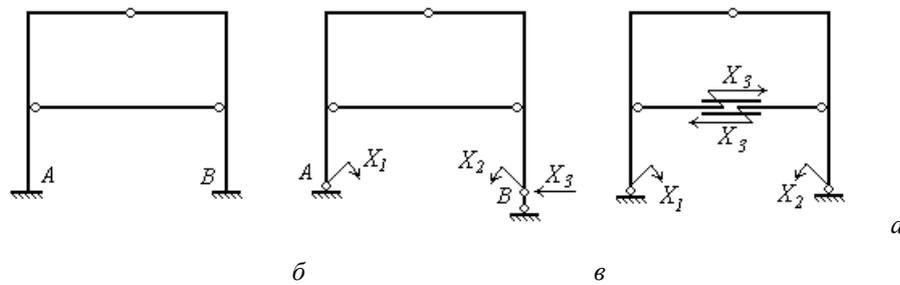


Рис. 10.5

Для заданої статично невизначуваної рами, зображеної на рис.10.5,а і основної системи методу сил (рис.10.5,б), виходячи з умов їх еквівалентності, обов'язково повинні виконуватись наступні умови:

- горизонтальне зміщення точки B основної системи від дії невідомих X_1 , X_2 , X_3 і заданого навантаження має співпадати з горизонтальним зміщенням точки B вихідної рами, тобто дорівнювати нулю;
- кути повороту осі рами в перерізах A і B для основної системи також повинні дорівнювати нулю, тому що в заданій рамі стержні в цих точках жорстко затиснені.

Використаємо ці умови для визначення переміщень в основній системі в напрямках вилучених в'язей від дії на основну систему невідомих зусиль X_1 , X_2 , X_3 та заданого зовнішнього навантаження. В кінцевому вигляді відповідні переміщення можна представити системою

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0. \end{cases} \quad (10.3)$$

Система рівнянь (10.3) називається **системою канонічних рівнянь** методу сил, які по суті є рівняннями сумісності деформацій.

Перше рівняння системи (10.3) визначає суму переміщень в основній системі в напрямку X_1 від дії X_1 , X_2 , X_3 та зовнішнього навантаження (ліва частина), яка прирівнюється до відповідного переміщення в заданій рамі – тобто нулю (права частина). Аналогічний зміст має кожне з рівнянь системи (10.3).

У загальному випадку для n раз статично невизначуваної рами система канонічних рівнянь складається з n рівнянь

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} = 0. \end{cases} \quad (10.4)$$

Коефіцієнти δ_{ik} при невідомих – це переміщення в основній системі в напрямку сили X_i від дії одиничної сили $X_k = 1$; $\delta_{ik} \cdot X_k$ – переміщення в напрямку сили X_i від дії невідомої узагальненої сили X_k .

Коефіцієнт Δ_{iP} , який називається **вантажним**, або **вільним членом** системи канонічних рівнянь, є переміщенням в напрямку сили X_i основної системи від дії заданого зовнішнього навантаження.

Переміщення δ_{ik} та Δ_{iP} ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) обчислюються за формулою Мора, яка для рам має вигляд

$$\delta_{ik} = \sum_{j=1}^m \int_L \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k}{EI} dx, \quad \Delta_{iP} = \sum_{j=1}^m \int_L \frac{\overline{M}_i M_P}{EI} dx, \quad (i, k=1, 2, \dots, n). \quad (10.5)$$

У формулах (10.5) позначено: \overline{M}_i та \overline{M}_k – згинальні моменти в елементах основної системи від дії сили $X_i = 1$ та сили $X_k = 1$, відповідно, M_P – згинальні моменти в елементах основної системи від дії заданого навантаження, j – номер ділянки інтегрування ($j = 1, 2, \dots, m$).

Таким чином, для обчислення коефіцієнтів δ_{ik} та вільних членів Δ_{iP} системи канонічних рівнянь необхідно в основній системі рами побудувати епюри згинальних моментів окремо від дії одиничних навантажень в напрямку кожного невідомого методу сил та від заданого навантаження. Так, епюра \overline{M}_1 будується в основній системі від дії лише сили $X_1 = 1$. Епюра \overline{M}_1 називається **одиночною епюрою**, а відповідний стан рами – **одиночним станом**. Загальне число одиничних станів відповідає кількості невідомих методу сил. Епюра M_P будується в основній системі рами від заданого навантаження. Цей стан рами називається **вантажним станом**.

У системі лінійних алгебраїчних рівнянь методу сил (10.4) діагональні члени додатньо визначені ($\delta_{ii} > 0$). Коефіцієнти, розташовані симетрично відносно головної діагоналі, на основі теореми про взаємність переміщень попарно однакові $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Таким чином, матриця, складена з коефіцієнтів при невідомих системи канонічних рівнянь методу сил, завжди симетрична.

Отже коефіцієнти системи канонічних рівнянь є переміщеннями, а саме: кути повороту при виборі основних систем утворених постановкою шарнірів, та поступальні переміщення при основних системах, побудованих усуненням кінематичних в'язей (ідеальних стержнів).

Розв'язком системи канонічних рівнянь є величини зусиль у вилучених в'язях заданої рами. Інші сили взаємодії дисків між собою та внутрішні зусилля в них можуть бути визначеними з умов рівноваги при розрахунку основної системи на дію зовнішнього навантаження та знайдених зусиль у умовно знятих зайвих в'язях. Цей спосіб визначення внутрішніх зусиль в заданій рамі отримав назву *статичного способу*. З іншого боку, маючи значення основних невідомих методу сил, внутрішні зусилля в заданій рамі можна обчислити шляхом додавання (накладення) епюр за схемою

$$\begin{aligned} M_o &= \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p, \\ Q_o &= \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \dots + \bar{Q}_n X_n + Q_p, \\ N_o &= \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n + N_p. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Тут M_o, Q_o, N_o – дійсні зусилля в заданій статично невизначуваній рамі; $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) – внутрішні зусилля, в i -му одиничному стані основної системи; M_p, Q_p, N_p – внутрішні зусилля у вантажному стані основної системи рами; X_i ($i=1, 2, \dots, n$) – значення основних невідомих методу сил.

Для підтвердження достовірності отриманих результатів розрахунку виконуються дві перевірки епюр дійсних внутрішніх зусиль: кінематична і статична. Кінематична перевірка полягає у визначенні переміщень у заданій рамі, які заздалегідь відомі (наприклад, дорівнюють нулю). Будь-яке узагальнене переміщення обчислюється за формулою Мора

$$\Delta_{k\delta} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_o}{EI} dx, \quad (10.7)$$

де $\Delta_{k\delta}$ – переміщення в заданій статично невизначуваній рамі в напрямку k -ї в'язі; M_o – дійсні згинальні моменти в рамі.

Для побудови епюри \bar{M}_k вихідна рама замінюється довільною основною системою (при створенні якої серед знятих n умовно зайвих в'язей має бути k -та), яка завантажується узагальненою одиничною силою в напрямку вилученої k -ї в'язі.

Наприклад, для обчислення горизонтального переміщення опори B статично невизначуваної системи (рис.10.5,а) можна використати варіант основної системи, показаний на рис.10.5,б. Одиничний стан, що відповідає горизонтальному переміщенню точки B , зображений на рис.10.6.

Для перевірки усіх ділянок епюри M_o необхідно визначати такі переміщення в заданій рамі і вибирати такі варіанти основних систем, при яких епюра \bar{M}_k була б на всіх стержнях рами. Часто для виконання цієї вимоги використовують епюру \bar{M}_Σ , побудовану в основній системі від одночасної дії декількох (не обов'язково всіх) одиничних узагальнених сил.

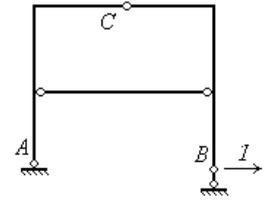


Рис. 10.6

При виконанні кінематичної перевірки M_o похибка, як правило, не повинна перевищувати кількох відсотків.

Статична перевірка полягає в перевірці виконання умов рівноваги всіх вузлів рами та рівноваги рами в цілому. Кожен вузол рами умовним замкненим перерізом, який перетинає всі стержні, поєднані ним, відокремлюється від рами і перевіряються умови його рівноваги: $\sum M = 0$, $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ (з урахуванням заданих зовнішніх вузлових сил і моментів). Вважається, що переріз знаходиться нескінченно близько біля вузла. Значення внутрішніх сил у перерізах беруться з епюр дійсних згинальних моментів, поперечних та поздовжніх сил.

Перевірка епюри поперечних сил Q_o виконується по епюрі M_o , виходячи з диференційної залежності між поперечними силами та згинальними моментами

$$Q_o(x) = \frac{d M_o(x)}{d x}. \quad (10.8)$$

Виконання умов рівноваги рами в цілому перевіряється шляхом відокремлення її від “землі”. При цьому замкнений переріз слід провести через усі опорні пристрої рами. В рівняння рівноваги поряд із зовнішнім навантаженням включають і опорні реакції, які визначаються по епюрах M_o , Q_o , N_o .

Розрахунок симетричних рам має деякі особливості. Найбільш трудомісткою частиною розрахунку рам методом сил є формування системи канонічних рівнянь. Суттєвого спрощення можна досягти, якщо не визначати коефіцієнти системи рівнянь δ_{ij} , які завідомо дорівнюють нулю. Для симетричних рам (симетричні зовнішня геометрія та жорсткості) при виборі симетричної основної системи коефіцієнти $\delta_{ik} = \int (\bar{M}_i \bar{M}_k / EI) dx$ дорівнюють нулю тоді, коли одна з епюр-множників буде симетричною, а інша – косиметричною.

Епюра згинальних моментів в симетричній рамі буде симетричною (косиметричною), якщо навантаження, що діє на раму, буде симетричним (косиметричним).

У більшості випадків навантаження, що діє на симетричну раму не є симетричним або косиметричним. Таке навантаження називається навантаженням загального вигляду. В таких випадках

основні невідомі методу сил також є невідомими загального вигляду, але, використовуючи так звану процедуру **групування невідомих**, їх можна привести до симетричних та кососиметричних і цим досягти того, щоб епюри згинальних моментів в одиничних станах були симетричними або кососиметричними.

Групування невідомих здійснюється так, щоб однотипні невідомі X_i та X_j , розташовані в симетричних точках основної системи, були б замінені сумою і різницею інших двох невідомих Y_i, Y_j

$$\begin{aligned} X_i &= Y_i + Y_j, \\ X_j &= Y_i - Y_j. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Така заміна можлива для будь-яких двох чисел, наприклад, числа 5 і 7 можна записати як суму та різницю чисел 6 і 1 ($7 = 6+1$; $5 = 6-1$).

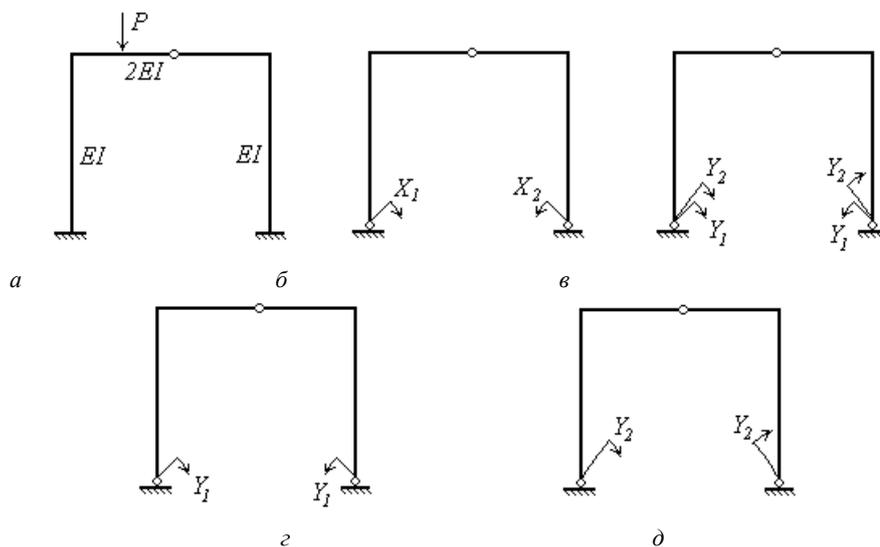


Рис. 10.7

Для прикладу на рис.10.7,*а* показана симетрична двічі статично невизначувана рама.

Вибрана основна система (рис.10.7,*б*) симетрична. Основні невідомі X_1 і X_2 загального вигляду (епюри згинальних моментів від кожного з них не є симетричними або кососиметричними).

Замінімо невідомі загального вигляду X_1 та X_2 іншими невідомими Y_1 та Y_2 , які були б відповідно симетричними та кососиметричними (рис.10.7, *в*)

$$\begin{aligned} X_1 &= Y_1 + Y_2, \\ X_2 &= Y_1 - Y_2. \end{aligned}$$

У подальшому в систему рівнянь методу сил включають невідомі Y_1 (рис.10.7,*з*) – симетричний одиничний стан; та Y_2 (рис.10.7,*д*) – кососиметричний одиничний стан.

Система канонічних рівнянь методу сил в цьому разі має вигляд

$$\begin{cases} \delta_{11}Y_1 + \delta_{12}Y_2 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21}Y_1 + \delta_{22}Y_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases} \quad (10.10)$$

Для обчислення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь будуються епюри згинальних моментів в одиничних і вантажному станах (рис.10.8).

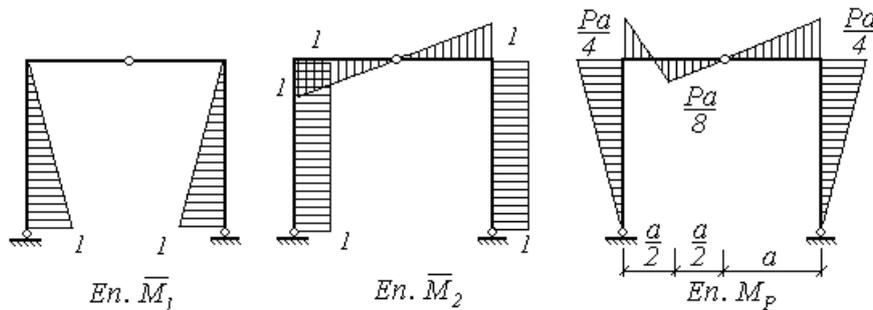


Рис. 10.8

Враховуючи $\delta_{12} = \delta_{21} = \int_l \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2}{EI} dx = 0$, система рівнянь (10.10) набуває вигляду

$$\begin{cases} \delta_{11}Y_1 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{22}Y_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases} \quad (10.11)$$

Звідки видно, що

$$Y_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}, \quad Y_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}.$$

Тоді

$$M_o = \overline{M}_1 Y_1 + \overline{M}_2 Y_2 + M_p.$$

Наслідком групування основних невідомих є те, що система канонічних рівнянь розпадається на дві підсистеми: до однієї входять симетричні, до другої – косиметричні основні невідомі. Якщо зовнішнє навантаження симетричне, то вантажні члени системи рівнянь косиметричної групи будуть нульовими, а тому й всі основні невідомі, що входять до відповідної підсистеми, будуть теж дорівнювати нулю (тривіальний розв'язок системи однорідних лінійних рівнянь).

Те ж станеться і з симетричною групою основних невідомих у випадку, коли зовнішнє навантаження косиметричне.

Таким чином завдяки процедурі групування невідомих вдається зменшити кількість розв'язувальних рівнянь методу сил.

10.2. Розрахунок рами методом сил

Дано: розрахункова модель (рис.10.9,*а*).

Необхідно: побудувати епюри внутрішніх зусиль.

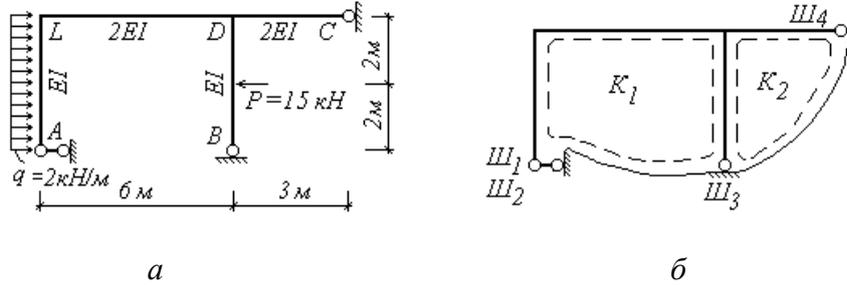


Рис. 10.9

Розв'язування:

1) По формулі (10.2) обчислюється ступінь статичної невизначуваності (рис.10.9,*б*)

$$n = 3K - III = 3 \cdot 2 - 4 = 2.$$

2) Шляхом вилучення двох умовно зайвих в'язей утворюється основна система методу сил. На рис.10.10,*а-г* показано чотири варіанти основних систем.

Для подальшого розрахунку приймається варіант, зображений на рис.10.10,*б*.

3) Система канонічних рівнянь методу сил

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

Для обчислення коефіцієнтів при невідомих δ_{ik} ($i, k = 1,2$) і вільних членів Δ_{ip} ($i = 1,2$) будуть для основної системи рами епюри згинальних моментів для першого (рис.10.11) і другого (рис.10.12) одиничних станів та для вантажного стану (рис.10.13).

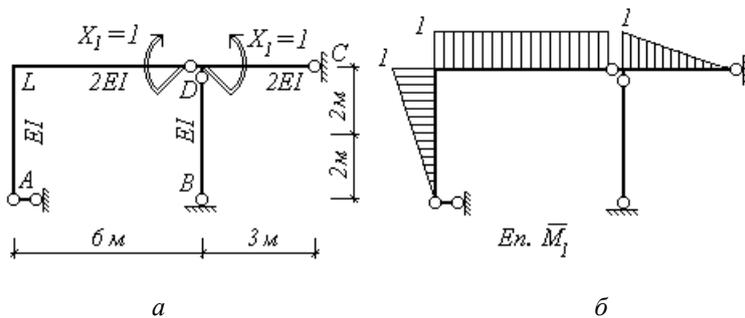


Рис.10.11

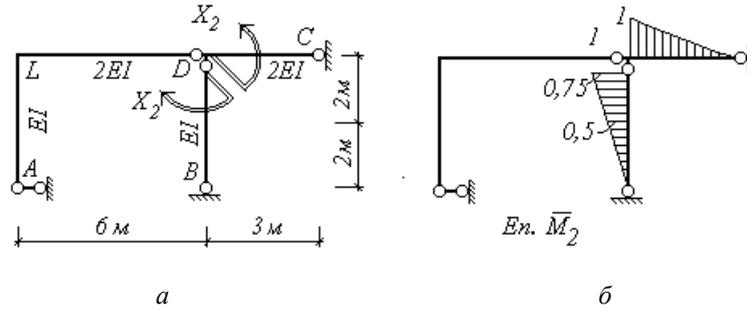


Рис.10.12

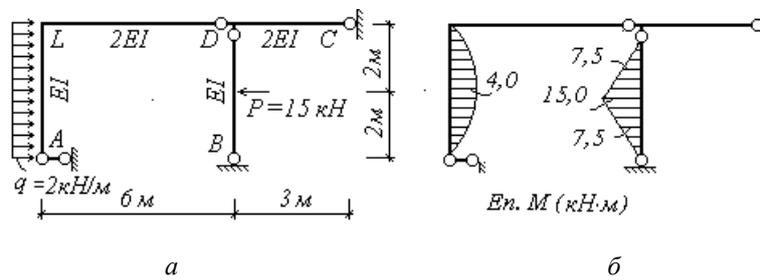


Рис.10.13

Інтегрування в формулі Мора (10.5) виконується чисельно за правилом Верещагіна або по формулі Сімпсона-Корноухова

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{1}{2EI} 1 \cdot 6 \cdot 1 + \frac{1}{EI} 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2EI} 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{4,833}{EI};$$

$$\delta_{12} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{0,5}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2EI} 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1,833}{EI};$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} dx = -\frac{4}{6EI} (0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 4 + 0) = -\frac{5,333}{EI};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2P} &= \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_P}{EI} dx = \frac{2}{6EI} (0 + 4 \cdot 0,75 \cdot 7,5 + 15 \cdot 0,5) + \frac{1}{EI} 15 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 = \\ &= \frac{10 + 5}{EI} = \frac{15}{EI}. \end{aligned}$$

Для перевірки коефіцієнтів системи канонічних рівнянь будується епюра $\bar{M}_\Sigma = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$, шляхом складання ординат епюр моментів в одиничних станах у відповідних точках (рис.10.14).

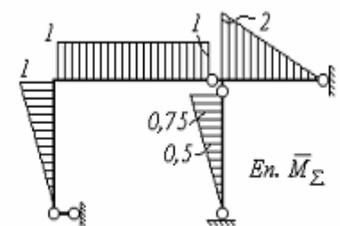


Рис.9.14

Суть перевірки полягає в альтернативному обчисленні коефіцієнтів у відповідності з формулами

$$\delta_{1\Sigma} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_\Sigma}{EI} dx = \sum \int \frac{\bar{M}_1 (\bar{M}_1 + \bar{M}_2)}{EI} dx = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dx + \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dx = \delta_{11} + \delta_{12};$$

$$\delta_{2\Sigma} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_\Sigma}{EI} dx = \sum \int \frac{\bar{M}_2 (\bar{M}_1 + \bar{M}_2)}{EI} dx = \delta_{21} + \delta_{22};$$

$$\Delta_{\Sigma P} = \sum \int \frac{M_P \bar{M}_\Sigma}{EI} dx = \sum \int \frac{M_P (\bar{M}_1 + \bar{M}_2)}{EI} dx = \Delta_{P1} + \Delta_{P2}.$$

Отже, маємо

$$\delta_{1\Sigma} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_\Sigma}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \right) \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} (1 \cdot 6) 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \right) \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = \frac{5,333}{EI}; \quad \delta_{11} + \delta_{12} = \frac{1}{EI} (4,833 + 0,5) = \frac{5,333}{EI}.$$

Перевірка коефіцієнтів при невідомих першого рівняння $\delta_{1\Sigma} = \sum \delta_{1i}$ ($i=1, 2$) підтверджує правильність їх визначення.

$$\delta_{2\Sigma} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_\Sigma}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \right) \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \right) \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = \frac{2,333}{EI};$$

$$\delta_{21} + \delta_{22} = \frac{1}{EI} (0,5 + 1,833) = \frac{2,333}{EI}.$$

Перевірка вільних членів

$$\Delta_{\Sigma P} = \sum \int \frac{M_P \bar{M}_\Sigma}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{4}{6} (0 - 4 \cdot 4 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0) + \left(\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 4 \right) \cdot 0,5 \right] = \frac{9,667}{EI},$$

$$\Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \frac{1}{EI} (-5,333 + 15) = \frac{9,667}{EI},$$

Отже, $\Delta_{\Sigma P} = \sum \Delta_{iP}$.

Виконання перевірок підтверджує правильність визначення коефіцієнтів та вільних членів системи канонічних рівнянь, яка після помноження на EI лівої та правої частини кожного з рівнянь набуває вигляду

$$\begin{cases} 4,83X_1 + 0,5X_2 - 5,33 = 0, \\ 0,5X_1 + 1,833X_2 + 15 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком системи є: $X_1 = 2,01$; $X_2 = -8,73$.

Слід перевірити розв'язок системи рівнянь підстановкою коренів в кожне з них або в сумарне рівняння.

4) Побудова епюри дійсних згинальних моментів

$$M_\theta = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + M_P = 2,01\bar{M}_1 - 8,73\bar{M}_2 + M_P.$$

Всі складові (парціальні) епюри та результат показано на рис.10.15.

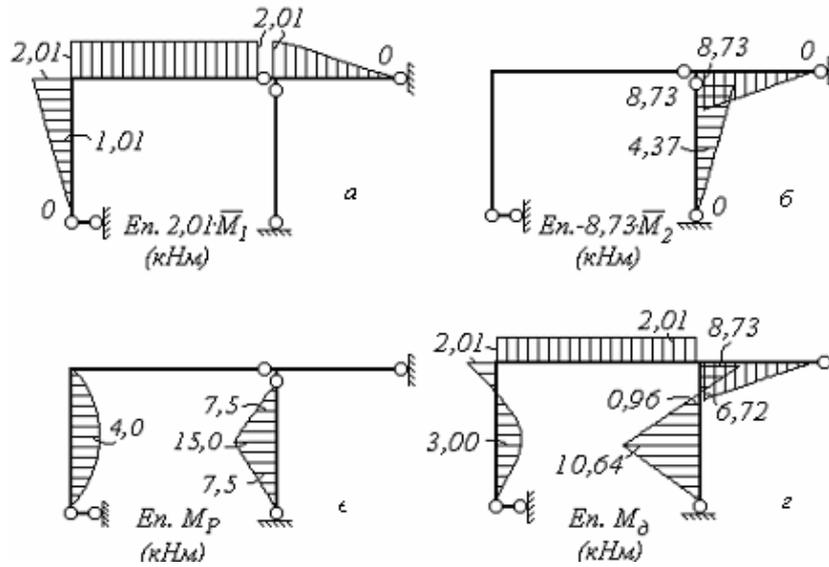


Рис.10.15

5) Статична перевірка епюри дійсних згинальних моментів.

Перевірка виконання умов рівноваги вузлів D та L (рис.10.16):

$$\sum M_D = 8,73 - 2,01 - 6,72 = 0,$$

$$\sum M_L = 2,01 - 2,01 = 0.$$

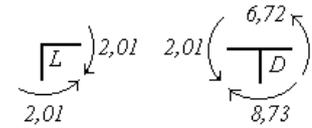


Рис. 10.16

б) Кінематична перевірка епюри дійсних згинальних моментів. Для виконання кінематичної (основної) перевірки використовується альтернативна основна система (рис.10.17,а). Переміщення в напрямках X_1 та X_2 в заданій рамі дорівнює нулю. Контрольна епюра згинальних моментів (рис.10.17,б) охоплює всі стержні рами, тому є раціональною.

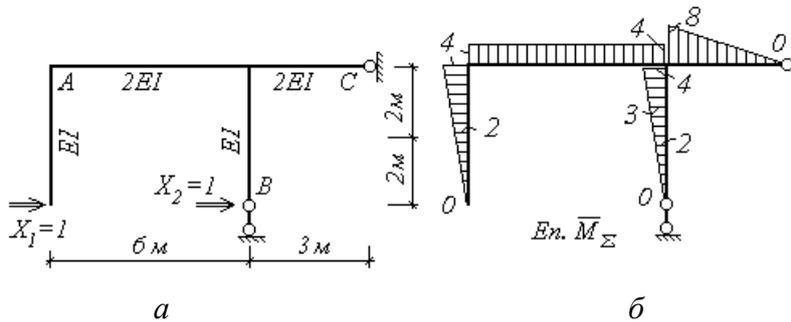


Рис. 10.17

$$\begin{aligned} \delta_{\Sigma 0} &= \sum_k \frac{\overline{M}_{\Sigma} M_0}{EI} dx = \frac{4}{6EI} (0 - 4 \cdot 2 \cdot 3 + 2,01 \cdot 4) + \frac{1}{2EI} 2,01 \cdot 6 \cdot 4 - \\ &- \frac{3}{6 \cdot 2EI} (6,72 \cdot 8 + 4 \cdot 3,36 \cdot 4 + 0) + \frac{2}{6EI} (-4 \cdot 8,73 + 4 \cdot 3 \cdot 0,96 + 2 \cdot 10,64) + \\ &+ \frac{1}{EI} 2 \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10,64 = \frac{-10,64 + 24,12 - 26,88 - 0,706 + 14,19}{EI} = \\ &= \frac{38,31 - 38,226}{EI} = \frac{0,084}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

Відносна похибка становить

$$\varepsilon = \frac{0,084}{38,31} \cdot 100\% = 0,22\% .$$

7) Для побудови епюри дійсних поперечних сил можна використати диференційну залежність (10.8). Похідна обчислюється виходячи з її геометричної суті – тангенс кута нахилу дотичної до графіку функції моментів, побудованої на осі стержня.

На ділянках з прямолінійними епюрами моментів значення похідної (поперечної сили) постійне (рис.10.18,а,б)

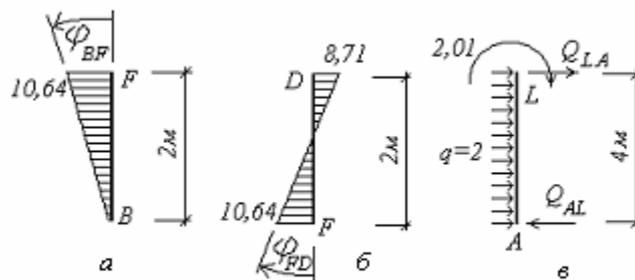


Рис.10.18

$$\begin{aligned} Q_{BF} &= -\frac{10,64}{2} = -5,32(\kappa H); & Q_{FD} &= \frac{10,64 + 8,73}{2} = 9,68(\kappa H); \\ Q_{DC} &= -\frac{6,72}{3} = -2,24(\kappa H); & Q_{LD} &= 0, \text{ (функція } M_{LD} \text{ – постійна).} \end{aligned}$$

Поперечна сила має знак "+", якщо кут нахилу епюри моментів відраховується від осі стержня по напрямку руху годинникової стрілки, в іншому разі поперечна сила від'ємна.

На ділянці стержня, де графік згинального моменту є параболою, поперечна сила є лінійною функцією. Для побудови її епюри необхідно знати дві ординати, які можна обчислити з умов рівноваги вилученої ділянки AL (рис.10.18,в)

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0: & Q_{LA} \cdot 4 + 2,01 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0; \Rightarrow Q_{LA} = -4,5(\kappa H), \\ \sum F_x = 0: & -Q_{AL} + Q_{LA} + 2 \cdot 4 = 0; \Rightarrow Q_{AL} = 3,5(\kappa H). \end{aligned}$$

Епюра дійсних поперечних сил показана на рис.10.19,а.

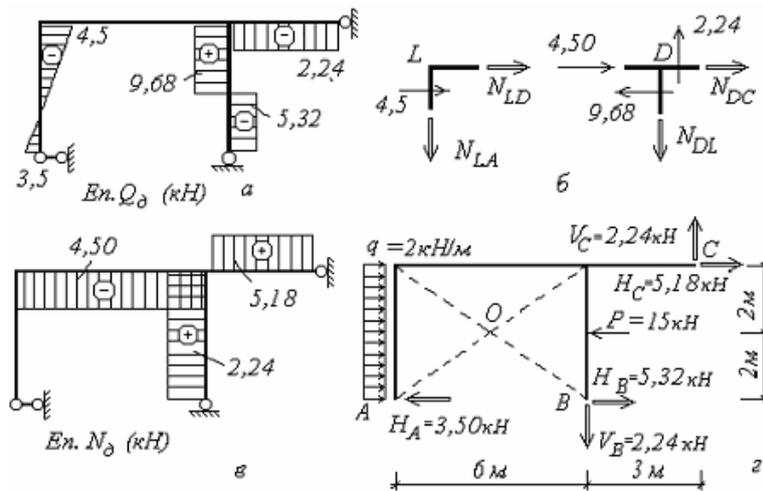


Рис.10.19

8) Ординати епюри дійсних поздовжніх сил обчислюються з умов рівноваги вузлів рами (рис.10.19,б)

$$\text{Вузол } L: \sum F_x = 0: N_{LD} + 4,5 = 0; \Rightarrow N_{LD} = -4,5 (\text{кН});$$

$$\sum F_y = 0: N_{LA} = 0.$$

$$\text{Вузол } D: \sum F_x = 0: N_{DC} + 4,5 - 9,68 = 0; \Rightarrow N_{DC} = 5,18 (\text{кН});$$

$$\sum F_y = 0: -N_{DF} + 2,24 = 0; \Rightarrow N_{DF} = 2,24 (\text{кН}).$$

Епюра дійсних поздовжніх сил зображена на рис.10.19,в.

9) Для виконання перевірки рівноваги рами в цілому необхідно по епюрах M_0 , Q_0 , N_0 визначити значення опорних реакцій і перевірити умову рівноваги (рис. 10.18,з)

$$\begin{aligned} \sum M_O &= -2H_A - 3V_B + 2H_B - 2H_C + 6V_C = \\ &= -2 \cdot 3,50 - 3 \cdot 6,57 + 2 \cdot 2,24 - 2 \cdot 5,18 + 6 \cdot 2,24 = 24,08 - 24,08 = 0. \end{aligned}$$

Відповідь: епюри внутрішніх зусиль для статично невизначуваної рами зображені на рис.10.15, з та рис.10.19,а,в.

10.3. Розрахунок симетричної рами методом сил

Дано: розрахункова модель (рис.10.20).

Необхідно: побудувати епюри внутрішніх зусиль.

Розв'язування:

1) Ступінь статичної невизначуваності рами

$$n = 3K - III = 3 \cdot 2 - 2 = 4.$$

Отже, рама чотири рази статично невизначувана. Структура плоскої рами – стержневий розгалужений диск, приєднаний до опорної

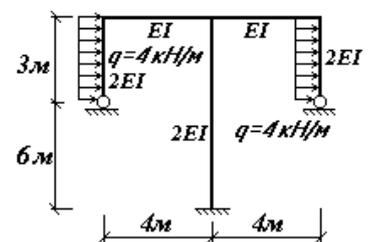


Рис. 10.20

поверхні двома простими шарнірами та припайкою свідчить про її геометричну незмінюваність.

2) Для розв'язку задачі методом сил можна використати одну із основних систем, запропонованих на рис.10.21.

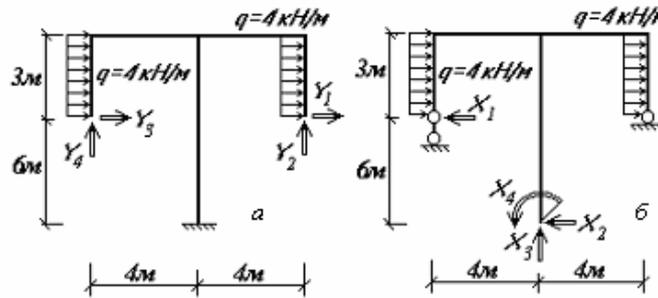


Рис.10.21

Розглянемо приклад розв'язку за першим варіантом основної системи (рис.10.21,а). Враховуючи симетрію геометрії та жорсткостей стержнів розрахункової схеми виконується заміна невідомих загального вигляду Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 (прикладених до симетричних точок) на попарно симетричні та кососиметричні невідомі X_1, X_2, X_3, X_4 (рис.10.22). Нові невідомі мають задовольняти наступні рівняння:

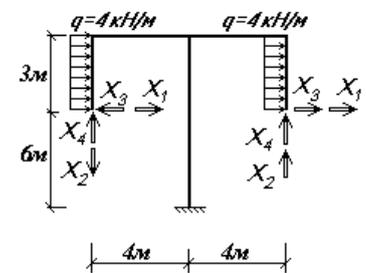


Рис. 10.22

$$X_1 + X_3 = Y_1,$$

$$X_1 - X_3 = Y_3,$$

$$X_4 + X_2 = Y_2,$$

$$X_4 - X_2 = Y_4.$$

3) Система канонічних рівнянь для чотири рази статично невизначуваної рами має вигляд

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2P} = 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3P} = 0; \\ \delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} = 0. \end{cases}$$

Від симетричного одиничного навантаження в третьому та четвертому одиничних станах епюри згинальних моментів будуть симетричними. Частина коефіцієнтів системи рівнянь, які обчислені множенням симетричних епюр на кососиметричні, дорівнюватимуть нулю, тому система канонічних рівнянь набуде вигляду

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + \Delta_{2P} = 0; \\ 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + 0 = 0; \\ 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + 0 = 0; \end{cases}$$

і може бути розділена на дві підсистеми

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0; & \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0; & \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 = 0. \end{cases}$$

Друга підсистема є однорідною і має тривіальний розв'язок $X_3 = 0; X_4 = 0$, тому для побудови епюр дійсних зусиль в статично невизначуваній рамі залишається відшукати корені лише першої підсистеми.

4) Для визначення коефіцієнтів та вільних членів системи канонічних рівнянь будуються епюри згинальних моментів для одиничних та вантажного станів (рис.10.23).

Обчислення коефіцієнтів та вільних членів системи рівнянь

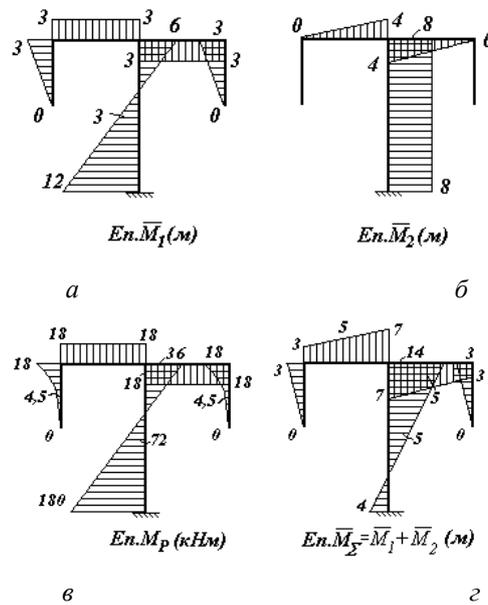


Рис. 10.23

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dx = 2 \left[\frac{1}{2EI} 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EI} 3 \cdot 4 \cdot 3 \right] + \frac{9}{6 \cdot 2EI} (6^2 + 4 \cdot 3^2 + 12^2) = \frac{243}{EI};$$

$$\delta_{12} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dx = 2 \left[\frac{1}{EI} 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right] - \frac{1}{2EI} 8 \cdot 9 \cdot 3 = -\frac{60}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EI} dx = 2 \left[\frac{1}{EI} 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} 8 \cdot 9 \cdot 8 \right] = \frac{331}{EI};$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} dx = 2 \left[\frac{3}{6 \cdot 2EI} (0 + 4 \cdot 4,5 \cdot 1,5 + 18 \cdot 3) + \frac{1}{EI} 18 \cdot 4 \cdot 3 \right] + \frac{9}{6 \cdot 2EI} (180 \cdot 12 + 4 \cdot 72 \cdot 3 + 36 \cdot 6) = \frac{2903}{EI};$$

$$\Delta_{2P} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_P}{EI} dx = 2 \left[\frac{1}{EI} 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 18 - \frac{1}{2EI} 8 \cdot 9 \cdot 72 \right] = -\frac{2304}{EI}.$$

Перевірка отриманих коефіцієнтів та вільних членів

$$\Delta_{\Sigma 1} = \sum \int \frac{\bar{M}_{\Sigma} \bar{M}_1}{EI} dx = 2 \left(\frac{1}{2EI} 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EI} 3 \cdot 4 \cdot 5 \right) + \frac{9}{6 \cdot 2EI} (6 \cdot 14 - 4 \cdot 3 \cdot 5 + 12 \cdot 4) = \frac{183}{EI};$$

$$\delta_{11} + \delta_{12} = \frac{243 - 60}{EI} = \frac{183}{EI};$$

$$\Delta_{\Sigma 2} = \sum \int \frac{\overline{M}_{\Sigma} \overline{M}_2}{EI} dx = 2 \frac{4}{6EI} (0 + 4 \cdot 2 \cdot 5 + 7 \cdot 4) + \frac{1}{2EI} 8 \cdot 9 \cdot 5 = \frac{271}{EI};$$

$$\delta_{12} + \delta_{22} = \frac{-60 + 331}{EI} = \frac{271}{EI};$$

$$\Delta_{\Sigma P} = \sum \int \frac{\overline{M}_{\Sigma} \overline{M}_P}{EI} dx = 2 \left[\frac{3}{6 \cdot 2EI} (0 + 4 \cdot 4,5 \cdot 1,5 + 18 \cdot 3) + \frac{1}{EI} 18 \cdot 4 \cdot 5 \right] + \frac{9}{6 \cdot 2EI} (180 \cdot 4 - 4 \cdot 72 \cdot 5 + 36 \cdot 14) = \frac{599}{EI};$$

$$\Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \frac{2903 - 2304}{EI} = \frac{599}{EI}.$$

5) Після підстановки коефіцієнтів та вільних членів система канонічних рівнянь набуває вигляду

$$\begin{cases} \frac{243}{EI} X_1 - \frac{60}{EI} X_2 + \frac{2903}{EI} = 0; \\ -\frac{60}{EI} X_1 + \frac{331}{EI} X_2 - \frac{2304}{EI} = 0. \end{cases}$$

Помноживши ліву і праву частини обох рівнянь на EI , маємо

$$\begin{cases} 243X_1 - 60X_2 = -2903; \\ -60X_1 + 331X_2 = 2304. \end{cases}$$

Розв'язком системи рівнянь є

$$X_1 = -10,707 \approx -10,70; \quad X_2 = 5,020.$$

Перевірка правильності розв'язування системи рівнянь підстановкою коренів у сумарне рівняння

$$\begin{aligned} (243 - 60) \cdot (-10,707) + (-60 + 331) \cdot 5,02 &= -595; \\ -2903 + 2304 &= -599. \end{aligned}$$

Відносна похибка визначення коренів системи рівнянь

$$\varepsilon = \frac{599 - 595}{595} \cdot 100\% = 0,7\%.$$

6) Побудова парціальних епюр згинальних моментів (рис.10.24)

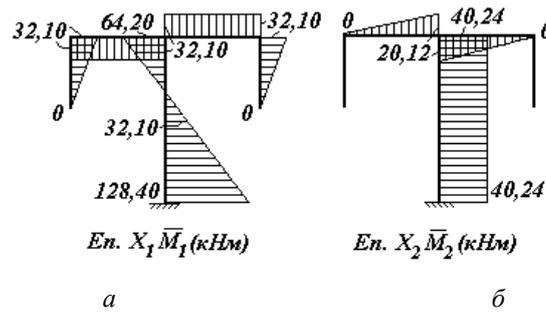


Рис. 10.24

Ординати дійсної епюри згинальних моментів (рис.10.25,*a*) визначаються за формулою

$$M_o = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_p = -10,70 \bar{M}_1 + 5,02 \bar{M}_2 + M_p .$$

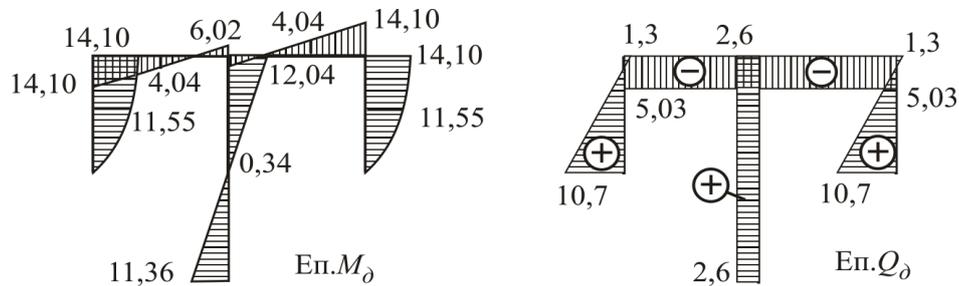


Рис.10.25

7) Кінематична перевірка (за контрольну прийнято епюру \bar{M}_Σ , рис.10.23,*з*)

$$\begin{aligned} \Delta_{\Sigma P} &= \sum \int \frac{\bar{M}_\Sigma M_p}{EI} dx = -2 \left[\frac{3}{6 \cdot 2EI} (0 + 4 \cdot 11,55 \cdot 1,5 + 14,10 \cdot 3) + \frac{4}{6 \cdot EI} \times \right. \\ &\times (3 \cdot 14,10 + 4 \cdot 5 \cdot 4,04 - 7 \cdot 6,03) \left. \right] + \frac{9}{6 \cdot 2EI} (11,36 \cdot 4 - 4 \cdot 0,34 \cdot 5 + 14 \cdot 12,04) = \\ &= \frac{-55,80 - 164,13 + 56,28 + 160,50 - 5,10}{EI} = \frac{216,78 - 225,03}{EI} = \frac{-8,25}{EI} . \end{aligned}$$

$$\text{Відносна похибка } \varepsilon = \frac{8,25}{216,78} \cdot 100\% = 3,8\% .$$

8) Епюра дійсних поперечних сил (рис.10.25,*б*) будується по епюрі дійсних згинальних моментів з використанням диференційної залежності між ними

$$Q(x) = dM(x)/dx .$$

9) Значення поздовжньої сили (рис.10.26,*a*) в перерізах рами визначаємо з умов рівноваги вузлів (рис.10.26,*б*)

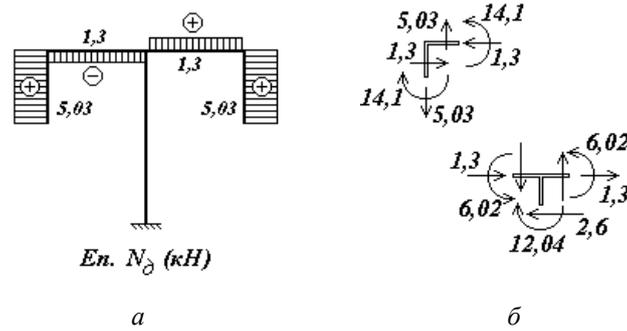


Рис. 10.26

10) Перевірка рівноваги рами в цілому (рис.10.27)

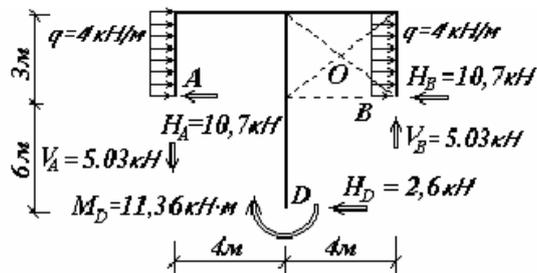


Рис.10.27

$$\begin{aligned} \sum M_O &= 6V_A + 2V_B - M_D - 1.5(H_A + H_B) - 7.5H_D = \\ &= 6 \cdot 5.03 + 2 \cdot 5.03 - 11.36 - 1.5 \cdot (10.7 + 10.7) - 7.7 \cdot 2.6 = \\ &= 51.6 - 51.6 = 0. \end{aligned}$$

Перевірка задовільна.

10.4. Задачі для самостійного опрацювання

Визначити внутрішні зусилля в стержнях розрахункових моделей, зображених на рис.10.28,а-е.

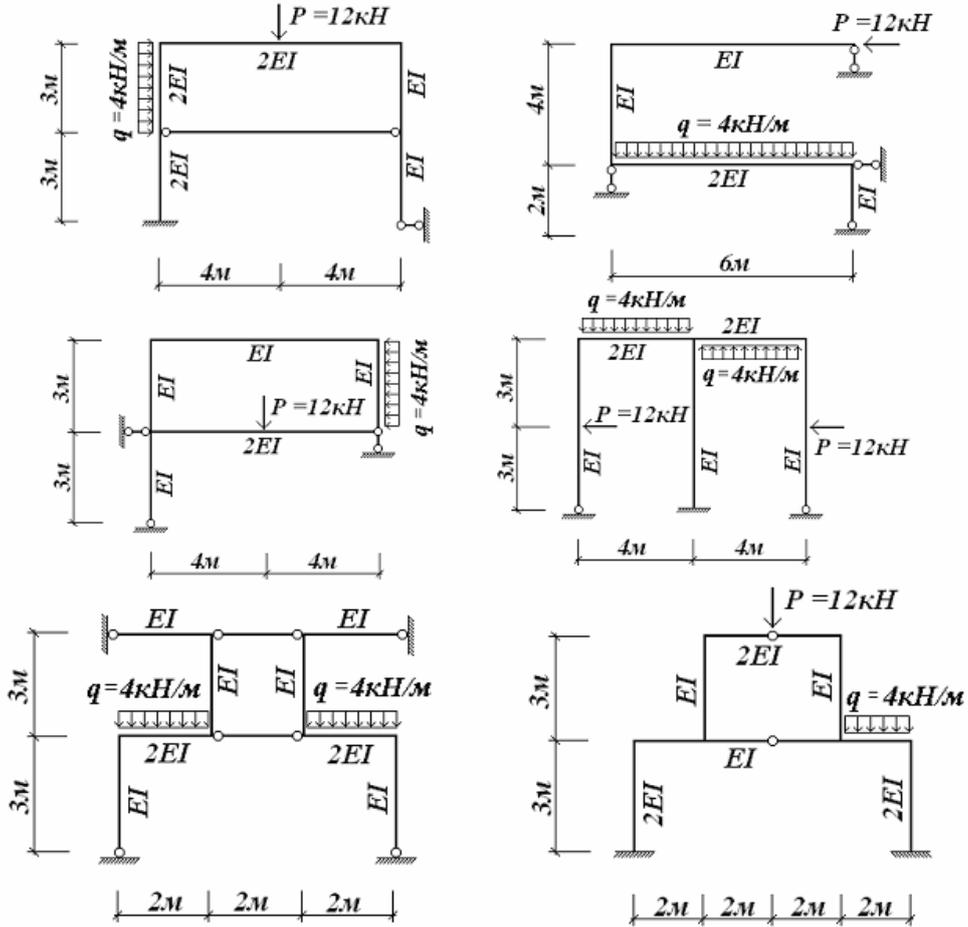


Рис.10.28

11. Статично невизначувані ферми

11.1.Короткі теоретичні відомості

11.1.1. Основна система та основні невідомі

Розрахунок статично невизначуваних ферм за методом сил має деякі особливості, які пов'язані з особливостями їхньої структури, навантаження і напружено-деформованого стану (див. главу 10). Так, ступінь статичної невизначуваності ферм можна обчислювати як за формулою (10.2), так і за іншою формулою, призначеною лише для ферм:

$$n = C + C_{on} - 2B, \quad (11.1)$$

де C – кількість стержнів ферми, C_{on} – кількість опорних стержнів, B – кількість вузлів ферми. Для ферми, що зображена на рис.11.1,а, $n = 17 + 4 - 2 \cdot 10 = 1$.

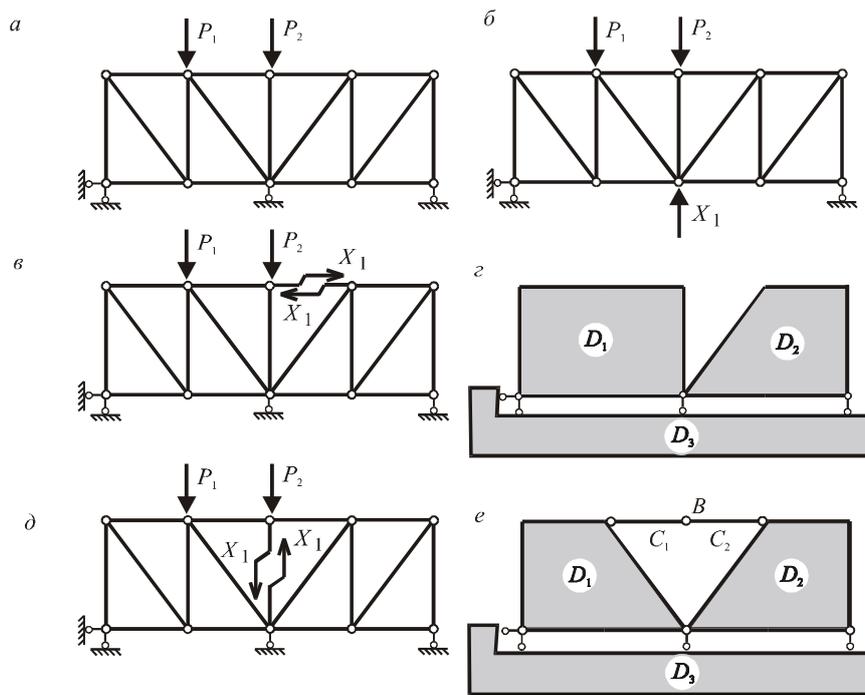


Рис.11.1

Якщо ж скористатися формулою (8.2), то можна записати:

$$n = 3k - u = 3 \cdot 10 - 29 = 1.$$

Маємо той самий результат, але він здобутий дещо складнішими розрахунками, що зумовлюється необхідністю обчислення кількості простих шарнірів.

Відкидання “зайвих” в’язей під час призначення основної системи здійснюється або відкиданням опорних стержнів, або розрізанням стержнів ферми. У першому випадку до ферми

прикладаються невідомі реакції відкинутих опорних в'язей (рис.11.1,б), у другому – до місця розрізу прикладаються поздовжні сили, величина яких невідома. В усіх випадках основна система повинна бути геометрично незмінюваною. Так, основна система, утворена розрізом стержня верхнього поясу (рис.11.1,в), є геометрично незмінюваною Її геометрична структура (рис.11.1,г) утворюється послідовним з'єднанням дисків простих ферм D_1 та D_3 способом Шухова, а потім диска D_2 способом Полонсо. Таким чином, вся ферма основної системи є диском. У той самий час основна система, утворена розрізом середньої стійки є миттєво змінюваною і не може застосуватись для розрахунку. Дійсно, до диска, утвореного послідовним з'єднанням дисків D_1 , D_2 та D_3 , приєднується вузол B за допомогою двох кінематичних в'язей C_1 і C_2 . Проте ці в'язі розташовано вздовж однієї прямої.

11.1.2. Розрахунок на нерухоме навантаження

Система канонічних рівнянь має звичайний вигляд і для ферми, що розглядається, може бути записана в такий спосіб:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

Для обчислення коефіцієнтів системи рівнянь необхідно утворити допоміжний і вантажний стан (рис.11.2,а,б).

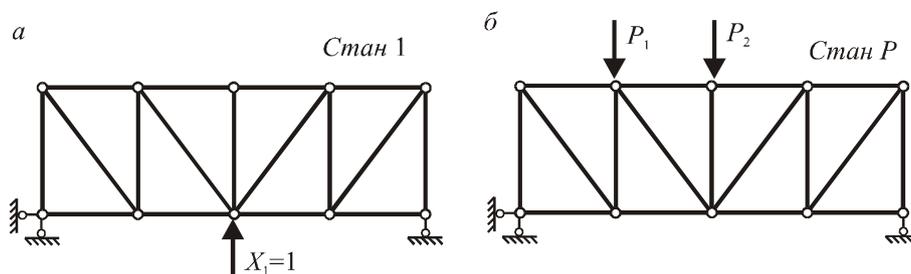


Рис.11.2

Оскільки в стержнях ферми виникають лише поздовжні сили, формула Мора набиратиме такий вигляд:

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EA_0} \sum_{k=1}^c \bar{N}_i \bar{N}_j l'_k; \quad \Delta_{ip} = \frac{1}{EA_0} \sum_{k=1}^c \bar{N}_i N_p l'_k. \quad (11.2)$$

У цих формулах $\bar{N}_i, \bar{N}_j, N_p$ – поздовжні зусилля в стержнях основної системи відповідно від дії одиничних невідомих $X_i = 1, X_j = 1$ і від зовнішнього навантаження, EA_0 – довільна константа, яку доцільно покласти такою, що дорівнює жорсткості на поздовжні деформації якогось стержня ферми, l' – зведені довжини стержнів ферми, які обчислюються за формулою

$$l'_k = \frac{EA_0}{EA_k} l_k, \quad (11.3)$$

де l_k , EA_k – відповідно довжина і жорсткість стержня k ферми на поздовжні деформації.

Дійсні зусилля можуть обчислюватись за способом накладання:

$$N_\delta = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n + N_p. \quad (11.4)$$

Кінематична перевірка розрахунку полягає в обчисленні завідомо нульового переміщення в напрямі відкинutoї в'язі:

$$\Delta_{i\delta} = \frac{1}{EA_0} \sum_{k=1}^c \bar{N}_i N_\delta l'_k = 0 \quad (11.5)$$

11.1.3. Побудова ліній впливу

Лініями впливу називають графіки, які показують, як змінюються ти чи інші параметри напружено–деформованого стану, коли по споруді переміщується одинична вертикальна сила. Побудова і використання ліній впливу в статично визначуваних системах розглянуто в підрозділі 7. Побудова ліній впливу для статично невизначуваних систем, зокрема ферм, має певні особливості. Вона полягає в тому, що насамперед необхідно побудувати лінії впливу основних невідомих.

Нехай статично невизначувана ферма (рис.11.3,а) перебуває під дією одиничної вертикальної сили, яка переміщується по верхньому поясу.

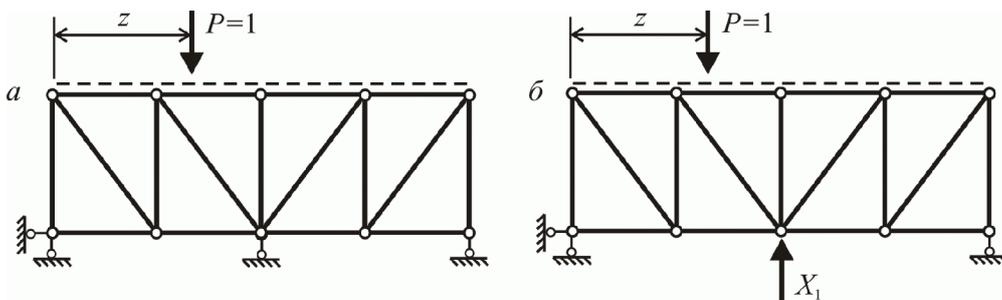


Рис.11.3

Основна система представлена на рис.11.3,б. Оскільки навантаження рухається по фермі, то величина основного невідомого залежить координати z , тобто є функцією положення сили в кожний момент часу $X_1 = X_1(z)$.

Канонічне рівняння методу сил при дії одиничного навантаження набуває вигляду

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1p} = 0. \quad (11.6)$$

Тут δ_{1P} – функція, що показує, як змінюється переміщення у напрямі основного невідомого X_1 при русі по верхньому поясу ферми вертикальної сили. Замість побудови лінії впливу δ_{1P} можна побудувати епюру прогинів вантажного поясу ферми δ_{P1} .

Одним із способів отримання епюри прогинів є спосіб пружних вантажів, за яким епюра прогинів еквівалентна епюрі згинальних моментів в балці, якою умовно замінюють вантажний пояс ферми. Балка завантажується системою зосереджених сил, кожна з яких чисельно дорівнює куту зламу між стержнями вантажного поясу у відповідному вузлі ферми.

Так, для обчислення пружного вантажу у вузлах вантажного поясу (рис.11.4) необхідно послідовно до кожного вузла основної системи прикласти одиничні моменти, спрямовані в протилежних напрямках. Для визначення зусиль в стержнях кожен з моментів замінюється парою сил.

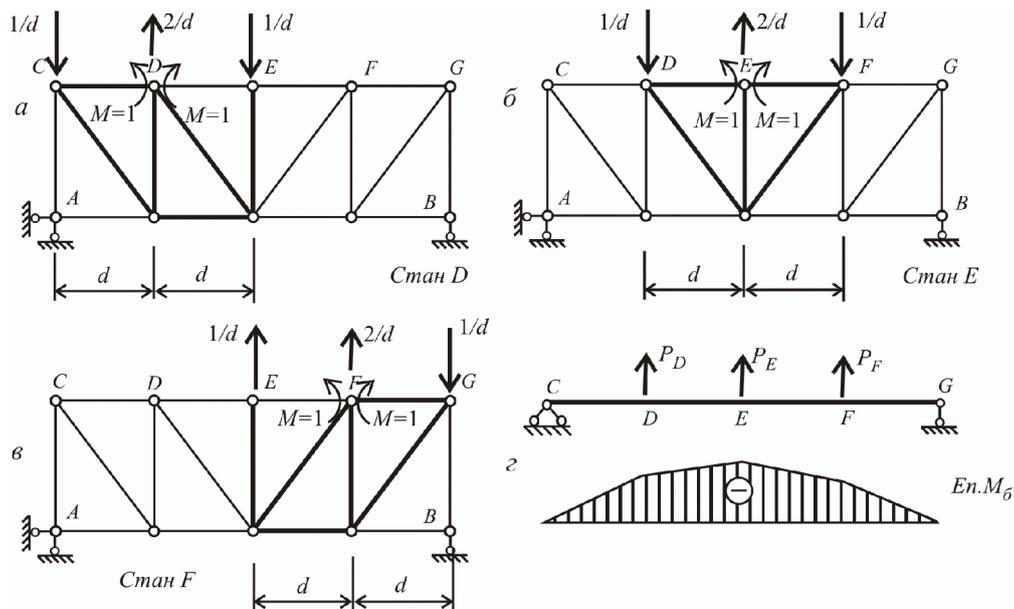


Рис.11.4

Від зазначеного навантаження зусилля виникають в стержнях лише двох суміжних з вузлом панелей. Такі стержні позначено товстими лініями. Тоді кути зламу вузлів основної системи від дії основних невідомих $X_1 = 1$, які дорівнюють пружним вантажам для відповідних вузлів, визначатиметься за формулою Максвела:

$$\begin{aligned}\delta_{D1} &= \frac{1}{EA_0} \sum_{k=1}^C \bar{N}_D \bar{N}_1 l' = P_D, \\ \delta_{E1} &= \frac{1}{EA_0} \sum_{k=1}^C \bar{N}_E \bar{N}_1 l' = P_E, \\ \delta_{F1} &= \frac{1}{EA_0} \sum_{k=1}^C \bar{N}_F \bar{N}_1 l' = P_F.\end{aligned}\quad (11.7)$$

Очевидно, що внаслідок симетрії основної системи, пружний вантаж для вузла F буде таким самим, як і для вузла D :

$$P_F = P_D.$$

Епюра згинальних моментів від пружних вантажів, прикладених до однопрогонової балки, представлена на рис.11.4,з. Вона дорівнює епюрі прогинів вантажного поясу балки за умови, що вузли D та F основної системи, які моделюються опорами балки, не мають вертикальних переміщень.

Для врахування прогинів опорних вузлів утворюється допоміжний стан C (рис.11.5,а).

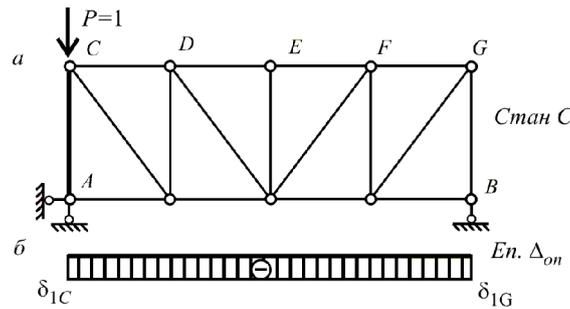


Рис.11.5

Тоді прогин визначається за формулою Максвела

$$\delta_{C1} = \frac{1}{EA_0} \sum_{k=1}^C \bar{N}_C \bar{N}_1 l' = \Delta_{on}$$

Такий самий прогин буде й у вузлі G . Епюру опорних прогинів (рис.11.6,в) необхідно додати до еп.Δ (рис.11.6,б) Це й буде повна епюра прогинів вантажного поясу δ_{p1} , яка еквівалентна лінії впливу переміщення δ_{1p} (рис.11.6,з).

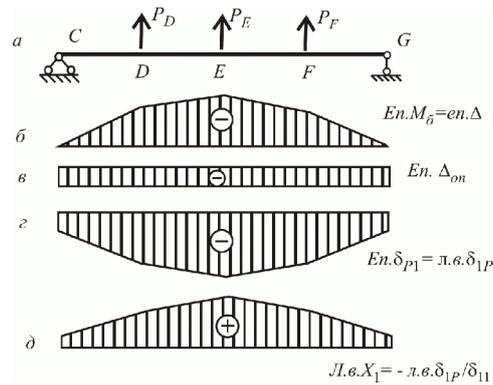


Рис.11.6

Лінія впливу основного невідомого X_1 (рис.11.6,д) будується на підставі розв'язання канонічного рівняння (11.6):

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

Лінія впливу зусилля в будь-якому стержні ферми k можна одержати за допомогою формули накладання:

$$л.в.N^k = \bar{N}_1^k л.в.X_1 + л.в.N_p^k, \quad (11.8)$$

де \bar{N}_1^k – зусилля в стержні k в одиничному стані;

л.в. \bar{N}_p^k – лінія впливу зусилля в стержні k , побудована в статично визначуваній основній системі.

11.2.Приклад розрахунку

Виконаємо розрахунок статично невизначуваної ферми, представленій на рис.11.5,а.

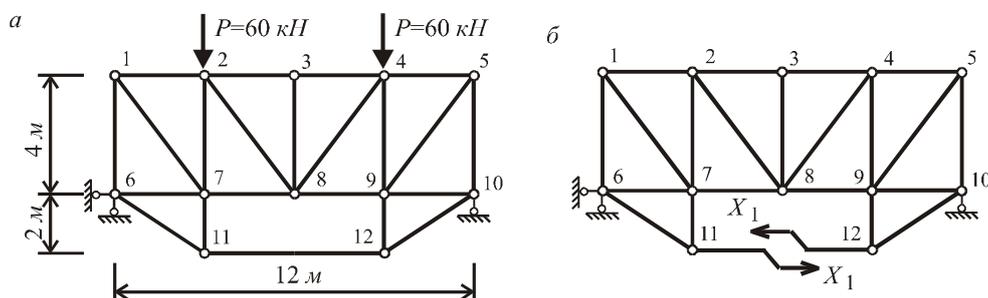


Рис.11.7

Стержні ферми мають такі жорсткості:

- нижній пояс і підвіска – EA ;
- верхній пояс і стійки – $2EA$;
- розкоси – $1,5EA$.

Ступінь статичної невизначуваності

Ступінь статичної невизначуваності обчислюємо за формулою (11.1):

$$n = 22 + 3 - 2 \cdot 12 = 1.$$

Оскільки кількість опорних в'язей дорівнює їх мінімально можливій кількості, очевидно, що “зайвим” можна вважати один зі стержнів решітки.

Вибір основної системи

Основну систему утворимо шляхом розрізу горизонтального стержня підвіски (рис.11.8,*a*). Легко впевнитись, що перетворена в такий спосіб ферма утворена способом “діади” і, отже, є геометрично незмінюваною. За основне невідоме X_1 береться зусилля, яке діє в горизонтальному стержні підвіски.

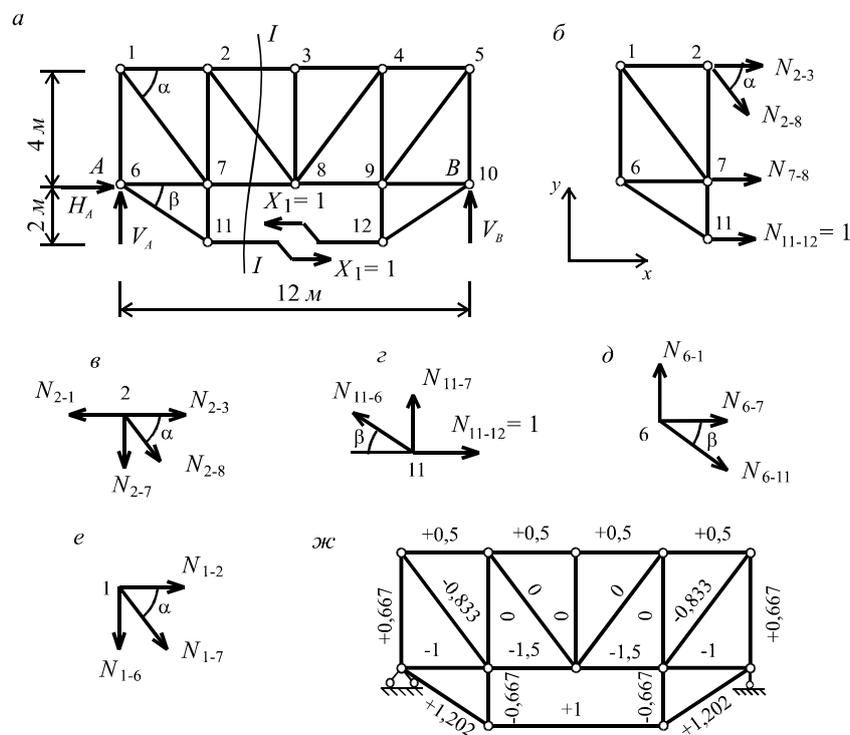


Рис.11.8

Допоміжний стан основної системи

Визначення опорних реакцій (рис.11.8,*a*)

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\Rightarrow V_A \cdot 12 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_A = 0; \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow -V_B \cdot 12 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_B = 0; \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_A - 1 + 1 = 0 \Rightarrow H_A = 0. \end{aligned}$$

Тригонометричні функції кутів нахилу стержнів визначимо по геометричній схемі ферми:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{l_{2-7}}{l_{1-7}} = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,8000; & \cos \alpha &= \frac{l_{1-2}}{l_{1-7}} = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,6000. \\ \sin \beta &= \frac{l_{7-11}}{l_{6-11}} = \frac{2}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 0,5547; & \cos \beta &= \frac{l_{6-7}}{l_{6-11}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 0,8320.\end{aligned}$$

Внутрішні зусилля

На підставі ознак нульових стержнів доходимо висновку, що стержень 3-8 є нульовим:

$$N_{3-8} = 0.$$

Виконавши розріз $I-I$ розглядаємо рівновагу лівої половини ферма (рис.11.8,б).

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{2-8} \sin \alpha = 0 \Rightarrow N_{2-8} = 0; \\ \sum M_7 = 0 &\Rightarrow N_{2-3} \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow N_{2-3} = +0,5; \\ \sum M_2 = 0 &\Rightarrow -N_{7-8} \cdot 4 - 1 \cdot 6 = 0 \Rightarrow N_{7-8} = -1,5.\end{aligned}$$

Розглядаємо рівновагу вузлів.

Вузол 2 (рис.11.8,в):

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow N_{2-3} - N_{2-1} + N_{2-8} \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_{2-1} = 0,5; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{2-7} - N_{2-8} \sin \alpha = 0 \Rightarrow N_{2-7} = 0.\end{aligned}$$

Вузол 11 (рис.11.8,г):

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow -N_{11-6} \cos \beta + N_{11-12} = 0 \Rightarrow N_{11-6} = \frac{1}{0,8320} = 1,202; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow N_{11-7} + N_{11-6} \sin \beta = 0 \Rightarrow N_{11-7} = -N_{11-6} \cdot 0,5547 = -0,667.\end{aligned}$$

Вузол 6 (рис.11.8,д):

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow N_{6-7} + N_{6-11} \cos \beta = 0 \Rightarrow N_{6-7} = -N_{6-11} \cdot 0,8320 = -1,000; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow N_{6-1} - N_{6-11} \sin \beta = 0 \Rightarrow N_{6-1} = N_{6-11} \cdot 0,667 = 0,667.\end{aligned}$$

Вузол 1 (рис.11.8,е):

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{1-7} \sin \alpha - N_{1-6} = 0 \Rightarrow N_{1-7} = -\frac{N_{1-6}}{0,8000} = -0,833; \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow N_{1-2} + N_{1-7} \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_{1-2} = -N_{1-7} \cdot 0,6000 = 0,5.\end{aligned}$$

Результати розрахунку (зусилля допоміжного стану N_1) наведено на рис. 11.8,ж.

11.2.1. Розрахунок на нерухоме навантаження

Вантажний стан основної системи (рис.11.9,а)

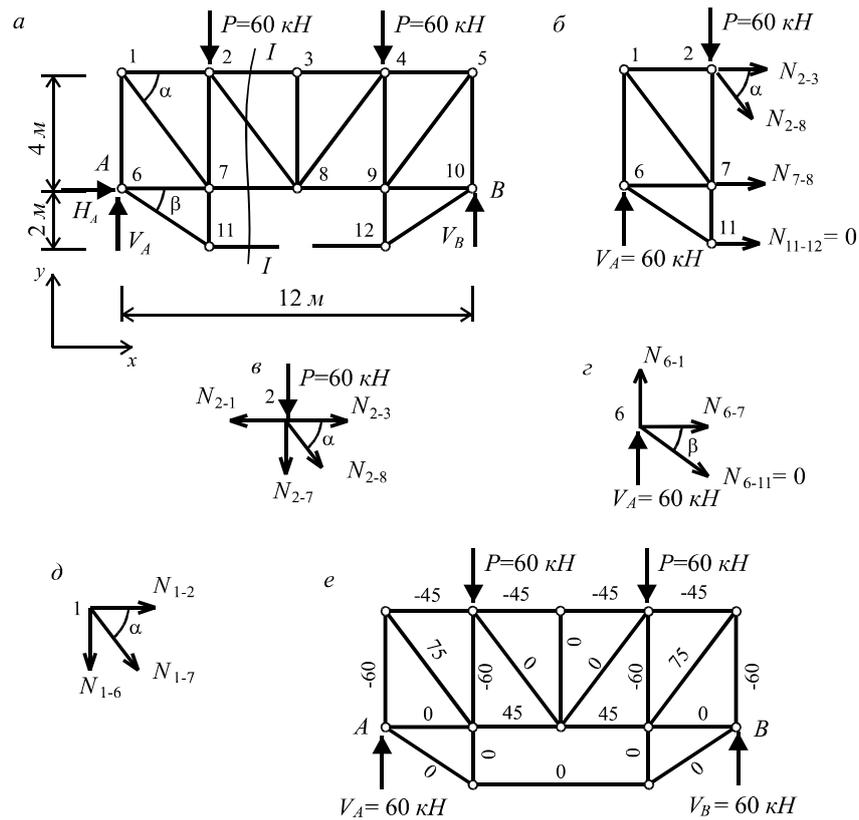


Рис.11.9

Визначення опорних реакцій

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\Rightarrow V_A \cdot 12 - 60 \cdot 9 - 60 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_A = 60 \text{ кН}; \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow -V_B \cdot 12 + 60 \cdot 9 + 60 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_B = 60 \text{ кН}; \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_A = 0. \end{aligned}$$

Внутрішні зусилля

Шість стержнів основної системи є завідомо нульовими:

$$N_{11-12} = N_{7-11} = N_{6-11} = N_{9-12} = N_{10-12} = N_{3-8} = 0.$$

Для визначення зусиль в інших стержнях скористаємось методами наскрізних перерізів та вирізання вузлів.

Переріз $I-I$ (рис.11.9,б).

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{2-8} \sin \alpha + 60 - 60 = 0 \Rightarrow N_{2-8} = 0; \\ \sum M_7 = 0 &\Rightarrow N_{2-3} \cdot 4 + 60 \cdot 3 = 0 \Rightarrow N_{2-3} = -45 \text{ кН}; \\ \sum M_2 = 0 &\Rightarrow -N_{7-8} \cdot 4 + 60 \cdot 4 = 0 \Rightarrow N_{7-8} = 45 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Вузол 2 (рис.11.9,в):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow -N_{2-1} + N_{2-3} + N_{2-8} \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_{2-1} = -45 \text{ кН}; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{2-7} - N_{2-8} \sin \alpha - 60 = 0 \Rightarrow N_{2-7} = -60 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Вузол 6 (рис.11.9,з):

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow N_{6-7} + N_{6-11} \cos \beta = 0 \Rightarrow N_{6-7} = 0; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow N_{6-1} - N_{6-11} \sin \beta + 60 = 0 \Rightarrow N_{6-1} = -60 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Вузол 1 (рис.11.9,д):

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{1-7} \sin \alpha - N_{1-6} = 0 \Rightarrow N_{1-7} = -\frac{N_{1-6}}{0,8000} = 75 \text{ кН}; \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow N_{1-2} + N_{1-7} \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_{1-2} = -N_{1-7} 0,6000 = -45 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Унаслідок симетрії зусилля для правої половини основної системи є дзеркальним відбиттям зусиль лівої половини.

Система канонічних рівнянь методу сил

Унаслідок того, що задана ферма один раз статично невизначувана, система канонічних рівнянь методу сил складається з одного рівняння

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0,$$

яке виражає рівність нулю взаємного наближення точок прикладення основних невідомих.

Обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь

Практичний розрахунок рами складається з однотипних обчислень для всіх стержнів ферми, тому розрахунок зручно виконувати в табличній формі (див. табл. 11.1).

Перший стовпець містить перелік всіх стержнів ферми. Стовпці 2 і 3 – довжини стержнів і жорсткості – визначаються по схемі ферми. Тут вважаємо, що $EA_0 = EA$. Зведені довжини стержнів, обчислені за формулою (11.3), записано в стовпець 4.

Зусилля в допоміжному і вантажному станах основної системи занесено відповідно в стовпці 5 і 6.

Коефіцієнти системи рівнянь визначаються за формулами (11.2). Обчислення записані в стовпці 7 і 8. Суми чисел в цих стовпцях дорівнюють відповідно коефіцієнтам δ_{11} та Δ_{1P} . Отже

$$\delta_{11} = \frac{45,602}{EA_0}, \quad \Delta_{1P} = -\frac{1116,580}{EA_0}.$$

Таблиця 11.1

Ст.	l	$\frac{EA}{EA_0}$	l'	N_1	N_P	$N_1 N_1 l'$	$N_P N_1 l'$	$N_1 X_1$	N_δ	$N_\delta N_1 l'$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

1-2	3	2	1,5	0,5	-45	0,375	-33,750	12,243	-32,757	-24,568	
2-3	3	2	1,5	0,5	-45	0,375	-33,750	12,243	-32,757	-24,568	
3-4	3	2	1,5	0,5	-45	0,375	-33,750	12,243	-32,757	-24,568	
4-5	3	2	1,5	0,5	-45	0,375	-33,750	12,243	-32,757	-24,568	
6-7	3	1	3	-1	0	3,000	0	-24,485	-24,485	73,456	
7-8	3	1	3	-1,5	45	6,750	-202,500	-36,728	8,272	-37,224	
8-9	3	1	3	-1,5	45	6,750	-202,500	-36,728	8,272	-37,224	
9-10	3	1	3	-1	0	3,000	0	-24,485	-24,485	73,456	
1-6	4	2	2	0,667	-60	0,890	-80,040	16,332	-43,668	-58,254	
2-7	4	2	2	0	-60	0	0	0	-60	0	
3-8	4	2	2	0	0	0	0	0	0	0	
4-9	4	2	2	0	-60	0	0	0	-60	0	
5-10	4	2	2	0,667	-60	0,890	-80,040	16,332	-43,668	-58,254	
1-7	5	1,5	3,333	-0,833	75	2,313	-208,250	-20,396	54,604	-151,616	
2-8	5	1,5	3,333	0	0	0	0	0	0	0	
4-8	5	1,5	3,333	0	0	0	0	0	0	0	
5-9	5	1,5	3,333	-0,833	75	2,313	-208,250	-20,396	54,604	-151,616	
7-11	2	1	2	-0,667	0	0,890	0	-16,332	-16,332	21,786	
9-12	2	1	2	-0,667	0	0,890	0	-16,332	-16,332	21,786	
6-11	3,605	1	3,605	1,202	0	5,209	0	29,431	29,431	127,532	
10-12	3,605	1	3,605	1,202	0	5,209	0	29,431	29,431	127,532	
11-12	6	1	6	1	0	6,000	0	24,485	24,485	146,912	
							45,602	-1116,580			0,000

Розв'язання канонічних рівнянь

Підставляємо коефіцієнти до канонічного рівняння:

$$\frac{45,602}{EA_0} X_1 - \frac{1116,580}{EA_0} = 0.$$

Звідси

$$X_1 = 24,485.$$

Обчислення дійсних зусиль в стержнях ферми

Дійсні зусилля в стержнях статично невизначуваної ферми обчислимо, базуючись на принципі незалежності дій сил, як суми зусиль в основній системі від основного невідомого і від зовнішнього навантаження, тобто за формулою

$$N_o = \bar{N}_1 X_1 + N_p.$$

Добутки $\bar{N}_1 X_1$ підраховуються в стовпці 9, а дійсні зусилля – в стовпці 11.

Кінематична перевірка результатів розрахунку

Результати розрахунку перевіряються перемноженням дійсних зусиль в стержнях ферми N_o на одиничні зусилля \bar{N}_1 за формулою (11.5), тобто

$$\Delta_{1o} = \frac{1}{EA_0} \sum \bar{N}_1 N_o l'.$$

Перемноження для кожного стержня записуються в стовпці 11. Сума чисел стовпця дорівнює нулю, тобто

$$\Delta_{1o} = \frac{1}{EA_0} \sum \bar{N}_1 N_o l' = 0.$$

Отже, розрахунок виконано правильно.

11.2.2. Побудова ліній впливу

Будемо вважати, що одинична сила рухатиметься по верхньому поясу ферми (рис.11.10,*а*).

Система канонічних рівнянь методу сил

Система канонічних рівнянь методу сил складається з одного рівняння

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1p} = 0,$$

яке виражає рівність нулю взаємного наближення точок прикладення основних невідомих. Вільний член δ_{1p} канонічного рівняння являє собою функцію координати z прикладання одиничної сили (рис.11.10,*б*). Графік цієї функції буде лінією впливу зближення кінців стержня, розрізаного при виборі основної системи.

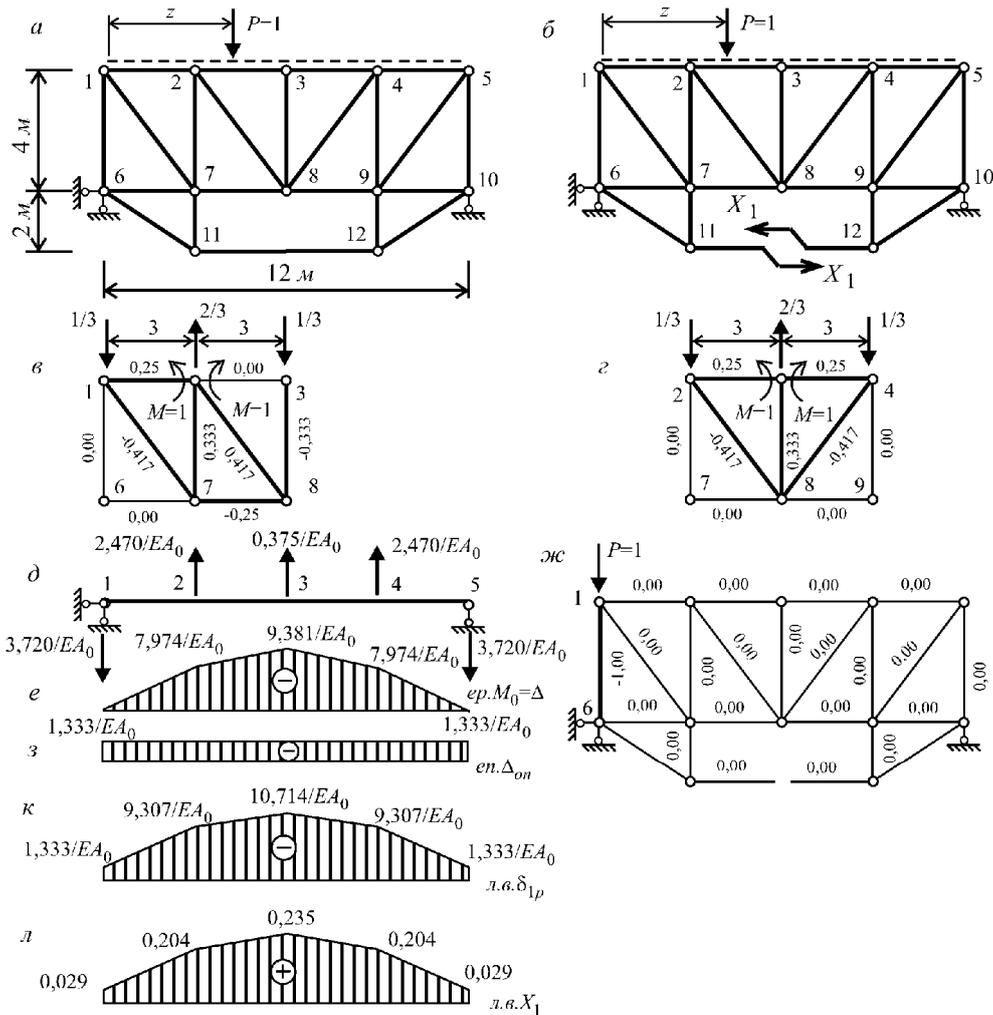


Рис.11.10

Визначення вільного члена

Лінію впливу δ_{1P} , яка еквівалентна епюрі прогинів вантажного (верхнього) поясу δ_{P1} основної системи, побудуємо методом пружних вантажів. У кожному вузлі основної системи визначається пружний вантаж, який чисельно дорівнює куту зламу між стержнями вантажного поясу у вузлі від дії одиничного невідомого $X_1 = 1$.

Пружний вантаж для вузла 2

На рис.11.10,в показано допоміжний стан для визначення кута зламу у вузлі 2. Для визначення зусиль в стержнях ферми одиничні моменти замінено парами сил. Зусилля \bar{N}_2 цього стану показано на рис.11.10,г. Обчислення кута зламу за формулою Максвела

$$\delta_{21} = \frac{1}{EA_0} \sum_{k=1}^c \bar{N}_2 \bar{N}_1 l' = P_2$$

здійснюється в табл.11.2.

Таблиця 11.2

№	l	$\frac{EA}{EA_0}$	l'	N_1	\bar{N}_2	$\bar{N}_2 \bar{N}_1 l'$
1-2	3	2	1,5	0,5	0,25	0.1875
7-8	3	1	3	-1,5	-0,25	1,1250
2-7	4	2	2	0	0,333	0
3-8	4	2	2	0	-0,333	0
1-7	5	1,5	3,333	-0,833	-0,417	1,1579
2-8	5	1,5	3,333	0	0,417	0
$\Sigma=$						2,4704

$$\text{Отже } P_2 = \frac{2,4704}{EA_0}.$$

Пружний вантаж для вузла 3

На рис.11.10,*г* показано допоміжний стан для визначення кута зламу у вузлі 3. Одиничні моменти замінено парами сил. Зусилля \bar{N}_3 цього стану показано на рис.11.10,*г*. Обчислення кута зламу за формулою Максвелла

$$\delta_{31} = \frac{1}{EA_0} \sum_{k=1}^c \bar{N}_3 \bar{N}_1 l' = P_3$$

здійснюється в табл.11.3.

Таблиця 11.3

№	l	$\frac{EA}{EA_0}$	l'	N_1	\bar{N}_3	$\bar{N}_3 \bar{N}_1 l'$
2-3	3	2	1,5	0,5	0,25	0,1875
3-4	3	2	1,5	0,5	0,25	0,1875
3-8	4	2	2	0	0,667	0
2-8	5	5	1	0	-0,417	0
4-8	5	5	1	0	0,417	0
$\Sigma=$						0,375

$$\text{Таким чином } P_3 = \frac{0,375}{EA_0}.$$

Пружний вантаж для вузла 4

Унаслідок симетрії основної системи пружний вантаж для вузла 4 такий самий, як для вузла 2:

$$P_4 = P_2 = \frac{2,4704}{EA_0}.$$

Епюра згинальних моментів від пружних вантажів

Пружні вантажі прикладаються до однопрогонової балки, яка моделює вантажний пояс основної системи (рис.11.10,д). Епюра згинальних моментів M_0 побудована на рис.11.10,е. Ця епюра характеризує прогини вантажного (у даному випадку верхнього) поясу (еп. Δ), якщо вважати що вузли, які моделюються опорами балки, не мають прогинів. Епюра прогинів є еквівалентною лінії впливу переміщення δ_{1P} .

Для перевірки визначимо величину Δ_{1P} від дії нерухомих сил, завантаживши зазначеним силами лінію впливу δ_{1P} .

$$\Delta_{1P} = \sum P_i y_i = 60 \cdot \left(-\frac{9,307}{EA_0} \right) + 60 \cdot \left(-\frac{9,307}{EA_0} \right) = -\frac{1116,84}{EA_0}.$$

З розрахунку на нерухоме навантаження $\Delta_{1P} = -\frac{1116,580}{EA_0}$, тобто результати, практично, однакові.

Лінія впливу основного невідомого

Лінія впливу основного невідомого X_1 визнається розв'язання канонічного рівняння (11.6):

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} \Rightarrow \text{л.в.} X_1 = -\frac{\text{л.в.} \delta_{1P} EA_0}{45,602}.$$

Відповідний графік (л.в. X_1) представлено на рис.11.10,л.

Завантаживши одержану лінію впливу нерухомим навантаженням (рис.11.9,а) маємо

$$X_1 = \sum P_i y_i = 60 \cdot 0,204 + 60 \cdot 0,204 = 24,48 \text{ кН},$$

що відповідає результату попереднього розрахунку ($X_1 = 24,485 \text{ кН}$).

Лінія впливу зусилля в стержні 7-8 ферми

Лінія впливу зусилля в стержні к ферми будується відповідно до формули (11.8). Для обраного стержня вона набуває вигляду

$$\begin{aligned} \text{л.в.} N_{7-8} &= \bar{N}_1^{7-8} \text{ л.в.} X_1 + \text{л.в.} N_P^{7-8} = \\ &= (-1,5) \text{ л.в.} X_1 + \text{л.в.} N_0^{7-8}. \end{aligned}$$

Тут $\text{л.в.} N_0^{7-8}$ - лінія впливу зусилля для даного стержня в статично визначуваній основній системі.

Процес побудови лінії впливу показано на рис.11.11.

Завантаження лінії впливу нерухомими силами дає

$$N_{7-8} = \sum P_i y_i = 60 \cdot 0,2565 + 60 \cdot (-0,1185) = -6.8535 \text{ кН},$$

що відповідає результату розрахунку на нерухоме навантаження.

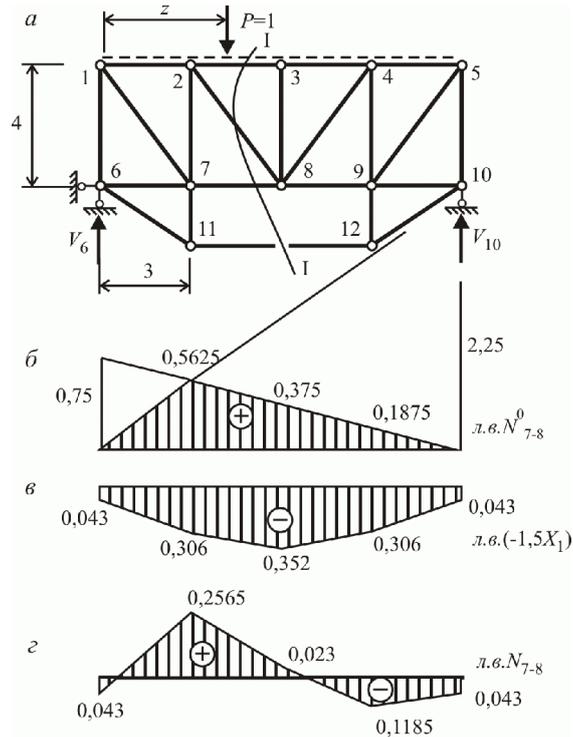


Рис.11.11

11.3. Задачі для самостійного опрацювання

Розрахувати статично невизначувані ферми (рис.11.12). Жорсткості всіх стержнів вважати однаковими.

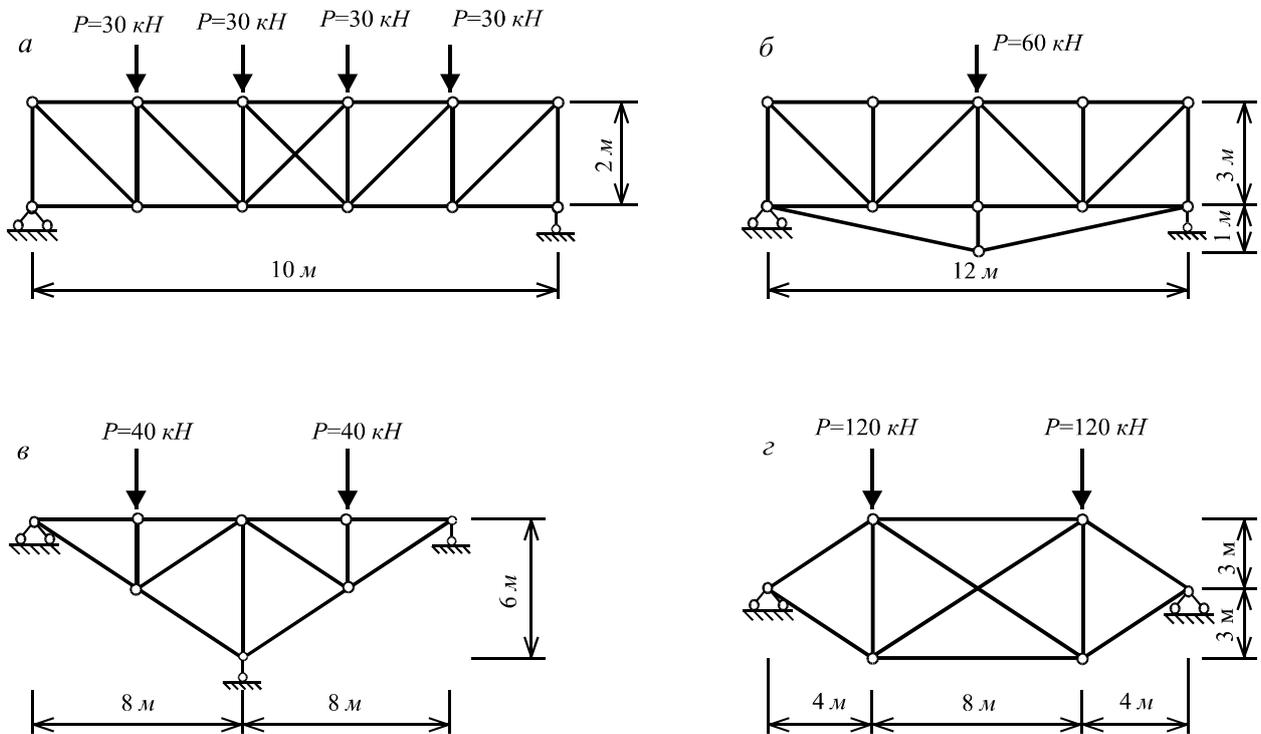


Рис.11.12

12. Нерозрізна балка

12.1. Основні теоретичні відомості

Нерозрізною називають статично невизначувану багатопрогонову балку, яка на всьому протязі не переривається шарнірами. Ступінь її статичної невизначуваності зручно визначати за формулою:

$$n = C - 3, \tag{12.1}$$

де C – кількість опорних в'язей (затиснення еквівалентне трьом в'язям, шарнірно-нерухома опора – двом, а шарнірно-рухома – одній в'язі).

