Бесплатно

Министерство высшего и среднего специального
образования УССР

Днепропетровский ордена Трудового Красного Знамени
горный институт им. Артема

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО РАЗДЕЛУ "КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ"

Днепропетровск ДГИ
1981

Министерство высшего и среднего специального
образования УССР

Днепропетровский ордена Трудового Красного Знамени
горный институт им. Артема

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО РАЗДЕЛУ
"КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ"

(Кафедра теоретической и
строительной механики)

Днепропетровск ДГИ
1981

I. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

I.I. Система с одной степенью свободы

В положении равновесия потенциальная энергия консервативной системы $\Pi(q_1, q_2, \dots q_n)$ имеет экстремум, т.е. если при $q_i = \alpha_i$ консервативная система находится в равновесии, то

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_{q_i=\alpha_i} = 0; \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{I.I}$$

Равновесное положение консервативной системы с голономными идеальными связями является устойчивым, если потенциальная энергия системы имеет в этом положении изолированный минимум (теорема Лагранжа - Дирихле).

Для системы с одной степенью свободы условиями устойчивости положения равновесия будет

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_{q=\alpha} = 0; \qquad \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_{q=0} > 0. \tag{I.2}$$

Приближенное выражение потенциальной энергии консервативной системы с одной степенью свободы (вблизи положения равновесия $q=\alpha$) с точностью до малых второго порядка имеет вид:

$$\Pi \approx \frac{1}{2} c (q - \alpha)^2, \tag{I.3}$$

причем при условии устойчивости положения равновесия

$$c = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_{q=\alpha} > 0. \tag{I.4}$$

Если на систему с одной степенью свободы наложены стационарные связи, то ее кинетическая энергия будет иметь вид:

$$T = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2. \tag{I.5}$$

Для q, близких к положению равновесия $q = \alpha$,

$$T \approx \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \tag{I.6}$$

где

$$a = A(\alpha). \tag{I.7}$$

В общем случае уравнения Лагранжа II рода имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}; \; (i=1,\dots n), \tag{I.8}$$

где n - число степеней свободы системы; Q_i - обобщенная сила, соответствующая действию активных непотенциальных сил; Φ - функция рассеивания энергии.

В случае, когда Q_i и Φ равны нулю, подставляя (I.3) и (I.6) в (I.8) для системы с одной степенью свободы ($i = I$) получим

$$a\ddot{q} + cq = 0. \tag{I.9}$$

При $c > 0$ система совершает незатухающие гармонические колебания с периодом

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{c}{a}} \tag{I.10}$$

по закону

$$q = \hat{C} \sin(kt + \beta), \tag{I.II}$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{a}}$ - круговая частота; $\hat{C}$, β - произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

При наличии сил сопротивления

$$F_i = -\mu_i \dot{q}_i\ , \tag{I.12}$$

где μ_i - коэффициент сопротивления.

Обобщенная сила сопротивления при малых q и $\dot{q}$ имеет вид:

$$Q_{сопр} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = -\mu \dot{q}, \tag{I.13}$$

где

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i q_i^2}{2}; \qquad (I.14)$$

Φ - функция рассеивания

В этом случае при $i=1$ (система с одной степенью свободы),

$$\Phi = \frac{1}{2}\mu\dot{q}^2$$

и вместо (I.9) получим

$$a\ddot{q} + \mu\dot{q} + cq = 0. \qquad (I.15)$$

В зависимости от соотношения коэффициентов a, μ, c будем иметь различные виды решения. При

$$\frac{c}{a} - \frac{\mu^2}{4a^2} > 0 \qquad (I.16)$$

система совершает затухающие гармонические колебания по закону

$$q = e^{-bt}(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt), \qquad (I.17)$$

где

$$b = \frac{\mu}{2a}; \qquad k = \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{\mu^2}{4a^2}}. \qquad (I.18)$$

Коэффициенты C_1 и C_2 определяются из начальных условий.

При наличии активных сил, действующих на систему, одним из наиболее часто встречающихся случаев является гармоническое возмущение по закону

$$Q_1 = Q_1^0 \sin pt. \qquad (I.19)$$

Подставляя (I.19) в уравнения (I.8) аналогично (I.15) для $i=1$, получим

$$a\ddot{q} + \mu\dot{q} + cq = Q^0 \sin pt. \qquad (I.20)$$

Общее решение такого уравнения состоит из суммы двух слагаемых: общего решения однородного уравнения в виде (I.17) и частного

решения неоднородного уравнения, определяющего вынужденные колебания системы по закону

$$q_{вын} = H \sin(pt - \beta), \qquad (I.21)$$

где

$$H = \frac{Q^0}{a\sqrt{\left[\frac{c}{a} - p^2\right]^2 + \frac{\mu^2}{a^2}p^2}}; \qquad (I.22)$$

$$tg\beta = \frac{\mu p}{a\left[\frac{c}{a} - p^2\right]}. \qquad (I.23)$$

Таким образом, общее решение уравнения (I.20) имеет вид:

$$q = e^{-bt}(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) + H \sin(pt - \beta). \qquad (I.24)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из начальных условий.

При решении задач на определение положения устойчивого равновесия консервативных систем с одной степенью свободы следует придерживаться следующей последовательности.

1. Выбрать обобщенную координату системы.
2. Составить выражение для потенциальной энергии системы.
3. Найти положение равновесия системы. Для этого следует приравнять нулю первую производную от потенциальной энергии системы по обобщенной координате и найти корни полученного уравнения.
4. Пользуясь теоремой Лагранжа-Дирихле, исследовать найденные положения равновесия на устойчивость. В положении устойчивого равновесия системы ($q = \alpha$) должно выполняться условие

$$C = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right) > 0.$$

Если $C < 0$, то по теореме Ляпунова равновесие неустойчиво.

Если по условиям задачи требуется, кроме того, найти период собственных колебаний системы вблизи положения устойчивого равновесия, то далее необходимо:

а) определить значение инерциального коэффициента a, равного множителю при $\frac{1}{2}\dot{q}^2$ в приближенном выражении кинетической энергии системы (I.6);

б) пользуясь формулой (I.I0) найти значение периода τ.

Если требуется определить закон движения, тогда необходимо:

– при отсутствии рассеивания энергии построить решение в виде (I.II) и найти постоянные τ и β по начальным условиям;

– при наличии диссипации определить коэффициент затухания, равный множителю при $\frac{1}{2}\dot{q}^2$ в приближенном выражении для функции рассеивания (I.I4) и определить произвольные постоянные.

При наличии внешнего гармонического возмущения построить решение в виде (I.24).

I.2. Малые колебания системы с несколькими степенями свободы

Исследование малых колебаний консервативной системы с несколькими степенями свободы вблизи ее положения устойчивого равновесия удобно проводить, используя уравнения Лагранжа II рода.

При нахождении кинетической энергии следует пользоваться приближенной формулой

$$T \approx \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \tag{2.1}$$

где коэффициенты a_{ij} – постоянные величины, удовлетворяющие соотношениям $a_{ij}=a_{ji}$ при $i,j=1,2,\ldots,n$.

Если в положении равновесия системы $q_i=0$, то потенциальная энергия с точностью до малых второго порядка может быть представлена в виде

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}q_iq_j, \tag{2.2}$$

где коэффициенты

$$c_{ij} = \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_i\partial q_j}\right)_{q=0}. \tag{2.3}$$

Для системы с двумя степенями свободы будем иметь

$$T \approx \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2\right), \tag{2.4}$$

где

$$a_{11}>0;\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0; \tag{2.5}$$

$$\Pi \approx \frac{1}{2}\left(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2\right). \tag{2.6}$$

При условии устойчивости положения равновесия

$$c_{11}>0;\quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0. \tag{2.7}$$

При решении задач на малые колебания системы с двумя степенями свободы необходимо придерживаться следующей последовательности:

1. Выбрать обобщенные координаты системы.
2. Составить выражение для потенциальной энергии системы с точностью до малых величин второго порядка (2.6).
3. Составить выражение для кинетической энергии системы с точностью до малых величин второго порядка (2.4).
4. Составить уравнение Лагранжа II рода.
5. Найти частные решения полученной системы дифференциальных уравнений в форме

$$q_1 = A\sin(Kt+\alpha); \qquad q_2 = B\sin(Kt+\alpha), \tag{2.8}$$

где A, B, α, K – постоянные, подлежащие определению.

Подставляя (2.8) в исходные дифференциальные уравнения, построим систему уравнений относительно A и B

$$\left.\begin{aligned} A\left(c_{11}-K^2a_{11}\right)+B\left(c_{12}-K^2a_{12}\right)&=0;\\ A\left(c_{12}-K^2a_{12}\right)+B\left(c_{22}-K^2a_{22}\right)&=0, \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

которая имеет ненулевое решение только когда ее определитель равен нулю, т.е.

$$\Delta(K^2) = \begin{vmatrix} C_{11} - K^2 a_{11} & C_{12} - K^2 a_{12} \\ C_{21} - K^2 a_{21} & C_{22} - K^2 a_{22} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.10)$$

Этот определитель называется "частотным определителем", а выражение (2.10) — характеристическим уравнением.

При выполнении условий (2.5), (2.7) его корни будут вещественны.

6. Найти, используя (2.10), главные частоты K_1 и K_2.

7. Найти коэффициенты распределения

$$\beta_1 = \frac{B_1}{A_1} = -\frac{C_{12} - K_1^2 a_{12}}{C_{22} - K_1^2 a_{22}}; \qquad \beta_2 = \frac{B_2}{A_2} = -\frac{C_{12} - K_2^2 a_{12}}{C_{22} - K_2^2 a_{22}}, \quad (2.11)$$

где A_1, B_1 – значения постоянных, соответствующих частоте K_1;
A_2, B_2 – значения постоянных, соответствующих частоте K_2.

8. Написать закон изменения каждой обобщенной координаты в виде

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(K_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(K_2 t + \alpha_2); \\ q_2 &= A_1 \beta_1 \sin(K_1 t + \alpha_1) + A_2 \beta_2 \sin(K_2 t + \alpha_2). \end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

9. Определить, используя начальные условия, постоянные.

Ниже приведены примеры построения решений для некоторых характерных задач как с использованием метода Лагранжа, так и других общих теорем и законов динамики.

2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача № I.

Однородный стержень AB длиной ℓ, весом P_1, концом A укреплен шарнирно. К концу B стержня прикреплен нерастяжимый трос, перекинутый через блок C и несущий груз $P_2 = P_1/(2\sqrt{3})$.

Принимая, что $AC = AB$ и пренебрегая трением, определить угол φ в интервале $(0 - \pi)$, при котором стержень будет находится в положении устойчивого равновесия, а также период его малых колебаний около этого положения.

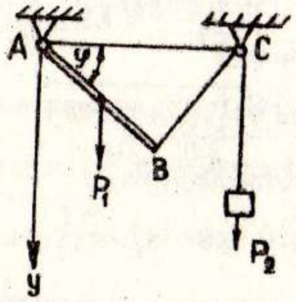

Рис. I

Решение.

Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол φ. Найдем потенциальную энергию системы

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2,$$

где

$$\Pi_1 = -P_1 y_1 + const = -P_1 \frac{\ell}{2} \sin\varphi + const;$$

$$\Pi_2 = -P_2 y_2 + const.$$

Так, учитывая, что $AC = AB$ и

$$y_2 = L - 2\ell \sin\frac{\varphi}{2},$$

где L – длина троса, найдем

$$\Pi = -P_1 \frac{\ell}{2} \sin\varphi + 2\ell P_2 \sin\frac{\varphi}{2} + const.$$

Определим угол φ, при котором система находится в равновесии.

