Бесплатно

Министерство высшего и среднего специального образования УССР

Днепропетровский ордена Трудового Красного Знамени горный институт им. Артема

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Днепропетровск
1991

Министерство высшего и среднего специального образования УССР

Днепропетровский ордена Трудового Красного Знамени горный институт им. Артема

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ (РАЗДЕЛ "СТАТИКА")

Утверждена на заседании кафедры теоретической и строительной механики.
Протокол № 21 от 25.06.90

Днепропетровск
1991

Методические указания к самостоятельной работе по теоретической механике для студентов всех специальностей (раздел "Статика") / Сост.: В.И.Онищенко, Л.В.Колосов, В.В.Плахотник. - Днепропетровск: ДГИ, 1991. - 24 с.

Составители: В.И.Онищенко, канд. физ.-мат. наук, профессор,
Л.В.Колосов, д-р техн. наук, профессор,
В.В.Плахотник, канд. техн. наук, доцент

Ответственный за выпуск заведующий кафедрой теоретической и строительной механики В.И.Онищенко, канд. физ.-мат. наук, профессор

I. СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Решение задач по теоретической механике обычно сопровождается различными действиями над скалярными и векторными величинами. Рассмотрим наиболее часто используемые понятия и зависимости.

I.I. Основные соотношения для треугольника

При действиях с векторами необходимо уметь использовать основные тригометрические зависимости для треугольника.

Для прямоугольного треугольника (рис.I) с катетами AC и BC и гипотенузой AB основными являются следующие соотношения:

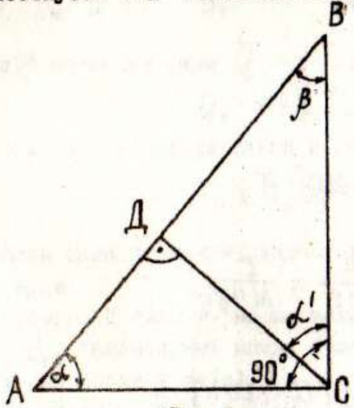


Рис.I

$$\alpha + \beta = 90^\circ;$$

$$AC^2 + BC^2 = AB^2;$$

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{BC}{AB}; \qquad \cos\alpha = \sin\beta = \frac{AC}{AB};$$

$$tg\,\alpha = ctg\,\beta = \frac{BC}{AC}; \qquad ctg = tg\,\beta = \frac{AC}{BC};$$

площадь ΔABC равна

$$S_\Delta = \frac{1}{2} AB \cdot ДC = \frac{1}{2} BC \cdot AC,$$

где $ДC$ высота

$$ДC = BC \sin\beta = BC \cos\alpha.$$

Для разностороннего треугольника (рис.2) ΔABC со сторонами a, b, c и углами α, β, γ основными соотношениями будут:

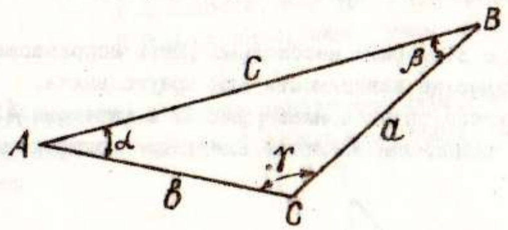


Рис.2

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ = \pi;$$

- теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma};$$

- теорема косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

I.2. Проекция силы на ось и на плоскость

При решении задач статики аналитическим методом основным является понятие проекции силы на ось.

Проекцией силы $\bar{F}$ на ось x (рис.3) называется скалярная величина F_x, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка A_1B_1, заключенного между проекциями начала A и конца B силы $\bar{F}$

$$F_x = A_1B_1 = F\cos\alpha,$$

т.е. проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси.

Проекция имеет знак плюс, если перемещение от ее начала к

концу происходит в положительном направлении оси, и знак минус - если в отрицательном.

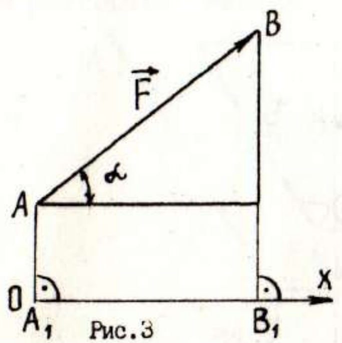


Рис.3

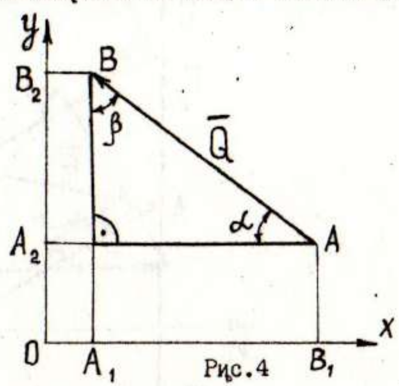


Рис.4

На рис.4 проекция силы $\bar{Q}$ на ось x отрицательна

$$Q_x = -A_1B_1 = -Q\cos\alpha,$$

а на ось y - положительна и равна

$$Q_y = A_2B_2 = Q\cos\beta = Q\sin\alpha.$$

Если сила перпендикулярна оси, то ее проекция на эту ось равна нулю.

Проекцией силы $\bar{F}$ на плоскость xy называется вектор $\bar{F}_{xy} = \overline{OB}_1$, заключенный между проекциями начала и конца силы на эту плоскость (рис.5).

По модулю $F_{xy} = F\cos\alpha$, где α угол между направлением силы $\bar{F}$ и плоскостью.

