Бесплатно

Министерство образования Украины

Днепропетровский горный институт

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ ПО РАЗДЕЛУ "ДИНАМИКА" ДИСЦИПЛИНЫ "ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА" ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВЕЧЕРНЕГО И ЗАОЧНОГО ФАКУЛЬТЕТОВ ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Днепропетровск

1993

Министерство образования Украины

Днепропетровский горный институт

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

К ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ ПО РАЗДЕЛУ "ДИНАМИКА" ДИСЦИПЛИНЫ "ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА"

для студентов вечернего и заочного факультетов всех специальностей

Утверждено
на заседании кафедры
строительной и теоретической механики
Протокол № 12
от 25.12.92 г.

Днепропетровск
1993

Методические указания по выполнению заданий к разделу "Динамика" дисциплины "Теоретическая механика" для студентов вечернего и заочного факультетов /Сост.: В.И.Онищенко, В.Д.Кирнос, С.Е.Блохин, В.Е.Артюхова. - Днепропетровск: ДГИ, 1992. - 47 с.

Составители: В.И.Онищенко, канд.физ.-мат.наук, проф.
В.Д.Кирнос, канд.техн.наук, доц.
С.Е.Блохин, д-р техн.наук, проф.
В.Е.Артюхова, ассист.

Ответственный за выпуск зав.кафедрой строительной и теоретической механики В.И.Онищенко, канд.физ.-мат.наук,профессор

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В настоящих указаниях приводятся варианты контрольных задач по разделу "Динамика". Даются примеры выполнения задач и пояснения к их выполнению.

При изучении курса особое внимание следует уделить приобретению навыков решения задач. Для этого, изучив материал данной темы, следует обязательно разобраться в решениях соответствующих задач, которые приводятся.

I. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА РАЗДЕЛА "ДИНАМИКА"

I.I. Основные положения динамики и ускорения движения точки

Законы механики Галилея-Ньютона.Инерциальная система отсчета. Задача динамики. Дифференциальные уравнения свободной материальной точки. Две основные задачи динамики для материальной точки.

I.2. Свободные и вынужденные колебания материальной точки

Учет сил трения. Резонанс. Коэффициент динамичности.

I.3. Относительное движение материальной точки

Дифференциальные уравнения движения. Переносная и Кориолисова сила инерции. Принцип относительности классической механики.

I.4. Геометрия масс

Центр масс механической системы и его координаты. Моменты инерции. Радиус инерции. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей. Примеры вычисления моментов инерции тел.

I.5. Общие теоремы динамики точки и системы их приложения

Свойства внутренних сил системы. Дифференциальные уравнения движения системы. Количества движения точки и системы. Элементарный и полный импульсы силы. Теорема об изменении количества движения точки и системы. Законы сохранения количества движения. Теорема о движении центра масс системы. Кинетический момент точки и системы. Кинетический момент относительно оси вращения при вращательном движении твердого тела. Теорема об изменении кинетического момента точки и системы. Законы сохранения кинетических моментов. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Элементарная и полная работа силы. Примеры вычисления работы силы. Кинетическая энергия твердого тела. Теорема об изменении кинетической энергии точки и системы. Теорема Кенинга. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Поверхности уровня. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии точки и состемы.

I.6. Принцип Даламбера для материальной точки и системы

Силы инерции твердого тела. Главный вектор и главный момент сил инерции.

I.7 Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)

Связи, классификация связей. Возможные перемещения системы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений и его применение для расчета простейших машин и определение реакций связей. Принцип Лагранжа-Даламбера (общее уравнение динамики).

I.8. Уравнение Лагранжа второго рода

Обобщенные координаты и обобщенные силы. Условия равновесия системы. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах. Уравнения Лагранжа второго рода. Случай потенциальных сил.

I.9. Список литературы

I. Добронравов В.В., Никитин Н.И., Дворников А.Л. Курс теоретической механики - М.: Высш. шк., 1974. - 527 с.

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Наука, 1970. - 478 с.
3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике /Под ред. А.А.Яблонского. - М.: Высш.шк. 1978. - 388 с.

2. ЗАДАЧИ К ДОМАШНИМ ЗАДАНИЯМ

2.I. Задача Д I

Тело движется из точки А по участку АВ (длиной ℓ) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течение τ с. Его начальная скорость V_A. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f. В точке В тело покидает плоскость со скоростью V_B и попадает со скоростью V_C в точку С плоскости ВД, наклоненную под углом β к горизонту, находясь в воздухе T с.

Определить, используя данные табл. ДI и рис. ДI.0 - Д.I.9, скорость в точке С и неизвестный размер h или d, указанный в табл. ДI.

Указания I

I. При решении задач тело принять за материальную точку.
2. Для рисунков, на которых не указаны углы α и β, принимать их равными нулю или 90° /по смыслу/.
3. Длину участка ℓ принять равной I0 м.

Таблица Д I

Номер условия	Исходные данные						Искомые данные
	V_A, м/с	h, м	d, м	α, град	β, град	f	
0	25	100	-	30	30	0,1	V_c, d
1	50	-	10	45	45	0,15	V_c, h
2	30	50	-	60	60	0,2	V_c, d
3	100	60	-	70	70	0,25	V_c, h
4	160	-	100	80	80	0,30	V_c, d
5	70	90	-	35	35	0,35	V_c, h
6	80	-	40	50	40	0,05	V_c, d
7	40	20	-	40	50	0,08	V_c, h
8	30	-	30	20	65	0,18	V_c, d
9	200	200	-	65	20	0,25	V_c, h

Указания 2

При решении задачи ДI необходимо придерживаться такой последовательности:

1. Вводится система координат для первого участка.
2. Составляются дифференциальные уравнения движения для первого участка.
3. Методом разделения переменных дифференциальные уравнения интегрируются.
4. По начальным условиям задачи определяются постоянные интегрирования.
5. После их исключения определяется скорость в точке.
6. Далее аналогично рассматривается движение на втором участке.

Пример задачи ДI

В железнодорожных скальных выемках для защиты кюветов от попадания в них с откосов каменных осыпей устраивается полка ДС. Учитывая возможность движения камня из наивысшей точки A откоса и полагая при этом его начальную скорость V_0 равной нулю, определить минимальную ширину полки b и скорость V_c, с которой камень падает на нее. По участку АВ откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l, камень движется τ_e (рис. Д I).

При решении задачи считать коэффициент трения скольжения камня на участке АВ постоянным, а сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано: $V_A = 0$; $\alpha = 60^\circ$; $l = 4$ м; $\tau_e = 1$ с; $f \neq 0$; $h = 5$ м; $\beta = 75^\circ$.

Определить: b и V_c

Решение: Рассмотрим движение камня на участке АВ. Принимая камень за материальную точку, покажем (см. рис. Д.I) действующие на него силы: вес G, нормальную реакцию N и силу трения скольжения F. Составим дифференциальное уравнение движения на участке АВ:

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx_1}; \qquad m\frac{d^2x_1}{dt^2} = G\sin\alpha - F.$$

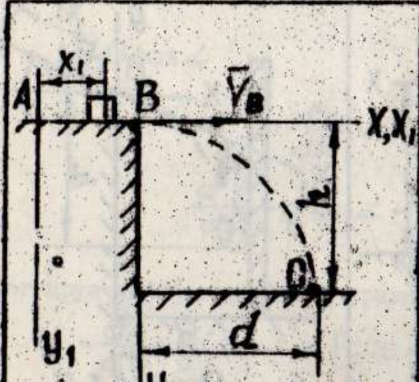


Рис. Д1.0

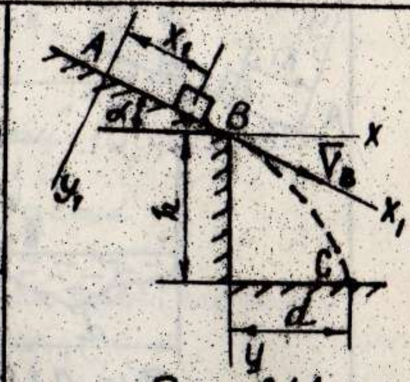


Рис. Д1.1

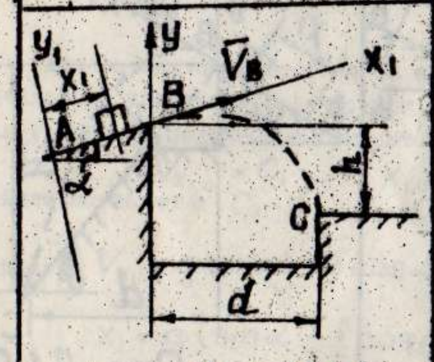


Рис. Д1.2

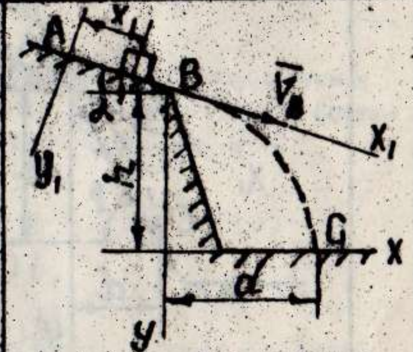


Рис. Д1.3

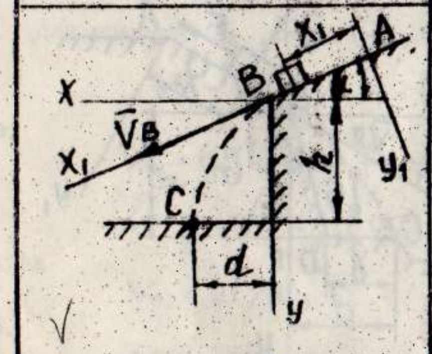


Рис. Д1.4

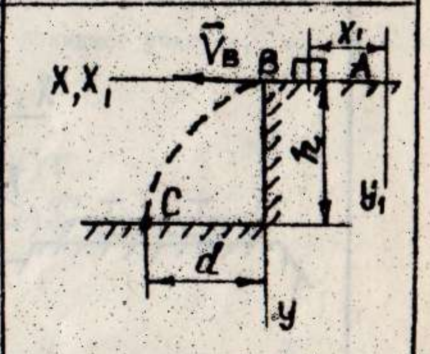


Рис. Д1.5

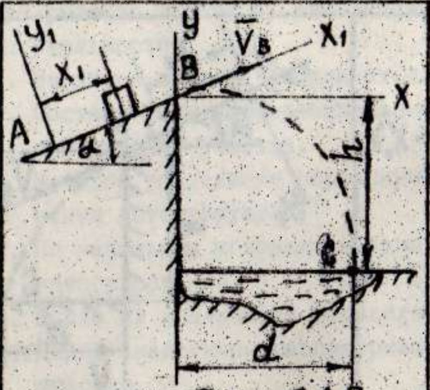


Рис. Д1.6

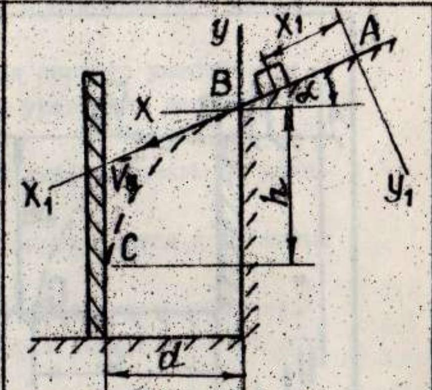


Рис. Д1.7

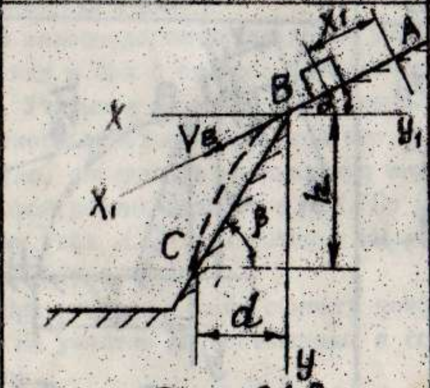


Рис. Д1.8

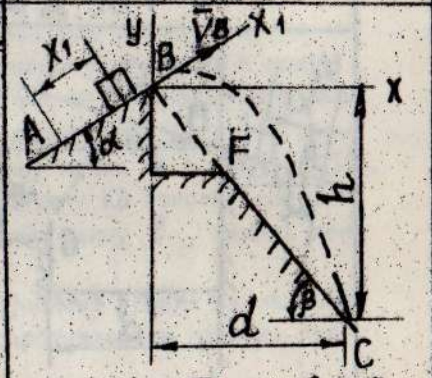


Рис. Д1.9

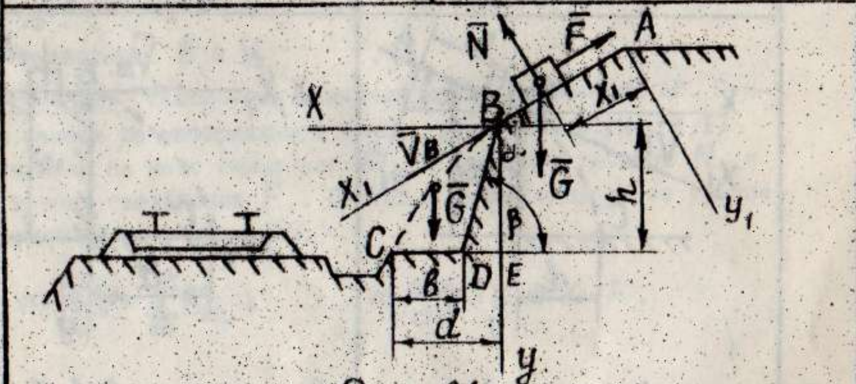


Рис. Д1

Сила трения $F = fN$,

где $N = G\cos\alpha$

Таким образом, $m\frac{d^2x_1}{dt^2} = G\sin\alpha - fG\cos\alpha$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\sin\alpha - fg\cos\alpha.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение дважды, получаем:

