

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Под редакцией  
Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ и Д. Р. МЕРКИНА

## ТОМ ПЕРВЫЙ СТАТИКА И КИНЕМАТИКА

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ,  
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Допущено Министерством  
высшего и среднего специального образования СССР  
в качестве учебного пособия  
для вузов*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1967

**Теоретическая механика в примерах и задачах, т. I**  
(статика и кинематика), Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С.

Книга представляет собой пособие по решению задач теоретической механики. Краткие сведения из теории даны в конспективной форме. Цель книги — научить читателя самостоятельно решать основные типы задач. Всего в книге 234 решенные задачи.

Книга может быть полезна не только студентам и преподавателям, но и инженерам, ведущим технические расчеты, так как решения многих задач являются одновременно примерами инженерных расчетов.

В первом томе рассматриваются следующие разделы статики и кинематики: система сходящихся сил, произвольная плоская система сил, равновесие тел при наличии трения скольжения и трения качения, графическая статика, пространственная система сил, центр тяжести; движение точки, поступательное движение и вращение твердого тела вокруг неподвижной оси, сложное движение точки, плоское движение твердого тела, вращение твердого тела вокруг неподвижной точки, общий случай движения твердого тела, сложение вращений твердого тела вокруг параллельных и пересекающихся осей, сложение поступательного и вращательного движений твердого тела.

Рисунков 312.

*Моисей Иосифович Бать,  
Георгий Юстинович Джанелидзе,  
Анатолий Саулович Кельзон*

Теоретическая механика в примерах и задачах  
Том I

М., 1967 г., 512 стр. с илл.

Редакторы А. Г. Мордвинцев, Н. И. Розальская

Техн. редактор И. Ш. Аксельрод

Корректоры С. Н. Емельянова, И. Я. Кришталь

Сдано в набор 19/V 1967 г. Подписано к печати 26/IX 1967 г. Бумага 60×90<sup>1/16</sup>. Физ. печ. л. 32. Условн. печ. л. 32. Уч.-изд. л. 29 79. Тираж 200 000 экз. Т-13613. Цена книги 93 коп. Заказ № 980.

Издательство «Наука»  
Главная редакция физико-математической литературы.  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Главполитграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.

Из предисловия редактора ко второму изданию . . . . .	6
Предисловие к пятому изданию . . . . .	8
Введение . . . . .	9

## РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

## СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основные законы статики . . . . .	10
Глава I. Плоская система сил . . . . .	16
§ 1. Система сходящихся сил . . . . .	16
1°. Равновесие твердого тела, к которому приложена система сходящихся сил . . . . .	16
2°. Теорема о трех непараллельных силах . . . . .	24
3°. Метод проекций . . . . .	28
4°. Момент силы относительно точки. Равновесие твердого тела с одной неподвижной точкой . . . . .	36
§ 2. Произвольная плоская система сил. Случай параллельных сил . . . . .	39
1°. Равновесие твердого тела при наличии плоской системы сил . . . . .	39
2°. Опрокидывание твердых тел . . . . .	55
3°. Приведение произвольной плоской системы сил к простейшему виду . . . . .	57
§ 3. Равновесие системы твердых тел . . . . .	63
§ 4. Равновесие тел при наличии трения . . . . .	82
1°. Равновесие твердого тела при наличии трения скольжения . . . . .	82
2°. Равновесие твердого тела при наличии трения качения . . . . .	108
3°. Равновесие твердых тел при наличии трения гибких тел . . . . .	115
§ 5. Графическая статика и методы расчета ферм . . . . .	123
1°. Равновесие произвольной плоской системы сил. Метод последовательного сложения . . . . .	123
2°. Применение метода веревочного многоугольника к плоской системе сил . . . . .	126
3°. Расчет усилий в стержнях фермы. Способ вырезания узлов . . . . .	134
4°. Определение усилий в стержнях фермы построенном диаграммы Максвелла — Кремонны . . . . .	140
5°. Определение усилий в стержнях фермы методом сечений . . . . .	144

1\*

Глава II. Пространственная система сил . . . . .	147
§ 1. Система сходящихся сил . . . . .	147
§ 2. Произвольная пространственная система сил . . . . .	155
1°. Момент силы относительно точки. Момент силы относительно оси. Теория пар в пространстве . . . . .	155
2°. Приведение к одному центру сил, произвольно расположенных в пространстве . . . . .	163
3°. Приведение произвольной пространственной системы сил к простейшему виду . . . . .	187
§ 3. Центр тяжести . . . . .	199

## РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

## КИНЕМАТИКА

Глава III. Движение точки . . . . .	216
§ 1. Траектория и уравнения движения точки . . . . .	216
1°. Основные определения . . . . .	216
2°. Переход от уравнений движения в декартовых координатах к естественному уравнению движения . . . . .	229
§ 2. Скорость и ускорение точки . . . . .	232
Глава IV. Простейшие движения твердого тела . . . . .	271
§ 1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси . . . . .	271
§ 2. Преобразование простейших движений . . . . .	285
Глава V. Сложное движение точки . . . . .	300
§ 1. Абсолютное, переносное и относительное движения точки . . . . .	300
§ 2. Сложение движений. Определение траекторий и уравнений движения в относительном и абсолютном движениях точки . . . . .	301
§ 3. Сложение скоростей. Определение скорости точки в относительном, переносном и абсолютном движениях . . . . .	311
§ 4. Сложение ускорений . . . . .	324
1°. Определение ускорений точки при переносном поступательном и произвольном переносном движениях . . . . .	324
2°. Скорость и ускорение точки в полярных, сферических и цилиндрических координатах . . . . .	341
§ 5. Кинематика колебаний . . . . .	354
1°. Гармонические колебания . . . . .	354
2°. Негармонические колебания . . . . .	361
Глава VI. Плоское движение твердого тела . . . . .	366
§ 1. Уравнения плоского движения твердого тела. Уравнения движения точки плоской фигуры . . . . .	366
1°. Определение уравнений плоского движения твердого тела и уравнений движения точки плоской фигуры . . . . .	366
2°. Определение положения центра конечного вращения плоской фигуры . . . . .	369
§ 2. Скорости точек плоской фигуры . . . . .	372
§ 3. Подвижная и неподвижная центры . . . . .	392
§ 4. Ускорения точек плоской фигуры . . . . .	404
§ 5. План скоростей и план ускорений . . . . .	434
§ 6. Сложение вращений твердого тела вокруг параллельных осей . . . . .	455

Глава VII. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки и сложение вращений вокруг пересекающихся осей. Общий случай движения твёрдого тела . . . . .	467
§ 1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки . . . . .	467
§ 2. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей . . . . .	480
§ 3. Общий случай движения твердого тела. Сложение поступательных и вращательных движений . . . . .	501
1°. Скорости и ускорения точек твердого тела в общем случае движения . . . . .	501
2°. Сложение поступательных и вращательных движений твердого тела . . . . .	504
Приложение. Международная система единиц (СИ) . . . . .	511

Немногочисленные законы и теоремы, лежащие в основе теоретической механики, находят весьма разнообразные и обширные применения. Поэтому у лиц, изучающих или использующих в своей деятельности теоретическую механику, наибольшие затруднения вызывает приложение общих положений теории к решению конкретных задач.

В обширной литературе, посвященной теоретической механике, имеется мало книг, ставящих своей целью научить читателя методам решения задач. Между тем потребность в таких руководствах ощущается как студентами в процессе обучения (в особенности студентами заочных и вечерних факультетов), так и инженерами и техниками в их практической деятельности.

Авторы настоящей книги, опираясь на многолетний опыт преподавания теоретической механики в Ленинградском политехническом институте им. М. И. Калинина, поставили своей целью создание руководства по решению задач.

В соответствии с этим замыслом в книге даны в конспективной форме лишь краткие сведения из теории — предполагается, что для ее изучения читатель пользуется одним из курсов теоретической механики. Из большого числа учебников по этому предмету, опубликованных в СССР, следует, прежде всего, рекомендовать курс Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье «Теоретическая механика», т. I, изд. 5, Гостехиздат, 1954 г.; т. II, изд. 5, Гостехиздат, 1955 г. (книга, определившая современные традиции преподавания механики во вузах и предназначенная для лиц, изучающих теоретическую механику по полной программе) и книгу С. М. Тарга «Краткий курс теоретической механики», изд. 3, Физматгиз, 1963 г. (учебник, предназначенный для лиц, изучающих теоретическую механику по сокращенной программе).

Наиболее эффективным путем обучения искусству приложения методов теоретической механики является не облегчение формального заучивания правил и приемов (чему часто способствуют обширные методические указания), а показ их в действии. Ввиду этого в руководстве основное внимание уделено решению конкретных за-

дач, специально составленных для того, чтобы, с одной стороны, избежать разбора задач, входящих в сборник И. В. Мещерского и иные распространенные в СССР задачки, а с другой — дать возможность после изучения книги (или ее разделов) самостоятельно решать главные типы задач.

Для облегчения активного изучения материала (а только такое изучение и имеет смысл) в каждом разделе книги даны краткие рекомендации о последовательности решения тех или иных типов задач и лишь после этого приведено подробное рассмотрение подобных задач, причем зачастую сравнены и оценены различные методы решения.

Предполагается, что параллельно с разбором материала по руководству читатель на основе изученного самостоятельно решает соответствующие задачи из сборника задач по теоретической механике И. В. Мещерского и тем самым научается применять полученные знания.

Сравнительно большой объем руководства объясняется тем, что оно составлено в расчете как на последовательное изучение, так и на выборочное использование. Последний способ и является главной формой применения ввиду различия объема материала и порядка его прохождения в различных высших учебных заведениях.

В этом томе основные законы статики, §§ 1, 2 главы I и глава II написаны М. И. Бать; §§ 3, 4, 5 главы I, главы III, IV, V, VI, VII написаны А. С. Кельзоном. Введение написано Г. Ю. Джанелидзе. Он же принял участие в составлении многих других параграфов, в частности, §§ 1, 2 главы I, §§ 1, 2 главы III и §§ 1—4 главы V, а также осуществил общее редактирование.

Авторы считают приятным долгом принести глубокую благодарность Г. М. Валовой, О. Е. Короли, И. Е. Лившицу, Л. И. Мачабели, Д. Р. Меркину, Т. В. Путята, Г. Н. Савину, Р. С. Шафаревичу и В. Н. Щелкачеву за ценные указания и критические замечания.

Хочется надеяться, что и впредь читатели будут помогать совершенствованию книги своими критическими замечаниями, которые будут с благодарностью рассмотрены.

Ленинград,  
март 1963 г.

Г. Ю. Джанелидзе

Первое издание учебного пособия «Теоретическая механика в примерах и задачах» вышло в свет в 1961 г. Все последующие издания печатались без существенных изменений.

За прошедшие годы выявилась необходимость внести в книгу ряд изменений и дополнений. Поэтому настоящее, пятое, издание подверглось переработке. Прежде всего, был пересмотрен весь текст и внесены необходимые исправления. Некоторые, менее удачные задачи заменены новыми. Во многих случаях даны более подробные решения.

Для навстречу многочисленным пожеланиям, авторы внесли новые главы, освещающие дополнительные разделы курса теоретической механики. Это потребовало увеличения объема книги, в связи с чем настоящее издание выходит в трех томах. Первые два тома охватывают материал, отвечающий основному курсу теоретической механики, а третий содержит дополнительные главы. Это вызвало необходимость перенести из первого тома в третий том раздел, в котором рассматривалась кинематика точки в относительных координатах (задачи преследования). Одновременно в первый том включены новые разделы: кинематика колебательных движений и общий случай движения твердого тела.

В первом томе основные законы статики, §§ 1 и 2 главы I и глава II написаны М. И. Бать, введение написано Г. Ю. Джанелидзе, остальные разделы написаны А. С. Кельзоном. Авторский коллектив понес невосполнимую утрату в лице безвременно скончавшегося профессора Г. Ю. Джанелидзе, соавтора и первого редактора книги.

В новом издании изменена нумерация задач и рисунков — первое число означает номер главы, второе — номер задачи (рисунка) в этой главе.

Авторы считают своим приятным долгом принести глубокую благодарность Н. И. Алексеевой, Е. Г. Бергер и О. В. Григорьевой за ценные указания.

М. И. Бать, А. С. Кельзон, Д. Р. Меркин



Теоретическая механика является наукой, в которой изучаются перемещения тел с течением времени (механические движения). Она служит базой других разделов механики (теория упругости, сопротивление материалов, теория пластичности, теория механизмов и машин, гидроаэродинамика) и многих технических дисциплин.

В основе теоретической механики, как и всякой науки, лежат представления и абстракции, отражающие главные черты изучаемых явлений. Рассмотрим некоторые из них.

Количественная мера механического взаимодействия между физическими объектами — *сила* — характеризуется модулем, направлением и точкой приложения, т. е. является вектором.

Во многих случаях форма и размеры движущегося тела не играют существенной роли. Поэтому вводится понятие о *материальной точке*, не имеющей протяженности, но обладающей массой (мерой инертности материальной точки).

Все физические тела в той или иной степени деформируемы. В тех случаях, когда этими деформациями можно пренебречь, материальное тело рассматривается как абсолютно твердое (или, короче, твердое), т. е. предполагается, что расстояния между любыми его точками остаются неизменными.

Курс механики состоит из трех разделов — *статики*, *кинematики* и *динамики*.

Возникшая в результате практической деятельности теоретическая механика развивается в неразрывной связи с техникой. За несколько столетий до нашей эры возникновение статики было вызвано расцветом строительства. Затем новый толчок дало развитие мореплавания, промышленности, военного дела и астрономии — в результате в XV—XVII вв. возникли кинематика и динамика.

Великие достижения последних лет — внедрение автоматизации в различные области техники, создание искусственных спутников Земли, запуск космических ракет и межпланетных лабораторий — обуславливают дальнейшее развитие теоретической механики, науки, созданной в результате усилий большого числа гениальных ученых и выдающихся инженеров.

Основные законы статики

*Статикой* называется раздел теоретической механики, в котором рассматриваются задачи на равновесие твердых тел и преобразования одной системы сил в другую, ей эквивалентную. В основе теоретической механики лежат экспериментально установленные законы, справедливость которых проверена многовековой практической деятельностью человека. Основные определения и законы даны ниже.

*Изолированной* называется материальная точка, действием на которую других материальных тел можно пренебречь.

**Закон 1 (закон инерции).** Изолированная материальная точка находится в покое либо движется равномерно и прямолинейно.

Равномерное и прямолинейное движение материальной точки является движением по инерции. Под состоянием равновесия материальной точки и твердого тела понимают не только состояние покоя, но и движение по инерции. Для твердого тела существуют различные виды движения по инерции, например равномерное вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

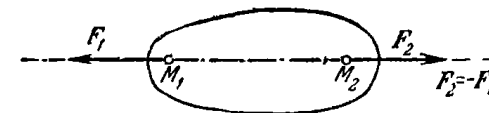


Рис. 1.1.

**Закон 2.** Твердое тело находится в равновесии под действием двух сил только в том случае, если эти силы равны по модулю и направлены в противоположные стороны по общей линии действия (рис. 1.1).

Эти две силы называются *уравновешивающимися*. Вообще силы называются уравновешивающимися, если твердое тело, к которому приложены эти силы, находится в покое.

**Закон 3.** Не нарушая состояния \*) твердого тела, можно добавлять и отбрасывать уравновешивающиеся силы.

**Следствие.** Не нарушая состояния твердого тела, силу можно переносить по ее линии действия в любую точку тела.

Две системы сил называются *эквивалентными*, если одну из них можно заменить другой, не нарушая состояния твердого тела.

\*) Слово «состояние» здесь означает состояние движения или покоя.

*Равнодействующей* называется сила, которая эквивалентна данной системе сил.

**Закон 4.** Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, приложена в той же точке, равна по модулю диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, и направлена вдоль этой диагонали (рис. 1.2).

По модулю равнодействующая равна

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos(\angle F_1, F_2)}$$

**Закон 5** (закон равенства действия и противодействия). Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены в противоположные стороны по одной прямой, т. е.  $F_B = -F_A$  \*) (рис. 1.3).

Следует иметь в виду, что действие — сила, приложенная к телу  $B$ , и противодействие — сила, приложенная к телу  $A$ , не уравновешиваются, так как они приложены к разным телам.

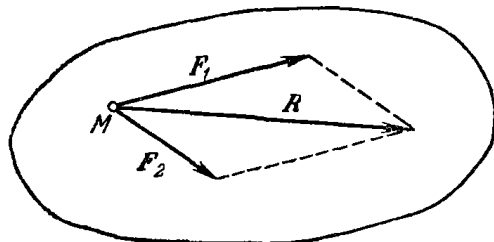


Рис. 1.2.

**Закон 6** (закон отвердевания). Равновесие нетвердого тела не нарушается при его затвердевании.

Не следует при этом забывать, что условия равновесия, являющиеся необходимыми и достаточными для твердого тела, являются необходимыми, но недостаточными для соответствующего нетвердого тела. Так, абсолютно жесткий стержень может находиться в равновесии под действием двух сил, равных по модулю и направленных вдоль стержня либо друг к другу, либо друг от друга (т. е. под действием как сжимающих, так и растягивающих сил), а нить, соответствующая этому стержню, может находиться в равновесии только под действием двух сил, направленных друг от друга. Под действием сил, направленных друг к другу, нить сомнется.

Твердое тело называется *свободным*, если его движение ничем не ограничено. В большей части технических задач встречаются лишь несвободные твердые тела.

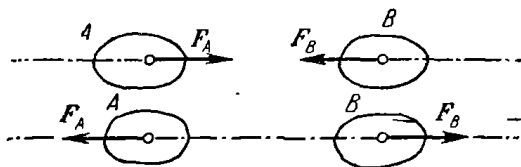


Рис. 1.3.

\*) Буквы, обозначающие векторы, набраны в книге полужирным шрифтом.

*Несвободным* называется такое твердое тело, на которое наложены *связи*, ограничивающие его движение в некоторых направлениях. Так, для лампы, подвешенной на шнуре, связью является шнур; для книги, лежащей на столе, связью является стол; для лестницы, приставленной к стене, связями являются пол и стена. Для шара, катящегося по бильярдному столу, связью является поверхность стола и его борта.

Сила, характеризующая действие связи на твердое тело, называется *реакцией связи*. Если считать силу, с которой твердое тело действует на связь, действием, то реакция связи является противодействием. При этом сила — действие приложена к связи, а реакция связи приложена к твердому телу.

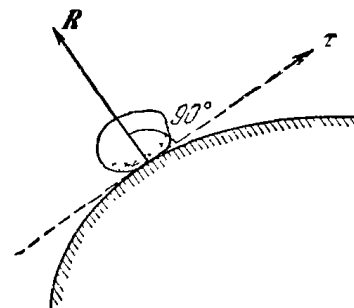


Рис. 1.4.

Все силы, действующие на твердое тело, можно разделить на две группы: *силы активные* и *реакции связей* \*). При этом активными следует считать все силы, не являющиеся реакциями связей. Таким образом, какая-либо неизвестная сила, не являющаяся реакцией связи, также является активной силой.

**Закон 7** (закон освобожденности от связей). Несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей, заменив действие связей соответствующими реакциями связей.

Этот закон дает возможность, в частности, применить к несвободному твердому телу условия равновесия, справедливые для свободного твердого тела. При этом следует, отбросив связи, наложенные на твердое тело, заменить их соответствующими реакциями связей. Затем надлежит рассмотреть равновесие этого несвободного твердого тела, как тела свободного, под действием активных сил и реакций связей.

В большинстве задач на равновесие твердого тела следует, если это возможно, сразу указать направление реакций связей, а затем определить их модули в ходе решения задач. Для облегчения определения направления реакций связей рекомендуется внимательно ознакомиться с приведенными ниже примерами.

1. Если твердое тело опирается на идеально гладкую (без трения) поверхность, то реакция поверхности направлена по нормали к ней в точке соприкосновения, т. е. перпендикулярно к касательной плоскости в данной точке поверхности (рис. 1.4). Такая реакция называется *нормальной реакцией*.

\*) Иногда активные силы называют задаваемыми.

2. Если твердое тело в точках  $A$  и  $B$  (рис. 1.5) опирается на ребра двугранных углов, а в точке  $C$  — на гладкую плоскость, то для направления реакций связи в точках  $A$  и  $B$  следует применить метод обращения, т. е. представить, что двугранный угол опирается на твердое тело (рис. 1.6), являющееся для него связью. Эта обращенная задача сводится к рассмотренному выше случаю 1, т. е. опорная реакция  $R'$  направляется по соответствующей нормали. Снова обратив задачу, определяют искомое направление реакций в точках  $A$  и  $B$ , причем на основании закона равенства действия и противодействия:  $R_A = -R'_A$ ,  $R_B = -R'_B$ . Реакция  $R_C$ , в соответствии со случаем 1, направляется перпендикулярно к горизонтальной плоскости (см. рис. 1.5).

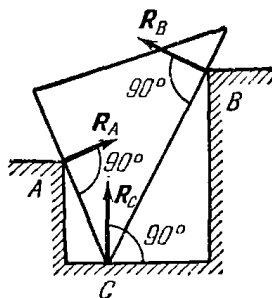


Рис. 1.5.

3. Если твердое тело упирается острием в угол (например, лестница в выступ пола), то подобную связь следует рассматривать как двойную: угол  $A$  (рис. 1.7) препятствует перемещению твердого тела по горизонтали налево и по вертикали вниз. Поэтому две составляющие опорной реакции  $R_{1A}$  и  $R_{2A}$  следует направить противоположно этим перемещениям: первую — направо, вторую — вверх. (В подобных случаях реакцию  $R_A$  зачастую ошибочно направляют вдоль  $AB$ .)

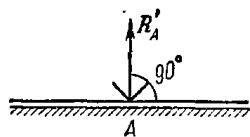


Рис. 1.6.

4. Цилиндрическим шарниром называется совокупность неподвижного валика  $A$  и надетой на него втулки  $B$ , соединенной с твердым телом  $D$  (рис. 1.8). При этом твердое тело может поворачиваться вокруг оси валика. В точке соприкосновения  $C$  втулки с валиком возникает опорная

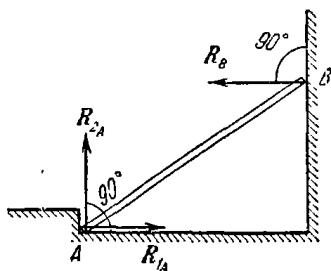


Рис. 1.7.

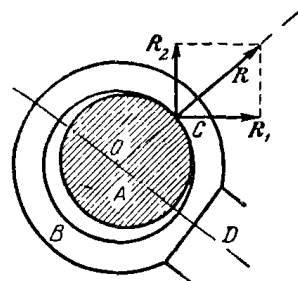


Рис. 1.8.

реакция, направленная по нормали к идеально гладким поверхностям соприкасающихся тел в точке касания. Так как положение точки  $C$  соприкосновения валика  $A$  с втулкой  $B$  заранее неизвестно, то

невозможно сразу указать направление реакции  $R$ . При решении задач реакция  $R$  заменяется двумя взаимно перпендикулярными составляющими  $R_1$  и  $R_2$ . Определив в ходе решения задачи  $R_1$  и  $R_2$ , находят модуль и направление реакции  $R$ . Нетрудно видеть, что реакцию можно разложить на составляющие по любым двум направлениям, например на  $R_1$  и  $R_2$  или на  $R_3$  и  $R_4$  (рис. 1.9) и т. д.

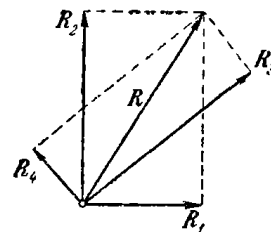


Рис. 1.9.

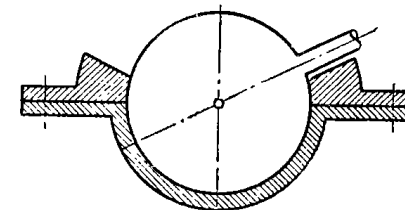


Рис. 1.10.

Обычно, пренебрегая диаметром валика, по сравнению с другими размерами, составляющие  $R_1$  и  $R_2$  прилагают в центре  $O$ .

5. В случае сферического шарнира (рис. 1.10) также нельзя заранее указать положение точки соприкосновения и, следовательно, направление реакции  $R$ . При решении задач реакция  $R$  сферического шарнира заменяется тремя взаимно перпендикулярными составляющими  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  (рис. 1.11).

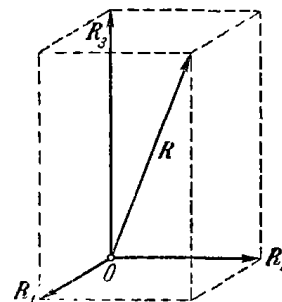


Рис. 1.11.

6. Если на твердое тело наложена гибкая связь (нить, канат,

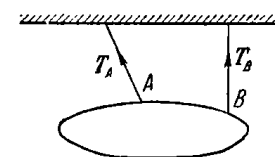


Рис. 1.12.

трос, цепь и др.), то реакция приложена к твердому телу в точке его прикрепления к гибким связям. Реакция гибкой связи направлена по касательной к связи в точке ее наложения (рис. 1.12).

7. Если абсолютно жесткий невесомый прямолинейный стержень, концы которого соединены шарнирами с другими частями конструкции, находится в равновесии под действием сил, приложенных по его концам, то следует реакции направить вдоль стержня.

Действительно, если к стержню со стороны других частей конструкции приложены силы в каждом из его концов, т. е. в шарнирах, то после сложения сил оказывается, что в каждом из шарниров

приложено по одной силе. В результате стержень находится в равновесии под действием двух сил, приложенных в шарнирах. Согласно второму закону эти силы по модулю равны и направлены в противоположные стороны по общей линии действия, т. е. вдоль стержня. При этом стержень подвергается растяжению силами  $F_1$  и  $F'_1$  (рис. 1.13, а) либо сжатию силами  $F_2$  и  $F'_2$  (рис. 1.13, б), причем  $F'_1 = -F_1$  и  $F'_2 = -F_2$ . Если стержень подвержен растяжению, то реакции стержня  $T_1$  и  $T'_1$ , приложенные к шарнирам, на основании закона равенства действия и противодействия направлены вдоль стержня друг к

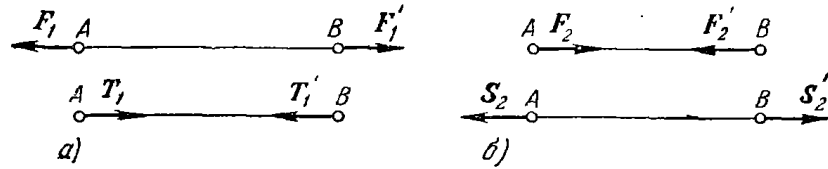


Рис. 1.13.

другу (рис. 1.13, а). Если стержень подвержен сжатию, то реакции стержня  $S_2$  и  $S'_2$ , приложенные к шарнирам, направлены вдоль стержня друг от друга (рис. 1.13, б). Следовательно,

$$F_1 = -T_1 \quad \text{и} \quad F'_1 = -T'_1$$

(рис. 1.13, а), а также

$$F_2 = -S_2 \quad \text{и} \quad F'_2 = -S'_2$$

(рис. 1.13, б). Так как  $F'_1 = -F_1$  и  $F'_2 = -F_2$ , то получим:

$$T'_1 = -T_1 \quad \text{и} \quad S'_2 = -S_2.$$

Решение задач на равновесие твердого тела, независимо от взаимного расположения приложенных к телу сил, рекомендуется проводить в следующем порядке:

- 1) выделить твердое тело, равновесие которого надо рассмотреть для отыскания неизвестных величин;
- 2) изобразить активные силы;
- 3) если твердое тело несвободно, то, применив закон освобождения от связей, приложить к нему соответствующие реакции связей;
- 4) рассмотреть равновесие данного несвободного твердого тела, как тела свободного, находящегося под действием активных сил и реакций связей;
- 5) использовать необходимые и достаточные условия (уравнения) равновесия в соответствии со взаимным расположением сил, приложенных к твердому телу, и определить искомые величины.

Обращаем внимание читателя на то, что этот порядок является общим при решении любых задач на равновесие твердого тела. Методы применения пятого пункта и дополнительные рекомендации будут сделаны в соответствующих параграфах.

Напомним, что в технической системе единиц сила измеряется в кг, а в системе единиц СИ — в н (ньютонх), причем

$$1 \text{ кг} = 9,81 \text{ н}.$$

## ГЛАВА I

## ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

## § 1. Система сходящихся сил

1°. Равновесие твердого тела, к которому приложена система сходящихся сил. Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке.

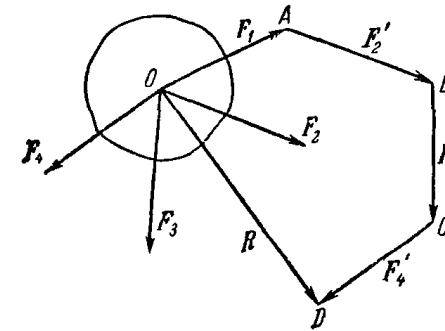


Рис. 1.14.

После переноса всех сил по их линиям действия в эту точку получается эквивалентная система сил, приложенных в одной точке.

Равнодействующая  $R$  системы сил, приложенных в одной точке, приложена в той же точке и изображается замыкающей стороной силового многоугольника, построенного на слагаемых силах, т. е. равнодействующая  $R$  равна векторной сумме слагаемых сил:

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{k=1}^n F_k. \quad (1^*)$$

При построении суммы векторов (рис. 1.14) надо к концу первого слагаемого вектора  $F_1$  приложить вектор  $F'_2$ , равный второму слагаемому вектору  $F_2$ , к концу второго слагаемого вектора  $F'_2$  присоединить вектор  $F'_3$ , равный третьему слагаемому вектору  $F_3$ , и т. д. Суммой векторов  $R$  является замыкающий вектор, начало которого совмещено с началом первого слагаемого вектора, а конец — с концом последнего слагаемого вектора. Если векторы изображают силы, то многоугольник  $OABCD$ , построенный на рисунке для четырех слагаемых сил, называется *силовым*, а его замыкающая сторона  $OD$  является равнодействующей  $R$ .

Если все слагаемые силы лежат на одной прямой, то вершины силового многоугольника оказываются лежащими на одной прямой. Равнодействующая  $R$  этой системы сил лежит на той же прямой. На рис. 1.15 изображена равнодействующая четырех сил  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  и  $F_4$ , лежащих на одной прямой. (Для ясности изображения линии действия сил несколько смещены друг относительно друга.)

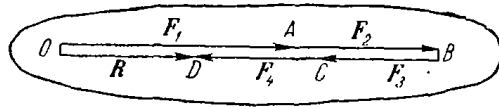


Рис. 1.15.

Для равновесия твердого тела, к которому приложена система сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы векторная сумма этих сил равнялась нулю:  $R=0$ , т. е. чтобы силовой многоугольник был замкнут. Это значит, что конец вектора последней слагаемой силы должен совместиться с началом вектора первой слагаемой силы. На рис. 1.16 изображен замкнутый силовой многоугольник, построенный на пяти слагаемых силах.

В случае равновесия твердого тела, к которому приложены силы, лежащие на одной прямой, вершины замкнутого силового многоугольника оказываются лежащими на прямой, вдоль которой в обоих направлениях отложены слагаемые силы, векторная сумма которых равна нулю (рис. 1.17).

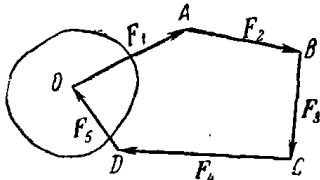


Рис. 1.16.

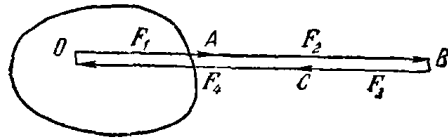


Рис. 1.17.

При решении задач на равновесие твердого тела, к которому приложена плоская система сходящихся сил, надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги, на стр. 15. Затем:

- 5) построить замкнутый силовой многоугольник (построение надо начинать с силы, известной как по модулю, так и по направлению);
- 6) решив силовой многоугольник, определить искомые величины.

Если число активных сил и реакций связей, приложенных к твердому телу, находящемуся в равновесии, равно трем, то задача сводится к построению и решению силового треугольника.

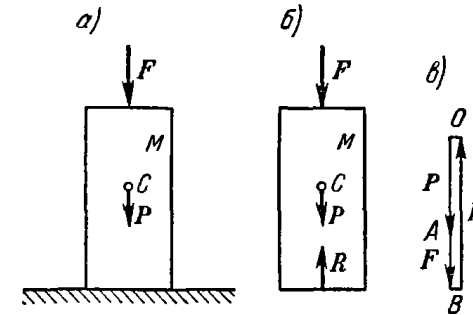
**Задача 1.1.** Однородный цилиндр  $M$ , вес которого  $P=20$  кг, лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Сверху на цилиндр давит вертикальная сила  $F=50$  кг, линия действия которой проходит через центр тяжести цилиндра.

Определить давление цилиндра на горизонтальную плоскость.

**Решение.** Рассмотрим равновесие несвободного цилиндра  $M$  (рис. а). К цилиндру приложены две активные силы:  $P$  — вес,  $F$  — вертикальная сила давления. Вес цилиндра приложен в его центре тяжести  $C$  и направлен по вертикали вниз. Сила давления совпадает по направлению с весом цилиндра.

На цилиндр наложена одна связь — гладкая горизонтальная плоскость, препятствующая перемещению цилиндра по вертикали вниз. Применяв закон освобожденности от связей, заменим действие горизонтальной плоскости на цилиндр соответствующей реакцией  $R$  (рис. б).

Направим реакцию  $R$  в сторону, противоположную тому перемещению, которое ограничено горизонтальной плоскостью, т. е. по вертикали вверх. Теперь данное несвободное твердое тело можно рассматривать как тело свободное, к которому приложены активные силы  $P$  и  $F$  и реакция горизонтальной плоскости  $R$ . Эти три силы лежат на одной прямой.



К задаче 1.1.

Если все слагаемые силы лежат на одной прямой, то вершины силового многоугольника оказываются расположенными на той же прямой.

Изобразим вектор, равный силе  $P$ , поместив его начало в произвольной точке. Из конца его, т. е. из точки  $A$ , проведем вектор, равный силе  $F$ . В конце его, т. е. в точке  $B$ , находится начало вектора  $R$  (рис. в).

Так как при равновесии твердого тела сумма сил  $P$ ,  $F$  и  $R$  должна быть равна нулю, то конец вектора  $R$  должен совпасть в точке  $O$  с началом первой слагаемой силы  $P$  (на рис. в для ясности изображения линии действия сил  $P$  и  $F$  и силы  $R$  несколько смещены друг относительно друга). Как следует из рис. в,  $R=P+F$ . Подставив численные значения, получим  $R=70$  кг.

Давление твердого тела на горизонтальную плоскость равно по модулю реакции  $R$  этой плоскости и направлено ей противоположно, т. е. по вертикали вниз.

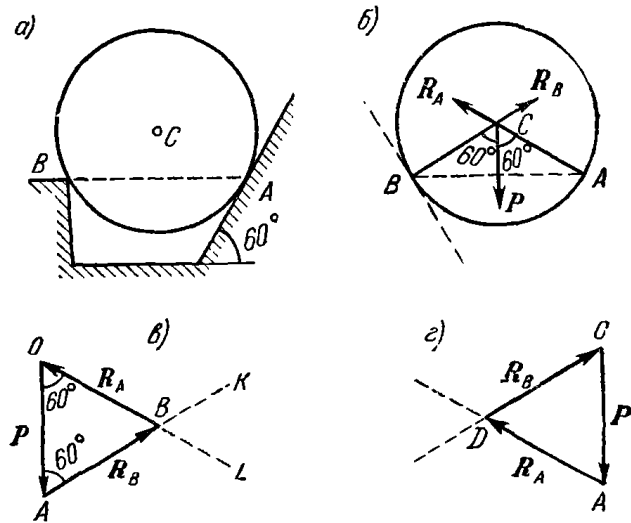
**Задача 1.2.** Однородный шар весом  $P=20$  кг опирается в точке  $A$  на гладкую наклонную плоскость, образующую угол  $\alpha=60^\circ$  с горизонтом, а в точке  $B$  на выступ, находящийся на одной горизонтали с точкой  $A$ .

Определить опорные реакции наклонной плоскости и выступа.

**Решение.** Рассмотрим равновесие шара. К шару приложена одна активная сила — его вес  $P$ , направленный по вертикали вниз. Шар

находится в равновесии при наличии двух связей: наклонной плоскости и выступа. Применив закон освобождения, заменим действие на шар мысленно отброшенных связей соответствующими реакциями. Реакция  $R_A$  гладкой наклонной плоскости направлена к ней перпендикулярно. В точке  $B$  проведем касательную (рис. б) и направим опорную реакцию перпендикулярно к касательной. Следовательно, линия действия  $R_B$  проходит через центр тяжести шара  $C$ .

Теперь можно рассмотреть шар как свободное твердое тело, находящееся в равновесии под действием плоской системы трех сил:  $P$ ,  $R_A$  и  $R_B$ , линии действия которых пересекаются в точке  $C$ . Для



К задаче 1.2.

равновесия шара необходимо и достаточно, чтобы сумма этих трех сил равнялась нулю. Поэтому силы образуют замкнутый силовой треугольник.

Построение силового треугольника начнем с силы  $P$ , известной как по величине, так и по направлению. Из произвольной точки  $O$  (рис. в) проведем вектор, который равен силе  $P$ . К концу силы  $P$  надо приложить начало силы  $R_A$  или  $R_B$ . Выбираем в качестве следующей стороны силового треугольника реакцию выступа  $R_B$ . Так как направление силы  $R_B$  известно, то проведем через точку  $A$  прямую  $AK$ , параллельную линии действия реакции  $R_B$ . Для последующего построения силового треугольника надо к концу  $R_B$  приложить начало силы  $R_A$ . Сделать это невозможно, так как модуль силы  $R_B$  неизвестен. Несмотря на возникшее затруднение, построение силового треугольника можно успешно завершить. Следует учесть, что при равновесии шара силовой треугольник должен быть замкнут. При

этом конец вектора реакции  $R_A$  должен совместиться с началом вектора силы  $P$ , т. е. попасть в точку  $O$ . Поэтому проведем через точку  $O$  прямую  $OL$ , параллельную линии действия силы  $R_A$ . Точка  $B$  пересечения прямых  $AK$  и  $OL$  определяет положение третьей вершины  $B$  силового треугольника  $OAB$ . В построенном силовом треугольнике должно иметь место единое направление стрелок, т. е. в каждой из вершин треугольника должен быть расположен конец только одной из трех сил.

Для определения модулей опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$  остается решить силовой треугольник  $OAB$ . Нетрудно видеть из рис. в, что углы, образованные линией действия силы  $P$  с линиями действия реакций  $R_A$  и  $R_B$ , равны  $60^\circ$ ; таким образом, силовой треугольник оказывается равносторонним и, следовательно,  $R_A = R_B = P = 20 \text{ кг}$ .

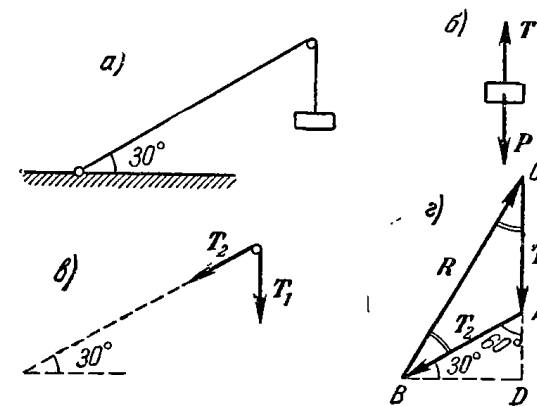
Если бы при построении силового треугольника мы к концу силы  $P$  приложили начало силы  $R_A$  (а не  $R_B$ , как это было сделано выше), то получили бы силовой треугольник  $OAD$  (рис. г), равный силовому треугольнику  $OAB$ . Решение этого силового треугольника, естественно, привело бы к тем же результатам.

**Задача 1.3.** Через гвоздь, вбитый в стену, переброшен трос (рис. а). Один конец троса прикреплен к полу под углом  $30^\circ$  к горизонту. К другому концу троса подвешен груз, вес которого  $P = 100 \text{ кг}$ .

Определить величину реакции стены, в которую вбит гвоздь. Весом гвоздя пренебречь. Трос расположен в вертикальной плоскости.

**Решение.** Предварительно рассмотрим равновесие груза (рис. б). К грузу приложены: вес  $P$ , направленный по вертикали вниз, и реакция троса  $T$ , направленная по вертикали вверх. Воспользовавшись вторым законом о равновесии твердого тела под действием двух сил, получим:

$$T = P = 100 \text{ кг}.$$



К задаче 1.3.

Переходим к рассмотрению равновесия гвоздя. Мысленно рассекая левую и правую ветви троса вблизи гвоздя, заменим действие отброшенных частей троса его реакциями  $T_1$  и  $T_2$  (рис. в). Силы  $T_1$  и  $T_2$  равны по модулю силе  $T$ , но различны по направлению:  $|T_1| = |T_2| = |T|$ . Связью, наложенной на гвоздь, является стена.

Гвоздь находится в равновесии под действием активных сил  $T_1$  и  $T_2$  и реакции  $R$  стены, направление которой неизвестно. Так как

линии действия этих трех сил пересекаются в одной точке, то можно построить силовой треугольник на силах  $T_1$ ,  $T_2$  и  $R$ . В данном силовом треугольнике две силы ( $T_1$  и  $T_2$ ) известны как по величине, так и по направлению. Проведя из произвольной точки  $O$  силу, векторно равную силе  $T_1$ , приложим к ее концу силу, векторно равную силе  $T_2$  (рис. 2).

Так как при равновесии гвоздя силовой треугольник должен быть замкнут, то, соединив начало  $O$  силы  $T_1$  с концом  $B$  силы  $T_2$ , определим реакцию стены  $R$ . Конiec силы должен находиться в исходной точке  $O$ . При этом силовой треугольник  $OAB$  оказывается замкнутым.

Для решения силового треугольника  $OAB$  воспользуемся вспомогательными построениями. Проведем из точки  $B$  направо горизонталь и продолжим  $OA$  по вертикали вниз до пересечения с горизонталью в точке  $D$ . В треугольнике  $ABD$  угол  $ABD$  равен углу наклона левой ветви троса к горизонту, т. е.  $30^\circ$ . Следовательно, угол  $BAD$  равен  $60^\circ$ . Угол  $BAD$  является внешним по отношению к силовому треугольнику  $OAB$ . Замечая, что силовой треугольник  $OAB$  является равнобедренным (силы  $T_1$  и  $T_2$  по модулю равны), имеем:  $\angle OBA = \angle BOA = \frac{1}{2} \angle BAD = 30^\circ$ . Теперь из треугольника  $OAB$  без труда находим искомый модуль реакций  $R$  стены:

$$R = BO = BA \cos 30^\circ + AO \cos 30^\circ = 2T \cos 30^\circ = 2 \cdot 100 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 173 \text{ кг}.$$

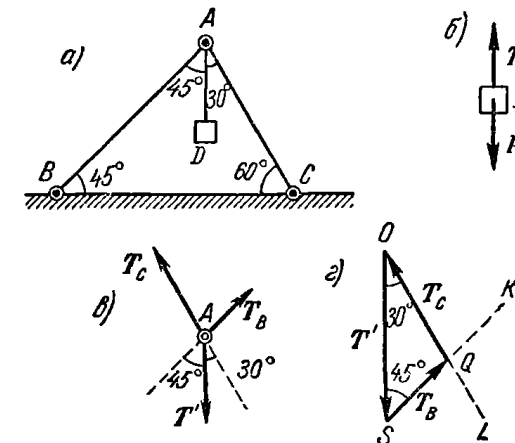
**Задача 1.4.** Два абсолютно жестких стержня  $AB$  и  $AC$  соединены шарниром в точке  $A$  и прикреплены к полу шарнирами  $B$  и  $C$ , образуя с полом соответственно углы  $45^\circ$  и  $60^\circ$  (рис. а). К валику шарнира  $A$  подвешен на нерастяжимой нити груз  $D$ , вес которого  $P = 100 \text{ кг}$ .

Определить усилия, возникающие в стержнях  $AB$  и  $AC$ . Весом стержней пренебречь.

**Решение.** Для определения усилий в стержнях  $AB$  и  $AC$  следует рассмотреть равновесие шарнира  $A$ . Однако непосредственно приступить к исследованию равновесия узла  $A$  невозможно, так как он находится в равновесии под действием трех неизвестных сил: реакций стержней  $AB$  и  $AC$  и реакции нити  $AD$ . Поэтому для определения реакции нити предварительно рассмотрим равновесие груза  $D$ . Груз  $D$  находится в равновесии под действием двух сил: веса  $P$  и реакции нити  $T$ . Эти силы направлены в противоположные стороны (рис. б). Учитывая условие равновесия груза, получим, что  $T = P = 100 \text{ кг}$ .

Теперь, когда одна из трех сил, приложенных к шарниру  $A$ , известна, можно изучить равновесие шарнира  $A$ . К нему приложена одна известная сила — реакция нити  $T'$ , направленная по вертикали

вниз (на основании закона равенства действия и противодействия  $T' = -T$ ). Реакции  $T_B$  и  $T_C$  стержней  $AB$  и  $AC$  направлены вдоль стержней (см. на стр. 14 и 15 пример 7 направления реакции связей). На рис. в эти три силы изображены приложенными в шарнире  $A$  (в общем случае трудно заранее указать, направлены ли силы  $T_B$  и  $T_C$  вдоль стержней вверх или вниз; это будет уточнено в ходе последующего решения задачи).



