

М. И. БАТЬ, Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ, А. С. КЕЛЬЗОН

531
Б 28
УДК 531.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Под редакцией Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ

ТОМ ВТОРОЙ
ДИНАМИКА

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебного пособия
для заочных и вечерних вузов*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

Предисловие редактора ко второму изданию	7
--	---

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

ДИНАМИКА

Глава VIII. Дифференциальные уравнения динамики материальной точки	11
§ 1. Основные формы дифференциальных уравнений динамики материальной точки	11
§ 2. Определение сил по заданному движению (прямая задача динамики материальной точки)	13
§ 3. Определение движения по заданным силам (обратная задача динамики материальной точки)	28
§ 4. Колебательное движение	74
1°. Восстанавливающая сила	74
2°. Свободные колебания материальной точки	75
3°. Влияние сил сопротивления, пропорциональной скорости, на свободные колебания материальной точки	76
4°. Вынужденные колебания материальной точки. Возмущающая сила	96
§ 5. Относительное движение	123
Глава IX. Общие теоремы динамики	141
§ 1. Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек	141
§ 2. Теорема о движении центра инерции системы материальных точек	142
1°. Центр инерции системы материальных точек	142
2°. Теорема о движении центра инерции системы материальных точек	146
3°. Случай сохранения скорости центра инерции системы материальных точек	165
§ 3. Теорема об изменении главного вектора количеств движения системы материальных точек	169
1°. Импульс силы. Главный вектор количеств движения системы материальных точек	169

1*

2°. Теорема об изменении количества движения материальной точки (в интегральной форме)	173
3°. Теорема об изменении главного вектора количеств движения системы материальных точек (в интегральной форме)	176
4°. Теорема об изменении главного вектора количеств движения системы материальных точек в приложении к сплошным средам (теорема Эйлера)	180
§ 4. Теорема об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек. Моменты инерции твердых тел	185
1°. Главный момент количеств движения системы материальных точек	185
2°. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки	186
3°. Случай сохранения момента количества движения материальной точки	191
4°. Теорема об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек	193
5°. Случай сохранения главного момента количеств движения системы материальных точек	193
6°. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси	207
7°. Теорема об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек в относительном движении по отношению к центру инерции	241
8°. Моменты инерции и эллипсоид инерции	243
§ 5. Динамика плоского движения твердого тела	252
§ 6. Теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек	272
1°. Работа силы	272
2°. Кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек	284
3°. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки	300
4°. Теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек	305
5°. Потенциальная энергия	330
6°. Закон сохранения механической энергии	333
Глава X. Динамика несвободной системы материальных точек	335
§ 1. Классификация связей. Число степеней свободы. Классификация сил	335
§ 2. Метод кинетостатики	339
1°. Силы инерции. Приведение сил инерции к главному вектору и главному моменту	339
2°. Метод кинетостатики	349
§ 3. Давление вращающегося твердого тела на ось вращения	372
§ 4. Принципы возможных перемещений	385
1°. Возможные перемещения. Идентичные связи	385
2°. Принципы возможных перемещений	387
3°. Рычаг Жуковского	407
§ 5. Общее уравнение динамики системы материальных точек	412

§ 6. Уравнения Лагранжа второго рода	453
1°. Обобщенные координаты. Обобщенные силы	453
2°. Общее уравнение динамики в обобщенных координатах. Уравнения Лагранжа второго рода	471
§ 7. Приближенная теория гироскопов	511
1°. Гироскоп с тремя степенями свободы	511
2°. Гироскоп с двумя степенями свободы	517
§ 8. Динамика твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки	523
1°. Движение по инерции твердого тела, имеющего неподвижную точку	523
2°. Регулярная прецессия симметричного твердого тела, имеющего неподвижную точку	529
Глава XI. Краткий обзор методов решения задач динамики	537
§ 1. Вводные замечания	537
§ 2. Задачи динамики материальной точки	537
§ 3. Задачи динамики системы материальных точек	539
§ 4. Задачи динамики твердого тела	540
1°. Поступательное движение твердого тела	540
2°. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси	541
3°. Плоское движение твердого тела	541
4°. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки	542
5°. Движение свободного твердого тела	543
§ 5. Общие замечания по решению задач динамики	544
Глава XII. Специальные задачи динамики	546
§ 1. Удар	546
1°. Удар двух тел. Удар тела о неподвижную преграду	546
2°. Теорема об изменении главного момента количества движения системы материальных точек в приложении к мгновенным силам	559
3°. Потеря кинетической энергии при ударе двух тел	565
4°. Удар по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси	568
§ 2. Динамика материальной точки переменной массы	579
Глава XIII. Теория малых движений системы с конечным числом степеней свободы. Устойчивость равновесия и движения системы	580
§ 1. Устойчивость равновесия системы	580
§ 2. Свободные колебания системы с одной степенью свободы	585
§ 3. Свободные колебания системы с двумя степенями свободы	594
§ 4. Вынужденные колебания системы с одной и двумя степенями свободы под действием синусоидальных возмущающих сил	602
§ 5. Влияние гироскопических сил и сил вязкого сопротивления на свободные и вынужденные колебания твердого тела с двумя степенями свободы	607

1°. Влияние гироскопических сил на свободные колебания системы с двумя степенями свободы	607
2°. Влияние вязкого трения и гироскопических сил на свободные колебания твердого тела с двумя степенями свободы	613
3°. Вынужденные колебания твердого тела с двумя степенями свободы с учетом гироскопических сил	615
4°. Влияние вязкого трения на вынужденные колебания твердого тела с двумя степенями свободы	621
5°. Влияние гироскопических сил на свободные колебания твердого тела с четырьмя степенями свободы	624
6°. Влияние гироскопических сил на вынужденные колебания твердого тела с четырьмя степенями свободы. Самоцентрирование	631
7°. Вынужденные колебания твердого тела при резонансе	642
§ 6. Устойчивость движения	645
1°. Прямой метод исследования	645
2°. Устойчивость движения по первому приближению	651
3°. Устойчивость движения при наличии гироскопических сил	657
Приложение I. Международная система единиц (СИ)	661
Приложение II. Список номеров задач из сборника задач по теоретической механике И. В. Мещерского (издания 18—27), рекомендуемых для самостоятельной работы	663

Второй том «Теоретической механики в примерах и задачах» посвящен динамике — третьему и важнейшему разделу курса механики.

Решение конкретных задач динамики часто связано с трудностями выбора законов и теорем, применение которых оказывается наиболее целесообразным. В связи с этим в книгу включена глава XI, в которой дан краткий обзор методов решения задач динамики.

В соответствии с замыслом, в книге даны в конспективной форме лишь краткие сведения из теории, — предполагается, что для изучения теории читатель пользуется одним из курсов теоретической механики. Из большого числа учебников по этому предмету, опубликованных в СССР, следует прежде всего для изучения динамики рекомендовать курс Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье «Теоретическая механика» т. II, 5-е изд., 1955 (книга, определившая современные традиции преподавания механики во вузах и предназначенная для лиц, изучающих теоретическую механику по полной программе) и книгу С. М. Тарга «Краткий курс теоретической механики», 3-е изд., 1963 (учебник, предназначенный для лиц, изучающих теоретическую механику по сокращенной программе).

Наиболее эффективным путем обучения искусству приложения методов теоретической механики является не облегчение формального заучивания правил и приемов (чему часто способствуют обширные методические указания), а показ их в действии. Ввиду этого в руководстве основное внимание уделено решению конкретных задач, специально составленных для того, чтобы, с одной стороны, избежать разбора задач, входящих в сборник И. В. Мещерского и иные распространенные в СССР задачки, а с другой — дать возможность после изучения книги (или ее разделов) самостоятельно решать главные типы задач.

Для облегчения активного изучения материала (а только такое изучение и имеет смысл) в каждом разделе книги даны краткие рекомендации о последовательности решения тех или иных типов задач и лишь после этого приведено подробное рассмотрение подобных задач, причем зачастую сравнены и оценены различные методы решения.

Предполагается, что параллельно с разбором материала по руководству читатель на основе изученного самостоятельно решает соответствующие задачи из сборника задач по теоретической механике И. В. Мещерского, применяя тем самым полученные знания.

Сравнительно большой объем руководства объясняется тем, что оно составлено в расчете как на последовательное изучение, так и на выборочное использование. Последний способ и является главной формой применения ввиду различия объема материала и порядка его прохождения в различных высших учебных заведениях.

Во втором томе главы VIII, IX, X, XI и § 1 главы XII написаны М. И. Бать; глава XIII написана А. С. Кельзоном; § 2 главы XII написан Г. Ю. Джапелидзе. Он же принял участие в составлении многих других параграфов, в частности § 3 и 4 главы VIII, § 4, 5 и 6 главы X, § 1 главы XII, § 5 и 6 главы XIII, а также осуществил общее редактирование.

В настоящем втором издании второго тома произведена корректура значительного числа отдельных мест текста, ряда рисунков и введены некоторые дополнения.

Авторы считают приятным долгом принести глубокую благодарность М. А. Александровой, Н. И. Барановской, Г. Н. Валовой, О. Е. Королю, А. К. Колосовской, Д. Р. Меркину, Л. И. Мачабели, Т. В. Пулята, Г. И. Савину и В. Н. Целкачеву за ценные указания и критические замечания.

Хочется надеяться, что и впредь читатели будут помогать совершенствованию книги своими критическими замечаниями, которые будут с благодарностью рассмотрены.

Ленинград, сентябрь 1963 г.

Г. Ю. Джапелидзе

Динамикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются механические движения материальных тел в зависимости от причин, их вызывающих.

В статике изучались задачи о приведении систем сил к простейшему виду и относительном равновесии материальных тел, в кинематике рассматривались задачи о геометрических характеристиках механического движения. В динамике — главном разделе курса — на основе сведений из статики и кинематики и специальных законов динамики решаются задачи о связи сил и движений.

Всякое механическое движение материальных тел происходит с течением времени в пространстве. Нет движения материальных тел вне пространства, также нет движения и вне времени. Время и пространство не могут существовать помимо и независимо от движения материальных тел. Таким образом, они являются формами существования движущейся материи.

Материальной точкой называется материальное тело, пренебрежимыми движениями которого, по сравнению с поступательными, можно пренебречь. Таким образом, не обязательно понимать под материальной точкой тело очень малых размеров. Твердое тело, движущееся поступательно, рассматривается как материальная точка.

Материальная точка называется *свободной*, если на ее движение не наложены никакие ограничения.

Несвободной называется материальная точка, на которую наложены связи, ограничивающие ее движение.

Законы динамики описывают механическое движение материальных тел по отношению к так называемым «неподвижным» или «абсолютным» осям координат и по отношению к осям, которые движутся поступательно и равномерно по отношению к неподвижным (инерциальные оси). Начало абсолютной системы координат принимается в центре Солнца, а оси направляются на три отдаленные звезды. Конечно, в природе, где материальные тела находятся во взаимодействии и движении, нет неподвижных осей координат. Однако в зависимости от требований, предъявляемых к результатам подсчетов, можно и другие координатные системы приближенно считать

«неподвижными». Так, при решении многих технических задач координатные оси, связанные с Землей, можно считать «неподвижными».

Применение законов динамики к изучению механических движений материальных тел по отношению к движущейся системе отсчета рассмотрено ниже, в главе VIII, § 5.

В основе динамики, как и других наук, лежат физические законы — аксиомы, подтверждаемые многовековой практической деятельностью человека. Их установление явилось результатом длительного пути развития механики. Важнейшее значение имели исследования Галилея (1564—1642) и Ньютона (1643—1727).

Аксиома первая (принцип инерции). Изолированная материальная точка сохраняет свою скорость неизменной по величине и по направлению.

Эта аксиома фактически утверждает существование инерциальных систем.

Материальные тела движутся с течением времени в пространстве, взаимодействуя друг с другом. Количественные меры этих механических взаимодействий называются силами. Материальная точка называется изолированной в том случае, когда действиями на нее всех прочих материальных тел можно пренебречь (это понятие является, конечно, абстракцией).

Таким образом, в реальных условиях движение материальной точки в тех случаях, когда действием на нее сил можно пренебречь, происходит без ускорения, т. е. равномерно и прямолинейно, либо материальная точка находится в покое.

Инерцией называется свойство материальной точки оказывать сопротивление изменению ее скорости.

Аксиома вторая (основной закон динамики). Ускорение, сообщаемое свободной материальной точке, приложенной к ней силой, имеет направление силы и по величине пропорционально силе:

$$F = m\omega.$$

Силы характеризуются не скоростями точек, а изменениями скоростей, т. е. ускорениями. Из основного закона динамики $F = m\omega$ следует, что при $F = 0$ ускорение $\omega = 0$.

Величина m , стоящая множителем при ускорении в основном законе динамики, называется массой. Эта физическая величина характеризует степень сопротивляемости материальной точки изменению ее скорости, т. е. является мерой инертности материальной точки. Следовательно, масса оказывается одной из характеристик движущейся материи (из других характеристик можно назвать: протяженность, непроницаемость, упругость и т. д.).

В классической механике изучаются движения материальных тел, происходящие со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. При этом масса считается величиной постоянной

(в механике теории относительности масса является величиной переменной, зависящей от скорости движения материальной точки).

В технической системе единиц, где за основные единицы приняты: единица длины — метр, единица силы — килограмм и единица времени — секунда, масса является производной единицей, измеряемой в $\text{кгсек}^2/\text{м}$.

Аксиома третья (принцип равенства действия и противодействия). Сила, с которой материальная точка A действует на материальную точку B (действие), равна по модулю и противоположна по направлению силе, с которой точка B действует на точку A (противодействие). Обе силы направлены по одной линии действия. Следует иметь в виду, что силы, именуемые действием и противодействием, приложены к разным материальным точкам. Так, в случае несвободной материальной точки, к точке приложено «действие», а к связи, наложенной на материальную точку, приложено «противодействие».

Аксиома четвертая (закон независимости действия сил). При одновременном действии нескольких сил ускорение материальной точки равно векторной сумме ускорений, которые имела бы эта точка при действии каждой из сил в отдельности:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \dots + \boldsymbol{w}_n,$$

$$\text{где } \boldsymbol{w}_1 = \frac{\boldsymbol{F}_1}{m}, \boldsymbol{w}_2 = \frac{\boldsymbol{F}_2}{m}, \dots, \boldsymbol{w}_n = \frac{\boldsymbol{F}_n}{m}.$$

Это значит, что при определении ускорения материальной точки можно пользоваться методом суперпозиции (наложения). Следует иметь в виду, что при определении скорости материальной точки аналогичная суперпозиция не имеет места, т. е. скорость материальной точки не равна векторной сумме скоростей, которые имела бы эта точка при действии каждой из сил в отдельности.

ГЛАВА VIII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 1. Основные формы дифференциальных уравнений динамики материальной точки

Ускорение \boldsymbol{w} материальной точки массы m , движущейся под действием приложенных к ней сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \dots, \boldsymbol{F}_n$, определяется с помощью основного закона динамики в сочетании с законом независимости действия сил:

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \dots + \boldsymbol{F}_n.$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси декартовых координат имеют вид:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^n F_{kz};$$

здесь $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ — проекции ускорения \boldsymbol{w} , а F_{kx}, F_{ky} и F_{kz} — проекции силы \boldsymbol{F}_k на соответствующие оси декартовых координат.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси натурального триэдра записываются в форме:

$$m \frac{dv_\tau}{dt} = \sum F_{k\tau}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn}, \quad 0 = \sum F_{kb};$$

здесь v_τ — проекция скорости на направление касательной к траектории, v — модуль скорости, ρ — радиус кривизны траектории в данной

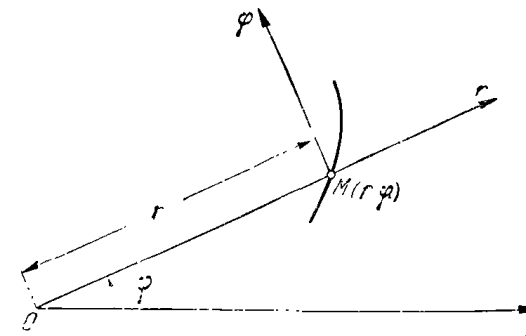


Рис. 110.

точке, $F_{k\tau}, F_{kn}, F_{kb}$ — проекции силы \boldsymbol{F}_k на оси натурального триэдра (τ — касательная, n — главная нормаль, b — бинормаль).

Как следует из последнего уравнения, проекция равнодействующей сил, приложенных к материальной точке, на бинормаль равна нулю, т. е. траектория располагается так, что равнодействующая сила оказывается лежащей в соприка-

сающейся плоскости, проведенной в данной точке траектории.

Дифференциальные уравнения плоского движения материальной точки в полярных координатах имеют вид:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \sum_{k=1}^n F_{kr}, \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\varphi}) = \sum_{k=1}^n F_{k\varphi};$$

здесь r — радиус-вектор точки, φ — полярный угол (рис. 110).

Дифференциальные уравнения движения материальной точки записываются соответственно избранной системе координат. Так, дифференциальные уравнения можно составить в цилиндрических, сферических и других криволинейных координатах. Ниже, в главе X, § 6 записаны дифференциальные уравнения движения материальной точки, отнесенные к любой системе координат.

С помощью дифференциальных уравнений движения материальной точки можно решать две основные задачи динамики: прямую и обратную.

Прямой называется задача, в которой по заданному движению и массе материальной точки определяется равнодействующая сил, приложенных к этой точке.

Обратной называется задача, в которой по заданным силам и массе материальной точки определяется ее движение.

Следующий параграф посвящен решению прямых задач динамики материальной точки.

§ 2. Определение сил по заданному движению

(прямая задача динамики материальной точки)

Если даны уравнения движения материальной точки массы m в декартовых координатах: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, то проекции F_x , F_y и F_z силы $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$, вызывающей это движение, определяются по формулам:

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z}, \quad (1^*)$$

откуда

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

$$\cos(\widehat{x, \mathbf{F}}) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\widehat{y, \mathbf{F}}) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\widehat{z, \mathbf{F}}) = \frac{F_z}{F}.$$

Таким образом, прямая задача динамики материальной точки легко решается посредством дифференцирования заданных уравнений движения точки.

Если дано уравнение движения материальной точки массы m по траектории, т. е. $\sigma = f(t)$, то проекции F_τ , F_n и F_b силы $\mathbf{F} = F_\tau \boldsymbol{\tau} + F_n \mathbf{n} + F_b \mathbf{b}$, вызывающей это движение, определяются по формулам:

$$F_\tau = m \frac{dv_\tau}{dt}, \quad F_n = m \frac{v^2}{\rho}, \quad F_b = 0, \quad (2^*)$$

откуда

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}, \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{F}}) = \frac{F_\tau}{F}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{F}}) = \frac{F_n}{F}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{F}}) = 0.$$

В формулах (2*) $v_\tau = \frac{d\sigma}{dt}$.

Если даны уравнения плоского движения материальной точки массы m в полярных координатах $r = f_1(t)$, $\varphi = f_2(t)$, то проекции F_r и F_φ силы \mathbf{F} , вызывающей это движение, определяются по формулам:

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2), \quad F_\varphi = \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}), \quad (3^*)$$

откуда

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_\varphi^2}, \quad \cos(\widehat{r, \mathbf{F}}) = \frac{F_r}{F}, \quad \cos(\widehat{\varphi, \mathbf{F}}) = \frac{F_\varphi}{F}.$$

Сила, приложенная к материальной точке, называется центральной, если линия ее действия проходит во время движения через неподвижную точку, называемую центром. Сила, направленная к неподвижному центру, называется силой притяжения. Сила, направленная от неподвижного центра, называется силой отталкивания.

Движение материальной точки под действием центральной силы происходит в плоскости, проходящей через вектор-радиус и начальную скорость точки. Для его исследования удобно ввести полярные координаты и использовать формулу Биле

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = - \frac{r^2}{4mC^2} F_r,$$

где C — секториальная скорость точки, которая при наличии центральной силы постоянна: $C = S = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$. (Секториальной скоростью S называется производная по времени от площади S , описываемой вектор-радиусом \mathbf{r} движущейся точки.)

Применение формулы Биле позволяет определить закон изменения центральной силы по данному уравнению центральной орбиты (прямая задача). Если F_r оказывается положительной, то центральная сила является силой отталкивания, если — отрицательной, то — силой притяжения.

Прямые задачи динамики несвободной материальной точки, в которых требуется определить задаваемую силу или силу реакции, приложенную к точке, рекомендуется решать в следующем порядке:

- 1) изобразить на рисунке материальную точку в текущем положении и приложенные к ней задаваемые силы;
- 2) применив принцип освобожденности от связей, изобразить соответствующие силы реакций связей;
- 3) выбрать систему отсчета, если она не указана в условии задачи;
- 4) определить по заданному закону движения ускорение материальной точки и найти его проекции на выбранные оси координат;
- 5) составить дифференциальные уравнения движения материальной точки, соответствующие принятой системе отсчета;
- 6) из системы составленных уравнений определить искомую величину.

Если при решении прямой задачи динамики материальной точки требуется определить равнодействующую сил, приложенных к этой точке, то решение задачи сводится к дифференцированию заданных уравнений движения точки с последующим использованием формул (1*), (2*) или для плоского движения формул (3*).

Задача 211. Материальная точка движется согласно уравнениям $x = at$, $y = bt$, где a и b — постоянные. Определить силу, вызывающую это движение.

Решение. Проекция искомой силы на оси декартовых координат определяем по формулам $F_x = m\ddot{x}$ и $F_y = m\ddot{y}$. Воспользовавшись заданными уравнениями движения, находим: $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$. Следовательно, $F_x = F_y = 0$, т. е. $F = 0$.

Эту задачу можно решить и иначе, определив траекторию и скорость точки. Точка движется по прямой $y = \frac{b}{a}x$ с постоянной скоростью $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Следовательно, согласно принципу инерции, $F = 0$.

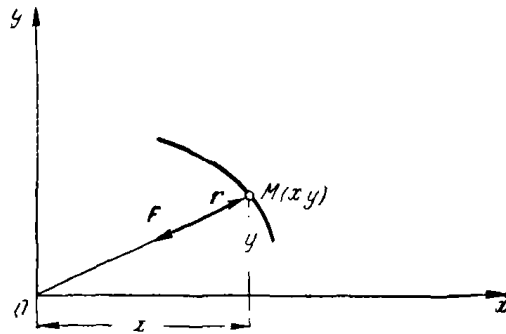
Задача 212. Материальная точка массы m движется согласно уравнениям $x = a \cos kt$, $y = b \sin kt$. Определить силу F , вызывающую это движение, если известно, что сила зависит только от положения точки.

Решение. Проекция силы F , приложенной к материальной точке, определяются по формулам $F_x = m\ddot{x}$, $F_y = m\ddot{y}$. В данном случае

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -ak^2 \cos kt, \\ \ddot{y} &= -bk^2 \sin kt.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}F_x &= -mak^2 \cos kt, \\ F_y &= -mbk^2 \sin kt.\end{aligned}$$



К задаче 212.

Так как, по условию, сила F зависит от положения материальной точки, то ее проекции F_x и F_y являются функциями координат x и y . Воспользовавшись уравнениями движения точки, получим:

$$F_x = -mk^2x, \quad F_y = -mk^2y.$$

Модуль силы F равен: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} = mk^2r$, где r — модуль вектор-радиуса материальной точки $r = OM$.

Направление силы F определяем с помощью направляющих косинусов:

$$\cos(\widehat{x, F}) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}, \quad \cos(\widehat{y, F}) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}.$$

Так как $\frac{x}{r}$ и $\frac{y}{r}$ определяют углы, образуемые соответственно осями x и y с вектор-радиусом r , то сила направлена от M к O . Следовательно, данная материальная точка движется под действием силы притяжения к центру O , равной по модулю $F = k^2mr$. Эта сила называется центральной.

Задача 213. Материальная точка массы m движется по окружности радиуса a согласно уравнению $\sigma = bt$.

Определить силу, вызывающую это движение (σ — дуговая координата, b — постоянная величина).

Решение. Воспользуемся осями натурального триэдра τ , n и b . Проекция искомой силы на эти оси определяются по формулам:

$$F_\tau = m \frac{dv_\tau}{dt}, \quad F_n = m \frac{v^2}{\rho}, \quad F_b = 0.$$

Учитывая, что алгебраическая величина скорости точки равна $v_\tau = \frac{d\sigma}{dt}$, находим, что $v_\tau = b$. Следовательно:

$$\omega_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = 0, \quad \omega_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{b^2}{a}.$$



К задаче 214.

Итак, $F_\tau = 0$, $F_n = m \frac{b^2}{a}$, $F_b = 0$, т. е. сила F , вызывающая заданное движение материальной точки, направлена по радиусу окружности к ее центру и по модулю равна $m \frac{b^2}{a}$.

Задача 214. Пассажирский лифт веса $P = 800$ кг опускается вниз с ускорением $\omega = 0,4g$, где g — ускорение силы тяжести.

Определить натяжение поддерживающего троса, если сила сопротивления движению F равна $0,2$ веса лифта.

Решение. К лифту приложена задаваемая сила — вес P , сила сопротивления движению F , направленная в сторону, противоположную движению, т. е. по вертикали вверх. Применив принцип освобождения от связей, мысленно рассечем трос и компенсируем действие отброшенной части троса на лифт силой реакции R , направленной по вертикали вверх. Направим ось x вдоль траектории лифта, т. е. по вертикали вниз.

Запишем дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на ось x :

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}.$$

В данном случае имеем:

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = P - F - R,$$

откуда

$$R = P - F - \frac{P}{g} \ddot{x}.$$

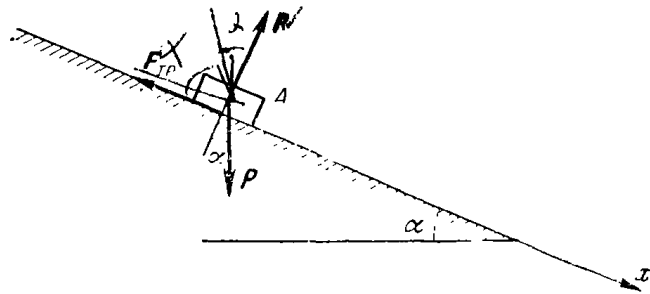
Учитывая, что $\ddot{x} = \omega = 0,4g$, а $F = 0,2P$, получим:

$$R = 0,4P = 320 \text{ кг}.$$

Искомое натяжение троса равно по модулю реакции R .

Задача 215. Груз A спускается вниз по негладкой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, двигаясь согласно уравнению $x = bgt^2$, где g — ускорение силы тяжести, а b — постоянный коэффициент. Определить модуль силы трения скольжения груза о плоскость.

Решение. Вес груза A обозначим P . К грузу приложены три силы: вес груза P и две составляющие R и $F_{\text{тр}}$ силы реакции наклонной плоскости. Нормальная реакция R направлена перпендикулярно к наклонной плоскости, а сила трения скольжения $F_{\text{тр}}$ — в сторону, противоположную движению груза, т. е. вдоль наклонной плоскости вверх.



К задаче 215.

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x :

$$m\ddot{x} = P \sin \alpha - F_{\text{тр}}. \quad (1)$$

Так как $x = bgt^2$, то $\ddot{x} = 2bg$. Масса груза равна $m = \frac{P}{g}$. Теперь уравнение (1) принимает вид

$$2bP = P \sin \alpha - F_{\text{тр}},$$

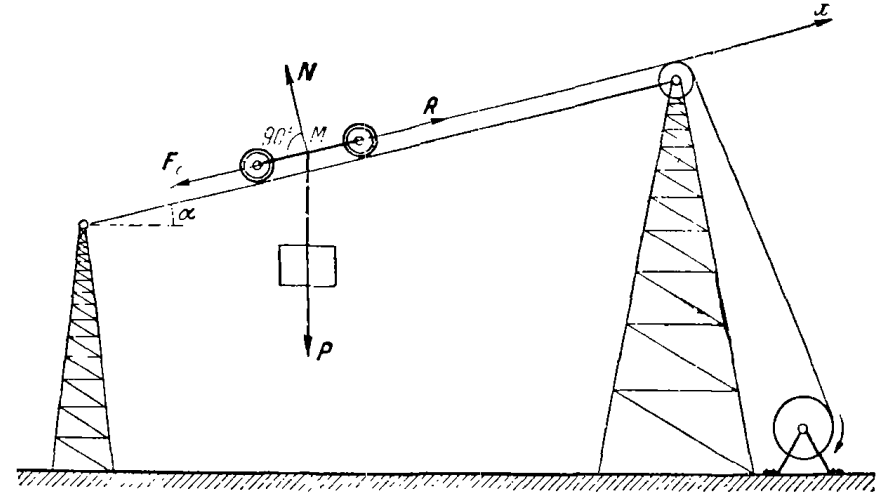
откуда определяем искомую величину силы трения скольжения $F_{\text{тр}}$ груза о наклонную плоскость:

$$F_{\text{тр}} = P(\sin \alpha - 2b).$$

Задача 216. Вагонетка веса P канатной подвесной дороги движется вверх под углом α к горизонту. Определить натяжение каната при пуске вагонетки в ход и при ее последующем равномерном движении, если пуск в ход осуществляется равноускоренно из состояния покоя в течение T секунд. К концу пускового периода вагонетка приобрела скорость v . На вагонетку действует сила сопротивления $F_c = fN$, где N — модуль нормального давления ва-

гонетки на канат, а f — постоянный коэффициент. Прогибом каната пренебречь.

Решение. Решаем задачу в предположении, что все силы приложены в точке M . В этой точке, помимо веса груза P , приложим суммарную нормальную реакцию N двух колес, силу реакции R каната и силу сопротивления движению F_c . Направим ось x вдоль каната, осуществляющего подъем вагонетки.



К задаче 216.

Так как пуск в ход осуществляется из состояния покоя равноускоренно, то $v = \omega T$, откуда находим ускорение вагонетки ω , направленное при пуске в ход вдоль каната вверх:

$$\omega = \frac{v}{T}.$$

Запишем дифференциальное уравнение движения вагонетки при пуске в ход в проекции на ось x :

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = R - P \sin \alpha - F_c,$$

откуда

$$R = P \sin \alpha + F_c + \frac{P}{g} \ddot{x}. \quad (1)$$

Учитывая, что $F_c = fN = fP \cos \alpha$, а $\ddot{x} = \omega = \frac{v}{T}$, находим:

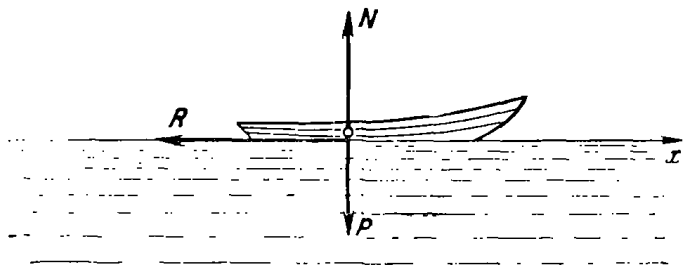
$$R = P(\sin \alpha + f \cos \alpha) + \frac{P}{g} \frac{v}{T}.$$

При равномерном движении вагонетки $\ddot{x} = 0$ и формула (1) принимает вид

$$R = P(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Искомое натяжение каната равно по модулю реакции R .

Задача 217. Определить силу сопротивления воды движению лодки веса P , если ее движение происходит согласно уравнению $x = \frac{P}{ag} v_0 (1 - e^{-\frac{ag}{P} t})$, где v_0 — начальная скорость движения, a — постоянный коэффициент. Сила сопротивления движению является функцией только скорости лодки.



К задаче 217.

Решение. К лодке приложены силы: P — вес лодки, N — нормальная сила реакции воды, R — сила сопротивления воды движению лодки, направленная в сторону, противоположную ее движению.

Проекция скорости лодки на ось x равна

$$v_x = \dot{x} = v_0 e^{-\frac{ag}{P} t}. \quad (1)$$

Проекция ускорения лодки на ось x имеет вид

$$\omega_x = \ddot{x} = -\frac{ag}{P} v_0 e^{-\frac{ag}{P} t}. \quad (2)$$

Запишем дифференциальное уравнение движения лодки в проекции на ось x :

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = R_x.$$

Воспользовавшись формулой (2), находим:

$$R_x = -av_0 e^{-\frac{ag}{P} t}.$$

Так как, по условию, сила сопротивления R является функцией скорости лодки, то, учитывая формулу (1), получим: $R_x = -av_x$.

Задача 218. Груз веса P , подвешенный на пружине, совершает колебания, согласно уравнению $x = a \sin \omega t$, где x — смещение груза из положения статического равновесия, a и ω — постоянные величины. Колебания совершаются под действием силы, проекция которой на ось x равна $S_x = H \sin \omega t$, где H и ω — постоянные величины. Определить величину упругой силы пружины, если известно, что она зависит от величины смещения x груза. Массой пружины и силой сопротивления движению груза пренебречь. Ось x направлена из положения статического равновесия по вертикали вниз, а сила S действует по этой оси.

Решение. К грузу приложены следующие силы: P — вес груза, S — сила, вызывающая колебания груза, и F — упругая сила пружины. Предположим, что груз из положения статического равновесия перемещается в положительном направлении оси x , т. е. вниз. При этом пружина растягивается и упругая сила пружины F оказывается направленной вверх*).

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x :

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = P + S_x + F_x,$$

откуда

$$\begin{aligned} F_x &= -\left(P + S_x - \frac{P}{g} \ddot{x}\right) = \\ &= -\left(P + H \sin \omega t - \frac{P}{g} \ddot{x}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

К задаче 218.

Так как, согласно заданному уравнению движения, $x = a \sin \omega t$, то $\ddot{x} = -a\omega^2 \sin \omega t$, т. е.

$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \quad (2)$$

Подставив значение \ddot{x} из формулы (2) в формулу (1), находим:

$$F_x = -\left(P + H \sin \omega t + \frac{P}{g} \omega^2 x\right). \quad (3)$$

Заметив, что из заданного уравнения движения груза $\sin \omega t = \frac{x}{a}$, запишем формулу (3) в виде

$$F_x = -\left[P + \left(\frac{H}{a} + \frac{P}{g} \omega^2\right) x\right].$$

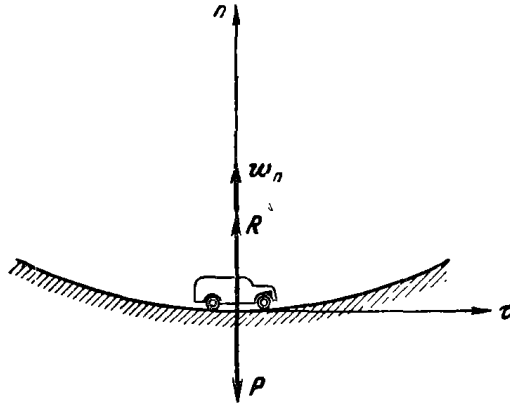
*) На рисунке, и далее в аналогичных случаях, сила F условно направлена в сторону убывания координаты x . В действительности же при колебаниях груза сила F периодически меняет свое направление.

При $x = a$, т. е. в крайнем нижнем положении груза, упругая сила F достигает наибольшего значения:

$$F_{\max} = P + H + \frac{P}{g} a \omega^2.$$

При прохождении грузом положения его статического равновесия, т. е. при $x = 0$, упругая сила пружины равна весу груза.

Задача 219. Автомобиль веса $P = 1200$ кг движется по дну оврага с постоянной по модулю скоростью $v = 36$ км/час. Определить давление автомобиля на дно оврага в наименьшей точке. Радиус кривизны траектории ρ в этой точке равен 50 м. Автомобиль считать точечной массой. Силой сопротивления движению пренебречь.



К задаче 219.

Решение. Воспользуемся осями натурального триэдра, направив ось x по горизонтали направо и ось n по вертикали вверх. К автомобилю, принимаемому за точечную массу, приложены две силы: вес P и нормальная сила реакции R грунта, направленная вдоль главной нормали по вертикали вверх.

Применим дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на главную нормаль n :

$$m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn}.$$

В данном случае

$$\frac{P}{g} \frac{v^2}{\rho} = R - P,$$

откуда

$$R = P + \frac{P}{g} \frac{v^2}{\rho}.$$

Подставив численные значения, получим, что $R = 1445$ кг.

Искомое давление автомобиля на дно оврага направлено противоположно силе нормальной реакции R и равно ей по модулю.

Задача 220. Определить, с какой скоростью должен двигаться искусственный спутник Земли на высоте $h = 900$ км, если орбиту спутника можно приблизительно принять за окружность, центр которой

совмещен с центром Земли. Радиус Земли $R = 6370$ км. Ускорение силы тяжести на поверхности Земли $g = 9,81$ м/сек². Сила притяжения спутника Землей обратно пропорциональна квадрату расстояния от спутника до центра Земли. Спутник считать точечной массой.

Решение. Проведем ось n через спутник M и центр Земли O . При движении с постоянной скоростью v спутник имеет нормальное ускорение w_n , направленное к центру Земли O .

Так как орбитой спутника считается окружность радиуса $R + h$ с центром в центре Земли O , то

$$w_n = \frac{v_M^2}{\rho} = \frac{v_M^2}{R + h}. \quad (1)$$

На спутник действует сила F притяжения к Земле, направленная к центру Земли O , обратно пропорциональная квадрату расстояния $OM = R + h$ от спутника до центра Земли, т. е.

$$F = \frac{km}{(R + h)^2}, \quad (2)$$

К задаче 220.

где m — масса спутника, а k — коэффициент пропорциональности. Учитывая, что на поверхности Земли, т. е. при $h = 0$, $F = P = mg$, находим из формулы (2), что $k = gR^2$. Следовательно, сила притяжения

$$F = \frac{mgR^2}{(R + h)^2}. \quad (3)$$

Запишем далее дифференциальное уравнение движения спутника, принимаемого за материальную точку, в проекции на ось n :

$$m w_n = F.$$

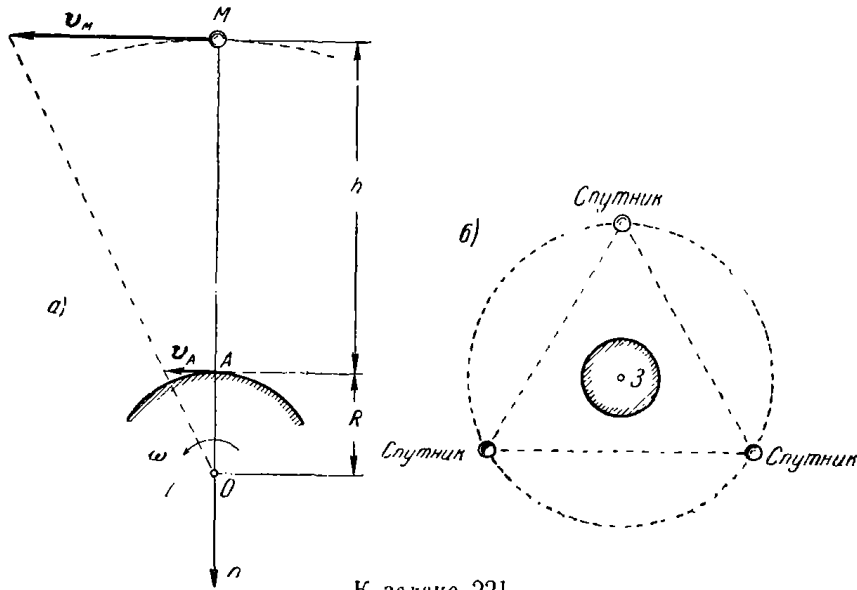
Воспользуемся формулами (1) и (3), получим:

$$\frac{mv_M^2}{R + h} = \frac{mgR^2}{(R + h)^2}, \quad (4)$$

откуда искомая скорость

$$v_M = R \sqrt{\frac{g}{R+h}} = 7,4 \text{ км/сек.}$$

Задача 221. На какую высоту надо запустить искусственный спутник Земли для того, чтобы с Земли он казался неподвижным для наблюдателя, вращающегося вместе с Землей? Орбиту спутника Земли приближенно считать окружностью, концентричной с экватором. Радиус Земли $R = 6370 \text{ км}$. Ускорение силы тяжести на поверхности Земли $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$. Модуль угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси $\omega = 0,00007 \text{ 1/сек}$.



К задаче 221.

Сила притяжения спутника Землей обратно пропорциональна квадрату расстояния от спутника до центра Земли. Спутник считать точечной массой.

Решение. Для того, чтобы искусственный спутник, движущийся по орбите, концентричной с экватором, казался с Земли неподвижным, он должен быть расположенным на оси n , проходящей через спутник M , центр Земли O , а также через наблюдателя A , расположенного на экваторе и вращающегося вместе с Землей (см. рис. а, на котором изображен вид Земли в плане с Северного полюса). При соблюдении этого условия скорости спутника M и наблюдателя A должны удовлетворять соотношению

$$\frac{v_M}{v_A} = \frac{OM}{OA}.$$

Так как $v_A = R\omega$, где ω — модуль угловой скорости суточного вращения Земли вокруг своей оси, $OM = R+h$, $OA = R$, то $v_M = (R+h)\omega$. Подставив это значение v_M в формулу (4) предыдущей задачи, находим:

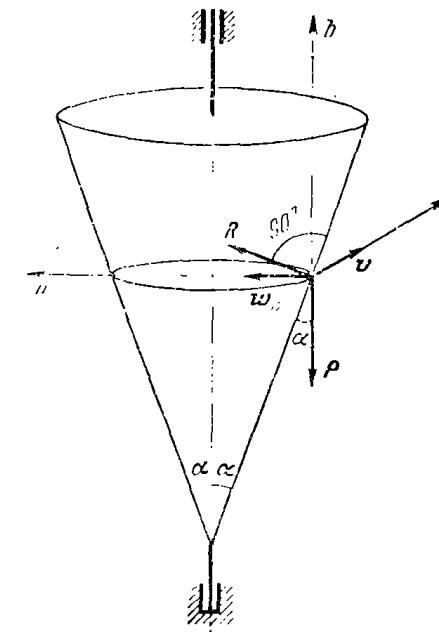
$$(R+h)\omega^2 = \frac{gR^2}{(R+h)^2},$$

откуда искомая высота

$$h = \sqrt[3]{\frac{gR^2}{\omega^2}} - R.$$

Подставив численные значения, найдем, что искомая высота равна $36\,800 \text{ км}$.

Существует проект запуска трех искусственных спутников на эту высоту так, чтобы они образовали равносторонний треугольник, в вершинах которого находились бы спутники. Учитывая неподвижность этих спутников по отношению к Земле, их предполагают использовать в качестве мировой ретрансляционной станции телевидения. Действительно, с высоты $h = 36\,800 \text{ км}$ волны, распространяясь прямолинейно, могут попасть в любую точку земной поверхности (см. рис. б).



К задаче 222.

Задача 222. Материальная точка движется внутри гладкого кругового конуса по горизонтальной окружности с постоянной по модулю скоростью v . Определить радиус ρ окружности, если угол при вершине конуса равен 2α .

Решение. Совместив начало координат с движущейся точкой, изобразим оси натурального триэдра τ, n, b (оси n и b расположены в плоскости рисунка, ось τ направлена перпендикулярно к плоскости рисунка, за рисунок).

К материальной точке приложен ее вес P и нормальная сила реакции R внутренней боковой поверхности конуса. Точка, движущаяся равномерно по горизонтальной окружности, имеет только нормальное ускорение ω_n , направленное по горизонтали влево.

Запишем дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси n и b :

$$m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn}, \quad 0 = \sum F_{kb}.$$

В данном случае

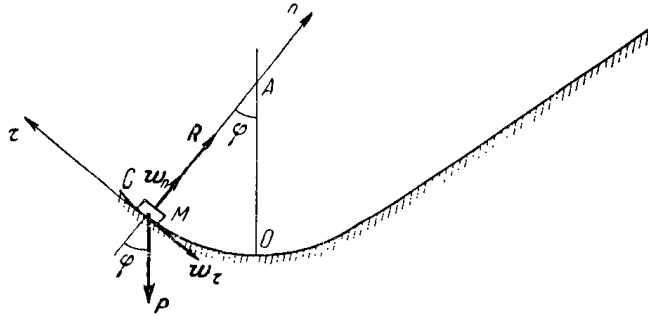
$$\frac{mv^2}{\rho} = R \cos \alpha,$$

$$0 = R \sin \alpha - P.$$

Исключив из этой системы уравнений R , определим искомую величину радиуса окружности:

$$\rho = \frac{v^2}{g} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Задача 223. При спуске с горы лыжник веса P достигает точки O со скоростью v_0 . При последующем подъеме на пригорок лыжник



К задаче 223.

движется по дуге окружности OC радиуса r со скоростью $v = \sqrt{v_0^2 - 2gr(1 - \cos \varphi)}$, где φ — угол, образуемый радиусом AM с вертикалью. Определить давление лыжника на снег при прохождении им участка OC . Силами сопротивления движению пренебречь. Лыжника считать точечной массой.

Решение. Трасстория лыжника известна. Изобразим оси натурального триэдра, расположив их начало в точке M , занимаемой лыжником в данный момент.

К лыжнику приложены силы: P — вес лыжника, R — нормальная сила реакции снега, направленная вдоль радиуса дуги OC от M к центру A .

Изобразим нормальную w_n и касательную w_τ составляющие ускорения лыжника. Для определения нормальной силы реакции R применим дифференциальное уравнение движения в проекции

на главную нормаль n : $m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn}$. В данном случае получим: $\frac{P}{g} \frac{v^2}{r} = R - P \cos \varphi$, откуда $R = P \cos \varphi + \frac{P}{g} \frac{v^2}{r}$. Учитывая, что, согласно условию задачи, $v = \sqrt{v_0^2 - 2gr(1 - \cos \varphi)}$, находим:

$$R = P \left[\cos \varphi + \frac{v_0^2 - 2gr(1 - \cos \varphi)}{gr} \right].$$

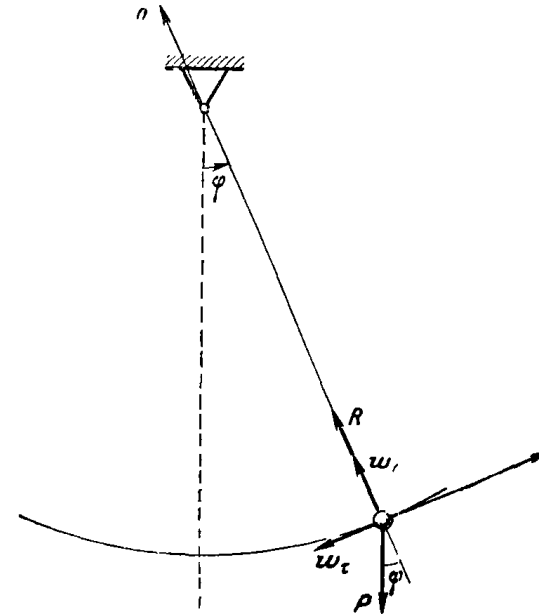
Искомое давление лыжника на снег противоположно силе реакции R по направлению и равно ей по модулю.

Наибольшее давление имеет место в точке O при $\varphi = 0$:

$$N_{\max} = P \left(1 + \frac{v_0^2}{gr} \right).$$

Задача 224. Определить натяжение нити математического маятника длины l и веса P , если качания маятника совершаются согласно уравнению $\varphi = \varphi_0 \sin kt$ (φ — угол отклонения маятника от вертикали, φ_0 и k — постоянные величины).

Решение. Изобразив маятник в промежуточном положении, при котором его нить образует с вертикалью угол φ , направим ось n вдоль нити, а ось τ — перпендикулярно к оси n , в сторону возрастания угла φ .



К задаче 224.

К маятнику приложены следующие силы: вес маятника P и сила реакции нити R . Покажем на рисунке эти силы, а также составляющие ускорения маятника w_n и w_τ .

Для определения силы реакции нити R применяем дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на главную нормаль n :

$$m w_n = \sum F_{kn}.$$

В данном случае, учитывая, что $w_n = l \dot{\varphi}^2$, имеем:

$$ml \dot{\varphi}^2 = R - P \cos \varphi,$$

откуда

$$R = P \cos \varphi + \frac{P}{g} l \dot{\varphi}^2. \quad (1)$$

Так как по условию $\varphi = \varphi_0 \sin kt$, то

$$\dot{\varphi} = \varphi_0 k \cos kt.$$

Подставив значение φ и $\dot{\varphi}$, находим:

$$R = P \left[\cos(\varphi_0 \sin kt) + \frac{k^2 l \varphi_0^2}{g} \cos^2 kt \right].$$

Наибольшего значения сила реакции нити достигает в отвесном положении, т. е. когда $kt = n\pi$:

$$R_{\max} = P \left(1 + \frac{lk^2}{g} \varphi_0^2 \right).$$

Искомое натяжение нити T направлено противоположно силе реакции R и равно ей по модулю.

Задача 225. Материальная точка движется под действием центральной силы по логарифмической спирали, уравнение которой имеет вид: $r = ae^{-\lambda\varphi}$, где a и λ — постоянные величины. Определить закон изменения центральной силы.

Решение. Воспользуемся формулой Бине

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2}{4mC^2} F_r.$$

Уравнение логарифмической спирали запишем в виде

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} e^{\lambda\varphi}.$$

Взяв вторую производную по φ , находим:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\lambda^2}{a} e^{\lambda\varphi} = \frac{\lambda^2}{r}.$$

Подставив это значение в формулу Бине и решив уравнение относительно F_r , получим:

$$F_r = -\frac{A}{r^3},$$

где $A = 4mC^2(1 - \lambda^2)$. Знак минус указывает, что центральная сила, вызывающая движение материальной точки по логарифмической спирали, является силой притяжения. Эта сила обратно пропорциональна кубу расстояния от неподвижного центра.

§ 3. Определение движения по заданным силам (обратная задача динамики материальной точки)

Даны силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные к материальной точке массы m . Для определения закона движения этой точки следует проинтегрировать систему дифференциальных уравнений движения, соответствующих избранной системе отсчета.

Так, если задача решается в проекциях на оси инерциальной системы декартовых координат, то интегрированию подлежит система дифференциальных уравнений движения:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^n F_{kz}. \quad (1^*)$$

В результате интегрирования этой системы определяют закон движения точки в декартовых координатах, т. е.

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

Решение обратных задач, связанное с интегрированием системы дифференциальных уравнений (1*), представляет подчас значительные трудности и часто не может быть выполнено в квадратурах. (Тогда приходится систему (1*) решать численно, применять иные методы приближенного интегрирования, либо пользоваться вычислительными машинами.)

Так как система (1*) состоит из трех дифференциальных уравнений второго порядка, то при ее интегрировании появляются шесть произвольных постоянных C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 и C_6 . Для их определения в условии задачи должны быть дополнительные данные, называемые *начальными условиями движения*.

Начальные условия движения материальной точки определяют положение точки и ее скорость в некоторый фиксированный момент времени. Положение точки определяется тремя координатами x, y, z , а скорость точки — тремя проекциями скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$; таким образом, начальные условия имеют вид:

$$\text{при } t = t_0$$

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \quad (\text{положение точки}),$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0 \quad (\text{скорость точки}).$$

(Часто эти условия задаются для начального момента времени $t = 0$.)

В результате подстановки начальных условий движения в первые и вторые интегралы системы (1*) образуется система шести уравнений для определения шести неизвестных C_1, C_2, \dots, C_6 .

Если движение материальной точки происходит в плоскости, то при расположении координатных осей x и y в этой плоскости число

дифференциальных уравнений движения равно двум, и поэтому число начальных условий движения равно четырем:

при $t = t_0$

$$x = x_0, \quad y = y_0 \quad (\text{положение точки}),$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0 \quad (\text{скорость точки})$$

(в данном случае $z_0 = \dot{z}_0 = 0$).

Если материальная точка движется прямолинейно, то при направлении оси x вдоль траектории точки имеется одно дифференциальное уравнение движения, и поэтому число начальных условий движения равно двум:

при $t = t_0$

$$x = x_0 \quad (\text{положение точки}),$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 \quad (\text{скорость точки}).$$

Силы, приложенные к материальной точке, могут быть:

1) постоянными силами (например, сила тяжести при движении материальной точки вблизи земной поверхности);

2) силами, зависящими от времени (например, периодически изменяющиеся силы, вызывающие колебания материальной точки);

3) силами, зависящими от положения точки (например, силы притяжения и отталкивания, силы упругости пружин, упругих нитей и т. д.);

4) силами, зависящими от скорости точки (например, силы сопротивления движению точки).

В более общем случае силы являются функциями времени, положения, скорости и ускорения точки. Тогда система уравнений (1*) имеет вид:

$$m\ddot{x} = f_1(t; x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}),$$

$$m\ddot{y} = f_2(t; x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}),$$

$$m\ddot{z} = f_3(t; x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}).$$

Обратные задачи динамики материальной точки рекомендуется решать в следующем порядке:

1) выбрать систему координат;

2) записать начальные условия движения точки;

3) изобразить на рисунке задаваемые силы и силы реакций связей, приложенные к материальной точке;

4) составить дифференциальные уравнения движения материальной точки;

5) проинтегрировать систему дифференциальных уравнений движения. Используя начальные условия движения, определить постоянные интегрирования;

б) воспользовавшись уравнениями движения материальной точки, полученными в предыдущем пункте, определить искомые величины.

При составлении дифференциальных уравнений движения надо рассматривать материальную точку в текущем положении.

В случае движения свободной материальной точки удобно пользоваться системой осей декартовых координат. При криволинейном движении несвободной материальной точки проще решать задачу в проекциях на оси натурального триэдра.

При движении материальной точки под действием центральной силы F удобно пользоваться дифференциальными уравнениями движения в полярных координатах или формулой Бине

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = - \frac{r^2}{4mC^2} F_r$$

(см. § 2).

Задача 226. Определить условия, выполнение которых обеспечивает прямолинейное движение материальной точки.

Решение. Направим ось x вдоль прямолинейной траектории материальной точки; при движении вдоль этой оси $y = z = 0$. Следовательно,

$$\dot{y} = \dot{z} = 0 \quad (1)$$

и

$$\ddot{y} = \ddot{z} = 0. \quad (2)$$

Запишем систему дифференциальных уравнений движения в проекциях на оси декартовых координат:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^n F_{kz}.$$

Воспользовавшись условиями (2), находим:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad 0 = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad 0 = \sum_{k=1}^n F_{kz}.$$

Из второго и третьего уравнений следует, что проекции равнодействующей сил, приложенных к материальной точке, на оси y и z равны нулю: $R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0$, $R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0$, т. е. равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, должна быть направлена вдоль оси x , т. е. вдоль неизменного направления.

Из условия (1) вытекает: $\dot{y} = \dot{z} = 0$, т. е. проекция скорости точки на оси y и z равна нулю; таким образом, скорость точки всегда направлена вдоль оси x . Следовательно, и начальная скорость точки должна иметь аналогичное направление.

Выясним достаточность этих условий.

Дано: в начальный момент точка находится на оси x , т. е. $y_0 = z_0 = 0$, начальная скорость точки направлена вдоль оси x , т. е. $\dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$, равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, направлена вдоль оси x , т. е.

$$R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0.$$

Требуется выяснить, достаточно ли выполнения этих условий для прямолинейного движения точки вдоль оси x ?

В данном случае дифференциальные уравнения движения материальной точки принимают вид:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = 0.$$

Из второго дифференциального уравнения $m\ddot{y} = 0$ находим, что $\dot{y} = C_1$. Так как $\dot{y}_0 = 0$, то $C_1 = 0$ и, следовательно, $\dot{y} = 0$, откуда $y = C_2$. Так как $y_0 = 0$, то $C_2 = 0$ и, следовательно, $y = 0$. Аналогично, из третьего дифференциального уравнения имеем $z = 0$. Из полученного результата $y = z = 0$ следует, что материальная точка движется вдоль оси x .

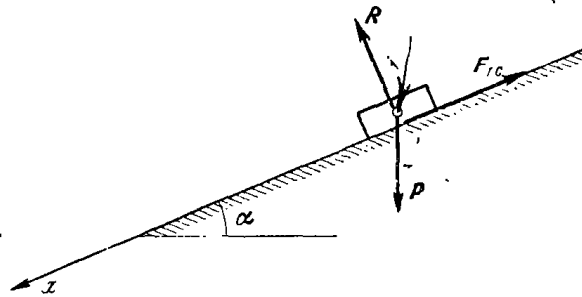
Итак, для осуществления прямолинейного движения материальной точки необходимо и достаточно, чтобы начальная скорость точки и равнодействующая сил, приложенных к этой точке, лежали на одной прямой.

Задача 227. В результате полученного толчка кирпич начал скользить вниз с начальной скоростью $v_0 = 2$ м/сек по неподвижной ленте конвейера, расположенной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Определить путь s , пройденный кирпичом за промежуток времени $\tau = 2$ сек, если коэффициент трения скольжения кирпича о ленту конвейера равен $f = 0,4$. Кирпич считать точечной массой.

Решение. Направим ось x вдоль наклонной ленты конвейера вниз. Возьмем начало отсчета на оси x в начальном положении кирпича, рассматриваемого как материальная точка.

Начальная скорость v_0 направлена вдоль оси x вниз. Следовательно, начальные условия движения имеют вид:

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0, \quad \dot{x} = v_0.$$



К задаче 227.

Обозначим вес кирпича через P . К кирпичу, являющемуся несвободной материальной точкой, приложена одна задаваемая сила — его вес P . Применив принцип освобожденности от связей, отбросим мысленно наклонную ленту конвейера, заменив ее действие на кирпич соответствующей силой реакции. Эта сила реакции имеет две составляющие: нормальную составляющую — силу реакции R , перпендикулярную к плоскости ленты, и силу трения скольжения $F_{т.с}$ кирпича о ленту конвейера, направленную в сторону, противоположную движению, т. е. вдоль ленты конвейера вверх.

Запишем дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на ось x :

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}.$$

В данном случае получим:

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = P \sin \alpha - F_{т.с}.$$

Так как по закону сухого трения $F_{т.с} = fN = fP \cos \alpha$, то после сокращения на P находим:

$$\ddot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha). \quad (1)$$

Для интегрирования дифференциального уравнения движения заменим \ddot{x} на $\frac{dx}{dt}$. После отделения переменных получим:

$$d\dot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) dt.$$

Проинтегрировав, имеем:

$$\dot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + C_1. \quad (2)$$

Соотношение (2) является первым интегралом дифференциального уравнения движения (1). Для определения постоянной интегрирования C_1 подставим в уравнение (2) начальное условие движения (при $t = 0$ $\dot{x} = v_0$), откуда следует, что $C_1 = v_0$. Полученное значение C_1 подставляем в уравнение (2):

$$\dot{x} = v_0 + g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t. \quad (3)$$

Для определения закона движения кирпича заменим в уравнении (3) \dot{x} на $\frac{dx}{dt}$. После отделения переменных находим:

$$dx = v_0 dt + g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t dt.$$

Проинтегрировав, получим:

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t^2 + C_2. \quad (4)$$

Постоянная интегрирования C_2 определяется после подстановки начальных условий движения в (4) (при $t = 0$ $x = 0$), откуда имеем, что

$C_2 = 0$. Внося это значение C_2 в (4), получаем уравнение движения кирпича

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t^2. \quad (5)$$

Для определения искомого пути s , пройденного за τ секунд, следует в уравнении (5) положить $t = \tau$. Тогда

$$s = v_0 \tau + \frac{1}{2} g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \tau^2.$$

После подстановки численных значений получим $s = 7,02$ м.

Если бы при решении этой задачи мы направили ось x вдоль ленты конвейера вверх, то начальные условия движения приняли бы вид:

$$\text{при } t = 0, \quad x = 0, \quad \dot{x} = -v_0.$$

В дифференциальном уравнении движения изменились бы знаки:

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = -P \sin \alpha + F_{\tau, c}, \quad \text{т. е. } \ddot{x} = -g (\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Повторив решение этой задачи, мы последовательно получим:

$$\dot{x} = -g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t + C_1,$$

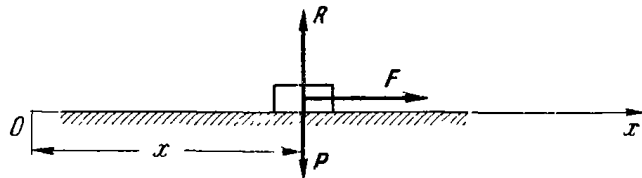
$$C_1 = -v_0, \quad \dot{x} = -[v_0 + g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t];$$

$$x = -\left[v_0 t + g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \frac{t^2}{2} \right] + C_2,$$

$$C_2 = 0, \quad x = -\left[v_0 t + g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \frac{t^2}{2} \right],$$

$$\sigma = -\left[v_0 \tau + g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \frac{\tau^2}{2} \right], \quad \sigma = -7,02 \text{ м.}$$

Знак минус указывает, что кирпич расположен в отрицательной части оси x . Так как ось x направлена вверх, то это значит,



К задаче 228.

что кирпич опустился вдоль ленты конвейера вниз, пройдя путь, равный 7,02 м.

Задача 228. Груз веса P , находившийся в покое на гладкой горизонтальной плоскости, начинает двигаться под действием горизонтальной силы, проекция которой на направленную по горизонтали

направо ось x равна $F_x = H \sin kt$, где H и k — постоянные величины. Найти закон движения груза.

Решение. Возьмем начало отсчета оси x в начальном положении груза. Учитывая, что в начальный момент груз находился в покое, запишем начальные условия движения:

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0.$$

К грузу приложены следующие силы: P — вес груза, F — движущая сила, R — нормальная сила реакции горизонтальной плоскости. Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x имеет вид

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = F_x \quad \text{или} \quad \ddot{x} = \frac{Hg}{P} \sin kt.$$

Так как $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$, то, отделив переменные, имеем:

$$d\dot{x} = \frac{Hg}{P} \sin kt \, dt,$$

откуда

$$\dot{x} = -\frac{Hg}{Pk} \cos kt + C_1. \quad (1)$$

Подставив в (1) начальное условие (при $t = 0 \quad \dot{x} = 0$), находим, что $C_1 = \frac{Hg}{Pk}$. Уравнение (1) после подстановки в него значения C_1 принимает вид

$$\dot{x} = \frac{Hg}{Pk} - \frac{Hg}{Pk} \cos kt. \quad (2)$$

Учитывая, что $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, отделяем в уравнении (2) переменные:

$$dx = \frac{Hg}{Pk} dt - \frac{Hg}{Pk} \cos kt \, dt.$$

Интегрирование приводит к результату:

$$x = \frac{Hg}{Pk} t - \frac{Hg}{Pk^2} \sin kt + C_2. \quad (3)$$

Для определения C_2 подставляем в (3) начальное условие движения (при $t = 0 \quad x = 0$), откуда следует, что $C_2 = 0$. Следовательно, искомое уравнение движения груза имеет вид

$$x = \frac{Hg}{Pk} \left(t - \frac{1}{k} \sin kt \right). \quad (4)$$

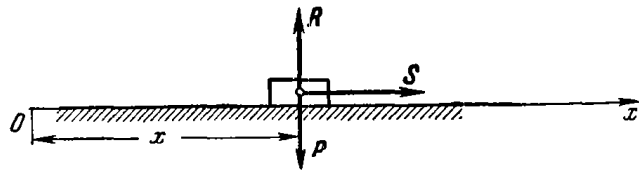
Как видно из уравнения (4), на равномерное движение груза, происходящее по горизонтали направо со скоростью $\frac{Hg}{Pk}$, накладывается колебание с амплитудой $a = \frac{Hg}{Pk^2}$ и периодом $T = \frac{2\pi}{k}$.

Просмотрев внимательно решение этой задачи, можно обнаружить, что равномерное прямолинейное движение груза является следствием соответствующих начальных условий движения (наличие в уравнении (2) постоянного слагаемого $\frac{Hg}{Pk}$). Нетрудно подобрать начальные условия движения, при которых груз совершал бы только колебательное движение. Для этого постоянная интегрирования C_1 должна в уравнении (1) обратиться в нуль. Из уравнения (1) при $t=0$ и $C_1=0$ получим $\dot{x}_0 = -\frac{Hg}{Pk}$.

Следовательно, если бы в условии задачи было указано, что в начальный момент грузу сообщили влево скорость, равную по модулю $\frac{Hg}{Pk}$, то уравнение (2) приняло бы вид: $\dot{x} = -\frac{Hg}{Pk} \cos kt$, а уравнение движения груза — соответственно $x = -\frac{Hg}{Pk^2} \sin kt$. Итак, от величины начальной скорости зависит характер движения груза.

Так как в данной задаче начальное положение груза не было оговорено, то мы выбрали начало отсчета на оси x в начальном положении груза и, таким образом, получили $x_0=0$. При выборе начала отсчета на оси x в другой точке мы получили бы $x_0 \neq 0$. Тогда на основании уравнения (3) $C_2 = x_0$, и в формулу (4) входит дополнительное слагаемое x_0 . Итак, от выбора начала отсчета зависит лишь величина постоянного слагаемого, которое на характер движения груза не влияет.

Задача 229. К твердому телу массы m , могущему двигаться вдоль оси x , приложена сила отталкивания, проекция которой на ось x ,



К задаче 229.

направленную по горизонтали направо, равна $S_x = k^2 mx$, где k^2 — постоянный коэффициент, x — абсцисса, определяющая положение твердого тела. (Сила отталкивания направлена вдоль оси x .) В начальный момент твердое тело находилось в покое на расстоянии a от начала отсчета. Найти закон движения твердого тела, считая его точечной массой.

Решение. Изобразим твердое тело на расстоянии x от начала отсчета O . По условию задачи начальные условия движения имеют вид:

$$\text{при } t=0 \quad x=a, \quad \dot{x}=0. \quad (1)$$

К твердому телу приложены следующие силы: P — вес груза, R — нормальная сила реакции гладкой горизонтальной плоскости, S — сила отталкивания, направленная от точки O направо.

Дифференциальное уравнение движения твердого тела в проекции на ось x имеет вид

$$m\ddot{x} = S_x.$$

Так как $S_x = k^2 mx$, то

$$\ddot{x} - k^2 x = 0. \quad (2)$$

Для решения дифференциального уравнения (2), являющегося линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами без правой части, составим соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - k^2 = 0,$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = \pm k.$$

Учитывая, что корни характеристического уравнения оказались вещественными, запишем решение уравнения (1) в виде

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}. \quad (3)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 надо иметь два уравнения. Дифференцируя x по t , имеем:

$$\dot{x} = C_1 k e^{kt} - C_2 k e^{-kt}. \quad (4)$$

Подставив начальные условия (1) в выражения (3) и (4), а затем решив полученную систему уравнений, находим, что $C_1 = C_2 = \frac{a}{2}$. После подстановки значений C_1 и C_2 в (3) приходим к искомому закону движения твердого тела:

$$x = \frac{a}{2} (e^{kt} + e^{-kt}), \quad (5)$$

который с помощью гиперболического косинуса угла kt можно записать в виде:

$$x = a \operatorname{ch} kt.$$

Предположим теперь, что горизонтальная плоскость является негладкой. Рассмотрим влияние силы трения скольжения на движение твердого тела, если коэффициент трения скольжения равен f .

К силам P , S и R , приложенным к твердому телу, добавляется сила трения скольжения $F_{т.с} = fP$, направленная в сторону, противоположную движению, т. е. по горизонтали влево. При этом $F_{т.с}$ войдет в правую часть дифференциального уравнения движения со знаком минус. Дифференциальное уравнение (2) примет вид

$$\ddot{x} - k^2 x = -fg. \quad (6)$$

Общее решение x этого неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами равно сумме общего решения x_1 соответствующего однородного уравнения и частного решения x_2 уравнения с правой частью, т. е.

$$x = x_1 + x_2. \quad (7)$$

Общее решение x_1 дается выражением (3). Учитывая, что правая часть уравнения (6) является постоянной, ищем частное решение в виде постоянного, т. е. $x_2 = A$. Подставив это значение в уравнение (6), находим, что $x_2 = A = \frac{fg}{k^2}$. Итак, в соответствии с формулой (7), общее решение имеет вид

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} + \frac{fg}{k^2}. \quad (8)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим:

$$\dot{x} = C_1 k e^{kt} - C_2 k e^{-kt}. \quad (9)$$

Подставив в (8) и (9) начальные условия (1) и решив полученную систему уравнений, находим: $C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \left(a - \frac{fg}{k^2} \right)$. Внося значения C_1 и C_2 в уравнение (8), получим искомое уравнение движения твердого тела

$$x = \frac{1}{2} \left(a - \frac{fg}{k^2} \right) (e^{kt} + e^{-kt}) + \frac{fg}{k^2}. \quad (10)$$

Сопоставив формулы (10) и (5) приводит к выводу, что при наличии силы трения скольжения движение твердого тела будет совершаться медленнее. Действительно, коэффициент $\frac{1}{2} \left(a - \frac{fg}{k^2} \right)$, стоящий при $e^{kt} + e^{-kt}$, меньше соответствующего коэффициента $\frac{a}{2}$. Интересно отметить, что при $a - \frac{fg}{k^2} = 0$, т. е. при значении коэффициента трения скольжения

$$f = \frac{ak^2}{g}, \quad (11)$$

уравнение движения (10) принимает вид

$$x = \frac{fg}{k^2}.$$

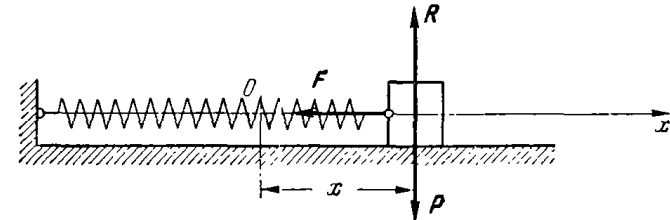
Значит, твердое тело находится в покое. Это легко объяснить. Действительно, при $fg \geq ak^2$ имеем

$$fP \geq k^2 ma. \quad (12)$$

Так как $fP = F_{\text{тр}}$, а $k^2 ma$ равно модулю силы отталкивания F в начальном положении твердого тела при $x = a$, то неравенство (12)

показывает, что модуль силы отталкивания меньше модуля силы трения скольжения. Следовательно, сила отталкивания не может нарушить покой твердого тела. (Предполагаем, что коэффициент трения скольжения при движении равен коэффициенту трения скольжения при покое.)

Задача 230. Груз веса P прикреплен к правому концу пружины, левый конец которой закреплён в стене. В начальный момент пружина не была деформирована, а грузу, лежащему на горизонтальной плоскости, посредством толчка сообщили начальную скорость v_0 .



К задаче 230.

направленную по горизонтали направо. Ось x направлена вдоль оси пружины по горизонтали направо, причем начало отсчета находится в правом конце недеформированной пружины.

Найти наибольшее смещение груза, если проекция упругой силы пружины равна $F_x = -\alpha x - \beta x^3$, где x — удлинение пружины, а α и β — постоянные положительные коэффициенты. Силой трения скольжения груза о горизонтальную плоскость и массой пружины пренебречь.

Решение. Запишем начальные условия движения груза:

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0, \quad \dot{x} = v_0.$$

Изобразим груз во время движения смещенным по оси x направо. При этом пружина растянется на x . Упругая сила пружины F направлена по горизонтали налево. Ее проекция на ось x равна $F_x = -(\alpha x + \beta x^3)$.

К грузу приложены следующие силы: P — вес груза, R — нормальная сила реакции горизонтальной плоскости, F — упругая сила пружины.

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x :

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = -\alpha x - \beta x^3. \quad (1)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка. Интегрирование уравнения (1) для определения уравнения движения груза $x = f(t)$ связано с вычислительными трудностями. Вместе с тем вычис-

ление наибольшего смещения можно легко осуществить, так как для этого достаточно найти зависимость между \dot{x} и x и, приравняв затем в крайнем положении груза \dot{x} нулю, определить искомую величину. Для этого умножим левую и правую части дифференциального уравнения (1) на dx и, учитывая, что $\dot{x} dx = \frac{d\dot{x}}{dt} dx = \dot{x} d\dot{x}$, запишем:

$$\frac{P}{g} \dot{x} d\dot{x} = -(\alpha x + \beta x^3) dx.$$

Проинтегрировав это уравнение, находим:

$$\frac{P}{g} \frac{\dot{x}^2}{2} = -\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{\beta x^4}{4} + C. \quad (2)$$

В начальный момент времени $x=0$ и $\dot{x}=v_0$. Следовательно, $C = \frac{P}{g} \frac{v_0^2}{2}$. Теперь уравнение (2) принимает вид

$$\frac{P}{g} \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{P}{g} \frac{v_0^2}{2} = -\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{\beta x^4}{4}. \quad (3)$$

(К уравнению (3) можно непосредственно прийти с помощью теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки; см. ниже, главу IX, § 6.)

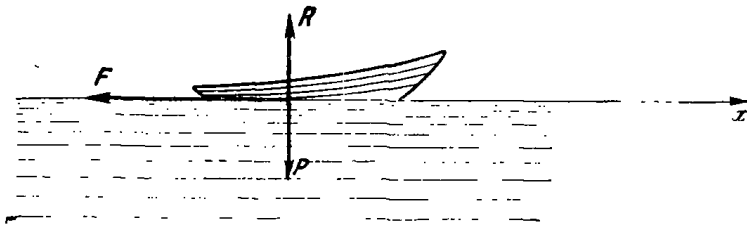
В момент, соответствующий наибольшему смещению a , скорость груза равна нулю. Поэтому подставим в уравнение (3): $x=a$, $\dot{x}=0$. Получим биквадратное уравнение относительно искомого смещения a :

$$a^4 + 2 \frac{\alpha}{\beta} a^2 - 2 \frac{P}{g\beta} v_0^2 = 0.$$

Решив это уравнение, находим:

$$a = \frac{1}{g\beta} \sqrt{g\beta \left(\sqrt{g^2 v_0^2 + 2Pg\beta v_0^2} - gx \right)}.$$

Задача 231. В момент выключения двигателя моторная лодка веса P имела скорость v_0 . Через какой промежуток времени скорость



К задаче 231.

лодки станет в три раза меньше начальной, если проекция на ось x силы сопротивления воды движению лодки равна $F_x = -\alpha \dot{x} - \beta \dot{x}^2$, где \dot{x} — проекция скорости лодки, α и β — постоянные положительные

величины. Ось x направлена по горизонтали направо в сторону движения лодки. Вычислить также путь, пройденный лодкой за этот промежуток времени. Лодку считать точечной массой.

Решение. Возьмем начало отсчета на оси x в начальном положении лодки. Начальные условия движения лодки имеют вид:

$$\text{при } t=0 \quad x=0, \quad \dot{x}=v_0.$$

Изобразим силы, приложенные к лодке: P — вес лодки, R — суммарная нормальная сила реакции воды, F — суммарная сила сопротивления движению, направленная в сторону, противоположную движению лодки, т. е. по горизонтали влево.

Составим дифференциальное уравнение движения лодки в проекции на ось x :

$$m\ddot{x} = F_x;$$

так как по условию $F_x = -\alpha \dot{x} - \beta \dot{x}^2$, то

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = -\alpha \dot{x} - \beta \dot{x}^2. \quad (1)$$

Заменив в уравнении (1) \dot{x} на $\frac{d\dot{x}}{dt}$ и отделив переменные, получим:

$$\frac{P}{g} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}(\alpha + \beta \dot{x})} = -dt. \quad (2)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (2) и учитывая, что

$$\frac{1}{\dot{x}(\alpha + \beta \dot{x})} = \frac{1}{\alpha \dot{x}} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta \dot{x})},$$

будем иметь:

$$\frac{P}{g\alpha} \ln \frac{\dot{x}}{\alpha + \beta \dot{x}} = -t + C. \quad (3)$$

Используя в уравнении (3) начальное условие движения (при $t=0$ $\dot{x}=v_0$), находим, что

$$C = \frac{P}{g\alpha} \ln \frac{v_0}{\alpha + \beta v_0}.$$

Следовательно, уравнение (3) принимает вид

$$t = \frac{P}{g\alpha} \ln \frac{v_0(\alpha + \beta \dot{x})}{(\alpha + \beta v_0)\dot{x}}. \quad (4)$$

Уравнение (4) определяет зависимость между проекцией скорости лодки \dot{x} и временем t . После подстановки в (4) $t=T$, $\dot{x} = \frac{v_0}{3}$

определим искомый промежуток времени T , по истечении которого скорость лодки стала в три раза меньше начальной:

$$T = \frac{P}{g\alpha} \ln \frac{3\alpha + \beta v_0}{\alpha + \beta v_0}.$$

Для определения пути s , пройденного лодкой за промежуток времени T , вернемся к дифференциальному уравнению (1). Умножим его на dx . Учитывая, что $\dot{x} dx = \frac{d\dot{x}}{dt} dx = \dot{x} d\dot{x}$, после отделения переменных получим:

$$\frac{P}{g} \frac{d\dot{x}}{\alpha + \beta \dot{x}} = -dx.$$

Проинтегрировав это уравнение, будем иметь:

$$\frac{P}{g\beta} \ln(\alpha + \beta \dot{x}) = -x + C. \quad (5)$$

Так как в начальный момент $x = 0$ и $\dot{x} = v_0$, то $C = \frac{P}{g\beta} \ln(\alpha + \beta v_0)$. После подстановки значения C в уравнение (5) получим:

$$x = \frac{P}{g\beta} \ln \frac{\alpha + \beta v_0}{\alpha + \beta \dot{x}}. \quad (6)$$

Для определения искомого пути s , пройденного лодкой от начального момента времени до момента, соответствующего уменьшению начальной скорости v_0 в три раза, надо в уравнение (6) подставить: $x = s$, $\dot{x} = \frac{v_0}{3}$. Тогда

$$s = \frac{P}{g\beta} \ln \frac{3(\alpha + \beta v_0)}{\alpha + \beta v_0}.$$

Интересно отметить, что при заданной силе сопротивления движению лодка никогда не остановится. Действительно, подставив в уравнение (4) $\dot{x} = 0$ и $t = \tau$, получим $\tau = \infty$.

Предел соответствующего пути, пройденного лодкой, можно определить из уравнения (6). Учитывая, что пройденный путь $s = \lim_{t \rightarrow \infty} x$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x} = 0$, находим:

$$s = \frac{P}{g\beta} \ln \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} v_0 \right).$$

Задача 232. Измерение глубины реки производится с помощью груза, опускаемого на тросе в воду до дна реки. При опускании груза со скоростью v_0 трос оборвался, и груз достиг дна через T секунд после момента обрыва троса.

Определить путь H , пройденный грузом до дна реки, если проекция на ось x силы сопротивления воды движению груза равна

$R_x = -km\dot{x}$, где m — масса груза, \dot{x} — проекция его скорости на ось x , k — постоянный коэффициент. Ось x направлена по вертикали вниз. Силой выталкивания груза из воды пренебречь.

Решение. Возьмем начало отсчета O в положении груза, соответствующем моменту обрыва троса. К грузу приложены следующие силы: P — вес груза, R — сила сопротивления воды движению груза, направленная в сторону, противоположную движению, т. е. по вертикали вверх.

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x :

$$m\ddot{x} = P + R_x. \quad (1)$$

Так как $R_x = -km\dot{x}$, то

$$\ddot{x} = g - k\dot{x}. \quad (2)$$

Таково дифференциальное уравнение движения груза, которое следует дважды проинтегрировать для определения пути, пройденного грузом.

Заменив в уравнении (2) \ddot{x} на $\frac{d\dot{x}}{dt}$ и отделив переменные, имеем: $\frac{d\dot{x}}{g - k\dot{x}} = dt$. После интегрирования находим:

$$-\frac{1}{k} \ln(g - k\dot{x}) = t + C_1. \quad (3)$$

К задаче 232.

Для определения постоянной интегрирования C_1 , подставив в уравнение (3) $t = 0$ и $\dot{x} = v_0$, получим, что $C_1 = -\frac{1}{k} \ln(g - kv_0)$. Внося это значение C_1 в уравнение (3), находим:

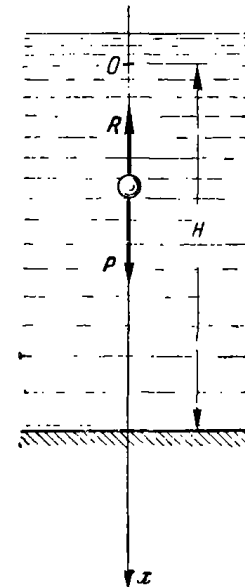
$$\frac{1}{k} \ln \frac{g - kv_0}{g - k\dot{x}} = t,$$

откуда

$$\dot{x} = \frac{g}{k} - \frac{g - kv_0}{k} e^{-kt}. \quad (4)$$

Уравнение (3), устанавливающее зависимость проекции скорости груза от времени, является первым интегралом дифференциального уравнения движения груза. Заменив в уравнении (4) \dot{x} на $\frac{dx}{dt}$ и отделив переменные, получим:

$$dx = \frac{g}{k} dt - \frac{g - kv_0}{k} e^{-kt} dt.$$



После интегрирования находим:

$$x = \frac{g}{k}t + \frac{g - kv_0}{k^2} e^{-kt} + C_2. \quad (5)$$

Подставив в уравнение (5) $t=0$ и $x=0$, получим, что $C_2 = -\frac{g - kv_0}{k^2}$. Подставив это значение C_2 в уравнение (5), находим закон движения груза:

$$x = \frac{g}{k}t - \frac{g - kv_0}{k^2} (e^{-kt} - 1). \quad (6)$$

Для определения пути H , пройденного грузом до дна реки за промежуток времени T , надо в уравнение (6) подставить $t=T$, $x=H$. В результате получим, что

$$H = \frac{g}{k}T - \frac{g - kv_0}{k^2} (1 - e^{-kT}).$$

Задача 233. Парашютист в момент раскрытия парашюта имел скорость v_0 , направленную вертикально вниз. Найти уравнение движения парашютиста, если проекция на ось x силы сопротивления движению равна $R_x = -k^2 m \dot{x}^2$, где m — масса парашютиста, \dot{x} — проекция на ось x его скорости, k^2 — постоянный коэффициент. Ось x направлена по вертикали вниз.

Движение парашютиста рассматривать как движение материальной точки.

Решение. Возьмем начало отсчета на оси x в месте раскрытия парашюта. Запишем начальные условия движения:

$$\text{при } t=0 \quad x=0, \quad \dot{x}=v_0.$$

Изобразим материальную точку во время движения на расстоянии x от начального положения. Вес парашютиста обозначим P . К парашютисту приложены следующие силы: P — вес его, R — суммарная сила сопротивления движению, направленная в сторону, противоположную движению, т. е. по вертикали вверх.

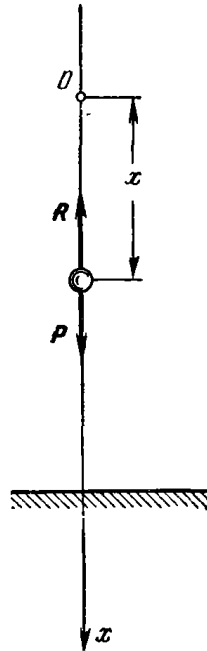
Составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x :

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = P + R_x.$$

Так как $R_x = -k^2 m \dot{x}^2$, то

$$\ddot{x} = g - k^2 \dot{x}^2. \quad (1)$$

Таково дифференциальное уравнение движения.



К задаче 233.

Записав $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$ и отделив в уравнении (1) переменные, находим:

$$\frac{d\dot{x}}{g - k^2 \dot{x}^2} = dt. \quad (2)$$

Интегрируя уравнение (2) и учитывая, что

$$\frac{1}{g - k^2 \dot{x}^2} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \left(\frac{1}{\sqrt{g} + k\dot{x}} + \frac{1}{\sqrt{g} - k\dot{x}} \right),$$

получим:

$$\ln \frac{\sqrt{g} + k\dot{x}}{\sqrt{g} - k\dot{x}} = 2k\sqrt{g}t + C_1. \quad (3)$$

Подставив в уравнение (3) начальное условие (при $t=0$ $x=v_0$), получим, что $C_1 = \ln \frac{\sqrt{g} + kv_0}{\sqrt{g} - kv_0}$. Теперь уравнение (3) принимает вид

$$\ln \frac{(\sqrt{g} - kv_0)(\sqrt{g} + k\dot{x})}{(\sqrt{g} + kv_0)(\sqrt{g} - k\dot{x})} = 2k\sqrt{g}t.$$

Решив это уравнение относительно \dot{x} , получим:

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{g}(\sqrt{g} + kv_0)e^{2k\sqrt{g}t} - (\sqrt{g} - kv_0)}{(\sqrt{g} + kv_0)e^{2k\sqrt{g}t} + (\sqrt{g} - kv_0)},$$

или

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{g}(\sqrt{g}(e^{2k\sqrt{g}t} - 1) + kv_0(e^{2k\sqrt{g}t} + 1))}{\sqrt{g}(e^{2k\sqrt{g}t} + 1) + kv_0(e^{2k\sqrt{g}t} - 1)}. \quad (4)$$

Для интегрирования уравнения (4) следует заменить \dot{x} на $\frac{dx}{dt}$ и отделить переменные.

Ввиду того, что правая часть уравнения (4) имеет громоздкий вид, затрудняющий интегрирование, запишем уравнение (4) в гиперболических функциях, воспользовавшись формулами:

$$e^{2z} + 1 = 2e^z \operatorname{ch} z, \quad e^{2z} - 1 = 2e^z \operatorname{sh} z.$$

Теперь уравнение (4) принимает вид

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{g}(\sqrt{g} \operatorname{sh}(k\sqrt{g}t) + kv_0 \operatorname{ch}(k\sqrt{g}t))}{\sqrt{g} \operatorname{ch}(k\sqrt{g}t) + kv_0 \operatorname{sh}(k\sqrt{g}t)}, \quad (5)$$

откуда

$$dx = \frac{\sqrt{g}(\sqrt{g} \operatorname{sh}(k\sqrt{g}t) + kv_0 \operatorname{ch}(k\sqrt{g}t))}{\sqrt{g} \operatorname{ch}(k\sqrt{g}t) + kv_0 \operatorname{sh}(k\sqrt{g}t)} dt. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что числитель дроби, стоящий в правой части уравнения (6), является производной от знаменателя дроби, деленной

на $k\sqrt{g}$. Поэтому получим:

$$x = \frac{1}{k^2} \ln [V\bar{g} \operatorname{ch}(k\sqrt{g}t) + kv_0 \operatorname{sh}(k\sqrt{g}t)] + C_2. \quad (7)$$

Подставим в уравнение (7) начальное условие (при $t=0$ $x=0$), видим, что $C_2 = -\frac{1}{k^2} \ln V\bar{g}$. После подстановки этого значения C_2 в уравнение (7) получим искомое уравнение движения парашютиста:

$$x = \frac{1}{k^2} \ln \left[\operatorname{ch}(k\sqrt{g}t) + \frac{kv_0}{V\bar{g}} \operatorname{sh}(k\sqrt{g}t) \right]. \quad (8)$$

Определим величину, к которой стремится скорость парашютиста, совершающего длительный спуск с большой высоты, т. е. вычислим предел \dot{x} при $t \rightarrow \infty$. Для этого воспользуемся формулой (5). Разделив почленно числитель и знаменатель правой части на $\operatorname{ch}(k\sqrt{g}t)$, находим:

$$\dot{x} = \frac{V\bar{g}}{k} \frac{V\bar{g} \cdot \operatorname{th}(k\sqrt{g}t) + kv_0}{V\bar{g} + kv_0 \cdot \operatorname{th}(k\sqrt{g}t)}.$$

Учитывая, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{th}(k\sqrt{g}t) = 1$, получим, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x} = \frac{V\bar{g}}{k},$$

т. е. при длительном спуске движение парашютиста приближается к равномерному со скоростью, не зависящей от начальных условий движения.

Задача 234. Вертикальный спуск парашютиста происходит без начальной скорости с высоты H при наличии силы сопротивления, указанной в условии предыдущей задачи. Определить скорость парашютиста в момент приземления.

Решение. Для определения скорости парашютиста в момент приземления целесообразно повторить решение предыдущей задачи, так как при интегрировании по времени мы находим проекцию скорости \dot{x} и координату x в виде функций времени. Пришлось бы из уравнения движения определить момент времени T , соответствующий спуску на высоту H , затем полученное значение T подставить в \dot{x} для определения искомой скорости.

В данной задаче удобнее получить \dot{x} в зависимости от x , т. е. выразить проекцию скорости парашютиста в зависимости от его положения x и затем, подставив $x = H$, определить искомую скорость v .

Для определения зависимости $\dot{x} = f(x)$ следует применить прием, заключающийся в умножении левой и правой частей дифференциального уравнения движения на dx . Это быстро приводит к результату, причем интегрировать дифференциальное уравнение движения

приходится только один раз (в предыдущей задаче для определения закона движения $x = f(t)$ мы осуществляли интегрирование дважды).

Для применения указанного выше приема запишем дифференциальное уравнение (1), полученное при решении предыдущей задачи, в виде

$$\ddot{x} dx = (g - k^2 \dot{x}^2) dx. \quad (1)$$

Учитывая, что $\ddot{x} dx = \frac{d\dot{x}}{dt} dx = \dot{x} d\dot{x}$, и отделив переменные в уравнении (1), получим:

$$\frac{\dot{x} d\dot{x}}{g - k^2 \dot{x}^2} = dx.$$

Проинтегрировав это уравнение, находим:

$$-\frac{1}{2k^2} \ln(g - k^2 \dot{x}^2) = x + C. \quad (2)$$

В начальном положении парашютиста, т. е. при $x=0$, скорость его, по условию задачи, равнялась нулю, т. е. $\dot{x}=0$. Подставив эти значения в уравнение (2), находим, что

$$C = -\frac{1}{2k^2} \ln g.$$

После подстановки полученного значения C уравнение (2) принимает вид

$$\frac{1}{2k^2} \ln \frac{g}{g - k^2 \dot{x}^2} = x,$$

откуда

$$\dot{x} = \frac{1}{k} \sqrt{g(1 - e^{-2k^2 x})}. \quad (3)$$

Уравнение (3) определяет проекцию скорости парашютиста в зависимости от его положения.

Для нахождения скорости парашютиста в момент приземления надо в уравнение (3) подставить: $x = H$, $\dot{x} = v$. Тогда

$$v = \frac{1}{k} \sqrt{g(1 - e^{-2k^2 H})}.$$

Как было указано, тот же результат, но более громоздким способом можно получить с помощью формул, выведенных при решении предыдущей задачи. Действительно, запишем формулы (5) и (8), полученные в предыдущей задаче, положив в них $v_0 = 0$. Тогда

$$\dot{x} = \frac{V\bar{g}}{k} \cdot \operatorname{th}(k\sqrt{g}t). \quad (4)$$

$$x = \frac{1}{k^2} \ln \operatorname{ch}(k\sqrt{g}t). \quad (5)$$

Обозначив через T продолжительность спуска парашютиста с высоты H , из формулы (5) имеем:

$$\operatorname{ch}(k\sqrt{g}T) = e^{k^2 H}.$$

Так как $\operatorname{th}(k\sqrt{g}T) = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2(k\sqrt{g}T) - 1}}{\operatorname{ch}(k\sqrt{g}T)}$, то

$$\operatorname{th}(k\sqrt{g}T) = \sqrt{1 - e^{-2k^2 H}}. \quad (6)$$

Искомую скорость определим из формулы (4), положив в ней $t = T$, $\dot{x} = v$. Воспользовавшись формулой (6), находим:

$$v = \frac{1}{k} \sqrt{g(1 - e^{-2k^2 H})}.$$

Задача 235. Камень брошен вертикально вверх со скоростью v_0 . Определить, на какой высоте H от поверхности Земли скорость камня уменьшится в два раза, если проекция на ось x силы сопротивления движению R равна: $R_x = -k^2 m \dot{x}^2$, где m — масса камня, \dot{x} — проекция на ось x его скорости, k^2 — постоянный коэффициент. Ось x направлена по вертикали вверх.

Решение. Возьмем начало отсчета на оси x на поверхности Земли в начальном положении камня. Начальные условия движения имеют вид:

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0, \quad \dot{x} = v_0. \quad (1)$$

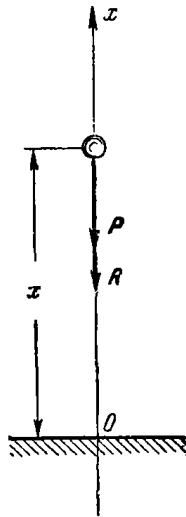
Вес камня обозначим через P . К камню приложены следующие силы: P — его вес, R — сила сопротивления движению, направленная в сторону, противоположную движению, т. е. по вертикали вниз.

Составим дифференциальное уравнение движения камня в проекции на ось x :

$$m\ddot{x} = -P + R_x;$$

так как $R_x = -k^2 m \dot{x}^2$, то

$$\ddot{x} = -(g + k^2 \dot{x}^2). \quad (2) \quad \text{К задаче 235.}$$



По условию задачи требуется определить положение камня в зависимости от его скорости. Поэтому применим прием, использованный в предыдущей задаче, т. е. левую и правую части дифференциального уравнения (2); умножим на dx :

$$\ddot{x} dx = -(g + k^2 \dot{x}^2) dx. \quad (3)$$

Учитывая, что $\ddot{x} dx = \dot{x} d\dot{x}$, и отделив переменные, перепишем уравнение (3) так:

$$\frac{\dot{x} d\dot{x}}{g + k^2 \dot{x}^2} = -dx.$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем:

$$\frac{1}{2k^2} \ln(g + k^2 \dot{x}^2) = -x + C. \quad (4)$$

Воспользовавшись начальными условиями движения (1), получаем:

$$C = \frac{1}{2k^2} \ln(g + k^2 v_0^2).$$

Подставив это значение в уравнение (4), находим:

$$x = \frac{1}{2k^2} \ln \frac{g + k^2 v_0^2}{g + k^2 \dot{x}^2}. \quad (5)$$

Уравнение (5) выражает зависимость между положением камня и его скоростью. Для определения высоты H подъема камня, соответствующей уменьшению его начальной скорости v_0 в два раза, надо в уравнение (5) подставить $x = H$, $\dot{x} = \frac{v_0}{2}$. Тогда

$$H = \frac{1}{2k^2} \ln 4 \frac{g + k^2 v_0^2}{4g + k^2 v_0^2}.$$

Задача 236. Определить условия, выполнение которых обеспечивает движение материальной точки в плоскости.

Решение. Расположим оси x и y на плоскости, в которой находится траектория материальной точки. Тогда $z = 0$, откуда

$$\dot{z} = 0 \quad (1)$$

и

$$\ddot{z} = 0. \quad (2)$$

Запишем систему дифференциальных уравнений движения материальной точки в проекциях на оси декартовых координат:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^n F_{kz}.$$

Воспользовавшись условием (2) находим:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad 0 = \sum_{k=1}^n F_{kz}.$$

Из последнего уравнения следует, что проекция на ось z равнодействующей сил, приложенных к материальной точке, равна нулю:

$R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0$, т. е. равнодействующая расположена в плоскости, в которой происходит движение точки.

Из условия (1) $\dot{z} = 0$ следует, что проекция скорости точки на ось z равна нулю, т. е. скорость точки расположена в плоскости, в которой происходит движение точки. Следовательно, начальная скорость точки лежит в той же плоскости, т. е.

$$\dot{z}_0 = 0.$$

Выясним достаточность этих условий. Пусть в начальный момент точка находится в плоскости xy , т. е. $z_0 = 0$, начальная скорость точки лежит в той же плоскости, т. е. $\dot{z}_0 = 0$, и равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, лежит в той же плоскости, т. е. $R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0$.

Достаточно ли выполнения этих условий для движения материальной точки в плоскости xy ?

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в данном случае принимают вид:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad m\ddot{z} = 0.$$

Из последнего дифференциального уравнения находим $\dot{z} = C_1$. Так как $\dot{z}_0 = 0$, то $C_1 = 0$ и, следовательно, $\dot{z} = 0$. Тогда $z = C_2$. Но так как $z_0 = 0$, то $C_2 = 0$ и, следовательно, $z = 0$. Из полученного результата $z = 0$ следует, что движение материальной точки происходит в плоскости xy .

Итак, для осуществления движения материальной точки в плоскости необходимо и достаточно, чтобы начальная скорость точки и равнодействующая сил, приложенных к этой точке, лежали в одной плоскости.

Задача 237. Человек бросает камень из точки, расположенной на высоте h над поверхностью Земли, сообщив ему горизонтальную начальную скорость v_0 . Определить уравнение траектории камня, дальность полета и скорость в момент падения на Землю. Силой сопротивления движению и кривизной Земли пренебречь.

Решение. Выбранная система осей декартовых координат изображена на рисунке. M_0 — начальное положение камня.

Изобразим камень во время движения в промежуточном положении M . Вес камня обозначим P . К камню приложена лишь одна сила — его вес P , направленный по вертикали вниз.

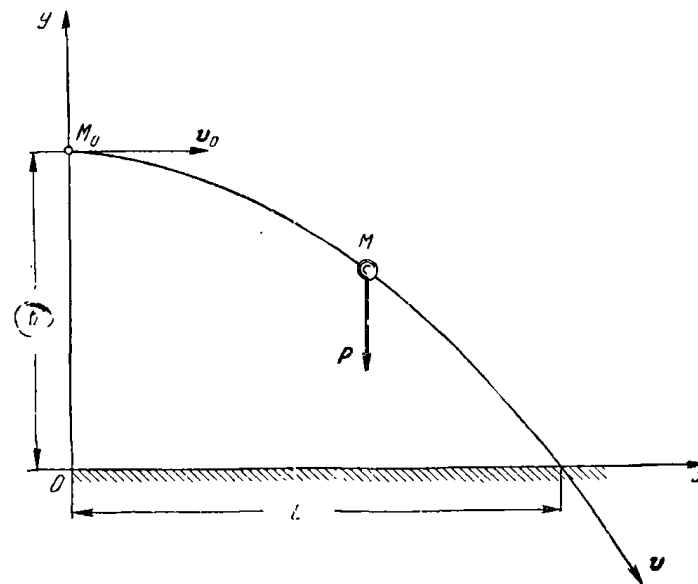
Так как начальная скорость v_0 и сила P лежат в вертикальной плоскости xy , то движение камня происходит в этой плоскости.

Поэтому достаточно составить два дифференциальных уравнения движения в проекциях на оси x и y .

Запишем начальные условия движения камня:

$$\text{при } t=0 \quad x=0, \quad y=h, \quad \dot{x}=v_0, \quad \dot{y}=0.$$

(Довольно часто, решая подобные задачи, ошибочно прикладывают к материальной точке некую движущую силу, направленную по касательной к траектории в данной точке в сторону движения. Движение камня по траектории, отличной от вертикальной прямой, происходит в результате сообщения камню в начальный момент скорости v_0 .



К задаче 237.

Начальная скорость v_0 является результатом толчка, имевшего место в течение весьма малого промежутка времени, равного тысячным долям секунды. За начало отсчета времени принимают момент конца толчка, когда камень приобретает скорость v_0 . Это указание следует учитывать при решении задач о полете пули, снаряда и т. д. Так, сила давления пороховых газов на пулю или снаряд проявляется в сообщении им начальной скорости.)

Составим дифференциальные уравнения движения камня в проекциях на оси x и y :

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = -P,$$

$$\text{или } \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g.$$

При интегрировании дифференциального уравнения $\ddot{x} = 0$ получим: $\dot{x} = C_1$. Так как при $t = 0$ $\dot{x} = v_0$, то $C_1 = v_0$. Следовательно, в любой момент времени

$$\dot{x} = v_0. \quad (1)$$

Записав $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ и проинтегрировав уравнение (1), получим:

$$x = v_0 t + C_2. \quad (2)$$

Так как в момент $t = 0$ $x = 0$, то из уравнения (2) следует, что $C_2 = 0$. Таким образом, уравнение (2) можно окончательно записать в виде

$$x = v_0 t. \quad (3)$$

Для интегрирования дифференциального уравнения $\ddot{y} = -g$ заменим \ddot{y} на $\frac{d\dot{y}}{dt}$. Отделив переменные, находим:

$$d\dot{y} = -g dt.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$\dot{y} = -gt + C_3. \quad (4)$$

Так как при $t = 0$ $\dot{y} = 0$, то из уравнения (4) следует, что $C_3 = 0$, и уравнение (4) принимает вид

$$\dot{y} = -gt. \quad (5)$$

Осуществим последующее интегрирование, предварительно заменив \dot{y} на $\frac{dy}{dt}$ и отделив переменные. Тогда

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_4. \quad (6)$$

Так как при $t = 0$ $y = h$, то $C_4 = h$, и уравнение (6) принимает вид

$$y = h - \frac{gt^2}{2}. \quad (7)$$

Уравнения

$$x = v_0 t, \quad (3)$$

$$y = h - \frac{gt^2}{2}. \quad (7)$$

определяют закон движения камня. Для нахождения уравнения траектории камня исключаем из этой системы время. Траекторией является парабола

$$y = h - \frac{g}{2v_0^2} x^2. \quad (8)$$

Дальность полета камня определяется его абсциссой в момент падения на Землю. Подставив в уравнение (8) $y = 0$, определим дальность полета:

$$L = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Для нахождения скорости камня в момент падения воспользуемся формулами (1) и (5) проекций его скорости на оси декартовых координат:

$$\dot{x} = v_0, \quad (1)$$

$$\dot{y} = -gt. \quad (5)$$

Момент времени T , соответствующий падению камня на Землю, вычисляем из уравнения (7), учитывая, что при $t = T$ $y = 0$. Получим:

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Следовательно, проекции скорости камня в момент падения даются формулами:

$$\dot{x}_T = v_0, \quad \dot{y}_T = -\sqrt{2gh}.$$

Тогда модуль скорости камня в момент падения

$$v_T = \sqrt{\dot{x}_T^2 + \dot{y}_T^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Направляющие косинусы скорости имеют вид:

$$\cos(\widehat{x, v_T}) = \frac{\dot{x}_T}{v_T} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}, \quad \cos(\widehat{y, v_T}) = \frac{\dot{y}_T}{v_T} = -\sqrt{\frac{2gh}{v_0^2 + 2gh}}.$$

Считая начальную скорость v_0 равной нулю, получим из формул (3) и (7) уравнения свободного падения материальной точки в безвоздушном пространстве:

$$x = 0, \quad y = h - \frac{gt^2}{2}.$$

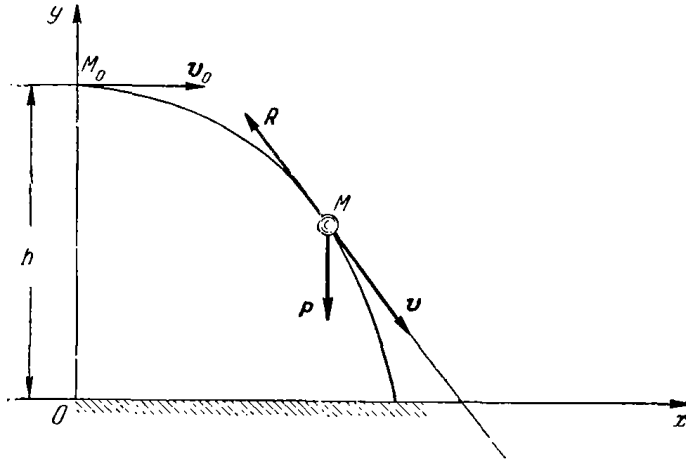
Так как $x = 0$, то траекторией точки является вертикальная прямая, совмещенная с осью y .

Задача 238. Решить предыдущую задачу с учетом силы сопротивления движению, пропорциональной скорости камня: $R = -kmv$, где m — масса камня, v — его скорость, k — постоянный коэффициент. Определить уравнение траектории камня.

Решение. Начальные условия движения камня остаются прежними:

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0, \quad y = h, \quad \dot{x} = v_0, \quad \dot{y} = 0.$$

К камню M приложены две силы: P — вес камня, R — сила сопротивления движению, направленная по касательной к траектории в данной точке в сторону, противоположную движению.



К задаче 238.

Составим векторное дифференциальное уравнение движения камня:

$$m\boldsymbol{\omega} = \mathbf{P} + \mathbf{R},$$

по так как $\boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{r}}$ и $\mathbf{R} = -mk\mathbf{v} = -mk\dot{\mathbf{r}}$, то получим

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} - k\dot{\mathbf{r}}.$$

Проектируя на оси x и y , имеем:

$$\ddot{x} = -k\dot{x}, \quad \ddot{y} = -g - k\dot{y}. \quad (1)$$

Так как $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, то

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -k dt,$$

откуда

$$\ln \dot{x} = -kt - C_1.$$

Постоянная C_1 находится путем использования начального условия движения ($t=0$, $\dot{x} = v_0$), что дает $C_1 = \ln v_0$. Следовательно,

$$\ln \frac{\dot{x}}{v_0} = -kt,$$

т. е.

$$\dot{x} = v_0 e^{-kt}. \quad (2)$$

Проинтегрировав уравнение (2), приходим:

$$x = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + C_2,$$

причем так как при $t=0$ $x=0$, то $C_2 = \frac{v_0}{k}$. Итак,

$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}). \quad (3)$$

Для решения второго дифференциального уравнения (1) заменим \ddot{y} на $\frac{d\dot{y}}{dt}$ и отделим переменные:

$$-\frac{d\dot{y}}{k\dot{y} + g} = dt.$$

Тогда

$$-\frac{1}{k} \ln(k\dot{y} + g) = t + C_3.$$

Используя начальные условия движения (при $t=0$ $\dot{y}=0$), найдем, что $C_3 = -\frac{1}{k} \ln g$. Следовательно,

$$\frac{1}{k} \ln \frac{g + k\dot{y}}{g} = -t,$$

откуда

$$\dot{y} = \frac{g}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k}. \quad (4)$$

Заменив в уравнении (4) \dot{y} на $\frac{dy}{dt}$ и интегрируя это уравнение, получим:

$$y = -\frac{g}{k} t - \frac{g}{k^2} e^{-kt} + C_4.$$

Так как при $t=0$ $y=h$, то $C_4 = h + \frac{g}{k^2}$ и, следовательно,

$$y = h - \frac{g}{k} t + \frac{g}{k^2} (1 - e^{-kt}). \quad (5)$$

Итак, камень совершает движение согласно уравнениям:

$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}), \quad (3)$$

$$y = h - \frac{g}{k} t + \frac{g}{k^2} (1 - e^{-kt}). \quad (5)$$

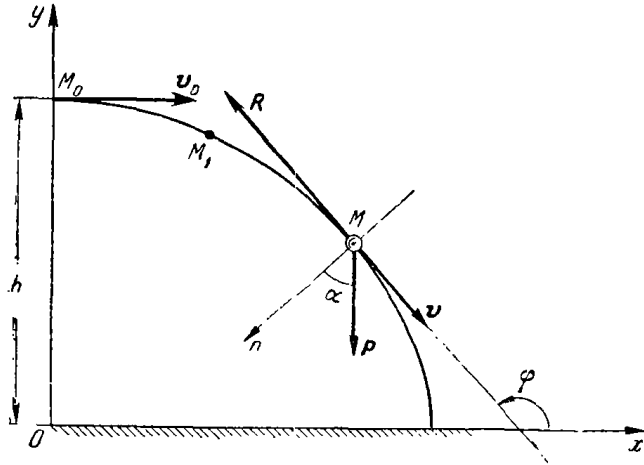
Исключив время из системы (3) и (5), определяем уравнение траектории камня:

$$y = h - \frac{g}{k^2} \ln \frac{v_0}{v_0 - kx} + \frac{gx}{kv_0}.$$

При движении с малой скоростью сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости точки. Движению материальной

точки со значительной скоростью соответствует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости (см. задачу 239).

Задача 239. Сохраняя условие задачи 237 с учетом силы сопротивления движению, пропорциональной квадрату скорости камня: $R = kmv^2$, где m — масса камня, v — его скорость, k — постоянный коэффициент, определить уравнение участка M_0M_1 траектории камня, непосредственно примыкающего к его начальному положению M_0 .



К задаче 239.

Решение. Начальные условия движения камня остаются прежними:

$$\text{при } t=0 \quad x=0, \quad y=h, \quad \dot{x}=v_0, \quad \dot{y}=0.$$

Направления сил P и R не изменились по сравнению с предыдущей задачей. Поэтому

$$R = -kmv^2 = -kmv\dot{r}.$$

Запишем векторное дифференциальное уравнение движения камня:

$$m\dot{w} = P + R$$

или

$$\dot{r} = g - kv\dot{r}.$$

Проектируя на оси x и y , получим:

$$\ddot{x} = -kv\dot{x}, \quad (1)$$

$$\ddot{y} = -g - kv\dot{y}. \quad (2)$$

Для интегрирования дифференциального уравнения (1) заменим \dot{x} на $\frac{d\dot{x}}{dt}$, а v на $\frac{d\sigma}{dt}$, где σ — дуговая координата, измеряемая по траектории от точки M_0 . После отделения переменных получим:

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -k d\sigma,$$

откуда

$$\ln \dot{x} = -k\sigma + C. \quad (3)$$

В начальном положении камня, т. е. при $\sigma=0$, проекция скорости $\dot{x}=v_0$. Следовательно, $C = \ln v_0$. Подставив это значение C в уравнение (3), находим:

$$\ln \frac{\dot{x}}{v_0} = -k\sigma,$$

т. е.

$$\dot{x} = v_0 e^{-k\sigma}. \quad (4)$$

Для упрощения решения задачи вместо дифференциального уравнения (2) воспользуемся дифференциальным уравнением движения камня в проекции на главную нормаль n :

$$m \frac{v^2}{\rho} = P \cos \alpha$$

(сила сопротивления R даст проекцию на главную нормаль, равную нулю). Так как $\alpha = 2\pi - \varphi$, где φ — угол между осью x и касательной, то $\cos \alpha = \cos \varphi$, т. е.

$$\frac{v''}{\rho} = g \cos \varphi. \quad (5)$$

Как известно из курса дифференциальной геометрии, кривизна кривой в данной точке

$$k = \frac{1}{\rho} = -\frac{d\varphi}{d\sigma}. \quad (6)$$

Знак минус взят потому, что с возрастанием σ угол φ убывает. Так как $\operatorname{tg} \varphi = y'_x$, то $\varphi = \operatorname{arctg} y'_x$.

Следовательно,

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma} (\operatorname{arctg} y'_x) = \frac{1}{1 + y_x'^2} \cdot y_x'' \cdot \frac{d\sigma}{d\sigma}.$$

Учитывая, что $d\sigma = \sqrt{1 + y_x'^2} dx$, находим: $\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{y_x''}{(1 + y_x'^2)^{3/2}}$. (Это — выражение кривизны кривой, известное из курса дифференциальной геометрии.)

Подставив полученное значение $\frac{d\varphi}{d\sigma}$ в формулу (6), имеем:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{y''_x}{(1 + y'^2_x)^{3/2}} = -\frac{y''_x}{(1 + (g^2\sigma^2)^{3/2}},$$

т. е.

$$\frac{1}{\rho} = -y''_x \cos^3 \varphi. \quad (7)$$

Воспользовавшись формулой (7), перепишем уравнение (5) в виде:

$$\frac{d^2y}{dx^2} v^2 \cos^3 \varphi = -g.$$

Учитывая, что $v \cos \varphi = \dot{x}$, а также формулу (4), получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{\sigma_0^2} e^{2kx}. \quad (8)$$

По условию задачи требуется определить уравнение настильного участка траектории M_0M_1 , непосредственно прилегающего к начальному положению точки M_0 . Так как этот участок траектории близок к горизонтальному, то, считая σ величиной первого порядка малости, мы можем с точностью до слагаемых первого порядка малости включительно заменить в уравнении (8) σ на x (разность $x - \sigma$ является величиной второго порядка малости). Теперь дифференциальное уравнение (8) принимает вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{\sigma_0^2} e^{2kx}. \quad (9)$$

Проинтегрировав это приближенное дифференциальное уравнение, находим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{2k\sigma_0^2} e^{2kx} + C_1. \quad (10)$$

При $x=0$ $\frac{dy}{dx} = 0$ (касательная к траектории в точке M_0 расположена горизонтально). Подставив эти начальные условия в уравнение (10), находим, что $C_1 = \frac{g}{2k\sigma_0^2}$. Следовательно, уравнение (10) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g}{2k\sigma_0^2} - \frac{g}{2k\sigma_0^2} e^{2kx}. \quad (11)$$

Проинтегрировав дифференциальное уравнение (11), получаем:

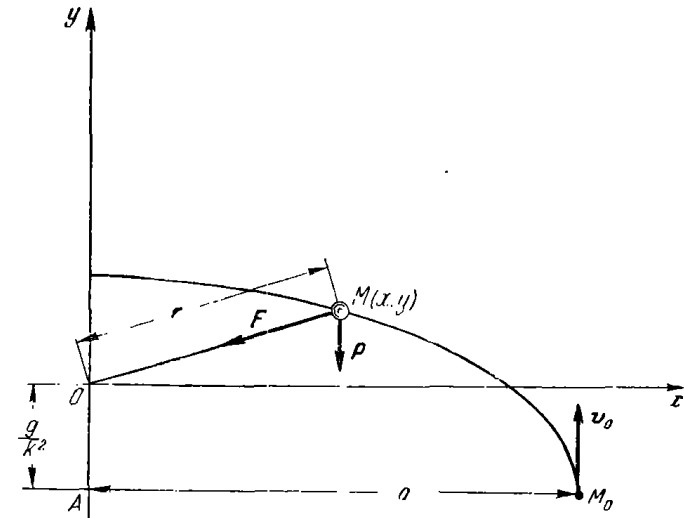
$$y = \frac{g}{2k\sigma_0^2} x - \frac{g}{4k^2\sigma_0^2} e^{2kx} + C_2. \quad (12)$$

Так как при $x=0$ $y=h$, то $C_2 = h + \frac{g}{4k^2\sigma_0^2}$, и уравнение (12) принимает вид

$$y = h + \frac{g}{2k\sigma_0^2} x + \frac{g}{4k^2\sigma_0^2} (1 - e^{2kx}).$$

Это — искомое приближенное уравнение участка траектории M_0M_1 .

Задача 240. Материальная точка M движется в вертикальной плоскости под действием центральной силы притяжения, пропорцио-



К задаче 240.

нальной ее расстоянию до неподвижного центра: $F = -k^2 m r$, где r — вектор-радиус точки, m — ее масса, k^2 — постоянный коэффициент.

Найти уравнение траектории точки, если в начальный момент она занимала положение $M_0(a, -\frac{g}{k^2})$ и имела скорость v_0 , направленную по вертикали вверх (см. рисунок).

Решение. Начало осей декартовых координат взято в неподвижном центре O , к которому притягивается точка M . Ось x проходит по горизонтали направо, ось y — по вертикали вверх. Запишем начальные условия движения точки в виде:

$$\text{при } t=0 \quad x=a, \quad y=-\frac{g}{k^2}, \quad \dot{x}=0, \quad \dot{y}=v_0.$$

К материальной точке M приложены следующие силы: P — ее вес, F — сила притяжения, направленная к неподвижному центру O .

Составим векторное дифференциальное уравнение движения материальной точки

$$m\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{P} + \mathbf{F}$$

или

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} - k^2 \mathbf{r}.$$

Проектируя на оси x и y , получим:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (1)$$

$$\ddot{y} + k^2 y = -g. \quad (2)$$

Уравнение (1) является однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его интегрирования составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + k^2 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = \pm ki$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (1) запишется в виде

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (3)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Для определения C_1 и C_2 вычислим

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt \quad (4)$$

и затем подставим в уравнение (3) $t=0$, $x=a$, а в уравнение (4) $t=0$, $\dot{x}=0$. Находим: $C_1=a$, $C_2=0$. Внося эти значения C_1 и C_2 в уравнение (3), имеем:

$$x = a \cos kt. \quad (5)$$

Дифференциальное уравнение (2), в отличие от дифференциального уравнения (1), является неоднородным. Следовательно, его общее решение имеет вид

$$y = y_1 + y_2, \quad (6)$$

где y_2 — частное решение неоднородного уравнения, а y_1 — общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$\ddot{y} + k^2 y = 0. \quad (7)$$

Заметив, что дифференциальное уравнение (7) аналогично дифференциальному уравнению (1), запишем:

$$y_1 = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt. \quad (8)$$

Правая часть дифференциального уравнения (2) постоянна. Поэтому ищем частное решение в виде $y_2 = A$, где A — постоянная.

Положив в уравнении (2) $y = A$, находим:

$$y_2 = -\frac{g}{k^2}. \quad (9)$$

Воспользовавшись формулами (8) и (9), запишем общее решение по формуле (6):

$$y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt - \frac{g}{k^2}. \quad (10)$$

Для определения постоянных интегрирования C_3 и C_4 вычислим:

$$\dot{y} = -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt. \quad (11)$$

Затем подставим в уравнение (10) $t=0$, $y = -\frac{g}{k^2}$, а в уравнение (11) $t=0$, $\dot{y} = v_0$. Тогда $C_3 = 0$, $C_4 = \frac{v_0}{k}$. Подставив эти значения C_3 и C_4 в уравнение (10), получим:

$$y = \frac{v_0}{k} \sin kt - \frac{g}{k^2}. \quad (12)$$

Итак, уравнения движения материальной точки имеют вид

$$x = a \cos kt,$$

$$y = \frac{v_0}{k} \sin kt - \frac{g}{k^2}.$$

Для определения уравнения траектории следует из уравнений движения исключить время. Замечая, что

$$\cos kt = \frac{x}{a}, \quad \sin kt = \frac{k}{v_0} \left(y + \frac{g}{k^2} \right),$$

получим искомое уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(y + \frac{g}{k^2} \right)^2}{\left(\frac{v_0}{k} \right)^2} = 1.$$

(Это — уравнение эллипса с центром в точке $A \left(0, -\frac{g}{k^2} \right)$. Одна полуось эллипса равна a , а другая полуось равна $\frac{v_0}{k}$.)

Задача 241. Материальная точка движется в вертикальной плоскости под действием центральной силы отталкивания, пропорциональной расстоянию до неподвижного центра: $\mathbf{F} = k^2 m \mathbf{r}$, где \mathbf{r} — вектор-радиус точки M , m — ее масса, k^2 — постоянный коэффициент.

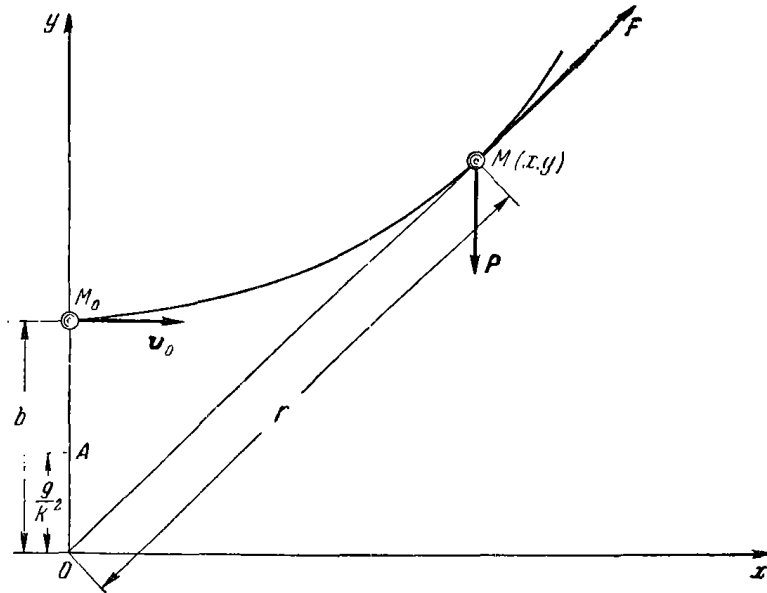
Найти уравнение траектории точки, если в начальный момент она занимала положение M_0 ($OM_0 = b$) и имела скорость \mathbf{v}_0 , направленную по горизонтали направо (см. рисунок).

Решение. Начало декартовых осей координат взято в неподвижном центре O , от которого отталкивается точка M . Ось x проходит по горизонтали направо, ось y — через начальное положение

точки по вертикали вверх. Запишем начальные условия движения точки в виде:

$$\text{при } t=0 \quad x=0, \quad y=b, \quad \dot{x}=v_0, \quad \dot{y}=0.$$

К материальной точке M приложены следующие силы: P — ее вес, F — сила отталкивания, направленная вдоль OM от центра O .



К задаче 241.

Составим векторное дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{F},$$

или

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{g} + k^2\boldsymbol{r}.$$

Проектируя на оси x и y , получим:

$$\ddot{x} - k^2x = 0, \quad (1)$$

$$\ddot{y} - k^2y = -g. \quad (2)$$

Уравнение (1) является однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его интегрирования составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - k^2 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = \pm k$. Следовательно, решение дифференциального уравнения (1) запишется в виде

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}. \quad (3)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим

$$\dot{x} = C_1 k e^{kt} - C_2 k e^{-kt} \quad (4)$$

и затем подставим в уравнение (3) $t=0, x=0$, а в уравнение (4) $t=0, \dot{x}=v_0$. Тогда получаем систему уравнений:

$$0 = C_1 + C_2,$$

$$v_0 = C_1 k - C_2 k.$$

Решив эту систему, имеем: $C_1 = \frac{v_0}{2k}$ и $C_2 = -\frac{v_0}{2k}$. Следовательно, окончательно получим:

$$x = \frac{v_0}{2k} (e^{kt} - e^{-kt}) = \frac{v_0}{k} \operatorname{sh} kt. \quad (5)$$

Так как дифференциальное уравнение (2) является неоднородным, то его общее решение y имеет вид

$$y = y_1 + y_2, \quad (6)$$

где y_1 — общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$\ddot{y} - k^2 y = 0 \quad (7)$$

и y_2 — частное решение уравнения (2).

Дифференциальные уравнения (1) и (7) аналогичны, поэтому

$$y_1 = C_3 e^{kt} + C_4 e^{-kt}. \quad (8)$$

Правая часть дифференциального уравнения (2) постоянна. Поэтому частное решение y_2 ищем в виде постоянного: $y_2 = A$. Положив в уравнении (2) $y_2 = A$, находим:

$$y_2 = \frac{g}{k^2}. \quad (9)$$

Воспользовавшись формулами (8) и (9), запишем общее решение по формуле (6):

$$y = C_3 e^{kt} + C_4 e^{-kt} + \frac{g}{k^2}. \quad (10)$$

Для определения постоянных интегрирования C_3 и C_4 вычислим:

$$\dot{y} = C_3 k e^{kt} - C_4 k e^{-kt}. \quad (11)$$

Затем подставим в уравнение (10) $t=0, y=b$, а в уравнение (11) $t=0, \dot{y}=0$. Тогда получим систему уравнений:

$$b = C_3 + C_4 + \frac{g}{k^2},$$

$$0 = C_3 k - C_4 k,$$

откуда

$$C_3 = C_4 = \frac{1}{2} \left(b - \frac{g}{k^2} \right).$$

Окончательно:

$$y = \frac{1}{2} \left(b - \frac{g}{k^2} \right) (e^{kt} + e^{-kt}) + \frac{g}{k^2},$$

т. е.

$$y = \left(b - \frac{g}{k^2} \right) \operatorname{ch} kt + \frac{g}{k^2}. \quad (12)$$

Итак, уравнения движения материальной точки имеют вид:

$$x = \frac{v_0}{k} \operatorname{sh} kt, \quad (5)$$

$$y = \left(b - \frac{g}{k^2} \right) \operatorname{ch} kt + \frac{g}{k^2}. \quad (12)$$

Для определения уравнения траектории точки следует из уравнений движения исключить время. Из (5) и (12) находим:

$$\operatorname{sh} kt = \frac{kx}{v_0},$$

$$\operatorname{ch} kt = \frac{y - \frac{g}{k^2}}{b - \frac{g}{k^2}}.$$

Учитывая, что $\operatorname{ch}^2 kt - \operatorname{sh}^2 kt = 1$, получаем искомое уравнение траектории точки M :

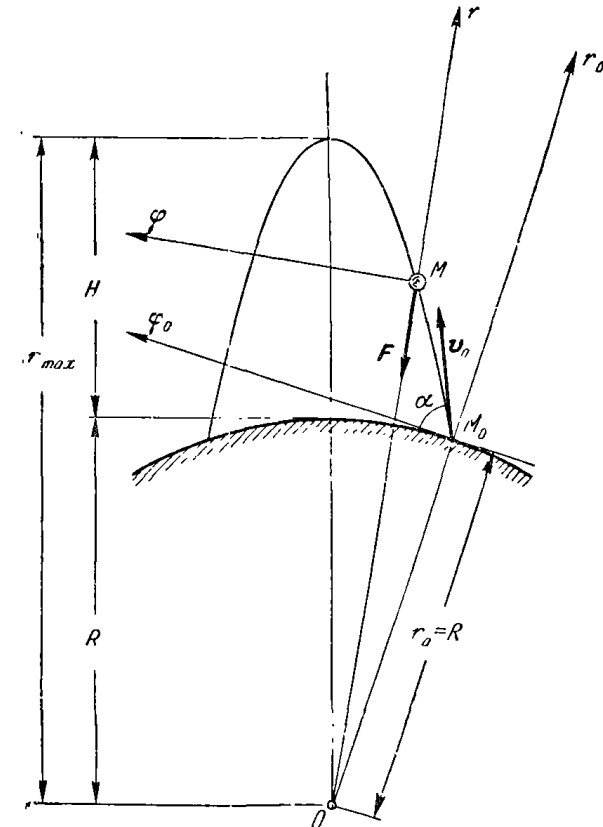
$$\frac{\left(y - \frac{g}{k^2} \right)^2}{\left(b - \frac{g}{k^2} \right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{v_0}{k} \right)^2} = 1.$$

Это — уравнение гиперболы с центром в точке $A \left(0; \frac{g}{k^2} \right)$. Действительная полуось равна $b - \frac{g}{k^2}$, а мнимая полуось $\frac{v_0}{k}$.

Задача 242. Найти наибольшую высоту подъема над поверхностью Земли снаряда, вылетевшего с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту и упавшего на Землю, считая силу притяжения Земли обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра Земли. Силой сопротивления движению пренебречь. Снаряд считать точечной массой. На поверхности Земли ускорение силы тяжести равно g . Радиус Земли равен R .

Решение. Предположим, что снаряд в рассматриваемый произвольный момент времени находится в точке M (см. рисунок), а в начальный момент времени находился в точке M_0 .

Учитывая, что к снаряду приложена только центральная сила F , решаем задачу в полярных координатах. Полюс O выбираем в центре Земли, оси r даем направление вектор-радиуса OM от O к M . Ось φ проводим через точку M перпендикулярно к оси r . Оси r_0 и φ_0 соответствуют начальному положению снаряда M_0 .



К задаче 242.

Запишем начальные условия движения снаряда в виде:

$$\text{при } t = 0 \quad r = r_0 = R, \quad \varphi = 0,$$

$$\dot{r} = v_{0r} = v_0 \sin \alpha, \quad \dot{\varphi} = \frac{v_0}{R} \cos \alpha.$$

Действительно, если обозначить начальное значение $\dot{\varphi}$ через $\dot{\varphi}_0$, то пр. $_{\varphi_0} v_0 = r_0 \dot{\varphi}_0$, а вследствие соотношения пр. $_{r_0} v_0 = v_0 \cos \alpha$ находим:

$$R \dot{\varphi}_0 = v_0 \cos \alpha, \quad (1)$$

откуда следует записанное выше:

$$\dot{\phi}_0 = \frac{v_0}{R} \cos \alpha.$$

К снаряду приложена только сила притяжения F , обратно пропорциональная квадрату расстояния до центра Земли, т. е. $F = \frac{km}{r^2}$. Учитывая, что на поверхности Земли, т. е. при $r = R$, $F = P = mg$, находим, что $k = gR^2$. Следовательно,

$$F = \frac{mgR^2}{r^2}. \quad (2)$$

Сила притяжения F направлена к центру O .

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси полярных координат имеют вид:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = F_r, \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = F_\phi.$$

В данном случае

$$F_r = -F = -\frac{mgR^2}{r^2}, \quad F_\phi = 0.$$

Следовательно:

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{gR^2}{r^2}, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0. \quad (4)$$

Из дифференциального уравнения (4) следует интеграл площадей: $r^2\dot{\phi} = C$, т. е.

$$r^2\dot{\phi} = r_0^2\dot{\phi}_0. \quad (5)$$

Учитывая, что $r_0 = R$, а также формулу (1), запишем формулу (5) в виде

$$r^2\dot{\phi} = Rv_0 \cos \alpha,$$

откуда

$$\dot{\phi} = \frac{Rv_0 \cos \alpha}{r^2} \quad (6)$$

($r^2\dot{\phi}$ является удвоенной секториальной скоростью снаряда, т. е. производной по времени от площади, описываемой вектор-радиусом r снаряда. Итак, при центральном движении материальной точки ее секториальная скорость постоянна).

Обратимся к интегрированию дифференциального уравнения (3). Воспользовавшись формулой (6), запишем это уравнение в виде

$$\ddot{r} - \frac{R^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{r^3} = -\frac{gR^2}{r^2}.$$

Умножив почленно на dr , осуществим интегрирование, учитывая, что

$$\dot{r} dr = \frac{d\dot{r}}{dt} dr = \dot{r} d\dot{r}.$$

Получим:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{R^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{2r^2} = \frac{gR^2}{r} + C.$$

Так как в начальном положении снаряда $r = r_0 = R$, $\dot{r} = \text{пр}_{r_0} v_0 = v_0 \sin \alpha$, то постоянная интегрирования имеет вид

$$C = -\frac{2gR - v_0^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{R^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{2r^2} = \frac{gR^2}{r} - \frac{2gR - v_0^2}{2}. \quad (7)$$

Уравнение (7) устанавливает зависимость между проекцией скорости снаряда \dot{r} на ось r и радиусом-вектором r .

В наивысшей точке траектории проекция скорости снаряда на ось r равна нулю, т. е. при $r = r_{\max}$ $\dot{r} = 0$. Подставив эти значения в уравнение (7), получим квадратное уравнение относительно r_{\max} :

$$(2gR - v_0^2) r_{\max}^2 - 2gR^2 r_{\max} + Rv_0^2 \cos^2 \alpha = 0,$$

откуда

$$r_{\max} = \frac{gR \pm \sqrt{g^2 R^2 - (2gR - v_0^2) v_0^2 \cos^2 \alpha}}{2gR - v_0^2} R. \quad (8)$$

Из уравнения (8) следует, что при $v_0^2 = 2gR$ величина r_{\max} обращается в бесконечность, т. е. снаряд на Землю не возвратится ($v_0 = \sqrt{2gR} = 11,2$ км/сек называется второй космической скоростью). Поэтому снаряду надо сообщить начальную скорость, удовлетворяющую условию $2gR - v_0^2 > 0$, т. е. $v_0 < \sqrt{2gR}$.

Наибольшая высота подъема снаряда над поверхностью Земли $H = r_{\max} - R$.

Используя формулу (8), получим:

$$H_{1,2} = \frac{-gR + v_0^2 \pm \sqrt{g^2 R^2 - (2gR - v_0^2) v_0^2 \cos^2 \alpha}}{2gR - v_0^2} R. \quad (9)$$

Отбрасывая отрицательное значение H_2 , окончательно находим:

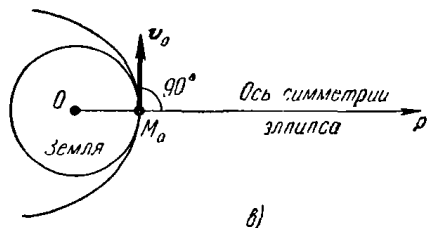
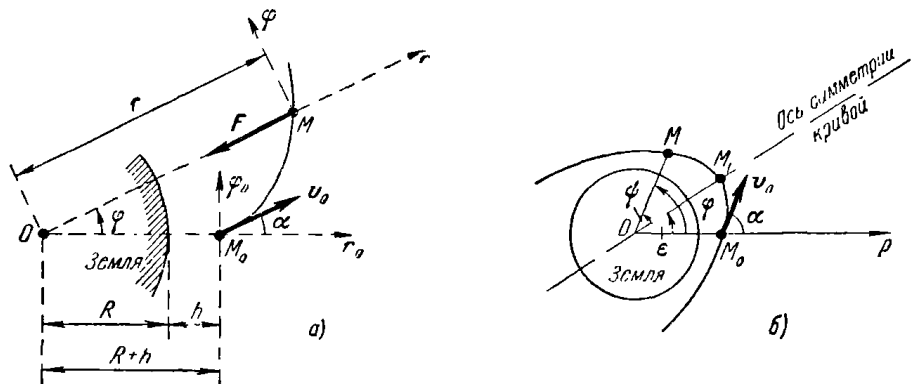
$$H = \frac{-gR + v_0^2 + \sqrt{g^2 R^2 - (2gR - v_0^2) v_0^2 \cos^2 \alpha}}{2gR - v_0^2} R.$$

Для случая, когда начальная скорость v_0 направлена по вертикали вверх, т. е. при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, имеем:

$$H = \frac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2}.$$

Задача 243. 4 октября 1957 г. в Советском Союзе был запущен первый в мире искусственный спутник Земли. В момент выведения на орбиту в положении M_0 на высоте h спутник имел скорость v_0 , расположенную под углом α к вертикали, проходящей через центр Земли.

Требуется показать, что спутник движется по эллипсу. Сила земного притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния



К задаче 243.

спутника от центра Земли. Ускорение силы тяжести на поверхности Земли равно g . Радиус Земли R . Силой сопротивления движению пренебречь.

Решение. Так как начальная скорость v_0 и сила земного притяжения F лежат в одной плоскости, то траектория спутника является плоской кривой. Поэтому выберем систему полярных координат с полюсом O в центре Земли (рис. а). Радиус-вектор OM соединяет полюс O с промежуточным положением M движущегося спутника. Вдоль OM проводим ось r , а перпендикулярно к ней через точку M — ось φ . M_0 — начальное положение спутника на орбите.

Из условия задачи видно, что начальные условия движения спутника имеют вид:

$$\text{при } t=0 \quad r=r_0=R+h, \quad \varphi=0,$$

$$\dot{r}=\dot{r}_0=\text{пр}_{r_0}v_0=v_0 \cos \alpha, \quad \dot{\varphi}=\frac{v_0}{r_0} \sin \alpha,$$

ибо, если обозначить начальное значение $\dot{\varphi}$ через $\dot{\varphi}_0$, то $\text{пр}_{\varphi_0}v_0=r_0\dot{\varphi}_0$ и вследствие соотношения $\text{пр}_{\varphi_0}v_0=v_0 \sin \alpha$ находим:

$$r_0\dot{\varphi}_0=v_0 \sin \alpha, \tag{1}$$

т. е. $\dot{\varphi}_0$ является заданной величиной.

Движение спутника M происходит под действием центральной силы F земного притяжения, направленной к центру Земли. Сила земного притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра Земли, т. е.

$$F=\frac{mk}{r^2}. \tag{2}$$

На поверхности Земли, т. е. при $r=R$, $F=P=mg$. Подставив эти значения в формулу (2), находим, что $k=gR^2$. Следовательно, формула (2) принимает вид

$$F=\frac{mgR^2}{r^2}. \tag{3}$$

Составим дифференциальные уравнения движения спутника в полярных координатах. Учитывая, что дифференциальные уравнения движения материальной точки в полярных координатах имеют вид:

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=F_r, \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})=F_\varphi,$$

в данном случае получим:

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=-F, \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})=0$$

или, принимая во внимание формулу (3):

$$\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2=-\frac{gR^2}{r^3}, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})=0. \tag{5}$$

Из дифференциального уравнения (5) находим:

$$r^2\dot{\varphi}=C. \tag{6}$$

Так как секториальная скорость точки, т. е. производная по времени от площади S , описываемой вектор-радиусом r , равна $\dot{S}=\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$, то $C=2\dot{S}$. Итак, секториальная скорость спутника постоянна, т. е. $r^2\dot{\varphi}=r_0^2\dot{\varphi}_0$. Воспользовавшись формулой (1), запишем формулу (6) в виде

$$C=r^2\dot{\varphi}=r_0^2\dot{\varphi}_0=r_0v_0 \sin \alpha,$$

откуда

$$\dot{\varphi}=\frac{r_0v_0 \sin \alpha}{r^2}. \tag{7}$$

Переходим к исследованию дифференциального уравнения (4):

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{gR^2}{r^2}.$$

Вычислим производную от r по времени: $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi}$. Учитывая формулу (7), находим:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{r_0 v_0 \sin \alpha}{r^2} = -r_0 v_0 \sin \alpha \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (8)$$

Так как $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \dot{\varphi}$, то, воспользовавшись формулами (7) и (8), имеем:

$$\ddot{r} = -\frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (9)$$

Запишем дифференциальное уравнение (4) с учетом формул (7) и (9). Тогда

$$-\frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{r^2} = -\frac{gR^2}{r^2},$$

т. е.

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = A, \quad (10)$$

где

$$A = \frac{gR^2}{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}.$$

Проинтегрировав дифференциальное уравнение (10), мы определим искомое уравнение траектории спутника в полярных координатах. (Дифференциальное уравнение (10) можно было непосредственно получить, воспользовавшись формулой Бине:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2 F_r}{mC^2},$$

где C — удвоенная секториальная скорость: $C = 2\dot{S} = r_0 v_0 \sin \alpha$, а $F_r = -F = -\frac{mgR^2}{r^2}$.)

Уравнение (10) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением относительно $\frac{1}{r}$ с постоянными коэффициентами. Его общее решение $\frac{1}{r}$ равно сумме общего решения $\left(\frac{1}{r} \right)_1$ соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = 0 \quad (11)$$

и частного решения $\left(\frac{1}{r} \right)_2$ неоднородного уравнения, т. е.

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r} \right)_1 + \left(\frac{1}{r} \right)_2. \quad (12)$$

Для решения дифференциального уравнения (11) составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$, откуда $\lambda = \pm i$. Следовательно,

$$\left(\frac{1}{r} \right)_1 = B \cos(\varphi - \epsilon), \quad (13)$$

где B и ϵ — постоянные интегрирования, подлежащие последующему определению.

Нетрудно видеть, что частное решение дифференциального уравнения (10) равно его постоянной правой части, т. е.

$$\left(\frac{1}{r} \right)_2 = A. \quad (14)$$

Воспользовавшись формулами (13) и (14), запишем общее решение по формуле (12) в виде

$$\frac{1}{r} = B \cos(\varphi - \epsilon) + A. \quad (15)$$

Это уравнение является уравнением траектории спутника.

Для определения постоянных интегрирования B и ϵ вычислим производную от $\frac{1}{r}$ по времени:

$$-\frac{1}{r^2} \dot{r} = -B \dot{\varphi} \sin(\varphi - \epsilon). \quad (16)$$

Подставив в уравнение (15) $r = r_0 = R + h$, $\varphi = 0$, а в уравнение (16)

$$r = r_0 = R + h, \quad \varphi = 0, \quad \dot{r} = \dot{r}_0 = v_0 \cos \alpha,$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \frac{v_0 \sin \alpha}{r_0} = \frac{v_0 \sin \alpha}{R + h},$$

получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R+h} &= B \cos \epsilon + A, \\ \frac{v_0 \cos \alpha}{(R+h)^2} &= -\frac{B v_0 \sin \alpha}{R+h} \sin \epsilon. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Для определения постоянных интегрирования B и ϵ из уравнений (17) запишем эту систему в виде:

$$B \cos \epsilon = \frac{1}{R+h} - A, \quad (18)$$

$$B \sin \epsilon = -\frac{v_0 \cos \alpha}{R+h}. \quad (19)$$

Из системы (18) и (19) находим:

$$B = \sqrt{\left(\frac{1}{R+h} - A\right)^2 + \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{(R+h)^2}}$$

или, подставляя значение A , после несложных преобразований:

$$B = \frac{gR^2}{(R+h)^2 v_0^2 \sin^2 \alpha} \sqrt{1 - \frac{(R+h) v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2 R^4} [2gR^2 - (R+h) v_0^2]}. \quad (20)$$

Разделив (19) на (18), находим $\operatorname{tg} \epsilon$ и, следовательно,

$$\epsilon = \operatorname{arctg} \frac{(R+h) v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{gR^2 - (R+h) v_0^2 \sin^2 \alpha}. \quad (21)$$

Вернемся к уравнению траектории спутника, записанному в виде (15). Решив это уравнение относительно r , находим:

$$r = \frac{1}{A + B \cos(\varphi - \epsilon)}$$

или

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \psi}, \quad (22)$$

где

$$p = \frac{1}{A} = \frac{(R+h)^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{gR^2}, \quad (23)$$

$$e = \frac{B}{A} = \sqrt{1 - \frac{(R+h) v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2 R^4} [2gR^2 - (R+h) v_0^2]} \quad (24)$$

и

$$\psi = \varphi - \epsilon. \quad (25)$$

Здесь ϵ определяется по формуле (21).

Как известно из курса аналитической геометрии, уравнение (22) является уравнением кривых второго порядка в полярных координатах. В нем p — параметр кривой, а e — эксцентриситет.

Кривая является: а) окружностью при $e=0$; б) эллипсом при $e < 1$; в) параболой при $e=1$; г) гиперболой при $e > 1$.

Угол ψ отсчитывается от оси симметрии кривой до радиуса-вектора, определяющего положение точки M на кривой (см. рис. б), причем ось симметрии направлена от полюса O (в данном случае центра Земли), находящегося в одном из фокусов кривой, в сторону ближайшей к фокусу вершины. Угол ϵ определяет положение оси симметрии кривой.

Выясним характер начальных условий запуска спутника для того, чтобы он мог двигаться по каждой из этих кривых:

а) Для того чтобы спутник двигался по окружности, должно быть выполнено условие $e=0$, т. е., согласно формуле (24),

$$\sqrt{1 - \frac{(R+h) v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2 R^4} [2gR^2 - (R+h) v_0^2]} = 0,$$

откуда получаем биквадратное уравнение относительно начальной скорости v_0 спутника на орбите:

$$(R+h)^2 v_0^4 \sin^2 \alpha - 2gR^2 (R+h) v_0^2 \sin^2 \alpha + g^2 R^4 = 0,$$

т. е.

$$v_0^2 = \frac{gR^2}{R+h} (1 \pm i \operatorname{ctg} \alpha).$$

Комплексное значение v_0^2 указывает, что движение спутника по круговой орбите возможно только в частном случае, когда $\alpha = \frac{\pi}{2}$, т. е. при горизонтальном направлении начальной скорости v_0 . Тогда

$$v_0 = R \sqrt{\frac{g}{R+h}}. \quad (26)$$

(Эта формула получена выше, в задаче 220.)

б) Для того чтобы спутник двигался по эллипсу, должно быть выполнено условие $e < 1$, т. е., согласно формуле (24),

$$\sqrt{1 - \frac{(R+h) v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2 R^4} [2gR^2 - (R+h) v_0^2]} < 1.$$

Для выполнения этого неравенства необходимо, чтобы

$$2gR^2 - (R+h) v_0^2 > 0,$$

т. е.

$$v_0 < \sqrt{\frac{2g}{R+h}} R.$$

Итак, для того чтобы движение спутника происходило по эллипсу, его начальная скорость v_0 на орбите должна удовлетворять условию

$$v_0 < \sqrt{\frac{2g}{R+h}} R. \quad (27)$$

Однако этого условия недостаточно, так как эллиптическая траектория спутника не должна проходить внутри Земли. Значит, наименьшее расстояние r должно быть больше или равно радиусу Земли R , т. е.

$$r_{\min} \geq R. \quad (28)$$

Расстояние от фокуса O , совмещенного с центром Земли, до точки на эллипсе является кратчайшим в момент прохождения спутником положения M_1 (см. рис. б), т. е. при $\psi=0$. Поэтому, подставив в неравенство (28) значение r из уравнения (22) и считая при этом $\psi=0$, получим:

$$\frac{p}{1+e} \geq R. \quad (29)$$

Подставив в неравенство (29) значение величин p и e , из формул (23) и (24) найдем после ряда преобразований:

$$v_0 \geq \sqrt{2gR} \frac{R}{R+h} \sqrt{\frac{h}{(R+h) \left[\sin^2 \alpha - \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 \right]}}. \quad (30)$$

Сопоставив неравенства (27) и (30), видим, что условие, при выполнении которого спутник будет двигаться вокруг Земли по эллиптической орбите, можно записать в форме

$$\sqrt{2gR} \frac{R}{R+h} \sqrt{\frac{h}{(R+h) \left[\sin^2 \alpha - \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 \right]}} \leq v_0 < \sqrt{\frac{2g}{R+h}} R, \quad (31)$$

где v_0 — начальная скорость спутника на орбите; h — начальная высота спутника над поверхностью Земли; g — ускорение силы тяжести у поверхности Земли; α — угол, образуемый начальной скоростью с вертикалью.

Для вещественности левой части неравенства (31) необходимо, чтобы

$$|\sin \alpha| \geq \frac{R}{R+h}.$$

При запуске спутника с поверхности Земли, т. е. при $h=0$, получаем, что $|\sin \alpha|=1$, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ или $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ (см. рис. в). Однако в этом случае левая часть неравенства (31) принимает неопределенный вид $\frac{0}{0}$. Полагая в левой части (31) $|\sin \alpha|=1$ и затем устремляя h к нулю, приходим к неравенству

$$\sqrt{gR} \leq v_0 < \sqrt{2gR}. \quad (32)$$

Полагая $g=9,81$ м/сек² и $R=6370$ км, имеем:

$$7,9 \text{ км/сек} \leq v_0 < 11,2 \text{ км/сек}. \quad (33)$$

Итак, при запуске с поверхности Земли для движения спутника по эллиптической орбите модуль его начальной скорости должен удовлетворять неравенству (33), причем начальная скорость должна быть направлена горизонтально. Значение $v=7,9$ км/сек называется первой космической скоростью, а значение $v=11,2$ км/сек называется второй космической скоростью.

В случае $v_0 < 7,9$ км/сек тело падает на Землю.

в) Для того чтобы тело двигалось по параболе, должно быть выполнено условие $e=1$. Из формулы (24) следует, что при $e=1$ $2gR^2 - (R+h)v_0^2 = 0$, откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{2g}{R+h}} R. \quad (34)$$

г) Для того чтобы тело двигалось по гиперболе, должно быть выполнено условие $e > 1$, откуда следует, что

$$v_0 > \sqrt{\frac{2g}{R+h}} R. \quad (35)$$

Из формул (34) и (35) следует, что при

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2g}{R+h}} R \quad (36)$$

тело будет двигаться по параболе или гиперболе, т. е. не окажется спутником Земли и будет от нее бесконечно удаляться. Если, кроме того, в начальный момент тело находится на поверхности Земли, т. е. $h=0$, то из формулы (36) получим:

$$v_0 \geq \sqrt{2gR}, \quad (37)$$

т. е.

$$v_0 \geq 11,2 \text{ км/сек}. \quad (38)$$

§ 4. Колебательное движение

1°. Восстанавливающая сила. Теория колебаний является одним из важнейших разделов теоретической механики. Ее роль в современной технике все время возрастает. При проектировании двигателей, машин и механизмов, мостов и других сооружений всегда производятся расчеты на колебания.

В данном параграфе рассматривается простейшая задача о линейных колебаниях материальной точки (крутильные колебания рассмотрены ниже в главе IX, малые колебания систем материальных точек — в главе XIII). Линейными называются колебания, описываемые линейными дифференциальными уравнениями.

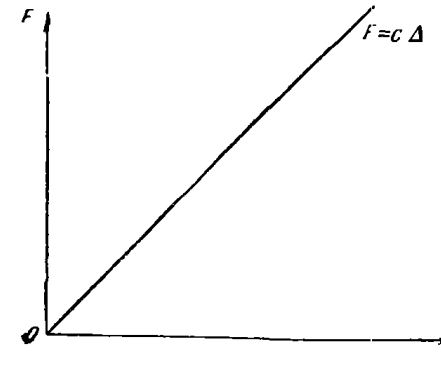


Рис. 111.

При движении материальной точки может действовать упругая сила, стремящаяся вернуть точку к некоторому положению. Эта упругая сила называется восстанавливающей. В большинстве задач рассматривается *восстанавливающая сила* F , изменяющаяся по линейному закону (по закону Гука) (рис. 111). При растяжении пружины эта сила прямо пропорциональна удлинению $F = -c\Delta$, где Δ — смещение конца пружины из ненапряженного состояния, c — коэффициент упругости (коэффициент жесткости), численно равный силе, которую

надо приложить к пружине для того, чтобы изменить ее длину на единицу. Единица измерения коэффициента упругости — $кг/см$.

Вообще линейной восстанавливающей называется сила, стремящаяся вернуть точку в положение равновесия и пропорциональная отклонению этой точки от положения равновесия.

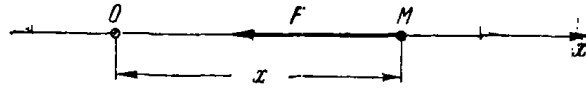


Рис. 112.

2°. Свободные колебания материальной точки. Свободными называются колебания материальной точки, которые происходят под действием восстанавливающей силы. При движении материальной точки M массы m по горизонтальной оси x (рис. 112) под действием восстанавливающей силы F , равной по модулю $F = c|x|$ (O — положение равновесия точки M), имеет место дифференциальное уравнение движения

$$\ddot{x} + k^2x = 0,$$

где $k^2 = \frac{c}{m}$.

В случае колебаний материальной точки M массы m , подвешенной к нижнему концу пружины, верхний конец которой прикреплен к потолку, упругая (восстанавливающая) сила F при движении точки M вниз направлена вверх (рис. 113), причем $F_x = -c(\Delta_{ст} + x)$, где $\Delta_{ст}$ — статическое удлинение пружины под действием силы веса $P = mg$. Ось x направлена вдоль оси пружины в сторону ее растяжения, т. е. вниз. Начало отсчета на оси взято в положении статического равновесия материальной точки M , висящей на пружине. При этом выборе начала отсчета дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки имеет вид

$$\ddot{x} + k^2x = 0,$$

где $k^2 = \frac{c}{m}$.

При начальных условиях движения материальной точки, записанных в виде:

$$\text{при } t=0 \quad x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0,$$

закон ее свободных колебаний имеет вид

$$x = a \sin(kt + \alpha),$$

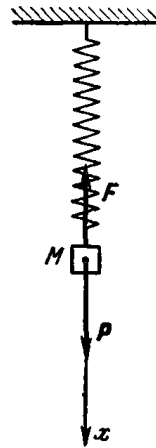


Рис. 113.

т. е. материальная точка совершает гармоническое колебательное движение; здесь a — амплитуда колебаний — наибольшее отклонение колеблющейся точки от положения равновесия

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}};$$

$kt + \alpha$ — фаза колебаний, α — начальная фаза колебаний, определяемая по начальным данным:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0};$$

k — круговая частота колебаний — число колебаний материальной точки за 2π секунд:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}}.$$

Круговая частота колебаний от начальных условий движения (x_0 и \dot{x}_0) не зависит. Это свойство называется изохронностью, а колебания — изохронными (амплитуда колебаний a и начальная фаза α зависят от начальных условий движения).

Периодом колебаний T материальной точки называется наименьший промежуток времени, по истечении которого точка имеет ту же координату и ту же проекцию скорости

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta_{ст}}{g}}.$$

Размахом колебаний называется расстояние между крайними положениями колеблющейся точки. Размах колебаний равен двум амплитудам колебаний.

3°. Влияние силы сопротивления, пропорциональной скорости, на свободные колебания материальной точки. При движении материальной точки в среде, препятствующей движению (воздух, жидкость), возникает сила сопротивления движению. Эта сила при малых скоростях движения точки может приближенно считаться прямо пропорциональной первой степени скорости точки: $R = \beta v$, где β — постоянный коэффициент; при больших скоростях — квадрату скорости точки: $R = \beta_1 v^2$, где β_1 — постоянный коэффициент.

Ниже рассмотрены свободные колебания материальной точки при наличии силы, пропорциональной первой степени скорости точки: $R = \beta v$. В этом случае дифференциальное уравнение движения материальной точки имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0,$$

где

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad 2n = \frac{\beta}{m}.$$

Различаются три вида движения: а) $n < k$ — случай малого сопротивления, б) $n > k$ — случай большого сопротивления, в) $n = k$ — предельный случай.

а) $n < k$ — случай малого сопротивления. Материальная точка совершает затухающие колебания по закону:

$$x = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \alpha) \quad (\text{при } t \rightarrow \infty \quad x \rightarrow 0).$$

При заданных начальных условиях движения (при $t=0 \quad x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0$) A и α имеют вид

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + n x_0)^2}{k^2 - n^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 \sqrt{k^2 - n^2}}{\dot{x}_0 + n x_0}.$$

Это движение не является периодическим, так как выражение Ae^{-nt} переменнo и убывает по экспоненциальному закону. Однако по аналогии со свободными колебаниями и здесь вводят круговую частоту и период колебаний.

Круговая частота колебаний k_R материальной точки при наличии силы сопротивления равна

$$k_R = \sqrt{k^2 - n^2},$$

т. е. $k_R < k$. Итак, сила сопротивления движению, пропорциональная скорости, уменьшает круговую частоту колебаний.

Период колебаний T_R материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, равен

$$T_R = \frac{2\pi}{k_R} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Так как при отсутствии силы сопротивления $T = \frac{2\pi}{k}$, то

$$T_R = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}} T,$$

т. е. $T_R > T$. Итак, сила сопротивления, пропорциональная скорости, увеличивает период колебаний.

Обычно условно вводят переменную амплитуду колебаний $a = Ae^{-nt}$, представляющую, по существу, величину наибольшего отклонения.

Амплитуда колебаний $a = Ae^{-nt}$ (при $t \rightarrow \infty \quad a \rightarrow 0$) убывает с каждым полупериодом (см. рис. 114) по закону геометрической прогрессии, знаменатель которой равен

$$q = \frac{a_{i+1}}{a_i} = e^{-\frac{nT_R}{2}}.$$

Логарифмическим декрементом колебаний называется логарифм отношения двух смежных амплитуд, отличающихся во времени на $\frac{T_R}{2}$, т. е.

$$\ln \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{nT_R}{2}.$$

б) $n > k$ — случай большого сопротивления. Материальная точка совершает затухающее аperiodическое (непериодическое) движение согласно уравнению

$$x = e^{-nt} (C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t}).$$

При $t \rightarrow \infty \quad x \rightarrow 0$. Вследствие изменения по показательному закону движение быстро затухает.

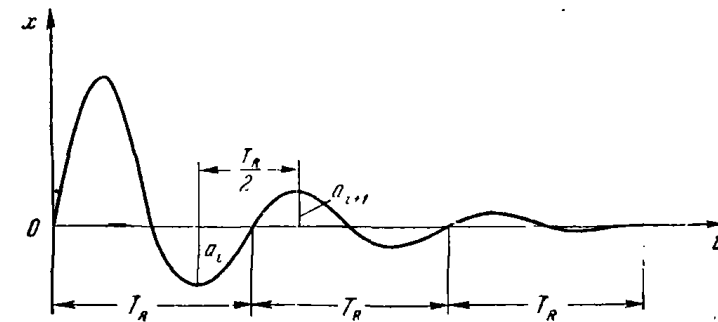


Рис. 114.

При заданных начальных условиях движения:

$$\text{при } t=0 \quad x=x_0, \quad \dot{x}=\dot{x}_0,$$

постоянные интегрирования имеют вид:

$$C_1 = \frac{\dot{x}_0 + (n + \sqrt{n^2 - k^2}) x_0}{2 \sqrt{n^2 - k^2}}, \quad C_2 = -\frac{\dot{x}_0 + (n - \sqrt{n^2 - k^2}) x_0}{2 \sqrt{n^2 - k^2}},$$

т. е.

$$x = \frac{e^{-nt}}{2 \sqrt{n^2 - k^2}} \left\{ [\dot{x}_0 + (n + \sqrt{n^2 - k^2}) x_0] e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} - [\dot{x}_0 + (n - \sqrt{n^2 - k^2}) x_0] e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t} \right\}$$

или

$$x = \frac{e^{-nt}}{\sqrt{n^2 - k^2}} [(\dot{x}_0 + n x_0) \operatorname{sh} \sqrt{n^2 - k^2} t + x_0 \sqrt{n^2 - k^2} \operatorname{ch} \sqrt{n^2 - k^2} t].$$

Характер движения зависит от начальных условий. При $x = x_0 \geq 0, \dot{x} = \dot{x}_0 > 0$, т. е. когда в начальный момент материальная точка

смещена из положения статического равновесия на x_0 и ей сообщена начальная скорость в том же направлении, материальная точка вначале отклоняется в указанном направлении до точки A (см. на рис. 115 кривую I), а затем асимптотически приближается к положению равновесия (не переходя через него).

При $x = x_0 > 0$ $\dot{x} = \dot{x}_0 < 0$ (причем $|\dot{x}_0| > x_0(n + \sqrt{n^2 - k^2})$), т. е. когда в начальный момент материальная точка смещена из положения статического равновесия на x_0 и ей сообщена в противоположном направлении скорость, модуль которой удовлетворяет указанному выше неравенству, материальная точка приближается к положению равновесия, проходит его (см. на рис. 115 кривую II), отклоняется в противоположную сторону до точки B и затем асимптотически приближается к положению равновесия (больше не переходя через него).

При $x = x_0 > 0$ $\dot{x} = \dot{x}_0 \leq 0$ (причем $|\dot{x}_0| < x_0(n + \sqrt{n^2 - k^2})$), т. е. когда в начальный момент материальная точка смещена из положения равновесия на x_0 и отпущена без начальной скорости, либо ей сообщена в противоположном направлении начальная скорость, модуль которой удовлетворяет указанному неравенству, материальная точка асимптотически приближается к положению равновесия, не переходя через него (см. кривую III).

Во всех трех случаях движение быстро затухает.

в) $n = k$ — предельный случай. Материальная точка совершает затухающее аperiодическое движение: $x = e^{-nt}(C_1 + C_2t)$. При $t \rightarrow \infty$ x становится неопределенностью типа $0 \cdot \infty$. Раскрытие неопределенности по правилу Лопиталю дает $\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0$, что указывает на затухание движения.

При заданных начальных условиях движения $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ уравнение движения имеет вид

$$x = e^{-nt} [x_0 + (\dot{x}_0 + nx_0)t].$$

Характер затухания зависит от начальных условий движения. При $x = x_0 \geq 0$ $\dot{x} = \dot{x}_0 > 0$ движение материальной точки соответствует кривой I . При $x = x_0 > 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 < 0$ (причем $|\dot{x}_0| > nx_0$) движение материальной точки соответствует кривой II . При $x = x_0 > 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$ либо $\dot{x}_0 < 0$ (причем $|\dot{x}_0| < nx_0$) движение материальной точки соответствует кривой III .

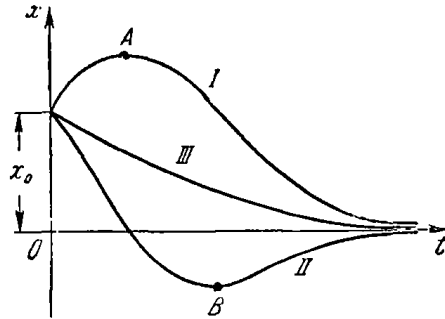


Рис. 115.

Во всех трех случаях движение быстро затухает.

Решение задач на свободные колебания материальной точки рекомендуется выполнять в следующем порядке:

- 1) выбрать систему отсчета, взяв начало отсчета в положении статического равновесия материальной точки;
- 2) записать начальные условия движения материальной точки;
- 3) изобразить на рисунке задаваемые силы, приложенные к материальной точке. Применяв принцип освобождения от связей, добавить силы реакций связей;
- 4) составить дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на соответствующую ось;
- 5) проинтегрировать дифференциальное уравнение движения, используя начальные условия движения для определения постоянных интегрирования.

Для определения круговой частоты k и k_R и периода колебаний T и T_R нет необходимости в интегрировании дифференциального уравнения движения. Достаточно, составив дифференциальное уравнение движения, определить коэффициент k^2 при координате, коэффициент $2n$ при проекции скорости \dot{x} точки и вычислить круговую частоту и период колебаний по указанным выше формулам.

При составлении дифференциального уравнения надо изобразить материальную точку в промежуточном положении, соответствующем ее положительной координате, предположив при этом, что точка перемещается в сторону возрастания этой координаты.

После составления дифференциального уравнения движения (пункт 4) следует рассмотреть условие статического равновесия материальной точки, совершающей колебания. Используя это условие, часто удается сократить ряд постоянных слагаемых в правой части дифференциального уравнения.

Рассматривая задачу о свободных колебаниях материальной точки при отсутствии силы сопротивления, можно довести решение до результата в общем виде и затем подставить в него численные данные. Решая же задачу о свободных колебаниях материальной точки при наличии силы сопротивления, надо подставить численные данные в составленное дифференциальное уравнение и определить n и k , так как в зависимости от соотношения коэффициентов n и k приходится записывать решение уравнения в тригонометрических либо в гиперболических функциях (случаи малого, большого сопротивлений и предельный случай).

Задача 244. Груз веса $P = 98$ г подвешен к концу пружины, находившейся в начальный момент в покое в недеформированном состоянии, и отпущен без толчка. Найти уравнение колебаний груза, если известно, что для деформации пружины на 1 см надо приложить к ней силу, модуль которой равен 14,4 г.

Решение. Направим ось x по вертикали вниз, взяв начало отсчета в положении статического равновесия груза.

В начальный момент груз подвешивался к концу M_0 недеформированной пружины, следовательно, он находился выше положения статического равновесия на величину статической деформации пружины $\Delta_{ст} = \frac{P}{c}$, где c — коэффициент упругости пружины. Отсутствие в начальный момент толчка указывает на движение без начальной скорости. Итак, начальные условия движения груза имеют вид:

$$\text{при } t=0 \quad x = x_0 = -\frac{P}{c}, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = 0$$

(x_0 имеет знак минус, так как ось x направлена по вертикали вниз, а груз в начальный момент находился над положением статического равновесия).

Изобразим груз в положении, смещенном относительно нуля на x вниз и предположим, что он движется в сторону возрастания x , т. е. вниз. При этом пружина растягивается, и ее упругая сила F (восстанавливающая сила) равна $F = -c\Delta$, где Δ — смещение конца пружины из ненапряженного состояния, т. е. $\Delta_x = M_0M = \Delta_{ст} + x$. Следовательно,

$$F_x = -c(\Delta_{ст} + x). \quad (1)$$

Кроме силы F , к грузу приложен его вес P .

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x :

$$m\ddot{x} = P + F_x. \quad (2)$$

Применив формулу (1), имеем

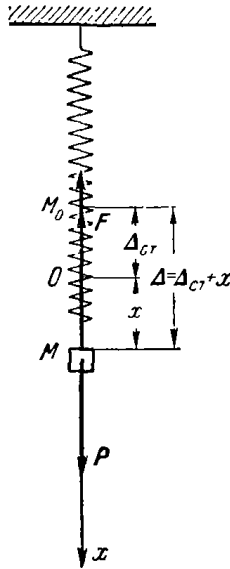
$$\frac{P}{g}\ddot{x} = P - c\Delta_{ст} - cx. \quad (3)$$

Рассмотрим груз в положении статического равновесия. К грузу приложен его вес P , направленный по вертикали вниз, и статическая упругая сила $F_{ст}$, которая появилась при растяжении пружины на $\Delta_{ст}$ под действием веса груза, т. е. $F_{ст} = c\Delta_{ст}$. Упругая сила $F_{ст}$ направлена по вертикали вверх. Из условия равновесия груза следует:

$$P - F_{ст} = 0,$$

т. е.

$$P - c \cdot \Delta_{ст} = 0. \quad (4)$$



К задаче 244.

Воспользовавшись этим результатом, запишем дифференциальное уравнение (3) в виде

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \quad (5)$$

где

$$k^2 = \frac{cg}{P}.$$

Дифференциальное уравнение (5) свободных колебаний груза является линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения мнимые: $\lambda_{1,2} = \pm ki$. Следовательно, решение уравнения записывается в виде

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (6)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (7)$$

Подставив в (6) начальное условие движения:

$$t=0 \quad x = x_0 = -\frac{P}{c}, \quad \text{а в (7)} \quad t=0 \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = 0,$$

находим

$$C_1 = x_0 = -\frac{P}{c}, \quad C_2 = 0.$$

Уравнение (6) движения груза после подстановки значений C_1 и C_2 принимает вид

$$x = -\frac{P}{c} \cos kt,$$

где

$$k = \sqrt{\frac{cg}{P}}.$$

Воспользовавшись численными данными, получаем:

$$k = \sqrt{\frac{cg}{P}} = 12 \frac{1}{сек}, \quad \frac{P}{c} = 6,8 \text{ см.}$$

Итак,

$$x = -6,8 \cos 12t \text{ см.}$$

или, делая множитель при тригонометрической функции положительным:

$$x = 6,8 \sin\left(12t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ см.}$$

Сопоставляя этот результат с уравнением свободных колебаний, записанным в общем виде: $x = a \sin(kt + \alpha)$, видим, что амплитуда колебаний $a = 6,8$ см, начальная фаза колебаний $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ и круговая частота колебаний $k = 12 \frac{1}{сек}$.

Период колебаний груза определяется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{12} = 0,52 \text{ сек.}$$

Эти результаты можно непосредственно получить с помощью формул:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} = \frac{P}{c} = 6,8 \text{ см, } \alpha = \arctg \frac{kx_0}{\dot{x}_0} = \arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

Задача 245. Под действием груза, подвешенного к концу пружины, пружина получила статическое удлинение $\Delta_{ст} = 5$ см. Найдите закон колебаний этого груза на пружине, если в начальный момент грузу, находившемуся в положении статического равновесия, была сообщена вверх начальная скорость $v_0 = 28$ см/сек.

Решение. Направим ось x по вертикали вниз, взяв начало отсчета в положении статического равновесия груза. В этом положении пружина под действием силы тяжести груза растянута на $\Delta_{ст}$.

До сообщения начальной скорости груз находится в равновесии под действием двух сил: веса P и упругой силы пружины $F_{ст}$, направленной по вертикали вверх (см. рис. а). По модулю $F_{ст} = c\Delta_{ст}$, где c — коэффициент упругости пружины. Запишем условие равновесия груза:

$$P - F_{ст} = 0 \tag{1}$$

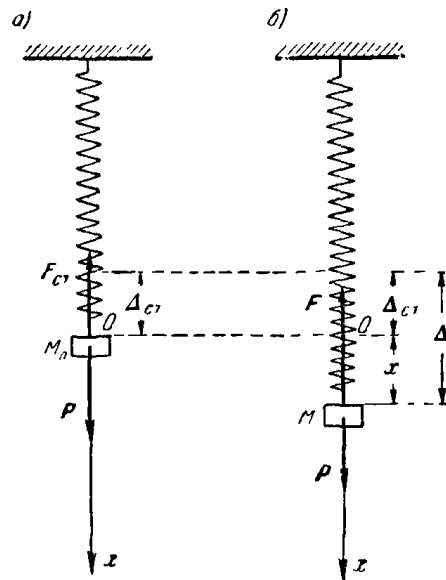
или

$$P - c\Delta_{ст} = 0.$$

Начальные условия движения груза имеют вид:

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_0 = 0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = -28 \text{ см/сек}$$

(\dot{x}_0 отрицательно, так как начальная скорость v_0 , сообщенная грузу, направлена вверх).



К задаче 245.

Изобразим груз в промежуточном положении M , соответствующем его положительной абсциссе x (см. рис. б). При этом пружина оказывается растянутой на $\Delta = \Delta_{ст} + x$, а упругая сила F (восстанавливающая сила) — направленной по вертикали вверх. Тогда

$$F_x = -c\Delta_x = -c(\Delta_{ст} + x). \tag{2}$$

К грузу, помимо упругой силы F , приложен его вес P . Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x :

$$m\ddot{x} = P + F_x.$$

Воспользовавшись формулами (2) и (1), получим:

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \tag{3}$$

где

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Вычисление k^2 непосредственно провести невозможно, так как неизвестен коэффициент упругости c пружины. Подставив в формулу (1) $P = mg$, представим ее в виде $\frac{c}{m} = \frac{g}{\Delta_{ст}}$. Следовательно,

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} \tag{4}$$

($\Delta_{ст}$ в условии задачи задано).

Интегрирование дифференциального уравнения (3) не представляет затруднений. Составим соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + k^2 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = \pm ki$. Так как корни характеристического уравнения мнимые, то решение уравнения имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{5}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 найдем:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{6}$$

Подставим в уравнение (5): $t = 0, x = x_0 = 0$, а в уравнение (6): $t = 0, \dot{x} = \dot{x}_0$. Тогда $C_1 = 0, C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}$.

Следовательно, уравнение (5) принимает вид

$$x = \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt. \tag{7}$$

Используя численные данные, получим:

$$k = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{980}{5}} = 14 \text{ сек}^{-1}, \quad \frac{\dot{x}_0}{k} = -\frac{28}{14} = -2 \text{ см.}$$

Итак, груз совершает на пружине гармонические колебания, согласно уравнению $x = -2 \sin 14t$ см. Делая множитель при тригонометрической функции положительным, имеем:

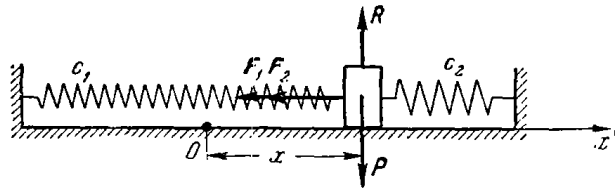
$$x = 2 \sin (14t - \pi) \text{ см.}$$

Амплитуда колебаний груза $a = 2$ см, начальная фаза колебаний $\alpha = \pi$, круговая частота колебаний $k = 14$ сек⁻¹.

Период колебаний T можно вычислить по формуле

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{14} = 0,45 \text{ сек.}$$

Задача 246. Груз веса $P = 9,8$ кг лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Слева и справа он соединен с кошками двух горизонтально расположенных пружин (см. рисунок) с коэффициентами упругости $c_1 = 4$ кг/см, $c_2 = 5$ кг/см. В положении равновесия груза обе



К задаче 246.

пружины недеформированы. Найти уравнение движения и период колебаний груза, если в начальный момент он был смещен из положения равновесия направо на 4 см и ему была сообщена направо начальная скорость 90 см/сек.

Решение. Направим ось x по горизонтали направо, взяв начало отсчета в положении равновесия груза.

Запишем начальные условия движения груза:

$$\text{при } t=0 \quad x_0 = 4 \text{ см, } \dot{x}_0 = 90 \text{ см/сек.}$$

Изобразим груз в промежуточном положении, смещенным по отношению к началу отсчета направо на x , и представим, что он движется в сторону возрастания x , т. е. направо.

При этом правая пружина сжимается на x , и ее упругая сила F_2 направлена влево. Одновременно левая пружина растягивается на x , и, следовательно, ее упругая сила F_1 также направлена влево, т. е.

$$F_{1x} = -c_1 x, \quad F_{2x} = -c_2 x.$$

Кроме двух восстанавливающих сил F_1 и F_2 , к грузу приложен его вес P и нормальная сила реакции R гладкой плоскости.

Запишем дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на ось x . В данном случае получим:

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = F_{1x} + F_{2x}, \quad \text{или} \quad \frac{P}{g} \ddot{x} = -(c_1 + c_2) x. \quad (1)$$

Как следует из дифференциального уравнения (1), обе пружины можно заменить одной эквивалентной пружиной, коэффициент упругости которой равен сумме коэффициентов упругости двух данных пружин, т. е. $c = c_1 + c_2$. Запишем дифференциальное уравнение (1) в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (2)$$

где

$$k^2 = \frac{(c_1 + c_2)g}{P}.$$

Составим характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (2): $\lambda^2 + k^2 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = \pm ki$. Следовательно, решение уравнения (2) имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (3)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (4)$$

Подставив в уравнение (3) $t=0$, $x=x_0$, а в уравнение (4) $t=0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$, получим: $C_1 = x_0$, $C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}$. Тогда уравнение (3) принимает вид

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt. \quad (5)$$

Положим

$$x_0 = a \sin \alpha, \quad \frac{\dot{x}_0}{k} = a \cos \alpha, \quad (6)$$

где a и α — постоянные. Тогда уравнение (5) колебаний груза можно представить так:

$$x = a \sin (kt + \alpha). \quad (7)$$

Амплитуда колебаний a и начальная фаза колебаний α определяются из системы уравнений (6):

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}, \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0}. \quad (9)$$

Воспользовавшись численными значениями, получим из формулы (2):

$$k = \sqrt{\frac{(c_1 + c_2)g}{P}} = \sqrt{\frac{(4 + 5) \cdot 980}{9,8}} = 30 \frac{1}{\text{сек}},$$

из формулы (8):

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} = \sqrt{4^2 + \frac{90^2}{30^2}} = 5 \text{ см},$$

из формулы (9):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0} = \frac{30 \cdot 4}{90} = \frac{4}{3},$$

откуда

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} = 0,92 \text{ рад}.$$

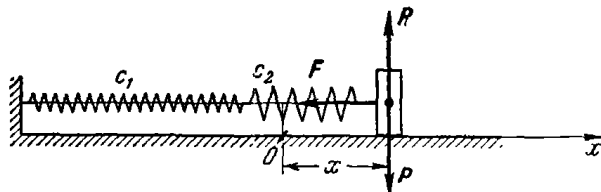
Итак, закон колебаний груза дается формулой

$$x = 5 \sin(30t + 0,92) \text{ см},$$

причем период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{30} = 0,21 \text{ сек}.$$

Задача 247. Решить предыдущую задачу в предположении, что обе пружины соединены последовательно (см. рисунок).



К задаче 247.

Решение. Начало отсчета оси x принимаем в положении равновесия груза при недеформированных пружинах. Ось x направлена по горизонтали направо. Начальные условия движения остаются прежними:

$$\text{при } t=0 \quad x = x_0 = 4 \text{ см}, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = 90 \text{ см/сек}.$$

Изобразим груз в промежуточном положении смещенным направо на x . При этом в пружинах возникает восстанавливающая сила F , направленная налево.

Вычислим коэффициент упругости c пружины, эквивалентной двум данным пружинам. Суммарное удлинение пружин равно смещению груза, т. е. $|x|$; поэтому

$$|x| = \frac{F}{c}. \quad (1)$$

При смещении груза направо на x каждая из пружин получила удлинение. Сумма этих удлинений равна $|x|$, т. е.

$$|x| = |x_1| + |x_2|. \quad (2)$$

Так как каждая из пружин растягивается под действием силы F , то

$$|x_1| = \frac{F}{c_1}, \quad |x_2| = \frac{F}{c_2}. \quad (3)$$

Подставив формулы (1) и (3) в формулу (2), находим:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}. \quad (4)$$

Величины, обратные коэффициентам упругости (жесткости), называются коэффициентами податливости. Итак, при последовательном соединении пружин податливость эквивалентной пружины равна сумме податливостей данных пружин. Из формулы (4) находим коэффициент упругости c эквивалентной пружины:

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}. \quad (5)$$

В дальнейшем вместо двух данных последовательно соединенных пружин будем рассматривать одну эквивалентную пружину с коэффициентом упругости c .

При смещении груза направо на x проекция восстанавливающей силы F , направленной налево, равна

$$F_x = -cx = -\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} x. \quad (6)$$

Кроме силы F , к грузу приложены следующие силы: P — его вес, R — нормальная сила реакции гладкой горизонтальной плоскости.

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x :

$$m\ddot{x} = F_x \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = -\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} x.$$

Полученное уравнение перепишем так:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (7)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{g}{P}} = 14,9 \frac{1}{\text{сек}}. \quad (8)$$

Нетрудно обнаружить тождественность дифференциального уравнения (7) и дифференциального уравнения (2), полученного в предыдущей задаче. Поэтому можно, минуя промежуточные выкладки, записать ответ на основании формул (7), (8) и (9) предыдущей задачи:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{90}{14,9}\right)^2} = 7,25 \text{ см},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0} = \frac{14,9 \cdot 4}{90} = 0,66, \quad \alpha = \operatorname{arctg} 0,66 = 0,58 \text{ рад}.$$

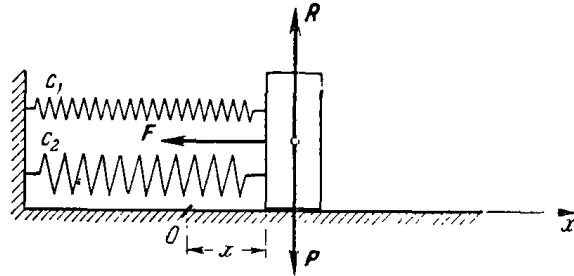
$$x = 7,25 \sin(14,9t + 0,58) \text{ см}.$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{14,9} = 0,42 \text{ сек.}$$

Задача 248. Решить задачу 246 в предположении, что обе пружины соединены параллельно. Груз считать точечной массой.

Решение. Выбираем начало отсчета, направляем ось x и изображаем силы P , R и F в соответствии с решением предыдущей задачи.



К задаче 248.

Заменяем две параллельные пружины одной эквивалентной пружиной. При смещении груза направо на x обе пружины также растягиваются на x , т. е. $x_1 = x_2 = x$. При этом в пружинах возникают восстанавливающие силы F_1 и F_2 , сумма которых равна F , т. е. $F = F_1 + F_2$. Разделив последнее равенство почленно на $|x|$ и учитывая, что $|x| = |x_1| = |x_2|$, получим: $\frac{F}{|x|} = \frac{F_1}{|x_1|} + \frac{F_2}{|x_2|}$. Так как $\frac{F}{|x|} = c$, $\frac{F_1}{|x_1|} = c_1$, $\frac{F_2}{|x_2|} = c_2$, то окончательно

$$c = c_1 + c_2. \quad (1)$$

Таким образом, при параллельном соединении пружин коэффициент упругости эквивалентной пружины равен сумме коэффициентов упругости данных пружин.

Последующий ход решения задачи повторяет решение двух предыдущих задач.

Используя формулу (1), запишем сразу окончательные результаты:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{P} g} = \sqrt{\frac{4 + 5}{9,8} 980} = 30 \frac{1}{\text{сек}},$$

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} = \sqrt{4^2 + \frac{90^2}{30^2}} = 5 \text{ см},$$

$$\alpha = \arctg \frac{kx_0}{\dot{x}_0} = \arctg \frac{30 \cdot 4}{90} = \arctg \frac{4}{3} = 0,92 \text{ рад},$$

$$x = 5 \sin(30t + 0,92) \text{ см},$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{30} = 0,21 \text{ сек.}$$

(При выполнении конструкции, соответствующей этой задаче, для каждой из пружин должна быть предусмотрена отдельная направляющая.)

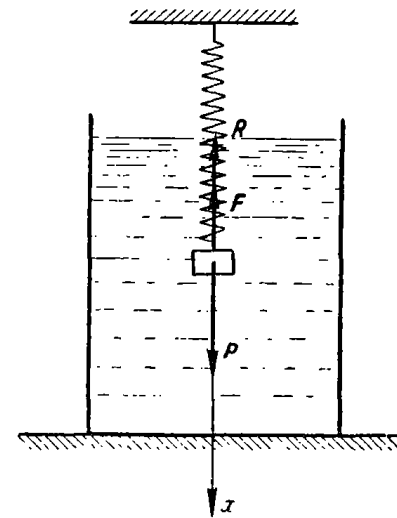
Задача 249. Груз веса $P = 98 \text{ г}$, подвешенный к кошку пружины, движется в жидкости. Коэффициент жесткости пружины $c = 10 \text{ г/см}$. Сила сопротивления движению пропорциональна первой степени скорости груза: $R = \beta v$, где $\beta = 1,6 \text{ гсек/см}$. Найти уравнение движения груза, если в начальный момент груз был смещен из положения статического равновесия вниз на 4 см и ему была сообщена вниз начальная скорость $v_0 = 4 \text{ см/сек}$.

Решение. Направим ось x вдоль пружины по вертикали вниз, взяв начало отсчета в положении статического равновесия груза.

Запишем начальные условия движения груза:

$$\text{при } t=0 \quad x = x_0 = 4 \text{ см},$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 = 4 \text{ см/сек.}$$



К задаче 249.

Изобразим груз в положении, при котором его абсцисса x положительна. Так как пружина при этом получит удлинение $\Delta = \Delta_{\text{ст}} + x$, то проекция на ось x упругой силы F пружины, направленной по вертикали вверх, равна

$$F_x = -c(\Delta_{\text{ст}} + x). \quad (1)$$

Предположим, что груз движется в сторону возрастания абсциссы x . Сила сопротивления R движению груза направлена противоположно скорости, т. е. по вертикали вверх.

Кроме сил F и R , к грузу приложен его вес P . Составим дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\ddot{x} = P + F_x + R_x.$$

Подставив в это уравнение $R_x = -\beta v_x$ и значение F_x из формулы (1), находим:

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = P - c\Delta_{\text{ст}} - cx - \beta v_x. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что

$$P - c\Delta_{\text{ст}} = 0. \quad (3)$$

Действительно, в положении статического равновесия к грузу приложены следующие силы: P — его вес, направленный по вертикали вниз, и статическая упругая сила пружины $F_{\text{ст}} = c\Delta_{\text{ст}}$, направленная

по вертикали вверх. Так как груз находится в равновесии, то $P - F_{сг} = 0$, откуда и следует формула (3).

Первые два слагаемых в правой части дифференциального уравнения (2), на основании формулы (3), уничтожаются. Заменив в последнем слагаемом v_x на \dot{x} , имеем:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} - k^2x = 0, \quad (4)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{cg}{P}}, \quad n = \frac{\beta g}{2P}.$$

Подставив численные значения, находим, что $k = 10 \text{ сек}^{-1}$, $n = 8 \text{ сек}^{-1}$; таким образом, $n < k$ (случай малого сопротивления).

Запишем характеристическое уравнение дифференциального уравнения (4): $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$, откуда

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm i \sqrt{k^2 - n^2}.$$

Следовательно, уравнение движения груза имеет вид

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t). \quad (5)$$

Для определения постоянных интегрирования вычислим:

$$\begin{aligned} \dot{x} = e^{-nt} & (-C_1 \sqrt{k^2 - n^2} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t + \\ & + C_2 \sqrt{k^2 - n^2} \cos \sqrt{k^2 - n^2} t) - ne^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + \\ & + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t). \quad (6) \end{aligned}$$

Подставив в уравнение (5) $t=0$, $x=x_0$, а в уравнение (6) $t=0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$, получаем: $C_1 = x_0$, $C_2 = \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}$. Подставив значения C_1 и C_2 в уравнение (5), находим:

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right). \quad (7)$$

Преобразуем полученное уравнение. Для этого положим:

$$x_0 = A \sin \alpha, \quad \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} = A \cos \alpha, \quad (8)$$

где A и α — постоянные. Из (8) легко найти, что

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + n x_0)^2}{k^2 - n^2}}, \quad (9)$$

$$\alpha = \text{arctg} \frac{x_0 \sqrt{k^2 - n^2}}{\dot{x}_0 + n x_0}. \quad (10)$$

Теперь уравнение (7) принимает вид

$$x = A e^{-nt} \sin (\sqrt{k^2 - n^2} t + \alpha). \quad (11)$$

Движение груза является затухающим (так как при $t \rightarrow \infty$ $x \rightarrow 0$) с круговой частотой

$$k_R = \sqrt{k^2 - n^2}. \quad (12)$$

Амплитудой колебаний a является коэффициент, стоящий перед синусом в уравнении (11), т. е.

$$a = A e^{-nt}, \quad (13)$$

где A определяется по формуле (9).

Выше было найдено, что $k = 10 \text{ сек}^{-1}$, $n = 8 \text{ сек}^{-1}$. Из условия задачи следует, что $x_0 = 4 \text{ см}$; $\dot{x}_0 = 4 \text{ см/сек}$. Подставив эти численные значения в формулы (9), (10), (12), (13), находим: $A = 7,2 \text{ см}$, $\alpha = 0,59 \text{ рад}$, $k_R = 6 \text{ сек}^{-1}$, $a = 7,2 e^{-8t} \text{ см}$.

Итак, груз совершает затухающие колебания по закону

$$x = 7,2 e^{-8t} \sin (6t + 0,59) \text{ см}. \quad (14)$$

Период колебаний T_R груза равен $T_R = \frac{2\pi}{k_R} = \frac{2\pi}{6} = 1,05 \text{ сек}$. (Если бы груз совершал колебания при отсутствии силы сопротивления, то период его колебаний был бы меньше. Действительно, по формуле $T = \frac{2\pi}{k}$ получим $T = 0,63 \text{ сек}$.)

Амплитуда колебаний груза $a = 7,2 e^{-8t} \text{ см}$ убывает по экспоненциальному закону. Допустим, что моменту времени t_i соответствует i -я амплитуда a_i . Следующая амплитуда a_{i+1} имеет место через полпериода, т. е. при $t_{i+1} = t_i + \frac{T_R}{2}$. Следовательно,

$$a_i = 7,2 e^{-8t_i}, \quad a_{i+1} = 7,2 e^{-8t_{i+1}} = 7,2 e^{-8 \left(t_i + \frac{T_R}{2} \right)}.$$

Разделив a_{i+1} на a_i , находим:

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = e^{-4T_R};$$

так как $T_R = 1,05 \text{ сек}$, то $\frac{a_{i+1}}{a_i} = e^{-4,2} \approx 0,02$.

Таким образом, последовательность амплитуд образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q \approx 0,02$.

Задача 250. Решить предыдущую задачу в предположении, что сила сопротивления движению равна $R = \beta v$, где $\beta = 5,2 \text{ гсек/см}$. В начальный момент груз был смещен из положения статического

равновесия на 4 см и ему была сообщена вверх начальная скорость $v_0 = 240$ см/сек.

Решение. Начало отсчета оси x по-прежнему расположим в положении статического равновесия груза и ось x направим по вертикали вниз. В данном случае начальные условия движения груза имеют вид:

$$\text{при } t=0 \quad x=x_0=4 \text{ см}, \quad \dot{x}=\dot{x}_0=-240 \text{ см/сек}$$

(\dot{x}_0 отрицательно, так как начальная скорость направлена вверх).

Следуя решению предыдущей задачи, получим дифференциальное уравнение движения груза (см. формулу (4) предыдущей задачи)

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0,$$

где

$$k = \sqrt{\frac{cg}{P}}, \quad n = \frac{\beta g}{2P}.$$

Подставив численные значения, получим, что $k = 10$ сек⁻¹, $n = 26$ сек⁻¹; таким образом, $n > k$ (случай большого сопротивления).

Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$, откуда

$$\lambda_1 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}, \quad \lambda_2 = -n + \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Так как $n > k$, то корни λ_1 и λ_2 являются вещественными и отрицательными. Уравнение движения груза имеет вид:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (1)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим:

$$\dot{x} = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (2)$$

Подставив в уравнение (1) $t=0$, $x=x_0$, а в уравнение (2) $t=0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$, получим систему уравнений:

$$x_0 = C_1 + C_2; \quad \dot{x}_0 = C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad C_2 = \frac{\lambda_1 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Заменив в уравнении (1) C_1 и C_2 вычисленными значениями, находим уравнение движения груза

$$x = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [(\lambda_1 x_0 - \dot{x}_0) e^{\lambda_2 t} - (\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0) e^{\lambda_1 t}]. \quad (3)$$

Воспользовавшись значениями λ_1 и λ_2 и гиперболическими функциями, запишем уравнение движения (3) в виде:

$$x = \frac{e^{-nt}}{\sqrt{n^2 - k^2}} [(\dot{x}_0 + nx_0) \operatorname{sh} \sqrt{n^2 - k^2} t + x_0 \sqrt{n^2 - k^2} \operatorname{ch} \sqrt{n^2 - k^2} t]. \quad (4)$$

Движение груза является аperiодическим и притом затухающим, так как при $t \rightarrow \infty$ $x \rightarrow 0$.

После подстановки в уравнения (3) и (4) численных значений: $n = 26$ сек⁻¹, $k = 10$ сек⁻¹, $x_0 = 4$ см, $\dot{x}_0 = -240$ см/сек, получим:

$$x = \frac{1}{6} e^{-26t} (29e^{-24t} - 5e^{24t}) \quad (5)$$

или

$$x = \frac{1}{3} e^{-26t} (12 \operatorname{ch} 24t - 17 \operatorname{sh} 24t). \quad (6)$$

Выясним теперь, переходит ли груз положение статического равновесия. Для этого приравняем x в уравнении (5) нулю:

$$\frac{1}{6} e^{-26t} (29e^{-24t} + 5e^{24t}) = 0.$$

Моменты времени, в которые груз находится в положении статического равновесия, определяются из уравнений

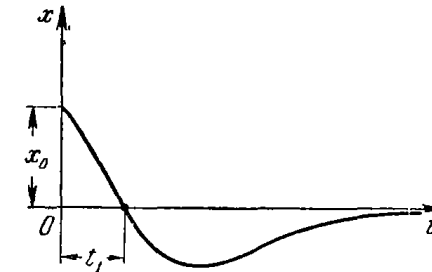
$$29e^{-24t_1} - 5e^{24t_1} = 0, \quad e^{-26t_2} = 0.$$

Произведя вычисления, найдем, что $t_1 = 0,037$ сек, $t_2 = \infty$.

Значение $t_1 = 0,037$ сек соответствует переходу груза через положение статического равновесия. Значение $t_2 = \infty$ соответствует затуханию движения (см. рисунок).

(Если бы при решении задачи значение t_1 оказалось отрицательным, то это указывало бы на отсутствие перехода груза через положение статического равновесия.)

Итак, в данной задаче груз переходит один раз через положение статического равновесия и затем асимптотически к нему приближается с другой стороны (больше одного раза груз через положение стати-



К задаче 250.