$$V_{x_1} = \frac{dx_1}{dt} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + C_1,$$

$$x_1 = [g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2]t^2 + C_1t + C_2$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: при $t = 0, x_{1,0} = 0$ и $V_{x_{1,0}} = 0$. Составив уравнения, полученные при интегровании, для $t = 0$

$$V_{x_{1,0}} = C_1, \quad x_{1,0} = C_2$$

найдем постоянные $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

Тогда $V_{x_1} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t$;

$$x_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2}.$$

Для момента τ_c, когда камень покидает участок,

$$V_{x_1} = V_B, \quad x_1 = \ell,$$

т.е.

$$V_B = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau,$$

$$\ell = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{\tau^2}{2},$$

откуда

$$V_B = 2\ell/\tau,$$

т.е.

$$V_B = \frac{2\cdot 4}{1} = 8 \text{ м/с}$$

Рассмотрим движение камня от точки B до точки C.

Показав силу тяжести G, действующую на камень, составим дифференциальные уравнения его движения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0; \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=G.$$

Интегрируем первое из этих уравнений:

$$V_x=\frac{dx}{dt}=C_3, \qquad x=C_3t+C_4.$$

Постоянные интегрирования C_3 и C_4 определим используя начальные условия задачи: при $t=0$, $X_0=0$, $V_{X_0}=V_B\cdot\cos\alpha$

$$V_{X_0}=C_3, \quad X_0=C_4$$

найдем, что

$$C_3=V_B\cos\alpha, \quad C_4=0.$$

Тогда

$$V_x=V_B\cos\alpha, \quad x=V_B\cos\alpha\cdot t$$

Интегрируя уравнения $m\frac{d^2y}{dt^2}=G$, имеем:

$$\frac{dy}{dt}=gt+C_5, \quad y=gt^2/2+C_5t+C_6$$

Начальные условия: при $t=0$, $y_0=0$, $V_{y,0}=V_B\sin\alpha$

Из уравнений, полученных интегрированием и составленных для $t=0$

$$V_{y_0}=C_5, \quad y_0=C_6,$$

найдем, что

$$C_5=V_B\sin\alpha, \quad C_6=0.$$

Окончательно

$$V_y=gt+V_B\sin\alpha, \quad y=\frac{gt^2}{2}+V_B\sin\alpha\cdot t.$$

Таким образом, уравнения движения камня имеют вид

$$x=V_B\cos\alpha\cdot t, \quad y=\frac{gt^2}{2}+V_B\sin\alpha\, t$$

Уравнение траектории камня найдем, исключив параметр t из уравнений движения. Определив t из первого уравнения и

подставив его значение во второе, получим уравнение параболы:

$$y=\frac{gx^2}{2V_B^2\cdot\cos^2\alpha}+x\,tg\,\alpha.$$

В момент падения $y=h=5$ м, $x=d$

т.е. $$5=\frac{9{,}81\cdot d^2}{2\cdot 8^2\cdot 0{,}5^2}+d\sqrt{3},$$

откуда $$d_{1,2}=-2{,}82\pm4{,}93,$$

так, что $d_1=2{,}11$ м, $d_2=-7{,}75$ м.

Поскольку траекторией движения камня является ветвь параболы с положительными абсциссами ее точек, то $d=2{,}11$ м.

Минимальная ширина полки

$$b=d-ЕД=d-h/tg\,75^\circ=2{,}11-5/3{,}73=0{,}77\text{ м}$$

Используя уравнение движения камня $x=V_B\cos\alpha\cdot t$, найдем время T движения камня от точки B до точки C:

$$2{,}11=8\cdot0{,}5T,$$

откуда

$$T=0{,}53\text{ с}.$$

Скорость камня при падении найдем через проекции скорости на оси координат

$$V_x=V_B\cos\alpha, \quad V_y=gt+V_B\sin\alpha,$$

по формуле $V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}$

Для момента падения $t=T=0{,}53$ с,

$$V_C=\sqrt{(V_B\cos\alpha)^2+(gT+V_B\sin\alpha)^2}=$$

$$=\sqrt{(8\cdot0{,}5)^2+(9{,}81\cdot0{,}53+8\cdot\sin\alpha)^2}=12{,}8\text{ м/с}$$

2.2. Задача Д 2

Механическая система сотоит из нескольких тел, соединенных между собой нитями, намотенными на шкивы.

Под действием силы $F = f(S)$, момента и сил тяжести система переходит в движение из состояния покоя.

Определить значение скорости V_1 первого тела, когда оно пройдет путь S_1. При расчетах принять радиусы осевых моментов инерции тел равными: $i_2 = i_3 = 20$ кгм^2, массы тел $m_1 = m_2 = m_3 = 10$ кг, коэффициент трения скольжения $f = 0{,}1$. Трением качения пренебречь.

Указания

Задача Д 2 на применение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий тел системы.

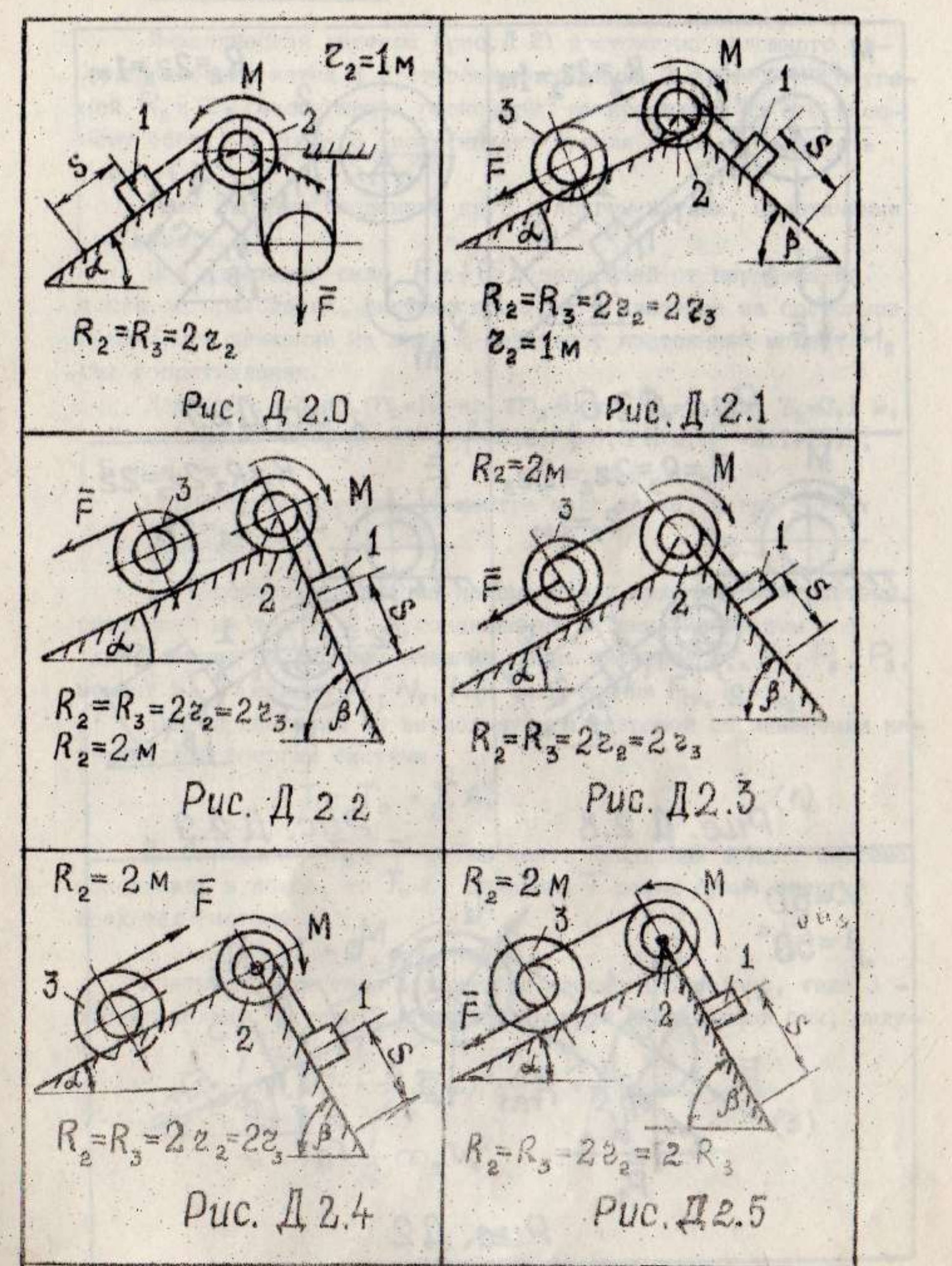
Эту энергию можно выразить через скорость первого тела.

При определении работы все перемещения следует выразить через заданное перемещение S_1.

Таблица Д 2

Номер условия	M, Нм	$F = f(S)$, Н	S, м	α, град	β, град
0	1	50 (2+3S)	1,0	30	60
1	-15	200 (5+2S)	2,0	60	30
2	20	800 (3+4S)	3,0	30	30
3	-40	400 (4+5S)	0,5	60	60
4	-16	300 (3+2S)	1,5	30	60
5	30	400 (3+5S)	2,5	60	30
6	60	600 (2+5S)	3,5	60	60
7	-100	300 (8+3S)	0,8	30	30
8	-50	400 (2+5S)	1,6	60	30
9	20	500 (3+2S)	2,5	30	60

Знак /–/ для M указывает, что момент необходимо направлять в противоположную сторону.