В соответствии с (I.I)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -P_1\frac{\ell}{2}\cos\varphi + \ell P_2 \cos\frac{\varphi}{2} = 0.$$

Отсюда с учетом значений P_1 и P_2 получим

$$\sqrt{3}\cos\varphi - \cos\frac{\varphi}{2} = 0.$$

Заменив $\cos\varphi/2$ выражением

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)}$$

и решая это уравнение, получим значения

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{2}; \qquad \cos\varphi_2 = -\frac{1}{3}.$$

Интервалу $(0-\pi)$ соответствует первое решение

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{3}.$$

Исследуем устойчивость найденного положения равновесия.

Имеем

$$C = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{3}} = P_1\frac{\ell}{2}\sin\frac{\pi}{3} - \frac{\ell P_2}{2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{5\ell P_1}{8\sqrt{3}} > 0,$$

т.е. данное положение равновесия устойчиво.

Вычислим кинетическую энергию системы.

$$T = T_1 + T_2 = \frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{P_2 V_2^2}{2g}.$$

Здесь

$$J_1 = \frac{P_1\ell^2}{3g}; \quad \omega_1 = \dot{\varphi}; \quad V_2 = \dot{y}_2 = -\ell\dot{\varphi}\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Таким образом,

$$T = \frac{P_1\ell^2\dot{\varphi}^2}{12\sqrt{3}g}\left(2\sqrt{3} + 3\cos^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

Сравнивая это выражение с (I.5), находим

$$A(\varphi) = \frac{P_1\ell^2}{6\sqrt{3}g}\left[2\sqrt{3} + 3\cos^2\frac{\varphi}{2}\right].$$

Согласно (I.7)

$$a = A\left(\frac{\pi}{3}\right) = P_1\ell^2(8\sqrt{3}+9)/(24\sqrt{3}g).$$

По (I.I0) находим период колебаний

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{8\sqrt{3}+9}{15}\cdot\frac{\ell}{g}} = 7{,}75\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Согласно (I.I) закон движения будет иметь вид

$$\varphi = D\sin\left(\sqrt{\frac{15g}{\ell(8\sqrt{3}+9)}}\,t + \beta\right),$$

где D и β определяются из начальных условий.

Задача № 2.

Тонкий однородный стержень AB длиной ℓ, весом P шарнирно закреплен в точке A и удерживается в вертикальном положении горизонтальной пружиной жесткостью C_1, прикрепленной в точке O, причем, $AO = \frac{\ell}{3}$. Другой конец пружины закреплен неподвижно. Когда стержень находится в вертикальном положении, пружина не напряжена. При движении стержня на каждый его элемент dS действует сила сопротивления $d\bar{F} = -\beta\bar{V}dS$. Считая коэффициент β постоянным, определить значение жесткости C_1, при котором вертикальное положение стержня будет положением устойчивого равновесия. Найти также значение коэффициента β, при котором стержень будет совершать малые затухающие колебания около вертикального положения.

Решение.

Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол φ отклонения стержня от вертикали. Составим выражение для потенциальной энергии системы.

Имеем

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2,$$

где Π_1 - потенциальная энергия силы тяжести; Π_2 - потенциальная энергия поля упругих сил.

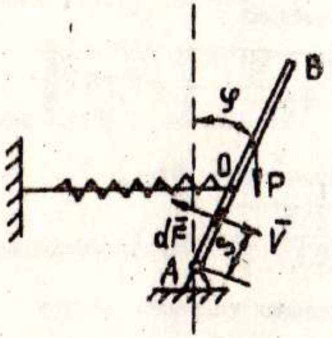

Рис. 2

Приняв за нулевую эквипотенциальную поверхность горизонтальную плоскость, проходящую через точку A, будем иметь

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} P\ell \cos\varphi;$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} c_1 \Delta^2,$$

где Δ - изменение длины пружины по сравнению с ее недеформированной длиной.

Следовательно

$$\Pi = \frac{1}{2} P\ell\cos\varphi + \frac{1}{2} c_1 \Delta^2.$$

Ограничиваясь малыми второго порядка, положим

$$\cos \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}; \qquad \Delta \approx \frac{\ell}{3}\varphi.$$

В соответствии с этим

$$\Pi = \frac{1}{18} c_1 \ell^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} P\ell\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right).$$

Приравняв производную $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}$ нулю, получим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{c_1 \ell^2 \varphi}{9} - \frac{1}{2} P\ell\varphi = 0.$$

Отсюда видно, что при $\varphi = 0$ стержень находится в положении равновесия. Чтобы это положение было положением устойчивого равновесия, необходимо выполнение условия

$$c = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi=0} = \frac{1}{9} c_1 \ell^2 - \frac{1}{2} P\ell > 0.$$

Таким образом, при вертикальном положении стержень будет находиться в положении устойчивого равновесия, если

$$c_1 > \frac{9P}{2\ell}.$$

Составим далее выражение для кинетической энергии стержня

$$T = \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2 = P\ell^2\dot{\varphi}^2/(6g) = \frac{1}{2} a\dot{\varphi}^2,$$

откуда

$$a = P\ell^2/(2g).$$

Определим функцию рассеивания.

Согласно (I.12)

$$\mu = \beta ds.$$

По (I.14), заменяя суммирование интегрированием, получим

$$\Phi = \frac{1}{2}\beta \int_0^{\ell} V^2 ds.$$

Так как

$$V = s\dot{\varphi},$$

то

$$\Phi = \frac{1}{2}\beta\dot{\varphi}^2 \int_0^{\ell} s^2 ds = \frac{1}{6}\beta\ell^3\dot{\varphi}^2.$$

Сравнивая с (I.I4), находим

$$\mathcal{M} = \frac{1}{3}\beta l^3.$$

По (I.I5) теперь получим

$$\frac{Pl^2}{3g}\ddot{\varphi} + \frac{1}{3}\beta l^3\dot{\varphi} + \frac{1}{18}(2C_1 l^2 - 9Pl)\varphi = 0.$$

Вводя обозначения

$$2n = \frac{1}{P}\beta g l; \qquad K^2 = \frac{1}{6Pl}g(2C_1 l - 9P),$$

будем иметь

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + K^2\varphi = 0.$$

Это дифференциальное уравнение движения стержня вблизи вертикального положения равновесия. Движение будет носить колебательный характер, если $n < K$.

Подставив в это неравенство значения n и K, получим

$$\beta < \frac{1}{gl}\sqrt{\frac{1}{3l}2gP(2C_1 l - 9P)}.$$

Задача № 3.

Однородный цилиндр радиуса r и веса P, который может вращаться вокруг вертикальной оси OO_1, охватывает невесомая нить. Концы нити связаны с концами A и C горизонтальных пружин AB и CD, имеющих одинаковую жесткость, равную C_1. Конец B пружины AB закреплен неподвижно, а конец D пружины CD связан с ползуном, совершающим прямолинейное движение по закону

$$S = b\sin\omega t,$$

где b - малая величина. В начальный момент пружины находятся в недеформированном состоянии, а цилиндр - в покое. Пренебрегая сопротивлением, определить амплитуду вынужденных колебаний цилиндра.

Решение.

Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угловую координату φ цилиндра. Составим выражение для кинетической энергии цилиндра

$$T = \frac{1}{2}J_z\dot{\varphi}^2 = \frac{Pr^2\dot{\varphi}^2}{4g}.$$

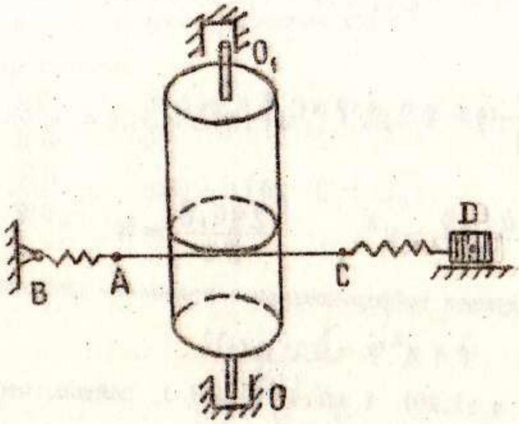

Рис. 3

Потенциальная энергия пружин будет определяться выражением

$$\Pi = \frac{1}{2}C_1\Delta_1^2 + \frac{1}{2}C_1\Delta_2^2 = \frac{1}{2}C_1(\Delta_1^2 + \Delta_2^2),$$

где $\Delta_{1,2}$ - приращение длин пружин AB и CD по сравнению с их недеформированной длиной.

Ограничиваясь малыми второго порядка, будем иметь

$$\Delta_1 \approx R\varphi; \quad \Delta_2 \approx S - K\varphi = b\sin\omega t - r\varphi$$

и, следовательно,

$$\Pi = \frac{C_1}{2}\left[r^2\varphi^2 + (b\sin\omega t - r\varphi)^2\right].$$

Подставив значения T и Π в уравнения Лагранжа (I.8), при Φ и Q равных нулю (влияние вынуждающего воздействия вошло в выражение потенциальной энергии), получим

$$\frac{Pr^2}{2g}\ddot{\varphi} = -2C_1 r^2\varphi + C_1 r b \sin\omega t$$

или

$$\frac{Pr}{2g}\ddot{\varphi} + 2C_1 r\varphi = C_1 b \sin\omega t.$$

Обозначив

$$\frac{4C_1 g}{P} = K^2; \qquad \frac{2gC_1 b}{Pr} = h,$$

будем иметь следующее дифференциальное уравнение движения цилиндра:

$$\ddot{\varphi} + K^2\varphi = h\sin\omega t.$$

Сравнивая с (I.20) (здесь ($M \equiv 0$), найдем, что амплитуда вынужденных колебаний (I.2I) будет равна

$$\varphi_0 = \frac{h}{K^2 - \omega^2} = \frac{2gC_1 b}{r(4C_1 g - P\omega^2)}.$$

Задача № 4.

Два груза M_1 и M_2 с одинаковыми массами m образуют систему как показано на рисунке. Определить частоты главных вертикальных колебаний грузов, если пружины имеют одинаковую жесткость, равную C. Массой блока, пружин и нити, а также сопротивлением пренебречь. Найти уравнение движения грузов, если из положения равновесия грузу M_2 была сообщена начальная скорость V_0, направленная вниз.

Решение.

Система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем абсолютные вертикальные перемещения S_1 и S_2 грузов из положения статического равновесия. Составим выражение для потенциальной энергии системы

$$\Pi = mgs_1 - mgs_2 + \frac{1}{2}c(s_1 + \Delta_1)^2 + \frac{1}{2}c(s_2 - s_1 + \Delta_2)^2 + const,$$

где Δ_1 и Δ_2 статические удлинения пружин.

Отсюда находим

$$\frac{\partial\Pi}{\partial s_1} = mg + c(s_1 + \Delta_1) - c(s_2 - s_1 + \Delta_2);$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial s_2} = -mg + c(s_2 - s_1 + \Delta_2).$$

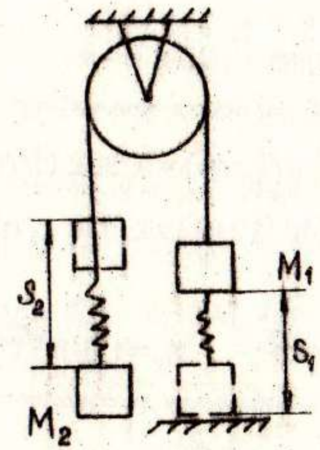

Рис. 4

В положении равновесия $S_1 = S_2 = 0$.

Согласно (I.I) $\frac{\partial\Pi}{\partial q_i} = 0$ при $S_1 = S_2 = 0$.

Отсюда получаем $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = mg/C$.

