статика ...
специальностей/ /сост.: В.И.Онищенко, С.Е.Блохин, В.Д.Кир-
Матысина, С.В.Гришак, Л.А.Бабченко. - Днепропетровск: ГГАУ,
.

Составители: В.И.Онищенко, канд.физ.-мат.наук,проф.
С.Е.Блохин, д-р техн.наук,проф.
В.Д.Кирнос, канд.техн.наук,доц.
Н.В.Матысина, канд.техн.наук,доц.
Л.А.Бабченко, асс.
С.В.Гришак, канд.техн.наук,доц.

тветственный за выпуск В.Д.Кирнос, канд.техн.наук,доцент.

к разделу "Статика" и даны примеры их выполнения.

Перед выполнением задач необходимо изучить теоретический материал, вопросы которого изложены в настоящей методической работе. Особое внимание следует уделить вопросам векторной алгебры.

# I. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА РАЗДЕЛА "СТАТИКА"

## I.I. Основные понятия и аксиомы статики. Система сходящихся сил.

Предмет статики. Основные понятия и определения. Аксиомы статики. Связи и их реакции. Геометрический и аналитический способ сложения сил. Сходящаяся система сил. Сходящиеся силы. Равнодействующая сходящихся сил. Условия равновесия.

## I.2. Произвольная система сил

Момент силы относительно центра как вектор. Момент силы относительно оси. Сложение параллельных сил. Пара сил. Равновесие системы пар . Теорема о параллельном переносе сил. Приведение пространственной системы сил к данному центру. Главный вектор и главный момент. Условия равновесия систем сил. Частные случаи приведения пространственной системы сил к простейшему виду. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. Равновесие плоской и пространственной систем сил. Распределенные и сосредоточенные силы. Трения, скольжения, качения и верчения. Равновесие конструкций.

## I.3. Центр параллельных сил и центр тяжести

Центр параллельных сил. Центр тяжести твердого тела. Координаты центра тяжести однородных тел. Способы определения координат центров тяжести тел.

## I.4. Список литературы

I. Добровольский В.В., Никитин Н.И., Дврников А.П. Курс теоретической механики. - М.: Высш.шк., I974. - 527 с.

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Наука, I970. - 470 с.

3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под ред. А.А.Яблонского. - М.: Высш.шк., I978. - 388 с.

## 2. ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

### 2.1. Задача CI

Жесткая рама /рис.CI.0–CI.9, табл.CI/ закреплена в точке А шарнирно, а в точке В прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

На раму действует пара сил с моментом $M$ = 60 кН·м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице /например, в условиях № I на раму действует сила $F_2$ под углом I5° к горизонтальной оси, приложенная в точке Е и т.д./.

Определить реакции связей в точках А, В, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять $a$ = 0,5 м.

Указания.

Задача С1 – на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. Уравнение моментов будет более простым /содержать меньше неизвестных/, если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы $\bar{F}$ часто удобно разложить ее на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда

$$m_O(\bar{F}) = m_O(\bar{F}') + m_O(\bar{F}'').$$

Таблица CI

| Силы | $\bar{F}_1$, $\alpha_1$ | | $\bar{F}_2$, $\alpha_2$ | | $\bar{F}_3$, $\alpha_3$ | | $\bar{F}_4$, $\alpha_4$ | | Распределенная нагрузка |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $F_1$ = 10 кН | | $F_2$ = 20 кН | | $F_3$ = 30 кН | | $F_4$ = 40 кН | | $q$ |
| Номер условия | точка приложения | град | точка приложения | град | точка приложения | град | точка приложения | град | Н/м |
| 0 | Н | 30 | – | – | – | – | К | 60 | 10 |
| I | – | – | Д | I5 | Е | 60 | – | – | 20 |
| 2 | К | 75 | – | – | – | – | Е | 30 | 30 |
| 3 | – | – | К | 60 | Н | 30 | – | – | I0 |
| 4 | Д | 30 | – | – | – | – | Е | 60 | 20 |
| 5 | – | – | Н | 30 | – | – | Д | 75 | 30 |
| 6 | Е | 60 | – | – | К | I5 | – | – | I0 |
| 7 | – | – | Д | 60 | – | – | Н | I5 | 20 |
| 8 | Н | 60 | – | – | Д | 30 | – | – | 30 |
| 9 | – | – | Е | 75 | К | 30 | – | – | I0 |

Пример CI. Жесткая пластина АВСД /рис.CI/ имеет в точке А неподвижную шарнирную опору, а в точке В– подвижную шарнирную опору, на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рис.



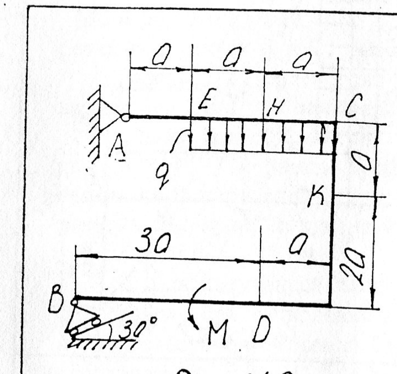


Рис. С1.0

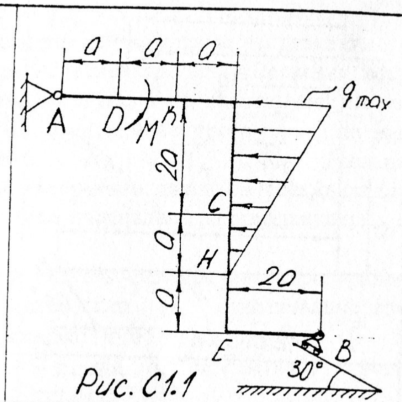


Рис. С1.1

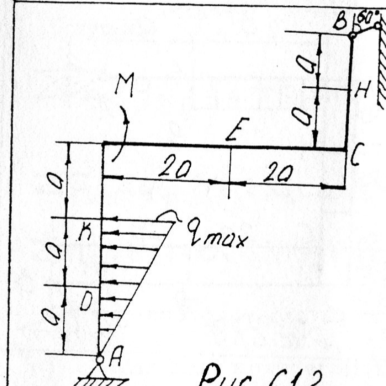


Рис. С1.2

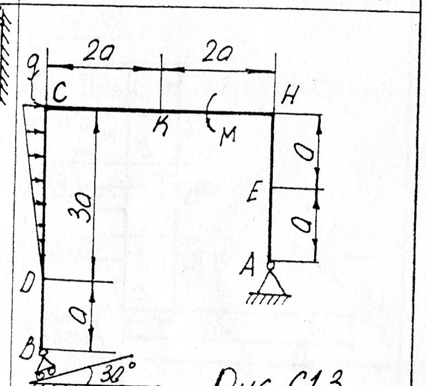


Рис. С1.3

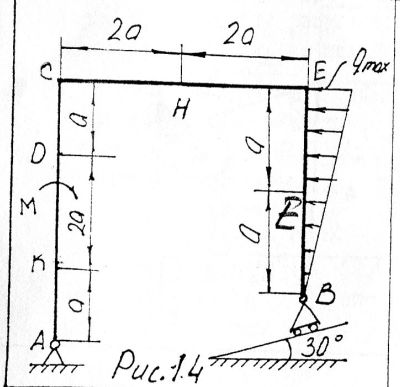


Рис. 1.4

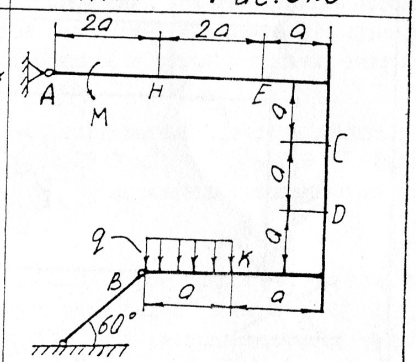


Рис. С1.5

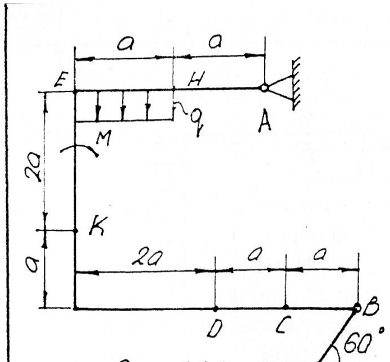


Рис. С1.6

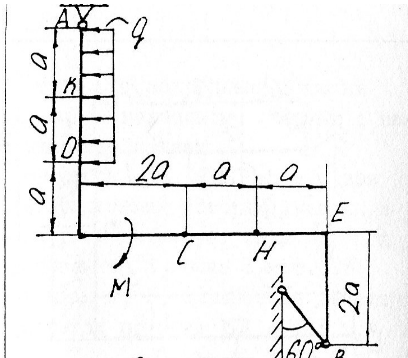


Рис. С1.7

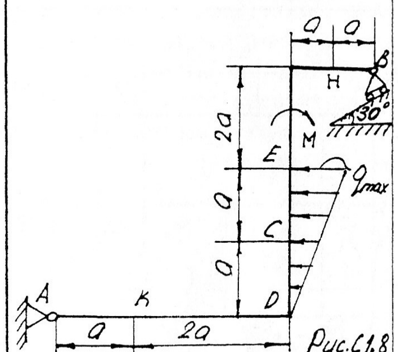


Рис. С1.8

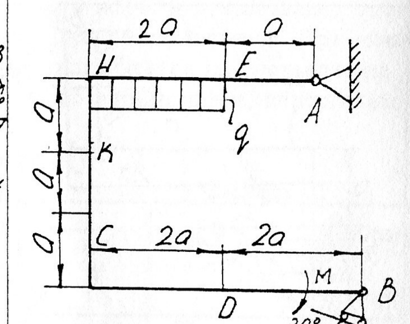


Рис. С1.9

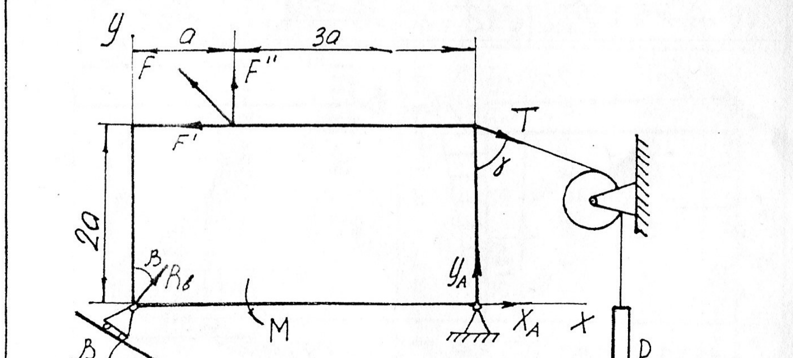


Рис. С1



Д а н о: $F$ = 25 кН, $\alpha$ = 60°, $P$ = 18 кН, $\gamma$ = 75°, $M$ = 50 кН·м, $\beta$ = 30°, $a$ = 0,5 м. Определить: реакции в точках А и В, вызываемые действующими нагрузками.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси $XY$ и изобразим действующие на пластину силы: силу $\bar{F}$, пару сил с моментом $M$, натяжение троса $\bar{T}$ /по модулю $T = P$ / и реакции связей $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{R}_B$ /реакцию неподвижной шарнирной опоры А изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости/.

