Бесплатно

Министерство образования Украины

Днепропетровский горный институт

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ (РАЗДЕЛЫ "СТАТИКА", "КИНЕМАТИКА") ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ ГИ

Днепропетровск
1993

Министерство образования Украины

Днепропетровский горный институт

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
(РАЗДЕЛЫ"СТАТИКА","КИНЕМАТИКА")
ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ ГИ

Утверждено
на заседании кафедры теоретической и строительной механики.
Протокол № 8 от I4.06.92 г.

Днепропетровск
I993

Конспект лекций по теоретической механике (разделы"Статика", "Кинематика") для студентов специальности ГИ / Сост. В.П.Равишин. - Днепропетровск: ДГИ, 1993. - 59 с.

Составитель В.П.Равишин, канд. техн. наук, доц.

Ответственный за выпуск заведующий кафедрой теоретической и строительной механики В.И.Онищенко, д-р техн. наук, проф.

ВВЕДЕНИЕ В ПРЕДМЕТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Теоретическая механика - одна из основных технических дисциплин, изучаемых в высшей школе. Выводы и законы теоретической механики широко используются при расчете, изготовлении и эксплуатации машин. Наряду с астрономией и математикой, механика является древнейшей наукой, начало которой положил Архимед. Теоретическая механика - наука об общих законах равновесия или механических движениях материальных тел и является основой для всех технических дисциплин.

Основные разделы теоретической механики:

I. Статика.

2. Кинематика.

3. Динамика.

По свойствам изучаемого объекта теоретическую механику подразделяют:

а/ механика материальной точки; механика системы материальной точки;

б/ механика абсолютного твердого тела;

в/ механика тела переменной массы;

г/ механика жидкости /гидромеханика/;

д/ механика дефформируемого тела;

е/ механика газа /газодинамика/.

Раздел I. СТАТИКА

Глава I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ

I.I. Основные понятия статики. Сила.

Статика - раздел теоретической механики, в котором изучается равновесие тел, находящихся под действием системы сил. Основные задачи статики сводятся к следующему:

а/ сложение сил, действующих на тело, и приведение их к простейшему виду;

б/ определение условий равновесия под действием этих сил.

Способы решения задач:

I. Геометрическими построениями.

2. Численными расчетами (аналитически).

Сила, как мера количественного взаимодействия тел, в статике определяется следующими параметрами:

- точкой приложения, линией действия силы, модулем /рис.1.1/.

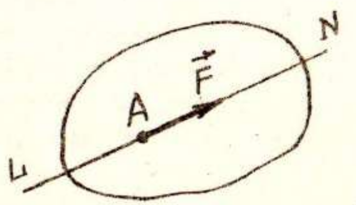


Рис. 1.1

Если на тело действует несколько сил - они образуют систему сил.

Условимся о следующем:

1. Если тело не связано с другими телами и ему можно задать любое движение в пространстве, то такое тело называют свободным. Если тело ограничено другими телами - не свободно.

2. Если данную систему сил можно заменить другой системой и при этом равновесие или движение тела не изменится - системы называют эквивалентными.

3. Если данная система сил может быть заменена одной силой, то последняя называется равнодействующей.

4. Сосредоточенной силой называется сила, приложенная к телу в одной точке. Сила, приложенная в нескольких точках по длине тела, называется распределенной нагрузкой /рис. 1.2/.

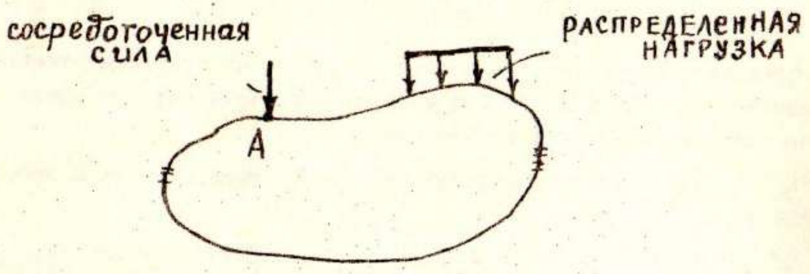


рис. 1.2

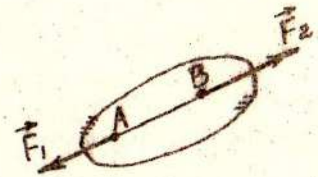
5. Если под действием данной системы сил тело находится в равновесии, то такая система сил называется уравновешенной или эквивалентной 0.

1.2. Аксиомы статики

В основу статики положены некоторые положения - аксиомы.

Аксиома 1

Абсолютно твердое тело находится в равновесии тогда и только тогда, если на него действуют силы, равные по модулю и направленные по одной прямой в противоположные стороны /рис. 1.3/.



$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Рис. 1.3

Аксиома 2

Действие данной системы сил на тело не изменится, если к ней прибавить или отнять уравновешенную систему /рис. 1.4/.

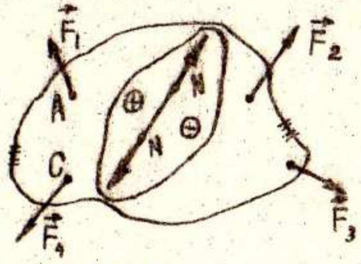
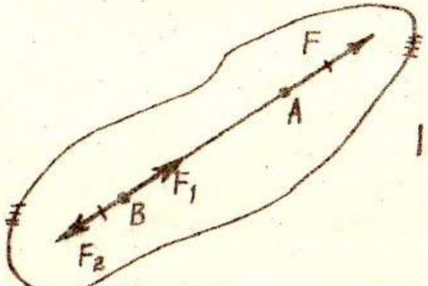


Рис. 1.4

Следствие из 1- и 2-й аксиом:

-действие силы на тело не изменится, если точку приложения силы перенести в любую точку тела по линии действия силы /рис.1.5/.



$$|\vec{F}| = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$$

Рис. I.5

Аксиома 3

Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, изображается диагональю параллелограмма, построенного на данных силах, как на сторонах /рис.I.6 /.

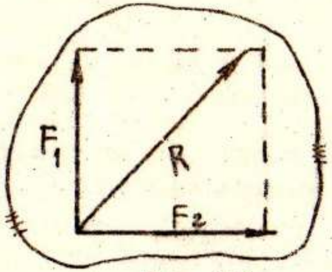


Рис. I.6.

Аксиома 4

Два тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и противоположными по направлению /рис. I.7 /.

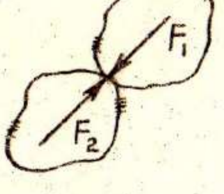


Рис. I.7

Аксиома 5

Равновесие не твердого /деформированного/ тела под действием данной системы сил не изменится, если тело отвердеет.

I.3. Связи и их реакции

I.4. Аксиомы связей

Всякое абсолютное твердое тело можно рассматривать как свободное тело, если заменить все действующие на тело связи их реакциями /рис.I.8 а,б/.

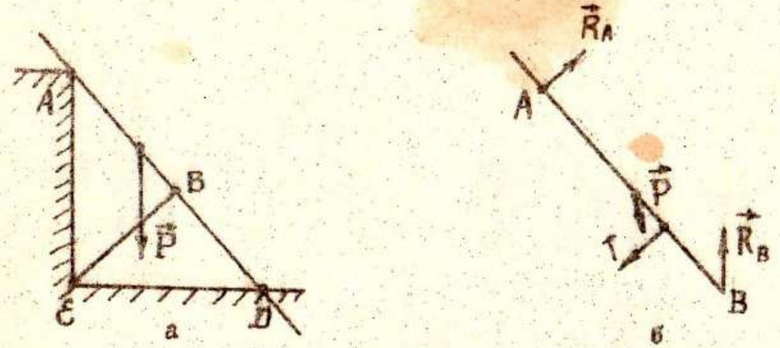
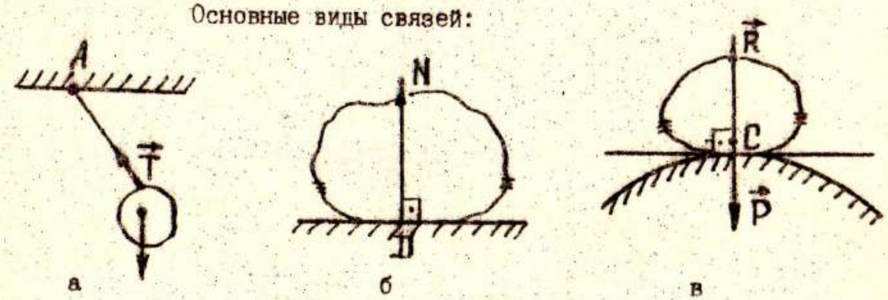


Рис. I.8

Все то, что ограничивает движение тела, называют связью. Тело действует на связь с определенной силой, а в соответствии с 4-й аксиомой связь действует на тело с такой же силой. Сила, возникающая в связи, называется реакцией связи.

Основные виды связей:



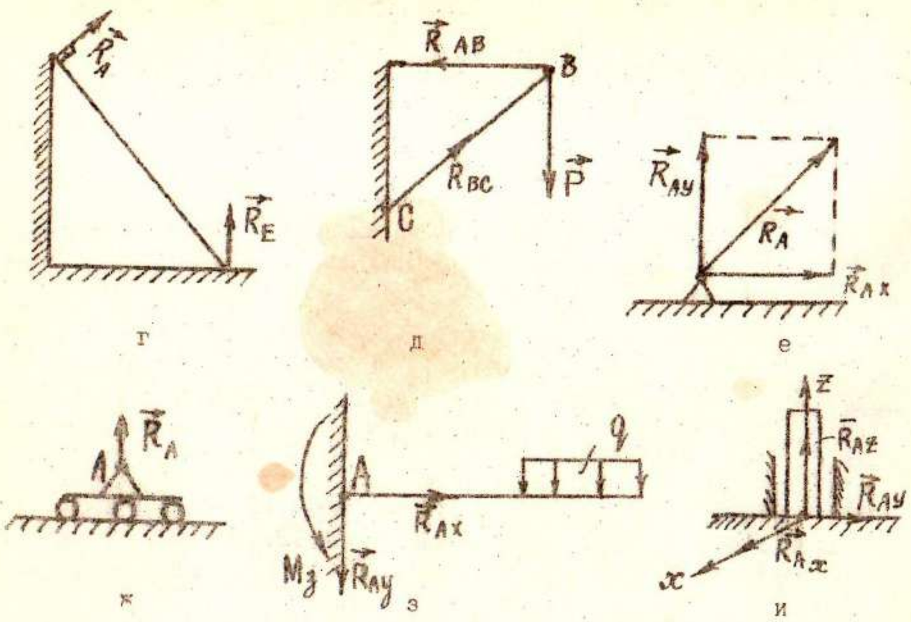


Рис. I.9

Глава 2. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Система сходящихся сил - система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке /рис. 2.I/.

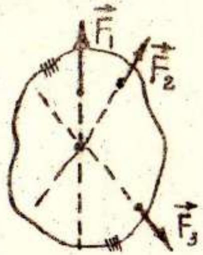


Рис. 2.I

2.I. Геометрические способы сложения сил

Существует четыре способа геометрического сложения сил.

I. Способ силового треугольника (рис. 2.2)

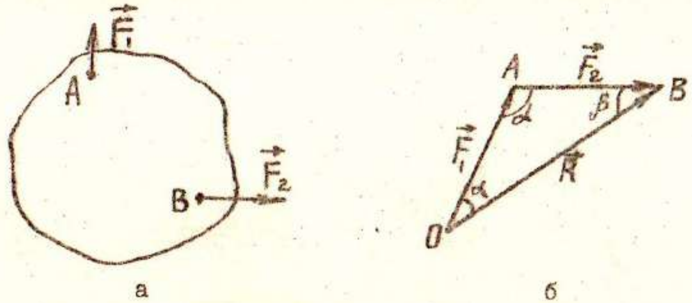


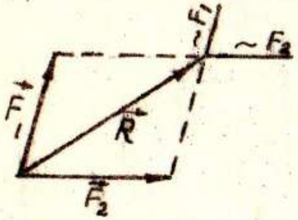
Рис. 2.2

$$OA = |F_1|; \qquad AB = |F_2|;$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \qquad \frac{R}{\sin\gamma} = \frac{F_1}{\sin\beta} = \frac{F_2}{\sin\alpha};$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\gamma}.$$

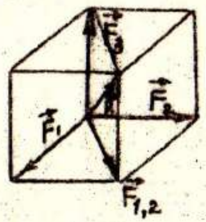
2. Способ силового параллелограмма (рис. 2.3)



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Рис. 2.3

3. Способ параллелепипеда (рис. 2.4)



$$\vec{R} = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Рис. 2.4

4. Способ силового /веревочного/ многоугольника

Замыкающая сторона многоугольника будет равнодействующей всех сил (рис. 2.5).

Рис. 2.5

2.2. Геометрический способ разложения силы

Разложить силу-значит найти составляющие,для которых данная сила является равнодействующей. Разложение силы на составляющие осуществляется по заданным направлениям составляющих. Существует три способа разложения силы.