Далее находим

$$c_{11}=\frac{\partial^2\Pi}{\partial s_1^2}\Big|_{s=0}=2c;\quad c_{12}=-\frac{\partial^2\Pi}{\partial s_1\partial s_2}\Big|_{s=0}=-c;\quad c_{22}=\frac{\partial^2\Pi}{\partial s_2^2}\Big|_{s=0}=c.$$

Составим выражение кинетической энергии системы

$$T=\frac{1}{2}m\dot{s}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{s}_2^2.$$

Сравнивая последнее выражение с (2.4), находим

$$a_{11}=m;\quad a_{12}=0;\quad a_{22}=m.$$

Таким образом, согласно (2.10) уравнением частот будет

$$\Delta(K^2)=(2c-K^2m)(c-K^2m)-c^2=0$$

или

$$K^4-3K^2c/m+(c/m)^2=0.$$

Отсюда находим квадраты частот главных колебаний

$$K_1^2=(3-\sqrt{5})\,c/(2m)=0{,}382\,c/m;$$

$$K_2^2=(3+\sqrt{5})\,c/(2m)=2{,}618\,c/m.$$

Следовательно

$$K_1=0{,}618\sqrt{c/m};\qquad K_2=1{,}618\sqrt{c/m}.$$

По (2.11) находим коэффициенты распределения амплитуд

$$\beta_1=\frac{B_1}{A_1}=\frac{c}{c-0{,}382\,cm/m}=-1{,}618;$$

$$\beta_2=\frac{B_2}{A_2}=\frac{c}{c-2{,}618\,cm/m}=-0{,}618.$$

В соответствии с (2.12)

$$S_1=A_1\sin(K_1t+\alpha_1)+A_2\sin(K_2t+\alpha_2);$$

$$S_2=\beta_1A_1\sin(K_1t+\alpha_1)+\beta_2A_2\sin(K_2t+\alpha_2).$$

При $t=0;\ S_1=S_2=0;\ \dot{S}_1=0;\ \dot{S}_2=V_0,$

следовательно

$$0=A_1\sin\alpha_1+A_2\sin\alpha_2;$$

$$0=\beta_1A_1\sin\alpha_1+\beta_2A_2\sin\alpha_2;$$

$$0=K_1A\cos\alpha_1+K_2A_2\cos\alpha_2;$$

$$V_0=\beta_1K_1A_1\cos\alpha_1+\beta_2K_2A_2\cos\alpha_2.$$

Отсюда

$$\alpha_1=\alpha_2=0;\quad A_1=V_0/(K_1(\beta_1-\beta_2))=0{,}725\,V_0\sqrt{m/c};$$

$$A_2=V_0/(K_2(\beta_2-\beta_1))=-0{,}276\,V_0\sqrt{m/c}.$$

Таким образом, уравнения движения грузов будут иметь вид

$$S_1=0{,}725\,V_0\sqrt{\frac{m}{c}}\sin K_1t-0{,}276\,V_0\sqrt{\frac{m}{c}}\sin K_2t;$$

$$S_2=1{,}17\,V_0\sqrt{\frac{m}{c}}\sin K_1t+0{,}17\,V_0\sqrt{\frac{m}{c}}\sin K_2t,$$

где K_1 и K_2 определены ранее.

Задача № 5.

Невесомый стержень на одном конце имеет горизонтальную ось вращения O, на другом точечную массу m, к которой при помощи пружины подвешена такая же масса. Стержень удерживается в горизонтальном положении вертикальной пружиной, прикрепленной в середине стержня. Определить частоты главных колебаний системы, считая жесткости пружин одинаковыми и равными C.

Решение.

Система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем абсолютные вертикальные перемещения грузов B и C. Составим выражение для потенциальной энергии системы.

Так как A по условию делит отрезок OB пополам, следовательно $2\delta = s_1$. Тогда

$$\Pi = \frac{c\delta_1^2}{2} + \frac{c(s_2-s_1)^2}{2} - mgs_1 - mgs_2 + const =$$

$$= \frac{1}{8}cs_1^2 + \frac{1}{2}c(s_2-s_1)^2 - mg(s_1+s_2) + const.$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial\Pi}{\partial s_1} = \frac{1}{4}cs_1 - c(s_2-s_1) - mg;$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial s_2} = c(s_2-s_1) - mg;$$

$$c_{11} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial s_1^2} = \frac{5}{4}c; \qquad c_{22} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial s_2^2} = c;$$

$$c_{21} = c_{12}\ \frac{\partial^2\Pi}{\partial s_1\partial s_2} = -c_1.$$

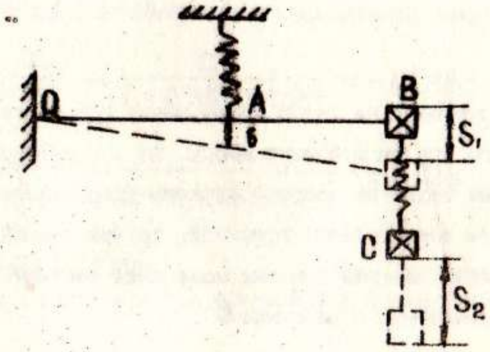

Рис. 5

Составим выражение для кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2}m\dot{s}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}_2^2.$$

Сравнивая с (2.4) запишем

$$a_{11} = m; \quad a_{22} = m; \quad a_{12} = a_{21} = 0.$$

Таким образом, уравнение частот будет иметь вид

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} \frac{5}{4}c - k^2m & -c \\ -c & c - k^2m \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{4}c - k^2m\right)(c - k^2m) - c^2 =$$

$$= mk^4 - \frac{9}{4}cmk^2 + \frac{1}{4}c^2 = 0.$$

Решая это биквадратное уравнение относительно k^2 находим

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2m^2}\left[\frac{9}{4}cm \pm \sqrt{\frac{81}{16}c^2m^2 - c^2m^2}\right].$$

Откуда

$$k_1 = 1{,}46\sqrt{\frac{c}{m}}; \qquad k_2 = 0{,}34\sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Задача № 6.

Вибрационная машина, служащая для создания колебаний, состоит из двух дисков, насаженных эксцентрично на две параллельные оси; вес каждого диска Q, вес всей машины P. Эксцентриситет обоих дисков одинаков и равен r. При начальной установке диски образуют с горизонталью углы α_1 и α_2. Оба диска вращаются в противоположные стороны с угловой частотой ω. Машина закреплена болтами на упругой станине жесткости C. Пренебрегая весом станины, определить амплитуду ее вынужденных колебаний.

Решение.

Введем в рассмотрение материальную систему "корпус машины –

диски". Нулевым положением системы назовем такое ее положение, при котором главный вектор внешних сил системы равен нулю. Момент прохождения дисками положений α_1, α_2 будем считать начальным моментом времени. Через $x, \omega t, -\omega t$ обозначим отклонения от нулевого положения соответственно корпуса и каждого из дисков. В момент t вертикальная координата центра тяжести системы (относительно нулевого положения)

$$x_ц = \frac{1}{P+2Q}[Px + Q(x + const + r\sin(\alpha_1+\omega t)) + Q(x + c + + r\sin(\alpha_2 - \omega t))].$$

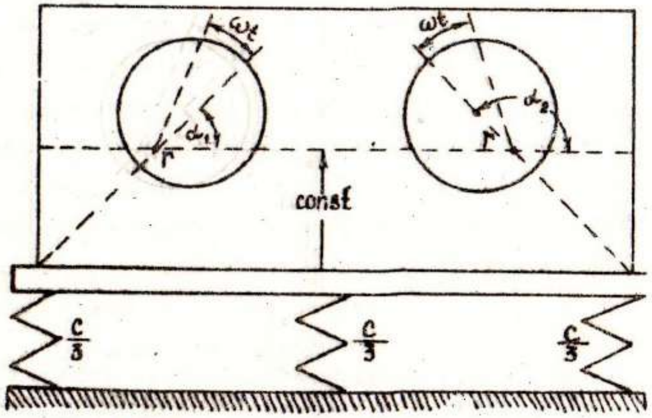

Рис. 6

Воспользуемся теоремой о движении центра масс системы

$$-cx = \frac{1}{g}(P+2Q)\ddot{x}_ц = \frac{1}{g}(P+2Q)\ddot{x} - \frac{1}{g}r\omega^2[\sin(\alpha_1+\omega t)+\sin(\alpha_2-\omega t)]$$

или

$$\frac{1}{g}(P+2Q)\ddot{x} + cx = \frac{2}{g}Qr\omega^2\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cdot\cos\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\omega t\right). \quad (I)$$

Вынужденные колебания корпуса машины ищем в виде частного решения уравнения (I).

$$x_ц = A\cos\left(\omega t + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right). \quad (2)$$

Подчиняем функцию (2) уравнению (I)

$$A\left[c - \frac{1}{g}(P+2Q)\omega^2\right] = \frac{2}{g}Qr\omega^2\sin(\alpha_1+\alpha_2),$$

откуда

$$A = 2Qr\sin\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)/\left[\frac{cg}{\omega^2} - (P+2Q)\right].$$

Задача № 7.

Вертикальный двигатель весом Q закреплен на фундаменте с площадью основания S, удельная жесткость грунта равна λ. Длина кривошипа двигателя r, длина шатуна l, угловая частота вращения вала ω, вес поршня и неуравновешенных частей, совершающих возвратно-поступательное движение, равен P, вес фундамента G; кривошип считать уравновешенным при помощи противовеса. Массой шатуна пренебречь. Определить вынужденные колебания фундамента.

Указание. При расчетах пренебречь всеми членами, содержащими малое отношение r/l в степенях выше первой.

Решение.

Свяжем с фундаментом относительную систему отсчета. В этой системе координата центра тяжести ползуна –

$$x_в = r\cos\varphi + l\cos\psi = r\cos\varphi + l\sqrt{1-\sin^2\psi} = r\cos\varphi + l\sqrt{1-(r/l\sin\varphi)^2} = r\cos\varphi + l\left(1 - \frac{r^2}{2l^2}\sin^2\varphi + \dots\right).$$

Следовательно, координата центра тяжести неуравновешенных частей, совершающих относительное возвратно-поступательное движение при $r/l \ll 1$, равна

$$x = x_0 + const = r\cos\varphi + l\left(1 - \frac{r^2}{2l^2}\sin^2\varphi\right) + const.$$

Если в качестве начального момента времени выбрать момент прохождения кривошипом оси Ox, то в виду равномерного вращения кривошипа

$$\varphi = \omega t; \quad x = r\cos\omega t + l\left(1 - \frac{r^2}{2l^2}\sin^2\omega t\right) + const. \qquad (1)$$