ческого равновесия перейти не может, так как при $x=0$ получается только одно значение t , отличное от бесконечности).

Задача 251. Решить задачу 249 в предположении, что сила сопротивления движению равна $R = \beta v$, где $\beta = 2$ гсек/см. В начальный момент груз был смещен из положения статического равновесия вниз на 4 см и отпущен без начальной скорости.

Решение. Как и в двух предыдущих задачах, начало отсчета расположим в положении статического равновесия и ось x направим по вертикали вниз. Запишем начальные условия движения груза:

$$\text{при } t=0 \quad x=x_0=4 \text{ см}, \quad \dot{x}=\dot{x}_0=0.$$

Аналогично тому, как делалось в двух предыдущих задачах, получим дифференциальное уравнение движения груза:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0,$$

где

$$k = \sqrt{\frac{cg}{P}}, \quad n = \frac{\beta g}{2P}.$$

Подставив сюда численные значения, получим, что $k = 10 \text{ сек}^{-1}$, $n = 10 \text{ сек}^{-1}$; таким образом, $n = k$ (случай предельного сопротивления).

Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$, откуда

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Так как $n = k$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = -n$, т. е. корни характеристического уравнения являются вещественными и равными. Уравнение движения груза имеет вид

$$x = C_1 e^{-nt} + C_2 t e^{-nt}. \quad (1)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим:

$$\dot{x} = -nC_1 e^{-nt} + C_2 e^{-nt} - nC_2 t e^{-nt}. \quad (2)$$

Подставив в уравнение (1) $x = x_0$ при $t = 0$, а в уравнение (2) $\dot{x} = 0$ при $t = 0$, имеем $C_1 = x_0$, $C_2 = nx_0$.

Заменив в уравнении (1) C_1 и C_2 вычисленными значениями, получим уравнение движения груза в виде

$$x = x_0 e^{-nt} (1 + nt). \quad (3)$$

Движение груза является аperiодическим. При $t \rightarrow \infty$ выражение (3) оказывается неопределенностью типа $0 \cdot \infty$. Для раскрытия неопределенности применяем правило Лопиталья, предварительно представив (3) в виде

$$x = \frac{x_0 (1 + nt)}{e^{nt}}.$$

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_0 (1 + nt)}{e^{nt}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dt} [x_0 (1 + nt)]}{\frac{d}{dt} (e^{nt})} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{nx_0}{ne^{nt}} = 0;$$

таким образом, при $t \rightarrow \infty$ $x \rightarrow 0$.

Итак, груз, согласно уравнению (3), совершает аperiодическое затухающее движение. Подставив численные значения: $n = 10 \text{ сек}^{-1}$, $x_0 = 4 \text{ см}$, получим уравнение движения груза

$$x = 4e^{-10t} (1 + 10t). \quad (4)$$

Выясним теперь, переходит ли груз через положение статического равновесия. Для этого приравняем x в уравнении (4) нулю

и определим соответствующие значения времени, т. е.

$$4e^{-10t} (1 + 10t) = 0, \text{ откуда } 1 + 10t_1 = 0, e^{-10t_2} = 0.$$

Находим: $t_1 = -0,1 \text{ сек}$, $t_2 = \infty$.

Отрицательное значение t_1 указывает на то, что груз не переходит через положение статического равновесия при значениях $t > 0$. Значение $t_2 = \infty$ соответствует затуханию движения.

Таким образом, картина движения существенно отличается от рассмотренной в предыдущей задаче — при данных начальных условиях движения груз асимптотически приближается к положению статического равновесия, ни разу не переходя через него. Кроме того, благодаря равенству нулю скорости груза в начальный момент времени, касательная к кривой $x = x(t)$ в точке $t = 0$ параллельна оси t .

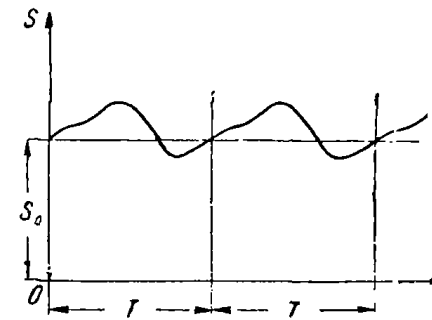


Рис. 116.

касательная к кривой $x = x(t)$ в точке $t = 0$ параллельна оси t .
4². Вынужденные колебания материальной точки. Возмущающая сила.

В теории колебаний *возмущающей* называется сила, приложенная к материальной точке и заданная как функция времени. Эта сила большей частью является непрерывной функцией времени. (В некоторых технических задачах возмущающая сила бывает

прерывистой и импульсивной.) В машинных агрегатах и механизмах возмущающая сила возникает в результате неточной балансировки вращающихся частей машин (турбинных дисков, роторов электромоторов, маховиков) либо при наличии периодически изменяющейся силы давления воды, газа или пара в цилиндрах двигателей и т. д.

Простейшей является возмущающая сила S , изменяющаяся по гармоническому закону: $S = H \sin(pt + \delta)$, где H — наибольшая величина возмущающей силы (амплитуда силы), p — круговая частота изменения возмущающей силы, δ — начальная фаза. H измеряется в кг, p измеряется в сек^{-1} , δ — безразмерная величина.

Если возмущающая сила $S(t)$ является периодической функцией времени (рис. 116) с периодом $T = \frac{2\pi}{p}$, т. е. $S(t + T) = S(t)$, и удовлетворяет условиям Дирихле (наличие на протяжении одного периода конечного числа максимумов и минимумов и конечного числа точек разрыва первого рода), то эту функцию можно разложить в ряд Фурье:

$$S(t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos ipt + B_i \sin ipt),$$

где

$$p = \frac{2\pi}{T}, \quad A_i = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \cos ipt \, dt, \quad B_i = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \sin ipt \, dt;$$

здесь $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Вынужденные колебания материальной точки вызываются действием системы сил, в составе которой имеются восстанавливающая сила F и возмущающая сила S . На рис. 117 ось x направлена вдоль линий действия сил F и S . Начало отсчета взято в положении статического равновесия материальной точки. Сила S условно направлена вниз, однако, как следует из ее закона изменения, ее направление является переменным.

Возмущающая сила изменяется по гармоническому закону: $S = H \sin(pt + \delta)$. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \delta),$$

где

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{H}{m}.$$

Закон движения материальной точки в случае $p \neq k$ дается формулой $x = x_1 + x_2$ (x_1 — общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения, x_2 — частное решение неоднородного уравнения), где

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta),$$

значит,

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta).$$

При начальных условиях движения материальной точки, т. е. при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ постоянные интегрирования выражаются формулами:

$$C_1 = x_0 - \frac{h}{k^2 - p^2} \sin \delta, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{ph}{k(k^2 - p^2)} \cos \delta.$$

Окончательно уравнение движения материальной точки имеет вид

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \frac{h}{k^2 - p^2} \left(\sin \delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt \right) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta).$$

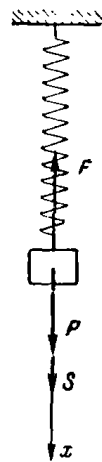


Рис. 117.

Последний член правой части уравнения движения $\frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)$ определяет вынужденные колебания, первые два слагаемых $x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt$ определяют свободные колебания, которые совершила бы материальная точка при отсутствии возмущающей силы, а слагаемое

$$-\frac{h}{k^2 - p^2} \left(\sin \delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt \right)$$

— колебания материальной точки, имеющие частоту свободных и вызванные возмущающей силой S .

Вынужденные колебания материальной точки: $x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \times \sin(pt + \delta)$ имеют круговую частоту p колебаний, равную круговой частоте p изменения возмущающей силы (т. е. период вынужденных колебаний x_2 , вызванных возмущающей силой S , равен периоду этой силы).

Амплитуда вынужденных колебаний a , т. е. величина наибольшего динамического смещения материальной точки, равна $a = \frac{h}{k^2 - p^2}$.

Статическое смещение материальной точки под действием постоянной силы H равно $\Delta_H = \frac{H}{c}$.

Коэффициентом динамичности λ называется отношение амплитуды a вынужденных колебаний к статическому смещению Δ_H , т. е. $\lambda = \frac{a}{\Delta_H}$.

Коэффициент динамичности λ определяет, во сколько раз большее динамическое смещение материальной точки, вызываемое переменной возмущающей силой $S = H \sin(pt + \delta)$, больше статического смещения Δ_H , происходящего под действием постоянной силы, равной по величине амплитуде возмущающей силы.

Коэффициентом расстройки z называется отношение круговой частоты p вынужденных колебаний материальной точки к круговой частоте k ее свободных колебаний, т. е. $z = \frac{p}{k}$.

Коэффициент динамичности λ связан с коэффициентом расстройки z зависимостью $\lambda = \frac{1}{1 - z^2}$. График этой функции изображен на рис. 118. Рассмотрим его подробнее:

1) В случае $0 < z < 1$, т. е. при $p < k$, происходят вынужденные колебания малой частоты. При этом коэффициент динамичности λ растет от единицы до бесконечности.

2) При $z \rightarrow 1$, т. е. при $p \rightarrow k$, $\lambda \rightarrow \infty$. При $p = k$, т. е. при равенстве круговых частот свободных и вынужденных колебаний, имеет место явление, называемое *резонансом*. При резонансе переменная амплитуда вынужденных колебаний неограниченно возрастает (в реальных задачах при учете силы сопротивления движению амплитуда является конечной).

3) В случае $z > 1$, т. е. при $p > k$, происходят вынужденные колебания большой частоты. При $z \rightarrow \infty$ коэффициент динамичности λ убывает до нуля.

В случае *резонанса*, т. е. при $p = k$, частное решение x_2 неоднородного уравнения $\ddot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta)$ имеет вид: $-\frac{h}{2k} t \cos(kt + \delta)$.

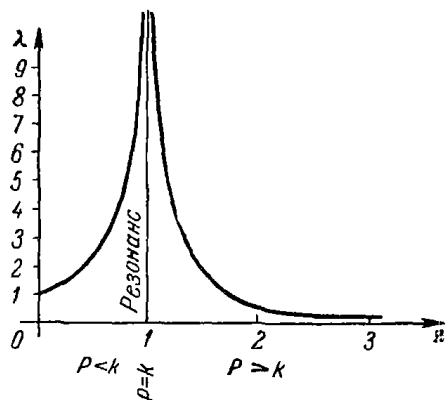


Рис. 118.

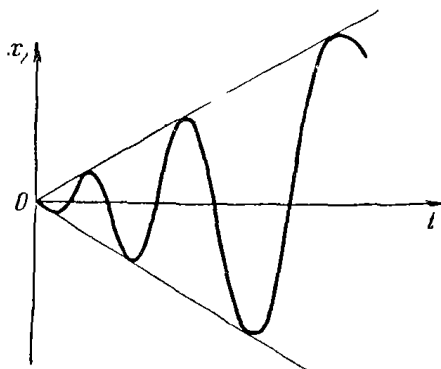


Рис. 119.

При резонансе переменная амплитуда вынужденных колебаний $a = \frac{h}{2k} t$ растет прямо пропорционально времени (рис. 119).

Уравнение движения материальной точки в случае резонанса, т. е. при $p = k$, имеет вид

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt + \frac{h}{2k^2} \cos \delta \sin kt - \frac{h}{2k} t \cos(kt + \delta).$$

Последнее слагаемое справа $-\frac{h}{2k} t \cos(kt + \delta)$ определяет вынужденные колебания, первые два слагаемых $x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt$ соответствуют свободным колебаниям, которые имели бы место при отсутствии возмущающей силы, слагаемое $\frac{h}{2k^2} \cos \delta \sin kt$ определяет колебания, вызванные возмущающей силой, имеющие круговую частоту свободных колебаний.

Сдвиг фаз между возмущающей силой и вынужденными колебаниями материальной точки (рис. 120):

1) В случае вынужденных колебаний малой частоты, т. е. при $p < k$, сдвиг фаз ϵ между возмущающей силой S и вызванными ею вынужденными колебаниями x_2 равен нулю. (Возмущающая сила и вынужденные колебания одновременно достигают наибольших, наименьших значений и обращаются в нуль.)

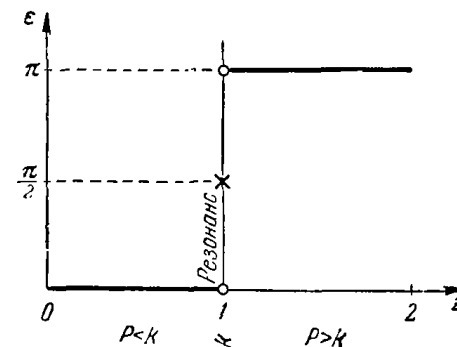


Рис. 120.

2) В случае резонанса, т. е. при $p = k$, сдвиг фаз ϵ между возмущающей силой S и вынужденными колебаниями x_2 равен $\frac{\pi}{2}$ (вынужденные колебания, вызванные возмущающей силой, отстают по фазе от этой силы на $\frac{\pi}{2}$).

3) В случае вынужденных колебаний большой частоты, т. е. при $p > k$, сдвиг фаз ϵ между возмущающей силой S и вынужденными колебаниями x_2 равен π (вынужденные колебания отстают по фазе от соответствующей возмущающей силы на π).

Рассмотрим случай, когда возмущающая сила $S(t)$ является периодической функцией времени периода T . Разложим ее в ряд Фурье:

$$S(t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos ipt + B_i \sin ipt),$$

где $p = \frac{2\pi}{T}$, $A_i = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \cos ipt dt$, $B_i = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \sin ipt dt$;

здесь $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Тогда дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки имеет вид

$$\ddot{x} + k^2x = \frac{1}{2} \frac{A_0}{m} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos ipt + B_i \sin ipt).$$

Уравнение движения материальной точки при $p \neq k$ будет: $x = x_1 + x_2$, где x_1 — общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения, x_2 — частное решение

неоднородного уравнения:

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \frac{A_0}{c} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{k^2 - i^2 p^2} \cos ipt + \frac{B_i}{k^2 - i^2 p^2} \sin ipt \right).$$

При начальных условиях вида: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$ постоянные интегрирования имеют значения:

$$C_1 = x_0 - \left(\frac{1}{2} \frac{A_0}{c} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{k^2 - i^2 p^2} \right), \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{1}{m} \frac{p}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i B_i}{k^2 - i^2 p^2}.$$

Окончательно уравнение движения материальной точки запишется в форме:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \left(\frac{1}{2} \frac{A_0}{c} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{k^2 - i^2 p^2} \right) \cos kt - \\ - \left(\frac{1}{m} \frac{p}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i B_i}{k^2 - i^2 p^2} \right) \sin kt + \frac{1}{2} \frac{A_0}{c} + \\ + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{k^2 - i^2 p^2} \cos ipt + \frac{B_i}{k^2 - i^2 p^2} \sin ipt \right).$$

Здесь $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_i}{k^2 - i^2 p^2} \cos ipt + \frac{B_i}{k^2 - i^2 p^2} \sin ipt \right)$ — вынужденные колебания материальной точки; $x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt$ — свободные колебания материальной точки, которые имели бы место в случае отсутствия возмущающей силы;

$$- \left(\frac{1}{2} \frac{A_0}{c} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{k^2 - i^2 p^2} \right) \cos kt - \left(\frac{p}{mk} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i B_i}{k^2 - i^2 p^2} \right) \sin kt$$

— колебания материальной точки, вызванные возмущающей силой и имеющие круговую частоту свободных колебаний.

При $k = ip$, где $i = 1, 2, 3, \dots$, наступают резонансные колебания i -го порядка, т. е.:

при $k = p$ — резонансные колебания первого порядка,

при $k = 2p$ — резонансные колебания второго порядка и т. д.

При одинаковом порядке коэффициентов A_i и B_i по мере повышения порядка резонансных колебаний амплитуды их убывают. Поэтому в таких случаях наиболее опасными являются резонансные колебания низших порядков.

Если возмущающая сила задана тригонометрическим полиномом, т. е. рядом Фурье, оборванным при $i = n$, то число резонансных колебаний равно n .

Влияние силы сопротивления, пропорциональной скорости, на вынужденные колебания материальной точки.

Пусть материальная точка массы m совершает колебания под действием восстанавливающей силы F , возмущающей силы S и силы сопротивления движению, пропорциональной скорости точки $R = -\beta \dot{x}$, где β — постоянный коэффициент. Ось x направлена вдоль линии действия сил F и S (рис. 121). Начало отсчета взято в положении статического равновесия материальной точки. Возмущающая сила изменяется по гармоническому закону $S = H \sin(pt + \delta)$.

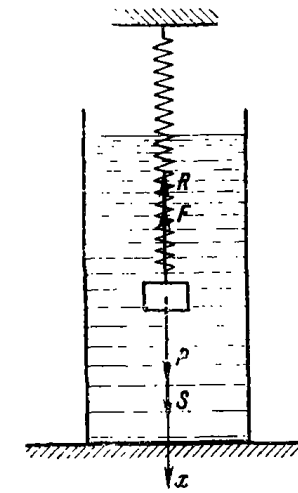


Рис. 121.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \delta),$$

$$\text{где } 2n = \frac{\beta}{m}, \quad k^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{H}{m}.$$

Тогда уравнение движения материальной точки будет: $x = x_1 + x_2$, где x_1 — общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения; x_2 — частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Решение x_1 в зависимости от соотношений $n < k$, $n > k$, $n = k$ получается в одном из рассмотренных выше видов (см стр. 76—79).

Частное решение x_2 , определяющее вынужденные колебания, равно

$$x_2 = a \sin(pt + \delta - \epsilon),$$

где

$$a = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}, \quad \epsilon = \arctg \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Введя для сокращения записи обозначение

$$A(t) = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt + \delta - \epsilon),$$

получим уравнение движения материальной точки в следующем окончательном виде:

$$x = \begin{cases} e^{-nt} (C_1 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t) + A(t) & \text{при } n < k; \\ e^{-nt} (C_1 + C_2 t) + A(t) & \text{при } n = k; \\ e^{-nt} (C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t}) + A(t) & \text{при } n > k. \end{cases}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются по заданным начальным условиям движения: при $t=0$ $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$.

Так как во всех трех случаях ($n < k$, $n = k$ и $n > k$) в выражение x_1 входит e^{-nt} , то движения x_1 быстро затухают, в то время как амплитуда вынужденных колебаний $a = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}$, круговая частота вынужденных колебаний p и сдвиг фаз $\epsilon = \arctg \frac{2np}{k^2 - p^2}$ от времени не зависят.

Круговая частота p вынужденных колебаний x_2 равна круговой частоте p возмущающей силы S , т. е. имеет место равенство периодов T вынужденных колебаний и возмущающей силы, вызывающей

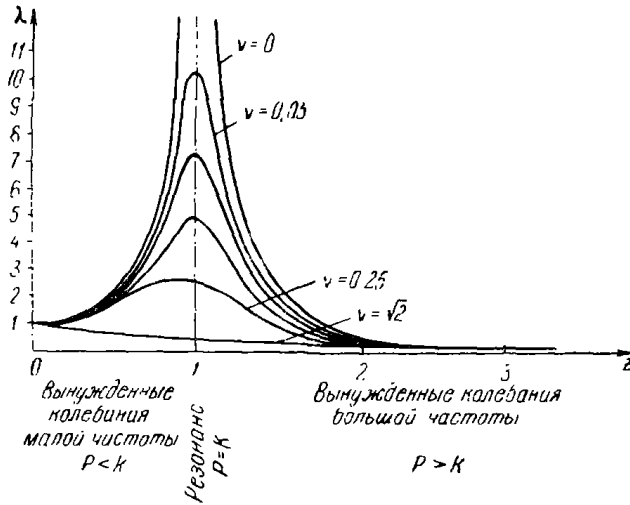


Рис. 122.

эти колебания. Это означает, что сила сопротивления движению, пропорциональная первой степени скорости, не влияет на величину круговой частоты вынужденных колебаний материальной точки.

Переменная амплитуда a вынужденных колебаний в случае отсутствия силы сопротивления неограниченно возрастала при резонансе, т. е. при $p=k$, по закону: $a = \frac{h}{2k} t$. При наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, амплитуда a постоянна и равна:

$$a_{\text{рез}} = \frac{h}{2nk}.$$

Зависимость коэффициента динамичности λ от коэффициента расстройки z имеет вид (рис. 122)

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4\nu^2 z^2}}, \quad \text{где } \nu = \frac{n}{k}.$$

Каждая из кривых, изображенных на рисунке, соответствует определенному значению ν . С увеличением ν , т. е. с увеличением силы сопротивления, коэффициент динамичности λ и, следовательно, амплитуда вынужденных колебаний уменьшаются.

В зоне вынужденных колебаний большой частоты, далеко за резонансом (например, при $z > 3$), все кривые, независимо от величины ν , почти сливаются. Следовательно, в этой зоне при вычислении амплитуды вынужденных колебаний силой сопротивления можно пренебречь.

Максимум коэффициента динамичности λ имеет место не при резонансе; он несколько смещен в зону $z < 1$:

$$z_{\text{max}} = \sqrt{1 - 2\nu^2}. \quad \text{При этом } \lambda_{\text{max}} = \frac{1}{2\nu \sqrt{1 - \nu^2}}.$$

При $\nu \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ функция $\lambda = f(z)$ монотонно убывает.

Сдвиг фаз $\epsilon = \arctg \frac{2\nu z}{1 - z^2}$ между возмущающей силой и вынужденными колебаниями остается при резонансе

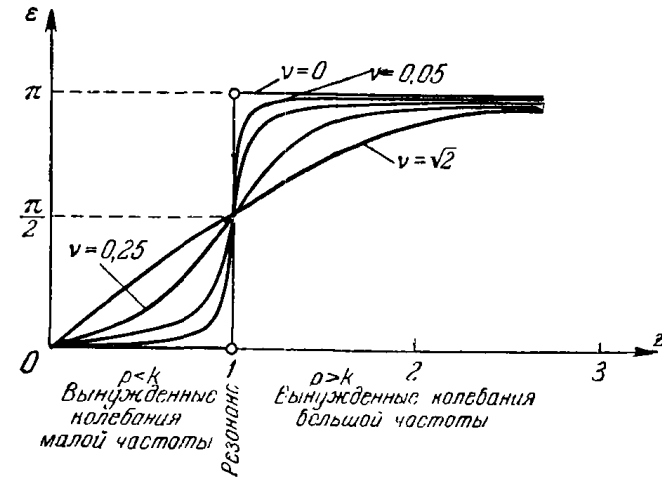


Рис. 123.

неизменным: $\epsilon = \frac{\pi}{2}$. Сдвиг фаз с возрастанием ν , т. е. силы сопротивления, увеличивается в зоне вынужденных колебаний малой частоты и убывает в зоне вынужденных колебаний большой частоты (рис. 123).

Рассмотрим случай, когда возмущающая сила $S(t)$ является периодической функцией времени периода T . Разложим ее в ряд Фурье:

$$S(t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos ipt + B_i \sin ipt),$$

где

$$p = \frac{2\pi}{T}, \quad A_i = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \cos ipt \, dt, \quad B_i = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \sin ipt \, dt;$$

здесь $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

В этом случае дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = \frac{1}{2} \frac{A_0}{m} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos ipt + B_i \sin ipt).$$

Тогда уравнение движения материальной точки будет: $x = x_1 + x_2$, где x_1 — общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения; x_2 — частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Колебания x_1 во всех трех случаях: $n < k$, $n = k$, $n > k$ затухают (см. стр. 76—79).

Вынужденные колебания, определяемые частным решением x_2 , происходят по закону:

$$x_2 = \frac{1}{2} \frac{A_0}{c} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ipt + b_i \sin ipt),$$

где

$$a_i = \frac{1}{m} \frac{A_i(k^2 - i^2p^2) - 2nipB_i}{(k^2 - i^2p^2)^2 + 4n^2i^2p^2},$$

$$b_i = \frac{1}{m} \frac{B_i(k^2 - i^2p^2) + 2nipA_i}{(k^2 - i^2p^2)^2 + 4n^2i^2p^2}.$$

При $k = ip$ наступают резонансные колебания i -го порядка. При этом

$$a_i = -\frac{1}{m} \frac{B_i}{2inp}, \quad b_i = \frac{1}{m} \frac{A_i}{2inp}.$$

Решение задач на вынужденные колебания материальной точки рекомендуется проводить в следующем порядке:

- 1) выбрать систему отсчета, взяв начало отсчета в положении статического равновесия материальной точки;
- 2) записать начальные условия движения материальной точки;
- 3) изобразить на рисунке силы, приложенные к материальной точке;
- 4) составить дифференциальное уравнение движения в проекции на соответствующую ось;

5) проинтегрировать дифференциальное уравнение движения, используя начальные условия для определения постоянных интегрирования.

Материальную точку следует всегда изображать в промежуточном положении, соответствующем ее положительной координате, и предположить, что точка движется в сторону возрастания координаты.

При составлении дифференциального уравнения движения следует воспользоваться условием статического равновесия материальной точки. Это часто приводит к уничтожению ряда постоянных слагаемых в правой части дифференциального уравнения движения.

Если составленное дифференциальное уравнение движения тождественно одному из выше записанных уравнений, то, не интегрируя это уравнение, можно сразу получить результат по указанным формулам.

Проводя решение задачи в общем виде, следует определить численные значения коэффициентов дифференциального уравнения, так как вид частного решения уравнения зависит от соотношения между круговыми частотами вынужденных и свободных колебаний, т. е. между p и k .

Так, интегрируя дифференциальное уравнение движения $\ddot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta)$, надо:

а) при отсутствии резонанса, т. е. при $p \neq k$, записать частное решение x_2 в виде $x_2 = A \sin(pt + \delta) + B \cos(pt + \delta)$ (очевидно, что $B = 0$);

б) при наличии резонанса, т. е. при $p = k$, искать частное решение x_2 в виде $x_2 = At \sin(pt + \delta) + Bt \cos(pt + \delta)$.

Интегрируя дифференциальное уравнение движения $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta)$, независимо от соотношения между p и k , надо искать частное решение x_2 в виде

$$x_2 = A \sin(pt + \delta) + B \cos(pt + \delta).$$

При решении задач, в которых требуется определить условие, обеспечивающее попадание материальной точки в резонанс, не следует интегрировать дифференциальное уравнение движения. Для этого достаточно, воспользовавшись составленным дифференциальным уравнением движения, определить круговые частоты свободных и вынужденных колебаний и приравнять их друг другу.

Задача 252. На рисунке изображена схема прибора для измерения давлений. К ползуну A веса $P = 196$ г прикреплена стрелка B , отмечающая показания на неподвижной шкале C . Ползун A , прикрепленный к концу пружины D , перемещается по горизонтальной идеально гладкой плоскости. К ползуну приложена горизонтальная сила $S = H \sin pt$, где $H = 1,6$ кг, $p = 60$ сек⁻¹. Коэффициент упругости пружины равен $c = 2$ кг/см. В начальный момент ползун находился в покое в положении статического равновесия.

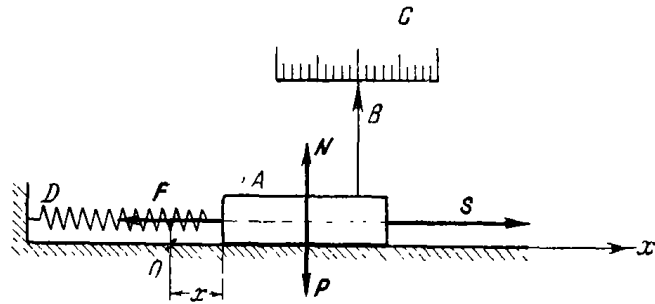
Определить: уравнение движения стрелки B в случае отсутствия силы сопротивления, коэффициент динамичности и коэффициент расстройки; уравнение движения стрелки B при наличии силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости ползуна: $R = \beta v$, где $\beta = 25,6 \text{ кг} \cdot \text{сек}/\text{см}$.

Решение. Направим ось x параллельно оси пружины по горизонтали направо, взяв начало отсчета в положении ползуна, соответствующем недеформированной пружине.

Начальные условия движения ползуна имеют вид:

$$\text{при } t=0 \quad x=0, \quad \dot{x}=0.$$

Изобразим ползун смещенным из положения равновесия вправо на x . При этом пружина растянется на $\Delta = x$.



К задаче 252.

К ползуну приложены следующие силы: P — вес ползуна, N — нормальная сила реакции горизонтальной плоскости, сила S , F — упругая сила растянутой пружины, проекция которой на ось x равна $F_x = -cx$.

Составим дифференциальное уравнение движения ползуна в проекции на ось x :

$$m\ddot{x} = S_x + F_x,$$

или

$$\ddot{x} = \frac{Hg}{P} \sin pt - \frac{cg}{P} x,$$

откуда

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt, \quad (1)$$

где $k = \sqrt{\frac{cg}{P}}$, $h = \frac{Hg}{P}$. В данном случае $k = 100 \text{ сек}^{-1}$, $h = 8000 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$.

Уравнение (1) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение уравнения равно сумме x_1 — общего решения соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \quad (2)$$

и x_2 — частного решения уравнения (1), т. е.

$$x = x_1 + x_2. \quad (3)$$

Составим характеристическое уравнение: $r^2 + k^2 = 0$, откуда $r_{1,2} = \pm ki$. Следовательно,

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (4)$$

Для определения вынужденных колебаний, т. е. частного решения x_2 , следует предварительно выяснить соотношение между круговыми частотами свободных и вынужденных колебаний. Так как $k = 100 \text{ сек}^{-1}$, а $p = 60 \text{ сек}^{-1}$, то $p < k$, т. е. имеют место вынужденные колебания малой частоты. При этом частное решение x_2 надо искать в виде

$$x_2 = A \sin pt + B \cos pt, \quad (5)$$

где A и B — коэффициенты, подлежащие определению. Подставив x_2 в дифференциальное уравнение (1) и приравняв коэффициенты, стоящие в левой и правой частях уравнения при соответствующих тригонометрических функциях, находим:

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2}, \quad B = 0.$$

Следовательно, частное решение, записанное в формуле (5), принимает вид

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (6)$$

Воспользовавшись формулами (4) и (6), запишем общее решение по формуле (3):

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (7)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt. \quad (8)$$

Подставив в уравнение (7) $t=0$, $x=0$, а в уравнение (8) — $t=0$, $\dot{x}=0$, находим: $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{p}{k} \frac{h}{k^2 - p^2}$.

Итак, уравнение движения ползуна и, следовательно, стрелки B имеет вид

$$x = -\frac{p}{k} \frac{h}{k^2 - p^2} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Подставив численные значения $p = 60 \text{ сек}^{-1}$, $k = 100 \text{ сек}^{-1}$, $h = 8000 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$, получаем:

$$x = (-0,75 \sin 100t + 1,25 \sin 60t) \text{ см.} \quad (9)$$

Первое слагаемое соответствует колебаниям ползуна со стрелкой с частотой свободных колебаний, вызванным действием возмущающей силы S , второе слагаемое определяет вынужденные колебания.

(Следует обратить внимание на ошибку, которую часто совершают при вычислении постоянных интегрирования C_1 и C_2 , подставляя начальные условия движения в общее решение (4) однородного уравнения вместо того, чтобы подставить их в общее решение (7).)

Определив по формуле (9) отклонение стрелки, а, следовательно, ползуна A и конца пружины D , можно найти величину упругой силы F , умножив смещение x на коэффициент упругости пружины c . Так как $c = 2 \text{ кг/см}$, то

$$F = (-1,5 \sin 100t + 2,5 \sin 60t) \text{ кг.}$$

При наличии силы сопротивления движению, пропорциональной скорости ползуна, колебания с частотой свободных колебаний затухают и стрелка прибора регистрирует чисто вынужденные колебания: $x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt$. Данный прибор предназначен для определения величины силы $S = H \sin pt$. Получив показание стрелки x_2 на шкале, т. е. величину смещения конца пружины, можно вычислить величину силы S_1 , указываемую прибором, умножив x_2 на коэффициент упругости c пружины

$$S_1 = cx_2 = \frac{hc}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Погрешность прибора ΔS определяется разностью между S_1 и S , т. е.

$$\Delta S = S_1 - S = \frac{hc}{k^2 - p^2} \sin pt - H \sin pt.$$

Учитывая, что $hc = c \frac{H}{m} = Hk^2$, находим:

$$\Delta S = \frac{Hp^2}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Относительная погрешность прибора будет

$$\eta = \frac{\Delta S}{S} = \frac{p^2}{k^2 - p^2}.$$

Относительная погрешность прибора незначительна при условии:

$$\frac{p^2}{k^2 - p^2} \approx 0. \text{ Это имеет место, если } k \gg p. \text{ Учитывая, что } k = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

приходим к выводу о необходимости установки пружины с большим коэффициентом жесткости c .

Для нахождения значения коэффициента динамичности λ воспользуемся формулой $\lambda = a/\Delta H$. Так как $a = 1,25 \text{ см}$ и $\Delta H = H/c = 1,6/2 = 0,8 \text{ см}$, то $\lambda = 1,56$. Это означает, что амплитуда вынужденных колебаний более чем в полтора раза превышает статическое смещение. Соответствующее значение коэффициента расстройки z будет $z = p/k = 60/100 = 0,6$.

Решим эту задачу с учетом силы сопротивления движению $R = \beta v$, где $\beta = 25,6 \text{ кг} \cdot \text{сек/см}$, v — скорость ползуна A .

К силам, ранее приложенным к ползуну, добавляется сила сопротивления движению R , направленная в сторону, противоположную скорости движения. Считая, что ползун A движется в сторону возрастания абсциссы x , направляем силу R по горизонтали влево. Следовательно,

$$m\ddot{x} = S_x + F_x + R_x$$

или

$$\ddot{x} = \frac{Hg}{p} \sin pt - \frac{cg}{p} x - \frac{\beta g}{p} \dot{x},$$

откуда

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin pt, \quad (10)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{cg}{p}} = 100 \text{ сек}^{-1}, \quad n = \frac{\beta g}{2p} = 64 \text{ сек}^{-1}, \quad h = \frac{Hg}{p} = 8000 \text{ см/сек}^2, \\ p = 60 \text{ сек}^{-1}.$$

Итак, $n < k$ и $p < k$.

Общее решение дифференциального уравнения (10) имеет вид:

$$x = x_1 + x_2, \quad (11)$$

где x_1 — общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\dot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0, \quad (12)$$

а x_2 — частное решение неоднородного уравнения.

Характеристическое уравнение, соответствующее (12), имеет вид $r^2 + 2nr + k^2 = 0$, откуда $r = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$. Так как $n < k$, то

корни получаются комплексными: $r_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}$. Находим общее решение однородного уравнения (12):

$$x_1 = e^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t - C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t). \quad (13)$$

Учитывая, что $p < k$, ищем частное решение x_2 в виде

$$x_2 = A \sin pt + B \cos pt. \quad (14)$$

Вычислив \dot{x}_2 , \ddot{x}_2 , подставив их вместе с x_2 в дифференциальное уравнение (10), приравняв коэффициенты, стоящие в левой и правой частях уравнения при синусе и косинусе, находим:

$$\begin{aligned} A(k^2 - p^2) - 2Bnp &= h, \\ B(k^2 - p^2) + 2Anp &= 0. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений, определим:

$$A = \frac{h(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}, \quad B = -\frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}$$

и, внося значения A и B в формулу (14), имеем:

$$x_2 = \frac{h(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2} \sin pt - \frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2} \cos pt. \quad (15)$$

Теперь, воспользовавшись формулами (13) и (15), можно общее решение дифференциального уравнения (10) записать в виде

$$\begin{aligned} x = e^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t) + \\ + \frac{h(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2} \sin pt - \frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2} \cos pt. \quad (16) \end{aligned}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 , вычислим:

$$\begin{aligned} \dot{x} = -ne^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t) + \\ + \sqrt{k^2 - n^2} e^{-nt} (-C_1 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t) + \\ + \frac{hp(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2} \cos pt + \frac{2np^2h}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2} \sin pt. \quad (17) \end{aligned}$$

Подставив в уравнение (16) $t=0$, $x=0$, а в уравнение (17) $t=0$, $\dot{x}=0$, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 - \frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}, \\ 0 &= -nC_1 + C_2 \sqrt{k^2 - n^2} + \frac{hp(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$C_1 = \frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}, \quad C_2 = -\frac{hp(k^2 - p^2 - 2n^2)}{[(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2] \sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Подставив эти значения C_1 и C_2 в уравнение (16), находим искомого уравнение движения ползуна A и, следовательно, стрелки B :

$$\begin{aligned} x = \frac{hpe^{-nt}}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2} (2n \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + \\ + \frac{2n^2 + p^2 - k^2}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t) + \\ + \frac{h}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2} [(k^2 - p^2) \sin pt - 2np \cos pt]. \quad (18) \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2} = b \sin \alpha, \quad \frac{(2n^2 + p^2 - k^2)ph}{[(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2] \sqrt{k^2 - n^2}} = b \cos \alpha$$

и

$$\frac{h(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2} = a \cos \varepsilon, \quad \frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2} = a \sin \varepsilon.$$

Теперь уравнение (18) принимает вид

$$x = be^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \alpha) + a \sin(pt - \varepsilon), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} b = \frac{ph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2} \sqrt{4n^2 + \frac{(2n^2 + p^2 - k^2)^2}{k^2 - n^2}}, \quad \alpha = \arctg \frac{2n \sqrt{k^2 - n^2}}{2n^2 + p^2 - k^2}, \\ a = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}, \quad \varepsilon = \arctg \frac{2np}{k^2 - p^2}. \end{aligned}$$

При численных значениях $n = 64 \text{ сек}^{-1}$, $k = 100 \text{ сек}^{-1}$, $p = 60 \text{ сек}^{-1}$, $h = 8000 \text{ см/сек}^2$, получим: $b = 0,63 \text{ см}$, $\alpha = 1,74 \text{ рад}$, $a = 0,8 \text{ см}$, $\varepsilon = 0,87 \text{ рад}$.

Следовательно, уравнение движения ползуна A и стрелки B имеет вид

$$x = [0,63e^{-64t} \sin(76,8t + 1,74) + 0,8 \sin(60t - 0,87)] \text{ см}. \quad (20)$$

Первое слагаемое уравнения (20) определяет колебания стрелки с частотой свободных колебаний, которые быстро затухают благодаря наличию множителя e^{-64t} .

Второе слагаемое уравнения (20) определяет вынужденные колебания стрелки B .

Вторые слагаемые уравнений (9) и (20) соответственно определяют вынужденные колебания стрелки B при отсутствии и при наличии силы сопротивления движению. Из сопоставления полученных результатов следует, что сила сопротивления движению на круговую частоту вынужденных колебаний не влияет. Как в формуле (9), так и в формуле (20) $p = 60 \text{ сек}^{-1}$; амплитуда вынужденных колебаний при наличии силы сопротивления стала меньше. Она уменьшилась от $1,25 \text{ см}$ до $0,8 \text{ см}$; сила сопротивления движению создала сдвиг фаз между возмущающей силой и вынужденными колебаниями: вынужденные колебания отстают по фазе от возмущающей силы на $\varepsilon = 0,87 \text{ рад}$.

Задача 253. Определить уравнение вынужденных колебаний стрелки прибора, описанного в предыдущей задаче, если возмущающая сила S изменяется согласно уравнению $S = H \sin pt$, где $H = 1,6 \text{ кг}$, $p = 100 \text{ сек}^{-1}$. Решить задачу в двух вариантах: при отсутствии силы сопротивления движению; при наличии силы сопротивления движению $R = \beta v$, где $\beta = 25,6 \text{ кг} \cdot \text{сек}/\text{см}$, v — скорость ползуна A со стрелкой B .

Решение. Воспользуемся дифференциальным уравнением (1) предыдущей задачи:

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt, \quad (1)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{cg}{P}} = \sqrt{\frac{2000 \cdot 980}{196}} = 100 \text{ сек}^{-1}, \quad p = 100 \text{ сек}^{-1},$$

$$h = \frac{Hg}{P} = \frac{1600 \cdot 980}{196} = 8000 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}.$$

Так как $p = k = 100 \text{ сек}^{-1}$, то имеет место явление резонанса. В случае резонанса, когда $p = k$, частное решение дифференциального уравнения (1) надо искать в виде

$$x_2 = At \sin pt + Bt \cos pt. \quad (1')$$

Для определения коэффициентов A и B подставим x_2 в уравнение (1). Для этого вычислим:

$$\dot{x}_2 = A \sin pt + Apt \cos pt + B \cos pt - Bpt \sin pt,$$

$$\ddot{x}_2 = 2Ap \cos pt - Ap^2 \sin pt - 2Bp \sin pt - Bp^2 t \cos pt.$$

Приравняв коэффициенты в левой и правой частях уравнения (1) при синусе и косинусе и используя, что $p = k$, получим $-2Bp = h$; $2Ap = 0$.

Решив эту систему уравнений, имеем:

$$A = 0, \quad B = -\frac{h}{2p}.$$

Теперь уравнение (1'), определяющее вынужденные колебания стрелки B , принимает вид

$$x_2 = -\frac{h}{2p} t \cos pt.$$

Подсчитав численные значения и введя сдвиг фаз, находим:

$$x_2 = 40t \sin \left(100t - \frac{\pi}{2} \right) \text{ см}. \quad (2)$$

Переменная амплитуда вынужденных колебаний при резонансе $a = 40t \text{ см}$ растет прямо пропорционально времени, что представляет угрозу сохранности прибора и той машины, на которой прибор смонтирован (так как в действительности имеется, хотя бы небольшая, сила сопротивления движению, то уравнение вынужденных колебаний оказывается иным. См. ниже второй вариант решения задачи).

Круговая частота вынужденных колебаний равна круговой частоте возмущающей силы: $p = 100 \text{ сек}^{-1}$. Вынужденные колебания отстают по фазе от возмущающей силы на $\frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим эту задачу в случае учета силы сопротивления движению $R = \beta v$, где $\beta = 25,6 \text{ кг} \cdot \text{сек}/\text{см}$.

При этом можно воспользоваться дифференциальным уравнением (10) предыдущей задачи:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \sin pt, \quad (3)$$

где

$$p = k = 100 \text{ сек}^{-1}, \quad n = \frac{\beta g}{2P} = 64 \text{ сек}^{-1}, \quad h = 8000 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}.$$

Для нахождения вынужденных колебаний стрелки прибора ищем частное решение в виде

$$x_2 = A \sin pt + B \cos pt. \quad (4)$$

Для определения A и B вычислим \dot{x}_2 и \ddot{x}_2 :

$$\dot{x}_2 = Ap \cos pt - Bp \sin pt; \quad \ddot{x}_2 = -Ap^2 \sin pt - Bp^2 \cos pt.$$

Подставив эти значения в уравнение (3) и приравняв коэффициенты в левой и правой частях уравнения при синусе и косинусе, находим:

$$A(k^2 - p^2) - 2Bnp = h; \quad B(k^2 - p^2) + 2Anp = 0.$$

Решив эту систему уравнений, имеем:

$$A = \frac{h(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}, \quad B = -\frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}.$$

Подставив эти значения A и B в уравнение (4), получим:

$$x_2 = \frac{h(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \sin pt - \frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \cos pt. \quad (5)$$

Для определения амплитуды a и сдвига фаз ϵ между вынужденными колебаниями и возмущающей силой введем обозначения:

$$\frac{h(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} = a \cos \epsilon, \quad \frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} = a \sin \epsilon. \quad (6)$$

Теперь уравнение (5) примет вид

$$x_2 = a \sin(pt - \epsilon), \quad (7)$$

где a и ϵ определяются из системы уравнений (6):

$$a = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}, \quad \epsilon = \arctg \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

В данном случае при резонансе $p = k$. Следовательно, $a = \frac{h}{2np}$, $\epsilon = \frac{\pi}{2}$ и уравнение (7) принимает вид

$$x_2 = \frac{h}{2np} \sin \left(pt - \frac{\pi}{2} \right).$$

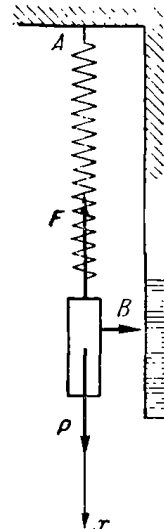
При численных значениях: $n = 64 \text{ сек}^{-1}$, $p = 100 \text{ сек}^{-1}$, $h = 8000 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$, находим:

$$x_2 = 0,625 \sin \left(100t - \frac{\pi}{2} \right) \text{ см.} \quad (8)$$

Из сопоставления формул (2) и (8) следует, что в то время, как при отсутствии силы сопротивления переменная амплитуда вынужденных колебаний стрелки B при резонансе росла прямо пропорционально времени: $a = 40t \text{ см}$, при наличии силы сопротивления движению $R = 25,6 \text{ н кг}$, амплитуда оказывается величиной постоянной, равной $0,625 \text{ см}$.

На величины круговой частоты вынужденных колебаний и сдвига фаз сила сопротивления при резонансе не влияет.

Задача 254. Для регистрации вибраций железнодорожного вагона к потолку вагона подвешена пружина, коэффициент жесткости которой равен $c = 10 \text{ г/см}$. К концу пружины подвешен груз веса $P = 98 \text{ г}$ со стрелкой B (см. рисунок). При вертикальных колебаниях вагона, т. е. точки A , начинаются колебания груза по отношению к вагону, которые регистрируются движением стрелки вдоль шкалы, изображенной на стене вагона. Написать уравнение движения стрелки B , определить коэффициент динамичности и коэффициент расстройки, если вагон совершает колебания согласно уравнению $\xi = a \sin pt$, где $a = 0,5 \text{ см}$, $p = 16\pi \text{ сек}^{-1}$. В начальный момент груз находился в покое в положении статического равновесия. Силой сопротивления движению груза пренебречь.



К задаче 254.

Решение. Введем ось x , связанную с неподвижной средой. Начало отсчета выберем в положении статического равновесия груза. Ось x направим по вертикали вниз. Запишем начальные условия движения груза, отнесенные к неподвижной оси x :

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_0 = 0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = 0.$$

Изобразим груз в промежуточном положении, смещенном из начала отсчета на x вниз. Если вагон неподвижен, то в этом положении груза пружина была бы растянута на $\Delta_{ст} + x$. Однако при этом имеет место смещение вагона и, следовательно, точки A на ξ вниз, поэтому удлинение Δ пружины оказывается меньше на величину ξ , т. е. $\Delta_x = \Delta_{ст} + x - \xi$.

К грузу приложены две силы: его вес P и упругая сила F пружины, направленная, в связи с растяжением пружины, по вертикали вверх, причем

$$F_x = -c\Delta_x = -c(\Delta_{ст} + x - \xi). \quad (1)$$

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x : $m\ddot{x} = P + F_x$. С учетом формулы (1) запишем:

$$m\ddot{x} = P - c\Delta_{ст} - cx + c\xi.$$

Так как в положении статического равновесия $x = \ddot{x} = \xi = 0$, то $P - c\Delta_{ст} = 0$ и дифференциальное уравнение движения принимает вид

$$m\ddot{x} = -cx + c\xi.$$

По условию $\xi = a \sin pt$. Поэтому

$$m\ddot{x} + cx = ca \sin pt. \quad (2)$$

Мы получили дифференциальное уравнение вынужденных колебаний груза при наличии возмущающей силы $ca \sin pt = c\xi$. Таким образом, колебания вагона и, следовательно, точки A привеса пружины оказались источником возмущающей силы, приложенной к грузу. Перепишем дифференциальное уравнение (2) в виде

$$\ddot{x} + k^2x = h \sin pt, \quad (3)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{cg}{P}} = 10 \text{ сек}^{-1}, \quad p = 16\pi \text{ сек}^{-1}, \quad h = \frac{cag}{P} = 50 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}.$$

Так как $p > k$, то имеют место вынужденные колебания большой частоты. Проинтегрировав дифференциальное уравнение (3), мы получим уравнение движения груза по отношению к неподвижной оси x , не связанной с вагоном: $x = x_1 + x_2$, где x_1 — колебания груза, определяемые общим решением соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \quad (4)$$

а x_2 — вынужденные колебания груза, определяемые частным решением дифференциального уравнения (3).

Решив уравнение (4), находим:

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (5)$$

Частное решение x_2 , ввиду отсутствия резонанса, ищем в виде

$$x_2 = A \sin pt + B \cos pt, \quad (6)$$

где A и B подлежат последующему определению. Вычислив \dot{x}_2 , \ddot{x}_2 , подставим x_2 , \dot{x}_2 , \ddot{x}_2 в уравнение (3). Приравняв затем коэффициенты, стоящие в левой и правой частях уравнения (3) при синусе и косинусе, найдем:

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2}, \quad B = 0.$$

Следовательно, уравнение (6) принимает вид

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (7)$$

Запишем общее решение дифференциального уравнения (3): $x = x_1 + x_2$. Воспользовавшись формулами (5) и (7), находим:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (8)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt - C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt. \quad (9)$$

Подставив в уравнение (8) $t = 0$, $x = x_0 = 0$, а в уравнение (9) $t = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$, определим:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{p}{k} \frac{h}{k^2 - p^2}.$$

Теперь уравнение движения стрелки принимает вид

$$x = -\frac{p}{k} \frac{h}{k^2 - p^2} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (10)$$

Используя численные данные, получим:

$$x = (0,1 \sin 10t - 0,02 \sin 16\pi t) \text{ см.} \quad (11)$$

Первые слагаемые в уравнениях (10) и (11) определяют колебания груза со стрелкой, имеющие частоту свободных, а вторые слагаемые — вынужденные колебания.

При наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости груза, колебания, имеющие частоту свободных, быстро затухают. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только вынужденные колебания груза со стрелкой:

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Так как шкала, по которой регистрируются колебания стрелки, прикреплена к стене вагона и, следовательно, совершает колебания вместе с вагоном, то стрелка отмечает колебания груза по отношению к вагону, равные разности x_2 и ξ , т. е. $x_r = x_2 - \xi$.

Получим:

$$x_r = x_2 - \xi = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt - a \sin pt = \frac{h - ak^2 + ap^2}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Учитывая, что $h = \frac{ca}{m} = ak^2$, находим:

$$x_r = \frac{ap^2}{k^2 - p^2} \sin pt = \frac{p^2}{k^2 - p^2} \xi. \quad (12)$$

(Этот результат можно получить с помощью уравнения динамики относительного движения материальной точки. См. в следующем параграфе задачу 259.)

Данный прибор предназначен для регистрации колебаний вагона, т. е. ξ . Стрелка же отмечает x_r . Для того чтобы колебания стрелки возможно точнее воспроизводили колебания вагона, необходимо, чтобы дробь $\frac{p^2}{k^2 - p^2}$ была близка к единице. Это имеет место при $p \gg k$.

Учитывая, что $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$, следует для данного прибора подбирать весьма слабую пружину с малым коэффициентом упругости c . (Чем слабее пружина, тем меньше реагирует груз на колебания точки подвеса пружины, оставаясь как бы неподвижным по отношению к колеблющемуся вагону.)

В рассматриваемой задаче

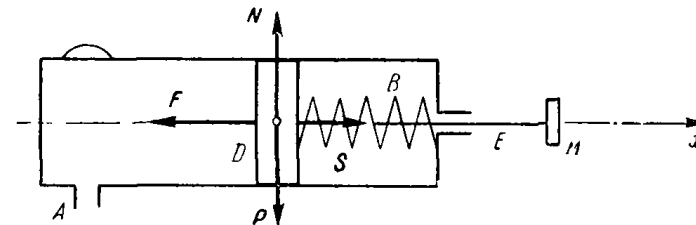
$$\frac{p^2}{k^2 - p^2} = -1,04.$$

Аналогично данному прибору конструируются вертикальные сейсмографы — приборы для регистрации землетрясений.

Для нахождения значения коэффициента динамичности λ воспользуемся формулой $\lambda = a/\Delta_H$. Так как $a = 0,02 \text{ см}$ и $\Delta_H = 0,5 \text{ см}$, то $\lambda = 0,04$. Это означает, что амплитуда вынужденных колебаний в 25 раз меньше статического смещения. Соответствующее значение коэффициента расстройки z будет

$$z = \frac{p}{k} = \frac{16\pi}{10} = 5,03.$$

Задача 255. Пневматический отбойный молоток приводится в движение сжатым воздухом, поступающим в корпус молотка через шланг А.



К задаче 255.

Давление воздуха, приложенное к поршню D молотка, изменяется, согласно уравнению

$$S = H_0 + H_1 \cos pt + H_3 \cos 3pt,$$

где p , H_0 , H_1 и H_3 — постоянные величины. В корпус молотка вмонтирована пружина B с коэффициентом жесткости c . Пружина упру-

растягивается левым концом в поршень, а правым — в корпус молотка. Поршень D соединен штоком E с бойком M . Написать уравнение вынужденных колебаний поршня при работе молотка вхолостую. Массой штока E , бойка M и пружины B , а также силой сопротивления движению пренебречь.

Решение. Направим ось x по горизонтали направо, взяв начало отсчета в положении статического равновесия поршня под действием силы H_0 и упругой силы пружины F_{ct} .

В этом положении пружина сжата на Δ_{ct} силой H_0 . При этом возникает упругая сила пружины $F_{ct} = c\Delta_{ct}$. Обе силы направлены по горизонтали: H_0 — направо, а F_{ct} — налево. Запишем условия равновесия поршня в проекции на ось x :

$$H_0 - c\Delta_{ct} = 0. \quad (1)$$

Изобразим поршень смещенным из нуля направо на x . При этом пружина сжата на $\Delta_x = \Delta_{ct} + x$ и возникшая в ней упругая сила F направлена по горизонтали налево. Ее проекция на ось x равна

$$F_x = -c\Delta_x = -c(\Delta_{ct} + x). \quad (2)$$

Кроме того, к поршню приложены следующие силы: P — его вес, N — нормальная сила реакции корпуса, S — сила давления сжатого воздуха.

Составим дифференциальное уравнение движения поршня D в проекции на ось x :

$$m\ddot{x} = S_x + F_x.$$

Учитывая формулу (2) и заданный закон изменения силы S , находим:

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = H_0 + H_1 \cos pt + H_2 \cos 3pt - c\Delta_{ct} - cx.$$

Принимая во внимание формулу (1), запишем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний поршня в виде

$$\ddot{x} + k^2x = h_1 \cos pt + h_2 \cos 3pt, \quad (3)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{cg}{P}}, \quad h_1 = \frac{H_1g}{P}, \quad h_2 = \frac{H_2g}{P}.$$

Для определения закона вынужденных колебаний поршня следует найти частное решение уравнения (3). Принимая во внимание правую часть этого уравнения, ищем частное решение x_2 в виде

$$x_2 = A_1 \sin pt + B_1 \cos pt + A_2 \sin 3pt + B_2 \cos 3pt, \quad (4)$$

где A_1, B_1, A_2 и B_2 — постоянные коэффициенты, подлежащие определению. Для отыскания A_1, B_1, A_2 и B_2 вычислим:

$$\dot{x}_2 = A_1 p \cos pt - B_1 p \sin pt + 3pA_2 \cos 3pt - 3pB_2 \sin 3pt,$$

$$\ddot{x}_2 = -A_1 p^2 \sin pt - B_1 p^2 \cos pt - 9A_2 p^2 \sin 3pt - 9B_2 p^2 \cos 3pt.$$

Подставив $x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2$ в дифференциальное уравнение (3) и приравняв коэффициенты, стоящие в левой и правой частях уравнения при синусе и косинусе, находим:

$$A_1(k^2 - p^2) = 0, \quad B_1(k^2 - p^2) = h_1, \quad A_2(k^2 - 9p^2) = 0, \\ B_2(k^2 - 9p^2) = h_2.$$

Решив эту систему уравнений, имеем:

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \frac{h_1}{k^2 - p^2}, \quad A_2 = 0, \quad B_2 = \frac{h_2}{k^2 - 9p^2}.$$

Подставив значения A_1, B_1, A_2 и B_2 в уравнение (4), находим искомое уравнение вынужденных колебаний поршня:

$$x_2 = \frac{h_1}{k^2 - p^2} \cos pt + \frac{h_2}{k^2 - 9p^2} \cos 3pt.$$

В случае $k = p$ наступают резонансные колебания первого порядка. В случае $k = 3p$ наступают резонансные колебания третьего порядка.

Так как $k = \sqrt{\frac{cg}{P}}$, то подбор коэффициента упругости пружины c следует производить так, чтобы обеспечить выполнение неравенств $k \neq p$ и $k \neq 3p$. При этом поршень не будет попадать в резонанс.

Задача 256. Груз веса P подвешен к концу пружины, коэффициент жесткости которой равен c . К грузу приложена возмущающая сила $S = f(t)$, где $f(t)$ — однозначная, непрерывная, дифференцируемая функция.

Найти уравнение движения груза, применив метод вариации произвольных постоянных. Ось x направлена вдоль оси пружины вниз, начало отсчета взято в положении статического равновесия груза. Начальные условия движения груза:

$$\text{при } t=0 \quad x = \dot{x}_0, \quad \dot{x} = \ddot{x}_0.$$

Силой сопротивления движению пренебречь.

Решение. В положении статического равновесия груза, под действием его веса P , пружина растянута на Δ_{ct} вниз. При этом возникает упругая сила F_{ct} , направленная вертикально вверх, $F_{ct} = c\Delta_{ct}$. Так как в рассматриваемом положении $P = F_{ct}$, то

$$P - c\Delta_{ct} = 0. \quad (1)$$

Изобразим груз смещенным из нуля на x вниз. При этом пружина растянута на $\Delta_x = \Delta_{ст} + x$, и упругая сила пружины F направлена вертикально вверх. Ее проекция на ось x равна

$$F_x = -c\Delta_x = -c(\Delta_{ст} + x). \quad (2)$$

Кроме силы F , к грузу приложены следующие силы: P — вес груза, S — возмущающая сила, проекция которой на ось x равна $S_x = f(t)$. Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x :

$$m\ddot{x} = P + S_x + F_x.$$

При $S_x = f(t)$ и значении F_x , записанном в формуле (2), находим:

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = P + f(t) - c\Delta_{ст} - cx.$$

Приняв во внимание формулу (1), запишем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний груза в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{g}{P} f(t), \quad (3)$$

где $k^2 = \frac{cg}{P}$.

Общее решение уравнения (3) имеет вид $x = x_1 + x_2$, где x_1 — общее решение соответствующего однородного уравнения, т. е.

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (4)$$

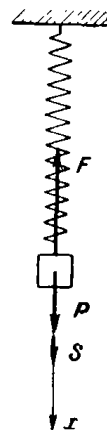
а x_2 — частное решение неоднородного уравнения. Однако при произвольном законе изменения возмущающей силы $S = f(t)$ отыскание частного решения дифференциального уравнения (3) подбором подчас представляет значительные трудности.

Применим для решения этой задачи метод вариации произвольных постоянных. Ищем решение уравнения (3) в виде

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (4^a)$$

аналогичном общему решению однородного уравнения. Однако теперь будем считать C_1 и C_2 некоторыми функциями времени, подлежащими последующему определению. Так как вместо одной неизвестной функции мы ввели две, то имеем право наложить на C_1 и C_2 дополнительное условие. Вычислим предварительно \dot{x} , воспользовавшись формулой (4). Получим:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \dot{C}_1 \cos kt - \dot{C}_2 \sin kt. \quad (5)$$



К задаче 256.

В качестве упомянутого дополнительного условия для упрощения выкладок возьмем:

$$\dot{C}_1 \cos kt + \dot{C}_2 \sin kt = 0. \quad (6)$$

Тогда формула (5) примет вид

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

Определив \dot{x} , вычислим:

$$\ddot{x} = -C_1 k^2 \cos kt - C_2 k^2 \sin kt - \dot{C}_1 k \sin kt + \dot{C}_2 k \cos kt. \quad (7)$$

Подставив x из формулы (4^a) и \ddot{x} из формулы (7) в дифференциальное уравнение (3), получим второе соотношение, связывающее функции C_1 и C_2 :

$$-\dot{C}_1 k \sin kt + \dot{C}_2 k \cos kt = \frac{g}{P} f(t). \quad (8)$$

Решив систему (6) и (8) относительно \dot{C}_1 и \dot{C}_2 , находим:

$$\dot{C}_1 = -\frac{g}{kP} f(t) \sin kt, \quad \dot{C}_2 = \frac{g}{kP} f(t) \cos kt,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{g}{kP} \int_0^t f(\tau) \sin k\tau d\tau + \tilde{C}_1, \quad C_2 = \frac{g}{kP} \int_0^t f(\tau) \cos k\tau d\tau + \tilde{C}_2.$$

Подставив эти значения функций C_1 и C_2 в уравнение (4), получим:

$$x = \tilde{C}_1 \cos kt + \tilde{C}_2 \sin kt - \frac{g}{kP} \cos kt \int_0^t f(\tau) \sin k\tau d\tau + \frac{g}{kP} \sin kt \int_0^t f(\tau) \cos k\tau d\tau,$$

или

$$x = \tilde{C}_1 \cos kt + \tilde{C}_2 \sin kt + \frac{g}{kP} \int_0^t f(\tau) \sin k(t-\tau) d\tau. \quad (9)$$

Для определения постоянных интегрирования \tilde{C}_1 и \tilde{C}_2 вычислим:

$$\dot{x} = -\tilde{C}_1 k \sin kt + \tilde{C}_2 k \cos kt + \frac{g}{P} \int_0^t f(\tau) \cos k(t-\tau) d\tau. \quad (10)$$

Подставив в (9): $t=0$, $x=x_0$, а в (10) $t=0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$, имеем:

$$\tilde{C}_1 = x_0, \quad \tilde{C}_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}.$$

Внося значения постоянных интегрирования \tilde{C}_1 и \tilde{C}_2 в уравнение (9), получим искомое уравнение движения груза:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt + \frac{g}{kP} \int_0^t f(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau. \quad (11)$$

Первые два слагаемых формулы (11): $x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt$ определяют свободные колебания груза, которые он совершал бы при отсутствии возмущающей силы $S = f(t)$.

Последнее слагаемое уравнения (11) $\frac{g}{kP} \int_0^t f(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau$ определяет колебания груза с частотой свободных, вызванные возмущающей силой, а также вынужденные движения груза под действием возмущающей силы $S = f(t)$.

Уравнением (11) можно широко пользоваться при решении задач динамики на вынужденные колебания материальной точки при произвольном законе изменения возмущающей силы $S = f(t)$. Как мы уже указывали, им целесообразно пользоваться в тех случаях, когда трудно подобрать частное решение дифференциального уравнения $\ddot{x} + k^2 x = \frac{g}{P} f(t)$.

§ 5. Относительное движение

Законы динамики сформулированы по отношению к так называемым «неподвижным» осям координат. Система отсчета считается неподвижной, если ее ускорением (вычисленным относительно другой системы отсчета) по сравнению с ускорением данной материальной точки можно пренебречь.

Уравнение динамики материальной точки, отнесенное к «неподвижной» системе отсчета, имеет вид

$$m\omega = \sum_{k=1}^n F_k.$$

Для применения уравнений динамики к материальной точке, движущейся в подвижной системе отсчета, следует внести в них поправки в виде дополнительных слагаемых — сил инерции, которые добавляются к силам F_k , приложенным к материальной точке.

Силы инерции равны по модулю произведениям массы материальной точки на соответствующие ускорения и направлены в стороны, противоположные этим ускорениям.

Определение относительного движения материальной точки по заданному переносному движению, массе точки и приложенным к ней силам.

Пусть материальная точка массы m движется по отношению к подвижной системе отсчета, связанной со средой, совершающей переносное движение. Даны силы, приложенные к материальной точке, и уравнения переносного движения подвижной среды. Требуется определить относительное движение материальной точки.

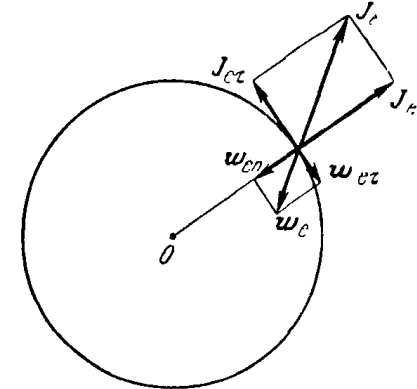


Рис. 124.

Зная переносное движение подвижной среды, можно, минуя определение абсолютного движения, непосредственно найти уравнения относительного движения материальной точки.

Относительное движение материальной точки происходит по таким же законам, как движение абсолютное под действием всех сил F_k , приложенных к точке, а также сил инерции в переносном движении J_e и кориолисовой силы инерции J_c :

$$m\omega_r = \sum_{k=1}^n F_k + J_e + J_c,$$

где

$$J_e = -m\omega_e,$$

$$J_c = -m\omega_c = -2m\omega \times v_r.$$

По модулю

$$J_e = m\omega_e, \quad J_c = 2m\omega v_r \sin(\widehat{\omega, v_r}).$$

Если переносное движение представляет собой вращение вокруг неподвижной оси (рис. 124), то сила инерции в переносном движении J_e является суммой центробежной J_{en} и вращательной $J_{e\tau}$ сил инерции:

$$J_e = J_{en} + J_{e\tau}$$

причем

$$J_{en} = -m\omega_{en}, \quad J_{e\tau} = -m\omega_{e\tau}.$$

По модулю

$$J_{en} = m\hbar\omega^2, \quad J_{e\tau} = m\hbar\epsilon,$$

где h — расстояние материальной точки до неподвижной оси, ω и ϵ — угловая скорость и угловое ускорение подвижной среды, вращающейся вокруг неподвижной оси.

В этом случае относительное движение материальной точки изучается с помощью уравнения

$$m\omega_r = \sum_{k=1}^n F_k + J_{en} + J_{e\epsilon} + J_c.$$

Если переносное движение подвижной среды является поступательным, то кориолисова сила инерции J_c равна нулю. Тогда относительное движение материальной точки изучается с помощью уравнения

$$m\omega_r = \sum_{k=1}^n F_k + J_e.$$

Если переносное движение подвижной среды является равномерным и прямолинейным, то сила инерции в переносном движении J_e и кориолисова сила инерции J_c равны нулю. В этом случае относительное движение материальной точки изучается с помощью уравнения, тождественного ее уравнению абсолютного движения

$$m\omega_r = \sum_{k=1}^n F_k.$$

Отсюда следует, что никакие механические явления, происходящие в подвижной среде, не могут обнаружить ее прямолинейного и равномерного движения (*принцип относительности классической механики*).

Таким образом, «абсолютное» движение материальной точки может рассматриваться не только по отношению к «неподвижным» осям координат, но и по отношению к любой системе отсчета, движущейся равномерно и прямолинейно по отношению к «неподвижным» осям координат. Эти системы отсчета называются *инерциальными* (галилеевыми осями).

Механические движения по отношению к инерциальным системам отсчета являются динамически равноценными.

В случае относительного покоя материальной точки по отношению к подвижной среде, совершающей переносное движение, относительное ускорение ω_r , ускорение Кориолиса ω_c и кориолисова сила инерции J_c равны нулю.

Уравнение относительного покоя материальной точки имеет вид

$$\sum_{k=1}^n F_k + J_e = 0.$$

Определение переносного движения среды по заданному относительному движению материальной точки, ее массе и силам, приложенным к этой точке.

Пусть материальная точка массы m движется по отношению к подвижной системе отсчета, связанной со средой, совершающей переносное движение. Даны силы F_k , приложенные к материальной точке, и уравнение относительного движения материальной точки. Требуется определить переносное движение подвижной среды.

Зная относительное движение материальной точки, можно непосредственно найти уравнения переносного движения подвижной среды.

Переносное движение точки подвижной среды, через которую проходит данная материальная точка, происходит как абсолютное движение материальной точки под действием всех сил F_k , приложенных к этой точке, а также силы инерции в относительном движении J_r и кориолисовой силы инерции J_c :

$$m\omega_e = \sum_{k=1}^n F_k + J_r + J_c,$$

где $J_r = -m\omega_r$, $J_c = -m\omega_c = -2m\omega \times v_r$. По модулю

$$J_r = m\omega_r, \quad J_c = 2m\omega v_r \sin(\widehat{\omega, v_r}).$$

Если переносное движение подвижной среды является поступательным, то кориолисова сила инерции равна нулю.

При этом переносное движение изучается с помощью уравнения

$$m\omega_e = \sum_{k=1}^n F_k + J_r.$$

Задачи динамики относительного движения материальной точки рекомендуется решать в следующем порядке:

1) Разложить «абсолютное» движение материальной точки на относительное и переносное; выбрать неподвижную систему отсчета и подвижную систему отсчета, связанную с подвижной средой, совершающей переносное движение;

2) записать начальные условия относительного движения материальной точки;

3) изобразить на рисунке силы F_k , приложенные к материальной точке;

4) определить ускорение материальной точки в переносном движении ω_e , ускорение Кориолиса ω_c , найти силу инерции в переносном движении J_r , кориолисову силу инерции J_c . Добавить эти силы инерции к силам F_k , приложенным к материальной точке;

5) составить дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки в проекциях на подвижные оси координат;

б) проинтегрировать составленные дифференциальные уравнения, определив постоянные интегрирования с помощью начальных условий движения;

7) определить искомые величины.

При решении прямой задачи, т. е. при определении сил по заданному движению, пункты 2) и б) следует опустить.

Материальную точку следует изображать в промежуточном положении, соответствующем положительным координатам этой точки, и предположить, что точка движется в сторону возрастания этих координат.

При относительном криволинейном движении материальной точки удобно пользоваться дифференциальными уравнениями движения в проекциях на оси натурального триэдра.

Задача 257. Груз A веса P спускается вниз по боковой грани призмы B , расположенной под углом α к горизонту. Призма движется по горизонтальной плоскости направо с ускорением ω .

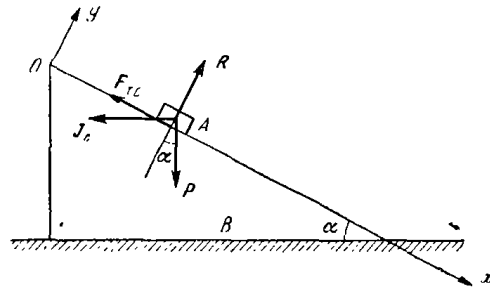
Определить ускорение груза по отношению к призме и давление груза на боковую грань призмы, если коэффициент трения скольжения груза о боковую грань призмы равен f .

Решение. Направим ось x вдоль боковой грани призмы вниз. Движение груза A является сложным. Разложим его на относительное движение по отношению к боковой грани призмы и на переносное движение вместе с призмой. К грузу A приложены следующие силы: P — вес груза, R — нормальная сила реакции боковой грани призмы, $F_{T,c}$ — сила трения скольжения, направленная в сторону, противоположную движению груза, т. е. по боковой грани вверх.

Для решения задачи методом динамики относительного движения материальной точки надо ко всем силам, приложенным к материальной точке, добавить силу инерции J_e в переносном движении и кориолисову силу инерции J_c .

Так как переносное движение является поступательным, то ускорение Кориолиса равно нулю и, следовательно, кориолисова сила инерции J_c равна также нулю. Сила инерции J_e в переносном движении направлена в сторону, противоположную ускорению ω , т. е. по горизонтали влево и равна по модулю

$$J_e = \frac{P}{g} \omega.$$



К задаче 257.

Для определения ускорения груза ω_r относительно боковой грани призмы составим дифференциальное уравнение относительного движения груза в проекции на ось x :

$$m\ddot{x}_r = P \sin \alpha - F_{T,c} - J_e \cos \alpha.$$

Учитывая, что $F_{T,c} = fR$, а $J_e = \frac{P}{g} \omega$, находим:

$$\ddot{x}_r = g \sin \alpha - \frac{gfR}{P} - \omega \cos \alpha. \quad (1)$$

Для определения нормальной реакции R боковой грани призмы составим дифференциальное уравнение относительного движения груза в проекции на ось y :

$$m\ddot{y}_r = R - P \cos \alpha - J_e \sin \alpha.$$

Так как ускорение груза в относительном движении ω_r направлено перпендикулярно к оси y , то $\ddot{y}_r = 0$. Заметив, что $J_e = \frac{P}{g} \omega$, находим:

$$R = P \left(\cos \alpha + \frac{\omega}{g} \sin \alpha \right). \quad (2)$$

Искомое давление груза на боковую грань призмы направлено противоположно нормальной реакции R и равно ей по модулю. Подставив в уравнение (1) значение R из формулы (2), получим:

$$\ddot{x}_r = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) - \omega(\cos \alpha + f \sin \alpha). \quad (3)$$

Воспользовавшись уравнением (3), можно определить значение угла α , при котором груз будет находиться в относительном покое. Считая, что $\ddot{x}_r = 0$, имеем:

$$g(\sin \alpha - f \cos \alpha) - \omega(\cos \alpha + f \sin \alpha) = 0,$$

откуда

$$\alpha = \arctg \frac{(f + \frac{\omega}{g})}{1 - f \frac{\omega}{g}} = \varphi + \arctg \frac{\omega}{g},$$

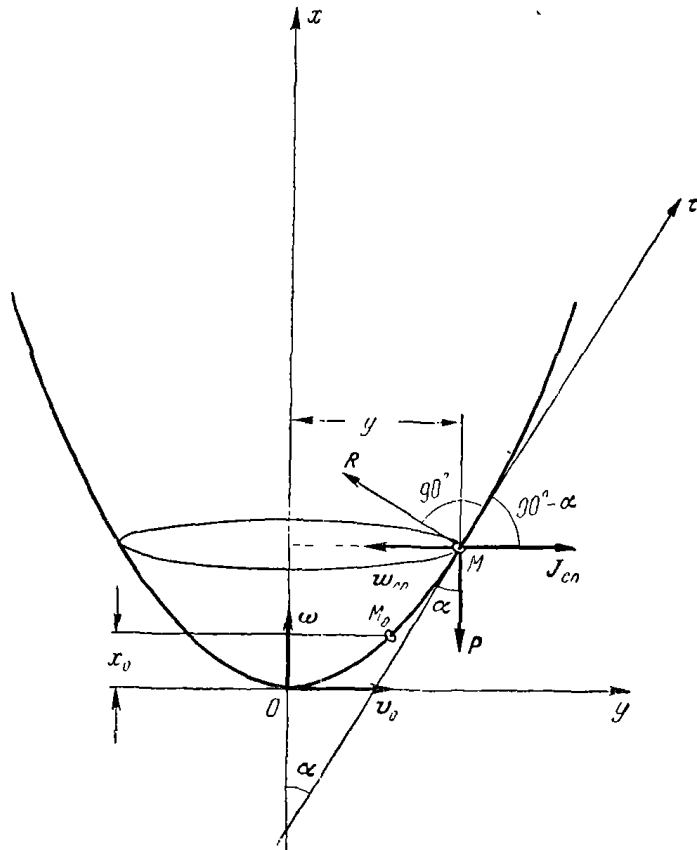
где φ — угол трения.

Задача 258. Проволока, изогнутая в виде параболы, уравнение которой $y^2 = 2px$, вращается вокруг вертикальной оси x с постоянной угловой скоростью ω . На проволоку надето кольцо, которое может двигаться вдоль проволоки.

Определить: 1) скорость кольца по отношению к проволоке, если в начальный момент оно находилось в покое в положении M_0 с абсциссой x_0 , 2) в какую точку поднимется кольцо, если в начальный момент оно находилось в начале координат и ему была сообщена

по горизонтали направо скорость v_0 . Трением скольжения кольца о проволоку пренебречь.

Решение. Оси $x\tau$ вращаются вместе с проволокой. Кольцо совершает сложное движение, которое можно разложить на относительное по отношению к проволоке и переносное вращательное вместе с проволокой вокруг вертикальной оси x .



К задаче 258.

Изобразим кольцо в промежуточном положении $M(x, y)$ в предположении, что оно движется вдоль проволоки вверх. Обозначим вес кольца P .

К кольцу приложены следующие силы: P — вес кольца, R — нормальная сила реакции проволоки. Добавим силы инерции в переносном движении J_c и кориолисову силу инерции J_{cn} .

При равномерном вращении проволоки с угловой скоростью ω ее угловое ускорение ϵ равно нулю. Следовательно, переносное вращательное ускорение кольца ω_{en} и вращательная сила инерции

в переносном движении J_{en} равны нулю. Переносное центростремительное ускорение ω_{en} кольца направлено по горизонтали влево, причем

$$\omega_{en} = y\omega^2.$$

Поэтому центробежная сила инерции в переносном движении J_{cn} направлена по горизонтали направо и по модулю равна

$$J_{cn} = \frac{P}{g} y\omega^2.$$

Ускорение Кориолиса $\omega_c = 2\omega \times v_r$ направлено перпендикулярно к плоскости рисунка от нас (v_r , согласно сделанному предположению, направлено по касательной к проволоке в точке M вверх). Следовательно, кориолисова сила инерции J_c направлена перпендикулярно к плоскости рисунка на нас и по модулю равна

$$J_c = 2 \frac{P}{g} \omega v_r \sin \alpha$$

(угол α образован положительными направлениями осей x и τ).

Составим дифференциальное уравнение относительного движения кольца в проекции на касательную τ к проволоке в данной точке M :

$$\frac{P}{g} \omega_{r\tau} = J_{cn} \sin \alpha - P \cos \alpha$$

(силы R и J_c проектируются на ось τ в точку). Учитывая, что $J_{cn} = \frac{P}{g} y\omega^2$, а $\omega_{r\tau} = \frac{dv_r}{dt}$, находим:

$$\frac{dv_r}{dt} = \omega^2 y \sin \alpha - g \cos \alpha. \quad (1)$$

Так как $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$, то нетрудно видеть, что $\sin \alpha = \frac{dy}{ds}$, а $\cos \alpha = \frac{dx}{ds}$. Кроме того,

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v_r \frac{dv_r}{ds}.$$

Теперь уравнение (1) принимает вид

$$v_r dv_r = \omega^2 y dy - g dx.$$

Проинтегрировав это уравнение, находим:

$$v_r^2 = \omega^2 y^2 - 2gx + C.$$

Так как, согласно условию, $y^2 = 2px$, то

$$v_r^2 = 2(p\omega^2 - g)x + C. \quad (2)$$

Определим скорость кольца v_r в относительном движении, зная, что в начальный момент кольцо находилось в покое в положении M_0 с абсциссой x_0 .

Подставив в уравнение (2) $x = x_0$, $v_r = 0$, получаем, что $C = -2(p\omega^2 - g)x_0$. Следовательно, уравнение (2) принимает вид

$$v_r^2 = 2(p\omega^2 - g)(x - x_0),$$

откуда

$$v_r = \sqrt{2(p\omega^2 - g)(x - x_0)}. \quad (3)$$

Исследовав формулу (3), можно определить направление движения кольца.

При движении кольца вдоль проволоки вверх $x > x_0$. Так как подкоренное выражение в формуле (3) положительно, то $p\omega^2 > g$, т. е. угловая скорость вращения проволоки должна удовлетворять условию $\omega^2 > \frac{g}{p}$, где p — параметр параболы $y^2 = 2px$.

При движении кольца вдоль проволоки вниз $x < x_0$. Следовательно, $p\omega^2 < g$, откуда $\omega^2 < \frac{g}{p}$.

При относительном покое кольца, т. е. при $v_r = 0$, получим, что $p\omega^2 = g$, откуда следует, что кольцо будет находиться на проволоке в относительном покое, если угловая скорость вращения проволоки удовлетворяет условию $\omega^2 = \frac{g}{p}$.

Определим, в какую точку проволоки должно подняться кольцо, если в начальный момент оно находилось в начале координат и ему была сообщена по горизонтали направо скорость v_0 .

Подставив в уравнение (2) $x = 0$, $v_r = v_0$, получим, что $C = v_0^2$. Следовательно, уравнение (2) принимает вид

$$v_r^2 = v_0^2 + 2(p\omega^2 - g)x,$$

откуда

$$v_r = \sqrt{v_0^2 + 2(p\omega^2 - g)x}. \quad (4)$$

В наивысшей точке подъема кольца по проволоке $v_r = 0$; поэтому

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{2(g - p\omega^2)}. \quad (5)$$

Учитывая, что $y^2 = 2px$, находим:

$$y_{\max} = \sqrt{2px_{\max}} = \sqrt{\frac{pv_0^2}{g - p\omega^2}}.$$

Так как $x_{\max} > 0$, то из формулы (5) имеем: $g - p\omega^2 > 0$, т. е. $\omega^2 < \frac{g}{p}$. Если же $\omega^2 > \frac{g}{p}$, то v_r в нуль не обратится, и кольцо будет неограниченно подниматься по проволоке вверх.

В случае $\omega^2 = \frac{g}{p}$ из формулы (4) следует, что $v_r = v_0$, т. е. кольцо будет двигаться по проволоке с постоянной по модулю скоростью v_0 .

Задача 259. Определить движение по отношению к шкале стрелки B прибора для регистрации колебаний железнодорожного вагона, рассмотренного в задаче 254. Использовать данные этой задачи.

Решение. Направим по вертикали вниз ось x , связанную с железнодорожным вагоном. Начало отсчета возьмем в положении статического равновесия груза, т. е. при растяжении пружины на $\Delta_{\text{ст}} = \frac{P}{c}$.

Груз совершает сложное движение, которое можно разложить на относительное движение по отношению к вагону, т. е. к точке A , и переносное движение вместе с вагоном согласно уравнению $x_c = \xi = a \sin pt$.

Запишем начальные условия относительного движения груза:

$$\text{при } t = 0 \quad x_r = x_{r0} = 0, \quad \dot{x}_r = \dot{x}_{r0} = 0.$$

Для определения уравнения относительного движения груза используем уравнение динамики относительного движения материальной точки:

$$m\ddot{x}_r = \sum_{k=1}^n F_k + J_c + J_c. \quad (1)$$

К задаче 259.

Изобразим груз смещенным из начала отсчета на x_r вниз. При этом пружина оказывается растянутой на $\Delta_x = \Delta_{\text{ст}} + x_r$, и упругая сила пружины F направлена по вертикали вверх. Ее проекция на ось x равна

$$F_x = -c\Delta_x = -c(\Delta_{\text{ст}} + x_r). \quad (2)$$

Кроме веса груза P и упругой силы пружины F , надо к грузу, в соответствии с уравнением (1), приложить силы инерции J_e и J_c .

Зная уравнение переносного движения вагона: $x_c = \xi = a \sin pt$, вычислим: $\ddot{x}_c = -ap^2 \sin pt$. Сила инерции в переносном движении имеет вид: $J_e = -m\ddot{x}_c$. Ее проекция на ось x равна

$$J_{ex} = \frac{P}{g} ap^2 \sin pt. \quad (3)$$

Так как переносное движение вагона является поступательным, то ускорение Кориолиса ω_c и, следовательно, кориолисова сила инерции J_c равны нулю.

Запишем уравнение (1) в проекции на ось x :

$$m\ddot{x}_r = P - F_x - J_{ex}$$

Используя формулы (2) и (3), находим:

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_r = P - c\Delta_{ct} - cx_r - \frac{P}{g}ap^2 \sin pt, \quad (4)$$

причем

$$P - c\Delta_{ct} = 0. \quad (5)$$

Используя формулу (5), запишем дифференциальное уравнение относительного движения груза (4) в виде

$$\ddot{x}_r + k^2x_r = ap^2 \sin pt, \quad (6)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{cg}{P}}.$$

Общее решение x_r этого дифференциального уравнения имеет вид

$$x_r = x_{r1} + x_{r2}, \quad (7)$$

где x_{r1} — общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{x}_r + k^2x_r = 0,$$

т. е.

$$x_{r1} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (8)$$

а x_{r2} — частное решение уравнения (6). Так как

$$k = \sqrt{\frac{cg}{P}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 980}{98}} = 10 \text{ сек}^{-1}, \text{ а } p = 16\pi \text{ сек}^{-1}, \text{ то } p \neq k,$$

и, следовательно, резонанса нет.

Ввиду отсутствия резонанса, ищем частное решение x_{r2} в виде

$$x_{r2} = A \sin pt + B \cos pt. \quad (9)$$

Для определения A и B вычислим:

$$\ddot{x}_{r2} = -Ap^2 \sin pt - Bp^2 \cos pt.$$

Подставив x_{r2} и \ddot{x}_{r2} в дифференциальное уравнение относительного движения груза (6), приравняв соответствующие коэффициенты в левой и правой частях этого уравнения при синусе и косинусе, получим:

$$A = \frac{ap^2}{k^2 - p^2}, \quad B = 0.$$

Следовательно, частное решение (9), соответствующее вынужденным колебаниям груза в относительном движении имеет вид

$$x_{r2} = \frac{ap^2}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (10)$$

Это уравнение вынужденных колебаний груза в относительном движении было нами найдено в задаче 254 (формула 12) более длинным путем. Применив уравнение динамики относительного движения материальной точки, мы непосредственно получили уравнение относительного движения x_{r2} , минуя определение его абсолютного движения. В решении же задачи 254 было предварительно определено абсолютное движение x_2 груза в формуле (7) и затем вычислены координаты точки в относительном движении по формуле (12): $x_r = x_2 - \xi$. Если требуется определить уравнение абсолютного движения груза, то более целесообразным является метод решения задачи 254. Если же требуется найти уравнение относительного движения точки, то предпочтительнее пользоваться уравнением динамики относительного движения, примененным в этой задаче.

Находим общее решение дифференциального уравнения (6) по формуле (7), используя уравнения (8) и (10):

$$x_r = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{ap^2}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (11)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим:

$$\dot{x}_r = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{ap^3}{k^2 - p^2} \cos pt. \quad (12)$$

Внося в (11) $t=0$ $x_r=0$, а в (12) $t=0$ $\dot{x}_r=0$, получаем, что

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{p}{k} \frac{ap^2}{k^2 - p^2}.$$

Подставив эти значения C_1 и C_2 в формулу (11), получим уравнение относительного движения груза со стрелкой

$$x_r = -\frac{p}{k} \frac{ap^2}{k^2 - p^2} \sin kt + \frac{ap^2}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (13)$$

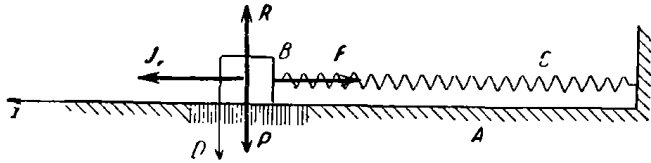
Используя численные данные: $k = 10 \text{ сек}^{-1}$, $p = 16\pi \text{ сек}^{-1}$, $a = 0,5 \text{ см}$, находим:

$$x_r = (-2,64 \sin 10t + 0,52 \sin 16\pi t) \text{ см}. \quad (14)$$

Первые слагаемые в уравнениях (13) и (14) определяют колебания в относительном движении груза со стрелкой, с круговой частотой свободных колебаний, а вторые слагаемые — их вынужденные колебания в относительном движении.

Задача 260. Для регистрации колебаний станка на горизонтальной идеально гладкой плоскости его станины A установлен груз B веса P , соединенный со станиной пружиной C (см. рисунок). Коэффициент жесткости пружины равен c . При колебаниях станины A груз приходит в движение относительно станины. Стрелка D , прикрепленная к грузу B , регистрирует горизонтальные колебания станины по шкале, изображенной на станине.

Определить амплитуду колебаний станины, если стрелка D движется относительно станины, согласно уравнению $\xi = a \cos pt$, где ξ отсчитывается по горизонтали налево от положения конца недеформированной пружины. В начальный момент станина и груз находились в покое.



К задаче 260.

Решение. Направим неподвижную ось x по горизонтали налево, взяв начало отсчета в положении груза при недеформированной пружине. Движение груза B по отношению к неподвижной оси x является сложным. Разложим его на относительное по отношению к станине A и переносное (в данном случае поступательное) вместе со станиной.

Задача сводится к определению переносного движения по заданному относительному движению груза.

Изобразим груз в положении, смещенном относительно станины на $x_r = \xi$.

Начальные условия переносного движения груза имеют вид:

$$\text{при } t=0 \quad x_e = 0, \quad \dot{x}_e = 0.$$

К грузу приложены следующие силы: P — вес груза, R — нормальная сила реакции горизонтальной плоскости, F — упругая сила пружины, растянутой на $\Delta_x = x_r = \xi$, при этом направлена по горизонтали направо. Ее проекция на ось x равна

$$F_x = -c\xi = -ca \cos pt. \quad (1)$$

Для определения переносного движения груза надо ко всем силам, приложенным к грузу, добавить силу инерции в относительном движении J_r и кориолисову силу инерции J_c . Так как ξ определяет закон относительного движения груза, т. е. $x_r = \xi = a \cos pt$, то

$\ddot{x}_r = -ap^2 \cdot \cos pt$. Сила инерции в относительном движении $J_r = -m\ddot{x}_r$. Ее проекция на ось x равна

$$J_{rx} = -m\ddot{x}_r = \frac{P}{g} ap^2 \cos pt. \quad (2)$$

Так как переносное движение станины является поступательным, то ускорение Кориолиса и, следовательно, кориолисова сила инерции J_c равны нулю.

Составим дифференциальное уравнение переносного движения груза в проекции на ось x :

$$m\ddot{x}_e = F_x + J_{rx}.$$

Учитывая формулы (1) и (2), представим это уравнение так:

$$\frac{P}{g} \ddot{x}_e = -ca \cos pt - \frac{P}{g} ap^2 \cos pt,$$

или

$$\ddot{x}_e = a(p^2 - k^2) \cos pt, \quad (3)$$

где обозначено:

$$k^2 = \frac{cg}{P}.$$

Интегрирование дифференциального уравнения (3) не представляет затруднений:

$$\dot{x}_e = \frac{a(p^2 - k^2)}{p} \sin pt + C_1.$$

Так как при $t=0$ $\dot{x}_e = 0$, то $C_1 = 0$.

Следовательно,

$$\dot{x}_e = \frac{a(k^2 - p^2)}{p^2} \sin pt.$$

Принтегрировав это дифференциальное уравнение, находим:

$$x_e = \frac{a(p^2 - k^2)}{p^2} \cos pt + C_2.$$

Используя, что при $t=0$ $x_e = 0$, найдем, что $C_2 = -\frac{a(k^2 - p^2)}{p^2}$. Следовательно, переносное движение станины происходит согласно уравнению

$$x_e = \frac{a(p^2 - k^2)}{p^2} (1 - \cos pt),$$

т. е. станина совершает гармонические колебания круговой частоты p . Искомая амплитуда колебаний станины равна $\frac{a(p^2 - k^2)}{p^2}$.

Для того чтобы регистрация колебаний станины совершалась возможно точнее, надо, чтобы амплитуда колебаний ξ груза по отно-

шению к станине и амплитуда колебаний x_e станины по отношению к неподвижной оси x были примерно равны, т. е. $a \approx \frac{a(p^2 - k^2)}{p^2}$,

или $\frac{p^2 - k^2}{p^2} \approx 1$. Для выполнения этого условия надо принять $k \ll p$.

Учитывая, что $k = \sqrt{\frac{cg}{P}}$, замечаем, что следует выбирать пружину с малым коэффициентом жесткости c .

Задача 261. Исследовать свободное падение материальной точки вблизи земной поверхности.

Решение. Начало неподвижной системы координатных осей $\xi\eta\zeta$ возьмем в центре Земли, направив ось ξ на отдаленные «неподвижные» звезды. Начало подвижной системы осей координат, связанных с Землей, выберем в начальном положении материальной точки M_0 . Направление подвижных осей x, y и z уточним в последующем изложении.

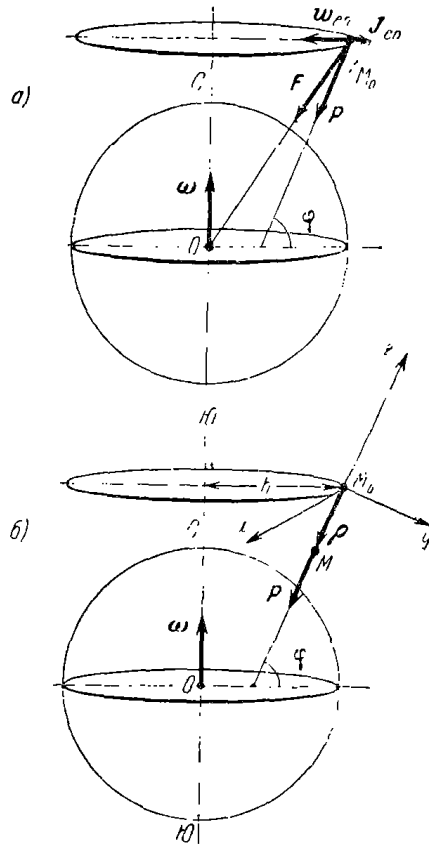
Свободное падение материальной точки вблизи земной поверхности можно разложить на простейшие движения: относительное движение по отношению к Земле и переносное суточное вращательное движение Земли вокруг своей оси с угловой скоростью

$$\omega = 0,00007 \text{ сек}^{-1}.$$

Свободным называется падение материальной точки на Землю из состояния относительного покоя, т. е. при следующих начальных условиях:

$$\dot{x} = \dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0 = 0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0 = 0 \quad (\text{при } t = 0).$$

К материальной точке приложена сила F притяжения к Земле, направленная к центру Земли: $F = \frac{kmM}{r^2}$, где m — масса материальной точки, M — масса Земли, r — расстояние материальной точки до центра Земли, k — гравитационная постоянная.



К задаче 261.

Нам предстоит исследовать свободное падение материальной точки на Землю, т. е. ее относительное движение. Запишем уравнение динамики относительного движения материальной точки:

$$m\mathbf{w}_r = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c.$$

В данной задаче $\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k$ является силой притяжения F к Земле, поэтому

$$m\mathbf{w}_r = F + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c. \quad (1)$$

Определим силу инерции материальной точки в переносном вращательном движении (J_c) и кориолисову силу инерции (J_e).

При вращении вокруг неподвижной оси сила инерции материальной точки в переносном движении J_e равна сумме переносной центробежной J_{en} и переносной вращательной силы инерции J_{er} , т. е.

$$\mathbf{J}_c = \mathbf{J}_{en} + \mathbf{J}_{er}. \quad (2)$$

Так как вращение Земли происходит с постоянной угловой скоростью $\omega = 0,00007 \text{ сек}^{-1}$, то угловое ускорение ϵ Земли равно нулю. Следовательно, $\mathbf{w}_{er} = h\epsilon = 0$ и переносная вращательная сила инерции также равна нулю:

$$\mathbf{J}_{er} = 0. \quad (3)$$

Центростремительное ускорение материальной точки w_{en} направлено по перпендикуляру, опущенному на ось вращения, а его модуль $w_{en} = h\omega^2$. Следовательно, переносная центробежная сила инерции J_{en} , направленная противоположно w_{en} , т. е. от оси вращения Земли (см. рис. а), равна по модулю:

$$J_{en} = mh\omega^2.$$

Модуль J_{en} составляет примерно лишь 1/290 величины силы притяжения F . Сумма сил F и J_{en} называется силой тяжести P ; таким образом,

$$\mathbf{P} = F + \mathbf{J}_{en}. \quad (4)$$

Отношение модуля силы тяжести P к массе материальной точки называется ускорением силы тяжести: $g = \frac{P}{m}$, т. е.

$$\mathbf{P} = mg. \quad (5)$$

Направление линии действия силы тяжести P называется вертикальным направлением в данной точке земной поверхности. Угол φ , образуемый вертикальным направлением с экваториальной плоскостью, называется географической широтой в данной точке земной поверх-

ности (см. рис. *a*). Горизонтальной называется плоскость, перпендикулярная к вертикальному направлению в данной точке.

Ускорение Кориолиса \boldsymbol{w}_c определяется по формуле $\boldsymbol{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$. Следовательно, кориолисова сила инерции:

$$\boldsymbol{J}_c = -m\boldsymbol{w}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r. \quad (6)$$

Выше было указано, что начало подвижных осей координат x, y, z , связанных с Землей, выбрано в начальном положении материальной точки M_0 . Направим ось z по вертикали вверх (см. рис. *b*), ось x — по касательной к окружности радиуса h , т. е. перпендикулярно к плоскости рисунка на нас, ось y расположена в плоскости меридиана, т. е. в плоскости рисунка.

Так как свободное падение материальной точки рассматривается вблизи земной поверхности, то считаем ускорение силы тяжести \boldsymbol{g} и широту φ постоянными. Воспользовавшись формулами (2), (3), (4), запишем уравнение (1) в виде

$$m\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{J}_c. \quad (7)$$

(На рисунке кориолисова сила инерции не изображена. Мы не можем сейчас указать ее направление, так как $\boldsymbol{J}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$, а направление скорости материальной точки в относительном движении \boldsymbol{v}_r нам пока неизвестно.)

Подставив в уравнение (7) значения \boldsymbol{P} и \boldsymbol{J}_c из формул (5) и (6) и сократив на массу точки m , имеем:

$$\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r. \quad (8)$$

Проектируя (8) на подвижные оси x, y, z , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -2(\omega_y v_{rz} - \omega_z v_{ry}), \\ \ddot{y} &= -2(\omega_z v_{rx} - \omega_x v_{rz}), \\ \ddot{z} &= -g - 2(\omega_x v_{ry} - \omega_y v_{rx}). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

В нашем случае:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= 0, \quad \omega_y = -\omega \cos \varphi, \quad \omega_z = \omega \sin \varphi, \\ v_{rx} &= \dot{x}, \quad v_{ry} = \dot{y}, \quad v_{rz} = \dot{z}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

т. е. (9) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega(\dot{z} \cos \varphi - \dot{y} \sin \varphi), \\ \ddot{y} &= -2\omega \dot{x} \sin \varphi, \\ \ddot{z} &= -g - 2\omega \dot{x} \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Будем искать решения уравнений (11) в виде рядов по степеням безразмерной перемешной ωt . В силу начальных условий.

$$t=0 \quad x=y=z=0, \quad \dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$$

искомые разложения начинаются с членов, содержащих $(\omega t)^2$, т. е.

$$\left. \begin{aligned} x &= a_2 (\omega t)^2 + a_3 (\omega t)^3 + \dots, \\ y &= b_2 (\omega t)^2 + b_3 (\omega t)^3 + \dots, \\ z &= c_2 (\omega t)^2 + c_3 (\omega t)^3 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где a_2, a_3, b_2, b_3, c_2 и c_3 подлежат последующему определению.

Подставляя выражения (12) в уравнения (11) и затем сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в правых и левых частях уравнений, получаем:

$$a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{3} \frac{g}{\omega^2} \cos \varphi, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0, \quad c_2 = -\frac{g}{2\omega^2}, \quad c_3 = 0.$$

Внося эти значения в (12), приближенно находим искомые уравнения движения:

$$x = -\frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \varphi, \quad y = 0, \quad z = -\frac{1}{2} g t^2. \quad (13)$$

Так как $y=0$, то траектория материальной точки, совершающей свободное падение, лежит в плоскости, перпендикулярной к меридиану. Если бы x равнялось нулю, то z определило бы свободное падение материальной точки по вертикали. Уравнение $x = -\frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \varphi$ указывает на отклонение материальной точки от вертикали в сторону, противоположную положительному направлению оси x , т. е. с запада на восток. Это восточное отклонение материальной точки, совершающей свободное падение вблизи земной поверхности, обусловлено наличием кориолисовой силы инерции: $\boldsymbol{J}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$.

Вычислим восточное отклонение материальной точки при свободном падении с высоты h . Из уравнения движения $z = -\frac{g t^2}{2}$ определим продолжительность падения τ на Землю. Так как при $t = \tau$ $z = -h$, то $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Теперь из уравнения движения $x = -\frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \varphi$ определим восточное отклонение материальной точки Δ , подставив в это уравнение $t = \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Величина отклонения

$$\Delta = \frac{1}{3} \omega g \left(\frac{2h}{g} \right)^{\frac{3}{2}} \cos \varphi.$$

При свободном падении с высоты $h = 100$ м на широте Ленинграда, т. е. при $\varphi = 60^\circ$, $g = 9,81$ м/сек² ($\omega = 0,00007$ сек⁻¹), материальная точка отклонится в восточном направлении на $\Delta = 1,1$ см.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

§ 1. Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек

В отличие от статики твердого тела и динамики материальной точки, где силы разделены на задаваемые силы и силы реакций связей, в этой главе при рассмотрении систем материальных точек применяется классификация сил на внутренние (F^i) и внешние (F^e).

Внутренними называются силы взаимодействия между материальными точками, входящими в состав рассматриваемой системы. В соответствии с принципом равенства действия и противодействия, внутренние силы существуют попарно. При этом главный вектор V^i и главный момент m_0^i внутренних сил системы равны нулю, т. е.

$$V^i = \sum_{k=1}^n F_k^i = 0, \quad m_0^i = \sum_{k=1}^n m_0(F_k^i) = 0.$$

Следует иметь в виду, что, несмотря на выполнение этих условий, система внутренних сил, вообще говоря, не является уравновешивающейся, так как внутренние силы приложены к разным материальным точкам.

Внешними называются силы, приложенные к материальным точкам рассматриваемой системы со стороны точек и тел, не входящих в состав этой системы. Внешние силы могут переходить в разряд сил внутренних и, наоборот, внутренние силы могут переходить в разряд внешних при изменении состава системы. Так, если рассматривать систему, состоящую из двух соприкасающихся шаров, то давления первого шара на второй и второго шара на первый являются внутренними силами. Если же рассматривать систему, состоящую из одного первого шара, то давление второго шара на первый является внешней силой.

Уравнение динамики для k -й точки материальной системы имеет вид

$$m_k \omega_k = F_k^e + F_k^i$$

где F_k^e — равнодействующая всех внешних сил, а F_k^i — равнодействующая всех внутренних сил, приложенных к k -й материальной точке.

Ниже рассматриваются как системы, состоящие из конечного числа материальных точек, так и системы тел с непрерывным распределением масс.

Все теоремы формулируются для систем материальных точек, но без труда могут быть распространены на системы тел.

Дифференциальные уравнения движения k -й материальной точки в проекциях на оси декартовых координат имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= F_{kx}^e + F_{kx}^i \\ m_k \ddot{y}_k &= F_{ky}^e + F_{ky}^i \\ m_k \ddot{z}_k &= F_{kz}^e + F_{kz}^i \end{aligned} \right\} \text{система трех уравнений.}$$

Дифференциальные уравнения движения системы n материальных точек в проекциях на оси декартовых координат записываются в форме

$$\left. \begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= F_{kx}^e + F_{kx}^i \\ m_k \ddot{y}_k &= F_{ky}^e + F_{ky}^i \\ m_k \ddot{z}_k &= F_{kz}^e + F_{kz}^i \end{aligned} \right\} \text{система } 3n \text{ уравнений,}$$

где $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Итак, для определения движения системы n материальных точек, входящих в состав системы, следует решить систему $3n$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с $3n$ неизвестными функциями одной независимой переменной t . Для нахождения $6n$ постоянных интегрирования должны быть заданы $6n$ начальных условий движения. При этом следует иметь в виду, что внешние и внутренние силы могут зависеть как от времени, так и от положений, скоростей и ускорений точек системы. Решение подобных задач оказывается трудным и громоздким.

В некоторых задачах динамики материальной точки и системы материальных точек можно значительно упростить решение путем применения так называемых общих теорем динамики.

§ 2. Теорема о движении центра инерции системы материальных точек

1°. Центр инерции системы материальных точек. *Центром инерции* (центром масс) *системы материальных точек* называется точка, положение которой определяется вектор-радиусом r_C

по формуле

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k}{M},$$

где $M = \sum_{k=1}^n m_k$ — масса системы материальных точек.

Декартовы координаты центра инерции системы материальных точек даются формулами:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{M}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{M},$$

$$z_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{M}.$$

Понятие центра инерции является обобщением понятия центра тяже-

сти твердого тела $\left(\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n \rho_k \mathbf{r}_k}{P} \right)$

для случая системы материальных точек. Заметим, что положение центра тяжести твердого тела неизменно по отношению к точкам тела, в то время как положение центра инерции системы, вообще говоря, меняется относительно отдельных материальных точек системы.

Зависимость между скоростью центра инерции и скоростями точек материальной системы имеет вид

$$\mathbf{v}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k}{M},$$

т. е.

$$\dot{x}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \dot{x}_k}{M}, \quad \dot{y}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \dot{y}_k}{M}, \quad \dot{z}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \dot{z}_k}{M}.$$

Здесь

$$\mathbf{v}_C = \dot{x}_C \mathbf{i} + \dot{y}_C \mathbf{j} + \dot{z}_C \mathbf{k}.$$

Зависимость между ускорением центра инерции и ускорениями точек материальной системы выражается соотношением

$$\boldsymbol{\omega}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \boldsymbol{\omega}_k}{M},$$

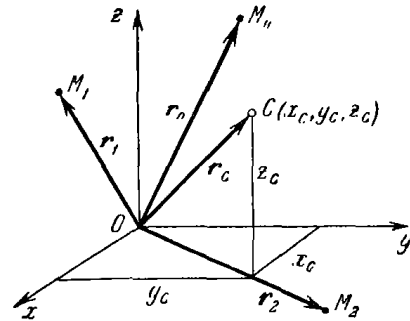


Рис. 125.

т. е.

$$\ddot{x}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \ddot{x}_k}{M}, \quad \ddot{y}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \ddot{y}_k}{M}, \quad \ddot{z}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \ddot{z}_k}{M}.$$

Здесь

$$\boldsymbol{\omega}_C = \ddot{x}_C \mathbf{i} + \ddot{y}_C \mathbf{j} + \ddot{z}_C \mathbf{k}.$$

Решение задач, в которых требуется определить уравнение траектории центра инерции, следует проводить в следующем порядке:

- 1) выбрать систему координат;
- 2) записать координаты центров тяжести каждой из масс системы, выразив их в виде функций времени:

$$x_k = \varphi_k(t), \quad y_k = \psi_k(t), \quad z_k = \chi_k(t), \quad \text{где } k = 1, 2, \dots, n;$$

- 3) определить координаты искомого центра инерции системы материальных точек по формулам:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{M}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{M}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{M};$$

при этом x_C, y_C, z_C окажутся функциями времени, т. е. полученные формулы будут параметрическими уравнениями движения центра инерции;

- 4) для нахождения явных уравнений траектории центра инерции системы материальных точек надо из последних уравнений исключить время.

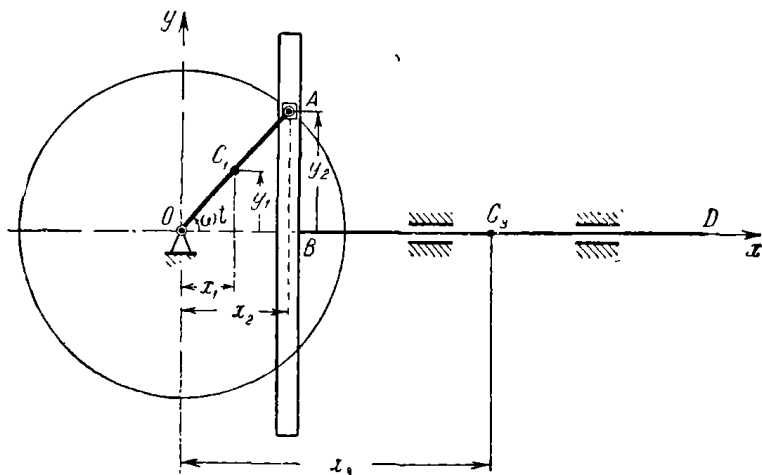
Задача 262. Определить уравнение траектории центра инерции кулисного механизма, изображенного на рисунке, если вес кривошипа OA равен P_1 , вес камня A кулисы равен P_2 , а вес кулисы и питанги BD равен P_3 . Кривошип, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω , считать тонким однородным стержнем, а камень A — точечной массой. Центр тяжести кулисы и питанги расположен в точке C_3 , причем $OA = BC_3 = l$. В начальный момент камень кулисы A занимал крайнее правое положение.

Решение. Выбираем оси декартовых координат, указанные на рисунке, на котором положение кулисного механизма соответствует моменту времени t . Так как кривошип вращается равномерно, то его угол поворота φ равен $\angle BOA = \omega t$.

Для определения положения центра инерции системы C надо найти его координаты x_C и y_C по формулам:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{M}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{M},$$

где $M = \sum_{k=1}^n m_k$ — масса системы.



К задаче 262.

Так как рассматриваемая система состоит из трех тел: кривошипа OA , камня A и кулисы со штангой BD , то

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (1)$$

Здесь индексы 1 соответствуют кривошипу, индексы 2 — камню A , индексы 3 — кулисе со штангой.

Как видно из рисунка:

$$x_1 = \frac{l}{2} \cos \omega t, \quad y_1 = \frac{l}{2} \sin \omega t,$$

$$x_2 = l \cos \omega t, \quad y_2 = l \sin \omega t,$$

$$x_3 = x_2 + BC_3 = l \cos \omega t + l = l(1 + \cos \omega t), \quad y_3 = 0.$$

Подставляя значения $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ в формулу (1) и выражая массы звеньев механизма через их вес, получаем:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{P_1 \frac{l}{2} \cos \omega t + P_2 l \cos \omega t + P_3 l (1 + \cos \omega t)}{P_1 + P_2 + P_3} = \\ &= \frac{P_3 l}{P_1 + P_2 + P_3} + \frac{P_1 + 2P_2 + 2P_3}{2(P_1 + P_2 + P_3)} l \cos \omega t, \\ y_C &= \frac{P_1 \frac{l}{2} \sin \omega t + P_2 l \sin \omega t}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{P_1 + 2P_2}{2(P_1 + P_2 + P_3)} l \sin \omega t. \end{aligned}$$

Для нахождения уравнения траектории центра инерции в явном виде надо из этих уравнений движения исключить время. Разрешив оба уравнения относительно $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, возведя их затем в квадрат и сложив, получим:

$$\left(x_C - \frac{P_3 l}{P_1 + P_2 + P_3} \right)^2 + \frac{y_C^2}{\left[\frac{(P_1 + 2P_2 + 2P_3) l}{2(P_1 + P_2 + P_3)} \right]^2} = 1.$$

Итак, траекторией центра инерции кулисного механизма является эллипс с полуосями:

$$a = \frac{(P_1 + 2P_2 + 2P_3) l}{2(P_1 + P_2 + P_3)}, \quad b = \frac{(P_1 + 2P_2) l}{2(P_1 + P_2 + P_3)}.$$

Центр эллипса лежит на оси x и отстоит от начала координат O вправо на расстоянии $\frac{P_3 l}{P_1 + P_2 + P_3}$.

2°. Теорема о движении центра инерции системы материальных точек. Центр инерции системы материальных точек движется как материальная точка, масса которой равна массе материальной системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему:

$$M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e,$$

Та же теорема, записанная в проекциях на оси декартовых координат, имеет вид:

$$M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad M \ddot{z}_C = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e.$$

Движение центра инерции системы материальных точек зависит от внешних сил, приложенных к данной системе. Внутренние силы, которые отсутствуют в формулировке теоремы, непосредственно на

движение центра инерции системы не влияют. Это обстоятельство значительно облегчает решение задач, так как внутренние силы системы большей частью бывают неизвестны.

Задачи динамики поступательного движения твердого тела решаются посредством теоремы о движении центра инерции системы материальных точек. Действительно, применив эту теорему, мы определим уравнение траектории, скорость и ускорение центра тяжести твердого тела. При поступательном же движении твердого тела траектории всех точек одинаковы, а скорости и ускорения их соответственно равны.

Если при решении задачи динамики движение точки системы разлагается на переносное поступательное вместе с полюсом и относительное по отношению к полюсу, то целесообразно принять за полюс центр инерции системы материальных точек. Тогда, применив теорему о движении центра инерции, можно определить переносное поступательное движение точек системы.

Посредством теоремы о движении центра инерции можно решать:

1) прямые задачи, в которых заданы законы движения отдельных материальных точек и их массы, а ищутся внешние силы;

2) обратные задачи, в которых заданы законы движения всех точек системы, кроме одной (либо законы движения некоторых из точек выражены через неизвестный закон движения этой точки), массы точек системы и определяется движение одной точки.

Задачи с помощью теоремы о движении центра инерции системы материальных точек рекомендуются решать в следующей последовательности:

1) изобразить на рисунке все внешние силы системы;

2) выбрать систему осей координат;

3) записать теорему о движении центра инерции системы материальных точек в проекциях на оси декартовых координат:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad M\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e.$$

4) вычислить сумму проекций всех внешних сил системы на оси декартовых координат;

5) записать координаты центров инерции всех n масс системы x_k, y_k, z_k , где $k=1, 2, \dots, n$, и, продифференцировав их дважды по времени, определить $M\ddot{x}_C, M\ddot{y}_C$ и $M\ddot{z}_C$ по формулам:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n m_k \ddot{x}_k, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n m_k \ddot{y}_k, \quad M\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^n m_k \ddot{z}_k.$$

Если в состав системы входят тела с непрерывным распределением масс, то следует записывать координаты x_k, y_k и z_k центров

тяжести этих тел и затем вычислить $M\ddot{x}_C, M\ddot{y}_C, M\ddot{z}_C$ по упомянутым формулам (в которых под m_k уже надо понимать массу k -го тела);

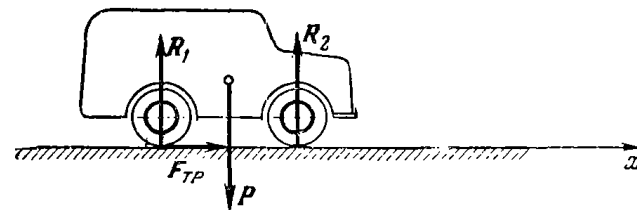
6) воспользовавшись полученными результатами, записать дифференциальные уравнения движения центра инерции системы (третий пункт) применительно к данной системе;

7) определить искомые внешние силы системы при решении прямой задачи либо найти искомый закон движения центра тяжести одной из масс системы при решении обратной задачи.

Задача 263. При полете снаряда в безвоздушном пространстве центр инерции снаряда описывает параболу. Изменится ли траектория центра инерции, если снаряд во время полета разорвется на несколько осколков?

Решение. Разрыв снаряда происходит под действием внутренних сил, которые непосредственно не влияют на движение центра инерции системы. Следовательно, осколки снаряда должны двигаться так, чтобы центр инерции разорвавшегося снаряда двигался по той же траектории, т. е. по параболе.

Задача 264. Какая сила приводит в движение центр инерции автомашины, движущейся по негладкой горизонтальной дороге?



К задаче 264.

Решение. Часто ошибочно полагают, что центр инерции автомашины непосредственно приводится в движение силой давления газов в цилиндрах двигателя. Эта сила, являясь внутренней, на движение центра инерции автомашины прямо не влияет. Под действием этой силы возникают вращающие моменты пар сил, приложенных к ведущим колесам. В результате появляются силы трения $F_{тр}$ между покрышками ведущих колес автомашины и землей, направленные по горизонтали в сторону движения автомашины (силами трения между покрышками ведомых колес и землей пренебрегаем).

Сила трения, являясь внешней по отношению к автомашине, приводит в движение его центр инерции C . Действительно, записав теорему о движении центра инерции системы в проекции на ось x (см. рисунок), получим $M\ddot{x}_C = F_{тр}$ (внешние силы P, R_1 и R_2 перпендикулярны к оси x , и их проекции на эту ось равны нулю), т. е. $\ddot{x}_C > 0$; если в начальный момент центр инерции C был в покое, то он будет перемещаться ускоренно по горизонтали направо.

Задача 265. Определить главный вектор V^e внешних сил, приложенных к однородному диску, вращающемуся вокруг неподвижной оси, если центр тяжести диска расположен на его оси вращения.

Решение. Применяем теорему о движении центра инерции системы материальных точек $M\omega_C = \sum_{k=1}^n F_k^e$. Так как центр тяжести диска неподвижен, то $\omega_C = 0$ и, следовательно, $\sum_{k=1}^n F_k^e = V^e = 0$, т. е. главный вектор внешних сил (в которые входят и силы реакции связи), приложенных к диску, равен нулю.

Задача 266. Тонкий, однородный стержень OA длины l и веса P вращается вокруг вертикальной оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью ω . Определить главный вектор внешних сил. Массой оси O_1O_2 пренебречь.

Решение. В соответствии с теоремой о движении центра инерции системы материальных точек $M\omega_C = \sum_{k=1}^n F_k^e$; для определения главного вектора внешних сил системы $V^e = \sum_{k=1}^n F_k^e$ достаточно найти $M\omega_C$.

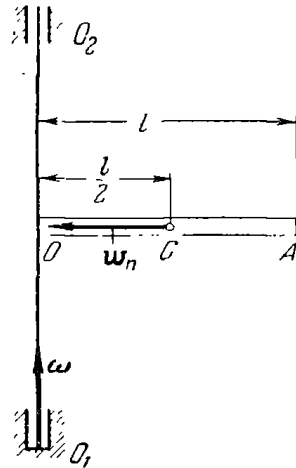
Так как центр инерции стержня находится в точке C на расстоянии $\frac{l}{2}$ от оси вращения и имеет, в силу постоянства вектора ω , только центростремительное ускорение $\omega_n = \omega^2 OC = \frac{l}{2} \omega^2$, которое направлено вдоль стержня от C к O , то главный вектор внешних сил системы V^e имеет то же направление и равен по модулю

$$V^e = M\omega_C = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \omega^2.$$

(В данном случае главный вектор внешних сил является векторной суммой веса стержня и сил реакций опор O_1 и O_2 .)

Задача 267. Машина дляковки металла (см. рис. *a*) приводится в действие посредством кривошипно-шатунного механизма OAB . Определить давление машины на фундамент при работе вхолостую, если вес станины с наковальней D равен P_1 , вес кривошипа OA длиной r равен P_2 , вес молота B равен P . Кривошип OA считать однородным стержнем.

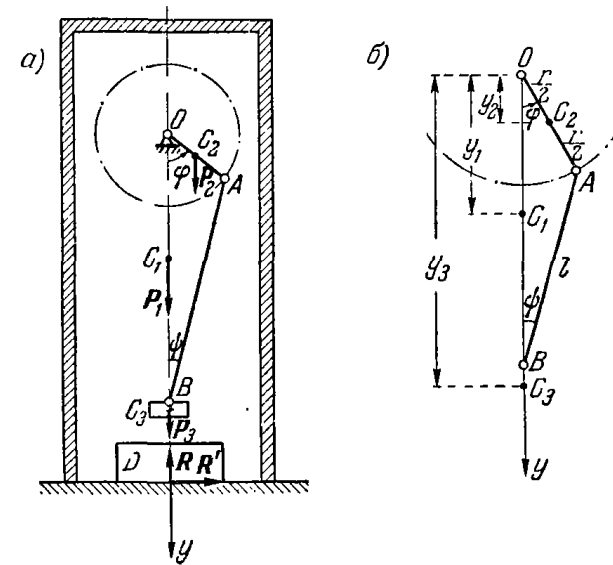
Кривошип, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω против часовой стрелки, в начальный момент занимал вертикальное нижнее положение. Массой шатуна AB длины l пренебречь.



К задаче 266.

Решение. Рассматриваемая система состоит из трех масс: 1) станины с наковальней D ; 2) кривошипа OA ; 3) молота B .

Изобразим внешние силы, приложенные к машине: P_1 — вес станины с наковальней, P_2 — вес кривошипа OA , P_3 — вес молота B , R — суммарная нормальная сила реакции фундамента (все силы тяжести приложены в соответствующих центрах тяжести C_1, C_2, C_3 отдельных масс рассматриваемой системы), R' — суммарная тангенциальная сила реакции фундамента.



К задаче 267.

Направим ось y по вертикали вниз, взяв ее начало отсчета на оси вращения кривошипа OA .

Применим теорему о движении центра инерции системы материальных точек в проекциях на ось y :

$$M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e.$$

Сумма проекций всех внешних сил системы на ось y равна

$$\sum_{k=1}^n F_{ky}^e = P_1 + P_2 + P_3 - R.$$

Следовательно,

$$M\ddot{y}_C = P_1 + P_2 + P_3 - R,$$

откуда сила реакции фундамента

$$R = P_1 + P_2 + P_3 - M\ddot{y}_C. \quad (1)$$

Для решения задачи остается определить $M\ddot{y}_C$.

Как известно, $M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n m_k \ddot{y}_k$. В данной задаче

$$M\ddot{y}_C = m_1 \ddot{y}_1 + m_2 \ddot{y}_2 + m_3 \ddot{y}_3. \quad (2)$$

Рассмотрим кривошипно-шатунный механизм в момент времени t , когда кривошип OA повернулся из нижнего вертикального положения на угол $\varphi = \omega t$. Координаты y_1, y_2, y_3 центров тяжести C_1, C_2, C_3 масс системы изображены на рис. б). Нетрудно видеть, что

$$y_1 = OC_1, \quad y_2 = \frac{OA}{2} \cos \omega t = \frac{r}{2} \cos \omega t,$$

$$y_3 = OA \cos \omega t + AB \cos \psi + BC_3 = r \cos \omega t + l \cos \psi + BC_3,$$

где $\psi = \angle ABO$. Зависимость между углами ωt и ψ определяем по теореме синусов из треугольника OAB :

$$\frac{\sin \psi}{\sin \omega t} = \frac{r}{l}, \quad \sin \psi = \frac{r}{l} \sin \omega t = \lambda \sin \omega t,$$

где $\frac{r}{l} = \lambda$. Тогда $\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}$; теперь y_3 принимает вид

$$y_3 = r \cos \omega t + \frac{l}{2} \cos \psi = r \cos \omega t + \frac{l}{2} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}.$$

Разложим выражение $\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}$ в ряд. Учитывая, что λ — правильная дробь, отбросим все члены ряда, содержащие λ в степени выше второй, т. е.

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t} = (1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \omega t.$$

Следовательно, $y_3 = r \cos \omega t + l \left(1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \omega t \right) + BC_3$; замечая, что $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t)$ и $\lambda = \frac{r}{l}$, получим:

$$y_3 = l - \frac{r^2}{4l} + r \left(\cos \omega t + \frac{1}{4} \lambda \cos 2\omega t \right) + BC_3.$$

Вычислим вторые производные от y_1, y_2, y_3 по времени t :

$$\ddot{y}_1 = 0, \quad \ddot{y}_2 = -\frac{r\omega^2}{2} \cos \omega t, \quad \ddot{y}_3 = -r\omega^2 (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t).$$

Теперь находим $M\ddot{y}_C$, подставив $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3$ в формулу (2):

$$M\ddot{y}_C = -\frac{P_2}{2g} r\omega^2 \cos \omega t - \frac{P_3}{g} r\omega^2 (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t),$$

или

$$M\ddot{y}_C = -\frac{r\omega^2}{2g} [(P_2 + 2P_3) \cos \omega t + 2\lambda P_3 \cos 2\omega t].$$

Внося полученное выражение $M\ddot{y}_C$ в формулу (1), определяем нормальную силу реакции фундамента:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{r\omega^2}{2g} [(P_2 + 2P_3) \cos \omega t + 2\lambda P_3 \cos 2\omega t],$$

которая зависит от времени t .

Искомое давление копытной машины на фундамент направлено противоположно силе нормальной реакции R и равно ей по модулю.

Задача 268. Груз A весом P_1 совершает колебания на пружине, второй конец которой прикреплен к неподвижному грузу B весом P_2 . Груз B лежит на горизонтальной плоскости.

Определить закон колебаний груза A , если экспериментально определенная нормальная сила реакции горизонтальной плоскости $R = P_1 + P_2 + H \cos \omega t$. В начальный момент пружина была сжата из положения статического равновесия груза A на x и отпущена без начальной скорости. Массой пружины пренебречь.

Решение. Рассматриваемая система состоит из двух масс A и B . Изображаем внешние силы: P_1 — вес груза A , приложенный в его центре тяжести C_1 , P_2 — вес груза B , приложенный в его центре тяжести C_2 , и R — нормальная сила реакции горизонтальной плоскости.

Выбираем начало отсчета O неподвижной вертикальной оси в положении статического равновесия груза A .

Запишем теорему о движении центра инерции системы материальных точек в проекции на ось y :

$$M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e.$$

К задаче 268.

В данном случае сумма проекций всех внешних сил системы на ось y

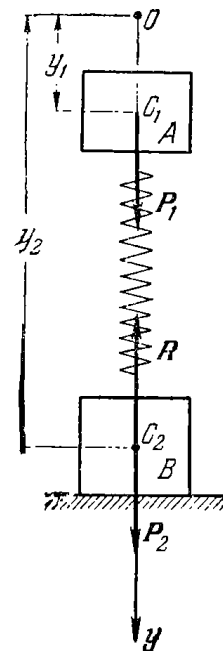
$$\sum_{k=1}^n F_{ky}^e = P_1 + P_2 - R.$$

Следовательно,

$$M\ddot{y}_C = P_1 + P_2 - R.$$

Так как $R = P_1 + P_2 + H \cos \omega t$, то

$$M\ddot{y}_C = -H \cos \omega t. \quad (1)$$



Вычисляем $M\ddot{y}_C$ по формуле $M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n m_k \ddot{y}_k$. В данном случае

$$M\ddot{y}_C = m_1 \ddot{y}_1 + m_2 \ddot{y}_2,$$

где y_1 — искомая величина, а $y_2 = OC_2$ — постоянная. Поэтому

$$M\ddot{y}_C = \frac{P_1}{g} \ddot{y}_1. \quad (2)$$

Подставив значение $M\ddot{y}_C$ из формулы (2) в уравнение (1), находим:

$$\frac{P_1}{g} \ddot{y}_1 = -H \cos \omega t,$$

т. е.

$$\ddot{y}_1 = -\frac{Hg}{P_1} \cos \omega t. \quad (3)$$

Это — дифференциальное уравнение движения груза A . Как следует из условия задачи, начальные условия движения груза имеют вид:

$$\text{при } t=0 \quad y_1 = a, \quad \dot{y}_1 = 0.$$

Проинтегрировав дифференциальное уравнение (3), получим:

$$\dot{y}_1 = -\frac{Hg}{P_1 \omega} \sin \omega t + D_1.$$

После подстановки начального условия движения $t=0$, $\dot{y}_1 = 0$ имеем $D_1 = 0$, т. е.

$$\dot{y}_1 = -\frac{Hg}{P_1 \omega} \sin \omega t.$$

Вторично проинтегрировав, находим:

$$y_1 = \frac{Hg}{P_1 \omega^2} \cos \omega t + D_2.$$

Подстановка начального условия движения $t=0$, $y_1 = a$ дает:

$$D_2 = a - \frac{Hg}{P_1 \omega^2}.$$

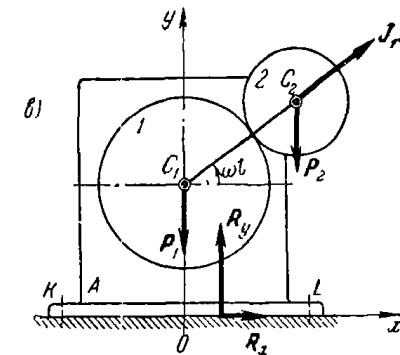
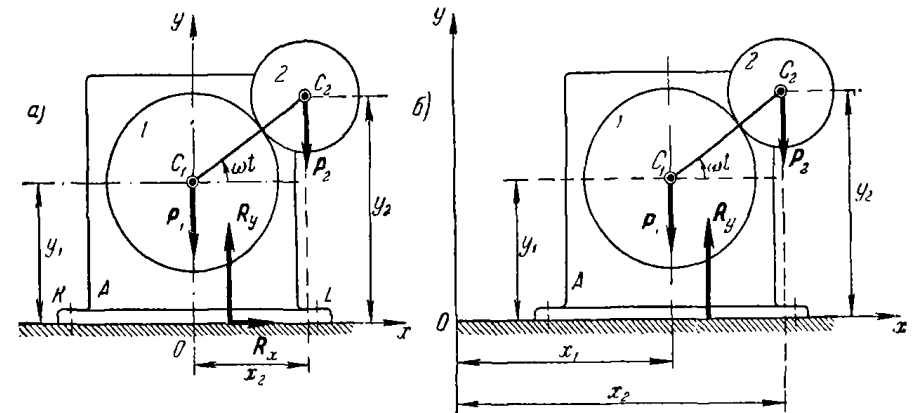
Итак, груз A совершает колебания по закону

$$y_1 = a - \frac{Hg}{P_1 \omega^2} + \frac{Hg}{P_1 \omega^2} \cos \omega t.$$

Амплитуда колебаний равна $\frac{Hg}{P_1 \omega^2}$, а круговая частота колебаний равна ω .

Задача 269. Эпициклический механизм, расположенный в вертикальной плоскости, установлен на горизонтальной идеально гладкой плоскости и прикреплен к ней болтами K и L .

Зубчатое колесо 1 радиуса r_1 неподвижно. C_2 — центр тяжести зубчатого колеса 2 веса P_2 и радиуса r_2 . C_1 — центр тяжести ста-



К задаче 269.

пины A и колеса 1, общий вес которых равен P_1 . Массой кривошипа C_1C_2 , вращающегося с постоянной угловой скоростью ω , пренебречь. В начальный момент кривошип занимал правое горизонтальное положение.

Определить: 1) силу нормального давления механизма на плоскость, 2) угловую скорость ω вращения кривошипа, при которой механизм в условиях отсутствия болтов начнет подпрыгивать над горизонтальной плоскостью, 3) наибольшее горизонтальное усилие, действующее на болты; 4) движение центра тяжести C_1 станины механизма после среза болтов K и L .

Решение. Материальная система состоит из двух масс: неподвижного колеса 1 со станиной и подвижного колеса 2. Изобразим внешние силы этой системы: P_1 — вес станины и неподвижного колеса 1, P_2 — вес подвижного колеса 2, R_y — суммарная нормальная сила реакции плоскости, R_x — суммарная тангенциальная сила реакции болтов K и L .

Направим ось y по вертикали через точку C_1 , а ось x — вдоль горизонтальной плоскости направо.

Запишем теорему о движении центра инерции системы в проекциях на оси x и y :

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e.$$

В данной задаче

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = R_x, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky}^e = R_y - P_1 - P_2.$$

Следовательно,

$$M\ddot{x}_C = R_x, \quad M\ddot{y}_C = R_y - P_1 - P_2,$$

т. е.

$$R_x = M\ddot{x}_C, \quad (1)$$

$$R_y = M\ddot{y}_C + P_1 + P_2. \quad (2)$$

Для определения сил R_x и R_y остается подсчитать $M\ddot{x}_C$ и $M\ddot{y}_C$. Вычисление $M\ddot{x}_C$ и $M\ddot{y}_C$ ведется по формулам:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n m_k \ddot{x}_k \quad \text{и} \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n m_k \ddot{y}_k.$$

В данном случае

$$M\ddot{x}_C = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 \quad \text{и} \quad M\ddot{y}_C = m_1 \ddot{y}_1 + m_2 \ddot{y}_2, \quad (3)$$

где x_1 и y_1 — координаты центра тяжести C_1 станины механизма и неподвижного колеса 1, а x_2 и y_2 — координаты центра тяжести C_2 подвижного колеса 2.

Как видно из рисунка, $x_1 = 0$, $y_1 = OC_1$ — постоянная, $x_2 = C_1C_2 \cos \omega t = (r_1 + r_2) \cos \omega t$ (угол поворота кривошипа C_1C_2 равен $\varphi = \omega t$, так как, по условию, ω постоянна), $y_2 = OC_1 + C_1C_2 \sin \omega t = OC_1 + (r_1 + r_2) \sin \omega t$.

Вычислив вторые производные от x_1 , y_1 , x_2 , y_2 по времени t , находим: $\ddot{x}_1 = 0$, $\ddot{y}_1 = 0$,

$$\ddot{x}_2 = -(r_1 + r_2) \omega^2 \cos \omega t, \quad \ddot{y}_2 = -(r_1 + r_2) \omega^2 \sin \omega t.$$

Внеся эти значения в формулы (3), получим:

$$M\ddot{x}_C = -m_2 (r_1 + r_2) \omega^2 \cos \omega t, \quad (4)$$

$$M\ddot{y}_C = -m_2 (r_1 + r_2) \omega^2 \sin \omega t. \quad (5)$$

После подстановки (4) в (1) и (5) в (2) находим:

$$R_x = -\frac{P_2}{g} (r_1 + r_2) \omega^2 \cos \omega t, \quad (6)$$

$$R_y = P_1 + P_2 - \frac{P_2}{g} (r_1 + r_2) \omega^2 \sin \omega t. \quad (7)$$

Давление механизма на горизонтальную плоскость направлено противоположно силе реакции R_y и по модулю равно ей:

$$N_y = P_1 + P_2 - \frac{P_2}{g} (r_1 + r_2) \omega^2 \sin \omega t.$$

Наибольшее давление

$$N_{y \max} = P_1 + P_2 - \frac{P_2}{g} (r_1 + r_2) \omega^2.$$

Наименьшее давление

$$N_{y \min} = P_1 + P_2 - \frac{P_2}{g} (r_1 + r_2) \omega^2.$$

В условиях отсутствия болтов механизм может начать подпрыгивать над горизонтальной плоскостью. Это будет иметь место при $R_{y \min} < 0$, т. е. при $P_1 + P_2 - \frac{P_2}{g} (r_1 + r_2) \omega^2 < 0$, откуда следует, что угловая скорость ω вращения кривошипа C_1C_2 , при которой происходит подпрыгивание механизма, должна удовлетворять неравенству

$$\omega > \sqrt{g \frac{P_1 + P_2}{P_2 (r_1 + r_2)}}.$$

Горизонтальное давление, действующее на болты, направлено противоположно R_x (см. формулу (6)), причем

$$N_x = \frac{P_2}{g} (r_1 + r_2) \omega^2 \cos \omega t.$$

Наибольшее давление равно

$$N_{x \max} = \frac{P_2}{g} (r_1 + r_2) \omega^2.$$

Допустим, что под действием силы N_x произошел срез болтов. Тогда весь механизм начнет двигаться по идеально гладкой горизонтальной плоскости.

На рис. 6 изображен механизм в положении, когда точка C_1 сместилась с оси y направо на x_1 . Так как станина механизма находится в движении относительно оси x , то x_1 является функцией времени t .

Из чертежа видно, что в данном случае

$$x_2 = x_1 + C_1C_2 \cos \omega t = x_1 + (r_1 + r_2) \cos \omega t.$$

Следовательно,

$$M\ddot{x}_C = m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 - m_2(r_1 + r_2)\omega^2 \cos \omega t. \quad (8)$$

Теорема о движении центра инерции системы материальных точек в проекции на ось x имеет вид

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e.$$

Так как после среза болтов сила реакции R_x отсутствует, а внешние силы P_1 , P_2 и R_y перпендикулярны к оси x , то $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0$ и $M\ddot{x}_C = 0$. Подставив в это уравнение значение $M\ddot{x}_C$ из формулы (8), получим:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 - m_2(r_1 + r_2)\omega^2 \cos \omega t = 0,$$

т. е.

$$\ddot{x}_1 = \frac{P_2}{P_1 + P_2}(r_1 + r_2)\omega^2 \cos \omega t. \quad (9)$$

Это — дифференциальное уравнение движения центра тяжести C_1 станины механизма по идеально гладкой горизонтальной плоскости при отсутствии болтов. Для интегрирования уравнения (9) должны быть известны начальные условия движения точки C_1 . Так как в момент среза болтов точка C_1 находилась на оси y и была в покое, то начальные условия движения записываются в виде:

$$\text{при } t=0 \quad x_1=0 \text{ и } \dot{x}_1=0.$$

Проинтегрировав дифференциальное уравнение (9), получим:

$$\dot{x}_1 = \frac{P_2}{P_1 + P_2}(r_1 + r_2)\omega \sin \omega t + D_1.$$

После подстановки начального условия движения $t=0$ и $\dot{x}_1=0$ имеем: $D_1=0$, т. е.

$$\dot{x}_1 = \frac{P_2}{P_1 + P_2}(r_1 + r_2)\omega \sin \omega t.$$

Вторично проинтегрировав, находим: $x_1 = -\frac{P_2}{P_1 + P_2}(r_1 + r_2)\cos \omega t + D_2$. Используя то, что при $t=0$ $x_1=0$, имеем:

$$D_2 = \frac{P_2}{P_1 + P_2}(r_1 + r_2),$$

т. е.

$$x_1 = \frac{P_2}{P_1 + P_2}(r_1 + r_2)(1 - \cos \omega t).$$

Итак, центр тяжести C_1 станины механизма в случае отсутствия болтов совершает гармонические колебания с амплитудой

$$\frac{P_2}{P_1 + P_2}(r_1 + r_2)$$

и круговой частотой, равной угловой скорости ω вращения кривошипа C_1C_2 .

Эту задачу можно решить также с помощью уравнения динамики переносного движения. Как известно, переносное поступательное движение системы происходит как движение абсолютное под действием всех внешних сил системы и сил инерции масс в их относительном движении, т. е.

$$M\mathbf{w}_e = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \mathbf{J}_{rk},$$

где F_k^e — внешние силы, а J_{rk} — силы инерции в относительном движении.

В проекциях на оси декартовых координат имеем:

$$M\ddot{x}_e = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e + \sum_{k=1}^n J_{rkx},$$

$$M\ddot{y}_e = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e + \sum_{k=1}^n J_{rky},$$

$$M\ddot{z}_e = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e + \sum_{k=1}^n J_{rkz}.$$

В данной задаче колесо 2, участвуя в переносном поступательном движении вместе с колесом 1 и станиной, совершает относительное вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр тяжести C_1 колеса 1 и станины перпендикулярно к плоскости xy .

Изобразив все внешние силы системы P_1 , P_2 , R_x и R_y (см. рис. 8), добавляем центробежную силу инерции в относительном движении $J_{rn} = -\frac{P_2}{g}\omega_{rn}$. Так как точка C_2 в относительном движении описывает окружность с центром C_1 радиуса $C_1C_2 = r_1 + r_2$, то центростремительное ускорение ω_{rn} направлено от C_2 к C_1 и, следовательно, центробежная сила инерции в относительном движении J_{rn} направлена противоположно. По модулю

$$J_{rn} = \frac{P_2}{g}\omega_{rn} = \frac{P_2}{g}(r_1 + r_2)\omega^2.$$

Вращательная сила инерции в относительном движении $J_{rx} = -\frac{P_2}{g}\omega_{rx}$ равна нулю, так как кривошип вращается равномерно.

Применив дифференциальные уравнения переносного поступательного движения материальной системы в проекциях на оси x и y :

$$M\ddot{x}_e = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e + \sum_{k=1}^n J_{rkx},$$

$$M\ddot{y}_e = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e + \sum_{k=1}^n J_{rky},$$

получим:

$$M\ddot{x}_e = R_x + J_{rn} \cos \omega t, \quad M\ddot{y}_e = R_y - P_1 - P_2 + J_{rn} \sin \omega t.$$

Так как $\ddot{x}_e = \ddot{x}_1$, $\ddot{y}_e = \ddot{y}_1$, $J_{rn} = \frac{P_2}{g}(r_1 + r_2)\omega^2$, то

$$M\ddot{x}_1 = R_x + \frac{P_2}{g}(r_1 + r_2)\omega^2 \cos \omega t, \quad (10)$$

$$M\ddot{y}_1 = R_y - P_1 - P_2 + \frac{P_2}{g}(r_1 + r_2)\omega^2 \sin \omega t. \quad (11)$$

В случае механизма, закрепленного болтами, центр тяжести C_1 колеса I и станины неподвижен, т. е. $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 0$, и дифференциальные уравнения принимают вид:

$$R_x + \frac{P_2}{g}(r_1 + r_2)\omega^2 \cos \omega t = 0, \quad (12)$$

$$R_y - P_1 - P_2 + \frac{P_2}{g}(r_1 + r_2)\omega^2 \sin \omega t = 0, \quad (13)$$

откуда вытекает, что проекция нормальной силы реакции плоскости равна

$$R_y = P_1 + P_2 - \frac{P_2}{g}(r_1 + r_2)\omega^2 \sin \omega t. \quad (14)$$

Проекция на ось x горизонтальной силы реакции болтов равна

$$R_x = -\frac{P_2}{g}(r_1 + r_2)\omega^2 \cos \omega t. \quad (15)$$

Условие подпрыгивания определяем из (14), считая $R_{y \min}$ отрицательным. Так как $R_{y \min} = P_1 + P_2 - \frac{P_2}{g}(r_1 + r_2)\omega^2$, а $R_{y \min} < 0$, то

$$P_1 + P_2 - \frac{P_2}{g}(r_1 + r_2)\omega^2 < 0,$$

откуда

$$\omega > \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{g \frac{P_2}{g}(r_1 + r_2)}}.$$

Для определения закона движения центра тяжести C_1 колеса I и станины механизма после среза болтов надо в формуле (10) положить $R_x = 0$. Тогда

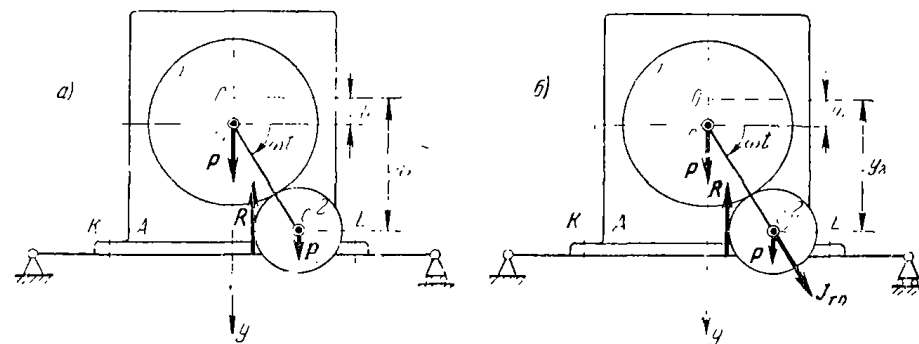
$$M\ddot{x}_1 = \frac{P_2}{g}(r_1 + r_2)\omega^2 \cos \omega t,$$

т. е. приходим к уравнению (9):

$$\ddot{x}_1 = \frac{P_2}{P_1 + P_2}(r_1 + r_2)\omega^2 \cos \omega t,$$

решение которого было получено выше.

Задача 270. Решить предыдущую задачу в предположении, что эпициклический механизм установлен на упругой балке, которая прогибается на 1 см под действием силы, равной с кгс.



К задаче 270.

При определении силы реакции балки эпициклический механизм считать материальной точкой, сосредоточенной в середине балки (это приближение законно, если размеры механизма малы по сравнению с длиной балки).

Определить закон колебаний центра тяжести C_1 станины механизма, предполагая, что в начальный момент точка C_1 находилась в положении статического равновесия, а скорость ее, равная по величине v_0 , была направлена вниз. Массой балки и сопротивлением движению пренебречь. Кривошип вращается по часовой стрелке с постоянной угловой скоростью ω . В начальный момент он занимал правое горизонтальное положение.

Решение. Изобразим внешние силы, приложенные к механизму: P_1 — вес станины A и неподвижного колеса I , P_2 — вес подвижного колеса 2 , R — суммарная упругая сила балки.

Выбираем начало отсчета O на неподвижной вертикальной оси y в положении статического равновесия центра тяжести C_1 станины механизма, т. е. при прогибе середины балки на

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{P_1 + P_2}{c}. \quad (1)$$

Ось y направим вниз.

Теорема о движении центра инерции системы материальных точек в проекции на ось y в данном случае имеет вид

$$M\ddot{y}_C = P_1 + P_2 + R_y. \quad (2)$$

На рис. *a* изображено положение точек C_1 и C_2 в момент времени t , когда точка C_1 переместилась вниз из положения статического равновесия. При этом кривошип C_1C_2 повернулся на угол $\varphi = \omega t$ (так как ω постоянно). Нетрудно видеть, что

$$y_2 = y_1 + (r_1 + r_2) \sin \omega t. \quad (3)$$

В этот момент времени балка прогнулась на $\Delta_y = \Delta_{\text{ст}} + y_1$ и, следовательно, проекция упругой силы балки равна

$$R_y = -c\Delta_y = -c(\Delta_{\text{ст}} + y_1). \quad (4)$$

Подставив это выражение R_y в уравнение (2) и приняв во внимание, что из формулы (1) следует $P_1 + P_2 - c\Delta_{\text{ст}} = 0$, получим:

$$M\ddot{y}_C = -cy_1. \quad (5)$$

Значение $M\ddot{y}_C$ определяем по формуле $M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n m_k \ddot{y}_k$. В данном случае

$$M\ddot{y}_C = m_1 \ddot{y}_1 + m_2 \ddot{y}_2.$$

Воспользовавшись формулой (3), найдем:

$$M\ddot{y}_C = \frac{P_1 + P_2}{g} \ddot{y}_1 - \frac{P_2}{g} (r_1 + r_2) \omega^2 \sin \omega t. \quad (6)$$

После подстановки значения $M\ddot{y}_C$ из формулы (6) в уравнение (5) получим:

$$\ddot{y}_1 + \frac{cg}{P_1 + P_2} y_1 = \frac{P_2}{P_1 + P_2} (r_1 + r_2) \omega^2 \sin \omega t.$$

Это — дифференциальное уравнение вынужденных колебаний центра тяжести C_1 станины механизма.

После введения обозначений

$$\frac{cg}{P_1 + P_2} = k^2 \quad \text{и} \quad \frac{P_2}{P_1 + P_2} (r_1 + r_2) \omega^2 = h,$$

уравнение принимает вид

$$\ddot{y}_1 + k^2 y_1 = h \sin \omega t. \quad (7)$$

Общее решение дифференциального уравнения (7) будет:

$$y_1 = y_{1 \text{ одн}} + y_{1 \text{ част}}, \quad (8)$$

где $y_{1 \text{ одн}}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, а $y_{1 \text{ част}}$ — частное решение уравнения (7). Решение $y_{1 \text{ одн}}$ определяем из дифференциального уравнения $\ddot{y}_1 + k^2 y_1 = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид $r^2 + k^2 = 0$. Корни характеристического уравнения равны $r_{1,2} = \pm ki$. Следовательно,

$$y_{1 \text{ одн}} = D_1 \cos kt + D_2 \sin kt, \quad (9)$$

где D_1 и D_2 — постоянные интегрирования.

При нахождении частного решения следует различать два варианта: а) случай отсутствия резонанса ($\omega \neq k$), б) случай резонанса ($\omega = k$).

Рассмотрим вариант а): если $\omega \neq k$, то частное решение ищется в виде $y_{1 \text{ част}} = A \sin \omega t + B \cos \omega t$, где A и B — постоянные коэффициенты, подлежащие последующему определению. Подставив $y_{1 \text{ част}}$ в дифференциальное уравнение (7), получим:

$$-A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t + Ak^2 \sin \omega t + Bk^2 \cos \omega t = h \sin \omega t.$$

Приравняв коэффициенты, стоящие в левой и правой частях уравнения соответственно при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, находим:

$$A(k^2 - \omega^2) = h, \quad B(k^2 - \omega^2) = 0;$$

так как $\omega \neq k$, то $A = \frac{h}{k^2 - \omega^2}$ и $B = 0$, т. е. частное решение имеет вид

$$y_{1 \text{ част}} = \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (10)$$

Подставив значения $y_{1 \text{ одн}}$ и $y_{1 \text{ част}}$ из формул (9) и (10) в общее решение (8), находим:

$$y_1 = y_{1 \text{ одн}} + y_{1 \text{ част}} = D_1 \cos kt + D_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (11)$$

Для определения постоянных интегрирования надо записать начальные условия движения точки C_1 . В условии задачи указано, что в начальный момент точка C_1 была в положении статического равновесия и скорость ее, по величине равная v_0 , была направлена вниз, т. е. при $t = 0$ $y_1 = 0$ и $\dot{y}_1 = v_0$. Подставив в (11) начальное условие $t = 0$, $y_1 = 0$, находим, что $D_1 = 0$.

Для определения D_2 продифференцируем по времени y_1 , определенное формулой (11),

$$\dot{y}_1 = -D_1 k \sin kt + D_2 k \cos kt + \frac{h\omega}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t.$$

Подставив в \dot{y} начальное условие $t=0$, $\dot{y}_1 = v_0$, находим:

$$D_2 = \frac{1}{k} \left(v_0 - \frac{\omega h}{k^2 - \omega^2} \right).$$

Теперь решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний центра тяжести C_1 станины механизма в случае отсутствия резонанса принимает вид

$$y_1 = \frac{1}{k} \left(v_0 - \frac{\omega h}{k^2 - \omega^2} \right) \sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t,$$

где

$$k = \sqrt{\frac{cg}{P_1 + P_2}}, \quad h = \frac{P_2}{P_1 + P_2} (r_1 + r_2) \omega^2.$$

Рассмотрим вариант б): если $\omega = k$, т. е. имеет место явление резонанса, то частное решение ищется в виде $y_{1 \text{ част}} = At \sin \omega t + Bt \cos \omega t$, где A и B — постоянные коэффициенты, подлежащие последующему определению. Вычисляем:

$$\dot{y}_{1 \text{ част}} = A \sin \omega t + A \omega t \cos \omega t + B \cos \omega t - B \omega t \sin \omega t,$$

$$\ddot{y}_{1 \text{ част}} = 2A\omega \cos \omega t - A\omega^2 t \sin \omega t - 2B\omega \sin \omega t - B\omega^2 t \cos \omega t.$$

Подставив $y_{1 \text{ част}}$ и $\ddot{y}_{1 \text{ част}}$ в дифференциальное уравнение (7), получим:

$$2A\omega \cos \omega t - A\omega^2 t \sin \omega t - 2B\omega \sin \omega t - B\omega^2 t \cos \omega t + Ak^2 t \sin \omega t + Bk^2 t \cos \omega t = h \sin \omega t.$$

Приравняв коэффициенты, стоящие в левой и правой частях уравнения соответственно при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, находим (напомним, что при резонансе $\omega = k$):

$$-2B\omega = h, \quad 2A\omega = 0,$$

откуда следует, что $A = 0$ и $B = -h/2\omega$, т. е. частное решение имеет вид

$$y_{1 \text{ част}} = -\frac{h}{2\omega} t \cos \omega t. \quad (12)$$

Подставив значения $y_{1 \text{ одн}}$ и $y_{1 \text{ част}}$ из формул (9) и (12) в (8), находим:

$$y_1 = y_{1 \text{ одн}} + y_{1 \text{ част}} = D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t - \frac{h}{2\omega} t \cos \omega t. \quad (13)$$

Воспользовавшись начальным условием движения, т. е. тем, что при $t=0$ $y_1 = 0$, получаем: $D_1 = 0$.

Для определения D_2 продифференцируем по времени y_1 , записанное формулой (13):

$$\dot{y}_1 = -D_1 \omega \sin \omega t + D_2 \omega \cos \omega t - \frac{h}{2\omega} \cos \omega t + \frac{h}{2} t \sin \omega t.$$

Подставив в \dot{y}_1 начальное условие движения $t=0$, $\dot{y}_1 = v_0$, имеем:

$$D_2 = \frac{1}{\omega} \left(v_0 + \frac{h}{2\omega} \right).$$

Теперь решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний центра тяжести C_1 станины механизма при резонансе принимает вид

$$y_1 = \frac{1}{\omega} \left(v_0 + \frac{h}{2\omega} \right) \sin \omega t - \frac{h}{2\omega} t \cos \omega t,$$

где $h = \frac{P_2}{P_1 + P_2} (r_1 + r_2) \omega^2$. Переменная амплитуда вынужденных колебаний точки C_1 равна $a = \frac{h}{2\omega} t$ и растет прямо пропорционально времени.

Эту задачу, подобно предыдущей, можно решить также и с помощью уравнения динамики переносного поступательного движения.

Колесо 2, участвуя в переносном поступательном движении вместе с центром тяжести C_1 колеса 1 и станины, совершает относительное вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр тяжести C_1 колеса 1 и станины, перпендикулярной к плоскости симметрии механизма.

Изобразив все внешние силы: P_1 , P_2 , R (см. рис. б), добавляем центростремительную силу инерции в относительном движении $J_{rn} = -\frac{P_2}{g} \omega_{rn}$. Так как точка C_2 описывает в относительном движении окружность с центром C_1 радиуса $r_1 + r_2$, то центростремительное ускорение ω_{rn} направлено от C_2 к C_1 и, следовательно, центростремительная сила инерции в относительном движении J_{rn} направлена противоположно. По модулю:

$$J_{rn} = \frac{P_2}{g} \omega_{rn} = \frac{P_2}{g} (r_1 + r_2) \omega^2.$$

Вращательная сила инерции в относительном движении $J_{r\tau} = -\frac{P_2}{g} \omega_{r\tau}$ равна нулю, так как кривошип вращается равномерно.

Применив дифференциальное уравнение переносного поступательного движения материальной системы в проекции на ось y :

$$M\ddot{y}_e = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e + \sum_{k=1}^n J_{rky}$$

получим:

$$M\ddot{y}_e = P_1 + P_2 + R_y + J_{rn} \sin \omega t. \quad (14)$$

Подставив в уравнение (14)

$$M = \frac{P_1 + P_2}{g}, \quad \ddot{y}_e = \ddot{y}_1, \quad J_{rn} = \frac{P_2}{g}(r_1 + r_2)\omega^2,$$

а также выражение $R_y = -c(\Delta_{ct} + y_1)$ из формулы (4), находим:

$$\frac{P_1 + P_2}{g}\ddot{y}_1 = P_1 + P_2 - c\Delta_{ct} - cy_1 + \frac{P_2}{g}(r_1 + r_2)\omega^2 \sin \omega t. \quad (15)$$

Учитывая, что на основании формулы (1), $P_1 + P_2 - c\Delta_{ct} = 0$, получим дифференциальное уравнение (7) в виде

$$\ddot{y}_1 + k^2 y_1 = h \sin \omega t,$$

где $k^2 = \frac{cg}{P_1 + P_2}$ и $h = \frac{P_2}{P_1 + P_2}(r_1 + r_2)\omega^2$. Интегрирование дифференциального уравнения (7) было выполнено в первом варианте решения этой задачи.

Задачи 269 и 270 были решены двумя способами: применением теоремы о движении центра инерции системы материальных точек и с помощью уравнения динамики нерезонансного поступательного движения. Степень трудности решения задач этими способами следует считать примерно равноценной.

3. Случай сохранения скорости центра инерции системы материальных точек. Если главный вектор внешних сил системы равен нулю ($V^e = \sum_{k=1}^n F_k^e = 0$), то скорость центра инерции системы неизменна по величине и направлению (v_C — постоянно), т. е. центр инерции системы материальных точек движется равномерно и прямолинейно либо находится в покое.

Если в частном случае скорость центра инерции равна нулю: $v_C = 0$ (что, например, имеет место при покое системы в начальный момент), то, несмотря на состояние покоя центра инерции, материальные точки системы могут перемещаться, и притом только так, что сумма произведений масс точек на векторы их перемещений равна нулю, т. е. $\sum_{k=1}^n m_k \Delta r_k = 0$.

Аналогично в проекции на ось x : если $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0$, то \dot{x}_C — постоянная. Если же в частном случае $\dot{x}_C = 0$, то $\sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = 0$.

Задача 271. Может ли человек ходить по идеально гладкой горизонтальной плоскости?

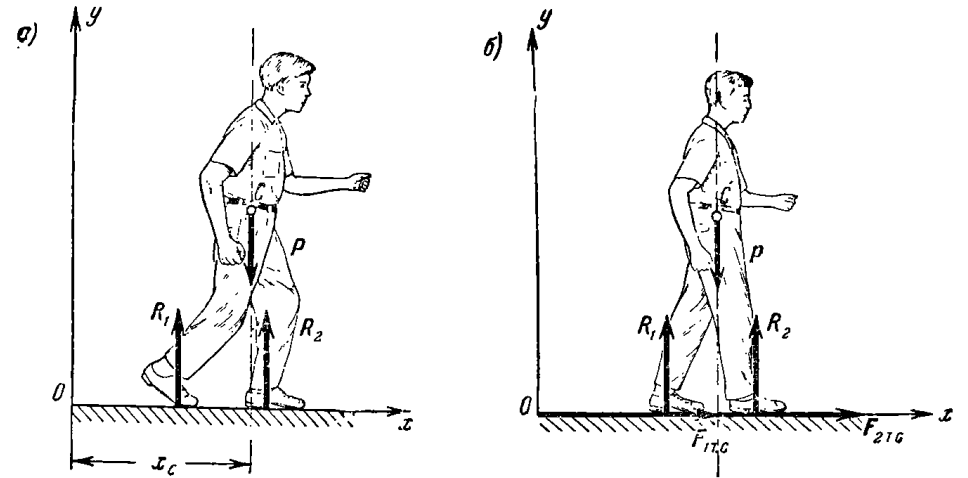
Решение. Внешними силами, приложенными к человеку, являются его вес P и суммарная нормальная сила реакции земли R . Горизон-

тальная сила реакции отсутствует, ибо плоскость является идеально гладкой.

Направив ось x по горизонтали направо, запишем теорему о движении центра инерции материальных точек в проекции на ось x :

$$M\dot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e$$

Так как силы P и R перпендикулярны к оси x , то $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0$ и, следовательно, $M\dot{x}_C = 0$, откуда $M\dot{x}_C = C_1 = \text{const}$. Так как в начальный момент человек находился в покое, то $C_1 = 0$ и $M\dot{x}_C = 0$. Значит, $Mx_C = C_2 = \text{const}$, т. е. абсцисса центра инерции C человека



К задаче 271.

остается неизменной и человек по гладкой горизонтальной плоскости не может ходить. Если бы человек все же попытался пойти, подняв и выставив, например, левую ногу вперед, то правая нога его переместилась бы назад настолько, что абсцисса центра инерции x_C осталась бы неизменной.

Человек мог бы переместиться по гладкой горизонтальной плоскости, бросив какой-нибудь предмет вперед (или назад); тогда бы он начал двигаться в противоположном направлении, т. е. назад (или вперед).

Если бы человек, стоящий на гладкой горизонтальной плоскости, хотел подпрыгнуть, то он мог бы это совершить. Действительно, теорема о движении центра инерции системы материальных точек в проекции на ось y дает:

$$M\ddot{y}_C = R - P;$$

при отталкивании от земли за счет деформации мышц получим $R > P$, т. е. $\ddot{y}_C > 0$, следовательно, центр инерции человека будет перемещаться по вертикали вверх.

Человек может ходить по негладкой горизонтальной плоскости, так как в этом случае к упомянутым внешним силам добавляется сила трения скольжения $F_{т.с}$ подошв человека о землю, направленная в сторону движения (см. рис. б). В этом случае получим $M\ddot{x}_C = F_{т.с}$, т. е. $\ddot{x}_C > 0$, и центр инерции человека C будет ускоренно перемещаться по горизонтали направо.

Задача 272. По наклонной плоскости KL усеченной четырехугольной призмы $DEKL$ опускается груз A веса $P_A = 10$ кг, приводя в движение посредством невесомой нерастяжимой нити груз B веса $P_B = 6$ кг.

Найти перемещение призмы $DEKL$ веса $P = 20$ кг по идеально гладкой горизонтальной плоскости, если груз A переместился по наклонной плоскости KL вниз на 1 м. В начальный момент система находилась в покое.

Решение. Изобразим все внешние силы, приложенные к материальной системе, состоящей из призмы и двух грузов. Внешними силами являются: P — вес призмы, P_A — вес груза A ; P_B — вес груза B и R — суммарная нормальная сила реакции горизонтальной плоскости. Так как горизонтальная плоскость идеально гладкая, то сила трения скольжения между призмой $DEKL$ и горизонтальной плоскостью отсутствует.

Направим ось x по горизонтали направо и запишем теорему о движении центра инерции системы материальных точек в проекции на эту ось:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e.$$

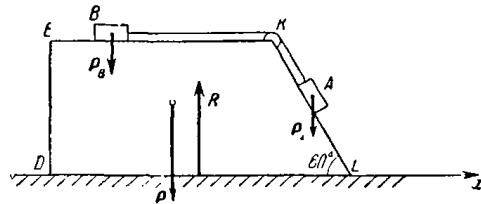
Так как все внешние силы перпендикулярны к оси x , то $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0$.

Следовательно, $M\ddot{x}_C = 0$. Тогда

$$M\dot{x}_C = C_1.$$

В начальный момент времени система находилась в покое; поэтому $C_1 = 0$ и $M\dot{x}_C = 0$. Отсюда следует, что

$$Mx_C = C_2,$$



К задаче 272.

т. е. абсцисса центра инерции системы, независимо от перемещений отдельных масс, входящих в систему, остается постоянной. Из определения центра инерции системы материальных точек вытекает, что

$$Mx_C = \sum_{k=1}^n m_k x_k.$$

Обозначим индексами 1 координаты материальных точек системы, соответствующие моменту t_1 начала перемещений, и индексами 2 — координаты, соответствующие моменту t_2 окончания перемещений. Тогда

$$\text{при } t = t_1 \quad Mx_C = \sum_{k=1}^n m_k x_{1k},$$

$$\text{при } t = t_2 \quad Mx_C = \sum_{k=1}^n m_k x_{2k}.$$

Вычитая из второго соотношения первое, имеем:

$$0 = \sum_{k=1}^n m_k (x_{2k} - x_{1k}).$$

Обозначив $x_{2k} - x_{1k} = \Delta x_k$, получим, что за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ при неизменной абсциссе x_C центра инерции системы материальных точек осуществились такие перемещения точек материальной системы, что сумма произведений масс точек на проекции их перемещений на ось x равна нулю: $\sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = 0$. Применительно к данной задаче запишем:

$$m_A \Delta x_A + m_B \Delta x_B + m \Delta x = 0,$$

где Δx — искомое перемещение призмы по горизонтальной плоскости.

Выразив массы тел через их веса, получим:

$$10(\Delta x + 1 \cdot \cos 60^\circ) + 6(\Delta x + 1) + 20\Delta x = 0.$$

(При решении подобных задач часто допускается грубая ошибка: проекции перемещений масс, входящих в систему, записываются не для абсолютного, а для относительного движения. Переносимым является движение призмы по горизонтальной плоскости, а относительным — движения грузов A и B по отношению к призме.)

Решив уравнение относительно Δx , находим: $\Delta x = -\frac{11}{36}$ м. Знак минус указывает, что призма перемещается в сторону, противоположную положительному направлению оси x , т. е. влево.

§ 3. Теорема об изменении главного вектора количеств движения системы материальных точек

1°. Импульс силы. Главный вектор количеств движения системы материальных точек. Импульс силы F , действующей в течение промежутка времени $t_2 - t_1$, определяется формулой

$$\mathbf{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt.$$

В частном случае постоянной по величине и направлению силы импульс постоянной силы

$$\mathbf{S} = \mathbf{F} \cdot (t_2 - t_1).$$

Проекция импульса силы на оси декартовых координат равны:

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt, \quad S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt, \quad S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt,$$

где $\mathbf{S} = S_x \mathbf{i} + S_y \mathbf{j} + S_z \mathbf{k}$, а F_x, F_y, F_z — проекции силы F . Модуль импульса силы

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}.$$

Направляющие косинусы определяются по формулам:

$$\cos(x, \widehat{\mathbf{S}}) = \frac{S_x}{S}, \quad \cos(y, \widehat{\mathbf{S}}) = \frac{S_y}{S}, \quad \cos(z, \widehat{\mathbf{S}}) = \frac{S_z}{S}.$$

Единица импульса силы: кг·сек.

Теорема об импульсе равнодействующей силы. Импульс равнодействующей силы за некоторый промежуток времени равен векторной сумме импульсов составляющих сил за тот же промежуток времени

$$\mathbf{S}(\mathbf{R}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{S}(\mathbf{F}_k).$$

Та же теорема в проекциях на оси декартовых координат имеет вид:

$$S_x(\mathbf{R}) = \sum_{k=1}^n S_x(\mathbf{F}_k), \quad S_y(\mathbf{R}) = \sum_{k=1}^n S_y(\mathbf{F}_k), \quad S_z(\mathbf{R}) = \sum_{k=1}^n S_z(\mathbf{F}_k).$$

Количество движения \mathbf{q} материальной точки массы m , движущейся со скоростью \mathbf{v} , определяется формулой

$$\mathbf{q} = m\mathbf{v},$$

т. е. количество движения — вектор, пропорциональный скорости точки.

Количество движения является одной из мер движения материальной точки.

Проекция количества движения материальной точки на оси декартовых координат имеют вид:

$$q_x = mv_x, \quad q_y = mv_y, \quad q_z = mv_z$$

или

$$q_x = m\dot{x}, \quad q_y = m\dot{y}, \quad q_z = m\dot{z}.$$

Модуль количества движения материальной точки

$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}.$$

Направляющие косинусы:

$$\cos(x, \widehat{\mathbf{q}}) = \frac{q_x}{q}, \quad \cos(y, \widehat{\mathbf{q}}) = \frac{q_y}{q}, \quad \cos(z, \widehat{\mathbf{q}}) = \frac{q_z}{q}.$$

Единица количества движения: кг·сек.

Главный вектор количеств движения системы материальных точек:

$$\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^n \mathbf{q}_k = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k = M\mathbf{v}_C,$$

являющийся векторной суммой количеств движения точек материальной системы, равен произведению массы системы на скорость ее центра инерции.

Проекция главного вектора количеств движения системы материальных точек на оси декартовых координат даются формулами:

$$Q_x = \sum_{k=1}^n m_k \dot{x}_k = M\dot{x}_C, \quad Q_y = \sum_{k=1}^n m_k \dot{y}_k = M\dot{y}_C, \quad Q_z = \sum_{k=1}^n m_k \dot{z}_k = M\dot{z}_C,$$

где $\mathbf{Q} = Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k}$.

Модуль главного вектора количеств движения системы материальных точек

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}.$$

Направляющие косинусы:

$$\cos(x, \widehat{\mathbf{Q}}) = \frac{Q_x}{Q}, \quad \cos(y, \widehat{\mathbf{Q}}) = \frac{Q_y}{Q}, \quad \cos(z, \widehat{\mathbf{Q}}) = \frac{Q_z}{Q}.$$

Задача 273. Диск вращается вокруг неподвижной оси. Центр тяжести диска лежит на оси вращения. Как изменится главный вектор количеств движения диска, если угловая скорость диска увеличится в два раза?

Решение. Так как центр тяжести диска лежит на оси вращения, то $\mathbf{v}_C = 0$ и, следовательно, $\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_C = 0$. Поэтому главный вектор количеств движения в данном случае от угловой скорости не зависит и равен нулю.

Задача 274. Определить главный вектор количеств движения колеса веса P , катящегося по прямолинейному рельсу, если центр тяжести колеса движется по закону $x_C = at$.

Решение. Главный вектор количеств движения колеса

$$Q = Mv_C$$

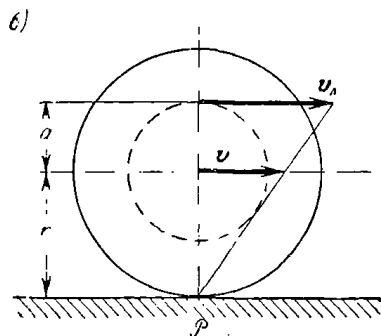
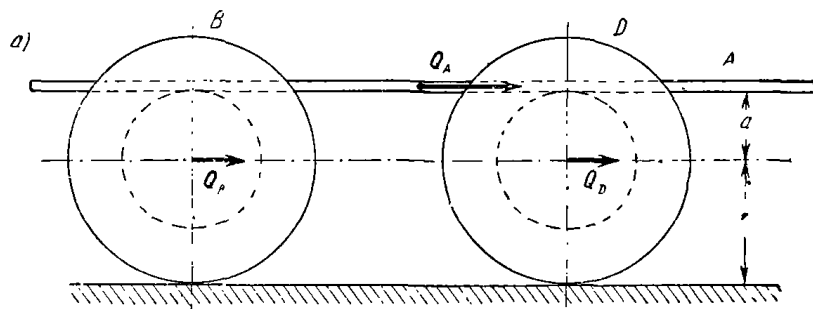
где M — масса, а v_C — скорость центра тяжести колеса.

В рассматриваемом случае $v_C = \dot{x}_C = a$, т. е.

$$Q = \frac{P}{g} a.$$

Вектор Q коллинеарен v_C , т. е. направлен по горизонтали направо.

Задача 275. Балка A веса P_1 перемещается по горизонтали направо посредством двух катушек B и D веса P_2 и радиуса r



К задаче 275.

каждая, катящихся по земле без скольжения. Скорость центра тяжести каждой из катушек равна v . Определить главный вектор

количеств движения системы. Балка находится от земли на расстоянии $r + a$ (см. рисунок).

Решение. Главный вектор количеств движения системы:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_D,$$

где Q_A — главный вектор количеств движения балки A , Q_B и Q_D — главные векторы количеств движения катушек B и D .

Имеем:

$$Q_A = \frac{P_1}{g} v_A, \quad Q_B = Q_D = \frac{P_2}{g} v.$$

Учитывая, что мгновенный центр скоростей \mathcal{P} каждой из катушек находится в точке касания катушки с землей (см. рис. б), находим:

$$v_A = \frac{r+a}{r} v.$$

Итак,

$$Q = \frac{P_1}{g} v_A + \frac{2P_2}{g} v = \frac{1}{g} \left(\frac{r+a}{r} P_1 + 2P_2 \right) v.$$

Таким образом, направление главного вектора количеств движения системы совпадает с направлением движения балки.

Задача 276. Определить главный вектор количеств движения кулисного механизма, рассмотренного в задаче 262.

Решение. Проекции главного вектора количеств движения механизма на оси декартовых координат даются формулами:

$$Q_x = M\dot{x}_C, \quad Q_y = M\dot{y}_C,$$

где

$$M = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{g}.$$

При решении задачи 262 были определены координаты центра инерции механизма:

$$x_C = \frac{P_3}{P_1 + P_2 + P_3} l + \frac{P_1 + 2P_2 + 2P_3}{2(P_1 + P_2 + P_3)} l \cos \omega t,$$

$$y_C = \frac{P_1 + 2P_2}{2(P_1 + P_2 + P_3)} l \sin \omega t.$$

Находим:

$$\dot{x}_C = -\frac{P_1 + 2P_2 + 2P_3}{2(P_1 + P_2 + P_3)} l \omega \sin \omega t,$$

$$\dot{y}_C = \frac{P_1 + 2P_2}{2(P_1 + P_2 + P_3)} l \omega \cos \omega t.$$

Следовательно,

$$Q_x = M\dot{x}_C = -\frac{P_1 + 2P_2 + 2P_3}{2g} l\omega \sin \omega t,$$

$$Q_y = M\dot{y}_C = \frac{P_1 + 2P_2}{2g} l\omega \cos \omega t.$$

Модуль главного вектора количеств движения кулисного механизма

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = \frac{l\omega}{2g} \sqrt{(P_1 + 2P_2 + 2P_3)^2 \sin^2 \omega t + (P_1 + 2P_2)^2 \cos^2 \omega t}.$$

Косинус угла, который образует вектор Q с осью x

$$\cos(x, \widehat{Q}) = \frac{Q_x}{Q} = -\frac{(P_1 + 2P_2 + 2P_3) \sin \omega t}{\sqrt{(P_1 + 2P_2 + 2P_3)^2 \sin^2 \omega t + (P_1 + 2P_2)^2 \cos^2 \omega t}}.$$

2°. Теорема об изменении количества движения материальной точки (в интегральной форме). Изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно векторной сумме импульсов сил, приложенных к точке за тот же промежуток времени:

$$\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 = \sum_{k=1}^n \mathbf{S}(\mathbf{F}_k),$$

где \mathbf{q}_1 соответствует начальному моменту времени t_1 , а \mathbf{q}_2 — конечному моменту времени t_2 . Та же теорема в проекциях на оси декартовых координат имеет вид:

$$m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = \sum_{k=1}^n S_x(\mathbf{F}_k),$$

$$m\dot{y}_2 - m\dot{y}_1 = \sum_{k=1}^n S_y(\mathbf{F}_k),$$

$$m\dot{z}_2 - m\dot{z}_1 = \sum_{k=1}^n S_z(\mathbf{F}_k).$$

С помощью теоремы об изменении количества движения материальной точки можно решать задачи, в которых в число данных и неизвестных входят: масса m материальной точки, скорость точки в начальный и конечный моменты времени (\mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2), силы, приложенные к материальной точке, и промежуток времени их действия.

Для вычисления импульса силы по формуле $\mathbf{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$ должна быть известна зависимость силы от времени, т. е. в случае сил, зависящих от координат и скоростей, надо знать закон движения.

Задачи на применение теоремы об изменении количества движения материальной точки следует решать в следующей последовательности:

- 1) изобразить на рисунке все силы, приложенные к материальной точке, т. е. задаваемые силы и силы реакций связей (применить принцип освобожденности от связей);
- 2) выбрать систему координат;
- 3) записать теорему об изменении количества движения материальной точки в проекциях на эти оси:

$$m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = \sum_{k=1}^n S_x(\mathbf{F}_k),$$

$$m\dot{y}_2 - m\dot{y}_1 = \sum_{k=1}^n S_y(\mathbf{F}_k),$$

$$m\dot{z}_2 - m\dot{z}_1 = \sum_{k=1}^n S_z(\mathbf{F}_k);$$

- 4) а) если в задаче требуется определить начальную или конечную скорости точки при заданном законе изменения сил и промежутке времени их действия, то, вычислив проекции импульсов сил по формулам

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt, \quad S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt, \quad S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt$$

и подставив их значения в уравнения предыдущего пункта, определяют искомые проекции скорости точки;

- б) если по условию задачи требуется определить одну из постоянных сил, приложенных к материальной точке, то ее можно легко получить из уравнений пункта 3), так как в этом случае

$$S_x = F_x(t_2 - t_1), \quad S_y = F_y(t_2 - t_1), \quad S_z = F_z(t_2 - t_1).$$

Задача 277. Материальная точка массы m движется равномерно по окружности со скоростью v под действием некоторой системы сил.

Определить импульс равнодействующей этой системы сил при перемещении материальной точки по дуге четверти окружности из точки A в точку B .

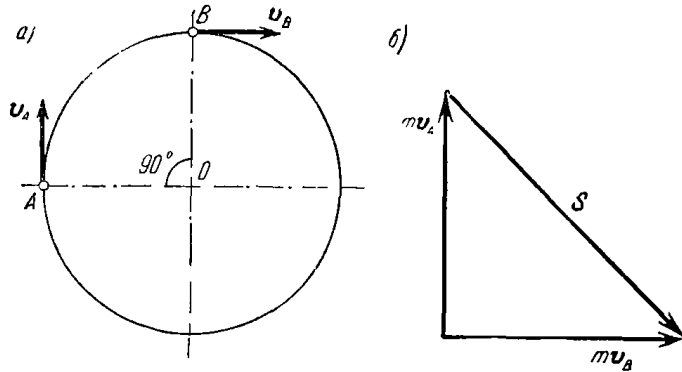
Решение. Применяем теорему об изменении количества движения материальной точки:

$$m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \mathbf{S}.$$

Так как $m\mathbf{v}_2 = m\mathbf{v}_B$, а $m\mathbf{v}_1 = m\mathbf{v}_A$, то

$$\mathbf{S} = m\mathbf{v}_B - m\mathbf{v}_A.$$

Построив векторы количеств движения $m\mathbf{v}_B$ и $m\mathbf{v}_A$ из одной точки (см. рис. б), находим их разность, равную импульсу равнодействующей силы S . Так как точка движется равномерно, т. е. $|\mathbf{v}_B| = |\mathbf{v}_A| = v$, то $|S| = mv\sqrt{2}$.

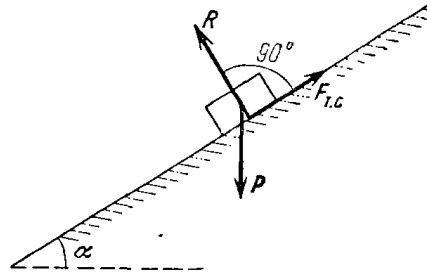


К задаче 277.

Задача 278. Груз спускается вниз по шероховатой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту; f — коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость. В начальный момент времени скорость груза равнялась v .

Через какой промежуток времени скорость груза удвоится?

Решение. Изобразим силы, приложенные к грузу: P — вес груза, R — нормальная сила реакции плоскости, $F_{т.с}$ — сила трения скольжения груза о плоскость, причем $F_{т.с} = fN = fP \cos \alpha$.



К задаче 278.

Направляем ось x вдоль наклонной плоскости вниз. Запишем теорему об изменении количества движения материальной точки в проекции на ось x :

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum_{k=1}^n S_x(F_k).$$

Согласно условию задачи, $v_{1x} = v$, $v_{2x} = 2v$. Так как все силы, приложенные к грузу, постоянны, то

$$\sum_{k=1}^n S_x(F_k) = \sum_{k=1}^n F_{kx} \Delta t = (P \sin \alpha - F_{т.с}) \Delta t = P(\sin \alpha - f \cos \alpha) \Delta t,$$

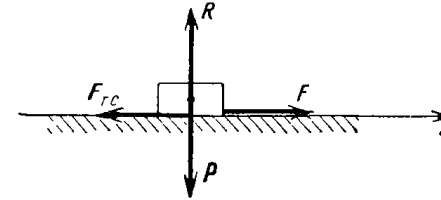
где Δt — искомый промежуток времени. Следовательно,

$$2mv - mv = P(\sin \alpha - f \cos \alpha) \Delta t,$$

откуда

$$\Delta t = \frac{v}{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}.$$

Задача 279. Твердое тело веса P начинает двигаться из состояния покоя по шероховатой горизонтальной плоскости под действием силы F , пропорциональной времени: $F = at$, где a — постоянная. Какую скорость приобретет тело через t секунд после начала движения, если коэффициент трения скольжения тела о горизонтальную плоскость равен f ?



К задаче 279.

Решение. Изобразим силы, приложенные к телу: P — вес тела, F — движущая сила, равная по модулю $F = at$, R — нормальная сила реакции горизонтальной плоскости, $F_{т.с}$ — сила трения скольжения тела о горизонтальную плоскость, причем $F_{т.с} = fP$.

Направим ось x по горизонтали направо.

Запишем теорему об изменении количества движения материальной точки в проекции на ось x :

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum_{k=1}^n S_x(F_k).$$

$v_{1x} = 0$, так как в начальный момент тело находилось в покое; $v_{2x} = v_x$, где v_x — проекция искомой скорости на ось x . Сумма проекций импульсов всех сил на ось x равна

$$\sum_{k=1}^n S_x(F_k) = \int_0^t F dt - F_{т.с} \cdot t = \int_0^t at dt - fPt = \frac{at^2}{2} - fPt.$$

Следовательно,

$$\frac{P}{g} v_x = \frac{at^2}{2} - fPt,$$

откуда

$$v_x = gt \left(\frac{at}{2P} - f \right).$$

3°. Теорема об изменении главного вектора количеств движения системы материальных точек (в интегральной форме). Изменение главного вектора количеств движения системы материальных точек за некоторый промежу-

ток времени равно векторной сумме импульсов всех внешних сил системы за тот же промежуток времени:

$$Q_2 - Q_1 = \sum_{k=1}^n S(F_k^e).$$

Та же теорема в проекциях на оси декартовых координат имеет вид:

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \sum_{k=1}^n S_x(F_k^e), \quad Q_{2y} - Q_{1y} = \sum_{k=1}^n S_y(F_k^e),$$

$$Q_{2z} - Q_{1z} = \sum_{k=1}^n S_z(F_k^e),$$

т. е.

$$M\dot{x}_{C_2} - M\dot{x}_{C_1} = \sum_{k=1}^n S_x(F_k^e), \quad M\dot{y}_{C_2} - M\dot{y}_{C_1} = \sum_{k=1}^n S_y(F_k^e),$$

$$M\dot{z}_{C_2} - M\dot{z}_{C_1} = \sum_{k=1}^n S_z(F_k^e).$$

Следует обратить внимание на то, что сумма импульсов внутренних сил системы всегда равна нулю: $\sum_{k=1}^n S(F_k^i) = 0$, т. е. внутренние силы непосредственно не влияют на изменение главного вектора количества движения системы материальных точек.

Отсутствие внутренних сил в формулировке теоремы об изменении главного вектора количества движения системы материальных точек значительно упрощает решение соответствующих задач.

Эта теорема обычно применяется в случае сплошных сред (см. ниже теорему Эйлера).

Случай сохранения главного вектора количества движения системы материальных точек.

Если векторная сумма импульсов внешних сил системы равна нулю, то главный вектор количества движения системы материальных точек постоянен, т. е. если $\sum_{k=1}^n S(F_k^e) = 0$, то $Q_2 = Q_1$.

Если сумма проекций импульсов внешних сил на некоторую ось равна нулю, то проекция на эту ось главного вектора количества движения системы неизменна. Например, если

$$\sum_{k=1}^n S_x(F_k^e) = 0, \quad \text{то} \quad Q_{2x} = Q_{1x}.$$

Закон сохранения главного вектора количества движения системы материальных точек или сохранения его проекции чаще всего применяется при решении задач, в которых в число данных и искомым величин входят массы материальных точек и их скорости в начальный и конечный моменты времени.

Решать задачи с помощью закона сохранения главного вектора количества движения надо в следующей последовательности:

1) изобразить на рисунке все внешние силы;

2) выбрать систему координат;

3) записать теорему об изменении главного вектора количества движения системы материальных точек в проекциях на оси координат;

4) если сумма проекций импульсов внешних сил на ось оказы-

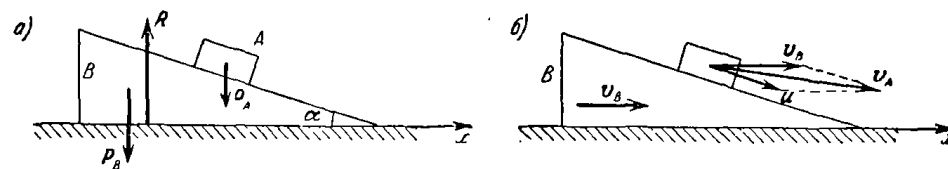
вается равной нулю, например: $\sum_{k=1}^n S_x(F_k^e) = 0$, то следует прирав-

нять между собой проекции на эту ось главного вектора количества движения системы в начальный и конечный моменты времени, т. е.

$Q_{2x} = Q_{1x}$, где $Q_{2x} = \sum_{k=1}^n m_k \dot{x}_{k_2}$ и $Q_{1x} = \sum_{k=1}^n m_k \dot{x}_{k_1}$, и из полученного

уравнения определить искомую величину.

Задача 280. Материальная система состоит из груза A веса P_A , лежащего на наклонной плоскости клина B веса P_B , расположенной под углом α к горизонту. В начальный момент система находилась в покое; затем груз A начал скользить по наклонной плоскости с относительной скоростью u .



К задаче 280.

Определить скорость движения клина B . Силой трения скольжения клина о горизонтальную плоскость пренебречь.

Решение. В состав рассматриваемой материальной системы входят два тела: груз A и клин B .

Изобразим все внешние силы системы: P_A — вес груза, P_B — вес клина, R — нормальная сила реакции горизонтальной плоскости (было бы ошибочным изображение нормальной силы реакции наклонной плоскости, приложенной к грузу, так как эта сила по отношению к системе, состоящей из груза и клина, является внутренней).

Направим ось x по горизонтали направо.

Запишем теорему об изменении главного вектора количеств движения системы материальных точек в проекции на ось x :

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \sum_{k=1}^n S_x(F_k^e).$$

Так как сумма проекций всех внешних сил на ось x равна нулю: $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0$, то и сумма проекций импульсов всех внешних сил на эту ось тоже равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n S_x(F_k^e) = \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} F_{kx}^e dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{k=1}^n F_{kx}^e \right) dt = 0.$$

Тогда

$$Q_{2x} - Q_{1x} = 0,$$

т. е. $Q_{2x} = Q_{1x}$.

Следовательно, имеет место случай сохранения проекции на ось x главного вектора количеств движения системы.

В начальный момент система находилась в покое, т. е. $Q_{1x} = 0$.

Вычислим проекцию на ось x главного вектора количеств движения системы в рассматриваемый момент времени. Допустим, что клин B движется направо с искомой скоростью v_B . Для нахождения скорости груза A надо применить теорему о сложении скоростей точки $v_a = v_e + v_r$. Груз A совершает переносное поступательное движение вместе с клином B , т. е. $v_e = v_B$, и относительное движение по отношению к клину B , т. е. $v_r = u$.

Следовательно, $v_A = v_B + u$ (см. рис. б) и

$$v_{Ax} = v_{Bx} + u_x = v_{Bx} + u \cos \alpha.$$

Теперь можно вычислить проекцию главного вектора количеств движения системы на ось x :

$$Q_{2x} = m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx} = \frac{P_A}{g} (v_{Bx} + u \cos \alpha) + \frac{P_B}{g} v_{Bx};$$

как было показано, $Q_{2x} = Q_{1x}$, т. е.

$$\frac{P_A}{g} (v_{Bx} + u \cos \alpha) + \frac{P_B}{g} v_{Bx} = 0,$$

откуда

$$v_{Bx} = -\frac{P_A}{P_A + P_B} u \cos \alpha.$$

Знак минус указывает, что в действительности клин B движется влево, т. е. вектор v_B направлен не так, как было предположено выше. (При решении подобных задач не следует забывать, что в выражение

главного вектора количеств движения системы материальных точек входят абсолютные скорости материальных точек.)

Задача 281. Решить предыдущую задачу в предположении, что в начальный момент клин B перемещался направо со скоростью v_B , а груз A находился в относительном покое.

Определить скорость клина B в момент, когда груз A начал двигаться по наклонной плоскости клина с относительной скоростью u .

Решение. Аналогично выкладкам предыдущей задачи запишем:

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \sum_{k=1}^n S_x(F_k^e), \quad \sum_{k=1}^n S_x(F_k^e) = 0,$$

откуда следует, что $Q_{2x} = Q_{1x}$.

Проекция главного вектора количеств движения после начала относительного движения груза определяется формулой

$$Q_{2x} = m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx},$$

где v_{Bx} — проекция на ось x искомой скорости клина.

В соответствии с теоремой о сложении скоростей точки, $v_A = v_B + u$ (см. рис. б, к задаче 280); имеем: $v_{Ax} = v_{Bx} + u \cos \alpha$. Таким образом,

$$Q_{2x} = \frac{P_A}{g} (v_{Bx} + u \cos \alpha) + \frac{P_B}{g} v_{Bx}.$$

Проекция главного вектора количеств движения в начальный момент времени имеет вид

$$Q_{1x} = \frac{P_A + P_B}{g} v_{Bx}^*.$$

Из условия равенства проекций на ось x главных векторов количеств движения системы материальных точек в конечный и начальный моменты времени находим:

$$\frac{P_A + P_B}{g} v_{Bx}^* = \frac{P_A}{g} (v_{Bx} + u \cos \alpha) + \frac{P_B}{g} v_{Bx},$$

откуда

$$v_{Bx} = v_{Bx}^* - \frac{P_A}{P_A + P_B} u \cos \alpha.$$

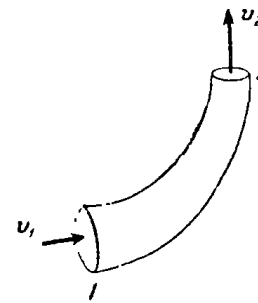


Рис. 126.

4°. Теорема об изменении главного вектора количеств движения системы материальных точек в приложении к сплошным средам (теорема Эйлера). Рассматривается объем жидкости (или газа), ограниченный боковой поверхностью трубы и двумя плоскими поперечными сечениями 1 и 2, перпендикулярными к стенкам трубы (рис. 126).

Пусть σ_1 и σ_2 — площади плоских поперечных сечений 1 и 2; ρ_1 и ρ_2 — плотности жидкости в сечениях 1 и 2, соответственно v_1 и v_2 — скорости жидкости в сечениях 1 и 2.

При стационарном течении секундная масса M_c , т. е. масса жидкости (или газа), протекающая в единицу времени через любое сечение трубы, постоянна:

$$M_c = \rho_1 v_1 \sigma_1 = \rho_2 v_2 \sigma_2.$$

Векторы $M_c v_1$ и $M_c v_2$ — секундные количества движения жидкости в сечениях 1 и 2.

Внешние силы, действующие на рассматриваемый объем жидкости, разделяются на объемные и поверхностные.

Объемными называются силы, которые действуют на все частицы жидкости, расположенные как внутри, так и на поверхности рассматриваемого объема (например, силы тяжести частиц жидкости).

Поверхностными называются силы, действующие на частицы жидкости, лежащие на внешней поверхности объема (например, силы реакций стенок трубы, приложенные к частицам жидкости, соприкасающимся со стенками трубы).

Теорема Эйлера. Сумма главных векторов объемных и поверхностных сил, а также векторов секундных количеств движения жидкости, протекающей через два сечения трубы, равна нулю, если векторы секундных количеств движения направить внутрь выделенного сечениями объема

$$V_{об} + V_{пов} + M_c v_1 - M_c v_2 = 0$$

(т. е. векторы $V_{об}$, $V_{пов}$, $M_c v_1$ и $-M_c v_2$ образуют замкнутый многоугольник (см. рис. 127)).

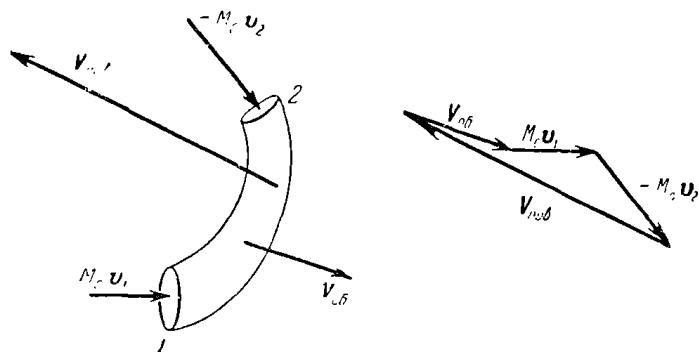


Рис. 127.

