Бесплатно

Министерство высшего и среднего специального
образования УССР

Днепропетровский ордена Трудового Красного Знамени
горный институт им. Артема

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ ЗАДАНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭВМ К РАЗДЕЛУ " ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ" ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Днепропетровск ДГИ
1985

Министерство высшего и среднего специального образования УССР

Днепропетровский ордена Трудового Красного Знамени горный институт им. Артема

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ ЗАДАНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭВМ К РАЗДЕЛУ "ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ" ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

(Кафедра теоретической и строительной механики)

Днепропетровск ДГИ
1985

Методические указания по выполнению расчетно-проектировочных заданий с применением ЭВМ к разделу "Вторая основная задача динамики материальной точки" для студентов всех специальностей. / Сост.: В.И.Онищенко, С.Р.Ильин, О.В.Бугрим. - Днепропетровск: ДГИ, 1985.- 24 с.

Предлагаемые методические указания предназначаются для организации индивидуальной самостоятельной работы студентов при изучении темы "Вторая основная задача динамики материальной точки". В процессе выполнения задания студенты будут иметь возможность применить свои знания классических методов решения дифференциальных уравнений, а также приближенных методов с выходом на ЭВМ, что является одним из элементов осуществления непрерывной математической подготовки.

Составители: В.И.Онищенко, С.Р.Ильин, О.В.Бугрим

Рецензенты: доцент В.В.Тунин (Днепропетровский сельскохозяйственный институт),
доцент Л.В.Колосов (Днепропетровский горный институт)

Утверждено на заседании кафедры (Протокол №3 от 14 марта 1984 г.)

ВВЕДЕНИЕ

Решения XXVI съезда КПСС и "Основные направления экономического и социального развития СССР на 1981-1985 годы и на период до 1990 года" предусматривают дальнейшее совершенствование системы обучения и повышения качества подготовки специалистов.

Одним из эффективных путей решения поставленной задачи в высших учебных заведениях с учетом требований научно-технической революции является внедрение ЭВМ в учебный процесс и всемерное развитие на их основе элементов научно-исследовательской работы при выполнении курсовых заданий.

I. УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Уравнение движения несвободной материальной точки на основании второго закона Ньютона-Галилея в векторной форме имеет вид

$$m\vec{W} = \sum_{i=1}^{k} \vec{F}_i + \vec{N}, \qquad (I.1)$$

где m - масса точки, $\vec{W}$ - ускорение, $\vec{F}_i$ - активные силы, действующие на точку, $\vec{N}$ - равнодействующая реакций связей. Вторая основная задача динамики несвободной материальной точки состоит в том, чтобы, зная активные силы, действующие на точку, определить закон ее движения и реакции связей. Решается эта задача путем аналитического либо численного интегрирования уравнений движения (I.I).

В проекциях на оси декартовой и естественной систем координат уравнение (I.I) имеет вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum_{i=1}^{k} F_{ix} + N_x; \\ m\ddot{y} = \sum_{i=1}^{k} F_{iy} + N_y; \\ m\ddot{z} = \sum_{i=1}^{k} F_{iz} + N_z; \end{cases} \qquad (I.2)$$

$$\begin{cases} m\dfrac{\dot s^2}{\rho} = \sum\limits_{i=1}^{k} F_{in} + N_n ; \\ m\ddot s = \sum\limits_{i=1}^{k} F_{i\tau} + N_\tau ; \\ 0 = \sum\limits_{i=1}^{k} F_{ib} + N_b , \end{cases} \qquad (I.3)$$

где x, y, z - координаты материальной точки в декартовой системе, точками обозначены производные по времени, $s(t)$ - функция, определяющая закон движения по траектории, n, τ, b - оси естественного трехгранника - нормаль, касательная и бинормаль к траектории движения точки, ρ - радиус кривизны траектории.

Выбор системы координат определяется условием задачи исходя из соображений о простоте составления и интегрирования дифференциальных уравнений движения.

Для построения решения полученных уравнений необходимо задать условия, определяющие положение и скорость точки в некоторый момент времени t_0. Для уравнений (I.2) эти условия имеют вид:

$$x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0,\ \dot x=\dot x_0,\ \dot y=\dot y_0,\ \dot z=\dot z_0 \ \text{при} \ t=t_0 . \qquad (I.4)$$

Для уравнений (I.3) имеем

$$s=s_0 , \quad \dot s=\dot s_0 \quad \text{при} \ t=t_0 . \qquad (I.5)$$

Условия (I.4) и (I.5) используются для определения произвольных постоянных, появляющихся в процессе интегрирования. С учетом соотношений (I.4) и (I.5) решения уравнений (I.2) и (I.3) можно представить в форме

$$\begin{aligned} x &= x(t, x_0, y_0, z_0, \dot x_0, \dot y_0, \dot z_0) ; \\ y &= y(t, x_0, y_0, z_0, \dot x_0, \dot y_0, \dot z_0) ; \\ z &= z(t, x_0, y_0, z_0, \dot x_0, \dot y_0, \dot z_0) ; \end{aligned} \qquad (I.6)$$

$$s = s(t, s_0, \dot s_0) . \qquad (I.7)$$

2. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задача I. Материальная точка M массы m=Iкг движется по горизонтальной плоскости (рис.2.I). Считая, что величина равнодействующей всех активных сил, приложенных к точке, равна $F(t, x, \dot x)$, пользуясь данными, приведенными в таблице, в результате интегрирования дифференциального уравнения движения