При определении проекций силы $\bar{F}$ на оси координат Oxy бывает удобнее сначала найти проекцию этой силы на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем найденную проекцию силы на плоскость xy спроектировать на данную ось. Например,

$$F_x = F_{xy}\cos\beta = F\cos\alpha\cdot\cos\beta;$$
$$F_y = F_{xy}\sin\beta = F\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Если проекции силы $\bar{F}$ на оси координат известны, а $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ направляющие орты этой системы (рис.5), то аналитически выражение для силы $\bar{F}$ имеет вид

$$\bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k},$$

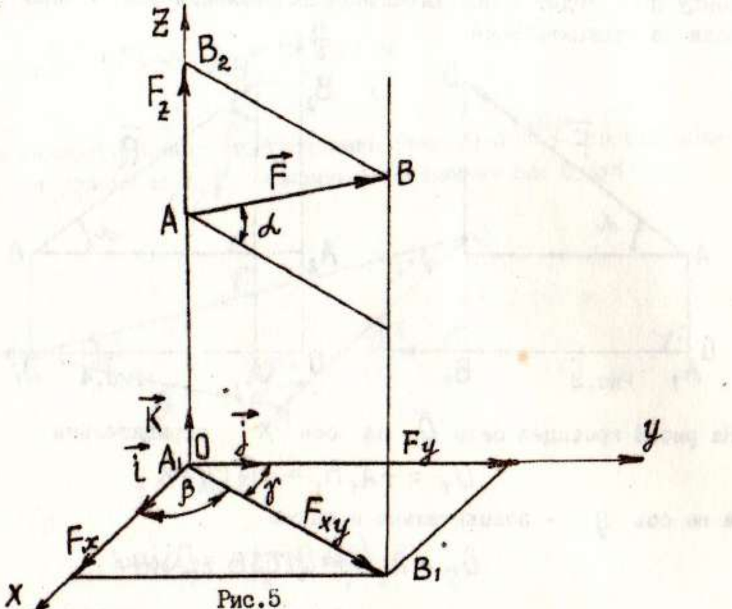


Рис.5

а модуль силы равен

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}.$$

Положение вектора $\bar F$ по отношению к положительным направлениям осей системы координат xyz определяется углами α, β, γ, косинусы которых равны

$$\cos\alpha=\frac{F_z}{F};\quad \cos\beta=\frac{F_x}{F};\quad \cos\gamma=\frac{F_y}{F}.$$

1.3. Сложение и разложение векторов сил

Решение многих задач статики связано со сложением векторов сил. Геометрическая сумма $\bar F$ двух сил $\bar F_1$ и $\bar F_2$, приложенных в одной точке (рис.6), находится по правилу параллелограмма. Модуль $\bar F$ будет равен

$$F=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\alpha}.$$

Часто бывает необходимо решить задачу обратную к данной: разложить силу на составляющие по двум заданным направлениям

OM и ON. Для этого необходимо построить такой параллелограмм, у которого диагональ будет изображать силу $\bar F$, а стороны будут параллельны прямым OM и ON.

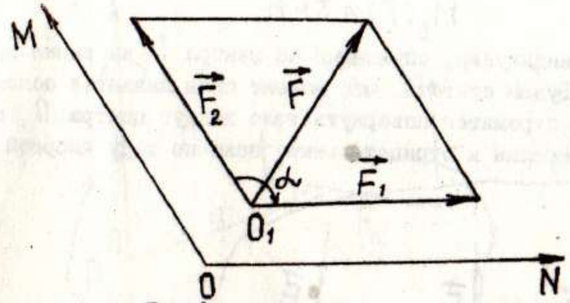


Рис.6

Геометрическая сумма $\bar F$ трех сходящихся сил $\bar F_1, \bar F_2, \bar F_3$, не лежащих в одной плоскости, изображается диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах (рис.7).

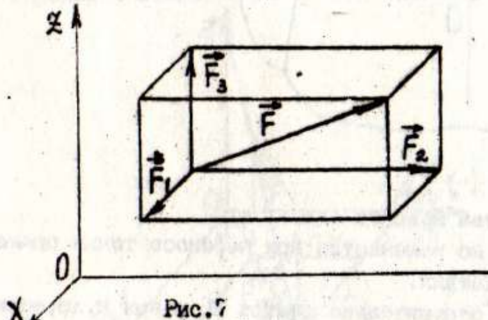


Рис.7

Если же силу $\bar F$ необходимо разложить по трем направлениям, не лежащим в одной плоскости (например по осям x, y, z), то эта задача сводится к построению такого параллелепипеда, у которого диагональ изображает заданную силу $\bar F$, а ребра параллельны заданным направлениям.

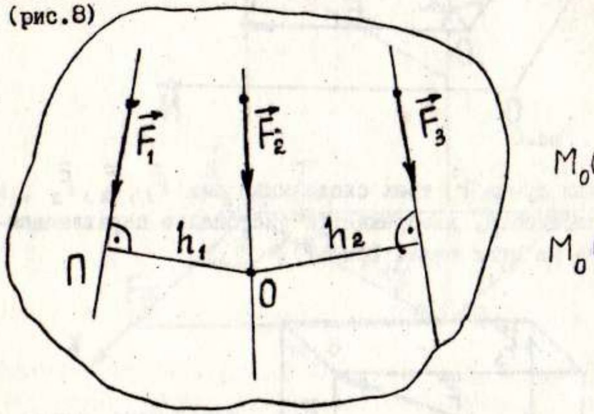
1.4. Момент силы

Вращательный **эффект силы $\bar F$ характеризуется ее моментом. Если сила $\bar F$ лежит в плоскости Π, то моментом силы $\bar F$ отно-**

сительно центра O называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на длину плеча h

$$M_O(\vec{F}) = \pm Fh,$$

где h - перпендикуляр, опущенный из центра O на линию действия силы $\vec{F}$. Будем считать, что момент силы является положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки и отрицательным, если по ходу часовой стрелки (рис.8)



$$M_O(\vec{F}_1) = F_1 h_1;$$

$$M_O(\vec{F}_3) = -F_3 h_2$$

Рис.8

Основные свойства момента силы:

1. Момент силы не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль линии действия.