Теоремой Эйлера в приложении к сплошным средам (жидкостям и газам) удобно пользоваться при решении задач, в которых в число данных и искомых величин входят: площади плоских поперечных сечений, ограничивающих рассматриваемый объем (σ_1 и σ_2), плотности

жидкости (газа) в этих сечениях (ρ_1 и ρ_2), скорости жидкости (газа) в этих сечениях (v_1 и v_2), объемные и поверхностные силы.

Задачи с помощью теоремы Эйлера рекомендуется решать в следующей последовательности:

- 1) изобразить на рисунке объемные и поверхностные силы;
- 2) изобразить на рисунке векторы секундных количеств движения жидкости (газа), протекающей через два сечения, ограничивающие рассматриваемый объем жидкости (газа); при этом векторы секундных количеств движения надо направлять внутрь этого объема;
- 3) выбрать систему координат;
- 4) записать теорему Эйлера в проекциях на оси декартовых координат:

$$V_{об\ x} + V_{пов\ x} + M_c v_{1x} - M_c v_{2x} = 0,$$

$$V_{об\ y} + V_{пов\ y} + M_c v_{1y} - M_c v_{2y} = 0,$$

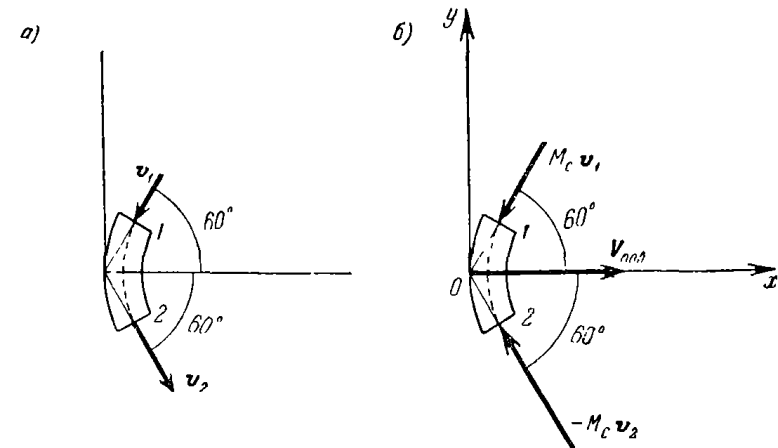
$$V_{об\ z} + V_{пов\ z} + M_c v_{1z} - M_c v_{2z} = 0,$$

где

$$M_c = \rho_1 \sigma_1 v_1 = \rho_2 \sigma_2 v_2;$$

5) из уравнений, составленных в предыдущем пункте, определить искомые величины.

Задача 282. Струя воды протекает по изогнутой трубе, прямолинейные участки которой образуют угол 120° , со скоростью 10 м/сек.



К задаче 282.

Ось трубы, изображенная на рис. а, расположена в горизонтальной плоскости. Сечение трубы — круг, диаметр которого 10 см.

Определить главный вектор сил добавочных динамических давлений воды на стенки трубы.

Решение. Используем теорему Эйлера в приложения к сплошным средам. На рис. а изображен вид трубы в плане.

Объемной является сила тяжести воды, которая перпендикулярна к плоскости рисунка. Поверхностными являются силы реакции стенок трубы, приложенные к частицам воды. Определив главный вектор сил реакций стенок трубы, найдем искомый главный вектор добавочных динамических давлений воды на стенки трубы по принципу равенства действия и противодействия.

Изображаем векторы секундных количеств движения воды, протекающей через сечения трубы 1 и 2, направив их внутрь рассматриваемого объема (см. рис. б).

Секундная масса воды, т. е. масса воды, протекающей через сечение трубы в одну секунду,

$$M_c = \frac{\gamma}{g} \sigma v,$$

где γ — удельный вес воды, σ — площадь поперечного сечения трубы, v — модуль скорости движения воды по трубе.

Направим ось x по горизонтали направо, а ось y по вертикали вверх.

Запишем теорему Эйлера в проекциях на оси x и y :

$$V_{об\ x} + V_{пов\ x} + M_c v_{1x} - M_c v_{2x} = 0,$$

$$V_{об\ y} + V_{пов\ y} + M_c v_{1y} - M_c v_{2y} = 0.$$

В данном случае, поскольку вектор $V_{об}$ перпендикулярен к осям x и y , получим:

$$V_{пов\ x} - M_c v \cos 60^\circ - M_c v \cos 60^\circ = 0,$$

$$V_{пов\ y} - M_c v \cos 30^\circ + M_c v \cos 30^\circ = 0$$

(индексы при скоростях отброшены, так как в нашем случае $|v_1| = |v_2| = v$), откуда

$$V_{пов\ x} = 2M_c v \cos 60^\circ, \quad V_{пов\ y} = 0.$$

Итак, главный вектор добавочных динамических реакций стенок трубы направлен параллельно оси x (см. рис. б). Так как $M_c = \frac{\gamma}{g} \sigma v$, то

$$V_{пов} = 2 \frac{\gamma}{g} \sigma v^2 \cos 60^\circ.$$

По условию $\gamma = 1 \text{ кг/дм}^3$, $\sigma = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = 0,79 \text{ дм}^2$, $v = 100 \text{ дм/сек}$, $g = 98,1 \text{ дм/сек}^2$. Подставив эти значения, получим, что $V_{пов} = 80,6 \text{ кг}$.

Главный вектор сил добавочных динамических давлений воды на стенки трубы N равен по модулю и направлен противоположно $V_{пов}$, т. е. по горизонтали влево.

Задача 283. Из резервуара, наполненного водой, вытекает струя воды со скоростью $v = 12 \text{ м/сек}$. Диаметр выходного отверстия $d = 4 \text{ см}$.

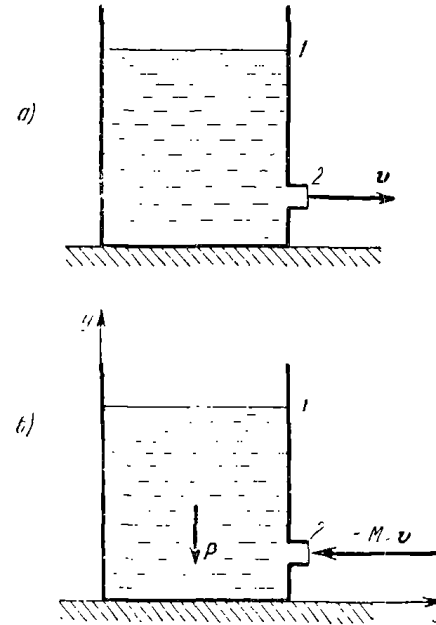
Определить суммарную добавочную горизонтальную реакцию стенок резервуара. Понижением уровня воды в резервуаре пренебречь.

Решение. Используем теорему Эйлера в приложения к сплошным средам. Объемными являются силы тяжести частиц воды. Поверхностными — силы реакции стенок резервуара.

Так как скоростью понижения уровня воды в резервуаре мы пренебрегаем, то секундное количество движения воды в сечении 1 равно нулю.

Вектор секундного количества движения воды, проходящей через сечение 2, направим внутрь рассматриваемого объема воды, т. е. по горизонтали влево.

Выбранные оси декартовых координат xu изображены на рисунке б.



К задаче 283.

Теорема Эйлера в проекции на ось x имеет вид

$$V_{об\ x} + V_{пов\ x} + M_c v_{1x} - M_c v_{2x} = 0.$$

В данном случае, так как $V_{об\ x}$ и $M_c v_{1x}$ равны нулю, получим:

$$V_{пов\ x} - M_c v = 0, \quad \text{т. е.} \quad V_{пов\ x} = M_c v.$$

Секундная масса воды равна $M_c = \frac{\gamma}{g} \sigma v$, где γ — удельный вес воды, σ — площадь поперечного сечения 2, v — модуль скорости течения воды, т. е. $V_{пов\ x} = \frac{\gamma}{g} \sigma v^2$. В данной задаче

$$\gamma = 1 \text{ кг/дм}^3, \quad \sigma = \frac{\pi \cdot 0,04^2}{4} = 0,13 \text{ дм}^2, \quad v = 120 \text{ дм/сек},$$

$$g = 98,1 \text{ дм/сек}^2.$$

Подставив численные значения, получим модуль искомой суммарной добавочной горизонтальной силы реакции стенок резервуара $R_x = V_{пов\ x} = 19,1 \text{ кг}$.

§ 4. Теорема об изменении главного момента количества движения системы материальных точек.

Моменты инерции твердых тел

1°. Главный момент количества движения системы материальных точек. Моментом L_O количества движения (кинетическим моментом) материальной точки относительно центра O называется вектор, определяемый формулой

$$l_O = r \times mv.$$

Модуль этого вектора равен $|L_O| = mvh$, где h — плечо (рис. 128).

Единица момента количества движения: кг·м·сек.

Момент количества движения l_z материальной точки относительно оси равен проекции на эту ось момента количества движения материальной точки относительно любого центра, лежащего на оси:

$$l_z = \text{пр}_z l_O.$$

Разложение вектора l_O по ортам имеет вид

$$l_O = l_x \mathbf{i} + l_y \mathbf{j} + l_z \mathbf{k}.$$

Его модуль дается формулой

$$|l_O| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2},$$

а соответствующие направляющие косинусы будут:

$$\cos(x, \widehat{l_O}) = \frac{l_x}{|l_O|}, \quad \cos(y, \widehat{l_O}) = \frac{l_y}{|l_O|}, \quad \cos(z, \widehat{l_O}) = \frac{l_z}{|l_O|}.$$

Моменты количества движения материальной точки относительно осей декартовых координат даются формулами:

$$l_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \quad l_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \quad l_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

где x, y, z — координаты материальной точки в системе осей, имеющей начало в центре O ; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ — проекции скорости точки на эти оси.

Главный момент L_O количества движения системы (кинетический момент) материальных точек относительно центра O равен векторной сумме моментов количества движения относительно того же центра материальных точек системы, т. е.

$$L_O = \sum_{k=1}^n l_{kO} = \sum_{k=1}^n (r_k \times m_k v_k)$$

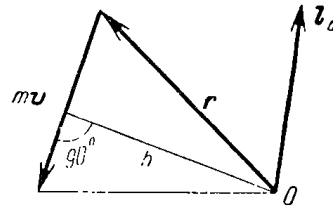


Рис. 128.

(было бы ошибочным считать, что $L_O = r_c \times Mv_c$, так как момент главного вектора количества движения относительно центра, вообще говоря, не равен главному моменту количества движения всех материальных точек системы относительно того же центра).

Главные моменты количества движения системы материальных точек относительно осей декартовых координат определяются формулами:

$$L_x = \sum_{k=1}^n l_{kx}, \quad L_y = \sum_{k=1}^n l_{ky}, \quad L_z = \sum_{k=1}^n l_{kz}.$$

Нетрудно проследить полную аналогию между понятием момента силы в статике и момента количества движения в динамике, вытекающую из сопоставления соответствующих формул:

$$m_O(F) = r \times F, \quad l_O = r \times mv \quad \text{и т. д.}$$

2°. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки. Производная по времени от вектора момента количества движения материальной точки относительно неподвижного центра равна векторной сумме моментов относительно того же центра всех сил, приложенных к материальной точке:

$$\frac{dl_O}{dt} = \sum_{k=1}^n m_O(F_k).$$

Та же теорема, записанная относительно осей декартовых координат, имеет вид:

$$\frac{dl_x}{dt} = \sum_{k=1}^n m_x(F_k), \quad \frac{dl_y}{dt} = \sum_{k=1}^n m_y(F_k), \quad \frac{dl_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k).$$

Задачи с помощью теоремы об изменении момента количества движения материальной точки рекомендуется решать в следующей последовательности:

1) выбрать систему координат (при движении точки по дуге окружности следует одну из осей направить через центр окружности перпендикулярно к ее плоскости и выбрать положительное направление отсчета угла поворота φ);

2) изобразить на рисунке силы, приложенные к материальной точке, т. е. задаваемые силы и силы реакций связей (применив принцип освобождения от связей);

3) вычислить суммы моментов сил, приложенных к материальной точке относительно осей координат;

4) изобразить вектор количества движения материальной точки, записать выражение его моментов относительно осей координат и взять от них производные по времени;

5) подставить результаты подсчетов двух предыдущих пунктов решения задачи в уравнения теоремы об изменении момента количества движения материальной точки;

6) решить в соответствии с условием прямую либо обратную задачу динамики точки.

Пункт 4) решения задачи можно, минуя 2) и 3), выполнять после 1).

Задача 284. Найти закон и период колебаний *математического маятника*, длина нити которого равна l . В начальный момент маятнику, нить которого занимала отвесное положение, была сообщена посредством толчка начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0$.

Решение. Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная посредством нерастяжимой нити к неподвижной оси и движущаяся в вертикальной плоскости.

Из рисунка маятник изображен в отклоненном положении от вертикали на угол φ . Направление положительного отсчета угла поворота φ указано на рисунке. Маятник совершает качания около оси z , перпендикулярной к плоскости рисунка и проходящей через точку привеса O . Траекторией материальной точки является дуга окружности, расположенная в вертикальной плоскости с центром в O и радиусом l .

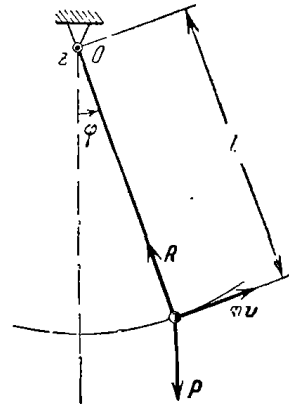
Для решения задачи применяем теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно оси z :

$$\frac{dl_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k). \quad (1)$$

Изображаем вес материальной точки P и силу реакции нити R . Момент силы реакции нити R относительно оси z равен нулю, а момент веса P равен $-Ph = -Pl \sin \varphi$. Момент отрицателен, так как его направление противоположно направлению положительного отсчета угла поворота φ .

Итак, сумма моментов всех сил, приложенных к маятнику, равна

$$\sum_{k=1}^n m_z(F_k) = -Pl \sin \varphi. \quad (2)$$



К задаче 284.

Рисунок сделан в предположении, что маятник движется в сторону увеличения угла поворота φ . Момент количества движения маятника относительно оси z равен $l_z = mv l$; так как $v = l\dot{\varphi}$, то $l_z = ml^2\dot{\varphi}$ и

$$\frac{dl_z}{dt} = ml^2\ddot{\varphi}. \quad (3)$$

Подставив значения $\sum_{k=1}^n m_z(F_k)$ и $\frac{dl_z}{dt}$ из формул (2) и (3) в уравнение (1), получим:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -Pl \sin \varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (4)$$

Решение этого нелинейного дифференциального уравнения колебаний маятника представляет известные трудности. Поэтому решим задачу приближенно, считая колебания маятника малыми. Разложим $\sin \varphi$ в ряд

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

и пренебрегая членами разложения порядка выше первого, получим $\sin \varphi \approx \varphi$. Тогда дифференциальное уравнение колебаний маятника примет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Обозначив $\frac{g}{l} = k^2$, запишем окончательно:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0.$$

Для решения этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами составим соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + k^2 = 0$. Корни характеристического уравнения равны $\lambda_{1,2} = \pm ki$, и решение уравнения запишется в виде

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (5)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 воспользуемся заданными начальными условиями движения. В условии задачи указано, что в начальный момент маятнику, нить которого занимала отвесное положение, была сообщена посредством толчка начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0$, т. е. при $t=0$ $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$.

Дифференцируя φ , определенное уравнением (5), по времени, находим:

$$\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (6)$$

Подставив в (5): $t=0$, $\varphi=0$, а в (6) $t=0$, $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0$, получим: $C_1=0$, $C_2=\frac{\dot{\varphi}_0}{k}$. Теперь уравнение (5) принимает вид

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt,$$

где $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Обозначим $\frac{\dot{\varphi}_0}{k} = \alpha$; тогда окончательно:

$$\varphi = \alpha \sin kt.$$

Итак, маятник совершает гармонические колебания с угловой амплитудой α и с круговой частотой $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$. При малых колебаниях маятника ($\sin \varphi \approx \varphi$) оказывается, что круговая частота колебаний не зависит от начальных условий движения, т. е. колебания маятника обладают свойством *изохронности*.

Период колебаний маятника равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (7)$$

Масса материальной точки не входит в выражение периода колебаний T . Следовательно, материальные точки, несмотря на различные массы, имеют при одинаковой длине нити маятника l один и тот же период колебаний. (В «секундном маятнике» $\frac{T}{2} = 1$ сек, т. е. $\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 1$, откуда длина нити «секундного маятника» равна $l = \frac{g}{\pi^2} \approx 1$ м.)

Переходим к определению периода колебаний T из точного дифференциального уравнения колебаний математического маятника (4):

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Обозначив $\frac{g}{l} = k^2$, умножив почленно уравнение на $d\varphi$ и учитывая, что $\ddot{\varphi} d\varphi = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} d\varphi = \dot{\varphi} d\dot{\varphi}$, получим:

$$\dot{\varphi} d\dot{\varphi} = -k^2 \sin \varphi d\varphi.$$

Принтегрировав, находим:

$$\dot{\varphi}^2 = 2k^2 \cos \varphi + C;$$

так как при $\varphi = \alpha$ $\dot{\varphi} = 0$, то имеем $C = -2k^2 \cos \alpha$ и, следовательно,

$$\dot{\varphi} = k \sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}.$$

Так как $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$, то

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}} = k dt.$$

Воспользовавшись тождеством $\cos \varphi - \cos \alpha = 2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)$, получим:

$$\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = k dt. \quad (8)$$

Сделаем подстановку

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin u, \quad (9)$$

откуда

$$d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos u du}{\cos \frac{\varphi}{2}}.$$

Теперь уравнение (8) принимает вид

$$\frac{du}{\cos \frac{\varphi}{2}} = k dt,$$

или

$$\frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 u}} = k dt.$$

В силу условия, что при $t=0$ $\varphi=0$, из формулы (9) вытекает, что в начальный момент $u=0$, а из условия, что при $t = \frac{T}{4}$ $\varphi = \alpha$, следует, что $u = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 u}} = \frac{kT}{4};$$

где $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Итак, период колебаний маятника равен

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot K, \quad (10)$$

где

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 u}}$$

является эллиптическим интегралом первого рода. Разлагая

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 u}}$$

в ряд и почленно интегрируя, получим:

$$K = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{4} + \frac{9 \sin^4 \frac{\alpha}{2}}{64} + \dots \right).$$

После подстановки полученного значения K в формулу (10) приходим к искомому выражению периода колебаний маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right), \quad (11)$$

т. е. колебания маятника при конечной угловой амплитуде α свойством изохронности не обладают — его период зависит от угловой амплитуды колебаний α .

Считая α малой величиной и пренебрегая в формуле (11) членами разложения, содержащими α во второй и более высоких степенях, получим приближенную формулу (7):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (12)$$

При угловой амплитуде колебаний $\alpha = 20^\circ$ период колебаний, подсчитанный по формуле (11) или по более точной формуле (10), больше периода колебаний маятника, определенного по приближенной формуле (12), всего лишь на $0,8\%$, но при $\alpha = 60^\circ$ — соответственно уже на $3,5\%$.

3. Случай сохранения момента количества движения материальной точки. Если векторная сумма моментов относительно неподвижного центра всех сил, приложенных к материальной точке, равна нулю, то момент количества движения материальной точки относительно того же центра постоянен, т. е. если

$$\sum_{k=1}^n m_k (\mathbf{F}_k) = 0, \text{ то } l_O \text{ постоянен.}$$

Аналогично, если сумма моментов сил, приложенных к материальной точке, относительно оси равна нулю, то момент количества движения этой точки относительно той же оси постоянен. Например,

$$\text{если } \sum_{k=1}^n m_k (F_k)_x = 0, \text{ то } l_x \text{ — постоянная величина.}$$

Этими частными случаями теоремы об изменении момента количества движения материальной точки удобно пользоваться при изучении движения материальной точки под действием центральной силы.

Задачи с помощью закона сохранения момента количества движения материальной точки можно решать, придерживаясь следующей последовательности действий:

1) выбрать центр, относительно которого следует применить теорему об изменении момента количества движения материальной точки (при движении точки под действием центральной силы следует брать центр силы);

2) изобразить на рисунке все задаваемые силы и силы реакции связей, приложенные к материальной точке;

3) определить вектор количества движения материальной точки и найти момент количества движения этой точки относительно центра;

4) применить теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра и, проверив, что сумма моментов всех сил относительно центра равна нулю, приравнять

моменты количеств движения материальной точки в ее начальном и конечном положениях: $l_{2O} = l_{1O}$. Из этого уравнения определить искомую величину.

В некоторых задачах приходится пользоваться этой теоремой относительно одной из осей координат.

Задача 285. Материальная точка движется под действием центральной силы F , линия действия которой неизменно проходит через точку O .

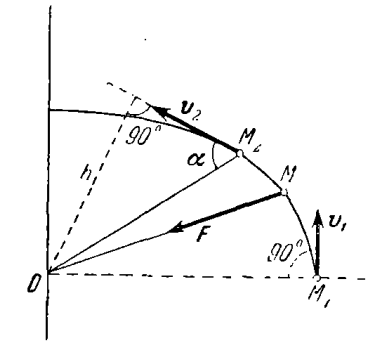
К задаче 285.

Найти скорость точки в положении M_2 , если в положении M_1 ее скорость v_1 равнялась 4 м/сек , причём $\frac{OM_1}{OM_2} = \frac{3}{2}$ и угол, образуемый скоростью v_2 с линией действия силы, $\alpha = 60^\circ$ (см. рисунок). Весом точки M пренебречь.

Решение. Применяем теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно оси z , проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости рисунка (на рисунке эта ось не показана):

$$\frac{dl_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_k (F_k)_z.$$

Так как к материальной точке приложена только сила F , момент которой относительно оси равен нулю, то $\sum_{k=1}^n m_k (F_k)_z = 0$ и, следо-



вательно, l_z — постоянная величина, т. е. $l_{1z} = l_{2z}$. Момент количества движения материальной точки в положении M_1 относительно оси z

$$l_{1z} = mv_1 OM_1.$$

Момент количества движения материальной точки в положении M_2 относительно оси z

$$l_{2z} = mv_2 h = mv_2 \cdot OM_2 \cdot \sin \alpha.$$

Так как $l_{1z} = l_{2z}$, то $mv_1 \cdot OM_1 = mv_2 \cdot OM_2 \sin \alpha$, откуда $v_2 = v_1 \frac{OM_1}{OM_2 \sin \alpha}$. После подстановки численных значений получим, что $v_2 = 6,92$ м/сек.

4°. Теорема об изменении главного момента количества движения системы материальных точек. Производная по времени от главного момента количества движения системы материальных точек относительно неподвижного центра равна векторной сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра, т. е.

$$\frac{dL_O}{dt} = \sum_{k=1}^n m_O(F_k^e).$$

(Следует обратить внимание на то, что, подобно теоремам о движении центра инерции, об изменении главного вектора количества движения системы материальных точек, в формулировку данной теоремы также не входят внутренние силы системы, определение которых обычно связано со значительными трудностями.)

Та же теорема, записанная относительно осей декартовых координат, имеет вид:

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum_{k=1}^n m_x(F_k^e), \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum_{k=1}^n m_y(F_k^e), \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k^e).$$

5°. Случай сохранения главного момента количества движения системы материальных точек. Если векторная сумма моментов всех внешних сил системы относительно неподвижного центра равна нулю, то главный момент количества движения системы относительно того же центра постоянен, т. е. если

$$\sum_{k=1}^n m_O(F_k^e) = 0,$$

то вектор L_O постоянен.

Аналогично, если сумма моментов всех внешних сил системы относительно неподвижной оси равна нулю, то главный момент количества

движения системы относительно той же оси постоянен. Например, если $\sum_{k=1}^n m_x(F_k^e) = 0$, то L_x — постоянная величина.

Теорему об изменении главного момента количества движения системы материальных точек относительно неподвижной оси рекомендуется применять при рассмотрении движения материальной системы, в состав которой входит подвижная среда, вращающаяся вокруг этой оси. Если сумма моментов всех внешних сил системы относительно оси равна нулю, то можно получить соотношение между массами материальных точек, их скоростями и угловой скоростью вращения подвижной среды.

Задачи с помощью теоремы о сохранении главного момента количества движения рекомендуется решать в следующей последовательности:

- 1) выбрать координатные оси, направив одну из них вдоль неподвижной оси вращения;
- 2) изобразить на рисунке все внешние силы системы;
- 3) записать теорему об изменении главного момента количества движения системы материальных точек относительно выбранной оси, например:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k^e);$$

- 4) показать, что сумма моментов всех внешних сил системы относительно оси равна нулю;

- 5) вычислить и приравнять главные моменты количества движения системы материальных точек относительно оси в начальный и конечный моменты времени: $L_{1z} = L_{2z}$, где $L_{1z} = \sum_{k=1}^n l_{1kz}$ и $L_{2z} = \sum_{k=1}^n l_{2kz}$;

- 6) решив уравнение $L_{1z} = L_{2z}$, определить искомую величину.

Главный момент количества движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, относительно оси вращения равен произведению момента инерции твердого тела относительно этой оси на проекцию угловой скорости вращения:

$$L_z = I_z \omega_z.$$

Моментом инерции твердого тела I_z относительно оси называется сумма произведений масс материальных точек, из которых состоит твердое тело, на квадраты их расстояний до оси, т. е.

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2.$$

Момент инерции твердого тела относительно оси характеризует распределение масс его материальных точек относительно этой оси. Момент инерции всегда положителен. Единица измерения момента инерции $\text{кгм} \cdot \text{сек}^2$.

При непрерывном распределении масс материальных точек в твердом теле момент инерции определяется формулой

$$I_z = \int_{(M)} r^2 dm.$$

В случае однородного твердого тела имеем:

$$I_z = \frac{M}{V} \int_{(V)} r^2 dV,$$

где M — масса твердого тела, V — объем твердого тела, dV — элемент объема.

Теорема Штейнера о зависимости между моментами инерции твердого тела относительно параллельных осей формулируется так: момент инерции твердого тела относительно оси равен сумме его момента инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр тяжести тела C , и произведения массы твердого тела на квадрат расстояния между параллельными осями (рис. 129), т. е.

$$I_{z_1} = I_{z_C} + Md^2.$$

Радиусом инерции ρ твердого тела относительно оси называется величина, произведение квадрата которой на массу твердого тела равно моменту инерции твердого тела относительно этой оси, т. е.

$$I_z = M\rho^2.$$

Так, для шара $I_z = \frac{2}{5} Mr^2 = M\rho^2$, откуда $\rho = 0,63 r$.

Если в ходе решения задачи требуется вычислить момент инерции твердого тела относительно оси, не проходящей через центр тяжести, то проводят параллельную ось через центр тяжести твердого тела и применяют теорему Штейнера (при этом момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через центр тяжести, масса твердого тела и расстояние между параллельными осями должны быть известны).

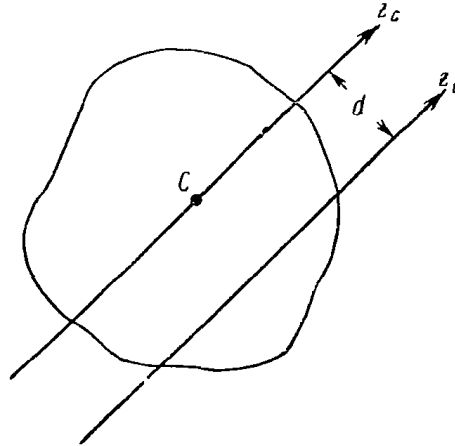


Рис. 129.

Если надо вычислить момент инерции материальной системы, состоящей из нескольких твердых тел, причем момент инерции каждого из порознь взятых твердых тел известен, то определяют момент инерции системы относительно некоторой оси как сумму моментов инерции всех твердых тел, входящих в систему, относительно той же оси.

При вычислении момента инерции однородной плоской фигуры относительно некоторой оси выделяют в плоской фигуре такую элементарную площадь, момент инерции которой относительно соответствующей оси известен, либо легко может быть подсчитан. Затем определяется искомый момент инерции однородной плоской фигуры путем суммирования моментов инерции всех элементарных площадей.

При вычислении момента инерции однородного трехмерного твердого тела относительно некоторой оси выделяют в твердом теле такой элементарный объем, момент инерции которого относительно соответствующей оси известен, либо легко может быть определен. Затем вычисляется искомый момент инерции однородного твердого тела путем суммирования моментов инерции всех элементарных объемов.

Задача 286. Вычислить момент инерции и радиус инерции однородного круглого диска веса P и радиуса r относительно оси L , лежащей в его плоскости и отстоящей от центра тяжести C диска на расстоянии, равном четверти радиуса.

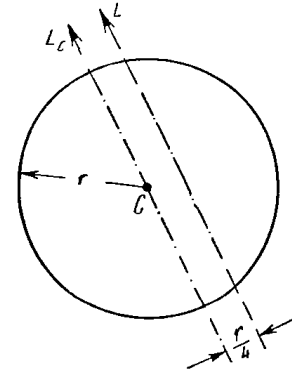
Решение. Проводим ось L_C через центр тяжести C диска параллельно оси L . Как известно, момент инерции однородного круглого диска относительно оси, проходящей вдоль одного из его диаметров, $I_{L_C} = \frac{Mr^2}{4}$.

Применив теорему Штейнера, находим:

$$I_L = I_{L_C} + M \left(\frac{r}{4} \right)^2 = \frac{Mr^2}{4} + \frac{Mr^2}{16} = \frac{5Pr^2}{16g}.$$

Воспользовавшись формулой $I_L = \frac{P}{g} \rho_L^2$, определяем радиус инерции ρ_L диска относительно оси L . Имеем:

$$\frac{P}{g} \rho_L^2 = \frac{5Pr^2}{16g}, \text{ откуда } \rho_L = \frac{r\sqrt{5}}{4}.$$

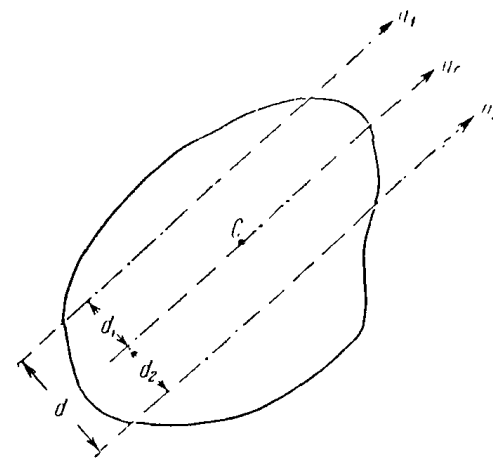


К задаче 286.

Моменты инерции некоторых однородных твердых тел

№	Наименование	Схема тела	Момент инерции
1	Тонкий прямолинейный стержень		$I_z = \frac{Ml^2}{3}$
2	Кольцо (материальная окружность)		$I_z = Mr^2$
3	Тонкий круглый диск		$I_x = I_y = \frac{Mr^2}{4}$ $I_z = \frac{Mr^2}{2}$
4	Круглый цилиндр		$I_x = I_y = M \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right)$ $I_z = \frac{Mr^2}{2}$
5	Шар		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} Mr^2$

Задача 287. Даны моменты инерции твердого тела I_{y_1} и I_{y_2} относительно двух параллельных осей y_1 и y_2 , отстоящих друг от друга на расстоянии d , причем $I_{y_1} > I_{y_2}$. Центр тяжести твердого тела массы M расположен между осями y_1 и y_2 . Какая из осей расположена ближе к центру тяжести C твердого тела и насколько?



К задаче 287.

Решение. Проводим через центр тяжести C твердого тела ось y_C , параллельную осям y_1 и y_2 . Применяв дважды теорему Штейнера, находим:

$$I_{y_1} = I_{y_C} + Md_1^2, \quad (1)$$

$$I_{y_2} = I_{y_C} + Md_2^2. \quad (2)$$

Так как по условию $I_{y_1} > I_{y_2}$, то $d_1 > d_2$, т. е. ось y_2 расположена ближе к центру тяжести C .

Вычитая из равенства (1) равенство (2), получим:

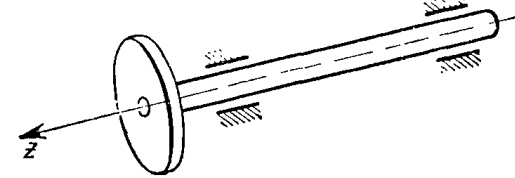
$$I_{y_1} - I_{y_2} = M(d_1^2 - d_2^2) = M(d_1 + d_2)(d_1 - d_2);$$

так как $d_1 + d_2 = d$, то

$$I_{y_1} = I_{y_2} + Md(d_1 - d_2).$$

Следовательно, ось y_2 расположена ближе к центру тяжести C , чем ось y_1 , на величину

$$d_1 - d_2 = \frac{I_{y_1} - I_{y_2}}{Md}.$$



К задаче 288.

Задача 288. Вычислить момент инерции относительно оси вращения z вала веса 100 кг и радиуса 10 см с посаженным на него маховиком веса 1 т и радиуса 1 м. Вал считать однородным сплошным цилиндром, маховик — однородным кольцом.

Решение. Момент инерции системы, состоящей из вала и маховика, равен сумме их моментов инерции, т. е.

$$I_z = I_{zv} + I_{zm} = \frac{100}{9,81} \cdot \frac{0,1^2}{2} + \frac{1000}{9,81} \cdot 1^2 = 0,05 + 102 = 102,05 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2.$$

Так как момент инерции вала составляет всего лишь 0,05% от момента инерции маховика, то им можно пренебречь.

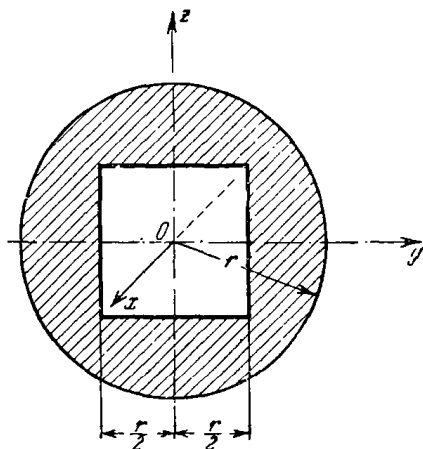
Задача 289. Вычислить моменты инерции относительно осей координат x , y , z тонкой однородной круглой пластинки радиуса r , внутри которой вырезан квадрат с длиной стороны, равной r . Центры квадрата и круга совпадают; M — масса пластинки без выреза.

Решение. Момент инерции пластинки с вырезом относительно некоторой оси равен разности моментов инерции круга $I^{(1)}$ и квадрата $I^{(2)}$ относительно той же оси, т. е.

$$I_x = I_x^{(1)} - I_x^{(2)},$$

$$I_y = I_y^{(1)} - I_y^{(2)},$$

$$I_z = I_z^{(1)} - I_z^{(2)}.$$



К задаче 289.

Из соображений симметрии следует, что $I_y = I_z$. Воспользуемся формулами:

$$I_x^{(1)} = \frac{Mr^2}{2}, \quad I_y^{(1)} = I_z^{(1)} = \frac{Mr^2}{4}, \quad I_x^{(2)} = \frac{M^{(2)} \cdot r^2}{6}, \quad I_y^{(2)} = I_z^{(2)} = \frac{M^{(2)} \cdot r^2}{12}$$

(где масса вырезанного квадрата $M^{(2)} = \frac{M}{\pi r^2} \cdot r^2 = \frac{M}{\pi}$).

Следовательно,

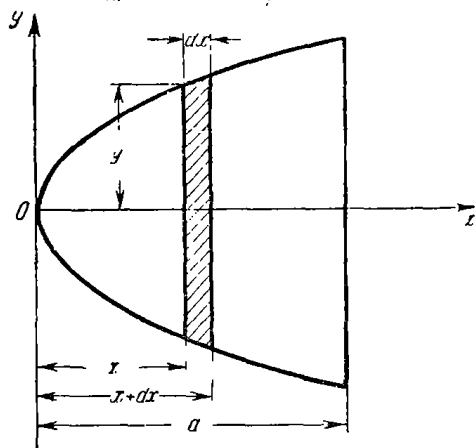
$$I_x^{(2)} = \frac{Mr^2}{6\pi}, \quad I_y^{(2)} = I_z^{(2)} = \frac{Mr^2}{12\pi};$$

окончательно получим:

$$I_x = \frac{Mr^2}{2} - \frac{Mr^2}{6\pi} = \frac{3\pi - 1}{6\pi} Mr^2 = 0,446 Mr^2;$$

$$I_y = I_z = \frac{Mr^2}{4} - \frac{Mr^2}{12\pi} = \frac{3\pi - 1}{12\pi} Mr^2 = 0,223 Mr^2.$$

Задача 290. Вычислить момент инерции тонкой однородной параболической пластинки массы M относительно оси y . Основание пластинки параллельно оси y и отстоит от него на расстоянии a . Уравнение параболы, ограничивающей пластинку, имеет вид $y^2 = 4x$.



К задаче 290.

Решение. Проведем на пластинке две прямые, параллельные оси y и отстоящие от нее на расстояниях x и $x + dx$.

Вычислим момент инерции относительно оси y массы площадки, заштрихованной на рисунке, ограниченной этими прямыми и параболическим контуром пластинки: $dI_y = x^2 dm$, где элементарная масса заштрихованной площади пластинки равна $dm = \gamma ds$. Здесь γ — плотность пластинки, ds — площадь заштрихованной площадки, причем $ds = 2y dx$.

Следовательно, $dm = 2\gamma y dx$ и $dI_y = 2\gamma x^2 y dx$. Так как по условию $y^2 = 4x$, т. е. $y = 2\sqrt{x}$, то $dI_y = 4\gamma x^2 \sqrt{x} dx$. Момент инерции пластинки относительно оси y

$$I_y = \int_{(S)} dI_y = \int_0^a 4\gamma x^2 \sqrt{x} dx = \frac{8}{7} \gamma a^2 \sqrt{a}.$$

Так как масса пластинки равна $M = \gamma S$, где площадь пластинки

$$S = \int_0^a 2y dx = 4 \int_0^a \sqrt{x} dx = \frac{8}{3} a \sqrt{a}, \quad \text{то } M = \frac{8}{3} \gamma a \sqrt{a}.$$

Учитывая выражение массы пластинки M , запишем искомый момент инерции в форме $I_y = \frac{3}{7} Ma^2$.

Задача 291. Вычислить моменты инерции относительно осей x , y , z однородного круглого конуса массы M , с высотой h и радиусом основания r (см. рисунок).

Решение. Рассекаем конус двумя плоскостями, параллельными плоскости xu и отстоящими от нее на расстояниях z и $z + dz$.

Вычислим момент инерции массы элементарного объема, ограниченного этими плоскостями и боковой поверхностью конуса.

Дифференциал объема тела определяем как объем кругового цилиндра с радиусом основания y и высотой dz , т. е. $dv = \pi y^2 dz$. Следовательно, масса выделенного элемента объема равна $dm = \gamma dv = \gamma \pi y^2 dz$, где γ — плотность конуса.

Момент инерции выделенного элементарного объема относительно оси z вычисляем по формуле момента инерции цилиндра:

$$dI_z = \frac{dm \cdot y^2}{2} = \frac{\gamma \pi}{2} y^4 dz.$$

Обозначив α половину угла при вершине конуса, получим $y = z \operatorname{tg} \alpha$ и, следовательно, $dI_z = \frac{\gamma \pi \operatorname{tg}^4 \alpha}{2} z^4 dz$. Тогда момент инерции конуса относительно оси z равен

$$I_z = \int_{(V)} dI_z = \int_0^h \frac{\gamma \pi \operatorname{tg}^4 \alpha}{2} z^4 dz = \frac{\gamma \pi}{10} h^5 \operatorname{tg}^4 \alpha.$$

Учитывая, что объем конуса $v = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^3 \operatorname{ctg} \alpha$ и, следовательно, масса конуса $M = \gamma \cdot v = \frac{1}{3} \pi \gamma r^3 \operatorname{ctg} \alpha$, окончательно получим:

$$I_z = \frac{3}{10} Mr^2.$$

Нетрудно видеть из соображений симметрии, что $I_x = I_y$.

Для вычисления I_y выделим момент инерции выделенного элементарного объема относительно оси y . Для этого через его центр тяжести проведем ось y_1 , параллельную оси y . Воспользовавшись формулой момента инерции диска относительно экваториальной оси y_1 , имеем:

$$dl_{y_1} = \frac{dm \cdot y^2}{4}.$$

Применив теорему Штейнера, находим:

$$dl_y = dl_{y_1} + dm \cdot z^2 = \\ = dm \left(\frac{y^2}{4} + z^2 \right).$$

Воспользовавшись ранее вычисленным значением $dm = \gamma \pi y^2 dz$, получим: $dl_y = \gamma \pi y^2 \left(\frac{y^2}{4} + z^2 \right) dz = \\ = \gamma \pi \operatorname{tg}^2 \alpha \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{4} \right) z^4 dz$ (так как $y = z \operatorname{tg} \alpha$).

Вычисление момента инерции конуса относительно оси y дает:

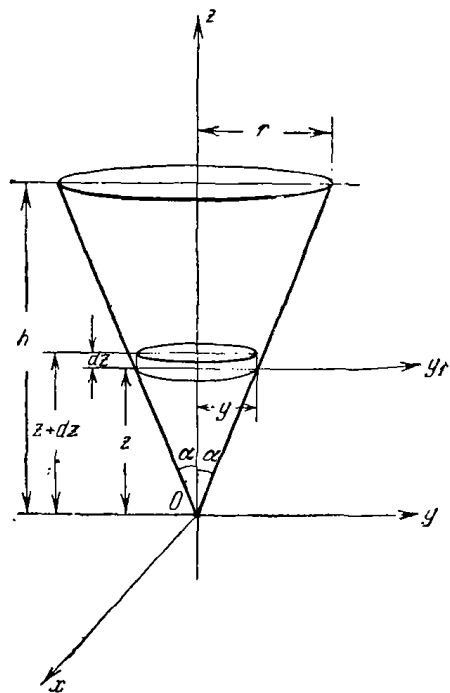
$$I_y = \int_{(z)} dl_y = \int_0^h \gamma \pi \operatorname{tg}^2 \alpha \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{4} \right) z^4 dz = \frac{\gamma \pi h^5}{5} \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{4} \right) \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Учитывая, что масса конуса равна $M = \frac{1}{3} \gamma \pi r^2 h$ и $\frac{r}{h} = \operatorname{tg} \alpha$, находим:

$$I_y = \frac{3}{5} M \left(h^2 + \frac{r^2}{4} \right).$$

Так как $I_x = I_y$, то окончательно имеем:

$$I_x = I_y = \frac{3}{5} M \left(h^2 + \frac{r^2}{4} \right).$$



К задаче 291.

Задача 292. Вычислить главный момент количества движения относительно оси вращения диска массы M и радиуса r , эксцентрично посаженного на ось вращения и вращающегося с угловой скоростью ω . Плоскость диска перпендикулярна к оси вращения. Эксцентриситет равен половине радиуса.

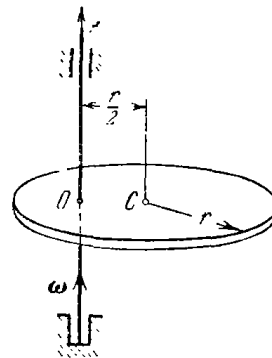
Решение. Направим вдоль оси вращения координатную ось z .

Главный момент количества движения твердого тела относительно оси вращения $L_z = I_z \omega_z$, где I_z — момент инерции твердого тела относительно оси вращения. Для вычисления I_z применяем теорему Штейнера. Мысленно проведя через центр тяжести C диска ось, параллельную оси z , найдем:

$$I_z = I_C + M \left(\frac{r}{2} \right)^2 = \frac{Mr^2}{2} + \frac{Mr^2}{4} = \frac{3}{4} Mr^2.$$

Итак, искомый главный момент количества движения рассматриваемого диска относительно оси вращения z дается формулой

$$L_z = I_z \omega_z = \frac{3}{4} Mr^2 \omega_z.$$



К задаче 292.

Задача 293. Может ли повернуться человек, стоящий на идеально гладкой горизонтальной плоскости, если он начнет вращать руку над головой?

Решение. Направим через центр тяжести C человека ось z перпендикулярно к неподвижной плоскости, изобразим внешние силы, приложенные к человеку: P — вес человека и R — нормальная сила реакции плоскости (так как плоскость идеально гладкая, то сила трения отсутствует).

Применяем теорему об изменении главного момента количества движения системы материальных точек относительно оси z :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_z (F_k^e).$$

Так как внешние силы P и R лежат на оси z , то $\sum_{k=1}^n m_z (F_k^e) = 0$,

т. е. $\frac{dL_z}{dt} = 0$ и L_z — постоянная; следовательно,

$$L_{1z} = L_{2z}.$$

Итак, имеет место случай сохранения главного момента количества движения системы материальных точек относительно оси z .

Человек находился в начальный момент в покое; поэтому $L_{1z} = 0$. Затем человек поднял руку над головой и начал ею вращать вокруг оси z с относительной угловой скоростью ω_2^* . Допустим, что при

этом туловище человека начинает вращаться в ту же сторону с угловой скоростью $\omega_z^{2'}$. Теперь главный момент количества движения системы относительно оси z будет $L_{z2} = L_z^{1'} - L_z^{2'}$, причем

$$L_z^{1'} = I_z^1 \omega_z^{1'}, \quad L_z^{2'} = I_z^2 \omega_z^{2'},$$

где I_z^1 — момент инерции руки относительно оси вращения z , I_z^2 — момент инерции туловища относительно оси вращения z , $\omega_z^{1'}$ — абсолютная угловая скорость руки.

Учитывая, что рука человека совершает сложное движение (относительное по отношению к туловищу и переносное вместе с туловищем), получим: $\omega_z^{1'} = \omega_z^{(1)*} + \omega_z^{2'}$, и следовательно,

$$L_z^{1'} = I_z^{(1)} (\omega_z^{(1)*} + \omega_z^{2'}).$$

Тогда

$$L_{z2} = L_z^{(1)} + L_z^{(2)} = I_z^{(1)} (\omega_z^{(1)*} + \omega_z^{(2)}) + I_z^{(2)} \omega_z^{(2)}.$$

Учитывая, что $L_{1z} = L_{z2}$ и $L_{1z} = 0$, получим:

$$I_z^{(1)} (\omega_z^{(1)*} + \omega_z^{(2)}) + I_z^{(2)} \omega_z^{(2)} = 0,$$

откуда

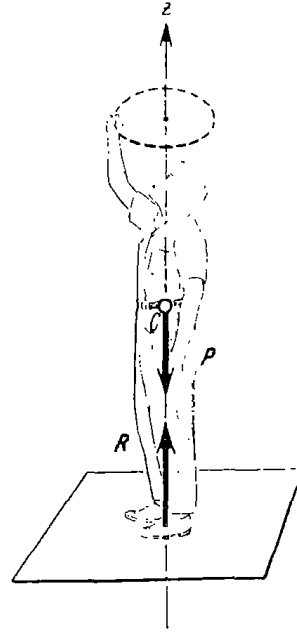
$$\omega_z^{(2)} = - \frac{I_z^{(1)}}{I_z^{(1)} + I_z^{(2)}} \omega_z^{(1)*}.$$

Знак минус указывает, что человек будет вращаться вокруг оси z в сторону, противоположную вращению руки.

Итак, человек, стоящий на идеально гладкой горизонтальной плоскости, может повернуться вокруг оси, проходящей через его центр тяжести перпендикулярно к этой плоскости.

Задача 294. На боковой поверхности кругового конуса симметрично расположены два груза, соединенные между собой тонкой нитью и отстоящие от оси вращения конуса на расстоянии одной трети радиуса основания конуса. Конус вместе с грузами вращался с угловой скоростью ω . После внезапного разрыва нити грузы начали опускаться по боковой поверхности конуса. Определить угловую скорость конуса в момент, когда грузы достигнут основания конуса. Вес каждого из грузов в четыре раза меньше веса конуса. Силами сопротивлений движению пренебречь. Грузы считать точечными массами.

Решение. Взяв начало координат в нижней опоре A оси конуса, направим ось z по оси вращения конуса. Обозначим: P — вес конуса, r — радиус основания конуса.



К задаче 293

Изобразим внешние силы материальной системы, состоящей из конуса и двух грузов: P — вес конуса, P_1 и P_2 — веса грузов, R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Az} , R_{Bx} , R_{By} — составляющие сил реакций опор A и B .

Применим теорему об изменении главного момента количества движения системы материальных точек относительно оси z :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_k (F_k^z).$$

Так как все внешние силы либо параллельны, либо пересекают ось вращения z , то сумма моментов всех внешних сил относительно

оси z равна нулю: $\sum_{k=1}^n m_k (F_k^z) = 0$,

т. е. $\frac{dL_z}{dt} = 0$ и L_z — постоянная, следовательно, $L_{1z} = L_{z2}$. Итак, имеет место случай сохранения проекции главного момента количества движения системы материальных точек.

Воспользовавшись формулой $L_z = I_z \omega_z$, запишем:

$$L_{1z} = I_{1z} \omega_{1z}, \quad L_{z2} = I_{z2} \omega_{z2},$$

где I_{1z} и I_{z2} — соответственно моменты инерции системы в первом и во втором положении грузов. Так как $L_{1z} = L_{z2}$, то $I_{1z} \omega_{1z} = I_{z2} \omega_{z2}$, откуда

$$\omega_{z2} = \frac{I_{1z}}{I_{z2}} \omega_{1z}.$$

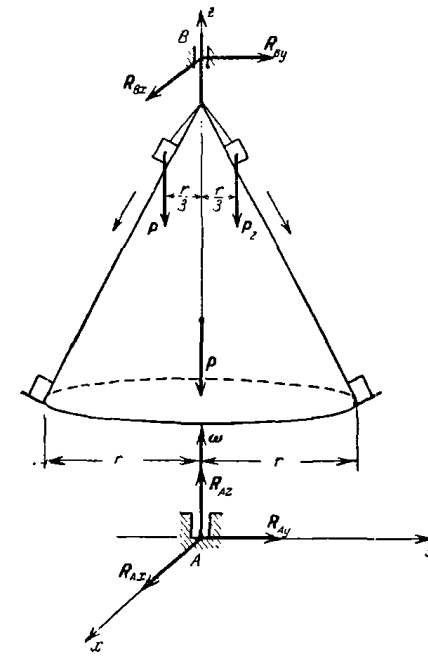
Остается вычислить I_{1z} и I_{z2} . Так как материальная система состоит из конуса и двух грузов, то момент инерции системы равен сумме моментов инерции конуса и грузов.

Момент инерции конуса относительно оси вращения z равен $\frac{3}{10} \frac{P}{g} r^2$, грузы считаем точечными массами. В соответствии с начальными и конечными положениями грузов запишем:

$$I_{1z} = \frac{3}{10} \frac{P}{g} r^2 + 2 \frac{P}{4g} \left(\frac{r}{3}\right)^2 = \frac{16}{45} \frac{P}{g} r^2, \quad I_{z2} = \frac{3}{10} \frac{P}{g} r^2 + 2 \frac{P}{4g} r^2 = \frac{4}{5} \frac{P}{g} r^2.$$

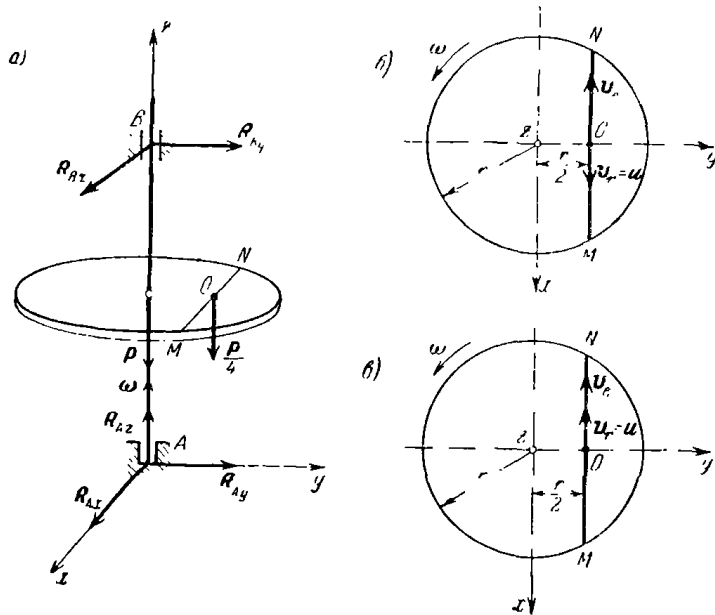
Используя найденные значения I_{1z} и I_{z2} , получим:

$$\omega_{z2} = \frac{4}{9} \omega_{1z}.$$



К задаче 294.

Задача 295. По хорде MN диска радиуса r , вращающегося вокруг неподвижной вертикальной оси, совершает колебание груз, который при прохождении среднего положения O имеет относительную скорость u . В момент времени, когда груз находится в крайних положениях M и N , угловая скорость диска равна ω_1 . Определить угловую скорость ω_2 диска в моменты прохождения грузом среднего положения O . Вес груза в четыре раза меньше веса диска. Хорда MN отстоит от центра диска на расстоянии, равном половине радиуса. Груз считать точечной массой. Силами сопротивления пренебречь.



К задаче 295.

Решение. Выбрав начало координат в нижней опоре A , направим ось z по оси вращения диска. Изобразим все внешние силы материальной системы, состоящей из диска и груза: P — вес диска, $\frac{P}{4}$ — вес груза, R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Az} , R_{Bx} , R_{By} — составляющие сил опорных реакций (см. рис. а).

Применим теорему об изменении главного момента количества движения системы материальных точек относительно оси вращения z :

$$\frac{dI_{z-z}}{dt} = \sum_{k=1}^n m_z (F_k^c).$$

Так как моменты всех внешних сил относительно оси вращения равны нулю, то $\sum_{k=1}^n m_z (F_k^c) = 0$, т. е. $\frac{dL_z}{dt} = 0$ и L_z — постоянная.

Следовательно, $L_{1z} = L_{2z}$.

Итак, имеет место случай сохранения главного момента количества движения системы материальных точек относительно оси z .

В моменты времени, когда груз занимает крайние положения (M или N), скорость его относительно диска равна нулю и, следовательно, $L_{1z} = I_{1z}\omega_1$, где I_{1z} — момент инерции материальной системы, состоящей из диска и груза, находящегося в положении M или N . Следовательно,

$$I_{1z} = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = \frac{P}{g} \frac{r^2}{2} + \frac{P}{4g} r^2 = \frac{3}{4} \frac{P}{g} r^2.$$

Здесь $I_z^{(1)}$ — момент инерции диска, $I_z^{(2)}$ — момент инерции груза.

Итак, главный момент количества движения системы L_{1z} относительно оси z при крайнем положении груза равен

$$L_{1z} = \frac{3}{4} \frac{P}{g} r^2 \omega_{1z}. \quad (1)$$

Главный момент количества движения системы L_{2z} относительно оси z при среднем положении груза равен сумме момента количества движения диска $L_z^{(1)}$ и момента количества движения груза относительно той же оси $L_z^{(2)}$:

$$L_{2z} = L_z^{(1)} + L_z^{(2)}. \quad (2)$$

Имеем:

$$L_z^{(1)} = I_z^{(1)} \omega_{2z} = \frac{P}{g} \frac{r^2}{2} \omega_{2z}. \quad (3)$$

Кроме того,

$$L_z^{(2)} = m^{(2)} v_a^{(2)} \frac{r}{2},$$

где $v_a^{(2)}$ — абсолютная скорость груза, а $m^{(2)}$ — масса груза. Так как груз совершает сложное движение (относительное по отношению к диску и переносное вместе с диском), то, применив теорему о сложении скоростей точки $v_a = v_e + v_r$ (см. рис. б и в), в проекции на ось τ , направленную вдоль MN , имеем:

$$v_{a\tau}^{(2)} = v_{e\tau}^{(2)} + v_{r\tau}^{(2)} = \frac{r}{2} \omega_{2z} + u_{\tau},$$

следовательно,

$$L_z^{(2)} = \frac{P}{4g} \left(\frac{r}{2} \omega_{2z} + u_{\tau} \right) \frac{r}{2}. \quad (4)$$

Подставляя $L_{2z}^{(1)}$ и $L_{2z}^{(2)}$ из формул (3) и (4) в формулу (2), находим главный момент количества движения системы относительно оси z при среднем положении груза:

$$L_{2z} = L_{2z}^{(1)} + L_{2z}^{(2)} = \frac{P}{g} \frac{r^2}{2} \omega_{2z} + \frac{P}{4g} \left(\frac{r}{2} \omega_{2z} + u_z \right) \frac{r}{2},$$

т. е.

$$L_{2z} = \frac{9}{16} \frac{P}{g} r^2 \omega_{2z} + \frac{Pr}{8g} u_z. \quad (5)$$

Так как $L_{1z} = L_{2z}$, то, используя формулы (1) и (5), получим:

$$\frac{3}{4} \frac{P}{g} r^2 \omega_{1z} = \frac{9}{16} \frac{P}{g} r^2 \omega_{2z} + \frac{Pr u_z}{8g},$$

откуда

$$\omega_{2z} = \frac{4}{3} \omega_{1z} - \frac{2}{9} \frac{u_z}{r}.$$

Итак, при колебаниях груза по хорде MN диска, в связи с постоянством главного момента количества движения системы материальных точек относительно оси вращения, изменяется угловая скорость вращения диска. В момент прохождения грузом среднего положения проекция на ось z угловой скорости диска равна

$$\omega_{2z} = \frac{4}{3} \omega_{1z} - \frac{2}{9} \frac{u_z}{r}.$$

В случае совпадения направлений относительного движения груза и вращения диска (рис. в) $u_z = u$, т. е.

$$\omega_{2z} = \frac{4}{3} \omega_{1z} - \frac{2}{9} \frac{u}{r}.$$

В случае противоположных направлений относительного движения груза и вращения диска (рис. б) $u_z = -u$, т. е.

$$\omega_{2z} = \frac{4}{3} \omega_{1z} + \frac{2}{9} \frac{u}{r}.$$

6°. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси имеет вид

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_z (F_k^c),$$

где φ — угол поворота твердого тела, I_z — момент инерции твердого тела относительно оси вращения, $m_z (F_k^c)$ — момент k -й внешней силы относительно оси z .

Из сопоставления этого дифференциального уравнения с теоремой о движении центра инерции системы материальных точек:

$$M \mathbf{w}_C = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^c,$$

применяемой при решении задач о поступательном движении твердого тела, следует, что масса M твердого тела, движущегося поступательно, и момент инерции I_z твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z , имеют аналогичный смысл: масса M — мера инертности твердого тела, движущегося поступательно; момент инерции I_z — мера инертности твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

С помощью дифференциального уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси можно решать как прямые, так и обратные задачи динамики.

В прямых задачах по данному моменту инерции твердого тела I_z относительно оси вращения и закону вращения твердого тела $\varphi = f(t)$ определяется главный момент относительно этой оси внешних сил, приложенных к твердому телу.

В обратных задачах по заданному моменту инерции твердого тела I_z относительно оси вращения и моментам внешних сил относительно этой оси определяется уравнение вращения твердого тела $\varphi = f(t)$. При этом должны быть заданы начальные условия движения: положение и угловая скорость твердого тела в начальный момент времени, т. е.

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0.$$

Решение обратных задач часто представляет значительные трудности, так как при этом приходится интегрировать дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Моменты внешних сил относительно оси вращения могут зависеть не только от времени, но также от угла поворота φ и угловой скорости $\dot{\varphi}$ твердого тела, т. е.

$$\sum_{k=1}^n m_z (F_k^c) = f(\varphi, \dot{\varphi}, t).$$

Легко решаются задачи в случаях, когда моменты внешних сил постоянны либо являются функциями только времени.

Задачи динамики о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси надо решать в следующей последовательности:

- 1) выбрать оси декартовых координат и направить одну из них (ось z) по оси вращения твердого тела;
- 2) изобразить все внешние силы, приложенные к твердому телу;

3) вычислить сумму моментов всех внешних сил относительно оси вращения $\sum_{k=1}^n m_z(F_k^e)$;

4) записать дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k^e),$$

подставить в него выражение суммы моментов всех внешних сил, значение момента инерции I_z твердого тела относительно оси вращения и решать, в зависимости от условия, прямую либо обратную задачи.

Задача 296. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси под действием приложенной к нему системы сил.

Чему должен быть равен главный момент внешних сил относительно оси вращения для того, чтобы твердое тело вращалось: а) равномерно, б) равнопеременно?

Решение. Направив ось z по оси вращения твердого тела, запишем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k^e);$$

а) в случае равномерного вращения угловая скорость $\dot{\varphi}$ твердого тела постоянна; следовательно, $\ddot{\varphi} = 0$ и

$$\sum_{k=1}^n m_z(F_k^e) = 0,$$

т. е. главный момент внешних сил относительно оси вращения равен нулю;

б) в случае равнопеременного вращения угловое ускорение твердого тела $\ddot{\varphi}$ постоянно, следовательно,

$$\sum_{k=1}^n m_z(F_k^e) = \text{const},$$

т. е. главный момент внешних сил относительно оси вращения постоянен.

Задача 297. Определить величину вращающего момента m , под действием которого диск веса 20 кг и радиуса 10 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 4t^2$.

Решение. Направляем ось z по оси вращения диска.

Дифференциальное уравнение вращения диска вокруг неподвижной оси z имеет вид

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k^e).$$

К диску и его оси приложены внешние силы: силы реакций опор, вес диска и пара сил, момент которой требуется определить.

Так как моменты сил опорных реакций и веса диска относительно его оси вращения z равны нулю, то сумма моментов всех внешних сил равна искомому вращающему моменту пары сил относительно оси вращения z . Следовательно,

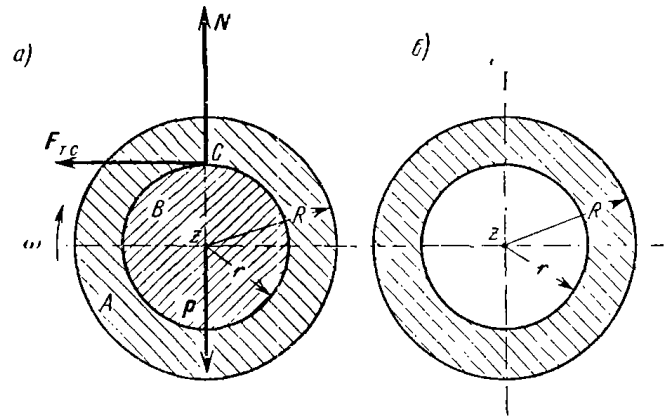
$$m_z = I_z \ddot{\varphi}.$$

Момент инерции диска относительно оси вращения z равен

$$I_z = \frac{Pr^2}{2g} = \frac{20 \cdot 0,1^2}{2 \cdot 9,81} = 0,01 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}^2, \text{ а } \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 8 \frac{1}{\text{сек}^2};$$

тогда искомый вращающий момент $m_z = 0,08 \text{ кг} \cdot \text{м}$.

Задача 298. Кольцу A радиуса R , насаженному на неподвижную горизонтальную ось B радиуса r , в начальный момент была сообщена угловая скорость ω_0 . Сколько оборотов сделает кольцо до остановки, если коэффициент трения скольжения кольца об ось равен f ?



К задаче 298.

Решение. Допустим, что кольцо A при вращении соприкасается с осью B в точке C . К кольцу приложены внешние силы: P — вес кольца, N — нормальная сила реакции оси, $F_{тр, c}$ — сила трения скольжения кольца об ось: $F_{тр, c} = fN = fp$, направленная перпендикулярно к нормальной силе реакции N в сторону, противоположную движению, т. е. по горизонтали влево.

Выберем направление отсчета угла поворота φ в сторону вращения кольца, т. е. по часовой стрелке (ось z направлена от нас за плоскость рисунка).

Запишем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k^e). \quad (1)$$

Для определения числа оборотов, которое сделало кольцо до остановки, требуется проинтегрировать это уравнение, предварительно определив I_z — момент инерции кольца относительно оси вращения

z и $\sum_{k=1}^n m_z(F_k^e)$ — главный момент внешних сил относительно оси z .

Так как моменты сил P и N относительно оси z равны нулю, то

$$\sum_{k=1}^n m_z(F_k^e) = m_z(F_{\tau, c}) = -F_{\tau, c} r = -fPr \quad (2)$$

(момент силы трения скольжения $F_{\tau, c}$ отрицателен, так как его направление противоположно направлению положительного отсчета угла поворота φ).

Момент инерции кольца вычислим как разность моментов инерции большого диска радиуса R и малого диска радиуса r (см. рис. б):

$$I_z = \frac{MR^2}{2} - \frac{mr^2}{2},$$

где M — масса диска радиуса R , а m — масса диска радиуса r .

Обозначив γ плотность кольца, получим: $M = \gamma\pi R^2$ и $m = \gamma\pi r^2$. Тогда

$$I_z = \frac{\gamma\pi R^4}{2} - \frac{\gamma\pi r^4}{2} = \frac{\gamma\pi}{2} (R^4 - r^4).$$

Учитывая, что вес кольца $P = \gamma g\pi (R^2 - r^2)$, имеем:

$$I_z = \frac{P}{2g} (R^2 + r^2). \quad (3)$$

Подставив значения $\sum_{k=1}^n m_z(F_k^e)$ и I_z из формул (2) и (3) в уравнение

(1), находим:

$$\frac{P}{2g} (R^2 + r^2) \ddot{\varphi} = -fPr,$$

откуда

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2fgr}{R^2 + r^2}. \quad (4)$$

Начальные условия движения имеют вид:

$$\text{при } t=0 \quad \varphi=0, \quad \dot{\varphi}=\omega_0.$$

Проинтегрировав дифференциальное уравнение (4), получим:

$$\dot{\varphi} = -\frac{2fgr}{R^2 + r^2} t + C_1,$$

подставив $t=0$, $\dot{\varphi}=\omega_0$, найдем, что $C_1 = \omega_0$; следовательно,

$$\dot{\varphi} = \omega_0 - \frac{2fgr}{R^2 + r^2} t. \quad (5)$$

Решив дифференциальное уравнение (5), имеем:

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{fgr}{R^2 + r^2} t^2 + C_2.$$

Подставляя $t=0$, $\varphi=0$, имеем $C_2=0$; итак,

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{fgr}{R^2 + r^2} t^2. \quad (6)$$

Для того чтобы определить угол поворота φ , на который повернулось кольцо до остановки, следует предварительно вычислить соответствующий момент времени. В момент остановки $t=\tau$ угловая скорость кольца $\dot{\varphi}=0$. Подставив эти значения в уравнение (5), получаем: $\tau = \frac{\omega_0 (R^2 + r^2)}{2fgr}$. Для определения φ_τ — угла поворота кольца в момент остановки, остается подставить полученное значение τ в уравнение (6). Находим:

$$\varphi_\tau = \frac{\omega_0^2 (R^2 + r^2)}{4fgr}.$$

Число оборотов, которое сделало кольцо до остановки,

$$n_\tau = \frac{\varphi_\tau}{2\pi} = \frac{\omega_0^2 (R^2 + r^2)}{8\pi fgr}.$$

Эту задачу можно решить также и с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы материальных точек (см. решение задачи 349. Там же приведена сравнительная оценка обоих методов решения).

Задача 299. Твердое тело начинает вращаться из состояния покоя под действием пары сил с моментом, зависящим от угловой скорости $\dot{\varphi}$ вращения тела: $m_z = m_0 - a\dot{\varphi}^2$, где m_0 и a — постоянные. Здесь m_0 — вращающий момент, а $a\dot{\varphi}^2$ — тормозящий момент.

Определить угловую скорость вращения твердого тела, если его момент инерции относительно оси вращения z равен I_z . Центр тяжести твердого тела расположен на оси вращения.

Решение. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси имеет вид

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_z (F_k^e).$$

К твердому телу приложены внешние силы: P — вес тела, силы опорных реакций и пара сил с моментом m_z . Так как моменты веса тела и сил опорных реакций относительно оси вращения z равны нулю, то сумма моментов внешних сил относительно оси вращения z равна моменту m_z , т. е.

$$\sum_{k=1}^n m_z (F_k^e) = m_0 - a\dot{\varphi}^2.$$

Итак, дифференциальное уравнение вращения принимает вид

$$I_z \ddot{\varphi} = m_0 - a\dot{\varphi}^2$$

или

$$\ddot{\varphi} = \frac{a}{I_z} \left(\frac{m_0}{a} - \dot{\varphi}^2 \right);$$

заменив $\dot{\varphi}$ на $\frac{d\dot{\varphi}}{dt}$ и отделив переменные, получим:

$$\frac{d\dot{\varphi}}{\frac{m_0}{a} - \dot{\varphi}^2} = \frac{a}{I_z} dt.$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{m_0}} \ln \frac{\sqrt{\frac{m_0}{a}} + \dot{\varphi}}{\sqrt{\frac{m_0}{a}} - \dot{\varphi}} = \frac{a}{I_z} t + C.$$

При $t=0$ $\dot{\varphi}=0$; следовательно, $C=0$, т. е.

$$\ln \frac{\sqrt{\frac{m_0}{a}} + \dot{\varphi}}{\sqrt{\frac{m_0}{a}} - \dot{\varphi}} = \frac{2}{I_z} \sqrt{am_0} t.$$

Решив это уравнение относительно $\dot{\varphi}$, получим искомую угловую скорость вращения твердого тела

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{m_0}{a}} \frac{1 - e^{-\frac{2}{I_z} \sqrt{am_0} t}}{1 + e^{-\frac{2}{I_z} \sqrt{am_0} t}}.$$

Допустим, что твердое тело вращается длительное время под действием вращающего момента m_z . Вычислим его угловую скорость при $t \rightarrow \infty$; получим:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{m_0}{a}},$$

т. е. вращение твердого тела стремится к равномерному с постоянной угловой скоростью $\omega = \sqrt{\frac{m_0}{a}}$.

Задача 300. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси z из состояния покоя под действием пары сил с моментом, зависящим от угла поворота φ вращающегося тела: $m_z = a\varphi - b\varphi^3$, где a и b — постоянные.

Определить угловую скорость твердого тела в зависимости от угла поворота φ , если его момент инерции относительно оси вращения z равен I_z . Центр тяжести твердого тела расположен на оси вращения.

Решение. Решая задачу аналогично предыдущей, получим дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot{\varphi} = a\varphi - b\varphi^3;$$

умножив уравнение почленно на $d\varphi$ и заметив, что $\ddot{\varphi} d\varphi = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} d\varphi = \dot{\varphi} d\dot{\varphi}$, находим:

$$I_z \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = (a\varphi - b\varphi^3) d\varphi.$$

Проинтегрировав это уравнение, имеем:

$$\frac{I_z \dot{\varphi}^2}{2} = \frac{a\varphi^2}{2} - \frac{b\varphi^4}{4} + C.$$

При $t=0$ $\varphi=0$, $\dot{\varphi}=0$; следовательно, $C=0$, т. е.

$$\frac{I_z \dot{\varphi}^2}{2} = \frac{a\varphi^2}{2} - \frac{b\varphi^4}{4}.$$

Решив уравнение относительно $\dot{\varphi}$, получим искомую угловую скорость вращения твердого тела:

$$\dot{\varphi} = \varphi \sqrt{\frac{2a - b\varphi^2}{2I_z}}.$$

Нетрудно видеть, что в момент, когда $\varphi = \sqrt{\frac{2a}{b}}$, угловая скорость $\dot{\varphi} = 0$, т. е. в этот момент тело меняет направление своего вращения на обратное.

Задача 301. К твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси z , приложена пара сил с моментом $m_z = A \sin kt$, где A и

k — постоянные. Момент силы сопротивления движению пропорционален угловой скорости вращения твердого тела $m_z^* = -\alpha\dot{\varphi}$, где α — постоянная ($\alpha > 0$).

Найти уравнение вращения твердого тела, если его момент инерции относительно оси вращения z равен I_z . Центр тяжести твердого тела лежит на оси вращения. В начальный момент твердое тело находилось в покое.

Решение. После записи дифференциального уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z :

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k^c),$$

вычисляем главный момент внешних сил относительно оси z . Так как моменты сил опорных реакций и веса твердого тела равны нулю, то

$$\sum_{k=1}^n m_z(F_k^c) = m_z + m_z^* = A \sin kt - \alpha\dot{\varphi}.$$

Следовательно,

$$I_z \ddot{\varphi} = A \sin kt - \alpha\dot{\varphi};$$

запишем это уравнение так:

$$\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} = \gamma \sin kt, \quad (1)$$

где $\beta = \frac{\alpha}{I_z}$ и $\gamma = \frac{A}{I_z}$. Общее решение этого дифференциального уравнения равно сумме общего решения φ_1 соответствующего однородного уравнения $\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} = 0$, и частного решения φ_2 уравнения (1), т. е. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Для решения уравнения $\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} = 0$ запишем его характеристическое уравнение $\lambda^2 + \beta\lambda = 0$, откуда $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -\beta$; следовательно,

$$\varphi_1 = C_1 + C_2 e^{-\beta t}. \quad (2)$$

Ищем частное решение уравнения (1) в виде $\varphi_2 = M \sin kt + N \cos kt$. Для определения M и N подставляем φ_2 в дифференциальное уравнение (1):

$$-Mk^2 \sin kt - Nk^2 \cos kt + \beta Mk \cos kt - \beta Nk \sin kt = \gamma \sin kt.$$

Приравняв коэффициенты при $\sin kt$ и $\cos kt$ в левой и правой частях уравнения, получим систему уравнений:

$$-Mk^2 - \beta Nk = \gamma, \quad -Nk^2 + \beta Mk = 0.$$

Решив эту систему, найдем:

$$M = -\frac{\gamma}{k^2 + \beta^2}, \quad N = -\frac{\gamma\beta}{k(k^2 + \beta^2)}.$$

Следовательно, частное решение имеет вид

$$\varphi_2 = M \sin kt + N \cos kt = -\frac{\gamma}{k^2 + \beta^2} \sin kt - \frac{\gamma\beta}{k(k^2 + \beta^2)} \cos kt. \quad (3)$$

Найдем теперь, воспользовавшись формулами (2) и (3), общее решение дифференциального уравнения (1):

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = C_1 + C_2 e^{-\beta t} - \frac{\gamma}{k^2 + \beta^2} \sin kt - \frac{\gamma\beta}{k(k^2 + \beta^2)} \cos kt. \quad (4)$$

Остается определить постоянные интегрирования C_1 и C_2 . Для этого продифференцируем соотношение (4) по времени:

$$\dot{\varphi} = -C_2\beta e^{-\beta t} - \frac{\gamma k}{k^2 + \beta^2} \cos kt + \frac{\gamma\beta}{k^2 + \beta^2} \sin kt. \quad (5)$$

После подстановки начальных условий движения: $t = 0$, $\varphi = 0$ в (4) и $t = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ в (5), получим систему уравнений:

$$0 = C_1 + C_2 - \frac{\gamma\beta}{k(k^2 + \beta^2)}, \quad 0 = -C_2\beta - \frac{\gamma k}{k^2 + \beta^2}.$$

Решив эту систему уравнений, найдем:

$$C_1 = \frac{\gamma}{\beta k} \quad \text{и} \quad C_2 = -\frac{\gamma k}{\beta(k^2 + \beta^2)}.$$

Подставив значения C_1 и C_2 в уравнение (4), получаем уравнение вращения рассматриваемого твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$\varphi = \frac{\gamma}{\beta k} - \frac{\gamma k}{\beta(k^2 + \beta^2)} e^{-\beta t} - \frac{\gamma}{k^2 + \beta^2} \left(\sin kt + \frac{\beta}{k} \cos kt \right),$$

где

$$\beta = \frac{\alpha}{I_z} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{A}{I_z}.$$

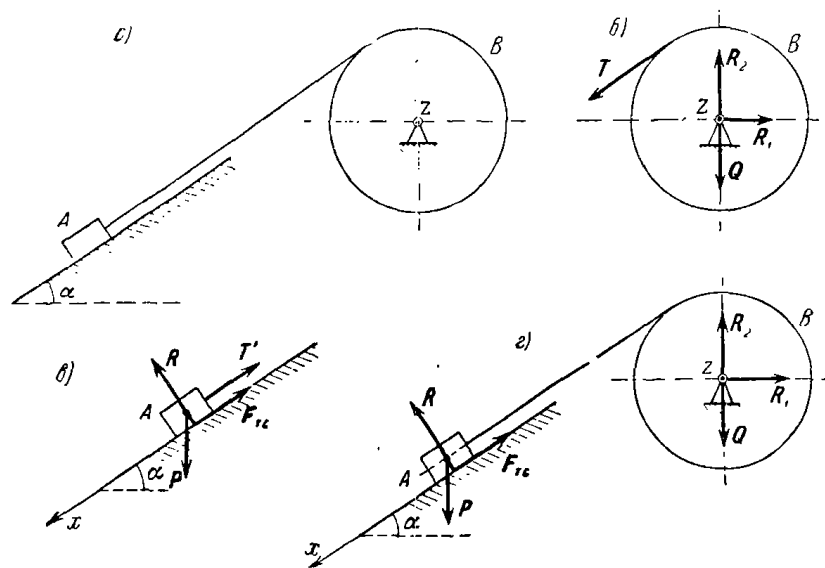
Задача 302. Груз A веса P , спускаясь по наклонной плоскости вниз, приводит во вращение барабан B посредством намотанной на него веревки; r — радиус барабана, f — коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость, расположенную под углом α к горизонту; I_z — момент инерции барабана относительно его оси вращения z , перпендикулярной к плоскости рисунка. Определить угловую скорость вращения барабана. Массой веревки пренебречь.

Решение. Задачу можно решать с помощью дифференциального уравнения вращения барабана B вокруг неподвижной оси z :

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k^c).$$

К барабану приложены внешние силы (см. рис. б): Q — вес барабана, R_1 и R_2 — составляющие силы реакции оси барабана, T — сила реакции веревки.

(Иногда ошибочно включают в число внешних сил вес груза. В действительности же барабан приводится во вращение силой реакции веревки T , являющейся по отношению к барабану внешней силой. Величина силы реакции веревки T , естественно, зависит от веса груза P , но по модулю, вообще говоря, не равна P .)



К задаче 302.

Моменты сил Q , R_1 и R_2 относительно оси z равны нулю. Следовательно, главный момент внешних сил относительно оси z равен моменту силы T , и дифференциальное уравнение вращения барабана относительно оси вращения z имеет вид

$$I_z \ddot{\varphi} = Tr, \quad (1)$$

где T — сила реакции веревки, пока нам неизвестна. Для исключения T следует составить дифференциальное уравнение движения груза по наклонной плоскости.

Направляем вдоль наклонной плоскости ось x (см. рис. в). К грузу A приложена одна задаваемая сила — вес P и силы реакций связей: R — нормальная сила реакции наклонной плоскости, $F_{1,c}$ — сила трения скольжения груза о наклонную плоскость и T' — сила реакции веревки. (На основании принципа равенства действия и противодействия $T' = -T$.)

Составим дифференциальное уравнение движения груза A в проекции на ось x :

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = P \sin \alpha - T' - F_{1,c};$$

так как

$$F_{1,c} = fN = fP \cos \alpha,$$

то

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = P(\sin \alpha - f \cos \alpha) - T'. \quad (2)$$

Учитывая, что скорость веревки при ходе с обода барабана равна скорости груза, имеем $r\dot{\varphi} = \dot{x}$. Следовательно,

$$\ddot{x} = r\ddot{\varphi}. \quad (3)$$

Рассмотрим систему уравнений (1), (2), (3), учитывая при этом, что $|T'| = |T| = T' = T$:

$$I_z \ddot{\varphi} = Tr,$$

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = P(\sin \alpha - f \cos \alpha) - T',$$

$$\ddot{x} = r\ddot{\varphi};$$

исключив T , T' и \ddot{x} , имеем:

$$\frac{1}{r} \left(I_z + \frac{P}{g} r^2 \right) \ddot{\varphi} = P(\sin \alpha - f \cos \alpha),$$

откуда получаем дифференциальное уравнение вращения барабана вокруг неподвижной оси z :

$$\ddot{\varphi} = \frac{rP(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{I_z + \frac{P}{g} r^2}; \quad (4)$$

из этого уравнения видно, что барабан вращается равноускоренно.

Проинтегрировав, находим:

$$\dot{\varphi} = \frac{rP(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{I_z + \frac{P}{g} r^2} t + C;$$

при $t=0$ $\dot{\varphi}=0$, следовательно, $C=0$. Итак, угловая скорость вращения барабана равна

$$\dot{\varphi} = \frac{rP(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{I_z + \frac{P}{g} r^2} t.$$

Эту задачу можно решить и другим способом, применив теорему об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек относительно оси z :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k^e). \quad (5)$$

Так как данная материальная система состоит из барабана B и груза A , то сила реакции веревки T , будучи силой внутренней, в уравнение (5) не входит. Это упрощает решение задачи, ибо не приходится использовать систему уравнений (1), (2), (3) для исключения T и \ddot{x} .

Изобразив все внешние силы системы: P , R , $F_{\tau, c}$, Q , R_1 и R_2 (см. рис. 2), составим сумму моментов внешних сил относительно оси z :

$$\sum_{k=1}^n m_z(F_k^e) = Pr \sin \alpha - F_{\tau, c} r = Pr (\sin \alpha - f \cos \alpha). \quad (6)$$

(В уравнение (6) вошел момент составляющей веса P , направленной вдоль веревки и равный по модулю $P \sin \alpha$; составляющая же веса P , перпендикулярная к направлению веревки, равная по модулю $P \cos \alpha$, и нормальная сила реакции наклонной плоскости $R = P \cos \alpha$ в уравнение (6) не вошли, так как они по модулю равны и противоположно направлены.)

Главный момент количеств движения системы, состоящей из барабана и груза, относительно оси z дается формулой

$$L_z = L_z^{(1)} + L_z^{(2)}.$$

Здесь $L_z^{(1)}$ — момент количеств движения барабана, а $L_z^{(2)}$ — момент количества движения груза относительно оси z . Имеем:

$$L_z^{(2)} = \frac{P}{g} vr = \frac{P}{g} r^2 \dot{\phi} \quad (\text{так как } v = v_x = r \dot{\phi}).$$

Кроме того, $L_z^{(1)} = I_z \dot{\phi}$. Следовательно,

$$L_z = \left(I_z + \frac{P}{g} r^2 \right) \dot{\phi}. \quad (7)$$

Подставив значения $\sum_{k=1}^n m_z(F_k^e)$ и L_z из формул (6) и (7) в уравнение (5), получим:

$$\left(I_z + \frac{P}{g} r^2 \right) \ddot{\phi} = Pr (\sin \alpha - f \cos \alpha),$$

откуда следует уравнение (4). Повторив далее решение задачи, как и в первом варианте, находим:

$$\dot{\phi} = \frac{rP (\sin \alpha - f \cos \alpha)}{I_z + \frac{P}{g} r^2} t. \quad (8)$$

Если на ось z рядом с барабаном насадить последовательно твердое тело, момент инерции которого неизвестен, то, замерив путь s , пройденный грузом по наклонной плоскости и соответствующий промежуток времени τ , можно определить неизвестный момент инерции. Это — один из экспериментальных методов определения моментов инерции твердых тел.

Действительно, умножив уравнение (8) на r и учтя, что $r \dot{\phi} = \dot{x}$, найдем проекцию скорости груза на ось x :

$$\dot{x} = \frac{Pr^2 (\sin \alpha - f \cos \alpha)}{I_z + \frac{P}{g} r^2} t.$$

Проинтегрировав это дифференциальное уравнение, получим:

$$x = \frac{Pr^2 (\sin \alpha - f \cos \alpha)}{2 \left(I_z + \frac{P}{g} r^2 \right)} t^2 + C.$$

Так как при $t=0$ $x=0$, то имеем $C=0$, и следовательно, уравнение движения груза запишется в виде

$$x = \frac{Pr^2 (\sin \alpha - f \cos \alpha)}{2 \left(I_z + \frac{P}{g} r^2 \right)} t^2.$$

Подставив в это уравнение $x=s$ и $t=\tau$ и решив уравнение относительно I_z , находим:

$$I_z = \frac{P}{g} r^2 \left[\frac{g\tau^2 (\sin \alpha - f \cos \alpha)}{2s} - 1 \right].$$

Полученное значение I_z равно сумме момента инерции барабана и искомого момента инерции твердого тела, насаженного на одну ось с барабаном. Следовательно, из полученного значения I_z надо вычесть момент инерции барабана относительно оси z .

Задача 303. Физический маятник состоит из однородного стержня длины l , к концу которого прикреплен круглый однородный диск радиуса $r = \frac{l}{8}$. Определить закон колебаний маятника и положение его центра качаний, если он подвешен за свободный конец стержня.

В начальный момент маятник был отклонен от вертикального положения на угол φ_0 и ему была сообщена начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0$. Вес диска в два раза больше веса стержня.

Решение. Физическим маятником называется твердое тело, подвешенное к неподвижной оси.

Изобразим физический маятник в отклоненном от вертикали положении. Выберем направление положительного отсчета угла поворота φ от вертикали против часовой стрелки, направим ось z вдоль оси привеса маятника в точке O перпендикулярно к плоскости рисунка на нас.

Внешними силами, приложенными к маятнику, являются: P — вес стержня, Q — вес диска, R_1 и R_2 — составляющие силы реакции оси привеса маятника.

Применяем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k^e). \quad (1)$$

Моменты сил R_1 и R_2 относительно оси привеса z равны нулю, следовательно,

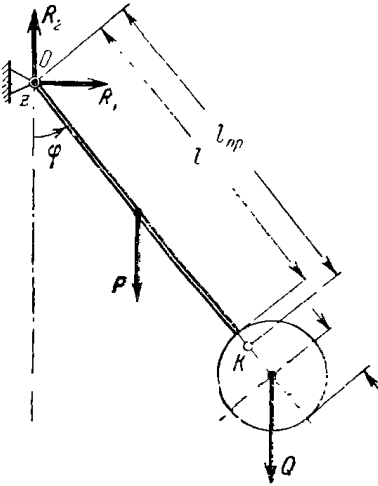
$$\sum_{k=1}^n m_z(F_k^e) = m_z(P) + m_z(Q) = -P \frac{l}{2} \sin \varphi - Q(l + r) \sin \varphi$$

(знаки минус указывают, что направления моментов сил P и Q противоположны направлению положительного отсчета угла поворота φ).

Учитывая, что $Q = 2P$ и $r = \frac{l}{3}$, получим, что сумма моментов внешних сил относительно оси z будет

$$\sum_{k=1}^n m_z(F_k^e) = -\frac{11}{4} Pl \sin \varphi. \quad (2)$$

Вычисляем момент инерции маятника относительно оси привеса z как сумму моментов инерции стержня I_z^{11} и диска I_z^{21} относительно той же оси: $I_z = I_z^{11} + I_z^{21}$.



К задаче 303.

Применив теорему Штейнера и учитывая, что $Q = 2P$ и $r = \frac{l}{3}$, находим:

$$I_z^{11} = \frac{P}{g} \frac{l^2}{12} + \frac{P}{g} \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{P}{g} \frac{l^2}{3}, \quad I_z^{21} = \frac{Q}{g} \frac{r^2}{2} + \frac{Q}{g} (l + r)^2 = \frac{163}{64} \frac{P}{g} l^2,$$

следовательно, момент инерции маятника относительно оси привеса z равен

$$I_z = I_z^{11} + I_z^{21} = \frac{553}{192} \frac{P}{g} l^2. \quad (3)$$

Подставив $\sum_{k=1}^n m_z(F_k^e)$ и I_z из формул (2) и (3) в уравнение (1), получим:

$$\frac{553}{192} \frac{P}{g} l^2 \ddot{\varphi} = -\frac{11}{4} Pl \sin \varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{528}{553} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Рассмотрим малые колебания маятника, предположив, что $\sin \varphi \approx \varphi$. Тогда дифференциальное уравнение качаний маятника принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{528}{553} \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (4)$$

Обозначив

$$\frac{528}{553} \frac{g}{l} = k^2, \quad (5)$$

перепишем полученное уравнение так:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + k^2 = 0$. Его корни: $\lambda_{1,2} = \pm ki$. Следовательно,

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (6)$$

Вычислим:

$$\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (7)$$

Начальные условия движения маятника имеют вид: при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$.

Подставив $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$ в (6) и $t = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ в (7), имеем: $C_1 = \varphi_0$, $C_2 = \frac{\dot{\varphi}_0}{k}$. Внося эти значения в уравнение (6), находим:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt + \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt.$$

Введем обозначения:

$$\varphi_0 = a \sin \alpha, \quad \frac{\dot{\varphi}_0}{k} = a \cos \alpha; \quad (8)$$

тогда

$$\varphi = a \sin (kt + \alpha),$$

т. е. физический маятник совершает гармонические колебания.

Угловая амплитуда колебаний a , определенная из системы уравнений (8), равна

$$a = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{k^2}}.$$

Она зависит от начальных условий движения и круговой частоты колебаний. Начальная фаза колебаний α , находящаяся из той же системы уравнений, имеет вид

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{k\varphi_0}{\dot{\varphi}_0}.$$

Она также зависит от начальных условий движения и круговой частоты колебаний.

Круговая частота колебаний $k = \sqrt{\frac{528}{553} \frac{g}{l}}$ (см. формулу (5)) от начальных условий движения не зависит, т. е. в случае малых колебаний ($\sin \varphi \approx \varphi$) физический маятник обладает свойством изохронности. (При рассмотрении задачи 284 о колебаниях математического маятника была получена формула для круговой частоты колебаний маятника с конечной угловой амплитудой. В этом случае маятник свойством изохронности не обладает и его период зависит от угловой амплитуды колебаний.)

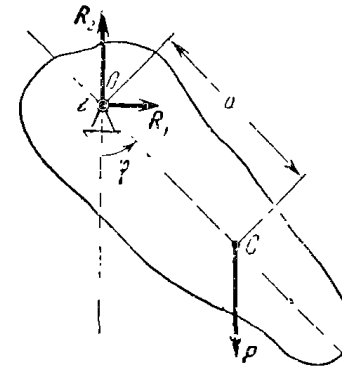
Для определения положения центра качаний данного физического маятника следует учесть, что центр качаний отстоит от точки привеса O на расстоянии приведенной длины физического маятника (напомним, что приведенной длиной физического маятника называется длина нити математического маятника, круговая частота качаний которого равна круговой частоте качаний данного физического маятника).

В ходе решения задачи о колебаниях математического маятника (см. задачу 284) была определена его круговая частота колебаний $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Для рассматриваемого физического маятника $k = \sqrt{\frac{528}{553} \frac{g}{l}}$.

Приравняв квадраты круговых частот, находим приведенную длину физического маятника $l_{\text{пр}} = \frac{553}{528} l$.

Следовательно, центр качаний K данного физического маятника отстоит от точки привеса O на расстоянии $\frac{553}{528} l$ (см. рисунок).

Задача 304. Определить момент инерции твердого тела веса P относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно к плоскости его материальной симметрии, зная период малых качаний этого тела при подвесе его в точке O ; $OC = a$.



К задаче 304.

Решение. Метод качаний является одним из наиболее распространенных экспериментальных приемов определения моментов инерции твердых тел. Повторив рассуждения предыдущей задачи, запишем дифференциальное уравнение колебаний маятника:

$$I_z \ddot{\varphi} = -Pa \sin \varphi;$$

считая колебания малыми ($\sin \varphi \approx \varphi$), получим:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Pa}{I_z} \varphi = 0.$$

Так как коэффициент, стоящий при угле поворота φ , является квадратом круговой частоты колебаний, то $k = \sqrt{\frac{Pa}{I_z}}$. Как известно, круговая частота колебаний k и период колебаний T связаны зависимостью $k = \frac{2\pi}{T}$. Следовательно, $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{Pa}{I_z}}$, т. е. $I_z = \frac{PaT^2}{4\pi^2}$. В соответствии с теоремой Штейнера, $I_z = I_c + \frac{P}{g} a^2$ (оси z и c перпендикулярны к плоскости рисунка), откуда

$$I_c = I_z - \frac{P}{g} a^2 = \frac{PaT^2}{4\pi^2} - \frac{P}{g} a^2.$$

Итак, искомый момент инерции твердого тела вычисляется по формуле

$$I_c = Pa \left(\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{a}{g} \right),$$

где P , a и T определяются экспериментально.

Задача 305. Однородный круглый диск веса P и радиуса r подвешен к тонкой упругой проволоке в одной из точек, лежащих на его ободе (см. рисунок). При повороте диска на угол φ вокруг оси z , проходящей вдоль проволоки и вертикального диаметра диска, в проволоке возникает пара сил с упругим моментом, пропорциональным углу закручивания φ : $m_z = -c\varphi$, где c — момент пары, необходимой для закручивания проволоки на один радиан.

Определить движение диска, если в начальный момент диск, находящемуся в покое, была сообщена начальная угловая скорость ω_0 . Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Применяем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z :

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k^o). \quad (1)$$

К диску приложены внешние силы: P — вес диска, R — сила реакции проволоки, m_z — упругий момент проволоки, направление которого противоположно направлению угла закручивания проволоки φ . Поэтому главный момент внешних сил относительно оси z имеет вид

$$\sum_{k=1}^n m_z(F_k^o) = m_z = -c\varphi. \quad (2)$$

Момент инерции диска относительно оси z равен

$$I_z = \frac{Pr^2}{4g}. \quad (3)$$

Подставив значения $\sum_{k=1}^n m_z(F_k^o)$ и I_z из формул (2) и (3) в уравнение (1), находим:

$$\frac{Pr^2}{4g} \ddot{\varphi} = -c\varphi, \quad (4)$$

т. е.

$$\ddot{\varphi} + \frac{4gc}{Pr^2} \varphi = 0.$$

Это — дифференциальное уравнение свободных крутильных колебаний диска на проволоке, которое после обозначения $\frac{4gc}{Pr^2} = k^2$ принимает вид

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0.$$

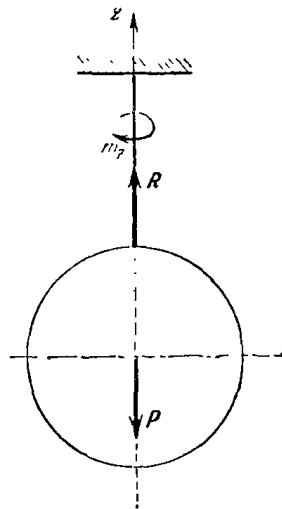
Запишем соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + k^2 = 0$. Корни характеристического уравнения равны $\lambda_{1,2} = \pm ki$. Следовательно, уравнение движения диска запишется в виде

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (5)$$

Угловая скорость диска равна

$$\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (6)$$

Начальные условия движения диска имеют вид: при $t=0$ $\varphi=0$, $\dot{\varphi}=\omega_0$. Подстановка начальных условий движения в (5) и (6) дает:



К задаче 305.

$C_1 = 0$, $C_2 = \frac{\omega_0}{k}$. Следовательно, диск на проволоке совершает крутильные колебания по закону:

$$\varphi = \frac{\omega_0}{k} \sin kt,$$

где $k = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{cg}{P}}$ — круговая частота колебаний, а $\frac{\omega_0}{k}$ — угловая амплитуда колебаний диска.

Если вместо диска к проволоке подвешено твердое тело, момент инерции которого неизвестен, то этот момент инерции можно экспериментально определять методом крутильных колебаний. Для этого надо знать коэффициент упругости проволоки c и измерить период колебаний T подвешенного твердого тела.

Действительно, в этом случае уравнение (4) примет вид

$$I_z \ddot{\varphi} = -c\varphi,$$

где I_z — искомый момент инерции твердого тела. Это уравнение можно записать так:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0,$$

где $k^2 = \frac{c}{I_z}$. Так как круговая частота колебаний k и период колебаний T связаны с формулой $k = \frac{2\pi}{T}$, то получим: $\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{c}{I_z}$, откуда находим искомую величину момента инерции твердого тела:

$$I_z = \frac{cT^2}{4\pi^2}.$$

Задача 306. Решить предыдущую задачу в предположении, что диск совершает колебания в вязкой жидкости, причем момент силы сопротивления движению пропорционален угловой скорости диска: $m_z^* = -\beta\dot{\varphi}$, где β — постоянная ($\beta > 0$). Определить закон колебаний диска.

Решение. По отношению к предыдущей задаче добавляется момент силы сопротивления m_z^* , знак которого противоположен знаку угловой скорости $\dot{\varphi}$. Следовательно, в правую часть дифференциального уравнения (4) предыдущей задачи входит слагаемое: $m_z^* = -\beta\dot{\varphi}$, и уравнение принимает вид

$$\frac{Pr^2}{4g} \ddot{\varphi} = -c\varphi - \beta\dot{\varphi}, \quad (1)$$

т. е.

$$\ddot{\varphi} + \frac{4cg}{Pr^2} \varphi + \frac{4\beta g}{Pr^2} \dot{\varphi} = 0.$$

Обозначив $\frac{4cg}{Pr^2} = k^2$ и $\frac{4\beta g}{Pr^2} = 2n$, получим дифференциальное уравнение свободных крутильных колебаний диска при наличии мо-

мента сопротивления движению, пропорционального угловой скорости диска:

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0. \quad (2)$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$, его корни равны

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (3)$$

Здесь возможны три случая:

- а) $n < k$ — случай малого сопротивления,
- б) $n > k$ — случай большого сопротивления,
- в) $n = k$ — предельный случай.

Рассмотрим последовательно все три случая:

а) $n < k$ (случай малого сопротивления). При этом формула (3) принимает вид $\lambda = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}$.

Закон движения запишется в виде

$$\varphi = e^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t). \quad (4)$$

После вычисления производной $\dot{\varphi}$ по t :

$$\dot{\varphi} = -ne^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t) + \sqrt{k^2 - n^2} e^{-nt} (-C_1 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t) \quad (5)$$

и подстановки начальных условий движения: $t=0, \varphi=0$ в (4) и $t=0, \dot{\varphi}=\omega_0$ в (5) найдем: $C_1=0, C_2=\frac{\omega_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}$. Внося полученные значения C_1 и C_2 в уравнение (4), получим:

$$\varphi = \frac{\omega_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} e^{-nt} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t, \quad (6)$$

где

$$k = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{cg}{\rho}} \quad \text{и} \quad n = \frac{2\beta g}{\rho r^2}.$$

Коэффициент, стоящий при синусе, является переменной угловой амплитудой крутильных колебаний диска при наличии момента сопротивления движению, т. е.

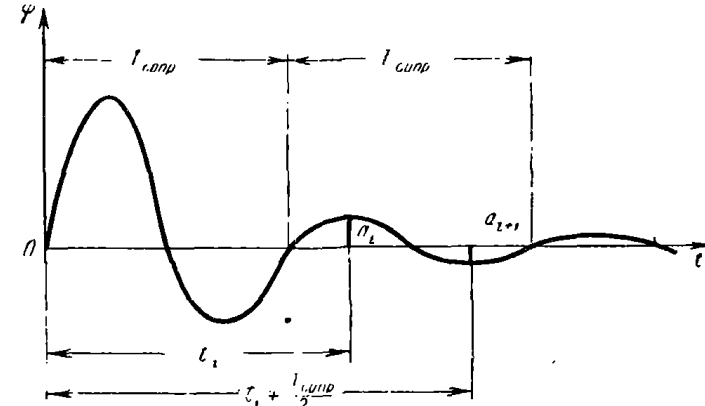
$$a = \frac{\omega_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} e^{-nt}. \quad (7)$$

Коэффициент, стоящий при аргументе t под знаком синуса, является круговой частотой крутильных колебаний диска при наличии момента сил сопротивления движению:

$$k_{\text{сопр}} = \sqrt{k^2 - n^2}, \quad (8)$$

т. е. $k_{\text{сопр}} < k$. Так как период колебаний $T = \frac{2\pi}{k}$, то при наличии момента силы сопротивления $T_{\text{сопр}} = \frac{2\pi}{k_{\text{сопр}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$, т. е. $T_{\text{сопр}} > T$.

Итак, при наличии момента силы сопротивления пропорционального угловой скорости диска, круговая частота свободных крутильных колебаний уменьшается, и следовательно, период колебаний увеличивается.



К задаче 306.

Рассмотрим закон изменения переменных угловых амплитуд. Выражение для переменной угловой амплитуды дается формулой (7). Допустим, что a_i соответствует моменту времени t_i ; тогда

$$a_i = \frac{\omega_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} e^{-nt_i}. \quad (9)$$

Следующее наибольшее отклонение a_{i+1} наступает через полпериода, т. е. соответствует моменту времени $t_i + \frac{T_{\text{сопр}}}{2}$ (см. рис.), поэтому

$$a_{i+1} = \frac{\omega_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} e^{-n \left(t_i + \frac{T_{\text{сопр}}}{2} \right)}. \quad (10)$$

Разделив (10) на (9), находим:

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = e^{-\frac{nT_{\text{сопр}}}{2}},$$

т. е. отношение величин двух смежных наибольших угловых отклонений постоянно. Следовательно, они убывают по закону геометрической прогрессии со знаменателем, равным

$$q = e^{-\frac{nT_{\text{сопр}}}{2}}.$$

Итак, в случае малого сопротивления ($n < k$) диск совершает затухающие крутильные колебания.

б) $n > k$ (случай большого сопротивления).

В соответствии с формулой (3), корни характеристического уравнения являются вещественными:

$$\lambda_1 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}, \quad \lambda_2 = -n + \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Закон движения запишется в виде:

$$\varphi = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (11)$$

После вычисления производной от φ по t

$$\dot{\varphi} = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (12)$$

и подстановки начальных условий движения $t=0, \varphi=0$ в (11) и $t=0, \dot{\varphi}=\omega_0$ в (12) найдем:

$$C_1 = -C_2 = \frac{\omega_0}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Внося полученные значения C_1 и C_2 в уравнение (11), получим:

$$\varphi = \frac{\omega_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}), \quad (13)$$

где

$$\lambda_1 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}, \quad \lambda_2 = -n + \sqrt{n^2 - k^2},$$

$$k = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{cg}{P}} \quad \text{и} \quad n = \frac{2\beta g}{Pr^2}.$$

Так как при $t \rightarrow \infty$ величина φ стремится к нулю, то движение затухает.

Итак, в случае большого сопротивления ($n > k$) диск совершает затухающее аperiodическое движение.

в) $n = k$ (предельный случай).

В соответствии с формулой (3), корни характеристического уравнения равны $\lambda_1 = \lambda_2 = -n$. Закон движения запишется в виде

$$\varphi = C_1 e^{-nt} + C_2 t e^{-nt}. \quad (14)$$

После вычисления производной от φ по t

$$\dot{\varphi} = -nC_1 e^{-nt} + C_2 e^{-nt} - nC_2 t e^{-nt} \quad (15)$$

и подстановки начальных условий движения: $t=0, \varphi=0$ в (14) и $t=0, \dot{\varphi}=\omega_0$ в (15), найдем $C_1=0$ и $C_2=\omega_0$.

Внося полученные значения C_1 и C_2 в (14), имеем:

$$\varphi = \omega_0 t e^{-nt}, \quad (16)$$

где $n = \frac{2\beta g}{Pr^2}$.

Так как при $t \rightarrow \infty$ выражение (16) становится неопределенностью вида $\infty \cdot 0$, то для раскрытия неопределенности применим правило Лопиталья

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega_0 t e^{-nt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega_0 t}{e^{nt}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\omega_0 t)'}{(e^{nt})'} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega_0}{n e^{nt}} = 0,$$

т. е. в предельном случае ($n = k$) диск совершает затухающее аperiodическое движение.

Итак: а) в случае малого сопротивления ($n < k$) диск совершает затухающие колебания по закону:

$$\varphi = \frac{\omega_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} e^{-nt} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t,$$

где $k = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{cg}{P}}$ и $n = \frac{2\beta g}{Pr^2}$;

б) в случае большого сопротивления ($n > k$) диск совершает затухающее аperiodическое движение по закону:

$$\varphi = \frac{\omega_0}{2 \sqrt{n^2 - k^2}} e^{-nt} (e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} - e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t}),$$

где $k = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{cg}{P}}$ и $n = \frac{2\beta g}{Pr^2}$;

в) в предельном случае ($n = k$) диск совершает затухающее аperiodическое движение по закону:

$$\varphi = \omega_0 t e^{-nt},$$

где $n = \frac{2\beta g}{Pr^2}$.

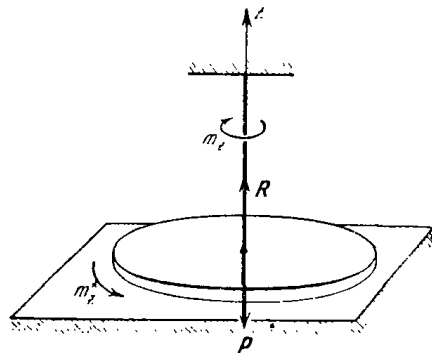
Задача 307. Диск, подвешенный к упругой проволоке, совершает крутильные колебания. При этом нижнее основание диска соприкасается с неподвижной горизонтальной плоскостью (см. рисунок). Наибольшее значение момента силы трения нижнего основания диска о неподвижную плоскость равно $m_{тр}^{max} = 10 \text{ кг} \cdot \text{см}$. Упругий момент проволоки пропорционален ее углу закручивания φ , т. е.: $m_z = -c\varphi$, где c — коэффициент упругости проволоки — величина упругого момента, необходимого для закручивания проволоки на 1 рад ; $c = 50 \text{ кг} \cdot \text{см}$. В начальный момент диск повернут на угол, равный 1 рад и отпущен без начальной скорости.

Определить число и величины угловых амплитуд колебаний диска до остановки, если его момент инерции относительно оси z , проходящей вдоль проволоки, равен $I_z = 0,5 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2$.

Решение. Ввиду наличия момента силы трения, крутильные колебания диска будут затухать. Движение прекратится в том крайнем положении диска, в котором момент силы трения окажется больше или равным упругому моменту проволоки.

Решение задачи осложняется тем, что при переменах направления вращения диска меняется направление момента силы трения, который, будучи величиной постоянной, должен в дифференциальном уравнении колебаний диска менять знак. Поэтому приходится составлять дифференциальные уравнения колебаний диска при движении в каждом из направлений (по и против часовой стрелки) в отдельности. При этом значения угла поворота и угловой скорости диска в моменты, когда данное дифференциальное уравнение утрачивает силу, оказываются начальными условиями для последующего дифференциального уравнения.

Начало отсчета угла поворота φ диска взято в положении, в котором упругий момент проволоки равен нулю. Будем считать положительным отсчет угла поворота φ диска в направлении против часовой стрелки (полагаем, что наблюдатель смотрит с конца оси z вниз на диск).



К задаче 307.

К диску приложены: P — вес диска, R — сила реакции проволоки, m_z — упругий момент проволоки и момент силы трения нижнего основания диска о неподвижную горизонтальную плоскость. Наибольшее значение модуля этого момента равно $|m_z^*|_{\max}$.

Для решения задачи воспользуемся дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z :

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_z (F_k^e).$$

В начальный момент диск был повернут на угол $\varphi_0 = 1 \text{ рад}$ против часовой стрелки и отпущен без начальной скорости. При этом момент трения относительно оси z , действующий против часовой стрелки, входит в дифференциальное уравнение со знаком плюс.

Запишем: $I_z \ddot{\varphi} = m_z + |m_z^*|_{\max} = -c\varphi + |m_z^*|_{\max}$, т. е. $0,5\ddot{\varphi} = -50\varphi + 10$ или

$$\ddot{\varphi} + 100\varphi = 20. \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение (1) описывает движение диска по часовой стрелке при начальных условиях движения: при $t=0$ $\varphi_0 = 1 \text{ рад}$, $\dot{\varphi}_0 = 0$.

Общее решение этого дифференциального уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения уравнения (1), т. е. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 100 = 0$. Корни характеристического уравнения равны $\lambda_{1,2} = \pm 10i$. Следовательно, решение однородного уравнения $\ddot{\varphi} + 100\varphi = 0$ имеет вид

$$\varphi_1 = C_1 \cos 10t + C_2 \sin 10t.$$

Ищем частное решение φ_2 в виде постоянного: $\varphi_2 = A$. Подставив $\varphi_2 = A$ в уравнение (1), находим, что $\varphi_2 = 0,2$.

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$\varphi = C_1 \cos 10t + C_2 \sin 10t + 0,2. \quad (2)$$

Вычислив производную от φ по времени t :

$$\dot{\varphi} = -10C_1 \sin 10t + 10C_2 \cos 10t \quad (3)$$

и подставив начальные условия: $t=0$, $\varphi=1 \text{ рад}$ в (2) и $t=0$, $\dot{\varphi}=0$ в (3), имеем: $C_1=0,8$ и $C_2=0$. Внося эти значения C_1 и C_2 в уравнение (2), получим:

$$\varphi = 0,8 \cos 10t + 0,2. \quad (4)$$

Это — уравнение вращения диска по часовой стрелке на первом этапе движения. Угловая скорость диска $\dot{\varphi} = -8 \sin 10t$. Перемена направления движения произойдет в момент времени, соответствующий $\dot{\varphi} = 0$. При этом $-8 \sin 10t = 0$, откуда находим, что $t=0$ и $t = \frac{\pi}{10} \text{ сек}$. Значение $t=0$ соответствует началу движения диска из состояния покоя, а значение $t = \frac{\pi}{10} \text{ сек}$ соответствует первой перемене направления движения.

Подставив в уравнение (4) $t = \frac{\pi}{10} \text{ сек}$, получим угловую амплитуду диска $a_1 = 0,6 \text{ рад}$. В этом крайнем положении диска упругий момент равен $|m_z| = 50 \cdot 0,6 = 30 \text{ кг}\cdot\text{см}$. Так как $|m_z^*|_{\max} = 10 \text{ кг}\cdot\text{см}$, т. е. $|m_z| > |m_z^*|_{\max}$, то начинается движение диска против часовой стрелки. При этом упругий момент направлен против часовой стрелки, а момент трения — по часовой стрелке. Теперь дифференциальное уравнение вращения диска принимает вид

$$0,5\ddot{\varphi} = -50\varphi - 10.$$

Итак, движение диска против часовой стрелки описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{\varphi} + 100\varphi = -20 \quad (5)$$

при начальных условиях движения: при $t=0$ $\varphi = 0,6 \text{ рад}$, $\dot{\varphi} = 0$. (Отсчет времени опять начинаем сначала.)

Решив дифференциальное уравнение (5) аналогично дифференциальному уравнению (1), получим:

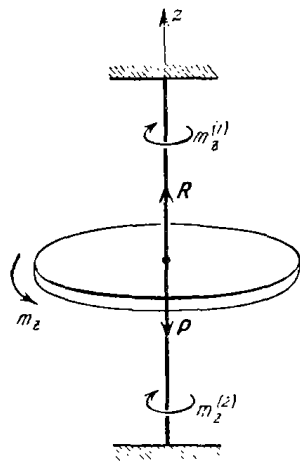
$$\varphi = -0,4 \cos 10t - 0,2. \quad (6)$$

Это — уравнение вращения диска против часовой стрелки. Угловая скорость диска: $\dot{\varphi} = 4 \sin 10t$. Перемена направления движения диска произойдет в момент времени, соответствующий $\dot{\varphi} = 0$. При этом $4 \sin 10t = 0$, откуда находим, что $t = 0$ и $t = \frac{\pi}{10}$ сек. Значение $t = 0$ соответствует началу движения диска против часовой стрелки, а значение $t = \frac{\pi}{10}$ сек соответствует перемене направления движения.

Подставив в (6) $t = \frac{\pi}{10}$ сек, получим угловую амплитуду $a_2 = 0,2$ рад. В этом крайнем положении диска модуль упругого момента равен $|m_z| = 50 \cdot 0,2 = 10$ кг·см. Так как $|m_z|_{\max} = 10$ кг·см, т. е. $|m_z| = |m_z|_{\max}$, то в этом крайнем положении диска его движение прекратится.

Итак, диск, будучи в начальный момент повернут на 1 рад против часовой стрелки и отпущен без начальной скорости, движется по часовой стрелке вплоть до поворота в отрицательном направлении отсчета на 0,6 рад (следовательно, размах колебаний по часовой стрелке равен 1,6 рад); затем диск меняет направление вращения и движется против часовой стрелки вплоть до поворота в положительном направлении отсчета на 0,2 рад (следовательно, размах колебаний против часовой стрелки равен 0,8 рад). В этом положении диска его движение прекратится.

Задача 308. Однородный круглый диск веса P и радиуса r , прикрепленный к потолку и полу посредством двух упругих проволок, расположенных на одной вертикали (см. рисунок), совершает крутильные колебания. При повороте диска в проволоках возникают упругие моменты, пропорциональные углу закручивания; c_1 — коэффициент упругости верхней проволоки, c_2 — нижней проволоки. К диску приложена пара сил с моментом $m_z = m_0 \sin \omega t$, где m_0 и ω — постоянные. Определить закон движения диска, если в начальный момент он находился в покое при ненапряженном состоянии проволок. Силой сопротивления движению пренебречь. Ось z направлена вдоль проволок.



К задаче 308.

Решение. К диску приложены: P — вес диска, R — суммарная сила реакции двух проволок, $m_z^{(1)}$ и $m_z^{(2)}$ — упругие моменты проволок, направленные в сторону, противоположную их закручиванию, m_z — момент вращающей пары сил.

Применяем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z :

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k^e).$$

Так как момент инерции диска I_z относительно оси z равен $\frac{Pr^2}{2g}$, а главный момент внешних сил относительно оси z равен

$$\sum_{k=1}^n m_z(F_k^e) = m_z^{(1)} + m_z^{(2)} + m_z = -c_1 \varphi - c_2 \varphi + m_0 \sin \omega t,$$

то дифференциальное уравнение вращения принимает вид

$$\frac{Pr^2}{2g} \ddot{\varphi} = -(c_1 + c_2) \varphi + m_0 \sin \omega t$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{2g(c_1 + c_2)}{Pr^2} \varphi = \frac{2gm_0}{Pr^2} \sin \omega t.$$

Обозначив $\frac{2g(c_1 + c_2)}{Pr^2} = k^2$ и $\frac{2gm_0}{Pr^2} = h$, запишем полученное уравнение в виде

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = h \sin \omega t. \quad (1)$$

Это дифференциальное уравнение вынужденных крутильных колебаний диска.

Общее решение дифференциального уравнения (1) равно сумме общего решения φ_1 соответствующего однородного уравнения $\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0$ и частного решения φ_2 уравнения (1), т. е. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Решив характеристическое уравнение $\lambda^2 + k^2 = 0$, получим $\lambda_{1,2} = \pm ki$, следовательно, решение однородного уравнения запишется в виде

$$\varphi_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (2)$$

где

$$k = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2g(c_1 + c_2)}{P}}.$$

При определении частного решения следует рассмотреть два варианта: а) $\omega \neq k$ и б) $\omega = k$.

Рассмотрим вариант а) $\omega \neq k$, т. е. случай отсутствия резонанса. Ищем частное решение в виде

$$\varphi_2 = A \sin \omega t + B \cos \omega t.$$

После подстановки этого значения φ_2 в уравнение (1) приравняем коэффициенты, стоящие соответственно при синусе и косинусе в левой и правой частях уравнения. Получим:

$$A(k^2 - \omega^2) = h, \quad B(k^2 - \omega^2) = 0.$$

Так как $\omega \neq k$, то $A = \frac{h}{k^2 - \omega^2}$ и $B = 0$. Теперь частное решение принимает вид

$$\varphi_2 = \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t,$$

где $k^2 = \frac{2g(c_1 + c_2)}{Pr^2}$ и $h = \frac{2gm_0}{Pr^2}$. Запишем общее решение дифференциального уравнения (1):

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (3)$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 вычислим производную от φ по t :

$$\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{h\omega}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (4)$$

После подстановки начальных условий: $t = 0, \varphi = 0$ в (3) и $t = 0, \dot{\varphi} = 0$ в (4), найдем, что $C_1 = 0$ и $C_2 = -\frac{h\omega}{k(k^2 - \omega^2)}$.

Следовательно, уравнение движения диска (3) имеет вид

$$\varphi = -\frac{h\omega}{k(k^2 - \omega^2)} \sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

Рассмотрим вариант б) $\omega = k$, т. е. случай резонанса. Ищем частное решение в виде

$$\varphi_2 = At \sin \omega t + Bt \cos \omega t. \quad (5)$$

После подстановки (5) в уравнение (1) приравняем коэффициенты, стоящие соответственно при синусе и косинусе в левой и правой частях уравнения. Получим: $A = 0$ и $B = -\frac{h}{2\omega}$, следовательно,

$$\varphi_2 = -\frac{h}{2\omega} t \cos \omega t, \quad (6)$$

где $h = \frac{2gm_0}{Pr^2}$.

Учитывая формулы (2) и (6), запишем общее решение дифференциального уравнения (1) в виде

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt - \frac{h}{2\omega} t \cos \omega t. \quad (7)$$

Взяв производную от φ по t , имеем:

$$\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt - \frac{h}{2\omega} \cos \omega t + \frac{h}{2} t \sin \omega t; \quad (8)$$

подставив начальные условия движения: $t = 0, \varphi = 0$ в (7) и $t = 0, \dot{\varphi} = 0$ в (8), найдем: $C_1 = 0$ и $C_2 = \frac{h}{2\omega^2}$ (так как $\omega = k$). Внося C_1 и C_2 в уравнение (7), окончательно получим уравнение движения диска в случае резонанса:

$$\varphi = \frac{h}{2\omega^2} \sin \omega t - \frac{h}{2\omega} t \cos \omega t,$$

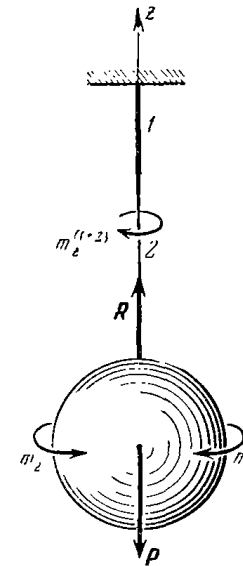
где $\omega = k = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2g(c_1 + c_2)}{P}}$ и $h = \frac{2gm_0}{Pr^2}$.

Переменная амплитуда вынужденных колебаний, равная $\frac{h}{2\omega} t$, неограниченно возрастает пропорционально времени.

Задача 309. Шар веса P и радиуса r совершает крутильные колебания на двух последовательно соединенных упругих проволоках (см. рисунок); c_1 — коэффициент упругости верхней проволоки, c_2 — нижней проволоки. К шару приложена пара сил с вращающим моментом $m_z = m_0 \sin \omega t$, где m_0 и ω постоянны. Момент силы сопротивления движению пропорционален угловой скорости шара: $m_z^* = -\beta \dot{\varphi}$, где β — постоянная ($\beta > 0$). Определить закон вынужденных колебаний шара. Ось z направлена вдоль упругих проволок.

Решение. К шару приложены: P — вес шара, R — суммарная сила реакции двух проволок, m_z — вращающий момент пары сил, m_z^* — момент сил сопротивления и $m_z^{(1+2)}$ — суммарный упругий момент двух проволок. Для определения суммарного упругого момента $m_z^{(1+2)}$ двух проволок найдем коэффициент упругости c проволоки, эквивалентной двум данным последовательно соединенным проволокам с коэффициентами упругости c_1 и c_2 , т. е. приведем данную задачу к обычной схеме крутильных колебаний твердого тела на упругой проволоке.

Допустим, что к шару приложен момент m , под действием которого проволока повернулась на угол φ ; тогда $\varphi = \frac{m}{c}$, где c — искомый эквивалентный коэффициент упругости. В рассматриваемом случае угол поворота φ шара равен сумме углов поворота φ_1 и φ_2 —



К задаче 309.

нижних сечений соответственно верхней и нижней проволок, т. е. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Так как $\varphi_1 = \frac{m}{c_1}$ и $\varphi_2 = \frac{m}{c_2}$, то $\frac{m}{c} = \frac{m}{c_1} + \frac{m}{c_2}$, т. е. $\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$, откуда коэффициент упругости эквивалентной проволоки $c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$. Итак, суммарный упругий момент двух последовательно соединенных проволок

$$m_z^{(1+2)} = -c\varphi = -\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \varphi.$$

Запишем дифференциальное уравнение вращения шара вокруг оси z :

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_z (F_k^e).$$

После подстановки $I_z = \frac{2}{5} \frac{Pr^2}{g}$ и $\sum_{k=1}^n m_z (F_k^e) = m_z^{(1+2)} + m_z^* + m_z = -\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \varphi - \beta \dot{\varphi} + m_0 \sin \omega t$ это уравнение примет вид

$$\frac{2Pr^2}{5g} \ddot{\varphi} = -\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \varphi - \beta \dot{\varphi} + m_0 \sin \omega t$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = h \sin \omega t, \quad (1)$$

где

$$\frac{5g}{2Pr^2} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = k^2, \quad \frac{5g\beta}{2Pr^2} = 2n \quad \text{и} \quad \frac{5gm_0}{2Pr^2} = h.$$

Уравнение (1) — дифференциальное уравнение вынужденных крутильных колебаний шара на проволоке при наличии момента силы сопротивления движению, пропорционального угловой скорости.

Так как требуется определить только вынужденные крутильные колебания шара, то решение задачи сводится к отысканию частного решения уравнения (1). Ищем частное решение в виде

$$\varphi = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (2)$$

Для нахождения коэффициентов A и B подставляем φ из формулы (2) в уравнение (1):

$$-A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t + 2An\omega \cos \omega t - 2Bn\omega \sin \omega t + Ak^2 \sin \omega t - Bk^2 \cos \omega t = h \sin \omega t.$$

Приравняв коэффициенты при синусе и косинусе в левой и правой частях уравнения, получим систему:

$$\begin{aligned} A(k^2 - \omega^2) - 2Bn\omega &= h, \\ B(k^2 - \omega^2) + 2An\omega &= 0, \end{aligned}$$

откуда $A = \frac{h(k^2 - \omega^2)}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}$ и $B = -\frac{2n\omega h}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}$.

Подставив полученные значения A и B в уравнение (2), найдем:

$$\varphi = \frac{h(k^2 - \omega^2)}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \sin \omega t - \frac{2n\omega h}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \cos \omega t.$$

Для определения амплитуды вынужденных крутильных колебаний обозначим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{h(k^2 - \omega^2)}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} &= a \cos \varepsilon, \\ \frac{2n\omega h}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} &= a \sin \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Теперь φ принимает вид

$$\varphi = a \sin(\omega t - \varepsilon), \quad (4)$$

где a — угловая амплитуда, а ε — сдвиг фаз между возмущающим моментом и вынужденными колебаниями; a и ε определяем из системы уравнений (3):

$$a = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}.$$

Итак, вынужденные крутильные колебания шара происходят по гармоническому закону:

$$\varphi = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \sin\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}\right),$$

где

$$k^2 = \frac{5g}{2Pr^2} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}, \quad n = \frac{5g\beta}{4Pr^2} \quad \text{и} \quad h = \frac{5gm_0}{2Pr^2}.$$

В случае резонанса, т. е. при $\omega = k$, угловая амплитуда вынужденных крутильных колебаний шара равна $\frac{h}{2n\omega}$.

Задача 310. Твердое тело, подвешенное на упругой проволоке, совершает крутильные колебания под действием внешнего момента $m = f(t)$, где $f(t)$ — однозначная периодическая функция периода τ ; c — коэффициент упругости проволоки, упругий момент которой пропорционален углу закручивания: $m_z = -c\varphi$.

Определить закон вынужденных крутильных колебаний твердого тела, если его момент инерции относительно оси z , направленной

вдоль проволоки, равен I_z . Силой сопротивления движению пренебречь.

Решение. Разложим $m=f(t)$ в ряд Фурье (предварительно проверив выполнение условий Дирихле):

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos i\omega t + b_i \sin i\omega t), \quad (1)$$

где

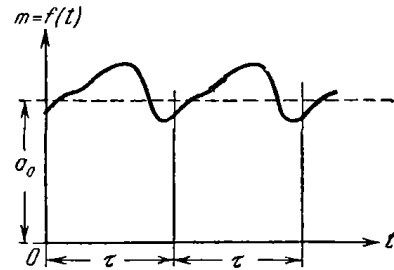
$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}.$$

Как известно, коэффициенты ряда Фурье вычисляются по формулам:

$$a_i = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \cos i\omega t dt$$

и

$$b_i = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \sin i\omega t dt,$$



К задаче 310.

где $i=0, 1, 2, \dots$

Запишем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг оси z :

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k^c).$$

Так как моменты силы веса твердого тела и силы реакции проволоки относительно оси z равны нулю, то

$$\sum_{k=1}^n m_z(F_k^c) = m_z + m = -c\varphi + f(t).$$

Воспользовавшись формулой (1), получим:

$$\sum_{k=1}^n m_z(F_k^c) = -c\varphi + \frac{1}{2} a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos i\omega t + b_i \sin i\omega t).$$

Следовательно, дифференциальное уравнение вынужденных крутильных колебаний твердого тела имеет вид

$$I_z \ddot{\varphi} = -c\varphi + \frac{1}{2} a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos i\omega t + b_i \sin i\omega t)$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = \frac{a_0}{2I_z} + \frac{1}{I_z} \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos i\omega t + b_i \sin i\omega t), \quad (2)$$

где $k^2 = \frac{c}{I_z}$. Для определения закона вынужденных крутильных колебаний требуется найти только частное решение дифференциального уравнения (2), которое ищем в виде

$$\varphi = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos i\omega t + B_i \sin i\omega t). \quad (3)$$

Для вычисления коэффициентов A_0, A_i и B_i ($i=0, 1, 2, \dots$) подставим значение φ из формулы (3) в уравнение (2):

$$\begin{aligned} -i^2 \omega^2 \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos i\omega t + B_i \sin i\omega t) + k^2 A_0 + \\ + k^2 \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos i\omega t + B_i \sin i\omega t) = \\ = \frac{a_0}{2I_z} + \frac{1}{I_z} \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos i\omega t + b_i \sin i\omega t). \end{aligned} \quad (4)$$

Приравняв постоянные слагаемые, а также коэффициенты, стоящие при соответствующих синусах и косинусах в левой и правой частях уравнения (4), получим:

$$A_i (k^2 - i^2 \omega^2) = \frac{a_i}{I_z}, \quad B_i (k^2 - i^2 \omega^2) = \frac{b_i}{I_z},$$

откуда

$$A_i = \frac{a_i}{(k^2 - i^2 \omega^2) I_z} \quad \text{и} \quad B_i = \frac{b_i}{(k^2 - i^2 \omega^2) I_z},$$

где $i=0, 1, 2, \dots$

Подставив вычисленные значения A_i, B_i в уравнение (3), находим уравнение вынужденных крутильных колебаний твердого тела

$$\varphi = \frac{a_0}{2c} + \frac{1}{I_z} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{a_i}{k^2 - i^2 \omega^2} \cos i\omega t + \frac{b_i}{k^2 - i^2 \omega^2} \sin i\omega t \right),$$

где

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}, \quad k^2 = \frac{c}{I_z}, \quad a_i = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \cos i\omega t dt$$

и

$$b_i = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \sin i\omega t dt \quad (i=0, 1, 2, \dots).$$

Твердое тело попадает в резонанс при условии: $k^2 - i^2\omega^2 = 0$, где $i = 1, 2, 3, \dots$, т. е. при $k = i\omega$.

Так, при $i = 1$, т. е. $k = \omega$, имеют место резонансные колебания первого порядка,

при $i = 2$, т. е. $k = 2\omega$, имеют место резонансные колебания второго порядка

.....

при $i = n$, т. е. $k = n\omega$ имеют место резонансные колебания n -го порядка.

При одном порядке величин a_i и b_i по мере повышения порядка резонансных колебаний их амплитуды уменьшаются, поэтому наиболее опасными являются резонансные колебания низших порядков.

7°. Теорема об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек в относительном движении по отношению к центру инерции. Разложим движение материальных точек системы на переносное поступательное вместе с осями декартовых координат, начало которых совмещено с центром инерции системы, и относительное движение по отношению к центру инерции. При этом теорема об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек в относительном движении по отношению к центру инерции имеет вид, тождественный аналогичной теореме в абсолютном движении:

$$\frac{dL_c}{dt} = \sum_{k=1}^n m_c (F_k^e),$$

т. е. производная по времени от главного момента количеств движения системы материальных точек относительно центра инерции системы в их относительном движении в системе координат, движущихся поступательно вместе с центром инерции, равна векторной сумме моментов внешних сил системы относительно центра инерции.

Та же теорема в проекциях на оси декартовых координат, начало которых совмещено с центром инерции системы и движущихся поступательно вместе с центром инерции, имеет вид

$$\frac{dL_{cx}}{dt} = \sum_{k=1}^n m_{cx} (F_k^e), \quad \frac{dL_{cy}}{dt} = \sum_{k=1}^n m_{cy} (F_k^e), \quad \frac{dL_{cz}}{dt} = \sum_{k=1}^n m_{cz} (F_k^e).$$

Случай сохранения главного момента количеств движения системы материальных точек в относительном движении по отношению к центру инерции системы.

Если векторная сумма моментов внешних сил относительно центра инерции равна нулю, то главный момент количеств движения системы

материальных точек относительно центра инерции в системе осей координат, движущихся поступательно вместе с центром инерции, сохраняется неизменным, т. е.

$$\text{если } \sum_{k=1}^n m_c (F_k^e) = 0, \text{ то } L_c \text{ постоянно.}$$

Та же теорема в проекциях на оси декартовых координат, начало которых совмещено с центром инерции системы и движущихся поступательно вместе с центром инерции, имеет вид:

$$\text{если } \sum_{k=1}^n m_{cx} (F_k^e) = 0, \text{ то } L_{cx} \text{ постоянно и т. д.}$$

Теорема об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек (со случаем сохранения) в относительном движении по отношению к центру инерции системы широко применяется в задачах динамики плоского движения твердого тела (см. следующий параграф) и движения свободного твердого тела, т. е. в тех случаях, когда движение твердого тела можно разложить на переносное вместе с осями координат, движущимися поступательно с центром инерции, и относительное по отношению к этим осям.

Задача 311. Акробат, совершая сальто, отталкиваясь ногами от земли, сообщает себе в начальный момент угловую скорость $\omega_1 = 1$ об/сек вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр тяжести. При этом момент инерции акробата относительно оси равен $I_1 = 1,5$ кг·м·сек². Для того чтобы в полете увеличить угловую скорость, акробат поджимает ноги и руки к туловищу, тем самым уменьшая момент инерции до величины $I_2 = 0,5$ кг·м·сек².

Определить угловую скорость вращения ω_2 акробата вокруг горизонтальной оси в полете. Силами сопротивления движению пренебречь.

Решение. Единственной внешней силой, действующей на акробата в полете, является его вес.

Движение акробата в процессе выполнения сальто является сложным. Разложив его на переносное поступательное движение вместе с центром инерции и относительное вращательное вокруг горизонтальной оси x , проходящей через центр инерции, можно воспользоваться теоремой об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек в относительном движении по отношению к этой оси:

$$\frac{dL_{cx}}{dt} = \sum_{k=1}^n m_{cx} (F_k^e).$$

Так как горизонтальная ось x проходит через центр тяжести акробата, то момент силы веса акробата относительно этой оси равен нулю. Следовательно, $\frac{dL_{cx}}{dt} = 0$ и L_{cx} постоянно, т. е. $L_{1cx} = L_{2cx}$.

Итак, имеет место случай сохранения главного момента количества движения системы материальных точек в относительном движении.

Так как $L_{1cx} = I_1\omega_1$ и $L_{2cx} = I_2\omega_2$, то $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$, откуда $\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1$. Подставив численные значения, получим $\omega_2 = 3$ об/сек.

8°. Моменты инерции и эллипсоид инерции. Момент инерции твердого тела относительно оси L , проходящей через данную точку, определяется формулой

$$I_L = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta,$$

где α , β и γ — соответственно углы между координатными осями x , y , z и осью L , относительно которой вычислен момент инерции твердого тела (рис. 130), I_x , I_y , I_z — осевые моменты инерции твердого тела, I_{xy} , I_{yz} , I_{zx} — центробежные моменты инерции твердого тела, определяемые формулами

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k, \quad I_{yz} = \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k, \\ I_{zx} = \sum_{k=1}^n m_k z_k x_k.$$

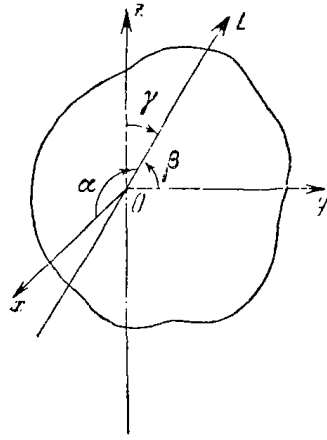


Рис. 130.

В отличие от осевых моментов инерции твердого тела I_x , I_y , I_z , которые всегда положительны, центробежные моменты инерции могут быть также отрицательными и в частных случаях могут оказаться равными нулю.

В случае непрерывного распределения масс в однородном твердом теле центробежные моменты инерции вычисляются по формулам

$$I_{xy} = \frac{M}{V} \iiint_{(V)} xy \, dV, \quad I_{yz} = \frac{M}{V} \iiint_{(V)} yz \, dV, \quad I_{zx} = \iiint_{(V)} zx \, dV,$$

где M — масса твердого тела, V — его объем, dV — элементарный объем. Интегрирование распространено по всему объему твердого тела.

В случае непрерывного распределения масс в однородной пластинке:

$$I_{xy} = \frac{M}{S} \iint_{(S)} xy \, dS, \quad I_{xz} = \frac{M}{S} \iint_{(S)} xz \, dS, \quad I_{yz} = \iint_{(S)} yz \, dS,$$

где M — масса пластинки, S — площадь пластинки, dS — элементарная площадка. Интегрирование распространено по всей площади пластинки.

Эллипсоидом инерции в данной точке твердого тела называется геометрическое место точек, отстоящих от данной точки на расстояние $OD = \frac{1}{\sqrt{I_L}}$.

Отрезок OD откладывается по оси L , проходящей через данную точку O , относительно которой определен момент инерции твердого тела I_L (рис. 131).

Уравнение эллипсоида инерции в данной точке твердого тела имеет вид

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx - 2I_{xy} xy = 1,$$

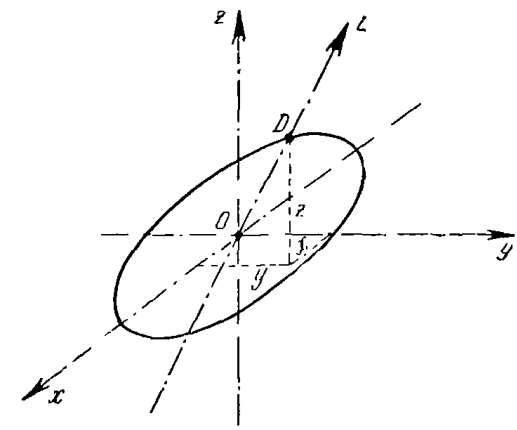


Рис. 131.

где x , y и z — текущие координаты точек, лежащих на поверхности эллипсоида.

Через любую точку твердого тела можно провести пучок осей L и построить соответствующий эллипсоид инерции.

Если координатные оси x , y и z направить по осям эллипсоида инерции, то уравнение эллипсоида принимает каноническую форму:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1,$$

т. е. центробежные моменты инерции обращаются в нуль:

$$I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0.$$

Оси эллипсоида инерции в данной точке твердого тела называются главными осями инерции. Следовательно, в каждой точке твердого тела имеются три главные оси инерции, являющиеся осями соответствующего эллипсоида инерции.

Если оси декартовых координат направить по главным осям инерции, т. е. по осям эллипсоида инерции в данной точке твердого тела, то, учитывая, что $I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$, получим в данном случае следующую формулу для момента инерции твердого тела относительно оси L :

$$I_L = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma,$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ — направляющие косинусы оси L .

Любая ось, не проходящая через центр тяжести твердого тела, является главной только в одной точке, т. е. ось является осью только того эллипсоида инерции, центр которого совпадает с данной точкой; так, главная ось z в точке O будет осью эллипсоида инерции с центром в O ; при этом для эллипсоидов инерции с центрами в других точках, лежащих на оси z , например в O_1 и O_2 , ось z не является осью эллипсоида (рис. 132).

Если оси x и y , проходящие через точку O , не являются осями эллипсоида, то $I_{xy} \neq 0$, т. е. если только одна из осей будет главной осью инерции в данной точке твердого тела, то в нуль обращаются лишь два центробежных момента инерции относительно осей, одной из которых является главная ось инерции; например, если z — главная ось инерции в точке O , то $I_{zx} = I_{zy} = 0$ (следует помнить, что оси x и y проходят через точку O и образуют совместно с осью z ортогональную систему осей координат).

Главная ось инерции, проходящая через центр тяжести твердого тела, называется *главной центральной осью инерции* и является главной в любой своей точке.

Если в твердом теле имеется плоскость материальной симметрии, то любая ось, перпендикулярная к этой плоскости, будет главной в точке пересечения с плоскостью.

Если в твердом теле имеется ось материальной симметрии, то она является главной осью инерции твердого тела.

Если при решении задачи приходится пользоваться формулами, содержащими центробежные моменты инерции твердых тел (например: в задачах на определение давлений вращающегося твердого тела на ось вращения (глава X, § 3), в задачах об ударе по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси (глава XII, § 1), в задачах динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки (глава X, § 8)), то для упрощения решения задач следует специально выбрать направление осей декартовых координат. Для этого требуется выяснить, нет ли в твердом теле оси материальной симметрии либо плоскости материальной симметрии. При наличии в твердом теле оси материальной симметрии надо одну из координатных осей направить по этой

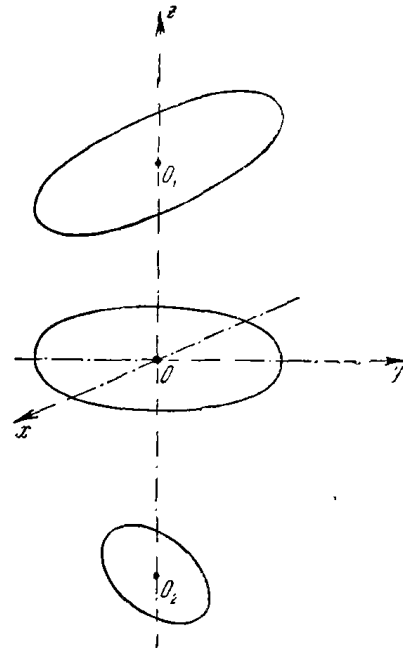


Рис. 132.

оси, которая и явится главной осью инерции. При наличии в твердом теле плоскости материальной симметрии надо одну из координатных осей направить перпендикулярно к плоскости материальной симметрии. Эта координатная ось является главной осью инерции твердого тела в точке пересечения с плоскостью материальной симметрии. При наличии главной оси инерции в данной точке твердого тела два центробежных момента инерции относительно осей, одной из которых является главная ось инерции, обращаются в нуль, и остается вычислить только третий центробежный момент инерции, не равный нулю. Так, если вдоль главной оси инерции направлена ось z , то $I_{zx} = I_{zy} = 0$ и остается вычислить только I_{xy} .

Иногда при вычислении центробежного момента инерции, например I_{xy} , бывает удобно осуществить поворот координатных осей x и y . Этим приемом целесообразно пользоваться в тех случаях, когда повернутые оси x_1 и y_1 оказываются главными и осевые моменты инерции твердого тела относительно них, т. е. I_{x_1} и I_{y_1} , известны, так как тогда искомым центробежным моментом инерции оказывается функцией величин I_{x_1} и I_{y_1} .

Для определения уравнения эллипсоида инерции в данной точке твердого тела следует:

1) выбрать координатные оси, взяв начало координат в данной точке; если положение главных осей инерции можно легко определить благодаря наличию в твердом теле плоскости либо оси материальной симметрии, то координатные оси следует направлять вдоль главных осей инерции;

2) вычислить моменты инерции I_x, I_y, I_z и центробежные моменты инерции твердого тела I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} ;

3) определить уравнение эллипсоида инерции, воспользовавшись формулой

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx - 2I_{xy} xy = 1.$$

Задача 312. На рисунке изображена схема коленчатого вала четырехцилиндрового двигателя внутреннего сгорания. Колена A и E расположены в горизонтальной плоскости yz . Колена B и D расположены в вертикальной плоскости xz . Вычислить центробежные моменты инерции коленчатого вала I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} , приближенно считая его массу сосредоточенной в точках A, B, E и D , причем $m_A = m_B = m_E = m_D = m$. Размеры указаны на рисунке.

Решение. По определению центробежных моментов инерции твердого тела получаем:

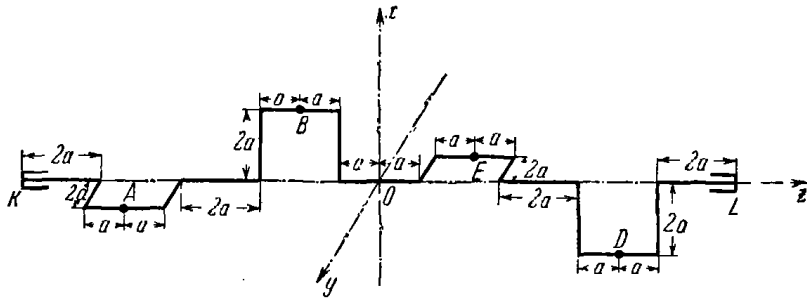
$$I_{xy} = \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k, \quad I_{xz} = \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k, \quad I_{yz} = \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k.$$

Распространив суммирование на четыре точечные массы m_A, m_B, m_E и m_D , имеем:

$$I_{yz} = \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k = m_A y_A z_A + m_B y_B z_B + m_E y_E z_E + m_D y_D z_D =$$

$$= m_A \cdot 2a(-6a) + m_E(-2a)2a = -12m_A a^2 - 4m_E a^2 = -16ma^2,$$

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k = m_A x_A y_A + m_B x_B y_B + m_E x_E y_E + m_D x_D y_D = 0,$$



К задаче 312.

$$I_{xz} = \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k = m_A x_A z_A + m_B x_B z_B + m_E x_E z_E + m_D x_D z_D =$$

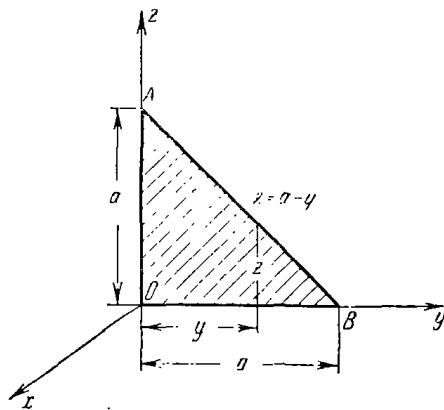
$$= m_B(-2a)2a + m_D 6a(-2a) = -4m_B a^2 - 12m_D a^2 = -16ma^2$$

(напомним, что $y_B = y_D = x_A = x_E = 0$, а $m_A = m_B = m_E = m_D = m$).

Итак, $I_{yz} = I_{xz} = -16ma^2$ и $I_{xy} = 0$.

Интересно отметить, что при двух центробежных моментах инерции I_{xz} и I_{yz} , отличных от нуля, центр тяжести коленчатого вала лежит на оси вращения z .

Задача 313. Вычислить центробежные моменты инерции I_{xy} , I_{xz} и I_{yz} однородной пластинки OAB веса P . Катет прямоугольного равнобедренного треугольника OAB равен a . Оси координат изображены на рисунке.



К задаче 313.

Решение. Ось x , перпендикулярная к плоскости материальной симметрии пластинки, является главной осью инерции в точке O . Известно, что центробежные моменты инерции относительно

осей, одна из которых является главной осью инерции, равны нулю, т. е.

$$I_{xy} = I_{xz} = 0.$$

Переходим к вычислению центробежного момента инерции I_{yz} :

$$I_{yz} = \int_{(M)} yz \, dm,$$

где $dm = \gamma \, dy \, dz$, а γ — плотность пластинки.

Следовательно,

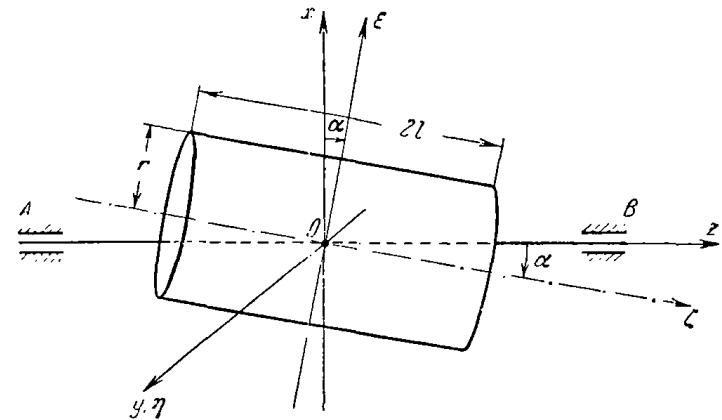
$$I_{yz} = \gamma \int \int yz \, dy \, dz = \gamma \int_0^a y \, dy \int_0^{a-y} z \, dz = \gamma \int_0^a y \frac{(a-y)^2}{2} \, dy =$$

$$= \frac{\gamma}{2} \int_0^a (a^2 y - 2ay^2 + y^3) \, dy = \frac{\gamma a^4}{24};$$

так как $\frac{\gamma a^2}{2} = M = \frac{P}{g}$, то окончательно получим:

$$I_{yz} = \frac{Pa^2}{12g}.$$

Задача 314. Прямой однородный круглый цилиндр веса P , длины $2l$ и с радиусом основания, равным r , прикреплен к горизонтальной оси z , проходящей через его центр тяжести O . Ось z образует с осью



К задаче 314.

цилиндра ζ угол α . Вычислить центробежные моменты инерции цилиндра I_{xy} , I_{xz} , I_{yz} . Ось x расположена в вертикальной плоскости.

Решение. Координатная плоскость xz совмещена с плоскостью материальной симметрии цилиндра. Поэтому ось y , перпендикулярная к плоскости материальной симметрии, является главной осью инерции

цилиндра в точке пересечения с этой плоскостью, т. е. в точке O . Как известно, центробежные моменты инерции твердого тела относительно осей, одной из которых является главная ось инерции, равны нулю. Следовательно,

$$I_{xy} = I_{yz} = 0.$$

Остается вычислить центробежный момент инерции

$$I_{xz} = \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k. \quad (1)$$

Введем новую систему координатных осей $\xi\eta\zeta$ так, чтобы ось η совпала с осью y , а оси ξ и ζ были повернуты соответственно относительно осей x и z на угол α в направлении по часовой стрелке. Формулы преобразования координат для случая их поворота на угол α в направлении *против часовой стрелки* имеют вид

$$z = \zeta \cos \alpha - \xi \sin \alpha \quad \text{и} \quad x = \zeta \sin \alpha + \xi \cos \alpha. \quad (2)$$

Так как в данной задаче поворот на угол α совершен *по часовой стрелке*, то, заменив в формулах (2) α на $-\alpha$, получим:

$$z = \zeta \cos \alpha + \xi \sin \alpha \quad \text{и} \quad x = -\zeta \sin \alpha + \xi \cos \alpha. \quad (3)$$

Подставляя значения z и x из формул (3) в (1), имеем:

$$\begin{aligned} I_{xz} &= \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k = \sum_{k=1}^n m_k (\zeta_k \cos \alpha + \xi_k \sin \alpha) (-\zeta_k \sin \alpha + \xi_k \cos \alpha) = \\ &= -\sin \alpha \cos \alpha \sum_{k=1}^n m_k \zeta_k^2 + \cos^2 \alpha \sum_{k=1}^n m_k \zeta_k \xi_k - \sin^2 \alpha \sum_{k=1}^n m_k \xi_k^2 + \\ &+ \sin \alpha \cos \alpha \sum_{k=1}^n m_k \xi_k^2 = \frac{\sin 2\alpha}{2} \left(\sum_{k=1}^n m_k \xi_k^2 - \sum_{k=1}^n m_k \zeta_k^2 \right) + \\ &+ \cos 2\alpha \sum_{k=1}^n m_k \zeta_k \xi_k = \frac{\sin 2\alpha}{2} \left[\sum_{k=1}^n m_k (\xi_k^2 + \zeta_k^2) - \sum_{k=1}^n m_k (\zeta_k^2 + \xi_k^2) \right] + \\ &+ I_{\zeta\xi} \cos 2\alpha. \quad (4) \end{aligned}$$

Ось ξ перпендикулярна к плоскости материальной симметрии цилиндра и, следовательно, является главной осью инерции в точке O . Поэтому $I_{\zeta\xi} = 0$, и формула (4) принимает вид

$$I_{xz} = \frac{\sin 2\alpha}{2} \left[\sum_{k=1}^n m_k (\xi_k^2 + \zeta_k^2) - \sum_{k=1}^n m_k (\zeta_k^2 + \xi_k^2) \right]. \quad (5)$$

Так как $\xi_k^2 + \zeta_k^2 = d_{k\zeta}^2$, где $d_{k\zeta}$ — расстояние от k -й материальной точки до оси ζ и $\zeta_k^2 + \xi_k^2 = d_{k\xi}^2$, где $d_{k\xi}$ — расстояние от k -й материальной

точки до оси ξ , то

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_k (\xi_k^2 + \zeta_k^2) &= \sum_{k=1}^n m_k d_{k\zeta}^2 = I_{\zeta}; \\ \sum_{k=1}^n m_k (\zeta_k^2 + \xi_k^2) &= \sum_{k=1}^n m_k d_{k\xi}^2 = I_{\xi}. \end{aligned}$$

Теперь формула (5) принимает вид

$$I_{xz} = \frac{\sin 2\alpha}{2} (I_{\zeta} - I_{\xi}). \quad (6)$$

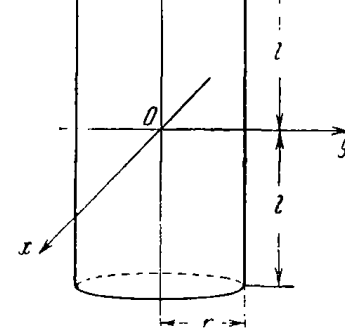
Для круглого однородного цилиндра

$$I_{\zeta} = \frac{Pr^2}{2g} \quad \text{и} \quad I_{\xi} = \frac{P}{g} \left(\frac{r^4}{4} + \frac{l^2}{3} \right).$$

Подставив значения I_{ζ} и I_{ξ} в формулу (6), окончательно получим:

$$I_{xz} = \frac{P}{2g} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3} \right) \sin 2\alpha.$$

Задача 315. Написать уравнение эллипсоида инерции, построенного в центре тяжести однородного круглого цилиндра массы m высоты $2l$ с радиусом основания, равным r . Координатные оси изображены на рисунке. Начало координат O совпадает с положением центра тяжести цилиндра.



К задаче 315.

Решение. Уравнение эллипсоида инерции в данной точке твердого тела имеет вид

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx - 2I_{xy} xy = 1.$$

Как известно, для круглого цилиндра $I_x = I_y = M \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right)$ и $I_z = \frac{Mr^2}{2}$. Так как оси x , y и z являются главными осями инерции цилиндра, то $I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$.

Теперь уравнение эллипсоида инерции для центра тяжести цилиндра будет

$$M \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right) x^2 + M \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right) y^2 + \frac{Mr^2}{2} z^2 = 1.$$

Полуоси эллипсоида инерции равны

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{M \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right)}} \quad \text{и} \quad c = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2}{M}}.$$

Задача 316. При каком соотношении между радиусом основания r однородного круглого конуса и его высотой h эллипсоид инерции, построенный для вершины конуса O , обратится в сферу. Координатные оси изображены на рисунке (см. рисунок к задаче 291).

Решение. Запишем уравнение эллипсоида инерции однородного круглого конуса для его вершины O . Для этого в уравнение эллипсоида инерции

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx - 2I_{xy} xy = 1$$

следует подставить: $I_x = I_y = \frac{3}{5} M \left(h^2 + \frac{r^2}{4} \right)$ и $I_z = \frac{3}{10} Mr^2$ (см. решение задачи 291), $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ (оси x, y, z являются главными осями инерции конуса в точке O).

Получим:

$$\frac{3}{5} M \left(h^2 + \frac{r^2}{4} \right) x^2 + \frac{3}{5} M \left(h^2 + \frac{r^2}{4} \right) y^2 + \frac{3}{10} Mr^2 z^2 = 1.$$

Следовательно, полуоси эллипсоида инерции конуса в точке O равны

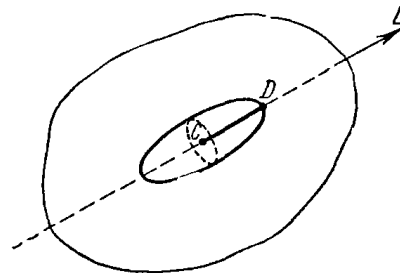
$$a = b = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{5} M \left(h^2 + \frac{r^2}{4} \right)}} \quad \text{и} \quad c = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{10}{3M}}.$$

Эллипсоид обращается в сферу при условии: $a = b = c$, т. е.⁶

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{5} M \left(h^2 + \frac{r^2}{4} \right)}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{10}{3M}}, \quad \text{откуда} \quad \frac{r}{h} = 2.$$

Задача 317. Определить положение точки в твердом теле и направление оси, проходящей через эту точку, если известно, что момент инерции твердого тела относительно этой оси является наименьшим. Эллипсоиды инерции для всех точек твердого тела считать заданными.

Решение. Применение теоремы Штейнера показывает, что при наличии системы параллельных осей момент инерции твердого тела является наименьшим относительно оси, проходящей через центр инерции C твердого тела. Остается выбрать направление оси, проходящей через эту точку. Построим эллипсоид инерции с центром в точке C . По определению эллипсоида инерции, расстояние от центра эллипсоида до точки, лежащей на его поверхности, равно $CD = \frac{1}{\sqrt{I_L}}$, где I_L —



К задаче 317.

момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через центр эллипсоида и точку, лежащую на его поверхности. Для того чтобы момент инерции I_L был наименьшим, расстояние CD должно быть наибольшим. Следовательно, искомая ось L проходит через центр инерции C твердого тела вдоль наибольшей оси CD эллипсоида инерции, построенного в этой точке.

§ 5. Динамика плоского движения твердого тела

Как известно из кинематики, уравнения плоского движения твердого тела имеют вид

$$x_C = f_1(t), \quad y_C = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

Разложив плоское движение твердого тела на переносное поступательное вместе с поступательно движущимися осями координат, начало которых расположено в центре инерции твердого тела, и на относительное вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр инерции C перпендикулярно к неподвижной плоскости (рис. 133), запишем дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела в форме

$$\bullet \quad M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad J_C \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_C (F_k^e).$$

Первые два уравнения (теорема о движении центра инерции системы материальных точек, записанная в проекциях на оси декартовых координат x и y) описывают переносное поступательное движение вместе с поступательно движущимися осями координат, начало которых расположено в центре инерции C твердого тела.

Третье уравнение (теорема об изменении главного момента количества движения системы материальных точек в относительном движении по отношению к центру инерции, записанная для случая вращения твердого тела вокруг подвижной оси, движущейся поступательно) описывает относительное вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр инерции C твердого тела перпендикулярно к неподвижной плоскости.

В то время как в кинематике за полюс можно принять любую точку плоской фигуры, в динамике за полюс следует брать только центр инерции C . Иной выбор полюса приводит к усложнению уравнений.

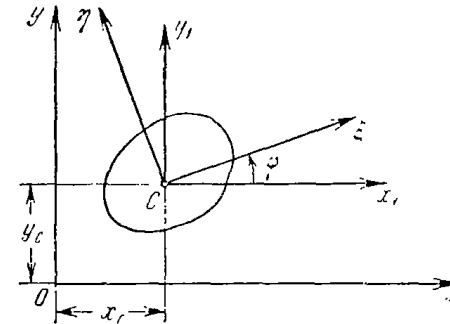


Рис. 133.

С помощью дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела можно решать как прямые, так и обратные задачи динамики плоского движения.

При решении обратных задач динамики (определение движения по заданным силам) приходится интегрировать систему дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела. Для определения шести постоянных интегрирования должны быть заданы шесть начальных условий движения, имеющих вид:

$$\text{при } t=0 \quad x_C = x_{C_0}, \quad y_C = y_{C_0}, \quad \dot{x}_C = \dot{x}_{C_0}, \quad \dot{y}_C = \dot{y}_{C_0}, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0.$$

Решение задач динамики плоского движения твердого тела рекомендуется выполнять в следующей последовательности:

1) изобразить на рисунке все внешние силы, приложенные к твердому телу;

2) выбрать систему координат и тем самым определить направление положительного отсчета угла поворота φ ;

3) составить дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела (не следует забывать, что в третьем уравнении $I_C \ddot{\varphi} =$

$$= \sum_{k=1}^n m_C (F_k^e) \text{ момент инерции твердого тела } I_C \text{ и сумма моментов}$$

всех внешних сил: $\sum_{k=1}^n m_C (F_k^e)$ вычисляются относительно оси, проходящей через центр инерции C твердого тела, перпендикулярно к неподвижной плоскости);

4) а) в случае решения прямой задачи искомые внешние силы и их моменты определяются из составленной в предыдущем пункте системы дифференциальных уравнений;

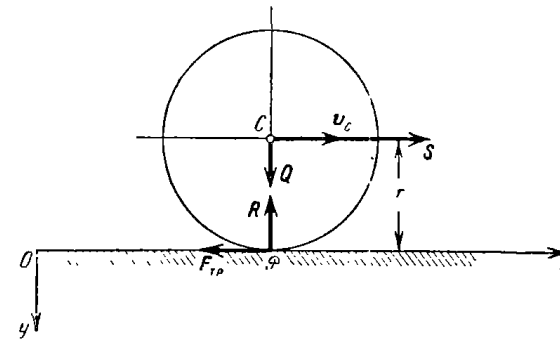
б) в случае решения обратной задачи интегрированием системы дифференциальных уравнений движения определяют уравнения плоского движения твердого тела:

$$x_C = f_1(t), \quad y_C = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

Если по условию задачи известна зависимость двух координат от третьей (например, $x_C = F_1(\varphi)$, $y_C = F_2(\varphi)$) либо некоторые координаты заданы, то, проинтегрировав систему дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела, можно определить искомую координату (например φ) и, кроме того, найти величины двух неизвестных внешних сил (или силы и момента).

Задача 318. Колесо веса Q и радиуса r катится прямолинейно без скольжения по горизонтальной плоскости под действием горизонтально направленной силы S , приложенной к колесу в центре тяжести C .

Дан закон движения центра тяжести C : $x_C = \frac{at^2}{2}$, где a — постоянная (ось x направлена по горизонтали в сторону движения). Определить величину силы S , величину нормальной силы реакции R , а также модуль силы трения $F_{\text{тр}}$ колеса о горизонтальную плоскость. Колесо считать сплошным однородным диском.



К задаче 318.

считать сплошным однородным диском.

Решение. Направление оси x задано. Направляем ось y по вертикали вниз. Угол поворота колеса φ отсчитываем в направлении по часовой стрелке.

К колесу приложены внешние силы: Q — вес колеса, S — движущая сила, R — нормальная сила

реакции плоскости, $F_{\text{тр}}$ — сила трения колеса о горизонтальную плоскость, направленная в сторону, противоположную движению колеса.

Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела имеют вид:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad I_C \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_C (F_k^e).$$

В данном случае получим:

$$\frac{Q}{g} \ddot{x}_C = S - F_{\text{тр}}, \quad \frac{Q}{g} \ddot{y}_C = Q - R, \quad \frac{Qr^2}{2g} \ddot{\varphi} = F_{\text{тр}} r. \quad (1)$$

При движении колеса $y_C = -r$ постоянно, т. е. $\ddot{y}_C = 0$. Из второго уравнения системы (1) находим: $R = Q$.

При качении колеса без скольжения мгновенный центр скоростей расположен в точке P касания колеса с горизонтальной плоскостью, следовательно, $v_C = r\omega$. Так как скорость центра параллельна оси x , то

$$\dot{x}_C = r\dot{\varphi}. \quad (2)$$

Формула (2) определяет условие качения колеса без скольжения. Воспользовавшись формулой (2), вычислим:

$$\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}. \quad (3)$$

Так как движение центра тяжести C колеса задано: $x_C = \frac{at^2}{2}$, то

$$\ddot{x}_C = a. \quad (4)$$

Из формул (3) и (4) находим:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{r} = \frac{a}{r}. \quad (5)$$

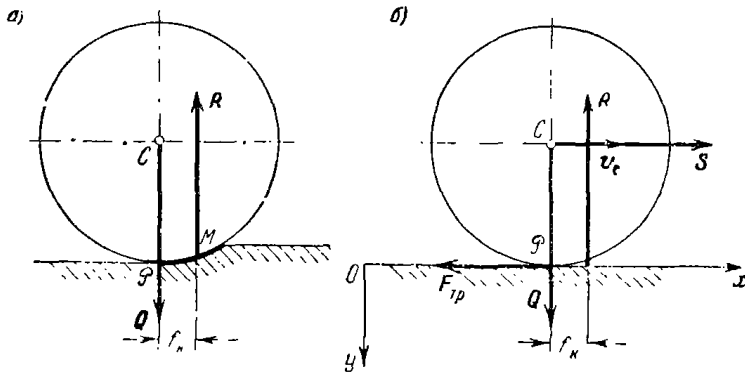
Используя формулу (5) из третьего уравнения системы (1), определим искомый модуль силы трения

$$F_{\text{тр}} = \frac{Qa}{2ig}. \quad (6)$$

Остается из первого уравнения системы (1) найти S . Принимая во внимание формулы (4) и (6), получаем:

$$S = \frac{3}{2} \frac{a}{g} Q.$$

Задача 319. Решить предыдущую задачу, учитывая трение качения колеса о горизонтальную плоскость; коэффициент трения качения равен f_k .



К задаче 319.

Решение. При качении колеса по плоскости, в результате деформации колеса и плоскости, соприкосновение их происходит не в одной точке P , а по небольшой дуге PM . Суммарная сила реакции R , подсчитанная по дуге соприкосновения PM , разлагается на нормальную и касательную составляющие. Касательная составляющая является силой трения $F_{\text{тр}}$. Нормальная составляющая силы реакции оказывается смещенной относительно центра тяжести колеса C в сторону движения. Вес колеса и нормальная сила реакции плоскости образуют пару сил — пару трения качения. Плечо этой пары f_k (см. рисунок a) называется коэффициентом трения качения. Следовательно, в отличие от коэффициента трения f , который является безразмерной величиной, коэффициент трения качения f_k измеряется в сантиметрах (при качении колеса железнодорожного вагона

по рельсу коэффициент трения качения f_k имеет порядок сотых долей сантиметра).

При решении предыдущей задачи с учетом пары трения качения первое и второе уравнения системы (1) остаются без изменения. В правую часть третьего уравнения добавляется отрицательный момент пары трения качения: $m_{\text{т.к}} = -Rf_k = -Qf_k$ (момент отрицателен, так как направление вращения пары противоположно направлению положительного отсчета угла поворота φ).

Следовательно, система дифференциальных уравнений движения колеса принимает вид:

$$\frac{Q}{g} \ddot{x}_C = S - F_{\text{тр}}, \quad \frac{Q}{g} \ddot{y}_C = Q - R, \quad \frac{Qr^2}{2g} \ddot{\varphi} = F_{\text{тр}} \cdot r - Qf_k.$$

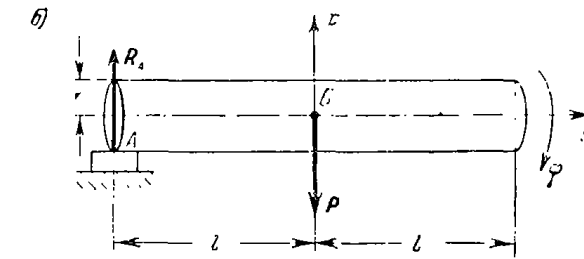
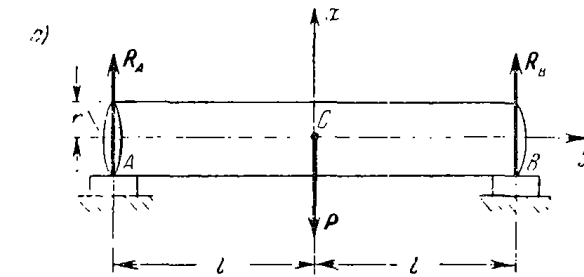
Из второго уравнения системы находим величину нормальной силы реакции: $R = Q$; таким образом, на все наличие пары трения качения не влияет. Из третьего уравнения системы, после использования формулы (5) предыдущей задачи, находим:

$$F_{\text{тр}} = \left(\frac{a}{2g} + \frac{f_k}{r} \right) Q.$$

После подстановки полученного значения $F_{\text{тр}}$ и значения \ddot{x}_C из формулы (4) предыдущей задачи в первое уравнение системы получим:

$$S = \left(\frac{3}{2} \frac{a}{g} + \frac{f_k}{r} \right) Q.$$

Как и следовало ожидать, для получения того же самого закона движения центра тяжести C колеса, при наличии пары трения качения, следует прикладывать большую по модулю силу S .



К задаче 320.

Задача 320. Бревно веса P длины $2l$ с радиусом основания r опиралось своими концами на два кирпича. Внезапно правый кирпич был выбит из-под бревна. Определить силу реакции левого кирпича, полагая, что в начальный момент падения бревна его ось остается горизонтальной. Бревно считать однородным круглым цилиндром.

Решение. При наличии двух опор (см. рис. *a*) сила реакции каждой из них равна $\frac{P}{2}$.

На рис. *b* изображено бревно в начальный момент своего падения после внезапного удаления правого кирпича. Падая, бревно совершает плоское движение. К бревну приложены внешние силы: вес бревна P и сила реакции левого кирпича R_A .

Начало осей координат выбираем в центре тяжести C бревна. Оси x и y располагаем в вертикальной плоскости материальной симметрии бревна, направив ось x по вертикали вверх.

Составим дифференциальные уравнения плоского движения бревна, справедливые для малых углов поворота балки:

$$\frac{P}{g} \ddot{x}_C = -P + R_A, \quad \frac{P}{g} \ddot{y}_C = 0, \quad \frac{P}{g} \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right) \ddot{\varphi} = R_A l. \quad (1)$$

При составлении третьего уравнения (1) использовано, что момент инерции бревна относительно горизонтальной оси, проходящей через его центр тяжести, равен $\frac{P}{g} \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right)$.

Искомая сила реакции R_A входит в правые части первого и третьего уравнений системы (1), в левых частях которых стоят \ddot{x}_C и $\ddot{\varphi}$. Для исключения \ddot{x}_C и $\ddot{\varphi}$ следует найти зависимость между ними. Так как $v_C = l\omega$, т. е. $\dot{x}_C = -l\dot{\varphi}$ (мы пренебрегаем толщиной бревна и считаем опору точечной), то

$$\ddot{x}_C = -l\ddot{\varphi}. \quad (2)$$

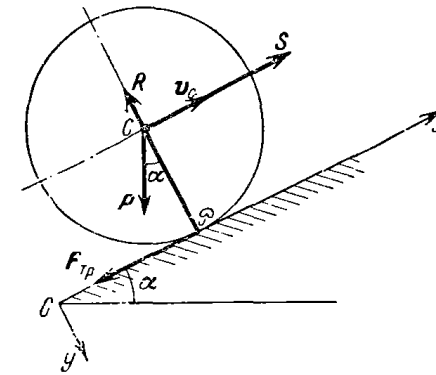
Разделив первое уравнение системы (1) на третье и используя формулу (2), получим: $\frac{l}{\frac{l^2}{3} + \frac{r^2}{4}} = \frac{P - R_A}{R_A l}$, откуда определим искомую реакцию левого кирпича:

$$R_A = P \frac{4l^2 + 3r^2}{16l^2 + 3r^2}.$$

Задача 321. Определить закон движения центра тяжести C ведомого колеса автомашины, поднимающейся в гору, склон которой расположен под углом α к горизонту. К оси ведомого колеса приложена постоянная сила S . Колесо считать однородным кольцом веса P . В начальный момент автомашина находилась в покое. Колесо катится без скольжения. Сопротивлением качению пренебречь.

Решение. При движении автомашины за счет работы двигателя создается вращающий момент, приложенный к ведущей паре колес (обычно задней). Сила трения, возникающая при соприкосновении ведущих колес с дорожным покрытием, направлена в сторону движения

и является той внешней силой, которая движет автомашину. При отдельном рассмотрении движения ведомого колеса надо считать, что к его оси приложена сила S , о которой говорится в условии задачи. На ведомое колесо действует также сила трения, возникающая в точках его соприкосновения с дорогой. Эта сила направлена в сторону, противоположную силе S , и тем самым в сторону, противоположную силе трения ведущего колеса.



К задаче 321.

Итак, к ведомому колесу приложены внешние силы: P — вес колеса, S — движущая сила, R — нормальная сила реакции наклонной поверхности дороги, $F_{тр}$ — сила трения колеса о дорожное покрытие. В случае ведомого колеса сила трения направлена в сторону, противоположную движению колеса. Радиус колеса обозначим r .

Координатные оси изображены на рисунке. В соответствии с направлением осей считаем положительным направление отсчета угла поворота φ по часовой стрелке.

Запишем дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad I_C \ddot{\varphi} = \sum m_C (l_k^e)^2,$$

которые для рассматриваемой задачи принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{g} \ddot{x}_C &= S - P \sin \alpha - F_{тр}, & \frac{P}{g} \ddot{y}_C &= P \cos \alpha - R, \\ \frac{P}{g} r^2 \ddot{\varphi} &= F_{тр} r. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Момент силы трения в последнем уравнении системы (1) положительный, так как его направление совпадает с направлением положительного отсчета угла поворота φ .

Так как при движении колеса $y_C = -r$ постоянно, т. е. $\ddot{y}_C = 0$, то из второго уравнения системы (1) находим: $R = P \cos \alpha$ (то же результат получается и при покое колеса).

Для определения уравнения движения центра тяжести C колеса следует проинтегрировать первое уравнение системы (1). Однако в правую часть этого уравнения входит неизвестная по модулю сила трения $F_{тр}$. Для исключения $F_{тр}$ следует обратиться к третьему урав-

нению системы (1), одновременно используя условие качения колеса без скольжения:

$$\dot{x}_C = r\dot{\varphi} \quad (2)$$

(мгновенный центр скоростей колеса находится в точке \mathcal{P} соприкосновения колеса с дорогой). Вычисляя производную по времени от \dot{x}_C , получим:

$$\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}. \quad (3)$$

Подставив (3) в первое уравнение системы (1) и разделив первое уравнение на третье, находим:

$$\frac{S - P \sin \alpha - F_{\text{тр}}}{F_{\text{тр}}} = 1,$$

откуда

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{2} (S - P \sin \alpha). \quad (4)$$

Теперь первое уравнение системы (1) после подстановки в него значения $F_{\text{тр}}$ из формулы (4) принимает вид

$$\ddot{x}_C = \frac{g}{2P} (S - P \sin \alpha).$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение для начальных условий движения: при $t=0$, $x_C=0$, $\dot{x}_C=0$ (по условию задачи в начальный момент колесо находилось в покое), получим искомый закон движения центра тяжести C ведомого колеса:

$$x_C = \frac{g}{4P} (S - P \sin \alpha) t^2.$$

Нетрудно установить, что колесо будет катиться вверх при выполнении условия $S - P \sin \alpha > 0$, т. е. $S > P \sin \alpha$.

Часто, решая подобные задачи, ошибочно полагают, что может происходить качение колеса без скольжения при отсутствии силы трения $F_{\text{тр}}$. Нетрудно видеть, что при этом предположении третье уравнение системы (1) принимает вид $\frac{P}{g} r^2 \ddot{\varphi} = 0$, т. е. $\ddot{\varphi} = 0$. Учитывая, что при $t=0$ $\varphi=0$ и $\dot{\varphi}=0$, получим $\varphi=0$. Это означает, что при отсутствии силы трения качение колеса невозможно.

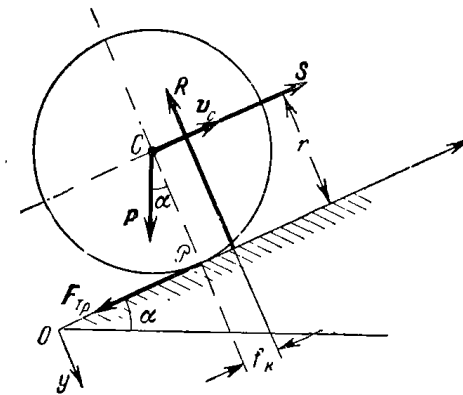
Задача 322. Решить предыдущую задачу с учетом трения качения колеса о дорогу; коэффициент трения качения равен f_k . Радиус колеса r .

Решение. В схему расположения внешних сил вносится только одно изменение: нормальная сила реакции R оказывается смещенной относительно центра тяжести C колеса в сторону его движения на f_k .

На первых двух дифференциальных уравнениях движения системы (1) предыдущей задачи это изменение не отражается, а в правой части третьего уравнения добавляется момент пары трения качения:

$m_{\tau, k} = -Nf_k = -Pf_k \cos \alpha$ (момент отрицателен, так как его направление противоположно положительному направлению отсчета угла поворота φ). Итак, система дифференциальных уравнений плоского движения ведомого колеса принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{P}{g} \ddot{x}_C &= S - P \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \\ \frac{P}{g} \ddot{y}_C &= -R + P \cos \alpha, \\ \frac{P}{g} r^2 \ddot{\varphi} &= F_{\text{тр}} r - Pf_k \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$



К задаче 322.

Воспользовавшись формулой (3) предыдущей задачи и разделив первое уравнение системы (1) на третье, определяем силу трения

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{2} \left[S - P \left(\sin \alpha - \frac{f_k}{r} \cos \alpha \right) \right]. \quad (2)$$

Первое уравнение системы (1) после подстановки в него значения $F_{\text{тр}}$ из формулы (2) принимает вид

$$\ddot{x}_C = \frac{g}{2P} \left[S - P \left(\sin \alpha + \frac{f_k}{r} \cos \alpha \right) \right].$$

Интегрируя последнее дифференциальное уравнение при начальных условиях движения $t=0$ $x_C=0$, $\dot{x}_C=0$, находим искомый закон движения центра тяжести C ведомого колеса:

$$\dot{x}_C = \frac{g}{4P} \left[S - P \left(\sin \alpha + \frac{f_k}{r} \cos \alpha \right) \right] t^2. \quad (3)$$

Из формулы (3) следует, что движение колеса вверх может происходить при выполнении условия

$$S - P \left(\sin \alpha + \frac{f_k}{r} \cos \alpha \right) > 0,$$

т. е.

$$S > P \left(\sin \alpha + \frac{f_k}{r} \cos \alpha \right). \quad (4)$$

Однако качение колеса без скольжения может иметь место при значениях силы S , не превосходящих определенного предела, соответствующего предельному значению силы трения fN . Последнее усло-

ние приводит к неравенству $F_{\text{тр}} \leq fN$. Так как сила нормальной реакции $N = P \cos \alpha$, то $F_{\text{тр}} \leq fP \cos \alpha$. Подставив в левую часть этого неравенства значение $F_{\text{тр}}$ из формулы (2), получим:

$$\frac{1}{2} \left[S - P \left(\sin \alpha - \frac{f_{\text{к}}}{r} \cos \alpha \right) \right] \leq fP \cos \alpha,$$

откуда

$$S \leq P \left[\sin \alpha + \left(2f - \frac{f_{\text{к}}}{r} \right) \cos \alpha \right]. \quad (5)$$

Сопоставив неравенства (4) и (5), запишем:

$$P \left(\sin \alpha + \frac{f_{\text{к}}}{r} \cos \alpha \right) < S \leq P \left[\sin \alpha + \left(2f - \frac{f_{\text{к}}}{r} \right) \cos \alpha \right]. \quad (6)$$

Значение S , удовлетворяющее двойному неравенству (6), обеспечивает качение вперед ведомого колеса без скольжения. При

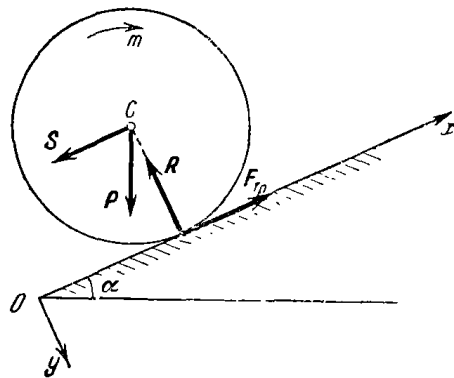
$$S > P \left[\sin \alpha + \left(2f - \frac{f_{\text{к}}}{r} \right) \cos \alpha \right]$$

колесо начинает скользить.

Задача 323. При движении автомашины в гору, склон которой расположен под углом α к горизонту, к ведущему колесу приложена пара сил с постоянным вращающим моментом m . К оси C ведущего колеса приложена со стороны ведомых частей автомашины постоянная сила S . Определить закон движения центра тяжести C колеса. Колесо считать однородным кольцом веса P и радиуса r . В начальный момент автомашина находилась в покое. Колесо катится без скольжения. Трением качения пренебречь.

Решение. На колесо действуют внешние силы: P — вес колеса, S — сила, приложенная со стороны ведомых частей автомашины, R — нормальная сила реакции поверхности Земли, пара сил с вращающим моментом m ; $F_{\text{тр}}$ — сила трения ведущего колеса о поверхность Земли — направлена в сторону движения и является движущей силой (у ведомого колеса, рассмотренного в двух предыдущих задачах, сила трения $F_{\text{тр}}$ направлена в сторону, противоположную движению).

Оси координат изображены на рисунке. В соответствии с направлением осей считаем положительным направление отсчета угла поворота φ по часовой стрелке.



К задаче 323.

Запишем дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела:

$$M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad I_C \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_C (F_k^e),$$

принимающие для рассматриваемой задачи вид

$$\begin{aligned} \frac{P}{g} \ddot{x}_C &= F_{\text{тр}} - P \sin \alpha - S, & \frac{P}{g} \ddot{y}_C &= -R + P \cos \alpha, \\ \frac{Pr^2}{2g} \ddot{\varphi} &= m - F_{\text{тр}} r. \end{aligned} \quad (1)$$

Так как $y_C = -r$ постоянно, то $\ddot{y}_C = 0$ и из второго уравнения системы следует, что $R = P \cos \alpha$.

Разделив первое уравнение системы (1) на третье и используя при этом вытекающее из условия качения колеса без скольжения $\dot{x}_C = r\dot{\varphi}$ соотношение $\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}$ (см. решение двух предыдущих задач), получим:

$$\frac{F_{\text{тр}} - P \sin \alpha - S}{\frac{m}{r} - F_{\text{тр}}} = 1,$$

откуда

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{r} + P \sin \alpha + S \right). \quad (2)$$

После подстановки значения $F_{\text{тр}}$ из формулы (2) в правую часть первого уравнения системы (1) найдем:

$$\ddot{x}_C = \frac{g}{2P} \left(\frac{m}{r} - P \sin \alpha - S \right).$$

Интегрирование этого дифференциального уравнения при начальных условиях движения $t=0$, $x_C=0$, $\dot{x}_C=0$ приводит к выражению

$$x_C = \frac{g}{4P} \left(\frac{m}{r} - P \sin \alpha - S \right) t^2.$$

Как следует из полученного результата, движение колеса вверх из состояния покоя может происходить только при выполнении условия

$$\frac{m}{r} - P \sin \alpha - S > 0,$$

т. е.

$$m > (P \sin \alpha + S) r. \quad (3)$$

Однако качение ведущего колеса без скольжения может происходить лишь при значениях вращающего момента m , не превосходящих определенного предела. Действительно, так как сила трения должна

удовлетворять неравенству $F_{\text{тр}} \leq fN$, т. е. $F_{\text{тр}} \leq fP \cos \alpha$, то, подставив в левую часть этого неравенства значение $F_{\text{тр}}$ из формулы (2), находим:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{m}{r} + P \sin \alpha + S \right) \leq fP \cos \alpha,$$

откуда

$$m \leq [P(2f \cos \alpha - \sin \alpha) - S] r. \quad (4)$$

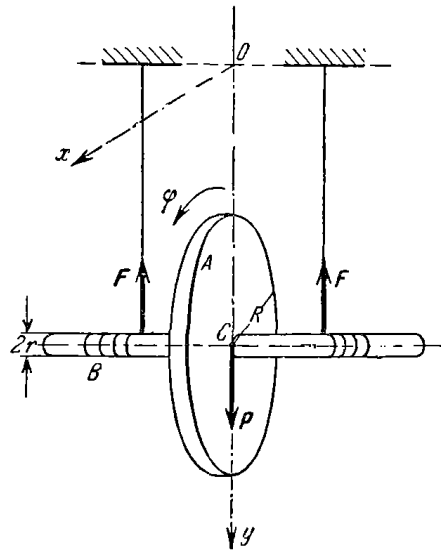
Сопоставив неравенства (3) и (4), запишем:

$$(P \sin \alpha + S) r < m \leq [P(2f \cos \alpha - \sin \alpha) - S] r.$$

Если величина вращающего момента удовлетворяет этому двойному неравенству, то качение ведущего колеса осуществляется без скольжения.

При $m > [P(2f \cos \alpha - \sin \alpha) - S] r$ колесо начинает скользить.

Задача 324. Однородный круглый диск A веса P и радиуса R подвешен на двух нерастяжимых нитях, намотанных на его горизонтальную ось B радиуса r . Под действием силы тяжести диск опускается вниз. При этом нити разматываются до полной длины. При дальнейшем вращении диска в том же направлении нити наматываются на ось B , а сам диск поднимается вверх. Подъем кончается, когда нити полностью наматываются на ось. Затем снова начинается разматывание нитей и опускание диска вниз и т. д. Этот прибор называется маятником Максвелла. Определить натяжение нитей и скорость центра тяжести C диска. В верхнем крайнем положении скорость центра тяжести C равна нулю. Массой оси B и нитей пренебречь; силы трения не учитывать.



К задаче 324.

Решение. К диску приложены внешние силы: вес диска P и две силы реакций нитей F . Координатные оси x и y и направление положительного отсчета угла поворота φ указаны на рисунке.

Составим дифференциальные уравнения движения диска A :

$$\frac{P}{g} \ddot{x}_C = 0, \quad \frac{P}{g} \ddot{y}_C = P - 2F, \quad \frac{PR^2}{2g} \ddot{\varphi} = 2Fr.$$

Из первого уравнения системы при нулевых начальных условиях находим $x_C = 0$. Это указывает на движение центра тяжести C диска по вертикали.

Используя зависимость между угловой скоростью диска и скоростью его центра тяжести $v_C = r\omega$, т. е. $\dot{y}_C = r\dot{\varphi}$, вычислив затем $\ddot{y}_C = r\ddot{\varphi}$ и разделив второе уравнение системы на третье, находим: $\frac{2r}{R^2} = \frac{P - 2F}{2Fr}$. Из этого соотношения определяем величину силы реакции нити

$$F = \frac{PR^2}{2(R^2 + 2r^2)}.$$

Второе уравнение системы после подстановки в него полученного значения F принимает вид

$$\ddot{y}_C = 2g \frac{r^2}{R^2 + 2r^2}.$$

Так как в крайнем верхнем положении диска при $t=0$ $\dot{y}_C = 0$, то

$$\dot{y}_C = 2g \frac{r^2}{R^2 + 2r^2} t.$$

Это уравнение соответствует опусканию диска вниз.

Интересно отметить, что независимо от направления движения центра тяжести C диска его ускорение \ddot{y}_C остается неизменным. В крайних нижних положениях диска происходит удар, скорость центра тяжести C обращается в нуль и затем меняет свое направление.

Задача 325. Катушка веса P и радиуса r_2 скатывается, скользя под действием силы тяжести, с наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. При этом разматываются две нити, намотанные на ось катушки радиуса r_1 симметрично ее вертикальной плоскости материальной симметрии (на рисунке прямолинейные участки нитей изображены одной прямой). При движении катушки ее ось остается горизонтальной. Определить силу реакции нити и скорость центра тяжести C катушки; ρ — радиус инерции катушки относительно оси, проходящей через ее центр тяжести C перпендикулярно к плоскости движения. В начальный момент катушка находилась в покое. Коэффициент трения скольжения катушки о наклонную плоскость равен f .

Решение. К катушке приложены внешние силы: P — вес катушки, $2T$ — суммарная сила реакций нитей, R — нормальная сила реакции наклонной плоскости, $F_{\text{тр}}$ — сила трения скольжения катушки о наклонную плоскость. Так как катушка, скатываясь, поворачивается по часовой стрелке, то $F_{\text{тр}}$ направлена вдоль наклонной плоскости вверх.

Выбираем оси координат x, y , изображенные на рисунке. Положительным считаем направление отсчета угла φ по часовой стрелке.

Составим дифференциальные уравнения плоского движения катушки:

$$\begin{aligned} \frac{P}{g} \ddot{x}_C &= P \sin \alpha - 2T - F_{\text{тр}}, \\ \frac{P}{g} \ddot{y}_C &= R - P \cos \alpha, \\ \frac{P}{g} \rho^2 \ddot{\varphi} &= 2Tr_1 - F_{\text{тр}}r_2. \end{aligned} \quad (1)$$

При движении катушки $y_C = r_2$ постоянно, т. е. $\ddot{y}_C = 0$. Из второго уравнения системы (1) находим величину нормальной силы реакции плоскости:

$$R = P \cos \alpha. \quad (2)$$

Для определения силы реакции нити T надо из первого и третьего уравнений системы (1) исключить \ddot{x}_C и $\ddot{\varphi}$. Для этого следует установить зависимость между ними. Заметим, что мгновенный центр скоростей \mathcal{P} расположен в точке схода нити с оси катушки (см. рисунок), запишем $v_C = r_1 \omega$, т. е. $\dot{x}_C = r_1 \dot{\varphi}$, и следовательно,

$$\ddot{x}_C = r_1 \ddot{\varphi}. \quad (3)$$

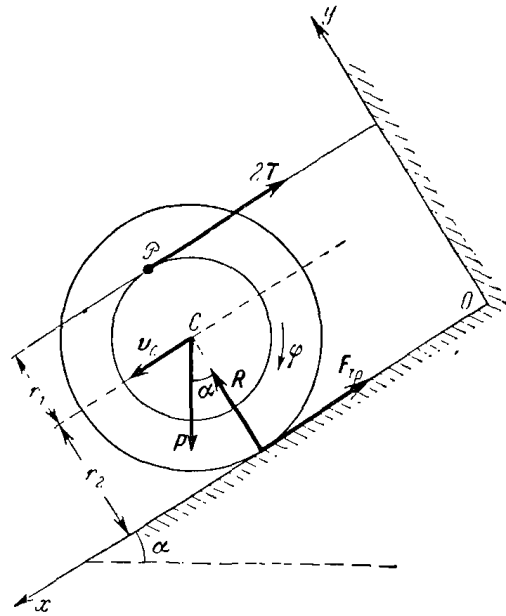
Разделив первое уравнение системы (1) на третье и используя зависимость (3), находим:

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{\rho^2} &= \frac{P \sin \alpha - 2T - F_{\text{тр}}}{2Tr_1 - F_{\text{тр}}r_2}, \\ \text{откуда} \quad T &= \frac{1}{2} \frac{P\rho^2 \sin \alpha + F_{\text{тр}}(r_1r_2 - \rho^2)}{\rho^2 + r_1^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как сила трения равна $F_{\text{тр}} = fR$, то $F_{\text{тр}} = fP \cos \alpha$ и в соответствии с формулой (2) формула (4) принимает вид

$$T = \frac{P\rho^2 \sin \alpha + f(r_1r_2 - \rho^2) \cos \alpha}{\rho^2 + r_1^2}.$$

Таково значение модуля силы реакции нити.



К задаче 325.

Остается определить скорость центра тяжести C катушки. Для этого, подставив в первое уравнение системы (1) значения $F_{\text{тр}}$ и T , находим:

$$\ddot{x}_C = gr_1 \frac{r_1 \sin \alpha - f(r_1 + r_2) \cos \alpha}{\rho^2 + r_1^2}.$$

Так как при $t=0$ $\dot{x}_C = 0$, то

$$\dot{x}_C = gr_1 \frac{r_1 \sin \alpha - f(r_1 + r_2) \cos \alpha}{\rho^2 + r_1^2} t.$$

Для того чтобы катушка скатывалась по наклонной плоскости, необходимо выполнение условия $\dot{x}_C > 0$, т. е.

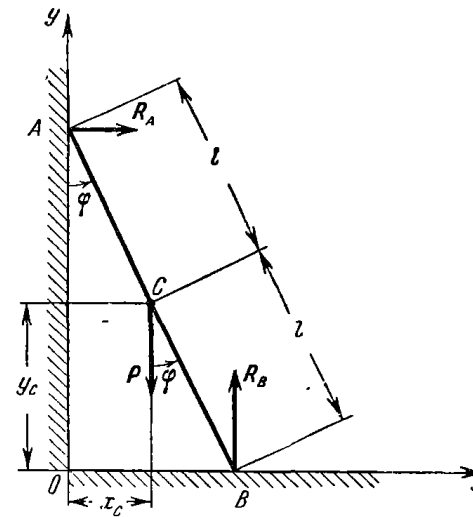
$$r_1 \sin \alpha - f(r_1 + r_2) \cos \alpha > 0.$$

Следовательно,

$$\text{tg } \alpha > f \frac{r_1 + r_2}{r_1}.$$

Если $\text{tg } \alpha \leq f \frac{r_1 + r_2}{r_1}$, то катушка остается в покое.