I. Способ силового треугольника (рис. 2.6)

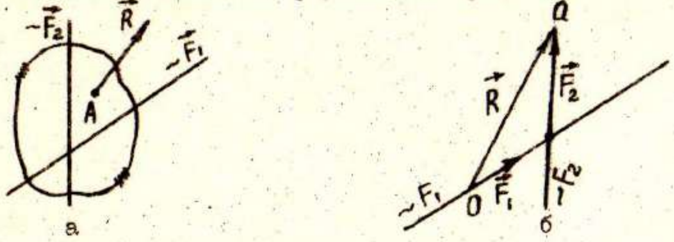


Рис. 2.6

2. Способ силового параллелограмма (рис. 2.7)

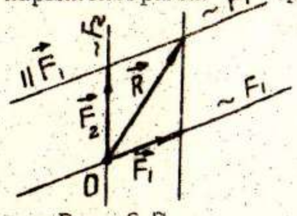


Рис. 2.7

3. Способ силового параллелепипеда (рис. 2.8)

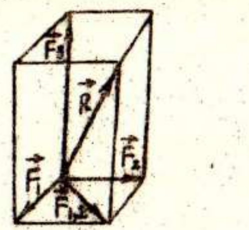
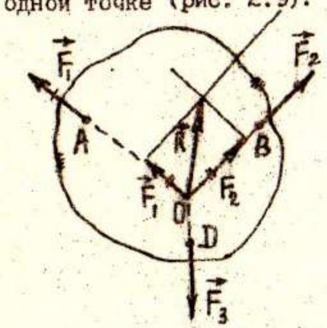


Рис. 2.8

2.3. Теорема о трех силах

Если под действием данной системы трех не параллельных сил, тело находится в равновесии, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке (рис. 2.9).

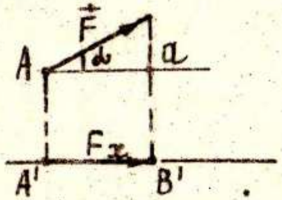


I/ следствие из I- и 2-й аксиом;
2/ 3-я аксиома;
3/ 4-я аксиома.

Рис. 2.9

2.4. Проекции силы на ось и плоскость

Проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная отрезку прямой, заключенному между проекциями начала и конца вектора силы на данную ось /рис. 2.10/.



$$F_x = F \cdot \cos\alpha .$$

Следует: проекция силы на ось равна произведению модуля силы и угла.

Рис. 2.10

Проекция силы положительная, если ее направление совпадает с положительным направлением оси. Не совпадает - отрицательная.

Проекция силы на плоскость - векторная величина, равная отрезку прямой, заключенному между проекциями начала и конца вектора силы на данную плоскость /рис. 2.II/.

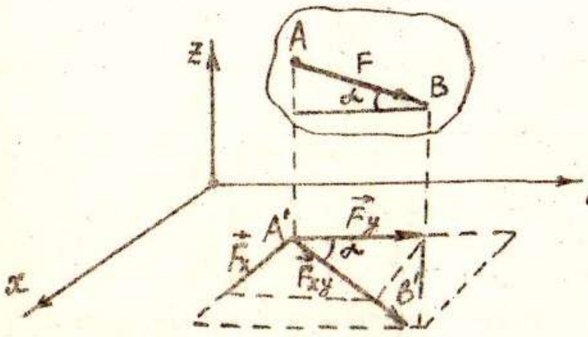


Рис. 2.II

2.5. Аналитический способ задания сил

Вектор силы можно определить, если известны модуль силы и углы наклона к осям координат /рис. 2.I2/.

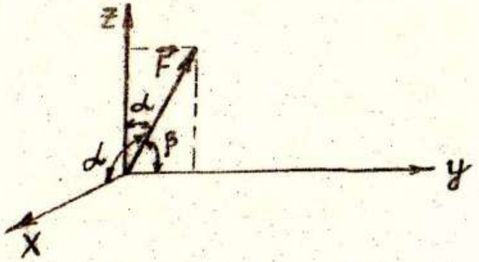
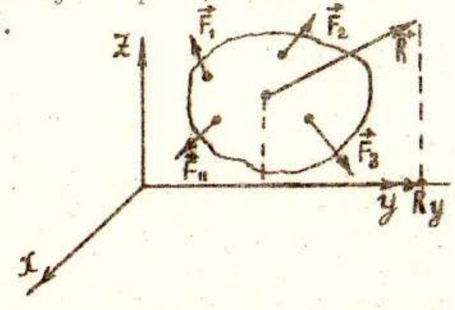


Рис. 2.I2

$$+\begin{cases} F_x = F\cdot\cos\alpha; \\ F_y = F\cdot\cos\beta; \\ F_z = F\cdot\cos\gamma; \end{cases} \qquad F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2} = \\ =\sqrt{F^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}.$$

2.6. Аналитический способ сложения сил

Теорема.
Проекции равнодействующей системы сил на декартовые оси координат равны сумме проекций всех сил системы на эти оси координат /рис.2.I3/.



$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \\ + F_N = \sum F_{ky};$$
$$R_x = \sum F_{kx};$$
$$R_z = \sum F_{kz}.$$

Рис. 2.I3

2.7. Условие равновесия сходящейся системы сил

Главное условие равновесия системы сходящихся сил - это равенство нулю главного вектора системы сил, т.е. равнодействующей $\vec{R} = 0$.

Геометрическое условие равновесия заключается в том, что при сложении сил системы силовой многоугольник должен быть замкнут, т.е. конец последнего вектора силы должен совпадать с началом первого вектора силы /рис. 2.I4/.

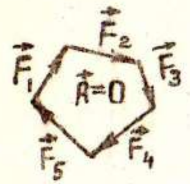


Рис. 2.I4

Аналитическое условие равновесия: для равновесия сходящихся сил системы необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на декартовые оси координат были равны нулю.

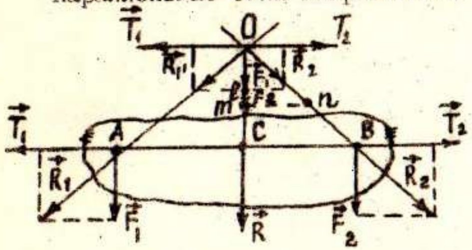
$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}=0;$$

$$\left.\begin{array}{ll} R_x=0, & \sum F_{kx}=0; \\ R_y=0, & \sum F_{ky}=0; \\ R_z=0, & \sum F_{kz}=0. \end{array}\right\}$$

Глава 3. ПЛОСКАЯ ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА СИЛ И ПАР

3.I. Сложение и разложение параллельных сил

Параллельные силы направлены в одну сторону /рис.3.I/.



$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2;$$

$$R=F_1+F_2.$$

Рис. 3.I

По 2-й аксиоме статики прибавим уравновешенную систему $\vec{T}_1\,\vec{T}_2$.
По следствию из I- и 2-й аксиом перенесем в т.О равнодействующие R_1 и R_2.
По правилу силового параллелограмма разложим R_1 и R_2.
Из подобия $\Delta O\kappa\ell$ и ΔOAC

$$\frac{k\ell}{AC}=\frac{O\ell}{OC};\quad \frac{T_1}{AC}=\frac{F_1}{OC};$$

$$T_1=\frac{F_1\cdot AC}{OC}.$$

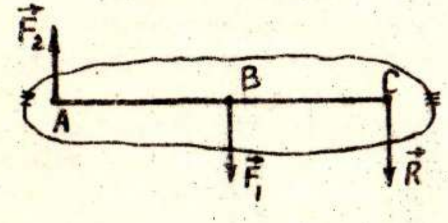
Из подобия ΔOmn и ΔOCB

$$\frac{T_2}{CB}=\frac{F_2}{OC};\qquad T_2=\frac{F_2\cdot CB}{OC};\qquad T_1=T_2;$$

$$\frac{F_1}{CB}=\frac{F_2}{AC}.$$

Следует: равнодействующая 2-х параллельных сил, направленных в одну сторону, направлена в ту же сторону. Модуль равен сумме модулей слагаемых сил, а точка приложения равнодействующей находится внутри отрезка, соединяющего точки приложения сил, на расстояниях обратно пропорциональных самим силам.

Параллельные силы, направленные в обратные стороны /рис.3.2/.



$$R=F_2-F_1;$$

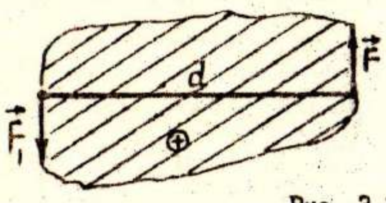
$$\frac{F_1}{BC}=\frac{F_2}{AC}=\frac{R}{AB}.$$

Рис. 3.2

Следует: равнодействующая $\vec{R}$ двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны, параллельна им и направлена в сторону большей силы. Точка приложения равнодействующей находится вне отрезка, соединяющего точки приложения сил, на расстояниях обратно пропорциональных самим силам.

3.2. Пара сил. Момент пары сил

Парой сил называется система 2-х равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил /рис. 3.3/.



d - плечо пары,
$|\vec{F}_1|=|\vec{F}_2|\quad \vec{F}_1=-\vec{F}_2.$

Рис. 3.3

Пара сил равнодействующей не имеет.

Пара сил характеризуется вращательным эффектом, зависящим от:

- модуля одной из сил пары и плеча d ;
- плоскости действия пары;
- направления поворота в этой плоскости.

Алгебраическим моментом пары называется взятая со знаком "+" или"-" величина, равная модулю одной из сил пары на плечо:

$$m(\vec{F_1};\vec{F_2}) = \pm F_1 \cdot d = \pm F_2 \cdot d\ ,$$

"+" - вращение, вызываемое парой, происходит против часовой стрелки;
"-" - вращение происходит по ходу часовой стрелки.

3.3. Сложение пар в плоскости /рис. 3.4/

Условие равновесия пар

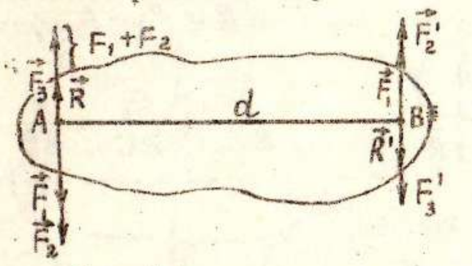


Рис. 3.4

I пара $(\vec{F_1};\vec{F_1'}) \to d \to m_1 = F_1 \cdot d$;

II пара $(\vec{F_2};\vec{F_2'}) \to d \to m_2 = F_2 \cdot d$;

III пара $(\vec{F_3};\vec{F_3'}) \to d \to m_3 = F_3 \cdot d$;

IУ пара $(\vec{R};R') \to d \to m_4 = -R \cdot d$;

$$-R = F_3 - F_1 - F_2;$$

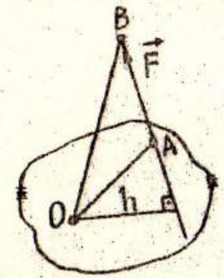
$$m_4 = m_3 = -R \cdot d = -(F_3 - F_1 - F_2)d = -F_3 d + F_1 d + F_2 d.$$

Таким образом доказана теорема: система пар, расположенная в одной плоскости, эквивалентна одной паре, момент которой равен алгебраической сумме моментов слагаемых пар. Для равновесия пар в плоскости необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов слагаемых пар была равна 0.

$$\sum m_i = 0;$$

$$m_э = m_1 + m_2 + m_3 + = \sum m_i\ .$$

3.4. Момент силы относительно данного центра /рис. 3.5/



$$m_o(\vec{F}) = \pm F \cdot h.$$

Рис. 3.5

Момент силы относительно центра вызывает вращательный эффект, зависящий от модуля силы и плеча.

Алгебраическим моментом силы относительно центра называется взятая со знаком плюс или минус величина, равная произведению модуля силы на плечо.

"+" - вращение, создаваемое силой относительно центра, происходит против хода часовой стрелки;
"-" - по ходу.

Свойства момента силы

1. Модуль момента силы не изменится, если силу перенести в любую точку по линии действия силы (рис. 3.6).

$$M = Fh.$$

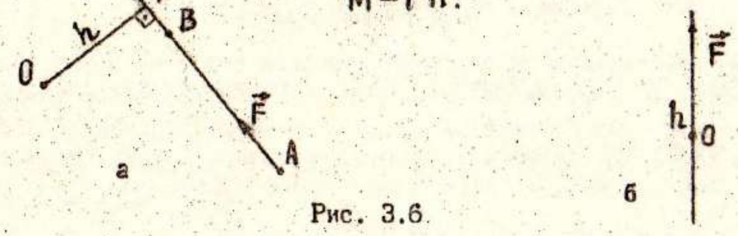


Рис. 3.6

2. Момент силы равен нулю, если сила равна нулю или плечо.

3. Момент силы относительно центра равен двойной площади треугольника, проходящего через вектор силы и данный центр.

$$m_o(\vec{F}) = 2 S_{\Delta OAB}\ ;$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} BA \cdot h = \frac{1}{2} F \cdot h = m_o |\vec{F}|.$$

3.5. Теорема Вариньона

Момент равнодействующей относительно центра равен сумме моментов сил системы относительно этого центра /рис. 3.7/.

