Міністерство освіти України

Національна гірнича академія України

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ КУРСОВИХ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ
З РОЗДІЛУ “ДИНАМІКА МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ”
ДИСЦИПЛІНИ “ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА”
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ВСІХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Дніпропетровськ
1997

Методичні вказівки до виконання курсових домашніх завдань з розділу "Динаміка механічної системи" дисципліни "Теоретична механіка" для студентів всіх спеціальностей / Упорядн. В.П. Равішин. - Дніпропетровськ: НГА України, 1997. - 33 с.

Упорядник В.П. Равішин, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри будівельної та теоретичної механіки С.Є. Блохін, д-р техн. наук, професор

Друкується в редакційній обробці упорядника.

I. ВВЕДЕННЯ

Методичні вказівки вміщають загальні відомості по виконанню і оформленню курсових домашніх завдань; приклади виконання домашніх завдань і контрольні питання по відповідних темах розділу "Динаміка механічної системи".

Призначено для студентів стаціонарної і вечірньої форм навчання тих спеціальностей, котрі вивчають повний курс теоретичної механіки /7.0505-гірничі машини і комплекси і гірнича електромеханіка; 8.0506 - машини і устаткування збагачувальних фабрик, 2.0108 -технологія і техніка розвідки корисних копалин і др.

Вказівки можуть бути використанні також студентами тих спеціальностей в котрих передбачено скорочену програму по теоретичній механіці. При цьому кількість задач курсових завдань зменшується.

2. Загальні вказівки

В цих методичних вказівках приведені основні теоретичні відомості по двох основних темах: "Загальні теореми динаміки механічної системи" і "Аналітична механіка" , а також дані приклади рішення окремих задач по цих темах.

Студентам вказується варіант домашнього завдання і номер розрахункової схеми механічної системи, котра, як правило, відповідає порядковому номеру прізвища студента в журналі групи студентів. Варіанти і номери схем беруться за даними приведеними на стендах варіантів домашніх завдань кафедри. Окрім цього, за рішенням викладача студенту можуть бути видані курсові домашні завдання по методичних посібниках для студентів-заочників.

Рішення кожної із задач домашнього курсового завдання необхідно ілюструвати окремою розрахунковою схемою, на котрій повинні бути зображені осі координат і всі вектори, котрі задані для кожної окремої задачі.

Хід рішення кожної задачі повинен супроводжуватися короткими поясненнями, а саме: які теореми, формули, або рівняння застосовуються, їх аналіз і розшифровка всіх позначень, прийнятих в розрахункових формулах.

3. Курсове домашнє завдання № 4+/

Загальні теореми динаміки механічної системи.

3.I. Теоретичні /довідкові/ дані

3.I.I. Теорема про рух центра мас механічної системи.

+/ Курсові домашні завдання № I, № 2, № 3 виконуються при вивченні розділів "Статика", "Кінематика", "Динаміка" матеріальної точки".

$$M\vec{W}_c = \vec{R}^e + \vec{R}^i, \qquad /1/$$

де $M = \sum m_k$ - маса всієї системи;
$\vec{W}_c$ - прискорення центра мас системи;
$\vec{R}^e = \sum \vec{F}_k^e$ - головний вектор зовнішніх сил, діючих на систему;
$\vec{R}^i = \sum \vec{F}_k^i$ - головний вектор внутрішніх сил, діючих на систему. $\vec{R}^i = 0$ — за властивостями внутрішніх сил.

Тоді теорема про рух центра мас механічної системи буде мати вигляд:

$$M\vec{W}_c = \sum \vec{F}_k^e \qquad /2/$$

Координати центра мас механічної системи визначаються виразами:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum m_k x_k}{M}, \\ y_c &= \frac{\sum m_k y_k}{M}, \\ z_c &= \frac{\sum m_k z_k}{M}, \end{aligned}\right\} \qquad /3/$$

де m_k - маса окремої точки, або тіла механічної системи.

Дифференціальні рівняння руху центра мас механічної системи в декартових координатах

$$\left.\begin{aligned} M W_{cx} &= \sum F_{kx}^e, \\ M W_{cy} &= \sum F_{ky}^e, \\ M W_{cz} &= \sum F_{kz}^e, \end{aligned}\right\} \qquad /4/$$

де: $W_{cx} = \frac{d^2 x_c}{dt^2}$; $W_{cy} = \frac{d^2 y_c}{dt^2}$; $W_{cz} = \frac{d^2 z_c}{dt^2}$; -

- проекції прискорення центра мас на відповідні осі координат;

$F_{kx}^e, F_{ky}^e, F_{kz}^e$ - сумма проекцій зовнішніх сил на відповідні осі координат.

Закон збереження руху центра мас механічної системи.

Якщо $\sum \vec{F}_k^e = 0$, то $M\vec{W}_c = 0$,
, так як $M \neq 0$, то $\vec{W}_c = 0$,
отже $\vec{V}_c = Const$.

Відповідно в проекціях на декартові осі координат

$$\sum F_{kx} = 0 \rightarrow V_{cx} = Const,$$
$$\sum F_{ky} = 0 \rightarrow V_{cy} = Const,$$
$$\sum F_{kz} = 0 \rightarrow V_{cz} = Const.$$

3.2.I. Теорема про зміну кількості руху системи в дифференціальній формі

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e \qquad /5/$$

де $\vec{Q} = \sum m_k \vec{V}_k$ - кількість руху механічної системи,
$\vec{V}_k$ - швидкість руху центра мас кожного тіла механічної системи;

або $\vec{Q} = M\vec{V}_c$ - кількість руху механічної системи;
$\vec{V}_c$ - швидкість руху центра мас механічної системи.

В проекціях на декартові осі координат

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e \qquad /6/$$

Закон збереження кількості руху механічної системи.

Якщо $\sum F_k^e = 0$, то $\frac{dQ}{dt} = 0$, отже $\vec{Q} = Const$.

Відповідно в проекціях на декартові осі координат

$$\sum F_{kx} = 0 \rightarrow Q_x = Const,$$
$$\sum F_{ky} = 0 \rightarrow Q_y = Const,$$
$$\sum F_{kz} = 0 \rightarrow Q_z = Const.$$

3.I.3. Теорема про зміну кількості руху механічної системи в інтегральній формі

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e \qquad /7/$$

де $\vec{Q}_1$ и $\vec{Q}_0$ - кількість руху механічної системи відповідно в кінцевому і початковому положеннях;

$\sum \vec{S}_k^e = \int_0^t \vec{F}_k^e dt$ - сумма імпульсів всіх зовнішніх сил, діючих на систему.

В проекціях на координатні осі будемо мати

$$\left.\begin{aligned} Q_{1x} - Q_{0x} &= \sum S_{k_x}^e, \\ Q_{1y} - Q_{0y} &= \sum S_{k_y}^e, \\ Q_{1z} - Q_{0z} &= \sum S_{k_z}^e, \end{aligned}\right\} \qquad /8/$$

де Q_{1x}, Q_{1y}, Q_{1z}, - проекції кількості руху системи в кінцевому положенні відповідно на осі X, Y, ;

Q_{0x}, Q_{0y}, Q_{0z} - проекції кількості руху системи в початковому положенні на відповідні осі координат;

$\sum S_{k_x}^e$, $\sum S_{k_y}^e$, $\sum S_{k_z}^e$ - проекції імпульсів зовнішніх сил системи на координатні осі.

3.1.4. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи в диференціальній формі

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i \qquad /9/$$

де $\sum dA_k^e$, $\sum dA_k^i$ - суми елементарних робіт відповідно зовнішніх і внутрішніх сил системи.

3.1.5. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи в інтегральній формі

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i \qquad /10/$$

де T_1, T_0 - кінетична енергія системи відповідно в кінцевому і початковому положеннях механічної системи;

$\sum A_k^e$, $\sum A_k^i$ - суми робіт всіх зовнішніх і внутрішніх сил системи на відповідному її переміщенні.

Кінетична енергія тіла, здійснюючого поступальний рух

$$T = \frac{MV^2}{2} \qquad /11/$$

де M - маса всього тіла;

$\vec{V}$ - швидкість руху тіла /будь-якої його точки/.

Кінетична енергія тіла, здійснюючого обертальний рух відносно нерухомої осі

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2} \qquad /12/$$

де J_z - момент інерції тіла відносно осі z ;

ω - кутова швидкість обертання тіла.

Кінетична енергія тіла, здійснюючого плоскопаралельний рух

$$T = \frac{MV_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2} \qquad /13/$$

де J_c - момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас C тіла, перпендикулярно до площини руху;

$\bar{V}_c$ - швидкість руху центра мас тіла.

Момент інерції відносно осі суцільного однорідного диска радіуса R

$$J_z = \frac{MR^2}{2} \qquad /14/$$

Робота постійної по модулю та напрямку сили $\vec{F}$ на прямолінійному переміщенні S рівна

$$A = FS\cos\alpha \qquad /15/$$

де α - кут між напрямками сили і переміщення.

Робота сили тертя $\bar{F}_{тр.}$ на прямолінійному переміщенні рівна

$$A = -F_{тр.} S = -Nfs \qquad /16/$$

де N - нормальна реакція площини ковзання;

f - коефіцієнт тертя ковзання.