Задача 326. Лестница AB , опирающаяся концом A о гладкую стену и концом B о гладкий пол, начинает падать под действием



К задаче 326.

своего веса. В начальный момент лестница находилась в покое и составляла со стеной угол φ_0 . При каком значении угла φ конец A лестницы отделится от стены? Лестницу считать однородным тонким стержнем.

Решение. Обозначим вес лестницы P и длину ее $2l$; если C — центр тяжести лестницы, то $AC = CB = l$.

К лестнице приложены внешние силы: P — вес лестницы, R_A — нормальная сила реакции стены и R_B — нормальная сила реакции пола.

Напомним, что по условию, стена и пол являются гладкими.

Выбранные координатные оси x, y изображены на рисунке. Отсчет угла φ считаем положительным в направлении против часовой стрелки. Лестница совершает плоское движение в вертикальной плоскости x, y . Составим дифференциальные уравнения плоского движения

лестницы:

$$\frac{P}{g} \ddot{x}_C = R_A, \quad (1)$$

$$\frac{P}{g} \ddot{y}_C = -P + R_B, \quad (2)$$

$$\frac{P}{g} \frac{l^2}{3} \ddot{\varphi} = R_B l \sin \varphi - R_A l \cos \varphi. \quad (3)$$

Для выражения $\ddot{\varphi}$ и $\dot{\varphi}$ через φ исключаем R_A и R_B из составленной системы уравнений. Подставив в уравнение (3) значение R_A из уравнения (1) и значение R_B из уравнения (2), после несложных вычислений находим:

$$\frac{l}{3} \ddot{\varphi} = (\ddot{y}_C + g) \sin \varphi - \ddot{x}_C \cos \varphi. \quad (4)$$

Как видно из рисунка, $x_C = l \sin \varphi$, $y_C = l \cos \varphi$. Дифференцируя по времени, находим:

$$\dot{x}_C = l \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \ddot{x}_C = l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \quad (5)$$

$$\dot{y}_C = -l \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \ddot{y}_C = -l \ddot{\varphi} \sin \varphi - l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi. \quad (6)$$

После подстановки значений \ddot{x}_C и \ddot{y}_C из формул (5) и (6) в формулу (4) и простых преобразований получим выражение $\ddot{\varphi}$ через φ :

$$\ddot{\varphi} = \frac{3}{4} \frac{g}{l} \sin \varphi. \quad (7)$$

Для определения зависимости $\dot{\varphi}$ от φ умножаем почленно дифференциальное уравнение (7) на $d\varphi$ и, учитывая, что $\ddot{\varphi} d\varphi = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} d\varphi = \dot{\varphi} d\dot{\varphi}$, находим:

$$\dot{\varphi} d\dot{\varphi} = \frac{3}{4} \frac{g}{l} \sin \varphi d\varphi.$$

Интегрирование дает: $\dot{\varphi}^2 = -\frac{3}{2} \frac{g}{l} \cos \varphi + C$. При $t=0$ $\varphi = \varphi_0$,

$\dot{\varphi} = 0$. Следовательно, $C = \frac{3}{2} \frac{g}{l} \cos \varphi_0$. Итак,

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi). \quad (8)$$

(Уравнение (8) можно было получить короче, применив теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек, рассмотренную в следующем параграфе.)

Теперь можно определить значение угла φ , при котором конец лестницы A отделится от стены. В момент отделения от стены R_A обратится в нуль. Тогда из уравнения (1) следует, что в этот момент $\ddot{x}_C = 0$. Применив формулу (5), получим, что в момент отделения лестницы от стены:

$$\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = 0. \quad (9)$$

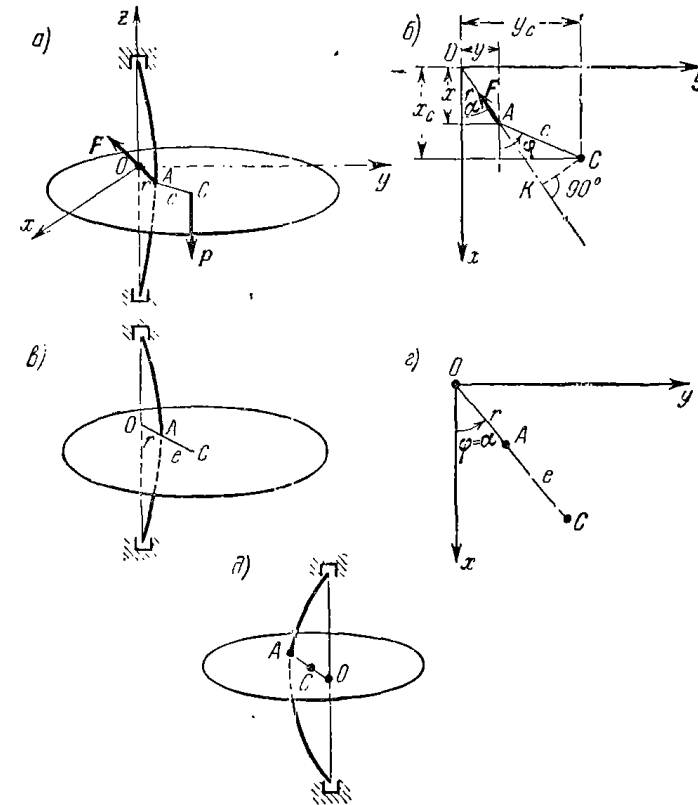
Подставляем в формулу (9) значения $\ddot{\varphi}$ и $\dot{\varphi}^2$ соответственно из формул (7) и (8). После простых преобразований получим:

$$[\cos \varphi - 2(\cos \varphi_0 - \cos \varphi)] \sin \varphi = 0.$$

Из условия задачи следует: $\varphi > \varphi_0$, т. е. что $\sin \varphi \neq 0$. Следовательно, $\cos \varphi - 2(\cos \varphi_0 - \cos \varphi) = 0$. Из этого уравнения определяется значение угла φ , при котором лестница отделяется от стены:

$$\varphi = \arccos \left(\frac{2}{3} \cos \varphi_0 \right).$$

Задача 327. Определить закон движения турбинного диска веса P , эксцентрисично посаженного в середине вертикального упругого вала.



К задаче 327.

Упругая сила вала пропорциональна его прогибу. Коэффициент упругости равен c ; e — эксцентриситет турбинного диска. В начальный момент диску была сообщена угловая скорость ω . Силами сопротивления движению пренебречь.

Решение. При вращении турбинного диска вал изгибается. Так как диск насажен в середине вала без перекося, то его движение будет происходить в горизонтальной плоскости, и поэтому следует применить дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

Проведем вертикальную ось z через опоры упругого вала, т. е. совместим ее с геометрической осью вращения диска. Выберем начало осей координат в точке пересечения оси z с горизонтальной плоскостью диска. Оси x и y расположены в плоскости диска. Пусть, далее, $A(x, y)$ — точка пересечения изогнутой оси вала с плоскостью диска, $C(x_C, y_C)$ — центр инерции диска, $OA = r$ — прогиб вала, $AC = e$ — эксцентриситет.

Обозначим: α — угол между осью x и направлением OA , φ — угол между осью x и прямой, проходящей через точку A крепления диска к оси и его центр тяжести (рис. б).

На турбинный диск действуют две внешние силы: P — вес диска и упругая сила вала F , приложенная в точке A и направленная от A к O , причем $F = cr$.

Составим дифференциальные уравнения плоского движения диска:

$$\frac{P}{g} \ddot{x}_C = -F \cos \alpha, \quad \frac{P}{g} \ddot{y}_C = -F \sin \alpha, \quad I_C \ddot{\varphi} = F \cdot |KC|, \quad (1)$$

причем

$$F = cr, \quad r \cos \alpha = x, \quad r \sin \alpha = y, \quad |KC| = |AC| \sin \phi = e \sin(\varphi - \alpha), \quad (2)$$

где $\phi = \angle CAK = \varphi - \alpha$.

Воспользовавшись формулами (2), запишем систему уравнений (1) в виде:

$$\frac{P}{g} \ddot{x}_C = -cx, \quad \frac{P}{g} \ddot{y}_C = -cy, \quad I_C \ddot{\varphi} = cre \sin(\varphi - \alpha). \quad (3)$$

Как следует из рис. б, имеет место следующая зависимость между координатами точек C и A :

$$x_C = x + e \cos \varphi, \quad y_C = y + e \sin \varphi.$$

Следовательно,

$$\ddot{x}_C = \ddot{x} - e \ddot{\varphi} \sin \varphi - e \dot{\varphi}^2 \cos \varphi,$$

$$\ddot{y}_C = \ddot{y} + e \ddot{\varphi} \cos \varphi - e \dot{\varphi}^2 \sin \varphi.$$

Подставив эти значения \ddot{x}_C и \ddot{y}_C в уравнения (3), находим:

$$\frac{P}{g} \ddot{x} - \frac{P}{g} e \ddot{\varphi} \sin \varphi - \frac{P}{g} e \dot{\varphi}^2 \cos \varphi = -cx,$$

$$\frac{P}{g} \ddot{y} + \frac{P}{g} e \ddot{\varphi} \cos \varphi - \frac{P}{g} e \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = -cy,$$

$$I_C \ddot{\varphi} = cre \sin(\varphi - \alpha),$$

откуда

$$\ddot{x} + \frac{cg}{P} x = e \ddot{\varphi} \sin \varphi + e \dot{\varphi}^2 \cos \varphi,$$

$$\ddot{y} + \frac{cg}{P} y = -e \ddot{\varphi} \cos \varphi + e \dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \quad (4)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{ce}{I_C} r \sin(\varphi - \alpha).$$

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (4) весьма затруднительно. Поэтому мы будем решать ее приближенно.

В правой части третьего уравнения стоит произведение эксцентриситета e на $\sin(\varphi - \alpha)$. Считая это произведение малым, приближенно приравняем его нулю (ниже будет показано, что совершаемая при этом ошибка невелика). Теперь третье уравнение системы (4) приближенно принимает вид $\ddot{\varphi} = 0$, откуда, учитывая начальные условия движения: при $t = 0$ $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \omega$, находим: $\dot{\varphi} = \omega$ и

$$\varphi = \omega t, \quad (5)$$

т. е. вращение диска совершается равномерно.

Используя формулу (5), запишем первые два уравнения системы (4) в форме

$$\ddot{x} + k^2 x = h \cos \omega t, \quad \ddot{y} + k^2 y = h \sin \omega t, \quad (6)$$

где $\frac{cg}{P} = k^2$ и $e\omega^2 = h$.

Интегрирование дифференциальных уравнений (6) осуществляется независимо друг от друга. Общие решения этих уравнений имеют вид:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t,$$

$$y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t, \quad (7)$$

где $k = \sqrt{\frac{cg}{P}}$ и $h = e\omega^2$.

Как известно, первые два слагаемых описывают колебания, затухающие при наличии сил сопротивления, а третье слагаемое — установившиеся вынужденные колебания. Поэтому в дальнейшем первые два слагаемых отбросим.

Тогда

$$x = \frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t, \quad y = \frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t, \quad (8)$$

т. е. точка A совершает гармонические колебания круговой частоты ω и амплитуды $\frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2}$. После возведения каждого из уравнений (7) в квадрат и суммирования находим:

$$x^2 + y^2 = \frac{e^2 \omega^4}{(k^2 - \omega^2)^2}.$$

Так как $x^2 + y^2 = r^2$, то прогиб вала будет

$$r = \frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2}. \quad (9)$$

Как следует из рис. б, координаты точки А равны: $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$. Подставив вместо x и y их значения из формул (8) и значение r из формулы (9), имеем: $\alpha = \omega t$. Сопоставив этот результат с формулой (5), получим:

$$\alpha = \varphi. \quad (10)$$

При выполнении условия $\alpha = \varphi$ точки О, А и С лежат на одной прямой.

(При $\alpha = \varphi$ правая часть третьего уравнения системы (4) оказывается точно равной нулю. Поэтому ошибка, которую мы совершаем, приближенно считая правую часть третьего уравнения системы (4) равной нулю, получается за счет пренебрежения первыми двумя слагаемыми в каждом из уравнений системы (7). Учитывая затухание свободных колебаний под действием сил сопротивления движению, подобное приближение следует считать вполне допустимым. При точном решении системы дифференциальных уравнений (4) угловая скорость диска $\dot{\varphi}$ не оказалась бы постоянной и не равнялась бы ω .)

Теперь рис. а и б принимают более простой вид, так как точки О, А и С лежат на одной прямой (см. соответственно рис. в и г).

Вычислим смещение центра тяжести С диска от точки О: $OC = r + e$. Подставив значение r из формулы (9), находим:

$$OC = \frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2} + e = \frac{ek^2}{k^2 - \omega^2}. \quad (11)$$

В случае вынужденных колебаний малой частоты, т. е. при $\omega < k$, на основании формул (9) и (11) получим $|OC| > r > 0$ (см. рис. в и г). В случае вынужденных колебаний большой частоты, т. е. при $\omega > k$, $r > |OC| > 0$, что соответствует изображению на рис. д.

По мере увеличения угловой скорости вращения ω диска, расстояние OC (см. формулу (11)) по модулю уменьшается, т. е. диск, насаженный на упругий вал, *самостоятельно центрируется* (при $\omega \rightarrow \infty$ $|OC| \rightarrow 0$), и его центр тяжести С приближается к геометрической оси вращения.

Перепишем формулу (11) в виде $\frac{|OC|}{e} = \frac{k^2}{|k^2 - \omega^2|}$. Если угловая скорость вращения турбинного диска значительно больше его круговой частоты собственных колебаний, т. е. $\omega \gg k$, то $\frac{|OC|}{e}$ оказывается весьма малой величиной. Например, при $\omega = 6k$ получим: $\frac{|OC|}{e} = 0,029$. (При этом следует иметь в виду, что при насадке турбинных дисков на вал эксцентриситет e измеряется микронами.)

Явление самостоятельного центрирования диска на упругом валу было впервые обнаружено в конце XIX века Лавалем и использовано им в конструкции паровой турбины, диск которой совершал до 30 000 об/мин.

В случае $\omega = k$ имеет место явление резонанса и расстояние OC неограниченно возрастает. Конечно, в действительности OC так не растет, ввиду наличия сил сопротивления движению. Однако величина OC становится значительной, что угрожает надежности работы конструкции. Резонансная угловая скорость вращения турбинного диска, при которой прогиб вала достигает больших значений, называется *критической угловой скоростью* гибкого вала, а соответствующее число оборотов вала в минуту — *критическим числом оборотов*.

Так как при резонансе $\omega_{кр} = k$, а $k = \sqrt{\frac{cg}{P}}$, то $\omega_{кр} = \sqrt{\frac{cg}{P}}$. Следовательно,

$$n_{кр} = \frac{30}{\pi} \omega_{кр} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{cg}{P}}.$$

§ 6. Теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек

1°. Работа силы. *Работой постоянной силы на прямолинейном перемещении* называется скалярное произведение векторов силы и перемещения, т. е. работа равна произведению модуля силы на модуль перемещения и на косинус угла между ними:

$$A = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = F \Delta r \cos(\widehat{F, \Delta r})$$

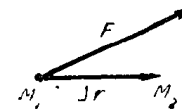


Рис. 134.

(M_1 и M_2 — соответственно начальное и конечное положения точки M , $\Delta \mathbf{r}$ — вектор перемещения точки (рис. 134, 135) при переходе из M_1 в M_2).

Единица измерения работы: кг·м.

Элементарная работа переменной силы равна скалярному произведению векторов силы и элементарного перемещения $\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

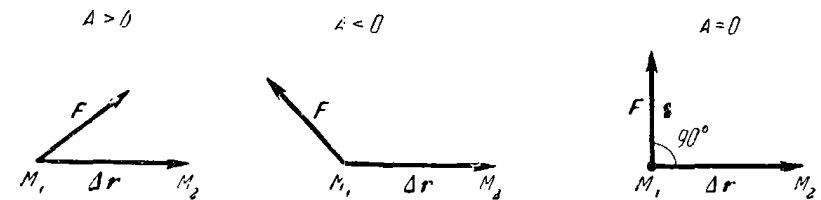


Рис. 135.

Элементарное перемещение $d\mathbf{r}$ направляется по касательной к траектории в данной точке (рис. 136). Элементарная работа обозначается δA , а не dA , так как только в частных случаях элементарная

работа силы является полным дифференциалом некоторой функции координат (см. ниже случай потенциального поля).

Выражение элементарной работы переменной силы через проекции силы на оси декартовых координат имеет вид

$$\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

где

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad \text{и} \quad d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}.$$

Работа переменной силы на конечном перемещении по криволинейной траектории равна криволинейному интегралу, взятому вдоль дуги кривой от M_1 до M_2 , от скалярного произведения векторов силы и элементарного перемещения:

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} F dr \cos(\widehat{\mathbf{F}, d\mathbf{r}}).$$

(Интеграл называется криволинейным, так как осуществляется суммирование вдоль криволинейной траектории, в разных точках которой касательные элементарные перемещения $d\mathbf{r}$ различны по направлению.)

Выражение работы переменной силы на конечном перемещении во криволинейной траектории через проекции силы на оси декартовых координат имеет вид:

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

При приложении системы сил к точкам материальной системы работа равна сумме работ всех сил, т. е.

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \delta A_k = \sum_{k=1}^n F_{kx} dx_k + F_{ky} dy_k + F_{kz} dz_k$$

и

$$A = \sum_{k=1}^n \int_{(M_{1k})}^{(M_{2k})} F_{kx} dx_k + F_{ky} dy_k + F_{kz} dz_k,$$

где F_{kx} , F_{ky} , F_{kz} — проекции главного вектора сил, действующих на k -ю точку системы.

Теорема о работе равнодействующей силы: работа равнодействующей сил, приложенных к точке, на некотором перемещении равна сумме работ составляющих сил на том же перемещении

$$A(\mathbf{R}) = \sum_{k=1}^n A(\mathbf{F}_k), \quad \text{где} \quad \mathbf{R} = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k.$$

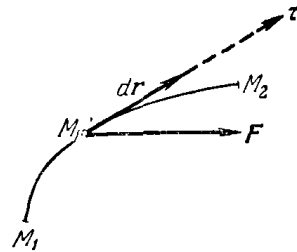


Рис. 136.

Элементарная работа сил, приложенных к твердому телу, находится по следующим формулам:

а) при поступательном движении: $\delta A = \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$, где \mathbf{V} — главный вектор системы сил, $d\mathbf{r}$ — элементарное перемещение любой из точек твердого тела;

б) при вращении вокруг неподвижной оси: $\delta A = m_z d\varphi$, где m_z — главный момент системы сил относительно оси вращения z , $d\varphi$ — элементарное угловое перемещение твердого тела;

в) при плоском движении: $\delta A = \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}_O + m_{zO} d\varphi$, где \mathbf{V} — главный вектор системы сил, $d\mathbf{r}_O$ — элементарное перемещение полюса O , m_{zO} — главный момент системы сил относительно оси z , проходящей через полюс O перпендикулярно к неподвижной плоскости, $d\varphi$ — элементарное угловое перемещение вокруг этой оси. (Полюс O выбирается произвольно.)

Элементарная работа внешних сил, приложенных к неизменяемой системе, вычисляется по приведенным выше формулам.

Элементарная работа внутренних сил неизменяемой системы материальных точек (например, абсолютно твердого тела) равна

нулю: $\sum_{k=1}^n \delta A(\mathbf{F}_k^i) = 0$. Подчеркнем, что работа внутренних сил в упругом теле (изменяемой системе) не равна нулю.

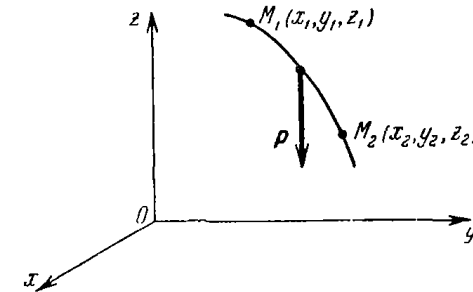


Рис. 137.

В ряде случаев для вычисления работы сил удобнее использовать готовые формулы, некоторые из которых приводятся ниже.

Работа силы тяжести материальной точки равна произведению силы тяжести на разность высот конечного и начального положений точки (Δh), т. е. $A = P \cdot \Delta h$. Если материальная точка приближается к земной поверх-

ности, то $A(\mathbf{P}) > 0$. Если материальная точка отдаляется от земной поверхности, то $A(\mathbf{P}) < 0$. Если высоты начального и конечного положений материальной точки равны (в частности, при движении точки по замкнутому контуру), то $A(\mathbf{P}) = 0$.

Следовательно, работа силы тяжести материальной точки зависит от высот ее начального и конечного положений и не зависит от формы кривой, по которой перемещается материальная точка (см. ниже § 5^с).

В случае системы материальных точек работа сил тяжести равна произведению силы тяжести всей системы на разность высот

конечного и начального положений центра инерции системы:

$$A = -P(z_{2c} - z_{1c}),$$

где $P = \sum_{k=1}^n P_k$, а ось z направлена вертикально.

Работа упругой силы ($F_x = -cx$) на прямолинейном перемещении по линии действия силы из точки с абсциссой x_1 в точку с абсциссой x_2 (рис. 138) определяется формулой

$$A = -\frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

(при $x=0$ упругая сила равна нулю, т. е. пружина не напряжена).

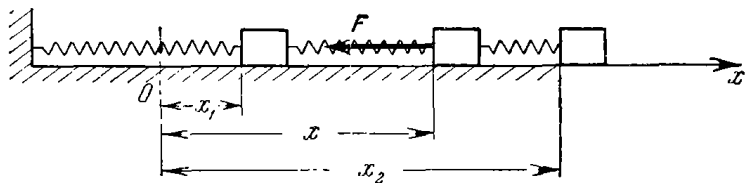


Рис. 138.

Работа упругой силы отрицательна, если точка движется в сторону возрастания модуля упругой силы; работа упругой силы положительна, если точка движется в сторону убывания модуля упругой силы. Работа упругой силы $F = -cr$ на конечном перемещении по криволинейной траектории пропорциональна разности квадратов конечного и начального радиус-векторов точки: $A = -\frac{c}{2}(r_2^2 - r_1^2)$, т. е., подобно работе силы тяжести, работа упругой силы зависит от начального и конечного положений точки и не зависит от формы кривой, по которой перемещается материальная точка.

Работа момента упругих сил $m_2 = -c\varphi$ равна

$$A = -\frac{c}{2}(\varphi_2^2 - \varphi_1^2).$$

Мощность N характеризует быстроту совершения работы с течением времени и определяется формулой

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

В случае силы P , приложенной к некоторой точке, мощность равна $N = P \cdot v$, где v — скорость точки. В случае момента m , приложенного к твердому телу, вращающемуся с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, мощность будет $N = m\omega$. Единицами измерения мощности являются $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{сек}$ и $\text{ватт} = 0,102 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{сек}$.

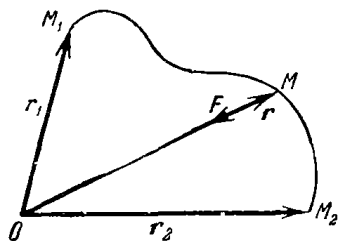
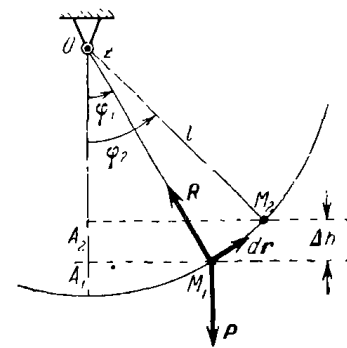


Рис. 139.

Вычисление суммы работ сил, приложенных к материальной точке либо к системе материальных точек, является одним из этапов решения задач, в которых применяется теорема об изменении кинетической энергии, либо составляются уравнения Лагранжа второго рода (см. ниже, главу X, § 6).

Вычисление суммы работ сил надо выполнять в следующей последовательности:

- 1) изобразить на рисунке силы, приложенные к материальной точке либо к системе материальных точек;
- 2) изобразить элементарные перемещения точек системы;
- 3) вычислить элементарную работу сил, т. е. сумму работ всех сил на элементарных перемещениях точек системы;
- 4) вычислить искомую сумму работ сил на конечных перемещениях как сумму определенных интегралов, взятых в соответствующих пределах от элементарных работ, вычисленных в предыдущем пункте.



К задаче 328.

При наличии сил тяжести и упругих сил можно, минуя три последних пункта, выбрав систему координат, вычислить работу этих сил на конечных перемещениях по вышеприведенным формулам.

Задача 328. При движении математического маятника нить его в начальном положении составляла с вертикалью угол φ_1 , а в конечном положении — угол φ (причем $\varphi_2 > \varphi_1$). Вычислить сумму работ сил, приложенных к точечной массе маятника, на этом угловом перемещении, если P — вес его точечной массы и l — длина нити. Направление положительного отсчета угла поворота φ указано на рисунке.

Решение. К точечной массе маятника приложены две силы: вес P и сила реакции нити R . Следовательно, искомая сумма работ сил имеет вид

$$\sum_{k=1}^n A_k = A(P) + A(R). \quad (1)$$

Так как сила реакции нити R направлена вдоль нити и во время движения маятника перпендикулярна к элементарному перемещению dr , направленному по касательной к траектории в данной точке, то работа силы реакции нити равна нулю:

$$A(R) = 0. \quad (2)$$

Работа силы тяжести P отрицательна, так как точечная масса маятника поднимается вверх $A(P) = -P\Delta h$. Разность высот конеч-

ного и начального положений точечной массы маятника:

$$\Delta h = A_1 A_2 = OA_1 - OA_2 = l(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2),$$

следовательно,

$$A(\mathbf{P}) = -Pl(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2). \quad (3)$$

Подставив значения $A(\mathbf{R})$ и $A(\mathbf{P})$ из формул (2) и (3) в формулу (1), находим искомую сумму работ сил:

$$\sum A_k = -Pl(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)$$

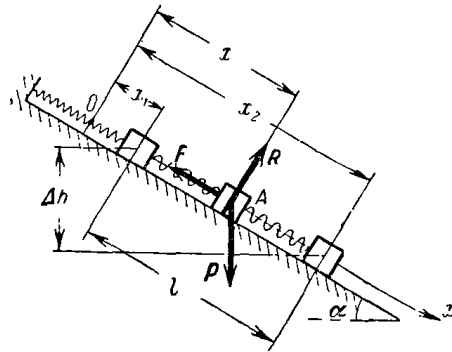
Эту задачу можно было также решить, вычисляя сумму работ сил при вращении маятника вокруг оси z , проходящей через точку привеса O перпендикулярно к плоскости рисунка. В этом случае элементарная работа сил равна $\delta A = m_z \cdot d\varphi$, где m_z — главный момент относительно оси вращения z сил, приложенных к точечной массе. Учитывая, что момент силы реакции нити \mathbf{R} относительно оси z равен нулю, а момент силы веса \mathbf{P} относительно оси z равен $-Pl \sin \varphi$ (момент отрицателен, так как его направление противоположно направлению положительного отсчета угла поворота φ), получим $m_z = -Pl \sin \varphi$ и, следовательно, $\delta A = m_z d\varphi = -Pl \sin \varphi d\varphi$.

Для вычисления искомой работы следует взять определенный интеграл по φ в пределах от φ_1 до φ_2 :

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} m_z d\varphi = -Pl \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi = -Pl(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2).$$

Задача 329. Груз A удерживается в равновесии на наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, посредством пружины, ось которой параллельна линии наибольшего ската наклонной плоскости (см. рисунок). Вследствие полученного толчка груз переместился вниз вдоль наклонной плоскости на l . Вычислить сумму работ сил, приложенных к грузу A на этом перемещении, если коэффициент упругости (жесткости) пружины равен c . Силой трения скольжения груза A о наклонную плоскость пренебречь.

Решение. К грузу приложены следующие силы: \mathbf{P} — его вес, \mathbf{F} — упругая сила пружины, \mathbf{R} — сила нормальной реакции наклонной плоскости.



К задаче 329.

Направим параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости ось x , выбрав начало отсчета O в конце недеформированной пружины.

В положении равновесия груза пружина растянута на Δ_{ct} . Записав сумму проекций всех сил, приложенных к грузу, на ось x , находим $P \sin \alpha - F_{ct} = 0$. Так как величина упругой силы при растяжении пружины на Δ_{ct} равна $F_{ct} = c\Delta_{ct}$, то $P \sin \alpha - c\Delta_{ct} = 0$, т. е.

$$\Delta_{ct} = \frac{P \sin \alpha}{c}. \quad (1)$$

Искомая сумма работ сил имеет вид

$$\sum A_k = A(\mathbf{P}) + A(\mathbf{F}) + A(\mathbf{R}). \quad (2)$$

Работа силы тяжести положительна, так как груз A приближается к земной поверхности: $A(\mathbf{P}) = P\Delta h$; учитывая, что $\Delta h = l \sin \alpha$, находим:

$$A(\mathbf{P}) = Pl \sin \alpha. \quad (3)$$

Работа упругой силы пружины определяется формулой

$$A(\mathbf{F}) = -\frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2).$$

Учитывая, что $x_1 = \Delta_{ct}$, а $x_2 = x_1 + l = \Delta_{ct} + l$, находим:

$$A(\mathbf{F}) = -\frac{cl}{2}(2\Delta_{ct} + l). \quad (4)$$

Работа нормальной силы реакции \mathbf{R} равна нулю, так как эта сила перпендикулярна к перемещению груза, направленному вдоль наклонной плоскости

$$A(\mathbf{R}) = 0. \quad (5)$$

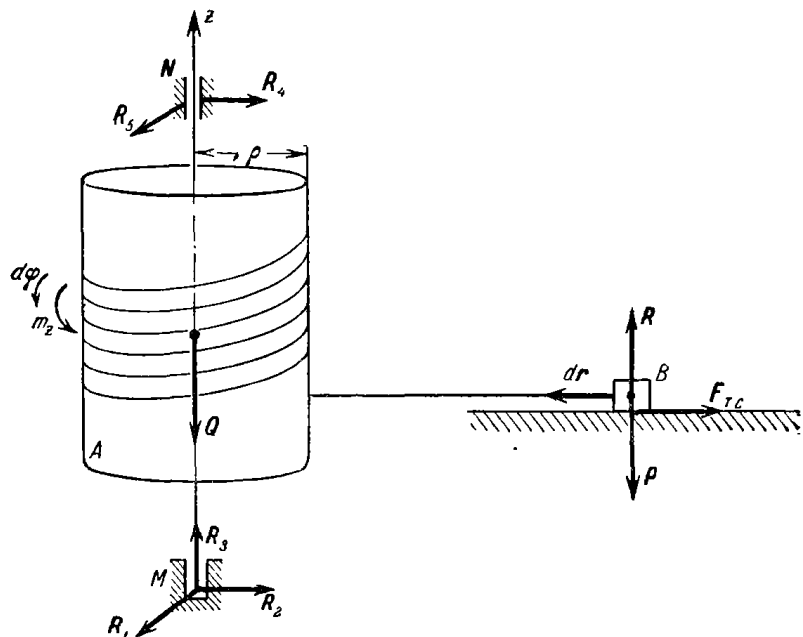
Подставляя выражения работ из (3), (4) и (5) в формулу (2) и учитывая зависимость (1), находим искомую сумму работ сил, приложенных к грузу:

$$\sum A_k = -\frac{cl^2}{2}.$$

Задача 330. Кабестан, изображенный на рисунке, применяется для перемещения тяжелых грузов. К валу кабестана A при пуске в ход был приложен созданный электромотором вращающий момент $m_z = a\varphi + b\varphi^2$, где φ — угол поворота вала кабестана, а a и b — постоянные. При вращении вала кабестана веса Q и радиуса ρ на его боковую цилиндрическую поверхность наматывается веревка, которая приводит в движение по горизонтальной плоскости груз B .

Вычислить сумму работ всех сил, приложенных к рассматриваемой системе, за два оборота вала, если P — вес груза B , а f — коэффициент трения скольжения груза о горизонтальную плоскость. Массой веревки пренебречь. Ось z направлена вдоль оси вала.

Решение. Изобразим все силы и моменты, приложенные к системе: Q — вес вала кабестана, R_1, R_2, R_3, R_4 и R_5 — составляющие



К задаче 330.

сил реакций опор M и N , P — вес груза, $F_{тр}$ — сила трения скольжения груза о горизонтальную плоскость, R — сила нормальной реакции горизонтальной плоскости, m_z — вращающий момент относительно оси z .

Вал кабестана вращается вокруг неподвижной оси z , следовательно, элементарная работа сил вычисляется по формуле

$$\delta A = m_z d\varphi = (a\varphi + b\varphi^2) d\varphi. \quad (1)$$

(Моменты сил Q, R_1, R_2, R_3, R_4 и R_5 относительно оси вращения z равны нулю.)

Груз B совершает поступательное движение, следовательно, элементарная работа сил имеет вид $\delta A = V \cdot dr$. Силы P и R перпендикулярны к перемещению груза dr , и элементарная работа этих сил равна нулю. Таким образом,

$$\delta A = -F_{тр} dr = -fPdr. \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) мы не учитывали работу сил реакций перекли, так как при недеформируемой и постоянно натянутой веревке сумма работ этих сил равна нулю.

Складывая (1) и (2), находим:

$$\delta A = (a\varphi + b\varphi^2) d\varphi - fPdr.$$

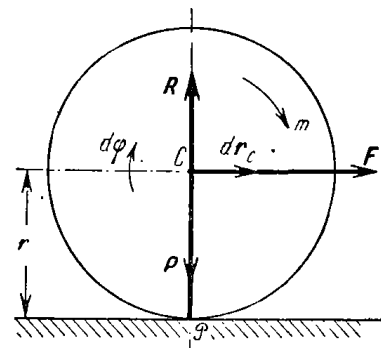
Учитывая связь между элементарными перемещениями dr и $d\varphi$, т. е. $dr = \rho d\varphi$, получим выражение элементарной работы всех сил, приложенных к рассматриваемой системе:

$$\delta A = (a\varphi + b\varphi^2 - fP\rho) d\varphi. \quad (3)$$

Для вычисления искомой суммы работ всех сил при двух оборотах вала кабестана следует воспользоваться формулой (3), взяв определенный интеграл в пределах от 0 до 4π :

$$A = \int_0^{4\pi} (a\varphi + b\varphi^2 - fP\rho) d\varphi = \frac{4\pi}{3} (6\pi a + 16\pi^2 b - 3fP\rho).$$

Задача 331. Колесо радиуса r катится без скольжения по прямолинейному горизонтальному рельсу под действием приложенной в центре тяжести C колеса постоянной силы F , параллельной рельсу, и постоянного вращающего момента m . Вычислить сумму работ всех внешних сил, если ось колеса C переместилась на s . Трением пренебречь.



К задаче 331.

Решение. Обозначим вес колеса P . К колесу приложены внешние силы: P — вес колеса, R — нормальная сила реакции рельса, F — движущая сила, пара сил с моментом m .

Так как колесо совершает плоское движение, то, приняв точку C за полюс, вычислим элементарную работу всех внешних сил по формулам

$$\delta A = V^e \cdot dr_C + m_{zC}^e d\varphi. \quad (1)$$

Учитывая, что $R = -P$, получим, что главный вектор $V^e = F$ и, следовательно, $V^e \cdot dr_C = F dr_C$. Так как моменты сил P, F и R относительно оси z , проходящей через точку C перпендикулярно к плоскости материальной симметрии колеса, равны нулю, то главный момент внешних сил относительно оси z равен $m_{zC}^e = m$. Теперь формула (1) принимает вид

$$\delta A = F dr_C + m d\varphi. \quad (2)$$

Согласно условию задачи, колесо катится без скольжения. Поэтому его мгновенный центр скоростей находится в точке касания \mathcal{P} колеса с рельсом и dr_C связано с $d\varphi$ зависимостью

$$dr_C = r d\varphi.$$

Соответственно формула (2) запишется так:

$$\delta A = \left(F + \frac{m}{r} \right) dr_C. \quad (3)$$

Для вычисления искомой суммы работ всех внешних сил остается взять от δA определенный интеграл в пределе от 0 до s :

$$A = \int_0^s \left(F + \frac{m}{r} \right) dr_C = \left(F + \frac{m}{r} \right) s. \quad (4)$$

В обзоре теории было отмечено, что за полюс может быть принята произвольная точка твердого тела, совершающего плоское движение. Для иллюстрации этого положения возьмем за полюс вместо точки C мгновенный центр скоростей \mathcal{P} . Тогда элементарную работу всех внешних сил следует вычислять по формуле

$$\delta A = \mathbf{V}^e \cdot d\mathbf{r}_{z\mathcal{P}} + m_{z\mathcal{P}}^e d\varphi. \quad (5)$$

Так как скорость точки \mathcal{P} колеса равна нулю: $\mathbf{v}_{\mathcal{P}} = 0$, а $\mathbf{v}_{z\mathcal{P}} = \frac{dr_{z\mathcal{P}}}{dt}$, то $d\mathbf{r}_{z\mathcal{P}} = \mathbf{v}_{z\mathcal{P}} dt = 0$, и формула (5) примет вид

$$\delta A = m_{z\mathcal{P}}^e d\varphi. \quad (6)$$

Главный момент внешних сил $m_{z\mathcal{P}}^e$ относительно оси z , проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно неподвижной плоскости, равен:

$$m_{z\mathcal{P}}^e = F \cdot r + m.$$

Поэтому формулу (6) можно записать в виде:

$$\delta A = (F \cdot r + m) d\varphi.$$

Приняв во внимание, что $dr_C = r d\varphi$, находим:

$$\delta A = \left(F + \frac{m}{r} \right) dr_C.$$

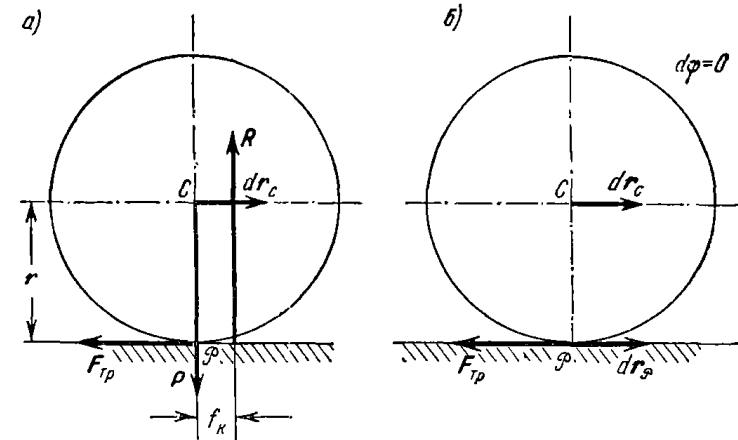
Это же выражение элементарной работы было получено выше (см. формулу (3)), когда за полюс была взята точка C .

Сопоставление обоих вариантов вычисления δA показывает, что целесообразнее принимать за полюс точку \mathcal{P} колеса, так как при

этом отпадает необходимость в определении главного вектора \mathbf{V}^e внешних сил системы.

Задача 332. Ведомое колесо веса P и радиуса r катится без скольжения по прямолинейному горизонтальному рельсу направо. Вычислить сумму работ силы трения и пары трения качения, если центр тяжести C колеса переместился на s ; f — коэффициент трения, f_k — коэффициент трения качения.

Решение. Сила трения приложена в точке касания колеса с рельсом и направлена вдоль рельса в сторону, противоположную движению. Нормальная сила реакции рельса R при наличии трения



к задаче 332.

качения смещается в сторону движения и отстоит от силы нормального давления (в данной задаче сила нормального давления равна весу колеса P) на расстоянии, равном коэффициенту трения качения f_k , образуя с весом колеса пару трения качения (см. рисунок а).

Элементарная работа силы трения $F_{тр} = fN = fP$ равна нулю. Действительно, при качении колеса без скольжения его мгновенный центр скоростей \mathcal{P} находится в точке касания колеса с рельсом. Сила трения $F_{тр}$ всегда приложена к колесу в точке, совпадающей с мгновенным центром скоростей, и перемещается вместе с ним. Поэтому мощность силы трения, вычисляемая по формуле $N = \mathbf{F}_{тр} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{P}}$, равна нулю, так как $\mathbf{v}_{\mathcal{P}} = 0$. Приняв во внимание, что $N = \frac{dA}{dt}$, получим

$$\delta A (F_{тр}) = 0. \quad (1)$$

Элементарная работа пары трения качения отрицательна, так как момент пары трения качения, направленный против часовой стрелки,

противоположен направлению угла поворота колеса (при качении колеса направо оно поворачивается по часовой стрелке):

$$\delta A_{\tau,к} = -m_{\tau,к} d\varphi.$$

Так как силы, входящие в пару трения качения, равны по модулю P , а плечо пары равно коэффициенту трения качения f_k , то $m_{\tau,к} = Pf_k$ и, следовательно, $\delta A_{\tau,к} = -Pf_k d\varphi$.

Так как $dr_C = r d\varphi$ (см. решение предыдущей задачи), то находим:

$$\delta A_{\tau,к} = -P \frac{f_k}{r} dr_C. \quad (2)$$

Итак, учитывая формулы (1) и (2), получим сумму элементарных работ силы трения и пары трения качения:

$$\delta A = \delta A(F_{тр}) + \delta A_{\tau,к} = -\frac{f_k}{r} P dr_C. \quad (3)$$

Для определения суммы работ на конечном перемещении s центра тяжести C колеса вычислим от δA определенный интеграл в пределах от 0 до s . Окончательно:

$$A = -\frac{f_k}{r} Ps.$$

Если бы колесо скользило по рельсу без качения, то оно совершало бы поступательное движение. При этом $d\varphi = 0$, а $dr_{\mathcal{G}} = dr_C$ (см. рис. б).

Следовательно,

$$\delta A_{\tau,с} = -F_{\tau,с} dr_{\mathcal{G}} = -fP dr_C,$$

$$\delta A_{\tau,к} = -m_{\tau,к} d\varphi = 0.$$

В рассматриваемом случае сумма элементарных работ равна

$$\delta A = \delta A_{\tau,с} + \delta A_{\tau,к} = -fP dr_C.$$

После интегрирования в пределах от 0 до s находим:

$$A = -fPs.$$

Задача 333. Определить мощность заряженной частицы, летящей со скоростью $v = 60\,000$ км/сек, под действием силы электромагнитного поля $F = 5 \cdot 10^{-10}$ з.

Решение. Мощность частицы вычисляем по формуле $N = Fv$. Выражая скорость частицы в м/сек и силу в кг, имеем:

$$v = 6 \cdot 10^7 \text{ м/сек}, \quad F = 5 \cdot 10^{-13} \text{ кг},$$

т. е.

$$N = 6 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^{-13} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ кгм}.$$

2°. Кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек. *Кинетическая энергия материальной точки* равна половине произведения массы точки на квадрат ее скорости: $T = \frac{1}{2} mv^2$.

Единица кинетической энергии кг·м. Кинетическая энергия является одной из мер движения материальной точки.

Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетических энергий всех материальных точек системы:

$$T = \sum_{k=1}^n T_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2.$$

Кинетическая энергия положительна, за исключением случая, когда скорости всех точек одновременно равны нулю.

По теореме Кеннига кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии всей ее массы, движущейся со скоростью центра инерции, и кинетической энергии системы в ее относительном движении по отношению к поступательно движущимся осям координат с началом в центре инерции:

$$T = \frac{1}{2} Mv_C^2 + T_r, \quad \text{где} \quad T_r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_{kC}^2$$

(v_{kC} — относительная скорость k -й материальной точки по отношению к центру инерции).

Кинетическая энергия твердого тела вычисляется по формулам:

а) при поступательном движении: $T = \frac{1}{2} Mv^2$, где M — масса твердого тела, а v — скорость любой его точки;

б) при вращении вокруг неподвижной оси: $T = \frac{1}{2} I_z \omega^2$, где I_z — момент инерции твердого тела относительно оси вращения z , а ω — угловая скорость вращения;

в) при плоском движении: $T = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC} \omega^2$, где M — масса твердого тела, v_C — скорость его центра инерции, I_{zC} — момент инерции твердого тела относительно оси z , проходящей через центр инерции перпендикулярно к неподвижной плоскости, ω — величина мгновенной угловой скорости вращения.

В случае плоского движения кинетическую энергию можно также вычислять по формуле $T = \frac{1}{2} I_{\mathcal{G}} \omega^2$, где $I_{\mathcal{G}}$ — момент инерции твердого тела относительно оси \mathcal{G} , проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно к неподвижной плоскости.

Поэтому при движении твердого тела момент инерции $I_{\mathcal{P}}$, вообще говоря, является переменным.

г) При вращении вокруг неподвижной точки: $T = \frac{1}{2} I \omega^2$, где I — момент инерции твердого тела относительно мгновенной оси, ω — величина мгновенной угловой скорости (так как мгновенная ось меняет свое положение при вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, то I является величиной переменной).

Если выбрать начало подвижных координатных осей x, y, z , связанных с твердым телом, в неподвижной точке O , то

$$T = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 - 2I_{yz} \omega_y \omega_z - 2I_{zx} \omega_z \omega_x - 2I_{xy} \omega_x \omega_y),$$

где ω_x, ω_y и ω_z — проекции мгновенной угловой скорости на соответствующие оси координат.

Если оси x, y, z являются главными осями инерции твердого тела в неподвижной точке O , то $I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$ и, следовательно,

$$T = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2).$$

д) В общем случае движения твердого тела: $T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$, где M — масса твердого тела, v_C — модуль скорости его центра инерции, I_C — его момент инерции относительно мгновенной оси, проходящей через центр инерции, ω — величина мгновенной угловой скорости.

Если выбрать начало подвижных координатных осей x, y, z в центре инерции C , то

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 - 2I_{yz} \omega_y \omega_z - 2I_{zx} \omega_z \omega_x - 2I_{xy} \omega_x \omega_y),$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции мгновенной угловой скорости на соответствующие координатные оси.

Если оси x, y, z являются главными центральными осями инерции, то $I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$ и, следовательно,

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2).$$

Вычисление кинетической энергии системы материальных точек является одним из этапов решения задач при использовании теоремы об изменении кинетической энергии системы материальных точек, либо при составлении уравнений Лагранжа второго рода (см. ниже, главу X, § 6), либо при вычислении потери кинетической энергии при ударе (см. ниже, главу XII, § 1).

При вычислении кинетической энергии системы материальных точек следует суммировать кинетические энергии всех масс,

входящих в систему, вычисляя кинетическую энергию каждой из масс по формуле, соответствующей движению данной массы (поступательное движение, вращение вокруг неподвижной оси, плоское движение и т. д.). Следует помнить, что кинетическая энергия является величиной положительной независимо от направлений движений масс, входящих в систему.

Задача 334. Вычислить кинетическую энергию колеса, катящегося без скольжения по прямолинейному рельсу, если P — вес колеса и v_C — скорость его центра инерции. Колесо считать сплошным однородным диском.

Решение. Так как колесо совершает плоское движение, то его кинетическую энергию можно вычислить двумя способами по формулам:

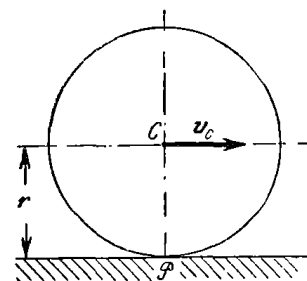
$$\text{а) } T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC} \omega^2, \quad \text{б) } T = \frac{1}{2} I_{\mathcal{P}} \omega^2,$$

где $I_{\mathcal{P}}$ — момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей \mathcal{P} перпендикулярно к плоскости материальной симметрии тела.

При беглой оценке степени сложности подсчета можно отдать предпочтение варианту б). Однако, как показывают последующие вычисления, объем вычислений по обоим вариантам примерно одинаков.

Вариант а):

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC} \omega^2.$$



К задаче 334.

Момент инерции диска относительно оси z , проходящий через центр тяжести C перпендикулярно к плоскости материальной симметрии колеса, равен: $I_{zC} = \frac{P r^2}{2g}$, где радиус колеса обозначен r . Следовательно,

$$T = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v_C^2 + \frac{1}{2} \frac{P r^2}{2g} \omega^2.$$

При качении колеса без скольжения мгновенный центр скоростей расположен в точке касания \mathcal{P} колеса и рельса, поэтому $v_C = r \omega$ и формула кинетической энергии принимает вид

$$T = \frac{3}{4} \frac{P}{g} v_C^2.$$

Вариант б):

$$T = \frac{1}{2} I_{\mathcal{P}} \omega^2.$$

$I_{\mathcal{P}}$ — момент инерции колеса относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей \mathcal{P} перпендикулярно к плоскости материальной симметрии колеса. Так как оси z_C и \mathcal{P} параллельны, то, применив теорему Штейнера, получим:

$$I_{\mathcal{P}} = I_{z_C} + Mr^2 = \frac{Pr^2}{2g} + \frac{P}{g} r^2 = \frac{3}{2} \frac{P}{g} r^2.$$

Теперь находим:

$$T = \frac{1}{2} I_{\mathcal{P}} \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{P}{g} r^2 \omega^2.$$

Учитывая, что $r\omega = v_C$, окончательно имеем:

$$T = \frac{3}{4} \frac{P}{g} v_C^2.$$

Задача 335. Груз A веса P , опускаясь по наклонной плоскости вниз со скоростью v приводит во вращение барабан B веса Q посредством намотанной на него веревки. Барабан считать однородным круглым цилиндром. Массой веревки пренебречь. Вычислить кинетическую энергию системы, выразив ее через скорость груза A .

Решение. Система состоит из двух масс: груза A и барабана B . Следовательно, кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий груза $T^{(1)}$ и барабана $T^{(2)}$:

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}. \quad (1)$$

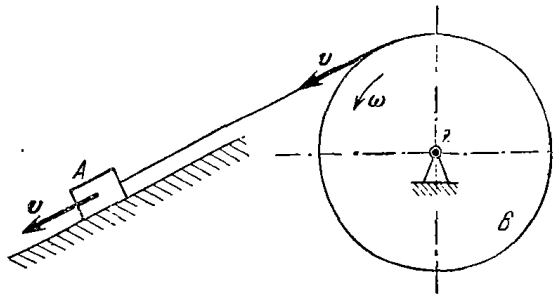
Кинетическая энергия груза, движущегося поступательно, вычисляется по формуле

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2. \quad (2)$$

Кинетическая энергия барабана, вращающегося вокруг неподвижной оси z , перпендикулярной к плоскости рисунка, находится по формуле

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} I_z \omega^2, \quad (3)$$

где I_z — момент инерции барабана относительно оси вращения z , а ω — угловая скорость вращения барабана. Барабан считаем



К задаче 335.

сплошным однородным круглым цилиндром, поэтому

$$I_z = \frac{Q}{g} \frac{r^2}{2}, \quad (4)$$

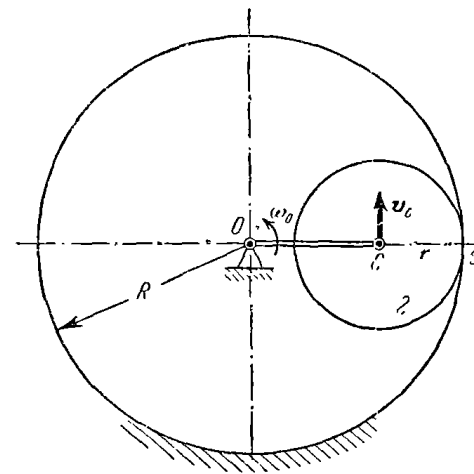
где радиус барабана обозначен r . Подставив значение I_z из формулы (4) в формулу (3), имеем: $T^{(2)} = \frac{1}{4} \frac{Q}{g} r^2 \omega^2$. Учитывая, что скорость точки на ободе барабана равна скорости груза, получим: $v = r\omega$ и, следовательно,

$$T^{(2)} = \frac{1}{4} \frac{Q}{g} v^2. \quad (5)$$

После подстановки значений $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ из формул (2) и (5) в (1) находим искомую кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{2P + Q}{4g} v^2.$$

Задача 336. Вычислить кинетическую энергию механизма, изображенного на рисунке. Колесо 2 веса P и радиуса r находится во внутреннем зацеплении с неподвижным колесом 1 радиуса $R = 3r$. Колесо 2 приводится в движение посредством кривошипа OC веса Q , вращающегося вокруг неподвижной оси O , перпендикулярной к плоскости рисунка, с постоянной угловой скоростью ω_0 . Колесо 2 считать однородным круглым диском, а кривошип OC — тонким однородным стержнем. Кинетическую энергию выразить через угловую скорость ω_0 кривошипа OC .



К задаче 336.

Решение. В рассматриваемую систему входят три массы: колесо 1, колесо 2 и кривошип OC . Поэтому кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий этих масс

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}, \quad (1)$$

где $T^{(1)}$ — кинетическая энергия колеса 1, $T^{(2)}$ — колеса 2, $T^{(3)}$ — кривошипа OC .

Колесо 1 неподвижно, поэтому

$$T^{(1)} = 0. \quad (2)$$

Колесо 2 совершает плоское движение. Его кинетическая энергия будет:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_2^2. \quad (3)$$

Длина кривошипа равна $OC = O\mathcal{P} - C\mathcal{P} = R - r = 2r$. Следовательно,

$$v_C = OC \cdot \omega_0 = 2r\omega_0. \quad (4)$$

Мгновенную угловую скорость колеса 2 определяем, учитывая, что точка \mathcal{P} является мгновенным центром скоростей, т. е. $v_C = r\omega_2$, откуда

$$\omega_2 = \frac{v_C}{r} = 2\omega_0. \quad (5)$$

Так как колесо 2 является однородным круглым диском, то

$$I_C = \frac{Pr^2}{2g}. \quad (6)$$

Воспользовавшись при подсчете $T^{(2)}$ по формуле (3) выражениями (4), (5) и (6), получим кинетическую энергию колеса 2:

$$T^{(2)} = 3 \frac{P}{g} r^2 \omega_0^2. \quad (7)$$

Кривошип OC вращается вокруг неподвижной оси O , перпендикулярной к плоскости рисунка. Поэтому его кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} I_O \omega_0^2.$$

Так как кривошип OC является однородным тонким стержнем, то $I_O = \frac{Q}{3g} (OC)^2 = \frac{4}{3} \frac{Q}{g} r^2$ и, следовательно,

$$T^{(3)} = \frac{2}{3} \frac{Q}{g} r^2 \omega_0^2. \quad (8)$$

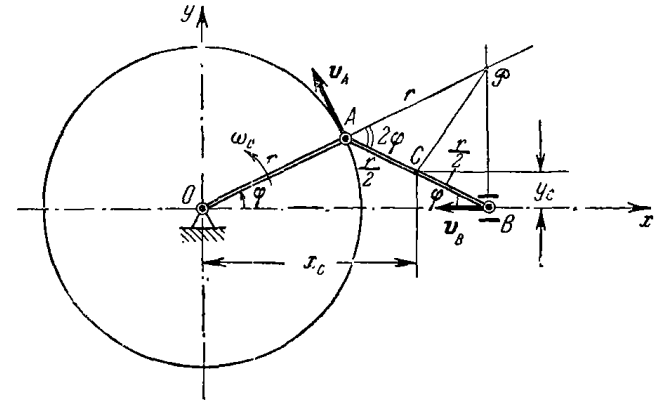
После подстановки выражений (2), (7) и (8) в формулу (1) находим искомую кинетическую энергию механизма

$$T = \frac{9P + 2Q}{3g} r^2 \omega_0^2.$$

Задача 337. Вычислить кинетическую энергию кривошипно-шатунного механизма, у которого вес и длина кривошипа OA соответственно равны весу и длине шатуна AB . Кривошип OA веса P и длины r вращается с угловой скоростью ω_0 . Вес ползуна B равен Q .

Кривошип и шатун считать тонкими прямолинейными однородными стержнями.

Решение. Взяв начало координат на оси кривошипа O , направляем ось x вдоль направляющей ползуна B . Будем отсчитывать угол поворота φ кривошипа OA от оси x в направлении против часовой стрелки.



К задаче 337.

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий: $T^{(1)}$ — кривошипа OA , $T^{(2)}$ — шатуна AB и $T^{(3)}$ — ползуна B :

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}. \quad (1)$$

Кривошип OA вращается вокруг неподвижной оси O , перпендикулярной к плоскости рисунка, следовательно,

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} I_O \omega_0^2,$$

так как $I_O = \frac{P}{g} \frac{r^2}{3}$, то

$$T^{(1)} = \frac{1}{6} \frac{P}{g} r^2 \omega_0^2. \quad (2)$$

Шатун AB совершает плоское движение. Вычисляем его кинетическую энергию по формуле

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} I_{\mathcal{P}} \omega_{\text{мг}}^2, \quad (3)$$

где $I_{\mathcal{P}}$ — момент инерции шатуна относительно оси \mathcal{P} , проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно к плоскости материальной симметрии. Мгновенный центр скоростей \mathcal{P} лежит в точке пересечения перпендикуляров, восставленных к скоростям из точек A и B .

Нетрудно видеть, что $A\mathcal{F} = OA = r$. Скорость точки A как конца кривошипа дается формулой

$$v_A = OA \cdot \omega_0 = r\omega_0. \quad (4)$$

Скорость точки A как точки, лежащей на шатуне AB , совершающем плоское движение, равна

$$v_A = A\mathcal{F} \cdot \omega_{\text{мг}} = r\omega_{\text{мг}}. \quad (5)$$

Сопоставив формулы (4) и (5), находим мгновенную угловую скорость шатуна:

$$\omega_{\text{мг}} = \omega_0. \quad (6)$$

Для вычисления момента инерции $I_{\mathcal{F}}$ применим теорему Штейнера:

$$I_{\mathcal{F}} = I_C + \frac{P}{g} (C\mathcal{F})^2, \quad (7)$$

где I_C — момент инерции шатуна AB относительно оси, проходящей через центр тяжести C шатуна перпендикулярно к плоскости его материальной симметрии:

$$I_C = \frac{P}{g} \frac{r^2}{12}. \quad (8)$$

Расстояние между параллельными осями $C\mathcal{F}$ вычисляем из треугольника $AC\mathcal{F}$; имеем $(C\mathcal{F})^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} - 2r \frac{r}{2} \cos 2\varphi$, т. е.

$$(C\mathcal{F})^2 = \frac{r^2}{4} (5 - 4 \cos 2\varphi). \quad (9)$$

Подставив выражения (8) и (9) в формулу (7), находим:

$$I_{\mathcal{F}} = \frac{1}{3} \frac{P}{g} r^2 (4 - 3 \cos 2\varphi). \quad (10)$$

Подставив выражения (6) и (10) в формулу (3), получаем выражение кинетической энергии шатуна AB :

$$T^{(2)} = \frac{1}{6} \frac{P}{g} r^2 (4 - 3 \cos 2\varphi) \omega_0^2,$$

которое после несложных преобразований можно представить в виде

$$T^{(2)} = \frac{1}{6} \frac{P}{g} r^2 (1 + 6 \sin^2 \varphi) \omega_0^2. \quad (11)$$

Вычисление кинетической энергии шатуна AB , совершающего плоское движение, можно также произвести по формуле

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_{\text{мг}}^2. \quad (12)$$

Мгновенная угловая скорость шатуна $\omega_{\text{мг}}$ определяется, как и в первом варианте подсчета ($\omega_{\text{мг}} = \omega_0$).

Для вычисления скорости центра тяжести C шатуна AB запишем координаты точки C . Нетрудно видеть из рисунка, что $x_C = \frac{3}{2} r \cos \varphi$, $y_C = \frac{r}{2} \sin \varphi$. Взяв производные от x_C и y_C по времени, получим проекции скорости точки C :

$$v_{Cx} = \dot{x}_C = -\frac{3}{2} r \dot{\varphi} \sin \varphi = -\frac{3}{2} r \omega_0 \sin \varphi,$$

$$v_{Cy} = \dot{y}_C = \frac{r}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi = \frac{r}{2} \omega_0 \cos \varphi.$$

Следовательно,

$$v_C^2 = v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2 = \frac{9}{4} r^2 \omega_0^2 \sin^2 \varphi + \frac{r^2}{4} \omega_0^2 \cos^2 \varphi = \frac{r^2}{4} \omega_0^2 + 2r^2 \omega_0^2 \sin^2 \varphi. \quad (13)$$

Подставив выражения (6), (8) и (13) в формулу (12), имеем:

$$T^{(2)} = \frac{1}{6} \frac{P}{g} r^2 (1 + 6 \sin^2 \varphi) \omega_0^2.$$

Объем вычислений, необходимых для подсчетов кинетической энергии шатуна в каждом из вариантов, примерно одинаков.

Переходим к вычислению кинетической энергии ползуна B . Так как ползун движется поступательно, то

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v_B^2. \quad (14)$$

Зная положение мгновенного центра скоростей \mathcal{F} шатуна AB , легко находим скорость ползуна B :

$$v_B = v_A \frac{B\mathcal{F}}{A\mathcal{F}};$$

так как $v_A = r\omega_0$, $A\mathcal{F} = r$, а $B\mathcal{F} = 2r |\sin \varphi|$, то

$$v_B = 2r\omega_0 |\sin \varphi| \quad (15)$$

(v_B можно было определить и иначе: записать абсциссу точки B : $x_B = 2r \cos \varphi$ и, взяв производную от x_B по времени, найти проекцию скорости точки B на ось x ; $v_{Bx} = \dot{x}_B = -2r \dot{\varphi} \sin \varphi = -2r\omega_0 \sin \varphi$).

Внося значение v_B из формулы (15) в формулу (14), находим кинетическую энергию ползуна B :

$$T^{(3)} = 2 \frac{Q}{g} r^2 \omega_0^2 \sin^2 \varphi. \quad (16)$$

После подстановки выражений (2), (11) и (16) в формулу (1) получим искомую кинетическую энергию кривошипно-шатунного механизма:

$$T = \frac{r^2 \omega_0^2}{3g} [P + 3(P + 2Q) \sin^2 \varphi].$$

Задача 338. Вывести выражение кинетической энергии твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, пользуясь выражениями проекций скоростей точек твердого тела на оси декартовых координат, связанные с твердым телом (формулы Эйлера).

Решение. Если начало координат O расположено в неподвижной точке, а оси декартовых координат x , y и z связаны с твердым телом, то, как известно из кинематики, формулы Эйлера имеют вид

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x, \quad (1)$$

где x , y , z — координаты точки твердого тела, а ω_x , ω_y и ω_z — проекции угловой скорости твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, на соответствующие оси декартовых координат.

Кинетическая энергия твердого тела вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2} \int_{(M)} v^2 dm, \quad (2)$$

где интегрирование распространено по всей массе твердого тела. После замены v^2 на $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ и использования формулы (1) выражение (2) принимает вид

$$T = \frac{1}{2} \int_{(M)} [(\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2] dm. \quad (3)$$

Собрав в формуле (3) слагаемые, содержащие квадраты и произведения проекций угловых скоростей, имеем:

$$T = \frac{1}{2} \left[\omega_x^2 \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm + \omega_y^2 \int_{(M)} (x^2 + z^2) dm + \omega_z^2 \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm - 2\omega_y \omega_z \int_{(M)} yz dm - 2\omega_z \omega_x \int_{(M)} zx dm - 2\omega_x \omega_y \int_{(M)} xy dm \right]. \quad (4)$$

Так как сумма квадратов двух координат точки определяет квадрат расстояния от этой точки до третьей оси, то

$$\int_{(M)} (y^2 + z^2) dm = \int_{(M)} h_x^2 dm = I_x, \quad \int_{(M)} (x^2 + z^2) dm = \int_{(M)} h_y^2 dm = I_y, \quad \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm = \int_{(M)} h_z^2 dm = I_z. \quad (5)$$

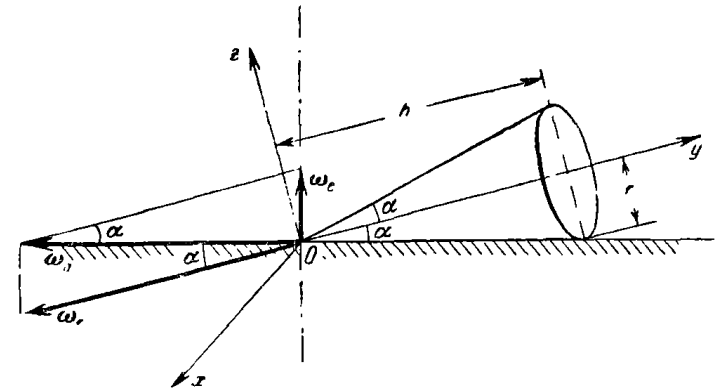
Кроме того, по определению

$$\int_{(M)} yz dm = I_{yz}, \quad \int_{(M)} zx dm = I_{zx}, \quad \int_{(M)} xy dm = I_{xy}. \quad (6)$$

Подставив значения I_x , I_y , I_z , I_{xy} , I_{xz} , I_{yz} из (5) и (6) в формулу (4), получим искомое выражение кинетической энергии твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки

$$T = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 - I_{yz} \omega_y \omega_z - I_{zx} \omega_z \omega_x - I_{xy} \omega_x \omega_y.$$

Задача 339. Однородный круговой конус веса P высоты h с радиусом основания $r = \frac{h}{2}$ катится без скольжения по неподвижной



К задаче 339.

горизонтальной плоскости, имея неподвижную точку в своей вершине O . Вычислить кинетическую энергию конуса, если он делает вокруг вертикальной оси один оборот в секунду.

Решение. Выбираем начало осей координат x , y , z в неподвижной точке O . Ось y направим по оси симметрии конуса. Ось z расположим в вертикальной плоскости. Горизонтальная ось x тогда перпендикулярна к плоскости рисунка.

Так как конус вращается вокруг неподвижной точки O , а оси x , y , z являются главными осями инерции конуса в точке O , то $I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$, т. е. кинетическая энергия конуса вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2), \quad (1)$$

где I_x , I_y , I_z — моменты инерции конуса относительно соответствующих координатных осей, а ω_x , ω_y , ω_z — проекции мгновенной (абсолютной) угловой скорости конуса на соответствующие оси координат.

Моменты инерции конуса I_x, I_y, I_z были найдены в задаче 291:

$$I_y = \frac{3}{10} \frac{P}{g} r^2, \quad I_x = I_z = \frac{3}{5} \frac{P}{g} \left(h^2 + \frac{r^2}{4} \right). \quad (2)$$

Так как конус, вращаясь вокруг неподвижной точки O , участвует в двух вращениях вокруг пересекающихся осей (переносное вращение совершается вокруг вертикальной оси, а относительное — вокруг оси симметрии конуса y), то, применив теорему о сложении вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей: $\omega_a = \omega_e + \omega_r$, построим параллелограмм угловых скоростей. Вектор мгновенной (абсолютной) угловой скорости конуса лежит на мгновенной оси, направленной горизонтально вдоль линии касания боковой поверхности конуса с неподвижной плоскостью.

Если угол при вершине конуса обозначить 2α , то нетрудно видеть, что

$$\omega_a = \omega_e \operatorname{ctg} \alpha. \quad (3)$$

Вычислим проекции ω_a на оси x, y, z :

$$\omega_y = -\omega_a \cos \alpha, \quad \omega_z = \omega_a \sin \alpha, \quad \text{а} \quad \omega_x = 0 \quad (4)$$

(параллелограмм угловых скоростей лежит в плоскости yz).

Используя выражения (2), (3) и (4), запишем формулу (1) в виде

$$T = \frac{3}{20} \frac{P}{g} \omega_e^2 \left(3h^2 + \frac{r^2}{2} \right) \cos^2 \alpha.$$

Так как $\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$, а, согласно условию задачи, $r = \frac{h}{2}$ и $\omega_e = 2\pi \operatorname{сек}^{-1}$, то окончательно получим:

$$T = \frac{3}{2} \pi^2 \frac{P}{g} h^2.$$

Задача 340. Диск D веса P и радиуса r , свободно сидящий на оси BC , приводится в движение посредством ломаного рычага ABC . Диск катится без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости. Кривошип ABC вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω_0 . Вычислить кинетическую энергию диска.

Решение. В общем случае движения твердого тела кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 - 2I_{yz} \omega_y \omega_z - 2I_{zx} \omega_z \omega_x - 2I_{xy} \omega_x \omega_y), \quad (1)$$

где M — масса твердого тела, v_c — скорость его центра тяжести C ; I_x, I_y, I_z — осевые моменты инерции, I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} — центробежные моменты инерции твердого тела относительно осей, связанных с диском, начало которых совмещено с центром тяжести C твердого тела, $\omega_x,$

ω_y, ω_z — проекции мгновенной (абсолютной) угловой скорости твердого тела на соответствующие оси декартовых координат.

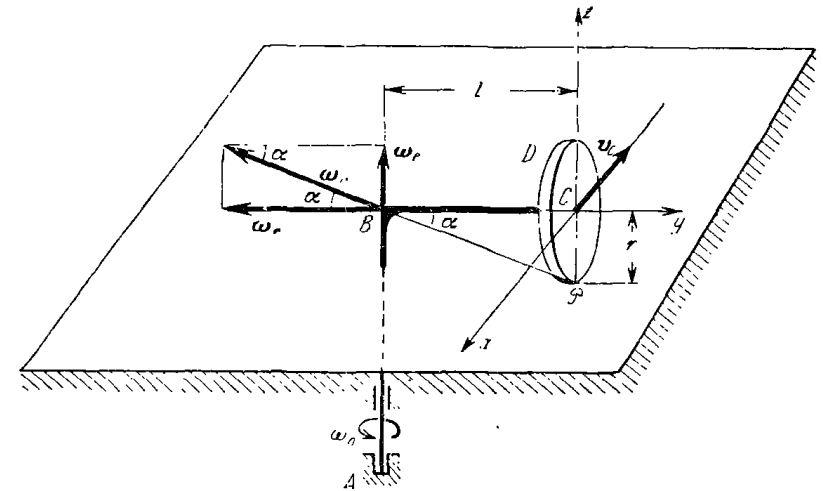
Направляем ось y вдоль BC , ось z — перпендикулярно к неподвижной плоскости. Так как оси x, y, z являются главными центральными осями инерции диска D , то

$$I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0. \quad (2)$$

Кроме того,

$$I_y = \frac{Mr^2}{2}, \quad I_x = I_z = \frac{Mr^2}{4}. \quad (3)$$

Диск D участвует в двух вращениях вокруг пересекающихся в точке B осей (переносное вращение совершается вокруг оси AB с угловой скоростью ω_0 , а относительное вращение — вокруг оси BC).



К задаче 340.

Мгновенная ось (ось абсолютного вращения) проходит через точку B пересечения осей переносного и относительного вращений и через точку \mathcal{P} касания диска с неподвижной плоскостью. Применив теорему о сложении вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей: $\omega_a = \omega_e + \omega_r$, построим параллелограмм угловых скоростей, являющийся в рассматриваемой задаче прямоугольником. Обозначив угол $CB\mathcal{P}$ через α , нетрудно найти, что

$$\omega_a = \frac{\omega_e}{\sin \alpha} = \frac{\omega_0}{\sin \alpha}.$$

Так как из треугольника $BC\mathcal{P}$

$$\sin \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + l^2}},$$

то

$$\omega_a = \frac{\omega_0 \sqrt{r^2 + l^2}}{r}.$$

Определяя проекции ω_a на оси x, y, z , т. е. $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, имеем:

$$\omega_y = -\omega_a \cos \alpha = -\frac{\omega_0 \sqrt{r^2 + l^2}}{r} \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}} = -\omega_0 \frac{l}{r},$$

$$\omega_z = \omega_e = \omega_0, \quad \omega_x = 0 \quad (4)$$

(прямоугольник угловых скоростей лежит в плоскости y_2).

Скорость точки C определяется по формуле

$$v_C = EC\omega_0 = l\omega_0. \quad (5)$$

Используя выражения (2), (3), (4), (5) и формулу (1), получим искомое выражение кинетической энергии диска:

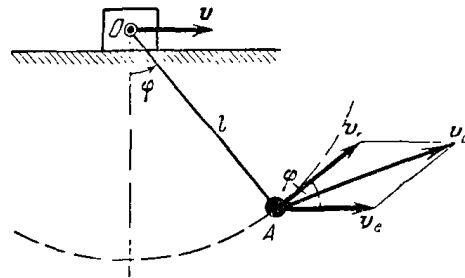
$$T = \frac{1}{8} \frac{P}{g} (6l^2 + r^2) \omega_0^2.$$

Задача 341. По горизонтальной плоскости прямолинейно со скоростью v движется куб массы M . С кубом соединена ось привеса O математического маятника массы m при длине нити l . Вычислить кинетическую энергию материальной системы, предполагая известным закон движения маятника: $\varphi = \varphi(t)$. (Вектор v лежит в плоскости качаний маятника.)

Решение. Рассматриваемая система состоит из куба и материальной точки A ; следовательно, искомая кинетическая энергия T равна

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}, \quad (1)$$

К задаче 341.



где $T^{(1)}$ — кинетическая энергия куба, а $T^{(2)}$ — кинетическая энергия материальной точки A .

Куб движется поступательно, поэтому

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} Mv^2. \quad (2)$$

Кинетическая энергия точечной массы A

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} mv_A^2,$$

где v_A — абсолютная скорость точки A . Точка A совершает сложное движение: переносное вместе с кубом и относительное по отношению к кубу, т. е. $v_e = v$ и $v_r = l\dot{\varphi}$ (здесь φ — угол поворота маятника).

Применив теорему о сложении скоростей $v_a = v_e + v_r$, построим параллелограмм скоростей (см. рисунок). Из параллелограмма скоростей, используя теорему косинусов, находим:

$$v_A^2 = v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos \varphi.$$

Подставив значения v_e и v_r , имеем:

$$v_A^2 = v^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}v \cos \varphi,$$

следовательно,

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} mv_A^2 = \frac{1}{2} m(v^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}v \cos \varphi). \quad (3)$$

Внося значения $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ из формул (2) и (3) в (1), получим искомую кинетическую энергию системы:

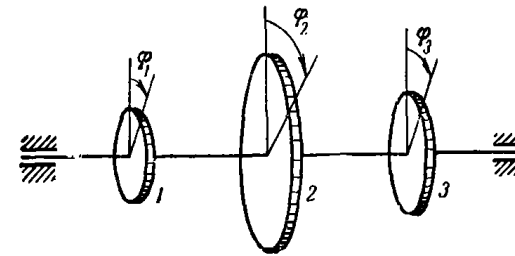
$$T = \frac{1}{2} (M + m)v^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + ml\dot{\varphi}v \cos \varphi.$$

Следует обратить внимание на то, что кинетическая энергия данной системы зависит не только от скоростей точек, но и от положения точек системы (в третьем слагаемом имеется множитель $\cos \varphi$).

Задача 342. На упругий горизонтальный вал насажены три диска 1, 2 и 3, моменты инерции которых относительно оси вала соответственно равны I_1, I_2 и I_3 .

Вследствие упругости вала и в результате его вращения диски поворачиваются на разные углы.

Зная зависимость углов поворота дисков φ_1, φ_2 и φ_3 от времени, вычислить кинетическую энергию системы. Массой вала пренебречь.



К задаче 342.

Решение. Кинетическая энергия T системы равна сумме кинетических энергий трех дисков, т. е.

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}.$$

Так как диски вращаются вокруг неподвижной оси, то

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2, \quad T^{(2)} = \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2, \quad T^{(3)} = \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2.$$

Следовательно, искомая кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2.$$

Задача 343. Груз массы M , подвешенный на однородной пружине массы m , совершает свободные колебания. Вычислить кинетическую энергию системы, состоящей из груза и пружины.

При подсчете кинетической энергии пружины предположить, что смещения точек пружины пропорциональны их расстояниям от точки привеса O .

Решение. Направим вдоль оси пружины ось s , взяв начало отсчета в точке привеса пружины к потолку. Так как рассматриваемая система состоит из груза и пружины, то ее кинетическая энергия равна

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}, \quad (1)$$

где $T^{(1)}$ — кинетическая энергия груза, $T^{(2)}$ — кинетическая энергия пружины.

Обозначив через x смещение груза, запишем его кинетическую энергию

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2. \quad (2)$$

Остается вычислить кинетическую энергию пружины. Введем обозначения: l — длина недеформированной пружины, γ — плотность пружины.

Выделим на расстоянии s элемент пружины длины ds . При свободных колебаниях системы все точки пружины и груз получают смещения. Обозначим через ξ — смещение элемента пружины ds , отстоящего от точки привеса O на расстоянии s . В соответствии с условием задачи, смещения точек пружины пропорциональны их расстояниям от точки привеса O , т. е. $\frac{\xi}{x} = \frac{s}{l}$, откуда $\xi = \frac{s}{l} x$. Взяв производные по времени, найдем: $\dot{\xi} = \frac{s}{l} \dot{x}$.

Кинетическая энергия элемента пружины длины dx равна $dT^{(2)} = \frac{1}{2} dm \dot{\xi}^2$, где масса элемента пружины $dm = \gamma ds$, т. е.

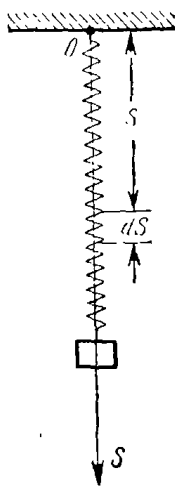
$$dT^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\gamma \dot{x}^2}{l^2} s^2 ds. \quad (3)$$

Кинетическую энергию всей пружины получим, взяв определенный интеграл в пределах от 0 до l :

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\gamma \dot{x}^2}{l^2} \int_0^l s^2 ds = \frac{1}{6} \gamma l \dot{x}^2;$$

так как масса пружины $m = \gamma l$, то

$$T^{(2)} = \frac{1}{6} m \dot{x}^2. \quad (4)$$



К задаче 343.

После подстановки значений $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ из формул (2) и (4) в (1) получим искомое выражение кинетической энергии системы:

$$T = \frac{1}{2} \left(M + \frac{1}{3} m \right) \dot{x}^2.$$

Итак, при приближенном учете массы пружины следует к массе груза добавлять одну треть массы пружины (приближение Рэля).

3². Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки. Изменение кинетической энергии материальной точки при ее перемещении равно сумме работ, совершенных силами, приложенными к точке, на этом перемещении:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(F_k),$$

или

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \sum_{k=1}^n A(F_k).$$

С помощью теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки следует решать задачи в тех случаях, когда в число данных и искомых величин входят: масса m (или вес P), скорости точки v_1 и v_2 — соответственно в начальный и конечный моменты времени, силы, приложенные к точке, и перемещение точки.

Легко решаются задачи при постоянных силах и силах, зависящих от положения точки.

Решение задач с помощью теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки рекомендуется проводить в следующей последовательности:

- 1) изобразить на рисунке силы, приложенные к материальной точке, т. е. задаваемые силы и силы реакций связей;
- 2) вычислить сумму работ всех сил, приложенных к материальной точке, на ее перемещении;
- 3) вычислить кинетическую энергию материальной точки в ее начальном и конечном положениях;
- 4) используя результаты вычислений двух предыдущих пунктов, применить теорему об изменении кинетической энергии материальной точки и определить искомую величину.

Задача 344. Материальная точка, начав двигаться из состояния покоя по криволинейной траектории, через некоторое время замедлила свое движение и остановилась. Вычислить сумму работ сил, приложенных к точке на этом перемещении.

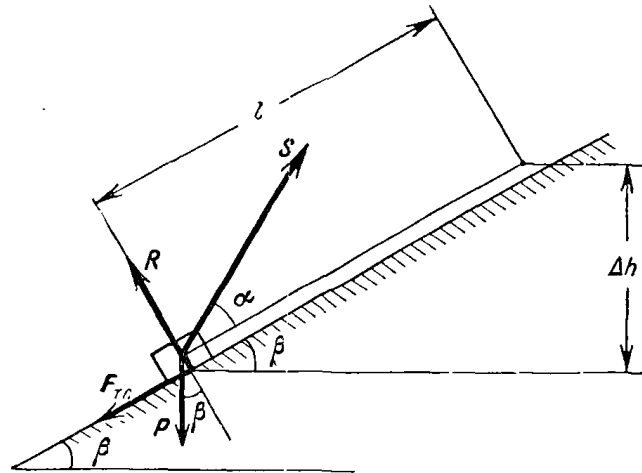
Решение. Применяем теорему об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \sum_{k=1}^n A(F_k). \quad (1)$$

Так как в начале и конце движения материальной точки скорость ее равна нулю, т. е. $v_1 = v_2 = 0$, то из уравнения (1) получается, что сумма работ всех сил, приложенных к материальной точке, на соответствующем перемещении равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n A(F_k) = 0.$$

Задача 345. Груз веса $P = 20$ кг поднимается по наклонной плоскости посредством веревки, расположенной под углом $\alpha = 30^\circ$



К задаче 345.

к плоскости. Наклонная плоскость образует угол $\beta = 30^\circ$ с горизонтом. Натяжение веревки $S = 15$ кг. В начальном положении груз находился в покое. Найти величину перемещения l груза вдоль наклонной плоскости в момент, когда груз имеет скорость $v = 2$ м/сек. Коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость f равен 0,2.

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \sum_{k=1}^n A(F_k). \quad (1)$$

К грузу приложены: P — вес груза, S — сила реакции веревки, R — нормальная сила реакции наклонной плоскости, $F_{T,c}$ — сила трения скольжения груза о наклонную плоскость, причем $F_{T,c} = fN$, где нормальное давление равно $N = P \cos \beta - S \sin \alpha$; таким образом, $F_{T,c} = f(P \cos \beta - S \sin \alpha)$.

Вычислим сумму работ этих сил на перемещении груза, равном l :

$$\sum A(F_k) = A(P) + A(S) + A(R) + A(F_{T,c}). \quad (2)$$

Работа силы тяжести отрицательна, так как груз поднимается вверх:

$$A(P) = -P \Delta h = -Pl \sin \beta. \quad (3)$$

Работа силы реакции веревки S равна

$$A(S) = Sl \cos \alpha. \quad (4)$$

Работа нормальной силы реакции R наклонной плоскости равна нулю, так как сила R перпендикулярна к перемещению l :

$$A(R) = 0. \quad (5)$$

Работа силы трения скольжения $F_{T,c}$ отрицательна, так как угол между направлениями силы $F_{T,c}$ и перемещения l равен 180° :

$$A(F_{T,c}) = -F_{T,c} l = -f(P \cos \beta - S \sin \alpha) l. \quad (6)$$

После подстановки значений $A(P)$, $A(S)$, $A(R)$, $A(F_{T,c})$ из формул (3), (4), (5) и (6) в (2) находим сумму работ всех сил, приложенных к грузу, на перемещении l :

$$\sum A(F_k) = [S(\cos \alpha + f \cos \alpha) - P(\sin \beta + f \cos \beta)] l. \quad (7)$$

Переходим к вычислению изменения кинетической энергии груза на его перемещении l . В начальном положении груз находился в покое, следовательно, $T_1 = 0$. В конечном положении груз приобрел скорость v , т. е. $T_2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2$.

Итак,

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2. \quad (8)$$

Подставив значения $\sum A(F_k)$ и $T_2 - T_1$ из формул (7) и (8) в уравнение (1), определим искомое перемещение:

$$l = \frac{P v^2}{2g [S(\cos \alpha + f \sin \alpha) - P(\sin \beta + f \cos \beta)]}.$$

После подстановки численных данных находим, что $l = 3,54$ м.

Задача 346. Груз веса P совершает свободные колебания на подвешенной к потолку пружине. коэффициент упругости (жесткости) которой равен c . Грузу, находившемуся в положении статического равновесия, сообщена посредством толчка скорость v_0 .

Определить скорость груза v в зависимости от его смещения из положения статического равновесия и амплитуду колебаний груза.

Решение. Применяем теорему об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \sum_{k=1}^n A(F_k). \quad (1)$$

Ось x направляем вдоль оси пружины вниз, выбрав начало отсчета в положении статического равновесия груза, т. е. когда пружина имеет статическое удлинение:

$$\Delta_{ст} = \frac{P}{c}. \quad (2)$$

Изображаем груз в положении, смещенном из начала отсчета на x . К грузу приложены: P — вес груза, F — упругая сила пружины $F = c|\Delta|$. Так как удлинение пружины при данном положении груза равно

$$\Delta = \Delta_{ст} + x, \quad (3)$$

то

$$F_x = -c(\Delta_{ст} + x).$$

Вычислим сумму работ сил, приложенных к грузу на его перемещении, равном x :

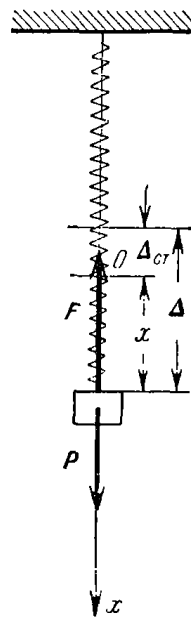
$$\sum A(F_k) = A(P) + A(F). \quad (4)$$

Работа силы тяжести при перемещении груза из нуля вниз на x равна

$$A(P) = Px. \quad (5)$$

Работа упругой силы F отрицательна, так как при перемещении груза из начала отсчета вниз на x пружина удлиняется. В начальном положении груза пружина деформирована на $\Delta_{ст}$, а в конечном положении груза, смещенном из начала отсчета на x вниз: $\Delta = \Delta_{ст} + x$ (см. формулу (3)). Следовательно, работа упругой силы равна $A(F) = -\frac{c}{2}(\Delta^2 - \Delta_{ст}^2)$. Используя формулу (3), получим:

$$A(F) = -\frac{c}{2}(2\Delta_{ст}x + x^2). \quad (6)$$



К задаче 346.

Подставив значения $A(P)$ и $A(F)$ из формул (5) и (6) в (4), находим сумму работ сил, приложенных к грузу, на его перемещении от нуля на x вниз:

$$\sum A(F_k) = Px - \frac{c}{2}(2\Delta_{ст}x + x^2).$$

Учитывая формулу (2), получим:

$$\sum A(F_k) = -\frac{cx^2}{2}. \quad (7)$$

Переходим к вычислению изменения кинетической энергии груза. В начальном положении грузу была сообщена скорость v_0 , т. е.

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v_0^2.$$

В конечном положении груз приобрел скорость v , поэтому

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2.$$

Следовательно, изменение кинетической энергии груза равно

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} (v^2 - v_0^2). \quad (8)$$

После подстановки значений $\sum A(F_k)$ и $T_2 - T_1$ из формул (7) и (8) в уравнение (1) определяем скорость груза в зависимости от его смещения x :

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{cg}{P} x^2}.$$

Как известно из теории колебаний материальной точки, $\frac{cg}{P} = k^2$, где k — круговая частота колебаний груза. Итак, окончательно:

$$v = \sqrt{v_0^2 - k^2 x^2}. \quad (9)$$

Амплитуда a свободных колебаний груза легко определяется из формулы (9), так как при отклонении груза в крайнее положение $x = \pm a$ его скорость обращается в нуль.

Подставляя эти значения в формулу (9), находим амплитуду свободных колебаний груза:

$$a = \frac{v_0}{k},$$

где

$$k = \sqrt{\frac{cg}{P}}.$$

4°. Теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек. Изменение кинетической энергии системы материальных точек при ее перемещении равно сумме работ всех внешних и внутренних сил системы на этом перемещении:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(F_k^e) + \sum_{k=1}^n A(F_k^i).$$

Это — единственная из четырех общих теорем динамики, в формулировку которой входят не только внешние, но и внутренние силы. Наличие в формулировке теоремы внутренних сил несколько усложняет решение задачи. Если, однако, требуется определить внутреннюю силу, то решение задачи с помощью общих теорем динамики возможно только при применении теоремы об изменении кинетической энергии системы материальных точек.

В случае неизменяемой системы материальных точек, например, абсолютно твердого тела, сумма работ внутренних сил равна нулю и теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек принимает вид

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(F_k^e).$$

Теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек следует применять в тех случаях, когда в число данных и искомых величин входят: инерционные характеристики системы (массы и моменты инерции), скорости (линейные и угловые), силы и моменты пар сил, перемещения (линейные и угловые).

Легко решаются задачи, в которых силы и моменты пар сил постоянны либо зависят от положений точек системы.

Решение задач с помощью теоремы об изменении кинетической энергии рекомендуется проводить в следующей последовательности:

1) изобразить на рисунке все внешние и внутренние силы системы (в случае неизменяемой материальной системы — только внешние силы);

2) вычислить сумму работ всех внешних и внутренних сил на перемещениях точек системы (в случае неизменяемой материальной системы — только сумму работ внешних сил);

3) вычислить кинетическую энергию системы материальных точек в начальном и конечном положениях системы;

4) воспользовавшись результатами вычислений пунктов 2) и 3), записать теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(F_k^e) + \sum_{k=1}^n A(F_k^i),$$

или в случае неизменяемой материальной системы:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(F_k^e),$$

и определить искомую величину.

Задача 347. Машинный агрегат работает под действием системы приложенных к нему сил.

Определить знак суммы работ этих сил при: а) пуске в ход, б) остановке, в) установившемся режиме работы.

Решение. Запишем теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(F_k). \quad (1)$$

Все силы, приложенные к системе, разделим на: силы движущие (например, момент, создаваемый электроприводом), работа которых положительна ($\sum_{k=1}^n A(F_{k \text{ дн}}) > 0$), и силы сопротивления (силы полез-

ного сопротивления: например, сила резания при снятии резцом стружки с болванки, сила давления штампа и т. п. и силы вредного сопротивления: например, силы трения скольжения валов о вкладыши подшипников, силы трения в зацеплениях зубчатых передач и т. д.),

работа которых отрицательна ($\sum_{k=1}^n A(F_{k \text{ сопр}}) < 0$). Запишем уравнение (1), учитывая эту классификацию сил:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(F_{k \text{ дн}}) + \sum_{k=1}^n A(F_{k \text{ сопр}}). \quad (2)$$

а) При пуске машинного агрегата в ход скорости его материальных точек, которые в начальных положениях были равны нулю, возрастают. Следовательно, $T_1 = 0$, $T_2 \neq 0$, но кинетическая энергия положительна, т. е. $T_2 > 0$. Поэтому изменение кинетической энергии системы $T_2 - T_1 > 0$, и из уравнения (2) находим:

$$\sum_{k=1}^n A(F_{k \text{ дн}}) + \sum_{k=1}^n A(F_{k \text{ сопр}}) > 0.$$

Так как первая сумма положительна, а вторая отрицательна, то при пуске в ход модуль суммы работ движущих сил больше модуля суммы работ сил сопротивления.

б) При остановке машинного агрегата скорости его материальных точек, которые в начальных положениях (в момент выключения дви-

гателя) не были равны нулю, уменьшаются и в конечных положениях (в момент остановки) обращаются в нуль. Следовательно, $T_1 \geq 0$, $T_2 = 0$. Поэтому изменение кинетической энергии системы $T_2 - T_1 < 0$, и из уравнения (2) находим:

$$\sum_{k=1}^n A(F_{k \text{ дв}}) + \sum_{k=1}^n A(F_{k \text{ сопр}}) < 0.$$

Так как первая сумма положительна, а вторая отрицательна, то при остановке машинного агрегата модуль суммы работ движущих сил меньше модуля суммы работ сил сопротивления.

в) При установившемся режиме работы скорости точек являются периодическими функциями. Периодом может, например, оказаться промежуток времени, в течение которого вал двигателя делает один оборот, два оборота и т. д., т. е. $T(\varphi) = T(\varphi + 2k\pi)$, где $k = 1, 2, \dots, n$. Взяв начальные положения материальных точек системы соответственно углу поворота φ вала двигателя, а конечные — углу поворота $\varphi + 2k\pi$, где $k = 1, 2, \dots, n$, находим: $T_1(\varphi) = T_2(\varphi + 2k\pi)$. Поэтому изменение кинетической энергии системы равно нулю: $T_2 - T_1 = 0$, и из уравнения (2) получим:

$$\sum_{k=1}^n A(F_{k \text{ дв}}) + \sum_{k=1}^n A(F_{k \text{ сопр}}) = 0.$$

Так как первая сумма положительна, а вторая отрицательна, то при установившемся режиме работы машинного агрегата модуль суммы работ движущих сил равен модулю суммы работ сил сопротивления на том же угловом перемещении вала (при подсчете этих величин за промежуток времени, равный периоду процесса).

Задача 348. Две трети однородной цепи AB длины l лежат на наклонной плоскости призмы, расположенной под углом α к горизонту, а одна треть цепи свисает вдоль вертикальной грани призмы (см. рисунок). Под действием своего веса цепь, находившаяся в начальный момент в покое, начинает соскальзывать по наклонной плоскости вниз.

Определить скорость цепи в тот момент, когда конец A ее свисавшей части поднимется на наклонную плоскость в точку O ; f — коэффициент трения скольжения цепи о наклонную плоскость.

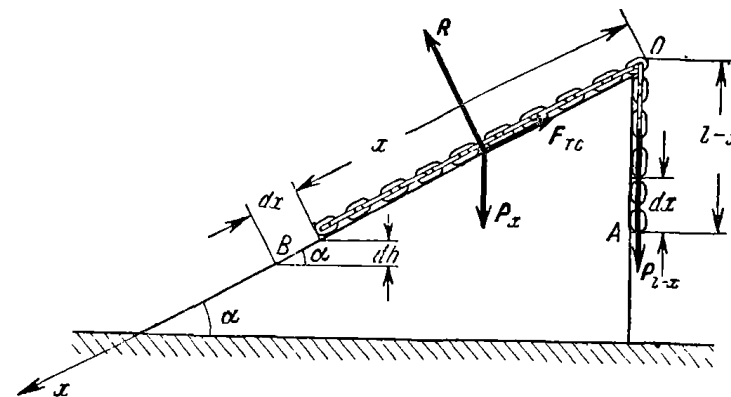
Решение. Направим ось x из точки O вдоль наклонной плоскости вниз. Изобразим цепь во время движения; обозначим OB через x , тогда $OA = l - x$. Запишем теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(F_k^e) + \sum_{k=1}^n A(F_k^i). \quad (1)$$

Считая цепь недеформируемой, получим неизменяемую систему. Тогда сумма работ внутренних сил системы равна нулю, и уравнение (1) принимает вид

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(F_k^e). \quad (2)$$

Обозначим вес цепи P . Изобразим внешние силы системы: P_x — вес части цепи OB , лежащей на наклонной плоскости, P_{l-x} — вес свисающей части цепи, R — суммарная сила нормальной реакции части цепи OA , $F_{т.с}$ — сила трения скольжения части цепи OB о наклонную плоскость.



К задаче 348.

Дадим концу цепи B элементарное перемещение dx вдоль наклонной плоскости вниз. При этом конец цепи A поднимается на dx вверх.

Вычисляем элементарную работу внешних сил на перемещении dx :

$$\delta A = \sum \delta A(F_k^e) = \delta A(P_x) + \delta A(P_{l-x}) + \delta A(R) + \delta A(F_{т.с}). \quad (3)$$

Так как

$$P_x = \frac{P}{l} x, F_{т.с} = fN = fP_x \cos \alpha = f \frac{P}{l} x \cos \alpha, P_{l-x} = \frac{P}{l} (l - x),$$

то

$$\delta A(P_x) = P_x dh = P_x dx \sin \alpha = \frac{P}{l} \sin \alpha x dx, \quad (4)$$

$$\delta A(P_{l-x}) = -P_{l-x} dx = -\frac{P}{l} (l - x) dx, \quad (5)$$

$$\delta A(R) = R dx \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad (6)$$

$$\delta A(F_{т.с}) = -F_{т.с} dx = -f \frac{P}{l} \cos \alpha x dx. \quad (7)$$

Подставив значения $\delta A(P_x)$, $\delta A(P_{l-x})$, $\delta A(R)$, $\delta A(F_{т.с})$ из (4), (5), (6) и (7) в формулу (3), находим:

$$\delta A = \sum \delta A(F_k^e) = \frac{P}{l} (1 - \sin \alpha - f \cos \alpha) x dx - P dx. \quad (8)$$

Для вычисления суммы работ внешних сил на перемещении цепи при подъеме ее конца A в положение O следует взять определенный интеграл от выражения δA , записанного в формуле (8), в пределах от $\frac{2}{3}l$ до l (в начальный момент на наклонной плоскости была расположена часть цепи $OB = \frac{2}{3}l$, в конечный момент на наклонной плоскости должна находиться вся цепь, т. е. при совмещении точек A и O должно выполняться равенство $OB = l$).

Вычислив определенный интеграл, находим сумму работ всех внешних сил на заданном конечном перемещении цепи:

$$\sum A(F_k^e) = \frac{Pl}{18} [5(\sin \alpha - f \cos \alpha) - 1]. \quad (9)$$

Переходим к вычислению кинетической энергии цепи. В начальный момент цепь находилась в покое, т. е.

$$T_1 = 0. \quad (10)$$

В конечный момент все материальные точки цепи (учитывая ее недеформируемость) имели искомую скорость v , следовательно,

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2. \quad (11)$$

Подставив значения $\sum A(F_k^e)$, T_1 и T_2 из формул (9), (10) и (11) в уравнение (2) и решив это уравнение относительно v , имеем:

$$v = \frac{1}{3} \sqrt{gl [5(\sin \alpha - f \cos \alpha) - 1]}.$$

Движение цепи по наклонной плоскости вниз возможно только при условии, что $v > 0$, т. е. при выполнении неравенства $5(\sin \alpha - f \cos \alpha) - 1 > 0$ или

$$f < \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{5 \cos \alpha}.$$

Задача 349. Решить задачу 298 с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы материальных точек.

Решение. Эта задача была решена с помощью дифференциального уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. При этом пришлось дважды интегрировать дифференциальное уравнение

ние вращения кольца, определять две постоянные интегрирования и вычислять промежуток времени, в течение которого кольцо вращалось до остановки.

Применением теоремы об изменении кинетической энергии

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(F_k^e) + \sum_{k=1}^n A(F_k^i) \quad (1)$$

можно объем вычислений сократить в несколько раз.

Изобразив все внешние силы, вычислив момент инерции кольца относительно оси вращения z : $I_z = \frac{P}{2g} (R^2 + r^2)$ и главный момент внешних сил относительно этой же оси: $m_z^e = -fPr$, как это было выполнено при решении задачи 298, переходим к вычислению суммы работ всех внешних сил системы $\sum_{k=1}^n A(F_k^e) = m_z^e \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ — искомое угловое перемещение кольца до момента остановки. Таким образом

$$\sum_{k=1}^n A(F_k^e) = -fPr \Delta\varphi. \quad (2)$$

Кольцо является абсолютно твердым телом, следовательно,

$$\sum_{k=1}^n A(F_k^i) = 0. \quad (3)$$

Кинетическая энергия в начальном положении кольца дается формулой

$$T_1 = \frac{1}{2} I_z \omega_0^2. \quad (4)$$

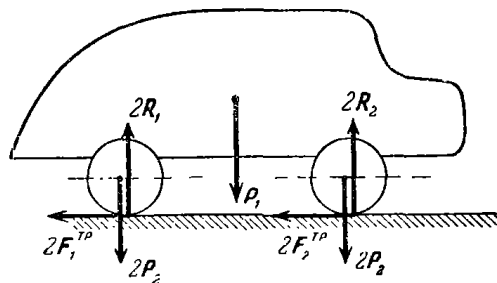
Кинетическая энергия в конечном положении, т. е. в момент остановки, равна

$$T_2 = 0. \quad (5)$$

Подставив значения $\sum_{k=1}^n A(F_k^e)$, $\sum_{k=1}^n A(F_k^i)$, T_1 и T_2 из формул (2), (3), (4), (5) в уравнение (1) и решив это уравнение относительно $\Delta\varphi$, получим: $\Delta\varphi = \frac{\omega_0^2 (R^2 + r^2)}{4fgr}$ или $n = \frac{\omega_0^2 (R^2 + r^2)}{8\pi fgr}$ оборотов.

Следует отметить, что задача оказалась столь просто решенной с помощью теоремы об изменении кинетической энергии потому, что требовалось получить зависимость между угловой скоростью (равной в момент остановки нулю) и углом поворота кольца. Если бы по условию задачи требовалось определить $\omega = f(t)$ либо $\varphi = \psi(t)$, то пришлось бы решить дифференциальное уравнение.

Задача 350. Какой путь s прошла по прямой дороге до остановки автомашина, если в момент выключения мотора она двигалась со скоростью $v = 72 \text{ км/час}$. Вес кузова автомашины с шофером и пассажирами равен $P_1 = 1000 \text{ кг}$, вес каждого из четырех колес $P_2 = 20 \text{ кг}$. Радиус инерции колеса относительно оси, проходящей через его центр инерции перпендикулярно к плоскости материальной симметрии, равен $\rho = 20 \text{ см}$, радиус колеса $r = 25 \text{ см}$. Коэффициент трения качения колес о шоссе $f_k = 0,1$. Колеса автомашины катятся без скольжения. Силой сопротивления воздуха пренебречь.



К задаче 350.

Решение. При движении автомашины направо направление положительного отсчета угла поворота φ колес выбираем по часовой стрелке.

Запишем теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(F_k^e) + \sum_{k=1}^n A(F_k^i). \quad (1)$$

Изображаем внешние силы, приложенные к автомашине (см. рисунок): P_1 и $4P_2$ — силы тяжести, $2R_1$ и $2R_2$ — нормальные силы реакций, смещенные относительно центров тяжести колес в сторону движения на величину коэффициента трения качения f_k , $2F_1^{TP}$ и $2F_2^{TP}$ — силы трения колес о шоссе, направленные в сторону, противоположную движению (после выключения мотора все колеса автомашины оказываются ведомыми). Внутренние силы не изображаем, считая автомашину неизменяемой системой и пренебрегая силами внутреннего трения. Следовательно, сумма работ всех внутренних сил системы равна нулю. Теперь уравнение (1) принимает вид

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(F_k^e). \quad (2)$$

Сумма работ всех внешних сил системы на искомом перемещении s равна

$$\sum_{k=1}^n A(F_k^e) = A(P_1) + 4A(P_2) + 4A(F_{TP}) + 4A(m_{т.к}) \quad (3)$$

(коэффициенты «4» соответствуют числу колес автомашины).

Так как разность высот Δh при перемещениях точек приложения сил P_1 и $4P_2$ равна нулю, то

$$A(P_1) = 4A(P_2) = 0. \quad (4)$$

При качении колес без скольжения их мгновенные центры скоростей \mathcal{P} находятся в точках касания. Силы трения всегда приложены к колесам в точках, совпадающих с мгновенными центрами скоростей \mathcal{P} и перемещаются вместе с ними. Мощность этих сил трения, вычисляемая по формуле $N = F_{TP} \cdot v_{\mathcal{P}}$, равна нулю, так как $v_{\mathcal{P}} = 0$. Следовательно, работа сил трения на конечном перемещении, равная интегралу от мощности по времени, тоже равна нулю:

$$4A(F_{TP}) = 0. \quad (5)$$

Учитывая, что радиусы колес и коэффициенты трения качения для всех четырех колес одинаковы, приводим вычисление суммы работ пар трения качения к одному колесу, считая нормальное давление равным $N = P_1 + 4P_2$. Так как коэффициент трения качения f_k является плечом пары трения качения, то момент пары трения качения будет $m_{т.к} = Nf_k = (P_1 + 4P_2)f_k$. Элементарная работа пары трения качения равна

$$4\delta A(m_{т.к}) = -m_{т.к} d\varphi = -(P_1 + 4P_2)f_k d\varphi \quad (6)$$

(работа отрицательна, так как направление момента пары трения качения противоположно направлению угла поворота φ колес), где $d\varphi$ — элементарное угловое перемещение колеса вокруг мгновенного центра скоростей \mathcal{P} . Учитывая, что $d\varphi$ связано с элементарным перемещением ds центра тяжести C колеса зависимостью $ds = r d\varphi$, получим

$$d\varphi = \frac{ds}{r}. \quad (7)$$

Подставляя значение $d\varphi$ из формулы (7) в (6), находим:

$$4\delta A(m_{т.к}) = -(P_1 + 4P_2) \frac{f_k}{r} ds. \quad (8)$$

Для вычисления суммарной работы пары трения качения на конечном перемещении центра тяжести C колеса остается взять от выражения δA по формуле (8) определенный интеграл в пределах от 0 до s . После вычислений получим:

$$4A(m_{т.к}) = -(P_1 + 4P_2) \frac{f_k}{r} s. \quad (9)$$

Подставляя значения $A(P_1)$, $4A(P_2)$, $4A(F_{TP})$, $4A(m_{т.к})$ из формул (4), (5) и (9) в (3), находим сумму работ всех внешних сил, приложенных к автомашине на ее перемещении, равном s :

$$\sum A(F_k^e) = -(P_1 + 4P_2) \frac{f_k}{r} s. \quad (10)$$

Переходим к вычислению кинетических энергий автомашины в ее начальном и конечном положениях. Так как в конечном положении, т. е. в момент остановки, скорости всех точек равны нулю, то

$$T_2 = 0. \quad (11)$$

Запишем кинетическую энергию T_1 автомашины, состоящей из пяти масс: кузова с шофером и пассажирами и четырех колес, в виде

$$T_1 = T_1^{(1)} + 4T_1^{(2)}. \quad (12)$$

Кузов с шофером и пассажирами совершает поступательное движение, поэтому

$$T_1^{(1)} = \frac{1}{2} P_1 v^2. \quad (13)$$

Колеса совершают плоское движение, поэтому

$$4T_1^{(2)} = 4 \left(\frac{1}{2} P_2 v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \right); \quad (14)$$

так как $v_C = v$, $I_C = \frac{P_2}{g} \rho^2$, $\omega = \frac{v}{r}$, то формула (14) принимает вид

$$4T_1^{(2)} = 2 \frac{P_2}{g} \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} \right) v^2. \quad (15)$$

Внося значения $T_1^{(1)}$ и $4T_1^{(2)}$ из формул (13) и (15) в (12), находим кинетическую энергию автомашины в ее начальном положении:

$$T_1 = \frac{v^2}{2g} \left[P_1 + 4P_2 \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} \right) \right]. \quad (16)$$

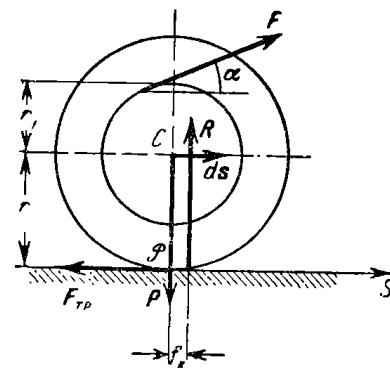
Подставляя значения $\sum A(F_k^e)$, T_2 и T_1 из формул (10), (11) и (16) в уравнение (2) и решив это уравнение относительно s , получим:

$$s = \frac{rv^2 \left[P_1 + 4P_2 \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} \right) \right]}{2gf_k(P_1 + 4P_2)} = 53,4 \text{ м.}$$

Задача 351. Катушка веса P и радиуса r приводится в движение посредством сматываемой с нее нити, расположенной под углом α к горизонту. К нити приложена постоянная сила F . Определить скорость центра инерции C катушки в момент, когда она переместится на расстояние s . Радиус инерции катушки относительно оси, проходящей через ее центр инерции C перпендикулярно к плоскости материальной симметрии, равен ρ , f_k — коэффициент трения качения катушки о горизонтальную плоскость.

Катушка катится без скольжения. Массой нити пренебречь. r_1 — радиус оси катушки, на которую намотана нить. В начальный момент система находилась в покое.

Решение. Катушка совершает плоское движение. Так как качение происходит без скольжения, то мгновенный центр скоростей \mathcal{P} расположен в точке касания обода катушки с горизонтальной плоскостью. Направим ось s по горизонтали направо. В соответствии с направлением оси s , принимаем положительное направление угла поворота φ по часовой стрелке.



К задаче 351.

Запишем теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(F_k^e) + \sum_{k=1}^n A(F_k^i).$$

Так как катушка является неизменяемой материальной системой, то сумма работ внутренних сил равна нулю, и поэтому

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(F_k^e). \quad (1)$$

Изобразим внешние силы, приложенные к катушке (см. рисунок): P — ее вес, R — нормальная сила реакции плоскости, смещенная относительно центра инерции C катушки на величину коэффициента трения качения f_k в сторону движения, F — сила реакции нити, равная по модулю силе, приложенной к нити, $F_{тр}$ — сила трения катушки о горизонтальную плоскость.

Дадим центру инерции C катушки элементарное перемещение ds , направленное по горизонтали направо. Учитывая положение мгновенного центра скоростей \mathcal{P} , имеем:

$$ds = r d\varphi. \quad (2)$$

Вычислим работу внешних сил на элементарном перемещении ds :

$$\delta A = \delta A(P) + \delta A_{тр,k} + \delta A(F) + \delta A(F_{тр}). \quad (3)$$

Так как перемещение центра инерции C происходит по горизонтали, то

$$\delta A(P) = 0. \quad (4)$$

Элементарная работа пары трения качения: $\delta A_{т.к} = -m_{т.к} d\varphi$. Работа пары трения качения отрицательна, так как направление момента пары противоположно направлению поворота колеса.

Так как $m_{т.к} = N \cdot f_k = (P - F \sin \alpha) f_k$, то, принимая во внимание формулу (2), находим:

$$\delta A_{т.к} = -(P - F \sin \alpha) f_k \frac{ds}{r}. \quad (5)$$

Сила трения $F_{тр}$, как и в предыдущей задаче, не совершает работы. Действительно,

$$\delta A (F_{тр}) = F_{тр} \cdot v_{\mathcal{P}} dt = 0 \quad (6)$$

(при качении без скольжения $v_{\mathcal{P}} = 0$).

Остается вычислить элементарную работу силы F . Выбрав за полюс точку C , запишем: $\delta A (F) = F \cdot ds + m_C d\varphi$, где ds — вектор элементарного перемещения центра инерции C , а m_C — момент силы F относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно к неподвижной плоскости, т. е. $m_C = Fr_1$. Следовательно,

$$\delta A (F) = F ds \cos \alpha + Fr_1 d\varphi.$$

Учитывая формулу (2), получим:

$$\delta A (F) = \frac{F}{r} (r_1 + r \cos \alpha) ds. \quad (7)$$

При вычислении работы силы, приложенной к твердому телу, совершающему плоское движение, за полюс можно принимать произвольную точку твердого тела. При этом следует помнить, что элементарное угловое перемещение $d\varphi$ от выбора полюса не зависит.

После подстановки формул (4), (5), (6) и (7) в (2) получим элементарную работу внешних сил, приложенных к катушке, на элементарном перемещении ds :

$$\delta A = [F(r_1 + r \cos \alpha) - f_k(P - F \sin \alpha)] \frac{ds}{r}. \quad (8)$$

Для определения суммы работ внешних сил на перемещении центра инерции s следует, воспользовавшись формулой (8), взять определенный интеграл в пределах от 0 до s . Сделав это, получим:

$$\sum A (F_k^e) = [F(r_1 + r \cos \alpha) - f_k(P - F \sin \alpha)] \frac{s}{r}. \quad (9)$$

Вычислим кинетическую энергию катушки. В начальном положении катушка была в покое, т. е.

$$T_1 = 0. \quad (10)$$

Кинетическая энергия в конечном положении катушки равна

$$T_2 = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2,$$

где

$$M = \frac{P}{g}, \quad I_C = \frac{P}{g} \rho^2, \quad \omega = \frac{v_C}{r}.$$

Следовательно,

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v_C^2 \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} \right). \quad (11)$$

Подставив (9), (10) и (11) в уравнение (1) и решив это уравнение относительно v_C , находим искомую скорость центра инерции катушки C :

$$v_C = \sqrt{\frac{2gr s}{r^2 + \rho^2} [F(r_1 + r \cos \alpha) - (P - F \sin \alpha) f_k]}. \quad (12)$$

Из формулы (12) видно, что катушка находится в движении, если модуль силы F удовлетворяет условию

$$F > \frac{P f_k}{r_1 + r \cos \alpha + f_k \sin \alpha}.$$

Задача 352. Грузы A и B приводятся в движение посредством двух блоков: подвижного K и неподвижного L (см. рис. a). В результате толчка, сообщенного грузу A , он начал опускаться со скоростью v_0 . На какое расстояние должен опуститься груз A для того, чтобы его скорость увеличилась в два раза?

Грузы A и B — одинакового веса. Блоки K и L считать однородными круглыми дисками одинакового веса Q . Коэффициент трения скольжения груза B о горизонтальную плоскость равен f . Массой веревки пренебречь.

Решение. Направим ось s через центр инерции C подвижного блока K по вертикали вниз. Соответственно с направлением оси s , считаем положительным направление угла поворота блока K по часовой стрелке, а блока L — против часовой стрелки. Радиусы блоков обозначим r .

Запишем теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек:

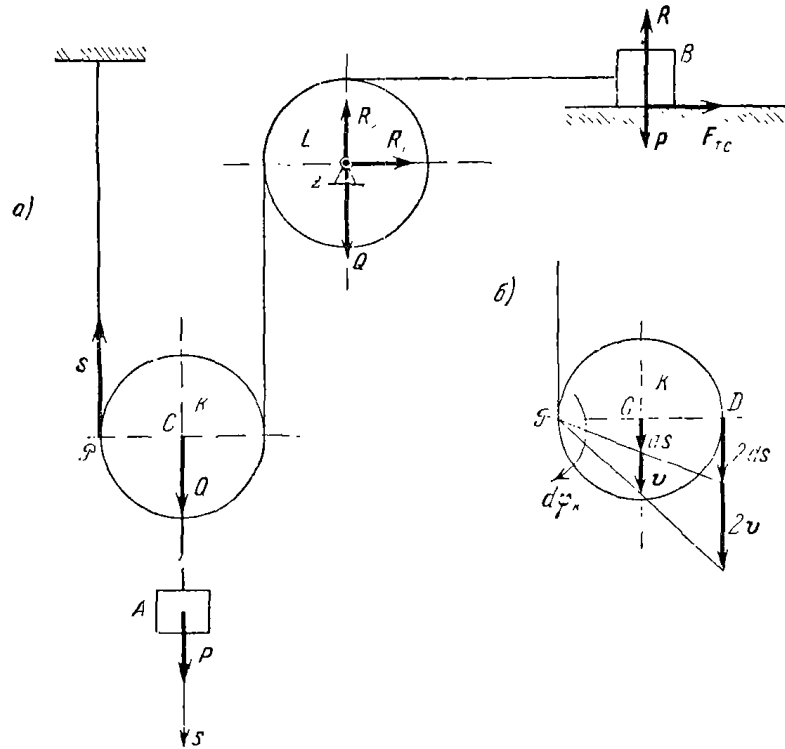
$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A (F_k^e) + \sum_{k=1}^n A (F_k^i). \quad (1)$$

Так как веревка, охватывающая блоки K и L и приводящая в движение груз B , не деформируется и при движении системы находится в натянутом состоянии, то рассматриваемая материальная система

является неизменяемой. Следовательно, сумма работ внутренних сил системы равна нулю. Поэтому уравнение (1) принимает вид

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(F_k^e). \quad (2)$$

Изобразим внешние силы системы: силы тяжести грузов A и B и блоков K и L , R — нормальную силу реакции горизонтальной плоскости, $F_{т.с}$ — силу трения скольжения груза B о горизонтальную плоскость, R_1 и R_2 — составляющие силы реакции оси блока L , S — силу реакции веревки.



К задаче 352.

Дадим элементарное перемещение ds центру инерции C блока K по вертикали вниз. При этом блок K получит угловое перемещение по часовой стрелке. Учитывая, что блок K , осуществляющий плоское движение, имеет мгновенный центр скоростей \mathcal{P} в точке касания обода блока с левой ветвью веревки, находим перемещение точки обода D , равное $2ds$ (см. рис. б). Следовательно, элементарное перемещение груза B направлено по горизонтали налево и равно $2ds$, а угловое перемещение блока L направлено против часовой стрелки.

Вычислим элементарную работу всех внешних сил системы:

$$\delta A = \sum \delta A(F_k^e) = \delta A(P_A) + \delta A(Q_K) + \delta A(Q_L) + \delta A(P_B) + \delta A(R) + \delta A(S) + \delta A(R_1) + \delta A(R_2) + \delta A(F_{т.с}). \quad (3)$$

Находим:

$$\delta A(P_A) = P ds, \quad (4)$$

$$\delta A(Q_K) = Q ds, \quad (5)$$

$$\delta A(Q_L) = 0 \quad (6)$$

(точка приложения веса Q_L неподвижна),

$$\delta A(P_B) = 0 \quad (7)$$

(груз B перемещается по горизонтали),

$$\delta A(S) = 0 \quad (8)$$

(сила реакции веревки S всегда приложена в мгновенном центре скоростей \mathcal{P}),

$$\delta A(R) = 0 \quad (9)$$

(нормальная сила реакции R перпендикулярна к элементарному перемещению груза B),

$$\delta A(R_1) = \delta A(R_2) = 0 \quad (10)$$

(точка приложения сил R_1 и R_2 неподвижна),

$$\delta A(F_{т.с}) = -F_{т.с} dr_B.$$

Так как перемещение груза dr_B , направленное налево, равно $2ds$, а $F_{т.с} = fP$, то

$$\delta A(F_{т.с}) = -2fP ds. \quad (11)$$

После подстановки выражений (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10) и (11) в формулу (3) находим:

$$\delta A = \sum \delta A(F_k^e) = [Q + P(1 - 2f)] ds. \quad (12)$$

Для вычисления суммы работ на искомом перемещении груза A , равном s , следует, воспользовавшись формулой (12), взять определенный интеграл в пределах от 0 до s . Тогда будем иметь:

$$\sum A(F_k^e) = [Q + P(1 - 2f)] s. \quad (13)$$

Переходим к вычислению кинетической энергии системы, в состав которой входят массы двух грузов и двух блоков. Запишем:

$$T = T_A + T_B + T_K + T_L. \quad (14)$$

Обозначим через v скорость груза A . Тогда $v_C = v$. Учитывая, что мгновенный центр скоростей блока K находится в точке \mathcal{P} , получим: $v_D = 2v$ (см. рис. б). Так как веревка нерастяжима, то скорость груза B равна скорости точки D , т. е. $v_B = 2v$.

Мгновенная угловая скорость блока K : $\omega_K = \frac{v_C}{r} = \frac{v}{r}$, угловая скорость блока L : $\omega_L = \frac{v_B}{r} = \frac{2v}{r}$ (скорость точки на ободу блока L равна скорости груза B).

Грузы A и B движутся поступательно, поэтому

$$T_A = \frac{1}{2} P \frac{v^2}{g}, \quad (15)$$

$$T_B = \frac{1}{2} P \frac{v_B^2}{g} = 2 \frac{P}{g} v^2. \quad (16)$$

Блок K совершает плоское движение, т. е.

$$T_K = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_K^2$$

где $M = \frac{Q}{g}$, $I_C = \frac{Qr^2}{2g}$, $\omega_K = \frac{v}{r}$. Поэтому

$$T_K = \frac{3}{4} \frac{Q}{g} v^2. \quad (17)$$

Блок L вращается вокруг неподвижной оси, т. е.

$$T_L = \frac{1}{2} I_z \omega_L^2$$

где $I_z = \frac{Qr^2}{2g}$, $\omega_L = \frac{2v}{r}$. Следовательно,

$$T_L = \frac{Q}{g} v^2. \quad (18)$$

Подставив выражения (15), (16), (17) и (18) в формулу (14), найдем кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{v^2}{4g} (10P + 7Q). \quad (19)$$

Согласно условию задачи, скорость груза A в начальном положении системы равнялась v_0 , т. е.

$$T_1 = \frac{v_0^2}{4g} (10P + 7Q). \quad (20)$$

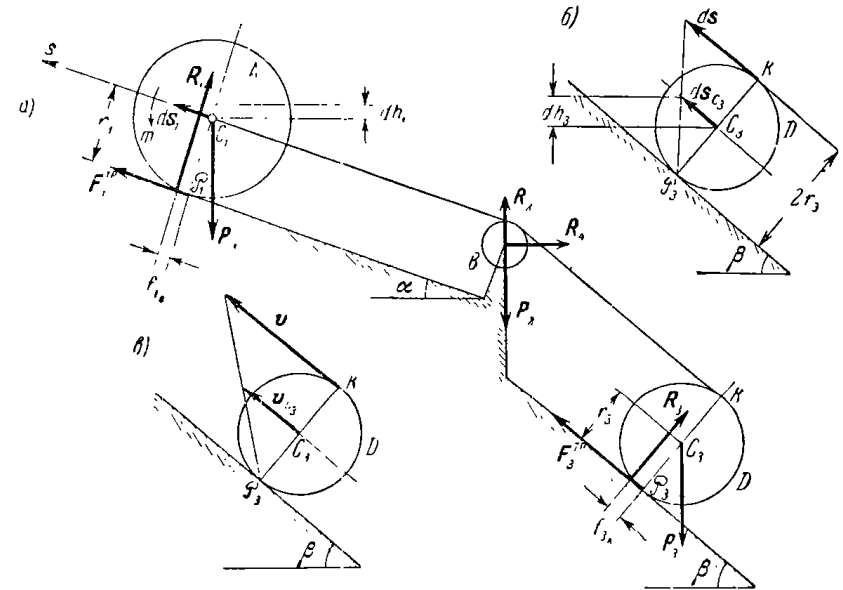
В конечном положении системы скорость груза A удвоилась, следовательно,

$$T_2 = \frac{v_0^2}{g} (10P + 7Q). \quad (21)$$

Подставив формулы (13), (20) и (21) в уравнение (2), решив это уравнение относительно s , определим искомое перемещение груза A :

$$s = \frac{3v_0^2 (10P + 7Q)}{4g [Q + P(1 - 2f)]}.$$

Задача 353. К оси C_1 катка A веса P_1 и радиуса r_1 привязан конец однородной недеформируемой веревки, переброшенной через блок B веса P_2 и намотанной на цилиндр D веса P_3 и радиуса r_3



К задаче 353.

(см. рис. а). Под действием вращающего момента, пропорционального углу поворота катка, $m = a\varphi$, где a — постоянная, каток A , катясь без скольжения, поднимается по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, и посредством веревки приводит в движение цилиндр D , который, катясь без скольжения, поднимается вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом β к горизонту. Коэффициент трения качения катка A о наклонную плоскость равен f_{1K} , коэффициент трения качения цилиндра D с намотанной на него веревкой о наклонную плоскость равен f_{3K} .

Определить скорость оси C_1 катка A в положении системы, при котором ось C_1 переместится параллельно линии наибольшего ската

наклонной плоскости на расстояние s . В начальном положении система находилась в покое. Каток A , блок B и цилиндр D считать сплошными однородными цилиндрами. Массой веревки пренебречь.

Решение. Направим ось s через центр инерции C_1 катка A параллельно линии наибольшего ската верхней наклонной плоскости.

В соответствии с положительным направлением оси s , углы поворота катка A , блока B и цилиндра D , соответственно равные φ_1 , φ_2 , φ_3 , имеют положительное направление отсчета против часовой стрелки.

Задачу решаем с помощью теоремы об изменении кинетической энергии неизменяемой системы материальных точек (веревка при движении системы натягивается):

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(F_k^e). \quad (1)$$

Изобразим внешние силы системы: P_1 — вес катка A , P_2 — вес блока B , P_3 — вес цилиндра D , m — вращающий момент, приложенный к катку A ; R_1 и R_3 — нормальные силы реакций наклонных плоскостей, смещенные в сторону движения относительно центров инерции C_1 и C_3 соответственно катка A и цилиндра D ; R_2 и R_4 — составляющие силы реакции оси блока B , $F_1^{тр}$ — сила трения катка A о наклонную плоскость, направленная в сторону движения, $F_3^{тр}$ — сила трения скольжения веревки, намотанной на цилиндр, о наклонную плоскость, направленная в сторону движения.

Дадим элементарное перемещение ds центру инерции C_1 катка A параллельно наклонной плоскости вверх. Ввиду недеформируемости веревки точка обода блока B и точка K веревки, намотанной на обод цилиндра D , также получают перемещение ds . Следовательно, $ds = r_1 d\varphi_1 = r_2 d\varphi_2 = 2r_3 d\varphi_3$, где $d\varphi_1$, $d\varphi_2$ и $d\varphi_3$ — элементарные угловые перемещения соответственно катка A , блока B и цилиндра D .

Перемещение ds точки K цилиндра D следует рассматривать по отношению к мгновенному центру \mathcal{P}_3 цилиндра. Как видно из рис. 6, перемещение центра инерции C_3 цилиндра D в два раза меньше перемещения точки K , т. е. $ds_{C_3} = \frac{ds}{2}$. Поэтому

$$ds = r_1 d\varphi_1 = r_2 d\varphi_2 = 2r_3 d\varphi_3 = 2ds_{C_3}. \quad (2)$$

Вычислим элементарную работу всех внешних сил системы:

$$\delta A = \delta A(P_1) + \delta A(P_2) + \delta A(P_3) + \delta A_{т.кА} + \delta A_{т.кD} + \delta A(R_2) + \delta A(R_4) + \delta A(m) + \delta A(F_1^{тр}) + \delta A(F_3^{тр}). \quad (3)$$

Имеем:

$$\delta A(P_1) = -P_1 dh_1 = -P_1 ds \sin \alpha, \quad (4)$$

$$\delta A(P_2) = 0 \quad (5)$$

(точка приложения силы тяжести P_2 неподвижна),

$$\delta A(P_3) = -P_3 dh_3 = -P_3 ds_{C_3} \sin \beta.$$

Поэтому, на основании формулы (2), получаем:

$$\delta A(P_3) = -\frac{P_3 ds \sin \beta}{2}. \quad (6)$$

Далее:

$$\delta A_{т.кА} = -m_{т.кА} d\varphi_1.$$

Так как $m_{т.кА} = R_1 f_{1к} = P_1 \cos \alpha f_{1к}$, то, воспользовавшись формулой (2), находим:

$$\delta A_{т.кА} = -P_1 \frac{f_{1к}}{r_1} \cos \alpha ds. \quad (7)$$

Затем

$$\delta A_{т.кD} = -m_{т.кD} d\varphi_3.$$

Вычисляя момент $m_{т.кD} = R_3 f_{3к} = P_3 \cos \beta f_{3к}$ и используя формулу (2), получаем:

$$\delta A_{т.кD} = -P_3 \frac{f_{3к}}{2r_3} \cos \beta ds. \quad (8)$$

Далее:

$$\delta A(R_2) = \delta A(R_4) = 0 \quad (9)$$

(точка приложения сил R_2 и R_4 неподвижна).

Наконец, имеем:

$$\delta A(m) = m d\varphi.$$

Так как $m = a\varphi_1$, то, опять воспользовавшись формулой (2), запишем:

$$\delta A(m) = \frac{a\varphi_1}{r_1} ds. \quad (10)$$

Затем

$$\delta A(F_1^{тр}) = \delta A(F_3^{тр}) = 0. \quad (11)$$

(Каток A и цилиндр D катятся без скольжения).

Подставив (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10) и (11) в формулу (3), находим выражение элементарной работы внешних сил системы:

$$\delta A = \left[\frac{a}{r_1} \varphi_1 - P_1 \left(\sin \alpha + \frac{f_{1к}}{r_1} \cos \alpha \right) - \frac{P_3}{2} \left(\sin \beta + \frac{f_{3к}}{r_3} \cos \beta \right) \right] ds. \quad (12)$$

Для вычисления суммы работ внешних сил системы на конечном перемещении s остается, воспользовавшись формулой (12), взять оп-

ределенный интеграл от выражения (12) в пределах от 0 до s . При этом $r_1 \varphi_1 = s$. Произведя интегрирование, получим:

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{as}{r_1^2} - 2P_1 \left(\sin \alpha + \frac{f_{1K}}{r_1} \cos \alpha \right) - P_3 \left(\sin \beta + \frac{f_{3K}}{r_3} \cos \beta \right) \right] s. \quad (13)$$

Переходим к вычислению кинетической энергии данной системы, состоящей из трех масс (катка A , блока B и цилиндра D):

$$T = T_A + T_B + T_D.$$

В начальном положении система находилась в покое, т. е.

$$T_1 = 0. \quad (14)$$

Кинетическая энергия в конечном положении:

$$T_2 = T_{2A} + T_{2B} + T_{2D}. \quad (15)$$

Обозначим через v искомую скорость точки C_1 . Так как веревка не деформируется, то скорость оси C_1 равна скорости точки на ободу блока B и скорости точки K на ободу цилиндра D , т. е.

$$v = r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2 = 2r_3 \omega_3 = 2v_{C_3}, \quad (16)$$

где ω_1 , ω_2 и ω_3 — угловые скорости соответственно катка A , блока B и цилиндра D . (Скорость v точки K цилиндра D следует рассматривать по отношению к мгновенному центру \mathcal{P}_3 цилиндра. Как видно из рис. β , скорость центра инерции C_3 цилиндра D в два раза меньше скорости точки K).

Кинетическая энергия катка A , совершающего плоское движение, вычисляется по формуле

$$T_{2A} = \frac{1}{2} M_1 v_{C_1}^2 + \frac{1}{2} I_{C_1} \omega_1^2.$$

Учитывая, что $M_1 = \frac{P_1}{g}$, $v_{C_1} = v$, $I_{C_1} = \frac{P_1 r_1^2}{2g}$, $\omega_1 = \frac{v}{r_1}$, находим:

$$T_{2A} = \frac{3}{4} \frac{P_1}{g} v^2. \quad (17)$$

Кинетическая энергия блока B , вращающегося вокруг неподвижной оси, будет

$$T_{2B} = \frac{1}{2} I_z \omega_2^2,$$

где $I_z = \frac{P_2 r_2^2}{2g}$, $\omega_2 = \frac{v}{r_2}$ (см. формулу (16)). Следовательно,

$$T_{2B} = \frac{1}{4} \frac{P_2}{g} v^2. \quad (18)$$

Кинетическая энергия цилиндра D , совершающего плоское движение, вычисляется по формуле

$$T_{2D} = \frac{1}{2} M_3 v_{C_3}^2 + \frac{1}{2} I_{C_3} \omega_3^2,$$

где $M_3 = \frac{P_3}{g}$, $v_{C_3} = \frac{v}{2}$, $I_{C_3} = \frac{P_3 r_3^2}{2g}$, $\omega_3 = \frac{v}{2r_3}$ (см. формулу (16)). Следовательно,

$$T_{2D} = \frac{3}{16} \frac{P_3}{g} v^2. \quad (19)$$

Внося (17), (18) и (19) в формулу (15), находим выражение кинетической энергии системы в ее конечном положении:

$$T_2 = \frac{v^2}{16g} (12P_1 + 4P_2 + 3P_3). \quad (20)$$

Остается подставить (13), (14) и (20) в уравнение (1) и определить искомую скорость v центра инерции C_1 катка A :

$$v = 2 \sqrt{\frac{\frac{as}{r_1^2} - 2P_1 \left(\sin \alpha + \frac{f_{1K}}{r_1} \cos \alpha \right) - P_3 \left(\sin \beta + \frac{f_{3K}}{r_3} \cos \beta \right)}{12P_1 + 4P_2 + 3P_3}}.$$

Движение возможно, если подкоренное выражение положительно.

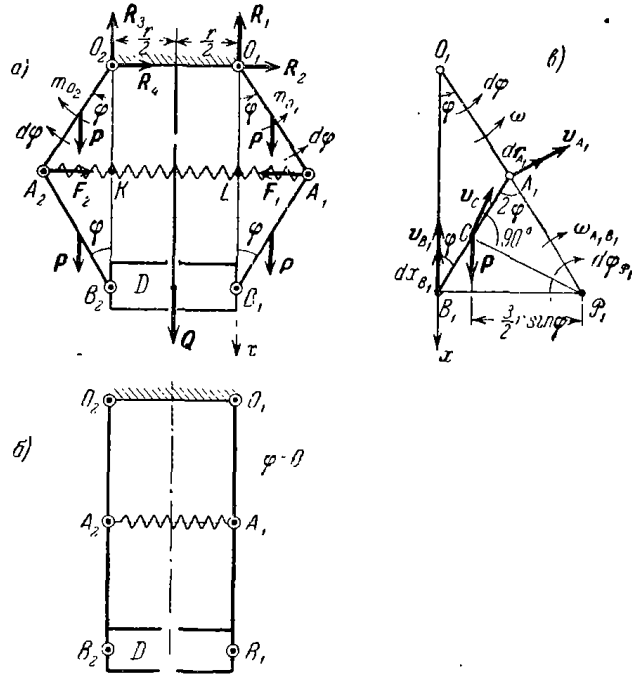
Задача 354. На рис. a изображен узел автоматического устройства, состоящий из двух спаренных кривошипно-шатунных механизмов $O_1 A_1 B_1$ и $O_2 A_2 B_2$, имеющих общий ползун D веса Q , который движется в вертикальных направляющих. Кривошипы $O_1 A_1$ и $O_2 A_2$ и шатуны $A_1 B_1$ и $A_2 B_2$ одинакового веса P и длины r . Оси кривошипов O_1 и O_2 , перпендикулярные к плоскости рисунка, отстоят от вертикальной оси симметрии механизма на расстоянии $\frac{r}{2}$. Для придания механизму жесткости концы кривошипов A_1 и A_2 соединены между собой пружиной, коэффициент упругости которой равен c . В начальном положении механизма кривошипы и шатуны были расположены вертикально, а пружина не деформирована (см. рис. b). Под действием постоянных вращающих моментов m кривошипы отклоняются от своих вертикальных положений, поднимая ползун D . Определить угловую скорость вращения кривошипов $O_1 A_1$ и $O_2 A_2$ в положении механизма, когда кривошипы отклонены от вертикали на угол φ . В начальном положении механизм находился в покое. Кривошипы и шатуны считать однородными тонкими стержнями. Массой пружины пренебречь.

Решение. Направим ось x из точки O_1 по вертикали вниз. Положительное направление отсчета угла φ : для правого кривошипа — против часовой стрелки, для левого кривошипа — по часовой стрелке.

Запишем теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(F_k^e) + \sum_{k=1}^n A(F_k^i). \quad (1)$$

Данный механизм не является неизменяемой материальной системой ввиду наличия пружины A_2A_1 . Поэтому при вычислении суммы



К задаче 354.

работ сил надо учесть не только внешние силы (силы тяжести двух кривошипов, двух шатунов и ползуна D , составляющие силы реакций осей кривошипов R_1, R_2, R_3, R_4 , вращающие моменты m_{O_1} и m_{O_2} , которые приложены к кривошипам), но и внутренние упругие силы пружины F_1 и F_2 (прочие внутренние силы можно не учитывать, так как кривошипы и шатуны являются абсолютно твердыми телами, и следовательно, сумма работ соответствующих внутренних сил равна нулю). Все указанные выше силы изображены на рис. а.

Дадим элементарные угловые перемещения $d\varphi$ кривошипам O_1A_1 и O_2A_2 в положительных направлениях отсчета углов φ и вычислим сумму элементарных работ внешних и внутренних сил системы на

этих перемещениях:

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum \delta A(F_k^e) + \sum \delta A(F_k^i) = \\ &= \delta A(P_{O_1A_1}) + \delta A(P_{O_2A_2}) + \delta A(P_{A_1B_1}) + \delta A(P_{A_2B_2}) + \delta A(Q) + \\ &+ \delta A(R_1) + \delta A(R_2) + \delta A(R_3) + \delta A(R_4) + \delta A(m_{O_1}) + \\ &+ \delta A(m_{O_2}) + \delta A(F_1) + \delta A(F_2). \end{aligned}$$

При учете симметрии механизма и системы приложенных сил относительно вертикальной оси выражение элементарной работы упрощается:

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum \delta A(F_k^e) + \sum \delta A(F_k^i) = 2\delta A(P_{O_1A_1}) + 2\delta A(P_{A_1B_1}) + \\ &+ \delta A(Q) + 2\delta A(R_1) + 2\delta A(R_2) + 2\delta A(m) + 2\delta A(F). \quad (2) \end{aligned}$$

Кривошип O_1A_1 вращается вокруг неподвижной оси O_1 , перпендикулярной к плоскости рисунка. Поэтому

$$\delta A(P_{O_1A_1}) = -m_{O_1}(P_{O_1A_1})d\varphi.$$

Работа отрицательна, так как направления момента силы и углового перемещения $d\varphi$ противоположны. Учитывая, что $m_{O_1}(P_{O_1A_1}) = P \frac{r}{2} \sin \varphi$, находим:

$$\delta A(P_{O_1A_1}) = -P \frac{r}{2} \sin \varphi d\varphi. \quad (3)$$

Штуп A_1B_1 совершает плоское движение. Мгновенный центр скоростей \mathcal{P}_1 находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A_1 и B_1 к скоростям v_{A_1} и v_{B_1} (см. рис. в). Так как $O_1A_1 = A\mathcal{P}_1 = r$, то $dr_{A_1} = O_1A_1d\varphi = A_1\mathcal{P}_1d\varphi_{\mathcal{P}_1}$ и, следовательно, $d\varphi_{\mathcal{P}_1} = d\varphi$, причем $d\varphi_{\mathcal{P}_1}$ направлено по часовой стрелке. Далее,

$$\delta A(P_{A_1B_1}) = -m_{\mathcal{P}_1}(P_{A_1B_1})d\varphi_{\mathcal{P}_1}.$$

Работа отрицательна, так как направления момента силы $P_{A_1B_1}$ и углового перемещения $d\varphi_{\mathcal{P}_1}$ противоположны. Учитывая, что $m_{\mathcal{P}_1}(P_{A_1B_1}) = P \frac{3}{2} r \sin \varphi$, находим:

$$\delta A(P_{A_1B_1}) = -\frac{3}{2} Pr \sin \varphi d\varphi. \quad (4)$$

Вычислим элементарную работу силы тяжести Q ползуна D :

$$\delta A(Q) = Q dx_{B_1}.$$

Определим dx_{B_1} из пропорции:

$$\frac{|dx_{B_1}|}{|dr_{A_1}|} = \frac{B_1\mathcal{P}_1}{A_1\mathcal{P}_1}, \text{ т. е. } |dx_{B_1}| = |dr_{A_1}| \frac{B_1\mathcal{P}_1}{A_1\mathcal{P}_1}.$$

Учитывая, что $dr_{A_1} = O_1A_1d\varphi = r d\varphi$, $B_1\mathcal{P}_1 = 2r \sin \varphi$, $A_1\mathcal{P}_1 = r$, находим: $dx_{B_1} = -2r \sin \varphi d\varphi$, так как элементарное перемещение dx_{B_1} при $\sin \varphi d\varphi > 0$ направлено вверх. Теперь получим:

$$\delta A(Q) = Q dx_{B_1} = -2Qr \sin \varphi d\varphi. \quad (5)$$

Мы определили dx_{B_1} , воспользовавшись мгновенным центром скоростей \mathcal{P}_1 , который ввели выше. Если бы в условии данной задачи было указано, что массой шатунов можно пренебречь, то нам не пришлось бы вычислять работу силы $P_{A_1L_1}$ и, следовательно, определять положение мгновенного центра скоростей \mathcal{P}_1 шатуна. В этом случае элементарное перемещение точки B_1 и, следовательно, ползуна D можно было бы определить так: 1) записать зависимость между координатами x_{B_1} и φ и 2) продифференцировать этот результат. Действительно, из треугольника $O_1A_1B_1$ находим: $x_{B_1} = O_1B_1 = 2r \cos \varphi$, откуда $dx_{B_1} = -2r \sin \varphi d\varphi$, где знак минус указывает, что элементарное перемещение точки B_1 направлено вверх (при $\sin \varphi d\varphi > 0$). В данной задаче второй вариант определения dx_{B_1} оказался проще благодаря тому, что удалось легко записать аналитическую зависимость между x_{B_1} и φ .

Точки приложения опорных реакций R_1 и R_2 при угловом перемещении $d\varphi$ неподвижны, т. е.

$$\delta A(R_1) = \delta A(R_2) = 0. \quad (6)$$

Вращающий момент m приложен к кривошипу O_1A_1 , получившему элементарное угловое перемещение $d\varphi$, поэтому

$$\delta A(m) = m d\varphi. \quad (7)$$

Внутренняя упругая сила пружины F_1 приложена к концу A_1 кривошипа O_1A_1 , поэтому

$$\delta A(F_1) = -m_{O_1}(F_1) d\varphi. \quad (8)$$

Работа отрицательна, так как направления момента силы и углового перемещения $d\varphi$ противоположны.

В положении механизма (см. рис. *a*), когда его кривошины отклонены от вертикали на угол φ , пружина растянута на

$$\Delta = A_2K + LA_1 = 2LA_1 = 2r \sin \varphi.$$

Так как упругая сила пропорциональна деформации пружины, то

$$F_1 = c\Delta = 2rc \sin \varphi.$$

Момент упругой силы F относительно точки O_1 равен

$$m_{O_1}(F_1) = F_1 \cdot O_1L, \text{ где } O_1L = r \cos \varphi, \text{ т. е.}$$

$$m_{O_1}(F_1) = F_1 r \cos \varphi = 2cr^2 \sin \varphi \cos \varphi. \quad (9)$$

Внося (9) в формулу (8), находим:

$$\delta A(F_1) = -cr^2 \sin 2\varphi d\varphi. \quad (10)$$

После подстановки выражений (3), (4), (5), (6), (7) и (10) в формулу (2) получим:

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum \delta A(F_k^e) + \sum \delta A(F_k^i) = -Pr \sin \varphi d\varphi - 3Pr \sin \varphi d\varphi - \\ &\quad - 2Qr \sin \varphi d\varphi + 2m d\varphi - 2cr^2 \sin 2\varphi d\varphi = \\ &= 2[m - (Q + 2P)r \sin \varphi - cr^2 \sin 2\varphi] d\varphi. \quad (11) \end{aligned}$$

По условию задачи, в начальном положении механизма $\varphi = 0$. Следовательно, для вычисления суммы работ внешних и внутренних сил системы на конечном угловом перемещении кривошипов надо взять определенный интеграл от значения δA из формулы (11) в пределах от 0 до φ :

$$\begin{aligned} \sum \Lambda(F_k^e) + \sum \Lambda(F_k^i) &= \\ &= 2 \int_0^\varphi [m - (Q + 2P)r \sin \varphi - cr^2 \sin 2\varphi] d\varphi = \\ &= 2 \left[m\varphi - 2(Q + 2P)r \sin^2 \frac{\varphi}{2} - cr^2 \sin^2 \varphi \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

Переходим к вычислению кинетической энергии механизма, в состав которого входят пять масс (два кривошипа, два шатуна и ползун).

Учитывая симметричность расположения масс механизма относительно вертикальной оси, имеем:

$$T = 2T_{O_1A_1} + 2T_{A_1B_1} + T_D.$$

В начальном положении механизм находился в покое, т. е.

$$T_1 = 0. \quad (13)$$

В конечном положении механизма, когда кривошипы отклонены от вертикалей на угол φ , кинетическая энергия равна

$$T_2 = 2T_{2O_1A_1} + 2T_{2A_1B_1} + T_{2D}. \quad (14)$$

Кинетическая энергия кривошипа, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется формулой

$$T_{2O_1A_1} = \frac{1}{2} I_{O_1} \omega^2,$$

где $I_{O_1} = \frac{Pr^2}{3g}$, а ω — искомая угловая скорость. Следовательно,

$$T_{2O_1A_1} = \frac{Pr^2}{6g} \omega^2. \quad (15)$$

Кинетическая энергия шатуна A_1B_1 , совершающего плоское движение, равна

$$T_{2A_1B_1} = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_{A_1B_1}^2. \quad (16)$$

В данном случае

$$M = \frac{P}{g}, \quad I_C = \frac{Pr^2}{12g}. \quad (17)$$

Скорость центра инерции C шатуна A_1B_1 находим с помощью мгновенного центра скоростей \mathcal{P}_1 (см. рис. в):

$$v_C = v_{A_1} \frac{C\mathcal{P}_1}{A_1\mathcal{P}_1}. \quad (18)$$

В треугольнике $A_1\mathcal{P}_1C$: $A_1C = \frac{r}{2}$, $A_1\mathcal{P}_1 = A_1O_1 = r$. Следовательно,

$$\begin{aligned} C\mathcal{P}_1 &= \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4} - 2r \frac{r}{2} \cos 2\varphi} = \frac{r}{2} \sqrt{5 - 4 \cos 2\varphi} = \\ &= \frac{r}{2} \sqrt{1 + 8 \sin^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Подставив значения $A_1\mathcal{P}_1$ и $C\mathcal{P}_1$ в формулу (18) и учитывая при этом, что $v_{A_1} = O_1A_1\omega = r\omega$, находим:

$$v_C = \frac{r\omega}{2} \sqrt{1 + 8 \sin^2 \varphi}. \quad (19)$$

Угловая скорость шатуна A_1B_1 определяется легко:

$$v_{A_1} = O_1A_1\omega = A_1\mathcal{P}_1\omega_{A_1B_1},$$

т. е.

$$\omega_{A_1B_1} = \omega. \quad (20)$$

Направления $\omega_{A_1B_1}$ и ω противоположны (см. рис. в).

Подставив (17), (19) и (20) в формулу (16), получаем выражение кинетической энергии шатуна A_1B_1 :

$$T_{2A_1B_1} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \frac{r^2 \omega^2}{4} (1 + 8 \sin^2 \varphi) + \frac{1}{2} \frac{Pr^2}{12g} \omega^2 = \frac{Pr^2 \omega^2}{6g} (1 + 6 \sin^2 \varphi). \quad (21)$$

Кинетическая энергия ползуна D , движущегося поступательно, вычисляется по формуле:

$$T_{2D} = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v_D^2. \quad (22)$$

При поступательном движении $v_D = v_{B_1}$. Скорость точки B_1 находим с помощью мгновенного центра скоростей \mathcal{P}_1 (см. рис. в):

$$v_{B_1} = v_{A_1} \frac{B_1\mathcal{P}_1}{A_1\mathcal{P}_1}.$$

Так как $v_{A_1} = O_1A_1\omega = r\omega$, $A_1\mathcal{P}_1 = O_1A_1 = r$, $B_1\mathcal{P}_1 = O_1\mathcal{P}_1 \sin \varphi = 2r \sin \varphi$, то

$$v_D = v_{B_1} = 2r\omega \sin \varphi. \quad (23)$$

Подставив формулу (23) в (22), имеем:

$$T_{2D} = 2 \frac{Q}{g} r^2 \omega^2 \sin^2 \varphi. \quad (24)$$

Скорость точки B_1 можно было определить, не пользуясь мгновенным центром скоростей \mathcal{P}_1 . Для этого следовало записать уравнение движения точки B_1 : $x_{B_1} = 2r \cos \varphi$ и затем взять производную по времени:

$$\dot{x}_{B_1} = v_{B_1} = -2r\dot{\varphi} \sin \varphi = -2r\omega \sin \varphi.$$

Подставив выражения (15), (21) и (24) в формулу (14), находим кинетическую энергию механизма в его конечном положении:

$$T_2 = \frac{2}{3} \frac{r^2 \omega^2}{g} [P + 3(P + Q) \sin^2 \varphi]. \quad (25)$$

Остается подставить формулы (12), (13) и (25) в уравнение (1) и затем определить искомую угловую скорость вращения кривошипа. Получим:

$$\omega = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{m\varphi - 2(Q + 2P)r \sin^2 \frac{\varphi}{2} - cr^2 \sin^2 \varphi}{P + 3(P + Q) \sin^2 \varphi}}.$$

5°. Потенциальная энергия. Если на систему материальных точек действуют силы, однозначно определяемые положениями точек, то система движется в силовом поле.

Силовое поле называется *потенциальным (консервативным)*, если работа сил поля определяется начальными и конечными положениями точек системы и не зависит от вида траекторий этих точек.

Потенциальная энергия материальной точки определяется работой, которую совершает сила поля при перемещении этой точки из данного положения в нулевое.

Потенциальная энергия зависит от положения точки в поле:

$$\Pi = \Pi(x, y, z).$$

Потенциальная энергия системы материальных точек является функцией от координат всех n точек системы, т. е.

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n).$$

Эквипотенциальной поверхностью (поверхностью уровня) называется геометрическое место точек поля, в которых потенциальная энергия имеет одинаковое значение:

$$\Pi(x, y, z) = C.$$

Работа силы поля при перемещении материальной точки в потенциальном поле равна разности потенциальных энергий начального и конечного положений точки:

$$A = \Pi_1 - \Pi_2.$$

Сила, действующая в потенциальном поле, направлена по нормали к эквипотенциальной поверхности в данной точке в сторону убывания потенциальной энергии.

Проекция на ось этой силы равна частной производной потенциальной энергии по соответствующей координате, взятой с обратным знаком:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Здесь $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$, т. е. $\mathbf{F} = -\text{grad } \Pi$.

В случае системы n материальных точек

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k}, \quad \text{где } k = 1, 2, \dots, n.$$

Если даны проекции силы F_x , F_y и F_z на оси декартовых координат и надо определить, является ли сила $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$ силой, действующей в потенциальном поле (потенциальной силой), то следует проверить, имеют ли место равенства

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}.$$

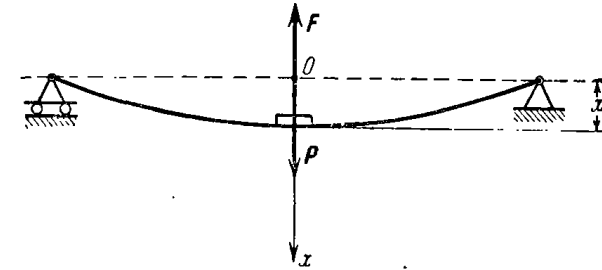
Если эти равенства тождественно удовлетворены, то сила \mathbf{F} потенциальна. В противном случае сила не потенциальна. Элементарная работа потенциальной силы равна полному дифференциалу потенциальной энергии, взятой с обратным знаком:

$$\delta A = -d\Pi.$$

Итак, в случае потенциальных сил элементарная работа силы δA может быть обозначена dA .

Вычисление потенциальной энергии системы материальных точек является одним из этапов решения задач при использовании теоремы об изменении кинетической энергии, уравнений Лагранжа второго рода и т. д.

Задача 355. Груз веса P , лежащий посередине упругой балки, совершает свободные колебания. Упругая сила балки пропорциональна ее прогибу и направлена по вертикали. Проекция упругой силы на вертикальную ось x равна: $F_x = -c\Delta x$, где Δ — прогиб балки в ее середине, а c — коэффициент упругости, численно равный силе, которую надо приложить в середине балки для того, чтобы прогнуть ее на единицу длины.



К задаче 355.

Вычислить потенциальную энергию системы, пренебрегая массой балки.

Решение. Возьмем начало отсчета оси x в середине недеформированной балки.

Изобразим силы, приложенные к грузу: P — вес груза, F — упругая сила балки.

Обе силы потенциальны. Для вычисления потенциальной энергии груза надо сложить потенциальные энергии силы тяжести $\Pi^{(1)}$ и упругой силы $\Pi^{(2)}$:

$$\Pi = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)}. \quad (1)$$

Так как потенциальной энергией называется работа потенциальной силы при перемещении материальной точки из данного положения в нулевое, то

$$\Pi^{(1)} = -Px. \quad (2)$$

Потенциальная энергия силы тяжести P отрицательна при $x > 0$, так как груз для перемещения из данного положения в нулевое должен подняться вверх.

Далее находим:

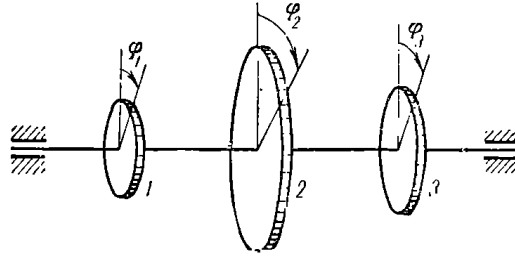
$$\Pi^{(2)} = \frac{cx^2}{2}. \quad (3)$$

Потенциальная энергия упругой балки положительна.

Подставив формулы (2) и (3) в (1), находим искомое выражение потенциальной энергии системы:

$$\Pi = \frac{cx^2}{2} - Px.$$

Задача 356. На горизонтальный упругий вал, коэффициент упругости которого на кручение равен c , насажены три диска. Вследствие упругости вала, во время вращения системы около оси вала диски оказываются повернутыми на разные углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Вычислить потенциальную энергию системы. Центры тяжести дисков лежат на оси вращения.



К задаче 356.

Решение. Вычислим углы закручивания вала. На участке между дисками 1 и 2 угол закручивания вала равен $\varphi_2 - \varphi_1$, а на участке между дисками 2 и 3 — соответственно $\varphi_3 - \varphi_2$.

Поэтому потенциальная энергия системы, состоящая из энергий отдельных участков, будет

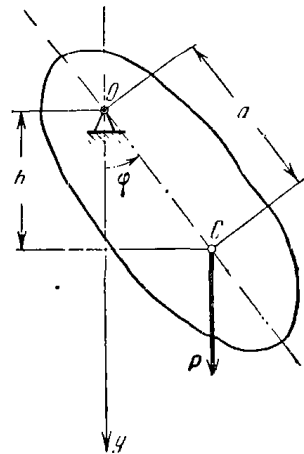
$$\Pi = \frac{c}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{c}{2} (\varphi_3 - \varphi_2)^2.$$

6°. Закон сохранения механической энергии. Если все силы, приложенные к системе материальных точек, потенциальны, то сумма кинетической и потенциальной энергий системы постоянна:

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2.$$

Так как в механизмах и машинах действуют силы сопротивления, которые не потенциальны, то происходит уменьшение механической энергии. Эта энергия расходуется на работу непотенциальных сил и переходит в другие виды энергии (например, в тепловую). Следовательно, закон сохранения механической энергии в этих случаях неприменим, и для поддержания установившегося режима работы машины или механизма необходим приток механической энергии извне.

Задача 357. Вычислить полную механическую энергию физического маятника веса P в зависимости от угла отклонения φ (см. рисунок), если центр тяжести C маятника отстоит от оси привеса на расстоянии a ; I_C — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр тяжести C перпендикулярно к плоскости материальной симметрии.



К задаче 357.

Решение. Направим ось y из точки привеса O по вертикали вниз. Положительное направление отсчета угла φ указано на рисунке. Механическая энергия маятника равна сумме его кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + \Pi. \quad (1)$$

Потенциальной силой является вес маятника P . Следовательно, потенциальная энергия маятника определяется формулой

$$\Pi = -Ph = -Pa \cos \varphi. \quad (2)$$

Кинетическая энергия маятника, качающегося вокруг неподвижной оси O , перпендикулярной к плоскости рисунка, равна

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2.$$

Так как по теореме Штейнера

$$I_O = I_C + \frac{P}{g} a^2,$$

то

$$T = \frac{1}{2} \left(I_C + \frac{P}{g} a^2 \right) \dot{\varphi}^2. \quad (3)$$

Подставив (2) и (3) в формулу (1), получим искомое выражение полной механической энергии физического маятника:

$$E = \frac{1}{2} \left(I_C + \frac{P}{g} a^2 \right) \dot{\varphi}^2 - Pa \cos \varphi.$$

ДИНАМИКА НЕСВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

§ 1. Классификация связей. Число степеней свободы. Классификация сил

Несвободной называется система материальных точек, на движение которых (координаты, скорости и ускорения) наложены некоторые ограничения (связи).

Всякий механизм является примером несвободной системы материальных точек.

Связями называются физические тела, налагающие ограничения на координаты, скорости и ускорения точек материальной системы. Связи делятся на *двухсторонние* и *односторонние*.

Связи называются *двухсторонними* (удерживающими), если они препятствуют перемещениям материальных точек в некоторых направлениях, а также в направлениях прямо противоположных.

Примером двухсторонней связи служит идеальный (невесомый, недеформируемый) стержень, по концам которого размещены две материальные точки. Эти материальные точки не могут ни приблизиться друг к другу, ни отдалиться друг от друга. Если одну из материальных точек, например точку O (рис. 140), закрепить, то вторая точка A может перемещаться по кривой, лежащей на сфере радиуса, равного длине l идеального стержня, т. е. координаты точки A оказываются связанными зависимостью: $x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - l^2 = 0$. Таким образом, двухсторонняя геометрическая связь выражается соотношением

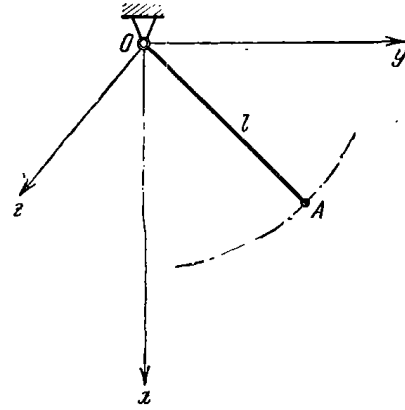


Рис. 140.

координатами точек материальной системы:

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_k, y_k, z_k, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0.$$

Связи называются *односторонними* (несудерживающими), если они препятствуют перемещениям материальных точек в некоторых направлениях, но допускают перемещения в прямо противоположных направлениях.

Такую связь можно получить, если в предыдущем примере идеальный стержень OA заменить нитью. Тогда точки O и A отдалиться друг от друга не могут, но приблизиться имеют возможность, так как при этом произойдет смятие нити (рис. 141).

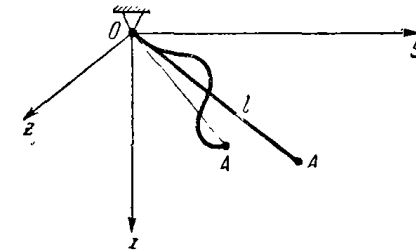


Рис. 141.

Уравнение односторонней связи имеет вид

$$x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - l^2 \leq 0.$$

(Знак равенства соответствует натянутому состоянию нити.) Таким образом, односторонняя связь выражается неравенством вида

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_k, y_k, z_k, \dots, x_n, y_n, z_n) \leq 0.$$

Связи делятся также на *нестационарные* (зависящие от времени) и *стационарные* (не зависящие от времени).

Связь называется *нестационарной*, если в уравнение связи в явном виде входит время, т. е.

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_k, y_k, z_k, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0.$$

(В неявном виде время входит в большинство уравнений связей, так как координаты точек при движении системы, вообще говоря, являются

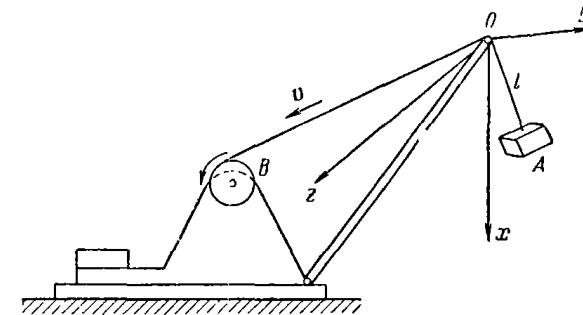


Рис. 142.

функциями времени). В случае подъемного крана, поднимающего груз A (материальную точку), связь, зависящая от времени, создается тросом (рис. 142). При равномерном наматывании троса на

барабан со скоростью v длина свисающей части троса изменится по закону

$$l = l_0 - vt,$$

где l_0 — длина свисающей части троса в начальный момент. Так как груз может раскачиваться, то уравнение этой связи имеет вид $x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - (l_0 - vt)^2 = 0$, т. е. содержит время в явном виде.

Связь называется стационарной, если время в явном виде в уравнение связи не входит (во всех рассмотренных выше примерах, кроме последнего, связи не зависят от времени).

Связи делятся также на *голономные* и *неголономные*. Голономными (интегрируемыми) называются связи, которые накладывают ограничения на положения точек материальной системы (конечно, после дифференцирования уравнения связи по времени можно получить также зависимость между координатами и скоростями точек системы).

Неголономными (неинтегрируемыми) называются связи, которые накладывают ограничения на скорости точек системы. Они выражают зависимость между координатами и скоростями точек системы. Независимо от дифференциальных уравнений движения системы уравнения этих связей не могут быть проинтегрированы.

Примером неголономной системы является шар, катящийся по шероховатой плоскости.

Числом степеней свободы системы материальных точек, подчиненной голономным связям, называется число независимых параметров, однозначно определяющих положения точек системы.

Так, твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет одну степень свободы, так как положение этого твердого тела вполне определяется углом поворота φ вокруг оси вращения.

Твердое тело, совершающее плоское движение, имеет три степени свободы, так как положение любого его сечения, проведенного параллельно неподвижной плоскости, определяется двумя координатами центра тяжести сечения x_C и y_C и углом поворота φ .

Системой с тремя степенями свободы является твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки. Его положение определяется тремя углами Эйлера φ , ψ и θ .

Системой с шестью степенями свободы является свободное твердое тело, так как его положение определяется шестью независимыми параметрами: тремя координатами центра тяжести x_C , y_C , z_C и тремя углами Эйлера φ , ψ и θ .

Упругое тело имеет бесчисленное множество степеней свободы.

Подавляющее большинство механизмов является системами с одной степенью свободы. Так, положение любой точки кривошипно-

шатунного механизма определяется углом поворота φ кривошина (рис. 143).

Диск K , вращающийся вокруг оси AB , которая в свою очередь вращается вокруг оси CD (рис. 144), является системой с двумя степенями свободы. Для определения положения диска K следует задать

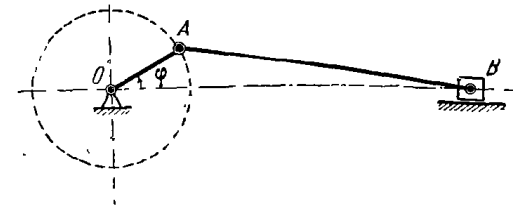


Рис. 143.

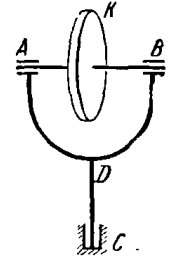


Рис. 144.

два независимых параметра: угол поворота диска вокруг оси AB и угол поворота вилки ADB вокруг оси CD .

Связи, ограничивая перемещения материальных точек системы, действуют на эти точки посредством сил, называемых *силами реакций связей*.

В динамике несвободной системы материальных точек, как правило, силы удобно разделять на задаваемые (активные) силы и силы реакций связей (пассивные силы).

Следует иметь в виду, что к «задаваемым» относятся все силы, не являющиеся силами реакций связей. Таким образом, задаваемой может быть какая-либо неизвестная — искомая сила, не входящая в число сил реакций связей (это показывает условность термина «задаваемые силы»).

Принцип освобожденности от связей. В задачах динамики несвободной системы материальных точек пользуются *принципом освобожденности от связей*, который уже применялся в задачах статики. Отбрасывая мысленно связи, наложенные на систему, включают силы реакций связей в число задаваемых сил. При этом несвободная система материальных точек рассматривается как система свободная, движущаяся под действием задаваемых сил и сил реакций связей.

При движении системы силы реакций связей являются, вообще говоря, переменными. Они зависят от положений точек, их скоростей, ускорений и времени. Это значительно усложняет решение обратных задач, в которых движения точек системы определяются в зависимости от приложенных сил, т. е., в частности, от сил реакций связей. В подобных задачах приходится из системы дифференциальных уравнений движения исключать силы реакций связей. После нахождения движения точек системы и, следовательно, их скоростей и ускорений можно найти величины сил реакций связей.

§ 2. Метод кинестатики

1°. Силы инерции. Приведение сил инерции к главному вектору и главному моменту. При взаимодействии двух свободных материальных точек к одной из них приложена сила F_1 , называемая действием, а к другой — сила F_2 , называемая противодействием. Материальная точка A (рис. 145), к которой приложено действие со стороны материальной точки B , приобретает ускорение ω и впредь именуется «ускоряемой».

Материальная точка B , сообщившая ускорение материальной точке A , называется «ускоряющей».

К «ускоряющей» точке B приложено противодействие со стороны «ускоряемой» точки A .

На основании принципа равенства действия и противодействия,

$$F_2 = -F_1.$$

В соответствии с основным законом динамики, действие равно $F_1 = m\omega$, следовательно, противодействие равно $F_2 = -m\omega$. Противодействие именуется *силой инерции* и обозначается J .

Итак, в случае свободной материальной точки сила инерции равна по модулю произведению массы «ускоряемой» точки A на модуль ее ускорения, направлена в сторону, противоположную ускорению точки A и приложена к «ускоряющей» точке B .

Если при движении несвободной материальной точки ее траектория предопределена связью, наложенной на эту точку, то к материальной точке, являющейся «ускоряемой», приложено действие со стороны наложенной связи, которая в данном случае заменяет «ускоряющую» точку.

На основании принципа равенства действия и противодействия, к связи приложено со стороны материальной точки противодействие, именуемое силой инерции J . Так как $F_1 = m\omega$, а $F_2 = -F_1$, то $J = F_2 = -m\omega$.

Так, при равномерном движении колечка A по проволоке B траектория колечка A , являющегося «ускоряемой» точкой, предопределена проволокой, являющейся связью. Колечко A приобретает центростремительное ускорение под действием силы D , приложенной к нему со стороны проволоки — связи. На основании принципа равенства действия и противодействия, к соответствующей точке проволоки приложено противодействие Π , именуемое силой инерции J (рис. 146).

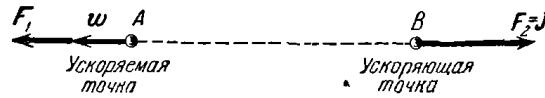


Рис. 145.

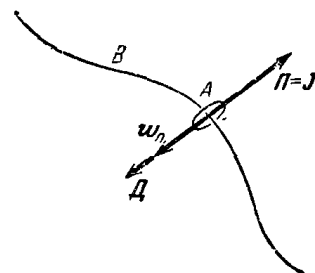


Рис. 146.

Если на *несвободную* — ускоряемую материальную точку паложены связи, а также действуют ускоряющие точки, то *силы инерции* частично приложены к связям и частично к «ускоряющим» точкам.

Как известно из статики, систему сил можно привести к силе, векторно равной главному вектору, и к паре сил с моментом, векторно равным главному моменту. *Приведение сил инерции дает следующие результаты* (ниже в 2° при изложении метода кинестатики поясняется, что силы инерции условно прилагаются «к ускоряемому» твердому телу):

а) при *поступательном движении твердого тела* силы инерции приводятся к равнодействующей, приложенной к центру тяжести C твердого тела. Равнодействующая $R^{(J)}$ равна по модулю произведению массы твердого тела на ускорение любой его точки и направлена противоположно этому ускорению: $R^{(J)} = -M\omega$ (рис. 147);

б) при *вращении плоской фигуры вокруг перпендикулярной к ней неподвижной оси* силы инерции приводятся к равнодействующей (рис. 148), приложенной в центре качаний соответствующего физического маятника, ось пружины которого совмещена с неподвижной осью данного твердого тела (центр качаний K отстоит от оси пружины на расстоянии, равном приведенной длине физического маятника: $l_{пр} = \frac{I_z}{Ma}$, где I_z — момент инерции твердого тела относительно оси пружины, M — масса твердого тела, a — расстояние от оси пружины до центра тяжести). Равнодействующая сил инерции $R^{(J)}$ равна по модулю произведению

массы твердого тела на ускорение его центра тяжести и направлена в сторону, противоположную этому ускорению

$$R^{(J)} = -M\omega_c,$$

так как $\omega_c = a\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, то $R^{(J)} = Ma\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$; направление $R^{(J)}$ определяется углом α , находимым из уравнения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon_z}{\omega^2}.$$

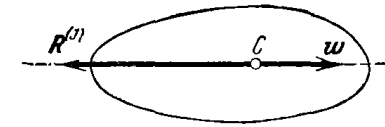


Рис. 147.

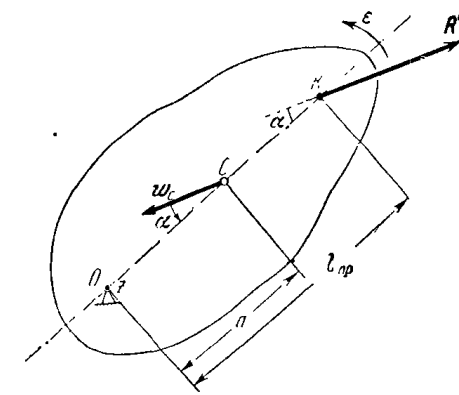


Рис. 148.

Если за центр приведения выбрать центр тяжести C твердого тела, то силы инерции приводятся к силе, векторно равной главному вектору $V^{(J)}$, и к паре сил с моментом, равным главному моменту $m_C^{(J)}$ (рис. 149).

Главный вектор сил инерции $V^{(J)}$ равен по модулю произведению массы твердого тела на ускорение его центра тяжести и направлен в сторону, противоположную этому ускорению:

$$V^{(J)} = -M\omega_C,$$

причем

$$V^{(J)} = Ma\sqrt{\varepsilon^2 - \dot{\omega}^2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon_z}{\dot{\omega}^2}.$$

Главный момент сил инерции $m_C^{(J)}$ относительно оси, проходящей через центр тяжести C параллельно оси вращения, равен по модулю произведению момента инерции твердого тела относительно оси C на модуль углового ускорения твердого тела ε . Знак главного момента сил инерции противоположен знаку проекции углового ускорения: $m_C^{(J)} = -I_C \varepsilon_z$ (ε_z — проекция углового ускорения ε на ось вращения z).

Если за центр приведения выбрать точку O , лежащую на неподвижной оси, то силы инерции приводятся к силе, равной главному вектору $V^{(J)}$, и паре сил, момент которой равен главному моменту $m_O^{(J)}$. По-прежнему $V^{(J)} = -M\omega_C$, а в выражение главного момента сил инерции вместо I_C входит I_O , т. е. $m_O^{(J)} = -I_O \varepsilon_z$, где $I_O = I_C + Ma^2$.

В случае, когда центр тяжести C лежит на оси вращения плоской фигуры, главный вектор сил инерции $V^{(J)}$ обращается в нуль, и следовательно, система сил инерции приводится к паре сил с моментом $m_O^{(J)} = -I_O \varepsilon_z$.

в) При движении плоской фигуры силы инерции приводятся к силе, равной главному вектору $V^{(J)}$, приложенной в центре приведения, и к паре сил, момент которой равен главному моменту относительно

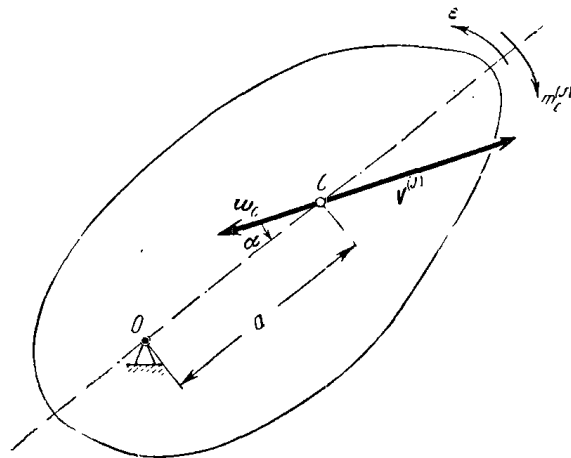


Рис. 149.

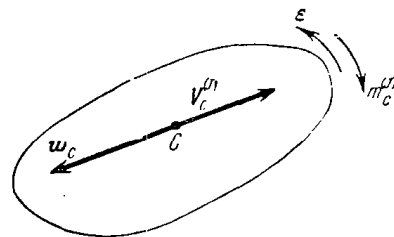


Рис. 150.

оси, проходящей через центр приведения перпендикулярно к неподвижной плоскости. Так, если за центр приведения сил инерции выбрать центр тяжести C твердого тела, то

$$V^{(J)} = -M\omega_C, \quad m_C^{(J)} = -I_C \varepsilon_z.$$

Приведение сил инерции к силе, равной главному вектору, и паре сил, момент которой равен главному моменту, является одним из важных этапов решения задач динамики несвободной системы материальных точек в случае применения метода кинестатики, либо общего уравнения динамики (см. ниже § 5), а также при определении динамических давлений на ось вращающегося твердого тела (см. ниже § 3). Отметим, что с силами инерции связаны *формальные* методы решения задач. Все упомянутые далее задачи могут быть решены несколько проще без применения сил инерции. В этой книге излагаются методы решения задач с использованием сил инерции лишь потому, что эти методы, в силу сложившихся исторических традиций, еще довольно распространены в инженерной практике. В динамике нет таких задач, которые не могли бы быть решены без применения сил инерции. В дальнейшем неоднократно дается сравнение методов решения задач с использованием и без использования сил инерции.

Главный вектор и главный момент сил инерции, условно приведенных к ускоряемому твердому телу, следует определять по приведенным выше формулам, в соответствии с видом движения твердого тела (поступательное движение, вращение вокруг неподвижной оси, плоское движение). Если с помощью готовых формул главный вектор и главный момент вычислить нельзя, то в случае непрерывного распределения масс надо вычислить силы инерции для выделенного элемента и затем распространить суммирование по всему твердому телу, вычислив определенный интеграл в соответствующих пределах.

В следующем параграфе будут рассмотрены методы приведения сил инерции материальных точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Задача 358. Определить главный момент сил инерции $m_B^{(J)}$ относительно точки B колеса 3 эциклической передачи, изображенной на рис. а. Колесо 1 неподвижно. Радиусы колес 1 и 3 равны. Передача приводится в движение кривошипа OAB , вращающегося вокруг оси O , перпендикулярной к плоскости, в которой расположен механизм, с постоянной угловой скоростью ω_0 . К чему приводятся силы инерции колеса 3?

Решение. Главный момент сил инерции колеса 3 относительно точки B определяется по формуле

$$m_{Bz}^{(J)} = -I_B \varepsilon_{3z}.$$

Кривошип вращается равномерно, колеса передачи круглые. Поэтому угловые скорости всех колес с течением времени не меняются.

В силу этого, угловые ускорения колес равны нулю, т. е. $\epsilon_{3z} = 0$ и, следовательно, $m_{Bz}^{(J)} = 0$.

Наблюдателю, вращающемуся вместе с кривошипом, он кажется неподвижным, а неподвижное колесо — вращающимся с угловой скоростью ω_0 в направлении, противоположном вращению кривошипа (рис. б). Запишем зависимости между относительными угловыми скоростями колес и их радиусами:

$$\frac{\omega_{1z}^{(r)}}{\omega_{2z}^{(r)}} = -\frac{r_2}{r_1}$$

и

$$\frac{\omega_{2z}^{(r)}}{\omega_{3z}^{(r)}} = -\frac{r_3}{r_2}$$

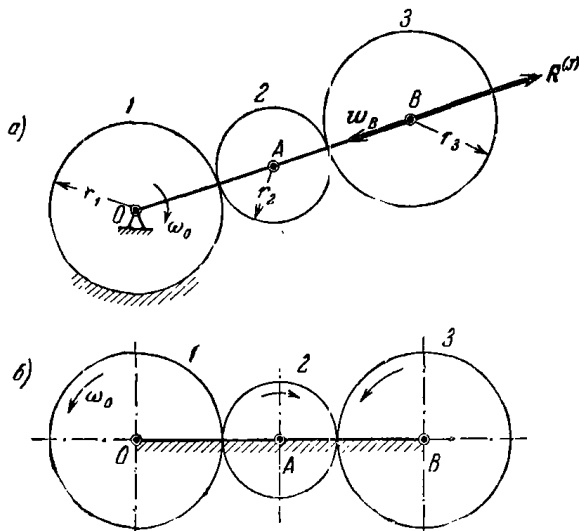
Перемножив пропорции, получим: $\frac{\omega_{1z}^{(r)}}{\omega_{3z}^{(r)}} = \frac{r_3}{r_1}$. Так как по условию $r_3 = r_1$, то $\omega_{3z}^{(r)} = \omega_{1z}^{(r)}$.

Согласно теореме о сложении вращений твердого тела вокруг параллельных осей, $\omega_2^{(a)} = \omega_2^{(e)} + \omega_2^{(r)}$, т. е. $\omega_2^{(r)} = \omega_2^{(a)} - \omega_2^{(e)}$. В данной задаче $\omega_{1z}^{(r)}$ и $\omega_{3z}^{(r)}$ — относительные угловые скорости, ω_{1z} и ω_{3z} — абсолютные угловые скорости, а переносной угловой скоростью служит ω_{0z} . Поэтому

$$\omega_{1z}^{(r)} = \omega_{1z} - \omega_{0z}, \quad \omega_{3z}^{(r)} = \omega_{3z} - \omega_{0z}.$$

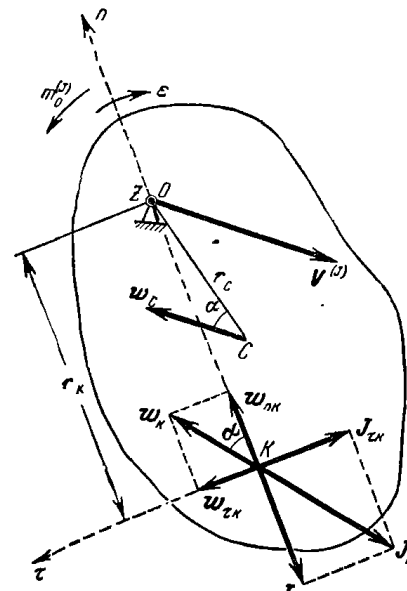
Учитывая, что $\omega_{3z}^{(r)} = \omega_{1z}^{(r)}$, находим: $\omega_{3z} = \omega_{1z}$; но, по условию, колесо 1 неподвижно, т. е. $\omega_{1z} = 0$, следовательно, $\omega_{3z} = 0$. Это значит, что колесо 3 совершает круговое поступательное движение.

Как известно, при поступательном движении твердого тела силы инерции приводятся к равнодействующей, приложенной к центру тяжести твердого тела: $R^{(J)} = -M\omega$, где ω — ускорение любой точки твердого тела. Легко определить ускорение точки B колеса 3, так как точка B одновременно является концом кривошипа OAB. Если ω_0 — постоянная, то $\omega_B = \omega_{B1} = |AB|\omega_0^2$. Ускорение ω_B направлено от B к O (рис. а). Следовательно, равнодействующая сила инерции $R^{(J)}$, приложенная в центре тяжести B колеса 3, направлена вдоль OB от оси вращения O и по модулю равна $R^{(J)} = \frac{P_3}{g} |OB| \omega_0^2$.



К задаче 358.

Задача 359. Плоская фигура вращается вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка. Определить главный вектор и главный момент сил инерции материальных точек плоской фигуры, взяв за центр приведения точку O. Вектор ϵ направлен перпендикулярно к плоскости рисунка от нас.



К задаче 359.

Решение. Направляем ось z в сторону ϵ , т. е. перпендикулярно к плоскости рисунка от нас.

Возьмем произвольную точку K на плоской фигуре. Ускорение w_k точки K складывается из его центростремительной w_{nk} и вращательной w_{zk} составляющих, причем $w_{nk} = r_k \omega^2$, $w_{zk} = r_k \epsilon_z$, где $r_k = OK$ — расстояние от точки K до оси вращения O (направления осей z и n показаны на рисунке).

Соответственно ускорениям w_{nk} , w_{zk} и w_k изображаем направленные в противоположные стороны силы инерции k-й материальной точки: J_{nk} , J_{zk} и J_k . Центробежная сила инерции: $J_{nk} = -m_k w_{nk}$. Ее проекция на ось n: $J_{nk} = -m_k r_k \omega^2$. Вращательная сила инерции $J_{zk} = -m_k w_{zk}$. Ее проекция на ось z: $J_{zk} = -m_k r_k \epsilon_z$. Суммарная сила инерции: $J_k = -m_k w_k$. Ее модуль: $J_k = m_k r_k \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}$.

По определению главного вектора сил инерции: $V^{(J)} = \sum J_k$; учитывая, что $J_k = -m_k w_k$, запишем: $V^{(J)} = -\sum_{k=1}^n m_k w_k$.

Воспользовавшись формулой, приведенной в 1° § 2 главы IX:

$w_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k w_k}{M}$, где M — масса системы материальных точек, а w_C — ускорение центра инерции системы, получим:

$$V^{(J)} = -\sum_{k=1}^n m_k w_k = -M w_C,$$

т. е. главный вектор сил инерции направлен противоположно ускорению w_C центра тяжести C плоской фигуры. Учитывая, что по условию задачи за центр приведения взята точка O, силу $V^{(J)}$ надо приложить в этой точке (см. рисунок). Так как по модулю $w_C =$

$= r_C \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, где r_C — расстояние от оси вращения O до центра тяжести C плоской фигуры, то модуль главного вектора сил инерции равен

$$V^{(J)} = Mr_C \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Переходим к вычислению главного момента сил инерции материальных точек плоской фигуры $m_O^{(J)}$ относительно точки O . Он равен сумме моментов всех сил инерции относительно этой точки:

$$m_O^{(J)} = \sum_{k=1}^n m_O(J_k) = \sum_{k=1}^n m_O(J_{nk}) + \sum_{k=1}^n m_O(J_{\tau k}).$$

Моменты центробежных сил инерции относительно точки O равны нулю:

$$\sum_{k=1}^n m_O(J_{nk}) = 0.$$

Поэтому:

$$m_O^{(J)} = \sum_{k=1}^n m_O(J_{\tau k}) = \sum_{k=1}^n J_{\tau k} r_k.$$

Так как $J_{\tau k} = -m_k r_k \varepsilon_z$, то

$$m_O^{(J)} = \sum_{k=1}^n J_{\tau k} r_k = -\varepsilon_z \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = -I_O \varepsilon_z,$$

где $I_O = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2$ — момент инерции плоской фигуры относительно оси O , перпендикулярной к ее плоскости. Итак,

$$m_O^{(J)} = -I_O \varepsilon_z.$$

Знак главного момента $m_O^{(J)}$ противоположен знаку проекции углового ускорения ε_z .

Задача 360. Используя результат предыдущей задачи, определить главный вектор и главный момент сил инерции плоской фигуры, приняв за центр приведения центр тяжести C плоской фигуры.

Решение. На рис. *a* изображена сила $V^{(J)}$, равная главному вектору сил инерции и приложенная в точке O . В решении предыдущей задачи было получено:

$$V^{(J)} = -M\omega_c,$$

$$V^{(J)} = Mr_C \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

$$m_O^{(J)} = -I_O \varepsilon_z.$$

Совершим переход от старого центра приведения O к новому центру приведения C . Для этого изобразим в точке C два уравновешивающихся вектора: $V^{(J)}$ и $V'^{(J)}$, причем $V^{(J)} = -V'^{(J)}$. Теперь сила инерции $V^{(J)}$ приложена в центре тяжести C плоской фигуры. При этом появилась присоединенная пара сил инерции в составе силы $V^{(J)}$, приложенной в точке O , и силы $V'^{(J)}$. Плечо присоединенной пары сил инерции $h_C = r_C \sin \alpha$. Следовательно, момент присоединенной пары сил инерции равен

$$m_{\text{пр}}^{(J)} = V^{(J)} h_C = V^{(J)} r_C \sin \alpha = Mr_C^2 \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \sin \alpha.$$

Главный момент сил инерции относительно нового центра приведения C равен сумме главного момента сил инерции относительно старого центра приведения O и момента присоединенной пары сил инерции, т. е.

$$m_C^{(J)} = m_O^{(J)} + m_{\text{пр}}^{(J)} = -I_O \varepsilon_z + Mr_C^2 \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \sin \alpha.$$

К задаче 360.

Воспользовавшись рис. *б*, находим:

$$\sin \alpha = \frac{\omega_c c}{\omega_c} = \frac{r_C \varepsilon_z}{r_C \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{\varepsilon_z}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Следовательно,

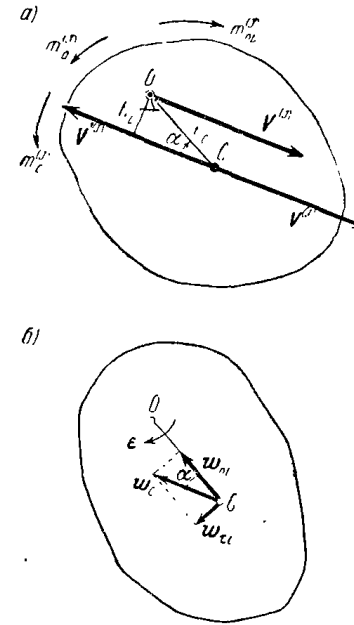
$$m_C^{(J)} = -I_O \varepsilon_z + Mr_C^2 \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \frac{\varepsilon_z}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = -I_O \varepsilon_z + Mr_C^2 \varepsilon_z = -(I_O - Mr_C^2) \varepsilon_z.$$

Применив теорему Штейнера: $I_O = I_C + Mr_C^2$, находим, что $I_O - Mr_C^2 = I_C$.

Итак, главный момент сил инерции относительно центра тяжести C равен

$$m_C^{(J)} = -I_C \varepsilon_z.$$

Задача 361. Линейка эллипсографа AB приводится в движение посредством кривошипа OC , вращающегося с постоянной угловой скоростью ω_0 .



Определить главный вектор и главный момент сил инерции линейки AB веса P и длины l , считая ее однородным прямолинейным стержнем; $OC=AC=CB=\frac{l}{2}$.

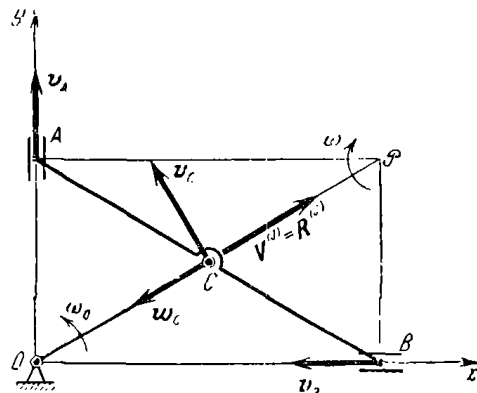
Решение. Линейка AB совершает плоское движение. Поэтому ее силы инерции приводятся к силе, равной главному вектору $V^{(J)}$, и паре сил, момент которой равен главному моменту $m_C^{(J)}$.

Сила, равная главному вектору сил инерции $V^{(J)}$, приложена в центре тяжести линейки и направлена в сторону, противоположную ускорению ω_C центра тяжести C : $V^{(J)} = -M\omega_C$. Так как центр тяжести C линейки AB одновременно является кохом кривошипа OC , то $\omega_C = \omega_{Cn} + \omega_{C\tau}$. При постоянной угловой скорости вращения кривошипа $\omega_{C\tau} = 0$, итак, $\omega_C = \omega_{Cn}$. Ускорение ω_C , будучи центростремительным, направлено от C к O . Следовательно, главный вектор сил инерции $V^{(J)}$ направлен вдоль кривошипа OC от оси вращения O . По модулю он равен $V^{(J)} = M\omega_C$. Учитывая, что $\omega_C = \omega_{Cn} = |OC| \omega_0^2 = \frac{l}{2} \omega_0^2$, находим:

$$V^{(J)} = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \omega_0^2.$$

Главный момент сил инерции линейки AB определяется по формуле $m_C^{(J)} = -I_C \epsilon_z$, где $I_C = \frac{Pl^2}{3g}$ — момент инерции линейки AB относительно оси, проходящей через ее центр тяжести C перпендикулярно к неподвижной плоскости, а ϵ_z — проекция углового ускорения линейки AB на ось z , перпендикулярную к плоскости рисунка.

Определив положение мгновенного центра скоростей \mathcal{P} линейки как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к соответствующим скоростям, находим угловую скорость линейки AB . Точка C как конец кривошипа OC имеет скорость $v_C = |OC| \omega_0$; с другой стороны, скорость точки C , лежащей также на линейке AB , дается формулой $v_C = |C\mathcal{P}| \omega$. Поэтому $|C\mathcal{P}| \omega = |OC| \omega_0$, т. е. $\omega = \frac{|OC|}{|C\mathcal{P}|} \omega_0$. Так как $OC = C\mathcal{P} = \frac{l}{2}$, то угловая скорость линейки AB равна $\omega = \omega_0$. Значит, угловое ускорение линейки равно нулю:



К задаче 361.

$\epsilon = \frac{d\omega_0}{dt} = 0$ и, следовательно, $\epsilon_z = 0$. Итак, главный момент сил инерции линейки равен нулю:

$$m_C^{(J)} = -I_C \epsilon_z = 0.$$

Значит, силы инерции точек линейки приводятся к равнодействующей силе, равной главному вектору сил инерции.

Задача 362. Определить главный вектор и главный момент сил инерции зубчатого колеса 2, находящегося во внутреннем зацеплении с неподвижным зубчатым колесом 1.

Колесо 2 веса P и радиуса r приводится в движение кривошипом $OA = 2r$, имеющим в данный момент угловую скорость ω_0 и угловое ускорение ϵ_0 . Колесо 2 считать сплошным однородным диском.

Решение. Колесо 2 совершает плоское движение. При этом главный вектор сил инерции $V^{(J)}$ направлен противоположно ускорению ω_A и равен по модулю $V^{(J)} = \frac{P}{g} \omega_A$. Так как $\omega_A = OA \sqrt{\epsilon_0^2 + \omega_0^4}$, а $OA = 2r$, то

$$V^{(J)} = \frac{2P}{g} r \sqrt{\epsilon_0^2 + \omega_0^4}$$

(см. рис. а).