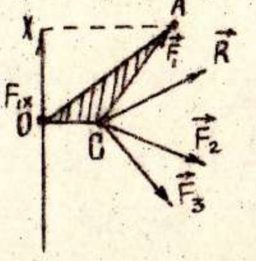


Рис. 3.7

$$m_o(\vec{F}_1)=2S_{\Delta OCA}=\frac{1}{2}\,OC\cdot F_{1x}\rightarrow 2S_{\Delta OCA}=F_{1x}\cdot OC;$$

$$m_o(\vec{F}_2)=F_{2x}\cdot OC;\quad m_o(\vec{F}_1)=F_{1x}\cdot OC;\quad m_o(\vec{R})=R_x\cdot OC;$$

$$R_x=\sum F_{kx}=F_{1x}-F_{2x}-F_{3x};$$

$$m_o(R)=R_x\cdot OC=(F_{1x}-F_{2x}-F_{3x})\cdot OC=\underbrace{F_{1x}\cdot OC}_{m''_o(\vec{F}_1)}-\underbrace{F_{2x}\,OC}_{m''_o(\vec{F}_2)}-\underbrace{F_{3x}\cdot OC}_{m''_o(\vec{F}_3)};$$

$$m_o(\vec{R})=\sum m_o(\vec{F}_k).$$

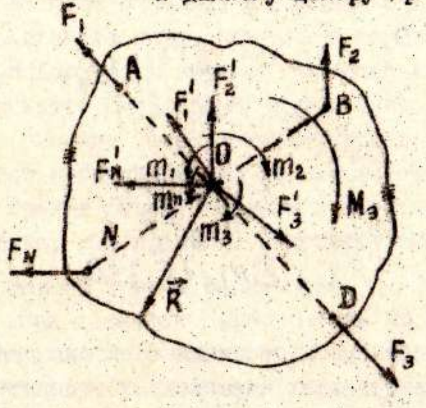
3.6. Теорема о параллельном переносе силы

Силу, действующую на абсолютно твердое тело, можно, не изменяя оказываемого ею действия на тело, переносить параллельно самой себе в другую точку тела, присоединяя при этом пару сил, момент которой равен моменту силы, относительно точки переноса /рис. 3.8/.

$$|\vec{F}|=|\vec{F}_1|=|\vec{F}_2|$$

Рис. 3.8

3.7. Приведение плоской произвольной системы сил к данному центру /рис. 3.9/



$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_3+\ldots+\vec{F}_n=\sum\vec{F}_k;$$

$$M_Э=m_1+m_2+\ldots+m_n=\sum m_o(\vec{F}_k).$$

Рис. 3.9

Любая плоская система сил при приведении ее к данному центру заменяется одной равнодействующей, равной геометрической сумме сил системы, и называется главным вектором и одной парой, момент которой равен сумме моментов всех сил системы, и называется главным моментом сил системы.

3.8. Приведение плоской произвольной системы сил к простейшему виду

1. Если главный вектор и главный момент равны нулю - система сил находится в равновесии.

2. Если главный вектор равен нулю, а главный момент не равен 0 - система сил приводится к одной паре, а тело совершает вращательное движение.

3. Если $\vec{R}\neq 0$, а $M=0$ - система сил, приводится к одной равнодействующей, проходящей через центр приведения, а тело при этом совершает поступательное движение.

4. Если $\vec{R}\neq 0$, $M\neq 0$ - система сил приводится к одной равнодействующей, не проходящей через центр приведения, а тело совершает плоскопараллельное движение.

3.9. Условия и формы равновесия плоской произвольной системы сил

Главным условием равновесия плоской произвольной системы сил является равенство нулю главного вектора и главного момента сил системы: $\vec{R}=0$; $M=0$.

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}; \quad \begin{cases} R_x=\Sigma F_{kx}; \\ R_y=\Sigma F_{ky}. \end{cases}$$

$$M_i=\Sigma m_i(\vec{F}_k).$$

I форма

$$\Sigma F_{kx}=0;$$
$$\Sigma F_{ky}=0;$$
$$\Sigma m_A(\vec{F}_k)=0.$$

Для равновесия необходимо, чтобы суммы проекций всех сил системы на оси координат и суммы моментов всех сил системы относительно какого-либо /выгодного/ центра были равны нулю.

II форма

$$\Sigma m_A(\vec{F}_k)=0;$$
$$\Sigma m_B(\vec{F}_k)=0;$$
$$\Sigma F_{kx}=0.$$

Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов относительно каких-либо двух центров, лежащих в плоскости действия сил, и проекции всех сил на одну из осей координат были равны нулю.

III форма

$$\Sigma m_A(\vec{F}_k)=0;$$
$$\Sigma m_B(\vec{F}_k)=0;$$
$$\Sigma m_C(\vec{F}_k)=0.$$

Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо, чтобы суммы моментов всех сил системы относительно каких-либо трех центров, лежащих в одной плоскости действия сил и не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

Глава 4. ТРЕНИЕ

4.I. Трение скольжения /рис.4.I/.

Многочисленными опытами установлено, что при движении одного тела по поверхности другого в точке или плоскости их соприкосновения возникает сила трения скольжения. Трение, как явление, представляет сложную физико-механическую проблему, зависящую от многих фактов и прежде всего от шероховатости соприкасающихся поверхностей. Трение бывает вредным и полезным. В горных инженерных задачах трение, как правило, учитывают опытными коэффициентами.

Законы трения скольжения.

I. При движении одного тела по поверхности другого в плоскости их соприкосновения возникает сила $F_{тр}$ скольжения, изменяющаяся от 0 до максимального значения. Сила трения скольжения равна произведению статического коэффициента трения на нормальную реакцию плоскости /давления на плоскость/: $F_{тр.с}=f_0 N$,

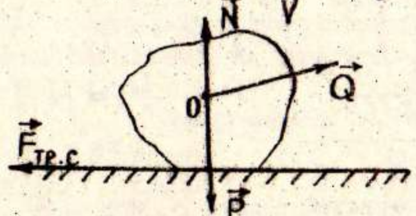


Рис. 4.I

f_0 - статический коэффициент трения, зависящий от множества факторов, а именно: чистоты обработки соприкасающихся поверхностей, вида материала соприкасающихся поверхностей, влажности, смазки, температуры и др.

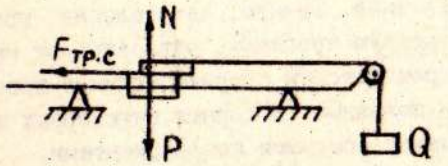
f_0 - величина безразмерная, $f_0 < 1$ всегда.

Пары трения	f_0
Дерево по дереву	0,4 - 0,7
Металл по металлу	0,I5 - 0,25
Металл по льду	0,027

Пары качения	k
Дерево по дереву	0,05 - 0,08
Металл по металлу	0,005

2. Коэффициент трения скольжения не зависит от площади соприкосновения тел.

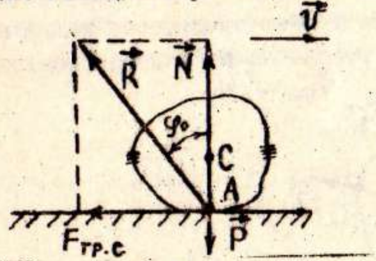
3. Сила трения скольжения всегда направленна в сторону, противоположную движению тела (рис. 4.2)



$$F_{тр_c} = f_o \cdot N .$$

Рис. 4.2

4.2. Реакция шероховатой связи. Угол трения /рис.4.3/



$$tg\,\varphi = \frac{\vec{F}_{тр.c}}{\vec{N}} = \frac{f_o \cdot N}{N} = f_o ;$$

$$tg\,\varphi_o \approx \varphi_o ;$$

$$\varphi_o = f_o .$$

Рис. 4.3

R - реакция шероховатой связи;

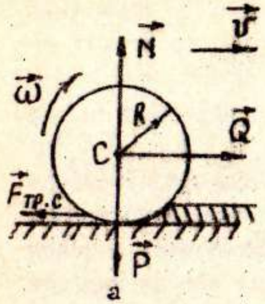
φ_o - угол трения.

4.3. Равновесие с учетом сил трения

В инженерных задачах трение учитывается опытными экспериментальными коэффициентами. После определения направлений предельных сил трения записывают уравнения равновесия статики для той или иной системы сил. Причем, статический коэффициент трения скольжения принимают предельным /max/.

4.4. Трение качения

Установлено, что при качении одного цилиндрического тела по поверхности или плоскости другого цилиндрического тела в точке или линии их соприкосновения возникает сила сопротивления, называемая силой трения (рис. 4.4).

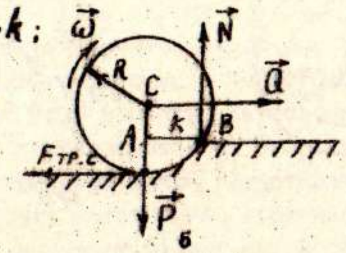


а

$$F_{тр.к}\, R \approx N \cdot k ;$$

$$F_{тр.к} = \frac{k}{R} N ;$$

$$m_1 \approx m_2 .$$



б

Рис. 4.4

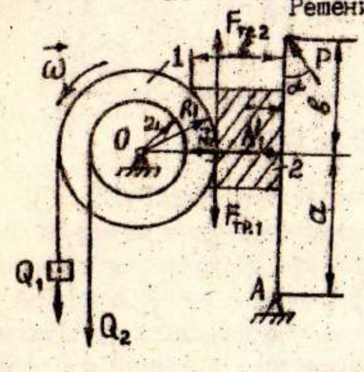
I пара $/\vec{Q} ; \vec{F}_{тр.c}/ \rightarrow R \rightarrow m_1 = Q \cdot R = F_{тр.к} \cdot R ;$

II пара $/\vec{N} ; P/ \rightarrow k \rightarrow m_2 = N \cdot k ,$

k - коэффициент трения качения, величина размерная, измеряемая в см.

Коэффициент трения качения много меньше коэффициента трения скольжения, чем и объясняется на практике замена пар скольжения на пары качения /рис. 4.5 а,б,в /.

Решение задачи "С-7"



$$N_2 = N_1 ;$$

$$F_{тр2} = F_{тр1} ;$$

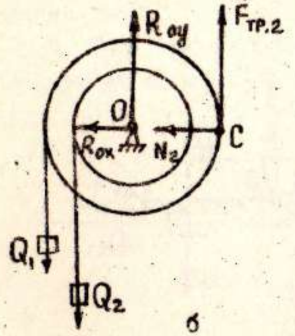
$$R_{ox} - ?$$

$$R_{oy} - ?$$

$$F_{тр.1} = F_{тр.2} - ?$$

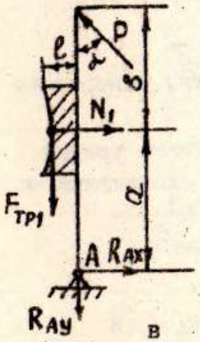
а

Рис. 4.5



$$\Sigma F_{kx} = -R_{ox} - N_2 = 0;$$
$$\Sigma F_{ky} = R_{oy} + F_{тр.2} - Q_1 - Q_2 = 0;$$
$$\Sigma m_o(\vec{F_k}) = Q_1 \cdot R_1 + Q_2\, r_1 + F_{тр.2} \cdot R_1 = 0;$$
$$F_{тр.2} = -\frac{Q_1 \cdot R_1 + Q_2 \cdot r_1}{R_1}.$$

б



$$\Sigma F_{kx} = -P \cdot \sin\alpha + N_1 + R_{Ax} = 0;$$
$$\Sigma F_{ky} = P \cdot \cos\alpha - F_{тр1} - R_{Ay} = 0;$$
$$\Sigma m_A(\vec{F_k}) = F_{тр.1} \cdot \ell - N_1\, a + P \cdot \sin\alpha (a+b) = 0$$

Проверка: $\Sigma m_o(\vec{F_k}) = 0$.

в

Рис. 4.5. Окончание

Глава 5. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА СИЛ И ПАР

5.I. Момент силы относительно центра, как вектор /рис.5.I/

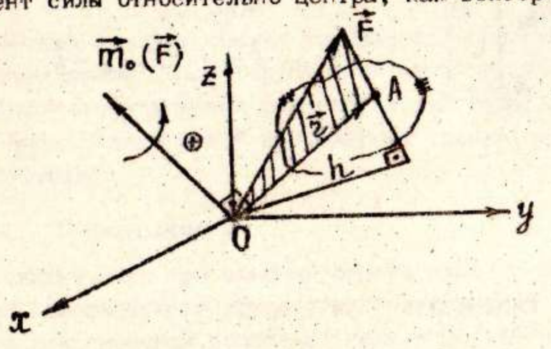
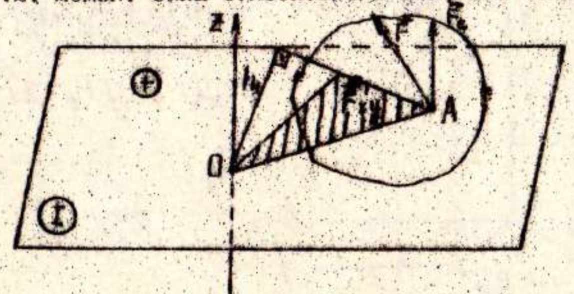


Рис. 5.I

Момент силы относительно центра вызывает вращательный эффект, зависящий от модуля силы $\vec{F}$ и плеча h, плоскости действия момента (плоскость, проходящая через вектор силы и данный центр), направления поворота в этой плоскости. В общем случае момент силы относительно центра в пространстве будем изображать некоторым вектором $\vec{m}_o(\vec{F}) = |\vec{F}| \times \vec{r}$, а направление вектора – перпендикулярно к плоскости, проходящей через данную силу и центр. За положительное направление вектора силы принято направление в ту сторону, откуда поворот относительно центра, совершаемый силой, представляется происходящим против хода часовой стрелки. Расстояние, соединяющее точку приложения силы с данным центром, называют радиус-вектором. Вектор момента силы относительно данного центра в этом случае определяется как векторное произведение вектора силы на радиус-вектор:

$$m_o(\vec{F}) = \vec{F} \times \vec{r}.$$

5.2. Момент силы относительно оси, как скаляр /рис.5.2/



$$m_z(\vec{F}_z) = 0;$$
$$m_z(\vec{F}) = F_{xy} \cdot h_1.$$

Рис. 5.2

Моментом силы относительно оси называется скалярная величина, определяемая моментом проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную данной оси, относительно точки пересечения данной оси с плоскостью. Момент силы относительно оси – положительный, если с положительного конца оси вращение, создаваемое проекцией на плоскость, представляется происходящим против хода часовой стрелки.