Робота сили тяжіння P тіла, що рухається по похилій площині на переміщенні S рівна

$$A = Ps\cos\beta \qquad /17/$$

де: β - кут наклону площини до горизонту.

Робота сили тертя тіла, що рухається по похилій площині під дією сили тяжіння на переміщенні S рівна

$$A = Pfs\cos\beta \qquad /18/$$

Робота постійної сили, прикладеної до тіла, що рухається навколо нерухомої осі Z рівна

$$A = M_z \varphi \qquad /19/$$

де M_z - обертальний момент сили відносно осі Z ;

φ - кут повороту тіла.

3.2. Приклад виконання курсового домашнього завдання № 4

3.2.1. Вихідні дані

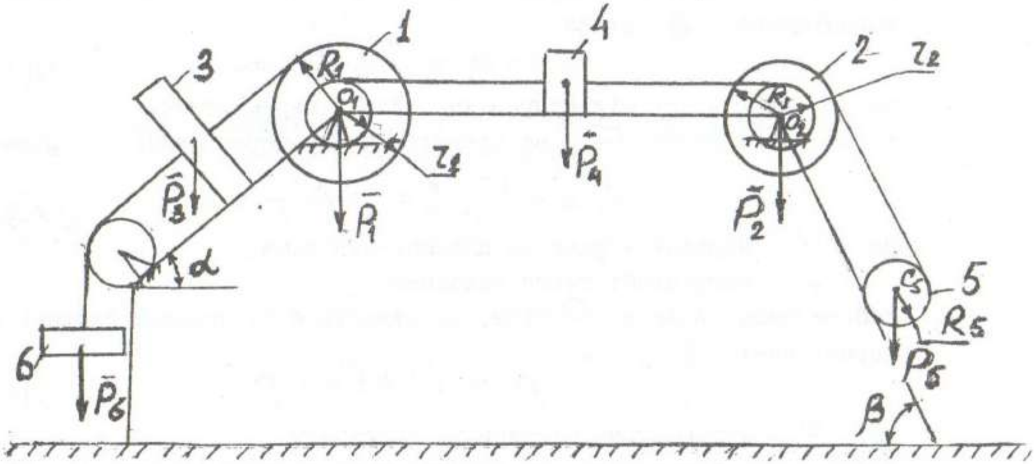
Механічна система, що складається з барабанів І і 2, катка 5 і вантажів 3,4,6 рухається під дією сил тяжіння. Барабани І і 2, а також каток 5 вважати однорідними суцільними циліндрами. Каток 5 рухається по похилій площині без ковзання. Похилі і горизонтальні відрізки ниток паралельні відповідним площинам по яких переміщаються тіла механічної системи.

Необхідні для вирішення дані приведені в таблиці I.

Вихідні дані задачі

Табл. I

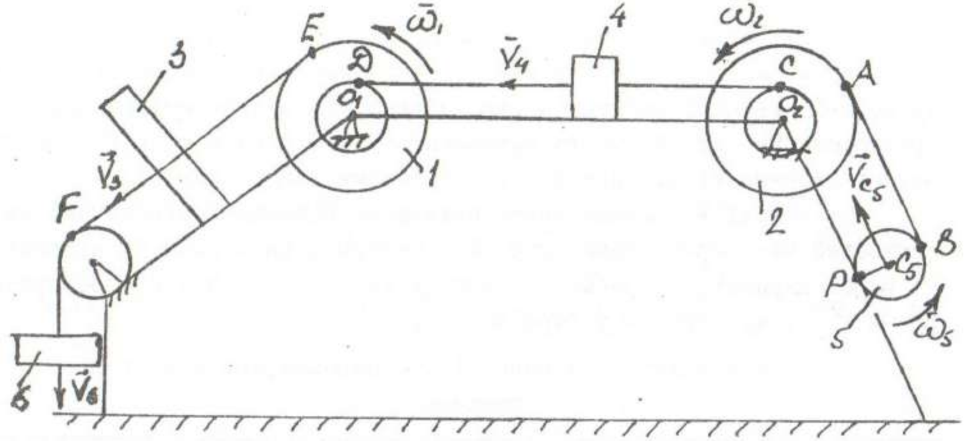
P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	R_1	r_1	R_2	r_2	R_5	f	α	β
10H	20H	10H	30H	10H	40 H	0,8 м	0,1 м	0,5 м	0,1 м	0,2 м	0,1	45°	60°



3.2.2. Визначення кінетичних залежностей між параметрами руху тіл системи

Визначимо необхідні для подальшого виконання домашнього завдання кінематичні залежності між параметрами руху тіл механічної системи, виразивши їх, наприклад, через кутову швидкість барабана 2[+/]

+/ кінематичні залежності між параметрами руху тіл системи можна виразити через будь-який інший параметр /лінійний чи кутовий/ будь-якого тіла механічної системи.



Задомося напрямком руху /в даній задачі рух тіл відбувається проти руху годинникової стрілки/. Напрямки лінійних і кутових швидкостей позначено на малюнку.

В данній задачі: барабани I і 2 здійснюють обертальний рух; каток 5 - плоскопаралельний рух; вантажі 3,4,6 - поступальний рух.

$$V_A = \omega_2 R_2 = 0{,}5\,\omega_2\,,\ \text{м/с}\,,$$

$$V_B = V_A = 0{,}5\,\omega_2\ \text{м/с}\,,$$

$$\omega_5 = \frac{V_B}{BP} = \frac{0{,}5\omega_2}{2R_5} = 1{,}25\,\omega_2\ \text{рад/с}\,,$$

$$\frac{V_B}{BP} = \frac{V_{C5}}{C_5P} \rightarrow V_{C5} = \frac{V_B \cdot C_5P}{BP} = \frac{0{,}5\omega_2 \cdot 0{,}2}{2 \cdot 0{,}2} = 0{,}25\,\omega_2\ \text{м/с}\,,$$

$$V_C = \omega_2 r_2 = 0{,}1\,\omega_2\ \text{м/с}\,,$$

$$V_4 = V_C = 0{,}1\,\omega_2\ \text{м/с}\,,$$

$$V_D = V_4 = 0{,}1\,\omega_2\ \text{м/с}\,,$$

$$V_D = \omega_1 r_1 \rightarrow \omega_1 = \frac{V_D}{r_1} = \frac{0{,}1\omega_2}{0{,}1} = \omega_2\ \text{рад/с}\,,$$

$$V_E=\omega_1 R_1=0,8\,\omega_2 \ \text{м/с},$$
$$V_E=V_3=V_F=V_6=0,8\,\omega_2 \ \text{м/с},$$
$$V_6=0,8\,\omega_2 \ \text{м/с}.$$

Так як відрізки ниток паралельні відповідним площинам по яких переміщаються тіла системи, то конфігурація системи під час руху не зміниться. В зв"язку з цим, залежності між переміщеннями та прискореннями /лінійними та кутовими/ будуть такими ж як і вище приведені залежності між лінійними і кутовими швидкостями.

На основі вищеприведеного складаємо таблицю 2 кінетичних залежностей між параметрами руху тіл системи, виразивши їх відповідно через параметри барабана 2: кутову швидкість ω_2 ; кутове прискорення ε_2 ; кут повороту барабана φ_2 .

Кінематичні залежності між параметрами руху тіл системи

$V_i(\omega_i)=f_1(\omega_2)$	$S_i(\varphi_i)=f_2(\varphi_2)$	$W_i(\varepsilon_i)=f_3(\varepsilon_2)$
$\omega_5=1,25\,\omega_2$	$\varphi_5=1,25\,\varphi_2$	$\varepsilon_5=1,25\,\varepsilon_2$
$V_{c5}=0,25\,\omega_2$	$S_{c5}=0,25\,\varphi_2$	$W_{c5}=0,25\,\varepsilon_2$
$V_4=0,1\,\omega_2$	$S_4=0,1\,\varphi_2$	$W_4=0,1\,\varepsilon_2$
$\omega_1=\omega_2$	$\varphi_1=\varphi_2$	$\varepsilon_1=\varepsilon_2$
$V_3=0,8\,\omega_2$	$S_3=0,8\,\varphi_2$	$W_3=0,8\,\varepsilon_2$
$V_6=0,8\,\omega_2$	$S_6=0,8\,\varphi_2$	$W_6=0,8\,\varepsilon_2$

3.2.3. Рішення задачі № I

Умова задачі: Використовуючи теорему про рух центра масс системи визначивши зміщення призми 7 при повороті барабана 2 на кут φ_2 = 2 рад. Вага призми 7 рівна 300 Н. Вважати, що призма 7 незакріплена на гладкій поверхні. Система рухається із стану спокою

Рішення задачі:

I. Показуємо механічну систему і зовнішні сили $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$, котрі діють на систему / N - нормальна реакція гладкої поверхні/. Вибираємо систему координат ХОУ і показуємо систему до повороту барабана на кут φ_2= 2 /верхній рисунок/. Нижче показуємо механічну систему тіл в даний момент часу, коли барабан 2 здійснив поворот проти годинникової стрілки на кут $\varphi_2 = 2$ рад. При цьому всі тіла системи здійснили відповідні рухи, а призма 7 перемістилась по гладкій поверхні вправо на величину Х, котру необхідно визначити за умовою задачі /нижній рисунок/.