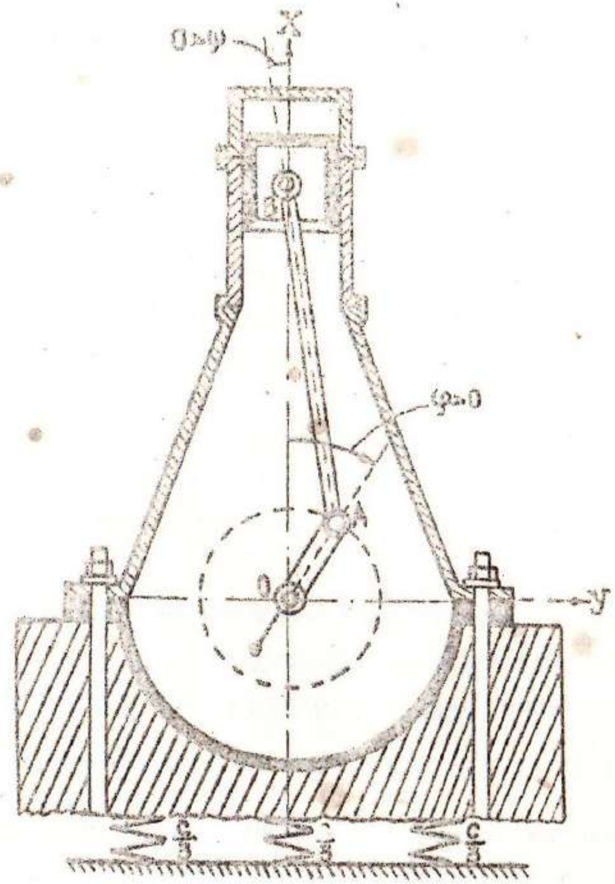

Рис. 7

Введем в рассмотрение материальную систему "дизель-фундамент". В абсолютных координатах введем нулевое положение материальной системы, как положение, при котором главный вектор внешних сил системы равняется нулю. Пусть ξ – смещение фундамента из его нулевого положения. Заданными силами, действующими на материальную систему, называются силы, не зависящие от выбора системы отсчета. В нашей задаче это силы $-C\xi$, где $C = S\lambda$ – коэффициент жесткости грунта. Чтобы составить уравнение колебаний материальной системы в относительных координатах, нужно, как известно, к заданным силам присоединить силы инерции материальных частиц, вызванные переносным и поворотным ускорением каждой из этих частиц. Составим уравнение кинетостатики в относительных координатах

$$-C\xi - \frac{1}{g}(Q + G)\ddot{\xi} - \frac{P}{g}\ddot{x} = 0;$$

$$\ddot{\xi} + K^2\xi = \frac{P}{Q + G}(-\ddot{x}),$$

где

$$K^2 = \frac{Cg}{Q + G} = \frac{S\lambda g}{Q + G}.$$

Учитывая (I), получим

$$\ddot{\xi} + K^2\xi = \frac{Pr\omega^2}{Q + G}\cos\omega t + \frac{r}{l}\,\frac{Pr\omega^2}{Q + G}\cos 2\omega t. \qquad (2)$$

Вынужденные колебания фундамента находим как частное решение уравнения (2)

$$\xi_2 = \frac{Pr\omega^2}{(Q + G)(K^2 - \omega^2)}\cos\omega t + \frac{r}{l}\,\frac{Pr\omega^2}{(Q + G)(K^2 - 4\omega^2)}\cos 2\omega t$$

при условии $K \neq \omega$; $K \neq 2\omega$.

Задача № 8.

Рассчитать вес фундамента под вертикальный двигатель, весящий $Q = 10$ т, таким образом, чтобы амплитуда вынужденных вертикальных колебаний фундамента не превосходила 0,25 мм. Площадь основания фундамента $S = 100$ м^2, удельная жесткость грунта, находящегося под фундаментом, $\lambda = 50$ т/м^3. Длина кривошипа двигателя $r = 30$ см, длина шатуна $l = 180$ см, угловая частота вала $\omega = 240$ об/мин, вес поршня и других неуравновешенных частей, совершающих возвратно-поступательное движение $P = 250$ кг; кривошип считать уравновешенным при помощи противовеса. Массой шатуна пренебречь.

Решение.

Пользуемся решением задачи № 7: при $P = 0{,}25$ т; $Q = 10$ т; $r = 30$ см; $\omega = 8\pi$ c^{-1}; $S\lambda = 50\ \frac{т}{см}$

$$\xi_r = \frac{Pr\omega^2}{(Q+G)(K^2-\omega^2)}\cos\omega t + \frac{r}{l}\,\frac{Pr\omega^2}{(Q+G)(K^2-4\omega^2)}\cos 2\omega t.$$

$$\xi_r = \frac{Pr\omega^2}{(Q+G)(K^2-\omega^2)}\cos\omega t \quad \text{при} \quad \left(\frac{r}{l} \ll 1\right),$$

откуда

$$A = \left|\xi_r\right|_{max} = \frac{Pr\omega^2}{(Q+G)(K^2-\omega^2)},$$

где

$$K^2 = \frac{S\lambda g}{Q+G}; \qquad A = 0{,}025 \text{ см}.$$

Значит

$$\frac{Pr}{A} = \left|\frac{S\lambda g}{\omega^2} - Q - G\right|$$

или

$$\frac{0{,}25\cdot 30}{0{,}025} = \left|\frac{50\cdot 981}{64\pi^2} - 10 - G\right|,$$

или

$$G = \frac{0{,}25\cdot 30}{0{,}025} + \frac{50\cdot 981}{64\pi^2} - 10 = 366{,}6 \text{ т}.$$

Задача № 9.

Кулачковый механизм для привода клапана может быть представлен в виде массы m, прикрепленной, с одной стороны, с помощью пружины жесткости c к неподвижной точке и получающей, с другой стороны, через пружину жесткости c_1 движение от поступательно движущегося кулака, профиль которого таков, что вертикальное движение определяется формулами:

$$x_1 = a\,[1-\cos\omega t] \quad \text{при} \quad 0 \le t < \frac{2\pi}{\omega};$$

$$x_1 = 0 \quad \text{при} \quad t > \frac{2\pi}{\omega}.$$

Определить движение массы m.

Решение.

Обозначим через x смещение массы m из ее положения равновесия. Отсчеты $x > 0$ условимся вести снизу вверх. Со стороны верхней пружины на массу m действует сила $(-cx)$, со стороны нижней действует сила $(-c_1(x - x_1))$. Составляем уравнение динамики материальной точки с массой m.

$$m\ddot{x} = -cx - c_1(x - x_1)$$

или

$$\ddot{x} + K^2 x = \frac{c_1 a}{m} - \frac{c_1 a}{m}\cos\omega t, \quad (1),\ K^2 = \frac{c+c_1}{m}, \left(0 \le t \le \frac{2\pi}{\omega}\right);$$

$$\ddot{x} + K^2 x = 0, \quad K^2 = \frac{c+c_1}{m} \quad \text{при} \quad \left(\frac{2\pi}{\omega} \le t\right).$$

Общее решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (I) имеет вид

$$x_{одн} = A\cos Kt + B\sin Kt.$$

Частное решение неоднородного уравнения (I) имеет вид при $0 \le t \le \frac{2\pi}{\omega}$:

$$x_2 = \frac{c_1 a}{c + c_1} - \frac{c_1 a\cos\omega t}{(c + c_1) - m\omega^2}.$$

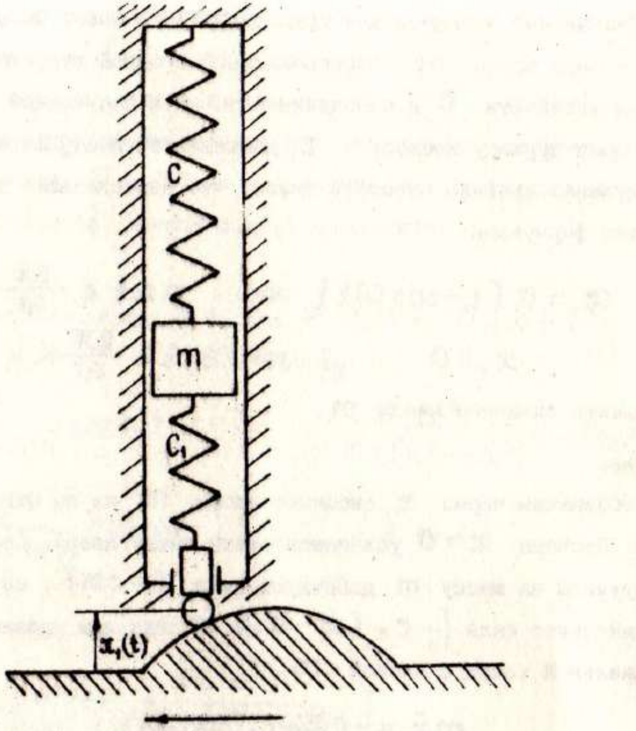

Рис. 9

Общее решение неоднородного уравнения (I) имеет вид

$$x = x_{одн} + x_ч = A\cos Kt + B\sin Kt + \frac{c_1 a}{c+c_1} - \frac{c_1 a\cos\omega t}{c+c_1-m\omega^2}. \qquad (2)$$

Подчинив решение (2) начальным условиям $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$, найдем, что

$$A = \frac{c_1 a}{m}\left[\frac{1}{K^2-\omega^2} - \frac{1}{K^2}\right], \quad B = 0. \qquad (3)$$

Значит при $0 \le t \le \frac{2\pi}{\omega}$

$$x = \frac{c_1 a}{m}\left[\frac{1}{K^2}(1-\cos Kt) + \frac{1}{K^2-\omega^2}(\cos Kt - \cos\omega t)\right].$$

При $t \geq \frac{2\pi}{\omega}$ частными решениями уравнения (I) являются линейно независимые функции $\cos Kt$, $\cos K\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right)$; поэтому общее решение этого уравнения

$$x = M\cos Kt + N\cos K\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right). \qquad (4)$$

Из (3) находим

$$t = \frac{2\pi}{\omega}; \quad x_{t=\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{c_1 a}{m}\left(\frac{1}{K^2} - \frac{1}{K^2-\omega^2}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi K}{\omega}\right);$$
$$t = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \dot{x}_{t=\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{c_1 a}{m}\left(\frac{1}{K^2} - \frac{1}{K^2-\omega^2}\right)\sin\frac{2\pi K}{\omega}. \qquad (5)$$

Подчиним решение (4) граничным условиям (5), при этом найдем

$$N = -M = \frac{c_1 a}{m}\left(\frac{1}{K^2} - \frac{1}{K^2-\omega^2}\right).$$

Окончательно (4) перепишется в следующем виде:

$$x = \frac{c_1 a}{m}\left[\frac{1}{K^2-\omega^2} - \frac{1}{K^2}\right]\left[\cos Kt - \cos K\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right)\right].$$

Задача № 10.

Найти закон движения маятника, состоящего из материальной точки, висящей на нерастяжимой нити длиной ℓ. Точка подвеса маятника движется по заданному закону $\xi = \xi(t)$ по горизонтальной прямой.

Решение.

Для маятника введем относительную систему отсчета, движущуюся поступательно вместе с точкой подвеса маятника. Присоединив к задаваемым силам, действующим на маятник, силы инерции переносного движения, составим уравнение относительного движения маятника

$$m\ell^2\ddot{\varphi} = mg\ell\sin\varphi + (-m\ddot{\xi})\,\ell\cos\varphi$$

или

$$\ddot{\varphi} + K^2\sin\varphi + \frac{\ddot{\xi}}{\ell}\cos\varphi = 0, \quad K^2 = \frac{g}{\ell}.$$

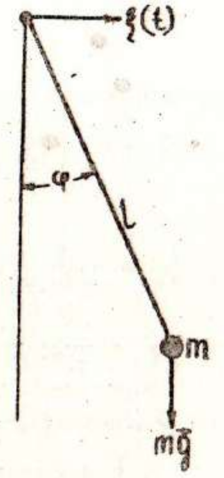

Рис. IO

Для малых φ соответственно

$$\ddot{\varphi} + K^2\varphi = -\frac{\ddot{\xi}}{\ell} \equiv Q(t).$$

Пусть $t=0$, φ_0, $\dot{\varphi}_0$ - начальные условия. Решение последнего уравнения имеет форму

$$\varphi(t)=C_1\sin Kt + C_2\cos Kt + \frac{1}{K}\int_0^t Q(\tau)\sin K(t-\tau)\,d\tau,$$

где

$$C_1=\frac{\dot{\varphi}_0}{K}, \qquad C_2=\varphi_0 .$$

Кроме того, проинтегрируем по частям

$$\int_0^t Q(\tau)\sin K(t-\tau)\,d\tau = -\frac{1}{\ell}\int_0^t d\dot{\xi}(\tau)\sin(t-\tau) = -\frac{1}{\ell}\dot{\xi}(\tau)\sin(t-\tau)\Big|_0^t -$$

$$-\frac{K}{\ell}\int_0^t d\xi(\tau)\cos K(t-\tau) = 0 - \frac{K}{\ell}\xi(\tau)\cos K(t-\tau)\Big|_0^t + \frac{K^2}{\ell}\int_0^t \xi(\tau)\times$$

$$\times \sin K(t-\tau)\,d\tau .$$

Таким образом,

$$\varphi(t)=C_1\sin Kt + C_2\cos Kt - \frac{\xi(\tau)}{\ell} + \frac{K}{\ell}\int_0^t \xi(\tau)\sin K(t-\tau)\,d\tau.$$

Задача № II.