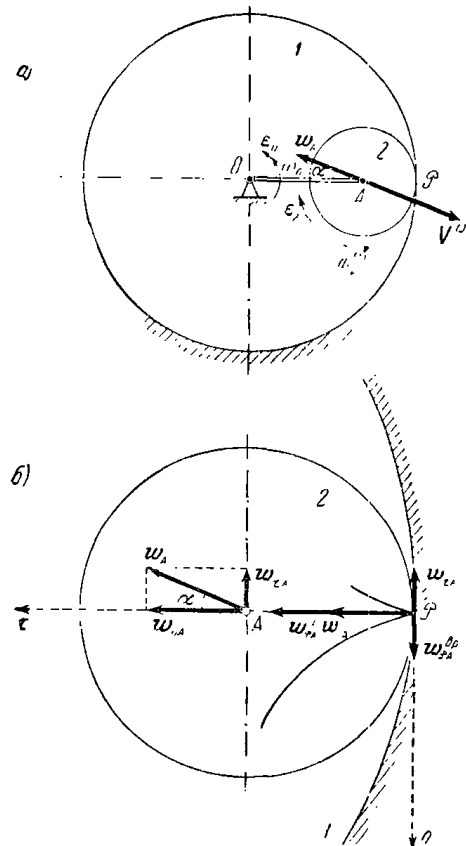
Главный момент сил инерции колеса 2 имеет знак, противоположный знаку проекции углового ускорения, причем

$$m_A^{(J)} = -I_A \epsilon_{2z}. \quad (1)$$

Для определения углового ускорения ϵ_{2z} колеса 2 воспользуемся его мгновенным центром скоростей \mathcal{P} , который, как известно, имеет только касательное ускорение. Траекторией точки \mathcal{P} является гипоциклоида, касательная τ к которой в точке \mathcal{P} направлена вдоль кривошипа.

Направим ось τ вдоль кривошипа OA и ось n — перпендикулярно к оси τ . Так как $\omega_{\mathcal{P}}$ лежит на оси τ , то проекция $\omega_{\mathcal{P}}$ на ось n равна нулю:

$$\omega_{\mathcal{P}n} = 0. \quad (2)$$



К задаче 362.

Определяем теперь ускорение $w_{\mathcal{F}}$, приняв за полюс точку A , т. е.

$$w_{\mathcal{F}} = w_{\tau A} + w_{nA} + w''_{\mathcal{F}A} + w^{np}_{\mathcal{F}A}.$$

Спроектировав это векторное равенство (см. рис. б) на ось n и используя формулу (2), получим:

$$w^{np}_{\mathcal{F}An} + w_{\tau An} = 0. \tag{3}$$

Так как $w^{np}_{\mathcal{F}An} = |AP| \varepsilon_{2z} = r \varepsilon_{2z}$, а $w_{\tau An} = -|OA| \varepsilon_{0z} = -2r \varepsilon_{0z}$, то, подставив эти значения в формулу (3), имеем:

$$\varepsilon_{2z} = -2\varepsilon_{0z}. \tag{4}$$

Момент инерции колеса 2 относительно оси A , перпендикулярной к его плоскости,

$$I_A = \frac{P_2 r^2}{2g}. \tag{5}$$

После подстановки ε_{2z} из формулы (4) и I_A из формулы (5) в (1), находим:

$$m_A^{(J)} = \frac{P_2}{g} r^2 \varepsilon_{0z}.$$

2°. Метод кинетостатики. Методом кинетостатики называется *формальный* прием, дающий возможность записать уравнения движения в виде уравнений равновесия.

Применяя метод кинетостатики к движущейся материальной точке, следует записать условие ее «равновесия» под действием задаваемых сил, сил реакций связей, а также фиктивных сил инерции:

$$F + R + J = 0,$$

где F — равнодействующая задаваемых сил, приложенных к материальной точке, R — равнодействующая сил реакций связей, наложенных на материальную точку, J — сила инерции материальной точки, равная по модулю произведению массы точки на модуль ее ускорения и направленная противоположно ускорению: $J = -m w$.

В формулировке метода кинетостатики сила инерции именуется фиктивной, так как она к данной материальной точке не приложена. (В действительности эта сила инерции приложена к «ускоряющим» материальным точкам и к связям, наложенным на данную точку.) Добавление к силам F и R силы инерции J , не приложенной к данной точке, приводит, естественно, к тому, что уравнения движения принимают вид уравнений равновесия.

При движении материальной точки по кривой силу инерции можно разложить на две составляющие, соответствующие касательному и

нормальному ускорениям точки: касательную силу инерции J_{τ} и нормальную силу инерции J_n (рис. 151), причем

$$J_{\tau} = -m w_{\tau}, \quad J_n = -m w_n,$$

$$J = -m w = J_{\tau} + J_n.$$

По модулю

$$J = m \sqrt{w_{\tau}^2 + w_n^2}.$$

Метод кинетостатики в приложении к несвободной системе материальных точек приводит к системе уравнений:

$$F_1 + R_1 + J_1 = 0,$$

$$F_2 + R_2 + J_2 = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$F_n + R_n + J_n = 0.$$

Число векторных уравнений равно числу материальных точек системы.

Если изучаемым объектом является твердое тело, то, применяя метод кинетостатики, надо составить уравнения «равновесия» этого тела, включив в них задаваемые силы, силы реакций связей и фиктивные силы инерции.

Методом кинетостатики можно пользоваться при решении прямых задач динамики несвободной системы материальных точек, т. е. при решении задач, в которых по заданному движению определяются неизвестные силы. Однако все эти задачи несколько менее громоздко могут быть решены обычным путем — посредством применения основного уравнения динамики к каждой из материальных точек системы, т. е.

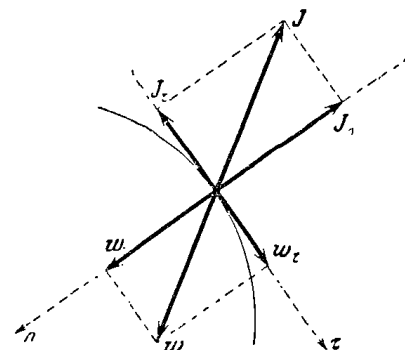


Рис. 151.

$$m_k w_k = F_k + R_k, \quad \text{где } k = 1, 2, \dots, n.$$

При решении же обратных задач, т. е. таких, в которых по заданным силам определяется движение, применение метода кинетостатики целесообразно.

Мы излагаем в этой книге метод кинетостатики, как уже упоминалось выше, лишь потому, что им, в силу установившихся традиций, еще довольно часто пользуются в различных инженерных дисциплинах. (При этом иногда метод кинетостатики ошибочно именуют «приемом Даламбера», который в этой книге не излагается.)

Методом кинестатики можно пользоваться в случаях, когда в число заданных и неизвестных величин входят: массы материальных точек, моменты инерции твердых тел, скорости и ускорения точек, угловые скорости и угловые ускорения твердых тел, силы и моменты сил.

Решение задач с помощью метода кинестатики рекомендуется выполнять в следующей последовательности:

1) изобразить на рисунке задаваемые силы, приложенные к каждой из материальных точек;

2) применив принцип освобожденности от связей, изобразить силы реакций связей, наложенных на каждую из материальных точек системы;

3) добавить к задаваемым силам и силам реакций связей фиктивные силы инерции материальных точек системы;

4) выбрать систему координат;

5) составить уравнения «равновесия» для каждой из материальных точек системы;

6) решив составленную систему уравнений, определить искомые величины.

Задача 363. Груз веса P совершает колебания на пружине, подвешенной верхним концом к потолку, по закону $x = a \sin \omega t$. Определить силу натяжения пружины. Массой пружины пренебречь. Начало оси x , направленной по вертикали вниз, находится в положении равновесия груза.

Решение. К грузу приложены две силы — его вес P и упругая сила пружины, проекция которой на ось x равна F_x .

Для решения задачи методом кинестатики прикладываем к грузу еще фиктивную силу инерции $J = -\frac{P}{g} \omega$. (Сила инерции названа фиктивной, так как она в действительности к грузу не приложена.)

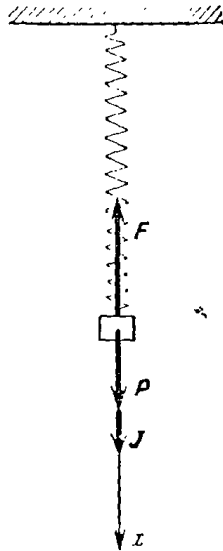
Зная закон движения груза $x = a \sin \omega t$, определяем проекцию его ускорения на ось x :

$$\omega_x = \ddot{x} = -a\omega^2 \sin \omega t.$$

Следовательно, проекция на ось x силы инерции J имеет вид

$$J_x = -\frac{P}{g} \omega_x = \frac{P}{g} a\omega^2 \sin \omega t.$$

Запишем уравнение «равновесия» груза в проекции на ось x . Мы можем уравнению движения формально придать вид уравнения



К задаче 363.

равновесия, потому что силу инерции J приложили к грузу, в то время как в действительности она на груз не действует:

$$P + J_x + F_x = 0.$$

Из этого уравнения находим:

$$F_x = -(P + J_x).$$

Учитывая, что $J_x = \frac{P}{g} a\omega^2 \sin \omega t$, получим:

$$F_x = -\left(P + \frac{P}{g} a\omega^2 \sin \omega t\right).$$

Искомая сила T натяжения пружины равна упругой силе F по модулю и направлена противоположно, т. е.

$$T = P + \frac{P}{g} a\omega^2 \sin \omega t.$$

Нетрудно определить максимальное и минимальное значения силы T :

$$T_{\max} = P + \frac{P}{g} a\omega^2, \quad T_{\min} = P - \frac{P}{g} a\omega^2.$$

Итак:

$$P - \frac{P}{g} a\omega^2 \leq T \leq P + \frac{P}{g} a\omega^2.$$

Так, в частности, при $P = 2 \text{ кг}$, $a = 2 \text{ см}$, $\omega = 100 \text{ сек}^{-1}$ находим: $-38,8 \text{ кг} \leq T \leq 42,8 \text{ кг}$. В случае же равновесия груза на пружине $T = 2 \text{ кг}$.

Не прибегая к методу кинестатики, эту прямую задачу можно было решить с помощью дифференциального уравнения движения груза в проекции на ось x :

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = P - F_x.$$

Из последнего уравнения при учете соотношения $\ddot{x} = -a\omega^2 \sin \omega t$ легко находится

$$F_x = -\left(P + \frac{P}{g} a\omega^2 \sin \omega t\right).$$

Таким образом, применение в этой задаче метода кинестатики несколько более громоздко (приходится дополнительно определить и изобразить силу инерции) и никаких преимуществ перед использованием дифференциального уравнения движения материальной точки не имеет.

Задача 364. При исполнении циркового аттракциона мотоциклист движется с постоянной по величине скоростью v по внутренней поверхности полусферы радиуса r . Он описывает в горизонтальной плоскости окружность радиуса $AB = \rho$. Схематизируя мотоциклиста

с мотоциклом в виде точечной массы веса P , вычислить давление на полусферу и максимальную скорость движения. Коэффициент трения резиновых покрышек о внутреннюю поверхность полусферы равен f .

Решение. Проведем вертикальную плоскость через центр O и точку A , изображающую произвольное положение точечной массы. Оси τ_1 и n_1 обозначены на рисунке. Обозначим α — угол, образуемый касательной τ_1 с вертикалью. К точке A приложена задаваемая сила — вес P . Силами реакций связей являются: нормальная сила реакции поверхности полусферы R и сила трения $F_{\text{тр}}$. При равномерном движении точки A ее вращательное ускорение равно нулю. Поэтому и вращательная сила инерции равна нулю:

$$J_{\tau} = -m\omega_{\tau} = 0.$$

Центробежная сила инерции точечной массы A направлена противоположно ее центростремительному ускорению ω_n , т. е. по горизонтали направо. По модулю

$$J_n = \frac{P}{g} \omega_n = \frac{P}{g} \frac{v^2}{\rho}.$$

Сила трения $F_{\text{тр}}$ направлена вдоль оси τ_1 вниз (см. рисунок).

Применяя метод кинетостатики, запишем уравнения «равновесия» точки A в проекциях на оси τ_1 и n_1 :

$$\sum F_{k\tau_1} = -F_{\text{тр}}^{\text{max}} - P \cos \alpha + J_n \sin \alpha = 0,$$

$$\sum F_{kn_1} = R - P \sin \alpha - J_n \cos \alpha = 0.$$

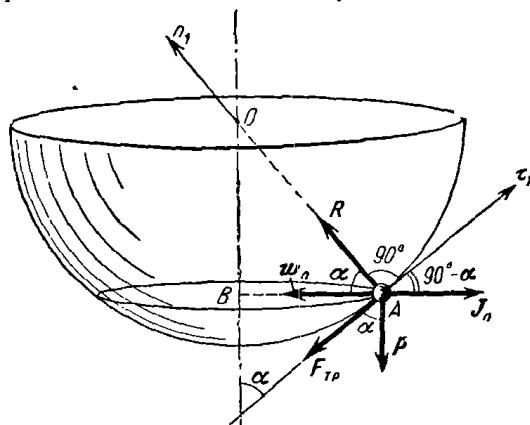
Учитывая, что $F_{\text{тр}}^{\text{max}} = fR$, а $J_n = \frac{P}{g} \frac{v_{\text{max}}^2}{\rho}$, запишем эту систему уравнений в виде:

$$-fR - P \cos \alpha + \frac{P}{g} \frac{v_{\text{max}}^2}{\rho} \sin \alpha = 0,$$

$$R - P \sin \alpha - \frac{P}{g} \frac{v_{\text{max}}^2}{\rho} \cos \alpha = 0.$$

Решив систему уравнений, получим:

$$R = \frac{P}{\sin \alpha - f \cos \alpha}, \quad v_{\text{max}} = \sqrt{gr \frac{1 + f \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - f}}.$$



К задаче 364.

Из треугольника OAB имеем: $\cos \alpha = \frac{\rho}{r}$, т. е.

$$\sin \alpha = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - \rho^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{r^2 - \rho^2}}{\rho}.$$

После подстановки этих значений окончательно получим:

$$v_{\text{max}} = \sqrt{gr \frac{\rho + f \sqrt{r^2 - \rho^2}}{\sqrt{r^2 - \rho^2} - f\rho}}, \quad R = \frac{Pr}{\sqrt{r^2 - \rho^2} - f\rho}.$$

Искомая нормальная сила давления на внутреннюю поверхность полусферы равна по модулю нормальной силе реакции R и направлена противоположно.

Центробежная сила инерции J_n , которой мы пользовались при решении задачи методом кинетостатики, в действительности не приложена к точке A . (Условное приложение этой силы инерции к рассматриваемой материальной точке привело нас к уравнениям «равновесия» этой точки, которая в действительности движется с ускорением ω_n .)

Поэтому при решении данной задачи с помощью основного закона динамики следует, естественно, учитывать только те силы, которые действительно приложены к материальной точке, т. е. P , R и $F_{\text{тр}}$:

$$m\omega_n = P + R + F_{\text{тр}}^{\text{max}}.$$

В проекциях на оси n_1 и τ_1 находим:

$$m\omega_n \cos \alpha = R - P \sin \alpha,$$

$$-m\omega_n \sin \alpha = -F_{\text{тр}}^{\text{max}} - P \cos \alpha.$$

Учитывая, что $m = \frac{P}{g}$, $\omega_n = \frac{v_{\text{max}}^2}{\rho}$, $F_{\text{тр}}^{\text{max}} = fR$, получим после решения этой системы уравнений искомые величины R и v_{max} .

Решение задачи методом кинетостатики несколько более громоздко, так как приходится дополнительно определять и изображать силу инерции J_n . Следовательно, целесообразнее решать задачу с помощью основного закона динамики.

Задача 365. Ведущее звено O_1B шарнирного четырехзвенника O_1O_2AB совершает качания вокруг горизонтальной оси O_1 , перпендикулярной к плоскости механизма, по закону $\varphi = \varphi_0 \sin kt$.

Определить добавочные давления на шарниры A и B от сил инерции звена AB веса P , если $O_1B = O_2A = l$, $O_1O_2 = BA$.

Звено AB считать тонким однородным стержнем.

Решение. Четырехзвенник O_1O_2AB является параллелограммом, так как по условию $O_1O_2 = BA$ и $O_1B = O_2A$. Следовательно, звено BA будет перемещаться, оставаясь все время параллельным неподвижному звену O_1O_2 , т. е. будет совершать поступательное движение.

При поступательном движении твердого тела силы инерции приводятся к равнодействующей $R^{(J)} = -M\omega$, приложенной в центре тяжести. При поступательном движении твердого тела ускорения всех его точек векторно равны. Поэтому достаточно определить ускорение любой точки стержня AB . Найдем ускорение точки B , являющейся одновременно концом звена O_1B :

$$\omega_B = \omega_{Bn} + \omega_{B\tau}.$$

По модулю

$$\omega_B = O_1B \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

К задаче 365.

Ускорение ω_B образует со звеном O_1B угол $\alpha = \arctg \frac{\varepsilon_z}{\omega^2}$.

Зная угол поворота φ звена O_1B , определяем ω_z и ε_z :

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_0 k \cos kt, \quad \varepsilon_z = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\varphi_0 k^2 \sin kt.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \omega_B &= O_1B \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \varphi_0 l k^2 \sqrt{\sin^2 kt + \varphi_0^2 \cos^4 kt}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\varepsilon_z}{\omega^2} = -\frac{\sin kt}{\varphi_0 \cos^2 kt}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Модуль равнодействующей сил инерции звена AB :

$$R^{(J)} = \frac{P}{g} \omega_B = \frac{P}{g} \varphi_0 l k^2 \sqrt{\sin^2 kt + \varphi_0^2 \cos^4 kt}. \quad (2)$$

Равнодействующая сил инерции приложена в центре тяжести звена AB , т. е. в его середине. Поэтому искомые давления на шарниры A и B от сил инерции звена AB оказываются векторно равными

$$N_A^{(J)} = N_B^{(J)} = \frac{R^{(J)}}{2} = -\frac{P\omega_B}{2g}.$$

По модулю

$$N_A^{(J)} = N_B^{(J)} = \frac{P}{2g} \varphi_0 l k^2 \sqrt{\sin^2 kt + \varphi_0^2 \cos^4 kt}. \quad (3)$$

При вертикальных положениях звеньев O_1B и O_2A угол поворота φ равен нулю. Так как $\varphi = \varphi_0 \sin kt$, то это соответствует моменту времени $t=0$. Подставляя $t=0$ в формулу (3), получим:

$$N_A^{(J)} = N_B^{(J)} = \frac{P}{2g} \varphi_0^2 l k^2.$$

Эти добавочные давления направлены по вертикали вниз.

Задача 366. Однородный круглый диск веса P и радиуса r под действием пары сил с моментом m вращается вокруг неподвижной вертикальной оси z , перпендикулярной к его плоскости. Проекция на ось z угловой скорости диска равна: $\omega_z = at$, где a — постоянная. Центр тяжести C диска отстоит от оси вращения на расстоянии $OC = a$.

Определить динамические силы реакций подпятника A , подшипника B и величину вращательного момента, если $AO = h$ и $OB = 2h$. Силами сопротивления движению пренебречь.

Решение. Изобразим подвижные оси координат, связанные с вращающимся диском. Ось z направим по оси вращения, ось y — вдоль линии, соединяющей точку O с центром тяжести C диска, ось x — так, чтобы она вместе с осями y и z образовала правую систему осей координат.

Задаваемыми силами являются: сила тяжести диска P и пара сил с вращающим моментом m . Составляющие динамических сил опорных реакций обозначены $R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, R_{Bx}, R_{By}$. Решаем задачу методом кинестатики.

Для составления уравнений «равновесия» диска следует к задаваемым силам и силам реакций связей добавить силы инерции приво-

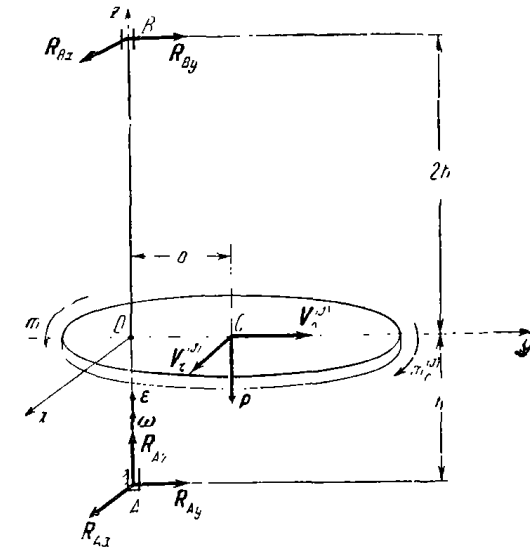
дятся к силе, равной главному вектору, и паре сил, момент которой равен главному моменту. Приняв за центр приведения сил инерции центр тяжести C диска, изобразим составляющие главного вектора сил инерции $V_n^{(J)}, V_\tau^{(J)}$; $m_C^{(J)}$ — главный момент сил инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести C перпендикулярно к плоскости диска.

Разложим ускорение центра тяжести C диска ω_C на его центростремительную ω_{Cn} и вращательную $\omega_{C\tau}$ составляющие.

Так как $V^{(J)} = -M\omega_C$, то $V_n^{(J)} = -M\omega_{Cn}$, $V_\tau^{(J)} = -M\omega_{C\tau}$, причем

$$V_n^{(J)} = V_y^{(J)} = M\omega_{Cn} = \frac{P}{g} a\omega^2, \quad V_\tau^{(J)} = V_x^{(J)} = M\omega_{C\tau} = \frac{P}{g} a\varepsilon_z.$$

Учитывая, что $\omega_z = at$, получим: $\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = a$.



К задаче 366.

Итак, сила $V_n^{(J)}$, равная центробежной составляющей главного вектора сил инерции диска, приложена в центре тяжести C диска, направлена вдоль оси x от оси вращения, и ее проекция на ось y дается формулой

$$V_n^{(J)} = \frac{P}{g} a \alpha^2 t^2. \quad (1)$$

Сила $V_\tau^{(J)}$, равная вращательной составляющей главного вектора сил инерции диска, приложена также в центре тяжести C диска, направлена противоположно вращательному ускорению $\omega_{C\tau}$ точки C , т. е. параллельно положительному направлению оси x , и ее проекция на ось x равна

$$V_\tau^{(J)} = \frac{P}{g} a \alpha. \quad (2)$$

Главный момент сил инерции диска относительно оси, проходящей через центр тяжести диска C перпендикулярно к его плоскости

$$m_C^{(J)} = -I_C \varepsilon_z.$$

Так как $I_C = \frac{Pr^2}{2g}$, а $\varepsilon_z = \alpha$, то

$$m_C^{(J)} = -\frac{Pr^2}{2g} \alpha. \quad (3)$$

Знак главного момента сил инерции $m_C^{(J)}$ противоположен знаку проекции углового ускорения ε_z .

Переходим, согласно методу кинестатики, к составлению уравнений «равновесия» диска при наличии задаваемых сил, сил реакций связей и фиктивных сил инерции. Следует составить шесть уравнений «равновесия».

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} + R_{Bx} + V_\tau^{(J)} = 0,$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} + R_{By} + V_n^{(J)} = 0,$$

$$\sum F_{kz} = R_{Az} - P = 0,$$

$$\sum m_x(F_k) = -Pa + R_{Ay}h - R_{By}2h = 0,$$

$$\sum m_y(F_k) = -R_{Ax}h + R_{By}2h = 0,$$

$$\sum m_z(F_k) = m + m_C^{(J)} - V_\tau^{(J)}a = 0.$$

Подставив сюда значения $V_n^{(J)}$, $V_\tau^{(J)}$, $m_C^{(J)}$ из формул (1), (2), (3) и решив систему уравнений, имеем:

$$R_{Ax} = -\frac{2Pa\alpha}{3g}, \quad R_{Ay} = \frac{P}{3gh}(a\alpha - 2ah\alpha^2 t^2), \quad R_{Az} = P, \quad R_{Bx} = -\frac{Pa\alpha}{3g},$$

$$R_{By} = -\frac{P}{3gh}(a\alpha + ah\alpha^2 t^2), \quad m = \frac{P}{2g}(r^2 + 2a^2)\alpha.$$

Как следует из полученных результатов, только составляющая силы опорной реакции подпятника R_{Az} не зависит от состояния диска, т. е. остается неизменной как при покое, так и при вращении диска.

Совершая в этой задаче приведение сил инерции диска, можно было за центр приведения выбрать любую точку диска. Так, если за центр приведения взять точку O , то силы $V_n^{(J)}$ и $V_\tau^{(J)}$, оставаясь неизменными по величине и направлению, окажутся приложенными в точке O . Главный момент сил инерции $m_z^{(J)}$ относительно оси z изменится по величине:

$$m_z^{(J)} = -I_z \varepsilon_z.$$

Учитывая, что $\varepsilon = \alpha$, а

$$I_z = I_C + \frac{P}{g} a^2 = \frac{Pr^2}{2g} + \frac{P}{g} a^2 = \frac{P}{2g}(r^2 + 2a^2),$$

находим:

$$m_z^{(J)} = -\frac{P}{2g}(r^2 + 2a^2)\alpha.$$

При этом первые пять уравнений остаются неизменными, а шестое уравнение принимает вид

$$\sum_{k=1}^n m_z(F_k) = m + m_z^{(J)} = 0.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$m = \frac{P}{2g}(r^2 + 2a^2)\alpha,$$

что совпадает с полученным прежде результатом.

Заметим, что если бы в данной задаче требовалось определить только величину вращающего момента m , то это можно было бы осуществить значительно проще, составив дифференциальное уравнение вращения диска вокруг неподвижной оси z :

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k^e).$$

Так как

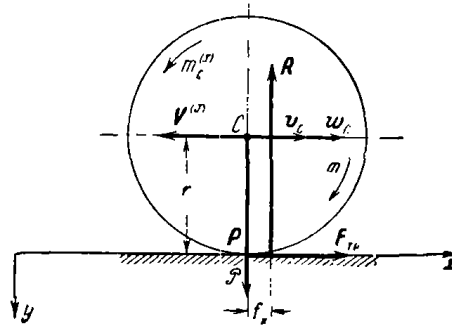
$$\sum_{k=1}^n m_z(F_k^e) = m, \quad I_z = I_C + \frac{P}{g} a^2 = \frac{P}{2g}(r^2 + 2a^2)$$

и $\ddot{\varphi} = \varepsilon_z = \alpha$, то уравнение принимает вид

$$\frac{P}{2g}(r^2 + 2a^2)\alpha = m.$$

Следовательно, шестое уравнение в системе, составленной при решении этой задачи методом кинетостатики, является, по существу, дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Задача 367. Однородное круглое колесо веса P и радиуса r катится без скольжения по горизонтальному рельсу. Определить величину момента пары сил, которую нужно приложить к колесу для того, чтобы центр тяжести C колеса двигался со скоростью $v_C = at$, где a — постоянная. Найти также величину нормальной силы реакции R рельса и модуль силы трения $F_{тр}$ колеса о рельс, если коэффициент трения качения равен f_k .



К задаче 367.

Решение. К колесу приложены задаваемые силы: вес колеса P и пара сил с искомым вращающим моментом m . Силами реакций связей являются: нормальная сила реакции R рельса, вынесенная в сторону движения на расстояние f_k от центра тяжести C колеса, и сила трения $F_{тр}$, направленная вдоль рельса в сторону движения.

Добавляем силы инерции колеса, совершающего плоское движение, приняв за полюс точку C . Силы инерции приводятся к силе, равной главному вектору $V^{(J)}$, и паре сил, момент которой равен главному моменту $m_C^{(J)}$.

Сила инерции $V^{(J)}$ приложена в центре тяжести C колеса, направлена в сторону, противоположную его ускорению ω_C , т. е. налево, и равна взятому с обратным знаком произведению массы колеса на ускорение его центра тяжести C , т. е. $V^{(J)} = -M\omega_C$.

Выберем систему неподвижных осей координат xu , изображенных на рисунке.

По условию $v_{Cx} = at$, тогда $\omega_{Cx} = \frac{dv_{Cx}}{dt} = a$. Следовательно,

$$V_x^{(J)} = -\frac{P}{g} a. \quad (1)$$

Знак главного момента сил инерции колеса $m_C^{(J)}$ противоположен знаку проекции углового ускорения ϵ_z на ось z , причем

$$m_C^{(J)} = -I_C \epsilon_z.$$

Так как

$$I_C = \frac{Pr^2}{2g}, \quad \text{а } \epsilon_z = \frac{\omega_{Cx}}{r} = \frac{a}{r},$$

то

$$m_C^{(J)} = -\frac{Pra}{2g}. \quad (2)$$

Решаем задачу методом кинетостатики. Учитывая, что все задаваемые силы, силы реакций связей и силы инерции лежат в одной плоскости, составим три уравнения «равновесия»:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} = F_{тр} + V_x^{(J)} &= 0, \\ \sum F_{ky} = P - R &= 0, \\ \sum m_C(F_k) = m + m_C^{(J)} - F_{тр}r - Rf_k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Воспользовавшись формулами (1) и (2), запишем систему (3) в виде:

$$\left. \begin{aligned} F_{тр} - \frac{P}{g} a &= 0, \\ P - R &= 0, \\ m - \frac{Pra}{2g} - F_{тр}r - Rf_k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Решив систему уравнений «равновесия» (4), получим:

$$R = P, \quad F_{тр} = \frac{gP}{a}, \quad m = P \left(\frac{ar}{2g} + f_k + \frac{gr}{a} \right).$$

Эту задачу можно также решить с помощью дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad I_C\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_C(F_k^e).$$

Действительно, изобразив на рисунке все силы и моменты, кроме главного вектора и главного момента сил инерции колеса, запишем:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= F_{тр}, \\ M\ddot{y}_C &= P - R, \\ I_C\ddot{\varphi} &= m - F_{тр}r - Rf_k. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\ddot{x}_C = \omega_{Cx} = a, \quad \ddot{y}_C = 0, \quad \ddot{\varphi} = \epsilon_z = \frac{\omega_{Cx}}{r} = \frac{a}{r} \quad \text{и} \quad I_C = \frac{Pr^2}{2g},$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{P}{g} Q &= F_{тр}, \\ 0 &= P - R, \\ \frac{Pra}{2g} &= m - F_{тр}r - Rf_k. \end{aligned}$$

Эта система уравнений тождественна системе уравнений (4).

Решение задачи методом кинетостатики оказалось более громоздким, так как пришлось определять главный вектор и главный момент фиктивных сил инерции колеса. Применение же дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела короче и естественнее, чем использование метода кинетостатики.

Задача 368. Грузы A и B соединены тонкой нерастяжимой нитью, переброшенной через блок D . При опускании вниз груза A веса P_1 блок D веса P_3 вращается вокруг своей неподвижной оси, а груз B веса P_2 поднимается вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Определить ускорения грузов A и B и силы реакций левой и правой ветвей нити. Коэффициент трения скольжения груза B о наклонную плоскость равен f . Блок D считать однородным круглым диском. Массой нити пренебречь.

Решение. Система состоит из трех масс: груза A , груза B и блока D .

Решаем задачу методом кинетостатики. Применяя принцип освобожденности от связей, рассмотрим каждую из масс в отдельности.

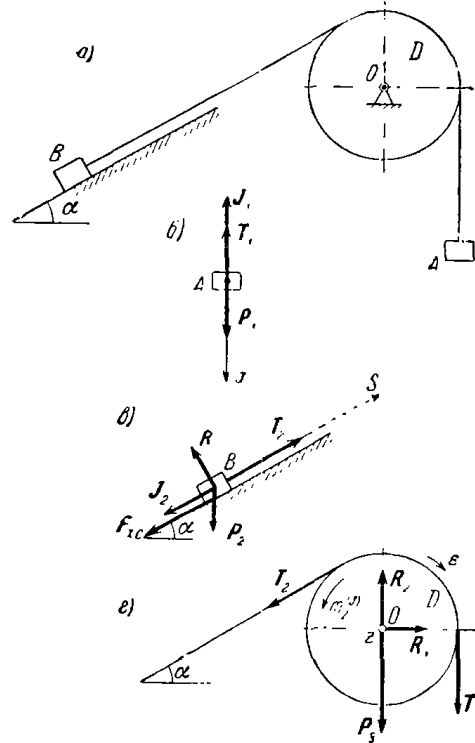
Груз A , опускаясь ускоренно вниз, движется поступательно с искомым ускорением w .

К грузу A приложены (см. рис. б): одна задаваемая сила — его вес P_1 , и сила реакции правой ветви нити T_1 . Ускорение груза направлено вниз, поэтому равнодействующая его сил инерции J_1 направлена вверх: $J_1 = -\frac{P_1}{g}w$, или в проекции на ось x :

$$J_{1x} = -\frac{P_1}{g}w_x.$$

Запишем уравнение «равновесия» груза A в проекции на вертикальную ось x :

$$P_1 - T_1 + J_{1x} = 0,$$



К задаче 368.

т. е.

$$P_1 - T_1 - \frac{P_1}{g}w_x = 0. \quad (1)$$

Груз B , поднимаясь по наклонной плоскости вверх, движется поступательно с тем же ускорением w .

К грузу B приложены: одна задаваемая сила — его вес P_2 , нормальная сила реакции R наклонной плоскости, сила трения скольжения $F_{тр.с}$ груза B о наклонную плоскость, сила реакции левой ветви нити T_2 (см. рис. в).

Ускорение w груза B направлено вдоль наклонной плоскости вверх. Поэтому равнодействующая сил инерции J_2 груза B направлена параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости вниз: $J_2 = -\frac{P_2}{g}w$. Ее проекция: $J_{2s} = -\frac{P_2}{g}w_s$ (направление оси s указано на рис. в).

Составим уравнение «равновесия» груза B в проекции на ось s :

$$T_2 - P_2 \sin \alpha - F_{тр.с} + J_{2s} = 0.$$

Учитывая, что $J_{2s} = -\frac{P_2}{g}w_s$, $F_{тр.с} = fN = fP_2 \cos \alpha$, запишем это уравнение в виде

$$T_2 - P_2 \sin \alpha - fP_2 \cos \alpha - \frac{P_2}{g}w_s = 0. \quad (2)$$

Переходим к рассмотрению блока D , вращающегося вокруг неподвижной оси z .

К блоку D приложены: одна задаваемая сила — его вес P_3 , сила реакции правой ветви нити T_1 , сила реакции левой ветви нити T_2 , составляющие силы реакции неподвижной оси R_1 и R_2 (см. рис. г).

Силы инерции блока приводятся к паре с моментом $m_z^{(J)}$, обратным по знаку проекции углового ускорения ϵ_z и равным произведению момента инерции блока I_z относительно оси z вращения блока, направленной за плоскость рисунка, на проекцию его углового ускорения ϵ_z , т. е. $m_z^{(J)} = -I_z \epsilon_z$.

Обозначив радиус блока r , запишем: $I_z = \frac{P_3 r^2}{2g}$. Следовательно,

$$m_z^{(J)} = -\frac{P_3 r^2}{2g} \epsilon_z.$$

Рассматривая «равновесие» блока D под действием задаваемых сил, сил реакций связей и фиктивных сил инерции, запишем уравнение моментов относительно оси вращения z :

$$-T_2 r + m_z^{(J)} + T_1 r = 0$$

(так как ось z направлена за плоскость рисунка, то положительным для читателя является направление по часовой стрелке, а отрицательным — против часовой стрелки).

На основании принципа равенства действия и противодействия: $T_1' = -T_1$, $T_2' = -T_2$, т. е. по модулю: $T_1' = T_1$ и $T_2' = T_2$. После подстановки в уравнение моментов значения $m_2^{(J)}$ и сокращения на r находим:

$$T_2 + \frac{P_3 r \varepsilon_z}{2g} - T_1 = 0. \quad (3)$$

Проекция ускорения точки нити, лежащей на ободу блока, равна

$$\omega_x = \omega_s = r \varepsilon_z \quad (4)$$

(проскальзыванием нити по ободу блока мы пренебрегаем).

Остается решить систему уравнений (1), (2), (3) и (4):

$$\begin{aligned} P_1 - T_1 - \frac{P_1}{g} \omega_x &= 0, \\ T_2 - P_2 \sin \alpha - f P_2 \cos \alpha - \frac{P_2}{g} \omega_s &= 0, \\ T_2 + \frac{P_3 r \varepsilon_z}{2g} - T_1 &= 0, \\ r \varepsilon_z = \omega_x = \omega_s. \end{aligned}$$

Определяя из этого уравнения неизвестные ω_x , T_1 и T_2 , получим:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= 2g \frac{P_1 - P_2 (\sin \alpha + f \cos \alpha)}{2P_1 + 2P_2 + P_3}, \\ T_1 &= \frac{2P_1 P_2 (1 + \sin \alpha + f \cos \alpha)}{2P_1 + 2P_2 + P_3}, \\ T_2 &= \frac{2P_1 P_2 (1 + \sin \alpha + f \cos \alpha) - P_3 [P_1 - P_2 (\sin \alpha + f \cos \alpha)]}{2P_1 + 2P_2 + P_3}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

При $P_1 > P_2 (\sin \alpha + f \cos \alpha)$ имеем $\omega_x > 0$, т. е. ускорение груза A направлено вниз.

Если решать эту задачу, пренебрегая массой блока D по сравнению с массами грузов A и B , то, считая $P_3 = 0$, находим:

$$\omega_x = g \frac{P_1 - P_2 (\sin \alpha + f \cos \alpha)}{P_1 + P_2}, \quad T_1 = T_2 = \frac{P_1 P_2 (1 + \sin \alpha + f \cos \alpha)}{P_1 + P_2}.$$

Итак, величины сил реакций левой и правой ветвей нити, переброшенной через блок, различны при учете массы блока и одинаковы, если массой блока пренебречь.

Если в данной задаче требовалось бы определить давление блока D на ось z , то при рассмотрении равновесия блока (см. рис. 2) следовало бы, кроме уравнения моментов относительно оси z , составить

также уравнения проекций всех сил на горизонтальную и вертикальную оси:

$$R_1 - T_2' \cos \alpha = 0,$$

$$R_2 - P_3 - T_1' - T_2' \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$R_1 = T_2' \cos \alpha = T_2 \cos \alpha,$$

$$R_2 = P_3 + T_1' + T_2' \sin \alpha = P_3 + T_1 + T_2 \sin \alpha.$$

После подстановки значений T_1 и T_2 из формул (5) мы получим величины составляющих сил реакций оси блока R_1 и R_2 . Искомые составляющие давлений блока D на ось противоположны по направлению соответствующим составляющим сил реакций оси R_1 и R_2 и равны им по модулю.

Если в данной задаче требовалось бы определить только ускорение ω груза A , то значительно проще получить результат, применив общее уравнение динамики (см. ниже задачу 390) или уравнение Лагранжа второго рода.

Задача 369. Тонкий однородный стержень KOL , изогнутый под прямым углом, шарнирно прикреплен в точке O к вертикальному валу AB . Найти величину постоянной угловой скорости ω вращения вала, при которой сторона стержня OK отклонена от вертикали на угол α (см. рис. а). Определить также силу реакции в шарнире O и опорные реакции подпятника A и подшипника B , если $OK = a$, $OL = b$, $OA = 2h$, $OB = k$; γ — масса единицы длины стержня.

Решение. Подвижные оси x и z свяжем с изогнутым стержнем и валом. Начало координат возьмем в шарнире O . Оси y и z направим соответственно вдоль OK и OL . Ось x изобразим так, чтобы вместе с осями y и z она образовала правую систему осей декартовых координат.

Вес части стержня OK равен $P_1 = \gamma g a$, вес части стержня OL равен $P_2 = \gamma g b$.

Кроме задаваемых сил P_1 и P_2 , следует изобразить силы реакций связей. Для стержня KOL связью является шарнир O .

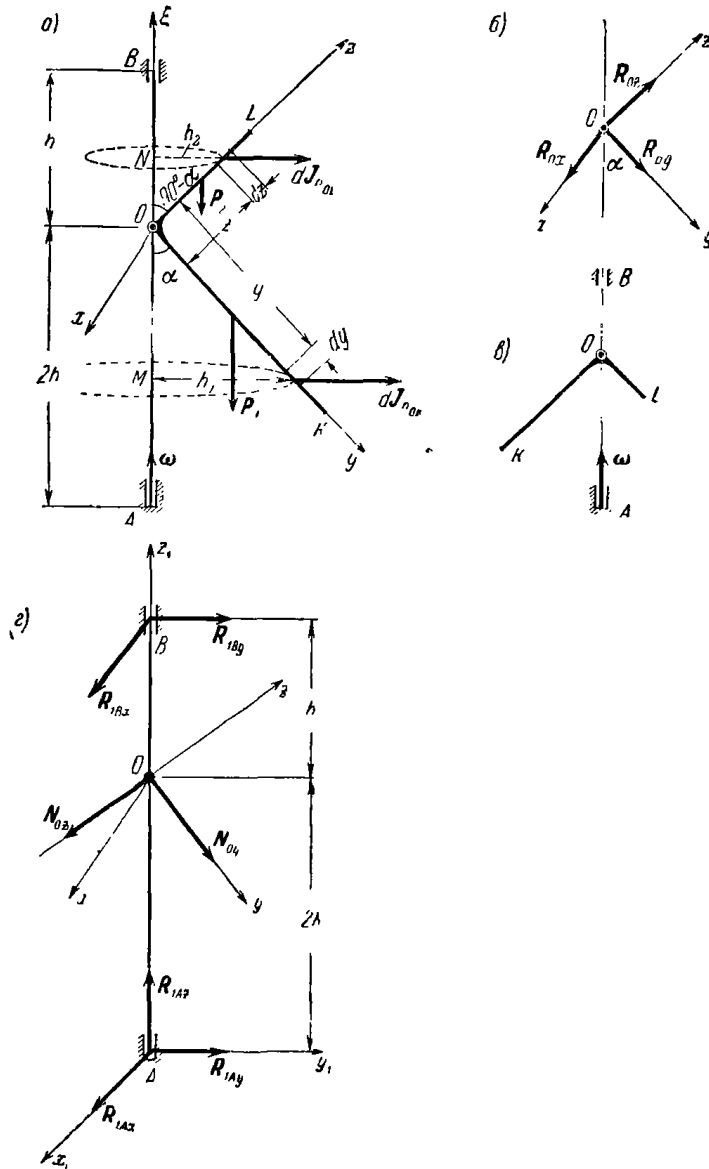
Изобразим составляющие силы реакции шарнира O : R_{Ox} , R_{Oy} , R_{Oz} (см. рис. б).

Для применения метода кинестатики следует к задаваемым силам и силам реакций связей добавить силы инерции стержня.

Выделим на стороне стержня OK элемент длины dy на расстоянии y от точки O , а на стороне стержня OL — элемент длины dz на расстоянии z от точки O . Массы этих элементов равны

$$dm_{OK} = \gamma dy, \quad dm_{OL} = \gamma dz. \quad (1)$$

Приложим к выделенным элементам стержня фиктивные центробежные силы инерции, направленные противоположно соответствующим



К задаче 369.

центростремительным ускорениям, т. е. по горизонтали направо. По модулю

$$dJ_{nOK} = dm_{OK} \omega_n^2 = dm_{OK} h_1 \omega^2, \quad dJ_{nOL} = dm_{OL} h_2 \omega^2.$$

Подставив значения dm_{OK} и dm_{OL} из формулы (1), а также $h_1 = y \sin \alpha$ и $h_2 = z \cos \alpha$, находим:

$$dJ_{nOK} = \gamma y \omega^2 \sin \alpha dy, \quad dJ_{nOL} = \gamma z \omega^2 \cos \alpha dz. \quad (2)$$

Вращательные силы инерции выделенных элементов равны нулю, так как угловая скорость ω вращения вала постоянна.

Приложив мысленно к каждому из элементов стержня KOL соответствующие фиктивные центробежные силы инерции, составим шесть уравнений «равновесия» стержня KOL :

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= R_{Ox} = 0, \\ \sum F_{ky} &= R_{Oy} + P_1 \cos \alpha + P_2 \cos \alpha + \int_{(OK)} dJ_{nOK} \sin \alpha + \\ &\quad + \int_{(OL)} dJ_{nOL} \sin \alpha = 0, \\ \sum F_{kz} &= R_{Oz} - P_1 \sin \alpha - P_2 \sin \alpha + \int_{(OK)} dJ_{nOK} \cos \alpha + \\ &\quad + \int_{(OL)} dJ_{nOL} \cos \alpha = 0, \\ \sum m_x(F_k) &= -P_1 \frac{a}{2} \sin \alpha - P_2 \frac{b}{2} \cos \alpha + \\ &\quad + \int_{(OK)} dJ_{nOK} |OM| - \int_{(OL)} dJ_{nOL} |ON| = 0, \\ \sum m_y(F_k) &= 0, \\ \sum m_z(F_k) &= 0. \end{aligned}$$

Подставляем в систему уравнений «равновесия»: $OM = y \cos \alpha$, $ON = z \sin \alpha$, $P_1 = \gamma ga$, $P_2 = \gamma gb$ и значения dJ_{nOK} и dJ_{nOL} из формулы (2). Получим:

$$\begin{aligned} R_{Ox} &= 0, \\ R_{Oy} + \gamma ga \cos \alpha + \gamma gb \cos \alpha + \gamma \omega^2 \sin^2 \alpha \int_0^a y dy + \gamma \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \int_0^b z dz &= 0, \\ R_{Oz} - \gamma ga \sin \alpha - \gamma gb \sin \alpha + \gamma \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \int_0^a y dy + \gamma \omega^2 \cos^2 \alpha \int_0^b z dz &= 0, \\ -\frac{\gamma ga^2}{2} \sin \alpha - \frac{\gamma gb^2}{2} \cos \alpha + \gamma \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \int_0^a y^2 dy - \\ &\quad - \gamma \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \int_0^b z^2 dz = 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$R_{Ox} = 0,$$

$$R_{Oy} + \gamma g a \cos \alpha + \gamma g b \cos \alpha + \frac{\gamma \omega^2 a^3}{2} \sin^2 \alpha + \frac{\gamma \omega^2 b^3}{2} \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

$$R_{Oz} - \gamma g a \sin \alpha - \gamma g b \sin \alpha + \frac{\gamma \omega^2 a^3}{2} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\gamma \omega^2 b^3}{2} \cos^2 \alpha = 0,$$

$$-\frac{g a^2}{2} \sin \alpha - \frac{g b^2}{2} \cos \alpha + \frac{\omega^2 a^3}{3} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\omega^2 b^3}{3} \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Решив эту систему уравнений, получим:

$$\omega^2 = \frac{3g}{2} \frac{a^2 \sin \alpha + b^2 \cos \alpha}{(a^3 - b^3) \sin \alpha \cos \alpha},$$

$$R_{Ox} = 0, \quad R_{Oy} = -\gamma g \left[(a + b) \cos \alpha + \frac{3}{4} \frac{(a^2 \sin \alpha + b^2 \cos \alpha)^2}{(a^3 - b^3) \cos \alpha} \right],$$

$$R_{Oz} = \gamma g \left[(a + b) \sin \alpha - \frac{3}{4} \frac{(a^2 \sin \alpha + b^2 \cos \alpha)^2}{(a^3 - b^3) \sin \alpha} \right].$$

Так как $\omega^2 > 0$, то вращение стержня KOL , описанное в условии задачи, возможно только при $a > b$. В случае $a \leq b$ стержень примет положение, изображенное на рис. *в*.

Переходим к определению сил опорных реакций подпятника A и подшипника B (см. рис. *з*). К шарниру O со стороны стержня KOL приложено давление N_1 , составляющие которого направлены противоположно составляющим сил реакций R_{Ox} , R_{Oy} , R_{Oz} и равны им по модулю, т. е.

$$N_{Ox} = -R_{Ox} = 0, \quad N_{Oy} = -R_{Oy}, \quad N_{Oz} = -R_{Oz}.$$

Изобразим новую систему подвижных осей $x_1 y_1 z_1$, также связанных со стержнем и валом. Начало координат выбираем в подпятнике A , ось z_1 направляем вдоль оси вала AB , ось x_1 параллельно оси x . Ось y_1 изображаем так, чтобы вместе с осями x_1 и z_1 она образовала правую систему осей координат.

К валу AB приложены задаваемые силы N_{Oy} и N_{Oz} ($N_{Ox} = 0$) и составляющие сил реакций подпятника A и подшипника B : R_{1Ax} , R_{1Ay} , R_{1Az} , R_{1Bx} , R_{1By} .

Составляем шесть уравнений «равновесия» вала AB :

$$\sum F_{1kx} = R_{1Ax} + R_{1Bx} = 0,$$

$$\sum F_{1ky} = R_{1Ay} + R_{1By} + N_{Oy} \sin \alpha - N_{Oz} \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{1kz} = R_{1Az} - N_{Oy} \cos \alpha - N_{Oz} \sin \alpha = 0,$$

$$\sum m_{x1}(F_k) = N_{Oz} 2h \cos \alpha - N_{Oy} 2h \sin \alpha - R_{1By} 3h = 0,$$

$$\sum m_{y1}(F_k) = R_{1Bx} 3h = 0,$$

$$\sum m_{z1}(F_k) = 0.$$

Решив эту систему уравнений, получим:

$$R_{1Ax} = R_{1Bx} = 0, \quad R_{1Az} = N_{Oy} \cos \alpha + N_{Oz} \sin \alpha,$$

$$R_{1By} = \frac{2}{3} (N_{Oz} \cos \alpha - N_{Oy} \sin \alpha), \quad R_{1Ay} = \frac{1}{3} (N_{Oz} \cos \alpha - N_{Oy} \sin \alpha).$$

Так как

$$N_{Oy} = \gamma g \left[(a + b) \cos \alpha + \frac{3}{4} \frac{(a^2 \sin \alpha + b^2 \cos \alpha)^2}{(a^3 - b^3) \cos \alpha} \right],$$

$$N_{Oz} = \gamma g \left[(a + b) \sin \alpha - \frac{3}{4} \frac{(a^2 \sin \alpha + b^2 \cos \alpha)^2}{(a^3 - b^3) \sin \alpha} \right],$$

то окончательно находим:

$$R_{1Ax} = R_{1Bx} = 0, \quad R_{1Ay} = -\frac{1}{4} \gamma g \frac{(a^2 \sin \alpha + b^2 \cos \alpha)^2}{(a^3 - b^3) \sin \alpha \cos \alpha},$$

$$R_{1By} = -\frac{1}{2} \gamma g \frac{(a^2 \sin \alpha + b^2 \cos \alpha)^2}{(a^3 - b^3) \sin \alpha \cos \alpha}, \quad R_{1Az} = \gamma g (a + b).$$

Задача 370. Вибрационная машина приводится в движение посредством кулисы, изображенной на рис. *а*. Кривошип кулисы OA веса P_1 и длины r вращается в направлении по часовой стрелке с постоянной угловой скоростью ω .

В начальный момент кривошип занимал верхнее вертикальное положение. Определить вертикальное давление машины на фундамент и вертикальную составляющую давления на ось O кривошипа OA , если вес рамки кулисы B и штока D равен P_2 , вес станины K равен P_3 . Всеми остальными массами машины пренебречь.

Решение. Изучаемая система состоит из трех масс: кривошипа, рамки кулисы и станины. Применяя метод кинестатики, рассмотрим движение каждой из трех масс в отдельности.

К кривошипу OA приложена одна задаваемая сила — его вес P_1 . На кривошипе наложены связи: ось кривошипа O и рамка кулисы B . На рис. *б* изображены две составляющие силы реакции R_1 и R_2 оси O и две составляющие силы реакции рамки кулисы R_3 и R_4 .

Для применения метода кинестатики остается добавить силы инерции кривошипа OA . Взяв за центр приведения сил инерции центр тяжести C_1 кривошипа, находим силу, равную главному вектору сил инерции $V^{(1)} = -M\omega C_1$. Угловая скорость ω вращения

кривошипа постоянна, поэтому $\epsilon = 0$ и ускорение точки C_1 является центростремительным:

$$\omega_{C_1} = \omega_{nC_1} = \frac{r}{2} \omega^2.$$

Итак, главный вектор сил инерции $V^{(J)}$ кривошипа направлен вдоль кривошипа от оси O и равен по модулю $V^{(J)} = \frac{P_1}{g} \frac{r}{2} \omega^2$. Главный момент сил инерции равен нулю: $m_C^{(J)} = -I_C \epsilon_z = 0$ (так как $\epsilon_z = 0$). Следовательно, система сил инерции приводится к равнодействующей, равной силе $V^{(J)}$.

Взяв начало координат на оси O кривошипа OA , направим ось y по вертикали вверх.

В соответствии с методом кинетостатики, запишем уравнение «равновесия» кривошипа в проекции на ось y :

$$-P_1 + R_2 + R_4 + V^{(J)} \cos \varphi = 0.$$

Учитывая, что $V^{(J)} = \frac{P_1}{g} \frac{r}{2} \omega^2$, а угол поворота кривошипа φ при равномерном его вращении пропорционален времени $\varphi = \omega t$, получим:

$$-P_1 + R_2 + R_4 + \frac{P_1}{g} \frac{r}{2} \omega^2 \cos \omega t = 0. \quad (1)$$

Переходим к рассмотрению рамки кулисы B и штока D (рис. *в*). К ним приложена одна заданная сила — их вес P_2 . Связями являются кривошип A и вертикальная направляющая штока. Изобразим на рис. *в* соответствующие силы реакций связей: R'_3, R'_4 и R'_5 ($R'_3 = -R_3, R'_4 = -R_4$).

Так как рамка кулисы B со штоком D совершает поступательное движение, то силы инерции приводятся к равнодействующей $R^{(J)} = -\frac{P_2}{g} \omega$, приложенной в центре тяжести C_2 . Для определения ускорения ω запишем уравнение движения точки C_2 :

$$y_{C_2} = OL + LC_2 = r \cos \omega t + LC_2,$$

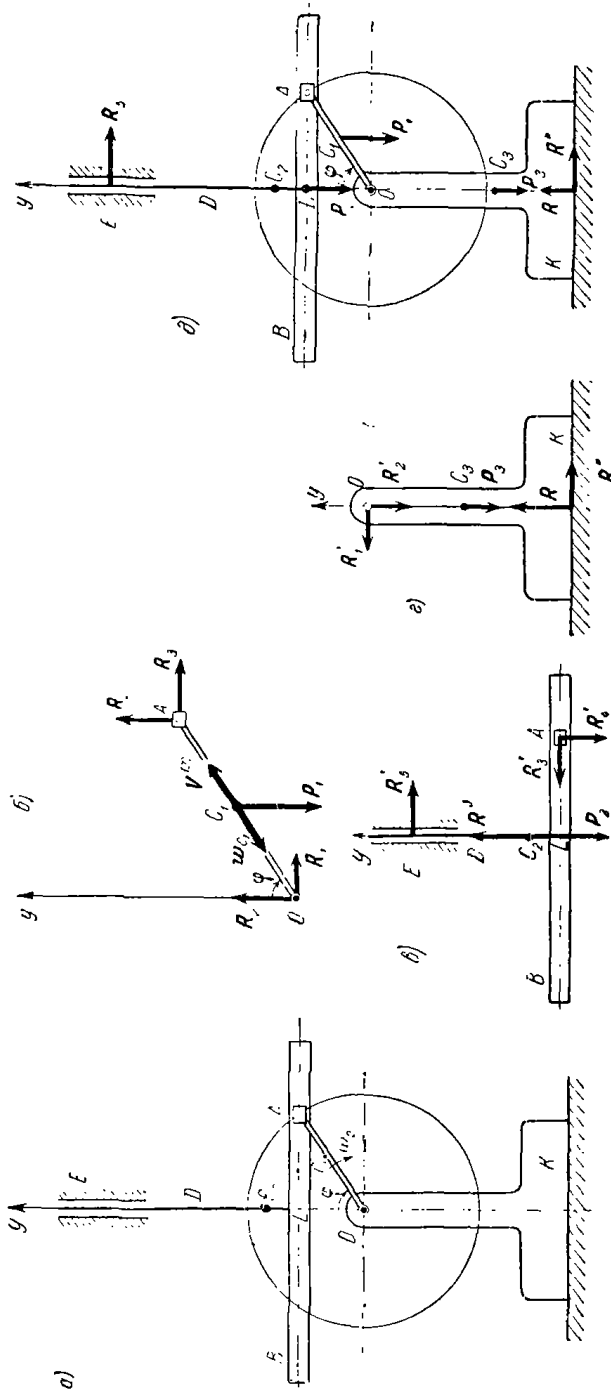
где LC_2 — постоянная. Находим:

$$\ddot{y}_{C_2} = -r\omega^2 \cos \omega t.$$

Проекция ускорения на ось y оказалась отрицательной, следовательно, ускорение при $\cos \omega t > 0$ направлено вниз, а равнодействующая сил инерции направлена вверх и равна

$$R^{(J)} = \frac{P_2}{g} r \omega^2 \cos \omega t.$$

Применив метод кинетостатики к кулисе B и штоку D , запишем



К задаче 370.

уравнение их «равновесия» в проекции на ось y :

$$-P_2 - R'_4 + R^{(J)} = 0,$$

т. е.

$$-P_2 - R'_4 + \frac{P_2}{g} r \omega^2 \cos \omega t = 0. \quad (2)$$

К станине K (рис. 2) приложена одна задаваемая сила — ее вес P_3 . На станину наложены связи: неподвижная горизонтальная плоскость и ось O кривошипа OA . Изображаем на рис. 2 соответствующие силы реакций связей R , R^* и R'_1 , R'_2 ($R'_1 = -R_1$, $R'_2 = -R_2$). Силы инерции станины равны нулю, так как она находится в покое.

Составим уравнение равновесия станины в проекции на ось y :

$$-P_3 + R - R'_4 = 0. \quad (3)$$

Итак, рассмотрев «равновесие» каждой из трех масс в отдельности, мы получили систему трех уравнений (1), (2) и (3):

$$-P_1 + R_2 + R_4 + \frac{P_1}{g} \frac{r}{2} \omega^2 \cos \omega t = 0,$$

$$-P_2 - R'_4 + \frac{P_2}{g} r \omega^2 \cos \omega t = 0,$$

$$-P_3 + R - R'_4 = 0.$$

Учитывая, что по модулю $R'_2 = R_2$ и $R'_4 = R_4$, из этой системы уравнений находим:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 - \frac{P_1 + 2P_2}{2g} r \omega^2 \cos \omega t,$$

$$R_2 = P_1 + P_2 - \frac{P_1 + 2P_2}{2g} r \omega^2 \cos \omega t.$$

Искомые вертикальные давления равны по модулям реакциям R и R_2 и направлены противоположно.

Решение этой задачи методом кинестатики является довольно громоздким.

Целесообразнее решать подобные задачи, применяя теорему о движении центра инерции системы материальных точек. Так, для определения силы реакции R надо рассмотреть всю систему в целом. При этом силы реакции R_1 , R_2 , R_3 и R_4 оказываются силами внутренними и в соответствующее уравнение не входят.

Запишем теорему о движении центра инерции системы материальных точек в проекции на ось y :

$$M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}.$$

Внешними являются пять сил: три силы тяжести P_1 , P_2 , P_3 , составляющие силы реакции горизонтальной плоскости R и R^* и сила

реакции направляющей штока R_n (см. рис. д). Получим:

$$M\ddot{y}_C = -P_1 - P_2 - P_3 + R,$$

откуда

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + M\ddot{y}_C. \quad (4)$$

Остается определить $M\ddot{y}_C$:

$$M\ddot{y}_C = m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_3, \quad (5)$$

где y_1 , y_2 и y_3 — ординаты центров тяжести масс C_1 , C_2 и C_3 . Так как

$$y_1 = \frac{r}{2} \cos \omega t, \quad y_2 = r \cos \omega t + LC, \quad y_3 = -OC_3 = \text{const},$$

то

$$\ddot{y}_1 = -\frac{r}{2} \omega^2 \cos \omega t, \quad \ddot{y}_2 = -r \omega^2 \cos \omega t, \quad \ddot{y}_3 = 0,$$

и формула (5) принимает вид

$$M\ddot{y}_C = -\frac{r\omega^2}{2g} (P_1 + 2P_2) \cos \omega t. \quad (6)$$

После подстановки формулы (6) в уравнение (4) находим:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 - \frac{r\omega^2}{2g} (P_1 + 2P_2) \cos \omega t.$$

Исключив из всей системы станину K и вновь применив теорему о движении центра инерции в проекции на ось y , найдем R_2 .

В последнее время в инженерной практике происходит постепенное вытеснение метода кинестатики применением основного закона и общих теорем динамики.

§ 3. Давление вращающегося твердого тела на ось вращения

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси возникают дополнительные давления на опоры твердого тела.

Пусть подвижные оси x и y связаны с твердым телом (рис. 152); O — произвольная точка на оси вращения, ось z направлена вдоль оси вращения. Оси x и y введены так, чтобы вместе с осью z образовывать правую систему осей координат. M — масса твердого тела, ω — угловая скорость твердого тела, ϵ — угловое ускорение твердого тела, $C(x_C, y_C, z_C)$ — центр тяжести твердого тела, I_{xz} , I_{yz} — центробежные моменты инерции твердого тела, a , b — расстояния от опор A , B до начала координат O ; N'_{Ax} , N'_{Ay} , N'_{Az} , N'_{Bx} , N'_{By} , N'_{Bz} — составляющие дополнительных динамических давлений на опоры;

$N_{Ax}, N_{Ay}, N_{Az}, N_{Bx}, N_{By}, N_{Bz}$ — составляющие динамических давлений на опоры, равные суммам соответствующих статических и дополнительных динамических давлений.

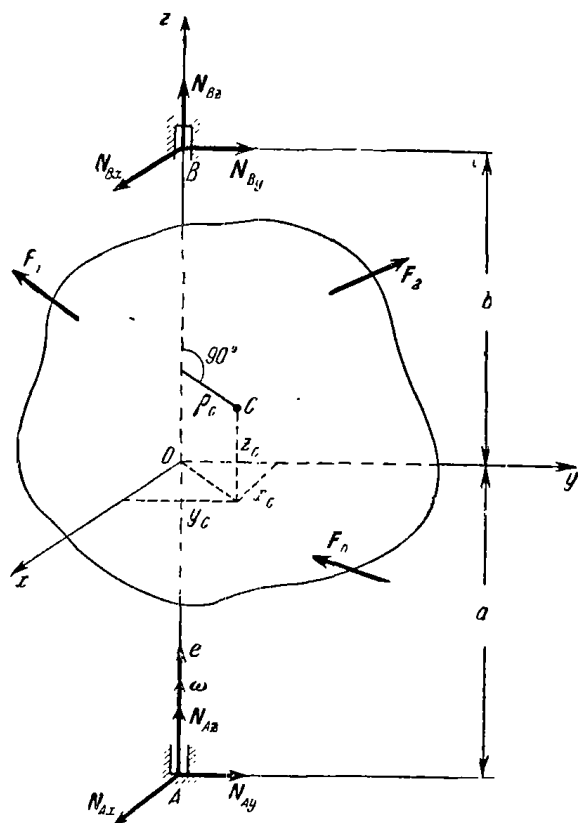


Рис. 152.

Эту задачу можно решить методом кинестатики. В результате приведения фиктивных сил инерции твердого тела к центру O получается сила, равная главному вектору $V^{(J)}$, и пара сил, момент которой равен главному моменту $m_0^{(J)}$ сил инерции.

Проекции главного вектора $V_x^{(J)}, V_y^{(J)}, V_z^{(J)}$ сил инерции твердого тела на подвижные оси координат x, y, z , связанные с твердым телом, имеют вид

$$\begin{aligned} V_x^{(J)} &= Mx_C\omega^2 + My_C\varepsilon_z, \\ V_y^{(J)} &= My_C\omega^2 - Mx_C\varepsilon_z, \\ V_z^{(J)} &= 0. \end{aligned}$$

Модуль главного вектора сил инерции равен

$$V^{(J)} = M\rho_C \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

где $\rho_C = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}$ — это эксцентриситет, т. е. расстояние от центра тяжести C твердого тела до оси вращения.

Главный вектор сил инерции обращается в нуль, когда $\rho_C = 0$, т. е. центр тяжести C твердого тела лежит на оси вращения z .

Главные моменты сил инерции твердого тела относительно подвижных осей координат x, y, z , связанных с твердым телом, записываются в форме:

$$m_x^{(J)} = -I_{yz}\omega^2 + I_{xz}\varepsilon_z,$$

$$m_y^{(J)} = I_{xz}\omega^2 - I_{yz}\varepsilon_z,$$

$$m_z^{(J)} = -I_z\varepsilon_z.$$

Введем вспомогательный момент $m_0^{(J)*}$, отличающийся от главного момента сил инерции относительно центра O отсутствием составляющей главного момента сил инерции относительно оси вращения z . Модуль этого момента равен

$$m_0^{(J)*} = \sqrt{I_{xz}^2 + I_{yz}^2} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Момент $m_0^{(J)*}$ обращается в нуль, если $I_{xz} = I_{yz} = 0$, т. е. когда ось вращения z является главной осью инерции в точке O .

Для того чтобы силы инерции твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, были уравновешены в смысле $V^{(J)} = 0$, $m_0^{(J)*} = 0$, необходимо и достаточно, чтобы ось вращения z была главной центральной осью инерции твердого тела ($\rho_C = 0, I_{xz} = I_{yz} = 0$).

При выполнении этих условий боковые дополнительные динамические давления на опоры равны нулю: $N_{Ax} = N_{Ay} = N_{Bx} = N_{By} = 0$. (Составляющие дополнительных динамических давлений, направленные вдоль оси вращения z , всегда равны нулю: $N_{Az} = N_{Bz} = 0$.) При этом динамические давления на опоры равны соответствующим статическим давлениям.

Если силы инерции вращающегося твердого тела не уравновешены, то величины составляющих дополнительных динамических боковых давлений $N'_{Ax}, N'_{Ay}, N'_{Bx}, N'_{By}$ находятся из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} N'_{Ax} + N'_{Bx} &= Mx_C\omega^2 + My_C\varepsilon_z, \\ N'_{Ay} + N'_{By} &= My_C\omega^2 + Mx_C\varepsilon_z, \\ N'_{Ay}a - N'_{By}b &= -I_{yz}\omega^2 + I_{xz}\varepsilon_z, \\ -N'_{Ax}a + N'_{Bx}b &= I_{xz}\omega^2 + I_{yz}\varepsilon_z. \end{aligned} \right\} \quad (1^*)$$

Величины составляющих динамических давлений N_{Ax} , N_{Ay} , N_{Az} , N_{Bx} , N_{By} , N_{Bz} , равные суммам соответствующих статических и дополнительных динамических давлений, определяются из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} N_{Ax} + N_{Bx} &= Mx_C \omega^2 + My_C \varepsilon_z + \sum_{k=1}^n F_{kx}, \\ N_{Ay} + N_{By} &= My_C \omega^2 - Mx_C \varepsilon_z + \sum_{k=1}^n F_{ky}, \\ N_{Az} + N_{Bz} &= \sum_{k=1}^n F_{kz}, \\ N_{Ay}a - N_{By}b &= -I_{yz} \omega^2 + I_{xz} \varepsilon_z + \sum_{k=1}^n m_x(F_k), \\ -N_{Ax}a + N_{Bx}b &= I_{xz} \omega^2 + I_{yz} \varepsilon_z + \sum_{k=1}^n m_y(F_k), \end{aligned} \right\} (2^*)$$

где F_1, F_2, \dots, F_n — задаваемые силы.

Из третьего уравнения системы (2*), аналогичного соответствующему уравнению статики, может быть определена сумма величин составляющих давлений N_{Az} и N_{Bz} . Каждая из них в отдельности не может быть вычислена. Если опора B выполнена в виде цилиндрического подшипника, то $N_{Bz} = 0$ и, следовательно, $N_{Az} = \sum_{k=1}^n F_{kz}$.

Задачи, в которых требуется определить боковые дополнительные динамические давления на опоры, решаются с помощью системы уравнений (1*).

Задачи, в которых требуется определить динамические давления на опоры, решаются посредством системы уравнений (2*).

Задачи на определение динамических давлений вращающегося твердого тела на ось вращения рекомендуется решать в следующем порядке:

1) выбрать подвижные оси x, y, z , связанные с вращающимся твердым телом, направив ось z вдоль оси вращения (если центр тяжести C лежит на оси вращения, то удобно начало координат O совмещать с центром тяжести C ; если центр тяжести C не лежит на оси вращения, то начало координат следует брать в основании перпендикуляра, опущенного из центра тяжести C на ось вращения z , либо в одной из опор твердого тела);

2) изобразить на рисунке систему задаваемых сил;

3) вычислить координаты центра тяжести C твердого тела x_C и y_C ;

4) вычислить центробежные моменты инерции твердого тела I_{xz} и I_{yz} ;

5) а) если неизвестными величинами являются боковые дополнительные динамические давления на опоры, то составить систему уравнений (1*); б) если неизвестными величинами являются динамические давления на опоры, то составить систему уравнений (2*);

6) решив систему уравнений (1*) или (2*), определить искомые величины.

При решении задач, в которых определяются боковые дополнительные динамические давления на опоры, второй пункт решения задачи следует опустить.

Задача 371. Однородный круглый диск вращается вокруг неподвижной оси. Как следует расположить ось вращения диска по отношению к его оси симметрии для того, чтобы дополнительные динамические давления на опоры были равны нулю?

Решение. Для того чтобы отсутствовали дополнительные динамические давления на опоры, главный вектор $V^{(J)}$ и вспомогательный момент сил инерции $m_0^{(J)*}$ должны быть равны нулю: $V^{(J)} = 0$, $m_0^{(J)*} = 0$. Так как

$$V^{(J)} = M\rho_C \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad \text{и} \quad m_0^{(J)*} = \sqrt{I_{xz}^2 + I_{yz}^2} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

то

$$M\rho_C \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0; \quad \sqrt{I_{xz}^2 + I_{yz}^2} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0.$$

Величины M, ω и ε не равны нулю, поэтому $\rho_C = 0, I_{xz} = I_{yz} = 0$, т. е. ось вращения z должна быть главной центральной осью инерции диска.

Для выполнения полученных условий ось вращения диска следует совместить с его осью симметрии. Действительно, ось симметрии однородного круглого диска проходит через его центр тяжести, т. е. $\rho_C = 0$, и, следовательно, главный вектор сил инерции $V^{(J)}$ равен нулю. Кроме того, ось симметрии диска перпендикулярна к плоскости его материальной симметрии, т. е. является его главной осью инерции в точке пересечения с этой плоскостью, т. е. $I_{xz} = I_{yz} = 0$. Следовательно, вспомогательный момент сил инерции равен нулю.

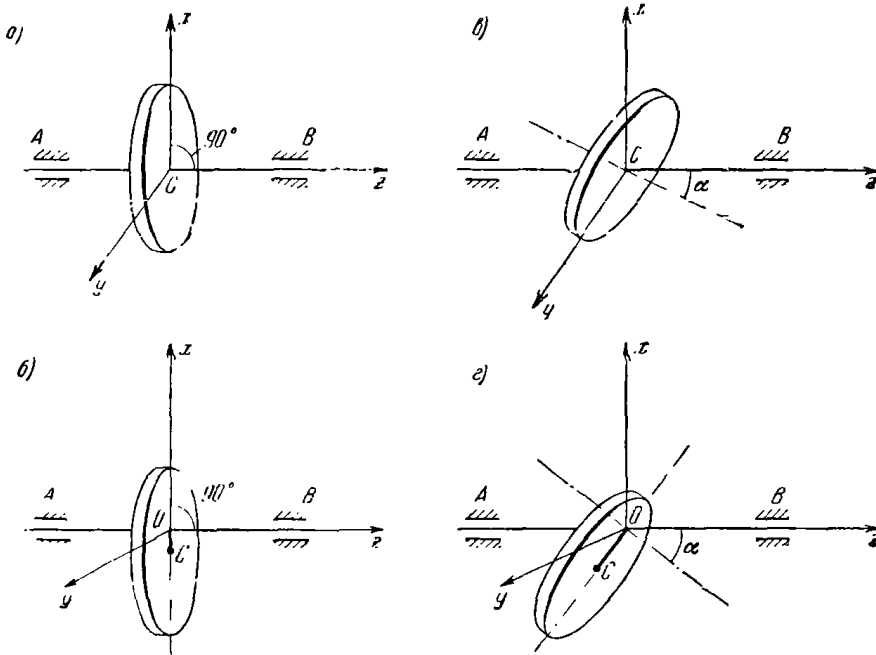
Итак, для того чтобы дополнительные динамические давления на опоры были равны нулю, ось вращения диска должна совместиться с его осью симметрии, т. е. должна проходить через центр тяжести диска перпендикулярно к плоскости его материальной симметрии (см. рис. а).

Если ось вращения диска z перпендикулярна к его плоскости материальной симметрии xy , но не проходит через центр тяжести C диска (см. рис. б), то эксцентриситет ρ_C не равен нулю. Следовательно, главный вектор сил инерции $V^{(J)}$ не равен нулю. При этом

возникают дополнительные динамические боковые давления на опоры A и B , которые даже при малой величине эксцентриситета ρ_C , но большой угловой скорости ω во много раз превосходят соответствующие статические давления.

Подобная неуравновешенность называется статической, так как может быть обнаружена при отсутствии вращения диска.

Если ось вращения диска проходит через его центр тяжести C , но не перпендикулярна к плоскости материальной симметрии (см. рис. b), т. е. $\alpha \neq 0$, то ось z не является главной ($I_{xz} \neq 0$ и $I_{yz} \neq 0$).



К задаче 371.

Следовательно, вспомогательный момент сил инерции $m_O^{(J)*}$ не равен нулю и возникают дополнительные динамические боковые давления на опоры A и B , которые даже при малых величинах угла α , но большой угловой скорости ω достигают больших значений. Такая неуравновешенность называется динамической, так как она обнаруживается только при вращении диска.

Практически невозможно насадить диск на ось вращения так, чтобы она совместилась с его осью симметрии, т. е. чтобы ρ_C и α равнялись нулю (см. рис. $з$). Следовательно, главный вектор и вспомогательный момент сил инерции не равны нулю и возникают дополнительные динамические боковые давления на опоры A и B , которые значительно больше соответствующих статических давлений.

Проблема устранения дополнительных динамических давлений играет большую роль в современной технике, так как в конструкциях машин-двигателей и производственных машин обычно имеется деталь (либо узел деталей), которая с большой угловой скоростью вращается вокруг неподвижной оси (турбинный диск, ротор электрического мотора или генератора, шпиндель токарного или расточного станков и т. д.).

Задача 372. Определить дополнительные динамические давления на подшипники K и L коленчатого вала конструкции, описанной в задаче 312. Вал вращается с постоянной угловой скоростью ω .

Решение. Координаты центра тяжести вала определяются по формулам (см. рисунок к задаче 312):

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{m_A x_A + m_B x_B + m_E x_E + m_D x_D}{m_A + m_B + m_E + m_D} = \frac{m_B \cdot 2a + m_D(-2a)}{m_A + m_B + m_E + m_D} = 0,$$

$$y_C = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} = \frac{m_A y_A + m_B y_B + m_E y_E + m_D y_D}{m_A + m_B + m_E + m_D} = \frac{m_A \cdot 2a + m_E(-2a)}{m_A + m_B + m_E + m_D} = 0$$

(напомним, что $x_A = x_E = y_B = y_D = 0$).

Итак, центр тяжести C коленчатого вала лежит на оси z .

Воспользовавшись этим результатом, а также значениями центробежных моментов инерции, подсчитанными в задаче 312: $I_{yz} = I_{xz} = -16ma^2$, составим систему уравнений (1*) для определения проекций дополнительных динамических боковых давлений N'_{Kx} , N'_{Ky} , N'_{Lx} , N'_{Ly} :

$$N'_{Kx} + N'_{Lx} = 0,$$

$$N'_{Ky} + N'_{Ly} = 0,$$

$$N'_{Ky} \cdot 9a - N'_{Ly} \cdot 9a = 16ma^2\omega^2,$$

$$-N'_{Kx} \cdot 9a - N'_{Lx} \cdot 9a = -16ma^2\omega^2.$$

Решив эту систему уравнений, получим: $N'_{Kx} = -N'_{Lx} = \frac{8}{9} ma\omega^2$, $N'_{Ky} = -N'_{Ly} = \frac{8}{9} ma\omega^2$. Следовательно:

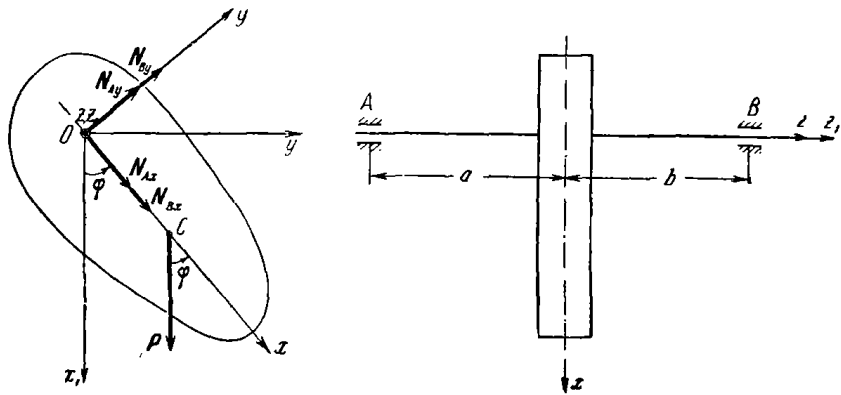
$$N'_K = \sqrt{N'^2_{Kx} + N'^2_{Ky}} = \frac{8}{9} \sqrt{2} ma\omega^2,$$

$$N'_L = \sqrt{N'^2_{Lx} + N'^2_{Ly}} = \frac{8}{9} \sqrt{2} ma\omega^2.$$

Дополнительные динамические боковые силы давлений поворачиваются вместе с твердым телом. Они образуют пару сил с плечом $KL = 18a$.

Задача 373. Маятник веса P , совершающий качания около горизонтальной оси, имеет плоскость материальной симметрии, перпендикулярную к этой оси.

Определить дополнительные давления на опоры A и B , отстоящие от плоскости материальной симметрии соответственно на расстояниях a и b ; l — расстояние от центра тяжести маятника до оси привеса, I_z — момент инерции маятника относительно оси привеса. В начальный момент маятник был отклонен от вертикали на угол φ_0 и отпущен без начальной скорости.



К задаче 373.

Решение. Направления выбранных неподвижных осей x_1, y_1, z_1 и подвижных осей x, y, z , связанных с маятником, указаны на рисунке. Координаты центра тяжести C маятника равны

$$x_C = l, \quad y_C = 0. \quad (1)$$

Так как ось привеса z перпендикулярна к плоскости материальной симметрии маятника, то она является главной осью инерции в точке O пересечения с этой плоскостью. Следовательно,

$$I_{xz} = I_{yz} = 0. \quad (2)$$

Единственной задаваемой силой является вес P маятника. Опорами служат подшипники A и B . Поэтому составляющие давлений вдоль оси привеса z отсутствуют: $N_{Az} = N_{Bz} = 0$.

Учитывая формулы (1) и (2), составляем систему уравнений (2*) для определения величин составляющих динамических давлений:

$$N_{Ax} + N_{Bx} = \frac{P}{g} l \dot{\varphi}^2 + P \cos \varphi, \quad (3)$$

$$N_{Ay} + N_{By} = -\frac{P}{g} l \ddot{\varphi} - P \sin \varphi, \quad (4)$$

$$N_{Ay}a - N_{By}b = 0, \quad (5)$$

$$-N_{Ax}a + N_{Bx}b = 0. \quad (6)$$

Из уравнения (5) находим:

$$N_{Ay} = \frac{b}{a} N_{By}, \quad (7)$$

и из (6) имеем:

$$N_{Ax} = \frac{b}{a} N_{Bx}. \quad (8)$$

После подстановки значения N_{Ax} из формулы (8) в уравнение (3), а значения N_{Ay} из формулы (7) в уравнение (4) получаем:

$$N_{Bx} = \frac{a}{a+b} \frac{P}{g} (l \dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi), \quad (9)$$

$$N_{By} = -\frac{a}{a+b} \frac{P}{g} (l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi). \quad (10)$$

Остается в формулы (9) и (10) подставить выражения $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ через угол поворота φ . Для этого составим дифференциальное уравнение качаний маятника:

$$I_z \ddot{\varphi} = -Pl \sin \varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} = -\frac{Pl}{I_z} \sin \varphi. \quad (11)$$

Умножив левую и правую части уравнения (11) на $d\varphi$ и проинтегрировав его, получим:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{Pl}{I_z} \cos \varphi + C.$$

Воспользовавшись начальными условиями движения: при $t=0$ $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$, находим, что

$$C = -\frac{Pl}{I_z} \cos \varphi_0.$$

Итак,

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2Pl}{I_z} (\cos \varphi - \cos \varphi_0). \quad (12)$$

Подставив значение $\dot{\varphi}^2$ из формулы (12) в формулу (9) и значение $\ddot{\varphi}$ из (11) в (10), получим величины N_{Bx} и N_{By} . Затем с помощью формул (7) и (8) находим N_{Ax} и N_{Ay} .

Окончательно:

$$N_{Bx} = \frac{a}{a+b} \frac{P}{gI_z} [(2Pl^2 + gI_z) \cos \varphi - 2Pl^2 \cos \varphi_0],$$

$$N_{Ax} = \frac{b}{a+b} \frac{P}{gI_z} [(2Pl^2 + gI_z) \cos \varphi - 2Pl^2 \cos \varphi_0],$$

$$N_{By} = \frac{a}{a+b} \frac{P}{gI_z} (Pl^2 - gI_z) \sin \varphi,$$

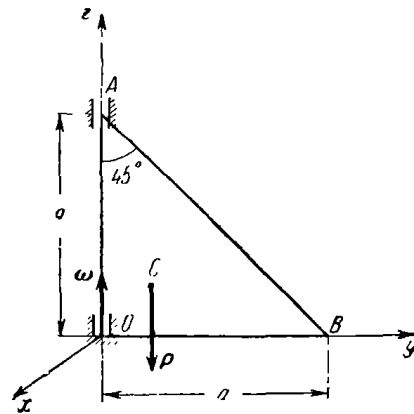
$$N_{Ay} = \frac{b}{a+b} \frac{P}{gI_z} (Pl^2 - gI_z) \sin \varphi.$$

Задача 374. Определить динамические давления однородной треугольной пластинки OAB веса P на подпятник O и подшипник A . Пластика вращается с постоянной угловой скоростью ω . Размеры пластинки указаны на рисунке.

Решение. Начало подвижных осей координат, связанных с пластинкой, выбираем в подпятнике O , ось z направляем по оси вращения пластинки, ось y — вдоль горизонтального катета пластинки, а ось x обозначаем так, чтобы вместе с осями y и z она образовала правую систему координат.

Задаваемой силой является вес пластинки P . Центр тяжести треугольной пластинки расположен в точке пересечения ее медиан. Следовательно,

$$x_C = 0, \quad y_C = \frac{1}{3} a.$$



К задаче 374.

Центробежные моменты инерции пластинки OAB были вычислены при решении задачи 313:

$$I_{xz} = 0, \quad I_{yz} = \frac{Pa^3}{12g}.$$

Угловое ускорение пластинки равно нулю, так как угловая скорость ω постоянна.

Составим систему уравнений (2*) для определения величин составляющих динамических давлений на опоры:

$$N_{Ox} + N_{Ax} = 0,$$

$$N_{Oy} + N_{Ay} = \frac{1}{3} \frac{P}{g} a \omega^2,$$

$$N_{Oz} = -P,$$

$$-N_{Ay} a = -\frac{Pa^2}{12g} \omega^2 - P \frac{a}{3},$$

$$N_{Ax} a = 0.$$

$N_{Az} = 0$, так как опора A является подшипником.

Решив систему уравнений, определим искомые величины составляющих динамических давлений пластинки на подпятник O и подшипник A :

$$N_{Ox} = N_{Ax} = 0, \quad N_{Oz} = -P,$$

$$N_{Ay} = \frac{P}{12g} a \omega^2 + \frac{P}{3}, \quad N_{Oy} = \frac{P}{4g} a \omega^2 - \frac{P}{3}.$$

При вращении пластинки AOB вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω появляются силы инерции, которые создают дополнительные давления на опоры:

$$N'_{Ay} = \frac{P}{12g} a \omega^2, \quad N'_{Oy} = \frac{P}{4g} a \omega^2.$$

Статические давления пластинки на опоры равны

$$N_{Oz}^{ст} = -P, \quad N_{Ay}^{ст} = \frac{P}{3}, \quad N_{Oy}^{ст} = -\frac{P}{3}.$$

Задача 375. Прямой однородный круглый цилиндр веса P , радиуса r и длины $2l$ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z , проходящей через его центр тяжести C . Ось вращения z цилиндра образует с его осью симметрии ξ угол α . Определить дополнительные динамические боковые давления на опоры A и B , если $OA = OB = h$.

Решение. Подвижные оси x, y, z , связанные с цилиндром, изображены на рисунке. Центробежные моменты инерции цилиндра были подсчитаны в задаче 314:

$$I_{yz} = 0, \quad I_{xz} = \frac{P}{2g} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3} \right) \sin 2\alpha. \quad (1)$$

Центр тяжести C цилиндра лежит на оси z , следовательно,

$$x_C = y_C = 0. \quad (2)$$

Так как цилиндр вращается равномерно, то

$$\dot{\epsilon} = 0. \quad (3)$$

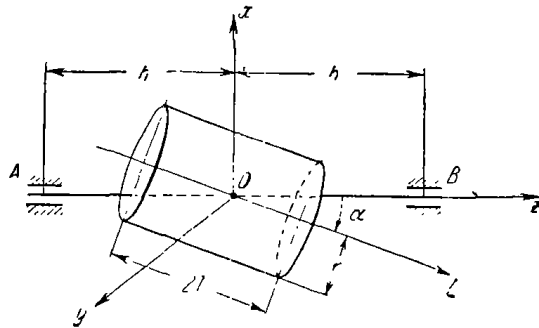
Воспользовавшись формулами (1), (2) и (3), составим систему уравнений (1*) для определения величин составляющих дополнительных боковых давлений N'_{Ax} , N'_{Ay} , N'_{Bx} , N'_{By} :

$$\begin{aligned} N'_{Ax} + N'_{Bx} &= 0, \\ N'_{Ay} + N'_{By} &= 0, \\ N'_{Ay}h - N'_{By}h &= 0, \\ -N'_{Ax}h + N'_{Bx}h &= \frac{P}{2g} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3} \right) \omega^2 \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений, получим:

$$N'_{Ay} = N'_{By} = 0, \quad N'_{Bx} = -N'_{Ax} = \frac{P}{4gh} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3} \right) \omega^2 \sin 2\alpha.$$

Итак, при вращении цилиндра создаются дополнительные боковые давления на опоры A и B , образующие пару сил с плечом $AB = 2h$.



К задаче 375.

Боковые дополнительные динамические силы реакций опор A и B равны по модулю соответствующим давлениям и направлены противоположно.

Эта задача может быть решена значительно короче с помощью теории регулярной прецессии симметричного твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки (см. ниже, решение задачи 428).

Задача 376. Решить предыдущую задачу, предполагая, что цилиндр насажен на ось z с эксцентриситетом $OC = \rho_C$.

Решение. Подвижные оси x , y , z расположены как и в предыдущей задаче. На рисунке введены также вспомогательные координатные оси ξ , η , ζ так, что ось η совмещается с осью y , а оси ξ и ζ

оказываются повернутыми относительно осей x и z на угол α в направлении по часовой стрелке.

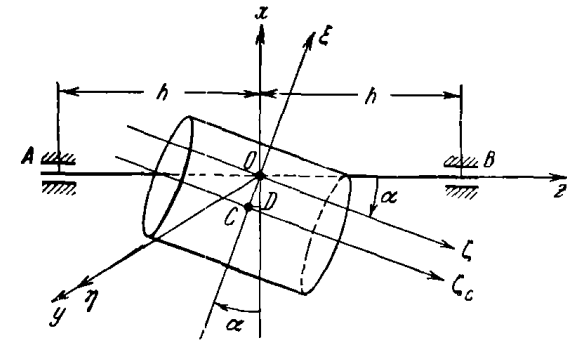
Центр тяжести C цилиндра лежит на оси ξ и отстоит от начала координат O на расстоянии $OC = \rho_C$. Координаты центра тяжести C цилиндра:

$$x_C = OD = -|OC| \cos \alpha = -\rho_C \cos \alpha, \quad y_C = 0. \quad (1)$$

Центробежные моменты инерции цилиндра были подсчитаны в задаче 314 для случая, когда начало координат помещено в центре тяжести цилиндра:

$$I_{yz} = 0, \quad I_{xz} = (I_\zeta - I_\xi) \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

(см. формулу (6) в решении задачи 314), где $I_\xi = \frac{P}{g} \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right)$.



К задаче 376.

Вычислим момент инерции цилиндра относительно оси ζ . Для этого проведем через центр тяжести C ось ζ_C , параллельную оси ζ , и применим теорему Штейнера: $I_\zeta = I_{\zeta_C} + \frac{P}{g} \rho_C^2$. Так как $I_{\zeta_C} = \frac{Pr^2}{2g}$, то

$$I_\zeta = \frac{Pr^2}{2g} + \frac{P}{g} \rho_C^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_{xz} &= (I_\zeta - I_\xi) \frac{\sin 2\alpha}{2} = \left(\frac{Pr^2}{2g} + \frac{P}{g} \rho_C^2 - \frac{P}{g} \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right) \right) \frac{\sin 2\alpha}{2} = \\ &= \frac{P}{g} \left(\frac{r^2}{4} + \rho_C^2 - \frac{l^2}{3} \right) \frac{\sin 2\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Итак,

$$I_{yz} = 0, \quad I_{xz} = \frac{P}{2g} \left(\frac{r^2}{4} + \rho_C^2 - \frac{l^2}{3} \right) \sin 2\alpha. \quad (2)$$

Цилиндр вращается равномерно, поэтому

$$\epsilon = 0. \quad (3)$$

Воспользовавшись формулами (1), (2) и (3), составим систему уравнений (1*) для определения величин составляющих дополнительных динамических боковых давлений N'_{Ax} , N'_{Ay} , N'_{Bx} , N'_{By} :

$$\begin{aligned} N'_{Ax} + N'_{Bx} &= -M\rho_C\omega^2 \cos \alpha, \\ N'_{Ay} + N'_{By} &= 0, \\ N'_{Ay}h - N'_{By}h &= 0, \\ -N'_{Ax}h + N'_{Bx}h &= \frac{P}{2g} \left(\frac{r^2}{4} + \rho_C^2 - \frac{l^2}{3} \right) \omega^2 \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений, получим:

$$\begin{aligned} N'_{Ay} = N'_{By} &= 0, \quad N'_{Ax} = -\frac{P}{2g} \left[\left(\frac{r^2}{4} + \rho_C^2 - \frac{l^2}{3} \right) \frac{\sin 2\alpha}{2h} + \rho_C \cos \alpha \right] \omega^2, \\ N'_{Bx} &= \frac{P}{2g} \left[\left(\frac{r^2}{4} + \rho_C^2 - \frac{l^2}{3} \right) \frac{\sin 2\alpha}{2h} - \rho_C \cos \alpha \right] \omega^2. \end{aligned}$$

Боковые дополнительные динамические силы реакций опор A и B равны по модулю соответствующим давлениям и направлены противоположно им.

§ 4. Принцип возможных перемещений

1°. Возможные перемещения. Идеальные связи. *Вариацией функции* δu называется приращение функции, обусловленное изменением вида функции, при фиксированном значении аргумента. Так, при переходе от функции $y_1 = f_1(x)$ к функции $y_2 = f_2(x)$ вариация функции δu будет:

$$\delta u = y_2 - y_1 = f_2(x) - f_1(x).$$

В отличие от вариации функции δu , дифференциал функции du является главной частью приращения функции, образуемого за счет приращения аргумента dx .

На рис. 153 изображен отрезок MM_1 , численно равный вариации функции δu , которая соответствует фиксированному значению аргумента x . На том же рисунке показано, что отрезок, численно равный дифференциалу функции du , соответствует приращенному значению аргумента $x + dx$.

Правила варьирования функций внешне подобны соответствующим правилам дифференцирования функций. Так, $\delta(cu) = c\delta u$, где c — постоянная, $\delta(y_1 + y_2) = \delta y_1 + \delta y_2$, $\delta(y_1 \cdot y_2) = y_1\delta y_2 + y_2\delta y_1$ и т. д.

Если рассматривать варьирование сложной функции $z = \varphi(y)$, где $y = f(x)$, то ее вариация определяется по формуле $\delta z = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y$. Пусть, например, $z = a \sin by$, где y — функция от x . Вариация функции z

равна $\delta z = ab \cos by \delta y$. Таким образом, установлена связь между вариациями функций z и y .

Возможным называется перемещение точки из данного ее положения, допускаемое связями, наложенными на эту точку.

Так, если материальная точка находится на неподвижной горизонтальной плоскости, то возможным является любое воображаемое перемещение точки из данного положения по плоскости. Если же эта материальная точка дополнительно связана с абсолютно жестким стержнем, второй конец которого закреплен на плоскости, то возможным является воображаемое перемещение точки на плоскости, осуществляемое в любом направлении по дуге окружности. Центр этой окружности расположен в закрепленном конце стержня, а радиус окружности равен длине этого стержня.

Возможное перемещение является воображаемым перемещением в данный момент (т. е. при фиксированном значении аргумента — времени t). В отличие от этого действительное перемещение точки происходит в определенном направлении

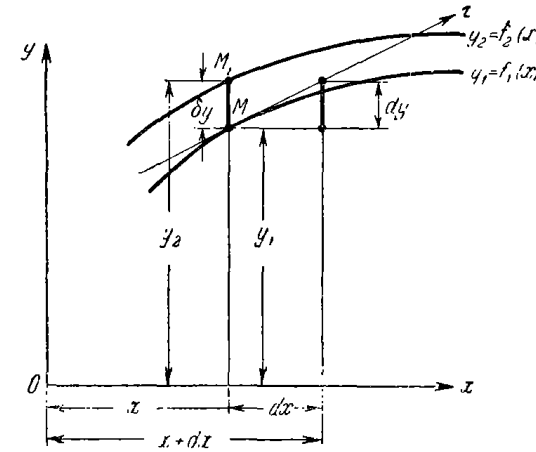


Рис. 153.

под действием системы приложенных сил при непрерывном изменении аргумента — времени. Поэтому возможное перемещение точки является вариацией, а действительное перемещение — дифференциалом.

Если \mathbf{r} — вектор-радиус точки, то $\delta \mathbf{r}$ — возможное перемещение точки, а $d\mathbf{r}$ — действительное перемещение точки. В разложении по ортам осей декартовых координат возможное перемещение имеет вид $\delta \mathbf{r} = \delta x \mathbf{i} + \delta y \mathbf{j} + \delta z \mathbf{k}$, где δx , δy , δz — проекции возможного перемещения $\delta \mathbf{r}$ точки на соответствующие оси декартовых координат. Действительное перемещение дается формулой $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$, где dx , dy , dz — проекции действительного перемещения $d\mathbf{r}$ точки на эти оси, причем $dx = \dot{x}dt$, $dy = \dot{y}dt$, $dz = \dot{z}dt$.

Действительное перемещение точки является одним из числа возможных перемещений этой точки (для стационарных связей).

Для нестационарных связей (связей, явно зависящих от времени) возможное перемещение точки рассматривается при мгновенно остановленных связях (т. е. при фиксированном значении момента времени). В этом случае действительное перемещение уже не является частным случаем возможного.

Рассмотрим материальную точку, которая находится на некоторой поверхности (рис. 154). Возможным является перемещение в касательной плоскости к поверхности в данной точке (направление возможного перемещения точки в этой плоскости, конечно, может быть любым).

Аналогично, если материальная точка находится на кривой, которая является связью, наложенной на точку (рис. 155), то возможное перемещение направлено по касательной к кривой в данной точке.

Идеальные связи. Идеальными называются связи, сумма работ сил реакций которых на любых возможных перемещениях точек системы равна нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^n R_k \cdot \delta r_k = 0,$$

где R_k — равнодействующая сил реакций связи, действующих на k -ю точку, δr_k — возможное перемещение k -й материальной точки системы.

Примеры идеальных связей: идеально гладкие плоскости и поверхности, абсолютно жесткий стержень, абсолютно твердое тело и т. д. Для жесткого стержня (абсолютно твердого тела) нулю равны суммы работ сил реакций, с которыми одни точки стержня (тела) действуют на другие.

Негладкая плоскость не является идеальной связью. Действительно (рис. 156), сила реакции R плоскости является суммой двух ее составляющих: нормальной R_n , перпендикулярной к плоскости в данной точке, и касательной, являющейся силой трения скольжения $F_{т.с}$ точки о плоскость. Оставляя в стороне случай отрыва материальной точки от плоскости, надо возможное перемещение δr точки направить вдоль плоскости. При вычислении суммы работ составляющих сил реакции связей R_n и $F_{т.с}$ на возможном перемещении δr работа силы R_n оказывается равной нулю, в то время как работа силы трения скольжения $F_{т.с}$ не равна нулю. Следовательно, условие, определяющее идеальность связи, не выполняется.

2°. Принцип возможных перемещений. Для равновесия системы материальных точек, подчиненной идеальным стационарным

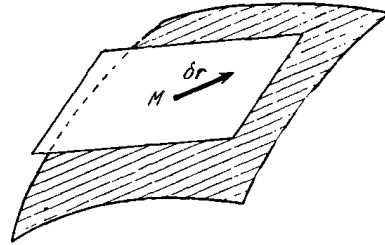


Рис. 154.

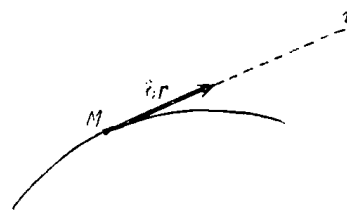


Рис. 155.

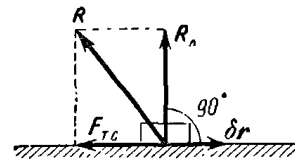


Рис. 156.

связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма работ задаваемых сил на любых возможных перемещениях точек системы равнялась нулю:

$$\sum_{k=1}^n F_k \cdot \delta r_k = 0.$$

Аналогично, в проекциях на оси декартовых координат имеем:

$$\sum_{k=1}^n (F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k) = 0.$$

Достоинством принципа возможных перемещений является отсутствие в его формулировке сил реакций идеальных связей.

Принцип возможных перемещений широко применяется в механике. С его помощью можно достаточно просто решать задачи о равновесии твердого тела и систем твердых тел, а также определять зависимости между величинами задаваемых сил. Особенно эффективно применение принципа возможных перемещений при решении задач о равновесии систем твердых тел.

Исходя из принципа возможных перемещений, можно вывести уравнения равновесия твердого тела при наличии как плоской, так и пространственной системы сил.

Если не все связи, наложенные на систему, являются идеальными, например, имеются негладкие опорные плоскости и поверхности, то к задаваемым силам следует добавлять силы трения и, следовательно, приравнивать нулю сумму работ не только задаваемых сил, но и сил трения, на любых возможных перемещениях точек системы. Составленное уравнение определяет зависимость между задаваемыми силами и силами трения.

Если требуется определить какую-либо силу реакции идеальной связи, для которой $R \cdot \delta r = 0$, то следует, применяя принцип освобождаемости от связей, отбросить соответствующую связь и заменить ее искомой силой реакции. При составлении уравнения равновесия надо к задаваемым силам добавить эту силу реакции связи. Такой метод решения задач о равновесии систем твердых тел является чрезвычайно эффективным, так как искомая сила реакции связи непосредственно определяется из составленного уравнения равновесия. (Применяя же обычные приемы статики, приходится составлять систему уравнений равновесия и определять искомую силу реакции связи в результате решения этой системы уравнений.)

Задачи о равновесии твердых тел и систем твердых тел с помощью принципа возможных перемещений рекомендуется решать в следующем порядке:

- 1) изобразить на рисунке задаваемые силы;
- 2) при наличии неидеальных связей добавить соответствующие силы реакций связей (например, силы трения);

3) в случае необходимости определить силу реакции связи мысленно отбросить соответствующую связь и заменить ее искомой силой реакции связи (если $R \cdot \delta r = 0$).

Дальнейшие действия следует осуществлять в зависимости от того, имеет система одну степень свободы или же несколько.

а) В случае системы с одной степенью свободы:

4) дать возможное перемещение одной из точек системы и выразить возможные перемещения точек приложения сил в зависимости от заданного возможного перемещения;

5) вычислить сумму работ всех сил, указанных в пунктах 1), 2) и 3), на соответствующих возможных перемещениях их точек приложения, и приравнять эту сумму нулю;

6) решив составленное уравнение равновесия, определить искомую величину;

б) В случае системы с несколькими степенями свободы:

4) выбрать независимые возможные перемещения точек системы в числе, равном числу степеней свободы этой системы;

5) дать возможное перемещение, соответствующее одной из степеней свободы системы, считая при этом возможные перемещения, соответствующие остальным степеням свободы, равными нулю. Выразить возможные перемещения точек приложения сил через это возможное перемещение;

6) вычислить сумму работ всех сил, указанных в пунктах 1), 2) и 3), на соответствующих возможных перемещениях их точек приложения, и эту сумму приравнять нулю;

7) последовательно произведя выкладки пунктов 5) и 6) для каждого из независимых возможных перемещений, составить систему уравнений равновесия в числе, равном числу независимых возможных перемещений, т. е. числу степеней свободы системы;

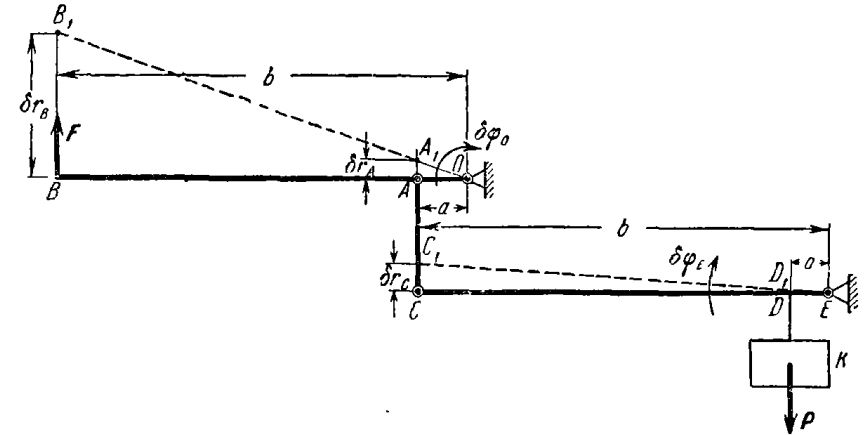
8) решив системы составленных уравнений равновесия, определить искомые величины.

Задача 377. На рисунке изображена система рычагов, применяемая для подъема груза K , подвешенного к нижнему рычагу в точке D . Подъем совершается посредством силы F , направленной по вертикали вверх и приложенной в точке B верхнего рычага. Определить вес P поднимаемого груза K , если $F = 10$ кг, а $\frac{b}{a} = 10$ (см. рисунок).

Решение. При решении этой задачи методами статики надо, применив принцип освобожденности от связей, мысленно разорвать тягу AC , заменить ее действие на рычаги соответствующими силами реакций связей и рассмотреть отдельно равновесие верхнего и нижнего рычагов. После исключения из составленных уравнений равновесия силы реакции тяги AC можно определить вес P поднимаемого груза K .

Значительно проще можно решить эту задачу с помощью принципа возможных перемещений.

Изобразим на рисунке задаваемые силы P и F . Дадим точке B верхнего рычага возможное перемещение $\delta r_B = BB_1$, направленное по вертикали вверх. При этом верхний рычаг повернется вокруг точки O по часовой стрелке и повернет в том же направлении нижний рычаг.



К задаче 377.

Выразим возможное перемещение $\delta r_D = DD_1$ точки D нижнего рычага в зависимости от δr_B (на рисунке новые положения рычагов изображены пунктирными линиями). Воспользовавшись подобием треугольников, построенных на верхнем рычаге, можно записать: $\delta r_A = \frac{a}{b} \delta r_B$. Так как тяга AC является абсолютно жестким стержнем, то $\delta r_C = \delta r_A$, т. е.

$$\delta r_C = \frac{a}{b} \delta r_B. \quad (1)$$

На основании подобия треугольников, построенных на нижнем рычаге, получим: $\delta r_D = \frac{a}{b} \delta r_C$. Подставив значение δr_C из формулы (1), находим:

$$\delta r_D = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \delta r_B. \quad (2)$$

Применим принцип возможных перемещений к системе рычагов, т. е. сумму работ задаваемых сил F и P на возможных перемещениях δr_B и δr_D их точек приложения B и D приравняем нулю:

$$F \delta r_B - P \delta r_D = 0. \quad (3)$$

Воспользовавшись формулой (2), после сокращения уравнения (3) на δr_B получим:

$$P = \left(\frac{b}{a}\right)^2 F. \quad (4)$$

Подстановка численных значений дает результат: $P = 1000$ кг.

Если бы, решая эту задачу, мы дали возможное перемещение δr_B точке B не вверх, а вниз, то в уравнении (3) знаки изменились бы на обратные.

Можно было вместо возможного линейного перемещения δr_B точки B дать возможное угловое перемещение $\delta \varphi_O$ и вычислить в зависимости от него возможное угловое перемещение $\delta \varphi_E$ нижнего рычага. Для этого следует воспользоваться возможными перемещениями точек A и C абсолютно жесткого стержня AC :

$$\delta r_A = a \delta \varphi_O, \quad \delta r_C = b \delta \varphi_E.$$

Так как $\delta r_A = \delta r_C$, то $a \delta \varphi_O = b \delta \varphi_E$, т. е.

$$\delta \varphi_E = \frac{a}{b} \delta \varphi_O.$$

Применив принцип возможных перемещений, находим:

$$m_O(F) \delta \varphi_O + m_E(P) \delta \varphi_E = 0,$$

следовательно,

$$Fb \delta \varphi_O - Pa \delta \varphi_E = 0,$$

откуда $P = \frac{b}{a} F \frac{\delta \varphi_O}{\delta \varphi_E}$. Воспользовавшись формулой (5), получим:

$$P = \left(\frac{b}{a}\right)^2 F,$$

т. е. результат, записанный в формуле (4).

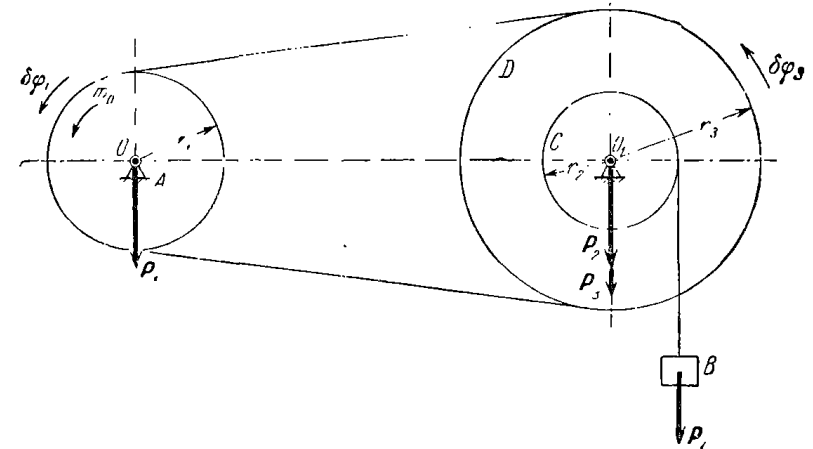
Задача 378. На рисунке изображена ременная передача, соединяющая шкивы A и D . Определить момент m_0 пары сил, которую нужно приложить к шкиву A радиуса r_1 для того, чтобы уравновесить груз B веса P_4 . Груз B привязан к концу каната, намотанного на барабан C радиуса r_2 , связанный со шкивом D радиуса r_3 . Массой ремня и каната пренебречь.

Решение. Для решения этой задачи методами статики надо мысленно разорвать верхнюю и нижнюю ветви ремня и заменить их действие соответствующими силами реакций связей. Затем рассмотреть равновесие шкива A , составив для него уравнение моментов относительно точки O , и шкива D совместно с барабаном C и грузом B , записав для них уравнение моментов относительно точки O_1 . Для определения искомого момента m_0 надо, решая полученную систему

уравнений равновесия, исключить силы реакций верхней и нижней ветвей ремня.

Значительно проще решается эта задача посредством принципа возможных перемещений. Искомая величина момента m_0 непосредственно определяется из одного уравнения равновесия.

Обозначим: P_1 — вес шкива A , P_2 — вес барабана C , P_3 — вес шкива D . Изобразим на рисунке задаваемые силы системы: P_1 , P_2 , P_3 , P_4 и пару сил с моментом m_0 .



К задаче 378.

Ладим возможное угловое перемещение $\delta \varphi_1$ шкиву A в направлении против часовой стрелки. При этом шкив D получит в том же направлении возможное угловое перемещение $\delta \varphi_3$. Учитывая нерастяжимость ремня и отсутствие проскальзывания, запишем:

$$r_1 \delta \varphi_1 = r_3 \delta \varphi_3. \quad (1)$$

Груз B получит возможное перемещение δr_4 по вертикали вверх, причем

$$\delta r_4 = r_2 \delta \varphi_3. \quad (2)$$

Применим принцип возможных перемещений, т. е. сумму работ задаваемых сил на соответствующих возможных перемещениях их точек приложения приравняем нулю:

$$m_0 \delta \varphi_1 - P_4 \delta r_4 = 0. \quad (3)$$

(Работа сил тяжести P_1 , P_2 и P_3 равна нулю, так как точки их приложения неподвижны.) Воспользовавшись формулами (1) и (2), после почленного сокращения уравнения (3) на $\delta \varphi_1$ находим:

$$m_0 = \frac{r_1 r_2}{r_3} P_4.$$

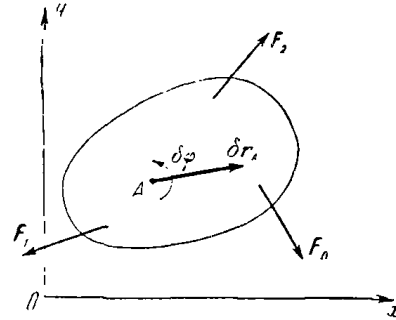
Задача 379. Пользуясь принципом возможных перемещений, вывести уравнения равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил.

Решение. Изобразим систему осей координат xu в плоскости действия сил. Обозначим задаваемые силы: F_1, F_2, \dots, F_n .

Выбрав за полюс произвольную точку A в плоскости действия задаваемых сил, разложим возможное перемещение твердого тела на переносное поступательное δr_A вместе с полюсом A и относительное вращательное $\delta \varphi$ вокруг оси, проходящей через точку A перпендикулярно к плоскости действия сил.

Применим принцип возможных перемещений, имеем:

$$\sum_{k=1}^n F_k \cdot \delta r_k + \sum_{k=1}^n m_A(F_k) \delta \varphi = 0. \quad (1)$$



К задаче 379.

Записав силы F_1, F_2, \dots, F_n и возможное перемещение δr_k в разложениях по ортам осей координат x и y :

$$F_k = F_{kx}i + F_{ky}j, \\ \delta r_k = \delta x_k i + \delta y_k j,$$

где $k = 1, 2, \dots, n$, получим уравнение (1) в виде

$$\sum_{k=1}^n (F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k) + \sum_{k=1}^n m_A(F_k) \delta \varphi = 0,$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} \delta x_k + \sum_{k=1}^n F_{ky} \delta y_k + \sum_{k=1}^n m_A(F_k) \delta \varphi = 0.$$

Так как переносное движение поступательное, то

$$\delta r_k = \delta r_A$$

и, следовательно, $\delta x_A, \delta y_A$ и $\delta \varphi$ можно вывести за знаки соответствующих сумм:

$$\delta x_A \sum_{k=1}^n F_{kx} + \delta y_A \sum_{k=1}^n F_{ky} + \delta \varphi \sum_{k=1}^n m_A(F_k) = 0, \quad (2)$$

привчем $\delta x_A, \delta y_A$ и $\delta \varphi$ — независимые возможные перемещения.

Поэтому левая часть уравнения (2) тождественно обращается в нуль лишь при условии, если коэффициенты $\sum_{k=1}^n F_{kx}, \sum_{k=1}^n F_{ky}, \sum_{k=1}^n m_A(F_k)$, стоящие при этих возможных перемещениях, равны нулю, т. е.

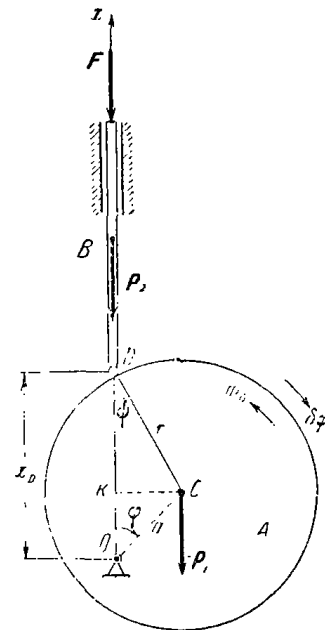
$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_A(F_k) = 0. \quad (3)$$

Как известно из статики, уравнения (3) являются уравнениями равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил.

Аналогично можно вывести шесть уравнений равновесия свободного твердого тела при наличии произвольной пространственной системы сил.

Полученные выше результаты убедительно подчеркивают степень общности принципа возможных перемещений, являющегося мощным средством для решения любых задач статики.

Задача 380. При вращении круглого эксцентрика A веса P_1 и радиуса r вокруг неподвижной горизонтальной оси O , перпендикулярной к плоскости рисунка, стержень B веса P_2 совершает в вертикальных направляющих возвратно-поступательное движение. К эксцентрику приложен момент m_0 , направленный против часовой стрелки. Механизм находится в равновесии при наличии вертикальной силы F , действующей на стержень B . Определить величину силы F и положение эксцентрика, указанное на рисунке. Эксцентриситет OC равен a .



К задаче 380.

Решение. Направим ось x по вертикали вверх, взяв начало отсчета в точке O . Угол поворота φ эксцентрика A отсчитываем от оси x в направлении по часовой стрелке.

Изобразим задаваемые силы: P_1 — вес эксцентрика A , P_2 — вес стержня B , F — вертикальную силу, приложенную к стержню B , пару сил с моментом m_0 .

Дадим возможное угловое перемещение $\delta \varphi$ эксцентрику A в направлении возрастания угла φ , т. е. по часовой стрелке. При этом точка D стержня B получит вертикальное возможное перемещение δx_D . Для определения δx_D в зависимости от $\delta \varphi$ выразим абсциссу

x_D точки D в функции от угла поворота φ эксцентрика A :

$$x_D = OD = OK + KD = a \cos \varphi + r \cos \psi, \quad (1)$$

где угол CDO обозначен через ψ . Установим теперь связь между углами ψ и φ . Из треугольника OCD получим: $\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{a}{r}$, откуда $\sin \psi = \lambda \sin \varphi$, где $\lambda = \frac{a}{r}$. Следовательно, $\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$. Вычисляя $\cos \psi$ с точностью до слагаемых, содержащих λ в квадрате (λ — правильная дробь), находим:

$$\begin{aligned} \cos \psi &= (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) = \\ &= 1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Подставив полученное значение $\cos \psi$ в формулу (1), получим:

$$x_D = r \left(1 - \frac{1}{4} \lambda^2 \right) + a \cos \varphi + \frac{1}{4} r \lambda^2 \cos 2\varphi. \quad (2)$$

Учитывая, что возможное перемещение точки является вариацией соответствующей координаты, вычислим вариацию функции (2):

$$\delta x_D = -a \sin \varphi \delta \varphi - \frac{1}{2} r \lambda^2 \sin 2\varphi \delta \varphi,$$

т. е.

$$\delta x_D = -a \sin \varphi (1 + \lambda \cos \varphi) \delta \varphi. \quad (3)$$

Формула (3) устанавливает зависимость между возможными перемещениями δx_D и $\delta \varphi$.

Применим к рассматриваемому механизму принцип возможных перемещений, т. е. сумму работ всех задаваемых сил на возможных перемещениях точек системы приравняем нулю:

$$P_1 a \sin \varphi \delta \varphi - m_0 \delta \varphi + P_{2x} \delta x_D + F_x \delta x_D = 0. \quad (4)$$

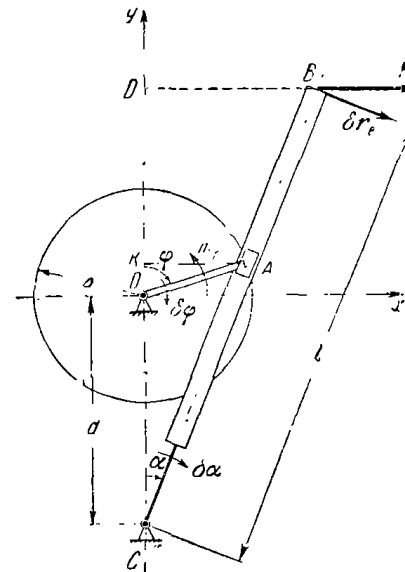
Подставив в уравнение (4) значение δx_D из формулы (3), почленно сократив на $\delta \varphi$ и приняв во внимание, что $P_{2x} = -P_2$ и $F_x = F_2$, определяем искомую величину силы F :

$$F = \frac{m_0 - [P_1 + P_2 (1 + \lambda \cos \varphi)] a \sin \varphi}{a (1 + \lambda \cos \varphi) \sin \varphi},$$

где

$$\lambda = \frac{a}{r}.$$

Задача 381. На рисунке изображена качающаяся кулиса, приводящая в движение стол поперечно-строгального станка. К рамке кулисы в точке B приложена горизонтальная сила F . Определить величину момента m_0 пары сил, которую надо приложить к кривошипу OA для того, чтобы механизм находился в равновесии в положении, указанном на рисунке. Весами деталей механизма пренебречь; $OA = r$, $OC = d$, $CB = l$.



К задаче 381.

Решение. Оси координат xu изображены на рисунке. Угол φ , образуемый осью y и кривошипом OA , отсчитываем в направлении по часовой стрелке. Угол между осью y и кулисой CB обозначим α .

Изобразим задаваемые силы: F и пару сил с моментом m_0 . Дадим кривошипу OA возможное угловое перемещение $\delta \varphi$ в направлении возрастания угла φ , т. е. по часовой стрелке. При этом точка B получит возможное перемещение δr_B , направленное перпендикулярно к CB .

Применив принцип возможных перемещений, запишем уравнение равновесия качающейся кулисы:

— $m_0 \delta \varphi + F \cdot \delta r_B = 0$.

$$- m_0 \delta \varphi + F \cdot \delta r_B = 0. \quad (1)$$

Учитывая, что $F \cdot \delta r_B = F_x \delta x_B + F_y \delta y_B$, где $F_x = F$ и $F_y = 0$, перепишем уравнение (1) в виде

$$- m_0 \delta \varphi + F \delta x_B = 0,$$

откуда

$$m_0 = F \frac{\delta x_B}{\delta \varphi}. \quad (2)$$

Для решения задачи остается установить зависимость между возможными перемещениями δx_B и $\delta \varphi$. Для этого надо вычислить вариацию координаты x_B , выраженной в виде функции от угла φ . Из треугольника CBD находим:

$$x_B = BD = l \sin \alpha. \quad (3)$$

Из треугольника CAK определим: $\sin \alpha = \frac{AK}{AC}$, где $AK = r \sin \varphi$,
а $AC = \sqrt{AK^2 + KC^2} = \sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + (d + r \cos \varphi)^2}$. Следовательно,

$$\sin \alpha = \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + (d + r \cos \varphi)^2}}. \quad (4)$$

Подставив полученное значение $\sin \alpha$ в формулу (3), имеем:

$$x_B = \frac{rl \sin \varphi}{\sqrt{r^2 + d^2 + 2dr \cos \varphi}}.$$

Вычислив вариацию δx_B , определяем зависимость между возможными перемещениями δx_B и $\delta \varphi$:

$$\delta x_B = rl \frac{(r^2 + d^2 + 2dr \cos \varphi) \cos \varphi + rd \sin^2 \varphi}{(r^2 + d^2 + 2dr \cos \varphi)^{3/2}} \delta \varphi. \quad (5)$$

Внося значение δx_B из формулы (5) в (2), после сокращения на $\delta \varphi$ найдем искомое значение момента m_0 пары сил:

$$m_0 = Fr l \frac{(r^2 + d^2 + 2dr \cos \varphi) \cos \varphi + rd \sin^2 \varphi}{(r^2 + d^2 + 2dr \cos \varphi)^{3/2}}.$$

Работу силы F можно было вычислить как произведение момента силы F относительно точки C на возможное угловое перемещение $\delta \alpha$, т. е. $\delta A(F) = m_C(F) \delta \alpha = Fl \cos \alpha \delta \alpha$. Следовательно, уравнение (1) приняло бы вид

$$-m_0 \delta \varphi + Fl \cos \alpha \delta \alpha = 0. \quad (6)$$

Для определения множителя $\cos \alpha \delta \alpha$ надо вычислить вариацию $\sin \alpha$, определенного формулой (4). Решив затем уравнение (6) относительно m_0 , мы получили бы искомый результат.

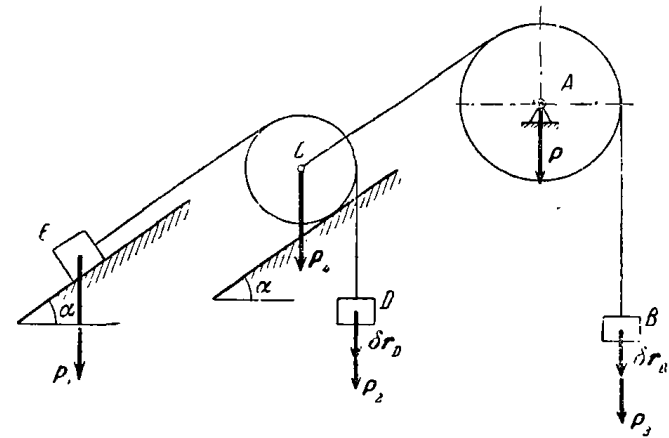
Задача 382. Через блок A веса P переброшена нить, к концам которой привязаны груз B и каток C веса P_1 , лежащий на идеально гладкой наклонной плоскости. Через каток C в свою очередь переброшена нить, к концам которой привязаны груз D веса P_2 и груз E веса P_1 , лежащий на параллельной идеально гладкой плоскости (см. рисунок). Определить вес P_3 груза B и угол α , образуемый наклонными плоскостями с горизонтом, если система находится в равновесии. Весом нитей пренебречь.

Решение. Рассматриваемая система имеет две степени свободы, так как для определения положения всех ее точек надо задать два независимых параметра. Один параметр должен определять положение груза B , а второй — положение грузов D и E по отношению к катку C .

Изобразим задаваемые силы: P — вес блока A , P_1 — вес груза E , P_2 — вес груза D , P_3 — искомый вес груза B и P_1 — вес катка C . Силы реакций связей изображать не следует, так как все связи,

положенные на систему, являются идеальными (нити натянуты и нерастяжимы, наклонные плоскости идеально гладкие).

Дадим системе два независимых возможных перемещения (число независимых возможных перемещений равно числу степеней свободы системы): δr_B — возможное перемещение груза B , направленное по вертикали вниз, и δr_D — возможное перемещение груза D , также направленное по вертикали вниз.



К задаче 382.

Применим принцип возможных перемещений для составления уравнений равновесия системы. Число уравнений должно быть равно числу ее степеней свободы. Поэтому для данной системы составим два уравнения равновесия.

Для составления уравнения равновесия системы, соответствующего возможному перемещению δr_D , будем считать возможное перемещение δr_B равным нулю, т. е. $\delta r_D \neq 0$, $\delta r_B = 0$ (это допустимо, так как возможные перемещения δr_B и δr_D являются независимыми). При этом груз B и каток C останутся в покое, груз D переместится на δr_D по вертикали вниз, а груз E переместится на δr_D параллельно наклонной плоскости вверх.

Применив принцип возможных перемещений, получим:

$$P_2 \delta r_D - P_1 \delta r_D \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$\sin \alpha = \frac{P_2}{P_1}. \quad (1)$$

Для составления уравнения равновесия системы, соответствующего возможному перемещению δr_B , будем считать возможное перемеще-

ние δr_D равным нулю, т. е. $\delta r_B \neq 0, \delta r_D = 0$. При этом грузы D и E по отношению к катку C останутся в покое, груз B переместится на δr_B по вертикали вниз, а каток C с грузами D и E переместится на δr_B параллельно наклонной плоскости вверх. Применяв принцип возможных перемещений, имеем:

$$P_3 \delta r_B - P_1 \delta r_B \sin \alpha - P_2 \delta r_B \sin \alpha - P_4 \delta r_B \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$P_3 = (P_1 + P_2 + P_4) \sin \alpha. \quad (2)$$

Подставив в формулу (2) значение $\sin \alpha$ из формулы (1), найдем искомую величину веса P_3 груза B :

$$P_3 = \frac{P_2}{P_1} (P_1 + P_2 + P_4).$$

Задача 383. Составная балка AD , лежащая на трех опорах, состоит из двух балок AC и CD , шарнирно соединенных в точке C . К балке AC приложены вертикальные силы $P_1 = 8m$ и $P_2 = 6m$, а к балке CD — пара сил с моментом $m = 4a$ м·м, направленным против часовой стрелки. Размеры указаны на рис. а.

Определите силы опорных реакций в A, B и D . Весом балок пренебречь.

Решение. Составная балка AD представляет собой систему двух твердых тел — балок AC и CD , находящихся в равновесии.

Решая эту задачу методами статики, надо, мысленно разорвав шарнир C , отбросить одну из балок, заменить действие отброшенной балки на оставшуюся балку двумя составляющими силами реакции шарнира C и составить уравнения равновесия для оставшейся балки. Затем, применив те же рассуждения к отброшенной балке, записать для нее уравнения равновесия. Наконец, решив систему уравнений равновесия, составленных для каждой из балок, определить искомые опорные реакции. Такое решение является довольно громоздким.

Применяя принцип возможных перемещений, можно любую искомую силу опорной реакции определить из одного соответствующим образом составленного уравнения. Это значительно упрощает решение задачи. Особенно в тех случаях, когда требуется определить только одну силу опорной реакции.

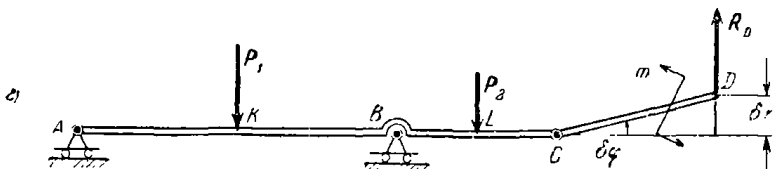
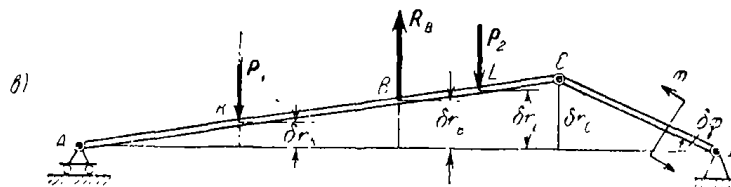
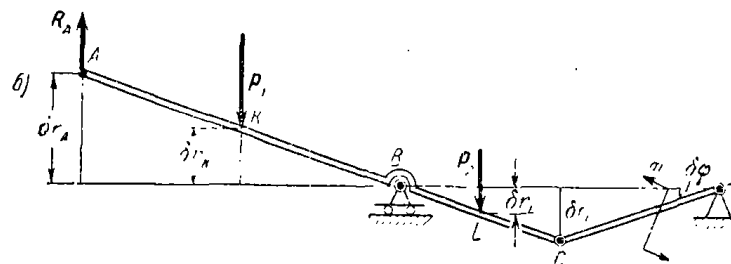
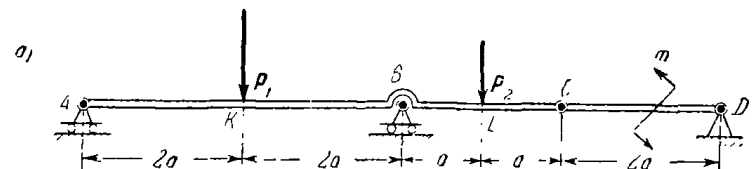
Проиллюстрируем это утверждение последовательным и притом друг от друга независимым определением опорных реакций A, B и D с помощью принципа возможных перемещений.

Изобразим на рис. а задаваемые силы P_1, P_2 и пару сил с моментом m .

Для определения силы опорной реакции R_A отбрасываем мысленно опору A , компенсируя отсутствие этой связи силой опорной реакции R_A .

Дадим возможное перемещение δr_A точке A по вертикали вверх. При этом балка примет положение, изображенное на рис. б.

Обозначим через δr_K и δr_L возможные перемещения точек приложения K и L сил P_1 и P_2 и через $\delta \varphi$ — угловое перемещение балки CD .



К задаче 383.

Выразим, воспользовавшись подобием треугольников, зависимость между линейными возможными перемещениями:

$$\delta r_A = 2\delta r_K = 4\delta r_L = 2\delta r_C = 4a\delta \varphi. \quad (1)$$

Применив принцип возможных перемещений, приравняем сумму работ всех задаваемых сил и силы реакции R_A на соответствующих возможных перемещениях нулю:

$$R_A \delta r_A - P_1 \delta r_K - P_2 \delta r_L + m \delta \varphi = 0. \quad (2)$$

Воспользовавшись формулой (1), после почленного сокращения уравнения (2) на δr_A находим:

$$R_A - \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{4} P_2 + \frac{1}{4a} m = 0,$$

откуда после подстановки численных значений получим:

$$R_A = 1,5m.$$

Для определения силы опорной реакции R_B мысленно отбрасываем опору B , компенсируя отсутствующую связь силой опорной реакции R_B .

Дадим возможное перемещение δr_C шарниру C по вертикали вверх. При этом балка примет положение, указанное на рис. *в*.

Обозначив через δr_K , δr_L и δr_B возможные перемещения точек приложения K , L и B сил P_1 , P_2 и R_B и возможное угловое перемещение балки CD через $\delta\varphi$, выразим связь между ними:

$$\delta r_C = \frac{6}{5} \delta r_L = \frac{3}{2} \delta r_B = 3\delta r_K = 2a \delta\varphi. \quad (3)$$

Применив принцип возможных перемещений, запишем:

$$-P_1 \delta r_K + R_B \delta r_B - P_2 \delta r_L - m \delta\varphi = 0. \quad (4)$$

Воспользовавшись формулой (3), после почленного сокращения уравнения (4) на δr_C находим:

$$-\frac{1}{3} P_1 + \frac{2}{3} R_B - \frac{5}{6} P_2 - \frac{m}{2a} = 0,$$

откуда после подстановки численных значений получим:

$$R_B = 14,5 m.$$

Остается определить силу опорной реакции R_D . Вновь применяя принцип освобождения от связей, мысленно отбрасываем опору D , возмещая ее отсутствие силой опорной реакции R_D .

Дадим возможное перемещение δr_D точке D по вертикали вверх. При этом балка CD повернется против часовой стрелки на угол

$$\delta\varphi = \frac{\delta r_D}{2a}. \quad (5)$$

Положение балки AC остается неизменным (см. рис. *з*).

Записав принцип возможных перемещений, получим:

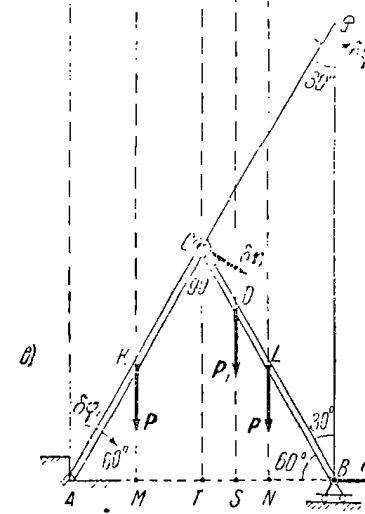
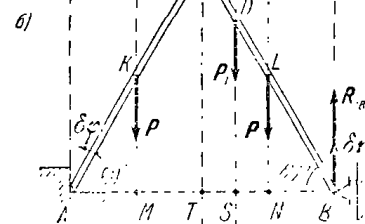
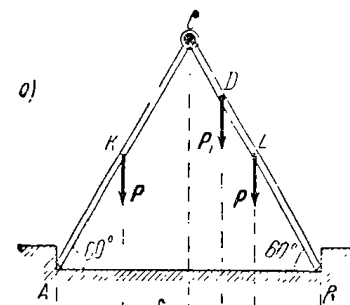
$$R_D \delta r_D + m \delta\varphi = 0. \quad (6)$$

После подстановки численных значений, использования формулы (5) и почленного сокращения уравнения (6) на δr_D находим:

$$R_D = -2m.$$

Знак минус указывает, что опорная реакция R_D направлена по вертикали вниз.

Задача 384. На рис. *а* изображена стремянка ACB . Две одинаковые стороны AC и CB стремянки шарнирно соединены в точке C , а концы A и B упираются в выступы пола. Вес каждой стороны стремянки равен P . В точке D стоит человек веса P_1 .



К задаче 384.

Определить силу опорной реакции в точке B , если $AC = CB = 4CD$, а $\angle CAB = \angle CBA = 60^\circ$.

Решение. Задаваемыми силами являются: P — вес каждой стороны стремянки, P_1 — вес человека. Обозначим длину каждой стороны стремянки $2l$. Тогда $AK = KC = CL = LB = 2CD = l$.

Для определения вертикальной составляющей R_{1B} силы опорной реакции в точке B дадим опоре B возможность двигаться в вертикальном направлении. С этой целью, применив принцип освобождения от связей, заменим выступ пола в точке B опорой на катках, которая может перемещаться в вертикальном направлении (см. рис. *б*).

Приложим в точке B соответствующую силу реакции R_{1B} . Дадим возможное перемещение δr_B точке B по вертикали вверх. При этом правая половина стремянки совершит плоское движение, а левая половина повернется вокруг оси A , перпендикулярной к плоскости рисунка. Направив возможное перемещение δr_C точки C перпендикулярно к AC , найдем положение мгновенного центра вращения стороны CB в точке A (в точке A пересекаются перпендикуляры, восстановленные из точек C и B к δr_C и δr_B). Итак, в точке A

совмещаются: центр вращения левой стороны AC стремянки, вращающейся вокруг неподвижной оси, и мгновенный центр вращения правой

стороны CB стремянки, совершающей плоское движение. Следовательно, вся стремянка получает возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ вокруг точки A , в плоскости рисунка, против часовой стрелки.

Применим принцип возможных перемещений, т. е. сумму работ задаваемых сил и вертикальной составляющей силы реакции R_{1B} на возможных перемещениях их точек приложения приравняем нулю:

$$-P|AM|\delta\varphi - P_1|AS|\delta\varphi - P|AN|\delta\varphi - R_{1B}|AB|\delta\varphi = 0. \quad (1)$$

Учитывая, что

$$AM = AK \cos 60^\circ = \frac{l}{2},$$

$$AS = AT - TS = AC \cos 60^\circ - CD \cos 60^\circ = \frac{5}{4} l,$$

$$AN = AT - TN = AC \cos 60^\circ - CL \cos 60^\circ = \frac{3}{2} l,$$

$$AB = 2l,$$

после сокращения уравнения (1) на $\delta\varphi$ находим:

$$R_{1B} = P - \frac{5}{8} P_1.$$

Для определения горизонтальной составляющей R_{2B} силы опорной реакции в точке B дадим опоре B подвижность в горизонтальном направлении. С этой целью, применив принцип освобожденности от связей, заменим выступ пола в точке B опорой на катках, которая может перемещаться в горизонтальном направлении (см. рис. *в*). Приложим в точке B соответствующую силу реакции R_{2B} .

Дадим возможное перемещение δr_B точке B по горизонтали направо. При этом правая половина стремянки совершит плоское движение, а левая половина стремянки повернется вокруг точки A . Направив в точке C возможное перемещение δr_C перпендикулярно к AC , определим положение мгновенного центра вращения стороны CB в точке \mathcal{F} пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек C и B к соответствующим возможным перемещениям δr_C и δr_B . Итак, левая половина AC стремянки поворачивается вокруг A на угол $\delta\varphi_A$ по часовой стрелке, а правая половина CB стремянки — вокруг \mathcal{F} на угол $\delta\varphi_{\mathcal{F}}$ против часовой стрелки.

Определим зависимость между возможными угловыми перемещениями $\delta\varphi_A$ и $\delta\varphi_{\mathcal{F}}$. Для этого заметим, что шарнир C принадлежит обшим сторонам стремянки, и поэтому

$$\delta r_C = AC\delta\varphi_A, \quad \delta r_C = C\mathcal{F}\delta\varphi_{\mathcal{F}}.$$

Следовательно,

$$C\mathcal{F}\delta\varphi_{\mathcal{F}} = AC\delta\varphi_A, \quad \text{т. е. } \delta\varphi_{\mathcal{F}} = \frac{AC}{C\mathcal{F}}\delta\varphi_A.$$

Нетрудно видеть, что так как $C\mathcal{F} = AC$ (треугольник $BC\mathcal{F}$ является равнобедренным), то

$$\delta\varphi_{\mathcal{F}} = \delta\varphi_A. \quad (2)$$

Применив принцип возможных перемещений, запишем:

$$P|AM|\delta\varphi_A - P_1|SB|\delta\varphi_{\mathcal{F}} + P|NB|\delta\varphi_{\mathcal{F}} - R_{2B}|FB|\delta\varphi_{\mathcal{F}} = 0. \quad (3)$$

Учитывая формулу (2), представим уравнение (3) после сокращения на $\delta\varphi_A$ в виде

$$P|AM| - P_1|SB| - P|NB| - R_{2B}|FB| = 0. \quad (4)$$

Так как

$$AM = AK \cos 60^\circ = \frac{l}{2}, \quad SB = BD \cos 60^\circ = \frac{3}{4} l,$$

$$NB = LB \cos 60^\circ = \frac{l}{2}, \quad FB = FC \cos 30^\circ - CB \cos 30^\circ = l\sqrt{3},$$

то после подстановки этих значений в уравнение (4), решив его относительно R_{2B} , находим:

$$R_{2B} = -\frac{\sqrt{3}}{12}(4P + 3P_1).$$

Итак, данная задача о равновесии системы твердых тел, состоящей из двух половин AC и CB стремянки ACB , нами решена с помощью принципа возможных перемещений. В ходе решения задачи мы определили каждую искомую составляющую силы реакции в точке B из одного уравнения независимо друг от друга. Так, вертикальная составляющая R_{1B} силы реакции в точке B была найдена из уравнения (1), а горизонтальная составляющая R_{2B} — из уравнения (3).

При решении же этой задачи методами статики мы должны были бы составить три уравнения равновесия для всей стремянки, затем три уравнения равновесия для правой половины стремянки и затем решить систему этих уравнений.

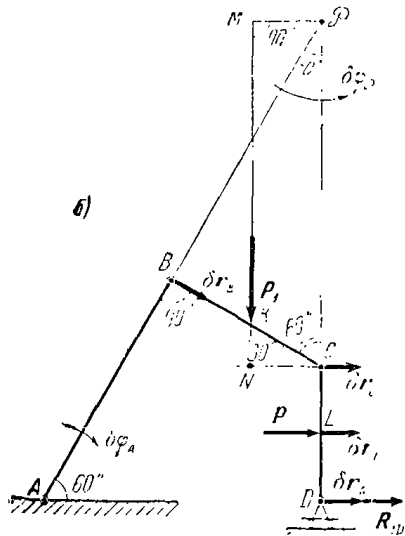
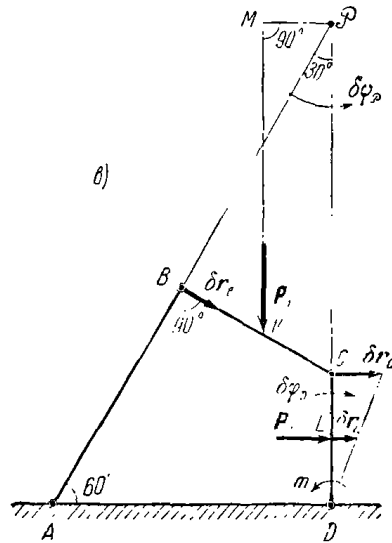
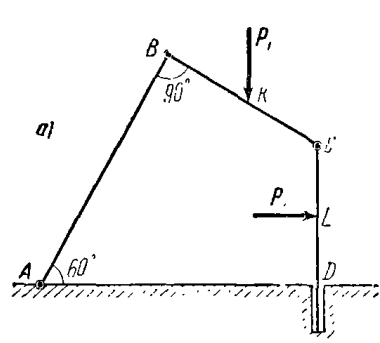
Преимущество применения принципа возможных перемещений к задачам о равновесии систем твердых тел по сравнению с методами статики совершенно бесспорно.

Задача 385. Две балки AB и BC соединены шарниром в точке B . Балка BC шарнирно прикреплена концом C к вертикальной стойке CD , заземленной в сечении D . Балка AB шарниром A прикреплена к земле.

Определить горизонтальную составляющую силы реакции R_D и реактивный момент m в заземленном сечении D . Силы P_1 и P_2 по-

казаны на рис. а. Весом балок пренебречь; $BC = CD = 2a$, $BK = KC$, $CL = LD$.

Решение. Для определения горизонтальной составляющей силы реакции в защемленном сечении D применим принцип освобождаемости



К задаче 385.

от связей. Сообщим стойке CD в сечении D подвижность в горизонтальном направлении, мысленно заменив опору в точке D на опору, расположенную на катках (см. рис. б). Приложим в точке D горизонтальную составляющую силы реакции R_{1D} , соответствующую отброшенной связи.

Дадим возможное перемещение δr_D точке D по горизонтали направо. При этом стойка CD получит поступательное возможное перемещение, т. е.

$$\delta r_C = \delta r_L = \delta r_D. \quad (1)$$

Балка AB получит возможное угловое перемещение $\delta\varphi_A$, а δr_B будет направлено перпендикулярно к AB , т. е. вдоль BC . Балка BC при наличии возможных перемещений δr_B и δr_C совершает плоское движение. Мгновенный центр вращения \mathcal{F} балки BC находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек B и C к δr_B и δr_C . Итак, балка BC совершает поворот на угол $\delta\varphi_{\mathcal{F}}$ в направлении против часовой стрелки вокруг мгновенного центра вращения \mathcal{F} .

Применяя принцип возможных перемещений, вычислим сумму работ задаваемых сил P_1 и P_2 и горизонтальной составляющей силы реакции R_{1D} на возможных перемещениях их точек приложения и приравняем ее нулю:

$$P_1 |M^{\mathcal{F}}| \delta\varphi_{\mathcal{F}} + P_2 \delta r_L + R_{1D} \delta r_D = 0. \quad (2)$$

Из треугольника $\mathcal{F}BC$ находим:

$$\mathcal{F}C = \frac{BC}{\sin 30^\circ} = 4a.$$

Тогда

$$\delta\varphi_{\mathcal{F}} = \frac{\delta r_C}{\mathcal{F}C} = \frac{\delta r_C}{4a}. \quad (3)$$

Учитывая формулы (1) и (3), после почленного сокращения уравнения (2) на δr_D , получаем:

$$P_1 \frac{|M^{\mathcal{F}}|}{4a} + P_2 + R_{1D} = 0. \quad (4)$$

Заметив, что

$$M^{\mathcal{F}} = NC = KC \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad (5)$$

и решив уравнение (4) относительно R_{1D} , найдем:

$$R_{1D} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{8} P_1 + P_2\right).$$

Знак минус указывает, что горизонтальная составляющая силы реакции R_{1D} направлена по горизонтали налево.

Переходим к определению величины реактивного момента m в защемленном сечении D . Для этого заменим защемление в сечении D неподвижным цилиндрическим шарниром, приложив к нему реактивный момент m в направлении против часовой стрелки (см. рис. в).

Дадим возможное угловое перемещение $\delta\varphi_D$ стойке CD вокруг шарнира D по часовой стрелке. Обозначив возможные перемещения в точках B и C соответственно δr_B и δr_C , определяем, как и ранее,

положение мгновенного центра вращения \mathcal{P} балки BC . При заданном возможном угловом перемещении $\delta\varphi_D$ стойки CD вокруг точки D балка BC совершает поворот на угол $\delta\varphi_{\mathcal{P}}$ вокруг мгновенного центра вращения \mathcal{P} в направлении против часовой стрелки.

Применив принцип возможных перемещений, получаем:

$$P_1 |M\mathcal{P}| \delta\varphi_{\mathcal{P}} + P_2 |LD| \delta\varphi_D - m\delta\varphi_D = 0. \quad (6)$$

Для установления зависимости между $\delta\varphi_D$ и $\delta\varphi_{\mathcal{P}}$ рассмотрим возможное перемещение δr_C точки C , одновременно принадлежащей балке BC и стойке CD :

$$\delta r_C = \mathcal{P}C\delta\varphi_{\mathcal{P}}, \quad \delta r_C = CD\delta\varphi_D.$$

Следовательно, $\mathcal{P}C\delta\varphi_{\mathcal{P}} = CD\delta\varphi_D$, откуда $\delta\varphi_{\mathcal{P}} = \frac{CD}{\mathcal{P}C} \delta\varphi_D$. Так как $\mathcal{P}C = 4a$, то $\delta\varphi_{\mathcal{P}} = \frac{2a}{4a} \delta\varphi_D = \frac{1}{2} \delta\varphi_D$. Теперь уравнение (6) после почленного сокращения на $\delta\varphi_D$ принимает вид

$$\frac{1}{2} P_1 |M\mathcal{P}| + P_2 a - m = 0.$$

Учитывая формулу (5), получим:

$$m = \left(\frac{V\sqrt{3}}{4} P_1 + P_2 \right) a.$$

3°. Рычаг Жуковского. Использование аналитических методов при решении задач на равновесие плоских многозвенных механизмов с помощью принципа возможных перемещений связано с вычислительными трудностями. Эти трудности возникают при составлении зависимостей между координатами точек приложения задаваемых сил. Вычисление вариаций этих координат, определяющих возможные перемещения соответствующих точек системы, ведет к дальнейшему усложнению вычислений (см., например, решение задачи 381, в которой рассмотрен сравнительно простой механизм качающейся кулисы).

В 1912 г. Н. Е. Жуковский предложил графоаналитический метод решения задач на равновесие плоских многозвенных механизмов, получивший название «рычага Жуковского». Метод решения задач основан на принципе возможных скоростей.

Так как скорости точек системы в действительном движении имеют направление dr_k , а при стационарных связях действительное перемещение является одним из возможных, то можно дать частную формулировку принципа возможных перемещений, заменив возможные перемещения δr_k на «возможные скорости» v_k — величины, пропорциональные действительным скоростям $\frac{dr_k}{dt}$.

Принцип возможных скоростей в случае равновесия системы материальных точек дается формулой

$$\sum_{k=1}^n F_k \cdot v_k = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^n F_k v_k \cos(\widehat{F_k, v_k}) = 0,$$

где F_k — задаваемая сила, приложенная к k -й точке системы, v_k — возможная скорость этой точки. Все связи, наложенные на систему, являются идеальными и стационарными.

Удобство применения «рычага Жуковского» при решении задач на равновесие плоских многозвенных механизмов заключается в том, что в уравнение равновесия не входят силы реакций идеальных связей.

Решив уравнение равновесия, можно определить одну из задаваемых сил (движущую силу, силу полезного сопротивления, силу вредного сопротивления и т. д.). Благодаря применению «рычага Жуковского» даже исследование равновесия сложных механизмов не оказывается громоздким.

Недостаток «рычага Жуковского» заключается в том, что построение приходится повторять для каждого положения механизма.

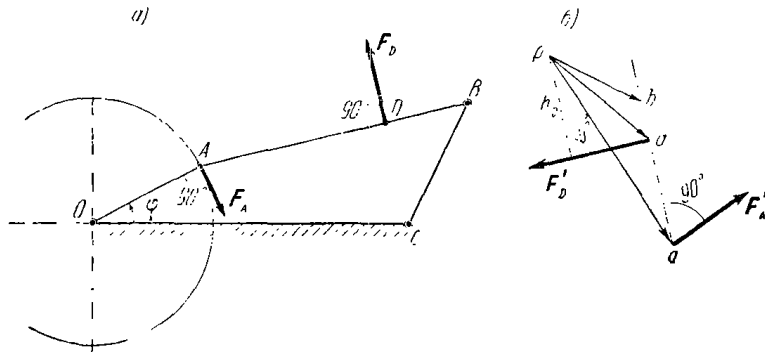
Решение задач с помощью «рычага Жуковского» рекомендуется проводить в следующей последовательности:

- 1) нарисовать схему механизма в рассматриваемом положении;
- 2) изобразить на чертеже задаваемые силы;
- 3) задавшись скоростью одной из точек механизма, построить для данного положения механизма план скоростей;
- 4) приложить все задаваемые силы на плане скоростей к концам соответствующих векторов скоростей их точек приложения. При этом все задаваемые силы надо повернуть по часовой стрелке, либо против часовой стрелки, на угол 90° ;
- 5) представить план скоростей в виде неизменяемой фигуры с неподвижной точкой в полюсе, т. е. в виде рычага с точкой опоры в полюсе плана скоростей. Записать уравнение равновесия рычага, т. е. сумму моментов относительно полюса плана скоростей всех задаваемых сил, повернутых на 90° , приравнять нулю. Это уравнение равновесия «рычага Жуковского» одновременно является уравнением равновесия данного механизма;
- 6) решив полученное уравнение равновесия, определить величину искомой задаваемой силы.

Задача 386. На рис. 2 изображен шарнирный четырехзвеночник $OABC$. К шарниру A приложена сила F_A , перпендикулярная к кривошлупу OA .

Определить величину силы F_D , направленной перпендикулярно к звену AB в точке D при равновесии механизма в положении, указанном на рис. *a*.

Решение. Применение аналитического метода при решении этой задачи нецелесообразно, так как выражение координат точки D в зависимости от угла поворота φ кривошипа OA и размеров звеньев механизма оказывается громоздким. Еще более сложными будут выражения вариаций координат точки D , т. е. проекций возможного перемещения точки D на оси координат. Поэтому для решения данной задачи воспользуемся «рычагом Жуковского».



К задаче 386.

На схеме механизма (см. рис. *a*) изображены задаваемые силы F_A и F_D .

Построим план скоростей, соответствующий рассматриваемому положению механизма. Дадим точке A скорость v_A в направлении вращения кривошипа OA по часовой стрелке (модуль скорости выбирается произвольно, а направление скорости можно изменить на противоположное). Выбрав вне схемы механизма полюс p , строим вектор скорости $v_A = pa$ в принятом масштабе скоростей (см. рис. *b*).

Скорость точки B должна быть направлена перпендикулярно к звену BC , качающемуся вокруг точки C . Проведем через полюс p вспомогательную прямую, перпендикулярную к BC .

На этой прямой располагается вектор скорости точки B . Для определения положения конца v_B проведем через точку a прямую, перпендикулярную к AB , которая в пересечении с первой вспомогательной прямой определяет конец b вектора скорости точки B ($v_B = v_A + v_{BA}$; на плане скоростей: $\overline{pb} = \overline{pa} + \overline{ab}$). Следовательно, $v_B = \overline{pb}$. На прямой ab располагаются концы векторов скоростей точек звена AB . Положение конца d скорости точки D определяется

из пропорции: $\frac{AD}{DB} = \frac{ad}{db}$. Соединив полюс p с точкой d , определяем скорость точки D :

$$v_D = \overline{pd}.$$

Теперь в точках a и d следует приложить задаваемые силы F_A и F_D , предварительно повернув их на угол 90° в одном направлении, например, против часовой стрелки. Повернутые силы обозначим F'_A и F'_D (так как направления F_A и v_A совпадают, то F'_A направим перпендикулярно к \overline{pa} . Учитывая, что по условию F_D перпендикулярно к AB , направим F'_D перпендикулярно к ab).

Представим план скоростей в виде неизменяемой фигуры с неподвижной точкой в полюсе p , т. е. в виде рычага с опорой в точке p . Запишем уравнение равновесия этого рычага под действием сил F'_A и F'_D :

$$m_p(F'_A) - m_p(F'_D) = 0,$$

т. е. $F'_A |pa| - F'_D h_D = 0$, где h_D — перпендикуляр, опущенный из полюса p на линию действия F'_D . Имеем: $F'_D = \frac{pa}{h_D} F'_A$, т. е. $F_D = \frac{pa}{h_D} F_A$. Измерив на рис. *b* длину отрезков pa и h_D и определив их отношение, найдем искомую величину силы F_D .

При изменении положения механизма все построения следует повторить.

Задача 387. На рис. *a* изображен многозвенный шарнирный плоский механизм, который приводится в движение силой F_A , приложенной в точке A перпендикулярно к кривошипу OA . При вращении кривошипа OA звено BD качается вокруг неподвижной оси C и посредством тяги DE приводит в возвратно-поступательное движение ползуна E . К ползуну E приложена горизонтальная сила полезного сопротивления F_E . Определить величину силы F_E при равновесии механизма в положении, указанном на рис. *a*.

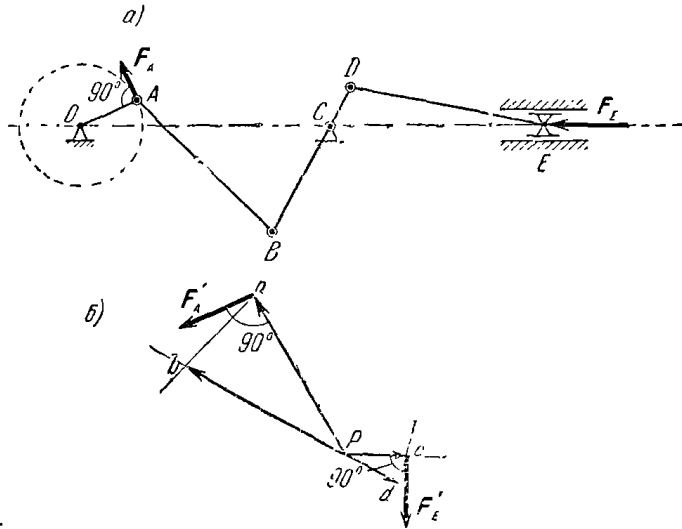
Решение. Равновесие механизмов, подобных данному, не следует изучать аналитически ввиду неизбежной громоздкости вычислений.

Для решения этой задачи воспользуемся «рычагом Жуковского». На схеме механизма (см. рис. *a*) изображены задаваемые силы F_A и F_E . Построим план скоростей, соответствующий рассматриваемому положению механизма.

Дадим скорость v_A точке A , направив ее перпендикулярно к кривошипу OA в сторону F_A , т. е. против часовой стрелки (модуль

скорости выбирается произвольно, направление скорости можно изменить на противоположное). Выбрав в стороне от схемы механизма полюс p плана скоростей, строим скорость $\mathbf{v}_A = \overline{pa}$ в принятом масштабе скоростей (см. рис. б).

На плане скоростей необходимо определить скорости точек механизма, к которым приложены задаваемые силы. Следовательно, кроме скорости точки A , надо найти скорость точки E . Для этого предварительно определяем скорости точек B и D .



К задаче 387.

Скорость точки B направлена перпендикулярно к звену BD , качающемуся вокруг неподвижной оси C . Проводим через полюс p вспомогательную прямую, перпендикулярную к BD . Направив через точку a прямую перпендикулярно к AB , находим в пересечении этих прямых точку b , являющуюся концом вектора скорости точки B ($\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$; на плане скоростей $\overline{pb} = \overline{pa} + \overline{ab}$). Следовательно, $\mathbf{v}_B = \overline{pb}$. Теперь легко определяется скорость точки D , так как скорости \mathbf{v}_B и \mathbf{v}_D параллельны и направлены в разные стороны. На прямой, проведенной вдоль pb в противоположную сторону, откладываем отрезок pd , величину которого вычисляем из пропорции $\frac{v_D}{v_B} = \frac{CD}{CB}$. Следовательно, $\mathbf{v}_D = \overline{pd}$. Остается найти скорость точки E , которая направлена по горизонтали. Проводим через полюс p горизонталь. Затем через точку d направляем вспомогательную прямую, перпендикулярную к звену DE , которая в пересечении с горизонталью опре-

деляет положение точки e ($\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{ED}$). На плане скоростей $\overline{pe} = \overline{pd} + \overline{de}$. Итак, $\mathbf{v}_E = \overline{pe}$.

Задаваемые силы \mathbf{F}_D и \mathbf{F}_E приложены в точках A и E механизма. Для решения задачи с помощью «рычага Жуковского» следует эти силы, предварительно повернув их на 90° в одну сторону, приложить к концам векторов скоростей \mathbf{v}_A и \mathbf{v}_E на плане скоростей. Приложим в точке a , являющейся концом \mathbf{v}_A , силу \mathbf{F}'_A , полученную путем поворота силы \mathbf{F}_A против часовой стрелки (так как \mathbf{F}_A перпендикулярно к OA , то \mathbf{F}'_A параллельно OA , т. е. \mathbf{F}'_A перпендикулярно к \overline{pa}). В точке e , являющейся концом \mathbf{v}_E , приложим силу \mathbf{F}'_E , получив ее путем поворота силы \mathbf{F}_E против часовой стрелки (так как \mathbf{F}_E направлена горизонтально, то \mathbf{F}'_E имеет вертикальное направление, т. е. \mathbf{F}'_E перпендикулярно \overline{pe}).

Теперь представим план скоростей в виде неизменяемой фигуры с неподвижной точкой в полюсе p , т. е. в виде рычага с опорой в точке p . Запишем уравнение равновесия этого рычага под действием сил \mathbf{F}'_A и \mathbf{F}'_E :

$$F'_A |pa| - F'_E |pe| = 0$$

или

$$F_A |pa| - F_E |pe| = 0,$$

откуда

$$F_E = \frac{pa}{pe} F_A.$$

Отношение pa к pe легко находим, определив длины этих отрезков на рис. б.

При изменении положения механизма все построения следует повторить.

§ 5. Общее уравнение динамики системы материальных точек

При движении системы материальных точек, подчиненной идеальным связям, сумма работ задаваемых сил и сил инерции на любых возможных перемещениях точек системы равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n (\mathbf{F}_k - m_k \mathbf{w}_k) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0.$$

Если

$$\mathbf{F}_k = F_{kx} \mathbf{i} + F_{ky} \mathbf{j} + F_{kz} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{w}_k = \ddot{x}_k \mathbf{i} + \ddot{y}_k \mathbf{j} + \ddot{z}_k \mathbf{k}, \quad \delta \mathbf{r}_k = \delta x_k \mathbf{i} + \delta y_k \mathbf{j} + \delta z_k \mathbf{k},$$

то общее уравнение динамики имеет вид

$$\sum_{k=1}^n [(F_{kx} - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k + (F_{ky} - m_k \ddot{y}_k) \delta y_k + (F_{kz} - m_k \ddot{z}_k) \delta z_k] = 0.$$

Общее уравнение динамики является аналогом принципа возможных перемещений для случая *движения* системы материальных точек.

Как известно, при движении системы силы реакций связей, вообще говоря, переменны. Они могут быть функциями времени, координат материальных точек, их скоростей и их ускорений. Поэтому при решении обратных задач динамики, в которых движение определяется по заданным силам, приходится исключать силы реакций связей из составленных уравнений движения.

Большое преимущество общего уравнения динамики по сравнению с другими теоремами динамики заключается в том, что в его формулировке отсутствуют силы реакций идеальных связей. Если не все связи являются идеальными, например имеются связи с трением, то, применяя общее уравнение динамики, следует к задаваемым силам добавлять силы реакций, соответствующие неидеальным связям.

Вычисление суммы работ сил инерции на возможных перемещениях точек твердого тела производится по формулам:

а) При поступательном движении:

$$\delta A = R^{(J)} \cdot \delta r,$$

где $R^{(J)}$ — равнодействующая сил инерции ($R^{(J)} = -M\omega$; ω — ускорение любой точки твердого тела), δr — возможное перемещение любой точки твердого тела.

б) При вращении вокруг неподвижной оси:

$$\delta A = m_z^{(J)} \delta \varphi,$$

где $m_z^{(J)}$ — главный момент сил инерции относительно оси вращения z ($m_z^{(J)} = -I_z \varepsilon_z$), $\delta \varphi$ — возможное угловое перемещение твердого тела.

в) При плоском движении:

$$\delta A = V_C^{(J)} \cdot \delta r_C + m_C^{(J)} \delta \varphi,$$

где $V_C^{(J)}$ — главный вектор сил инерции ($V_C^{(J)} = -M\omega_C$, ω_C — ускорение центра тяжести твердого тела), $m_C^{(J)}$ — главный момент сил инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести C твердого тела перпендикулярно к плоскости его материальной симметрии ($m_C^{(J)} = -I_C \varepsilon_z$), δr_C — возможное перемещение центра тяжести C твердого тела, $\delta \varphi$ — возможное угловое перемещение твердого тела.

С помощью общего уравнения динамики можно решать задачи динамики системы материальных точек в случаях, когда в число зада-

ваемых и искомым величин входят: инерционные характеристики (массы и моменты инерции), ускорения точек системы (линейные и угловые), задаваемые силы и пары сил, коэффициенты трения (скольжения и качения), коэффициенты упругости пружин.

Из общего уравнения динамики вытекают дифференциальные уравнения движения системы материальных точек, в которые не входят силы реакций идеальных связей. Возможно решение как прямых (определение сил по заданному движению), так и обратных задач (определение движения по заданным силам) динамики. При решении обратных задач приходится интегрировать составленную систему дифференциальных уравнений движения. Заметим, что использование общего уравнения динамики является *формальным* методом составления дифференциальных уравнений движения системы. Этот метод является менее удобным и менее эффективным по сравнению с применением уравнений Лагранжа второго рода (читатель сможет в этом убедиться, ознакомившись с содержанием следующего параграфа).

Задачи с помощью общего уравнения динамики рекомендуется решать в следующей последовательности:

- 1) изобразить на рисунке задаваемые силы и силы реакций, соответствующие неидеальным связям (например, силы трения);
- 2) определить главные векторы и главные моменты сил инерции масс системы.

Дальнейшие действия следует осуществлять в зависимости от того, имеет система одну степень свободы или же несколько.

- а) Для системы с одной степенью свободы:
 - 3) дать возможное перемещение одной из точек системы и выразить возможные перемещения точек приложения всех сил, указанных в первых двух пунктах, через это возможное перемещение;
 - 4) вычислить сумму работ всех сил, указанных в первых двух пунктах, на возможных перемещениях точек системы; составить общее уравнение динамики, приравняв вычисленную сумму работ сил нулю;
- б) после сокращения полученного уравнения на заданное возможное перемещение определить искомую величину либо провести интегрирование дифференциального уравнения движения.

б) Для системы с несколькими степенями свободы:

- 3) дать независимые возможные перемещения в числе, равном числу степеней свободы рассматриваемой системы; выразить возможные перемещения точек приложения всех сил, указанных в первых двух пунктах, через указанные независимые возможные перемещения;
- 4) составить систему уравнений в числе, равном числу степеней свободы рассматриваемой системы (каждое из полученных уравнений соответствует одному из независимых возможных перемещений), при этом все остальные возможные перемещения следует

считать равными нулю; для составления уравнения надо вычислить сумму работ всех сил, указанных в первых двух пунктах, на возможных перемещениях точек системы, соответствующих данному независимому возможному перемещению; вычисленную сумму работ сил следует приравнять нулю;

5) после сокращения каждого из составленных уравнений на соответствующее независимое возможное перемещение надо определить из полученной системы уравнений искомые величины.

При применении общего уравнения динамики к системам с двумя и большим числом степеней свободы, в связи с громоздкостью выкладок, удобнее пользоваться следующими правилами:

- а) сделать предположение о направлении ускорений точек системы;
- б) направить на рисунке силы инерции в стороны, противоположные избранному направлению соответствующих ускорений;
- в) записать алгебраические величины главных векторов и главных моментов сил инерции по формулам:

$$V^{(j)} = \frac{P}{g} \omega, \quad m_0^{(j)} = I_0 \epsilon,$$

где ω и ϵ — соответственно алгебраические величины векторов ω и ϵ ;

г) определить знаки работ сил инерции и моментов сил инерции в соответствии с их направлениями на рисунке и избранными направлениями возможных перемещений точек системы;

д) если искомые ускорения оказываются положительными, то сделанные предположения о направлениях ускорений подтверждаются, если — отрицательными, то соответствующие ускорения направлены в другую сторону (см. решение задач 396, 397 и 398).

Конечно, этот прием может быть использован и при решении задач о движении системы с одной степенью свободы.

Задача 388. Воспользовавшись общим уравнением динамики, вывести теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек.

Решение. При наличии стационарных связей действительные перемещения $d\mathbf{r}_k$ точек материальной системы входят в число соответствующих возможных перемещений $\delta\mathbf{r}_k$, где n — число материальных точек в системе, а $k = 1, 2, \dots, n$.

Подставив в общее уравнение динамики вместо возможных перемещений действительные, получим:

$$\sum_{k=1}^n (\mathbf{F}_k - m_k \boldsymbol{\omega}_k) \cdot d\mathbf{r}_k = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^n m_k \boldsymbol{\omega}_k \cdot d\mathbf{r}_k = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}_k. \quad (1)$$

(Напомним, что действительные перемещения при стационарных связях входят в число возможных.)

Учитывая, что

$$m_k \boldsymbol{\omega}_k \cdot d\mathbf{r}_k = m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} \cdot d\mathbf{r}_k = m_k \mathbf{v}_k \cdot d\mathbf{v}_k = d\left(\frac{1}{2} m_k v_k^2\right),$$

представим уравнение (1) в виде

$$\sum_{k=1}^n d\left(\frac{1}{2} m_k v_k^2\right) = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}_k. \quad (2)$$

Заменяв в левой части уравнения (2) сумму дифференциалов функций дифференциалом суммы функций и учитывая, что $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2 = T$ является кинетической энергией системы материальных точек, имеем:

$$dT = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}_k.$$

Возьмем определенные интегралы: в левой части от T_1 до T_2 , где T_1 и T_2 — кинетические энергии, соответствующие начальному и конечному положениям точек системы, а в правой части — по траекториям точек системы от их начальных до конечных положений:

$$T_2 - T_1 = \int \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}_k. \quad (3)$$

Заменяв в правой части уравнения (3) интеграл от суммы суммой интегралов и учитывая, что $\int_{(M_k)} \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}_k = A(\mathbf{F}_k)$ выражает работу задаваемой силы \mathbf{F}_k на перемещении ее точки приложения от начального положения до конечного, будем иметь:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(\mathbf{F}_k). \quad (4)$$

Уравнение (4) выражает теорему об изменении кинетической энергии материальной системы, подчиненной идеальным связям: изменение кинетической энергии системы материальных точек на конечном перемещении системы равно сумме работ всех задаваемых сил на соответствующих перемещениях точек системы.

Эта формулировка имеет преимущества по сравнению с той, которая была приведена в § 6 предыдущей главы:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(\mathbf{F}_k^0) - \sum_{k=1}^n A(\mathbf{F}_k^1).$$

так как отпадает необходимость вычислять сумму работ тех внешних и внутренних сил, которые являются силами реакций идеальных связей. Если не все связи, наложенные на систему, являются идеальными, то следует еще дополнительно вычислять сумму работ сил R_k реакций неидеальных связей и пользоваться теоремой в виде

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(F_k) + \sum_{k=1}^n A(R_k).$$

Задача 389. Два зубчатых колеса 1 и 2 радиусов r_1 и r_2 находятся во внешнем зацеплении. Моменты инерции колес относительно их осей вращения соответственно равны I_{O_1} и I_{O_2} .

Определить угловое ускорение колеса 1, если к нему приложена пара сил с вращающим моментом m_0 . Силами сопротивления пренебречь.

Решение. Направим ось z перпендикулярно к плоскости рисунка на нас.

Пара зубчатых колес является системой с одной степенью свободы, так как угол поворота одного из колес определяет положение второго колеса.

Силы тяжести колес обозначим через P_1 и P_2 . Изобразим задаваемые силы: P_1, P_2 , пару сил, приложенную к колесу 1, с вращающим моментом m_0 .

Займемся приведением сил инерции масс, входящих в систему. При вращении колес вокруг неподвижных осей их силы инерции приводятся к парам сил, моменты которых противоположны по знаку знакам соответствующих проекций угловых ускорений и равны по модулю произведениям моментов инерции колес относительно осей вращения на модули соответствующих проекций угловых ускорений. Проекции угловых ускорений связаны очевидным соотношением

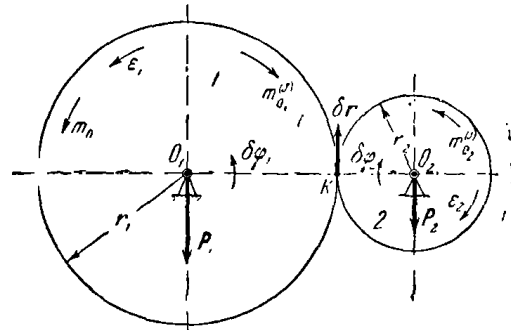
$$r_1 \varepsilon_{1z} = -r_2 \varepsilon_{2z} \quad (1)$$

(минус введен потому, что колеса вращаются в разные стороны). Момент пары сил инерции колеса 1 равен

$$m_{O_1}^{(J)} = -I_{O_1} \varepsilon_{1z}, \quad (2)$$

а момент пары сил инерции колеса 2

$$m_{O_2}^{(J)} = -I_{O_2} \varepsilon_{2z}.$$



К задаче 389.

или с учетом формулы (1):

$$m_{O_2}^{(J)} = I_{O_2} \frac{r_1}{r_2} \varepsilon_{1z}. \quad (3)$$

Дадим возможное угловое перемещение $\delta\varphi_1$ колесу 1. При этом колесо 2 получит возможное угловое перемещение $\delta\varphi_2$. Зависимость между $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ легко может быть получена с помощью возможного перемещения δr точки K касания колес. Так как точка K принадлежит обоим зубчатым колесам, то

$$\delta r = r_1 \delta\varphi_1 = -r_2 \delta\varphi_2$$

(знак минус введен, ибо возможные угловые перемещения направлены в разные стороны), откуда

$$\delta\varphi_2 = -\frac{r_1}{r_2} \delta\varphi_1. \quad (4)$$

Для составления общего уравнения динамики следует вычислить сумму работ задаваемых сил и сил инерции на возможных перемещениях точек системы и приравнять эту сумму нулю:

$$m_0 \delta\varphi_1 + m_{O_1}^{(J)} \delta\varphi_1 + m_{O_2}^{(J)} \delta\varphi_2 = 0.$$

(Работа сил тяжести P_1 и P_2 равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны.)

Воспользовавшись формулами (2), (3) и (4), после почленного сокращения уравнения на $\delta\varphi_1$ получим:

$$m_0 - I_{O_1} \varepsilon_{1z} - I_{O_2} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \varepsilon_{1z} = 0,$$

откуда определим проекцию на ось z искомого углового ускорения зубчатого колеса 1:

$$\varepsilon_{1z} = \frac{m_0}{I_{O_1} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 I_{O_2}}.$$

Задача 390. Определить ускорение w грузов A и B , рассмотренных в задаче 368.

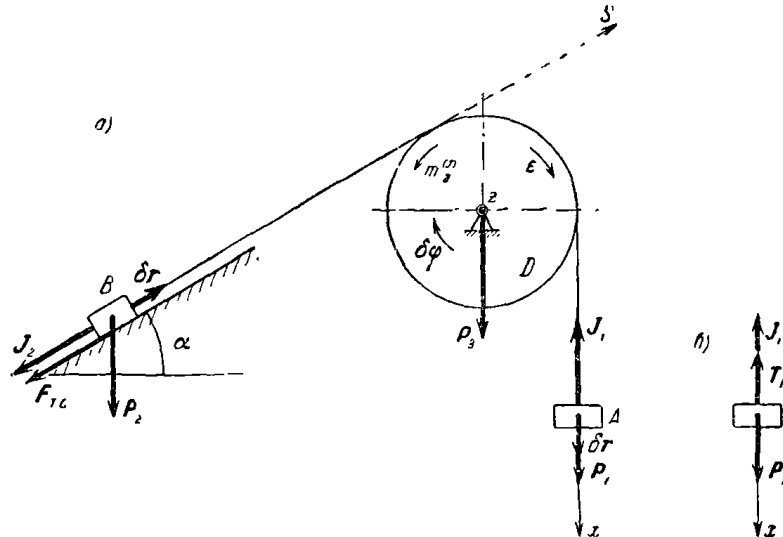
Решение. При решении задачи 368 методом кинестатики пришлось для определения ускорения w грузов рассмотреть каждую из трех масс системы (груз A , груз B и блок D) в отдельности, составить уравнения «равновесия» этих масс и решить систему трех уравнений с тремя неизвестными.

Значительно проще решается эта задача применением общего уравнения динамики. Вместо системы уравнений приходится решать лишь одно уравнение.

Направим ось z вдоль оси вращения блока D за рисунок. Радиус блока обозначим r .

Изобразим задаваемые силы, приложенные к данной системе: P_1 — вес груза A , P_2 — вес груза B , P_3 — вес блока D . При наличии идеальных связей, наложенных на систему, силы реакций связей в общее уравнение динамики не входят.

Добавив силу трения скольжения $F_{т.с}$ груза B о наклонную плоскость, мы считаем, что на данную систему наложены только идеальные связи (нить при движении системы считается натянутой и нерастяжимой). Остается прибавить силы инерции материальных точек системы. Пусть груз A опускается с искомым ускорением w .



К задаче 390.

К грузам A и B , совершающим поступательное движение, приложим равнодействующие сил инерции, направив их противоположно ускорениям соответствующих грузов, т. е. J_1 — вверх, а J_2 — параллельно наклонной плоскости вниз, причем

$$J_{1x} = -\frac{P_1}{g} w_x, \quad J_{2s} = -\frac{P_2}{g} w_s = -\frac{P_2}{g} w_x. \quad (1)$$

К блоку D , вращающемуся вокруг неподвижной оси, приложим главный момент сил инерции $m_z^{(J)}$, знак которого противоположен знаку проекции углового ускорения ε_z :

$$m_z^{(J)} = -I_z \varepsilon_z.$$

Так как $I_z = \frac{P_3 r^2}{2g}$, а $\varepsilon_z = \frac{w_x}{r}$, то

$$m_z^{(J)} = -\frac{P_3 r w_x}{2g}. \quad (2)$$

(Главный вектор сил инерции блока $V^{(J)} = -M w_c$ равен нулю, ибо центр тяжести блока расположен на оси вращения.)

Мысленно остановив систему, дадим одной из ее материальных точек возможное перемещение. Можно сообщить линейное возможное перемещение грузу A вверх или вниз, либо грузу B — по наклонной плоскости вверх или вниз, либо блоку D — угловое возможное перемещение по или против часовой стрелки.

Дадим грузу A возможное перемещение δr по вертикали вниз. (Не следует считать, что направления движения какой-либо материальной точки и ее возможного перемещения должны обязательно совпадать. Направление движения точки зависит от системы сил, которые к ней приложены, возможное же перемещение точки, рассматриваемое из данного положения, зависит только от связей, наложенных на эту точку, в остальном оно произвольно.) При этом, в силу нерастяжимости нити, груз B получит равное по модулю возможное перемещение, направленное вдоль наклонной плоскости вверх, а блок D получит угловое возможное перемещение $\delta \varphi$. Взяв точку нити на ободу блока, получим зависимость между линейным и угловым возможными перемещениями

$$\delta r = r \delta \varphi, \quad (3)$$

где r — радиус блока.

Применим к данной системе материальных точек общее уравнение динамики, т. е. приравняем нулю сумму работ задаваемых сил (включая силы реакции неидеальных связей) и сил инерции на возможных перемещениях точек системы

$$P_1 \delta r + J_{1x} \delta r + m_z^{(J)} \delta \varphi - P_2 \delta r \sin \alpha - F_{т.с} \delta r + J_{2s} \delta r = 0. \quad (4)$$

Подставив в уравнение (4) значение силы трения $F_{т.с} = fN = fP_2 \cos \alpha$ и воспользовавшись формулами (1), (2) и (3), после сокращения на δr получим:

$$P_1 - \frac{P_1}{g} w_x - \frac{P_3}{g} w_x - P_2 \sin \alpha - f P_2 \cos \alpha - \frac{P_2}{g} w_x = 0,$$

откуда находим проекцию искомого ускорения грузов A и B :

$$w_x = 2g \frac{P_1 - P_2 (\sin \alpha + f \cos \alpha)}{2P_1 + 2P_2 + P_3}. \quad (5)$$

При $w_x > 0$, т. е. при $P_1 > P_2 (\sin \alpha + f \cos \alpha)$ ускорение груза направлено вниз.

Если бы по условию задачи требовалось также определить какие-либо силы реакций связей либо давлений на связи, то пришлось бы применить принцип освобожденности к связи, силу реакции которой требуется найти, и к соответствующей массе системы применить основной закон динамики или метод кинестатики. При наличии вычисленных ускорений это не представляет затруднений.

Так, если требуется определить силу реакции правой ветви нити, мы мысленно обрываем нить вблизи груза A , прикладываем к грузу три силы (см. рис. б): P_1 — вес груза, T_1 — силу реакции нити, J_1 — силу инерции груза A .

Записываем уравнение «равновесия» груза A в проекции на вертикальную ось x :

$$P_1 - T_1 + J_{1x} = 0.$$

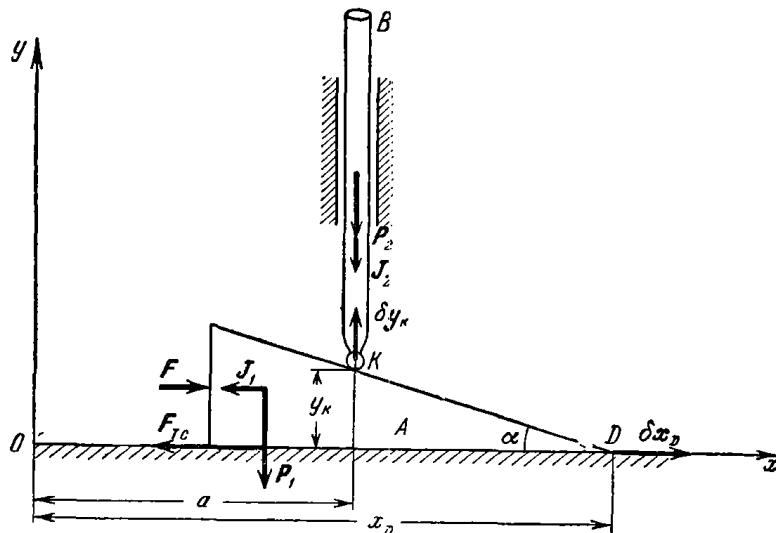
Так как $J_{1x} = -\frac{P_1}{g} \omega_x$, то

$$T_1 = P_1 - \frac{P_1}{g} \omega_x,$$

где ω_x — ускорение груза, определенное по формуле (5). После подстановки значения ω_x получим:

$$T_1 = \frac{P_1 [P_3 + 2P_2(1 + \sin \alpha + f \cos \alpha)]}{2P_1 + 2P_2 + P_3}.$$

Задача 391. При движении кулака A веса P_1 по горизонтальной плоскости направо стержень B веса P_2 поднимается в вертикальных направляющих вверх.



К задаче 391.

Какое ускорение приобретает кулак A , боковая поверхность которого образует угол α с горизонтом, если к нему приложена слева направо горизонтальная сила F ? Коэффициент трения скольжения кулака A о горизонтальную плоскость равен f .

Решение. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы, так как положение кулака A на горизонтальной плоскости определяет положение стержня B .

Неподвижные координатные оси xu изображены на рисунке.

К системе приложены задаваемые силы: P_1 — вес кулака, P_2 — вес стержня, F — движущая сила. Добавляем к задаваемым силам силу трения скольжения $F_{т.с}$ кулака A о горизонтальную плоскость, направленную в сторону, противоположную движению кулака, т. е. налево.

Приложим силы инерции масс рассматриваемой системы. Так как кулак A и стержень B движутся поступательно, то к каждому из них приложена равнодействующая сил инерции, направленная противоположно ускорению данного твердого тела и равная по модулю произведению его массы на модуль ускорения.

Обозначив абсциссу точки D кулака x_D (см. рисунок), выразим ординату точки K стержня через x_D :

$$y_K = (x_D - a) \operatorname{tg} \alpha, \quad (1)$$

где a и α — постоянные величины.

Взяв вторую производную от y_K по времени, определим зависимость между проекциями ускорений стержня и кулака:

$$\ddot{y}_K = \ddot{x}_D \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

Если ускорение кулака A направлено по горизонтали направо, то ускорение стержня B направлено по вертикали вверх. Поэтому проекция на ось x равнодействующей сил инерции кулака J_1 дается формулой

$$J_{1x} = -\frac{P_1}{g} \ddot{x}_D,$$

а проекция на ось y равнодействующей сил инерции стержня J_2 имеет вид

$$J_{2y} = -\frac{P_2}{g} \ddot{y}_K = -\frac{P_2}{g} \ddot{x}_D \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Дадим кулаку A возможное перемещение δx_D по горизонтали направо. При этом стержень B получит возможное перемещение δy_K по вертикали вверх. Зависимость между δx_D и δy_K определяем варьированием выражения (1):

$$\delta y_K = \delta x_D \operatorname{tg} \alpha. \quad (4)$$

Составляем общее уравнение динамики для данной системы, т. е. приравняем нулю сумму работ задаваемых сил, сил трения и сил инерции на возможных перемещениях точек системы:

$$F_x \delta x_D + J_{1x} \delta x_D + (F_{т.с})_x \delta x_D + P_2 \delta y_K + J_{2y} \delta y_K = 0,$$

где

$$(F_{\tau, c})_x = -fN = -f(P_{1y} + P_{2y} + J_{2y}), \quad F_x = F,$$

$$P_{1y} = -P_1, \quad P_{2y} = -P_2.$$

Воспользовавшись формулами (3) и (4), после почленного сокращения уравнения на δx_D получим:

$$F - \frac{P_1}{g} \ddot{x}_D - f \left(P_1 + P_2 + \frac{P_2}{g} \ddot{x}_D \operatorname{tg} \alpha \right) - P_2 \operatorname{tg} \alpha - \frac{P_2}{g} \ddot{x}_D \operatorname{tg}^2 \alpha = 0,$$

откуда определяем искомое ускорение кулака:

$$\ddot{x}_D = g \frac{F - f(P_1 + P_2) - P_2 \operatorname{tg} \alpha}{P_1 + P_2 (f + \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{tg} \alpha}.$$

Из найденного выражения следует, что если

а) $F > f(P_1 + P_2) + P_2 \operatorname{tg} \alpha$, то $\ddot{x}_D > 0$, т. е. ускорение кулака A направлено направо;

б) $F < f(P_1 + P_2) + P_2 \operatorname{tg} \alpha$, то $\ddot{x}_D < 0$, т. е. ускорение кулака A направлено налево;

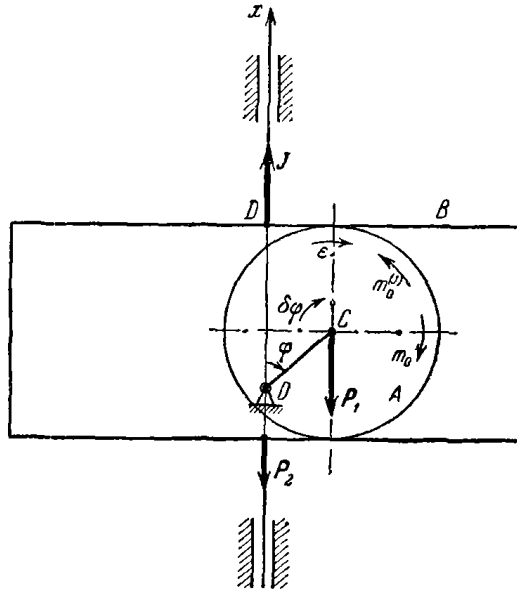
в) $F = f(P_1 + P_2) + P_2 \operatorname{tg} \alpha$, то $\ddot{x}_D = 0$, т. е. кулак A находится в покое, либо движется равномерно направо или налево (в зависимости от заданных начальных условий движения).

Задача 392. При вращении круглого эксцентрика A веса P_1 и радиуса r_1 вокруг неподвижной горизонтальной оси O приводится в движение рамка B веса P_2 . Центр тяжести C эксцентрика A отстоит от оси вращения на расстоянии $OC = a$. К эксцентрику приложена пара, момент которой равен m_0 .

Написать дифференциальное уравнение движения эксцентрика.

Решение. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы, так как положение всех ее точек определяется углом поворота эксцентрика.

Выбрав начало координат на оси O , направим ось x по вертикали вверх. Угол, образуемый прямой OC с осью x , обозначим φ .



К задаче 392.

Задаваемыми силами являются: P_1 — вес эксцентрика A , P_2 — вес рамки B , пара сил с моментом m_0 .

Силы инерции эксцентрика, вращающегося вокруг неподвижной оси, приводятся к паре сил с моментом $m_0^{(J)}$, знак которого противоположен знаку проекции углового ускорения ε_z :

$$m_0^{(J)} = -I_0 \varepsilon_z.$$

Момент инерции I_0 эксцентрика относительно оси O , перпендикулярной к его плоскости, вычисляем по теореме Штейнера:

$$I_0 = I_C + \frac{P_1}{g} OC^2.$$

Так как $I_0 = \frac{P_1 r^2}{2g}$ и $OC = a$, то

$$I_0 = \frac{P_1}{2g} (r^2 + 2a^2).$$

Следовательно,

$$m_0^{(J)} = -\frac{P_1}{2g} (r^2 + 2a^2) \ddot{\varphi}. \quad (1)$$

К рамке B , движущейся поступательно, приложим равнодействующую сил инерции J , направленную противоположно ускорению рамки B :

$$J = -\frac{P_2}{g} \ddot{x}_D.$$

Для определения ускорения рамки B запишем уравнение движения любой ее точки, например точки D :

$$x_D = OD = a \cos \varphi + r, \quad (2)$$

откуда

$$\ddot{x}_D = -a \ddot{\varphi}^2 \cos \varphi - a \ddot{\varphi} \sin \varphi.$$

Следовательно, проекция на ось x силы инерции J равна

$$J_x = \frac{P_2}{g} a (\ddot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi). \quad (3)$$

Дадим возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ эксцентрику в направлении возрастания угла φ . Возможное перемещение δx_D точки D выразим через $\delta\varphi$. Для этого вычислим вариацию x_D , воспользовавшись формулой (2)

$$\delta x_D = -a \sin \varphi \delta\varphi. \quad (4)$$

Знак минус указывает, что δr_D направлено вниз при $\sin \varphi \delta\varphi > 0$.

Составим общее уравнение динамики для данной системы, т. е. приравняем нулю сумму работ всех задаваемых сил и сил инерции

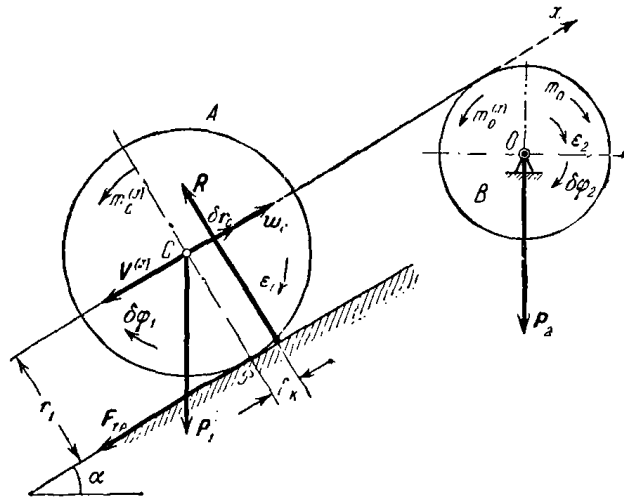
на возможных перемещениях точек системы:

$$m_0 \delta\varphi + m_0(P_1) \delta\varphi + m_0^{(J)} \delta\varphi + P_{2x} \delta x_D + J_x \delta x_D = 0.$$

Учитывая, что $m_0(P_1) = P_1 a \sin \varphi$ и $P_{2x} = -P_2$, воспользовавшись формулами (1), (3) и (4), после сокращения на $\delta\varphi$, получим искомое дифференциальное уравнение движения эксцентрика:

$$[P_1(r^2 + 2a^2) + 2P_2a^2 \sin^2 \varphi] \ddot{\varphi} + P_2a^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi - 2g(P_1 + P_2)a \sin \varphi - 2gm_0 = 0.$$

Задача 393. К оси C катка A веса P_1 и радиуса r_1 прикреплен конец тонкой нерастяжимой нити, намотанной на блок B веса P_2 и



К задаче 393.

радиуса r_2 . К блоку B приложена пара сил с моментом m_0 . При этом нить наматывается на обод вращающегося вокруг неподвижной оси блока B , а каток A катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту.

Определить ускорение центра тяжести C катка, если коэффициент трения качения катка о наклонную плоскость равен f_k . Каток A и блок B считать однородными круглыми дисками. Массой нити пренебречь.

Решение. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы, так как положение блока B , заданное посредством его угла поворота, определяет положение катка A .

Изобразим задаваемые силы: P_1 — вес катка A , P_2 — вес блока B , пару сил с вращающим моментом m_0 .

Наклонная плоскость, по которой катится каток A , не является идеальной связью. Поэтому к задаваемым силам добавляем силу трения $F_{тр}$ катка о наклонную плоскость ($F_{тр} = fN = fP_1 \cos \alpha$), направленную вдоль наклонной плоскости вниз (f — коэффициент трения скольжения). Так как имеется трение качения, то нормальная сила реакции R наклонной плоскости смещена в сторону движения катка на расстояние f_k , равное плечу пары трения качения, $m_{т.к} = Rf_k = f_k P_1 \cos \alpha$.