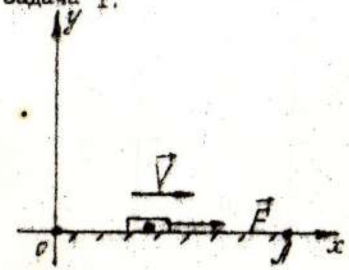

Рис. 2.I

$$m\ddot x = F(t, x, \dot x)$$

определить:

I. Закон движения точки M.

2. Время движения от начального пункта O до точки A.

3. Скорость в точке A.

Если движение точки M таково, что она не достигает точки A, то определить:

I. Закон движения точки M.

2. Наибольшее отклонение от точки O в направлении точки A.

3. Время движения из начального пункта $(t=t_0)$ до положения наибольшего отклонения от точки O в направлении точки A. При невозможности определения величин, указанных в пунктах 2 и 3 аналитическим путем, найти их численным способом.

В таблице приведены зависимости $F(t, x, \dot x)$, начальные условия и длина отрезка $|OA|$.

Таблица

№ п/п	$F=F(t,x,\dot x)$ [Н]	t_0	$x_0(t_0)$ [м]	$\dot x_0 = V_0$ [м/с]	$\|OA\|$ [м]
I	2	3	4	5	6
I	$2-2t+\dot x$	0	0	0	-
2	$3\sin 2t+x$	0	0	0	4

Продолжение таблицы

I	2	3	4	5	6
3	t^2+2-x	0	I	0	-
4	$9x-6e^{3t}$	0	0	0	-
5	$2\sqrt{x}$	0	0	0	-
6	$2x/3\dot{x}$	0	I	I	-
7	$t\cdot e^{t}$	0	I	0	-
8	$\dot{x}/t+t^2/\dot{x}$	2	0	4	-
9	$-(1+\dot{x}^2)/1+t^2$	0	I	I	-
IO	$\dot{x}^2/x$	0	I	2	-
II	$t(t-1)+\dot{x}/(t-1)$	0	0	0	-
I2	$(\dot{x}^2-x^2)/2x$	I	I/3	2	-
I3.	$2t\dot{x}/(t^2+1)$	0	I	I	3
I4.	$(6t+5)e^{-2t}-4x$	0	0	3/4	4
I5.	$(12t+20)e^{2t}+8x-2\dot{x}$	0	0	I	-
I6.	$(\dot{x}+t\dot{x}^2)/t$	2	2	I	-
I7	$(1-t)\cdot 2+\dot{x}$	0	I	I	-
I8	$(x^4-1)/x^3$	0	2	I/ 2	-
I9	$e^t(t^2+t-3)+2\dot{x}$	0	2	2	-
20	$(12t-7)e^{-t}-6x+5\dot{x}$	0	0	0	-
2I	$6e^{3t}-9x$	0	0	0	-
22	$2t^2e^t-5x+4\dot{x}$	0	2	3	-
23	$(1-\dot{x}^2)/x$	0	I	I	-
24	$(2+\ln t-\dot{x}/t)/(1+\ln t)$	I	I/2	I	-
25	$\dot{x}(1+\ln(x/t))/t$	I	I/2	I	-
26	$\dot{x}^2-\dot{x}(x-1)$	0	2	2	-
27	$(x^2+\dot{x}^2)/2x$	0	I	I	-
28	$2\dot{x}/(6t-\dot{x}^2)$	2	0	2	-
29	$(\dot{x}^2-\dot{x}x^2)/x$	0	I	2	-
30	$(1+\dot{x}^2)\dot{x}/(1+x\dot{x})$	0	I	I	-

3. КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задача 2.

Материальная точка M массы m =I кг движется по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом под действием следящей силы $\vec{F}$ (направление вектора силы $\vec{F}$ совпадает с направлением вектора скорости $\vec{V}$) (рис.3.I).

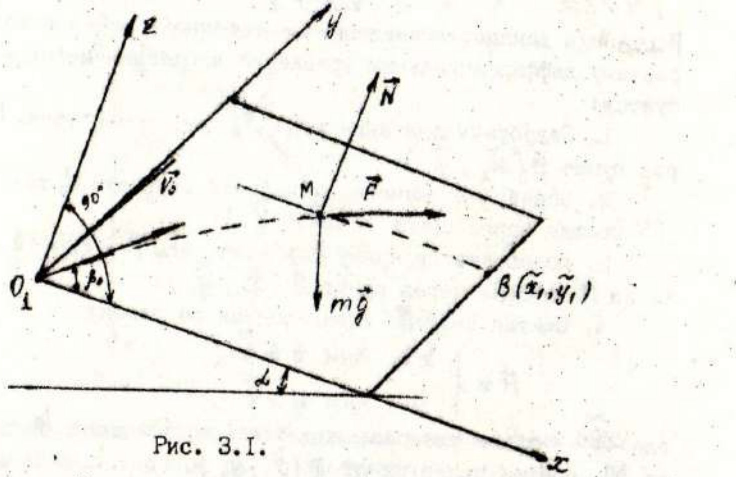

Рис. 3.I.