Розрахунок нерозрізної балки полягає у визначенні внутрішніх зусиль. Найбільш відповідальною і трудомісткою складовою розрахунку є визначення згинальних моментів над опорами балки, так званих опорних моментів. Для цього використовують метод трьох моментів або метод моментних фокусів.

1. Метод трьох моментів

Метод трьох моментів може бути застосований для розрахунку нерозрізних балок на будь-які навантаження. Система канонічних рівнянь методу сил може бути записана як система рівнянь трьох моментів для стандартної схеми балки.

Для переходу до стандартної схеми потрібно:

- відкинути консолі, якщо вони є, а затиснення замінити на фіктивні прогони нульової довжини;
- пронумерувати опори зліва направо;
- пронумерувати прогони в такий спосіб, щоб їхні номери відповідали номерам правих опор прогонів.

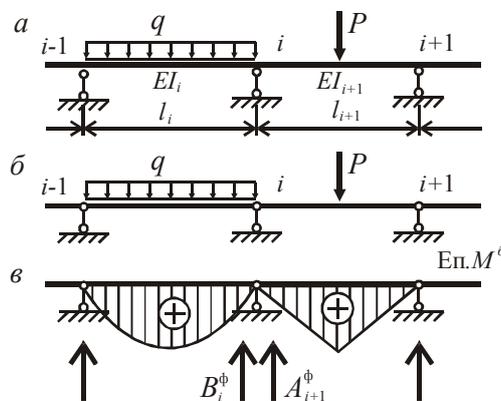


Рис. 12.1

Для кожної проміжної опори стандартної схеми i (рис.12.1,а) складається рівняння, яке зв'язує опорні моменти на двох суміжних прогонах:

$$l'_i M_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1})M_i + l'_{i+1}M_{i+1} = -6 \left(\frac{l'_i}{l_i} B_i^\phi + \frac{l'_{i+1}}{l_{i+1}} A_{i+1}^\phi \right). \quad (12.1)$$

Тут позначено: l'_i, l'_{i+1} – зведені довжини прогонів, які обчислюються за формулами:

$$l'_i = \frac{EI_o}{EI_i} l_i, \quad l'_{i+1} = \frac{EI_o}{EI_{i+1}} l_{i+1}, \quad \text{де } EI_o \text{ – жорсткість на згин одного з прогонів балки, яка обирається за}$$

основну; B_i^ϕ, A_{i+1}^ϕ – фіктивні опорні реакції (рис.12.1,в) на опорі i в прогонах l_i і l_{i+1} шарнірної основної системи (рис.12.1,б) відповідно. Величини фіктивних опорних реакцій наведено в таблиці 12.1.

Таблиця 12.1

Схема навантаження в прогоні	A^ϕ	B^ϕ	Схема навантаження в прогоні	A^ϕ	B^ϕ
	$\frac{ql^3}{24}$	$\frac{ql^3}{24}$		$\frac{Pl^2}{6}uv(1+v)$	$\frac{Pl^2}{6}uv(1+u)$
	$\frac{Pl^2}{16}$	$\frac{Pl^2}{16}$		$\frac{9ql^3}{384}$	$\frac{7ql^3}{384}$
	$-\frac{Ml}{24}$	$\frac{Ml}{24}$		$-\frac{Ml}{6}(1-3v^2)$	$\frac{Ml}{6}(1-3u^2)$
	$\frac{3Pl^2}{32}$	$\frac{3Pl^2}{32}$		$\frac{11ql^3}{384}$	$\frac{11ql^3}{384}$

Розв'язання системи рівнянь трьох моментів визначає згинальні моменти нерозрізної балки над її опорами.

2.Метод моментних фокусів

Метод моментних фокусів може бути застосовано для розрахунку нерозрізних балок, у яких навантажено лише один прогін (рис.12.2,а).

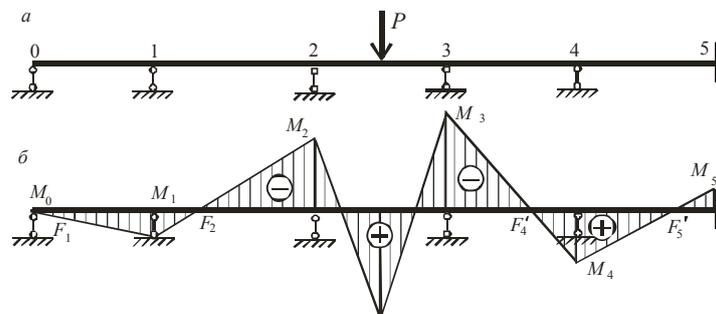


Рис.12.2

Епюра згинальних моментів (рис.12.2,б) в нерозрізній балці з одним навантаженим прогоном має такі властивості:

- у міру віддалення від навантаженого прогону опорні моменти зменшуються за значенням;
- на кожному ненавантаженому прогоні епюра M прямолінійна і перетинає вісь балки, тобто має нульову точку. Цю точку називають **моментним фокусом** даного прогону.

Розрізняють ліві й праві моментні фокуси. Лівим фокусом називають нульову точку епюри M у ненавантаженому прогоні, якщо він розташований ліворуч від навантаженого прогону (точки F_1, F_2 на рис. 12.2,б). Аналогічно визначаються праві фокуси (точки F'_4, F'_5).

Кожному фокусу відповідає додатне число, яке називається **фокусним співвідношенням**. Воно характеризує співвідношення опорних моментів на кінцях даного ненавантаженого прогону.

Ліве фокусне співвідношення для довільного прогону i має вигляд

$$k_i = 2 + \frac{l'_{i-1}}{l'_i} \left(2 - \frac{1}{k_{i-1}} \right). \quad (12.2)$$

Для правих фокусних співвідношень маємо аналогічну формулу:

$$k'_i = 2 + \frac{l'_{i+1}}{l'_i} \left(2 - \frac{1}{k'_{i+1}} \right). \quad (12.3)$$

Формула (12.2) дає змогу обчислити ліве фокусне співвідношення в прогоні l_i , якщо відоме фокусне співвідношення в попередньому прогоні l_{i-1} , а для обчислення правого фокусного співвідношення за формулою (12.3) потрібно мати співвідношення у прогоні l_{i+1} . Таким чином обчислення лівих фокусних співвідношень необхідно розпочинати з лівого, а правих – з правого кінця балки. Крім того, необхідно мати ліве фокусне співвідношення у крайньому лівому і праве фокусне співвідношення у крайньому правому прогоні, які залежать від виду крайньої опори. Ці величини зображені на рис.12.3.

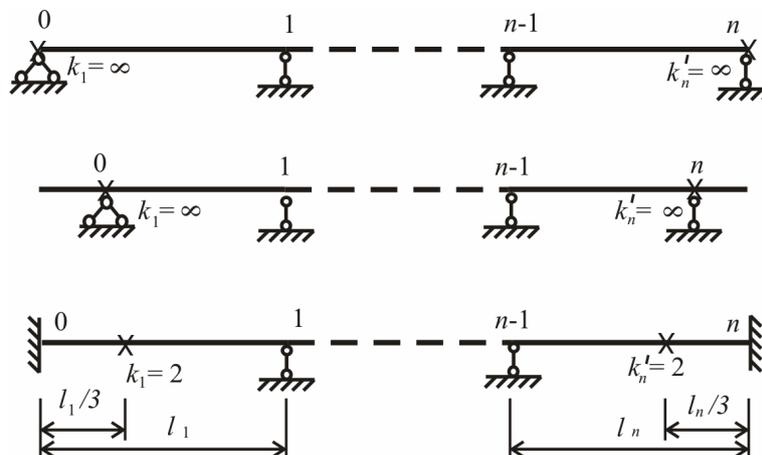


Рис.12.3

Для розрахунку нерозрізної балки методом моментних фокусів необхідно також визначити опорні моменти на кінцях навантаженого прогону. На рис.12.4 представлено фрагмент балки, який містить навантажений прогін.

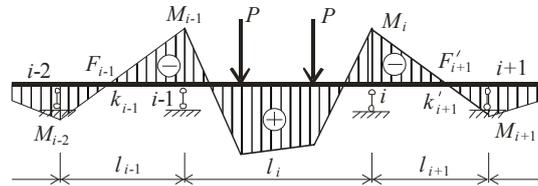


Рис.12.4

Опорні моменти на кінцях навантаженого прогону визначаються формулами:

$$M_{i-1} = -\frac{6}{l_i} \cdot \frac{A_i^\phi k_i' - B_i^\phi}{k_i k_i' - 1} \quad \text{або} \quad M_{i-1} = -\frac{6}{l_i} \cdot \frac{A_i^\phi - B_i^\phi / k_i'}{k_i - 1 / k_i'}, \quad (12.4)$$

$$M_i = -\frac{6}{l_i} \cdot \frac{B_i^\phi k_i - A_i^\phi}{k_i k_i' - 1} \quad \text{або} \quad M_i = -\frac{6}{l_i} \cdot \frac{B_i^\phi - A_i^\phi / k_i}{k_i' - 1 / k_i}. \quad (12.5)$$

Визначення опорних моментів в нерозрізній балці методом моментних фокусів здійснюється в такій послідовності:

- обчислюються фокусні співвідношення за формулами (12.2) і (12.3);
- визначаються опорні моменти на лівому і правому кінцях навантаженого прогону за формулами (12.4) – (12.5);
- переміщуючись ліворуч відносно завантаженого прогону, послідовно обчислюються опорні моменти на наступних опорах через ліві фокусні співвідношення ($M_j = -M_{j+1}/k_{j+1}$);
- переміщуючись праворуч відносно завантаженого прогону, послідовно обчислюються опорні моменти на наступних опорах через праві фокусні співвідношення ($M_j = -M_{j-1}/k_j$).

3. Внутрішні зусилля в прогонах

Внутрішні зусилля в прогонах виражаються через опорні моменти і навантаження в даному прогоні:

$$M_\partial^z = \frac{M_{i-1}}{l_i} (l_i - z) + \frac{M_i}{l_i} z + M_p^z. \quad (12.6)$$

$$Q_\partial^z = \frac{dM_\partial^z}{dz} = \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} + Q_p^z. \quad (12.7)$$

При необхідності побудови епюр наведені формули можна привести до вигляду:

$$M_\partial = M^{\text{оп}} + M^\sigma, \quad (12.8)$$

$$Q_\partial = Q^{\text{оп}} + Q^\sigma, \quad (12.9)$$

де M^o і Q^o – дійсні епюри згинальних моментів і поперечних сил; M^o і Q^o – епюри згинальних моментів і відповідних поперечних сил, побудовані в окремих прогонах як в однопрогонових балках; M^{op} , Q^{op} – епюри опорних моментів і поперечних сил. Для побудови першої з них величини опорних моментів відкладаються над опорами і з'єднуються відрізками прямих. Епюра опорних поперечних сил будується відповідною до епюри опорних моментів.

Опорні реакції можуть бути обчислені виходячи з рівнянь рівноваги опорних в'язей за формулою:

$$R_i = Q_{i+1} - Q_i. \quad (12.10)$$

Навантаження, що діють на будівельну конструкцію, можуть бути постійними або тимчасовими. Як постійне навантаження розглядається власна вага балки. Вага обладнання, яке розташовується на балці і в процесі експлуатації споруди може змінювати свою значення та розміщення, розглядається як тимчасове навантаження. Таким чином, внутрішні зусилля – це сума зусиль від дії постійного і тимчасових навантажень. Проте оскільки величини і розташування тимчасових навантажень можуть змінюватися, змінюватимуться і сумарні значення зусиль. Під час проектування важливо знати екстремальні величини зусиль, які можуть виникнути в системі за будь-яких можливих змін тимчасового навантаження.

У балках обчислюють максимальні і мінімальні згинальні моменти і поперечні сили:

$$\begin{aligned} M_{\max}^k &= M_{nocm}^k + \sum (+M_{тим}^k); \\ M_{\min}^k &= M_{nocm}^k + \sum (-M_{тим}^k); \\ Q_{\max}^k &= Q_{nocm}^k + \sum (+Q_{тим}^k); \\ Q_{\min}^k &= Q_{nocm}^k + \sum (-Q_{тим}^k). \end{aligned} \quad (12.11)$$

Епюри M_{\max} , M_{\min} , Q_{\max} , Q_{\min} , що характеризують максимальні і мінімальні згинальні моменти і поперечні сили, які виникають у перерізах балки за будь-яких передбачуваних тимчасових навантажень, називають огинаючими епюрами внутрішніх зусиль.

4. Побудова ліній впливу

Ліній впливу – це графіки, які показують, як змінюються опорні реакції та зусилля, при переміщенні по балці одиничної вертикальної сили.

Якщо рухома сила $P = 1$ розташована в одному з прогонів балки, то опорні моменти на кінцях завантаженого прогону визначаються по формулам (12.4), (12.5), які для даного навантаження можна представити у наступному вигляді:

$$M_{i-1} = M_{лів} = -\frac{l_i}{k_i k'_i - 1} \cdot (V k'_i - U),$$

$$M_i = M_{прав} = -\frac{l_i}{k_i k'_i - 1} \cdot (U k_i - V).$$
(12.12)

Якщо сила $P=1$ розташована в крайньому лівому прогоні l_1 , то

$$M_0 = M_{лів} = 0,$$

$$M_1 = M_{прав} = -\frac{l_1}{k'_1} \cdot U.$$
(12.13)

При розташуванні сили $P=1$ крайньому правому прогоні l_n , який на лівому кінці має шарнірну опору

$$M_{n-1} = M_{лів} = -\frac{l_n}{k_n} \cdot V,$$

$$M_n = M_{прав} = 0.$$
(12.14)

Величини U і V являють собою функції відносної координати $\xi = \frac{z}{l}$ прикладення одиничної сили $P=1$:

$$U = \xi(1 - \xi^2),$$

$$V = \xi(1 - \xi)(2 - \xi).$$
(12.15)

У табл.12.2 наведено значення функцій U та V для деяких значень відносної координати ξ .

Таблиця 12.2

ξ	U	V
0	0	0
0,25	0,2344	0,3281
0,50	0,3750	0,3750
0,75	0,3281	0,2344
1	0	0

Згинальні моменти на кінцях ненавантажених прогонів обчислюються за формулою

$$M_j = -\frac{M_{j+1}}{k_{j+1}},$$
(12.16)

якщо опора j розташована лівіше навантаженого прогона, або

$$M_j = -\frac{M_{j-1}}{k'_j},$$
(12.17)

якщо опора j розташована правіше навантаженого прогону.

За допомогою зазначених формул обчислюються опорні моменти для розташування одиничної сили $P=1$ у низці перерізів кожного прогону. За отриманими значеннями будуються лінії впливу опорних моментів.

Лінії впливу внутрішніх зусиль в перерізі будь-якого прогону будуються за формулами (12.6), (12.7), де M_{i-1} та M_i – лінії впливу опорних моментів на лівому та правому кінцях прогону; z – відстань від лівої опори прогону до перерізу; M_p^z, Q_p^z – лінії впливу відповідно згинального моменту та поперечної сили, побудовані в перерізі прогону як в простій двоопорній балці.

Лінія впливу опорної реакції R_i будується за співвідношенням (12.10). Тут Q_{i+1} – лінії впливу поперечної сили на лівому кінці правого, а Q_i – на правому кінці лівого прогону, які побудовано в прогонах як в окремих однопрогонових балках.

Побудовані лінії впливу дозволяють визначати зусилля чи опорні реакції від дій нерухомого навантаження. Так, якщо балка навантажена системою вертикальних зосереджених сил P_1, P_2, \dots, P_n , то шукана величина може бути обчислена за формулою

$$S = \sum_{i=1}^n P_i y_i, \quad (12.18)$$

де y_i – ординати лінії впливу величини S під відповідними силами.

Якщо на балці розташоване рівномірно розподілене навантаження, то величина S визначається формулою

$$S = q A_{Sq}, \quad (12.19)$$

де A_{Sq} – площа розташованої під навантаженням лінії впливу величини S .

Для визначення площин, обмежених кривими, можна використовувати формули чисельного інтегрування:

- формула трапецій:

$$A = \frac{l}{m} \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right); \quad (12.20)$$

- формула парабол (формула Сімпсона):

$$A = \frac{l}{3m} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-1} + y_n). \quad (12.21)$$

Тут l – інтервал інтегрування;

m – кількість ділянок розбиття інтервалу (для формули парабол має бути парною);

y_i – ординати лінії впливу в точках розбиття інтервалу.

12.2. Розрахунок статично невизначуваної балки на постійне навантаження методом трьох моментів

Нерозрізна балка, на яку діє рівномірно розподілене навантаження $g=1,2 \text{ кН/м}$ представлена на рис.12.5,а.

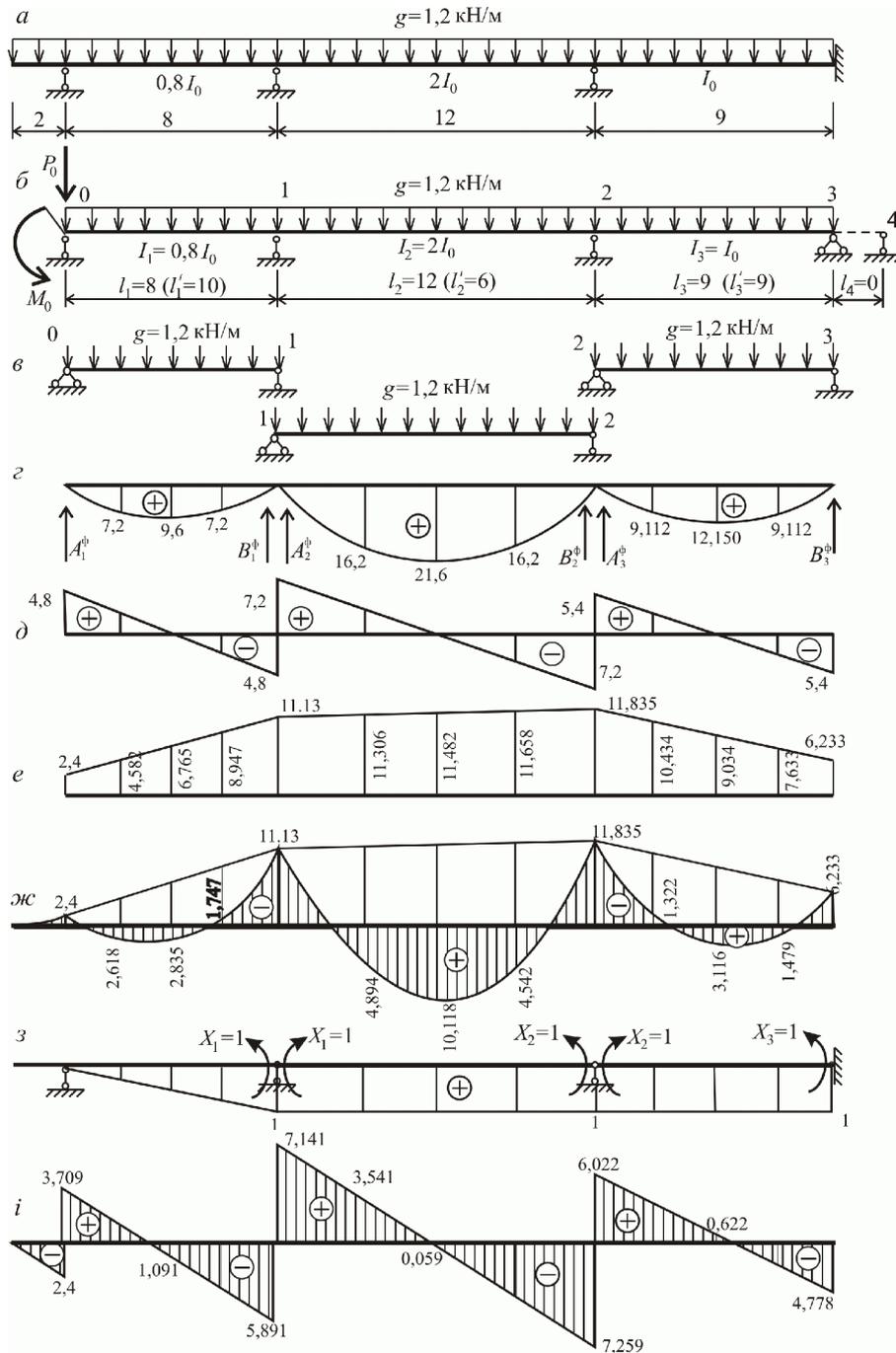


Рис.12.5

1.Ступінь статичної невизначуваності

$$n = 6 - 3 = 3.$$

Перехід до стандартної схеми балки

При переході до стандартної схеми затиснення на правому кінці балки замінено фіктивним прогоном нульової довжини, а консоль на лівому кінці відкинута. Рівномірне розподілене по консолі навантаження замінене зосередженими силою і моментом:

$$P_0 = 1,2 \cdot 2 = 2,4 \text{ кН}; \quad M_0 = 1,2 \cdot 2 \cdot 1 = 2,4 \text{ кНм}.$$

Опори стандартної схеми пронумеровано зліва направо. Прогони пронумеровано таким чином, щоб номер прогону відповідав номеру його правої опори. Приймаючи жорсткість EI_0 прогону l_3 за основну, визначаємо зведені довжини прогонів:

$$\begin{aligned} l'_1 &= \frac{EI_0}{EI_1} l_1 = \frac{EI_0}{0,8EI_0} 8 \text{ м} = 10 \text{ м}; \\ l'_2 &= \frac{EI_0}{EI_2} l_2 = \frac{EI_0}{2EI_0} 12 \text{ м} = 6 \text{ м}; \\ l'_3 &= \frac{EI_0}{EI_3} l_3 = \frac{EI_0}{EI_0} 9 \text{ м} = 9 \text{ м}. \end{aligned}$$

Стандартна схема балки показана на рис. 12.5,б.

2.Обчислення фіктивних опорних реакцій

Розглядаючи кожен прогін як балку на двох опорах (рис.12.5,в), будемо епюри балкових згинальних моментів M^ϕ і поперечних сил Q^ϕ від прогонових навантажень (рис.12.5,г і рис.12.5,д).

Користуючись табл.12.1 знаходимо фіктивні реакції опор:

$$\begin{aligned} A_1^\phi &= B_1^\phi = \frac{gl_1^3}{24} = \frac{1,2 \cdot 8^3}{24} = 25,6 \text{ кНм}^2; \\ A_2^\phi &= B_2^\phi = \frac{gl_2^3}{24} = \frac{1,2 \cdot 12^3}{24} = 86,4 \text{ кНм}^2; \\ A_3^\phi &= B_3^\phi = \frac{gl_3^3}{24} = \frac{1,2 \cdot 9^3}{24} = 36,45 \text{ кНм}^2; \\ A_4^\phi &= B_4^\phi = 0. \end{aligned}$$

3.Складання і розв'язування рівнянь трьох моментів

Складаємо рівняння трьох моментів (12.1) послідовно для кожної проміжної опори стандартної схеми балки, враховуючи, що згинальний опорний момент на крайній лівій опорі дорівнює $M_0 = -2,4 \text{ кНм}$ (момент від'ємний оскільки верхні волокна розтягнені), а на крайній правій опорі $M_4 = 0$.

Опора 1 ($i=1$)

$$\begin{aligned} M_0 l'_1 + 2M_1(l'_1 + l'_2) + M_2 l'_2 &= -6 \left(B_1^\phi \frac{l'_1}{l_1} + A_2^\phi \frac{l'_2}{l_2} \right), \\ (-2,4) \cdot 10 + 2M_1(10 + 6) + M_2 \cdot 6 &= -6 \left(25,6 \cdot \frac{10}{8} + 86,4 \cdot \frac{6}{12} \right), \end{aligned}$$

$$32M_1 + 6M_2 = -426,45.$$

Опора 2 ($i = 2$)

$$M_1 l'_2 + 2M_2 (l'_2 + l'_3) + M_3 l'_3 = -6 \left(B_2^\phi \frac{l'_2}{l_2} + A_3^\phi \frac{l'_3}{l_3} \right),$$

$$M_1 \cdot 6 + 2M_2 (6 + 9) + M_3 \cdot 9 = -6 \left(86,4 \cdot \frac{6}{12} + 36,45 \cdot \frac{9}{9} \right),$$

$$6M_1 + 30M_2 + 9M_3 = -477,9.$$

Опора 3 ($i = 3$)

$$M_2 l'_3 + 2M_3 (l'_3 + l'_4) + M_4 l'_4 = -6 \left(B_3^\phi \frac{l'_3}{l_3} + A_4^\phi \frac{l'_4}{l_4} \right),$$

$$M_2 \cdot 9 + 2M_3 (9 + 0) + 0 = -6 \left(36,45 \cdot \frac{9}{9} + 0 \right),$$

$$9M_2 + 18M_3 = -218,7.$$

Отже маємо систему розв'язувальних рівнянь

$$32M_1 + 6M_2 = -426,45,$$

$$6M_1 + 30M_2 + 9M_3 = -477,9,$$

$$9M_2 + 18M_3 = -218,7.$$

Звідси опорні моменти дорівнюють:

$$M_1 = -11,130 \text{ кНм}, \quad M_2 = -11,835 \text{ кНм}, \quad M_3 = -6,253 \text{ кНм}.$$

Побудова дійсної епюри моментів (рис.12.5,ж)

Будуємо епюру опорних моментів, відкладаючи знайдені опорні моменти над відповідними опорами (рис.12.5,е) і з'єднуючи їх прямолінійними відрізками. Дійсна епюра згинальних моментів в нерозрізній балці, отримана додаванням епюри опорних моментів (рис.12.5,е) і балкових епюр згинальних моментів (рис.12.5,з). Ця процедура рівнозначна відкладанню балкових епюр від лінії епюри опорних моментів. Інколи її називають "підвішуванням" балкових епюр.

4.Перевірка правильності дійсної епюри згинальних моментів

Для перевірки правильності розрахунку будуємо сумарну одиничну епюру згинальних моментів M_Σ (рис.12.5,з), ввівши до заданої схеми три шарніри і приклавши одиничні невідомі (моменти) водночас в усіх трьох шарнірах. Далі маємо за формулою Мора:

$$\begin{aligned} \Delta_{\Sigma\delta} &= \sum_0^l \int \frac{M_{\Sigma} M_{\delta}}{EI} dx = \frac{8}{6 \cdot 0,8 EI_0} (0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 2,835 - 1 \cdot 11,130) + \\ &+ \frac{12}{6 \cdot 2 EI_0} (-1 \cdot 11,130 + 4 \cdot 1 \cdot 10,118 - 1 \cdot 11,835) + \frac{9}{6 EI_0} (-1 \cdot 11,835 + \\ &+ 4 \cdot 1 \cdot 3,116 - 1 \cdot 6,233) = -\frac{9,100}{EI_0} + \frac{17,507}{EI_0} - \frac{8,406}{EI_0} = -\frac{17,506}{EI_0} + \frac{17,507}{EI_0} \approx 0. \end{aligned}$$

Відносна похибка

$$\varepsilon = \frac{17,507 - 17,506}{17,507} \cdot 100\% = 0,006\% < 1\%.$$

Отже, згідно кінематичній перевірці, епюра M_{δ} правильна.

5. Визначення поперечних сил

$$Q_{0-\kappa} = -1,2 \cdot 2 = -2,4 \text{ кН},$$

$$Q_{0-1} = \frac{(-11,130) - (-2,4)}{8} + 4,8 = 3,709 \text{ кН},$$

$$Q_{1-0} = \frac{(-11,130) - (-2,4)}{8} - 4,8 = -5,891 \text{ кН},$$

$$Q_{1-2} = \frac{(-11,835) - (-11,130)}{8} + 7,2 = 7,141 \text{ кН},$$

$$Q_{2-1} = \frac{(-11,835) - (-11,130)}{8} - 7,2 = -7,259 \text{ кН},$$

$$Q_{2-3} = \frac{(-6,253) - (-11,835)}{9} + 5,4 = 6,022 \text{ кН},$$

$$Q_{3-2} = \frac{(-6,253) - (-11,835)}{9} - 5,4 = -4,778 \text{ кН}.$$

Епюра поперечних сил побудована на рис. 12.5, і

6. Обчислення опорних реакцій

$$\begin{aligned} R_0 &= 3,709 - (-2,4) = 6,109 \text{ кН}, & R_2 &= 6,022 - (-7,259) = 13,281 \text{ кН}, \\ R_1 &= 7,141 - (-5,891) = 13,032 \text{ кН}, & R_3 &= 0 - (-4,448) = 4,778 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Перевірка рівноваги (рис. 12.6)

$$\sum F_y = 6,109 + 13,281 + 13,032 + 4,778 - 1,2 \cdot (2 + 8 + 12 + 9) = 0.$$

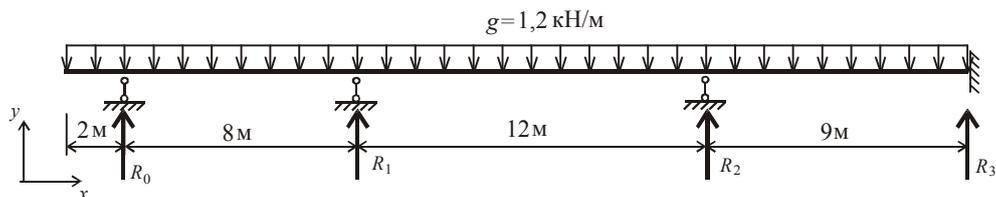


Рис. 12.6

12.3. Розрахунок нерозрізної балки на тимчасові навантаження методом моментних фокусів

Нехай на щойно розглянуту нерозрізну балку діють тимчасові навантаження (рис.12.7,*a*). Будемо розраховувати балку на окремі навантаження в кожному прогоні.

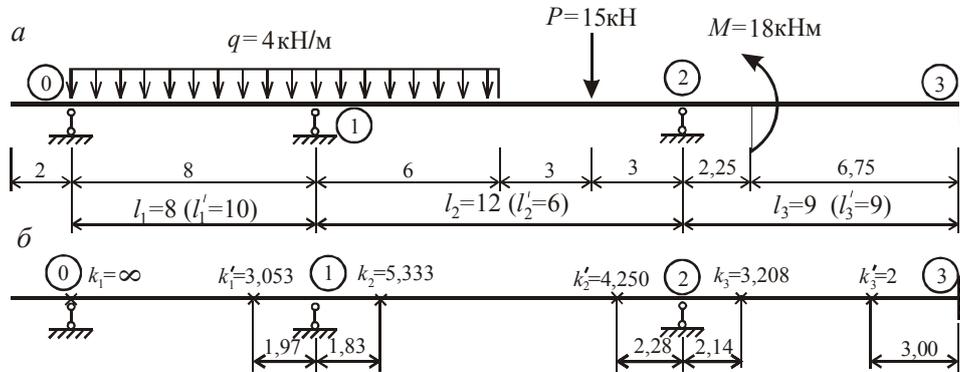


Рис.12.7

Обчислення фокусних співвідношень:

Ліві	Праві
$k_1 = \infty,$	$k'_3 = 2,$
$k_2 = 2 + \frac{10}{6} \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 5,333,$	$k'_2 = 2 + \frac{9}{6} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 4,250,$
$k_3 = 2 + \frac{6}{9} \left(2 - \frac{1}{5,333} \right) = 3,208.$	$k'_1 = 2 + \frac{6}{10} \left(2 - \frac{1}{4,250} \right) = 3,059.$

Визначення положення фокусів в прогонах балки

Прогон l_1 :	$a_1 = \frac{8}{1 + \infty} = 0,$	$b_1 = \frac{8}{1 + 3,059} = 1,97 \text{ м.}$
Прогон l_2 :	$a_2 = \frac{12}{1 + 5,333} = 1,89 \text{ м,}$	$b_2 = \frac{12}{1 + 4,250} = 2,28 \text{ м,}$
Прогон l_3 :	$a_3 = \frac{9}{1 + 3,208} = 2,14 \text{ м,}$	$b_3 = \frac{12}{1 + 2} = 3,00 \text{ м.}$

Схему розташування фокусів в прогонах балки представлено на рис.12.7,*б*.

1. Розрахунок на рівномірно розподілене навантаження $q = 4 \text{ кН/м}$ в прогоні l_1 (рис.12.8,а)

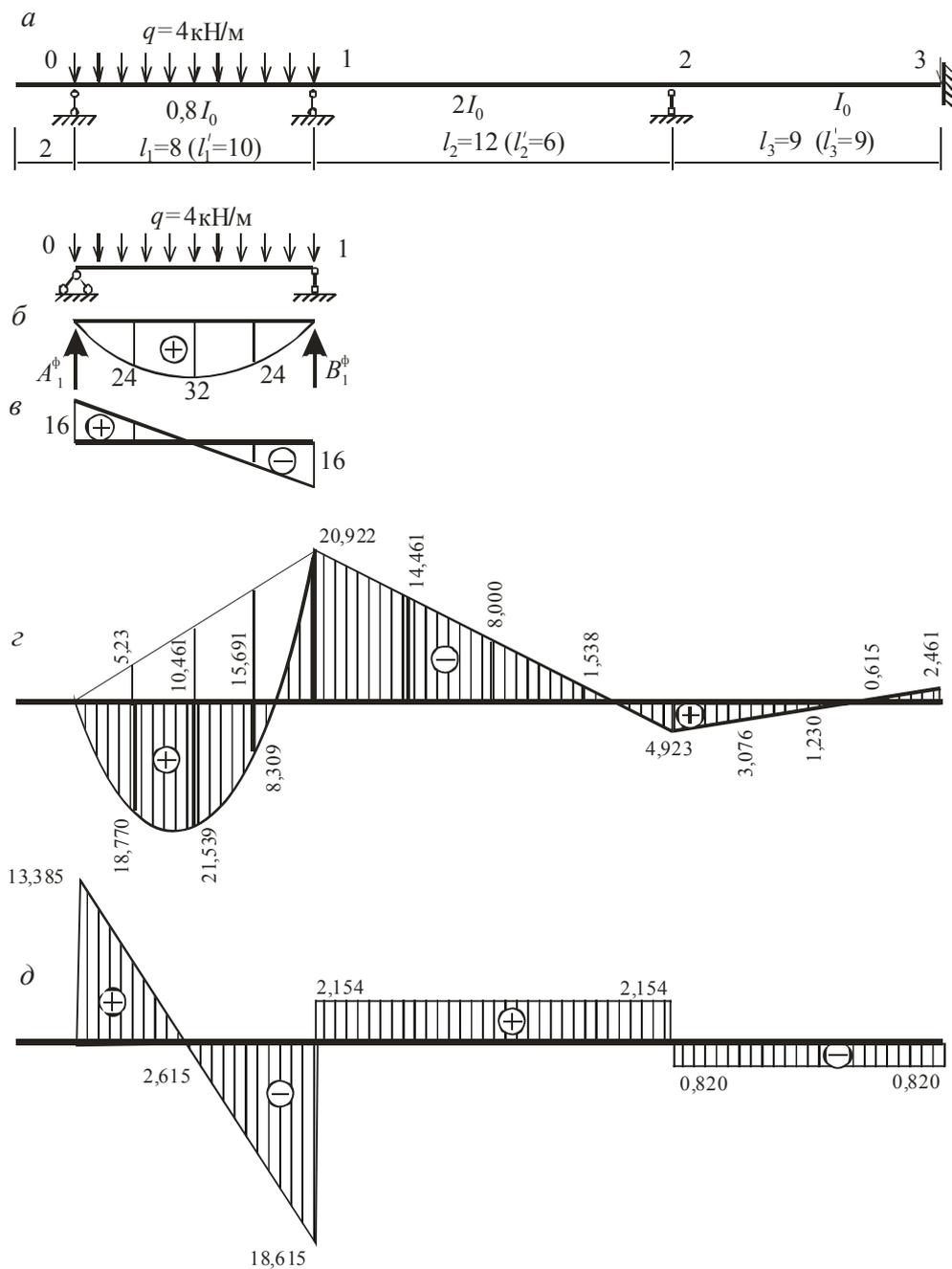


Рис.12.8

Балкові епюри M^b і Q^b побудовано на рис.12.8,б,в.

Фіктивні опорні реакції:

$$A_1^{\phi} = B_1^{\phi} = \frac{q l_1^3}{24} = \frac{4 \cdot 8^3}{24} = 85,333 \text{ кНм}^2.$$

Опорні моменти на кінцях навантаженого прогону:

$$M_0 = 0,$$

$$M_1 = -\frac{6}{8} \cdot \frac{85,333 - 85,333 \cdot \frac{1}{\infty}}{3,059 - \frac{1}{\infty}} = -20,922 \text{ кНм.}$$

Опорні моменти на кінцях ненавантажених прогонів:

$$M_2 = -\frac{M_1}{k'_2} = \frac{-20,922}{4,25} = 4,923 \text{ кНм,}$$

$$M_3 = -\frac{M_2}{k'_3} = -\frac{4,923}{2} = -2,461 \text{ кНм.}$$

Дійсна епюра M_1 від дії першого тимчасового навантаження наведена на рис.12.8,з.

Виконаємо кінематичну перевірку, скориставшись сумарною одиничною епюрою M_Σ , побудованою при розрахунку даної балки на постійне навантаження(рис.12.5,з):

$$\begin{aligned} \Delta_{\Sigma 1} &= \sum_0^l \int \frac{M_\Sigma M_1}{EI} dx = \frac{8}{6 \cdot 0,8 EI_0} (0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 21,539 - 1 \cdot 20,922) - \\ &- \frac{1}{2 EI_0} \cdot 1 \cdot 12 \cdot 8,000 + \frac{1}{EI_0} \cdot 1 \cdot 9,230 = \frac{36,927}{EI_0} - \frac{48,100}{EI_0} + \frac{11,070}{EI_0} = \\ &= \frac{47,997}{EI_0} - \frac{48,000}{EI_0} = -\frac{0,003}{EI_0} \approx 0. \end{aligned}$$

Відносна похибка

$$\varepsilon = \frac{0,003}{47,997} \cdot 100\% = 0,006\% < 1\%$$

Визначення поперечних сил:

$$Q_{0-1} = \frac{(-20,922) - 0}{8} + 16 = 13,385 \text{ кН,}$$

$$Q_{1-0} = \frac{(-20,922) - 0}{8} - 16 = -18,615 \text{ кН,}$$

$$Q_{1-2} = Q_{2-1} = \frac{4,923 - (-20,922)}{12} = 2,154 \text{ кН,}$$

$$Q_{2-3} = Q_{3-2} = \frac{(-2,461) - 4,923}{12} = -0,820 \text{ кН.}$$

Дійсна епюра поперечних сил Q_1 від дії першого тимчасового навантаження наведена на рис.12.8,д.

Обчислення опорних реакцій:

$$\begin{aligned} R_0 &= 13,385 - 0 = 3,385 \text{ кН,} & R_2 &= -0,82 - 2,154 = -2,974 \text{ кН,} \\ R_1 &= 2 \cdot 154 - (-18,615) = 20,769 \text{ кН,} & R_3 &= 0 - (-0,820) = 0,820 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Перевірка рівноваги балки (рис.12.9):

Опорні моменти на кінцях навантаженого прогону:

$$M_1 = -\frac{6}{12} \cdot \frac{162 \cdot 4,250 - 126}{5,333 \cdot 4,250 - 1} = -12,982 \text{ кНм},$$

$$M_2 = -\frac{6}{12} \cdot \frac{126 \cdot 4,250 - 162}{5,333 \cdot 4,250 - 1} = -11,769 \text{ кНм}.$$

Опорні моменти на кінцях не навантажених прогонів:

$$M_3 = -\frac{M_2}{k'_3} = -\frac{(-11,769)}{2} = 5,884 \text{ кНм},$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{k_1} = -\frac{(-12,982)}{\infty} = 0.$$

Дійсна епюра M_{II} від дії другого тимчасового навантаження наведена на рис.12.10,з.

Виконаємо кінематичну перевірку, скориставшись сумарною одиничною епюрою M_{Σ} , побудованою при розрахунку даної балки на постійне навантаження (рис.12.5,з):

$$\Delta_{II,\Sigma} = \sum_0^l \int \frac{M_{II} \cdot M_{\Sigma}}{EI} dx = -\frac{1}{0,8EI_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12,982 + \frac{6}{6 \cdot 2EI_0} (-1 \cdot 12,982 +$$

$$+ 4 \cdot 1 \cdot 23,321 + 1 \cdot 23,625) + \frac{1}{2EI_0} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5,929 - \frac{1}{EI_0} \cdot 1 \cdot 9 \cdot 2,942 =$$

$$= -\frac{43,273}{EI_0} + \frac{51,963}{EI_0} + \frac{17,784}{EI_0} - \frac{26,478}{EI_0} = -\frac{69,751}{EI_0} + \frac{69,747}{EI_0} \approx 0.$$

Відносна похибка:

$$\varepsilon = \frac{69,751 - 69,747}{69,747} \cdot 100\% = 0,004\% < 1\%.$$

Поперечні сили:

$$Q_{0-1} = Q_{1-0} = \frac{(-12,982) - 0}{8} = -1,623 \text{ кН},$$

$$Q_{1-2} = \frac{(-11,769) - (-12,982)}{12} + 18 = 18,101 \text{ кН},$$

$$Q_{1-2} = \frac{(-11,769) - (-12,982)}{12} - 6 = -5,899 \text{ кН},$$

$$Q_{2-3} = \frac{5,884 - (-11,769)}{12} = 1,961 \text{ кН}.$$

Дійсна епюра поперечних сил Q_{II} від дії другого тимчасового навантаження наведена на рис.12.10,д.

Обчислення опорних реакцій:

$$R_0 = -1,623 - 0 = -1,623 \text{ кН}, \quad R_2 = 1,961 - (-5,889) = 7,860 \text{ кН},$$

$$R_1 = 18,101 - (-1,623) = 19,724 \text{ кН}, \quad R_3 = 0 - 1,961 = -1,961 \text{ кН}.$$

Перевірка рівноваги балки (рис.12.11):

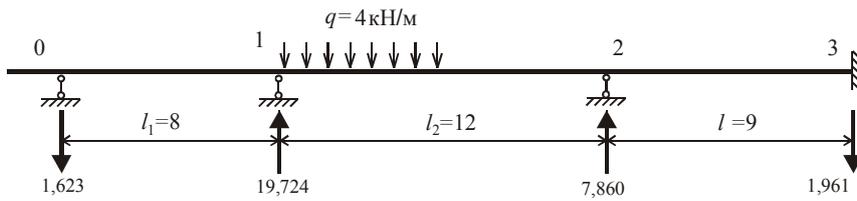


Рис.12.11

$$\sum F_y = -4 \cdot 6 - 1,623 + 19,724 + 7,860 - 1,961 \equiv 0.$$

3.Розрахунок на дію зосередженої сили $P = 15 \text{ кН}$ в прогоні l_2 (рис.12.12,a)

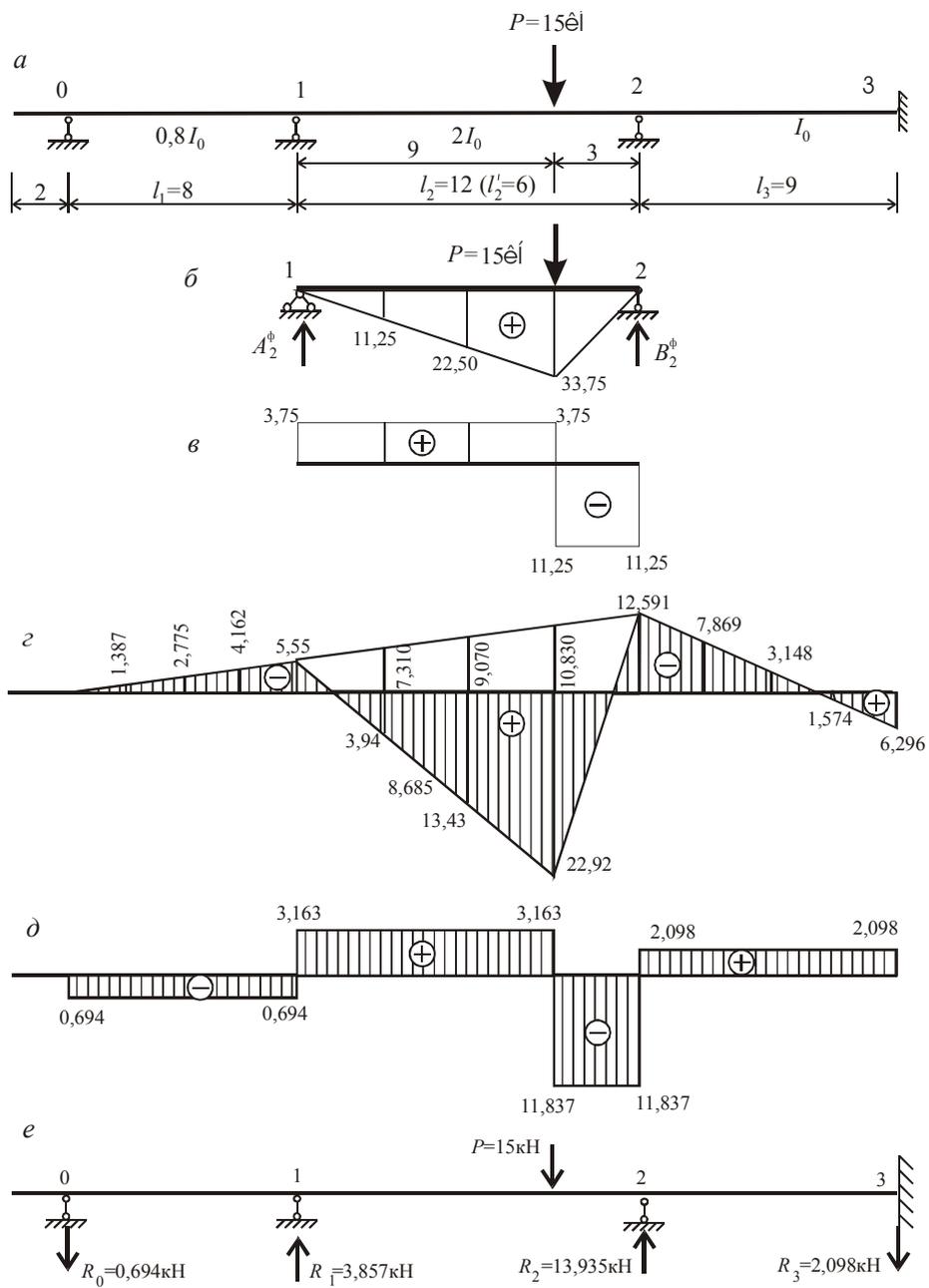


Рис.12.12

Балкові епюри M^{ϕ} і Q^{ϕ} побудовано на рис. 12.12,б,в.

Фіктивні опорні реакції:

$$A_2^{\phi} = \frac{15 \cdot 12^2}{6} \cdot 0,75 \cdot 0,25 \cdot (1 + 0,25) = 84,375 \text{ кНм}^2,$$

$$B_2^{\phi} = \frac{15 \cdot 12^2}{6} \cdot 0,75 \cdot 0,25 \cdot (1 + 0,75) = 118,125 \text{ кНм}^2.$$

Опорні моменти на кінцях навантаженого прогону:

$$M_1 = -\frac{6}{12} \cdot \frac{84,375 \cdot 4,250 - 118,125}{5,333 \cdot 4,250 - 1} = -5,550 \text{ кНм},$$

$$M_2 = -\frac{6}{12} \cdot \frac{118,125 \cdot 4,250 - 84,375}{5,333 \cdot 4,250 - 1} = -12,591 \text{ кНм}.$$

Опорні моменти на кінцях не навантажених прогонів:

$$M_3 = -\frac{M_2}{k'_3} = -\frac{(-12,591)}{2} = 6,296 \text{ кНм},$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{k_1} = -\frac{(-5,550)}{\infty} = 0.$$

Епюра згинальних моментів M_{III} побудована на рис. 12.12,г.

Виконаємо кінематичну перевірку, скориставшись сумарною одиничною епюрою M_{Σ} , побудованою при розрахунку даної балки на постійне навантаження (рис. 12.5,з):

$$\begin{aligned} \Delta_{III,\Sigma} &= \sum \int_0^l \frac{M_{III} M_{\Sigma}}{EI} dx = -\frac{1}{0,8EI_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,550 + \frac{1}{2EI_0} \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8,685 + \\ &+ \frac{1}{2EI_0} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5,164 - \frac{1}{EI_0} \cdot 1 \cdot 9 \cdot 3,148 = -\frac{18,50}{EI_0} + \frac{39,082}{EI_0} + \frac{7,746}{EI_0} - \frac{28,332}{EI_0} = \\ &= -\frac{46,832}{EI_0} + \frac{46,828}{EI_0} = -\frac{0,004}{EI_0} \approx 0. \end{aligned}$$

Відносна похибка:

$$\varepsilon = \frac{0,004}{46,828} \cdot 100 \% = 0,008 \% < 1 \%$$

Поперечні сили:

$$Q_{0-1} = Q_{1-0} = \frac{(-5,550) - 0}{8} = -0,694 \text{ кН},$$

$$Q_{1-2} = \frac{(-12,591) - (-5,550)}{12} + 3,75 = 3,163 \text{ кН},$$

$$Q_{2-1} = \frac{(-12,591) - (-5,550)}{12} + (-11,25) = -11,837 \text{ кН},$$

$$Q_{2-3} = Q_{3-2} = \frac{6,296 - (-12,591)}{9} = 2,098 \text{ кН}.$$

Дійсна епюра поперечних сил Q_{III} від дії третього тимчасового навантаження наведена на рис.12.12,д.

Обчислення опорних реакцій:

$$\begin{aligned} R_0 &= -0,694 - 0 = -0,694 \text{ кН}, & R_2 &= 2,098 - (-11,837) = 13,935 \text{ кН}, \\ R_1 &= 3,163 - (-0,694) = 3,857 \text{ кН}, & R_3 &= 0 - 2,098 = -2,098 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Перевірка рівноваги балки (рис.12.12,е):

$$\sum F_y = -15 - 0,694 + 3,857 + 13,935 - 2,098 = 0.$$

4.Розрахунок на дію зосередженого моменту $M = 18 \text{ кНм}$ в прогоні l_3 (рис.12.13,а)

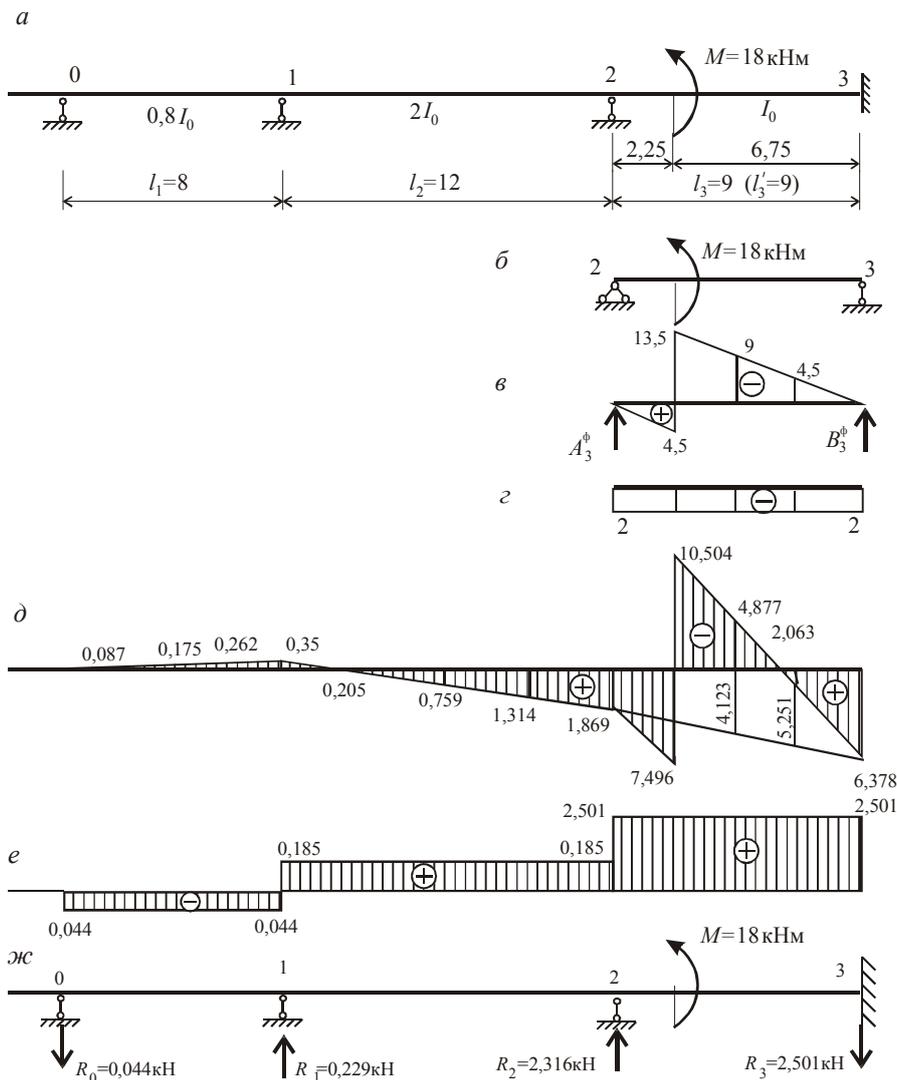


Рис.12.13

Епюри M^{ϕ} і Q^{ϕ} для однопрогонової балки (рис.12.13,б) побудовано на рис.12.13,в,г.
Фіктивні опорні реакції:

$$\begin{aligned} A_3^{\phi} &= -\frac{18 \cdot 9}{6} \cdot (3 \cdot 0,75^2 - 1) = -18,562 \text{ кНм}^2, \\ B_3^{\phi} &= -\frac{18 \cdot 9}{6} \cdot (1 - 3 \cdot 0,25^2) = -21,937 \text{ кНм}^2. \end{aligned}$$

Опорні моменти на кінцях навантаженого прогону:

$$M_2 = -\frac{6}{9} \cdot \frac{(-18,562) \cdot 2 - (-21,937)}{3,208 \cdot 2 - 1} = 1,869 \text{ кНм},$$

$$M_3 = -\frac{6}{9} \cdot \frac{(-21,937) \cdot 3,208 - (-18,562)}{3,208 \cdot 2 - 1} = 6,378 \text{ кНм}.$$

Опорні моменти на кінцях не навантажених прогонів:

$$M_1 = -\frac{M_2}{k_2} = -\frac{1,869}{2} = -0,350 \text{ кНм},$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{k_1} = -\frac{(-0,350)}{\infty} = 0.$$

Епюра згинальних моментів M_{IV} побудована на рис.12.13,д.

Виконаємо кінематичну перевірку, скориставшись сумарною одиничною епюрою M_{Σ} , побудованою при розрахунку даної балки на постійне навантаження (рис.12.5,з):

$$\Delta_{IV,\Sigma} = \sum \int_0^l \frac{M_{IV} M_{\Sigma}}{EI} dx = -\frac{1}{0,8EI_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2EI_0} \cdot 0,759 \cdot 12 \cdot 1 +$$

$$+ \frac{1}{EI_0} \cdot 4,682 \cdot 2,25 \cdot 1 - \frac{1}{EI_0} \cdot 2,063 \cdot 6,75 \cdot 1 = -\frac{1,167}{EI_0} + \frac{4,554}{EI_0} +$$

$$+ \frac{10,534}{EI_0} - \frac{13,925}{EI_0} = -\frac{15,092}{EI_0} + \frac{15,088}{EI_0} \approx 0.$$

Відносна похибка:

$$\varepsilon = \frac{-15,092 + 15,088}{15,088} \cdot 100 \% = 0,027 \% < 1 \%.$$

Поперечні сили:

$$Q_{0-1} = Q_{1-0} = \frac{(-0,350) - 0}{8} = -0,044 \text{ кН},$$

$$Q_{1-2} = Q_{2-1} = \frac{1,869 - (-0,350)}{12} = 0,185 \text{ кН},$$

$$Q_{2-3} = Q_{3-2} = \frac{6,378 - 1,869}{9} + 2 = 2,501 \text{ кН}.$$

Дійсна епюра поперечних сил Q_{IV} від дії четвертого тимчасового навантаження наведена на рис.12.13,е.

Обчислення опорних реакцій:

$$R_0 = -0,044 - 0 = -0,044 \text{ кН}, \quad R_2 = 2,501 - 0,185 = 2,316 \text{ кН},$$

$$R_1 = 0,185 - (-0,044) = 0,229 \text{ кН}, \quad R_3 = 0 - 2,501 = -2,501 \text{ кН}.$$

Перевірка рівноваги балки (рис.12.13,ж):

$$\sum F_y = -0,044 + 0,229 + 2,316 - 2,501 = 0.$$

5. Побудова огинаючих епюр

Обчислення ординат огинаючих епюр виконуються в табл.12.3.

Таблиця 12.3 (початок)

Вид зусиль	Консоль		Перший прогон						
	0	1	0	0,25	0,5	0,75	1	0	0,25
M_g	0	-2,4	-2,4	2,618	2,835	-1,747	-11,130	-11,130	4,894
M_I	0	0	0	18,770	21,539	8,309	-20,922	-20,922	-14,461
M_{II}	0	0	0	-3,245	-6,491	-9,736	-12,982	-12,982	23,321
M_{III}	0	0	0	-1,387	-2,775	-4,162	-5,550	-5,550	3,940
M_{IV}	0	0	0	-0,087	-0,175	-0,262	-0,350	-0,350	0,205
M_{max}	0	-2,4	-2,4	21,388	24,374	6,562	-11,130	-11,130	32,360
M_{min}	0	-2,4	-2,4	-2,101	-6,606	-15,907	-50,934	-50,934	-9,567
Q_g	0	-2,4	3,709	1,309	-1,091	-3,491	-5,891	7,141	3,541
Q_I	0	0	13,385	5,385	-2,615	-10,615	-18,615	2,154	2,154
Q_{II}	0	0	-1,623	-1,623	-1,623	-1,623	-1,623	18,101	6,101
Q_{III}	0	0	-0,694	-0,694	-0,694	-0,694	-0,694	3,163	3,163
Q_{IV}	0	0	-0,044	-0,044	-0,044	-0,044	-0,044	0,185	0,185
Q_{max}	0	-2,4	17,094	6,694	-1,091	-3,491	-5,891	30,744	15,144
Q_{min}	0	-2,4	1,348	-1,052	-6,067	-16,467	-26,867	7,141	3,541

Закінчення таблиці 12.3

Другий прогон				Третій прогон					
0,5	0,75-0	0,75+0	1	0	0,25-0	0,25+0	0,5	0,75	1
10,118	4,542	4,542	-11,835	-11,835	-1,322	-1,322	3,116	1,479	-6,233
-8,000	-1,538	-1,538	4,923	4,923	3,076	3,076	1,230	-0,615	-2,461
23,615	5,928	5,928	-11,769	-11,769	-7,355	-7,355	-2,942	1,471	5,884
13,430	22,920	22,920	-12,591	-12,591	-7,869	-7,869	-3,148	1,574	6,296
0,759	1,314	1,314	1,869	1,869	7,496	-10,504	-4,877	0,751	6,378
47,932	34,704	34,704	-5,043	-5,043	9,250	1,754	4,346	5,275	12,325
2,118	3,004	3,004	-36,195	-36,195	-16,546	-27,050	-7,851	0,864	-8,694
-0,069	-3,659	-3,659	-7,259	6,022	3,322	3,322	0,622	-2,078	-4,778
2,154	2,154	2,154	2,154	-0,820	-0,820	-0,820	-0,820	-0,820	-0,820
-5,899	-5,899	-5,899	-5,899	1,961	1,961	1,961	1,961	1,961	1,961
36163	3,163	-11,837	-11,837	2,098	2,098	2,098	2,098	2,098	2,098
0,185	0,185	0,185	0,185	2,501	2,501	2,501	2,501	2,501	2,501
5,443	1,843	-1,320	-4,920	12,582	9,882	9,882	7,182	4,482	1,782
-5,968	-9,558	-21,395	-24,995	5,202	2,502	2,502	-0,198	-2,898	-5,598

Стовпці таблиці відповідають перерізам в прогонах балки. На консолі розглядаються два перерізи: на початку і на кінці. В першому l_1 прогоні – п'ять перерізів – на початку, на кінці, в чвертях і посередині прогону. В другому l_2 та в третьому l_3 прогонах, крім того, вводяться додаткові перерізи в місцях прикладення зосереджених навантажень. Так, в другому прогоні l_2 в

точці $0,75l_2$, де прикладено зосереджену силу розглядаються не один, а два перерізи: перший розташовано нескінченно близько ліворуч ($0,75l_2-0$), а другий – нескінченно близько праворуч ($0,75l_2+0$) від зазначеної точки. Також два перерізи введено в місці прикладення зосередженого моменту в третьому l_3 прогоні.

По результатам обчислень табл.12.3 побудовано огинаючі епюри M і Q (рис.12.14,*a* і 12.14,*б* відповідно).

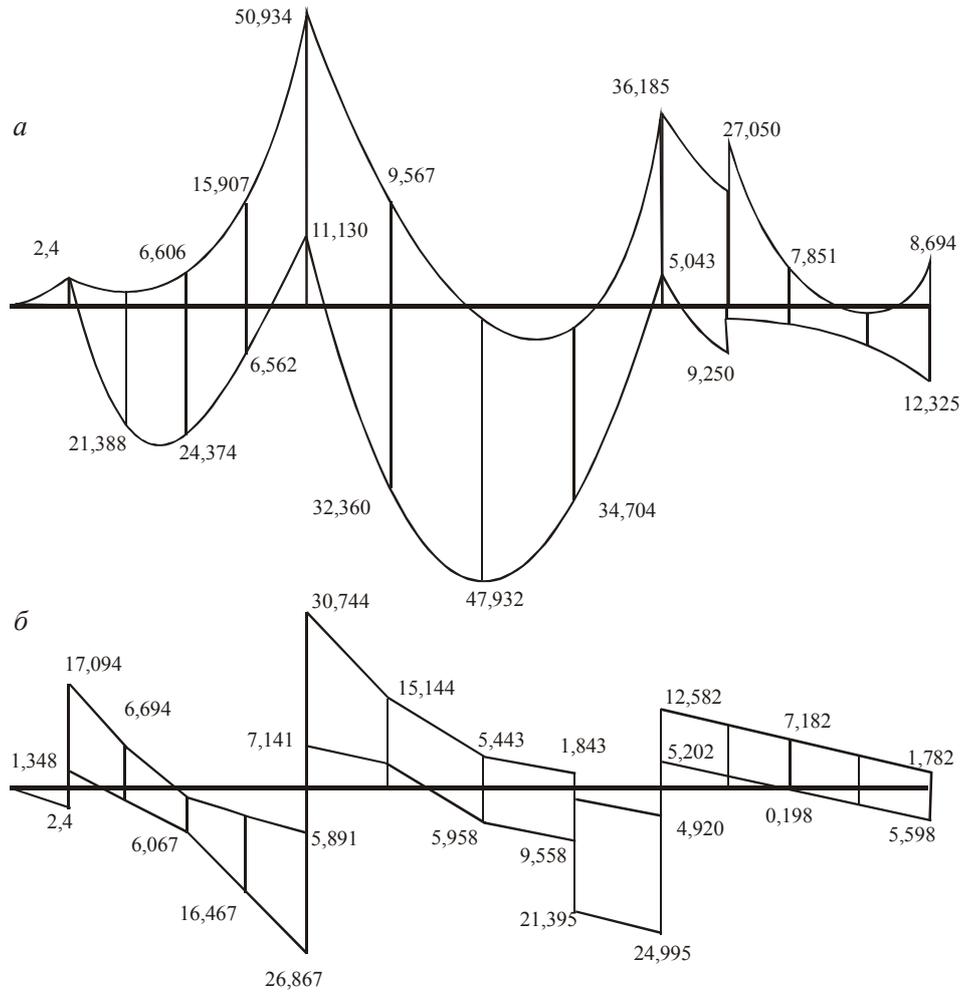


Рис.12.14

12.4. Побудова ліній впливу

1. Лінії впливу опорних моментів

Для побудови ліній впливу розташовуємо силу $P=1$ почергово у низці перерізів кожного прогону і обчислюємо відповідні опорні моменти по кінцях навантаженого прогону за формулами (12.12) – (12.14), а потім у ненавантажених прогонах за допомогою співвідношень (12.16) – (12.17).

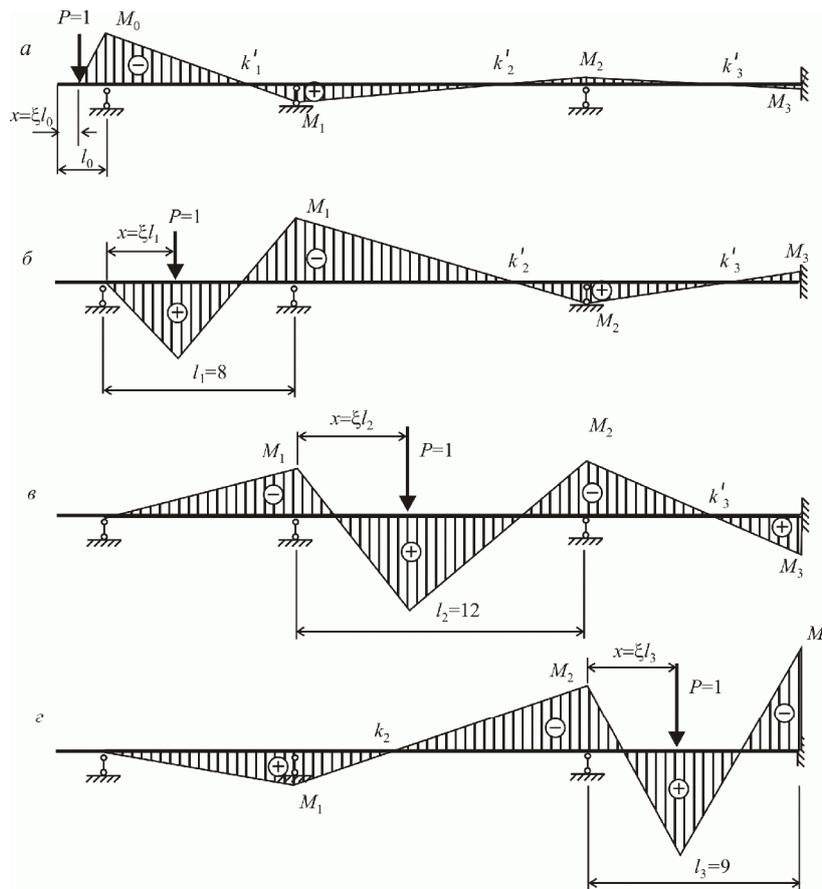


Рис.12.15

Сила $P=1$ на лівій консолі (рис.12.15,а)

$$M_0 = -1 \cdot (l_0 - x) = -l_0(1 - \xi),$$

$$M_1 = -\frac{M_0}{k'_1} = -\frac{M_0}{3,059},$$

$$M_2 = -\frac{M_1}{k'_2} = -\frac{M_1}{4,250},$$

$$M_3 = -\frac{M_2}{k'_3} = -\frac{M_0}{2}.$$

Обчислення виконуються в табл. 12.4.

Таблиця 12.4

ξ	M_0	M_1	M_2	M_3
0	-2	0,6538	-0,1538	0,0769
0,5	-1	0,3269	-0,0769	0,0384
1	0	0	0	0

Сила $P=1$ у прогоні l_1 (рис.12.6,б).

$$M_0 = M_{\text{лів}} = 0,$$

$$M_1 = M_{\text{прав}} = -\frac{l_1}{k'_1} \cdot U = -\frac{8}{3,059} U = -2,615U,$$

$$M_2 = -\frac{M_1}{k'_2} = -\frac{M_1}{4,250},$$

$$M_3 = -\frac{M_2}{k_3} = -\frac{M_2}{2}.$$

Обчислення виконуються в табл. 12.5.

Таблиця 12.5

ξ	U	M_1	M_2	M_3
0	0	0	0	0
0,25	0,2344	-0,6130	0,1442	-0,0721
0,5	0,3750	-0,9807	0,2307	-0,1154
0,75	0,3281	-0,8580	0,2019	-0,1009
1	0	0	0	0

Сила $P=1$ у прогоні l_2 (рис.12.6,в).

$$M_1 = M_{\text{лів}} = -\frac{l_2}{k_2 k'_2 - 1} (V k'_2 - U) = -\frac{12}{5,333 \cdot 4,250 - 1} (V \cdot 4,250 - U) =$$

$$= -2,354V + 0,554U;$$

$$M_2 = M_{\text{прав}} = -\frac{l_2}{k_2 k'_2 - 1} (U k_2 - V) = -\frac{12}{5,333 \cdot 4,250 - 1} (U \cdot 5,333 - V) =$$

$$= -2,954U + 0,554V;$$

$$M_0 = 0;$$

$$M_3 = -\frac{M_2}{k'_3} = -\frac{M_2}{2}.$$

Обчислення виконуються в табл. 12.6.

Таблиця 12.6

ξ	U	V	Обчислення M_1			Обчислення M_2			M_3
			$-2,354V$	$0,554U$	M_1	$-2,954U$	$0,554V$	M_2	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,25	0,2344	0,3281	-0,772	0,130	-0,642	-0,692	0,182	-0,510	0,255
0,5	0,3750	0,3750	-0,883	0,208	-0,675	-1,108	0,208	-0,900	0,450
0,75	0,3281	0,2344	-0,552	0,182	-0,370	-0,969	0,130	-0,839	0,419
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Сила $P=1$ у прогоні l_3 (рис.12.6,г).

$$M_2 = M_{\text{ліє}} = -\frac{l_3}{k_3 k'_3 - 1} (V k'_3 - U) = -\frac{12}{3,208 \cdot 2 - 1} (V \cdot 2 - U) =$$

$$= -3,323V + 1,662U;$$

$$M_3 = M_{\text{прав}} = -\frac{l_3}{k_3 k'_3 - 1} (U k_3 - V) = -\frac{9}{3,208 \cdot 2 - 1} (U \cdot 3,208 - V) =$$

$$= -5,331U + 1,662V,$$

$$M_1 = -\frac{M_2}{k_2} = -\frac{M_2}{5,333};$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{k_1} = -\frac{M_1}{\infty} = 0.$$

Обчислення виконуються в табл. 12.7.

Таблиця 12.7

ξ	U	V	Обчислення M_2			Обчислення M_3			M_1
			$-3,323V$	$1,662U$	M_2	$-5,333U$	$1,662V$	M_3	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,25	0,2344	0,3281	-1,090	0,389	-0,701	-1,249	0,545	-0,704	0,131
0,5	0,3750	0,3750	-1,246	0,623	-0,623	-1,999	0,623	-1,376	0,117
0,75	0,3281	0,2344	-0,779	0,545	-0,234	-1,749	0,389	-1,360	0,044
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

По результатам таблиць 12.4 – 12.7 будуються лінії впливу опорних моментів (рис.12.16).

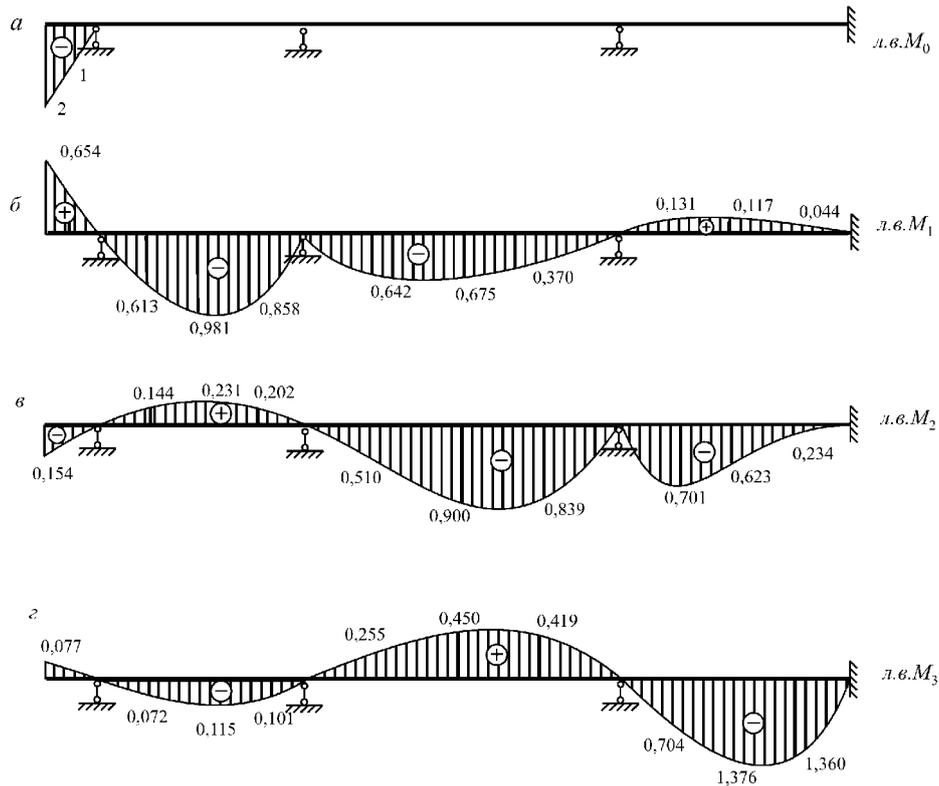


Рис.12.16

Для перевірки побудованих ліній впливу визначимо за їхньою допомогою опорні моменти від якого-небудь навантаження, наприклад від розподіленого по всій балці навантаження $g=1,2 \text{ кН/м}$ (рис.12.5,а). за формулою (12.19). Для визначення площей ліній впливу скористаємось на кожному прогоні формулою парабол (12.21).

$$M_1 = gA_{M_1g} = 1,2 \left[\frac{1}{2} \cdot 0,654 \cdot 2 - \frac{8}{3 \cdot 4} (0 + 4 \cdot 0,613 + 2 \cdot 0,981 + 4 \cdot 0,858 + 0) - \frac{12}{3 \cdot 4} (0 + 4 \cdot 0,642 + 2 \cdot 0,675 + 4 \cdot 0,370 + 0) + \frac{9}{3 \cdot 4} (0 + 4 \cdot 0,131 + 2 \cdot 0,117 + 4 \cdot 0,044) \right] = -11,135 \text{ кНм.}$$

$$M_2 = gA_{M_2g} = 1,2 \left[-\frac{1}{2} \cdot 0,154 \cdot 2 + \frac{8}{3 \cdot 4} (0 + 4 \cdot 0,144 + 2 \cdot 0,231 + 4 \cdot 0,202 + 0) - \frac{12}{3 \cdot 4} (0 + 4 \cdot 0,510 + 2 \cdot 0,900 + 4 \cdot 0,839 + 0) - \frac{9}{3 \cdot 4} (0 + 4 \cdot 0,701 + 2 \cdot 0,623 + 4 \cdot 0,234) \right] = -11,831 \text{ кНм.}$$

$$M_3 = gA_{M_3g} = 1,2 \left[\frac{1}{2} \cdot 0,077 \cdot 2 - \frac{8}{3 \cdot 4} (0 + 4 \cdot 0,072 + 2 \cdot 0,115 + 4 \cdot 0,101 + 0) + \frac{12}{3 \cdot 4} (0 + 4 \cdot 0,255 + 2 \cdot 0,450 + 4 \cdot 0,419 + 0) - \frac{9}{3 \cdot 4} (0 + 4 \cdot 0,704 + 2 \cdot 1,376 + 4 \cdot 1,360) \right] = -6,238 \text{ кНм.}$$

Одержані результати практично збігаються з розв'язком системи рівнянь трьох моментів.

2. Лінія впливу згинального моменту в перерізі k (рис.12.17,а)

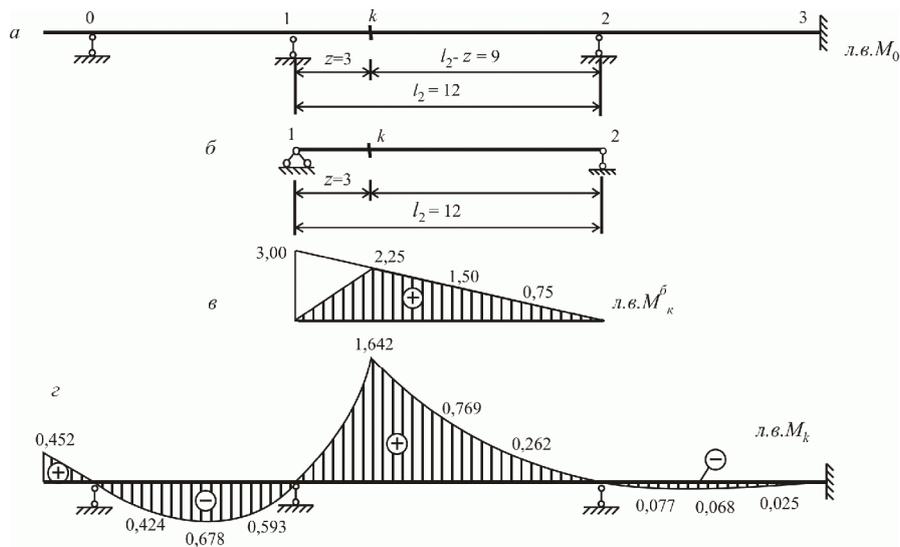


Рис.12.17

Лінія впливу згинального моменту M_k будується на базі формули (12.6). Тут M_{i-1} та M_i – лінії впливу опорних моментів на лівій та правій опорах прогону, а M_p^z – лінія впливу згинального моменту в перерізі однопрогонової балки (рис.12.17,в), який характеризується координатою z (рис.12.17,б). Для даного перерізу

$$\text{л.в.} M_k = \frac{M_1}{l_1} (l_1 - z) + z + M_p^k = 0,75 \text{л.в.} M_1 + 0,25 \text{л.в.} M_2 + \text{л.в.} M_0^k$$

Обчислення ординат лінії впливу згинального моменту M_k виконуємо в табл.12.8. Дійсна лінія впливу показана на рис.12.8,г.

Таблиця 12.8

l	ξ	M_1	M_2	M_0^k	$0,75M_1$	$0,25M_2$	M_k
l_0	0	0,654	-0,154	0	0,491	-0,039	0,452
	1	0	0	0	0,000	0,000	0,000
l_1	0	0	0	0	0,000	0,000	0,000
	0,25	-0,613	0,144	0	-0,460	0,036	-0,424
	0,50	-0,981	0,231	0	-0,736	0,058	-0,678
	0,75	-0,858	0,202	0	-0,644	0,051	-0,593
	1	0	0	0	0,000	0,000	0,000
l_2	0	0	0	0	0,000	0,000	0,000
	0,25	-0,642	-0,510	2,25	-0,482	-0,128	1,642
	0,50	-0,675	-0,900	1,50	-0,506	-0,225	0,769

	0,75	-0,370	-0,839	0,75	-0,278	-0,210	0,262
	1	0	0	0	0,000	0,000	0,000
l_3	0	0	0	0	0,000	0,000	0,000
	0,25	0,131	-0,701	0	0,098	-0,175	-0,077
	0,50	0,117	-0,623	0	0,088	-0,156	-0,068
	0,75	0,044	-0,234	0	0,033	-0,059	-0,025
	1	0	0	0	0,000	0,000	0,000

Обчислимо згинальний момент в перерізі від постійного навантаження $q = 1,2 \text{ кН/м}$ по всій балці (рис.12.8,а). Площу лінії впливу будемо обчислювати по формулі трапецій (12.20).

$$\begin{aligned}
 M_k = qA_{M_k} &= -1,2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 0,452 \cdot 2 - \frac{8}{4} (0 + 0,424 + 0,678 + 0,593 + 0) + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{12}{4} (0 + 1,642 + 0,769 + 0,262 + 0) - \frac{9}{4} (0 + 0,077 + 0,068 + 0,025 + 0) \right] = \\
 &= 4,699 \text{ кН/м}.
 \end{aligned}$$

З розрахунку на постійне навантаження (рис.12.8,г.) у перерізі k згинальний момент дорівнює $M_k = 4,894 \text{ кН/м}$, що практично, збігається з одержаним результатом.

3.Лінія впливу поперечної сили в перерізі k (рис.12.18,а)

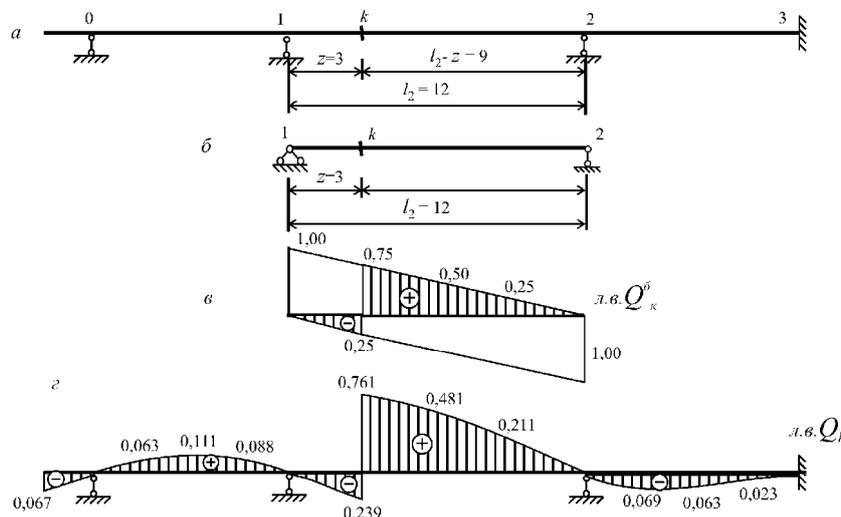


Рис.12.18

Лінії впливу поперечної сили будуються на базі співвідношення (12.7), де M_{i-1} та M_i – лінії впливу опорних моментів на лівій та правій опорах прогону, а Q_p^z – лінія впливу поперечної сили в перерізі однопрогонової балки (рис.12.18,в). Для даного перерізу

$$\text{л.в.} Q_k = \frac{1}{l_1} (M_2 - M_1) + Q_p^k = \frac{1}{12} \text{л.в.} M_2 - \frac{1}{12} \text{л.в.} M_1 + \text{л.в.} Q_0^k.$$

Обчислення ординат лінії впливу поперечної сили Q_k виконуємо в табл.12.9.

Таблиця 12.9

l	ξ	M_1	M_2	$-\frac{1}{12}M_1$	$\frac{1}{12}M_2$	Q_0^k	Q_k
l_0	0	0,654	-0,154	-0,154	-0,013	0	-0,067
	1	0	0	0	0	0	0
l_1	0	0	0	0	0	0	0
	0,25	-0,613	0,144	0,051	0,012	0	0,063
	0,50	-0,981	0,231	0,082	0,019	0	0,111
	0,75	-0,858	0,202	0,071	0,017	0	0,088
	1	0	0	0	0	0	0
l_2	0	0	0	0	0	0	0
	0,25	-0,642	-0,510	0,053	-0,042	-0,25/0,75	-0,239/0,761
	0,50	-0,675	-0,900	0,056	-0,075	0,50	0,481
	0,75	-0,370	-0,839	0,031	-0,070	0,25	0,211
	1	0	0	0	0	0	0
l_3	0	0	0	0	0	0	0
	0,25	0,131	-0,701	-0,011	-0,058	0	-0,069
	0,50	0,117	-0,623	-0,010	-0,052	0	-0,063
	0,75	0,044	-0,234	-0,004	-0,019	0	-0,023
	1	0	0	0	0	0	0

Дійсна лінія впливу показана на рис.12.18,г.

Для перевірки завантажуюємо лінію впливу постійним навантаженням $g = 1,2 \text{ кН/м}$ (рис.12.6).

Криволінійні площі лінії впливу в прогонах l_1 та l_3 будемо обчислювати за формулою парабол (12.21), а в прогоні l_2 – за формулою трапецій (12.20).

$$\begin{aligned}
 Q_k = 1,2 \cdot & \left[-\frac{1}{2} \cdot 0,067 \cdot 2 + \frac{8}{3 \cdot 4} (0 + 4 \cdot 0,063 + 2 \cdot 0,111 + 4 \cdot 0,088 + 0) - \right. \\
 & -\frac{3}{2} (0 + 0,239) + \frac{9}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot 0,761 + 0,481 + 0,211 + 0 \right) - \frac{9}{3 \cdot 4} (0 + 4 \cdot 0,069 + \\
 & \left. + 2 \cdot 0,063 + 4 \cdot 0,023 + 0) \right] = 3,567 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

Це, практично, збігається з результатом, одержаним при розрахунку за допомогою рівнянь трьох моментів.

l_2	0	0	0	0	0	0	1	0	1
	0,25	0	-0,642	-0,510	-0,011	0,080	0,75	0	0,841
	0,50	0	-0,675	-0,900	-0,019	0,084	0,5	0	0,565
	0,75	0	-0,370	-0,839	-0,039	0,046	0,25	0	0,257
	1	0	0	0	0	0	0	0	0
l_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,25	0	0,131	-0,701	-0,069	-0,116	0	0	-0,085
	0,50	0	0,117	-0,623	-0,062	-0,015	0	0	-0,077
	0,75	0	0,044	-0,234	-0,023	-0,005	0	0	-0,018
	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Для перевірки завантажуюмо побудовану лінію впливу постійним навантаженням $g = 1,2 \text{ кН/м}$ (рис.12.6). Криволінійні площі лінії впливу на кожному прогоні будемо обчислювати за формулою параболи (12.21).

$$R_1 = 1,2 \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot 0,389 \cdot 2 + \frac{8}{3 \cdot 4} (0 + 4 \cdot 0,390 + 2 \cdot 0,724 + 4 \cdot 0,945 + 1) + \right. \\ \left. + \frac{12}{3 \cdot 4} (1 + 4 \cdot 0,841 + 2 \cdot 0,565 + 4 \cdot 0,257 + 0) - \right. \\ \left. - \frac{9}{3 \cdot 4} (0 + 4 \cdot 0,085 + 2 \cdot 0,077 + 4 \cdot 0,028 + 0) \right] = 13,045 \text{ кН.}$$

Результати практично збігаються.

12.5. Задачі для самостійного опрацювання

Побудувати епюри зусиль в нерозрізних балках, представлених на рис.12.20.

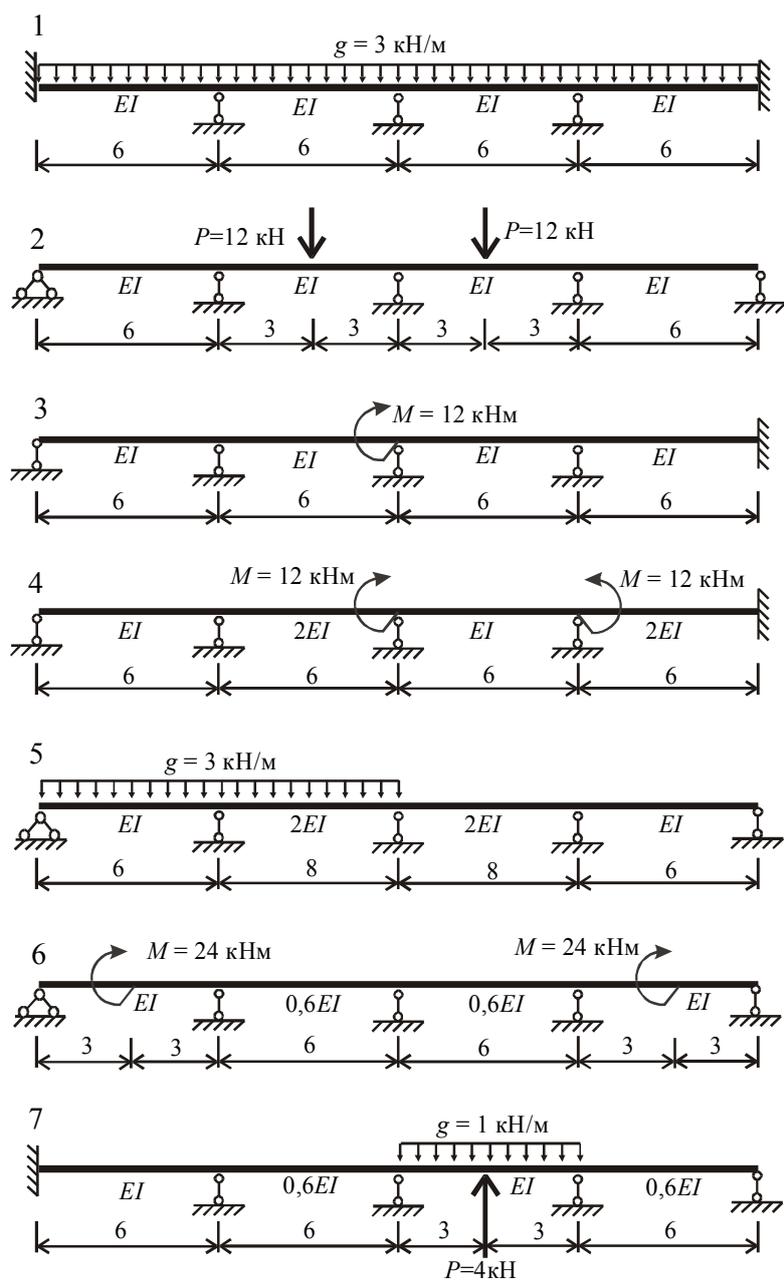


Рис.12.20

13. Метод переміщень

13.1.Короткі відомості про метод переміщень

Метод переміщень є одним з найбільш розповсюджених методів розрахунку стержневих статично невизначуваних систем. У багатьох випадках застосування методу призводить до меншої трудомісткості обчислювальних робіт, ніж метод сил.

Припущення методу переміщень

Метод переміщень ґрунтується на спрощуючих припущеннях, від яких залежить кількість основних невідомих методу.

- 1) Кути між стержнями, які збігаються у жорсткому вузлі, не змінюються після деформування споруди. Це означає, що при деформуванні всі кінці стержнів, з'єднані між собою в жорсткому вузлі, повертаються на однаковий кут.
- 2) Деформаціями від поздовжніх і поперечних сил можна знехтувати.
- 3) Не береться до уваги зближення кінців стержня внаслідок його згину.
- 4) Довжина проекції стержня на його початковий напрям до і після деформації вважається незмінною.
- 5) Кути нахилу стержнів внаслідок їх мализни обираються рівними їх тангенсам і синусам.

Ці припущення базуються на тому, що в реальних стержневих системах переміщення від пружних деформацій вельми незначні, порівняно з розмірами споруди, а відтак їх вплив на зміну її розмірів можна не враховувати.

Основна система методу переміщень

Основна система методу переміщень утворюється з вихідної системи введенням у її вузли додаткових з'єднань двох видів.

1. Для запобігання повороту жорстких вузлів до них встановлюються, так звані, **рухомі (плаваючі) затиснення**. Це такі умовні з'єднання, які усувають повороти вузлів, але не усувають їх поступальні переміщення. У таких затисненнях виникає лише одна реакція – реактивний момент.

Жорсткими вузлами є місця з'єднання кінців прямолінійних стержнів постійної жорсткості за допомогою припаювання. До жорстких вузлів треба віднести точки, в яких:

- з'єднуються без наскрізних шарнірів два або більше стержнів;

- змінюється під кутом напрям осі стержня;
- до стержня приєднується за допомогою прилеглого шарніра інший стержень або кілька стержнів;
- ступінчасто змінюється жорсткість стержня;
- до жорсткого вузла будь-якого з перелічених типів приєднується шарніром стержень або інший вузол.

2. Можливі поступальні переміщення вузлів системи виключаються встановленням **додаткових опорних стержнів**. У таких стержнях виникає лише одна реакція – спрямована вздовж стержня сила. Кількість додаткових стержнів повинна бути мінімальною, але достатньою для забезпечення нерухомості всіх вузлів системи.

Додаткові опорні стержні потрібно встановлювати не до всіх вузлів системи, а лише до тих, що мають **незалежні поступальні переміщення**. Для визначення кількості незалежних поступальних переміщень та місць встановлення необхідних додаткових опорних стержнів доцільно скористатися шарнірною схемою. **Шарнірна схема** утворюється введенням наскрізних шарнірів в усі жорсткі вузли вихідної системи, включаючи опорні. Зауважимо, що при створенні шарнірної схеми консолі та інші статично визначувані фрагменти можна відкидати.

Якщо шарнірна схема геометрично незмінювана, то вихідна система не має незалежних поступальних переміщень, тобто при створенні основної системи методу переміщень встановлювати додаткові опорні стержні не потрібно.

Якщо ж у процесі структурного аналізу шарнірної схеми виявляється можливість поступального переміщення якогось вузла, необхідно ввести додатковий опорний стержень, який перешкоджає появі цього переміщення. Мінімальна кількість таких додаткових опорних стержнів визначає кількість незалежних переміщень вузлів вихідної системи. При створенні основної системи методу переміщень додаткові опорні стержні необхідно встановлювати саме в цих місцях.

Основні невідомі

Переміщення, які виключаються з'єднаннями, накладеними при створенні основної системи, розглядаються як основні невідомі методу переміщень.

Таким чином, основними невідомими методу переміщень є кути повороту жорстких вузлів системи та незалежні поступальні переміщення її вузлів. Ці невідомі позначаються літерами $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \Delta_1, \Delta_2, \dots$ тощо – при використанні розгорнутої форми методу переміщень, чи Z_1, Z_2, \dots тощо – в канонічній формі.

Кількість основних невідомих методу переміщень називається **ступенем кінематичної невизначуваності системи**. Її можна визначити за формулою

$$k = k_{\phi} + k_{\Delta}, \quad (13.1)$$

де k_{ϕ} – кількість кутових переміщень жорстких вузлів системи, k_{Δ} – кількість незалежних лінійних переміщень її вузлів.

Рама (рис.13.1,а) має два проміжних жорстких вузла 3 і 4, в її шарнірну схему необхідно ввести один додатковий опорний стержень (рис.13.1,б). Отже, маємо ступінь кінематичної невизначуваності $k=2+1=3$. Основна система рами зображена на рис.13.1,в.