К задаче 1.4.

и конец силы  $T'$  прямые  $OL$  и  $SK$ , соответственно параллельные стержням  $AC$  и  $AB$ , получим в пересечении третьей вершину  $Q$  силового треугольника  $OSQ$ . Изобразив на сторонах треугольника  $SQ$  и  $QO$  стрелки так, чтобы сумма трех сил  $T'$ ,  $T_B$  и  $T_C$  равнялась нулю (в каждой из вершин силового треугольника  $OSQ$  должен быть расположен конец только одной из трех сил), получим направления реакций  $T_B$  и  $T_C$ .

Перейдя к решению силового треугольника, заметим, что  $\angle SOQ = \angle DAC = 30^\circ$  и  $\angle OSQ = \angle BAD = 45^\circ$ , как углы с соответственно параллельными сторонами. Следовательно,  $\angle SQO = 105^\circ$ . Применяя теорему синусов, получим:

$$\frac{T_B}{\sin 30^\circ} = \frac{T_C}{\sin 45^\circ} = \frac{T'}{\sin 105^\circ},$$

откуда

$$T_B = T' \frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ}, \quad T_C = T' \frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}.$$

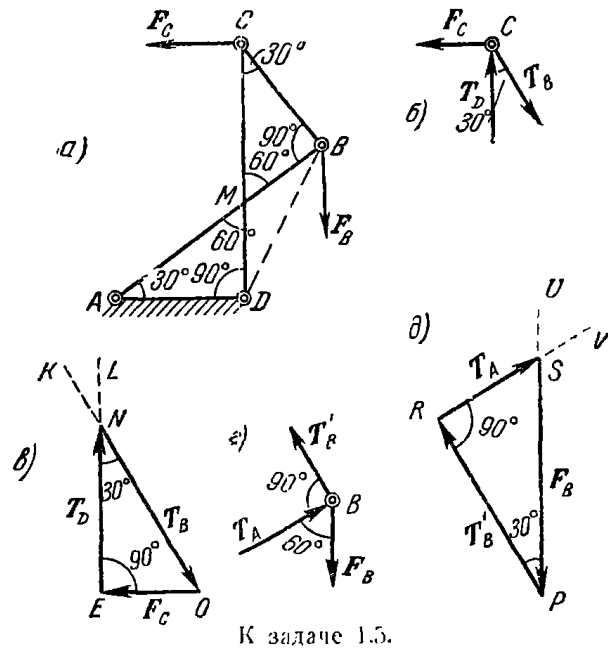
Подставив численные значения, находим:

$$T_B = 51,8 \text{ кг}, \quad T_C = 73,2 \text{ кг}.$$

**Задача 1.5.** На рис. а изображен механизм антипараллелограмма  $ABCD$ , состоящий из абсолютно жестких стержней  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ , шарнирно соединенных между собой в точках  $B$  и  $C$  и прикреплен-

ных шарнирами  $A$  и  $D$  к неподвижному звену  $AD$ ;  $AD=BC$ ,  $AB=CD$ . К валу шарнира  $C$  приложена направленная по горизонтали влево сила  $F_C=10 \text{ кГ}$ . (Впредь для краткости вал шарнира мы будем называть шарниром.)

Определить величину силы  $F_B$  приложенной в шарнире  $B$  и направленной по вертикали вниз, если механизм находится в равновесии в положении, указанном на рис.  $a$ , т. е. при  $\angle BAD=30^\circ$  и  $\angle ADC=90^\circ$ . Весом стержней пренебречь.



К задаче 1.5.

Решение. Для определения величины силы  $F_B$  следует рассмотреть равновесие шарнира  $B$ . Однако непосредственно это сделать невозможно, так как ни одна из трех сил, приложенных к шарниру  $B$  (сила  $F_B$  и реакции стержней  $AB$  и  $BC$ ), неизвестна по величине. Поэтому для определения величины реакции стержня  $BC$  предварительно рассмотрим равновесие шарнира  $C$ . К шарниру  $C$  приложена активная сила  $F_C$  и реакции стержней  $CD$  и  $CB$ . Так как стержни соединены шарнирами, то реакции направлены вдоль соответствующих стержней.

На рис.  $b$  изображен силовой треугольник для узла  $C$ . Из произвольной точки  $O$  проведена сила  $F_C$ . Через начало и конец силы  $F_C$  проведены прямые  $OK$  и  $OL$ , соответственно параллельные стержням  $CB$  и  $CD$ . В точке пересечения этих прямых найдем третью вершину  $N$  силового треугольника  $OEN$ . Направим векторы  $T_D$  и  $T_B$  так, чтобы сумма сил  $F_C$ ,  $T_D$  и  $T_B$  оказалась равной нулю.

Для определения углов в треугольнике  $OEN$  вернемся к рис.  $a$ . Соединив точки  $B$  и  $D$ , рассмотрим треугольники  $ABD$  и  $DCB$ . Эти треугольники равны по трем сторонам, так как по условию  $AD=BC$ ,  $AB=CD$ , а сторона  $BD$  у них общая. Воспользовавшись равенством треугольников, найдем, что  $\angle DCB=\angle DAB=30^\circ$ . Теперь легко доказать равенство треугольников  $AMD$  и  $CMB$ . Действительно,  $AD=BC$ ,  $\angle DAM=\angle MCB=30^\circ$ ,  $\angle AMD=\angle CMB=60^\circ$ . Следовательно,  $\angle CBM=\angle ADM=90^\circ$ .

Обратившись теперь к силовому треугольнику  $OEN$ , нетрудно заметить, что  $\angle ENO=\angle MCB=30^\circ$ . Так как  $F_C \perp T_D$ , то получим:

$$T_B = \frac{F_C}{\sin 30^\circ} = 2F_C. \quad (1)$$

Теперь мы можем определить искомую силу  $F_B$ , рассмотрев равновесие шарнира  $B$  (рис.  $z$ ). К шарниру  $B$  приложены активная сила  $F_B$  и реакции стержней  $AB$  и  $BC$ , направленные вдоль стержней. При этом реакция  $T_B'$  стержня нам известна. Она равна по модулю силе  $T_B$ , определенной из силового треугольника  $OEN$ , и противоположна ей направлена, т. е.  $T_B' = -T_B$  (см. на стр. 14 и 15 пример 7 направления реакций связей).

Начнем построение силового треугольника для узла  $B$  с реакции и  $T_B'$ , отложив ее от произвольной точки  $P$  (рис.  $d$ ). Затем, проведя через начало и конец  $T_B'$  прямые  $PU$  и  $PV$ , соответственно параллельные линиям действия искомой силы  $F_B$  и стержню  $AB$ , получим в их точке пересечения третью вершину  $S$  силового треугольника  $PRS$ . Направим векторы  $T_A$  и  $F_B$  так, чтобы силовой треугольник  $PRS$  оказался замкнутым. Так как линии действия сил  $T_B'$  и  $T_A$  соответственно параллельны стержням  $CB$  и  $AB$ , то  $\angle PRS = \angle MBC = 90^\circ$ . Заметив, что  $\angle RPS = \angle BAD = 30^\circ$ , как углы с взаимно перпендикулярными сторонами, найдем из силового треугольника  $PRS$ :

$$F_B = \frac{T_B'}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{3} \sqrt{3} T_B.$$

Подставив значение  $T_B$  из формулы (1), получим:

$$F_B = \frac{4}{3} \sqrt{3} F_C = 23,1 \text{ кГ}.$$

Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и последующих лет: 20, 24, 28, 31.

2°. Теорема о трех непараллельных силах. Если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллель-



ных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке (рис. 1.18).

Следует иметь в виду, что пересечение линий действия трех непараллельных сил в одной точке является лишь необходимым условием для равновесия твердого тела. Пересечение линий действия трех сил в одной точке не является достаточным условием, так как равнодействующая этих сил может оказаться не равной нулю. Следовательно, достаточным условием является наличие замкнутого силового треугольника при одновременном пересечении линий действия трех сил в одной точке.

Теорема о трех непараллельных силах значительно облегчает решение задач на равновесие твердого тела в тех случаях, когда направление одной из трех уравновешивающихся сил неизвестно. Действительно, определив точку пересечения линий действия двух сил, направления которых известны, можно указать направление линии действия третьей силы, так как она должна пройти через точку приложения этой силы и точку пересечения линий действия первых двух сил.

**Задача 1.6.** На рис. а изображена схема суппорта универсального металлорежущего станка с закрепленным в нем резцом. К резцу в точке  $D$  со стороны обрабатываемого изделия (на рисунке изделие не показано) приложено давление  $N$ , образующее угол  $30^\circ$  с вертикалью и равное по модулю  $300 \text{ кг}$ . Схематизируя опоры суппорта, считаем, что опорой  $A$  является цилиндрический шарнир, а в точке  $B$  суппорт поддерживается пружиной.

Пренебрегая весом суппорта, определить реакцию опоры и силу упругости пружины. Размеры указаны на рисунке.

**Решение.** Рассмотрим равновесие суппорта, к которому приложены силы:  $N$  — давление обрабатываемого изделия на резец,  $F$  — сила упругости пружины, направленная по вертикали вверх. Применив

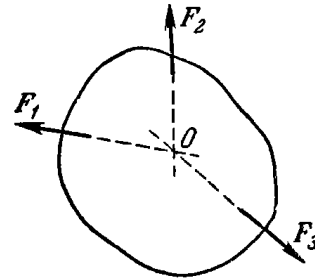
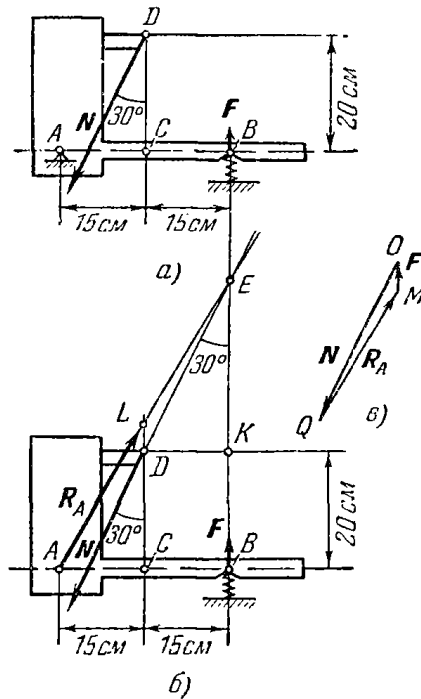


Рис. 1.18.



К задаче 1.6.

закон освобожденности от связей, мысленно отбросим цилиндрический шарнир  $A$  и компенсируем его действие на суппорт соответствующей реакцией  $R_A$ . Обычно мы не можем заранее указать направление этой реакции (см. пример 4 направления реакций на стр. 13 и 14). Однако в данном случае суппорт находится в равновесии под действием трех непараллельных сил:  $N$ ,  $F$  и  $R_A$ . Поэтому можно воспользоваться теоремой о трех непараллельных силах, согласно которой линии действия сил  $N$ ,  $F$  и  $R_A$  должны пересекаться в одной точке. Так как линии действия сил  $N$  и  $F$  пересекаются в точке  $E$ , то линия действия силы  $R_A$  также должна проходить через эту точку (см. рис. б).

Построение силового треугольника (см. рис. в) начнем с силы  $N$ , приложив ее в произвольной точке  $O$ , взятой вне основного рисунка. Через начало  $O$  и конец  $Q$  вектора  $N$  проведем прямые, параллельные линиям действия сил  $F$  и  $R_A$ . В точке пересечения этих прямых найдем третью вершину  $M$  силового треугольника  $OMQ$ . Направим векторы  $R_A$  и  $F$  так, чтобы силовой треугольник оказался замкнутым, т. е. чтобы в каждой из его вершин был расположен конец только одной силы.

Для решения силового треугольника выполним на рис. б вспомогательное построение: проведем через точку  $D$  вертикаль до пересечения в точке  $L$  с прямой  $AE$ . Нетрудно видеть, что треугольники  $OMQ$  (рис. в) и  $DLE$  (рис. б) подобны, ибо имеют соответственно параллельные стороны. Определим длины сторон треугольника  $DLE$ . Из прямоугольного треугольника  $DKE$ , в котором, по условию,  $DK = CB = 15 \text{ см}$ , имеем  $DE = \frac{DK}{\sin 30^\circ} = 30 \text{ см}$ ,  $KE = DK \operatorname{ctg} 30^\circ = 15\sqrt{3} \text{ см}$ . Поэтому  $BE = BK + KE = (20 + 15\sqrt{3}) \text{ см}$ , т. е.

$$BE = 46 \text{ см.} \quad (1)$$

Средняя линия  $CL$  треугольника  $BAE$  равна  $CL = \frac{1}{2} BE = 23 \text{ см}$ . Значит,  $DL = CL - CD = 3 \text{ см}$ . Для определения  $LE$  предварительно вычислим  $AE$  из прямоугольного треугольника  $AEB$ . Имеем  $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{30^2 + 46^2} = 55 \text{ см}$ . Так как  $AE = AL + LE = 2LE$ , то  $LE = 27,5 \text{ см}$ . Итак, стороны треугольника  $DLE$  равны

$$DE = 30 \text{ см}, \quad DL = 3 \text{ см}, \quad LE = 27,5 \text{ см.} \quad (2)$$

Используя подобие треугольников  $OMQ$  и  $DLE$ , запишем:

$$\frac{R_A}{LE} = \frac{F}{DL} = \frac{N}{DE},$$

откуда

$$R_A = N \cdot \frac{LE}{DE}, \quad F = N \cdot \frac{DL}{DE}.$$

Подставив значения  $LE$ ,  $DE$  и  $DL$  из формул (2), а также значение  $N=300$  кг, получим:

$$R_A = 275 \text{ кг}, \quad F = 30 \text{ кг}. \quad (3)$$

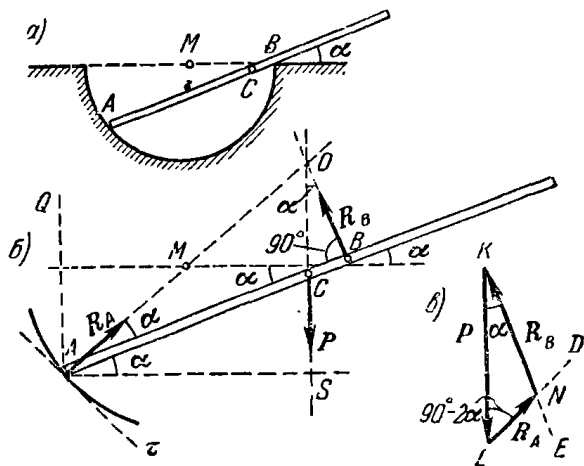
**Задача 1.7.** Однородная палочка весом  $P$  и длиной  $2a$  опирается концом  $A$  о гладкую внутреннюю поверхность полусферической чаши радиуса  $r$ . Промежуточной точкой  $B$  палочка опирается о ребро чаши.

Определить величину угла  $\alpha$ , образуемого палочкой с горизонтом в положении равновесия, и опорные реакции в точках  $A$  и  $B$ .  $C$  — центр тяжести палочки,  $M$  — центр сферы, половина которой образует чашу (рис. а).

Решение. Если опустить палочку концом  $A$  в полусферическую чашу, то она займет в ней положение равновесия при некотором фиксированном значении угла  $\alpha$ , образуемого палочкой с горизонтом. При этом угол  $\alpha$  зависит от длины палочки  $2a$  и радиуса чаши  $r$ .

В случае равновесия угол  $\alpha$  должен быть таким, чтобы линии действия трех сил, приложенных к палочке, — веса  $P$  и реакций  $R_A$  и  $R_B$  — пересекались в одной точке. Реакцию  $R_A$  направим по нормали к поверхности в данной точке, т. е. по радиусу  $AM$ , а реакцию  $R_B$  — перпендикулярно к палочке (рис. б). Пусть  $O$  — точка пересечения линий действия этих трех сил. Такого построения оказывается достаточно для определения значения угла  $\alpha$ . Рассматривая равнобедренный треугольник  $AMB$ , имеем  $AM = MB = r$ ,  $\angle BAM = \angle ABM$ . Так как  $\angle MBA = \angle BAS = \alpha$ , то  $\angle BAM = \angle ABM = \alpha$ . Угол  $ABO$ , вписанный в окружность радиуса  $r$ , является по построению прямым. Он должен опираться на диаметр окружности; поэтому  $AO = 2r$ . Из треугольника  $AOS$  находим  $AS = AO \cdot \cos 2\alpha = 2r \cos 2\alpha$ . Из треугольника  $ACS$  имеем  $AS = AC \cdot \cos \alpha = a \cos \alpha$ . (Так как центр тяжести однородной палочки расположен в ее середине, то  $AC = a$ .) Следовательно,

$$AS = 2r \cos 2\alpha = a \cos \alpha. \quad (1)$$



К задаче 1.7.

Заменяв  $\cos 2\alpha$  через  $2 \cos^2 \alpha - 1$ , получим:

$$2r(2 \cos^2 \alpha - 1) = a \cos \alpha,$$

или

$$4r \cos^2 \alpha - a \cos \alpha - 2r = 0.$$

Решив это квадратное уравнение, найдем:

$$\cos \alpha = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 32r^2}}{8r}.$$

Так как  $0 < \alpha < \pi/2$ , то  $0 < \cos \alpha < 1$ . Поэтому, отбросив отрицательное значение  $\cos \alpha$ , окончательно получим:

$$\cos \alpha = \frac{a + \sqrt{a^2 + 32r^2}}{8r}. \quad (2)$$

Для определения опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$  построим замкнутый силовой треугольник (рис. в). Из произвольной точки  $K$  проводим вектор, равный силе  $P$ . Проведем через начало вектора  $P$  прямую  $KE$ , параллельную реакции  $R_B$ , а через конец вектора  $P$  — прямую  $LD$ , параллельную реакции  $R_A$ , получим в точке пересечения этих прямых третью вершину  $N$  силового треугольника  $KNL$ . Из сравнения рис. б и в нетрудно видеть, что  $\angle NKL = \angle BOC = \alpha$ ,  $\angle NLK = \angle QAM = 90^\circ - \angle MAS = 90^\circ - 2\alpha$  и, следовательно,  $\angle KNL = 180^\circ - (\angle LKN + \angle KLN) = 90^\circ + \alpha$ .

Применив к силовому треугольнику  $KNL$  теорему синусов, запишем:

$$\frac{P}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{R_A}{\sin \alpha} = \frac{R_B}{\sin(90^\circ + 2\alpha)},$$

откуда

$$R_A = P \operatorname{tg} \alpha, \quad R_B = P \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha},$$

где  $\cos \alpha$  определяется по формуле (2).

Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и последующих лет: 37, 38, 40, 41.

3°. Метод проекций. Ортогональная проекция силы на ось, подобно проекции любого вектора на ось, равна произведению модуля силы на косинус угла, образованного положительным направлением оси проекций и направлением проектируемой силы (рис. 1.19):

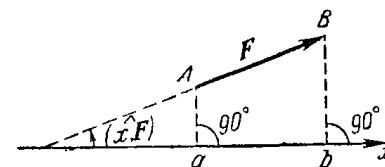


Рис. 1.19.

$$\operatorname{пр}_x F = ab = F \cos(x, \widehat{F}).$$

Проекция силы на ось является алгебраической величиной. Если угол между положительным направлением оси проекций и вектором

заклучен в пределах от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , либо от  $270^\circ$  до  $360^\circ$ , то проекция силы на ось положительна. Если же он лежит в пределах от  $90^\circ$  до  $270^\circ$ , то проекция силы на ось отрицательна. Если сила перпендикулярна к оси, то проекция силы на ось равна нулю. По этому способу определяются ортогональные проекции силы на координатные оси  $x$  и  $y$  (рис. 1.20)

$$\text{пр}_x \mathbf{F} = ab = F \cos(\widehat{x, \mathbf{F}}),$$

$$\text{пр}_y \mathbf{F} = a_1 b_1 = F \cos(\widehat{y, \mathbf{F}}).$$

Впредь для краткости будем обозначать:

$$\text{пр}_x \mathbf{F} = F_x, \quad \text{пр}_y \mathbf{F} = F_y$$

либо

$$\text{пр}_x \mathbf{F} = X, \quad \text{пр}_y \mathbf{F} = Y.$$

Следовательно,

$$F_x = X = F \cos(\widehat{x, \mathbf{F}}),$$

$$F_y = Y = F \cos(\widehat{y, \mathbf{F}}).$$

С помощью этих формул, зная модуль и направление силы, можно определить ее проекции на оси ортогональных декартовых координат.

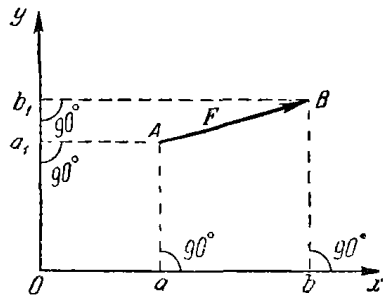


Рис. 1.20.

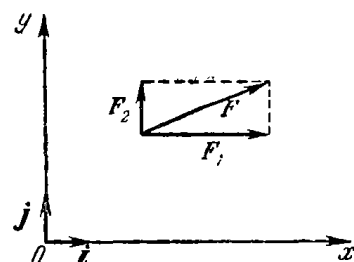


Рис. 1.21.

В случае решения обратной задачи, т. е. при определении модуля и направления силы по заданным проекциям на оси декартовых координат, вычисление ведется по формулам:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (\text{модуль силы}), \quad (2^*)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\widehat{x, \mathbf{F}}) &= \frac{F_x}{F} = \frac{X}{F}, \\ \cos(\widehat{y, \mathbf{F}}) &= \frac{F_y}{F} = \frac{Y}{F} \end{aligned} \right\} \quad (\text{направляющие косинусы}). \quad (3^*)$$

Нельзя отождествлять понятия проекции силы и ее составляющей. На рис. 1.21 изображена сила  $\mathbf{F}$ , разложенная на две составляющие

силы  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ , направленные параллельно соответствующим осям координат, т. е.  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ . Составляющая силы является вектором, который можно представить в виде произведения проекции силы на орт (единичный вектор) соответствующей оси, т. е.

$$\mathbf{F}_1 = F_x \mathbf{i} = X \mathbf{i}, \quad \mathbf{F}_2 = F_y \mathbf{j} = Y \mathbf{j}.$$

Следовательно, разложение силы на составляющие можно записать в виде

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} = X \mathbf{i} + Y \mathbf{j}.$$

Орты осей координат всегда направлены в положительных направлениях соответствующих осей. Знак проекции силы определяет направление ее составляющей, т. е. если проекция силы положительна, то направление составляющей силы совпадает с положительным направлением соответствующей оси, если же проекция силы отрицательна, то направление составляющей силы противоположно положительному направлению соответствующей оси.

Переходим к определению равнодействующей плоской системы сходящихся сил методом проекций. Пусть даны силы  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ . В плоскости действия сил построена система осей декартовых координат  $xu$ . Разложения данных сил по ортам этих осей координат имеют вид

$$\mathbf{F}_1 = F_{1x} \mathbf{i} + F_{1y} \mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_2 = F_{2x} \mathbf{i} + F_{2y} \mathbf{j}, \quad \dots, \quad \mathbf{F}_n = F_{nx} \mathbf{i} + F_{ny} \mathbf{j}.$$

Разложение равнодействующей плоской системы сходящихся сил по ортам этих осей координат дается формулой:  $\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$ , где  $R_x$  и  $R_y$  — проекции равнодействующей на соответствующие оси.

Проекция равнодействующей на оси декартовых координат равны алгебраическим суммам проекций слагаемых сил на соответствующие оси

$$\left. \begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{k=1}^n F_{ky}. \end{aligned} \right\} \quad (4^*)$$

Определив по этим формулам проекции равнодействующей, можно вычислить ее модуль

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (5^*)$$

и направляющие косинусы

$$\cos(\widehat{x, \mathbf{R}}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\widehat{y, \mathbf{R}}) = \frac{R_y}{R}. \quad (6^*)$$

Уравнения равновесия твердого тела при наличии плоской системы сходящихся сил. Для равновесия твер-

лого тела, к которому приложена система сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на оси декартовых координат равнялись нулю:

$$\left. \begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} &= 0, \\ F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7^*)$$

или, в более краткой записи,

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0. \quad (7^*)$$

Задача называется *статически определенной*, если число неизвестных равно числу независимых уравнений равновесия. Если же число неизвестных больше числа независимых уравнений равновесия, то задача называется *статически неопределенной*. В последнем случае одними уравнениями статики задача не может быть решена. Для ее решения следует привлечь уравнения, даваемые другими дисциплинами, например сопротивлением материалов.

Задача на равновесие твердого тела под действием плоской системы сходящихся сил является статически определенной, если число алгебраических неизвестных не более двух. Так, если известны направления всех слагаемых сил и модули всех сил, кроме двух, то можно определить неизвестные модули двух сил. Если одна из сил не известна ни по величине, ни по направлению, то все остальные слагаемые силы должны быть заданы.

Преимущества аналитического метода проекций по сравнению с геометрическим методом силового многоугольника особенно заметны в задачах на равновесие твердого тела при наличии более трех сходящихся сил. Действительно, решение силового четырех-, пяти- и  $n$ -угольника представляет известные трудности, в то время как решение задачи методом проекций лишь незначительно усложняется при увеличении числа проектируемых сил.

При решении методом проекций задач на равновесие твердого тела, находящегося под действием плоской системы сходящихся сил, надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги, на стр. 15. Затем:

5) убедиться в том, что данная задача является статически определенной, т. е. что число алгебраических неизвестных не более двух;

6) выбрать в плоскости действия сил систему осей декартовых координат  $x, y$ ;

7) составить уравнения равновесия твердого тела в проекциях на оси декартовых координат (7\*);

8) решить систему составленных уравнений равновесия и определить искомые величины; если величина какой-либо из неизвестных

сил окажется отрицательной, то это означает, что направление силы противоположно тому, которое было указано на рисунке.

Если по условию задачи требуется определить равнодействующую, то после выполнения первых четырех пунктов решения задачи надо вычислить проекции равнодействующей  $R_x$  и  $R_y$  по формулам (4\*), затем определить модуль равнодействующей и ее направляющие косинусы по формулам (5\*) и (6\*).

При выборе осей декартовых координат целесообразно их направить так, чтобы они были параллельны либо перпендикулярны большинству слагаемых сил.

При определении проекции силы на ось можно пользоваться следующим приемом: вычислить модуль проекции силы как произведение модуля силы на косинус острого угла между линией действия силы

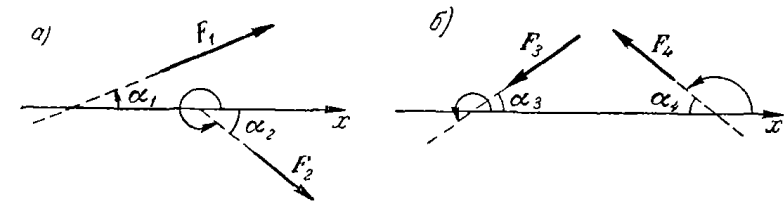


Рис. 1.22.

и прямой, лежащей на оси проекций. Для определения знака проекции силы надо смотреть на проектируемую силу и ось проекции так, чтобы плоскость, проходящая через них, была видна в виде прямой. Если при этом направления силы и оси совпадают, то проекция силы положительна, если же направления силы и оси противоположны, то проекция силы отрицательна.

Например, проекции на ось  $x$  сил  $F_1$  и  $F_2$ , изображенных на рис. 1.22, а, положительны, и можно сразу записать:

$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha_1, \quad F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2,$$

вместо того чтобы производить вычисления

$$F_{2x} = F_2 \cos (360^\circ - \alpha_2) = F_2 \cos \alpha_2.$$

Проекция же сил  $F_3$  и  $F_4$ , показанных на рис. 1.22, б, отрицательны, так как непосредственно ясно, что

$$F_{3x} = -F_3 \cos \alpha_3, \quad F_{4x} = -F_4 \cos \alpha_4.$$

Сложнее было бы вычислить проекции формально:

$$F_{3x} = F_3 \cos (180^\circ + \alpha_3) = -F_3 \cos \alpha_3,$$

$$F_{4x} = F_4 \cos (180^\circ - \alpha_4) = -F_4 \cos \alpha_4.$$

**Задача 1.8.** Решить задачу 1.4 методом проекций.

Решение. Воспользуемся изображением сил  $T'$ ,  $T_C$  и  $T_B$ , данным на рис. 6 к задаче 1.4. Направим ось  $x$  по горизонтали направо и ось  $y$  по вертикали вверх. Составим уравнения равновесия шарнира  $A$  в проекциях на оси  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= T_B \cos 45^\circ - T_C \cos 60^\circ = 0, \\ \sum F_{ky} &= T_B \cos 45^\circ + \\ &+ T_C \cos 30^\circ - T' = 0.\end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений, найдем  $T_C = 73,2$  кг,  $T_B = 51,8$  кг.

Решение этой задачи аналитическим методом проще геометрического метода (см. решение задачи 1.4).

**Задача 1.9.** На рисунке изображены четыре силы  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  и  $F_4$ , приложенные к твердому телу в точке  $O$  и лежащие в одной плоскости.

Определить модуль и направление силы  $F_5$ , которую следует приложить в точке  $O$  для того, чтобы твердое тело находилось в равновесии. Дано:  $F_1 = 2$  н,  $F_2 = F_3 = 4$  н,  $F_4 = 6$  н.

Решение. Для решения задачи методом проекций направим оси декартовых координат: ось  $x$  — по горизонтали направо, ось  $y$  — по вертикали вверх. Уравнения равновесия твердого тела в проекциях на оси  $x$  и  $y$  имеют вид

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0,$$

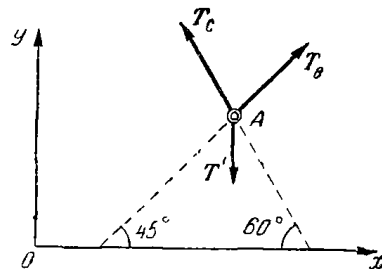
или

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} + F_{5x} = 0, \quad (1)$$

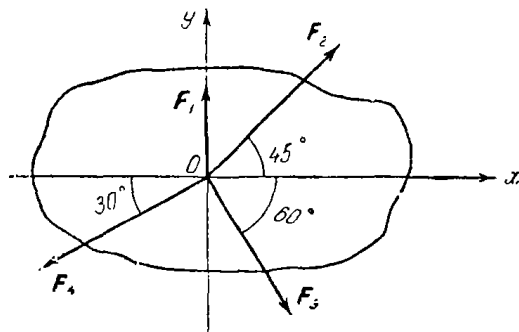
$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} + F_{5y} = 0, \quad (2)$$

где  $F_{5x}$  и  $F_{5y}$  — проекции неизвестной силы  $F_5$  на оси  $x$  и  $y$ .

Так как число неизвестных равно числу уравнений, то задача является статически определенной.



К задаче 1.8.



К задаче 1.9.

Вычислим проекции четырех заданных сил  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  и  $F_4$  на оси  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned}F_{1x} &= 0, & F_{2x} &= F_2 \cos 45^\circ = 2\sqrt{2}, & F_{3x} &= F_3 \cos 60^\circ = 2, \\ & & F_{4x} &= -F_4 \cos 30^\circ = -3\sqrt{3}, \\ F_{1y} &= F_1 = 2, & F_{2y} &= F_2 \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}, \\ F_{3y} &= -F_3 \sin 60^\circ = -2\sqrt{3}, & F_{4y} &= -F_4 \sin 30^\circ = -3.\end{aligned}$$

Подставляя эти значения в уравнения (1) и (2), получим:

$$2\sqrt{2} + 2 - 3\sqrt{3} + F_{5x} = 0, \quad (3)$$

$$2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 3 + F_{5y} = 0. \quad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) найдем  $F_{5x} = 0,37$ ,  $F_{5y} = 1,64$ . Модуль искомой силы  $F_5$  равен

$$F_5 = \sqrt{F_{5x}^2 + F_{5y}^2} = 1,68 \text{ н.}$$

Вычислим направляющие косинусы:

$$\cos(x, \widehat{F_5}) = \frac{F_{5x}}{F_5} = \frac{0,37}{1,68} = 0,22, \quad \cos(y, \widehat{F_5}) = \frac{F_{5y}}{F_5} = \frac{1,64}{1,68} = 0,98,$$

откуда

$$(x, \widehat{F_5}) \approx 77^\circ, \quad (y, \widehat{F_5}) \approx 13^\circ.$$

Определение искомой силы  $F_5$  методом проекций не составило особого труда. При геометрическом методе решения этой задачи пришлось бы построить силовой пятиугольник и затем определить модуль и направление силы  $F_5$ . Преимущества метода проекций бесспорны.

**Задача 1.10.** При монтаже колонны  $MN$  для подъема груза  $C$  весом  $P$  на вершину колонны использованы два крана. Груз поднимается с помощью троса  $BCA$ , прикрепленного концом  $B$  к неподвижному левому крану (кран на рис. а не изображен), а концом  $A$  — к тележке правого крана. При движении тележки по горизонтали направо груз — полый цилиндр, скользит вдоль колонны  $MN$  вверх. Длина троса равна  $L$ . Расстояние от неподвижного левого конца  $B$  троса до колонны  $MN$  равно  $BN = l$ .

Считая, что груз  $C$  находится в покое, определить натяжение троса и давление груза на колонну. Угол, образованный левой ветвью троса с колонной равен  $\alpha$ . Весом троса и трением груза о колонну пренебречь.

Решение. Для определения неизвестных рассмотрим равновесие груза  $C$ . К грузу приложена одна активная сила — его вес  $P$ . На груз наложены связи: трос  $BCA$  и колонна  $MN$ . Реакция  $R$  гладкой колонны перпендикулярна к ее оси (см. рис. б). Изобразим ее по гори-

зонгали палево. Мысленно рассечем обе ветви троса вблизи точки  $C$ . Реакции  $T$  и  $T'$  направлены вдоль ветвей троса, причем  $|T| = |T'| = T$ .

Направим ось  $x$  по горизонтали направо, а ось  $y$  по вертикали вверх. Обозначив угол  $NSA = \varphi$ , запишем уравнения проекций всех сил, приложенных к грузу  $C$ , на оси  $x$  и  $y$ :

$$\sum F_{kx} = T \sin \varphi - T \sin \alpha - R = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = T \cos \varphi + T \cos \alpha - P = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) найдем:

$$T = \frac{P}{\cos \varphi + \cos \alpha}. \quad (3)$$

Используя значение (3) в уравнении (1), получим:

$$R = \frac{P(\sin \varphi - \sin \alpha)}{\cos \varphi + \cos \alpha}. \quad (4)$$

Остается выразить  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$  через  $L$ ,  $l$  и  $\alpha$ . Обозначим:  $BC = a$ ,  $AC = b$ . По условию

$$a - b = L. \quad (5)$$

Из треугольника  $BCN$  имеем:

$$a = \frac{l}{\sin \alpha}, \quad CN = l \operatorname{ctg} \alpha. \quad (6)$$

Воспользовавшись треугольником  $ACN$  и выражениями (5) и (6), запишем:

$$\cos \varphi = \frac{CN}{b} = \frac{l \operatorname{ctg} \alpha}{L - a} = \frac{l \cos \alpha}{L \sin \alpha - l}. \quad (7)$$

Теперь нетрудно вычислить  $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$ . С помощью результата (7), после несложных преобразований, получим:

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{(L^2 + l^2) \sin^2 \alpha - 2Ll \sin \alpha}}{L \sin \alpha - l}. \quad (8)$$

Подставив значения  $\cos \varphi$  из (7) и  $\sin \varphi$  из (8) в (3) и (4), окончательно получим:

$$T = 2P \frac{L \sin \alpha - l}{L \sin 2\alpha},$$

$$R = 2P \frac{\sqrt{(L^2 + l^2) \sin^2 \alpha - 2Ll \sin \alpha} - (L \sin \alpha - l) \sin \alpha}{L \sin 2\alpha}.$$

По мере подъема груза  $C$  угол  $\alpha$  увеличивается, стремясь к  $90^\circ$  (значит,  $\sin 2\alpha \rightarrow 0$ ). При этом модуль реакции троса также растет. Груз  $C$  невозможно поднять на уровень горизонтали  $AB$ , ибо при этом  $\sin 2\alpha = \sin 180^\circ = 0$  и величина  $T$  неограниченно возрастает.

Искомые натяжение троса и давление груза  $C$  на колонну соответственно равны по модулям силам  $T$  и  $R$ .

Решение этой задачи с помощью силового многоугольника значительно сложнее, ибо приходится решать замкнутый силовой четырехугольник, построенный на силах  $P$ ,  $R$ ,  $T$  и  $T'$ .

Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и последующих лет: 21, 26.

4°. Момент силы относительно точки. Равновесие твердого тела с одной неподвижной точкой. Момент силы  $F$  относительно точки  $O$ , который записывается в виде  $m_O(F)$ , для плоской системы сил равен по абсолютной величине произведению модуля силы  $F$  на расстояние  $h$  от точки  $O$  до линии действия силы  $F$ , называемое *плечом*.

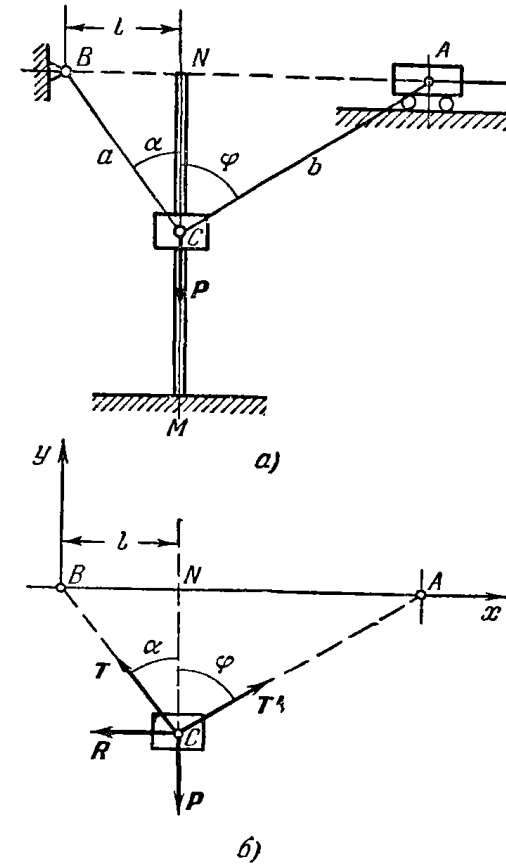
Если сила  $F$  стремится повернуть тело вокруг точки  $O$  против часовой стрелки, то момент силы положителен, если же в направлении часовой стрелки, то отрицателен. (В дальнейшем вместо: «сила стремится повернуть тело вокруг точки  $O$ ...», будем говорить: «сила видна направленной вокруг точки  $O$ »).

Например (рис. 1.23),  $m_O(F_1) = F_1 h_1$ ,  $m_O(F_2) = -F_2 h_2$ .

Размерность момента силы в технической системе единиц —  $\kappaГм$ , а в системе СИ —  $н \cdot м = дж$  (джоуль), причем

$$1 \kappaГм = 9,81 дж.$$

Следует помнить, что плечо  $h$  является отрезком перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы. Иногда ошибочно в качестве плеча изображают отрезок, соединяющий точку, относительно которой вычисляется момент, с точкой приложения силы.



К задаче 1.10.

Момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через эту точку, так как при этом плечо равно нулю. Например:  $m_O(F_3) = 0$  (рис. 1.23).

Теорема Вариньона для системы сходящихся сил (теорема о моменте равнодействующей): момент относительно точки равнодействующей  $R$  системы сходящихся сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , расположенных в одной плоскости, равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно той же точки:

$$m_O(R) = m_O(F_1) + m_O(F_2) + \dots + m_O(F_n) = \sum_{k=1}^n m_O(F_k). \quad (8^*)$$

Здесь

$$R = \sum_{k=1}^n F_k.$$

Удобство применения теоремы Вариньона заключается в том, что, минуя непосредственное определение равнодействующей, можно вычислить ее момент относительно точки, зная моменты всех слагаемых сил относительно той же точки.

Выражение момента силы  $F$  относительно точки  $A$  через проекции силы на оси декартовых координат имеет вид

$$m_A(F) = (x - a)F_y - (y - b)F_x, \quad (9^*)$$

где  $F_x$  и  $F_y$  — проекции силы  $F$  на оси декартовых координат,  $x$  и  $y$  — координаты точки  $B$  приложения силы  $F$ ,  $a$  и  $b$  — координаты точки  $A$  (рис. 1.24).

Этой формулой рекомендуется пользоваться в тех случаях, когда определение величины плеча  $h$  связано с вычислительными трудностями.

В частности, если момент силы  $F$  определяется относительно начала координат  $O$ , т. е.  $a = b = 0$ , то формула принимает вид

$$m_O(F) = xF_y - yF_x, \quad (10^*)$$

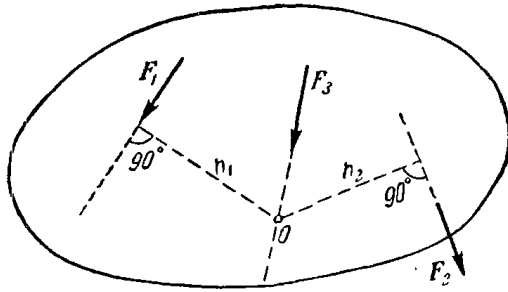


Рис. 1.23.

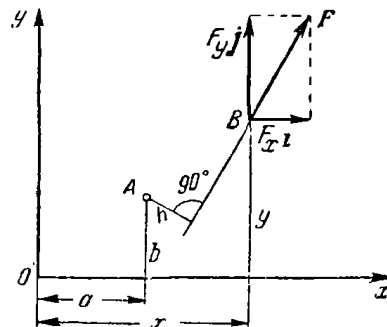


Рис. 1.24.

где  $F_x$  и  $F_y$  — проекции силы  $F$  на оси декартовых координат,  $x$  и  $y$  — координаты точки приложения силы  $F$ .

Перейдем к рассмотрению задач на равновесие твердого тела с одной неподвижной точкой. Если единственной связью, наложенной на твердое тело, находящееся в равновесии, является неподвижная точка (например, шарнир), то ее реакция должна уравниваться с равнодействующей всех активных сил. Следовательно, при равновесии твердого тела линия действия равнодействующей всех активных сил должна проходить через неподвижную точку. В противном случае происходит опрокидывание твердого тела.

Для определения условий, обеспечивающих равновесие твердого тела с одной неподвижной точкой, к которому приложена плоская система сходящихся сил, необходимо направить линию действия равнодействующей активных сил через точку пересечения линий действия активных сил и неподвижную точку.

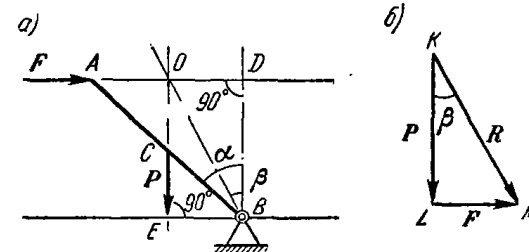
Эти же задачи можно решать с помощью теоремы Вариньона, записанной относительно неподвижной точки. Так как при этом момент равнодействующей активных сил, проходящих через неподвижную точку, равен нулю, то сумма моментов всех активных сил относительно неподвижной точки также равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n m_O(F_k) = 0, \quad (11^*)$$

где  $O$  — неподвижная точка.

**Задача 1.11.** Тонкий однородный стержень  $AB$  весом  $P$  может поворачиваться вокруг шарнира  $B$ , прикрепленного к полу.

Определить величину силы  $F$ , которую нужно приложить по горизонтали вправо в конце стержня  $A$  для того, чтобы стержень оставался в равновесии, образуя угол  $\alpha$  с вертикалью (рис. а).



К задаче 1.11.

Решение. Рассмотрим условия равновесия стержня  $AB$ . К стержню приложены две активные силы:  $P$  и  $F$ , линии действия которых пересекаются в точке  $O$ . Единственной связью, наложенной на стержень, является шарнир  $B$ . Линия действия реакции  $N$  шарнира согласно теореме о трёх непараллельных силах должна проходить через точку  $O$ .

Итак, стержень  $AB$  находится в равновесии под действием трех сходящихся сил  $P$ ,  $F$  и  $N$ . Для того чтобы не произошло опрокидывания стержня  $AB$  вокруг шарнира  $B$ , линия действия равнодействующей

ющей  $R$  активных сил  $P$  и  $F$  должна проходить через точки  $O$  и  $B$ , т. е. должна составлять с вертикалью угол  $OBD$ , который мы обозначим через  $\beta$ . Учтя, что вес  $P$  приложен в середине стержня, получим  $AC = CB$ . При этом  $AO = OD$ . Так как  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AD}{DB} = \frac{2OD}{DB}$ ,  $\operatorname{tg} \beta = \frac{OD}{DB}$ , то

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Построив на рис. 6 равнодействующую  $R$  активных сил  $P$  и  $F$  под углом  $\beta$  к вертикали, найдем из прямоугольного треугольника  $KLM$ :

$$F = \frac{P}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

При выполнении этого условия стержень  $AB$  будет находиться в равновесии. Если  $F > \frac{P}{2} \operatorname{tg} \alpha$ , то стержень опрокинется вокруг шарнира  $B$  в направлении по часовой стрелке, если же  $F < \frac{P}{2} \operatorname{tg} \alpha$ , то против часовой стрелки.

