

Безкоштовно

Міністерство освіти України  
Державна гірничо-академія України



МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
ДО ВИКОНАННЯ КОМПЛЕКСНИХ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ  
З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ СТУДЕНТАМИ МЕХАНІЧНИХ  
І НЕМЕХАНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Дніпропетровськ  
1996

Міністерство освіти України  
Державна гірничо-академія України

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
ДО ВИКОНАННЯ КОМПЛЕКСНИХ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ  
З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ СТУДЕНТАМИ МЕХАНІЧНИХ  
І НЕМЕХАНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Затверджено на засіданні  
кафедри будівельної та  
теоретичної механіки,  
протокол № 1 від 20 бе-  
резня 1996 р.

Дніпропетровськ  
1996



Методичні вказівки до виконання комплексних домашніх завдань в теоретичній механіці студентами механічних і немеханічних спеціальностей

Упорядники: Л.В.Колосов, В.Ю.Артюкова - Дніпропетровськ: ДГАУ, 1996. - 23 с.

В методичних вказівках приведені комплексні домашні завдання по теоретичній механіці та приклади їх виконання.

Завдання мають два рівні складності: I - для немеханічних гірничих спеціальностей, II - для механічних гірничих спеціальностей.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри будівельної та теоретичної механіки С.Б.Блохін, д-р, техн.наук, проф.