В начальный момент времени материальная точка находилась в пункте O_I и имела скорость $\vec{V_0}$, направленную под углом β_0 к оси O_1x.

Система дифференциальных уравнений движения точки M в форме (I.2) имеет вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F\cos\beta + mg\sin\alpha\ ; \\ m\ddot{y} = F\sin\beta\ . \end{cases} \tag{3.I}$$

Учитывая, что

$$\sin\beta = \frac{V_y}{|V|}\ , \quad \cos\beta = \frac{V_x}{|V|}\ ; \tag{3.2}$$

$$V_x=\dot{x}, \quad V_y=\dot{y}\ , \quad |V|=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\ , \tag{3.3}$$

где V_x и V_y – проекции вектора скорости $\vec{V}$ точки M на координатные оси, F - величина вектора силы $\vec{F}$, систему уравнений (3.I) запишем в форме

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} + mg\sin\alpha, \\ m\ddot{y} = F\dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}. \end{cases} \qquad (3.4)$$

Используя данные, приведенные в таблице и решая полученную систему дифференциальных уравнений численным методом на ЭЦВМ, требуется:

I. Подобрать значение угла β_0 так, чтобы точка M прошла через пункт $B(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$.

2. Подобрать значение начальной скорости V_0 так, чтобы точка M прошла через пункт $B(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$.

3. Подобрать величину следящей силы $F = const$ так, чтобы точка M прошла через пункт $B(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$.

4. Считая силу F изменяющейся по закону

$$F = \begin{cases} kt & при\ t \le \tilde{t}; \\ 0 & при\ t > \tilde{t}, \end{cases}$$

где $\tilde{t}$ - время разгона, подобрать коэффициент k так, чтобы точка M прошла через пункт $B(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$.

5. Подобрать значение угла наклона α так, чтобы при $F=const$ точка M прошла через пункт $B(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$.

Задача 3.

Материальная точка M массой m=Iкг движется в вязкой жидкости. Сила сопротивления движению $\vec{F}$. В начальный момент времени точка M находилась в пункте O_1 и имела скорость $\vec{V}_0$, направленную под углом β_0 к вертикали (рис.3.2).

Система дифференциальных уравнений движения материальной точки M в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -F\cos\beta + mg; \\ m\ddot{y} = -F\sin\beta. \end{cases} \qquad (3.5)$$

Учитывая, что $\cos\beta = \dot{x}/\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$, $\sin\beta = \dot{y}/\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$, получим

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -F\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} + mg; \\ m\ddot{y} = -F\dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \end{cases} \qquad (3.6)$$

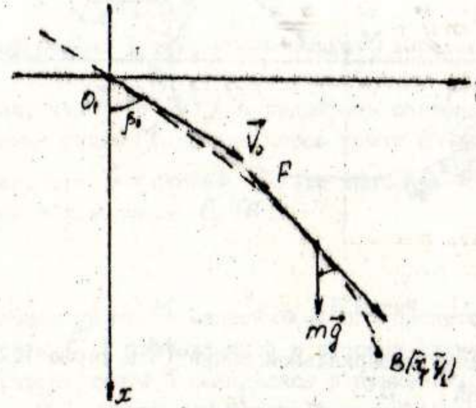

Рис. 3.2.

Решая полученную систему взаимосвязанных уравнений на ЭЦВМ, с использованием данных таблицы (3.I) требуется:

I. Подобрать значение угла β так, чтобы точка M опустилась на глубину h =25 м за время $\tilde{t}$.

2. Подобрать значение начальной скорости V_0 так, чтобы точка M достигла глубины h =30 м за время $\tilde{t}$.

3. Считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости $F = kV^2$, подобрать значение коэффициента k так, чтобы точка M достигла глубины h =40 м за время $\tilde{t}$.

4. Подобрать значение угла β_0 так, чтобы точка M прошла через пункт $B(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$.

5. Подобрать значение начальной скорости V_0 так, чтобы точка M прошла через пункт $B(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$.

Задача 4.

Материальная точка M массой m =I кг движется под действием центральной силы F. В начальный момент времени точка M находилась в пункте O_1 с координатами $x=a$, $y=0$ и имела скорость V_0, перпендикулярную оси Ox (рис. 3.3).

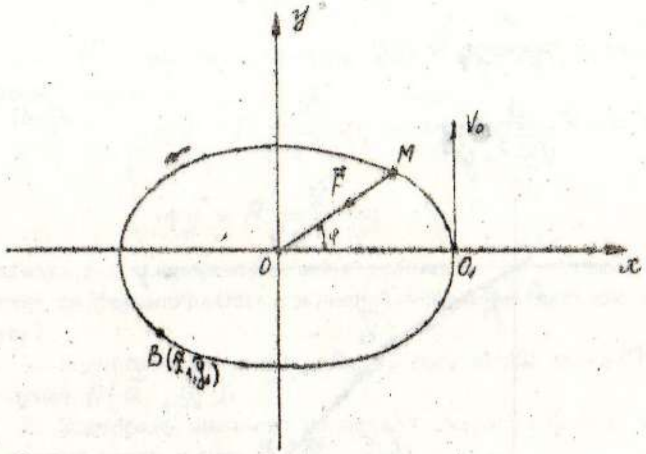

Рис.3.3.