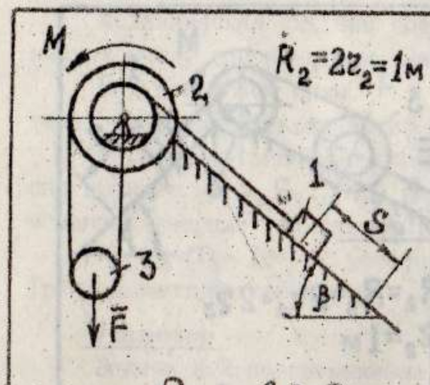


Рис. Д2.6

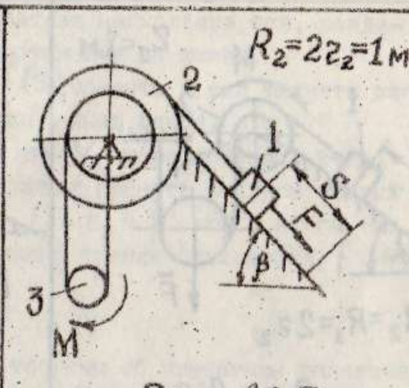


Рис. Д2.7

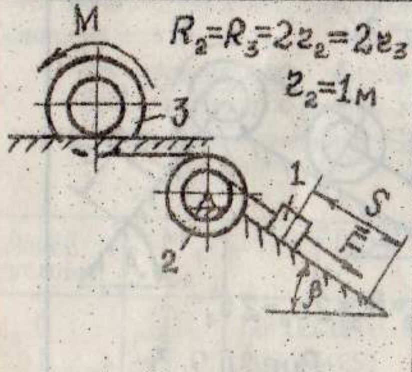


Рис. Д2.8

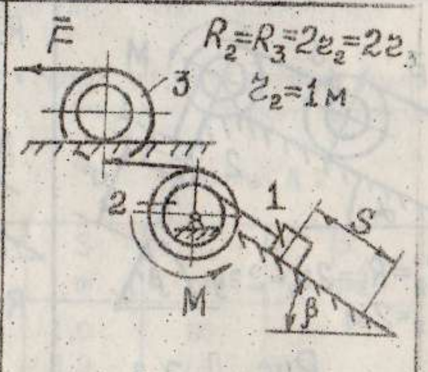


Рис. Д2.9

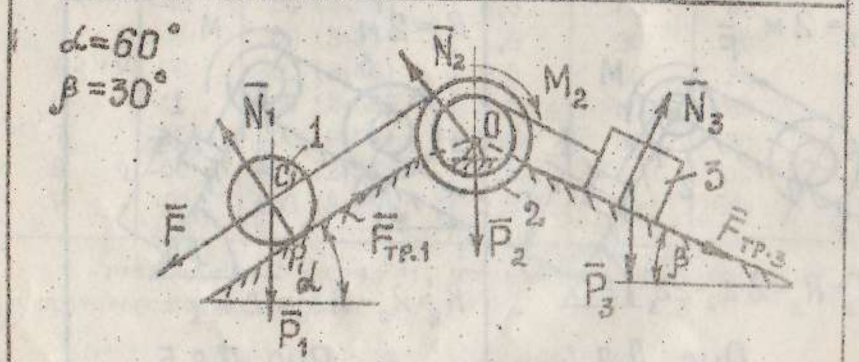


Рис. Д2

Пример задачи Д2

Механическая система (рис. Д 2) состоит из сплошного цилиндрического катка 1, ступенчатого шкива 2 с радиусами ступеней R_2 и r_2 (масса шкива равномерно распределена по его внешнему ободу) и груза 3 (коэффициент трения груза о плоскость равен f).

Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкив 2.

Под действием силы $F=f(S)$, зависящей от перемещения точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя. При движении на шкив 2 действует постоянный момент M_2 сил сопротивления.

Дано: $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 10$ кг, $m_3 = 8$ кг, $R_2 = 0{,}2$ м, $r_2 = 0{,}1$ м, $r_1 = 0{,}2$ м; $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $f = 0{,}2$, $M_2 = 0{,}6$ Н м, $F = 2(1+2S)$ Н, $S = 2$ м.

Определить скорость V_C центра масс катка, когда $S = S_1$.

Решение

1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, соединенных нитями. Изобразим все действующие на систему внешние силы: активные F_1, P_1, P_2, P_3, момент M_2, реакции N_1, N_2, N_3 и силы трения $F_{тр_1}$ и $F_{тр_3}$.

Для определения V_1 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e . \qquad (1)$$

2. Определим T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 . \qquad (2)$$

Учитывая, что тело 1 движется плоскопараллельно, тело 3 – поступательно, а тело 2 вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} J_{z_1} \omega_1^2 , \quad T_2 = \frac{1}{2} J_{z_2} \omega_2^2 , \qquad (3)$$
$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2$$

Все входящие сюда скорости следует выразить через искомую V_1. Приняв во внимание, что точка P_1 – мгновенный центр скоростей катка 1, и обозначив радиус катка через r_1, получим

$$\omega_1 = \frac{V_1}{P_1C_1} = \frac{V_1}{r_1}, \quad \omega_2 = \frac{V_1}{R_2}, \quad V_3 = \omega_2 r_2 = V_1 \frac{r_2}{R_2}. \qquad (4)$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних сил при этом перемещении, которое будет иметь система, когда точка C_1 пройдет путь S_1. Одновременно все перемещения следует выразить через заданную величину S_1, для чего учтем, что здесь зависимость между перемещениями будет такой же, как и между соответствующими скоростями в равенствах (4), т.е. $\varphi_2 = S_1/R_2$, $S_3 = S_1 r_2/R_2$

В результате получим:

$$A(\bar{F}) = \int_0^{S_1} 2(1+2S)\,dS = 2(S_1 + S_1^2),$$

$$A(\bar{P}_1) = P_1 S_1 \sin 60^\circ, \quad A(M_2) = -M_2\varphi_2 = -M_2 S_1/R_2,$$

$$A(\bar{P}_3) = -P_3 \cdot S_3 \sin 30^\circ = -P_3 S_1 \frac{r_2}{R_2} \sin 30^\circ,$$

$$A(\bar{F}_{тр_3}) = -F_{тр} S_3 = -f N_3 S_3 = -f P_3 \cos 30^\circ S_1 \frac{r_2}{R_2}.$$

Работа остальных сил равна нулю, так как точка P_1, где приложены N_1 и $F_{тр_1}$ – мгновенный центр скоростей; точка O, где приложены P_2 и N_2, неподвижна, а реакция N_3 перпендикулярна перемещению груза 3. Тогда окончательно

$$\Sigma A_k^e = 2(S_1 + S_1^2) + P_1 \sin 60^\circ S_1 - M\frac{S_1}{R_2} - P_3 S_1 \frac{r_2}{R_2}(\sin 30^\circ + f\cos 30^\circ). \qquad (5)$$

4. Подставив выражения (2) и (5) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0 = 0$, получим:

$$\left(\frac{3}{4}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_3\frac{r_2^2}{R_2^2}\right)V_1^2 = 2(S_1 + S_1^2) + P_1 S_1 \sin 60^\circ - M_2\frac{S_1}{R_2} - P_3 S_1 \frac{r_2^2}{R_2^2}(\sin 30^\circ + f\cos 30^\circ) \qquad (6)$$

При числовых значениях, которые имеют заданные величины, равенство (6) дает:

$$9V_1^2 = 10{,}55\,S_1^2 \ (Нм). \qquad (7)$$

Учитывая, что $S_1 = 2$ м, получим $V_1 = 1{,}53$ м/с.

2.3. Задача Д 3

Механическая система состоит из тел, связанных между собой нитями, намотанными на шкивы (рис. Д 3.0–Д 3.9). По исходным данным табл. Д 3 определить, используя теорему об изменении кинетической энергии механической системы, ускорение тела, указанного в табл. Д 3. Трение скольжения тел о плоскость принять равным 0,1. Радиусы осевых моментов инерции принять: $i_2 = i_3 = 2$ м

Таблица Д 3

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	F_1, Н	F_2, Н	M_1, Нм	M_2, Нм	Определить
0	2	5	4	50	–	5	–	ε_1
I	6	2	7	–	30	–	6	ε_2
2	8	6	3	80	–	3	–	W_1
3	4	5	2	–	60	–	4	W_2
4	3	7	8	40	–	6	–	ε_1 ? W_1
5	7	3	6	–	50	–	2	ε_1
6	5	4	5	50	–	8	–	ε_2
7	6	8	3	–	80	–	5	ε_2
8	2	6	2	30	–	5	–	W_1
9	5	2	6	–	40	–	3	W_1

Указания

Порядок решения задачи Д 3 аналогичен задаче Д 2. Необходимо задаться перемещением (линейным или угловым) тела, ускорение которого требуется определить.