Частные случаи /рис. 5.3/

I. Если сила перпендикулярна оси, то момент силы равен произведению силы на расстояние от точки приложения силы до данной оси.

2. Момент силы равен нулю, если сила параллельна оси.

3. Момент силы равен нулю, если сила пересекает ось.

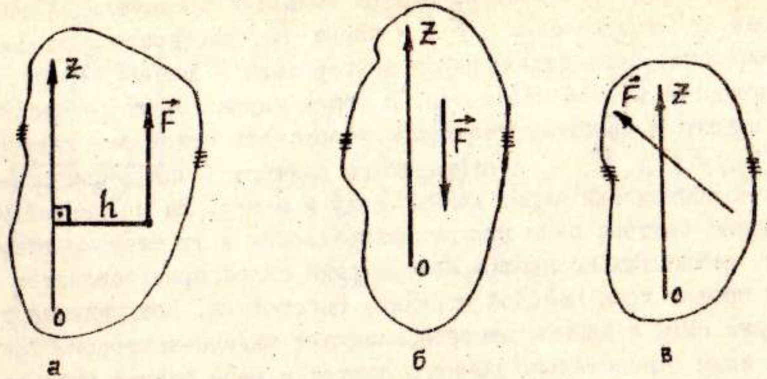
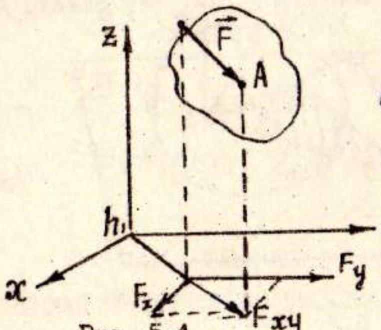


Рис. 5.3

5.3. Момент силы относительно декартовых осей координат (рис. 5.4)



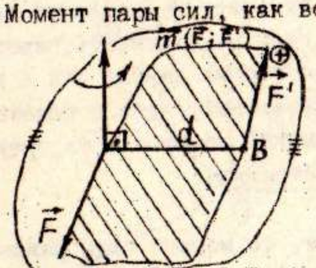
$$m_z(\vec F) = xF_y - yF_x;$$

$$m_x(\vec F) = y\cdot F_z - zF_y;$$

$$m_y(\vec F) = z\cdot F_x - xF_z.$$

Рис. 5.4

5.4. Момент пары сил, как вектор /рис.5.5/



$$\vec m(\vec F, \vec F') = \pm F\cdot d.$$

Рис. 5.5

Момент пары сил в пространстве вызывает вращательный эффект, зависящий от:

- модуля одной из сил пары и плеча;
- направления вращения этой плоскости;
- плоскости действия пары.

В общем случае момент пары сил в пространстве будем изображать вектором $\vec m(\vec F; \vec F')$, модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на плечо, а направление момента пары будет положительным, если вектор момента направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда вращение, создаваемое парой, представляется происходящим против хода часовой стрелки.

5.5. Сложение пар в пространстве /рис. 5.6/

Теорема

Любая пространственная система пар эквивалентна одной паре, момент которой равен геометрической сумме моментов слагаемых пар.

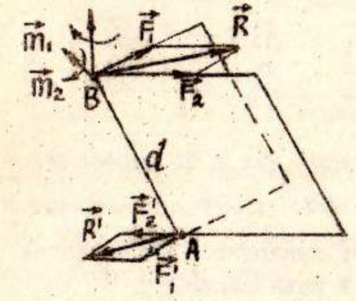


Рис. 5.6

I пара $(\vec F_1, \vec F_1') \to \vec{AB} \to m_1 = -F_1 d \to \vec m_1 = \vec F_1 \times \vec{AB}$;

II пара $\vec F_2, \vec F_2' \to \vec{AB} \to m_2 = -F_2\cdot d \to \vec m_2 = \vec F_2 \times \vec{AB}$;

III пара $\vec R, \vec R' \to \vec{AB} \to m_э = -R d \to \vec m_э = \vec R \times \vec{AB} = (\vec F_1 + \vec F_2) \times \vec{AB}$.

Для равновесия пространственной системы пар необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех сил системы была равна нулю, т.е. $\sum \vec m_k = 0$.

5.6. Приведение пространственной произвольной системы сил к данному центру /рис. 5.7/

Теорема

Любая пространственная система сил при приведении ее к данному центру заменяется одной равнодействующей, равной геометрической сумме сил системы, и называется главным вектором сил системы, и одной эквивалентной парой, момент которой равен геометрической сумме моментов всех сил системы относительно центра приведения, и называется главным моментом системы.

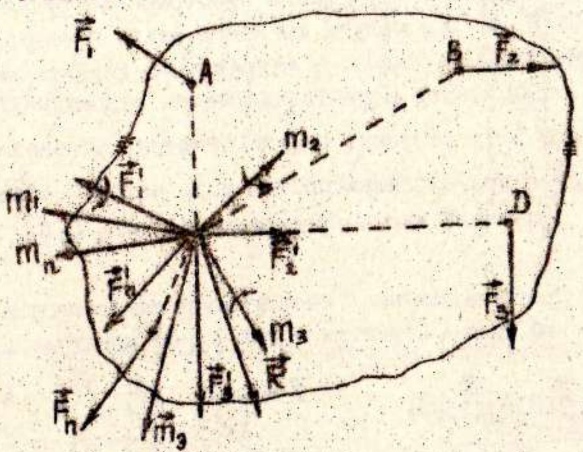


Рис. 5.7

5.7. Приведение пространственной системы сил к простейшему виду

1. Если $\vec{R}=0$, $\vec{M}_э=0$ - система сил не приводится ни к равнодействующей, ни к паре, а тело находится в равновесии.

2. Если $\vec{R}=0$, $\vec{M}_э\neq 0$ - система сил приводится к эквивалентной паре, а тело совершает вращательное движение.

3. Если $R\neq 0$, $\vec{M}_э=0$ - система сил приводится к одной равнодействующей, которая проходит через центр приведения, а тело совершает поступательное движение.

4. Если $\vec{R}\neq 0$, $\vec{M}_э\neq 0$, $\vec{R}\perp M_э$ - система сил приводится к одной равнодействующей, которая не проходит через центр приведения, а тело совершает плоскопараллельное движение /рис. 5.8/.

$$|\vec{R}|=|\vec{F}_1|=|\vec{F}_1'|.$$

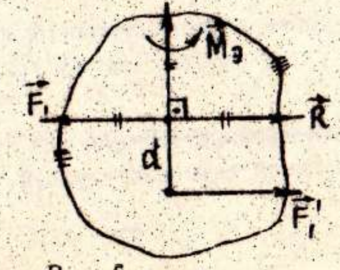


Рис. 5

5. Если $\vec{R}\neq 0$, $\vec{M}_э\neq 0$, $\vec{R}\parallel\vec{M}_э$ - система сил приводится к динаме, а тело совершает сложное винтовое движение.

Динама - совокупность силы и пары, плоскость действия которой перпендикулярна самой силе.

5.8. Условие равновесия пространственной произвольной системы сил

Главным условием равновесия пространственной произвольной системы сил является равенство нулю главного вектора и главного момента сил системы.

$$\vec{R}=0, \qquad \vec{M}_э=0;$$

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}, \qquad M=\sqrt{m_x^2+m_y^2+m_z^2};$$

$$\underbrace{\begin{array}{ll} \Sigma F_{Kx}=0, & \Sigma m_x(\vec{F}_к)=0; \\ \Sigma F_{Ky}=0, & \Sigma m_y(\vec{F}_к)=0; \\ \Sigma F_{Kz}=0, & \Sigma m_z(\vec{F}_к)=0. \end{array}}_{\text{Условие равновесия}}$$

Для равновесия пространственной произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на декартовые оси координат и суммы моментов всех сил системы относительно этих осей были равны нулю.

Пример /рис.5.9/

Дано: Q = 800 Н; R = 0,05 м,

АК = 0,4 м, АС = ВС = 0,5 м,

Найти: Р, R_A, R_B.

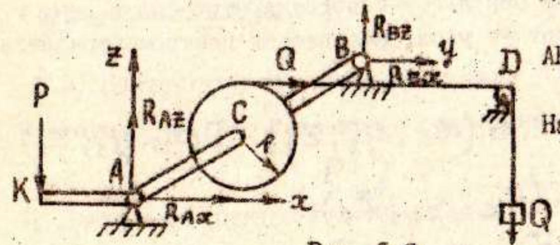


Рис. 5.9

$$\Sigma F_{Kx}=R_{Ax}+Q+R_{Bx}=0; \qquad R_{Ax}=-Q-R_{Bx}=1200\,Н;$$

$$\Sigma F_{Ky}=0;$$

$$\Sigma F_{Kz}=-P+R_{Az}+R_{Bz}=0; \qquad R_{Az}=P=800\,Н.$$

$$\Sigma m_x(\vec{F}_к)=R_{Bz}\cdot AB=0; \qquad R_{Bz}=0;$$

$$\Sigma m_y(\vec{F}_к)=-P\cdot AK+Q\,R=0; \qquad P=\frac{Q\cdot R}{AK}=100\ Н;$$

$$\Sigma m_z(\vec{F}_к)=-Q\cdot AC-R_{Bx}\cdot AB=0; \qquad R_{Bx}=-400\ Н.$$

Глава 6. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

6.I. Центр параллельных сил

Центр тяжести абсолютно твердого тела тесно связан с понятием центра параллельных сил /рис.6.I/.

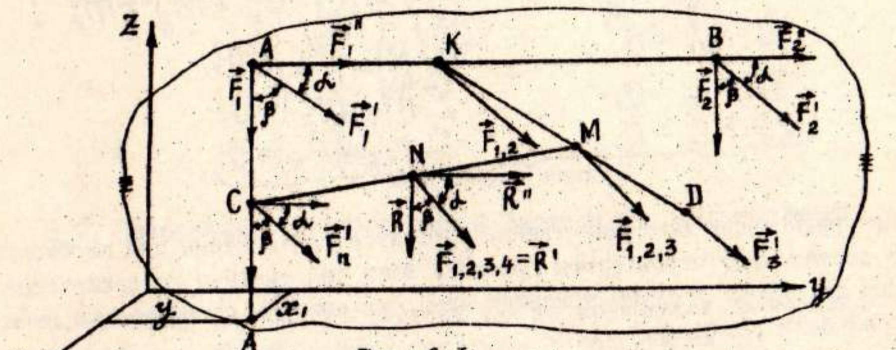


Рис. 6.I

Таким образом, т. N , через которую проходит линия действия равнодействующих параллельных сил при любых поворотах этих сил в одну и ту же сторону и на один и тот же угол, называется центром параллельных сил.

$$A(x_1;y_1;z_1);\quad B(x_2;y_2;z_2);\quad D(x_3;y_3;z_3);$$

$$C(x_c;y_c;z_c);$$

$$\Sigma m_y(\vec{R})=\Sigma m_y(\vec{F}_n);$$

$$R\cdot x_c=F_1\cdot x_1+F_2\cdot x_2+F_3\cdot x_3+\ldots+F_n\cdot x_n;$$

$$x_c=\frac{\Sigma F_к\cdot x_к}{R}.$$

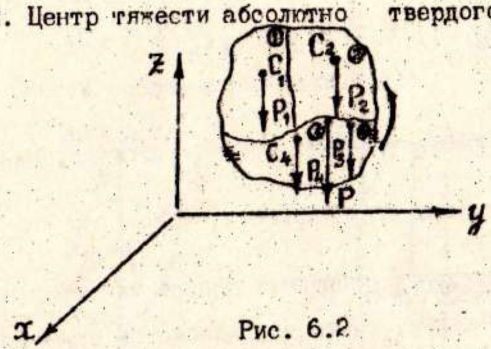
Координаты центра параллельных сил

$$x_c=\frac{\Sigma F_к\cdot x_к}{R};$$

$$y_c=\frac{\Sigma F_к\cdot y_к}{R};$$

$$z_c=\frac{\Sigma F_к\cdot z_к}{R}.$$

6.2. Центр тяжести абсолютно твердого тела /рис.6.2/



$$\vec{P}=\Sigma\vec{P}_к.$$

Рис. 6.2

Центр тяжести абсолютно твердого тела - неизменно связанная с телом точка, через которую проходит линия действия силы тяжести /веса/ всего тела.

Центр тяжести тела - точка геометрическая и она может лежать вне тела.

$$x_c=\frac{\Sigma P_к\cdot x_к}{P};\qquad z_c=\frac{\Sigma P_x\cdot z_к}{P}.$$

$$y_c=\frac{\Sigma P_к\cdot y_к}{P};$$

6.3. Центры тяжести однородных тел

Известно, что вес тела прямо пропорционален его объему, т.е.

$$P=\gamma\cdot V.$$

Координаты центра тяжести объема

$$x_c=\frac{\Sigma V_к\cdot x_к}{V};$$

$$y_c=\frac{\Sigma V_к\cdot y_к}{V};$$

$$z_c=\frac{\Sigma V_к\cdot z_к}{V}.$$

Координаты центра тяжести площади

$$x_c=\frac{\Sigma S_K\cdot x_K}{S};\quad y_c=\frac{\Sigma S_K\cdot y_K}{S}.$$

Координаты центра тяжести линии

$$x_c=\frac{\Sigma \ell_K\cdot x_K}{L};\quad y_c=\frac{\Sigma \ell_K\cdot y_K}{L};\quad z_c=\frac{\Sigma \ell_K\cdot z_K}{L},$$

где V_K; S_K; ℓ_K - соответственно объем, площадь, длина отдельных частей тела;

x_K, y_K, z_K - координаты этих частей.