Фундамент для машины, весящей $Q = 1$ МН, установлен на упругом грунте. Площадь основания фундамента $S = 17{,}0$ м^2, удельная жесткость грунта $\lambda = 60$ МН/м^3. Для устранения резонансных колебаний, возникающих при работе машины, она установлена на тяжелой раме, соединенной пружинами суммарной жесткости $C = 5000$ МН с фундаментом. Вес машины и рамы $P = 49$ кН. Определить частоты главных колебаний системы (фундамент и виброгаситель).

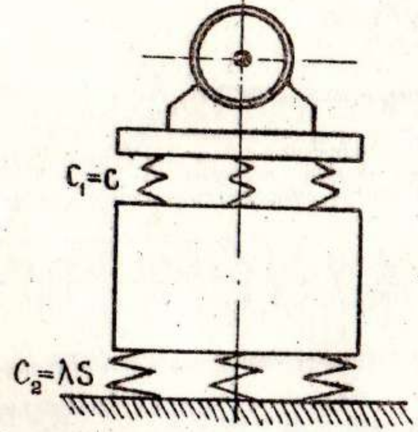

Рис. II

Решение.

Через x_1, x_2 обозначим соответственно смещения из положения равновесия для фундамента и плиты. Составим уравнения движения соответственно для фундамента и плиты в обозначениях

$$C_1 = C; \quad C_2 = \lambda S; \quad m_1 = \frac{P}{g}; \quad m_2 = \frac{Q}{g}.$$

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -c_1(x_1 - x_2); \\ m_2\ddot{x}_2 &= c_1(x_1 - x_2) - c_2 x_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Решение последней системы уравнений станем искать в виде:

$$x_1 = A_1 \sin Kt; \qquad x_2 = A_2 \sin Kt. \qquad (2)$$

Подстановка функций (2) в уравнения (I) приводит к однородной системе алгебраических уравнений относительно A_1, A_2 с определителем

$$\begin{vmatrix} -K^2 m_1 + c_1 & -c_2 \\ -c_1 & -K^2 m_2 + c_1 + c_2 \end{vmatrix} = K^4 - K^2\left(\frac{c_1+c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1}\right) +$$

$$+ \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} \equiv \Delta(K^2).$$

Условием существования ненулевого решения A_1, A_2 вышеуказанной однородной алгебраической системы является $\Delta(K^2) = 0$.

Из полученного уравнения частот находим его корни в порядке их возрастания

$$K^2_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1+c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1}\right) \mp \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c_1+c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1}\right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}.$$

При $m_1 = 5$ т, $c_1 = 50$ МН/м, $m_2 = 102$ т, $c_2 = 1020$ МН/м найдем, что $K_1 = 89{,}5$ с$^{-1}$, $K_2 = 111{,}7$ с$^{-1}$.

Задача № 12.

Для экспериментального исследования процесса регулирования гидравлических турбин сконструирована установка, состоящая из турбины, ротор которой имеет момент инерции относительно оси вращения $J_1 = 0{,}5$ кг.м^2, маховика с моментом инерции $J_2 = 15$ кг.м^2 и упругого вала C, соединяющего ротор турбины с маховиком; вал

имеет длину $l = 1552$ мм, диаметр $d = 25{,}4$ мм, модуль сдвига материала вала $G = 8800000$ Н/см^2. Не учитывая массы вала и пренебрегая скручиванием его толстых участков, найти то сечение mn вала, которое при свободных колебаниях данной системы остается неподвижным (узловое сечение), а также вычислить период T свободных колебаний системы.

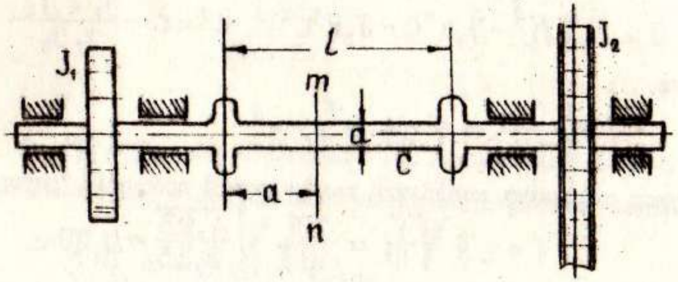

Рис.12

Решение.

Пусть φ_1, φ_2 - углы поворота ротора и маховика, отсчитываемые от положения, соответствующего отсутствию деформации закручивания вала. Составляем уравнения движения ротора и маховика

$$\left.\begin{aligned} J_1\ddot{\varphi}_1 &= -c(\varphi_1 - \varphi_2); \\ J_2\ddot{\varphi}_2 &= -c(\varphi_2 - \varphi_1), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где c - коэффициент жесткости вала при кручении. Как известно из курса сопротивления материалов для вала с круглым поперечным сечением

$$c = \frac{G\pi d^4}{32 l} = 2{,}33 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{см}.$$

Решение системы (I) будем искать в виде

$$\varphi_1 = A_1 \sin Kt; \quad \varphi_2 = A_2 \sin Kt. \qquad (2)$$

Подстановка функций (2) в уравнения (I) приводит к однородной системе алгебраических уравнений относительно A_1, A_2:

$$\left.\begin{aligned}(-J_1K^2+C)A_1-CA_2=0;\\ -CA_1+(-J_2K^2+C)A_2=0.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Условием существования ненулевого решения A_1, A_2 указанной однородной системы является равенство нулю ее определителя

$$0 = J_1J_2K^4 - J_1K^2C - J_2K^2C^2;\quad K^2 = C\cdot\frac{J_1+J_2}{J_1J_2}.\qquad(4)$$

Так как

$$\frac{J_1J_2}{J_1+J_2} = 4,33\cdot10^{-4}\ кгм^2,$$

то период свободных колебаний материальной системы "ротор-маховик"

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{K^2}} = \frac{2\pi}{100}\sqrt{\frac{4,33}{2,33}} = 0,09\ c.$$

Угол поворота сечения mn

$$\varphi(a) = \varphi_1 + \frac{a}{l}(\varphi_2-\varphi_1).$$

Выберем a так, чтобы

$$0 = \varphi(a) = \varphi_1 + \frac{a}{l}(\varphi_2-\varphi_1),$$

откуда

$$a = \frac{\varphi_1 l}{\varphi_1-\varphi_2}.$$

Ввиду (2), (3), (4) будем иметь

$$a = \frac{A_1 l}{A_1-A_2} = \frac{l}{1-\frac{A_2}{A_1}} = \frac{l}{1-\frac{C-J_1K^2}{C}} = \frac{lC}{J_1K^2} = \frac{J_1 l}{J_1+J_2} = 50\ мм.$$

Задача № 13.

Определить частоты свободных крутильных колебаний системы, состоящей из вала, закрепленного на одном конце, с насаженными посредине и на другом конце однородными дисками. Момент инерции каждого диска относительно оси вала J, жесткость на кручение вала $C_1=C_2=C$.

Массой вала пренебречь.

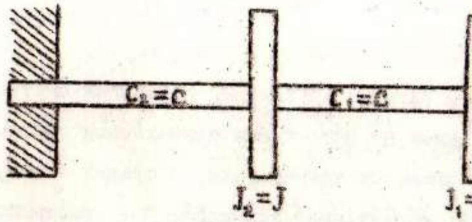

Рис. 13

Решение.

Пусть φ_1, φ_2 - угловые отклонения тел с моментами инерции J_1, J_2 от положения равновесия тел. Составим уравнения движения каждого из этих тел

$$\left.\begin{aligned}J_1\ddot{\varphi}_1 = -C_1(\varphi_1-\varphi_2);\\ J_2\ddot{\varphi}_2 = -C_2\varphi_2 - C_1(\varphi_2-\varphi_1).\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Положим

$$\varphi_1 = A_1\sin Kt;\quad \varphi_2 = A_2\sin Kt.\qquad(2)$$

Подстановка функций (2) в систему уравнений (1) при учете $J_2=J_1=J$, $C_1=C_2=C$ приводит к системе

$$\left.\begin{aligned}(C-JK^2)A_1-CA_2=0;\\ -CA_1+(2C-JK^2)A_2=0.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Условием существования ненулевого решения A_1, A_2 однородной системы (3) является равенство нулю определителя системы

$$J^2K^4 - 3CJK^2 + C^2 = 0.$$

Из полученного уравнения частот находим его корни

$$K_1^2 = \frac{C}{J}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right);\qquad K_2^2 = \frac{C}{J}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

или $K_1 = 0,62\sqrt{\frac{C}{J}}$; $\qquad K_2 = 1,62\sqrt{\frac{C}{J}}$.

Задача № I4.

Определить частоты главных крутильных колебаний системы, состоящей из вала с насаженными на него тремя одинаковыми однородными дисками. Два диска закреплены на концах вала, а третий – посредине. Момент инерции каждого диска относительно оси вала J, жесткость на кручение участков вала $C_1 = C_2 = C$. Массой вала пренебречь.

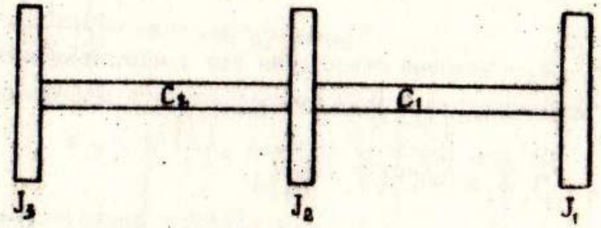

Рис. I4

Решение.

Обозначим через $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – углы отклонения тел с моментами инерции J_1, J_2, J_3 от положения равновесия этих тел. Составим уравнения движения каждого из этих тел.

$$\left.\begin{aligned} J_1\ddot{\varphi}_1 &= -C_1(\varphi_1 - \varphi_2); \\ J_2\ddot{\varphi}_2 &= -C_2(\varphi_2 - \varphi_1) - C_2(\varphi_2 - \varphi_3); \\ J_3\ddot{\varphi}_3 &= -C_2(\varphi_3 - \varphi_2). \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

Решение системы (I) будем искать в виде

$$\varphi_1 = A\sin Kt; \quad \varphi_2 = A_2\sin Kt; \quad \varphi_3 = \sin Kt. \qquad (2)$$

Подстановка функций (2) в систему (I) приводит к алгебраической однородной относительно A_1, A_2, A_3 системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} &(-J_1K^2 + C_1)A_1 - C_2A_2 = 0; \\ &-C_1A_1 + (-J_2K^2 + C_1 + C_2)A_2 - C_3A_3 = 0; \\ &-C_2A_2 + (-J_3K^2 + C_3)A = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Система (3) обладает ненулевым решением (A_1, A_2, A_3) при равенстве нулю определителя системы

$$\Delta(K^2) \begin{vmatrix} -J_1K^2 + C_1 & -C & 0 \\ -C & -J_2K^2 + C_1 + C_2 & -C_3 \\ 0 & -C_2 & -J_3K^2 + C_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

При $C_1 = C_2 = 0$; $J_1 = J_2 = J_3 = J$ будет

$$0 = \Delta(K^2) = -K^6 + \frac{4C}{J}K^4 - 3\left(\frac{C}{J}\right)^2 K^2.$$

Из полученного уравнения частот находим его корни

$$K_1^2 = 0; \quad K_2^2 = \frac{C}{J}; \quad K_3^2 = \frac{3C}{J}.$$

Задача № I5.