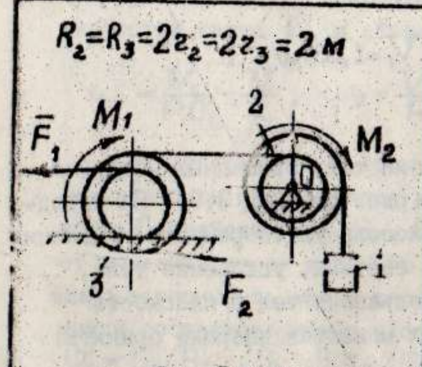


Рис.Д3.0

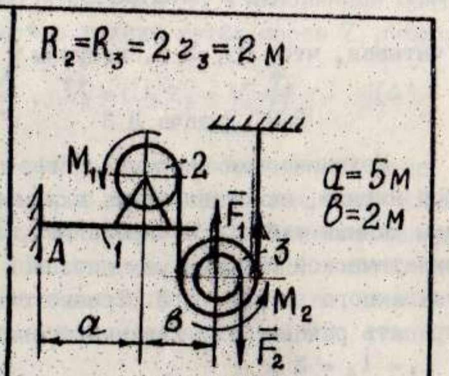


Рис.Д3.1

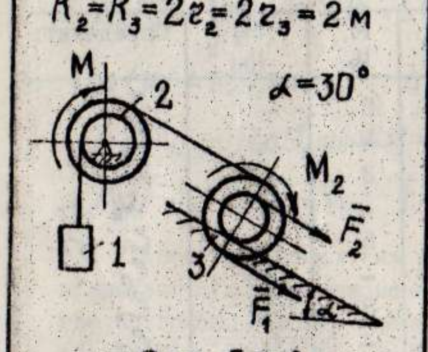


Рис. Д3.2

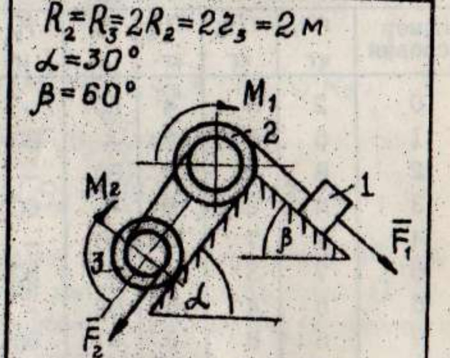


Рис. Д3.3

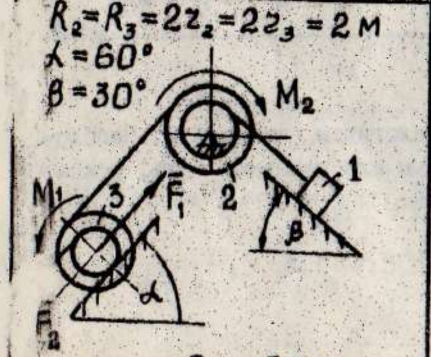


Рис. Д3.4

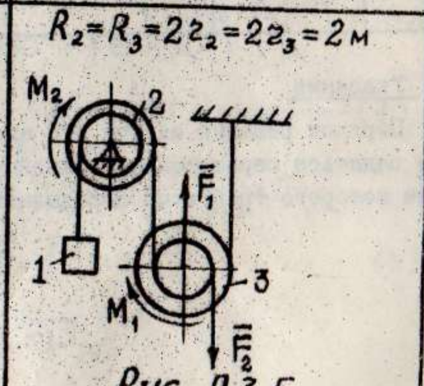


Рис. Д3.5

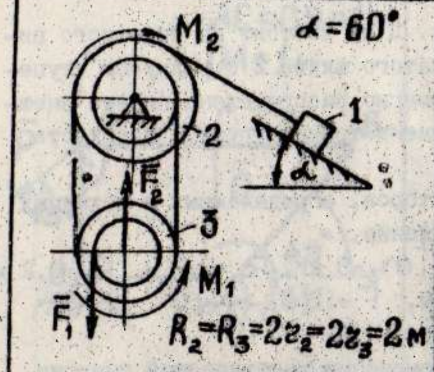


Рис. Д3.6

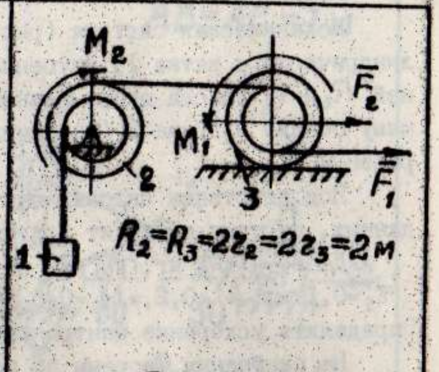


Рис. Д3.7

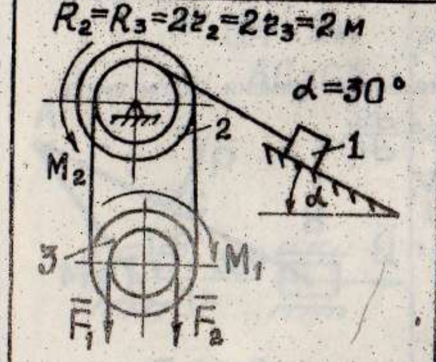


Рис. Д3.8

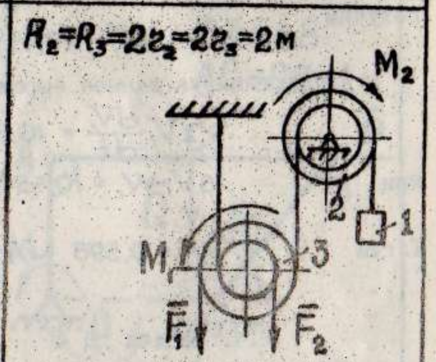


Рис. Д3.9

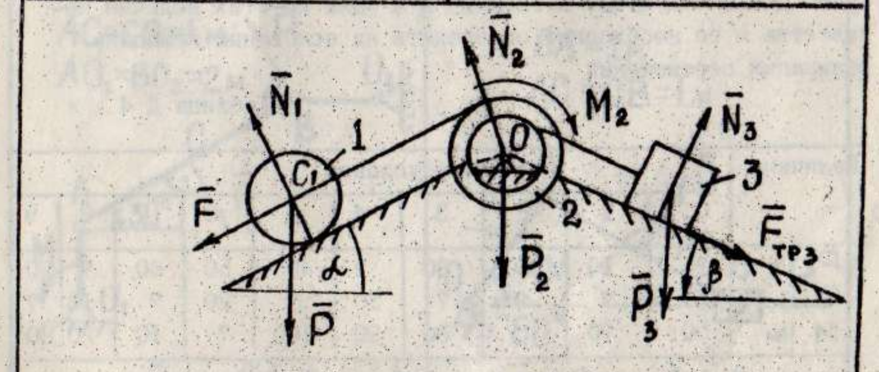


Рис. Д.3

Пример задачи Д 3

Механическая система (рис. Д 3) состоит из сплошного цилиндрического катка 1, ступенчатого шкива 2 с радиусом ступеней R_2 и r_2 (масса шкива равномерно распределена по его внешнему ободу) и груза 3 (коэффициент трения груза о плоскость равен f).

Под действием силовых факторов, определенных в исходных данных, система приходит в движение.

Дано: m_1=4 кг, m_2=10 кг, m_3=8 кг, R_1=0,2 м, R_1=0,2 м, r_2=0,1 м, f=0,2, M_2=0,6 Нм, F=12 Н, α=60°, β=30°

Определить ускорение центра катка W_1 .

На основании теоремы об изменении кинетической энергии, используя выражения (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) задачи Д 2 получим

$$9V_1^2 = 10{,}55S,$$

Дифференцируя данное выражение по времени будем иметь

$$9\cdot 2V_1\frac{dV_1}{dt} = 10{,}55\frac{dS_1}{dt},$$

или $$18V_1W_1 = 10{,}55V_1$$

Тогда $$W_1 = 0{,}598 \text{ м/с}^2$$

2.4. Задача Д 4

На механическую систему действуют силы P , Q и момент M (рис. Д 4.0 – Д 4.9). В таблице Д 4 одна из этих величин неизвестна и ее необходимо определить на основании принципа возможных перемещений

Таблица Д 4

Величина	Номер условия									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P, Н	?	10	20	30	?	40	50	60	?	70
Q, Н	50	?	40	?	30	?	20	?	10	?
M, Нм	60	70	?	80	90	100	?	10	20	30

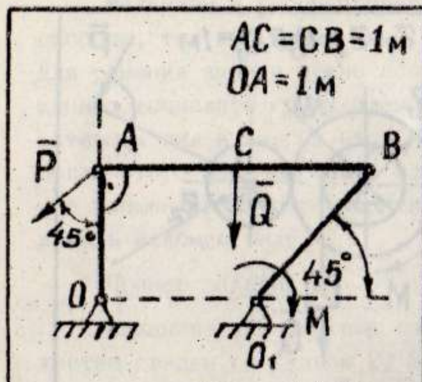


Рис. Д4.0

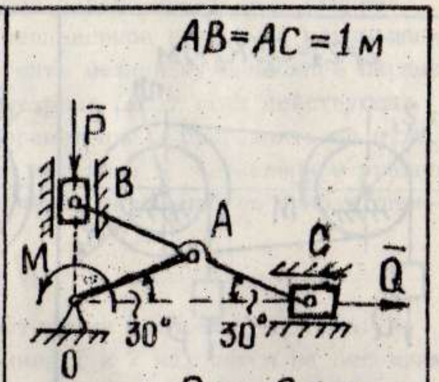


Рис. Д4.1

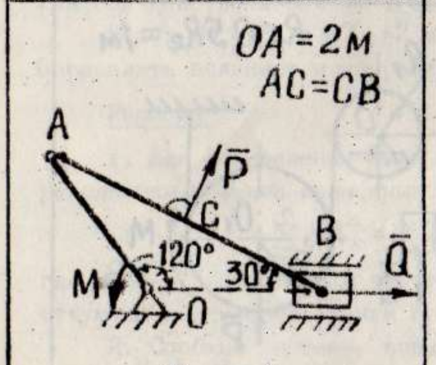


Рис. Д4.2

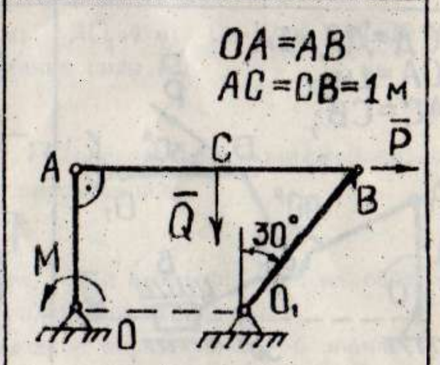


Рис. Д4.3

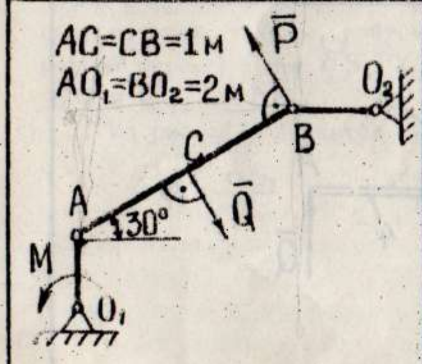


Рис. Д4.4

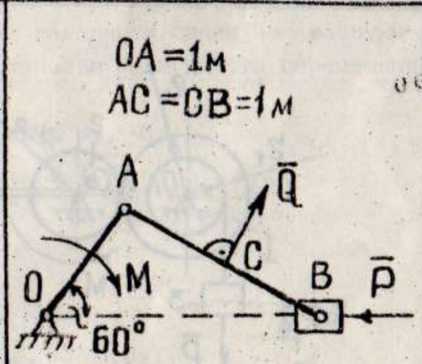


Рис. Д4.5

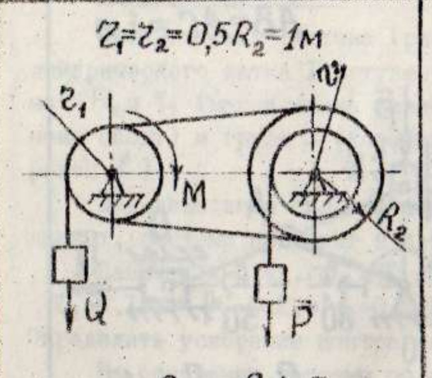


Рис. Д4.6

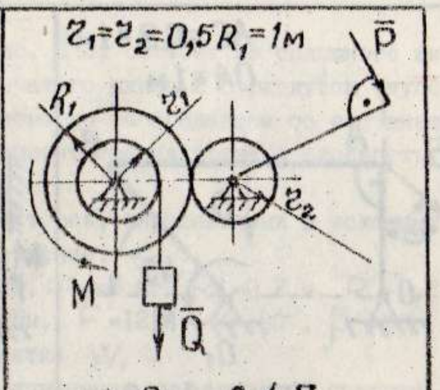


Рис. Д4.7

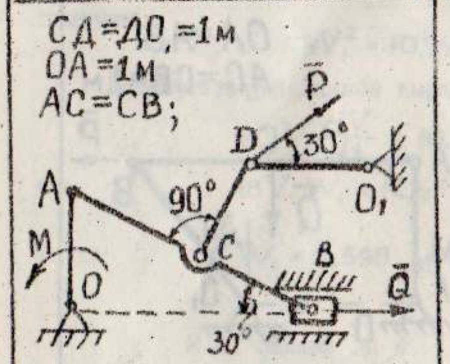


Рис. Д4.8

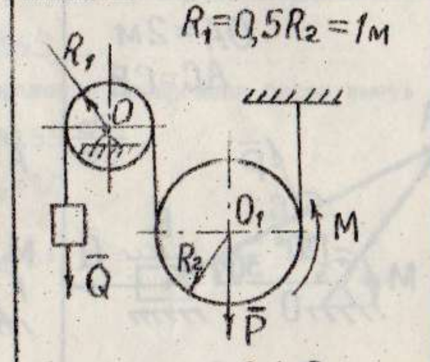


Рис. Д4.9

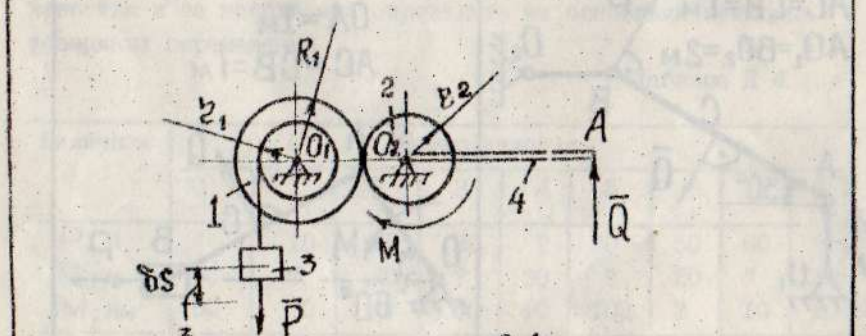


Рис. Д4

Указания

Механизм в рассматриваемой задаче имеет одну степень свободы, так как имеет одно независимое возможное перемещение. Для решения задачи нужно сообщить механизму возможное перемещение, вычислить сумму элементарных работ всех действующих активных сил и пар на этом перемещении и приравнять ее нулю. После этого надо выразить все вошедшие в составленное уравнение элементарные перемещения через какое-нибудь одно и определить искомую силу.

Пример задачи Д4

Механическая система состоит из четырех тел. Рычаг 4 жестко связан со шкивом 2. Шкивы I и 2 находятся на неподвижных шарнирных опорах O_1 и O_2 . Система находится в равновесии под действием сил P , Q и момента M .

Дано: $R_1 = 2r_1 = 2r_2 = 2$ м; AO_2=4 м; Q=I0 Н; M=I0 Нм

Определить величину и направление силы P .

Решение

I. Для определения силы P воспользуемся выражением, определяющим принцип возможных перемещений

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a = 0, \qquad (1)$$

где δA_k^a – элементарная работа К-ой активной силы на соответствующем перемещении точки приложения этой силы.

2. Сообщим системе возможное перемещение, обозначив при этом $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ элементарные повороты шкивов I и 2 соответственно, а δS_3 – элементарное перемещение тела 3. Система имеет одну степень свободы, поэтому зададимся одним независимым возможным перемещением δS_3. Установим зависимости перемещений $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ от δS_3.

Из рис. Д 4 является очевидным, что:

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta S_3}{r_1}, \qquad \delta\varphi_2 = \frac{\delta S_3 R_1}{r_1 \cdot r_2}. \qquad (2)$$

3. Составим уравнение (1) и получим

$$P\delta S_3 + M\delta\varphi_3 - Q\,AO_2\,\delta\varphi_2 = 0 . \qquad (3)$$

Учитывая зависимости (2) выражение (3) будет иметь вид:

$$P\delta S_3 + M\frac{\delta S_3 \cdot R_1}{r_1 \cdot r_2} - Q \cdot AO_2 \frac{\delta S_3\, R_1}{r_1 \cdot r_2} = 0 .$$

Учтя общий множитель δS_3 получим:

$$\left(P + M\frac{R_1}{r_1 r_2} - Q \cdot AO_2 \frac{R_1}{r_1 r_2}\right)\delta S_3 = 0 .$$

Приравняв нулю выражение в скобках, определим силу P

$$P = (QAO_2 - M)\frac{R_1}{r_1 \cdot r_2} = (10 \cdot 4 - 10)\frac{2}{1 \cdot 1} = 60\ H$$

2.5. Задача Д 5

Груз I массой m укреплен на пружинной подвеске в лифте (рис. Д5.0 – Д5.9), табл. Д5). Лифт движется вертикально по закону $\xi = 1/2(a_1 t^2) + a_2\sin(\omega t) + a_3\cos(\omega t)$ (ось ξ направлена по вертикали вверх; ξ выражено в метрах, t – в секундах). На груз действует сила сопротивления среды $R = \mu v$, где v – скорость груза по отношению к лифту.