2. Складаємо диференціальне рівняння руху центра мас системи в проекції на вісь СХ, скориставшись виразом /4/

$$M W_{cx}=\sum F^e_{kx}.$$

Так як всі зовнішні сили вертикальні, то тут буде мати місце закон збереження руху центра мас системи по осі СХ.

$$\sum F^e_{kx}=0,\ M W_{cx}=0,\ M\neq 0,\ W_{cx}=0,\ V_{cx}=Const.$$

В звязку з тим, що механічна система в початковий момент часу знаходиться в стані спокою / V_{c_0}= 0/, то $x_{c_0}=x_{c_1}$, тобто центр мас системи при її русі залишається на одній і тій же вертикалі, а координата x_c /після повороту барабана, на кут φ_2 = 2 рад/ не зміняться.

3. Показуємо координати кожного із тіл системи в початковому /індекс x_{0i} / і кінечному /індекс x_{1i} / положеннях на кресленні і визначаємо відповідно координати x_{c_0} і x_{c_1} .

$$x_{c_0}=\frac{\sum P_i x_{0i}}{\sum P_i}=\frac{P_1x_{01}+P_2x_{02}+P_3x_{03}+P_4x_{04}+P_5x_{05}+P_6x_{06}}{P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6},$$

$$x_{c_1}=\frac{\sum P_i x_{1i}}{\sum P_i}=\frac{P_1(x_{01}+x)+P_2(x_{02}+x)+P_3(x_{03}+x-S_3\cos\alpha)+}{P_1+P_2+P_3+\dots}$$

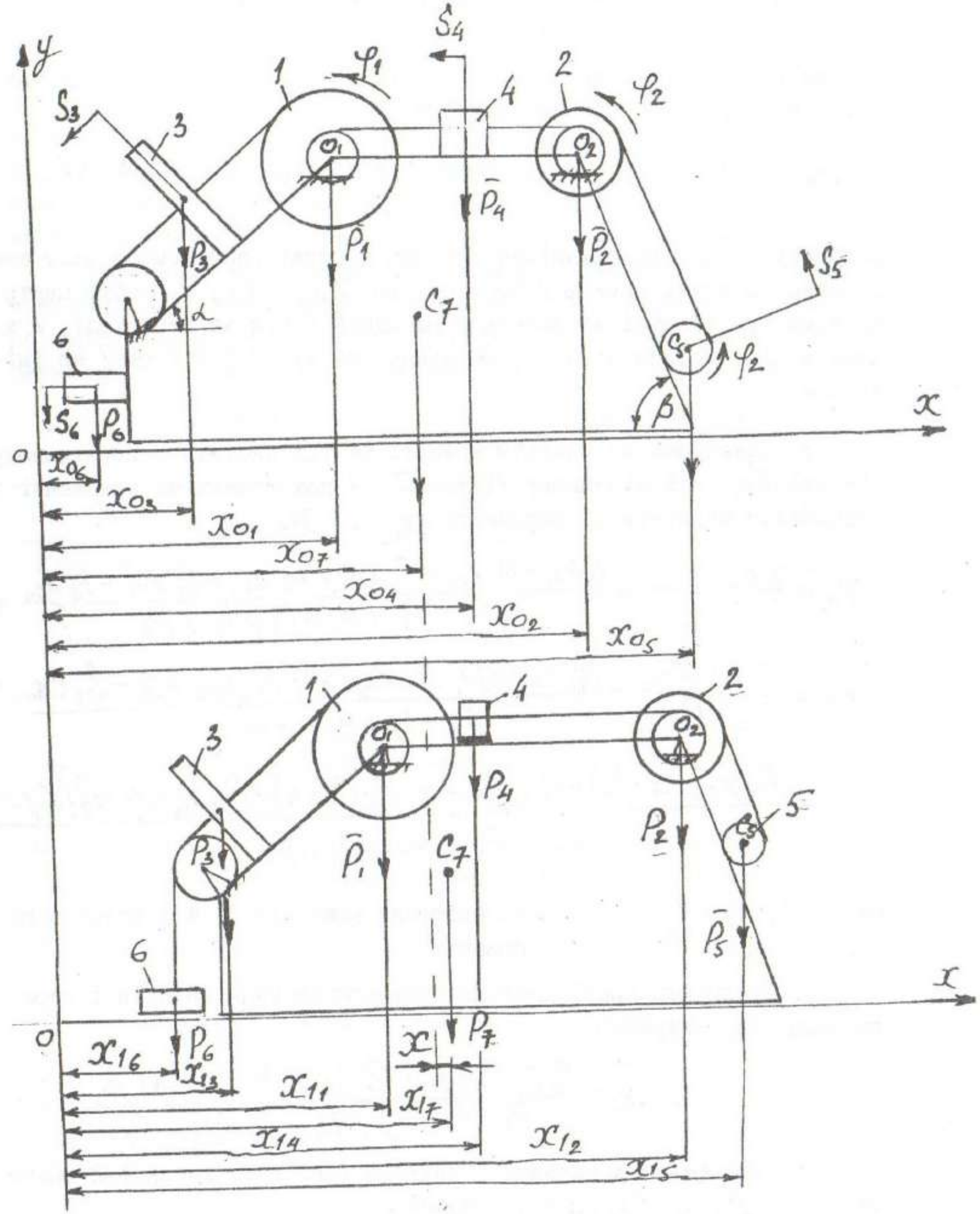
$$+\frac{P_4(x_{04}+x-S_4)+P_5(x_{05}+x-S_5\cos\beta)+P_6(x_{06}+x)+P_7(x_{07}+x)}{\dots+P_4+P_5+P_6+P_7},$$

де S_3 , S_4 , S_5 - переміщення вантажів 3, 4 і катка 5 по призмі.

4. Зрівнявши праві частини приведених вище виразів і перетворивши їх, одержимо

$$x=\frac{P_3S_3\cos\beta+P_4S_4+P_5S_5\cos\beta}{P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6+P_7}\ \text{м}$$

5. Підставим з таблиці I вихідні дані і із таблиці 2 значення $S_i=f_2(\varphi_2)$, получимо

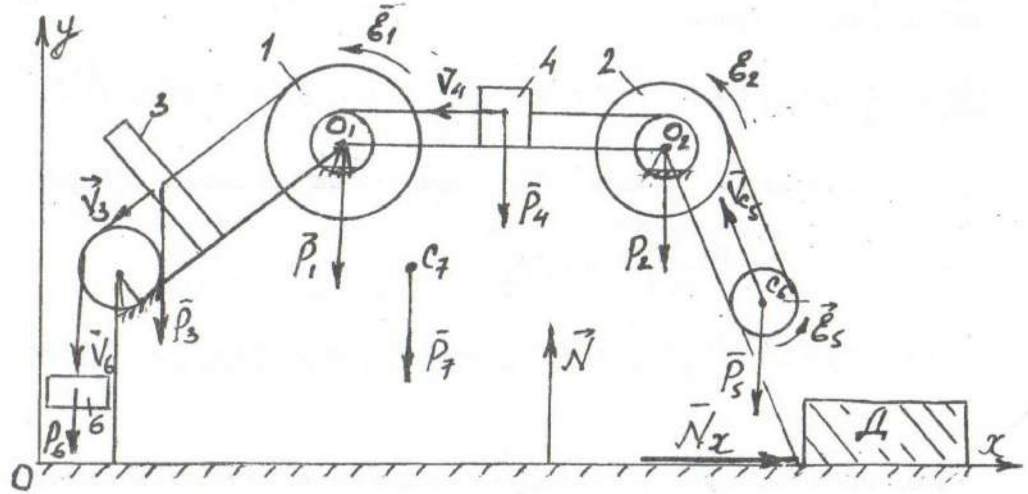


$$x = \frac{10\cdot 0{,}8\varphi_2\cdot 0{,}707+30\cdot 0{,}1\varphi_2+10\cdot 0{,}25\varphi_2\cdot 0{,}5}{10+20+10+30+10+40+300} = 0{,}024\varphi_2,$$

$$x = 0{,}024\cdot 2 = 0{,}048 \text{ м}.$$

3.2.4 Рішення задачі № 2

Умова задачі: Визначити зусилля N_x з яким призма діє на кріплення D при обертанні барабана 2 з кутовим прискоренням ε_2 = 2 рад/с^2. Для рішення задачі використати теорему про зміну кількості руху системи. Тертям вантажів 3 і 4 до площини знехтувати.



Рішення задачі:

1. Розглядаемо механічну систему, проаналізовану в п. 3.2.2., показуємо зовнішні сили P_I, P_2........P_7. Зусилля N_x направимо по осі OX.