Два одинаковых маятника длиной l и массой m соединены на уровне h упругой пружиной жесткости C, прикрепленной концами к стержням маятников. Определить малые колебания системы из плоскости равновесного положения маятников, после того как одному из маятников сообщено отклонение на угол α от положения равновесия; начальные скорости маятников равны нулю. Массами стержней маятников и массой пружины пренебречь.

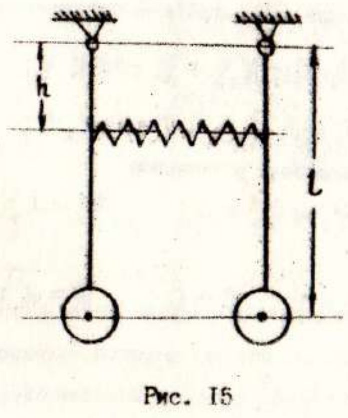

Рис. I5

Решение.

Через φ_1, φ_2 обозначим углы отклонения маятников от вертикали. Вводим в рассмотрение материальную систему, состоящую из маятников и пружины. В отклоненном от равновесия положении системы составим выражения кинетической и потенциальной энергии.

$$T=\frac{1}{2}ml^2\dot\varphi_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot\varphi_2^2;$$

$$\Pi=mgl(1-\cos\varphi_1)+mgl(1-\cos\varphi_2)+\frac{1}{2}c(h\varphi_1-h\varphi_2)^2.$$

Принимая φ_1, φ_2 за независимые обобщенные координаты материальной системы, составим для последней уравнения Лагранжа

$$0=\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi_1}\right)^{\cdot}-\frac{\partial T}{\partial\varphi_1}+\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_1}=ml^2\ddot\varphi_1+mgl\varphi_1+ch^2(\varphi_1-\varphi_2); \quad (I)$$

$$0=\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi_2}\right)^{\cdot}-\frac{\partial T}{\partial\varphi_2}+\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_2}=ml^2\ddot\varphi_2+mg\varphi_2+ch^2(\varphi_2-\varphi_1). \quad (2)$$

Складывая равенства (I), (2), а затем, вычитая почленно из первого второе, найдем

$$ml^2\ddot\psi+mgl\psi=0; \qquad ml^2\ddot\varphi+(mgl+2ch^2)\varphi=0; \quad (3)$$

где

$$\psi\equiv\varphi_1+\varphi_2; \qquad \varphi\equiv\varphi_1-\varphi_2.$$

Решения уравнений (3) имеем в форме

$$\varphi_1+\varphi_2=\psi=A\sin K_1t+B\cos K_1t; \qquad K_1^2=\frac{g}{l};$$

$$\varphi_1-\varphi_2=\varphi=C\sin K_2t+D\cos K_2t; \qquad K_2^2=\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}.$$

Пользуясь начальными условиями

$$t=0; \quad \dot\varphi_1=\dot\varphi_2=0; \quad \varphi_1=\alpha; \quad \varphi_2=0$$

находим

$$A=0; \quad C=0; \quad B=\alpha; \quad D=\alpha.$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1+\varphi_2&=\alpha\cos K_1t;\\ \varphi_1-\varphi_2&=\alpha\cos K_2t,\end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\varphi_1=\frac{\alpha}{2}[\cos K_1t+\cos K_2t]=\alpha\cos\frac{K_1+K_2}{2}t\cdot\cos\frac{K_2-K_1}{2}t;$$

$$\varphi_2=\frac{\alpha}{2}[\cos K_1t-\cos K_2t]=\alpha\sin\frac{K_1+K_2}{2}t\cdot\sin\frac{K_2-K_1}{2}t.$$

Задача № I6.

Маятник состоит из ползуна с массой M, скользящего без трения по горизонтальной плоскости, и шарика с массой m, соединенного с ползуном стержнем, который вращается вокруг оси, связанной с ползуном. К ползуну присоединена пружина жесткости c, другой конец которой закреплен неподвижно. Определить частоты малых колебаний системы.

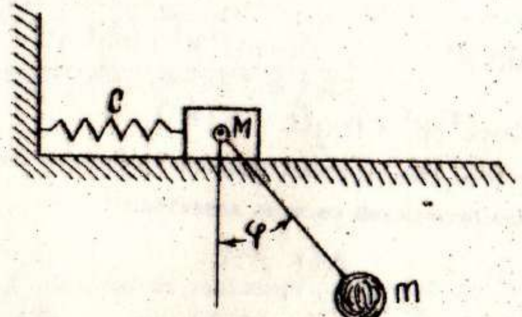

Рис. I6.

Решение.

Введем в рассмотрение материальную систему "маятник-ползун". Через x обозначим смещение ползуна из его положения равновесия. Составляем выражение кинетической энергии маятника

$$T=\frac{1}{2}M\dot x^2+\frac{1}{2}m[(x+l\sin\varphi)^{\cdot 2}+(l\cos\varphi)^{\cdot 2}]=\frac{1}{2}M\dot x^2+\frac{1}{2}m[(\dot x+l\dot\varphi)^2].$$

Составляем выражение потенциальной энергии маятника

$$\Pi = \frac{1}{2} cx^2 + mgl(1-\cos\varphi).$$

Принимая x, φ за независимые обобщенные координаты маятниковой системы, составим для последней уравнения Лагранжа

$$0 = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = M\ddot{x} + m(x+l\varphi)^{\cdot\cdot} + cx; \qquad (1)$$

$$0 = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = ml(x+l\varphi)^{\cdot\cdot} + mlg\varphi.$$

Решение системы уравнений (I) будем искать в виде

$$x = A\sin Kt; \quad \varphi = B\sin Kt. \qquad (2)$$

Подстановка функций (2) в систему уравнений (I) приводит к однородной системе алгебраических уравнений относительно A и B с определителем

$$\begin{vmatrix} -K^2(M+m)+c & -mlK^2 \\ -mlK^2 & -ml^2K^2+mgl \end{vmatrix} = Mml^2K^4 - [Mmgl + m^2gl + cml^2]K^2 + mglc \equiv \Delta(K^2).$$

Условием существования ненулевого решения вышеуказанной однородной алгебраической системы является

$$\Delta(K^2) = 0$$

или

$$0 = \frac{\Delta(K^2)}{Mml^2} = K^4 - \left[\frac{g}{l}\cdot\frac{M+m}{M} + \frac{c}{M}\right]K^2 + \frac{gc}{Ml}.$$

Задача № 17.

Общий вес подрессоренной части трехосного паровоза $Q = 26$ т, расстояния от центра тяжести подрессоренной части до точек крепления рессор $l_1 = l_2 = 1{,}25$ м, момент инерции подрессоренной части относительно продольной центральной оси $J = 300$ кг.м^2; жесткости рессор, закрепленных на трех осях колес, для каждой стороны равны:

$C_1 = C_2 = 135$ т/м; $C_3 = 148$ т/м. Определить колебания подрессоренной части паровоза в плоскости центрального поперечного сечения.

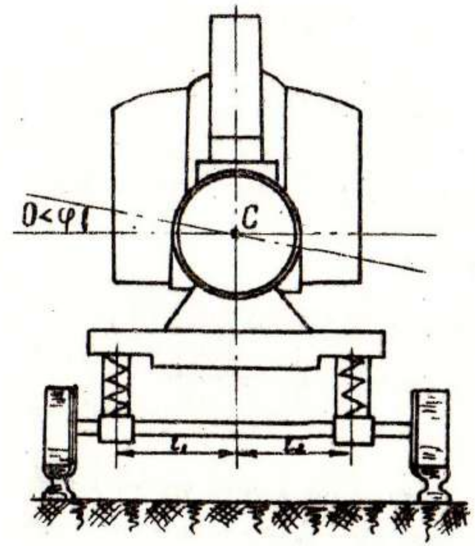

Рис. I7

Решение.

Обозначим через z смещение из положения равновесия для центра C тяжести паровоза. Будем считать $z > 0$ направленным вниз. Пусть φ – угловое отклонение паровоза в горизонтальной плоскости из положения равновесия паровоза. Будем считать $\varphi > 0$ направленным по часовой стрелке. Составим уравнения плоского движения паровоза

$$\frac{Q}{g}\ddot{z} = -C_1(z-l_1\varphi) - C_1(z+l_2\varphi) - C_2(z-l_1\varphi) - C_2(z+l_2\varphi) - C_3(z-l_1\varphi) - C_3(z+l_2\varphi),$$

$$J\ddot{\varphi} = -c_1(l_1\varphi)l_1 - c_1(l_2\varphi)l_2 - c_2(l_1\varphi)l_1 - c_2(l_2\varphi)l_2 - c_3(l_1\varphi)l_1 - c_3(l_2\varphi)l_2$$

или учитывая, что $l_1 = l_2 = l$

$$\frac{Q}{g}\ddot{z} = -2(c_1 + c_2 + c_3)z; \quad J\ddot{\varphi} = -2l^2(c_1 + c_2 + c_3)\varphi,$$

или

$$\ddot{z} + K_1^2 z = 0; \qquad \ddot{\varphi} + K_2^2\varphi = 0, \qquad (1)$$

где

$$K_1^2 = 2g\,\frac{c_1 + c_2 + c_3}{Q} = 2\cdot 9{,}81\,\frac{135 + 135 + 148}{26} = (17{,}8)^2 c^{-2};$$

$$K_2^2 = 2l^2\,\frac{c_1 + c_2 + c_3}{J} = 2\cdot 1{,}25^2\,\frac{135 + 135 + 148}{3} = (20{,}8)^2 c^{-2}.$$

Решение системы (1) имеет вид

$$z = A\sin(K_1 t + \alpha); \qquad \varphi = B\sin(K_2 t + \beta),$$

где A, α, B, β – постоянные интегрирования.

Задача № 18.

Исследовать колебания железнодорожного вагона в его средней вертикальной плоскости, если вес подрессоренной части вагона Q, расстояния центра тяжести от вертикальных плоскостей, проведенных через оси колес, $l_2 = l_1 = l$, радиус инерции относительно центральной оси, параллельной осям вагона, ρ; жесткость рессор для обеих осей одинакова: $c_1 = c_2 = c$.

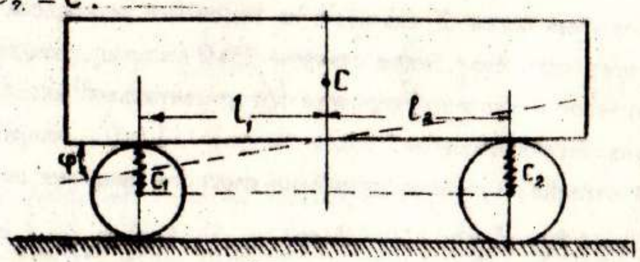

Рис. 18

Решение.

Пусть z, φ – соответственно поступательное и вращательное смещение вагона из положения его равновесия.