Найти закон движения груза по отношению к лифту, т.е. $X = f(t)$, начало координат поместить в положении статического равновесия груза при неподвижном лифте (во избежание ошибок в знаках, направить ось X в сторону удлинения пружины, а груз изобразить в положении, при котором $X > 0$ и пружина растянута). При подсчетах можно принять $g = 10$ м/с^2. Массой пружины и соединительной планки 2 пренебречь.

В таблице обозначено: C_1, C_2, C_3 – коэффициенты жесткости пружин, λ_0 – удлинение пружины с эквивалентной жесткостью в начальный момент времени $t = 0$, v_0 – начальная скорость груза по отношению к лифту (направлена вертикально вверх). Прочерк в столбцах C_1, C_2, C_3 означает, что соответствующая пружина отсутствует и на чертеже изображаться не должна. Если при этом конец одной из оставшихся пружин окажется свободным, его следует прикрепить в соответствующем месте к грузу или к потолку (полу) лифта; то же следует сделать, если свободными окажутся соединенные планкой 2 концы обеих пружин.

Условие $\mu = 0$ означает, что сила сопротивления отсутствует.

Указания

Задача Д5 охватывает одновременно темы относительного движения и колебания материальной точки. Сначала нужно составить дифференциальное уравнение относительного движения (по отношению к лифту) рассматриваемого в задаче груза, для чего присоединить к действующим силам переносную силу инерции. При этом заменить подвеску одной пружиной с жесткостью, эквивалентной жесткости подвески. Затем проинтегрировать полученное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка, учтя начальные условия.

Таблица Д 5

Номер условия	m, кг	C_1, Н/м	C_2, Н/м	C_3, Н/м	a_1, м/с^2	a_2, м	a_3, м	ω, с$^{-1}$	μ, Нс/м	λ_0, м	v_0, м/с
0	I	300	I50	–	0	0,I	0	I5	0	0	0
I	0,8	–	240	I20	–I,5	0	0	–	8	0,I	0
2	0,5	–	I00	I50	.0	0,8	0	5	0	0	4
3	I	240	–	I60	0	0	0,5	6	0	0	0
4	0,5	80	I20	–	–	0	0	–	6	0,I5	0
5	2	–	400	400	0	0	0,I	I6	0	0	0
6	0,4	60	–	I20		0	0	–	4	0	2
7	0,5	I20	–	I80	0	0,I	0	20	0	0	0
8	0,4	50	200	–	0	0	0,2	20	0	0,I5	0
9	I	200	–	300	I,5	0	0	–	20	0	3

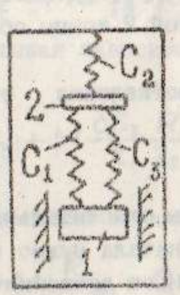


Рис. Д 5.0

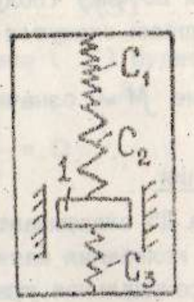


Рис. Д5.1

Рис. Д5.2

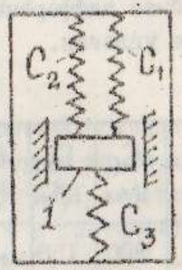


Рис. Д5.3

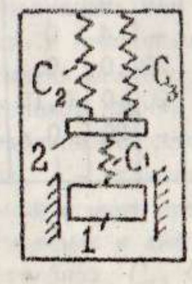


Рис. Д 5.4

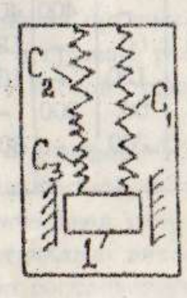


Рис. Д 5.5

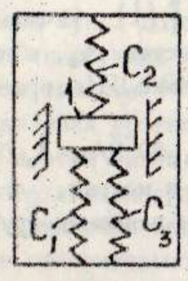


Рис. Д5.6

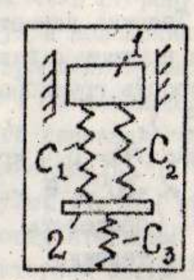


Рис. Д5.7

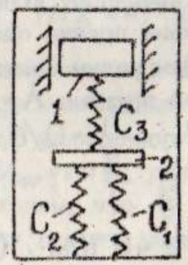


Рис. Д 5.8

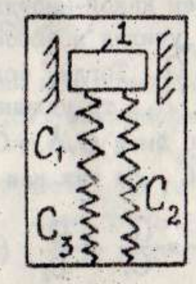
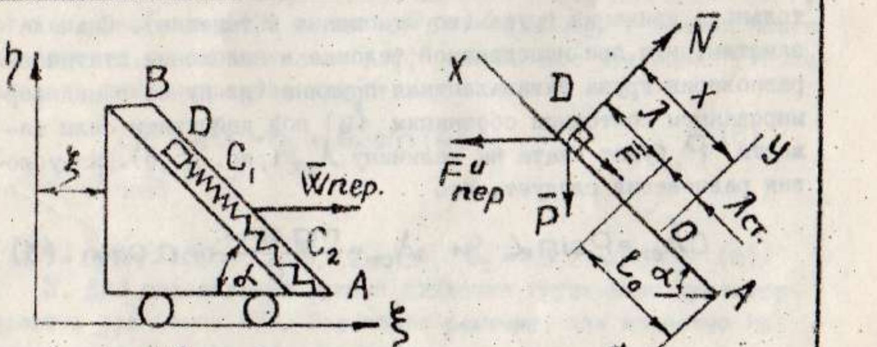


Рис. Д5.9



а) б)

Рис. Д5

Пример задачи Д 5

Груз D массой m, прикрепленный к двум последовательно соединенным пружинам с коэффициентами жесткости C_1 и C_2, перемещается по пазу AB призматической тележки (рис. Д 5,а). Тележка движется по закону $\xi = f_1(t)$. Начальное удлинение пружины с эквивалентной жесткостью λ_0, а начальная скорость груза по отношению к тележке V_0 (направлена от D к B).

Дано: $m = 0,4$ кг, $C_1=200$ Н/м, $C_2=50$ Н/м, $\lambda_0=0,1$ м, $V_0=1$ м/с, $\alpha=60^0$, $\xi = 2t^2 + 0,4\sin 4t$, ξ - в метрах, t - в секундах). Определить $x = f(t)$ - закон движения груза по отношению к тележке.

Решение

1. Заменим прикрепленные к грузу пружины одной эквивалентной пружиной с коэффициентом жесткости $C_{экв}=C$. Значение C здесь определяется из условия, что при равновесии под действием какой-нибудь приложенной к свободному концу пружин силы Q, усилия в любом поперечном сечении пружин одинаковы и равны Q. Тогда, если удлинения пружин равны соответственно λ_1 и λ_2, то удлинение эквивалентной пружины $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ и должно быть $C_1\lambda_1 = C_1\lambda_2 = C\lambda = Q$, откуда $\lambda_1 = Q/C_1$, $\lambda_2 = Q/C_2$, $\lambda = Q/C$. Но так как $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, то

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad (1), \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 40 \text{ Н/м}. \quad (2)$$

2. Составим теперь дифференциальное уравнение относительного движения груза (по отношению к тележке). Сначала заметим, что при неподвижной тележке в положении статического равновесия груза эквивалентная пружина (длину ее в недеформированном состоянии обозначим l_0) под действием силы тяжести P будет сжата на величину $\lambda_{ст}$ (рис. Д5,б). Из условия равновесия следует, что

$$C\lambda_{ст} = P\sin\alpha \quad \text{и} \quad \lambda_{ст} = \frac{mg\sin\alpha}{C} = 0,08 \text{ м}. \quad (3)$$

Свяжем тогда с тележкой подвижную систему отсчета OXY, начало O которой поместим в положении статического равновесия груза, а ось OX направим вдоль паза AB в сторону удлинения пружины (рис. Д5,б). Рассмотрим груз в положении, при котором $X>0$ и пружина растянута; изобразим действующие на груз силы: силу тяжести P, силу упругости F и реакцию паза N. Для составления уравнения относительного движения груза присоединим к этим силам переносную силу инерции $F^{и}_{пер} = mW_{пер}$; кориолисова сила инерции здесь равна нулю, так как переносное движение (движение тележки) является поступательным. Тогда уравнение относительного движения в векторной форме будет иметь вид

$$m\bar{W}_{от} = \bar{P} + \bar{F} + \bar{N} + \bar{F}^{и}_{пер}.$$

Проектируя обе его части на ось X, получим

$$m\ddot{X} = -P\sin\alpha - F + F^{и}_{пер}\cos\alpha. \quad (4)$$

Найдем значения F и $F^{и}_{пер}$. Так как при положении груза, определяемом координатой $X>0$ (рис. Д5,б), эквивалентная пружина имеет удлинение $\lambda = X - \lambda_{ст}$, то $F = C\lambda = C(X - \lambda_{ст})$. Далее $F^{и}_{пер} = mW_{пер} = m\ddot{\xi}$, где $\ddot{\xi}$ - ускорение тележки. Из равенства находим, что $\ddot{\xi} = 4-6,4\sin(4t)$. Кроме того, $\cos\alpha=0,5$. Подставляя все эти величины в уравнение (4), получим

$$m\ddot{X} = -P\sin\alpha - C(X - \lambda_{ст}) + m[2 - 3,2\sin(4t)].$$

Согласно равенству (3) члены $-P\sin\alpha$ и $C\lambda_{ст}$ в правой части сокращаются, окончательно дифференциальное уравнение относительного движения груза примет вид

$$\ddot{X} + k^2 X = b_1 + b_2\sin(4t), \quad (5)$$

где обозначено

$$k^2 = C/m = 100\, c^{-2}; \quad b_1 = 2 \text{ м/с}^2, \quad b_2 = -3,2 \text{ м/с}^2. \quad (6)$$

3. Для определения закона движения груза надо проинтегрировать уравнение (5). Его общее решение, как известно из теории дифференциальных уравнений

$$X = X_1 + X_2 \quad ;$$

$$X = X_1 + X_2 \quad , \tag{7}$$

где X_1 - общее решение однородного уравнения т.е.

$$X_1 = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt) \quad , \tag{8}$$

а X_2- частное решение уравнения (5). Учитывая, каковы правая и левая части этого уравнения, ищем X_2 в виде

$$X_2 = A + B\sin(4t) \quad . \tag{9}$$

Для определения постоянных A и B находим $\ddot{X}_2 = -16B\sin(4t)$, подставляем значения $\ddot{X}_2$ и X_2 в уравнение (5) и приравниваем в его обеих частях свободные члены и коэффициенты при $\sin(4t)$. В результате, принимая во внимание обозначения (6), получим

$$A = \frac{b_1}{k^2} = 0{,}02\,м, \qquad B = \frac{b^2}{k^2-16} = -0{,}04\ м \quad .$$

Тогда из равенств (7)-(9), учитывая, что $k = 10\,c^{-1}$, получим следующее общее решение уравнения (5):

$$x = C_1\sin(10t) + C_2\cos(10t) - 0{,}04\sin(4t) + 0{,}02. \tag{10}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 найдем еще $v_x = \dot{x}$

$$v_x = 10C_1\cos(10t) - 10C_2\sin(10t) - 0{,}16\cos(4t). \tag{11}$$

По условиям задачи при $t=0$, $v_x = v_0 = 1\,м/с$, $\lambda = \lambda_0 = 0{,}1\,м$. Тогда, как видно из рис. Д 5,б и равенства (3)

$$x_0 = \lambda_0 + \lambda_{ст} = 0{,}18\,м \ .$$

Подставив эти начальные данные в уравнения (10) и (11), найдем из них, что $C_1 = 0{,}12$, $C_2 = 0{,}16$. Уравнение (10) примет вид

$$x = 0{,}12\sin(10t) + 0{,}16\cos(10t) - 0{,}04\sin(4t) + 0{,}02. \tag{12}$$

Данное уравнение представляет собой закон колебания груза.