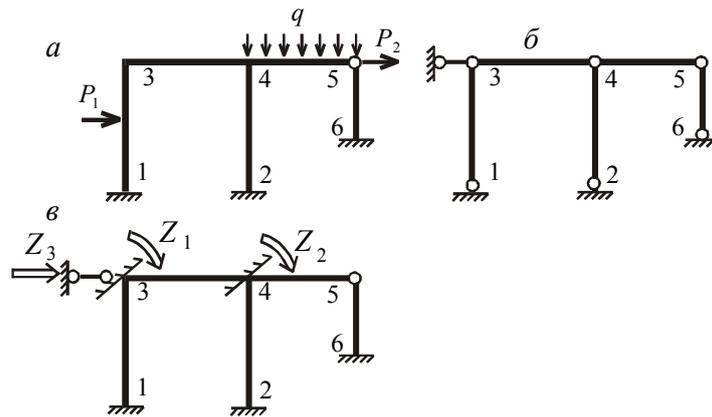


Рис.13.1

Система розв'язувальних рівнянь

Основна система буде еквівалентною заданій рамі за умови рівності нулю реакцій в додаткових з'єднаннях. Ця обставина використовується для складання системи розв'язувальних рівнянь.

Розв'язувальні рівняння методу переміщень утворюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих переміщень, яким перешкоджають накладені додаткові з'єднання, і можуть бути одержані в канонічній формі або в розгорнутій формі.

У **канонічній формі** система розв'язувальних рівнянь має вигляд

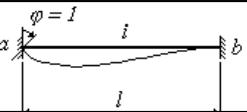
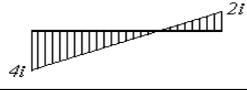
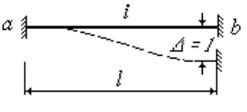
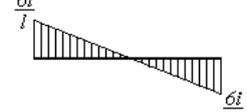
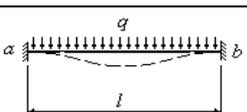
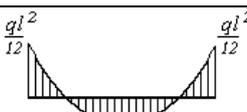
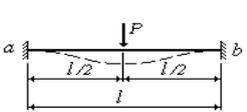
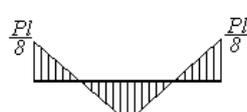
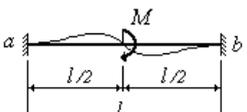
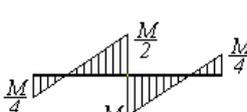
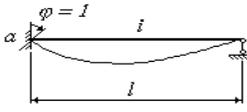
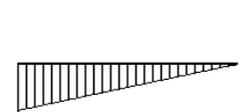
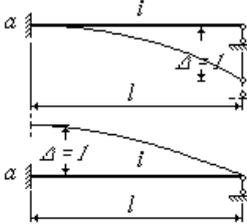
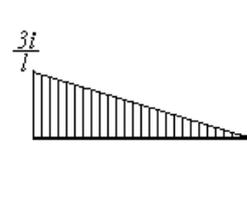
$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1p} &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2p} &= 0, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ r_{m1}Z_1 + r_{m2}Z_2 + \dots + r_{mn}Z_n + R_{mp} &= 0. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Тут Z_1, Z_2, \dots, Z_n – основні невідомі методу переміщень, пронумеровані підряд, r_{jk} – реакція (реактивний момент у рухомому затисненні або реактивна сила у додатковому стержні) у накладеному з'єднанні j основної системи від примусового переміщення $Z_k=1$, R_{jp} – реакція в накладеному з'єднанні j від зовнішнього навантаження.

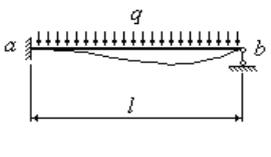
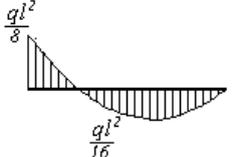
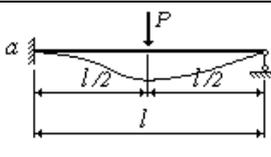
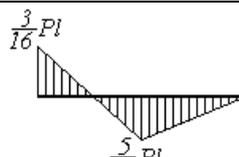
Система розв'язувальних рівнянь (13.2) має стандартний (канонічний) вигляд і називається **системою канонічних рівнянь методу переміщень**.

Для визначення коефіцієнтів і вільних членів системи рівнянь (13.2) необхідно заздалегідь побудувати епюри згинальних моментів в основній системі від одиничних значень основних невідомих Z_1, Z_2, \dots, Z_n і від дії зовнішнього навантаження. Побудова одиничних і вантажної епюр здійснюється за допомогою даних, наведених у таблиці 13.1.

Таблиця 13.1

№	Схема балки та навантаження	Кінцеві зусилля	Епюри згинальних моментів
1		$M_{ab} = 4i, \quad M_{ba} = 2i;$ $Q_{ab} = Q_{ba} = \frac{6i}{l}.$	
2		$M_{ab} = M_{ba} = -\frac{6i}{l};$ $Q_{ab} = Q_{ba} = \frac{12i}{l^2}.$	
3		$M'_{ab} = -M'_{ba} = -\frac{ql^2}{12};$ $Q'_{ab} = -Q'_{ba} = \frac{ql}{2}.$	
4		$M'_{ab} = -M'_{ba} = -\frac{Pl}{8};$ $Q'_{ab} = -Q'_{ba} = \frac{P}{2}.$	
5		$M'_{ab} = M'_{ba} = \frac{M}{4};$ $Q'_{ab} = Q'_{ba} = -\frac{1,5M}{l}.$	
6		$M_{ab} = 3i; \quad M_{ba} = 0;$ $Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{3i}{l}.$	
7		$M_{ab} = -\frac{3i}{l};$ $M_{ba} = 0;$ $Q_{ab} = Q_{ba} = \frac{3i}{l^2}.$	

Закінчення таблиці 13.1

№	Схема балки та навантаження	Кінцеві зусилля	Епюри згинальних моментів
8		$M_{ab}'' = -\frac{ql^2}{8}; M_{ba}'' = 0;$ $Q_{ab}'' = \frac{5}{8}ql; Q_{ba}'' = -\frac{3}{8}ql.$	
9		$M_{ab}'' = -\frac{3}{16}Pl; M_{ba}'' = 0;$ $Q_{ab}'' = \frac{11}{16}P; Q_{ba}'' = -\frac{5}{16}P.$	

Реакції в додаткових з'єднаннях r_{jk} і R_{jp} обчислюються з умов рівноваги вузлів рами (реактивні моменти в рухомих затисненнях) або відсічених частин рами (реакції в додаткових стержнях). При цьому реакції вважаються додатними, якщо їхні напрями збігаються з напрямками примусових переміщень, які надавались відповідним вузлам при побудові одиничних епюр.

У **розгорнутій формі** для складання системи розв'язувальних рівнянь використовуються формули, що виражають внутрішні зусилля на кінцях статично невизначуваних однопрогонових балок (кінцеві зусилля) залежно від переміщень опор і зовнішніх навантажень (див.табл.13.2).

Згинальні моменти вважаються додатними, якщо вони діють на вузол навпроти, а на стержень – за годинниковою стрілкою (рис.13.2,*а*). Додатні поперечні сили обертають і вузол і стержень за годинниковою стрілкою (рис.13.2,*б*). Додатні напрями кутів повороту φ і кутів перекосу стержнів ψ приймаються в напрямі руху годинникової стрілки.

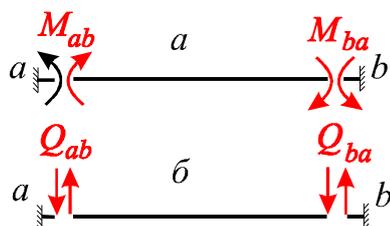


Рис.13.2

Для складання будь-якого розв'язувального рівняння слід прирівняти до нуля реакцію у відповідному додатковому з'єднанні. Якщо це рухоме затиснення, то необхідно вирізати вузол, на який було накладене означене затиснення. Реактивний момент, який визначається як сума кінцевих моментів в усіх стержнях, що примикають до вирізаного вузла, прирівнюється нулю. Якщо ж розглядається додатковий опорний стержень, то слід відокремити частину рами, яка утримується від переміщення означеним стержнем. До відокремленої частини необхідно

прикласти зовнішні навантаження і поперечні сили в місцях розрізів. Реакція в додатковому стержні, що визначається з рівняння проєкцій, прирівнюється до нуля.

Таблиця 13.2

№	Схема стержня	Кінцеві зусилля
1		$M_{ab} = 2i_{ab}(2\varphi_a + \varphi_b - 3\psi_{ab}) + M'_{ab}$ $M_{ba} = 2i_{ab}(\varphi_a + 2\varphi_b - 3\psi_{ab}) + M'_{ba}$ $Q_{ab} = -\frac{6i_{ab}}{l_{ab}}(\varphi_a + \varphi_b - 2\psi_{ab}) + Q'_{ab}$ $Q_{ba} = -\frac{6i_{ab}}{l_{ab}}(\varphi_a + \varphi_b - 2\psi_{ab}) + Q'_{ba}$
2		$M_{ab} = 3i_{ab}(\varphi_a - \psi_{ab}) + M''_{ab}$ $M_{ba} = 0$ $Q_{ab} = -\frac{3i_{ab}}{l_{ab}}(\varphi_a - \psi_{ab}) + Q''_{ab}$ $Q_{ba} = -\frac{3i_{ab}}{l_{ab}}(\varphi_a - \psi_{ab}) + Q''_{ba}$

У наведених формулах $\psi_{ab} = \frac{\Delta_b - \Delta_a}{l_{ab}}$ – кут перекосу стержня (додатний, якщо відбувається за годинниковою стрілкою). Величини доданків M'_{ab} , M'_{ba} , M''_{ab} , Q'_{ab} , Q'_{ba} , Q''_{ab} , Q''_{ba} залежать від зовнішнього навантаження і визначаються з табл. 13.1.

Побудова дійсних епюр зусиль

При розв'язанні задачі в канонічній формі дійсна еюра згинальних моментів будується способом накладення епюр у відповідності до формули

$$M_\delta = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \dots + \bar{M}_n Z_n + M_p. \quad (13.3)$$

Тут $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ – епюри згинальних моментів в основній системі від одиничних примусових переміщень $Z_1 = 1, Z_2 = 1, \dots, Z_n = 1$; M_p – еюра згинальних моментів в основній системі від зовнішнього навантаження; Z_1, Z_2, \dots, Z_n – дійсні величини основних невідомих.

У розгорнутій формі попередньо будується еюра вузлових моментів. Останні визначаються за формулами для кінцевих моментів в однопрогонових балках (див.табл.13.2) при значеннях переміщень, що одержані при розв'язанні системи рівнянь. Означені моменти відкладаються на

відповідних кінцях стержня і з'єднуються прямими лініями, тобто будується еюра вузлових моментів $M_{\text{вуз}}$. У межах стержнів, до яких прикладені зовнішні навантаження, від еюри вузлових моментів відкладаються еюри балкових моментів $M_{\text{бал}}$, побудовані від зовнішнього навантаження в стержнях як в простих статично визначуваних балках на двох шарнірних опорах.

Еюра поперечних сил будується на базі диференціальної залежності

$$Q_o = \frac{dM_o}{ds}. \quad (13.4)$$

При застосуванні розгорнутого способу дійсні поперечні сили можуть також бути обчислені за формулами для кінцевих зусиль (див.табл.13.2). Поздовжні сили визначаються з умов рівноваги вузлів або окремих частин рами, до яких прикладаються задані зовнішні навантаження, а в перерізах – поперечні сили, що беруться з еюри Q_o , і поздовжні сили. Вузли необхідно розглядати в такій послідовності, щоб у кожному з них було не більше двох невідомих поздовжніх сил.

13.2. Розрахунок несиметричної рами в канонічній формі

Виконаємо розрахунок статично невизначуваної рами (рис.13.3,а).

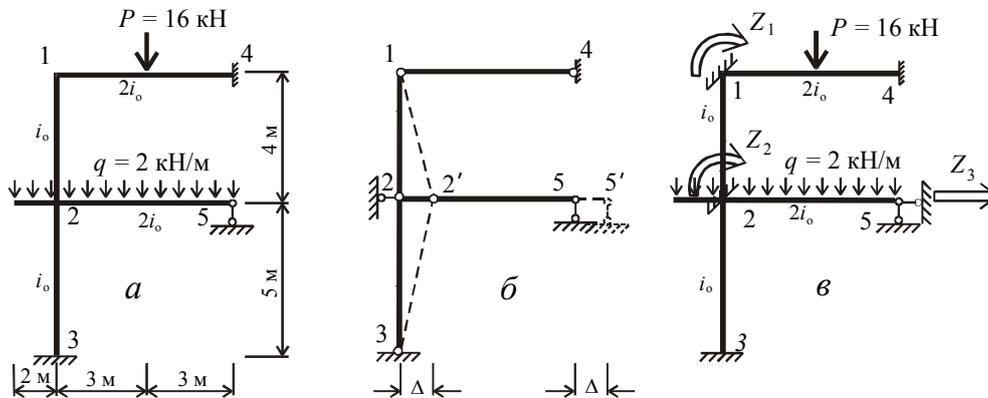


Рис.13.3

Створення основної системи методу переміщень

Вихідна рама має два проміжних жорстких вузли, в які необхідно ввести рухомі затиснення. Для визначення кількості незалежних лінійних переміщень створено шарнірну схему рами (рис.13.3,б). Для того щоб вона була геометрично незмінюваною достатньо ввести додатковий опорний стержень C_1 , який закріплює ригель 2-5 від можливих горизонтальних переміщень. Основна система методу переміщень зображена на рис.13.3,в.

Основні невідомі

Задана рама має три основні невідомі методу переміщень: два кути повороту в жорстких вузлах φ_1 і φ_2 , а також одне незалежне лінійне переміщення Δ . Позначимо ці невідомі стандартним чином:

$$Z_1 = \varphi_1, \quad Z_2 = \varphi_2, \quad Z_3 = \Delta.$$

Відповідно до нумерації основних невідомих пронумеруємо додаткові з'єднання:

1. рухоме затиснення у вузлі 1;
2. рухоме затиснення у вузлі 2;
3. опорний стержень C_1 .

Система канонічних рівнянь

Для випадку трьох основних невідомих система розв'язувальних рівнянь матиме вигляд:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} &= 0, \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} &= 0. \end{aligned}$$

Схеми розташування реакцій в допоміжних станах, зумовлених одиничними переміщеннями додаткових з'єднань, наведені на рис.13.4. На цих рисунках до того ж показано деформовані вісі стержнів.

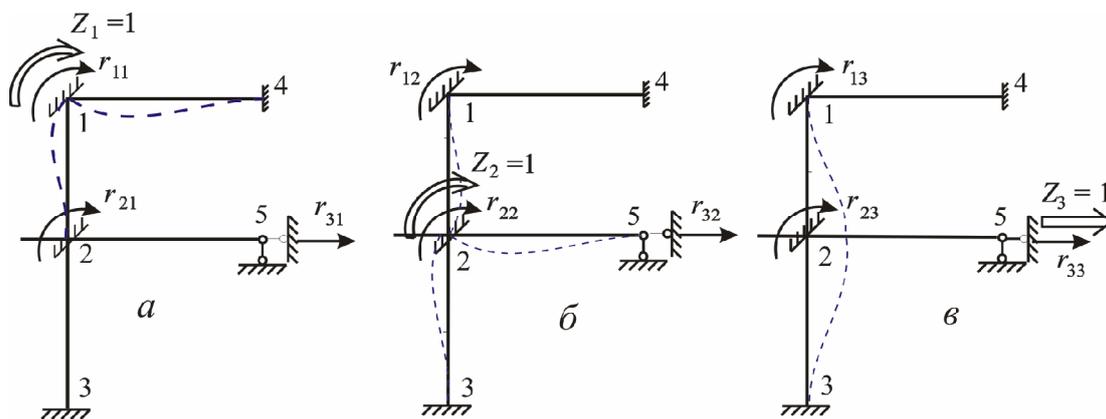


Рис.13.4

Позначення вантажних реакцій показано на рис.13.5. У всіх випадках напрями реакцій в додаткових з'єднаннях відповідають прийнятим напрямом переміщень цих з'єднань в допоміжних станах.

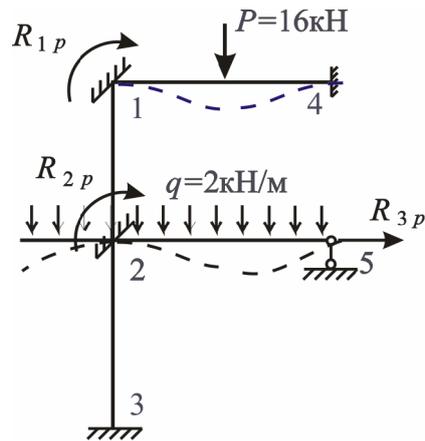


Рис.13.5

Побудова одиничних і вантажної епюр

Одиничні і вантажні епюри побудовано на рис.13.6. При побудові використовувались епюри в однопрогонових балках (табл.13.1).

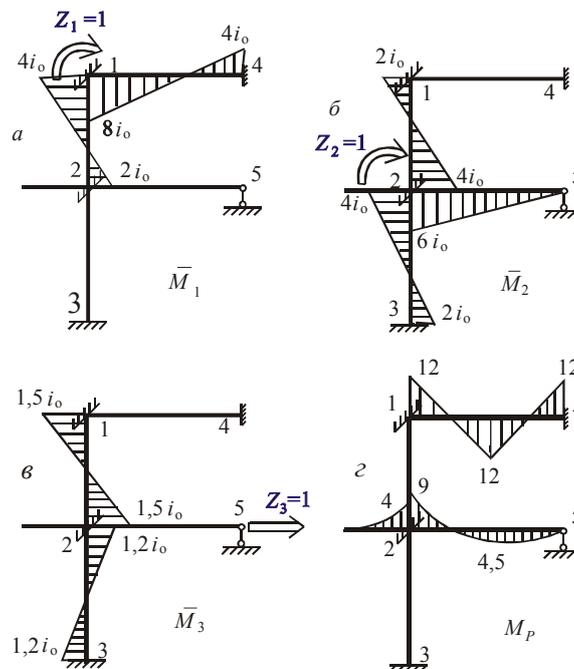


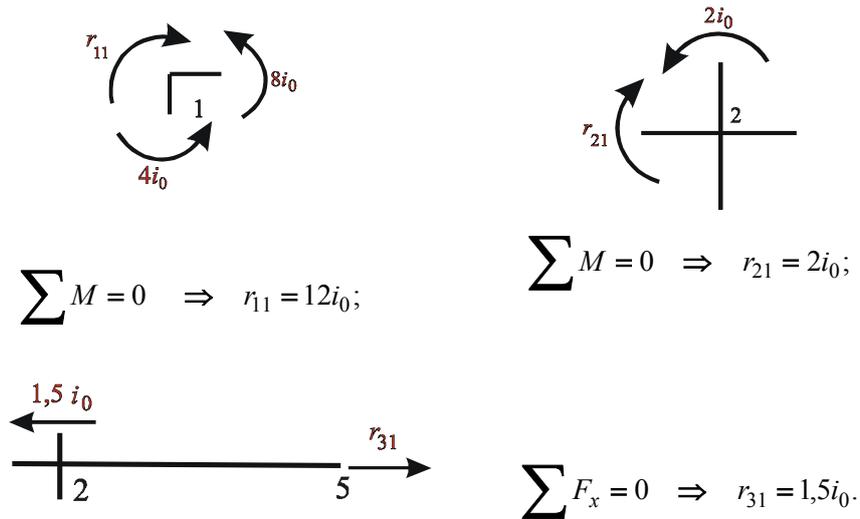
Рис.13.6

Так, при побудові епюри \bar{M}_1 від дії примусового кута повороту рухомого затиснення $Z_1 = 1$ деформуються лише стержні 1-4 і 1-2, що примикають до вузла 1. Обидва зазначені стержні мають на обох кінцях затиснення. Одне із затиснень повертається на одиничний кут. Така дія відповідає першому рядку табл.13.1. Тому епюри згинальних моментів з першого рядка таблиці переносяться на стержні 1-4 і 1-2 з урахуванням розтягнутих волокон (див.рис.13.4,а). Аналогічним чином побудовано одиничні епюри \bar{M}_2 і \bar{M}_3 , а також вантажну епюру M_p .

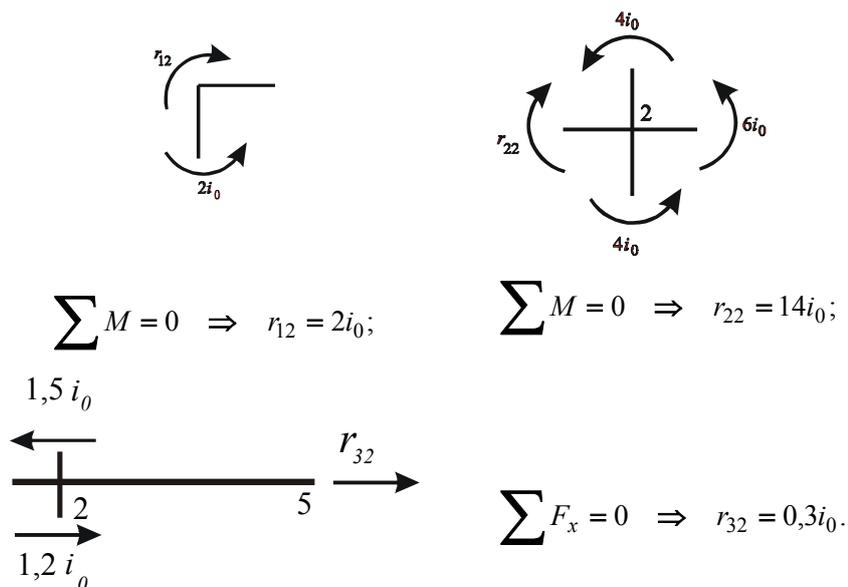
Обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь

Коефіцієнти системи канонічних рівнянь – це реакції у накладених з'єднаннях основної системи від одиничних примусових переміщень та від зовнішнього навантаження. Схеми одиничних реакцій наведено на рис.13.4, а вантажних – на рис.13.5. Реакції можуть бути визначені з умов рівноваги додаткових з'єднань в усіх одиничних і у вантажному стані основної системи.

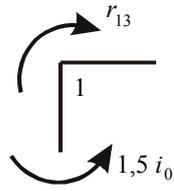
Обчислимо реакції в першому стані (рис.13.6,а).



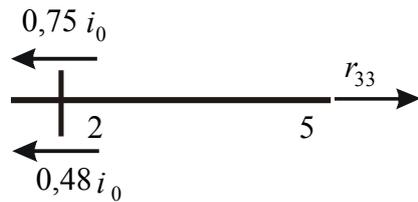
У другому стані (рис.13.6,б):



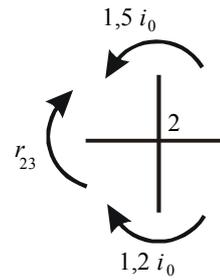
Реакції у третьому стані (рис.13.6,в):



$$\sum M = 0 \Rightarrow r_{13} = 1,5i_0;$$

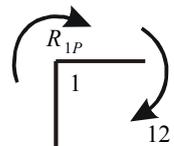


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow r_{33} = 1,23i_0.$$

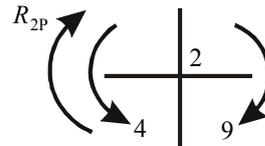


$$\sum M = 0 \Rightarrow r_{23} = 0,3i_0;$$

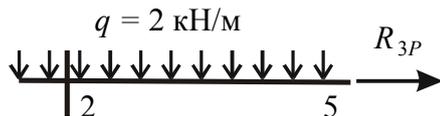
Реакції у вантажному стані (рис.13.6,г):



$$\sum M = 0 \Rightarrow R_{1p} = -12;$$



$$\sum M = 0 \Rightarrow R_{2p} = -5;$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{3p} = 0.$$

Розв'язання системи канонічних рівнянь

Підставимо знайдені коефіцієнти і вільні члени до системи розв'язувальних рівнянь:

$$12i_0Z_1 + 2i_0Z_2 + 1,5i_0Z_3 - 12 = 0;$$

$$2i_0Z_1 + 14i_0Z_2 + 0,3i_0Z_3 - 5 = 0;$$

$$1,5i_0Z_1 + 0,3i_0Z_2 + 1,23i_0Z_3 = 0.$$

У результаті розв'язання маємо:

$$Z_1 = 1,1437/i_0; \quad Z_2 = 0,2248/i_0; \quad Z_3 = -1,4496/i_0.$$

Для перевірки підставимо обчислені величини основних невідомих у сумарне рівняння:

$$15,5i_0Z_1 + 16,3i_0Z_2 + 3,03i_0Z_3 - 17 = 0;$$

$$15,5 \cdot 1,1437 + 16,3 \cdot 0,2248 + 3,03 \cdot (-1,4496) - 17 = 21,3915 - 21,3923 = -0,0008 \approx 0.$$

Відносна похибка

$$\varepsilon = \frac{0,0008}{21,3915} \cdot 100\% = 0,004\%.$$

Побудова дійсної епюри згинальних моментів

Дійсна епюра згинальних моментів будується накладанням епюр за допомогою формули

$$M_o = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \bar{M}_3 Z_3 + M_p.$$

Результати множення одиничних епюр на дійсні величини основних невідомих наведено на рис.13.7.

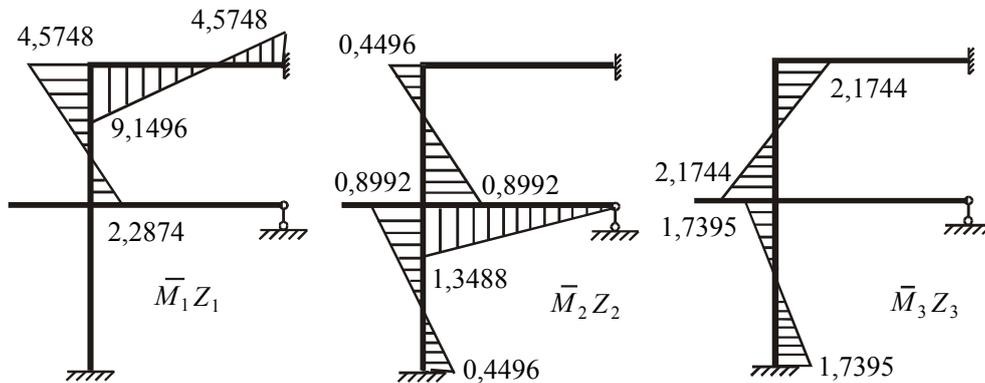


Рис.13.7

Дійсна епюра згинальних моментів представлена на рис.13.8,а.

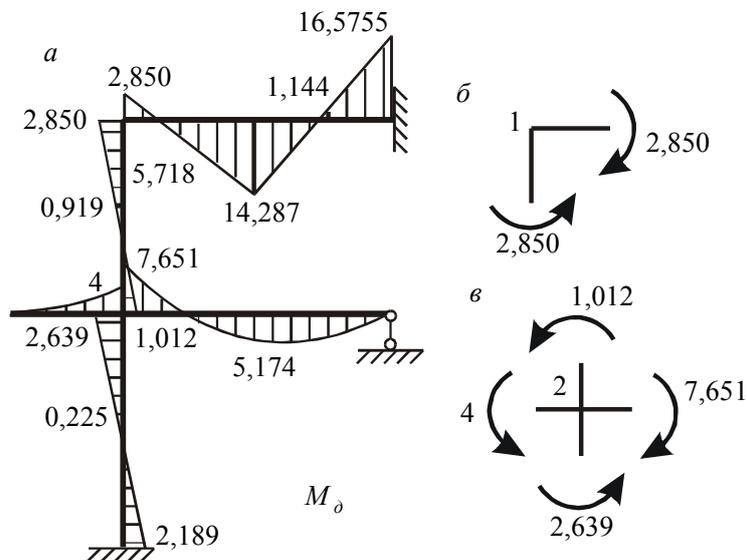


Рис.13.8

Статична перевірка дійсної епюри згинальних моментів

Статична перевірка полягає в перевірці умов рівноваги вузлів рами. Для її виконання по чергово виокремлюються всі проміжні вузли, до яких прикладаються зовнішні вузлові навантаження (якщо вони є), після чого перевіряється чи дорівнює нулю сума моментів у даному вузлі. Виконання перевірки показано на рис.10,8,б і 13.8,в. Так, рівновага вузла 1 очевидна, а для вузла 2 маємо:

$$7,651 - 2,639 - 4 - 1,012 = 0.$$

Кінематична перевірка епюри згинальних моментів

Кінематична перевірка полягає в обчисленні переміщень, які завідомо дорівнюють нулю. Для виконання перевірки необхідно задану статично невизначувану схему (рис.13.3,а) замінити статично визначуваною, тобто перейти до основної системи методу сил, відкинувши "зайві" в'язі. Кількість зайвих в'язей обчислюється за відомою формулою

$$n = 3k - III,$$

де k – кількість замкнених контурів, III – кількість простих шарнірів. У заданій схемі $k = 2$ (див.рис.13.9,а), $III = 2$. Звідси $n = 3 \cdot 2 - 2 = 4$. Відкинемо чотири опорні в'язі (рис.13.9,б). На цій же схемі позначено жорсткості стержнів на згин, які обчислені за формулою

$$EI_{ab} = i_{ab} \cdot l_{ab}.$$

Для кінематичної перевірки слід побудувати епюру згинальних моментів у статично визначуваній основній системі від одиничних невідомих. Причому епюру можна будувати або від будь-якого невідомого, або від сукупності будь-яких невідомих методу сил. У будь-якому разі необхідно, щоб епюра M розповсюджувалась на якомога більшу кількість стержнів. У даному прикладі побудована епюра \bar{M}_s від одночасної дії невідомих $X_1 = 1$ і $X_4 = 1$ (рис.13.9,в).

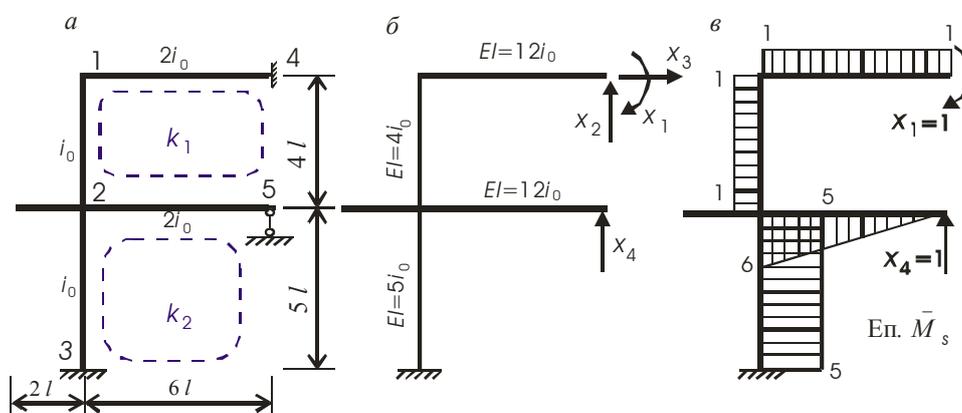


Рис.13.9

Обчислимо величину переміщення

$$\begin{aligned} \Delta_{S_0} &= \sum \int \frac{\bar{M}_s M_0}{EI} dx = \frac{1}{12i_0} 1 \cdot 3 \cdot 1,144 - \frac{1}{12i_0} 1 \cdot 3 \cdot 5,718 + \\ &+ \frac{1}{4i_0} 1 \cdot 4 \cdot 0,919 - \frac{1}{5i_0} 5 \cdot 5 \cdot 0,225 + \frac{6}{6 \cdot 12i_0} (-6 \cdot 7,651 + 4 \cdot 3 \cdot 5,174 + 0) = \\ &= \frac{0,286}{i_0} - \frac{1,429}{i_0} + \frac{0,919}{i_0} - \frac{1,125}{i_0} + \frac{1,348}{i_0} = \frac{2,553}{i_0} - \frac{2,554}{i_0} = -\frac{0,001}{i_0}. \end{aligned}$$

Відносна похибка

$$\varepsilon = \frac{0,001}{2,553} \cdot 100\% = 0,04\% \approx 0.$$

Обчислення поперечних сил

Обчислимо поперечні сили користуючись диференціальною залежністю між дійсними поперечними силами Q_0 і M_0 .

$$\begin{aligned} Q_{1-4} &= \frac{14,287 + 2,850}{3} = 5,713 \text{ кН}; \\ Q_{4-1} &= -\frac{16,5755 + 14,287}{3} = -10,287 \text{ кН}; \\ Q_{1-2} &= Q_{2-1} = -\frac{2,850 + 1,012}{4} = -0,966 \text{ кН}; \\ Q_{2-3} &= Q_{3-3} = -\frac{2,639 + 2,189}{5} = -0,966 \text{ кН}; \\ Q_{2-5} &= \frac{7,651}{6} + \frac{2 \cdot 6}{2} = 7,275 \text{ кН}; \\ Q_{5-2} &= \frac{7,651}{6} - \frac{2 \cdot 6}{2} = -4,725 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Дійсна еюра Q_0 побудована на рис.13.а.

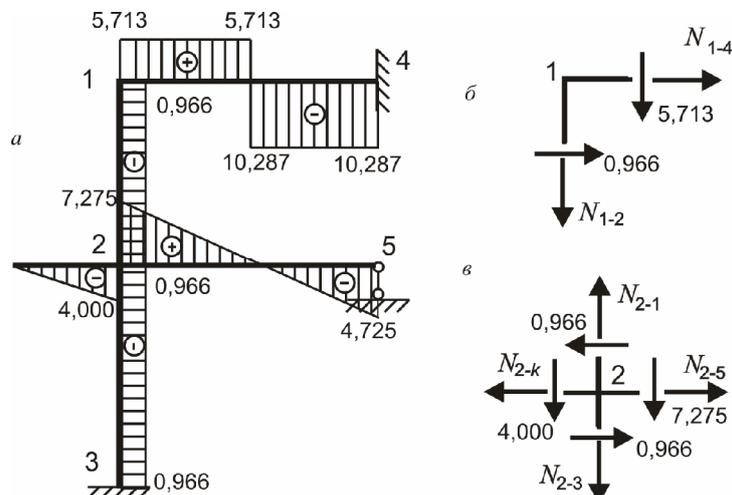


Рис.13.10

Обчислення поздовжніх сил

Поздовжні сили обчислюємо, розглядаючи послідовно рівновагу вузлів рами. Так, вирізавши вузол 1 (рис.13.10,б), прикладаємо до нього вже відомі поперечні сили, а також невідомі поздовжні сили. Як завжди, невідомі сили спрямовуємо в додатному напрямі, тобто вважаємо ці сили розтягуючими. Тоді з умов рівноваги маємо

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad N_{1-4} + 0,996 = 0 &\Rightarrow N_{1-4} = -0,996 \text{ кН}; \\ \sum F_y = 0 \quad -N_{1-2} - 5,713 = 0 &\Rightarrow N_{1-2} = -5,713 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Далі виокремлюється вузол 2, до якого прикладаються відомі поперечні сили, а також поздовжні сили (рис.13.10,в). Тут необхідно мати на увазі те, що поздовжня сила $N_{2-1} = N_{1-2} = -5,713$, а поздовжня сила на консолі $N_{1-k} = 0$. Отже маємо

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad N_{2-5} - 0,966 + 0,966 = 0 &\Rightarrow N_{2-5} = 0; \\ \sum F_y = 0 \quad -N_{2-3} - 4,000 - 7,275 + N_{2-1} = 0 &\Rightarrow N_{2-3} = -16,988 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Епюра поздовжніх сил побудована на рис.13.11,а.

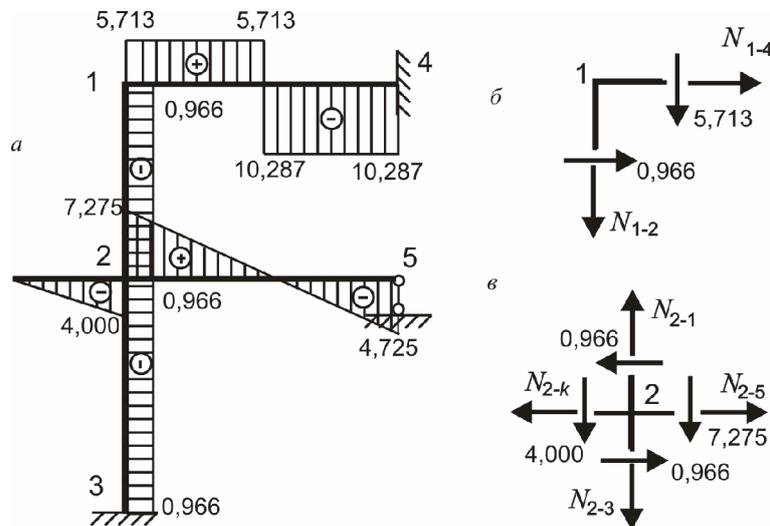


Рис.13.11

Перевірка загальної рівноваги рами

Проведімо переріз, що відокремлює раму від опор, і прикладемо в місцях перерізів згинальні моменти, поперечні і поздовжні сили (рис.13.11,б). Перевіримо, чи виконуються умови рівноваги всієї системи.

$$\sum F_x = 0,996 - 0,996 \equiv 0;$$

$$\sum F_y = 16,998 + 4,725 + 16,575 - 6 - 2 \cdot 8 = -0,002 \approx 0;$$

$$\sum M_4 = 16,988 \cdot 6 - 0,966 \cdot 9 + 2,189 - 2 \cdot \frac{(2+6)^2}{2} - 6 \cdot 3 + 16,575 \approx 0.$$

13.3. Розрахунок несиметричної рами в розгорнутій формі

Розглянемо раму, яка була розрахована в попередньому підрозділі. Схема рами наведена на рис.13.12,*а*.

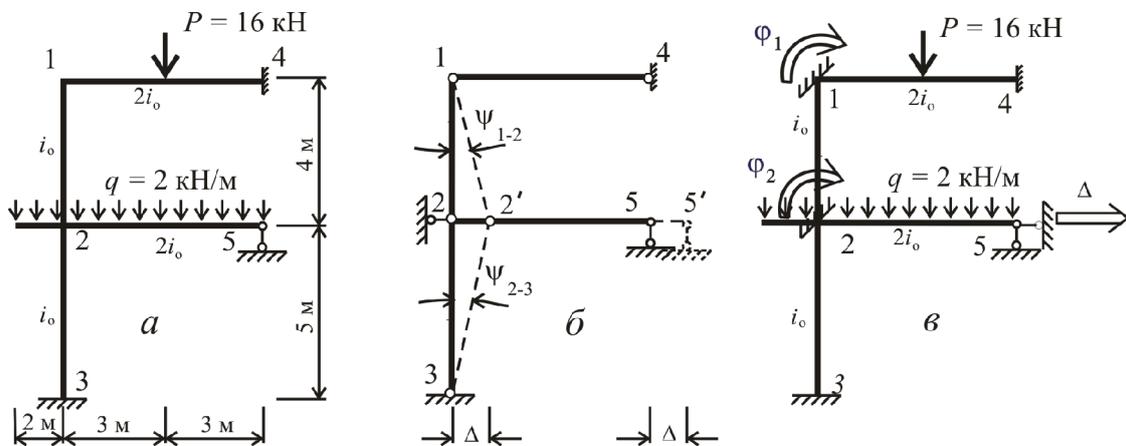


Рис.13.12

Основні невідомі і основна система методу переміщень

Основні невідомі – це кути повороту проміжних жорстких вузлів φ_1 і φ_2 , а також незалежне лінійне переміщення Δ . Повороти затиснень в опорних вузлах $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$.

На шарнірній схемі (рис.13.12,*б*) показано кути перекосу, які за мализною кутів беруться рівними відповідним тангенсам:

$$\psi_{1-2} = -\frac{\Delta}{4}, \quad \psi_{2-3} = \frac{\Delta}{5}, \quad \psi_{1-4} = 0, \quad \psi_{2-5} = 0.$$

(додатними вважаються кути перекосів за годинниковою стрілкою).

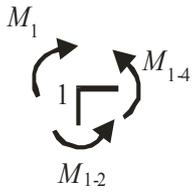
Основні невідомі методу і основна система зображено на рис.13.12,*в*.

Складання розв'язувальних рівнянь

Розв'язувальні рівняння складаємо з умов рівності нулю реакцій в накладених з'єднаннях.

Реактивний момент пружного затиснення вузла 1 виражається через кінцеві моменти в стержнях з умови рівноваги вузла 1.

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_1 = M_{1-2} + M_{1-4} = 0.$$



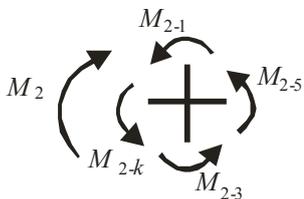
У свою чергу, кінцеві моменти виражаються через переміщення вузлів за допомогою формул методу переміщень для зігнутих стержнів, які наведено в табл.13.2. Оскільки стержні 1-4 і 1-2 мають на обох кінцях затиснення,

скористаємось з формул першого рядка табл.13.2:

$$M_{1-4} = 2i_{1-4} (2\varphi_1 + \varphi_4 - 3\psi_{1-4}) + M'_{1-4} = 2 \cdot 2i_0 (2\varphi_1 + 0 - 0) + \left(-\frac{16 \cdot 6}{8}\right) = 8i_0\varphi_1 - 12;$$

$$M_{1-2} = 4i_0\varphi_1 + 2i_0\varphi_2 + 1,5i_0\Delta.$$

$$M_1 = 12i_0\varphi_1 + 2i_0\varphi_2 + 1,5i_0\Delta - 12 = 0.$$



Реактивний момент пружного затиснення вузла 2 виражається через кінцеві моменти в стержнях з умови рівноваги вузла 2.

$$M_2 = M_{2-1} + M_{2-5} + M_{2-3} + M_{2-k} = 0.$$

Кінцеві моменти M_{2-1} і M_{2-3} визначаються формулами першого рядка табл.13.2, оскільки відповідні стержні мають затиснення на обох кінцях. Момент M_{2-5} – за формулою з другого рядка, тому що на одному кінці стержень має затиснення, а на протилежному – шарнір. Що стосується моменту M_{2-k} , то він обчислюється як згинальний момент у статично визначуваній консольній балці. Отже

$$M_{2-1} = 2i_{2-1} (2\varphi_2 + \varphi_1 - 3\psi_{2-1}) + M'_{2-1} = 2i_0 \left(2\varphi_2 + \varphi_1 - 3 \left(-\frac{\Delta}{4} \right) \right) + 0 = 4i_0\varphi_2 + 2i_0\varphi_1 + 1,5i_0\Delta;$$

$$M_{2-3} = 2i_{2-1} (2\varphi_2 + \varphi_3 - 3\psi_{2-3}) + M'_{2-3} = 2i_0 \left(2\varphi_2 + 0 - 3 \left(\frac{\Delta}{5} \right) \right) + 0 = 4i_0\varphi_2 - 1,2i_0\Delta;$$

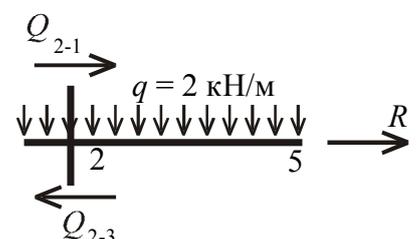
$$M_{2-5} = 3i_{2-5} (\varphi_2 - \psi_{2-5}) + M''_{2-5} = 3 \cdot 2i_0 (\varphi_2 - 0) + \left(-\frac{2 \cdot 6^2}{8} \right) = 6i_0\varphi_2 - 9;$$

$$M_{2-k} = \frac{2 \cdot 2^2}{2} = 4.$$

$$M_2 = 2i_0\varphi_1 + 14i_0\varphi_2 + 0,3i_0\Delta - 5 = 0.$$

Реактивна сила в додатковому опорному стержні C_1 визначається з умови рівноваги ригеля 2-5:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R = Q_{2-3} - Q_{2-1} = 0.$$



$$\begin{aligned}
 Q_{2-3} &= -\frac{6i_{2-3}}{l_{2-3}}(\varphi_2 + \varphi_3 - 2\psi_{2-3}) + Q'_{2-3} = -\frac{6i_0}{5}\left(\varphi_2 + 0 - 2\frac{\Delta}{5}\right) + 0 = \\
 &= -1,2i_0\varphi_2 + 0,48i_0\Delta; \\
 Q_{2-1} &= \frac{6i_{2-1}}{l_{2-1}}(\varphi_2 + \varphi_1 - 2\psi_{2-1}) + Q'_{2-3} = -\frac{6i_0}{4}\left(\varphi_2 + \varphi_1 - 2\left(-\frac{\Delta}{4}\right)\right) + 0 = \\
 &= -1,5i_0\varphi_2 - 1,5i_0\varphi_1 - 0,75i_0\Delta.
 \end{aligned}$$

$$R = 1,5i_0\varphi_1 + 0,3i_0\varphi_2 + 1,23i_0\Delta = 0.$$

Отже, маємо систему рівнянь

$$\begin{aligned}
 12i_0\varphi_1 + 2i_0\varphi_2 + 1,5i_0\Delta - 12 &= 0; \\
 2i_0\varphi_1 + 14i_0\varphi_2 + 0,3i_0\Delta - 5 &= 0; \\
 1,5i_0\varphi_1 + 0,3i_0\varphi_2 + 1,23i_0\Delta &= 0,
 \end{aligned}$$

яка повністю збігається з системою розв'язувальних рівнянь, одержаних за канонічним способом (див.п.13.2). Система має такий розв'язок:

$$\varphi_1 = 1,1437/i_0; \quad \varphi_2 = 0,2248/i_0; \quad \Delta = -1,4496/i_0.$$

Обчислення кінцевих згинальних моментів

Кінцеві згинальні моменти в стержнях рами обчислюємо за формулами табл.13.2.

У вузлі 1

$$\begin{aligned}
 M_{1-2} &= 2i_{1-2}(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\psi_{1-2}) + M'_{1-2} = 2i_0\left(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\left(-\frac{\Delta}{4}\right)\right) + M'_{1-2} = \\
 &= 2i_0\left(2 \cdot \frac{1,1437}{i_0} + \frac{0,2248}{i_0} - 3\left(-\frac{-1,4496}{4i_0}\right)\right) + 0 = 2,850;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{1-4} &= 2i_{1-4}(2\varphi_1 + \varphi_4 - 3\psi_{1-4}) + M'_{1-4} = 2 \cdot 2i_0(2\varphi_1 + \varphi_4 - 3\psi_{1-4}) - M'_{1-4} = \\
 &= 4i_0\left(2 \cdot \frac{1,1437}{i_0} + 0 - 0\right) + \left(-\frac{16 \cdot 6}{8}\right) = -2,850.
 \end{aligned}$$

У вузлі 2

$$M_{2-1} = 2i_{1-2}(2\varphi_2 + \varphi_1 - 3\psi_{1-2}) + M'_{2-1} = 2i_0 \left(2\varphi_2 + \varphi_1 - 3 \left(-\frac{\Delta}{4} \right) \right) + M'_{2-1} =$$

$$= 2i_0 \left(2 \cdot \frac{0,2248}{i_0} + \frac{1,1437}{i_0} - 3 \left(-\frac{-1,4496}{4i_0} \right) \right) + 0 = 1,012.$$

$$M_{2-5} = 3i_{2-5}(\varphi_2 - \psi_{2-5}) + M''_{2-5} = 3 \cdot 2i_0(\varphi_2 - \psi_{2-5}) + M''_{2-5} =$$

$$= 6i_0 \left(\frac{0,2248}{i_0} - 0 \right) + \left(-\frac{2 \cdot 6^2}{8} \right) = -7,651.$$

$$M_{2-3} = 2i_{2-3}(2\varphi_2 + \varphi_3 - 3\psi_{2-3}) + M'_{2-3} = 2i_0 \left(2\varphi_2 + \varphi_3 - 3 \frac{\Delta}{5} \right) + M'_{2-3} =$$

$$= 2i_0 \left(2 \cdot \frac{0,2248}{i_0} + 0 - \frac{-1,4496}{5i_0} \right) + 0 = 2,639.$$

$$M_{2-\kappa} = \frac{2 \cdot 2^2}{2} = 4.$$

Вузол 3.

$$M_{3-2} = 2i_{3-2}(2\varphi_3 + \varphi_2 - 3\psi_{2-3}) + M'_{3-2} = 2i_0 \left(2\varphi_3 + \varphi_2 - 3 \frac{\Delta}{5} \right) + M'_{3-2} =$$

$$= 2i_0 \left(0 + \frac{0,2248}{i_0} - 3 \cdot \frac{-1,4496}{5i_0} \right) + 0 = 2,189.$$

Вузол 4.

$$M_{4-1} = 2i_{4-1}(2\varphi_4 + \varphi_1 - 3\psi_{1-4}) + M'_{4-1} = 2 \cdot 2i_0(2\varphi_4 + \varphi_1 - 3\psi_{1-4}) + M'_{4-1} =$$

$$= 4i_0 \left(0 + \frac{1,1437}{i_0} - 0 \right) + \frac{16 \cdot 6}{8} = 16,5755.$$

Відклавши величини кінцевих моментів на схемі рами одержуємо епюру вузлових згинальних моментів $M_{\text{вуз}}$ (рис.13.13,а).

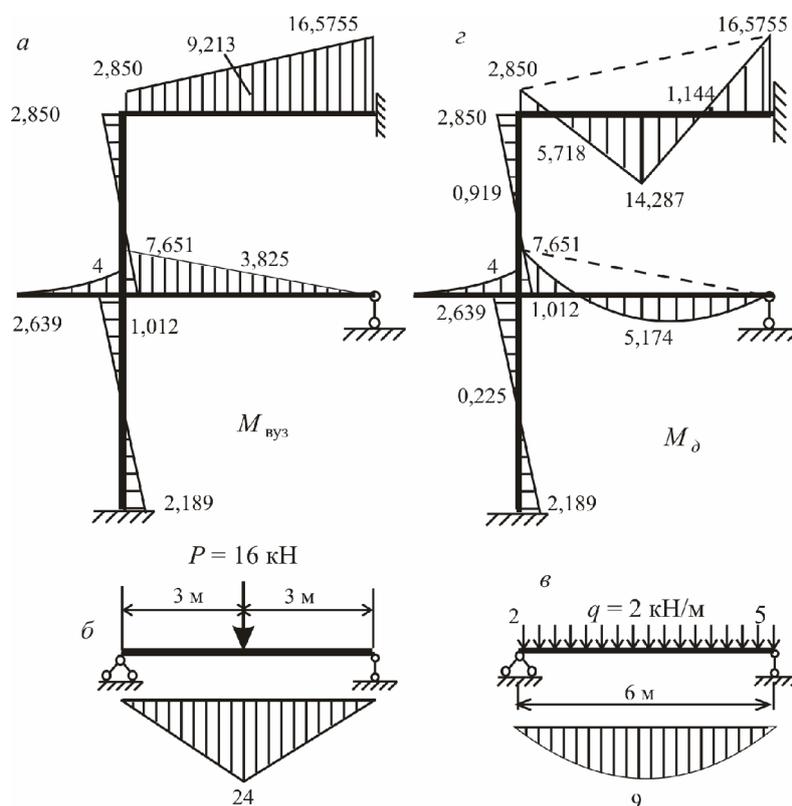


Рис.13.13

До епюри вузлових моментів слід додати епюри згинальних моментів, побудовані в навантажених стержнях як у простих балках (рис.13.13,б,в). Дійсна епюра згинальних моментів M_0 (рис.13.13,г) одержана накладенням епюр в однопрогонових балках на епюру вузлових моментів.

Подальший розрахунок повністю збігається з розрахунком рами в канонічній формі (див.п.13.2).

13.4. Розрахунок симетричної рами на симетричне навантаження

Виконаємо розрахунок статично невизначуваної рами на симетричне навантаження (рис.13.14,а).

Визначення кількості основних невідомих і призначення основної системи

Рама має шість проміжних жорстких вузлів, отже

$$k_{\varphi} = 6 \quad (\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8).$$

Для визначення кількості незалежних поступальних переміщень вузлів утворюємо шарнірну схему рами шляхом введення в усі жорсткі вузли наскрізних шарнірів (рис.13.14,б). Аналізуючи геометричну структуру шарнірної схеми доходимо висновку, що для забезпечення її геометричної незмінюваності достатньо ввести три додаткові опорні стержні C_1 , C_2 і C_3 . Це означає, що $k_{\Delta} = 3$.

Очевидно, що стержень C_1 усуває лише горизонтальне переміщення Δ_1 ригеля 6-7-8 (рис.13.14,в), стержень C_2 – лише горизонтальне переміщення Δ_2 ригеля 3-4-6 (рис.13.14,з), а стержень C_3 – вертикальне переміщення Δ_3 стояка 4-7 (рис.13.14,д).

Таким чином кількість основних невідомих

$$k = k_\phi + k_\Delta = 8$$

Основна система, утворена накладенням плаваючих затиснень і додаткових опорних стержнів, які усувають переміщення вузлів, наведено на рис.13.14,е.

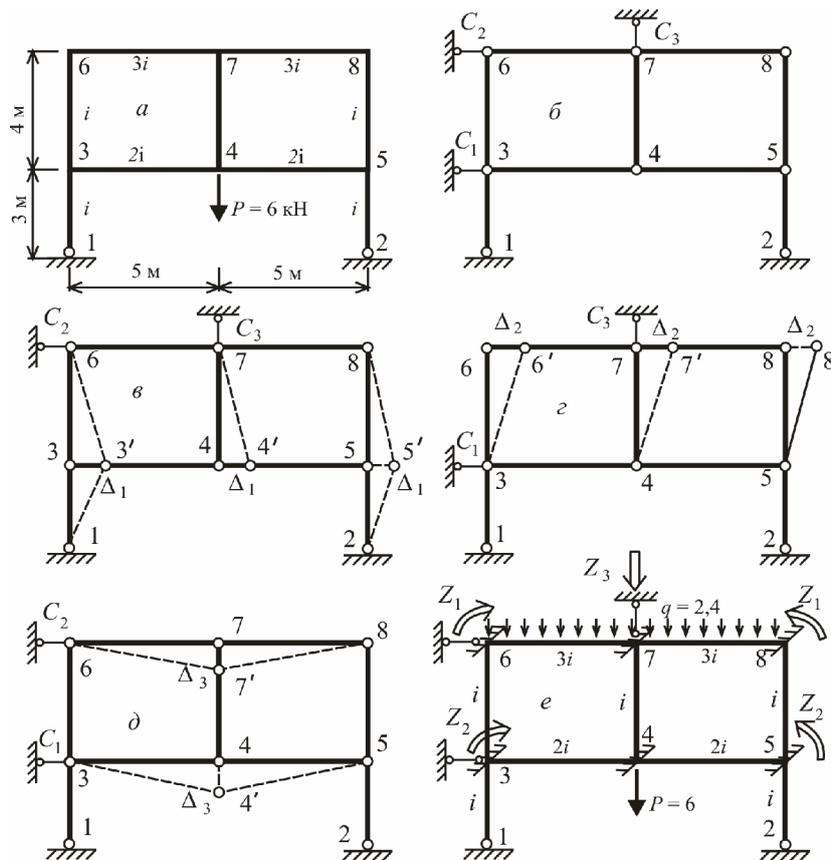


Рис.13.14

Позначення основних невідомих

Оскільки на симетричну раму діє симетричне навантаження, її напружено-деформований стан буде також симетричним. На цій підставі можна вважати, що вузли, розташовані на осі симетрії не повертаються, тобто $\phi_4 = \phi_7 = 0$. Нулю дорівнюють й поступальні переміщення вузлів, які порушують симетрію: $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. З іншого боку, кути повороту симетрично розташованих вузлів повертаються в протилежних напрямках і за величиною дорівнюють один одному. Одночасні симетричні повороти таких вузлів будемо розглядати як групові основні невідомі:

$$\begin{aligned}\varphi_6 \quad i \quad -\varphi_8 &\Rightarrow Z_1; \\ \varphi_3 \quad i \quad -\varphi_5 &\Rightarrow Z_2.\end{aligned}$$

Третім основним невідомим буде поступальне переміщення Δ_3 :

$$\Delta_3 \Rightarrow Z_3.$$

Зазначені основні невідомі показано на основній системі методу переміщень (рис.13.14,*e*).

Система канонічних рівнянь

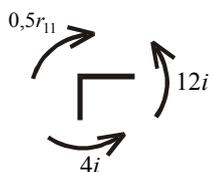
Система канонічних рівнянь методу переміщень має вигляд:

$$\begin{aligned}r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1P} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2P} &= 0; \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3P} &= 0.\end{aligned}$$

Побудова епюр згинальних моментів і обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь

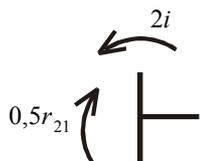
Коефіцієнти при невідомих – це реакції накладених з'єднань від дії основних невідомих, які дорівнюють одиниці, а вільні члени – реакції від зовнішнього навантаження. Визначатимемо коефіцієнти при невідомих по чергово надаючи одиничні змушені переміщення накладеним з'єднанням.

Реакції від дії основного невідомого $Z_1 = 1$ показано на рис.13.15,*a*. Відповідна еюра згинальних моментів \bar{M}_1 побудована на рис.13.15,*б*. Аналізуємо рівновагу вузлів, на які накладено плаваючі затиснення, по чергово вирізаючи їх з основної системи. В місцях розрізів до стержнів прикладаються згинальні моменти, які вибираються з епюри згинальних моментів \bar{M}_1 .



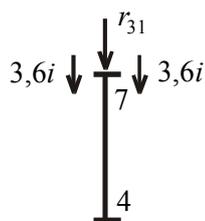
$$\sum M = 0 \Rightarrow 0,5r_{11} - 12i - 4i = 0.$$

$$r_{11} = 32i.$$



$$\sum M = 0 \Rightarrow 0,5r_{21} - 2i = 0.$$

$$r_{21} = 4i.$$



Для визначення реакції r_{31} вирізаємо і аналізуємо рівновагу стояка 4-7. Поперечні сили в стержнях визначаємо за епюрою \bar{M}_1 .

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -r_{31} - 3,6i - 3,6i = 0.$$

$$r_{31} = -7,2i.$$

Реакції від дії основного невідомого $Z_2 = 1$ показано на рис.13.15,в. Відповідна еюра згинальних моментів \bar{M}_2 побудована на рис.13.15,г. Почергово вирізаємо вузли, на які накладено плаваючі затиснення, і аналізуємо їх рівновагу. В місцях розрізів до стержнів прикладаються згинальні моменти, які вибираються з епюри згинальних моментів \bar{M}_2 .

$$\sum M = 0 \Rightarrow 0,5r_{12} - 2i = 0.$$

$$r_{12} = 4i.$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow 0,5r_{22} - 4i - 8i - 3i = 0.$$

$$r_{22} = 30i.$$

Для визначення реакції r_{31} вирізаємо і аналізуємо рівновагу стояка 4-7. Поперечні сили в стержнях визначаємо за епюрою \bar{M}_2 .

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -r_{32} - 2,4i - 2,4i = 0.$$

$$r_{32} = -4,8i.$$

Визначаємо реакції від дії основного невідомого $Z_3 = 1$ (рис.13.15,д). Еюра згинальних моментів \bar{M}_3 побудована на рис.13.15,е. Почергово аналізуємо рівновагу закріплених від поворотів вузлів. В місцях розрізів стержнів прикладаються згинальні моменти, які вибираються з епюри згинальних моментів \bar{M}_3 .

$$\sum M = 0 \Rightarrow 0,5r_{13} + 3,6i = 0.$$

$$r_{13} = -7,2i.$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow 0,5r_{23} + 2,4i = 0.$$

$$r_{23} = -4,8i.$$

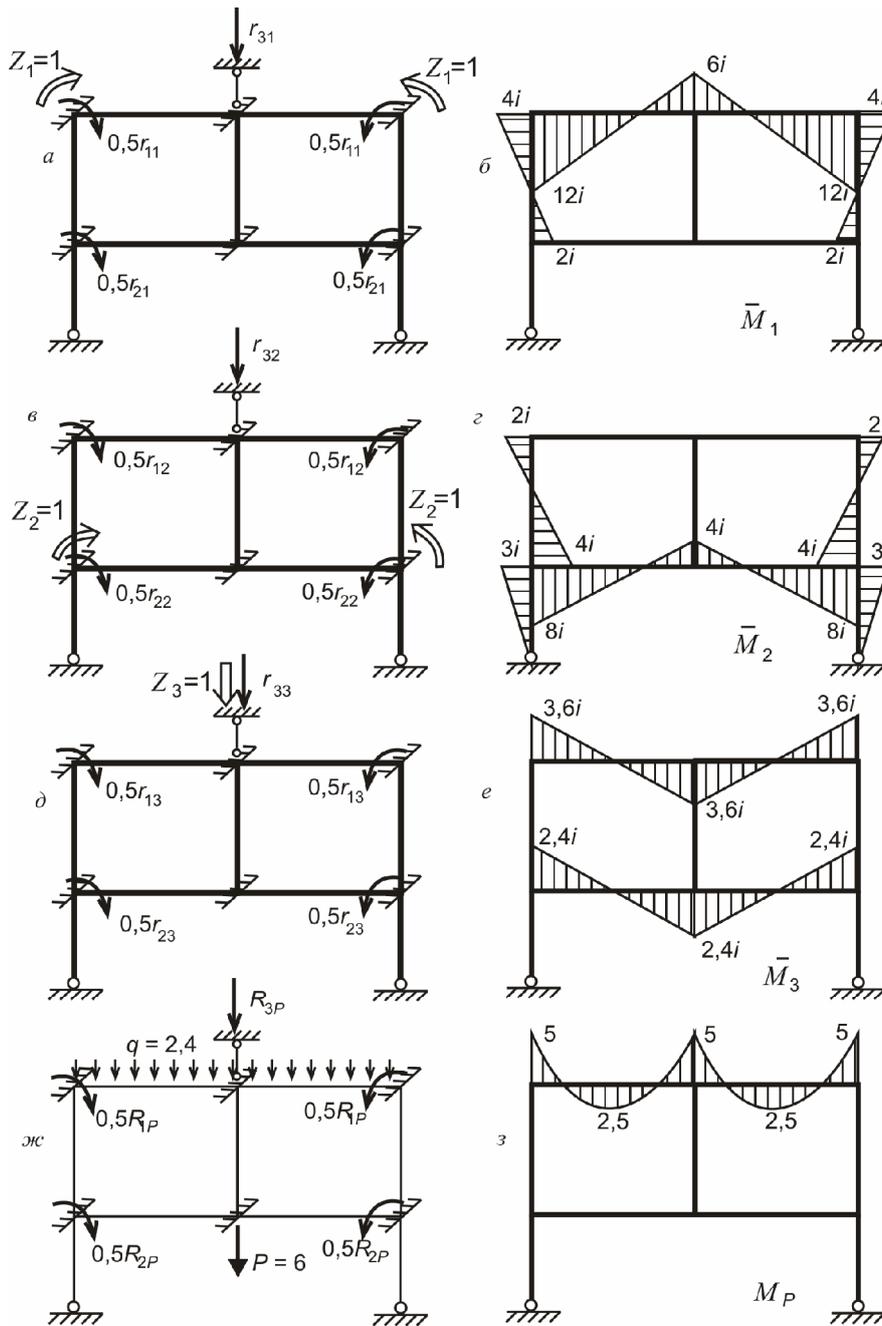


Рис.13.15

Для визначення реакції r_{33} вирізаємо і аналізуємо рівновагу стояка 4-7. Поперечні сили в стержнях визначаємо за епюрою M_3 .

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -r_{33} + 1,44i + 1,44i + 0,48i + 0,48i = 0.$$

$$r_{33} = 3,84i.$$

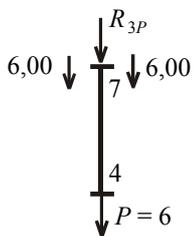
Визначаємо реакції від дії зовнішніх навантажень (рис.13.15,ж). Епюра згинальних моментів M_p побудована на рис.13.15,з. Почергово аналізуємо рівновагу закріплених від поворотів вузлів. В місцях розрізів стержнів прикладаються згинальні моменти, які вибираються з епюри M_p .

$$\sum M = 0 \Rightarrow 0,5R_{1P} + 5 = 0.$$

$$r_{13} = -10.$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow 0,5R_{2P} = 0.$$

$$R_{2P} = 0.$$



Для визначення реакції R_{3P} вирізаємо і аналізуємо рівновагу стояка 4-7. Поперечні сили в стержнях визначаємо за епюрою M_p .

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -R_{3P} - 6,00 - 6,00 - 6 = 0.$$

$$R_{3P} = -18.$$

Розв'язування системи канонічних рівнянь

Підставивши знайдені коефіцієнти до системи канонічних рівнянь маємо:

$$\begin{aligned} 32iZ_1 + 4iZ_2 - 7,2iZ_3 - 10 &= 0; \\ 4iZ_1 + 30iZ_2 - 4,8iZ_3 &= 0; \\ -7,2iZ_1 - 4,8iZ_2 + 4,8iZ_3 - 18 &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язавши систему рівнянь знаходимо величини основних невідомих:

$$Z_1 = \frac{1,8893}{i}; \quad Z_2 = \frac{0,9542}{i}; \quad Z_3 = \frac{7,5382}{i}.$$

Перевірка правильності розв'язку

Для перевірки підставимо величини основних невідомим до сумарного рівняння:

$$\begin{aligned} 28,8iZ_1 + 29,2iZ_2 - 7,2iZ_3 - 28 &= 0. \\ 28,8 \cdot 1,8893 + 29,2 \cdot 0,9542 - 7,2 \cdot 7,5382 - 28 &= 54,4118 + 27,8626 - 54,2750 - 28 = \\ = 82,2745 - 82,2750 &= -0,0005 \approx 0. \end{aligned}$$

Побудова дійсної епюри згинальних моментів

Дійсна епюра згинальних моментів M_0 будується способом накладення епюр

$$M_0 = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \bar{M}_3 Z_3 + M_p.$$

Одиничні епюри згинальних моментів, помножені на величини відповідних основних невідомих, і вантажна епюра M_P наведені на рис.13.16.

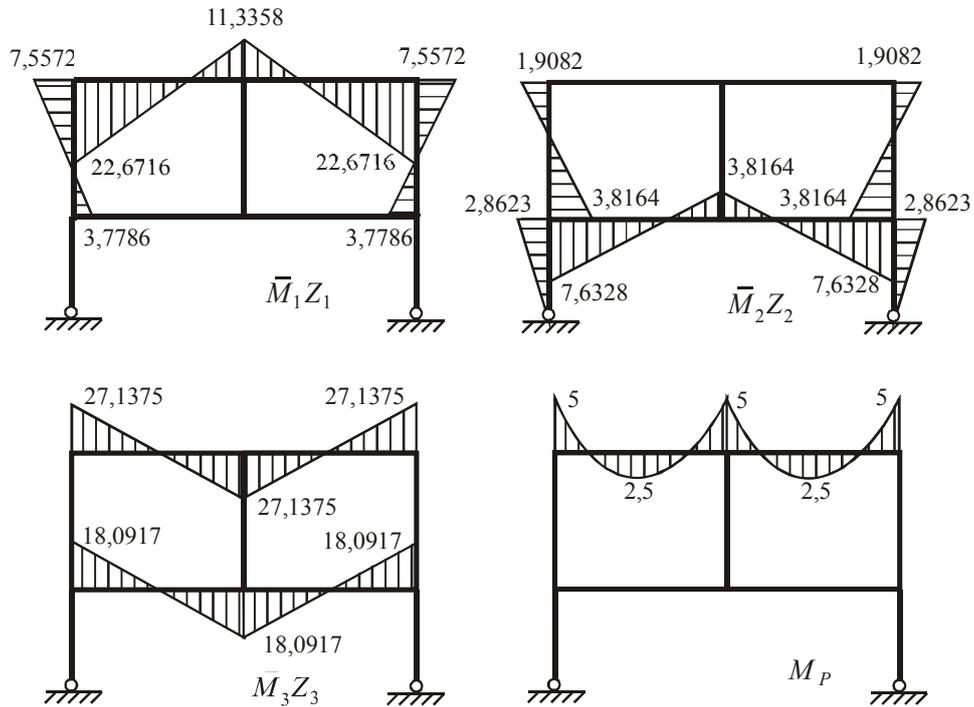


Рис.13.16

Дійсна епюра згинальних моментів M_D представлена на рис.13.17,*a*.

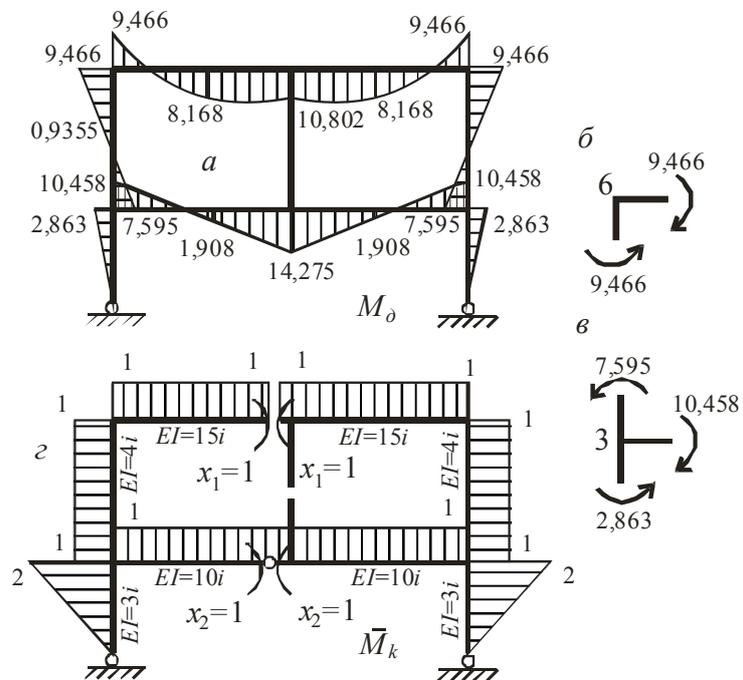


Рис.13.17

Статична перевірка

Перевірка полягає в аналізі рівноваги вузлів. Очевидно, що виокремлений зі схеми вузол 6, до якого прикладено згинальні моменти, вибрані з епюри M_δ (рис.13.17,б), перебуває в стані рівноваги. Так само зрівноваженим є вузол 3 (рис.13.17,в). Дійсно

$$\sum M_3 = 10,458 - 7,595 - 2,863 \equiv 0.$$

Кінематична перевірка

Для виконання кінематичної перевірки вибираємо в заданій рамі основну систему методу сил. Ступінь статичної невизначуваності рами

$$n = 3k - u = 3 \cdot 3 - 2 = 7.$$

Сім “зайвих” в’язей відкидаємо шляхом введення в схему одного шарніра і двох розрізів. До отриманої в такий спосіб основної системи методу сил прикладаємо дві основні невідомі $X_1=1$ і $X_2=1$ з таким розрахунком, щоби епюра згинальних моментів \bar{M}_k розповсюджувалась на всі стержні (рис.13.17,г).

Визначимо жорсткості стержнів на згин за формулою

$$EI = i \cdot l.$$

Отже:

$$EI_{6-7} = EI_{7-8} = 3i \cdot 5 = 15i;$$

$$EI_{3-4} = EI_{4-5} = 2i \cdot 5 = 10i;$$

$$EI_{1-3} = EI_{2-5} = i \cdot 3 = 3i;$$

$$EI_{3-6} = EI_{4-7} = EI_{5-8} = i \cdot 4 = 4i.$$

Жорсткості елементів рами на згин показано на її схемі (рис.13.17,г).

Отже за формулою Мора

$$\begin{aligned} \Delta_{k\delta} &= \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_k M_\delta}{EI} dx = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 15i} (9,466 \cdot 1 - 4 \cdot 8,168 \cdot 1 - 10,802 \cdot 1) - \\ &- \frac{1}{10i} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1,908 \cdot 2 + \frac{1}{3i} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,863 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{4i} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 0,9355 \cdot 2 = \\ &= -\frac{3,779}{i} - \frac{1,908}{i} + \frac{3,817}{i} + \frac{1,871}{i} = -\frac{5,687}{i} + \frac{5,688}{i} = \frac{0,001}{i} \approx 0. \end{aligned}$$

Побудова епюри поперечних сил

Поперечні сили в стержнях рами визначаємо за епюрою згинальних моментів M_δ (рис.13.17,*a*). Оскільки епюра M_δ симетрична, поперечні сили будуть кососиметричними. Отже, обчислювати поперечні сили можна лише для подовжні рами.

Для ділянок, на яких епюра M_δ прямолінійна:

$$Q_{1-3} = -\frac{2,863}{3} = -0,954 \text{ кН};$$

$$Q_{3-6} = -\frac{9,466 + 4,595}{4} = -4,365 \text{ кН};$$

$$Q_{3-4} = \frac{10,458 + 14,275}{5} = 4,947 \text{ кН}.$$

Для ділянки, на якій епюра M_δ криволінійна, поперечні сили визначаємо з аналізу рівноваги стержня. Так, стержень 6-7 виокремлюємо зі схеми і прикладаємо до нього зовнішнє рівномірно розподілене навантаження $q = 2,4 \text{ кН/м}$. В місцях розрізів прикладаємо згинальні моменти, які беруться з епюри M_δ , а також додатньо спрямовані кінцеві поперечні сили (рис.13.18).

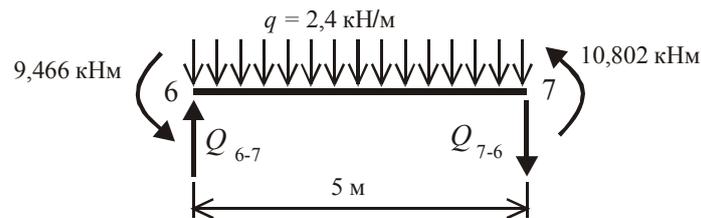


Рис.13.18

З рівнянь рівноваги стержня 6-7 маємо:

$$\sum M_7 = 0 \Rightarrow Q_{6-7} \cdot 5 - 2,4 \cdot 5 \cdot 2,5 - 9,466 - 10,802 = 0 \Rightarrow Q_{6-7} = 10,053 \text{ кН};$$

$$\sum M_6 = 0 \Rightarrow Q_{7-6} \cdot 5 + 2,4 \cdot 5 \cdot 2,5 - 9,466 - 10,802 = 0 \Rightarrow Q_{7-6} = -1,947 \text{ кН}.$$

Дійсна епюра поперечних сил Q_δ побудована на рис.13.19,*a*.

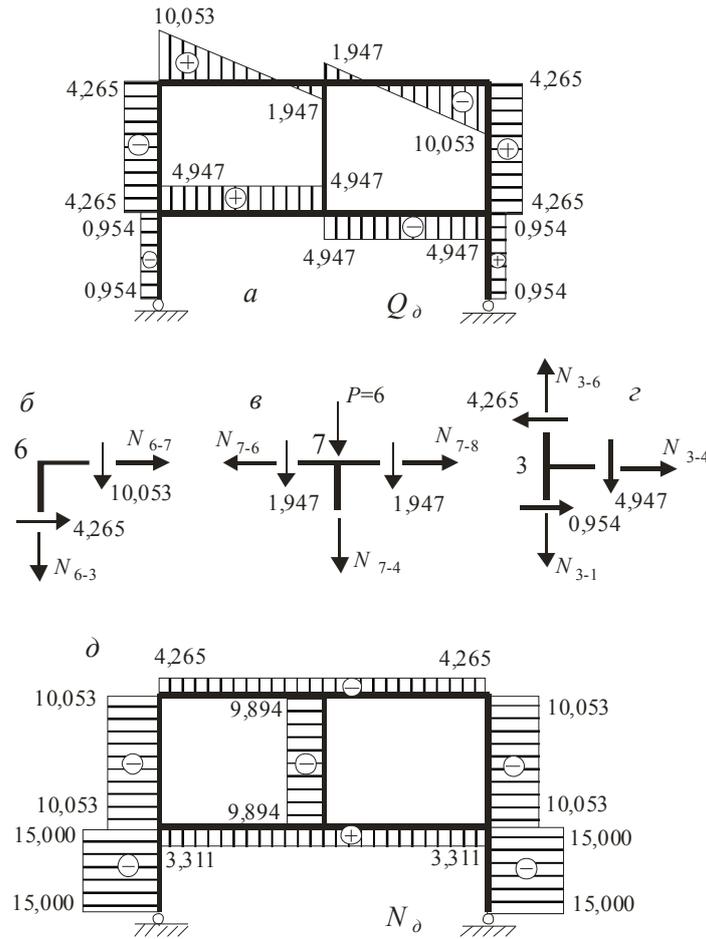


Рис.13.19

Визначення поздовжніх сил

Поздовжні сили в стержнях рами визначаються з умов рівноваги вузлів рами.

З умов рівноваги вузла 6 (рис.13.19.б) можна записати:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow N_{6-7} + 4,265 = 0 \Rightarrow N_{6-7} = -4,265 \text{ кН}; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{6-3} - 10,053 = 0 \Rightarrow N_{6-3} = -10,053 \text{ кН}. \end{aligned}$$

З умов рівноваги вузла 7 (рис.13.19.в):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow -N_{7-6} + N_{7-8} = 0 \Rightarrow N_{7-6} = -4,265 \text{ кН}; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{7-4} - 1,947 - 1,947 - 6 = 0 \Rightarrow N_{7-4} = -9,894 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Для вузла 3 (рис.13.17.г):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow N_{3-4} + 0,954 - 4,265 = 0 \Rightarrow N_{3-4} = 3,311 \text{ кН}; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{3-1} + N_{3-6} - 4,947 = 0 \Rightarrow N_{3-1} = -15,000 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Епюра поздовжніх сил N_d побудована на рис.13.19,д.

13.5. Розрахунок симетричної рами в розгорнутій формі

Виконаємо розрахунок статично невизначуваної рами на симетричне навантаження методом переміщень в розгорнутій формі (рис.13.20,а). Погонні жорсткості стержнів:

$$i_{3-4} = \frac{3EI}{6} = i;$$

$$i_{1-4} = \frac{2EI}{5} = 0,8i;$$

$$i_{4-7} = \frac{EI}{2} = i;$$

$$i_{6-8} = \frac{3EI}{6} = i.$$

Визначення кількості основних невідомих і призначення основної системи

Рама має чотири проміжних жорстких вузли, отже

$$k_{\varphi} = 4 \quad (\varphi_4, \varphi_5, \varphi_7, \varphi_8).$$

Для визначення кількості незалежних поступальних переміщень вузлів утворюємо шарнірну схему рами шляхом введення в усі жорсткі вузли наскрізних шарнірів (рис.13.20,б). Очевидно, що для забезпечення геометричної незмінюваності шарнірної схеми достатньо ввести три додаткові опорні стержні C_1 , C_2 і C_3 . Це означає, що $k_{\Delta} = 3$. Очевидно, що стержень C_1 усуває лише горизонтальне переміщення ригеля 3-4, стержень C_2 – лише горизонтальне переміщення ригеля 5-6, а стержень C_3 – горизонтальне переміщення ригеля 7-8.

Таким чином кількість основних невідомих

$$k = k_{\varphi} + k_{\Delta} = 7.$$

Основна система, утворена введенням “плаваючих” затиснень в проміжні жорсткі вузли, а також додаткових стержнів C_1 , C_2 і C_3 , представлена на рис.13.20,в.

Урахування симетрії дозволяє скоротити кількість основних невідомих. Дійсно, оскільки рама і навантаження симетричні, то й симетричними будуть деформації рами. На цій підставі можна вважати, що

$$\varphi_8 = -\varphi_7;$$

$$\varphi_5 = -\varphi_4.$$

До того ж поступальне переміщення ригеля 7-8 дорівнюватиме нулю, а поступальні переміщення ригелів 3-4 і 5-6 будуть симетричними і залежатимуть від параметра Δ (див.рис.13.20,б):

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta.$$

Таким чином кількість невідомих скорочується до трьох: φ_4 , φ_7 і Δ .

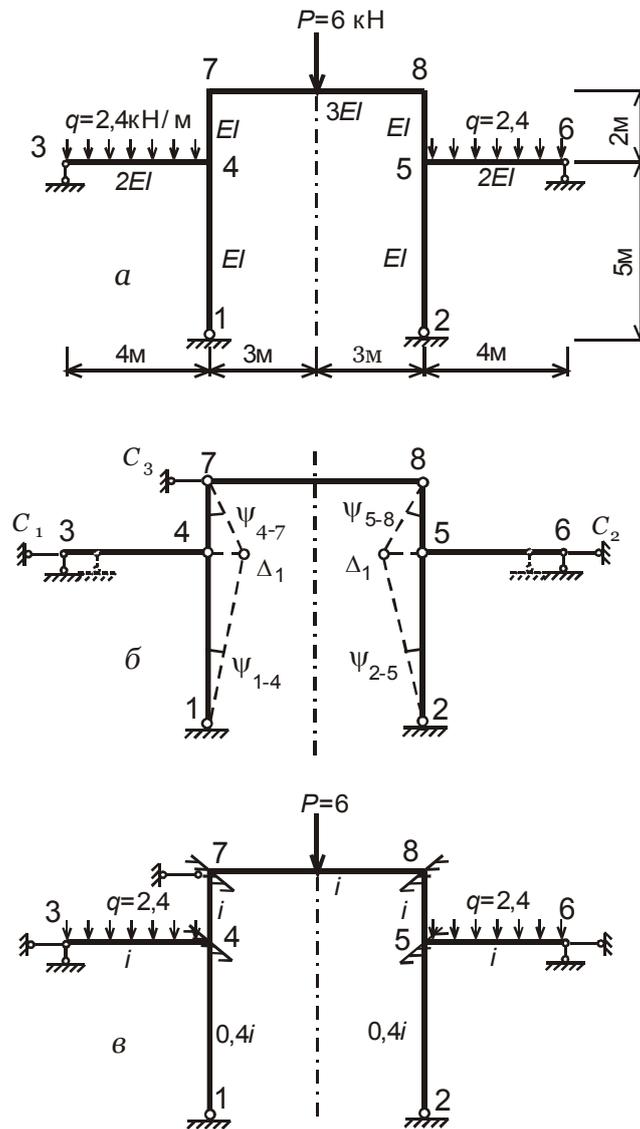


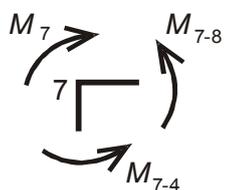
Рис.13.20

Кути перекосу стержнів визначатимуться через параметр Δ за схемою перекосів, представленої на рис.13.20,б:

$$\begin{aligned}\psi_{1-4} = -\psi_{2-5} &= \frac{\Delta}{5}; & \psi_{4-7} = -\psi_{5-8} &= -\frac{\Delta}{2}; \\ \psi_{3-4} = \psi_{5-6} &= 0; & \psi_{7-8} &= 0.\end{aligned}$$

Складання розв'язувальних рівнянь

Розв'язувальні рівняння складаємо з умов рівності нулю реакцій в накладених з'єднаннях, розглядаючи рівновагу елементів з одного боку від осі симетрії.



Реактивний момент пружного затиснення вузла 7 виражається через кінцеві моменти в стержнях з умови рівноваги вузла 7.

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_7 = M_{7-8} + M_{7-4} = 0.$$

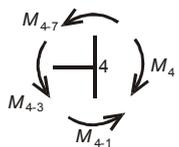
У свою чергу, кінцеві моменти виражаються через переміщення вузлів за допомогою формул методу переміщень для зігнутих стержнів, які наведено в табл.13.2. Оскільки стержні 7-8 і 7-4 мають на обох кінцях затиснення, скористаємось з формул першого рядка табл.13.2:

$$M_{7-8} = 2i_{7-8}(2\varphi_7 + \varphi_8 - 3\psi_{7-8}) + M'_{7-8} = \\ = 2i(2\varphi_7 + (-\varphi_7) - 0) + \left(-\frac{6 \cdot 6}{8}\right) = 2i\varphi_7 - 4,5;$$

$$M_{7-4} = 2i_{4-7}(2\varphi_7 + \varphi_4 - 3\psi_{4-7}) + M'_{7-4} = \\ = 2i\left(2\varphi_7 + \varphi_4 - 3\left(-\frac{\Delta}{2}\right)\right) + 0 = 4i\varphi_7 + 2i\varphi_4 + 3i\Delta.$$

$$M_7 = 6i\varphi_7 + 2i\varphi_4 + 3i\Delta - 4,5 = 0.$$

Реактивний момент пружного затиснення вузла 4 виражається через кінцеві моменти в стержнях з умови рівноваги вузла 4.



$$\sum M = 0 \Rightarrow M_4 = M_{4-7} + M_{4-1} + M_{4-3} = 0.$$

Кінцевий момент M_{4-7} виражаємо через основні невідомі, використовуючи формулу з першого рядка, а кінцеві моменти M_{4-1} і M_{4-3} – з другого рядка табл.13.2.

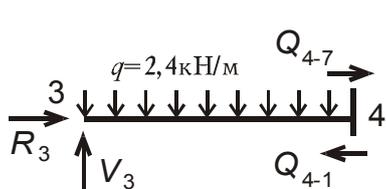
$$M_{4-7} = 2i_{4-7}(2\varphi_4 + \varphi_7 - 3\psi_{4-7}) + M'_{4-7} = \\ 2i\left(2\varphi_4 + \varphi_7 - 3\left(-\frac{\Delta}{2}\right)\right) + 0 = 4i\varphi_4 + 2i\varphi_7 + 3i\Delta;$$

$$M_{4-1} = 3i_{4-1}(\varphi_4 - \psi_{4-1}) + M''_{4-1} = 3 \cdot 0,4i\left(\varphi_4 - \frac{\Delta}{5}\right) + 0 = 1,2i\varphi_4 - 0,24i\Delta;$$

$$M_{4-3} = 3i_{4-3}(\varphi_4 - \psi_{4-3}) + M''_{4-3} = 3i(\varphi_4 - 0) + \frac{2,4 \cdot 4^2}{8} = 3i\varphi_4 + 4,8.$$

$$M_4 = 2i\varphi_7 + 8,2i\varphi_4 + 2,76i\Delta + 4,8 = 0.$$

Для аналізу реакції в накладеному стержні C_1 розглядаємо рівновагу ригеля 3-4, який утримується зазначеним стержнем від поступального переміщення.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_3 = Q_{4-1} - Q_{4-7} = 0.$$

Для стержня 4-1, що має на одному кінці затиснення, а на протилежному шарнір, кінцеву поперечну силу виражаємо через основні невідомі за формулою з другого, а для затисненого на обох кінцях стержня 4-7 – з першого рядка табл.13.2.

$$Q_{4-1} = -\frac{3i_{4-1}}{l_{4-1}}(\varphi_4 - \psi_{1-4}) + Q_{4-1}'' = -\frac{3 \cdot 0,4i}{5}\left(\varphi_4 - \frac{\Delta}{5}\right) + 0 = -0,24i\varphi_4 + 0,048i\Delta;$$

$$Q_{4-7} = -\frac{6i_{4-7}}{l_{4-7}}(\varphi_4 + \varphi_7 - 2\psi_{4-7}) + Q_{4-7}' = \\ = -\frac{6i}{2}\left(\varphi_4 + \varphi_7 - 2\left(-\frac{\Delta}{2}\right)\right) + 0 = -3i\varphi_4 - 3i\varphi_7 - 3i\Delta.$$

$$R_3 = 3i\varphi_7 + 2,76i\varphi_4 + 3,048i\Delta = 0.$$

У результаті маємо систему трьох рівнянь:

$$\begin{aligned} 6\varphi_7 + 2i\varphi_4 + 3i\Delta - 4,5 &= 0; \\ 2i\varphi_7 + 8,2i\varphi_4 + 2,76i\Delta + 4,8 &= 0; \\ 3i\varphi_7 + 2,76i\varphi_4 + 3,048i\Delta &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язавши систему рівнянь отримаємо:

$$\varphi_7 = \frac{1,3177}{i}; \quad \varphi_4 = -\frac{0,6764}{i}; \quad \Delta = -\frac{0,6845}{i}.$$

Для перевірки правильності розв'язання підставимо розв'язки до сумарного рівняння:

$$\begin{aligned} 11i\varphi_7 + 12,96i\varphi_4 + 5,808i\Delta + 0,3 &= \\ = 11 \cdot 1,3177 + 12,96 \cdot (-0,6764) + 5,808 \cdot (-0,6845) + 0,3 &= 14,7947 - 14,7952 \approx 0. \end{aligned}$$

Обчислення кінцевих моментів

Підставляючи отримані розв'язки до формул методу переміщень обчислюємо кінцеві моменти:

$$\begin{aligned} M_{7-8} &= 2i\varphi_7 - 4,5 = 2 \cdot 1,3177 - 4,5 = -1,865 \text{ кНм}; \\ M_{7-4} &= 4i\varphi_7 + 2i\varphi_4 + 3i\Delta = 4 \cdot 1,3177 + 2 \cdot (-0,6764) + 3 \cdot (-0,6845) = 1,865 \text{ кНм}; \\ M_{4-7} &= 4i\varphi_4 + 2i\varphi_7 + 3i\Delta = 4 \cdot (-0,6764) + 2 \cdot 1,3177 + 3 \cdot (-0,6845) = -2,124 \text{ кНм}; \\ M_{4-3} &= 3i\varphi_4 + 4,8 = 3 \cdot (-0,6764) + 4,8 = 2,771 \text{ кНм}; \\ M_{4-1} &= 1,2i\varphi_4 - 0,24i\Delta = 1,2 \cdot (-0,6764) - 0,24 \cdot (-0,6845) = -0,647 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

При симетричному навантаженні епюра згинальних моментів буде симетричною. Тому можна обмежитись обчисленням кінцевих моментів лише для половини рами.

Відкладавши кінцеві моменти з урахуванням знаків (додатний момент обертає вузол проти годинникової стрілки) на схемі рами і з'єднавши ординати прямими відрізками отримаємо епюру вузлових моментів $M_{\text{вузл}}$ (рис.13.21,а).

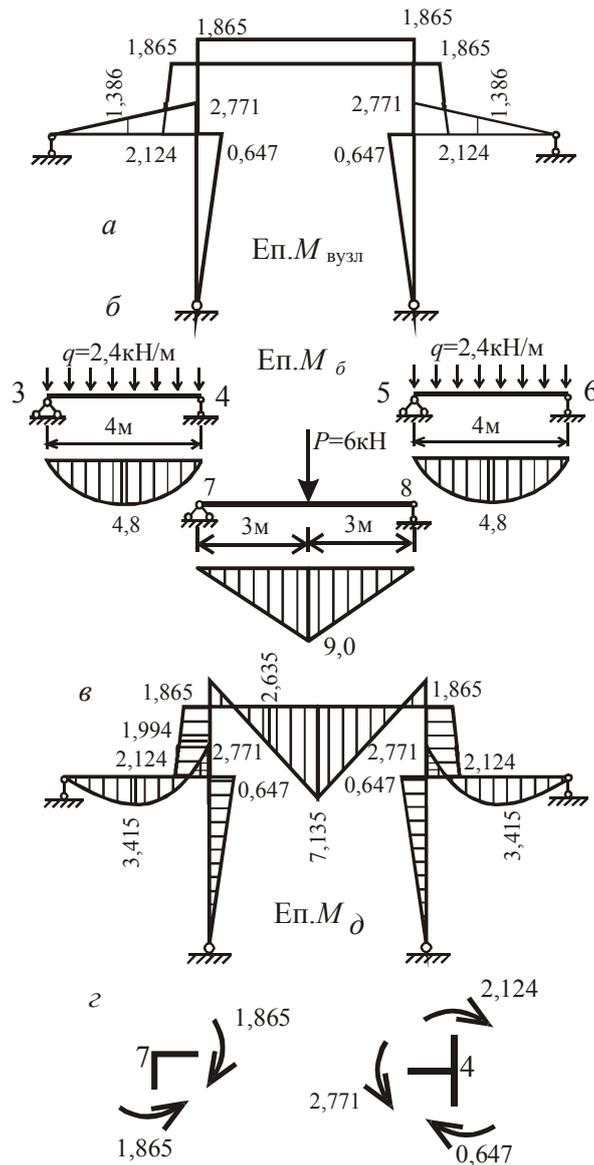


Рис.13.21

Побудова дійсної епюри згинальних моментів

Додавши до епюри вузлових моментів $M_{\text{вузл}}$ епюри $M_{\text{б}}$, побудовані в навантажених стержнях як в простих балках (рис.13.21,б), отримаємо дійсну епюру згинальних моментів $M_{\text{д}}$ в заданій рамі (рис.13.21,в).