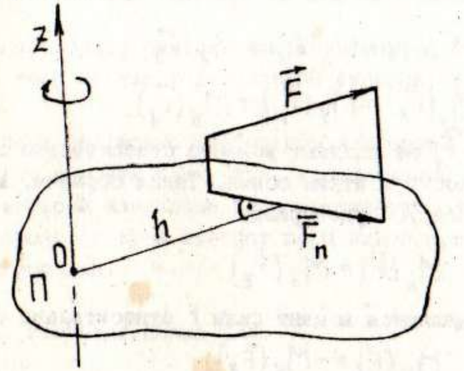
2. Момент силы относительно центра O равен нулю, если сила равна нулю или линия действия силы проходит через центр O

$$M_O(\vec{F}_2) = 0.$$

Моментом силы $\vec{F}$ относительно оси z (рис.9) называется скалярная величина, равная моменту проекции этой силы $\vec{F}_n$ на плоскость $П$, перпендикулярную оси, относительно точки O пересечения оси с плоскостью $П$.

Момент будем считать положительным, если смотря с положительного конца оси z, поворот, который сила $\vec{F}$ стремится совершить, виден происходящим против хода часовой стрелки. На рис.9 поворот $\vec{F}_n$ вокруг оси z с положительного конца оси z

виден по ходу часовой стрелки. Момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости (сила параллельна либо пересекает ось).



$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_n) = -F_n h.$$

Рис.9

Определим момент силы $\vec{F}$ относительно осей X, Y, Z (рис.10)

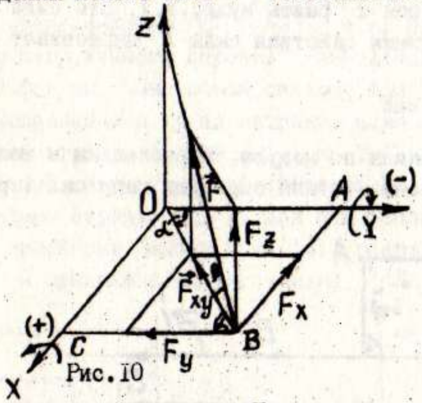


Рис.10

Вычисляя моменты силы $\vec{F}$ относительно осей X, Y, Z разложим ее на составляющие по осям данной системы координат. Эти составляющие численно равны соответствующим проекциям силы $\vec{F}$ на оси

$$F_x = F_{xy}\sin\alpha = -F\cos\beta\sin\alpha;$$

$$F_y = F_{xy}\cos\alpha = -F\cos\beta\cos\alpha;$$

$$F_z = F\sin\beta,$$

где F_{xy} – проекция силы $\bar F$ на плоскость XY. Тогда по теореме Вариньона момент силы $\bar F$ относительно оси равен сумме моментов относительно этой оси ее составляющих

$$M_x(\bar F) = M_x(\bar F_x) + M_x(\bar F_y) + M_x(\bar F_z);$$

$$M_y(\bar F) = M_y(\bar F_x) + M_y(\bar F_y) + M_y(\bar F_z).$$

Составляющие $\bar F_x$ и $\bar F_y$ не создают момента относительно осей X и Y, т.к. в одной плоскости с этими осями. Таким образом, момент силы $\bar F$ относительно оси X будет равен

$$M_x(\bar F) = M_x(\bar F_z).$$

Аналогично определяется момент силы $\bar F$ относительно оси Y

$$M_y(\bar F) = -M_y(\bar F_z).$$

Здесь момент отрицателен, т.к. с положительного конца оси Y поворот силы $\bar F$ вокруг оси виден по ходу часовой стрелки. Момент силы $\bar F$ относительно оси Z равен нулю, т.к. эта сила лежит в одной плоскости с осью (линия действия силы $\bar F$ пересекает ось Z).

I.5. Пара сил

Если две силы равны по модулю, параллельны и направлены в противоположные стороны, то они образуют пару сил (рис.II).

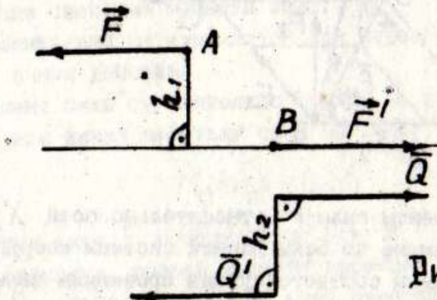


Рис. 11

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется плоскостью действия пары. Расстояние h между линиями действия сил пары называется плечом пары. Вращательный эффект пары сил характеризуется моментом пары.

Моментом пары называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил пары на ее

плечо

$$M = h\,F_1.$$

Момент пары будем считать положительным, когда пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и отрицательным, если наоборот.

Момент пары сил можно изобразить вектором $\bar M$, модуль которого равен модулю момента пары, т.е. произведению одной из ее сил на плечо, и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда поворот пары виден происходящим против хода часовой стрелки.

I.6. Распределенные силы

В инженерных расчетах часто приходится встречаться с нагрузками, распределенными вдоль данной поверхности по тому или иному закону. Для плоской системы сил распределенная нагрузка характеризуется ее интенсивностью q (Н/м) т.е. величиной силы на единицу длины нагруженного отрезка. Равнодействующая таких сил, равна площади фигуры, занимаемой силами, приложена в центре тяжести фигуры и направлена в ту же сторону. Если силы равномерно распределены вдоль отрезка прямой AB (рис.I2), то при расчетах эту систему сил можно заменить равнодействующей $Q = q\,\ell$, приложенной в середине отрезка AB. Для сил, распределенных вдоль отрезка AB по линейному закону (рис.I3), равнодействующая $Q = q\,\ell/2$ и приложена на расстоянии $2/3\,\ell$ от точки A

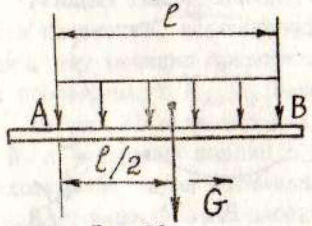


Рис. I2

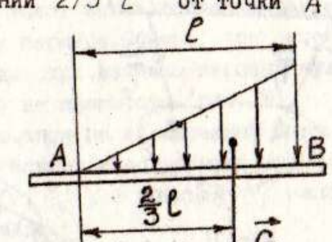


Рис. I3

I.7. Типы опорных закреплений

Перемещение несвободного тела в пространстве ограничено соприкасающимися с ним другими телами, которые называются связями. Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям , называется реакцией связи. Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу.