Данную задачу проще всего решить, применив условие равновесия рычага (11\*), которое здесь имеет вид

$$m_B(P) + m_B(F) = 0. \quad (1)$$

Так как  $m_B(P) = P \cdot BE = \frac{1}{2} P \cdot AB \sin \alpha$ ,  $m_B(F) = -F \cdot BD = -F \cdot AB \cos \alpha$ , то, подставив эти значения в формулу (1), получим:

$$\frac{1}{2} P \cdot AB \sin \alpha - F \cdot AB \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$F = \frac{P}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и последующих лет: 62, 63, 64.

## § 2. Произвольная плоская система сил. Случай параллельных сил

1°. Равновесие твердого тела при наличии плоской системы сил. Напомним сначала, что равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону, равна по модулю сумме модулей данных сил и направлена в ту же сторону. Линия

действия равнодействующей делит внутренним образом расстояние между линиями действия данных сил на части, обратно пропорциональные этим силам. Таким образом (рис. 1.25),

$$R = F_1 + F_2; \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$

Равнодействующая двух параллельных сил, не равных по модулю (пусть  $|F_2| > |F_1|$ ) и направленных в разные стороны, равна по модулю разности модулей этих сил и направлена в сторону большей

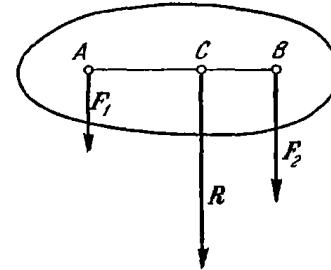


Рис. 1.25.

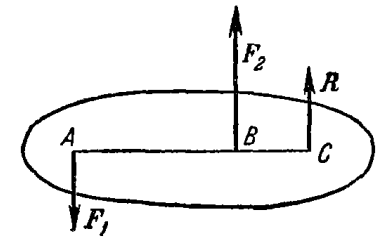


Рис. 1.26.

силы. Линия действия равнодействующей делит внешним образом расстояние между линиями действия данных сил на части, обратно пропорциональные этим силам. Таким образом (рис. 1.26),

$$R = F_2 - F_1; \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$

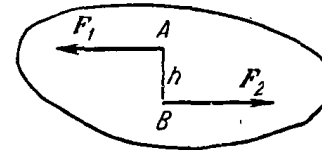


Рис. 1.27.

Система двух параллельных сил, равных по модулю и направленных в разные стороны, называется *парой сил* (рис. 1.27). Расстояние между линиями действия этих сил называется *плечом* пары. Так как две силы, равные по модулю и направленные в разные стороны, не лежат на одной линии действия, то твердое тело, к которому приложена пара сил, не находится в равновесии. Пара сил стремится повернуть твердое тело, к которому она приложена.

Мерой действия пары сил является алгебраическая величина, называемая ее *моментом*. Момент пары сил равен по абсолютной величине произведению модуля одной из сил пары на плечо. Если пара сил видна направленной против часовой стрелки, то момент пары положителен, если по часовой стрелке, то отрицателен. Примеры даны на рис. 1.28.

Теория пар сил на плоскости сводится к четырем теоремам.

Теорема 1. Алгебраическая сумма моментов сил, составляющих пару, относительно произвольной точки плоскости не зависит от выбора этой точки и равна моменту пары.



Теорема 2. Не нарушая состояния твердого тела, пару сил можно переносить в плоскости ее действия.

Теорема 3. Пары сил, моменты которых равны, эквивалентны. (Пары сил называются эквивалентными, если одну из пар можно заменить другой, не нарушая состояния твердого тела.)

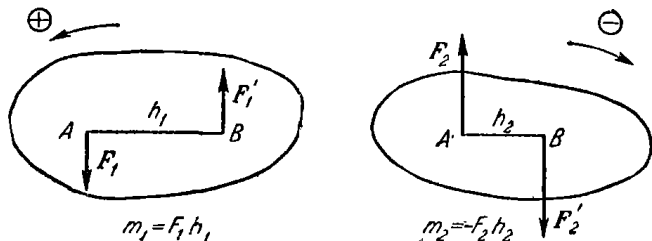


Рис. 1.28.

Это значит, что, не нарушая состояния твердого тела, можно изменять величину плеча либо величину силы, сохраняя при этом неизменным момент пары сил (рис. 1.29).

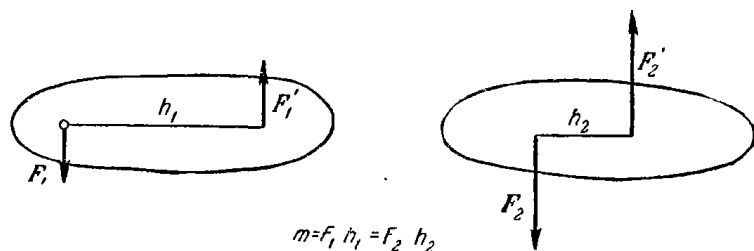


Рис. 1.29.

Теорема 4 (сложение пар сил на плоскости). При сложении нескольких пар сил на плоскости получается равнодействующая пара, момент которой  $m$  равен сумме моментов слагаемых пар:

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n \pm F_k h_k.$$

На рис. 1.30, а показаны три пары сил с моментами  $m_1 = F_1 h_1$ ,  $m_2 = -F_2 h_2$ ,  $m_3 = F_3 h_3$ , а на рис. 1.30, б представлена их равнодействующая пара с моментом  $m = F_1 h_1 - F_2 h_2 + F_3 h_3 = F h$ .

Для равновесия твердого тела под действием пар сил, лежащих в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов данных пар равнялась нулю:

$$\sum_{k=1}^n m_k = 0, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{k=1}^n \pm F_k h_k = 0.$$

Приведение силы к данной точке. При приведении силы к данной точке добавляется присоединенная пара сил, момент которой равен моменту данной силы относительно центра приведения.

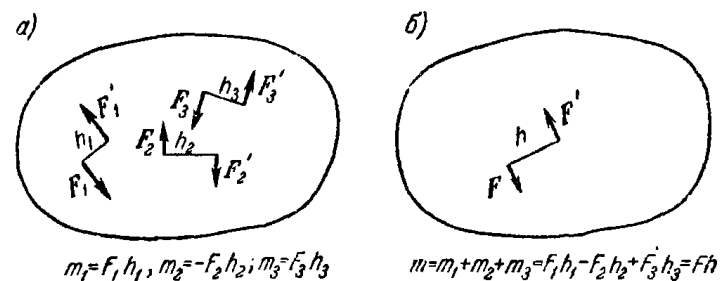


Рис. 1.30.

Это значит, что, не нарушая состояния твердого тела, можно силу  $F$  приложить в точке  $B$  (рис. 1.31), добавив присоединенную пару сил, момент которой равен моменту заданной силы  $F$  относительно центра приведения  $B$ .

Приведением силы к данной точке широко пользуются при преобразовании произвольной плоской системы сил к простейшему виду.

Главным вектором  $V$  называется векторная сумма сил, приложенных к твердому телу, т. е.

$$V = \sum_{k=1}^n F_k.$$

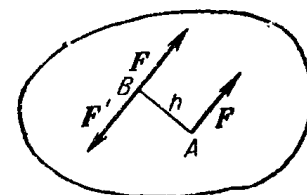


Рис. 1.31.

Проекции главного вектора  $V_x$  и  $V_y$  на оси декартовых координат равны суммам проекций данных сил на соответствующие оси:

$$V_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad V_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}.$$

Модуль главного вектора

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$$

Направляющие косинусы главного вектора определяются по формулам:

$$\cos(x, \widehat{V}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(y, \widehat{V}) = \frac{V_y}{V}.$$

Главным моментом  $m_O$  относительно центра  $O$  называется сумма моментов сил, приложенных к твердому телу, относительно этого

центра, т. е.

$$m_O = \sum_{k=1}^n m_O(F_k).$$

В соответствии с определением главный вектор  $V$  является статическим инвариантом, т. е. величина и направление главного вектора не зависят от выбора центра приведения системы. Главный момент системы при перемене центра, вообще говоря, меняется. Главный момент  $m_A$  плоской системы сил относительно нового центра приведения  $A$  равен сумме главного момента этой системы сил относительно старого центра  $O$  и момента относительно нового центра  $A$  главного вектора  $V$ , приложенного в старом центре  $O$ :

$$m_A = m_O + m_A(V_O).$$

Приведение к одному центру сил, произвольно расположенных на плоскости. В результате приведения сил, произвольно расположенных на плоскости, к одному центру  $O$  система сил преобразуется к приложенной в этом центре силе, равной главному вектору  $V$ , и паре сил, момент которой равен главному моменту  $m_O$ .

Не следует отождествлять силу  $V$  с равнодействующей  $R$ , так как равнодействующая — это одна сила, которая эквивалентна данной системе сил, а сила  $V$  эквивалентна данной системе сил только в совокупности с парой сил, момент которой равен главному моменту  $m_O$ .

Частные случаи приведения сил, произвольно расположенных на плоскости. а) Главный вектор равен нулю, но главный момент не равен нулю, т. е.  $V=0$ ,  $m_O \neq 0$ . Система сил приводится к паре сил, момент которой равен главному моменту  $m_O$  (в этом случае главный момент системы сил не зависит от выбора центра приведения).

б) Главный вектор не равен нулю, но главный момент равен нулю, т. е.  $V \neq 0$ ,  $m_O = 0$ . Система сил приводится к равнодействующей  $R=V$ , приложенной в центре приведения системы.

в) Главный вектор и главный момент системы не равны нулю, т. е.  $V \neq 0$ ,  $m_O \neq 0$ . Система сил приводится к равнодействующей  $R=V$ , линия действия которой отстоит от линии действия силы  $V$  на расстоянии  $h = m_O/V$ . Положение линии действия равнодействующей  $R$  должно быть таким, чтобы знак момента равнодействующей  $R$  относительно центра приведения  $O$  совпадал со знаком главного момента системы сил  $m_O$  относительно центра  $O$ .

Сила  $V$  и равнодействующая  $R$  равны по модулю и параллельны (рис. 1.32).

Теорема Вариньона для произвольной плоской системы сил. Если система сил приводится к равнодействующей,

то момент равнодействующей относительно произвольной точки равен сумме моментов данных сил относительно той же точки (теорема Вариньона):

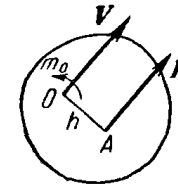


Рис. 1.32.

$$m_O(R) = \sum_{k=1}^n m_O(F_k).$$

г) Главный вектор  $V$  и главный момент  $m_O$  системы равны нулю  $V=0$ ,  $m_O=0$ . Твердое тело, к которому приложена данная система сил, находится в равновесии.

Уравнения равновесия твердого тела под действием произвольной плоской системы сил. Для равновесия твердого тела под действием произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на произвольно выбранные оси декартовых координат  $x$  и  $y$  и сумма моментов этих сил относительно произвольно выбранной точки  $O$  равнялись нулю:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_O(F_k) = 0. \quad (1^*)$$

В случае произвольной плоской системы сил задача является статически определенной, если число алгебраических неизвестных не более трех.

Можно ограничиться составлением одного уравнения проекций, например на ось  $x$ , но при этом составить два уравнения моментов относительно двух произвольных точек:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_A(F_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(F_k) = 0. \quad (2^*)$$

При этом следует иметь в виду, что ось, относительно которой составляется уравнение проекций, не должна быть расположена перпендикулярно к прямой, проходящей через две точки, относительно которых составляются уравнения моментов. Если это условие не будет выполнено, то уравнение проекций окажется следствием уравнений моментов и решение подобной системы уравнений равновесия даст возможность определить только две неизвестные величины вместо трех.

Можно, минуя составление уравнений проекций сил, составить три уравнения моментов относительно трех произвольно выбранных точек:

$$\sum_{k=1}^n m_A(F_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(F_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_C(F_k) = 0. \quad (3^*)$$

При этом следует иметь в виду, что эти три точки не должны лежать на одной прямой, так как иначе одно из уравнений равновесия окажется следствием двух других.

Уравнения равновесия твердого тела под действием плоской системы параллельных сил имеют вид

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_O(F_k) = 0, \quad (4^*)$$

причем ось  $x$  не перпендикулярна данным силам. Задача является статически определенной, если число алгебраических неизвестных не более двух.

Можно обойтись без уравнений проекций и составить два уравнения моментов относительно двух произвольно выбранных точек:

$$\sum_{k=1}^n m_A(F_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(F_k) = 0. \quad (5^*)$$

Следует иметь в виду, что эти две точки не должны лежать на прямой, параллельной данным силам, так как в противном случае одно из уравнений равновесия окажется следствием другого.

При решении задач на равновесие твердого тела, к которому приложена плоская система параллельных сил, надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги на стр. 15. Затем:

5) убедиться в том, что данная задача является статически определенной, т. е. число алгебраических неизвестных величин не более двух;

6) выбрать систему осей декартовых координат;

7) составить уравнения равновесия системы параллельных сил;

8) решив уравнения равновесия, определить неизвестные величины.

Если величина какой-либо неизвестной силы окажется отрицательной, то это означает, что направление этой силы противоположно тому, которое было изображено на рисунке.

Оси декартовых координат целесообразно направлять так, чтобы одна из них оказалась параллельной всем силам, приложенным к твердому телу. Уравнение моментов рекомендуется составлять относительно точки, лежащей на линии действия неизвестной силы. Это дает возможность определить одну из неизвестных величин непосредственно из уравнения моментов.

При решении задачи с помощью двух уравнений моментов шестой пункт решения задачи отпадает. При этом не следует забывать, что точки, относительно которых составляются уравнения моментов, не должны лежать на прямой, параллельной силам.

**Задача 1.12.** В кузове грузовой автомашины весом  $P$  лежит груз  $D$  весом  $Q = P/2$ .

Пренебрегая силами трения, определить давления передних и задних колес автомашины на шоссе. Размеры указаны на рис. а,  $C$  — центр тяжести автомашины.

**Решение.** Рассмотрим равновесие автомашины. К ней приложены активные силы:  $P$  — вес автомашины,  $Q$  — вес груза. Применяв закон освобожденности от связей, мысленно отбросим связь — шоссе. Реакции шоссе  $R_A$  и  $R_B$ , приложенные к колесам, при отсутствии трения направлены перпендикулярно к шоссе, т. е. вертикально вверх (рис. б). Конечно,  $R_A$  и  $R_B$  являются суммарными реакциями соответственно

двух задних и двух передних колес. Итак, автомашина находится в равновесии под действием плоской системы параллельных сил:  $P$ ,  $Q$ ,  $R_A$  и  $R_B$ . Задача является статически определенной, ибо число алгебраических неизвестных равно двум.

Направим ось  $x$  параллельно силам вертикально вверх, а уравнение моментов составим относительно точки  $A$ . Тогда, применив уравнения (4\*), запишем:

$$\sum F_{kx} = R_A + R_B - P - Q = 0, \quad (1)$$

$$\sum m_A(F_k) = R_B \cdot 3a - P \cdot 2a + Q \cdot a = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2), приняв во внимание, что  $Q = P/2$ , найдем  $R_B = P/2$ . Под-

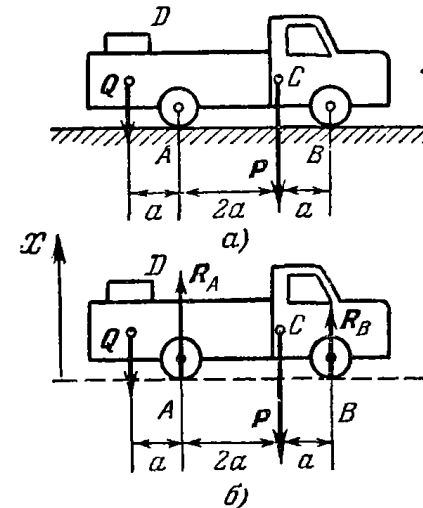
ставив это значение  $R_B$  в уравнение (1), получим  $R_A = P$ . Итак,

$$R_B = \frac{P}{2}, \quad R_A = P. \quad (3)$$

Искомые давления колес автомашины на шоссе равны по модулю соответствующим реакциям и направлены противоположно, т. е. вертикально вниз.

Эту задачу можно было решить с помощью уравнений равновесия, в каждое из которых входит лишь одна неизвестная величина. Для этого вместо уравнения (1), содержащего две неизвестные величины  $R_A$  и  $R_B$ , следует составить уравнение моментов относительно точки  $B$ . Это уравнение удобно тем, что в него не входит  $R_B$  (момент силы  $R_B$  относительно точки  $B$  равен нулю):

$$\sum m_B(F_k) = -R_A \cdot 3a + P \cdot a + Q \cdot 4a = 0. \quad (4)$$



К задаче 1.12.

Из уравнения (4) при  $Q = P/2$  непосредственно получим  $R_A = P$  (ср. формулу (3)).

**Задача 1.13.** Консольная балка  $AD$  весом  $P = 4 \text{ Т}$  лежит на двух опорах  $B$  и  $D$ , причем опора  $B$  расположена на катках. На конце  $A$  к балке приложена вертикальная сосредоточенная сила  $F = 8 \text{ Т}$ . На участке  $CD$  на балке находится равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q = 0,5 \text{ Т/м}$  (интенсивностью называется величина силы, действующей на единицу длины). На участке  $AB$  к балке приложена пара сил с моментом  $m = 6 \text{ Тм}$ .

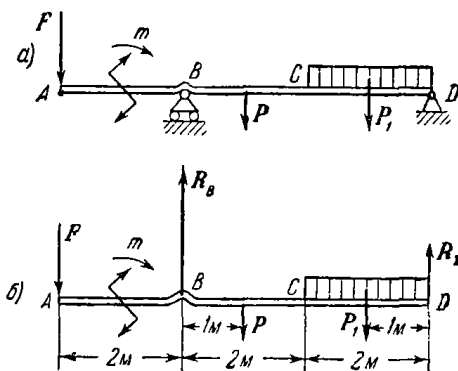
Определить опорные реакции в  $B$  и  $D$ . Размеры указаны на рисунке.

**Решение.** Рассмотрим равновесие консольной балки  $AD$  (участок балки  $AB$ , расположенный вне опор, называется консолью). На балку действуют активные силы: вес балки  $P$ , приложенный в ее середине, вертикальная сила  $F$ , равнодействующая  $P_1$  распределенной нагрузки ( $P_1 = q \cdot CD = 1 \text{ Т}$ ), приложенная в середине участка  $CD$  и направленная по вертикали вниз, и, наконец, пара сил с моментом  $m$ .

Применив закон освобождаемости от связей, направим опорную реакцию  $R_B$  по вертикали вверх. При равновесии балки главный вектор и главный момент равны нулю. Главный вектор равен сумме вертикальных сил  $F$ ,  $P$ ,  $P_1$ ,  $R_B$  и опорной реакции  $R_D$  (главный вектор пары сил равен нулю). Для того чтобы главный вектор был равен нулю, опорная реакция  $R_D$  должна быть направлена вертикально.

Итак, балка находится в равновесии под действием системы параллельных сил (пару сил можно, не нарушая равновесия балки, повернуть так, чтобы силы, входящие в ее состав, были направлены вертикально), в число которых входят две неизвестные по модулю силы  $R_B$  и  $R_D$ . Следовательно, задача является статически определенной.

При решении этой задачи целесообразнее, минуя составление уравнения проекций на ось, параллельную приложенным силам, составить два уравнения моментов относительно точек приложения  $B$  и  $D$  неизвестных сил  $R_B$  и  $R_D$ . При этом учитываем, что сумма моментов сил, входящих в состав пары сил, вычисленная относительно любой точки, равна моменту этой пары сил. Сумму моментов сил распределенной нагрузки  $CD$  заменяем на основании теоремы Вариньона



К задаче 1.13.

моментом равнодействующей силы  $P_1$ . Получим:

$$\sum m_B(F_k) = F \cdot 2 - m - P \cdot 1 - P_1 \cdot 3 + R_D \cdot 4 = 0, \quad (1)$$

$$\sum m_D(F_k) = F \cdot 6 - m - R_B \cdot 4 + P \cdot 3 + P_1 \cdot 1 = 0. \quad (2)$$

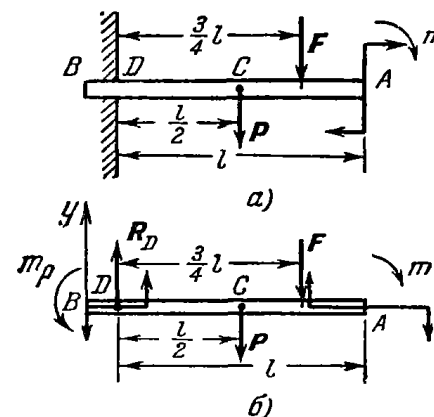
Удобство составленных уравнений заключается в том, что в каждое из них входит только одна неизвестная величина.

Из уравнений (1) и (2) находим:

$$R_D = -0,75 \text{ Т}, R_B = 13,75 \text{ Т}.$$

Отрицательное значение  $R_D$  указывает, что направление силы  $R_D$  противоположно тому, которое изображено на рисунке, т. е. опорная реакция  $R_D$  направлена по вертикали вниз.

**Задача 1.14.** Однородная горизонтальная балка  $AB$  весом  $P = 800 \text{ н}$  в сечении  $D$  закреплена в стене (рис. а). К балке приложены: вертикальная сосредоточенная сила  $F = 1200 \text{ н}$  и пара сил, стремящаяся повернуть балку по часовой стрелке. Момент пары равен  $m = 600 \text{ л дж}$ , где  $l$  — длина свободного конца балки, равная  $2 \text{ м}$ .



К задаче 1.14.

Определить реакцию и момент реактивной пары в защемленном сечении  $D$ . Размеры указаны на рисунке. Длиной защемленной части балки пренебречь.

**Решение.** Рассмотрим равновесие балки. К ней приложены активные силы:  $P$ ,  $F$  и пара сил с моментом  $m$ . Глухая заделка

балки в стену препятствует перемещению балки по вертикали вниз, а также ее повороту в вертикальной плоскости под действием активных сил по часовой стрелке. Поэтому, применив закон освобождаемости от связей и мысленно отбросив стену, мы должны компенсировать ее действие на балку реакцией  $R_D$  и реактивной парой сил, стремящейся повернуть балку против часовой стрелки (рис. б). Главный вектор является суммой  $P$ ,  $F$  и реакции  $R_D$  (напомним, что главный вектор каждой из пар равен нулю). Так как при равновесии балки главный вектор равен нулю, а силы  $P$  и  $F$  вертикальны, то реакция  $R_D$  также направлена вертикально (рис. б).

Повернув активную и реактивную пары так, чтобы входящие в них силы были направлены вертикально, мы получим плоскую систему параллельных сил. Данная задача является статически определенной, ибо число неизвестных равно двум ( $R_D$  и  $m_D$ ). Переходим

к составлению уравнений равновесия. Составим уравнение проекций на вертикальную ось  $y$  и уравнение моментов относительно точки  $D$ :

$$\sum F_{ky} = R_D - P - F = 0,$$

$$\sum m_D(F_k) = m_p - m - P \cdot \frac{l}{2} - F \cdot \frac{3}{4} l = 0.$$

Из первого уравнения находим  $R_D = P + F = 2000 \text{ н}$ , а из второго получим  $m_p = 3800 \text{ дж}$ . Положительные значения  $R_D$  и  $m_p$  указывают, что направления силы  $R_D$  и реактивной пары с моментом  $m_p$  были выбраны правильно.

Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и последующих лет: 78, 87, 89, 90.

Переходим к решению задач на равновесие твердого тела, к которому приложена произвольная плоская система сил. При решении этих задач надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги на стр. 15. Затем:

- 5) убедиться в том, что данная задача является статически определенной, т. е. что число неизвестных величин не более трех;
- 6) выбрать направления осей декартовых координат и точку (или точки), относительно которой предполагается составить уравнение моментов;
- 7) составить уравнения равновесия твердого тела;
- 8) решить систему полученных уравнений равновесия и определить неизвестные величины.

Уравнения равновесия можно составить в любом возможном виде (см. выше, стр. 44, формулы (1\*), (2\*), (3\*)).

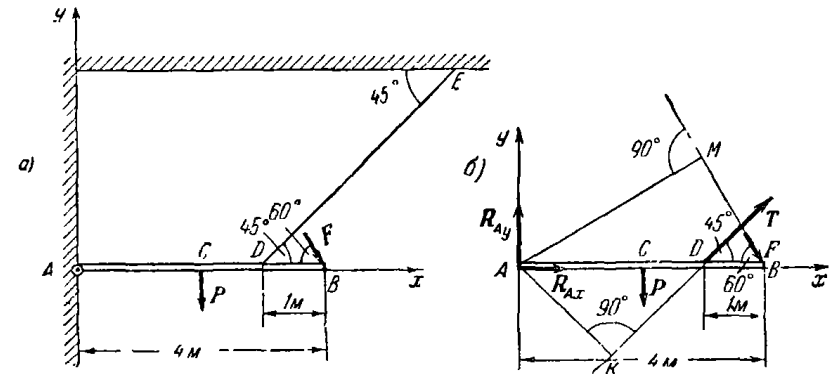
Следует стремиться к получению таких уравнений равновесия, в каждое из которых входила бы только одна неизвестная величина. В этом случае можно каждую из неизвестных величин непосредственно определить из соответствующего уравнения. Для этого оси координат целесообразно направить так, чтобы некоторые неизвестные силы оказались перпендикулярными к этим осям. Тогда величины этих неизвестных сил в соответствующее уравнение проекций не войдут. Центр моментов, т. е. точку, относительно которой должно быть составлено уравнение моментов, следует выбрать в точке пересечения линий действия двух неизвестных сил. Это дает возможность непосредственно определить из соответствующего уравнения моментов величину третьей неизвестной силы. Если, однако, этот центр моментов расположен так, что вычисление плеч при определении моментов сил представляет значительные трудности, то лучше составить относительно другого центра такое уравнение моментов, в которое войдут величины

двух неизвестных сил, и затем совместно решить полученную систему уравнений.

Если направление какой-либо реакции связи неизвестно, то следует заменить ее двумя составляющими, направив их параллельно осям координат в сторону положительного отсчета. Если в результате решения знак величины какой-либо силы окажется отрицательным, то это означает, что направление силы противоположно тому, которое было предварительно указано на рисунке.

В тех случаях, когда по условию задачи требуется определить давления твердого тела на опоры, нужно найти равные по модулю этим давлениям соответствующие реакции связей, а затем направить искомые давления противоположно этим реакциям.

**Задача 1.15.** Горизонтальная однородная балка  $AB$  длиной  $l = 4 \text{ м}$  и весом  $P = 1 \text{ Т}$ , прикрепленная шарниром  $A$  к стене, удерживается



К задаче 1.15.

в равновесии тросом  $DE$ , расположенным под углом  $45^\circ$  к горизонту;  $DB = 1 \text{ м}$ . К свободному концу балки  $B$  приложена сосредоточенная сила  $F = 2 \text{ Т}$ , образующая угол  $60^\circ$  с горизонтом.

Определить давление балки на шарнир  $A$  и натяжение троса  $DE$ .

**Решение.** Рассмотрим равновесие балки  $AB$ , на которую действуют две активные силы: вес балки  $P$ , приложенный в ее середине ( $AC = CB = 2 \text{ м}$ ), и сосредоточенная сила  $F$ , приложенная в конце балки  $B$ .

На балку наложены две связи, шарнир  $A$  и трос  $DE$ . Мысленно оборвав трос  $DE$ , заменяем действие троса на балку реакцией троса  $T$ , направленной от точки  $D$  в сторону обрыва. Направление реакции шарнира  $A$  заранее указать нельзя. Поэтому изобразим две взаимно перпендикулярные составляющие этой реакции. Направим ось  $x$  вдоль оси балки по горизонтали направо, а ось  $y$  по вертикали вверх. Составляющие реакции  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$  направим вдоль осей координат в сторону их возрастания.

Теперь балку можно рассматривать как свободное твердое тело, находящееся в равновесии под действием пяти сил, причем лишь величины трех сил  $T$ ,  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$  неизвестны. Следовательно, задача является статически определенной.

Составим уравнения равновесия балки в проекциях на оси  $x$  и  $y$  и уравнение моментов относительно точки  $A$ . Выбор точки  $A$  в качестве центра моментов удобен, так как моменты двух неизвестных по величине сил  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$  относительно точки  $A$  равны нулю и в уравнение моментов войдет лишь одна неизвестная  $T$ . Уравнения равновесия имеют вид

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} + T \cos 45^\circ + F \cos 60^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} - P + T \cos 45^\circ - F \cos 30^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum m_A(F_k) = T \cdot AK - P \cdot AC - F \cdot AM = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (3) находим

$$T = P \frac{AC}{AK} + F \frac{AM}{AK}.$$

Так как

$$AC = 2 \text{ м}, \quad AK = AD \sin 45^\circ = \frac{3}{2} \sqrt{2} \text{ м},$$

$$AM = AB \sin 60^\circ = 2 \sqrt{3} \text{ м},$$

то

$$T = 1 \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2 \frac{2}{3} \sqrt{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3} (1 + 2\sqrt{3}) = 4,2 T.$$

Подставив это значение  $T$  в уравнения (1) и (2), получим:

$$R_{Ax} = -3,96 T, \quad R_{Ay} = -0,23 T.$$

Знак минус, стоящий в выражении  $R_{Ax}$ , указывает, что направление из составляющей реакции шарнира  $R_{Ax}$  противоположно тому, которое было указано на рис. б, т. е. сила  $R_{Ax}$  направлена по горизонтали влево; аналогично сила  $R_{Ay}$  направлена по вертикали вниз.

Искомые давления балки на связи направлены противоположно соответствующим реакциям связей и равны им по модулю, т. е. горизонтальная составляющая силы, действующей на шарнир, равна  $3,96 T$  и направлена по горизонтали направо, вертикальная составляющая силы, действующей на шарнир, равна  $0,23 T$  и направлена вверх, натяжение троса равно по модулю  $4,2 T$ .

**Задача 1.16.** На рис. а изображена симметричная стропильная ферма длиной  $l = 10 \text{ м}$ , весом  $P = 12 T$ , стоящая на двух опорах, причем левая опора  $A$  расположена на катках, которые могут перемещаться вдоль горизонтальной плоскости. Перпендикулярно к  $AE$  в точке  $D$ , на расстоянии  $AD = 2 \text{ м}$ , приложена сосредоточенная сила  $F = 4 T$ ,  $\angle EAB = 30^\circ$ .

Определить опорные реакции в точках  $A$  и  $B$ .

**Решение.** Рассмотрим равновесие фермы, к которой приложены две активные силы: вес фермы  $P$  и сосредоточенная сила  $F$ .

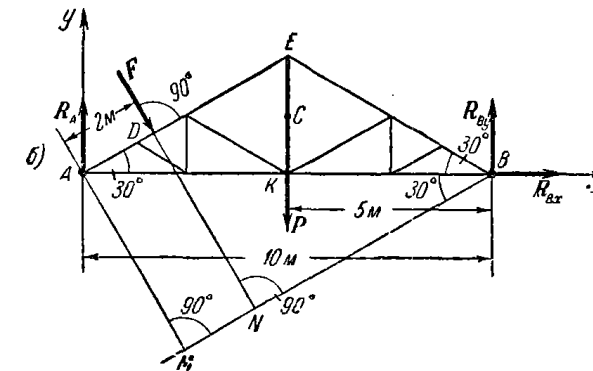
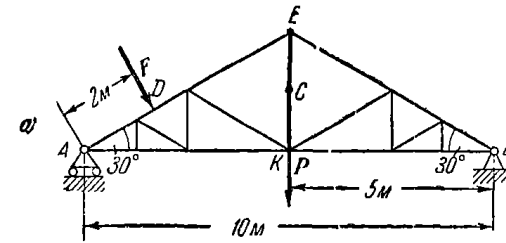
Так как катки не препятствуют перемещению фермы в горизонтальном направлении, то опорная реакция  $R_A$  направлена перпендикулярно к горизонтальной плоскости. Указать заранее направления опорной реакции в точке  $B$  невозможно. Поэтому в опоре  $B$  следует

изобразить две взаимно перпендикулярные составляющие реакции (рис. б).

Направим ось  $x$  по горизонтали направо, ось  $y$  по вертикали вверх, а составляющие реакции  $R_{Bx}$  и  $R_{By}$  параллельно соответствующим координатным осям.

Итак, к ферме приложены пять сил, в том числе три неизвестные по модулю силы:  $R_A$ ,  $R_{Bx}$  и  $R_{By}$ . Следовательно, задача является статически определенной.

Используем уравнения равновесия фермы в проекциях на оси  $x$  и  $y$  и уравнение моментов относительно точки  $A$ . Составление уравнений проекций на оси  $x$  и  $y$



К задаче 1.16.

целесообразно потому, что силы  $R_A$  и  $R_{By}$  перпендикулярны к оси  $x$ , а сила  $R_{Bx}$  перпендикулярна к оси  $y$ . Следовательно, эти три неизвестные по модулю силы в соответствующие уравнения проекций не войдут. Выбор точки  $A$  в качестве центра моментов удобен потому, что линии действия сил  $R_A$  и  $R_{Bx}$  пересекаются в этой точке. Следовательно, моменты этих сил относительно точки  $A$  равны нулю и в уравнение моментов войдет лишь неизвестная величина силы  $R_{By}$ . Уравнения равновесия имеют вид

$$\sum F_{kx} = F \cos 60^\circ + R_{Bx} = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = R_A + R_{By} - F \cos 30^\circ - P = 0, \quad (2)$$

$$\sum m_A(F_k) = -F \cdot AD - P \cdot AK + R_{By} \cdot AB = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (3) находим:

$$R_{By} = F \frac{AD}{AB} + P \frac{AK}{AB}.$$

Учитывая, что  $AD = 2$  м,  $AK = 5$  м,  $AB = 10$  м,  $F = 4$  Т,  $P = 12$  Т, получаем, что  $R_{By} = 6,8$  Т. Подставив это значение  $R_{By}$  в уравнение (2), имеем  $R_A = 8,66$  Т. Из уравнения (1) находим, что  $R_{Bx} = -F \cos 60^\circ = -2$  Т.

Знак минус, полученный в выражении для  $R_{Bx}$ , указывает, что направление составляющей опорной реакции  $R_{Bx}$  противоположно тому, которое было указано на рисунке, т. е. сила  $R_{Bx}$  направлена по горизонтали налево.

При решении системы уравнений (1), (2) и (3) модули неизвестных сил  $R_{Bx}$  и  $R_{By}$  были непосредственно определены из уравнений (1) и (3). Лишь величину силы  $R_A$  пришлось вычислить из уравнения (2), подставив в него значение  $R_{By}$ . Однако можно составить такую систему уравнений равновесия, чтобы из каждого уравнения была, независимо от других, определена каждая из неизвестных. Действительно, сохранив уравнения (1) и (3), составим вместо уравнения (2) такое уравнение моментов, чтобы в него вошла лишь одна неизвестная  $R_A$ . Для этого необходимо, чтобы моменты двух других неизвестных сил, т. е.  $R_{Bx}$  и  $R_{By}$ , оказались равными нулю. Этому условию легко удовлетворить, выбрав за центр моментов точку пересечения линий действия этих сил, т. е. точку  $B$ . Итак, вместо уравнения (2) составим уравнение моментов сил относительно точки  $B$ :

$$\sum m_B(F_k) = -R_A \cdot AB + P \cdot KB + F \cdot NB = 0. \quad (4)$$

Из уравнения (4) непосредственно находим:

$$R_A = P \frac{KB}{AB} + F \frac{NB}{AB}.$$

Учитывая, что  $KB = 5$  м,  $AB = 10$  м,  $NB = MB - MN = AB \cos 30^\circ - AD = 5\sqrt{3} - 2 = 6,65$  м,  $P = 12$  Т,  $F = 4$  Т, получим  $R_A = 8,66$  Т.

**Задача 1.17.** Ознакомившись с условием и решением задачи 1.6, определить силы  $R_A$  и  $F$  с учетом веса суппорта, приложенного в его центре тяжести  $S$  и равного  $P = 60$  кгГ.

**Решение.** В задаче 1.6 мы рассмотрели равновесие суппорта под действием трех сил:  $N$ ,  $F$  и  $R_A$ , используя теорему о трех непараллельных силах. Теперь к этим силам добавляется вес суппорта  $P$ . Это лишает нас возможности применить теорему о трех непараллельных силах, с помощью которой мы смогли определить положение линии действия реакции  $R_A$  цилиндрического шарнира  $A$ . Поэтому заменим силу  $R_A$  двумя взаимно перпендикулярными составляющими. Направив ось  $x$  по горизонтали направо, а ось  $y$  по вертикали вверх, изобразим на рис. б составляющие  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$ .

Итак, суппорт находится в равновесии под действием плоской системы пяти сил:  $N$ ,  $P$ ,  $F$ ,  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$ . Задача является статически определенной, ибо число алгебраических неизвестных равно трем:  $F$ ,  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$ .

Составим уравнения проекций на оси  $x$  и  $y$  и уравнение моментов относительно точки  $B$ . Выбор точки  $B$  целесообразен, ибо линии действия двух неизвестных сил  $R_{Ax}$  и  $F$  пересекаются в точке  $B$ . Значит, моменты этих сил относительно точки  $B$  равны нулю. В уравнение моментов войдет лишь одна неизвестная величина  $R_{Ay}$ , которую непосредственно можно будет определить. Уравнения равновесия имеют вид

$$\sum F_{kx} = -N \cos 60^\circ + R_{Ax} = 0, \quad (1)$$

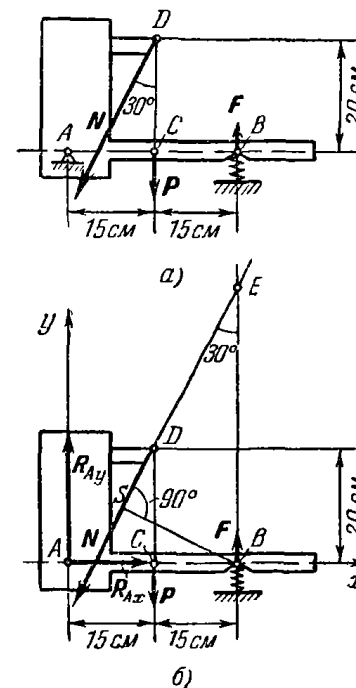
$$\sum F_{ky} = R_{Ay} - P - N \cos 30^\circ + F = 0, \quad (2)$$

$$\sum m_B(F_k) = P \cdot BC - R_{Ay} \cdot AB + N \cdot BS = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (3) получим:

$$R_{Ay} = \frac{P \cdot BC + N \cdot BS}{AB}. \quad (4)$$

По условию:  $P = 60$  кгГ,  $N = 300$  кгГ,  $BC = 15$  см,  $AB = 30$  см. Из треугольника  $BSE$  имеем  $BS = BE \cdot \sin 30^\circ = 46 \cdot \frac{1}{2} = 23$  см (здесь использована



К задаче 1.17.

формула (1) задачи 1.6). Подставив эти значения в (4), находим:

$$R_{Ay} = 260 \text{ кгГ}. \quad (5)$$

Затем из уравнений (1) и (2) имеем  $R_{Ax} = N \cos 60^\circ = 300 \cdot \frac{1}{2} = 150$  кгГ,  $F = P + N \cos 30^\circ - R_{Ay} = 60 + 150\sqrt{3} - 260 = 60$  кгГ. Итак,

$$R_{Ax} = 150 \text{ кгГ}, \quad F = 60 \text{ кгГ}. \quad (6)$$

Используя результаты (5) и (6), вычислим модуль реакции  $R_A$  цилиндрического шарнира  $A$  по формуле

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}.$$

Получим:

$$R_A = 300 \text{ кгГ}. \quad (7)$$

Как и следовало ожидать, учет силы тяжести  $P$  суппорта сказался на увеличении реакции  $R_A$  и силы упругости  $F$ . Напомним, что при решении задачи 1.6 без учета веса суппорта эти силы были по модулю равны:  $R_A = 275 \text{ кГ}$ ,  $F = 30 \text{ кГ}$  (см. формулу (3) задачи 1.6).

Как и в предыдущей задаче, вместо уравнения (2) можно составить уравнение моментов относительно точки  $A$ . Это дало бы нам возможность сразу определить силу  $F$ .

Конечно, задачу 1.6 можно также решить с помощью системы уравнений (1), (2), (3). Действительно, приняв в этих уравнениях  $P = 0$ , мы получим:  $R_{Ax} = 150 \text{ кГ}$ ,  $R_{Ay} = 230 \text{ кГ}$ ,  $F = 30 \text{ кГ}$  и, следовательно,  $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 275 \text{ кГ}$ .

Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и последующих лет: 122, 123, 129, 133, 134, 135, 136, 140.

2°. Опрокидывание твердых тел. При исследовании покоя твердого тела (конструкций) встречаются задачи, в которых следует определить предельные значения сил или размеров, обеспечивающих сохранение этого состояния. В этих задачах обычно при величине силы, превышающей наибольшее допустимое значение, обеспечивающее покой твердого тела, происходит опрокидывание тела вокруг одной из точек опоры.

Такие задачи решаются в предположении, что твердое тело начинает отрываться от одной из опор. Поэтому реакции этой опоры не следует учитывать. Тогда при равновесии твердого тела реакция оставшейся опоры должна уравновешиваться с равнодействующей всех активных сил. Это значит, что линия действия равнодействующей всех активных сил проходит через оставшуюся опору и, следовательно, момент равнодействующей относительно точки опоры равен нулю. Таким образом, в соответствии с теоремой Вариньона сумма моментов всех активных сил относительно точки опоры  $O$  равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n m_O(F_k) = 0.$$

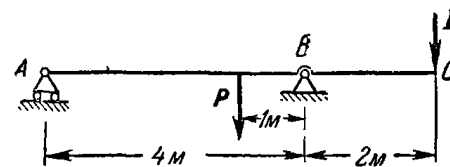
Из этого уравнения определяются предельные значения сил или размеров твердого тела, при которых еще не наступает опрокидывание.

Решение задач на опрокидывание твердых тел надо проводить в следующем порядке:

- 1) изобразить активные силы;
- 2) определить опору, относительно которой может произойти опрокидывание твердого тела;
- 3) составить уравнение моментов активных сил относительно этой точки опоры;

4) решив уравнение, определить искомую величину (предельную силу или предельный размер).

**Задача 1.18.** Горизонтальная консольная балка  $AC$  весом  $P$  лежит на опорах  $A$  и  $B$ , причем опора  $A$  расположена на катках, не препятствующих перемещению вверх. К консольному концу  $C$  балки приложена сосредоточенная вертикальная сила  $F$ .



К задаче 1.18.

Определить наибольшее значение силы  $F$ , при котором балка остается в покое. Размеры указаны на рисунке.

Решение. На балку действуют две активные силы: вес

балки  $P$ , приложенный в середине балки, т. е. на расстоянии 1 м от опоры  $B$ ,  $F$  — сосредоточенная сила, приложенная в конце консоли, т. е. в точке  $C$ .

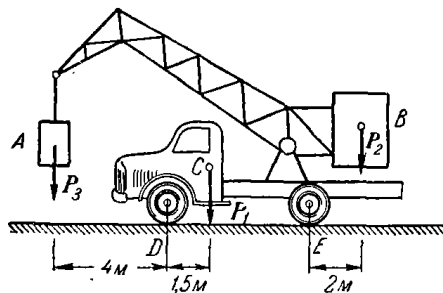
Нетрудно видеть, что при большом значении силы  $F$  произойдет опрокидывание балки вокруг опоры  $B$  в направлении по часовой стрелке.

Для определения наибольшего значения силы  $F$  надо сумму моментов активных сил относительно точки  $B$  приравнять нулю:

$$\sum m_B(F_k) = P \cdot 1 - F \cdot 2 = 0,$$

откуда  $F = \frac{P}{2}$ . Если сила  $F > \frac{P}{2}$ , то происходит опрокидывание балки вокруг опоры  $B$  в направлении по часовой стрелке.

**Задача 1.19.** Подъемный кран установлен на грузовой автомашине. Вес противовеса  $B$  равен  $P_2 = 2 \text{ Т}$ . Вес автомашины с краном без противовеса, равный  $P_1 = 5 \text{ Т}$ , приложен в точке  $C$ .



К задаче 1.19.

Определить наименьшее расстояние  $DE$  между осями колес автомашины и наибольший вес  $P_3$  поднимаемого груза  $A$ , при наличии которых автомашина не опрокинется как с грузом  $A$ , так и без него. Размеры указаны на рисунке.

Решение. К грузовой автомашине с установленным на ней

подъемным краном приложены активные силы:  $P_1$  — вес автомашины с краном без противовеса  $B$ ,  $P_2$  — вес противовеса  $B$ . При наличии груза  $A$  приложен также его вес  $P_3$ .

При подвешенном грузе  $A$  может произойти опрокидывание автомашины в направлении против часовой стрелки вокруг точки касания  $D$



переднего колеса с землей. При отсутствии груза  $A$  может совершиться опрокидывание автомашины под действием противовеса  $B$  в направлении по часовой стрелке вокруг точки касания  $E$  заднего колеса с землей. Иные варианты опрокидывания не рассматриваем как практически неинтересные.

Для определения наибольшей величины веса  $P_3$  поднимаемого груза  $A$  и наименьшего расстояния  $DE$  между осями колес, обеспечивающего равновесие автомашины, надо составить: 1) уравнение моментов активных сил относительно точки  $D$  с учетом момента веса  $P_3$ , 2) уравнение моментов активных сил относительно точки  $E$  без учета момента веса  $P_3$ . Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} P_3 \cdot 4 - P_1 \cdot 1,5 - P_2 (DE + 2) &= 0, \\ P_1 (DE - 1,5) - P_2 \cdot 2 &= 0. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений равновесия при  $P_2 = 5 \text{ T}$ ,  $P_1 = 2 \text{ T}$ , находим:  $P_3 = 4 \text{ T}$ ,  $DE = 2,3 \text{ м}$ . Таковы предельные значения  $P_3$  и  $DE$ , обеспечивающие равновесие автомашины.