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\bar{F}$ относительно точки А воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу $\bar{F}$ на составляющие $\bar{F}'$, $\bar{F}''$ / $F' = F\cos\alpha$, $F'' = F\sin\alpha$/ и учтем, что $m_A(\bar{F}) = m_A(\bar{F}') + m_A(\bar{F}'')$

Получим:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + R_B\sin\beta - F\cos\alpha + T\sin\gamma = 0; \quad /1/$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + R_B\cos\beta + F\sin\alpha - T\cos\gamma = 0; \quad /2/$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad M - R_B\cos\beta\cdot 4a + F\cos\alpha\cdot 2a - F\sin\alpha\cdot 3a - T\sin\gamma\cdot 2a = 0. \quad /3/$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции. Для проверки правильности результатов необходимо составить еще одно уравнение равновесия, не задействованное в решении задачи, например,

$$\sum m_B(\bar{F}_k) \stackrel{?}{=} 0$$

Если получилось тождество 0=0, следовательно, задача решена верно.

Ответ: $X_A$ = -8,5 кН; $Y_A$ = -23.3 кН; $R_B$ = 7,3 кН. Знаки указывают, что силы $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$ направлены показанным на рис. С1, противоположно.

## 2.2. Задача С2.

Жесткая рама /рис. С2.0...С2.9/ одним концом жестко защемлена в точке А. На раму действует пара сил с моментом $M$, три сосредоточенные силы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, и распределенная нагрузка интенсивностью $\bar{q}$.

Определить реакции связи /в точке защемления/, т.е. в точке А. Исходные данные сведены в табл. С2.

Таблица С2

| Силовые факторы | Номер условия | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | I | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $P_1$, Н | I0 | I5 | 20 | – | 30 | I0 | – | I5 | 20 | 30 |
| $P_2$, Н | – | I0 | I5 | 20 | – | – | 30 | I0 | – | I5 |
| $P_3$, Н | I0 | – | – | I5 | 20 | 30 | – | – | I0 | I5 |
| M, Н·м | I0 | I5 | 20 | 30 | I0 | I5 | 20 | 30 | I0 | I5 |
| q, Н/м | I0 | I5 | 20 | 30 | I0 | I5 | 20 | 30 | 20 | 30 |

Указания. Решение задачи С2 аналогично решению СI. При решении задачи /плоская произвольная система сил/ будем придерживаться следующей последовательности:

I. Отбрасываем связь и заменяем ее действия реакциями $X_A$, $Y_A$ и $M_A$. Здесь $M_A$ реактивный момент в защемлении.

2. Распределенную нагрузку приводим к сосредоточенной силе.

3. Составляем уравнения равновесия плоской произвольной системы сил.

Пример задачи С2. Жесткая рама одним концом жестко защемлена в точке А. На нее действуют сосредоточенная сила $\bar{c}$, пара сил с моментом M и распределенная нагрузка интенсивностью q. Необходимо определить реакции связей /рис. С2.а/.

Решение: отбрасываем связь и действие ее заменяем реакциями $X_A$, $Y_A$ и $M_A$./рис. С2, б/.

Распределенную нагрузку приводим к сосредоточенной силе Q, которая равна:

$$Q = q \cdot 2 \ (\text{Н})$$

Приложена сила Q в центре тяжести фигуры нагружения /Здесь фигура нагружения- прямоугольник длиной 2 и высотой q/.

Составляем уравнения равновесия плоской произвольной системы сил:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\bar{F}_i) = 0$$

Уравнениями равновесия для данной задачи будут:



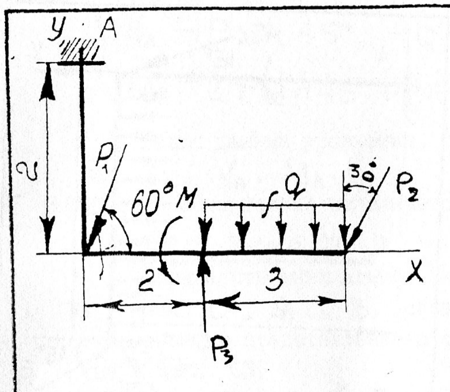


Рис. С2.0

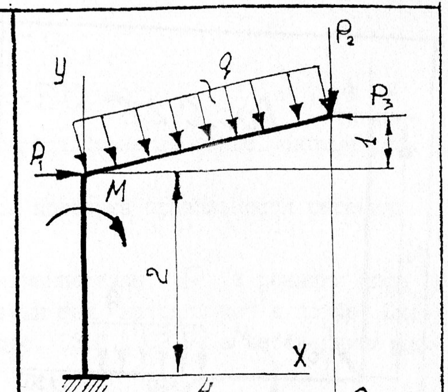


Рис. С2.1

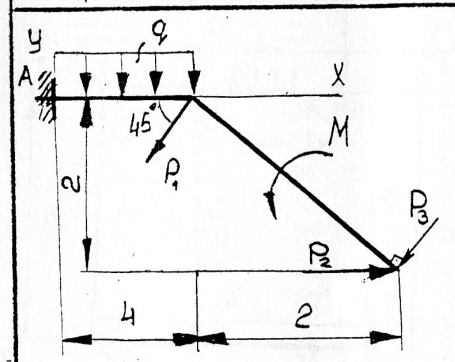


Рис. С2.2

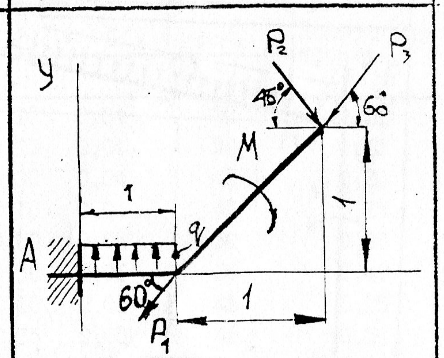


Рис. С2.3

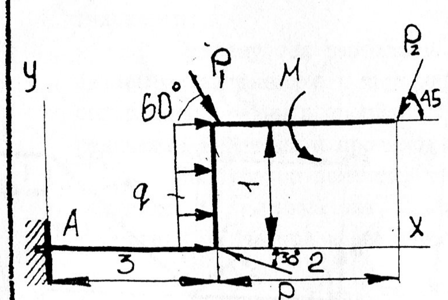


Рис. С2.4

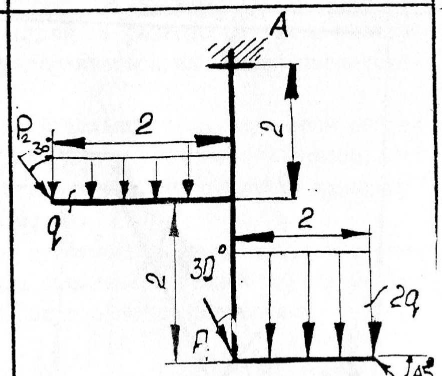


Рис. С2.5

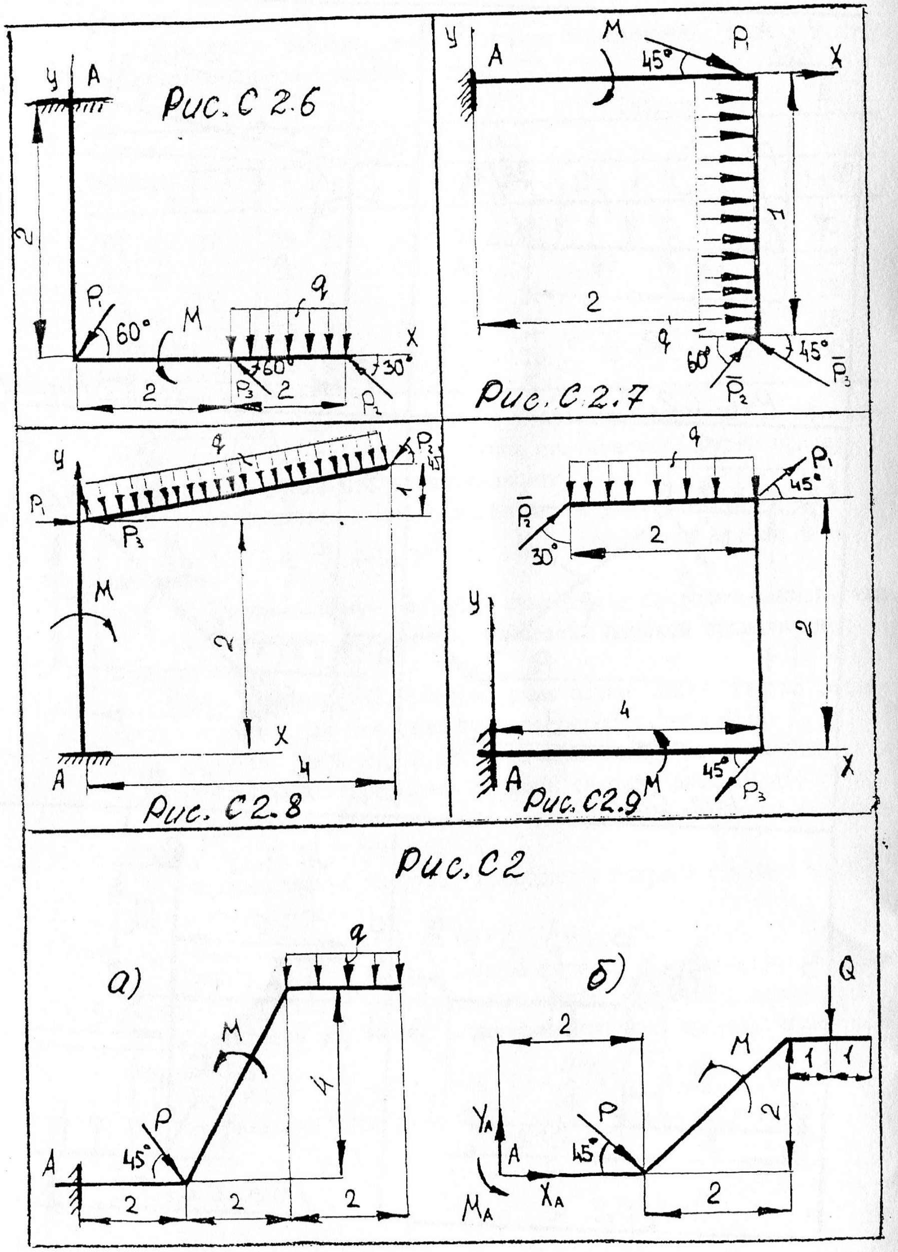


Рис. С2

$$\begin{cases} X_A + P\cos 45^\circ = 0; \\ Y_A - P\sin 45^\circ - Q = 0; \\ M_A - 2P\sin 45^\circ + M - 5Q = 0 \end{cases}$$

Решая данные уравнения, определим неизвестные искомые реакции $X_A$, $Y_A$, $M_A$.
В конце обязательно выполняется проверка правильности решения.

## 2.3. Задача С3

Определить минимальное значение силы $P$ и реакции опор в точках $O$, $A$, $B$ системы тел, находящихся в покое. Схемы вариантов представлены на рис. С3.0...С3.9, а необходимые данные в табл. С3.

Таблица С3

| Номер условия | $G$ | $Q$ | $a$ | $b$ | $e$ | $\alpha$ | Коэффициент трения $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | кН | | м | | | град | |
| 0 | I,0 | I0 | 0,20 | 0,I0 | 0,04 | 30 | 0,I0 |
| I | I,I | I2 | 0,I0 | 0,I5 | 0,04 | 30 | 0,I5 |
| 2 | I,5 | I6 | 0,20 | 0,30 | 0,04 | 45 | 0,20 |
| 3 | I,6 | I8 | 0,I5 | 0,I0 | 0,04 | 45 | 0,25 |
| 4 | 2,0 | 20 | 0,20 | 0,50 | 0,05 | 30 | 0,30 |
| 5 | I,9 | 24 | 0,40 | 0,50 | 0,06 | 30 | 0,40 |
| 6 | I,6 | 20 | 0,I0 | 0,I0 | 0,06 | 45 | 0,35 |
| 7 | I,3 | I2 | 0,I5 | 0,I5 | 0,05 | 45 | 0,3 |
| 8 | I,7 | I6 | 0,50 | 0,20 | 0,06 | 30 | 0,2 |
| 9 | I,8 | 20 | 0,I0 | 0,I5 | 0,05 | 45 | 0,I5 |

Указания. При решении задачи на равновесие тел с учетом трения скольжения необходимо придерживаться следующей последовательности:

I. Систему тел разбиваем на отдельные тела, при этом отбрасываем связи внешние и внутренние. Для внутренних учитываем, что они попарно равны и противоположно направлены согласно принципу равенства действия и противодействия.

2. Необходимо помнить, что в состоянии предельного равновесия сила $P$ минимальна, а сила сцепления /трения покоя/ между тормозной колодкой и барабаном определяется равенством

$$|F_{тр}| = f_0 \cdot N,$$

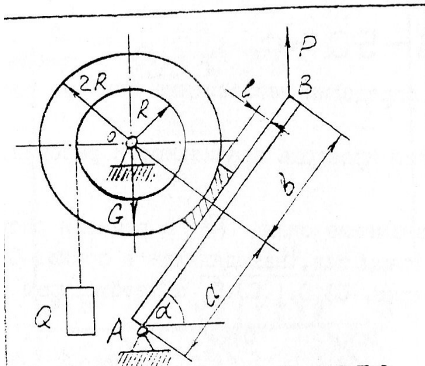
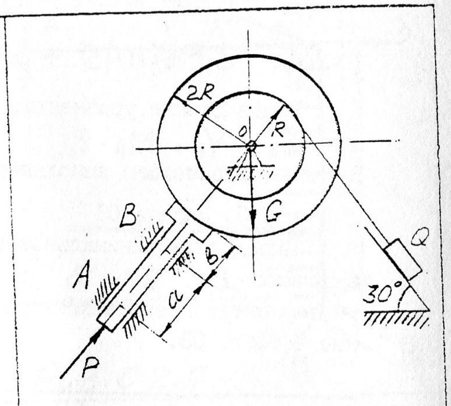



Рис.С3.0



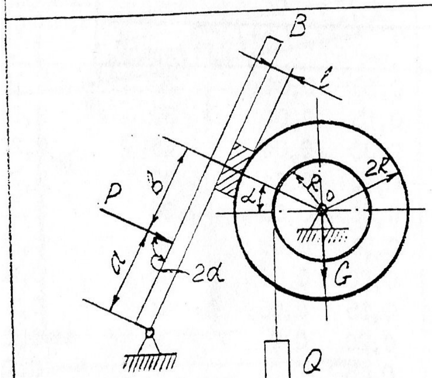
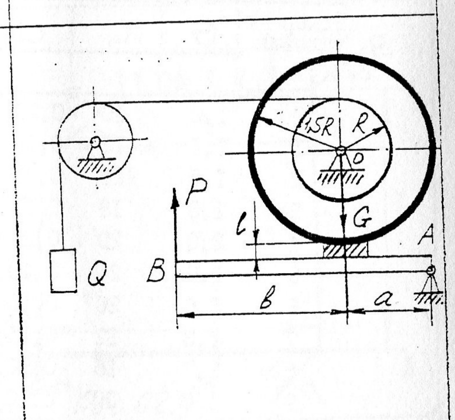




Рис.С3.2



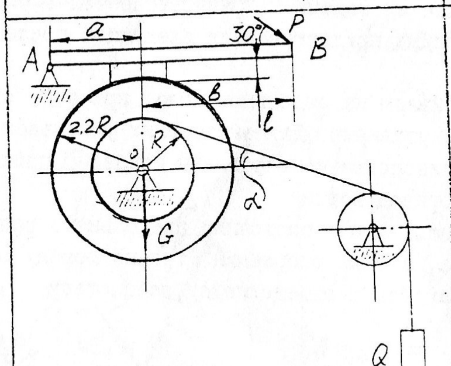
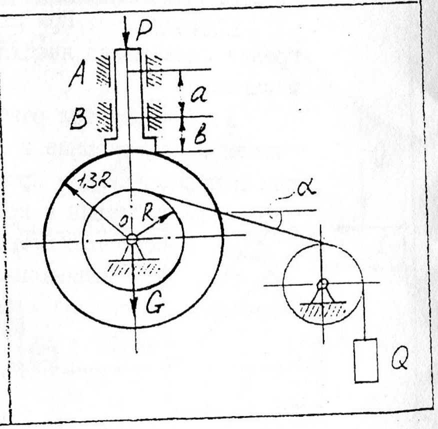




Рис.С3.4





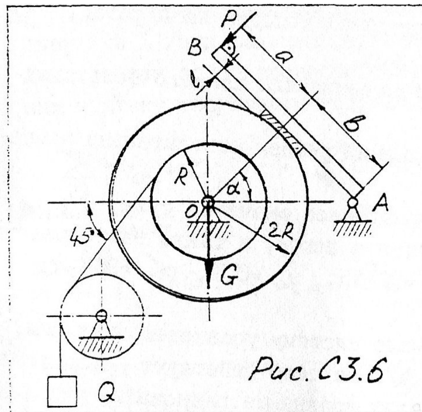




Рис. С3.6

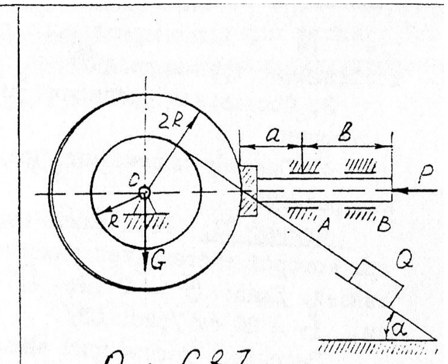



Рис. С3.7

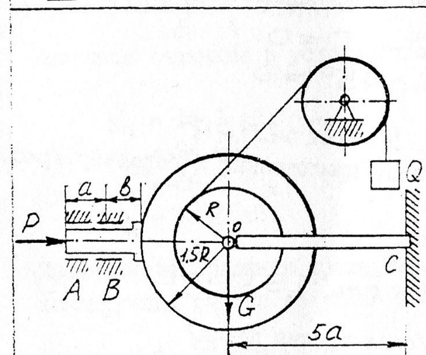



Рис. С3.8

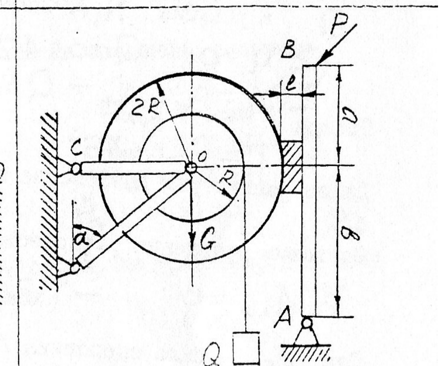



Рис.С3.8

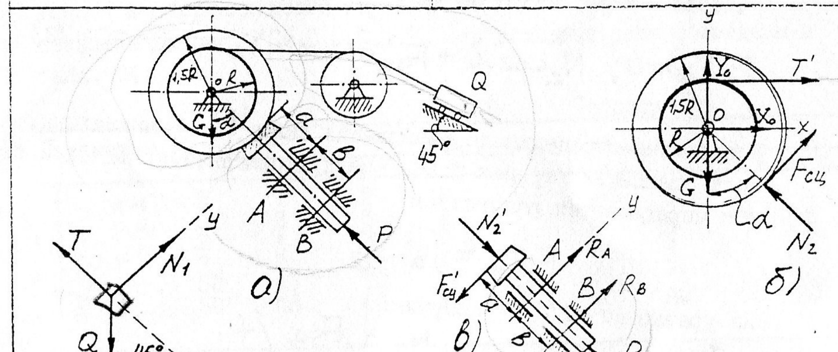



Рис. С3

где $N$ – сила нормального давления колодки на барабан, $f_0$ – коэффициент трения скольжения покоя.