2. Записуемо диференціальну форму теореми про змінення кількості руху системи в проекції на вісь OX, скориставшись виразом /6/

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum F^e_{kx} = N_x.$$

3. Визначимо проекції кількості руху всіх тіл системи на вісь OX

$$Q_x = Q_{1x} + Q_{2x} + Q_{3x} + Q_{4x} + Q_{5x} + Q_{6x} + Q_{7x}.$$

Так як $V_{6x}=0,\ V_1=0,\ V_2=0,\ V_7=0,$ то

$$Q_{6x}=V_1=V_2=V_7=0.$$

Тоді

$$Q_x=Q_{3x}+Q_{4x}+Q_{5x},$$

$$Q_{3x}=\frac{P_3}{g}V_3\cos\alpha,$$

$$Q_{4x}=\frac{P_4}{g}V_4,$$

$$Q_{5x}=\frac{P_5}{g}V_{C5}\cos\beta.$$

Звідси

$$Q_x=-\frac{P_3}{g}V_3\cos\alpha-\frac{P_4}{g}V_4-\frac{P_5}{g}V_{C5}\cos\beta.$$

Підставивши з таблиці 2 значення $V_i=f_1(\omega_2)$ і із таблиці I вхідні дані, получимо

$$Q_x=-\frac{10}{9,81}\cdot 0,8\omega_2\cdot 0,707-\frac{30}{9,81}\cdot 0,1\omega_2-\frac{10}{9,81}\cdot 0,25\omega_2\cdot 0,5=-0,925\omega_2\ H\cdot c.$$

4. Визначимо зусилля N_x, яке діє на кріплення D призми

$$\frac{dQ_x}{dt}=N_x,$$

$$N_x=-0,925\frac{d\omega_2}{dt},\ N_x=-0,925\varepsilon_2,\ N_x=-0,925\cdot 2=-1,85\ H.$$

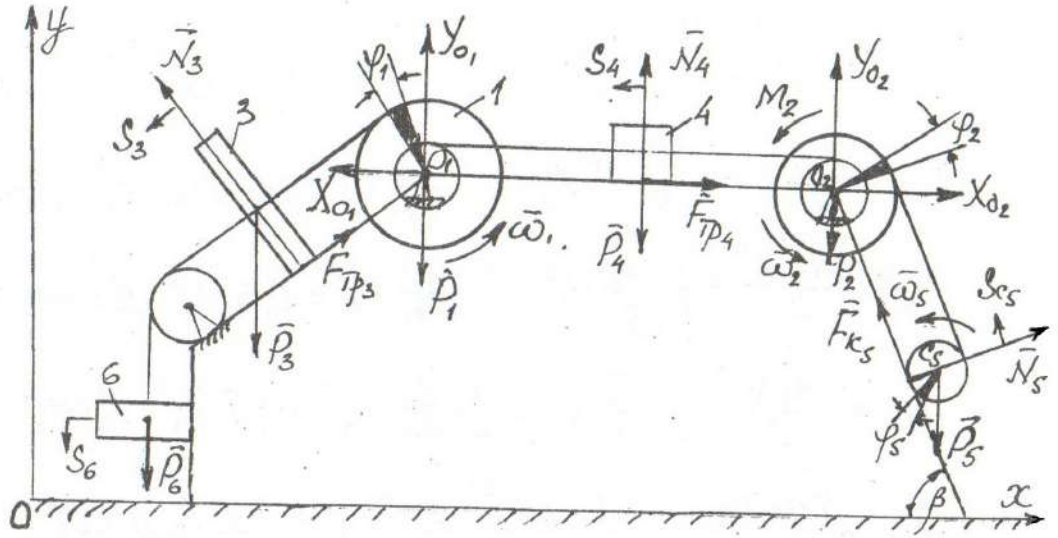
Знак мінус показує, що реакція N_x направлена в протилежну сторону.

3.2.5. Рішення задачі № 3

Умова задачі: Для розглядаемої механічної системи, використовуючи теорему про змінення кінетичної енергії системи, визначити кутову швидкість ω_2 і кутове прискорення ε_2 барабана 2 при його повороті на кут φ_2 = 2 рад., рахуючи призму 7 нерухомою. Крім сил тяжіння тіл, до барабана 2 прикладенний момент M_2 = = I,8 Нм.

Рішення задачі:

I. Показуемо на кресленні діючі на механічну систему сили: тяжіння P_I, P_2,......P_6; нормальні реакції поверхонь $\vec{N}_3$, $\vec{N}_4$, $\vec{N}_5$; реакції вісей барабанів X_{O_1}, Y_{O_1}, X_{O_2}, Y_{O_2}; сили



тертя вантажів $\vec{F}_{Tp_3}$, $\vec{F}_{Tp_4}$; силу тертя кочення $\vec{F}_{K_5}$.

2. Записуемо теорему про зміну кінетичної енергії системи в інтегральній формі і аналізуемо її

$$T_1-T_0=\sum A_k^e+\sum A_k^i.$$

Так як розглядаюча механічна система являеться незмінною, складається з абсолютно твердих тіл сполученних нерозтягуючими нитками, які паралельні площинам переміщення тіл, то

$$\sum A_k^i=0.$$

Так як система рухається з стану покою, то в початковому положенні її T_0 = 0, тоді рівняння теореми буде слідуюче

$$T_1=\sum A_k^e.$$

3. Визначимо кінетичну енергію системи в кінцевому положенні /після повороту барабана 2 на кут φ_2 = 2 рад/.

$$T_1=\sum T_{1i}=T_{1_1}+T_{1_2}+T_{1_3}+T_{1_4}+T_{1_5}+T_{1_6}.$$

Раніше відзначалося, що барабани I і 2 здійснюють крутильний рух відносно нерухомих вісей O_I і O_2, вантажі 3 і 4 здійснюють поступальний рух, а каток 5 - плоскопаралельний рух.

Відповілно з формулами II÷I4 визначимо кінетичну енергію вищенагаданих тіл механічної системи

$$T_{1_1} = \frac{J_{O_1}\omega_1^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}R_1^2\frac{\omega_1^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{9,81}0,8^2\frac{\omega_1^2}{2} = 0,16\omega_1^2 \text{ Дж},$$

$$T_{1_2} = \frac{J_{O_2}\omega_2^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}R_2^2\frac{\omega_2^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{20}{9,81}0,5^2\frac{\omega_2^2}{2} = 0,125\omega_2^2 \text{ Дж},$$

$$T_{1_3} = \frac{M_3 V_3^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{P_3}{g}V_3^2 = \frac{1}{2}\frac{10}{9,81}V_3^2 = 0,5V_3^2 \text{ Дж},$$

$$T_{1_4} = \frac{M_4 V_4^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{P_4}{g}V_4^2 = \frac{1}{2}\frac{30}{9,81}V_4^2 = 1,5V_4^2 \text{ Дж},$$

$$T_{1_5} = \frac{M_5 V_{C_5}^2}{2} + \frac{J_{C_5}\omega_5^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{P_5}{g}V_{C_5}^2 + \frac{1}{2}\frac{P_5}{g}R_5^2\frac{\omega_5^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{10}{9,81}V_{C_5}^2 + \frac{1}{2}\frac{10}{9,81}0,2^2\frac{\omega_5^2}{2} = 0,5V_{C_5}^2 + 0,01\omega_5^2 \text{ Дж},$$

$$T_{1_6} = \frac{M_6 V_6^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{P_6}{g}V_6^2 = \frac{1}{2}\frac{40}{9,81}V_6^2 = 2V_6^2 \text{ Дж}.$$

Скориставшись таблицею 2 і замінивши $V_i(\omega_i) = f_i(\omega_2)$ визначимо повну кінетичну енергію системи в кінцевому положенні

$$T_{1_1} = 0,16\omega_1^2 = 0,16\omega_2^2 \text{ Дж},$$

$$T_{1_2} = 0,125\omega_2^2 \text{ Дж},$$

$$T_{1_3} = 0,5V_3^2 = 0,5(0,8\omega_2)^2 = 0,32\omega_2^2 \text{ Дж},$$

$$T_{1_5} = 0,5V_{C_5}^2 + 0,01\omega_5^2 = 0,5(0,25\omega_2)^2 + 0,01(1,25\omega_2)^2 = 0,047\omega_2^2 \text{ Дж},$$

$$T_1 = T_{1_1} + T_{1_2} + T_{1_3} + T_{1_4} + T_{1_5} + T_{1_6} =$$

$$= 0,16\omega_2^2 + 0,125\omega_2^2 + 0,32\omega_2^2 + 0,015\omega_2^2 + 0,047\omega_2^2 + 1,28\omega_2^2 = 1,944\omega_2^2 \text{ Дж}.$$

4/. Визначимо суму робіт всіх зовнішніх сил прикладених до системи на тому переміщенні яке вона получить при повороті барабана 2 на кут $\varphi_2 = 2$ рад.

$$\Sigma A_k^e = A(\vec{P}_1) + A(\vec{P}_2) + A(\vec{P}_3) + A(\vec{P}_4) + A(\vec{P}_5) + A(\vec{P}_6) + A(X_{O_1}) + A(Y_{O_1}) + A(X_{O_2}) + A(Y_{O_2}) + A(\vec{N}_3) + A(\vec{N}_4) + A(\vec{N}_5) - A(\vec{F}_{тр_3}) - A(\vec{F}_{тр_4}) - A(\vec{F}_{к_5}).$$

Анализ:

$$A(\vec{P}_1) = A(\vec{P}_2) = A(X_{O_1}) = A(Y_{O_1}) = A(X_{O_2}) = A(Y_{O_2}) = 0,$$

Так як точки прикладення цих сил не переміщаються;

$A(\vec{P}_4) = A(\vec{N}_3) = A(\vec{N}_4) = A(\vec{N}_5) = 0$, так як ці сили перпендикулярні напрямкам переміщення точок їх прикладання;

$A(\vec{F}_{к_5}) = 0$, так як сила сцеплення прикладена в миттевому центрі швидкостей катка 5, який рухається без ковзання.