В случае  $P_3 > 4 \text{ T}$  произойдет опрокидывание автомашины вокруг точки  $D$  в направлении против часовой стрелки.

В случае  $DE < 2,3 \text{ м}$  при отсутствии груза  $A$  произойдет опрокидывание автомашины вокруг точки  $E$  в направлении по часовой стрелке.

Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и последующих лет: 94, 95, 96.

3°. Приведение произвольной плоской системы сил к простейшему виду. Рекомендуется следующий порядок выполнения приведения:

- 1) выбрать оси декартовых координат;
- 2) выбрать центр приведения системы сил;
- 3) вычислить проекции главного вектора системы сил по формулам

$$V_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad V_y = \sum_{k=1}^n F_{ky};$$

- 4) определить модуль главного вектора  $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$  и направляющие косинусы

$$\cos(x, \widehat{V}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(y, \widehat{V}) = \frac{V_y}{V};$$

- 5) вычислить главный момент системы сил относительно центра приведения по формуле

$$m_O = \sum_{k=1}^n m_O(F_k),$$

где  $O$  — центр приведения системы сил;

б) в зависимости от значений  $V$  и  $m_O$  возможны четыре случая:

а) если  $V \neq 0$  и  $m_O \neq 0$ , то следует систему привести к равнодействующей  $R$ , равной силе  $V$ , отстоящей от нее на расстоянии  $h = m_O/V$  и расположенной так, чтобы знак момента равнодействующей относительно центра  $O$  совпадал со знаком главного момента  $m_O$ ;

б) если  $V \neq 0$ ,  $m_O = 0$ , то система сил приводится к равнодействующей, совпадающей с  $V$ ;

в) если  $V = 0$ ,  $m_O \neq 0$ , то система сил приводится к паре сил с моментом  $m_O$ ;

г) если  $V = 0$  и  $m_O = 0$ , то система сил находится в равновесии.

Уравнение линии действия равнодействующей в случаях а) и б) имеет вид

$$xR_y - yR_x = \sum_{k=1}^n m_O(F_k),$$

где  $R_x = V_x$ ,  $R_y = V_y$ , а  $x$  и  $y$  — текущие координаты точки линии действия равнодействующей,  $O$  — начало координат.

Оси декартовых координат следует направлять так, чтобы силы в возможно большем числе оказались параллельными либо перпендикулярными к этим осям. Центр приведения системы следует выбирать так, чтобы моменты сил относительно этого центра в возможно большем числе обратились в нуль, т. е. чтобы линии действия этих сил проходили бы через центр приведения системы.

При переходе от одного центра приведения ( $O$ ) к другому центру приведения ( $A$ ) следует иметь в виду, что главный вектор  $V$  от выбора центра приведения не зависит (главный вектор является статическим инвариантом), а главный момент системы изменяется в соответствии с формулой

$$m_A = m_O + m_A(V_O).$$

**Задача 1.20.** Произвольная плоская система сил была приведена к центру  $O$ . В результате приведения были получены сила  $V$  (см. рисунок) и пара сил, момент которой равен главному моменту  $m_O = 4Va$ .

Определить главный момент этой системы сил при переходе к новому центру приведения  $A$ , находящемуся на расстоянии  $OA = a$  от старого центра по оси  $x$ .

**Решение.** Выбираем оси декартовых координат так, как это изображено на рисунке.

Задачу можно решить двумя способами.

1. Приведем силу  $V$  к точке  $A$ . Для этого приложим в точке  $A$  две уравновешивающиеся силы  $V$  и  $V'$  так, чтобы одна из них была векторно равна силе  $V$ . Теперь сила  $V$  оказалась приведенной к точке  $A$ . При этом добавилась пара сил (присоединенная пара), в состав которой входят сила  $V$ , приложенная в точке  $O$ , и сила  $V'$ ,

приложенная в точке  $A$ . Момент присоединенной пары  $m_{пр}$  равен  $m_{пр} = -Va$ .

Следовательно, помимо силы  $V$ , приложенной в точке  $A$ , мы имеем две пары сил с моментами  $m_O$  и  $m_{пр}$ . Эти две пары сил эквивалентны равнодействующей паре сил с моментом  $m_A$ , равным  $m_A = m_O + m_{пр} = 4Va - Va = 3Va$ . Величина  $m_A$  является искомым главным моментом системы сил относительно нового центра приведения  $A$ .

Итак, в результате перехода от старого центра приведения  $O$  к новому центру  $A$  главный момент системы изменился.

2. Эту задачу можно решить, воспользовавшись тем, что сила  $V$ , равная главному вектору системы сил, является статическим инвариантом, т. е. не зависит от выбора центра приведения, а главный момент системы изменяется. Как известно, главный момент произвольной плоской системы сил относительно нового центра приведения равен алгебраической сумме главного момента этой системы относительно старого центра и момента относительно нового центра главного вектора системы, приложенного в старом центре, т. е.  $m_A = m_O + m_A(V_O)$ . Учитывая, что по условию  $m_O = 4Va$ , а  $m_A(V_O) = -Va$ , находим  $m_A = 3Va$ .

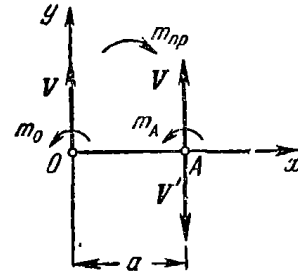
**Задача 1.21.** К диску приложены четыре силы:  $F_1 = F_2 = F$ ,  $F_3 = F\sqrt{3}$ ,  $F_4 = F\sqrt{6}$ .

Привести эту систему сил к простейшему виду.

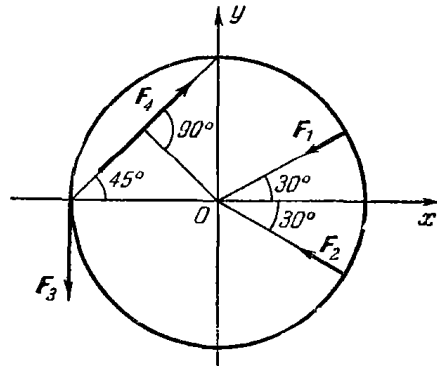
**Решение.** Взяв начало координат в центре  $O$  диска, направим ось  $x$  по горизонтали направо, а ось  $y$  по вертикали вверх. За центр приведения системы примем точку  $O$ . Определим главный вектор  $V$  и главный момент  $m_O$  данной системы сил. Так как

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \quad m_O = \sum_{k=1}^n m_O(F_k), \quad (1)$$

то предварительно вычислим проекции  $V_x$  и  $V_y$  главного вектора  $V$  на декартовы оси координат и сумму моментов  $\sum_{k=1}^n m_O(F_k)$  всех сил



К задаче 1.20.



К задаче 1.21.

относительно точки  $O$ :

$$V_x = \sum F_{kx} = -F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 30^\circ + F_4 \cos 45^\circ, \quad (2)$$

$$V_y = \sum F_{ky} = -F_1 \cos 60^\circ + F_2 \cos 60^\circ - F_3 + F_4 \cos 45^\circ, \quad (3)$$

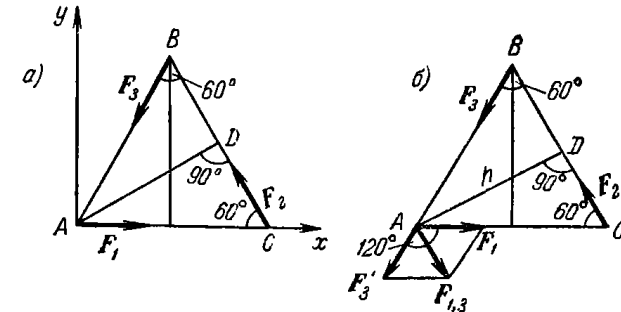
$$\sum m_O(F_k) = F_3 \cdot a - F_4 \cdot a \sin 45^\circ, \quad (4)$$

где буквой  $a$  обозначен радиус диска. Из (2) — (4) получим:  $V_x = 0$ ,  $V_y = 0$ ,  $\sum m_O(F_k) = 0$ . Теперь формулы (1) принимают вид:  $V = 0$ ,  $m_O = 0$ .

Итак, главный вектор  $V$  и главный момент  $m_O$  оказались равными нулю. Как известно, это условие является необходимым и достаточным для равновесия твердого тела. Значит, диск под действием данной системы сил находится в покое.

**Задача 1.22.** Вдоль сторон равностороннего треугольника направлены три равные по модулю силы  $|F_1| = |F_2| = |F_3| = F$ . Длина стороны треугольника равна  $a$ .

Привести систему сил к простейшему виду.



К задаче 1.22.

**Решение.** Выбрав начало осей декартовых координат в вершине треугольника  $A$ , направим ось  $x$  по горизонтали направо и ось  $y$  по вертикали вверх. Определим главный вектор и главный момент данной плоской системы сил. Выберем в качестве центра приведения точку  $A$ .

Модуль главного вектора данных сил вычислим по формуле  $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ , где

$$V_x = \sum F_{kx} = F_1 - F_2 \cos 60^\circ - F_3 \cos 60^\circ = 0,$$

$$V_y = \sum F_{ky} = F_2 \cos 30^\circ - F_3 \cos 30^\circ = 0.$$

Следовательно, главный вектор равен нулю:  $V = 0$ .

Вычислим главный момент данной системы сил относительно центра приведения  $A$ . Учитывая, что

$$m_A(F_1) = m_A(F_3) = 0, \quad m_A(F_2) = F_2 \cdot AD = \frac{\sqrt{3}}{2} Fa,$$

получим:

$$m_A = m_A(F_1) + m_A(F_2) + m_A(F_3) = \frac{\sqrt{3}}{2} Fa.$$

Итак, выбрав в качестве центра приведения данной системы сил точку  $A$ , мы нашли:

$$V = 0, \quad m_A = \frac{\sqrt{3}}{2} Fa,$$

т. е. установили, что система сил приводится к паре сил с моментом  $m = \frac{\sqrt{3}}{2} Fa$ . Как известно, в случае приведения системы сил к паре сил главный момент не зависит от выбора центра приведения.

Эту задачу можно было решить иначе. Так, например, совершив перенос силы  $F_3$  по ее линии действия в точку  $A$ , можно сложить силы  $F_1$  и  $F_3$ , приложенные в точке  $A$  (рис. б). Суммой этих сил будет сила  $F_{1,3}$ , являющаяся диагональю ромба, угол при вершине которого равен  $120^\circ$ . В этом случае диагональ ромба равна его стороне, т. е.  $|F_{1,3}| = F$ . Итак, данная система сил оказалась приведенной к паре сил, в состав которой входят силы  $F_2$  и  $F_{1,3}$ , с плечом  $h = AD = a \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Момент этой пары сил равен  $m = Fh = \frac{\sqrt{3}}{2} Fa$ .

Второй вариант решения задачи оказался более коротким. Однако следует иметь в виду, что в первом варианте использован более общий прием приведения произвольной плоской системы сил к простейшему виду, которым неизменно следует пользоваться при решении более сложных задач.

**Задача 1.23.** Привести к простейшему виду систему сил  $F_1, F_2$  и  $F_3$ , изображенную на рис. а. Силы  $F_1$  и  $F_2$  направлены по противоположным сторонам, а сила  $F_3$  — по диагонали прямоугольника  $ABCD$ , сторона  $AD$  которого равна  $a$ .  $|F_1| = |F_2| = \frac{1}{2}|F_3| = F$ .

**Решение.** Выбрав начало осей декартовых координат в вершине прямоугольника  $A$ , направим ось  $x$  по горизонтали направо, а ось  $y$  по вертикали вверх. (Выбор таких направлений осей  $x$  и  $y$  удобен, так как две силы из трех параллельны оси  $y$  и не дают проекций на ось  $x$ .)

Приведем данную систему сил к главному вектору и главному моменту. Выберем в качестве центра приведения системы сил начало координат  $A$ . Найдем сначала проекции главного вектора на оси координат:

$$V_x = \sum F_{kx} = -F_3 \cos 30^\circ = -F\sqrt{3},$$

$$V_y = \sum F_{ky} = F_1 + F_2 - F_3 \cos 60^\circ = F.$$

Модуль главного вектора  $V$  равен

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 2F, \quad (1)$$

а направляющие косинусы будут:

$$\cos(x, \hat{V}) = \frac{V_x}{V} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos(y, \hat{V}) = \frac{V_y}{V} = \frac{1}{2},$$

т. е.  $(x, \hat{V}) = 150^\circ$ ,  $(y, \hat{V}) = 60^\circ$ . Сила  $V$  изображена на рис. б.

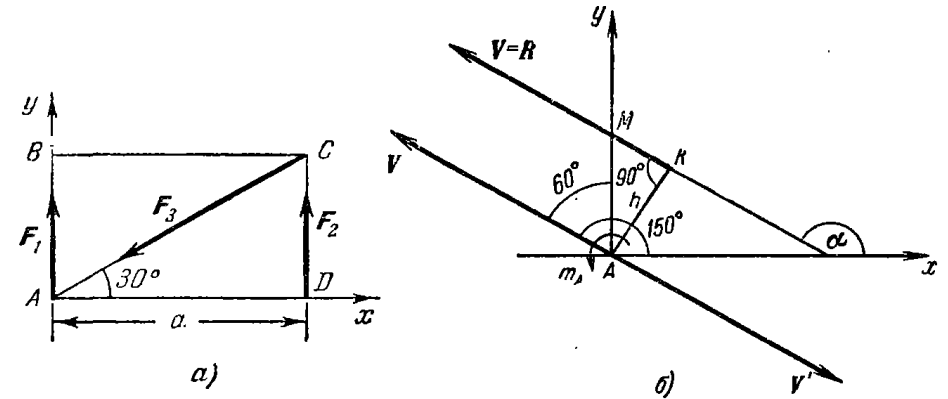
Переходим к определению главного момента системы сил относительно центра приведения  $A$ . Учитывая, что

$$m_A(F_1) = m_A(F_3) = 0, \quad \text{а} \quad m_A(F_2) = F_2 \cdot AD = Fa,$$

находим:

$$m_A = m_A(F_1) + m_A(F_2) + m_A(F_3) = Fa. \quad (2)$$

Итак, система сил оказалась приведенной к силе  $V$  и паре сил с моментом  $m_A$ , направленным против часовой стрелки.



К задаче 1.23.

Известно, что если  $V \neq 0$  и  $m_A \neq 0$ , то систему сил можно привести к равнодействующей силе  $R$ . Для этого изобразим пару сил, соответствующую главному моменту  $m_A$ , так, чтобы силы, входящие в состав пары сил, равнялись по модулю силе  $V$ , причем одна из них ( $V'$ ) лежала бы на одной линии действия с силой  $V$  и была направлена ей противоположно. При этом вторая сила, входящая в состав пары сил, приложенная в точке  $K$ , окажется векторно равной силе  $V$ . Плечо пары  $h = AK$  следует подобрать так, чтобы момент этой пары сил был равен главному моменту  $m_A$ , т. е.  $m_A = Vh$ , откуда  $h = AK = m_A/V$ . Воспользовавшись формулами (1) и (2), находим  $h = a/2$ . Теперь мы получили систему, состоящую из трех сил. Модуль каждой из этих сил равен модулю главного вектора  $V$ . Две силы, приложенные в точке  $A$ , равные по модулю и направленные в противоположные стороны по общей линии действия, уравновешиваются. Эти силы можно отбросить, не нарушая состояния твердого тела. Остается одна сила  $V$ , приложенная в точке  $K$ , эквивалентная

данной системе сил. Следовательно, эта сила, равная главному вектору  $V$ , является равнодействующей  $R$ . Таким образом, нам удалось привести данную систему сил к равнодействующей  $R$ .

Определим уравнение линии действия равнодействующей  $R$ , воспользовавшись уравнением

$$xR_y - yR_x = \sum_{k=1}^n m_A(F_k). \quad (3)$$

Проекции равнодействующей  $R$  на оси декартовых координат равны проекциям главного вектора  $V$  на соответствующие оси, т. е.  $R_x = -F\sqrt{3}$ ,  $R_y = F$ . Сумма моментов всех данных сил относительно начала координат  $A$  является главным моментом  $m_A$ , определяемым формулой (2):

$$\sum m_A(F_k) = m_A = Fa.$$

Подставив значения  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $\sum m_A(F_k)$  в уравнение (3), находим уравнение линии действия равнодействующей  $R$ :

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Это — уравнение прямой с угловым коэффициентом, равным  $-\sqrt{3}/3$ , откуда следует, что угол, образованный этой прямой с осью  $x$ , составляет  $150^\circ$ .

Найдем точки пересечения линии действия равнодействующей с осями координат. Имеем: при  $x=0$   $y = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ , при  $y=0$   $x=a$ . Следовательно, равнодействующая направлена по диагонали  $DB$  прямоугольника  $ABCD$ .

### § 3. Равновесие системы твердых тел

В статике твердого тела наряду с равновесием одного тела рассматриваются сочлененные системы материальных тел, т. е. совокупности твердых тел, касающихся друг друга своими поверхностями или соединенных друг с другом шарнирами, гибкими нитями или стержнями.

Важной задачей статики системы твердых тел является определение реакций связей. Для этого основным является способ расчленения, при котором наряду с равновесием всей системы тел рассматривается равновесие отдельных тел (или групп тел системы). При этом все остальные тела системы и соответствующие связи мысленно отбрасываются, а их действие на тело, равновесие которого рассматривается, заменяется реакциями.

Следует заметить, что при рассмотрении равновесия всей системы твердых тел реакции связей между телами, входящими в систему, не

должны учитываться; они не входят в уравнения равновесия, как внутренние, взаимно уравновешенные силы. А при рассмотрении равновесия каждого тела в отдельности или какой-либо группы тел, входящих в систему, соответствующие реакции связей, которые были мысленно расчленены, становятся внешними силами и входят в уравнения равновесия.

Задачи на равновесие системы твердых тел, находящихся под действием произвольной плоской системы сил, решаются путем применения уравнений равновесия твердого тела, разобранных в § 2 (уравнения (1\*) или (2\*), или (3\*)).

Рассмотрим в качестве примера системы твердых тел, изображенные на рис. 1.33, 1.34.

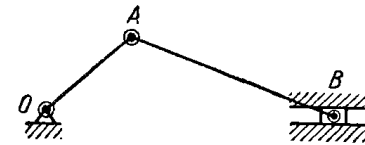


Рис. 1.33.

Шатунно-кривошипный механизм  $OAB$  (рис. 1.33) состоит из трех твердых тел: кривошипа  $OA$ , шатуна  $AB$  и ползуна  $B$ . Эти тела соединены друг с другом шарнирами  $A$  и  $B$ . Кроме того, на них наложены еще две связи: шарнирное закрепление в точке  $O$  и горизонтальные направляющие, препятствующие вертикальному перемещению ползуна  $B$ .

Цилиндрический стакан (рис. 1.34) поставлен вверх дном на горизонтальный пол, внутри стакана покоятся два шара. Эта система состоит из трех твердых тел: шара  $O_1$ , шара  $O_2$  и стакана, находящихся друг с другом в контакте. На эту систему тел наложена одна внешняя связь: гладкий горизонтальный пол.

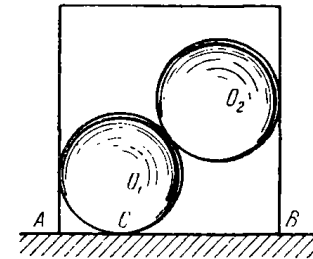


Рис. 1.34.

При решении задач на равновесие системы тел недостаточно, как правило, рассмотреть равновесие этой системы в целом. Для всей системы условия равновесия сводятся или к трем уравнениям равновесия для плоской системы сил, или к двум уравнениям для плоской системы параллельных сил. В этом случае число неизвестных может быть больше числа перечисленных уравнений.

Однако это обстоятельство еще не делает систему статически неопределимой, так как если разделить систему на отдельные твердые тела и составить уравнения равновесия для каждого из них, то число новых неизвестных может быть меньше числа новых уравнений равновесия. Если число всех составленных таким образом независимых уравнений равновесия для всей системы и отдельных ее частей будет равно числу всех неизвестных, то такая задача является статически определенной.

Поясним это на примере трехшарнирной арки (рис. 1.35, а). Арка состоит из двух симметричных полуарок, соединенных в точке  $C$  шарниром. В точках  $A$  и  $B$  арка шарнирно прикреплена к фундаменту.

На арку действуют две активные известные силы: горизонтальная сила  $Q$ , приложенная в точке  $D$ , и вертикальная сила  $P$ , приложенная в точке  $E$ . Применяя принцип освобожденности от связей, отбросим мысленно шарнирные закрепления в точках  $A$  и  $B$  и заменим их действие силами реакций. Величины и направление этих реакций неизвестны. Следовательно, их можно представить двумя составляющими каждую:  $F_{Ax}$  и  $F_{Ay}$ ,  $F_{Bx}$  и  $F_{By}$ . Таким образом, для системы

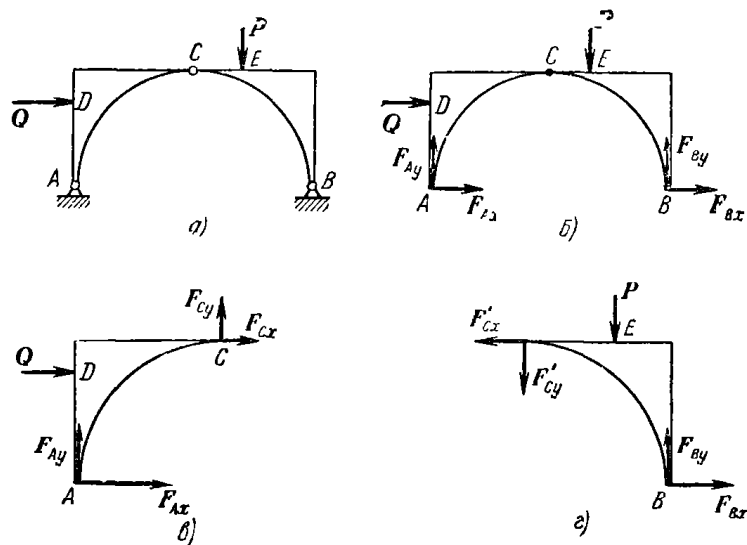


Рис 1.35.

твердых тел, состоящей из двух полуарок (рис. 1.35, б), можно составить три уравнения равновесия, в то время как число неизвестных сил равно четырём. Тем не менее задача является статически определенной. Рассмотрим равновесие какой-либо одной полуарки (рис. 1.35, в). На левую полуарку действует одна сила  $Q$ . Отбрасывая мысленно шарниры  $A$  и  $C$  вместе с правой полуаркой, заменяем их действие реакциями. Реакция в точке  $A$  представлена двумя ранее выбранными составляющими  $F_{Ax}$  и  $F_{Ay}$ , реакция в точке  $C$ , также неизвестная по величине и по направлению, определена составляющими  $F_{Cx}$  и  $F_{Cy}$ . Для левой полуарки можно составить три уравнения равновесия, между тем как новых неизвестных только два;  $F_{Cx}$  и  $F_{Cy}$ . Таким образом, рассматривая равновесие всей арки и левой полуарки, имеем шесть уравнений равновесия и шесть неизвестных, т. е. задача является статически определенной. Эта же задача может

быть решена и другим способом, если рассмотреть равновесие левой полуарки (рис. 1.35, в) и отдельно равновесие правой полуарки (рис. 1.35, з) и в этом случае число уравнений равновесия равно числу неизвестных (шесть). На основании пятого закона (закон равенства действия и противодействия) составляющие  $F'_{Cx}$ ,  $F'_{Cy}$ , реакции шарнира  $C$ , приложенные к правой полуарке, равны по модулю и направлены прямо противоположно соответствующим составляющим реакции того же шарнира  $C$ , приложенным к левой полуарке.

При решении задач на равновесие твердых тел надо выполнить четыре первых пункта указанных в начале книги, на стр. 15. При этом следует выделить систему твердых тел и отдельные твердые тела, входящие в систему, равновесие которых надо рассмотреть. Затем:

5) сопоставить число неизвестных величин и число независимых уравнений равновесия; эти числа должны быть равны, если задача является статически определенной;

6) выбрать наиболее удобные системы координат; при этом для каждого тела и для всей системы тел может быть избрана своя система координат;

7) составить уравнения равновесия для каждого твердого тела или для каждой системы твердых тел, равновесие которых исследуется;

8) решить систему всех уравнений равновесия.

Если система твердых тел разделяется на отдельные тела, то при замене их взаимодействия реакциями связей следует ввести реакции, приложенные к одному телу, и на основании закона равенства действия и противодействия выбрать реакции, действующие на второе тело, равными по модулю и направленными прямо противоположно (см., например, рис. 1.35, в и рис. 1.35, з).

В том случае, когда значение неизвестной силы окажется по ответу отрицательным, направление этой силы следует взять противоположным тому, которое было изображено на рисунке.

При составлении уравнений равновесия целесообразно оси координат и точки, относительно которых составляются уравнения моментов сил, выбирать так, чтобы в каждое уравнение входила только одна неизвестная величина.

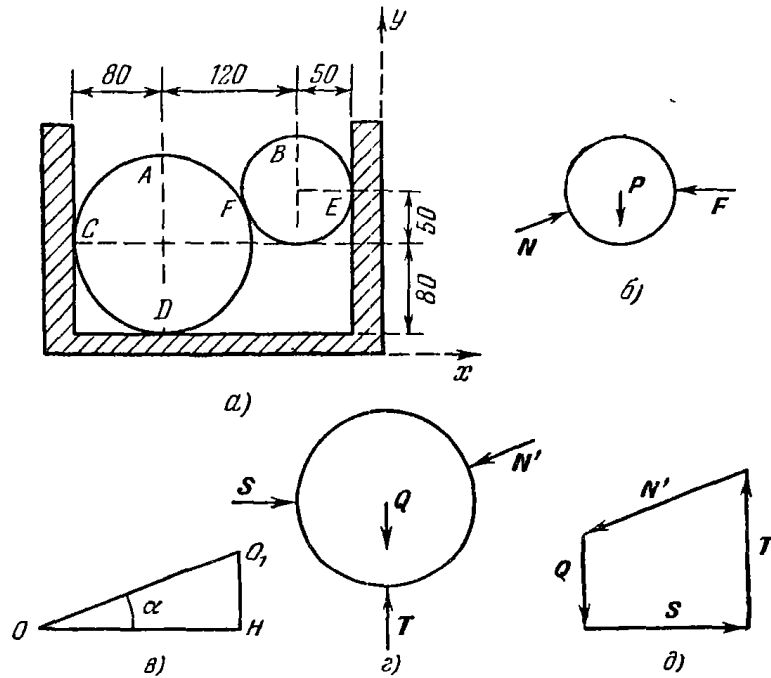
Если по условию задачи требуется определить лишь некоторые неизвестные величины, то надо составить только те из уравнений равновесия, которые необходимы для получения ответа.

**Задача 1.24.** Два гладких цилиндра  $A$  и  $B$  помещены в ящик (рис. а). Цилиндр  $A$  весит  $Q = 40$  кг и его радиус  $R = 80$  мм; цилиндр  $B$  весит  $P = 30$  кг и его радиус  $r = 50$  мм.

Определить реакции вертикальных стен в точках  $C$  и  $E$ , горизонтального пола в точке  $D$  и давление между цилиндрами, если ширина ящика 250 мм.

**Решение.** Отбросим мысленно стены и пол ящика и рассмотрим равновесие каждого цилиндра в отдельности. Цилиндр  $B$  находится в равновесии под действием трех сил: веса  $P$ , горизонтальной реакции стены  $F$  и реакции  $N$  цилиндра  $A$ , направленной по прямой, соединяющей центры  $O$  и  $O_1$  обоих цилиндров (рис. б).

Чтобы найти угол  $\alpha$ , образованный реакцией  $N$  с горизонтом, рассмотрим треугольник  $OO_1H$  (рис. в). В этом треугольнике сторона



К задаче 1.24.

$OO_1 = R + r = 130$  мм, катет  $OH = 120$  мм. Пользуясь теоремой Пифагора, находим длину второго катета  $O_1H = 50$  мм. Таким образом,

$$\sin \alpha = \frac{5}{13}, \quad \cos \alpha = \frac{12}{13}.$$

Составим уравнения равновесия для цилиндра  $B$ . Так как линии действия сил, приложенных к цилиндру, пересекаются в центре цилиндра, то достаточно составить два уравнения, приравняв нулю сумму проекций всех сил на оси  $x$  и  $y$  (рис. а):

$$\sum F_{kx} = N \cos \alpha - F = 0,$$

$$\sum F_{ky} = N \sin \alpha - P = 0.$$

Подставляя значение  $P = 30$  кг, находим:

$$N = 78 \text{ кг}, \quad F = 72 \text{ кг}.$$

Цилиндр  $A$  находится в равновесии под действием четырех сил: веса  $Q$ , горизонтальной реакции стены  $S$ , вертикальной реакции пола  $T$  и реакции  $N'$  цилиндра  $B$ , равной по величине и направленной противоположно силе  $N$ . Все четыре силы (рис. г) пересекаются в точке  $O$ , центре цилиндра  $A$ . Составим два уравнения равновесия этих сил. Суммы проекций сил на ось  $x$  и ось  $y$  равны нулю:

$$\sum F_{kx} = S - N \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{ky} = T - Q - N \sin \alpha = 0.$$

Отсюда находим:

$$S = 72 \text{ кг}, \quad T = 70 \text{ кг}.$$

Следует заметить, что эта задача может быть решена и другим, графическим способом. Действительно, зная величину и направление силы  $P$ , а также направления сил  $N$  и  $F$ , строим силовой замкнутый треугольник. Этот треугольник совпадает с треугольником  $OO_1H$  (рис. в), если сторону  $O_1H$  положить равной силе  $P$ . Тогда сторона  $OH$  даст в этом же масштабе силу  $F$ , а сторона  $OO_1$  силу  $N$ .

Далее строим замкнутый силовой многоугольник для сил, приложенных к цилиндру  $A$ . Построение начинаем с известных по величине и направлению сил  $N'$  и  $Q$ . Проводя из конца силы  $Q$  прямую, параллельную  $S$ , а из начала силы  $N'$  прямую, параллельную  $T$ , получаем замкнутый силовой многоугольник (рис. д), стороны которого в избранном масштабе и определяют неизвестные силы.

**Задача 1.25.** Блоки  $A$  и  $B$  весом соответственно  $600$  кг и  $300$  кг удерживаются в равновесии на гладкой плоскости, наклоненной под углом  $30^\circ$  к горизонту, силой  $P$ , параллельной  $OO_1$ , при помощи рычага  $OD$ , перпендикулярного к наклонной плоскости (рис. а). Тросы, соединяющие рычаг с блоками, также параллельны плоскости  $OO_1$ .

Определить, пренебрегая трением, усилия в тросах и величину силы  $P$ . Расстояния  $OH = 8$  см,  $HC = 8$  см,  $CD = 16$  см.

**Решение.** Рассмотрим равновесие каждого блока в отдельности и равновесие рычага. Блок  $A$  (рис. б) находится в равновесии под действием четырех сил: веса  $Q_2$ , натяжения  $T_2$ , параллельного наклонной плоскости, реакции  $N_1$  блока  $B$  и реакции наклонной плоскости  $N_2$ , перпендикулярных к плоскости  $OO_1$ .

Выберем оси координат  $xu$  (рис. а) и составим уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= T_2 - Q_2 \sin 30^\circ = 0, \\ \sum F_{ky} &= N_2 - Q_2 \cos 30^\circ - N_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Из первого уравнения найдем:

$$T_2 = Q_2 \sin 30^\circ = 300 \text{ кг}.$$

Блок  $B$  (рис.  $a$ ) находится в равновесии под действием трех сил: веса  $Q_1$ , реакции  $N_1$ , перпендикулярной к плоскости  $OO_1$ , и натяжения троса  $T_1$ , параллельного  $OO_1$ . Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = T_1 - Q_1 \sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum F_{ky} = N_1 - Q_1 \cos 30^\circ = 0.$$

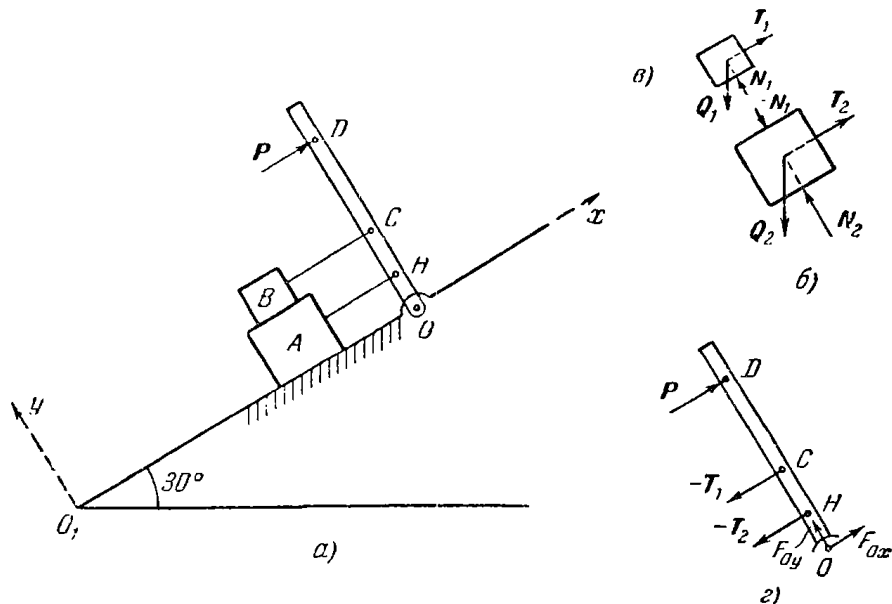
Отсюда находим:

$$T_1 = Q_1 \sin 30^\circ = 150 \text{ кгГ}, \quad N_1 = 150\sqrt{3} \text{ кгГ}.$$

Из второго уравнения системы (1) получим:

$$N_2 = Q_2 \cos 30^\circ + N_1 = 300 \cdot \sqrt{3} + 150\sqrt{3} = 450\sqrt{3} \text{ кгГ}.$$

Зная натяжение тросов, рассмотрим равновесие рычага (рис.  $2$ ), находящегося под действием сил:  $P$ ,  $-T_1$ ,  $-T_2$  и реакции шарнира



К задаче 1.25.

$O$ , которую представим в виде ее проекций  $F_{Ox}$  и  $F_{Oy}$ . Уравнения равновесия для рычага будут:

$$\sum F_{kx} = F_{Ox} + P - T_1 - T_2 = 0,$$

$$\sum F_{ky} = F_{Oy} = 0,$$

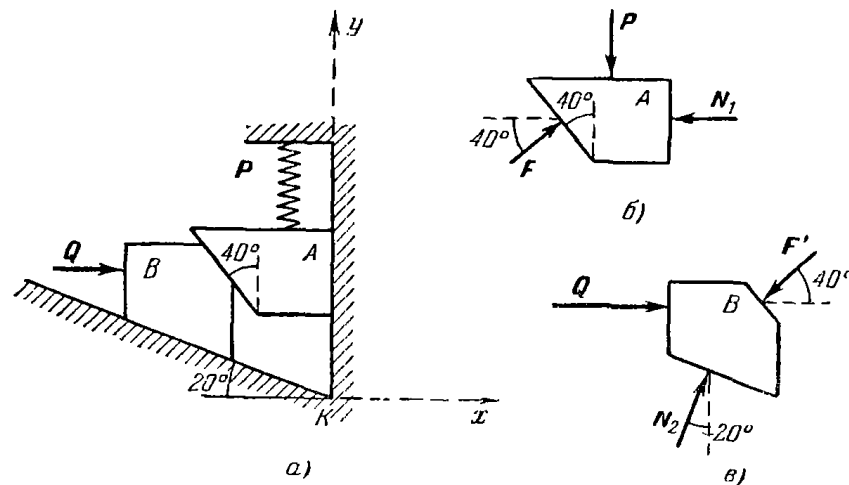
$$\sum m_O(F_k) = T_2 \cdot 8 + T_1 \cdot 16 - P \cdot 32 = 0.$$

Отсюда находим:  $P = \frac{8 \cdot 300 + 16 \cdot 150}{32} = 150 \text{ кгГ}$ ,  $F_{Ox} = T_1 + T_2 - P = 300 \text{ кгГ}$ .

**Задача 1.26.** В приборе (рис.  $a$ ) тела  $A$  и  $B$  могут скользить по сторонам угла  $K$ ; одна из сторон вертикальна, а другая образует угол  $20^\circ$  с горизонтом. Наклонная плоскость соприкосновения обоих тел составляет угол  $40^\circ$  с вертикалью. Сжатая пружина давит вниз с силой  $P = 10 \text{ кгГ}$  на тело  $A$ .

Пренебрегая весом тел и предполагая, что все соприкасающиеся поверхности гладкие, найти горизонтальную силу  $Q$ , удерживающую систему в равновесии.

Решение. Отбросим мысленно стороны угла  $K$  и рассмотрим отдельно равновесие тела  $A$  и тела  $B$ . На тело  $A$  (рис.  $b$ ) действуют



К задаче 1.26.

три силы: давление пружины  $P$ , направленное по вертикали вниз, реакция вертикальной стены  $N_1$ , направленная по горизонтали влево, и реакция  $F$  отброшенного тела  $B$ , перпендикулярная к наклонной плоскости соприкосновения обоих тел. Линии действия этих сил пересекаются в одной точке, так как тело  $A$  находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости. Следовательно, для них достаточно составить два уравнения равновесия, приравняв нулю сумму проекций всех сил на оси  $x$  и  $y$ . Выберем оси так, как это показано на рис.  $a$ . Тогда

$$\sum F_{kx} = F \cos 40^\circ - N_1 = 0,$$

$$\sum F_{ky} = F \sin 40^\circ - P = 0.$$

Подставляя значение силы  $P$ , находим из уравнений  $F = 15,58 \text{ кгГ}$ ,  $N_1 = 12 \text{ кгГ}$ .

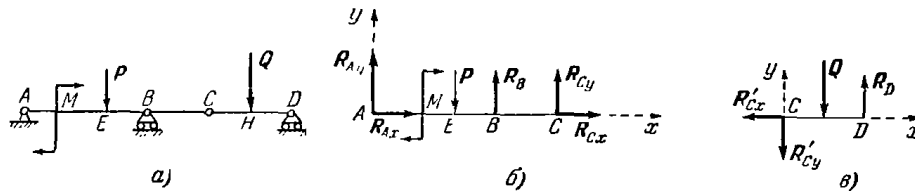
На тело  $B$  (рис.  $в$ ) действуют три силы: реакция  $F'$  тела  $A$ , равная известной уже силе  $F$ , но направленная в соответствии с законом равенства действия и противодействия в противоположную сто-

рону, неизвестная по величине горизонтальная сила  $Q$  и реакция  $N_2$ , перпендикулярная к наклонной стороне угла, составляющая, следовательно, с вертикалью угол  $20^\circ$ . Запишем для этих трех сил, пересекающихся в одной точке, два уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= Q + N_2 \sin 20^\circ - F \cos 40^\circ = 0, \\ \sum F_{ky} &= N_2 \cos 20^\circ - F \sin 40^\circ = 0.\end{aligned}$$

Подставляя в эти уравнения найденное ранее значение  $F$ , определяем остальные силы  $Q = 8,3$  кг,  $N_2 = 10,6$  кг.

**Задача 1.27.** Двухпролетная балка  $AD$  (рис. а) с промежуточным шарниром  $C$  закреплена шарнирно в точке  $A$ . В точках  $B$  и  $D$  балка опирается при помощи катков на горизонтальные направляющие.



К задаче 1.27.

Определить реакции опор  $A$ ,  $B$ ,  $D$  и усилие в шарнире  $C$ , если на балку действуют: пара сил с моментом  $M = 20$  кгм, сила  $P = 8$  кг, сила  $Q = 12$  кг. Даны размеры:  $AE = 4$  м,  $EB = 2$  м,  $BC = 3$  м,  $CH = HD = 2$  м.

**Решение.** Система твердых тел состоит из двух балок. Рассмотрим равновесие каждой из балок отдельно. На балку  $AC$  действуют (рис. б): активная сила  $P$  и активная пара сил с моментом  $M$ . Кроме того, на балку наложены связи — шарниры  $A$  и  $C$ , подвижная опора  $B$ . Отбрасывая мысленно связи, заменяем их действие реакциями. Так как реакция шарнира  $A$  неизвестна по направлению и величине, заменяем ее двумя составляющими  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$ . Аналогично реакция шарнира  $C$  также изобразится двумя составляющими  $R_{Cx}$  и  $R_{Cy}$ . Реакцию опоры  $B$  представим вертикальной силой  $R_B$ . Рассмотрим, далее, равновесие балки  $AC$  как равновесие свободного твердого тела, находящегося под действием шести сил и одной пары сил. Выберем оси координат с началом в точке  $A$ , ось абсцисс направим по горизонтали вправо, ось ординат по вертикали вверх. Составим уравнения равновесия балки  $AC$ :

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} + R_{Cx} = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} + R_B + R_{Cy} - P = 0, \quad (2)$$

$$\sum m_A(F_k) = R_B \cdot AB + R_{Cy} \cdot AC - P \cdot AE - M = 0. \quad (3)$$

Можно было бы вместо второго уравнения равновесия составить сумму моментов всех сил относительно точки  $C$ . В это уравнение вошли бы только две неизвестные силы  $R_{Ay}$  и  $R_B$ , так как линии действия остальных неизвестных сил пересекаются в точке  $C$ . Однако в обоих случаях уравнение (1) является независимым от остальных уравнений и содержит два неизвестных; уравнения (2) и (3) связаны между собой и содержат три неизвестных.

Таким образом, из полученной системы ни одно из неизвестных не может быть определено. Рассмотрим поэтому равновесие второй балки  $CD$  (рис. в). На балку действует одна активная сила  $Q$ . Применяя закон освобождения от связей, заменим действие шарнира  $C$  и опоры  $D$  реакциями связей. Реакция  $R_D$  направлена по вертикали, перпендикулярно к горизонтальной плоскости, на которую опираются катки. Реакция шарнира  $C$  неизвестна по величине и направлению. На основании закона равенства действия и противодействия составляющие этой реакции равны по модулю составляющим реакции шарнира, приложенным к балке  $AC$ , и направлены в прямо противоположные стороны (рис. в). Таким образом, имеем свободное твердое тело — балку  $CD$ , находящуюся в равновесии под действием пяти сил. Составим уравнения равновесия, выбрав оси координат с началом в точке  $C$ ; ось абсцисс направим по балке вправо, ось ординат — вертикально вверх. Имеем:

$$\sum F_{kx} = -R_{Cx} = 0, \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = R_D - Q - R_{Cy} = 0, \quad (5)$$

$$\sum m_C(F_k) = R_D \cdot CD - Q \cdot CH = 0. \quad (6)$$

В этих трех уравнениях равновесия только одна новая неизвестная  $R_D$ . А всего в шести уравнениях равновесия шесть неизвестных. Из уравнений (4) и (1) следует:

$$R_{Cx} = R_{Ax} = 0.$$

Из уравнения (6) находим:

$$R_D = Q \cdot \frac{CH}{CD} = 12 \cdot 2/4 = 6 \text{ кг},$$

а из (5) получаем:

$$R_{Cy} = R_D - Q = 6 - 12 = -6 \text{ кг}.$$

Знак минус показывает, что в действительности направления составляющих  $R_{Cy}$  и  $R'_{Cy}$  противоположны принятым на рисунке.

Далее, из (3) имеем:

$$R_B = P \frac{AE}{AB} + \frac{M}{AB} - R_{Cy} \frac{AC}{AB} = 8 \cdot 4/6 + 20/6 - 6 \cdot 9/6 = 17,66 \text{ кг}$$

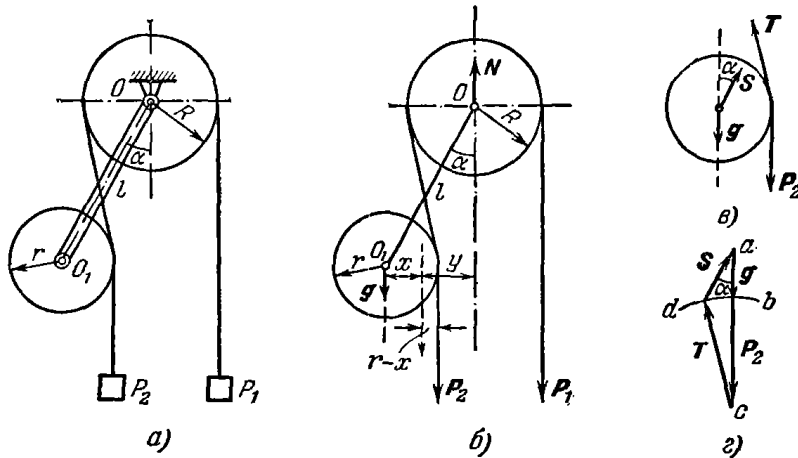
и, наконец, из (2) находим:

$$R_{Ay} = P - R_B - R_{Cy} = 8 - 17,66 + 6 = -3,66 \text{ кг}.$$



Знак минус указывает, что и реакция  $R_{Ay}$  направлена не вверх, как предполагалось, а по вертикали вниз.

**Задача 1.28.** Через блок с неподвижной осью  $O$  и радиуса  $R$  (рис. а) перекинута нить, к концам которой подвешены два одинаковых груза  $P_1$  и  $P_2$ . Правый конец нити свисает вертикально. Левый конец нити огибает блок с подвижной осью  $O_1$  и радиуса  $r$ . Вес блока с подвижной осью  $g$ . Осью нижнего блока насажена на концы стержня длиной  $l$ , другой конец которого закреплен на оси верхнего блока.