Уравнения движения материальной точки M в форме (I.2) в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -F\cos\varphi; \\ m\ddot{y} = -F\sin\varphi. \end{cases} \qquad (3.7)$$

Учитывая, что

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad (3.8)$$

имеем

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -F\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ m\ddot{y} = -F\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \qquad (3.9)$$

Решая систему (3.9) на ЭЦВМ, с использованием данных таблицы требуется:

I. Подобрать значение начальной скорости V_0 так, чтобы точка M прошла через пункт $B(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$.

2. Считая силу обратно пропорциональной расстоянию до центра O

$$F = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

подобрать значение V_0 так, чтобы точка M вернулась в пункт $O_1(a,0)$.

3. Считая, что

$$F = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

подобрать коэффициент k так, чтобы точка M вернулась в пункт O_1.

4. Считая, что $F=k(x^2+y^2)$, подобрать коэффициент k так, чтобы траектория точки M прошла через точку $B(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$.

5. Считая, что $F=const$, найти значение F, при котором точка M вернется в пункт $O_1(a;0)$.

Задача 5.

Материальная точка M массой $m=I$ кг движется под действием следящей силы $\vec{F}$, направленной в сторону движения. В начальный момент времени точка M находилась в пункте O_1 на высоте h и имела скорость $\vec{V}_0$, направленную под углом β_0 к горизонту (рис.3.4)

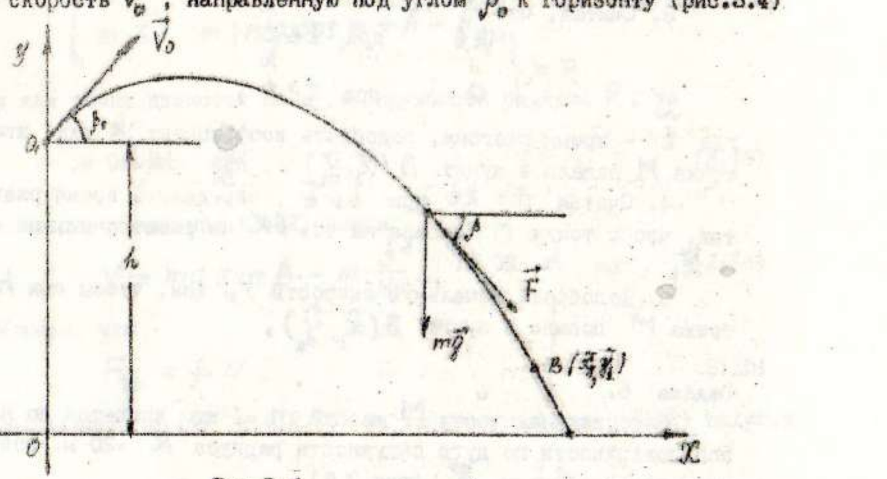

Рис.3.4.

Составляя систему уравнений движения материальной точки M в форме (I.2), имеем

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F\cos\beta\ ; \\ m\ddot{y} = -F\sin\beta - mg. \end{cases} \qquad (3.10)$$

Учитывая формулы (3.2) и (3.3), получим

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\ ; \\ m\ddot{y} = -F\dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} - mg. \end{cases} \qquad (3.11)$$

Используя данные таблицы и решая полученную систему на ЭЦВМ, требуется:

1. Подобрать значение h так, чтобы точка M попала в пункт $B(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$.

2. Подобрать значение β_0 так, чтобы при h =20 м точка M попала в пункт $B(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$.

3. Считая, что

$$F = \begin{cases} kt & \text{при } t \le \tilde{t}\ ; \\ 0 & \text{при } t > \tilde{t}\ , \end{cases}$$

где $\tilde{t}$ - время разгона, подобрать коэффициент k так, чтобы точка M попала в пункт $B(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ при h =40 м.

4. Считая $F = kt$ при $t \le \tilde{t}$, определить время разгона $\tilde{t}$ так, чтобы точка M попала на ось Ox на расстоянии, не меньшем $\tilde{x}_1$ при h =20 м.

5. Подобрать начальную скорость V_0 так, чтобы при h =10 м точка M попала в пункт $B(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$.

Задача 6.

Материальная точка M массой m =1 кг движется по негладкой поверхности по дуге окружности радиуса R =20 м. под действием следящей силы $\vec{F}$ (рис.3.5).

Решение. Коэффициент трения скольжения равен f =0,1. В начальный момент времени точка M находилась в пункте O_1 и имела

скорость $\vec{V}_0$, направленную под углом β_0 к вертикали.