Рассмотрим основные виды связей.

I. Гладкая плоскость. Это плоскость, трением о которую данного тела можно пренебречь. Реакция N_A гладкой поверхности направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой же точке (рис. I4).

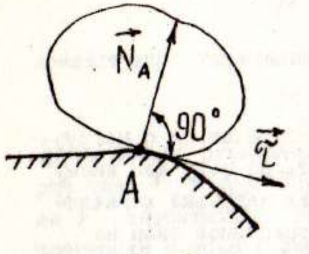


Рис. I4

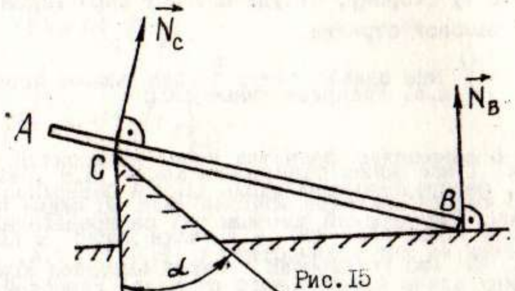


Рис. I5

Когда одна из поверхностей является точкой (рис. I5), то реакция направлена по нормали к другой поверхности.

2. Нить. Реакция ($\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$) натянутой нити (рис. I6) направлена вдоль нити к точке подвеса.

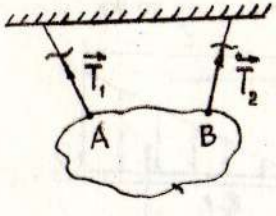


Рис. I6

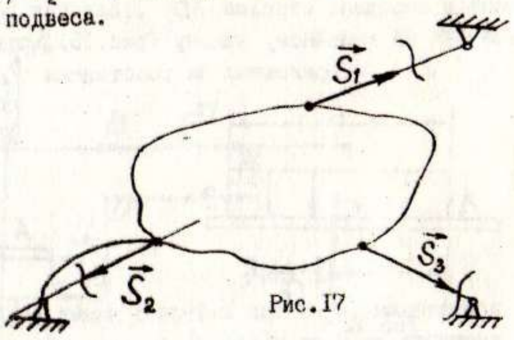


Рис. I7

3. Стержень. Реакция ($\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$) стержня (рис. I7), закрепленного шарнирами и весом которого можно пренебречь, направлена вдоль оси стержня.

4. Подвижная шарнирная опора. Реакция подвижной шарнирной опоры $\vec{N}$ (рис. I8) направлена перпендикулярно плоскости, на которую опираются катки подвижной опоры.

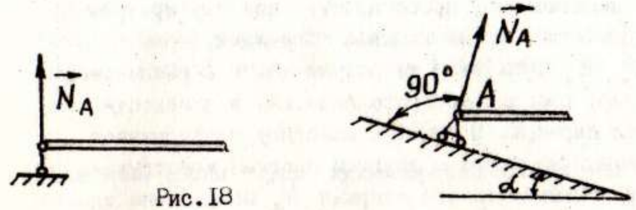


Рис. I8

5. Цилиндрический шарнир , (шарнирная опора неподвижна) Условные изображения цилиндрического шарнира в точке A и B показаны на рис. I9 и 20.

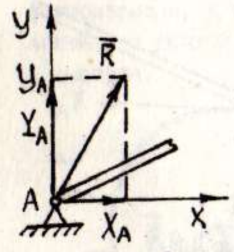


Рис. I9

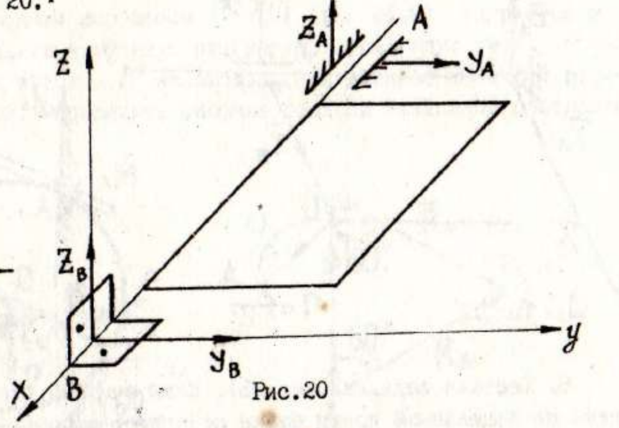


Рис. 20

Реакция цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Обычно, при решении задач, эту реакцию представляют в виде двух взаимно перпендикулярных составляющих X_A, Y_A, лежащих в той же плоскости (рис. I9).

На рис. 2I показана балка, опирающаяся на неподвижный шарнир в т. A и подвижный шарнир в т. C. Реакция неподвижного шарнира представлена двумя составляющими X_A и Y_A , а реакция $\overline{N}_C$ направлена перпендикулярно плоскости качения.

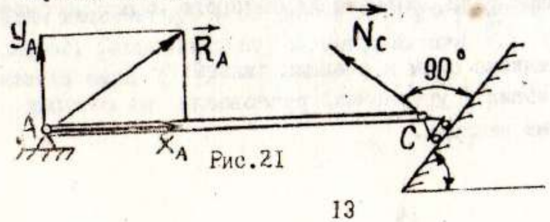


Рис. 2I

7. Шаровой шарнир. Реакция шарового шарнира A (рис.22) может иметь любое направление в пространстве, поэтому при решении задач ее представляют тремя взаимно перпендикулярными составляющими X_A, Y_A, Z_A. На этом же рисунке в т. B расположен цилиндрический шарнир, реакция которого показана в плоскости перпендикулярной оси шарнира. В точке C пластину поддерживает жесткий стержень, концы которого с другими частями конструкции соединены шарнирами. Реакция такого стержня $\bar{N}_c$ направлена вдоль оси стержня.