Роботу сил тяжіння $\vec{P}_3$, $\vec{P}_5$, $\vec{P}_6$, сил тертя $F_{тр_3}$ і $F_{тр_4}$, а також момента M_2 найдемо по формулам I5÷I9

$$A(\vec{P}_3) = P_3 S_3 \sin\alpha \text{ Дж},$$

$$A(\vec{P}_5) = -P_5 S_{C_5} \sin\beta \text{ Дж},$$

$$A(\vec{P}_6) = P_6 S_6 \text{ Дж},$$

$$A(\vec{F}_{тр_3}) = -P_3 f S_3 \cos\alpha \text{ Дж},$$

$$A(\vec{F}_{тр_4}) = -P_4 f S_4 \text{ Дж},$$

$$T_1 = T_{11} + T_{12} + T_{13} + T_{14} + T_{15} + T_{16} =$$
$$= 0{,}16\omega_2^2 + 0{,}125\omega_2^2 + 0{,}32\omega_2^2 + 0{,}015\omega_2^2 +$$
$$+ 0{,}047\omega_2^2 + 1{,}28\omega_2^2 = 1{,}944\omega_2^2 \text{ (дж)}.$$

4/. Визначимо суму робіт всіх зовнішніх сил прикладених до системи на тому переміщенні яке вона получить при повороті барабана 2 на кут $\varphi_2 = 2$ рад.

$$\sum A_K^e = A(\vec{P}_1) + A(\vec{P}_2) + A(\vec{P}_3) + A(\vec{P}_4) + A(\vec{P}_5) + A(\vec{P}_6) +$$
$$+ A(\vec{X}_{o_1}) + A(\vec{Y}_{o_1}) + A(\vec{X}_{o_2}) + A(\vec{Y}_{o_2}) + A(\vec{N}_3) +$$
$$+ A(\vec{N}_4) + A(\vec{N}_5) - A(\vec{F}_{Tp_3}) - A(\vec{F}_{Tp_4}) - A(\vec{F}_{K_5}).$$

Анализ:

$$A(\vec{P}_1) = A(\vec{P}_2) = A(\vec{X}_{o_1}) = A(\vec{Y}_{o_1}) = A(\vec{X}_{o_2}) + A(\vec{Y}_{o_2}) = 0,$$

Так як точки прикладення цих сил не переміщаються;

$A(\vec{P}_4) = A(\vec{N}_3) = A(\vec{N}_4) = A(\vec{N}_5) = 0$, так як ці сили перпендикулярні напрямкам переміщення точок їх прикладання;

$A(F_{K_5}) = 0$, так як сила сцеплення прикладена в миттєвому центрі швидкостей катка 5, який рухається без ковзання. Роботу сил тяжіння $\vec{P}_3$, $\vec{P}_5$, $\vec{P}_6$, сил тертя F_{Tp_3} і F_{Tp_4}, а також момента M_2 найдемо по формулам 15÷19

$$A(\vec{P}_3) = P_3 \cdot \sin\alpha \cdot S_3 \text{ (дж)};$$
$$A(\vec{P}_5) = -P_5 \cdot \sin\beta \cdot S_{c_5} \text{ (дж)},$$
$$A(\vec{P}_6) = P_6 S_6 \text{ (дж)},$$
$$A(\vec{F}_{Tp_3}) = -P_3 \cos\alpha \cdot f \cdot S_3 \text{ (дж)},$$
$$A(\vec{F}_{Tp_4}) = -P_4 \cdot f \cdot S_4 \text{ (дж)},$$
$$A(M_2) = M_2 \cdot \varphi_2 \text{ (дж)}.$$

$$A(M_2) = M_2 \varphi_2 \text{ Дж},$$
$$\sum A_K^e = P_3 S_3 \sin\alpha - P_5 S_{c_5} \sin\beta + P_6 S_6 -$$
$$- P_3 f S_3 \cos\alpha - P_4 S_4 f + M_2 \varphi_2 \text{ Дж}.$$

Скориставшись таблицею 2 і замінивши $S_i(\varphi_i) = f_2(\varphi_2)$, дістанемо

$$\sum A_K^e = P_3 \sin 45^\circ \cdot 0{,}8\varphi_2 - P_5 \sin 60^\circ \cdot 0{,}25\varphi_2 + P_6 \cdot 0{,}8\varphi_2 -$$
$$- P_3 \cos 45^\circ \cdot f \cdot 0{,}8\varphi_2 - P_4 f \, 0{,}1\varphi_2 + M_2\varphi_2 = 35{,}35\varphi_2 \text{ Дж}$$

5/. Визначаемо кутову швидкість ω_2 барабана 2

$$1{,}944\omega_2^2 = 35{,}35\varphi_2, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{35{,}35 \cdot 2}{1{,}944}} = 6 \text{ рад/с}.$$

6/. Використавши теорему про зміну кінетичної енергії системи в диференціальній формі, визначимо кутове прискорення $\mathcal{E}_2$ барабана 2

$$dT = \sum dA_K^e + \sum dA_K^i$$

Так як

$$\sum dA_K^i = 0, \text{ то } dT = \sum dA_K^e,$$
$$d(1{,}944\omega_2^2) = \sum d(35{,}35\varphi_2),$$
$$2 \cdot 1{,}944\omega_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt} = 35{,}35 \frac{d\varphi_2}{dt},$$
$$2 \cdot 1{,}944\cancel{\omega_2} \cdot \mathcal{E}_2 = 35{,}35\cancel{\omega_2},$$
$$\mathcal{E}_2 = \frac{35{,}35}{2 \cdot 1{,}944} = 8{,}3 \text{ рад/с}^2.$$

Якщо сума робіт всіх зовнішніх сил получиться з знаком "-", то напрям руху системи вибрано помилково і це значить, що треба змінити його на протилежний.

3.3. Контрольні запитання

I. Що називається механічною системою?
2. Яка точка називається центром мас системи?
3. В чому зміст теореми про рух центра мас системи?
4. Які сили, діючі на систему, не впливають на рух її центра мас?
5. Що називається кількістю руху системи?
6. Чому рівна кількість руху барабана? який крутиться навколо нерухомої осі?
7. Чому відбувається відкатка гармати при вистрілі?
8. Який фізичний зміст момента інерції тіла відносно осі?
9. Як визначається кінетична енергія тіла при поступальному, крутильному і плоскопаралельному русі тіла?
I0. Який зміст теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи?
II. Як визначається робота постійної по модолю і напрямку сили на прямолінійному переміщенні?
I2. На яких переміщеннях робота постійних сил позитивна, негативна, рівна 0.
I3. Як визначити роботу сил тертя?
I4. Як визначити роботу сили, прикладеної до твердого тіла, яке кр крутиться навколо нерухомої осі?
I5. Як впливають внутрішні сили системи на рух центра мас системи, кількість руху і кінетичну енергію системи?

4. Курсове домашне завдання 4

Тема: "Елементи аналітичної механіки".

4.I. Теоретичні /довідкові/ дані.

4.I.I. Принцип Даламбера для невільної механічної системи, яка складається з n матеріальних точок

$$\sum \vec{F}_k^a + \sum \vec{N}_k + \sum \vec{\Phi}_k^и = 0, \quad (k=1,2,3...n) \qquad /20/$$

де $\sum \vec{F}_k^a, \sum \vec{N}_k$ - рівнодіючі активних сил і реакцій звязків приложених до точок системи;

$\sum \vec{\Phi}_k^и = -\sum m_k \vec{W}_k$ - рівнодіюча сил інерції матеріальних точок системи.

Головний вектор і головний момент сил інерції у абсолютно твердого тіла визначається в залежності від виду його руху:

- при поступовому русі

$$\vec{\Phi}^и = -M\vec{W}_c, \qquad /21/$$

- при крутящому русі відносно осі oz, яка проходить через центр мас тіла

$$M_z^и = -J_z \varepsilon, \qquad /22/$$

- при плоскопаралельному русі /відносно центра мас тіла/

$$\vec{\Phi}^и = -M\vec{W}_c;$$
$$M_c^и = -J_c \varepsilon. \qquad /23/$$

4.I.2. Принцип можливих переміщень /умова рівноваги системи з ідеальними зв"язками/

$$\sum \delta A_k^a = \sum F_k^a \delta S_k \cos\alpha_k \qquad /24/$$

де: $\sum \vec{F}_k^a$ - активні сили, які діють на систему;

δS_k - можливі елементарні переміщення, які допускаються системою в даний момент часу;

α_k - кут між відповідними напрямками сил і можливого переміщення точок прикладання сил.

4.I.3. Загальне рівняння динаміки механічної системи.

При русі механічної системи з ідеальними звязками

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^и = 0, \qquad /25/$$

де $\sum \delta A_k^a$, $\sum \delta A_k^и$ - суми елементарних робіт всіх прикладених до точок системи активних сил і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи.

4.I.4. Рівняння Лагранжа П роду /диференційне рівняння системи в узагальних координатах/

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \; (i = 1, 2, 3 \ldots S), \qquad /26/$$

де S - число степенів свободи системи;

q_i - узагальнені координати;

$\dot{q}_i$ - узагальнені швидкості;

T - кінетична енергія системи;

Q_i - узагальнені сили.