Переходим к рассмотрению сил инерции системы. Направим ось z перпендикулярно к плоскости рисунка от нас, а ось x — вдоль нити вверх. Ускорение ω_C центра тяжести C катка направлено параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости. Ввиду того, что нить нерастяжима, $\omega_{Cx} = r_2 \varepsilon_2$. При качении катка без скольжения мгновенный центр скоростей находится в точке \mathcal{E}^s касания катка с наклонной плоскостью, поэтому $\omega_{Cx} = r_1 \varepsilon_1$, где ε_1 — проекция углового ускорения катка. Следовательно,

$$\omega_{Cx} = r_1 \varepsilon_1 = r_2 \varepsilon_2. \quad (1)$$

К блоку B , вращающемуся вокруг неподвижной горизонтальной оси O , перпендикулярной к плоскости рисунка, приложим пару сил инерции с моментом $m_0^{(J)}$, знак которого противоположен знаку проекции углового ускорения ε_2 :

$$m_0^{(J)} = -I_O \varepsilon_2.$$

Учитывая, что блок рассматривается как круглый однородный диск, т. е. $I_O = \frac{P_2 r_2^2}{2g}$, получим:

$$m_0^{(J)} = -\frac{P_2 r_2^2}{2g} \varepsilon_2. \quad (2)$$

Силы инерции катка A , совершающего плоское движение, приводятся к силе, равной главному вектору $V^{(J)}$ и паре сил, момент которой равен главному моменту $m_C^{(J)}$. Сила инерции $V^{(J)}$ приложена в центре тяжести C катка и направлена противоположно ускорению ω_C , причем

$$V_x^{(J)} = -\frac{P_1}{g} \omega_{Cx}. \quad (3)$$

Главный момент сил инерции $m_C^{(J)}$ относительно оси C , проходящей через центр тяжести катка перпендикулярно к его плоскости материальной симметрии, имеет знак, противоположный знаку проекции углового ускорения ε_1 катка: $m_C^{(J)} = -I_C \varepsilon_1$. Учитывая, что $I_C = \frac{P_1 r_1^2}{2g}$, запишем:

$$m_C^{(J)} = -\frac{P_1 r_1^2}{2g} \varepsilon_1. \quad (4)$$

Итак, силы инерции данной системы приводятся к паре сил с моментом $m_O^{(J)}$ (блок B), а также к силе $V^{(J)}$ и паре сил с моментом $m_C^{(J)}$ (каток A).

Дадим возможное угловое перемещение $\delta\varphi_2$ блоку. При этом точка нити, лежащая на ободке блока, получит возможное перемещение $r_2\delta\varphi_2$. В связи с нерастяжимостью нити такое же возможное перемещение имеет центр тяжести C катка: $\delta r_C = r_2\delta\varphi_2$.

Точка \mathcal{F} является мгновенным центром скоростей катка, поэтому $\delta r_C = r_1\delta\varphi_1$, где $\delta\varphi_1$ — возможное угловое перемещение катка A . Итак,

$$\delta r_C = r_1\delta\varphi_1 = r_2\delta\varphi_2. \quad (5)$$

Составим общее уравнение динамики для рассматриваемой системы:

$$m_O\delta\varphi_2 + m_O^{(J)}\delta\varphi_2 - P_1\delta r_C \sin \alpha + V_x^{(J)}\delta r_C + m_C^{(J)}\delta\varphi_1 + m_{т.к}\delta\varphi_1 + \delta A(F_{тр}) + \delta A(P_2) = 0.$$

Работа силы тяжести P_2 равна нулю, так как точка приложения этой силы неподвижна.

Выберем теперь в качестве возможного перемещения действительное перемещение $d\varphi_2$ (это можно сделать, так как в нашем случае связи стационарны). Тогда работа силы трения $\delta A(F_{тр})$ будет равна нулю, ибо при действительном перемещении точка приложения силы трения всегда совпадает с мгновенным центром скоростей.

Учитывая, что $m_{т.к} = -f_k R = -f_k P_1 \cos \alpha$, а также воспользовавшись формулами (2), (3) и (4), находим:

$$m_O\delta\varphi_2 - \frac{P_2 r_2^2}{2g} \varepsilon_{2z} \delta\varphi_2 - P_1\delta r_C \sin \alpha - \frac{P_1}{g} \omega_{Cx} \delta r_C - \frac{P_1 r_1^2}{2g} \varepsilon_{1z} \delta\varphi_1 - f_k P_1 \cos \alpha \delta\varphi_1 = 0.$$

С помощью формул (1) и (5) выразим $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ через δr_C , а ε_{1z} и ε_{2z} через ω_{Cx} . После почленного сокращения уравнения на δr_C получим:

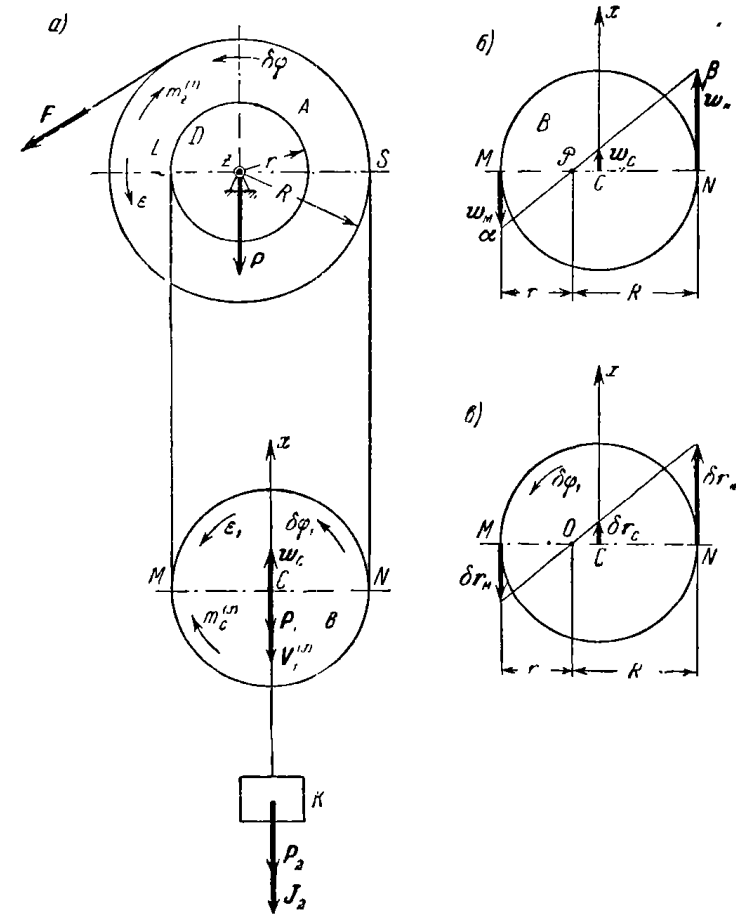
$$\frac{m_O}{r_2} - \frac{P_2}{2g} \omega_{Cx} - P_1 \sin \alpha - \frac{P_1}{g} \omega_{Cx} - \frac{P_1}{2g} \omega_{Cx} - \frac{f_k}{r_1} P_1 \cos \alpha = 0,$$

откуда определим проекцию на ось x искомого ускорения центра тяжести катка A :

$$\omega_{Cx} = 2g \frac{\frac{m_O}{r_2} - P_1 \left(\sin \alpha + \frac{f_k}{r_1} \cos \alpha \right)}{3P_1 + P_2}.$$

Если $\frac{m_O}{r_2} > P_1 \left(\sin \alpha + \frac{f_k}{r_1} \cos \alpha \right)$, то $\omega_{Cx} > 0$, т. е. ω_C направлено параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости вверх.

Задача 394. На рис. a изображен дифференциальный блок, употребляемый для подъема тяжестей. Сила F приложена к концу невесомой нерастяжимой нити. Нить, переброшенная через блок A радиуса R , охватывает нижний подвижной блок B веса P_1 . Вторым концом нити намотан на блок D радиуса r . Блоки A и D образуют



К задаче 394.

ступенчатый барабан веса P с радиусом инерции ρ относительно горизонтальной оси вращения барабана. Радиус инерции подвижного блока B относительно оси, проходящей через центр тяжести C блока перпендикулярно к плоскости его материальной симметрии, равен ρ_1 . К оси C блока B подвешен поднимаемый груз K веса P_2 .

Определить угловое ускорение ε ступенчатого барабана. Массой нити пренебречь.

Решение. Дифференциальный блок является системой с одной степенью свободы. Действительно, угол поворота φ барабана определяет положение всех точек системы.

К данной системе приложены задаваемые силы: F — сила, действующая на конец нити; P — вес ступенчатого барабана, P_1 — вес подвижного блока B , P_2 — вес поднимаемого груза K . Связи, наложенные на систему, являются идеальными (нить считается натянутой при работе дифференциального блока).

Добавляем силы инерции материальных точек системы.

Проекцию на ось z (ось z направим перпендикулярно к плоскости рисунка на нас) искомого углового ускорения ступенчатого барабана обозначим ε_z . К ступенчатому барабану, вращающемуся вокруг неподвижной оси z , приложим пару сил, момент которой равен главному моменту сил инерции $m_z^{(J)}$. Знак этого момента противоположен знаку ε_z :

$$m_z^{(J)} = -I_z \varepsilon_z = -\frac{P}{g} \rho^2 \varepsilon_z. \quad (1)$$

Рассмотрим нижний блок, совершающий плоское движение. Сила инерции блока B , равная главному вектору сил инерции $V_1^{(J)}$, приложена в его центре тяжести и направлена противоположно ускорению ω_C , т. е. $V_1^{(J)} = -\frac{P_1}{g} \omega_C$. Его проекция на ось x (см. рис. а) равна

$$V_{1x}^{(J)} = -\frac{P_1}{g} \omega_{Cx}. \quad (2)$$

Главный момент сил инерции блока B относительно оси, проходящей через его центр тяжести C перпендикулярно к плоскости материальной симметрии, равен

$$m_C^{(J)} = -I_C \varepsilon_{1z} = -\frac{P_1}{g} \rho_1^2 \varepsilon_{1z}. \quad (3)$$

В формулы (2) и (3) входят ω_{Cx} и ε_{1z} , которые надо выразить через проекции углового ускорения ступенчатого барабана ε_z . Заметим, что точки L и M нити имеют равные по модулю ускорения. Точка L расположена на ободе блока D радиуса r , вращающегося с угловым ускорением ε , т. е.

$$\omega_{Mx} = \omega_{Lx} = -r \varepsilon_z. \quad (4)$$

Точки N и S нити также имеют равные по модулю ускорения. Точка S расположена на ободе блока A радиуса R , вращающегося с угловым ускорением ε_z , т. е.

$$\omega_{Nx} = \omega_{Sx} = R \varepsilon_z. \quad (5)$$

Изобразим ускорения точек M и N нити на рис. б.

Проекцию ω_{Cx} ускорения ω_C центра тяжести C блока B на ось x можно легко определить рассуждением, законность которого обоснована в кинематике. Для этого соединим концы векторов ускорений ω_M и ω_N прямой. Центр тяжести C блока B движется по вертикали. Поэтому ускорение ω_C также направлено по вертикали.

Конец ω_C лежит на прямой $\alpha\beta$. Так как отрезки нити ML и NS расположены вертикально, то диаметр блока B равен

$$MN = R + r. \quad (6)$$

Пользуясь подобием треугольников $\mathcal{P}Ma$ и $\mathcal{P}N\beta$, запишем $\frac{\omega_M}{M\mathcal{P}} = \frac{\omega_N}{N\mathcal{P}}$. Учитывая формулы (4), (5) и (6), находим $M\mathcal{P} = r$, $N\mathcal{P} = R$. Следовательно, $C\mathcal{P} = MC - M\mathcal{P} = \frac{R+r}{2} - r = \frac{R-r}{2}$.

Из пропорции $\frac{\omega_{Cx}}{\omega_{Mx}} = -\frac{C\mathcal{P}}{M\mathcal{P}}$ получим: $\omega_{Cx} = -\frac{C\mathcal{P}}{M\mathcal{P}} \omega_{Mx}$, т. е.

$$\omega_{Cx} = \frac{R-r}{2} \varepsilon_z. \quad (7)$$

Проекция углового ускорения блока B равна

$$\varepsilon_{1z} = -\frac{\omega_{Mx}}{M\mathcal{P}} = \frac{\omega_{Nx}}{N\mathcal{P}} = \frac{\omega_{Cx}}{C\mathcal{P}}.$$

Тогда получим:

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_z. \quad (8)$$

Учитывая знаки ω_{Cx} и ε_z , направим на рис. а главный вектор $V_1^{(J)}$ сил инерции блока B по вертикали вниз. Внося в (2) значение ω_{Cx} из (7), определяем:

$$V_{1x}^{(J)} = -\frac{P_1}{g} \frac{R-r}{2} \varepsilon_z. \quad (9)$$

После подстановки в формулу (3) значения ε_{1z} из (8) находим:

$$m_C^{(J)} = -\frac{P_1}{g} \rho_1^2 \varepsilon_z. \quad (10)$$

Груз K веса P_2 движется по вертикали вверх. Проекция на ось x его ускорения $\omega_{Cx} = \frac{R-r}{2} \varepsilon_z$. Поэтому равнодействующая сил инерции груза K

$$J_2 = -\frac{P_2}{g} \omega_C$$

направлена по вертикали вниз и ее проекция

$$J_{2x} = -\frac{P_2}{g} \frac{R-r}{2} \varepsilon_z. \quad (11)$$

Итак, в результате приведения сил инерции дифференциального блока мы получим пару сил с моментом $m_z^{(J)}$ (ступенчатый барабан), силу $V_1^{(J)}$ и пару сил с моментом $m_C^{(J)}$, (блок B) и силу J_2 (груз K).

Дадим возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ ступенчатому барабану, направив $\delta\varphi$ против часовой стрелки. Вычислим возможные перемещения точек приложения задаваемых сил и сил инерции, выразив их через $\delta\varphi$. Точки L и M нити имеют равные возможные перемещения. Точка L расположена на ободе блока D радиуса r , получившего возможное перемещение $\delta\varphi$ против часовой стрелки. Поэтому возможное перемещение точки M направлено по вертикали вниз, причем:

$$\delta r_M = \delta r_L = r\delta\varphi. \quad (12)$$

Точки N и S нити также имеют равные возможные перемещения. Точка S нити расположена на ободе блока A радиуса R , получившего возможное перемещение $\delta\varphi$ против часовой стрелки. Поэтому возможное перемещение точки N направлено по вертикали вверх, причем

$$\delta r_N = \delta r_S = R\delta\varphi. \quad (13)$$

Изобразим возможные перемещения точек M и N на рис. *в*. Осуществив построение, аналогичное тому, которое было сделано для ускорений этих точек на рис. *б*, запишем: $\frac{\delta r_M}{OM} = \frac{\delta r_N}{ON}$. Воспользовавшись формулами (12) и (13), из пропорции получим $MO = r$, $ON = R$ (т. е. точка \mathcal{P} рис. *б* совмещена с точкой O рис. *в*). Следовательно, $OC = MC - MO = \frac{R+r}{2} - r = \frac{R-r}{2}$. Из пропорции $\frac{\delta r_C}{OC} = \frac{\delta r_M}{OM}$ находим, что возможное перемещение центра тяжести C нижнего блока B равно

$$\delta r_C = \frac{R-r}{2} \delta\varphi \quad (14)$$

и направлено по вертикали вверх. Возможное угловое перемещение блока B направлено против часовой стрелки, причем

$$\delta\varphi_1 = \delta\varphi. \quad (15)$$

Переходим к составлению общего уравнения динамики. Для этого надо сумму работ задаваемых сил и сил инерции на возможных перемещениях точек системы приравнять нулю. Имеем

$$m_z(F)\delta\varphi + m_z^{(J)}\delta\varphi + P_{1x}\delta r_{Cx} + V_{1x}^{(J)}\delta r_{Cx} + m_C^{(J)}\delta\varphi_1 + P_{2x}\delta r_{Cx} + J_{2x}\delta r_{Cx} = 0. \quad (16)$$

(Работа веса P равна нулю, так как точка приложения этой силы неподвижна.) Учитывая, что $m_z(F) = FR$, $P_{1x} = -P_1$, $P_{2x} = -P_2$, $\delta r_{Cx} = \delta r_C$, а также принимая во внимание формулы (1), (9), (10), (11), (14) и (15), после почленного сокращения уравнения (14) на $\delta\varphi$ получим:

$$FR - \frac{P}{g} \rho^2 \varepsilon_z - P_1 \frac{R-r}{2} - \frac{P_1}{g} \left(\frac{R-r}{2} \right)^2 \varepsilon_z - \frac{P_1}{g} \rho_1^2 \varepsilon_z - P_2 \frac{R-r}{2} - \frac{P_2}{g} \left(\frac{R-r}{2} \right)^2 \varepsilon_z = 0.$$

Решив это уравнение относительно ε_z , находим:

$$\varepsilon_z = 2g \frac{2FR - (P_1 + P_2)(R-r)}{4P_1\rho^2 + 4P_1\rho_1^2 + P_1(R-r)^2 + P_2(R-r)^2}.$$

Груз K поднимается из состояния покоя ускоренно вверх при $\varepsilon_z > 0$, т. е. при выполнении условия

$$F > (P_1 + P_2) \frac{R-r}{2R}.$$

Груз K опускается из состояния покоя ускоренно вниз при $\varepsilon_z < 0$, т. е. при выполнении условия

$$F < (P_1 + P_2) \frac{R-r}{2R}.$$

Если $F = (P_1 + P_2) \frac{R-r}{2R}$, то $\varepsilon_z = 0$. При этом груз находится в покое либо движется равномерно вверх или вниз (в зависимости от начальных условий движения).

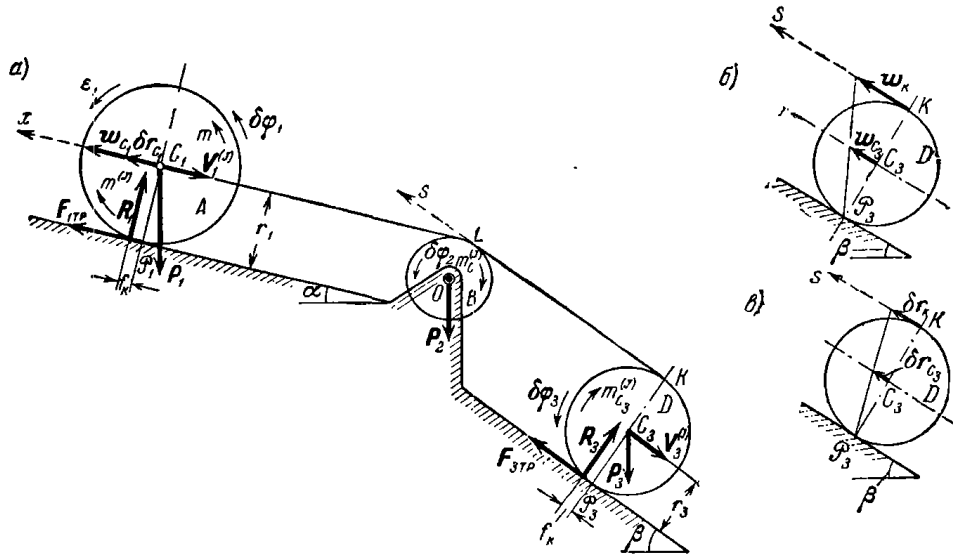
Задача 395. Каток A и барабан D связаны тонкой нерастяжимой нитью. Нить, привязанная своим концом к оси C_1 катка A , переброшена через блок B и намотана на барабан D . К катку A веса P_1 и радиуса r_1 приложена пара сил с моментом m , заставляющая каток A катиться вверх без скольжения по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. При этом блок B веса P_2 вращается вокруг неподвижной оси O , а барабан D веса P_3 и радиуса r_3 катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом β к горизонту.

Определить ускорение w_{C_1} центра тяжести C_1 катка A , если коэффициент трения качения катка и веревок, намотанных на барабан,

о наклонные плоскости равен f_k . Каток, блок и барабан считать однородными круглыми цилиндрами. Массой нити и ее проскальзыванием по ободу блока пренебречь.

Решение. Ось z направим перпендикулярно к плоскости рисунка на нас.

Рассматриваемая система имеет одну степень свободы, так как положение катка A на наклонной плоскости определяет положение блока и барабана. Обозначим: r_3 — радиус блока B .



К задаче 395.

К системе приложены задаваемые силы и моменты: P_1 — вес катка, P_2 — вес блока, P_3 — вес барабана и пара сил с вращающим моментом m .

Наклонные плоскости не являются идеальными связями. Поэтому изобразим силы трения. При наличии пары сил с вращающим моментом m каток A является ведущим и сила трения $F_{\text{тр}}$ катка A о наклонную плоскость направлена вдоль наклонной плоскости в сторону движения. Сила трения $F_{\text{зтр}}$ нити, намотанной на барабан, о наклонную плоскость, также направлена вдоль наклонной плоскости в сторону движения, т. е. вверх.

Ввиду наличия трения качения нормальные силы реакций наклонных плоскостей R_1 и R_3 смещены вперед в сторону движения на величину плеча пары трения качения, равного коэффициенту трения качения f_k .

Для определения модулей сил инерции и моментов пар сил инерции масс системы найдем зависимость между ускорениями центров

тяжести катка A и барабана D и угловыми ускорениями катка, блока и барабана. (Оси x и s изображены на рис. а.)

Направим ω_{C_1} параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости в сторону движения катка, т. е. по оси x . Ввиду нерастяжимости нити $\omega_{C_1x} = \omega_{1z} = \omega_{Ks}$, причем $\omega_{1z} = r_3 \varepsilon_{2z}$. Учитывая, что мгновенные центры скоростей катка и барабана соответственно расположены в точках \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_3 , получим:

$$\omega_{C_1x} = r_1 \varepsilon_{1z}, \quad \omega_{Ks} = 2r_3 \varepsilon_{3z}, \quad \omega_{C_3s} = \frac{\omega_{Ks}}{2}$$

(см. рис. б). Следовательно,

$$\omega_{C_1x} = r_1 \varepsilon_{1z} = r_2 \varepsilon_{2z} = 2r_3 \varepsilon_{3z} = 2\omega_{C_3s}, \quad (1)$$

где ε_{1z} , ε_{2z} и ε_{3z} — соответственно проекции на ось z угловых ускорений катка, блока и барабана.

Переходим к приведению сил инерции материальных точек системы.

Силы инерции катка A , совершающего плоское движение, приводятся к силе, равной главному вектору $V_1^{(J)}$ и паре сил, момент которой равен главному моменту $m_{C_1}^{(J)}$. Сила приложена в центре тяжести C_1 катка и направлена противоположно ускорению его центра тяжести, т. е. параллельно наклонной плоскости вниз ($V_1^{(J)} = -\frac{P_1}{g} \omega_{C_1x}$), поэтому

$$V_{1x}^{(J)} = -\frac{P_1}{g} \omega_{C_1x}. \quad (2)$$

Главный момент сил инерции катка $m_{C_1}^{(J)}$ относительно оси, проходящей через его центр тяжести C_1 перпендикулярно к плоскости материальной симметрии, имеет знак, противоположный знаку проекции углового ускорения ε_{1z} , т. е.

$$m_{C_1}^{(J)} = -I_{C_1} \varepsilon_{1z} = -\frac{P_1 r_1^2}{2g} \varepsilon_{1z}. \quad (3)$$

Силы инерции блока B , вращающегося вокруг неподвижной оси, приводятся к паре сил, момент которой равен главному моменту относительно оси вращения O . Знак момента противоположен знаку проекции его углового ускорения:

$$m_O^{(J)} = -I_O \varepsilon_{2z} = -\frac{P_2 r_2^2}{2g} \varepsilon_{2z}. \quad (4)$$

Силы инерции барабана D , совершающего плоское движение, приводятся к силе, равной главному вектору $V_3^{(J)}$ и паре сил, момент которой равен главному моменту $m_{C_3}^{(J)}$. Сила $V_3^{(J)}$ приложена в его

центре тяжести C_3 , направлена противоположно ускорению w_{C_3} , т. е. параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости вниз, и проекция этой силы на ось z равна

$$V_{3z}^{(J)} = -\frac{P_3}{g} w_{C_3z}. \quad (5)$$

Главный момент сил инерции $m_{C_3}^{(J)}$ барабана D относительно оси, проходящей через его центр тяжести C_3 перпендикулярно к плоскости материальной симметрии, имеет знак, противоположный знаку проекции углового ускорения ϵ_{3z} :

$$m_{C_3}^{(J)} = -I_{C_3} \epsilon_{3z} = -\frac{P_3 r_3^2}{2g} \epsilon_{3z}. \quad (6)$$

Итак, силы инерции материальных точек рассматриваемой системы оказались приведенными к силе $V_1^{(J)}$ и паре сил с моментом $m_{C_1}^{(J)}$ (каток A), к паре сил с моментом $m_0^{(J)}$ (блок B), к силе $V_3^{(J)}$ и паре сил с моментом $m_{C_3}^{(J)}$ (барабан D).

Дадим возможное перемещение δr_{C_1} центру тяжести C_1 катка A параллельно наклонной плоскости вверх. Учитывая нерастяжимость нити, имеем: $\delta r_{C_1} = \delta r_L = \delta r_K$. Кроме того, $\delta r_L = r_2 \delta \varphi_2$, где $\delta \varphi_2$ — возможное угловое перемещение блока B . Принимая во внимание, что мгновенные центры скоростей катка A и барабана D соответственно расположены в точках \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_3 , получим: $\delta r_{C_1} = r_1 \delta \varphi_1$, $\delta r_K = 2r_3 \delta \varphi_3 = 2\delta r_{C_3}$ (см. рис. θ), где $\delta \varphi_1$ и $\delta \varphi_3$ — соответственно возможные угловые перемещения катка и барабана. Следовательно,

$$\delta r_{C_1} = r_1 \delta \varphi_1 = r_2 \delta \varphi_2 = 2r_3 \delta \varphi_3 = 2\delta r_{C_3}. \quad (7)$$

Составим общее уравнение динамики:

$$\begin{aligned} m \delta \varphi_1 - P_1 \delta r_{C_1} \sin \alpha + V_{1x}^{(J)} \delta r_{C_1x} + m_{C_1}^{(J)} \delta \varphi_1 - m_{1т.к} \delta \varphi_1 + \\ + m_0^{(J)} \delta \varphi_2 - P_3 \delta r_{C_3} \sin \beta + V_{3z}^{(J)} \delta r_{C_3z} + m_{C_3}^{(J)} \delta \varphi_3 - \\ - m_{3т.к} \delta \varphi_3 + \delta A (P_2) + \delta A (F_{1тр}) + \delta A (F_{3тр}) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Работа веса P_2 блока B равна нулю, так как точка приложения этой силы неподвижна.

Выберем теперь в качестве возможного перемещения действительное перемещение dr_{C_1} (это допустимо, ибо в данном случае связи стационарны). Тогда работа сил трения $\delta A (F_{1тр})$ и $\delta A (F_{3тр})$ будет равна нулю, так как при действительных перемещениях точки приложения сил трения $F_{1тр}$ и $F_{3тр}$ всегда совпадают с соответствующими мгновенными центрами скоростей.

Учитывая, что модули моментов пар трения качения равны $m_{1т.к} = f_k P_1 \cos \alpha$, $m_{3т.к} = f_k P_3 \cos \beta$, $\delta r_{C_1x} = \delta r_{C_1}$, $\delta r_{C_3z} = \delta r_{C_3}$ и, вос-

пользовавшись формулами (2), (3), (4), (5) и (6), запишем уравнение (8) в виде

$$\begin{aligned} m \delta \varphi_1 - P_1 \delta r_{C_1} \sin \alpha - \frac{P_1}{g} w_{C_1x} \delta r_{C_1} - \frac{P_1 r_1^2}{2g} \epsilon_{1z} \delta \varphi_1 - \\ - f_k P_1 \cos \alpha \delta \varphi_1 - \frac{P_2 r_2^2}{2g} \epsilon_{2z} \delta \varphi_2 - P_3 \delta r_{C_3} \sin \beta - \frac{P_3}{g} w_{C_3z} \delta r_{C_3} - \\ - \frac{P_3 r_3^2}{2g} \epsilon_{3z} \delta \varphi_3 - f_k P_3 \cos \beta \delta \varphi_3 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Выразив с помощью формулы (1) ϵ_{1z} , ϵ_{2z} , ϵ_{3z} и w_{C_3z} через w_{C_1x} , а $\delta \varphi_1$, $\delta \varphi_2$, $\delta \varphi_3$ и δr_{C_3} с помощью формулы (7) — в зависимости от δr_{C_1} , представим уравнение (9) после почленного сокращения на δr_{C_1} в виде

$$\begin{aligned} \frac{m}{r_1} - P_1 \sin \alpha - \frac{3}{2} \frac{P_1}{g} w_{C_1x} - \frac{f_k}{r_1} P_1 \cos \alpha - \frac{P_2}{2g} w_{C_1x} - \\ - \frac{P_3}{2} \sin \beta - \frac{3P_3}{8g} w_{C_1x} - \frac{f_k}{2r_3} P_3 \cos \beta = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из уравнения (10) определяем проекцию искомого ускорения центра тяжести катка A :

$$w_{C_1x} = 8g \frac{\frac{m}{r_1} - P_1 \left(\sin \alpha + \frac{f_k}{r_1} \cos \alpha \right) - \frac{P_3}{2} \left(\sin \beta + \frac{f_k}{r_3} \cos \beta \right)}{12P_1 + 4P_2 + 3P_3}.$$

Если

$$\frac{m}{r_1} > P_1 \left(\sin \alpha + \frac{f_k}{r_1} \cos \alpha \right) + \frac{P_3}{2} \left(\sin \beta + \frac{f_k}{r_3} \cos \beta \right),$$

то $w_{C_1x} > 0$, т. е. ускорение центра тяжести C_1 катка A направлено параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости вверх.

Задача 396. К концам тонкой нерастяжимой нити привязаны груз A веса P_1 и груз B веса P_2 . Нить переброшена через блоки D и E и охватывает снизу подвижный блок K . К оси O_3 подвижного блока K прикреплен груз L веса P_6 ; P_3 — вес блока D , P_4 — вес блока E , P_5 — вес блока K . Грузы A и B движутся по наклонным плоскостям, соответственно расположенным под углами α и β к горизонту.

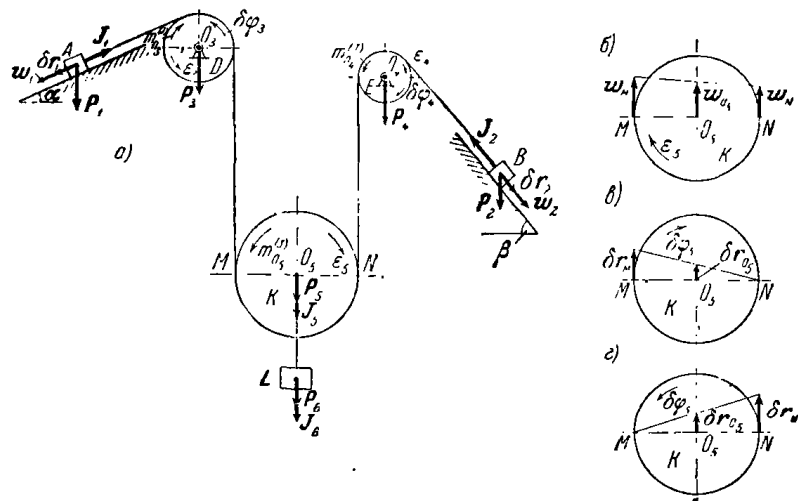
Определить ускорений грузов A , B и L . Блоки считать однородными круглыми дисками. Силами трения скольжения грузов о наклонные плоскости и массой нити пренебречь.

Решение. Данная материальная система имеет две степени свободы. Действительно, задав положения грузов A и B на наклонных плоскостях, мы определим положение всех остальных масс системы: блоков D , E и K и груза L .

Изобразим на рис. a все задаваемые силы: P_1 — вес груза A , P_2 — вес груза B , P_3 — вес блока D , P_4 — вес блока E , P_5 — вес блока K , P_6 — вес груза L .

Все связи, наложенные на систему, являются идеальными (наклонные плоскости — идеально гладкие, нить предполагается нерастяжимой и при движении системы натянутой). Поэтому при составлении общего уравнения динамики силы реакций связей рассмотрению не подлежат.

Обозначим через r_3 , r_4 и r_5 — радиусы блоков D , E и K соответственно, через ω_1 и ω_2 — ускорения грузов A и B . Предположим, что оба ускорения направлены параллельно линиям наибольшего ската соответствующих наклонных плоскостей вниз. Так как нить нерастяжима, то модуль ускорения точки M нити равен модулю ускорения груза A , а модуль ускорения точки N нити — модулю ускорения груза B ($\omega_M = \omega_1$, $\omega_N = \omega_2$).



К задаче 396.

Из рис. б можно найти ускорение центра тяжести O_5 блока K :

$$\omega_{O_5} = \frac{\omega_M + \omega_N}{2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (1)$$

Для определения углового ускорения ϵ_3 блока K примем точку N за полюс и воспользуемся тем, что проекция ускорения точки M на вертикальную ось равна

$$\omega_M = \omega_N + \omega_{MN}^{ap}.$$

Так как $\omega_{MN}^{ap} = MN\epsilon_3 = 2r_5\epsilon_3$, то

$$\epsilon_3 = \frac{\omega_M - \omega_N}{2r_5} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2r_5}. \quad (2)$$

При $\omega_1 > \omega_2$ блок K вращается ускоренно по часовой стрелке.

Ускорение точки нити на ободу блока D равно ω_1 ; следовательно, угловое ускорение ϵ_3 блока D будет

$$\epsilon_3 = \frac{\omega_1}{r_3}. \quad (3)$$

(Блок D вращается ускоренно против часовой стрелки).

Аналогично, блок E вращается ускоренно по часовой стрелке, причем

$$\epsilon_4 = \frac{\omega_2}{r_4}. \quad (4)$$

Переходим к приведению сил инерции материальных точек данной системы.

Силы инерции грузов A и B , движущихся поступательно, приводятся к равнодействующим J_1 и J_2 , направленным соответственно противоположно ускорениям ω_1 и ω_2 , т. е. параллельно линиям наибольшего ската наклонных плоскостей вверх:

$$J_1 = -\frac{P_1}{g} \omega_1, \quad J_2 = -\frac{P_2}{g} \omega_2,$$

причем

$$J_1 = \frac{P_1}{g} \omega_1, \quad J_2 = \frac{P_2}{g} \omega_2. \quad (5)$$

Силы инерции блоков D и E , вращающихся вокруг неподвижных осей, приводятся к парам сил с моментами $m_{O_3}^{(J)}$ и $m_{O_4}^{(J)}$, причем по модулю

$$m_{O_3}^{(J)} = I_3 \epsilon_3, \quad m_{O_4}^{(J)} = I_4 \epsilon_4.$$

Блоки D и E являются однородными круглыми дисками, поэтому

$$I_{O_3} = \frac{P_3 r_3^2}{2g}, \quad I_{O_4} = \frac{P_4 r_4^2}{2g}.$$

Приимая во внимание формулы (3) и (4), получим модули главных моментов сил инерции:

$$m_{O_3}^{(J)} = \frac{P_3 r_3 \omega_1}{2g}, \quad m_{O_4}^{(J)} = \frac{P_4 r_4 \omega_2}{2g}. \quad (6)$$

Силы инерции блока K , совершающего плоское движение, приводятся к силе, равной главному вектору J_5 и паре сил, момент которой равен главному моменту $m_{O_5}^{(J)}$ относительно оси, проходящей через его центр тяжести O_5 перпендикулярно к плоскости материальной симметрии. Сила J_5 приложена в центре тяжести O_5 блока K и направлена противоположно его ускорению ω_{O_5} , т. е. по вертикали вниз:

$$J_5 = -\frac{P_5}{g} \omega_{O_5}.$$

Учитывая формулу (1), получим:

$$J_5 = \frac{P_5}{g} \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (7)$$

Модуль главного момента $m_{O_5}^{(J)}$ сил инерции блока K имеет вид

$$m_{O_5}^{(J)} = I_{O_5} \varepsilon_5 = \frac{P_5 r_5 (\omega_1 - \omega_2)}{4g}. \quad (8)$$

Силы инерции груза L , движущегося поступательно, приводятся к равнодействующей J_6 , направленной противоположно его ускорению ω_{O_3} , т. е. по вертикали вниз: $J_6 = -\frac{P_6}{g} \omega_{O_3}$. С учетом формулы (1) получаем:

$$J_6 = \frac{P_6}{2g} (\omega_1 + \omega_2). \quad (9)$$

Итак, силы инерции рассматриваемой системы оказались приведенными к силам J_1 , J_2 , J_3 и J_6 и парам сил с моментами $m_{O_1}^{(J)}$, $m_{O_4}^{(J)}$, $m_{O_5}^{(J)}$.

Дадим данной материальной системе, имеющей две степени свободы, два независимых возможных перемещения δr_1 и δr_2 (соответственно грузам A и B), направив их параллельно наклонным плоскостям вниз.

Учитывая независимость этих возможных перемещений, будем при составлении каждого из дифференциальных уравнений движения давать одно возможное перемещение, считая при этом другое возможное перемещение равным нулю.

а) Дадим грузу A возможное перемещение δr_1 , считая при этом δr_2 равным нулю, т. е. $\delta r_1 \neq 0$, $\delta r_2 = 0$.

Это значит, что груз A переместится вдоль наклонной плоскости вниз на δr_1 . Учитывая нерастяжимость нити, отметим, что равное возможное перемещение получит точка M нити, расположенная на ободке блока K , т. е. $\delta r_M = \delta r_1$. Блок D повернется против часовой стрелки на угол

$$\delta \varphi_3 = \frac{\delta r_1}{r_3}. \quad (10)$$

Так как $\delta r_2 = 0$, то груз B , блок E и правая ветвь нити до точки N останутся в покое.

Пользуясь рис. 8, нетрудно найти возможное перемещение центра тяжести O_5 блока K :

$$\delta r_{O_5} = \frac{\delta r_M}{2} = \frac{\delta r_1}{2}. \quad (11)$$

Рассматривая возможное перемещение δr_M по отношению к неподвижной точке N , имеем: $\delta r_M = 2r_5 \delta \varphi_3$, откуда

$$\delta \varphi_3 = \frac{\delta r_M}{2r_5} = \frac{\delta r_1}{2r_5}. \quad (12)$$

Возможное угловое перемещение $\delta \varphi_3$ блока K направлено по часовой стрелке.

Составим общее уравнение динамики, т. е. вычислим сумму работ всех задаваемых сил и сил инерции материальной системы на возможных перемещениях, соответствующих δr_1 , и приравняем ее нулю:

$$P_1 \delta r_1 \sin \alpha - J_1 \delta r_1 - m_{O_3}^{(J)} \delta \varphi_3 - m_{O_5}^{(J)} \delta \varphi_3 - P_5 \delta r_{O_5} - J_5 \delta r_{O_5} - P_6 \delta r_{O_5} - J_6 \delta r_{O_5} = 0. \quad (13)$$

Работа сил P_2 , J_2 и пары сил инерции с моментом $m_{O_4}^{(J)}$ равна нулю, так как груз B , блок E и правая ветвь нити до точки N при $\delta r_2 = 0$ являются неподвижными. Работа сил P_3 и P_4 равна нулю, так как их точки приложения неподвижны.

Подставим в уравнение (13) значения: J_1 из формулы (5), $m_{O_3}^{(J)}$ — из формулы (6), $m_{O_5}^{(J)}$ — из формулы (8), J_5 — из (7), J_6 — из (9), $\delta \varphi_3$ — из (10), δr_{O_5} — из (11), $\delta \varphi_3$ — из (12). После почленного сокращения уравнения (13) на δr_1 находим:

$$P_1 \sin \alpha - \frac{P_1}{g} \omega_1 - \frac{P_3 \omega_1}{2g} - \frac{P_5 (\omega_1 - \omega_2)}{8g} - \frac{P_5}{2} - \frac{P_3}{4g} (\omega_1 + \omega_2) - \frac{P_6}{2} - \frac{P_6}{4g} (\omega_1 + \omega_2) = 0$$

или

$$-\frac{\omega_1}{8g} (8P_1 + 4P_3 + 3P_5 + 2P_6) - \frac{\omega_2}{8g} (P_5 + 2P_6) + P_1 \sin \alpha - \frac{P_5 + P_6}{2} = 0. \quad (14)$$

б) Дадим грузу B возможное перемещение δr_2 , считая при этом δr_1 равным нулю, т. е. $\delta r_1 = 0$, $\delta r_2 \neq 0$.

Это значит, что груз B переместится вдоль наклонной плоскости вниз на δr_2 . В связи с нерастяжимостью нити возможное перемещение точки N нити, лежащей на ободке блока K , равно возможному перемещению груза B , т. е. $\delta r_N = \delta r_2$. Блок E повернется по часовой стрелке на угол

$$\delta \varphi_4 = \frac{\delta r_2}{r_4}. \quad (15)$$

Так как $\delta r_1 = 0$, то груз A , блок D и левая ветвь нити до точки M находятся в покое. При этом

$$\delta r_{O_3} = \frac{\delta r_N}{2} = \frac{\delta r_2}{2} \quad (16)$$

(см. рис. 2).

Рассматривая возможное перемещение δr_N по отношению к неподвижной точке M , запишем: $\delta r_N = 2r_3 \delta \varphi_3$, откуда

$$\delta \varphi_3 = \frac{\delta r_N}{2r_3} = \frac{\delta r_2}{2r_3}. \quad (17)$$

Возможное угловое перемещение $\delta \varphi_3$ блока K направлено против часовой стрелки.

Составим общее уравнение динамики, т. е. вычислим сумму работ всех задаваемых сил и сил инерции материальной системы на возможных перемещениях, соответствующих δr_2 , и приравняем ее нулю:

$$P_2 \delta r_2 \sin \beta - J_2 \delta r_2 - m_{O_4}^{(J)} \delta \varphi_4 + m_{C_5}^{(J)} \delta \varphi_5 - P_6 \delta r_{O_5} - J_6 \delta r_{O_5} - P_6 \delta r_{O_5} - J_6 \delta r_{O_5} = 0. \quad (18)$$

Работа сил P_1 , J_1 и пары сил инерции с моментом $m_{O_3}^{(J)}$ равна нулю, так как груз A , блок D и левая ветвь нити до точки M неподвижны ($\delta r_1 = 0$). Работа сил P_3 и P_4 равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны.

Воспользовавшись формулами (5), (6), (7), (8), (9), (15), (16) и (17), после почленного сокращения уравнения (18) на δr_2 получим:

$$P_2 \sin \beta - \frac{P_2}{g} \omega_2 - \frac{P_4 \omega_2}{2g} + \frac{P_5 (\omega_1 - \omega_2)}{8g} - \frac{P_5}{2} - \frac{P_5}{4g} (\omega_1 + \omega_2) - \frac{P_6}{2} - \frac{P_6}{4g} (\omega_1 + \omega_2) = 0$$

или

$$-\frac{\omega_2}{8g} (8P_2 + 4P_4 + 3P_5 + 2P_6) - \frac{\omega_1}{8g} (P_5 + 2P_6) + P_2 \sin \beta - \frac{P_5 + P_6}{2} = 0. \quad (19)$$

Уравнения (14) и (19) образуют систему дифференциальных уравнений движения:

$$-\frac{\omega_1}{8g} (8P_1 + 4P_3 + 3P_5 + 2P_6) - \frac{\omega_2}{8g} (P_5 + 2P_6) + P_1 \sin \alpha - \frac{P_5 + P_6}{2} = 0, \quad (14)$$

$$-\frac{\omega_2}{8g} (8P_2 + 4P_4 + 3P_5 + 2P_6) - \frac{\omega_1}{8g} (P_5 + 2P_6) + P_2 \sin \beta - \frac{P_5 + P_6}{2} = 0. \quad (19)$$

Решив эту систему уравнений, находим модули искоемых ускорений грузов A и B :

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= 8g \frac{D(C-B) - C \cdot P_2 \sin \beta + B \cdot P_1 \sin \alpha}{AB - C^2}, \\ \omega_2 &= 8g \frac{D(C-A) + A \cdot P_2 \sin \beta - C \cdot P_1 \sin \alpha}{AB - C^2}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где

$$8P_1 + 4P_3 + 3P_5 + 2P_6 = A,$$

$$8P_2 + 4P_4 + 3P_5 + 2P_6 = B, \quad P_5 + 2P_6 = C$$

и

$$\frac{P_5 + P_6}{2} = D.$$

При решении задачи мы предположили, что грузы A и B движутся ускоренно вниз вдоль наклонных плоскостей с ускорениями ω_1 и ω_2 .

Если значения ω_1 и ω_2 , подсчитанные по формулам (20), окажутся положительными, то сделанное предположение подтверждается. Если же эти значения окажутся отрицательными, то это означает, что ускорения грузов направлены вдоль наклонных плоскостей вверх.

Для определения ускорения груза L , т. е. ω_{O_5} , надо в (1) подставить значения ω_1 и ω_2 из формул (20). Находим:

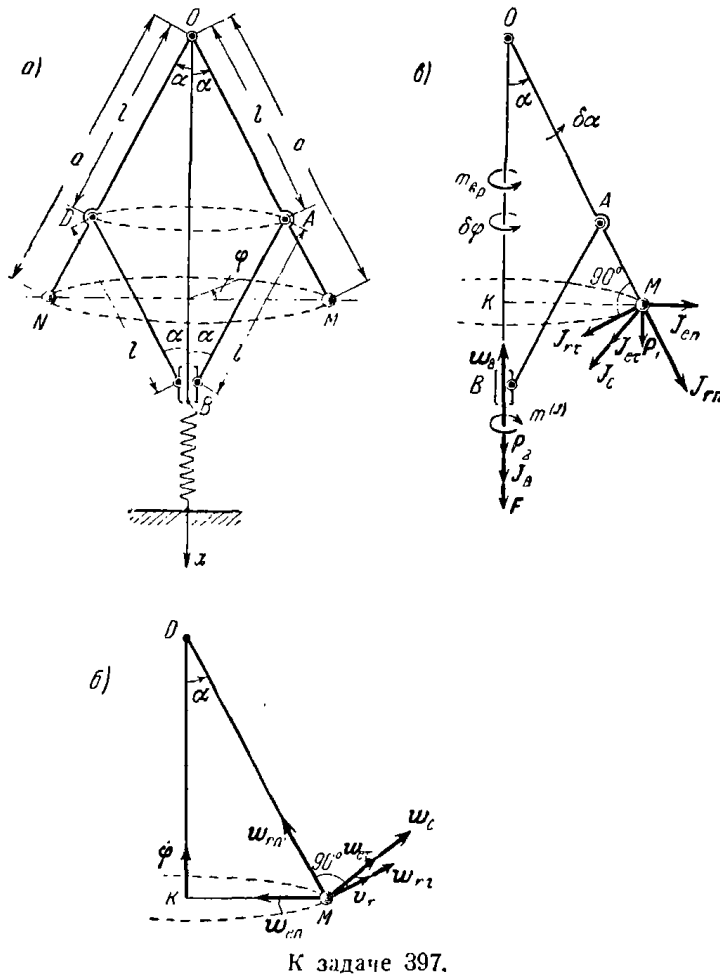
$$\omega_{O_5} = 4g \frac{D(2C - A - B) + (A - C)P_2 \sin \beta + (B - C)P_1 \sin \alpha}{AB - C^2}.$$

Если значение ω_{O_5} , подсчитанное по этой формуле, положительно, то ускорение груза L направлено вверх, если же отрицательно, то ускорение груза L направлено вниз.

Данную задачу, подобно всем предыдущим задачам этого параграфа, можно решить с помощью уравнений Лагранжа второго рода. Это решение приведено в задаче 414. Там же дана сравнительная оценка обоих методов решения задачи.

Задача 397. На рис. a изображен центробежный регулятор, который приводится во вращение вокруг вертикальной неподвижной оси парой сил с моментом $m_{вр} = m$. Шары регулятора M и N , веса P_1 каждый, укреплены на концах стержней OM и ON , шарнирно соединенных в точке O . Муфта B веса P_2 шарнирно соединена со стержнями BA и BD , которые в свою очередь соединены шарнирами A и D со стержнями OM и ON . Муфта B отжимается вниз пружиной, коэффициент упругости которой равен c . При отвесном положении стержней OM и ON пружина недеформирована $OM = ON = a$, $OA = AB = BD = OD = l$. При изменении нагрузки машины изменяется угол α , образуемый стержнями OM и ON с вертикалью.

Составить дифференциальные уравнения движения регулятора, если момент инерции муфты B относительно вертикальной оси равен I . Шары M и N считать точечными массами. Массами стержней и пружины пренебречь.



Решение. Регулятор представляет систему с двумя степенями свободы. Действительно, для определения положения всех его точек надо знать два независимых параметра: угол поворота φ регулятора вокруг вертикальной оси и угол отклонения α , образованный стержнями OM и ON с вертикалью (см. рис. а).

Задаваемыми силами и моментами являются:

P_1 — вес каждого из шаров, P_2 — вес муфты, упругая сила пружины F и пара сил с вращающим моментом m .

При увеличении угла α муфта B поднимается вверх, пружина растягивается и, следовательно, упругая сила пружины F направлена вертикально вниз. Модуль этой силы равен $F = c|\Delta|$, где Δ — удлинение пружины. (Силы изображены на рис. в.) Для вычисления удлинения пружины направим ось x из точки O вдоль оси вращения вниз. Воспользовавшись равнобедренным треугольником OAB ($OA = AB = l$), имеем:

$$x_B = OB = 2l \cos \alpha. \quad (1)$$

По условию задачи пружина недеформирована при отвесном положении стержней, т. е. при $OB = 2l$. Удлинение пружины $\Delta_x = -2l(1 - \cos \alpha)$. Следовательно, проекция на ось x упругой силы пружины F равна

$$F_x = -c\Delta_x = 2cl(1 - \cos \alpha). \quad (2)$$

Для определения сил инерции шаров M и N и муфты B рассмотрим их ускорения. Муфта B движется поступательно вдоль вертикальной оси. Взяв вторую производную от x_B по времени и воспользовавшись при этом формулой (1), получим:

$$\ddot{x}_B = -2l\ddot{\alpha}^2 \cos \alpha - 2l\ddot{\alpha} \sin \alpha$$

(при вычислении производных следует иметь в виду, что α является функцией времени). Знак минус указывает, что ускорение w_B муфты B при $\ddot{\alpha} > 0$ направлено по вертикали вверх. Итак,

$$w_B = 2l(\ddot{\alpha}^2 \cos \alpha + \ddot{\alpha} \sin \alpha). \quad (3)$$

Так как шары M и N имеют одинаковые по модулю ускорения, то достаточно рассмотреть ускорение одного из них.

Шар M , принимаемый за материальную точку, участвует в сложном движении: в переносном вращательном движении вокруг вертикальной оси регулятора и в относительном движении вместе со стержнем OM , который вращается вокруг горизонтальной оси O , перпендикулярной к плоскости рис. б. Следовательно, абсолютное ускорение точки M можно определить по теореме о сложении ускорений точки при переносном вращательном движении:

$$w_M = w_{en} + w_{e\tau} + w_{rn} + w_{r\tau} + w_c. \quad (4)$$

Все составляющие ускорения точки M изображены на рис. б. Ускорения w_{en} , w_{rn} , $w_{r\tau}$ лежат в плоскости рисунка, ускорения $w_{e\tau}$ и w_c направлены перпендикулярно к плоскости рисунка от нас. Величины ускорений определяются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} w_{en} &= |MK| \dot{\varphi}^2 = a\dot{\varphi}^2 \sin \alpha, & w_{e\tau} &= |MK| \ddot{\varphi} = a\ddot{\varphi} \sin \alpha, \\ w_{rn} &= a\ddot{\alpha}^2, & w_{r\tau} &= a\ddot{\alpha}, & w_c &= 2\omega_e v_r \sin(\omega_e, v_r) = 2a\dot{\varphi}\dot{\alpha} \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Переходим к определению сил инерции шаров M и N и муфты B (см. рис. в). Сила инерции шара M , принимаемого за точечную массу:

$$J_M = -\frac{P_1}{g} \omega_M.$$

Учитывая формулу (4), получим:

$$J_M = J_{en} + J_{e\tau} + J_{rn} + J_{r\tau} + J_c,$$

где

$$\begin{aligned} J_{en} &= -\frac{P_1}{g} \omega_{en}, & J_{e\tau} &= -\frac{P_1}{g} \omega_{e\tau}, & J_{rn} &= -\frac{P_1}{g} \omega_{rn}, \\ J_{r\tau} &= -\frac{P_1}{g} \omega_{r\tau}, & J_c &= -\frac{P_1}{g} \omega_c. \end{aligned}$$

Силы инерции J_{en} , J_{rn} и $J_{r\tau}$ лежат в плоскости рисунка, а силы инерции $J_{e\tau}$ и J_c направлены перпендикулярно к плоскости рисунка. В соответствии с формулами (5) получим:

$$\left. \begin{aligned} J_{en} &= \frac{P_1}{g} a \dot{\varphi}^2 \sin \alpha, & J_{e\tau} &= \frac{P_1}{g} a \ddot{\varphi} \sin \alpha, & J_{rn} &= \frac{P_1}{g} a \dot{\alpha}^2, \\ J_{r\tau} &= \frac{P_1}{g} a \ddot{\alpha}, & J_c &= 2 \frac{P_1}{g} a \dot{\varphi} \dot{\alpha} \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Муфта B участвует в двух движениях: переносном поступательном вдоль вертикальной оси с ускорением ω_B и относительном вращательном с угловым ускорением $\ddot{\varphi}$ вокруг вертикальной оси. Соответственно этим движениям силы инерции муфты приводятся к силе, равной главному вектору J_B , и паре сил, момент которой равен главному моменту $m^{(J)}$.

Главный вектор $J_B = -\frac{P_2}{g} \omega_B$. Так как ω_B направлено вверх, то J_B имеет направление по вертикали вниз. В соответствии с формулой (3):

$$J_B = 2 \frac{P_2}{g} l (\dot{\alpha}^2 \cos \alpha + \ddot{\alpha} \sin \alpha). \quad (7)$$

Главный момент сил инерции

$$m^{(J)} = -I \ddot{\varphi}, \quad (8)$$

где I — момент инерции муфты B относительно вертикальной оси регулятора.

Так как независимыми координатами, определяющими положение точек регулятора, являются углы поворота φ и α , то для решения задачи следует дать два возможных угловых перемещения $\delta\varphi$ и $\delta\alpha$. Направим их в сторону возрастания углов поворота φ и α .

Соответственно двум возможным перемещениям $\delta\varphi$ и $\delta\alpha$ составим два уравнения движения. При получении каждого из уравнений

движения удобно дать возможное перемещение, соответствующее данной координате, а второе возможное перемещение считать равным нулю. Так, составляя уравнение движения, соответствующее координате φ , надо сообщить системе возможное угловое перемещение $\delta\varphi$, а возможное угловое перемещение $\delta\alpha$ считать равным нулю. При выводе же уравнения движения, соответствующего координате α , надо сообщить системе возможное угловое перемещение $\delta\alpha$, а возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ считать равным нулю.

Переходим к составлению уравнений движения регулятора:

а) Составляем уравнение движения, соответствующее координате φ . Считаем $\delta\varphi \neq 0$, $\delta\alpha = 0$.

Это значит, что при неизменных углах α , образованных стержнями OM и ON с вертикалью, происходит поворот регулятора вокруг вертикальной оси на угол $\delta\varphi$ в сторону m . Вычислив сумму работ всех задаваемых сил и сил инерции на возможном угловом перемещении $\delta\varphi$, приравняем ее нулю:

$$m \delta\varphi - 2J_{e\tau} |MK| \delta\varphi - 2J_c |MK| \delta\varphi - m^{(J)} \delta\varphi = 0 \quad (9)$$

(коэффициенты 2 получились из-за наличия в регуляторе двух шаров M и N).

Работа сил J_{en} , J_{rn} , $J_{r\tau}$, P_1 , P_2 , F , J_B равна нулю, так как моменты этих сил относительно вертикальной оси регулятора равны нулю (напомним, что работа силы при вращении вокруг неподвижной оси равна произведению момента силы относительно этой оси на угловое перемещение).

Подставив в уравнение (9) $MK = a \sin \alpha$ значения $J_{e\tau}$ и J_c из формул (6), значение $m^{(J)}$ из формулы (8), после сокращения уравнения на $\delta\varphi$ получим:

$$m - 2 \frac{P_1}{g} a^2 \ddot{\varphi} \sin^2 \alpha - 2 \frac{P_1}{g} a^2 \dot{\varphi} \dot{\alpha} \sin 2\alpha - I \ddot{\varphi} = 0,$$

т. е.

$$\left(J + 2 \frac{P_1}{g} a^2 \sin^2 \alpha \right) \ddot{\varphi} + 2 \frac{P_1}{g} a^2 \dot{\varphi} \dot{\alpha} \sin 2\alpha - m = 0. \quad (10)$$

б) Составим уравнение движения регулятора, соответствующее координате α . Считаем: $\delta\alpha \neq 0$, $\delta\varphi = 0$.

Это значит, что при отсутствии поворота регулятора вокруг вертикальной оси, стержни OM и ON отклоняются от вертикали на угол $\delta\alpha$, поворачиваясь вокруг горизонтальной оси O , перпендикулярной к плоскости рисунка.

При этом муфта B получит возможное перемещение δx_B вдоль вертикальной оси, которое можно определить, вычислив вариацию x_B . Воспользовавшись формулой (1), получим:

$$\delta x_B = -2l \sin \alpha \delta\alpha. \quad (11)$$

Знак минус указывает, что возможное перемещение муфты B при $\sin \alpha \delta \alpha > 0$ направлено вверх.

Вычислив сумму работ всех задаваемых сил и сил инерции на возможном угловом перемещении $\delta \alpha$, приравняем ее нулю:

$$P_{2x} \delta x_B + F_x \delta x_B + J_{Bx} \delta x_B - 2P_1 |MK| \delta \alpha + 2J_{en} |OK| \delta \alpha - 2J_{rc} |OM| \delta \alpha = 0 \quad (12)$$

(коэффициенты 2 при трех последних членах уравнения (12) возникли из-за наличия в регуляторе двух шаров M и N).

Работа сил $J_{c\tau}$, J_{rn} , J_c , пары сил с моментом m и пары сил инерции с моментом $m^{(J)}$ равна нулю, так как моменты этих сил относительно горизонтальной оси O , перпендикулярной к плоскости рисунка, равны нулю.

Подставив в уравнение (12) $MK = a \sin \alpha$, $OK = a \cos \alpha$, $OM = a$, значение F_x из формулы (2), J_B из формулы (7), J_{en} и J_{rc} из (6), δx_B из (11), приняв во внимание, что $P_{2x} = P_2$, $J_{Bx} = J_B$, после сокращения уравнения на $\delta \alpha$ получим:

$$-2P_2 l \sin \alpha - 4cl^2 (1 - \cos \alpha) \sin \alpha - 4 \frac{P_2}{g} l^2 \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \cos \alpha - 4 \frac{P_2}{g} l^2 \ddot{\alpha} \sin^2 \alpha - 2P_1 a \sin \alpha + 2 \frac{P_1}{g} a^2 \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \frac{P_1}{g} a^2 \ddot{\alpha} = 0$$

или

$$\frac{P_1 a^2 + 2P_2 l^2 \sin^2 \alpha}{g} \ddot{\alpha} - \frac{P_1}{2g} a^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha + \frac{2P_2}{g} l^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha + 2cl^2 (1 - \cos \alpha) \sin \alpha + (P_1 a + P_2 l) \sin \alpha = 0. \quad (13)$$

Итак, искомая система дифференциальных уравнений движения регулятора имеет вид

$$(J + 2 \frac{P_1}{g} a^2 \sin^2 \alpha) \ddot{\varphi} + 2 \frac{P_1}{g} a^2 \dot{\varphi} \dot{\alpha} \sin 2\alpha - m = 0, \quad (10)$$

$$\frac{P_1 a^2 + 2P_2 l^2 \sin^2 \alpha}{g} \ddot{\alpha} - \frac{P_1}{2g} a^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha + 2 \frac{P_2}{g} l^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha + 2cl^2 (1 - \cos \alpha) \sin \alpha + (P_1 a + P_2 l) \sin \alpha = 0. \quad (13)$$

При установившемся режиме работы регулятора $m = 0$ и $\dot{\varphi} = \omega$ постоянно.

В этом случае система уравнений движения (10) и (13) принимает вид

$$2 \frac{P_1}{g} a^2 \omega \dot{\alpha} \sin 2\alpha = 0,$$

$$\frac{P_1 a^2 + 2P_2 l^2 \sin^2 \alpha}{g} \ddot{\alpha} - \frac{P_1}{2g} a^2 \omega^2 \sin 2\alpha + 2 \frac{P_2}{g} l^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha + 2cl^2 (1 - \cos \alpha) \sin \alpha + (P_1 a + P_2 l) \sin \alpha = 0.$$

Из первого уравнения системы получим $\dot{\alpha} = 0$, т. е. α постоянно. Следовательно, при установившемся режиме работы регулятора углы α , образуемые стержнями OM и ON регулятора с вертикалью, остаются постоянными. При этом второе уравнение системы запишется в виде

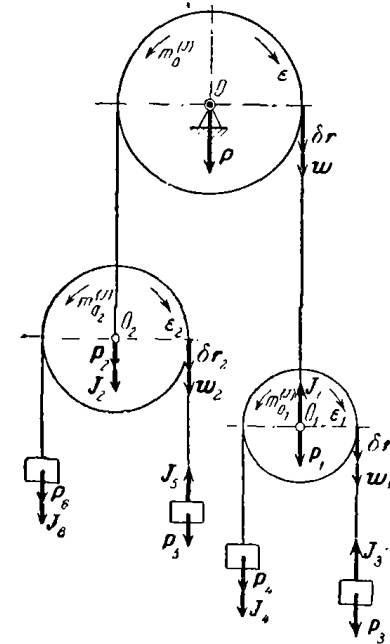
$$-\frac{P_1}{g} a^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2cl^2 (1 - \cos \alpha) \sin \alpha + (P_1 a + P_2 l) \sin \alpha = 0.$$

Отбросив корень уравнения $\alpha = 0$, соответствующий неустойчивому положению равновесия системы, получим зависимость между угловой скоростью ω вращения регулятора вокруг вертикальной оси и углом отклонения α стержней OM и ON от вертикали:

$$\omega^2 = g \frac{P_1 a + P_2 l + 2cl^2 (1 - \cos \alpha)}{P_1 a^2 \cos \alpha}.$$

Рассматриваемую задачу, подобно предыдущей, можно решить с помощью уравнений Лагранжа второго рода. Это решение приведено в задаче 415. Там же дана сравнительная оценка обоих методов решения.

Задача 398. На рисунке изображена система, состоящая из трех блоков: верхнего неподвижного веса P и двух подвижных. Оси O_1 и O_2 подвижных блоков соединены тонкой нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок. P_1 — вес правого подвижного блока, P_2 — вес левого подвижного блока. Через подвижные блоки переброшены тонкие нерастяжимые нити, к концам которых прикреплены грузы: справа — веса P_3 и P_4 , слева — веса P_5 и P_6 . Определить угловую скорость ω нити, переброшенной через неподвижный блок. Блоки считать однородными круглыми дисками. Массой нитей и их проскальзыванием по ободам блоков пренебречь.



К задаче 398.

Решение. Рассматриваемая система блоков и грузов имеет три степени свободы. Действительно, для определения положения всех точек системы следует задать три независимых параметра (например, углы поворота каждого из трех блоков). К системе приложены семь задаваемых сил: P , P_1 , P_2 — силы тяжести блоков, P_3 , P_4 , P_5 и P_6 — силы тяжести грузов.

Все связи, наложенные на систему, являются идеальными (нити считаются нерастяжимыми и натянутыми).

Для определения сил инерции рассматриваемой системы обозначим: ω — величину ускорения любой точки нити, переброшенной через неподвижный блок, ω_1 — величину ускорения точек нити, переброшенной через правый нижний блок, ω_2 — через левый нижний блок.

Направим ускорения точек правых ветвей нитей вниз.

Так как ускорения точек правой ветви нити по предположению направлены вниз, то верхний блок вращается ускоренно по часовой стрелке, причем $\varepsilon = \frac{\omega}{r}$, где r — радиус верхнего блока. Блок считается однородным круглым диском. Поэтому главный момент $m_O^{(J)}$ сил инерции верхнего блока относительно неподвижной горизонтальной оси вращения O , перпендикулярной к плоскости рисунка, равен по модулю:

$$|m_O^{(J)}| = I_O \varepsilon = \frac{Pr^2 \omega}{2g r} = \frac{Pr\omega}{2g}. \quad (1)$$

Оба нижних блока совершают плоское движение. Поэтому силы инерции этих блоков приводятся к силе, равной главному вектору, и паре сил, момент которой равен главному моменту. Силы инерции J_1 и J_2 приложены в центрах тяжести блоков O_1 и O_2 и направлены противоположно их ускорениям, т. е. J_1 — вверх и J_2 — вниз, причем по модулю:

$$J_1 = \frac{P_1}{g} \omega, \quad J_2 = \frac{P_2}{g} \omega. \quad (2)$$

Ускорения точек правых ветвей нитей ω_1 и ω_2 направлены вниз, поэтому оба нижних блока вращаются ускоренно по часовой стрелке, причем $\varepsilon_1 = \frac{\omega_1}{r_1}$, $\varepsilon_2 = \frac{\omega_2}{r_2}$, где r_1 и r_2 обозначают радиусы правого и левого подвижных блоков. Поэтому главные моменты сил инерции подвижных блоков относительно их осей вращения по модулю равны

$$\left. \begin{aligned} |m_{O_1}^{(J)}| &= I_{O_1} \varepsilon_1 = \frac{P_1 r_1^2 \omega_1}{2g r_1} = \frac{P_1 r_1 \omega_1}{2g}, \\ |m_{O_2}^{(J)}| &= I_{O_2} \varepsilon_2 = \frac{P_2 r_2^2 \omega_2}{2g r_2} = \frac{P_2 r_2 \omega_2}{2g}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Четыре груза, подвешенных на нитях, совершают сложное движение: переносное поступательное движение вместе с осями подвижных блоков O_1 и O_2 и относительное движение — по вертикалям вверх либо вниз, по отношению к осям O_1 и O_2 блоков.

Для определения ускорений грузов применяем теорему о сложении ускорений точки при переносном поступательном движении:

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r.$$

Обозначая ускорения грузов соответствующими индексами, получим:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega, \quad \omega_4 = \omega_1 - \omega, \quad \omega_5 = \omega_2 - \omega, \quad \omega_6 = \omega_2 + \omega. \quad (4)$$

(Заметим, что ω_3 и ω_5 направлены вниз, а ω_4 и ω_6 — вверх, если $|\omega_1| > |\omega|$ и $|\omega_2| > |\omega|$.)

Силы инерции грузов равны:

$$\begin{aligned} J_3 &= -\frac{P_3}{g} \omega_3, & J_4 &= -\frac{P_4}{g} \omega_4, \\ J_5 &= -\frac{P_5}{g} \omega_5, & J_6 &= -\frac{P_6}{g} \omega_6. \end{aligned}$$

В соответствии с направлениями ускорений грузов выясняем, что J_3 и J_5 направлены вверх, а J_4 и J_6 — вниз. Воспользовавшись формулами (4), запишем модули сил инерции:

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{P_3}{g} (\omega_1 + \omega), & J_4 &= \frac{P_4}{g} (\omega_1 - \omega), \\ J_5 &= \frac{P_5}{g} (\omega_2 - \omega), & J_6 &= \frac{P_6}{g} (\omega_2 + \omega). \end{aligned} \quad (5)$$

(При решении подобных задач часто допускается ошибка; в выражениях сил инерции подставляют, вместо абсолютных, относительные ускорения грузов, считая, таким образом, что $J_3 = \frac{P_3}{g} \omega_1$, $J_4 = \frac{P_4}{g} \omega_1$, $J_5 = \frac{P_5}{g} \omega_2$ и $J_6 = \frac{P_6}{g} \omega_2$.)

Так как рассматриваемая система имеет три степени свободы, то следует ввести три независимых возможных перемещения. Дадим возможное перемещение δr точке правой ветви верхней нити по вертикали вниз, возможные перемещения δr_1 и δr_2 точкам правых ветвей нижних нитей — также по вертикалям вниз (см. рисунок).

Учитывая независимость этих возможных перемещений, будем при составлении каждого из дифференциальных уравнений движения сообщать одно возможное перемещение точкам системы, считая при этом два других возможных перемещения равными нулю. Таким образом мы составим три дифференциальных уравнения движения системы.

а) Дадим точкам правой ветви верхней нити возможное перемещение δr вниз, считая при этом два других возможных перемещения равными нулю, т. е. $\delta r \neq 0$, $\delta r_1 = \delta r_2 = 0$.

Это значит, что верхний блок повернется по часовой стрелке на

$$\delta \varphi = \frac{\delta r}{r}, \quad (6)$$

а нижние блоки переместятся поступательно: правый блок на δr вниз, а левый блок на δr вверх.

Грузы по отношению к подвижным блокам будут находиться в покое, т. е. грузы веса P_3 и P_4 переместятся вместе с правым бло-

ком на δr вниз, а грузы веса P_5 и P_6 поднимутся вверх на δr вместе с левым блоком.

Составим общее уравнение динамики, т. е., вычислив сумму работ задаваемых сил и сил инерции материальных точек системы на возможном перемещении δr , приравняем ее нулю:

$$- |m_{O_1}^{(J)}| \delta \varphi + P_1 \delta r - J_1 \delta r - P_2 \delta r - J_2 \delta r + P_3 \delta r - J_3 \delta r + P_4 \delta r + J_4 \delta r + P_5 \delta r - P_6 \delta r - J_6 \delta r = 0. \quad (7)$$

Работа пар сил, моменты которых равны главным моментам сил инерции нижних блоков $m_{O_1}^{(J)}$ и $m_{O_2}^{(J)}$ на возможном перемещении δr равна нулю, так как блоки перемещаются только поступательно. Работа силы тяжести P верхнего блока равна нулю, так как точка приложения этой силы неподвижна.

Воспользовавшись формулами (1), (2), (5) и (6), после почленного сокращения уравнения (7) на δr получим:

$$-\frac{\omega}{2g}(P + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 + 2P_4 + 2P_5 + 2P_6) - \frac{\omega_1}{g}(P_3 - P_4) - \frac{\omega_2}{g}(P_6 - P_5) + P_1 + P_3 + P_4 - P_2 - P_5 - P_6 = 0. \quad (8)$$

б) Дадим возможное перемещение δr_1 точке правой ветви нити, переброшенной через правый нижний блок, считая при этом два других возможных перемещения равными нулю, т. е.

$$\delta r_1 \neq 0, \quad \delta r = \delta r_2 = 0.$$

Это значит, что верхний блок и левый нижний блок находятся в покое, а нижний правый блок повернется по часовой стрелке на

$$\delta \varphi_1 = \frac{\delta r_1}{r_1}, \quad (9)$$

груз веса P_3 перемещается на δr_1 вниз, а груз веса P_4 — на δr_1 вверх.

Вычислив сумму работ задаваемых сил и сил инерции материальных точек системы на возможном перемещении δr_1 , приравняем ее нулю:

$$- |m_{O_1}^{(J)}| \delta \varphi_1 + P_3 \delta r_1 - J_3 \delta r_1 - P_4 \delta r_1 - J_4 \delta r_1 = 0. \quad (10)$$

Работа сил P_1 , J_1 , P_2 , J_2 , P_5 , J_5 , P_6 , J_6 и пар сил инерции с моментами $m_{O_1}^{(J)}$ и $m_{O_2}^{(J)}$ равна нулю, так как возможные перемещения верхнего и нижнего левого блоков равны нулю.

Воспользовавшись формулами (3), (5) и (9), после почленного сокращения уравнения (10) на δr_1 получим:

$$-\frac{\omega_1}{2g}(P_1 + 2P_3 + 2P_4) - \frac{\omega}{g}(P_3 - P_4) + P_3 - P_4 = 0. \quad (11)$$

в) Дадим возможное перемещение δr_2 точке правой ветви нити, переброшенной через левый нижний блок, считая при этом два других возможных перемещения равными нулю, т. е.

$$\delta r_2 \neq 0, \quad \delta r = \delta r_1 = 0.$$

Это значит, что верхний блок и нижний правый блок находятся в покое, а нижний левый блок повернется по часовой стрелке на

$$\delta \varphi_2 = \frac{\delta r_2}{r_2}, \quad (12)$$

груз веса P_5 перемещается на δr_2 вниз, а груз веса P_6 — на δr_2 вверх.

Вычислим сумму работ задаваемых сил и сил инерции материальных точек системы на возможном перемещении δr_2 и приравняем ее нулю:

$$- |m_{O_2}^{(J)}| \delta \varphi_2 + P_5 \delta r_2 - J_5 \delta r_2 - P_6 \delta r_2 - J_6 \delta r_2 = 0. \quad (13)$$

Работа сил P_1 , J_1 , P_2 , J_2 , P_3 , J_3 , P_4 , J_4 и пар сил инерции с моментами $m_{O_1}^{(J)}$ и $m_{O_2}^{(J)}$ равна нулю, так как возможные перемещения верхнего и нижнего правого блоков равны нулю.

Воспользовавшись формулами (3), (5) и (12), после почленного сокращения уравнения (13) на δr_2 получим:

$$-\frac{\omega_2}{2g}(P_2 + 2P_5 + 2P_6) - \frac{\omega}{g}(P_5 - P_6) + P_5 - P_6 = 0. \quad (14)$$

Уравнения (8), (11) и (14) образуют систему дифференциальных уравнений движения:

$$-\frac{\omega}{2g}(P + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 + 2P_4 + 2P_5 + 2P_6) - \frac{\omega_1}{g}(P_3 - P_4) - \frac{\omega_2}{g}(P_6 - P_5) + P_1 + P_3 + P_4 - P_2 - P_5 - P_6 = 0, \quad (8)$$

$$-\frac{\omega_1}{2g}(P_1 + 2P_3 + 2P_4) - \frac{\omega}{g}(P_3 - P_4) + P_3 - P_4 = 0, \quad (11)$$

$$-\frac{\omega_2}{2g}(P_2 + 2P_5 + 2P_6) - \frac{\omega}{g}(P_5 - P_6) + P_5 - P_6 = 0. \quad (14)$$

Исключив из этой системы уравнений ω_1 и ω_2 , определим величину искомого ускорения ω нити, переброшенной через неподвижный блок:

$$\omega = 2g \frac{BCD - 2E^2C + 2K^2B}{ABC - 4E^2C - 4K^2B}.$$

Здесь

$$A = P + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 + 2P_4 + 2P_5 + 2P_6, \quad B = P_1 + 2P_3 + 2P_4, \\ C = P_2 + 2P_5 + 2P_6, \quad D = P_1 + P_3 + P_4 - P_2 - P_5 - P_6, \quad E = P_3 - P_4, \\ K = P_5 - P_6.$$

§ 6. Уравнения Лагранжа второго рода

1°. **Обобщенные координаты.** Обобщенные силы. Рассматривается система материальных точек, подчиненная идеальным голономным связям.

Обобщенными координатами называются независимые параметры, однозначно определяющие положения точек материальной системы.

Число степеней свободы системы материальных точек, подчиненной идеальным и голономным связям, равно числу независимых обобщенных координат.

Так, кривошипно-шатунный механизм является системой с одной степенью свободы. В качестве обобщенной координаты может быть взят угол поворота кривошипа, значением которого однозначно определяются положения всех материальных точек системы.

Механизм конического дифференциала (рис. 157) является системой материальных точек с двумя степенями свободы. В качестве независимых обобщенных координат можно избрать угол поворота φ_1 ведущего колеса 1 и угол поворота φ_0 водила ABC , вращающегося вокруг вертикальной оси. Значения углов поворота φ_1 и φ_0 однозначно определяют положение ведомого колеса 3 .

Вектор-радиус r_k , дающий положение k -й материальной точки системы с s степенями свободы, является в случае нестационарных связей функцией обобщенных координат и времени:

$$r_k = r_k(q_1, q_2, \dots, q_s, t),$$

где q_1, q_2, \dots, q_s — обобщенные координаты, а $k = 1, 2, \dots, n$ (n — число материальных точек системы).

Скорость этой точки равна

$$v_k = \frac{\partial r_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial r_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial r_k}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial r_k}{\partial t}.$$

Возможное перемещение этой точки, выражаемое вариацией вектор-радиуса r_k , имеет вид

$$\delta r_k = \frac{\partial r_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial r_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial r_k}{\partial q_s} \delta q_s,$$

где $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ — обобщенные возможные перемещения, т. е. вариации обобщенных координат.

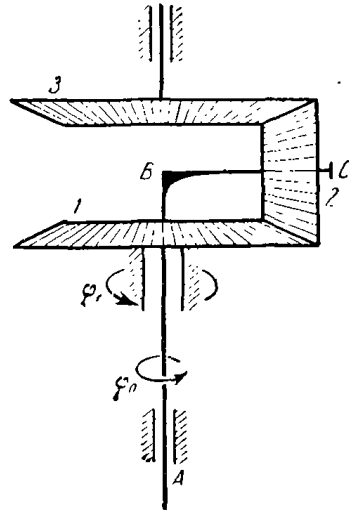


Рис. 157.

Обращаем внимание читателя на то, что в формуле, определяющей возможное перемещение δr_k , на одно слагаемое меньше по сравнению с формулой, дающей скорость точки v_k . Это получается потому, что возможное перемещение является вариацией функции, т. е. определяется при фиксированном значении аргумента t .

Обобщенными силами Q_i , где $i = 1, 2, \dots, s$, называются коэффициенты, стоящие в выражении суммы работ задаваемых сил при соответствующих обобщенных возможных перемещениях. Число обобщенных сил равно числу обобщенных координат, т. е. числу степеней свободы системы (связи, наложенные на систему, предполагаются идеальными и голономными). Размерность обобщенной силы:

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]},$$

т. е. она может быть различной в зависимости от выбора обобщенной координаты, например если обобщенная координата — объем, то обобщенная сила имеет размерность напряжения.

Обобщенная сила Q_i вычисляется по формуле

$$Q_i = \sum_{k=1}^n F_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

где n — число материальных точек, s — число степеней свободы, F_k — равнодействующая задаваемых сил, приложенных к k -й точке системы.

Выражение обобщенной силы Q_i через проекции задаваемых сил на оси декартовых координат имеет вид

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right),$$

где

$$F_k = F_{kx}i + F_{ky}j + F_{kz}k, \quad \frac{\partial r_k}{\partial q_i} = \frac{\partial x_k}{\partial q_i}i + \frac{\partial y_k}{\partial q_i}j + \frac{\partial z_k}{\partial q_i}k.$$

Если не все связи, наложенные на материальную систему, являются идеальными, например имеются негладкие опорные поверхности, то при вычислении обобщенной силы по формуле

$$Q_i = \sum_{k=1}^n F_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_i}$$

надо под F_k понимать не только задаваемые силы, но и силы трения.

Если силы, действующие на систему, имеют потенциал, то обобщенные силы равны взятым с обратным знаком частным производ-

ним от потенциальной энергии системы по соответствующим обобщенным координатам, т. е.

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i},$$

где $i = 1, 2, \dots, s$.

Вычисление обобщенных сил материальной системы является одним из существенных этапов решения задач с помощью уравнений Лагранжа второго рода.

Определение обобщенных сил можно проводить двумя способами:

а) Наиболее распространенным приемом является вычисление обобщенных сил как коэффициентов в выражении суммы элементарных работ задаваемых сил при соответствующих обобщенных возможных перемещениях. В этом случае вычисление обобщенных сил следует проводить в следующем порядке:

1) выяснить число степеней свободы рассматриваемой системы материальных точек, выбрать соответствующие обобщенные координаты;

2) изобразить все задаваемые силы системы;

3) если не все связи, наложенные на материальную систему, являются идеальными, то добавить к задаваемым силам соответствующие силы реакций связей (например, силы трения);

4) дать независимые обобщенные возможные перемещения системе в числе, равном числу обобщенных координат, т. е. числу степеней свободы материальной системы;

5) для определения обобщенной силы Q_i , соответствующей i -й обобщенной координате q_i , надо вычислить сумму работ всех задаваемых сил, включая силы реакций неидеальных связей, на обобщенном возможном перемещении δq_i . При этом все остальные обобщенные возможные перемещения $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_{i-1}, \delta q_{i+1}, \dots, \delta q_s$ надо считать равными нулю, т. е. $\delta q_i \neq 0, \delta q_1 = \delta q_2 = \dots = \delta q_{i-1} = \delta q_{i+1} = \dots = \delta q_s = 0$. Тогда обобщенная сила Q_i будет равна коэффициенту при δq_i . Аналогично определить все остальные обобщенные силы.

б) Если все силы, действующие на материальную систему, потенциальны, то после выбора обобщенных координат надо вычислить потенциальную энергию Π системы, выразив ее в зависимости от обобщенных координат. Обобщенная сила определяется как взятая с обратным знаком частная производная от потенциальной энергии по соответствующей обобщенной координате, т. е.

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i},$$

где $i = 1, 2, \dots, s$.

Этот способ определения обобщенных сил в случае систем с несколькими степенями свободы эффективнее предыдущего способа. Однако он пригоден лишь, когда все задаваемые силы потенциальны.

Принцип возможных перемещений в обобщенных координатах формулируется так: для равновесия системы материальных точек, подчиненной идеальным и стационарным связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма работ обобщенных сил на соответствующих обобщенных возможных перемещениях системы равнялась нулю:

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_i \delta q_i + \dots + Q_s \delta q_s = 0,$$

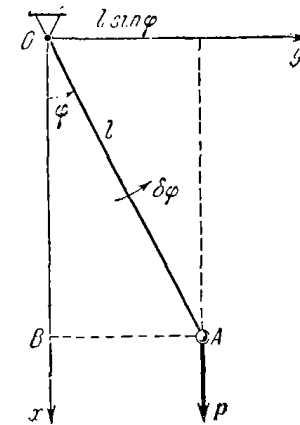
где Q_i — обобщенная сила, соответствующая i -й обобщенной координате.

Так как $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ являются независимыми обобщенными возможными перемещениями, то равенство оказывается справедливым лишь при условии

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_i = \dots = Q_s = 0.$$

Итак, в случае равновесия системы материальных точек все обобщенные силы равны нулю.

Задача 399. Определить обобщенную силу в случае движения математического маятника веса P , если длина нити равна l . За обобщенную координату взять угол отклонения φ .



К задаче 399.

Решение. Математический маятник является системой с одной степенью свободы, так как для определения положения маятника достаточно задать один параметр, например угол φ , образуемый нитью маятника с вертикалью. В соответствии с условием, в качестве обобщенной координаты выбираем угол поворота φ .

Единственной задаваемой силой является вес маятника P . Так как нить нерастяжима и при движении маятника натянута, то она является идеальной связью.

Дадим маятнику обобщенное возможное перемещение $\delta \varphi$ в сторону возрастания угла φ , т. е. против часовой стрелки.

Для определения обобщенной силы Q_φ вычисляем работу веса P маятника на обобщенном возможном перемещении $\delta \varphi$:

$$\delta A = - Pl \sin \varphi \delta \varphi. \quad (1)$$

Работа отрицательна, так как направления момента силы P относительно оси привеса z , перпендикулярной к плоскости рисунка, и возможного перемещения $\delta \varphi$ противоположны. Обобщенной силой Q_φ является коэффициент, стоящий в формуле (1) при $\delta \varphi$, т. е.

$$Q_\varphi = - Pl \sin \varphi$$

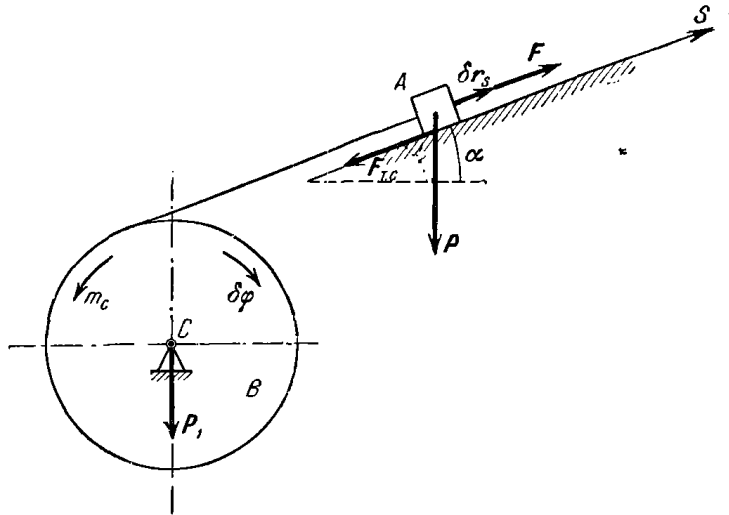
(индекс φ при обобщенной силе Q указывает, что эта сила соответствует обобщенной координате φ).

Рассмотрим теперь второй способ вычисления обобщенной силы.

Сила тяжести P потенциальна. Для вычисления потенциальной энергии маятника направим ось x по вертикали вниз, взяв начало отсчета в точке O привеса маятника. Потенциальная энергия маятника равна работе силы тяжести P при перемещении маятника из данного положения в нулевое, т. е. $\Pi = -Px$. Учитывая, что $x = l \cos \varphi$, получим: $\Pi = -Pl \cos \varphi$. Для определения обобщенной силы надо взять с обратным знаком производную от потенциальной энергии по обобщенной координате φ , т. е.

$$Q_\varphi = -\frac{d\Pi}{d\varphi} = -Pl \sin \varphi.$$

Задача 400. Груз A веса P движется под действием силы F вверх по негладкой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. К грузу A привязан конец нити, намотанной на барабан B



К задаче 400.

радиуса r . Барабан вращается вокруг неподвижной оси C , перпендикулярной к плоскости рисунка. К барабану приложена пара сил полезного сопротивления с моментом m_c , направленным в сторону, противоположную вращению барабана.

Выбрать обобщенную координату и определить соответствующую ей обобщенную силу. Нить считать нерастяжимой и массой ее пренебречь. Коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость равен f .

Решение. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы, так как положение на наклонной плоскости груза A определяет положение барабана B .

Выберем координату s груза A в качестве обобщенной координаты, направив ось s вдоль наклонной плоскости вверх.

Обозначим вес барабана P_1 .

К системе приложены задаваемые силы: P — вес груза A , P_1 — вес барабана B , F — сила, приложенная к грузу, пара сил полезного сопротивления с моментом m_c .

Негладкая наклонная плоскость не является идеальной связью. Поэтому к задаваемым силам следует добавить силу трения скольжения $F_{т.с}$ груза о наклонную плоскость, направленную в сторону, противоположную движению, т. е. вдоль наклонной плоскости вниз и равную по модулю $F_{т.с} = fN = fP \cos \alpha$.

Дадим грузу A обобщенное возможное перемещение δr_s в сторону возрастания s , т. е. параллельно наклонной плоскости вверх.

При этом барабан B получит возможное угловое перемещение $\delta \varphi$, связанное с δr_s зависимостью

$$\delta r_s = r \delta \varphi. \quad (1)$$

Вычислим сумму работ задаваемых сил и силы трения скольжения $F_{т.с}$ на возможных перемещениях точек системы, соответствующих обобщенному возможному перемещению δr_s :

$$\delta A = \delta A(P) + \delta A(F) + \delta A(F_{т.с}) + \delta A(P_1) + \delta A(m_c). \quad (2)$$

Находим:

$$\delta A(P) = -P \delta r_s \sin \alpha, \quad (3)$$

$$\delta A(F) = F \delta r_s, \quad (4)$$

$$\delta A(F_{т.с}) = -F_{т.с} \delta r_s = -fP \cos \alpha \delta r_s, \quad (5)$$

$$\delta A(P_1) = 0, \quad (6)$$

так как точка приложения силы P_1 неподвижна,

$$\delta A(m_c) = -m_c \delta \varphi. \quad (7)$$

Воспользовавшись формулами (1), (3), (4), (5), (6) и (7), представим (2) в виде

$$\delta A = \left[F - P(\sin \alpha + f \cos \alpha) - \frac{m_c}{r} \right] \delta r_s. \quad (8)$$

Обобщенной силой Q_s является коэффициент, стоящий в формуле (8) при обобщенном возможном перемещении δr_s , т. е.

$$Q_s = F - P(\sin \alpha + f \cos \alpha) - \frac{m_c}{r}.$$

Если бы в качестве обобщенной координаты мы выбрали угол поворота барабана φ , считая его положительным по часовой стрелке, то мы дали бы обобщенное возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ в том же направлении. При этом формулы (3), (4), (5), (6) и (7) приняли бы соответственно вид

$$\delta A(P) = -Pr \delta\varphi \sin \alpha, \quad \delta A(F) = Fr \delta\varphi, \quad \delta A(F_{T,c}) = -fPr \delta\varphi \cos \alpha, \\ \delta A(P_1) = 0, \quad \delta A(m_c) = -m_c \delta\varphi.$$

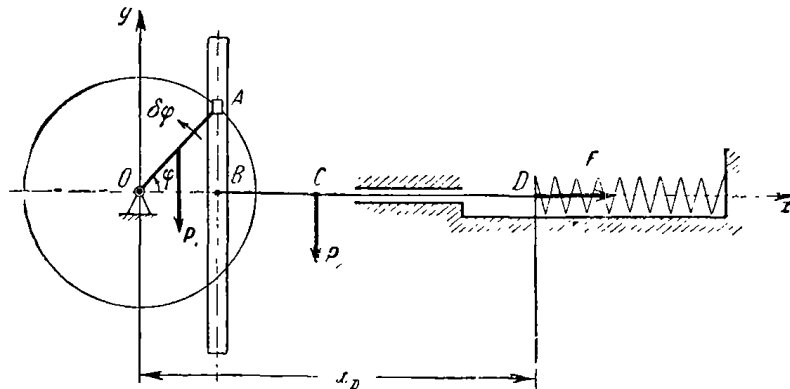
После подстановки этих значений в формулу (2) мы получили бы:

$$\delta A = [Fr - Pr(\sin \alpha + f \cos \alpha) - m_c] \delta\varphi.$$

Обобщенной силой Q_φ явился бы коэффициент, стоящий при $\delta\varphi$, т. е.

$$Q_\varphi = Fr - Pr(\sin \alpha + f \cos \alpha) - m_c.$$

Задача 401. Выбрать обобщенную координату и определить соответствующую ей обобщенную силу в случае кулисного механизма,



К задаче 401.

изображенного на рисунке. К концу D штока ED кулисы прикреплен пружина, коэффициент жесткости которой равен c . При крайнем правом положении кулисы пружина не деформирована. Вес кривошипа OA равен P_1 , r — длина кривошипа. Массами камня A кулисы и пружины пренебречь. Кривошип OA считать однородным стержнем. Механизм расположен в вертикальной плоскости. Силами сопротивления пренебречь.

Решение. Оси xu изображены на рисунке.

Кулисный механизм имеет одну степень свободы, так как положение всех его точек однозначно определяется одним параметром, например, углом поворота φ кривошипа OA , отсчитываемым от оси x против часовой стрелки. Выберем в качестве обобщенной координаты угол φ .

К механизму приложены три задаваемые силы: P_1 — вес кривошипа, P_2 — вес рамки и штока, F — упругая сила пружины.

В положении механизма, указанном на рисунке, пружина растянута. Следовательно, упругая сила F пружины направлена по горизонтали направо. Она равна по модулю произведению коэффициента жесткости c на модуль удлинения Δ пружины, т. е. $F = c|\Delta|$. Удлинение Δ пружины равно разности абсцисс точки D в ее начальном и промежуточном положениях: $\Delta_x = x_D - x_{0D}$. Так как $x_{0D} = r + BD$, а

$$x_D = OB + BD = r \cos \varphi + BD, \quad (1)$$

то

$$\Delta_x = -r(1 - \cos \varphi). \quad (2)$$

Следовательно,

$$F_x = -c\Delta_x = cr(1 - \cos \varphi). \quad (3)$$

Для вычисления обобщенной силы Q_φ дадим обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi$ в направлении возрастания угла φ , т. е. против часовой стрелки.

Найдем возможное перемещение δx_D точки D пружины, выразив его через $\delta\varphi$. Для этого вычислим вариацию абсциссы x_D , определенной формулой (1):

$$\delta x_D = -r \sin \varphi \delta\varphi. \quad (4)$$

Знак минус указывает, что направление возможного перемещения δx_D точки D при $\sin \varphi \delta\varphi > 0$ противоположно положительному направлению оси x , т. е. направлено налево.

Вычислим сумму работ задаваемых сил P_1 и P_2 и упругой силы F на возможном перемещении $\delta\varphi$:

$$\delta A = -P_1 \frac{r}{2} \cos \varphi \delta\varphi + F_x \delta x_D. \quad (5)$$

(Работа силы веса P_2 при горизонтальном перемещении ее точки приложения C равна нулю.)

Подставив в формулу (5) значение F_x из (3) и значение δx_D из (4), получим:

$$\delta A = -\frac{r}{2} [P_1 \cos \varphi + 2cr(1 - \cos \varphi) \sin \varphi] \delta\varphi. \quad (6)$$

Искомой обобщенной силой Q_φ является коэффициент, стоящий в выражении элементарной работы в формуле (6) при $\delta\varphi$, т. е.

$$Q_\varphi = -\frac{r}{2} [P_1 \cos \varphi + 2cr(1 - \cos \varphi) \sin \varphi].$$

Приведем второй вариант вычисления обобщенной силы Q_φ .

Так как все задаваемые силы, включая упругую силу F , потенциальны, то можно определить обобщенную силу по формуле

$Q_\varphi = -\frac{d\Pi}{d\varphi}$. Для этого следует вычислить потенциальную энергию рассматриваемой системы, которая складывается из потенциальных энергий сил P_1 , P_2 и F , т. е.

$$\Pi = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \Pi^{(3)}. \quad (7)$$

Потенциальная энергия $\Pi^{(1)}$ веса P_1 равна $\Pi^{(1)} = P_1 y$, где $y = \frac{r}{2} \sin \varphi$ — ордината центра тяжести кривошипа OA . Следовательно,

$$\Pi^{(1)} = P_1 \frac{r}{2} \sin \varphi. \quad (8)$$

Потенциальная энергия $\Pi^{(2)}$ силы веса P_2 равна нулю, так как ее точка приложения C перемещается по горизонтали, т. е.

$$\Pi^{(2)} = 0. \quad (9)$$

Потенциальная энергия $\Pi^{(3)}$ упругой силы F пружины будет $\Pi^{(3)} = \frac{c}{2} \Delta_x^2$. Подставив значение Δ_x из формулы (2), находим:

$$\Pi^{(3)} = \frac{c}{2} r^2 (1 - \cos \varphi)^2. \quad (10)$$

Воспользовавшись формулами (8), (9) и (10), запишем формулу (2) в виде

$$\Pi = P_1 \frac{r}{2} \sin \varphi + \frac{c}{2} r^2 (1 - \cos \varphi)^2. \quad (11)$$

Для вычисления искомой обобщенной силы остается взять с обратным знаком производную от потенциальной энергии Π , определяемой формулой (11), по обобщенной координате φ :

$$Q_\varphi = -\frac{r}{2} [P_1 \cos \varphi + 2cr (1 - \cos \varphi) \sin \varphi].$$

Объем вычислений, проведенных при подсчете обобщенной силы Q_φ в каждом из вариантов, примерно равноценен. Однако следует иметь в виду, что первым вариантом можно пользоваться независимо от характера задаваемых сил, в то время как второй вариант пригоден только в случае потенциальных задаваемых сил.

Задача 402. Кривошипно-шатунный механизм, расположенный в вертикальной плоскости, приводится в движение посредством пары сил с моментом m , приложенной к кривошипу OA веса P_1 и длины r , P_2 — вес шатуна AB , l — длина шатуна.

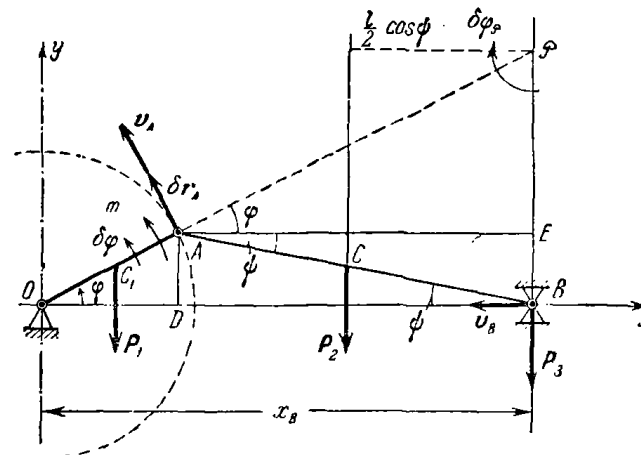
Выбрать обобщенную координату и определить соответствующую ей обобщенную силу. Кривошип и шатун считать тонкими однородными стержнями. Силами сопротивления пренебречь.

Решение. Оси декартовых координат x, y изображены на рисунке.

Кривошипно-шатунный механизм является системой с одной степенью свободы. В качестве обобщенной координаты выбираем угол поворота φ кривошипа OA , отсчитываемый от оси x против часовой стрелки. Вес ползуна B обозначим через P_3 .

Изобразим задаваемые силы системы и моменты сил: P_1 — вес кривошипа, P_2 — вес шатуна, P_3 — вес ползуна, пару сил с моментом m .

Все связи, наложенные на систему, являются идеальными. Дадим механизму обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi$ в направлении возрастания угла φ , т. е. против часовой стрелки.



К задаче 402.

Вычислим сумму работ задаваемых сил на возможных перемещениях, соответствующих обобщенному возможному перемещению $\delta\varphi$:

$$\delta A = \delta A(m) + \delta A(P_1) + \delta A(P_2) + \delta A(P_3). \quad (1)$$

Элементарная работа пары сил с вращающим моментом m равна

$$\delta A(m) = m \delta\varphi. \quad (2)$$

Элементарная работа веса P_1 кривошипа равна

$$\delta A(P_1) = -P_1 \frac{r}{2} \cos \varphi \delta\varphi. \quad (3)$$

Элементарная работа веса P_3 ползуна B равна нулю, так как ползун B получает возможное перемещение по горизонтали, а сила P_3 вертикальна:

$$\delta A(P_3) = 0. \quad (4)$$

Для вычисления элементарной работы веса P_2 шатуна AB , совершающего плоское движение, определяем положение его мгновенного

центра скоростей \mathcal{F} как точки пересечения перпендикуляров, составленных к скоростям точек A и B . Имеем:

$$\delta A(P_2) = -m \mathcal{F}(P_2) \delta \varphi \mathcal{F}. \quad (5)$$

Работа отрицательна, так как направления момента веса P_2 относительно оси \mathcal{F} и возможного перемещения $\delta \varphi \mathcal{F}$ противоположны. Находим:

$$m \mathcal{F}(P_2) = P_2 \frac{l}{2} \cos \psi, \quad (6)$$

где угол ABO обозначен ψ (см. рисунок).

Для вычисления $\delta \varphi \mathcal{F}$ воспользуемся возможным перемещением δr_A точки A , принадлежащей одновременно кривошипу OA и шатуну AB . Для точки A кривошипа имеем: $\delta r_A = r \delta \varphi$. Для точки A шатуна получаем: $\delta r_A = A \mathcal{F} \delta \varphi \mathcal{F}$. Следовательно, $r \delta \varphi = A \mathcal{F} \delta \varphi \mathcal{F}$, откуда

$$\delta \varphi \mathcal{F} = \frac{r}{A \mathcal{F}} \delta \varphi. \quad (7)$$

Воспользовавшись формулами (6) и (7), запишем (5) в виде

$$\delta A(P_2) = -P_2 \frac{l}{2} \frac{r}{A \mathcal{F}} \cos \psi d\varphi. \quad (8)$$

Проведем вспомогательную горизонталь через точку A . Из треугольника $A \mathcal{F} E$ получим: $A \mathcal{F} = \frac{AE}{\cos \varphi}$. Так как $AE = AB \cos \psi = l \cos \psi$ (из треугольника ABE), то

$$A \mathcal{F} = \frac{l \cos \psi}{\cos \varphi}. \quad (9)$$

Подставив это значение $A \mathcal{F}$ в формулу (8), имеем:

$$\delta A(P_2) = -P_2 \frac{r}{2} \cos \varphi d\varphi. \quad (10)$$

Этот результат можно было получить более коротким путем, вычисляя элементарную работу силы тяжести P_2 по формуле $\delta A(P_2) = P_2 \delta y_C$, где δy_C — вариация ординаты точки C приложения веса P_2 . Так как точка C расположена посередине шатуна AB , то $y_C = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} r \sin \varphi$. Вычислив вариацию y_C , находим:

$$\delta y_C = \frac{1}{2} r \cos \varphi \delta \varphi.$$

Следовательно, приняв во внимание, что $P_{2y} = -P_2$, получим:

$$\delta A(P_2) = P_2 \delta y_C = -P_2 \frac{r}{2} \cos \varphi \delta \varphi.$$

Подставляя выражения элементарных работ пары сил с моментом m и сил P_1, P_2, P_3 из формул (2), (3), (4) и (10) в (1), имеем:

$$\delta A = m \delta \varphi - P_1 \frac{r}{2} \cos \varphi \delta \varphi - P_2 \frac{r}{2} \cos \varphi \delta \varphi,$$

т. е.

$$\delta A = \left[m - \frac{1}{2} r (P_1 + P_2) \cos \varphi \right] \delta \varphi. \quad (11)$$

Искомой обобщенной силой Q_φ является коэффициент, стоящий в формуле (11) при обобщенном возможном перемещении $\delta \varphi$, т. е.

$$Q_\varphi = m - \frac{1}{2} r (P_1 + P_2) \cos \varphi.$$

Применение в этой задаче формулы $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ невозможно, так как не все задаваемые силы потенциальны. В этом случае можно воспользоваться указанной формулой для определения обобщенной силы, соответствующей потенциальным силам P_1, P_2 и P_3 . Вторую часть обобщенной силы, соответствующую паре сил с моментом m , пришлось бы подсчитать так, как это было сделано выше. Затем для определения искомой обобщенной силы надо было бы сложить вычисленные в отдельности выражения.

В задачах динамики курса «Теория механизмов и машин» обобщенная сила механизма носит название «приведенной силы».

Задача 403. Катушка веса P и радиуса R катится прямолинейно без скольжения по горизонтальной плоскости. На средней цилиндрической части катушки радиуса r намотана нить. Катушка приводится в движение посредством силы F , направленной вдоль нити под углом α к горизонту.

Определить обобщенную силу, приняв за обобщенную координату абсциссу центра тяжести C катушки. Коэффициент трения качения катушки о горизонтальную плоскость равен f_k .

Решение. Катушка, катящаяся без скольжения по плоскости, имеет одну степень свободы, так как положение всех точек катушки однозначно определяется положением ее центра тяжести C по отношению к неподвижной оси x , направленной вдоль горизонтальной плоскости.

Приняв x за обобщенную координату, дадим центру тяжести C катушки возможное перемещение δr_C по горизонтали направо.

К катушке приложены две задаваемые силы: P — вес катушки, F — сила, направленная вдоль нити.

Добавим к задаваемым силам силу трения $F_{тр}$, направленную по горизонтали влево. Ввиду наличия трения качения нормальная сила реакции N горизонтальной плоскости смещена на величину плеча пары трения качения, являющегося коэффициентом f_k .

Мгновенный центр скоростей \mathcal{P} расположен в точке касания катушки с горизонтальной плоскостью. Точка \mathcal{P} является мгновенным центром скоростей. Поэтому

$$\delta r_C = R \delta \varphi. \quad (1)$$

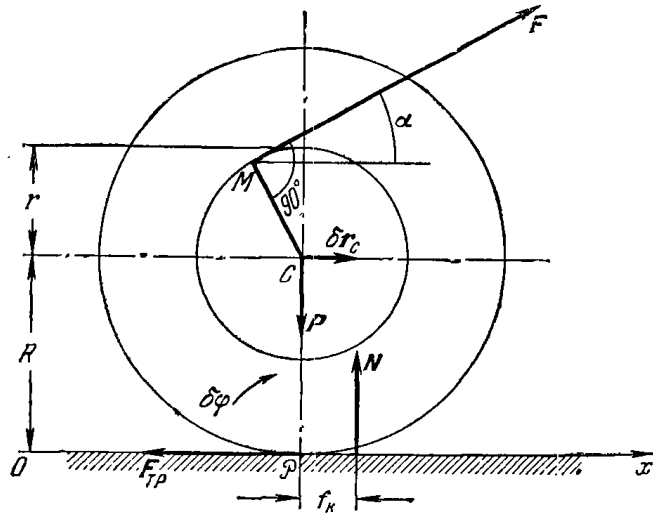
Вычислим сумму работ задаваемых сил P и F , силы трения $F_{\text{тр}}$ и пары трения качения на возможных перемещениях, соответствующих обобщенному возможному перемещению δr_C :

$$\delta A = \delta A(P) + \delta A(F_{\text{тр}}) + \delta A(m_{\text{т.к}}) + \delta A(F). \quad (2)$$

Работа силы тяжести P равна нулю, так как точка C перемещается по горизонтали, т. е.

$$\delta A(P) = 0. \quad (3)$$

Выберем теперь в качестве возможного перемещения действительное перемещение dr_C (это допустимо, так как в данной задаче



К задаче 403.

связи стационарны). Тогда работа силы трения $\delta A(F_{\text{тр}})$ будет равна нулю, ибо при действительных перемещениях скорость точки приложения силы трения $F_{\text{тр}}$ перемещается вместе с мгновенным центром \mathcal{P} , скорость в котором равна нулю, т. е. в нуль обращается мощность силы трения, а следовательно, и работа. Итак,

$$\delta A(F_{\text{тр}}) = 0. \quad (4)$$

Работа пары трения качения равна по модулю произведению момента пары трения качения ($m_{\text{т.к}} = Nf_k = Pf_k$) на возможное угловое перемещение $\delta \varphi$ катушки. Эта работа отрицательна, так как

направления момента пары трения качения и возможного углового перемещения противоположны:

$$\delta A(m_{\text{т.к}}) = -Pf_k \delta \varphi = -Pf_k \frac{\delta r_C}{R}. \quad (5)$$

Для вычисления работы силы F применим формулу

$$\delta A(F) = F \cdot \delta r_O + m_O(F) \delta \varphi,$$

где δr_O — возможное перемещение точки O плоской фигуры, принятой за полюс. Выберем за полюс центр тяжести C колеса. Тогда

$$\delta A(F) = F \cdot \delta r_C + m_C(F) \delta \varphi = F \delta r_C \cos \alpha + F |CM| \delta \varphi.$$

Так как $CM = r$, а $\delta \varphi = \frac{\delta r_C}{R}$, то

$$\delta A(F) = \frac{F(R \cos \alpha + r)}{R} \delta r_C. \quad (6)$$

Применив формулы (3), (4), (5) и (6), запишем (2) в виде

$$\delta A = \frac{F(R \cos \alpha + r) - Pf_k}{R} \delta r_C. \quad (7)$$

Обобщенной силой Q является коэффициент пропорциональности, стоящий в формуле (7) при δr_C , т. е.

$$Q = \frac{F(R \cos \alpha + r) - Pf_k}{R}.$$

Задача 404. Груз A веса P_1 движется по гладкой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. К грузу A прикреплен математический маятник веса P_2 . Длина нити маятника равна l .

Выбрать обобщенные координаты и найти им соответствующие обобщенные силы.

Решение. Рассматриваемая система имеет две степени свободы, так как для определения положения ее масс надо задать два независимых параметра. Один параметр должен определить положение груза A на наклонной плоскости, а второй дает положение математического маятника B по отношению к грузу A .

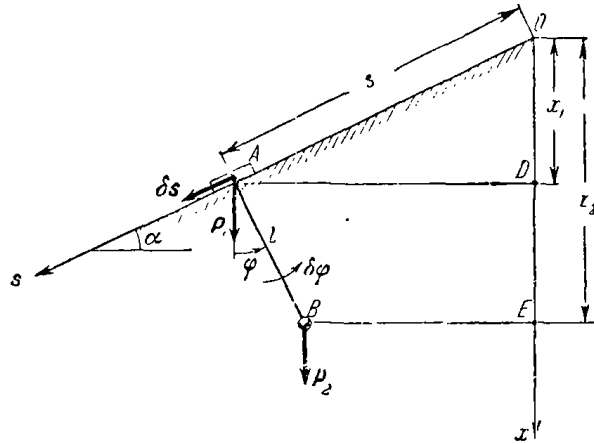
Направим ось s вдоль наклонной плоскости вниз, взяв на ней произвольно начало отсчета O . Из точки O направим по вертикали вниз ось x . Угол, образуемый нитью маятника с вертикалью, обозначим через φ , считая его положительным в сторону отклонения нити маятника от вертикали против часовой стрелки.

Выбираем для данной материальной системы две обобщенные координаты: s и φ . Соответственно этим обобщенным координатам, имеются две обобщенные силы: Q_s и Q_φ .

Изобразим задаваемые силы системы: P_1 — вес груза, P_2 — вес маятника B .

Силы реакций связей изображать не следует, так как все связи, наложенные на систему, являются идеальными (плоскость гладкая, а нерастяжимая нить при движении системы натянута).

Дадим системе два независимых обобщенных возможных перемещения: δs , направленное параллельно наклонной плоскости в сторону возрастания координаты s , т. е. вниз, и $\delta\varphi$ — в сторону возрастания угла φ , т. е. против часовой стрелки.



К задаче 404.

Учитывая независимость возможных перемещений δs и $\delta\varphi$, мы при вычислении суммы работ задаваемых сил будем давать системе возможное перемещение, соответствующее искомой обобщенной силе, а второе возможное перемещение будем при этом считать равным нулю.

Так, для определения обобщенной силы Q_s дадим системе возможное перемещение δs , а $\delta\varphi$ будем считать равным нулю:

$$\delta s \neq 0, \quad \delta\varphi = 0.$$

Это значит, что при фиксированном значении угла поворота маятника φ вся система, состоящая из груза A и маятника B , перемещается поступательно на δs .

Сумма работ задаваемых сил P_1 и P_2 на возможном перемещении δs имеет вид

$$\delta A = P_1 \delta s \cdot \sin \alpha + P_2 \delta s \cdot \sin \alpha = (P_1 + P_2) \sin \alpha \delta s. \quad (1)$$

Обобщенной силой Q_s является коэффициент пропорциональности, стоящий при δs в формуле (1), т. е.

$$Q_s = (P_1 + P_2) \sin \alpha.$$

Для определения обобщенной силы Q_φ дадим системе возможное перемещение $\delta\varphi$, а δs будем считать равным нулю: $\delta\varphi \neq 0$, $\delta s = 0$.

Это значит, что груз A находится на наклонной плоскости в покое, а нить маятника отклоняется на угол $\delta\varphi$ против часовой стрелки.

Сумма работ задаваемых сил P_1 и P_2 на возможном перемещении $\delta\varphi$ равна:

$$\delta A = m_A(P_2) \delta\varphi = -P_2 l \sin \varphi \delta\varphi. \quad (2)$$

Обобщенной силой Q_φ является коэффициент, стоящий при $\delta\varphi$ в формуле (2), т. е.

$$Q_\varphi = -P_2 l \sin \varphi.$$

Эти же обобщенные силы можно найти иначе. В обзоре теории было указано, что в системах с несколькими степенями свободы при потенциальных задаваемых силах проще определять обобщенные силы, пользуясь формулой $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$, где $i = 1, 2, \dots, s$.

В данной задаче обобщенные силы Q_φ и Q_s находим по формулам: $Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}$, $Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial s}$.

Для этого предварительно следует вычислить потенциальную энергию Π материальной системы:

$$\Pi = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)}. \quad (3)$$

Потенциальная энергия $\Pi^{(1)}$, соответствующая силе P_1 , равна работе силы P_1 при перемещении груза A из данного положения в нулевое, т. е. вверх на x_1 (см. рисунок), следовательно, $\Pi^{(1)} = -P_1 x_1$. Так как $x_1 = s \sin \alpha$, то

$$\Pi^{(1)} = -P_1 s \sin \alpha. \quad (4)$$

Аналогично получим: $\Pi^{(2)} = -P_2 x_2$. Так как $x_2 = OE = OD + DE = s \sin \alpha + l \cos \varphi$, то

$$\Pi^{(2)} = -P_2 (s \sin \alpha + l \cos \varphi). \quad (5)$$

Применив формулы (4) и (5), запишем (3) в виде

$$\Pi = -(P_1 + P_2) s \sin \alpha - P_2 l \cos \varphi.$$

Теперь легко определяем искомые обобщенные силы:

$$Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial s} [-(P_1 + P_2) s \sin \alpha - P_2 l \cos \varphi] = (P_1 + P_2) \sin \alpha,$$

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} [-(P_1 + P_2) s \sin \alpha - P_2 l \cos \varphi] = -P_2 l \sin \varphi.$$

Целесообразность применения этого способа вычисления обобщенных сил в случаях систем с несколькими степенями свободы при наличии только потенциальных задаваемых сил может быть проиллюстрирована решением следующей задачи.

Задача 405. На горизонтальный упругий вал, заделанный одним концом в стену, посажены три диска. Выбрать обобщенные координаты и определить им соответствующие обобщенные силы, если центры тяжести дисков расположены на геометрической оси вращения. Коэффициент упругости вала равен c .

Решение. Данная система имеет три степени свободы. Обозначим углы поворота дисков соответственно φ_1 , φ_2 и φ_3 .

Возьмем эти углы поворота за обобщенные координаты.

Вычислим углы закручивания вала. На левом участке вала (от стены до диска 1) его угол закручивания равен φ_1 , на следующем участке угол закручивания равен $\varphi_2 - \varphi_1$, участок между дисками 2 и 3 закручен на угол $\varphi_3 - \varphi_2$. На правом крайнем участке вала угол закручивания равен нулю.

Тогда потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} c \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} c (\varphi_3 - \varphi_2)^2.$$

Зная выражения потенциальной энергии системы, легко определим искомые обобщенные силы Q_{φ_1} , Q_{φ_2} и Q_{φ_3} :

$$Q_{\varphi_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = -c(2\varphi_1 - \varphi_2),$$

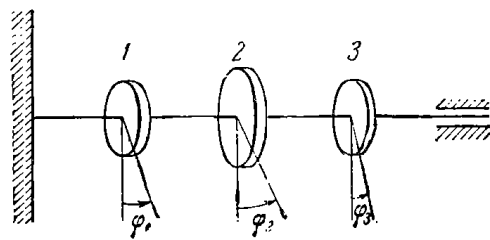
$$Q_{\varphi_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = -c(2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3),$$

$$Q_{\varphi_3} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_3} = -c(\varphi_3 - \varphi_2).$$

Задача 406. Наклонная призма A веса P_1 движется под действием горизонтальной силы F по гладкой горизонтальной плоскости. Вдоль гладкой наклонной плоскости призмы, расположенной под углом α к горизонту, скользит доска B веса P_2 . По доске B катится без скольжения цилиндр D веса P_3 . Силами трения пренебречь.

Выбрать обобщенные координаты и найти им соответствующие обобщенные силы.

Решение. Данная материальная система имеет три степени свободы, так как для определения положения всех ее материальных

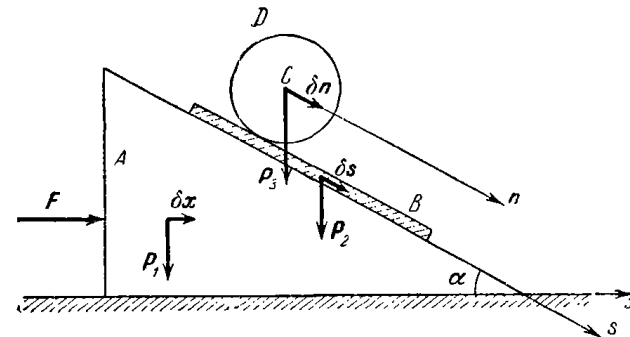


К задаче 405.

точек следует задать три независимых параметра. Эти параметры должны определить: 1) положение призмы A по отношению к горизонтальной плоскости, 2) положение доски B по отношению к призме, 3) положение цилиндра D по отношению к доске B .

Направим неподвижную ось x по горизонтальной плоскости направо, ось s , связанную с призмой A , — вдоль ее наклонной грани вниз и ось n , связанную с доской B , — параллельно доске вниз.

Выбираем обобщенные координаты в числе, равном числу степеней свободы данной системы, т. е. введем три обобщенные координаты: x , s и n . (Обобщенные координаты можно было бы избрать и другие. Так, для определения положения цилиндра D по отношению к доске B можно было выбрать угол поворота φ цилиндра.)



К задаче 406.

Соответственно трем обобщенным координатам x , s и n надо вычислить три обобщенные силы: Q_x , Q_s и Q_n .

Изображаем задаваемые силы системы: P_1 — вес призмы A , P_2 — вес доски B , P_3 — вес цилиндра D , F — силу, движущую призму A .

Дадим системе три независимых обобщенных возможных перемещения δx , δs и δn , соответствующих вариациям обобщенных координат δx , δs и δn и направленных вдоль ортов осей координат в сторону их возрастания.

Для определения обобщенной силы Q_x будем считать, что $\delta x \neq 0$, а $\delta s = \delta n = 0$.

Это значит, что цилиндр по отношению к доске и доска по отношению к призме находятся в покое. Таким образом, вся материальная система перемещается вправо на δx .

Вычислим сумму работ всех задаваемых сил на возможном перемещении δx :

$$\delta A = F \delta x. \quad (1)$$

Работа сил тяжести P_1 , P_2 и P_3 равна нулю, так как точки приложения этих сил перемещаются горизонтально. Коэффициент пропор-

циональности, стоящий в формуле (1) при δx , является обобщенной силой Q_x , т. е.

$$Q_x = F.$$

Для определения обобщенной силы Q_s будем считать, что $\delta s \neq 0$, а $\delta x = \delta n = 0$.

Это значит, что призма по отношению к горизонтальной плоскости и цилиндр по отношению к доске находятся в покое. Лишь доска, связанная с цилиндром, перемещается вдоль боковой наклонной грани призмы на δs вниз.

При этом сумма работ всех задаваемых сил на возможном перемещении δs запишется в виде

$$\delta A = (P_2 + P_3) \delta s \sin \alpha. \quad (2)$$

Работа сил F и P_1 равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны. Обобщенной силой Q_s является коэффициент, стоящий при δs в формуле (2), т. е.

$$Q_s = (P_2 + P_3) \sin \alpha.$$

Переходим к вычислению обобщенной силы Q_n . Для этого будем считать, что $\delta n \neq 0$, а $\delta x = \delta s = 0$.

Это значит, что доска по отношению к призме и призма по отношению к горизонтальной плоскости находятся в покое и лишь цилиндр совершает движение по отношению к доске, так что его центр тяжести C перемещается вдоль оси n вниз на δn .

Вычислим сумму работ задаваемых сил на возможном перемещении δn :

$$\delta A = P_3 \delta n \sin \alpha. \quad (3)$$

Работа сил F , P_1 и P_2 равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны. Обобщенной силой Q_n является коэффициент, стоящий при δn в формуле (3), т. е.

$$Q_n = P_3 \sin \alpha.$$

Итак, искомые обобщенные силы имеют значения:

$$Q_x = F, \quad Q_s = (P_2 + P_3) \sin \alpha, \quad Q_n = P_3 \sin \alpha.$$

2°. Общее уравнение динамики в обобщенных координатах. Уравнения Лагранжа второго рода. Общее уравнение динамики системы материальных точек

$$\sum_{k=1}^n (F_k - m_k \omega_k) \cdot \delta r_k = 0$$

в обобщенных координатах имеет вид

$$\delta q_1 \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} - Q_1 \right) + \delta q_2 \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} - Q_2 \right) + \dots + \delta q_s \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s \right) = 0,$$

где q_1, q_2, \dots, q_s — обобщенные координаты, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ — обобщенные скорости, $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ — обобщенные возможные перемещения системы, являющиеся вариациями соответствующих обобщенных координат, Q_1, Q_2, \dots, Q_s — обобщенные силы системы, T — кинетическая энергия системы.

Так как $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ в случае системы, подчиненной голономным связям, являются независимыми обобщенными возможными перемещениями, то общее уравнение динамики удовлетворяется лишь при условии, что коэффициенты, стоящие при возможных перемещениях, равны нулю, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2, \\ \dots &\dots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} &= Q_s. \end{aligned} \right\} \quad (1^*)$$

Уравнения (1*) называются уравнениями Лагранжа второго рода*).

При наличии голономных связей, наложенных на систему, число уравнений Лагранжа равно числу независимых обобщенных координат, т. е. числу степеней свободы. Система (1*) состоит из s обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Если задаваемые силы системы потенциальны, то уравнения Лагранжа можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, \\ \dots &\dots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial q_s}. \end{aligned} \right\} \quad (2^*)$$

* Уравнения Лагранжа первого рода в настоящей книге не рассматриваются. Поэтому ниже уравнения Лагранжа второго рода просто называются уравнениями Лагранжа.

Если ввести функцию Лагранжа L , равную разности кинетической и потенциальной энергий, т. е. $L = T - \Pi$, то уравнения (2) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= 0, \\ \dots & \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} &= 0. \end{aligned} \right\} (3^*)$$

Трудность решения задач динамики систем материальных точек с одной степенью свободы заключается, между прочим, и в удачном выборе соответствующей общей теоремы динамики. В случаях систем с несколькими степенями свободы решение задач значительно усложняется, так как при этом требуется совместное применение некоторых общих теорем и других соотношений динамики, выбор которых обычно представляет значительные трудности. В подобных случаях наиболее удобно использование уравнений Лагранжа, являющееся универсальным методом составления систем дифференциальных уравнений движения систем материальных точек.

Большое достоинство уравнений Лагранжа заключается в том, что при наличии идеальных и голономных связей в них не входят силы реакций связей. (При применении других методов решения задач приходится в ходе решения исключать силы реакций связей из системы составленных уравнений.)

Полученные выше при решении подавляющего большинства задач динамики системы уравнений могут быть непосредственно выведены с помощью уравнений Лагранжа. Если по условию задачи требуется найти силы реакций связей, то, определив с помощью уравнений Лагранжа ускорения точек системы, применяют принцип освобожденности от связей к соответствующей массе системы с последующим использованием одной из общих теорем динамики либо метода кинестатики.

Если при решении задачи динамики отсутствует ясный план применения тех или иных теорем, то следует остановиться на использовании уравнений Лагранжа.

Все сказанное выше не умаляет значения общих теорем, которыми целесообразно пользоваться при решении ряда простых задач динамики (см. ниже главу XI).

Составление уравнений Лагранжа надо проводить в следующей последовательности:

- 1) определить число степеней свободы материальной системы;
- 2) выбрать систему координат и ввести независимые обобщенные координаты в числе, равном числу степеней свободы;

3) определить обобщенные силы системы Q_1, Q_2, \dots, Q_s , соответствующие избраным обобщенным координатам. (Последовательность вычисления обобщенных сил детально разобрана в пункте 1 этого параграфа);

4) вычислить кинетическую энергию T рассматриваемой системы материальных точек;

5) найти частные производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$, т. е. $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}, \dots, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$, а затем вычислить производные от них по времени:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right), \dots, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right);$$

6) определить частные производные от кинетической энергии T по обобщенным координатам: q_1, q_2, \dots, q_s , т. е.

$$\frac{\partial T}{\partial q_1}, \frac{\partial T}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial T}{\partial q_s};$$

7) полученные в пунктах 3, 5 и 6 результаты подставить в уравнения Лагранжа.

Задача 407. Вывести дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, воспользовавшись уравнениями Лагранжа.

Решение. Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет одну степень свободы. Действительно, для определения положения всех точек достаточно задать один параметр, например его угол поворота φ . Выберем φ в качестве обобщенной координаты.

Направим ось z вдоль оси вращения твердого тела. Обозначим: I_z — момент инерции твердого тела относительно оси вращения, F_1, F_2, \dots, F_n — задаваемые силы.

Так как число уравнений Лагранжа при наличии идеальных и голономных связей равно числу степеней свободы системы, т. е. числу обобщенных координат, то в данном случае следует записать одно уравнение Лагранжа для обобщенной координаты φ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \quad (1)$$

Дадим твердому телу обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi$ и вычислим сумму работ задаваемых сил на этом возможном перемещении:

$$\delta A = \sum_{k=1}^n m_z(F_k) \delta\varphi = \left[\sum_{k=1}^n m_z(F_k) \right] \delta\varphi. \quad (2)$$

Обобщенной силой Q_φ является коэффициент, стоящий при $\delta\varphi$ в уравнении (2), т. е.

$$Q_\varphi = \sum_{k=1}^n m_z (F_k). \quad (3)$$

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, имеет вид

$$T = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2.$$

Вычислим частную производную от кинетической энергии по обобщенной скорости $\dot{\varphi}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_z \dot{\varphi},$$

а затем возьмем производную от полученного результата по времени:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_z \ddot{\varphi}. \quad (4)$$

Учитывая, что в выражение кинетической энергии T не входит обобщенная координата φ , имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \quad (5)$$

После подстановки формул (3), (4) и (5) в уравнение Лагранжа второго рода (1) находим дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_z (F_k). \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что в правой части уравнения (6) вместо суммы моментов всех задаваемых сил F_k относительно оси вращения z можно подставить сумму моментов всех внешних сил F_k^e относительно той же оси. Действительно, в число внешних сил входят, кроме задаваемых сил, только силы опорных реакций, моменты которых относительно оси вращения z равны нулю (опорные реакции приложены к оси вращения z). Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n m_z (F_k) = \sum_{k=1}^n m_z (F_k^e),$$

и уравнение (6) примет вид

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_z (F_k^e).$$

Задача 408. Вывести дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки, воспользовавшись уравнениями Лагранжа.

Решение. Свободная материальная точка имеет три степени свободы, так как ее положение в пространстве определяется тремя независимыми параметрами.

Изобразим систему неподвижных осей декартовых координат и выберем декартовы координаты x , y , z точки в качестве ее обобщенных координат.

Число уравнений Лагранжа второго рода равно числу степеней свободы материальной точки, т. е. числу ее обобщенных координат. Уравнения Лагранжа для обобщенных координат x , y , z запишутся в виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z} = Q_z.$$

Переходим к вычислению обобщенных сил Q_x , Q_y , Q_z . Дадим материальной точке независимые возможные перемещения δx , δy и δz . При определении Q_x считаем: $\delta x \neq 0$, $\delta y = \delta z = 0$. Сумма работ задаваемых сил, приложенных к материальной точке, имеет вид

$$\delta A = \sum_{k=1}^n F_{kx} \delta x = \left(\sum_{k=1}^n F_{kx} \right) \delta x. \quad (1)$$

Обобщенной силой является коэффициент, стоящий при δx в уравнении (1), т. е.

$$Q_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}. \quad (2)$$

Аналогично находим две другие обобщенные силы:

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= \sum_{k=1}^n F_{ky}, \\ Q_z &= \sum_{k=1}^n F_{kz}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Запишем выражение кинетической энергии материальной точки: $T = \frac{1}{2} m v^2$, где m — масса материальной точки, а v — ее скорость. Учитывая, что $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, получим:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Взяв частные производные от кинетической энергии по \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , находим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Вычислим производные от полученных результатов по времени:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z}. \quad (4)$$

Заметив, что кинетическая энергия T материальной точки не зависит от обобщенных координат x , y , z , имеем

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

После подстановки формул (2), (3), (4) и (5) в систему уравнений Лагранжа получим искомые дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^n F_{kz}.$$

Задача 409. Доказать изохронность колебаний циклоидального маятника.

Решение. Циклоидальным называется маятник, который может быть схематизирован в виде материальной точки, движущейся по дуге циклоиды.

В решении задачи 284 был рассмотрен математический маятник, у которого траекторией была дуга окружности. Дифференциальное уравнение колебаний математического маятника, записанное формулой (4) задачи 284, имело вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0,$$

где φ — угол отклонения нити маятника от вертикали, а l — длина нити.

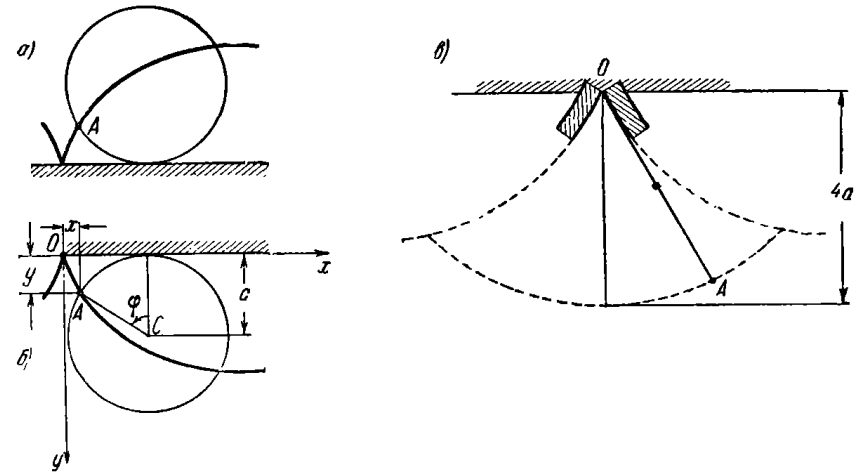
В формуле (11) той же задачи было показано, что период колебаний математического маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right),$$

где α — угловая амплитуда колебаний. Таким образом, колебания математического маятника свойством изохронности не обладают, так как его период колебаний зависит от начальных условий движения — от угловой амплитуды α . Лишь в случае малых колебаний маятника при замене в его дифференциальном уравнении движения $\sin \varphi$ на φ мы получали свойство изохронности колебаний маятника. При этом период колебаний математического маятника был приближенно равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Покажем, что колебания циклоидального маятника в отличие от колебаний математического обладают свойством изохронности, т. е. его период колебаний не зависит от начальных условий движения.



К задаче 409.

Обычное представление о циклоиде связано с траекторией точки A , лежащей на ободе колеса, которое катится без скольжения по прямолинейному рельсу (см. рис. *a*).

На рис. *b* изображено это колесо, катящееся без скольжения снизу по рельсу, расположенному над колесом. Покажем, что движение точки A является колебательным движением, период колебаний которого не зависит от начальных условий движения (конструкция циклоидального маятника будет описана ниже).

Выберем в качестве обобщенной координаты угол φ , образуемый радиусом AC точки A с вертикалью.

Как известно, уравнения циклоиды в параметрической форме имеют вид

$$x = a\varphi - a \sin \varphi, \quad y = a(1 - \cos \varphi), \quad (1)$$

где a — радиус колеса.

Запишем соответствующее уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}. \quad (2)$$

Единственной задаваемой силой является вес материальной точки, который мы обозначим P .

Потенциальная энергия Π материальной точки выражается формулой

$$\Pi = -Py = -Pa(1 - \cos \varphi). \quad (3)$$

Обобщенная сила Q_{φ} имеет вид $Q_{\varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}$. Внося в эту формулу выражение Π из (3), имеем:

$$Q_{\varphi} = Pa \sin \varphi. \quad (4)$$

Вычислим кинетическую энергию T материальной точки:

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (5)$$

Используя формулу (1), находим:

$$\dot{x} = a\dot{\varphi} - a\dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y} = a\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Теперь формула (5) принимает вид

$$T = ma^2(1 - \cos \varphi) \dot{\varphi}^2. \quad (6)$$

Вычислим частную производную от кинетической энергии T по обобщенной скорости $\dot{\varphi}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 2ma^2(1 - \cos \varphi) \dot{\varphi}.$$

Возьмем производную от полученного результата по времени:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 2ma^2(1 - \cos \varphi) \ddot{\varphi} + 2ma^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi. \quad (7)$$

Найдем теперь частную производную от выражения (6) кинетической энергии T по обобщенной координате φ :

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = ma^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi. \quad (8)$$

Подставив формулы (4), (7) и (8) в уравнение Лагранжа (2), получим:

$$\ddot{\varphi}(1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = \frac{g}{2a} \sin \varphi. \quad (9)$$

Вводя тригонометрические функции половинных углов и сокращая на $\sin \frac{\varphi}{2}$, имеем:

$$\ddot{\varphi} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{g}{2a} \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right) = -\frac{1}{2} \left(\ddot{\varphi} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \cos \frac{\varphi}{2} \right).$$

Следовательно, дифференциальное уравнение (9) можно записать так:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{g}{4a} \cos \frac{\varphi}{2} = 0.$$

Обозначив $\cos \frac{\varphi}{2} = z$, находим:

$$\ddot{z} + k^2 z = 0, \quad (11)$$

где

$$\frac{g}{4a} = k^2. \quad (12)$$

Таким образом, точное дифференциальное уравнение (11) колебаний циклоидального маятника тождественно приближенному дифференциальному уравнению колебаний математического маятника:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0.$$

Это значит, что колебания циклоидального маятника обладают свойством полной изохронности, т. е. период его колебаний не зависит от начальных условий движения.

Воспользовавшись формулой (12), можно записать период колебаний в виде

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

где $l = 4a$.

Эволюта циклоиды также является циклоидой, тождественной с исходной. Поэтому для осуществления рассматриваемого маятника следует вырезать шаблон, изображающий два участка дуг циклоиды, примыкающие к ее точке возврата O (рис. в). Нить длины $l = 4a$ при колебаниях частично накладывается то на левую, то на правую части шаблона, а материальная точка, находящаяся на конце нити, при этом движется по циклоиде.

Дифференциальное уравнение (9) можно также получить, воспользовавшись уравнением Лагранжа в форме (3*), т. е.

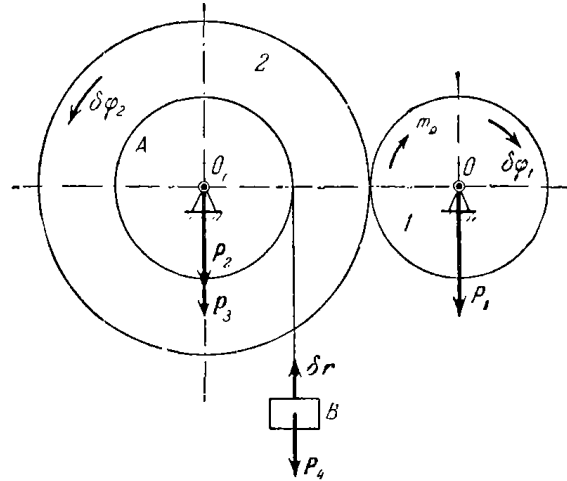
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \quad (13)$$

В данном случае функция Лагранжа L в соответствии с формулами (6) и (3) имеет вид

$$L = T - \Pi = ma^2(1 - \cos \varphi) \dot{\varphi}^2 + mga(1 - \cos \varphi).$$

Предоставляем читателю подставить функцию Лагранжа L в уравнение (13) и получить дифференциальное уравнение (9).

Задача 410. Зубчатое колесо I веса P_1 и радиуса r_1 электрической лебедки приводится в движение парой сил, момент которых равен m_0 . Колесо 2 веса P_2 и радиуса r_2 , находящееся во внешнем зацеплении с колесом I , связано с барабаном A веса P_3 и радиуса r_3 , на который намотана нить. К концу нити привязан груз B веса P_4 , который при включении мотора поднимается вверх. Определить ускорение груза B , считая зубчатые колеса I и 2 и барабан A сплошными круглыми цилиндрами. Массой нити пренебречь.



К задаче 410.

Решение. Электрическая лебедка является системой с одной степенью свободы, так как положение зубчатого колеса I определяет положение всех материальных точек рассматриваемой системы.

Выберем в качестве обобщенной координаты угол поворота φ_1 зубчатого колеса I , считая φ_1 положительным в направлении по часовой стрелке.

Уравнение Лагранжа для обобщенной координаты φ_1 имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1}. \quad (1)$$

К лебедке приложены задаваемые силы и моменты: P_1 — вес колеса I , P_2 — вес колеса 2 , P_3 — вес барабана A , P_4 — вес груза B , пара сил с моментом m_0 .

Все связи, наложенные на систему, являются идеальными (нить считается нерастяжимой и натянутой).

Для зубчатого колеса I возможное перемещение $\delta\varphi_1$ в направлении возрастания угла φ_1 , т. е. по часовой стрелке. При этом зубчатое колесо 2 с барабаном A повернется против часовой стрелки на

угол $\delta\varphi_2$, а груз B поднимется вверх на δr . Нетрудно видеть, что $\delta\varphi_2 = -\frac{r_1}{r_2} \delta\varphi_1$, а

$$\delta r = -r_3 \delta\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2} r_3 \delta\varphi_1. \quad (2)$$

Для определения обобщенной силы Q_{φ_1} вычислим сумму работ всех задаваемых сил на возможных перемещениях точек системы, соответствующих обобщенному возможному перемещению $\delta\varphi_1$:

$$\delta A = m_0 \delta\varphi_1 - P_4 \delta r.$$

Работа сил P_1 , P_2 и P_3 равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны. Используя формулу (2), имеем:

$$\delta A = \left(m_0 - \frac{r_1}{r_2} r_3 P_4 \right) \delta\varphi_1.$$

Следовательно, обобщенная сила Q_{φ_1} , являющаяся коэффициентом в выражении суммы элементарных работ задаваемых сил при обобщенном возможном перемещении $\delta\varphi_1$, имеет вид

$$Q_{\varphi_1} = m_0 - \frac{r_1}{r_2} r_3 P_4. \quad (3)$$

Переходим к вычислению кинетической энергии материальной системы, состоящей из двух зубчатых колес, барабана A и груза B :

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)} + T^{(4)}. \quad (4)$$

Кинетическая энергия зубчатого колеса I

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{P_1 r_1^2}{4g} \dot{\varphi}_1^2. \quad (5)$$

Кинетические энергии зубчатого колеса 2 и барабана A , учитывая, что $\dot{\varphi}_2 = -\frac{r_1}{r_2} \dot{\varphi}_1$, соответственно можно представить в виде

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2 = \frac{P_2 r_2^2}{4g} \dot{\varphi}_1^2 \quad \text{и} \quad T^{(3)} = \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_2^2 = \frac{P_3 r_3^2}{4g} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \dot{\varphi}_1^2. \quad (6)$$

Кинетическая энергия груза B , движущегося поступательно,

$$T^{(4)} = \frac{1}{2} \frac{P_4}{g} v_4^2.$$

Так как $v_4 = r_3 \dot{\varphi}_2 = -r_3 \frac{r_1}{r_2} \dot{\varphi}_1$, то

$$T^{(4)} = \frac{1}{2} \frac{P_4 r_3^2}{g} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \dot{\varphi}_1^2. \quad (7)$$

После подстановки в формулу (4) значений $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$ и $T^{(4)}$ из формул (5), (6) и (7) получим выражение кинетической энергии электрической лебедки:

$$T = \frac{1}{4g} \left[(P_1 + P_2) r_1^2 + (P_3 + 2P_4) r_3^2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] \dot{\varphi}_1^2. \quad (8)$$

Частная производная от кинетической энергии T по обобщенной скорости $\dot{\varphi}_1$ запишется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{1}{2g} \left[(P_1 + P_2) r_1^2 + (P_3 + 2P_4) r_3^2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] \dot{\varphi}_1.$$

Находим производную от полученного результата по времени:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{1}{2g} \left[(P_1 + P_2) r_1^2 + (P_3 + 2P_4) r_3^2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] \ddot{\varphi}_1. \quad (9)$$

Частная производная по φ_1 от кинетической энергии T системы, в выражение которой не входит обобщенная координата φ_1 , равна нулю:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0. \quad (10)$$

В результате подстановки формул (3), (9) и (10) в уравнение Лагранжа (1) получим дифференциальное уравнение движения лебедки для обобщенной координаты φ_1 :

$$\frac{1}{2g} \left[(P_1 + P_2) r_1^2 + (P_3 + 2P_4) r_3^2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] \ddot{\varphi}_1 = m_0 - \frac{r_1}{r_2} r_3 P_4,$$

откуда определим искомое угловое ускорение зубчатого колеса I :

$$\ddot{\varphi}_1 = 2g \frac{m_0 - P_4 \frac{r_1}{r_2} r_3}{(P_1 + P_2) r_1^2 + (P_3 + 2P_4) r_3^2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2}. \quad (11)$$

Если $m_0 > P_4 \frac{r_1}{r_2} r_3$, то ускорение груза B направлено вверх. Если $m_0 < P_4 \frac{r_1}{r_2} r_3$, то ускорение груза B направлено вниз. Если $m_0 = P_4 \frac{r_1}{r_2} r_3$, то лебедка находится в покое, либо все ее массы движутся равномерно. При этом направление движения зависит от начальных условий движения.

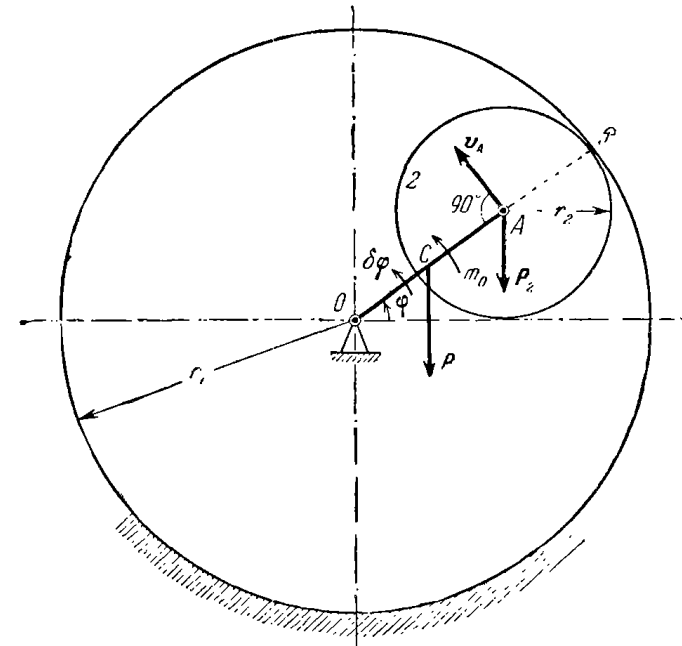
Эту задачу можно было решить также с помощью дифференциального уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_k (F_k^z),$$

которое следовало составить дважды: один раз для зубчатого колеса I и второй раз — для остальной части электрической лебедки. Для

этого нужно было мысленно разорвать данную систему на две части в точке сцепления зубчатых колес I и 2 , заменив действие отброшенной части конструкции соответствующей силой реакции связи. В составленную систему дифференциальных уравнений движения войдет сила реакции связи. Лишь после исключения этой силы реакции из полученной системы уравнений можно прийти к формуле (11). Преимущество уравнений Лагранжа, не содержащих сил реакций связей, совершенно очевидно.

Задача 411. Определить угловое ускорение кривошипа OA планетарной передачи, расположенной в вертикальной плоскости.



К задаче 411.

Зубчатое колесо 2 находится во внутреннем зацеплении с неподвижным зубчатым колесом 1 . Колесо 2 приводится в движение посредством кривошипа OA , к которому приложена пара сил с вращающим моментом m_0 . Вес кривошипа OA равен P , P_2 — вес колеса 2 , r_2 — радиус колеса 2 , r_1 — радиус неподвижного колеса 1 .

Колесо 2 считать однородным круглым диском, а кривошип OA — тонким однородным стержнем. Силами сопротивления движению пренебречь.

Решение. Планетарная передача имеет одну степень свободы, так как угол поворота φ кривошипа OA определяет положение всех

точек механизма. В качестве обобщенной координаты выбираем угол φ , отсчитываемый от горизонтальной оси против часовой стрелки.

Уравнение Лагранжа для обобщенной координаты φ имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}. \quad (1)$$

Задаваемыми силами являются: P — вес кривошипа, P_2 — вес колеса 2 и пара сил, приложенная к кривошипу OA , с вращающим моментом m_0 . Все связи, наложенные на систему, идеальны.

Дадим кривошипу OA возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ в направлении возрастания угла φ , т. е. против часовой стрелки.

Для определения обобщенной силы Q_{φ} вычислим сумму работ задаваемых сил на возможном перемещении $\delta\varphi$:

$$\delta A = m_0 \delta\varphi - P |OC| \cos \varphi \delta\varphi - P_2 |OA| \cos \varphi \delta\varphi.$$

Так как $OA = O\mathcal{P} - A\mathcal{P} = r_1 - r_2$, а $OC = \frac{OA}{2} = \frac{r_1 - r_2}{2}$, то

$$\delta A = \frac{1}{2} [2m_0 - (P + 2P_2)(r_1 - r_2) \cos \varphi] \delta\varphi.$$

Учитывая, что $\delta A = Q_{\varphi} \delta\varphi$, находим обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате φ :

$$Q_{\varphi} = \frac{1}{2} [2m_0 - (P + 2P_2)(r_1 - r_2) \cos \varphi]. \quad (2)$$

Переходим к вычислению кинетической энергии T механизма, в состав которого входят массы кривошипа OA и зубчатого колеса 2 (зубчатое колесо 1 неподвижно), т. е.

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}. \quad (3)$$

Кинетическая энергия кривошипа OA , вращающегося вокруг неподвижной оси O , перпендикулярной к плоскости рисунка, определяется формулой $T^{(1)} = \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2$, где

$$I_0 = \frac{1}{3} \frac{P}{g} OA^2 = \frac{1}{3} \frac{P}{g} (r_1 - r_2)^2$$

— момент инерции кривошипа. Следовательно,

$$T^{(1)} = \frac{1}{6} \frac{P}{g} (r_1 - r_2)^2 \dot{\varphi}^2. \quad (4)$$

Кинетическая энергия зубчатого колеса 2, совершающего плоское движение, равна

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v_A^2 + \frac{1}{2} I_A \omega_2^2. \quad (5)$$

Найдем скорость точки A , являющейся концом кривошипа OA :

$$v_A = |OA| \dot{\varphi} = (r_1 - r_2) \dot{\varphi}. \quad (6)$$

Рассмотрим скорость той же точки A , принадлежащей зубчатому колесу 2, по отношению к мгновенному центру скоростей \mathcal{P} колеса:

$$v_A = A\mathcal{P} \cdot \omega_2 = r_2 \omega_2. \quad (7)$$

Сопоставляя формулы (6) и (7), находим:

$$\omega_2 = \frac{r_1 - r_2}{r_2} \dot{\varphi}. \quad (8)$$

Момент инерции зубчатого колеса 2 вычисляется по формуле

$$I_A = \frac{P_2 r_2^2}{2g}. \quad (9)$$

После подстановки значений v_A , ω_2 и I_A соответственно из формул (6), (8) и (9) выражение (5) принимает вид

$$T^{(2)} = \frac{3}{4} \frac{P_2}{g} (r_1 - r_2)^2 \dot{\varphi}^2. \quad (10)$$

Воспользовавшись формулами (3), (4) и (10), запишем выражение кинетической энергии планетарного механизма:

$$T = \frac{2P + 9P_2}{12g} (r_1 - r_2)^2 \dot{\varphi}^2. \quad (11)$$

Вычислим частную производную от кинетической энергии T по обобщенной скорости $\dot{\varphi}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2P + 9P_2}{6g} (r_1 - r_2)^2 \dot{\varphi}$$

и возьмем производную от полученного результата по времени:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2P + 9P_2}{6g} (r_1 - r_2)^2 \ddot{\varphi}. \quad (12)$$

Заметив, что кинетическая энергия T системы, определенная формулой (11), не зависит от обобщенной координаты φ , находим:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \quad (13)$$

После подстановки выражений (2), (12), (13) в уравнение Лагранжа (1) получим дифференциальное уравнение движения механизма для обобщенной координаты φ :

$$\frac{2P + 9P_2}{6g} (r_1 - r_2)^2 \ddot{\varphi} = \frac{1}{2} [2m_0 - (P + 2P_2)(r_1 - r_2) \cos \varphi],$$

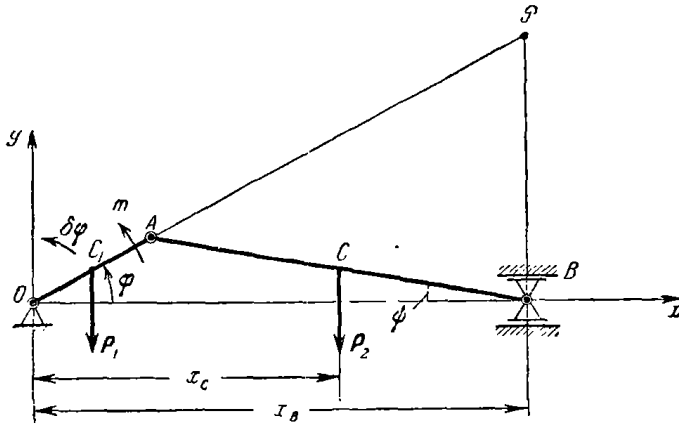
откуда определяем искомое угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ кривошипа OA :

$$\ddot{\varphi} = 3g \frac{2m_0 - (P + 2P_2)(r_1 - r_2) \cos \varphi}{2P + 9P_2}.$$

Равномерное вращение кривошипа осуществляется при выполнении условия

$$m_0 = \frac{1}{2} (P + 2P_2)(r_1 - r_2) \cos \varphi.$$

Задача 412. Кривошипно-шатунный механизм OAB , расположенный в вертикальной плоскости, приводится в движение посредством кривошипа OA , к которому приложена пара сил с моментом m . Найти закон изменения момента m , при котором осуществляется равномерное вращение кривошипа; P_1 — вес кривошипа OA , r — длина



К задаче 412.

кривошипа, P_2 — вес шатуна AB , l — длина шатуна, P_3 — вес ползуна. Кривошип OA и шатун AB считать тонкими однородными стержнями, а ползун — точечной массой. Силами сопротивления движению пренебречь.

Решение. В решении задачи 402 в качестве обобщенной координаты был введен угол поворота φ кривошипа и была определена обобщенная сила Q_φ :

$$Q_\varphi = m - \frac{1}{2} r (P_1 + P_2) \cos \varphi. \quad (1)$$

Уравнение Лагранжа для обобщенной координаты φ имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \quad (2)$$

Вычислим кинетическую энергию T механизма, в состав которого входят массы кривошипа, шатуна и ползуна, по формуле

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}. \quad (3)$$

Кинетическая энергия $T^{(1)}$ кривошипа OA , вращающегося вокруг неподвижной оси O , перпендикулярной к плоскости рисунка, равна $T^{(1)} = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2$. Так как кривошип считается однородным тонким стержнем, то $I_O = \frac{1}{3} \frac{P_1 r^2}{g}$, и, следовательно,

$$T^{(1)} = \frac{1}{6} \frac{P_1 r^2}{g} \dot{\varphi}^2. \quad (4)$$

Кинетическая энергия $T^{(2)}$ шатуна AB , совершающего плоское движение, имеет вид

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_2^2. \quad (5)$$

Выразим теперь v_C и ω_2 через обобщенную координату φ и обобщенную скорость $\dot{\varphi}$.

В решении задачи 402 было определено положение мгновенного центра скоростей \mathcal{P} шатуна AB и был вычислен мгновенный радиус точки A , равный $A\mathcal{P} = \frac{l \cos \psi}{\cos \varphi}$.

Учитывая, что точка A одновременно принадлежит кривошипу OA и шатуну AB , получим: $v_A = r \dot{\varphi} = |A\mathcal{P}| \omega_2$, откуда

$$\omega_2 = \frac{r}{A\mathcal{P}} \dot{\varphi} = \lambda \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \dot{\varphi}, \quad (6)$$

где $\lambda = \frac{r}{l}$.

Установим связь между $\cos \psi$ и углом φ . Из треугольника OAB находим, что $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{l}{r}$, откуда

$$\sin \psi = \lambda \sin \varphi, \quad (7)$$

где $\lambda = \frac{r}{l}$, следовательно,

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} = (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi \approx \\ &\approx 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) \approx 1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Итак,

$$\cos \psi \approx 1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\varphi. \quad (8)$$

Подставив значение $\cos \psi$ из формулы (8) в (6), получаем:

$$\omega_2 = \frac{\lambda \cos \varphi}{1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\varphi} \dot{\varphi}. \quad (9)$$

В первое слагаемое формулы (5) входит квадрат скорости центра тяжести C шатуна, который можно вычислить по формуле

$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что $x_C = |OA| \cos \varphi + |AC| \cos \psi = r \cos \varphi + \frac{l}{2} \cos \psi$. Подставляя значение $\cos \psi$ из формулы (9), имеем:

$$x_C = r \cos \varphi + \frac{l}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\varphi \right),$$

т. е.

$$x_C = \frac{l}{2} - \frac{1}{8} \lambda^2 l + r \cos \varphi + \frac{1}{8} \lambda^2 l \cos 2\varphi,$$

откуда

$$\dot{x}_C = -r \left(\sin \varphi + \frac{1}{4} \lambda \sin 2\varphi \right) \dot{\varphi}. \quad (11)$$

Центры тяжести кривошипа OA и шатуна AB расположены в их серединах и по конструкции имеют равные ординаты

$$y_C = y_{C_1} = \frac{r}{2} \sin \varphi,$$

откуда

$$\dot{y}_C = \frac{r}{2} \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}. \quad (12)$$

Внося в формулу (10) значения \dot{x}_C и \dot{y}_C соответственно из формул (11) и (12), находим:

$$v_C^2 = r^2 \left[\left(\sin \varphi + \frac{1}{4} \lambda \sin 2\varphi \right)^2 + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi \right] \dot{\varphi}^2. \quad (13)$$

Подставляем в формулу (6) выражения ω_2 и v_C^2 из формул (9) и (13) и, принимая во внимание, что $I_C = \frac{P_3 l^2}{12g}$, получаем:

$$T^{(2)} = \frac{P_2 r^2}{24g} \left\{ 3 \left[4 \left(\sin \varphi + \frac{1}{4} \lambda \sin 2\varphi \right)^2 + \cos^2 \varphi \right] + \frac{\cos^2 \varphi}{\left(1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\varphi \right)^2} \right\} \dot{\varphi}^2. \quad (14)$$

Кинетическая энергия $T^{(3)}$ ползуна B , движущегося поступательно, находится по формуле

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_3}{g} v_B^2. \quad (15)$$

Для определения v_B вычислим абсциссу x_B ползуна:

$$x_B = r \cos \varphi + l \cos \psi.$$

Используя формулу (8), запишем:

$$x_B = r \cos \varphi + l \left(1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\varphi \right),$$

откуда

$$v_{B_x} = \dot{x}_B = -r \left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right) \dot{\varphi}.$$

Теперь формула (15) принимает вид

$$T^{(3)} = \frac{P_3 r^2}{2g} \left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right)^2 \dot{\varphi}^2. \quad (16)$$

Кинетическая энергия кривошипно-шатунного механизма вычисляется по формуле (3) после подстановки в нее значений $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ и $T^{(3)}$ соответственно из (4), (14) и (16):

$$T = \frac{r^2}{24g} \left\{ 4P_1 + P_2 \left[12 \left(\sin \varphi + \frac{1}{4} \lambda \sin 2\varphi \right)^2 + 3 \cos^2 \varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{\left(1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\varphi \right)^2} \right] + 12P_3 \left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right)^2 \right\} \dot{\varphi}^2. \quad (17)$$

Если ввести обозначение

$$I_{пр} = \frac{r^2}{12g} \left\{ 4P_1 + P_2 \left[12 \left(\sin \varphi + \frac{1}{4} \lambda \sin 2\varphi \right)^2 + 3 \cos^2 \varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{\left(1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\varphi \right)^2} \right] + 12P_3 \left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right)^2 \right\}, \quad (18)$$

то кинетическая энергия кривошипно-шатунного механизма записывается в форме

$$T = \frac{1}{2} I_{пр} \dot{\varphi}^2, \quad (19)$$

т. е. получает вид кинетической энергии твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью, равной обобщенной скорости $\dot{\varphi}$ системы. Таким образом, все массы системы оказываются приведенными к обобщенной координате φ . Коэффициент $I_{пр}$ носит в курсе теории механизмов и машин название *приведенного момента инерции системы* (если бы в качестве обобщенной координаты была избрана какая-либо линейная координата s , то кинетическая энергия системы получила бы вид $T = \frac{1}{2} M_{пр} \dot{s}^2$, где $M_{пр}$ — приведенная масса системы).

Громоздкость выражения приведенного момента инерции I_{np} , определенной формулой (18), наглядно иллюстрирует вычислительные трудности, с которыми приходится сталкиваться при определении выражения кинетической энергии механизма аналитическим путем (не менее громоздким, как показывает решение задачи 402, получается и выражение обобщенной силы Q_φ , именуемое в курсе теории механизмов и машин приведенной силой). При этом следует иметь в виду, что в этой задаче рассматривается сравнительно несложный механизм. Поэтому в задачах динамики курса теории механизмов и машин при определении приведенных инерционных коэффициентов (т. е. приведенных моментов инерции и приведенных масс), а также приведенных сил широко применяются графоаналитические методы.

Возвращаясь к составлению уравнения Лагранжа для рассматриваемого кривошипно-шатунного механизма, вычислим частную производную от кинетической энергии T , определенной формулой (17), по обобщенной скорости $\dot{\varphi}$, т. е. $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$. Взяв затем производную от полученного результата по времени, т. е. $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$, и вычислив частную производную $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$ от кинетической энергии T по обобщенной координате φ , находим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = & \frac{r^2}{12g} \left\{ 4P_1 + P_2 \left[12 \left(\sin \varphi + \frac{1}{4} \lambda \sin 2\varphi \right)^2 + 3 \cos^2 \varphi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\cos^2 \varphi}{\left(1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\varphi \right)^2} \right] + 12P_3 \left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right)^2 \right\} \dot{\varphi} + \\ & + \frac{r^2}{24g} \left\{ P_2 \left[24 \left(\sin \varphi + \frac{1}{4} \lambda \sin 2\varphi \right) \left(\cos \varphi + \frac{1}{2} \lambda \cos 2\varphi \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin 2\varphi \frac{3 \left(1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\varphi \right)^2 - 1 - \frac{3}{4} \lambda^2 - \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\varphi}{\left(1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\varphi \right)^3} \right] + \right. \\ & \left. + 24P_3 \left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right) \left(\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi \right) \right\} \dot{\varphi}^2. \quad (20) \end{aligned}$$

После подстановки значений Q_φ , $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$ и $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$ соответственно из формул (1), (20) и (21) в уравнение Лагранжа (2) получим:

$$I_{np} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{dI_{np}}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 = m - \frac{1}{2} r (P_1 + P_2) \cos \varphi, \quad (21)$$

где I_{np} определено формулой (18). Уравнение (21) является дифференциальным уравнением движения кривошипно-шатунного механизма.

В случае решения обратной задачи, т. е. при определении движения по заданным силам ввиду сложности решения дифференциального уравнения (21), часто применяется численное интегрирование.

По условию задачи требуется определить закон изменения вращающего момента m , обеспечивающий равномерное вращение кривошипа, т. е. постоянство $\dot{\varphi}$. При этом $\ddot{\varphi} = 0$ и решение уравнения (21) относительно m приводит к результату:

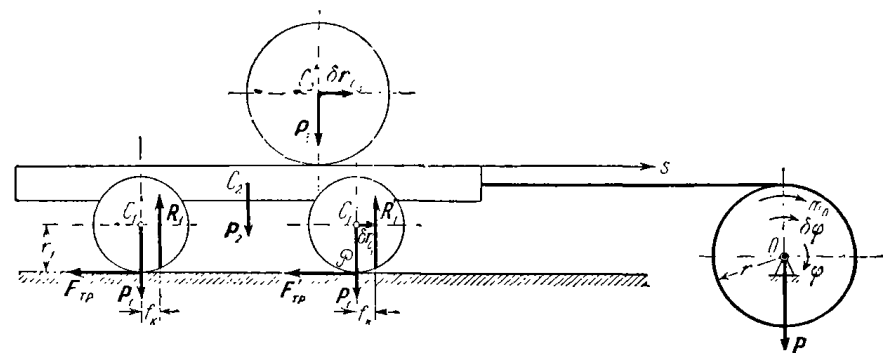
$$m = \frac{1}{2} \left[\frac{dI_{np}}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 + r (P_1 + P_2) \cos \varphi \right],$$

где

$$\begin{aligned} \frac{dI_{np}}{d\varphi} = & \frac{r^2}{12g} \left\{ P_2 \left[24 \left(\sin \varphi + \frac{1}{4} \lambda \sin 2\varphi \right) \left(\cos \varphi + \frac{1}{2} \lambda \cos 2\varphi \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin 2\varphi \frac{3 \left(1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\varphi \right)^2 + 1 - \frac{3}{4} \lambda^2 - \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\varphi}{\left(1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\varphi \right)^3} \right] + \right. \\ & \left. + 24P_3 \left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right) \left(\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi \right) \right\}; \end{aligned}$$

здесь $\lambda = \frac{r}{l}$.

Задача 413. Тележка приводится в движение посредством каната, намотанного на барабан веса P и радиуса r . На платформе тележки лежит бревно веса P_3 , которое при движении тележки катится без скольжения по платформе. Вес каждого из четырех колес тележки равен P_1 , r_1 — радиус колеса, P_2 — вес платформы.



К задаче 413.

Определить ускорение центра тяжести C_3 бревна и угловое ускорение барабана, к которому приложена пара сил с вращающим моментом m_0 . Коэффициент трения качения колес тележки о землю равен f_k . Барабан, колеса и бревно считать однородными круглыми пи-

лидрами. Массой каната и сопротивлением движению бревна по платформе пренебречь. Колеса тележки катятся без скольжения по земле.

Решение. Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Действительно, один параметр нужно задать для определения положения барабана и тележки, а второй — для определения положения бревна по отношению к тележке.

Выберем в качестве обобщенных координат угол поворота φ барабана и линейную координату s , полагая, что ось s связана с тележкой.

Соответственно двум принятым обобщенным координатам запишем два уравнения Лагранжа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_{\varphi}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} &= Q_s. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

К системе приложены задаваемые силы: P — вес барабана, четыре силы P_1 — веса каждого из четырех колес тележки, P_2 — вес платформы, P_3 — вес бревна, пара сил с вращающим моментом m_0 (см. рисунок).

Добавляем к задаваемым силам четыре силы трения $F_{\text{тр}}$ колес о землю (по числу колес тележки). В связи с наличием трения качения две нормальные реакции R_1 и две R'_1 смещены от центров тяжести колес в сторону движения на f_k (силы реакций обозначены R_1 и R'_1 , так как по модулю они различны).

Дадим системе два независимых обобщенных возможных перемещения $\delta\varphi$ и δr_{C_3} , направив их в сторону возрастания обобщенных координат φ и s .

Для вычисления обобщенной силы Q_{φ} будем считать, что $\delta\varphi$ не равно нулю, а δr_{C_3} равно нулю: ($\delta\varphi \neq 0$, $\delta r_{C_3} = 0$).

Это значит, что бревно по отношению к тележке находится в покое, а барабан поворачивается по часовой стрелке на угол $\delta\varphi$. При этом каждая точка каната получает возможное перемещение $r\delta\varphi$.

Рассмотрим любое из четырех колес тележки. Колесо катится по земле без скольжения, причем возможное перемещение его центра тяжести C_1 равно возможному перемещению любой точки каната: $\delta r_{C_1} = r\delta\varphi$. Мгновенный центр скоростей находится в точке \mathcal{P} , поэтому $\delta r_{C_1} = r_1\delta\varphi_1$, где $\delta\varphi_1$ — угол поворота колеса. Следовательно, $r_1\delta\varphi_1 = r\delta\varphi$, откуда

$$\delta\varphi_1 = \frac{r}{r_1} \delta\varphi. \quad (2)$$

Вычислим сумму работ всех задаваемых сил и сил трения на возможных перемещениях, соответствующих обобщенному возможному перемещению $\delta\varphi$:

$$\delta A = m_0\delta\varphi - 2R_1f_k\delta\varphi_1 - 2R'_1f_k\delta\varphi_1.$$

Учитывая, что $2R_1 + 2R'_1 = 4P_1 + P_2 + P_3$, и принимая во внимание формулу (2), получим:

$$\delta A = \left[m_0 - f_k \frac{r}{r_1} (4P_1 + P_2 + P_3) \right] \delta\varphi. \quad (3)$$

Работа сил тяжести P_1 , P_2 и P_3 равна нулю, так как точки приложения этих сил перемещаются по горизонтали. Работа силы тяжести P равна нулю, так как ее точка приложения неподвижна.

Выберем теперь в качестве возможного перемещения действительное угловое перемещение барабана $d\varphi$ (это допустимо, ибо в данной задаче связи стационарны). Тогда работа силы трения ($F_{\text{тр}}$) будет равна нулю, ибо при действительном перемещении $d\varphi$ сила трения $F_{\text{тр}}$, приложенная в мгновенном центре, не перемещается.

Обобщенной силой Q_{φ} является коэффициент, стоящий при $\delta\varphi$ в формуле (3), т. е.

$$Q_{\varphi} = m_0 - f_k \frac{r}{r_1} (4P_1 + P_2 + P_3). \quad (4)$$

Для вычисления обобщенной силы Q_s дадим обобщенное возможное перемещение δr_{C_3} центру тяжести бревна, считая при этом, что $\delta\varphi$ равно нулю:

$$\begin{aligned} \delta r_{C_3} &\neq 0, \\ \delta\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Это значит, что барабан и тележка находятся в покое, а центр тяжести бревна перемещается по горизонтали направо на δr_{C_3} . При этом горизонтальном перемещении работа силы тяжести P_3 бревна равна нулю. Работа всех остальных сил также равна нулю, так как их точки приложения неподвижны. Следовательно, сумма работ всех задаваемых сил и сил трения на возможном перемещении δr_{C_3} обращается в нуль: $\delta A = 0$, т. е. обобщенная сила Q_s , соответствующая обобщенной координате s , равна нулю:

$$Q_s = 0. \quad (5)$$

Займемся вычислением кинетической энергии T материальной системы, состоящей из барабана, четырех колес, платформы и бревна, т. е.

$$T = T^{(1)} + 4T^{(2)} + T^{(3)} + T^{(4)}. \quad (6)$$

Кинетическая энергия $T^{(1)}$ барабана, вращающегося вокруг неподвижной оси, вычисляется по формуле

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2.$$

Так как $I_0 = \frac{Pr^2}{2g}$, то

$$T^{(1)} = \frac{1}{4} \frac{P}{g} r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (7)$$

Кинетическая энергия платформы, движущейся поступательно, имеет вид

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v^2.$$

Учитывая, что ввиду нерастяжимости каната $v = r\dot{\varphi}$, находим:

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (8)$$

Колеса тележки совершают плоское движение. Поэтому

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} v_{C_1}^2 + \frac{1}{2} I_{C_1} \omega_1^2.$$

Момент инерции колеса равен $I_{C_1} = \frac{P_1 r_1^2}{2g}$. Учитывая, что при качении без скольжения $\omega_1 = \frac{v_{C_1}}{r_1}$, а скорость v_{C_1} центра тяжести колеса C_1 равна скорости платформы и тем самым скорости точек на ободе барабана, получим $v_{C_1} = r\dot{\varphi}$ и, следовательно,

$$T^{(2)} = \frac{3}{4} \frac{P_1}{g} r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (9)$$

Остается вычислить кинетическую энергию бревна, совершающего сложное движение: переносное поступательное вместе с платформой и относительное по отношению к платформе. Кинетическую энергию бревна находим по формуле

$$T^{(4)} = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} v_{C_3}^2 + \frac{1}{2} I_{C_3} \omega_3^2. \quad (10)$$

Момент инерции бревна относительно его центра тяжести равен $I_{C_3} = \frac{P_3 r_3^2}{2g}$, где через r_3 обозначен радиус бревна. При качении бревна без скольжения $\omega_3 = \frac{\dot{s}}{r_3}$, где \dot{s} — скорость v_r центра тяжести бревна по отношению к платформе. Теперь формула (10) принимает вид

$$T^{(4)} = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} v_{C_3}^2 + \frac{P_3}{4g} \dot{s}^2. \quad (11)$$

Для определения абсолютной скорости v_{C_3} центра тяжести бревна применим теорему о сложении скоростей точки:

$$v_a = v_e + v_r.$$

В данном случае скорости в переносном и относительном движениях направлены по горизонтали, значит: $v_{e_s} = r\dot{\varphi}$, $v_{r_s} = \dot{s}$. Следовательно,

$$v_{C_3} = v_{C_{3s}} = v_{e_s} + v_{r_s} = r\dot{\varphi} + \dot{s}.$$

После подстановки этого значения v_{C_3} в формулу (11) находим:

$$T^{(4)} = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{3}{4} \frac{P_3}{g} \dot{s}^2 + \frac{P_3}{g} r \dot{\varphi} \dot{s}. \quad (12)$$

Внося значения $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$ и $T^{(4)}$ из формул (7), (8), (9) и (12) в (6), получим выражение кинетической энергии T рассматриваемой материальной системы:

$$T = \frac{P + 12P_1 + 2P_2 + 2P_3}{4g} r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{3}{4} \frac{P_3}{g} \dot{s}^2 + \frac{P_3}{g} r \dot{\varphi} \dot{s}. \quad (13)$$

Переходим к составлению уравнений Лагранжа. Для этого вычислим частные производные от кинетической энергии T по обобщенным скоростям $\dot{\varphi}$ и \dot{s} :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{P + 12P_1 + 2P_2 + 2P_3}{2g} r^2 \dot{\varphi} + \frac{P_3}{g} r \dot{s}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{3}{2} \frac{P_3}{g} \dot{s} + \frac{P_3}{g} r \dot{\varphi}.$$

Взяв производные по времени, находим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{P + 12P_1 + 2P_2 + 2P_3}{2g} r^2 \ddot{\varphi} + \frac{P_3}{g} r \ddot{s}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} &= \frac{3}{2} \frac{P_3}{g} \ddot{s} + \frac{P_3}{g} r \ddot{\varphi}. \end{aligned} \quad (14)$$

Кинетическая энергия T материальной системы, определенная формулой (13), не зависит от обобщенных координат φ и s , поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial s} = 0. \quad (15)$$

После подстановки (4), (5), (14) и (15) в уравнения Лагранжа (1) получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P + 12P_1 + 2P_2 + 2P_3}{2g} r^2 \ddot{\varphi} + \frac{P_3}{g} r \ddot{s} &= m_0 - f_k \frac{r}{r_1} (4P_1 + P_2 + P_3), \\ \frac{3}{2} \frac{P_3}{g} \ddot{s} + \frac{P_3}{g} r \ddot{\varphi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Решив систему уравнений (16) относительно $\ddot{\varphi}$ и \ddot{s} , находим:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= 6g \frac{m_0 - f_k \frac{r}{r_1} (4P_1 + P_2 + P_3)}{r^2 (3P + 36P_1 + 6P_2 + 2P_3)}, \\ \ddot{s} &= -4g \frac{m_0 - f_k \frac{r}{r_1} (4P_1 + P_2 + P_3)}{r (3P + 36P_1 + 6P_2 + 2P_3)}. \end{aligned}$$

Знак минус в выражении \ddot{s} указывает, что ускорение центра тяжести C_3 бревна направлено в сторону, противоположную положительному направлению оси s , т. е. налево. Производные $\ddot{\varphi}$ и \ddot{s} постоянны. Поэтому, если система в начальный момент находилась в покое, то вращение барабана по часовой стрелке и движение центра тяжести C_3 бревна влево совершаются равноускоренно в соответствии с уравнениями:

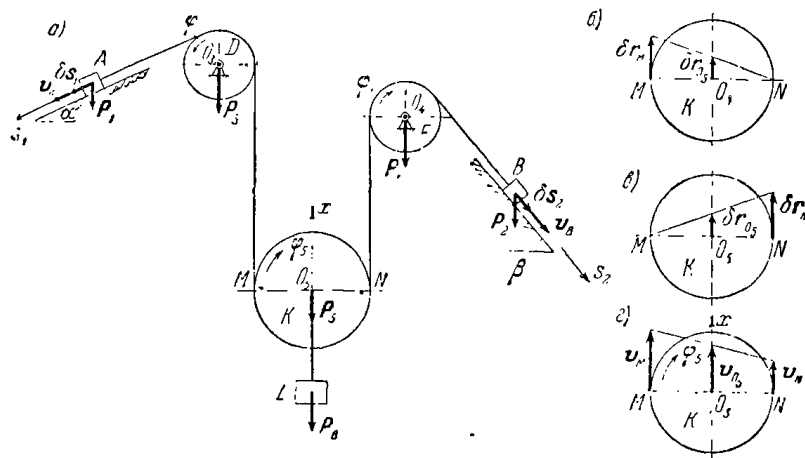
$$\varphi = 3g \frac{m_0 - f_k \frac{r}{r_1} (4P_1 + P_2 + P_3)}{r^2 (3P + 36P_1 + 6P_2 + 2P_3)} t^2,$$

$$s = -2g \frac{m_0 - f_k \frac{r}{r_1} (4P_1 + P_2 + P_3)}{r (3P + 36P_1 + 6P_2 + 2P_3)} t^2$$

(при выводе этих формул предположено, что при $t=0$ $\varphi=s=0$).

Задача 414. Решить задачу 396 с помощью уравнений Лагранжа.

Решение. При решении задачи 396 было показано, что рассматриваемая система имеет две степени свободы.



К задаче 414.

В качестве обобщенных координат выберем линейные координаты s_1 и s_2 , направленные вдоль наклонных плоскостей вниз.

Запишем уравнения Лагранжа для обобщенных координат s_1 и s_2 :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1} - \frac{\partial T}{\partial s_1} = Q_{s_1}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2} - \frac{\partial T}{\partial s_2} = Q_{s_2}. \quad (1)$$

Задаваемыми силами являются: P_1 — вес груза A , P_2 — вес груза B , P_3 — вес блока D , P_4 — вес блока E , P_5 — вес блока K , P_6 — вес груза L .

Силы реакций связей учитывать не следует, так как все связи, наложенные на систему, идеальны (наклонные плоскости идеально гладкие, трение в осях блоков отсутствует, нити предполагаются нерастяжимыми и натянутыми).

Для определения обобщенных сил Q_{s_1} и Q_{s_2} дадим грузам A и B соответственно возможные перемещения δs_1 и δs_2 , направленные параллельно линиям наибольшего ската наклонных плоскостей в сторону возрастания координат s_1 и s_2 .

Для вычисления обобщенной силы Q_{s_1} дадим системе обобщенное возможное перемещение δs_1 , считая при этом δs_2 равным нулю, т. е. $\delta s_1 \neq 0$, $\delta s_2 = 0$. (Это осуществимо, так как s_1 и s_2 являются независимыми обобщенными координатами.)

Таким образом, груз B , блок E и правая ветвь нити от груза B до точки N находятся в покое. При возможном перемещении груза A вниз на δs_1 , ввиду нерастяжимости нити, точка M нити получит возможное перемещение δr_M по вертикали вверх, равное по модулю δs_1 . Учитывая, что точка N нити остается при этом в покое, определим возможное перемещение оси блока δr_{O_5} (см. рис. б), равное по модулю половине модуля возможного перемещения δr_M , т. е.

$$\delta r_{O_5} = \frac{\delta r_M}{2} = \frac{\delta s_1}{2}. \quad (2)$$

Вычислим сумму работ задаваемых сил на возможных перемещениях точек системы, соответствующих обобщенному возможному перемещению δs_1 груза A :

$$\delta A = P_1 \sin \alpha \delta s_1 - (P_5 + P_6) \delta r_{O_5}.$$

Приимая во внимание формулу (2), находим:

$$\delta A = \left[P_1 \sin \alpha - \frac{1}{2} (P_5 + P_6) \right] \delta s_1. \quad (3)$$

Работа силы тяжести P_2 равна нулю, так как $\delta s_2 = 0$, работа сил тяжести P_3 и P_4 равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны. Обобщенной силой Q_{s_1} является коэффициент, стоящий при обобщенном возможном перемещении в уравнении (3), т. е.

$$Q_{s_1} = P_1 \sin \alpha - \frac{1}{2} (P_5 + P_6). \quad (4)$$

Для вычисления обобщенной силы Q_{s_2} дадим системе обобщенное возможное перемещение δs_2 , считая при этом δs_1 равным нулю: $\delta s_2 \neq 0$, $\delta s_1 = 0$.

Это значит, что груз A , блок D и левая ветвь нити от груза A до точки M нити находятся в покое. При возможном перемещении груза B на δs_2 вниз, ввиду нерастяжимости нити, точка N нити по-

лучит возможное перемещение δr_N по вертикали вверх, равное по величине модулю возможного перемещения δs_2 . Учитывая, что точка M нити остается при этом в покое, находим (см. рис. 8):

$$\delta r_{O_5} = \frac{\delta r_N}{2} = \frac{\delta s_2}{2}. \quad (5)$$

Вычислим сумму работ задаваемых сил на возможных перемещениях точек системы, соответствующих обобщенному возможному перемещению δs_2 :

$$\delta A = P_2 \delta s_2 \sin \beta - (P_5 + P_6) \delta r_{O_5}.$$

Учитывая формулу (5), имеем:

$$\delta A = \left[P_2 \sin \beta - \frac{1}{2} (P_5 + P_6) \right] \delta s_2. \quad (6)$$

Работа силы тяжести P_1 равна нулю, так как $\delta s_1 = 0$. Работа сил тяжести P_3 и P_4 равна нулю, так как их точки приложения неподвижны.

Обобщенной силой Q_{s_2} является коэффициент, стоящий при δs_2 в формуле (6), т. е.

$$Q_{s_2} = P_2 \sin \beta - \frac{1}{2} (P_5 + P_6). \quad (7)$$

Переходим к вычислению кинетической энергии T материальной системы, состоящей из шести масс: грузов A , B и L блоков D , E и K :

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)} + T^{(4)} + T^{(5)} + T^{(6)}. \quad (8)$$

Грузы A и B имеют скорости v_A и v_B , направленные параллельно линиям наибольшего ската наклонных плоскостей. Проекции этих скоростей на оси s_1 и s_2 соответственно равны \dot{s}_1 и \dot{s}_2 .

Обозначим радиусы блоков D , E и K через r_3 , r_4 и r_5 . При этом угловые скорости блоков D и E выразятся так:

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{\dot{s}_1}{r_3}, \quad \dot{\varphi}_4 = \frac{\dot{s}_2}{r_4}. \quad (9)$$

Ввиду нерастяжимости нити, скорость v_M точки M нити равна по величине скорости v_A груза A , т. е. $v_{Mx} = \dot{s}_1$. Аналогично: $v_{Nx} = \dot{s}_2$. Нетрудно, воспользовавшись рис. 2, найти скорость оси O_5 блока K , совершающего плоское движение:

$$v_{O_5x} = \frac{v_{Mx} + v_{Nx}}{2} = \frac{\dot{s}_1 + \dot{s}_2}{2}. \quad (10)$$

Для определения угловой скорости $\dot{\varphi}_5$ блока K найдем скорость точки M , приняв за полюс точку N :

$$v_{Mx} = v_{Nx} + (v_{MN})_x,$$

т. е.

$$(v_{MN})_x = v_{Mx} - v_{Nx} = \dot{s}_1 - \dot{s}_2.$$

Так как $(v_{MN})_x = |MN| \dot{\varphi}_5 = 2r_5 \dot{\varphi}_5$, то $2r_5 \dot{\varphi}_5 = \dot{s}_1 - \dot{s}_2$, откуда угловая скорость блока K :

$$\dot{\varphi}_5 = \frac{\dot{s}_1 - \dot{s}_2}{2r_5}. \quad (11)$$

Кинетические энергии грузов A и B , совершающих поступательное движение, имеют вид

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} \dot{s}_1^2, \quad T^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} \dot{s}_2^2. \quad (12)$$

Вычислим кинетические энергии блоков D и E , вращающихся вокруг неподвижных осей:

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} I_{O_3} \dot{\varphi}_3^2, \quad T^{(4)} = \frac{1}{2} I_{O_4} \dot{\varphi}_4^2.$$

Подставив значения моментов инерции блоков ($I_{O_3} = \frac{P_3 r_3^2}{2g}$, $I_{O_4} = \frac{P_4 r_4^2}{2g}$) и воспользовавшись формулами (9), находим:

$$T^{(3)} = \frac{P_3 \dot{s}_1^2}{4g}, \quad T^{(4)} = \frac{P_4 \dot{s}_2^2}{4g}. \quad (13)$$

Кинетическую энергию блока K , совершающего плоское движение, определим по формуле

$$T^{(5)} = \frac{1}{2} \frac{P_5}{g} v_{O_5}^2 + \frac{1}{2} I_{O_5} \dot{\varphi}_5^2.$$

Подставив значение момента инерции блока K ($I_{O_5} = \frac{P_5 r_5^2}{2g}$) и воспользовавшись формулами (10) и (11), получим:

$$T^{(5)} = \frac{3}{16} \frac{P_5}{g} (\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2) + \frac{1}{8} \frac{P_5}{g} \dot{s}_1 \dot{s}_2. \quad (14)$$

Кинетическая энергия груза L , движущегося поступательно, имеет вид

$$T^{(6)} = \frac{1}{2} \frac{P_6}{g} v_{O_5}^2.$$

Применив формулу (10), определяем:

$$T^{(6)} = \frac{1}{8} \frac{P_6}{g} (\dot{s}_1 + \dot{s}_2)^2. \quad (15)$$

Для вычисления кинетической энергии T материальной системы подставляем в формулу (8) выражения кинетических энергий масс системы (12), (13), (14) и (15). В итоге получаем:

$$T = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} \dot{s}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} \dot{s}_2^2 + \frac{1}{4} \frac{P_3}{g} \dot{s}_1^2 + \frac{1}{4} \frac{P_4}{g} \dot{s}_2^2 + \frac{3}{16} \frac{P_5}{g} (\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2) + \frac{1}{8} \frac{P_5}{g} \dot{s}_1 \dot{s}_2 + \frac{1}{8} \frac{P_6}{g} (\dot{s}_1 + \dot{s}_2)^2,$$

т. е.

$$T = \frac{8P_1 + 4P_3 + 3P_5 + 2P_6}{16g} \dot{s}_1^2 + \frac{8P_2 + 4P_4 + 3P_5 + 2P_6}{16g} \dot{s}_2^2 + \frac{P_5 + 2P_6}{8g} \dot{s}_1 \dot{s}_2. \quad (16)$$

Для составления системы уравнений Лагранжа второго рода следует вычислить частные производные от кинетической энергии T по обобщенным скоростям \dot{s}_1 и \dot{s}_2 :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1} = \frac{8P_1 + 4P_3 + 3P_5 + 2P_6}{8g} \dot{s}_1 + \frac{P_5 + 2P_6}{8g} \dot{s}_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2} = \frac{8P_2 + 4P_4 + 3P_5 + 2P_6}{8g} \dot{s}_2 + \frac{P_5 + 2P_6}{8g} \dot{s}_1$$

и взять производные от полученных результатов по времени:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1} &= \frac{8P_1 + 4P_3 + 3P_5 + 2P_6}{8g} \ddot{s}_1 + \frac{P_5 + 2P_6}{8g} \ddot{s}_2, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2} &= \frac{8P_2 + 4P_4 + 3P_5 + 2P_6}{8g} \ddot{s}_2 + \frac{P_5 + 2P_6}{8g} \ddot{s}_1. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Учитывая, что кинетическая энергия T , определенная формулой (16), не зависит от обобщенных координат s_1 и s_2 , имеем

$$\frac{\partial T}{\partial s_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial s_2} = 0. \quad (18)$$

После подстановки формул (4), (7), (17) и (18) в уравнение (1) получим уравнения Лагранжа второго рода для обобщенных координат s_1 и s_2 :

$$\frac{8P_1 + 4P_3 + 3P_5 + 2P_6}{8g} \ddot{s}_1 + \frac{P_5 + 2P_6}{8g} \ddot{s}_2 = P_1 \sin \alpha - \frac{1}{2} (P_5 + P_6), \quad (19)$$

$$\frac{8P_2 + 4P_4 + 3P_5 + 2P_6}{8g} \ddot{s}_2 + \frac{P_5 + 2P_6}{8g} \ddot{s}_1 = P_2 \sin \beta - \frac{1}{2} (P_5 + P_6). \quad (20)$$

Нетрудно видеть, что дифференциальные уравнения (19) и (20) тождественны дифференциальным уравнениям (14) и (19) задачи 396.

Определение из этой системы уравнений \ddot{s}_1 , \ddot{s}_2 и $\omega_{O_{3x}} = \frac{\dot{s}_1 + \dot{s}_2}{2}$ приводит к результатам, полученным при решении задачи 396.

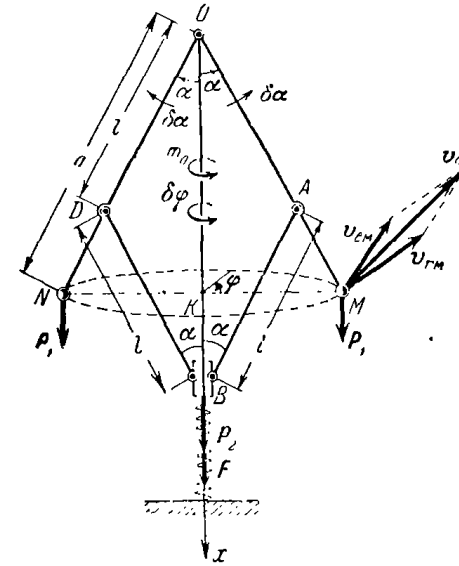
Итак, уравнения движения рассматриваемой системы были составлены двумя способами: с помощью общего уравнения динамики в задаче 396 и уравнений Лагранжа в данной задаче.

Сопоставление двух указанных методов показывает преимущества использования уравнений Лагранжа. Вместо формального введения сил инерции материальных точек системы, приведения их к простейшему виду, вычисления работ сил инерции и пар сил инерции на возможных перемещениях точек системы мы при решении задачи

с помощью уравнений Лагранжа должны лишь составить выражение кинетической энергии материальной системы с последующим вычислением ее производных и найти обобщенные силы.

Задача 415. Решить задачу 397 с помощью уравнений Лагранжа.

Решение. При решении задачи 397 было показано, что регулятор имеет две степени свободы. Примем в качестве обобщенных координат угол поворота φ стержней OM и ON с шарами M и N в горизонтальной плоскости (при вращении вокруг вертикальной оси регулятора) и угол α отклонения стержней OM и ON от вертикали. Положительные направления отсчета углов указаны на рисунке.



К задаче 415.

Напишем уравнения Лагранжа для обобщенных координат φ и α :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_\alpha.$$

Задаваемыми силами системы являются: P_1 — вес каждого из шаров, P_2 — вес муфты B и пара сил с вращающим моментом m_0 , а также упругая сила F пружины, направленная по вертикали вниз. Проекция упругой силы на ось x была определена формулой (2) задачи 397:

$$F_x = 2cl(1 - \cos \alpha). \quad (2)$$

Дадим регулятору независимые обобщенные возможные перемещения $\delta\varphi$ и $\delta\alpha$, направленные в сторону возрастания соответствующих углов поворота.

Для вычисления обобщенной силы Q_φ сообщим регулятору возможное перемещение $\delta\varphi$, считая при этом возможное перемещение δx равным нулю: $\delta\varphi \neq 0$, $\delta x = 0$.

Это значит, что при неизменной величине углов α , образуемых стержнями OM и ON с вертикалью, регулятор получил вокруг вертикальной оси угловое перемещение $\delta\varphi$.

Вычислим сумму работ задаваемых сил на обобщенном возможном перемещении $\delta\varphi$:

$$\delta A = m_0 \delta\varphi.$$

Учитывая, что $\delta A = Q_\varphi \delta\varphi$, находим:

$$Q_\varphi = m_0. \quad (3)$$

(Работа сил тяжести P_1 равна нулю, так как их точки приложения перемещаются в горизонтальной плоскости. Работа сил P_2 и F равна нулю, ибо их точки приложения неподвижны.)

Для вычисления обобщенной силы Q_α дадим регулятору возможное перемещение $\delta\alpha$, считая при этом возможное перемещение $\delta\varphi$ равным нулю: $\delta\alpha \neq 0$, $\delta\varphi = 0$.

Это значит, что при фиксированном значении угла поворота φ стержни регулятора OM и ON отклоняются от вертикали на угол $\delta\alpha$.

Для определения возможного перемещения δx_B муфты B надо вычислить вариацию выражения координаты x_B муфты B через угол α . Из треугольника OAB видно, что $x_B = OB = 2l \cos \alpha$. Следовательно,

$$\delta x_B = -2l \sin \alpha \delta\alpha. \quad (4)$$

Знак минус указывает, что при $\sin \alpha \delta\alpha > 0$ возможное перемещение муфты B направлено вверх.