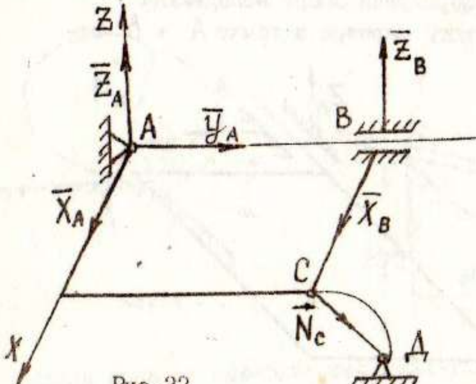


Рис.22

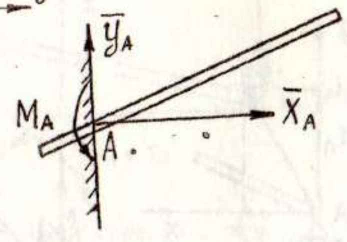


Рис.23

8. Жесткая заделка (рис.23). Если считать,что со стороны стены на заделанный конец балки действует распределенная нагрузка, то при приведении этих сил к т. A получаем пару сил с моментом M_A и одну силу, представленную взаимно перпендикулярными составляющими X_A, Y_A. Таким образом, для нахождения реакции жесткой заделки надо определить неизвестные величины X_A, Y_A, M_A.

2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Решение задач статики осуществляется в следующем порядке:

- выделяем твердое тело, равновесие которого нужно рассмотреть;
- изображаем активные силы и реакции связей;
- составляем условия (уравнения) равновесия, из которых определяем неизвестные реакции.

2.I. Сходящаяся система сил

Если активные силы и реакции связей образуют сходящуюся систему сил, т.е. , сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, то для равновесия такой системы необходимо и достаточно, чтобы векторная сумма этих сил была равна нулю

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = 0$$

или были равны нулю суммы проекций этих сил на оси координат

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0.$$

Задача I. Однородный шар весом $P = 20H$ (рис.24,а) опирается в точке A на гладкую наклонную плоскость, образующую угол $\alpha = 60^0$ с горизонтом, а в точке B на выступ, находящийся на одной горизонтали с точкой. Определить опорные реакции наклонной плоскости и выступа.

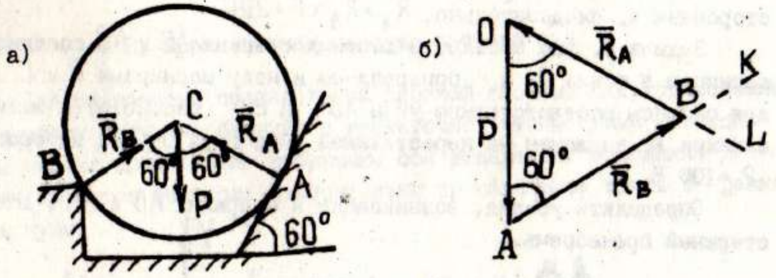


Рис.24

Решение. Рассмотрим равновесие шара. К шару приложена одна активная сила - сила тяжести $\bar{P}$. Шар находится в равновесии при наличии связей: наклонной плоскости и выступа. Применив закон освобождаемости от связей, заменим действие на шар мысленно отброшенных связей соответствующими реакциями. Реакция $\bar{R}_A$ направлена перпендикулярно гладкой наклонной плоскости. В точке B проведем касательную и направим опорную реакцию перпендикулярно касательной. Следовательно, линия действия $\bar{R}_B$ проходит через центр тяжести шара C.

Далее рассмотрим шар как свободное твердое тело, находящее-ся в равновесии под действием плоской системы трех сил $\overline{P}$, $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$, линии действия которых пересекаются в точке C . Из условия равновесия следует, что геометрическая сумма этих сил равна нулю, т.е. силовой многоугольник замкнут, поэтому силы образуют треугольник.

Построение силового треугольника начнем с силы $\overline{P}$, известной как по величине, так и по направлению. Из произвольной точки O (рис.24,б) проведем вектор $\overline{P}$, через концы которого проведем прямые AK и OL параллельные неизвестным реакциям. Точка B пересечения этих прямых определяет положение третьей вершины силового треугольника OAB . В построенном силовом треугольнике должно иметь место единое направление векторов, т.е. в каждой из вершин треугольника должен быть расположен конец только одной из трех сил.

Для определения модулей опорных реакций $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ рассмотрим треугольник OAB . Из построения следует, что углы, образованные линией действия силы $\overline{P}$ и линиями действия реакций $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$, равны 60^0, таким образом, силовой треугольник оказывается равносторонним и, следовательно, $R_A = R_B = P = 20H$.

Задача 2. Два абсолютно жестких стержня AB и AC соединены шарниром в точке A и прикреплены к полу шарнирами B и C , образуя с полом соответственно углы 45^0 и 60^0 (рис.25,а) к валику шарнира A подвешен на нерастяжимой нити груз D, вес которого $P = 100$ Н.

Определить усилия, возникающие в стержнях AB и AC . Весом стержней пренебречь.