3. Составляем уравнения равновесия для каждого тела в отдельности.

4. Систему полученных уравнений решаем относительно неизвестных реакций.

Пример С3. Определить минимальное значение силы $P_{min}$, при которой система тел находится в покое, а также найти реакции связей. Дано: $G$ = 2 кН, $Q$ =20 кН, $f_0$ =0,I, $\alpha$ =20°, $a$ =I0 см, $b$ = 20 см /рис. С3/.

Решение: рассмотрим вначале систему уравновешенных сил, приложенных к телу $Q$ / рис.С3,а/. На тело действуют сила тяжести $Q$ и реакция $N_1$. Составим уравнения равновесия указанных сил:

$$\sum X_i = 0; \quad Q\cos 45^\circ - T = 0 \;;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N_1 - Q\sin 45^\circ = 0$$

Отсюда

$$T = Q\cos 45^\circ; \qquad N = Q\sin 45^\circ$$

Далее рассмотрим равновесие сил, приложенных к барабану /рис.С3, б/.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum M_{io} = 0; \quad -TR + F_{сц}\cdot 1{,}5R = 0 \qquad /I/$$

Где $F_{сц}$ – сила сцепления /сила трения покоя/

$$\sum X_i = 0; \quad T + F_{сц}\cos\alpha - N_2\sin\alpha + X_o = 0; \quad /2/$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N_2\cos\alpha + F_{сц}\sin\alpha + Y_o - G = 0; \quad /3/$$

В состоянии предельного равновесия сила $P$ минимальна, а сила сцепления /трения покоя/ между тормозной колодкой и барабаном определяется равенством

$$F_{сц} = f_0 \cdot N_2 \qquad /4/$$

Из уравнений /I/-/4/ получим:

$$F_{сц} = T/1{,}5 \;; \qquad N_2 = F_{сц}/f$$

$$X_o = -T - F_{сц}\cos\alpha + N_2\sin\alpha; \quad Y_o = -N_2\cos\alpha - F_{сц}\sin\alpha + G;$$



Для определения минимального значения силы $P$ и реакций опор А и В /эти реакции перпендикулярны оси симметрии штока/. Так как трением здесь пренебрегаем, рассмотрим равновесие сил, приложенных к штоку тормозного устройства /рис.3.в/:

$$\sum M_{io} = 0; \quad F'_{сц}\cdot a + R_B \cdot b = 0 \;; \qquad /5/$$

$$\sum X_i = 0; \quad N_2 - P_{min} = 0 \;; \qquad /6/$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_A + R_B - F'_{сц} = 0 \qquad /7/$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$R_B = -\frac{F_{сц}a}{b}; \quad P_{min} = N_2' \;; \quad R_A = -R_B + F'_{сц}.$$

Учитывая заданные в условии числовые значения, получим:

| | |
|---|---|
| $N_1$ = I4,I кН; | $F_{сц}$ = 9,4 кН ; |
| $N_2$ = 94 кН; | $Y_o$ = 9,2 кН; |
| $Y_o$ =-89,6 кН; | $R_B$ =-4,7 кН; |
| $R_A$ = I4,I кН; | $P_{min}$ = 94 кН. |

Правильность решения проверяем, составляя уравнение для всей конструкции считая ее одним телом.

## 2.4. Задача С4.

Определить опорные реакции плоской фермы, а также найти усилия в стержнях левой /правой/ ее части. Схемы вариантов представлены на рис. С4.0...С.4.9, а исходные данные сведены в табл. С4.

Таблица С4

| Параметры | | Варианты | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | I | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 7 | 8 | 9 | I |
| $P_1$, | кН | 5 | 7 | 2 | 6 | 9 | I | 8 | 3 | I | 4 |
| $P_2$, | кН | 3 | 2 | 6 | I | 7 | 5 | 2 | 9 | 4 | 8 |
| $P_3$, | кН | 2 | 4 | 3 | 9 | 3 | 7 | 8 | I | 6 | 5 |
| $a$, | м | 2 | 3 | I | 4 | 5 | I | 3 | 2 | 5 | 4 |
| $\alpha$, | град | 60 | 45 | 30 | 30 | 60 | 45 | 45 | 60 | 45 | 3 |
| $\beta$ | град | 30 | 45 | 60 | 90 | 30 | 45 | 60 | 90 | I20 | I |