Вычислим сумму работ задаваемых сил на возможных перемещениях точек системы, соответствующих обобщенному возможному перемещению $\delta\alpha$:

$$\delta A = -2P_1 a \sin \alpha \delta\alpha + P_2 \delta x_B + F_x \delta x_B$$

(коэффициент 2 в первом слагаемом обусловлен наличием у регулятора двух шаров). После подстановки значений δx_B и F_x из формул (4) и (2) находим:

$$\delta A = -2 [P_1 a + P_2 l + 2cl^2 (1 - \cos \alpha)] \sin \alpha \delta\alpha. \quad (5)$$

Обобщенная сила Q_α является коэффициентом при обобщенном возможном перемещении $\delta\alpha$ в уравнении (5), т. е.

$$Q_\alpha = -2 [P_1 a + P_2 l + 2cl^2 (1 - \cos \alpha)] \sin \alpha. \quad (6)$$

Переходим к вычислению кинетической энергии T регулятора, состоящего из трех масс: двух шаров M и N и муфты B :

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}. \quad (7)$$

Кинетическая энергия шаров, являющихся точечными массами, вычисляется по формуле

$$T^{(1)} = T^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} v_M^2, \quad (8)$$

где v_M — модуль абсолютной скорости каждого из шаров M и N . Каждый шар участвует в сложном движении: переносном вращательном вокруг вертикальной оси регулятора с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ и относительном вращательном вокруг горизонтальной оси O , перпендикулярной к плоскости рисунка, с угловой скоростью $\dot{\alpha}$. Применяем теорему о сложении скоростей точки:

$$v_{aM} = v_{eM} + v_{rM}.$$

В данном случае скорость шара в переносном движении v_{eM} направлена перпендикулярно к плоскости рисунка, причем $v_{eM} = |MK| \omega_e = a \dot{\varphi} \sin \alpha$. Скорость шара в относительном движении v_{rM} перпендикулярна к стержню OM , расположена в плоскости рисунка, причем $v_{rM} = |OM| \omega_r = a \dot{\alpha}$. Учитывая, что скорости v_{rM} и v_{eM} взаимно перпендикулярны, найдем квадрат модуля скорости шара в абсолютном движении:

$$v_{aM}^2 = v_{eM}^2 + v_{rM}^2 = a^2 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha + \dot{\alpha}^2).$$

Теперь кинетическая энергия шаров M и N , согласно формуле (8), принимает вид

$$T^{(1)} = T^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} a^2 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha + \dot{\alpha}^2). \quad (9)$$

Кинетическая энергия муфты B , участвующей в переносном вращательном движении с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг вертикальной оси регулятора и относительном движении вдоль этой оси, запишется по формуле

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v_B^2 + \frac{1}{2} l \dot{\varphi}^2. \quad (10)$$

Для определения проекции v_B на ось x возьмем производную по времени от выражения координаты x_B муфты B через угол поворота α . Так как $x_B = 2l \cos \alpha$, то $v_{Bx} = \dot{x}_B = -2l \sin \alpha \cdot \dot{\alpha}$. Теперь формула (10) примет вид

$$T^{(3)} = \frac{2P_2}{g} l^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} l \dot{\varphi}^2. \quad (11)$$

Кинетическая энергия T регулятора находится после подстановки в формулу (7) значений $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ и $T^{(3)}$, определенных в (9) и (11):

$$T = \frac{1}{2} \left(I + \frac{2P_1}{g} a^2 \sin^2 \alpha \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{P_1 a^2 + 2P_2 l^2 \sin^2 \alpha}{g} \dot{\alpha}^2. \quad (12)$$

Вычислим частные производные от кинетической энергии T по обобщенным скоростям $\dot{\varphi}$ и $\dot{\alpha}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \left(I + \frac{2P_1}{g} a^2 \sin^2 \alpha \right) \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = 2 \frac{P_1 a^2 + 2P_2 l^2 \sin^2 \alpha}{g} \dot{\alpha}.$$

Возьмем производные от полученных результатов по времени:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \left(I + \frac{2P_1}{g} a^2 \sin^2 \alpha \right) \ddot{\varphi} + \frac{2P_1}{g} a^2 \dot{\varphi} \dot{\alpha} \sin 2\alpha, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} &= 2 \frac{P_1 a^2 + 2P_2 l^2 \sin^2 \alpha}{g} \ddot{\alpha} + \frac{4P_2}{g} l^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Вычислим частные производные от кинетической энергии T , определенной формулой (12), по обобщенным координатам φ и α :

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{P_1 a^2}{g} \dot{\varphi}^2 \sin 2\alpha + \frac{2P_2 l^2}{g} \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha. \quad (14)$$

После подстановки в уравнения (1) Лагранжа выражений (3), (6), (13) и (14) получим дифференциальные уравнения движения регулятора для обобщенных координат φ и α :

$$\left(I + \frac{2P_1}{g} a^2 \sin^2 \alpha \right) \ddot{\varphi} + \frac{2P_1}{g} a^2 \dot{\varphi} \dot{\alpha} \sin 2\alpha = m_0, \quad (15)$$

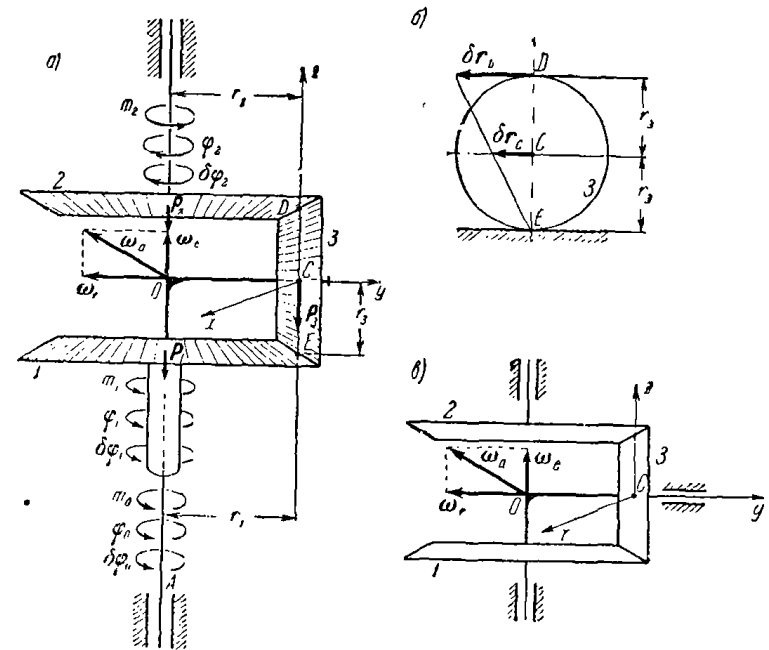
$$\begin{aligned} \frac{P_1 a^2 + 2P_2 l^2 \sin^2 \alpha}{g} \ddot{\alpha} - \frac{P_1 a^2}{2g} \dot{\varphi}^2 \sin 2\alpha + \frac{2P_2 l^2}{g} \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha = \\ = - [P_1 a + P_2 l + 2c l^2 (1 - \cos \alpha)] \sin \alpha. \end{aligned} \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что дифференциальные уравнения (15) и (16) тождественны дифференциальным уравнениям (10) и (13) задачи 397.

Подобно предыдущей, данная задача была решена двумя способами: с помощью общего уравнения динамики (см. задачу 397) и уравнений Лагранжа. Сопоставление обоих решений показывает, что применение уравнений Лагранжа является более эффективным и притом не требует использования формальных приемов, связанных с введением сил инерции.

Задача 416. На рис. *a* изображен механизм станочного дифференциала. Ведущее коническое зубчатое колесо 1 и ведомое коническое зубчатое колесо 2 работают вокруг неподвижных осей. Коническое зубчатое колесо 3, называемое сателлитом, передает вращение от колеса 1 к колесу 2. Колесо 3 свободно посажено на ось OC , являющуюся частью изогнутого кривошипа AOC , который вращается

вокруг неподвижной вертикальной оси. Сообщая разные угловые скорости кривошипу AOC и колесу 1, можно получить любую необходимую угловую скорость колеса 2. К кривошипу AOC приложена пара сил с вращающим моментом m_0 , к валу колеса 1 — пара сил с вращающим моментом m_1 и к валу колеса 2 — пара сил с моментом полезного сопротивления m_2 (см. рис. *a*). Колеса 1, 2 и 3 считать круглыми однородными дисками соответственно веса P_1 , P_2 и P_3 и радиусов r_1 , r_2 и r_3 (в рассматриваемой конструкции r_1 равно r_2).



К задаче 416.

Определить угловые ускорения кривошипа AOC и конических зубчатых колес 1 и 2. Массой кривошипа AOC и силами сопротивления движению пренебречь.

Решение. Из условия задачи следует, что станочный дифференциал является системой с двумя степенями свободы.

В качестве независимых обобщенных координат выберем угол поворота φ_0 кривошипа AOC вокруг вертикальной оси AO и угол поворота φ_1 колеса 1 вокруг соответствующей неподвижной оси. Угол поворота ведомого колеса 2 обозначим через φ_2 .

Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах φ_0 и φ_1 имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_0} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_0} = Q_{\varphi_0}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1}. \quad (1)$$

Изобразим на рис. *a* задаваемые силы: P_1, P_2, P_3 — силы тяжести конических колес *1, 2, 3* и пары сил с моментами m_0, m_1 и m_2 . Силы реакций связей изображать не следует, так как все связи, наложенные на дифференциал, являются идеальными.

Дадим дифференциалу независимые обобщенные возможные перемещения $\delta\varphi_0$ и $\delta\varphi_1$ в направлении возрастания углов φ_0 и φ_1 .

Для вычисления обобщенной силы Q_{φ_0} сообщим дифференциалу возможное перемещение $\delta\varphi_0$, считая при этом $\delta\varphi_1$ равным нулю: $\delta\varphi_0 \neq 0, \delta\varphi_1 = 0$.

Это значит, что при неподвижном колесе *1* кривошип получил возможное угловое перемещение $\delta\varphi_0$ вокруг оси *AO*. При этом возможное перемещение точки *C* кривошипа $\delta r_C = OC\delta\varphi_0 = r_1\delta\varphi_0$. Так как точка *C* одновременно принадлежит колесу *3*, имеющему при $\delta\varphi_1 = 0$ неподвижную точку *E*, то нетрудно видеть (см. рис. *b*), что возможное перемещение точки *D* третьего колеса $\delta r_D = 2\delta r_C = 2r_1\delta\varphi_0$. Учитывая, что точка *D* одновременно принадлежит колесу *2*, выразим δr_D через $\delta\varphi_2$; тогда имеем: $\delta r_D = r_2\delta\varphi_2$. Следовательно, $r_2\delta\varphi_2 = 2r_1\delta\varphi_0$, откуда

$$\delta\varphi_2 = 2\delta\varphi_0 \quad (2)$$

(по условию $r_3 = r_1$).

Вычислим сумму работ задаваемых сил на возможных перемещениях точек системы, соответствующих обобщенному возможному перемещению $\delta\varphi_0$: $\delta A = m_0\delta\varphi_0 - m_2\delta\varphi_2$.

Работа пары сил с моментом m_2 отрицательна, так как направление m_2 и $\delta\varphi_2$ противоположны. Учитывая формулу (2), получим:

$$\delta A = (m_0 - 2m_2)\delta\varphi_0. \quad (3)$$

Работа пары сил с моментом m_1 равна нулю, так как колесо *1* неподвижно. Работа сил P_1 и P_2 равна нулю, ибо их точки приложения неподвижны. Работа силы P_3 равна нулю, так как ее точка приложения перемещается в горизонтальной плоскости, а сила P_3 вертикальна. Обобщенной силой Q_{φ_0} является коэффициент, стоящий при $\delta\varphi_0$ в формуле (3), т. е.

$$Q_{\varphi_0} = m_0 - 2m_2. \quad (4)$$

Для вычисления обобщенной силы Q_{φ_1} дадим обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi_1$, считая при этом $\delta\varphi_0$ равным нулю: $\delta\varphi_1 \neq 0, \delta\varphi_0 = 0$.

Это значит, что при неподвижном кривошипе *AOC* колесо *1* получило возможное перемещение $\delta\varphi_1$. При этом колесо *2* через посредство колеса *3* получит равное по величине возможное перемещение $\delta\varphi_2$, направленное в противоположную сторону: $\delta\varphi_2 = \delta\varphi_1$. Следовательно, направления m_2 и $\delta\varphi_2$ совпадают.

Вычислим сумму работ задаваемых сил на обобщенном возможном перемещении $\delta\varphi_1$:

$$\delta A = m_1\delta\varphi_1 + m_2\delta\varphi_2 = (m_1 + m_2)\delta\varphi_1.$$

Учитывая, что $\delta A = Q_{\varphi_1}\delta\varphi_1$, находим:

$$Q_{\varphi_1} = m_1 + m_2. \quad (5)$$

Переходим к вычислению кинетической энергии T станочного дифференциала, в состав которого входят три конических зубчатых колеса *1, 2* и *3* (массой кривошипа *AOC*, по условию, мы пренебрегаем):

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}. \quad (6)$$

Кинетическая энергия колеса *1*, вращающегося вокруг неподвижной вертикальной оси, дается формулой

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2, \quad (7)$$

где I_1 — момент инерции колеса *1* относительно его оси вращения.

Кинетическая энергия колеса *2*, вращающегося вокруг неподвижной вертикальной оси, равна

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2, \quad (8)$$

где I_2 — момент инерции колеса *2* относительно его оси вращения.

Для вычисления кинетической энергии колеса *3* применяем формулу:

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} v_C^2 + \frac{1}{2} (I_{3x}\omega_x^2 + I_{3y}\omega_y^2 + I_{3z}\omega_z^2 - 2I_{3yz}\omega_y\omega_z - 2I_{3zx}\omega_z\omega_x - 2I_{3xy}\omega_x\omega_y),$$

где v_C — скорость центра тяжести *C* колеса *3*, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции абсолютной угловой скорости ω_a колеса *3* на подвижные координатные оси *x, y, z*, с ним жестко связанные, I_{3x}, I_{3y}, I_{3z} — осевые моменты инерции, $I_{3yz}, I_{3zx}, I_{3xy}$ — центробежные моменты инерции колеса *3* относительно соответствующих осей координат.

Выберем начало осей координат в центре тяжести *C* колеса *3*. Направим по вертикали ось *z*, по горизонтали направо вдоль оси относительного вращения колеса *3* направим ось *y* и, следовательно, перпендикулярно к плоскости рисунка ось *x*. Нетрудно видеть, что при подобном расположении осей координат они являются главными осями инерции колеса *3* (колесо *3*, подобно колесам *1* и *2*, мы считаем однородным круглым диском). Следовательно, $I_{3yz} = I_{3zx} =$

$\equiv I_{ax} \dot{\omega}_x = 0$, и формула для подсчета кинетической энергии $T^{(3)}$ колеса \mathcal{Z} упрощается:

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} v_C^2 + \frac{1}{2} (I_{ax} \omega_x^2 + I_{ay} \omega_y^2 + I_{az} \omega_z^2). \quad (9)$$

Для вычисления ω_x , ω_y и ω_z надо определить абсолютную угловую скорость ω_a колеса \mathcal{Z} . Колесо участвует в переносном вращательном движении с угловой скоростью $\omega_e = \dot{\phi}_0$ вокруг вертикальной оси и в относительном вращательном движении с угловой скоростью ω_r вокруг оси симметрии колеса \mathcal{Z} .

Для определения ω_r представим себе наблюдателя, расположенного на кривошипе AOC . Этому наблюдателю кривошип кажется неподвижным. Следовательно, глазам наблюдателя представится относительная картина движений. Ему будет казаться, что колеса 1, 2 и 3 вращаются вокруг неподвижных осей (см. рис. в). Запишем зависимости между относительными угловыми скоростями колес и их радиусами:

$$\frac{\omega_1^{(r)}}{\omega_3^{(r)}} = \frac{r_3}{r_1}, \quad \frac{\omega_2^{(r)}}{\omega_3^{(r)}} = -\frac{r_2}{r_3},$$

где $\omega_1^{(r)}$, $\omega_2^{(r)}$, $\omega_3^{(r)}$ обозначают угловые скорости колес 1, 2 и 3 по отношению к кривошипу AOC , вращающемуся с угловой скоростью ω_0 . Во второй пропорции стоит знак минус, который при совместном рассмотрении пропорций должен указывать на различные направления относительных угловых скоростей колес 1 и 2. Действительно, перемножив пропорции, получим: $\frac{\omega_1^{(r)}}{\omega_2^{(r)}} = -\frac{r_2}{r_1}$. Учитывая, что по условию $r_2 = r_1$, находим: $\omega_2^{(r)} = -\omega_1^{(r)}$. Так как $\omega_2^{(r)} = \omega_2 - \omega_0$, а $\omega_1^{(r)} = \omega_1 - \omega_0$, то $\omega_2 = 2\omega_0 - \omega_1$, т. е.

$$\dot{\phi}_2 = 2\dot{\phi}_0 - \dot{\phi}_1. \quad (10)$$

Из первой пропорции определим относительную угловую скорость $\omega_3^{(r)}$ колеса \mathcal{Z} :

$$\omega_3^{(r)} = \frac{r_1}{r_3} \omega_2^{(r)} = \frac{r_1}{r_3} (\omega_2 - \omega_0),$$

откуда

$$\omega_3^{(r)} = \frac{r_1}{r_3} (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_0). \quad (11)$$

Направление ω_r указано на рис. в.

Применим к колесу \mathcal{Z} теорему о сложении вращений твердого тела вокруг пересекающихся в точке O осей: $\omega_a = \omega_e + \omega_r$ (см. рис. в). Теперь нетрудно вычислить проекции абсолютной угловой скорости ω_a колеса \mathcal{Z} на оси x , y , z , с ним жестко связанные:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = -\omega_3^{(r)}, \quad \omega_z = \omega_3^{(r)}.$$

Учитывая формулу (11) и замечая, что $\omega_e = \dot{\phi}_0$, имеем:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = -\frac{r_1}{r_3} (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_0), \quad \omega_z = \dot{\phi}_0.$$

Внося эти значения ω_x , ω_y , ω_z в формулу (9) и принимая во внимание, что $v_C = |OC| \omega_0 = r_1 \dot{\phi}_0$, получим:

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} r_1^2 \dot{\phi}_0^2 + \frac{1}{2} I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2} (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_0)^2 + \frac{1}{2} I_{3z} \dot{\phi}_0^2,$$

т. е.

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} \left(I_{3z} + \frac{P_3}{g} r_1^2 + I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2} \right) \dot{\phi}_0^2 + \frac{1}{2} I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2} \dot{\phi}_1^2 - I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2} \dot{\phi}_0 \dot{\phi}_1. \quad (12)$$

Кинетическая энергия станочного дифференциала

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}$$

после подстановки значений $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ и $T^{(3)}$ из формул (7), (8) и (12) при одновременном учете соотношения (10) принимает вид

$$T = \frac{1}{2} \left(4I_2 + I_{3z} + \frac{P_3}{g} r_1^2 + I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2} \right) \dot{\phi}_0^2 + \frac{1}{2} \left(I_1 + I_2 + I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2} \right) \dot{\phi}_1^2 - \left(2I_2 + I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2} \right) \dot{\phi}_0 \dot{\phi}_1. \quad (13)$$

Для составления уравнений Лагранжа второго рода вычислим частные производные от кинетической энергии T по обобщенным скоростям $\dot{\phi}_0$ и $\dot{\phi}_1$, а затем возьмем производные от полученных результатов по времени. Находим:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_0} = \left(4I_2 + I_{3z} + \frac{P_3}{g} r_1^2 + I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2} \right) \ddot{\phi}_0 - \left(2I_2 + I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2} \right) \ddot{\phi}_1, \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} = \left(I_1 + I_2 + I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2} \right) \ddot{\phi}_1 - \left(2I_2 + I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2} \right) \ddot{\phi}_0. \quad (15)$$

Учитывая, что выражение для кинетической энергии T станочного дифференциала не зависит от обобщенных координат ϕ_0 и ϕ_1 , имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial \phi_0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \phi_1} = 0. \quad (16)$$

После подстановки формул (4), (5), (14), (15) и (16) в уравнения (1) получим уравнения Лагранжа для обобщенных координат ϕ_0 и ϕ_1 :

$$\left. \begin{aligned} \left(4I_2 + I_{3z} + \frac{P_3}{g} r_1^2 + I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2} \right) \ddot{\phi}_0 - \left(2I_2 + I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2} \right) \ddot{\phi}_1 &= m_0 - 2m_2, \\ \left(I_1 + I_2 + I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2} \right) \ddot{\phi}_1 - \left(2I_2 + I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2} \right) \ddot{\phi}_0 &= m_1 + m_2. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

По условию задачи колеса 1, 2 и 3 считаются однородными круглыми дисками; поэтому:

$$I_1 = \frac{P_1 r_1^2}{2g}, \quad I_2 = \frac{P_2 r_2^2}{2g}, \quad I_{3y} = \frac{P_3 r_3^2}{2g}, \quad I_{3z} = \frac{P_3 r_3^2}{4g}.$$

Теперь уравнения движения (17) дифференциала принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4g} [8P_2 r_1^2 + P_3 (6r_1^2 + r_3^2)] \ddot{\varphi}_0 - \frac{2P_2 + P_3}{2g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1 &= m_0 - 2m_2, \\ \frac{P_1 + P_2 + P_3}{2g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1 - \frac{2P_2 + P_3}{2g} r_1^2 \ddot{\varphi}_0 &= m_1 + m_2. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Решив систему уравнений (18) относительно $\ddot{\varphi}_0$ и $\ddot{\varphi}_1$, определим искомые угловые ускорения кривошипа AOC и колеса 1:

$$\ddot{\varphi}_0 = \frac{LN + MS}{KL - M^2}, \quad \ddot{\varphi}_1 = \frac{KS + MN}{KL - M^2};$$

здесь

$$K = \frac{1}{4g} [8P_2 r_1^2 + P_3 (6r_1^2 + r_3^2)], \quad L = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{2g} r_1^2,$$

$$M = \frac{2P_2 + P_3}{2g} r_1^2, \quad N = m_0 - 2m_2, \quad S = m_1 + m_2.$$

Воспользовавшись формулой (10), найдем: $\ddot{\varphi}_2 = 2\ddot{\varphi}_0 - \ddot{\varphi}_1$. После подстановки в эту формулу выражений $\ddot{\varphi}_0$ и $\ddot{\varphi}_1$ получаем искомое угловое ускорение колеса 2:

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{N(2L - M) + S(2M - K)}{KL - M^2},$$

где K , L , M , N и S имеют значения, указанные выше.

Решение этой задачи посредством использования общих теорем динамики представило бы значительные трудности. Применение уравнений Лагранжа дает возможность сравнительно просто получить уравнения движения дифференциала и вновь демонстрирует удобство применения уравнений Лагранжа при решении сложных задач динамики систем с несколькими степенями свободы.

§ 7. Приближенная теория гироскопов

1°. Гироскоп с тремя степенями свободы.

Гироскопические явления наблюдаются при быстром вращении твердых тел, сопровождающемся изменением направления оси вращения.

Гироскопом называется тяжелое твердое тело, имеющее ось симметрии и совершающее вокруг точки, лежащей на этой оси, вращательное движение.

Рассмотрим сначала случай, когда гироскоп движется около неподвижной точки.

Если выбрать начало координат в этой точке O и направить ось z по оси симметрии гироскопа, то оси x , y , z оказываются главными осями инерции гироскопа в неподвижной точке (рис. 158). Момент инерции I_z является полярным моментом инерции гироскопа, а I_x и I_y — экваториальными моментами инерции. В связи с наличием в твердом теле оси симметрии имеем $I_x = I_y$.

Пусть гироскоп вращается с угловой скоростью ω вокруг оси симметрии, которая в свою очередь вращается вокруг неподвижной точки (рис. 159) с угловой скоростью ω_1 . В соответствии с теоремой о сложении вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей, абсолютная угловая скорость ω_a равна векторной сумме угловых скоростей переносного и относительного вращений:

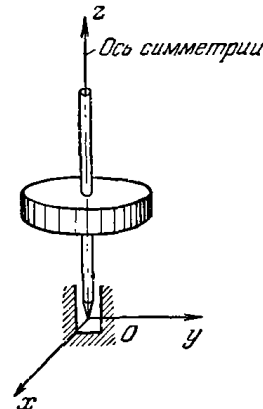


Рис. 158.

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r = \omega_1 + \omega.$$

Если гироскоп вращается с большой относительной угловой скоростью ω , а ось симметрии гироскопа z медленно изменяет свое положение в пространстве (т. е. $\omega_1 \ll \omega$), то, пренебрегая движением оси, можно считать, что абсолютная угловая скорость ω_a направлена по оси симметрии z гироскопа и главный момент количества движения гироскопа L_0 относительно неподвижной точки O направлен по его оси симметрии, причем $|L_0| = I_z \omega$. На этом допущении основана приближенная (элементарная) теория гироскопов.

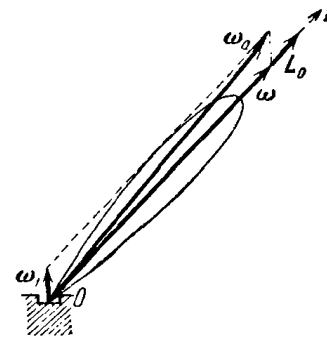


Рис. 159.

Рассмотрим теперь случай, когда все точки оси симметрии гироскопа находятся в движении. Разложим абсолютное движение гироскопа на переносное поступательное движение вместе с центром инерции и на относительное вращательное по отношению к центру инерции. В этом случае главный момент количества движения гироскопа относительно его центра инерции приближенно также направлен по оси симметрии и равен по модулю $I_z \omega$.

При решении задач с помощью приближенной теории гироскопов удобно пользоваться теоремой об изменении главного момента количества движения системы материальных точек в ее кинематической

интерпретации — *теоремой Резаля* (рис. 160): скорость u^*) конца главного момента количеств движения системы материальных точек L_O , определенного относительно неподвижной точки, векторно равна главному моменту внешних сил системы m_O^e относительно той же точки:

$$u = m_O^e$$

(скорость u конца L_O направлена по касательной к годографу L_O в соответствующей точке).

Основное свойство гироскопа с тремя степенями свободы в случае, когда главный момент m_O^e внешних сил относительно неподвижной точки равен нулю, заключается в сохранении неизменного направления оси гироскопа по отношению к инерциальным осям (см. задачу 417).

Быстро вращающийся неуравновешенный гироскоп с тремя степенями свободы обладает тем свойством, что при действии на его ось силы эта ось перемещается в направлении, перпендикулярном к направлению приложенной силы (положение связей, уменьшающих число степеней свободы, лишает гироскоп указанного свойства), и совершает так называемые «прецессионные движения» (см. задачи 418 и 419).

Задачи на определение движения оси гироскопа с помощью приближенной теории рекомендуется решать в следующей последовательности:

- 1) проверить, имеет ли гироскоп или гироскопическая система три степени свободы;
- 2) выбрать систему координат;
- 3) изобразить на рисунке внешние силы, приложенные к гироскопу;
- 4) определить главный момент внешних сил m_O^e относительно неподвижной точки;
- 5) найти главный момент количеств движения гироскопа относительно неподвижной точки L_O ;
- 6) применив теорему Резаля $u = m_O^e$, определить движение оси гироскопа.

Задача 417. На рисунке изображен гироскоп в кардановом подвесе. Гироскоп A выполнен в виде уравновешенного массивного круглого цилиндра, вращающегося вокруг оси KL . Ось KL укреплена

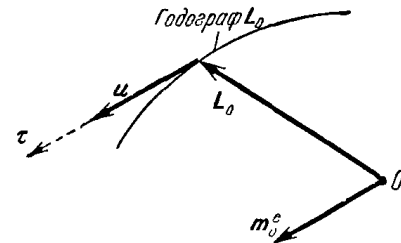
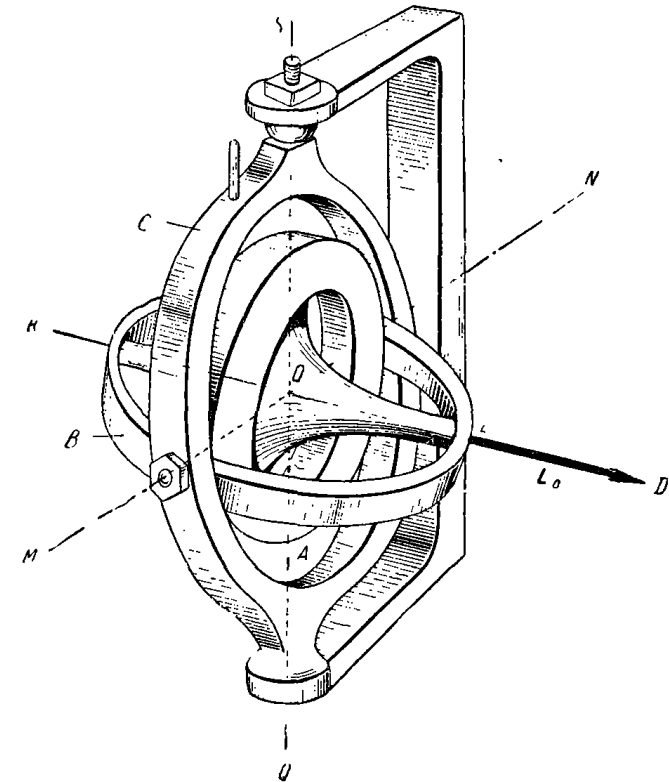


Рис. 160.

во внутреннем кольце B , вращающемся вокруг подвижной оси MN . Ось MN в свою очередь укреплена во внешнем кольце C , вращающемся вокруг неподвижной оси SQ . Ось SQ закреплена в стойке прибора. Оси KL , MN и SQ пересекаются в центре тяжести O гироскопа. Гироскопу A сообщена большая угловая скорость вокруг оси KL .

Определить изменение положения оси KL , пренебрегая трениями в опорах осей KL , MN и SQ и массами колец B и C .



К задаче 417.

Решение. Гироскоп A в кардановом подвесе имеет три степени свободы, так как его положение определяется тремя независимыми углами поворота вокруг осей KL , MN и SQ , пересекающихся в центре тяжести O . Таким образом, гироскоп вращается вокруг неподвижной точки O , совмещенной с центром тяжести. При этих условиях главный момент внешних сил относительно центра тяжести O гироскопа равен нулю:

$$m_O^e = 0. \quad (1)$$

* Вектор u называется скоростью условно, так как размерности скорости не имеет.

Главный момент количества движения гироскопа L_0 приближенно направлен вдоль оси KL . Конец вектора L_0 обозначим D (см. рисунок).

Применив теорему Резаля $u = m'_0$, в соответствии с формулой (1), находим $u = 0$, т. е. скорость точки D равна нулю. Значит, при вращении гироскопа ось KL сохраняет неизменное направление в пространстве. Этим свойством можно пользоваться для доказательства вращения Земли (опыт Фуко). Действительно, наблюдатель, находящийся на Земле, меняет свою ориентировку по отношению к звездам за счет вращения Земли. При этом ему кажется, что меняется направление оси KL , которая неизменно направлена на отдаленную неподвижную звезду.

Задача 418. Гироскоп совершает быстрое вращение вокруг своей вертикально направленной оси симметрии, имея неподвижную точку O . Выяснить направление движения оси гироскопа, если к ней приложена горизонтальная сила F .

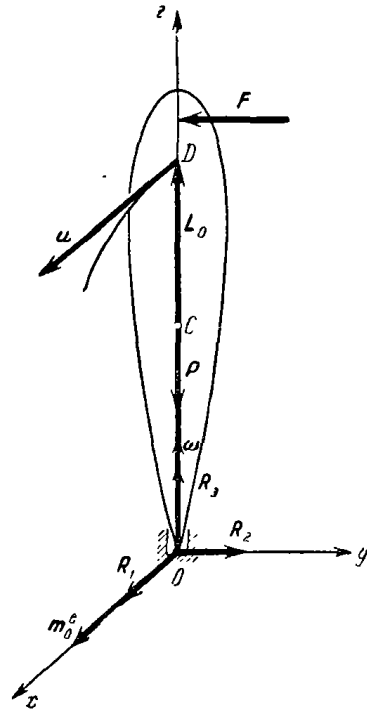
Решение. Данный гироскоп имеет три степени свободы. Его положение определяется тремя углами Эйлера.

Начало осей координат расположим в неподвижной точке O , ось z направим по оси симметрии гироскопа, плоскость uz совмещаем с плоскостью рисунка.

К гироскопу приложены внешние силы: P — вес гироскопа, R_1, R_2, R_3 — составляющие силы опорной реакции, F — параллельная оси y горизонтальная сила, действующая на ось гироскопа.

Определяем главный момент внешних сил относительно точки O . Так как моменты сил P, R_1, R_2 и R_3 относительно точки O равны нулю, то главный момент внешних сил относительно точки O векторно равен моменту силы F относительно точки O , направленному вдоль оси x (напомним, что момент силы относительно точки направляется перпендикулярно к плоскости, проходящей через силу и точку так, что с его конца сила видна направленной вокруг точки против часовой стрелки).

Главный момент количества движения гироскопа L_0 относительно точки O приближенно направлен по оси симметрии в сторону



К задаче 418.

вектора угловой скорости вращения. Конец вектора L_0 обозначим буквой D .

Применив теорему Резаля $u = m'_0$, направляем скорость u точки D параллельно m'_0 . Следовательно, ось симметрии гироскопа будет отклоняться в плоскости xz , т. е. в плоскости, перпендикулярной к направлению силы F . Если бы вращение гироскопа отсутствовало, то он находился бы в положении неустойчивого равновесия, и под действием силы F его ось симметрии совершила бы падение в плоскости uz .

Задача 419. После отклонения под действием силы F оси симметрии гироскопа, рассмотренного в предыдущей задаче, вес гироскопа P дает момент относительно точки опоры O .

Определить движение оси гироскопа, если ω — угловая скорость его вращения вокруг оси симметрии, I — момент инерции гироскопа относительно оси симметрии, a — расстояние от центра тяжести C до точки опоры O .

Решение. Оси xuz изображены в соответствии с расположением осей координат на рисунке предыдущей задачи.

К гироскопу приложены внешние силы: P — вес гироскопа, R_1, R_2, R_3 — составляющие опорной силы реакции.

Так как моменты сил R_1, R_2 и R_3 относительно точки равны нулю, то главный момент внешних сил m'_0 векторно равен моменту веса P относительно точки опоры O .

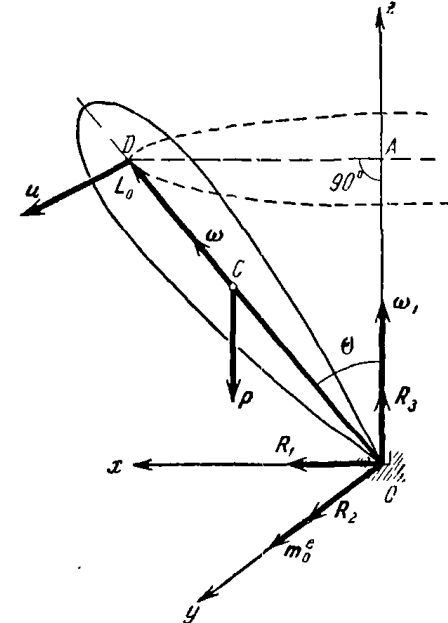
Обозначив через θ угол между осью симметрии гироскопа и осью z , находим:

$$|m'_0| = Pa \sin \theta, \quad (1)$$

причем вектор m'_0 направлен по оси y .

Главный момент количества движения L_0 гироскопа относительно точки O направлен по оси симметрии в сторону вектора угловой скорости ω и равен по модулю:

$$|L_0| = I\omega. \quad (2)$$



К задаче 419.

Обозначим через D конец вектора L_O . Согласно теореме Резаля, $u = m'_0$; поэтому u — скорость точки D — направлена перпендикулярно к оси симметрии (параллельно оси y), причем, как это следует из формулы (1),

$$u = Pa \sin \theta. \quad (3)$$

Вес P в любом положении гироскопа создает момент m'_0 относительно точки O . Следовательно, точка D имеет постоянную по модулю скорость u , направленную перпендикулярно к вертикальной плоскости, содержащей ось симметрии гироскопа. При этом ось гироскопа описывает боковую поверхность кругового конуса, поворачиваясь вокруг вертикальной оси с некоторой угловой скоростью ω_1 . Это движение называется *регулярной прецессией* оси гироскопа.

Вычислим угловую скорость ω_1 регулярной прецессии:

$$u = AD \cdot \omega_1.$$

Из треугольника OAD имеем: $AD = OD \sin \theta = L_O \sin \theta$. Подставив значение $|L_O|$ из формулы (2), получим:

$$u = I \omega \omega_1 \sin \theta. \quad (4)$$

Внося выражение u из формулы (4) в (3), находим угловую скорость регулярной прецессии оси гироскопа:

$$\omega_1 = \frac{Pa}{I \omega}.$$

Чем меньше угловая скорость ω вращения гироскопа вокруг его оси симметрии, тем больше угловая скорость прецессии ω_1 (от величины угла θ угловая скорость прецессии не зависит).

Скорость u можно записать в виде векторного произведения двух векторов, воспользовавшись формулой $v = \omega \times r$. В данном случае вектор-радиусом r служит главный момент количества движения гироскопа L_O относительно неподвижной точки O , а вектором угловой скорости является вектор угловой скорости прецессии ω_1 . Следовательно,

$$u = \omega_1 \times L_O.$$

Так как $L_O = I \omega$, то $u = \omega_1 \times I \omega$. По теореме Резаля имеем: $u = m'_0$. Поэтому главный момент внешних сил m'_0 относительно неподвижной точки O запишется в виде

$$m'_0 = I \omega_1 \times \omega.$$

Этот момент m'_0 стремится опрокинуть ось симметрии гироскопа.

2°. Гироскоп с двумя степенями свободы. При изменении направления оси симметрии гироскопа с двумя степенями

свободы возникает пара сил, создающая дополнительные динамические реакции опор. Момент пары дополнительных динамических давлений оси на опоры называется гироскопическим моментом (следовательно, гироскопический момент является моментом сил инерции гироскопа). Появление гироскопического момента носит название гироскопического эффекта.

Задачи с помощью приближенной теории гироскопов рекомендуется решать в следующей последовательности:

- 1) проверить, имеет ли гироскоп или гироскопическая система две степени свободы;
- 2) выбрать систему координат;
- 3) изобразить на рисунке внешние силы, приложенные к гироскопу;
- 4) определить главный момент количества движения L_O гироскопа относительно неподвижной точки;
- 5) найти скорость u конца L_O ;
- 6) применив теорему Резаля $u = m'_0$, определить главный момент внешних сил относительно неподвижной точки и дополнительные динамические силы реакций опор.

Задача 420. Ротор электромотора, подключенного к компрессору, установленному на корабле, имеет горизонтальную ось вращения AB .

Ось AB расположена перпендикулярно к продольной оси корабля O_1O_2 . Оси AB и O_1O_2 пересекаются в центре тяжести O ротора. Момент инерции ротора относительно оси AB равен I , ω — угловая скорость вращения ротора.

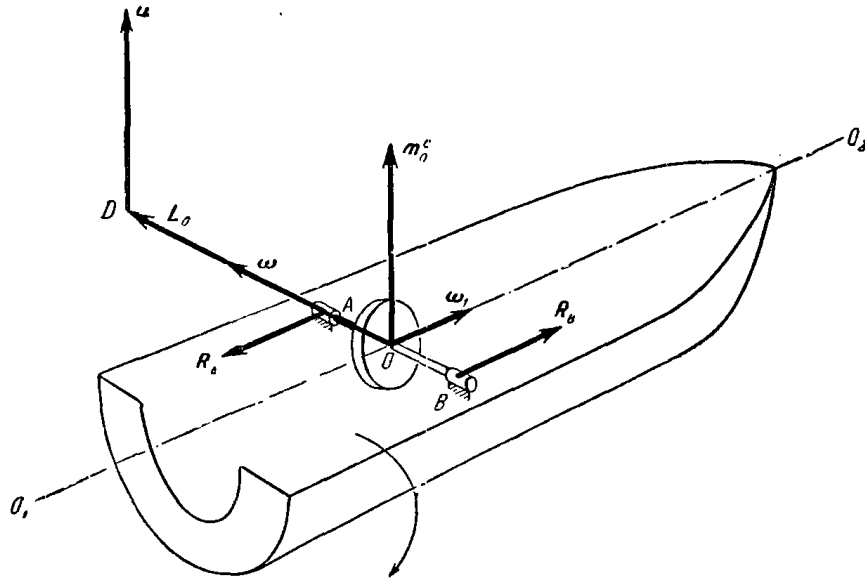
Определить наибольшее значение добавочных динамических сил реакций опор A и B при установившейся бортовой качке корабля, происходящей вокруг оси O_1O_2 по гармоническому закону $\varphi_1 = \varphi_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$ с угловой амплитудой φ_0 . Расстояние между опорами $AB = h$.

Решение. При бортовой качке корабля ось AB ротора электромотора изменяет свое направление. Следовательно, имеют место гироскопические явления.

Ротор электромотора является гироскопом. Гироскоп вместе с кораблем образует гироскопическую систему с двумя степенями свободы, так как его положение определяется двумя независимыми параметрами: углом поворота ротора вокруг оси AB и углом поворота оси AB вокруг оси O_1O_2 . Осью симметрии гироскопа является ось AB .

Используя приближенной теорией гироскопов, направляем главный момент количества движения ротора L_O относительно его центра тяжести O вдоль оси AB в сторону ω (см. рисунок). Конец вектора L_O обозначим буквой D . При бортовой качке корабля, происходящей вокруг оси O_1O_2 , конец вектора L_O — точка D — приобретает скорость u , направленную перпендикулярно к L_O .

В момент, соответствующий горизонтальному положению оси AB , скорость u направлена вверх либо вниз. Рассмотрим случай, когда скорость u направлена вверх. Точка D движется по дуге окружности



К задаче 420.

радиуса L_0 с угловой скоростью ω_1 бортовой качки, т. е. $u = L_0 \omega_1$. Так как $L_0 = l\omega$, то

$$u = l\omega\omega_1. \quad (1)$$

Для определения угловой скорости ω_1 бортовой качки корабля вокруг оси O_1O_2 воспользуемся соответствующим уравнением движения $\varphi_1 = \varphi_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$. Тогда

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{2\pi\varphi_0}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t$$

и $\omega_{1\max} = \frac{2\pi\varphi_0}{T}$. Теперь формула (1) принимает вид

$$u = \frac{2\pi\varphi_0}{T} l\omega. \quad (2)$$

Применив теорему Резаля $u = m_O^e$, направляем главный момент внешних сил параллельно u , т. е. по вертикали вверх. Принимая во внимание формулу (2), находим:

$$m_O^e = \frac{2\pi\varphi_0}{T} l\omega. \quad (3)$$

Величина m_O^e является моментом пары, образованной дополнительными динамическими силами реакций опор A и B . Эти реакции лежат в плоскости, перпендикулярной к m_O^e , т. е. в горизонтальной плоскости, и направлены так, что с конца m_O^e вращение пары видно против часовой стрелки. Так как через половину периода поворот корабля будет происходить в противоположном направлении, то скорость u будет направлена вертикально вниз, а R_A и R_B получат противоположные направления. Таким образом, при бортовой качке корабля, за счет изменения направления оси AB ротора электромотора, появляются дополнительные динамические реакции опор R_A и R_B , переменные по величине и направлению. Наибольшие значения

модулей этих сил, соответствующие горизонтальному положению оси AB , равны

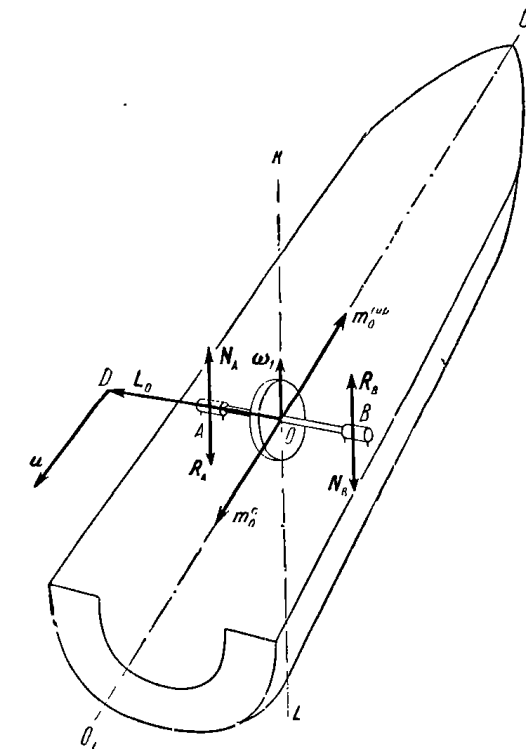
$$R_A = R_B = \frac{m_O^e}{AB} = \frac{2\pi\varphi_0 l\omega}{Th}.$$

В моменты перемены направления вращения корабля вокруг оси O_1O_2 , т. е. при $\omega_1 = 0$, эти силы реакций обращаются в нуль.

Задача 421. Определить гироскопические давления на опоры A и B оси ротора электромотора, рассмотренного в предыдущей задаче, если при отсутствии бортовой качки корабль совершает циркуляцию вокруг вертикальной оси KL с угловой скоростью ω_1 .

Решение. Определяем L_0 так, как это было сделано в предыдущей задаче. При повороте корабля вокруг оси KL с угловой скоростью ω_1 точка D приобретает скорость u , направленную параллельно оси O_1O_2 и равную по модулю $u = L_0\omega_1$. Так как $L_0 = l\omega$, то $u = l\omega\omega_1$.

В соответствии с теоремой Резаля, направляем m_O^e параллельно u , т. е. вдоль оси O_1O_2 . Гироскопический момент $m_O^{гир}$ направлен противоположно. Гироскопические давления N_A и N_B оси AB ротора на



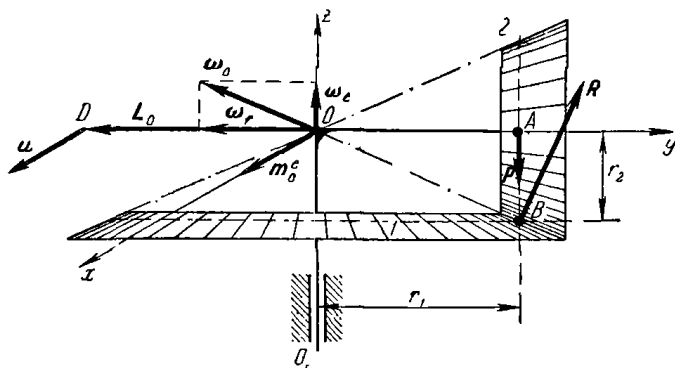
К задаче 421.

опоры A и B лежат в вертикальной плоскости и образуют пару сил. С конца $m_O^{гр}$ пара видна направленной против часовой стрелки.

Так как $u = l\omega_1$, а $|m_O^{гр}| = |m_O^e| = |u|$, то $m_O^{гр} = l\omega_1$ и, следовательно, искомые давления равны

$$N_A = N_B = \frac{|m_O^{гр}|}{AB} = \frac{l\omega_1}{h}.$$

Задача 422. Коническое зубчатое колесо 2 радиуса $r_2 = 20$ см свободно насажено на стержень OA , жестко соединенный в точке O с вертикальным валом OO_1 . При вращении вала OO_1 с угловой скоростью $\omega = 4\pi$ 1/сек коническое колесо 2 катится по неподвижной конической шестерне 1 радиуса $r_1 = 1,2$ м.



К задаче 422.

Определить отношение дополнительной динамической силы реакции шестерни 1 к ее статической силе реакции, если радиус инерции колеса 2 равен $\rho = 18$ см. Массой стержня OA пренебречь.

Решение. Для определения положения колеса 2 достаточно задать два независимых параметра: угол поворота стержня OA вокруг вертикальной оси и угол поворота колеса 2 вокруг стержня OA . Следовательно, коническое зубчатое колесо 2 является гироскопом с двумя степенями свободы. Ось симметрии гироскопа совмещена с осью стержня OA .

Зубчатое колесо 2, участвуя во вращении вокруг двух пересекающихся осей OA и OO_1 , совершает вращение вокруг неподвижной точки O . Направление осей координат x, y, z указано на рисунке. Вес колеса 2 обозначим буквой P .

К колесу 2 приложены внешние силы: P — вес колеса, R_1, R_2, R_3 — составляющие силы реакции шарнира O (эти силы не показаны на рисунке) и нормальная сила реакции R , направленная перпендикулярно к OB .

Определим статическую опорную реакцию $R_{ст}$. С этой целью рассмотрим равновесие шестерни 2 и составим уравнение моментов относительно точки O :

$$R_{ст} \cdot OB - P \cdot OA = 0,$$

откуда находим:

$$R_{ст} = P \frac{OA}{OB} = P \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}. \quad (1)$$

Дополнительная динамическая опорная реакция R появляется при изменении направления оси OA колеса 2.

Предварительно определим угловую скорость вращения колеса 2 вокруг оси OA . Колесо 2 совершает переносное вращение вокруг вертикальной оси с заданной угловой скоростью $\omega_r = \omega = 4\pi$ сек⁻¹. Ось симметрии OA колеса 2 является осью относительного вращения. Мгновенная ось проходит через точки O и B . Применив теорему о сложении вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей: $\omega_a = \omega_c + \omega_r$, строим параллелограмм угловых скоростей, который в данном случае оказывается прямоугольником. Из пропорции $\frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{r_1}{r_2}$

определим: $\omega_r = \frac{r_1}{r_2} \omega_e$.

Пользуясь при решении задачи приближенной теорией гироскопов, направляем главный момент количества движения L_O колеса 2 относительно неподвижной точки O в сторону ω_r , т. е. по оси симметрии OA колеса 2 налево. Конец вектора L_O обозначим буквой D . При качении колеса 2 по колесу 1 точка D описывает окружность радиуса L_O с угловой скоростью ω_e , т. е. $u = L_O \omega_e$. Так как $L_O = I \omega_r$, где $I = \frac{P}{g} \rho^2$ и $\omega_r = \frac{r_1}{r_2} \omega_e$, то

$$u = \frac{P}{g} \rho^2 \frac{r_1}{r_2} \omega_e^2. \quad (2)$$

Скорость u точки D направлена параллельно оси x .

В соответствии с теоремой Резаля $u = m_O^e$, изображаем дополнительный момент m_O^e на оси x . Приняв во внимание формулу (2), запишем:

$$m_O^e = \frac{P}{g} \rho^2 \frac{r_1}{r_2} \omega_e^2. \quad (3)$$

Дополнительная динамическая опорная реакция $R_{доп}$ колеса 2, моментом которой относительно неподвижной точки O является вектор m_O^e , определяется из формулы $m_O^e = R_{доп} OB$, т. е.

$$R_{доп} = \frac{m_O^e}{OB} = \frac{P}{g} \rho^2 \frac{r_1}{r_2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \omega_e^2.$$

Воспользовавшись формулой (1), определим отношение дополнительной динамической опорной реакции колеса I к статической:

$$\frac{R_{доп}}{R_{ст}} = \frac{\rho^2 \omega^2}{gr_2}.$$

После подстановки численных значений: $\omega_e = \omega = 4\pi$ 1/сек, $\rho = 18$ см, $r_2 = 20$ см, получим: $\frac{R_{доп}}{R_{ст}} \approx 26$. Следовательно, динамическая реакция колеса I при движении колеса 2 в 3,6 раза больше соответствующей силы реакции при покое.

Формула (3), которая определяет модуль дополнительного момента m_0^e , может быть получена короче с помощью динамических уравнений Эйлера (см. ниже задачу 427).

§ 8. Динамика твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки

1°. Движение по инерции твердого тела, имеющего неподвижную точку. Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, имеет три степени свободы. Его положение определяется тремя углами Эйлера.

Главные моменты количества движения твердого тела относительно координатных осей, начало которых находится в неподвижной точке, даются формулами:

$$L_x = I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{zx} \omega_z,$$

$$L_y = I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z - I_{xy} \omega_x,$$

$$L_z = I_z \omega_z - I_{zx} \omega_x - I_{yz} \omega_y.$$

Если оси x , y , z являются неподвижными, то осевые и центробежные моменты инерции твердого тела перемешны. Если оси x , y и z жестко связаны с движущимся твердым телом, то его осевые и центробежные моменты инерции постоянны. В случае, когда оси x , y , z являются главными осями инерции твердого тела в неподвижной точке, т. е. при $I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$, формулы принимают вид

$$L_x = I_x \omega_x, \quad L_y = I_y \omega_y, \quad L_z = I_z \omega_z.$$

Здесь I_x , I_y , I_z — главные моменты инерции твердого тела относительно неподвижной точки.

Динамические уравнения Эйлера для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, в проекциях на оси x , y , z ,

связанные с движущимся твердым телом, имеют вид:

$$\frac{dL_x}{dt} + \omega_y L_z - \omega_z L_y = m_x^e,$$

$$\frac{dL_y}{dt} + \omega_z L_x - \omega_x L_z = m_y^e,$$

$$\frac{dL_z}{dt} + \omega_x L_y - \omega_y L_x = m_z^e,$$

где m_x^e , m_y^e , m_z^e — главные моменты внешних сил относительно осей координат, ω_x , ω_y , ω_z — проекции угловой скорости твердого тела на оси координат.

Если оси x , y , z , связанные с твердым телом, являются главными осями инерции в неподвижной точке, то динамические уравнения Эйлера записываются так:

$$I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = m_x^e,$$

$$I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x = m_y^e,$$

$$I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = m_z^e.$$

Добавив к этим трем дифференциальным уравнениям кинематические уравнения Эйлера, выражающие зависимости между проекциями угловой скорости на соответствующие оси координат, углами Эйлера и их производными по времени:

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi,$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi,$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi},$$

получим систему шести обыкновенных дифференциальных уравнений движения.

Проинтегрировав эту систему уравнений (при наличии заданных начальных условий движения), определяют ω_x , ω_y , ω_z , а также уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки

$$\varphi = f_1(t), \quad \psi = f_2(t), \quad \theta = f_3(t).$$

Решение обратных задач динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, сопряжено с большими трудностями и приводится к квадратурам только в исключительных случаях.

Обобщенные динамические уравнения Эйлера для подвижных осей ξ, η, ζ , не связанных с твердым телом, имеют вид:

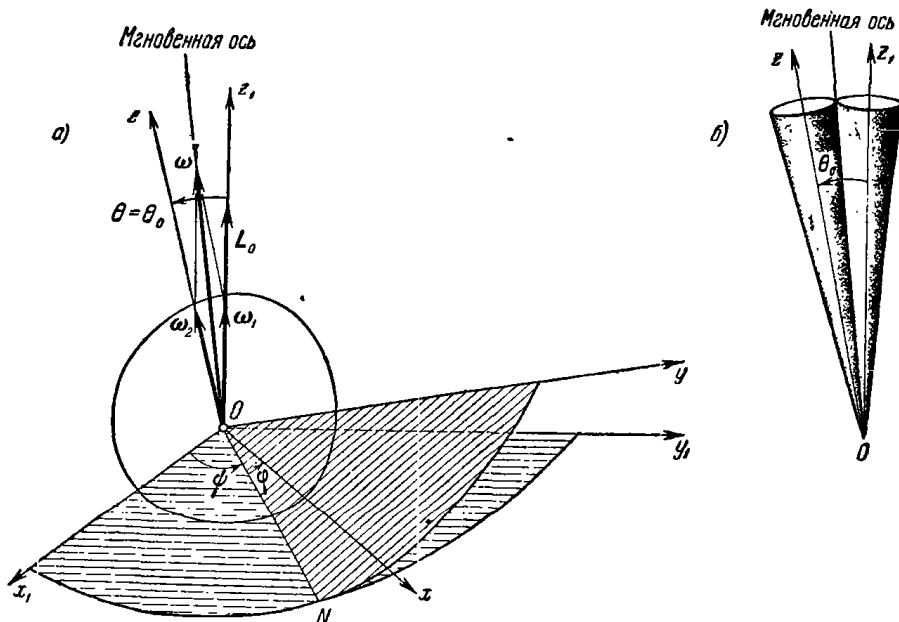
$$\frac{dL_\xi}{dt} + \omega_{1\eta} L_\zeta - \omega_{1\zeta} L_\eta = m_\xi^e,$$

$$\frac{dL_\eta}{dt} + \omega_{1\zeta} L_\xi - \omega_{1\xi} L_\zeta = m_\eta^e,$$

$$\frac{dL_\zeta}{dt} + \omega_{1\xi} L_\eta - \omega_{1\eta} L_\xi = m_\zeta^e,$$

где m_ξ^e , m_η^e и m_ζ^e — главные моменты внешних сил относительно подвижных осей ξ , η , ζ , не связанных с твердым телом, L_ξ , L_η и L_ζ — главные моменты количеств движения твердого тела относительно осей ξ , η , ζ , а $\omega_{1\xi}$, $\omega_{1\eta}$, $\omega_{1\zeta}$ — проекции угловой скорости вращения триэдра подвижных осей ξ , η , ζ на эти оси.

Задача 423. Исследовать движение по инерции симметричного твердого тела, центр тяжести которого совмещен с неподвижной точкой (случай Эйлера).



К задаче 423.

Решение. Твердое тело совершает движение по инерции вокруг неподвижной точки O при наличии двух внешних сил: веса тела, приложенного в центре тяжести O , и силы реакции опорной точки O .

Применяем теорему об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек относительно точки O :

$$\frac{dL_O}{dt} = \sum_{k=1}^n m_O (F_k^e).$$

Так как обе внешние силы приложены в неподвижной точке O , то $m_O^e = 0$, т. е. $\frac{dL_O}{dt} = 0$, и L_O оказывается постоянным. Итак, при движении по инерции симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки имеет место случай сохранения главного момента количеств движения твердого тела относительно этой точки.

Выбрав начало системы неподвижных осей координат в неподвижной точке O , направим ось z_1 вдоль вектора L_O , направление которого при движении твердого тела остается неизменным. Затем обозначим неподвижные оси x_1 и y_1 так, чтобы они вместе с осью z_1 образовали правую систему осей координат.

Начало системы подвижных осей координат x, y, z , связанных с твердым телом, выберем в той же точке O . Ось z направим по оси симметрии твердого тела. Затем введем подвижные оси x и y , которые являются главными осями инерции в точке O (см. рис. а). Так как оси x и y перпендикулярны к оси симметрии тела z , то $I_x = I_y$.

Запишем динамические и кинематические уравнения Эйлера для случая, когда $I_x = I_y$ и $m_x^e = m_y^e = m_z^e = 0$ (напомним, что $m_O^e = 0$):

$$I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = 0, \quad (1)$$

$$I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x = 0, \quad (2)$$

$$I_z \dot{\omega}_z = 0, \quad (3)$$

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad (4)$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad (5)$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}. \quad (6)$$

Из уравнений (1), (2) и (3) находим два первых интеграла. Умножив уравнение (1) на ω_x , уравнение (2) на ω_y , уравнение (3) на ω_z и затем сложив их, получим:

$$I_x \dot{\omega}_x \omega_x + I_y \dot{\omega}_y \omega_y + I_z \dot{\omega}_z \omega_z = 0,$$

т. е.

$$\frac{d}{dt} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) = 0,$$

откуда

$$I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 = C_1, \quad (7)$$

где C_1 — постоянная величина.

Так как кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, имеет вид

$$T = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2),$$

то из первого интеграла (7) следует постоянство кинетической энергии твердого тела (этот результат легко получить с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы материальных точек, так как внешние силы приложены к твердому телу в неподвижной точке и, следовательно, сумма работ внешних сил равна нулю).

Для определения другого первого интеграла умножим уравнение (1) на $I_x \omega_x$, уравнение (2) — на $I_y \omega_y$, уравнение (3) — на $I_z \omega_z$. После сложения этих уравнений получим:

$$I_x^2 \dot{\omega}_x \omega_x + I_y^2 \dot{\omega}_y \omega_y + I_z^2 \dot{\omega}_z \omega_z = 0,$$

т. е.

$$\frac{d}{dt} (I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2) = 0,$$

откуда

$$I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2 = C_2, \quad (8)$$

где C_2 — постоянная величина.

Нетрудно видеть, что первый интеграл, записанный в формуле (8), свидетельствует о постоянстве модуля главного момента количества движения твердого тела относительно неподвижной точки O . Действительно, так как оси x , y и z являются главными осями инерции твердого тела в точке O , то

$$L_x = I_x \omega_x, \quad L_y = I_y \omega_y, \quad L_z = I_z \omega_z, \quad (9)$$

откуда

$$I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L_O^2 = C_2.$$

Для упрощения интегрирования системы дифференциальных уравнений (3), (4), (5) и (6) запишем проекции главного момента количества движения твердого тела L_x, L_y, L_z на подвижные оси x, y и z , связанные с твердым телом, учитывая при этом, что вектор L_O расположен на оси z_1 (см. рис. a). После проектирования L_O на оси x, y, z находим:

$$L_x = L_O \sin \theta \sin \varphi, \quad L_y = L_O \sin \theta \cos \varphi, \quad L_z = L_O \cos \theta. \quad (10)$$

Воспользовавшись формулами (9), перепишем выражения (10) в виде:

$$I_x \omega_x = L_O \sin \theta \sin \varphi, \quad (11)$$

$$I_y \omega_y = L_O \sin \theta \cos \varphi, \quad (12)$$

$$I_z \omega_z = L_O \cos \theta. \quad (13)$$

Из дифференциального уравнения (3) находим, что ω_z постоянна. Если в начальный момент $\omega_z = \omega_{z_0}$, то и при движении $\omega_z = \omega_{z_0}$. Теперь из уравнения (13) получим:

$$\cos \theta = \frac{I_z \omega_{z_0}}{L_O}, \quad (14)$$

где $L_O = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \sqrt{I_x^2 \omega_{x_0}^2 + I_y^2 \omega_{y_0}^2 + I_z^2 \omega_{z_0}^2}$ — постоянная.

Следовательно, $\frac{I_z \omega_{z_0}}{L_O}$ — тоже постоянная величина и угол пугации θ

при движении твердого тела остается постоянным:

$$\dot{\theta} = 0, \quad (15)$$

откуда вытекает, что

$$\dot{\theta} = 0.$$

Теперь уравнения (4), (5) и (6) можно записать короче:

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \theta_0 \sin \varphi, \quad (16)$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \sin \theta_0 \cos \varphi, \quad (17)$$

$$\omega_{z_0} = \dot{\psi} \cos \theta_0 + \dot{\varphi}. \quad (18)$$

Подстановка значения ω_x из уравнения (16) в формулу (11), а также значения ω_y из уравнения (17) в формулу (12) приводит к результату $\dot{\psi} = \frac{L_O}{I_x} = \frac{L_O}{I_y}$, т. е. $\dot{\psi}$ постоянна (предполагается, что $\sin \theta_0 \neq 0$, а угол φ может принимать различные значения). Обозначим: $\frac{L_O}{I_x} = \frac{L_O}{I_y} = \omega_1$. Итак,

$$\dot{\psi} = \omega_1, \quad (19)$$

откуда, если $\psi = \psi_0$ при $t = 0$ имеем:

$$\psi = \omega_1 t + \psi_0, \quad (20)$$

т. е. прецессия совершается с постоянной угловой скоростью ω_1 .

Подставив в уравнение (18) вместо $\dot{\psi}$ величину ω_1 , получим:

$$\dot{\varphi} = \omega_{z_0} - \omega_1 \cos \theta_0.$$

Таким образом, $\dot{\varphi}$ постоянно; после введения обозначения

$$\omega_{z_0} - \omega_1 \cos \theta_0 = \omega_2$$

находим:

$$\dot{\varphi} = \omega_2, \quad (21)$$

откуда, если $\varphi = \varphi_0$ при $t = 0$ получаем:

$$\varphi = \omega_2 t + \varphi_0.$$

т. е. собственное вращение твердого тела совершается с постоянной угловой скоростью ω_2 .

Итак, при движении по инерции симметричного твердого тела, центр тяжести которого совмещается с неподвижной точкой, имеет место движение, называемое регулярной прецессией. Оно описывается уравнениями:

$$\dot{\theta} = 0, \quad \dot{\psi} = \omega_1 t + \psi_0, \quad \dot{\varphi} = \omega_2 t + \varphi_0.$$

Ось симметрии z твердого тела описывает круговой конус с углом при вершине O , равным $2\theta_0$, равномерно вращаясь вокруг неиз-

менного по направлению вектора L_O , расположенного на оси z_1 , с угловой скоростью ω_1 . При этом твердое тело вращается вокруг своей оси симметрии z с угловой скоростью ω_2 . Вектор мгновенной угловой скорости ω , изображаемый диагональю параллелограмма, построенного на векторах ω_1 и ω_2 (см. рис. а), лежит на мгновенной оси.

При движении твердого тела параллелограмм угловых скоростей, оставаясь неизменной фигурой, поворачивается вокруг оси z_1 с постоянной угловой скоростью ω_1 , т. е. ось симметрии твердого тела z описывает круговой конус вокруг оси z_1 .

Неподвижным аксоидом является круговой конус, описываемый мгновенной осью вокруг оси z_1 (см. рис. б). Подвижным аксоидом является круговой конус, описываемый мгновенной осью вокруг оси z . Движение твердого тела можно интерпретировать посредством качения без скольжения подвижного аксоида по неподвижному.

2°. Регулярная прецессия симметричного твердого тела, имеющего неподвижную точку. Симметричное твердое тело вращается

с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, которая в свою очередь вращается вокруг другой оси с постоянной угловой скоростью ω_1 . В результате сложения вращений вокруг двух пересекающихся осей твердое тело совершает вращение вокруг неподвижной точки. Это вращение называется *регулярной прецессией*. Угол θ между векторами ω и ω_1 называется углом нутации (рис. 161). При этом ω_1 — угловая скорость прецессии, ω — угловая скорость собственного вращения.

Начала подвижных осей $\xi\eta\zeta$ и неподвижных осей $xuyz$ взяты в неподвижной точке O . Ось z направлена вдоль вектора ω_1 . Оси x и y выбраны так, чтобы совместно с осью z образовать правую систему осей. Ось ζ направлена вдоль вектора ω , т. е. вдоль оси симметрии твердого тела. Ось ξ направлена вдоль линии узлов (т. е. ось ξ перпендикулярна к плоскости векторов ω и ω_1), ось η выбрана так, чтобы совместно с осями ξ и ζ образовать правую

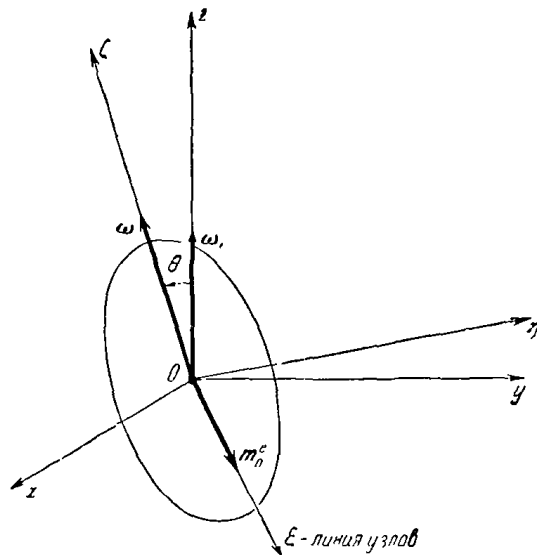


Рис. 161.

систему осей координат. Подчеркнем, что подвижные оси $\xi\eta\zeta$ не связаны с движущимся твердым телом.

Для того чтобы симметричное твердое тело совершало регулярную прецессию, к нему должны быть приложены внешние силы, главный момент которых относительно точки O лежит на оси ξ и равен по алгебраической величине:

$$m_{\xi}^e = \omega_{1z} \sin \theta [I_{\zeta} \omega_{\zeta} + (I_{\zeta} - I_{\eta}) \omega_{1z} \cos \theta].$$

Если $I_{\zeta} \omega_{\zeta} + (I_{\zeta} - I_{\eta}) \omega_{1z} \cos \theta > 0$, то m_{ξ}^e совпадает с положительным направлением оси ξ .

Гироскопический момент $m_{\xi}^{гир}$ направлен противоположно моменту m_{ξ}^e , т. е. $m_{\xi}^{гир} = -m_{\xi}^e$.

В случае быстро вращающегося гироскопа $\omega_{\zeta} \gg \omega_{1z}$. Пренебрегая при этом вторым слагаемым в квадратной скобке, получим выражение главного момента внешних сил, уже найденных по приближенной теории гироскопов:

$$m_{\xi}^e = I_{\zeta} \omega_{\zeta} \omega_{1z} \sin \theta.$$

Если векторы ω и ω_1 взаимно перпендикулярны, то $\theta = \frac{\pi}{2}$, и это выражение m_{ξ}^e является точным.

Обычно приходится решать задачи на регулярную прецессию твердого тела, в которых требуется:

- по заданным ω , ω_1 , θ , I_{ζ} , I_{η} определить главный момент внешних сил либо какую-либо внешнюю силу;
- по заданным ω , m_{ξ}^e , θ , I_{ζ} и I_{η} вычислить угловую скорость регулярной прецессии ω_1 .

Решать задачи на регулярную прецессию твердого тела рекомендуется в следующем порядке:

- 1) выбрать неподвижные оси координат $xuyz$ и подвижные оси $\xi\eta\zeta$, не связанные с твердым телом;
- 2) изобразить на рисунке внешние силы, приложенные к твердому телу;
- 3) а) если даны ω , ω_1 , θ , I_{ζ} , I_{η} , то по формуле

$$m_{\xi}^e = \omega_{1z} \sin \theta [I_{\zeta} \omega_{\zeta} + (I_{\zeta} - I_{\eta}) \omega_{1z} \cos \theta]$$

определить главный момент m_{ξ}^e внешних сил относительно оси ξ , либо одну из внешних сил;

б) если даны внешние силы, а также ω_1 , θ , I_{ζ} , I_{η} , то, определив главный момент внешних сил относительно неподвижной точки, из той же формулы найти проекцию на ось z угловой скорости регулярной прецессии ω_1 .

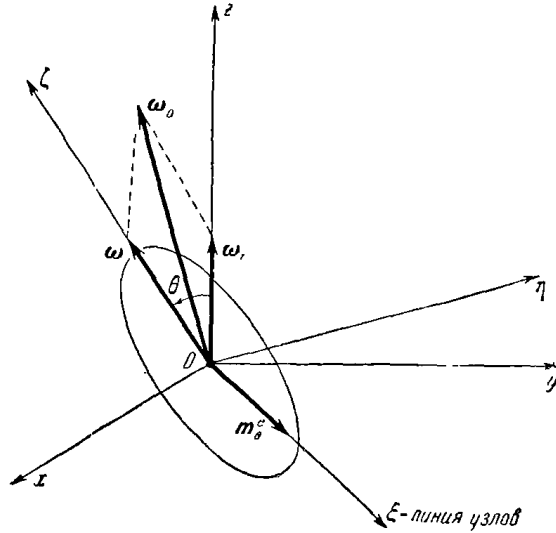
Задача 424. Вывести формулу, выражающую алгебраическую величину главного момента внешних сил:

$$m_{\xi}^e = \omega_{1z} \sin \theta [I_{\zeta} \omega_{\zeta} + (I_{\zeta} - I_{\eta}) \omega_{1z} \cos \theta],$$

при регулярной прецессии симметричного твердого тела.

Решение. неподвижные xuz и подвижные $\xi\eta\zeta$ координатные оси направляем так, как было указано выше, в обзоре теории. Следует помнить, что подвижные оси $\xi\eta\zeta$ с твердым телом не связаны. В то время, как подвижные оси $\xi\eta\zeta$ вращаются вокруг оси z с угловой скоростью ω_1 , твердое тело вращается вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\omega_a = \omega + \omega_1$, где ω — угловая скорость относительного вращения, ω_1 — угловая скорость переносного вращения.

При вычислении проекций ω_a и ω_1 на оси ξ, η, ζ следует иметь в виду, что параллелограмм угловых скоростей лежит в плоскости $\eta\zeta$. Как видно из рисунка,



К задаче 424.

$$\omega_{1\xi} = 0, \quad \omega_{1\eta} = \omega_{1z} \sin \theta, \quad \omega_{1\zeta} = \omega_{1z} \cos \theta. \quad (1)$$

Используя эти выражения, имеем:

$$\begin{aligned} \omega_{a\xi} &= \omega_{\xi} + \omega_{1\xi} = 0, \quad \omega_{a\eta} = \omega_{\eta} + \omega_{1\eta} = \omega_{1z} \sin \theta, \\ \omega_{a\zeta} &= \omega_{\zeta} + \omega_{1\zeta} = \omega_{\zeta} + \omega_{1z} \cos \theta. \end{aligned}$$

Следовательно, главные моменты количеств движения симметричного твердого тела относительно осей ξ, η, ζ , являющихся главными осями инерции в неподвижной точке O , имеют вид:

$$\begin{aligned} L_{\xi} &= I_{\xi} \omega_{a\xi} = 0, \quad L_{\eta} = I_{\eta} \omega_{a\eta} = I_{\eta} \omega_{1z} \sin \theta, \quad L_{\zeta} = I_{\zeta} \omega_{a\zeta} = \\ &= I_{\zeta} (\omega_{\zeta} + \omega_{1z} \cos \theta). \end{aligned} \quad (2)$$

Так как L_{ξ}, L_{η} и L_{ζ} постоянны, то

$$\frac{dL_{\xi}}{dt} = \frac{dL_{\eta}}{dt} = \frac{dL_{\zeta}}{dt} = 0. \quad (3)$$

Для определения главного момента внешних сил относительно точки O воспользуемся динамическими уравнениями Эйлера:

$$\frac{dL_{\xi}}{dt} + \omega_{1\eta} L_{\zeta} - \omega_{1\zeta} L_{\eta} = m_{\xi}^e,$$

$$\frac{dL_{\eta}}{dt} + \omega_{1\zeta} L_{\xi} - \omega_{1\xi} L_{\zeta} = m_{\eta}^e,$$

$$\frac{dL_{\zeta}}{dt} + \omega_{1\xi} L_{\eta} - \omega_{1\eta} L_{\xi} = m_{\zeta}^e.$$

После подстановки значений $\omega_{\xi 1}, \omega_{1\eta}, \omega_{1\zeta}$ из формул (1), выражений $L_{\xi}, L_{\eta}, L_{\zeta}$ — из формул (2) и $\frac{dL_{\xi}}{dt}, \frac{dL_{\eta}}{dt}, \frac{dL_{\zeta}}{dt}$ — из формул (3) уравнения Эйлера примут вид

$$m_{\xi}^e = \omega_{1z} \sin \theta [I_{\zeta} \omega_{\zeta} + (I_{\zeta} - I_{\eta}) \omega_{1z} \cos \theta],$$

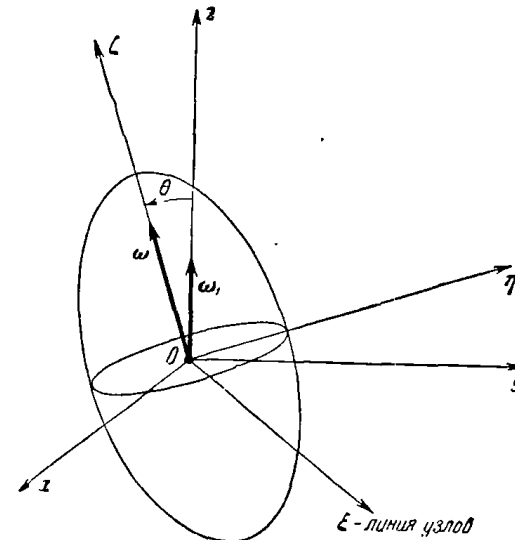
$$m_{\eta}^e = 0,$$

$$m_{\zeta}^e = 0.$$

Следовательно, главный момент внешних сил m_{ξ}^e относительно неподвижной точки O лежит на линии узлов ξ и совпадает с положительным направлением оси ξ , если

$$I_{\zeta} \omega_{\zeta} + (I_{\zeta} - I_{\eta}) \omega_{1z} \cos \theta > 0.$$

Задача 425. Вычислить угловую скорость регулярной прецессии симметричного твердого тела, центр тяжести которого расположен в неподвижной точке, если θ — угол между осью симметрии и осью прецессии, I_{ζ} — момент инерции твердого тела относительно оси симметрии, $I_{\xi} = I_{\eta}$ — экваториальные моменты инерции твердого тела, ω — угловая скорость собственного вращения (вокруг оси симметрии ζ).



К задаче 425.

Решение. Начала подвижных $\xi\eta\zeta$ и неподвижных xuz осей находятся в неподвижной точке O . Неподвижная ось z направлена по оси прецессии, а оси x и y — так, чтобы вместе с осью z образовать правую систему осей координат. Подвижная ось ζ направлена по оси

симметрии твердого тела, ось ξ — по линии узлов, ось η выбрана так, чтобы вместе с осями ξ и ζ образовать правую систему осей координат.

На твердое тело действуют две силы: вес тела и сила опорной реакции. Так как центр тяжести совмещен с неподвижной точкой O , то обе внешние силы приложены в точке O и их главный момент относительно точки O равен нулю, следовательно, $m_{\xi}^e = 0$.

Поэтому формула, определяющая алгебраическую величину главного момента:

$$m_{\xi}^e = \omega_{1z} \cos \theta [I_{\zeta} \omega_{\zeta} + (I_{\zeta} - I_{\eta}) \omega_{1z} \cos \theta],$$

принимает вид

$$\omega_{1z} \cos \theta [I_{\zeta} \omega_{\zeta} + (I_{\zeta} - I_{\eta}) \omega_{1z} \cos \theta] = 0,$$

откуда находится искомая угловая скорость регулярной прецессии:

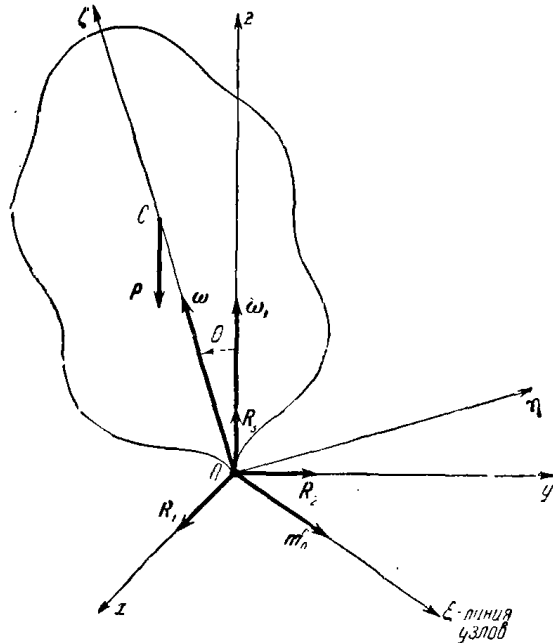
$$\omega_{1z} = \frac{I_{\zeta} \omega_{\zeta}}{(I_{\zeta} - I_{\eta}) \cos \theta}.$$

Подобная регулярная прецессия твердого тела при отсутствии других внешних сил, кроме веса и силы опорной реакции, является движением по инерции.

Итак, регулярная прецессия по инерции возможна вокруг любой оси, проходящей через неподвижную точку, за исключением осей, перпендикулярных к оси симметрии (в этом случае $\theta = \frac{\pi}{2}$ и ω_{1z} обращается в бесконечность).

Задача 426. Определить угловую скорость регулярной прецессии ω_1 симметричного твердого тела веса P , происходящей под действием силы тяжести. Расстояние от центра тяжести C твердого тела до неподвижной точки O равно a .

Даны моменты инерции твердого тела относительно главных центральных осей инерции, угловая скорость вращения ω вокруг оси симметрии и угол θ между осями симметрии и прецессии.



К задаче 426.

Решение. Неподвижные xuz и подвижные $\xi\eta\zeta$ координатные оси направлены так, как в предыдущей задаче.

К твердому телу приложены внешние силы: P — вес твердого тела, R_1, R_2, R_3 — составляющие силы опорной реакции в точке O . Вычислим главный момент внешних сил относительно оси ξ :

$$m_{\xi}^e = Pa \sin \theta.$$

Подставив это значение m_{ξ}^e в формулу

$$m_{\xi}^e = \omega_{1z} \sin \theta [I_{\zeta} \omega_{\zeta} + (I_{\zeta} - I_{\eta}) \omega_{1z} \cos \theta],$$

получим квадратное уравнение относительно проекции на ось z искомой угловой скорости регулярной прецессии ω_{1z} :

$$(I_{\zeta} - I_{\eta}) \omega_{1z}^2 \cos \theta + I_{\zeta} \omega_{\zeta} \omega_{1z} - Pa = 0.$$

Решив квадратное уравнение относительно ω_{1z} , находим два его корня:

$$\omega_{1z} = \frac{-I_{\zeta} \omega_{\zeta} \pm \sqrt{I_{\zeta}^2 \omega_{\zeta}^2 + 4(I_{\zeta} - I_{\eta}) Pa \cos \theta}}{2(I_{\zeta} - I_{\eta}) \cos \theta}, \quad (1)$$

т. е. твердое тело может совершать регулярные прецессии с разными угловыми скоростями (конечно, это движение возможно только при выполнении условия $I_{\zeta}^2 \omega_{\zeta}^2 - 4(I_{\zeta} - I_{\eta}) Pa \cos \theta > 0$; при достаточно больших значениях проекции угловой скорости ω_{ζ} это неравенство всегда выполняется).

Вычислим величины ω_{1z} в случае вращения твердого тела с большой угловой скоростью собственного вращения ω_{ζ} .

Приближенное определение дискриминанта квадратного уравнения дает:

$$\begin{aligned} \sqrt{I_{\zeta}^2 \omega_{\zeta}^2 + 4(I_{\zeta} - I_{\eta}) Pa \cos \theta} &= I_{\zeta} \omega_{\zeta} \sqrt{1 + \frac{4Pa(I_{\zeta} - I_{\eta}) \cos \theta}{I_{\zeta}^2 \omega_{\zeta}^2}} \approx \\ &\approx I_{\zeta} \omega_{\zeta} \left[1 + \frac{2(I_{\zeta} - I_{\eta}) Pa \cos \theta}{I_{\zeta}^2 \omega_{\zeta}^2} \right] \approx I_{\zeta} \omega_{\zeta} + \frac{2(I_{\zeta} - I_{\eta}) Pa \cos \theta}{I_{\zeta} \omega_{\zeta}}. \end{aligned}$$

Внося это значение в формулу (1), находим искомые приближенные значения проекции угловой скорости регулярной прецессии: угловую скорость медленной прецессии

$$\omega_{1z} = \frac{Pa}{I_{\zeta} \omega_{\zeta}}$$

и угловую скорость быстрой прецессии:

$$\omega_{1z} = \frac{I_{\zeta} \omega_{\zeta}}{(I_{\zeta} - I_{\eta}) \cos \theta}.$$

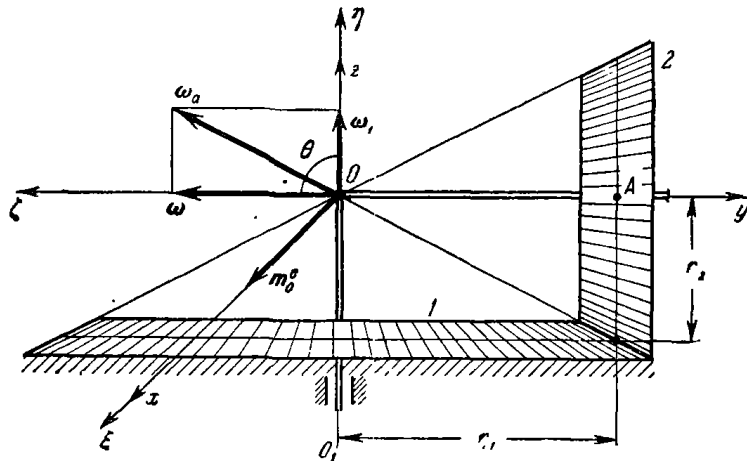
Значение проекции угловой скорости быстрой прецессии совпадает со значением проекции угловой скорости регулярной прецессии по инерции, полученной в предыдущей задаче.

Значение проекции угловой скорости медленной прецессии совпадает с результатом, подсчитанным при решении аналогичной задачи 419 с помощью приближенной теории гироскопов.

Задача 427. Вычислить дополнительный динамический момент, возникающий при движении системы, описанной в задаче 422.

Решение. Направления неподвижных $\xi\eta\zeta$ и подвижных $\xi\zeta$ осей координат указаны на рисунке.

Колесо 2 совершает регулярную прецессию с угловой скоростью ω_1 вокруг оси z . Угол нутации θ равен $\frac{\pi}{2}$.



К задаче 427.

Вычислим главный момент внешних сил по формуле

$$m_{\xi}^e = \omega_{1z} \sin \theta [I_{\zeta} \omega_{\zeta} + (I_{\zeta} - I_{\eta}) \omega_{1z} \cos \theta]. \quad (1)$$

При $\theta = \frac{\pi}{2}$ находим: $m_{\xi}^e = I_{\zeta} \omega_{\zeta} \omega_{1z}$, что соответствует результату, полученному в формуле (3) задачи 422, так как $I_{\zeta} = \frac{P}{g} \rho^2$, $\omega_{\zeta} = \frac{r_1}{r_2} \omega_{1z} = \frac{r_1}{r_2} \omega_e$.

Использование формулы (1) быстрее приводит к результату, чем применение теоремы Резаля, с помощью которой была решена задача 422, но требует наличия у читателя сведений по динамике твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

Формулу (1) можно также с успехом применить при решении задач 420 и 421.

Задача 428. Решить задачу 375, воспользовавшись теорией регулярной прецессии симметричного твердого тела.

Решение. Решение задачи 375, основанное на методе кинестатики, было довольно громоздким. Оно сводилось к системе четырех уравнений:

$$\begin{aligned} N'_{Ax} + N'_{Bx} &= Mx_C \omega^2 + M_{yc} \varepsilon, \\ N'_{Ay} + N'_{By} &= M_{yc} \omega^2 - Mx_C \varepsilon, \\ N'_{Ay} a - N'_{By} b &= -I_{yz} \omega^2 + I_{xy} \varepsilon, \\ -N'_{Ax} a + N'_{Bx} b &= I_{xy} \omega^2 + I_{yz} \varepsilon. \end{aligned}$$

При этом предварительно были определены центробежные моменты инерции I_{xz} и I_{yz} . Вычисление I_{xz} и I_{yz} потребовало ряд выкладок, выполненных в решении задачи 314.

Эту задачу можно решить значительно короче, если рассматривать вращение цилиндра вокруг оси z как частный случай регулярной прецессии при отсутствии его собственного вращения вокруг оси ζ .

Для этого достаточно определить гироскопический момент $m^{\text{гир}}$ цилиндра, являющийся моментом его сил инерции, которые приводятся к паре искомых боковых дополнительных динамических давлений на опоры A и B : $m^{\text{гир}} = -m_0^e$.

Угол нутации θ в данной задаче обозначен α , следовательно,

$$m^{\text{гир}} = \omega_{1z} \sin \alpha [I_{\zeta} \omega_{\zeta} + (I_{\zeta} - I_{\eta}) \omega_{1z} \cos \alpha]. \quad (1)$$

Ввиду отсутствия собственного вращения $\omega_{\zeta} = 0$, а ω_{1z} следует заменить на ω , так как угловая скорость вращения цилиндра вокруг оси z является угловой скоростью регулярной прецессии. Теперь формула (1) принимает вид

$$m^{\text{гир}} = (I_{\zeta} - I_{\eta}) \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Для цилиндра $I_{\zeta} = \frac{Pr^2}{2g}$ и $I_{\eta} = \frac{P}{g} \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right)$, т. е.

$$m^{\text{гир}} = \frac{P}{2g} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3} \right) \omega^2 \sin 2\alpha.$$

Гироскопический момент является моментом пары дополнительных боковых давлений на опоры A и B с плечом $AB = 2h$. Поэтому

$$|N'_A| = |N'_B| = \frac{m^{\text{гир}}}{2h} = \frac{P}{4gh} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3} \right) \omega^2 \sin 2\alpha.$$

Метод решения этой задачи может быть с успехом использован при решении ряда задач на определение дополнительных динамических боковых давлений, приложенных к опорам твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

КРАТКИЙ ОБЗОР МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ

§ 1. Вводные замечания

При решении задач динамики часто возникают затруднения, связанные с выбором соответствующих теорем и уравнений. Эти затруднения можно успешно преодолеть лишь при наличии достаточных навыков в решении задач динамики. Для приобретения подобных навыков мало практики в решении задач, нужно еще продумать и сопоставить различные методы и приемы. Для облегчения этого сопоставления ниже сделана попытка систематизации методов решения задач динамики.

Задачи динамики можно разбить на три группы: задачи динамики материальной точки, задачи динамики системы материальных точек, задачи динамики твердого тела.

Задачи всех трех групп делятся на *прямые* (определение сил по заданному движению) и *обратные* (определение движения по заданным силам). При сравнительно простоте прямых задач решение обратных задач подчас связано с большими трудностями.

§ 2. Задачи динамики материальной точки

Наиболее общим приемом решения задач динамики материальной точки является применение *дифференциальных уравнений движения* точки в проекциях на орты различных систем координат.

Чаще других применяются дифференциальные уравнения движения в проекциях на оси декартовых координат.

При сложном движении материальной точки пользуются уравнениями динамики относительного движения (либо переносного движения) в проекциях на орты различных систем координат.

При движении несвободной материальной точки по заданной кривой удобно пользоваться дифференциальными уравнениями в проекциях на оси натурального триэдра.

При движении несвободной материальной точки по заданной поверхности целесообразно применять дифференциальные уравнения

движения в проекциях на орты цилиндрических, сферических или иных криволинейных координат.

Если равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, расположена при движении точки в одной плоскости с ее начальной скоростью, то движение точки происходит в этой плоскости. При этом можно ограничиться применением двух дифференциальных уравнений движения в проекциях на две оси декартовых координат или на оси полярных координат, расположенных в этой плоскости, или на иные оси.

Для определения траектории материальной точки, движущейся под действием центральной силы, удобно пользоваться формулой Бине.

Если равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, расположена при движении точки на одной оси с ее начальной скоростью, то движение точки происходит прямолинейно вдоль этой оси. При этом следует ограничиться применением одного дифференциального уравнения движения в проекции на эту ось.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки поддаются сравнительно просто интегрированию в задачах, где равнодействующая сил, приложенных к точке, постоянна либо зависит *только* от: 1) времени, 2) положения точки, 3) скорости точки. Труднее решать обратные задачи, если равнодействующая сила одновременно зависит от времени, положения, скорости и ускорения материальной точки. В этих случаях легко решаются задачи, которые приводятся к линейным дифференциальным уравнениям.

Иногда, используя общие теоремы динамики, можно сразу получить первые интегралы дифференциальных уравнений движения и тем самым упростить решение задачи.

Теорему об изменении количества движения материальной точки применяют в задачах, где силы постоянны либо являются известными функциями времени, а в число данных и неизвестных величин входят: масса (вес) материальной точки, силы, приложенные к точке, промежуток времени действия сил, скорости материальной точки в начале и в конце этого промежутка времени.

Теорему об изменении момента количества движения материальной точки преимущественно применяют при движении точки под действием центральной силы, когда в число данных и искомых величин входят: масса (вес) точки, положения точки в некоторые фиксированные моменты времени, скорости точки в эти моменты времени.

Теорему об изменении кинетической энергии материальной точки применяют в задачах, где силы, приложенные к точке, постоянны либо зависят от положения точки, а в число данных и неизвестных величин входят: масса (вес) точки, силы, приложенные к точке, перемещение точки и ее скорости в начале и в конце этого перемещения. Подчеркнем, что эту теорему удобно использовать и тогда, когда на систему действуют постоянные силы трения.

§ 3. Задачи динамики системы материальных точек

Наиболее общим приемом составления дифференциальных уравнений движения системы материальных точек является применение уравнений Лагранжа либо общего уравнения динамики.

При наличии идеальных связей, наложенных на систему, в составленные дифференциальные уравнения не входят силы реакций связей. При наличии голономных связей, наложенных на систему, число составленных дифференциальных уравнений движения системы равно числу ее степеней свободы.

Если по условию задачи требуется определить силы реакций связей, то задачу следует решать в два этапа: 1) с помощью уравнений Лагранжа или общего уравнения динамики определить ускорения точек системы, 2) применив принцип освобожденности от связей, использовать дифференциальные уравнения движения соответствующей материальной точки, либо применить метод кинестатики.

Если по условию задачи требуется определить законы движения точек системы, то приходится интегрировать систему дифференциальных уравнений движения.

В некоторых задачах удобно пользоваться общими теоремами динамики:

а) Если в число данных и неизвестных величин входят: массы материальных точек, внешние силы и уравнения движения точек системы, то можно, применив *теорему о движении центра инерции системы материальных точек* в проекциях на оси координат, составить дифференциальные уравнения движения, в которые войдут те силы реакций связей, которые для рассматриваемой системы являются внешними силами. Эти дифференциальные уравнения движения дают возможность, помимо решения обратных задач, определять искомые силы реакций связей непосредственно из составленных уравнений (выше было указано, что в подобных случаях после применения уравнений Лагранжа либо общего уравнения динамики приходится дополнительно пользоваться дифференциальными уравнениями движения соответствующей материальной точки либо применять метод кинестатики).

б) Если внешние силы постоянны либо зависят от времени, а в число данных и неизвестных величин входят: массы материальных точек, внешние силы, промежуток времени действия внешних сил и скорости точек системы в начале и конце этого промежутка, то следует применить *теорему об изменении главного вектора количества движения системы материальных точек*.

в) Если в состав системы материальных точек входит *твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси*, а в число данных и искомых величин — инерционные характеристики системы (массы, моменты инерции), уравнения движения точек системы и уравнение

вращения твердого тела (либо скорости точек системы и угловая скорость твердого тела), а также внешние силы системы, то можно применить *теорему об изменении главного момента количества движения системы материальных точек*.

г) Если внешние силы постоянны либо зависят от положений точек системы, а в число данных и искомых величин входят: инерционные коэффициенты системы (массы, моменты инерции), внешние и внутренние силы системы (в случае неизменяемой материальной системы — только внешние силы), перемещения точек системы и скорости этих точек в начале и в конце этих перемещений, то следует применять *теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек*.

д) Если рассматриваемая система материальных точек является *сплошной средой* — жидкостью (газом), а в число данных и неизвестных величин входят: секундные массы жидкости (газа), скорости капель жидкости (газа), проходящих через крайние поперечные сечения рассматриваемого объема жидкости (газа), объемные и поверхностные силы, то следует применять *уравнение Эйлера, т. е. теорему об изменении главного вектора количества движения системы материальных точек в приложении к сплошным средам*.

§ 4. Задачи динамики твердого тела

1°. Поступательное движение твердого тела. Наиболее общим приемом составления уравнений динамики поступательного движения твердого тела является применение *теоремы о движении центра инерции системы материальных точек*. Теорема преимущественно используется в проекциях на оси декартовых координат. В число данных и искомых величин должны входить: массы материальных точек, их уравнения движения, внешние силы системы. Решение обратных задач упрощается в случаях, когда главный вектор внешних сил, приложенных к твердому телу, постоянен либо зависит только от: 1) времени, 2) положений точек системы, 3) скоростей точек системы. Труднее решать обратные задачи, в которых главный вектор внешних сил одновременно зависит от времени, положения и скоростей точек системы.

В некоторых случаях, используя общие теоремы динамики, можно сразу получить первые интегралы дифференциальных уравнений движения и тем самым упростить решение задачи.

Теорему об изменении количества движения применяют в задачах, где силы или их проекции постоянны либо зависят от времени, а в число данных и искомых величин входят: масса (вес) твердого тела, внешние силы, приложенные к твердому телу, промежуток времени действия сил, скорости центра инерции (либо любой другой точки) в начале и в конце этого промежутка времени.

Теорему об изменении кинетической энергии применяют в задачах, где *силы постоянны либо зависят от положений точек твердого тела*, а в число данных и неизвестных величин входят: масса (вес) твердого тела, внешние силы, приложенные к твердому телу, перемещение центра инерции (либо любой другой точки), скорости центра инерции (либо любой, другой точки) в начале и в конце этого перемещения.

2°. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Наиболее удобно при решении задач пользоваться *дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси*. В число данных и неизвестных величин должны входить: момент инерции твердого тела относительно оси вращения, уравнение вращения твердого тела, внешние силы, приложенные к твердому телу.

Решение обратных задач упрощается в случаях, когда главный момент внешних сил относительно оси вращения постоянен либо зависит *только* от: 1) времени, 2) угла поворота, 3) угловой скорости твердого тела. Труднее решать задачи, в которых главный момент внешних сил одновременно зависит от времени, угла поворота и угловой скорости твердого тела. В этих случаях легко решаются задачи, которые приводятся к линейным дифференциальным уравнениям.

Можно получить первые интегралы дифференциального уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, используя *теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек*. Это осуществимо в задачах, где *главный момент внешних сил постоянен либо зависит от угла поворота твердого тела*, а в число данных и неизвестных величин входят: момент инерции твердого тела относительно оси вращения, внешние силы, приложенные к твердому телу, угловое перемещение, угловые скорости твердого тела в начале и в конце этого углового перемещения.

При определении *динамических давлений на ось твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси*, целесообразно применять теоремы об изменении главного вектора и главного момента количеств движения системы материальных точек либо пользоваться методом кинестатики.

3°. Плоское движение твердого тела. Наиболее общим приемом составления уравнений в задачах, где определяются силы реакций связей либо закон движения, является применение *дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела*. В число данных и неизвестных величин должны входить: масса и момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через его центр инерции перпендикулярно к неподвижной плоскости, уравнения движения центра инерции, уравнение вращения твердого тела вокруг оси, проходящей через центр инерции перпендикулярно

к неподвижной плоскости, внешние силы, приложенные к твердому телу.

Решение обратных задач упрощается в случаях, когда главный вектор внешних сил и главный момент внешних сил относительно оси, проходящей через центр инерции твердого тела перпендикулярно к неподвижной плоскости, являются постоянными либо зависят только: 1) от времени, 2) от положения точек, 3) от скоростей точек. Труднее решать задачи, в которых главный вектор и главный момент внешних сил одновременно зависят от времени, положения и скоростей точек.

Если требуется определить только закон плоского движения твердого тела, то для составления дифференциальных уравнений движения, не содержащих сил реакций связей, следует при наличии идеальных связей, наложенных на твердое тело, применять уравнения Лагранжа или общее уравнение динамики.

Можно упростить интегрирование дифференциальных уравнений движения, используя *теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек* в задачах, где *главный вектор и главный момент сил, приложенных к твердому телу, постоянны либо зависят от положений точек (угла поворота) твердого тела*, а в число данных и неизвестных величин входят: масса и момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через его центр инерции перпендикулярно к неподвижной плоскости, силы, приложенные к твердому телу, перемещения точек твердого тела (угловые перемещения), скорости точек твердого тела (угловые скорости) в начале и в конце этих перемещений.

4°. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки. Наиболее общим приемом составления исходных уравнений является применение *динамических уравнений Эйлера*. В число данных и неизвестных величин должны входить: главные моменты инерции твердого тела относительно главных осей инерции, проходящих через неподвижную точку, проекции угловой скорости на эти оси, главные моменты внешних сил относительно этих осей.

Решение обратных задач динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, представляет значительные трудности. Дифференциальные уравнения движения, т. е. динамические уравнения Эйлера, решаются в квадратурах только в исключительных случаях.

Кроме динамических уравнений Эйлера, можно решать задачи с помощью *уравнений Лагранжа, отнесенных к обобщенным координатам — углам Эйлера*.

Если внешние силы, приложенные к твердому телу, постоянны либо зависят от положений точек твердого тела, то можно получить первый интеграл динамических уравнений Эйлера, применяя *теорему об изменении кинетической энергии системы материальных то-*

чек. Это осуществимо в задачах, где в число данных и неизвестных величин входят: главные моменты инерции твердого тела относительно подвижных осей, проходящих через неподвижную точку, внешние силы, приложенные к твердому телу, перемещения точек (угловое перемещение твердого тела) и их скорости (угловые скорости твердого тела) в начале и в конце этих перемещений.

В случае симметричного твердого тела (гироскопа), угловая скорость вращения которого вокруг оси симметрии значительно больше угловой скорости вращения вокруг других осей, можно при приближенном решении задач применять теорему Резаля. С помощью элементарной теории гироскопов возможно определение угловых скоростей вращения либо дополнительных динамических давлений на связи.

5². Движение свободного твердого тела. Общим приемом составления уравнений движения свободного твердого тела является совокупное применение теоремы о движении центра инерции и динамических уравнений Эйлера, выражающих теорему об изменении главного момента количества движения твердого тела в относительном движении по отношению к центру инерции.

Обратные задачи динамики свободного твердого тела относятся к числу наиболее трудных задач механики (например, задачи внешней баллистики).

Для определения уравнений движения свободного твердого тела приходится интегрировать систему шести дифференциальных уравнений второго порядка. Задача решается в квадратурах только в исключительных случаях.

Для составления дифференциальных уравнений движения свободного твердого тела можно пользоваться уравнениями Лагранжа, отнесенными к обобщенным координатам: трем координатам центра инерции твердого тела и трем углам Эйлера.

Для определения дополнительных динамических давлений твердого тела на связи рекомендуется пользоваться сочетанием теоремы о движении центра инерции либо метода кинестатики (для переносного поступательного движения вместе с центром инерции) с теоремой Резаля (для относительного вращательного движения по отношению к центру инерции).

Если внешние силы постоянны либо зависят от положений точек твердого тела, то можно упростить интегрирование системы дифференциальных уравнений движения, применяя теорему об изменении кинетической энергии в задачах, где в число данных и искомым величин входят: масса, главные центральные моменты инерции твердого тела, внешние силы, приложенные к твердому телу, перемещения точек (угловое перемещение) твердого тела, скорости центра инерции и угловые скорости твердого тела в начале и в конце этих перемещений.

§ 5. Общие замечания по решению задач динамики

1. Эффективность решения задач динамики в значительной мере зависит от удачного выбора системы координат.

2. Основными и вместе с тем наиболее трудными являются обратные задачи динамики, в которых по заданным силам определяется движение. При этом приходится интегрировать систему дифференциальных уравнений движения. Эти задачи редко удается решить в квадратурах. Иногда приходится применять приближенные методы интегрирования или пользоваться математическими машинами.

3. Удобство применения общих теорем динамики заключается в возможности упростить интегрирование дифференциальных уравнений движения системы. Однако эти общие теоремы могут (как показано выше) применяться только в некоторых случаях. Удобно и то, что в формулировке общих теорем динамики не входят внутренние силы, определение которых обычно связано со значительными трудностями (это замечание о внутренних силах в равной мере относится к: дифференциальному уравнению вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, дифференциальным уравнениям плоского движения твердого тела и динамическим уравнениям Эйлера). Лишь в формулировку теоремы об изменении кинетической энергии системы материальных точек входят не только внешние, но и внутренние силы (в частном случае неизменяемой материальной системы, например абсолютно твердого тела, и в этой теореме фигурируют только внешние силы).

4. Наиболее общим приемом составления дифференциальных уравнений движения системы материальных точек является применение уравнений Лагранжа или общего уравнения динамики. (Применение общего уравнения динамики является менее удобным и притом формальным методом в связи с использованием сил инерции.)

Вместо искусственного сочетания некоторых общих теорем и уравнений динамики, выбор которых представляет значительные трудности, указанные методы быстро и естественно приводят к составлению дифференциальных уравнений движения. Удачный выбор обобщенных координат обеспечивает простоту и изящество решения задачи. Удобно и то, что в составленные дифференциальные уравнения движения не входят силы реакций идеальных связей, определение которых обычно связано с большими трудностями (силы реакций связей при движении системы являются функциями от времени, положения, скоростей и ускорений точек системы).

5. Применяя общие теоремы динамики, дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела, динамические уравнения Эйлера, уравнения Лагранжа, часто в число рассматриваемых сил ошибочно включают силы инерции. Следует помнить, что силами инерции следует пользоваться только в случае применения:

а) метода кинестатики, б) общего уравнения динамики, в) исследования относительного (либо переносного) движения материальной точки или системы материальных точек.

6. При решении задач с помощью общих теорем динамики, а также при применении дифференциального уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела и динамических уравнений Эйлера силы разделяются на внешние и внутренние.

При решении задач с помощью уравнений Лагранжа, общего уравнения динамики и метода кинестатики силы разделяются на задаваемые и силы реакций связей.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

§ 1. Удар

1°. Удар двух тел. Удар тела о неподвижную преграду. Удар есть процесс, при котором в течение очень малого промежутка времени действуют очень большие силы. Промежуток времени часто равен тысячным и даже десятитысячным долям секунды.

Величина силы, приложенной к телу во время удара, может в тысячи и даже в десятки тысяч раз превосходить вес тела.

В теории удара классической механики вводится следующая идеализация этого процесса — совершается предельный переход к бесконечно большим силам, действующим бесконечно малое время (мгновенные силы) и имеющим конечный импульс S .

Пусть сила F действует в течение времени τ , начиная свое действие в момент времени t . Тогда ее импульс будет:

$$\int_t^{t+\tau} F dt.$$

Для определения ударного импульса S , соответственно со сказанным выше, совершаем предельный переход, устремляя $F \rightarrow \infty$, а $\tau \rightarrow 0$, т. е.

$$S = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ F \rightarrow \infty}} \int_t^{t+\tau} F dt.$$

Здесь предполагается, что бесконечно большая мгновенная сила действует бесконечно малый промежуток времени; при этом считается, что ударный импульс S имеет конечную величину.

Применяя теорему об изменении количества движения при ударе, следует учитывать только импульсы мгновенных сил.

При действии мгновенной силы перемещение точки приложения силы равно нулю, а скорость точки скачкообразно меняется:

$$v_2 = v_1 + \frac{S}{m}.$$

В действительности скачок скорости происходит в течение очень малого промежутка времени.

Линией центров называется ось, проходящая через центры тяжести соударяющихся тел.

Удар называется центральным, если точка K соприкосновения соударяющихся тел лежит на линии центров C_1C_2 , а касательная плоскость, проведенная в точке соприкосновения к поверхностям этих тел, перпендикулярна к линии центров (рис. 162).

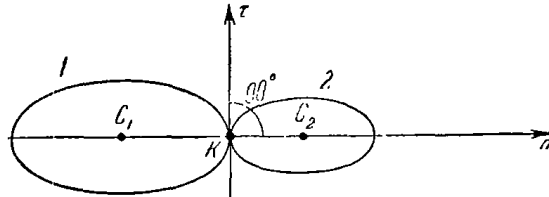


Рис. 162.

Удар называется прямым, если скорости центров тяжести соударяющихся тел в начале удара лежат на линии центров (рис. 163).

Если хотя бы одна из скоростей центров тяжести соударяющихся тел в начале удара не лежит на линии центров, то удар называется косым (рис. 164).

Рассмотрение процесса удара по существу требует выхода за рамки классической механики — отказа от схемы абсолютно твердого тела и перехода к схеме деформируемого тела. В зависимости от степени восстановления недеформированного состояния удары разделяются на неупругие, частично упругие и упругие.

Удар называется неупругим, если недеформированное состояние соударяющихся тел не восстанавливается. В конце удара центры тяжести тел движутся с одинаковыми скоростями.

Удар называется частично упругим, если недеформированное состояние не полностью восстанавливается. В конце удара центры тяжести тел движутся с разными скоростями.

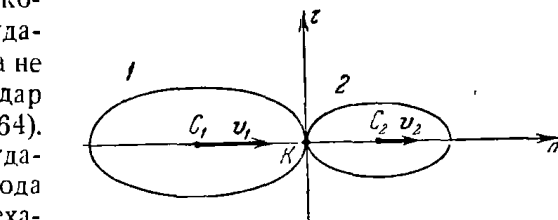


Рис. 163.

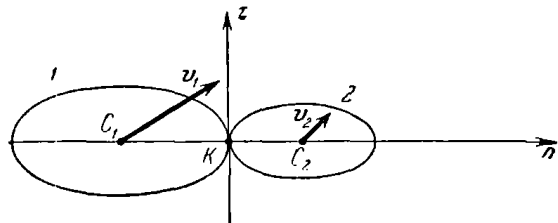


Рис. 164.

Удар называется упругим, если недеформированное состояние полностью восстанавливается.

Для рассмотрения прямого центрального неупругого удара двух тел введем обозначения:

№ тела	Масса тела	Скорости	
		в начале удара	в конце удара
1	m_1	v_1	} u
2	m_2	v_2	

Тогда проекция на ось n (рис. 165) общей скорости соударяющихся тел в конце удара равна:

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}$$

(ось n проведена вдоль линии центров).

Импульс мгновенной силы определяется формулой

$$S = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1n} - v_{2n}).$$

Для рассмотрения прямого центрального частично упругого удара двух тел разделим процесс удара на два этапа.

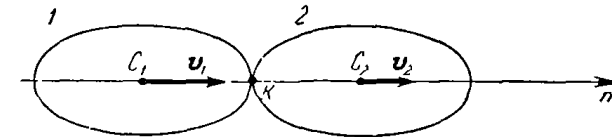


Рис. 165.

В течение первого этапа совершается деформация соударяющихся тел. В течение второго этапа — частичное восстановление недеформированного состояния. В момент окончания первого этапа и начала второго центры тяжести тел обладают одинаковыми скоростями, которые они имели бы в конце соответствующего неупругого удара. В конце второго этапа центры тяжести тел имеют уже различные скорости u_1 и u_2 . Коэффициентом восстановления недеформированного состояния k называется отношение импульса мгновенной силы второго этапа к импульсу мгновенной силы первого этапа:

$$k = \frac{S_{II}}{S_I}.$$

Введение в это определение мгновенных сил возвращает нас в теорию удара классической механики.

Коэффициент восстановления, являющийся безразмерной величиной, изменяется в пределах от 0 до 1 ($0 \leq k \leq 1$):
 при неупругом ударе $k = 0$,
 при частично упругом ударе $k < 1$,
 при упругом ударе $k = 1$.
 Введем обозначения:

№ тела	Масса тела	Скорости		
		в начале удара	в конце I этапа	в конце удара
1	m_1	v_1	}	u_1
2	m_2	v_2		u_2
		I этап		II этап

Тогда проекции на ось n скоростей соударяющихся тел в конце удара равны:

$$u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n}),$$

$$u_{2n} = u_n + k(u_n - v_{2n}),$$

где

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}$$

(ось n проведена вдоль линии центров $C_1 C_2$). Из этих формул можно получить выражение коэффициента восстановления

$$k = \frac{u_{1n} - u_n}{v_n - v_{1n}},$$

которое иногда используется в качестве определения этого понятия.

В случае упругого удара, т. е. при $k = 1$:

$$u_{1n} = 2u_n - v_{1n},$$

$$u_{2n} = 2u_n - v_{2n}.$$

Для рассмотрения прямого частично упругого удара тела о неподвижную плоскость введем обозначения:

№ тела	Масса тела	Скорости		
		в начале удара	в конце I этапа	в конце удара
1	m_1	v_1	}	u_1
2	∞	0		0

Тогда проекция на ось n скорости центра тяжести падающего тела в конце удара равна $u_{1n} = -k v_{1n}$, причем $k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$, где h_1 — высота свободного падения тел на неподвижную плоскость, h_2 — высота отражения тела после частично упругого удара (рис. 166).

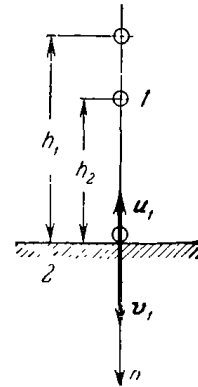


Рис. 166.

При рассмотрении косоугольного частично упругого удара двух тел поверхности соударяющихся тел считаются абсолютно

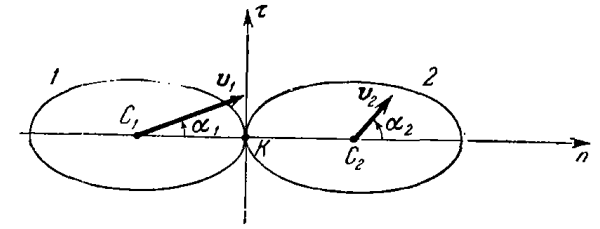


Рис. 167.

гладкими. Ось n проводится вдоль линии центров $C_1 C_2$ (рис. 167). Ось τ перпендикулярна к оси n . Проекции скоростей центров тяжести соударяющихся тел в начале удара имеют вид:

$$v_{1n} = v_1 \cos \alpha_1, \quad v_{2n} = v_2 \cos \alpha_2, \quad v_{1\tau} = v_1 \sin \alpha_1, \quad v_{2\tau} = v_2 \sin \alpha_2.$$

Проекции скоростей центров тяжести соударяющихся тел в конце удара (рис. 168) равны:

$$u_{1\tau} = v_{1\tau}, \quad u_{2\tau} = v_{2\tau}, \quad u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n}),$$

$$u_{2n} = u_n + k(u_n - v_{2n}),$$

где

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2},$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{u_{1\tau}}{u_{1n}} = \frac{v_{1\tau}}{u_n + k(u_n - v_{1n})},$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{u_{2\tau}}{u_{2n}} = \frac{v_{2\tau}}{u_n + k(u_n - v_{2n})}.$$

Модули скоростей центров тяжести соударяющихся тел в конце удара равны:

$$u_1 = \sqrt{u_{1\tau}^2 + u_{1n}^2}, \quad u_2 = \sqrt{u_{2\tau}^2 + u_{2n}^2}.$$

При изучении косоугольного частично упругого удара тела о неподвижную плоскость поверхности тела и неподвижной плоскости считаются абсолютно гладкими.

Направления осей n и τ указаны на рис. 169.

Проекции скорости центра тяжести падающего тела в начале удара имеют вид: $v_{1n} = v_1 \cos \alpha$, $v_{1\tau} = v_1 \sin \alpha$.

Проекции скорости центра тяжести падающего тела в конце удара равны:

$$u_{1\tau} = v_{1\tau}, \quad u_{1n} = -k v_{1n}.$$

Модуль скорости центра тяжести падающего тела в конце удара определяется формулой

$$u_1 = \sqrt{u_{1\tau}^2 + u_{1n}^2} = \sqrt{v_{1\tau}^2 + k^2 v_{1n}^2}.$$

Коэффициент восстановления вычисляется по формуле $k = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$, где α — угол падения, β — угол отражения.

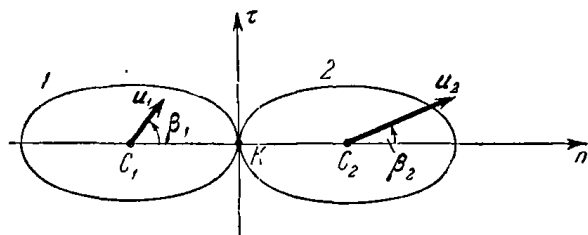


Рис. 168.

Задачи об определении скоростей соударяющихся тел в конце центрального косоугольного упругого удара рекомендуется решать в следующей последовательности:

- 1) направить ось n вдоль линии центров, ось τ — перпендикулярно к ней;
- 2) вычислить проекции на оси n и τ скоростей v_{1n} , v_{2n} , $v_{1\tau}$, $v_{2\tau}$ соударяющихся тел в начале удара;
- 3) вычислить проекцию общей скорости u_n соударяющихся тел на ось n в конце неупругого удара по формуле

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2};$$

- 4) вычислить проекции скоростей u_{1n} , u_{2n} , $u_{1\tau}$, $u_{2\tau}$ соударяющихся тел на оси n и τ в конце удара по формулам:

$$\begin{aligned} u_{1\tau} &= v_{1\tau}, & u_{2\tau} &= v_{2\tau}, \\ u_{1n} &= u_n + k(u_n - v_{1n}), \\ u_{2n} &= u_n + k(u_n - v_{2n}); \end{aligned}$$

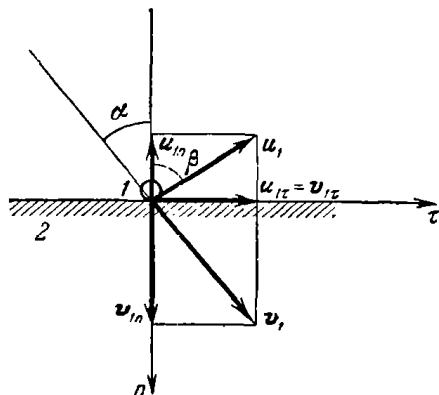


Рис. 169.

- 5) определить скорости обоих тел в конце удара. Модули скоростей равны:

$$u_1 = \sqrt{u_{1\tau}^2 + u_{1n}^2}, \quad u_2 = \sqrt{u_{2\tau}^2 + u_{2n}^2}.$$

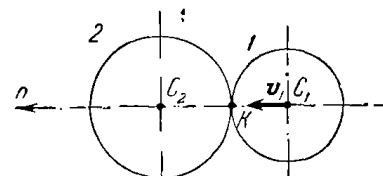
Направления скоростей определяются формулами:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg}(\widehat{n}, u_1) = \frac{u_{1\tau}}{u_{1n}}, \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \operatorname{tg}(\widehat{n}, u_2) = \frac{u_{2\tau}}{u_{2n}}.$$

При ударе тела о неподвижную плоскость следует считать массу неподвижной плоскости бесконечно большой, а скорость до удара равной нулю ($m_2 = \infty$, $v_2 = 0$).

В случае центральных прямых ударов двух тел вычисления упрощаются, так как проекции скоростей на ось τ обращаются в нуль.

Задача 429. Шар веса $P_1 = 10$ кг ударяется о неподвижный шар веса $P_2 = 20$ кг. Какую скорость v_1 должен иметь центр тяжести первого шара до удара, для того чтобы после неупругого удара их общая скорость равнялась 6 м/сек?



К задаче 429.

Решение. Ось n направим вдоль линии центров $C_1 C_2$ влево, как показано на рисунке.

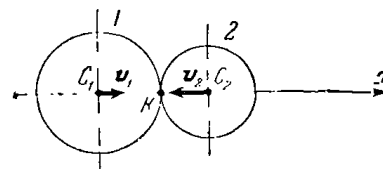
Проекции скоростей центров тяжести шаров на ось n в начале удара имеют вид:

$$v_{1n} = v_1, \quad v_{2n} = 0.$$

Проекция общей скорости шаров на ось n в конце неупругого удара равна

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}.$$

Из этого соотношения находим проекцию искомой скорости v_{1n} центра тяжести первого шара в начале неупругого удара:



К задаче 430.

$$\begin{aligned} v_{1n} &= \frac{(m_1 + m_2) u_n - m_2 v_{2n}}{m_1} = \\ &= \frac{(P_1 + P_2) u_n - P_2 v_{2n}}{P_1} = \\ &= \frac{(10 + 20) 6 - 20 \cdot 0}{10} = 18 \text{ м/сек.} \end{aligned}$$

Задача 430. Скорости центров тяжести двух шаров, двигавшихся навстречу друг другу, равны: $v_1 = 6$ м/сек, $v_2 = 10$ м/сек. Вес первого шара равен $P_1 = 10$ кг. Определить вес второго шара и величину ударного импульса S , если после неупругого удара шары остановились.

Решение. Направляем ось n вдоль линии центров C_1C_2 .

Проекция скоростей центров тяжести шаров на ось n в начале удара будут:

$$v_{1n} = 6 \text{ м/сек}, \quad v_{2n} = -10 \text{ м/сек}.$$

Так как, по условию, проекция общей скорости на ось n после неупругого удара равна нулю, то

$$\frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2} = 0,$$

т. е.

$$m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = 0,$$

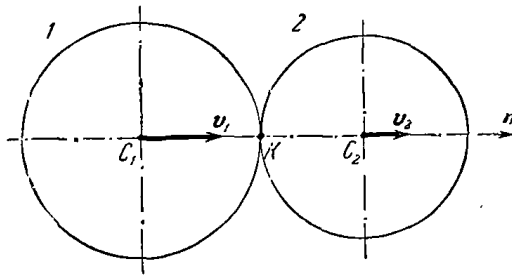
откуда

$$P_2 = -\frac{P_1 v_{1n}}{v_{2n}} = 6 \text{ кг}.$$

Величина ударного импульса будет:

$$S = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1n} - v_{2n}) = \frac{10 \cdot 6}{10 + 6} (6 + 10) = 60 \text{ кг} \cdot \text{сек}.$$

Задача 431. Определить скорости центров тяжести двух шаров веса $P_1 = 12 \text{ кг}$ и $P_2 = 10 \text{ кг}$ в конце частично упругого удара, если их скорости в начале удара были равны соответственно: $v_1 = 10 \text{ м/сек}$ и $v_2 = 6 \text{ м/сек}$. Шары двигались в одном направлении. Коэффициент восстановления k при ударе равен 0,8.



К задаче 431.

Решение. Направляем ось n вдоль линии центров C_1C_2 в сторону движения шаров. Проекция скоростей на ось n центров тяжести шаров в начале удара равны: $v_{1n} = 10 \text{ м/сек}$, $v_{2n} = 6 \text{ м/сек}$.

Проекция общей скорости на ось n в случае неупругого удара равна:

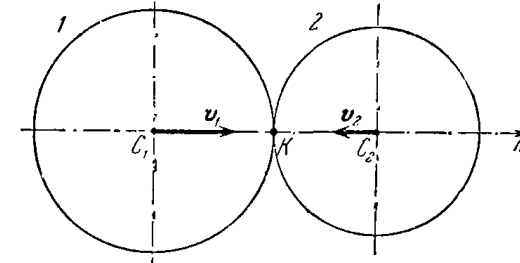
$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2} = \frac{12 \cdot 10 + 10 \cdot 6}{12 + 10} = 8,18 \text{ м/сек}.$$

Проекция искоемых скоростей центров тяжести шаров на ось n в конце упругого удара даются формулами:

$$u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n}) = 8,18 + 0,8(8,18 - 10) = 6,72 \text{ м/сек},$$

$$u_{2n} = u_n + k(u_n - v_{2n}) = 8,18 + 0,8(8,18 - 6) = 9,92 \text{ м/сек}.$$

Положительные значения u_{1n} и u_{2n} указывают, что в конце упругого удара шары будут двигаться в том же направлении. Первый шар, двигавшийся до удара быстрее второго, после удара будет от него отставать.



К задаче 432.

Задача 432. Решить предыдущую задачу в предположении, что до удара шары двигались навстречу друг другу.

Решение. Ось n направлена вдоль линии центров направо. Проекция скоростей на ось n центров тяжести шаров в начале удара будут: $v_{1n} = 10 \text{ м/сек}$, $v_{2n} = -6 \text{ м/сек}$.

Проекция общей скорости на ось n в случае неупругого удара равна

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2} = \frac{12 \cdot 10 - 10 \cdot 6}{12 + 10} = 2,73 \text{ м/сек}.$$

Проекция искоемых скоростей центров тяжести шаров на ось n в конце упругого удара определяются формулами:

$$u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n}) = 2,73 + 0,8(2,73 - 10) = -3,07 \text{ м/сек},$$

$$u_{2n} = u_n + k(u_n - v_{2n}) = 2,73 + 0,8(2,73 + 6) = 9,65 \text{ м/сек}.$$

Знаки u_{1n} и u_{2n} указывают, что после удара шары будут двигаться в разные стороны, т. е. первый шар влево, а второй шар направо.

Задача 433. С какой высоты h_1 падает шарик на неподвижную горизонтальную плиту, если после частично упругого удара он поднимается на высоту $h_2 = 81 \text{ см}$. Коэффициент восстановления равен 0,9.

Решение. Ось n направим по вертикали вниз. Скорость центра тяжести шарика в начале удара обозначим v_1 . Скорость неподвижной плоскости равна нулю: $v_2 = 0$. Масса ее m_2 бесконечно велика, т. е. $m_2 = \infty$. Проекция общей скорости u на ось n в случае неупругого удара равна

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_{1n} + v_{2n}}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = 0.$$

Проекция скорости центра тяжести шарика на ось n в конце удара равна $u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n})$. Так как $u_n = 0$, то $u_{1n} = -k v_{1n}$.

Знак минус указывает, что скорость шарика в конце удара направлена вверх. Зависимость между модулями скоростей центра тяжести шарика в начале и в конце удара имеет вид

$$u_1 = kv_1. \quad (1)$$

Так как шарик совершал свободное падение, то

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}. \quad (2)$$

После частично упругого удара шарик начинает подъем вверх со скоростью u_1 . В наивысшей точке подъема h_2 скорость шарика равна нулю. Следовательно,

$$u_1 = \sqrt{2gh_2}. \quad (3)$$

После подстановки значений v_1 и u_1 из формул (2) и (3) в формулу (1) находим:

$$\sqrt{h_2} = k \sqrt{h_1}, \quad (4)$$

откуда

$$h_1 = \frac{h_2}{k^2} = \frac{81}{0,9^2} = 1 \text{ м.}$$

Формула (4), записанная в виде

$$k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}, \quad (5)$$

дает возможность экспериментально определить коэффициент восстановления при частично упругом ударе.

В случае неупругого удара шарик от плоскости не отскакивает, т. е. $h_2 = 0$. Из формулы (5) получим: $k = 0$.

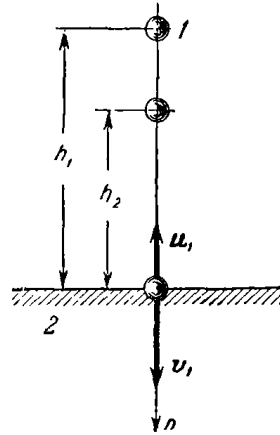
В случае упругого удара шарик должен отскочить в исходное положение, т. е. $h_2 = h_1$. Из формулы (5) находим: $k = 1$.

При частично упругом ударе $h_2 < h_1$ и, следовательно, $0 < k < 1$. Так, при ударе деревянного шарика о стальную плиту $k = 0,55$, при ударе шарика из слоновой кости о плиту из того же материала $k = 0,90$, при ударе стеклянного шарика о стеклянную плиту $k = 0,94$ и т. д.

Задача 434. В момент столкновения двух одинаковых поступательно движущихся шаров скорость центра тяжести левого шара 1 была направлена вдоль линии центров направо, а скорость центра тяжести правого шара 2 была перпендикулярна к линии центров.

Определить скорости центров тяжести шаров в конце удара, считая удар упругим.

Решение. Направим ось n вдоль линии центров C_1C_2 и ось τ — к ней перпендикулярно. Вычислим проекции скоростей v_1 и v_2



К задаче 433.

на оси n и τ :

$$v_{1n} = v_1, \quad v_{1\tau} = 0, \quad v_{2n} = 0, \quad v_{2\tau} = v_2.$$

Проекцию общей скорости шаров на ось n в случае неупругого удара вычисляем по формуле

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}.$$

Так как происходит удар двух одинаковых шаров, то $m_1 = m_2 = m$ и, следовательно,

$$u_n = \frac{v_{1n}}{2}. \quad (1)$$

Проекции скоростей центров тяжести шаров на касательную τ в начале и в конце удара равны, т. е.

$$u_{1\tau} = v_{1\tau} = 0, \quad u_{2\tau} = v_{2\tau} = v_2. \quad (2)$$

Проекции скоростей центров тяжести шаров на нормаль n в конце удара вычисляем по формулам:

$$u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n}),$$

$$u_{2n} = u_n + k(u_n - v_{2n}).$$

Учитывая значение u_n , определенное формулой (1), и то, что удар является упругим, т. е. $k = 1$, находим:

$$u_{1n} = 0, \quad u_{2n} = v_1. \quad (3)$$

Теперь определим модули скоростей центров тяжести шаров в конце удара по формулам:

$$u_1 = \sqrt{u_{1\tau}^2 + u_{1n}^2}, \quad u_2 = \sqrt{u_{2\tau}^2 + u_{2n}^2}.$$

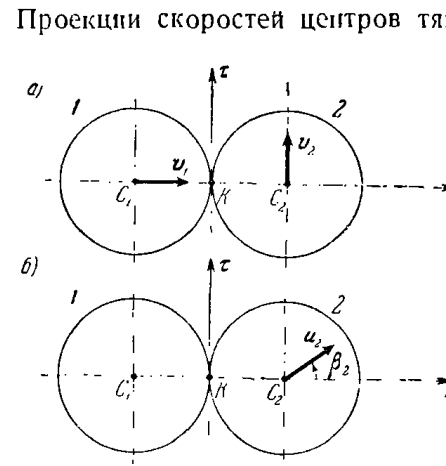
Воспользовавшись формулами (2) и (3), получим:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$

т. е. после упругого удара левый шар остается в покое. Направление скорости u_2 определяется с помощью угла β_2 (см. рис. б):

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{u_{2\tau}}{u_{2n}} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Задача 435. В момент столкновения двух одинаковых поступательно движущихся шаров скорости их центров тяжести были равны



К задаче 434.

по модулю $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = v$. Шары были расположены симметрично относительно оси τ , причем $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$ (см. рис. а). Определить скорости центров тяжести шаров в конце удара, считая удар упругим. Оси n и τ обозначены на рис. а.

Решение. Вычислим проекции \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 на оси n и τ :

$$v_{1n} = v \cos \alpha_1,$$

$$v_{1\tau} = v \sin \alpha_1,$$

$$v_{2n} = -v \cos \alpha_1,$$

$$v_{2\tau} = v \sin \alpha_1$$

(при вычислении этих проекций скоростей учитываем, что $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = v$ и $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$).

Проекцию общей скорости шаров на ось n в случае их неупругого удара вычисляем по формуле

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}.$$

После подстановки: $m_1 = m_2 = m$, $v_{1n} = v \cos \alpha_1$, $v_{2n} = -v \cos \alpha_1$ находим:

$$u_n = 0. \tag{1}$$

Проекции скоростей центров тяжести шаров на касательную τ в начале и в конце удара:

$$u_{1\tau} = v_{1\tau} = v \sin \alpha_1, \quad u_{2\tau} = v_{2\tau} = v \sin \alpha_1,$$

т. е.

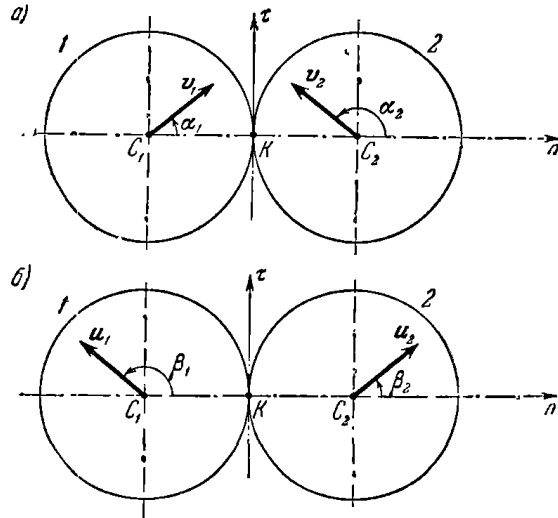
$$u_{1\tau} = u_{2\tau} = v \sin \alpha_1. \tag{2}$$

Проекции скоростей центров тяжести на нормаль n в конце удара вычисляются по формулам:

$$u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n}), \quad u_{2n} = u_n + k(u_n - v_{2n}).$$

Воспользовавшись значением u_n из формулы (1), для случая упругого удара, т. е. при $k = 1$, находим:

$$u_{1n} = -v \cos \alpha_1, \quad u_{2n} = v \cos \alpha_1. \tag{3}$$



К задаче 435.

Модули скоростей центров тяжести шаров в конце удара вычисляются по формулам:

$$u_1 = \sqrt{u_{1\tau}^2 + u_{1n}^2}, \quad u_2 = \sqrt{u_{2\tau}^2 + u_{2n}^2}.$$

Используя формулы (2) и (3), получим:

$$u_1 = u_2 = v.$$

Направления этих скоростей определяются с помощью углов β_1 и β_2 (см. рис. б):

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{u_{1\tau}}{u_{1n}} = -\operatorname{tg} \alpha_1, \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{u_{2\tau}}{u_{2n}} = \operatorname{tg} \alpha_1,$$

т. е.

$$\beta_1 = 180^\circ - \alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_2 = \alpha_1.$$

Итак, рассматриваемый косой удар не изменяет модулей скоростей центров тяжести шаров, а углы, которые векторы скорости образуют с осью n , меняются местами.

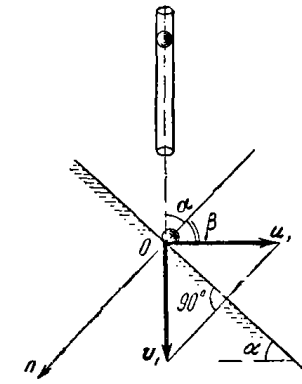
Задача 436. Свободно падающий шарик ударяется о неподвижную наклонную плоскость, расположенную под углом α к горизонту.

Определить направление скорости шарика в конце частично упругого удара, если коэффициент восстановления равен k .

Решение. Направим ось τ вдоль наклонной плоскости, а ось n к ней перпендикулярно в точке падения шарика на наклонную плоскость.

Углы α и β , обозначенные при вершине O , соответственно называются углом падения и углом отражения.

Определим проекции скорости центра тяжести шарика \mathbf{v}_1 в начале удара на оси n и τ :



К задаче 436.

$$v_{1n} = v_1 \cos \alpha, \quad v_{1\tau} = v_1 \sin \alpha.$$

Проекция на ось n общей скорости шарика и наклонной плоскости в случае неупругого удара вычисляется по формуле

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{m_1}{m_2} v_{1n} + v_{2n}}{\frac{m_1}{m_2} + 1}.$$

Масса неподвижной плоскости бесконечно велика, а скорость ее равна нулю, т. е. $m_2 = \infty$, $v_2 = 0$. Следовательно,

$$u_n = 0. \tag{1}$$

Проекция скорости центра тяжести шарика на ось τ в начале и в конце упругого удара равны, т. е.

$$u_{1\tau} = v_{1\tau} = v_1 \sin \alpha. \quad (2)$$

Проекция скорости центра тяжести шарика на ось n в конце упругого удара определяется выражением

$$u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n}).$$

Воспользовавшись формулой (1), находим:

$$u_{1n} = -kv_{1n} = -kv_1 \cos \alpha. \quad (3)$$

Искомый тангенс угла отражения β дается формулой

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|u_{1n}|}{|u_{1\tau}|} = \frac{v_1 \sin \alpha}{kv_1 \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{k}. \quad (4)$$

Формула (4) указывает удобный способ экспериментального определения коэффициента восстановления k при частично упругом ударе. Схема прибора основана на идее рассмотренной задачи. Наклонная плоскость может устанавливаться под разными углами α к горизонту, поворачиваясь вокруг оси O , перпендикулярной к плоскости рисунка. Свободное падение шарика обеспечивается вертикальными направляющими (см. рисунок). Угол падения α и угол отражения β измеряются с помощью угломера, установленного на приборе.

Из формулы (4) получим:

$$k = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}.$$

В случае упругого удара угол падения α равен углу отражения β , откуда $k = 1$.

2°. Теорема об изменении главного момента количества движения системы материальных точек в приложении к мгновенным силам. Приращение главного момента количества движения системы материальных точек относительно неподвижного центра при ударе равно векторной сумме моментов относительно того же центра импульсов внешних мгновенных сил:

$$(L_O)_2 - (L_O)_1 = \sum_{k=1}^n m_O [S(F_k^e)],$$

или в проекциях на оси декартовых координат:

$$(L_x)_2 - (L_x)_1 = \sum_{k=1}^n m_x [S(F_k^e)],$$

$$(L_y)_2 - (L_y)_1 = \sum_{k=1}^n m_y [S(F_k^e)],$$

$$(L_z)_2 - (L_z)_1 = \sum_{k=1}^n m_z [S(F_k^e)].$$

Та же теорема для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z , выражается формулой

$$I_z (\omega_{2z} - \omega_{1z}) = \sum_{k=1}^n m_z [S(F_k^e)].$$

Итак, действие ударного импульса на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, проявляется в скачкообразном изменении его угловой скорости.

Этой теоремой следует пользоваться в задачах об ударе по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, когда в число данных и искомых величин входят: ударные импульсы, момент инерции тела относительно оси вращения, угловая скорость тела в начале и в конце удара.

Задачи с помощью теоремы об изменении главного момента количества движения в приложении к мгновенным силам рекомендуется решать в следующей последовательности:

- 1) изобразить на рисунке внешние ударные импульсы;
- 2) вычислить сумму моментов ударных импульсов (т. е. импульсов всех внешних мгновенных сил) относительно оси z вращения тела;
- 3) подставив результат, полученный в предыдущем пункте, в уравнение

$$I_z (\omega_{2z} - \omega_{1z}) = \sum_{k=1}^n m_z [S(F_k^e)],$$

определить искомую величину.

Задача 437. На рис. *a* изображен штамп B веса P_1 , который приводится в движение посредством кулака A веса P_2 , вращающегося вокруг неподвижной оси z_2 . После удара выступа кулака о штамп в точке D штамп B поднимается, вращаясь при этом вокруг неподвижной оси z_1 . После прохождения выступа кулака штамп падает на обрабатываемую деталь E . Оси z_1 и z_2 перпендикулярны к плоскости рисунка. Расстояния точки D до этих осей вращения равны соответственно d_1 и d_2 . В момент начала удара выступа кулака о штамп в точке D кулак имел угловую скорость ω_{20} , а штамп находился в покое. Радиус инерции штампа относительно оси z_1 равен ρ_1 , ρ_2 — радиус инерции кулака относительно оси z_2 .

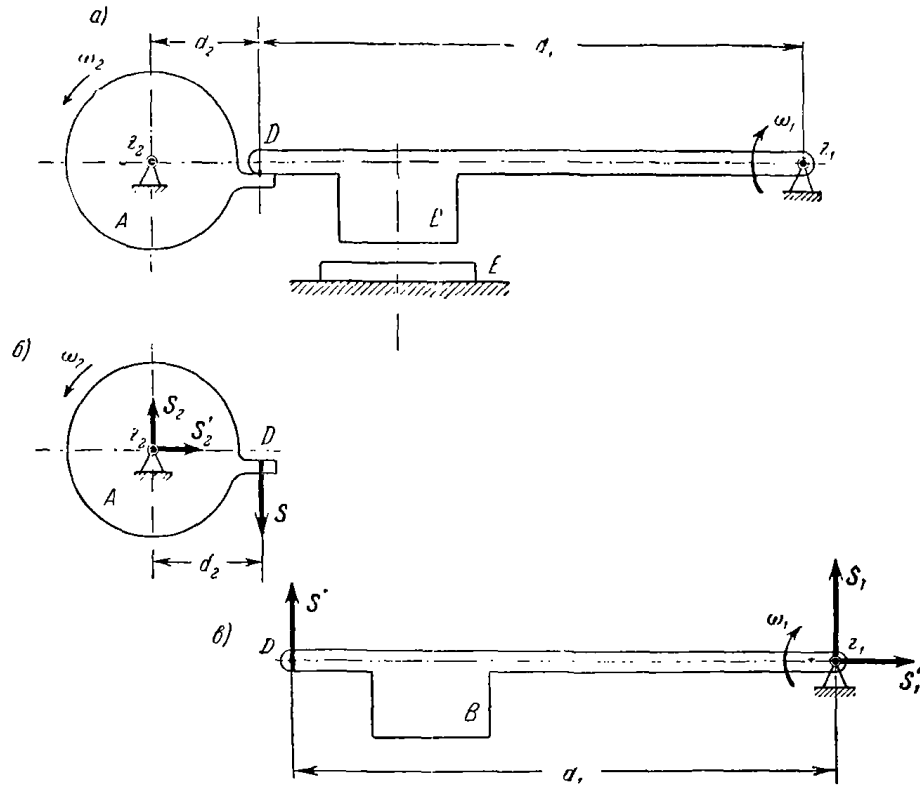
Определить угловую скорость штампа ω_1 в конце удара, считая удар неупругим, если $\frac{d_1}{d_2} = \lambda$.

Решение. Данная материальная система состоит из двух тел: кулака A и штампа B . Рассмотрим движение каждого из тел в отдельности.

Во время удара к кулаку A в точке D со стороны штампа B приложен ударный импульс S . При этом в опоре возникает реактив-

ный ударный импульс, составляющие которого S_2 и S'_2 изображены на рис. б.

Применим к движению кулака A теорему об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек в прило-



К задаче 437.

жении к мгновенным силам (относительно оси вращения z_2):

$$(L_{z_2})_2 - (L_{z_2})_1 = \sum_{k=1}^n m_{z_2} [S(F_k^e)].$$

В данном случае $(L_{z_2})_1 = I_{z_2} \omega_{20z}$, $(L_{z_2})_2 = I_{z_2} \omega_{2z}$, где ω_{2z} — проекция на ось z угловой скорости ω_2 кулака в конце удара, а

$$\sum_{k=1}^n m_{z_2} [S(F_k^e)] = -Sd_2.$$

Следовательно,

$$I_{z_2} (\omega_{2z} - \omega_{20z}) = -Sd_2. \quad (1)$$

Переходим к рассмотрению движения штампа B . Во время удара к штампу B приложен в точке D со стороны кулака A ударный импульс S' , причем на основании принципа равенства действия и противодействия, $S' = -S$. При ударе в опоре возникает реактивный ударный импульс, составляющие которого S_1 и S'_1 изображены на рис. в.

Применим к движению штампа B теорему об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек в приложении к мгновенным силам (относительно оси z_1):

$$(L_{z_1})_2 - (L_{z_1})_1 = \sum_{k=1}^n m_{z_1} [S(F_k^e)].$$

В данном случае $(L_{z_1})_1 = 0$, так как штамп в начале удара был в покое, $(L_{z_1})_2 = L_{z_1} \omega_{1z}$, где ω_{1z} — проекция на ось z искомой угловой скорости ω_1 штампа в конце неупругого удара, а

$$\sum_{k=1}^n m_{z_1} [S(F_k^e)] = S'd_1.$$

Следовательно,

$$I_{z_1} \omega_{1z} = S'd_1. \quad (2)$$

Учитывая, что $v_D = d_1 \omega_{1z} = -d_2 \omega_{2z}$, т. е.

$$\omega_{2z} = -\frac{d_1}{d_2} \omega_{1z} = -\lambda \omega_{1z}, \quad \text{а} \quad |S| = |S'|,$$

исключаем из системы уравнений (1) и (2) величины S и S' и определяем проекцию на ось z искомой угловой скорости ω_1 штампа B в конце удара:

$$\omega_{1z} = \frac{\lambda I_{z_2} \omega_{20z}}{I_{z_1} + \lambda^2 I_{z_2}}.$$

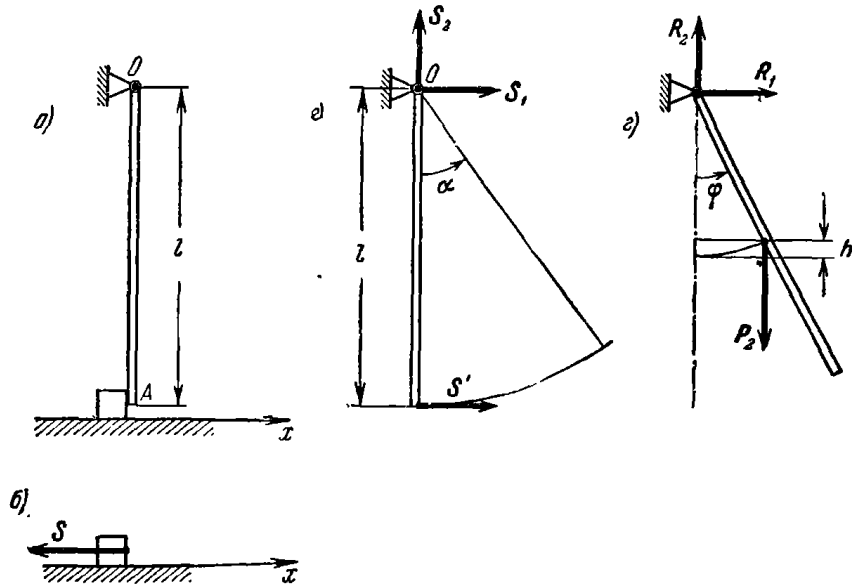
Так как $I_{z_1} = \frac{P_1}{g} \rho_1^2$, $I_{z_2} = \frac{P_2}{g} \rho_2^2$, то окончательно:

$$\omega_{1z} = \frac{\lambda P_2 \rho_2^2}{P_1 \rho_1^2 + \lambda^2 P_2 \rho_2^2} \omega_{20z}.$$

Задача 438. Груз веса P_1 , движущийся направо по горизонтальной плоскости, в момент столкновения с висящим вертикальным стержнем OA имеет скорость v . Определить величину ударного импульса S и наибольший угол отклонения α от вертикали стержня OA , который подвешен к неподвижной горизонтальной оси O , перпендикулярной к плоскости рисунка. Вес стержня P_2 , длина стержня l . Удар груза о стержень считать неупругим.

Решение. Направим ось x по горизонтали направо. Данная материальная система состоит из двух тел: груза и стержня. Рассмотрим движение каждого из тел в отдельности.

При ударе к грузу со стороны стержня приложен ударный импульс S , направленный справа налево (см. рис. б). Применим к



К задаче 438.

движению груза теорему об изменении количества движения материальной точки в приложении к мгновенным силам в проекции на ось x :

$$q_{2x} - q_{1x} = \sum_{k=1}^n S_x(F_k).$$

В данном случае

$$\frac{P_1}{g} v_1 - \frac{P_1}{g} v = -S, \quad (1)$$

где v_1 — скорость груза в конце неупругого удара.

Рассмотрим стержень OA . При ударе к стержню OA в точке A со стороны груза приложен ударный импульс S' , причем на основании принципа равенства действия и противодействия, $S' = -S$. При ударе в опоре O возникает реактивный ударный импульс, составляющие которого S_1 и S_2 изображены на рис. в.

Применим к движению стержня теорему об изменении главного момента количества движения системы материальных точек в приложении к мгновенным силам относительно оси вращения O , перпенди-

кулярной к плоскости рисунка:

$$I_O(\omega_{1z} - \omega_{0z}) = \sum_{k=1}^n m_O [S(F_k^e)].$$

В данном случае

$$\omega_{0z} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_O [S(F_k^e)] = S'l.$$

Следовательно,

$$I_O \omega_{1z} = S'l. \quad (2)$$

Учитывая, что $v_1 = l\omega_1$, и $|S| = |S'|$, исключаем v , S и S' из системы уравнений (1) и (2) и определяем проекцию на ось z угловой скорости ω_1 стержня OA в конце удара:

$$\omega_{1z} = \frac{P_1 v l}{g I_O + P_1 l^2}.$$

Момент инерции стержня $I_O = \frac{P_2 l^2}{3g}$. Поэтому

$$\omega_{1z} = \frac{3P_1 v}{(3P_1 + P_2)l}. \quad (3)$$

Ударный импульс S определяется в результате подстановки значения ω_{1z} из (3) в (1) либо в (2). Находим:

$$S = \frac{P_1 P_2}{g(3P_1 + P_2)} v.$$

Для вычисления наибольшего угла отклонения α стержня от вертикального положения применяем теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(F_k^e).$$

Угловая скорость стержня ω_1 в конце удара является в данном случае для последующего движения начальной, а угловая скорость при наибольшем отклонении равна нулю.

Работа составляющих опорных реакций R_1 и R_2 равна нулю, работа силы тяжести P_2 дается формулой $A(P_2) = -P_2 h$, где

$$h = \frac{l}{2} (1 - \cos \alpha)$$

(см. рис. г). Следовательно,

$$-\frac{I_O \omega_1^2}{2} = -\frac{P_2 l}{2} (1 - \cos \alpha). \quad (4)$$

Воспользовавшись формулой (3) и решив уравнение (4) относительно α , получим:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{3P_1 v^2}{gl(3P_1 + P_2)^2}.$$

Если бы в данной задаче не требовалось вычислить величину ударного импульса S , то угловую скорость ω_1 стержня в конце неупругого удара можно было бы определить проще. Для этого, вместо применения теорем динамики системы материальных точек к движениям груза и стержня в отдельности, можно было бы использовать теорему об изменении главного момента количеств движения к системе, состоящей из груза и стержня:

$$L_{z_2} - L_{z_1} = \sum_{k=1}^n m_z [S(F_k^e)].$$

В этом случае ударные импульсы S и S' оказываются внутренними и в уравнение не входят, т. е. $\sum_{k=1}^n m_z [S(F_k^e)] = 0$, где z — ось, проходящая через точку O перпендикулярно к неподвижной плоскости. Следовательно, $L_{z_2} - L_{z_1} = 0$, откуда $L_{z_2} = L_{z_1}$. Значит, имеет место случай сохранения главного момента количеств движения системы относительно оси z . Главный момент количеств движения системы в начале удара $L_{z_1} = \frac{P_1}{g} vl$, а в конце удара равен $L_{z_2} = \left(\frac{P_2 l^2}{3g} + \frac{P_1}{g} l^2\right) \omega_{1z}$. Приравняв эти значения L_{z_1} и L_{z_2} , получим определенное выше формулой (3) значение ω_{1z} .

3. Потеря кинетической энергии при ударе двух тел. При неупругом ударе двух тел происходит потеря кинетической энергии, которая расходуется на остаточную деформацию и нагревание тел.

При частично упругом ударе двух тел на первом этапе при возрастании деформации кинетическая энергия переходит в другие формы энергии. На втором этапе в процессе восстановления недеформированного состояния снова приобретает кинетическая энергия. При частично упругом ударе потеря кинетической энергии меньше чем при соответствующем неупругом ударе.

При упругом ударе происходит полное восстановление недеформированного состояния и, следовательно, потеря кинетической энергии равна нулю.

Пусть T_1 — кинетическая энергия системы в начале удара, T_2 — кинетическая энергия системы в конце удара, m_1 и m_2 — массы соударяющихся тел, v_1 и v_2 — скорости тел в начале удара, k — коэффициент восстановления недеформированного состояния при ударе. Тогда потеря кинетической энергии при прямом центральном частично

упругом ударе двух поступательно движущихся тел вычисляется по формуле

$$T_1 - T_2 = (1 - k^2) \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_{1n} - v_{2n})^2.$$

При неупругом ударе $k = 0$ и, следовательно,

$$T_1 - T_2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_{1n} - v_{2n})^2.$$

При упругом ударе $k = 1$ и, следовательно, $T_1 - T_2 = 0$.

Если до удара второе тело было в покое, т. е. $v_2 = 0$, то кинетическая энергия системы в начале удара равна $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$, а потеря кинетической энергии при ударе дается выражением

$$T_1 - T_2 = (1 - k^2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot T_1.$$

Решение задач на подсчет потери кинетической энергии при ударе двух тел следует выполнять по приведенным выше формулам.

Задача 439. а) К какому соотношению масс молота и наковальни следует стремиться при ковке металла?

б) К какому соотношению масс копра и сваи следует стремиться при забивке свай?

Решение. а) Обозначим: m_1 — масса молота, m_2 — масса наковальни и поковки, v_1 — скорость молота в начале удара, скорость наковальни в начале удара равна нулю.

Потерю кинетической энергии вычисляем по формуле

$$T_1 - T_2 = (1 - k^2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1. \quad (1)$$

Так как при ковке целесообразно получить большую остаточную деформацию отковываемого металла, то необходимо иметь большую потерю кинетической энергии. Для этого величина дроби $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$ должна быть близка к единице, т. е. масса наковальни и поковки должна быть значительно больше массы молота: $m_2 \gg m_1$.

Коэффициентом полезного действия η молота называется отношение полезной работы, затрачиваемой на деформацию металла, к работе, затрачиваемой на поднятие молота, т. е. отношение потери кинетической энергии при ударе к кинетической энергии системы в начале удара:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Воспользовавшись формулой (1), находим:

$$\eta = (1 - k^2) \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Так, если вес молота равен $2 m$, вес наковальни с поковкой равен $40 m$, коэффициент восстановления равен $k=0,6$, то коэффициент полезного действия $\eta=0,61$.

б) Обозначим: m_1 — масса копра, m_2 — масса забиваемой сваи. Скорость v_2 сваи в начале удара равна нулю. Следовательно, можно воспользоваться формулой (1).

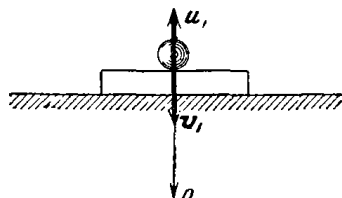
Так как при забивке сваи следует стремиться к меньшей деформации сваи, то необходимо иметь малую потерю кинетической энергии. Для этого величина дроби $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$ должна быть близка к нулю, т. е. масса сваи должна быть значительно меньше массы копра: $m_2 \ll m_1$.

Коэффициент полезного действия при забивке свай равен $\eta = \frac{T_2}{T_1}$, так как полезным является запас кинетической энергии, которая остается в системе в конце удара.

Задача 440. Шар веса $P_1=2$ кг, падая с высоты $h=1$ м на неподвижную плиту веса $P_2=20$ кг, отскакивает вверх на высоту $h_2=25$ см. Вычислить потерю кинетической энергии при ударе.

Решение. Потеря кинетической энергии при ударе тела о неподвижную плоскость вычисляется по формуле

$$T_1 - T_2 = (1 - k^2) \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2 \quad (1)$$



К задаче 440.

Для подсчета по формуле (1) надо предварительно найти величину коэффициента восстановления k . Направим ось n перпендикулярно к неподвижной плоскости.

Проекцию скорости шара u_1 на ось n вычисляем по формуле

$$u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n}), \quad (2)$$

где проекция общей скорости u на ось n равна

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}.$$

Так как плита в начале удара была неподвижна, т. е. $v_{2n}=0$, то $u_n = \frac{m_1 v_{1n}}{m_1 + m_2}$. Теперь формула (2) принимает вид

$$u_{1n} = \frac{m_1 - k m_2}{m_1 + m_2} v_{1n},$$

откуда

$$k = \frac{m_1}{m_2} - \frac{m_1 + m_2}{m_2} \frac{u_{1n}}{v_{1n}}. \quad (3)$$

Учитывая, что шар совершает свободное падение, запишем: $v_{1n} = v_1 = \sqrt{2gh_1}$. Аналогично: $u_{1n} = -u_1 = -\sqrt{2gh_2}$. Внося эти значения v_{1n} и u_{1n} в формулу (3), имеем:

$$k = \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_1 + m_2}{m_2} \sqrt{\frac{h_2}{h_1}},$$

или

$$k = \frac{P_1}{P_2} + \frac{P_1 + P_2}{P_2} \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}.$$

После подстановки численных значений получим: $k=0,65$.

Вычислив значение k , можно определить потерю кинетической энергии при ударе по формуле (1).

Учитывая, что $v_1^2 = 2gh_1$, запишем эту формулу в виде

$$T_1 - T_2 = (1 - k^2) \frac{P_1 \cdot P_2}{P_1 + P_2} h_1.$$

Используя численные значения, получим:

$$T_1 - T_2 = 1,05 \text{ кг} \cdot \text{м}.$$

4°. Удар по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. При ударе по телу, вращающемуся вокруг

неподвижной оси, в опорах возникают реактивные ударные импульсы S_A и S_B . Пусть ось z подвижной системы координат, связанной с телом, направлена вдоль оси вращения. Плоскость xz проведена через ось вращения и центр тяжести C тела. Ось y образует вместе с осями x и z правую систему осей координат (рис. 170). Предположим, что ударный импульс S приложен в точке D , лежащей на оси x . (Для этого достаточно найти точку D пересечения линии действия ударного импульса S с плоскостью xz , провести ось x через точку D перпендикулярно к оси вращения z и перенести ударный импульс S по его линии действия в точку D .) Пусть, далее: $OD=d$, $OA=a$, $OB=b$, $S = S_x i + S_y j + S_z k$, $S_A = S_{Ax} i + S_{Ay} j + S_{Az} k$, $S_B = S_{Bx} i + S_{By} j + S_{Bz} k$, ω_1 — угловая скорость тела в начале удара, ω_2 — угловая скорость тела в конце удара.

Для определения проекций реактивных ударных импульсов S_{Ax} , S_{Ay} , S_{Az} , S_{Bx} , S_{By} , S_{Bz} на подвижные оси декартовых координат, свя-

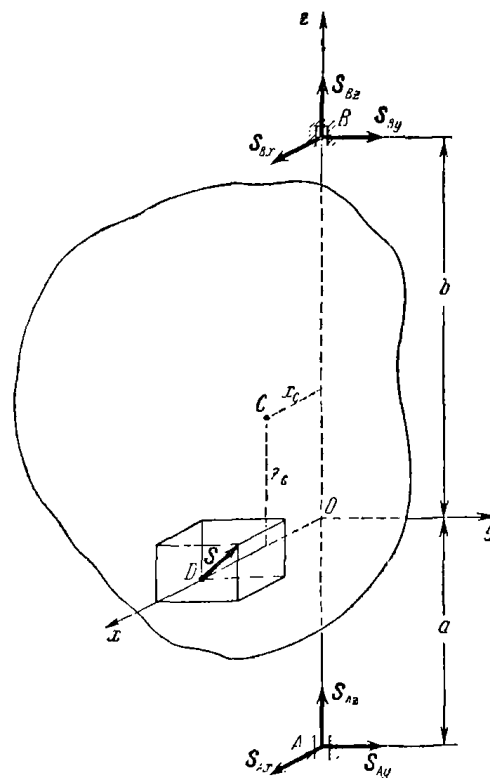


Рис. 170.

занные с телом, вращающимся вокруг неподвижной оси z , следует решить систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} S_{Ax} + S_{Bx} &= -S_x, \\ S_{Ay} + S_{By} &= Mx_C(\omega_{2z} - \omega_{1z}) - S_y, \\ S_{Az} + S_{Bz} &= -S_z, \\ S_{Ay}a - S_{By}b &= -I_{xz}(\omega_{2z} - \omega_{1z}), \\ -S_{Ax}a + S_{Bx}b &= S_zd - I_{yz}(\omega_{2z} - \omega_{1z}). \end{aligned} \right\} (1^*)$$

(Эта система уравнений является результатом применения теорем об изменении главного вектора количеств движения и об изменении главного момента количеств движения в приложении к мгновенным силам в проекциях на подвижные оси декартовых координат.)

Проекции реактивных ударных импульсов на ось вращения S_{Az} и S_{Bz} входят только в третье уравнение системы. Поэтому может быть вычислена только их сумма, а каждая из этих величин в отдельности не определяется. Если же верхняя опора B выполнена в виде подшипника, то $S_{Bz} = 0$, и из третьего уравнения системы вычисляется S_{Az} .

Для того чтобы при ударе по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, реактивные ударные импульсы S_A и S_B обращались в нуль (что является весьма существенным при выполнении конструкций, работающих на удар), должны быть удовлетворены следующие условия:

1) ударный импульс S должен быть направлен перпендикулярно к плоскости xz , проходящей через ось вращения и центр тяжести тела, т. е. $S_x = S_z = 0$ и $S = S_y j$;

2) ось вращения тела z должна быть главной осью инерции в точке пересечения с перпендикулярной плоскостью xu , содержащей ударный импульс S , т. е. $I_{xz} = I_{yz} = 0$;

3) точка приложения D ударного импульса S должна отстоять от оси вращения z на расстоянии приведенной длины физического маятника, ось пружины которого совпадает с осью вращения данного тела, т. е. $d = \frac{I_z}{Mx_C}$.

При отсутствии реактивных ударных импульсов S_A и S_B точка D приложения ударного импульса S называется *центром удара*.

Решение задач об определении положения центра удара сводится к выполнению трех указанных выше условий.

Задачи, в которых по заданным скоростям соударяющихся тел в начале удара, силам тяжести, моментам инерции этих тел и положениям их центров тяжести требуется определить реактивные ударные импульсы, рекомендуется решать в следующем порядке:

1) направить подвижные координатные оси, связанные с телом: ось z выбрать вдоль оси вращения, плоскость xz провести через

ось вращения и центр тяжести C тела, ось x направить через точку D пересечения линии действия ударного импульса S с плоскостью xz . Ось y выбрать так, чтобы вместе с осями x и z она образовала правую систему осей координат;

2) рассмотрев каждое из соударяющихся тел в отдельности, изобразить импульсы внешних мгновенных сил и применить теорему об изменении главного момента количеств движения в приложении к мгновенным силам к движению тела, вращающегося вокруг неподвижной оси; в случае поступательного движения одного из соударяющихся тел применить к этому телу теорему об изменении главного вектора количеств движения в приложении к мгновенным силам;

3) решив систему уравнений, составленных в предыдущем пункте, определить величину ударного импульса S в конце удара;

4) составить систему уравнений (1*) применительно к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси;

5) решив систему уравнений (1*), определить проекции искомых реактивных ударных импульсов.

Если в условии задачи заданы ударный импульс S и угловая скорость ω_z тела в конце удара, то второй и третий пункты решения задачи следует опустить.

Задача 441. По телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, нанесен удар, создающий реактивные ударные импульсы в опорах.

Как известно, при вращении неуравновешенного тела создаются дополнительные силы реакций в опорах.

Можно ли найти условия, при выполнении которых ударные импульсы в опорах и дополнительные силы реакций в опорах обратятся в нуль?

Решение. Для того чтобы дополнительные опорные реакции обратились в нуль, ось вращения твердого тела должна быть главной центральной осью инерции. При этом центр тяжести C лежит на оси вращения, т. е. эксцентриситет равен нулю:

$$\rho_C = 0. \quad (1)$$

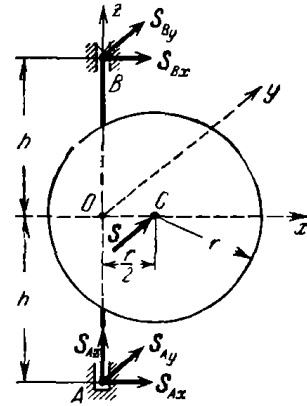
Для того чтобы ударные импульсы в опорах были равны нулю, должны быть выполнены три условия, изложенные в обзоре теории. Согласно третьему условию, точка приложения ударного импульса, называемая центром удара, должна отстоять от оси вращения на расстоянии d , равном приведенной длине физического маятника, ось пружины которого совмещена с осью вращения тела, т. е. $d = \frac{I_z}{Mx_C}$, где x_C — расстояние от центра тяжести C тела до оси вращения, т. е. эксцентриситет ρ_C . Следовательно,

$$d = \frac{I_z}{M\rho_C}. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что условия (1) и (2) несовместимы, так как при $\rho_C = 0$ получим $d = \infty$, т. е. точка приложения ударного импульса должна быть бесконечно удалена от оси вращения, что практически неосуществимо.

Итак, избавиться одновременно от реактивных ударных импульсов и от дополнительных сил реакций в опорах невозможно.

Задача 442. Пуля весом P_1 попадает в центр тяжести C неподвижной круглой мишени веса P_2 и радиуса r со скоростью v_1 , направленной перпендикулярно к плоскости мишени. Мишень может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, лежащей в ее плоскости и отстоящей от центра тяжести C мишени на расстоянии, равном половине радиуса. Определить величины реактивных ударных импульсов в подшипнике A и подшипнике B , считая удар неупругим: $AC = BC = h$. Мишень считать однородным круглым диском.



К задаче 442.

Решение. Выбираем подвижные оси координат, связанные с вращающейся мишенью; ось z совмещаем с осью вращения. Плоскость xz проводим через ось вращения z и центр тяжести C мишени. Ось x направляем через центр тяжести C , в котором приложен ударный импульс S . Ось y выбираем так, чтобы вместе с осями x и z она образовала правую систему координат.

Изображаем ударные импульсы внешних сил: S — ударный импульс, приложенный в центре тяжести C мишени, S_{Ax} , S_{Ay} , S_{Az} , S_{Bx} , S_{By} — составляющие реактивных ударных импульсов.

Так как величина ударного импульса S и угловая скорость ω_2 мишени в конце неупругого удара неизвестны, то для определения их рассмотрим в отдельности движение пули и мишени.

К пуле приложен ударный импульс S' со стороны мишени. Применим к движению пули теорему об изменении количества движения в приложении к мгновенным силам:

$$\frac{P_1}{g} v_2 - \frac{P_1}{g} v_1 = -S', \quad (1)$$

где v_1 — заданная скорость пули в начале удара, v_2 — неизвестная скорость пули в конце удара.

Запишем для движения мишени теорему об изменении главного момента количества движения в приложении к мгновенным силам относительно оси z :

$$I_z (\omega_{2z} - \omega_{1z}) = S' \frac{r}{2}.$$

В начале удара мишень была в покое, т. е. $\omega_{1z} = 0$. Момент инерции мишени относительно оси z равен

$$I_z = \frac{P_2 r^2}{4g} + \frac{P_2}{g} \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{P_2 r^2}{2g}.$$

Следовательно,

$$\frac{P_2 r^2}{2g} \omega_{2z} = S' \frac{r}{2}.$$

Учитывая, что $\frac{r}{2} \omega_{2z} = v_2$, находим:

$$\frac{P_2}{g} v_2 = \frac{S}{2}. \quad (2)$$

Решив систему уравнений (1) и (2) ($|S| = |S'|$), определим S и v_2 :

$$S = \frac{2P_1 P_2}{g(P_1 + 2P_2)} v_1, \quad (3)$$

$$v_2 = \frac{P_1 v_1}{P_1 + 2P_2}.$$

Так как $v_2 = \frac{r}{2} \omega_2$, то

$$\omega_2 = \frac{2P_1 v_1}{r(P_1 + 2P_2)}. \quad (4)$$

Для определения величин составляющих реактивных ударных импульсов запишем для мишени систему уравнений (1*):

$$\left. \begin{aligned} S_{Ax} + S_{Bx} &= -S_x, \\ S_{Ay} + S_{By} &= Mx_C (\omega_{2z} - \omega_{1z}) - S_y, \\ S_{Az} + S_{Bz} &= -S_z, \\ S_{Ax} a - S_{By} b &= -I_{xz} (\omega_{2z} - \omega_{1z}), \\ -S_{Ax} a + S_{Bx} b &= S_z d - I_{yz} (\omega_{2z} - \omega_{1z}). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ударный импульс S параллелен оси y . Следовательно,

$$S_x = 0, \quad S_y = S, \quad S_z = 0. \quad (5)$$

Координаты центра тяжести C мишени, лежащего на оси x , равны:

$$x_C = \frac{r}{2}, \quad y_C = 0. \quad (6)$$

Опора B является подшипником, т. е.

$$S_{Bz} = 0. \quad (7)$$

Ось y перпендикулярна к плоскости материальной симметрии xz мишени. Следовательно,

$$I_{yz} = 0. \quad (8)$$

Ось x является осью симметрии мишени. Следовательно,

$$I_{xz} = 0. \quad (9)$$

Угловая скорость мишени в начале удара равна нулю:

$$\omega_1 = 0. \quad (10)$$

Воспользовавшись формулами (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9) и (10) и учитывая, что $a = b = h$, представим систему уравнений (I) в виде:

$$\left. \begin{aligned} S_{Ax} + S_{Bx} &= 0, \\ S_{Ay} + S_{By} &= -\frac{P_1 P_2 v_1}{g(P_1 + 2P_2)}, \\ S_{Az} &= 0, \\ S_{Ay} h - S_{By} h &= 0, \\ -S_{Ax} h + S_{Bx} h &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Решив эту систему уравнений, находим искомые величины составляющих реактивных ударных импульсов в подпятнике A и подшипнике B :

$$\begin{aligned} S_{Ax} &= 0, & S_{Ay} &= -\frac{P_1 P_2 v_1}{2g(P_1 + 2P_2)}, & S_{Az} &= 0, \\ S_{Bx} &= 0, & S_{By} &= -\frac{P_1 P_2 v_1}{2g(P_1 + 2P_2)}. \end{aligned}$$

Задача 443. В какой точке мишени, рассмотренной в предыдущей задаче, должен быть применен ударный импульс S , для того чтобы он не передавался на опоры?

Решение. Для того чтобы ударный импульс S не передавался на опоры, должны быть выполнены три условия:

1) ударный импульс S должен быть направлен перпендикулярно к плоскости, проходящей через ось вращения z и центр тяжести тела. Это условие удовлетворяется;

2) ось вращения z должна быть главной осью инерции в точке пересечения с перпендикулярной плоскостью, в которой лежит ударный импульс S . Это условие также удовлетворяется, так как $I_{xz} = I_{yz} = 0$;

3) точка приложения ударного импульса S , называемая центром удара, должна отстоять от оси вращения z на расстоянии d , равном приведенной длине физического маятника, ось привеса которого совпадает с осью вращения тела: $d = \frac{I_z}{Mx_C}$.

Так как $I_z = \frac{P_2 r^2}{2g}$, $M = \frac{P_2}{g}$ и $x_C = \frac{r}{2}$, то $d = r$.

Итак, ударный импульс S должен быть применен в точке, отстоящей от оси вращения z на расстоянии r .

Этот результат можно непосредственно получить из решения предыдущей задачи.

Действительно, если расстояние от точки приложения ударного импульса S до оси вращения z вместо $\frac{r}{2}$ обозначить d , то $v_2 = d\omega_2$ и формулы (3) и (4) предыдущей задачи принимают вид

$$S = \frac{P_1 P_2 r^2 v_1}{g(2P_1 d^2 + P_2 r^2)} \quad (1)$$

и

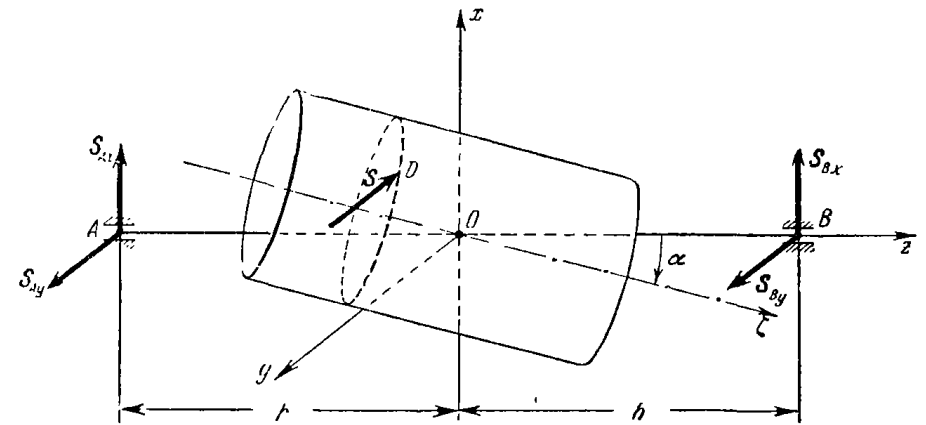
$$\omega_2 = \frac{2dP_1 v_1}{2P_1 d^2 + P_2 r^2}. \quad (2)$$

Эти значения S и ω_2 следует подставить в правую часть второго уравнения системы (I) и потребовать, чтобы она обратилась в нуль (при этом правые части всех уравнений системы (II) обратятся в нуль и, следовательно, реактивные ударные импульсы будут равны нулю):

$$Mx_C(\omega_{2z} - \omega_{1z}) - S_y = 0. \quad (3)$$

После подстановки в уравнение (3) значений S и ω_2 из формул (1) и (2) и решения уравнения (3) относительно d (при этом следует иметь в виду, что $x_C = \frac{r}{2}$, $M = \frac{P_2}{g}$ и $\omega_1 = 0$), находим определенное выше значение: $d = r$.

Задача 444. Прямой однородный круглый цилиндр веса P_1 длины $2l$ и с радиусом основания, равным r , может вращаться по кругу горизонтальной оси z , проходящей через его центр тяжести O .



К задаче 444.

Ось z образует с осью симметрии цилиндра ζ угол α . Плоскость xz совмещена с плоскостью материальной симметрии цилиндра. По бо-

ковой поверхности цилиндра, находившегося в покое, нанесится удар, причем ударный импульс $\mathbf{S} = -Sj$. Точка D приложения ударного импульса \mathbf{S} лежит на боковой поверхности цилиндра в плоскости xu , причем $x_D = 0,5r$. Определить реактивные ударные импульсы в подшипниках A и B , считая удар неупругим; $AO = OB = h$. Подвижные оси координат xuz связаны с цилиндром.

Решение. Изобразим импульсы внешних мгновенных сил: \mathbf{S} — ударный импульс, примененный к боковой поверхности цилиндра, S_{Ax} , S_{Ay} , S_{Bx} , S_{By} — составляющие реактивных ударных импульсов в подшипниках A и B .

Так как угловая скорость ω_z цилиндра в конце удара не задана, то для ее определения применим к движению цилиндра теорему об изменении главного момента количеств движения в приложении к мгновенным силам относительно оси вращения z :

$$I_z(\omega_{2z} - \omega_{1z}) = \sum_{k=1}^n m_k [S(F_k^e)]. \quad (1)$$

В данном случае

$$I_z = \frac{Pr^2}{2g}, \quad \omega_{1z} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_k [S(F_k^e)] = Sx_D = \frac{Sr}{2}.$$

Поэтому уравнение (1) принимает вид

$$\frac{Pr^2}{2g} \omega_{2z} = \frac{Sr}{2},$$

откуда

$$\omega_{2z} = \frac{gS}{Pr}. \quad (2)$$

Для определения величин составляющих реактивных ударных импульсов составим для цилиндра систему уравнений (1*):

$$\left. \begin{aligned} S_{Ax} + S_{Bx} &= -S_x, \\ S_{Ay} + S_{By} &= Mx_C(\omega_{2z} - \omega_{1z}) - S_y, \\ S_{Az} + S_{Bz} &= -S_z, \\ S_{Ay}a - S_{By}b &= -I_{xz}(\omega_{2z} - \omega_{1z}), \\ -S_{Ax}a + S_{Bx}b &= S_zd - I_{yz}(\omega_{2z} - \omega_{1z}). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

По условию $\mathbf{S} = -Sj$. Следовательно,

$$S_x = 0, \quad S_y = -S, \quad S_z = 0. \quad (3)$$

Центр тяжести C цилиндра расположен в начале координат O , т. е.

$$x_C = 0. \quad (4)$$

Ось u перпендикулярна к плоскости материальной симметрии xz в точке O , т. е.

$$I_{yz} = 0. \quad (5)$$

Центробежный момент инерции цилиндра I_{xz} был вычислен в решении задачи 314:

$$I_{xz} = \frac{P}{2g} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3} \right) \sin 2\alpha. \quad (6)$$

В начале удара цилиндр находился в покое, т. е.

$$\omega_1 = 0. \quad (7)$$

Опоры A и B являются подшипниками, поэтому

$$S_{Az} = S_{Bz} = 0. \quad (8)$$

Воспользовавшись формулами (2) — (8) и учитывая, что $a = b = h$ и $d = x_D = \frac{r}{2}$, запишем систему уравнений (1) в виде:

$$\begin{aligned} S_{Ax} + S_{Bx} &= 0, \\ S_{Ay} + S_{By} &= -S, \\ S_{Ay}h - S_{By}h &= -\frac{S}{2r} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3} \right) \sin 2\alpha, \\ -S_{Ax}h + S_{Bx}h &= 0. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений, находим искомые проекции составляющих реактивных ударных импульсов в подшипниках A и B :

$$\begin{aligned} S_{Ax} &= 0, \quad S_{Ay} = -\frac{S}{2} \left[\frac{1}{2rh} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3} \right) \sin 2\alpha + 1 \right], \\ S_{Bx} &= 0, \quad S_{By} = \frac{S}{2} \left[\frac{1}{2rh} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3} \right) \sin 2\alpha - 1 \right]. \end{aligned}$$

§ 2. Динамика материальной точки переменной массы

Если масса материальной точки изменяется в результате непрерывного присоединения или отделения частиц бесконечно малой массы, то уравнение движения этой точки имеет вид (уравнение И. В. Мещерского)

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dm}{dt} (\mathbf{u} - \mathbf{v}). \quad (1^*)$$

Здесь m — мгновенное значение массы материальной точки; \mathbf{v} — скорость материальной точки; \mathbf{u} — скорость присоединяющихся или

уходящих частиц; F — главный вектор внешних сил, действующих на точку переменной массы; $\Phi = \frac{dm}{dt} (\mathbf{u} - \mathbf{v})$ — реактивная сила.

Задача 445. Реактивный снаряд летит по прямой. Относительная скорость истечения газов из сопла снаряда постоянна и равна c .

Зная массу начального запаса горючего m_1^* и массу корпуса снаряда m_0 , определить его скорость в момент сгорания последней порции горючего. Силой сопротивления воздуха пренебречь; в начальный момент скорость снаряда равнялась нулю.

Решение. Масса снаряда m в данный момент равна сумме переменной массы горючего m_1 и массы корпуса снаряда

$$m = m_0 + m_1;$$

так как m_0 постоянна, то

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_1}{dt}.$$

Относительная скорость истечения газов

$$c = \mathbf{u} - \mathbf{v}.$$

Запишем теперь уравнение И. В. Мещерского в проекции на ось x (вдоль которой летит снаряд):

$$(m_0 + m_1) \frac{dv_x}{dt} = c_x \frac{dm_1}{dt} = -c \frac{dm_1}{dt}, \quad (1)$$

ибо

$$c_x = -c,$$

где c — модуль вектора относительной скорости.

Преобразуя (1), получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$dv_x = -c \frac{dm_1}{m_0 + m_1},$$

решая которое, имеем:

$$v_x = -c \ln(m_0 + m_1) + D.$$

Постоянную интегрирования D определяем из начального условия: при $t=0$ $v_x=0$, $m_1=m_1^*$, и окончательно получаем:

$$v_x = c \ln \frac{m_0 + m_1^*}{m_0 + m_1}. \quad (2)$$

В момент окончания сгорания горючего $m_1=0$ и

$$v_x = c \ln \left(1 + \frac{m_1^*}{m_0} \right) \quad (3)$$

(формула К. Э. Циолковского).

Задача 446. Висящая на нити однородная материальная точка, являющаяся в начальный момент времени шариком радиуса r_0 , имеющим массу m_0 , качается без трения и постепенно обмерзает.

Составить и решить уравнение движения маятника, предполагая, что вследствие обмерзания материальная точка испытывает непрерывное приращение массы, пропорциональное в единицу времени площади поверхности шарика (α — коэффициент пропорциональности). Массой нити пренебречь.

Решение. Уравнение движения маятника переменной массы получим, приравняв произведение мгновенного значения момента инерции маятника относительно оси подвеса $I = ml^2$ на проекцию углового ускорения $\epsilon_z = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, где φ — угол отклонения нити от вертикали, сумме моментов относительно оси подвеса силы тяжести и реактивной силы:

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi - l \frac{dm}{dt} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1)$$

Здесь второе слагаемое представляет момент реактивной силы Φ , причем в нашем случае ее модуль

$$|\Phi| = \left| \frac{dm}{dt} \right| \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| l,$$

ибо при обмерзании скорость присоединяющихся частиц равна нулю.

Замечая, что массы шарика в разные моменты времени относятся как кубы радиусов, имеем:

$$\frac{m}{m_0} = \left(\frac{r}{r_0} \right)^3,$$

т. е.

$$m = m_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^3$$

и

$$\frac{dm}{dt} = 3m_0 \frac{r^2}{r_0^3} \frac{dr}{dt}. \quad (2)$$

Тогда (1) принимает вид

$$m_0 l^2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^3 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -m_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^3 gl \sin \varphi - 3m_0 l^2 \frac{r^2}{r_0^3} \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt}.$$

По условию приращение массы, отнесенное ко времени, т. е. производная $\frac{dm}{dt}$, пропорциональна площади поверхности шарика в данный момент:

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi r^2 \alpha. \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), получаем:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{4\pi r_0^3}{3m_0} a = \gamma,$$

где γ — новая постоянная.

После интегрирования имеем:

$$r = r_0 + \gamma t. \quad (4)$$

Вводя вместо t в качестве независимой переменной величину $\tau = 1 + \frac{\gamma}{r_0} t$, перепишем (1) в виде

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{3}{\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{gr_0^3}{l\gamma^3} \varphi = 0. \quad (5)$$

Общее решение уравнения (5) может быть выражено через функции Бесселя и Неймана *) и записано в форме

$$\varphi = \frac{1}{\tau} \left[C_1 J_1 \left(\tau \sqrt{\frac{gr_0^3}{\gamma^3 l}} \right) + C_2 N_1 \left(\tau \sqrt{\frac{gr_0^3}{\gamma^3 l}} \right) \right].$$

Постоянные C_1 и C_2 подлежат определению из начальных условий.

*) См., например, Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, Гостехиздат, 1948.

ТЕОРИЯ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ И ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

§ 1. Устойчивость равновесия системы

Равновесие системы материальных точек называется устойчивым, если после сообщения точкам системы весьма малых начальных отклонений от положения равновесия и весьма малых начальных скоростей система в своем последующем движении будет весьма мало отклоняться от рассматриваемого равновесного положения.

Ограничимся изучением устойчивости равновесия системы, подчиненной голономным, стационарным и идеальным связям. Если такая система находится в консервативном силовом поле, то устойчивость равновесия системы определяется согласно теореме Лагранжа — Дирихле или теоремам Ляпунова. Теорема Лагранжа — Дирихле гласит: если в положении равновесия системы потенциальная энергия имеет минимум, то положение равновесия устойчиво.

Потенциальная энергия системы может быть разложена в ряд по степеням обобщенных координат. Это разложение начинается с членов не ниже второго порядка относительно координат, если за начало отсчета координат принято положение равновесия и потенциальная энергия в положении равновесия считается равной нулю

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} \right)_0 \cdot q_1^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0 q_1 q_2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_k^2} \right)_0 q_k^2 + \dots \right] \quad (1^*)$$

Если в положении равновесия значение потенциальной энергии не является минимальным, то для суждения об устойчивости равновесия следует применить теоремы А. М. Ляпунова, которые формулируются следующим образом.

а) Равновесие системы неустойчиво, если отсутствие минимума потенциальной энергии может быть определено по членам второго порядка в разложении потенциальной энергии (1*), без рассмотрения членов высших порядков.

б) Равновесие системы неустойчиво, если потенциальная энергия имеет в положении равновесия максимум, который может быть установлен из рассмотрения членов наименьшего порядка, действительно имеющих в разложении потенциальной энергии в ряд (1*).

При решении задач на устойчивость равновесия системы с одной степенью свободы, находящейся под действием потенциальных сил, рекомендуется следующий порядок действий:

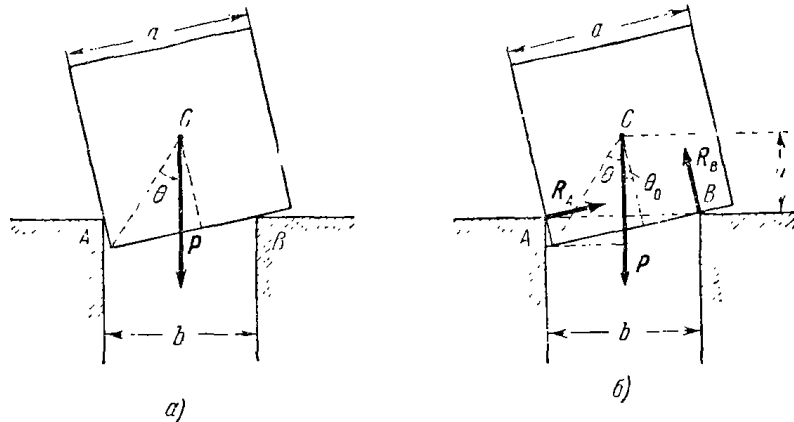
1) выделяем тело или систему тел, равновесие которых подлежит рассмотрению, и выбираем обобщенную координату, задание которой определяет положение системы;

2) составляем выражение потенциальной энергии системы;

3) вычисляя производную от потенциальной энергии системы по обобщенной координате и приравнявая ее нулю, находим возможные положения равновесия системы;

4) вычисляя значение второй производной от потенциальной энергии по обобщенной координате для каждого из возможных положений равновесия, находим знак этой производной, по которому судим об устойчивости.

Задача 447. Однородный призматический брус веса P квадратного сечения со стороной, равной a , опирается своими боковыми гранями на параллельные ребра двух опор, лежащие в одной горизонтальной плоскости на расстоянии b одно от другого, причем $b < a\sqrt{2}$ (рис. а).



К задаче 447.

Предполагая грани бруса гладкими, найти возможные положения равновесия и опорные реакции, соответствующие этим положениям. Определить условия устойчивости положений равновесия.

Решение. Рассмотрим равновесие призматического бруса, находящегося в консервативном силовом поле тяжести. Отбрасываем мысленно опоры и заменим их действие реакциями R_A и R_B (рис. б).

Выбираем далее обобщенную координату, определяющую положение бруса. За обобщенную координату принимаем угол θ , образованный диагональю вертикального поперечного сечения бруса с вертикалью.

Находим высоту u центра тяжести над прямой AB (рис. б):

$$u = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \theta - b \sin \theta_0 \cos \theta_0, \quad (1)$$

или

$$u = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \theta - \frac{b}{2} \sin 2\theta_0. \quad (2)$$

Но углы θ и θ_0 связаны зависимостью

$$2\theta_0 = \frac{\pi}{2} - 2\theta \quad (3)$$

и, следовательно,

$$u = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \theta - \frac{b}{2} \sin 2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right), \quad (4)$$

или

$$u = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \theta - \frac{b}{2} \cos 2\theta. \quad (5)$$

Так как потенциальная энергия силы тяжести равна произведению веса на высоту

$$\Pi = P \cdot u,$$

то, учитывая (5), имеем:

$$\Pi = P \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \cos \theta - \frac{b}{2} \cos 2\theta \right).$$

Находим производную от Π по θ и приравняем ее нулю:

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{d\Pi}{d\theta} = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}} + 2b \cos \theta \right) \sin \theta = 0. \quad (6)$$

Из этого уравнения следует, что возможны два положения равновесия. Первое положение равновесия будет при $\sin \theta = 0$, или $\theta = 0$.

Второе положение равновесия будет при

$$-\frac{a}{\sqrt{2}} + 2b \cos \theta = 0, \quad (7)$$

или

$$\cos \theta = \frac{a}{2\sqrt{2}b}. \quad (8)$$

Это положение равновесия возможно, если

$$\frac{a}{2} \leq b\sqrt{2}. \quad (9)$$

Найдем теперь вторую производную:

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = -\frac{a}{\sqrt{2}} \cos \theta + 2b \cos 2\theta. \quad (10)$$

Для решения вопроса об устойчивости равновесия следует найти знак этой производной для каждого из возможных положений равновесия. В первом положении $\theta = \theta_1 = 0$. Подставляя это значение в уравнение (10), имеем:

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} \Big|_{\theta=0} = -\frac{a}{\sqrt{2}} + 2b. \quad (11)$$

Следовательно, по теореме Лагранжа — Дирихле это положение равновесия устойчиво, если

$$b > \frac{a}{2\sqrt{2}}. \quad (12)$$

В противном случае положение равновесия неустойчиво.

Во втором положении равновесия

$$\theta = \theta_2 = \arccos \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{b} \right). \quad (13)$$

Подставляя это значение угла в уравнение (10), находим:

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} \Big|_{\theta=\theta_2} = \frac{1}{b} \left(\frac{a^2}{4} - 2b^2 \right). \quad (14)$$

Но, согласно (9),

$$\frac{a^2}{4} - 2b^2 < 0. \quad (15)$$

Следовательно, заключаем, что

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} \Big|_{\theta_2} < 0, \quad (16)$$

т. е. положение равновесия $\theta = \theta_2$, по второй теореме Ляпунова, неустойчиво. Исключение составляет случай, когда $\theta = 0$ и

$$\frac{a^2}{4} - 2b^2 = 0, \quad (17)$$

что соответствует первому положению равновесия, рассмотренному ранее.

Возможные положения равновесия твердого тела могут быть определены и другим путем. Составим три уравнения равновесия для произвольного положения бруса (рис. б), определяемого углом θ .

Первое уравнение — равенство нулю суммы проекций всех сил на горизонтальную ось:

$$R_A \cos \theta_0 - R_B \sin \theta_0 = 0. \quad (18)$$

Второе уравнение — равенство нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось:

$$R_A \sin \theta_0 + R_B \cos \theta_0 - P = 0. \quad (19)$$

Третье уравнение — равенство нулю суммы моментов сил относительно точки А:

$$R_B \cdot b \cos \theta_0 - P \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \sin \theta + b \sin^2 \theta_0 \right) = 0. \quad (20)$$

Из уравнений (18) и (19) находим:

$$R_B = P \cos \theta_0. \quad (21)$$

Подставляя это значение в уравнение (20), имеем:

$$Pb \cos^2 \theta_0 - P \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \sin \theta + b \sin^2 \theta_0 \right) = 0, \quad (22)$$

или

$$b \cos 2\theta_0 - \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \theta = 0, \quad (23)$$

$$b \cos 2 \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) - \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \theta = 0, \quad (24)$$

$$b \sin 2\theta - \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \theta = 0 \quad (25)$$

и окончательно

$$\sin \theta \left(2b \cos \theta - \frac{a}{\sqrt{2}} \right) = 0, \quad (26)$$

откуда находятся значения θ , соответствующие двум возможным положениям равновесия:

1) $\sin \theta = 0$ и, следовательно, $\theta = \theta_1 = 0$;

2) $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}a}{4b}$ и, следовательно, $\theta = \theta_2 = \arccos \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{b} \right)$.

Первое решение соответствует симметричному положению бруса, при котором его грани наклонены под углом 45° к горизонту.

Второе решение возможно, если $a < 2b\sqrt{2}$. При $a = 2b\sqrt{2}$ находим $\cos \theta_2 = 1$, т. е. $\sin \theta_2 = 0$, и мы возвращаемся к первому случаю.

Находим значения реакций в первом возможном положении равновесия:

$$R_A = R_B = \frac{\sqrt{2}}{2} P; \quad (27)$$

во втором положении равновесия:

$$\left. \begin{aligned} R_A &= \frac{\sqrt{2}}{4b} \sqrt{4b^2 - a} \sqrt{8b^2 - a^2} P, \\ R_B &= \frac{1}{4b} (a + \sqrt{8b^2 - a^2}) P. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Сопоставляя оба способа решения, видим, что первый способ позволяет прямым путем определить возможные положения равновесия системы и характер устойчивости этих положений равновесия. Однако этот способ не приводит к нахождению реакций опор. Второй способ позволяет непосредственно определить возможные положения равновесия системы и соответствующие им реакции опор, но не оценивает устойчивости равновесия системы и характер устойчивости этих положений равновесия.