Щоб визначити узагальнену силу Q_i, що відповідає узугальненій координаті q_i, необхідно придати системі таке можливе переміщення, при якому зміниться тільки одна узугальнена координата q_i, а всі інші залишаться незмінними. Після цього складемо суму елементарних робіт $\sum \delta A_k^a$ всіх активних сил на цьому переміщенні і розділити цю суму на приріст узагальненної координати δq_i, тобто

$$Q_i = \frac{\sum \delta A_k^a}{\delta q_i}. \qquad /27/$$

4.2. Приклад виконання курсового домашнього завдання № 5

4.2.I. Рішення задачі № I

Умова задачі: Для даної механічної системи, використовуючи принцип Даламбера, визначити натяг канатів, з"єднуючих тіла системи і кутове прискорення барабана 2 x/

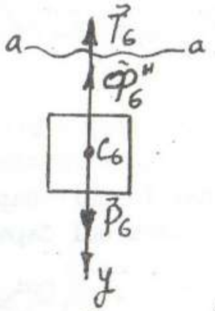
Рішення задачі:

I. Використовуючи аксіому про звільнення від зв"язків, розглянемо кожне з рухомих тіл системи окремо.

x/ Рекомендується в завданні № 5 після умови задачі привести схему механічної системи.

2. Вантаж 6 рухається поступально і опуститься прискорено вниз. Покажемо всі сили, що діють на вантаж 6: вагу $\vec{P_6}$; натяг /реакцію/ каната $\vec{T_6}$ /направлену в сторону відкинутої частини механічної системи/. У відповідності з принципом Даламбера сила інерції $\Phi_6^и$ для вантажа 6 направлена в сторону протилежну рухові тіла /відносно розрізу a-a/.

Згадана система сил знаходиться в рівновазі /вісь oy направлена вертикально вниз/, отже сума проекцій всіх сил на вісь oy буде рівна



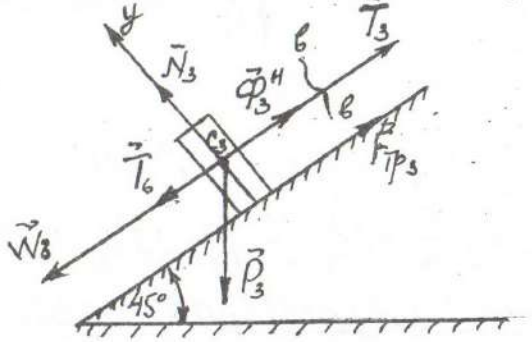
$$\sum F_{k_y} = 0,$$

$$T_6 - \Phi_6^и + P_6 = 0.$$

Підставивши значення сили інерції $\Phi_6^и$, знайдемо з вище приведенного рівняння силу натягу канату T_6.

$$T_6 = P_6 - \Phi_6^и = P_6 - \frac{P_6}{g} W_6 = 40 - \frac{40}{9{,}81} 0{,}8 \varepsilon_2 = 40 - 3{,}26 \varepsilon_2 \, ^{x)} H.$$

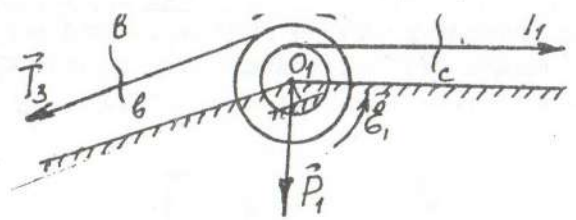
3. Вантаж 3 опускається прискорено вниз по нахилій площині і рухається поступально. Покажемо всі сили, що діють на тіло 3: вагу $\vec{P_3}$; ріакцію площини $\vec{N_3}$; силу тертя ковзання $\vec{F}_{тр_3}$; натяг /реакцію/ каната $\vec{T_3}$. Добавивши силу інерції $\vec{\Phi}_3^и$ запишемо умови рівноваги системи в проекціях на осі ox і oy і вирішимо систему рівнянь.



x/ В цьому виразі і в подальшому, при визначенні натягу канатів, лінійні прискорення вантажів , що входять у виразу і кутові прискорення барабанів і катка заміняємо залежностями в табл.2

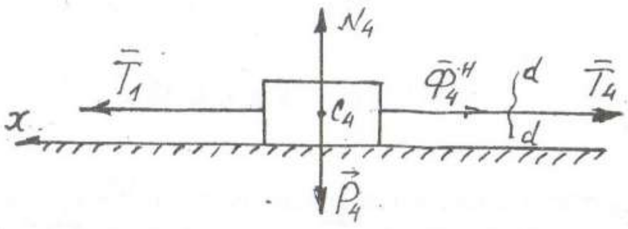
$$\Sigma F_{kx}=0,\quad P_3\sin45^\circ+T_6-T_3-\Phi_3^и-F_{тр3}=0,$$
$$\Sigma F_{ky}=0,\quad -P_3\cos45^\circ+N_3=0,$$
$$N_3=P_3\cos45^\circ$$
$$F_{тр3}=N_3 f=P\cos45^\circ f=0{,}1\cdot10\cdot0{,}707=0{,}7\ H,$$
$$\Phi_3^и=\frac{P_3}{g}W_3=\frac{10}{9{,}81}0{,}8\varepsilon_2=0{,}8\varepsilon_2\ H,$$
$$T_3=P_3\sin45^\circ+T_6-\Phi_3^и-F_{тр3}=$$
$$=10\cdot0{,}707+40-32\varepsilon_2-0{,}8\varepsilon_2-0{,}7=46{,}3-32{,}8\varepsilon_2\ H.$$

4. Барабан I здійснює обертальний рух проти ходу годинникової стрілки. Сили діючі на барабан: вага $\vec{P}_1$; натяг верхнього відрізку канату $\vec{T}_3$, натяг нижнього відрізку $\vec{T}_1$; момент інерції барабану $M_1^и$. Запишемо умову рівноваги рівнянням моментів відносно осі барабана /центра O_1/.



$$\Sigma m_{O_1}(\vec{F}_k)=0,\quad T_3R_1-T_1r_1-M_1^и=0,$$
$$M_1^и=J_{O_1}\varepsilon_1=\frac{1}{2}\frac{P_1}{g}R_1^2\varepsilon_1=\frac{1}{2}\frac{10}{9{,}81}0{,}8^2\varepsilon_2=0{,}32\varepsilon_2\ Нм$$
$$T_1=\frac{T_3R_1-M_1^и}{r_1}=\frac{(46{,}3-32\varepsilon_2)0{,}8-0{,}32\varepsilon_2}{0{,}1}=$$
$$=370{,}4-255{,}5\varepsilon_2\ H.$$

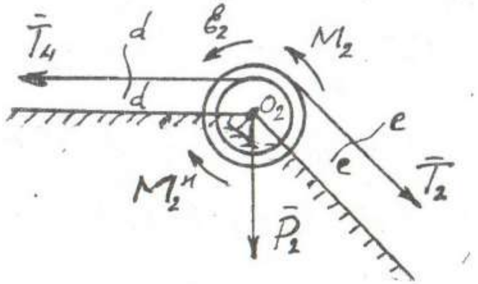
5. Вантаж 4 здійснює поступальний рух. Сили діючі на вантаж: вага $\vec{P}_4$; нормальна реакція опори $\vec{N}_4$; сила тертя ковзання $\vec{F}_{тр4}$; натяг лівого відрізку канату $\vec{T}_1$; натяг правого відрізку $\vec{T}_4$. Додавши силу інерції $\vec{\Phi}_4^и$, запишемо умови рівноваги в проекціях на вісь Ox.



$$\Sigma F_{kx}=0,\quad T_1-F_{тр4}-\Phi_4^и-T_4=0,$$
$$\Phi_4^и=\frac{P_4}{g}W_4=\frac{30}{9{,}81}0{,}1\varepsilon_2=0{,}3\varepsilon_2\ H,\quad F_{тр4}=fN_4=0{,}1\cdot30=3\ H.$$
$$T_4=T_1-F_{тр4}-\Phi_4^и=370{,}4-255{,}5\varepsilon_2-3-0{,}3\varepsilon_2=$$
$$=367{,}3-255{,}8\varepsilon_2\ H.$$

6. Барабан 2 здійснює обертальний рух проти руху годинникової стрілки. На барабан діють: обертальний момент M_2; Вага $\vec{P}_2$; натяг нижнього відрізку каната $\vec{T}_4$; натяг верхнього відрізку $\vec{T}_2$; момент інерції барабана $M_2^и$.

Записавши умови рівноваги рівнянням моментів відносно осі барабана /центра O_2/, найдемо натяг $\vec{T}_2$.