Рис. С4.0

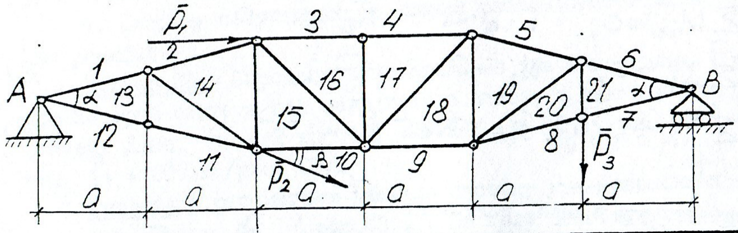



Рис. С4.1

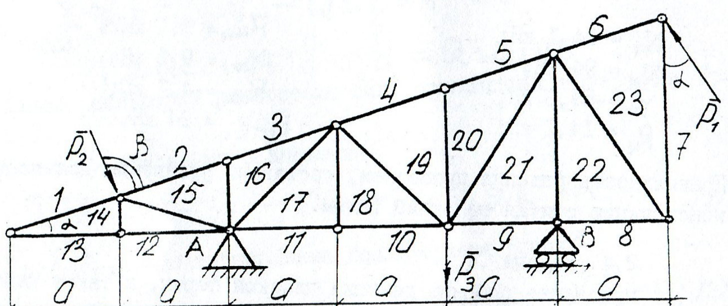



Рис. С4.2

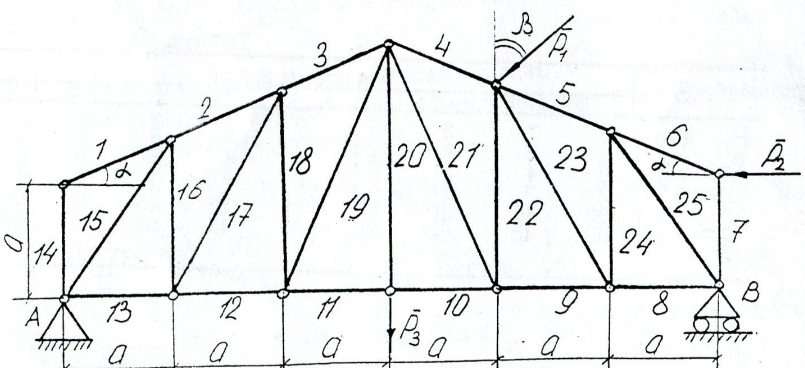





Рис. С4.3

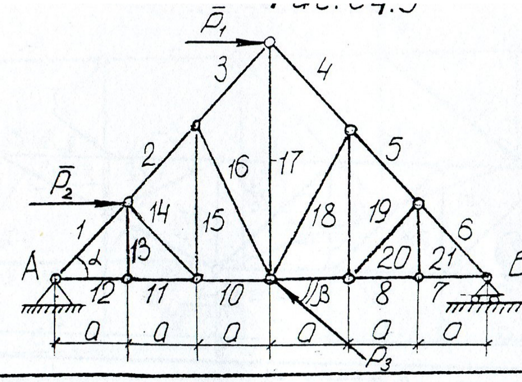



Рис. С4.4

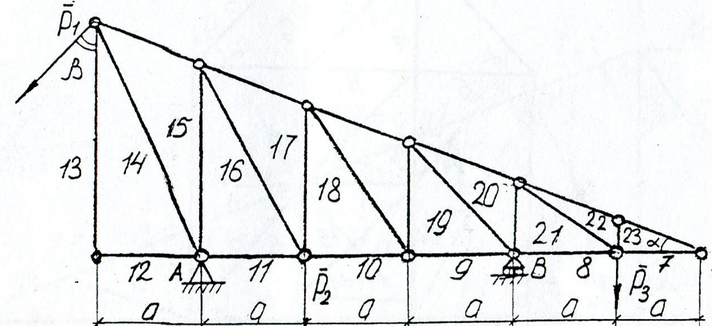



Рис. С4.5

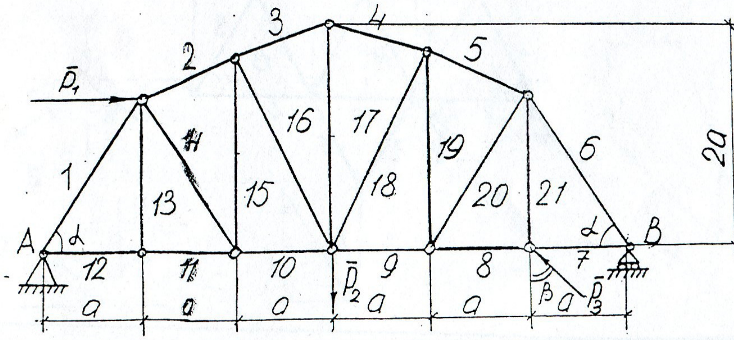


Рис. С4.6

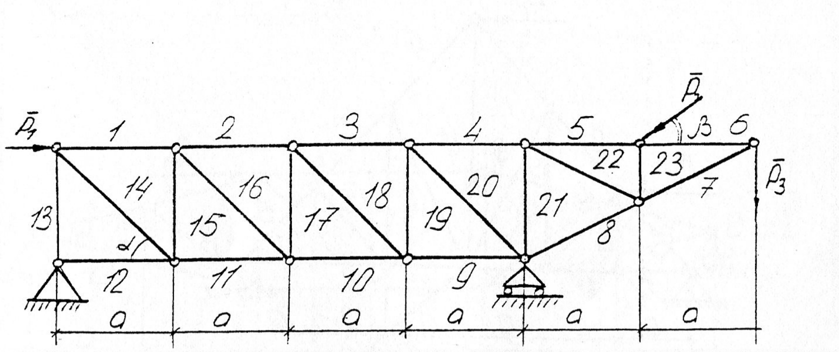


Рис. С4.7

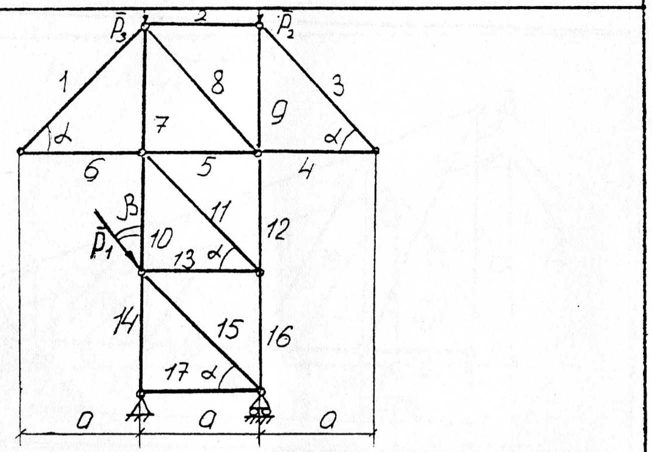


Рис. С4.8

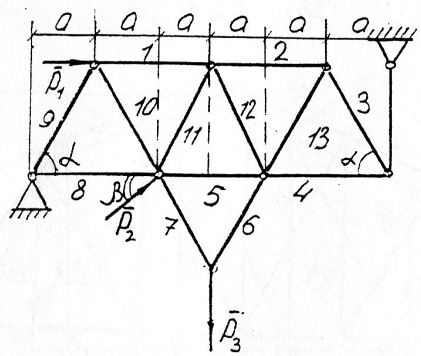
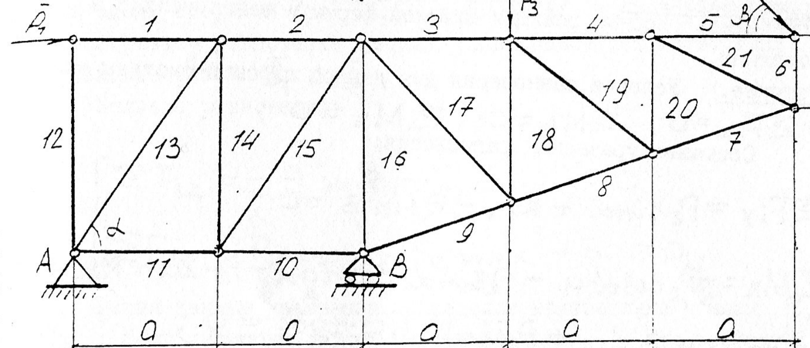


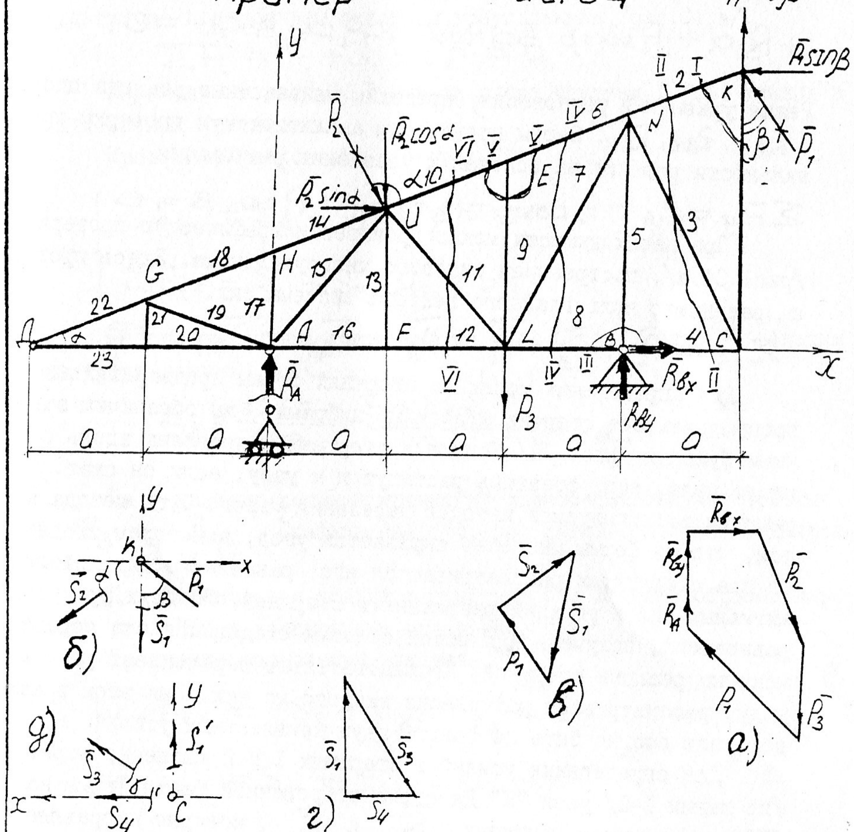


Рис. С4.9



Пример

Рис. С4



Пример задачи С4. Расчетная схема фермы показана на рис. С4. Определить опорные реакции плоской фермы и найти усилия в стержнях.

Решение. Условия равновесия для данной плоской системы сил

$$\Sigma F_{ix}=0; \quad \Sigma M_A=0; \quad \Sigma M_B=0;$$

Составим уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{ix}=P_2\sin\alpha+R_{Bx}-P_1\sin\beta=0;$$

$$\Sigma M_A=-P_2\cos\alpha\cdot a-P_2\sin\alpha\cdot 3a\cdot tg\alpha-P_3\cdot 2a+R_{By}\cdot 3a+$$
$$+P_1\cos\beta\cdot 4a+P_1\sin\beta\cdot 6a\cdot tg\alpha=0;$$

$$\Sigma M_B=-R_A\cdot 3a+P_2\cos\alpha\cdot 2a-P_2\sin\alpha\cdot 3a\cdot tg\alpha+$$
$$+P_3\cdot a+P_1\sin\beta\cdot 6a\,tg\alpha+P_1\cos\beta\cdot a=0.$$

Решая уравнения равновесия, определим неизвестные реакции опор $R_A$, $R_{Bx}$, $R_{By}$. Затем производим аналитическую проверку правильности решения на основании уравнения равновесия.

$$\Sigma F_{iy}=R_A-P_2\cos\alpha-P_3+R_{By}+P_1\cos\beta=0$$

При необходимости можно произвести графическую проверку /рис. С4.а/, построением силового многоугольника. Здесь проверяем равенство нулю главного вектора системы сил.

$$\Sigma\overline{F}_i=\overline{P}_2+\overline{P}_3+\overline{P}_1+\overline{R}_A+\overline{R}_{Bx}+\overline{R}_{By}=0$$

Для определения усилий в стержнях фермы предварительно пронумеруем все стержни арабскими цифрами. Узлы обозначим заглавными буквами /рис. С4/ Усилия в стержнях направляем вдоль стержня от узла, если стержень растянут и к узлу, если он сжат. При решении воспользуемся методом вырезания узлов. Суть метода в том, что из фермы мысленно вырезается узел, в котором сходятся два стержня, и рассматривается его равновесие под действием активных сил и реакций разрезанных стержней. Из двух уравнений равновесия, полученной плоской системы сходящихся сил определяем искомые реакции стержней. Последовательно переходя от узла к узлу, рассматриваем равновесие каждого из них. При этом в каждом узле должно быть не больше двух неизвестных усилий.

Для определения усилий в стержнях I и 2 мысленно вырезаем /по линии I-I/ узел "К" Действие отброшенной части фермы на узел "К" компенсируем усилиями $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, которые направляем от



узла вдоль стержней /рис.С4.б/ предполагая что они растянуты. Рассматриваем равновесие данного узла. Здесь действуют сила $\overline{F}$ и реакции связей $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$.

Условие равновесия:

$$\begin{cases}\Sigma F_{ix}=-P_1\cdot\sin\beta-S_2\cos\alpha=0;\\ \Sigma F_{iy}=P_1\cos\beta-S_2\sin\alpha-S_1=0.\end{cases}$$

Решая данные уравнения, определим неизвестные усилия $S_1$ $S_2$. Если получены отрицательные значения, то это говорит о том, данный стержень сжат.

Выполняем графическую проверку правильности полученных результатов построением силового треугольника /рис.С4,в/.

$$\Sigma\overline{F}_i=\overline{P}_1+\overline{S}_1+\overline{S}_2=0$$

Переходим к узлу С. В нем сходятся стержни I,3,4. Усилия в двух из них неизвестны.

Уравнения равновесия для узла С:

$$\begin{cases}\Sigma F_{ix}=S_4+S_3\cos\gamma=0\\ \Sigma F_{iy}=S_1'+S_3\cdot\sin\gamma=0\end{cases}$$

Рассчетная схема приведена на рис. С4,д. Угол $\gamma$ находим из треугольника $BNC$:

$$tg\gamma=\frac{l_5}{a}=\frac{5a\,tg\alpha}{a}=5tg\alpha$$

На основании решения уравнений равновесия получим искомые $S_3$ и $S_4$. Графическая проверка равновесия узла С показана на рис С4,г.