Механічний піднімальний пристрій, наведений на рис. I-30, обладнаний двигуном та гальмом. Маса двигуна включена в масу шківів I. Враховуючи опір тертя ковзання тіла 2, нехтуючи іншим опором та масами ниток, вважаючи їх нерозтяжними, дослідити стан рівноваги і руху системи при таких умовах.

I. Система рухається рівномірно, або знаходиться в стані рівноваги під впливом моменту  $M_g = M_{cm}$ , прикладеного до шківів I. Гальмо відключене.

Визначити:

I.1. Натяг нитки.

I.2. Значення моменту  $M_g = M_{cm}$ .

II. Система загальмована - знаходиться в стані рівноваги під впливом постійної сили  $Q = Q_{cm}$ , прикладеної в т. А важеля. Двигун відключений  $M_g = 0$ .

Визначити опорні реакції в т. O і O<sub>1</sub>, та величину сили  $Q = Q_{cm}$ .

III. Система починає рухатись із стану спокою під впливом постійного рухового моменту  $M_g = \gamma M_{cm}$ , де  $\gamma > 1$ . Гальмо відключене.

Визначити:

III.1. Кутове прискорення шківів I.

III.2. Прискорення центру C шківів або колеса 2.

III.3. Прискорення т. P шківів або колеса 2.

III.4. Розмір та напрям швидкостей точок B та C тіла 2 в момент часу  $t = t_1$ .

III.5. Натяг нитки.

IV. При рівномірному русі системи шків 2 рухається вгору по похилій площині з швидкістю  $V_c$  / сталося затиснення верхнього перерізу нитки на шківі I. Вважаючи нитку розтяжною пружиною жорсткістю C, визначити:

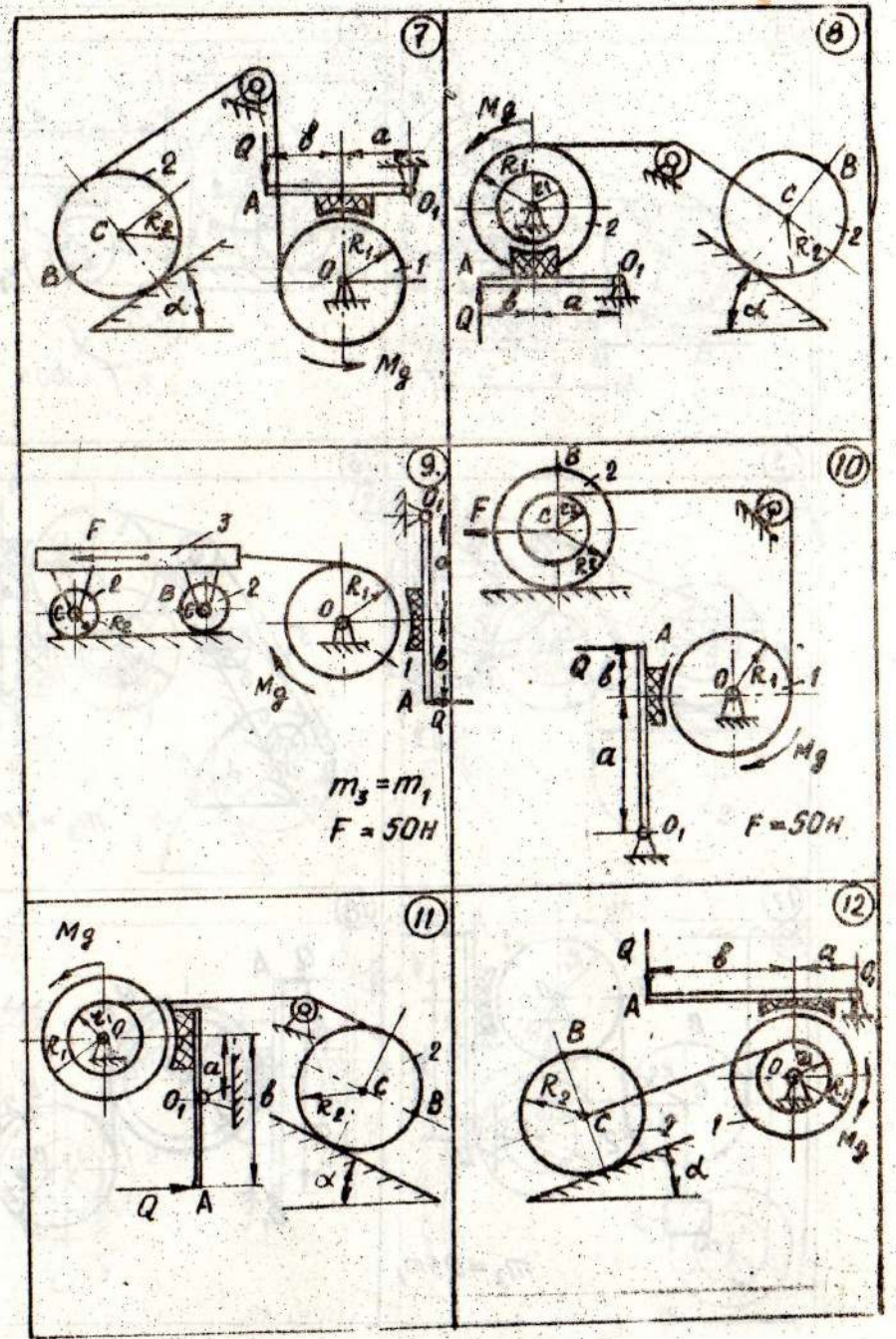
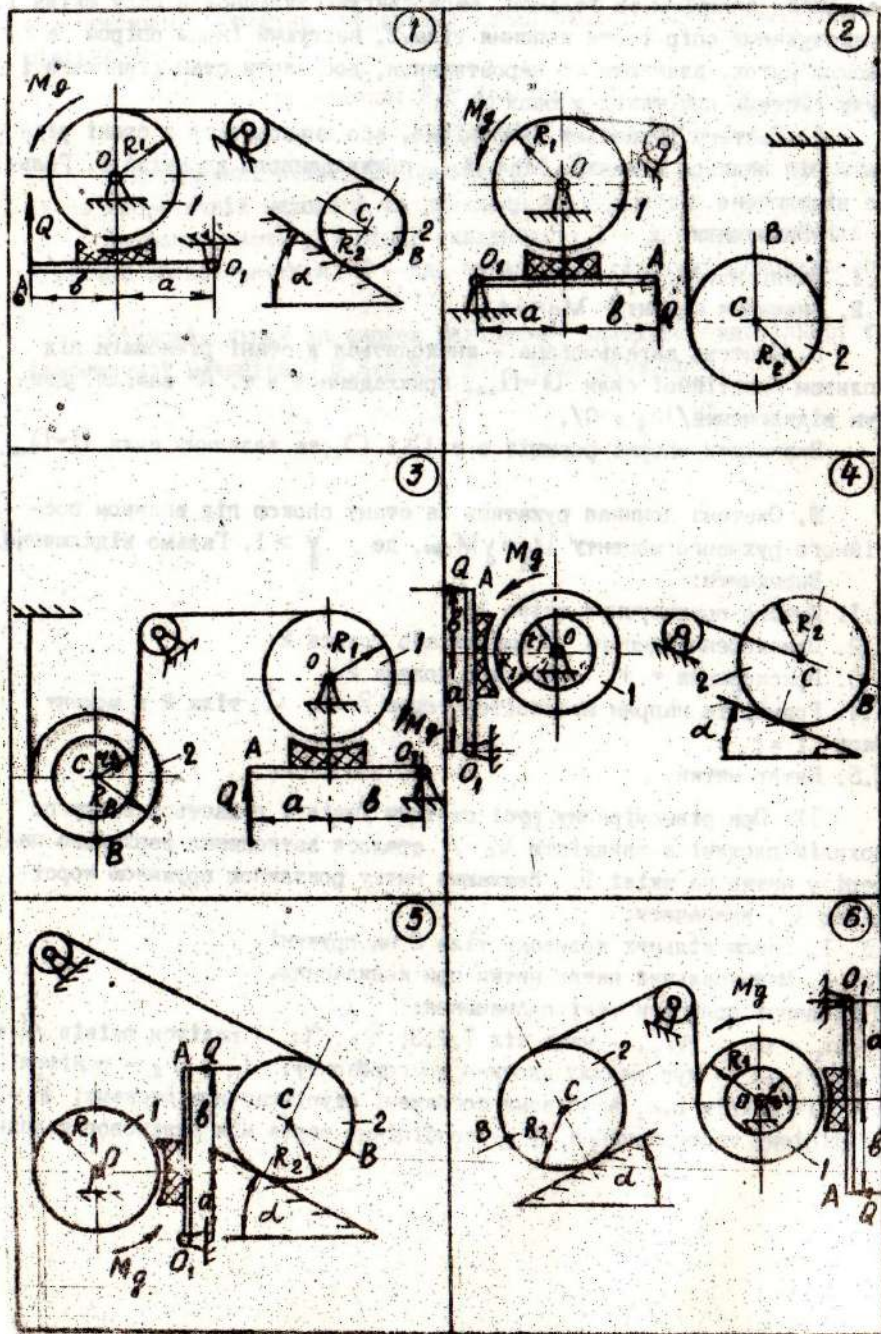
IV.1. Закон вільних коливань тіла 2 на пружині.