6.4. Способы определения координат центра тяжести

1. Если тело имеет центр, линию или плоскость симметрии, то центр тяжести лежит соответственно в центре, на линии или в плоскости симметрии.

2. Способ разбиения - заключается в том, что данное тело /деталь/ разбивают на такие фигуры, центры тяжести которых известны /квадрат, прямоугольник, круг, треугольник, ромб/. Затем, пользуясь формулами, определяем центр тяжести всего тела.

3. Способ дополнения /способ отрицательных площадей/ - применяется для тел, имеющих отверстия, вырезы и др., причем площади отверстий и вырезов в формулах вычитаются.

4. Интегральный способ - заключается в том, что данное тело нельзя разбить на известные фигуры, его разбивают на элементарные объемы V_i, площади S_i, линии $\Delta \ell_i$.

$$x_c=\frac{\Sigma\Delta V_i\cdot x_i}{V};\qquad x_c=\lim\frac{\Sigma\Delta V_i\cdot x_i}{V};$$

Для объема

$$x_c=\frac{1}{V}\int_{(V)}x_i\,dV;\qquad y_c=\frac{1}{V}\int_{(V)}y_i\,dV;$$
$$z_c=\frac{1}{V}\int_{(V)}z_i\,dV.$$

Для линии /длина/

$$x_c=\frac{1}{L}\int_{(V)}x_i\,d\ell;\qquad y_c=\frac{1}{L}\int_{(V)}y_i\,d\ell;$$
$$z_c=\frac{1}{L}\int_{(V)}z_i\,d\ell.$$

Для площади

$$x_c=\frac{1}{S}\int_{(S)}x_i\,dS;\qquad y_c=\frac{1}{S}{}_{(S)}\,y_i\,dS.$$

5. Способ подвешивания /рис.6.3/

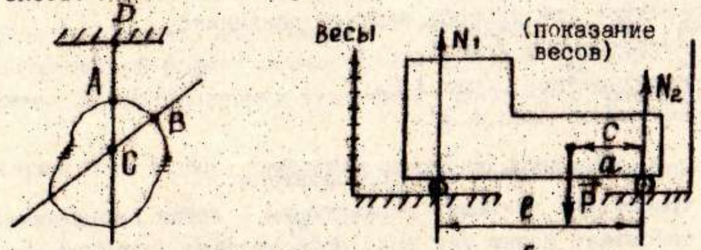


Рис. 6.3

6. Способ взвешивания

$$\Sigma m_c(\vec{F}_K)=N_2\,a-N_1(\ell-a)=0;$$
$$N_2 a+N_1 a=N_1\ell;$$
$$a=\frac{N_1\,\ell}{\underbrace{N_1+N_2}_{P}}=\frac{\ell}{P}N_1=KN_1.$$

Раздел II. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Кинематика - раздел теоретической механики, в котором изучается движение точки или материальных тел только лишь с геометрической точки зрения, т.е. причины, побуждающие это движение, не учитываются / действие на тело или точку силы не учитывается/. Основная задача кинематики – по заданным законам движения тела или точки определить их параметры движения / S, $\vec{v}$, t, $\vec{w}$ /.

Глава I. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

I.I. Способы задания движения

Задать движение – значит задать положение точки и тела в данный отдельный момент времени относительно заданной системы отсчета. В инженерных задачах такой системой является инерциальная, которую условно связывают с землей и считают неподвижной системой.

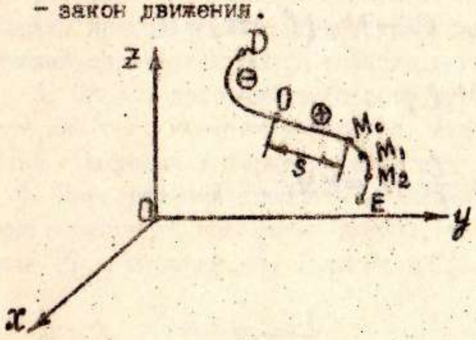
Существуют три способа задания движения:
- естественный /рис.I.I/;
- координатный /рис.I.2/;
- векторный /рис.I.3/.

I. При естественном способе задаются:

– траектория движения /траектория – любая непрерывная линия, которую описывает точка или тело относительно заданной системы отсчета/;

– начало и направление отсчета движения точки или тела по заданной траектории;

– закон движения.



S – криволинейная координата,

$$S = f(t).$$

Рис. I.I

2. Координатный способ – наиболее часто применяется при решении инженерных задач. Уравнения движения точки задаются в декартовых координатах.

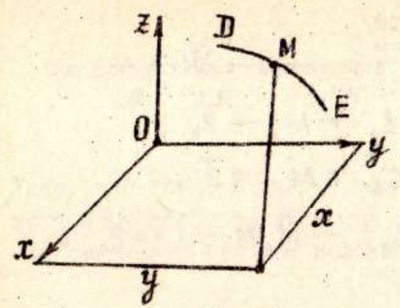


Рис. I.2

Пространственная система

$$x = f_1(t);$$
$$y = f_2(t);$$
$$z = f_3(t).$$

Плоская система

$$x = f_1(t);$$
$$y = f_2(t).$$

Два последних выражения представляют собой уравнения в параметрической форме, параметром в которых является время t. Исключив время t из последних уравнений, определим траекторию движения.

Пример: материальная точка совершает движение в плоскости согласно уравнений:

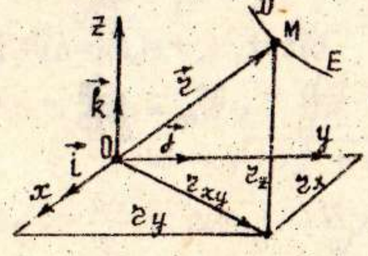
$$\begin{cases} x = 3\cos\frac{\pi}{2}t, \\ y = 4\sin\frac{\pi}{2}t, \end{cases}$$

$(x, y$ – в м; t – в с$)$,

$$+\left.\begin{aligned} &\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left(\cos\frac{\pi}{2}t\right)^2, \\ &\left(\frac{y}{4}\right)^2 = \left(\sin\frac{\pi}{2}t\right)^2, \end{aligned}\right\}$$

$$1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \ \text{– эллипс.}$$

3. Векторный способ – здесь положение точки относительно заданной системы отсчета задается так называемым радиус-вектором.

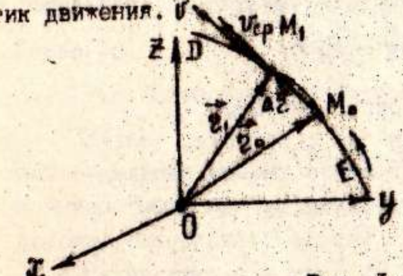


$$\vec{r} = \varphi(t);$$
$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z.$$

Рис. I.3

I.2. Вектор скорости точки /рис.I.4/

Скорость является одной из основных кинематических характеристик движения.



$$t_0 \to M_0 \to \vec{r}_0 ;$$
$$t_1 \to M_1 \to \vec{r}_1 ;$$
$$\Delta t \to t_1 t_0 \to M_0 M_1 \to \Delta\vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1 .$$

Рис. I.4

Величина, равная частному от деления $\Delta \vec{r}$ к приращению Δt, называется средней скоростью движения тела :

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} .$$

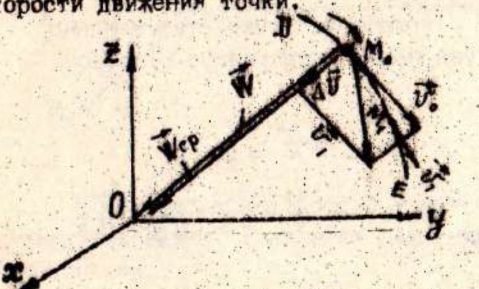
Скоростью в данный момент времени называется величина, определяемая пределом, к которому стремится средняя скорость движения точки при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} ; \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} .$$

Скорость точки в данный момент времени определяется первой производной от радиус-вектора положения точки по времени. Направлен вектор скорости перпендикулярно к радиус-вектору положения точки в сторону движения.

I.3. Вектор ускорения точки /рис.I.5/

Ускорение - величина, характеризующая изменение во времени скорости движения точки.



$$t_0 \to M_0 \to \vec{v}_0 ;$$
$$t_1 \to M_1 \to \vec{v}_1 ;$$
$$\Delta t = t_1 - t_0 \to M_0 M_1 = \Delta\vec{v} = \vec{v}_0 - \vec{v}_1 ;$$
$$\vec{W}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} .$$

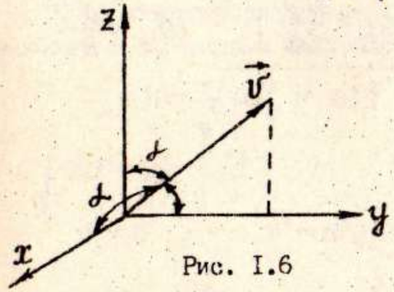
Рис. I.5

$$\vec{W} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{W}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} ; \qquad \vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} .$$

Ускорение точки в данный момент времени определяется первой производной от скорости движения точки по времени или второй производной от радиус-вектора положения точки по времени.

I.4. Определение ускорения и скорости движения точки при координатном способе задания движения (рис.I.6

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} ;$$
$$\vec{r}_x = x ; \qquad \vec{r}_y = y ; \qquad \vec{r}_z = z ;$$
$$v_x = \frac{dr_x}{dt} = \frac{dx}{dt} ; \qquad v_y = \frac{dy}{dt} ; \qquad v_z = \frac{dz}{dt} ;$$
$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \end{aligned}\right\} ;$$



$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} ;$$
$$\cos\beta = \frac{v_y}{v} ;$$
$$\cos\gamma = \frac{v_z}{v} ;$$
$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} ;$$

Рис. I.6

$$w_x = \frac{dv_x}{t} ; \qquad w_y = \frac{dv_y}{t} ; \qquad w_z = \frac{dv_z}{t} ;$$
$$v_x = \frac{dx}{dt} ; \quad v_y = \frac{dy}{dt} ; \quad v_z = \frac{dz}{dt} ;$$
$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} ;$$
$$\cos\alpha_1 = \frac{W_x}{W} ; \quad \cos\beta_1 = \frac{W_y}{W} ; \quad \cos\gamma_1 = \frac{W_z}{W} .$$

I.5. Определение $\vec{v}$ и W при естественном способе движения /рис. I.7/

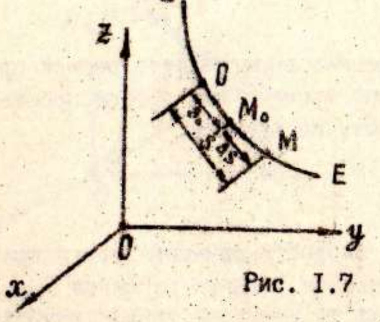


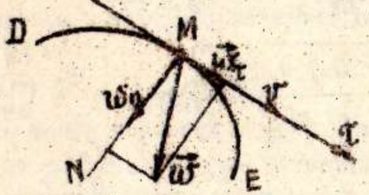
Рис. I.7

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t};$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t};$$

$$v = \frac{dS}{dt}.$$

Ускорение при естественном способе движения определяется как диагональ параллелограмма, построенного на касательной и нормальной составляющих ускорения как на сторонах /рис. I.8/.



$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2};$$

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad w_n = \frac{v^2}{R}.$$

Рис. I.8

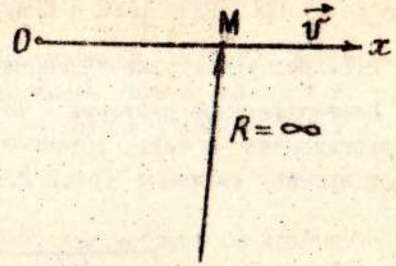
I.6. Частные случаи движения точки

Равномерное движение - движение, осуществляемое с постоянной скоростью:

$$v = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}; \qquad w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(const)}{dt} = 0;$$

$$\vec{v} = const; \qquad w = w_n = \frac{v^2}{R}.$$

Равномерное прямолинейное движение /рис. I.9/.



$$v = const;$$

$$w_\tau = 0; \quad w_n = 0.$$

Рис. I.9

Это единственное движение в природе, которое осуществляется без ускорения.

$$\vec{v} = const; \qquad w_\tau = 0;$$

$$w = w_n = \frac{v^2}{R};$$

$$v = \frac{dS}{dt}; \quad \int_{S_o}^{S} dS = v\int_0^t dt; \quad S - S_o = vt; \quad S = S_o + v \cdot t$$

$$S_o = 0; \qquad S = v \cdot t.$$

Равнопеременное движение - это движение, которое осуществляется с постоянным касательным ускорением.

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}; \quad w_\tau = \frac{dv}{dt};$$

$$\int_{v_o}^{v} dv = w_\tau \int_0^t dt; \qquad v = v_o + w_\tau \cdot t;$$

$$v_o = 0; \qquad v = w_\tau \cdot t;$$

$$\int_{S_o}^{S} dS = v_o \int_0^t dt + w_\tau \int_0^t t \cdot dt;$$

$$S = S_o + v_o t + \frac{w_\tau \cdot t^2}{2};$$

при $S_o = 0$ и $V_o = 0$ $\quad S = \dfrac{W_\tau \cdot t^2}{2}.$

Глава 2. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

2.1. Поступательное движение

Поступательное движение - это движение, при котором любая прямая, проведенная на теле, остается параллельной самой себе в любой момент времени движения (рис. 2.1).