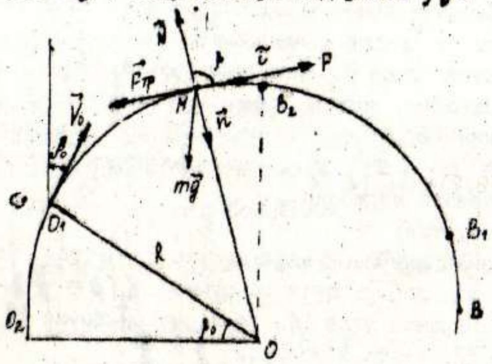

Рис.3.5.

Уравнения движения точки M , записанные в форме (I.3), имеют вид

$$\begin{cases} m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = mg\sin\beta - N; \\ m\ddot{s} = -mg\cos\beta + F - F_{тр}. \end{cases} \qquad (3.12)$$

Так как точка движется по дуге окружности радиуса R , то

$$\beta = \frac{S}{R}\ . \qquad (3.13)$$

Из первого уравнения (3.12) имеем

$$N = mg\sin\beta - m\frac{\dot{s}^2}{\rho}\ . \qquad (3.14)$$

Учитывая, что

$$F_{тр} = f\cdot N \qquad (3.15)$$

и подставляя (3.14) и (3.15) во второе уравнение (3.12), получим

$$m\ddot{s} = -mg\cos\frac{s}{R} + F - mgf\sin\frac{s}{R} + mf\frac{\dot{s}^2}{\rho}\ . \qquad (3.16)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка. В результате решения его на ЭВМ приближенным методом, с учетом данных таблицы составляется таблица значений $S_i(t_i)$ и $\dot{S}_i(t_i)$, где i – номер участка, на которые разбивается интервал интегрирования. На основании (3.14) с учетом (3.13) составляется таблица значений величин $N_i(S_i, \dot{S}_i)$, которая используется для анализа рассматриваемого движения.

В результате требуется:

1. Подобрать значение начальной скорости V_0 так, чтобы точка M не покинула поверхности до пункта $B_2(\beta = \frac{\pi}{2})$.

2. Подобрать значание угла β_0 так, чтобы точка M не покинула поверхности до пункта, в котором $\beta = \frac{\pi}{2}$.

3. Подобрать значение $F = const$ так, чтобы точка M покинула кривую OB в пункте $B_1(S=a)$.

4. Подобрать значение угла β_0 так, чтобы время движения до пункта $B_2(\beta = \frac{\pi}{2})$ было меньше $\tilde{t}$ при условии, что точка не должна оторваться от поверхности.

5. Считая, что $F = kS$, где S – длина дуги O_1M, подобрать значение k так, чтобы в пункте $B_1(S=a)$ точка M покинула поверхность.

Задача 7.

Материальная точка M массы $m = 1$ кг движется по негладкой поверхности по дуге окружности радиуса $R = 20$ м под действием следящей силы F (рис.3.6).

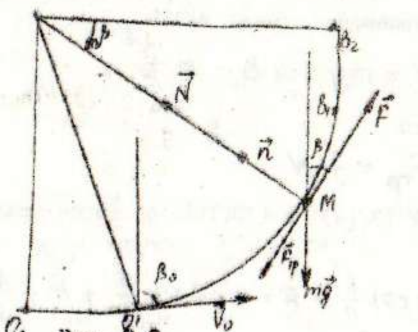

Рис. 3.6.

Коэффициент трения скольжения равен $f = 0{,}1$. В начальный момент времени материальная точка M находилась в пункте O_1 и имела скорость $\vec{V}_0$, направленную под углом β_0 к вертикали.

По аналогии с предыдущей задачей дифференциальные уравнения движения можно записать в виде

$$\begin{cases} m\dfrac{\dot{S}^2}{\rho} = -mg\cos\beta + N; \\ m\ddot{S} = -mg\sin\beta + F - F_{тр}. \end{cases} \qquad (3.17)$$

Из первого уравнения имеем

$$N = mg\cos\beta + m\frac{\dot{S}^2}{\rho}. \qquad (3.18)$$

С учетом (3.18), (3.13) и (3.15) второе уравнение (3.17) представляется в форме

$$m\ddot{S} = -mg\sin\frac{S}{R} - mgf\cos\frac{S}{R} - mf\frac{\dot{S}^2}{\rho} + F. \qquad (3.19)$$

Решая это дифференциальное уравнение на ЭВМ, с учетом данных таблицы, составляем таблицу значений $S_i(t_i)$ и $\dot{S}_i(t_i)$ и $N_i(S_i, \dot{S}_i)$ и проводим анализ полученного решения исходя из условий задачи. В результате анализа требуется:

1. Подобрать значение V_0 так, чтобы в пункте $B_1(S=a)$ скорость материальной точки M была равна нулю.

2. Считая, что $F = k/(a+S)$, подобрать значение k так, чтобы в пункте $B_1(S=a)$ скорость точки M была равна $4V_0$.

3. Подобрать V_0 так, чтобы в пункте $B_1(S=a)$ нормальное давление N было равно весу точки M.

4. Считая $F = k/(a+S)$, подобрать значение a так, чтобы время движения от пункта O_1 до пункта $B_2(\beta=0)$ было меньше $\tilde{t}$.