IV.2. Максимальний натяг нитки при коливаннях.

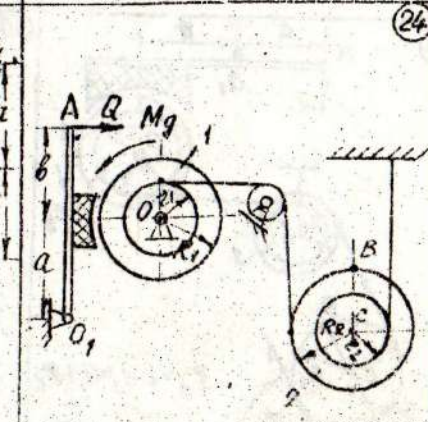
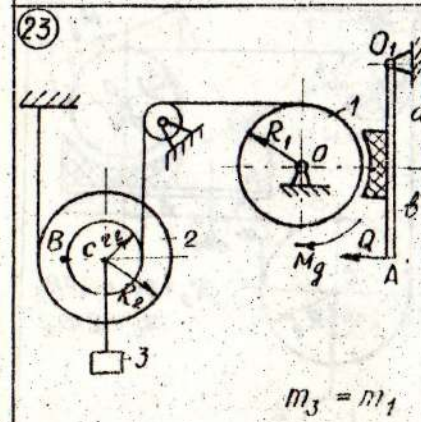
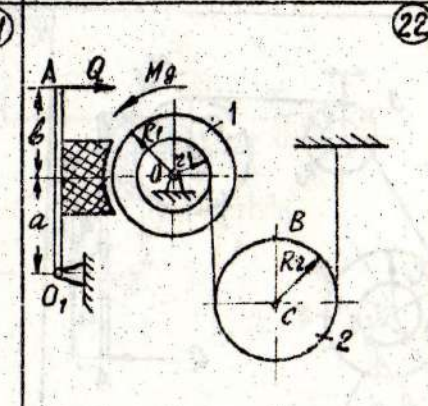
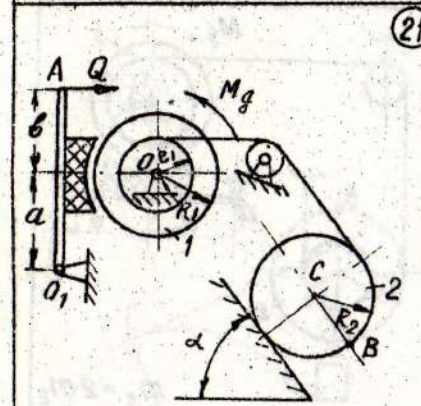
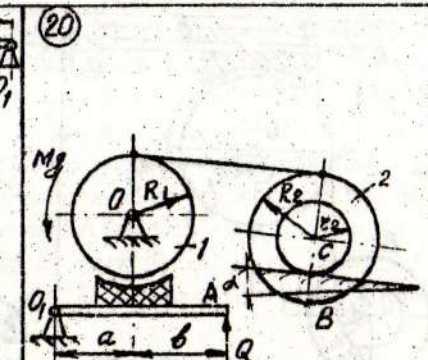
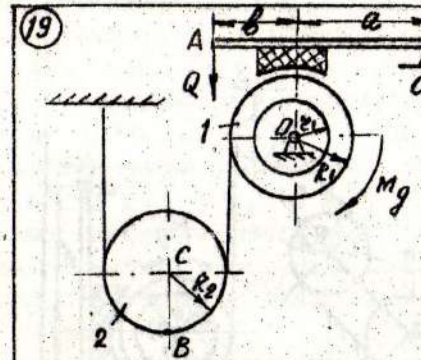
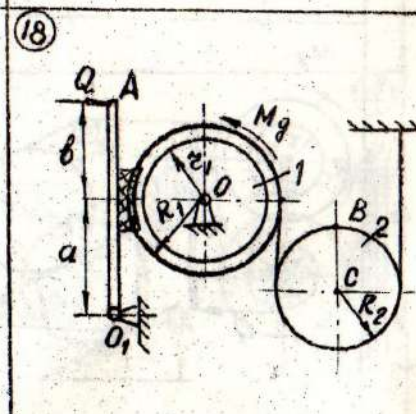
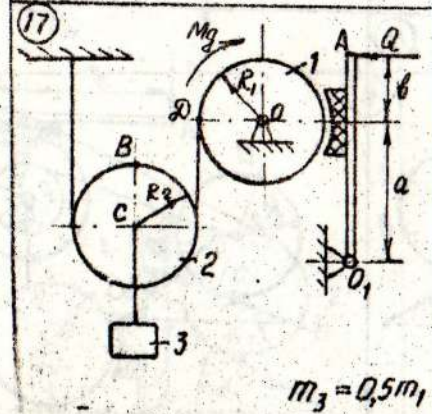
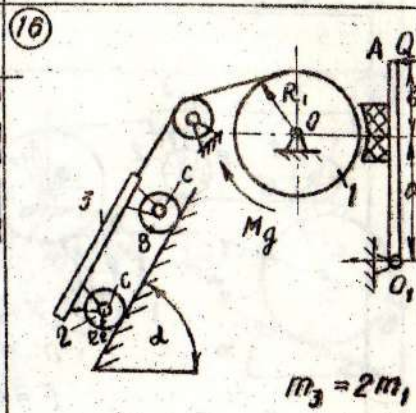
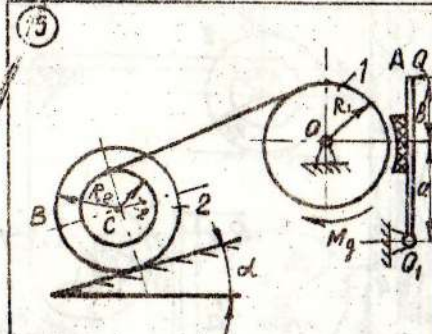
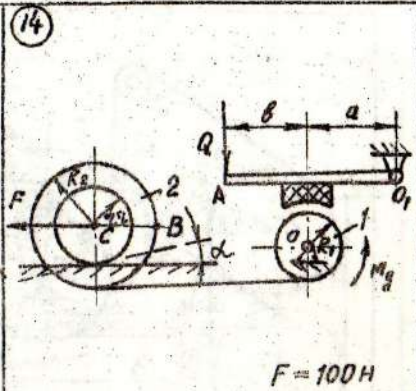
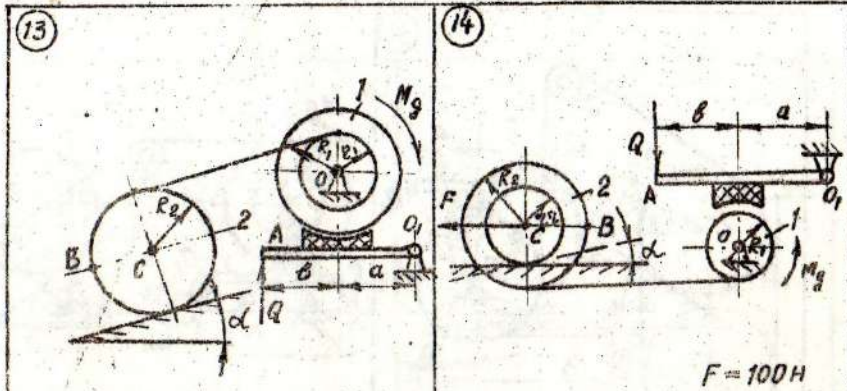
В завданні прийняти такі позначення:

$m_1, m_2, m_3$  - маси тіл 1,2,3;  $R_1, r_1$  - радіуси шківів / I, 2,3 /;  $\alpha$  - кут нахилу площини до горизонту;  $l_1, l_2$  - радіуси інерції шківів 1,2, якщо вони зображені ступінчастими дисками;  $\delta$  - коефіцієнт тертя ковзання,  $f$  - коефіцієнт тертя між гальмовою колодою