Примечания:

1. Если груз был прикреплен к двум параллельным пружинам, то при равновесии под действием некоторой силы Q каждая из пружин и эквивалентная пружина имели бы одно и то же удлинение λ. Тогда для двух пружин C

$$C_1\lambda = Q$$

отсюда и определяется значение

$$C_{экв} = C = C_1 + C_2 \ .$$

2. Если пружины были бы прикреплены к тележке в точке B (рис. Д5,а), а груз D находился на другом их конце, то в положении статического равновесия эквивалентная пружина была бы растянута на величину $\lambda_{ст}$, а не сжата, что следует учесть при изображении схемы, подобной показанной на рис.Д5,б и при определении зависимости между x, λ и $\lambda_{ст}$ (в этом случае $\lambda = x + \lambda_{ст}$).

2.6. Задача Д 6

Вертикальный вал AK (рис. Д6.0-Д6.9), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10\,c^{-1}$, закреплен подпятником в точке A и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл. Д6. Здесь $AB = BД = ДE = EK = 0{,}4\,м$. К валу прикреплен жестко однородный ломаный стержень массой $m = 10$ кг, состоящий из частей 1 и 2. Размеры частей стержня ℓ_1 и ℓ_2 даны на рисунках ($b = 0{,}1$ м), а массы этих частей пропорциональны длинам.

Определить реакции соответствующих подшипников, указанных в табл. Д6. Весом вала пренебречь.

Указания

Задача Д6 - на применение к изучению системы принципа Даламбера. При решении задачи учесть, что когда силы инерции частей тела (в данной задаче стержня) имеют равнодействующую $R^и$, то численно $R^и = mW_c$, где W_c - ускорение центра масс C тела, но линия влияния действия силы $R^и$ в общем случае не проходит через центр масс (точку C).

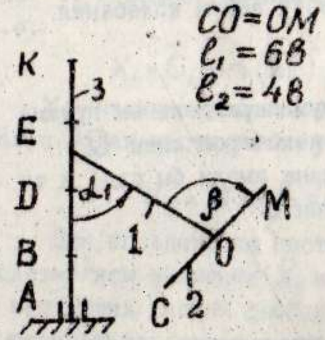


Рис. Д 6.0

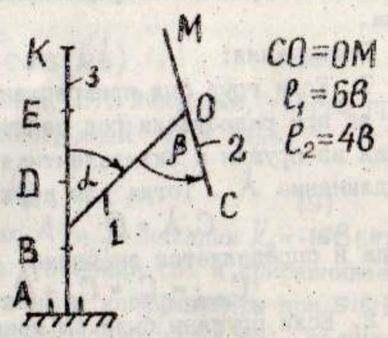


Рис. Д6.1

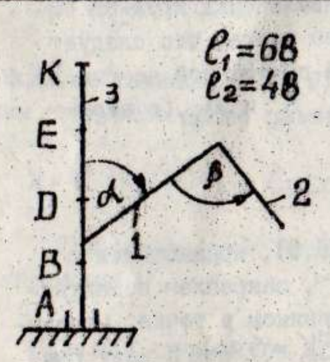


Рис Д.6.2

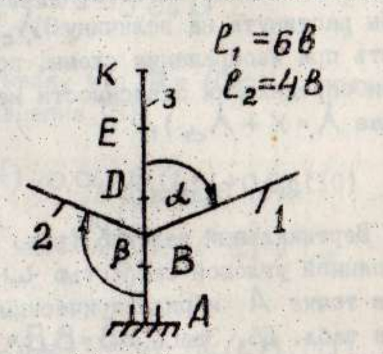


Рис. Д6.3

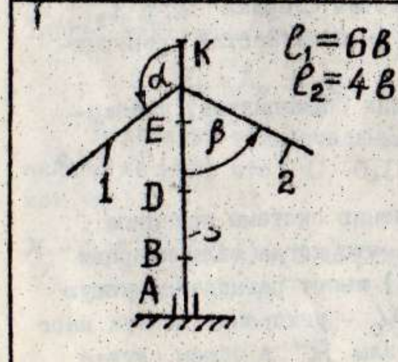


Рис. Д6.4

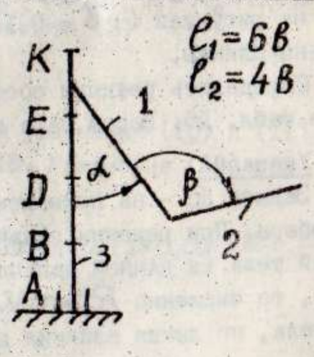


Рис. Д6.5

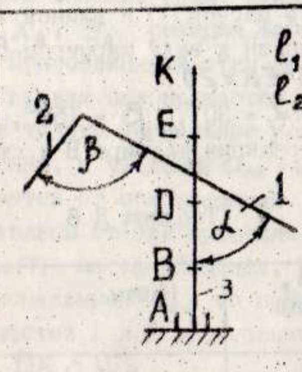


Рис. Д6.6

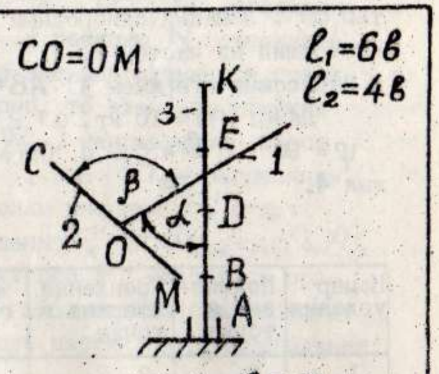


Рис. Д6.7

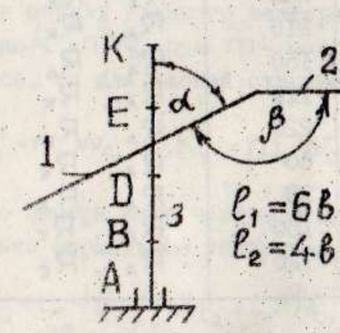


Рис. Д6.8

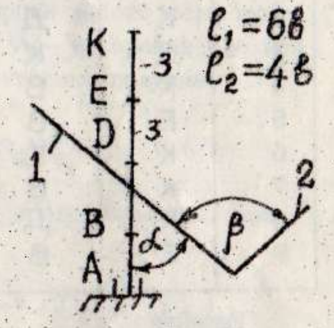


Рис. Д6.9

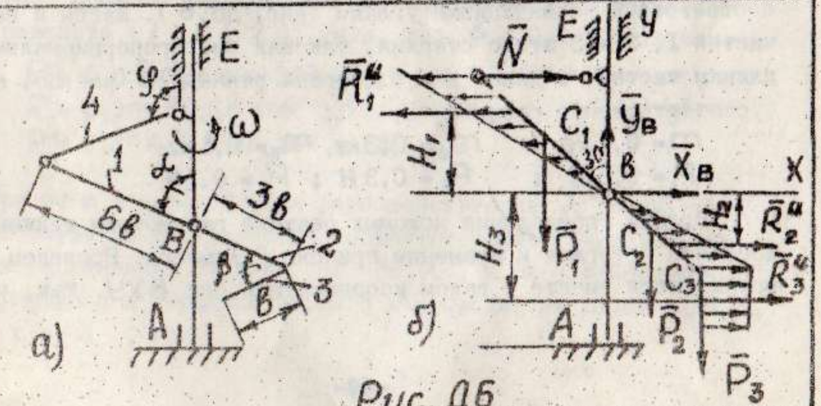


Рис. Д6

Пример задачи Д 6

Вертикальный вал, закрепленный подпятником А и подшипником E (рис. Д6, а), вращается с постоянной угловой скоростью ω. Ломаный однородный стержень массой m и длиной $10в$, состоящий из частей I, 2, прикреплен к валу шарниром B и невесомым стержнем 3. $AB=BД=ДE=EK=2в$.

Дано: m = I0 кг, ω = 8 $с^{-1}$, $\alpha = 30^0$, $\beta = 150^0$, $\varphi = 90^0$; $в$ = 0,2 м. Определить реакции шарнира В и стержня 4.

Таблица Д 6

Номер условия	Подшипник в точке	Крепление стержня в точке	α, град	β, град	Найти
I	2	3	4	5	6
0	В	Д	45	I35	R_A, R_B
I	В	Е	60	240	R_A, R_B
2	К	Д	30	2I0	R_A, R_K
3	Д	К	60	I50	R_A, R_A
4	К	В	30	I20	R_A, R_K
5	Е	В	45	225	R_A, R_E
6	К	Е	60	60	R_A, R_K
7	К	В	30	30	R_A, R_K
8	К	Д	60	I50	R_A, R_K
9	Е	В	30	I20	R_A, R_E

Решение

I. Изобразим вал и прикрепленный к нему ломаный стержень в соответствии с заданными углами (рис. Д6, $в$). Массы и вес частей I, 2 и 3 этого стержня, так как они пропорциональны длинам частей, а длина всего стержня равна $10в$ (рис.Д6, а), соответственно равны:

m_1 = 0,6 кг ; m_2 = 0,3 кг, m_3 = 0,I кг

P_1 = 0,6 H ; P_2 = 0,3 H ; P_3 = 0,I H .

2. Для определения искомых реакций рассмотрим движение ломаного стержня и применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом координатные оси BXY так, чтобы стержень лежал в плоскости XY, и изобразим действующие на него внешние силы: силы тяжести P_1, P_2, P_3, составляющие X_B, Y_B реакции шарнира R и реакцию N стержня 4.

Присоединим к этим силам силы инерции элементов стержня. Так как вал вращается равномерно, то элементы стержня имеют только нормальные ускорения W_{nk}, направленные к оси вращения, а численно $a_{nk} = \omega^2 h_k$, где h_k - расстояния элементов от оси вращения. Тогда силы инерции $F_k^и$ будут направлены от оси вращения, а численно $F_k^и = \Delta m W_{nk} = \Delta m \omega^2 h_k$ где Δm - масса элемента. Поскольку все $F_k^и$ оказались пропорциональными h_k, то эпюры этих параллельных сил образуют для частей I и 2 треугольники, а для части 3 - прямоугольник (рис. Д6, б).

Каждую из полученных систем параллельных сил инерции заменим ее равнодействующей, равной главному вектору этих сил. Так как модуль главного вектора сил инерции любого тела имеет значение $R^и = mW_c$, где m - масса тела, W_c - ускорение его центра масс, то для частей стержня соответственно получим:

$$R_1^и = m_1 W_{c_1}, \quad R_2^и = m_2 W_{c_2}, \quad R_3^и = m_3 W_{c_3} \qquad (1)$$

Но центры масс частей стержня, как и его элементы, имеют только нормальные ускорения, равные

$$W_{c_1} = \omega^2 h_{c_1}, \quad W_{c_2} = \omega^2 h_{c_2}, \quad W_{c_3} = \omega^2 h_{c_3}, \qquad (2)$$

где $h_{c_1} = 3в \sin 30^\circ$, $h_{c_2} = 1{,}5в \sin 30^0$, $h_{c_3} = 3в \sin 30^0$ расстояния центров масс частей от оси вращения. В результате из равенств (1) и (2), учтя, что $в$ = 0,2 м, получим:

$$R_1^и = 0{,}6m\omega^2 3в \sin 30^0 = 115{,}2 \text{ Н};$$
$$R_2^и = 0{,}3m\omega^2 1{,}5в \sin 30^0 = 28{,}8 \text{ Н}; \qquad (3)$$
$$R_3^и = 0{,}1m\omega^2 3в \sin 30^0 = 19{,}2 \text{ Н}.$$

При этом линии действия равнодействующих $R_1^и$ и $R_2^и$ пройдут через центры тяжестей соответствующих треугольников, т.е. на расстояниях H_1 и H_2 от оси X, а равнодействующая $R_3^и$ приложена в середине части 3 и проходит на расстоянии H_3 от оси X, где

$$H_1 = 2/3 \cdot 6b \cdot \cos 30^\circ = 0{,}69 \text{ м};$$
$$H_2 = 2/3 \cdot 3b \cdot \cos 30^\circ = 0{,}35 \text{ м}; \qquad (4)$$
$$H_3 = 3b \cdot \cos 30^\circ + b/2 = 0{,}62 \text{ м}.$$

3. Согласно принципу Даламбера, приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составив для этой плоской системы сил три уравнения равновесия, получим

$$\Sigma F_{kx} = 0; \quad X_B - R_1^u + R_2^u + R_3^u + N = 0;$$
$$\Sigma F_{ky} = 0; \quad Y_B - P_1 - P_2 - P_3 = 0;$$
$$\Sigma M_B(\bar{F}_k) = 0; \quad P_1 3b \sin 30^\circ + R_1^u H_1 -$$
$$- P_2 \cdot 1{,}5b \cdot \sin 30^\circ + R_2^u H_2 - P_3 \cdot 3b \cdot \sin 30^\circ +$$
$$+ R_3^u \cdot H_3 - N 6b \cdot \cos 30^\circ = 0. \qquad (5)$$

Подставив сюда значения соответствующих величин из равенств (1), (2), (4) и решив затем эту систему уравнений, найдем искомые реакции. Ответ: $X_B = -40{,}4$ Н; $Y_B = 98{,}1$ Н; $N = 107{,}6$ Н.