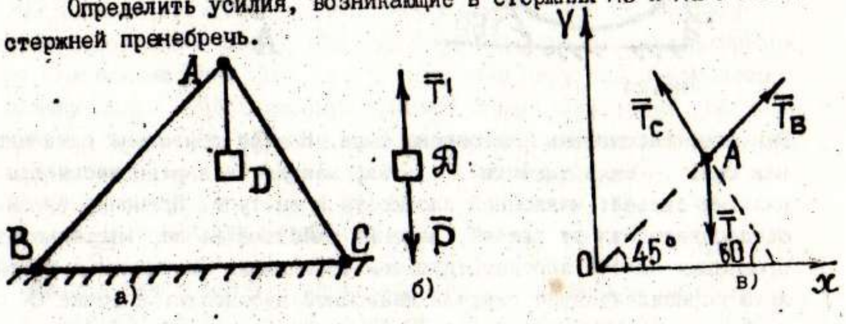


Рис.25

Решение. Для определения усилий в стержнях AB и AC следует рассмотреть равновесие шарнира A , находящегося под действием сил $\overline{T}_B$, $\overline{T}_C$ - реакций стержней, и $\overline{T}$ - реакции нити. Для определе-

ния реакции нити рассмотрим равновесие груза D . Груз D находится в равновесии под действием силы тяжести $\overline{P}$ и реакции нити $\overline{T}'$. Эти силы направлены в противоположные стороны (рис.25,б). Учитывая равновесия груза, получим $T' = P = 100$ Н.

Тогда к шарниру A (рис.25,в) приложена реакция нити $\overline{T}$,направленная по вертикали вниз ($\overline{T} = -\overline{T}'$ на основании закона равенства и противодействия) , реакции $\overline{T}_B$ и $\overline{T}_C$ стержней AB и AC, направленные вдоль стержней.

Составим уравнения равновесия шарнира A , находящегося под действием этих сил

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = T_B \cos 45^o - T_C \cos 60^o = 0 ;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = T_B \cos 45^o + T_C \cos 30^o - T = 0.$$

Решив эту систему уравнений, найдем $T_C = 73{,}2H$, $T_B = 51{,}8H$.

2.2. Произвольная плоская система сил

Для равновесия произвольной плоской системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на произвольно выбранные оси декартовых координат X и Y сумма моментов этих сил относительно произвольной точки O равнялась нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 ; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 ; \quad \sum_{i=1}^{n} M_0(\overline{F}_i) = 0.$$

В случае произвольной плоской системы сил задача является статически определенной, если число алгебраических неизвестных не более трех.

Часто при решении задач удобно воспользоваться другой формой уравнений равновесия, а именно, составлять уравнение проекций всех сил, например на ось X, и уравнения моментов относительно двух произвольных точек A и B

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 ; \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\overline{F}_i) = 0 ; \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\overline{F}_i) = 0 .$$

При этом следует иметь в виду, что ось, относительно которой составляется уравнение проекций, не должна быть расположена перпендикулярно прямой, проходящей через указанные точки.

Задача 3. К однородной горизонтальной балке AB длиной 4 м и весом P=200 кН, заделанной концом A в стену (рис.26, а), приложена пара сил, момент которой равен M =200 кН м . В точке B на балку под углом 60° к горизонту действует сила $\bar{F}$, модуль которой равен 100 кН. На участке DB действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности $\bar{q}$ =100 кН/м.

Найти реакцию и момент в заделке A .

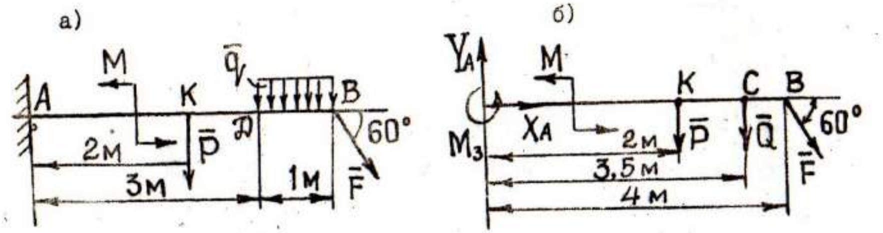


Рис.26

Решение. Для определения реакции и момента в заделке рассмотрим равновесие балки. Заменим равномерно распределенную нагрузку на участке эквивалентной сосредоточенной силой $Q = q\, DB = 100кН$. Реакцию связи в т. A можно представить в виде взаимно перпендикулярных составляющих X_A , Y_A и пары сил с моментом M_3 (опорный момент). Отбросив связь и заменив ее действие на балку реакциями (рис.25, б) составим уравнения равновесия балки

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = X_A + F\cos 60^\circ = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Y_A - P - Q - F\sin 60^\circ = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_A(\bar{F}_i) = M_3 - M - P\,AK - Q\,AC - F\sin 60^\circ AB = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $X_A = -50кН$, знак минус показывает, что сила X_A направлена в противоположную сторону, из второго уравнения определяем $Y_A = 386{,}5кН$, из третьего $M_3 = 896кН\,м$.

Если реакции заделки найдены правильно, то они должны удовлетворять любому, не использованному при решении, условию равновесия. Например,
$$\sum_{i=1}^{n} M_B(\bar{F}_i) = M_3 - Y_A AB - M + P\,KB + Q\,CB = 0.$$

При подстановке значений реакций и заданной нагрузки на балку получим
$$896-386{,}5\cdot 4-200+200\cdot 2+100\cdot 0{,}5 = 0$$

Задача 4. Горизонтальная балка AB (рис.27, а) длиной 12 м шарнирно укреплена правым концом в неподвижной точке B , а левым концом A опирается катками на гладкую горизонтальную плоскость. К балке в точке D под углом 30° к горизонту приложена сосредоточенная сила $\bar{F}$ =8 кН. На правую половину балки действует нагрузка, распределенная по линейному закону, причем наибольшая ее интенсивность q =2 кН/м . К балке приложена также пара сил с моментом M =32 кН·м.

Определить реакции в опорах. Весом балки пренебречь.