К задаче 1.28.

Пренебрегая весом стержня, определить угол  $\alpha$ , который образует стержень с вертикалью в положении равновесия, и усилие в стержне  $OO_1$ .  $P_1 = P_2 = 10 \text{ кг}$ ,  $g = 4 \text{ кг}$ ,  $R = 4 \text{ см}$ ,  $r = 3 \text{ см}$ ,  $l = 10 \text{ см}$ .

**Решение.** Рассмотрим равновесие системы твердых тел, состоящей из двух блоков и стержня, соединяющего их центры (рис. б). Для этого мысленно отбросим ось  $O$ , поддерживающую верхний блок, и заменим ее реакцией  $N$ . Кроме того, на систему действуют внешние силы  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $g$ . Реакция  $N$  вертикальна, так как все остальные силы заведомо вертикальны. Составим для данной системы параллельных сил два уравнения равновесия:

$$\sum F_{iy} = N - P_1 - P_2 - g = 0,$$

$$\sum m_O(F_i) = P_1 R - P_2 (l \sin \alpha - r) - gl \sin \alpha = 0.$$

Из первого уравнения определим реакцию  $N$ :

$$N = P_1 + P_2 + g = 24 \text{ кг}.$$

Из второго уравнения находим угол  $\alpha$ :

$$10 \cdot 4 - 10(10 \sin \alpha - 3) - 4 \cdot 10 \sin \alpha = 0,$$

откуда  $\sin \alpha = 1/2$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

Для определения усилия в стержне рассмотрим равновесие блока с подвижной осью. Он находится в равновесии под действием четырех сил (рис. в): веса  $g$ , двух равных по величине реакций нити  $P_2$  и  $T$ , а также реакции стержня  $S$ , направленной по стержню, но неизвестной по величине. Таким образом, геометрическая сумма этих четырех сил должна быть равна нулю:

$$P_2 + T + g + S = 0.$$

Так как угол  $\alpha$  известен и  $T = P_2$ , то проще всего величину  $S$  определить графически, построением силового многоугольника. Отложим из точки  $a$  (рис. г) две вертикальные силы  $g$  и  $P_2$  в избранном для сил масштабе. Далее, из точки  $c$ , конца силы  $P_2$ , как из центра, проведем дугу окружности радиусом, равным по величине  $P_2$ . На этой дуге должен находиться конец силы  $T$  и начало силы  $S$ , составляющей угол  $\alpha = 30^\circ$  с вертикалью. Проведя из точки  $a$  под углом  $30^\circ$  к вертикали прямую до пересечения с дугой окружности в точке  $d$ , соединим прямой точки  $d$  и  $c$ . Отрезок  $da$  и определит величину усилия в стержне. Измерив его в избранном для сил масштабе, находим, что усилие в стержне  $S = 5 \text{ кг}$ .

**Задача 1.29.** Рама состоит из двух жестких частей  $AC$  и  $BC$  (рис. а), соединенных шарниром  $C$  и прикрепленных к фундаменту шарнирными опорами  $A$  и  $B$ .

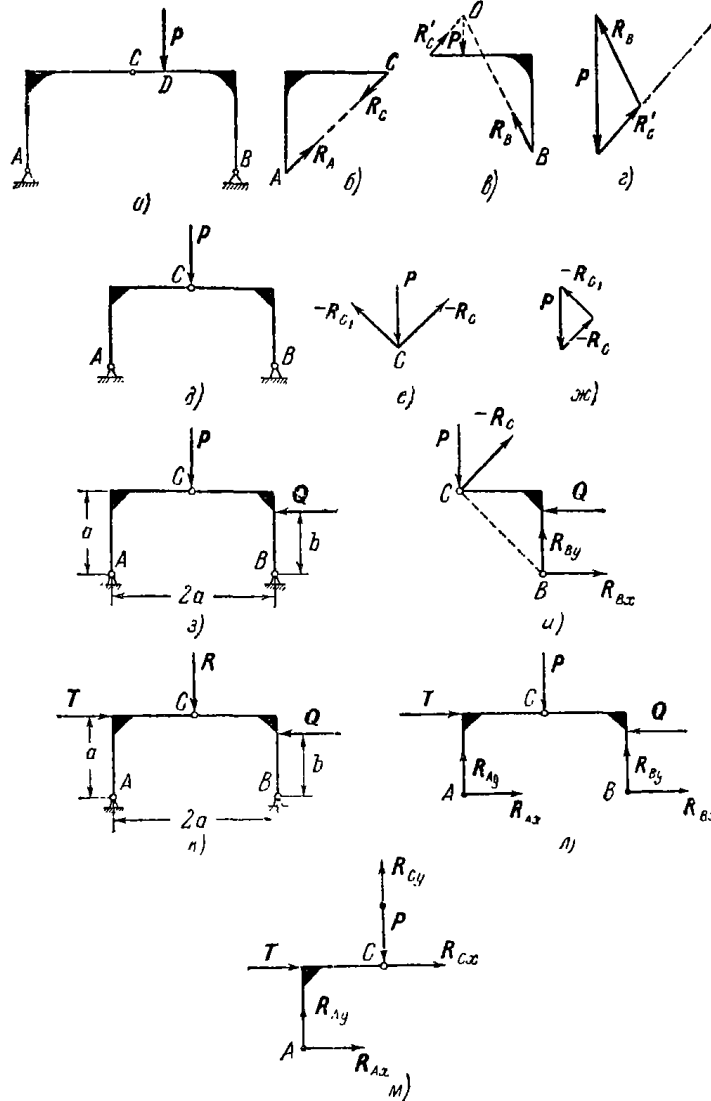
Определить реакции в шарнирах  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , если в точке  $D$  приложена вертикальная сила  $P = 1 \text{ т}$ . Задачу решить графически.

**Решение.** Реакции шарниров  $A$  и  $B$  неизвестны по величине и направлению. Следовательно, если рассматривать равновесие всей системы  $ACB$ , отбросив опоры  $A$  и  $B$  и заменив их действие реакциями, то число неизвестных будет равно четырем, а уравнений равновесия будет три.

Рассмотрим поэтому отдельно равновесие левой части рамы (рис. б). К этому твердому телу никаких активных сил не приложено. Применяя закон освобожденности от связей, отбросим мысленно шарниры  $A$  и  $C$  и заменим их действие реакциями. Часть рамы  $AC$  находится в равновесии под действием двух сил:  $R_A$  и  $R_C$ . Согласно второму закону статики эти силы должны быть равны по величине и направлены по одной прямой в разные стороны. Так как одна сила приложена в точке  $A$ , а другая — в точке  $C$ , то общей линией действия этих сил будет  $AC$ .

Рассмотрим, далее, равновесие правой части  $BC$  рамы. К ней приложена одна активная сила  $P$ . Освобождаясь мысленно от двух связей: шарниров  $B$  и  $C$ , заменяем их действие реакциями. Реакция  $R'_C$  на

основании закона равенства действия и противодействия равна по величине  $R_C$  и направлена в противоположную сторону по  $AC$  (рис. в).



К задаче 1.29.

Направление реакции  $R_B$  может быть определено на основании теоремы о трех непараллельных силах. Действительно, часть  $BC$  находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости. Линии действия двух сил известны: они пересекаются в точке  $O$ . Согласно теореме линия действия третьей силы

реакции  $R_B$  должна также проходить через точку  $O$ . Три силы  $P, R'_C, R_B$ , линии действия которых пересекаются в точке  $O$ , находятся в равновесии. Следовательно, они должны образовать замкнутый треугольник. Откладываям из произвольной точки (рис. з) силу  $P$ , известную по величине и направлению. Из конца силы  $P$  проводим линию, параллельную  $AC$ , т. е. линии действия силы  $R'_C$ . Из начала силы  $P$  проводим линию, параллельную  $OB$ , т. е. линии действия силы  $R_B$ . Получаем замкнутый силовой треугольник, стороны которого и определяют в принятом для силы  $P$  масштабе величины искомых реакций:  $R'_C$  и  $R_B$ . Согласно ранее доказанному реакция шарнира  $A$  равна  $R'_C$ .

Решение задачи об определении реакций шарниров трехшарнирной арки осложняется, если среди активных сил, действующих на трехшарнирную арку, имеется одна сила, приложенная к шарниру  $C$ . Рассмотрим в этом случае трехшарнирную арку как составленную из трех тел: двух полуарок и шарнирного болта. Полуарки не соприкасаются друг с другом. Шарнирный болт соприкасается с каждой из них.

Рассмотрим три возможных варианта задачи.

В первом варианте (рис. д) активная сила  $P$  приложена к шарнирному болту, а к полуаркам никаких задаваемых сил не приложено. В этом случае на левую полуарку, находящуюся в равновесии, действуют две равные силы  $R_A$  и  $R_C$  (рис. б), направленные по прямой  $AC$  в противоположные стороны. Совершенно аналогично на правую полуарку действуют две взаимно уравновешивающиеся силы  $R_B$  и  $R_C$ , направленные по прямой  $BC$ . Рассмотрим равновесие шарнирного болта  $C$ , к которому приложены три силы: сила  $P$ , реакции левой и правой полуарок —  $R_C, -R_{C1}$  (рис. е), причем сила  $P$  известна по величине и направлению, а у реакций полуарок известны только линии действия. Строя замкнутый треугольник (рис. ж), найдем величины реакций  $R_C, R_{C1}$  и, следовательно, равные им величины  $R_A, R_B$ .

Во втором варианте (рис. з) активные силы, кроме шарнирного болта  $C$ , приложены только к одной правой полуарке (сила  $Q$ ). Рассмотрим равновесие левой полуарки (рис. б). Направление реакции  $R_C$  и  $R_A$  совпадает с прямой  $AC$ .

Далее, присоединяем шарнирный болт  $C$  вместе с приложенной к нему активной силой  $P$  к правой полуарке и рассматриваем ее равновесие (рис. и) под действием сил:  $P, Q, -R_C$  и реакции  $R_B$ , которую раскладываем на две составляющие  $R_{Bx}, R_{By}$ .

Замечая, что  $-R_C$  образует угол  $45^\circ$  с горизонталью, составляем три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= R_C \cos 45^\circ - Q + R_{Bx} = 0, \\ \sum F_{ky} &= R_C \sin 45^\circ - P + R_{By} = 0, \\ \sum m_B(F_k) &= R_C a \sqrt{2} - P \cdot a - Q \cdot b = 0, \end{aligned}$$

откуда и определяются все три неизвестные.

В третьем варианте (рис. *к*) активные силы приложены, кроме шарнирного болта, и к обеим полуаркам.

В этом случае сначала определяем реакции шарниров *A* и *B*. Для этого рассмотрим равновесие всей арки, отбросив мысленно шарниры *A* и *B* и заменив их действие реакциями (рис. *л*). Три уравнения равновесия будут:

$$\sum F_{kx} = T + R_{Ax} + R_{Bx} - Q = 0,$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} + R_{By} - P = 0,$$

$$\sum m_A(F_k) = Q \cdot b - T \cdot a - P \cdot a + R_{By} \cdot 2a = 0.$$

В этих трех уравнениях четыре неизвестных:  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Bx}$ ,  $R_{By}$ . Чтобы составить четвертое недостающее уравнение равновесия, рассмотрим равновесие любой полуарки (например, левой), присоединив к ней шарнирный болт с приложенной к нему силой  $P$  (рис. *м*). При этом составляем уравнение равновесия, в которое бы не входила реакция правой полуарки на болт. Таким уравнением равновесия будет равенство нулю суммы моментов всех сил относительно шарнирного болта *C*

$$\sum m_C(F_k) = R_{Ax} \cdot a - R_{Ay} \cdot a = 0.$$

Из этой системы четырех уравнений определяются  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Bx}$ ,  $R_{By}$ . Далее, составляя остальные уравнения равновесия для левой полуарки, находим  $R_{Cx}$ ,  $R_{Cy}$  — составляющие реакции правой полуарки на болт.

Для определения реакции левой полуарки на болт (она в этом случае не равна реакции на болт правой полуарки) необходимо рассмотреть отдельно равновесие правой полуарки.

**Задача 1.30.** Цилиндрический стакан радиуса  $R$  поставлен открытой стороной на гладкий горизонтальный пол. Внутри стакана находятся два одинаковых шара радиуса  $r$  и весом  $P$  каждый.

Определить вес  $Q$  цилиндрического стакана, при котором шары не опрокинут его. Стенки стакана абсолютно гладкие.

**Решение.** Для определения искомого веса стакана рассмотрим отдельно равновесие двух шаров (рис. *б*) и равновесие стакана (рис. *в*).

На систему двух шаров действуют силы: вес каждого шара  $P$ , приложенный в центре шара и направленный по вертикали вниз; реакция гладкого пола  $T$ , направленная по вертикали вверх; реакции стенок стакана  $N_1$  и  $N_2$ , направленные по горизонтали и приложенные в точках *D* и *C*.

Проведем оси координат: ось  $x$  горизонтально, ось  $y$  вертикально. Уравнения равновесия для системы, состоящей из двух шаров, имеют

вид

$$\sum F_{kx} = N_1 - N_2 = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = T - 2P = 0, \quad (2)$$

$$\sum m_O(F_k) = N_2 \cdot AB - P \cdot OB = 0. \quad (3)$$

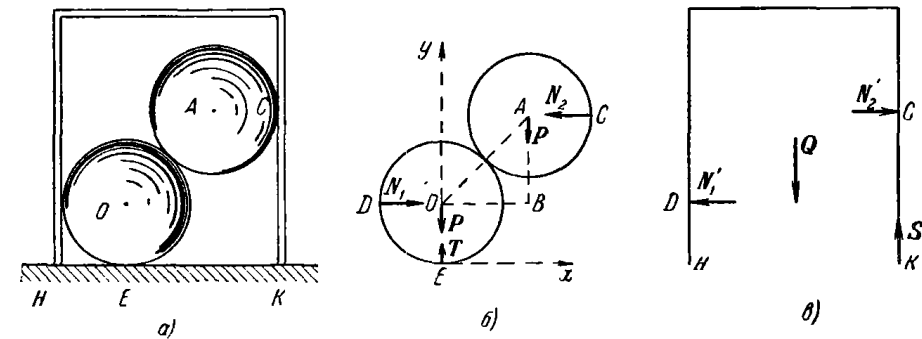
Третье уравнение — уравнение моментов — составлено относительно точки *O*, где пересекаются линии действия трех сил, в том числе двух неизвестных. Из первого уравнения следует:

$$N_1 = N_2 = N. \quad (4)$$

Из третьего уравнения находим:

$$N = \frac{P \cdot OB}{AB}. \quad (5)$$

Рассмотрим, далее, равновесие цилиндрического стакана (рис. *в*). На стакан действуют силы: вес  $Q$  по вертикали вниз, реакции шаров



К задаче 1.30.

$N'_1$  и  $N'_2$ , приложенные в точках *D* и *C*, реакции пола в точках *H* и *K*. (Ясно, что  $N'_1 = N_1$  и  $N'_2 = N_2$ .) В момент опрокидывания стакана, который мы рассматриваем, давление в точке *H* на пол и, следовательно, реакция пола обращаются в нуль и стакан опирается на горизонтальную плоскость только в точке *K*.

Составим уравнение моментов относительно точки *K*

$$\sum m_K(F_k) = N'_2 \cdot CK - N'_1 \cdot DH - Q \cdot R = 0. \quad (6)$$

Далее из (6), учитывая (4), имеем:

$$N \cdot AB - Q \cdot R = 0.$$

Подставляя в это равенство значение  $N$ , определенное формулой (5), имеем:

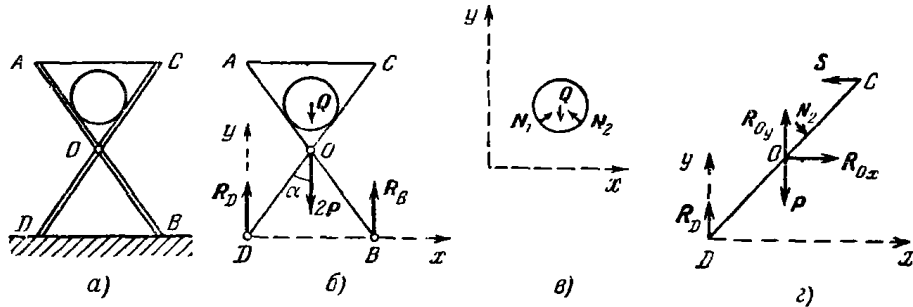
$$Q = N \frac{AB}{R} = \frac{P \cdot OB \cdot AB}{R \cdot AB} = \frac{P \cdot OB}{R};$$

но  $OB = 2R - 2r$ , и, следовательно, для равновесия необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$Q \geq 2P \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

(знак неравенства соответствует случаю, когда давление на горизонтальную плоскость будет распределяться по всей ободу).

**Задача 1.31.** Два однородных стержня  $AB$  и  $CD$  длиной  $2l$  и весом  $P$  каждый опираются в точках  $D$  и  $B$  на гладкий горизонтальный пол и соединены посередине шарниром  $O$ . Концы стержней  $A$  и  $C$  соединены нитью. Между верхними половинами стержней лежит гладкий диск радиуса  $r$  и весом  $Q$ . Угол  $DOB = 2\alpha$ .



К задаче 1.31.

Определить натяжение нити.

**Решение.** Для нахождения реакций пола в точках  $D$  и  $B$  рассмотрим равновесие системы твердых тел (два стержня, скрепленных шарниром и нитью, и диск), отбросив мысленно пол и заменив его действие вертикальными реакциями  $R_D$  и  $R_B$  (рис. б). Кроме реакций пола, к системе твердых тел приложены: в центре диска его вес  $Q$ , в шарнире  $O$  вес стержней  $2P$ , оси координат показаны на рисунке. Составляем два уравнения:

сумма проекций всех параллельных сил на вертикаль равна нулю

$$\sum F_{ky} = R_D + R_B - 2P - Q = 0;$$

сумма моментов всех сил относительно точки  $D$  равна нулю

$$\sum m_D(F_k) = R_B \cdot BD - (2P + Q) \frac{BD}{2} = 0.$$

Решая совместно эти уравнения, находим:

$$R_D = R_B = P + \frac{Q}{2}.$$

Как и следовало ожидать, реакции пола равны между собой.

Рассмотрим, далее, равновесие диска, отбросив стержни и заменив их действие на диск реакциями  $N_1$  и  $N_2$  (рис. в). Реакции  $N_1$  и  $N_2$  соответственно перпендикулярны к стержням  $AB$  и  $CD$ , так как трение между диском и стержнями по условию отсутствует. Следовательно,  $N_1$  и  $N_2$  образуют с горизонталью равные углы  $\alpha$ . Кроме реакций, на диск действует сила тяжести  $Q$ . Линии действия всех трех сил пересекаются в центре диска. Напишем уравнения равновесия диска:

$$\sum F_{kx} = N_1 \cos \alpha - N_2 \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{ky} = N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha - Q = 0.$$

Решая совместно эти два уравнения, имеем:

$$N = N_1 = N_2 = \frac{Q}{2 \sin \alpha}.$$

Таким образом, реакции стержней равны между собой, что очевидно и по соображениям симметрии.

Далее, рассмотрим равновесие одного из стержней, заменив действие пола известной реакцией  $R_D$  и давление диска найденной величиной  $N$  (рис. г). На стержень, кроме того, действуют следующие силы: неизвестное по величине натяжение нити  $S$ , неизвестная по величине и направлению реакция шарнира  $O$ , которую представляем двумя составляющими  $R_{Ox}$  и  $R_{Oy}$ , и вес стержня  $P$ . Благодаря тому, что ранее были найдены реакции  $R_D$  и  $N_2$ , число неизвестных сил, действующих на стержень, равно трем, т. е. задача является статически определенной. Так как по условию требуется найти только натяжение нити, то достаточно составить одно уравнение равновесия, приравняв нулю сумму моментов всех сил относительно точки  $O$ :

$$\sum m_O(F_k) = Sl \cos \alpha - R_D l \sin \alpha - N_2 \frac{r}{\lg \alpha} = 0.$$

Отсюда

$$S = (P + 0,5Q) \operatorname{tg} \alpha + \frac{Qr}{2l \sin^2 \alpha}.$$

**Задача 1.32.** Нить  $AEB$  прикреплена к потолку в точках  $A$  и  $B$  и пропущена через два отверстия в балке  $CD$  (рис. а). В середине  $E$  нити подвешен груз  $P$ . Вес балки  $CD$  равен  $Q$ . Расстояние  $CD$  между отверстиями в балке равно  $AB$ .

Полагая нить и балку абсолютно гладкими, определить угол  $\alpha$ , образовавшийся в положении равновесия балкой и нижними отрезками нити, натяжение нити и реакции между балкой и нитью в точках  $C$  и  $D$ .

**Решение.** Для определения натяжения нити разрежем мысленно  $AC$  и  $BD$  и рассмотрим равновесие нижней части системы (рис. б)

под действием веса груза  $P$ , веса балки  $Q$  и реакций нитей  $R_1$  и  $R_2$ . Проведем оси координат (рис. б), составляем два уравнения равновесия:

$$\sum F_{ky} = R_1 + R_2 - P - Q = 0,$$

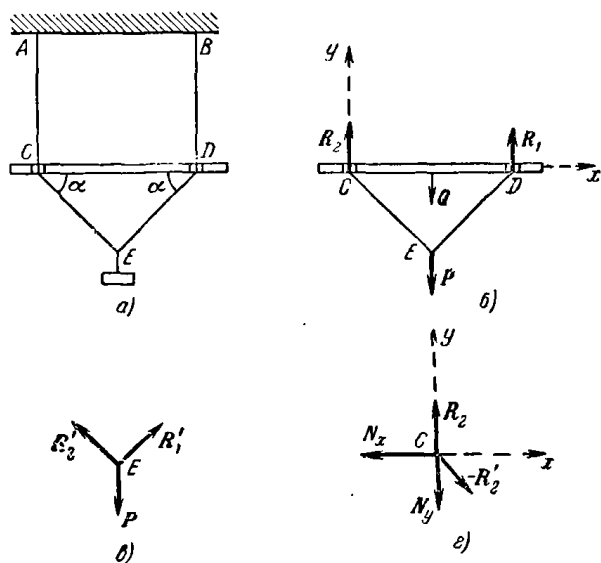
$$\sum m_C(F_k) = R_1 \cdot CD - (Q + P) \frac{CD}{2} = 0.$$

Решая совместно эти два уравнения, имеем:

$$R_1 = R_2 = R = \frac{P + Q}{2},$$

что, впрочем, очевидно вследствие симметрии системы.

Для нахождения угла  $\alpha$  рассмотрим равновесие сил, приложенных к точке  $E$  (рис. в). Следует заметить, что натяжение во всех частях



К задаче 1.32.

нити по модулю одно и то же, так как в точках  $C$  и  $D$ , где нить проходит через отверстия в балке, трение отсутствует. Если бы в этих точках между нитью и балкой существовало трение, то натяжения нити по разные стороны от отверстия были бы различны.

В точке  $E$  приложены вес  $P$  и натяжения  $R_1'$  и  $R_2'$  нитей, образующих угол  $\alpha$  с горизонталью. Для определения угла  $\alpha$  достаточно составить одно уравнение равновесия (сумма проекций всех сил на вертикаль равна нулю):

$$2R \sin \alpha - P = 0,$$

откуда

$$\sin \alpha = \frac{P}{P + Q}.$$

Второе уравнение равновесия (сумма проекций всех сил на горизонталь равна нулю) составлять нет необходимости, так как оно только вновь подтвердит ранее установленное равенство натяжений в левой и правой половинах нити  $R_1' = R_2' = R$ . Для определения реакции между балкой и нитью рассмотрим равновесие нити в точке  $C$ , отбросив балку и заменив ее действие реакцией, составляющие которой обозначим через  $N_x$  и  $N_y$  (рис. з). Кроме того, на нить в точке  $C$  действуют натяжения  $R_2$  и  $-R_2'$  отрезков нитей  $AC$  и  $EC$ . Составляем уравнения равновесия точки  $C$ :

$$\sum F_{kx} = R \cos \alpha - N_x = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = R - N_y - R \sin \alpha = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) находим:

$$N_y = R(1 - \sin \alpha) = \frac{Q}{2}.$$

Уравнение (1) дает:

$$N_x = 0,5 \sqrt{Q^2 + 2PQ}.$$

Для приобретения навыков в решении задач на равновесие системы твердых тел рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 108, 109, 112, 143, 144, 145, 147, 150, 164, 166, 167, 169.

#### § 4. Равновесие тел при наличии трения

1°. Равновесие твердого тела при наличии трения скольжения. Силы *трения скольжения* возникают между шероховатым телом и шероховатой поверхностью, если равнодействующая активных сил  $R$  не направлена по нормали к поверхности, на которой покоится тело (рис. 1.36). При равновесии тела необходимо, чтобы реакция шероховатой поверхности  $S$  (рис. 1.37) равнялась по величине  $R$  и была направлена в прямо противоположную сторону. Разложим активную силу  $R$  на нормальную составляющую  $N$  и касательную составляющую  $T$ , реакцию шероховатой поверхности на нормальную составляющую  $N_1$  и касательную составляющую  $F$ , называемую *силой трения скольжения* или *силой трения первого рода*. При равновесии должны соблюдаться равенства

$$N - N_1 = 0, \quad (1^*)$$

$$T - F = 0. \quad (2^*)$$

Из опыта известно, что при изменении величины составляющей  $T$  в определенных пределах равновесие тела не нарушается. Следовательно, и сила трения скольжения согласно уравнению (2\*) будет меняться в этих пределах.

Таким образом, сила трения скольжения при покое есть составляющая реакции связи, возникающая при действии активных сил, стремящихся сдвинуть тело. Эта составляющая реакции направлена в сторону, противоположную возможному движению тела. Величина силы трения может меняться от нуля до некоторого предела, в зависимости от величины и направления активных сил, с тем чтобы

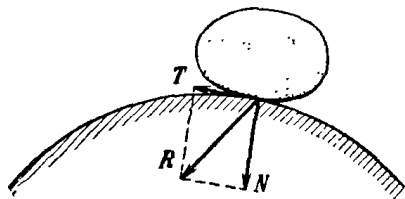


Рис. 1.36.

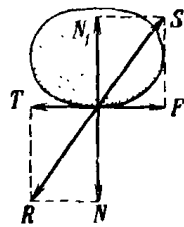


Рис. 1.37.

воспрепятствовать перемещению тела. Отличие силы трения от других реакций связей заключается в том, что ее модуль не может превысить определенного предела.

Зависимость между силой трения и нормальным давлением определяется законом Кулона: наибольшая величина силы трения скольжения пропорциональна нормальному давлению тела на поверхность

$$F_{\max} = fN. \quad (3^*)$$

Сила трения всегда направлена в сторону, противоположную возможному относительному движению.

Постоянная  $f$  называется *коэффициентом трения скольжения*. Экспериментально установлено, что этот коэффициент зависит от материала соприкасающихся тел и их шероховатости (чистоты обработки). Для абсолютно гладких тел коэффициент  $f$  равен нулю. Для реальных тел

$$f > 0. \quad (4^*)$$

Коэффициент трения не зависит от силы нормального давления и площади соприкосновения \*).

\*) В последнее время экспериментально установлено, что с изменением нормального давления и площади соприкосновения коэффициент трения незначительно меняется. Этим изменением мы будем пренебрегать.

Угол  $\varphi$  между нормалью к поверхности и полной ее реакцией в положении предельного равновесия, когда  $F = F_{\max}$ , называется углом трения (рис. 1.38). Этот угол определяется равенством

$$\operatorname{tg} \varphi = f, \quad \text{т. е.} \quad \varphi = \operatorname{arctg} f. \quad (5^*)$$

Построим в точке соприкосновения нормаль к поверхности и прямую  $OA$ , составляющую с ней угол  $\varphi$ . Конус, описанный этой прямой как образующей, называется *конусом трения*.

Если линия действия равнодействующей активных сил, приложенных к твердому телу, лежит внутри конуса трения, то вне зависимости от ее модуля тело останется в покое. Это объясняется тем, что в этом случае движущая сила будет меньше предельной силы трения.

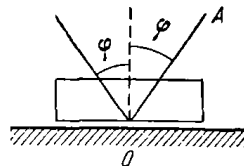


Рис. 1.38.

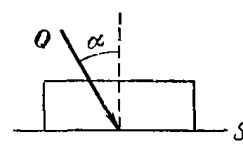


Рис. 1.39.

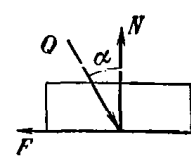


Рис. 1.40.

Действительно, рассмотрим равновесие тела, находящегося на горизонтальной плоскости  $S$  (рис. 1.39). К телу приложена равнодействующая активных сил  $Q$  под углом  $\alpha$  к нормали (нес тела входит в  $Q$ ). Коэффициент трения скольжения  $f = \operatorname{tg} \varphi$  известен. Полагая  $\alpha < \varphi$ , составим уравнение равновесия, приравняв нулю сумму проекций всех сил на направление нормали (рис. 1.40):

$$N - Q \cos \alpha = 0 \quad \text{или} \quad N = Q \cos \alpha. \quad (6^*)$$

Проектируя все силы на горизонтальное направление, находим:

$$Q \sin \alpha - F = 0 \quad \text{или} \quad Q \sin \alpha = F. \quad (7^*)$$

Замечая, что наибольшее значение силы трения равно

$$F_{\max} = fQ \cos \alpha, \quad (8^*)$$

и учитывая, что  $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi$ , заключаем:

$$Q \sin \alpha < fQ \cos \alpha. \quad (9^*)$$

Следовательно, сила  $Q$ , линия действия которой находится внутри конуса трения, не может сдвинуть тело с места, как бы велика она ни была. На этом свойстве основаны некоторые самотормозящиеся устройства.

Если из  $Q$  выделить вес тела  $P$ , то неравенство (9\*) примет вид

$$Q_1 \sin \alpha < f(P + Q_1 \cos \alpha). \quad (10^*)$$

Следовательно, сила  $Q_1$  не может нарушить равновесие тела при

$$f = \operatorname{tg} \varphi > \frac{Q_1 \sin \alpha}{P + Q_1 \cos \alpha}. \quad (11^*)$$

Сила трения может принимать различные значения от нуля до наибольшей величины. Поэтому уравнения равновесия твердого тела, которые выражались равенствами (§ 2, уравнения (1\*), (2\*), (3\*)), при наличии сил трения превращаются в неравенства. В связи с этим при решении задач, как правило, рассматривают наибольшее значение силы трения и находят при этом из уравнений равновесия предельные (наибольшие и наименьшие) значения искомых величин.

Так, например, рассматривая равновесие лестницы  $AB$  (рис. 1.41), опирающейся на гладкую стену и шероховатый пол, мы найдем наименьшее значение угла  $\alpha$ , при котором лестница будет в покое, если возьмем максимальное значение силы трения. Положений равновесия лестницы будет при этом бесчисленное множество, так как при любом значении угла  $\alpha$ , большем найденного, но меньшем  $90^\circ$ , для равновесия необходима сила трения меньшая, чем ее максимальная величина.

При решении задач на равновесие твердого тела при наличии сил трения следует выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги, на стр. 15. При этом следует реакцию шероховатой поверхности представить двумя составляющими — нормальной реакцией и силой трения, или же, не раскладывая эту реакцию на составляющие, направить ее под углом трения  $\varphi$  к нормали к поверхности (при максимальной силе трения);

5) сопоставить число известных величин и число независимых уравнений равновесия, которые должны быть равны для статически определенных задач; при этом к уравнениям равновесия твердого тела следует добавить зависимость силы трения от нормального давления (3\*);

6) выбрать систему координат;

7) составить систему уравнений равновесия для сил, приложенных к твердому телу или к системе твердых тел;

8) решив систему уравнений равновесия, определить искомые величины.

**Задача 1.33.** Определить модуль силы  $P$ , при которой начнется движение блока (рис. а). Вес блока  $Q = 200$  кгГ, высота  $h = 0,8$  м, ширина  $b = 0,6$  м. Сила  $P$ , приложенная в точке  $B$ , образует угол  $30^\circ$  с горизонтом. Коэффициент трения между блоком и горизонтальным полом  $f = 0,2$ .

Решение. Движение блока может начаться в двух случаях: а) если начнется скольжение блока по плоскости вправо (рис. б) и б) если блок начнет опрокидываться вокруг ребра (рис. в).

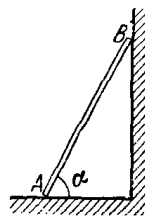


Рис. 1.41.

Рассмотрим первый случай. В этом случае точка приложения реакции пола  $N$  неизвестна. Составим уравнения равновесия — приравняем суммы проекций всех сил на оси координат (рис. б) нулю

$$\sum F_{kx} = P \cos 30^\circ - F_1 = 0,$$

$$\sum F_{ky} = N + P \sin 30^\circ - Q = 0.$$

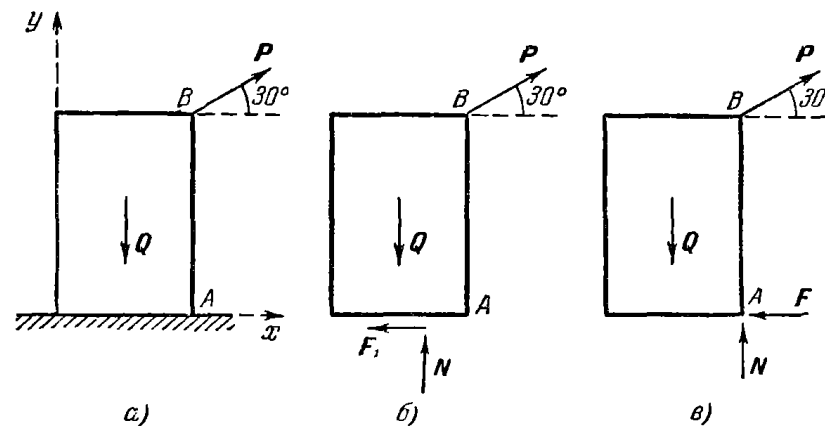
Кроме того, учтем зависимость силы трения от нормального давления

$$F_1 = fN.$$

Определим из данной системы уравнений силу  $P$ . Исключая силы  $F_1$  и  $N$ , находим:

$$P = \frac{fQ}{\cos 30^\circ + f \sin 30^\circ} = \frac{40}{0,965} = 41,5 \text{ кгГ}.$$

Если величина силы  $P$  станет больше этого значения, то блок начнет скользить вправо.



К задаче 1.33.

Рассмотрим второй случай. В случае возможного опрокидывания блока вокруг ребра  $A$  нормальная реакция  $N$  и сила трения  $F$  будут приложены в точке  $A$  (рис. в).

Составим три уравнения равновесия и четвертое уравнение — зависимость силы трения от нормального давления

$$\sum F_{kx} = P \cos 30^\circ - F = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = N - Q + P \sin 30^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum m_A(F_k) = Q \cdot \frac{b}{2} - P \cos 30^\circ h = 0, \quad (3)$$

$$F = fN. \quad (4)$$

Для нахождения величины силы  $P$  достаточно найти ее значение из (3):

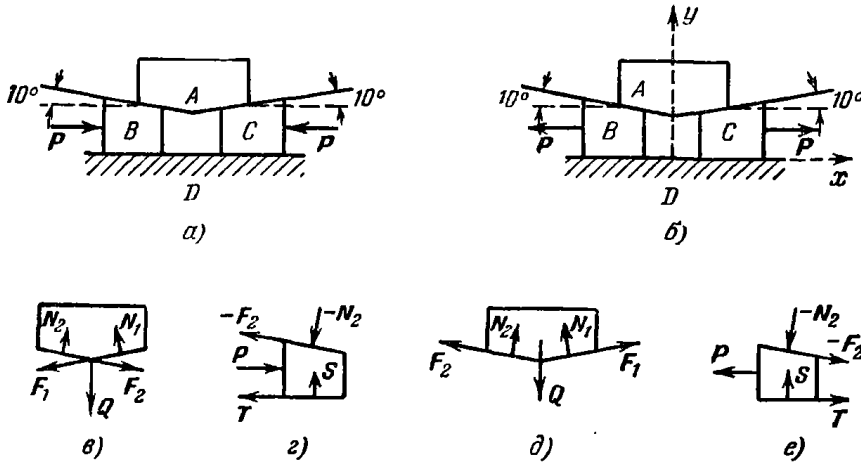
$$P = \frac{Qb}{2h \cos 30^\circ} = \frac{200 \cdot 0,6 \cdot 2}{2 \cdot 0,8 \cdot \sqrt{3}} = 86,6 \text{ кгГ.}$$

Если модуль силы  $P$  станет больше этого значения, то блок начнет опрокидываться около ребра  $A$ .

Уравнения (1), (2), (4) смогут быть использованы для определения нормальной реакции и силы трения.

Сопоставляя значения модуля силы  $P$  в первом и во втором случаях, заключаем, что так как величина силы  $P$  при скольжении меньше ее величины при опрокидывании, то при возрастании модуля силы  $P$  от нуля до максимума блок начнет сначала скользить, а не опрокидываться.

**Задача 1.34.** Для подъема (рис. а) или опускания (рис. б) каменного блока  $A$ , весом  $2000 \text{ кгГ}$ , применили два клина  $B$  и  $C$ . Коэффициент трения для соприкасающихся поверхностей  $AB$  и  $AC$  равен  $f = 0,2$ , а для поверхностей  $BD$  и  $CD$  равен  $f_1 = 0,25$ .



К задаче 1.34.

Найти равные по величине горизонтальные силы  $P$ , сжимающие клинья, необходимые для подъема блока  $A$ . Определить силы  $P$ , растягивающие клинья, необходимые для опускания блока  $A$ . Наклонные плоскости соприкосновения блока с клиньями образуют угол  $10^\circ$  с горизонтом.

**Решение.** Рассмотрим равновесие системы тел, состоящей из блока  $A$  и клиньев  $B$  и  $C$ . При подъеме блока (рис. а) силы  $P$  сжимают клинья. Рассмотрим отдельно равновесие блока и равновесие клина. Отбросив мысленно клинья, заменим их действие на блок

нормальными реакциями  $N$  и силами трения  $F$  (рис. в). Кроме того, на блок действует известная сила — вес  $Q$ . Составим два уравнения равновесия, приравняв нулю суммы проекций всех сил на оси  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= N_2 \sin 10^\circ - N_1 \sin 10^\circ + F_2 \cos 10^\circ - F_1 \cos 10^\circ = 0, \\ \sum F_{ky} &= N_1 \cos 10^\circ + N_2 \cos 10^\circ - Q - F_1 \sin 10^\circ - F_2 \sin 10^\circ = 0. \end{aligned}$$

Кроме того, запишем зависимость сил трения от нормального давления

$$F_1 = fN_1, \quad F_2 = fN_2.$$

Тогда находим:

$$N_1 = N_2 = 1050 \text{ кгГ}, \quad F_1 = F_2 = 210 \text{ кгГ.}$$

Перейдем, далее, к рассмотрению равновесия клина  $B$  (рис. з). На клин действуют: реакция блока, которая раскладывается на нормальную составляющую —  $N_2$  и силу трения —  $F_2$ , активная сила  $P$  и реакция пола, разложенная на нормальную силу  $S$  и силу трения  $T$ . Напишем уравнения равновесия для клина  $B$ :

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= -N_2 \sin 10^\circ - F_2 \cos 10^\circ - T + P = 0, \\ \sum F_{ky} &= S + F_2 \sin 10^\circ - N_2 \cos 10^\circ = 0. \end{aligned}$$

Кроме того, имеем зависимость силы трения от нормального давления

$$T = f_1 S.$$

Отсюда, пользуясь найденными ранее значениями реакций, найдем

$$S = 996 \text{ кгГ}, \quad T = 249 \text{ кгГ}, \quad P = 641 \text{ кгГ.}$$

Таким образом, для равновесия системы при подъеме блока получено необходимое граничное значение силы  $P = 641 \text{ кгГ}$ . Если же  $P > 641 \text{ кгГ}$ , то начнется подъем блока; система придет в движение.

Перейдем к определению величины силы  $P$  при спуске блока. Блок  $A$  находится в равновесии (рис. д) под действием активной силы — веса  $Q$ , нормальных реакций клиньев  $N_1$  и  $N_2$  и сил трения  $F_1$  и  $F_2$ . Силы трения в этом случае направлены вдоль наклонной плоскости вверх. Это сразу видно из рассмотрения равновесия клина  $B$  (рис. з), так как в связи с изменением направления силы  $P$  на прямо противоположные силы  $T$  и  $-F_2$  меняют свое направление на противоположное по сравнению с предыдущим случаем (рис. з).

Уравнения равновесия для блока  $A$  будут:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= F_1 \cos 10^\circ - F_2 \cos 10^\circ - N_1 \sin 10^\circ + N_2 \sin 10^\circ = 0, \\ \sum F_{ky} &= N_1 \cos 10^\circ + N_2 \cos 10^\circ + F_1 \sin 10^\circ + F_2 \sin 10^\circ - Q = 0. \end{aligned}$$

Кроме того, зависимость силы трения от нормального давления дается равенствами

$$F_1 = fN_1, \quad F_2 = fN_2.$$



Отсюда находим:

$$N_1 = N_2 = 980 \text{ кг}, \quad F_1 = F_2 = 196 \text{ кг}.$$

Уравнения равновесия для клина  $B$  (рис.  $e$ ) будут:

$$\sum F_{kx} = T + F_2 \cos 10^\circ - N_2 \sin 10^\circ - P = 0,$$

$$\sum F_{ky} = S - N_2 \cos 10^\circ - F_2 \sin 10^\circ = 0.$$

Сила трения выражается через нормальное давление

$$T = f_1 S.$$

Отсюда, пользуясь ранее найденными значениями реакций  $N_2$  и  $F_2$ , найдем:

$$S = 999 \text{ кг}, \quad T = 250 \text{ кг}, \quad P = 273 \text{ кг}.$$

Найденное значение  $P$  является граничным при равновесии системы в случае опускания блока.

Таким образом, на основании проведенного исследования можно заключить, что система будет находиться в равновесии, если проекция силы  $P$  лежит в пределах

$$-273 \text{ кг} \leq P_x \leq 641 \text{ кг}.$$

Если модуль каждой из сил  $P$  будет больше 641 кг, то при их направлении, указанном на рис.  $a$ , начнется подъем блока. Для того чтобы блок начал опускаться, нужно приложить силы  $P$  в противоположном направлении, причем их модуль должен превышать 273 кг.

**Задача 1.35.** Полуцилиндр весом  $P$  и радиуса  $R$  лежит на гладкой горизонтальной плоскости (рис.  $a$ ). Однородный стержень  $OA$  длиной  $l$  и весом  $Q$  шарнирно закреплен в точке  $O$ . Он опирается на гладкую поверхность полуцилиндра, образуя угол  $\alpha$  с вертикалью  $OB = h$ .

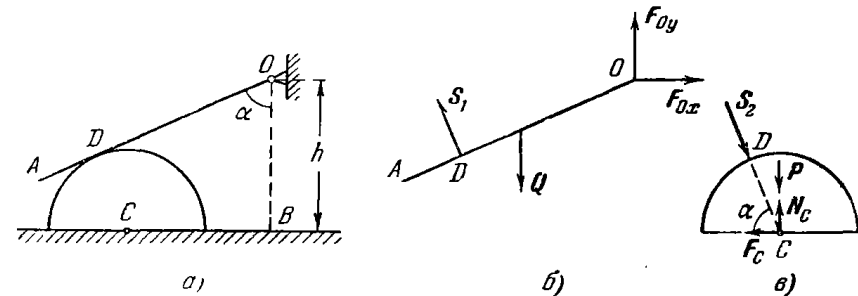
Определить наименьшую величину коэффициента трения скольжения  $f$  между полуцилиндром и горизонтальной плоскостью при равновесии.

**Решение.** Полуцилиндр и стержень являются системой твердых тел, находящихся в равновесии. Под действием веса стержня полуцилиндр может начать движение вправо (при недостаточной силе трения между полуцилиндром и полом). Для определения искомой наименьшей величины коэффициента трения скольжения между полуцилиндром и горизонтальной плоскостью рассмотрим отдельно равновесие стержня и полуцилиндра.

Рассматривая равновесие стержня  $OA$  (рис.  $b$ ), отбросим мысленно шарнир  $O$  и заменим его действие реакцией. Реакция шарнира приложена в точке  $O$  и неизвестна по величине и направлению. Представим поэтому реакцию двумя составляющими  $F_{Ox}$  и  $F_{Oy}$ . Отбрасывая

мысленно полуцилиндр, заменим его действие на стержень реакцией  $S_1$ , направленной перпендикулярно к стержню, так как согласно условию трение между стержнем и полуцилиндром отсутствует. Величина реакции  $S_1$  неизвестна. Кроме указанных реакций, к стержню в его середине приложен вес  $Q$ , направленный по вертикали.

На рис.  $b$  представлены силы, действующие на полуцилиндр при равновесии. Полуцилиндр находится в равновесии под действием трех сил: веса  $P$ , реакции стержня  $S_2$  и реакции негладкой горизонтальной плоскости. Вес  $P$  направлен по вертикальной оси симметрии полуцилиндра и, следовательно, линия действия этой силы проходит через точку  $C$ , лежащую на оси цилиндра. Реакция стержня  $S_2$  согласно пятому закону (закон равенства действия и противодействия) равна по величине  $S_1$  и направлена противоположно. Следовательно, реакция



К задаче 1.35.