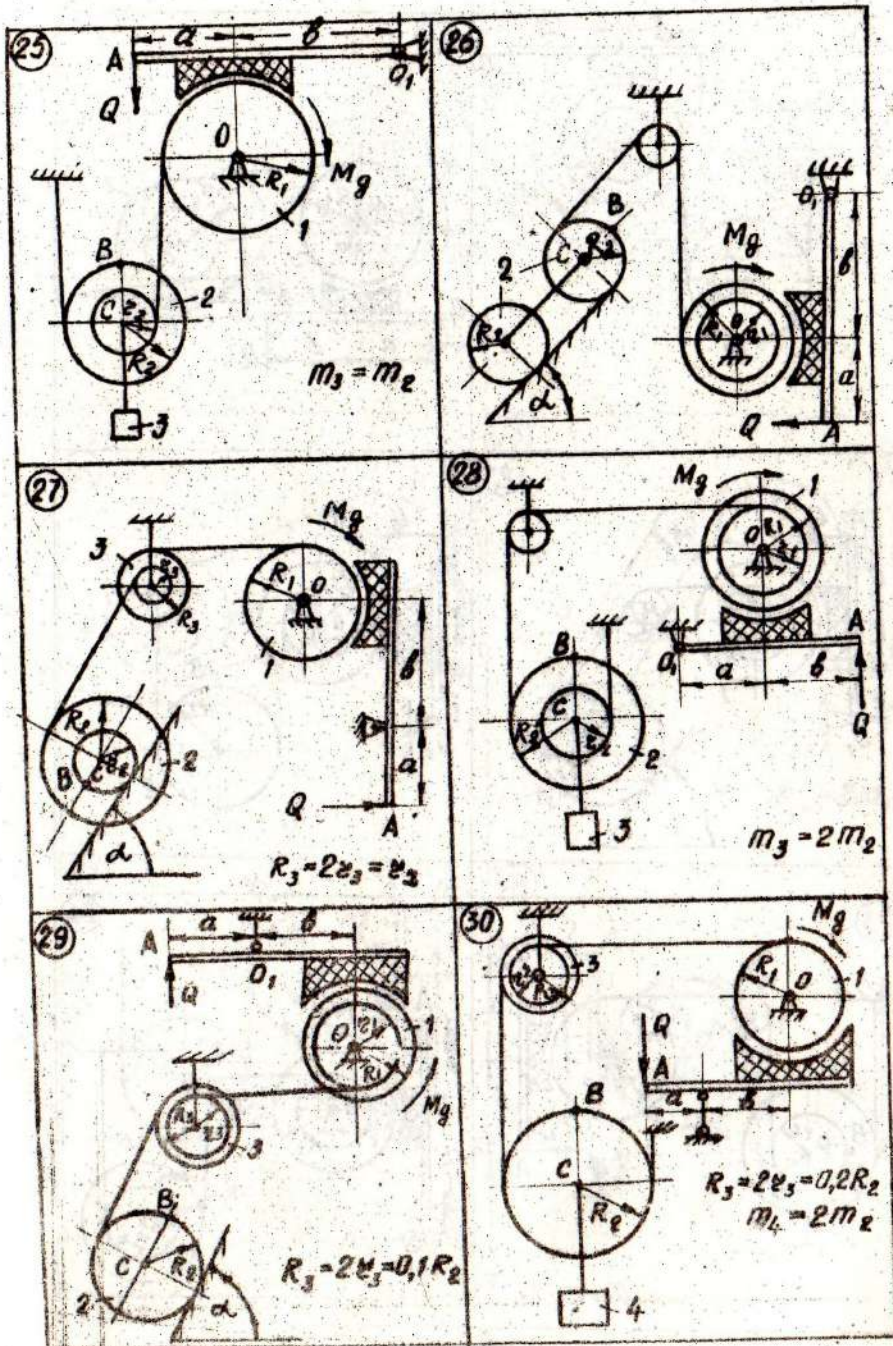












кою та шківів;  $a, b$  - плечі важеля гальма,  $e$  - розмір гальмової колодки;  $\gamma$  - кратність моменту, що розкручується двигуном.

$M_g = \gamma M_{ст} (\gamma > 1)$ .  $M_{ст}$  - статичний момент двигуна, при якому система знаходиться в рівновазі;  $\beta$  - кратність гальмового зусилля  $Q = \beta Q_{ст} (\beta > 1)$ ;  $Q_{ст}$  - значення гальмової сили  $Q$ , при якій система знаходиться в рівновазі при вилученому гальмові та  $M_g = 0$ ;  $t_1, t_2$  - задані проміжки часу /для умови III/;  $V_c$  - задана швидкість центру тіла 2 /або 3/. Необхідні для рішення данні приведені в таблиці I. Шківів та колеса, для яких радіуси інерції в таблиці не вказані, вважати суцільними однорідними циліндрами.

Приклад виконання завдання.

Розглянемо механічну систему наведену на рис. 31.

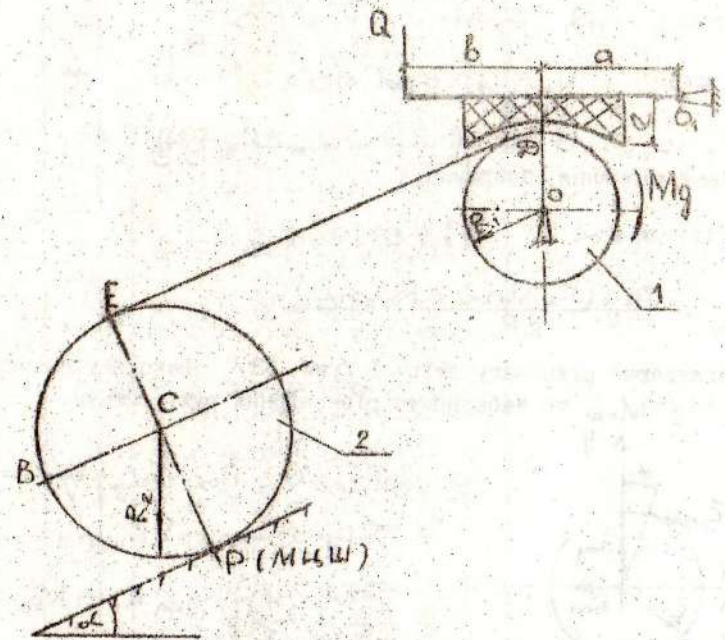


Рис. 31



1: Рівномірний рух системи. Гальмо відключене.

1.1. Виходячи з ум в рівновазі шків 2 знаходимо натяг нитки  $S_{H_{cm}}$  /рис. 32/.

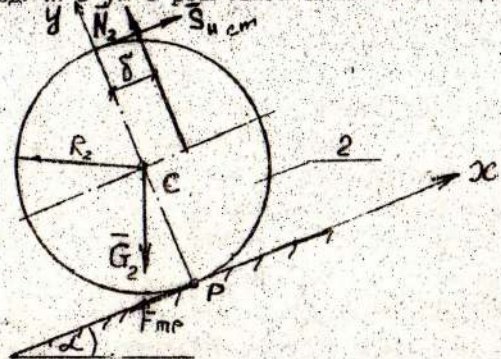


Рис. 32

$$\sum F_x = 0; \quad S_{H_{cm}} - G_2 \sin \alpha - F_{2mp} = 0$$

$$\sum F_y = 0; \quad N_2 - G_2 \cos \alpha = 0$$

$$\sum M_P = 0; \quad G_2 \sin \alpha \cdot R_2 - S_{H_{cm}} \cdot 2R_2 + N_2 \cdot \delta = 0$$

Розв'язавши рівняння, одержимо

$$N_2 = G_2 \cos \alpha, \quad G_2 = m_2 g,$$

$$S_{H_{cm}} = \frac{m_2 g (R_2 \sin \alpha + \delta \cos \alpha)}{2R_2} \quad //1/$$

1.2. Розглядаючи рівновагу шків 1 /рис. 33/, знаходимо значення моменту  $M_g = M_{cm}$ , що забезпечує рівномірний рух системи.

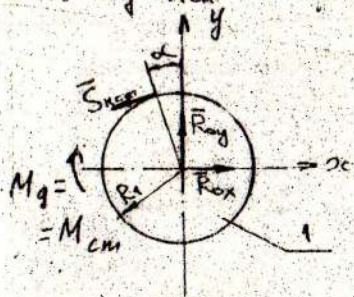


Рис. 33

$$\sum F_x = 0; \quad R_{0x} - S_{H_{cm}} \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0; \quad R_{0y} - S_{H_{cm}} \sin \alpha = 0$$