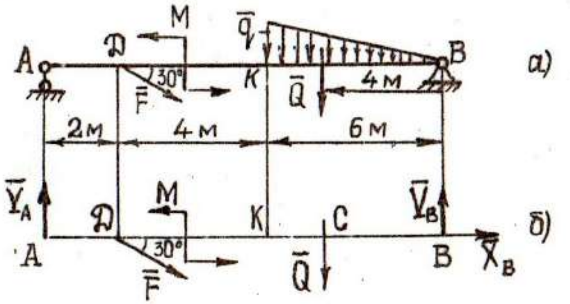


Рис.27

Решение. Для определения реакций в опорах A и B рассмотрим равновесие балки AB . Предварительно заменим распределенную нагрузку на участке KB эквивалентной сосредоточенной силой $\bar{Q}$, направленной в ту сторону , что и распределенная нагрузка и приложенной в центре тяжести "треугольника" (фигуры, которую занимает распределенная нагрузка) $Q = q\cdot KB/2 = 6кН$, а расстояние $BC = 2/3\ KB = 4м$.

К балке AB приложены активные силы $\bar{F}, \bar{Q}$ и момент M . На балку наложены две связи: опора A (подвижный шарнир) и опора B (неподвижный шарнир). Отбросив эти связи (рис.27, б), заменим их реакциями в точке A – Y_A, направленной перпендикулярно плоскости, на которую опирается каток, а точке B – X_B, Y_B, двумя взаимно перпендикулярными составляющими реакции неподвижного шарнира.

Уравнения равновесия балки

$$\sum F_{ix} = F\cos 30^\circ + X_B = 0,$$
$$\sum M_A = -F\sin 30^\circ\, AD - Q\, AC + Y_B\, AB = 0,$$
$$\sum M_B = -Y_A\, AB + F\sin 30^\circ\, DB + Q\, CB = 0.$$

Из решения этих уравнений получим $X_B = -6{,}92$ кН, $Y_B = 2$ кН, $Y_A = 8$ кН.

Убедиться в правильности полученных значений можно при подстановке их в любое уравнение равновесия, не использованное при решении задачи, например $\sum F_{iy} = Y_A - F\sin 30^\circ - Q + Y_B = 0.$ Получим тождество $8 - 8\cdot 0{,}5 - 6 + 2 = 0$

Статический расчет конструкций во многих случаях сводится к рассмотрению условий равновесия системы тел, соединенных какими-нибудь связями. Реакции этих связей, так называемые внутренние определяют расчленяя конструкцию на отдельные тела и составляя условия равновесия для каждого из тел в отдельности. При этом реакции внутренних связей будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению.

Задача 5. Конструкция (рис.28), состоящая из балки BE и ломаного стержня AC, нагружена силами $\bar{F}_1$, F_2 и парой сил с моментом M. Балка BE удерживается в равновесии посредством нити, нагруженной грузом и переброшенной через блок K, и стержня AC, подпирающего балку в точке C.

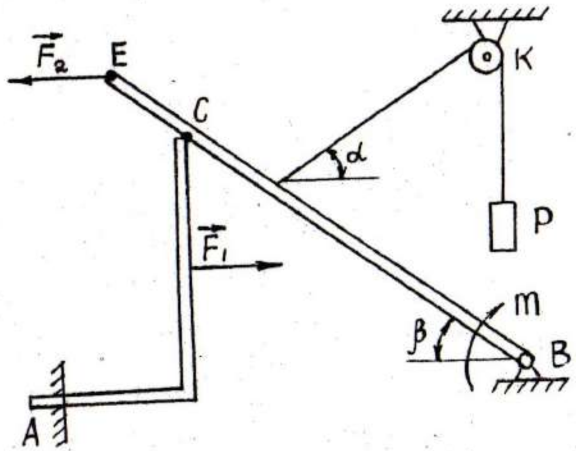


Рис.28

Определить реакции конструкции и силу взаимодействия стержня и балки в точке контакта.

Решение. Определяя реакции составной конструкции, ее расчленяют на балку BE и ломаный стержень AC (рис.29). В точке C, соответствующей соединению этих элементов, на балку BE действует реакция $\bar{N}_C'$, а на стержень AC – реакция $\bar{N}_C$ такая, что $\bar{N}_C = -\bar{N}_C'$. Внешние силы и реакции связей, действующие на стержень AC и балку BE, образуют две произвольные плоские системы сил.

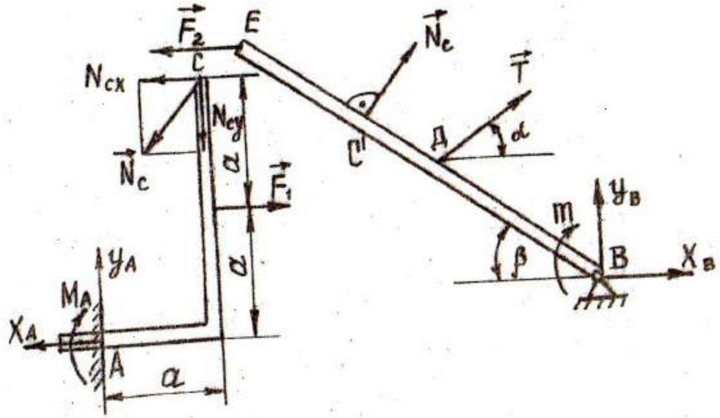


Рис.29

Уравнения равновесия для этих систем сил имеют вид

$$\sum F_{ix} = X_B + T\cos\alpha + N_C'\cos\beta - F_2 = 0,$$
$$\sum F_{iy} = Y_B + T\sin\alpha + N_C'\sin\beta = 0,$$
$$\sum M_B = -m - T\sin(\alpha+\beta)\, DB - N_C'\, CB + F_2\sin\beta\, BE = 0;$$

$$\sum F_{ix} = -N_C\cos\beta + F_1 + X_A = 0,$$
$$\sum F_{iy} = -N_C\sin\beta + Y_A = 0,$$
$$\sum M_A = -M_3 + N\cos\beta\, 2a - N\sin\beta\, a - F_1\, a = 0.$$

Совместное решение этих уравнений позволяет определить значение реакций $\bar{N}_C$ внутренних связей и реакций X_B, Y_B, X_A, Y_A, M_3 внешних связей.