Составим уравнения движения

$$\frac{Q}{g}\ddot{z} = -c_1(z + l_1\varphi) - c_2(z - l_2 l);$$

$$\frac{Q}{g}l^2\ddot{\varphi} = -c_1(z + l_1\varphi) + c_2(z - l_2\varphi)l_2$$

или ввиду $l_1 = l_2 = l; \quad c_1 = c_2 = c;$

$$\frac{Q}{g}\ddot{z} + 2cz = 0;$$

$$\frac{Q}{g}\rho^2\ddot{\varphi} + 2cl^2\varphi = 0.$$

Решение последних уравнений имеет вид:

$$z = A\sin(K_1 t + \alpha);$$

$$\varphi = B\cos(K_2 t + \beta);$$

$$K_1^2 = \frac{2cg}{Q};$$

$$K_2^2 = \frac{2cgl^2}{Q\rho^2},$$

где A, α, B, β – постоянные интегрирования.

Задача № 19.

Круглый однородный диск радиуса r с массой M связан шарниром со стержнем OA длиной l, и может поворачиваться около неподвижной горизонтальной оси. На окружности диска закреплена материальная точка с массой m. Определить частоты свободных колебаний системы. Массой стержня пренебречь. Диск может вращаться в плоскости колебаний стержня OA.

Решение.

Предварительно найдем приближенное выражение квадрата скорости материальной точки с массой m при малых отклонениях φ, ψ системы "стержень-диск-точка m" от ее положения равновесия

$$\left[(\ell\cos\varphi + r\cos\psi)^{\cdot}\right]^2 + \left[(\ell\sin\varphi + r\sin\psi)^{\cdot}\right]^2 = [-\ell\dot\varphi\sin\varphi - r\dot\psi\sin\psi]^2 + [\ell\dot\varphi\cos\varphi + r\dot\psi\cos\psi]^2 = 0 + [\ell\dot\varphi + r\dot\psi]^2.$$

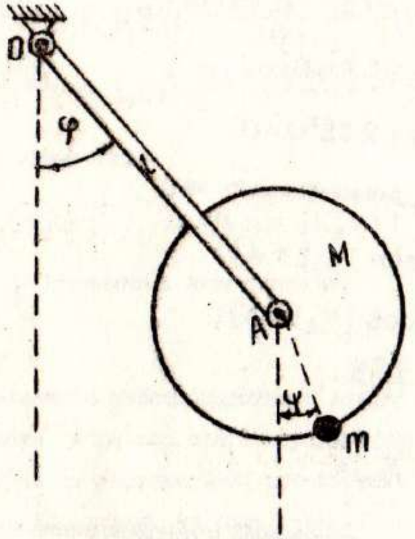

Рис. I9

Составляем выражение потенциальной энергии системы

$$\Pi = -Mg\cos\varphi - mg(\ell\cos\varphi + r\cos\psi).$$

Составляем выражение кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2}M\ell^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\dot\psi^2 + \frac{1}{2}m(\ell\dot\varphi + r\dot\psi)^2.$$

Принимая φ, ψ за обобщенные независимые координаты вышеуказанной материальной системы, составляем для последней уравнения Лагранжа:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} + \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = M\ell^2\ddot\varphi + m\ell(\ell\ddot\varphi + r\ddot\psi) + g(M\ell\varphi + m\ell\varphi);$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\psi}\right) - \frac{\partial T}{\partial\psi} + \frac{\partial\Pi}{\partial\psi} = \frac{Mr^2}{2}\ddot\psi + mr(\ell\ddot\varphi + r\ddot\psi) + grm\psi.$$

Решение системы уравнений Лагранжа будем искать в форме

$$\varphi = \varphi_0\sin Kt; \qquad \psi = \psi_0\sin Kt.$$

Подстановка этих функций в систему уравнений Лагранжа приводит к алгебраической однородной относительно φ_0, ψ_0 системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} &[-K^2(M\ell^2 + m\ell^2) + g(M\ell + m\ell)]\varphi_0 - K^2 mr\ell\psi_0 = 0;\\ &-K^2 m\ell\varphi_0 - \left[K^2\left(\frac{Mr^2}{2} + mr^2\right) + gmr\right]\psi_0 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Составим определитель этой системы уравнений

$$\Delta(K^2) = K^4\frac{(M^2 + 3M + m)r\ell}{2} - K^2 g\frac{(M+m)[(M+2m)r + 2m\ell]}{2} + g^2 m[M+m].$$

Необходимым и достаточным условием существования решения (φ_0, ψ_0) однородной алгебраической системы является $0 = \Delta(K^2)$

или

$$0 = \frac{2}{(M^2 + 3M + m)r\ell}\Delta(K^2) = K^4 - \frac{M+m}{M+3m}\left[1 + 2\frac{m(r+\ell)}{Mr}\right]\frac{g}{\ell}K^2 + \frac{2m(M+m)g^2}{M(M+3m)\ell r}.$$

Задача № 20.

Определить частоты свободных крутильных колебаний системы, состоящей из двух валов, соединенных зубчатой передачей. Моменты инерции масс, насаженных на валы, и моменты инерции зубчатых колес относительно оси валов имеют величины: $J_1 = 8750$ кг·м^2, $J_2 = 5600$ кг·м^2; $i_1 = 302$ кг·м^2, $i_2 = 1.05$ кг·м^2; передаточное число $K = \frac{z_1}{z_2} = 5$; жесткости валов при кручении $C_1 = 316 \times 10^5$ Н·м, $C_2 = 115 \cdot 10^5$ Н·м; массами валов пренебречь.

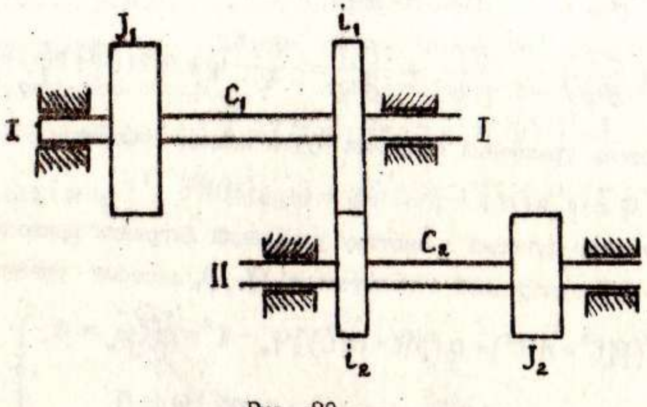

Рис. 20

Решение.

Рассмотрим систему тел, моменты инерции которых обозначены через J_1, J_2, i_1, i_2. Соответственно через $\vartheta_1, \vartheta_2, \varphi_1, \varphi_2$ обозначим углы отклонения этих тел от положения, соответствующего их равновесию. Очевидно

$$\varphi_2 = \varphi_1 \frac{z_1}{z_2} = \varphi_1 z .$$

Составим выражение конетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} i_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} i_2 (\dot{\varphi}_1 z)^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\vartheta}^2 .$$

Составим выражение потенциальной энергии системы

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 (\vartheta_1 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} c_2 (\vartheta_2 - \varphi_2)^2 = \frac{c_1}{2} (\vartheta_1 - \varphi_1)^2 + \frac{c_2}{2} (\vartheta_2 - z\varphi_1)^2 .$$

Принимая $\vartheta_1, \varphi, \vartheta_2$ за независимые обобщенные координаты системы, составим для последней уравнения Лагранжа:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta_1} = J_1 \ddot{\vartheta}_1 + c_1 (\vartheta_1 - \varphi_1); \qquad (I)$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = (i_1 + z^2 i_2)\ddot{\varphi}_1 - c_1(\vartheta_1 - \varphi_1) - c_2 z(\vartheta_2 - z\varphi_1);$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta_2} + \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta_2} = J_2 \ddot{\vartheta}_2 + c_2 (\vartheta_2 - z\varphi_1).$$

Решение системы уравнений Лагранжа станем искать в форме

$$\vartheta_1 = A \sin Kt ; \quad \varphi_1 = B \sin Kt ; \quad \vartheta_2 = \frac{1}{z} C \sin Kt . \qquad (2)$$

Подставка функций (2) в систему уравнений Лагранжа (I) приводит к однородной системе алгебраических уравнений относительно A, B, C с определителем

$$\begin{vmatrix} -J_1 K^2 + c_1 & -c & 0 \\ -c & -i^* K^2 + c_1 + c_2^* & -c_2^* \\ 0 & -c_2^* & -J_2^* K^2 + c_2^* \end{vmatrix} \equiv \Delta(K^2),$$

где $i^* = i_1 + z^2 i_2; \quad c_2^* = z^2 c_2; \quad J_2^* = z^2 J_2$.

Условием существования ненулевого решения (A, B, C) указанной однородной системы является $0 = \Delta(K^2)$

или

$$0 = -\frac{\Delta(K^2)}{J_1 J_2^* i^*} = K^2\left[K^4 - K^2\left(\frac{c_1}{J_1} + \frac{c_2^*}{J_2^*} + \frac{c_1 + c_2^*}{i^*}\right) + \frac{(J_1 + J_2^* + i^*) c_1 c_2^*}{J_1 J_2^* i^*}\right] =$$

$$= K^2 (K^4 - 5657{,}457 \cdot 10^3 K^2 + 3014{,}8 \cdot 10^6).$$

Из полученного частотного уравнения находим его положительные корни $K_1 = 23{,}1\ c^{-1}$, $K_2 = 2474\ c^{-1}$.

Задача № 21.

Фундамент машины весом $P_1 = 100$ т, установленный на упругом грунте, совершает вертикальные вынужденные колебания под действием вертикальной возмущающей силы, меняющейся по закону $F = 10 \sin \omega t$. В целях устранения резонансных колебаний, обнаруживающихся при угловой частоте вала машины $\omega = 100\ c^{-1}$, на фундаменте установлен на упругих пружинах гаситель в виде тяжелой рамы.

Определить вес рамы P_2 и суммарную жесткость пружин C_2 гасителя так, чтобы амплитуда вынужденных колебаний фундамента при вышеуказанной скорости вала обратилась в нуль, а амплитуда колебаний гасителя не превосходила A =2 мм.

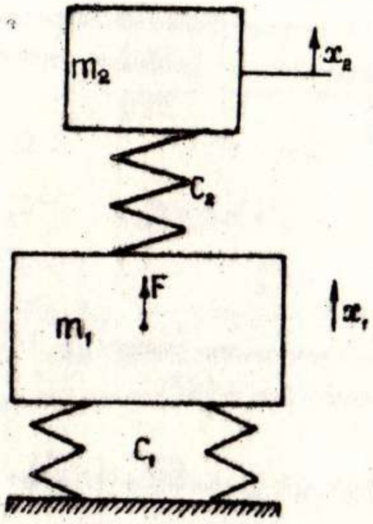

Рис. 21.

Решение.

Обозначим через m_1 массу фундамента, через m_2 - массу рамы вместе с машиной. При отсутствии гасителя (рамы) вынужденные колебания фундамента являются резонансными

$$\omega = n_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}. \tag{1}$$

При наличии гасителя составим уравнение колебаний каждого из масс вокруг ее положения равновесия

$$m_1\ddot{x}_1 = -c_1x_1 - c_2(x_1 - x_2) + F;$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -c_2(x_2 - x_1) = 0; \qquad F = F_0\sin\omega t. \tag{2}$$

Вынужденные колебания системы масс "$m_1 - m_2$" описываются частным решением системы уравнений (2)

$$x_1^{(2)} = B\sin\omega t; \quad x_2^{(2)} = A\sin\omega t. \tag{3}$$

Подставив (3) в систему уравнений (2) и положив заранее B =0, получим

$$0 = C_2A + F_0; \qquad m_2\omega^2 = C_2,$$

откуда

$$C_2 = -\frac{F_0}{A}; \qquad C_2 = \frac{F_0}{|A|} \geqslant \frac{10}{2} = 5\ \text{т/мм} = 5\cdot10^4\ \text{МН/м},$$

$$m_2 = \frac{C_2}{\omega_2}; \qquad P_2 = m_2 g \frac{C_2}{\omega^2} g = \frac{5\cdot10^3\cdot 9{,}81}{100^2} = 4{,}9\ \text{МН}.$$

Задача № 22.