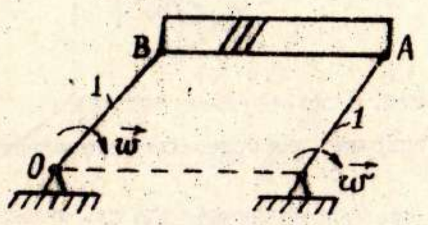
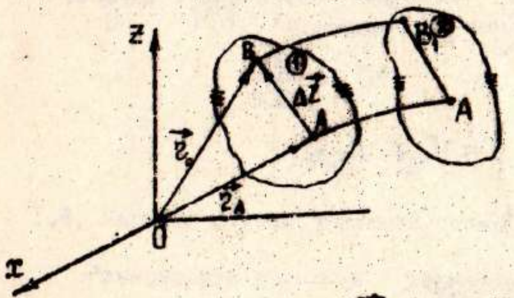


Рис. 2.1

Теорема

При поступательном движении тела, в каждый отдельный момент времени, все его точки описывают одинаковые траектории и имеют одинаковые по модулю и направлению $\vec{v}$ и $\vec{w}$ (рис. 2.2).



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \Delta\vec{r};$$

$$AB = \Delta r = const;$$

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\Delta r}{dt} = 0;$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A;$$

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt}; \qquad \vec{w}_B = \vec{w}_A.$$

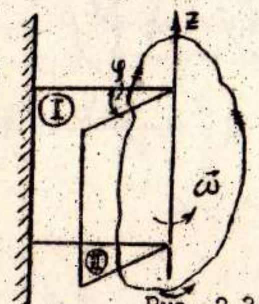
Рис. 2.2

Траектория точки B получается из траектории точки A путем параллельного смещения всех ее точек на постоянную величину AB, значит траектории одинаковы, при совмещении - совпадают. Кинематика поступательного движения тела сводится к кинематике точки, рассматривалась в предыдущей главе.

Поступательное движение - это единственное движение в природе, для которого $\vec{v}$ и $\vec{w}$ движения тела имеют полный смысл, т.к. скорости и ускорения точек тела такие же, что и у самого тела.

2.2. Вращательное движение тела

Вращательное движение - движение, при котором по крайней мере две точки тела остаются неподвижными при движении тела. Линия, проходящая через эти две точки, называется осью вращения. Все остальные точки, лежащие на оси, тоже неподвижные, а остальные точки, лежащие вне оси, описывают концентрические окружности, центры которых лежат на оси вращения (рис. 2.3).



I- неподвижная плоскость;
II- подвижная плоскость, условно врезанная в тело.

Рис. 2.3

Положение подвижной плоскости относительно неподвижной характеризуется углом φ, который называется углом поворота тела и измеряется в радианах. Так как угол φ во времени изменяется, то уравнение вращательного движения тела будет:

$$\varphi = f(t), \qquad \varphi = 3\pi t^2, \text{ рад.}$$

Пусть

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \; [рад/с]$$

$$t_0 \to \varphi_0;$$

$$t_1 = t_0 + \Delta t \to \varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi;$$

$$\Delta t = t_1 - t_0 \to \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0;$$

$$\vec{\omega}_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}; \qquad \vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\omega}_{ср} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Угловая скорость определяется первой производной от угла поворота по времени. Вектор угловой скорости направлен по оси вращения тела. За положительное направление вектора $\vec{\omega}$ принято направление по оси вращения в ту сторону, откуда вращение тела представляется происходящим против хода часовой стрелки (рис. 2.4).

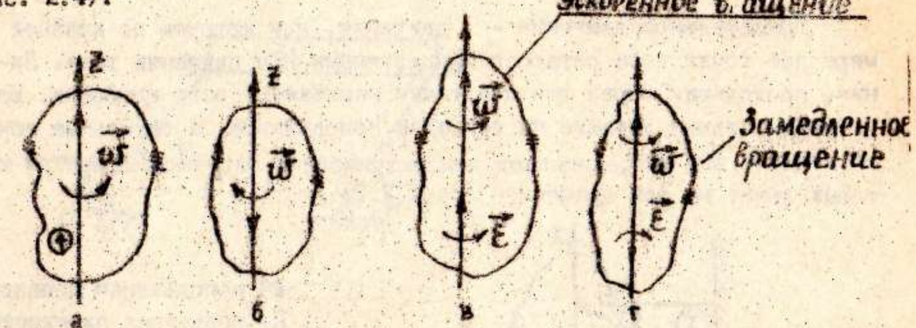


Рис. 2.4

Пусть

$$\begin{cases} t_0 \to \vec{\omega}_0, \\ t_1 = t_0 + \Delta t \to \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_0 + \Delta\vec{\omega}; \end{cases}$$

$$\vec{\varepsilon}_{ср} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}; \qquad \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\ [рад/с^2];$$

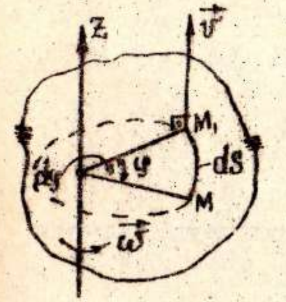
$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\varepsilon}_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}.$$

Угловое ускорение определяется первой производной от угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота по времени. Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ определяется также, как направление вектора угловой скорости.

2.3. Определение скоростей и ускорений точек вращающегося тела

Линейная скорость точки тела определяется произведением угловой скорости на расстояние до оси вращения точки. Из формулы /1/ следует, что линейные скорости точек прямо пропорциональны их рас-

стояниям до оси вращения. Вектор линейной скорости направлен по касательной к окружности/или перпендикулярен к радиусу/в сторону вращения (рис. 2.5).



$$\Delta t \to d\varphi \to MM_1 \to dS;$$

$$dS = h \cdot d\varphi;$$

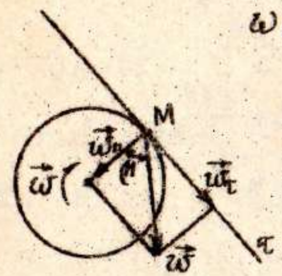
$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d(h\,d\varphi)}{dt} = h\,\frac{d\varphi}{dt} = h \cdot \omega;$$

$$v = \omega \cdot h\ [м/с].$$

Рис. 2.5

Для определения ускорений точек вращения тела воспользуемся формулами криволинейного движения при естественном способе задания (рис.2.6).

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega \cdot h)}{dt} = h \cdot \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \cdot h; \qquad w_\tau = \varepsilon \cdot h\ [м/с^2];$$



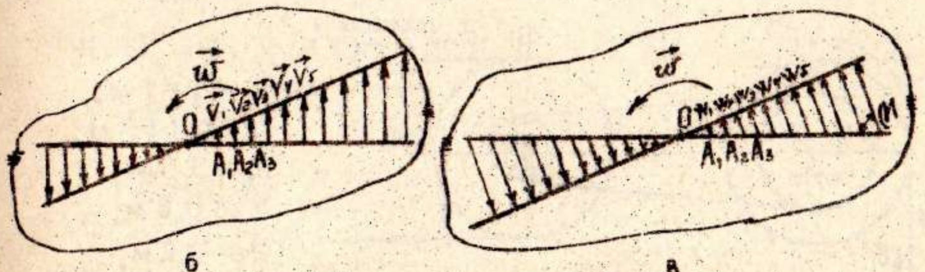
$$w_n = \omega^2 h; \qquad w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$tg\,\mu = \frac{w_\tau}{w_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2};$$

$$\mu = arctg\,\frac{\varepsilon}{\omega^2};$$

$$v = \omega \cdot h. \qquad (I)$$

а



б в

Рис. 2.6

2.4. Частные случаи вращающегося движения тела

I. Равномерное вращение – вращение тела, которое осуществляется с постоянной угловой скоростью.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}\ ; \qquad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt ;$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t\ ; \qquad \varphi_0 = 0\ ; \qquad \varphi = \omega t .$$

2. Равнопеременное – вращение тела, которое осуществляется с постоянным угловым ускорением.

$$\varepsilon = const\ ; \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}\ ; \qquad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt\ ;$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t ;$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t\ ; \qquad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega_0 \int_0^t dt + \varepsilon \int_0^t t\,dt\ ;$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}\ ;$$

$$\varphi_0 = 0, \qquad \varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}\ ;$$

$$\omega_0 = 0, \qquad \varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} .$$

Пример решения (рис. 2.7).

По заданному уравнению поступательного движения тела I определить законы движения тел 2,3,4, а также скорость и ускорение точки **M**.

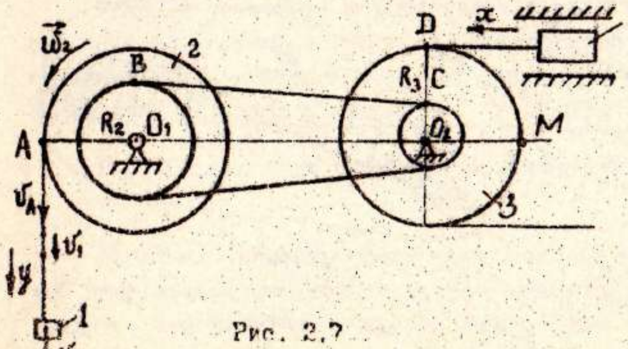


Рис. 2.7

Дано: $R_2 = 1$ м;
$y = 0{,}1\,t^3$ м;
$r_2 = 0{,}5$ м;
$R_3 = 0{,}8$ м;
$r_3 = 0{,}2$ м.

Найти: v_M, $\varphi_2 = f_1(t)$,
w_M, $\varphi_3 = f(t)$,
$x = \psi(t)$.

Решение

1. $v_1 = \frac{dy}{dt} = (0{,}1\,t^3)' = 0{,}3\,t^2$ (м/с);
2. $v_A = v_1 = 0{,}3\,t^2$ (м/с);
3. $v_A = \omega_2 R_2 \rightarrow \omega_2 = \frac{v_A}{R_2} = \frac{0{,}3t^2}{1} = 0{,}3\,t^2$ (м/с);
4. $v_B = \omega_2 r_2 \rightarrow v_B = 0{,}3\,t^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}15\,t^2$ (м/с);
5. $v_C = v_B = 0{,}15\,t^2$ (м/с);
6. $\omega_3 = \frac{v_C}{r_3} = \frac{0{,}15\,t^2}{0{,}2} = 0{,}75\,t^2$ (рад/с);
7. $v_D = \omega_3 R_3 = 0{,}6\,t^2$ (м/с);
8. $v_4 = v_D = 0{,}6\,t^2$ (м/с);
9. $\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$;

$$d\varphi_2 = \omega_2\, dt\ ; \quad \int_0^{\varphi_2} d\varphi_2 = 0{,}3 \int_0^t t^2 dt\ ; \quad \varphi_2 = 0{,}1\,t^3 \ (\text{рад});$$

10. $\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt}$;

$$d\varphi_3 = \omega_3\, dt\ ; \quad \int_0^{\varphi_3} d\varphi_3 = 0{,}75 \int_0^t t^2 dt\ ; \quad \varphi_3 = 0{,}25\,t^3 (\text{рад});$$

11. $v_4 = \frac{dx_4}{dt}$;

$$dx_4 = v_4\, dt\ ; \int_0^{x_4} dx_4 = 0{,}6 \int_0^t t^2 dt\ ; \quad x_4 = 0{,}3\,t^3 (\text{м});$$

12. $v_M = v_D = \omega_3 R_3 = 0{,}75\,t^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}6\,t^2$ (м/с);

$v_M\big|_{t=1} = 0{,}6 \cdot 1^2 = 0{,}6$ (м/с);

13. $w_M^{\tau} = \varepsilon_3 R_3 = 1{,}5 \cdot 0{,}8 = 1{,}2$ (м/с²); $\quad \varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = (0{,}75\,t^2)' = 1{,}5\,t$;
14. $w_M^{n} = \omega_3^2 R_3 = 0{,}75^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$ (м/с²);

$\omega_3 = 0{,}75 \cdot 1^2 = 0{,}75$ (рад/с²);

15. $w = R_3 \sqrt{\varepsilon_3^2 + \omega_3^4} = 0{,}47$ (м/с²);
16. $\mu = arctg \frac{\varepsilon_3}{\omega_3^2}$.

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Движения – абсолютное, относительное, переносное

Любое движение точки или тела есть движение относительное, т.к. его можно наблюдать по отношению других тел и систем отсчета. В инженерной практики такой системой является инерциальная система, жестко связанная с землей.

Движение точки или тела по отношению к неподвижной системе отсчета называется абсолютным движением. Абсолютное движение выгодно рассматривать как сложное движение, состоящее из двух происходящих одновременно движений.

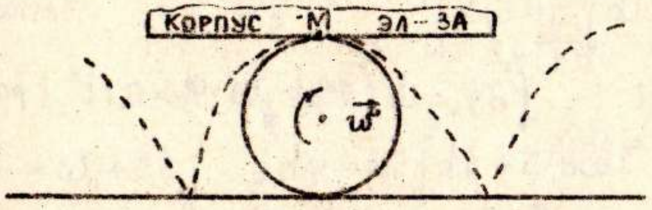


Рис. 3.1

Например, точка обода колеса описывает сложную траекторию, называемую циклоидной. Движение точки M можно рассматривать, как два движения: вращательное – вместе с колесом относительно корпуса (относительно вагона); поступательное – вместе с корпусом относительно рельс (рис. 3.1).