$$\sum M_G = 0; \quad S_{H_{cm}} R_1 - M_{cm} = 0$$

Таблиця I

| # ва-<br>ріанта | m1<br>кг | m2<br>кг | R1      | R2      | z1  | z2  | l1  | l2  | alpha | delta | phi  | epsilon | a   |     |     | b |     |     | t1 | t2 | Vc<br>м/с |
|-----------------|----------|----------|---------|---------|-----|-----|-----|-----|-------|-------|------|---------|-----|-----|-----|---|-----|-----|----|----|-----------|
|                 |          |          |         |         |     |     |     |     |       |       |      |         | м   | м   | м   | м | м   | м   |    |    |           |
| 1               | 100      | 400      | 0,7/0,5 | 0,8/0,4 | 0,6 | 0,5 | 0,5 | 45° | 0,005 | 0,1   | 0,05 | 0,05    | 0,8 | 0,5 | 1,1 | 1 | 1,5 | 0,5 |    |    |           |
| 2               | 200      | 500      | 0,8/0,6 | 1,0/0,5 | 0,7 | 0,6 | 0,6 | 40° | 0,008 | 0,15  | 0,05 | 0,05    | 0,6 | 0,3 | 1,2 | 2 | 1,0 | 0,8 |    |    |           |
| 3               | 300      | 600      | 0,9/0,6 | 1,2/0,4 | 0,8 | 0,9 | 0,9 | 15° | 0,01  | 0,2   | 0,05 | 0,05    | 0,9 | 0,6 | 1,3 | 3 | 1,2 | 1,0 |    |    |           |
| 4               | 400      | 700      | 1,1/0,7 | 0,8/0,6 | 1,0 | 0,7 | 0,7 | 10° | 0,012 | 0,1   | 0,1  | 0,1     | 1,0 | 0,6 | 1,2 | 2 | 1,8 | 1,2 |    |    |           |
| 5               | 500      | 1000     | 1,0/0,8 | 0,9/0,4 | 0,9 | 0,8 | 0,8 | 15° | 0,01  | 0,15  | 0,1  | 0,1     | 1,2 | 0,8 | 1,1 | 1 | 0,5 | 1,5 |    |    |           |
| 6               | 520      | 1200     | 1,2/0,9 | 1,0/0,6 | 1,1 | 1,0 | 1,0 | 10° | 0,015 | 0,2   | 0,1  | 0,1     | 1,4 | 1,0 | 1,2 | 2 | 0,8 | 2,0 |    |    |           |
| 7               | 540      | 1000     | 0,8/0,5 | 0,6/0,4 | 0,7 | 0,5 | 0,5 | 20° | 0,01  | 0,25  | 0,1  | 0,1     | 1,0 | 0,4 | 1,3 | 3 | 1,2 | 2,5 |    |    |           |
| 8               | 560      | 800      | 0,6/0,4 | 0,5/0,3 | 0,5 | 0,4 | 0,4 | 30° | 0,015 | 0,1   | 0,05 | 0,05    | 0,8 | 0,3 | 1,2 | 2 | 1,5 | 3,0 |    |    |           |
| 9               | 580      | 900      | 0,9/0,5 | 0,7/0,4 | 0,8 | 0,6 | 0,6 | 25° | 0,01  | 0,15  | 0,05 | 0,05    | 0,9 | 0,4 | 1,1 | 1 | 0,5 | 3,5 |    |    |           |
| 10              | 600      | 1000     | 0,6/0,3 | 0,9/0,5 | 0,4 | 0,5 | 0,5 | 30° | 0,008 | 0,2   | 0,05 | 0,05    | 0,7 | 0,2 | 1,3 | 3 | 1,2 | 4,0 |    |    |           |



Звідси знаходимо

$$M_{cm} = S_{Hcm} R_1 = \frac{m_2 g R_1 (R_2 \sin \alpha + \delta \cos \alpha)}{2 R_2} \quad /2/$$

Перевіримо результат обчислення моменту  $M_g = M_{cm}$ , застосовуючи для рішення принцип неважливих переміщень /розрахункова схема приведена на рис. 34/.

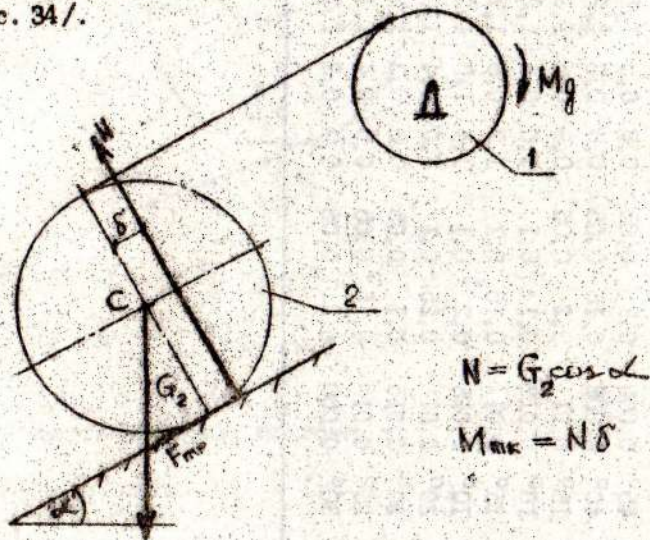


Рис. 34

$$M_g \delta \varphi_1 - G_2 \sin \alpha \cdot \delta S_c - G_2 \cos \alpha \cdot \delta \cdot \delta \varphi_2 = 0$$

Враховуючи, що  $\delta S_c = \frac{\delta \varphi_1 R_1}{2}$ ,

$$\delta \varphi_2 = \frac{\delta \varphi_1 R_1}{2 R_2},$$

одержимо

$$M_g = \frac{m_2 g R_1}{2} \left( \sin \alpha + \cos \alpha \frac{\delta}{R_2} \right) \quad /3/$$

П. Система загальмована за допомогою постійної сили  $Q = Q_{cm}$ , прикладеної в т. А важілля гальма.

Знаючи статичний натяг нитки  $S_{Hcm}$  /1/ розглянемо рівновагу шківів I, замінивши в т. D дію відкинутої колодки гальма реакціями  $N_D$  і  $F_{Dmr}$  /рис. 35/.

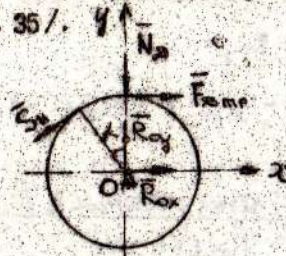


Рис. 35

$$\sum F_x = 0; \quad R_{Ox} + F_{Dmr} - S_H \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0; \quad R_{Oy} - N_D - S_H \sin \alpha = 0; \quad F_{Dmr} = f N_D$$

$$\sum M_O = 0; \quad S_H R_1 - F_{Dmr} R_1 = 0$$

З цих рівнянь знаходимо

$$F_{Dmr} = S_H = \frac{m_2 g (R_2 \sin \alpha + \delta \cos \alpha)}{2 R_2}$$

$$N_D = \frac{F_{Dmr}}{f} = \frac{m_2 g (R_2 \sin \alpha + \delta \cos \alpha)}{2 f R_2}$$

$$R_{Oy} = N_D + S_H \sin \alpha = \frac{m_2 g (R_2 \sin \alpha + \delta \cos \alpha)}{2 R_2} \left( \frac{1}{f} + \sin \alpha \right)$$

$$R_{Ox} = S_H \cos \alpha - F_{Dmr} = \frac{m_2 g (R_2 \sin \alpha + \delta \cos \alpha)}{2 R_2} (\cos \alpha - 1)$$

Виходячи з умов рівноваги важілля  $AO_1$ , знайдемо значення завантаження  $Q = Q_{cm}$ , прикладеного в т. А, а також реакції в т.  $O_1$  /рис. 36/.