Для определения усилий в стержнях 5 и 8 целесообразно вырезать узел "В" и рассмотреть его равновесие.

Уравнение равновесия для узла "В"

$$\begin{cases}\Sigma F_{ix}=-S_8+R_{Bx}+S_4'=0;\\ \Sigma F_{iy}=S_5+R_{By}=0\end{cases}$$

Решая данные уравнения определим усилия $S_5$ и $S_8$. Затем производим графическую проверку по аналогии с предыдущим узлом:

$$\Sigma \bar{F}_i = \bar{S}_4 + \bar{S}_5 + \bar{S}_8 + \bar{R}_{By} + \bar{R}_{Bx} = 0$$

Далее последовательно рассматриваем равновесия узлов $N$, $E$, $L$ и т.д.

Для проверки правильности определения усилий в стержнях фермы воспользуемся другим способом - методом сечений /метод Риттера/. Мысленно разрезаем ферму на две части и заменяем действие отброшенной части искомыми усилиями стержней. При этом число разрезанных стержней не должно превышать трех. Для рассматриваемой части фермы составляем 3 уравнения равновесия в виде уравнений моментов относительно точек, где пересекаются линии действия двух неизвестных усилий. /точек Риттера/.

Например, для проверки усилий в стержнях 2,3,4 проводим сечение II - II через эти стержни и рассмотрим равновесие правой части фермы. Система сил - плоская произвольная. Неизвестных - 3 /$S_2$, $S_3$, $S_4$ /. Условия равновесия - $\Sigma M_N = 0$; $\Sigma M_D = 0$; $\Sigma M_C = 0$

Уравнения равновесия.

$$\Sigma M_N = P_1 \cos\beta \cdot a + P_1 \sin\beta \cdot h_2 - S_4 \cdot h_4 = 0;$$

$$\Sigma M_D = P_1 \cos\beta \cdot 6a + P_1 \sin\beta \cdot 6a \cdot tg\alpha + S_3 h_3 = 0,$$

$$\Sigma M_C = P_1 \sin\beta \cdot 6a \cdot tg\alpha + S_2 \cdot 6a \cdot \sin\alpha = 0$$

Решая систему уравнений получим искомые усилия $S_2$, $S_3$, $S_4$.

Построив силовой многоугольник для рассмотренной части фермы, проверяем равенство нулю главного вектора приложенной к ней системы сил, т.е. замкнутость силового многоугольника.

Для определения усилий в стержнях 6, 7, 8 проводим сечение IУ - IУ и т.д.

## 2.5. Задача С5.

Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены /сварены/ под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром /или подпятником/ в точке А, цилиндрическим шарниром /подшипником/ в точке В и невесомым стержнем I /рис.С5.0-С5.7/



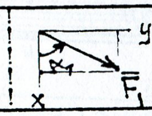
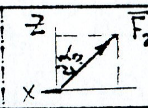
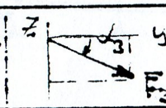
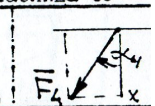
или же двумя подшипниками в точках А и В и двумя невесомыми стержнями I и 2 /рис.С5.8 С5.9/; все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

Размеры плит указаны на рисунках; вес большей плиты $P_1$ = 5 кН, вес меньшей плиты $P_2$ = 3 кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей /плоскость ХУ горизонтальная/. На плиты действуют пара сил с моментом $M$ =4 кН·м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С5; при этом силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_4$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости ХУ, сила $\bar{F}_2$ - в плоскости, параллельной $XZ$ и сила $\bar{F}_3$ в плоскости, параллельной $YZ$. Точки приложения сил /Д, Е, Н, К/ находятся в углах или в серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках А и В и реакцию стержня /стержней/. При подсчетах принять $a$ =0,6 м.

**Указания.** Задача С5 - на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При ее решении учесть, что реакция сферического шарнира /подпятника/ имеет три составляющие /по всем трем координатным осям/, а реакция цилиндрического шарнира /подшипника/ - две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира /подшипника/. При вычислении момента силы $\bar{F}$ часто удобно разложить ее на две составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$ параллельные координатным осям /или на три/; тогда по теореме Вариньона, $m_x(\bar{F}) = m_x(\bar{F}') + m_x(\bar{F}'')$ и т.д.

Таблица С5

| Силы |  | |  | |  | |  | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Номер условия | $F_1$ = 6 кН | | $F_2$ =8 кН | | $F_3$ =10 кН | | $F_4$ 12 кН | |
| | точка приложения | $\alpha_1$ град | точка приложения | $\alpha_2$ град | точка приложения | $\alpha_3$ град | точка приложения | $\alpha_4$ град |
| 0 | Е | 60 | Н | 30 | - | - | - | -- |
| I | - | - | Д | 60 | Е | 30 | - | - |
| 2 | - | - | - | - | К | 60 | Е | 30 |
| 3 | К | 30 | - | - | Д | 0 | - | - |
| 4 | - | - | Е | 30 | - | - | Д | 60 |
| 5 | Н | 0 | К | 60 | - | - | - | - |
| 6 | - | - | Н | 90 | Д | 30 | - | - |
| 7 | - | - | - | - | Н | 60 | К | 90 |
| 8 | Д | 30 | - | - | К | 0 | - | - |
| 9 | - | - | Д | 90 | - | - | Н | 30 |

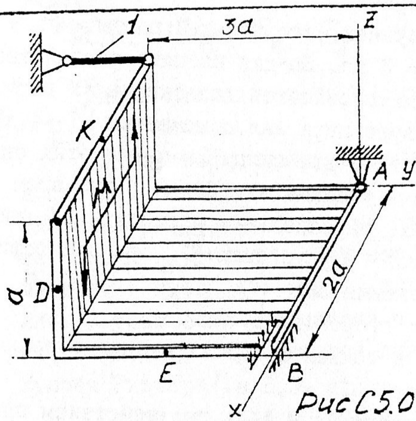
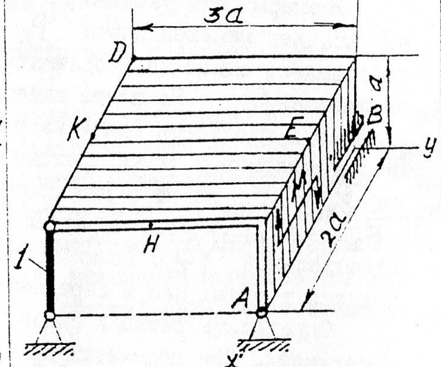



Рис С5.0

Рис С5.1



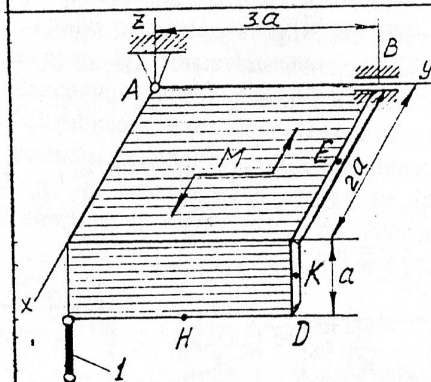
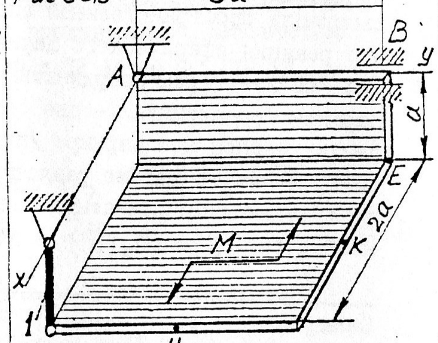




Рис С5.2

Рис С5.3



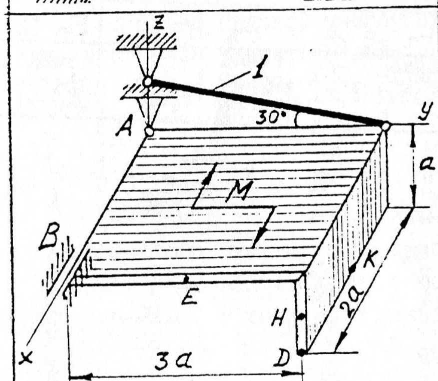
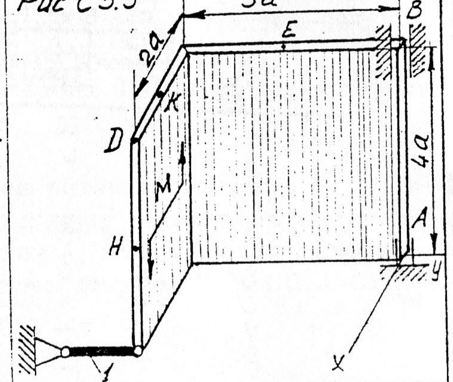