Статична перевірка дійсної епюри згинальних моментів

Статична перевірка полягає в аналізі рівноваги вузлів. Виокремлені зі схеми вузли рами, до яких прикладені згинальні моменти, наведені на рис.13.21,з. Рівновага вузла 7 очевидна. Для вузла 4 можна записати:

$$\sum M_4 = 2,124 + 0,647 - 2,771 \equiv 0.$$

Кінематична перевірка

Для кінематичної перевірки необхідно вибрати для заданої рами основну систему методу сил. Ступінь статичної невизначуваності рами

$$n = 3k - u = 3 \cdot 3 - 6 = 3.$$

Одна з можливих основних систем може бути отримана шляхом розрізу ригеля 7-8 по осі симетрії (рис.13.22,а). Одинична епюра \bar{M}_1 від дії основних невідомих $X_1 = 1$ побудована на рис.13.22,б. Перемножимо епюру \bar{M}_1 на дійсну епюру M_0 за формулою Мора:

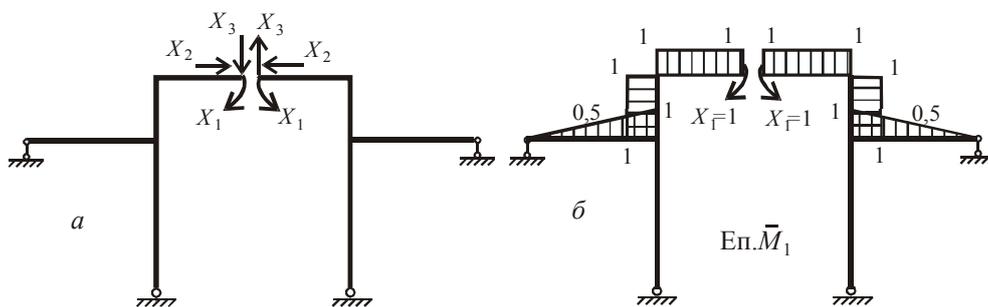


Рис.13.22

$$\Delta_{10} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_0}{EI} dx = 2 \cdot \left[-\frac{1}{3EI} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2,635 + \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1,994 + \right. \\ \left. + \frac{4}{6 \cdot 2EI} \cdot (0 - 4 \cdot 0,5 \cdot 3,415 + 1 \cdot 2,771) \right] = 2 \cdot \left[-\frac{2,635}{EI} + \frac{3,984}{EI} - \frac{1,353}{EI} \right] \approx 0.$$

Визначення поперечних сил

Поперечні сили в стержнях рами простіше за все визначити по відповідності до епюри згинальних моментів M_0 . Зважаючи на те, що при симетричному навантаженні поперечні сили мають косиметричний характер, будемо обчислювати їх лише для половини рами.

$$Q_{7-8} = \frac{7,135 + 1,865}{3} = 3,000 \text{ кН};$$

$$Q_{4-7} = \frac{2,124 - 1,865}{2} = 0,129 \text{ кН};$$

$$Q_{1-4} = \frac{0,647}{5} = 3 \text{ кН}.$$

Для стержня 3-4, де епюра M_0 має криволінійний характер, обчислимо поперечні сили по формулам методу переміщень для поперечних сил (табл.13.2, рядок 2):

$$Q_{3-4} = -\frac{3i_{3-4}}{l_{3-4}}(\varphi_4 - \psi_{3-4}) + Q_{3-4}'' = -\frac{3 \cdot 2i}{4}(-0,6764 - 0) + \frac{3}{8} \cdot 2,4 \cdot 4 = 4,107 \text{ кН};$$

$$Q_{4-3} = -\frac{3i_{3-4}}{l_{3-4}}(\varphi_4 - \psi_{3-4}) + Q_{4-3}'' = -\frac{3 \cdot 2i}{4}(-0,6764 - 0) - \frac{5}{8} \cdot 2,4 \cdot 4 = -5,493 \text{ кН}.$$

Дійсна епюра Q_d побудована на рис.13.23,а.

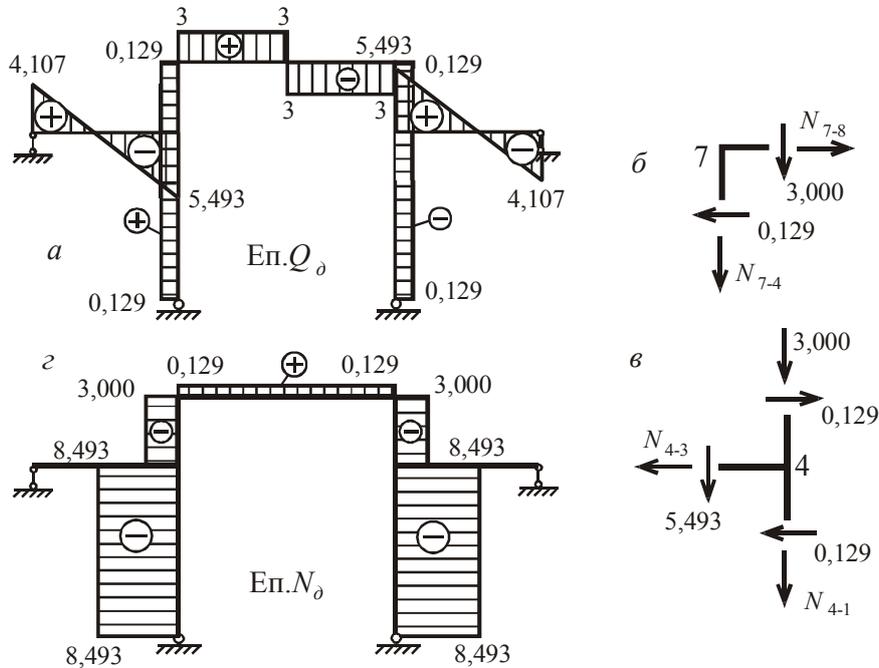


Рис.13.23

Визначення поздовжніх сил

Поздовжні сили визначимо з умов рівноваги вузлів рами. Почергово вирізаються вузли рами, до яких прикладаються зосереджені зовнішні сили (якщо такі сили існують), поперечні сили, які вибираються з епюри Q_d , а також невідомі та вже відомі поздовжні сили. З рівнянь проєкцій визначаються невідомі поздовжні сили.

На рис.13.23,б до виокремленого вузла 7 прикладено поперечні сили, спрямовані відповідно до своїх знаків, а також невідомі поздовжні сили, спрямовані в додатних напрямках, тобто від вузла. З умов рівноваги вузла маємо:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{7-8} - 0,129 = 0 \Rightarrow N_{7-8} = 0,129 \text{ кН};$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{7-4} - 3 = 0 \Rightarrow N_{7-4} = -3 \text{ кН}.$$

До вузла 4 (рис.13.23,в) прикладаються поперечні сили, вже відома поздовжня сила N_{7-4} , а також дві невідомі поздовжні сили N_{4-1} і N_{4-3} . Складаємо рівняння рівноваги вузла:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N_{4-3} - 0,129 + 0,129 = 0 \Rightarrow N_{4-3} = 0;$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{4-1} - 3 - 5,493 = 0 \Rightarrow N_{4-1} = -8,493 \text{ кН}.$$

Дійсна епюра поздовжніх сил N_δ побудована на рис.13.23,з.

13.6. Задачі для самостійного опрацювання

Розрахувати за методом переміщень рами, представлені на рис.13.24.

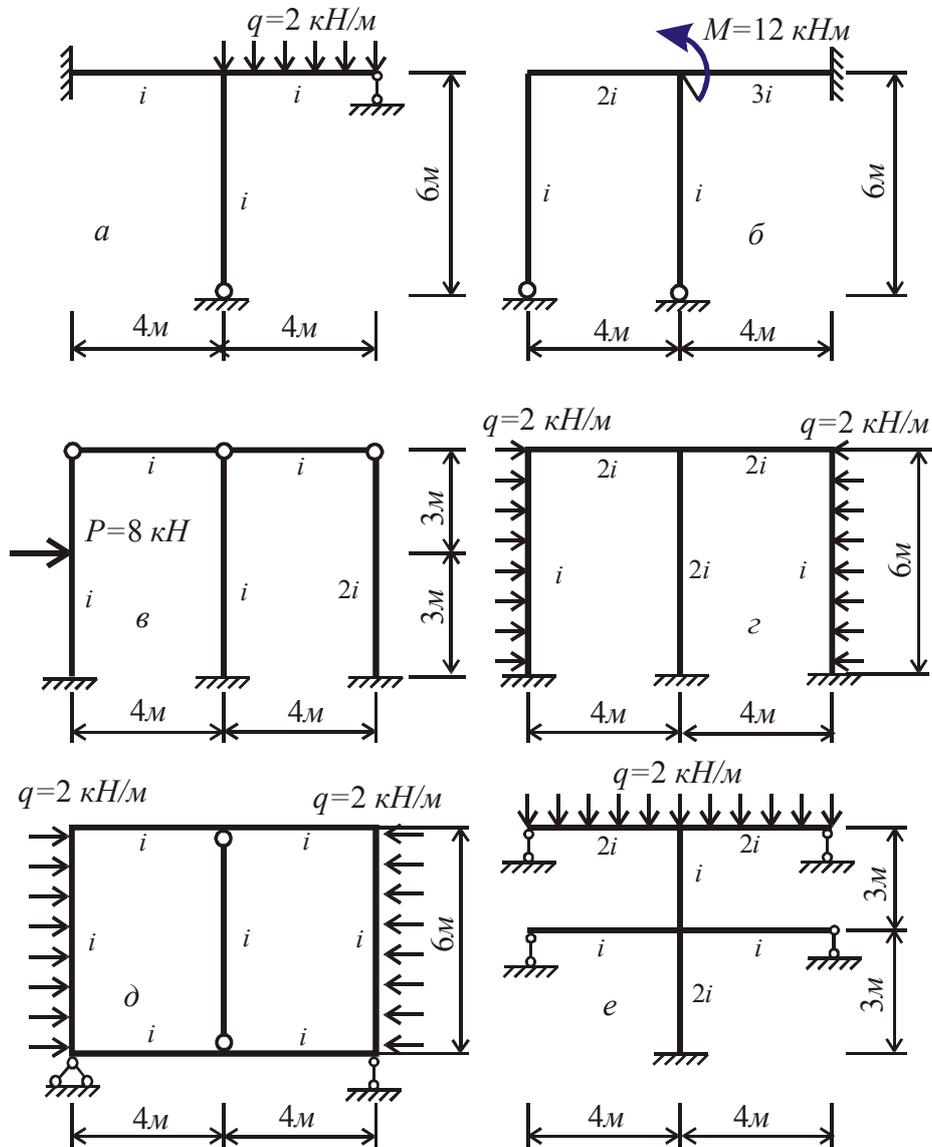


Рис.13.24

14. Метод скінченних елементів для стержневих систем

14.1. Основні положення методу скінченних елементів

Основна ідея методу скінченних елементів полягає в тому, що конструкція представляється набором окремих фрагментів – скінченних елементів, які взаємодіють між собою в скінченній кількості точок – вузлах.

Пружно-деформований стан скінченно-елементної (дискретної) моделі конструкції характеризується переміщеннями та реакціями, визначеними у вузлах. Зусилля і переміщення у будь-якій точці визначаються як функції вузлових переміщень.

Скінченно-елементна модель стержневої системи

Перший етап розрахунку стержневої системи за методом скінченних елементів полягає в **дискретизації**, тобто в переході від її розрахункової схеми до дискретної моделі. Вихідна розрахункова схема розбивається на окремі стержні (скінченні елементи) і вузли. Скінченні елементи повинні являти собою прямолінійні стержні постійної жорсткості, на яких може бути розташоване рівномірно розподілене зовнішнє навантаження. Криволінійні стержні апроксимуються декількома прямолінійними елементами. Аналогічно апроксимуються стержні, що мають змінну жорсткість, або ті, до яких прикладено нерівномірно розподілене навантаження. Така схема споруди називається її **дискретною** або **скінченно-елементною моделлю (СЕМ)**.

Вузлами дискретної моделі вважають точки:

- поєднання двох або більше окремих стержнів;
- ступінчатої зміни жорсткості стержнів;
- прикладення зосереджених зовнішніх сил або моментів;
- ступінчатої зміни інтенсивності розподіленого навантаження;
- опорні вузли.

Перехід від розрахункової схеми до дискретної моделі показано на рис.14.1. Розрахункова схема рами (рис.14.1.а) перетворена на СЕМ (рис.14.1,б). Вузли дискретної моделі в даному прикладі пронумеровані в довільному порядку. Для позначення будь-якого скінченного елемента достатньо вказати номери вузлів, які він поєднує.

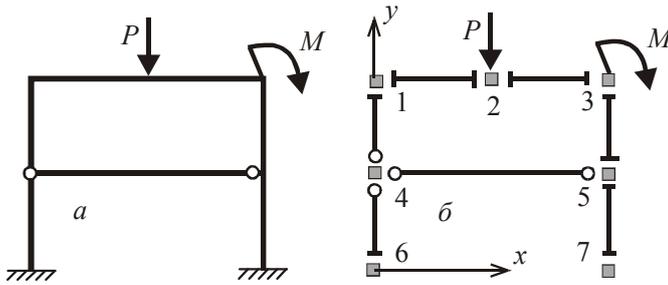


Рис.14.1

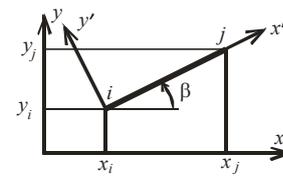


Рис.14.2

Для визначення взаємного розташування вузлів, їх кінематичних і статичних характеристик вводиться загальна для всього об'єкту система декартових координат x, y , яка називається **загальною** або **глобальною**.

Безпосередньо з кожним стержнем пов'язується його власна система координат x', y' , якою зручно користуватися для аналізу напружено-деформованого стану стержня. Така система координат називається **місцевою** або **локальною**. Початок місцевої системи координат пов'язується з тим вузлом, що має менший номер. Цю точку називають **початком** стержня, а точку, яка розташована на протилежному кінці стержня – його **кінцем**. Вісь x' спрямовують вздовж стержня від його початку до кінця, а вісь y' – перпендикулярно до стержня, причому прямиий кут відкладається від осі x' проти ходу годинникової стрілки (рис.14.2). На рисунку початок стержня позначено літерою i , а кінець – літерою j . Такі позначення будуть застосовуватися і надалі.

Довжина стержня обчислюється через координати вузлів на початку i на кінці j за формулою:

$$l = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}, \quad (14.1)$$

де x_i, x_j, y_i, y_j – координати відповідних вузлів у глобальній системі координат.

Тригонометричні функції кута β повороту локальної системи координат стержня відносно глобальної системи координат усієї дискретної моделі можуть бути обчислені за формулами:

$$\sin \beta = \frac{y_j - y_i}{l}; \quad \cos \beta = \frac{x_j - x_i}{l}. \quad (14.2)$$

У плоскій дискретній моделі можна виділити чотири типи скінченних елементів, які відрізняються граничними умовами, тобто способами примикання до вузлів:

- жорсткі вузли на початку і на кінці стержня (рис.14.3,а);
- жорсткий вузол на початку і шарнірний вузол на кінці стержня (рис.14.3,б);
- шарнірний вузол на початку і жорсткий вузол на кінці стержня (рис.14.3,в);
- шарнірні вузли на початку і на кінці стержня (рис.14.3,г).

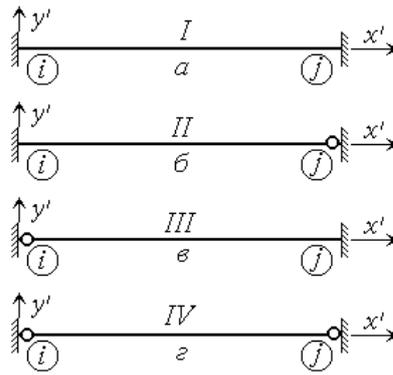


Рис.14.3

Вузлові характеристики дискретної моделі

Вузли дискретної моделі можуть бути характеризовані із статичного і кінематичного погляду. Кінематичними характеристиками є вузлові переміщення, а статичними – вузлові навантаження і вузлові реакції.

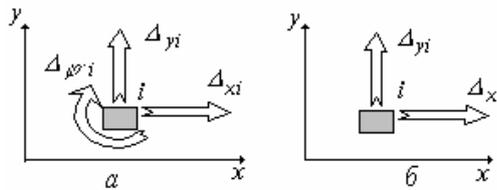


Рис.14.4

Будь-який вільний жорсткий вузол i дискретної моделі має три ступеня вільності, тобто можливість двох поступальних Δ_{xi}, Δ_{yi} і одного кутового переміщення $\Delta_{\phi i}$ цього вузла (рис.14.4,а). Ці величини можуть бути записані у вигляді вектора

$$\bar{\Delta}_i = \{ \Delta_{xi} \quad \Delta_{yi} \quad \Delta_{\phi i} \}^T.$$

Положення шарнірного вузла на площині характеризується тільки поступальними переміщеннями Δ_{xi}, Δ_{yi} (рис.14.4,б). Тому шарнірний вузол має два ступеня вільності і відповідно вектор переміщень такого вузла матиме дві компоненти:

$$\bar{\Delta}_i = \{ \Delta_{xi} \quad \Delta_{yi} \}^T.$$

Сукупність усіх вузлових переміщень дискретної моделі (рис.14.5,а) складає вектор вузлових переміщень:

$$\bar{\Delta} = \{ \bar{\Delta}_1 \quad \bar{\Delta}_2 \quad \dots \quad \bar{\Delta}_i \quad \dots \quad \bar{\Delta}_7 \}^T.$$

або

$$\vec{\Delta} = \{\Delta_{x1} \ \Delta_{y1} \ \Delta_{\varphi1} | \Delta_{x2} \ \Delta_{y2} \ \Delta_{\varphi2} |, \dots, | \Delta_{x7} \ \Delta_{y7} \ \Delta_{\varphi7}\}^T.$$

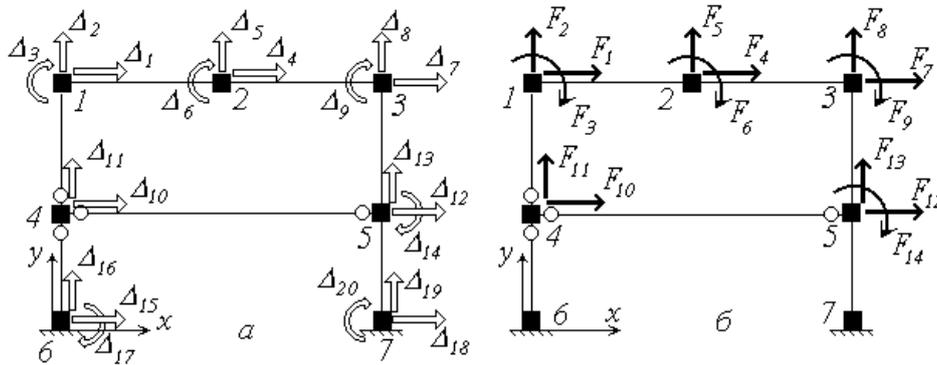


Рис.14.5

Для практичних розрахунків зручно використовувати наскрізну нумерацію компонентів вузлових переміщень у межах всієї моделі (рис.14.5). Тоді вектор вузлових переміщень матиме вигляд:

$$\vec{\Delta} = \{\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3 | \Delta_4 \ \Delta_5 \ \Delta_6 |, \dots, | \Delta_{18} \ \Delta_{19} \ \Delta_{20}\}^T.$$

Деякі переміщення вузлів можуть бути відомі з граничних умов задачі. Так, у даному прикладі

$$\Delta_{15} = \Delta_{16} = \Delta_{17} = \Delta_{18} = \Delta_{19} = \Delta_{20} = 0.$$

Отже невідомими є переміщення $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{14}$. Вектор $\vec{\Delta}$ після вилучення нульових елементів набуває остаточного вигляду:

$$\vec{\Delta} = \{\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3 | \Delta_4 \ \Delta_5 \ \Delta_6 | \Delta_7 \ \Delta_8 \ \Delta_9 | \Delta_{10} \ \Delta_{11} | \Delta_{12} \ \Delta_{13} \ \Delta_{14}\}^T$$

Компоненти вектора вузлових переміщень становлять основні невідомі методу скінченних елементів у формі методу переміщень. Їхня кількість характеризує кількість ступенів вільності дискретної (скінченно-елементної) моделі.

Статичною характеристикою вузлів дискретної моделі є вузлові навантаження. В кожному вузлі i припускається можливість дії трьох компонентів зовнішніх зосереджених силових дій: F_{xi} – сила, яка спрямована вздовж осі x загальної системи координат; F_{yi} – сила, яка діє вздовж осі y ; $F_{\varphi i}$ – зосереджений момент. Сукупність зосереджених дій у жорсткому вузлі i може бути записана у вигляді вектора:

$$\mathbf{F}_i = \{F_{xi} \ F_{yi} \ F_{\varphi i}\}^T,$$

а сукупність вузлових навантажень, які можуть діяти на всі вузли дискретної схеми (рис.14.5,б), вектором

$$\mathbf{F} = \{\bar{\mathbf{F}}_1 \ \bar{\mathbf{F}}_2 \ \dots \ \bar{\mathbf{F}}_i \ \dots \ \bar{\mathbf{F}}_7\}^T = \{F_{x1} \ F_{y1} \ F_{\varphi1} \mid F_{x2} \ F_{y2} \ F_{\varphi2} \mid \dots \mid F_{x7} \ F_{y7} \ F_{\varphi7}\}^T$$

Вектор $\bar{\mathbf{F}}$ можна представити як суму двох векторів:

$$\bar{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{Q}}, \quad (14.3)$$

де $\tilde{\mathbf{F}}$ – вектор зовнішніх сил, що безпосередньо діють на вузли, його компоненти дорівнюють відповідним зовнішнім силовим діям; $\bar{\mathbf{Q}}$ – вектор реактивних сил, що передаються на вузли з боку тих стержнів, на які діє розподілене навантаження. Компоненти цього вектора необхідно попередньо визначити, звівши розподілене на стержнях навантаження до вузлових сил.

При розв'язанні практичних задач компоненти зазначених векторів також мають наскрізну нумерацію, яка відповідає нумерації вузлових переміщень:

$$\bar{\mathbf{F}} = \{F_1 \ F_2 \ F_3 \mid F_4 \ F_5 \ F_6 \mid F_7 \ F_8 \ F_9 \mid F_{10} \ F_{11} \mid F_{12} \ F_{13} \ F_{14}\}^T;$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \{\tilde{F}_1 \ \tilde{F}_2 \ \tilde{F}_3 \mid \tilde{F}_4 \ \tilde{F}_5 \ \tilde{F}_6 \mid \tilde{F}_7 \ \tilde{F}_8 \ \tilde{F}_9 \mid \tilde{F}_{10} \ \tilde{F}_{11} \mid \tilde{F}_{12} \ \tilde{F}_{13} \ \tilde{F}_{14}\}^T;$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \{Q_1 \ Q_2 \ Q_3 \mid Q_4 \ Q_5 \ Q_6 \mid Q_7 \ Q_8 \ Q_9 \mid Q_{10} \ Q_{11} \mid Q_{12} \ Q_{13} \ Q_{14}\}^T.$$

На шарнірний вузол (вузол ферми) можуть діяти дві компоненти зовнішніх навантажень, які дорівнюють проекціям зовнішніх сил, прикладених до вузла. Отже, для шарнірного вузла сукупність зосереджених дій у вузлі i може бути записана у вигляді вектора:

$$\bar{\mathbf{F}}_i = \{F_{xi} \ F_{yi}\}^T,$$

Ще одна статична характеристика вузлів – вузлові реакції. Під впливом зовнішніх дій вузли дискретної моделі переміщуються, а стержні, які їх поєднують, деформуються. Між вузлами і стержнями виникають реакції взаємодії, що зумовлені тільки переміщеннями вузлів. Сумарні реакції всіх стержнів, які приєднуються до вузла i , зобразимо у вигляді двох зосереджених сил, що орієнтовані вздовж осей глобальної системи координат всієї моделі, і зосередженого моменту. Позначимо ці реакції через $R_{xi}, R_{yi}, R_{\varphi i}$.

Реакції, які передаються на вузол i з боку стержнів, і на стержні, що приєднуються до вузла, однакові за величиною, але спрямовані в протилежних напрямках. Звичайно для реактивних сил, з якими вузли діють на стержні, за додатні приймають напрями, які збігаються з додатними напрямками вузлових переміщень. Тоді реакції, які передаються на вузли з боку стержнів, будуть спрямовані у протилежних напрямках (рис.14.6).

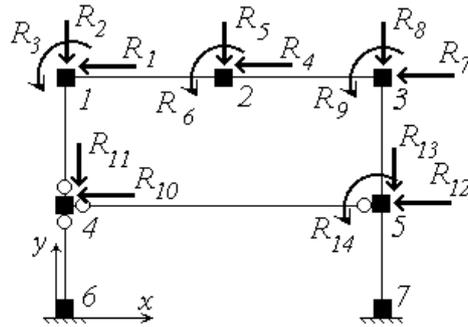


Рис.14.6

Сукупність реакцій для жорсткого вузла i можна записати у вигляді вектора:

$$\bar{\mathbf{R}}_i = \{R_{xi} \quad R_{yi} \quad R_{\phi i}\}^T.$$

Якщо вузол шарнірний, то вектор вузлових реакцій має дві компоненти

$$\bar{\mathbf{R}}_i = \{R_{xi} \quad R_{yi}\}^T$$

Вузлові реакції всієї дискретної моделі утворюють вектор вузлових реакцій:

$$\bar{\mathbf{R}} = \{\bar{\mathbf{R}}_1 \quad \bar{\mathbf{R}}_2 \quad \dots \quad \bar{\mathbf{R}}_n\}^T.$$

При розв'язанні практичних задач використовується наскрізна нумерація реакцій, причому їхні номери повинні збігатися з номерами відповідних переміщень:

$$\bar{\mathbf{R}} = \{R_1 \quad R_2 \quad R_3 \mid R_4 \quad R_5 \quad R_6 \mid R_7 \quad R_8 \quad R_9 \mid R_{10} \quad R_{11} \mid R_{12} \quad R_{13} \quad R_{14}\}^T.$$

Матриця жорсткості дискретної моделі

У лінійно деформованих об'єктах між вузловими реакціями і вузловими переміщеннями, що їх зумовлюють, існує лінійна залежність. Так, для дискретної моделі з n ступенями свободи

$$\begin{aligned} R_1 &= K_{1,1}\Delta_1 + K_{1,2}\Delta_2 + \dots + K_{1,n}\Delta_n; \\ R_2 &= K_{2,1}\Delta_1 + K_{2,2}\Delta_2 + \dots + K_{2,n}\Delta_n; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ R_n &= K_{n,1}\Delta_1 + K_{n,2}\Delta_2 + \dots + K_{n,n}\Delta_n \end{aligned} \quad (14.4)$$

або в матричній формі:

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{K}\bar{\Delta}. \quad (14.5)$$

Тут $\bar{\mathbf{R}}$ – вектор вузлових реакцій, $\bar{\Delta}$ – вектор вузлових переміщень, \mathbf{K} – матриця жорсткості дискретної моделі:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,n} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n,1} & K_{n,2} & \dots & K_{n,n} \end{bmatrix}. \quad (14.6)$$

Будь-який елемент $K_{i,j}$ матриці – це вузлова реакція R_i , яка зумовлюється вузловим переміщенням $\Delta_j = 1$ за умови, що всі інші вузлові переміщення дорівнюють нулю. Зазначимо, що головні елементи матриці жорсткості – це істотно додатні числа $K_{i,i} > 0$, а сторонні елементи симетричні відносно головної діагоналі: $K_{i,j} = K_{j,i}$ (при $i \neq j$).

Рівняння рівноваги вузлів дискретної моделі

З умов рівноваги вузлів дискретної моделі ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M = 0$) одержимо систему рівнянь, яка в матричній формі має вигляд:

$$\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{0}}, \quad (14.7)$$

де $\bar{\mathbf{0}}$ – нульовий вектор:

$$\bar{\mathbf{0}} = \{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0\}^T.$$

З урахуванням співвідношення (14.5) система рівнянь (14.7) набуває вигляду:

$$\mathbf{K}\bar{\Delta} - \bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{0}} \quad (14.8)$$

або в координатній формі:

$$\begin{aligned} K_{1,1}\Delta_1 + K_{1,2}\Delta_2 + \dots + K_{1,n}\Delta_n - F_1 &= 0; \\ K_{2,1}\Delta_1 + K_{2,2}\Delta_2 + \dots + K_{2,n}\Delta_n - F_2 &= 0; \\ \dots & \dots \\ K_{n,1}\Delta_1 + K_{n,2}\Delta_2 + \dots + K_{n,n}\Delta_n - F_n &= 0. \end{aligned} \quad (14.9)$$

Невідомими в рівняннях (14.9) є переміщення вузлів, коефіцієнти – величини вузлових реакцій, вільні члени – вузлові навантаження.

Як було зазначено, будь-який коефіцієнт матриці жорсткості $K_{i,j}$ дискретної моделі являє собою вузлову реакцію R_i , що обумовлена вузловим переміщенням $\Delta_j = 1$. На цій підставі для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості необхідно по чергово надавати одиничні переміщення вуз-

лам дискретної моделі і знаходити сили, які при цьому передаватимуться на вузли. Величини цих сил визначаються елементами відповідних матриць жорсткості окремих стержнів.

Кінцеві характеристики стержнів

У процесі деформування споруди її вузли, отже і кінці стержнів, переміщуються, внаслідок чого на кінцях виникають реакції взаємодії стержнів з вузлами дискретної моделі. Ці кінцеві реакції і кінцеві переміщення можуть бути визначені в локальній або в глобальній системі координат. Позначення і додатні напрями кінцевих переміщень і реакцій в локальній системі координат для стержня, який жорстко примикає до вузлів, зображено відповідно на рис.14.7,*а* і рис.14.7,*б*.

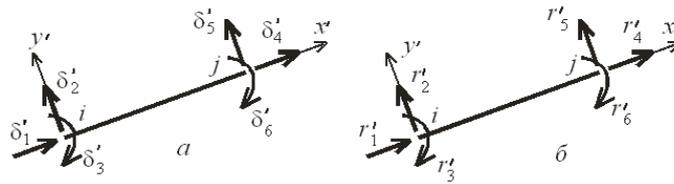


Рис.14.7

Необхідно звернути увагу на те, що кінцеві переміщення і кінцеві реакції нумеруються в суворо визначеному порядку.

Аналогічно, позначення і додатні напрями кінцевих переміщень і реакцій в локальній системі координат для стержня, який примикає до вузлів шарнірно, зображено відповідно на рис.14.8,*а* і рис.14.8,*б*.

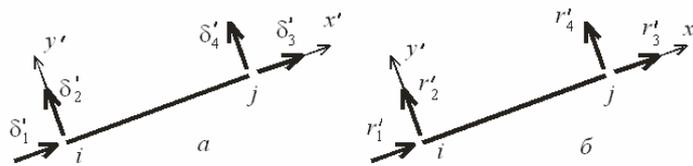


Рис.14.8

Таким чином, кінцеві переміщення в локальній системі координат на початку i стержня, який жорстко приєднується до вузлів, можуть бути записані у вигляді матриці-стовпця (вектора):

$$\bar{\delta}'_i = \begin{Bmatrix} \delta'_1 \\ \delta'_2 \\ \delta'_3 \end{Bmatrix}_i = \{\delta'_1 \quad \delta'_2 \quad \delta'_3\}_i^T.$$

Аналогічно можна представити вектор кінцевих переміщень на кінці j стержня:

$$\bar{\delta}'_j = \begin{Bmatrix} \delta'_4 \\ \delta'_5 \\ \delta'_6 \end{Bmatrix}_j = \{\delta'_4 \quad \delta'_5 \quad \delta'_6\}_j^T.$$

Повний вектор переміщень скінченного елемента e в локальній системі координат матиме вигляд:

$$\bar{\delta}'_e = \{\bar{\delta}'_i \quad \bar{\delta}'_j\}_e^T = \{\delta'_1 \quad \delta'_2 \quad \delta'_3 \mid \delta'_4 \quad \delta'_5 \quad \delta'_6\}_e^T.$$

Так само можна записати вектор кінцевих реакцій стержня в локальній системі координат:

$$\bar{r}'_e = \{\bar{r}'_i \quad \bar{r}'_j\}_e^T = \{r'_1 \quad r'_2 \quad r'_3 \mid r'_4 \quad r'_5 \quad r'_6\}_e^T.$$

Для стержня, який приєднується до вузлів шарнірно (стержень ферми), вектори кінцевих переміщень і реакцій в локальній системі координат матимуть вигляд:

$$\bar{\delta}'_e = \{\bar{\delta}'_i \quad \bar{\delta}'_j\}_e^T = \{\delta'_1 \quad \delta'_2 \mid \delta'_3 \quad \delta'_4\}_e^T$$

$$\bar{r}'_e = \{\bar{r}'_i \quad \bar{r}'_j\}_e^T = \{r'_1 \quad r'_2 \mid r'_3 \quad r'_4\}_e^T$$

Кінцеві переміщення і реакції можуть бути представлені у вигляді компонентів, які являють собою проекції відповідних величин на осі глобальної і локальної систем координат. Позначення і додатні напрями зазначених компонентів для стержня жорстко прикріпленого до вузлів представлено на рис.14.9,*а,б*, а для стержня, який приєднується до вузлів шарнірно – на рис.14.9,*в,г*.

Нумерація цих величин також суворо фіксована і аналогічна нумерації в локальній системі координат.

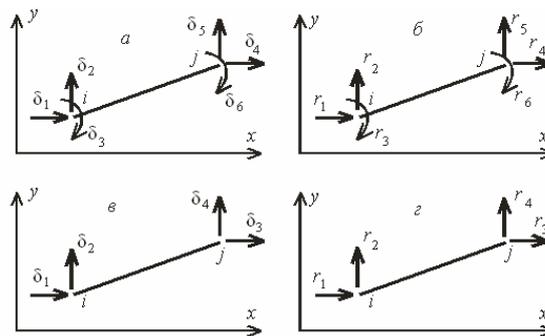


Рис.14.9

Кінцеві переміщення і кінцеві реакції в глобальній системі координат можуть бути представлені у вигляді векторів:

- для стержня жорстко прикріпленого до вузлів

$$\bar{\delta}'_e = \{\bar{\delta}'_i \quad \bar{\delta}'_j\}_e^T = \{\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \mid \delta_4 \quad \delta_5 \quad \delta_6\}_e^T;$$

$$\bar{r}_e = \{\bar{r}_i \quad \bar{r}_j\}_e^T = \{r_1 \quad r_2 \quad r_3 \mid r_4 \quad r_5 \quad r_6\}_e^T.$$

- для стержня прикріпленого до вузлів шарнірно

$$\bar{\delta}'_e = \{\bar{\delta}'_i \quad \bar{\delta}'_j\}_e^T = \{\delta_1 \quad \delta_2 \mid \delta_4 \quad \delta_4\}_e^T$$

$$\bar{r}_e = \{\bar{r}_i \quad \bar{r}_j\}_e^T = \{r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4\}_e^T$$

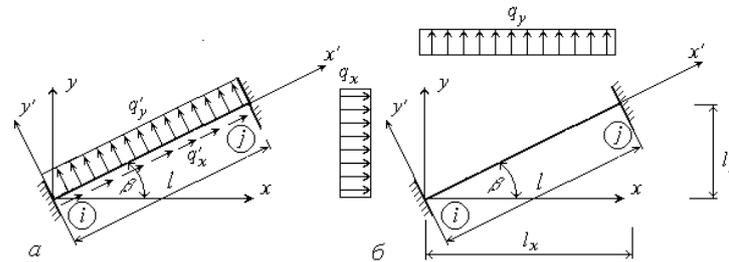


Рис.14.10

Крім кінцевих переміщень, на стержневий скінченний елемент можуть діяти рівномірно розподілені навантаження, які орієнтуються за осями або локальної (рис.14.10,*a*) або глобальної (рис.14.10,*б*) системи координат. Зв'язок між цими двома системами навантажень встановлюється співвідношеннями

$$\begin{aligned} q'_x &= \frac{q_x l_y}{l} \cos \beta + \frac{q_y l_x}{l} \sin \beta; \\ q'_y &= -\frac{q_x l_y}{l} \sin \beta + \frac{q_y l_x}{l} \cos \beta \end{aligned} \quad (14.10)$$

або навпаки

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{q'_x l}{l_y} \cos \beta - \frac{q'_y l}{l_y} \sin \beta; \\ q_y &= \frac{q'_x l}{l_x} \sin \beta + \frac{q'_y l}{l_x} \cos \beta. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Так само за локальними (рис.14.11,*a*) або за глобальними координатними осями (рис.14.11,*б*) орієнтуються вантажні реакції, які зумовлюються розподіленими вздовж стержня навантаженнями.

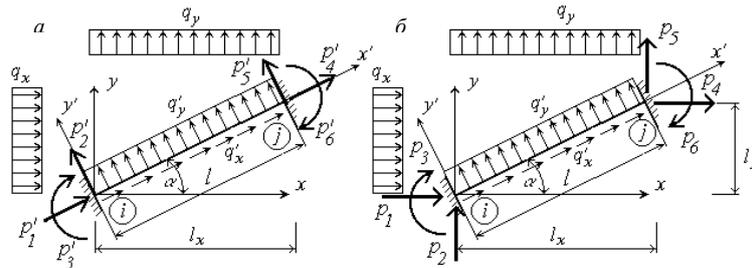


Рис.14.11

Нумерація вантажних реакцій також суворо визначена.

Вантажні реакції в локальній і в глобальній системі координат також можуть бути представлені у вигляді векторів:

$$\bar{\mathbf{p}}'_e = \{p'_1 \quad p'_2 \quad p'_3 \mid p'_4 \quad p'_5 \quad p'_6\}_e^T,$$

$$\bar{\mathbf{p}}_e = \{p_1 \quad p_2 \quad p_3 \mid p_4 \quad p_5 \quad p_6\}_e^T.$$

Для стержня, що має на кінцях шарніри

$$\bar{\mathbf{p}}'_e = \{p'_1 \quad p'_2 \mid p'_3 \quad p'_4\}_e^T$$

$$\bar{\mathbf{p}}_e = \{p_1 \quad p_2 \mid p_3 \quad p_4\}_e^T$$

Цілком очевидно, що в разі відсутності розподілених навантажень ці вектори є нульовими. При наявності розподілених навантажень значення елементів векторів вантажних реакцій залежать від граничних умов по кінцям стержня. Так, для скінченного елемента першого типу (рис.14.3,а), тобто для елемента, що має жорсткі вузли на обох кінцях

$$\bar{\mathbf{p}}'_e = \begin{Bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \\ p'_4 \\ p'_5 \\ p'_6 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} -\frac{q'_x l}{2} \\ \frac{q'_y l}{2} \\ \frac{q'_y l^2}{12} \\ -\frac{q'_x l}{2} \\ \frac{q'_y l}{2} \\ -\frac{q'_y l^2}{12} \end{Bmatrix}_e + \begin{Bmatrix} \frac{q'_x l}{2} \\ -\frac{q'_y l}{2} \\ \frac{q'_y l^2}{12} \\ \frac{q'_x l}{2} \\ -\frac{q'_y l}{2} \\ \frac{q'_y l^2}{12} \end{Bmatrix}_e; \quad \bar{\mathbf{p}}_e = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} -\frac{q'_x l_y}{2} \\ \frac{q'_y l_x}{2} \\ \frac{q'_y l_y^2}{12} \\ -\frac{q'_x l_y}{2} \\ -\frac{q'_y l_x}{2} \\ -\frac{q'_y l_y^2}{12} \end{Bmatrix}_e. \quad (14.12)$$

Матриці жорсткості і вектори вантажних реакцій для скінченних елементів інших типів наведено в додатках 1.

Між кінцевими характеристиками в глобальній та в локальній системах координат може бути встановлений формальний зв'язок:

$$\vec{\delta}'_e = \mathbf{T}_e \vec{\delta}_e, \quad (14.13)$$

$$\vec{r}'_e = \mathbf{T}_e \vec{r}_e, \quad (14.14)$$

$$\vec{p}'_e = \mathbf{T}_e \vec{p}_e, \quad (14.15)$$

де

$$\mathbf{T}_e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]_e.$$

Квадратна матриця \mathbf{T}_e називається матрицею перетворення стержневого елемента e .

Для стержня з шарнірами на кінцях матриця перетворення набуває вигляду:

$$\mathbf{T}_e = \left[\begin{array}{cc|cc} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{array} \right]$$

Матриці жорсткості стержневих скінченних елементів

Між кінцевими реакціями і кінцевими переміщеннями існує зв'язок, який у глобальній системі координат може бути записаний у формі:

$$\vec{r}_e = \mathbf{k}_e \vec{\delta}_e, \quad (14.16)$$

де \mathbf{k}_e – матриця жорсткості елемента e в глобальній системі координат. Для стержневого скінченного елемента першого типу матриця має вигляд:

$$\mathbf{k}_e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ \hline k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{array} \right]_e \quad (14.17)$$

Елементи матриці жорсткості – це реакції на кінцях, тобто кінцеві реакції стержневого скінченного елемента, які зумовлюються його кінцевими переміщеннями. Перший індекс характеризує номер кінцевої реакції, а другий – номер кінцевого переміщення, яке цю реакцію викликало. Наприклад, елемент k_{25} – це кінцева реакція r_2 (див.рис.14.9,б) від дії примусового переміщення $\delta_5 = 1$ (див.рис.14.9,а) за умови, що всі інші кінцеві переміщення дорівнюють нулю. Величини реакцій залежать від типу скінченного елемента. Так, для скінченного стержневого елемента, що має жорсткі вузли з обох сторін (рис.14.3,а), елементи матриці жорсткості мають значення:

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= k_{44} = -k_{14} = -k_{41} = f \cos^2 \beta + \frac{12i}{l^2} \sin^2 \beta; \\
 k_{22} &= k_{55} = -k_{25} = -k_{52} = f \sin^2 \beta + \frac{12i}{l^2} \cos^2 \beta; \\
 k_{33} &= k_{66} = 4i; \\
 k_{12} &= k_{21} = k_{45} = k_{54} = -k_{15} = -k_{51} = -k_{24} = -k_{42} = \left(f - \frac{12i}{l^2} \right) \sin \beta \cos \beta; \\
 k_{13} &= k_{31} = k_{16} = k_{61} = -k_{46} = -k_{64} = -k_{34} = -k_{43} = \frac{6i}{l} \sin \beta; \\
 k_{35} &= k_{53} = k_{56} = k_{65} = -k_{23} = -k_{32} = -k_{26} = -k_{62} = \frac{6i}{l} \cos \beta; \\
 k_{36} &= k_{63} = 2i.
 \end{aligned} \tag{14.18}$$

Тут позначено:

$$i = \frac{EI}{l}; \quad f = \frac{EA}{l}, \tag{14.19}$$

де l – довжина, EI – жорсткість стержня на згин, EA – жорсткість стержня на поздовжні деформації.

Для стержневого скінченного елемента четвертого типу (шарнірне приєднання з обох сторін) матриця жорсткості в глобальній системі координат набуває вигляду:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}_e = \tag{14.20}$$

$$= \begin{bmatrix} f \cos^2 \beta & f \sin \beta \cos \beta & -f \sin^2 \beta & -f \sin \beta \cos \beta \\ f \sin \beta \cos \beta & f \sin^2 \beta & -f \sin \beta \cos \beta & -f \sin^2 \beta \\ -f \sin^2 \beta & -f \sin \beta \cos \beta & f \cos^2 \beta & f \sin \beta \cos \beta \\ -f \sin \beta \cos \beta & -f \sin^2 \beta & f \sin \beta \cos \beta & f \sin^2 \beta \end{bmatrix}_e$$

Визначення зусиль у стержнях

Розв'язок рівняння рівноваги (14.8) визначає вектор вузлових переміщень

$$\bar{\Delta} = \mathbf{K}^{-1}\bar{\mathbf{F}}. \quad (14.21)$$

Таким чином стають відомими переміщення всіх вузлів дискретної моделі. Внаслідок нерозривності деформацій кінці стержнів, які приєднуються до вузлів, матимуть такі ж самі переміщення, що й вузли. Отже для кожного стержня дискретної моделі можна побудувати вектор кінцевих переміщень у глобальній системі координат:

$$\bar{\delta}_e = \{\bar{\Delta}_i \quad \bar{\Delta}_j\}_e^T = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} \Delta_{xi} \\ \Delta_{yi} \\ \Delta_{\phi i} \\ \Delta_{xj} \\ \Delta_{yj} \\ \Delta_{\phi j} \end{Bmatrix}_e. \quad (14.22)$$

Сумарні кінцеві реакції стержня в локальній системі координат (рис.14.12,*a*)

$$\bar{s}'_e = \{\bar{s}'_i \quad \bar{s}'_j\}_e^T = \{s'_1 \quad s'_2 \quad s'_3 \mid s'_4 \quad s'_5 \quad s'_6\}_e^T.$$

складаються з кінцевих реакцій r'_i , що зумовлені переміщеннями вузлів дискретної моделі (14.22), і кінцевими силами p'_i , які викликані дією розподіленого на стержні зовнішнього навантаження:

$$\bar{s}'_e = \bar{\mathbf{r}}'_e + \bar{\mathbf{p}}'_e. \quad (14.23)$$

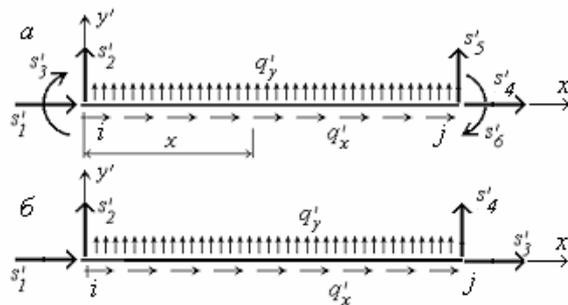


Рис.14.12

Сумарні кінцеві реакції можуть бути обчислені за формулою:

$$\bar{s}'_e = \mathbf{h}_e \bar{\delta}_e + \bar{\mathbf{p}}'_e. \quad (14.24)$$

Вигляд матриці \mathbf{h}_e залежить від граничних умов на кінцях стержня. Так, для стержня, що має на обох кінцях жорсткі вузли

$$\mathbf{h}_e = \begin{bmatrix} fC & fS & 0 & -fC & -fS & 0 \\ -\frac{12i}{l^2}S & \frac{12i}{l^2}C & -\frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2}S & -\frac{12i}{l^2}C & -\frac{6i}{l} \\ \frac{6i}{l}S & -\frac{6i}{l}C & 4i & -\frac{6i}{l}S & \frac{6i}{l}C & 2i \\ -fC & -fS & 0 & fC & fS & 0 \\ \frac{12i}{l^2}S & -\frac{12i}{l^2}C & \frac{6i}{l} & -\frac{12i}{l^2}S & \frac{12i}{l^2}C & \frac{6i}{l} \\ \frac{6i}{l}S & -\frac{6i}{l}C & 2i & -\frac{6i}{l}S & \frac{6i}{l}C & 4i \end{bmatrix}_e \quad (14.25),$$

а для стержня з шарнірами на кінцях

$$\mathbf{h}_e = \begin{bmatrix} fC & fS & -fC & -fS \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -fC & -fS & fC & fS \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14.26)$$

Тут позначено: $S = \sin \beta$, $C = \cos \beta$.

Нумерація сумарних кінцевих реакцій для стержня, що має на кінцях шарнірні вузли представлена на рис.14.12,б.

Приклавши сумарні кінцеві реакції до стержня (рис.14.12), можемо обчислити внутрішні зусилля в будь-якому його перерізі розглядаючи рівновагу однієї з його частин. Наприклад, у перерізі з абсцисою x (рис.14.12,а), маємо:

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{\text{лів.}} M_x = s_2'x + s_3' + \frac{q_y'x^2}{2}; \\ Q_x &= \sum_{\text{лів.}} y' = s_2' + q_y'x; \\ N_x &= \sum_{\text{лів.}} x' = -s_1' - q_x'x. \end{aligned} \quad (14.27)$$

14.2. Приклад розрахунку плоскої рами

Необхідно виконати статичний розрахунок плоскої рами (рис.14.13). На раму діють зосереджені сили $P_1 = 10 \text{ кН}$ і $P_2 = 20 \text{ кН}$, а також рівномірно розподілені навантаження з інтенсивністю $q_1 = 2,4 \text{ кН/м}$ і $q_2 = 3,0 \text{ кН/м}$.

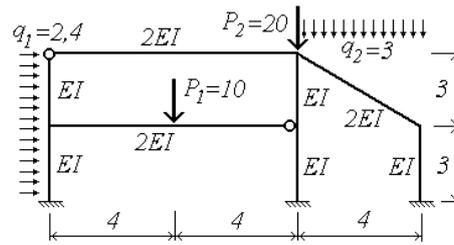


Рис.14.13

Стояки мають жорсткості на згинальні та поздовжні деформації відповідно $EI = 1$, $EA = 100$, а ригелі – вдвічі більшу: $EI = 2$, $EA = 200$.

Перехід до дискретної (скінченно-елементної) моделі

Для переходу від заданої розрахункової схеми до дискретної (скінченно-елементної) моделі розіб'ємо схему на окремі стержневі елементи, які поєднуються у вузлах. За вузли приймаємо точки сполучення окремих стержнів, опорні точки, а також точку прикладення зовнішньої зосередженої сили P_1 . Пронумеруємо вузли в довільному порядку. Початок глобальної системи візьмемо у вузлі 7. Дискретна модель наведена на рис.14.14.

Фізико-геометричні характеристики скінченних елементів

Для кожного стержня дискретної моделі необхідно обчислити довжину (l), нахил осей локальної системи координат ($\sin\beta$, $\cos\beta$), погонні жорсткості (i, f), а також визначити тип його граничних умов (рис.14.14). Результати обчислень занесені до табл.14.1.

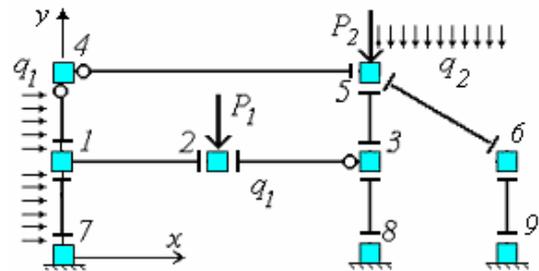


Рис.14.14

Таблиця 14.1

Скінченний елемент	Тип СЕ	Початок СЕ		Кінець СЕ		l	$\sin\beta$	$\cos\beta$	EI	EA	i	f
		x_i	y_i	x_j	y_j							
1-2	1	0	3	4	3	4	0	1	2	200	0,5	50
2-3	2	4	3	8	3	4	0	1	2	200	0,5	50
4-5	3	0	6	8	6	8	0	1	2	200	0,25	25
5-6	1	8	6	12	3	5	-0,6	0,8	2	200	0,4	40

1-7	1	0	3	0	0	3	-1	0	1	100	0,333	33,33
1-4	2	0	3	0	6	3	1	0	1	100	0,333	33,33
3-8	1	8	3	8	0	3	-1	0	1	100	0,333	33,33
3-5	1	8	3	8	6	3	1	0	1	100	0,333	33,33
6-9	1	12	3	12	0	3	-1	0	1	100	0,333	33,33

Усі жорсткі вузли дискретної моделі мають три ступені вільності. Вузол 4, до якого всі елементи примикають шарнірно, має два ступеня вільності. Схема можливих вузлових переміщень наведена на рис.14.15.

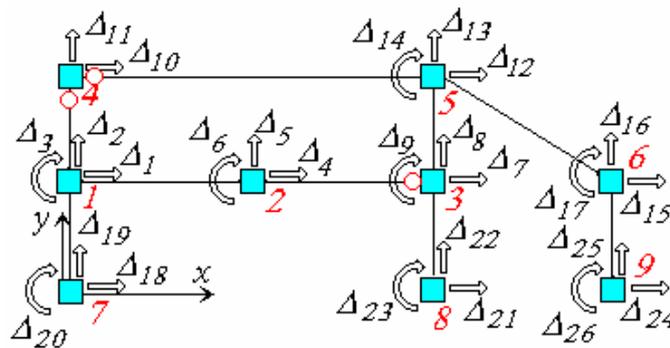


Рис.14.15

Вектор вузлових переміщень має 26 компонентів:

$$\bar{\Delta} = \{\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \mid \Delta_4 \quad \Delta_5 \quad \Delta_6 \mid \dots \mid \Delta_{24} \quad \Delta_{25} \quad \Delta_{26}\}^T.$$

Переміщення опорних вузлів дорівнюють нулю:

$$\Delta_{18} = \Delta_{19} = \Delta_{20} = \Delta_{21} = \Delta_{22} = \Delta_{23} = \Delta_{24} = \Delta_{25} = \Delta_{26} = 0.$$

Виключивши нульові компоненти з вектора вузлових переміщень маємо остаточно:

$$\bar{\Delta} = \{\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \mid \Delta_4 \quad \Delta_5 \quad \Delta_6 \mid \dots \mid \Delta_{15} \quad \Delta_{16} \quad \Delta_{17}\}^T.$$

Таким чином дискретна модель має 17 невідомих вузлових переміщень і отже 17 ступенів вільності.

Побудова вектора вузлових навантажень

Вектор вузлових навантажень має компоненти, які відповідають компонентам вектора вузлових переміщень:

$$\bar{F} = \{F_1 \quad F_2 \quad F_3 \mid F_4 \quad F_5 \quad F_6 \mid \dots \mid F_{15} \quad F_{16} \quad F_{17}\}^T.$$

Схема дії зовнішніх вузлових навантажень наведена рис.14.16.

Згідно до формули (14.3) вектор вузлових навантажень складається з двох векторів. Перший з них – це вектор зовнішніх зосереджених сил і моментів, що безпосередньо діють на вузли:

$$\vec{\tilde{F}} = \{\tilde{F}_1 \quad \tilde{F}_2 \quad \tilde{F}_3 \mid \tilde{F}_4 \quad \tilde{F}_5 \quad \tilde{F}_6 \mid \tilde{F}_7 \quad \tilde{F}_8 \quad \tilde{F}_9 \mid \tilde{F}_{10} \quad \tilde{F}_{11} \mid \tilde{F}_{12} \quad \tilde{F}_{13} \quad \tilde{F}_{14} \mid \tilde{F}_{15} \quad \tilde{F}_{16} \quad \tilde{F}_{17}\}^T.$$

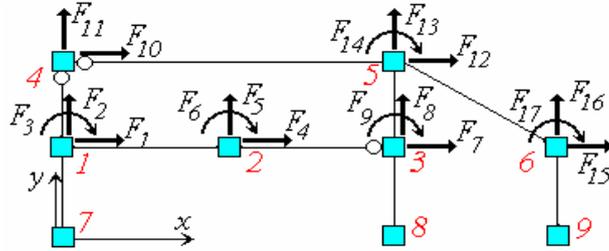


Рис.14.16

Порівнюючи схему завантаження дискретної моделі (рис.14.14) зі схемою компонентів вузлових навантажень (рис.14.16), можна записати:

$$\tilde{F}_5 = -10; \quad \tilde{F}_{13} = -20.$$

Усі інші компоненти дорівнюватимуть нулю, тому:

$$\vec{\tilde{F}} = \{0 \quad 0 \quad 0 \mid 0 \quad -10 \quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad 0 \mid 0 \quad 0 \mid 0 \quad -20 \quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad 0\}^T.$$

Вектор \vec{Q} реактивних сил, що передаються на вузли від розподілених на стержні навантажень, також має 17 компонентів:

$$\vec{Q} = \{Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \mid Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 \mid Q_7 \quad Q_8 \quad Q_9 \mid Q_{10} \quad Q_{11} \mid Q_{12} \quad Q_{13} \quad Q_{14} \mid Q_{15} \quad Q_{16} \quad Q_{17}\}^T.$$

Схема дії компонентів цього вектора аналогічна компонентам вектора $\vec{\tilde{F}}$ (рис.14.17). Для обчислення компонентів вектора \vec{Q} розглянемо завантажені стержні окремо.

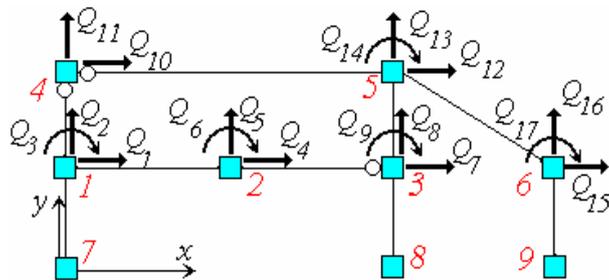


Рис.14.17

Стержень 1-7 (рис.14.18,а). Скінченний елемент має з обох боків жорсткі вузли і відноситься до першого типу. Навантаження в локальній системі координат (рис.14.18,б):

$$q'_x = 0; \quad q'_y = 2,4.$$

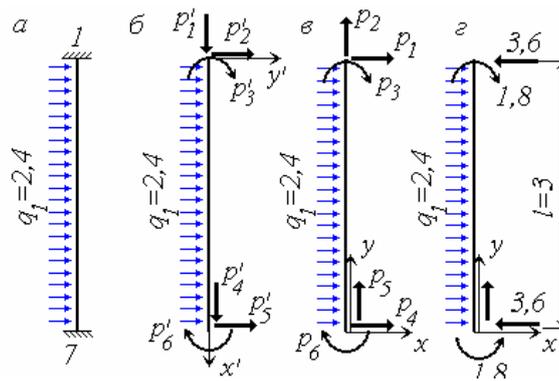


Рис.14.18

Вантажні реакції в локальній системі координат:

$$\begin{aligned}
 p_1' &= -\frac{q_x' l}{2} = 0; & p_4' &= -\frac{q_x' l}{2} = 0; \\
 p_2' &= -\frac{q_y' l}{2} = -\frac{2,4 \cdot 3}{2} = -3,6; & p_5' &= -\frac{q_y' l}{2} = -\frac{2,4 \cdot 3}{2} = -3,6; \\
 p_3' &= \frac{q_y' l^2}{12} = \frac{2,4 \cdot 3^2}{12} = 1,8; & p_6' &= -\frac{q_y' l^2}{12} = -\frac{2,4 \cdot 3^2}{12} = -1,8.
 \end{aligned}$$

Вантажні реакції у глобальній системі координат можна визначити по формулам (14.15) або шляхом порівняння реакцій у локальній та глобальній системах координат. Так, з порівняння вантажних реакцій в локальній (рис.14.18,б) і в глобальній (рис.14.18,в) системах координат доходимо висновку:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= p_2' = -3,6; & p_4 &= p_5' = -3,6; \\
 p_2 &= p_1' = 0; & p_5 &= p_4' = 0; \\
 p_3 &= p_3' = 1,8; & p_6 &= p_6' = -1,8.
 \end{aligned}$$

Вантажні реакції, орієнтовані по осях глобальної системи координат, з урахуванням знаків показано на рис.14.18,г:

Стержень 1-4 (рис.14.19,а). Скінченний елемент має жорсткий вузол на початку і шарнірний на кінці і тому відноситься до другого типу. Навантаження в локальній системі координат:

$$q_x' = 0; \quad q_y' = -2,4.$$

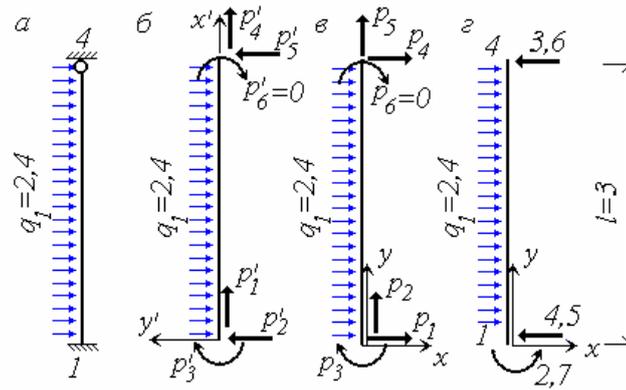


Рис.14.19

Вантажні реакції в локальній системі координат (рис.14.19,б):

$$\begin{aligned}
 p_1' &= -\frac{q_x' l}{2} = 0; & p_4' &= -\frac{q_x' l}{2} = 0; \\
 p_2' &= -\frac{5q_y' l}{8} = -\frac{5 \cdot (-2,4) \cdot 3}{8} = 4,5; & p_5' &= -\frac{q_y' l}{2} = -\frac{2,4 \cdot 3}{2} = -3,6; \\
 p_3' &= \frac{q_y' l^2}{8} = \frac{(-2,4) \cdot 3^2}{8} = -2,7; & p_6' &= -\frac{q_y' l^2}{12} = -\frac{2,4 \cdot 3^2}{12} = -1,8.
 \end{aligned}$$

Порівнюючи вантажні реакції, орієнтовані по осях локальної системи координат стержня (рис.14.19,б) з вантажними реакціями, спрямованими по осях глобальної системі координат скінченно-елементної моделі (рис.14.19,в), можемо записати:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= -p_2' = -4,5; & p_4 &= -p_5' = -3,6; \\
 p_2 &= p_1' = 0; & p_5 &= p_4' = 0; \\
 p_3 &= p_3' = -2,7; & p_6 &= 0.
 \end{aligned}$$

Вантажні реакції у глобальній системі координат з урахуванням знаків показано на рис.14.19,г.

Стержень 5-6 (рис.14.20,а). Скінченний елемент має з обох боків жорсткі вузли і відноситься до першого типу. Навантаження в глобальній системі координат:

$$q_x = 0; \quad q_y = -3.$$

Для зручності обчислення вантажних реакцій, орієнтованих за локальною системою координат, перетворимо розподілене навантаження до локальної системи координат за формулами (14.10):

$$\begin{aligned}
 q_x' &= \frac{1}{l}(q_x l_y \cos \beta + q_y l_x \sin \beta) = \frac{1}{5}(0 - 3 \cdot 4 \cdot (-0,6)) = 1,44; \\
 q_y' &= \frac{1}{l}(-q_x l_y \sin \beta + q_y l_x \cos \beta) = \frac{1}{5}(0 + (-3) \cdot 4 \cdot 0,8) = -1,92.
 \end{aligned}$$

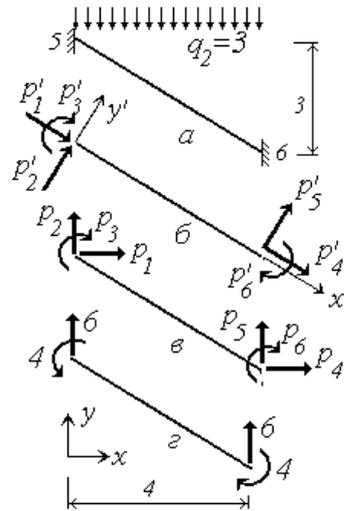


Рис.14.20

Вантажні реакції за локальною системою координат (рис.14.20,б):

$$\begin{aligned}
 p'_1 &= -\frac{q'_x l}{2} = -\frac{1,44 \cdot 5}{2} = -3,60; & p'_4 &= -\frac{q'_x l}{2} = -3,60; \\
 p'_2 &= -\frac{q'_y l}{2} = -\frac{(-1,92) \cdot 5}{2} = 4,80; & p'_5 &= -\frac{q'_y l}{2} = 4,80; \\
 p'_3 &= \frac{q'_y l^2}{12} = \frac{(-1,92) \cdot 5^2}{12} = -4,00; & p'_6 &= -\frac{q'_y l^2}{12} = 4,00.
 \end{aligned}$$

За глобальною системою координат (рис.14.20,в):

$$\begin{aligned}
 p_1 &= -\frac{q_x l_y}{2} = 0; & p_4 &= 0; \\
 p_2 &= -\frac{q_y l_x}{2} = -\frac{(-3) \cdot 4}{2} = 6,00; & p_5 &= 6,00; \\
 p_3 &= \frac{q_y l_x^2}{12} - \frac{q_x l_y^2}{12} = \frac{(-3) \cdot 4^2}{12} - 0 = -4,00; & p_6 &= 4,00.
 \end{aligned}$$

Вантажні реакції у глобальній системі координат з урахуванням знаків показано на рис.14.20,г:

Прикладаємо вантажні реакції завантажених стержнів до вузлів дискретної моделі, змінивши напрямки на протилежні (рис.14.21).

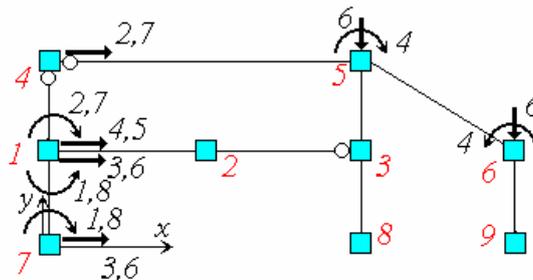


Рис.14.21

Порівнюючи сили на рис.14.17 і на рис.14.21, можемо записати:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 3,6 + 4,5 = 8,1; \\ Q_3 &= 2,7 - 1,8 = 0,9; \\ Q_{10} &= 2,7; \\ Q_{13} &= -6; \\ Q_{14} &= 4; \\ Q_{16} &= -6; \\ Q_{17} &= -4. \end{aligned}$$

Усі інші елементи вектора \bar{Q} дорівнюють нулю. Таким чином

$$\bar{Q} = \{8,1 \quad 0 \quad 0,9 \mid 0 \quad 0 \quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad 0 \mid 2,7 \quad 0 \mid 0 \quad -6 \quad 4 \mid 0 \quad -6 \quad -4\}^T.$$

Додаючи вектори \bar{F} і \bar{Q} одержуємо, згідно з формулою (14.3), вектор вузлових навантажень дискретної моделі:

$$\bar{F} = \{8,1 \quad 0 \quad 0,9 \mid 0 \quad -10 \quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad 0 \mid 2,7 \quad 0 \mid 0 \quad -6 \quad 4 \mid 0 \quad -6 \quad -4\}^T.$$

Матриця жорсткості дискретної моделі

Дискретна модель рами, що розраховується, має 17 ступенів вільності. Тому матриця жорсткості дискретної моделі є квадратною матрицею 17×17 :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,17} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,17} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{17,1} & K_{17,2} & \dots & K_{17,17} \end{bmatrix}.$$

Елементи матриці – це величини вузлових реакцій, що зумовлюються одиничними вузловими переміщеннями. Для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості необхідно по чергові надавати одиничні переміщення вузлам дискретної моделі і знаходити сили, які при цьому передаватимуться на вузли.

Обчислимо, наприклад, елементи 14 стовпця матриці жорсткості. З цією метою надамо дискретній моделі примусове вузлове переміщення $\Delta_{14} = 1$, вважаючи, що всі інші переміщення вузлів дорівнюють нулю. Тобто надамо вузлу 5 примусовий одиничний поворот, вважаючи, що всі інші вузли не переміщуються. На вузли дискретної моделі з боку стержнів передаватимуться кінцеві реакції, зумовлені деформаціями стержнів (рис.14.22).

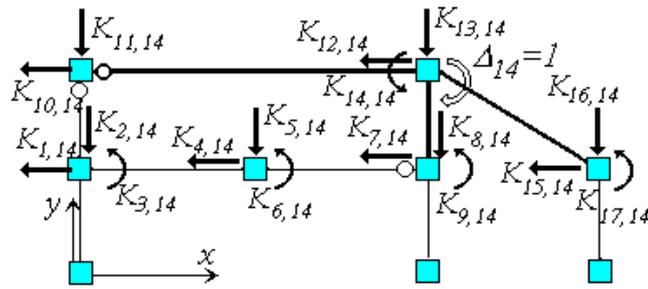


Рис.14.22

Унаслідок переміщення вузла 5 деформуються стержні 4-5, 5-6, 3-5, які до нього приєднуються. Вони виділені на рисунку товстими лініями. Тільки в цих стержнях виникають напруження і кінцеві реакції, що передаються на вузли дискретної моделі і зумовлюють появу вузлових реакцій. Тому можна відразу зазначити: якщо до вузла приєднуються тільки недеформовані стержні, то вузлових реакцій в даному вузлі не виникає. На цій підставі можна вважати, що $K_{1,14} = K_{2,14} = K_{3,14} = K_{4,14} = K_{5,14} = K_{6,14} = 0$. Для обчислення реакцій, які діють на вузли з боку деформованих стержнів розглянемо окремо відповідний фрагмент у збільшеному масштабі (рис.14.23).

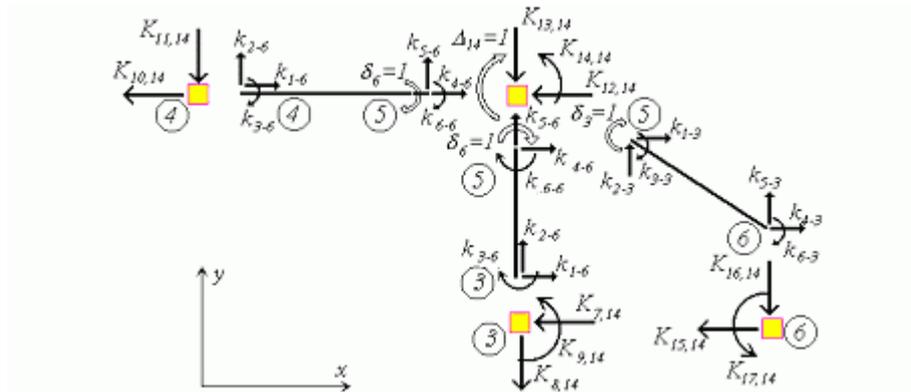


Рис.14.23

Разом із поворотом $\Delta_{14} = 1$ вузла 5 повертаються кінці стержнів 4-5, 3-5 і 5-6. Але якщо для стержня 5-6 це поворот його початку і тому на схемі він позначений $\delta_3 = 1$, то для стержнів 4-5 і 3-5 – це повороти кінців, тобто $\delta_6 = 1$. Тому на стержні 5-6 кінцеві реакції другим мають індекс 3 ($k_{1,3}, k_{2,3}, k_{3,3}, k_{4,3}, k_{5,3}, k_{6,3}$), а на стержнях 4-5 і 3-5 – індекс 6 ($k_{1,6}, k_{2,6}, k_{3,6}, k_{4,6}, k_{5,6}, k_{6,6}$). Величини кінцевих реакцій визначаються матрицями жорсткості скінченних елементів відповідних типів. Так, стержні 3-5 і 5-6 є елементами першого, а стержень 4-5 – елементом другого типу. Дані для обчислень вибираємо з табл.14.4.

$$\begin{aligned}
K_{7,14} &= k_{16}^{3-5} = \left(\frac{6i}{l} \sin \beta \right)^{3-5} = \frac{6 \cdot 0,333}{3} \cdot 1 = 0,666; \\
K_{8,14} &= k_{26}^{3-5} = \left(-\frac{6i}{l} \cos \beta \right)^{3-5} = 0; \\
K_{9,14} &= k_{36}^{3-5} = (2i)^{3-5} = (2 \cdot 0,333) = 0,666; \\
K_{10,14} &= k_{16}^{4-5} = \left(\frac{3i}{l} \sin \beta \right)^{4-5} = 0; \\
K_{11,14} &= k_{26}^{4-5} = \left(-\frac{3i}{l} \cos \beta \right)^{4-5} = -\frac{3 \cdot 0,25}{8} \cdot 1 = -0,09375; \\
K_{12,14} &= k_{46}^{4-5} + k_{13}^{5-6} + k_{46}^{3-5} = \left(-\frac{3i}{l} \sin \beta \right)^{4-5} + \left(\frac{6i}{l} \sin \beta \right)^{5-6} + \left(-\frac{6i}{l} \sin \beta \right)^{3-5} = \\
&= 0 + \frac{6 \cdot 0,4}{5} \cdot (-0,6) + \left(-\frac{6 \cdot 0,333}{3} \cdot 1 \right) = 0 - 0,288 - 0,666 = -0,954; \\
K_{13,14} &= k_{56}^{4-5} + k_{23}^{5-6} + k_{56}^{3-5} = \left(\frac{3i}{l} \cos \beta \right)^{4-5} + \left(-\frac{6i}{l} \cos \beta \right)^{5-6} + \left(\frac{6i}{l} \cos \beta \right)^{3-5} = \\
&= \frac{3 \cdot 0,25}{8} \cdot 1 - \frac{6 \cdot 0,4}{5} \cdot 0,8 + 0 = 0,09375 - 0,384 + 0 = -0,29025; \\
K_{14,14} &= k_{66}^{4-5} + k_{33}^{5-6} + k_{66}^{3-5} = (3i)^{4-5} + (4i)^{5-6} + (4i)^{3-5} = \\
&= 3 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,333 = 3,682; \\
K_{15,14} &= k_{43}^{5-6} = \left(-\frac{6i}{l} \sin \beta \right)^{5-6} = -\frac{6 \cdot 0,4}{5} \cdot (-0,6) = 0,288; \\
K_{16,14} &= k_{53}^{5-6} = \left(\frac{6i}{l} \cos \beta \right)^{5-6} = \frac{6 \cdot 0,4}{5} \cdot 0,8 = 0,384; \\
K_{17,14} &= k_{63}^{5-6} = (2i)^{5-6} = 2 \cdot 0,4 = 0,8.
\end{aligned}$$

Система рівнянь рівноваги вузлів

Матричне рівняння рівноваги вузлів (14.8) еквівалентне системі рівнянь

$$\begin{aligned}
K_{1,1}\Delta_1 + K_{1,2}\Delta_2 + \dots + K_{1,17}\Delta_{17} - F_1 &= 0; \\
K_{2,1}\Delta_1 + K_{2,2}\Delta_2 + \dots + K_{2,17}\Delta_{17} - F_2 &= 0; \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots &= \dots \quad \dots \quad \dots \\
K_{17,1}\Delta_1 + K_{17,2}\Delta_2 + \dots + K_{17,17}\Delta_{17} - F_{17} &= 0.
\end{aligned}$$

У результаті розв'язання системи рівнянь маємо такі значення вузлових переміщень дискретної моделі:

Вузол 1: $\Delta_1 = 13,228;$ $\Delta_2 = -0,1827;$ $\Delta_3 = 7,9986;$

Вузол 2: $\Delta_4 = 13,131;$ $\Delta_5 = -35,666;$ $\Delta_6 = 1,5684;$

Вузол 3: $\Delta_7 = 13,034;$ $\Delta_8 = -0,6678;$ $\Delta_9 = 1,6059;$

$$\text{Вузол 4:} \quad \Delta_{10} = 12,923; \quad \Delta_{11} = -0,1815;$$

$$\text{Вузол 5:} \quad \Delta_{12} = 12,707; \quad \Delta_{13} = -1,2679; \quad \Delta_{14} = 0,5571;$$

$$\text{Вузол 6:} \quad \Delta_{15} = 13,063; \quad \Delta_{16} = -0,4094; \quad \Delta_{17} = 0,4117.$$

Обчислення внутрішніх зусиль

Визначення вузлових переміщень дискретної моделі дає змогу обчислити сумарні кінцеві реакції в кожному скінченному елементі. Обчислимо, наприклад, сумарні кінцеві реакції в стержні 5-6 (рис.14.14).

Побудуємо вектор кінцевих переміщень у глобальній системі координат для стержня 5-6:

$$\bar{\delta}_{5-6} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix}_{5-6} = \begin{Bmatrix} \Delta_{12} \\ \Delta_{13} \\ \Delta_{14} \\ \Delta_{15} \\ \Delta_{16} \\ \Delta_{17} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12,707 \\ -1,2679 \\ 0,5571 \\ 13,063 \\ -0,4094 \\ 0,4117 \end{Bmatrix}.$$

Скомпонуємо вектор вантажних реакцій стержня 5-6 у локальній системі координат:

$$\bar{p}'_{5-6} = \begin{Bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \\ p'_4 \\ p'_5 \\ p'_6 \end{Bmatrix}_{5-6} = \begin{Bmatrix} -3,60 \\ 4,80 \\ -4,00 \\ -3,60 \\ 4,80 \\ 4,00 \end{Bmatrix}.$$

Складемо матрицю \mathbf{h}_{5-6} , на підставі співвідношень (14.25), як для стержня з першим типом граничних умов. При обчисленнях дані вибираємо з таблиці фізико-геометричних характеристик скінченних елементів (Табл.14.1). В результаті маємо:

$$\mathbf{h}_{5-6} = \begin{bmatrix} 32 & -24 & 0 & -32 & 24 & 0 \\ 0,1152 & 0,1536 & -0,48 & -0,1152 & -0,1536 & -0,48 \\ -0,288 & -0,384 & 1,6 & 0,288 & 0,384 & 0,8 \\ -32 & 24 & 0 & 32 & -24 & 0 \\ -0,1152 & -0,1536 & 0,48 & 0,1152 & 0,1536 & 0,48 \\ -0,288 & -0,384 & 0,8 & 0,288 & 0,384 & 1,6 \end{bmatrix}.$$

Виконуємо обчислення за формулою (14.24):

$$\bar{s}'_{5-6} = \begin{Bmatrix} s_1' \\ s_2' \\ s_3' \\ s_4' \\ s_5' \\ s_6' \end{Bmatrix}_{5-6} = h_{5-6} \cdot \bar{\delta}_{5-6} + \bar{p}'_{5-6} =$$

$$= \begin{bmatrix} 32 & -24 & 0 & -32 & 24 & 0 \\ 0,1152 & 0,1536 & -0,48 & -0,1152 & -0,1536 & -0,48 \\ -0,288 & -0,384 & 1,6 & 0,288 & 0,384 & 0,8 \\ -32 & 24 & 0 & 32 & -24 & 0 \\ -0,1152 & -0,1536 & 0,48 & 0,1152 & 0,1536 & 0,48 \\ -0,288 & -0,384 & 0,8 & 0,288 & 0,384 & 1,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 12,707 \\ -1,2679 \\ 0,5571 \\ 13,063 \\ -0,4094 \\ 0,4117 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -3,60 \\ 4,80 \\ -4,00 \\ -3,60 \\ 4,80 \\ 4,00 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5,615 \\ 4,162 \\ -2,347 \\ -12,815 \\ 5,438 \\ 5,536 \end{Bmatrix}$$

Знайдені сумарні кінцеві реакції прикладаються до скінченного елемента (рис.14.24).

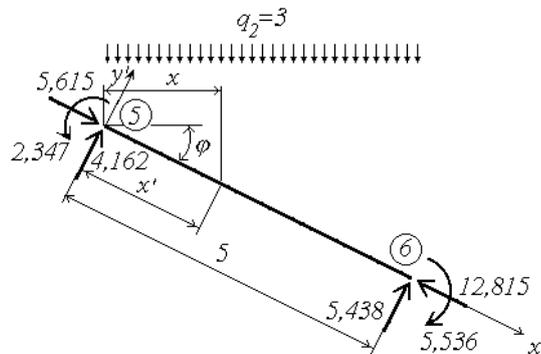


Рис.14.24

Обчислимо внутрішні зусилля в довільному перерізі стержня:

$$M_x = \sum_{\text{лів}} M_x = 4,162 \cdot x' - 2,347 - \frac{3 \cdot x'^2}{2};$$

$$Q_x = \sum_{\text{лів}} y' = 4,162 - 3 \cdot x' \cdot \cos \varphi;$$

$$N_x = \sum_{\text{лів}} x' = -5,165 - 3 \cdot x' \cdot \sin \varphi.$$

Зауважимо, що $\sin \varphi = |\sin \beta|$, $\cos \varphi = |\cos \beta|$.

Таким чином, на початку стержня ($x' = x = 0$)

$$M_{\text{п}} = -2,347; \quad Q_{\text{п}} = 4,162; \quad N_{\text{п}} = -5,165.$$

В середині стержня ($x' = 2,5$; $x = 2$)

$$M_c = 4,162 \cdot 2,5 - 2,347 - \frac{3 \cdot 2^2}{2} = 2,058;$$

$$Q_c = 4,162 - 3 \cdot 2 \cdot 0,8 = -0,638;$$

$$N_c = -5,165 - 3 \cdot 2 \cdot 0,6 = -8,765.$$

На кінці стержня ($x' = 5$; $x = 4$)

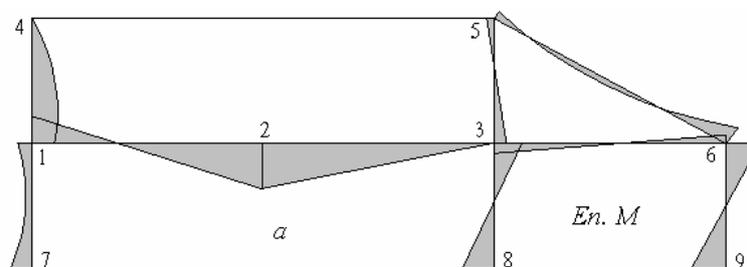
$$M_k = -5,536; \quad Q_k = -5,438; \quad N_k = -12,815.$$

Аналогічні обчислення виконуються для всіх інших стержнів. Результати розрахунків запишемо до табл.14.2.

Таблиця 14.2

СЕ	M_{Π}	M_c	M_k	Q_{Π}	Q_k	N_{Π}	N_k
1- 2	-9.047	3.215	15.477	6.131	6.131	-4.853	-4.853
2- 3	15.477	7.738	0.000	-3.869	-3.869	-4.853	-4.853
3- 6	3.817	0.597	-2.623	-1.610	-1.610	1.456	1.456
4- 5	0.000	-0.158	-0.316	-0.039	-0.039	-5.400	-5.400
5- 6	-2.347	2.058	-5.536	4.162	-5.438	-5.613	-14.813
1- 7	3.646	1.766	5.286	-3.053	4.147	-6.091	-6.091
1- 4	5.400	5.400	0.000	1.800	-5.400	0.039	0.039
3- 5	2.731	0.350	-2.031	-1.587	-1.587	-20.002	-20.002
3- 8	-6.548	0.535	7.619	4.722	4.722	-22.261	-22.261
6- 9	-8.160	0.137	8.434	5.531	5.531	-14.648	-14.648

За результатами табл. 14.2 на рис. 14.25 побудовано епюри внутрішніх зусиль.



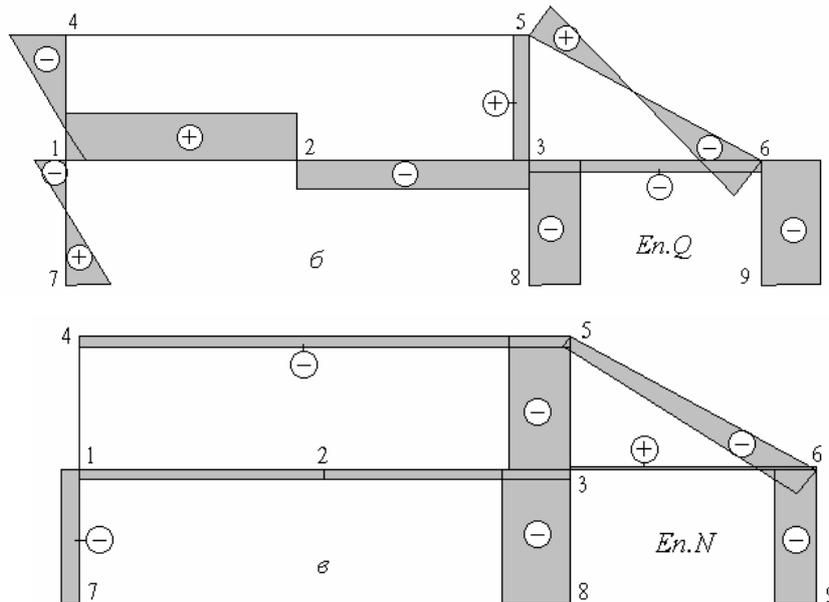


Рис.14.25

14.3. Приклад розв'язування просторової рами методом скінченних елементів

Дано: розрахункова модель просторової рами (рис.14.26), всі стержні якої мають жорсткісні параметри: $EA = 300$, $EI_y = EI_z = GI_{кр} = 3$.

Необхідно: Визначити внутрішні зусилля в стержнях рами.

Розв'язуватимемо задачу в глобальній системі координат $OXYZ$ (рис.14.27). Просторову раму розглядатимемо як сукупність трьох стержневих скінченних елементів 1-2, 2-3, 3-4, поєднаних між собою у вузлах 2, 3 і з диском „земля” жорсткими в'язями 1 та 4. З кожним скінченним елементом пов'яжемо локальні системи координат $x_{i-j}y_{i-j}z_{i-j}$.

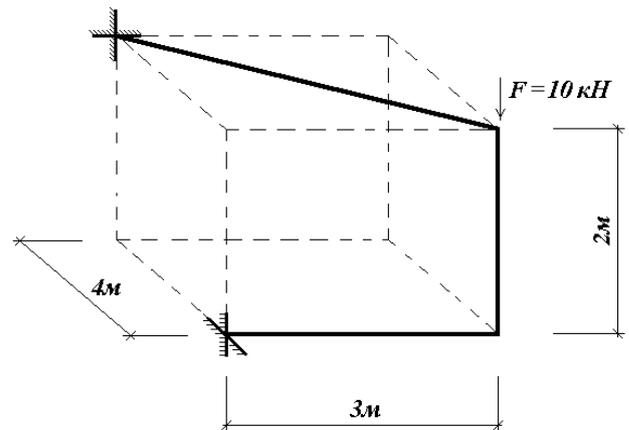


Рис.14.26

Вузли рами мають дванадцять можливих переміщень (рис.14.28)

$$\vec{\Delta} = \{\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \dots \quad \Delta_{12}\}^T.$$

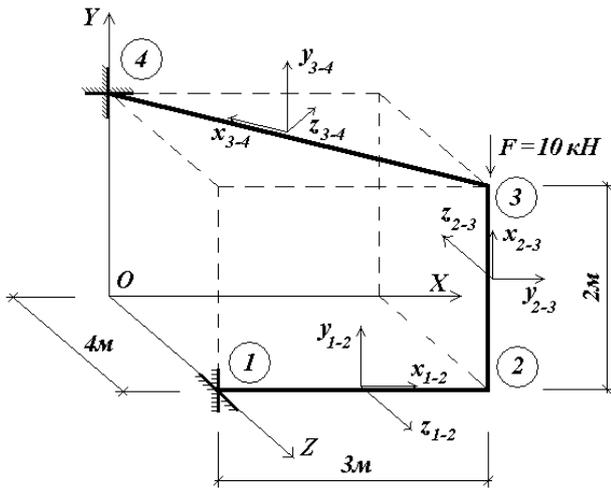


Рис.14.27

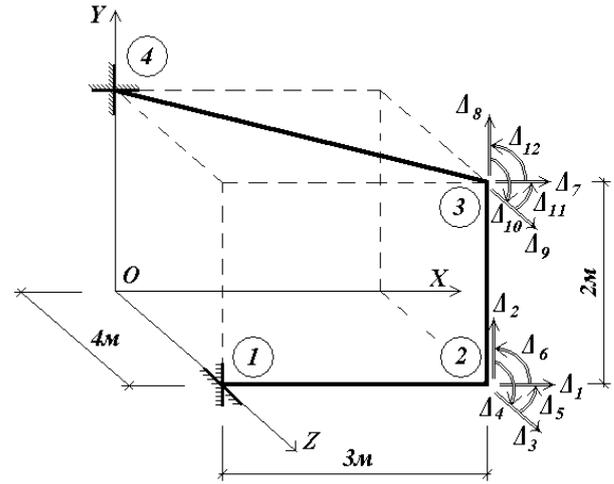


Рис. 11.28

Система розв'язувальних рівнянь методу скінченних елементів у формі переміщень має вигляд

$$\mathbf{K}\bar{\Delta} - \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{0}},$$

або в координатній формі

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & K_{1,4} & K_{1,5} & K_{1,6} & K_{1,7} & K_{1,8} & K_{1,9} & K_{1,10} & K_{1,11} & K_{1,12} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} & K_{2,4} & K_{2,5} & K_{2,6} & K_{2,7} & K_{2,8} & K_{2,9} & K_{2,10} & K_{2,11} & K_{2,12} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} & K_{3,4} & K_{3,5} & K_{3,6} & K_{3,7} & K_{3,8} & K_{3,9} & K_{3,10} & K_{3,11} & K_{3,12} \\ K_{4,1} & K_{4,2} & K_{4,3} & K_{4,4} & K_{4,5} & K_{4,6} & K_{4,7} & K_{4,8} & K_{4,9} & K_{4,10} & K_{4,11} & K_{4,12} \\ K_{5,1} & K_{5,2} & K_{5,3} & K_{5,4} & K_{5,5} & K_{5,6} & K_{5,7} & K_{5,8} & K_{5,9} & K_{5,10} & K_{5,11} & K_{5,12} \\ K_{6,1} & K_{6,2} & K_{6,3} & K_{6,4} & K_{6,5} & K_{6,6} & K_{6,7} & K_{6,8} & K_{6,9} & K_{6,10} & K_{6,11} & K_{6,12} \\ \hline K_{7,1} & K_{7,2} & K_{7,3} & K_{7,4} & K_{7,5} & K_{7,6} & K_{7,7} & K_{7,8} & K_{7,9} & K_{7,10} & K_{7,11} & K_{7,12} \\ K_{8,1} & K_{8,2} & K_{8,3} & K_{8,4} & K_{8,5} & K_{8,6} & K_{8,7} & K_{8,8} & K_{8,9} & K_{8,10} & K_{8,11} & K_{8,12} \\ K_{9,1} & K_{9,2} & K_{9,3} & K_{9,4} & K_{9,5} & K_{9,6} & K_{9,7} & K_{9,8} & K_{9,9} & K_{9,10} & K_{9,11} & K_{9,12} \\ K_{10,1} & K_{10,2} & K_{10,3} & K_{10,4} & K_{10,5} & K_{10,6} & K_{10,7} & K_{10,8} & K_{10,9} & K_{10,10} & K_{10,11} & K_{10,12} \\ K_{11,1} & K_{11,2} & K_{11,3} & K_{11,4} & K_{11,5} & K_{11,6} & K_{11,7} & K_{11,8} & K_{11,9} & K_{11,10} & K_{11,11} & K_{11,12} \\ K_{12,1} & K_{12,2} & K_{12,3} & K_{12,4} & K_{12,5} & K_{12,6} & K_{12,7} & K_{12,8} & K_{12,9} & K_{12,10} & K_{12,11} & K_{12,12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \Delta_9 \\ \Delta_{10} \\ \Delta_{11} \\ \Delta_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Вектор вузлових навантажень на скінченно-елементну модель

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Для побудови матриці жорсткості всієї моделі \mathbf{K} визначимо матриці жорсткості кожного скінченного елемента в локальній \mathbf{k} і в глобальній \mathbf{k} системах координат. Стержень, що деформується в просторі, має дванадцять можливих вузлових переміщень $\delta_1 \dots \delta_{12}$ (рис.14.29).

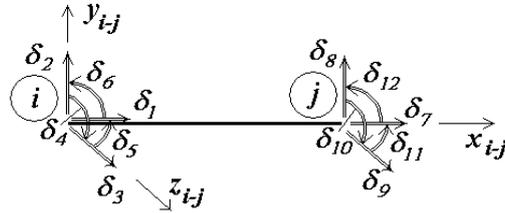


Рис.14.29

При такій схемі розміщення невідомих переміщень матриця жорсткості окремого стержневого скінченного елемента довжиною L в локальній системі координат будується по схемі

$$\bar{\mathbf{k}}_e = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{k}}_1 & \bar{\mathbf{k}}_3 \\ \bar{\mathbf{k}}_3^T & \bar{\mathbf{k}}_2 \end{bmatrix}$$

в якій блоки мають наповнення:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{kp}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{kp}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_{kp}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \end{bmatrix},$$

Використовуючи приведену схему, отримуємо матриці жорсткості скінчених елементів в локальних системах координат

$$\bar{\mathbf{k}}_{1-2} = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,333 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1,333 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1,333 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1,333 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline -100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,333 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1,333 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1,333 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1,333 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right],$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{2-3} = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,5 & 0 & 0 & 0 & 4,5 & 0 & -4,5 & 0 & 0 & 0 & 4,5 \\ 0 & 0 & 4,5 & 0 & -4,5 & 0 & 0 & 0 & -4,5 & 0 & -4,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4,5 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 4,5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4,5 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -4,5 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ \hline -150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4,5 & 0 & 0 & 0 & -4,5 & 0 & 4,5 & 0 & 0 & 0 & -4,5 \\ 0 & 0 & -4,5 & 0 & 4,5 & 0 & 0 & 0 & 4,5 & 0 & 4,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4,5 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 4,5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4,5 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -4,5 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right],$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{3-4} = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 60 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -60 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,288 & 0 & 0 & 0 & 0,72 & 0 & -0,288 & 0 & 0 & 0 & 0,72 \\ 0 & 0 & 0,288 & 0 & -0,72 & 0 & 0 & 0 & -0,288 & 0 & -0,72 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,72 & 0 & 2,4 & 0 & 0 & 0 & 0,72 & 0 & 1,2 & 0 \\ 0 & 0,72 & 0 & 0 & 0 & 2,4 & 0 & -0,72 & 0 & 0 & 0 & 1,2 \\ \hline -60 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,288 & 0 & 0 & 0 & -0,72 & 0 & 0,288 & 0 & 0 & 0 & -0,72 \\ 0 & 0 & -0,288 & 0 & 0,72 & 0 & 0 & 0 & 0,288 & 0 & 0,72 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,72 & 0 & 1,2 & 0 & 0 & 0 & 0,72 & 0 & 2,4 & 0 \\ 0 & 0,72 & 0 & 0 & 0 & 1,2 & 0 & -0,72 & 0 & 0 & 0 & 2,4 \end{array} \right]$$

Матриця перетворення трьохвимірної системи координат має вигляд:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix},$$

Однотипові блоки матриці перетворення мають компоненти:

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

які можна визначити за формулами:

$$l_x = \frac{X_j - X_i}{L_{i-j}}; \quad m_x = \frac{Y_j - Y_i}{L_{i-j}}; \quad n_x = \frac{Z_j - Z_i}{L_{i-j}};$$

$$l_y = -\frac{l_x n_x \sin \varphi + m_x \cos \varphi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}}; \quad m_y = -\frac{n_x m_x \sin \varphi - l_x \cos \varphi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}}; \quad n_y = \sqrt{l_x^2 + m_x^2} \sin \varphi; \quad l_z = -\frac{l_x n_x \cos \varphi - m_x \sin \varphi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}};$$

$$m_z = -\frac{m_x n_x \cos \varphi + l_x \sin \varphi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}}; \quad n_z = \sqrt{l_x^2 + m_x^2} \cos \varphi.$$

У цих формулах позначено: $X_i, Y_i, Z_i, X_j, Y_j, Z_j$ – координати початкового і кінцевого вузлів скінченного елемента в глобальній системі координат, φ – кут між віссю y_{i-j} і прямою перетину площин XY та $y_{i-j}z_{i-j}$.