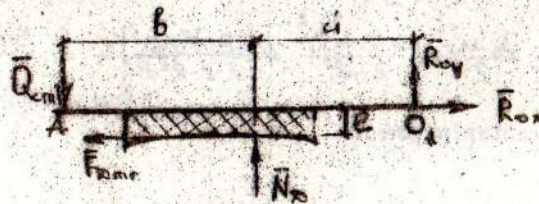


Рис. 36



$$\sum F_x = 0; \quad R_{0x} - F_{\text{д.тр}} = 0$$

$$\sum F_y = 0; \quad N_D - Q_{\text{см}} + R_{0y} = 0$$

$$\sum M_{01} = 0; \quad Q_{\text{см}}(a+b) - F_{\text{д.тр}} \cdot e - N_D \cdot a = 0$$

З цих рівнянь рівноваги маємо:

$$Q_{\text{см}} = \frac{N_D \cdot a + F_{\text{д.тр}} \cdot e}{a+b} = \frac{m_2 g (R_2 \sin \alpha + \delta \cos \alpha) \left( \frac{a}{f} + e \right)}{R_2 (a+b)}$$

$$R_{0y} = Q_{\text{см}} - N_D = \frac{m_2 g (R_2 \sin \alpha + \delta \cos \alpha) (ef - b)}{2R_2 (a+b) f}$$

$$R_{0x} = F_{\text{д.тр}} = \frac{m_2 g (R_2 \sin \alpha + \delta \cos \alpha)}{2R_2}$$

III. Рух механічної системи із стану спокою відбувається під впливом рушійного постійного моменту  $M_g$  /рис. 31/.

III.1. Для визначення кутового прискорення шківів I можна застосувати теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи або застосувати інші способи /загальне рівняння динаміки, рівняння Лагранжа II роду/. Кінетична енергія системи /рис. 31/ визначається як сума

$$T = T_1 + T_2 \quad , \quad \text{де}$$

$$T_1 = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} = \frac{m_1 R_1^2}{2} \cdot \frac{\omega_1^2}{2}$$

$$T_2 = \frac{m_2 v_{2c}^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 \omega_1^2 R_1^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{m_2 R_2 \omega_1^2 R_1^2}{2 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot R_2} = \frac{3m_2 \omega_1^2 R_1^2}{16}$$

Тут застосовані співвідношення

$$v_{2c} = \frac{\omega_1 R_1}{2}; \quad \omega_2 = \frac{\omega_1 R_1}{2R_2}$$

Остаточно кінетична енергія введеться до вигляду

$$T = \frac{\omega_1^2 R_1^2}{16} (4m_2 + 3m_2) = \omega_1^2 m_{\text{нр}}$$

$$\text{де} \quad m_{\text{нр}} = \frac{R_1^2 (4m_2 + 3m_2)}{16}$$

Обчислимо суму робіт усіх активних сил, прикладених до системи, при повороті шківів I з початкового стану на кут  $\varphi_1$ .

$$\sum A^e = A_{M_g} + A_{G_2} + A_{M_{\text{тк}}}$$

Робота інших сил дорівнює 0. Робота моменту  $M_g$  обчислюється як добуток

$$A_{M_g} = M_g \cdot \varphi_1, \quad M_g = \gamma M_{\text{см}}$$

значення  $M_{\text{см}}$  одержане в /2/.

Робота сили ваги дорівнює

$$A_{G_2} = G_2 S_{2c} \cos(90 + \alpha) = -m_2 g \frac{\varphi_1 R_1}{2} \sin \alpha$$

Робота моменту тертя ковзання

$$A_{M_{\text{тк}}} = M_{\text{тк}} \varphi_2 = -m_2 g \cos \alpha \cdot \delta \cdot \frac{\varphi_1 R_1}{2R_2}$$

Остаточно сума робіт дорівнює

$$\sum A^e = \varphi_1 \left( M_g - \frac{m_2 g R_1}{2} \left( \sin \alpha + \frac{\delta \cos \alpha}{R_2} \right) \right) = \varphi_1 Q_{\text{нр}}$$

де

$$Q_{\text{нр}} = M_g - \frac{m_2 g R_1}{2} \left( \sin \alpha + \frac{\delta \cos \alpha}{R_2} \right)$$

Запишемо теорему про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі:

$$dT = dA$$

Підставляючи значення

$$T = m_{\text{нр}} \cdot \omega_1^2; \quad A = Q_{\text{нр}} \cdot \varphi_1$$

маємо

$$\frac{d}{dt} (m_{\text{нр}} \omega_1^2) = \frac{d}{dt} (Q_{\text{нр}} \varphi_1)$$

$$m_{\text{нр}} 2\omega_1 \frac{d\omega_1}{dt} = Q_{\text{нр}} \frac{d\varphi_1}{dt} = Q_{\text{нр}} \omega_1$$



звідки

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{Q_{np}}{2m_{np}} = \\ &= \frac{8\gamma M_{св} - 4m_2 g R_1 (\sin\alpha + \frac{\delta \cos\alpha}{R_1})}{R_1^2 (4m_1 + 3m_2)} \end{aligned} \quad /4/$$

III.2. Для обчислення прискорення  $W_{2c}$  центра колеса 2 використаємо загальне рівняння динаміки

$$\sum \delta A^c + \sum \delta A^i = 0$$

Розрахункова схема приведена на рис. 37

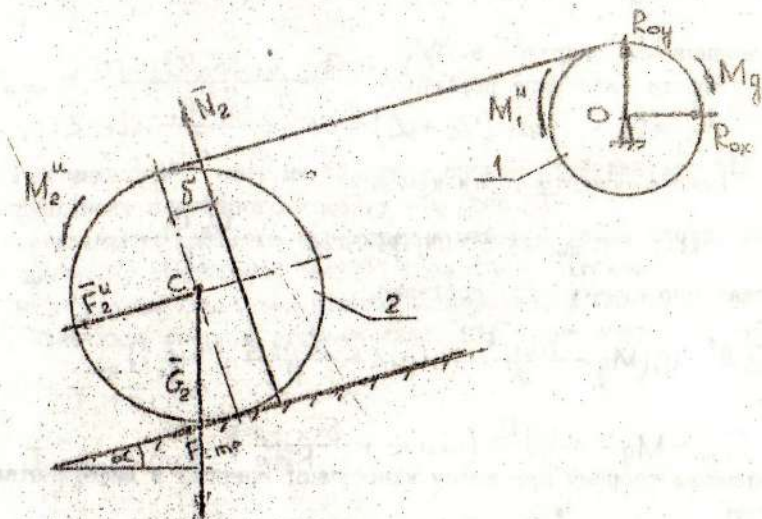


Рис. 37

Складаємо загальне рівняння динаміки

$$(M_g - M_1^u) \delta \varphi_1 + (G_2 \cos(90 + \alpha) - F_2^u) \delta S_{2c} - (M_2^u + M_{ак}) \delta \varphi_2 = 0,$$

$$\text{де } M_1^u = J_1 \epsilon_1 = \frac{m_1 R_1^2}{2} \cdot \frac{2W_{2c}}{R_1}; \quad \delta \varphi_1 = \frac{2\delta S_{2c}}{R_1};$$

$$F_2^u = m_2 W_{2c};$$

$$M_2^u = J_2 \epsilon_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2} \cdot \frac{W_{2c}}{R_2}; \quad \delta \varphi_2 = \frac{\delta S_{2c}}{R_2};$$

$$M_{ак} = N_2 \cdot \delta = m_2 g \cos\alpha \cdot \delta.$$

Підставляючи ці значення, знаходимо значення прискорення центру колеса 2

$$W_{2c} = \frac{4Mg - 2m_2 g R_1 (\sin\alpha + \frac{\delta \cos\alpha}{R_1})}{R_1 (4m_1 + 3m_2)} \quad /5/$$

Щоб перевірити обчислення, треба використати залежність  $\epsilon_1 = \frac{2W_{2c}}{R_1}$  і порівняти с результатом, добути раніше /4/.