Рис С5.4

Рис С5.5



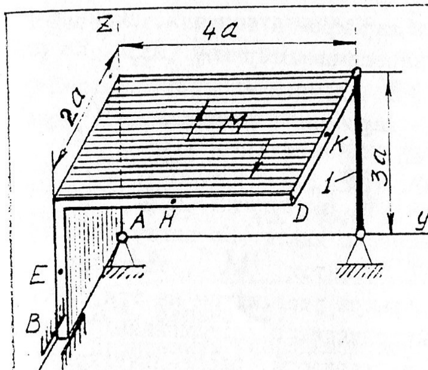




Рис С5.6

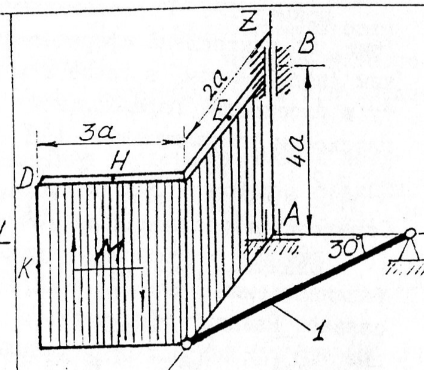



Рис С5.7

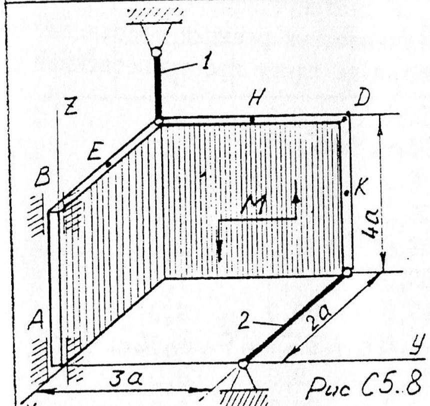



Рис С5.8

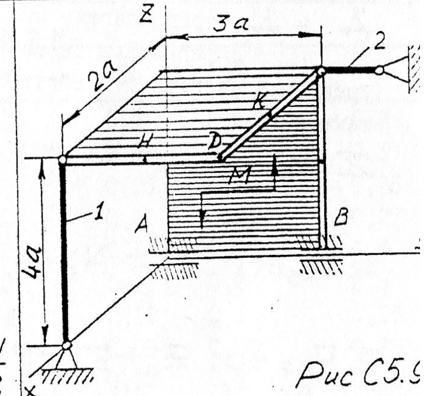



Рис С5.9

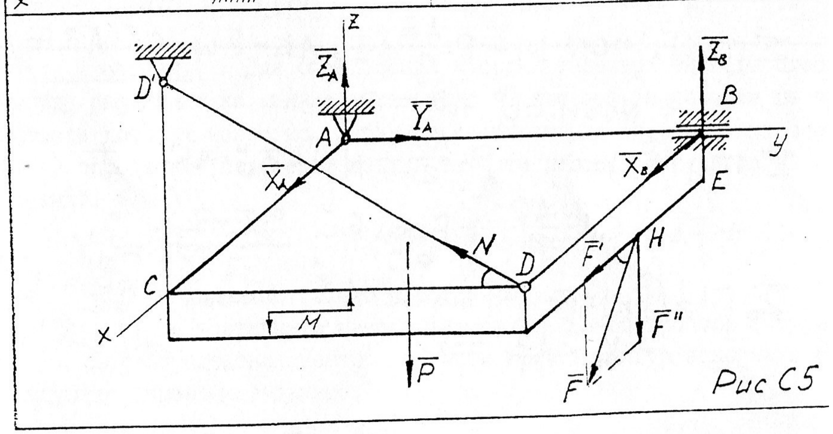



Рис С5

Пример С5. Горизонтальная прямоугольная плита весом $P$ /рис. С5 закреплена сферическим шарниром в точке А, цилиндрическим /подшипником/ в точке В и невесомым стержнем $ДД'$. На плиту в плоскости, параллельной $XZ$, действует сила $\bar{F}$, а в плоскости, параллельной $YZ$ – пара сил с моментом $M$.

Да н о : $P$ =3 кН, $F$ = 8 кН, $M$ = 4 кН·м, $\alpha$ = 60°, $AC$ = 0,8 м, $AB$ = 1,2 м, $BE$ = 0,4 м, $EH$ = 0,4 м.

Определить: реакции опор $A$ и $B$ и стержня $ДД'$.

Решение. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы $\bar{P}$, $\bar{F}$ и пара с моментом $M$, также реакции связей. Реакцию сферического шарнира расположим на три составляющие $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$, цилиндрического /подшипника/ на две составляющие $\bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$ / в плоскости, перпендикулярной оси подшипника/; реакцию $\bar{N}$ стержня направляем вдоль стержня от $Д$ к $Д'$, предполагая, что он растянут.

Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\sum F_{kx}=0;\quad X_A+X_B+F\cos 60^\circ=0; \qquad /1/$$

$$\sum F_{ky}=0;\quad Y_A-N\cos 30^\circ=0; \qquad /2/$$

$$\sum F_{kz}=0;\quad Z_A+Z_B-P+N\sin 30^\circ-F\sin 60^\circ=0; \qquad /3/$$

$$\sum m_x(\bar{F}_k)=0;\quad M-P\cdot\frac{AB}{2}+Z_B\cdot AB-F\sin 60^\circ\cdot AE+ \qquad /4/$$
$$+N\sin 30^\circ\cdot AB=0;$$

$$\sum m_y(\bar{F}_k)=0;\quad P\cdot\frac{AC}{2}-N\sin 30^\circ\cdot AC+ \qquad /5/$$
$$+F\sin 60^\circ\cdot\frac{AC}{2}-F\cos 60^\circ\cdot BE=0;$$

$$\sum m_z(\bar{F}_k)=0;\quad -F\cos 60^\circ\cdot AB-N\cos 30^\circ\cdot AC- \qquad /6/$$
$$-X_B\cdot AB=0.$$



Для определения моментов силы $\bar{F}$ относительно осей разлагаем ее на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные осям $X$ и $Z$ / $F'=F\cos\alpha$, $F''=F\sin\alpha$ /, применяем теорему Вариньона /см.Указания/. Аналогично можно поступить при определении моментов реакции $\bar{N}$.

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин, решив эти уравнения, найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A$ = 3,4 кН; $Y_A$ =5,1 кН; $Z_A$ =4,8 кН;
$X_B$ = -7,4 кН; $Z_B$ = 2,1 кН; $N$ = 5,9 кН.

## 2.6. Задача С6.

Определить координаты центра тяжести плоской фигуры /рис. С6.0..С6.9/. Исходные данные сведены в таблицу С6.

Таблица С6

| Номер условия | Размеры, м | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $R$ | $r$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| 0 | 0,4 | 0,2 | 0,08 | 0,1 | 0,06 | 0,3 |
| 1 | 0,6 | 0,3 | 0,16 | 0,2 | 0,1 | 0,5 |
| 2 | 0,8 | 0,4 | 0,2 | 0,05 | 0,16 | 0,65 |
| 3 | 0,3 | 0,15 | 0,08 | 0,01 | 0,04 | 0,25 |
| 4 | 0,5 | 0,2 | 0,12 | 0,1 | 0,08 | 0,4 |
| 5 | 0,7 | 0,3 | 0,08 | 0,16 | 0,2 | 0,5 |
| 6 | 0,2 | 0,08 | 0,04 | 0,12 | 0,1 | 0,16 |
| 7 | 0,4 | 0,15 | 0,1 | 0,06 | 0,08 | 0,28 |
| 8 | 0,5 | 0,2 | 0,16 | 0,12 | 0,2 | 0,46 |
| 9 | 0,6 | 0,25 | 0,2 | 0,16 | 0,12 | 0,5 |

Указания. Для определения координат центра тяжести плоскую фигуру разбивают на минимальное число $n$ частей, положение центров тяжести которых известно. Выбирают расположение координатных осей. Затем определяют положение центра тяжести плоской фигуры из выражений:

$$X_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n}F_i};\qquad y_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n}F_i},$$

где: $F_i$ – площадь $i$ -ой простой фигуры;
$x_i$, $y_i$ – координаты центра тяжести $i$ -ой простой фигуры.

Для определения центров тяжести простых фигур используются следующие справочные данные:

Пример С5. Горизонтальная прямоугольная плита весом $P$ /рис. С5 закреплена сферическим шарниром в точке А, цилиндрическим /подшипником/ в точке В и невесомым стержнем $ДД'$. На плиту в плоскости, параллельной $XZ$, действует сила $\bar{F}$, а в плоскости, параллельной $YZ$ – пара сил с моментом $M$.

Дано: $P$ =3 кН, $F$ = 8 кН, $M$ = 4 кН·м, $\alpha$ = 60°, $AC$ = 0,8 м, $AB$ = 1,2 м, $BE$ = 0,4 м, $EH$ = 0,4 м.

Определить: реакции опор $A$ и $B$ и стержня $ДД'$.

Решение. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы $\bar{P}$, $\bar{F}$ и пара с моментом $M$, также реакции связей. Реакцию сферического шарнира расположим на три составляющие $X_A$, $Y_A$, $Z_A$, цилиндрического /подшипника/ на две составляющие $X_B$, $Z_B$ / в плоскости, перпендикулярной оси подшипника/; реакцию $N$ стержня направляем вдоль стержня от $Д$ к $Д'$, предполагая, что он растянут.

Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\sum F_{kx}=0; \quad X_A+X_B+F\cos 60^\circ=0; \qquad /1/$$

$$\sum F_{ky}=0; \quad Y_A-N\cdot\cos 30^\circ=0; \qquad /2/$$

$$\sum F_{kz}=0; \quad Z_A+Z_B-P+N\sin 30^\circ-F\sin 60^\circ=0; \qquad /3/$$

$$\sum m_x(\bar{F}_k)=0; \quad M-P\cdot\frac{AB}{2}+Z_B\cdot AB-F\sin 60^\circ\cdot AB+ \qquad /4/$$
$$+N\sin 30^\circ\cdot AB=0;$$

$$\sum m_y(\bar{F}_k)=0; \quad P\cdot\frac{AC}{2}-N\sin 30^\circ\cdot AC+ \qquad /5/$$
$$+F\sin 60^\circ\cdot\frac{AC}{2}-F\cos 60^\circ\cdot BE=0;$$

$$\sum m_z(\bar{F}_k)=0; \quad -F\cos 60^\circ\cdot AB-N\cos 30^\circ\cdot AC- \qquad /6/$$
$$-X_B\cdot AB=0.$$



Для определения моментов силы $\bar{F}$ относительно осей разлагаем ее на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные осям $X$ и $Z$ / $F'=F\cos\alpha$, $F''=F\sin\alpha$ /, применяем теорему Вариньона /см.Указания/. Аналогично можно поступить при определении моментов реакции $\bar{N}$.

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин, решив эти уравнения, найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A$ = 3,4 кН; $Y_A$ =5,1 кН; $Z_A$ =4,8 кН;
$X_B$ = -7,4 кН; $Z_B$ = 2,1 кН; $N$ = 5,9 кН.