Для стержня 1-2:

$$\varphi = 0;$$

$$l_x = \frac{X_2 - X_1}{L_{1-2}} = \frac{3 - 0}{3} = 1;$$

$$m_x = \frac{Y_2 - Y_1}{L_{1-2}} = \frac{0 - 0}{3} = 0;$$

$$n_x = \frac{Z_2 - Z_1}{L_{1-2}} = \frac{4 - 4}{4} = 0;$$

$$l_y = -\frac{l_x n_x \sin \varphi + m_x \cos \varphi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}} = -\frac{1 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 0;$$

$$m_y = -\frac{n_x m_x \sin \varphi - l_x \cos \varphi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}} = -\frac{0 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 1;$$

$$n_y = \sqrt{l_x^2 + m_x^2} \sin \varphi = \sqrt{1^2 + 0^2} \cdot 0 = 0;$$

$$l_z = -\frac{l_x n_x \cos \varphi - m_x \sin \varphi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}} = -\frac{1 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 0;$$

$$m_z = -\frac{m_x n_x \cos \varphi + l_x \sin \varphi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}} = -\frac{0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 0;$$

$$n_z = \sqrt{l_x^2 + m_x^2} \cos \varphi = \sqrt{1^2 + 0^2} \cdot 1 = 1;$$

Матриця перетворення системи координат набуває вигляду

$$\mathbf{T}_{1-2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для стержня 2-3:

$$\varphi = 0;$$

$$l_x = \frac{X_3 - X_2}{L_{2-3}} = \frac{3-3}{2} = 0;$$

$$m_x = \frac{Y_3 - Y_2}{L_{2-3}} = \frac{2-0}{2} = 1;$$

$$n_x = \frac{Z_3 - Z_2}{L_{2-3}} = \frac{4-4}{4} = 0;$$

$$l_y = -\frac{l_x n_x \sin \varphi + m_x \cos \varphi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}} = -\frac{0 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = -1;$$

$$m_y = -\frac{n_x m_x \sin \varphi - l_x \cos \varphi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}} = -\frac{0 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 0;$$

$$n_y = \sqrt{l_x^2 + m_x^2} \sin \varphi = \sqrt{0^2 + 1^2} \cdot 0 = 0;$$

$$l_z = -\frac{l_x n_x \cos \varphi - m_x \sin \varphi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}} = -\frac{0 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 0;$$

$$m_z = -\frac{m_x n_x \cos \varphi + l_x \sin \varphi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}} = -\frac{1 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 0;$$

$$n_z = \sqrt{l_x^2 + m_x^2} \cos \varphi = \sqrt{0^2 + 1^2} \cdot 1 = 1;$$

Матриця перетворення системи координат набуває вигляду

$$\mathbf{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для стержня 3-4:

$$\varphi = 0;$$

$$l_x = \frac{X_4 - X_3}{L_{3-4}} = \frac{0 - 3}{5} = -0,6;$$

$$m_x = \frac{Y_4 - Y_3}{L_{3-4}} = \frac{2 - 2}{5} = 0;$$

$$n_x = \frac{Z_4 - Z_3}{L_{3-4}} = \frac{0 - 4}{5} = -0,8;$$

$$l_y = -\frac{l_x n_x \sin \varphi + m_x \cos \varphi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}} = -\frac{-0,6 \cdot (-0,8) \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{(-0,6)^2 + 0^2}} = 0;$$

$$m_y = -\frac{n_x m_x \sin \varphi - l_x \cos \varphi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}} = -\frac{(-0,8) \cdot 0 \cdot 0 - (-0,6) \cdot 1}{\sqrt{(-0,6)^2 + 0^2}} = -1;$$

$$n_y = \sqrt{l_x^2 + m_x^2} \sin \varphi = \sqrt{(-0,6)^2 + 0^2} \cdot 0 = 0;$$

$$l_z = -\frac{l_x n_x \cos \varphi - m_x \sin \varphi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}} = -\frac{(-0,6) \cdot (-0,8) \cdot 1 - 0 \cdot 0}{\sqrt{(-0,6)^2 + 0^2}} = -0,8;$$

$$m_z = -\frac{m_x n_x \cos \varphi + l_x \sin \varphi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}} = -\frac{0 \cdot (-0,8) \cdot 1 + (-0,6) \cdot 0}{\sqrt{(-0,6)^2 + 0^2}} = 0;$$

$$n_z = \sqrt{l_x^2 + m_x^2} \cos \varphi = \sqrt{(-0,6)^2 + 0^2} \cdot 1 = 0,6.$$

Матрица перетворення системи координат набуває вигляду:

$$\times \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} -0,6 & 0 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,8 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 & -0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0 & 0,6 \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 21,78 & 0 & 28,66 & 0 & -0,576 & 0 & -21,78 & 0 & -28,66 & 0 & -0,576 & 0 \\ 0 & 0,288 & 0 & 0,576 & 0 & -0,432 & 0 & -0,288 & 0 & 0,576 & 0 & -0,432 \\ 28,66 & 0 & 38,50 & 0 & 0,432 & 0 & -28,66 & 0 & -38,50 & 0 & 0,432 & 0 \\ \hline 0 & 0,576 & 0 & 1,752 & 0 & -0,864 & 0 & -0,576 & 0 & 0,552 & 0 & -0,864 \\ -0,576 & 0 & 0,432 & 0 & 2,4 & 0 & 0,576 & 0 & -0,432 & 0 & 1,2 & 0 \\ 0 & -0,432 & 0 & -0,864 & 0 & 1,24 & 0 & 0,432 & 0 & -0,864 & 0 & 0,048 \\ \hline -21,78 & 0 & -28,66 & 0 & 0,576 & 0 & 21,78 & 0 & 28,66 & 0 & 0,576 & 0 \\ 0 & -0,288 & 0 & -0,576 & 0 & 0,432 & 0 & 0,288 & 0 & -0,576 & 0 & 0,432 \\ -28,66 & 0 & -38,50 & 0 & -0,432 & 0 & 28,66 & 0 & 38,50 & 0 & -0,432 & 0 \\ \hline 0 & 0,576 & 0 & 0,552 & 0 & -0,864 & 0 & -0,576 & 0 & 1,752 & 0 & -0,864 \\ -0,576 & 0 & 0,432 & 0 & 1,2 & 0 & 0,576 & 0 & -0,432 & 0 & 2,4 & 0 \\ 0 & -0,432 & 0 & -0,864 & 0 & 0,048 & 0 & 0,432 & 0 & -0,864 & 0 & 1,24 \end{array} \right] .$$

Елементи матриці жорсткості скінченно-елементної моделі визначаються як реакції уявних в'язей по напрямках можливих переміщень вузлів шляхом сумування кінцевих реакцій деформованих стержнів при одиничних вузлових переміщеннях. Ці реакції є компонентами матриць жорсткості окремих скінченних елементів у глобальній системі координат.

$$K_{1,1} = k_{7,7}^{1-2} + k_{1,1}^{2-3} = 100 + 4,5 = 104,5;$$

$$K_{2,1} = k_{8,7}^{1-2} + k_{2,1}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{3,1} = k_{9,7}^{1-2} + k_{3,1}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{4,1} = k_{10,7}^{1-2} + k_{4,1}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{5,1} = k_{11,7}^{1-2} + k_{5,1}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{6,1} = k_{12,7}^{1-2} + k_{6,1}^{2-3} = 0 - 4,5 = -4,5;$$

$$K_{7,1} = k_{7,1}^{2-3} = -4,5;$$

$$K_{8,1} = k_{8,1}^{2-3} = 0;$$

$$K_{9,1} = k_{9,1}^{2-3} = 0;$$

$$K_{10,1} = k_{10,1}^{2-3} = 0;$$

$$K_{11,1} = k_{11,1}^{2-3} = 0;$$

$$K_{12,1} = k_{12,1}^{2-3} = -4,5.$$

$$K_{1,2} = k_{7,8}^{1-2} + k_{1,2}^{2-3} = 0 + 0 = 0$$

$$K_{2,2} = k_{8,8}^{1-2} + k_{2,2}^{2-3} = 1,333 + 150 = 151,333;$$

$$K_{3,2} = k_{9,8}^{1-2} + k_{3,2}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{4,2} = k_{10,8}^{1-2} + k_{4,2}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{5,2} = k_{11,8}^{1-2} + k_{5,2}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{6,2} = k_{12,8}^{1-2} + k_{6,2}^{2-3} = -2 + 0 = -2;$$

$$K_{7,2} = k_{7,2}^{2-3} = 0;$$

$$K_{8,2} = k_{8,2}^{2-3} = -150;$$

$$K_{9,2} = k_{9,2}^{2-3} = 0;$$

$$K_{10,2} = k_{10,2}^{2-3} = 0;$$

$$K_{11,2} = k_{11,2}^{2-3} = 0;$$

$$K_{12,2} = k_{12,2}^{2-3} = 0.$$

$$K_{1,3} = k_{7,9}^{1-2} + k_{1,3}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{2,3} = k_{8,9}^{1-2} + k_{2,3}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{3,3} = k_{9,9}^{1-2} + k_{3,3}^{2-3} = 1,333 + 4,5 = 5,833;$$

$$K_{4,3} = k_{10,9}^{1-2} + k_{4,3}^{2-3} = 0 + 4,5 = 4,5;$$

$$K_{5,3} = k_{11,9}^{1-2} + k_{5,3}^{2-3} = 2 + 0 = 2;$$

$$K_{6,3} = k_{12,9}^{1-2} + k_{6,3}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{7,3} = k_{7,3}^{2-3} = 0;$$

$$K_{8,3} = k_{8,3}^{2-3} = 0;$$

$$K_{9,3} = k_{9,3}^{2-3} = -4,5;$$

$$K_{10,3} = k_{10,3}^{2-3} = 4,5;$$

$$K_{11,3} = k_{11,3}^{2-3} = 0;$$

$$K_{12,3} = k_{12,3}^{2-3} = 0.$$

$$K_{1,4} = k_{7,10}^{1-2} + k_{1,4}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{2,4} = k_{8,10}^{1-2} + k_{2,4}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{3,4} = k_{9,10}^{1-2} + k_{3,4}^{2-3} = 0 + 4,5 = 4,5;$$

$$K_{4,4} = k_{10,10}^{1-2} + k_{4,4}^{2-3} = 1 + 6 = 7;$$

$$K_{5,4} = k_{11,10}^{1-2} + k_{5,4}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{6,4} = k_{12,10}^{1-2} + k_{6,4}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{7,4} = k_{7,4}^{2-3} = 0;$$

$$K_{8,4} = k_{8,4}^{2-3} = 0;$$

$$K_{9,4} = k_{9,4}^{2-3} = -4,5;$$

$$K_{10,4} = k_{10,4}^{2-3} = 3;$$

$$K_{11,4} = k_{11,4}^{2-3} = 0;$$

$$K_{12,4} = k_{12,4}^{2-3} = 0.$$

$$K_{1,5} = k_{7,11}^{1-2} + k_{1,5}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{2,5} = k_{8,11}^{1-2} + k_{2,5}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{3,5} = k_{9,11}^{1-2} + k_{3,5}^{2-3} = 2 + 0 = 2;$$

$$K_{4,5} = k_{10,11}^{1-2} + k_{4,5}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{5,5} = k_{11,11}^{1-2} + k_{5,5}^{2-3} = 4 + 1,5 = 5,5;$$

$$K_{6,5} = k_{12,11}^{1-2} + k_{6,5}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{7,5} = k_{7,5}^{2-3} = 0;$$

$$K_{8,5} = k_{8,5}^{2-3} = 0;$$

$$K_{9,5} = k_{9,5}^{2-3} = 0;$$

$$K_{10,5} = k_{10,5}^{2-3} = 0;$$

$$K_{11,5} = k_{11,5}^{2-3} = -1,5$$

$$K_{12,5} = k_{12,5}^{2-3} = 0.$$

$$K_{1,6} = k_{7,12}^{1-2} + k_{1,6}^{2-3} = 0 - 4,5 = -4,5;$$

$$K_{2,6} = k_{8,12}^{1-2} + k_{2,6}^{2-3} = -2 + 0 = -2;$$

$$K_{3,6} = k_{9,12}^{1-2} + k_{3,6}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{4,6} = k_{10,12}^{1-2} + k_{4,6}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{5,6} = k_{11,12}^{1-2} + k_{5,6}^{2-3} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{6,6} = k_{12,12}^{1-2} + k_{6,6}^{2-3} = 4 + 6 = 10;$$

$$K_{7,6} = k_{7,6}^{2-3} = 4,5;$$

$$K_{8,6} = k_{8,6}^{2-3} = 0;$$

$$K_{9,6} = k_{9,6}^{2-3} = 0;$$

$$K_{10,6} = k_{10,6}^{2-3} = 0;$$

$$K_{11,6} = k_{11,6}^{2-3} = 0;$$

$$K_{12,6} = k_{12,6}^{2-3} = 3.$$

$$K_{1,7} = k_{1,7}^{2-3} = -4,5;$$

$$K_{2,7} = k_{2,7}^{2-3} = 0;$$

$$K_{3,7} = k_{3,7}^{2-3} = 0;$$

$$K_{4,7} = k_{4,7}^{2-3} = 0;$$

$$K_{5,7} = k_{5,7}^{2-3} = 0;$$

$$K_{6,7} = k_{6,7}^{2-3} = 4,5;$$

$$K_{7,7} = k_{7,7}^{2-3} + k_{1,1}^{3-4} = 4,5 + 21,784 = 26,284;$$

$$K_{8,7} = k_{8,7}^{2-3} + k_{2,1}^{3-4} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{9,7} = k_{9,7}^{2-3} + k_{3,1}^{3-4} = 0 + 28,662 = 28,662;$$

$$K_{10,7} = k_{10,7}^{2-3} + k_{4,1}^{3-4} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{11,7} = k_{11,7}^{2-3} + k_{5,1}^{3-4} = 0 - 0,576 = -0,576;$$

$$K_{12,7} = k_{12,7}^{2-3} + k_{6,1}^{3-4} = 4,5 + 0 = 4,5.$$

$$K_{1,8} = k_{1,8}^{2-3} = 0;$$

$$K_{2,8} = k_{2,8}^{2-3} = -150;$$

$$K_{3,8} = k_{3,8}^{2-3} = 0;$$

$$K_{4,8} = k_{4,8}^{2-3} = 0;$$

$$K_{5,8} = k_{5,8}^{2-3} = 0;$$

$$K_{6,8} = k_{6,8}^{2-3} = 0;$$

$$K_{7,8} = k_{7,8}^{2-3} + k_{1,2}^{3-4} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{8,8} = k_{8,8}^{2-3} + k_{2,2}^{3-4} = 150 + 0,288 = 150,288;$$

$$K_{9,8} = k_{9,8}^{2-3} + k_{3,2}^{3-4} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{10,8} = k_{10,8}^{2-3} + k_{4,2}^{3-4} = 0 + 0,576 = 0,576;$$

$$K_{11,8} = k_{11,8}^{2-3} + k_{5,2}^{3-4} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{12,8} = k_{12,8}^{2-3} + k_{6,2}^{3-4} = 0 - 0,432 = -0,432.$$

$$K_{1,9} = k_{1,9}^{2-3} = 0;$$

$$K_{2,9} = k_{2,9}^{2-3} = 0;$$

$$K_{3,9} = k_{3,9}^{2-3} = -4,5$$

$$K_{4,9} = k_{4,9}^{2-3} = -4,5;$$

$$K_{5,9} = k_{5,9}^{2-3} = 0;$$

$$K_{6,9} = k_{6,9}^{2-3} = 0;$$

$$K_{7,9} = k_{7,9}^{2-3} + k_{1,3}^{3-4} = 0 + 28,662 = 28,662;$$

$$K_{8,9} = k_{8,9}^{2-3} + k_{2,3}^{3-4} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{9,9} = k_{9,9}^{2-3} + k_{3,3}^{3-4} = 4,5 + 38,504 = 43,004;$$

$$K_{10,9} = k_{10,9}^{2-3} + k_{4,3}^{3-4} = -4,5 + 0 = -4,5;$$

$$K_{11,9} = k_{11,9}^{2-3} + k_{5,3}^{3-4} = 0 + 0,432 = 0,432;$$

$$K_{12,9} = k_{12,9}^{2-3} + k_{6,3}^{3-4} = 0 + 0 = 0.$$

$$K_{1,10} = k_{1,10}^{2-3} = 0;$$

$$K_{2,10} = k_{2,10}^{2-3} = 0;$$

$$K_{3,10} = k_{3,10}^{2-3} = 4,5$$

$$K_{4,10} = k_{4,10}^{2-3} = 3;$$

$$K_{5,10} = k_{5,10}^{2-3} = 0;$$

$$K_{6,10} = k_{6,10}^{2-3} = 0;$$

$$K_{7,10} = k_{7,10}^{2-3} + k_{1,4}^{3-4} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{8,10} = k_{8,10}^{2-3} + k_{2,4}^{3-4} = 0 + 0,576 = 0,576;$$

$$K_{9,10} = k_{9,10}^{2-3} + k_{3,4}^{3-4} = -4,5 + 0 = -4,5;$$

$$K_{10,10} = k_{10,10}^{2-3} + k_{4,4}^{3-4} = 6 + 1,752 = 7,752;$$

$$K_{11,10} = k_{11,10}^{2-3} + k_{5,4}^{3-4} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{12,10} = k_{12,10}^{2-3} + k_{6,4}^{3-4} = 0 - 0,864 = -0,864.$$

$$K_{1,11} = k_{1,11}^{2-3} = 0;$$

$$K_{2,11} = k_{2,11}^{2-3} = 0;$$

$$K_{3,11} = k_{3,11}^{2-3} = 0;$$

$$K_{4,11} = k_{4,11}^{2-3} = 0;$$

$$K_{5,11} = k_{5,11}^{2-3} = -1,5;$$

$$K_{6,11} = k_{6,11}^{2-3} = 0;$$

$$K_{7,11} = k_{7,11}^{2-3} + k_{1,5}^{3-4} = 0 - 0,576 = -0,576;$$

$$K_{8,11} = k_{8,11}^{2-3} + k_{2,5}^{3-4} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{9,11} = k_{9,11}^{2-3} + k_{3,5}^{3-4} = 0 + 0,432 = 0,432;$$

$$K_{10,11} = k_{10,11}^{2-3} + k_{4,5}^{3-4} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{11,11} = k_{11,11}^{2-3} + k_{5,5}^{3-4} = 1,5 + 2,4 = 3,9;$$

$$K_{12,11} = k_{12,11}^{2-3} + k_{6,5}^{3-4} = 0 + 0 = 0.$$

$$K_{1,12} = k_{1,12}^{2-3} = -4,5;$$

$$K_{2,12} = k_{2,12}^{2-3} = 0;$$

$$K_{3,12} = k_{3,12}^{2-3} = 0;$$

$$K_{4,12} = k_{4,12}^{2-3} = 0;$$

$$K_{5,12} = k_{5,12}^{2-3} = 0;$$

$$K_{6,12} = k_{6,12}^{2-3} = 3;$$

$$K_{7,12} = k_{7,12}^{2-3} + k_{1,6}^{3-4} = 4,5 + 0 = 4,5;$$

$$K_{8,12} = k_{8,12}^{2-3} + k_{2,6}^{3-4} = 0 - 0,432 = -0,432;$$

$$K_{9,12} = k_{9,12}^{2-3} + k_{3,6}^{3-4} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{10,12} = k_{10,12}^{2-3} + k_{4,6}^{3-4} = 0 - 0,864 = -0,864;$$

$$K_{11,12} = k_{11,12}^{2-3} + k_{5,6}^{3-4} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{12,12} = k_{12,12}^{2-3} + k_{6,6}^{3-4} = 6 + 1,248 = 7,248.$$

Система лінійних рівнянь

$$\mathbf{K}\bar{\Delta} - \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{0}}$$

при побудованих матриці жорсткості \mathbf{K} та векторі вузлових навантажень $\bar{\mathbf{P}}$ має розв'язок

$$\vec{\Delta} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \Delta_9 \\ \Delta_{10} \\ \Delta_{11} \\ \Delta_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,0293 \\ -15,416 \\ -7,1195 \\ -0,5817 \\ 3,6154 \\ -6,3429 \\ 10,320 \\ -15,468 \\ -7,6655 \\ 0,5384 \\ 3,7638 \\ -4,6578 \end{Bmatrix}.$$

Зусилля в крайніх точках стержневих скінченних елементів визначаються за формулою

$$\vec{S}_{i-j} = \left\{ -N^i \quad Q_z^i \quad Q_y^i \quad M_{kp}^i \quad M_y^i \quad -M_z^i \mid N^j \quad -Q_z^j \quad -Q_y^j \quad -M_{kp}^j \quad -M_y^j \quad M_z^j \right\}^T = \bar{\mathbf{k}}_{i-j} \cdot \mathbf{T}_{i-j} \cdot \vec{\delta}_{i-j},$$

де: $\vec{\delta}_{i-j}$ – вектор вузлових переміщень скінченного елемента в глобальній системі координат, компоненти якого є підмножиною матриці $\vec{\Delta}$:

$$\vec{\delta}_{1-2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,0293 \\ -15,416 \\ -7,1195 \\ -0,5817 \\ 3,6154 \\ -6,3429 \end{Bmatrix}, \quad \vec{\delta}_{2-3} = \begin{Bmatrix} -0,0293 \\ -15,416 \\ -7,1195 \\ -0,5817 \\ 3,6154 \\ -6,3429 \\ 10,320 \\ -15,468 \\ -7,6655 \\ 0,5384 \\ 3,7638 \\ -4,6578 \end{Bmatrix}, \quad \vec{\delta}_{3-4} = \begin{Bmatrix} 10,320 \\ -15,468 \\ -7,6655 \\ 0,5384 \\ 3,7638 \\ -4,6578 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Враховуючи ці вектори отримуємо

$$\bar{S}_{1-2} = \begin{Bmatrix} -N \\ Q_y \\ Q_z \\ M_{кр} \\ M_y \\ -M_z \\ N \\ -Q_y \\ -Q_z \\ -M_{кр} \\ -M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,93 \\ 7,87 \\ 2,26 \\ 0,58 \\ -7,01 \\ 18,14 \\ -2,93 \\ -7,87 \\ -2,26 \\ -0,58 \\ 0,23 \\ 5,46 \end{Bmatrix}, \quad \bar{S}_{2-3} = \begin{Bmatrix} -N \\ Q_y \\ Q_z \\ M_{кр} \\ M_y \\ -M_z \\ N \\ -Q_y \\ -Q_z \\ -M_{кр} \\ -M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7,86 \\ -2,93 \\ 2,26 \\ -0,23 \\ -0,58 \\ -5,46 \\ -7,86 \\ 2,93 \\ -2,26 \\ 0,23 \\ -3,94 \\ -0,40 \end{Bmatrix}, \quad \bar{S}_{3-4} = \begin{Bmatrix} -N \\ Q_y \\ Q_z \\ M_{кр} \\ M_y \\ -M_z \\ N \\ -Q_y \\ -Q_z \\ -M_{кр} \\ -M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3,57 \\ 2,13 \\ -0,99 \\ 2,04 \\ 0,23 \\ 3,40 \\ 3,57 \\ -2,13 \\ 0,99 \\ -2,04 \\ 4,74 \\ 7,27 \end{Bmatrix}.$$

По отриманих значеннях внутрішніх зусиль будуються епюри (рис. 14.30).

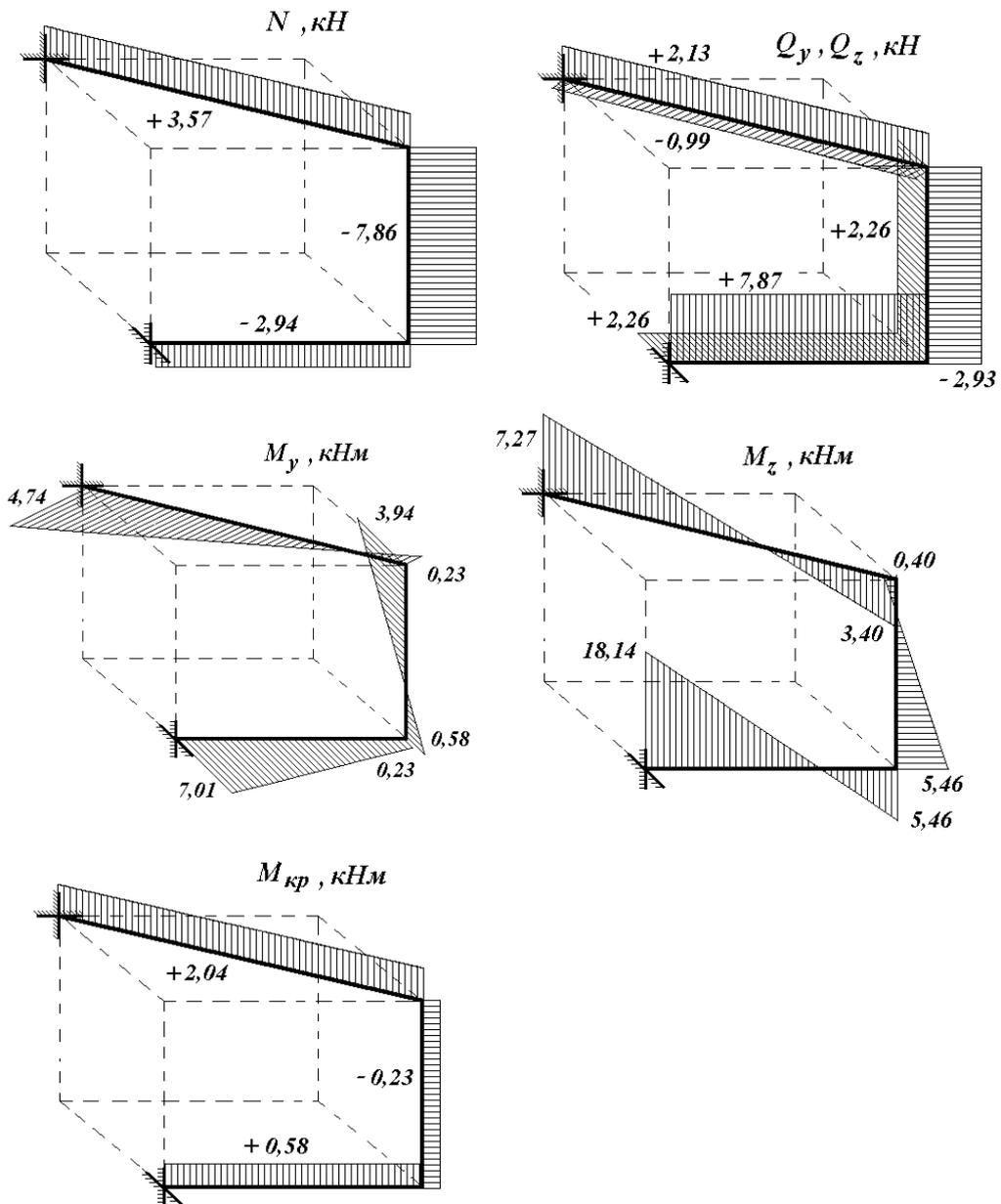


Рис. 14.30

14.4. Розрахунок шарнірно-стержневої системи методом скінченних елементів

Дано: плоска шарнірно-стержнева система (рис.14.31,а).

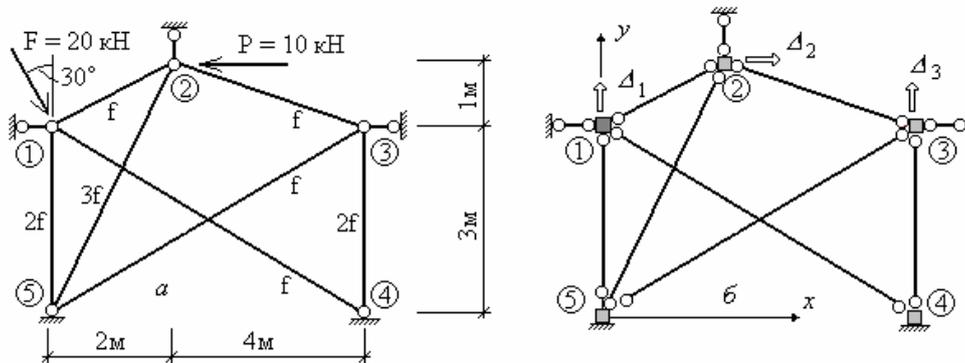


Рис.14.31

Необхідно: визначити зусилля в стержнях системи методом скінченних елементів та обчислити зусилля у в'язях.

Розв'язування:

Кінематичний аналіз системи.

$$\Gamma = 3D + 2B - 3П - 2Ш - C - 3 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 10 - 3 = 9 - 13 = -4$$

Отже, система чотири рази статично невизначувана.

Геометричні характеристики скінченних елементів

Геометричні характеристики скінченних елементів обчислюються в табл.14.3.

Таблиця 14.3

СЕ	X_{II} (м)	Y_{II} (м)	X_K (м)	Y_K (м)	ΔX (м)	ΔY (м)	L (м)	$\cos \beta$	$\sin \beta$	f
1-2	0	3	2	4	2	1	2,236	0,8945	0,4472	f_0
1-4	0	3	6	0	6	-3	6,708	0,8945	-0,4472	f_0
1-5	0	3	0	0	0	-3	3,0	0	-1,0	$2f_0$
2-3	2	4	6	3	4	-1	4,123	0,9702	-0,2425	f_0
2-5	2	4	0	0	-2	-4	4,472	-0,4472	-0,8945	$3f_0$
3-4	6	3	6	0	0	-3	3,0	0	-1,0	$2f_0$
3-5	6	3	0	0	-6	-3	6,708	-0,8945	-0,4472	f_0

де: $L = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2}$; $\Delta X = x_k - x_n$; $\Delta Y = y_k - y_n$; $\sin \beta = \frac{\Delta Y}{L}$; $\cos \beta = \frac{\Delta X}{L}$.

Перехід до скінченно-елементної моделі

Скінченно-елементна модель заданої шарнірно-стержневої системи представлена на рис.14.31,б. Система представлена як сукупність вузлів і скінченних елементів. Початок глобальної системи координат береться в лівому нижньому вузлі. Кожен стержень розглядається як окремий скінчений елемент, який примикає до вузлів за допомогою шарнірів. Отже, всі стержні системи являють собою елементи одного типу. За вузли взяті точки, в яких елементи поєднуються між собою. Всі вузли відносяться до шарнірних, тому в кожному з них можлива наявність двох поступальних переміщень. Деякі переміщення унеможливаються існуючими в'язями. Можливими залишаються такі переміщення: Δ_1 – вертикальне переміщення вузла 1; Δ_2 – горизонтальне переміщення вузла 3; Δ_3 – вертикальне переміщення вузла 2. Ці переміщення становлять основні невідомі задачі, а їх кількість характеризує кількість ступенів вільності СЕМ. Отже, скінченно-елементна модель має три ступеня вільності.

Розв'язувальне рівняння МСЕ

$$K\bar{\Delta} - \bar{F} = \bar{0},$$

де невідомі

$$\bar{\Delta} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix}.$$

В розгорнутій формі система розв'язувальних рівнянь має вигляд

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Вектор вузлових навантажень.

Порівнюючи схеми, зображені на рис.14.32, а, б, маємо

$$\bar{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -17,32 \\ -10 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

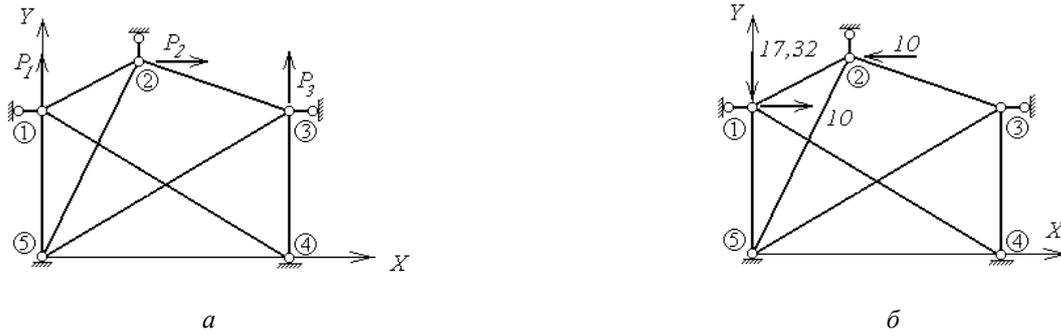


Рис. 14.32

Матриця жорсткості скінченно-елементної моделі (СЕМ)

Загальний вигляд матриці жорсткості стержневого СЕ з двома шарнірами:

$$k_e = \begin{bmatrix} fc^2 & fsc & -fc^2 & -fsc \\ fsc & fs^2 & -fsc & -fs^2 \\ -fc^2 & -fsc & fc^2 & fsc \\ -fsc & -fs^2 & fsc & fs^2 \end{bmatrix}_e$$

Визначення елементів першого стовпця матриці жорсткості СЕМ (рис.14.33):

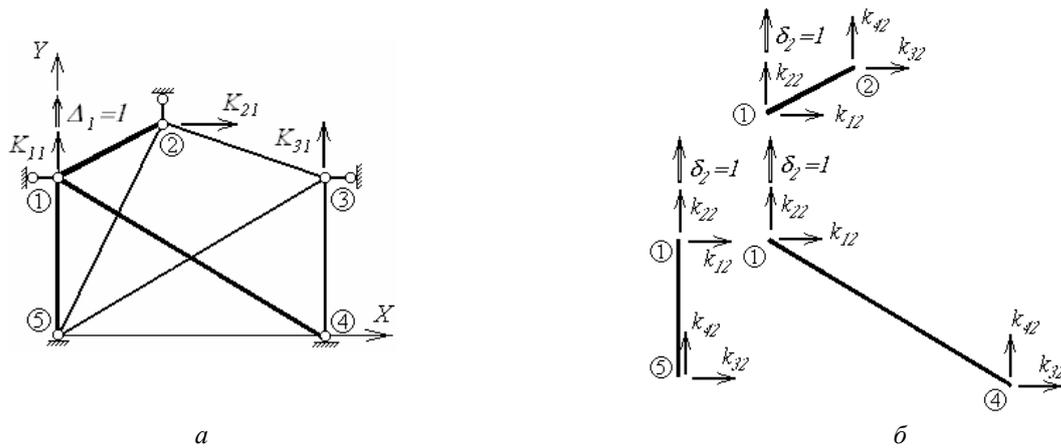


Рис.14.33

$$K_{1,1} = k_{22}^{1-2} + k_{22}^{1-4} + k_{22}^{1-5} = (fs^2)^{1-2} + (fs^2)^{1-4} + (fs^2)^{1-5} =$$

$$= f_0 \cdot 0,4472^2 + f_0 \cdot 0,4472^2 + 2f_0 \cdot 1^2 = 2,4 f_0$$

$$K_{2,1} = k_{32}^{1-2} = (-fsc)^{1-2} = -f_0 \cdot 0,4472 \cdot 0,8945 = -0,4 f$$

$$K_{3,1} = 0$$

Визначення елементів другого стовпця матриці жорсткості СЕМ (рис.14.34):

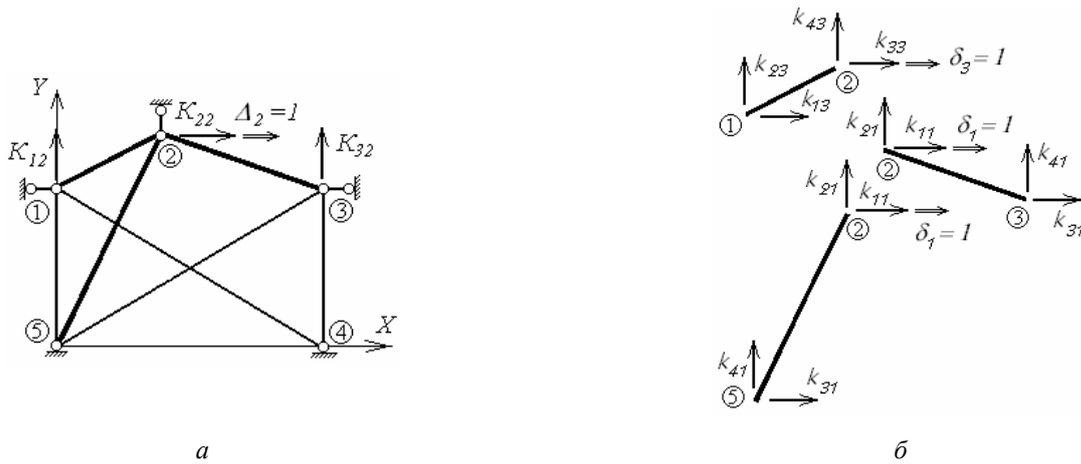


Рис.14.34

$$K_{12} = k_{23}^{1-2} = (-fsc)^{1-2} = -f_0 \cdot 0,4472 \cdot 0,8945 = -0,4f_0$$

$$K_{22} = k_{33}^{1-2} + k_{11}^{2-3} + k_{11}^{2-5} = (fc^2)^{1-2} + (fc^2)^{2-3} + (fc^2)^{2-5} =$$

$$= f_0 \cdot 0,8945^2 + f_0 \cdot 0,9702^2 + 3f_0 \cdot 0,4472^2 = 2,341f_0$$

$$K_{32} = k_{41}^{2-3} = (-fsc)^{2-3} = -f_0(-0,2425) \cdot 0,9702 = 0,2353f_0$$

Визначення елементів третього стовпця матриці жорсткості СЕМ (рис.14.35):

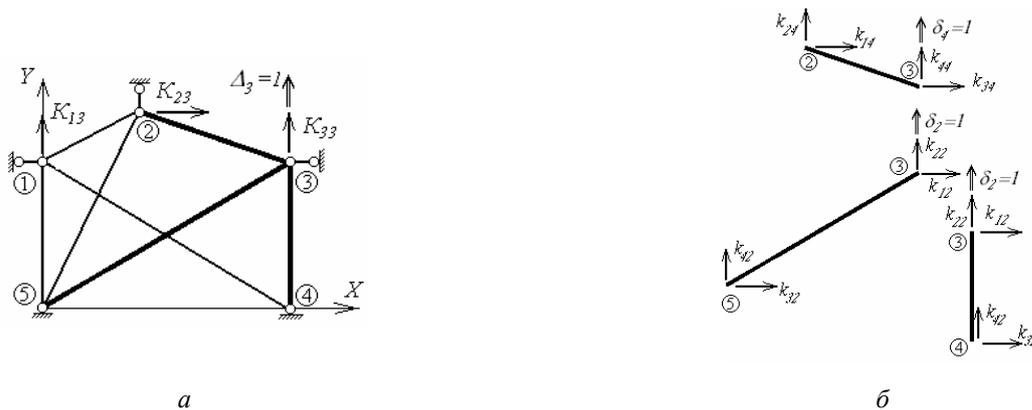


Рис.14.35

$$K_{1,3} = 0$$

$$K_{2,3} = k_{14}^{2-3} = (-fsc)^{2-3} = -f_0(0,2425) \cdot 0,9702 = 0,2353f_0$$

$$K_{3,3} = k_{44}^{2-3} + k_{22}^{3-4} + k_{22}^{3-5} = (fs^2)^{2-3} + (fs^2)^{3-4} + (fs^2)^{3-5} =$$

$$= f_0 \cdot 0,2425^2 + 2f_0 \cdot 1^2 + f_0 \cdot 0,4472^2 = 2,2588f_0$$

Система рівнянь

$$\begin{bmatrix} 2,4f_0 & -0,4f_0 & 0 \\ -0,4f_0 & 2,341f_0 & 0,2353f_0 \\ 0 & 0,2353f_0 & 2,2588f_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -17,32 \\ -10 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

або:

$$\begin{aligned} 2,4f_0 \cdot \Delta_1 - 0,4f_0 \cdot \Delta_2 + 0 \cdot \Delta_3 &= -17,32; \\ -0,4f_0 + 2,341f_0 \cdot \Delta_2 + 0,2353f_0 \cdot \Delta_3 &= -10; \\ 0 \cdot \Delta_1 + 0,2353f_0 \cdot \Delta_2 + 2,2588f_0 \cdot \Delta_3 &= 0, \end{aligned}$$

має розв'язок

$$\begin{aligned} f_0 \Delta_1 &= -8,1713; \\ f_0 \Delta_2 &= -5,7279; \\ f_0 \Delta_3 &= 0,5967 \end{aligned}$$

або

$$\bar{\Delta} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{f_0} \begin{Bmatrix} -8,1713 \\ -5,7279 \\ 0,5967 \end{Bmatrix}.$$

Перевірка підстановкою в сумарне рівняння

$$\begin{aligned} 2,0f_0 \cdot \Delta_1 + 2,1763f_0 \cdot \Delta_2 + 2,4941f_0 \cdot \Delta_3 &= -27,32; \\ 2,0f_0 \cdot \left(-\frac{8,171}{f_0}\right) + 2,1763f_0 \cdot \left(-\frac{5,728}{f_0}\right) + 2,4941f_0 \cdot \left(\frac{0,597}{f_0}\right) &= -27,32; \\ -27,32 &= -27,32. \end{aligned}$$

Визначення зусиль в стержнях ферми

$$\{S\}_{n-k} = \begin{Bmatrix} -N_n \\ N_k \end{Bmatrix}_{n-k} = \mathbf{h}_{n-k} \bar{\mathbf{V}}_{n-k} = \begin{bmatrix} fc & fs & -fc & -fs \\ -fc & -fs & fc & fs \end{bmatrix}_{n-k} \begin{Bmatrix} v_n^X \\ v_n^Y \\ v_k^X \\ v_k^Y \end{Bmatrix}_{n-k}$$

де: $n-k$ – номер (шифр) скінченного елемента по номерах початкового та кінцевого вузлів,

$v_n^X, v_n^Y, v_k^X, v_k^Y$ - переміщення початку та кінця стержня.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}_{1-2} &= \begin{Bmatrix} -N_1 \\ N_2 \\ 0 \end{Bmatrix}_{1-2} = f_0 \begin{bmatrix} 0,8945 & 0,4472 & -0,8945 & -0,4472 \\ -0,8945 & -0,4472 & 0,8945 & 0,4472 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{Bmatrix} -8,1713 \\ -5,7279 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{f_0} = \begin{Bmatrix} 1,4694 \\ -1,4694 \end{Bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{1-5} = \begin{Bmatrix} -N_1 \\ N_5 \end{Bmatrix}_{1-5} = f_0 \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -8,1713 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{1}{f_0} = \begin{Bmatrix} 16,34 \\ -16,34 \end{Bmatrix} \right\};$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{2-3} = \begin{Bmatrix} -N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix}_{2-3} = f_0 \begin{bmatrix} 0,9702 & -0,2425 & -0,9702 & 0,2425 \\ -0,9702 & 0,2425 & 0,9702 & -0,2425 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -5,7279 \\ 0 \\ 0 \\ 0,5967 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{1}{f_0} = \begin{Bmatrix} -5,413 \\ 5,413 \end{Bmatrix} \right\};$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{2-5} = \begin{Bmatrix} -N_2 \\ N_5 \end{Bmatrix}_{2-5} = f_0 \begin{bmatrix} -1,3416 & -2,6835 & 1,3416 & 2,6835 \\ 1,3416 & 2,6835 & -1,3416 & -2,6835 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -5,7279 \\ 0 \\ 0 \\ 0,5967 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{1}{f_0} = \begin{Bmatrix} 7,686 \\ -7,686 \end{Bmatrix} \right\};$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{3-4} = \begin{Bmatrix} -N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix}_{3-4} = f_0 \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,5967 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{1}{f_0} = \begin{Bmatrix} -1,191 \\ 1,191 \end{Bmatrix} \right\};$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{3-5} = \begin{Bmatrix} -N_3 \\ N_5 \end{Bmatrix}_{3-5} = f_0 \begin{bmatrix} -0,8945 & -0,4472 & 0,8945 & 0,4472 \\ 0,8945 & 0,4472 & -0,8945 & -0,4472 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,59670 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{1}{f_0} = \begin{Bmatrix} -0,2668 \\ 0,2668 \end{Bmatrix} \right\};$$

$$\bar{S}_{1-4} = \begin{Bmatrix} -N_1 \\ N_4 \end{Bmatrix}_{1-4} = f_0 \begin{bmatrix} 0,8945 & -0,4472 & -0,8945 & 0,4472 \\ -0,8945 & 0,4472 & 0,8945 & -0,4472 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} 0 \\ -8,1713 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{f_0} = \begin{Bmatrix} 3,654 \\ -3,654 \end{Bmatrix}.$$

Кінематична перевірка зусиль в стержнях

Основна система методу сил для розв'язування статично невизначуваної системи показана на рис.14.36

Тригонометричні функції кутів нахилу стержнів розрахункової схеми

$$\cos a = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 3^2}} = 0,8944$$

$$\sin a = \frac{3}{\sqrt{6^2 + 3^2}} = 0,4472 \quad \cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = 0,9701;$$

$$\cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 0,8944 \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = 0,2425.$$

$$\sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 0,4472$$

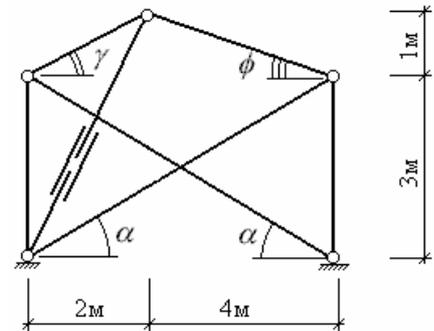
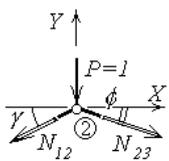


Рис.14.36

Визначення зусиль в одиничному стані за методом вирізання вузлів



$$\sum F_x = 0; \quad N_{2-3} \cos \varphi - N_{1-2} \cos \gamma = 0;$$

$$N_{2-3} = N_{1-2} \frac{\cos \gamma}{\cos \varphi} = N_{1-2} \frac{0,8944}{0,9701} = 0,9219 N_{1-2}$$

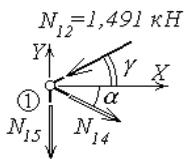
$$\sum F_y = 0; \quad -P - N_{2-3} \sin \varphi - N_{1-2} \sin \gamma = 0;$$

$$N_{2-3} = -\frac{P + N_{1-2} \sin \gamma}{\sin \varphi} = -N_{1-2} \frac{0,4472}{0,2425} - \frac{1}{0,2425} = \begin{cases} N_{2-3} - 0,9219 N_{1-2} = 0; \\ N_{2-3} + 1,8441 N_{1-2} = -4,12; \end{cases}$$

$$= -1,8441 N_{1-2} - 4,12;$$

$$N_{2-3} = -1,374;$$

$$N_{1-2} = -1,491.$$



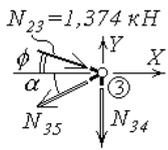
$$\sum F_x = 0; \quad N_{1-4} \cos \alpha - N_{1-2} \cos \gamma = 0;$$

$$N_{1-4} = N_{1-2} \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} = 1,491 \cdot \frac{0,8944}{0,9701} = 1,491;$$

$$\sum F_y = 0; \quad N_{1-5} + N_{1-2} \sin \gamma + N_{1-4} \sin \alpha = 0;$$

$$N_{1-5} = -N_{1-2} \sin \gamma - N_{1-4} \sin \alpha =$$

$$= -1,491 \cdot 0,4472 - 1,491 \cdot 0,4472 = -1,333;$$



$$\sum F_x = 0; \quad N_{2-3} \cos \varphi - N_{3-5} \cos \alpha = 0;$$

$$N_{3-5} = N_{2-3} \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha} = 1,374 \cdot \frac{0,9701}{0,8944} = 1,491;$$

$$\sum F_y = 0; \quad N_{3-4} + N_{2-3} \sin \varphi + N_{3-5} \sin \alpha = 0;$$

$$N_{3-4} = -N_{2-3} \sin \varphi - N_{3-5} \sin \alpha =$$

$$= -1,374 \cdot 0,2425 - 1,491 \cdot 0,4472 = -1,0;$$

Обчислення вертикального переміщення вузла 2

Обчислення переміщення виконуються в табл.14.4.

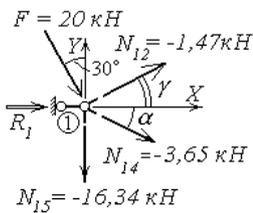
Таблиця 14.4

№ СЕ	$L(m)$	$N_p(kH)$	N_1	f/f_0	$N_p N_1 / f$
1-2	2,236	-1,470	-1,491	1	2,189
1-4	6,708	-3,654	1,491	1	-5,444
1-5	3,0	-16,34	-1,333	2	10,894
2-3	4,123	5,413	-1,374	1	-7,440
3-5	6,708	0,267	1,490	1	0,398
3-4	3,0	1,190	-1,0	2	-0,550
2-5	4,472	-7,686	0	3	0
				$\Sigma+$	13,481
				$\Sigma-$	-13,434
				Σ	0,047

Відносна похибка

$$\varepsilon = \frac{0,047}{13,434} \cdot 100\% = 0,36\%.$$

Статична перевірка рівноваги вузлів та обчислення зусиль у в'язях



$$\sum F_x = 0; \quad R_1 + F \cdot \sin 30^\circ + N_{2-1} \cos \gamma + N_{1-4} \cos \alpha = 0;$$

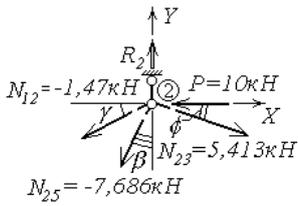
$$R_1 = F \cdot \sin 30^\circ - N_{2-1} \cos \gamma - N_{1-4} \cos \alpha = 20 \cdot 0,5 -$$

$$-(-1,47) \cdot 0,8944 - (-3,654) \cdot 0,8944 = -5,417 kH$$

$$\sum F_y = -F \cdot \cos 30^\circ + N_{2-1} \sin \gamma - N_{1-4} \sin \alpha - N_{1-5} =$$

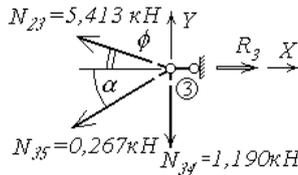
$$= -20 \cdot 0,8660 + (-1,47) \cdot 0,4472 - (-3,654) \cdot 0,4472 -$$

$$-(-16,34) = 17,974 - 17,977 = -0,003 \approx 0.$$



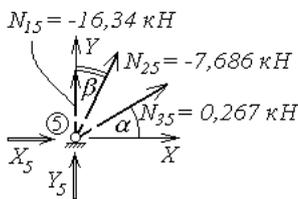
$$\begin{aligned}\sum F_x &= -P - N_{2-1} \cos \gamma - N_{2-5} \sin \beta + N_{2-3} \cos \varphi = \\ &= -10 - (-1,47) \cdot 0,8944 - (-7,686) \cdot 0,4472 + 5,413 \cdot 0,9701 = \\ &= 10,003 - 10 = 0,003 \approx 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0; R_2 - N_{1-2} \cdot \sin \gamma - N_{2-5} \cos \beta - N_{2-3} \sin \varphi = 0; \\ R_2 &= N_{1-2} \cdot \sin \gamma + N_{2-5} \cos \beta + N_{2-3} \sin \varphi = \\ &= -1,47 \cdot 0,4472 + (-7,686) \cdot 0,8944 + 5,413 \cdot 0,2425 = \\ &= -6,219 \text{ kH}\end{aligned}$$



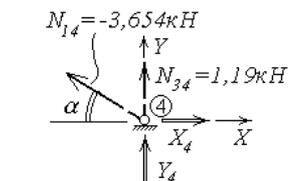
$$\begin{aligned}\sum F_y &= N_{2-3} \sin \varphi - N_{3-5} \sin \alpha - N_{3-4} = \\ &= 5,413 \cdot 0,2425 - 0,264 \cdot 0,4472 - 1,190 = \\ &= 1,313 - 1,309 = 0,004 \approx 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0; R_3 - N_{2-3} \cdot \cos \varphi - N_{3-5} \cos \alpha = 0; \\ R_3 &= N_{2-3} \cdot \cos \varphi + N_{3-5} \cos \alpha = \\ &= 5,413 \cdot 0,9701 + 0,264 \cdot 0,8944 = 5,490 \text{ kH}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0; X_5 + N_{2-5} \sin \beta + N_{3-5} \cos \alpha = 0; \\ X_5 &= -N_{2-5} \sin \beta - N_{3-5} \cos \alpha = \\ &= -(-7,686) \cdot 0,4472 - 0,264 \cdot 0,8944 = 3,198 \text{ kH}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0; Y_5 + N_{1-5} + N_{2-5} \cos \beta + N_{3-5} \sin \alpha = 0; \\ Y_5 &= -N_{1-5} - N_{2-5} \cos \beta - N_{3-5} \sin \alpha = -(-16,34) - \\ &= -(-7,686) \cdot 0,8944 - 0,267 \cdot 0,4472 = 23,095 \text{ kH}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0; X_4 - N_{1-4} \cos \alpha = 0; \\ X_4 &= N_{1-4} \cos \alpha = -3,654 \cdot 0,8944 = -3,268 \text{ kH}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0; Y_4 + N_{3-4} + N_{1-4} \cdot \sin \alpha = 0; \\ Y_4 &= -N_{3-4} - N_{1-4} \sin \alpha = -1,19 - (-3,654) \cdot 0,4472 = \\ &= 0,444 \text{ kH}\end{aligned}$$

Перевірка рівноваги всієї конструкції (рис.14.37):

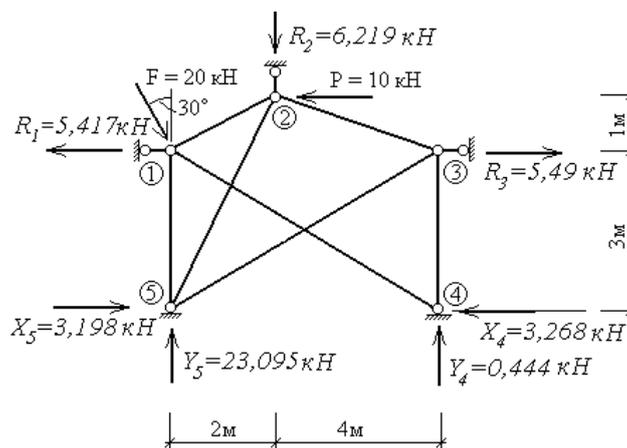


Рис.14.37

$$\begin{aligned}\sum F_x &= -R_1 + X_5 + F \sin 30^\circ - P + R_3 - X_4 = \\ &= -5,417 + 3,198 + 20 \cdot 0,5 - 10 + 5,49 - 3,268 = 18,688 - 18,685 = 0,003 \approx 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= Y_5 + Y_4 - F \cos 30^\circ - R_2 = 23,095 + 0,444 - 20 \cdot 0,8660 - 6,219 = \\ &= 23,539 - 23,539 = 0;\end{aligned}$$

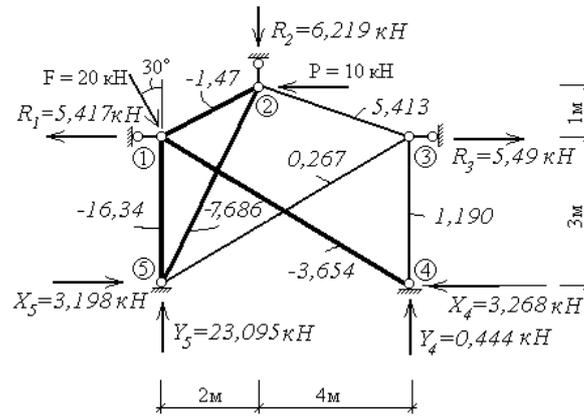


Рис. 14.38

$$\begin{aligned} \sum M_1 &= 1 \cdot P - 2R_2 + 3X_5 + 6Y_4 - 3X_4 = \\ &= 10 - 2 \cdot 6,219 + 3 \cdot 3,198 + 6 \cdot 0,444 - 3 \cdot 3,268 = 22,258 - 22,242 = 0,016 \approx 0; \end{aligned}$$

Умови рівноваги виконуються з відносною похибкою

$$\varepsilon = \frac{0,016}{22,242} \cdot 100\% = 0,07\% .$$

Відповідь:

Реакції у в'язях та зусилля в стержнях плоскої ферми приведені на рис.14.38. Стиснуті стержні зображені основною лінією, розтягнуті – тонкою.

14.5. Схеми для самостійного розв'язування

Визначити зусилля в стержнях та реактивні сили у в'язях розрахункових моделей, зображених на рис. 14.39, а-г.

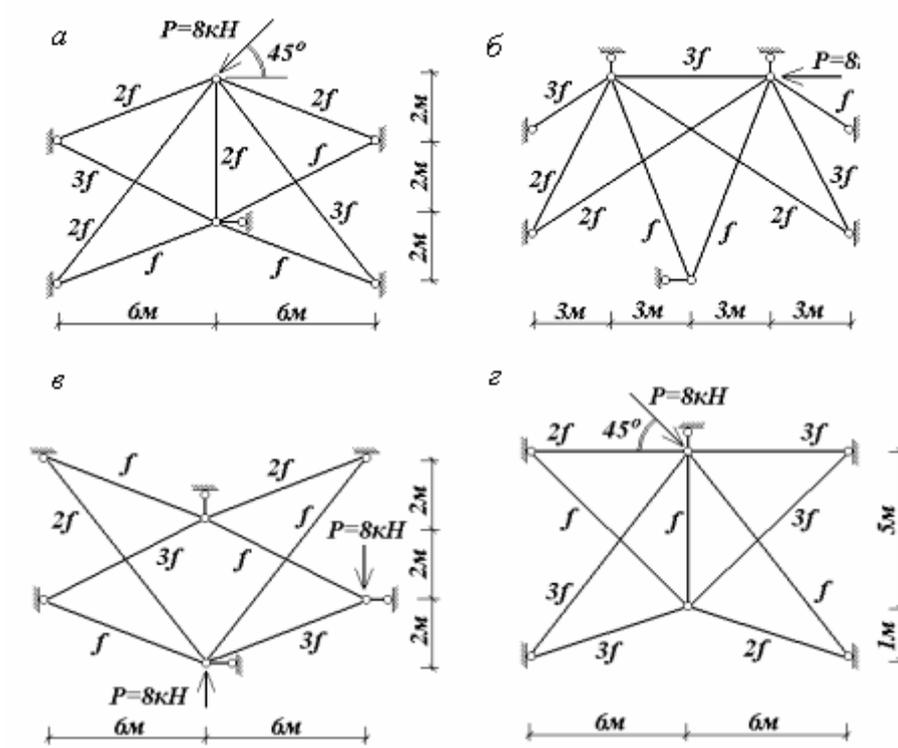


Рис.14.39

15. Розрахунок рам на стійкість

15.1. Короткі теоретичні відомості

Формою рівноваги називається деформований стан пружної системи, якому відповідають внутрішні сили, що разом із зовнішніми навантаженнями задовольняють умови рівноваги.

Стійкою називається така форма рівноваги, при якій у випадку невеликого примусового відхилення система повертається до попереднього стану, коли причини, що зумовили відхилення, щезають. Якщо це відхилення з часом зростає, то форма рівноваги називається **не стійкою**.

Перехід споруди зі стійкого до нестійкого стану рівноваги при кількісному зростанні зовнішнього навантаження називається **втратою стійкості**. Момент переходу зі стійкого до нестійкого стану рівноваги називається **критичним станом** системи, а відповідне цьому моменту навантаження – критичним.

При втраті стійкості першого роду (втрата стійкості за Ейлером) відбувається зміна стану рівноваги, яка зумовлена зростанням зовнішнього навантаження до деякої (критичної) величини.

Так, наприклад, у центрально-стисненому стержні при докритичному навантаженні стійким є прямолінійний стан рівноваги. При збільшенні навантаження до критичної величини ця форма рівноваги стає нестійкою і відбувається перехід до зігнутої форми рівноваги.

У першому стані виникають лише поздовжні деформації. В рамках такий стан є можливим тільки при дії вузлових сил, які не викликають деформацій згину. Форма рівноваги характеризується відсутністю кутів повороту вузлів і їх поступальних переміщень (якщо знехтувати поздовжніми деформаціями). Всі стержні в процесі деформації залишаються прямолінійними.

Другий стан (після втрати стійкості) характеризується появою деформацій згину в елементах рами, внаслідок чого в стержнях виникають згинальні моменти і поперечні сили, на величини яких суттєво впливають поздовжні сили. Іншими словами, до деформації стиснення додається згин.

Найпростішою задачею розрахунку стержневих елементів на стійкість є визначення критичної сили для центрально-стиснутого прямолінійного стержня, яка обчислюється за формулою Ейлера:

$$P^{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}. \quad (15.1)$$

У наведеній формулі EI – жорсткість стержня на згин; l – довжина стержня, μ – коефіцієнт приведення довжини, величина якого залежить від граничних умов стержня.

Формулу (15.1) можна записати в іншому вигляді:

$$P^{kp} = \frac{v^2 EI}{l^2}, \quad (15.2)$$

де $v = \frac{\pi}{\mu}$ – безрозмірний параметр (параметр стійкості), який враховує вплив поздовжньої сили на згин.

Значення параметрів μ і v при різних граничних умовах наведені на рис.15.1.

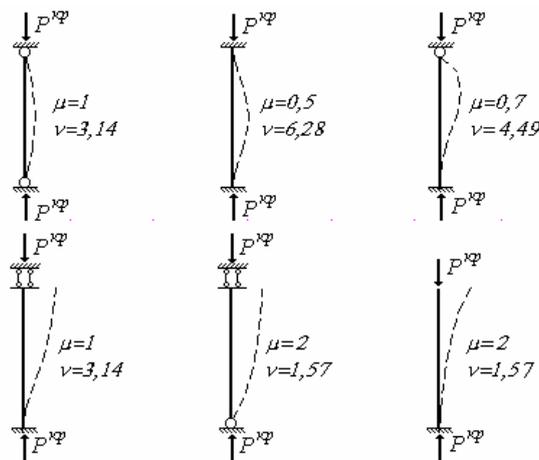


Рис.15.1

Мета розрахунку на стійкість полягає в обчисленні величини критичного навантаження.

При розрахунку рам на стійкість в основу покладено такі припущення:

- розглядаються тільки вузлові навантаження, які в початковому стані не зумовлюють поперечного згину;
- не враховуються поздовжні деформації і деформації зсуву стержнів;
- усі зовнішні сили повинні залежати від одного параметра, який називається параметром навантаження.

Враховуючи ці припущення, згинальні моменти M і поперечні сили Q до настання втрати стійкості дорівнюють нулю. Поздовжні сили в стержнях можуть бути обчислені з умов рівноваги вузлів. У момент втрати стійкості, коли рама зі стисненої перетворюється на стиснено-зігнуту, в стержнях рами на додаток до поздовжніх сил з'являються згинальні моменти і поперечні сили.

Розрахунок плоских рам на стійкість здебільшого виконується за методом переміщень. Основна система методу утворюється накладенням на задану схему додаткових з'єднань, які перешкоджають можливим кутовим і поступальним переміщенням вузлів при виникненні згину, тобто при втраті стійкості. Розв'язувальні рівняння методу переміщень – це умови рівності нулю реакцій у додаткових з'єднаннях. Якщо з'єднання є пружним ("плаваючим") затисненням,

необхідно вирізати вузол, який утримується від повороту цим затисненням. Реактивний момент у затисненні, який визначається як сума кінцевих моментів в усіх стержнях, що примикають до вузла, прирівнюється до нуля. Якщо ж розглядається додатковий стержень, то необхідно вирізати і розглянути рівновагу частини рами, яка утримується цим стержнем від поступального переміщення. Переріз при цьому повинен перетинати додатковий стержень і всі стержні рами, які перекошуються внаслідок поступального переміщення. До вирізаної частини прикладаються зовнішні навантаження і поперечні сили, Реакція в додатковому опорному стержні визначається з рівняння проєкцій і прирівнюється до нуля. Таким чином, кількість рівнянь відповідає кількості основних невідомих методу переміщень.

Основна система методу переміщень – це сукупність прямолінійних стержнів з різними граничними умовами, в яких реалізується стиснення чи стиснення зі згином. При складанні розв’язувальних рівнянь методу переміщень необхідно виразити згинальні моменти і поперечні сили на кінцях стержнів (кінцеві зусилля) через кутові і поступальні переміщення кінців. У практичних розрахунках для цього можна скористатися формулами методу переміщень для стиснено-зігнутих стержнів. Вплив стискуючої поздовжньої сили N на кінцеві зусилля залежить від безрозмірного параметра

$$v = \sqrt{\frac{NI}{i}}, \quad (15.3)$$

де $i = EI/l$ – погонна жорсткість стержня. При застосуванні формули (15.3) стискуюча поздовжня сила N вважається додатною.

Формули методу переміщень для стиснено-зігнутих стержнів за різних граничних умов наведено в табл.15.1 – 15.3.

Стержень із затисненнями з обох кінців (рис.15.2)

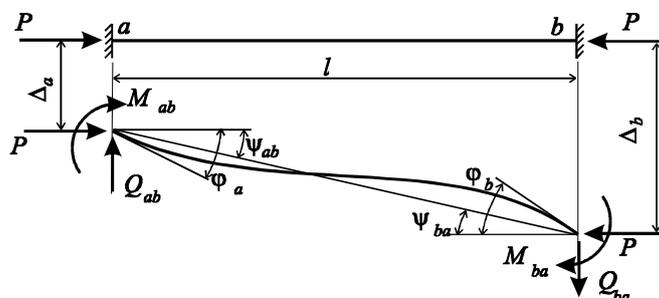


Рис.15.2

Таблиця 15.1

Умови	Кінцеві зусилля	№ № формул
$N \neq 0, Q = ?$	$M_{ab} = 2i_{ab} [\alpha_{ab} \varphi_a + \beta_{ab} \varphi_b - (\alpha + \beta)_{ab} \psi_{ab}];$ $Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{2i_{ab}}{l_{ab}} [(\alpha + \beta)_{ab} (\varphi_a + \varphi_b) - \gamma_{ab} \psi_{ab}].$	15.4 15.5
$N \neq 0, Q = 0$	$M_{ab} = i_{ab} \left(\left(\frac{\mathbf{v}}{\operatorname{tg} \mathbf{v}} \right)_{ab} \varphi_a - \left(\frac{\mathbf{v}}{\sin \mathbf{v}} \right)_{ab} \varphi_b \right)$	15.6
$N = 0$	$M_{ab} = 2i_{ab} (2\varphi_a + \varphi_b - 3\psi_{ab});$ $Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{6i_{ab}}{l_{ab}} (\varphi_a + \varphi_b - 2\psi_{ab}).$	15.7 15.8

Стержень із затисненням і шарніром на кінцях (рис.15.3)

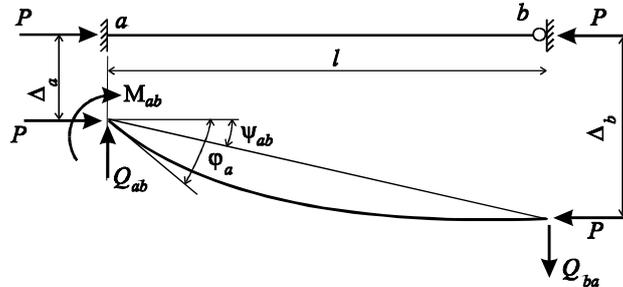


Рис.15.3

Таблиця 15.2

Умови	Кінцеві зусилля	№ № формул
$N \neq 0, Q = ?$	$M_{ab} = i_{ab} \bar{\alpha}_{ab} (\varphi_a - \psi_{ab});$ $Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{i_{ab}}{l_{ab}} (\bar{\alpha}_{ab} \varphi_a - \bar{\gamma}_{ab} \psi_{ab}).$	15.9 15.10
$N \neq 0, Q = 0$	$M_{ab} = -i_{ab} \mathbf{v}_{ab} \operatorname{tg} \mathbf{v}_{ab} \varphi_a$	15.11
$N = 0$	$M_{ab} = 3i_{ab} (\varphi_a - \psi_{ab});$ $Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{3i_{ab}}{l_{ab}} (\varphi_a - \psi_{ab}).$	15.12 15.13

Стержень з шарнірами з обох сторін (рис.15.4)

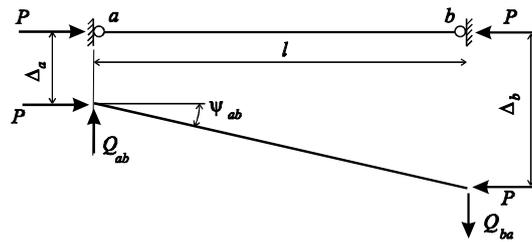


Рис.15.4

Таблиця 15.3

Умови	Кінцеві зусилля	№ № формул
$N \neq 0, Q = ?$	$Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{i_{ab}}{l_{ab}} v^2 \Psi_{ab}$	15.14
$N = 0$	$Q_{ab} = Q_{ba} = 0$	15.15

При дії вузлових навантажень, які не зумовлюють згину, система розв'язувальних рівнянь методу переміщень є однорідною:

$$\mathbf{R} \bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{0}} . \quad (15.16)$$

Як відомо з лінійної алгебри, така система має або тривіальний нульовий розв'язок

$$\bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{0}} , \quad (15.17)$$

або ненульовий розв'язок, якщо визначник матриці коефіцієнтів \mathbf{R} дорівнює нулю:

$$\text{Det}|\mathbf{R}| = 0 . \quad (15.18)$$

У задачах стійкості розв'язок (15.17) означає рівність нулю кутових і поступальних переміщень вузлів рами, що свідчить про відсутність втрати стійкості.

Умова (15.18) означає, що принаймні деякі з основних невідомих методу переміщень (кутові і поступальні переміщення вузлів рами) відмінні від нуля. Це свідчить про наявність згину елементів рами, тобто про втрату стійкості.

Таким чином, співвідношення (15.18) є умовою втрати стійкості і називається рівнянням стійкості рами.

Визначник матриці \mathbf{R} є складною трансцендентною функцією параметра v . Цей параметр є невідомою величиною в рівнянні стійкості (15.18).

Для пружної системи рівняння (15.18) має нескінченно велику кількість коренів, які розташовані на додатній частині числової осі. Найменший з коренів відповідає мінімальному

критичному навантаженню. Саме це мінімальне значення критичного навантаження становить практичний інтерес. Обчислення мінімального кореня звичайно виконують методом послідовних наближень. При цьому слід остерігатися пропуску мінімального значення v^{kp} . Для рам можна рекомендувати послідовно надавати параметру стійкості значення $v = 0; 0,5; 1; 1,5; 2 \dots$, поки визначник (15.18) не набуде від'ємного значення. Якщо величина v^{kp} визначена, із співвідношення (15.3) обчислюють величину критичного параметра навантаження:

$$P^{kp} = \frac{(v^{kp})^2 i}{l}. \quad (15.19)$$

15.2. Приклад розрахунку рами на стійкість

Схему рами зображено на рис.15.5,а. Геометричні розміри визначаються параметрами $l = 9\text{ м}$, $h = 4\text{ м}$. Необхідно виконати розрахунок рами на стійкість.

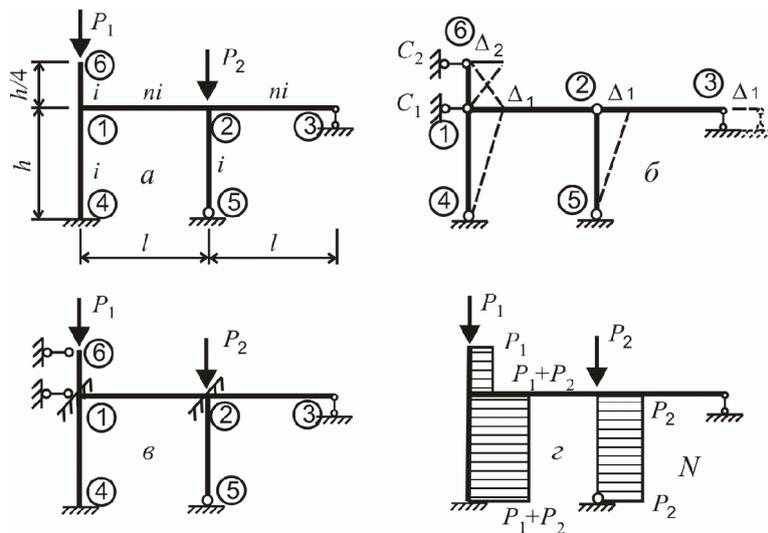


Рис.15.5

Для виконання розрахунку рами необхідно:

1. скласти рівняння стійкості рами;
2. визначити критичний параметр навантаження P^{kp} при $P_1 = P$, $P_2 = P$, $n = 2$;
3. дослідити вплив жорсткості ригеля на величини критичного навантаження при $P_1 = P_2 = P$ (побудувати графік $P^{kp} = f(n)$);
4. дослідити взаємний вплив критичних величин сил P_1^{kp} і P_2^{kp} (побудувати графік $P_1^{kp} = f(P_2^{kp})$).

15.2.1. Складання рівняння стійкості

Для складання рівняння стійкості скористаємося методом переміщень.

Визначення ступеня кінематичної невизначуваності

Рама, що розглядається, має два жорсткі проміжні вузли 1 і 2. Отже кількість невідомих кутів повороту вузлів $k_{\varphi} = 2$ (φ_1, φ_2).

Для визначення кількості незалежних поступальних переміщень вузлів утворимо шарнірну схему рами, встановивши шарніри в усі жорсткі вузли (рис.15.5,б). Одержана система двічі геометрично змінювана.

Дійсно, для перетворення геометрично змінюваної шарнірної схеми на геометрично незмінювану достатньо ввести дві додаткові опорні в'язі: стержень C_1 , який усуває можливе горизонтальне переміщення вузла 1 (і, отже, всього ригеля 1-2-3) і стержень C_2 , який закріплює від горизонтального переміщення вільний кінець 6 консолі. Таким чином, рама має два невідомі поступальні переміщення вузлів Δ_1 і Δ_2 , тобто $k_{\Delta} = 2$. Зобразивши на шарнірній схемі можливі поступальні переміщення вузлів (можливі поступальні переміщення необхідно спрямовувати в напрямку осей системи координат), одержуємо схему перекосів стержнів рами (рис.15.5,б). Запишемо кути перекосів усіх стержнів, вважаючи, що кути перекосів внаслідок мализни дорівнюють тангенсам відповідних кутів нахилу стержнів:

$$\begin{aligned}\psi_{1-4} = \psi_{2-5} &= \frac{\Delta_1}{h} = \frac{\Delta_1}{4}; & \psi_{1-2} = \psi_{2-3} &= 0; \\ \psi_{1-6} &= -\frac{\Delta_1}{h/4} + \frac{\Delta_2}{h/4} = -\frac{\Delta_1}{1} + \frac{\Delta_2}{1}.\end{aligned}$$

Повна кількість основних невідомих методу переміщень

$$k = k_{\varphi} + k_{\Delta} = 4$$

у подальшому може бути зменшена за рахунок виключення зі складу невідомих поступальних переміщень вузлів тих стержнів, для яких буде доведено, що поперечні сили в них дорівнюють нулю.

Основну систему методу переміщень одержимо введенням до заданої схеми рами додаткових з'єднань, які виключають основні невідомі переміщення. Так, для закріплення вузлів 1 і 2 від можливих поворотів необхідно накласти на ці вузли пружні ("плаваючі") затиснення, а для усунення можливих поступальних переміщень – додати опорні стержні у вузли 1 і 6 (рис.15.5,в).

Визначення параметрів стійкості

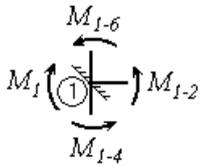
Для визначення параметрів стійкості побудуємо епюру поздовжніх сил у заданій рамі. Оскільки до моменту настання втрати стійкості в стержнях рами виникають тільки поздовжні сили (згинальні моменти і поперечні сили відсутні), епюра N (рис.15.5,г) може бути побудована в

шарнірній схемі рами, для забезпечення геометричної незмінюваності якої необхідно ввести два додаткові опорні стержні C_1 і C_2 . Тоді параметри стійкості визначатимуться співвідношеннями:

$$\begin{aligned} v_{1-4} &= \sqrt{\frac{N_{1-4}l_{1-4}}{i_{1-4}}} = \sqrt{\frac{P_1 h}{i}}; & v_{2-5} &= \sqrt{\frac{N_{2-5}l_{2-5}}{i_{2-5}}} = \sqrt{\frac{P_2 h}{i}}; \\ v_{1-6} &= \sqrt{\frac{N_{1-6}l_{1-6}}{i_{1-6}}} = \sqrt{\frac{P_1 h}{4i}}; & v_{1-2} &= \sqrt{\frac{N_{1-2}l_{1-2}}{i_{1-2}}} = 0; \\ v_{2-3} &= \sqrt{\frac{N_{2-3}l_{2-3}}{i_{2-3}}} = 0. \end{aligned} \quad (15.20)$$

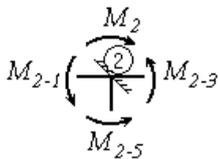
Складання системи рівнянь методу переміщень

Запишемо рівняння методу переміщень, які виражають рівність нулю реакцій в додаткових з'єднаннях стиснено-зігнутого стану основної системи, тобто після втрати стійкості.



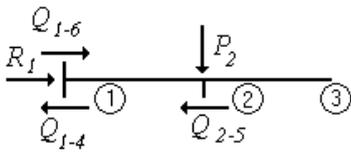
Плаваюче затиснення у вузлі 1:

$$\begin{aligned} \sum M_1 &= 0; \\ M_1 &= M_{1-6} + M_{1-2} + M_{1-4} = 0. \end{aligned} \quad (15.21)$$



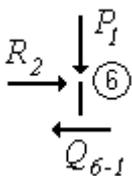
Плаваюче затиснення у вузлі

$$\begin{aligned} \sum M_2 &= 0; \\ M_2 &= M_{2-1} + M_{2-3} + M_{2-5} = 0. \end{aligned} \quad (15.22)$$



Додатковий опорний стержень C_1 у вузлі 1:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0; \\ R_1 &= Q_{1-4} + Q_{2-5} - Q_{1-6} = 0. \end{aligned} \quad (15.23)$$



Додатковий опорний стержень C_2 у вузлі 6:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0; \\ R_{21} &= Q_{6-1} = 0. \end{aligned} \quad (15.24)$$

З рівняння (15.24) випливає, що поперечна сила в консолі $Q_{6-1} = Q_{1-6} = 0$. На цій підставі поступальне переміщення Δ_2 , яке зумовлює перекик ψ_{1-6} , що йому запобігає стержень C_2 , з числа невідомих можна вилучити. Втім це в жодному разі не означає, що переміщення $\Delta_2 = 0$. Отже, кількість основних невідомих фактично скорочується до трьох: $n = 3$ ($\varphi_1, \varphi_2, \Delta_1$). Кінцеві зусилля, що входять до рівнянь (15.21) – (15.23), необхідно виразити через основні невідомі задачі за допомогою формул методу переміщень для стиснено-зігнутих стержнів.

Пружне затиснення у вузлі 1 (див. рівняння (15.21))

Стержень 1-4 має на кінцях затиснення, поздовжня сила $N_{1-4} \neq 0$, поперечна сила невідома, і тому вважається, що $Q_{1-4} \neq 0$. Отже, на підставі формули (15.4) маємо:

$$\begin{aligned} M_{1-4} &= 2i_{1-4} [\alpha_{1-4}\varphi_1 + \beta_{1-4}\varphi_4 - (\alpha + \beta)_{1-4}\psi_{1-4}] = \\ &= 2i \left[\alpha_{1-4}\varphi_1 - (\alpha + \beta)_{1-4} \frac{\Delta_1}{4} \right] = 2i\alpha_{1-4}\varphi_1 - i \frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} \Delta_1. \end{aligned}$$

Стержень 1-2 також має на обох кінцях затиснення, але поздовжня сила в стержні $N_{1-2} = 0$. Відносно поперечної сили нічого сказати не можна, тому вважаємо, що $Q_{1-2} \neq 0$. На підставі (15.6) одержимо:

$$M_{1-2} = 2i_{1-2} (2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\psi_{1-2}) = 2ni (2\varphi_1 + \varphi_2 - 0) = 4ni + 2ni\varphi_2.$$

Стержень 1-6 має плаваюче затиснення на кінці 1 і шарнір на кінці 6. Поздовжня сила $N_{1-6} \neq 0$, а поперечна сила $Q_{1-6} = 0$ (див. співвідношення (15.24)). Згідно з формулою (15.11):

$$M_{1-6} = -i_{1-6} (\mathbf{vtg}\mathbf{v})_{1-6} \varphi_1 = -i (\mathbf{vtg}\mathbf{v})_{1-6} \varphi_1.$$

Підставивши одержані величини в рівняння (15.21), дістанемо:

$$\left[4n + 2\alpha_{1-4} - (\mathbf{vtg}\mathbf{v})_{1-6} \right] \varphi_1 + 2n\varphi_2 - \frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} \Delta_1 = 0. \quad (15.25)$$

Пружне затиснення у вузлі 2 (див. рівняння (15.22))

Стержень 2-3 має затиснення у вузлі 2 і шарнір у вузлі 3. Поздовжня сила в стержні $N_{2-3} = 0$, поперечна сила невідома, і тому вважаємо, що $Q_{2-3} \neq 0$. Відповідно до формули (15.12)

$$M_{2-3} = 3i_{2-3} (\varphi_2 - \psi_{2-3}) = 3ni (\varphi_2 - 0) = 3ni\varphi_2.$$

Стержень 2-5 має затиснення у вузлі 2 і шарнір у вузлі 5. Поздовжня сила $N_{2-5} \neq 0$. Поперечна

сила невідома, і тому вважаємо, що $Q_{2-5} \neq 0$. За формулою (15.9) маємо

$$M_{2-5} = i_{2-5} \bar{\alpha}_{2-5} (\varphi_2 - \psi_{2-5}) = i \bar{\alpha}_{2-5} \left(\varphi_2 - \frac{\Delta_1}{4} \right) = i \bar{\alpha}_{2-5} \varphi_2 - \frac{i \bar{\alpha}_{2-5}}{4} \Delta_1.$$

Для стержня 2-1 на підставі (15.7) маємо:

$$M_{2-1} = 2i_{2-1} (2\varphi_2 + \varphi_1 - 3\psi_{2-1}) = 2ni (2\varphi_2 + \varphi_1 - 0) = 4ni\varphi_2 + 2ni\varphi_1.$$

Підставивши значення кінцевих моментів у рівняння (15.22), одержимо:

$$2n\varphi_1 + (7n + \bar{\alpha}_{2-5})\varphi_2 - \frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} \Delta_1 = 0. \quad (15.26)$$

Додатковий опорний стержень C_1 (див. рівняння (15.23))

$$\begin{aligned} Q_{1-4} &= -\frac{2i_{1-4}}{l_{1-4}} \left[(\alpha + \beta)_{1-4} (\varphi_1 + \varphi_4) - \gamma_{1-4} \psi_{1-4} \right] = \\ &= -\frac{2i}{4} \left[(\alpha + \beta)_{1-4} \varphi_1 - \gamma_{1-4} \frac{\Delta_1}{4} \right] = -i \frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} \varphi_1 + i \frac{\gamma_{1-4}}{8}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{2-5} &= -\frac{i_{2-5}}{l_{2-5}} (\bar{\alpha}_{2-5} \varphi_2 - \bar{\gamma}_{2-5} \psi_{2-5}) = -\frac{i}{4} \left(\bar{\alpha}_{2-5} \varphi_2 - \bar{\gamma}_{2-5} \frac{\Delta_1}{4} \right) = \\ &= -i \frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} \varphi_2 + i \frac{\bar{\gamma}_{2-5}}{16} \Delta_1; \end{aligned}$$

$$Q_{1-6} = 0.$$

Підставивши одержані співвідношення в рівняння (15.23), матимемо:

$$-\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} \varphi_1 - \frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} \varphi_2 + \frac{1}{8} \left(\gamma_{1-4} + \frac{\bar{\gamma}_{2-5}}{2} \right) \Delta_1 = 0. \quad (15.27)$$

Отже, маємо систему трьох алгебраїчних рівнянь (15.25) – (15.27). Рівняння стійкості одержимо, прирівнявши до нуля визначник матриці коефіцієнтів означеної системи рівнянь:

$$D = \begin{vmatrix} 4n + 2\alpha_{1-4} - (\text{vtgv})_{1-6} & 2n & -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} \\ 2n & 7n + \bar{\alpha}_{2-5} & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} \\ -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} & \frac{1}{8} \left(\gamma_{1-4} + \frac{\bar{\gamma}_{2-5}}{2} \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (15.28)$$

Рівняння (15.28) містить як невідомі параметр n і величини критичних параметрів стійкості $\nu_{1-4}, \nu_{2-5}, \nu_{1-6}$, які входять до коефіцієнтів $\alpha, \beta, \gamma \dots$ тощо. Отже, рівняння стійкості можна записати у вигляді:

$$D(n, \nu_{1-4}, \nu_{2-5}, \nu_{1-6}) = 0. \quad (15.29)$$

15.2.2. Визначення критичного параметра навантаження при $P_1 = P$, $n = 2$

Коли співвідношення між величинами зовнішніх сил відоме, можна встановити зв'язок між параметрами стійкості, які визначаються за співвідношеннями (15.20):

$$\begin{aligned} v_{1-4} &= \sqrt{\frac{P_1 h}{i}} = \sqrt{\frac{4P}{i}} = 2\sqrt{\frac{P}{i}}; \\ v_{2-5} &= \sqrt{\frac{P_2 h}{i}} = \sqrt{\frac{4P}{i}} = 2\sqrt{\frac{P}{i}}; \\ v_{1-6} &= \sqrt{\frac{P_1 h}{4i}} = \sqrt{\frac{P}{i}}. \end{aligned} \quad (15.30)$$

До того ж задано коефіцієнт $n = 2$. При цьому рівняння стійкості набуває вигляду:

$$D = \begin{vmatrix} 8 + 2\alpha_{1-4} - (vtgv)_{1-6} & 4 & -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} \\ 4 & 14 + \bar{\alpha}_{2-5} & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} \\ -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} & \frac{1}{8} \left(\gamma_{1-4} + \frac{\bar{\gamma}_{2-5}}{2} \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (15.31)$$

Відшукаємо перший (мінімальний) корінь рівняння (15.31), послідовно надаючи одному з параметрів, який вважатимемо за незалежний, довільних значень, наприклад: 0; 0,8; 1,6 тощо. При кожному значенні незалежного параметра v будемо обчислювати відповідні значення інших параметрів, знаходити величини функцій $\alpha, \beta, \gamma \dots$ за таблицями, які наведені в додатках 1, і обчислювати величину визначника. Процес наближення вважається закінченим, коли визначник дорівнюватиме нулю.

Для розв'язання задачі за незалежний візьмемо параметр v_{1-4} . Тоді з (15.30) маємо: $v_{2-5} = v_{1-4}$; $v_{1-6} = 0,5v_{1-4}$. Отже, визначник (15.29) стає функцією тільки одного параметра:

$$D(v_{1-4}) = 0.$$

Надамо незалежному параметру нульового значення: $v_{1-4} = 0$. Відповідно маємо: $v_{2-5} = v_{1-4} = 0$; $v_{1-6} = 0,5$; $v_{1-4} = 0$. За таблицями, що наведені в додатках 1, знаходимо:

- при $v_{1-4} = 0$ $\alpha_{1-4} = 2,000$;
 $(\alpha + \beta)_{1-4} = 3,000$;
 $\gamma_{1-4} = 6,000$;
- при $v_{2-5} = 0$ $\bar{\alpha}_{2-5} = 3,000$;
 $\bar{\gamma}_{2-5} = 3,000$;

• при $v_{1-6} = 0$ ($\text{tg}v$) $_{1-6} = 0,000$.

Підставивши одержані величини до (15.31) і виконавши обчислення, маємо:

$$D(0) = \begin{vmatrix} 8+2 \cdot 2-0 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 4 & 14+3 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8}\left(6+\frac{3}{2}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 4 & -1,5 \\ 4 & 17 & -0,75 \\ -1,5 & -0,75 & 0,9375 \end{vmatrix} = 140,25.$$

Визначник $D(0)$ не дорівнює нулю, тому надамо незалежному параметру v_{1-4} іншого значення, наприклад $v_{1-4} = 0,8$, і повторюємо обчислення. І так далі, поки визначник не набуде нульового або від'ємного значення. Результати обчислень занесені до табл.15.4.

Таблиця 15.4

v_{1-4}	α_{1-4}	$(\alpha + \beta)_{1-4}$	γ_{2-4}	v_{2-5}	α_{2-5}	γ_{2-5}	v_{1-6}	$(\text{tg}v)_{1-6}$	D
0	2,000	3,000	6,000	0	3,000	3,000	0	0	140,25
0,8	1,957	2,968	5,616	0,8	2,869	2,229	0,4	0,169	134,46
1,6	1,823	2,870	4,459	1,6	2,446	-0,114	0,8	0,824	68,39
2,4	1,583	2,699	2,519	2,4	1,591	-4,169	1,2	3,087	-18,53
2,2	1,654	2,749	3,078	2,2	1,861	-2,979	1,1	2,161	1,212
2,3	1,620	2,725	2,805	2,3	1,732	-3,559	1,15	2,570	-2,801

Графік залежності визначника від параметра v_{2-4} побудовано на рис.15.6,а згідно з таблицею 15.4.

Уточнимо значення незалежного критичного параметра v_{2-4} на інтервалі [2,2; 2,3] за допомогою лінійної інтерполяції (рис.15.6,б).

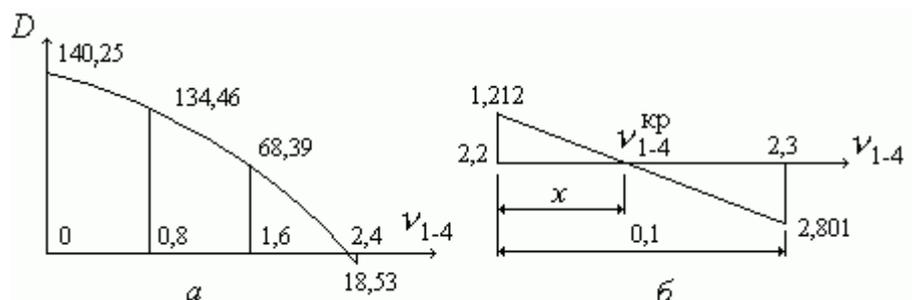


Рис.15.6

$$x = \frac{1,212 \cdot 0,1}{1,212 + 2,801} = 0,030 ;$$

$$v_{1-4}^{kp} = 2,2 + 0,030 = 2,230 .$$

Критичний параметр навантаження можна визначити з першого із співвідношень (15.30):

$$P^{kp} = \frac{v_{1-4}^2 i}{h} = \frac{2,230^2 i}{4} = 1,243i .$$

Критичні величини зовнішніх сил: $P_1^{kp} = P_2^{kp} = P^{kp} = 1,243i$.

15.2.3. Дослідження впливу жорсткості ригеля на величини критичного навантаження

Дослідження полягає в аналізі графіка залежності $P^{kp} = f(n)$, яка задається рівнянням стійкості (15.29).

Оскільки співвідношення між силами залишається заданим ($P_1 = P_2 = P$), то залежності (15.30) зберігаються без змін, і визначник (15.29) буде функцією параметрів n і v_{1-4} :

$$D(n, v_{1-4}) = 0 . \quad (15.32)$$

Для побудови графіка залежності (15.30) необхідно визначити границі, в яких можуть змінюватися змінні n і v_{1-4} . З фізичних міркувань очевидно, що параметр жорсткості n змінюється в межах від 0 до ∞ . Обчислимо відповідні границі зміни параметра стійкості v_{1-4} .

Визначення критичного навантаження при $n = 0$

При $n = 0$ жорсткість ригеля на згин дорівнює нулю, тобто ригель може сприймати лише поздовжні зусилля, що відповідає наявності шарнірів по кінцях ригелів 1-2 і 2-3. Отже, розрахункова схема рами може мати вигляд, поданий на рис.15.7.

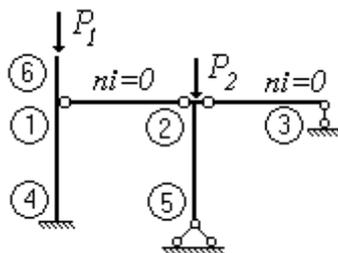


Рис.15.7

Рівняння стійкості можна дістати, поклавши в (15.28) параметр $n = 0$:

$$D = \begin{vmatrix} 2\alpha_{1-4} - (\mathbf{v} \operatorname{tg} \mathbf{v})_{1-6} & 0 & -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} \\ 0 & \bar{\alpha}_{2-5} & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} \\ -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} & \frac{1}{8} \left(\gamma_{1-4} + \frac{\bar{\gamma}_{2-5}}{2} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язуємо це рівняння шляхом підбору незалежного параметра стійкості v_{1-4} , при якому визначник системи рівнянь обертається на нуль. Результати підбору заносимо до табл.15.5.

Таблиця 15.5

v_{1-4}	α_{1-4}	$(\alpha + \beta)_{1-4}$	γ_{1-4}	v_{2-5}	$\bar{\alpha}_{2-5}$	$\bar{\gamma}_{2-5}$	v_{1-6}	$(\mathbf{v} \operatorname{tg} \mathbf{v})_{1-6}$	D
0	2,000	3,000	6,000	0	3,000	3,000	0	0	2,25
0,8	1,957	2,968	5,616	0,8	2,869	2,229	0,4	0,169	0,79
1,6	1,823	2,870	4,459	1,6	2,446	-0,114	0,8	0,824	-2,29
1,1	1,918	2,939	5,273	1,1	2,749	1,539	0,55	0,341	-0,33
1,0	1,932	2,950	5,399	1,0	2,794	1,794	0,5	0,273	0,06

Уточнюючи величину критичного параметра за допомогою лінійної інтерполяції, маємо:

$$v_{1-4}^{kp} = 1,0 + \frac{0,06}{0,06 + 0,33} = 1,016.$$

Критична величина параметра навантаження

$$P^{kp} = \frac{v_{1-4}^2 i}{h} = \frac{1,016^2 i}{4} = 0,258i,$$

а критичні величини зовнішніх сил:

$$P_1^{kp} = P_2^{kp} = P^{kp} = 0,258i.$$

Визначення критичного навантаження при $n \rightarrow \infty$

При $n \rightarrow \infty$ жорсткість ригелів на згин набагато перевищує жорсткості стояків на згин, і тому ригелі можна вважати абсолютно твердими тілами, що не згинаються (рис.15.8,а). Тому $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, і раму можна подати як таку, що складається з двох частин (обведених штриховими лініями), які деформуються незалежно одна від одної.