5. Считая $F = \begin{cases} kS & \text{при } S \le \tilde{S} \\ 0 & \text{при } S > \tilde{S}, \end{cases}$

где $\tilde{S}$ – участок разгона, подобрать значение $\tilde{S} = a$ так, чтобы в пункте $B_2(\beta=0)$ точка M имела скорость $V \ge 0$.

Таблица

№ п/п	Номер задачи	Номер задания к задаче	R [м]	β_0 [рад]	V_0 [м/с]	$\tilde{x}_1$	$\tilde{y}_1$	$\tilde{t}$	a [м]	k	α [рад]
I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
I	2	2	20	П/6	?	40	40	-	-	-	П/4
2	2	I	40	?	0	40	20	-	-	-	П/4
3	2	4		П/4	2	30	20	5	-	?	П/6
4	2	3	?	П/3	4	50	I0	-	-	-	П/4
5	2	5	30	П/5	5	45	35	-	-	-	?
6	3	I	I5	?	20	-	-	I	-	-	-
7	3	2	20	П/6	?	-	-	2	-	-	-
8	3	3		П/4	30	-	-	4	-	?	-
9	3	4	5	?	I5	40	30	-	-	-	-
I0	3	5	I0	П/3	?	35	20	-	-	-	-
II	4	I	I0	-	?	0	I5	-	I0	-	-
I2	4	2		-	?	-	-	-	20	I	-
I3	4	3		-	I0	-	-	-	I5	?	-
I4	4	4		-	I5	20	0	-	I0	?	-
I5	4	5	?	-	20	-	-	-	25	-	-
I6	5	I	20	П/3	50	200	70	-	-	-	-
I7	5	2	50	?	30	I50	80	-	-	-	-
I8	5	3		0	I0	250	40	I0	-	?	-
I9	5	4		П/4	0	400	-	?	-	I	-
20	5	5	30	П/5	?	300	I50	-	-	-	-
2I	6	I	40	П/I0	?	-	-	-	-	-	-
22	6	2	50	?	0	-	-	-	-	-	-
23	6	3	?	П/I2	I	-	-	-	20	-	-
24	6	4	I0	?	0	-	-	5	-	-	-
25	6	5		0	5	-	-	-	I5	?	-

Продолжение таблицы

I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
26	7	I	I0	П/I0	?	-	-	-	30	-	-
27	7	2		0	I0	-	-	-	32	?	-
28	7	3	I5	0	?	-	-	-	-	-	-
29	8	4		0	5	-	-	8	?	I	-
30	7	5		0	0	-	-	-	?	2	-

4. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.I. Уравнение 2-го порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} = f(x,t) \qquad (4.I)$$

называется уравнением с разделяющимися переменными, если его можно представить в виде

$$\dot{x} = \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(t), \qquad (4.2)$$

т.е. функция $f(x,t)$ распадается на множители, каждый из которых зависит только от одной переменной.

Представляя уравнение (4.2) в виде

$$\frac{dx}{\varphi_1(x)} = \varphi_2(t)\,dt$$

и интегрируя правую и левую части последнего равенства, находим общее решение (или общий интеграл) данного уравнения. При наличии начальных условий $x(t_0) = x_0$ определяется частное решение.

Пример. Найти частное решение уравнения $\dot{x} = x\ln x/\sin t$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $x(\pi/2) = e$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{dx}{dt} = x\ln x\cdot\frac{1}{\sin t}\,.$$

Разделяем переменные $\dfrac{dx}{x\ln x} = \dfrac{dt}{\sin t}$.

Интегрируя, найдем общий интеграл

$$\ln|\ln x| = \ln|tg\frac{t}{2}| + \ln C.$$

После потенцирования получим

$$\ln x = C\cdot tg\frac{t}{2} \Rightarrow x = e^{C\cdot tg\frac{t}{2}},$$

что является общим решением исходного уравнения.

Положим теперь $t = \pi/2$, $x = e$, тогда $e = e^{C\cdot tg\frac{\pi}{4}}$,

откуда $C = 1$; $x = e^{tg\frac{t}{2}}$ - частное решение данного уравнения.

4.2. Однородные дифференциальные уравнения I-го порядка

Дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{4.3}$$

называется однородным, если $f(x,t)$ - однородная функция своих аргументов нулевого измерения. Иначе, если уравнение (4.3) однородное, то после замены в нем x на kx, а t на kt - уравнение не изменяет своей формы. С помощью подстановки $x = ut$, где u - некоторая функция, зависящая от аргумента t, однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример. Найти общий интеграл уравнения

$$\dot{x} = -\frac{t^2+2tx}{tx}.$$

Заменив x - на kx, t на kt, убеждаемся, что уравнение однородное. Действительно,

$$\dot{x} = -\frac{(kt)^2 + 2kt\cdot kx}{kt\cdot kx} \Rightarrow \dot{x} = -\frac{k^2(t^2+2tx)}{k^2 tx} \Rightarrow \dot{x} = -\frac{t^2+2tx}{tx}.$$