Примечания:

Если по условиям задачи ломаный стержень в точке жестко скреплен с валом (невесомый стержень 4 отсутствует) и требуется определить реакции подпятника А и подшипника, то для решения надо рассмотреть движение механической системы, состоящей из ломаного стержня и вала и тоже применить принцип Даламбера. При этом действующими внешними силами будут все силы тяжести и реакции подпятника А и подшипника. Силы инерции вычисляют так же, как в рассмотреном примере. Затем составляют три уравнения равновесия и из них определяют искомые реакции.

2.7 Задача Д-7

Механическая система состоит из тел, связанных между собой нитями, намотанными на шкивы (рис. Д3.0 - Д3.9). По исходным данным табл. Д3 определить ускорение тела, указанного в табл. Д3.

Коэффициент трения скольжения тел f о плоскость принять равным 0,1. Радиусы осевых моментов инерции принять

равным 0,1. Радиусы осевых моментов инерции принять

$$i_2 = i_3 = 2 \text{ м}.$$

Трением качения пренебречь.

Указания

Задача Д7 - на применение при изучении движения системы общего уравнения динамики (принципа Даламбера-Лагранжа).

Рисунки и исходные данные для своего варианта выбирать из задачи Д3.

Пример задачи Д7

Механическая система (рис. Д3) состоит из сплошного цилиндрического катка 1, ступенчатого шкива 2 с радиусами ступеней R_2 и r_2 (масса шкива равномерно распределена по его внешнему ободу) и груза 3 (коэффициент трения скольжения f)

Под действием силовых факторов, определенных в исходных данных, система приходит в движение.

Дано: $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 10$ кг, $m_3 = 8$ кг, $R_1 = 0{,}2$ м, $R_2 = 0{,}2$ м, $r_2 = 0{,}1$ м, $f = 0{,}2$, $M_2 = 0{,}6$ Нм, $F = 12$ Н, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $i_2 = i_3 = 2$м.

Определить ускорение центра катка.

Решение

1. Рассмотрим движение механической системы. Система имеет одну степень свободы. Связи, наложенные на эту систему, идеальные.

Для определения W_1 применим общее уравнение динамики

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^u = 0, \qquad (1)$$

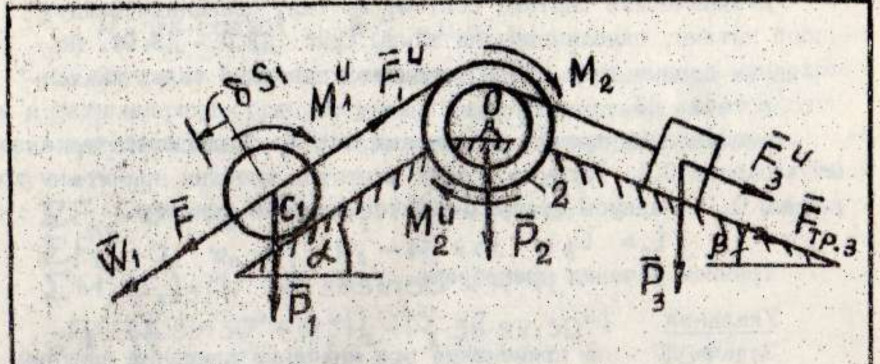


Рис. Д7

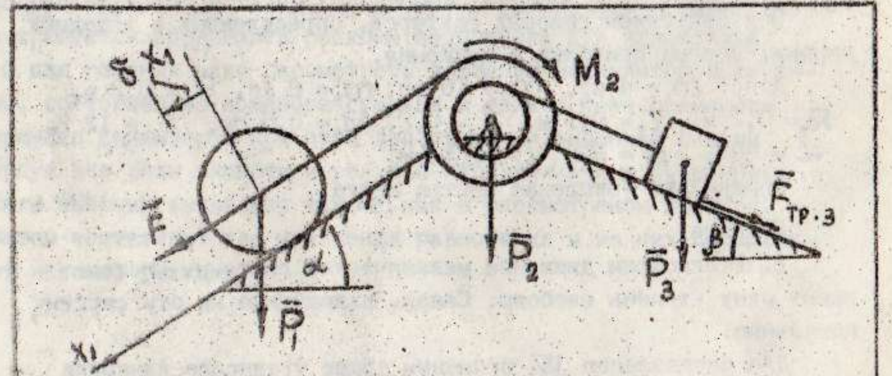


Рис. Д8

где $\sum\delta A_k^a$ – сумма элементарных работ активных сил; $\sum\delta A_k^и$ – сумма элементарных работ сил инерции.

2. Задавшись направлением ускорения W_1, изобразим на чертеже, кроме активных силовых факторов P_1, P_2, P_3, F и M также силы инерции $F_1^и$ и $F_3^и$ и моменты инерции $M_1^и$ и $M_2^и$, величины которых равны:

$$F_1^и = m_1 W_1\,, \qquad F_3^и = m_3 W_3\,,$$
$$M_2^и = J_2\mathcal{E}_2 = m_2 R_2^2 \mathcal{E}_2\,, \quad M_1^и = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \mathcal{E}_1\,, \tag{2}$$

где J_1 и J_2 – осевые моменты инерции соответствующих тел; $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ – угловые ускорения тела I и 2 соответственно; W_1 и W_2 – линейные ускорения тела I и центра масс тела 2, P_1, P_2, P_3 – вес соответствующего тела.

3. Сообщим системе возможное перемещение и используя уравнение (I) получим:

$$(P_1 \sin\alpha + F)\delta S_1 - M_2\delta\varphi_2 - (P_3\sin\beta + F_{тр_3})\delta S_3 -$$
$$- F_1^и \delta S_1 - F_3^и \delta S_3 - M_1^и \delta\varphi_1 - M_2^и\delta\varphi_2 = 0\,, \tag{3}$$

где δS_1, δS_3, $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ – элементарные перемещения соответствующих тел.

Выразим все перемещения через δS_1:

$$\delta S_3 = \frac{r_2}{R_2}\delta S_1\,, \quad \delta\varphi_1 = \frac{\delta S_1}{r_1}\,, \quad \delta\varphi_2 = \frac{\delta S_1}{R_2}\,. \tag{4}$$

Учтем, что сила трения $F_{тр_3} = f m_3 g \cos\beta$.
Подставив величины (2) и (4) в уравнение (3), приведем его к виду

$$\Big(m_1 g \sin\alpha + F - \frac{M_2}{R_2} - \frac{r_2}{R_2} m_3 g \sin\beta - \frac{r_2}{R_2} m_3 g f \cos\beta -$$
$$- m W_1 - m_3\frac{r_2}{R_2} W_3 - \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} - m_2 R_2^2 \frac{\mathcal{E}_2}{R_2}\Big)\delta S_1 = 0$$

Входящие сюда величины W_3, $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ выразим через W_1

$$\mathcal{E}_1=\frac{W_1}{r_1}; \quad \mathcal{E}_2=\frac{W_1}{R_2}; \quad W_3=W_1\frac{r_2}{R_2}.$$

Приравнивая 0 выражение, стоящее в скобках получим

$$W_1=\frac{m_1 g\sin\alpha+F-\frac{M_2}{R_2}-\frac{r_2}{R_2}m_3 g\sin\beta-f\frac{r_2}{R_2}m_3 g\cos\beta}{m_1+\frac{r_2^2}{R_2^2}m_3+\frac{1}{2}m_1+m_2}.$$

В результате вычисления получим $W_1=0{,}598$ м/с^2.

2.8. Задача Д 8

Механическая система состоит из 3-х тел, связанных друг с другом нитями (рис. Д3.0 – Д3.9). По исходным данным табл. Д3 определить ускорение тела, указанного в табл. Д3.

Коэффициент трения скольжения тел f_0 о плоскость принять равным 0,1. Радиусы осевых моментов инерции принять:

$$i_2=i_3=2 \text{ м}$$

Трением качения пренебречь.

Указания

Задача Д8 – на применение при изучении движения системы уравнений Лагранжа. В задаче система имеет одну степень свободы; следовательно, ее положение определяется одной обобщенной координатой и для нее должно быть составлено одно уравнение.

Решение начинать с выбора обобщенной координаты. Затем вычислить кинетическую энергию системы и обобщенную силу. Эти данные вводятся в уравнение Лагранжа II рода и при его решении определяется искомый параметр.

Рисунки и исходные данные для своего варианта выбирать из задачи Д3.

Пример задачи Д8

Механическая система (рис. Д3) состоит из сплошного цилиндрического катка I, ступенчатого шкива 2 с радиусом ступеней R_2 и r_2 (масса шкива равномерно распределена по его внешнему ободу) и груза 3 (коэффициент трения груза о плоскость равен f).

Под действием силовых факторов, определенных в исходных данных система приходит в движение.

Дано: $m_1=4$ кг, $m_2=10$ кг, $m_3=8$ кг, $R_2=0{,}2$ м, $R_1=0{,}2$ м, $r_2=0{,}1$ м, $f=0{,}2$, $M_2=0{,}6$ Нм, $F=12$ Н, $\alpha=60^\circ$, $\beta=30^\circ$. Определить ускорение центра катка.

Решение

I. За обобщенную координату принимаем перемещение центра катка, т.е. $q_1=x$

Составим уранение Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta T}{\delta \dot{x}}\right)-\frac{\delta T}{\delta x}=Q_x. \qquad (1)$$

2. Определим кинетическую энергию системы и выразим ее через обобщенную скорость V_1, т.е. $\dot{q}_1=V=\dot{x}_1$ (кинетическая энергия данной системы определена в задаче Д3)

$$T=9V_1^2 \quad \text{или} \quad T=9\dot{x}_1^2. \qquad (2)$$

3. Определим обобщенную силу Q. Для этого изобразим силы, действующие на систему и совершающие работу. Затем сообщим системе возможное перемещение δx и вычислим элементарные работы от сил при данном перемещении системы.

$$\begin{aligned}
&\delta A(F)=F\cdot\delta x_1\\
&\delta A(P_1)=m_1 g\sin\alpha\ \delta x_1\\
&\delta A(M_2)=-M_2\delta\varphi_2\\
&\delta A(F_{тр_3})=-fm_3 g\cos\alpha\ \delta x_3\\
&\delta A(P_3)=-m_3 g\sin\alpha\ \delta x_3.
\end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь δx_3 и $\delta\varphi_2$ – элементарные перемещения тел 3 и 2 соответственно при перемещении центра катка I на величину δx_1.