$S_2$  перпендикулярна к стержню, совпадающему по направлению с касательной к полуцилиндру, и направлена по радиусу  $DC$ . Этот радиус образует с горизонтальным диаметром полуцилиндра угол  $\alpha$ , так как стороны  $AO$  и  $BO$ , образующие угол  $\alpha$ , соответственно перпендикулярны к прямой  $DC$  и горизонтальному диаметру. Равнодействующая реакций негладкой горизонтальной плоскости должна быть приложена в точке  $C$ . Действительно, полуцилиндр находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости. Следовательно, линии действия всех трех сил пересекаются в одной точке. Но силы  $S_2$  и  $P$  пересекаются в точке  $C$ . Значит, и линия действия равнодействующей реакции негладкой плоскости должна проходить через точку  $C$ . А это возможно только в том случае, если эта реакция приложена в точке  $C$ . Разложим реакцию горизонтальной плоскости на две составляющие: нормальную реакцию  $N_C$  и силу трения  $F_C$ . Перейдем к составлению уравнений равновесия обоих тел. Составим для стержня сумму проекций всех сил на оси  $x$  и  $y$  и приравняем их нулю:

$$F_{Ox} - S_1 \cos \alpha = 0, \quad (1)$$

$$F_{Oy} - Q + S_1 \sin \alpha = 0. \quad (2)$$

Уравнение моментов относительно точки  $O$  будет:

$$Q \frac{AO}{2} \sin \alpha - S_1 \cdot OD = 0. \quad (3)$$

Точка  $O$  выбрана за центр моментов, так как при этом составляющие реакции шарнира  $O$  не входят в уравнение моментов. Таким образом, из последнего уравнения непосредственно находится неизвестная сила  $S_1$ , а только эта сила из входящих в систему уравнения (1) — (3) и войдет далее в уравнения равновесия полуцилиндра. Уравнения (1) — (2) могут быть использованы для нахождения неизвестных составляющих реакций шарнира  $F_{Ox}$ ,  $F_{Oy}$ .

Из уравнения (3), пользуясь очевидным равенством

$$OD \cos \alpha = h - r \sin \alpha, \quad (4)$$

найдем:

$$S_1 = Q \frac{AO}{2 \cdot OD} \sin \alpha = Q \frac{l \cos \alpha \sin \alpha}{2(h - r \sin \alpha)}. \quad (5)$$

Перейдем к составлению уравнений равновесия для полуцилиндра. Проектируя силы, приложенные к полуцилиндру, на оси координат, получим два уравнения равновесия:

$$S_2 \cos \alpha - F_C = 0, \quad (6)$$

$$N_C - S_2 \sin \alpha - P = 0. \quad (7)$$

Кроме того, сила трения связана с нормальной реакцией зависимостью

$$F_C = f N_C. \quad (8)$$

Учитывая равенство  $S_1 = S_2$ , получим систему четырех уравнений (5) — (8) с четырьмя неизвестными  $S$ ,  $F_C$ ,  $N_C$ ,  $f$ . Для нахождения наименьшего значения коэффициента трения  $f$  исключим из рассматриваемой системы остальные неизвестные. Внося (5) и (8) в уравнение (6), получим:

$$Q \frac{l \sin 2\alpha \cos \alpha}{4(h - r \sin \alpha)} - f N_C = 0. \quad (9)$$

Подставляя (5) в (7), найдем:

$$N_C = P + Q \frac{l \sin 2\alpha \sin \alpha}{4(h - r \sin \alpha)}. \quad (10)$$

Исключая из полученных уравнений (9) и (10) реакцию  $N_C$ , получим окончательно:

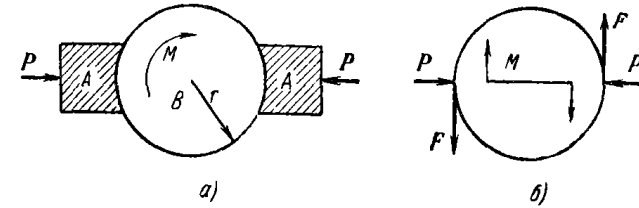
$$f = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \frac{2P}{Q} \left( \frac{2h}{l \sin 2\alpha} - \frac{r}{l \cos \alpha} \right)}.$$

Это и есть наименьшее значение коэффициента трения, при котором полуцилиндр и стержень будут находиться в равновесии.

**Задача 1.36.** Крутящий момент мотора электрической лебедки равен  $M = 120 \text{ кгм}$ . Для остановки мотора служат тормозные колодки тормоза  $A$  (рис. а), прижимающиеся силами  $P$  к тормозному диску  $B$ , жестко связанному с ротором мотора. Радиус тормозного диска  $r = 600 \text{ мм}$ .

Определить силу давления  $P$ , необходимую для удержания ротора в равновесии, если коэффициент трения между деревянными колодками и чугунным тормозным диском равен  $f = 0,5$ .

**Решение.** Рассмотрим равновесие тормозного диска  $B$  (рис. б). К диску приложена активная пара — крутящий момент  $M$ . Отбрасывая мысленно тормозные колодки, заменим их действие реакциями.



К задаче 1.36.

Каждая реакция раскладывается на две составляющие: нормальное давление  $P$  и силу трения  $F$ . Зависимость между нормальным давлением и силой трения выражается при помощи коэффициента трения

$$F = fP. \quad (1)$$

Для равновесия диска необходимо, чтобы сумма моментов всех сил, приложенных к диску, равнялась нулю. Силы  $P$  взаимно уравновешиваются и в уравнение моментов не входят. Силы трения образуют пару сил; крутящий момент представляет собой также пару сил. Сумма моментов сил, составляющих пару относительно любой точки, равна моменту пары. Таким образом,

$$F \cdot 2r - M = 0. \quad (2)$$

Подставляя значение силы трения (1) в уравнение (2), имеем:

$$fP \cdot 2r - M = 0,$$

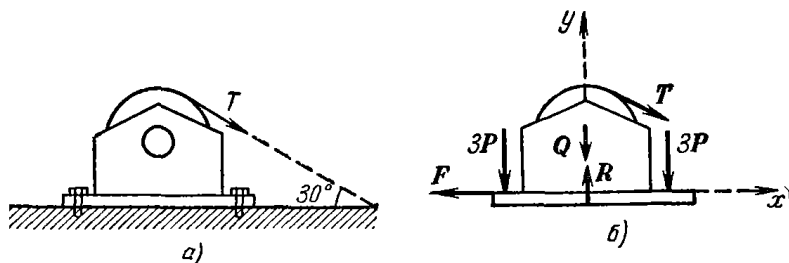
откуда

$$P = \frac{M}{2rf} = \frac{120}{2 \cdot 0,6 \cdot 0,5} = 200 \text{ кг}.$$

**Задача 1.37.** Электрическая лебедка (рис. а) весом  $Q = 2 \text{ Т}$  крепится к фундаменту при помощи шести болтов. Максимальная сила тяги  $T$  равна  $8 \text{ Т}$  и направлена под углом  $30^\circ$  к горизонту. Коэффициент трения между основанием лебедки и фундаментом равен  $f = 0,5$ .

Определить силу затяжки болтов, при которой срезающее усилие в них равно нулю и лебедка удерживается от сдвига одной силой трения.

Решение. Рассмотрим равновесие лебедки. К ней приложены две активные силы: вес  $Q$  и сила тяги  $T$ . Отбрасывая мысленно связи — болты и фундамент, заменим их действие реакциями (рис. б). Полагая затяжку всех шести болтов одинаковой, заменяем их действие двумя силами по  $3P$  каждая. Реакцию фундамента раскладываем на нормальную составляющую  $R$  и силу трения  $F$ . Силу трения направляем по горизонтали влево, в сторону, противоположную возможному сдвигу



К задаче 1.37.

лебедки. Так как срезающее усилие в болтах равно нулю, то следует рассмотреть равновесие лебедки как равновесие свободного твердого тела, находящегося под действием сил:  $Q$ ,  $T$ ,  $3P$ ,  $3P$ ,  $R$ ,  $F$ .

Выберем оси координат: ось  $x$  направим по горизонтали вправо, ось  $y$  вертикально вверх. Составим сумму проекций всех сил на ось  $y$  и приравняем ее нулю:

$$R - 6P - Q - T \sin 30^\circ = 0.$$

Из этого уравнения определяется нормальная составляющая реакции фундамента, равная по величине нормальному давлению на фундамент:

$$R = 6P + Q + T \sin 30^\circ = 6P + 2 + 8 \cdot 0,5 = 6P + 6. \quad (1)$$

Приравняв нулю сумму проекций всех сил на ось  $x$ , имеем:

$$T \cos 30^\circ - F = 0.$$

Из этого уравнения определяется необходимая для равновесия сила трения

$$F = T \cos 30^\circ = 8 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 6,92 T. \quad (2)$$

Зависимость между силой трения и нормальным давлением дается формулой

$$F = fR.$$

Подставив в это выражение значение силы трения (2), нормального давления (1) и коэффициента трения, получим:

$$6,92 = (6P + 6) f = (6P + 6) 0,5,$$

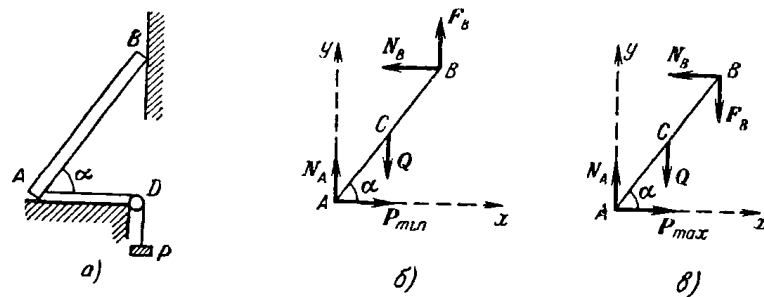
откуда определим необходимую величину затяжки болтов

$$P = \frac{6,92 - 6 \cdot 0,5}{6 \cdot 0,5} \approx 1,3 T.$$

Таким образом, для того чтобы болты не испытывали срезающих усилий и лебедка удерживалась от сдвига силой трения, необходимо и достаточно, чтобы затяжка каждого болта удовлетворяла условию

$$P \geq 1,3 T.$$

**Задача 1.38.** Однородный прямолинейный стержень  $AB$  весом  $Q$  (рис. а) опирается в точке  $B$  на шероховатую вертикальную стену. Коэффициент трения между стержнем и стеной равен  $f$ . В точке  $A$  стержень опирается на горизонтальный гладкий пол. Стержень удерживается в равновесии нитью  $AD$ , перекинутой через блок  $D$ . К концу нити подвешен груз  $P$ .



К задаче 1.38.

Определить пределы, в которых можно изменять величину груза  $P$ , чтобы не нарушить равновесия стержня.

Решение. Рассмотрим равновесие стержня  $AB$ . На него действует одна активная сила, вес стержня  $Q$ , приложенный посередине стержня в точке  $C$  и направленный по вертикали вниз. На стержень наложены три связи: горизонтальный пол, вертикальная стена и нить  $AD$ . На основании закона освобождения от связей отбросим мысленно связи и заменим их действие реакциями. Реакция гладкого пола  $N_A$  направлена перпендикулярно к полу, натяжение нити  $P$  направлено по горизонтали вправо, реакция шероховатой вертикальной стены может быть представлена двумя составляющими: нормальной реакцией  $N_B$ , направленной по горизонтали влево, и силой трения  $F_B$ . Сила трения направлена по вертикали: 1) в случае, когда груз  $P$

наименьшей величины и, следовательно, возможное направление движения точки — вниз, сила трения  $F_B$  направлена вверх (рис. б), в сторону, противоположную возможному движению; 2) в случае, когда груз  $P$  наибольшей величины, точка  $B$  может начать скользить по стене вверх и, следовательно, сила трения  $F_B$  (рис. в) направлена по вертикали вниз, опять-таки в сторону, противоположную возможному движению.

Рассматривая равновесие стержня  $AB$  как свободного твердого тела, находящегося под действием пяти сил:  $Q$ ,  $N_A$ ,  $N_B$ ,  $F_B$ ,  $P_{\min}$  (рис. б), найдем минимальное значение веса груза  $P_{\min}$ . Выберем оси координат — ось  $x$  направляем по горизонтали вправо, ось  $y$  вертикально вверх. Составим уравнения равновесия (рис. б):

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= P_{\min} - N_B = 0, \\ \sum F_{ky} &= N_A + F_B - Q = 0, \\ \sum m_B(F_k) &= P_{\min} l \sin \alpha + Q \cdot 0,5 l \cos \alpha - N_A l \cos \alpha = 0.\end{aligned}$$

Через  $l$  в последнем уравнении обозначена длина стержня  $AB$ . Кроме того, напишем зависимость силы трения от нормального давления

$$F_B = fN_B.$$

Задача является статически определенной, так как система из четырех уравнений содержит четыре неизвестных:  $N_A$ ,  $F_B$ ,  $N_B$ ,  $P_{\min}$ . Решая совместно эту систему уравнений, находим искомое минимальное значение величины груза  $P$ :

$$P_{\min} = \frac{Q}{2(\operatorname{tg} \alpha + f)}.$$

Для определения наибольшей величины груза  $P$  рассмотрим равновесие стержня  $AB$  (рис. в) как свободного твердого тела, находящегося под действием пяти сил:  $N_B$ ,  $F_B$ ,  $Q$ ,  $N_A$ ,  $P_{\max}$ . Тогда уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= P_{\max} - N_B = 0, \\ \sum F_{ky} &= N_A - F_B - Q = 0, \\ \sum m_B(F_k) &= P_{\max} l \sin \alpha + Q \cdot 0,5 l \cos \alpha - N_A l \cos \alpha = 0,\end{aligned}$$

кроме того,

$$F_B = fN_B.$$

Решая совместно эту систему уравнений, находим наибольшую величину груза  $P$ , при которой стержень будет в равновесии:

$$P_{\max} = \frac{Q}{2(\operatorname{tg} \alpha - f)}. \quad (1)$$

Из уравнения (1) следует, что  $P_{\max}$  неограниченно возрастает, если  $\operatorname{tg} \alpha \rightarrow f$ . При  $\operatorname{tg} \alpha < f$  для возможности подъема стержня (скольжения точки  $B$  вверх по стене) необходимо, чтобы сила  $Q$  была направлена вверх по вертикали, что невозможно. Таким образом, в этом случае не существует силы  $P_{\max}$ , которая могла бы нарушить равновесие лестницы.

Таким образом, равновесие стержня возможно при изменении веса груза  $P$  в пределах

$$\frac{Q}{2(\operatorname{tg} \alpha - f)} \geq P \geq \frac{Q}{2(\operatorname{tg} \alpha + f)}. \quad (2)$$

Эта задача может быть решена и несколько иным путем. Замечаем, что по условию задачи не требуется определения неизвестной реакции гладкого пола  $N_A$ . Поэтому из возможных уравнений равновесия стержня (рис. б) выберем такие, которые не содержат  $N_A$ . Составим уравнение моментов всех сил относительно точки  $A$ :

$$\sum m_A(F_k) = N_B l \sin \alpha - F_B l \cos \alpha - Q \frac{l}{2} \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

Второе уравнение равновесия — равенство нулю суммы проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$ . В него также не войдет неизвестная сила  $N_A$ :

$$\sum F_{kx} = P_{\min} - N_B = 0. \quad (4)$$

К этим двум уравнениям добавляется соотношение между нормальной реакцией и силой трения в точке  $B$ :

$$F_B = fN_B. \quad (5)$$

Подставив значение  $F_B$  из (5) в (3) и учитывая (4), сразу получим.

$$P_{\min} = \frac{Q}{2(\operatorname{tg} \alpha + f)}. \quad (6)$$

Аналогично для нахождения наибольшего значения силы  $P$  составим такие же уравнения равновесия (рис. в):

$$\begin{aligned}\sum m_A(F_k) &= N_B l \sin \alpha - F_B l \cos \alpha - Q \frac{l}{2} \cos \alpha = 0, \\ \sum F_{kx} &= P_{\max} - N_B = 0, \\ F_B &= fN_B.\end{aligned}$$

Решив совместно эту систему уравнений, определим максимальное значение силы  $P$ :

$$P_{\max} = \frac{Q}{2(\operatorname{tg} \alpha - f)}. \quad (7)$$

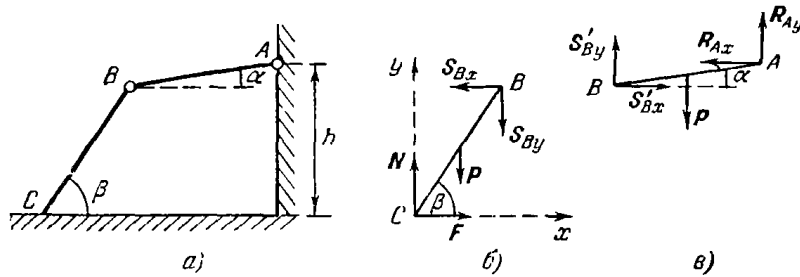
Таким образом, как и следовало ожидать, мы пришли к результату, выражаемому формулой (2).

Сопоставляя оба решения, мы видим, что в первом случае мы применили общий метод составления уравнений равновесия для твер-

лого тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил, не учитывая особенностей данной задачи. Достоинство общих методов и заключается в том, что они ведут к цели, несмотря на различия в условиях задач.

Иногда такой путь не является самым простым и коротким. На примере второго способа решения мы видим, что при учете особенности данной задачи (в задаче не требуется определить величину реакции гладкого пола  $N_A$ ) удалось составить меньшее число уравнений равновесия, которые проще и скорее привели к цели.

**Задача 1.39.** Два одинаковых однородных стержня  $AB$  и  $BC$ , весом  $P$  и длиной  $l$  каждый, шарнирно соединены между собой. В точке  $A$  стержень  $AB$  шарнирно прикреплен к вертикальной стене.



К задаче 1.39.

Точка  $A$  находится на высоте  $h$  над горизонтальным полом, на который концом  $C$  свободно опирается стержень  $BC$ .

Зная коэффициент трения  $f$  между стержнем  $BC$  и горизонтальным полом, определить угол  $\beta$  при равновесии.

**Решение.** Рассмотрим отдельно равновесие стержня  $BC$  (рис. б) и стержня  $AB$  (рис. в). Отбросив мысленно связи, заменим их действие реакциями. К стержню  $BC$  приложены силы: вес  $P$ , нормальная реакция горизонтального пола  $N$  и сила трения  $F$ , направленная в сторону, противоположную возможному движению; реакция шарнира  $B$  не известна ни по величине, ни по направлению (представим ее двумя составляющими  $S_{Bx}$  и  $S_{By}$ ).

К стержню  $AB$  приложены силы: вес  $P$ ; составляющие реакции шарнира  $B$ , равные и противоположные силам, приложенным в точке  $B$  к стержню  $BC$  (обозначим эти составляющие через  $S'_{Bx}$  и  $S'_{By}$ ); составляющие реакции шарнира  $A$ , названные  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$ .

Составим уравнения предельного равновесия для стержня  $BC$ :

$$F - S_{Bx} = 0, \quad (1)$$

$$N - P - S_{By} = 0, \quad (2)$$

$$Fl \sin \beta - Nl \cos \beta + P \cdot \frac{l}{2} \cos \beta = 0, \quad (3)$$

$$F = fN. \quad (4)$$

Уравнение моментов (3) составлено относительно точки  $B$ , уравнение (4) дает зависимость силы трения от нормального давления.

Уравнения равновесия для стержня  $AB$  будут:

$$S'_{Bx} - R_{Ax} = 0, \quad (5)$$

$$S'_{By} - P + R_{Ay} = 0, \quad (6)$$

$$S'_{Bx}l \sin \alpha - S'_{By}l \cos \alpha + P \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha = 0. \quad (7)$$

Здесь сумма моментов сил (7) составлена относительно точки  $A$ .

Чтобы найти уравнения, определяющие зависимость между углами  $\alpha$  и  $\beta$ , решим совместно составленные уравнения, кроме уравнений (5) и (6), так как последние содержат  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$ , которые согласно условию задачи находить не нужно. Из уравнения (1), (2) и (4) найдем:

$$S_{Bx} = f(P + S_{By}). \quad (8)$$

Исключив из уравнения (3) неизвестные  $F$ ,  $N$ , получим:

$$S_{Bx}l \sin \beta - (P + S_{By})l \cos \beta + \frac{Pl}{2} \cos \beta = 0. \quad (9)$$

Разделив это равенство на  $l \cos \beta$  и воспользовавшись равенством (8), найдем:

$$f(P + S_{By}) \operatorname{tg} \beta - S_{By} - \frac{P}{2} = 0. \quad (10)$$

С другой стороны, разделив уравнение (7) на  $l \cos \alpha$  и воспользовавшись равенством (8), получим:

$$f(P + S_{By}) \operatorname{tg} \alpha - S_{By} + \frac{P}{2} = 0. \quad (11)$$

Исключив из уравнений (10) и (11)  $S_{By}$ , найдем:

$$3 \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{f}. \quad (12)$$

Это — первое уравнение, определяющее углы  $\alpha$ ,  $\beta$  в положении равновесия.

Второе уравнение найдем из геометрического равенства

$$l \sin \beta + l \sin \alpha = h, \quad (13)$$

откуда получим:

$$\sin \beta + \sin \alpha = \frac{h}{l}. \quad (14)$$

Исключив из равенств (12) и (14) угол  $\alpha$ , найдем:

$$3 \operatorname{tg} \beta - \frac{h/l - \sin \beta}{\sqrt{1 - (h/l - \sin \beta)^2}} = \frac{2}{f}.$$

Если  $\beta_0$  — корень этого уравнения, то равновесие системы будет при любом  $\beta > \beta_0$ .

**Задача 1.40.** Однородный стержень  $AB$  длиной  $l$  опирается концом  $A$  на внутреннюю гладкую поверхность пустотелого полуцилиндра радиуса  $r$  и концом  $B$  на шероховатый горизонтальный пол ( $l < 2r$ ). В положении равновесия центр тяжести стержня  $C$  находится на вертикальном диаметре полуцилиндра.

Определить угол  $\beta$ , составляемый стержнем с полом в положении равновесия, и коэффициент трения скольжения  $f$  между стержнем и полом, полагая, что сила трения достигает в этом положении стержня своего предельного значения.

**Решение.** Рассмотрим равновесие стержня  $AB$ . На стержень действует одна активная сила, вес стержня  $P$ . Так как центр тяжести стержня  $C$  лежит на одной вертикали с центром цилиндра  $O$ , то линия действия силы тяжести проходит через точку  $O$ . На стержень наложены две связи: гладкая поверхность полуцилиндра и шероховатый пол. Применим закон освобожденности от связей. Отбросим мысленно связи (рис. б) и заменим их действие реакциями. Реакция гладкой стенки полуцилиндра направлена нормально к его поверхности, т. е. по радиусу  $AO$ . Изобразим ее действием реакциями. Реакция  $T$  и веса  $P$ . Но стержень находится в равновесии под действием трех сил:  $T$ ,  $P$  и реакции пола в точке  $B$ . Согласно теореме о трех непараллельных силах линия действия реакции пола  $R$  должна также пересекать точку  $O$ . Направим реакцию  $R$  по линии  $BO$  (рис. б). Угол между нормалью к полу и реакцией  $R$  есть угол трения  $\varphi$ , причем  $f = \operatorname{tg} \varphi$ . Из треугольника  $OBD$  найдем:

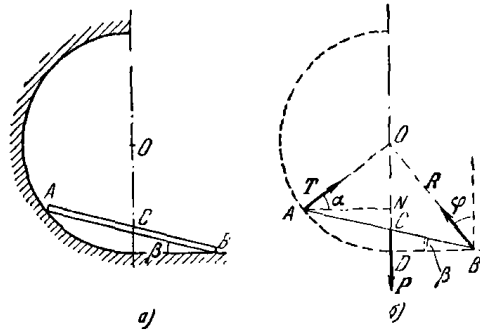
$$f = \operatorname{tg} \varphi = \frac{BD}{OD} = \frac{BC \cos \beta}{OD} = \frac{l \cos \beta}{2r}. \quad (1)$$

Обозначим угол между силой  $T$  и линией горизонта буквой  $\alpha$ . Тогда, опуская перпендикуляр  $AN$  из точки  $A$  на вертикальный диаметр, имеем  $AN = AO \cos \alpha = AC \cos \beta$ , или

$$r \cos \alpha = \frac{l}{2} \cos \beta. \quad (2)$$

Аналогично  $ON = r \sin \alpha$  и  $DN = l \sin \beta$ ; следовательно,

$$r \sin \alpha + l \sin \beta = r. \quad (3)$$



К задаче 1.40.

Сопоставив (1) и (2), найдем:

$$\cos \alpha = f. \quad (4)$$

Обозначив для краткости  $\frac{l}{2r} = b < 1$  (так как по условию  $l < 2r$ ), найдем из (2) и (3), что

$$\cos \alpha = b \cos \beta, \quad (5)$$

$$\sin \alpha = 1 - 2b \sin \beta. \quad (6)$$

Возведем равенства (5) и (6) в квадрат и сложим. После несложных преобразований получим:

$$3b \sin^2 \beta - 4 \sin \beta + b = 0,$$

откуда

$$\sin \beta = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3b^2}}{3b}.$$

Следовательно,

$$\cos \beta = \frac{2}{3b} \sqrt{3b^2 - 2 \pm \sqrt{4 - 3b^2}}.$$

Знак минус перед вторым корнем должен быть отброшен, так как

$$3b^2 - 2 - \sqrt{4 - 3b^2} < 0$$

и значение  $\cos \beta$  будет при этом минимым. Итак, окончательно

$$\cos \beta = \frac{2}{3b} \sqrt{3b^2 - 2 + \sqrt{4 - 3b^2}},$$

$$f = b \cos \beta = \frac{2}{3} \sqrt{3b^2 - 2 + \sqrt{4 - 3b^2}}.$$

Решение этой задачи отличается от большинства задач на равновесие при наличии трения тем, что мы не разлагаем реакцию шероховатой поверхности на нормальную составляющую и силу трения.

**Задача 1.41.** Две одинаковые призмы  $A$  и  $B$  образуют лестницу. Ступени нагружены силами  $P$  и  $Q$ , точки приложения которых заданы (рис. а). Призма  $A$  опирается на вертикальную стену и наклоненную под углом  $\alpha$  плоскость второй призмы. Призма  $B$  опирается на горизонтальный пол.

Определить условия равновесия, учитывая трение всех контактирующих поверхностей. Коэффициенты трения призм о горизонтальный пол, вертикальную стену и друг о друга одинаковы и равны  $f = \operatorname{tg} \varphi$ . Собственными весами призм можно пренебречь по сравнению с силами  $P$  и  $Q$ .

Решение. Рассмотрим равновесие каждой из призм, отбросив мысленно стену, пол и другую призму, заменив их действия нормальными реакциями  $N_1, N_2, N_3$  и силами трения  $T_1, T_2, T_3$ . Расчетные схемы показаны на рис. б для верхней призмы и на рис. в для нижней.

Максимальные значения касательных сил (сил трения) при равновесии равны

$$T_1 = fN_1, \quad T_2 = fN_2, \\ T_3 = fN_3.$$

В проекциях на координатные оси уравнения равновесия имеют вид:

для призмы А

$$N_1 - N_2 \sin \alpha + \\ + fN_3 \cos \alpha = 0,$$

$$N_2 \cos \alpha + fN_1 - P + \\ + fN_2 \sin \alpha = 0;$$

для призмы В

$$-fN_2 \cos \alpha + \\ + N_2 \sin \alpha - fN_3 = 0, \\ -fN_2 \sin \alpha - N_2 \cos \alpha - Q + \\ + N_3 = 0.$$

Решив эту систему уравнений равновесия, найдем:

$$P = fQ \frac{2f \sin \alpha + (1 - f^2) \cos \alpha}{(1 - f^2) \sin \alpha - 2f \cos \alpha}$$

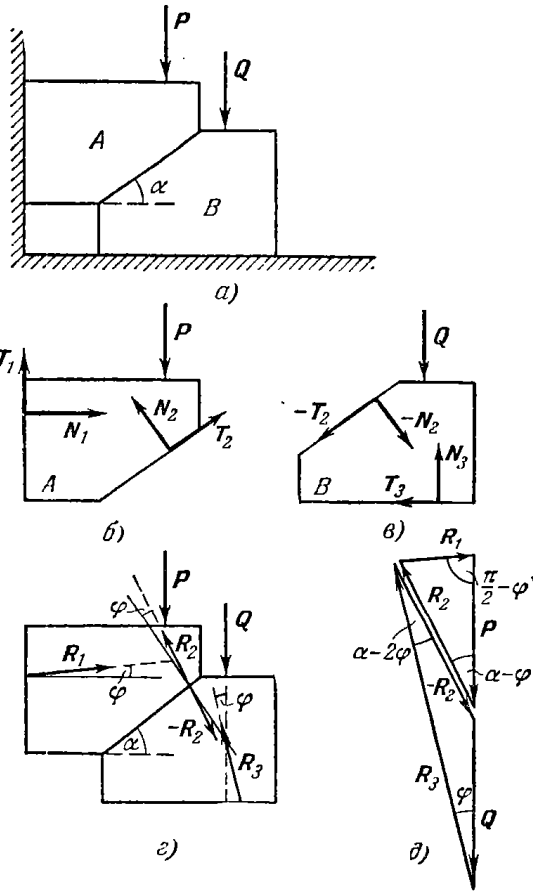
или, после подстановки  $f = \operatorname{tg} \varphi$  и несложных тригонометрических преобразований,

$$P = Q \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi)}.$$

Отсюда видно, что решение существует, если  $\alpha > 2\varphi$ . Таким образом, условие равновесия лестницы, образованной двумя призмами, будет:

$$P \leq Q \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi)}.$$

Эта задача наряду с приведенным аналитическим решением может быть решена и графически.



К задаче 1.41.

Если заменить касательную и нормальную составляющую реакции в каждом случае одним вектором (рис. г):

$$R_1 = N_1 + T_1, \\ \pm R_2 = \pm N_2 \pm T_2, \\ R_3 = N_3 + T_3,$$

то к каждой из призм будет приложено три силы (см. рис. г) и можно воспользоваться теоремой о трех силах. Графическое решение — комбинация двух замкнутых силовых треугольников — представлено на рис. д.

Задача имеет решение только при  $\alpha > 2\varphi$ . Это учтено на рис. г, где угол  $\alpha$  начерчен достаточно большим.

Задача 1.42. Однородный стержень АС длиной  $l$  и весом  $G$  опирается концом А на гладкую горизонтальную плоскость, а промежуточной точкой В на прямоугольную призму, стоящую на той же гладкой плоскости. Угол трения между стержнем и призмой равен  $\varphi$ .

Определить, какой вес должна иметь призма, чтобы система была в равновесии. Стержень составляет с горизонтом угол  $\alpha$ . Размеры призмы известны (рис. а).

Решение. Рассмотрим равновесие стержня и призмы в отдельности. Отбросив мысленно горизонтальную плоскость и призму, заменим их действие на стержень реакциями. На стержень действуют (рис. б): вес  $G$ , нормальная реакция гладкой плоскости  $N_A$ , нормальная реакция призмы  $N_B$ , касательная реакция призмы  $T_B$  (сила трения).

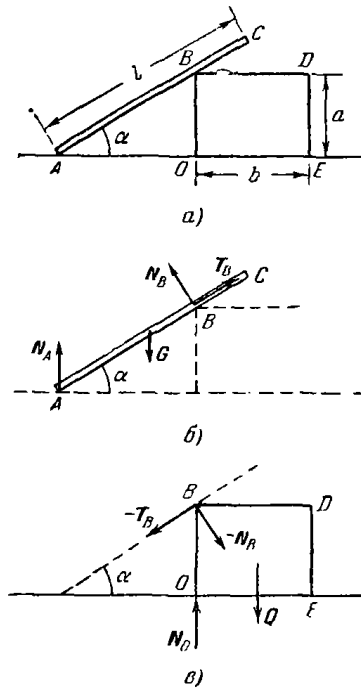
Составим уравнение моментов относительно точки А:

$$-G \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha + N_B \cdot \frac{a}{\sin \alpha} = 0,$$

откуда получим:

$$N_B = \frac{Gl}{2a} \cos \alpha \cdot \sin \alpha.$$

Рассмотрим, далее, предельное равновесие призмы, отбросив мысленно пол и стержень. На призму действуют (рис. в): вес  $Q$ , давление стержня —  $N_B$ , сила трения —  $T_B$  и нормальная реакция  $N_O$  плоскости.



К задаче 1.42.

Где следует приложить равнодействующую нормальной реакции плоскости? Правее силы  $Q$  она не может быть приложена, так как относительно такой точки не будет выполнено равенство нулю суммы моментов всех сил. Значит, точка приложения реакции лежит на левой половине отрезка  $OE$ . Крайнее возможное положение ее, соответствующее критическому равновесию, в точке  $O$ , когда призма может начать поворачиваться вокруг ребра  $O$ . На рис. *в* изображены силы в положении критического равновесия.

Горизонтальная составляющая нормальной давления —  $N_B$  на призму не должна превышать по модулю горизонтальной составляющей силы трения —  $T_B$  в предельном положении равновесия. Это условие может быть записано так:

$$T_B \cos \alpha \geq N_B \sin \alpha.$$

При этом знак неравенства следует понимать в том смысле, что сила трения не достигает своего максимального значения и, следовательно, равновесие системы не будет нарушено.

Подставив в это неравенство максимальное значение  $T_B$ , равное  $N_B \cdot \operatorname{tg} \varphi$ , получим:

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot N_B \cos \alpha \geq N_B \sin \alpha, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \varphi \geq \operatorname{tg} \alpha,$$

т. е.

$$\varphi \geq \alpha.$$

Составим уравнение моментов сил, приложенных к призме относительно точки  $O$ :

$$T_B \cdot a \cdot \cos \alpha - N_B \cdot a \cdot \sin \alpha - Q \frac{b}{2} = 0.$$

Подставив предельное значение силы трения

$$T_B = N_B \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

и значение  $N_B$ , найденное ранее, в предыдущее равенство, получим:

$$a \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha \frac{Gl}{2a} \cos \alpha \sin \alpha - \frac{Gl}{2a} \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot a \sin \alpha - Q \frac{b}{2} = 0.$$

Отсюда найдем:

$$Q = \frac{Gl}{b} (\operatorname{tg} \varphi \cos \alpha - \sin \alpha) \cos \alpha \sin \alpha = \\ = \frac{Gl}{2b \cos \varphi} (\sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha) \cdot \sin 2\alpha,$$

или окончательно

$$Q = \frac{Gl}{2b \cos \varphi} \sin (\varphi - \alpha) \sin 2\alpha.$$

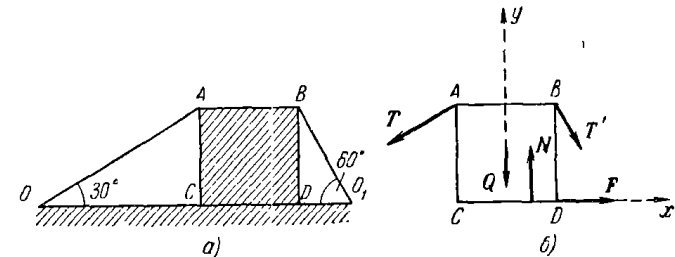
Из этой формулы также следует, что задача имеет решение при  $\varphi \geq \alpha$ , ибо в противном случае вес призмы получится отрицательным,

что невозможно. Чем ближе угол наклона стержня к углу трения, тем более легкой может быть призма; в случае когда  $\alpha = \varphi$ , даже невесомая призма удерживается в равновесии.

**Задача 1.43.** Квадратный ящик весом  $Q$  находится в покое на горизонтальном негладком полу. Коэффициент трения между полом и ящиком равен  $f$ . Через ящик перекинут трос, закрепленный своими концами в  $O$  и  $O_1$ . Ветви троса образуют с полом углы  $30^\circ$  и  $60^\circ$ .

Пренебрегая трением между ящиком и тросом, определить натяжение троса, при котором ящик будет оставаться в покое (рис. *а*).

Решение. Рассмотрим равновесие ящика (рис. *б*). На ящик действует одна активная сила — вес  $Q$ , приложенная в центре и направленная по вертикали вниз. На ящик наложены две связи — трос и



К задаче 1.43.

пол. Отбрасывая мысленно эти связи, заменим их действие реакциями. Так как трение между ящиком и тросом отсутствует, то натяжение троса  $T$  будет везде одинаковым. Натяжение троса будет действовать на ящик по направлениям  $OA$  и  $O_1B$  (рис. *а*). Разложим реакцию пола на нормальную реакцию  $N$  и касательную реакцию  $F$ , являющуюся силой трения.

Рассмотрим равновесие ящика как свободного тела, находящегося под действием пяти сил, указанных на рисунке. Составим уравнения равновесия, приравняв нулю сумму проекций всех сил на оси  $x$  и  $y$ :

$$T \cos 60^\circ - T \cos 30^\circ + F = 0, \quad (1)$$

$$N - Q - T \sin 60^\circ - T \sin 30^\circ = 0. \quad (2)$$

Кроме того, имеем зависимость между силой трения и нормальным давлением (по модулю равным нормальной реакции), а именно:

$$F = fN. \quad (3)$$

Из (2) находим:

$$N = Q + T(\sin 60^\circ + \sin 30^\circ). \quad (4)$$

Подставляя это значение в (3) и затем в (1), имеем:

$$T(\cos 60^\circ - \cos 30^\circ) + f[Q + T(\sin 60^\circ + \sin 30^\circ)] = 0. \quad (5)$$



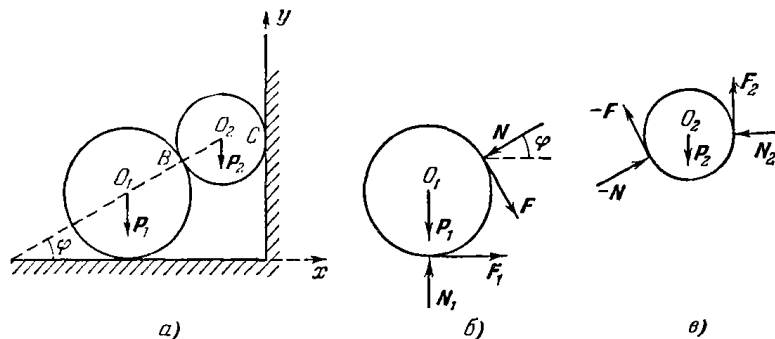
Решая уравнение (5) относительно неизвестного  $T$ , находим натяжение троса в предельном случае

$$T = \frac{fQ}{\cos 30^\circ - \cos 60^\circ - f(\sin 60^\circ - \sin 30^\circ)} = \frac{2fQ}{\sqrt{3} - 1 - f(\sqrt{3} + 1)}.$$

Ящик будет находиться в покое при

$$T \leq \frac{2fQ}{\sqrt{3} - 1 - f(\sqrt{3} + 1)}.$$

**Задача 1.44.** Два цилиндра с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  и весами  $P_1$  и  $P_2$  опираются на горизонтальный пол и вертикальную стену так, что прямая  $O_1O_2$ , соединяющая центры цилиндров, образует угол  $\varphi$  с го-



К задаче 1.44.

ризонтом. Коэффициенты трения: между первым цилиндром и горизонтальным полом  $f_1$ , между вторым цилиндром и вертикальной стеной  $f_2$  и между цилиндрами  $f$ .

Определить минимальные значения этих коэффициентов, при которых система может находиться в равновесии, а также нормальные реакции пола, стены и реакции между цилиндрами.

**Решение.** Рассмотрим равновесие каждого из цилиндров в отдельности (рис. б и в), отбросив мысленно пол, стену и другой цилиндр, заменив их действие реакциями. Каждую реакцию разложим на нормальную составляющую и силу трения. Тогда первый цилиндр можно рассматривать как свободное твердое тело, находящееся в равновесии под действием пяти сил: веса, двух нормальных реакций и двух сил трения (рис. б). Аналогично рассматривается равновесие второго цилиндра (рис. в). Силы трения направлены по касательным, проведенным к цилиндрам в точках соприкосновения в сторону, противоположную возможному движению цилиндра.

Составим уравнения равновесия для первого цилиндра:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= F_1 - N \cos \varphi + F \sin \varphi = 0, \\ \sum F_{ky} &= N_1 - P_1 - N \sin \varphi - F \cos \varphi = 0, \\ \sum m_{O_1}(F_k) &= F_1 r_1 - F r_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Уравнения равновесия для второго цилиндра будут:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= N \cos \varphi - N_2 - F \sin \varphi = 0, \\ \sum F_{ky} &= N \sin \varphi - P_2 + F_2 + F \cos \varphi = 0, \\ \sum m_{O_2}(F_k) &= F_2 r_2 - F r_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

К этим уравнениям равновесия следует добавить зависимости предельных сил трения от нормального давления

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= f_1 N_1, \\ F &= f N, \\ F_2 &= f_2 N_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Решив совместно систему из девяти уравнений (1) — (3), найдем:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{P_2 \cos \varphi}{P_1(1 + \sin \varphi + \cos \varphi) + P_2(1 + \sin \varphi)}; & N_1 &= P_1 + P_2 \frac{1 + \sin \varphi}{1 + \sin \varphi + \cos \varphi}; \\ f_2 &= 1; & N_2 &= \frac{P_2 \cos \varphi}{1 + \sin \varphi + \cos \varphi}; \\ f &= \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi}; & N &= P_2 \frac{1 + \sin \varphi}{1 + \sin \varphi + \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Полученные значения коэффициентов трения являются минимальными; если они будут превышать эти величины, то равновесие системы сохранится, а силы трения при этом не будут достигать своих предельных значений.

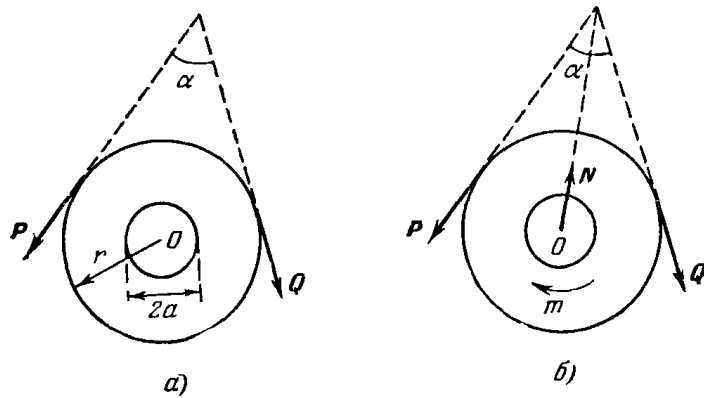
**Задача 1.45.** Шкив радиуса  $r$  насажен на вал радиуса  $a$ , который может вращаться в подшипниках. Коэффициент трения между валом и подшипниками  $f$ .

Определить наибольшую величину силы  $P$ , которая удержит шкив в покое, если к шкиву приложена сила  $Q$ , образующая с силой  $P$  угол  $\alpha$  (рис. а). Найти значение силы  $P$ , когда  $\alpha = \pi/2$  и когда силы  $P$  и  $Q$  параллельны.

**Решение.** Отбросив мысленно подшипники, рассмотрим равновесие вала вместе со шкивом, заменив действие подшипников нормальной реакцией  $N$  и моментом сил трения  $m$ . Момент сил трения (относительно точки  $O$ ) может быть представлен в виде

$$m = fN a. \quad (1)$$

Момент сил трения будет направлен в сторону, противоположную возможному движению. Таким образом, этот момент будет совпадать



К задаче 1.45.

по направлению с моментом меньшей силы. Положив  $Q < P$ , составим уравнение равновесия вала со шкивом, приравняв нулю сумму моментов всех сил относительно центра  $O$ :

$$P \cdot r - Q \cdot r - fN \cdot a = 0. \quad (2)$$

С другой стороны, нормальная реакция  $N$  определится по величине как равнодействующая двух сил  $P$  и  $Q$

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}. \quad (3)$$

Подставив это значение в уравнение (2) и освободившись от радиуса, получим:

$$\left(1 - \frac{f^2 a^2}{r^2}\right) P^2 - \left(2Q + 2Q \cos \alpha \frac{f^2 a^2}{r^2}\right) P + Q^2 \left(1 - \frac{f^2 a^2}{r^2}\right) = 0. \quad (4)$$

Величина  $P$  равна большему корню этого квадратного уравнения.

Меньший корень  $P$  будет соответствовать случаю  $Q > P$ . В случае, когда  $P$  и  $Q$  параллельны, решение упрощается. Действительно, при этом

$$N = P + Q \quad (5)$$

и, следовательно, из (2) после несложных преобразований находим:

$$P = Q \frac{r + fa}{r - fa}. \quad (6)$$

В случае  $\alpha = \pi/2$  силы  $P$  и  $Q$  взаимно перпендикулярны, и из (4) получим:

$$P = Q \left[ \frac{r^2}{r^2 - f^2 a^2} \pm \sqrt{\left(\frac{r^2}{r^2 - f^2 a^2}\right)^2 - 1} \right]. \quad (7)$$

Знак минус не удовлетворяет условию задачи, так как при этом

$$\frac{r^2}{r^2 - f^2 a^2} - \sqrt{\left(\frac{r^2}{r^2 - f^2 a^2}\right)^2 - 1} < 1 \quad (8)$$

и, следовательно,  $P < Q$ , что противоречит условию. Неравенство (8) вытекает из того, что функция

$$\varphi(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

при  $x = 1$  принимает значение  $\varphi(1) = 1$  и при  $x > 1$  монотонно убывает. Действительно,

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} < 0 \quad \text{при } x > 1,$$

а в рассматриваемом случае

$$x = \frac{r^2}{r^2 - f^2 a^2} > 1.$$

Знак минус в равенстве (7) соответствует случаю  $Q > P$ , когда момент трения будет совпадать по направлению с моментом силы  $P$ .