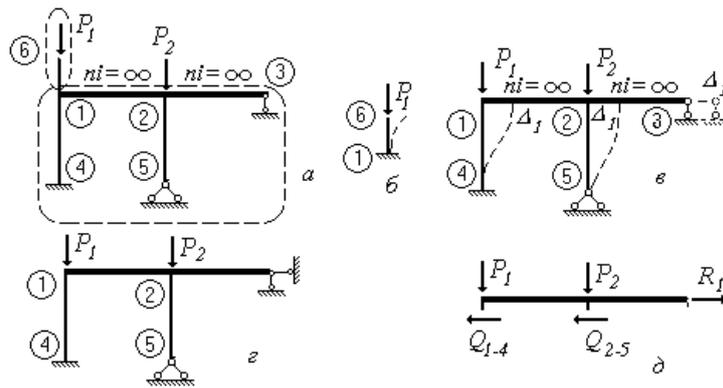


Рис.15.8

Перша частина становить собою консольний стержень (рис.15.8,б), який має затиснення на опорі 6. Втрата стійкості такого стержня – це задача Ейлера. Отже, для консолі $\nu_{1-6}^{sp} = 1,57$ (див. рис.15.1,д). Тоді відповідні параметри стійкості в інших стержнях становлять:

$$\nu_{1-4} = 2\nu_{1-6} = 3,14; \quad \nu_{2-5} = \nu_{1-4} = 3,14.$$

Друга частина – це два стояки 1-4 і 2-5, які пов'язані абсолютно жорсткою вставкою 1-2-3. Єдиним невідомим методу переміщень в такій системі є поступальне переміщення вставки Δ_1 (рис.2.8,в). Основна система, що одержана постановкою додаткового опорного стержня, подана на рис.2.8,з.

Складемо рівняння методу переміщень, згідно з яким реакція в додатковому стержні дорівнює нулю. З розгляду рівноваги ригеля (рис.2.8,д) можна записати:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_1 = Q_{1-4} + Q_{2-5} = 0.$$

За формулами методу переміщень для стиснено-зігнутих стержнів маємо:

$$Q_{1-4} = -\frac{2i_{1-4}}{l_{1-4}} [(\alpha + \beta)_{1-4} (\varphi_1 + \varphi_4) - \gamma_{1-4} \psi_{1-4}] = \frac{2i}{h^2} \gamma_{1-4} \Delta_1;$$

$$Q_{2-5} = -\frac{i_{2-5}}{l_{2-5}} (\bar{\alpha}_{2-5} \varphi_2 - \bar{\gamma}_{2-5} \psi_{2-5}) = \frac{i}{h^2} \bar{\gamma}_{2-5} \Delta_1.$$

Підставивши одержані співвідношення до рівняння рівноваги, маємо рівняння

$$\frac{1}{h^2} (2\gamma_{1-4} + \bar{\gamma}_{2-5}) \Delta_1 = 0,$$

звідки можна записати рівняння стійкості рами, що зображена на рис.2.8,в:

$$D = 2\gamma_{1-4} + \bar{\gamma}_{2-5} = 0.$$

Розв'язуємо це рівняння за методом підбору, прийнявши параметр ν_{2-4} за базовий і записуючи результати до табл.15.6.

Таблиця 15.6

v_{1-4}	α_{1-4}	$v_{2-5} = v_{1-4}$	$\bar{\gamma}_{2-5}$	D
0	6	0	3	15,00
0,8	5,616	0,8	2,229	14,46
1,6	4,459	1,6	-0,114	8,80
2,4	2,519	2,4	-4,169	0,87
2,5	2,220	2,5	-4,812	-0,37

Уточнимо одержаний параметр за допомогою лінійної інтерполяції:

$$v_{1-4}^{kp} = 2,4 + \frac{0,87 \cdot 0,1}{0,87 + 0,37} = 2,470.$$

З двох одержаних параметрів v_{1-4}^{kp} вибираємо найменший, отже $v_{1-4}^{kp} = 2,470$.

Критичний параметр навантаження

$$P^{kp} = \frac{v_{1-4}^2 i}{h} = \frac{2,470^2 i}{4} = 1,525i.$$

Таким чином границі зміни критичного параметра навантаження:

$$1,032i \leq P^{kp} < 1,525i.$$

Визначення критичного навантаження при проміжних значеннях параметра n

Проміжні значення критичного параметра навантаження можуть бути обчислені послідовним наданням параметру n декількох значень з інтервалу $(0; \infty)$ з подальшим розв'язанням у кожному випадку рівняння стійкості, як це було зроблено в попередніх випадках. Наприклад, якщо задатися величиною $n = 1$, то рівняння стійкості (15.28) набуває вигляду:

$$D = \begin{vmatrix} 4 + 2\alpha_{1-4} - (v \operatorname{tg} v)_{1-6} & 2 & -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} \\ 2 & 7 + \bar{\alpha}_{2-5} & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} \\ -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} & \frac{1}{8} \left(\gamma_{1-4} + \frac{\bar{\gamma}_{2-5}}{2} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язавши рівняння так само, як це було зроблено раніше, одержимо: $v_{1-4}^{kp} = 1,996$; $P^{kp} = 0,996i$. Результати обчислень при різних значеннях параметра n занесено до табл.15.7.

Таблиця 15.7

n	v_{1-4}^{kp}	P^{kp}
0	1,016	0,258i
1	1,996	0,996i
2	2,230	1,243i
4	2,320	1,346i
∞	2,470	1,525i

За результатами табл.15.7 побудовано графік (рис.15.9) залежності критичного параметра навантаження P^{kp} від параметра n жорсткості ригеля.

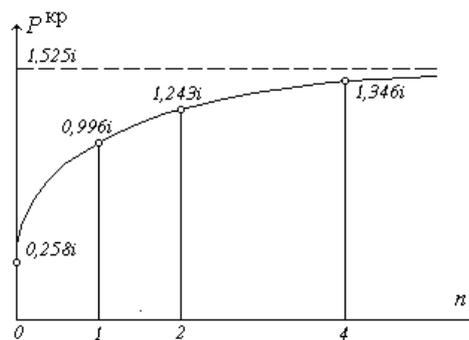


Рис.15.9

З графіка видно, що на величину критичного параметра навантаження P^{kp} найбільш суттєво впливає зміна параметра n від 0 до 4. На величину критичного навантаження подальше збільшення параметра практично не впливає.

При виконанні розрахунково-графічної роботи за допомогою комп'ютерної програми достатньо скласти рівняння стійкості при значеннях параметра жорсткості ригеля $n=0$ і $n=\infty$. Розв'язання цих рівнянь, а також рівнянь при проміжних значеннях параметра n , можна одержати з результатів роботи програми. Для цього необхідно в режимі діалогу вводити до комп'ютера конкретні значення параметра n при фіксованому співвідношенні між діючими зовнішніми силами. Замість нескінченності вводиться будь-яке достатньо велике число, наприклад 100 або 1000.

15.2.4. Дослідження взаємного впливу критичних сил P_1^{kp} і P_2^{kp}

Дослідження полягає в побудові і в проведенні аналізу графіка $P_2^{kp} = f(P_1^{kp})$ при фіксованому значенні параметра жорсткості ригеля $n=2$. За даною умовою рівняння стійкості (15.31) можна навести у формі:

$$D(v_{1-4}, v_{2-5}, v_{1-6}) = 0. \quad (15.33)$$

При цьому всі параметри стійкості залежать лише від двох зовнішніх сил P_1 і P_2 , тобто фактично можна записати рівняння (15.33) у формі:

$$D(P_1, P_2) = 0. \quad (15.34)$$

Для побудови графіка визначимо межі, в яких можуть змінюватися сили P_1 і P_2 . Оскільки ці сили не залежать одна від одної, то при $P_1 = 0$ величина P_2^{kp} набуває максимального значення і навпаки.

Нехай $P_1 = 0$. Тоді з (15.20) випливає: $v_{1-6} = v_{1-4} = 0$. Отже, за таблицями, що розташовано в додатках, $\alpha_{1-4} = 2$, $(\alpha + \beta)_{1-4}$, $\gamma_{1-4} = 6$, $(\mathbf{v} \operatorname{tg} \mathbf{v})_{1-6} = 0$. Підставивши ці величини до (15.31), маємо:

$$D = \begin{vmatrix} 12 & 4 & -1,5 \\ 4 & 14 + \bar{\alpha}_{2-5} & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} \\ -1,5 & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} & \frac{1}{8} \left(6 + \frac{\bar{\gamma}_{2-5}}{2} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язуємо одержане рівняння, підбираючи параметр v_{2-5} (табл.15.8).

Таблиця 15.8

v_{2-5}	$\bar{\alpha}_{2-5}$	$\bar{\gamma}_{2-5}$	D
0	3	3	140,25
0,8	2,869	2,229	126,71
1,6	2,446	-0,114	100,57
2,4	1,591	-4,169	51,53
3,2	-0,190	-10,430	-16,97
3,0	0,408	-8,592	2,10
3,1	0,127	-9,483	-7,26

Виконуючи інтерполяцію, знаходимо:

$$v_{2-5}^{kp} = 3,0 + \frac{2,10 \cdot 0,1}{2,10 + 7,26} = 3,022.$$

Зі співвідношень (15.20) одержуємо:

$$P_2^{kp} = \frac{(v_{2-5}^{kp})^2 i}{h} = \frac{3,022^2 \cdot i}{4} = 2,281i.$$

Аналогічно, при $P_2 = 0$ маємо $v_{2-5} = 0$, звідки за таблицями, наведеними в доданку, $\bar{\alpha}_{2-5} = 3, \bar{\gamma}_{2-5} = 3$. В цьому випадку рівняння (15.31) набуває вигляду:

$$D = \begin{vmatrix} 8 + 2\alpha_{1-4} - (\mathbf{v} \operatorname{tg} \mathbf{v})_{1-6} & 4 & -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} \\ 4 & 17 & -0,75 \\ -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} & -0,75 & \frac{1}{8}(\gamma_{1-4} + 1,5) \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язуємо одержане рівняння, підбираючи параметр v_{2-5} (Табл.15.9).

Таблиця 15.9

v_{1-4}	α_{1-4}	$(\alpha + \beta)_{1-4}$	γ_{1-4}	$v_{1-6} = v_{2-4}/2$	$(\mathbf{v} \operatorname{tg} \mathbf{v})_{1-6}$	D
0	2	3	6	0	0	140,25
0,8	1,957	2,968	5,616	0,4	0,169	128,22
1,6	1,823	2,870	4,459	0,8	0,824	92,64
2,4	1,583	2,699	2,519	1,2	3,087	33,55
2,7	1,459	2,615	1,585	1,35	6,400	-0,31
2,6	1,503	2,644	1,909	1,30	4,683	13,65

Виконавши лінійну інтерполяцію, знаходимо:

$$v_{1-4}^{kp} = 2,6 + \frac{13,65 \cdot 0,1}{13,65 + 0,31} = 2,698.$$

З (15.20) знаходимо:

$$P_1^{kp} = \frac{(v_{1-4}^{kp})^2 i}{h} = \frac{2,698^2 i}{4} = 1,820i.$$

Для побудови графіка залежності необхідно визначити положення декількох проміжних точок. Для цього будемо задаватися значеннями сили P_1^{kp} , оскільки від неї залежить більша кількість функцій. Величини сили вибираємо будь-які в межах $0 \leq P_1^{kp} \leq 1,820i$, Наприклад: $0, 1,0i, 1,243i, 1,562i, 1,820i$. Далі знаходимо з рівняння (15.31) відповідні значення P_2^{kp} .

Нехай, наприклад, $P_1^{kp} = 1,0i$. Тоді

$$v_{1-4} = \sqrt{\frac{P_1^{kp} h}{i}} = \sqrt{\frac{ih}{i}} = \sqrt{4} = 2; \quad v_{1-6} = 0,5v_{1-4} = 1.$$

За таблицями, що наведені в додатках, знаходимо:

$$\alpha_{1-4} = 1,718; \quad (\alpha + \beta)_{1-4} = 2,794; \quad \gamma_{1-4} = 3,588; \quad (v \operatorname{tg} v)_{1-6} = 1,557.$$

Підставивши одержані величини до (15.31), маємо:

$$D = \begin{vmatrix} 8 + 2 \cdot 1,718 - 1,597 & 4 & -\frac{2,794}{2} \\ 4 & 14 + \alpha_{2-5} & -\frac{\alpha_{2-5}}{4} \\ -\frac{2,794}{2} & -\frac{\alpha_{2-5}}{4} & \frac{1}{8} \left(3,588 + \frac{\gamma_{2-5}}{2} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язуємо одержане рівняння, підбираючи параметр v_{2-5} . У результаті маємо $v_{2-5}^{kp} = 2,434$ і відповідно

$$P_2^{kp} = \frac{(v_{2-5}^{kp})^2 i}{h} = \frac{2,434^2 i}{4} = 1,481i.$$

Аналогічні обчислення виконуємо для інших значень P_1^{kp} . Результати заносимо до табл.15.10.

Таблиця 15.10

P_1^{kp}	v_{1-4}	α_{1-4}	$(\alpha + \beta)_{1-4}$	γ_{1-4}	$v_{1-6} = v_{1-4}/2$	$(v \operatorname{tg} v)_{1-6}$	P_2^{kp}
0	0	2	3	6	0	0	2,281i
1,0i	2	1,718	2,794	3,588	1	1,587	1,481i
1,243i	2,230	1,644	2,742	2,997	1,115	2,274	1,243i
1,562i	2,5	1,544	2,872	2,229	1,25	3,865	0,710i
1,820i	2,698	1,459	2,615	2,615	1,349	6,014	0

У таблиці враховані деякі результати попередніх розрахунків. За її даними на рис.15.10 побудовано графік $P_2^{kp} = f(P_1^{kp})$.

На графіку можна виділити три зони:

1. зона стійкості (обмежена осями координат і кривою);
2. критична зона (власне крива);
3. зона втрати стійкості (вся площа за межами зони стійкості).

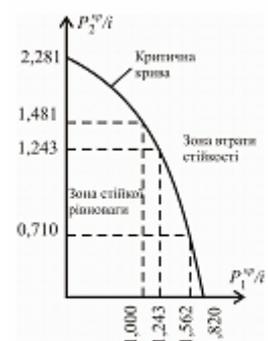


Рис.14.10

При розрахунку за допомогою комп'ютерної програми точки графіка можуть бути знайдені в режимі діалогу з комп'ютером. Для цього необхідно під час завдання вхідних даних задавати різні співвідношення зовнішніх сил при фіксованому значенні параметра жорсткості ригеля n .

Приклад введених до комп'ютера співвідношень і відповідні результати наведено в табл.15.11.

Таблиця 15.11

P_1/P	P_2/P	P^{kp}	P_1^{kp}/i	P_2^{kp}/i
0	1	2,281i	0	2,281
1	0	1,820i	1,820	0
1	1	1,243i	1,243	1,243

15.2.5. Особливості розрахунку рами на стійкість за допомогою навчальної комп'ютерної програми комплексу АСИСТЕНТ

Комп'ютерна програма з розрахунку рам на стійкість дає можливість автоматизовано виконати більшість розрахунків. Для використання програми необхідно вручну виконати перші два етапи: скласти рівняння стійкості і обчислити критичне навантаження.

Програма надає можливість в режимі діалогу ввести вхідні дані, які стосуються номера заданої схеми, геометричних розмірів, параметра жорсткості одного або декількох стержнів, а також задані співвідношення між зовнішніми силами. Для перевірки правильності розрахунків, зроблених вручну, програма запропонує ввести критичні величини зовнішніх сил, обчислених в п.15.2.2. Якщо ці результати помилкові, програма пропонує ще деякі питання щодо величини критичного параметра навантаження, порядку визначника системи рівнянь методу переміщень, а також щодо коефіцієнтів і значення визначника, обчислених при нульових параметрах стійкості. Наприкінці програма повідомить місце можливої помилки. Якщо ж результати розрахунків, виконаних вручну, збігаються з результатами роботи програми, то вона надає можливість продовжити роботу в автоматизованому режимі, коли можна змінювати будь-які параметри задачі, виконуючи дослідження п.п.15.2.3 і 15.2.4. Результати розрахунків можуть бути виведені на екран монітора або на принтер.

15.3. Розрахунок на стійкість симетричної рами

Схему симетричної рами під дією симетричного вузлового навантаження представлено на рис.15.11,а. Необхідно визначити критичну величину вузлових сил.

Визначення ступеня кінематичної невизначуваності і призначення основної системи

Задана рама має чотири проміжні жорсткі вузли. Тому

$$k_{\varphi} = 4 (\varphi_7, \varphi_8, \varphi_4, \varphi_6).$$

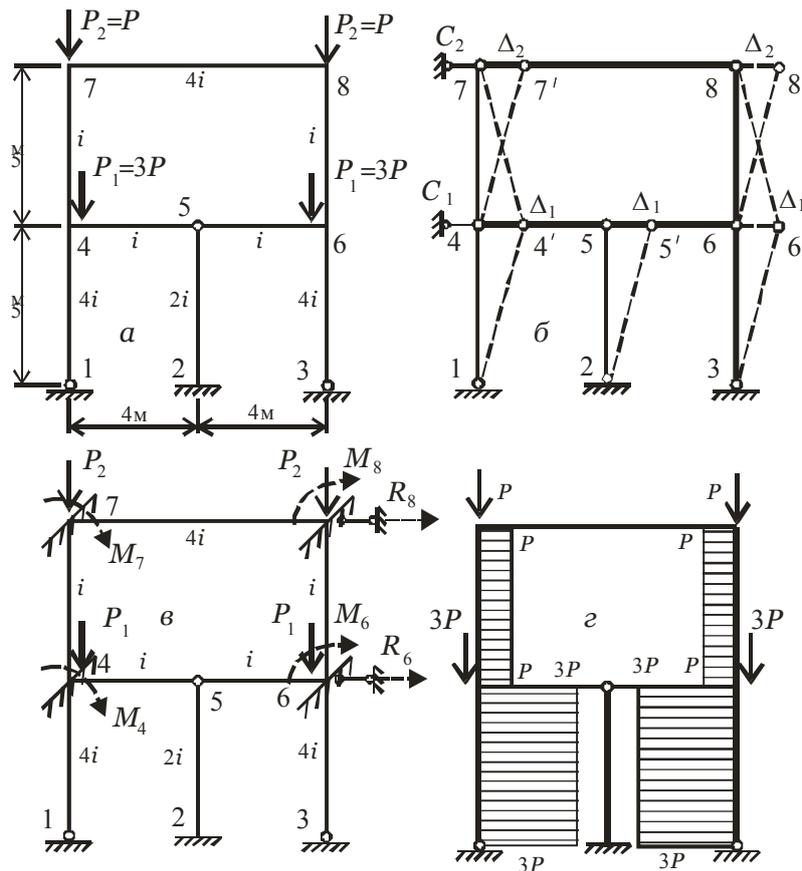


Рис.15.11

Для визначення кількості незалежних поступальних переміщень вузлів утворимо шарнірну схему рами (рис.15.11,б). Очевидно, що для перетворення шарнірної схеми на геометрично незмінювану систему необхідно ввести два додаткові опорні стержні C_1 та C_2 . Перший з них утримує від поступального горизонтального переміщення Δ_1 вузли 4, 5 і 6, а другий – від поступального горизонтального переміщення Δ_2 вузли 7 і 8. На цій підставі вважаємо, що

$$k_{\Delta} = 2 \quad (\Delta_1, \Delta_2).$$

Поступальні переміщення вузлів визначають кут перекосів стержнів:

$$\psi_{1-4} = \psi_{2-5} = \psi_{3-6} = \frac{\Delta_1}{5};$$

$$\psi_{4-7} = \psi_{6-8} = -\frac{\Delta_1}{5} + \frac{\Delta_2}{5};$$

$$\psi_{4-6} = \psi_{5-6} = \psi_{7-8} = 0.$$

Отже, ступінь кінематичної невизначуваності рами

$$k = k_{\varphi} + k_{\Delta} = 6.$$

Основну систему методу переміщень одержимо введенням "плаваючих" затиснень у вузли $\varphi_7, \varphi_8, \varphi_4, \varphi_6$ для унеможливлення їхніх кутів повороту, а для усунення можливих

поступальних переміщень – введенням опорних стержнів у вузли 4 і 7 (рис.11.5,в).

Епюра N нормальних сил в рамі до настання втрати стійкості подана на рис. 11.5,г.

Параметри стійкості в стержнях рами виражаються через поздовжні сили:

$$v_{4-7} = \sqrt{\frac{N_{4-7}l_{4-7}}{i_{4-7}}} = \sqrt{\frac{Ph}{i}}; \quad v_{6-8} = \sqrt{\frac{N_{6-8}l_{6-8}}{i_{46-8}}} = \sqrt{\frac{Ph}{i}} = v_{4-7};$$

$$v_{1-4} = \sqrt{\frac{N_{1-4}l_{1-4}}{i_{1-4}}} = \sqrt{\frac{4Ph}{4i}} = \sqrt{\frac{Ph}{i}} = v_{4-7}; \quad v_{3-6} = \sqrt{\frac{N_{3-6}l_{3-6}}{i_{13-6}}} = \sqrt{\frac{4Ph}{4i}} = \sqrt{\frac{Ph}{i}} = v_{4-7};$$

$$v_{7-8} = v_{4-5} = v_{5-6} = v_{2-5} = 0.$$

Симетрична рама під дією симетричного навантаження може деформуватись при втраті стійкості або за симетричною, або за кососиметричною формою. Реалізуватиметься та форма, якій відповідає менше значення критичного навантаження. Тому доцільно виконати розрахунок окремо на симетричну і окремо на кососиметричну деформацію.

15.3.1. Розрахунок на втрату стійкості за симетричною формою деформації

Очікуваний згин рами при втраті стійкості за симетричною формою деформації показано на рис.15.12.

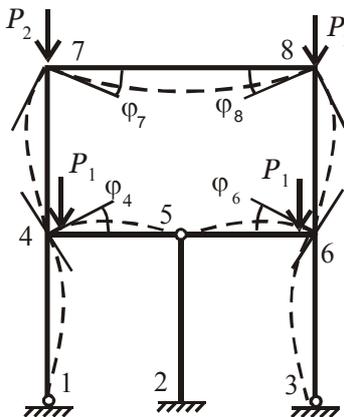


Рис.15.12

З умов симетрії можна зробити висновки щодо основних невідомих:

$$\begin{aligned} \Phi_8 &= -\Phi_7; \\ \Phi_6 &= -\Phi_4; \\ \Delta_1 &= \Delta_2 = 0. \end{aligned}$$

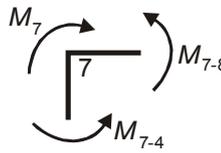
Таким чином, кількість основних невідомих скорочується до трьох.

При цьому кути перекосу всіх стержнів дорівнюють нулю:

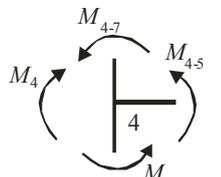
$$\Psi_{1-4} = \Psi_{4-7} = \Psi_{2-5} = \Psi_{6-8} = \Psi_{3-6} = \Psi_{7-8} = \Psi_{4-5} = \Psi_{5-6} = 0.$$

Складання рівнянь рівноваги

Розв'язувальні рівняння складасмо з умов рівноваги елементів, які утримуються від переміщень накладеними з'єднаннями. Формули для кінцевих зусиль вибираються з табл.15.1, 15.2 та 15.3 залежно від граничних умов.



$$\begin{aligned}
 M_7 &= M_{7-4} + M_{7-8} = 0. \\
 M_{7-4} &= 2i_{7-4}(\alpha_{7-4}\varphi_7 + \beta_{7-4}\varphi_4 - (\alpha + \beta)_{7-4}\psi_{7-4}) = \\
 &= 2i(\alpha_{7-4}\varphi_7 + \beta_{7-4}\varphi_4) = 2i\alpha_{7-4}\varphi_7 + 2i\beta_{7-4}\varphi_4; \\
 M_{7-8} &= 2i_{7-8}(2\varphi_7 + \varphi_8 - 2\psi_{7-8}) = 2 \cdot 4i(2\varphi_7 - \varphi_7) = 8i\varphi_7. \\
 \underline{M_7} &= \underline{(2\alpha_{7-4} + 8)i\varphi_7 + 2\beta_{7-4}i\varphi_4} = 0. \quad (15.35)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 M_4 &= M_{4-7} + M_{4-5} + M_{4-1} = 0. \\
 M_{4-7} &= 2i_{4-7}(\alpha_{4-7}\varphi_4 + \beta_{4-7}\varphi_7 - (\alpha + \beta)_{4-7}\psi_{4-7}) = \\
 &= 2i(\alpha_{4-7}\varphi_4 + \beta_{4-7}\varphi_7) = 2i\alpha_{4-7}\varphi_4 + 2i\beta_{4-7}\varphi_7; \\
 M_{4-5} &= 3i_{4-5}(\varphi_4 - \psi_{4-5}) = 3i\varphi_4; \\
 M_{4-1} &= i_{4-1}\bar{\alpha}_{4-1}(\varphi_4 - \psi_{4-1}) = 4i\bar{\alpha}_{4-1}\varphi_4. \\
 \underline{M_4} &= \underline{2i\beta_{4-7} + (2\alpha_{4-7} + 4\bar{\alpha}_{4-1} + 3)i\varphi_4} = 0. \quad (15.36)
 \end{aligned}$$

Складання рівняння стійкості

Умовою втрати стійкості є дорівнювання нулю визначника матриці коефіцієнтів при невідомих переміщеннях вузлів:

$$D = \begin{vmatrix} 2\alpha_{7-4} + 8 & 2\beta_{7-4} \\ 2\beta_{7-4} & 2\alpha_{4-7} + 4\bar{\alpha}_{4-1} + 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язання рівняння стійкості

Відшукаємо перший (мінімальний) корінь рівняння стійкості, послідовно надаючи одному з параметрів, який вважатимемо за незалежний (нехай це буде параметр ν_{7-4} , довільних значень, наприклад: 0; 1; 2 тощо. При кожному значенні незалежного параметра ν_{7-4} будемо обчислювати відповідні значення інших параметрів, знаходити величини функцій $\alpha, \beta, \bar{\alpha} \dots$ за таблицями, які наведені в додатках 1, і обчислювати величину визначника. Процес наближень вважається закінченим, коли визначник дорівнюватиме нулю.

Так, взявши $\nu_{7-4}=0$ маємо з таблиць

$$\alpha_{7-4} = 2; \quad \beta_{7-4} = 1.$$

Для $v_{4-1}=v_{7-4}=0$ маємо $\alpha_{1-4} = 3$.

Підставивши отримані значення до рівняння стійкості отримаємо:

$$D = \begin{vmatrix} 2 \cdot 2 + 8 \cdot 2 \cdot 1 & \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 19 \end{vmatrix} = 224.$$

Взявши $v_{7-4}=1$ маємо

$$\alpha_{7-4} = 1,932; \quad \beta_{7-4} = 1,017.$$

Для стержня 4-1 відповідне значення параметру $v_{4-1}=v_{7-4}=1$. Маємо з таблиць

$$\bar{\alpha}_{1-4} = 2,794.$$

Тоді

$$D = \begin{vmatrix} 2 \cdot 1,932 + 8 \cdot 2 \cdot 1,017 & \\ 2 \cdot 1,017 & 2 \cdot 1,932 + 4 \cdot 2,794 + 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11,864 & 2,034 \\ 2,034 & 18,040 \end{vmatrix} = 209,9.$$

Продовжуємо аналогічні обчислення надаючи параметру стійкості v_{7-4} наступних значень доти, поки визначник змінить знак. Результати заносимо до таблиці 15.12.

Таблиця 15.12

№	v_{7-4}	α_{7-4}	β_{7-4}	v_{1-4}	$\bar{\alpha}_{1-4}$	D
1	0	2	1	0	3	224
2	1	1,932	1,017	1	2,794	209,9
3	2	1,718	1,076	2	2,088	164,5
4	3	1,312	1,206	3	0,408	71,3
5	4	0,586	1,502	4	-6,518	-229,8
6	3,5	1,004	1,321	3,5	-1,468	-15,6
7	3,4	1,073	1,294	3,4	-0,974	5,98

Графік функції $D=D(v_{7-4})$ побудовано на рис.15.13,а.

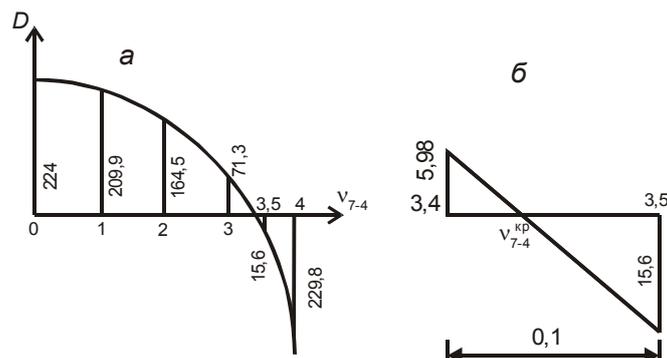


Рис.15.13

Як видно, визначник D змінює знак при значеннях параметру ν_{1-4} в проміжку між 3 і 3,5. Виконуючи на означеному проміжку лінійну інтерполяцію (рис.15.13,б) знаходимо

$$\nu_{4-7}^{kp} = 3,4 + \frac{0,1 \cdot 5,98}{5,98 + 15,6} = 3,428.$$

Критична величина параметру навантаження при симетричній формі втрати стійкості складає

$$P_{кр} = \frac{\nu_{4-7}^2 \cdot i}{h} = \frac{3,428^2 \cdot i}{5} = 2,350i.$$

15.3.2. Розрахунок на втрату стійкості за кососиметричною формою деформації

Очікуваний згин рами при втраті стійкості за кососиметричною формою деформації показано на рис.15.14.

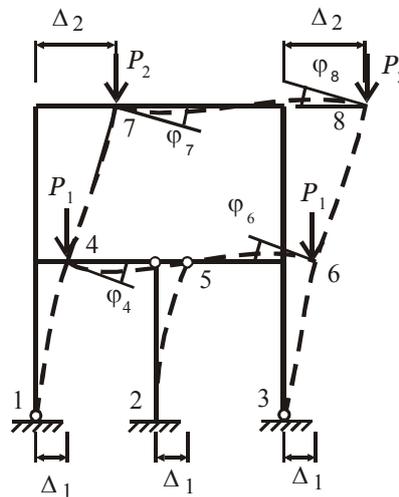


Рис.15.14

З умов симетрії можна зробити висновки щодо основних невідомих:

$$\varphi_8 = \varphi_7;$$

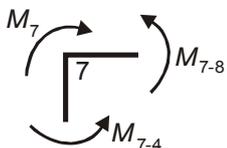
$$\varphi_6 = \varphi_4.$$

Таким чином, кількість основних невідомих скорочується до чотирьох:

$$\varphi_4, \varphi_7, \Delta_1, \Delta_2.$$

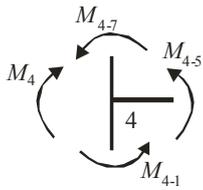
Складання рівнянь рівноваги

Розв'язувальні рівняння складаємо з умов рівноваги елементів, які утримуються від переміщень накладеними з'єднаннями.



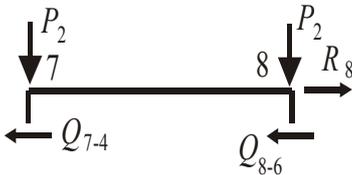
Так, з умов рівноваги вузла 7 маємо:

$$M_7 = M_{7-4} + M_{7-8} = 0. \quad (15.37)$$



З умов рівноваги вузла 4:

$$M_4 = M_{4-7} + M_{4-5} + M_{4-1} = 0. \quad (15.38)$$

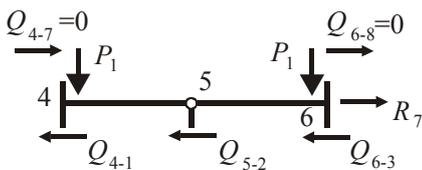


З умов рівноваги верхнього ригеля 7-8 маємо:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_8 - Q_{7-4} - Q_{8-6} = 0 \text{ або } R_8 = Q_{7-4} + Q_{8-6} = 0,$$

звідки випливає, що $Q_{7-4} = -Q_{8-6}$.

З іншого боку, внаслідок кососиметричного напружено-деформованого стану рами згинальні моменти кососиметричні, а поперечні сили – симетричні, тобто $Q_{7-4} = Q_{8-6}$. Обидві рівності можливі лише за умови, що поперечні сили в стояках дорівнюють нулю $Q_{7-4} = Q_{8-6} = 0$. Це означає, що поступальне переміщення Δ_2 з числа невідомих можна виключити, взявши для стояків 4-7 та 6-8 формули кінцевих моментів для випадку, коли поперечна сила дорівнює нулю.



Умова рівноваги нижнього ригеля 4-5-6 дає

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_7 - Q_{4-1} - Q_{5-2} - Q_{6-3} = 0.$$

З умов косої симетрії напружено-деформованого стану можна вважати, що $Q_{6-3} = Q_{4-1}$. З урахуванням отриманого співвідношення умова рівноваги ригеля набуває вигляду:

$$R_7 = 2Q_{4-1} + Q_{5-2} = 0. \quad (15.39)$$

Отже виражаємо кінцеві зусилля, що входять до рівнянь (15.37) – (15.39).

$$M_{7-4} = i_{7-4} \left[\left(\frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu} \right)_{7-4} \varphi_7 - \left(\frac{\nu}{\sin \nu} \right)_{7-4} \varphi_4 \right] = i \left(\frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu} \right)_{7-4} \varphi_7 - i \left(\frac{\nu}{\sin \nu} \right)_{7-4} \varphi_4;$$

$$M_{7-8} = 2i_{7-8} (2\varphi_t + \varphi_8 - 3\psi_{7-8}) = 2 \cdot 4i (2\varphi_t + \varphi_7) = 24\varphi_7;$$

$$M_{4-7} = i_{7-4} \left[\left(\frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu} \right)_{7-4} \varphi_4 - \left(\frac{\nu}{\sin \nu} \right)_{7-4} \varphi_7 \right] = i \left(\frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu} \right)_{7-4} \varphi_4 - i \left(\frac{\nu}{\sin \nu} \right)_{7-4} \varphi_7;$$

$$M_{4-5} = 3i_{4-5} (\varphi_4 - \psi_{4-5}) = 3i\varphi_4;$$

$$M_{4-1} = i_{4-1} \bar{\alpha}_{4-1} (\varphi_4 - \psi_{4-1}) = 4i \bar{\alpha}_{4-1} \left(\varphi_4 - \frac{\Delta_1}{5} \right) = 4i \bar{\alpha}_{4-1} \varphi_4 - 0,8i \bar{\alpha}_{4-1} \Delta_1;$$

$$Q_{4-1} = -\frac{i_{4-1}}{l_{4-1}}(\bar{\alpha}_{4-1}\varphi_4 - \bar{\gamma}_{4-1}\psi_{4-1}) = -\frac{4i}{5}\left(\bar{\alpha}_{4-1}\varphi_4 - \bar{\gamma}_{4-1}\frac{\Delta_1}{5}\right) = -0,8i\bar{\alpha}_{4-1}\varphi_4 + 0,16i\bar{\gamma}_{4-1}\Delta_1;$$

$$Q_{5-2} = -\frac{3i_{5-2}}{l_{5-2}}(\varphi_2 - \psi_{5-2}) = -\frac{3 \cdot 2i}{5}\left(0 - \frac{\Delta_1}{5}\right) = 0,24i\Delta_1.$$

Підставивши отримані кінцеві зусилля до системи рівнянь отримаємо систему рівнянь методу переміщень:

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{v}{\operatorname{tg} v}\right)_{7-4} + 24\right)\varphi_7 - \left(\frac{v}{\sin v}\right)_{7-4}\varphi_4 &= 0; \\ -\left(\frac{v}{\sin v}\right)_{7-4}\varphi_7 + \left(\left(\frac{v}{\operatorname{tg} v}\right)_{7-4} + 4\bar{\alpha}_{1-4} + 3\right)\varphi_4 - 0,8\bar{\alpha}_{1-4}\Delta_1 &= 0; \\ -0,8\bar{\alpha}_{1-4}\varphi_4 + (0,32\bar{\gamma}_{4-1} + 0,24)\Delta_1 &= 0. \end{aligned} \quad (15.40)$$

Складання рівняння стійкості

Рівняння стійкості рами одержимо, прирівнявши до нуля визначник матриці коефіцієнтів системи рівнянь (15.40) методу переміщень:

$$D = \begin{vmatrix} \left(\frac{v}{\operatorname{tg} v}\right)_{7-4} + 24 & -\left(\frac{v}{\sin v}\right)_{7-4} & 0 \\ -\left(\frac{v}{\sin v}\right)_{7-4} & \left(\frac{v}{\operatorname{tg} v}\right)_{7-4} + 4\bar{\alpha}_{1-4} + 3 & -0,8\bar{\alpha}_{1-4} \\ 0 & -1,6\bar{\alpha}_{1-4} & 0,32\bar{\gamma}_{4-1} + 0,24 \end{vmatrix} = 0 \quad (15.41)$$

Розв'язання рівняння стійкості

Рівняння стійкості (15.40) розв'язуємо так само як і для симетричної форми втрати стійкості, зважаючи на те, що $v_{1-4} = v_{4-7}$. Послідовно надаємо незалежному параметру v_{4-7} значень 0; 1; 2 і т.д. Критичною буде величина параметру, за якою визначник (15.40) обертається на нуль. Результати обчислень заносимо в таблицю 15.15.

Таблиця 15.13

№	v_{4-7}	$\left(\frac{v}{\operatorname{tg} v}\right)_{4-7}$	$\left(\frac{v}{\sin v}\right)_{4-7}$	v_{1-4}	α_{1-4}	γ_{1-4}	D
1	0	1	1	0	3	3	190,8
2	1	0,642	1,188	1	2,790	1,794	50,23
3	2	-0,915	2,199	2	2,088	-1,911	-216,4

4	1,2	0,466	1,287	1,2	2,699	1,259	-40,8
5	1,1	0,560	1,234	1,1	2,749	1,539	-30,96

Виконавши лінійну інтерполяцію в інтервалі $1 < v_{4-7} < 1,1$, знаходимо:

$$v_{4-7}^{\text{кр}} = 1 + \frac{50,23 \cdot 0,1}{50,23 + 30,96} = 1,062.$$

Критичний параметр навантаження, який відповідає втраті стійкості за кососиметричною формою деформації дорівнює:

$$P_{\text{кр}} = \frac{v_{4-7}^2 \cdot i}{h} = \frac{1,062^2 i}{5} = 0,225i.$$

З іншого боку, при розрахунку рами в передбаченні втрати стійкості за симетричною формою деформації було отримано

$$P_{\text{кр}} = 2,350i.$$

Порівнюючи означені результати доходимо висновку, що рама втратить стійкість за кососиметричною формою.

15.4. Задачі для самостійного розв'язування

Визначити критичні величини сил для плоских рам, представлених на рис.15.15.

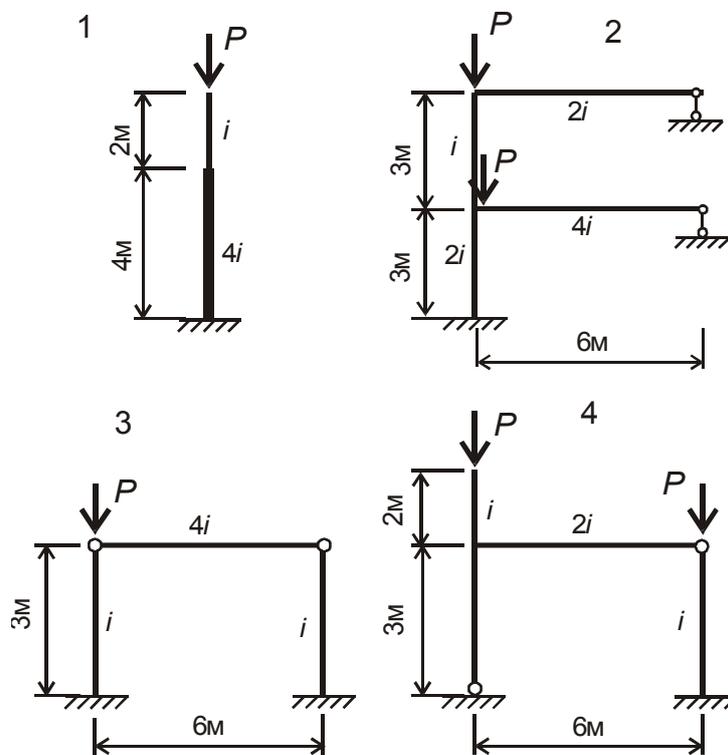


Рис.15.15

16. Динамічний розрахунок рам

16.1. Короткі відомості про розрахунок на динамічні дії

Однією з найголовніших характеристик коливальних систем є число динамічних ступенів вільності, тобто кількість незалежних геометричних параметрів (узагальнених координат), які визначають положення всіх мас системи при її деформаціях.

При визначенні числа ступенів вільності динамічної системи зручно кожну зосереджену масу умовно закріплювати кінематичними в'язями так, щоб маса при обраних передумовах розрахунку зробилась нерухомою. Мінімальне число кінематичних в'язей, які необхідно ввести для повного закріплення всіх мас, характеризує число динамічних ступенів вільності коливальної системи.

Вільними називають коливання системи, яка в початковий момент часу виводиться зі стану рівноваги, після чого причини збудження усуваються і система продовжує рух за відсутності зовнішніх дій. Коливання відбуваються за рахунок запасу енергії, яку одержала система при початковому збудженні.

Змушені коливання характеризуються тим, що система перебуває під постійною дією зовнішніх динамічних навантажень. Енергія, яка необхідна для підтримки процесу коливань, здобувається за рахунок зовнішніх дій.

Вільні коливання системи з n ступенями динамічної вільності характеризуються системою лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} y_1 &= -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{11} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{12} - \dots - m_n \ddot{y}_n \delta_{1n}; \\ y_2 &= -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{21} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{22} - \dots - m_n \ddot{y}_n \delta_{2n}; \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_n &= -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{n1} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{n2} - \dots - m_n \ddot{y}_n \delta_{nn}. \end{aligned} \tag{16.1}$$

Тут y_1, y_2, \dots, y_n – можливі переміщення зведених мас $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \dots, \tilde{m}_n$ системи (зведеною масою \tilde{m}_i назвемо сумарну масу, яка зміщується в напрямі переміщення y_i), δ_{ik} – переміщення зведеної маси в напрямі i від дії одиничної сили в напрямі k .

Система диференціальних рівнянь (16.1) може бути записана в матричній формі

$$\mathbf{Dm} \ddot{\bar{y}} + \bar{y} = \bar{\mathbf{0}}. \tag{16.2}$$

Тут \mathbf{m} – матриця мас

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \tilde{m}_1 & & & \\ & \tilde{m}_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \tilde{m}_n \end{bmatrix}; \quad (16.3)$$

\mathbf{D} – матриця податливості коливальної системи

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}; \quad (16.4)$$

$\bar{\mathbf{y}}, \ddot{\bar{\mathbf{y}}}$ – вектори можливих переміщень та їхніх других похідних за часом

$$\bar{\mathbf{y}} = \{y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n\}^T, \quad (16.5)$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{y}}} = \{\ddot{y}_1 \quad \ddot{y}_2 \quad \dots \quad \ddot{y}_n\}^T. \quad (16.6)$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (16.1) розшукується у вигляді:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 \sin(\omega t + \varphi), & \ddot{y}_1 &= -a_1 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi); \\ y_2 &= a_2 \sin(\omega t + \varphi), & \ddot{y}_2 &= -a_2 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi); \\ &\dots & &\dots \\ y_n &= a_n \sin(\omega t + \varphi), & \ddot{y}_n &= -a_n \omega^2 \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (16.7)$$

Тут a_1, a_2, \dots, a_n – амплітуди можливих переміщень мас системи; ω – циклічна (колова) частота вільних коливань, що характеризує кількість повних циклів коливань за 2π секунд; φ – початкова фаза коливань.

Підстановка розв'язків (16.7) в систему диференціальних рівнянь (16.1) перетворює її на систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} (\tilde{m}_1 \delta_{11} - \lambda) a_1 + \tilde{m}_2 \delta_{12} a_2 + \dots + \tilde{m}_n \delta_{1n} a_n &= 0, \\ \tilde{m}_1 \delta_{21} a_1 + (\tilde{m}_2 \delta_{22} - \lambda) a_2 + \dots + \tilde{m}_n \delta_{2n} a_n &= 0, \\ \dots &\dots \dots \\ \tilde{m}_1 \delta_{n1} a_1 + \tilde{m}_2 \delta_{n2} a_2 + \dots + (\tilde{m}_n \delta_{nn} - \lambda) a_n &= 0. \end{aligned} \quad (16.8)$$

Тут позначено

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}. \quad (16.9)$$

Система однорідних алгебраїчних рівнянь (16.8) складена відносно амплітуд переміщень зведених мас. Система матиме ненульовий розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю:

$$D = \begin{vmatrix} \tilde{m}_1 \delta_{11} - \lambda & \tilde{m}_2 \delta_{12} & \dots & \tilde{m}_n \delta_{1n} \\ \tilde{m}_1 \delta_{21} & \tilde{m}_2 \delta_{22} - \lambda & \dots & \tilde{m}_n \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{m}_1 \delta_{n1} & \tilde{m}_2 \delta_{n2} & \dots & \tilde{m}_n \delta_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (16.10)$$

Рівняння (16.10) називається "віковим", або частотним. Воно є характеристичним рівнянням системи (16.1). Невідомим у "віковому" рівнянні є величина λ , яка в системах з n ступенями вільності має n дійсних значень.

"Вікове" рівняння може бути представлено в матричній формі:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{0}}, \quad (16.11)$$

де \mathbf{E} – одинична матриця,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} m_1 \delta_{11} & m_2 \delta_{12} & \dots & m_n \delta_{1n} \\ m_1 \delta_{21} & m_2 \delta_{22} & \dots & m_n \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \delta_{n1} & m_2 \delta_{n2} & \dots & m_n \delta_{nn} \end{bmatrix}, \quad (16.12)$$

Оскільки "вікове" рівняння (16.10) має n дійсних коренів λ , можна дійти висновку, що система, що має n ступенів динамічної вільності, може коливатися з n частотами. Частоти власних коливань виражаються виходячи зі співвідношення (16.9) за формулою

$$\omega_i = + \sqrt{\frac{1}{\lambda_i}}. \quad (16.13)$$

Сукупність усіх частот ω_i ($i=1,2,\dots,n$) утворює спектр частот. Розташуємо частоти в порядку їх збільшення: $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n$. Найменша частота ω_1 називається **частотою основного тону** коливань, а решта частот – **обертонами**.

Кожній частоті, тобто кожному кореню λ_i ($i=1,2,\dots,n$), відповідає сукупність амплітуд a_1, a_2, \dots, a_n , які визначаються з точністю до множника. Набір амплітуд, що відповідає якійсь певній частоті, характеризує форму деформації системи, яка відповідає означеній частоті і називається формою власних коливань.

Число λ називається **власним, або характеристичним числом** матриці \mathbf{A} . Частоти, кожна з яких відповідає якомусь із власних чисел, називають **власними частотами**. Очевидно, що першій частоті вільних коливань, яка є найменшою у спектрі, відповідає найбільше власне число, тобто

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_n,$$

причому найбільше власне число λ_1 вважається старшим. Множина амплітуд, які відповідають якому-небудь власному числу, утворюють вектор \vec{V} , який називається **власним вектором**.

Таким чином, квадратна матриця \mathbf{A} (16.12) порядку n має n власних чисел і n власних векторів. Для визначення частот вільних коливань (власних частот) необхідно обчислити власні числа матриці \mathbf{A} , а для визначення амплітуд – власні вектори.

Власні числа мають певні властивості.

1. Сума власних чисел дорівнює сумі головних коефіцієнтів (сліду) матриці \mathbf{A} :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = Sp \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \tilde{m}_i \delta_{ii}. \quad (16.14)$$

2. Добуток власних чисел дорівнює визначнику матриці \mathbf{A} :

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = Det \mathbf{A}. \quad (16.15)$$

Переміщення мас системи характеризує деформовану вісь споруди, так звану **форму коливань**. Форми коливань, які визначаються амплітудами, що входять до складу власних векторів, називають **головними формами** коливань. Отже, системи з n ступенями вільності мають n головних форм коливань, а переміщення будь-якої маси j в будь-який момент часу t може розглядатися як накладання n головних форм коливань:

$$\begin{aligned} y_j &= a_{j1} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + a_{j2} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots + a_{jn} \sin(\omega_n t + \varphi_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ji} \sin(\omega_i t + \varphi_i). \end{aligned} \quad (16.16)$$

Тут a_{ji} – амплітуда переміщення y_j в формі коливань i .

На цій підставі можна вважати, що кожна маса системи з n ступенями вільності в процесі вільних коливань коливається водночас з n власними частотами.

Головні форми коливань мають такі властивості:

1. У будь-який момент часу співвідношення між амплітудами не змінюється, тобто деформована вісь споруди, що відповідає головній формі коливань, зберігає свою форму деформації. Тому такі деформації називають **стоячою хвилею**. Так, для сукупності амплітуд $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ji}, \dots, a_{ki}, \dots, a_{ni}$ будь-якої головної форми власних коливань, яка відповідає власній частоті ω_i , можна записати

$$\frac{y_{ji}}{y_{ki}} = \frac{a_{ji}}{a_{ki}} = const. \quad (16.17)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\delta_{11} - \frac{1}{\tilde{m}_1 \theta^2} \right) B_1 + \delta_{12} B_2 + \dots + \delta_{1n} B_n + \delta_{1p} P_0 = 0; \\
& \delta_{21} B_1 + \left(\delta_{22} - \frac{1}{\tilde{m}_2 \theta^2} \right) B_2 + \dots + \delta_{2n} B_n + \delta_{2p} P_0 = 0; \\
& \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
& \delta_{n1} B_1 + \delta_{n2} B_2 + \dots + \left(\delta_{nn} - \frac{1}{\tilde{m}_n \theta^2} \right) B_n + \delta_{np} P_0 = 0.
\end{aligned} \tag{16.22}$$

Тут B_1, B_2, \dots, B_n – амплітудні величини сил інерції, які діють в напрямках можливих переміщень і виражаються співвідношеннями

$$B_1 = \tilde{m}_1 A_1 \theta^2, \quad B_2 = \tilde{m}_2 A_2 \theta^2, \quad \dots, \quad B_n = \tilde{m}_n A_n \theta^2. \tag{16.23}$$

Амплітудні величини динамічних зусиль $M_\delta, Q_\delta, N_\delta$ можуть бути визначені на базі принципу незалежності дії за формулами накладання:

$$\begin{aligned}
M_\delta &= \sum_{i=1}^n \bar{M}_i B_i + \bar{M}_p P_0; \\
Q_\delta &= \sum_{i=1}^n \bar{Q}_i B_i + \bar{Q}_p P_0; \\
N_\delta &= \sum_{i=1}^n \bar{N}_i B_i + \bar{N}_p P_0,
\end{aligned} \tag{16.24}$$

де $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ – відповідно згинальні моменти, поперечні і поздовжні сили від дії одиничних сил інерції, $\bar{M}_p, \bar{Q}_p, \bar{N}_p$ – зусилля від статичної дії одиничного зовнішнього навантаження.

Амплітуди переміщень можуть бути визначені на базі формул (16.23)

$$A_1 = \frac{B_1}{\tilde{m}_1 \theta^2}, \quad A_2 = \frac{B_2}{\tilde{m}_2 \theta^2}, \quad \dots, \quad A_n = \frac{B_n}{\tilde{m}_n \theta^2} \tag{16.25}$$

або за формулою Максвелла-Мора:

$$A_i = \Delta_{i\delta} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_\delta}{EI} dx. \tag{16.26}$$

Розрахунок динамічної системи на змушені коливання може виконуватись способом розкладання навантаження по головним формам коливань. Такий підхід дозволяє виконати розрахунок на змушені коливання без складання і розв'язування системи рівнянь. Ідея способу полягає в розкладанні зовнішнього навантаження, що діє на маси системи, на низку інших навантажень, кількість яких дорівнює числу ступенів вільності. Сили, що діють на маси в кожному навантаженні мають бути пропорційні силам інерції однієї з головних форм коливань. При такому

завантаженні коливання відбуватимуться по відповідній головній формі. Отже, замість одного дійсного навантаження з'являються кілька інших завантажень, зовнішні сили в яких пропорційні силам інерції головних форм коливань. При кожному з таких завантажень система, що має n ступенів вільності коливатиметься з однією, спільною для всіх мас, частотою, тобто буде поводитися як система з одним ступенем вільності і може розраховуватися відповідними способами. Кінцеві результати для вихідної схеми можуть бути отримані додаванням результатів розрахунків на кожне навантаження окремо. Таким чином, розрахунок системи з n ступенями вільності може бути зведений до розрахунку n систем з одним ступенем вільності.

Для одержання сили в напрямі i , що відповідає певній головній формі j , необхідно скористатися формулою

$$P_i(t) = \sum_{k=1}^n \tilde{m}_i a_{ik} H_k, \quad (16.27)$$

де коефіцієнт H_j визначається зі співвідношення

$$H_j = \frac{\sum_{i=1}^n P_i(t) a_{ij}}{\sum_{i=1}^n \tilde{m}_i a_{ij}^2}. \quad (16.28)$$

У наведених формулах $P_i(t)$ – зовнішні сили, що діють у напрямках можливих переміщень зведених мас системи \tilde{m}_i , a_{ij} – відповідні амплітуди даної форми коливань.

Від кожного утвореного навантаження будуються складові епюри. Дійсні епюри можуть бути одержані як сума складових епюр, помножених на відповідні динамічні коефіцієнти

$$\mu_1 = \frac{1}{1 - (\theta/\omega_1)^2}, \quad \mu_2 = \frac{1}{1 - (\theta/\omega_2)^2}, \quad \mu_3 = \frac{1}{1 - (\theta/\omega_3)^2}, \dots \quad (16.29)$$

16.2. Приклад динамічного розрахунку рами

Розглянемо невагому рами, наведену на рис.16.1,а. Геометричні розміри рами характеризуються параметрами $l = 6$ м, $h = 3$ м. На рамі розташовано дві точкові маси $m_1 = 2m$, $m_2 = m$. Зовнішнє навантаження – вібраційна сила $P(t) = P_0 \sin \theta t$, причому $P_0 = 10$ кН, $\theta = 0,9\omega_1$. Необхідно виконати динамічний розрахунок рами, тобто розрахувати раму на вільні і змушені коливання.

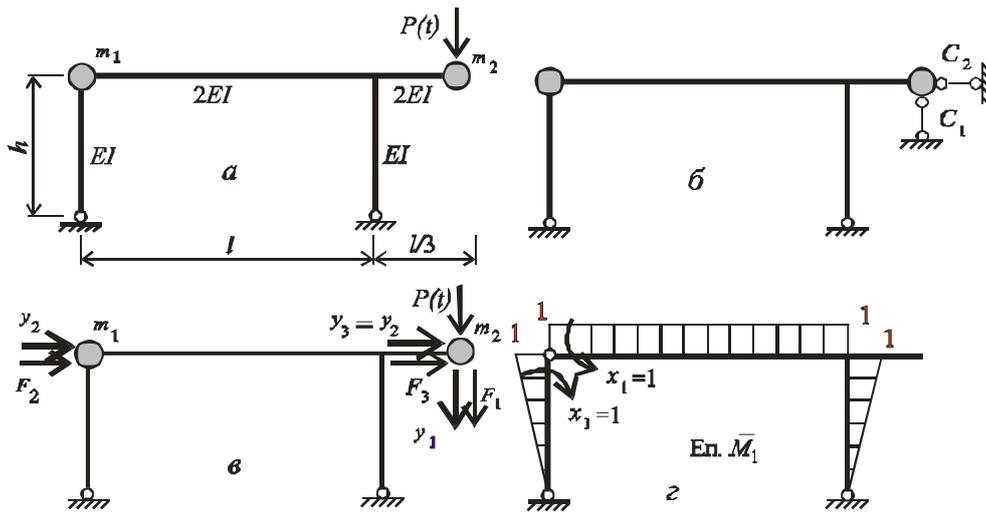


Рис.16.1

16.2.1. Розрахунок на вільні коливання

Визначення числа ступенів вільності

Для закріплення мас системи достатньо ввести два додаткових опорних стержня (рис.16.1.б). Вертикальне переміщення y_1 маси m_2 усувається постановкою стержня C_1 , а вертикальне переміщення маси m_1 дорівнює нулю, оскільки при згині рам поздовжніми деформаціями стержнів можна нехтувати. Горизонтальні переміщення обох мас усуваються постановкою одного додаткового опорного стержня C_2 . Отже, переміщення y_2 і y_3 лінійно залежні. До того ж очевидно, що

$$y_2 = y_3. \quad (16.30)$$

Таким чином, задана система має два динамічних ступеня вільності

$$n_{\text{дин}} = 2. \quad (16.31)$$

Напрями можливих переміщень показано на рис.16.1,в. У подальшому ці напрями вважатимемо за додатні. Тут також показано додатні напрями сил інерції F_1, F_2, F_3 , які зумовлені рухом точкових мас системи.

Складання диференціальних рівнянь руху

Запишемо можливі незалежні переміщення як суми переміщень від дії сил інерції

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}F_1 + \delta_{12}F_2 + \delta_{13}F_3, \\ y_2 &= \delta_{21}F_1 + \delta_{22}F_2 + \delta_{23}F_3. \end{aligned} \quad (16.32)$$

Враховуючи рівність вертикальних переміщень (16.30) можна записати

$$\begin{aligned}\delta_{13} &= \delta_{12}, \\ \delta_{23} &= \delta_{22}.\end{aligned}\tag{16.33}$$

Сили інерції виразимо через можливі незалежні переміщення y_1 і y_2 :

$$\begin{aligned}F_1 &= -m_1\ddot{y}_1 = -m\ddot{y}_1, \\ F_2 &= -m_2\ddot{y}_2 = -m\ddot{y}_2, \\ F_3 &= -m_1\ddot{y}_3 = -2m\ddot{y}_2.\end{aligned}\tag{16.34}$$

Система рівнянь (16.30) з урахуванням (16.33) і (16.34) набуває вигляду

$$\begin{aligned}(m\delta_{11}\ddot{y}_1 + y_1) + 3m\delta_{12}\ddot{y}_2 &= 0, \\ m\delta_{21}\ddot{y}_1 + (3m\delta_{22}\ddot{y}_2 + y_2) &= 0.\end{aligned}\tag{16.35}$$

У диференціальних рівняннях (16.35) зведені маси, які переміщуються в напрямках незалежних переміщень y_1 і y_2 , дорівнюють

$$\begin{aligned}\tilde{m}_1 &= m_2 = m, \\ \tilde{m}_2 &= m_1 + m_2 = 3m.\end{aligned}\tag{16.36}$$

Отже, матриця мас має вигляд

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix}.\tag{16.37}$$

Розв'язання диференціальних рівнянь руху

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (16.6) розшукуємо у вигляді

$$\begin{aligned}y_1 &= a_1 \sin(\omega t + \lambda), \\ y_2 &= a_2 \sin(\omega t + \lambda).\end{aligned}\tag{16.38}$$

Після підстановки розв'язків (16.38) до рівнянь (16.35) одержуємо систему однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}(m\delta_{11} - \lambda)a_1 + 3m\delta_{12}a_2 &= 0, \\ m\delta_{21}a_1 + (3m\delta_{22} - \lambda)a_2 &= 0,\end{aligned}\tag{16.39}$$

де позначено

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}.\tag{16.40}$$

Розрахунок заданої рами на одиничні дії

Для обчислення коефіцієнтів системи рівнянь (16.39) необхідно побудувати епюри згинальних моментів, що виникають у заданій схемі від дії одиничних сил інерції. Отже, виникає потреба розрахунку рами на дію статичних навантажень.

Задана схема статично невизначувана. Дійсно, $n = 3k - u = 3 \cdot 1 - 2 = 1$. Для розрахунку скористаємось методом сил. Основну систему одержимо за рахунок уведення шарніра у лівий верхній вузол рами. Одинична епюра \bar{M}_1 побудована на рис.16.1,з.

Система канонічних рівнянь методу сил складається з одного рівняння

$$\bar{\delta}_{11}X_1 + \bar{\delta}_{1p} = 0. \quad (16.41)$$

Одиничний коефіцієнт $\bar{\delta}_{11}$ не залежить від зовнішніх навантажень і може бути обчислений за формулою Мора:

$$\bar{\delta}_{11} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx = 2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 = \frac{5}{EI}. \quad (16.42)$$

Розв'язавши (16.41) маємо

$$X_1 = -\frac{\bar{\delta}_{1p}}{\bar{\delta}_{11}} = -\frac{EI}{5} \bar{\delta}_{1p}. \quad (16.43)$$

Дійсна епюра згинальних моментів може бути побудована, згідно формули

$$M_\rho = \bar{M}_1 X_1 + M_p. \quad (16.44)$$

Розрахунок на дію сили $F_1 = 1$ (рис.16.2,а).

Вантажна епюра M_{p1} показана на рис.16.2,б. Вантажний коефіцієнт

$$\bar{\delta}_{1p} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_{p1}}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 = \frac{3}{EI}. \quad (16.45)$$

Розв'язок канонічного рівняння (16.41) згідно до (16.43):

$$X_1 = -\frac{EI}{5} \cdot \frac{3}{EI} = -0,6. \quad (16.46)$$

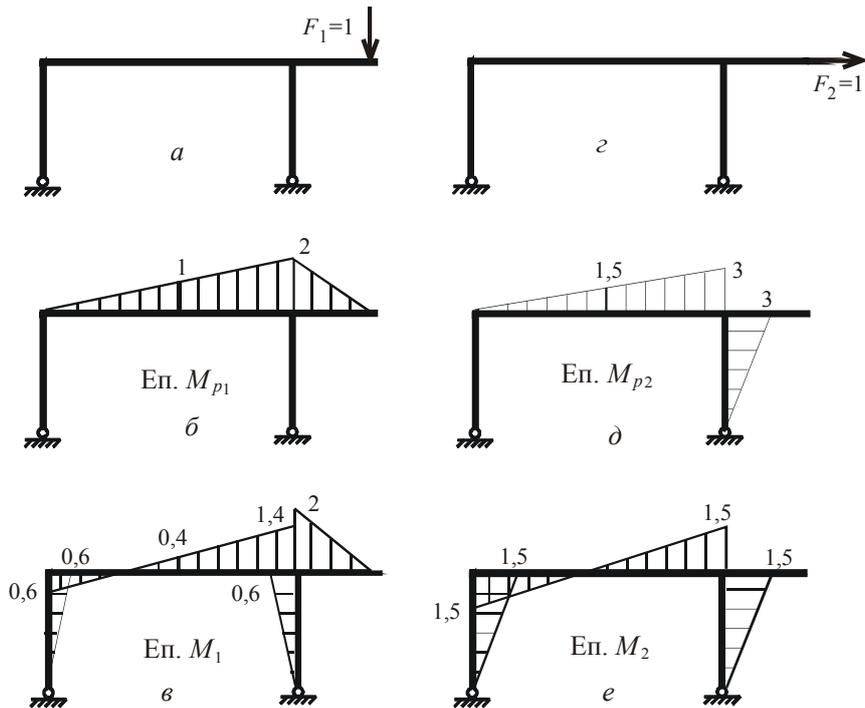


Рис.16.2

Дійсна епюра згинальних моментів від першого навантаження, побудована за формулою (16.44), наведена на рис.16.2,б.

Розрахунок на дію сили $F_2 = 1$ (рис.16.2,с).

Вантажна епюра M_{p2} показана на рис.16.2,д. Вантажний коефіцієнт

$$\bar{\delta}_{1p} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_{p2}}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1,5 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{7,5}{EI}. \quad (16.47)$$

Розв'язок канонічного рівняння (16.41) згідно до (16.43):

$$X_1 = -\frac{EI}{5} \cdot \frac{7,5}{EI} = -1,5. \quad (16.48)$$

Дійсна епюра згинальних моментів від другого навантаження, побудована за формулою (16.44), наведена на рис.16.2,е.

Обчислення переміщень

Визначимо переміщення, які входять до рівнянь (16.39). Для контролю кожне переміщення будемо обчислювати двома способами.

$$\delta_{11} = \sum_0^l \int \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{6}{6 \cdot 2EI} (0,6^2 + 4 \cdot 0,4^2 + 1,4^2) + 2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{0,6 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,6 +$$

$$+ \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{3,533}{EI};$$

$$\delta_{11} = \sum_0^l \int \frac{M_1 M_{p1}}{EI} dx = \frac{6}{6 \cdot 2EI} (0,6 \cdot 0 + 4 \cdot 0,4 \cdot 1 + 1,4 \cdot 2) +$$

$$+ \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{3,533}{EI}.$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_0^l \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx = \frac{6}{6 \cdot 2EI} (0,6 \cdot 1,5 + 4 \cdot 0 \cdot 0,4 + 1,4 \cdot 1,5) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{0,6 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{0,6 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 = \frac{1,5}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_0^l \int \frac{M_1 M_{p2}}{EI} dx = \frac{6}{6 \cdot 2EI} (0,6 \cdot 0 + 4 \cdot 1,5 \cdot 0,4 + 3 \cdot 1,4) -$$

$$- \frac{1}{EI} \cdot \frac{0,6 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{1,5}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_0^l \int \frac{M_{p1} M_2}{EI} dx = \frac{6}{6 \cdot 2EI} (0 \cdot 1,5 + 4 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1,5) = \frac{1,5}{EI}.$$

$$\delta_{22} = \sum_0^l \int \frac{M_2^2}{EI} dx = 2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{3 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{3 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 \cdot 2 = \frac{6,75}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum_0^l \int \frac{M_2 M_{p2}}{EI} dx = \frac{6}{6 \cdot 2EI} (0 \cdot 1,5 + 4 \cdot 0 \cdot 1,5 + 1,5 \cdot 3) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 = \frac{6,75}{EI}.$$

Дані коефіцієнти складають матрицю податливості

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3,533}{EI} & \frac{1,5}{EI} \\ \frac{1,5}{EI} & \frac{6,75}{EI} \end{bmatrix} \quad (16.49)$$

Складання "вікового" рівняння

Підставивши переміщення в систему (16.39), одержимо

$$\begin{aligned} (3,533 - \tilde{\lambda}) a_1 + 4,5 a_2 &= 0, \\ 1,5 a_1 + (20,25 - \tilde{\lambda}) a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (16.50)$$

Тут позначено

$$\tilde{\lambda} = \frac{EI}{m} \lambda = \frac{EI}{m\omega^2}. \quad (16.51)$$

Отже, для одержання динамічних характеристик системи необхідно обчислити власні значення (власні числа і власні вектори) матриці

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3,533 & 4,5 \\ 1,5 & 20,25 \end{bmatrix}. \quad (16.52)$$

"Вікове" рівняння, тобто умова наявності вільних коливань заданої рами матиме вигляд

$$\text{Det}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 3,533 - \tilde{\lambda} & 4,5 \\ 1,5 & 20,25 - \tilde{\lambda} \end{vmatrix} = 0. \quad (16.53)$$

Визначення власних чисел матриці \mathbf{A}

Розкривши визначник (16.53), одержуємо квадратне рівняння

$$\begin{aligned} \text{Det}(\mathbf{A} - \tilde{\lambda} \mathbf{E}) &= (3,533 - \tilde{\lambda})(20,25 - \tilde{\lambda}) - 4,5 \cdot 1,5 = 0; \\ \tilde{\lambda}^2 - 23,783\tilde{\lambda} + 64,793 &= 0. \end{aligned}$$

Корені квадратного рівняння є власними числами матриці \mathbf{A} .

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = 11,892 \pm \sqrt{11,892^2 - 64,793} = 11,892 \pm 8,573;$$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= 20,534, \\ \tilde{\lambda}_2 &= 3,139. \end{aligned} \quad (16.54)$$

Перевірка власних чисел

Сума власних чисел має дорівнювати сумі головних коефіцієнтів (сліду) матриці \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \tilde{\lambda}_i &= \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 = 20,645 + 3,139 = 23,784; \\ \text{Sp } \mathbf{A} &= 3,533 + 20,25 = 23,783. \end{aligned} \quad (16.55)$$

Добуток власних чисел має дорівнювати визначнику матриці \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^2 \tilde{\lambda}_i &= \tilde{\lambda}_1 \cdot \tilde{\lambda}_2 = 20,645 \cdot 3,139 = 64,804; \\ \text{Det } \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 3,533 & 4,5 \\ 1,5 & 20,25 \end{vmatrix} = 64,793. \end{aligned} \quad (16.56)$$

Обчислення частот вільних коливань

Власні частоти вільних коливань визначаються на базі співвідношення (16.40):

$$\omega_i = + \sqrt{\frac{EI}{m\tilde{\lambda}_i}}. \quad (16.57)$$

Отже, маємо:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{EI}{m\tilde{\lambda}_1}} = 0,22\sqrt{\frac{EI}{m}}; \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{EI}{m\tilde{\lambda}_2}} = 0,564\sqrt{\frac{EI}{m}}. \end{aligned} \quad (16.58)$$

Визначення головних форм вільних коливань

Співвідношення амплітуд переміщень, які визначають форму зігнутої осі рами при кожній власній частоті, можуть бути знайдені з рівнянь (16.39).

Перша головна форма

Підставимо величину $\tilde{\lambda}_1 = 20,645$ до рівнянь (16.39). Маємо:

$$\begin{aligned} -17,112a_1 + 4,5a_2 &= 0; \\ 1,5a_1 - 0,395a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (16.59)$$

Легко впевнитись, що як з першого, так і з другого рівняння, отримаємо

$$a_1 = 0,263a_2. \quad (16.60)$$

Таким чином, якщо амплітуда $a_2 = 1$, то амплітуда $a_1 = 0,263$. Отже, можна записати для першої форми

$$\vec{V}_1 = \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,263 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (16.61)$$

Друга головна форма

Підставимо величину $\tilde{\lambda}_2 = 3,139$ до рівнянь (16.39). Маємо:

$$\begin{aligned} 0,394a_1 + 4,5a_2 &= 0; \\ 1,5a_1 + 17,111a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (16.62)$$

Як з першого, так і з другого рівняння, отримаємо

$$a_2 = -0,088a_1. \quad (16.63)$$

Таким чином, якщо амплітуда $a_1 = 1$, то амплітуда $a_2 = -0,088$. Отже, можна записати для другої головної форми коливань

$$\vec{V}_2 = \begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,088 \end{Bmatrix}. \quad (16.64)$$

Перевірка ортогональності головних форм вільних коливань

Перевіримо, чи дорівнює нулю, згідно до (16.18), сума добутків мас і відповідних амплітуд двох головних форм вільних коливань

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \tilde{m}_j a_{j1} a_{j2} &= \tilde{m}_1 a_{11} a_{12} + \tilde{m}_2 a_{21} a_{22} = m \cdot 0,263 \cdot 1 + 3m \cdot 1 \cdot (-0,088) = \\ &= 0,263m - 0,264m = -0,001m \approx 0. \end{aligned}$$

Побудова головних форм вільних коливань

Перша і друга головні форми коливань побудовано на рис.16.3.а і 16.3.б відповідно.

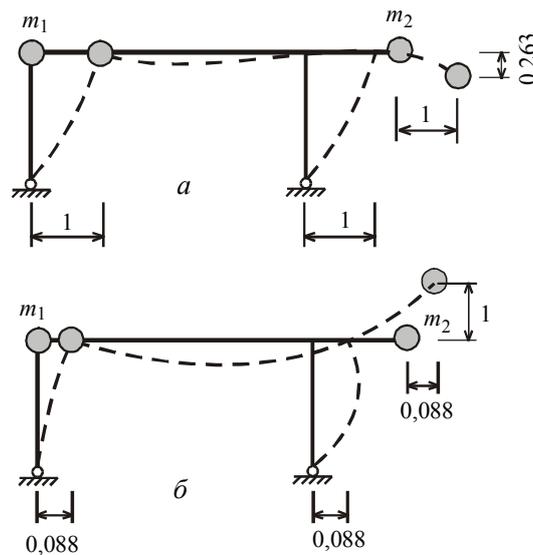


Рис.16.3

16.2.2. Розрахунок на змушені коливання безпосереднім розв'язанням диференціального рівняння руху

Система алгебраїчних рівнянь

Система лінійних алгебраїчних рівнянь для змушених коливань (16.22) для заданої схеми набуває вигляду

$$\begin{aligned} \left(\delta_{11} - \frac{1}{\tilde{m}_1 \theta^2} \right) B_1 + \delta_{12} B_2 + \delta_{1p} P_0 &= 0, \\ \delta_{21} B_1 + \left(\delta_{22} - \frac{1}{\tilde{m}_2 \theta^2} \right) B_2 + \delta_{2p} P_0 &= 0 \end{aligned} \quad (16.65)$$

або з урахуванням величин зведених мас

$$\begin{aligned} \left(\delta_{11} - \frac{1}{m \theta^2} \right) B_1 + \delta_{12} B_2 + \delta_{1p} P_0 &= 0, \\ \delta_{21} B_1 + \left(\delta_{22} - \frac{1}{3m \theta^2} \right) B_2 + \delta_{2p} P_0 &= 0. \end{aligned} \quad (16.66)$$

Тут B_1, B_2 – невідомі амплітудні величини сил інерції, що діють в напрямках можливих переміщень і виражаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} B_1 &= \tilde{m}_1 A_1 \theta^2 = m A_1 \theta^2, \\ B_2 &= \tilde{m}_2 A_2 \theta^2 = 3m A_2 \theta^2. \end{aligned} \quad (16.67)$$

Коефіцієнти системи алгебраїчних рівнянь

До рівнянь (16.66) входять переміщення, які були обчислені під час розрахунку на вільні коливання і складають матрицю податливості (16.49). Для визначення вантажних коефіцієнтів δ_{1p}, δ_{2p} необхідно побудувати в рамі епюру M_p , зумовлену дією одиничного зовнішнього навантаження (рис.16.4,а).

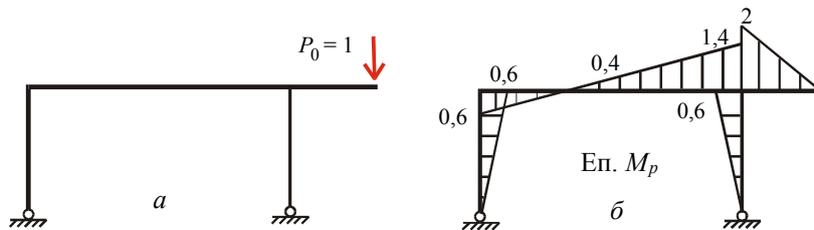


Рис.16.4

Означений вантажний стан збігається із допоміжним станом, від дії першої сили інерції (рис.16.2,а). Тому епюра M_p (рис.16.4,а) дорівнює епюрі M_1 (рис.16.2,в):

$$M_p = M_1. \quad (16.68)$$

Отже, вантажні переміщення

$$\begin{aligned}\delta_{1P} &= \sum_0^l \int \frac{M_1 M_P}{EI} dx = \sum_0^l \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \delta_{11} = \frac{3,533}{EI}, \\ \delta_{2P} &= \sum_0^l \int \frac{M_2 M_P}{EI} dx = \sum_0^l \int \frac{M_2 M_1}{EI} dx = \delta_{21} = \frac{1,5}{EI}.\end{aligned}\quad (16.69)$$

За умовою задачі $P_0 = 10 \text{ кН}$, циклічна частота змушених коливань

$$\begin{aligned}\theta &= 0,9\omega_1 = 0,9 \cdot 0,22 \sqrt{\frac{EI}{m}} = 0,198 \sqrt{\frac{EI}{m}}; \\ \theta^2 &= 0,0392 \frac{EI}{m}.\end{aligned}\quad (16.70)$$

Для визначення головних коефіцієнтів системи (16.66) обчислимо величини

$$\begin{aligned}\frac{1}{m\theta^2} &= \frac{1}{m \cdot 0,0392 \frac{EI}{m}} = \frac{25,4876}{EI}, \\ \frac{1}{3m\theta^2} &= \frac{8,4959}{EI}.\end{aligned}\quad (16.71)$$

Розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

Підставивши всі зазначені величини до (16.66) і скоротивши на величину EI , одержимо остаточно

$$\begin{aligned}-21,955B_1 + 1,5B_2 + 35,33 &= 0, \\ 1,5B_1 - 1,746B_2 + 15 &= 0.\end{aligned}\quad (16.72)$$

Розв'язавши систему (16.72) маємо:

$$\begin{aligned}B_1 &= 2,333; \\ B_2 &= 10,594.\end{aligned}\quad (16.73)$$

Для перевірки підставимо знайдені величини до сумарного рівняння

$$\begin{aligned}-20,455B_1 - 0,246B_2 + 0,246 &= 0; \\ -20,455 \cdot 2,333 - 0,246 \cdot 10,594 + 0,246 &= -50,327 + 0,246 = -50,081 \approx 0.\end{aligned}$$

Рівняння руху мас системи при змушених коливаннях

Амплітуди переміщень мас визначимо за формулами (16.25):

$$A_1 = \frac{B_1}{\tilde{m}_1 \theta^2} = B_1 \frac{1}{m \theta^2} = 2,333 \cdot \frac{25,4876}{EI} = \frac{59,4626}{EI};$$

$$A_2 = \frac{B_2}{\tilde{m}_2 \theta^2} = B_2 \frac{1}{3m \theta^2} = 10,594 \cdot \frac{8,4959}{EI} = \frac{90,0056}{EI}.$$
(16.74)

Таким чином, рух мас системи при змушених коливаннях відбувається за такими законами:

$$y_1 = \frac{59,4626}{EI} \sin \theta t,$$

$$y_2 = \frac{90,0056}{EI} \sin \theta t.$$
(16.75)

Побудова навантаженої схеми рами

Перш ніж будувати епюри зусиль, необхідно показати всі сили, які діють на раму в процесі змушених коливань. Така схема амплітудних сил інерції і динамічного навантаження показана на рис.16.5.

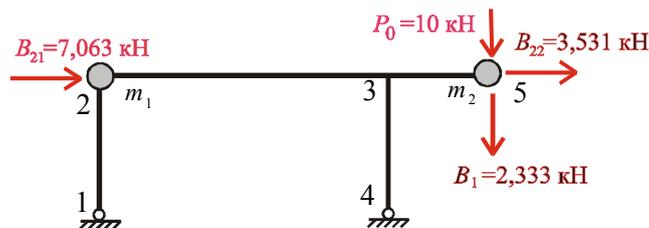


Рис.16.5

При побудові схеми спільна для обох мас сила інерції B_2 , що діє в горизонтальному напрямі, розподілена між масами пропорційно їх величинам:

$$B_{21} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} B_2 = \frac{2m}{2m + m} \cdot 10,594 \text{ кН} = 7,063 \text{ кН};$$

$$B_{22} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} B_2 = \frac{m}{2m + m} \cdot 10,594 \text{ кН} = 3,531 \text{ кН}.$$
(16.76)

Побудова динамічних епюр зусиль

Динамічні епюри зусиль будуються за формулами (16.24). Так, для побудови епюри згинальних моментів необхідно скористатися формулою

$$M_\delta = M_1 B_1 + M_2 B_2 + M_p P_0.$$
(16.77)

Процес побудови амплітудної епюри згинальних моментів M_δ показано на рис. 16.2.6.

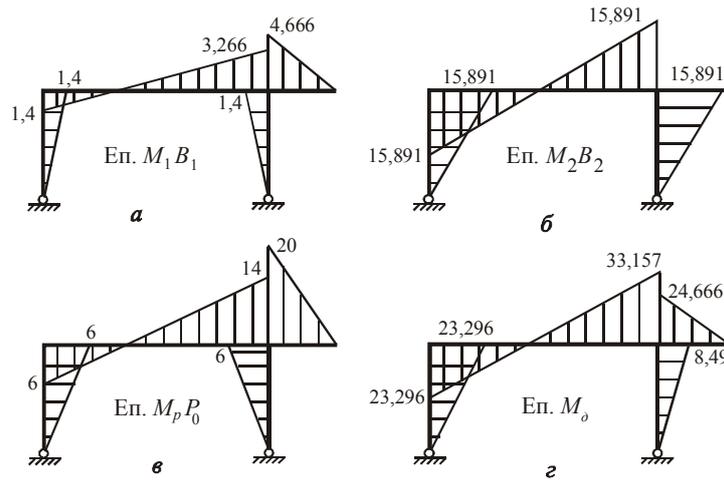


Рис.16.6

Динамічна епюра Q_0 (рис.16.7) побудована на базі диференціальної залежності з епюрою M_0 :

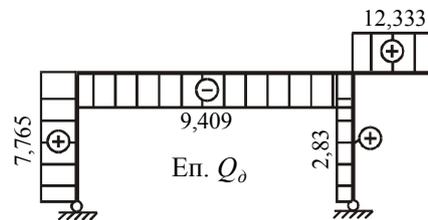


Рис.16.7

$$Q_{1-2} = \frac{23,296}{3} = 7,765 \text{ кН}; \quad Q_{3-4} = \frac{8,49}{3} = 2,83 \text{ кН},$$

$$Q_{2-3} = -\frac{23,296 + 33,157}{6} = -9,409 \text{ кН}; \quad Q_{3-5} = \frac{24,666}{2} = 12,333 \text{ кН}.$$

Амплітудні поздовжні сили можуть бути обчислені виходячи з рівноваги елементів рами:

З умов рівноваги вузла 2:

$$\sum F_x = N_{2-3} + 7,063 - 7,765 = 0;$$

$$N_{2-3} = 0,702 \text{ кН}.$$

$$\sum F_y = -N_{2-1} + 9,409 = 0;$$

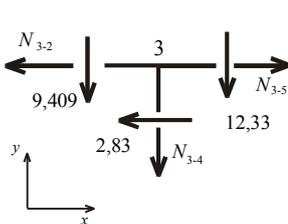
$$N_{2-1} = 9,409 \text{ кН}.$$

З умов рівноваги стержня 2-3:

$$\sum F_x = N_{3-2} - N_{2-3} = 0;$$

$$N_{3-2} = N_{2-3} = 0,702 \text{ кН}.$$

З умов рівноваги вузла 3:



$$\sum F_x = N_{3-5} - N_{3-2} - 2,83 = 0;$$

$$N_{3-5} = 3,532 \text{ кН.}$$

$$\sum F_y = -N_{3-4} - 12,33 - 9,409 = 0;$$

$$N_{3-4} = -21,739 \text{ кН.}$$

Динамічна епюра N_{∂} поздовжніх сил наведена на рис.16.8.

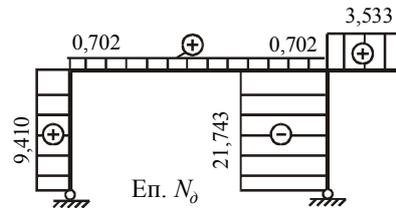


Рис.16.8

Кінематична перевірка розрахунку

Для перевірки порівняємо амплітудні переміщення мас (16.74), обчислені за формулами (16.25), з відповідними переміщеннями, визначеними за формулою Мора (16.26).

$$\Delta_{1\partial} = \sum \int_0^l \frac{M_{p1} M_{\partial}}{EI} dx = \frac{6}{6 \cdot 2EI} (0 + 4 \cdot 1 \cdot 4,930 + 2 \cdot 33,157) +$$

$$+ \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 24,666 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{43,017}{EI} + \frac{16,444}{EI} = \frac{59,461}{EI} \approx \frac{59,4626}{EI}.$$

$$\Delta_{2\partial} = \sum \int_0^l \frac{M_{p2} M_{\partial}}{EI} dx = \frac{6}{6 \cdot 2EI} (0 + 4 \cdot 1,5 \cdot 4,930 + 3 \cdot 33,157) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8,49 = \frac{64,525}{EI} + \frac{25,47}{EI} = \frac{89,995}{EI} \approx \frac{90,0056}{EI}.$$

16.2.3. Розрахунок на змушені коливання розкладанням навантаження по головним формам коливань

Обчислення коефіцієнтів розкладання

Для кожної головної форми коливань необхідно за формулою (16.28) обчислити коефіцієнт H_j . Компоненти зовнішніх навантажень $P_i(t)$ по напрямках можливих переміщень (рис.16.1) мають такі значення:

$$P_1(t) = P_0 = 10 \text{ кН}; \quad P_2(t) = 0.$$

Зведені маси обчислено у співвідношеннях (16.36). Величини амплітуд вільних коливань записано у вигляді векторів (16.61) і (16.64).

Отже, для першої головної форми

$$H_1 = \frac{\sum_{i=1}^2 P_i(t) a_{i1}}{\sum_{i=1}^2 \tilde{m}_i a_{i1}^2} = \frac{P_1(t) a_{11} + P_2(t) a_{21}}{\tilde{m}_1 a_{11}^2 + \tilde{m}_2 a_{21}^2} = \frac{10 \cdot 0,263 + 0}{m \cdot 0,263^2 + 3m \cdot 1^2} = \frac{0,8569}{m}.$$

Для другої головної форми

$$H_2 = \frac{\sum_{i=1}^2 P_i(t) a_{i2}}{\sum_{i=1}^2 \tilde{m}_i a_{i2}^2} = \frac{P_1(t) a_{12} + P_2(t) a_{22}}{\tilde{m}_1 a_{12}^2 + \tilde{m}_2 a_{22}^2} = \frac{10 \cdot 1 + 0}{m \cdot 1^2 + 3m \cdot (-0,088)^2} = \frac{9,774}{m}.$$

Визначення навантажень, відповідних головним формам

Сили, відповідні силам інерції головних форм, визначаються за формулою (16.27).

Для першої головної форми

$$P_{11} = \tilde{m}_1 a_{11} H_1 = m \cdot 0,263 \cdot \frac{0,8569}{m} = 0,2254 \text{ кН};$$

$$P_{21} = \tilde{m}_2 a_{21} H_1 = 3m \cdot 1 \cdot \frac{0,8569}{m} = 2,5707 \text{ кН}.$$

Для другої головної форми

$$P_{12} = \tilde{m}_1 a_{12} H_2 = m \cdot 1 \cdot \frac{9,774}{m} = 9,774 \text{ кН};$$

$$P_{22} = \tilde{m}_2 a_{22} H_2 = 3m \cdot (-0,088) \cdot \frac{9,774}{m} = -2,5745 \text{ кН}.$$

Виконаємо перевірку розкладення:

$$P_1(t) = P_{11} + P_{12} = 0,2254 + 9,774 = 9,9994 \approx 10;$$

$$P_2(t) = P_{21} + P_{22} = 2,5707 + (-2,5745) = -0,0038 \approx 0.$$

Побудова епюр від навантажень, відповідних головним формам коливань

Навантаження, відповідне першій головній формі, наведено на рис.16.9,а.

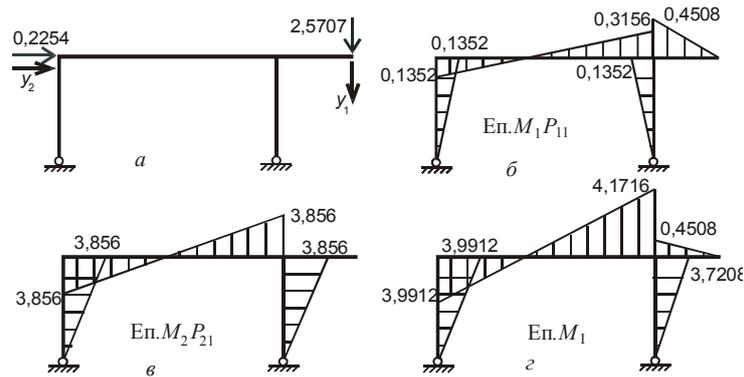


Рис.16.9

Епюра згинальних моментів M_I від даного навантаження (рис.16.9,г) може бути побудована за способом накладення

$$M_I = M_{I1}P_{11} + M_{21}P_{21} = 0,2254M_I + 2,5707M_2.$$

Графіки доданків цієї формули побудовано на рис. 16.9,б і 16.9,в.

Навантаження, відповідне першій головній формі, наведено на рис.16.10,а.

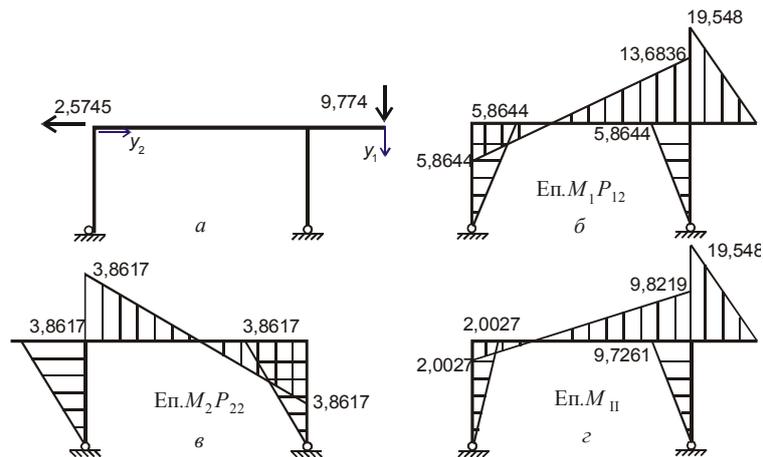


Рис.16.10

Епюра згинальних моментів M_{II} від даного навантаження (рис.16.10,г) також може бути побудована за способом накладення

$$M_{II} = M_{I12}P_{12} + M_{22}P_{22} = 9,774M_I + (-2,5745)M_2.$$

Визначення динамічних коефіцієнтів

За формулою (16.29) визначимо величини динамічних коефіцієнтів для кожної головної форми. Власні частоти ω_1 , ω_2 й частота динамічного навантаження θ були обчислені раніше (16.58), (16.70).

$$\mu_1 = \frac{1}{1 - (\theta/\omega_1)^2} = \frac{1}{1 - (0,198/0,22)^2} = 5,253;$$

$$\mu_{II} = \frac{1}{1 - (\theta/\omega_2)^2} = \frac{1}{1 - (0,198/0,564)^2} = 1,140.$$

Побудова динамічної епюри згинальних моментів

Дійсна динамічна епюра згинальних моментів M_δ (рис.16.11,в) будується як сума епюр від кожного окремого навантаження, які помножені на відповідні динамічні коефіцієнти

$$M_\delta = M_I \mu_I + M_{II} \mu_{II}.$$

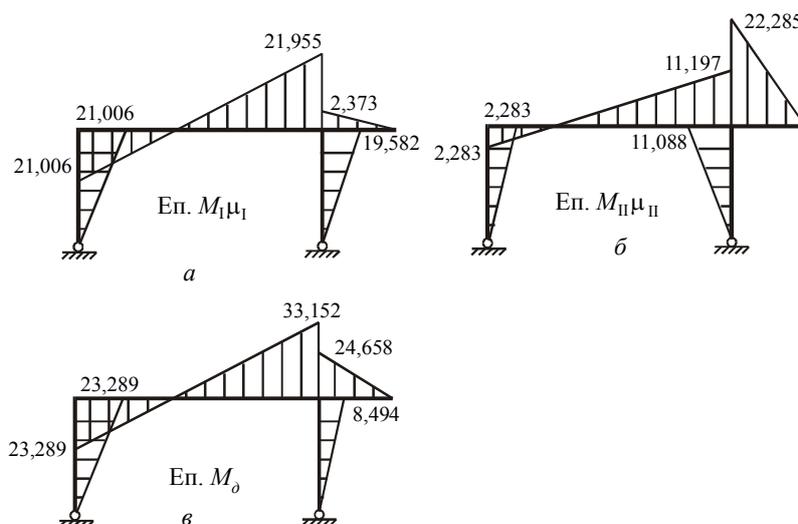


Рис.16.11

Епюра згинальних моментів M_δ , побудована шляхом розкладання динамічного навантаження по головним формам вільних коливань, практично збігається з епюрою, побудованою безпосереднім розв'язком системи диференціальних рівнянь руху (рис.16.6,з). Динамічні епюри поперечних Q_δ і поздовжніх N_δ сил можуть бути побудовані так само, як в п.16.2.

16.3. Виконання розрахунково-графічної роботи з використанням комп'ютерної програми

Розрахунково-графічна робота "Динамічний розрахунок рам" може бути виконана із застосуванням комп'ютерної програми, яка входить до програмного навчального комплексу АСИСТЕНТ. Програма перевіряє розрахунки, виконані "вручну", і в разі відсутності помилок видає результати на принтер або на дисплей. Таким чином, до роботи на комп'ютері можна приступити лише після закінчення "ручного" розрахунку на вільні та змушені коливання.

Для залучення програми до роботи ввести номер схеми і вхідні дані (рис.16.12).

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ЗАДАЧИ					
L	H	M1	M2	Po	Teta/Omega
6.00000	3.00000	2.00000	1.00000	10.0000	0.9

Рис.16.12

Програма перевіряє величину найбільшого власного (характеристичного) числа. У разі помилки програма перевіряє коефіцієнти δ_{ik} матриці податливості. Якщо старше власне число обчислено правильно, на екран видаються головні форми коливань.

Для перевірки правильності розрахунку на змушені коливання, виконаного вручну, програма пропонує ввести величини амплітудних сил інерції. Схема сил показана на рис 16.13.

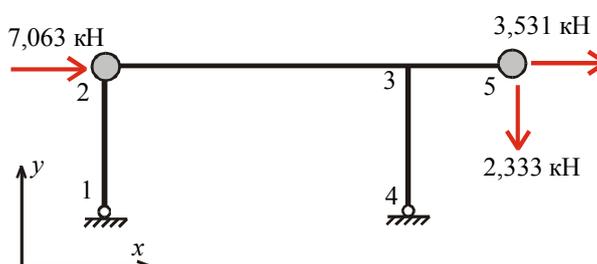


Рис.16.13

Амплітудні величини сил інерції вводяться у віконця діалогового вікна. При цьому сила вважається додатною, якщо її напрям збігається з напрямом відповідної координатної осі.

Якщо сили інерції визначено правильно, на екран дисплея видаються амплітудні епюри згинальних моментів, поперечних і поздовжніх сил, а числові результати виводяться на принтер і додаються до розрахунково-графічної роботи.

16.4. Задачі для самостійного опрацювання

Виконати розрахунок рам (рис.16.14) на вільні та змушені коливання, вважаючи, що динамічні сили змінюються в часі за законом $P(t) = 10 \sin \theta t$.