Делаем подстановку $x = ut$. Находим $\dot{x} = \dot{u}t + u$. Подставляем в данное уравнение x и $\dot{x}$. Получаем

$$\dot{u}t + u = -\frac{t^2+2t\cdot ut}{t\cdot ut} \Rightarrow$$

$$\dot{u}t = -\frac{1+2u}{u} - u \Rightarrow \dot{u}t = -\frac{1+2u+u^2}{u} \Rightarrow \frac{du}{dt}t = -\frac{(1+u)^2}{u}.$$

Разделяя переменные и итегрируя, имеем

$$\frac{u\,du}{1+u^2} = -\frac{dt}{t} \Rightarrow \ln(u+1) + \frac{1}{1+u} = -\ln t + C.$$

Возвращаясь к старой переменной $(u = \frac{x}{t})$, получаем

$$\ln(x+t) + \frac{t}{x+t} = C.$$

4.3. Линейные дифференциальные уравнения I-го порядка

Линейным дифференциальным уравнением I-го порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной.

Линейное уравнение можно представить в виде

$$\dot{x} + p(t)\,x = f(t). \tag{4.4}$$

Рассмотрим один из методов решения этого уравнения - метод И.Бернулли.

Полагаем $x(t) = u(t)\cdot v(t)$. Находя $\dot{x} = \dot{u}v + \dot{v}u$ и подставляя x и $\dot{x}$ в уравнение (4.4), после преобразований получим

$$\dot{u}v + u(\dot{v} + pv) = f(t). \tag{4.5}$$

Определяя $v(t)$ из условия, что $\dot{v} + pv = 0$, находим затем из (4.5) функцию $u(t)$, а, следовательно, и решение уравнения (4.4).

Пример. Найти общее решение уравнения

$$\dot{x} + 2xt = 2te^{-t^2}. \tag{4.6}$$

Полагая $x = u(t)\cdot v(t)$ и находя $\dot{x} = \dot{u}v + u\dot{v}$, получаем

$$\dot{u}v + \dot{v}u + 2uvt = 2te^{-t^2} \Rightarrow \dot{u}v + u(\dot{v} + 2vt) = 2te^{-t^2}.$$

Функцию $\upsilon(t)$ найдем из условия

$$\dot{\upsilon} + 2\upsilon t = 0. \qquad (4.7)$$

Уравнение (4.7) является уравнением с разделяющимися переменными. Решая его, имеем

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -2t\,dt \Rightarrow \ln\upsilon = -t^2 \Rightarrow \upsilon = e^{-t^2}.$$

Для определения функции $u(t)$ остается уравнение

$$\dot{u}e^{-t^2} = 2te^{-t^2} \Rightarrow \dot{u} = 2t \Rightarrow du = 2t\,dt \Rightarrow u = t^2 + c.$$

Итак, общее решение уравнения (4.6) будет

$$x = (t^2 + c)\,e^{-t^2}$$

4.4. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

I. Уравнение вида $\ddot{x} = f(t)$ решается посредством двукратного интегрирования. При каждом интегрировании получается одна произвольная постоянная, а в результате - две произвольных постоянных. Постоянные можно определить, если заданы начальные условия: при $t = t_0$ $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$.

Пример. Найти частное решение уравнения $\ddot{x} = te^{-t}$, удовлетворяющее начальным условиям: при $t = 0$

$x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.

Найдем общее решение уравнения последовательным интегрированием

$$\dot{x} = \int te^{-t}dt \Rightarrow \dot{x} = -te^{-t} - e^{-t} + C_1;$$

$$x = \int(-te^{-t} - e^{-t} + C_1)dt \Rightarrow x = te^{-t} + 2e^{-t} + C_1 t + C_2 \Rightarrow$$

$$x = (t+2)e^{-t} + C_1 t + C_2.$$

Воспользуемся начальными условиями. Получим

$$\begin{cases} 0 = -1 + C_1 \\ 1 = 2 + C_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Итак, частным решением исходного уравнения будет функция

$$x(t) = (t+2)e^{-t} + t - 1.$$

2. Если уравнение второго порядка не содержит явно искомой функции $x(t)$, т.е. имеет вид

$$\ddot{x} = F(t, \dot{x}), \qquad (4.8)$$

то порядок уравнения можно понизить заменой

$$\dot{x} = p(t)\ ;\quad \ddot{x} = \dot{p}(t).$$

Уравнение (4.8) примет вид

$$\dot{p} = F(t, p). \qquad (4.9)$$

В зависимости от типа уравнения (4.9) его нужно решать одним из способов, приведенных в разделах (4.I) - (4.3). Найдя $p(t)$, затем из условия $\dot{x} = p(t)$ находим искомую функцию $x(t)$.

3. Если уравнение второго порядка не содержит явно независимой переменной t, т.е. имеет вид

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}), \qquad (4.10)$$

его порядок можно понизить с помощью подстановки

$$\dot{x} = p(x)\ ;\quad \ddot{x} = p\frac{dp}{dx}.$$

Уравнение (4.II) примет вид

$$p\frac{dp}{dx} = F(x, p). \qquad (4.II)$$

Это уравнение первого порядка, в котором искомой функцией является $p(x)$, а аргументом - переменная x. Найдя $p(x)$, затем из условия $\dot{x} = p(x)$ находим функцию $x(t)$.