III.3. Для визначення прискорення т. В. колеса 2 використаємо векторне рівняння

$$\vec{W}_B = \vec{W}_c + \vec{W}_{Bc} = \vec{W}_c + \vec{W}_{Bc}^n + \vec{W}_{Bc}^t$$

Тут  $W_c = W_{2c}$  /обчислено раніше /5/.

$$W_{Bc}^n = \omega_2^2 \cdot R_2 = \omega_2^2 R_2$$

$$W_{Bc}^t = \epsilon_2 \cdot BC = \epsilon_2 R_2$$

Кутове прискорення  $\epsilon_2$  можна визначити, використовуючи залежність

$$\epsilon_2 = \frac{W_{2c}}{R_2} = \frac{4Mg - 2m_2 g R_1 (\sin\alpha + \frac{\delta \cos\alpha}{R_1})}{R_1 R_2 (4m_1 + 3m_2)}$$

Кутову швидкість  $\omega_2$  визначимо із рівняння:  $\omega_2 = \omega_0 + \epsilon_2 t$ , враховуючи що  $\omega_0 = 0$ , час  $t$  задано умовами задачі.

Визначимо напрям векторів, що складають вектор прискорення т. С. Вектор  $W_{2c} = W_c$  направлений паралельно площині переміщення колеса 2, вектор  $W_{Bc}^t$ , направлений перпендикулярно  $BC$ , вектор  $W_{Bc}^n$  - вздовж  $BC$  /рис.38/.

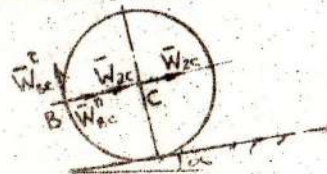


Рис. 38



Ураховуючи ці напрямки обчислимо значення прискорення т. В

$$W_B = \sqrt{(W_{Bc})^2 + (W_{Bc}^n + W_{2c})^2}$$

Зважаючи на громоздкість виразів, не будемо підставляти значення для обчислення прискорення  $W_B$ .

III.4. Для визначення швидкостей точок колеса 2 використаємо їх залежності від положення миттєвого центру швидкостей /МЦШ/. /рис.39/.

$$\frac{V_C}{CP} = \frac{V_B}{BP} = \omega_2$$

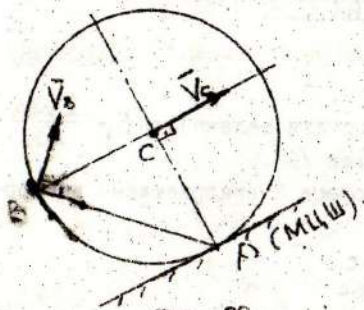


Рис. 39

звідси

$$V_C = \omega_2 \cdot CP = \omega_2 R_2$$

$$V_B = \omega_2 \cdot BP = \omega_2 R_2 \sqrt{2}$$

III.5. Для обчислення натягу нитки під час прискореного руху застосуємо принцип Даламбера і складемо рівняння рівноваги для шківів I /рис. 40/.

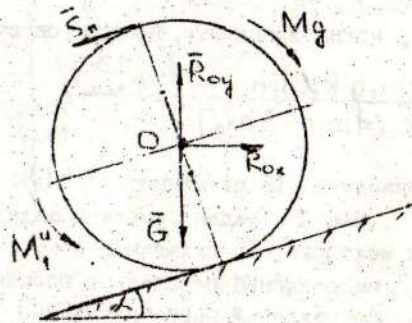


Рис. 40

$$\sum F_x = 0; \quad R_{ox} - S_H \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_y = 0; \quad R_{oy} - G_1 - S_H \sin \alpha = 0;$$

$$\sum M_o = 0; \quad M_g - M_1^u - S_H R_1 = 0$$

З третього з цих рівнянь визначаємо натяг нитки  $S_H$ , враховуючи, що  $M_1^u = J_1 \epsilon_1 = \frac{m_1 R_1^2}{2} \epsilon_1$ , значення  $\epsilon_1$ , обчислене в /4/.

$$S_H = \frac{M_g - \frac{m_1 R_1^2 \epsilon_1}{2}}{R_1} = \frac{(3Mg + 2m_1 g R_1 (\sin \alpha + \frac{\delta \cos \alpha}{R_2})) m_2}{R_1 (4m_1 + 3m_2)} \quad /6/$$

IV. Коливання шківів 2 на нитці після затиснення верхнього перерізу нитки на шківі I.

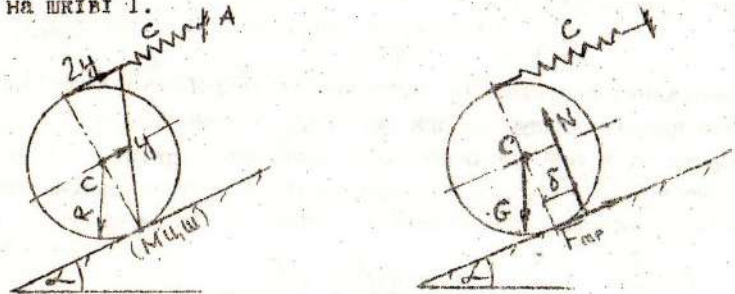


Рис. 41

IV.1. Для складання диференціального рівняння вільних коливань використаємо рівняння Лагранжа II роду.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q$$

Виберемо за узагальнену координату переміщення  $y$  центра колеса

C;  $\dot{y} = V_{Co}$ . Обчислимо кінетичну енергію

$$T = \frac{m \dot{y}^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2} = \frac{1}{2} m V_{Co}^2 + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{2} \frac{V_{Co}^2}{R^2} =$$

$$= \frac{3}{4} m V_{Co}^2 = \frac{3}{4} m \dot{y}^2$$

$$\text{Тут } J_c = \frac{m R^2}{2}, \quad \omega = \frac{V_{Co}}{R}$$



Обчислимо потенціальну енергію як суму потенціальної енергії системи у полі сил ваги  $\Pi_1$  та потенціальної енергії здеформованої пружини  $\Pi_2$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$$

$$\Pi_1 = -G \sin \alpha \cdot 2y$$

У положенні спокою видовження пружини від ваги  $G$  тягара 2

$$\delta_{cm} = \frac{G \sin \alpha}{c}$$

При відхиленні тягара 2 від положення спокою на віддалі  $2y$  видовження пружини дорівнює

$$(\delta_{cm} + 2y)$$

Потенціальна енергія  $\Pi_2$  визначиться як робота, що здійснюється силою пружності пружини при переході системи із положення, що розглядається, в положення спокою,

$$\Pi_2 = \frac{c(\delta_{cm} + 2y)^2}{2} - \frac{c\delta_{cm}^2}{2} =$$

$$= \frac{c\delta_{cm}^2}{2} + c\delta_{cm} \cdot 2y + \frac{c4y^2}{2} - \frac{c\delta_{cm}^2}{2} = c\delta_{cm} \cdot 2y + \frac{c \cdot 4y^2}{2}$$