Для приобретения навыков в решении задач на равновесие при наличии трения скольжения рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 67, 71, 73, 74, 174, 175, 176, 177, 178, 180, 184, 186, 187.

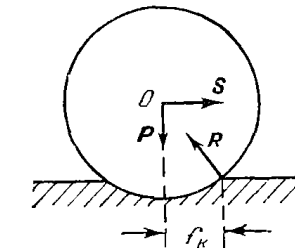


Рис. 1.42.

2°. Равновесие твердого тела при наличии трения качения. Между катком и плоскостью, на которой он покоится, возникают силы трения, если приложить к оси катка силу  $S$  (рис. 1.42), стремящуюся его двигать по плоскости.

Рассмотрим случай, когда сила  $S$  параллельна горизонтальной плоскости.

Из опыта известно, что при изменении величины силы  $S$  от нуля до некоторого предельного значения  $S_{\text{пр}}$  каток остается в покое, т. е. силы, действующие на каток, уравновешиваются. Кроме активных сил: веса  $P$  и силы  $S$ , к катку, равновесие которого рассматривается, приложена реакция плоскости. Из условия равновесия трех непараллельных сил следует, что реакция плоскости  $R$  должна проходить через центр катка  $O$ , так как две другие силы приложены к этой точке.

Следовательно, точка приложения реакции  $S$  должна быть смещена на некоторое расстояние  $f_k$  от вертикали, проходящей через центр колеса, иначе реакция  $R$  не будет иметь горизонтальной со-

ставляющей, необходимой для удовлетворения условий равновесия. Разложим реакцию плоскости  $R$  на две составляющие: нормальную составляющую  $N$  и касательную реакцию  $F$ , являющуюся силой трения (рис. 1.43).

Таким образом, в предельном положении равновесия катка к нему будут приложены две взаимно уравновешивающиеся пары: одна пара сил  $(S_{\text{пр}}, F)$  с моментом  $S_{\text{пр}} \cdot r$  (где  $r$  — радиус катка) и вторая пара сил  $(N, P)$ , удерживающая каток в равновесии. Момент второй пары, называемый моментом трения качения, определяется формулой

$$m_{\text{тр}} = f_k N, \quad (12^*)$$

где  $f_k$  — коэффициент трения качения, измеряемый в единицах длины. Этот коэффициент можно рассматривать как расстояние, на которое смещается реакция  $N$  от вертикали, проходящей через центр катка.

Для того чтобы имело место чистое качение (без скольжения), необходимо, чтобы сила трения  $F$  была меньше по величине, чем максимальная сила трения скольжения

$$F < fN, \quad (13^*)$$

где  $f$  — коэффициент трения скольжения.

Трение качения возникает из-за деформации катка и плоскости, вследствие чего соприкосновение между катком и плоскостью происходит по некоторой поверхности, смещенной от нижней точки катка в сторону возможного движения. При решении задач на равновесие твердого тела при наличии трения качения надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги, на стр. 15. При этом следует реакцию шероховатой поверхности направить из точки, отстоящей на расстоянии коэффициента трения качения  $f_k$  от нормали, проведенной из центра катка так, чтобы она проходила через точку  $O$  пересечения двух других сил, действующих на каток (рис. 1.42), или заменить реакцию  $R$  двумя составляющими — нормальной реакцией  $N$  и силой трения  $F$ ;

5) сопоставить число неизвестных и число уравнений равновесия, добавив к ним зависимость момента трения от нормального давления; число неизвестных должно быть равно числу уравнений, если задача является статически определенной;

6) составить систему уравнений равновесия для твердого тела;

7) решив полученную систему уравнений, определить искомые величины;

8) сопоставив величину силы трения с максимальной силой трения скольжения, убедиться в том, что первая сила меньше второй.

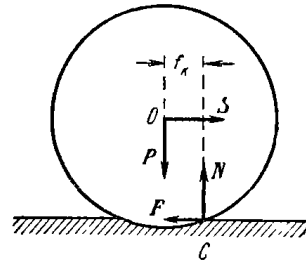
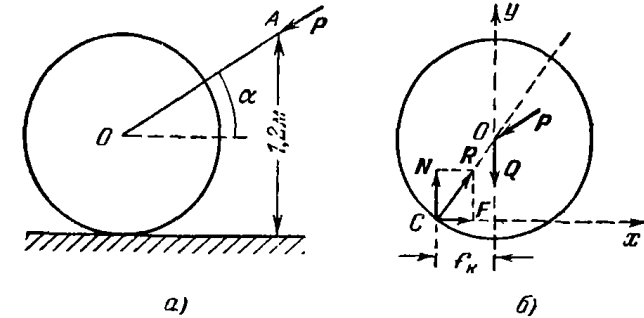


Рис. 1.43.

**Задача 1.46.** Цилиндрический каток диаметра 60 см и весом  $Q = 392 \text{ кг}$  приводится в равномерное движение человеком, который давит на рукоятку  $AO = 1,5 \text{ м}$  с постоянной силой  $P$  в направлении  $AO$ . Высота точки  $A$  над горизонтальной дорогой 1,2 м. Коэффициент трения качения катка равен  $f = 0,5 \text{ см}$ .

Определить величину силы  $P$ , силу трения при качении и нормальную составляющую реакции горизонтальной плоскости (рис. а). Коэффициент трения скольжения между катком и дорогой  $f = 0,2$ .

**Решение.** При равномерном качении катка все силы, действующие на каток, уравновешиваются. К катку приложены две активные силы: вес катка  $Q$  и сила давления человека  $P$ . На каток наложена одна связь — горизонтальная плоскость. Применив закон освобождения от связей, отбросим мысленно горизонтальную плоскость и



К задаче 1.46.

заменяем ее действие реакцией  $R$ . Эта реакция приложена в точке  $C$ , находящейся на расстоянии  $f_k$  от вертикали, проведенной через центр колеса. Реакция  $R$  направлена по прямой  $CO$ , так как согласно теореме о трех непараллельных силах в случае равновесия линии их действия пересекаются в одной точке  $O$  (рис. б). Реакцию плоскости  $R$  раскладываем на две составляющие: нормальную составляющую  $N$ , перпендикулярную к плоскости, и касательную составляющую — силу трения при качении  $F$ , направленную вдоль плоскости.

Рассмотрим равновесие катка как твердого тела, находящегося под действием четырех сил:  $Q, P, N, F$ .

Выберем систему декартовых координат. Ось  $x$  направим по горизонтальной плоскости вправо, ось  $y$  — вертикально вверх через центр катка. Составим уравнения равновесия. Обозначив буквой  $\alpha$  угол между горизонталью (осью  $x$ ) и рукояткой  $OA$ , получим:

$$\sum F_{hx} = F - P \cos \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{hy} = N - Q - P \sin \alpha = 0, \quad (2)$$

$$\sum m_C(F_k) = P \cos \alpha \cdot r - (Q + P \sin \alpha) f_k = 0. \quad (3)$$

В уравнении (3) буквой  $r$  обозначен радиус катка.

При составлении суммы моментов сил относительно точки  $C$  сила  $P$ , приложенная в центре катка  $O$ , разложена на две составляющие — горизонтальную ( $P \cos \alpha$ ) и вертикальную ( $P \sin \alpha$ ), и использована теорема Вариньона. При этом, как принято всегда делать, при вычислении момента горизонтальной составляющей силы  $P$  мы пренебрегли изменением ее плеча, считая, что оно равно радиусу катка  $r$ .

Из уравнения (3) найдем величину искомой силы  $P$ :

$$P = \frac{Qf_k}{r \cos \alpha - f_k \sin \alpha} = \frac{392 \cdot 0,5}{30 \frac{1,2}{1,5} - 0,5 \frac{0,9}{1,5}} = 8,27 \text{ кг}.$$

Равенство (2) даст:

$$N = Q + P \sin \alpha = 392 + 8,27 \frac{0,9}{1,5} = 396,95 \text{ кг}.$$

Из уравнения (1) определяем величину силы трения:

$$F = P \cos \alpha = 8,27 \frac{1,2}{1,5} = 6,63 \text{ кг}.$$

Проверим, сопоставляя величины силы трения при качении  $F$  и силы трения скольжения, будет ли в данном случае чистое качение или же будет иметь место скольжение. Сила трения скольжения равна

$$F_1 = fN = 0,2 \cdot 396,95 = 79,4 \text{ кг}.$$

Таким образом, сила трения скольжения больше силы трения при качении.

$$F_1 > F$$

и каток будет катиться без скольжения.

**Задача 1.47.** Цилиндрический каток радиуса  $r$  и весом  $Q$  (рис. а) удерживается в равновесии на наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, нитью, перекинутой через блок  $A$ . К концу нити подвешен груз весом  $P$ . Коэффициент трения качения катка равен  $f_k$ .

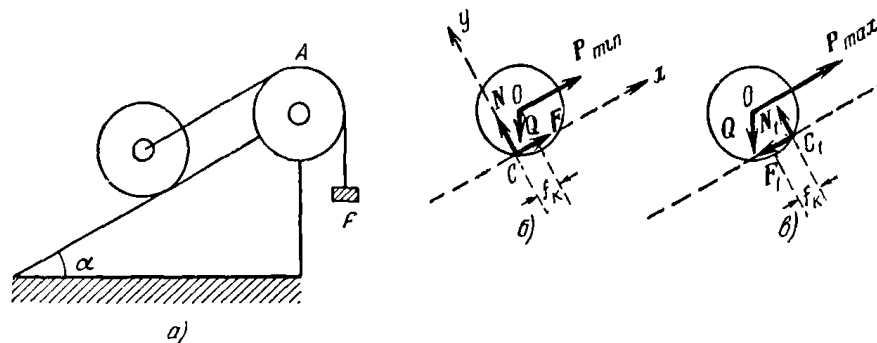
Определить наименьшую и наибольшую величины веса  $P$ , при которых каток будет в равновесии. Найти наименьшее значение коэффициента трения скольжения  $f$ , при котором в случае движения каток будет катиться без скольжения.

**Решение.** Рассмотрим равновесие катка в двух случаях.

В первом случае, когда величина  $P$  имеет наименьшее значение, возможное направление движения катка по наклонной плоскости — вниз (рис. б). Точка  $C$ , где приложена реакция плоскости, в этом случае смещена на расстояние  $f_k$  влево от перпендикуляра, опущенного из центра катка  $O$  на наклонную плоскость. К катку приложены две активные силы: вес  $Q$  и натяжение нити  $P_{\min}$ .

Отбрасывая мысленно связь, наложенную на каток, — наклонную плоскость, заменяем ее действие реакцией, которую раскладываем на нормальную составляющую  $N$  и касательную составляющую (силу трения  $F$ ). Составляющая  $N$  перпендикулярна к наклонной плоскости, сила трения направлена вдоль наклонной плоскости в сторону, противоположную возможному движению центра катка.

Рассмотрим равновесие катка как равновесие свободного твердого тела, находящегося под действием четырех сил:  $Q$ ,  $P_{\min}$ ,  $N$ ,  $F$ . Так как по условию требуется найти только минимальное и максимальное значения силы  $P$  при равновесии, то из трех уравнений равновесия



К задаче 1.47.

составим одно уравнение, выражающее равенство нулю суммы моментов всех сил относительно точки  $C$ :

$$\sum m_C(F_k) = -f_k Q \cos \alpha - (Q \sin \alpha - P_{\min}) r = 0. \quad (1)$$

В это уравнение не вошли неизвестные силы  $N$  и  $F$ , так как они приложены в точке  $C$ .

При составлении уравнения мы разложили силу  $Q$  на две составляющие:  $Q \cos \alpha$ , направленную перпендикулярно к наклонной плоскости (плечо этой составляющей относительно точки  $C$  равно коэффициенту трения качения  $f_k$ ), и составляющую  $Q \sin \alpha$ , направленную параллельно наклонной плоскости и отстоящую на расстоянии  $r$  от нее. Решая уравнение (1) относительно  $P_{\min}$ , имеем:

$$P_{\min} = Q \left[ \sin \alpha - \frac{f_k}{r} \cos \alpha \right]. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь второй случай, когда сила  $P$  достигает максимальной величины, при которой возможно равновесие. В этом случае возможное направление движения катка — вверх по наклонной плоскости (рис. в). Силы  $Q$  и  $P_{\max}$  направлены аналогично первому случаю и приложены по-прежнему в центре катка  $O$ . Реакция наклонной

плоскости на этот раз приложена в точке  $C_1$ , смещенной на расстояние  $f_k$  вправо по наклонной плоскости.

Составляем уравнение моментов относительно точки  $C_1$ :

$$\sum m_{C_1}(F_k) = f_k Q \cos \alpha - (P_{\max} - Q \sin \alpha) r = 0,$$

откуда имеем:

$$P_{\max} = Q \left[ \sin \alpha + \frac{f_k}{r} \cos \alpha \right]. \quad (3)$$

Таким образом, каток будет находиться в равновесии на наклонной плоскости, если величина силы  $P$  лежит в пределах

$$Q \left[ \sin \alpha - \frac{f_k}{r} \cos \alpha \right] \leq P \leq Q \left[ \sin \alpha + \frac{f_k}{r} \cos \alpha \right].$$

Перейдем к определению наименьшего значения коэффициента трения скольжения  $f$ , при котором в случае движения цилиндр будет катиться, а не скользить. Рассмотрим вначале случай, когда вес груза  $P$  имеет наименьшую величину.

Приравняем нулю суммы проекций всех сил на ось  $x$ , параллельную наклонной плоскости, и на ось  $y$ , перпендикулярную к ней (рис. б). Подставляя в первое уравнение

$$\sum F_{kx} = P_{\min} + F - Q \sin \alpha = 0$$

значение  $P_{\min}$ , соответствующее (2), находим силу трения при качении

$$F = \frac{f_k}{r} Q \cos \alpha.$$

Второе уравнение равновесия

$$\sum F_{ky} = N - Q \cos \alpha = 0$$

позволяет определить нормальное давление, равное по величине нормальной реакции

$$N = Q \cos \alpha.$$

Условием, при котором будет чистое скольжение, является:

$$F < fN, \quad (4)$$

где  $f$  — коэффициент трения скольжения. Внося в (4) значения  $F$  и  $N$ , находим:

$$\frac{f_k}{r} < f. \quad (5)$$

Рассмотрим, далее, случай, когда вес груза  $P$  имеет наибольшую величину (рис. в). В этом случае уравнения проекций будут:

$$\sum F_{kx} = P_{\max} - F_1 - Q \sin \alpha = 0, \quad (6)$$

$$\sum F_{ky} = N_1 - Q \cos \alpha = 0.$$

Внося в уравнение (6) значение  $P_{\max}$  (3), находим:

$$F_1 = \frac{f_k}{r} Q \cos \alpha,$$

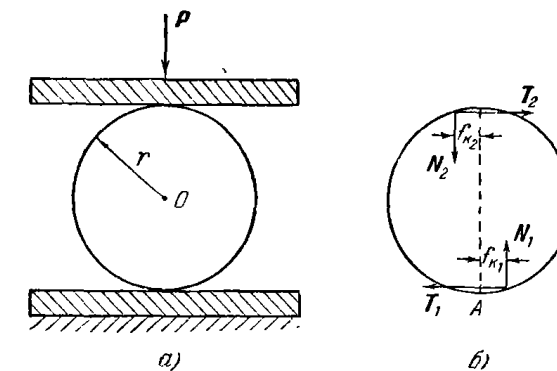
$$N_1 = Q \cos \alpha.$$

Подставляя эти значения в (4), получаем условие чистого качения

$$\frac{f_k}{r} < f,$$

которое совпадает с условием (5).

**Задача 1.48.** Стальной цилиндр радиуса  $r$  зажат между двумя параллельными направляющими, из которых нижняя закреплена неподвижно, а верхняя может перемещаться прямолинейно, оставаясь параллельной своему первоначальному положению.



К задаче 1.48.

Верхняя направляющая прижимается вертикальной силой  $P$  к диску (рис. а). Коэффициенты трения качения между цилиндром, нижней и верхней направляющими соответственно равны  $f_{k1}$  и  $f_{k2}$ .

Пренебрегая весом цилиндра и направляющих, найти максимальную силу  $T_2$ , приложенную к верхней направляющей, при которой цилиндр еще будет оставаться в покое.

**Решение.** Рассмотрим равновесие цилиндра (рис. б), отбросив мысленно нижнюю и верхнюю направляющие, заменив их действие реакциями. Тогда на цилиндр будут действовать со стороны нижней направляющей нормальная реакция  $N_1$  и сила трения  $T_1$ , со стороны верхней направляющей нормальная реакция  $N_2$  и сила трения  $T_2$ . При этом точка приложения реакции нижней направляющей будет смещена вправо от вертикального диаметра на расстояние  $f_{k1}$ , а точка приложения реакции верхней направляющей будет смещена на расстояние  $f_{k2}$  от вертикального диаметра влево, т. е. в сторону воз-

возможного перемещения цилиндра по отношению к каждой из направляющих.

С другой стороны, если рассмотреть равновесие цилиндра вместе с верхней направляющей, то, проектируя силы на вертикаль, получим:

$$N_1 - P = 0 \quad \text{или} \quad N_1 = P.$$

Тогда, возвращаясь к рассмотрению цилиндра (рис. б), имеем, проектируя силы на вертикаль:

$$N_1 - N_2 = 0 \quad \text{или} \quad N_1 = N_2 = P.$$

Составим, далее, сумму моментов всех сил относительно точки А:

$$N_1 f_{k_1} + N_2 f_{k_2} - T_2 \cdot 2r = 0,$$

откуда искомая максимальная сила равна

$$T_2 = \frac{1}{2r} (N_1 f_{k_1} + N_2 f_{k_2}) = \frac{P}{2r} (f_{k_1} + f_{k_2}).$$

Если коэффициенты трения качения равны

$$f_{k_1} = f_{k_2} = f_k,$$

то тогда

$$T_2 = \frac{N f_k}{r} = \frac{P f_k}{r}.$$

Для приобретения навыков в решении задач на равновесие тел при наличии трения качения рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 190, 191, 192.

3°. Равновесие твердых тел при наличии трения гибких тел. Предположим, что на неподвижный цилиндр намотана нить, к одному концу которой подвешен груз весом  $P$ . Угол охвата цилиндра нитью равен  $\alpha$  (рис. 1.44). Коэффициент трения нити о шероховатую поверхность цилиндра равен  $f$ . Тогда сила  $T$ , необходимая для удержания груза  $P$  в равновесии, определяется по формуле Эйлера:

$$T = P e^{-f\alpha}, \quad (14^*)$$

где  $e$  — основание натуральных логарифмов. Таким образом, сила  $T$ , уравновешивающая груз  $P$ , не зависит от диаметра цилиндра и является функцией угла охвата и коэффициента трения.

При решении задач на равновесие твердых тел при наличии трения гибких нитей надо выполнить

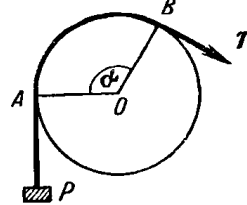


Рис. 1.44.

четыре первых пункта, указанных в начале книги, на стр. 15. Далее следует:

5) сопоставить число неизвестных величин и число уравнений равновесия, добавив к уравнениям равновесия зависимость (14\*) между силами натяжения нити с обеих сторон охватываемого тела, и убедиться в том, что число независимых уравнений равно числу неизвестных и, следовательно, задача является статически определенной;



К задаче 1.49.

6) выбрать систему координат;

7) составить уравнения равновесия твердого тела;

8) решив эту систему уравнений, определить неизвестные величины.

**Задача 1.49.** При швартовке судна матрос накладывает канат восьмеркой на чугунные столбы. Натяжение каната равно  $Q$ , сила, с которой матрос удерживает канат, равна  $P$ . Угол охвата канатом каждого столба равен  $210^\circ$ .

Определить коэффициент трения каната о столбы, если известно, что матрос может удержать канат, наложив три восьмерки. Полагая коэффициент трения каната о чугунный столб равным  $f = 0,15$ , определить величину натяжения, которое матрос способен удержать, если сила  $P = 60$  кг.

Решение. Угол охвата канатом одного столба равен

$$210^\circ = \frac{7}{6}\pi.$$

При наложении трех восьмерок угол охвата канатом столбов будет в шесть раз больше, т. е.  $7\pi$ . Тогда зависимость натяжений двух концов каната определится формулой

$$P = Q e^{-7\pi f}.$$

Логарифмируя, находим искомый коэффициент трения между канатом и чугунным столбом:

$$f = \frac{1}{7\pi} \ln \frac{Q}{P}. \quad (1)$$

Из (1) имеем:

$$\ln \frac{Q}{P} = 7\pi f = 3,3.$$

Отсюда при заданных значениях  $f$  и  $P$

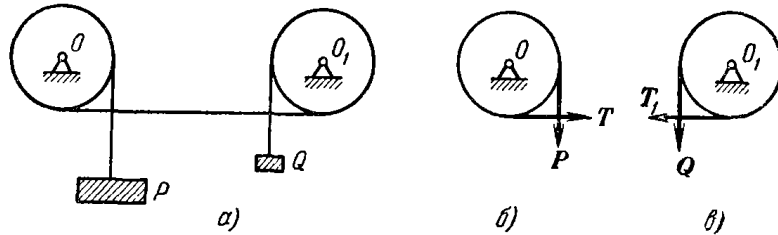
$$\frac{Q}{P} = 27 \quad \text{и} \quad Q = 27 \cdot 60 = 1620 \text{ кг}.$$

Таким образом, наложив три восьмерки на чугунные столбы, матрос может удержать в равновесии канат, ко второму концу которого приложена сила, равная 1620 кг.

**Задача 1.50.** Через два неподвижных вала с центрами  $O$  и  $O_1$  (рис. а) перекинут трос, к концам которого подвешены грузы  $P$  и  $Q$ , причем  $P > Q$ .

Определить минимальное значение коэффициента трения между валами и тросом, при котором грузы будут находиться в равновесии. Полагая коэффициент трения троса о вал равным  $f = 0,25$ , найти груз  $P$ , который можно удержать в равновесии грузом  $Q = 10$  кг.

Решение. Рассмотрим равновесие части троса, охватывающего левый вал (рис. б). На трос действует активная сила  $P$ . Отбрасывая мысленно правый вал, разрезаем трос между валами и заменяем действие правой части силой натяжения троса  $T$ .



К задаче 1.50.

Для равновесия этой части троса должно удовлетворяться равенство

$$T = Pe^{-f\alpha}, \quad (1)$$

где угол обхвата  $\alpha$  равен  $3\pi/2$ . Итак,

$$T = Pe^{-\frac{3}{2}\pi f}. \quad (1)$$

Рассмотрим, далее, равновесие правого вала (рис. в), отбросив мысленно левый вал, разрезав трос и заменив его действие силой  $T_1$ . Согласно закону равенства действия и противодействия натяжения  $T$  и  $T_1$  равны по величине. Для равновесия части троса, охватывающей правый вал, должно удовлетворяться равенство

$$Q = Te^{-\frac{3}{2}\pi f}, \quad (2)$$

так как и у правого вала угол обхвата  $\alpha = 3\pi/2$ .

Решая совместно уравнения (1) и (2), исключая натяжение троса между валами  $T$ , находим:

$$\frac{P}{Q} = e^{3\pi f},$$

откуда

$$f = \frac{1}{3\pi} \ln \frac{P}{Q}.$$

Эта же задача может быть решена и другим способом. Рассматривая равновесие всего троса (рис. а) и замечая, что полный угол обхвата тросом двух валов равен

$$\frac{3}{2}\pi + \frac{3}{2}\pi = 3\pi,$$

находим зависимость между силами  $P$  и  $Q$ :

$$Q = Pe^{-3\pi f},$$

откуда имеем:

$$f = \frac{1}{3\pi} \ln \frac{P}{Q}. \quad (3)$$

Для определения величины груза  $P$ , который может быть удержан в равновесии грузом  $Q = 10$  кг, из (3) находим:

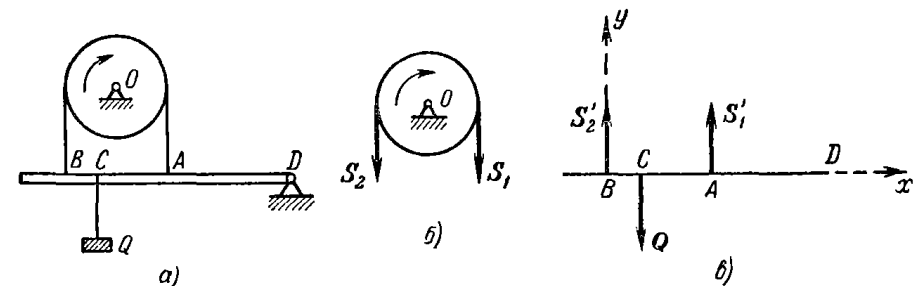
$$\ln \frac{P}{Q} = 3\pi f = 2,358.$$

Тогда

$$\frac{P}{Q} = 10,5 \quad \text{и} \quad P = 10 \cdot 10,5 = 105 \text{ кг}.$$

Таким образом, грузом  $Q$ , равным 10 кг, можно удержать в равновесии груз  $P$ , равный 105 кг.

**Задача 1.51.** Трос  $AB$  охватывает барабан, вращающийся вокруг центра  $O$ . Коэффициент трения троса о барабан равен  $f$ . Концы троса  $A$  и  $B$  прикреплены к рычагу  $BAD$ , который может поворачиваться вокруг точки  $D$ . Расстояния  $AD = a$ ,  $BD = b$ .



К задаче 1.51.

Определить натяжение троса в точках  $A$  и  $B$ . Пренебрегая весом рычага  $BAD$ , найти расстояние  $CD = c$ , на котором надо подвесить к рычагу груз  $Q$ , чтобы давление в точке  $D$  равнялось нулю.

Решение. Рассмотрим равновесие троса, охватывающего барабан, отбросив мысленно рычаг (рис. б) и заменив его действие реакциями троса  $S_1$  и  $S_2$ .

Согласно уравнению (14\*) зависимость между этими натяжениями определится формулой

$$S_2 = S_1 e^{f\pi}, \quad (1)$$

так как угол охвата тросом барабана равен  $\pi$ . Показатель степени в (1) положителен, ибо при заданном направлении вращения барабана натяжение  $S_1 < S_2$ ,

Рассмотрим, далее, равновесие рычага  $BAD$ , полагая в согласии с условием задачи, что давление в точке  $D$ , и, следовательно, реакция шарнира  $D$  равны нулю. На рычаг действует активная сила  $Q$ . Отбросим мысленно трос и заменим его действие реакциями  $S'_1$  и  $S'_2$  (рис. в). Очевидно, что  $S'_1 = S_1$ ,  $S'_2 = S_2$ .

Выберем оси координат и составим уравнения равновесия

$$\sum F_{ky} = S'_1 - S'_2 - Q = 0, \quad (2)$$

$$\sum m_D(F_k) = Qc - S'_1 a - S'_2 b = 0. \quad (3)$$

Мы получили систему из трех уравнений (1), (2), (3) с тремя неизвестными:  $S'_1$ ,  $S'_2$ ,  $c$ . Из уравнений (1) и (2) получим:

$$S'_1 = \frac{Q}{1 + e^{f\pi}}, \quad S'_2 = \frac{Qe^{f\pi}}{1 + e^{f\pi}}.$$

Подставив эти значения натяжений в уравнение (3), найдем искомое расстояние  $c$ :

$$c = \frac{S_1 a + S_2 b}{Q} = \frac{a + be^{f\pi}}{1 + e^{f\pi}}.$$

Вместо уравнений равновесия (2) и (3) можно составить два уравнения моментов относительно точек  $A$  и  $B$ . К этим точкам приложены неизвестные по величине реакции  $S'_1$  и  $S'_2$ . Следовательно, каждое уравнение моментов будет содержать только одну неизвестную величину силы и искомое расстояние  $c$ :

$$\sum m_A(F_k) = Q(c - a) - S'_2(b - a) = 0,$$

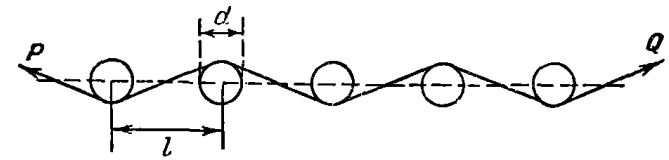
$$\sum m_B(F_k) = S'_1(b - a) - Q(b - c) = 0.$$

Решая эти уравнения совместно с равенством (1), приходим к ранее полученным ответам.

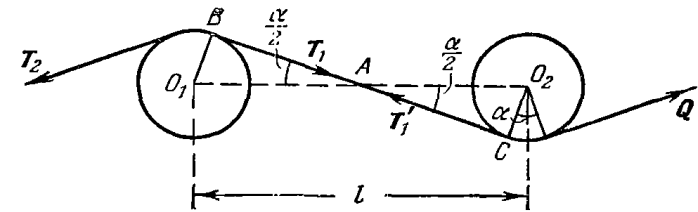
**Задача 1.52.** Ремень пропущен через пять неподвижных валиков, как это показано на рис. а. Коэффициент трения ремня о валик  $f = 0,4$ . Расстояние между центрами валиков, расположенными на одной прямой, равно  $l = 50$  мм. Диаметр валиков  $d = 25$  мм. Слева к ремню приложена сила  $P = 150$  кгГ.

Каково минимальное значение силы  $Q$ , при котором ремень будет находиться в покое.

Решение. Обозначим угол охвата валика ремнем через  $\alpha$ . Тогда для отрезка ремня, охватывающего каждый валик, можно записать



а)



б)

К задаче 1.52.

соотношение между натяжениями ремня по обе стороны от валика:

$$Q = T_1 e^{f\alpha},$$

$$T_1 = T_2 e^{f\alpha},$$

$$T_2 = T_3 e^{f\alpha},$$

$$\dots$$

$$T_4 = P e^{f\alpha}.$$

Исключая из этой системы уравнений промежуточные усилия  $T_1, \dots, T_4$  (перемножая все равенства), находим

$$Q = P e^{5f\alpha}. \quad (1)$$

Угол  $\alpha$  определится из равных прямоугольных треугольников  $AO_1B$  и  $AO_2C$  (рис. б):

$$l \sin \frac{\alpha}{2} = d,$$

откуда

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{l} = 0,5,$$

$$\alpha = 60^\circ = 1,0472 \text{ рад.}$$

Тогда из (1) находим:

$$Q = 150 \cdot e^{5 \cdot 0,4 \cdot 1,0472} = 150 \cdot e^{2,0944} = 150 \cdot 8,1207 = 1218,11 \text{ кгГ.}$$



**Задача 1.53.** На неподвижный цилиндр намотана веревка, к одному из концов которой подвешен груз  $Q$ .

Сколько раз надо намотать веревку на цилиндр, чтобы груз  $Q$  можно было удержать вертикальной силой  $P$ , приложенной к другому концу веревки? Коэффициент трения веревки о цилиндр равен  $f$ .

**Решение.** Воспользуемся формулой Эйлера, согласно которой при предельном равновесии минимальное значение модуля силы  $P$  равно

$$P = Qe^{-f\alpha},$$

где  $\alpha$  — угол охвата веревкой цилиндра. Этот угол равен

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n + \frac{\pi}{2} = \pi(2n + 1),$$

где  $n$  — число полных витков веревки, к которым добавляется по углу  $\pi/2$  со стороны действия каждой из сил. Таким образом,

$$P = Qe^{-f\pi(2n+1)}.$$

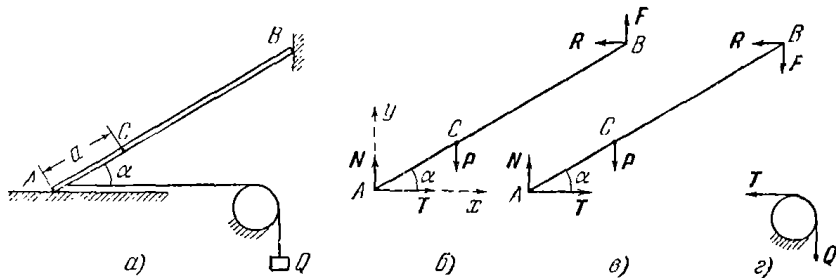
Логарифмируя, находим:

$$\ln Q - \ln P = f\pi(2n + 1),$$

откуда

$$n = \frac{1}{2} \left( \frac{\ln Q - \ln P}{f\pi} - 1 \right).$$

**Задача 1.54.** Прямолинейный стержень  $AB$ , длиной  $l$  и весом  $P$ , центр тяжести  $C$  которого находится от конца  $A$  на расстоянии



К задаче 1.54.

$AC = a$ , опирается в точке  $B$  на шероховатую вертикальную стену, а в точке  $A$  — на гладкий горизонтальный пол. Коэффициент трения между стержнем и вертикальной стеной  $f_1$ . В точке  $A$  к стержню прикреплена нить, перекинутая через неподвижный круглый цилиндр

(рис. а). К концу нити подвешен груз  $Q$ . Коэффициент трения между нитью и цилиндром равен  $f$ .

Пренебрегая весом нити, определить, в каких границах может изменяться угол  $\alpha$  при равновесии.

**Решение.** Рассмотрим равновесие стержня  $AB$ , отбросив мысленно вертикальную стену, горизонтальный пол и горизонтальную нить и заменив их действие реакциями. Отдельно рассмотрим равновесие нити, охватывающей цилиндр (рис. з). Решение задачи распадается на два случая.

**Случай минимального угла  $\alpha$ .** При этом точка  $A$  может начать двигаться влево, точка  $B$  — вниз. Следовательно, сила трения  $F$  будет направлена вверх (рис. б), а силы трения, приложенные к нити на цилиндре (рис. з), будут направлены по часовой стрелке. Таким образом, стержень  $AB$  (рис. б) будет находиться в равновесии под действием следующих сил: нормальной реакции  $N$ , натяжения нити  $T$ , веса  $P$ , нормальной реакции  $R$  и силы трения  $F$ .

Составим уравнения равновесия для стержня  $AB$ :

$$\sum F_{kx} = T - R = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = N - P + F = 0, \quad (2)$$

$$\sum m_B(F_k) = -Nl \cos \alpha + P(l - a) \cos \alpha + Tl \sin \alpha = 0. \quad (3)$$

Кроме того, запишем зависимость силы трения от нормального давления в точке  $B$ :

$$F = f_1 R.$$

Зависимость натяжения нити  $T$  от силы  $Q$ , учитывая, что силы трения на цилиндре направлены по часовой стрелке, будет (формула Эйлера):

$$Te^{-f\pi/2} = Q.$$

Из данной системы уравнений найдем:

$$N = P - f_1 Q e^{f\pi/2}.$$

Подставив значения  $N$  и  $T$  в уравнение (3), получим окончательно:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{Q} \cdot \frac{a}{l} e^{-f\pi/2} - f_1.$$

Этой формулой определяется минимальное значение угла  $\alpha$  при равновесии стержня.

**Случай максимального угла  $\alpha$ .** При этом точка  $A$  может начать двигаться вправо, точка  $B$  — вверх. Следовательно, сила трения  $F$  будет направлена вниз (рис. в), а силы трения, приложенные к нити на цилиндре, будут направлены против часовой стрелки.

Уравнения равновесия стержня  $AB$  будут:

$$\begin{aligned} T - R &= 0, \\ N - P - F &= 0, \\ -Nl \cos \alpha + P(l - a) \cos \alpha + Tl \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Кроме того, зависимость силы трения от нормального давления в точке  $B$  определяется равенством

$$F = f_1 R.$$

Натяжение нити будет:

$$T = Qe^{-f\pi/2}.$$

Из этой системы, исключив  $R$  и  $F$ , найдем:

$$N = P + f_1 Qe^{-f\pi/2}.$$

Далее, подставив в уравнение моментов значения  $N$  и  $T$ , получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{Q} \cdot \frac{a}{l} e^{f\pi/2} + f_1.$$

Этой формулой определяется максимальное значение угла  $\alpha$  при равновесии.

## § 5. Графическая статика и методы расчета ферм

1°. Равновесие произвольной плоской системы сил. Метод последовательного сложения. Если твердое тело находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил, то путем последовательного графического сложения таких сил можно определить значение неизвестных из условий равновесия. При этом число неизвестных не должно превышать трех для системы сил, приложенных к одному твердому телу, иначе задача будет статически неопределенной. Этот графический метод решения задач целесообразно применять, если общее число сил, действующих на твердое тело, невелико. По сравнению с аналитическим методом решения задач на равновесие плоской системы сил указанный графический способ более нагляден, но его применение при большом числе сил очень громоздко.

Метод последовательного сложения сил можно применять в двух вариантах.

Если твердое тело находится в равновесии под действием заданной плоской системы сил и трех реакций, линии действия которых известны ( $l_1, l_2, l_3$ ), а величины реакций требуется определить, то рекомендуется такая последовательность действий (первый вариант):

1) складываем последовательно графически все известные активные силы и получаем их равнодействующую;

2) находим точку пересечения линии действия равнодействующей с линией действия одной из реакций ( $l_1$ );

3) переносим равнодействующую в эту точку и разлагаем ее на две силы: одну, направленную вдоль линии  $l_1$ , а другую, направленную в точку пересечения линии действия двух остальных реакций ( $l_2, l_3$ );

4) составляющая равнодействующей активных сил, направленная по линии  $l_1$ , определяет величину первой реакции;

5) вторую составляющую равнодействующей активных сил переносим в точку пересечения линий действия двух остальных реакций и, разлагая по направлениям их действия ( $l_2$  и  $l_3$ ), находим искомые величины двух последних реакций.

Если твердое тело находится в равновесии под действием заданной плоской системы сил и двух реакций, причем для одной реакции известна только точка приложения ( $A$ ), а для второй — линия действия ( $l_2$ ), то рекомендуется такая последовательность действий (второй вариант):

1) складываем последовательно графически все известные активные силы и получаем их равнодействующую;

2) переносим равнодействующую в точку пересечения ее линии действия с линией действия второй реакции ( $l_2$ );

3) в точке пересечения разлагаем равнодействующую на две составляющие: одну по линии действия второй реакции, а другую по направлению к точке  $A$ . Первая составляющая определяет вторую реакцию, а вторая составляющая — величину и направление реакции в точке  $A$ .

**Задача 1.55.** Вертикальный гладкий стержень  $CD$  весом  $P$  опирается в точках  $A$  и  $B$  (рис. а) на цилиндрические шарниры, а концом  $D$  на гладкую плоскость, наклоненную к горизонту под углом  $\alpha$ . Определить графически реакции в точках  $A, B, D$ , если  $AB = AD = a$ .

Решение. Для определения реакций в точках  $A, B, D$  рассмотрим равновесие стержня  $CD$ . На стержень действует одна активная сила — сила тяжести  $P$ , направленная по стержню. Стержень находится в равновесии под действием четырех сил: веса  $P$ , реакций наклонной плоскости и цилиндрических шарниров  $A$  и  $B$ . Применяя закон освобождаемости от связей, отбросим мысленно связи и заменим их действие на стержень реакциями (рис. б).

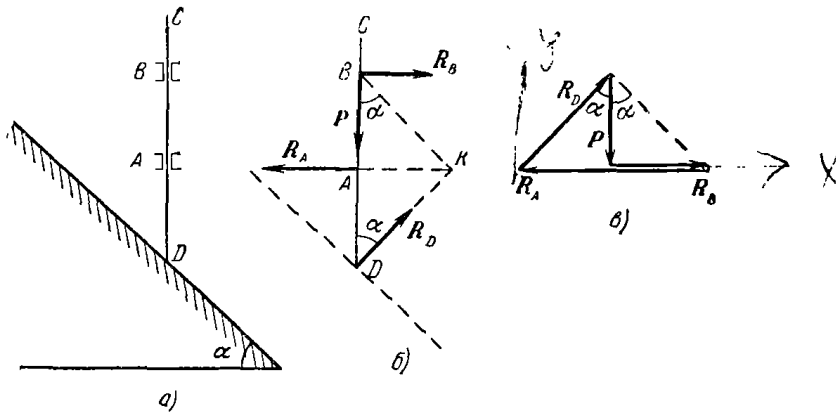
Реакция гладкой наклонной плоскости  $R$  приложена в точке  $D$  и направлена перпендикулярно к наклонной плоскости. Реакция цилиндрического шарнира направлена перпендикулярно к оси шарнира, так как перемещению вдоль оси такой шарнир не препятствует. Обозначим эти реакции  $R_A$  и  $R_B$  (рис. б). Таким образом, стержень  $CD$  находится в равновесии как свободное твердое тело, на которое действуют четыре силы:  $P, R_A, R_B, R_D$ .

Продолжаем линии действия реакций  $R_A$  и  $R_B$  до их пересечения в точке  $K$  (рис. б). Линия действия равнодействующей этих двух сил проходит через точку  $K$ . Линии действия двух других сил  $P$  и  $R_D$  персе-

секаются в  $B$ . Следовательно, линия действия их равнодействующей проходит через точку  $B$ .

Итак, все силы, действующие на стержень  $CD$ , приведены к двум силам, одну из которых перенесем по линии действия в  $K$ , а другую — в  $B$ . Таким образом, стержень  $CD$  находится в равновесии под действием двух сил, приложенных в  $B$  и  $K$ . Следовательно, эти силы направлены по одной прямой  $BK$  в противоположные стороны.

Откладываем (рис.  $\beta$ ) в избранном масштабе известную по величине и направлению силу  $P$ . К ее концу присоединяем силу  $R_B$ , конец которой находится в точке пересечения с прямой, параллельной  $BK$



К задаче 1.55.

и проведенной из начала силы  $P$ . При этом условии равнодействующая сил  $P$  и  $R_B$  будет направлена от  $B$  к  $K$ .

Затем из конца силы  $R_B$  проводим горизонтальную прямую, соответствующую линии действия силы  $R_A$ , до пересечения с линией, параллельной  $R_D$  и проведенной из начала силы  $P$ . Равнодействующая сил  $R_A$  и  $R_D$  направлена при этом от  $K$  и  $B$ . Таким образом, графически определены реакции  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_D$ . Замечая, что угол между  $R_D$  и вертикалью равен  $\alpha$ , находим:

$$R_B = P \operatorname{tg} \alpha, \quad R_A = 2P \operatorname{tg} \alpha, \quad R_D = \frac{P}{\cos \alpha}.$$

Задача может быть решена и аналитически. Замечая, что  $\angle ADK = \alpha$ , составляем три уравнения равновесия (ось  $x$  направляем по горизонтали вправо, ось  $y$  — вертикально вверх):

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= R_B - R_A + R_D \sin \alpha = 0, \\ \sum F_{ky} &= R_D \cos \alpha - P = 0, \\ \sum m_B(F_k) &= R_A a - R_D 2a \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

Решая совместно полученную систему уравнений, находим:

$$R_B = P \operatorname{tg} \alpha, \quad R_A = 2P \operatorname{tg} \alpha, \quad R_D = \frac{P}{\cos \alpha}.$$

Для приобретения навыков в решении задач на равновесие тел методом последовательного сложения сил рекомендуется решить графически следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 121, 123.

2°. Применение метода веревочного многоугольника к плоской системе сил. Сложение сил, расположенных в одной плоскости, при помощи метода веревочного многоугольника, является столь же общим методом решения задач статики на плоскости, как и аналитический, рассмотренный ранее.

Для графического сложения сил  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  необходимо изобразить силы на рисунке (рис. 1.45, а).

Далее, строим силовой многоугольник (рис. 1.45, б), откладывая из произвольной точки вектор, равный первой силе  $F_1$ , из его конца вектор  $F_2$  и из конца вектора  $F_2$  вектор  $F_3$ . Начало первой силы соединяем вектором  $R$  с концом последней силы. Вектор  $R$  определяет величину и направление равнодействующей.

Для нахождения линии действия равнодействующей выбираем произвольную точку  $O$  за полюс и соединяем полюс с началом и концом каждой силы прямыми линиями, называемыми лучами. Первый луч обозначается через  $\alpha$ , луч, идущий в конец первой и начало второй силы, 1—2, и т. д. вплоть до последнего луча, обозначенного через  $\omega$ .

Далее (рис. 1.45, а) проводим из произвольной точки  $d$  прямую, параллельную лучу  $\alpha$ , до пересечения с линией действия силы  $F_1$ , из этой точки проводим прямую, параллельную лучу 1—2, до пересечения с линией действия силы  $F_2$ ; из этой точки проводим прямую,

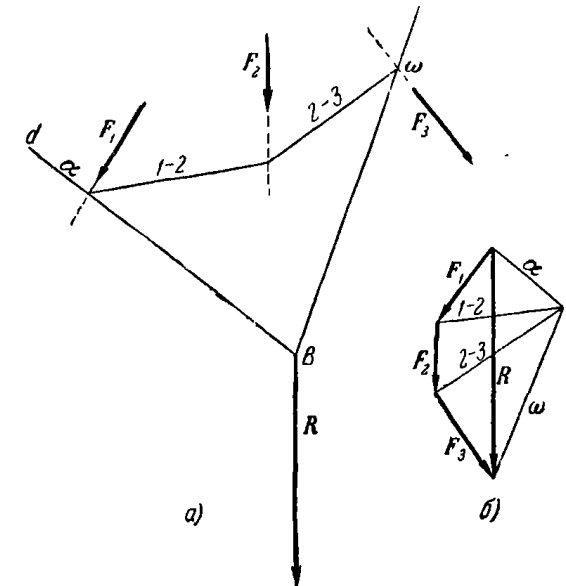


Рис. 1.45.