Движение точки M относительно подвижной системы /корпуса электровоза/ называется относительным. Движение подвижной системы /корпус тепловоза с колесом и точкой/ относительно неподвижной системы /земли, рельсов/ называется переносным движением точки. При этом каждое движение имеет свои скорости и ускорения:

- абсолютное $\vec{v}_a$, $\vec{w}_a$;
- относительное $\vec{v}_r$, $\vec{w}_r$;
- переносное $\vec{v}_e$, $\vec{w}_e$.

3.2. Теорема о скоростях точки при сложном движении (рис. 3.2)

Абсолютная скорость точки при сложном движении равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей: $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$.

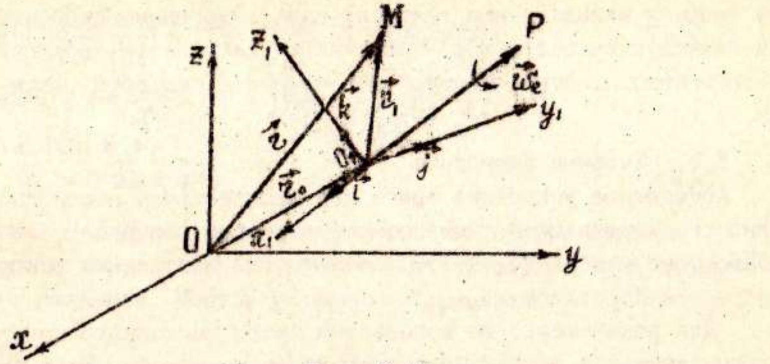


Рис. 3.2

x, y, O, z – неподвижная система;

$x_1 y_1 O_1 z_1$ – подвижная система;

$\vec{r}_0$ – радиус-вектор положения подвижной системы относительно неподвижной;

r – радиус-вектор положения точки M относительно неподвижной системы отсчета;

$\vec{r}_1$ – радиус-вектор положения точки M относительно подвижной системы отсчета.

$$\Delta\, OO_1M \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 \; ; \quad /1/$$

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \; ; \quad /2/$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \, . \quad /3/$$

Для определения скорости относительного движения мысленно прекратим переносное движение /т.е. $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – не изменяются/.

$$\vec{v}_r = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{i}\frac{dx_1}{dt} + \vec{j}\frac{dy_1}{dt} + \vec{k}\frac{dz_1}{dt} \, . \quad /4/$$

Для определения скорости переносного движении мысленно прекратим относительное /т.е. x_1, y_1, z_1 – не изменяются/, взяв производную от выражения /3/:

$$\vec{v}_e = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + x_1\frac{d\vec{i}}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}}{dt} \; ; \quad /5/$$

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + x_1\frac{d\vec{i}}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}}{dt} + \vec{i}\frac{dx_1}{dt} + \vec{j}\frac{dy_1}{dt} + \vec{k}\frac{dz_1}{dt} \, . \quad /6/$$

Эту теорему называют еще теоремой параллелограмма скоростей, т.к. абсолютная скорость точки изображается диагональю параллелограмма, построенного на относительной и переносной скоростях, как на сторонах.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e . \qquad /7/$$

3.3. Теорема Кориолиса

Абсолютное ускорение точки при произвольном переносном движении равно геометрической сумме относительного, переносного и некоторого добавочного ускорений, которые называются поворотным ускорением или ускорением Кориолиса.

Для доказательства используем прием мысленного прекращения отдельных движений, описанных в предыдущем параграфе. Взяв производную по времени от выражений соответствующих скоростей движения /формулы 4,5,6/, получим ускорения отдельных движений.

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_K ;$$

$$\vec{\omega}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{i}\frac{d^2x_1}{dt^2} + \vec{j}\frac{d^2y_1}{dt^2} + \vec{k}\frac{d^2z_1}{dt^2} ; \qquad /8/$$

$$\vec{\omega}_e = \frac{d\vec{v}_e}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + x_1\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y_1\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z_1\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} ; \qquad /9/$$

$$\vec{\omega}_a = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + x_1\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y_1\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z_1\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} + \frac{d\vec{i}}{dt}\frac{dx_1}{dt} + \frac{d\vec{j}}{dt}\frac{dy_1}{dt} + \frac{d\vec{k}}{dt}\frac{dz_1}{dt} + \ldots + ;$$

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e + 2\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\frac{dx_1}{dt} + \frac{d\vec{j}}{dt}\frac{dy_1}{dt} + \frac{d\vec{k}}{dt}\frac{dz_1}{dt}\right).$$

В нашем случае вектор $\vec{\omega}_e$ относительно мгновенной оси OP. Из теории движения свободного тела известно, что скорость любой точки тела определяется векторным произведением радиус-вектора положения точки на вектор мгновенной переносной угловой скорости (10):

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_e \times \vec{k} \quad /10/;$$

$$v_A = \frac{d\vec{k}}{dt} \quad /11/; \qquad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k} ;$$

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i} ;$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j} .$$

С другой стороны, скорость точки v_A определяется выражением /11/.

$$2\left(\frac{di}{dt}\frac{dx_1}{dt} + \frac{dj}{dt}\cdot\frac{dy_1}{dt} + \frac{dk}{dt}\cdot\frac{dz_1}{dt}\right) =$$

$$= 2\vec{\omega}_e \times \left(\frac{dx_1}{dt}\vec{i} + \frac{dy_1}{dt}\cdot\vec{j} + \frac{dz_1}{dt}\cdot\vec{k}\right) =$$

$$= 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r ;$$

$$\vec{W}_K = 2\vec{v}_r \times \vec{\omega}_e . \qquad /12/$$

Вектор ускорения Кориолиса равен двойному произведению вектора линейной скорости относительного движения на вектор угловой скорости переносного движения. Модуль ускорения Кориолиса

$$W_K = 2 v_r \cdot \omega_e \sin(\vec{v}_r \hat{\times} \vec{\omega}_e) . \qquad /13/$$

Модуль ускорения Кориолиса равен двойному произведению модуля линейной скорости относительного движения на модуль угловой скорости переносного движения и на $\sin$ угла между ними. Из выражения /13/ следует, что ускорение Кориолиса отсутствует:

- когда наблюдается относительный покой, $\vec{v}_r = 0$;
- когда переносное движение поступательное, $\vec{\omega}_e = 0$;
- когда вектор $\vec{v}_r$ параллелен $\vec{\omega}_e$.

Для нахождения вектора ускорения Кориолиса в данной точке M необходимо в эту точку перенести вектор переносной угловой скорости $\vec{\omega}_e$, к плоскости, проходящей через вектора $\vec{v}_r$ и $\vec{\omega}_e$, провести перпендикуляр в точке M, а сам вектор ускорения Кориолиса направить по этому перпендикуляру в ту сторону, откуда кратчайший поворот вектора $\vec{\omega}_e$ на вектор $\vec{v}_r$ представляется происходящим против хода часовой стрелки /рис. 3.3/.

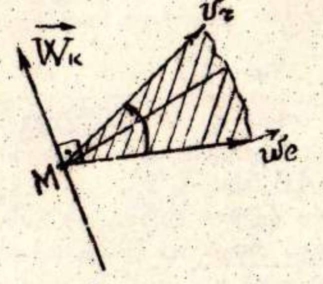


Рис. 3.3

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

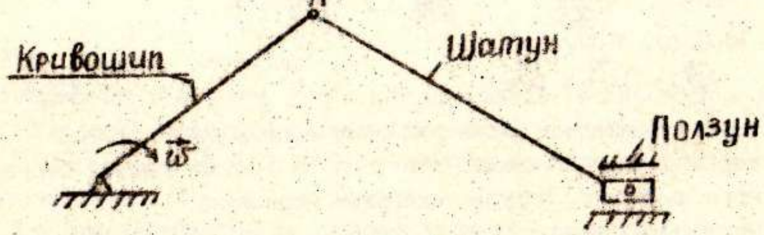


Рис. 4.I

Плоскопараллельное движение абсолютно твердого тела – это такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости (рис. 4.I).

4.I. Уравнение плоскопараллельного движения и кинематические характеристики его движения

Все точки сечения S совершают движение параллельно неподвижной плоскости I /рис. 4.2/, а значит для исследования характеристик плоскопараллельного движения достаточно рассматривать движение сечения S, которое будем совмещать с плоскостью xoy.

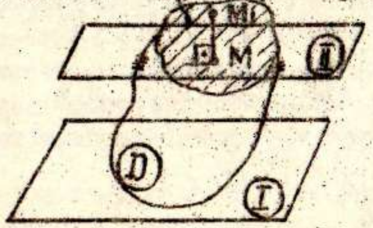


Рис. 4.2

Положение сечения S относительно xoy будет известно, если известно положение любой прямой этого сечения,
например, прямой AB (рис.4.3).
В свою очередь положение прямой AB будет считаться заданным, если будут известны координаты одной из точек прямой /например, точки A /, а также угол наклона прямой к одной из осей координат /оси Ox /. При плоскопараллельном движении тела точка A, координаты которой задаются, называется полюсом.

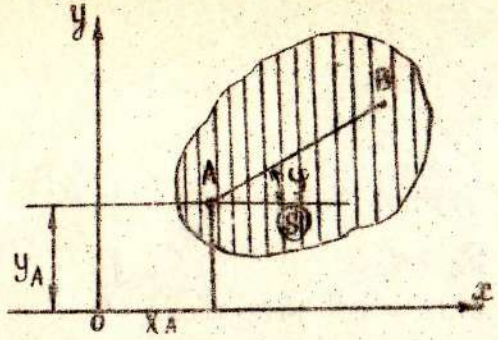


Рис. 4.3

Так как при движении тела координаты x_A, y_A и угол φ по времени изменяются, то уравнениями плоскопараллельного движения будут:

$$x_A = f_1(t); \quad /1/$$
$$y_A = f_2(t); \quad /2/$$
$$\varphi = f_3(t). \quad /3/$$

Уравнения /1/ и /2/ характеризуют собой поступательную часть движения вместе с полюсом A. Уравнение /3/ – вращательная часть движения относительно оси, проходящей через полюс A. Таким образом, плоскопараллельное движение тела состоит из поступательного движения вместе с полюсом и вращательного движения относительно оси, проходящей через полюс.

Кинематическими характеристиками движения являются скорость и ускорение тела в поступательном движении вместе с полюсом A ($\vec{W} = \vec{W}_A$, $\vec{v} = \vec{v}_A$), а также угловая скорость $\vec{\omega}$ и угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ вращательного движения тела относительно оси, проходящей через полюс.

4.2. Определение скоростей точек плоскопараллельно движущегося тела /рис. 4.4/

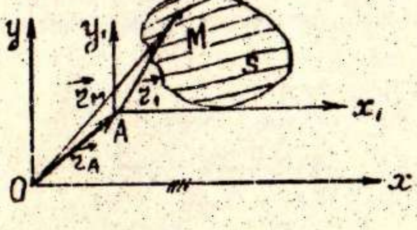


Рис. 4.4

Из ΔOAM $\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_1$;

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_1}{dt}$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA} ; \qquad /4/$$

$$v_{MA} = \omega\, r = \omega\ MA .$$

Скорость любой точки плоскопараллельно движущегося тела определяется геометрическим сложением вектора скорости поступательного движения вместе с полюсом и вектора скорости относительно полюса во вращательном движении /рис. 4.5 /.

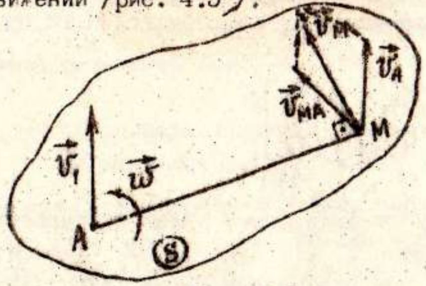


Рис. 4.5

4.3. Определение ускорений точек плоскопараллельно движущегося тела

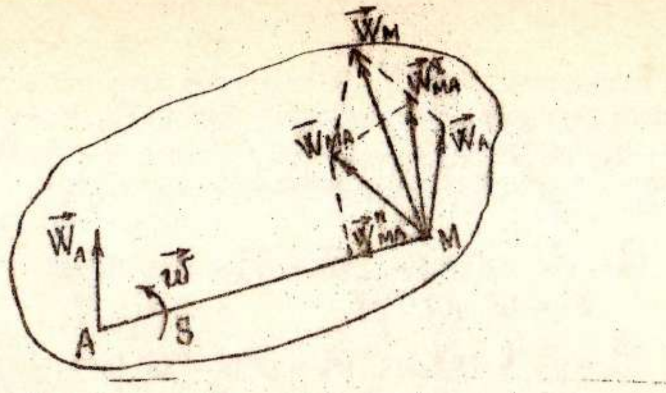
Взяв производную по времени от уравнения /4/, получим выражение ускорения точки M .