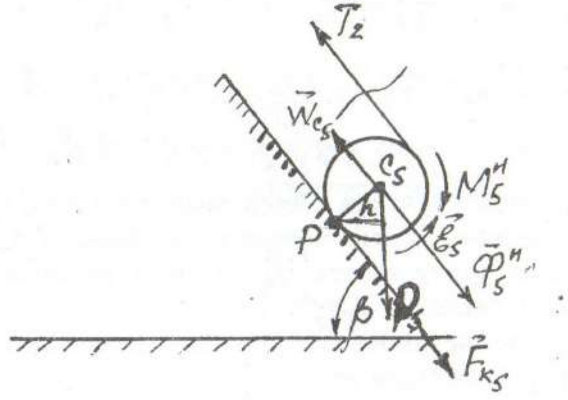
$$\sum M_{O_2}(\vec F_k)=0,\quad T_4 r_4 + M_2 - T_2 R_2 - M_2^{и}=0,$$

$$M_2^{и} = J_{O_2}\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}R_2^2\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\frac{20}{9,81}0,5^2\varepsilon_2 =$$
$$= \frac{1}{2}2\cdot 0,25\,\varepsilon_2 = 0,25\,\varepsilon_2\ Нм$$

$$T_2 = \frac{T_4 r_4 + M_2 - M_2^{и}}{R_2} = \frac{(367,3-255,8\varepsilon_2)0,1+1,8-0,25\varepsilon_2}{0,5} =$$

$$= 75,26 - 50,66\,\varepsilon_2\ H.$$

7. Каток 5 здійснює плоскопаралельний рух. На каток діють: вага P_5 ; натяг каната $\vec T_2$; сила інерції $\Phi_5^{и}$; момент інерції $M_5^{и}$; сила тертя кочіння $\vec F_{k5}$. Записавши умови рівноваги рівнянням моментів відносно миттєвого центра швидкостей P , найдемо натяг каната $\vec T_2$.



$$\sum M_P(\vec F_k)=0,\quad T_2 2R_5 - \Phi_5^{и}R_5 - M_5^{и} - P_5 h = 0,$$
$$\Phi_5^{и} = \frac{P_5}{g}W_{c_5} = \frac{10}{9,81}0,25\varepsilon_2 = 0,25\,\varepsilon_2\ H,$$
$$M_5^{и} = J_{c_5}\varepsilon_5 = \frac{1}{2}\frac{P_5}{g}R_5^2\varepsilon_5 =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{10}{9,81}0,2^2\cdot 1,25\varepsilon_2 = 0,025\,\varepsilon_2\ H,\quad h = R_5\sin\beta\ м,$$

$$T_2 = \frac{\Phi_5^{и}R_5 + M_5^{и} - P_5 R_5\sin\beta}{2R_5} =$$
$$= \frac{0,25\varepsilon_2\cdot 0,2 + 0,025\varepsilon_2 + 10\cdot 0,2\cdot 0,87}{2\cdot 0,2} =$$
$$= 4,35 + 0,875\,\varepsilon_2\ H.$$

8. Прирівнявши праві частини виразів пунктів 6 і 7 отримаємо кутове прискорення ε_2 барабана 2.

$$75,26-50,66\varepsilon_2 = 4,35+0,1875\varepsilon_2,\qquad \varepsilon_2 = 1,35\ рад/с^2.$$

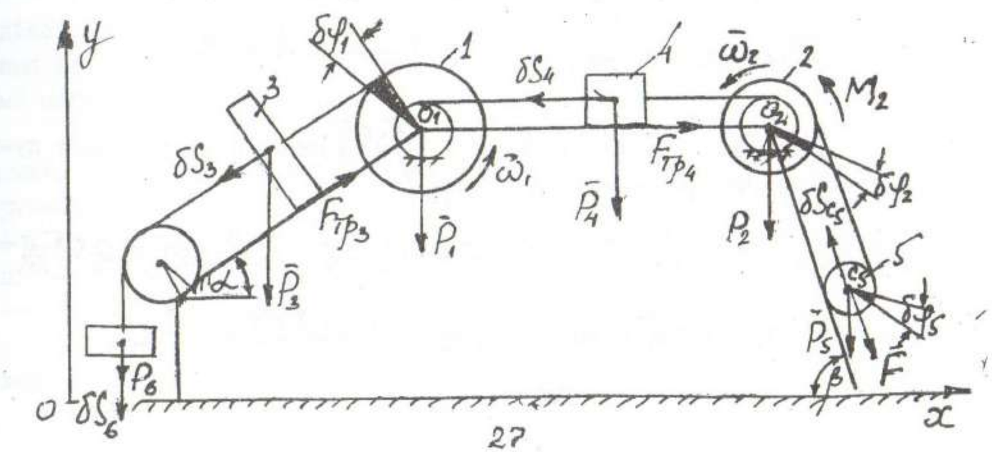
9. Визначаємо величину натягу канатів, підставляючи в кожен вираз T_i значення ε_2

$$T_6 = 40-32\varepsilon_2 = 40-32\cdot 1,35 = -3,2\ H,$$
$$T_3 = 46,3-32,8\varepsilon_2 = 46,3-32,8\cdot 1,35 = 2,02\ H,$$
$$T_1 = 370,4-255,8\varepsilon_2 = 370,4-255,8\cdot 1,35 = 25,5\ H,$$
$$T_4 = 367,3-255,8\varepsilon_2 = 367,3-255,8\cdot 1,35 = 21,3\ H,$$
$$T_2 = 75,26-50,66\varepsilon_2 = 75,26-50,66\cdot 1,35 = 5,1\ H.$$

Натяг каната вантажа 6 направлений в протилежну сторону.

4.2.2. Рішення задачі № 2

Умова задачі: Використовуючи принцип можливих переміщень; визначити величину сили $\vec F$, прикладеної до катка 5, при якій система буде знаходитись в рівновазі.



Рішення задачі

І. Розглядаємо систему тіл І÷6, що знаходиться в рівновазі під дією активних /заданих/ сил $\vec P_1$, $\vec P_2$, $\vec P_3$, $\vec P_4$, $\vec P_5$, $\vec P_6$, M_2, $\vec F$, сил тертя $\vec F_{тр3}$ и $\vec F_{тр4}$ /негладкі поверхні призми 7 являют собою ідеальні зв"язки/. Опори O_1 і O_2 барабанів І і 2 і канат з"єднуючий тіла механічної системи будуть також ідеальними зв"язками

2. Дана механічна система має одну степінь свободи /достатньо накласти один додатковий зв"язок, наприклад, загальмувати барабан 2, щоб вся система перестала рухатись/. Ще раз підкреслемо, що проковзання троса по барабанам І,2 і катку 5 по похилій площині відсутнє.

3. Придамо системі можливе переміщення, яке співпадає з її дійсним переміщенням при опусканні вантажа 6. Виберемо в ролі незалежного переміщення елементарний кут пороту барабана 2 - $\delta\varphi_2$.

4. Використовуючи принцип можливих переміщень складемо рівняння можливих робіт прикладених до тіл системи сил на їх можливі переміщення в формулі /24/.

$$\Sigma\delta A_k^e = P_6\delta S_6 + P_3\sin\alpha\cdot\delta S_3 + M_2\delta\varphi_2 - F_{тр3}\delta S_3 - F_{тр4}\delta S_4 - P_5\sin\beta\,\delta S_{c5} - F\delta S_{c5} = 0.$$

Замітимо, що елементарна робота сил тяжіння $\vec P_1$ і $\vec P_2$ рівна 0, так як барабани І і 2 не переміщуються; элементарна робота сили тяжіння $\vec P_4$ також рівна 0, так як $\vec P_4$ - нормаль до площини переміщення вантажа 4.

5. Виразимо всі можливі переміщення $\delta S_i / \delta\varphi_i /$ через незалежні можливі переміщення $\delta\varphi_2$, використовуючи для цього знайдені раніше залежності /таблиця 2/:

$$\delta S_{c5} = 0{,}25\,\delta\varphi_2, \qquad \delta S_3 = 0{,}8\,\delta\varphi_2,$$
$$\delta S_4 = 0{,}1\,\delta\varphi_2, \qquad \delta S_6 = 0{,}8\,\delta\varphi_2.$$

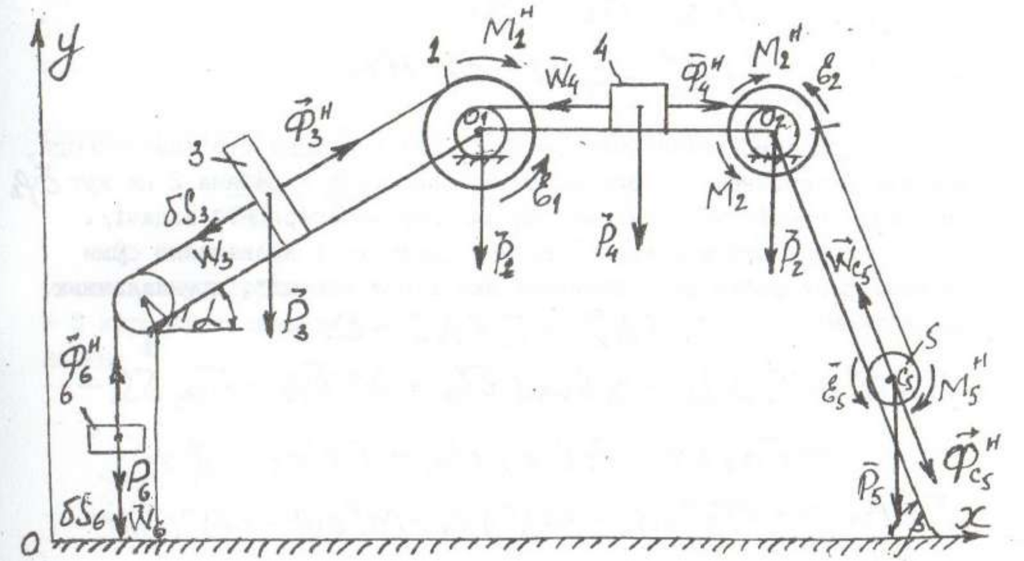
6. Підставимо вирази $\delta S_i = f(\delta\varphi_2)$ пункту 5 в рівняння пункту 4, визначимо силу $\vec F$ /скоротивши $\delta\varphi_2$/

$$P_6\, 0{,}8\delta\varphi_2 + P_3\sin 30^\circ\cdot 0{,}8\delta\varphi_2 + M_2\delta\varphi_2 - P_3\cos 30^\circ f\cdot 0{,}8\delta\varphi_2 - P_4 f\, 0{,}1\delta\varphi_2 - P_5\sin 60^\circ\cdot 0{,}25\delta\varphi_2 - F\cdot 0{,}25\delta\varphi_2 = 0,$$

$$F = \frac{40\cdot 0{,}8 + 10\cdot 0{,}5\cdot 0{,}8 + 2{,}4 - 10\cdot 0{,}87\cdot 0{,}1\cdot 0{,}8 - 80\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1}{0{,}25} - \frac{10\cdot 0{,}87\cdot 0{,}25}{0{,}25} = 101{,}2\ H.$$

4.2.3. Рішення задачі № 3

Умова задачі: Для розглядаємої механічної системи скориставшись загальним рівнянням динаміки визначимо кутове прискорення барабана 2 — ε_2.