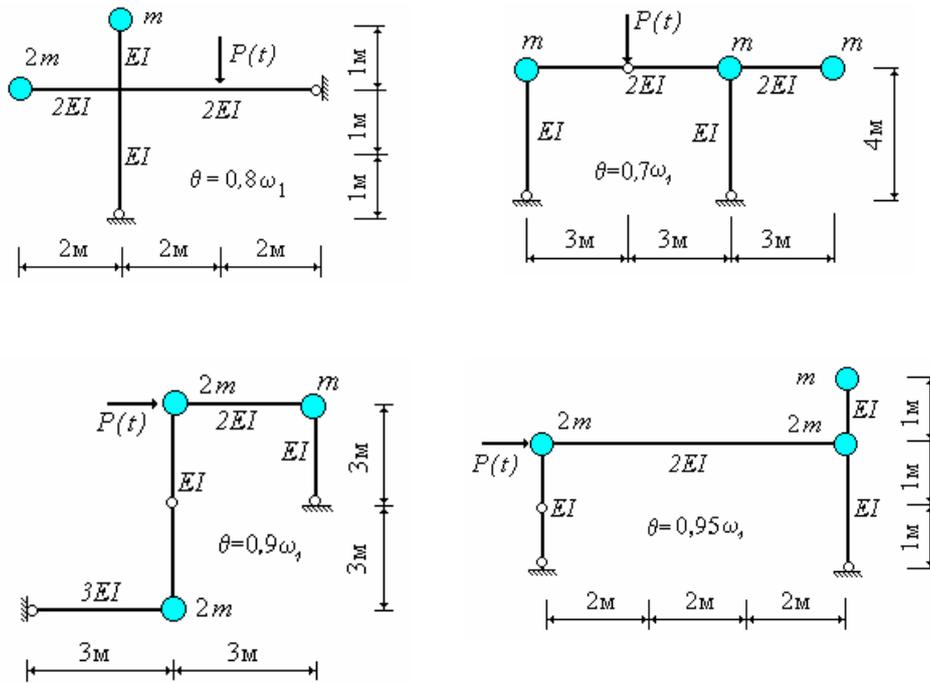


Рис.16.14

17. Навчальний програмний комплекс АСИСТЕНТ

17.1. Основні характеристики

Навчальний програмний комплекс **АСИСТЕНТ** функціонально складається з трьох розділів: "**Чисельні методи**", "**Розрахункові роботи**" та "**Проектування**", звернення до яких здійснюється через меню **Розрахунки**. Всі програми комплексу призначено для роботи в ОС Windows.

Розділ "**Чисельні методи**" містить програми, які використовуються для розв'язання лінійних і нелінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язання задач матричної алгебри, апроксимації функцій тощо.

У розділі "**Розрахункові роботи**" зібрано деякі прикладні програми, які використовуються студентами Київського національного університету і архітектури при виконанні таких розрахунково-графічних робіт:

- Розрахунок тришарнірної арки.
- Розрахунок плоскої ферми.
- Розрахунок нерозрізної балки.
- Розрахунок рами методом скінченних елементів.
- Динамічний розрахунок рам.
- Розрахунок рам на стійкість.

Переважна більшість програм розділу містить базу індивідуальних завдань. Усі програми засновані на поєднанні "машинних" і "ручних" розрахунків. Вони здійснюють контроль фрагментів типових розрахунків, частину з яких студент повинен виконати "вручну" і автоматизують подальші аналогічні розрахунки, позбавляючи студентів значної кількості однотипних обчислювальних процедур. При цьому програма обчислює образ відповіді, порівнює його з наданим результатом, отриманим "вручну", і в разі незбігу відстежує в режимі діалогу процес розрахунку, конкретизує місце можливої помилки, аналізує її причини та дає рекомендації щодо її усунення. За збігу результатів з образом відповіді подальші аналогічні розрахунки повністю автоматизуються.

Розділ "**Проектування**" призначений для аналізу напружено-деформованого стану стержневих систем при статичних і динамічних навантаженнях і використовується в курсовому і дипломному проектуванні. Зміст його складають такі програми:

- розрахунок плоских стержневих систем за МСЕ;
- динамічний розрахунок рам;
- стійкість стержневих систем.

Складовими частинами комплексу є комп'ютерна програма, призначена для **тестування рівня знань** та умінь з будівельної механіки стержневих систем та **Короткий довідник з будівельної механіки**, а також деякі допоміжні прикладні програми.

17.2. Запуск комплексу АСИСТЕНТ

Комплекс АСИСТЕНТ розташовано на **WEB**-сторінці кафедри будівельної механіки на **WEB**-сайті Київського національного університету будівництва і архітектури (<http://www.knuba.edu.ua>). Комплекс може працювати лише після того, як буде встановлено на Вашому комп'ютері.

Увага! Під час установки комплекс необхідно витягати на диск С:

У результаті на логічному диску **С:** буде створено каталог **С:\ASSISTANT**, де розташовуються прикладні програми комплексу, а також бази індивідуальних завдань. Якщо програмний комплекс було встановлено на інший диск, деякі програми комплексу не працюватимуть.

У подальшому вже встановлений комплекс може бути запущений до роботи, якщо двічі клацнути по програмному файлу **С:\ASSISTANT\ASSIST.exe**. Ярлик цієї програми можна винести на робочий стіл **Windows** і запускати комплекс за допомогою ярлика. Внаслідок зазначених дій на екран комп'ютера виводиться головне вікно комплексу (рис.17.1).



Рис.17.1

17.3. Керування роботою комплексу

Керування роботою комплексу здійснюється за допомогою спадаючих меню, розташованих у верхньому рядку головного вікна (рис.17.2).

Розрахунки Тестування знань Довідки Сервіс Про програму

Рис.17.2

Натискання мишею на пункти меню призводить до розгортання підменю програмних засобів для виконання тих чи інших дій. Так натискання на пункт **Розрахунки** розгортає меню нижчого рівня, в яких прикладні програми згруповані за функціональними ознаками (рис.17.3).

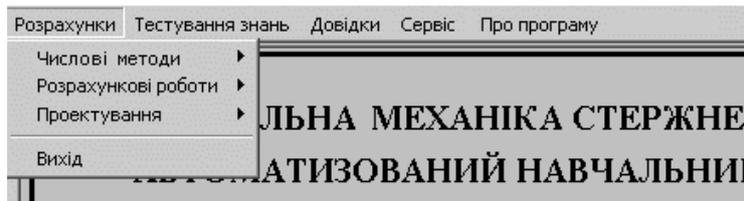


Рис.17.3

Вибір того чи іншого пункту виводить на екран списки програм, які реалізують розв'язання задач відповідного розділу. Так, на рис.17.4 показано групу програм, які входять до складу розділу **"Числові методи"**.

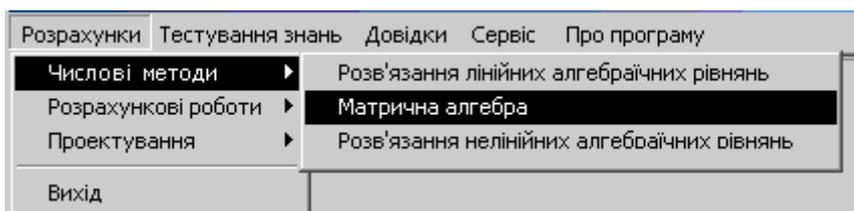


Рис.17.4

17.4. Виконання розрахункових робіт

Виконання розрахункових робіт за допомогою програмного комплексу **АСИСТЕНТ** має певні особливості. В першу чергу необхідно отримати числові значення заздалегідь обумовлених величин, виконавши "вручну" відповідні фрагменти розрахунку. Це можуть бути внутрішні зусилля в деяких перерізах, коефіцієнти систем розв'язувальних рівнянь, реакції опор тощо. Далі через пункт **Розрахунки/Розрахункові роботи** (рис.17.5) залучається певна прикладна програма.

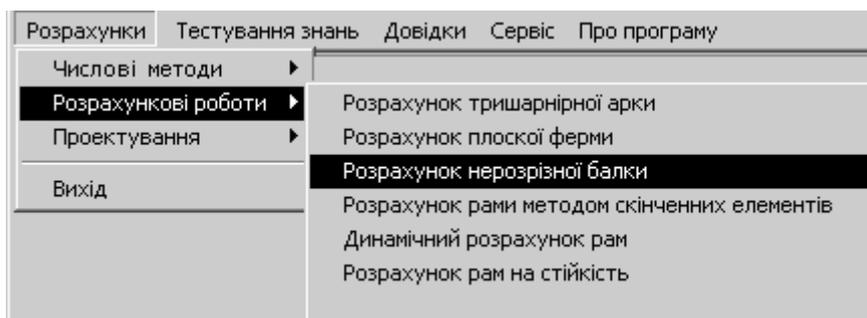


Рис.17.5

17.4.1. Розрахунок тришарнірної арки

Програма призначена для перевірки “ручного” розрахунку тришарнірної арки з опорами на одному рівні. Арка може бути окреслена за квадратною параболою, за синусоїдою або за колом і мати горизонтальну затяжку, яка розташована на рівні або вище рівня опор. На арку можуть діяти не більше, ніж дві зосереджені вертикальні сили, два рівномірно розподілені навантаження та два зосереджені моменти. Додатні сили і навантаження спрямовані вниз, зосереджені моменти – за годинниковою стрілкою.

Студент повинен “вручну” визначити згинальні моменти, поперечні і поздовжні сили в двох фіксованих перерізах: при $x=0,35l$ та $x=0,75l$. Означені величини вводяться у відповідь на запити програми. Якщо результати правильні, програма видасть на екран епюри згинальних моментів, поперечних та поздовжніх сил, а також величини внутрішніх зусиль в низці точок.

17.4.2. Розрахунок плоскої ферми

Програма призначена для перевірки “ручного” розрахунку плоских статично визначуваних ферм на вертикальне навантаження. Схема ферми вибирається за номером з бази індивідуальних завдань. Геометричні розміри і вузлові сили задаються в процесі діалогу.

Студент повинен “вручну” визначити зусилля в п’яти стержнях: верхній пояс, нижній пояс та розкіс, а також у двох стояках, які обмежують панель ліворуч і праворуч.

Якщо зусилля знайдено вірно, то програма видасть зусилля в усіх стержнях ферми.

17.4.3. Розрахунок нерозрізної балки

Програма призначена для перевірки “ручного” розрахунку статично невизначуваної нерозрізної балки на дію постійного навантаження методом трьох моментів і на дію тимчасових навантажень методом моментних фокусів. Схема балки вибирається за номером з бази індивідуальних завдань. Геометричні розміри і величини навантажень задаються в процесі діалогу.

Студент повинен скласти систему рівнянь трьох моментів від дії постійного навантаження (рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю g на всій балці). Коефіцієнти системи рівнянь вводяться в діалогове вікно програми. Якщо коефіцієнти обчислено правильно, програма повідомить величини опорних моментів.

Базуючись на отриманих опорних моментах студент повинен побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил у другому прогоні балки. Зусилля вводяться в програму в режимі діалогу. Якщо результати правильні, програма видасть величини зусиль в усіх прогонах.

Від кожного тимчасового навантаження студент повинен обчислити опорні моменти та побудувати епюри зусиль у завантаженому прогоні. Опорні моменти і зусилля вводяться в

програму в режимі діалогу. Якщо результати правильні, програма видасть величини зусиль в усіх прогонах.

Наприкінці студент визначає розрахункові зусилля і будує обвідні епюри в другому прогоні балки. Якщо величини обчислено правильно, то програма видасть значення розрахункових зусиль в усіх прогонах.

17.4.4. Розрахунок рами методом скінченних елементів

Програма призначена для перевірки “ручного” розрахунку статично невизначуваної багатоповерхової багатопрогонової рами на дію зовнішнього навантаження методом скінченних елементів у формі методу переміщень. Схема рами вибирається за номером з бази індивідуальних завдань. Геометричні розміри і величини навантажень задаються в процесі діалогу.

Робота виконується в два етапи. На першому етапі студент повинен “вручну” обчислити елементи вектора вузлових реакцій та елементи певного стовпця матриці жорсткості скінченно-елементної моделі. Номер стовпця задається різним для різних академгруп.

Обчислені “вручну” результати вводяться у відповідь на запити програми. Якщо результати правильні, програма видасть у табличній формі компоненти вектора вузлових переміщень і запропонує побудувати епюри зусиль у двох певних стержнях.

На другому етапі студент “вручну” визначає зусилля в запропонованих стержнях і вводить їх у відповідь на запити програми. В разі правильних результатів програма видає величини зусиль в усіх стержнях.

17.4.5. Динамічний розрахунок рам

Програма призначена для перевірки “ручного” розрахунку статично невизначуваної рами на динамічні дії. Схема рами вибирається за номером з бази індивідуальних завдань. Геометричні розміри і величини навантажень задаються в процесі діалогу.

Студент повинен “вручну” визначити власні числа і частоти вільних коливань, а також амплітудні величини сили інерції при дії динамічного навантаження. Якщо означені величини обчислено правильно, програма видасть головні форми вільних коливань, а також епюри амплітудних величин внутрішніх зусиль.

17.4.6. Розрахунок рам на стійкість

Програма призначена для перевірки “ручного” розрахунку рами на втрату стійкості першого роду. Схема рами вибирається за номером з бази індивідуальних завдань. Геометричні розміри і величини навантажень задаються в процесі діалогу.

Студент повинен “вручну” обчислити критичні величини зовнішніх сил і ввести їх у відповідь на запити програми. Якщо результати правильні, програма переходить до режиму автоматизованих розрахунків, що дозволяє отримувати критичні величини навантаження при різних співвідношення зовнішніх сил і різних параметрах жорсткості.

17.5. Статичні та динамічні розрахунки стержневих систем

Програмний комплекс АСИСТЕНТ дозволяє виконувати розрахунки плоских стержневих систем на статичні й динамічні дії за допомогою оригінальних програм, які реалізують розрахунки відповідно на дію статичних і динамічних навантажень, а також розрахунки на стійкість першого роду. Звернення до означених програм здійснюється через меню **Розрахунки/Проектування** (рис.17.6).

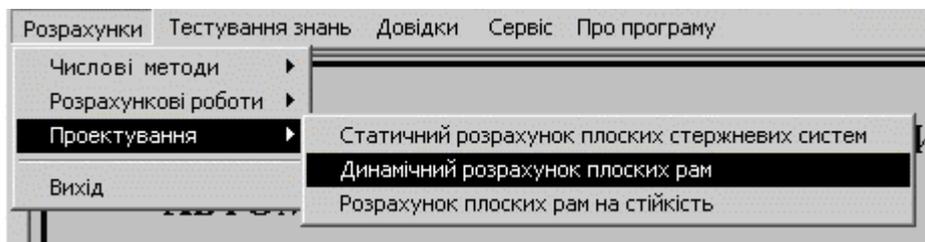


Рис.17.6

Виконанню розрахунків передуює складання за певними правилами вхідної інформації, яка описує розрахункову модель споруди. Інформація являє собою набори чисел, записаних у файл. Для її підготовки необхідно намалювати розрахункову схему з довільним чином пронумерованими вузлами.

За вузли слід приймати точки з'єднання і зломів стержнів та місця зміни жорсткості. Доцільно також приймати за вузли точки прикладення зосереджених сил і моментів та границі розподіленого навантаження. Інакше ці силові впливи потрібно привести до вузлових. На схемі потрібно показати глобальну систему прямокутних координат з початком в будь-якій точці. Крім того, в кожному стержні повинна бути задана згинна жорсткість (EI) і жорсткість (EA) на поздовжні деформації.

Вхідна інформація поділяється на чотири частини:

- загальна інформація;
- інформація про вузли системи;
- інформація про жорсткісні характеристики;
- інформація про стержні системи.

Підготовлена інформація записується на вінчестер у файл з довільно вибраним ім'ям, що складається з літер латинського алфавіту та цифр. Програма зчитує інформацію з файлу, виконує відповідні розрахунки і виводить чисельні і графічні результати.

17.5.1. Розрахунок стержневих систем на статичні дії

Загальні відомості про програму

Програма призначена для статичного розрахунку плоских стержневих систем, які можна апроксимувати прямолінійними стержнями постійної жорсткості. До таких систем можуть бути віднесені балки, рами, ферми і комбіновані системи. Розрахунок ведеться на дію зосереджених сил і моментів та рівномірно розподілених навантажень.

В основу програми покладено метод скінченних елементів у формі методу переміщень. Максимальна кількість вузлів системи - 30, стержнів - 40.

Загальна інформація

Загальна інформація про розрахункову схему складається з трьох чисел, які характеризують:

- кількість вузлів розрахункової схеми;
- кількість стержнів;
- кількість типів жорсткісних характеристик стержнів.

Інформація про вузли системи

Інформація про вузли містить дані щодо наявності в них опорних зв'язків, координати вузлів у прийнятій глобальній системі координат та про вузлові навантаження.

Кожному вузлу відповідає один рядок інформації, який містить:

- ознаку наявності опорного пристрою (ПО), який може приймати такі значення:
 - 0 - опорні зв'язки у вузлі відсутні;
 - 1 - у вузлі встановлене затиснення;
 - 2 - у вузлі встановлена шарнірно-нерухома опора;
 - 3 - у вузлі встановлено вертикальний опорний стержень;
 - 4 - у вузлі встановлено горизонтальний опорний стержень.
- координати X , Y вузла в прийнятій глобальній системі координат;
- величини вузлових навантажень: P_x , P_y - зосереджені сили, спрямовані паралельно осям OX , OY відповідно, M – зосереджений момент у вузлі. Сили P_x , P_y вважаються додатними, якщо їхні напрями збігаються з напрямками відповідних координатних осей, зосереджений момент вважається додатним, якщо напрям його обертання збігається з рухом годинникової стрілки.

Порядок рядків інформації про вузли повинен відповідати їхній нумерації. Кількість рядків інформації про вузли повинна дорівнювати кількості вузлів.

Жорскісні характеристики стержнів

Інформація містить значення жорсткості при згинній (EI) і при поздовжній деформації (EA) стержнів системи. Стержні, що мають однакові поперечні перетини і модулі пружності, розглядаються як стержні одного типорозміру. Кожному типорозміру відповідає один рядок, що містить значення EI та EA . Номер рядка повинен відповідати номеру даного типорозміру. Кількість рядків повинна дорівнювати кількості типів жорскісних характеристик, указаних у загальній інформації.

Інформація про стержні системи

Інформація про стержні системи містить відомості про номери вузлів, з якими сполучається кожний стержень, про способи примикання стержнів до вузлів, про номери їхніх типів жорсткості і про розподілені навантаження.

Кожному стержню системи відповідає один рядок інформації, який містить:

- Номер вузла на початку стержня і номер вузла в його кінці. При цьому слід мати на увазі, що номер початкового вузла завжди повинен бути меншим номера кінцевого. Номери вузлів, до яких стержень примикає шарнірно, записуються із знаком мінус.
- Номер рядка інформації жорскісних характеристик, які відповідають типу поперечного перерізу даного стержня.
- Два числа, що характеризують інтенсивність розподілених на стержні навантажень qx і qy .

Рядки інформації про стержні можуть записуватися у довільному порядку. Загальна кількість рядків повинна дорівнювати числу, що визначає кількість стержнів у загальній інформації.

Інформація, що виводиться

Результати розрахунку записуються у файл зі стандартним ім'ям **RamaD.tmp** у каталог **C:\ASSISTANT\RAZD3\RAZD31**. При розв'язанні наступної задачі зміст файлу оновлюється. Файл **RamaD.tmp** може виводитись в робоче вікно програми або на принтер у процесі діалогу. При необхідності цей файл може бути відредагований будь-яким текстовим редактором, наприклад **NotePad** і, згодом виведений на друк.

Роздруківка результатів розв'язання задачі містить наступні три групи інформації:

- вхідні дані задачі;
- таблиця "Поступальні та кутові переміщення і вузлів";
- таблиця "Величини зусиль у стержнях".

У таблиці "Поступальні та кутові переміщення і вузлів" виводяться поступальні та кутові переміщення вузлів стержневої системи, що отримані внаслідок статичного розрахунку. Додатні значення поступальних переміщень D_x , D_y відповідають зміщенням вузла у напрямках осей глобальної системи координат.

Додатне значення кута повороту D_f відповідає повороту вузла в напрямі годинникової стрілки.

У таблиці "Величини зусиль у стержнях" кожному стержню відповідає один рядок, який містить номери вузлів на початку і в кінці стержня, згинальні моменти на початку, посередині і в кінці стержня. При побудові епюри згинальних моментів за результатами, представленими в таблиці, від'ємні величини згинальних моментів потрібно відкладати у бік осі Y місцевої системи координат стержня, що розглядається. Знаки на епюрах Q і N повинні відповідати знакам, що наведені в таблиці.

17.5.2. Динамічний розрахунок рам

Загальні відомості про програму

Програма призначена для динамічного розрахунку плоских стержневих систем з розподіленими і зосередженими масами, які апроксимуються прямолінійними стержнями постійної жорсткості. До таких систем можуть бути віднесені балки, рами, ферми і комбіновані системи. Розрахунок ведеться на вільні та змушені коливання від дії зосереджених сил і моментів. Навантаження змінюються у часі за гармонічним законом. Якщо водночас діє кілька навантажень, то всі вони змінюються синхронно та синфазно.

В основу програми покладений метод скінченних елементів у формі методу переміщень. Максимальна кількість вузлів системи - 30, стержнів - 40. Кількість типів поперечних перерізів - 20.

При роботі з програмою необхідно ввести ім'я файлу, що містить інформацію про стержневу систему.

Загальна інформація

Загальна інформація складається з чотирьох цілих і одного дійсного числа. Тут послідовно записуються:

- кількість вузлів системи;
- кількість стержнів;
- кількість типів жорсткісних характеристик стержнів;
- частота збурюючих силових дій, виражена через власну частоту основного тону коливань.

Так, для розрахунку рами, яка містить 16 вузлів, 24 стержні має 5 типів жорсткісних характеристик і розраховується на змушені коливання з частотою $\theta = 0,9\omega_1$ (де ω_1 – частота основна основного тону вільних коливань), загальна інформація для виведення на друк 4 головних форм коливань має вигляд:

16 24 5 4 0.9

Інформація про вузли

Інформація про вузли включає дані про наявність опорних зв'язків у вузлах стержневої системи, координатах вузлів у прийнятій загальній системі координат, розташованих у вузлах зосереджених масах і про вузлові динамічні навантаження.

Кожному вузлу відповідає один рядок інформації, що містить такі дані:

- номер типу опорного пристрою у вузлі, який може мати такі значення:
 - 0 - опорні зв'язки у вузлі відсутні;
 - 1 - у вузлі встановлене жорстке затиснення;
 - 2 - у вузлі є шарнірно-нерухома опора;
 - 3 - у вузлі є вертикальний опорний стержень;
 - 4 - у вузлі є горизонтальний опорний стержень.
- координати X, Y вузла в прийнятій загальній системі координат;
- величина зосередженої у вузлі маси;
- вузлові зосереджені динамічні навантаження: P_x, P_y – амплітудні величини зосереджених сил, спрямованих паралельно осям OX, OY відповідно, M – зосереджений амплітудний момент у вузлі. Сили P_x, P_y вважаються додатними, якщо їх напрями збігаються з напрями відповідних координатних осей, зосереджений момент вважається додатним, якщо обертається за ходом годинникової стрілки.

Порядок рядків інформації про вузли мусить відповідати нумерації вузлів на розрахунковій схемі. Кількість рядків вузлової інформації має дорівнювати кількості вузлів.

Таблиця жорсткісних характеристик стержнів

Таблиця містить значення жорсткостей на згинну (EI) та поздовжню (EA) деформації, а також погонні маси (M_p) стержнів системи.

Стержні, що мають однакові поперечні перетини, модулі пружності та погонні маси розглядаються як елементи одного типорозміру. Кожному типорозміру відповідає один рядок таблиці, що містить значення EI, EA та M_p .

Номер рядка таблиці повинен відповідати номеру даного типорозміру. Кількість рядків повинна дорівнювати кількості типів жорсткісних характеристик, вказаних у загальній інформації.

Інформація про стержні системи

Інформація про стержні системи містить відомості про номери вузлів на початку і кінці кожного стержня, про способи примикання стержнів до вузлів та про номери їх типу жорсткості.

Кожному стержню системи відповідає один рядок інформації який містить:

- номер вузла на початку стержня і номер вузла в його кінці При цьому потрібно мати на увазі, що номер початкового вузла завжди повинен бути менше номера кінцевого вузла. Номер вузлів, до яких стержень примикає шарнірно, записуються зі знаком мінус;
- номер рядка таблиці жорсткісних характеристик, які відповідають даному стержню.

Рядки з інформацією для стержнів можуть розташовуватися у довільному порядку. Загальна кількість рядків повинна дорівнювати числу, що визначає кількість рядків у загальній інформації.

Інформація, що виводиться

Результат розрахунку зберігаються у тимчасовому файлі **Dinpr.tmp** у каталозі **C:\ASSISTANT\RAZD3\RAZD32**. Файл може бути виведено на дисплей або на принтер безпосередньо з програми.

Роздруківка результатів розв'язання задачі містить наступні групи даних:

- вхідна інформація;
- власні числа, колові частоти та вузлові переміщення, які визначають головні форми вільних коливань;
- таблиця "Сили інерції", в якій виводяться амплітудні величини сил інерції. Таблиця "Зусилля і моменти в стержнях", де наведено амплітудні величини згинальних моментів, поперечних та поздовжніх сил для всіх стержнів.

17.5.3. Розрахунок плоских рам на стійкість

Загальні відомості

Програма призначена для розрахунку на стійкість плоских стержневих систем, які можуть бути апроксимовані прямолінійними стержнями постійної жорсткості. До таких схем можуть бути віднесені балки, рами, ферми та комбіновані системи. Розрахунок виконується у передбаченні, що до моменту настання втрати стійкості в стержнях виникають лише поздовжні сили, які залежать від одного параметра (параметра навантаження), критична величина якого невідома і має бути визначена в процесі розрахунку.

В основу програми покладено метод скінчених елементів у формі методу переміщень при урахуванні впливу поздовжніх сил на деформації згину. Поява згинних деформацій в елементах системи, що перебуває в стані центрального стиснення, розглядається як втрата стійкості першого

роду. Це стає можливим, якщо визначник розв'язувальних рівнянь дорівнює нулю (рівняння стійкості). За невідому величину в рівнянні стійкості виступає параметр стійкості ν , який виражається через параметр навантаження P , згинну жорсткість EI та довжину l одного із стержнів залежністю

$$\nu = \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}}$$

Рівняння стійкості розв'язується методом послідовних наближень шляхом варіювання параметра стійкості ν . Процес обчислень закінчується, якщо різниця між параметрами стійкості двох послідовних наближень не перевищує 0.0001.

Максимальна кількість вузлів системи – 30, стержнів - 40, типів поперечних перерізів – 20.

Загальна інформація

Загальна інформація про систему складається з трьох чисел, які характеризують:

- кількість вузлів розрахункової схеми;
- кількість стержнів;
- кількість типів жорсткісних характеристик стержнів.

Інформація про вузли системи

Інформація про вузли містить дані про наявність в них опорних зв'язків та їхні координати в прийнятій глобальній системі координат.

Кожному вузлу відповідає один рядок інформації, який містить:

- ознаку наявності опорного пристрою ПО, яка може мати такі значення:
 - 0 - опорні зв'язки у вузлі відсутні;
 - 1 - у вузлі встановлене затиснення;
 - 2 - у вузлі встановлена шарнірно-нерухома опора;
 - 3 - у вузлі встановлено вертикальний опорний стержень;
 - 4 - у вузлі встановлено горизонтальний опорний стержень.
- координати X, Y вузла в прийнятій глобальній системі координат.

Порядок рядків інформації про вузли повинен відповідати їх нумерації. Кількість рядків інформації про вузли повинна дорівнювати кількості вузлів.

Жорсткісні характеристики стержнів

Інформація містить значення жорсткості при згині (EI) та поздовжні деформації (EA) стержнів системи. Стержні, що мають однакові жорсткості, вважаються елементами одного типорозміру.

Кожному типорозміру відповідає один рядок інформації, що містить значення *EI* та *EA*. Номер рядка інформації повинен відповідати номеру даного типорозміру. Кількість рядків повинна дорівнювати кількості типів жорскісних характеристик, вказаних у загальній інформації.

Інформація про стержні системи

Інформація про стержні системи містить відомості про номери вузлів, з якими сполучається кожний стержень, про способи примикання стержнів до вузлів, про номери типів жорсткості стержнів і про величину поздовжньої сили в стержнях визначену до настання втрати стійкості.

Кожному стержню системи відповідає один рядок інформації, який містить:

- Номер вузла на початку стержня і номер вузла в його кінці. При цьому треба мати на увазі, що номер початкового вузла завжди повинен бути меншим номера кінцевого вузла. Номери вузлів, до яких стержень примикає шарнірно, записуються із знаком мінус.
- Номер рядка інформації жорскісних характеристик, що відповідають даному стержню.
- Множник параметра навантаження, який визначає величину поздовжньої сили в стержні.

Рядки інформації про стержні можуть записуватися в довільному порядку. Загальна кількість рядків повинна дорівнювати кількості рядків у загальній інформації.

Інформація, що виводиться

Результати розрахунку автоматично записують у файл, який має стандартне ім'я USS.tmp і розміщується в каталозі C:\ASSISTANT\RAZD3\RAZD33. При розв'язанні наступної задачі зміст файлу оновлюється. Файл USS.tmp може виводиться на дисплей або на принтер безпосередньо з програми. При необхідності цей файл може бути відредагований будь-яким текстовим редактором і згодом виведений на друк.

Роздруківка результатів розв'язання задачі містить наступні три групи інформації:

- вхідні дані задачі;
- інформацію щодо величин критичних параметрів стійкості та навантаження;
- таблиця характеристик стиснених стержнів.

18. Обчислювальний комплекс Structure CAD

18.1. Основні характеристики

Обчислювальний комплекс Structure CAD (OK SCAD) являє собою систему для чисельних досліджень міцності та проектування широкого кола об'єктів – плоских і просторових стержневих систем, пластин і оболонок, просторових масивних тіл, а також їх комбінацій, які являють собою відповідальні будівельні конструкції. Дослідження можуть проводитись при статичних (силових, температурних і кінематичних) та динамічних навантаженнях.

Обчислювальний комплекс SCAD є ядром інтегрованої системи SCAD Office, що складається із декількох груп програм – проектувально-аналітичних, проектувально-конструкторських і допоміжних, які дозволяють комплексно вирішувати питання розрахунків та проектування сталевих і залізобетонних конструкцій.

До групи проектувально-аналітичних програм, в яких реалізовані алгоритми розв'язання окремих задач міцності указаних конструкцій відповідно до вимог нормативних документів (СНиП, ДБН України (ДБН) або Eurocode) відносяться програми:

- КРИСТАЛЛ – розрахунок елементів сталевих конструкцій;
- АРБАТ – підбір арматури і експертиза елементів залізобетонних конструкцій;
- КАМИН – розрахунок кам'яних і армокам'яних конструкцій, включаючи місцеву експертизу міцності у місцях сполучення із балками та іншими елементами конструкції, а також аналіз міцності з урахуванням наявності тріщин;
- ДЕКОР – розрахунок дерев'яних конструкцій;
- ЗАПРОС – розрахунок елементів основ і фундаментів;
- ОТКОС – аналіз стійкості укосів і схилів.

До групи проектувально-конструкторських програм, що дозволяють виконувати розроблення конструкторської документації на стадії детального пророблення проектного рішення, відносяться програми:

- МОНОЛИТ – проектування залізобетонних монолітних ребристих перекриттів;
- КОМЕТА, КОМЕТА-2 – розрахунок і проектування вузлів сталевих конструкцій.

До групи допоміжних програм, що спрямовані на виконання окремих стандартних операцій, які являють собою етапи підготовки вихідних даних та формування розрахункових схем, відносяться програми:

- ВЕСТ – розрахунок навантажень по СНиП "Нагрузки и воздействия" и ДБН;
- КРОСС – розрахунок коефіцієнтів постелі будівель і споруд на пружній основі.

- КоКон – довідник з коефіцієнтів концентрації напружень і коефіцієнтів інтенсивності напружень;
- КУСТ – розрахунково-теоретичний довідник проектувальника.
- КОНСТРУКТОР СЕЧЕНИЙ – конструювання поперечних перерізів з прокатних профілів і листів та визначення їх геометричних характеристик;
- КОНСУЛ – побудова довільних геометричних перерізів і визначення їх геометричних характеристик на основі теорії суцільних стержнів;
- ТОНУС – побудова довільних (у тому числі відкрито-замкнених) поперечних перерізів і визначення їх геометричних характеристик на основі теорії тонкостінних стержнів;
- СЕЗАМ – визначення еквівалентних перерізів (двотавра, швелера, тавра, коробчастого перерізу), основні геометричні характеристики яких (площа, момент інерції і момент опору) найбільше відповідають іншим перерізам довільної форми.

Результати роботи останніх чотирьох програм можуть бути використані в ОК SCAD при описі жорсткісних характеристик конструкції.

З точки зору математичного забезпечення ОК SCAD базується на методі скінчених елементів (МСЕ). В ОК SCAD реалізований МСЕ в переміщеннях, що обумовлено простотою алгоритмізації і фізичної інтерпретації та можливістю створення єдиних алгоритмів побудови матриці жорсткості та векторів навантажень для різних типів скінчених елементів (СЕ). Скінченоелементна база ОК SCAD включає стержневі СЕ, що є характерними для типових плоских і просторових стержневих конструкцій, у тому числі стержневі СЕ на пружній основі, пластинчасті СЕ – трикутні, прямокутні, довільної форми чотирикутні для створення дискретних моделей балок-стінок, плит, оболонки, у тому числі на пружній основі, просторові СЕ у вигляді тетраедра, паралелепіпеда, трикутної і чотирикутної призми, а також спеціальні скінчені елементи, що враховують особливі умови передачі навантаження або роботи матеріалу – в'язі скінченої жорсткості, СЕ для моделювання ґрунтової основи та інші.

Програмне забезпечення ОК SCAD ґрунтується на використанні операційної системи Windows. Зважаючи на це, організація інтерфейсу ОК SCAD дозволяє користувачу, знайомому з цим середовищем, достатньо швидко опанувати основні прийоми роботи з цим програмним комплексом.

Для формування розрахункової дискретної моделі МСЕ в ОК SCAD реалізовані два види графічних модулів – графічний препроцесор, що дозволяє створювати, переглядати і коригувати розрахункові моделі конструкцій, складені з як окремих СЕ, так і з СЕ в складі стандартних параметричних моделей (наприклад рам або ферм) та препроцесор ФОРУМ для формування укрупнених моделей. У графічному препроцесорі реалізовані багатоваріантні способи створення і

коригування дискретних моделей із використанням панелей інструментів, контекстні підказки, засоби масштабування, фільтри для перегляду окремих складових дискретної моделі і інформації про неї, використання різних одиниць виміру і т.ін.

Процесор ОК SCAD дозволяє розв'язувати задачі статички і динаміки із великою кількістю ступенів вільності (до 392000). Розрахунок супроводжується детальним протоколом, що містить викладення результатів контролю вихідних даних (зокрема аналізу наявності мінімально необхідної інформації – геометрії моделі, жорсткісних характеристик всіх елементів, навантаження та геометричної незмінюваності системи і повідомлення про наявні помилки) а також, при «прийнятті» завдання на виконання – інформацію про всі виконувані етапи розрахунку і необхідні для цього ресурси комп'ютера. У випадку відсутності мінімально необхідної для розрахунку інформації розрахунок не виконується.

Графічний постпроцесор реалізує засоби відображення результатів у вигляді деформованих схем, епюр або ізоліній досліджуваних фізичних величин із виведенням числових значень як безпосередньо на графічному зображенні, так і шляхом формування електронних таблиць їх значень.

Наявні в ОК SCAD засоби документування результатів дозволяють формувати звіти за результатами роботи з комплексом. При цьому вся інформація може бути представлена як у табличному, так і в графічному вигляді. Табличний і графічний розділи необхідної для звіту інформації можуть бути розміщені спільно на спеціально створюваних аркушах, на які також можуть бути додані пояснення і коментарі. Крім того, таблична інформація може бути передана в Microsoft Excel для виконання обробки результатів або додаткових розрахунків, не передбачених в ОК SCAD.

До складу ОК SCAD входять також спеціальні програми-конвектори, які дозволяють підтримувати інформаційний зв'язок з іншими широко розповсюдженими Cad-системами, такими як AutoCad, ArchiCad, Hypersteel, Allplan, ФОК- ПК та ін.

Таким чином, ОК SCAD є сучасним універсальним засобом розрахунку і проектування будівельних конструкцій.

Обсяг даного навчального посібника не дозволяє у повному обсязі розкрити всі можливості і навести опис виконання більшості операцій в ОК SCAD. Зважаючи, що у межах посібника розглядаються стержневі системи, викладення матеріалу пов'язаного із описом ОК SCAD теж обмежено описом прийомів створення дискретних моделей і прикладами розв'язання найпростіших задач для стержневих систем. Разом з тим, необхідно зауважити, що виконання значної частини етапів створення дискретних моделей стержневих систем і аналізу результатів розрахунку (завдання в'язей, зовнішніх навантажень, перегляд інформації про дискретну модель і

результатів розрахунку) є здебільшого ідентичними випадку, наприклад, пластинчастих конструкцій. Тому наведений у даній главі матеріал є достатнім для первісного опанування ОК SCAD в обсязі, необхідному для навчальних цілей.

Більш докладний опис теоретичних основ і принципів розрахунку, покладених в основу роботи інтегрованої системи SCAD Office і методик її використання, може бути знайдений в Інтернеті на сайті <http://www.scadgroup.com>.

18.2. Установлення ОК SCAD

ОК SCAD є комерційним ліцензійним програмним забезпеченням. Для навчальних цілей може бути використана демонстраційна версія ОК SCAD, яка має певні обмеження щодо кількості невідомих, опису властивостей дискретних моделей, постановок задач та виконуваних операцій обробки результатів розрахунку, але є достатньою для первісного ознайомлення й опанування основних принципів роботи з ОК SCAD.

Інсталяційну програму **scad.exe** для установлення демонстративної версії 7.27 ОК SCAD для Windows 95/98/NT можна скопіювати з WEB-сторінки розробника програмного комплексу – компанії Scadgroup – за електронною адресою <http://www.scadgroup.com/download/scad.exe>. Після запуску інсталяційної програми розпочинається стандартна процедура установки Windows-програм, у процесі якої необхідно обрати шлях для установлення програми на жорсткому диску (або погодитись із запропонованим програмою установки **C:\WinSCAD**) та визначити місце розташування службових папок **SDATA** і **SWORK**, які призначені для збереження поточної інформації про розв'язувані задачі.

Використання зазначених папок підпорядковується наступному принципу. Кожна задача, розв'язувана із використанням ОК SCAD, подається у вигляді єдиного інформаційного середовища, що має загальну назву «**Проект**» і містить всю інформацію про розрахункову схему, представлену в термінах ОК SCAD. **Проект** ідентифікується із використанням імені (наприклад «**my_ project**»). Це ж ім'я може бути використано в якості імен файлів, що містять інформацію про розрахункову дискретну модель, навантаження результати розрахунку (в загальному випадку ці імена можуть відрізнитись). Цей файл зберігається в папці **SDATA**, і має ім'я із розширенням **SPR**. Формат файлу ***.SPR** для **Windows** є асоційованим із ОК SCAD, тобто застосована до цього файлу команда «**Открыть**» у меню **Проводника** приводить до завантаження ОК SCAD. Перенесення цього файлу з одного комп'ютера, де встановлений ОК SCAD, на інший дозволяє повністю переносити інформацію про створену дискретну модель. Інший файл з таким саме ім'ям формується при завантаженні ОК SCAD для роботи із існуючим проектом, або при створенні нового проекту і зберігається в папці **SWORK** упродовж роботи із ОК SCAD. Цей файл містить

поточну інформацію про створення дискретної моделі і проведення розрахунку, яка, зокрема, дозволяє відмінити внесені в дискретну модель корективи, повертатись на попередні кроки її редагування, а також відновлювати відмінені дії. Згадані файли формуються автоматично в ході роботи із інтерактивними графічними засобами, реалізованими в ОК SCAD. Інформація про дискретну модель може бути представлена також у вигляді спеціального текстового файлу. Цей файл є сумісним як з MS DOS-версіями комплексу, так із розглядуваною Windows-версією, що надає змогу використовувати для проведення розрахунків інформацію про раніше створені моделі. Текстовий опис вхідної інформації потребує високої кваліфікації користувача ОК SCAD і використовується здебільшого при описі не стандартних розрахункових схем.

18.3. Завантаження ОК SCAD і основні елементи керування

Робота із ОК SCAD базується на використанні інтерактивних графічних засобів, які дозволяють проводити створення, візуалізацію і редагування дискретних моделей МСЕ, виконання розрахунків і відображення результатів. Як було зазначено раніше, інтерфейс ОК SCAD містить стандартні для Windows-програм елементи керування. Основними з них є меню із відповідними підменю і панелі інструментів з кнопками команд, на яких нанесені символічними зображення, що відповідають найбільш часто вживаним командам меню.

Запуск ОК SCAD може бути здійснений із використанням команди головного меню Windows **"Пуск" → "Програми" → "SCAD" → "SCAD для Windows"** (рис.18.1), яка додається в головне меню в процесі установлення, або із використанням ярлика "SCAD" на робочому столі Windows.

Після запуску ОК SCAD на екрані з'являється початкове вікно, яке містить, зокрема, завантажувальне меню **«Проект»** і відповідну йому панель інструментів (рис.18.2). Відповідність команд меню і кнопок панелі інструментів показана на рисунку ламаними лініями.

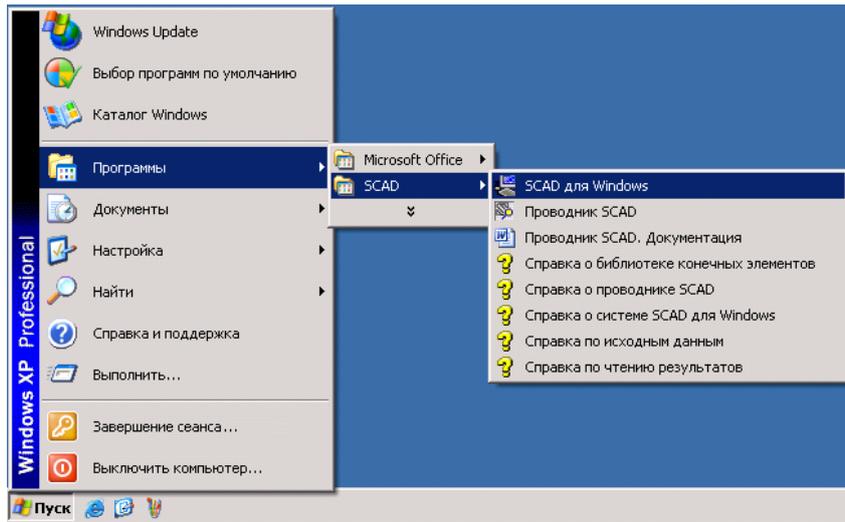


Рис.18.1

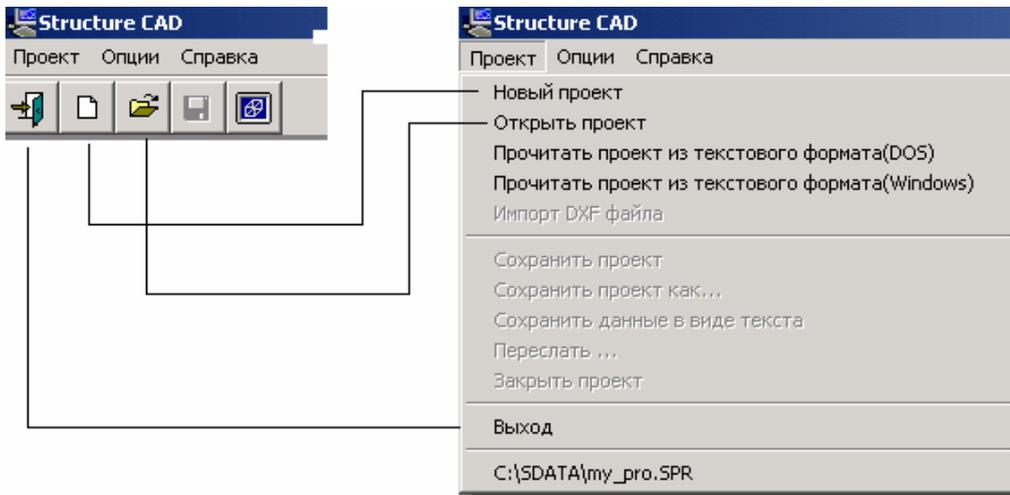


Рис.18.2

Вибір команди «**Новый проект**» викликає відповідне вікно (рис.18.3), в текстові поля «**Наименование**», «**Организация**», «**Объект**» якого необхідно ввести ідентифікаційну інформацію проекту, обрати норми проектування, які будуть застосовані при виконанні розрахунків, що стосуються даного проекту, одиниці виміру і тип розрахункової схеми.

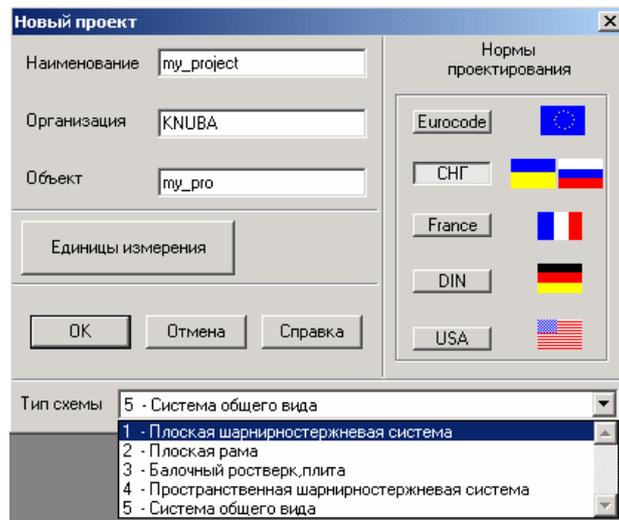


Рис.18.3

Натиснення кнопки «Единицы измерения» приводить до появи допоміжного вікна (рис.18.4), в якому з відповідних списків окремо обираються одиниці виміру лінійних розмірів елементів конструкції, розмірів поперечних перерізів, навантажень та форма їх подання (числовий або експоненціальний) та кількість значущих цифр, що встановлюється кнопками «>» і «<».

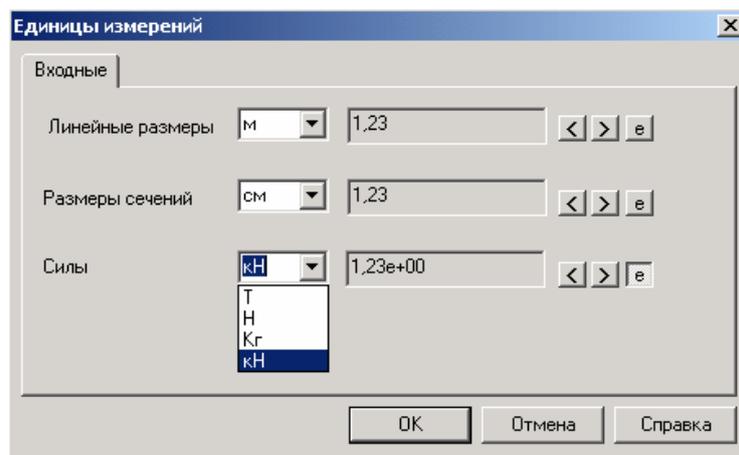


Рис.18.4

Вибір значення текстового поля «Тип схеми» проводиться зі списку, показаного на рис.18.3. «Тип схеми» є атрибутом, який визначається на початку створення розрахункової схеми і в подальшому не може бути змінений. Зважаючи на це, при виборі значення атрибуту «Тип схеми» необхідно враховувати наступні міркування. У загальному випадку вузол дискретної моделі являє собою тверде тіло скінчено малого розміру. Як відомо, такий об'єкт має в просторі шість ступенів вільності – три поступальних (лінійних) переміщення X , Y , Z в напрямку осей декартової системи координат xuz (яка в подальшому вважається базисною системою координат для опису дискретної моделі) – і три кутових переміщення (кути повороту) відносно цих осей – UX , UY , UZ . Це

стосується як просторових конструкцій загального вигляду так і стержневих систем. Зокрема, у випадку наявності всіх зазначених ступенів вільності, для стержневих систем розглядається універсальний стержневий СЕ (рис.18.5).

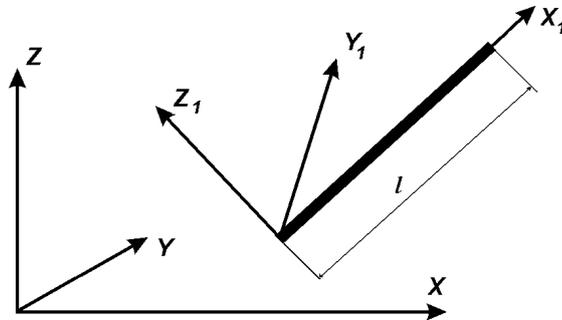


Рис.18.5

У певних часткових випадках одне або декілька переміщень можуть не спричиняти впливу на напружений стан конструкції. Типовим випадком є плоска ферма, в якій, внаслідок особливості прийнятої в будівельній механіці розрахункової схеми, всі стержні вважаються приєднаними до вузлів шарнірно. Таким чином кути повороту стержнів у вузлах не впливають на величини внутрішніх зусиль. Крім того, в плоских конструкціях також не спричиняють впливу на напружено-деформований стан переміщення, спрямовані вздовж осі, перпендикулярної до площини розташування конструкції. Якщо для опису ступенів вільності всіх вузлів розглядуваної системи достатнім є використання певної скороченої кількості невідомих переміщень, то всі інші переміщення можуть бути виключені з розгляду, що дозволить, відповідно, зменшити обчислювальні витрати. Таким чином, в залежності від характерних особливостей роботи конкретної розглядуваної конструкції використовуються різні модифікації універсального стержневого СЕ (табл.18.1), кількість ступенів вільності в яких обмежена. При цьому в якості визначального значення атрибуту «Тип схеми» необхідно обирати найбільшу кількість невідомих, що буде використана для опису окремих складових розрахункової схеми.

Таблиця 18.1

Тип схеми	Розглядувана конструкція	Ступені вільності
1	«Плоская шарнирно стержневая система» (плоска ферма)	X, Z
2	«Плоская рама» (плоска рама)	X, Z, UY
3	«Балочный ростверк», «плита»	Z, UX, UY
4	«Пространственная шарнирно-стержневая система» (просторова ферма)	X, Y, Z
5	«Система общего вида» (система загального виду)	$X, Y, Z,$ UX, UY, UZ

Крім того, після визначення зазначених параметрів користувачу пропонується визначити ім'я файлів ***.SPR**.

Після виконання дій із створення проекту на екрані з'являється вікно керування роботою комплексу із «деревом проекту» (рис.18.6), яке являє собою впорядковану систему вкладених папок. Їхнє відкриття дозволяє здійснювати перехід між окремими етапами роботи, основними з яких є задання вихідних даних, розрахунок і представлення результатів. Послідовність розташування папок згори до низу відтворює послідовність дій для розв'язання задачі.

Знаки  , що стоять біля окремих пунктів указують на необхідність задання вихідної інформації або наявність помилок в даному пункті, а знак  вказує на недоступність даної операції в поточний момент роботи з комплексом. Це може бути обумовлено або нестачею вихідних даних (зокрема, лінійний розрахунок буде доступним в даній демонстраційній версії комплексу лише після повного задання всієї інформації в розділах **«Исходные данные»** → **«Расчетная схема»**) або обмеженнями, встановленими в даній версії ОК SCAD. Активізація кожного з доступних пунктів «дерева проекту» здійснюється шляхом підведення до нього курсору миші і натискання її лівої кнопки.

Активізація розділу **«Расчетная схема»** або його підрозділів відкриває головне вікно графічного препроцесора (рис.18.7). У верхньому рядку цього вікна розміщується ім'я відкритого проекту. В розташованому в наступному рядку меню зібрані команди, які здійснюють налаштування і керування роботою ОК SCAD (пункти **«Проект»**, **«Файл»**, **«Опции»**, **«Операции»**) та виклик додаткових допоміжних функцій (**«Сервис»** і **«Справка»**). Два наступних

рядки займає панель інструментів, яка систематизована за шістьма розділами – «Управление», «Схема», «Назначения», «Узлы и элементы», «Загрузки», «Группы». Кожний із розділів активізується натисненням лівої кнопки миші на відповідну іменну закладку розділу. При підведенні курсору миші до кожної з кнопок панелі інструментів на екрані з'являється контекстна підказка із назвою відповідної команди.

Виконання переважної кількості команд, що викликаються з панелі інструментів, виконується за наступним алгоритмом:

- активізація команди (натисненням лівою кнопкою миші відповідної кнопки панелі інструментів);
- призначення параметрів команди (задання числових значень величин, визначення прив'язки до осей координат та ін.), що виконується для частини команд при появі відповідного діалогового вікна;
- вибір на розрахунковій схемі вузлів і елементів, до яких застосовується команда;
- натиснення кнопки «ОК» у відповідному розділі панелі інструментів або клавіші «Enter» на клавіатурі.

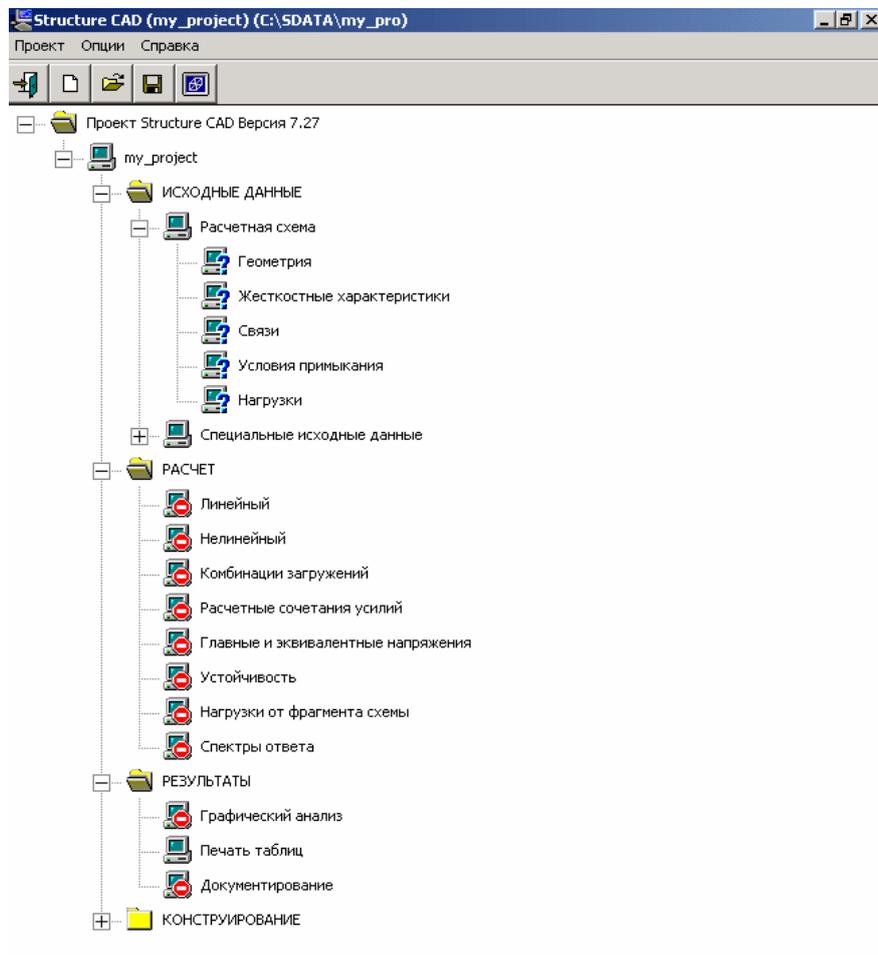


Рис.18.6

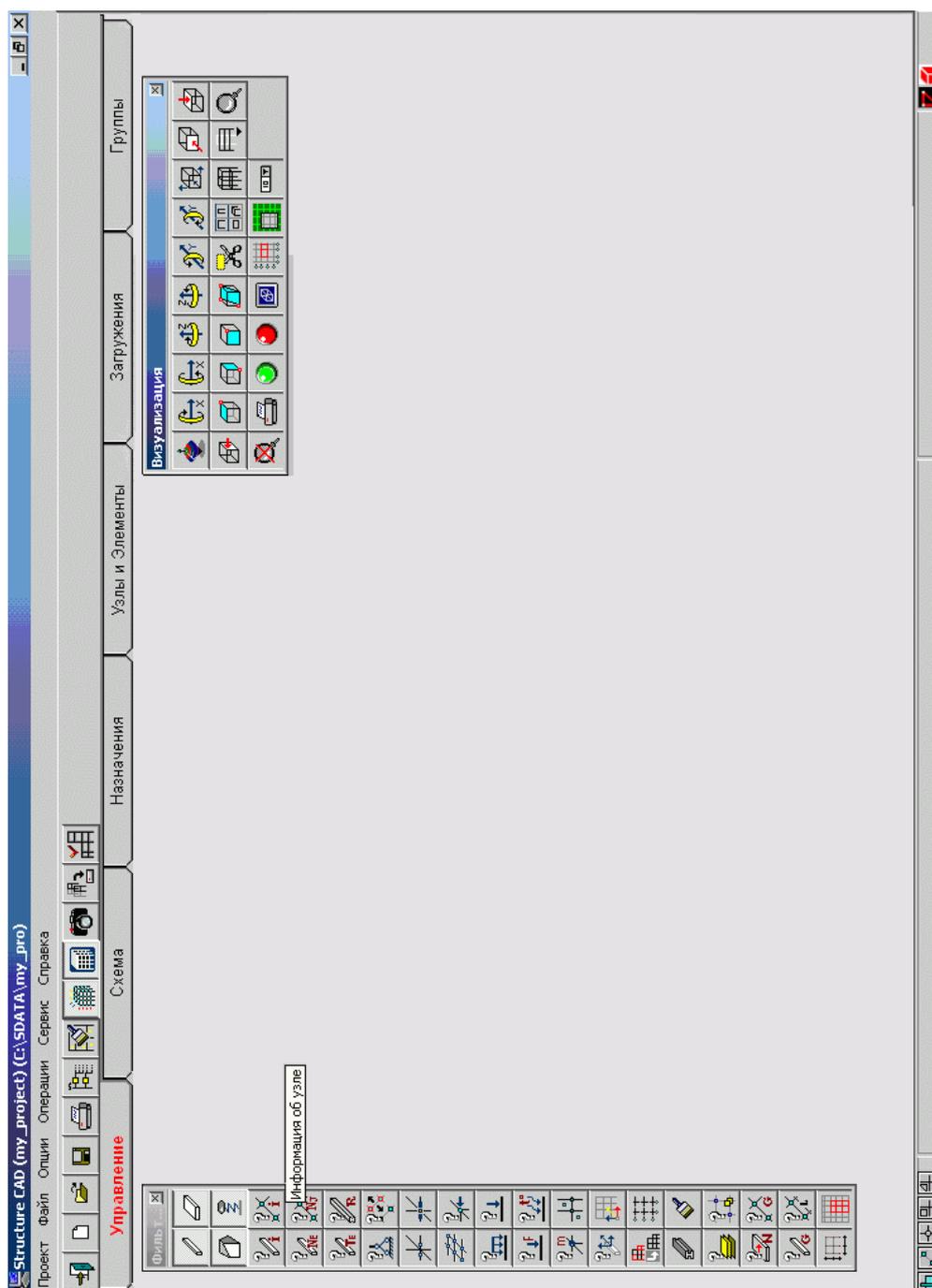


Рис.18.7

Вибір окремих вузлів або скінчених елементів здійснюється вказуванням на них курсором і натисканням лівої кнопки миші. При цьому вузол або СЕ виділяється червоним кольором. Для вибору груп вузлів або СЕ використовується курсор з прямокутною або полігональною рамкою. Переключення між режимами вибору окремих елементів розрахункової моделі та курсором з рамкою здійснюється, зокрема із використанням кнопок розташованих в лівій частині нижнього рядка вікна графічного препроцесора (рис.18.7). Ці кнопки дозволяють здійснювати вибір окремих вузлів (), окремих СЕ (), обрати курсор з прямокутною () або полігональною ()

рамкою. Інший спосіб змінення режимів вибору вузлів і СЕ реалізується із використанням діалогового вікна «**Выбор узлов и элементов**» (рис.18.8), виклик якого здійснюється натисканням правої кнопки миші у вільній частині робочого поля. Це вікно містить додаткові опції вибору, зокрема можливість здійснення вибору тільки певним чином розташованих стержневих СЕ – горизонтальних, вертикальних або похилих, переключення здійснюється натисненням відповідних кнопок у вікні), або пластинчастих СЕ, розташованих в певній площині.

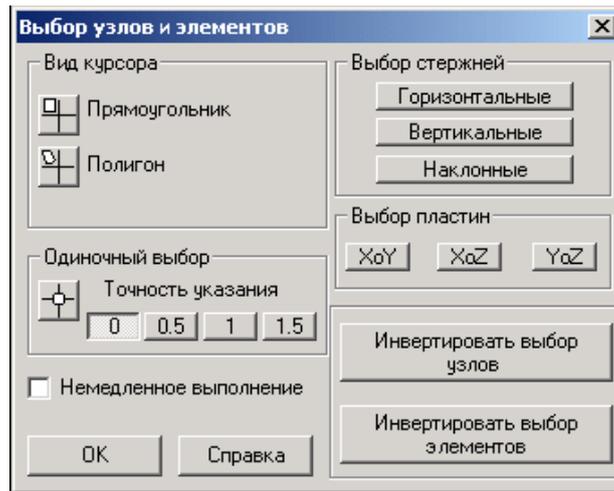


Рис.18.8

Розташована нижче частина вікна графічного препроцесора являє собою робоче поле графічного інтерфейсу, в якому відображається розрахункова модель. На робочому полі розташовані також окремі вікна із меню. Меню «**Фильтры отображения**», що містить команди, які дозволяють відображати на екрані окремі складові інформації про вузли і елементи дискретної моделі – номери вузлів і СЕ, типи поперечних перерізів окремих СЕ, значення навантажень і т.ін. Меню «**Визуализация**», що дозволяє проводити перегляд дискретної моделі з різних кутів огляду, виконувати переріз моделі в певних площинах, змінювати масштаб зображення, проводити перегляд окремих фрагментів моделі і т.ін. Конфігурація і розташування цих меню можуть бути змінені користувачем з метою оптимізації вільного місця в робочій зоні для відображення розрахункової схеми.

18.4. Основні етапи створення розрахункової схеми в ОК SCAD

Основними етапами створення розрахункової схеми (дискретної моделі), необхідними для проведення розрахунку є:

- опис геометрії (розділ панелі інструментів «**Схема**»);
- задання жорсткісних параметрів (розділ панелі інструментів «**Назначения**»);

- задання в'язей і умов приєднання окремих СЕ до вузлів (розділ панелі інструментів «Назначения»);
- задання навантажень (розділ панелі інструментів «Загружения»).

Виклик операцій для виконання кожного з перелічених етапів може бути здійснений або із використанням кнопок відповідних розділів панелі інструментів, або із використанням команд розділу «Операции». Необхідно зауважити, що наповнення цього пункту меню змінюється залежно від активного розділу панелі інструментів. Відповідність основних команд меню і кнопок на панелі інструментів для розділу панелі інструментів «Схема» наведена на рис.18.9, для розділу «Назначения» – на рис.18.10, для розділу «Загружения» – на рис.18.11.

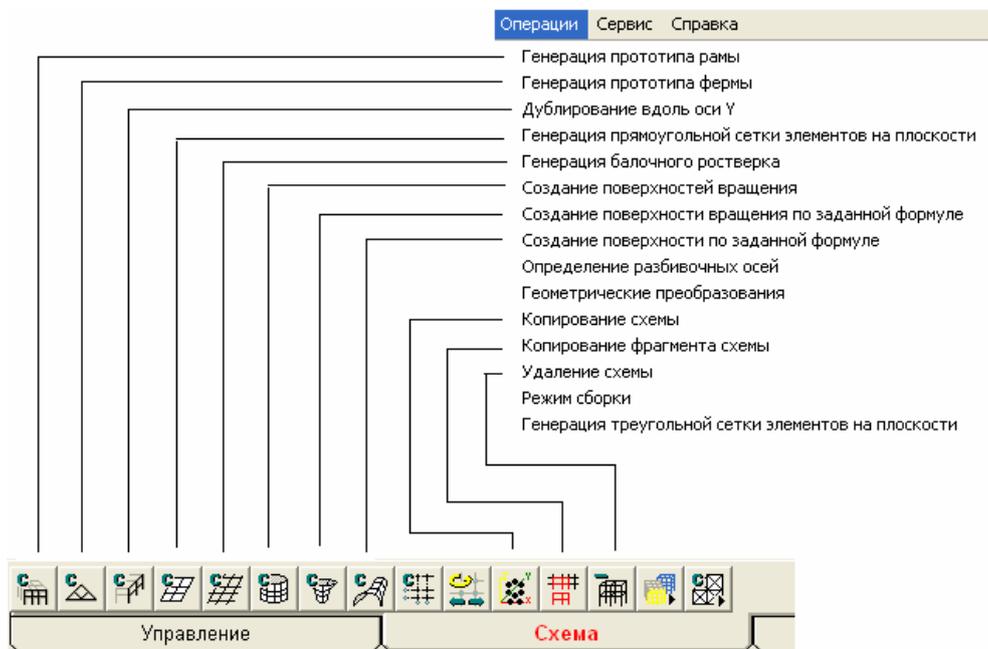


Рис.18.9

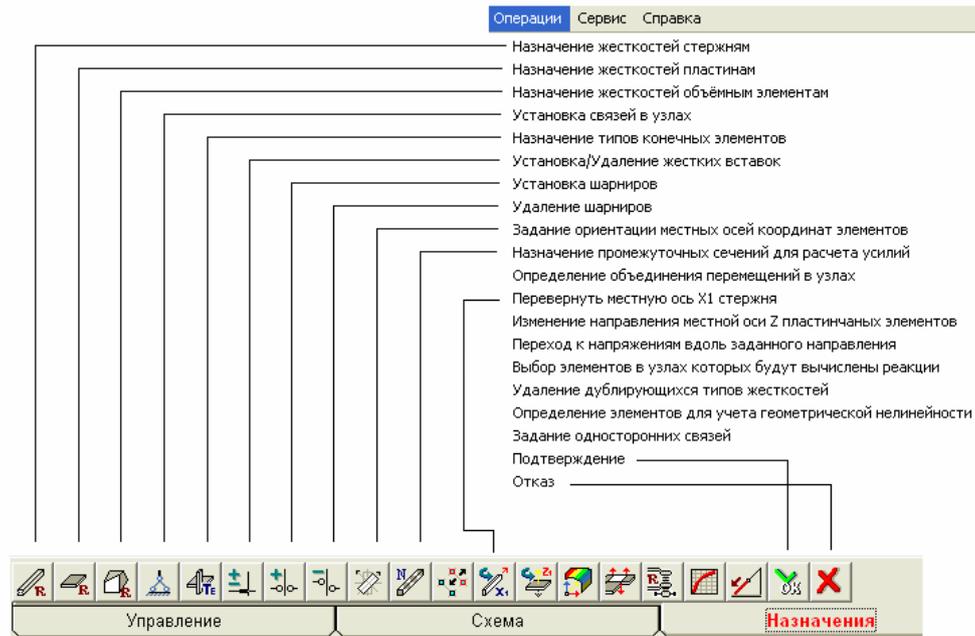


Рис.18.10

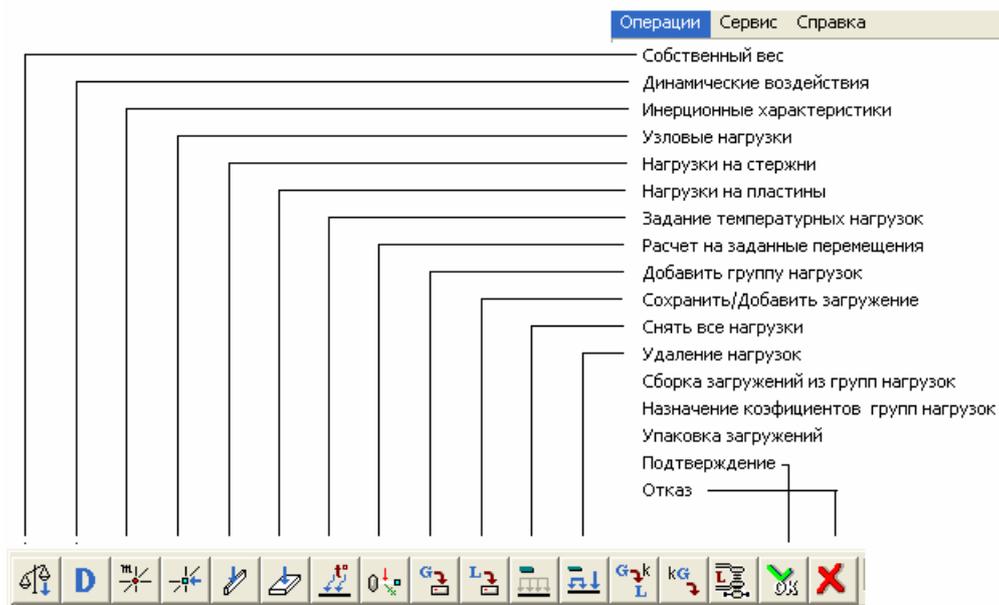


Рис.18.11

18.4.1. Опис геометрії розрахункової схеми

Створення розрахункової схеми із використанням функції генерації прототипів

Створення розрахункової схеми на основі генерації прототипів розрахункових моделей шляхом задання набору параметрів є основним способом створення розрахункових схем в ОК SCAD. За допомогою таких моделей можна сформувавши розрахункові схеми рам, ферм, балочних ростверків, плоских конструкцій (пластин), а також більш складних конструкцій, геометрія яких

може бути описана різноманітними поверхнями і т.ін. Необхідно відзначити, що в окремих випадках процедура генерації прототипів включає не лише власне опис геометрії розрахункової схеми, а й задання жорсткісних параметрів і в'язей.

Генерація прототипу плоскої рами.

Виконання цієї процедури розглянемо на прикладі рами, показаної на рис.18.12. Матеріал стержнів рами – бетон В25, поперечний переріз колон 25х25 см, ригелів – 25х40 см.

Процедура «Генерація прототипа рами» активізується кнопкою  розділу «Схема» панелі інструментів. Після вибору конфігурації рами у відповідному діалоговому вікні (рис.18.13) відкривається нове вікно – «Задание параметров регулярной рамы» (рис.18.14).

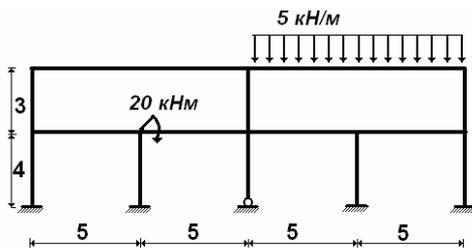


Рис.18.12

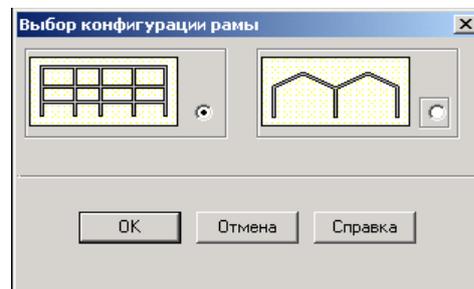


Рис.18.13

У таблицях, що займають більшу частину цього вікна, задається довжина L_p прогонів, висота H_s поверхів і їх кількість. Для заданої рами маємо 4 прогони при $L_p=5$, і по одному поверху при $H_s=4$ і $H_s=3$. Задання в'язей проводиться для всіх колон рами, що приєднані до землі. Натиснений вигляд кнопок із позначеннями всіх шести ступенів вільності – X , Y , Z , UX , UY , UZ – свідчить про жорстке закріплення в зазначених точках.

Задання жорсткостей здійснюється окремо для колон і ригелів рами. Натиснення кожної з кнопок «Колонны» або «Ригели» призводить до активізації вікна «Жесткости стержневых элементов» (рис.18.15).

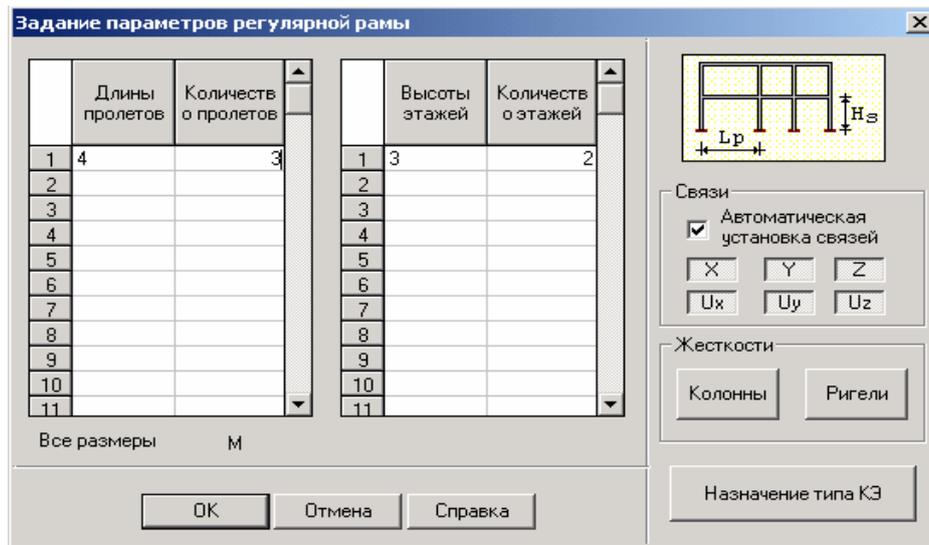


Рис.18.14

У вихідному стані поле «Тип жорсткості» і розташоване ліворуч від нього поле із зображеннями поперечних перерізів є вільними. В полі «Тип жорсткості» розташовується список наявних у рамі типів поперечних перерізів стержнів, який заповнюється по мірі їх опису. В іншому полі надається зображення обраного із списку типу перерізу. Обираючи опцію «Спосіб задання» можна здійснити параметричний опис для перерізу у вигляді певної геометричної фігури, профілю металопрокату або здійснити чисельно-параметричний опис перерізу, що дає можливість задання заздалегідь відомих чисельних значень геометричних характеристик перерізу. Після вибору цієї опції у вікні стають доступними закладки, які відповідають обраному способу опису жорсткості. Після відкриття другої вкладки вікна, наприклад, «Параметрические сечения», із пропонованого переліку (рис.18.16) натисканням кнопки обираємо форму перерізу. Для прямокутного перерізу, що відповідає заданим для розглядуваної рами даним, обираємо зі списку матеріалів бетон В25 (при цьому у відповідних текстових полях вікна з'являються його фізико-механічні характеристики), заповнюємо текстові поля із величинами розмірів перерізу і підтверджуємо інформацію натисненням кнопки «ОК». Попереднє натиснення кнопки «Контроль» дозволяє переглянути ескіз заданого перерізу. Натиснення кнопки «Характеристики сечения» дозволяє переглянути числові значення геометричних і жорсткісних характеристик кожного з описаних перерізів, зокрема величини жорсткостей на розтяг стиснення (EF), на згин (EI_y і EI_z), на кручення ($GI_{кр}$), на зсув (GI_y і GI_z), розміри ядра перерізу (Y_1 , Y_2 , Z_1 , Z_2).

При виборі опції «Спосіб задання» «Профиль металлопроката» на відповідній закладці вікна потрібно обрати із списку матеріал, тип перерізу (двотавр, кутик, швелер і т.ін.) та його номер. У випадку вибору опції «Численное описание» користувачу пропонується самостійно

ввести числові значення геометричних характеристик перерізу (площа, момент інерції т.ін.) з урахуванням розташування перерізу відносно місцевої системи координат СЕ.

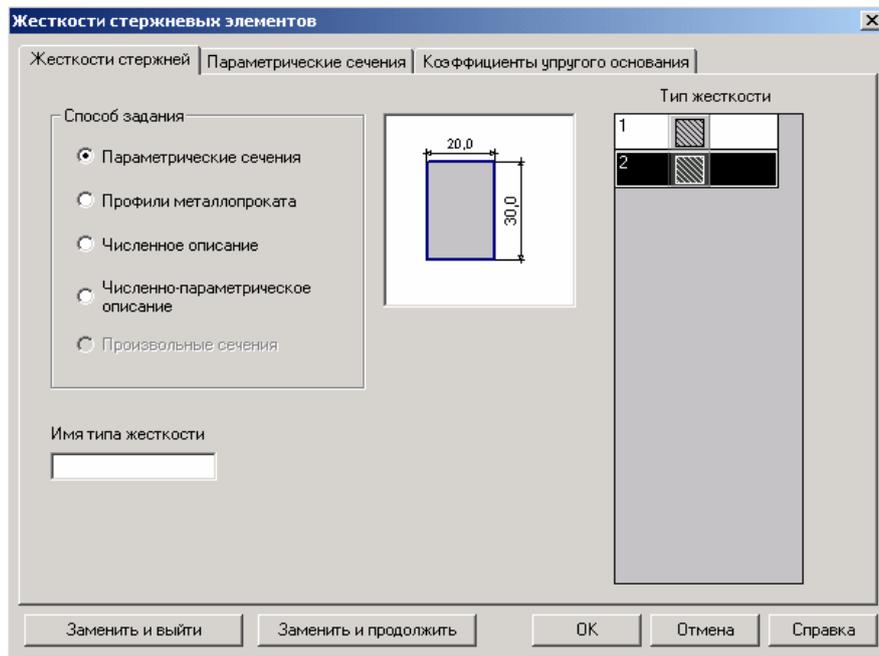


Рис.18.15

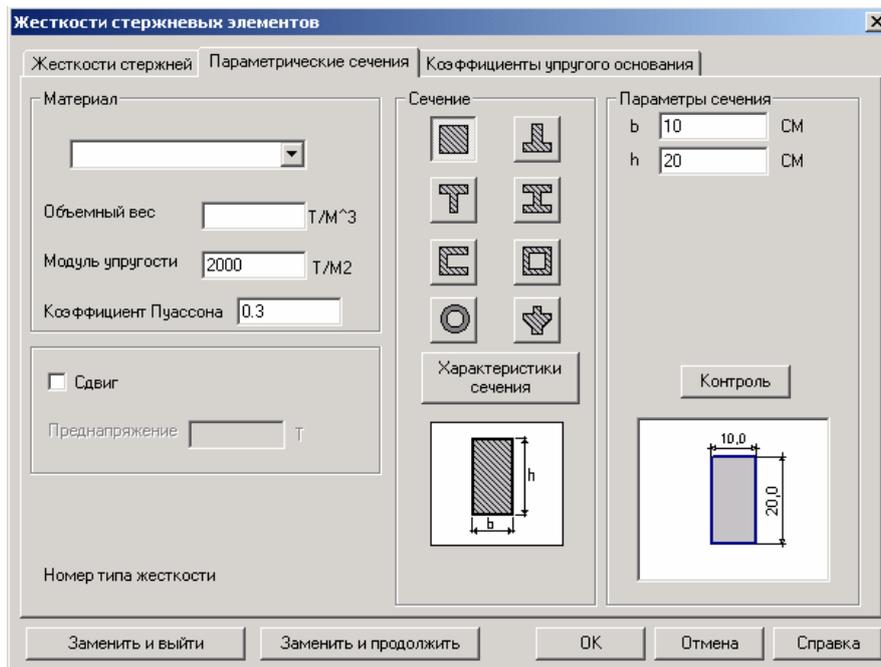


Рис.18.16

Після виконання перелічених дій із опису жорсткісних характеристик і натискання кнопки «ОК» у вікні «Задание параметров регулярной рамы» на екрані з'являється зображення описаної конструкції (рис.18.17). Для його наочності були проведені додаткові налаштування,

зокрема натисненням кнопки  на панелі «Фильтры отображения» показана загальна

(глобальна) система координат дискретної моделі, натисненням кнопок  і  на екран виведені зображення і номери вузлів, натисненням кнопки  – номери типів жорсткостей стержнів (показані цифрами, розташованими посередині стержнів, цифри відповідають номерам типів жорсткостей у вікні «Жесткости стержневых элементов» на рис.18.13), натисненням кнопки  – показані вузли, на які накладені в'язі (прямокутники у вузлах №№ 1–5).

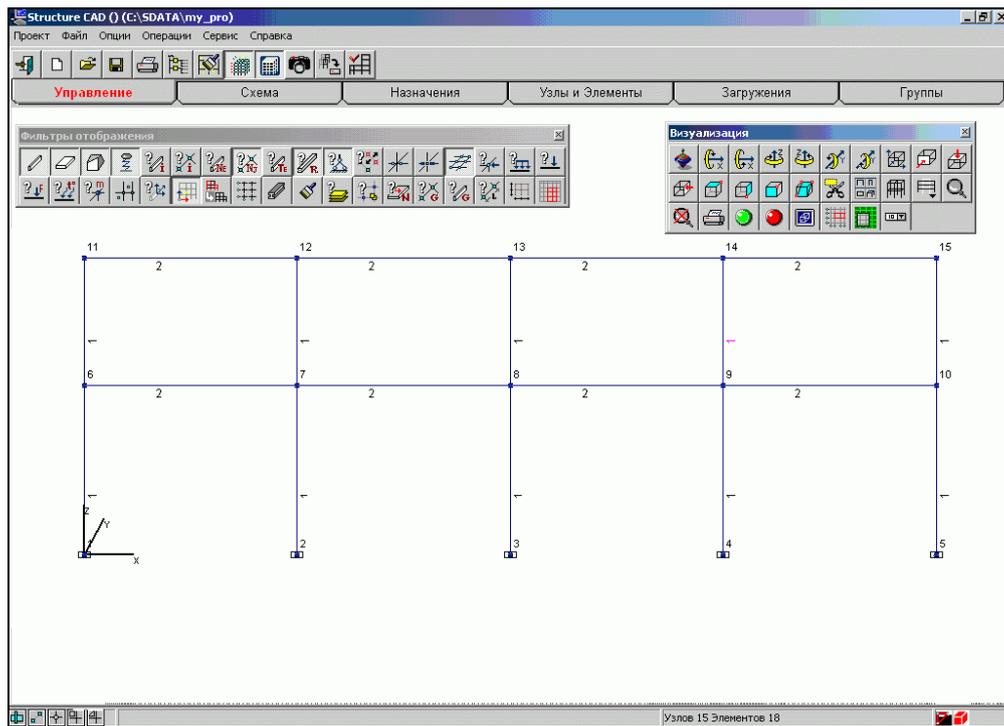


Рис.18.17

Необхідно відзначити, що активізація фільтра відображення в'язей лише позначає вузли із в'язями. Для отримання інформації про вид накладених в'язей можна скористатись функцією «**Інформація об узле**», яка активізується натисненням кнопки  на панелі «**Фильтры отображения**» і реалізована у відповідному вікні (рис.18.18,а), яке з'являється на екрані. Вузол, інформація про який запитується, після натиснення кнопки «**Указать курсором**» може бути показаний курсором на екрані або може бути ідентифікований за його номером, який вводиться у відповідне текстове поле і підтверджується натисканням кнопки «**Поиск**». Обраний вузол позначається на екрані зеленим колом, при цьому в текстових полях вікна з'являється інформація про координати вузла та набувають натисненого вигляду кнопки, що відповідають обмеженню у вузлі ступеням вільності (накладеним в'язям), див. рис.18.18,б.

Це вікно дозволяє не лише переглядати інформацію про вузол, а й змінювати її. Зокрема, введення у текстові поля нових координат вузла або «відпускання» кнопок із позначеннями в'язей і подальше натиснення кнопки «**Применить**» призведе до застосування зазначених змін до розрахункової схеми – тобто змінення розташування вузла і його закріплення.

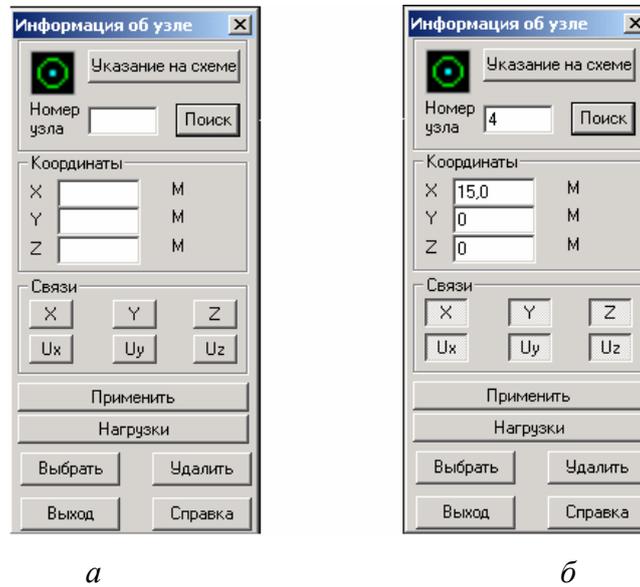


Рис.18.18

Отримана після виконання процедури генерації прототипу рами розрахункова схема відрізняється від заданої на рис.18.12 і потребує певного коригування., зокрема видалення зайвих стержнів і змінення в'язей. Відповідні процедури будуть розглянуті далі.

Ферма

Процедура «**Генерация прототипа фермы**» активізується кнопкою  розділу «Схема» панелі інструментів. Після вибору конфігурації ферми у відповідному вікні (рис.18.19) відкривається вікно «**Параметры фермы**» (рис.18.20), в якому можна додатково уточнити конфігурацію ферми і задати її геометричні параметри. Після натискання кнопки «**ОК**» на екрані відображається описана ферма. Процедура «**Генерация прототипа фермы**» не передбачає опису жорсткісних характеристик стержнів та в'язей. Відповідні дані мають бути задані окремо.

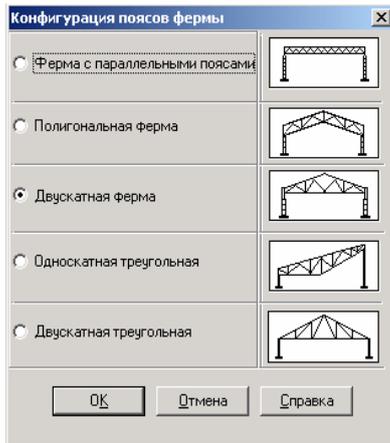


Рис.18.19

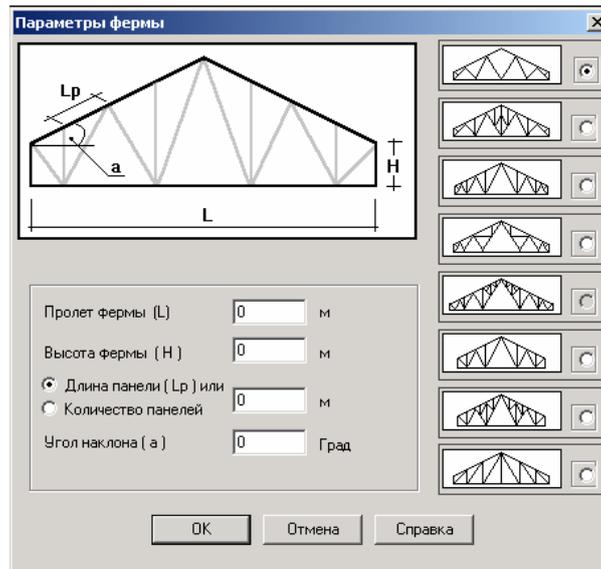


Рис.18.20

Просторові конструкції – прототипи поверхонь

ОК SCAD передбачає можливість опису просторових конструкцій, прототипами яких є поверхні обертання або довільні поверхні. Фактично, в даному випадку отримуємо не поверхню, а певне наближення до неї: вузли конструкції лежатимуть на заданій поверхні і утворюватимуть стержневі або пластинчасті скінчені елементи. Наближення до поверхні буде тим кращим, чим більша кількість СЕ буде використана.

Відповідні процедури генерації активізуються натисканням наступних кнопок розділу «Схема» панелі інструментів:



– генерація стандартних поверхонь обертання (циліндр, конус, сфера, тор);



– генерація поверхонь обертання, описаних формулами в базисній системі координат;



– генерація довільних поверхонь, описаних формулами в базисній системі координат.

Опис такої розрахункової схеми із використанням стержневих СЕ як самостійної конструкції потребує задання типу схеми 4 – «Пространственная шарнирно-стержневая система».

В якості прикладу розглянемо процедуру створення стержневої системи, прототипом якої є конус. Після задання вихідних даних у вікні «Создание поверхностей вращения» (рис.18.21), а саме числових значень радіусів основ, висоти, кута розтвору і кількості скінчених елементів nH в осьовому і nR у коловому напрямках, вибору опції виду СЕ – «Стержни» і опису жорсткісних характеристик стержнів, що здійснюється викликом вікна «Жесткости стержневых элементов» (рис.18.13) шляхом натискання кнопки «Жесткость» і підтвердження введених даних натисканням кнопки «ОК» отримаємо розрахункову схему, наведену на рис.18.22.

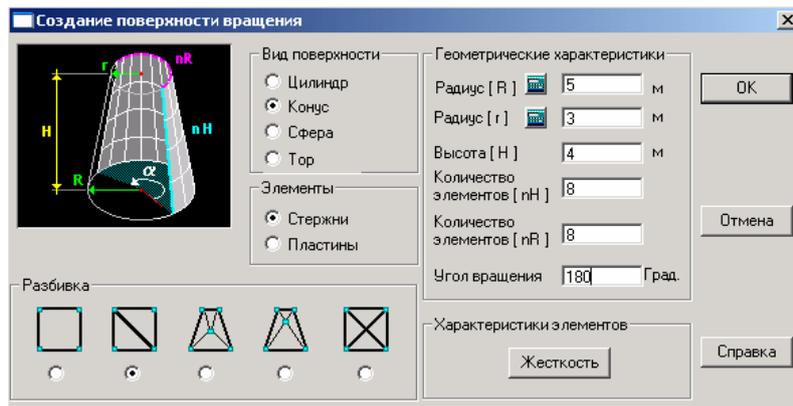


Рис.18.21

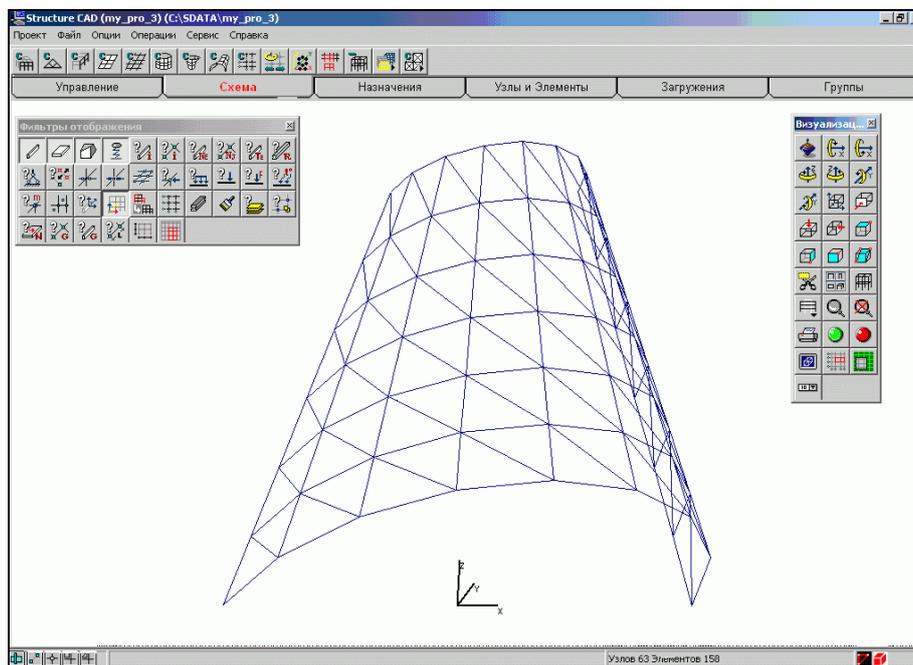


Рис.18.22

Як видно, в даному випадку початок базисної системи координат обирається в центрі нижньої основи конуса. Отримана таким чином розрахункова схема потребує подальшого задання в'язей.

Необхідно також відзначити, що з метою покращення оглядовості первісно отримана розрахункова схема була повернута відносно осей базисної системи координат натисканням кнопок «**Поворот относительно оси**» (наприклад, для осі X – ) панелі інструментів «**Визуализация**».

Оператії коригування дискретної моделі

Оператії коригування дискретної моделі застосовуються здебільшого для внесення змін у раніше створену із використанням процедури генерації прототипів розрахункову схему. В окремих випадках ці процедури можуть бути використані для поелементного або повузлового опису унікальних розрахункових схем, що не відповідають передбаченим в ОК SCAD прототипам.

Операції, що виконуються із вузлами, активізуються з панелі інструментів «Узлы и элементы», на якій після натискання кнопки  розгортається меню для операцій із вузлами. Операції, що виконуються зі скінченими елементами здійснюються з панелі інструментів «Узлы и элементы», на якій після натискання кнопки  розгортається відповідне меню.

Додавання вузла

Додавання вузла може бути здійснено:

а) За його координатами, для чого натисканням кнопки  активізується вікно «Ввод узлов» (рис.18.23), в якому здійснюється введення координат вузла. Введення даних підтверджується кнопкою «Добавить», після чого, при активізованому фільтрі відображення вузлів, вузол з'являється на екрані. При відсутності необхідності подальшого задання вузлів операція може бути деактивізована закриттям вікна «Ввод узлов».