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{v}_{MA}}{dt} ; \quad \vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{W}_{MA} .$$

Следует: ускорение любой точки тела геометрически состоит из ускорения тела вместе с полюсом в поступательном движении и ускорения точки тела относительно полюса во вращательном движении /рис.4.6/.

$$\vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{W}^{\tau}_{MA} + \vec{W}^{n}_{MA} ; \qquad /5/$$

$$\vec{W}_M = \vec{W}^{\tau}_A + \vec{W}^{n}_A + \vec{W}^{\tau}_{MA} + \vec{W}^{n}_{MA} . \qquad /6/$$

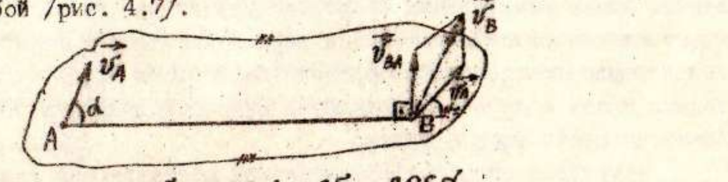


$$\vec{W}_M = \vec{W}^{\tau}_A + \vec{W}^{n}_A + \vec{W}^{\tau}_{MA} + \vec{W}^{n}_{MA} . \qquad /7/$$

Рис. 4.6

4.4. Теорема о проекциях скоростей двух точек плоскопараллельно движущегося тела

Проекции скоростей двух точек тела на линию, соединяющую точки, равны между собой /рис. 4.7/.



$$v_A \cos\alpha = v_A \cdot \cos\alpha ;$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} .$$

Рис. 4.7

4.5. Мгновенный центр скоростей (МЦС)

Мгновенным центром скоростей называется такая точка плоскопараллельно движущегося тела, скорость которой в данный момент времени равна нулю /рис.4.8/.

МЦС – P

$\vec{v}_P = 0$

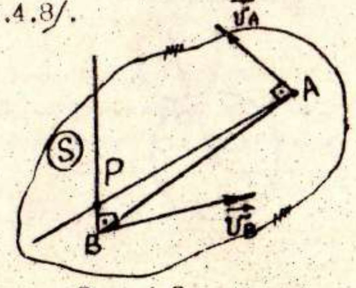


Рис. 4.8

Если бы скорость точки P не была равна нулю, то по теореме предыдущего параграфа вектор скорости точки P должен быть одновременно перпендикулярен и к прямой AP, и к прямой BP, что не возможно, а значит скорость точки P равна нулю.

P - полюс

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P^{\neq 0} + \vec{v}_{AP} \rightarrow \quad \vec{v}_A = \vec{v}_{AP} = \omega \cdot AP\ ;$$

$$v_A = \omega \cdot AP\ ;$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_P^{\neq 0} + \vec{v}_{BP} \rightarrow \quad \vec{v}_B = \vec{v}_{BP} = \omega \cdot BP\ ;$$

$$v_B = \omega \cdot BP\ ;$$

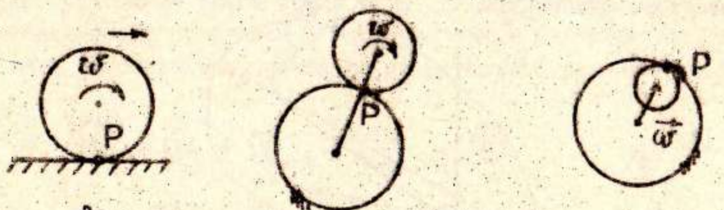
$$\omega = \frac{v_A}{AP}\ ; \quad \omega = \frac{v_B}{BP}\ ; \qquad \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \ldots = \frac{v_i}{iP}\ .$$

Из приведенного следует:

- скорость точки определяется как вращательная скорость относительно оси, проходящей через МЦС;
- скорости точек прямо пропорциональны их расстояниям до МЦС;
- для того, чтобы определить скорость любой точки тела, необходимо знать направление скоростей двух точек тела, при этом МЦС будет находится на пересечении перпендикуляров к этим скоростям;
- для того, чтобы определить скорость любой точки тела, необходимо знать модуль и направление скорости одной из точек и направление скорости данной точки;
- угловая скорость вращательной составляющей движения определяется частным от деления скорости любой точки тела на ее расстояние до МЦС, $\omega = \frac{v_i}{iP}$.

4.6. Частные случаи определения МЦС /рис.4.9/

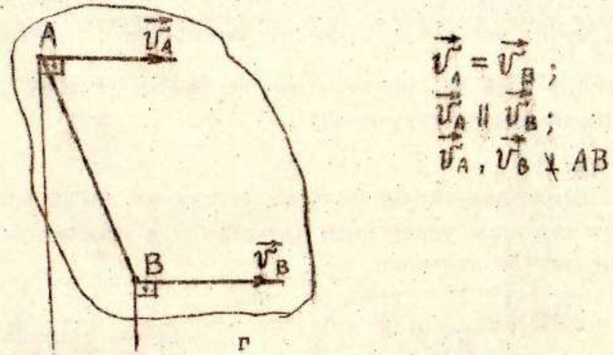
При качении цилиндрического тела по плоскости или поверхности второго цилиндрического тела, при условии что последнее неподвижно, МЦС находится в точке соприкосновения тел /рис.4.9 а,б,в/.



а б в

Рис. 4.9

Если скорости двух тел параллельны и не перпендикулярны к прямой, соединяющей эти точки, то МЦС находится в бесконечности, а это значит, что в данный момент тело совершает мгновенное поступательное движение /рис.4.9,г/.



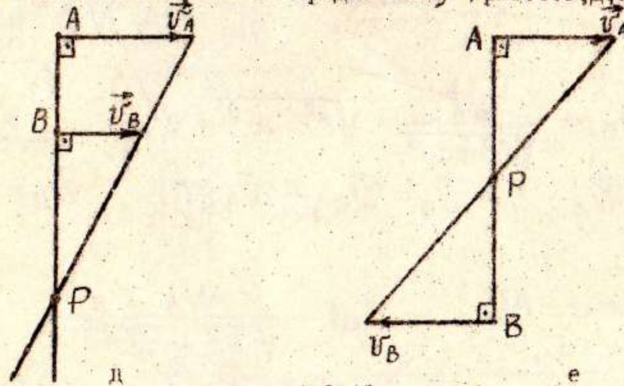
г

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B\ ;$$

$$\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B\ ;$$

$$\vec{v}_A,\ \vec{v}_B \not\perp AB.$$

Если скорости двух точек тела параллельны между собой и перпендикулярны прямой, соединяющей их точки приложения, то МЦС находится графически, как показано на чертеже, т.е. находится на пересечении прямой, соединяющей эти точки /или на ее продолжении/, и прямой, соединяющей концы векторов этих точек /или ее продолжении/ /рис.4.9,д,е/.



д е

$$\vec{v}_A \neq \vec{v}_B\ ;$$

$$\vec{v}_A\ ;\ \vec{v}_B \perp AB.$$

Рис. 4.9. Окончание

Расстояние до МЦС определяется частным от деления скорости любой точки тела на угловую скорость вращения ее:

$$iP = \frac{v_i}{\omega}$$

4.7. Мгновенный центр ускорений /МЦУ/

Это такая точка, ускорение которой в данный момент равно нулю.

Для нахождения МЦУ должны быть заданы: ускорение одной из точек тела, угловая скорость, угловое ускорение во вращательном движении. Мгновенный центр ускорений находится в следующей последовательности /рис.4.10/.

I. Определяют угол μ между направлением известного ускорения и линией, соединяющей точку с МЦУ.

$$tg\,\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Причем, угол μ откладывается от вектора ускорения любой точки в сторону вращения тела при ускоренном движении и в противоположную сторону-при замедленном движении.

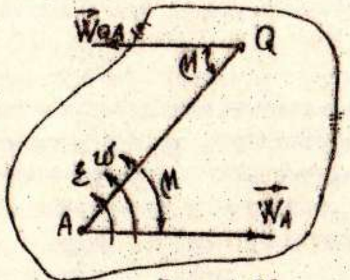


Рис. 4.10

$$QA = \frac{W_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}};$$

$$\vec{W}_Q = \vec{W}_A + \vec{W}_{QA};$$

$$W_{QA} = QA\,\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$W_{QA} = \frac{W_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}\,\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = W_A;$$

$$\vec{W}_{QA} = -\vec{W}_A; \quad \vec{W}_Q = \vec{W}_{QA} - \vec{W}_A = 0; \quad \vec{W}_Q = 0.$$

2.Определяют расстояние AQ: $$QA = \frac{W_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}},$$

где точка Q - МЦУ.

Из приведенного следует:

-ускорение любой точки плоскопараллельного движения тела равно его вращательной составляющей ускорения относительно МЦУ;

- ускорения точек прямо пропорциональны их расстояниям до МЦУ:

$$\frac{W_A}{AQ} = \frac{W_B}{BQ} = \ldots = \frac{W_i}{iQ}.$$

4.8. План скоростей - диаграмма (рис. 4.II, 4.I2)

План скоростей - диаграмма, на которой от некоторой неподвижной точки отложены в масштабе все скорости точек механизма.

Основным свойством плана скоростей является то, что отрезки, соединяющие концы векторов на плане скоростей, перпендикулярны соответственно отрезкам на механизме, причем эти отрезки прямо пропорциональны.

На плане скоростей	На механизме
Oa	OA
ab	AB
ac	AC
cd	CD
cf	CF
df	DF
ef	EF
cb	CB

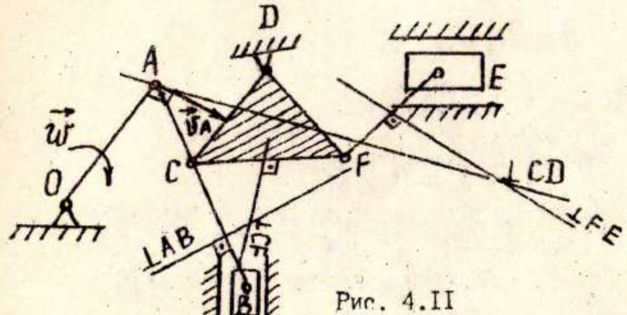


Рис. 4.II

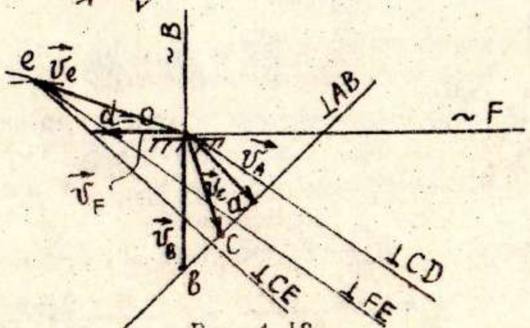
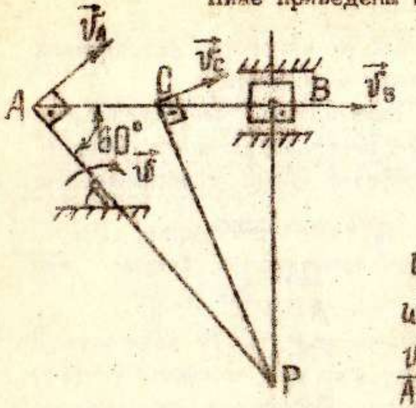


Рис. 4.I2

Ниже приведены примеры решения задач.



Задача 1

Дано: $OA=0{,}5$ м; $AB=1$ м; $n=30$ об/мин.

Найти V_c.

Решение

$v_A=\omega_{OA}$; $R_{OA}=3\cdot 0{,}5=4{,}5$ м/с;

$\omega_{OA}=\frac{\pi n}{30}=\frac{3{,}14\cdot 30}{30}=3$ рад/с;

$\frac{v_A}{AP}=\frac{v_B}{BP}=\frac{v_C}{CP}$; $v_C=\frac{v_A\,CP}{AP}=\frac{1{,}5\cdot 1{,}8}{2}=13{,}5$ м/с;

$AP=\frac{AB}{\cos 60^\circ}=\frac{1}{0{,}5}=2$ м.

Из ΔAPB $BP=AP\sin 60^\circ=1{,}74$ м;

$CP=\sqrt{CB^2+BP^2}=\sqrt{0{,}5^2+1{,}74^2}=1{,}8$ м.

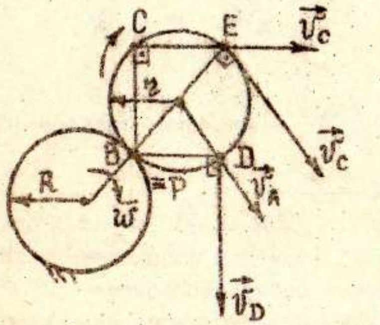
Задача 2

Дано: $OA=R+r$;

$\omega_{OA}=5$ рад/с; $R=1$;

$r=0{,}2$ м.

Найти: v_B, v_C, v_E, v_D, v_A.



$v_A=\omega_{OA}\,OA=5\cdot 1{,}2=6$ м/с;

$v_B=0$;

$\frac{v_E}{EP}=\frac{v_B}{BP}=\frac{v_C}{CP}=\frac{v_D}{DP}=\frac{v_A}{AP}$;

$v_C=\frac{v_A\,CP}{AP}=\frac{6\cdot 0{,}28}{0{,}2}=8{,}4$ м/с;

$CP=r\sqrt{2}=0{,}28$;

$v_D=v_C=8{,}4$ м/с;

$v_E=\frac{v_A\,EP}{AP}=\frac{6\cdot 28r}{8r}=12$ м/с.

Составитель

Василий Петрович Гавишин

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ (РАЗДЕЛЫ "СТАТИКА", "КИНЕМАТИКА") ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ ГИ

Редактор Л.А. Чуищева
Ст. корректор Ю.В Рачковская
Редакционно-издательский отдел

Подписано в печать 17.11.92. Формат 60х84/16.
Бут. тип. Офс. печ. Усл. печ. л. 3,2.
Уч.-изд. л. 3,2. Тираж 100 экз. Заказ № 87 . Бесплатно.
Ротапринт ДГИ.
320600, ГСП, г. Днепропетровск-27, пр. К.Маркса, 19.