Рішення задачі

І. Показуємо механічну систему тіл І÷6, яка рухається під дією активних сил $\vec P_1$, $\vec P_2$, $\vec P_3$, $\vec P_4$, $\vec P_5$, $\vec P_6$, момента M_2 і сил тертя $\vec F_{тр3}$, $\vec F_{тр4}$. На кресленні механічної системи показуємо напрямки дії лінійних і кутових прискорень тіл системи.

2. Прикладаємо до тіл системи сили інерції направлені протилежно відповідним прискоренням тіл системи: до вантажів 3,4,6 які рухаються поступально-сили інерції $\vec\Phi_3^н$, $\vec\Phi_4^н$, $\vec\Phi_5^н$: до барабанів І і 2, що здійснюють обертання навколо осей O_1 і O_2 моменти інерції $M_1^н$ і $M_2^н$; до катка 5, що здійснює плоскопаралельний рух — силу інерції $\Phi_{c5}^н$ і момент інерції $M_5^н$.

Модулі сил інерції і моментів інерції визначенні при рішенні задачі І домашнього завдання № 5

$$\Phi_3^и = 0,8\varepsilon_2\ Н,$$
$$\Phi_4^и = 0,3\varepsilon_2\ Н,$$
$$\Phi_6^и = 32\varepsilon_2\ Н,$$
$$\Phi_{c_5}^и = 0,25\varepsilon_2\ Н,$$
$$M_1^и = 0,32\varepsilon_2\ Нм,$$
$$M_2^и = \varepsilon_2\ Нм,$$
$$M_5^и = 0,025\varepsilon_2\ Нм.$$

3. Придаємо механічній системі, яка має одну степінь свободи, можливі переміщення що визначаються поворотом барабана 2 на кут $\delta\varphi_2$ /можливі переміщення показані на малюнку в попередній задачі/.

4. Записуємо загальне рівняння динаміки і визначаємо суми елементарних робіт всіх активних сил і сил інерції, прикладенних до системи. $\sum\delta A_k^a + \sum\delta A_k^и = 0,$

$$\sum\delta A_k^a = P_6\,\delta S_6 + P_3\sin\alpha\cdot\delta S_3 + M_2\,\delta\varphi_2 - F_{тр_3}\,\delta S_3 - F_{тр_4}\,\delta S_4 - P_5\sin\beta\,\delta S_{c_5} - F\,\delta S_{c_5}\ Дж,$$

$$\sum\delta A_k^и = -\Phi_6^и\,\delta S_6 - \Phi_3^и\,\delta S_3 - M_1^и\,\delta\varphi_1 - \Phi_4^и\,\delta S_4 - M_2^и\,\delta\varphi_2 - \Phi_{c_5}^и\,\delta S_{c_5} - M_5^и\,\delta\varphi_5\ Дж.$$

Якщо ввести заміни δS_i і $\delta\varphi_i$ з таблиці 2 в вищеприведені вирази, то після відповідних преображень можна визначити кутове прискорення барабана 2 — ε_2 /скоротивши на $\delta\varphi_2$ /.

$$P_6\,0,8\delta\varphi_2 + P_3\sin 30^\circ\cdot 0,8\delta\varphi_2 + M_2\delta\varphi_2 - P_3\cos 30^\circ\cdot f\cdot 0,8\delta\varphi_2 - P_4 f\cdot 0,1\delta\varphi_2 - P_5\sin 60^\circ\cdot 0,25\delta\varphi_2 - \Phi_6^и 0,8\delta\varphi_2 - \Phi_3^и 0,8\delta\varphi_2 - M_1^и\delta\varphi_2 - \Phi_4^и\cdot 0,1\delta\varphi_2 - M_2^и\delta\varphi_2 - \Phi_{c_5}^и 0,25\delta\varphi_2 - M_5^и 1,25\delta\varphi_2 = 0,$$

$$\varepsilon_2 = 6,8\ рад/с^2.$$

4.2.4. Рішення задачі № 4

Умова задачі: Для заданої механічної системи, використовуючи рівняння Лагранжа П роду, визначити кутове прискорення барабану 2 - ε_2 ?

Рішення задачі

I. Показуємо рухаючуюся систему тіл I÷6 /використаємо малюнок до задачі № 2 другого домашнього завдання, виключаючи силу $\vec{F}$ /.

2. Досліджувана механічна система має одну степінь свободи; за узагальнену координату приймаємо кут повороту барабана 2 $q = \varphi_2$. Тоді узагальнена швидкість буде $\dot{q} = \dot{\varphi}_2 = \omega_2$, тобто кутова швидкість крутіння барабана 2.

Для даної системи маємо одне рівняння Лагранжа П роду. Запишемо це рівняння для узагальненої координати φ_2

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\omega_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi_2} = Q_{\varphi_2}.$$

3. Вичисляємо кінетичну енергію системи, виражаючи її через узагальнену координату и узагальнену швидкість. Раніше, в задачі № 3 курсового завдання № 4 кінетична енергія тіл системи була визначена */

$$T_1 = T = 1,944\,\omega_2^2\ Дж.$$

4. Беремо всі необхідні похідні від кінетичної енергії

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi_2} = 0,\quad \frac{\partial T}{\partial\omega_2} = 1,944\cdot 2\omega_2 = 3,888\,\omega_2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\omega_2}\right) = 3,888\,\frac{d\omega_2}{dt} = 3,888\varepsilon_2\ Н.$$

5. Визначаємо узагальнену силу Q_{φ_2} , що відповідає узагальненій координаті φ_2 , враховуючи, що узагальнена сила Q_{φ_2} - це коефіцієнт при прирісті узагальненої координати $\delta\varphi_2$ в виразі повної елементарної роботи, виконуємої активними силами при зміні узагальненої координати

$$\sum\delta A_k^a = P_6\,\delta S_6 + P_3\sin\alpha\,\delta S_3 + M_2\delta\varphi_2 - F_{тр_3}\delta S_3 - F_{тр_4}\delta S_4 - P_5\sin\beta\,\delta S_{c_5}\ Дж.$$

---

*/ В цій задачі рекомендується розрахунок кінетичної енергії механічної системи, привеленної в задачі № 3 курсового завдання № 4, повторити.

Введемо заміну $\delta S_i = f(\delta\varphi_2)$ з таблиці 2 і визначимо узагальнену силу Q_{φ_2}

$$\sum \delta A_k^a = P_6 \cdot 0{,}8\delta\varphi_2 + P_3 \sin 30^\circ \cdot 0{,}8\delta\varphi_2 + M_2 \delta\varphi_2 - P_4 f \cdot 0{,}1\delta\varphi_2 -$$
$$- P_3 \cos 30^\circ f \cdot 0{,}8\delta\varphi_2 - P_5 \sin 60^\circ \cdot 0{,}25\delta\varphi_2 = 26{,}425\,\delta\varphi_2 \text{ Дж.}$$

$$Q_{\varphi_2} = 26{,}425 \text{ Н.}$$

6. Визначаємо кутове прискорення $\vec{\varepsilon}_2$ барабана 2

$$3{,}888\,\varepsilon_2 = 26{,}425,$$

$$\varepsilon_2 = 6{,}8 \text{ рад/с}^2.$$

Контрольні запитання

1. Що називається силою інерції?
2. В чому заключається зміст принципа Даламбера для матеріальної точки і механічної системи?
3. Яку вигоду дає принцип Даламбера при рішенні інженерних задач динаміки?
4. Що називається можливими переміщеннями?
5. Що називається можливою роботою?
6. Для яких механічних систем застосовується принцип можливих переміщень?
7. Яка формула і як читається принцип Лагранжа-Даламбера?
8. Який фізичний зміст узагальненої координати і узагальненої сили?
9. Скільки рівнянь Лагранжа II роду може мати механічна система?
10. Які сили називаються потенціальними?
11. Запишіть рівняння Лагранжа II роду для механічної системи яка рухається під впливом сил тяжіння її тіл.