Сумарна потенціальна енергія системи

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -G \sin \alpha \cdot 2y + c\delta_{cm} \cdot 2y + \frac{c \cdot 4y^2}{2} =$$

$$= -G \sin \alpha \cdot 2y + c \cdot \frac{G \sin \alpha}{c} \cdot 2y + c \cdot \frac{4y^2}{2}$$

Остаточно одержимо:

$$\Pi = \frac{c4y^2}{2} = \frac{c(2y)^2}{2}$$

Підставляючи  $T$  та  $\Pi$  до рівняння Лагранжа II роду, знаходимо:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = 2 \cdot \frac{3}{4} m \dot{y} = \frac{3}{2} m \dot{y};$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{3}{2} m \ddot{y};$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = \frac{2 \cdot c \cdot 4y}{2} = 4cy;$$

$$\frac{3}{2} m \ddot{y} + 4cy = 0$$

- диференціальне рівняння

вільних коливань або

$$\ddot{y} + k^2 y = 0$$

коливань.

$$\text{де } k^2 = \frac{4c \cdot 2}{3m} = \frac{8c}{3m}$$

- частота

Період коливань дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{8c}}$$

Рішення диференціального рівняння має вигляд

$$y = y_0 \cos kt + \frac{V_0}{k} \sin kt$$

Обчислимо початкові умови  $y_0$  і  $V_0$ . У момент затиснення кінця нитки на шківі I, тягар 2 мав початкову швидкість  $V_0$  і за інерцією продовжує рухатися вгору. Знайдемо, на яку відстань  $S$  переміститься шків 2, припускаючи, що шків 2 котиться без ковзання до зупинки. (рис. 42)

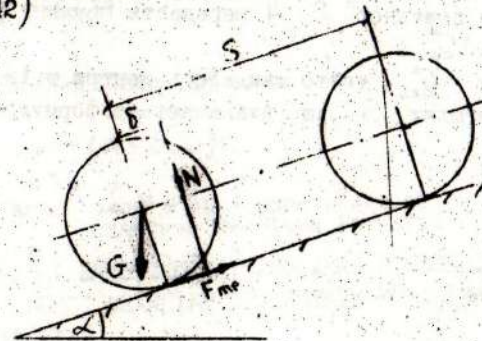


Рис. 42

Запишемо теорему про зміну кінетичної енергії

$$T - T_0 = \sum A$$

В момент зупинки  $T = 0$ .



$$T_0 = \frac{1}{2} m V_{co}^2 + \frac{1}{2} J_c \omega_0^2 = \frac{1}{2} m V_{co}^2 + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{2} \frac{V_{co}^2}{R^2} = \frac{3}{4} m V_{co}^2,$$

Тут  $J_c = \frac{m R^2}{2}$ ;  $\omega_0 = \frac{V_{co}}{R}$ .

Сума робіт складається з роботи сили ваги  $G$  та роботи моменту тертя кочення, а робота сили  $F_{\text{пр}}$  дорівнює 0, бо сила проходить через миттєвий центр швидкостей.

$$\Sigma A = -G \sin \alpha \cdot S + G \cos \alpha \cdot \delta \varphi = -mg S (\sin \alpha + \cos \alpha \cdot \frac{\delta}{R})$$

$$d\varphi = \frac{S}{R}$$

Остаточно одержимо

$$S = \frac{3}{4} \cdot \frac{V_{co}^2}{g (\sin \alpha + \frac{\delta}{R} \cos \alpha)} \quad /7/$$

Після зупинки шків почне котитися вниз по похилій площині, вбираючи ослаблення нитки довжиною  $S$  і передасть пружині розтягуючий удар із швидкістю  $V_{co}^*$ .

Знайдемо величину  $V_{co}^*$ , тобто швидкість центра шківа, яку він придбає, пройшовши шлях  $S$ , що визначається формулою /7/

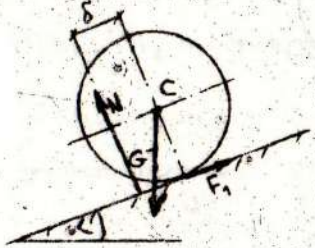


Рис. 43

$$T = \frac{3}{4} M (V_{co}^*)^2,$$

$$A_{\delta}^e = G \sin \alpha \cdot S - \frac{\delta}{R} G \cos \alpha \cdot S = S (\sin \alpha - \frac{\delta}{R} \cos \alpha),$$

$$S = \frac{3}{4} \frac{V_{co}^{*2}}{g (\sin \alpha - \frac{\delta}{R} \cos \alpha)} \quad /8/$$

Підставляючи замість  $S$  вираз /7/, получимо:

$$\frac{3}{4} \frac{V_{co}^2}{g (\sin \alpha + \frac{\delta}{R} \cos \alpha)} = \frac{3}{4} \frac{V_{co}^{*2}}{g (\sin \alpha - \frac{\delta}{R} \cos \alpha)}$$

Звідки

$$V_{co}^* = V_{co} \sqrt{\frac{\sin \alpha - \frac{\delta}{R} \cos \alpha}{\sin \alpha + \frac{\delta}{R} \cos \alpha}} \quad /9/$$

Якщо коефіцієнт тертя кочення  $\delta = 0$ , то

$$V_{co}^* = V_{co} \quad /10/$$

Закон коливань краще записати у такій формі

$$y = A \sin (kt + \alpha), \quad /11/$$

де

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{V_{co}^{*2}}{k}}$$

$$y_0 = -\delta_{cm}$$

Максимальний натяг пружини

$$S_{\text{max}} = (A + \delta_{cm}) c \quad /12/$$

Упорядники: Леонід Вікторович Колосов  
Валентина Охмівна Артюкова

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КОМПЛЕКСНИХ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ СТУДЕНТАМИ МЕХАНІЧНИХ І НЕМЕХАНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Редактор Е.І.Здільник  
Редакційно-видавничий відділ

Підписано до друку 07.12.95. Формат 60x84/16. Папір друк № 3. Офс. друк. Умовн. друк. арк. 1,2. Обл.-вид. арк. 1,2. Тираж 100 прим.  
Замовлення № 247. Безкоштовно.

Ротапринт ДГА України

320600, ДСП, м. Дніпропетровськ-27, пр. К.Маркса, 19.