Выразим все элементарные перемещения через δx_1

$$\delta\varphi_2=\frac{\delta x_1}{R_2}, \quad \delta x_3=\frac{\delta x_1 r_2}{R_2}. \qquad (4)$$

Подставим (4) в (3) и получим сумму элементарных работ.

$$\Sigma \delta A = \left(F + m_1 g \sin\alpha - \frac{M_2}{R_2} - m_3 g f \frac{r_2}{R_2}\cos\beta - m_3 g \frac{r_2}{R_2}\sin\beta\right) \times$$
$$\times \delta x_1 = 0$$

Коэффициент (выражение в скобках) при δx_1 и будет обобщенной силой Q. После подстановки численных данных имеем:

$$Q = 10{,}55 \text{ Н}$$

Тогда:

$$\frac{\delta T}{\delta x_1} = 0; \quad \frac{\delta T}{\delta \dot{x}_1} = 18\dot{x}_1; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta T}{\delta \dot{x}_1}\right) = 18\ddot{x}_1.$$

Подставляя эти данные в уравнение (I) определим ускорение центра катка I

$$18\ddot{x}_1 = 10{,}55; \qquad W_1 = \ddot{x}_1 = 0{,}598 \text{ м/с}^2.$$

2.9. Задача Д 9

Для механической системы, имеющей 2 степени свободы, определить ускорение, указанное на рис. Д 9. Значение моментов M, сил F и масс m сведены в табл. Д 9, а величины радиусов тел R, r указаны на рисунках, $\alpha = 60°$

Таблица Д 9

Величина	Номер условия									
	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9
M, Нм	50	20	I0	I5	30	40	20	60	70	40
F_1, Н	I00	-	60	-	70	-	30	-	50	-
F_2, Н	-	40	-	80	-	20	-	90	-	80
F_3, Н	50	20	80	40	60	I0	70	30	90	60
m_1, кг	10	5	8	7	4	6	2	3	9	7

Величина	Номер условия									
	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9
m_2, кг	5	4	6	8	9	2	6	7	8	9
m_3, кг	9	7	8	5	6	3	4	2	8	6
m_4, кг	6	8	2	4	3	6	5	8	7	9

Указания

Задача Д9 на применение уравнений Лагранжа II рода. При решении задачи силами трения пренебречь. Радиус инерции тела 2 принять равным $i_2 = 1$ м. Другие круглые тела системы считать цилиндрами.

Порядок решения задач следующий.

I. Устанавливается число степеней свободы системы и выбираются обобщенные координаты.

2. Изображается система в произвольный момент времени и показываются все активные силы, действующие на систему.

3. Вычисляются обобщенные силы Q путем, указанным в задаче Д 8.

4. Определяется кинетическая энергия системы T в абсолютном движении и выражается через обобщенные координаты q и скорости $\dot{q}$.

5. Подсчитываются соответствующие частные производные.

6. Составляются уравнения Лагранжа второго рода.

Пример задачи Д9

Масса тележки 1 равна m_1, а масса находящегося на ней сплошного цилиндрического катка 2 равна m_2. Определить, с каким ускорением будет двигаться тележка вдоль горизонтальной плоскости под действием приложенной к ней силы F (рис. Д9), если каток при этом катился по тележке без скольжения, массой колес тележки пренебречь.

Решение

Система имеет две степени свободы (независимы перемещения катка относительно тележки и перемещение самой тележки). В ка-

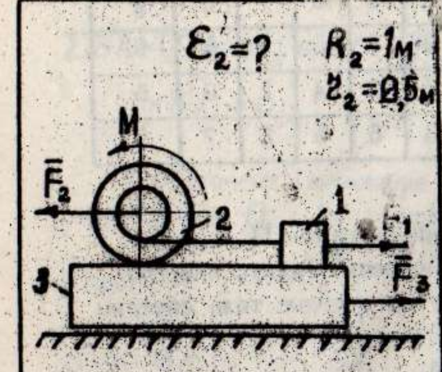


Рис. Д9.0

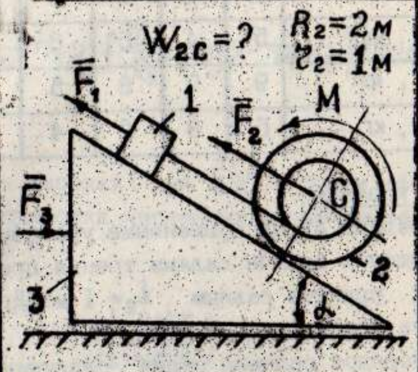


Рис. Д9.1

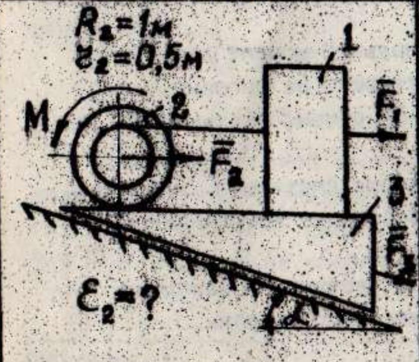


Рис. Д9.2

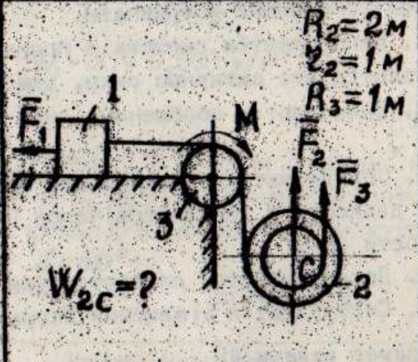


Рис. Д9.3

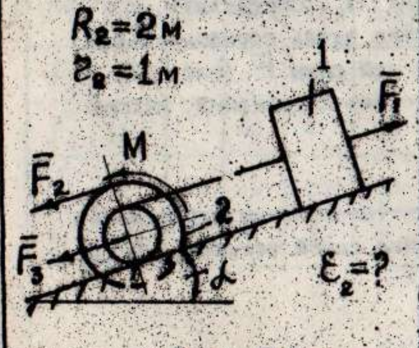


Рис. Д9.4

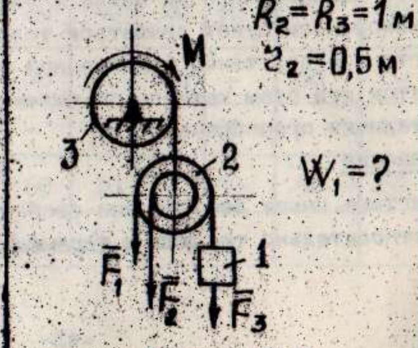


Рис. Д9.5

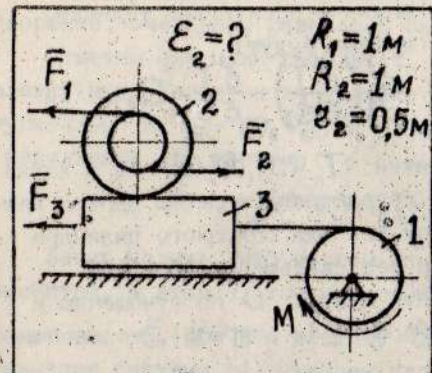


Рис. Д9.6

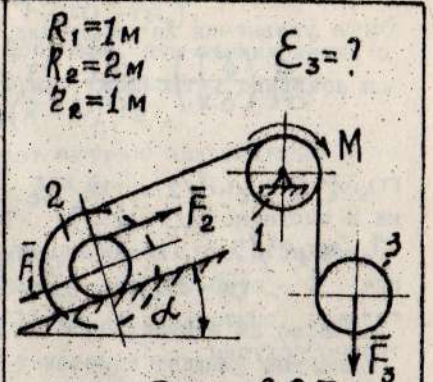


Рис. Д9.7

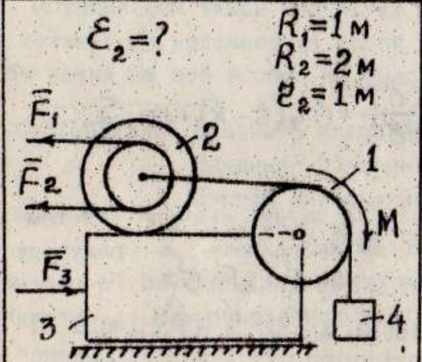


Рис. Д9.8

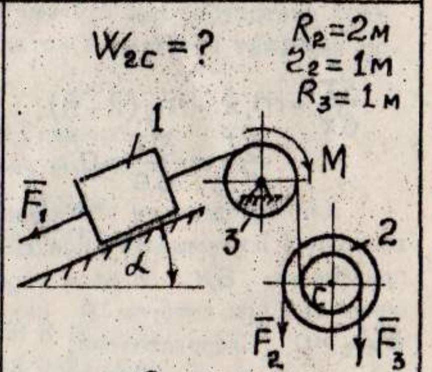


Рис. Д9.9

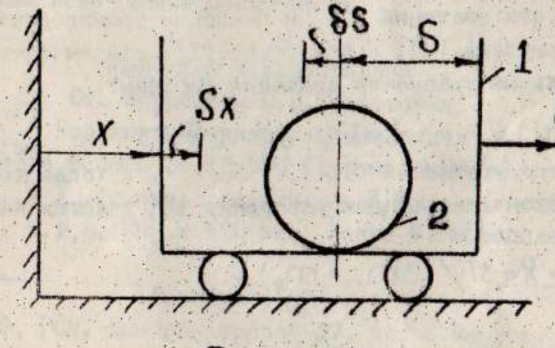


Рис. Д9

честве обобщенных координат выберем координату X тележки и координату S центра масс C катка относительно тележки. Тогда уравнения Лагранжа для системы будут:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta T}{\delta \dot{x}}\right)-\frac{\delta T}{\delta x}=Q_1;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta T}{\delta \dot{s}}\right)-\frac{\delta T}{\delta s}=Q_2 . \quad (1)$$

Кинетическая энергия тележки $T_1=m_1\dot{x}^2/2$, а катка $m_2V_c^2/2+J_c\omega^2/2$, где V_c – абсолютная скорость центра катка и численно $V_c=\dot{x}-\dot{s}$. Так как для сплошного цилиндра $J_c=m_2 r^2/2$, а при качении без скольжения $\omega=\dot{s}/r$, где $\dot{s}$ – относительная скорость центра C по отношению к тележке (считать здесь $\omega=V_c/r$ было бы ошибкой), то окончательно получим

$$T=T_1+T_2=m_1\dot{x}^2/2+m_2(\dot{x}-\dot{s})^2/2+m_2\dot{s}^2/4 . \quad (2)$$

Тогда

$$\frac{\delta T}{\delta \dot{x}}=m_1\dot{x}+m_2(\dot{x}-\dot{s});\quad \frac{\delta T}{\delta \dot{s}}=m_2(\dot{s}-\dot{x})+m_2\frac{\dot{s}}{2};\quad (3)$$
$$\frac{\delta T}{\delta x}=\frac{\delta T}{\delta s}=0 .$$

Для определения обобщенных сил дадим сначала системе возможное перемещение, при котором координата X получает приращение δx. На этом перемещении $\delta A_1=F\cdot\delta x$. На перемещении же, при котором S получает приращение δs, очевидно, $\delta A_2=0$. Следовательно,

$$Q_1=F;\quad Q_2=0.$$

Подставляя эти значение Q и значения производных, определяемые формулами (3), в равенство (I), найдем следующие дифференциальные уравнения движения системы:

$$(m_1+m_2)\ddot{x}-m_2\ddot{s}=F;\quad 3\ddot{s}-2\ddot{x}=0 . \quad (4)$$

Из последнего уравнения $\ddot{s}=2\ddot{x}/3$, и тогда первое уравнение дает окончательно для ускорения W_1 тележки значение

$$W_1=\ddot{x}=3F/(3m_1+m_2) .$$

Если бы каток был на тележке закреплен неподвижно, то ее ускорение, очевидно, равнялось бы $F/(m_1+m_2)$.

Отметим еще один результат. Допустим, что трения катка о тележку нет. Тогда он по тележке будет скользить, двигаясь поступательно и $T_2=m_2V_c^2/2=m_2(\dot{x}-\dot{s})^2/2$.
В результате для системы

$$T=m_1\dot{x}^2+m_2(\dot{x}-\dot{s})^2/2 .$$

Легко видеть, что первое из уравнений (4) при этом не изменится, а второе, так как теперь $\frac{\delta T}{\delta \dot{s}}=m_2(\dot{s}-\dot{x})$ примет вид $\ddot{s}-\ddot{x}=0$ и даст $\ddot{s}=\ddot{x}$. В результате из первого уравнения системы (4) находим для ускорения тележки значение

$$W_1=F/m_1 .$$

Объясняется такой результат тем, что при отсутствии трения тележка не увлекает за собой каток и движется так, как если бы катка на ней вообще не было.

Составители: Владимир Иванович Снищенко
Владимир Дмитриевич Кирнос
Сергей Евгеньевич Блохин
Валентина Ефимовна Артюхова

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ "ДИНАМИКА" КУРСА "ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА" для студентов вечернего и заочного факультетов всех специальностей

Редактор В.В.Дубровина
Ст. корректор Ю.В.Рачковская
Редакционно-издательский отдел
Подписано в печать 30.12.92. Формат 60х84/16.
Бум.тип. № 3.Офс.печ. Усл.печ. л. 2,6.
Уч.-изд. л. 2,6. Тираж 400 экз. Заказ № 226. Бесплатно.

Ротапринт ДГИ
320600, ГСП, Днепропетровск-27, пр. К.Маркса, 19.