Конечно, после определения реакций и положений равновесия по этому способу для ответа на вопрос об устойчивости равновесия надо вернуться к теореме Лагранжа — Дирихле.

§ 2. Свободные колебания системы с одной степенью свободы

Механическая система называется системой с одной степенью свободы, если ее положение в пространстве может быть однозначно определено заданием одной величины q , называемой обобщенной координатой. Движение системы в пространстве при этом описывается зависимостью обобщенной координаты от времени.

Принимая положение устойчивого равновесия за начало отсчета обобщенной координаты и за нулевой уровень потенциальной энергии, рассмотрим малые движения системы около этого положения равновесия. Отклонение системы от положения равновесия при таком выборе начала отсчета будет определяться значением обобщенной координаты.

Полагая при составлении дифференциальных уравнений малых движений обобщенные координаты (отсчитываемые от положения равновесия) и обобщенные скорости малыми величинами, ограничимся в дифференциальных уравнениях движения линейными членами. Этот прием, заключающийся в отбрасывании в нелинейных дифференциальных уравнениях членов, содержащих квадрат и более высокие степени обобщенных координат и скоростей, называется линеаризацией уравнений. Такая линеаризация, естественно, в известной мере искажает действительную картину движений, однако чем меньше отклонения системы от положения устойчивого равновесия, тем точнее будут описывать линеаризованные уравнения движение системы. Линеаризация дифференциальных уравнений позволяет получить замкнутое решение для таких систем, для которых нахождение интегралов точной,

нелинейной системы уравнений в конечном виде, как правило, невозможно.

Удобным способом составления дифференциальных уравнений малых колебаний системы является использование уравнений Лагранжа. Эти уравнения для системы с одной степенью свободы имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \quad (1^*)$$

где T — кинетическая энергия системы, выраженная через обобщенную координату q и обобщенную скорость \dot{q} ; Q — обобщенная сила.

Кинетическая энергия системы, подчиненной стационарным связям, выражается через обобщенные координаты и скорости формулой

$$T = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2, \quad (2^*)$$

где $A(q)$ является положительной функцией обобщенной координаты q . Далее, для линеаризации выражения кинетической энергии разлагаем $A(q)$ в ряд Маклорена

$$A(q) = A(0) + A'(0)q + \frac{A''(0)}{2!}q^2 + \dots \quad (3^*)$$

Внося это значение в формулу (2*), имеем:

$$T = \frac{1}{2} A(0) \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \left[A'(0)q + \frac{A''(0)}{2}q^2 + \dots \right] \dot{q}^2. \quad (4^*)$$

Тогда, полагая q и \dot{q} малыми величинами, приближенно принимаем

$$T = \frac{1}{2} A(0) \dot{q}^2 \equiv \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad (5^*)$$

где для краткости постоянная $A(0)$ обозначена a .

Эта постоянная всегда положительна. Ее называют инерционным коэффициентом. Для линейных обобщенных координат инерционный коэффициент a имеет размерность массы, для угловых координат — размерность момента инерции твердого тела.

Потенциальная энергия системы является функцией обобщенной координаты

$$\Pi = \Pi(q). \quad (6^*)$$

Разложим эту функцию в ряд Маклорена около положения устойчивого равновесия

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \Pi'(0)q + \frac{1}{2} \Pi''(0)q^2 + \frac{\Pi'''(0)}{3!}q^3 + \dots \quad (7^*)$$

В этом выражении

$$\Pi(0) = 0, \quad (8^*)$$

так как положение равновесия выбрано за нулевой уровень потенциальной энергии. Обобщенная сила в положении равновесия также равна нулю, следовательно,

$$Q = \left(-\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}} \right)_{q=0} = 0, \quad (9^*)$$

и поэтому ряд (7*) начинается с третьего слагаемого. Отбрасывая члены более высокого порядка и обозначая для краткости $\Pi''(0) = c$, имеем:

$$\Pi(q) = \frac{1}{2} cq^2, \quad (10^*)$$

где постоянная c называется квазиупругим коэффициентом. В случае устойчивого равновесия $c > 0$. Внося значения кинетической (5*) и потенциальной (10*) энергий в уравнение Лагранжа (1*), получаем дифференциальное уравнение малых свободных колебаний системы с одной степенью свободы

$$a\ddot{q} + cq = 0. \quad (11^*)$$

Это уравнение имеет структуру, аналогичную дифференциальному уравнению свободных колебаний материальной точки, возникающих под действием линейной восстанавливающей силы. Общий интеграл уравнения (11*) имеет вид

$$q = A \sin(kt + \alpha), \quad (12^*)$$

где для краткости обозначено $k^2 = \frac{c}{a}$. Здесь A — амплитуда колебаний, α — начальная фаза, $kt + \alpha$ — фаза колебаний, k — частота колебаний.

Амплитуда и начальная фаза колебаний определяются по начальным условиям. Обозначая начальные значения обобщенной координаты и ее производной при $t=0$ через $q=q_0$, $\dot{q}=\dot{q}_0$, имеем:

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{k^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{kq_0}{\dot{q}_0}. \quad (13^*)$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}}. \quad (14)$$

Свободные, или, иначе, собственные колебания системы, определяемые уравнением (12*), являются гармоническими колебаниями. Их частота и период не зависят от начальных данных — это свойство называется изохронностью малых колебаний.

Следует заметить, что дифференциальное уравнение свободных колебаний (11*) может быть, конечно, составлено и без применения уравнений Лагранжа.

При решении задач на свободные колебания системы с одной степенью свободы рекомендуется следующий порядок действий.

Первый способ — применение уравнений Лагранжа:

- 1) выбираем обобщенную координату q ;
- 2) составляем выражение кинетической энергии T ;
- 3) находим потенциальную энергию Π (только в случае, если система является консервативной) или вычисляем значение обобщенной силы;
- 4) подставляя T и Π (или выражение обобщенной силы) в уравнение Лагранжа, получаем дифференциальное уравнение малых колебаний;
- 5) интегрируя это уравнение и определяя произвольные постоянные интегрирования, находим уравнение движения системы;
- 6) определяем период колебаний и другие искомые величины.

Второй способ — применение основного уравнения динамики или одной из общих теорем динамики системы:

- 1) исходя из условий задачи, выбираем путь составления дифференциального уравнения — основное уравнение динамики, теорему о движении центра инерции, теорему об изменении кинетической энергии, теорему об изменении главного момента количества движения;

2) применяя избранную теорему, составляем дифференциальное уравнение малых колебаний системы;

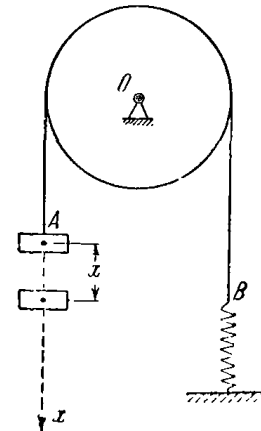
3) интегрируя это дифференциальное уравнение, определяем по начальным данным произвольные постоянные интегрирования;

4) находим далее период колебаний и остальные искомые величины.

Задача 448. Груз веса P подвешен к нерастяжимой нити AB , перекинутой через блок с неподвижной осью O . Вес блока F . Его масса распределена равномерно по поверхности круга радиуса r . Конец нити B прикреплен к вертикальной пружине, коэффициент жесткости которой равен c . Определить колебания груза,

если в начальный момент груз находился в покое, его вес уравновешивался натяжением пружины и ему сообщили начальную скорость v_0 , направленную по вертикали вниз. Трением между осью блока и подшипниками пренебречь. Весом нити пренебрегаем.

Решение. Воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. Выбираем ось x с началом в положении равновесия груза и направим ее по вертикали вниз. Тогда координата x груза в произволь-



К задаче 448.

ный момент времени полностью определяет положение системы и может быть принята за обобщенную координату.

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии груза и кинетической энергии блока:

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{I_z\omega_z^2}{2} = \frac{P}{2g}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{Fr^2}{2g}\omega_z^2. \quad (1)$$

Напоминаем, что $I_z = \frac{Mr^2}{2} = \frac{Fr^2}{2g}$.

Скорость груза равна по величине скорости точки на ободе блока

$$\dot{x} = r \cdot \omega_z. \quad (2)$$

Следовательно, окончательно выражение кинетической энергии системы через обобщенную скорость принимает вид

$$T = \frac{1}{2g}\left(P + \frac{F}{2}\right)\dot{x}^2. \quad (3)$$

Для определения обобщенной силы дадим системе возможное перемещение δx и составим элементарную работу задаваемых сил. Элементарная работа складывается из работы силы тяжести груза и работы упругой силы пружины

$$\delta A = P \cdot \delta x - c(x + \Delta)\delta x = (P - c \cdot \Delta - c \cdot x)\delta x = -cx \cdot \delta x, \quad (4)$$

ибо в положении равновесия $c\Delta = P$. Буквой Δ обозначено статическое удлинение пружины. Обобщенной силой является коэффициент при возможном перемещении δx в выражении для элементарной работы

$$Q = -cx. \quad (5)$$

Заметим, что в этой задаче обобщенная сила Q может быть легко вычислена и другим путем. Составим выражение потенциальной энергии системы, выбрав за нулевой уровень положение равновесия груза P . Тогда

$$\Pi = \frac{1}{2}cx^2$$

и обобщенная сила равна

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -cx,$$

что совпадает с (5).

Составляем уравнение Лагранжа. Так как

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \left(P + \frac{F}{2}\right)\frac{\dot{x}}{g}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

то

$$\left(P + \frac{F}{2}\right)\frac{\ddot{x}}{g} = -cx \quad (7)$$

или

$$\ddot{x} + \frac{cg}{P + 0,5F}x = 0. \quad (8)$$

Решение этого однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$x = a \sin(kt + \beta), \quad (9)$$

где частота k находится из равенства

$$k^2 = \frac{cg}{P + 0,5F}. \quad (10)$$

Произвольные постоянные интегрирования a и β определяются из начальных условий:

$$\text{при } t=0 \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = v_0. \quad (11)$$

Подставляя эти значения в (9), находим:

$$0 = a \sin \beta \text{ или } \beta = 0. \quad (12)$$

Далее, из (9) имеем:

$$\dot{x} = ak \cos kt, \quad (13)$$

и, следовательно, при $t=0$

$$v_0 = ak \text{ или } a = \frac{v_0}{k}. \quad (14)$$

Внося значения произвольных постоянных в (9), получаем окончательно:

$$x = \frac{v_0}{k} \sin kt. \quad (15)$$

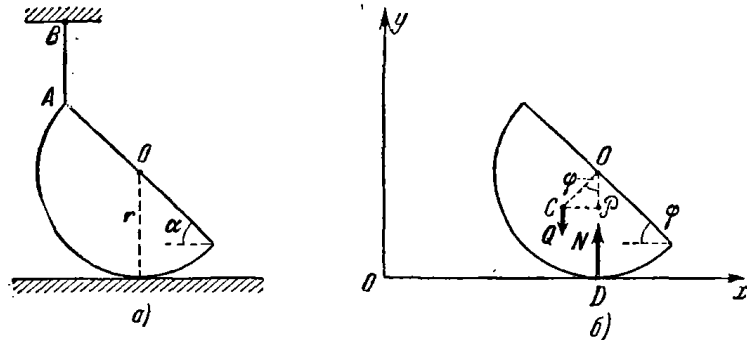
Период свободных колебаний груза

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{P + 0,5F}{cg}}. \quad (16)$$

Задача 449. Полушар веса Q и радиуса r удерживается в равновесии на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости нитью AB . При этом плоская часть поверхности полушара составляет угол α с горизонтом (рис. а). Определить после обрыва нити AB скорость центра O и ее максимальное значение, наибольшее давление полушара на горизонтальную плоскость. Найти также, полагая угол α малым, приведенную длину эквивалентного математического маятника.

Решение. После обрыва нити (рис. б) на полушар действуют две силы, вес Q и реакция гладкой плоскости N . Обе силы направлены по вертикали. Согласно теореме о движении центра инерции ускорение центра тяжести C будет также направлено вертикально. Так как начальная скорость точки C , так же как и остальных точек полушара, равнялась нулю, то центр инерции будет двигаться прямо-

линейно по вертикали. Центр полушара O находится от гладкой плоскости на постоянном расстоянии r . Следовательно, точка O перемещается по горизонтальной прямой, параллельной опорной плоскости. Таким образом, скорость точки C направлена по вертикали, скорость точки O — по горизонтали. Восстанавливая к скоростям этих двух точек перпендикуляры, находим мгновенный центр скоростей \mathcal{P} .



К задаче 449.

Применяя теорему об изменении кинетической энергии к перемещению полушара из начального положения, определяемого углом α , в произвольное положение (угол φ), имеем, обозначая OC через l :

$$\frac{1}{2} I_{\mathcal{P}} \dot{\varphi}^2 = mgl (\cos \varphi - \cos \alpha). \quad (1)$$

В левой части равенства стоит выражение кинетической энергии в конце перемещения (в начальный момент кинетическая энергия полушара равнялась нулю, так как он находился в покое). В правой части подсчитана работа силы тяжести при переходе полушара из начального положения в конечное. Работа реакции N равна нулю, так как эта реакция направлена перпендикулярно к перемещению точки D .

Момент инерции полушара относительно мгновенного центра скоростей \mathcal{P} может быть выражен на основании теоремы Штейнера следующим образом:

$$I_{\mathcal{P}} = I_C + ml^2 \sin^2 \varphi. \quad (2)$$

Таким образом, $I_{\mathcal{P}}$ является известной функцией угла φ . Определим I_C — момент инерции полушара относительно горизонтальной оси, проходящей через центр инерции и перпендикулярной к плоскости чертежа. Момент инерции однородного шара $2I_0$ относительно любой центральной оси равен

$$2I_0 = \frac{2}{5} Mr^2 = \frac{2}{5} (2m) r^2,$$

где $M = 2m$ — масса однородного шара.

Тогда момент инерции однородного полушара относительно горизонтальной оси, перпендикулярной к плоскости чертежа и проходящей через точку O , будет

$$I_0 = \frac{2}{5} mr^2.$$

Расстояние центра инерции полушара от точки равно $l = \frac{3}{8} r$. Воспользовавшись теоремой Штейнера, находим:

$$I_C = I_0 - ml^2 = \frac{2}{5} mr^2 - \frac{9}{64} mr^2 = \frac{83}{320} mr^2. \quad (3)$$

Внося это значение в формулу (2), находим:

$$I_{\mathcal{P}} = \frac{83}{320} mr^2 + ml^2 \sin^2 \varphi = ml^2 \left(\frac{83}{45} + \sin^2 \varphi \right). \quad (4)$$

Обозначая для краткости $\frac{83}{45} = s^2$, из (1), имеем:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g (\cos \varphi - \cos \alpha)}{l (s^2 + \sin^2 \varphi)}. \quad (5)$$

Скорость точки O — центра полушара равна по величине

$$\begin{aligned} v_O &= OP \cdot \omega_M = l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = \frac{3}{8} r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3gr} \cos \varphi \sqrt{\frac{\cos \varphi - \cos \alpha}{s^2 + \sin^2 \varphi}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Скорость точки O будет максимальной при $\varphi = 0$

$$v_{O \max} = \frac{1}{2} \sqrt{3gr} \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{s^2}} = \sqrt{\frac{135}{166} gr} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (7)$$

Для определения давления полушара на горизонтальную плоскость составим дифференциальное уравнение движения центра инерции в проекции на вертикальную ось y :

$$m \ddot{y}_C = N - Q. \quad (8)$$

С другой стороны, ордината центра инерции равна

$$y_C = r - l \cos \varphi. \quad (9)$$

Вычисляя вторую производную от y_C , имеем:

$$\ddot{y}_C = l (\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi). \quad (10)$$

Пользуясь (5), находим вторую производную от угла φ по времени

$$\ddot{\varphi} = - \frac{g}{l} \sin \varphi \frac{s^2 + 1 + \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi \cos \alpha}{(s^2 + \sin^2 \varphi)^2}.$$

Внося в уравнение (10) значения первой и второй производных от угла φ и подставляя значение \ddot{y}_C в (8), после несложных преобразований находим:

$$N = \frac{Q}{(s^2 + \sin^2 \varphi)^2} (s^4 + 2s^2 - s^2 \cdot \sin^2 \varphi - 2s^2 \cos \varphi \cdot \cos \alpha).$$

Учитывая, далее, равенства (3) и (4), получаем окончательно

$$N = Q \frac{I_C}{I_G^2} [I_C + ml^2 (1 + \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi \cos \alpha)]. \quad (11)$$

Наибольшее давление полушара на плоскость будет при $\varphi = 0$

$$N_{\max} = Q \left(1 + \frac{4ml^2}{I_C} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = Q \left(1 + \frac{180}{83} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right). \quad (12)$$

Дифференциальное уравнение колебаний полушара находится из (1) дифференцированием по времени

$$I_G \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \dot{\varphi} \frac{dI_G}{dt} = -mgl \sin \varphi \quad (13)$$

или

$$I_G \ddot{\varphi} + ml^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = -mgl \sin \varphi. \quad (14)$$

Для перехода от составленного уравнения к уравнениям малых движений подсчитаем все члены с точностью до величин первого порядка малости включительно. Получим:

$$I_C \ddot{\varphi} + mgl \varphi = 0. \quad (15)$$

Приведенная длина эквивалентного математического маятника

$$l_{\text{прив}} = \frac{83}{120} r. \quad (16)$$

Переходим ко второму способу составления дифференциального уравнения малых колебаний при помощи уравнений Лагранжа. Выбираем угол φ за обобщенную координату системы. Тогда кинетическая энергия системы может быть представлена формулой

$$T = \frac{1}{2} I_G \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} (I_C + ml^2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2. \quad (17)$$

Для составления уравнений Лагранжа вычисляем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = (I_C + ml^2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}, \quad (18)$$

и далее

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = (I_C + ml^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 \cdot ml^2 \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi. \quad (19)$$

Производная от кинетической энергии по обобщенной координате будет:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = ml^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi. \quad (20)$$

Для нахождения обобщенной силы даем системе возможное перемещение $\delta\varphi$ и вычисляем работу всех сил на этом перемещении

$$Q \delta\varphi = mgl [\cos(\varphi + \delta\varphi) - \cos \varphi] \approx -mgl \sin \varphi \delta\varphi. \quad (21)$$

Ввиду малости $\delta\varphi$ принято $\sin \delta\varphi \approx \delta\varphi$, $\cos \delta\varphi \approx 1$. Внося полученные значения в уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \quad (22)$$

находим:

$$(I_C + ml^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} + ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi = -mgl \sin \varphi, \quad (23)$$

что соответствует уравнению (14), выведенному ранее другим путем.

Первый метод решения данной задачи несколько быстрее ведет к цели, но правильный выбор той или иной общей теоремы динамики существенно зависит от содержания задачи и требует некоторого навыка. Второй путь — составление уравнений Лагранжа — несколько более длинный, но является универсальным способом, применимым к любым системам, подчиненным идеальным голономным связям.

§ 3. Свободные колебания системы с двумя степенями свободы

Рассмотрим малые колебания механической системы с двумя степенями свободы, подчиненной голономным, идеальным и стационарным связям. Обозначим обобщенные координаты, определяющие положение системы в пространстве, через q_1, q_2 . Кинетическая энергия такой системы будет однородной квадратичной формой обобщенных скоростей

$$T = \frac{1}{2} [A_{11} \dot{q}_1^2 + 2A_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + A_{22} \dot{q}_2^2]. \quad (1^*)$$

В этой формуле коэффициенты A_{11}, A_{12}, A_{22} являются функциями обобщенных координат.

Положение устойчивого равновесия, около которого происходят малые движения системы, примем за начало отсчета обобщенных координат. Следовательно, в положении равновесия все обобщенные координаты равны нулю. Раскладываем каждый коэффициент в ряд Маклорена по степеням обобщенных координат:

$$A_{ik}(q_1, q_2) = A_{ik}(0) + \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_1} \right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_2} \right)_0 q_2 + \dots \quad (2^*)$$

Ограничиваясь в разложении первым слагаемым, так как обобщенные координаты и скорости считаются малыми величинами, и обозначая для краткости постоянные коэффициенты

$$A_{ik}(0) = a_{ik}, \quad (3^*)$$

находим окончательное выражение для кинетической энергии системы:

$$T = \frac{1}{2} (a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2). \quad (4^*)$$

Величины a_{11} , a_{12} , a_{22} называются инерционными коэффициентами. Если система движется в потенциальном силовом поле, то потенциальная энергия системы может быть разложена по степеням обобщенных координат в ряд Маклорена

$$\Pi(q_1, q_2) = \Pi(0) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\right)_0 q_2 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2}\right)_0 q_2^2 \right] + \dots \quad (5^*)$$

Так как выбор начала отсчета потенциальной энергии произволен, то положим потенциальную энергию системы в положении равновесия равной нулю:

$$\Pi(0) = 0. \quad (6^*)$$

В положении равновесия в нуль обращаются все обобщенные силы:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad (7^*)$$

и, следовательно, в разложении (5*) исчезают члены, содержащие обобщенные координаты в первой степени. Тогда потенциальная энергия системы, совершающей малые движения около положения устойчивого равновесия, будет однородной квадратичной формой обобщенных координат:

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2), \quad (8^*)$$

где для краткости постоянные коэффициенты обозначены

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0 = c_{ik}. \quad (9^*)$$

Коэффициенты c_{11} , c_{12} , c_{22} называются квазиупругими коэффициентами.

Внося полученные значения кинетической и потенциальной энергий в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i=1, 2), \quad (10^*)$$

находим дифференциальные уравнения движения системы:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11^*)$$

в которых $a_{21} = a_{12}$, $c_{12} = c_{21}$.

Частное решение уравнений (11*) ищем в виде

$$q_1 = B \sin(kt + \alpha), \quad q_2 = D \sin(kt + \alpha), \quad (12^*)$$

где B , D , α — неизвестные постоянные. Для их определения вносим значения (12*) обобщенных координат в систему уравнений (11*) и сокращаем на общий множитель $\sin(kt + \alpha)$. Тогда получаем:

$$\left. \begin{aligned} B(c_{11} - k^2 a_{11}) + D(c_{12} - k^2 a_{12}) &= 0, \\ B(c_{21} - k^2 a_{21}) + D(c_{22} - k^2 a_{22}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13^*)$$

Эта система линейных однородных алгебраических уравнений всегда имеет тривиальное решение $B = D = 0$, соответствующее равновесию системы. Система уравнений (13*) может иметь другие, отличные от нуля решения, если определитель системы будет равен нулю:

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - k^2 a_{11} & c_{12} - k^2 a_{12} \\ c_{12} - k^2 a_{12} & c_{22} - k^2 a_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (14^*)$$

Из уравнений (13*) находится отношение амплитуд

$$\frac{B}{D} = -\frac{c_{12} - k^2 a_{12}}{c_{11} - k^2 a_{11}} = -\frac{c_{22} - k^2 a_{22}}{c_{12} - k^2 a_{12}}. \quad (15^*)$$

Определитель (14*) выражает равенство отношений амплитуд, найденных независимо из первого и второго уравнений (13*). Следовательно, если условия (15*) выполняются, то уравнения (13*) являются зависимыми и из них может быть определено только отношение амплитуд.

Раскрывая определитель (14*) или из (15*) находим уравнение частот, иначе называемое вековым уравнением:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)k^4 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2c_{12}a_{12})k^2 + (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) = 0. \quad (16^*)$$

Исследуемые движения будут малыми и, следовательно, равновесие устойчиво, если корни этого уравнения положительны:

$$k_1^2 > 0, \quad k_2^2 > 0. \quad (17^*)$$

Если же k_1^2 или k_2^2 отрицательны или являются комплексными величинами, то решение (12*) будет включать гиперболические функции и движения около положения равновесия не будут малыми. Корни k_1^2 и k_2^2 будут положительными при удовлетворении неравенств

$$\left. \begin{aligned} a_{11} > 0, & \quad a_{22} > 0, & \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \\ c_{11} > 0, & \quad c_{22} > 0, & \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (18^*)$$

Могут встретиться два особых случая. Первый случай, когда

$$\Delta \begin{pmatrix} c_{11} \\ a_{11} \end{pmatrix} = 0, \quad \Delta \begin{pmatrix} c_{22} \\ u_{22} \end{pmatrix} = 0. \quad (19^*)$$

При этом обеим координатам соответствуют гармонические колебания одинаковой частоты:

$$k = \sqrt{\frac{c_{11}}{u_{11}}} = \sqrt{\frac{c_{12}}{u_{12}}} = \sqrt{\frac{c_{22}}{u_{22}}}. \quad (20^*)$$

Второй случай, когда

$$c_{11}c_{12} - c_{12}^2 = 0. \quad (21^*)$$

В этом случае один из корней уравнения частот обращается в нуль.

После того как найдены корни уравнения частот k_1 и k_2 , определяются главные колебания системы. Первое главное колебание описывается уравнениями:

$$q_1 = B_1 \sin(k_1 t + \alpha_1), \quad q_2 = D_1 \sin(k_1 t + \alpha_1), \quad (22^*)$$

а второе главное колебание — формулами:

$$q_1 = B_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \quad q_2 = D_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \quad (23^*)$$

Общее решение в силу линейности уравнений является суммой частных решений:

$$q_1 = B_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + B_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \quad (24^*)$$

$$q_2 = D_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + D_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \quad (25^*)$$

Подставляя в (15*) значения k_1 и затем k_2 , определяем отношения амплитуд:

$$\beta_1 = \frac{B_1}{D_1} = -\frac{c_{12} - k_1^2 u_{12}}{c_{11} - k_1^2 u_{11}}, \quad \beta_2 = \frac{B_2}{D_2} = -\frac{c_{12} - k_2^2 u_{12}}{c_{11} - k_2^2 u_{11}}. \quad (26^*)$$

Тогда

$$q_1 = \beta_1 D_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + \beta_2 D_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \quad (27^*)$$

$$q_2 = D_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + D_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \quad (28^*)$$

Произвольные постоянные интегрирования D_1 , D_2 , α_1 , α_2 после этого находят по начальным условиям движения.

Наряду с уравнениями Лагранжа, для составления дифференциальных уравнений малых колебаний системы с двумя степенями свободы могут быть применены общие теоремы динамики.

При решении задач на исследование малых колебаний консервативной системы с двумя степенями свободы рекомендуется следующий порядок действий.

Первый способ — использование уравнений Лагранжа:

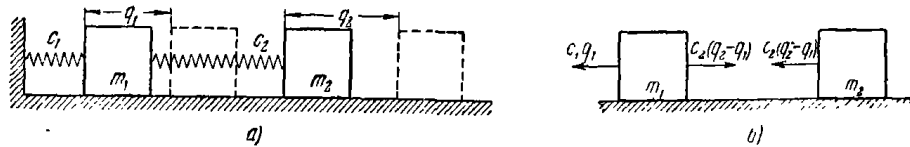
- 1) выбираем обобщенные координаты q_1 и q_2 ;
- 2) составляем выражение кинетической энергии T ;
- 3) определяем потенциальную энергию системы Π или вычисляем обобщенные силы;
- 4) внося выражения T и Π (или обобщенные силы) в уравнения Лагранжа, получаем систему двух дифференциальных уравнений малых колебаний;
- 5) задаваясь частным решением этой системы, подставляем частное решение в систему дифференциальных уравнений движения;
- 6) исключая из полученной системы алгебраических уравнений амплитуды колебаний, находим уравнение частот;
- 7) решая уравнение частот, определяем собственные частоты системы;
- 8) внося найденные частоты в частное решение, получаем формулы, описывающие два главных колебания;
- 9) складывая уравнения главных колебаний для каждой обобщенной координаты, находим общее решение;
- 10) определяем четыре произвольные постоянные, из начальных условий движения.

Второй способ — использование общих теорем динамики:

- 1) исходя из условий задачи, выбираем путь составления дифференциальных уравнений — основное уравнение динамики или какую-либо из общих теорем динамики;
- 2) применяя избранную теорему, составляем дифференциальные уравнения малых колебаний системы;
- 3) задаваясь частными решениями системы, вносим эти частные решения в систему дифференциальных уравнений;
- 4) решая полученную систему уравнений, находим уравнение частот, из которого определяем собственные частоты системы;
- 5) внося найденные частоты в частное решение, находим уравнения главных колебаний;
- 6) складывая уравнения главных колебаний для каждой обобщенной координаты, находим общее решение системы;
- 7) пользуясь начальными условиями движения, определяем произвольные постоянные интегрирования.

Задача 450. На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости лежат два тела, массы которых m_1 и m_2 . Первое тело прикреплено к стене пружиной, коэффициент жесткости которой равен c_1 . Второе тело присоединено к первому пружиной, коэффициент жесткости которой c_2 (рис. а). Определить уравнения движения системы, если в положении, когда обе пружины не растянуты, второму телу сообщили скорость v_0 . Найти собственные частоты системы.

Решение. Система имеет две степени свободы. Ее положение может быть определено двумя обобщенными координатами. Первая обобщенная координата q_1 определяет перемещение первого тела от начального положения, вторая обобщенная координата q_2 измеряет перемещение второго тела от его начального положения (рис. а).



К задаче 450.

Применим уравнения Лагранжа для составления дифференциальных уравнений малых колебаний системы. Находим выражение кинетической энергии системы

$$T = \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{q}_2^2}{2}. \quad (1)$$

Потенциальная энергия системы складывается из потенциальных энергий двух пружин:

$$\Pi = \frac{c_1 q_1^2}{2} + \frac{c_2 (q_2 - q_1)^2}{2}, \quad (2)$$

так как q_1 является удлинением первой пружины, а $(q_2 - q_1)$ — удлинением второй пружины.

Переходим к составлению дифференциальных уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (3)$$

где $i = 1, 2$, так как система имеет две степени свободы. Поскольку

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= m_1 \dot{q}_1; & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) &= m_1 \dot{q}_1; & \frac{\partial T}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} &= c_1 q_1 - c_2 (q_2 - q_1), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

то первое дифференциальное уравнение движения системы принимает вид

$$m_1 \ddot{q}_1 = -c_1 q_1 + c_2 (q_2 - q_1). \quad (5)$$

Так как

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= m_2 \dot{q}_2; & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) &= m_2 \ddot{q}_2; & \frac{\partial T}{\partial q_2} &= 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} &= c_2 (q_2 - q_1), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

то второе дифференциальное уравнение движения запишется так:

$$m_2 \ddot{q}_2 = -c_2 (q_2 - q_1). \quad (7)$$

Таким образом, получена система двух дифференциальных уравнений движения (5) и (7).

С целью нахождения общего интеграла этой системы линейных, однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами будем искать частные решения в виде

$$q_1 = B \sin(kt + \alpha); \quad q_2 = D \sin(kt + \alpha). \quad (8)$$

Для этого внесем значения (8) в уравнения (5) и (7). Сокращая на общий множитель $\sin(kt + \alpha)$, находим:

$$\left. \begin{aligned} Bk^2 m_1 - Bc_1 + c_2(D - B) &= 0, \\ Dk^2 m_2 - c_2(D - B) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

В этих двух уравнениях три неизвестных B, D и k . Из них определяется отношение амплитуд; из первого уравнения

$$\frac{B}{D} = \frac{c_2}{c_1 + c_2 - m_1 k^2}, \quad (10)$$

из второго уравнения

$$\frac{B}{D} = \frac{c_2 - m_2 k^2}{c_2}. \quad (11)$$

Приравняв правые части двух последних равенств, находим уравнение частот

$$\frac{c_1 + c_2 - m_1 k^2}{c_2} = \frac{c_2}{c_2 - m_2 k^2}, \quad (12)$$

откуда получаем:

$$k^4 - \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right) k^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0. \quad (13)$$

Из этого биквадратного уравнения определяются собственные частоты системы:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \sqrt{0,5 \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right) - \sqrt{0,25 \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}}, \\ k_2 &= \sqrt{0,5 \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right) + \sqrt{0,25 \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Таким образом, существуют две вещественные частоты k_1 и k_2 .

Ввиду линейности системы уравнений (5) и (7), общий интеграл может быть найден как сумма двух частных решений (8) с различными частотами, амплитудами и начальными фазами.

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= B_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + B_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ q_2 &= D_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + D_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где

$$q_1 = B_1 \sin(k_1 t + \alpha_1); \quad q_2 = D_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) \quad (16)$$

описывают первое главное колебание системы, а

$$q_1 = B_2 \sin(k_2 t + \alpha_2); \quad q_2 = D_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) \quad (17)$$

— второе главное колебание.

С другой стороны, отношение амплитуд в первом главном колебании находится из (10) подстановкой $k = k_1$:

$$\frac{B_1}{D_1} = \frac{c_2}{c_1 + c_2 - m_1 k_1^2} \equiv \beta_1. \quad (18)$$

Аналогично получаем для второго главного колебания:

$$\frac{B_2}{D_2} = \frac{c_2}{c_1 + c_2 - m_1 k_2^2} \equiv \beta_2, \quad (19)$$

где обозначения β_1, β_2 введены для краткости записи. Следовательно, общее решение (15) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \beta_1 D_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + \beta_2 D_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ q_2 &= D_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + D_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Произвольные постоянные $D_1, D_2, \alpha_1, \alpha_2$ определяются по начальным условиям движения. Согласно условиям задачи при $t=0$

$$q_1 = 0, \quad \dot{q}_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad \dot{q}_2 = v_0. \quad (21)$$

Внося эти значения переменных в уравнения (20), находим:

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 D_1 \sin \alpha_1 + \beta_2 D_2 \sin \alpha_2 &= 0, & D_1 \sin \alpha_1 + D_2 \sin \alpha_2 &= 0, \\ \beta_1 D_1 k_1 \cos \alpha_1 + \beta_2 D_2 k_2 \cos \alpha_2 &= 0, & D_1 k_1 \cos \alpha_1 + D_2 k_2 \cos \alpha_2 &= v_0, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

откуда определяются все произвольные постоянные интегрирования: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, т. е. начальные фазы обоих главных колебаний равны нулю, а амплитуды главных колебаний будут:

$$D_1 = \frac{v_0}{k_1(\beta_2 - \beta_1)}; \quad D_2 = \frac{v_0}{k_2(\beta_1 - \beta_2)}. \quad (23)$$

Движение системы, согласно (20), представляет наложение двух гармонических колебаний с разными частотами.

Для составления дифференциальных уравнений движения можно применить и другой способ, используя основной закон динамики.

Рассмотрим произвольное положение системы, определяемое обобщенными координатами q_1, q_2 (рис. б). Тогда, учитывая упругие силы пружин, составляем дифференциальные уравнения движения каждого груза:

$$m_1 \ddot{q}_1 = c_2(q_2 - q_1) - c_1 q_1, \quad m_2 \ddot{q}_2 = -c_2(q_2 - q_1). \quad (24)$$

Эти уравнения идентичны уравнениям (5) и (7), полученным при помощи уравнений Лагранжа.

Применение основного закона динамики ведет в данной задаче быстрее и проще к составлению дифференциальных уравнений движения, однако первый путь — использование уравнений Лагранжа в обобщенных координатах является более общим методом.

§ 4. Вынужденные колебания системы с одной и двумя степенями свободы под действием синусоидальных возмущающих сил

Если на систему действуют внешние возмущающие силы в течение всего процесса колебаний, то возникают сложные колебания, являющиеся результатом наложения вынужденных и свободных колебаний системы. Дифференциальные уравнения движения системы могут быть составлены применением уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i(t), \quad (1^*)$$

где q_i — обобщенные координаты системы, T — кинетическая энергия системы, Π — потенциальная энергия, $Q_i(t)$ — возмущающие силы. Если система имеет одну степень свободы, то $i=1$, если две, то $i=1, 2$.

Для случая двух степеней свободы подстановка T и Π в уравнения (1*) приводит к системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 &= H_1 \sin(pt + \delta), \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 &= H_2 \sin(pt + \delta), \end{aligned} \right\} \quad (2^*)$$

где возмущающие силы $Q_i(t)$ взяты изменяющимися по синусоидальному закону (часто встречающийся случай, рассмотрением которого мы ограничимся ввиду сравнительной простоты математических выкладок и в то же время значительного практического значения):

$$Q_1(t) = H_1 \sin(pt + \delta), \quad Q_2(t) = H_2 \sin(pt + \delta). \quad (3^*)$$

Общее решение системы (2*) дифференциальных уравнений складывается из общего решения однородной системы уравнений и частного решения неоднородной системы. Общее решение однородной системы представляет ранее рассмотренные свободные колебания и находится согласно методам, приведенным в §§ 2 и 3 этой главы. Поэтому мы остановимся на определении частного решения этой системы, представляющего вынужденные колебания системы.

Частное решение ищем в виде:

$$q_1 = D_1 \sin(pt + \delta), \quad q_2 = D_2 \sin(pt + \delta). \quad (4^*)$$

Внося эти значения в уравнения (2*), приходим к системе алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} (c_{11} - p^2 a_{11}) D_1 + (c_{12} - p^2 a_{12}) D_2 &= H_1, \\ (c_{21} - p^2 a_{21}) D_1 + (c_{22} - p^2 a_{22}) D_2 &= H_2, \end{aligned} \right\} \quad (5^*)$$

откуда определяются неизвестные D_1, D_2 .

Определитель этой системы обращается в нуль:

$$(c_{11} - p^2 a_{11})(c_{22} - p^2 a_{22}) - (c_{12} - p^2 a_{12})^2 = 0, \quad (6^*)$$

при резонансе, когда $p = k_1$ или $p = k_2$. В этом случае частное решение системы не может быть найдено в форме (4*).

Дифференциальные уравнения движения системы могут быть также составлены с помощью общих теорем динамики.

При решении задач на определение вынужденных колебаний рекомендуется следующая последовательность действий.

Первый способ — использование уравнений Лагранжа:

1) выбираем обобщенные координаты и составляем выражение кинетической энергии системы;

2) находим выражение потенциальной энергии или вычисляем обобщенные силы;

3) составляем дифференциальные уравнения движения системы, внося значения кинетической и потенциальной энергий (или обобщенных сил) в уравнения Лагранжа;

4) ищем частные решения дифференциальных уравнений движения системы и находим значения амплитуд обобщенных координат;

5) приравнявая нулю знаменатель в выражениях амплитуд, находим значения частот возмущающей силы, при которых возникает резонанс.

Второй способ — применение общих теорем динамики: после выбора обобщенных координат системы непосредственно составляются дифференциальные уравнения движения, исходя из избранных теорем динамики. Дальнейший ход решения тот же, что и при первом способе.

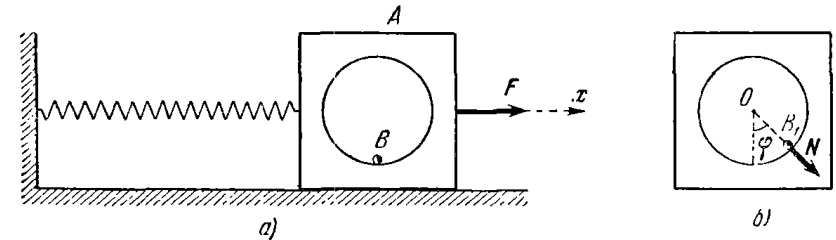
Задача 451. Квадратный ящик A массы m_1 лежит на горизонтальной, абсолютно гладкой плоскости. Внутри ящика в цилиндрическом отверстии радиуса r покоится шарик B (рис. a) массы m_2 , размерами которого можно пренебречь.

Ящик соединен с вертикальной стеной пружиной, коэффициент жесткости которой равен c . Пренебрегая трением между шариком и внутренней поверхностью ящика, определить вынужденные колебания системы, возникающие под действием периодической горизонтальной силы $F = F_0 \sin \omega t$.

Решение. Выберем ось x с началом в положении равновесия центра O ящика и обозначим через φ угол отклонения радиуса OB_1 от вертикали. Обозначая через N давление шарика на ящик, направленное по радиусу OB_1 , напишем дифференциальное уравнение движения ящика:

$$m_1 \ddot{x} = F_0 \sin \omega t - cx + N \sin \varphi. \quad (1)$$

Дифференциальные уравнения абсолютного движения шарика составим в проекциях на OB_1 и на перпендикуляр к OB_1 . Абсолютное движение шарика складывается из переносного поступательного движения вместе с ящиком и относительного вращения вокруг центра O .



К задаче 451.

Кориолисово ускорение шарика равно нулю, так как переносное движение является поступательным. Дифференциальное уравнение движения шарика в проекции на перпендикуляр к OB_1 будет:

$$m_2 (r \ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi) = -m_2 g \sin \varphi; \quad (2)$$

дифференциальное уравнение движения в проекции на OB_1 имеет вид

$$m_2 (r \dot{\varphi}^2 - \ddot{x} \sin \varphi) = N - m_2 g \cos \varphi. \quad (3)$$

Решая совместно эти три уравнения, исключим N :

$$(m_1 + m_2 \sin^2 \varphi) \ddot{x} + cx - m_2 r \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - m_2 g \sin \varphi \cos \varphi = F_0 \sin \omega t, \quad (4)$$

$$r \ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0. \quad (5)$$

Эта система нелинейных дифференциальных уравнений не может быть проинтегрирована в замкнутом виде. Ограничиваясь малыми колебаниями, для которых можно положить приблизительно $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, и пренебрегая малыми величинами выше первого порядка малости, представим уравнения (4) и (5) в виде

$$m_1 \ddot{x} + cx - m_2 g \varphi = F_0 \sin \omega t, \quad (6)$$

$$\ddot{x} + r \ddot{\varphi} + g \varphi = 0. \quad (7)$$

Обозначая для краткости $\frac{c}{m_1} = k^2$, $\frac{m_2}{m_1} = \lambda$, $\frac{F_0}{m_1} = h$, имеем:

$$\ddot{x} + k^2 x - \lambda g \varphi = h \sin \omega t, \quad (8)$$

$$\ddot{x} + r \ddot{\varphi} - g \varphi = 0. \quad (9)$$

Вынужденные колебания определяются частным решением этой системы. Ищем частное решение в виде

$$x = D_1 \sin \omega t, \quad \varphi = D_2 \sin \omega t. \quad (10)$$

Внося эти значения в (8) и (9), после несложных преобразований находим:

$$D_1 (k^2 - \omega^2) - D_2 \lambda g = h, \quad D_1 \omega^2 - D_2 (r \omega^2 - g) = 0, \quad (11)$$

откуда

$$D_1 = \frac{h (g - r \omega^2)}{(k^2 - \omega^2) (g - r \omega^2) - \lambda g \omega^2}, \quad (12)$$

$$D_2 = \frac{h \omega^2}{(k^2 - \omega^2) (g - r \omega^2) - \lambda g \omega^2}. \quad (13)$$

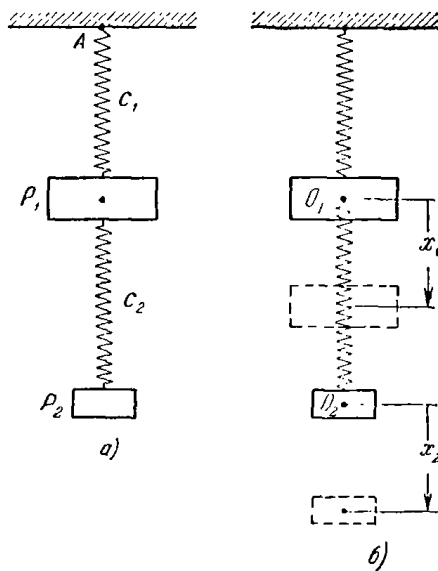
Резонанс наступит при значениях частоты возмущающей силы, отвечающих обращению в нуль знаменателя в (12) и (13):

$$(k^2 - \omega^2) (g - r \omega^2) - \lambda g \omega^2 = 0. \quad (14)$$

При $\omega^2 = \frac{g}{r}$ ящик остается в покое ($D_1 = 0$), шарик колеблется один.

Задача 452. Груз P_1 (рис. а) подвешен к неподвижной точке А при помощи пружины, коэффициент жесткости которой c_1 . К грузу P_1 приложена вертикальная возмущающая сила $Q = Q_0 \sin \omega t$. Груз P_2 , являющийся виброгасителем, подвешен к грузу P_1 при помощи пружины с коэффициентом жесткости c_2 . Пренебрегая массами пружин, определить коэффициент жесткости c_2 и вес второго груза P_2 при которых амплитуда вынужденных колебаний первого груза будет равна нулю.

Решение. Выберем положение равновесия грузов за начало отсчета (рис. б). Система имеет две степени свободы. За обобщенные



К задаче 452.

координаты принимаем отклонение первого груза от положения равновесия x_1 и смещение второго груза от своего положения равновесия x_2 . Тогда к первому грузу будут приложены три силы: упругая сила верхней пружины

$$F_1 = -c_1 x_1, \quad (1)$$

упругая сила нижней пружины

$$F_2 = c_2 (x_2 - x_1), \quad (2)$$

возмущающая сила

$$Q = Q_0 \sin \omega t. \quad (3)$$

Ко второму грузу приложена одна сила: упругая сила нижней пружины

$$F_3 = -c_2 (x_2 - x_1). \quad (4)$$

Составляем дифференциальные уравнения движения грузов

$$\frac{P_1}{g} \ddot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1) + Q_0 \sin \omega t, \quad (5)$$

$$\frac{P_2}{g} \ddot{x}_2 = -c_2 (x_2 - x_1). \quad (6)$$

Частное решение этой системы, определяющее вынужденные колебания грузов, ищем в виде

$$x_1 = D_1 \sin \omega t, \quad x_2 = D_2 \sin \omega t. \quad (7)$$

Подставляя значения переменных (7) в уравнения (5) и (6), находим:

$$\left(c_1 + c_2 - \frac{P_1}{g} \omega^2 \right) D_1 - c_2 D_2 = 0, \quad -c_2 D_1 + \left(c_2 - \frac{P_2}{g} \omega^2 \right) D_2 = 0. \quad (8)$$

Из этих уравнений определяются величины амплитуд вынужденных колебаний

$$D_1 = \frac{Q_0 \left(c_2 - \frac{P_2}{g} \omega^2 \right)}{\left(c_1 + c_2 - \frac{P_1}{g} \omega^2 \right) \left(c_2 - \frac{P_2}{g} \omega^2 \right) - c_2^2}, \quad (9)$$

$$D_2 = \frac{Q_0 c_2}{\left(c_1 + c_2 - \frac{P_1}{g} \omega^2 \right) \left(c_2 - \frac{P_2}{g} \omega^2 \right) - c_2^2}. \quad (10)$$

Согласно уравнению (9), амплитуда вынужденных колебаний первого груза обращается в нуль, если выбрать коэффициент жесткости второй пружины c_2 и вес P_2 так, чтобы

$$c_2 - \frac{P_2}{g} \omega^2 = 0. \quad (11)$$

Таким образом, при заданной частоте возмущающей силы ω можно всегда подобрать коэффициент жесткости добавочной пружины и вес второго груза так, чтобы погасить вынужденные колебания первого груза. При этом следует остерегаться резонанса, который наступает при обращении в нуль знаменателя в (9) и (10)

$$(c_1 + c_2 - \frac{P_1}{g} \omega^2) (c_2 - \frac{P_2}{g} \omega^2) - c_2^2 = 0. \quad (12)$$

Значение угловой скорости ω , определяемой из равенства (11), не обращает в нуль знаменатель в (9) и (10) и, следовательно, не удовлетворяет (12). Однако, не всегда удается точно поддерживать одно и то же значение ω . При случайном изменении угловой скорости и возможно возникновение опасных резонансных колебаний.

§ 5. Влияние гироскопических сил и сил вязкого сопротивления на свободные и вынужденные колебания твердого тела с двумя степенями свободы

1°. Влияние гироскопических сил на свободные колебания системы с двумя степенями свободы. При составлении дифференциальных уравнений малых колебаний с учетом гироскопических сил можно применять теорему об изменении главного момента количества движения относительно неподвижных осей координат

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum_{k=1}^n m_x (F_k^e); \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum_{k=1}^n m_y (F_k^e); \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_z (F_k^e), \quad (1^*)$$

где L_x, L_y, L_z — главные моменты количества движения относительно неподвижных осей координат x, y, z ; $\sum_{k=1}^n m (F_k^e)$ — главные моменты внешних сил относительно тех же осей.

Если осесимметричное твердое тело, имеющее неподвижную точку, вращается с большой угловой скоростью ω вокруг оси симметрии, которая совпадает при равновесии тела с неподвижной осью x , то с точностью до величин первого порядка малости главные моменты количества движения относительно неподвижных осей координат будут:

$$L_x = A\omega, \quad L_y = A\omega\beta - B\dot{\gamma}, \quad L_z = A\omega\gamma + B\dot{\beta}, \quad (2^*)$$

где A — момент инерции твердого тела относительно оси симметрии, B — момент инерции относительно любой оси, перпендикулярной к оси симметрии и проходящей через неподвижную точку, β — малый угол поворота оси симметрии, отсчитываемый от неподвижной оси x в плоскости xu , γ — малый угол поворота оси симметрии, отсчитываемый от неподвижной оси x в плоскости xz .

При решении задач на свободные колебания твердого тела, вращающегося вокруг своей оси, рекомендуется следующий порядок действий:

1) выбираем две системы координат — неподвижную и подвижную — с началом в неподвижной точке;

2) вычисляем главные моменты всех внешних сил относительно неподвижных осей x, y, z и главные моменты количества движения относительно этих осей;

3) пользуясь теоремой об изменении главного момента количества движения относительно осей x, y, z , находим дифференциальные уравнения малых колебаний системы;

4) задаемся частным решением системы и подставляем его в дифференциальные уравнения движения. Находим уравнение частот, из которого определяем собственные частоты системы;

5) находим, далее, отношение амплитуд колебаний, соответствующих каждой частоте;

6) составляем уравнения первого и второго главных колебаний и общее решение как сумму главных колебаний.

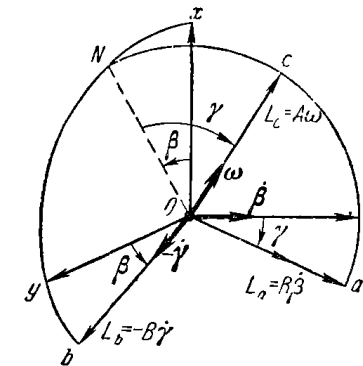
Задача 453. Ротор, имеющий неподвижную точку O , вращается с угловой скоростью ω вокруг оси симметрии Oc и совершает малые колебания вокруг неподвижных осей y, z . Найти главный момент количества движения ротора с точностью до величин первого порядка малости. Момент инерции ротора относительно оси Oc равен A , а относительно главных осей инерции a и b равен B .

Решение. Выберем неподвижную систему координат xuz с началом в неподвижной точке O и подвижную систему осей a, b, c , являющихся главными осями инерции твердого тела в точке O . Найдем пересечение плоскости ac с плоскостью xu — линию узлов ON и будем определять положение подвижной системы осей при помощи углов β и γ .

Тогда составляющие угловой скорости ротора будут: ω , направленная по оси Oc , $\dot{\beta}$, направленная по оси z , $\dot{\gamma}$, направленная в отрицательную сторону оси Ob . Находим проекции угловой скорости ротора на главные оси инерции a, b, c :

$$\omega_c = \omega + \dot{\beta} \sin \gamma, \quad \omega_a = \dot{\beta} \cos \gamma, \quad \omega_b = -\dot{\gamma}. \quad (1)$$

Полагая углы β и γ , а также их производные малыми величинами первого порядка, найдем значения проекций угловой скорости на глав-



К задаче 453.

ные оси инерции с точностью до малых величин первого порядка включительно. Тогда $\sin \gamma \approx \gamma$, $\cos \gamma \approx 1$ и, далее,

$$\omega_c = \omega + \dot{\beta} \cdot \gamma \approx \omega, \quad \omega_a = \dot{\beta}, \quad \omega_b = -\dot{\gamma}. \quad (2)$$

Главные моменты количества движения относительно главных осей инерции abc будут:

$$L_a = B\dot{\beta}, \quad L_b = -B\dot{\gamma}, \quad L_c = A\omega. \quad (3)$$

Далее находим проекции главного момента количества движения на неподвижные оси:

$$\left. \begin{aligned} L_x &= L_c \cos \gamma \cos \beta - L_a \sin \gamma \cos \beta - L_b \sin \beta \approx \\ &\approx A\omega - B\dot{\beta}\gamma + B\dot{\gamma}\beta, \\ L_y &= L_c \cos \gamma \sin \beta - L_a \sin \gamma \sin \beta - L_b \cos \beta \approx \\ &\approx A\omega\beta - B\dot{\beta}\gamma\beta - B\dot{\gamma}, \\ L_z &= L_c \sin \gamma + L_a \cos \gamma \approx A\omega\gamma + B\dot{\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Отбрасывая члены, порядок малости которых выше первого, окончательно получаем:

$$L_x = A\omega, \quad L_y = A\omega\beta - B\dot{\gamma}, \quad L_z = A\omega\gamma + B\dot{\beta}. \quad (5)$$

Задача 454. Шпиндель веретена закреплен неподвижно в точке O и вращается в упруго закрепленном подшипнике A . Центр тяжести шпинделя находится в точке C (рис. *a*) на расстоянии l_2 от точки O . Расстояние между опорами l . Коэффициент жесткости c упругого поля, в котором перемещается нижняя опора A , одинаков в любом горизонтальном направлении.

Зная моменты инерции A, B относительно главных осей инерции, проходящих через точку O , найти малые колебания шпинделя около положения равновесия. Угловая скорость ω вращения шпинделя вокруг оси симметрии постоянна по величине.

Решение. Выберем неподвижные оси координат x, y, z (рис. *a*) с центром в неподвижной точке O , направив вертикальную ось x по оси симметрии шпинделя в положении равновесия.

На шпиндель действуют внешние силы: реакция R опоры A , реакция опоры O и сила тяжести Q . Составим главные моменты всех внешних сил относительно осей x, y, z , давая шпинделю малые отклонения на угол β вокруг оси z и соответственно на угол γ вокруг оси y .

Главный момент внешних сил относительно оси y равен

$$\sum_{k=1}^n m_y(F_k^e) = -Qz_c - clz_1 = Q \frac{l_2}{l} z_1 - clz_1, \quad (1)$$

где z_1 — координата точки A , а z_c — координата центра тяжести (рис. *b*).

Из рис. *b* определяется и значение угла γ :

$$\gamma = -\frac{z_1}{l}. \quad (2)$$

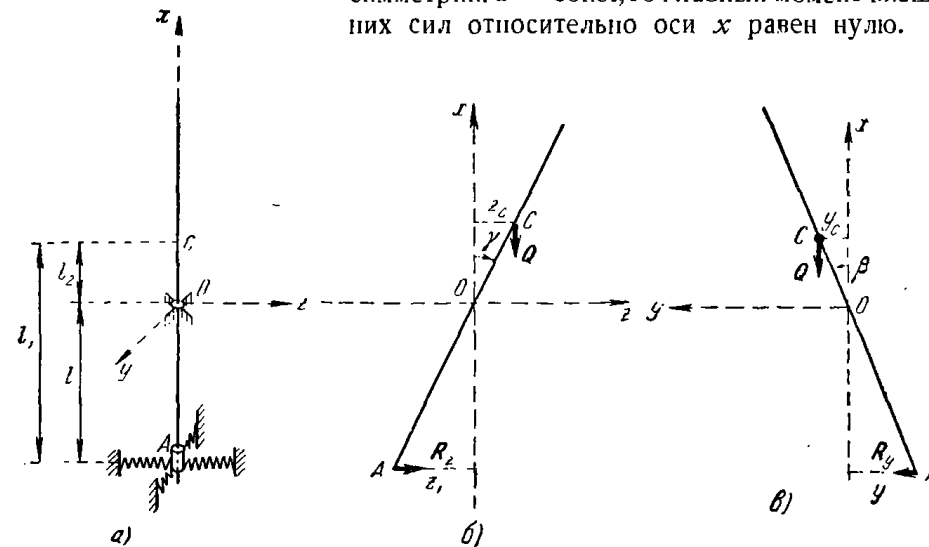
Далее находим главный момент внешних сил относительно оси z (рис. *b*).

$$\sum_{k=1}^n m_z(F_k^e) = Qy_c + cly_1 = -Q \frac{l_2}{l} y_1 + cly_1. \quad (3)$$

Угол β определяется формулой (см. рисунок):

$$\beta = -\frac{y_1}{l}. \quad (4)$$

Так как согласно условию шпиндель вращается равномерно вокруг оси симметрии: $\omega = \text{const}$, то главный момент внешних сил относительно оси x равен нулю.



К задаче 454.

Пользуясь теоремой об изменении главного момента количества движения шпинделя относительно осей y, z , находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} [A\omega\beta - B\dot{\gamma}] &= \left(-cl + Q \frac{l_2}{l} \right) z_1, \\ \frac{d}{dt} [A\omega\gamma + B\dot{\beta}] &= \left(cl - Q \frac{l_2}{l} \right) y_1. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Преобразуем эти уравнения, подставив вместо β и γ их выражения через y_1 и z_1 . Тогда получаем:

$$\left. \begin{aligned} B\ddot{z}_1 - A\omega\dot{y}_1 + (cI^2 - QI_2)z_1 &= 0, \\ B\ddot{y}_1 + A\omega\dot{z}_1 + (cI^2 - QI_2)y_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Таковы дифференциальные уравнения малых колебаний шпинделя.

Решение этой системы однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ищем в виде

$$y_1 = a \sin(pt + \alpha), \quad z_1 = b \cos(pt + \alpha). \quad (7)$$

Подставляя эти значения переменных в уравнения (6) и сокращая затем соответственно на $\sin(pt + \alpha)$ и $\cos(pt + \alpha)$, получаем систему алгебраических уравнений для определения постоянных:

$$\left. \begin{aligned} -A\omega pa + [cI^2 - QI_2 - Bp^2]b &= 0, \\ [cI^2 - QI_2 - Bp^2]a - A\omega pb &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Исключая из этих уравнений a и b , получаем частотное уравнение

$$A^2\omega^2 p^2 - [cI^2 - QI_2 - Bp^2]^2 = 0. \quad (9)$$

Корни этого уравнения определяют собственные частоты малых колебаний шпинделя. Если подставить эти корни в уравнения (8), то можно найти отношение амплитуд колебаний $\frac{a}{b}$.

Проще всего найти корни уравнения частот (9) следующим образом. Складывая и вычитая равенства (8), имеем:

$$\left. \begin{aligned} (cI^2 - QI_2 - Bp^2 - A\omega p)(a + b) &= 0, \\ (cI^2 - QI_2 - Bp^2 + A\omega p)(a - b) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Отсюда следует, что существует два рода главных или нормальных колебаний шпинделя.

Частоты первого главного колебания определяются из уравнения

$$Bp^2 - A\omega p - (cI^2 - QI_2) = 0. \quad (11)$$

Решая это квадратное уравнение, находим частоты

$$p_{1,2} = \frac{A\omega \pm \sqrt{(A\omega)^2 + 4B(cI^2 - QI_2)}}{2B}. \quad (12)$$

Так как значения частот (12) не обращают в нуль первый множитель в первом из уравнений (10), то им соответствует равенство

$$a + b = 0 \quad \text{или} \quad a = -b. \quad (13)$$

Частоты второго главного колебания находятся из уравнения

$$Bp^2 + A\omega p - (cI^2 - QI_2) = 0, \quad (14)$$

откуда

$$p_{3,4} = \frac{-A\omega \pm \sqrt{(A\omega)^2 + 4B(cI^2 - QI_2)}}{2B}. \quad (15)$$

Так как значения частот (15) не обращают в нуль первый множитель во втором уравнении (10), то этим частотам соответствует равенство

$$a - b = 0 \quad \text{или} \quad a = b. \quad (16)$$

Замечая, что

$$p_1 = -p_3, \quad p_2 = -p_4, \quad (17)$$

закключаем, что существует два типа главных колебаний ротора.

Первый тип главных колебаний характеризуется формулами

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_1 \sin(p_1 t + \alpha_1), \\ z_1 &= a_1 \cos(p_1 t + \alpha_1). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Второй тип главных колебаний определяется выражениями

$$y_1 = a_2 \sin(p_2 t + \alpha_2), \quad z_1 = -a_2 \cos(p_2 t + \alpha_2). \quad (19)$$

При колебаниях первого типа точка A будет описывать окружность вокруг центра, расположенного на оси x . Вращение точки A будет совпадать по направлению с собственным вращением ротора. Это движение называется прямой регулярной прецессией. При втором типе колебаний точка A описывает окружность вокруг центра, находящегося на оси x , в направлении, обратном собственному вращению ротора. Такое движение называется обратной прецессией.

Общее решение дифференциальных уравнений, определяющих свободные колебания ротора, складывается из двух главных колебаний

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) + a_2 \sin(p_2 t + \alpha_2), \\ z_1 &= a_1 \cos(p_1 t + \alpha_1) - a_2 \cos(p_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Четыре произвольных постоянных интегрирования $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$ определяются по начальным данным — значениям $y_1, z_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$ при $t=0$.

Если положить в уравнениях (11) и (15) угловую скорость собственного вращения ротора ω равной нулю, то эти уравнения примут вид

$$Bp^2 - (cI^2 - QI_2) = 0. \quad (21)$$

Корни уравнения частот невращающегося шпинделя (21) будут:

$$p_0 = \pm \sqrt{\frac{cI^2 - QI_2}{B}}. \quad (22)$$

Сравнивая положительные значения собственных частот вращающегося ротора со значением собственной частоты невращающегося ротора, находим, что они располагаются в следующем порядке:

$$p_1 > p_0 > p_2. \quad (23)$$

Таким образом, наличие гироскопических сил приводит к удвоению числа собственных частот. С увеличением угловой скорости шпинделя значения частот p_1 и p_2 все больше и больше отличаются от величины p_0 (рис. 2).

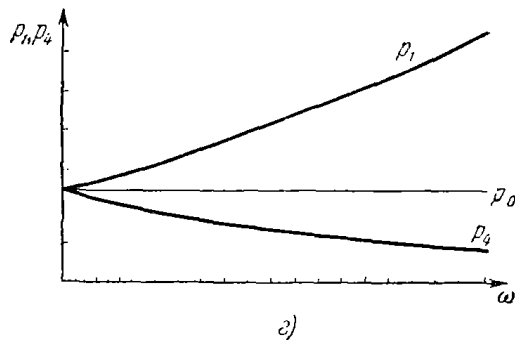
Следует заметить, что отрицательные значения корней частотных уравнений приводят к решениям, линейно зависящим от выше найденных, и, таким образом, не вносят ничего нового.

2°. Влияние вязкого трения и гироскопических сил на свободные колебания твердого тела с двумя степенями свободы. В пункте 1° этого параграфа было рассмотрено влияние гироскопических сил на свободные колебания системы с двумя степенями свободы. При этом не учитывались диссипативные силы, которые в виде вязкого сопротивления среды, сухого трения и внутреннего трения в материале всегда сопутствуют движению. Из всех разновидностей диссипативных сил, учитывая сравнительную простоту математических выкладок и значительное распространение этих сил в технике, мы рассмотрим только силы вязкого трения.

В добавление к тому, что было сказано в пункте 1° относительно составления дифференциальных уравнений малых колебаний системы, следует учесть при составлении главного момента внешних сил и момент сил вязкого трения. Эти силы считают пропорциональными первой степени скорости и направленными прямо противоположно скорости.

Покажем, как учитывается влияние вязкого трения на примере решения задачи о малых колебаниях шпинделя веретена.

Задача 455. В условиях задачи 454 определить малые колебания шпинделя веретена, полагая, что силы вязкого трения создают моменты: относительно оси y равный $(-\frac{n}{l} \dot{z}_1)$ и относительно оси z равный $(\frac{n}{l} \dot{y}_1)$, где n — некоторый постоянный коэффициент.



К задаче 454.

Решение. Согласно теореме об изменении главного момента количества движения шпинделя относительно осей y , z , имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} [A\omega\beta - B\dot{\gamma}] &= \left(-cl + Q\frac{l_2}{l} \right) z_1 - \frac{n}{l} \dot{z}_1, \\ \frac{d}{dt} [A\omega\gamma + B\dot{\beta}] &= \left(cl - Q\frac{l_2}{l} \right) y_1 + \frac{n}{l} \dot{y}_1. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Внося в эти уравнения значения β и γ , полученные в предыдущей задаче, получаем дифференциальные уравнения малых колебаний шпинделя в виде

$$\left. \begin{aligned} B\ddot{z}_1 - A\omega\dot{y}_1 + n\dot{z}_1 + (cl^2 - Ql_2) z_1 &= 0, \\ B\ddot{y}_1 + A\omega\dot{z}_1 + n\dot{y}_1 + (cl^2 - Ql_2) y_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Для интегрирования этой системы дифференциальных уравнений введем комплексную переменную $\lambda = z_1 + iy_1$. Умножая второе уравнение из (2) на i и складывая его с первым уравнением (2), находим:

$$B\dot{\lambda} - (n + iA\omega)\dot{\lambda} + (cl^2 - Ql_2)\lambda = 0. \quad (3)$$

Составляем характеристическое уравнение

$$Bs^2 + (n + iA\omega)s + (cl^2 - Ql_2) = 0. \quad (4)$$

Находим корни характеристического уравнения:

$$s_{1,2} = \frac{-(n + iA\omega) \pm \sqrt{(n + iA\omega)^2 - 4B(cl^2 - Ql_2)}}{2B}. \quad (5)$$

Сокращенно эти корни могут быть записаны в виде

$$s_{1,2} = \frac{-(n + iA\omega) \pm \sqrt{a_1 + ib_1}}{2B}, \quad (6)$$

где

$$a_1 = n^2 - A^2\omega^2 - 4B(cl^2 - Ql_2), \quad b_1 = 2nA\omega.$$

Согласно формуле Муавра для дробного показателя можно определить два значения $\sqrt{a_1 + ib_1}$:

$$\sqrt{a_1 + ib_1} = \pm \sqrt{\rho} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right), \quad (7)$$

где

$$\rho = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{[n^2 - A^2\omega^2 - 4B(cl^2 - Ql_2)]^2 + 4n^2A^2\omega^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b_1}{a_1} = \frac{2nA\omega}{n^2 - A^2\omega^2 - 4B(cl^2 - Ql_2)}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1 + ib_1} &= a_2 + ib_2 = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \{ \sqrt{[n^2 - A^2\omega^2 - 4B(cl^2 - QI_2)]^2 + 4n^2A^2\omega^2 + n^2 - A^2\omega^2 - 4B(cl^2 - QI_2)} \} +} \\ &+ i \sqrt{\frac{1}{2} \{ \sqrt{[n^2 - A^2\omega^2 - 4B(cl^2 - QI_2)]^2 + 4n^2A^2\omega^2 - n^2 + A^2\omega^2 + 4B(cl^2 - QI_2)} \} }. \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, корни характеристического уравнения могут быть представлены в виде

$$s_1 = \frac{-(n - a_2) - i(A\omega - b_2)}{2B}, \quad s_2 = \frac{-(n + a_2) - i(A\omega + b_2)}{2B}. \quad (9)$$

Тогда общее решение уравнения (4) будет:

$$\lambda = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}. \quad (10)$$

Здесь C_1 и C_2 — комплексные постоянные величины вида

$$C_1 = D_1 + iD_3, \quad C_2 = D_2 + iD_4. \quad (11)$$

Подставляя эти значения произвольных постоянных в (10), получим:

$$\begin{aligned} \lambda &= (D_1 + iD_3) e^{-(n-a_2)t/2B} \left(\cos \frac{b_2 - A\omega}{2B} t + i \sin \frac{b_2 - A\omega}{2B} t \right) + \\ &+ (D_2 + iD_4) e^{-(n+a_2)t/2B} \left(\cos \frac{b_2 + A\omega}{2B} t - i \sin \frac{b_2 + A\omega}{2B} t \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Отделяя в этом уравнении вещественную и мнимую части, находим исходные перемещения y_1 , z_1 :

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-(n-a_2)t/2B} \left(D_1 \sin \frac{b_2 - A\omega}{2B} t + D_3 \cos \frac{b_2 - A\omega}{2B} t \right) + \\ &+ e^{-(n+a_2)t/2B} \left(-D_2 \sin \frac{b_2 + A\omega}{2B} t + D_4 \cos \frac{b_2 + A\omega}{2B} t \right), \\ z_1 &= e^{-(n-a_2)t/2B} \left(D_1 \cos \frac{b_2 - A\omega}{2B} t - D_3 \sin \frac{b_2 - A\omega}{2B} t \right) + \\ &+ e^{-(n+a_2)t/2B} \left(D_2 \cos \frac{b_2 + A\omega}{2B} t + D_4 \sin \frac{b_2 + A\omega}{2B} t \right). \end{aligned}$$

Замечая, что всегда $n > a_2$, что следует из (8), заключаем, что координаты нижнего конца шпинделя убывают с течением времени. Свободные колебания шпинделя под влиянием вязкого трения затухают.

3°. Вынужденные колебания твердого тела с двумя степенями свободы с учетом гироскопических сил. При составлении дифференциальных уравнений в этом случае движения может быть использована теорема об изменении главного

момента количества движения. Выражения для главного момента количества движения, приведенные в пункте 1° этого параграфа, определенные уравнениями (2*), сохраняют силу. В отличие от ранее рассмотренных случаев малых колебаний, в главный момент внешних сил относительно неподвижных осей входит момент возмущающих сил.

Наиболее распространенным в технике видом возмущающих сил, действующих на твердое тело, вращающееся вокруг оси, являются силы, вызванные неуравновешенностью ротора.

При решении задач на определение вынужденных колебаний твердого тела с двумя степенями свободы при действии гироскопических сил рекомендуется следующая последовательность действий:

- 1) выбираем неподвижную и подвижную системы координат;
- 2) составляем выражения для главного момента количества движения тела и главного момента внешних сил относительно неподвижных осей координат;
- 3) находим дифференциальные уравнения малых колебаний, пользуясь теоремой об изменении главного момента количества движения;
- 4) ищем частное решение системы дифференциальных уравнений, определяющее вынужденные колебания системы;
- 5) определяем критические угловые скорости ротора, при которых возникает явление резонанса;
- 6) находим предельные значения искомого перемещения при неограниченном возрастании угловой скорости вращения ротора.

Покажем, как исследуются вынужденные колебания ротора, вызванные собственной неуравновешенностью, на следующих примерах.

Задача 456. Определить вынужденные колебания шпинделя вертеса в условиях задачи 454, если на высоте b над неподвижной точкой O (рис. а), на расстоянии e от геометрической оси к ротору прикреплена малая масса m . Ввиду малости массы m , пренебречь ее влиянием на изменение положения центра тяжести ротора и на изменение его моментов инерции.

Решение. Составим дифференциальные уравнения движения ротора, пользуясь теоремой об изменении главного момента количества движения. Моменты относительно неподвижных осей дают реакции нижней упругой опоры, сила тяжести и сила F , реакция связи, удерживающей массу m на роторе. Сила F по величине равна

$$F = m\omega^2 e. \quad (1)$$

Она лежит в плоскости, параллельной yz , составляя угол $\varphi = \omega t$ с осью, параллельной Oy и проходящей через точку, где находится масса m . Моменты этой силы относительно неподвижных осей yz будут:

$$m_y(F) = -m\omega^2 e b \sin \omega t, \quad m_z(F) = m\omega^2 e b \cos \omega t. \quad (2)$$

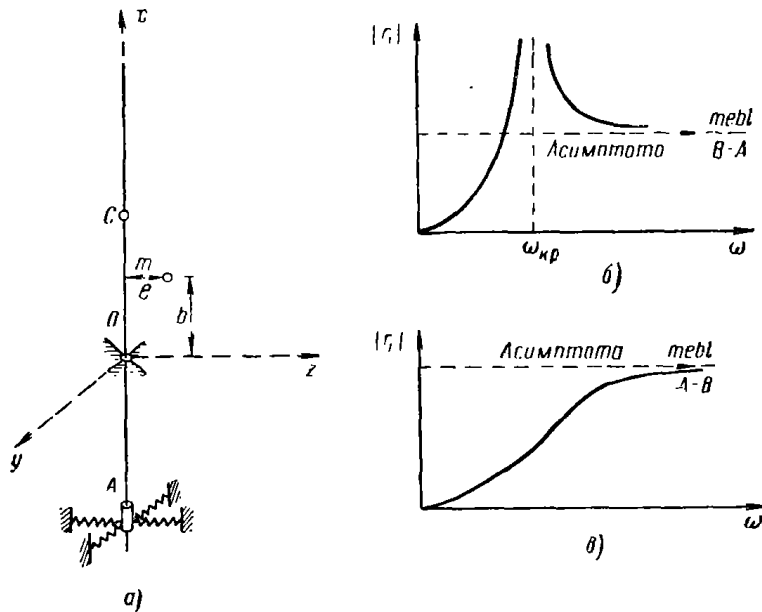
Тогда, согласно теореме об изменении главного момента количества движения, находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} [A\omega\beta - B\dot{\gamma}] &= \left(-cl + Q\frac{l_2}{l} \right) z_1 - m\omega^2 eb \sin \omega t, \\ \frac{d}{dt} [A\omega\dot{\gamma} + B\dot{\beta}] &= \left(cl - Q\frac{l_2}{l} \right) y_1 + m\omega^2 eb \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Внося ранее полученные значения β , γ в эти уравнения, имеем:

$$\left. \begin{aligned} B\ddot{z}_1 - A\omega\dot{y}_1 + (cl^2 - QL_2) z_1 &= -m\omega^2 ebl \sin \omega t, \\ B\ddot{y}_1 + A\omega\dot{z}_1 + (cl^2 - QL_2) y_1 &= -m\omega^2 ebl \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Частное решение системы линейных неоднородных дифференциальных



К задаче 456.

уравнений, определяющие вынужденные колебания ротора, ищем в виде:

$$y_1 = h_1 \cos \omega t, \quad z_1 = d_1 \sin \omega t. \quad (5)$$

Подставляя эти значения y_1 , z_1 в уравнения (4) и сокращая соответственно в первом уравнении на $\sin \omega t$, а во втором уравнении на $\cos \omega t$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} A\omega^2 h_1 + [cl^2 - QL_2 - B\omega^2] d_1 &= -m\omega^2 ebl, \\ [cl^2 - QL_2 - B\omega^2] h_1 - A\omega^2 d_1 &= -m\omega^2 ebl. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Решая полученную систему линейных уравнений, определяем неизвестные

$$h_1 = d_1 = \frac{m\omega^2 ebl}{(B - A)\omega^2 - (cl^2 - QL_2)}. \quad (7)$$

Таким образом, при вынужденных колебаниях точка A будет описывать окружность радиуса $r = h_1 = d_1$, вращаясь с угловой скоростью ω в направлении собственного вращения ротора. Ось ротора при этом будет описывать круговой конус с вершиной в неподвижной точке O.

Вынужденным колебаниям, вызванным неуравновешенностью ротора, соответствует прямая прецессия ротора с угловой скоростью ω , равной по величине собственной угловой скорости ротора. Если $B\omega^2 + QL_2 > A\omega^2 + cl^2$, то вынужденные колебания нижнего конца ротора и возмущающая сила совпадают по фазе, если же $B\omega^2 + QL_2 < A\omega^2 + cl^2$, то они находятся в противоположных фазах.

В условиях задачи неуравновешенность ротора не может вызвать вынужденные колебания, соответствующие обратной прецессии ротора.

Если неограниченно увеличивать угловую скорость собственного вращения ротора, то из уравнения (7) определится предельное значение радиуса окружности, описываемой нижним концом ротора:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} r_1 = \frac{m e b l}{B - A}. \quad (8)$$

Зависимость величины амплитуды колебаний нижнего конца ротора от угловой скорости ротора представлена на рис. б (для случая, когда $B > A$) и рис. в (для случая, когда $A > B$). При построении графиков принято $(cl^2 - QL_2) > 0$.

Зная радиус окружности, описываемой нижним концом ротора, можно найти радиус окружности (амплитуду колебаний), описываемой любой точкой оси ротора. Так, например, для центра тяжести имеем:

$$r_c = r_1 \frac{l_2}{l}. \quad (9)$$

Общее решение дифференциальных уравнений (4) складывается из общего решения этих уравнений без правой части и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение системы однородных уравнений было найдено в задаче 454. Складывая это решение с частным решением (5) и учитывая (7), находим уравнения движения нижнего конца ротора под действием возмущающей силы вызванной неуравновешенностью

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) + a_2 \sin(p_1 t + \alpha_2) + \\ &\quad + \frac{m\omega^2 ebl}{(B - A)\omega^2 - (cl^2 - QL_2)} \cos \omega t, \\ z_1 &= a_1 \cos(p_1 t + \alpha_1) - a_2 \cos(p_1 t + \alpha_2) - \\ &\quad - \frac{m\omega^2 ebl}{(B - A)\omega^2 - (cl^2 - QL_2)} \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Это решение получено без учета сил сопротивления, препятствующих колебаниям ротора. Как бы малы ни были силы сопротивления, они ведут к быстрому затуханию свободных колебаний, определяемых первыми двумя слагаемыми в правой части уравнений (10). Поэтому при изучении колебаний, вызванных неуравновешенностью ротора, в установившемся режиме можно опустить первые два слагаемых в правой части уравнений (10).

Рассмотрим критические скорости вращения ротора. Приравняв нулю определитель системы уравнений (6), находим частотное уравнение

$$(A\omega^2 + cl^2 - Ql_2 - B\omega^2)(A\omega^2 - cl^2 + Ql_2 + B\omega^2) = 0, \quad (11)$$

откуда получаем два уравнения:

$$(A - B)\omega^2 + cl^2 - Ql_2 = 0, \quad (A + B)\omega^2 - cl^2 + Ql_2 = 0. \quad (12)$$

Эти уравнения не имеют общих корней (за исключением $\omega = 0$, что соответствует отсутствию гироскопических сил), в чем легко убедиться, сложив их.

Из уравнений (12) определяются критические угловые скорости вала:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{cl^2 - Ql_2}{B - A}}, \quad (13)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{cl^2 + Ql_2}{B + A}}. \quad (14)$$

Таким образом, у ротора две критические скорости вращения. Сравнивая значения этих критических скоростей со значением собственной частоты невращающегося ротора (задача 454), находим: $\omega_1 > \rho_0 > \omega_2$. Вращение ротора, удваивая число критических скоростей, делает одну из них меньше, а вторую больше собственной частоты невращающегося ротора.

Если числитель в подкоренном выражении для критических скоростей положителен

$$cl^2 - Ql_2 > 0, \quad (15)$$

то при $B > A$ существуют две критические скорости. Если же $B < A$, то одно значение критической скорости остается вещественным, второе становится мнимым.

Как следует из уравнения (7), при вынужденных колебаниях ротора, вызванных неуравновешенностью, возникают резонансные колебания, соответствующие только одной критической скорости. Эта скорость отвечает обращению в нуль знаменателя правой части (7)

$$(B - A)\omega^2 - (cl^2 - Ql_2) = 0. \quad (16)$$

Это значение критической скорости идентично ω_1 (13). Резонансных колебаний, соответствующих второму значению критической скорости (14), при условиях настоящей задачи возникнуть не может.

Задача 457. В условиях задачи 454 определить вынужденные колебания ротора, если на него действует возмущающая сила F , направленная параллельно оси y и приложенная на расстоянии a от неподвижной точки O . Проекция возмущающей силы на ось y изменяется согласно формуле

$$F = F_0 \cos \omega t, \quad (1)$$

где F_0 — наибольшее значение возмущающей силы, ω — угловая скорость собственного вращения ротора.

Решение. Составим дифференциальные уравнения движения ротора, воспользовавшись теоремой об изменении главного момента

количеств движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} [A\omega\beta - B\dot{\gamma}] &= (-cl + Q\frac{l_2}{l})z_1, \\ \frac{d}{dt} [A\omega\gamma - B\dot{\beta}] &= (cl - Q\frac{l_2}{l})y_1 + F_0a \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Внося в уравнения (2) значения β и γ , находим:

$$\left. \begin{aligned} B\ddot{z}_1 - A\omega\dot{y}_1 + (cl^2 - Ql_2)z_1 &= 0, \\ B\ddot{y}_1 + A\omega\dot{z}_1 + (cl^2 - Ql_2)y_1 &= -F_0al \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Частное решение уравнений (3), определяющее вынужденные колебания ротора, ищем в виде

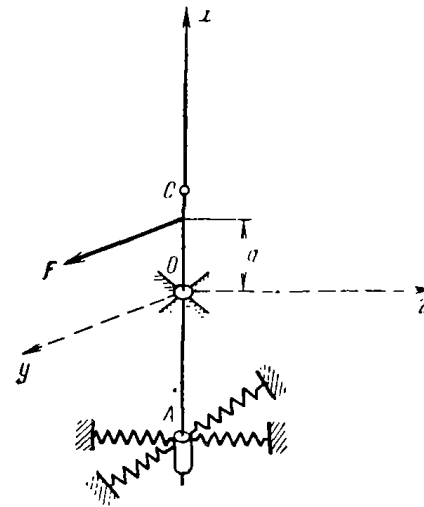
$$y_1 = b_1 \cos \omega t, \quad z_1 = d_1 \sin \omega t. \quad (4)$$

Подставляя (4) в уравнения (3) и сокращая соответственно на $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} A\omega^2 b_1 + (cl^2 - Ql_2 - B\omega^2)d_1 &= 0, \\ (cl^2 - Ql_2 - E\omega^2)b_1 + A\omega^2 d_1 &= -F_0al. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Из уравнений (5) определяются значения d_1 и b_1 :

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \frac{-F_0alA\omega^2}{A^2\omega^4 - (cl^2 - Ql_2 - B\omega^2)^2}, \\ b_1 &= \frac{F_0al(cl^2 - Ql_2 - B\omega^2)}{A^2\omega^4 - (cl^2 - Ql_2 - B\omega^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$



К задаче 457.

Резонанс наступит, когда знаменатель в этих равенствах обратится в нуль:

$$A^2\omega^4 - (cl^2 - Ql_2 - B\omega^2)^2 = 0. \quad (7)$$

Отсюда находятся два значения критической скорости:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{cl^2 - Ql_2}{B - A}}, \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{cl^2 - Ql_2}{B + A}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, в отличие от рассмотренных в предыдущей задаче вынужденных колебаний, вызванных неуравновешенностью ротора, в данном случае резонанс наступает при любом из двух значений (8) угловой скорости вращения ротора.

Найдем отношение амплитуд вблизи резонанса, соответствующего второму значению критической скорости. Из (6) имеем:

$$\frac{b_1}{d_1} = \frac{cl^2 - Ql_2 - B\omega^2}{-A\omega^2} = \frac{cl^2 - Ql_2 - B\frac{cl^2 - Ql_2}{B + A}}{-A\frac{cl^2 - Ql_2}{B + A}} = -1. \quad (9)$$

Из уравнения (9) следует, что при этих колебаниях ось ротора описывает круговой конус в направлении, обратном собственному вращению шпинделя. Такое движение называется обратной прецессией ротора.

Найдем далее отношение амплитуд вблизи резонанса, соответствующего первому значению критической скорости. Имеем:

$$\frac{b_1}{d_1} = \frac{cl^2 - Ql_2 - B\omega_1^2}{-A\omega_1^2} = \frac{cl^2 - Ql_2 - B\frac{cl^2 - Ql_2}{B - A}}{-A\frac{cl^2 - Ql_2}{B - A}} = 1. \quad (10)$$

В этом случае движение оси ротора соответствует прямой прецессии.

Итак, если вынужденные колебания вызываются силой постоянной по направлению, величина которой меняется с частотой собственного вращения ротора, то возможно появление колебаний двух видов, соответствующих обоим значениям (8) критической скорости. Первые колебания соответствуют прямой прецессии, а вторые обратной прецессии ротора.

4°. Влияние вязкого трения на вынужденные колебания твердого тела с двумя степенями свободы. Рассмотренная в предыдущем пункте 3° теория вынужденных колебаний системы хорошо согласуется с действительностью во всем, за исключением одного результата. Хотя при резонансе и наблюдается

рост амплитуды колебаний, но этот рост никогда не становится неограниченным, как это получалось в двух предыдущих задачах. Объяснение этого несоответствия кроется в наличии сил сопротивления, которые не учитывались в пункте 3°. Поэтому мы рассмотрим ниже задачу 456, но с дополнительным учетом сил сопротивления.

Задача 458. В условиях задачи 456 определить вынужденные колебания шпинделя веретена, учитывая силы вязкого трения, которые создают моменты: относительно оси y равный $(-\frac{k}{l}z_1)$ и относительно оси z равный $(+\frac{k}{l}y_1)$, где k — постоянный коэффициент (характеристика трения).

Решение. Согласно теореме об изменении главного момента количества движения, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} [A\omega\beta - B\dot{\gamma}] &= \left(-cl + Q\frac{l_2}{l}\right)z_1 - \frac{k}{l}z_1 - m\omega^2 eb \sin \omega t, \\ \frac{d}{dt} [A\omega\gamma + B\dot{\beta}] &= \left(cl - Q\frac{l_2}{e}\right)y_1 + \frac{k}{l}y_1 + m\omega^2 eb \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Внося в эти уравнения значения β и γ , находим:

$$\left. \begin{aligned} B\ddot{z}_1 - A\omega\dot{y}_1 + kz_1 + (cl^2 - Ql_2)z_1 &= -m\omega^2 ebl \sin \omega t, \\ B\ddot{y}_1 + A\omega\dot{z}_1 + ky_1 + (cl^2 - Ql_2)y_1 &= -m\omega^2 ebl \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Общее решение этой системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений складывается из общего решения системы без правых частей (однородная система уравнений) и частного решения неоднородной системы. Первое решение определяет затухающие свободные колебания системы и было получено в задаче 455. Второе частное решение, определяющее вынужденные колебания системы, будем искать в виде:

$$y_1 = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, \quad z_1 = a_2 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t. \quad (3)$$

Подставим эти значения в уравнения (2). Имеем:

$$\begin{aligned} -a_2\omega^2 B \sin \omega t - b_2\omega^2 B \cos \omega t + A\omega^2 a_1 \sin \omega t - Ab_1\omega^2 \cos \omega t + \\ + ka_2\omega \cos \omega t - kb_2\omega \sin \omega t + (cl^2 - Ql_2)a_2 \sin \omega t + \\ + (cl^2 - Ql_2)b_2 \cos \omega t = -m\omega^2 ebl \sin \omega t, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} -a_1\omega^2 B \cos \omega t - b_1\omega^2 B \sin \omega t + a_2 A\omega^2 \cos \omega t - b_2 A\omega^2 \sin \omega t - \\ - a_1 k\omega \sin \omega t + b_1 k\omega \cos \omega t + (cl^2 - Ql_2)a_1 \cos \omega t + \\ + (cl^2 - Ql_2)b_1 \sin \omega t = -m\omega^2 ebl \cos \omega t. \end{aligned} \quad (5)$$

Приравнявая нулю отдельно члены, содержащие $\sin \omega t$, и члены, содержащие $\cos \omega t$, находим:

$$-a_2 B \omega^2 + a_1 A \omega^2 - b_2 k \omega + a_2 (cl^2 - Ql_2) = -m \omega^2 ebl, \quad (6)$$

$$-a_1 B \omega^2 + a_2 A \omega^2 + b_1 k \omega + a_1 (cl^2 - Ql_2) = -m \omega^2 ebl, \quad (7)$$

$$-b_2 B \omega^2 - b_1 A \omega^2 + a_2 k \omega + b_2 (cl^2 - Ql_2) = 0, \quad (8)$$

$$-b_1 B \omega^2 - b_2 A \omega^2 - a_1 k \omega + b_1 (cl^2 - Ql_2) = 0. \quad (9)$$

Из этой системы алгебраических уравнений определяются a_1, b_1, a_2, b_2 :

$$a_1 = a_2 = \frac{m \omega^2 ebl [(B-A)\omega^2 - (cl^2 - Ql_2)]}{\omega^2 k^2 + [(B-A)\omega^2 - (cl^2 - Ql_2)]^2}, \quad (10)$$

$$b_1 = -b_2 = \frac{-m \omega^2 ebl \omega k}{\omega^2 k^2 + [(B-A)\omega^2 - (cl^2 - Ql_2)]^2}. \quad (11)$$

Прежде чем по этим значениям a_1, b_1, a_2, b_2 найти y_1, z_1 согласно (3), введем для упрощения выкладок новые постоянные ρ и γ , равные

$$\rho \cos \gamma = (B-A)\omega^2 - (cl^2 - Ql_2), \quad \rho \sin \gamma = -\omega k. \quad (12)$$

Тогда, исходя из (3), получим:

$$y_1 = \frac{m \omega^2 ebl}{\sqrt{\omega^2 k^2 + [(B-A)\omega^2 - (cl^2 - Ql_2)]^2}} \cos(\omega t - \gamma),$$

$$z_1 = \frac{m \omega^2 ebl}{\sqrt{\omega^2 k^2 + [(B-A)\omega^2 - (cl^2 - Ql_2)]^2}} \sin(\omega t - \gamma). \quad (13)$$

Следовательно, амплитуда вынужденных колебаний равна

$$r_1 = \frac{m \omega^2 ebl}{\sqrt{\omega^2 k^2 + [(B-A)\omega^2 - (cl^2 - Ql_2)]^2}}. \quad (14)$$

Сдвиг фазы возмущающей силы по отношению к вынужденным колебаниям определится уравнением

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{-\omega k}{(B-A)\omega^2 - (cl^2 - Ql_2)}. \quad (15)$$

Рассмотрим, какова будет амплитуда колебаний и сдвиг фаз при резонансе, когда

$$(B-A)\omega^2 - (cl^2 - Ql_2) = 0. \quad (16)$$

Из (14) определяем значение амплитуды

$$r_1 = \frac{m}{k} \omega ebl. \quad (17)$$

Из (15) находим сдвиг фаз

$$\gamma = 0,5 \pi. \quad (18)$$

Таким образом, при резонансе амплитуда вынужденных колебаний с учетом сил трения не растет неограниченно, а принимает конечное значение. Фаза колебаний отличается от фазы возмущающей силы на $0,5 \pi$.

Идем, далее, значение амплитуды вынужденных колебаний и сдвига фаз при неограниченном росте угловой скорости вращения ротора. Из (14) и (15) имеем:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} r_1 = \frac{m ebl}{B-A}; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \gamma = 0. \quad (19)$$

Сопоставляя эти значения с результатами, полученными в задаче 45б, где вынужденные колебания рассматривались без учета сил сопротивления, видим, что при неограниченном росте угловой скорости ротора предельные величины амплитуды колебаний не отличаются друг от друга, а сдвиг фаз в обоих случаях стремится к нулю. Вдали от резонанса вынужденные колебания с учетом сил сопротивления мало отличаются от вынужденных колебаний без учета сил вязкого трения.

5°. Влияние гироскопических сил на свободные колебания твердого тела с четырьмя степенями свободы. Для составления дифференциальных уравнений малых колебаний твердого тела при наличии гироскопических сил следует применить теорему о движении центра инерции системы материальных точек вместе с теоремой об изменении главного момента количества движения системы материальных точек в относительном движении по отношению к центру инерции.

Согласно первой теореме имеем:

$$M \ddot{x}_C = R_x^e; \quad M \ddot{y}_C = R_y^e; \quad M \ddot{z}_C = R_z^e, \quad (1^*)$$

где M — масса твердого тела; x_C, y_C, z_C — координаты центра инерции (тяжести) твердого тела в системе неподвижных осей координат; R_x^e, R_y^e, R_z^e — проекции главного вектора внешних сил, приложенных к твердому телу.

Вторая теорема приводит к соотношениям

$$\frac{dL_{Cx}}{dt} = \sum_{k=1}^n m_{Cx} (F_k^e); \quad \frac{dL_{Cy}}{dt} = \sum_{k=1}^n m_{Cy} (F_k^e); \quad \frac{dL_{Cz}}{dt} = \sum_{k=1}^n m_{Cz} (F_k^e), \quad (2^*)$$

где L_{Cx}, L_{Cy}, L_{Cz} — главные моменты количества движения относительно осей, движущихся поступательно вместе с центром инерции (тяжести) твердого тела; $\sum_{k=1}^n m (F_k^e)$ — главные моменты внешних сил относительно тех же осей.

Если осесимметричное твердое тело вращается с большой угловой скоростью ω вокруг оси симметрии, которая совпадает при отсутствии малых колебаний тела с осью x , то с точностью до вели-

чин первого порядка малости главные моменты количества движения относительно осей координат, движущихся поступательно вместе с центром инерции твердого тела, будут:

$$\left. \begin{aligned} I_{C_x} &= A\omega, \\ I_{C_y} &= A\omega\beta - B\dot{\gamma}_1, \\ I_{C_z} &= A\omega\gamma + B\dot{\beta}, \end{aligned} \right\} (3^*)$$

где A — момент инерции твердого тела относительно оси симметрии; B — момент инерции твердого тела относительно любой оси, перпендикулярной к оси симметрии и проходящей через центр инерции тела; β — малый угол поворота оси симметрии, отсчитываемый от оси x в плоскости xu ; γ — малый угол поворота оси симметрии, отсчитываемый от оси x в плоскости xz .

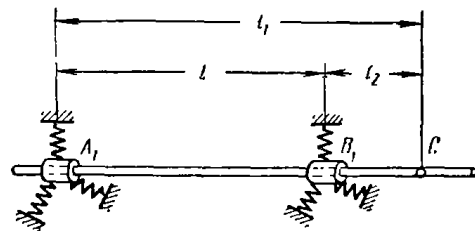
При изучении поперечных колебаний обычно пренебрегают малыми продольными перемещениями твердого тела, т. е. полагают координату x_C неизменной. Тогда первое уравнение (1*) отпадает. Если, кроме того, рассматривается равномерное вращение твердого тела, то отпадает и первое уравнение системы (2*).

Для решения задач о свободных колебаниях твердого тела, в которых возможны вышеуказанные допущения, может быть рекомендован следующий порядок действий:

1. Выбираем две системы координат: первую систему — жестко связанную с твердым телом и вторую — неподвижную систему координат.
2. Применяя теорему о движении центра инерции, составляем два дифференциальных уравнения движения центра тяжести.
3. Пользуясь теоремой об изменении главного момента количества движения в относительном движении по отношению к осям, движущимся поступательно вместе с центром инерции, составляем остальные два дифференциальных уравнения малых колебаний твердого тела.

4. Интегрируя полученную систему дифференциальных уравнений движения твердого тела, находим частоты свободных колебаний, главные колебания ротора и общее решение задачи.

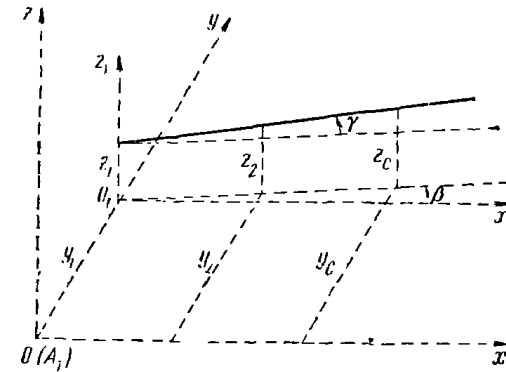
Задача 459. Жесткий ротор массы M вращается в двух упругих опорах A_1 и B_1 . Коэффициенты жесткости левой опоры c_1 , правой c_2 (рис. а). Расстояние между опорами равно l . Центр тяжести C



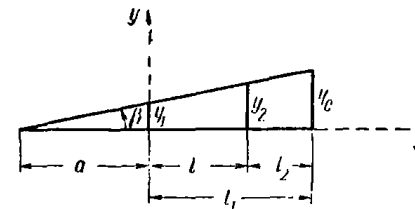
а)

К задаче 459.

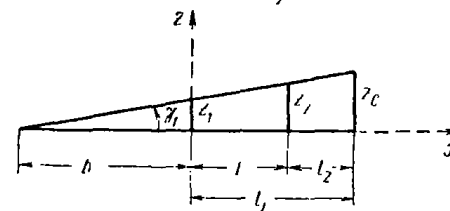
ротора вместе с подшипниками находится на расстоянии l_1 от опоры A_1 и на расстоянии l_2 от опоры B_1 . Ротор вращается вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью ω . Момент инерции ротора относительно оси симметрии равен A , относительно оси, перпендикулярной к оси вращения и проходящей через центр тяжести ротора, равен B . Найти свободные колебания ротора.



б)



в)



г)

К задаче 459.

ротора относительно оси симметрии равен A , относительно оси, перпендикулярной к оси вращения и проходящей через центр тяжести ротора, равен B . Найти свободные колебания ротора.

Решение. Рассмотрим малые колебания ротора около положения равновесия (равномерного вращения около горизонтальной оси). Неподвижную систему координат xuz выбираем так (рис. б), чтобы ее начало совпало с левой опорой в положении равновесия.

Дадим ротору произвольное перемещение (рис. в). Координаты левой опоры обозначим y_1, z_1 , координаты правой опоры y_2, z_2 , координаты центра тяжести y_C, z_C . Изменением координат x_1, x_2, x_C как величинами более высокого порядка малости будем пренебрегать. Угол между проекцией оси ротора на плоскость xu и осью x назовем β ; угол между осью ротора и ее проекцией на плоскость xu обозначим γ .

На рис. в, г ось ротора спроектирована на координатные плоскости xu и xz .

Выразим координаты центра тяжести и углы β, γ_1 через независимые координаты y_1, z_1, y_2, z_2 , вполне определяющие положение ротора. Имеем на основании рис. б, в и г:

$$y_C = -y_1 \frac{l_2}{l} + y_2 \frac{l_1}{l}, \quad (1)$$

$$z_C = -z_1 \frac{l_2}{l} + z_2 \frac{l_1}{l}, \quad (2)$$

$$\beta = \frac{y_2 - y_1}{l}, \quad (3)$$

$$\gamma_1 = \frac{z_2 - z_1}{l}. \quad (4)$$

На основании теоремы о движении центра инерции можно написать два дифференциальных уравнения:

$$M\ddot{y}_C = -c_1 y_1 - c_2 y_2, \quad (5)$$

$$M\ddot{z}_C = -c_1 z_1 - c_2 z_2, \quad (6)$$

где в правой части стоят проекции на соответствующие оси упругих реакций пружин.

Переходим к составлению дифференциальных уравнений малых колебаний ротора вокруг осей параллельных y , z и проведенных через центр инерции колеблющейся системы.

Главные моменты количеств движения системы с точностью до малых величин первого порядка малости включительно будут:

$$L_x = A\omega, \quad (7)$$

$$L_y = A\omega\beta - B\dot{\gamma}, \quad (8)$$

$$L_z = A\omega\gamma + B\dot{\beta}. \quad (9)$$

Главные моменты внешних сил относительно осей, проведенных через центр инерции, легко находятся из рис. а:

$$\sum m_{C_x}(F_k^e) = 0, \quad (10)$$

$$\sum m_{C_y}(F_k^e) = -z_2 c_2 l_2 - z_1 c_1 l_1, \quad (11)$$

$$\sum m_{C_z}(F_k^e) = y_2 c_2 l_2 + y_1 c_1 l_1. \quad (12)$$

Используя теорему об изменении главного момента количеств движения в относительном движении по отношению к центру инерции и выражения (8) — (12), имеем

$$A\omega\dot{\beta} - B\ddot{\gamma} = -z_2 c_2 l_2 - z_1 c_1 l_1, \quad (13)$$

$$A\omega\dot{\gamma} + B\ddot{\beta} = y_2 c_2 l_2 + y_1 c_1 l_1. \quad (14)$$

Подставляя в уравнения (5), (6), (13), (14) значения y_C , z_C , β , γ , получим для нахождения y_1 , y_2 , z_1 , z_2 систему четырех линейных однородных дифференциальных уравнений:

$$M(l_1 \ddot{y}_2 - l_2 \ddot{y}_1) + c_1 l y_1 + c_2 l y_2 = 0, \quad (15)$$

$$M(l_1 \ddot{z}_2 - l_2 \ddot{z}_1) + c_1 l z_1 + c_2 l z_2 = 0, \quad (16)$$

$$A\omega(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - B(\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1) + c_2 l_2 z_2 + c_1 l_1 z_1 = 0, \quad (17)$$

$$A\omega(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + B(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) - c_2 l_2 y_2 - c_1 l_1 y_1 = 0. \quad (18)$$

Частное решение этой системы будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= D_1 \sin(pt + \alpha), \\ y_2 &= D_2 \sin(pt + \alpha), \\ z_1 &= D_3 \cos(pt + \alpha), \\ z_2 &= D_4 \cos(pt + \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где D_1 , D_2 , D_3 , D_4 , p , α — постоянные, которые должны быть определены так, чтобы (19) удовлетворяло системе дифференциальных уравнений (15) — (18). Внося (19) в (15) — (18), имеем, после сокращения соответственно на $\sin(pt + \alpha)$ и $\cos(pt + \alpha)$ и приведения подобных членов, однородную систему четырех алгебраических уравнений относительно D_1 , D_2 , D_3 , D_4 :

$$\left. \begin{aligned} (c_1 l - M l_2 p^2) D_1 + (c_2 l - M l_1 p^2) D_2 &= 0, \\ (c_1 l + M l_2 p^2) D_3 + (c_2 l - M l_1 p^2) D_4 &= 0, \\ -A\omega p D_1 + A\omega p D_2 + (c_1 l_1 l - B p^2) D_3 - (c_2 l_2 l - B p^2) D_4 &= 0, \\ (B p^2 - c_1 l_1 l) D_1 - (B p^2 + c_2 l_2 l) D_2 + A\omega p D_3 - A\omega p D_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Легко показать, что система (20) распадается на две. Действительно, складывая и вычитая первые два и последние два уравнения, получаем:

$$(c_1 l - M l_2 p^2)(D_1 + D_3) + (c_2 l - M l_1 p^2)(D_2 + D_4) = 0,$$

$$(c_1 l + M l_2 p^2)(D_1 - D_3) + (c_2 l - M l_1 p^2)(D_2 - D_4) = 0,$$

$$(B p^2 + A\omega p - c_1 l_1 l)(D_1 + D_3) - (B p^2 + A\omega p + c_2 l_2 l)(D_2 + D_4) = 0,$$

$$(B p^2 - A\omega p - c_1 l_1 l)(D_1 - D_3) - (B p^2 - A\omega p + c_2 l_2 l)(D_2 - D_4) = 0.$$

Группируя уравнения, имеем систему для нахождения $D_1 + D_3$ и $D_2 + D_4$:

$$\left. \begin{aligned} (c_1 l + M l_2 p^2)(D_1 + D_3) + (c_2 l - M l_1 p^2)(D_2 + D_4) &= 0, \\ (B p^2 + A\omega p - c_1 l_1 l)(D_1 + D_3) - & \\ - (B p^2 + A\omega p + c_2 l_2 l)(D_2 + D_4) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

и систему для нахождения $D_1 - D_3$ и $D_2 - D_4$:

$$\left. \begin{aligned} (c_1 l + M l_2 p^2)(D_1 - D_3) + (c_2 l - M l_1 p^2)(D_2 - D_4) &= 0, \\ (B p^2 - A\omega p - c_1 l_1 l)(D_1 - D_3) - & \\ - (B p^2 - A\omega p + c_2 l_2 l)(D_2 - D_4) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Приравнявая определители систем (21) и (22) нулю, получаем два частотных уравнения*):

$$(Bp^2 + A\omega p - c_2 l_2^2 - c_1 l_1^2)(c_1 + c_2 - Mp^2) + (c_1 l_1 + c_2 l_2)^2 = 0 \quad (23)$$

$$(Bp^2 - A\omega p - c_2 l_2^2 - c_1 l_1^2)(c_1 + c_2 - Mp^2) + (c_1 l_1 + c_2 l_2)^2 = 0. \quad (24)$$

Докажем, что уравнения (23) и (24) не имеют общих корней.

Предположим, что общий корень p_1 существует. Тогда при $p = p_1$ оба уравнения удовлетворяются одновременно. Вычитая из первого уравнения второе, получаем:

$$2A\omega p_1(c_1 + c_2 - Mp_1^2) = 0,$$

т. е. общими корнями могли бы быть

$$p_1 = 0 \quad \text{и} \quad p_1 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{M}},$$

но оба эти значения не удовлетворяют исходным уравнениям. Покажем теперь, что корни частотных уравнений вещественны. Для этого рассмотрим функции

$$f_1(p) = (Bp^2 + A\omega p - c_2 l_2^2 - c_1 l_1^2)(c_1 + c_2 - Mp^2) + (c_1 l_1 + c_2 l_2)^2, \quad (25)$$

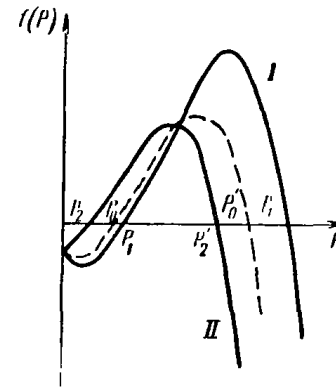
$$f_2(p) = (Bp^2 - A\omega p - c_2 l_2^2 - c_1 l_1^2)(c_1 + c_2 - Mp^2) + (c_1 l_1 + c_2 l_2)^2 \quad (26)$$

и найдем их значения для некоторых характерных значений аргумента p :

p	$f_1(p)$	$f_2(p)$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{M}}$	$(c_1 l_1 + c_2 l_2)^2$	$(c_1 l_1 + c_2 l_2)^2$
0	$-c_1 c_2 l^2$	$-c_1 c_2 l^2$
$+\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{M}}$	$(c_1 l_1 + c_2 l_2)^2$	$(c_1 l_1 + c_2 l_2)^2$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

* По существу, описанная операция означает разложение на множители частотного уравнения системы (20).

Из таблицы видно, что непрерывные функции $f_1(p)$ и $f_2(p)$ при изменении аргумента p от $-\infty$ до $+\infty$ четыре раза меняют знак. Вспоминая, что (23) и (24) являются уравнениями четвертой степени, можно утверждать, что каждое из уравнений (23) и (24) имеет по два отрицательных и два положительных корня, т. е. корни обоих уравнений вещественны. Отметим, что рассматриваемые корни обладают интересным свойством: отрицательные корни одного уравнения равны по абсолютной величине положительным корням другого, и наоборот.



в)

К задаче 459.

При угловой скорости ω , равной нулю, уравнения (23) и (24) совпадают и принимают вид

$$(Bp^2 - c_2 l_2^2 - c_1 l_1^2)(c_1 + c_2 - Mp^2) + (c_1 l_1 + c_2 l_2)^2 = 0. \quad (27)$$

Корни уравнения (27) определяют частоты свободных колебаний невращающегося ротора. На рис. д представлены графики функций $f_1(p)$, $f_2(p)$ и $f_0(p)$, причем через $f_0(p)$ обозначена левая часть (27).

Как видно из графика положительные корни этих уравнений, т. е. частоты свободных колебаний ротора, располагаются в следующем порядке:

$$p_2 < p_0 < p_1 < p'_2 < p'_0 < p'_1. \quad (28)$$

Здесь p_0, p'_0 — частоты свободных колебаний невращающегося ротора.

Из уравнений (21) и (22) видно, что для корней первого частотного уравнения частное решение будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= D_1 \sin(pt + a), \\ z_1 &= D_1 \cos(pt + a), \\ y_2 &= D_2 \sin(pt + a), \\ z_2 &= D_2 \cos(pt + a), \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

так как система (22) в этом случае имеет только тривиальное решение $D_1 - D_3 = 0$ и $D_2 - D_4 = 0$. Аналогично для корней второго частотного уравнения получаем:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= D_1 \sin(pt + a), \\ z_1 &= -D_1 \cos(pt + a), \\ y_2 &= D_2 \sin(pt + a), \\ z_2 &= -D_2 \cos(pt + a). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Легко проверить, что вследствие указанной выше особенности корней частотных уравнений можно ограничиться подстановкой в (29) и (30) лишь положительных корней соответствующих частотных уравнений, ибо отрицательные корни не приведут к новым линейно независимым частотным решениям.

В итоге корням p_1 и p_1' отвечают первое и второе главные колебания, при которых ось ротора описывает круговой конус, вращаясь в том же направлении, что и ротор. Эти движения называются «прямой» прецессией ротора. При «прямой» прецессии вектор угловой скорости твердого тела (при вращении вокруг оси симметрии) и вектор угловой скорости оси ротора образуют острый угол.

Корням p_2 и p_2' отвечают третье и четвертое главные колебания, при которых ось ротора описывает круговой конус, вращаясь в направлении, обратном вращению ротора.

Эти движения называются «обратной» прецессией ротора. При «обратной» прецессии вектор угловой скорости твердого тела (при вращении вокруг оси симметрии) и вектор угловой скорости оси ротора образуют тупой угол.

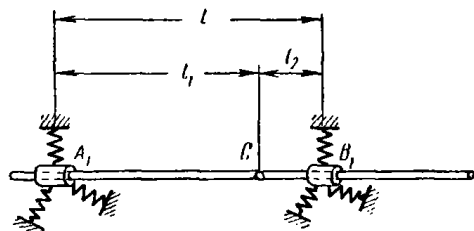
Таким образом, свободные колебания ротора складываются из четырех гармонических колебаний, два из которых соответствуют «прямой» прецессии и два «обратной».

Подчеркнем, что частоты свободных колебаний вращающегося ротора, как видно из уравнений (23) и (24), зависят от его угловой скорости.

Заметим еще, что задача решена для горизонтального ротора, центр тяжести ротора лежит вне участка между опорами. Если же центр тяжести ротора лежит между опорами (рис. е), то во всех уравнениях надо изменить знак перед l_2 на противоположный.

6°. Влияние гироскопических сил на вынужденные колебания твердого тела с четырьмя степенями свободы. Самоцентрирование. При составлении дифференциальных уравнений малых движений твердого тела можно применить теорему о движении центра инерции системы материальных точек и теорему об изменении главного момента количества движения системы материальных точек в относительном движении по отношению к центру инерции.

Указанные теоремы используются в форме пункта 5° настоящего параграфа (уравнения (1*), (2*), (3*)).



е)

К задаче 459.

Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний отличаются от рассмотренных в пункте 5° этого параграфа уравнений свободных колебаний наличием в правых частях возмущающих сил и их моментов. К весьма распространенной в технике категории возмущающих сил относятся силы, вызванные статической и динамической неуравновешенностью роторов.

Статическая неуравновешенность обуславливается смещением центра инерции ротора от геометрической оси вращения. Динамическая неуравновешенность является следствием наклона главной оси инерции твердого тела по отношению к геометрической оси вращения.

При решении задач на определение вынужденных колебаний твердого тела с четырьмя степенями свободы рекомендуется следующая последовательность действий:

- 1) выбираем обобщенные координаты;
- 2) пользуясь теоремой о движении центра инерции, составляем два дифференциальных уравнения движения центра инерции твердого тела;
- 3) составляем выражения главного момента количества движения системы в относительном движении по отношению к центру инерции и выражение главного момента внешних сил относительно осей, движущихся поступательно вместе с центром инерции твердого тела;
- 4) пользуясь теоремой об изменении главного момента количества движения в относительном движении по отношению к центру инерции, выписываем еще два дифференциальных уравнения малых колебаний;
- 5) находим частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений, определяющее вынужденные колебания.

Задача 460*). Горизонтальный жесткий ротор массы M вращается с постоянной угловой скоростью ω в двух упругих опорах A_1 и B_1 . Опоры перемещаются в однородном упругом поле. Коэффициенты жесткости опор: левой c_1 , правой c_2 . Расстояние между опорами l . Расстояние от центра тяжести ротора C до опоры A_1 равно l_1 , до опоры B_1 равно l_2 . Далее, A — момент инерции ротора относительно оси симметрии, B — момент инерции ротора относительно оси, перпендикулярной к оси вращения и проходящей через его центр.

Определить вынужденные колебания ротора, вызванные его статической и динамической неуравновешенностью, если центр тяжести ротора отстоит от геометрической оси на расстояние e , а главная ось инерции ротора, близкая к геометрической оси, обра-

*) А. С. Кельзон, Самоцентрирование и уравновешивание жесткого ротора, вращающегося в двух упругих опорах. Доклады АН СССР, т. 110, вып. 1, 1956.

зует с последней угол δ . Плоскости, проведенные через геометрическую ось и центр тяжести, а также через геометрическую ось и главную ось инерции, образуют двугранный угол, равный ε .

Найти также закон вынужденного движения ротора и определить предельные значения координат центра тяжести ротора и угла отклонения главной оси инерции от геометрической оси ротора при неограниченном увеличении угловой скорости ротора.

Решение. Будем исходить из дифференциальных уравнений движения ротора, полученных в предыдущей задаче:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{y}_C &= -c_1 y_1 - c_2 y_2, \\ M\ddot{z}_C &= -c_1 z_1 - c_2 z_2, \\ A\omega\dot{\beta} - B\ddot{\gamma} &= -z_2 c_2 l_2 - z_1 c_1 l_1, \\ A\omega\dot{\gamma} + B\ddot{\beta} &= y_2 c_2 l_2 + y_1 c_1 l_1. \end{aligned} \right\} (1)$$

Если обозначить через y, z координаты точки геометрической оси ротора, лежащей на пересечении этой оси с плоскостью, перпендикулярной к оси вращения и проходящей через центр тяжести ротора, то координаты центра тяжести будут:

$$\left. \begin{aligned} y_C &= y + e \cos \omega t, \\ z_C &= z + e \sin \omega t. \end{aligned} \right\} (2)$$

Обозначим через β угол между проекцией главной центральной оси на плоскость xu и осью x . Угол между проекцией геометрической оси на плоскость xu и осью x обозначим β_2 . Эти углы связаны соотношением

$$\beta = \beta_2 + \delta \cos(\omega t - \varepsilon), \quad (3)$$

где $(\omega t - \varepsilon)$ — угол между плоскостью, в которой лежит угол δ и плоскостью xu .

Обозначая аналогично через γ угол между проекцией главной центральной оси инерции на плоскость xz и осью x , и γ_2 угол между проекцией геометрической оси на плоскость xz и осью x , находим:

$$\gamma = \gamma_2 + \delta \sin(\omega t - \varepsilon). \quad (4)$$

Подставляя найденные значения y_C, z_C, β, γ в дифференциальные уравнения движения ротора (1), имеем:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{y} + c_1 y_1 + c_2 y_2 &= M e \omega^2 \cos \omega t, \\ M\ddot{z} + c_1 z_1 + c_2 z_2 &= M e \omega^2 \sin \omega t, \\ A\omega\dot{\beta}_2 - B\ddot{\gamma}_2 + c_2 l_2 z_2 + c_1 l_1 z_1 &= -(B - A) \omega^2 \delta \sin(\omega t - \varepsilon), \\ A\omega\dot{\gamma}_2 + B\ddot{\beta}_2 - c_2 l_2 y_2 - c_1 l_1 y_1 &= (B - A) \omega^2 \delta \cos(\omega t - \varepsilon). \end{aligned} \right\} (5)$$

Правые части этих уравнений представляют возмущающие факторы, вызванные статической и динамической неуравновешенностью ротора.

Используя установленные в предыдущей задаче соотношения

$$\left. \begin{aligned} \beta_2 &= \frac{y_2 - y_1}{l}, & y &= -y_1 \frac{l_2}{l} + y_2 \frac{l_1}{l}, \\ \gamma_2 &= \frac{z_2 - z_1}{l}, & z &= -z_1 \frac{l_2}{l} + z_2 \frac{l_1}{l} \end{aligned} \right\} (6)$$

и систему уравнений (5), находим:

$$\left. \begin{aligned} M(l_1 \ddot{y}_2 - l_2 \ddot{y}_1) + c_1 l y_1 + c_2 l y_2 &= M e l \omega^2 \cos \omega t, \\ M(l_1 \ddot{z}_2 - l_2 \ddot{z}_1) + c_1 l z_1 + c_2 l z_2 &= M e l \omega^2 \sin \omega t, \\ A\omega(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - B(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + c_2 l_2 l z_2 + c_1 l_1 l z_1 &= \\ &= -(B - A) \omega^2 l \delta \sin(\omega t - \varepsilon), \\ A\omega(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + B(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - c_2 l_2 l y_2 - c_1 l_1 l y_1 &= \\ &= (B - A) \omega^2 l \delta \cos(\omega t - \varepsilon). \end{aligned} \right\} (7)$$

Полученная система линейных, неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами описывает малые колебания ротора, вызванные статической и динамической неуравновешенностью.

Решение этой системы складывается из общего решения системы без правой части и частного решения полной системы.

Общее решение системы без правой части найдено в предыдущей задаче, — оно отвечает свободным колебаниям ротора.

Частное решение полной системы, которое будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, \\ z_1 &= a_2 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t, \\ y_2 &= a_3 \cos \omega t + b_3 \sin \omega t, \\ z_2 &= a_4 \sin \omega t + b_4 \cos \omega t, \end{aligned} \right\} (8)$$

определяет искомые вынужденные колебания.

Для того чтобы найти значения постоянных a_i, b_i , подставим решение (8) в уравнения движения (7). Так как эти уравнения должны быть удовлетворены в произвольный момент времени, то необходимо отдельно приравнять нулю сумму всех членов, содержащих множителем $\cos \omega t$, и сумму всех членов, содержащих множителем $\sin \omega t$. В итоге получаем две системы алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} M\omega^2(l_2 a_1 - l_1 a_3) + c_1 l a_1 + c_2 l a_3 &= M e l \omega^2, \\ M\omega^2(l_2 a_2 - l_1 a_4) + c_1 l a_2 + c_2 l a_4 &= M e l \omega^2, \\ -A\omega^3(a_3 - a_1) + B\omega^3(a_4 - a_2) + c_2 l_2 l a_4 + c_1 l_1 l a_2 &= \\ &= -(B - A) l \delta \omega^2 \cos \varepsilon, \\ A\omega^3(a_4 - a_2) - B\omega^3(a_3 - a_1) - c_2 l_2 l a_3 - c_1 l_1 l a_1 &= \\ &= (B - A) l \delta \omega^2 \cos \varepsilon \end{aligned} \right\} (9)$$

и

$$\left. \begin{aligned} M\omega^2 (l_2 b_1 - l_1 b_3) - c_1 l b_1 + c_2 l b_3 &= 0, \\ M\omega^2 (l_2 b_2 - l_1 b_4) - c_1 l b_2 + c_2 l b_4 &= 0, \\ A\omega^2 (b_3 - b_1) - B\omega^2 (b_4 - b_2) - c_2 l_2 l b_4 + c_1 l_1 l b_2 &= \\ &= (B - A) \delta l \omega^2 \sin \varepsilon, \\ A\omega^2 (b_4 - b_2) - B\omega^2 (b_3 - b_1) + c_2 l_2 l b_3 + c_1 l_1 l b_1 &= \\ &= -(B - A) \delta l \omega^2 \sin \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из этих двух систем могут быть найдены значения всех восьми постоянных $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ так, чтобы частное решение удовлетворяло исходной системе дифференциальных уравнений.

Проще всего эти постоянные определяются, если сложить и вычесть первые два и последние два уравнения каждой системы. Тогда из первой системы имеем:

$$(Ml_2\omega^2 - c_1 l)(a_1 - a_2) - (Ml_1\omega^2 - c_2 l)(a_3 - a_4) = 0, \quad (11)$$

$$[(B + A)\omega^2 - c_1 l l_1](a_1 - a_2) - [(B - A)\omega^2 + c_2 l l_2](a_3 - a_4) = 0, \quad (12)$$

$$(Ml_2\omega^2 - c_1 l)(a_1 + a_2) - (Ml_1\omega^2 - c_2 l)(a_3 + a_4) = 2Mel\omega^2, \quad (13)$$

$$[(B - A)\omega^2 - c_1 l l_1](a_1 + a_2) - [(B + A)\omega^2 + c_2 l l_2](a_3 + a_4) = 2(B - A)l\delta\omega^2 \cos \varepsilon. \quad (14)$$

Аналогично из второй системы находим:

$$(Ml_2\omega^2 + c_1 l)(b_1 - b_2) - (Ml_1\omega^2 - c_2 l)(b_3 - b_4) = 0, \quad (15)$$

$$[(B - A)\omega^2 - c_1 l l_1](b_1 - b_2) - [(B + A)\omega^2 + c_2 l l_2](b_3 - b_4) = 2(B - A)l\delta\omega^2 \sin \varepsilon, \quad (16)$$

$$(Ml_2\omega^2 + c_1 l)(b_1 + b_2) - (Ml_1\omega^2 - c_2 l)(b_3 + b_4) = 0, \quad (17)$$

$$[(B + A)\omega^2 - c_1 l l_1](b_1 + b_2) - [(B - A)\omega^2 + c_2 l l_2](b_3 + b_4) = 0. \quad (18)$$

Рассмотрим совместно уравнения (11), (12), (17), (18), представляющие по существу две группы однородных уравнений, относительно сумм и разностей искомых величин.

Если

$$f_1(\omega) = [(B + A)\omega^2 + c_2 l l_2](Ml_2\omega^2 - c_1 l) - [(B - A)\omega^2 - c_1 l l_1](Ml_1\omega^2 - c_2 l) \neq 0, \quad (19)$$

то эти системы однородных алгебраических уравнений имеют только тривиальное решение

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_2, & b_1 &= -b_2, \\ a_3 &= a_4, & b_3 &= -b_4. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Подставив найденные значения искомых постоянных в оставшиеся уравнения (13), (14), (15), (16), получаем:

$$\left. \begin{aligned} (Ml_2\omega^2 + c_1 l)a_1 - (Ml_1\omega^2 - c_2 l)a_3 &= Mel\omega^2, \\ [(B - A)\omega^2 - c_1 l l_1]a_1 - [(B - A)\omega^2 + c_2 l l_2]a_3 &= \\ &= (B - A)\delta l \omega^2 \cos \varepsilon, \\ (Ml_2\omega^2 + c_1 l)b_1 - (Ml_1\omega^2 - c_2 l)b_3 &= 0, \\ [(B - A)\omega^2 - c_1 l l_1]b_1 - [(B - A)\omega^2 + c_2 l l_2]b_3 &= \\ &= (B - A)\delta l \omega^2 \sin \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Теперь легко находятся все искомые величины.

Если, кроме того,

$$f_2(\omega) = [(B - A)\omega^2 + c_2 l l_2](Ml_2\omega^2 + c_1 l) - [(B - A)\omega^2 - c_1 l l_1](Ml_1\omega^2 - c_2 l) \neq 0, \quad (22)$$

то постоянные будут равны

$$a_1 = \frac{1}{f_2(\omega)} \{ Mel\omega^2 [(B - A)\omega^2 + c_2 l l_2] - (Ml_1\omega^2 - c_2 l)(B - A)l\delta\omega^2 \cos \varepsilon \}, \quad (23)$$

$$a_3 = \frac{1}{f_2(\omega)} \{ Mel\omega^2 [(B - A)\omega^2 - c_1 l l_1] - (Ml_2\omega^2 + c_1 l)(B - A)l\delta\omega^2 \cos \varepsilon \}, \quad (24)$$

$$b_1 = -\frac{1}{f_2(\omega)} (Ml_1\omega^2 - c_2 l)(B - A)l\delta\omega^2 \sin \varepsilon, \quad (25)$$

$$b_3 = -\frac{1}{f_2(\omega)} (Ml_2\omega^2 + c_1 l)(B - A)l\delta\omega^2 \sin \varepsilon. \quad (26)$$

Вводя вместо постоянных $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ новые постоянные r_1, r_2, χ, ψ , связанные с ними соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_2 = r_1 \cos \chi, & b_1 &= -b_2 = r_1 \sin \chi, \\ a_3 &= a_4 = r_2 \cos \psi, & b_3 &= -b_4 = r_2 \sin \psi, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

перепишем уравнения (8) в виде

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= r_1 \cos(\omega t - \chi), \\ z_1 &= r_1 \sin(\omega t - \chi), \\ y_2 &= r_2 \cos(\omega t - \psi), \\ z_2 &= r_2 \sin(\omega t - \psi). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

На основании уравнений (28) заключаем, что вынужденные колебания ротора, вызванные его статической и динамической неуравновешенностью, представляют «прямую» прецессию с угловой скоростью ω , равной угловой скорости ротора.

Заметим, что статическая и динамическая неуравновешенность в данной системе не могут вызвать вынужденных колебаний, соответствующих «обратной» прецессии ротора.

Найдем теперь предельные значения постоянных, определяемых равенствами (23) — (26) при неограниченном возрастании угловой скорости:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} a_1 &= l_1 \delta \cos \varepsilon - e, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} a_3 &= l_2 \delta \cos \varepsilon - e, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} b_1 &= l_1 \delta \sin \varepsilon, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} b_3 &= l_2 \delta \sin \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Внося предельные значения постоянных в уравнения (8), находим выражения координат при $\omega = \infty$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} y_1 &= -e \cos \omega t - l_1 \delta \cos (\omega t - \varepsilon), \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} z_1 &= -e \sin \omega t + l_1 \delta \sin (\omega t - \varepsilon), \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} y_2 &= -e \cos \omega t + l_2 \delta \cos (\omega t - \varepsilon), \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} z_2 &= -e \sin \omega t + l_2 \delta \sin (\omega t - \varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Для определения предельных значений координат центра тяжести ротора и угла отклонения его главной оси инерции от геометрической оси ротора, подставим предельные значения координат (30) в уравнения (2), (3), (4). Используем зависимости (6). В итоге получаем:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} y_C &= 0, & \lim_{\omega \rightarrow \infty} z_C &= 0, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \beta &= 0, & \lim_{\omega \rightarrow \infty} \gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Следовательно, при неограниченном увеличении угловой скорости вращения неуравновешенный статически и динамически ротор стремится совместить ось вращения с главной центральной осью инерции. При неограниченном увеличении угловой скорости, жесткий ротор, пращющийся в двух упругих опорах, располагается так, что устраняется его статическая и динамическая неуравновешенности.

Ротор с четырьмя степенями свободы (не считая вращения вокруг оси) обладает замечательным свойством самоцентрирования. Это свойство находит широкое применение при конструировании современных высокооборотных машин.

Задача 461. В условиях предыдущей задачи определить критические угловые скорости ротора (при отсутствии сил трения).

Критическими называются значения угловых скоростей ротора, при которых амплитуды вынужденных колебаний неограниченно возрастают.

Решение. Как следует из уравнений (8) предыдущей задачи, координаты точек ротора неограниченно возрастают одновременно с коэффициентами a_i, b_i .

Из равенств (23) — (26) видно, что это будет при

$$f_2(\omega) = [(B - A)\omega^2 + c_2 l_2 l] (M l_2 \omega^2 + c_1 l) - [(B - A)\omega^2 - c_1 l l_1] (M l_1 \omega^2 - c_2 l) = 0. \quad (1)$$

Представим функцию $f_2(\omega)$ в виде

$$f_2(\omega) = (B - A)\omega^2 l [c_1 + c_2 - M\omega^2] + M l \omega^2 (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2) - c_1 c_2 l^3 \quad (2)$$

и исследуем ее. Для этого для значений ω , равных: 0, $\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{M}}$, ∞ , находим значения $f_2(\omega)$. При этом следует различать два случая: $B > A$ и $A > B$.

Результаты вычислений сведем в таблицу:

ω	$B > A$	$A > B$
	$f_2(\omega)$	$f_2(\omega)$
0	$-c_1 c_2 l^3$	$-c_1 c_2 l^3$
$\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{M}}$	$l(c_1 l_1 - c_2 l_2)^2$	$l(c_1 l_1 - c_2 l_2)^2$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Из таблицы видно (см. стр. 629), что при $B > A$ уравнение (1) имеет два положительных вещественных корня ω_1 и ω_2 , т. е., что резонанс наступает при этих двух значениях угловой скорости ротора. В этом случае имеется два значения критической угловой скорости, причем

$$\omega_1 < \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{M}} < \omega_2.$$

Во втором случае, при $A > B$, уравнение (1) имеет один положительный вещественный корень ω_1 , т. е. у ротора одна критическая угловая скорость, причем $\omega_1 < \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{M}}$.

Упомянутые критические угловые скорости жесткого ротора в двух упругих опорах определяются как корни биквадратного урав-

нения (1):

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{R_1 \pm \sqrt{S_1^2 - 4M(B-A)c_1c_2l^2}}{2M(B-A)}}, \quad (3)$$

где

$$R_1 = (c_1 + c_2)(B - A) + M(c_1l_1^2 + c_2l_2^2)$$

и

$$S_1 = (c_1 + c_2)(B - A) - M(c_1l_1^2 + c_2l_2^2)$$

При $A = 0$ формула (3) дает значение критической угловой скорости без учета гироскопического эффекта.

До сих пор при определении вынужденных колебаний ротора мы предполагали, что $f_1(\omega) \neq 0$. Рассмотрим теперь особый случай, когда

$$f_1(\omega) = 0. \quad (4)$$

Найдем разность

$$f_1(\omega) - f_2(\omega) = 2A\omega^2l(c_1 + c_2 - M\omega^2). \quad (5)$$

Из (5) следует, что при условии (4), функция $f_2(\omega)$ не обращается в нуль, если $c_1 + c_2 \neq M\omega^2$ и $\omega \neq 0$. Найденные в предыдущей задаче значения a_i , b_i и при условии (4) удовлетворяют исходным дифференциальным уравнениям движения. Значит, в этом случае мы имеем те же резонансные колебания и критические угловые скорости, которые уже определены уравнением (3). На этом основании можно заключить, что при воздействии на ротор возмущающих сил, вызванных его статической и динамической неуравновешенностью, резонансных колебаний, соответствующих обращению в нуль, функции $f_1(\omega)$ возникнуть не могут. Однако при действии других возмущающих сил, изменяющихся с частотой, равной угловой скорости ротора ω , резонансные колебания, соответствующие обращению в нуль $f_1(\omega)$, могут возникнуть. Доказательство этого утверждения приводится в следующей задаче.

Задача 462. В условиях задачи 460 определить критические угловые скорости ротора, если возмущающая сила равна

$$F = F_0 \cos \omega t.$$

Возмущающая сила с постоянной амплитудой приложена в центре тяжести ротора и сохраняет неизменное направление, параллельное оси y .

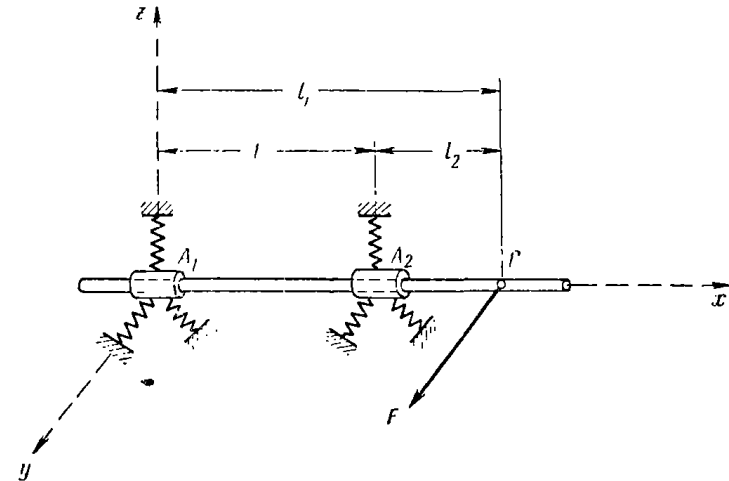
Решение. Дифференциальные уравнения движения ротора будут (см. уравнения (5), (6), (13), (14) задачи 459):

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{y}_C + c_1y_1 + c_2y_2 &= F_0 \cos \omega t, \\ M\ddot{z}_C + c_1z_1 + c_2z_2 &= 0, \\ A\omega\dot{\beta} - B\ddot{\gamma} + c_2l_2z_2 + c_1l_1z_1 &= 0, \\ A\omega\dot{\gamma} + B\ddot{\beta} - c_2l_2y_2 - c_1l_1y_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Подставляя выражения для y_C , z_C , β , γ (см. уравнения (1) — (4) задачи 459) в эти уравнения, находим:

$$\left. \begin{aligned} M(l_1\ddot{y}_2 - l_2\ddot{y}_1) + c_1ly_1 + c_2ly_2 &= F_0l \cos \omega t, \\ M(l_1\ddot{z}_2 - l_2\ddot{z}_1) + c_1lz_1 + c_2lz_2 &= 0, \\ A\omega(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - B(\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1) + c_2l_2lz_2 + c_1l_1lz_1 &= 0, \\ A\omega(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + B(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - c_2l_2ly_2 - c_1l_1ly_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Решение этой системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами складывается из общего решения системы без правой части и частного решения полной системы.



К задаче 462.

Общее решение системы без правой части уже найдено, — это уравнение свободных колебаний ротора (см. задачу 459).

Частное решение полной системы, определяющее вынужденные колебания ротора, будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_1 \cos \omega t; & z_1 &= a_2 \sin \omega t; \\ y_2 &= a_3 \cos \omega t; & z_2 &= a_4 \sin \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Подставляя (3) в дифференциальные уравнения движения (2) и сокращая соответственно на $\sin \omega t$ или $\cos \omega t$, получаем систему алгебраических уравнений для определения постоянных a_1 , a_2 , a_3 , a_4 :

$$\left. \begin{aligned} (c_1l + Ml_2\omega^2)a_1 - (c_2l - Ml_1\omega^2)a_3 &= F_0l, \\ (c_1l - Ml_2\omega^2)a_2 - (c_2l - Ml_1\omega^2)a_4 &= 0, \\ A\omega^2a_1 - A\omega^2a_3 - (c_1l_1 - B\omega^2)a_2 + (c_2l_2l + B\omega^2)a_4 &= 0, \\ A\omega^2a_1 - A\omega^2a_2 - (c_1l_1l - B\omega^2)a_1 - (c_2l_2l + B\omega^2)a_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Складывая и вычитая первые два и последние два уравнения, находим:

$$\left. \begin{aligned} (c_1 l + M l_2 \omega^2)(a_1 + a_2) + (c_2 l - M l_1 \omega^2)(a_3 + a_4) &= F_0 l, \\ [(B - A)\omega^2 - c_1 l_1 l](a_1 + a_2) - \\ - [(B - A)\omega^2 + c_2 l_2 l](a_3 + a_4) &= 0, \\ (c_1 l - M l_2 \omega^2)(a_1 - a_2) + \\ + (c_2 l - M l_1 \omega^2)(a_3 - a_4) &= F_0 l, \\ [(B + A)\omega^2 - c_1 l_1 l](a_1 - a_2) - \\ - [(B + A)\omega^2 + c_2 l_2 l](a_3 - a_4) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Из этих уравнений получаем:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= \frac{F_0 l [(B - A)\omega^2 + c_2 l_2 l]}{f_2(\omega)}, \\ a_3 + a_4 &= \frac{F_0 l [(B - A)\omega^2 - c_1 l_1 l]}{f_2(\omega)}, \\ a_1 - a_2 &= \frac{F_0 l [(B + A)\omega^2 + c_1 l_1 l]}{f_1(\omega)}, \\ a_3 - a_4 &= \frac{F_0 l [(B + A)\omega^2 - c_2 l_2 l]}{f_1(\omega)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{F_0 l [(B - A)\omega^2 + c_2 l_2 l]}{2f_2(\omega)} + \frac{F_0 l [(B + A)\omega^2 + c_1 l_1 l]}{2f_1(\omega)}, \\ a_2 &= \frac{F_0 l [(B - A)\omega^2 + c_2 l_2 l]}{2f_2(\omega)} - \frac{F_0 l [(B + A)\omega^2 + c_1 l_1 l]}{2f_1(\omega)}, \\ a_3 &= \frac{F_0 l [(B - A)\omega^2 - c_1 l_1 l]}{2f_2(\omega)} + \frac{F_0 l [(B + A)\omega^2 - c_2 l_2 l]}{2f_1(\omega)}, \\ a_4 &= \frac{F_0 l [(B - A)\omega^2 - c_1 l_1 l]}{2f_2(\omega)} - \frac{F_0 l [(B + A)\omega^2 - c_2 l_2 l]}{2f_1(\omega)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Формулы (6) показывают, что a_1, a_2, a_3, a_4 неограниченно возрастают, когда $f_1(\omega)$ приближается к нулю. При решении предыдущей задачи было установлено, что $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega)$ не имеют общих корней. Следовательно, когда $f_1(\omega) \rightarrow 0$, то $f_2(\omega)$ принимает отличное от нуля значение. Поэтому при малых $f_1(\omega)$ первые слагаемые в формулах (6) пренебрежимо малы по сравнению со вторыми.

Следовательно, для приближенного определения постоянных можно в (6) отбросить первые части.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -a_2, \\ a_3 &= -a_4. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Поэтому уравнения движения точек ротора, совпадающих с центрами нижней и верхней опор, будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_1 \cos \omega t, & y_2 &= a_3 \cos \omega t, \\ z_1 &= -a_1 \sin \omega t, & z_2 &= -a_3 \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из уравнений (8) видно, что характер колебаний, вызываемых силой F вблизи резонанса при соответствующей критической угловой скорости, определяемой из уравнения $f_1(\omega) = 0$, отвечает синхронной «обратной» прецессии ротора.

Значения критических угловых скоростей «обратной» прецессии находятся из уравнения (см. задачу 460)

$$f_1(\omega) = [(B + A)\omega^2 + c_2 l_2 l] (M l_2 \omega^2 - c_1 l) - [(B - A)\omega^2 - c_1 l_1 l] (M l_1 \omega^2 - c_2 l) = 0, \quad (9)$$

откуда

$$\omega_{3,4} = \sqrt{\frac{R_2 + \sqrt{R_2^2 - 4M(B + A)c_1 c_2 l^2}}{2M(B + A)}},$$

где

$$R_2 = (c_1 + c_2)(B + A) + M(c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2)$$

и

$$S_2 = (c_1 - c_2)(B - A) + M(c_1 l_1^2 - c_2 l_2^2)$$

причем эти значения всегда вещественны.

Таким образом, при действии возмущающей силы постоянного направления, изменяющейся по синусоидальному закону с частотой, равной угловой скорости ротора, существуют четыре или три критические угловые скорости ротора (в зависимости от соотношения моментов инерции A и B).

7°. Вынужденные колебания твердого тела при резонансе. Дифференциальные уравнения движения твердого тела составляются в соответствии с общими правилами, указанными в § 4 и 5, пунктах 3°, 6° настоящей главы.

При решении задач на определение вынужденных колебаний твердого тела при резонансе рекомендуется следующая последовательность действий:

- 1) выбираем обобщенные координаты;
- 2) пользуясь уравнениями Лагранжа или общими теоремами динамики, составляем дифференциальные уравнения движения твердого тела;
- 3) рассматривая задачу о свободных колебаниях тела, находим частоты свободных колебаний (резонансные частоты);
- 4) для случая резонанса находим частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений движения и накладывая на него общее решение однородной системы, получаем искомое общее решение задачи.

Задача 463. Определить вынужденные колебания шпинделя верстала, закрепленного шарнирно в точке O и имеющего в точке A

упругую опору с коэффициентом жесткости c_1 в любом горизонтальном направлении. Центр тяжести шпинделя находится в точке C . Угловая скорость вращения шпинделя ω вокруг оси симметрии постоянная по величине. Главные моменты инерции шпинделя относительно осей, проведенных через неподвижную точку O , соответственно равны: осевой момент инерции A , момент инерции относительно любой оси, перпендикулярной оси симметрии B . Расстояния $OA = l$, $AC = l_1$, $OC = l_2$. На высоте b над неподвижной точкой O , на расстоянии e от оси симметрии, находится неуравновешенная малая масса m (рис. к задаче 463). Ввиду малости массы m и расстояния e пренебречь ее влиянием на положение центра тяжести и моменты инерции.

Определить вынужденные колебания шпинделя при резонансе.

Решение. Воспользуемся некоторыми результатами, полученными при решении задачи 456, когда для этого же шпинделя были определены вынужденные колебания при значениях угловой скорости вращения, отличных от резонансных.

Дифференциальные уравнения движения имели вид

$$\left. \begin{aligned} B\ddot{z}_1 - A\omega^2 z_1 - (c_1 l^2 - Ql_2) z_1 &= -m\omega^2 b e l \sin \omega t, \\ B\ddot{y}_1 + A\omega^2 y_1 + (c_1 l^2 - Ql_2) y_1 &= -m\omega^2 b e l \cos \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где y_1, z_1 — координаты точки шпинделя, соприкасающейся с нижней опорой.

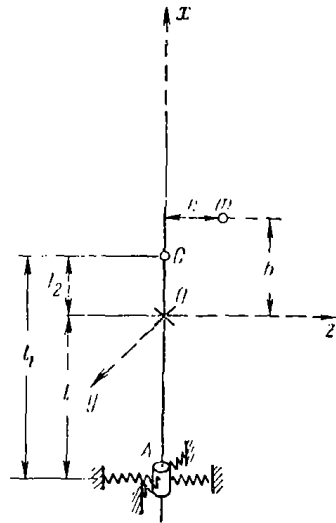
Частное решение системы, определяющее вынужденные колебания, дается формулами

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{m\omega^2 b e l}{(B - A)\omega^2 - (c_1 l^2 - Ql_2)} \cos \omega t, \\ z_1 &= \frac{m\omega^2 b e l}{(B - A)\omega^2 - (c_1 l^2 - Ql_2)} \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Это решение удовлетворяет системе дифференциальных уравнений движения при всех значениях угловой скорости вращения шпинделя, кроме критического (резонансного), равного

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1 l^2 - Ql_2}{B - A}}, \quad (3)$$

для которого знаменатель в (2) обращается в нуль.



К задаче 463.

Из уравнений (2) следует, что при вынужденных колебаниях точка с координатами y_1, z_1 будет описывать окружность радиусом

$$r_1 = \frac{m\omega^2 b e l}{(B - A)\omega^2 - (c_1 l^2 - Ql_2)}, \quad (4)$$

с угловой скоростью, равной по величине угловой скорости вращения шпинделя вокруг оси симметрии. При этом угол между направлениями угловых скоростей меньше $\pi/2$. Следовательно, вынужденным колебаниям шпинделя, вызванным неуравновешенностью, соответствует «прямая» прецессия его оси с угловой скоростью, равной по модулю угловой скорости вращения шпинделя. При вынужденных колебаниях, вызванных неуравновешенностью шпинделя, резонансные колебания, соответствующие второму значению критической скорости

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{c_1 l^2 - Ql_2}{B + A}}, \quad (5)$$

возникнуть не могут.

Перейдем к определению закона вынужденных колебаний шпинделя при резонансе, когда угловая скорость шпинделя равна критической.

Тогда частное решение системы дифференциальных уравнений (1) вследствие ее структуры следует искать в виде

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= t d_1 \sin \omega t, \\ z_1 &= t h_1 \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Вычисляя первую и вторую производные от y_1 и z_1 по времени, подставляем полученные выражения в систему (1)

$$\left. \begin{aligned} [-2Bh_1\omega - Ad_1] \sin \omega t + [-tBh_1\omega^2 - tAd_1\omega^2 + \\ + (c_1 l^2 - Ql_2) t h_1] \cos \omega t &= -m\omega^2 b e l \sin \omega t, \\ [2Bd_1\omega + A\omega h_1] \cos \omega t + [-tBd_1\omega^2 - tAh_1\omega^2 + \\ + (c_1 l^2 - Ql_2) t d_1] \sin \omega t &= -m\omega^2 b e l \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Так как эти равенства должны быть справедливы в любой момент времени, то необходимо приравнять коэффициенты при $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $t \sin \omega t$ и $t \cos \omega t$ в правой и левой частях. В результате получаем четыре уравнения для определения двух неизвестных:

$$\left. \begin{aligned} -2B\omega h_1 - Ad_1 &= -m\omega^2 b e l, \\ -B\omega^2 h_1 - A\omega^2 d_1 - (c_1 l^2 - Ql_2) h_1 &= 0, \\ 2B\omega d_1 + A\omega h_1 &= -m\omega^2 b e l, \\ -B\omega^2 d_1 - A\omega^2 h_1 - (c_1 l^2 - Ql_2) d_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Особенность системы состоит в том, что решение первых двух уравнений тождественно удовлетворяет остальным. Поэтому

$$d_1 = -h_1 = \frac{m\omega b e l}{A - 2B} = -\frac{m b e l}{2B - A} \sqrt{\frac{c_1 l^2 - Q l_2}{B - A}}. \quad (9)$$

Следовательно, уравнения вынужденных колебаний нижнего коша шпинделя при резонансе будут:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -\frac{m b e l}{2B - A} \sqrt{\frac{c_1 l^2 - Q l_2}{B - A}} t \sin \omega t, \\ z_1 &= \frac{m b e l}{2B - A} \sqrt{\frac{c_1 l^2 - Q l_2}{B - A}} t \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из этих уравнений следует, что при резонансе вынужденным колебаниям соответствует «обратная» прецессия оси шпинделя.

Если угловая скорость шпинделя меньше критической (3), то, как видно из уравнений (2), знаменатель в правых частях отрицателен. Таким образом, ось шпинделя совершает «прямую» прецессию. При резонансе возникают нарастающие колебания, соответствующие «обратной» прецессии оси шпинделя.

Далее, с ростом угловой скорости шпинделя знаменатель в уравнениях (2) становится положительным и, таким образом, после резонанса вновь возникают колебания, соответствующие «прямой» прецессии шпинделя.

§ 6. Устойчивость движения

1. Прямой метод исследования. Для изучения устойчивости движения системы материальных точек запишем систему дифференциальных уравнений движения в виде системы первого порядка

$$\frac{dy_k}{dt} = Y_k(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \quad (k = 1, 2, \dots, 2n), \quad (1^*)$$

где y_k — обобщенные координаты или обобщенные скорости системы, являющиеся функциями времени t .

Если

$$y_1 = f_1(t), \quad y_2 = f_2(t), \quad \dots, \quad y_n = f_n(t) \quad (2^*)$$

является частным решением системы (1*), соответствующим заданным начальным условиям движения:

$$y_1 = y_{10}, \quad y_2 = y_{20}, \quad \dots, \quad y_n = y_{n0} \quad \text{при } t = 0, \quad (3^*)$$

то решение (2*) определяет невозмущенное движение системы.

Невозмущенное движение системы называется устойчивым, если при малом изменении начальных условий решения системы (2*)

переходят в решения, мало отличающиеся от исходных для сколь угодно больших значений t . Такое невозмущенное движение называют также движением устойчивым в малом.

Если отклонения от невозмущенного движения, кроме того, при неограниченном возрастании времени стремятся к нулю, то такое невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым.

В некоторых технических задачах недостаточно исследовать устойчивость движения в малом. Тогда следует отбросить ограничения, наложенные на отклонения начальных условий возмущенного движения, от начальных условий невозмущенного движения.

Невозмущенное движение системы называется асимптотически устойчивым в большом, если при любых иных начальных условиях, чем (3*), решение системы уравнений (1*), начиная с некоторого определенного значения времени, будет отклоняться от решения (2*) на величину, меньшую наперед заданной.

Отклонения начальных условий движения от заданных уравнениями (3*) называются возмущениями.

Возможны и другие определения устойчивости движения. В частности, во многих задачах современной техники важно обеспечить малые отклонения в решении дифференциальных уравнений возмущенного движения от решения невозмущенного движения на конечном интервале времени.

При решении задач на устойчивость движения в этом пункте будет применен прямой метод интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения. Этот метод наиболее эффективен по своим результатам, однако его применение ограничено небольшим числом возможных приложений ввиду математических трудностей, связанных с получением решения в замкнутом виде.

При решении задач на устойчивость движения прямым методом интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения рекомендуется следующий порядок действий:

1) составляем дифференциальные уравнения невозмущенного движения системы;

2) находим частное решение этой системы дифференциальных уравнений, соответствующее заданным начальным условиям и определяющее невозмущенное движение системы;

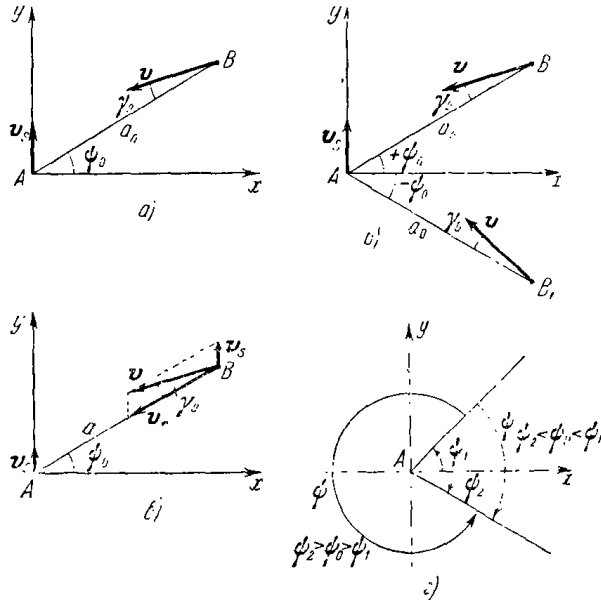
3) задаемся другими начальными условиями движения;

4) составляем дифференциальные уравнения возмущенного движения;

5) интегрируя дифференциальные уравнения возмущенного движения, находим их решение;

6) сопоставляя решения дифференциальных уравнений невозмущенного и возмущенного движений, судим об устойчивости невозмущенного движения.

Задача 464. Точка A движется равномерно и прямолинейно со скоростью v_s . Точка B находилась в начальный момент на расстоянии a_0 от точки A . Прямая AB , соединяющая обе точки, в начальный момент образывала угол ψ_0 с перпендикуляром, восстановленным к прямолинейной траектории точки A (рис. а).



К задаче 464.

Угол γ , образованный скоростью точки B с линией AB , называется углом упреждения. Точка B будет сближаться с точкой A , вплоть до точного попадания, по прямолинейной относительной траектории, если выбрать угол упреждения γ_0 согласно равенству

$$\sin \gamma_0 = \frac{v_s}{v} \cos \psi_0 \equiv k \cos \psi_0, \quad (1)$$

так как при этом относительная скорость точки B будет направлена по BA (рис. в).

Равенству (1) соответствуют два значения угла $\pm \psi_0$ (рис. б):

$$\sin \psi_0 = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \gamma_0}{k^2}}, \quad \sin(-\psi_0) = -\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \gamma_0}{k^2}}. \quad (2)$$

Таким образом, прямолинейное движение точки B возможно при подходе к точке A с передней полуплоскости и с задней полуплоскости, по прямым BA и B_1A .

Определить устойчивость движения точки B по BA и B_1A .

Решение. Рассматривая движение точки B как сложное движение, складывающееся из переносного движения вместе с точкой A и относительного движения по отношению к точке A , замечаем, что при соблюдении равенства (1) вектор относительной скорости точки B направлен в точку A (рис. в). Наблюдатель, движущийся вместе с точкой A , видит точку B , движущейся по прямолинейной относительной траектории BA с постоянной скоростью v_r . Это и будет невозмущенное движение точки B .

Рассмотрим теперь возмущенное движение точки B , полагая, что угол упреждения γ не удовлетворяет равенству (1). Обозначая расстояние AB через a , находим проекции относительной скорости на AB и на ось, перпендикулярную к AB :

$$\dot{a} = -v \cos \gamma - v_s \sin \psi, \quad (3)$$

$$a \dot{\psi} = v \sin \gamma - v_s \cos \psi. \quad (4)$$

В этих уравнениях через ψ обозначен угол между осью x и прямой AB в данный момент времени.

Разделим уравнение (3) на равенство (4) и помножим обе части на $d\psi$. Тогда найдем:

$$\frac{da}{a} = \frac{v \cos \gamma + v_s \sin \psi}{v_s \cos \psi - v \sin \gamma} d\psi. \quad (5)$$

При интегрировании этого уравнения с разделенными переменными необходимо рассмотреть три частных случая:

$$1) \sin^2 \gamma < k^2; \quad 2) \sin^2 \gamma = k^2; \quad 3) \sin^2 \gamma > k^2.$$

Первый случай: (малый угол упреждения: $\sin^2 \gamma < k^2$). Интегрируя (5), находим:

$$\ln Ca = \ln \left[\left(\frac{\sin \gamma - k \cos \psi}{-k + \sin \gamma \cos \psi + \sqrt{k^2 - \sin^2 \gamma} \sin \psi} \right)^{\frac{\cos \gamma}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \gamma}}} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\sin \gamma - k \cos \psi} \right], \quad (6)$$

где C — произвольная постоянная, а через k обозначено отношение скоростей $k = \frac{v_s}{v}$.

Освобождаясь от логарифмов и определяя C по начальным условиям (при $t=0$ $a=a_0$, $\psi=\psi_0$), имеем:

$$\frac{a}{a_0} = \left[\frac{-k + \sin \gamma \cos \psi_0 + \sqrt{k^2 - \sin^2 \gamma} \sin \psi_0}{-k + \sin \gamma \cos \psi + \sqrt{k^2 - \sin^2 \gamma} \sin \psi} \cdot \frac{\sin \gamma - k \cos \psi_0}{\sin \gamma - k \cos \psi} \right]^{\frac{\cos \gamma}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \gamma}}} \times \\ \times \frac{\sin \gamma - k \cos \psi_0}{\sin \gamma - k \cos \psi}. \quad (7)$$

Это уравнение относительной траектории точки B в возмущенном движении.

Заметим, что при разных k показатель степени различен:

$$\frac{\cos \gamma}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \gamma}} \left. \begin{array}{l} > 1 \text{ при } k < 1 \\ = 1 \text{ при } k = 1 \\ < 1 \text{ при } k > 1. \end{array} \right\} \quad (8)$$

Если $k < 1$, то точка B достигнет точку A при угле ψ_2 , определенном равенствами

$$\cos \psi_2 = \frac{\sin \gamma}{k}, \quad \sin \psi_2 = -\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \gamma}{k^2}}, \quad (9)$$

так как тогда a обратится в нуль, что следует из (7). Сопоставляя значения ψ_2 (9) с равенствами (1) и (2), заключаем, что угол $\psi_2 = -\psi_0$ для угла упреждения γ . Иначе говоря, в конце движения точка B выходит на траекторию невозмущенного движения, находящуюся в задней полуплоскости. Следовательно, движение по относительной траектории AB , находящейся под углом $(-\psi_0)$ к оси x , устойчиво в большом. Каково бы ни было начальное возмущение, точка B в конце движения вернется на прямую AB .

С другой стороны из равенства (4) имеем:

$$\dot{\psi} = \frac{v \sin \gamma - v_s \cos \psi}{a}. \quad (10)$$

Следовательно, при переходе через прямую, расположенную под углом ψ_1 , определяемым равенствами (рис. 2)

$$\cos \psi_1 = \frac{\sin \gamma}{k}, \quad \sin \psi_1 = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \gamma}{k^2}}, \quad (11)$$

угловая скорость вращения линии AB меняет знак.

Если начальный угол ψ_0 меньше ψ_1 и больше ψ_2 , то в процессе движения угол ψ монотонно уменьшается вплоть до $\psi = \psi_2$, когда точка B совмещается с точкой A .

Если же угол ψ_0 больше ψ_1 , но меньше ψ_2 , то угол в процессе движения монотонно увеличивается вплоть до $\psi = \psi_2$, при котором опять-таки точка B совмещается с точкой A (рис. 2). Следовательно, невозмущенное движение по относительной траектории AB , расположенной в передней полуплоскости, неустойчиво в малом.

Как бы мало ни было отклонение точки от траектории невозмущенного движения, находящейся в передней полуплоскости, она при дальнейшем движении будет все дальше отклоняться от невозмущенной траектории, приближаясь к другой прямолинейной траектории невозмущенного движения, расположенной в задней полуплоскости.

Второй случай: ($\sin^2 \gamma = k^2$). Интегрируя уравнение (5) и определяя произвольную постоянную интегрирования по начальным условиям

(при $t=0$ $a=a_0$, $\psi=\psi_0$), находим уравнение относительной траектории возмущенного движения

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1 - \cos \psi_0}{1 - \cos \psi} e^{\frac{\sqrt{1-k^2}}{k} (\text{ctg } \frac{\psi}{2} - \text{ctg } \frac{\psi_0}{2})}. \quad (12)$$

Уравнение (10) в этом случае принимает вид

$$\dot{\psi} = \frac{v_s}{a} (1 - \cos \psi). \quad (13)$$

Следовательно, угловая скорость поворота линии BA всегда положительна.

Из уравнения (12) следует, что расстояние a обращается в нуль при $\psi \rightarrow 0$ с отрицательной стороны. Таким образом, в этом случае обе траектории невозмущенного движения (рис. 2) сливаются в одну прямую Ax , углы ψ_1 и ψ_2 обращаются соответственно в нуль. В этом случае следует судить об устойчивости движения по прямой Ax на основании знака возмущения. Если начальное отклонение находится в первой четверти, то точка B будет отклоняться все дальше от прямой Ax и совпадет с точкой A при $\psi \rightarrow 0$ с отрицательной стороны. Если начальное отклонение лежит в четвертой четверти, то точка B будет приближаться к прямой Ax , угол ψ_0 будет стремиться к нулю. В этом случае движение устойчиво в большом.

Третий случай: ($\sin^2 \gamma > k^2$). Интегрируя уравнение (5) и определяя произвольную постоянную интегрирования по начальным условиям ($a=a_0$, $\psi=\psi_0$ при $t=0$), находим уравнение относительной траектории возмущенного движения

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{\sin \gamma - k \cos \psi_0}{\sin \gamma - k \cos \psi} \right) \times \times e^{-\frac{2 \cos \gamma}{\sqrt{\sin^2 \gamma - k^2}} \left[\text{arc tg} \left(\sqrt{\frac{\sin \gamma + k}{\sin \gamma - k}} \text{tg } \frac{\psi}{2} \right) - \text{arc tg} \left(\sqrt{\frac{\sin \gamma + k}{\sin \gamma - k}} \text{tg } \frac{\psi_0}{2} \right) \right]}. \quad (14)$$

Из этого уравнения следует, что расстояние до точки A обращается в нуль при неограниченном возрастании угла ψ .

Из уравнения (4) находим угловую скорость поворота прямой

$$\dot{\psi} = \frac{v}{a} (\sin \gamma - k \cos \psi), \quad (15)$$

откуда следует, что угловая скорость не меняет знака. Ее знак совпадает со знаком $\sin \gamma$.

Таким образом, возмущенная траектория точки B — спираль, проходящая через точку A .

Из уравнения (15) следует, что угловая скорость вращения прямой BA по мере приближения точки B к A неограниченно возрастает.

2°. Устойчивость движения по первому приближению. Решение задач на определение устойчивости движения прямым методом интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения в большинстве случаев не может быть осуществлено ввиду невозможности получения решения в замкнутом виде.

В связи с этим широкое распространение получил способ определения устойчивости движения по первому приближению. Этот способ был известен задолго до появления классического труда А. М. Ляпунова (Общая задача об устойчивости движения, 1892 г.). Однако именно А. М. Ляпунов впервые установил условия, при которых первое приближение позволяет судить об устойчивости движения исходной системы, движение которой описывается нелинейными дифференциальными уравнениями.

Способ определения устойчивости движения по первому приближению заключается в следующем.

Пусть

$$y_1 = f_1(t), \quad y_2 = f_2(t), \quad \dots, \quad y_n = f_n(t) \quad (1^*)$$

является частным решением системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dy_k}{dt} = Y_k(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \quad (2^*)$$

при заданных начальных условиях движения

$$y_1 = y_{10}, \quad y_2 = y_{20}, \quad \dots, \quad y_n = y_{n0} \quad \text{при } t = 0. \quad (3^*)$$

Решение (1*) определяет невозмущенное движение системы. При других начальных условиях движения значения переменных y_k , определяющие движение системы, можно представить в виде

$$y_k = f_k(t) + x_k. \quad (4^*)$$

Тогда уравнения (2*) примут вид

$$\frac{df_k}{dt} + \frac{dx_k}{dt} = Y_k[f_1(t) + x_1, f_2(t) + x_2, \dots, f_n(t) + x_n, t]. \quad (5^*)$$

Вычитая из каждого соответственного уравнения (5*) уравнение (2*), найдем

$$\frac{dx_k}{dt} = Y_k[f_1(t) + x_1, \dots, f_n(t) + x_n, t] - Y_k[f_1(t), \dots, f_n(t), t]. \quad (6^*)$$

Обозначая правую часть этих уравнений для краткости:

$$\begin{aligned} X_k(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \\ = Y_k[f_1(t) + x_1, \dots, f_n(t) + x_n, t] - Y_k[f_1(t), \dots, f_n(t), t], \end{aligned} \quad (7^*)$$

получим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, \dots, x_n, t). \quad (8^*)$$

Из (7*) следует, что

$$X_k(0, 0, \dots, 0, t) = 0 \quad (9^*)$$

и, следовательно,

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \quad (10^*)$$

является частным решением системы (8*), соответствующим невозмущенному движению.

Для рассмотрения устойчивости по первому приближению в системе уравнений (8*) в правой части выделяются линейные слагаемые. При этом ограничимся случаем, когда время не входит явно в правую часть уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n + F_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (11^*)$$

где $a_{ks} = \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_s} \right)_{x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0}$, а $F_k(x_1, \dots, x_n)$ содержит слагаемые второго и более высоких порядков относительно переменных x_k .

Тогда для исследования устойчивости по первому приближению составляют систему, получаемую из (11*) отбрасыванием нелинейных слагаемых (уравнения в вариациях)

$$\frac{dx_k}{dt} = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n, \quad (12^*)$$

и находят характеристическое уравнение системы (12*)

$$z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \dots + A_n = 0. \quad (13^*)$$

Согласно первой теореме Ляпунова, невозмущенное движение, определяемое уравнениями (1*), устойчиво, если все корни характеристического уравнения (13*) имеют отрицательную вещественную часть. В этом случае отброшенные нелинейные слагаемые в правой части уравнений (11*) не влияют на устойчивость движения.

Согласно второй теореме Ляпунова, невозмущенное движение, определяемое уравнениями (1*), неустойчиво, если среди корней характеристического уравнения (13*) имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью. И в этом случае отброшенные нелинейные слагаемые в правой части уравнений (11*) не могут влиять на устойчивость движения.

Таким образом, исследование по первому приближению позволяет окончательно ответить на вопрос об устойчивости движения в тех случаях, когда корни характеристического уравнения имеют отрицательную или положительную вещественную часть.

Если в числе корней характеристического уравнения имеются корни, вещественная часть которых равна нулю, то есть нулевые или

чисто мнимые корни, то судить об устойчивости движения по первому приближению нельзя. В этих случаях, называемых «критическими», как показал А. М. Ляпунов, необходимо учитывать в дифференциальных уравнениях члены порядка выше первого.

О знаке корней характеристического уравнения можно судить на основании теоремы Гурвица, которая формулируется следующим образом. Уравнение n -й степени с вещественными коэффициентами ($a_0 > 0$)

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (14^*)$$

имеет все корни с отрицательной вещественной частью, если все определители вида

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} \quad (15^*)$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

положительны. При этом $a_i = 0$, если $i > n$. Это условие является необходимым и достаточным.

При решении задач на исследование устойчивости движения системы по первому приближению рекомендуется следующий порядок действий:

1) определяем число степеней свободы системы и выбираем обобщенные координаты;

2) пользуясь уравнениями Лагранжа, составляем дифференциальные уравнения невозмущенного движения;

3) составляем дифференциальные уравнения возмущенного движения, полагая, что обобщенные координаты и обобщенные скорости в возмущенном движении отличаются от значений в невозмущенном движении на величины первого порядка малости;

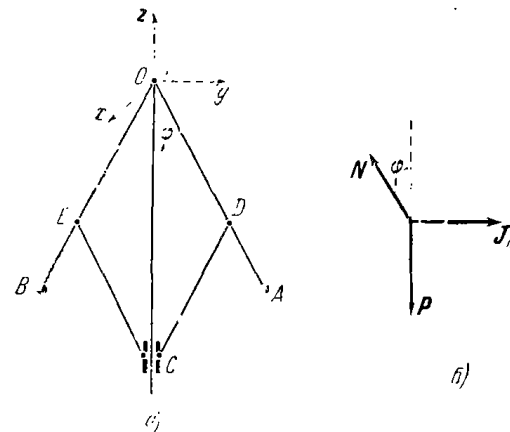
4) в полученных дифференциальных уравнениях отбрасываем слагаемые второго и более высоких порядков малости;

5) вычитаем из дифференциальных уравнений возмущенного движения соответственные дифференциальные уравнения невозмущенного движения;

6) для случая системы линейных дифференциальных уравнений в вариациях с постоянными коэффициентами составляем характеристическое уравнение;

7) пользуясь теоремой Гурвица, определяем знаки вещественных частей корней движения характеристического уравнения и затем судим об устойчивости движения исходной системы.

Задача 465. Центробежный регулятор Уатта предназначен для поддержания равномерного вращательного движения. Он состоит из двух стержней OA и OB одинаковой длины l , шарнирно укрепленных в неподвижной точке O . На концах стержней несут два шара массы m каждый (рис. а). При помощи двух стержней CE и DC



К задаче 465.

муфта C , которая может скользить по вертикальной оси, шарнирно соединена со стержнями, несущими шары. Шары считать материальными точками. При увеличении угловой скорости вращения шары расходятся, муфта C поднимается, уменьшая впускное отверстие для пара. При уменьшении угловой скорости шары сближаются, муфта C опускается и увеличивает отверстие для впуска пара.

Пренебрегая массами стержней и муфты, а также силами трения, определить устойчивость движения регулятора. Момент инерции вращающихся частей относительно вертикальной оси равен I_0 (без учета шаров).

Восстанавливающий момент, вызванный отклонением угла φ от невозмущенного значения φ_0 , равен

$$L_x = -k(\varphi - \varphi_0),$$

где k — постоянный положительный коэффициент.

Решение. Регулятор в целом представляет собой систему с двумя степенями свободы. Выбираем обобщенные координаты: угол поворота вокруг оси OC , который обозначим β , и угол поворота стержней OA и OB вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к плоскости OAB , который назовем φ . Определим значение угла φ_0 , соответствующее вращению системы с постоянной заданной угловой скоростью $\dot{\beta}_0 = \omega_0$. Для этого достаточно рассмотреть относительное равновесие одного из шаров (рис. б). К шару приложены: вес P ($P = mg$) и реакция стержня N . Присоединяя к этим силам нормальную силу инерции J_n ($J_n = ml \sin \varphi_0 \omega_0^2$), можем рассматривать совокупность трех сил как уравновешенную систему.

Проектируя все силы на направление, перпендикулярное к N , имеем:

$$J_n \cos \varphi_0 - mg \sin \varphi_0 = 0, \quad (1)$$

откуда

$$\omega_0^2 = \frac{k}{I \cos \varphi_0}. \quad (2)$$

Таким образом, заданной угловой скорости вращения системы соответствует вполне определенный угол φ_0 . Это установившееся движение системы называется невозмущенным движением.

Для составления дифференциальных уравнений движения системы воспользуемся уравнениями Лагранжа. Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2} [I_1 \dot{\varphi}^2 + I_2 \dot{\psi}^2]. \quad (3)$$

Момент инерции I_1 относительно оси z (рис. а) складывается из момента инерции I_0 всех вращающихся частей, кроме шаров (этот момент инерции остается неизменным при изменении угла φ), и из момента инерции шаров, зависящего от угла φ :

$$I_1 = I_0 + 2ml^2 \sin^2 \varphi. \quad (4)$$

Момент инерции I_2 шаров относительно оси x (рис. а) равен

$$I_2 = 2ml^2. \quad (5)$$

Таким образом, кинетическая энергия системы выражается в обобщенных координатах в виде

$$T = \frac{1}{2} [(I_0 + 2ml^2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 + 2ml^2 \dot{\psi}^2]. \quad (6)$$

Переходим к определению обобщенных сил. Первая обобщенная сила Q_φ находится как коэффициент при соответствующем возможном перемещении в выражении для элементарной работы:

$$\delta W_1 = L_2 \cdot \delta \varphi. \quad (7)$$

Следовательно, обобщенная сила будет

$$Q_\varphi = L_2 = -k(\varphi - \varphi_0). \quad (8)$$

Вторая обобщенная сила Q_ψ находится как частная производная от потенциала по углу ψ . Действительно, при изменении угла ψ работу совершает только сила тяжести шаров, так как центр тяжести остальных вращающихся частей системы остается неизменным, а работа момента L_2 при изменении угла ψ равна нулю. Тогда с точностью до произвольной постоянной потенциальная энергия шаров равна

$$U = -2mgl \cos \varphi. \quad (9)$$

Составляем, далее, уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} (I_1 \dot{\varphi}) = Q_\varphi, \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} (I_2 \dot{\psi}) - \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \psi}. \quad (11)$$

Рассматривая малые колебания системы около положения невозмущенного движения (2), полагаем:

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 + \delta\dot{\psi} = \omega_0 + \delta\dot{\psi}. \quad (12)$$

Внося значения переменных в уравнение (10), находим:

$$2ml^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot \delta\dot{\psi} - I_1 \ddot{\varphi} = -k(\varphi - \varphi_0) \quad (13)$$

или, учитывая (12),

$$2ml^2 \sin(\varphi_0 + \delta\varphi) \cos(\varphi_0 + \delta\varphi) \delta\dot{\varphi} (\dot{\psi}_0 + \delta\dot{\psi}) - [I_0 + 2ml^2 \sin^2(\varphi_0 + \delta\varphi)] \delta\ddot{\varphi} = -k \cdot \delta\varphi. \quad (14)$$

Для составления уравнения малых движений подсчитаем все члены с точностью до величин первого порядка малости включительно, полагая $\sin \delta\varphi \approx \delta\varphi$, $\cos \delta\varphi \approx 1$. Находим после несложных преобразований:

$$(I_0 + 2ml^2 \sin^2 \varphi_0) \delta\ddot{\varphi} + ml^2 \sin 2\varphi_0 \cdot \dot{\psi}_0 \delta\dot{\varphi} + k \cdot \delta\varphi = 0 \quad (15)$$

Второе дифференциальное уравнение малых движений находим из (11):

$$I_2 \ddot{\psi} - \dot{\varphi} \cdot ml^2 \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi = -2mgl \sin \varphi. \quad (16)$$

Внося в это уравнение значения (12) и (5), получаем:

$$\delta\ddot{\psi} - \frac{1}{2} (\dot{\psi}_0 + \delta\dot{\psi})^2 \sin(2\varphi_0 + 2\delta\varphi) - \frac{g}{l} \sin(\varphi_0 + \delta\varphi) = 0. \quad (17)$$

Раскрываем скобки и подсчитываем для малых движений все члены с точностью до величин первого порядка малости включительно. После несложных преобразований, учитывая равенство (2), имеем:

$$\delta\ddot{\psi} - \dot{\psi}_0 \sin 2\varphi_0 \cdot \delta\dot{\psi} + \left(\frac{g}{l} \cos \varphi_0 - \dot{\psi}_0^2 \cos 2\varphi_0 \right) \delta\varphi = 0. \quad (18)$$

Таким образом получена система двух дифференциальных уравнений (15), (18) малых движений системы.

Для получения характеристического уравнения этой системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами ищем решения в виде

$$\delta\varphi = C_1 e^{pt}, \quad \delta\dot{\psi} = C_2 e^{pt}, \quad (19)$$

где C_1 , C_2 , p — постоянные величины. Подставляя эти значения в уравнения (15), (18) и сокращая на общий множитель e^{pt} , получаем характеристическое уравнение

$$\left(\frac{I_0}{2ml^2} + \sin^2 \varphi_0 \right) p^3 - \frac{1}{2} \dot{\psi}_0^2 \sin^2 \varphi_0 \left(1 + 2 \cos^2 \varphi_0 + \frac{I_0}{2ml^2} \right) p + \frac{k}{2ml^2} \dot{\psi}_0 \sin 2\varphi_0 = 0. \quad (20)$$

Кратко это уравнение записывается в виде

$$a_0 p^3 + a_1 p + a_2 = 0, \quad (21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{I_0}{2ml^2} + \sin^2 \varphi_0, & a_1 &= 0, \\ a_2 &= \dot{\varphi}_0^2 \sin^2 \varphi_0 \left(1 + 2 \cos^2 \varphi_0 - \frac{I_0}{2ml^2} \right), & a_3 &= \frac{k}{2ml^2} \dot{\varphi}_0 \sin 2\varphi_0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Условие Гурвица отрицательности вещественной части корней уравнения третьей степени имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} a_1 > 0, & \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 (a_1 a_2 - a_3 a_0) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Так как в данном случае $a_0 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $a_1 = 0$, то условия Гурвица не удовлетворяются, и, следовательно, малые движения регулятора неустойчивы. Этот факт, установленный сравнительно давно экспериментально, приводит к необходимости вводить дополнительные звенья в систему регулирования.

3°. Устойчивость движения при наличии гироскопических сил. Система, неустойчивая сама по себе, может быть сделана устойчивой по первому приближению путем введения гироскопических сил только в том случае, если число неустойчивых степеней свободы четно. Эта теорема была доказана Кельвином.

Гироскопическая стабилизация движения возможна только для консервативной системы. Диссипативные силы, как бы малы ни были, действуя достаточно долго, уничтожат устойчивость, созданную гироскопическими силами. Поэтому устойчивость, созданная гироскопическими силами, называется «временной», в то время как устойчивость консервативной системы является «вековой».

Таким образом, диссипативные силы усиливают устойчивость движения при действии одних консервативных сил и разрушают устойчивость, если она достигнута благодаря добавлению гироскопических сил.

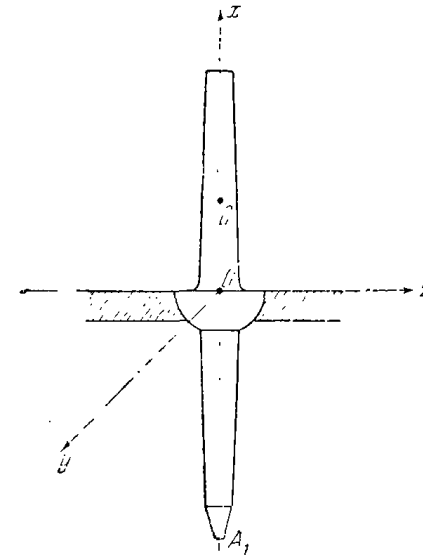
При решении задач на исследование устойчивости движения при действии гироскопических сил рекомендуется следующая последовательность действий:

- 1) определяем число степеней свободы системы и выбираем обобщенные координаты;
- 2) находим невозмущенное движение системы;
- 3) задаваясь малыми отклонениями начальных условий движения, составляем дифференциальные уравнения возмущенного движения, пользуясь уравнениями Лагранжа или общими теоремами динамики;
- 4) полагая, что обобщенные координаты и обобщенные скорости в возмущенном движении отличаются от значений в невозмущенном

движении на величины первого порядка малости, линеаризируем дифференциальные уравнения, отбрасывая слагаемые второго и более высоких порядков малости, вычитаем из дифференциальных уравнений возмущенного движения соответствующие уравнения невозмущенного движения;

5) исследуем устойчивость системы по первому приближению непосредственным интегрированием дифференциальных уравнений возмущенного движения или применяя критерий Гурвица к дифференциальным уравнениям в вариациях.

Задача 466. Ротор веса Q вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг собственной оси симметрии, совпадающей с неподвижной вертикальной осью x . Точка O , являющаяся центром сферической опоры ротора, неподвижна. Центр тяжести ротора C находится на высоте $OC = l_2$. Расстояние $OA_1 = l$; буквой A_1 обозначена крайняя нижняя точка ротора. Момент инерции ротора относительно оси симметрии равен A , а момент инерции относительно оси, проходящей через точку O и перпендикулярной к оси симметрии ротора, равен B .



К задаче 466.

Исследовать устойчивость вертикального положения оси ротора.

Решение. Ротор представляет собой систему с двумя степенями свободы. Выберем в качестве обобщенных координат координаты y_1 , z_1 крайней точки ротора A_1 . Для составления дифференциальных уравнений движения применим теорему

об изменении главного момента количества движения относительно неподвижных осей y , z .

Сохраняя обозначения, принятые в задаче 454, находим:

$$\frac{d}{dt} (A\omega\beta - B\dot{\gamma}) = Q \frac{l_2}{l} z_1, \quad \frac{d}{dt} (A\omega\gamma + B\dot{\beta}) = -Q \frac{l_2}{l} y_1. \quad (1)$$

Внося в эти уравнения значения углов β и γ :

$$\beta = -\frac{y_1}{l}, \quad \gamma = -\frac{z_1}{l}, \quad (2)$$

получаем:

$$B\ddot{z}_1 - A\omega\dot{y}_1 = Ql_2 z_1, \quad (3)$$

$$B\ddot{y}_1 + A\omega\dot{z}_1 = Ql_2 y_1. \quad (4)$$

Кососимметричные члены $(-A\omega\dot{y}_1)$ и $(A\omega\dot{z}_1)$ соответствуют гироскопическим силам.

Решение этой системы однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами найдем, вводя комплексную переменную

$$\lambda = z_1 + iy_1. \quad (5)$$

Умножая уравнение (4) на i и складывая его с уравнением (3), имеем:

$$B\ddot{\lambda} + iA\omega\dot{\lambda} - QI_2\lambda = 0. \quad (6)$$

Составляем характеристическое уравнение

$$BS^2 + iA\omega S - QI_2 = 0. \quad (7)$$

Определяем корни этого уравнения:

$$S_1 = \frac{-iA\omega - \sqrt{-A^2\omega^2 + 4BQI_2}}{2B}, \quad (8)$$

$$S_2 = \frac{-iA\omega + \sqrt{-A^2\omega^2 + 4BQI_2}}{2B}. \quad (9)$$

Если выполнено условие

$$A^2\omega^2 > 4BQI_2, \quad (10)$$

то корни являются чисто мнимыми величинами и могут быть для краткости записаны в виде

$$S_1 = ik_1, \quad S_2 = ik_2, \quad (11)$$

где

$$k_1 = \frac{-A\omega - \sqrt{A^2\omega^2 - 4BQI_2}}{2B}, \quad (12)$$

$$k_2 = \frac{-A\omega + \sqrt{A^2\omega^2 - 4BQI_2}}{2B}. \quad (13)$$

— вещественные числа. В этом случае решение уравнения (6) будет

$$\lambda = D_1 e^{ik_1 t} + D_2 e^{ik_2 t}, \quad (14)$$

где D_1 и D_2 — комплексные произвольные постоянные вида $D_1 = B_1 + iB_3$, $D_2 = B_2 + iB_4$. Тогда уравнение (14) примет вид

$$\lambda = (B_1 + iB_3)(\cos k_1 t + i \sin k_1 t) + (B_2 + iB_4)(\cos k_2 t + i \sin k_2 t). \quad (15)$$

Далее находим исходные переменные y_1 и z_1 , отделив в уравнении (15) вещественную часть от мнимой:

$$y_1 = B_1 \sin k_1 t - B_3 \cos k_1 t + B_2 \sin k_2 t - B_4 \cos k_2 t, \quad (16)$$

$$z_1 = B_1 \cos k_1 t - B_3 \sin k_1 t + B_2 \cos k_2 t - B_4 \sin k_2 t. \quad (17)$$

В этих уравнениях B_1, B_2, B_3, B_4 — произвольные постоянные интегрирования, определяемые по начальным данным $y_{10}, \dot{y}_{10}, z_{10}, \dot{z}_{10}$ при

$t = 0$. Так как y_1 и z_1 являются линейными функциями косинуса и синуса, то координаты нижнего конца ротора не растут с течением времени.

Итак, при выполнении условия (10) точка A_1 совершает перпендикулярное движение (полагаем, что k_1 и k_2 соизмеримы), складывающееся из четырех гармонических колебаний. Следовательно, если угловая скорость ротора

$$\omega > 2 \frac{\sqrt{BQI_2}}{A}, \quad (18)$$

что вытекает из (10), то вертикальное положение оси ротора устойчиво, несмотря на то, что центр тяжести занимает наивысшее положение и равновесие такого же невращающегося стержня неустойчиво. Гироскопические силы стабилизируют неустойчивую консервативную систему. Рассмотрим далее случай, когда

$$\omega < 2 \frac{\sqrt{BQI_2}}{A}. \quad (19)$$

Корни характеристического уравнения (7) будут комплексными числами вида

$$s_1 = -a + ib, \quad s_2 = -a - ib, \quad (20)$$

где

$$a = \frac{\sqrt{4BQI_2 - A^2\omega^2}}{2B} > 0, \quad b = \frac{-A\omega}{2B} < 0. \quad (21)$$

В этом случае общее решение уравнения (6) будет

$$\lambda = D_1 e^{s_1 t} + D_2 e^{s_2 t}. \quad (22)$$

Здесь, так же как и в первом случае, $D_1 = B_1 + iB_3$, $D_2 = B_2 + iB_4$. Следовательно, уравнение (22) после этой замены примет вид

$$\lambda = (B_1 + iB_3) e^{-at} (\cos bt + i \sin bt) + (B_2 + iB_4) e^{-at} (\cos bt + i \sin bt). \quad (23)$$

Исходные переменные y_1 и z_1 получим, отделяя вещественную часть от мнимой:

$$y_1 = e^{-at} (B_1 \sin bt - B_3 \cos bt) + e^{-at} (B_2 \sin bt - B_4 \cos bt), \quad (24)$$

$$z_1 = e^{-at} (B_1 \cos bt - B_3 \sin bt) + e^{-at} (B_2 \cos bt - B_4 \sin bt). \quad (25)$$

Вторые слагаемые в этих уравнениях содержат множитель e^{-at} и, следовательно, им соответствуют все возрастающие колебания. Вертикальное положение оси ротора в этом случае неустойчиво.

МЕЖДУНАРОДНАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ (СИ)

В декабре 1960 г. XI Генеральная конференция по мерам и весам приняла единую Международную систему единиц (СИ), которая должна применяться как предпочтительная во всех областях науки, техники и народного хозяйства.

Процесс введения этой системы в практику (и особенно тех ее единиц, которые еще не получили широкого распространения) будет осуществляться постепенно в течение ряда лет — и переходный период, конечно, будет сохраняться и традиционные единицы систем СГС и МКГС, использованные в настоящей книге.

Приведем для справки таблицу Международной системы единиц по ГОСТу 9867-61:

Наименование величины	Единица измерения	Сокращенные обозначения единицы	
		русские	латинские или греческие
Основные единицы			
Длина	Метр	<i>м</i>	m
Масса	Килограмм	<i>кг</i>	kg
Время	Секунда	<i>сек</i>	s
Температура	Градус Кельвина	$^{\circ}\text{K}$	$^{\circ}\text{K}$
Сила электрического тока	Ампер	<i>а</i>	A
Сила света	Свеча	<i>св</i>	cd
Дополнительные единицы			
Плоский угол	Радан	<i>рад</i>	rad
Телесный угол	Стерадан	<i>стер</i>	sr
Производные единицы			
Площадь	Квадратный метр	<i>м²</i>	m ²
Объем	Кубический метр	<i>м³</i>	m ³
Частота	Герц (<i>Гсек</i>)	<i>гц</i>	Hz
Объемная масса (плотность)	Килограмм на куб. метр	<i>кг м⁻³</i>	kg·m ⁻³
Скорость	Метр в секунду	<i>м сек</i>	m/s
Угловая скорость	Радан в секунду	<i>рад сек</i>	rad/s

Продолжение

Наименование величины	Единица измерения	Сокращенные обозначения единицы	
		русские	латинские или греческие
Ускорение	Метр на секунду в квадрате	<i>м/сек²</i>	m/s ²
Угловое ускорение	Радан на секунду в квадрате	<i>рад/сек²</i>	rad/s ²
Сила	Ньютон (<i>кг · м/сек²</i>)	<i>н</i>	N
Давление (механическое напряжение)	Ньютон на кв. метр	<i>н м²</i>	N/m ²
Динамическая вязкость	Ньютон-секунда на кв. метр	<i>н сек · м²</i>	N·s/m ²
Кинематическая вязкость	Кв. метр на секунду	<i>м² · сек</i>	m ² /s
Работа, энергия, количество теплоты	Джоуль (<i>н · м</i>)	<i>дж</i>	J
Мощность	Ватт (<i>дж/сек</i>)	<i>вт</i>	W
Количество электричества	Кулон (<i>а · сек</i>)	<i>к</i>	C
Электрическое напряжение, разность потенциалов, электродвижущая сила	Вольт (<i>вт · а</i>)	<i>в</i>	V
Напряженность электрического поля	Вольт на метр	<i>в/м</i>	V/m
Электрическое сопротивление	Ом (<i>в/а</i>)	<i>ом</i>	Ω
Электрическая емкость	Фарада (<i>к/в</i>)	<i>ф</i>	F
Поток магнитной индукции	Вебер (<i>к/ом</i>)	<i>вб</i>	Wb
Индуктивность	Генри (<i>вб/а</i>)	<i>гн</i>	H
Магнитная индукция	Тесла (<i>вб · м⁻²</i>)	<i>тл</i>	T
Напряженность магнитного поля	Ампер на метр	<i>а · м</i>	A/m
Световой поток	Люмен (<i>св · стер</i>)	<i>лм</i>	lm
Яркость	Свеча на кв. метр	<i>св · м²</i>	cd/m ²
Освещенность	Люкс (<i>лм · м⁻²</i>)	<i>лк</i>	lx

Определения основных единиц

Метр — длина, равная 1/650 763,73 длины волны в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями 2p₁₀ и 5d₅ атома криптона-86.

Килограмм — единица массы — представлен массой международного прототипа килограмма.

Секунда — 1/31 556 925,9747 часть тропического года для 1900 г. января 0 в 12 часов эфемеридного времени.

Ампер — сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную 2 · 10⁻⁷ единиц силы Международной системы на каждый метр длины.

Градус Кельвина — единица измерения температуры по термодинамической температурной шкале, в которой для температуры тройной точки воды установлено значение 273,16° К (точно).

Свеча — единица силы света, значение которой принимается таким, чтобы яркость полного излучателя при температуре затвердевания платины была равна 60 св на 1 см².

Некоторые переводные множители

- | | |
|---|-------------------------------|
| 1 кг = 9,80665 н ≈ 9,81 н | 1 кг·м = 9,80665 дж ≈ 9,81 дж |
| 1 дина = 10 ⁻⁵ н | 1 эрг = 10 ⁻⁷ дж |
| 1 кг·см ² = 98066,5 н·м ² | 1 кал = 4,1868 дж |
| 1 дина·см ² = 0,1 н·м ² | |

ПРИЛОЖЕНИЕ II

**СПИСОК НОМЕРОВ ЗАДАЧ ИЗ СБОРНИКА ЗАДАЧ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
И. В. МЕЩЕРСКОГО (ИЗДАНИЯ 18—27),
РЕКОМЕНДУЕМЫХ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ**

Номер главы	Номер параграфа	Номера задач по сборнику И. В. Мещерского
на конце книги		
VIII	2	639, 645, 646, 651, 668
	3	677, 678, 682, 688, 689, 690, 691, 694, 710, 711, 720, 725
	4	825, 826, 828, 832, 833, 834, 837, 838, 843, 844, 848, 849, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 859
IX	5	862, 863, 867, 868, 869, 870, 871
	2	861, 860, 872, 952, 953, 955, 958, 959, 962, 963
	3	733, 734, 743, 970, 973, 975, 976, 979, 980
	4	736, 984, 985, 989, 991, 993, 994, 995, 996, 1002, 1003, 1006, 1007, 1011, 1011, 1016, 1017, 1019, 1020, 1021
	5	1084, 1085, 1086, 1087, 1088, 1090, 1091, 1092, 1095, 1096
	6	784, 785, 786, 787, 788, 1052, 1053, 1054, 1056, 1060, 1061, 1062, 1064, 1065, 1066, 1067, 1068, 1069, 1071, 1073, 1074, 1075, 1078, 1079, 1080, 1081
X	2	879, 880, 884, 889, 890, 891, 894, 897, 898, 899, 900, 901
	3	1100, 1101, 1102, 1103, 1105, 1106, 1109
	4	143, 903, 905, 906, 909, 914, 915, 916, 917, 920, 921, 922
	5	925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 935, 936, 937, 940, 941, 942, 943, 941, 945, 946, 947
	6	934, 940, 941, 942, 945, 946, 947, 1091, 1096, 1114, 1120, 1121, 1184, 1186, 1187, 1218, 1219, 1226
	7	1027, 1028, 1029, 1030, 1031, 1034, 1035, 1036, 1039
XII	1	1127, 1129, 1133, 1136, 1137, 1141, 1142, 1143, 1144, 1145
	2	1150, 1151, 1153, 1155, 1157
XIII	1	1171, 1172, 1173, 1175, 1177, 1178
	2	1243, 1244, 1245, 1246, 1247, 1253, 1273
	3	1296, 1301, 1302, 1303, 1304, 1305, 1313, 1316
	4	1277, 1278, 1279, 1280, 1281, 1282, 1283, 1329, 1330, 1331
	5	1293, 1294, 1295, 1332, 1333, 1334, 1341
	6	1348, 1351, 1352, 1353, 1356, 1358, 1359, 1363

Бать Моисей Иосифович,
Ляанелидзе Георгий Юстинович,
Кельзон Анатолий Саулович
Геометрическая механика в примерах и задачах
Том II
М., 1966 г. 664 стр с илл
Редактор Маркузон И А
Техн редактор Аксельрод И Ш
Корректор Страхова Т С

Печать с матриц. Подписано к печати 31.X
1966 г. Бумага 60×90^{1/16}. Физ печ л 41,5
Условн печ л 41,5 Уч изд л 40,62 Тираж
100 000 экз. Цена книги 1 р 24 к Заказ № 688

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В 71, Ленинский проспект 15

Ленинградская типография № 1 «Печатный
Двор» имени А. М. Горького Главполиграф-
прома Комитета по печати при Совете Мини-
стров СССР Гатчинская 26