На общем валу четырехтактного двигателя с тремя цилиндрами закреплены: ротор динамомашины постоянного тока с моментом инерции J_1 = 1,78·10^2 Н·м^2, ротор генератора переменного тока с моментом инерции J_2=5J_1 и маховик с моментом инерции J_3=50J_1, приведенные длины частей вала l_1= 373 см, l_2= 239 см, модуль сдвига материала вала G, полярный момент инерции сечения вала i, произведение iG =10^7 Н·м^2. Пренебрегая влиянием масс поршней, шатунов, кривошипов и вала, определить частоты главных колебаний системы, критические скорости вала, отношение амплитуд колебаний масс и число узловых точек вала при каждом главном колебании.

Решение.

Сперва найдем частоты свободных колебаний материальной системы, состоящей из вала и связанного с ним телами.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ - углы отклонения тел 1,2,3 из положения равновесия указанной материальной системы.

Пренебрегая массой поршней, кривошипов, шатунов и вала, составим уравнение движения для каждого из тел 1,2,3.

$$J_1\ddot{\varphi}_1 = -C_1(\varphi_1-\varphi_2);$$
$$J_2\ddot{\varphi}_2 = -C_1(\varphi_2-\varphi_1)-C_2(\varphi_2-\varphi_3); \qquad (I)$$
$$J_3\ddot{\varphi}_3 = -C_2(\varphi_3-\varphi_2),$$

где C_1, C_2 - коэффициенты жесткости при кручении участков l_1, l_2 вала. По известной формуле из курса сопротивления материалов

$$C_1 = \frac{iG}{l_1} = \frac{10^{10}}{373} = 2{,}68\cdot 10^6 \text{ кН/м}, \quad C_2 = \frac{iG}{l_2} = \frac{10^{10}}{239} = 4{,}18\cdot 10^6 \text{ кН/м}.$$

Решение системы (I) ищем в виде

$$\varphi_1 = A_1\sin Kt; \quad \varphi_2 = A_2\sin Kt; \quad \varphi_3 = A_3\sin Kt. \qquad (2)$$

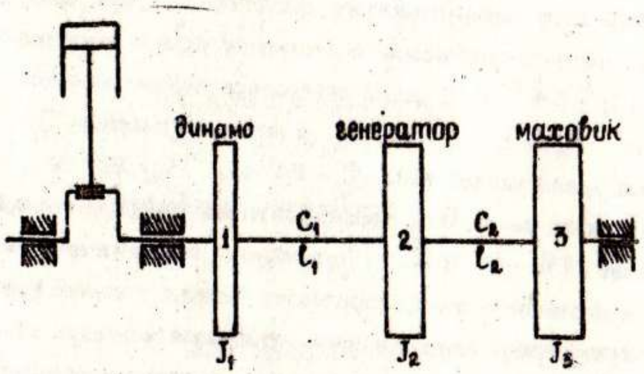

Рис. 22

Подставляя (2) в (I) и отбрасывая общий для всех членов множитель, получим

$$\left.\begin{aligned} &(C_1-J_1K^2)A_1 - C_1A = 0;\\ &-C_1A_1 + (C_1+C_2-J_2K^2)A_2 - C_2A_3 = 0;\\ &-C_2A_2 + (C_2-J_3K^2)A_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Система (3) является однородной относительно A_1, A_2, A_3. Для су-

ществования ненулевого решения потребуем обращения в нуль определителя системы

$$0 = K^2\left[K^4 - \left(\frac{C_1}{J_1} + \frac{C_1+C_2}{J_2} + \frac{C_2}{J_3}\right)K^2 + (J_1+J_2+J_3)\frac{C_1C_2}{J_1J_2J_3}\right].$$

При численных значениях C_1, C_2 и при

$$J_1 = 1{,}78\cdot 10^2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; \qquad J_2 = 5J_1; \quad J_3 = 50J_1,$$

получим

$$0 = K^2\left[K^4 - \frac{4{,}13\cdot 10^3}{1{,}78}K^2 + \frac{2{,}51\cdot 10^6}{1{,}78^2}\right].$$

Решая последнее уравнение, находим частоты свободных колебаний

$K_1 = 0$; $K_2 = 64{,}3$ с$^{-1}$; $K_3 = 138$ с$^{-1}$.

Из (3) находим $\left(\frac{A_2}{A_1}\right)_{K=K_2} = 1 - \frac{J_1}{C_1}K_1^2 = 0{,}724$; $\left(\frac{A_2}{A_1}\right)_{K=K_3} = 1 - \frac{J_1}{C_1}K_2^2 = -0{,}092$; $\left(\frac{A_3}{A_1}\right)_{K=K_3} = \frac{C_1-J_1K_2^2}{C_2-J_3K_2^2}\cdot\frac{C_2}{C_1} = -0{,}091$; $\left(\frac{A_3}{A_1}\right)_{K=K_3} = 0{,}0096$.

Из соотношений для амплитуд главных колебаний тел I,2,3 по взаимному расположению этих тел заключаем, что во втором $(K=K_2)$ главном колебании имеется один узел, а в третьем $(K=K_3)$ -два узла. Так как четыре такта двигателя завершаются за два оборота коленчатого вала, то за время $2T_0$ (T_0- время оборота вала) от трех цилиндров передаются на вал три крутящих импульса, следующих друг за другом через один и тот же промежуток времени $T = 2T_0/3$. Значит для вала T является периодом возмущающей силы. Частота возмущающей силы

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{3}{2} = \omega\,\frac{3}{2} = \eta,$$

где ω - угловая частота вала.

При совпадении частоты возмущающей силы с одной из частот свободных колебаний материальной системы наступает явление резонанса:

$$K_{2,3}=\eta_{кр}=\omega_{кр}\cdot\frac{3}{2};\quad \omega_{кр}=\frac{2}{3}K_{2,3};\quad \omega_{кр_1}=42{,}6\ c^{-1};$$

$$\omega_{кр_2}=92{,}0\ c^{-1}.$$

Задача № 23.

Три железнодорожных груженых вагона сцепляются между собой. Жесткости сцепок равны C_1 и C_2; веса вагонов равны Q_1, Q_2, Q_3. В начальный момент два вагона находятся в положении равновесия, а крайний (правый) вагон отклонен на x_0 от положения равновесия. Найти частоты главных колебаний системы.

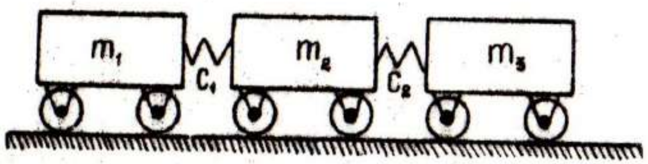

Рис. 23

Решение.

Вагоны рассматриваем как материальные точки с массами m_1, m_2, m_3. Составим основное уравнение динамики для каждой из этих материальных точек:

$$m_1\ddot{x}_1=-C_1(x_1-x_2); \tag{I}$$

$$m_2\ddot{x}_2=-C_1(x_2-x_1)-C_2(x_2-x_3);$$

$$m_3\ddot{x}_3=-C_2(x_3-x_2),$$

где x_i - смещение из положения равновесия материальной точки массой m_i ($i=1,2,3$). Решение системы (I) станем искать в виде

$$x_1=A\cos(Kt+\alpha);\quad x_2=B\cos(Kt+\alpha);\quad x_3=C\cos(Kt+\alpha). \tag{2}$$

Подстановка функций (2) в систему дифференциальных уравнений (I) приводит к однородной алгебраической системе относительно A, B, C

$$\left.\begin{aligned}&(C_1-m_1K^2)A-C_1B=0;\\ &-C_1A+(C_1+C_2-m_2K^2)B-C_2C_1=0;\\ &-C_2B+(C_2+m_3K^2)C=0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Необходимым и достаточным условием существования ненулевого решения системы (3) является равенство нулю определителя системы

$$0=\Delta(K^2)=m_1m_2m_3K^6+[C_1m_1m_3+(C_1+C_2)m_1m_3+C_2m_1m_2]K^4+$$

$$+C_1C_2(m_1+m_2+m_3).$$

Последнее уравнение является частотным.

Задача № 24.

Двойной маятник, образованный двумя стержнями длиной ℓ и материальными точками с массами m, подвешен на горизонтальной оси, вращающейся с постоянной угловой частотой ω вокруг оси z. Исследовать устойчивость вертикального положения равновесия маятника. Массой стержней пренебречь.

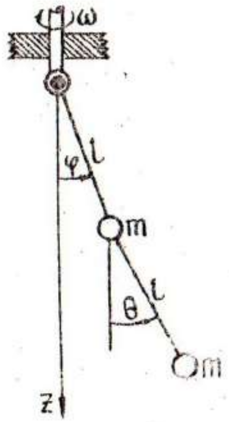

Рис. 24

Решение.

Введем систему отсчета, вращающуюся вместе с плоскостью маятника вокруг оси z . Назовем ее относительной. Введем в рассмотрение материальную систему, образующую двойной маятник. Чтобы составить уравнение движения материальной системы в относительной системе отсчета, нужно к заданным силам (не зависящим от системы отсчета) присоединить дополнительно силы инерции, вызванные вращением относительной системы отсчета. В относительном движении над материальной системой работу выполняют заданные силы (силы тяжести) и центральные силы инерции. Работа центральных сил определяет их потенциальную энергию

$$-\frac{1}{2}\omega^2[ml^2\sin^2\varphi+m(l\sin\varphi+l\cos\theta)^2]; \quad (\omega=const).$$

Составим выражение потенциальной энергии заданных сил

$$-mgl\cos\varphi-mg(l\cos\varphi+l\cos\theta).$$

Значит в относительной системе отсчета выражение потенциальной энергии для маятника имеет вид

$$\Pi(\varphi,\theta)=-\frac{1}{2}\omega^2ml^2[\sin^2\varphi+(\cos\varphi+\cos\theta)^2]-mgl(2\cos\varphi+\cos\theta)].$$

Так как $\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial\Pi}{\partial\theta}$ обращаются в нуль при $\varphi=0$, $\theta=0$, то равновесным положением маятника является вертикальное. Указанное относительное равновесное положение маятника исследуем на устойчивость. Чтобы равновесие стало устойчивым, в соответствии с теоремой Лагранжа-Дирихле, необходимо, чтобы при $\varphi=0$, $\theta=0$ функция $\Pi(\varphi,\theta)$ достигла минимума. При $\varphi=0$, $\theta=0$ $\frac{\partial^2\Pi}{\partial\theta^2}=ml^2\omega^2+mgl>0.$

А так же

$$0<\frac{\partial^2\Pi}{\partial\theta^2}\cdot\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial^2\Pi}{\partial\theta\partial\varphi}=(ml^2\omega^2-mgl)(2ml^2\omega^2-2mgl)-ml^2\omega^2$$

или

$$l\omega^2<g\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

Список литературы

1. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике.- М.: Гостехиздат, 1957. - 384 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Леонид Викторович Колосов
Василий Петрович Равишин
Сергей Ростиславович Ильин
Петр Яковлевич Кирик

Ответственный за выпуск доцент Новикова Л.В.

Редактор Чуищева Л.А.

Редакционно-издательский отдел ДГИ.

Подписано к печати 05.10.81. Формат 60 х 84 1/16.

Бумага типографская № 1. Печать плоская. Усл. печ.л. 3,0.

Уч.-изд.л. 2,4. Тираж 200 экз. Зак. № 173 Бесплатно.

Ротапринт ДГИ им. Артема.

320600, г. Днепропетровск, пр. К.Маркса 19.