б) Введенням певної кількості вузлів між двома указаними, для чого натисканням кнопки  активізується вікно «Ввод дополнительных узлов между узлами» (рис.18.24). Після вибору одного з запропонованих у вікні варіантів і натиснення кнопки «ОК» у вікні процедури, курсор набуває вигляду прицілу, що дозволяє відмітити два вузли, перший з яких позначиться червоним кольором. Відразу після вибору другого вузла операція додавання вузлів здійснюється автоматично. Після виконання операції вона залишається активною і її можна застосувати до іншої пари вузлів. Для відмови від подальшого використання операції необхідно натиснути кнопку «Отказ» () на панелі інструментів.

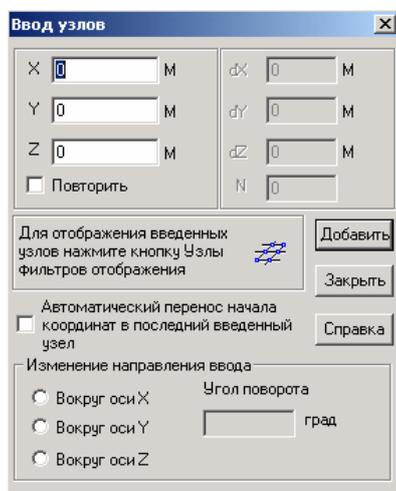


Рис.18.23



Рис.18.24

Необхідно відзначити, що введення нових вузлів за координатами між двома наявними вузлами, які являють собою початок і кінець певного стержневого скінченого елемента, ще не є розділенням цього елемента на відповідну кількість нових. Знов створені вузли, хоч і лежатимуть на осі існуючого СЕ, але не будуть пов'язані з ним, тому кожний з цих вузлів буде мати певну (в залежності від типу задачі) кількість ступенів вільності. Отримана таким чином розрахункова схема буде геометрично змінюваною, що буде виявлено в подальшому при проведенні розрахунку.

в) утворенням одного чи декількох нових вузлів на певній відстані від визначеного існуючого вузла. Операція активізується натискання кнопки , після чого активізується вікно «Ввод вузлов» (рис.18.25).

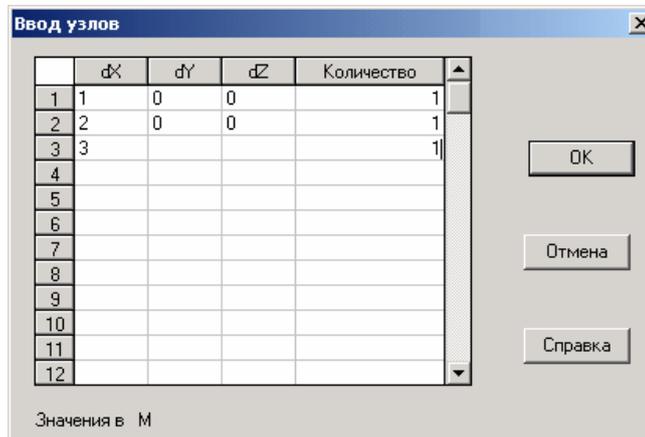


Рис.18.25

Після визначення значень відстаней і натискання кнопки «ОК» у вікні, курсором, що набув вигляд прицілу, визначається «відрахунковий» вузол. Після натискання кнопки «ОК»  на панелі інструментів «Узлы и элементы» вузли додаються в розрахункову схему. Як і у випадку додавання окремого вузла, додавання СЕ між знов створеними вузлами необхідно виконати окремо.

Після виконання операції вона, разом із заданими параметрами, залишається активною і її можна застосувати до іншого вузла. Для відмови від подальшого використання операції необхідно натиснути кнопку «Отказ»  на панелі інструментів.

Група знов створюваних вузлів може бути також розташована по дузі кола, центром якого є точка із визначеними координатами або існуючий вузол (операція  – «Генерация узлов по дуге»). Послідовність виконання дій є аналогічною.

Змінення координат вузлів

Змінення координат вузла може бути здійснено:

а) Із використанням операції «**Перенос вузлов**». Операція активізується натисканням кнопки , після чого на екрані з'являється однойменне вікно. Операція може бути виконана в двох варіантах – перенесення вузла на певну величину (при активній опції «**Перенос вузла на заданий вектор**», рис.18.26,а) або в точку із заданими координатами (при активній опції «**Перенос вузла в заданную точку**», рис.18.26,б). Перший варіант є зручним для однакового змінення координат групи з декількох вузлів, другий – для цієї ж дії над окремим вузлом. Після задання значень dX , dY , dZ або X , Y , Z натиснення у вікні кнопки «**ОК**» курсор набуває вигляду прицілу, що дозволяє відмітити окремий вузол або, послідовно, групу вузлів. Після відмітки всіх потрібних вузлів для виконання процедури необхідно натиснути кнопку «**ОК**» () на панелі інструментів «**Узлы и элементы**».

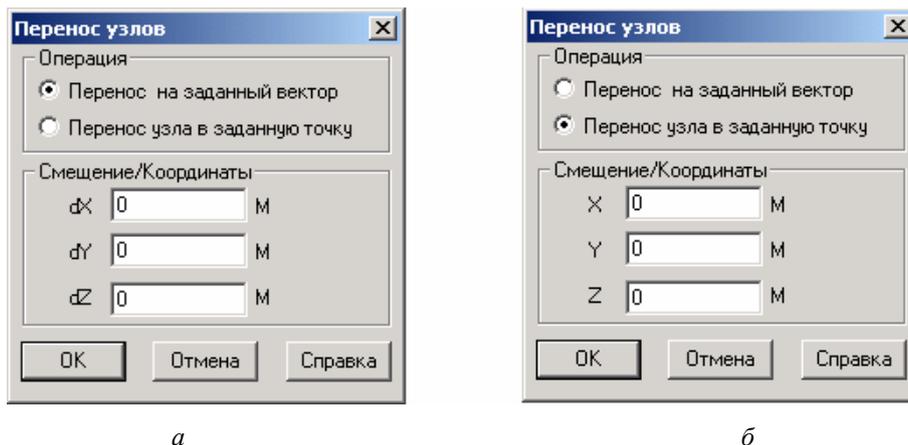


Рис.18.26

Після виконання операції вона разом із заданими параметрами залишається активною і її можна застосувати до іншого вузла. Для відмови від подальшого використання операції необхідно натиснути кнопку «**Отказ**» () на панелі інструментів.

б) Із використанням вікна «**Информация об узлах**» (рис.18.18). Для цього необхідно активізувати це вікно натисканням кнопки , на панелі «**Фильтры отображения**», обрати вузол безпосереднім указуванням на схемі курсором, який набуде вигляду прицілу, або за його номером і ввести нові координати вузла в відповідні текстові поля. Після натискування розташованої у вікні кнопки «**Применить**» координати вузла будуть змінені.

Видалення вузла

Видалення вузла може бути здійснено:

а) Із використанням команди панелі інструментів «Узлы и элементы»  – «Удаление узла». Для цього необхідно попередньо відмітити відповідні вузли, активізувавши команду  – «Отметка узла», або використавши контекстне меню, що викликається натисканням правої кнопки миші у вільному місці робочого поля (див.п.18.3, рис.18.8). Обрані вузли позначаються червоним кольором. Для їх видалення необхідно натиснути кнопку «ОК» () на панелі інструментів. Після виконання видалення вузла операція разом із заданими параметрами залишається активною і її можна застосувати до іншого вузла або групи вузлів. Для відмови від подальшого використання операції необхідно натиснути кнопку «Отказ» () на панелі інструментів.

б) Із використанням вікна «Информация об узле» (рис.18.18). Для цього необхідно активізувати це вікно натисканням кнопки  на панелі «Фильтры отображения» і обрати вузол безпосереднім указуванням на схемі курсором, що набуде вигляду прицілу, або за його номером. Вузол буде видалений після натискання кнопки «Удалить» у вікні «Информация об узлах».

У випадку вибору вузла за номером необхідно спочатку натиснути кнопку «Выбрать» (вузол позначиться червоним кольором) і після цього натиснути кнопку «Удалить».

Необхідно відзначити, що видалення вузла призводить до автоматичного видалення всіх скінчених елементів, які примикають до нього. Так, наприклад, у випадку видалення вузла №7 (див.рис.18.17) будуть видалені скінчені елементи 2-7, 6-7, 7-8, 7-12. Видалення вузла не приводить до автоматичної перенумерації вузлів в дискретній моделі.

Відновлення видалених вузлів

У випадку помилкового видалення вузлів з розрахункової схеми вони можуть бути відновлені за допомогою операції «Восстановление удаленных узлов», яка активізується натисканням кнопки  розділу «Узлы и элементы» панелі інструментів. При цьому, видалені вузли позначаються на екрані жовтим кольором, курсор набуває вигляду прицілу, а при активізованій опції «Номера узлов» панелі інструментів «Визуализация» номери біля цих вузлів не з'являються. Після вибору курсором вузлів, що підлягають відновленню, і натиснення кнопки  на панелі інструментів позначені вузли набувають синього кольору і біля них з'являються номери, що свідчить про їх відновлення в складі дискретної моделі.

Додавання скінченого елемента

Додавання скінченого елемента може бути здійснено:

а) В «ручному» режимі, шляхом позначення початкового і кінцевого вузла скінченого елемента. Операція додавання стержневого скінченого елемента активізується натисканням кнопки



– «Добавление стержня». Після суміщення курсора із початковим вузлом нового скінченого елемента необхідно натиснути ліву кнопку миші і, не відпускаючи її, «протягнути» скінчений елемент до суміщення курсора із вузлом, що є його кінцем, після чого ліву кнопку миші відпустити.

Необхідно зауважити, що у випадку вибору в якості початкового вузла скінченого елемента вузла з більшим номером, а в якості кінцевого – вузла з меншим номером орієнтація місцевої системи координат знов створеного скінченого елемента буде відповідати цьому вибору користувача, а не прийнятому за умовчанням розташуванню початку скінченого елемента (і, відповідно, початку місцевої системи координат) у вузлі з меншим номером.

б) Розділення існуючого скінченого елемента на декілька – виконується активізацією команди



– «Разбивка стержня». Після обрання схеми розділення (при розбитті на два скінчених елементи – за розміром чи співвідношенням частин, або розбиття на N однакових ділянок) у вікні «Деление элемента» (рис.18.27) і натискання у вікні кнопки «ОК» необхідно обрати курсором скінчений елемент для розділення, що позначиться червоним кольором, і натиснути кнопку «ОК»



() на панелі інструментів. Після виконання розділення операція разом із заданими параметрами залишається активною і її можна застосувати до іншого скінченого елемента. Для відмови від подальшого використання операції необхідно натиснути кнопку «Отказ» () на панелі інструментів.

Видалення скінченого елемента

Видалення скінченого елемента може бути здійснено:

а) Із використанням вікна «Информация об элементе». Для цього необхідно активізувати вікно натисканням кнопки  на панелі «Фильтры отображения» і обрати скінчений елемент безпосереднім указуванням курсором на схемі або за його номером. Скінчений елемент буде видалений після натискання кнопки «Удалить» у вікні «Информация об элементах».

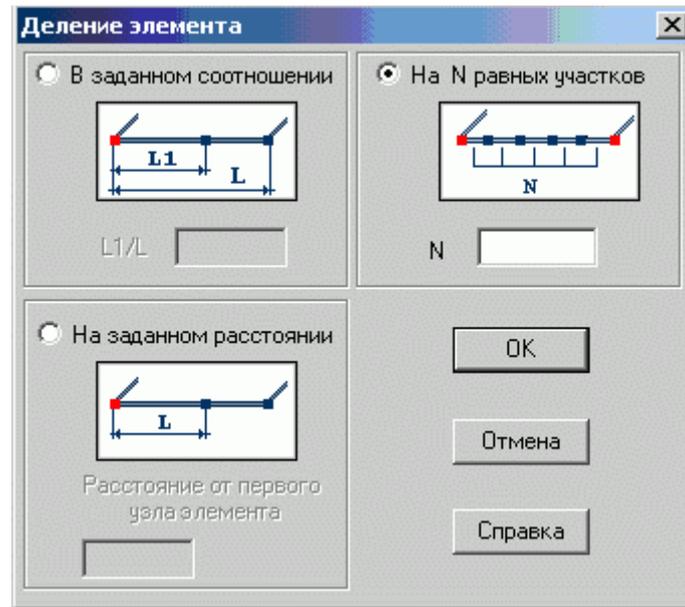


Рис.18.27

б) Із використанням команди панелі інструментів «Узлы и элементы»  – «Удаление элемента». Для цього необхідно попередньо відмітити відповідні скінчені елементи, активізувавши команду  – «Отметка элементов». Обрані скінчені елементи позначаються червоним кольором. Для їх видалення необхідно натиснути кнопку «ОК» () на панелі інструментів. Після видалення скінчених елементів операція залишається активною. Для відмови від її подальшого використання необхідно натиснути кнопку «Отказ» () на панелі інструментів.

Зокрема, із використанням цієї операції з показаної на рис.18.17 розрахункової схеми можуть бути видалені зайві стержні – скінчені елементи 7-12 і 9-14.

Створення просторової розрахункової схеми із використанням операції «Дублирование»

Операція «Дублирование» дозволяє отримати просторову розрахункову модель конструкції, яка являє собою групу декількох однакових плоских систем. Операція активізується натисканням кнопки  в розділі «Схема» панелі інструментів, після чого на екрані з'являється вікно «Схема продольного каркаса» (рис.18.28).

Вихідна конструкція, що дублюється, розташована в площині XoZ , дублювання відбувається в напрямку осі Y за набором кроків L_p (у вікні – «Длины пролетов»). При цьому в конструкцію автоматично додаються ригелі, що розташовуються в напрямку осі Y і пов'язують всі продубльовані вузли. Жорсткості ригелів можуть бути описані у відповідному вікні (рис.18.15), яке відкривається після натискання кнопки «Ригели».

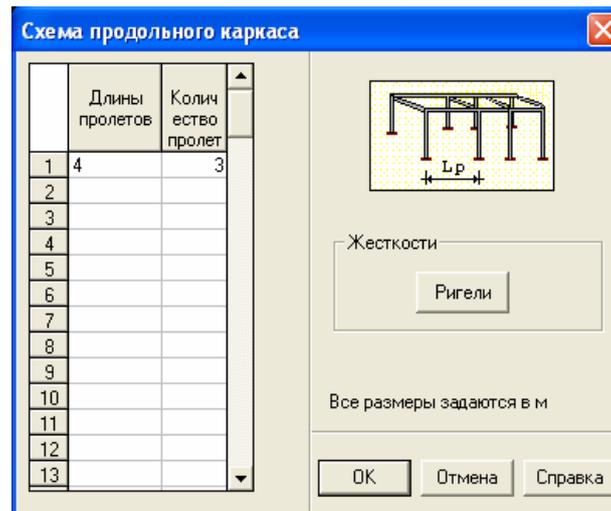


Рис.18.28

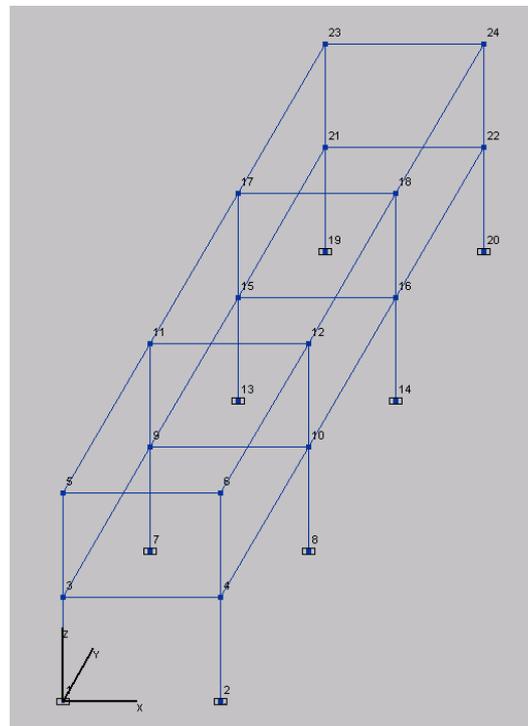


Рис.18.29

Після задання всіх параметрів операції і натискання кнопки «ОК» у вікні «Схема продольного каркаса» на екрані відображається просторова розрахункова схема. Так, на рис.18.29 наведена розрахункова схема, отримана із застосуванням операції «Дублирование» до вихідної плоскої рами, утвореної вузлами №№1-6.

При застосуванні операції «Дублирование» в'язі та жорсткісні характеристики, задані для вихідної рами переносяться на відповідні дубльовані елементи. В той же час навантаження при застосуванні операції «Дублирование» не переносяться.

Створення розрахункових схем із використанням операції «Копирование»

Операція «Копирование» дозволяє шляхом послідовного копіювання певної вихідної розрахункової схеми збільшити кількість поверхів у плоскій конструкції, перетворити плоску розрахункову схему на просторову із зміненням типу скінчених елементів, збільшити кількість поверхів в просторовій схемі, отримати складні циклічно симетричні конструкції, в тому числі такі, що утворені обертанням певної вихідної схеми-прототипу щодо базисних осей. Важливою відмінністю операції «Копирование» від операції «Дублирование» є можливість автоматичного змінення вимірності СЕ дискретної моделі – перетворення стержневих СЕ на пластинчасті, пластинчастих – на просторові.

Операція активізується натисканням кнопки , в розділі «Схема» панелі інструментів, після чого на екрані з'являється вікно «Копирование схемы» (рис.18.30).

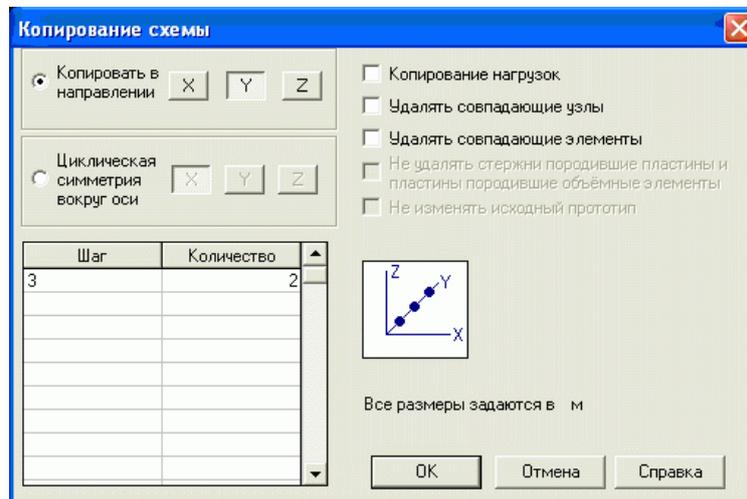


Рис.18.30

Копіювання вихідної схеми може здійснюватись шляхом її повторення в напрямку однієї із осей (при активній опції «Копировать в направлении») або шляхом обертання навколо заданої осі (при активній опції «Циклическая симметрия вокруг оси») із заданою величиною кроків, поданих відповідно в одиницях довжини (метрах) або в одиницях вимірювання кута (градусах) задану кількість разів. Операція здійснюється після задання числових значень величини кроків і кількості копій і натискання кнопки «ОК» у вікні.

Залежно від визначених опцій операції, копіювання може здійснюватись за різними правилами.

При активізації операції за відсутності попередньо відмічених вузлів або скінчених елементів відбувається просте повторення схеми задану кількість разів. На рис. 18.31,а подана вихідна схема, а на рис.18.31,б – результат такого копіювання вихідної двоповерхової рами при числових значеннях параметрів операції, поданих на рис.18.30. З'єднання отриманих рам довільно

розташованими стержневими скінченими елементами може бути здійснено шляхом їх додавання в «ручному» режимі.

При активізації операції у випадку попереднього обрання окремих вузлів з кожного такого вузла в напрямку його копіювання формується стержневий скінчений елемент. На рис.18.31,в поданий результат такого копіювання вихідної рами (рис.18.31,а) попередньому обранні вузлів 5,6.

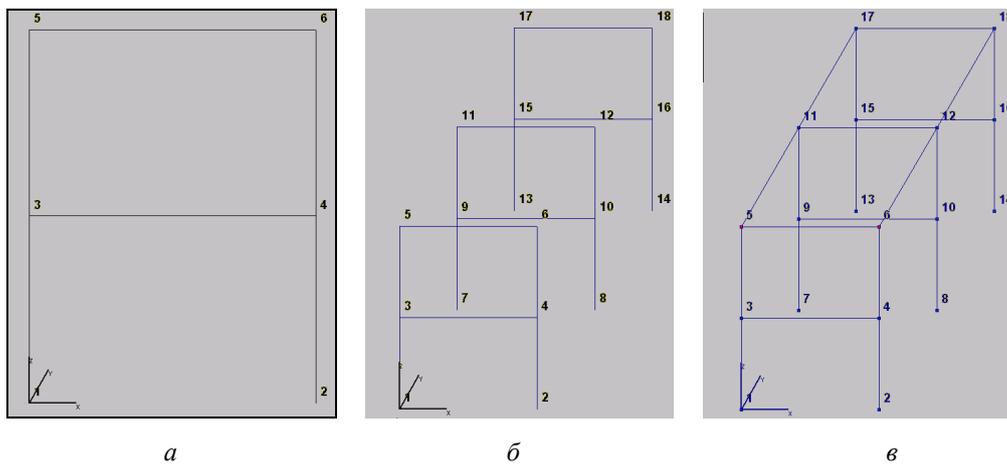


Рис.18.31

При активізації операції у випадку попереднього обрання окремих скінчених елементів з кожного такого скінченого елемента в напрямку його копіювання формується пластинчастий стержневий скінчений елемент. Так, при обранні стержневого скінченного елемента 5-6 в напрямку його копіювання будуть сформовані прямокутні пластинчасті скінчені елементи, обмежені вузлами 5-6-11-12, і 11-12-17-18.

При попередньому позначенні пластинчастих скінчених елементів з них в напрямку копіювання будуть сформовані просторові скінчені елементи (рис.18.31,в).

Операція «Копіювання» застосовується до всієї розрахункової схеми і не може бути застосована до її окремих фрагментів.

Необхідно відзначити, що на відміну від операції «Дублювання» в цьому випадку необхідним є додаткове використання операції задання жорсткостей для знов створених скінчених елементів.

18.4.2. Задання жорсткісних параметрів дискретної моделі

Залучення операцій задання жорсткісних параметрів здійснюється кнопками розділу «Назначення» панелі інструментів. Ці операції можуть бути активізовані командами меню «Операции» (рис.18.10).

Задання жорсткісних параметрів дискретної моделі в певних випадках виконується в ході виконання операції генерації розрахункових схем за прототипами (зокрема, при описі прототипу рами). В інших випадках (наприклад при генерації прототипу ферми, при додаванні стержневих скінчених елементів в дискретну модель в «ручному» режимі, при виконанні операцій копіювання і т.ін.) задання жорсткісних параметрів виконується окремо після опису геометрії.

Операція **«Назначение жесткостей стержням»** активізується натисканням кнопки  в розділі **«Назначения»** панелі інструментів, після чого на екрані з'являється вікно **«Жесткости стержневых элементов»** (рис.18.15).

Для опису жорсткісних параметрів необхідно обрати опцію **«Способ задания»**, відкрити відповідну закладку вікна, де обрати матеріал, форму і розміри перерізу і натиснути кнопку **«ОК»** у вікні **«Жесткости стержневых элементов»** (більш докладний опис цього вікна наведений у п.18.4.1). Після зникнення вікна курсор набуде вигляду прицілу, що дозволить за його допомогою відмітити окремий стержень або групу стержнів, переріз яких відповідає описаному. Для присвоєння відміченим стержням цього типу жорсткості необхідно натиснути кнопку  на панелі інструментів. Колір відмічених стержнів зміниться на білий, що свідчить про виконання операції задання жорсткості для цих стержнів. Після виконання операція залишається активною.

Для опису наступного типу жорсткості для іншої групи стержнів необхідно знов натиснути кнопку **«Назначение жесткостей стержням»** і повторити описані вище дії.

Для відмови від подальшого використання операції необхідно натиснути кнопку **«Отказ»** () на панелі інструментів.

Група стержнів може бути відмічена також до виклику вікна **«Жесткости стержневых элементов»**. Всі інші дії для присвоєння опису і задання типів жорсткості виконуються в тій самій послідовності.

Перегляд результату присвоєння кожного з типів жорсткостей буде більш наочним якщо в цей час буде активізований фільтр відображення типів жорсткостей (натиснута кнопка  на панелі **«Фильтры отображения»**). В цьому випадку відразу після натиснення кнопки **«ОК»** на панелі інструментів біля стержня з'являтиметься номер призначеного типу жорсткості зі списку типів жорсткостей.

18.4.3. Задання в'язей і умов приєднання елементів до вузлів дискретної моделі

Елементи керування для виклику операцій задання в'язей і умов приєднання стержнів розташовуються в розділі «Назначения» панелі інструментів. Ці операції можуть бути активізовані також командами меню «Операции» (рис.18.10).

Зовнішні в'язі

Зовнішні в'язі можуть бути задані:

а) Із використанням операції «Задание связей в узлах». Операція активізується натисканням кнопки  розділу «Назначения» панелі інструментів, після чого на екрані з'являється вікно «Связи» (рис.18.32). Задання в'язей для подальшого їх накладення на вузол здійснюється натисканням курсором миші кнопок вікна із позначеннями ступенів вільності. Операція може бути виконана в двох варіантах – із додаванням нових в'язей до вже існуючих або із виконанням повної заміни існуючих в'язей на знов описані. Також, в цьому вікні можуть бути зняті всі встановлені у вузлі в'язі (кнопка «Отключить все»). Після натиснення у вікні кнопки «ОК» курсор набуває вигляду прицілу, що дозволяє відмітити окремий вузол або, послідовно, групу вузлів. Після відмітки всіх потрібних вузлів для виконання процедури необхідно натиснути кнопку «ОК» () на панелі інструментів.

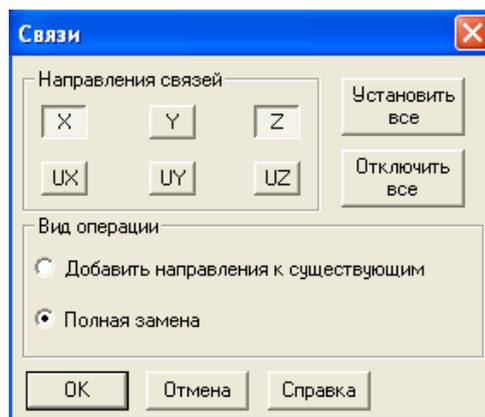


Рис.18.32

Після виконання операції вона разом із заданими параметрами залишається активною і її можна застосувати до іншого вузла. Для відмови від подальшого використання операції необхідно натиснути кнопку «Отказ» () на панелі інструментів.

б) Із використанням вікна «**Інформація об узлах**» (рис.18.18). Для цього необхідно активізувати це вікно натисканням кнопки  на панелі «**Фильтры отображения**», обрати вузол або безпосереднім указуванням на схемі курсором, який набуде вигляду прицілу, або за його номером і натисканням кнопок у розділі вікна «**Связи**» задати відповідну інформацію. Після натискання кнопки «**Применить**» в'язі, накладені на вузол будуть змінені.

Необхідно пам'ятати, що для відображення наявності в'язей у вузлі (позначення закріпленого вузла) повинна бути активізована опція відображення в'язей (натиснена кнопка  на панелі «**Фильтры отображения**»).

Процедура задання в'язей може бути використана при побудові дискретної моделі рами, наведеної на рис.18.10: для вузла середнього стояка, жорстко приєднаного до землі, необхідно відмінити кутову в'язь UY , для чого "вимикнути" відповідну кнопку у вікні «**Связи**».

Умови приєднання скінчених елементів до вузлів дискретної моделі.

Шарніри

При створенні дискретної моделі стержневої системи загального вигляду, що не відноситься до типу шарнірно–стержневих, на умовчання передбачається жорстке приєднання кінцевого перерізу скінченого елемента до вузла, тобто наявність шести в'язей за напрямками трьох лінійних переміщень і трьох поворотів. Відсутність однієї в'язі за кутовим переміщенням моделює циліндричний шарнір, розташований вздовж відповідної осі, відсутність трьох в'язей за кутовими переміщеннями – сферичний шарнір, відсутність в'язі в напрямку лінійного переміщення – повзун. В термінах ОК SCAD відсутність у вузлі будь-якої в'язі, як за кутовими так і за лінійними переміщеннями, носить назву «шарнір».

Такий шарнір може бути використаний також для опису шарнірного приєднання стержня до нерухомої основи («землі», рис.18.33,а). В дискретній моделі термінах ОК SCAD використання шарнірного приєднання кінцевого перерізу скінченого елемента до вузла (шарнір UY) і жорсткого закріплення вузла (рис.18.33,б) є еквівалентним призначенню для цього ж вузла шарнірного з'єднання вузла із "землею" і жорсткого приєднання кінцевого перерізу скінченого елемента до вузла (рис.18.33,в).

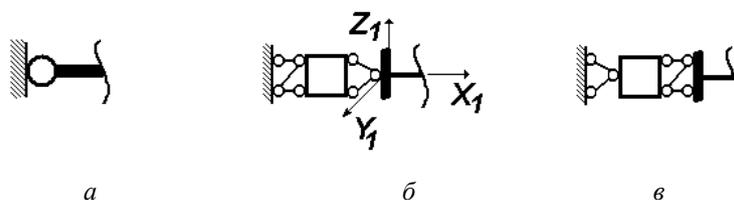


Рис.18.33

Опис шарнірів може бути здійснений:

а) Із використанням операцій **«Установка шарнірів»** (**«Удаление шарниров»**). Операція активізується натисканням кнопки  (відповідно для видалення шарнірів – ) розділу **«Назначения»** панелі інструментів, після чого на екрані з'являється вікно **«Условия примыкания стержней»** (рис.18.34). Встановлення (видалення) шарнірів виконується вмиканням (вимиканням) відповідних прапорців біля позначень в'язей на кожному з кінці стержня. Під вузлом 1 мається на увазі початковий вузол скінченого елемента, під вузлом 2 – кінцевий. При цьому необхідно враховувати, що при автоматичному створенні скінчених елементів (зокрема при виконанні процедур генерації прототипів та операцій копіювання і дублювання) початковий вузол має менший глобальний номер, а вузол на кінці – більший. У випадку «ручного» додавання скінченого елемента між двома вузлами початковим визнається перший з обраних для додавання цього елемента вузол, номер якого може бути більшим, ніж номер кінцевого вузла. Після натискання кнопки **«ОК»** у вікні курсор набуває вигляду прицілу, що дозволяє відмітити окремий скінчений елемент або групу елементів, після чого необхідно натиснути кнопку **«ОК»** ) на панелі інструментів.

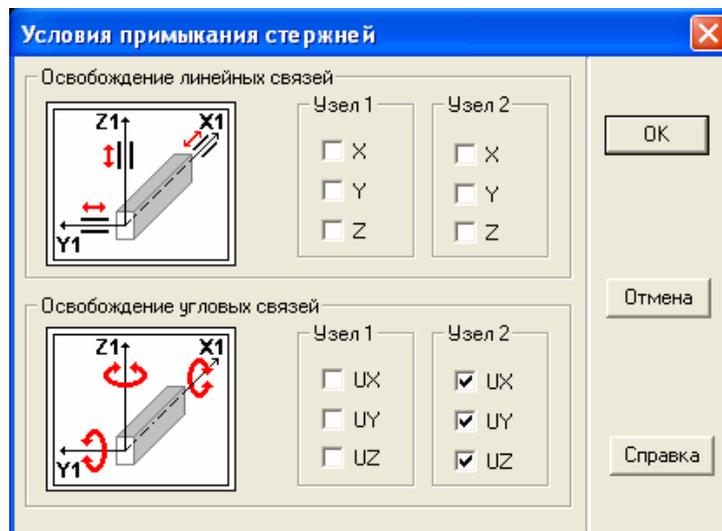


Рис.18.34

Після виконання операції вона разом із заданими параметрами залишається активною і її можна застосувати до інших скінчених елементів. Для відмови від подальшого використання операції необхідно натиснути кнопку **«Отказ»** () на панелі інструментів.

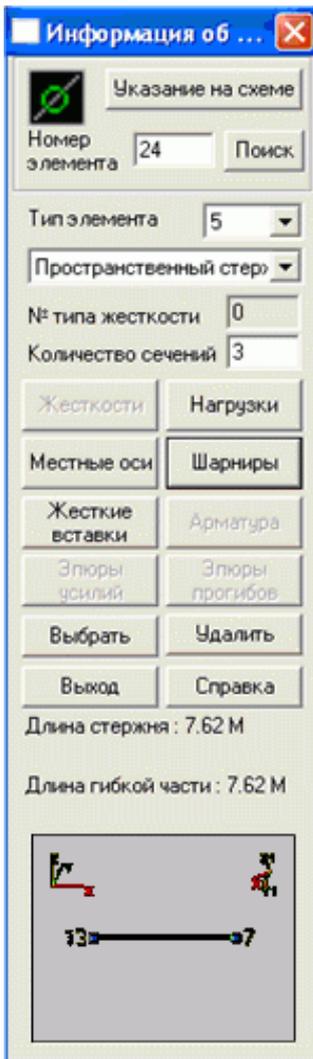


Рис.18.35

б) Із використанням вікна «**Информация об элементах**» (рис.18.35). Для цього необхідно активізувати це вікно натисканням кнопки  на панелі «**Фильтры отображения**», обрати скінчений елемент безпосереднім указуванням на схемі курсором, або за його номером і натиснути кнопку «**Шарниры**». Після цього на екрані з'явиться вікно «**Условия примыкания стержней**», робота з яким описана в попередньому пункті. Після опису шарнірів необхідно натиснути кнопку «**Применить**» – шарніри будуть враховані в розрахунковій схемі і відображені на екрані.

Необхідно пам'ятати, що для відображення наявності на розрахунковій схемі шарнірів повинна бути активізована опція відображення шарнірів (натиснена кнопка  на панелі «**Фильтры отображения**»).

Скінчені елементи, в яких передбачається задання шарнірів, можуть бути також обрані попередньо, до активізації операції з установлення шарнірів.

Жорсткі вставки

Процес побудови розрахункових схем стержневих моделей і подальше утворення дискретних моделей МСЕ передбачає використання припущення щодо приєднання стержнів безпосередньо до центру вузлів і збігу продовжень осей стержнів в одній точці. В реальних конструкціях кінцеві перерізи стержнів розташовані на певній відстані від місць їхнього з'єднання, що обумовлено наявністю певних розмірів з'єднання та розмірами поперечних перерізів стержнів. У цьому випадку лінійні переміщення кінцевого перерізу і вузла не збігаються, оскільки вони залежать від поворотів вузлів. Натомість, повороти вузла і кінцевого перерізу є однаковими. Опція «**Жесткие вставки**» дозволяє моделювати розташування кінцевих перерізів стержнів на певній відстані від вузлів.

Опис наявності жорстких вставок може бути здійснений:

а) Із використанням операцій «**Установка и удаление жестких вставок**». Операція активізується натисканням кнопки  розділу «**Назначения**» панелі інструментів, після чого на екрані з'являється вікно «**Жесткие вставки**» (рис.18.36).

Опис жорстких вставок здійснюється шляхом задання їх розмірів в напрямку місцевих або глобальних систем координат. Після натискання кнопки «**ОК**» у вікні курсор набуває вигляду

прицілу, що дозволяє відмітити окремий скінчений елемент або групу елементів, після чого необхідно натиснути кнопку «ОК» () на панелі інструментів.

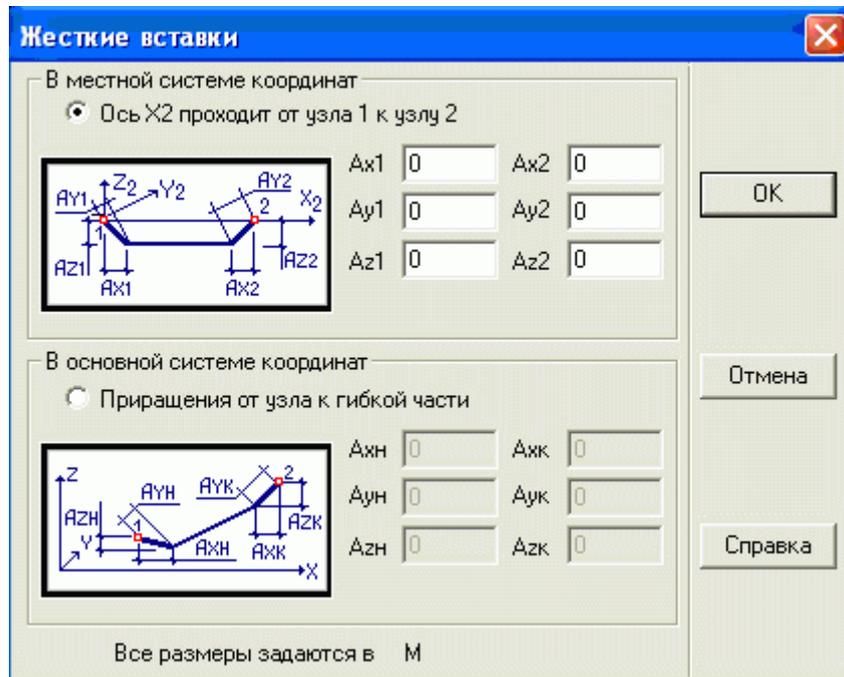


Рис.18.36

Після виконання операції вона разом із заданими параметрами залишається активною і її можна застосувати до інших скінчених елементів. Для відмови від подальшого використання необхідно натиснути кнопку «Отказ» () на панелі інструментів.

б) Із використанням вікна «Информация об элементах» (рис.18.35). Для цього необхідно активізувати це вікно натисканням кнопки  на панелі «Фильтры отображения», обрати скінчений елемент безпосереднім указуванням на схемі курсором, або за його номером і натиснути кнопку «Жесткие вставки». Після цього на екрані з'явиться відповідне вікно, робота з яким описана в попередньому пункті.

Необхідно пам'ятати, що для відображення наявності на розрахунковій схемі жорстких вставок повинна бути активізована відповідна опція – натиснена кнопка  на панелі «Фильтры отображения».

18.4.4. Задання навантажень

Елементи керування для виклику операцій задання навантажень розташовуються в розділі «Загружения» панелі інструментів. Ці операції можуть бути активізовані командами меню «Операции» (рис.18.10). Розглянемо способи опису окремих силових навантажень.

Задання вузлових навантажень

Операція задання вузлових навантажень активізується натисканням кнопки  «Загружения» панелі інструментів, після чого на екрані з'являється вікно «Ввод узловых нагрузок» (рис.18.37), в якому натисканням відповідних кнопок необхідно визначити вид навантаження (сила або момент), його напрямок в базисній системі координат. При цьому у вікні праворуч з'являється зображення навантаження, де показаний його додатній напрямок.

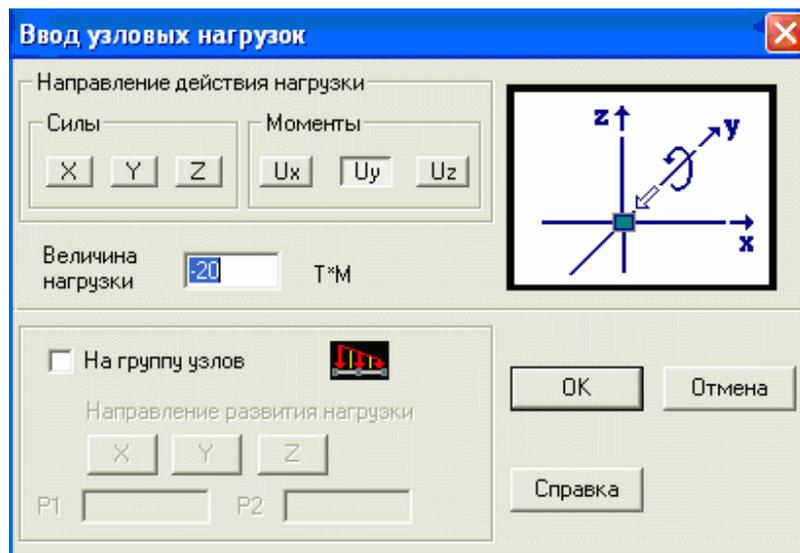


Рис.18.37

Після задання величини навантаження з урахуванням знака (на рис.18.37 наведені параметри для задання зосередженого моменту $M=20$ кНм у вузлі №7 рами, рис.18.12) і натиснення кнопки «ОК» у вікні, курсор набуває вигляду прицілу, що дозволяє відмітити окремий вузол (або декілька вузлів), в яких прикладене описане навантаження, після чого необхідно натиснути кнопку «ОК» () на панелі інструментів.

Для відображення прикладеного навантаження на розрахунковій схемі повинна бути активізована відповідна опція – натиснена кнопка  на панелі «Фильтры отображения».

Задання навантажень на скінчені елементи

Операція задання навантажень на скінчені елементи активізується натисканням кнопки  «Загружения» панелі інструментів, після чого на екрані з'являється вікно «Задание нагрузок на стержневые элементы» (рис.18.38).

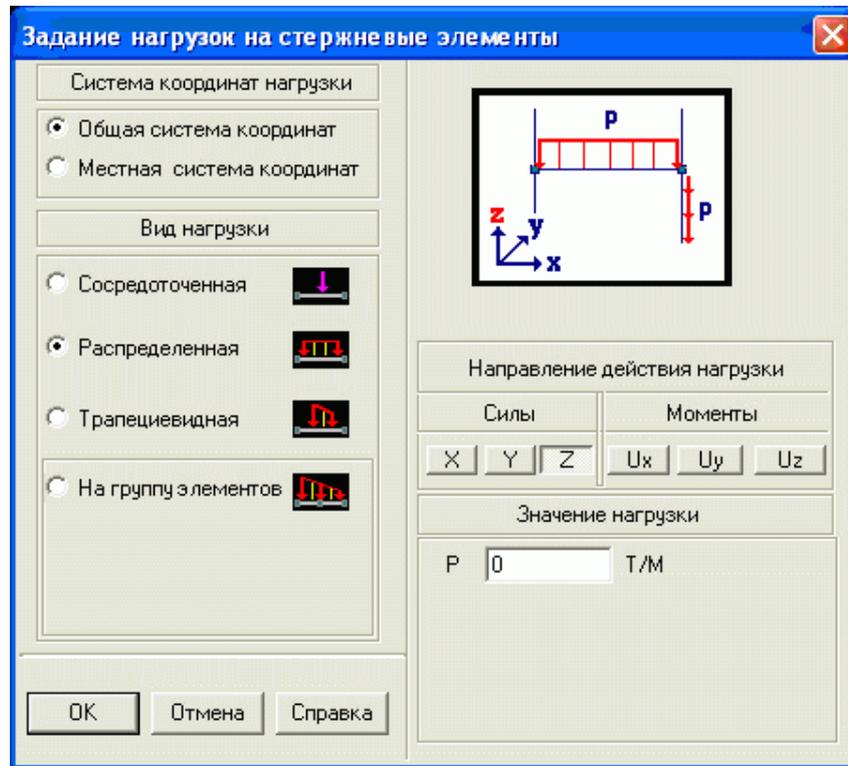


Рис.18.38

Для скінченого елемента опис навантаження може здійснюватись в базисній або місцевій системі координат, що визначається відповідною опцією. Далі, після визначення виду навантаження (зосереджене, рівномірно розподілене або нерівномірно розподілене за лінійним законом) і його напрямку задається величина навантаження. При цьому у вікні праворуч з'являється зображення навантаження, де показаний його додатній напрямок. Після натиснення кнопки «ОК» у вікні, курсор набуває вигляду прицілу, що дозволяє відмітити окремий скінчений елемент (або групу елементів) в яких прикладене описане навантаження., після чого необхідно натиснути кнопку «ОК» () на панелі інструментів.

Для відображення прикладеного навантаження на розрахунковій схемі повинна бути активізована відповідна опція – натиснена кнопка відображення зосереджених () або розподілених () навантажень на панелі «Фильтры отображения».

Видалення навантажень

Видалення навантажень, прикладених у вузлах або до скінчених елементів, може бути здійснено:

а) Із використанням операції «**Удаление нагрузок**», яка активізується натисканням кнопки  розділу «**Загружения**» панелі інструментів.

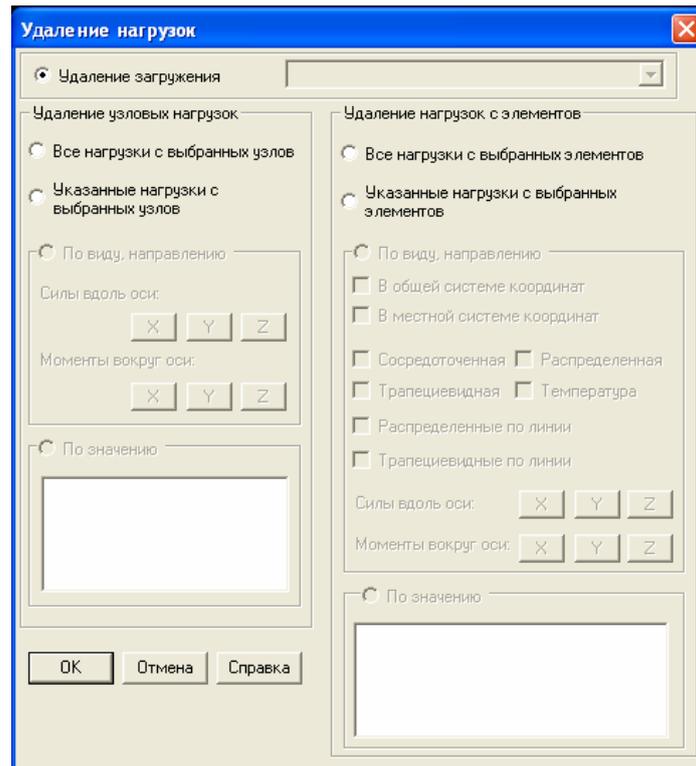


Рис.18.39

У відповідному вікні (рис.18.39) необхідно ідентифікувати навантаження, що видаляються, за способом їх прикладення (до вузлів або скінчених елементів), за видом (сили, моменти, розподілені навантаження, температурні навантаження) і напрямками дії. Після здійснення вибору і натиснення кнопок «**ОК**» у вікні і на панелі інструментів навантаження буде видалено.

б) Із використанням вікон «**Информация об элементах**» (рис.18.35) або «**Информация об узле**» (рис.18.18), виклик яких здійснюється кнопками  і  на панелі «**Фильтры отображения**». Після вибору відповідного вузла або скінченого елемента і натискання кнопки «**Нагрузки**» на екрані з'являється вікно із переліком навантажень (рис.18.40). Обране з переліку навантаження буде видалено відразу після натиснення кнопки «**Удалить нагрузку**».

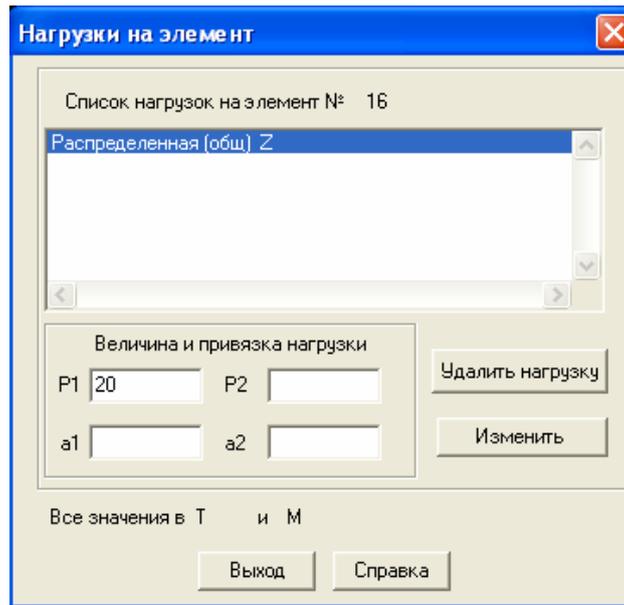


Рис.18.40

Формування груп навантажень і завантажень розрахункової схеми

Згідно із вимогами, що встановлені будівельними нормами, визначення внутрішніх зусиль і напружено-деформованого стану будівельних конструкцій виконується від дії декількох окремих груп навантажень, що мають різну фізичну природу і характер впливу на конструкцію (навантаження від власної ваги, снігові і вітрові навантаження, технологічні навантаження і т.ін.). Кожне з таких навантажень характеризується власною, відмінною від інших схемою прикладання до конструкції. Зважаючи на це, в ОК SCAD передбачена можливість проведення в межах одного розрахунку визначення напружено-деформованого стану конструкції від окремої дії декількох навантажень і подальшого визначення на цій основі внутрішніх зусиль від дії певних комбінацій навантажень. З точки зору процедури розв'язання задачі на основі МСЕ це означає проведення розв'язання системи рівнянь МСЕ, коефіцієнти якої визначаються геометричними і фізико-механічними параметрами дискретної моделі, із різними правими частинами, склад яких визначається розглядуваними навантаженнями.

З цією метою в ОК «SCAD» передбачено задання і збереження інформації про навантаження у вигляді сукупностей окремих зусиль і зовнішніх впливів, прикладених до конструкції. Такі сукупності зусиль розділені на дві категорії – «**Загружение**» і «**Группа нагрузок**».

«**Загружение**» – це сукупність зусиль і зовнішніх впливів, що становить один із варіантів діючого на конструкцію навантаження, яке використовується в розрахунку і від якого визначається напружено-деформований стан конструкції.

«**Группа нагрузок**» – це сукупність зусиль і зовнішніх впливів, які не враховуються в розрахунку як діючі завантаження, а використовуються лише на стадії формування завантажень

(можуть бути додані в діючі завантаження із певними коефіцієнтами). Групи навантажень використовуються в тих випадках, коли деякий набір навантажень на вузли і елементи включається в декілька діючих завантажень.

Для створення групи необхідно виконати наступні дії: використовуючи кнопку  «**Снять все нагрузки**» в розділі «**Загружения**» панелі інструментів видалити поточне завантаження; ввести навантаження, які треба помістити в групу (наприклад, як описано вище для вузлів і скінчених елементів) натиснути кнопку  «**Запись группы нагрузок**» і у діалоговому вікні, що відкрилося, зберегти групу навантажень, надавши їй певне ім'я, яке є єдиним ідентифікатором групи (групи не нумеруються) і натиснути кнопку «**ОК**». Після виконання цих операцій найменування введеної групи потрапляє в список. Для включення групи в завантаження необхідно використати операцію  – «**Сборка загружений из групп нагрузок**».

Якщо група навантажень є ідентичною завантаженню в цілому її можна записати або як групу, або відразу як завантаження. В останньому випадку після завершення опису сукупності навантажень необхідно натиснути кнопку  «**Сохранить/Добавить загрузку**» в розділі «**Загружения**» панелі інструментів.

Зважаючи на викладене, найпростішим шляхом виконання розрахунку конструкції, що знаходиться під одночасною дією декількох навантажень (як, наприклад, зображена на рис.18.12 рама) є послідовне введення цих навантажень і подальше збереження їх у єдине завантаження.

18.5. Виконання розрахунку в ОК SCAD

Необхідною умовою виконання розрахунку є задання мінімально необхідного обсягу вихідних даних, зокрема геометрії розрахункової моделі, в'язей, жорсткісних характеристик і навантаження.

З метою запобігання помилок, пов'язаних саме із недостатністю вихідних даних в ОК SCAD передбачена можливість виконання перевірки розрахункової схеми. Активізація цієї процедури здійснюється кнопкою  «**Экспресс-контроль расчетной схемы**» розділу «**Управление**» панелі інструментів. У відповідному вікні (рис.18.41) надається можливість обрати для контролю певні типи помилок, або натисканням кнопки «**Отметить все**» призначити контроль по всіх параметрах. Після натискання кнопки «**ОК**» у вікні на екрані з'являється вікно «**Обнаруженные ошибки**» (рис.18.42). Обравши з цього списку певний клас помилок можна отримати інформацію про скінчені елементи, де знайдені ці помилки у наступному вікні, зображеному на рис.18.43. Відповідні елементи можуть бути за бажанням користувача видалені, або виділені чи фрагментовані з метою подальшого виправлення помилок. У випадку якщо всі вихідні дані задані

правильно для початку розрахунку необхідно натиснути кнопку «**Выйти в экран управления проектом**»  в розділі «**Управление**» панелі інструментів, або обрати пункт меню «**Файл**» → «**Выйти из режима**», що призведе до появи на екрані **Дерева проекта**.

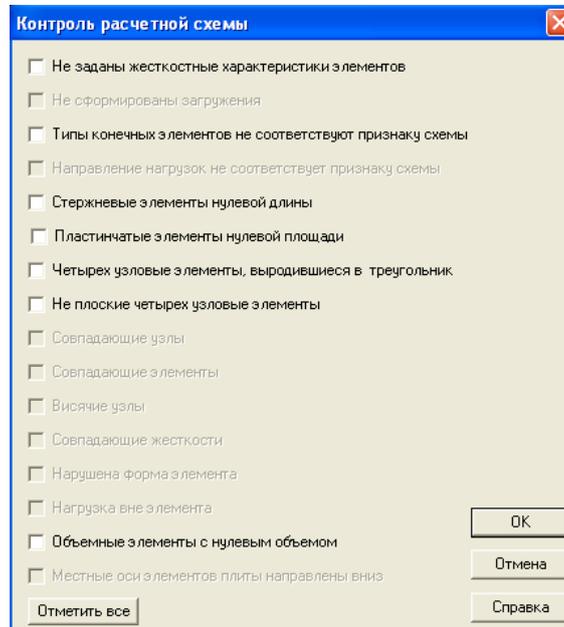


Рис.18.41

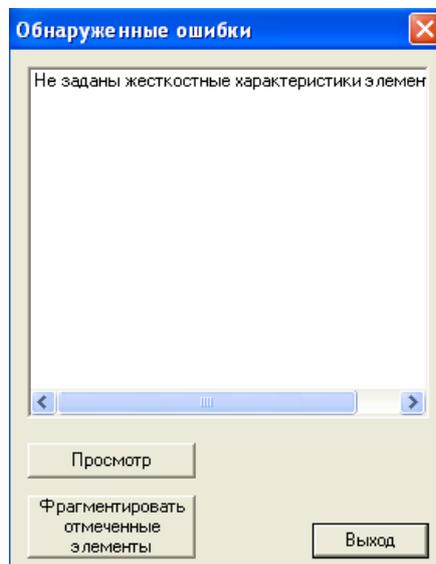


Рис.18.42



Рис.18.43

Процедура розрахунку активізується шляхом обрання в папці «**Расчет**» дерева проекту необхідного виду розрахунку (наприклад «**Линейный расчет**»). Після цього на екрані з'являється діалогове вікно «**Параметры расчета**», в якому здійснюється визначення якісних і кількісних параметрів розрахунку і формування протоколу.

Виконання розрахунку може бути відстежено за допомогою вікна роботи процесора (рис.18.44). Верхній рядок вікна містить назву поточного проекту, а в полі вікна відокремлені 3 області, в яких наведені загальний вигляд розрахункової схеми, структура матриці жорсткості розв'язуваної задачі (число в заголовному рядку вікна «**Матриця**» визначає кількість ступенів вільності системи) і протокол виконання розрахунку.

Протокол містить інформацію щодо основних етапів розрахунку, параметри розв'язуваної системи рівнянь і потрібні для розв'язання задачі ресурси пам'яті.

У процесі обробки матриці жорсткості системи в протоколі може з'явитись повідомлення про геометричну змінюваність системи. Таке повідомлення може бути пов'язане із неправильним описом в'язей. OK SCAD у цьому випадку призначає додаткові в'язі автоматично або вносить виправлення в існуючі в'язі. Після цього необхідно провести аналіз описаної розрахункової схеми, доданих до неї в'язей та виправити знайдені помилки. Повідомлення про геометричну змінюваність може бути також наслідком недостатньої точності розкладення матриці (мінімально допустимим на діагоналі матриці числом). Така ситуація може виникнути, наприклад, у випадку суттєвих відмінностей абсолютних жорсткостей окремих елементів в складі дискретної моделі. В цьому випадку для виправлення величини точності розкладання матриці необхідно повторно розпочати розрахунок і зазначити нове значення точності розкладання матриці у вікні «**Параметри розрахунку**».

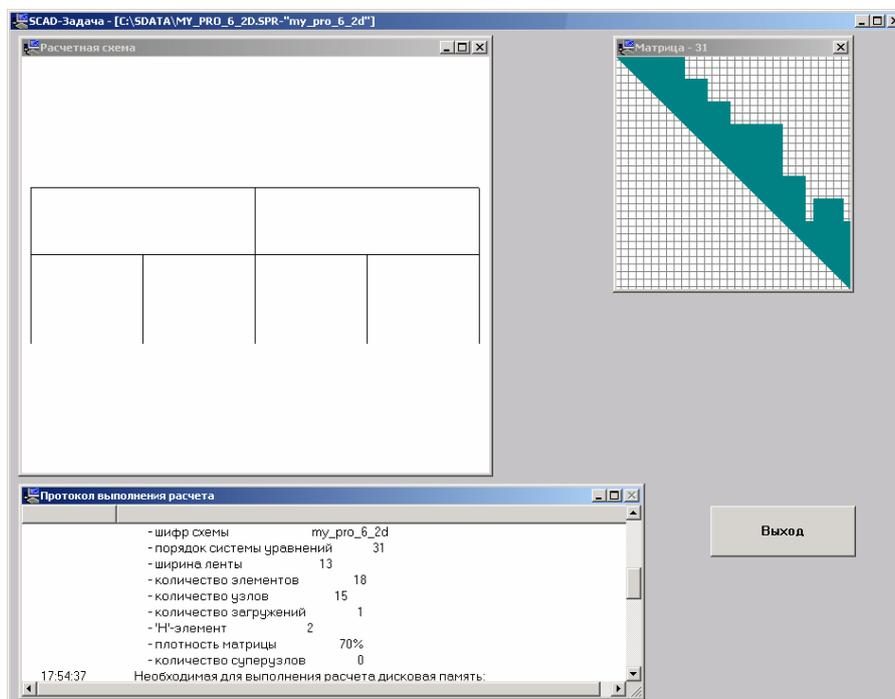


Рис.18.44

Після успішного завершення розрахунку, про що користувач сповіщається записом в протоколі «Задание выполнено», для виходу з режиму розрахунку необхідно натиснути кнопку «**Выход**».

18.6. Перегляд і документування результатів

Активізація режиму перегляду результатів здійснюється із використанням пункту «Графический анализ» розділу «Расчет» дерева проекту. Цей режим дозволяє отримувати наочне подання результатів розрахунку у вигляді епюр, кольорових ізополів параметрів напружено-деформованого стану, зображень деформованих схем конструкції і т.ін.

Перегляд розподілу внутрішніх зусиль

Перегляд розподілу внутрішніх зусиль здійснюється із використанням команд розділу панелі інструментів «Эпюры усилий». Відповідність основних команд цього розділу і пункта меню «Операции», а також найменування списків вибору наведені на рис.18.45.

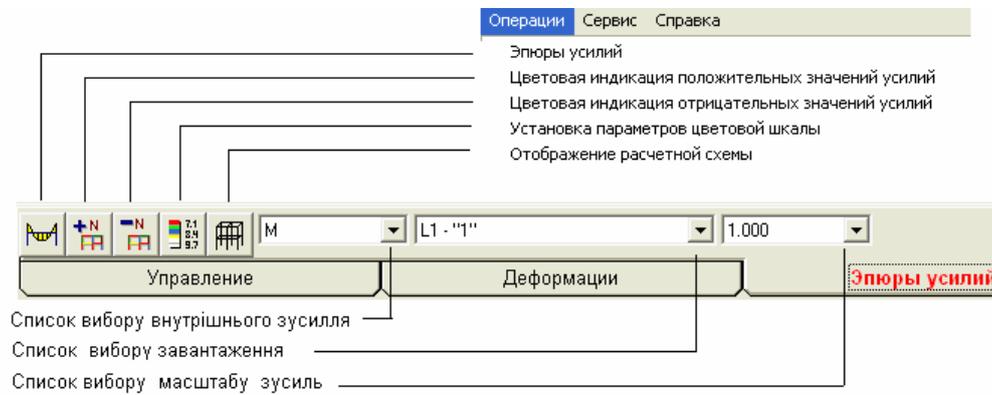


Рис.18.45

Перегляд епюр зусиль може бути здійснений у вигляді епюри певного зусилля для розрахункової схеми в цілому або у вигляді епюр всіх зусиль для окремого стержня.

Для перегляду епюри певного внутрішнього зусилля необхідно, після активізації розділу панелі інструментів «Эпюры усилий» здійснити вибір цього зусилля та відповідного завантаження в списках вибору, а для нанесення на зображення числових значень – активізувати

опцію «Оцифровка изополей/изолиний» натисканням кнопки  панелі інструментів «Фильтры отображения». Для більшої наочності відображення передбачена також можливість вибору масштабу відкладання зусиль на епюрах.

Для того, щоб переглянути зусилля в окремому скінченому елементі, необхідно активізувати операцію «Информация об элементах» на панелі «Фильтры отображения». У відповідному вікні, на відміну від його вигляду, показаному на рис. 18.35, після проведення розрахунку буде доступною кнопка виклику команди «Эпюры усилий». Вигляд епюр в стержні, обмеженому вузлами №№14-15 (рис.18.17) при навантаженнях, показаних на рис.18.12, наведений на рис.18.46. Ці епюри відображаються в окремому вікні, яке також містить інформацію про скінчений елемент, зокрема про його поперечний переріз.

Перегляд розподілу деформацій

Перегляд розподілу деформацій здійснюється із використанням команд розділу панелі інструментів «Деформації». Відповідність основних команд цього розділу і пункту меню «Операції» наведена на рис.18.47.

При виконанні команд цього розділу є можливість переглянути значення характерних переміщень усієї дискретної моделі. Виконання команди «Вивод значень переміщень в узлах» відзначає біля кожного вузла, залежно від обраної зі списку вибору переміщень опції, значення лінійного переміщення. Для отримання інформації про всі переміщення одного окремо обраного вузла необхідно скористатись командою «Інформація об узлах» (кнопка  на панелі «Фильтры отображения»).

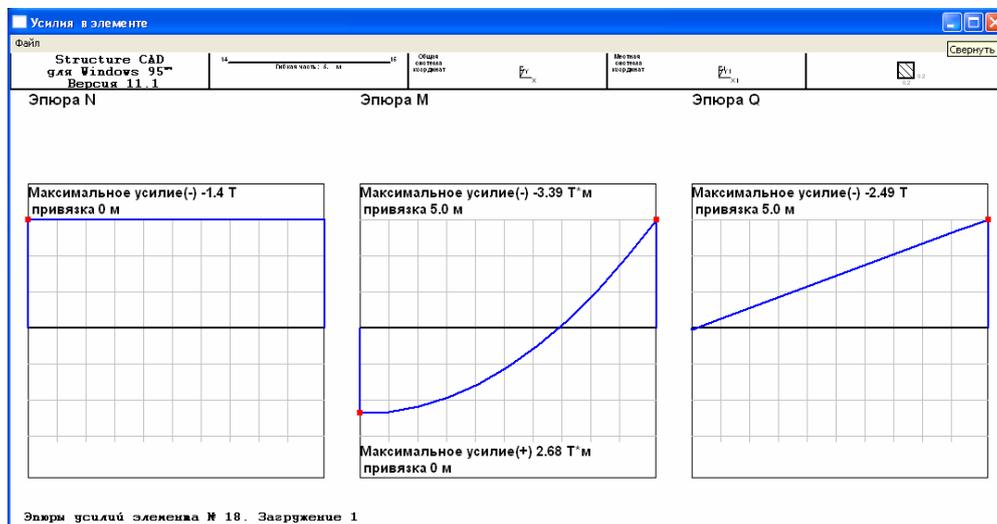


Рис.18.46

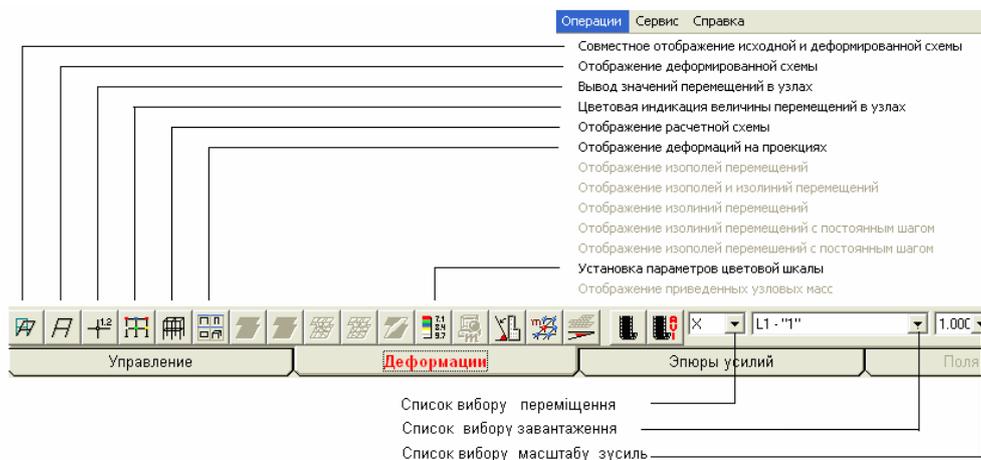


Рис.18.47

Після вибору вузла (курсором або за номером) на екрані у нижній частині цього ж вікна з'явиться інформація про всі переміщення вузла. Приклад результату послідовного виконання команд перегляду переміщень наведений на рис.18.48, де показаний фрагмент дискретної моделі із наведеними біля вузлів значеннями переміщень, та вікно з інформацією про переміщення вузла №13.

Використання команди **«Інформація об елементах»** надає змогу переглянути епюри переміщень в трьох характерних напрямках (X , Y , Z). Форма їх подання є аналогічною до показаних на рис.18.46 епюр внутрішніх зусиль.

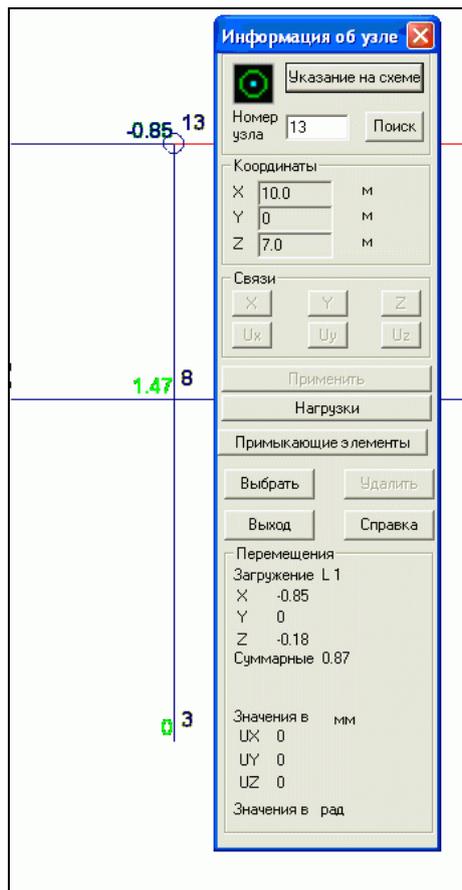


Рис.18.48

Вихід з режиму перегляду результатів здійснюється командою **«Выход из режима»** в пункти меню **«Файл»**. Виконання цієї команди відображає на екрані **Дерево проекта**.

Створення таблиць результатів розрахунку

Подання результатів розрахунку у вигляді таблиць може бути здійснено із використанням генератора таблиць у текстовому форматі, що здійснюється командою **«Печать таблиц»** **Дерева проекта**, або із використанням підсистеми **Документатор**.

При активізації команди **«Печать таблиц»** на екрані з'являється діалогове вікно **«Оформление результатов расчета»** (рис.18.49), в якому надається можливість обрати склад інформації, що буде подана в таблиці. Після вибору опції, що визначає зміст таблиці (наприклад, **«Перемещение»**, рис.18.49) за допомогою кнопки **«Параметры вывода»** здійснюється виклик діалогового вікна **«Состав выходных таблиц»** (рис.18.50), яке, в свою чергу, містить кнопки для виклику діалогових вікон для задання кількості вузлів, для яких здійснюється виведення інформації про переміщення (рис.18.51) та завантажень, для яких буде здійснений друк пекремішень (рис.18.52). У випадку вибору у вікні **«Оформление результатов расчета»** опції **«Усилия и напряжения»** формування таблиці буде здійснюватись по скінчених елементах, що відобразиться у вікні **«Состав выходных таблиц»** наявністю кнопки **«Список элементов»**.

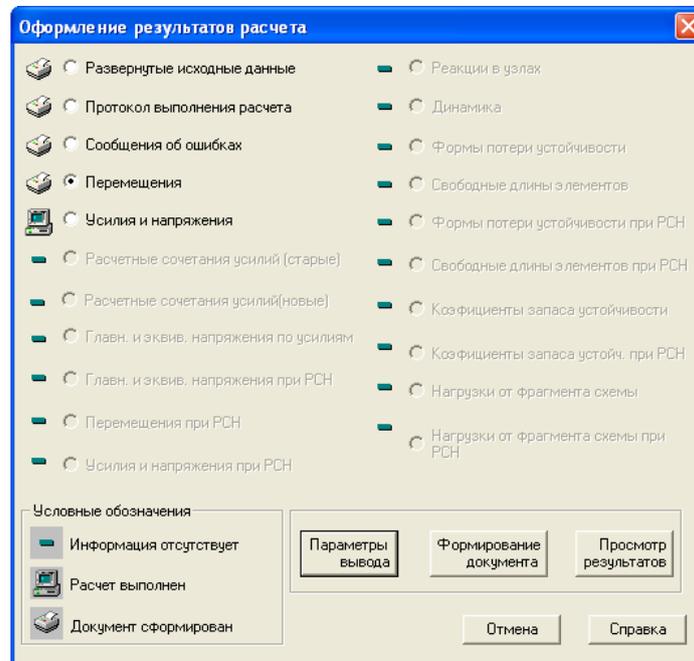


Рис.18.49

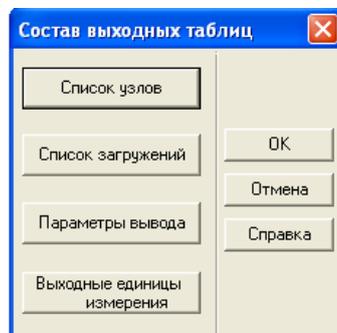


Рис.18.50

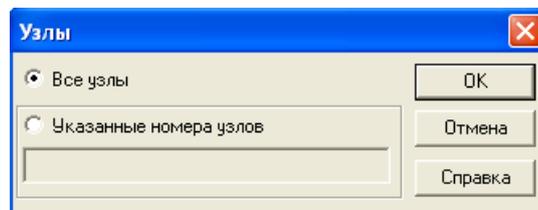


Рис.18.51

Кнопка **«Параметры вывода»** викликає діалогове вікно для визначення параметрів форматування таблиці (кількості рядків на сторінці, формування таблиці по рядках або по стовпцях, розмірів шрифту тощо).

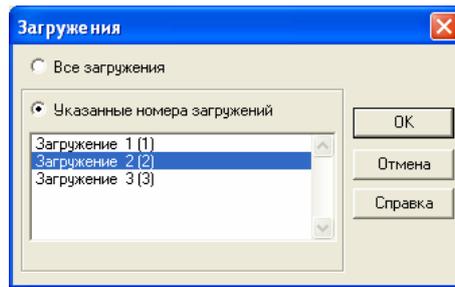


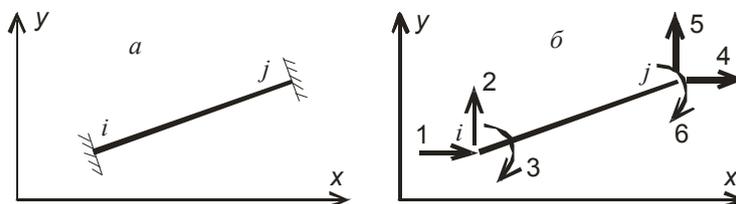
Рис.18.52

Необхідно зауважити, що утворені в такий спосіб таблиці мають являють собою, фактично, текст із певним розташуванням символів, і дозволяють лише отримати компактне та наочне представлення результатів розрахунку для перегляду або друку. Вони не можуть бути використані в подальшому для обробки із застосуванням стандартних засобів, що надають для обробки таблиць Microsoft Word або Microsoft Excel. На відміну від цього, система «Документатор» дозволяє отримувати таблиці в електронному форматі, сумісному із використовуваним в Microsoft Word або Microsoft Excel.

Вікно керування роботою системи «Документатор» викликається однойменною командою **Дерева проекту** і містить перелік опцій для вибору видів інформації (вихідних даних, переміщень, зусиль, тощо), на основі якої формуватимуться таблиці. Доступність вибору видів інформації визначається автоматично залежно від виду розв’язуваної задачі або наявності цієї інформації в результатах розв’язання задачі. Вибір зі запропонованого списку здійснюється шляхом встановлення відповідних маркерів. Додаткові опції виведення інформації встановлюються у діалогових вікнах, які викликаються натисканням кнопок , розташованих ліворуч від рядків із назвою виду інформації. В нижній частині вікна містяться кнопки за допомогою яких здійснюється вибір Windows-програми (Microsoft Word або Microsoft Excel), у форматі якої буде здійснено формування таблиці.

Матриці жорсткості та вантажні реакції для стержневих скінченних елементів

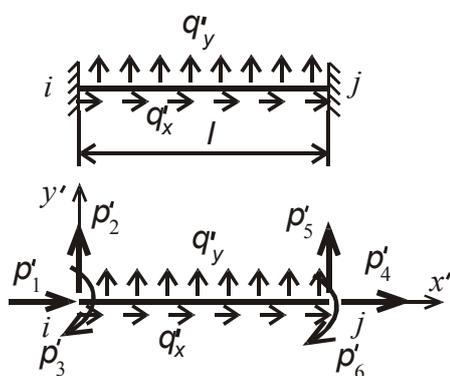
1.Стержень, що має на кінцях затиснення



Матриця жорсткості

$$k_e = \begin{bmatrix} fC^2 + \frac{12i}{l^2}S^2 & SC\left(f - \frac{12i}{l^2}\right) & \frac{6i}{l}S & -\left(fC^2 + \frac{12i}{l^2}S^2\right) & -SC\left(f - \frac{12i}{l^2}\right) & \frac{6i}{l}S \\ SC\left(f - \frac{12i}{l^2}\right) & fS^2 + \frac{12i}{l^2}C^2 & -\frac{6i}{l}C & -SC\left(f - \frac{12i}{l^2}\right) & -\left(fS^2 + \frac{12i}{l^2}C^2\right) & -\frac{6i}{l}C \\ \frac{6i}{l}S & -\frac{6i}{l}C & 4i & -\frac{6i}{l}S & \frac{6i}{l}C & 2i \\ -\left(fC^2 + \frac{12i}{l^2}S^2\right) & -SC\left(f - \frac{12i}{l^2}\right) & -\frac{6i}{l}S & fC^2 + \frac{12i}{l^2}S^2 & SC\left(f - \frac{12i}{l^2}\right) & -\frac{6i}{l}S \\ -SC\left(f - \frac{12i}{l^2}\right) & -\left(fS^2 + \frac{12i}{l^2}C^2\right) & \frac{6i}{l}C & SC\left(f - \frac{12i}{l^2}\right) & fS^2 + \frac{12i}{l^2}C^2 & \frac{6i}{l}C \\ \frac{6i}{l}S & -\frac{6i}{l}C & 2i & -\frac{6i}{l}S & \frac{6i}{l}C & 4i \end{bmatrix}_e$$

Вантажні реакції в локальній системі координат стержня



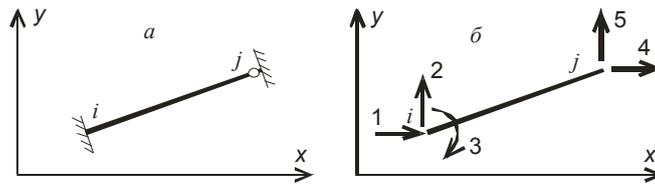
$$\vec{p}'_e = \begin{Bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \\ p'_4 \\ p'_5 \\ p'_6 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} -\frac{q'_x l}{2} \\ \frac{q'_y l}{2} \\ +\frac{q'_y l^2}{12} \\ -\frac{q'_x l}{2} \\ -\frac{q'_y l}{2} \\ -\frac{q'_y l^2}{12} \end{Bmatrix}_e$$

Допоміжні матриці

$$T_e = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_e$$

$$h_e = \begin{bmatrix} fC & fS & 0 & -fC & -fS & 0 \\ -\frac{12i}{l^2}S & \frac{12i}{l^2}C & -\frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2}S & -\frac{12i}{l^2}C & -\frac{6i}{l} \\ \frac{6i}{l}S & -\frac{6i}{l}C & 4i & -\frac{6i}{l}S & \frac{6i}{l}C & 2i \\ -fC & -fS & 0 & fC & fS & 0 \\ \frac{12i}{l^2}S & -\frac{12i}{l^2}C & \frac{6i}{l} & -\frac{12i}{l^2}S & \frac{12i}{l^2}C & \frac{6i}{l} \\ \frac{6i}{l}S & -\frac{6i}{l}C & 2i & -\frac{6i}{l}S & \frac{6i}{l}C & 4i \end{bmatrix}_e$$

2. Стержень, що має затиснення на початку і шарнір на кінці



Матриця жорсткості

$$k_e = \begin{bmatrix} fC^2 + \frac{3i}{l^2}S^2 & SC\left(f - \frac{3i}{l^2}\right) & \frac{3i}{l}S & -\left(fC^2 + \frac{3i}{l^2}S^2\right) & -SC\left(f - \frac{3i}{l^2}\right) \\ SC\left(f - \frac{3i}{l^2}\right) & fS^2 + \frac{3i}{l^2}C^2 & -\frac{3i}{l}C & -SC\left(f - \frac{3i}{l^2}\right) & -\left(fS^2 + \frac{3i}{l^2}C^2\right) \\ \frac{3i}{l}S & -\frac{3i}{l}C & 3i & -\frac{3i}{l}S & \frac{3i}{l}C \\ -\left(fC^2 + \frac{3i}{l^2}S^2\right) & -SC\left(f - \frac{3i}{l^2}\right) & -\frac{3i}{l}S & fC^2 + \frac{3i}{l^2}S^2 & SC\left(f - \frac{3i}{l^2}\right) \\ -SC\left(f - \frac{3i}{l^2}\right) & -\left(fS^2 + \frac{3i}{l^2}C^2\right) & \frac{3i}{l}C & SC\left(f - \frac{3i}{l^2}\right) & fS^2 + \frac{3i}{l^2}C^2 \end{bmatrix}_e$$

Вантажні реакції в локальній системі координат стержня

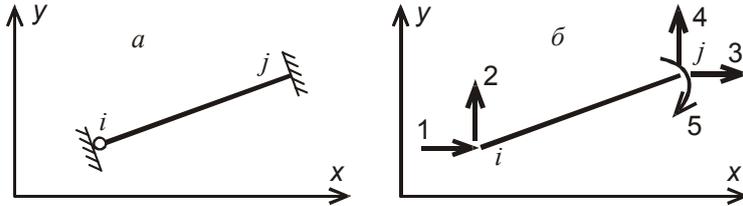
$$\bar{p}'_e = \begin{Bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \\ p'_4 \\ p'_5 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} -\frac{q'_x l}{2} \\ 5q'_y l \\ \frac{8}{q'_y l^2} \\ -\frac{q'_x l}{2} \\ 3q'_y l \\ -\frac{8}{8} \end{Bmatrix}_e$$

Допоміжні матриці

$$T_e = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}_e$$

$$\mathbf{h}_e = \begin{bmatrix} f \cos \beta & f \sin \beta & 0 & -f \cos \beta & -f \sin \beta \\ -\frac{3i}{l^2} \sin \beta & \frac{3i}{l^2} \cos \beta & -\frac{3i}{l} & \frac{3i}{l^2} \sin \beta & -\frac{3i}{l^2} \cos \beta \\ \frac{3i}{l} \sin \beta & -\frac{3i}{l} \cos \beta & 3i & -\frac{3i}{l} \sin \beta & \frac{3i}{l} \cos \beta \\ -f \cos \beta & -f \sin \beta & 0 & f \cos \beta & f \sin \beta \\ \frac{3i}{l^2} \sin \beta & -\frac{3i}{l^2} \cos \beta & \frac{3i}{l} & -\frac{3i}{l^2} \sin \beta & \frac{3i}{l^2} \cos \beta \end{bmatrix}_e$$

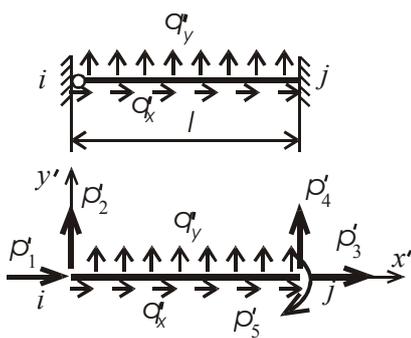
3. Стержень, що має шарнір на початку і затиснення на кінці



Матриця жорсткості

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} fC^2 + \frac{3i}{l^2} S^2 & SC\left(f - \frac{3i}{l^2}\right) & -\left(fC^2 + \frac{3i}{l^2} S^2\right) & -SC\left(f - \frac{3i}{l^2}\right) & \frac{3i}{l} S \\ SC\left(f - \frac{3i}{l^2}\right) & fS^2 + \frac{3i}{l^2} C^2 & -SC\left(f - \frac{3i}{l^2}\right) & -\left(fS^2 + \frac{3i}{l^2} C^2\right) & -\frac{3i}{l} C \\ -\left(fC^2 + \frac{3i}{l^2} S^2\right) & -SC\left(f - \frac{3i}{l^2}\right) & fC^2 + \frac{3i}{l^2} S^2 & SC\left(f - \frac{3i}{l^2}\right) & -\frac{3i}{l} S \\ -SC\left(f - \frac{3i}{l^2}\right) & -\left(fS^2 + \frac{3i}{l^2} C^2\right) & SC\left(f - \frac{3i}{l^2}\right) & fS^2 + \frac{3i}{l^2} C^2 & \frac{3i}{l} C \\ \frac{3i}{l} S & -\frac{3i}{l} C & -\frac{3i}{l} S & \frac{3i}{l} C & 3i \end{bmatrix}_e$$

Вантажні реакції в локальній системі координат стержня



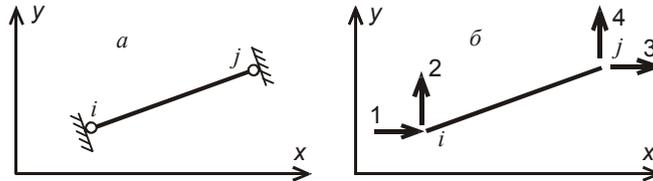
$$\bar{\mathbf{p}}'_e = \begin{Bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \\ p'_4 \\ p'_5 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} -\frac{q'_x l}{2} \\ \frac{5q'_y l}{8} \\ -\frac{q'_x l}{2} \\ \frac{3q'_y l}{8} \\ -\frac{q'_y l^2}{8} \end{Bmatrix}_e$$

Допоміжні матриці

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_e$$

$$\mathbf{h}_e = \begin{bmatrix} f \cos \beta & f \sin \beta & -f \cos \beta & -f \sin \beta & 0 \\ -\frac{3i}{l^2} \sin \beta & \frac{3i}{l^2} \cos \beta & \frac{3i}{l^2} \sin \beta & -\frac{3i}{l^2} \cos \beta & -\frac{3i}{l} \\ -f \cos \beta & -f \sin \beta & f \cos \beta & f \sin \beta & 0 \\ \frac{3i}{l^2} \sin \beta & -\frac{3i}{l^2} \cos \beta & -\frac{3i}{l^2} \sin \beta & \frac{3i}{l^2} \cos \beta & \frac{3i}{l} \\ -\frac{3i}{l} \sin \beta & -\frac{3i}{l} \cos \beta & -\frac{3i}{l} \sin \beta & \frac{3i}{l} \cos \beta & 3i \end{bmatrix}_e$$

4. Стержень, що має на кінцях шарніри



Матриця жорсткості

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} f \cos^2 \beta & f \sin \beta \cos \beta & -f \cos^2 \beta & -f \sin \beta \cos \beta \\ f \sin \beta \cos \beta & f \sin^2 \beta & -f \sin \beta \cos \beta & -f \sin^2 \beta \\ -f \cos^2 \beta & -f \sin \beta \cos \beta & f \cos^2 \beta & f \sin \beta \cos \beta \\ -f \sin \beta \cos \beta & -f \sin^2 \beta & f \sin \beta \cos \beta & f \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

Вантажні реакції в локальній системі координат стержня

$$\bar{\mathbf{p}}'_e = \begin{Bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \\ p'_4 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} -\frac{q'_x l}{2} \\ q'_y l \\ -\frac{q'_x l}{2} \\ \frac{q'_y l}{2} \end{Bmatrix}_e$$

Допоміжні матриці

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}_e$$

$$\mathbf{h}_e = \begin{bmatrix} f \cos \beta & f \sin \beta & -f \cos \beta & -f \sin \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f \cos \beta & -f \sin \beta & f \cos \beta & f \sin \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_e$$

Коефіцієнти формул методу переміщень для стиснено-зігнутих стержнів

Значення функцій α , β , $\alpha + \beta$, γ , $\bar{\alpha}$, $\bar{\gamma}$, $\frac{v}{\operatorname{tg} v}$, $\frac{v}{\sin v}$, $v \operatorname{tg} v$

v	α	β	$\alpha + \beta$	γ	$\bar{\alpha}$	$\bar{\gamma}$	$\frac{v}{\operatorname{tg} v}$	$\frac{v}{\sin v}$	$v \operatorname{tg} v$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,0	2,000	1,000	3,000	6,000	3,000	3,000	1,000	1,000	0,000
0,1	1,999	1,000	2,999	5,994	2,998	2,988	0,997	1,002	0,010
0,2	1,997	1,001	2,998	5,976	2,992	2,952	0,987	1,006	0,040
0,3	1,994	1,001	2,995	5,946	2,982	2,892	0,970	1,015	0,093
0,4	1,989	1,003	2,992	5,904	2,968	2,808	0,946	1,027	0,169
0,5	1,983	1,004	2,987	5,850	2,950	2,700	0,915	1,043	0,273
0,6	1,976	1,006	2,982	5,784	2,927	2,567	0,877	1,063	0,410
0,7	1,967	1,008	2,975	5,706	2,901	2,411	0,831	1,086	0,590
0,8	1,957	1,011	2,968	5,616	2,869	2,229	0,777	1,115	0,824
0,9	1,945	1,014	2,959	5,513	2,834	2,024	0,714	1,149	1,134
1,0	1,932	1,017	2,950	5,399	2,794	1,794	0,642	1,188	1,557
1,1	1,918	1,021	2,939	5,273	2,749	1,539	0,560	1,234	2,161
1,2	1,902	1,025	2,927	5,134	2,699	1,259	0,466	1,287	3,086
1,3	1,885	1,030	2,914	4,984	2,644	0,954	0,361	1,349	4,683
1,4	1,866	1,035	2,901	4,821	2,584	0,624	0,241	1,421	8,117
1,5	1,845	1,040	2,886	4,628	2,511	0,268	0,106	1,504	21,152
1,6	1,823	1,046	2,870	4,459	2,446	-0,114	0,001	1,570	1971,0
1,7	1,800	1,053	2,852	4,260	2,367	-0,523	-0,014	1,580	-171,66
1,8	1,774	1,060	2,834	4,048	2,282	-0,958	-0,047	1,601	-54,772
1,9	1,747	1,068	2,815	3,824	2,189	-1,421	-0,221	1,714	-13,084
2,0	1,718	1,076	2,794	3,588	2,088	-1,912	-0,420	1,848	-7,715
2,1	1,687	1,085	2,772	3,339	1,979	-2,431	-0,649	2,008	-5,561
2,2	1,654	1,095	2,749	3,078	1,861	-2,979	-0,915	2,199	-4,370
2,3	1,620	1,105	2,725	2,805	1,732	-3,558	-1,228	2,433	-3,591
2,4	1,583	1,116	2,699	2,519	1,591	-4,169	-1,601	2,721	-3,002
2,5	1,544	1,129	2,672	2,220	1,438	-4,812	-2,055	3,084	-2,547
2,6	1,503	1,142	2,644	1,909	1,270	-5,490	-2,620	3,553	-2,198
2,7	1,459	1,156	2,615	1,585	1,086	-6,204	-3,347	4,177	-1,868
2,8	1,413	1,171	2,584	1,248	0,833	-6,957	-4,302	5,044	-1,564
2,9	1,364	1,188	2,552	0,898	0,659	-7,751	-5,711	6,318	-1,276
3,0	1,312	1,206	2,518	0,536	0,408	-8,592	-7,876	8,358	-0,995
3,1	1,257	1,225	2,482	0,160	0,127	-9,483	-11,769	12,121	-0,715
3,14	1,235	1,233	2,468	0,006	0,005	-9,855	-21,046	21,258	-0,428

ν	α	β	$\alpha + \beta$	γ	$\bar{\alpha}$	$\bar{\gamma}$	$\frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu}$	$\frac{\nu}{\sin \nu}$	$\operatorname{tg} \nu$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3,15	1,229	1,235	2,464	-0,033	-0,026	-9,949	-74,489	74,554	-0,129
3,2	1,199	1,246	2,446	-0,229	-0,191	-10,431	54,725	-54,725	0,187
3,3	1,138	1,269	2,407	-0,630	-0,554	-11,444	20,658	-20,920	0,527
3,4	1,073	1,294	2,367	-1,046	-0,974	-12,534	12,863	-13,305	0,899
3,5	1,004	1,321	2,325	-1,474	-1,468	-13,718	9,344	-9,978	1,311
3,6	0,931	1,351	2,282	-1,916	-2,059	-15,019	7,295	-8,135	1,776
3,7	0,853	1,383	2,236	-2,372	-2,781	-16,471	5,922	-6,983	2,311
3,8	0,770	1,419	2,189	-2,842	-3,691	-18,131	4,912	-6,211	2,939
3,9	0,681	1,458	2,140	-3,325	-4,881	-20,091	4,116	-5,670	3,695
4,0	0,587	1,502	2,088	-3,823	-6,518	-22,518	3,455	-5,285	4,631
4,1	0,485	1,550	2,035	-4,335	-8,941	-25,751	2,880	-5,010	5,836
4,2	0,375	1,604	1,979	-4,862	-12,947	-30,587	2,362	-4,819	7,467
4,3	0,257	1,664	1,921	-5,403	-20,984	-39,474	1,881	-4,693	9,829
4,4	0,130	1,731	1,861	-5,959	-45,981	-65,341	1,421	-4,624	13,624
4,49	0,005	1,799	1,804	-6,472	-1135,9	-1336,1	0,970	-4,603	20,868
4,5	-0,009	1,807	1,797	-6,530	683,787	663,537	0,519	-4,629	40,757
4,6	-0,162	1,893	1,732	-7,117	44,008	22,848	0,058	-4,700	379,35
4,7	-0,329	1,992	1,663	-7,719	23,456	1,366	-0,422	-4,818	-54,647
4,8	-0,514	2,106	1,591	-8,338	16,207	-6,833	-0,930	-4,987	-25,811
4,9	-0,721	2,237	1,516	-8,973	12,439	-11,571	-1,479	-5,214	-16,903
5,0	-0,954	2,392	1,438	-9,624	10,084	-14,916	-2,082	-5,509	-12,492
5,1	-1,220	2,576	1,356	-10,293	8,439	-17,571	-2,758	-5,886	-9,805
5,2	-1,526	2,796	1,270	-10,979	7,196	-19,844	-3,530	-6,368	-7,957
5,3	-1,884	3,065	1,180	-11,684	6,200	-21,890	-4,435	-6,988	-6,575
5,4	-2,313	3,399	1,086	-12,408	5,365	-23,795	-5,524	-7,795	-5,467
5,5	-2,836	3,824	0,987	-13,150	4,636	-25,614	-6,880	-8,871	-4,558
5,6	-3,496	4,379	0,883	-13,913	3,980	-27,380	-8,640	-10,351	-3,760
5,7	-4,361	5,135	0,774	-14,697	3,370	-29,120	-11,055	-12,484	-3,043
5,8	-5,555	6,214	0,659	-15,503	2,791	-30,849	-14,636	-15,781	-2,378
5,9	-7,336	7,873	0,537	-16,331	2,226	-32,584	-20,618	-21,473	-1,746
6,0	-10,32	10,727	0,408	-17,183	1,665	-34,335	-32,926	-33,487	-1,130
6,1	-16,47	16,739	0,272	-18,061	1,097	-36,113	-74,360	-74,618	-0,517
6,2	-37,18	37,308	0,127	-18,965	0,510	-37,930	-1971,5	-1971,5	-0,020
6,28	-985,8	985,80	0,005	-19,709	0,020	-39,418	$-\infty$	$-\infty$	0,000

ЛІТЕРАТУРА

1. В.А.Баженов, С.Я.Гранат, О.В.Шишов. Будівельна механіка. Комп'ютерний курс. – К.: ВІПОЛ, 1999.
2. В.А.Баженов, О.В.Шишов. Будівельна механіка. Електронний підручник. – <http://www.knuba.edu.ua/ua/facultes/10/38>, 2008.
3. В.А.Баженов, А.В.Перельмутер, О.В.Шишов. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології. – К.: Каравела, 2009.
4. В.А.Баженов, А.В.Перельмутер, О.В.Шишов. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання – К.: ВІПОЛ, 2013.
5. В.А.Баженов, Г.М.Іванченко, О.В.Шишов. Будівельна механіка. Розрахункові справи. Задачі. Комп'ютерне тестування. Навчальний посібник. К.: Каравела, 2006, 2007.
6. В.А.Баженов, Г.М.Іванченко, О.В.Шишов, С.О.Пискунов. Будівельна механіка. Розрахункові справи. Задачі. Комп'ютерне тестування. Навчальний посібник. К.: Каравела, 2010.