2.6. Задача С6.

Определить координаты центра тяжести плоской фигуры /рис. С6.0..С6.9/. Исходные данные сведены в таблицу С6.

Таблица С6

| Номер условия | Размеры, м | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $R$ | $r$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| 0 | 0,4 | 0,2 | 0,08 | 0,1 | 0,06 | 0,3 |
| 1 | 0,6 | 0,3 | 0,16 | 0,2 | 0,1 | 0,5 |
| 2 | 0,8 | 0,4 | 0,2 | 0,05 | 0,16 | 0,65 |
| 3 | 0,3 | 0,15 | 0,08 | 0,01 | 0,04 | 0,25 |
| 4 | 0,5 | 0,2 | 0,12 | 0,1 | 0,08 | 0,4 |
| 5 | 0,7 | 0,3 | 0,08 | 0,16 | 0,2 | 0,5 |
| 6 | 0,2 | 0,08 | 0,04 | 0,12 | 0,1 | 0,16 |
| 7 | 0,4 | 0,15 | 0,1 | 0,06 | 0,08 | 0,28 |
| 8 | 0,5 | 0,2 | 0,16 | 0,12 | 0,2 | 0,46 |
| 9 | 0,6 | 0,25 | 0,2 | 0,16 | 0,12 | 0,5 |

Указания. Для определения координат центра тяжести плоскую фигуру разбивают на минимальное число $n$ частей, положение центров тяжести которых известно. Выбирают расположение координатных осей. Затем определяют положение центра тяжести плоской фигуры из выражений:

$$X_c=\frac{\sum_{i=1}^{n} F_i\cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}; \qquad y_c=\frac{\sum_{i=1}^{n} F_i\cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i},$$

где: $F_i$ – площадь $i$ -ой простой фигуры;
$x_i$, $y_i$ – координаты центра тяжести $i$ -ой простой фигуры.

Для определения центров тяжести простых фигур используются следующие справочные данные:

а/ Центр тяжести площади кругового сектора расположен на его оси симметрии: его расстояние от центра окружности определяется по формуле

$$X_{c_i} = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

где: $R$ - радиус окружности, $\alpha$ - половина угла сектора;

**б/ центр тяжести полукруга радиуса $R$ находится от диаметра на расстоянии $X_{c_i}$ =0,424 $R$ и расположен на оси симметрии. Эта формула вытекает из предыдущей, если вместо** $\alpha$ подставить $\frac{\pi}{2}$ ;

в/ центр тяжести четверти круга расположен на ее оси симметрии и его расстояние от любого из ограничивающих фигуру радиусов выражается величиной

$$X_{c_i} = 0{,}424\, R;$$

г/ центр тяжести площади кругового сегмента расположен на его оси симметрии и его расстоянии от центра окружности определяется по формуле

$$X_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha}.$$

Пример С6. Определить координаты центра тяжести плоской фигуры /рис. С6,а/. Дано: $X_1$ = 0,15 м, $y_1$ =0,2 м; $F_1$ =0.12 м$^2$, $X_2$ = 0,467 м, $y_2$ = 0,133 м, $F_2$ = 0,1 м$^2$, $X_3$ =0,085 м, $y_3$ = 0,2 м, $F_3$ =-0,0628 м$^2$.

Решение. Выбираем систему отсчета т.е. оси $X$ , $Y$ . Затем разбиваем плоскую фигуру на 3 части, для которых легко определяются площади $F_i$ и координаты центров тяжести $X_i$ , $y_i$ .

В данном случае в качестве таких частей принимаем прямоугольник, треугольник и половину круга /рис. С6,б/. Площадь половины круга, отрицательная, т.к. она вырезана из прямоугольника.

Окончательно определяем координаты центра тяжести заданной фигуры

$$X_c = \frac{F_1 X_1 + F_2 X_2 + F_3 X_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{0{,}12\cdot 0{,}15 + 0{,}1\cdot 0{,}467 - 0{,}0628\cdot 0{,}085}{0{,}15 + 0{,}1 - 0{,}0628} = 0{,}378 \text{ м},$$

$$Y_c = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{0{,}12\cdot 0{,}2 + 0{,}1\cdot 0{,}133 - 0{,}0628\cdot 0{,}2}{0{,}15 + 0{,}1 - 0{,}0628} = 0{,}157 \text{ м}$$



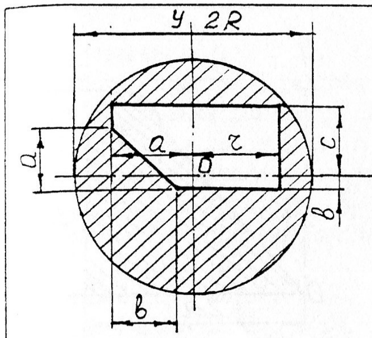


Рис.С6.0

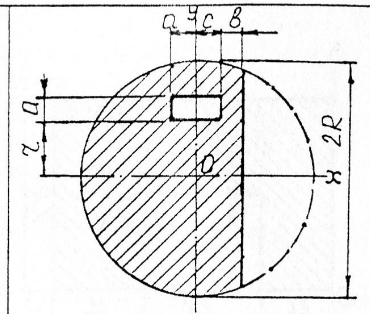


Рис. С6.1

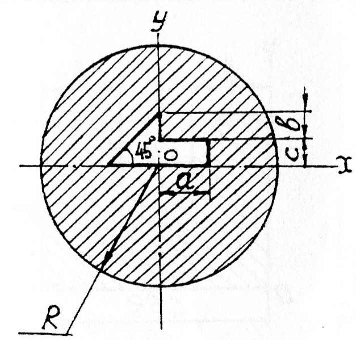


Рис. С6.2

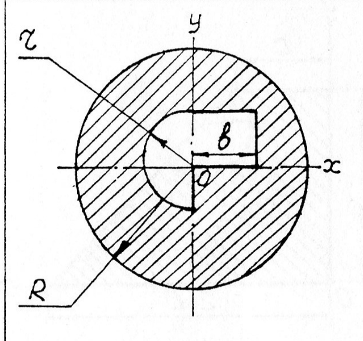


Рис. С6.3

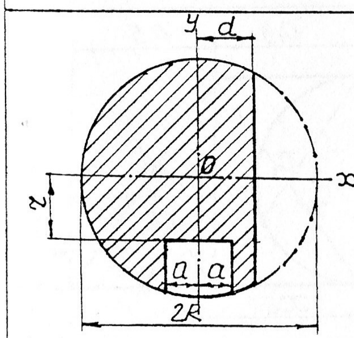


Рис. С6.4

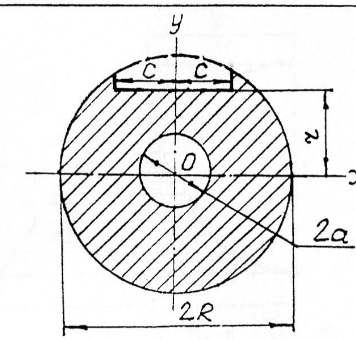


Рис. С6.5

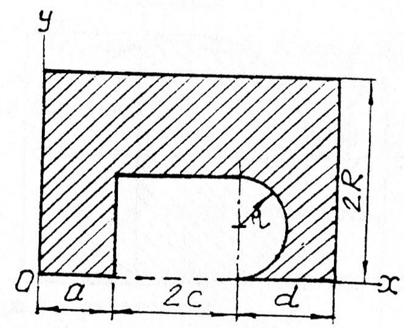



Рис. С6.6

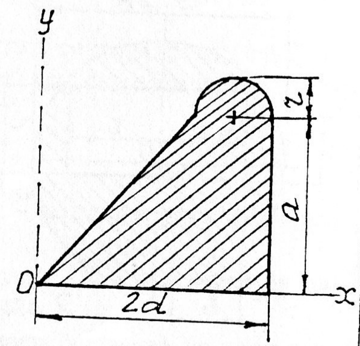



Рис. С6.7

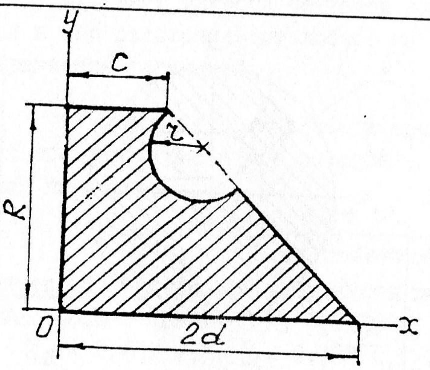



Рис. С6.8

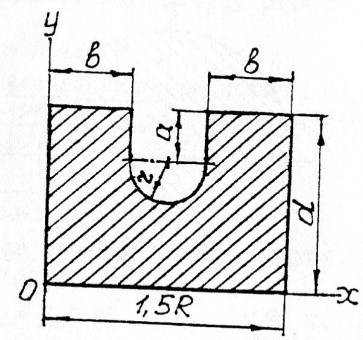



Рис. С 6.9.

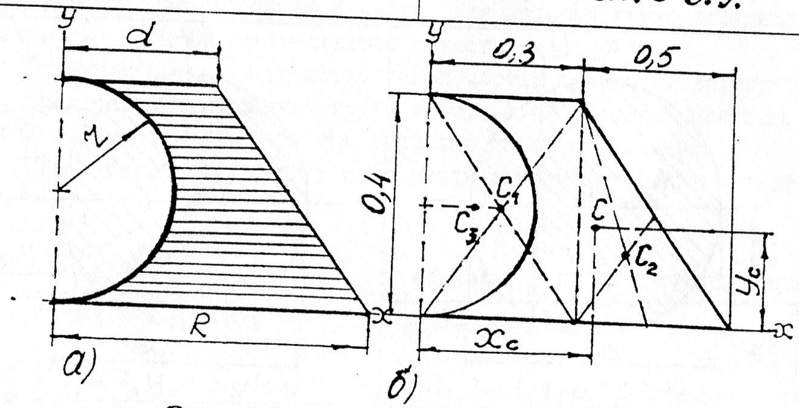



Рис. С6.



СОДЕРЖАНИЕ