2.3. Произвольная пространственная система сил

При рассмотрении пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил и ее главный момент относительно любого центра были равны нулю, т.е.

$$\sum \bar{F}_i = 0., \qquad \sum M_0(\bar{F}_i) = 0,$$

или в аналитической форме

$$\sum F_{ix} = 0, \qquad \sum F_{iy} = 0, \qquad \sum F_{iz} = 0,$$

$$\sum M_x(\bar{F}_i) = 0, \qquad \sum M_y(\bar{F}_i) = 0, \qquad \sum M_z(\bar{F}_i) = 0.$$

Задача 6. Плита сложной конфигурации (рис.30), нагруженная силами $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ и парой сил с моментом M, поддерживается в равновесии посредством шарового шарнира A, цилиндрического шарнира B и нити DC. Нить соединяет вершину C плиты с точкой D, расположенной на вертикальной стене. К этой стене плита прикреплена шарнирами A и B. Нить образует с плоскостью плиты угол α, причем AC перпендикулярна DA.

Определить реакции шарниров A и B и нити DC.

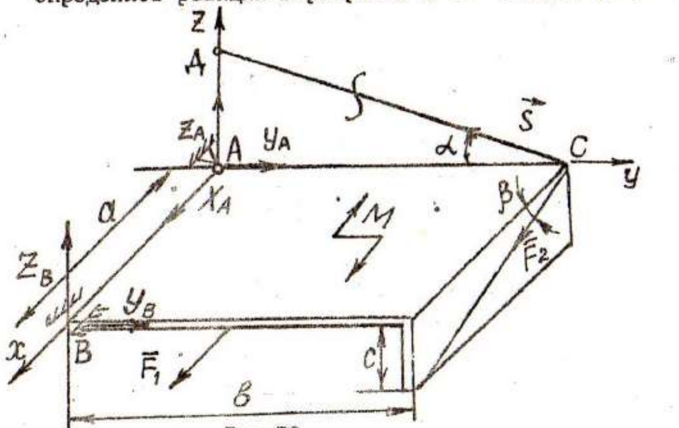


Рис.30

Решение. Для определения неизвестных рассмотрим равновесие плиты. Применив закон освобождаемости от связей, мысленно отбросим связи, наложенные на плиту, и заменим действие связей на плиту соответствующими реакциями связей. Рассечем нить DC и направим реакцию $\bar{S}$ по нити от точки C к сечению нити. Направление реакции шарового шарнира заранее неизвестно, поэтому заменим ее тремя взаимно перпендикулярными составляющими X_A, Y_A, Z_A. Цилиндрический шарнир B допускает перемещение вдоль AB, поэтому реакцию шарнира, перпендикулярную AB, заменим двумя взаимно перпендикулярными составляющими Y_B, Z_B.

Итак, плита находится в равновесии под действием активных сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2$ пары с моментом M и реакций $S, X_A, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B$. Для этой произвольной пространственной системы сил можно составить шесть независимых уравнений равновесия. Так как число неизвестных тоже равно шести, то задача является статически определенной.

Для рассматриваемой системы сил уравнения равновесия имеют вид

$$\sum F_{ix} = X_A + F_1 + F_2 \cos\beta = 0,$$

$$\sum F_{iy} = Y_A - S\cos\alpha + Y_B = 0,$$

$$\sum F_{iz} = Z_A + S\sin\alpha - F_2 \sin\beta + Z_B = 0,$$

$$\sum M_x(\bar{F}_i) = -F_2 \sin\beta\, b + S \sin\alpha\, b = 0,$$

$$\sum M_y(\bar{F}_i) = -Z_B\, a = 0,$$

$$\sum M_z(\bar{F}_i) = Y_B a - F_1 b/2 - M - F_2 \cos\beta\, b = 0.$$

При составлении уравнений равновесия учитываем, что силы Y_B, Z_B, X_A, Y_A, Z_A пересекают ось X, а сила $\bar{F}_1$ параллельна оси. Значит, моменты упомянутых сил относительно оси X равны нулю.

Силы $\bar{S}, \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{F}_1, \bar{F}_2$ пересекают, а сила $\bar{Y}_B$ параллельна оси Y и моменты этих сил относительно оси Y равны нулю. Моменты сил $\bar{Z}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_A, \bar{S}$ относительно оси Z также равны нулю. Момент пары сил, лежащих в плоскости плиты, проецируется только на ось Z, т.к. пара сил представляется в виде вектора, направленного перпендикулярно плоскости действия пары.

Из решения системы уравнений равновесия плиты находим неизвестные реакции:

$Z_B = 0; \qquad S = F_2 \sin\beta / \sin\alpha;$

$Z_A = F_2 \sin\beta - S \sin\alpha = 0;$

$Y_B = (F_1 b/2 + M + F_2 \cos\beta\, b)/a;$

$Y_A = S \cos\alpha - Y_B = F_2 \sin\beta \, ctg\alpha - (F_1 b/2 + M + F_2 \cos\beta\, b)/a;$

$X_A = -F_1 - F_2 \cos\beta.$

Список литературы

I. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Физматгиз, 1970. - 478 с.

2. Гернет М.М. Курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 1981. - 304 с.

3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. - М.: Наука, 1980. - 512 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Составители : Владимир Иванович Онищенко
Леонид Викторович Колосов
Валентина Васильевна Плахотник

Методические указания к самостоятельной работе по теоретической механике для студентов всех специальностей (раздел "Статика")

Редактор В.В.Дубровина
Редакционно-издательский отдел ДГИ

Подписано в печать II.04.9I. Формат 60х84/I6.
Бум.тип. №3 Офс.печ. Усл. печ.л. I,3.
Уч.-изд.л. I,3 Тираж I00 экз. Заказ 290.
Бесплатно

Ротапринт ДГИ им.Артема
320600, г.Днепропетровск, пр.К.Маркса, I9