Пример. Найти частное решение уравнения

$$\ddot{x} = \frac{2(\dot{x})^2}{tg\, x},$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0) = \frac{\pi}{4}, \quad \dot{x}(0) = \frac{1}{2}.$$

Решение. Положим, $\dot{x} = p(x)$, тогда $\ddot{x} = p \cdot \frac{dp}{dx}$ и данное уравнение преобразуется к виду

$$p\frac{dp}{dx} = \frac{2p^2}{tg\, x} \Rightarrow \frac{dp}{p} = 2\frac{dx}{tg\, x}.$$

Интегрируя, получим

$$\ln|p| = 2\ln|\sin x| + \ln c_1 \Rightarrow p = c_1 \cdot \sin^2 x.$$

Используем для нахождения произвольной постоянной C_1 начальные условия.

Получим $\frac{1}{2} = C_1 \sin^2\frac{\pi}{4} \Rightarrow C_1 = 1$

Итак, $p = \sin^2 x$.

Учитывая, что $p = \dot{x}$, имеем

$$\dot{x} = \sin^2 x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sin^2 x \Rightarrow \frac{dx}{\sin^2 x} = dt \Rightarrow$$

$$-ctg\, x = t + C_2.$$

Исходя из начальных условий, имеем

$$-ctg\frac{\pi}{4} = 0 + C_2 \Rightarrow -1 = C_2 \Rightarrow C_2 = -1.$$

Итак, окончательно

$$ctg\, x = 1 - t \Rightarrow x = arcctg(1-t).$$

4.5. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами (ЛОДУ) называется уравнение вида

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0, \tag{4.12}$$

где p, q – некоторые действительные числа.

Для нахождения общего решения $X(t)$ этого уравнения составляют характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{4.13}$$

Общее решение уравнения (4.12) строится в зависимости от характера корней уравнения (4.13):

1) если корни уравнения (4.13) действительные различные $k_1 \neq k_2$ (дискриминант $D > 0$), то

$$X(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t};$$

2) в случае равных корней $k_1 = k_2 = k$ ($D = 0$)

$$X(t) = C_1 e^{kt} + C_2 t e^{kt};$$

3) если корни характеристического уравнения (4.13) комплексно-сопряженные $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ ($D < 0$), то

$$X(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t).$$

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (ЛНДУ), т.е. уравнения вида

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f(t) \tag{4.14}$$

равно сумме любого его частного решения $\bar{x}(t)$ и общего решения соответствующего однородного уравнения, т.е. $x(t) = \bar{x}(t) + X(t)$.

Частное решение ЛНДУ (4.14) можно отыскать методом подбора (методом неопределенных коэффициентов), если его правая часть имеет вид

$$f(t) = e^{at}(P_n(t)\cos bt + Q_m(t)\sin bt)$$

(или является суммой такого вида). Здесь a, b – постоянные, $P_n(t)$ и $Q_m(t)$ – многочлены от t соответственно m-ой и n-ой степеней.

Частное решение ЛНДУ имеет вид

$$\bar{x}(t) = e^{at}(\bar{P}_\ell(t)\cos bt + \bar{Q}_\ell(t)\sin bt),$$

где $\bar{P}_\ell(t)$ и $\bar{Q}_\ell(t)$ – полные многочлены от t с неопределенными коэффициентами, l - наибольшее из чисел n и m. Подчеркнем, что многочлены $\bar{P}_l(t)$ и $\bar{Q}_l(t)$ должны быть полными (т.е. содержать все степени t от нуля до l) с различными неопределенными коэффициентами при одних и тех же степенях t в обоих многочленах и при этом, если в выражении функции $f(t)$ входит хотя бы одна из функции $\sin bt$ или $\cos bt$ в $\bar{x}(t)$ надо вводить обе функции.

Неопределенные коэффициенты можно найти из системы линейных алгебраических уравнений, получаемых отождествлением коэффициентов подобных членов в правой и левой частях исходного уравнения после подстановки в него $\bar{x}$, $\dot{\bar{x}}$ и $\ddot{\bar{x}}$ вместо x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$.

Замечание. Если корни характеристического уравнения (4.14) комплексно сопряженные, причем $k = a \pm bi$, то

$$\bar{x}(t) = e^{at}\left(\bar{P}_l(t)\cos bt + \bar{Q}_l(t)\sin bt\right)t.$$

Список литературы

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Наука, 1964.- 841 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы, т.1. - М.: Наука, 1973.- 631 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т.2. - М.: Наука, 1972.- 576 с.

Составители:

Владимир Иванович Онищенко
Сергей Ростиславович Ильин
Ольга Владимировна Бугрим

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению расчетно-проектировочных заданий с применением ЭВМ к разделу "Вторая основная задача динамики материальной точки" для студентов всех специальностей

Ответств. за выпуск В.И.Онищенко
Редактор С.С.Графская

Редакционно-издательский отдел

Подписано в печать 28.06.85. Формат 60х84/16.
Бум. тип. № 3. Офс. печ. Усл. печ. л. 1,0.
Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 200 экз. Заказ 3-9 . Бесплатно.

Ротапринт ДГИ им. Артема
320600, г.Днепропетровск, пр.К.Маркса, 19.