параллельную лучу 2—3, до пересечения с линией действия последней силы  $F_3$ . Из этой точки проводим прямую, параллельную лучу  $\omega$ . Далее, продолжаем полученные лучи  $\alpha$  и  $\omega$  до их пересечения в точке  $B$ , которая и является одной из точек, лежащих на линии действия равнодействующей. Перенеся в точку  $B$  найденный из многоугольника сил вектор  $R$ , можем считать задачу о нахождении равнодействующей системы сил  $F_1, F_2, F_3$  разрешенной. Построенная на рис. 1.45, *a* ломаная линия называется *веревочным многоугольником*. Этот метод решения применим для любого числа сил, лежащих в одной плоскости.

Если система сил находится в равновесии, то силовой многоугольник и веревочный многоугольник должны быть замкнуты. Следовательно, на рис. 1.45, *b* конец последней силы должен совпасть с началом первой силы; на рис. 1.45, *a* лучи  $\alpha$  и  $\omega$  должны быть направлены по одной прямой. Система сил приводится к паре сил, если силовой многоугольник замкнут, а веревочный многоугольник не замкнут. В этом случае в силовом многоугольнике лучи  $\alpha$  и  $\omega$  сольются в одну прямую, а в веревочном многоугольнике лучи  $\alpha$  и  $\omega$  будут параллельны друг другу.

При решении задач на определение равнодействующей плоской системы сил способом веревочного многоугольника рекомендуется такая последовательность действий:

- 1) изображаем в избранном масштабе на рисунке твердое тело с приложенными к нему силами;
- 2) строим отдельно силовой многоугольник и находим его замыкающую  $R$ ;
- 3) выбираем произвольную точку за полюс и соединяем ее с вершинами силового многоугольника прямыми линиями — лучами, обозначаемыми  $\alpha, 1-2, 2-3, \dots, \omega$ ;
- 4) строим на первом рисунке, где изображено твердое тело с приложенными силами, веревочный многоугольник;
- 5) продолжая до пересечения лучи  $\alpha$  и  $\omega$  веревочного многоугольника, находим точку на линии действия равнодействующей;
- 6) через полученную точку проводим равнодействующую  $R$  параллельно главному вектору силового многоугольника.

При решении задач на определение реакций опор твердого тела, находящегося в равновесии под действием плоской системы сил, следует придерживаться такого порядка действий:

- 1) изображаем в избранном масштабе твердое тело с активными силами;
- 2) отбросив мысленно опоры, заменяем их действие искомыми реакциями;
- 3) строим на отдельном рисунке силовой многоугольник, из которого определяется сумма искомых реакций, но не каждая из них;

4) выбирая произвольную точку за полюс, соединяем ее лучами с вершинами силового многоугольника;

5) строим на первом рисунке веревочный многоугольник, замыкая который, находим направление недостающего луча, разделяющего реакции опор;

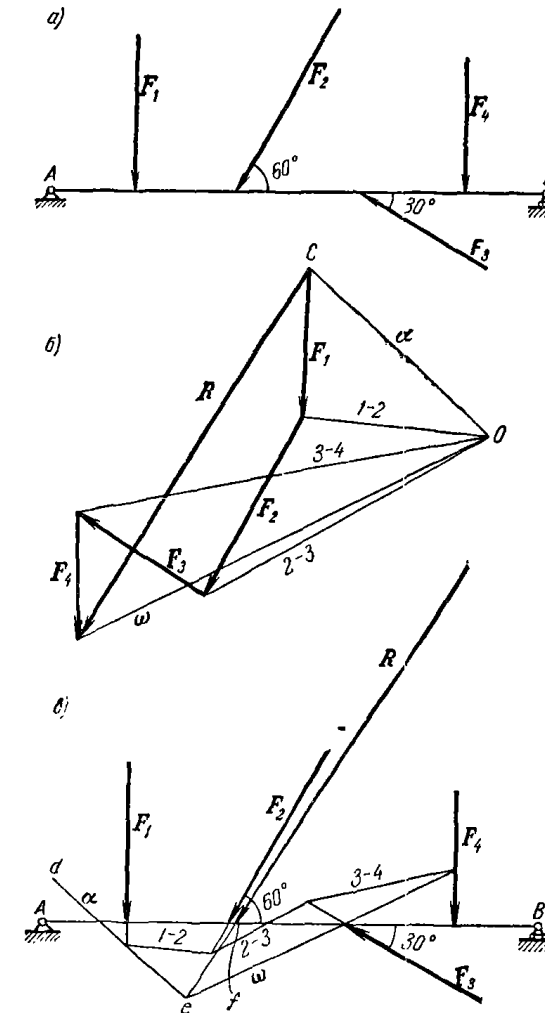
6) перенеся найденное направление недостающего луча на рисунок силового многоугольника, находим каждую из искомых реакций опор.

**Задача 1.56.** На балку  $AB$  действуют силы:  $F_1 = 6T$ ,  $F_2 = 8T$ ,  $F_3 = 6T$ ,  $F_4 = 5T$ . Силы  $F_1$  и  $F_4$  направлены по вертикали. Силы  $F_2$  и  $F_3$  действуют соответственно под углами  $60^\circ$  и  $30^\circ$  к балке (рис. *a*).

Определить построением веревочного многоугольника равнодействующую данной системы сил.

**Решение.** Для определения равнодействующей данной системы сил строим силовой многоугольник (рис. *b*). Для этого в избранном масштабе для сил из произвольно выбранной точки  $c$  (рис. *b*) проводим вектор, по величине и направлению равный силе  $F_1$ ; из конца этого вектора проводим второй вектор, по величине и направлению равный силе  $F_2$ ; из конца этого вектора откладываем вектор, равный  $F_3$ , и из конца последнего откладываем вектор, равный  $F_4$ . Построенный силовой многоугольник оказался незамкнутым; следовательно, силы приводятся к равнодействующей.

Соединив начало вектора  $F_1$  с концом вектора  $F_4$ , находим вектор  $R$ , замыкающий силовой многоугольник; этот вектор по величине и направлению равен равнодействующей данной системы сил. При



К задаче 1.56.

обходе силового многоугольника все составляющие силы направлены в одну сторону, тогда как вектор  $R$  направлен в противоположную.

Чтобы найти точку приложения равнодействующей, строим веревочный многоугольник. Для этого из произвольно выбранной точки  $O$  (рис. б) проводим луч  $\alpha$  в начало вектора  $F_1$ , луч 1—2 в начало вектора  $F_2$ , луч 2—3 в начало вектора  $F_3$  и луч 3—4 в начало вектора  $F_4$ . В конец вектора  $F_4$  проводим луч  $\omega$ . Из произвольной точки  $d$  (рис. в) вблизи силы  $F_1$  проводим прямую, параллельную лучу  $\alpha$ , до пересечения ее с линией действия силы  $F_1$ . Из точки их пересечения проводим прямую, параллельную лучу 1—2, до пересечения ее с линией действия силы  $F_2$ . Из точки пересечения этих линий проводим прямую, параллельную лучу 2—3, до пересечения ее с линией действия силы  $F_3$  и из этой точки проводим прямую, параллельную лучу 3—4, до пересечения с линией действия силы  $F_4$ . Из точки пересечения луча 3—4 с линией действия силы  $F_4$  проводим прямую, параллельную лучу  $\omega$ .

Продолжая прямые, параллельные лучам  $\alpha$  и  $\omega$ , до их пересечения в точке  $e$ , проводим через точку  $e$  прямую, параллельную вектору  $R$ . Точку пересечения этой прямой с балкой обозначим через  $f$ . Это и есть точка приложения равнодействующей заданных сил на балке  $AB$ .

Измеряя длину вектора  $R$ , находим, пользуясь избранным масштабом, величину равнодействующей. Она равна 17,4 Т. Принят масштаб  $1/3 T$  в 1 мм.

**Задача 1.57.** Балка  $AB$  (рис. а) длиной 12 м закреплена шарнирно концом  $A$  и опирается концом  $B$  на опору, установленную на катках. К балке приложены силы:  $F_1 = 2T$ ,  $F_2 = 3T$ ,  $F_3 = 1T$ . Расстояния:  $AC = 4$  м,  $CD = 2$  м,  $DE = 3$  м.

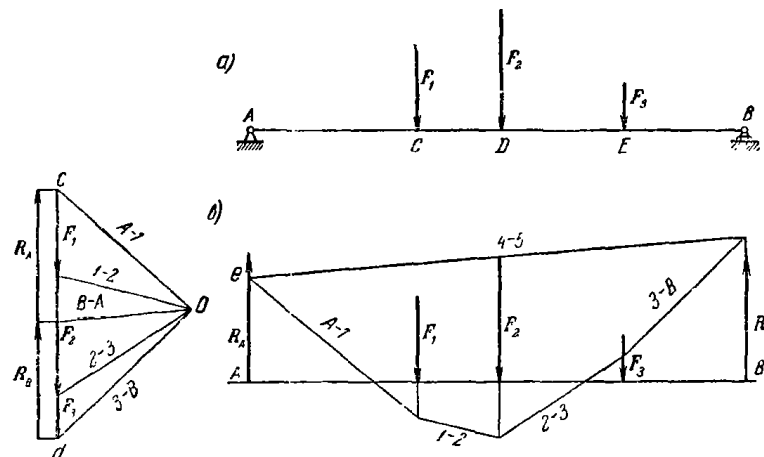
Определить построением веревочного многоугольника реакции опор  $A$  и  $B$ .

**Решение.** Рассмотрим равновесие балки  $AB$ . На балку действуют активные силы:  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ . Применяя закон освобождаемости от связей, отбросим мысленно опоры  $A$  и  $B$  и заменим их действие реакциями. Реакция опоры  $B$ , установленной на катках, направлена перпендикулярно к плоскости, на которую опираются катки, т. е. по вертикали вверх. Направление реакции шарнира  $A$ , вообще говоря, неизвестно, но так как все силы, действующие на балку, направлены вертикально, то ясно, что и реакция шарнира  $A$  должна быть вертикальной; если бы эта реакция не была вертикальной, то ее составляющая по горизонтали ничем не уравновешивалась бы и равновесие балки было бы невозможно.

Обозначим реакцию опоры  $A$  через  $R_A$ , реакцию опоры  $B$  через  $R_B$  и построим силовой многоугольник для пяти сил, действующих на балку. Из произвольно выбранной точки  $c$  (рис. б) проводим в некотором масштабе вектор, изображающий силу  $F_1$ ; из конца этого

вектора проводим второй вектор, изображающий силу  $F_2$ , и аналогично изображаем силу  $F_3$ .

Реакции опор  $R_A$  и  $R_B$  известны только по их направлениям. Ввиду того, что балка находится в равновесии, силовой многоугольник должен быть замкнут и конец вектора  $R_A$  должен совпадать с началом вектора  $F_1$  (в точке  $c$ ), а начало вектора  $R_B$  — с концом вектора  $F_3$  (в точке  $d$ ). Таким образом, вектор суммы реакций известен. Для определения величин каждой из слагаемых этой суммы проведем из произвольно выбранной точки  $o$  луч  $A-1$  в начало вектора  $F_1$  и конец вектора  $R_A$ , луч 1—2 в начало вектора  $F_2$ ,



К задаче 1.57.

луч 2—3 в начало вектора  $F_3$ , луч 3— $B$  в начало вектора  $R_B$  (совпадающее с концом вектора  $F_3$  в точке  $d$ ). Направление луча  $B-A$  неизвестно, так как неизвестны величины реакций  $R_A$  и  $R_B$ .

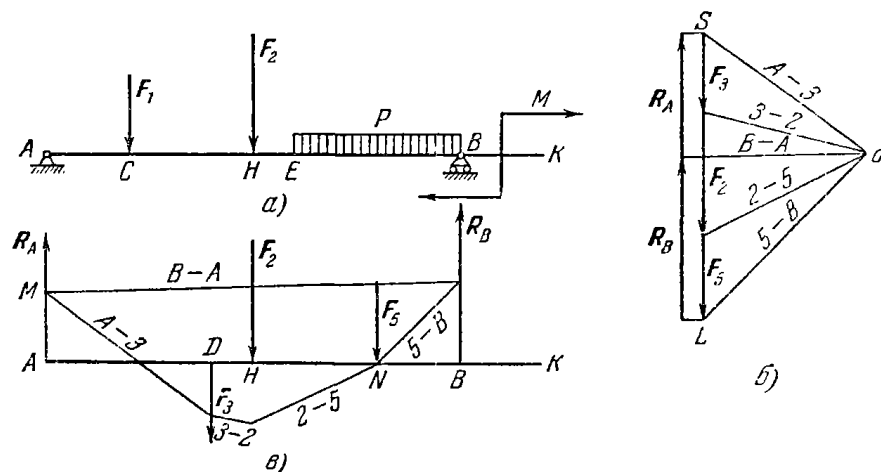
Далее переходим к построению веревочного многоугольника. Для этого из точки  $e$  (рис. в) на линии действия реакции  $R_A$  проводим прямую, параллельную лучу  $A-1$ , до пересечения ее с линией действия силы  $F_1$ , из точки их пересечения проводим прямую, параллельную лучу 1—2, до пересечения с линией действия силы  $F_2$ ; таким же образом проводим прямые, параллельные лучам 2—3, 3— $B$ , до пересечения их с линиями действия сил  $F_3$  и реакций  $R_B$ .

Так как система сил находится в равновесии, то веревочный многоугольник должен быть замкнут, и, следовательно, прямая между линиями действия реакций  $R_A$  и  $R_B$  должна проходить через точку  $e$ . Теперь мы можем провести из полюса  $o$  луч  $B-A$ , параллельный этой прямой; он поделит отрезок  $dc$  на отрезки, равные реакциям  $R_A$  и  $R_B$  (для наглядности на рис. б реакции  $R_A$  и  $R_B$  смещены несколько влево). Измеряя найденные величины реакций в принятом масштабе, находим их значения:  $R_A = 3,1T$ ,  $R_B = 2,9T$ .

**Задача 1.58.** На балку  $AK$ , находящуюся в равновесии, шарнирно закрепленную в точке  $A$  и свободно опертую при помощи катков в точке  $B$ , действуют силы:  $F_1 = 2\ T$ ,  $F_2 = 3\ T$ , пара сил, момент которой равен  $M = 4\ T \cdot м$ , и распределенная нагрузка интенсивностью  $P = 0,5\ T/м$ .

Определить с помощью построения веревочного многоугольника реакции опор  $A$  и  $B$  (рис. а). Размеры заданы:  $AK = 12\ м$ ,  $AC = 2\ м$ ,  $CH = 3\ м$ ,  $HE = 1\ м$ ,  $EB = 4\ м$ .

**Решение.** Для определения реакций опор, применяя закон освобожденности от связей, мысленно отбрасываем опоры и заменяем их



К задаче 1.58.

действие на балку реакциями опор  $R_A$  и  $R_B$  (рис. в). Обе реакции направлены вертикально вверх, так как все активные силы направлены вертикально вниз, а сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю. Так как действие пары сил не изменится, если перенести ее в любое место плоскости, сохранив момент пары неизменным, заменим пару силами  $F_4$  и  $F_5$ , равными по модулю  $2\ T$  каждая и приложенными соответственно в точках  $C$  и  $D$ , расположенных на расстоянии  $2\ м$  друг от друга. Сила  $F_4$ , равная  $2\ T$  и приложенная в точке  $C$ , уравновесится силой  $F_1$ , равной  $2\ T$ , и в дальнейшем в расчет приниматься не будет.

Чтобы решить задачу с помощью веревочного многоугольника, распределенную нагрузку необходимо заменить сосредоточенной силой  $F_3$ . Модуль этой силы равен

$$F_3 = P \cdot EB = 0,5 \cdot 4 = 2\ T,$$

и приложена она в точке  $N$  в середине отрезка  $EB$ .

Переходим к построению силового многоугольника. Для этого из произвольной точки  $S$  (рис. б) откладываем в выбранном масштабе вектор, по модулю и направлению равный силе  $F_3$ . Из конца этого вектора проводим вектор, по модулю и направлению равный силе  $F_2$ . Из конца этого вектора проводим вектор, равный силе  $F_5$ . Ввиду того, что балка находится в равновесии, многоугольник сил должен быть замкнут, и поэтому начало вектора, соответствующего реакции  $R_B$ , должно совпадать с концом вектора, соответствующего силе  $F_5$ , а конец вектора, соответствующего реакции  $R_A$ , — с началом силы  $F_3$  в точке  $S$ . Для наглядности реакции  $R_B$  и  $R_A$  (рис. б) проведем несколько левее. Затем из произвольно выбранной точки  $O$  проводим луч  $A-3$  в начало вектора  $F_3$ , луч  $3-2$  в начало вектора  $F_2$ , луч  $2-5$  в начало вектора  $F_5$ , луч  $5-B$  в начало вектора  $R_B$ , луч  $B-A$  в начало вектора  $R_A$  провести пока нельзя, так как неизвестны модули сил  $R_B$  и  $R_A$ .

Далее переходим к построению веревочного многоугольника. Для этого из произвольной точки  $M$  (рис. в) на линии действия реакции  $R_A$  проводим прямую, параллельную лучу  $A-3$ , до пересечения с линией действия силы  $F_3$ . Из точки их пересечения проводим прямую, параллельную лучу  $3-2$ , до пересечения ее с линией действия силы  $F_2$ . Из точки их пересечения проводим прямую, параллельную лучу  $2-5$ , до пересечения ее с линией действия силы  $F_5$ . Из точки их пересечения проводим прямую, параллельную лучу  $5-B$ , до пересечения ее с линией действия силы  $R_B$ . Так как рассматриваемая система сил находится в равновесии, веревочный многоугольник должен быть замкнут. Поэтому прямая между линиями действия сил  $R_B$  и  $R_A$  должна пройти через точку  $M$ , лежащую на направлении силы  $R_A$  (рис. в). Теперь можно провести луч  $B-A$  параллельно этой прямой из точки  $O$  (рис. б). Этот луч разделит отрезок  $SL$  на векторы, равные реакциям  $R_A$  и  $R_B$ . Измерив эти векторы и умножив на выбранный масштаб, находим, что  $R_B = 3,9\ T$ , а  $R_A = 3,1\ T$ .

**Задача 1.59.** На балку  $AB$ , шарнирно закрепленную в точке  $A$  и опертую при помощи катков в точке  $B$ , действуют силы  $F_1 = 6\ T$ ,  $F_2 = 8\ T$ ,  $F_3 = 6\ T$ ,  $F_4 = 5\ T$ ; силы  $F_1$  и  $F_4$  направлены по вертикали. Силы  $F_2$  и  $F_3$  направлены соответственно под углами  $60^\circ$  и  $30^\circ$  к балке.

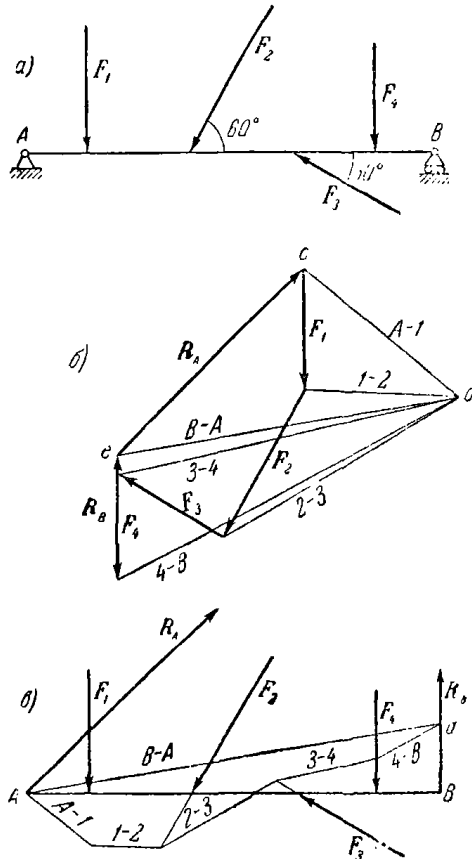
Определить построением веревочного многоугольника реакции опор (рис. а).

**Решение.** Для определения реакций опор применяем закон освобожденности от связей, отбрасываем мысленно опоры и заменяем их действия реакциями  $R_A$  и  $R_B$ . Реакция  $R_B$  направлена по вертикали вверх, так как опора  $B$  установлена на катках и, следовательно, не может препятствовать перемещению вдоль плоскости, на которую опираются катки. Реакция шарнира  $R_A$  может быть любого направления (рис. в).

Для определения реакций опор способом веревочного многоугольника строим сперва в выбранном масштабе силовой многоугольник для активных сил и реакций опор. Активные силы известны по величине и направлению, реакция опоры  $R_B$  известна только по направлению, реакция опоры  $R_A$  не известна ни по величине, ни по направлению, однако можно сказать, что конец ее в силовом многоугольнике должен совпасть с началом силы  $F_1$ , так как балка находится в равновесии и силовой многоугольник должен быть замкнут.

Из произвольной точки  $c$  (рис. б) проводим вектор, по величине и направлению равный силе  $F_1$ , из конца этого вектора проводим вектор, по величине и направлению равный силе  $F_2$ . Таким же образом проводим векторы, по величине и направлению равные силам  $F_3$  и  $F_4$ . Из конца вектора, равного силе  $F_4$ , проводим направление реакции  $R_B$ , на котором должен лежать конец вектора, равного реакции  $R_B$ . Далее из произвольного полюса  $o$  проводим луч  $A-1$  в начало вектора  $F_1$ , луч  $1-2$  в начало вектора  $F_2$ , луч  $2-3$  в начало вектора  $F_3$ , луч  $3-4$  в начало вектора  $F_4$  и луч  $4-B$  в начало вектора  $R_B$ . Луч  $B-A$  в начало вектора  $R_A$  провести нельзя, так как величина реакции  $R_B$  неизвестна.

Для определения величины реакции  $R_B$  переходим к построению веревочного многоугольника. Для этого проводим через точку  $A$  (рис. а) (так как это единственная известная точка на линии действия реакции  $R_A$ ) прямую, параллельную лучу  $A-1$ , до пересечения ее с линией действия силы  $F_1$ . Через эту точку пересечения проводим прямую, параллельную лучу  $1-2$ , до пересечения ее с линией действия силы  $F_2$ . Через эту точку пересечения проводим прямую, параллельную лучу  $2-3$ , до пересечения ее с линией действия силы  $F_3$ . Таким же образом проводим прямые, параллельные лучам  $3-4$  и  $4-B$ , до пересечения их с линиями действия сил  $F_4$  и  $R_B$ .



К задаче 1.59.

Прямая, параллельная лучу  $4-B$ , пересекает направление реакции  $R_B$  в точке  $d$ .

Ввиду того, что при равновесии системы веревочный многоугольник должен быть замкнут, соединяем точку  $d$  с точкой  $A$ , где было начато построение веревочного многоугольника. Теперь можно провести луч  $B-A$  через полюс  $o$  (рис. б) параллельно прямой  $dA$ . Луч  $B-A$  пересекает направление реакции  $R_B$  в точке  $e$ , которая и определяет конец вектора  $R_B$ . Величина и направление реакции  $R_A$  найдутся, если соединить конец вектора  $R_B$  с началом вектора  $F_1$ . Измерив отрезки, изображающие реакции, и учтя принятый масштаб, найдем  $R_A = 12,8 \text{ T}$ ,  $R_B = 6 \text{ T}$ .

Для приобретения навыков в решении задач на равновесие тел и сложение сил способом веревочного многоугольника ре-

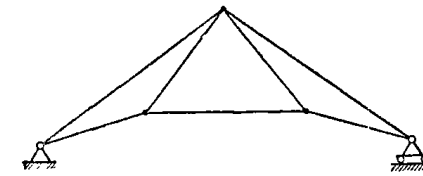


Рис. 1.46.

комендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 193, 194, 195, 196.

3°. Расчет усилий в стержнях фермы. Способ вырезания узлов. Фермой (рис. 1.46) называется геометрически неизменяемая конструкция, образованная прямолинейными стержнями, соединенными друг с другом концами при помощи шарниров. Шарнирные соединения концов стержней называются узлами. Ферма является статически определимой, если число узлов  $n$  и число стержней  $m$  удовлетворяют уравнению

$$m = 2n - 3.$$

Если число стержней не удовлетворяет этому равенству, то возможны два случая:

$$m > 2n - 3,$$

ферма является в этом случае статически неопределимой;

$$m < 2n - 3,$$

конструкция перестает быть геометрически неизменяемой, получает подвижность (становится механизмом).

Расчет усилий в стержнях фермы методами статики (в том числе и графостатики) может быть произведен только для статически определимых ферм \*).

\*). Расчет статически неопределимых ферм выходит за рамки курса теоретической механики, так как требует учета деформаций конструкции.

В дальнейшем мы будем полагать, что заданные активные силы приложены в узлах фермы и лежат в одной плоскости с фермой, трение в шарнирах отсутствует. При выполнении этих условий стержни будут или сжаты, или растянуты, следовательно, реакции стержней будут совпадать по направлению со стержнями.

Расчет статически определимых ферм проводится одним из трех способов:

- способом вырезания узлов;
- построением диаграммы Максвелла — Крeмоны;
- методом сечений.

Расчет сводится к определению усилий в стержнях фермы. Активные силы и реакции опор являются внешними силами для всей фермы, рассматриваемой как твердое тело; усилия в стержнях в этом случае — внутренние силы. Поэтому для определения усилий необходимо, согласно общему правилу, рассмотреть равновесие части фермы, для которой искомые усилия являются внешними силами.

При расчете ферм способом вырезания узлов можно пользоваться аналитическим и графическим методами.

При аналитическом методе решения задач на расчет ферм способом вырезания узлов надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги, на стр. 15. Затем:

5) определить реакции опор, пользуясь уравнениями равновесия для всей фермы, рассматриваемой как твердое тело, или при помощи веревочного многоугольника;

6) вырезать узел, в котором сходятся два стержня, и рассмотреть его равновесие под действием активных сил и реакций разрезанных стержней; определить эти реакции из двух уравнений проекций сил, приложенных к узлу, на декартовы оси координат;

7) переходя от узла к узлу, рассматривать аналогично равновесие каждого узла; при этом в каждом узле должно быть только два неизвестных усилия в стержнях; составляя для каждого узла два уравнения равновесия в проекциях на оси  $x$  и  $y$ , определить все искомые усилия в стержнях.

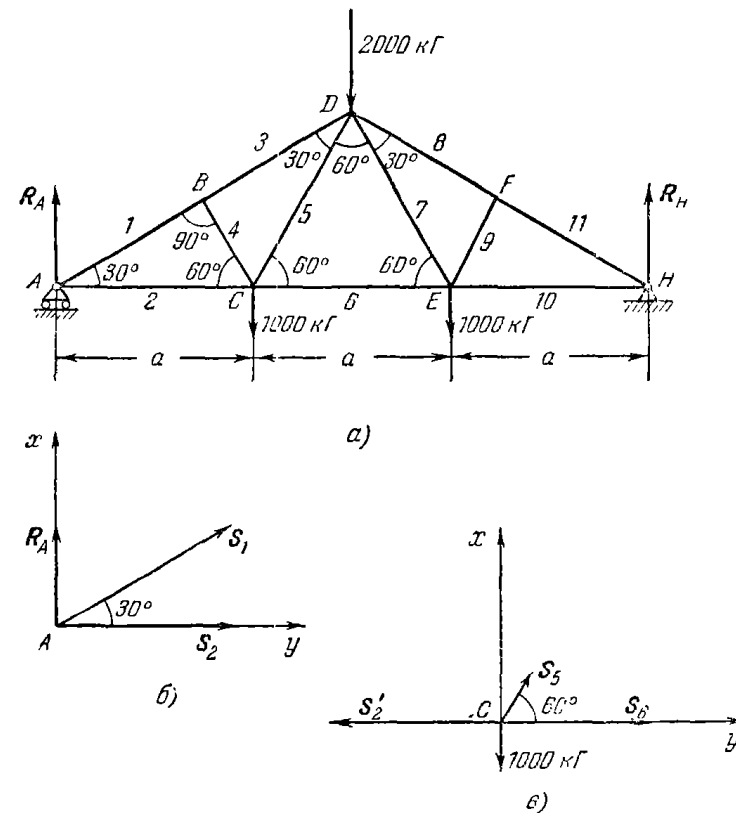
При графическом методе решения задач на расчет ферм способом вырезания узлов надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги, на стр. 15. Затем:

5) определить реакции опор, пользуясь уравнениями равновесия для всей фермы, рассматриваемой как твердое тело, или при помощи веревочного многоугольника;

6) вырезать узел, в котором сходятся два стержня, и рассмотреть его равновесие под действием заданных активных сил и реакций разрезанных стержней; определить эти реакции построением замкнутого треугольника или многоугольника сил, приложенных к узлу;

7) переходя от узла к узлу, рассматривать аналогично равновесие каждого узла; при этом в каждом узле должно быть только два неизвестных усилия в стержнях; строя для каждого узла замкнутый силовой многоугольник, определить все искомые усилия в стержнях.

**Задача 1.60.** Определить усилия в стержнях фермы (рис. а) аналитическим методом вырезания узлов.



К задаче 1.60.

**Решение.** Для определения усилий в стержнях сначала надо найти реакции опор  $A$  и  $H$ . Для этого мысленно отбрасываем опоры и заменяем их действие на ферму реакциями  $R_A$  и  $R_H$ . Ввиду симметрии фермы и нагрузки реакции опор равны друг другу и каждая по величине равна  $2000 \text{ кг}$ . Когда реакции опор определены, переходим к определению усилий в стержнях. Для этого надо рассматривать равновесие каждого узла, мысленно отбросив сходящиеся в них стержни и заменяя их действие на узел реакциями. Первым надо рассмотреть узел, к которому приложены только две неизвестные силы. Начнем с узла  $A$ . Узел  $A$  находится в равновесии под дейст-



вием известной реакции  $R_A$  и неизвестных реакций стержней 1 и 2. Будем обозначать реакции стержней соответственно через  $S_1$  и  $S_2$  (рис. б) и направлять их от узла, предполагая таким образом, что стержни растянуты. Затем через точку  $A$  проводим оси  $x$  и  $y$  и составляем систему уравнений равновесия узла  $A$ , приравнявая нулю сумму проекций всех сил на эти оси.

Уравнение проекций на оси  $x$  и  $y$  будут:

$$S_2 + S_1 \cos 30^\circ = 0,$$

$$R_A + S_1 \cos 60^\circ = 0.$$

Отсюда находим:

$$S_1 = -4000 \text{ кг}, \quad S_2 = 3464 \text{ кг}.$$

Отрицательное значение реакции  $S_1$  показывает, что в действительности она направлена в противоположную сторону и стержень 1 не растянут, как мы предполагали, а сжат.

Теперь переходим к исследованию равновесия узла  $B$ . В узле  $B$  сходятся три стержня, из которых стержни 1 и 3 направлены по одной прямой, а стержень 4 под углом к ним. Никаких активных сил к узлу  $B$  не приложено. Следовательно, точка  $B$  находится в равновесии под действием трех реакций стержней. Это возможно только в случае, если усилие в стержне 4 равно нулю, так как только оно проектируется на направление, перпендикулярное к стержням 1 и 3. Итак, усилия в стержнях 1 и 3 одинаковы, а усилие в стержне 4 равно нулю.

Переходим к узлу  $C$ . Узел  $C$  находится в равновесии под действием двух неизвестных реакций  $S_5$  и  $S_6$ , активной силы  $1000 \text{ кг}$  и известной реакции  $S_2'$ , которая по величине равна реакции  $S_2$ , приложенной к узлу  $A$ , но направлена в противоположную сторону (рис. в). Проводим оси координат через точку  $C$  и составляем уравнения равновесия для узла  $C$ .

Уравнения проекций на оси  $x$  и  $y$  будут:

$$-S_2' + S_5 \cos 60^\circ + S_6 = 0,$$

$$S_5 \cos 30^\circ - 1000 = 0.$$

Отсюда находим:

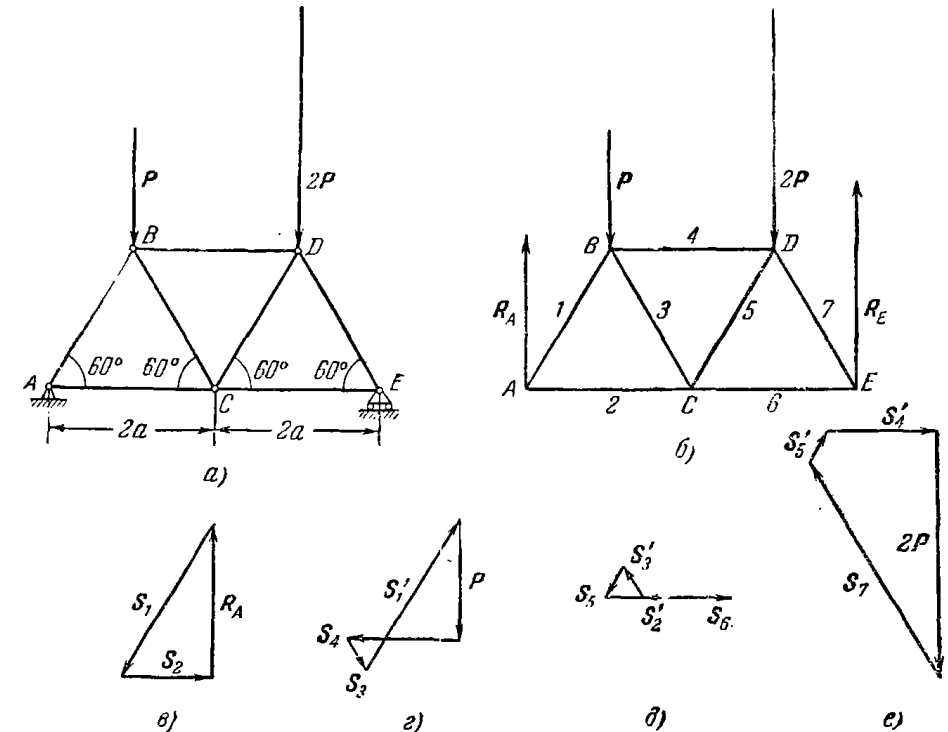
$$S_5 = 1155 \text{ кг}, \quad S_6 = 2886,5 \text{ кг}.$$

Следовательно, стержни 5 и 6, как мы и предполагали, растянуты.

Ввиду полной симметрии фермы и приложенной в узлах нагрузки достаточно определить усилия в стержнях левой половины фермы. Так, например, усилия в стержнях 1 и 11, 2 и 10 будут ввиду симметрии равными.

**Задача 1.61.** Определить графически усилия в стержнях фермы (рис. а) способом вырезания узлов.

Решение. Для определения усилий в стержнях фермы необходимо сперва найти реакции опор. Для этого мысленно отбросим опоры и заменим их действие на ферму реакциями  $R_A$  и  $R_E$ . Эти реакции направлены по вертикали вверх, так как активные силы направлены по вертикали вниз. Кроме того, опора  $E$  может воспринимать только вертикальные усилия. Для определения величины реакций



К задаче 1.61.

рассмотрим ферму как твердое тело, находящееся в покое под действием активных сил, включая реакции опор (рис. б).

Уравнение моментов относительно точки  $A$  будет:

$$-P \cdot a - 2P \cdot 3a + R_E \cdot 4a = 0,$$

откуда

$$R_E = 1,75 P.$$

Уравнение моментов относительно точки  $E$  будет:

$$-2P \cdot a - P \cdot 3a + R_A \cdot 4a = 0,$$

откуда

$$R_A = 1,25 P.$$

Определив реакции опор, переходим к нахождению усилий в стержнях. Обозначим стержни цифрами 1, 2, 3, ..., 7.

Первым вырежем тот узел, в котором имеется только две неизвестные силы, например узел *A*. К узлу *A* приложены три силы: реакция опоры  $R_A$ , реакции  $S_1$  и  $S_2$  перерезанных стержней 1, 2. Реакция  $R_A$  известна по величине и направлению, реакции стержней направлены вдоль стержней, но величина их неизвестна. Напомним, что совпадение направления реакций со стержнями соблюдается всегда, если прямолинейные стержни закреплены шарнирно своими концами и все силы приложены только в узлах.

Для определения величины реакций стержней строим треугольник сил, откладывая их в том порядке, в каком они встречаются при обходе узла по часовой стрелке. Первой откладываем в масштабе известную величину  $R_A$  (рис. *б*), из ее конца и начала проводим прямые, параллельные стержням 1 и 2, до их пересечения. Стороны полученного треугольника определяют реакции  $S_1$  и  $S_2$ . Чтобы найти их направление, обходим треугольник сил в направлении, указанном известной силой  $R_A$ . При равновесии узла стрелки в замкнутом силовом многоугольнике идут в одном направлении. Переносим реакцию  $S_1$  на стержень 1, находим, что она направлена к узлу, следовательно, стержень 1 сжат. Переносим реакцию  $S_2$  на стержень 2, находим, что она направлена от узла *A*, следовательно, стержень 2 растянут.

Следующим вырезаем узел *B*. К нему приложены четыре силы: две неизвестные реакции  $S_3$  и  $S_4$  стержней 3 и 4, известная реакция стержня 1, которая равна по величине реакции  $S_1$ , приложенной к узлу *A*, но направлена в противоположную сторону (обозначим ее через  $S'_1$ ), активная сила  $P$ . Строим многоугольник этих сил. Первой откладываем в масштабе силу  $S'_1$  (рис. *г*), к концу ее прикладываем активную силу  $P$ , а затем через конец силы  $P$  проводим прямую, параллельную стержню 4, а через начало силы  $S'_1$  — прямую, параллельную стержню 3, до их пересечения. Стороны полученного четырехугольника определяют реакции  $S_3$  и  $S_4$ . Чтобы найти их направление, обходим четырехугольник в направлении, указанном известными силами. Переносим реакцию  $S_3$  на стержень 3, находим, что она направлена от узла *B*, следовательно, стержень 3 растянут. Переносим реакцию  $S_4$  на стержень 4, находим, что она направлена к узлу *B*, следовательно, стержень 4 сжат.

Следующим вырезаем узел *C*. К нему приложены четыре силы: две неизвестные реакции  $S_5$  и  $S_6$  стержней 5 и 6 и две известные реакции стержней 2 и 3, которые по величине равны реакциям  $S_2$  и  $S_3$ , приложенным соответственно к узлам *A* и *B*, но направлены в противоположные стороны (обозначим их через  $S'_2$  и  $S'_3$ ). Строим многоугольник этих сил. Первой откладываем известную силу  $S'_2$ , к ней прибавляем также известную силу  $S'_3$ , затем через конец силы  $S'_3$  и начало силы  $S'_2$  проводим прямые, параллельные стержням 5 и 6,

до их пересечения. Обходя полученный многоугольник сил в направлении, указанном известными силами, находим направление реакций  $S_5$  и  $S_6$ . Переносим реакцию  $S_5$  на стержень 5, находим, что она направлена к узлу *C*, следовательно, стержень 5 сжат. Переносим реакцию  $S_6$  на стержень 6, находим, что она направлена от узла *C*, следовательно, стержень 6 растянут.

Следующим вырезаем узел *D*. К нему приложены четыре силы: одна неизвестная реакция стержня 7, активная сила  $2P$  и известные реакции  $S_4$  и  $S_5$ , которые равны по величине реакциям  $S_4$  и  $S_5$ , приложенным соответственно к узлам *B* и *C*, но направлены в противоположные стороны (обозначим их через  $S'_4$  и  $S'_5$ ). Строим многоугольник сил. Первой откладываем силу  $S'_5$  (рис. *е*), к ней присоединяем силу  $S'_4$  и активную силу  $2P$ . Затем соединяем конец силы  $2P$  с началом силы  $S'_5$  и получаем искомую реакцию  $S_7$ . Переносим реакцию  $S_7$  на стержень 7, находим, что она направлена к узлу *D*. Следовательно, стержень 7 сжат. Построение этого многоугольника одновременно служит и проверкой правильности построения всех многоугольников, так как найденная сила  $S_7$  должна быть параллельна стержню 7, если построение сделано верно.

4<sup>2</sup>. Определение усилий в стержнях фермы построением диаграммы Максвелла — Кремоны. Способ вырезания узлов, рассмотренный в предыдущем пункте, позволяет сравнительно просто найти усилия в стержнях фермы. К недостаткам этого способа следует отнести повторное построение усилий в стержнях, которые один раз проводятся в одном направлении, а другой раз — в противоположном. Кроме того, построение силовых многоугольников для каждого узла в отдельности не создает общей картины распределения усилий в стержнях фермы. Определение усилий построением диаграммы Максвелла — Кремоны позволяет устранить эти недостатки.

*Построение диаграммы Максвелла — Кремоны заключается в соединении силовых многоугольников, построенных для всех узлов фермы, в один чертеж так, чтобы ни одно из усилий не повторялось дважды.*

При расчете фермы способом Максвелла — Кремоны следует придерживаться следующих правил и последовательности действий:

1) определяем из условий равновесия всей фермы как твердого тела, находящегося под действием плоской системы сил, опорные реакции; это делается графически, построением веревочного многоугольника, причем результат затем проверяется аналитически, при помощи уравнений равновесия;

2) отбрасываем опоры и изображаем все приложенные к ферме внешние силы, включая реакции опор, так, чтобы эти векторы располагались вне контура фермы;

3) части плоскости, ограниченные контуром фермы и линиями действия внешних сил, обозначаем буквами; обозначаем буквами также части плоскости, ограниченные стержнями фермы; узлы фермы обозначаем римскими цифрами; стержни нумеруем арабскими цифрами;

4) строим замкнутый многоугольник внешних сил, откладывая силы в том порядке, в каком они встречаются при обходе фермы; направление обхода выбирается произвольно (по часовой или против часовой стрелки); силы обозначаем двумя малыми буквами того же наименования, что и большие буквы, обозначающие смежные участки плоскости, между которыми проходит линия действия данной силы;

5) последовательно строим на этом же рисунке замкнутые силовые многоугольники для каждого узла; при этом узлы выбираем в таком порядке, чтобы каждый раз число неизвестных усилий в стержнях равнялось двум (в последнем узле получится при этом одно неизвестное усилие); обход каждого узла делаем в том же направлении, которое было избрано для внешних сил (по часовой или против часовой стрелки); в этом же порядке откладываем встречающиеся внешние силы и усилия в стержнях;

6) для определения того, сжат или растянут стержень, в каждом замкнутом силовом многоугольнике мысленно направляем стрелки в одном направлении, указанном известными силами, и переносим найденное усилие на стержень; стержень сжат, если усилие направлено к узлу, и растянут, если усилие идет от узла;

7) измеряем на диаграмме отрезки, изображающие искомые усилия в стержнях фермы, и находим, учитывая принятый масштаб сил, величины усилий.

**Задача 1.62.** Определить усилия в стержнях фермы (рис. а) построением диаграммы Максвелла — Кремоны.

**Решение.** Для определения усилий в стержнях фермы необходимо прежде всего найти реакцию опор. Для этого мысленно отбросим опоры и заменим их действие на ферму реакциями. Реакция опоры  $B$  направлена по вертикали вверх, так как опора установлена на катках, которые не могут препятствовать перемещению вдоль плоскости, на которую опираются катки. Величина и направление реакции опоры  $A$  неизвестны, поэтому найдем ее составляющие по осям  $x$  и  $y$ . Для этого составим уравнения равновесия фермы как свободного твердого тела, находящегося в равновесии под действием активных сил и реакций опор.

Уравнение моментов относительно точки  $A$  будет:

$$-R_B \cdot 6a + P \cdot a + P \cdot 4a + 2P \cdot 2a = 0,$$

откуда

$$R_B = 1,5P.$$

Уравнения проекций на оси  $x$  и  $y$  будут:

$$R_{Ax} - P = 0,$$

$$R_B - P - 2P + R_{Ay} = 0,$$

откуда

$$R_{Ax} = P, \quad R_{Ay} = 1,5P.$$

Тогда модуль реакции шарнира  $A$  равен

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 1,8P.$$

Определим направление реакции опоры  $A$ . Для этого найдем угол  $\beta$ , образованный реакцией с осью  $x$ :

$$\cos \beta = \frac{R_{Ax}}{R_A} = \frac{P}{1,8P} = 0,55,$$

откуда

$$\beta = 56^\circ 20'.$$

После того как реакции опор найдены, можно перейти непосредственно к построению диаграммы Максвелла — Кремоны.

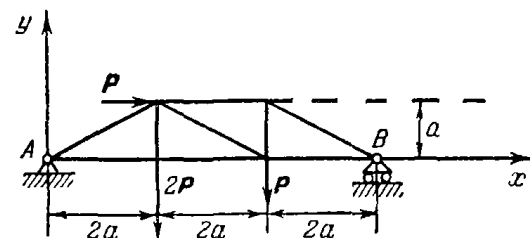
Изображаем все приложенные к ферме внешние силы, включая реакции опор, так, чтобы их векторы расположились вне контура фермы (рис. б). Части плоскости, ограниченные контуром фермы и линиями действия внешних сил, обозначим буквами  $C, D, E, F, G$ ; плоскости, ограниченные стержнями фермы, обозначим буквами  $H, I, L, M$ ; узлы фермы обозначим римскими цифрами  $I, II, III, IV, V, VI$ ; стержни нумеруем арабскими цифрами  $1-9$ .

Строим вначале многоугольник внешних сил (рис. в), который должен быть замкнут, так как ферма находится в равновесии. Откладываем силы в том порядке, в каком они встречаются при обходе фермы по часовой стрелке, и обозначаем их двумя малыми буквами, соответствующими тем большим буквам, которыми обозначены две смежные области, разграниченные линией действия данной силы при обходе фермы по часовой стрелке. Откладываем в масштабе вектор  $cd$ , соответствующий реакции  $R_A$ , к нему прибавляем вектор  $de$ , соответствующий силе  $P$ , таким же образом откладываем векторы  $ef, fg, gc$ , соответствующие силам  $R_B, P$  и  $2P$ .

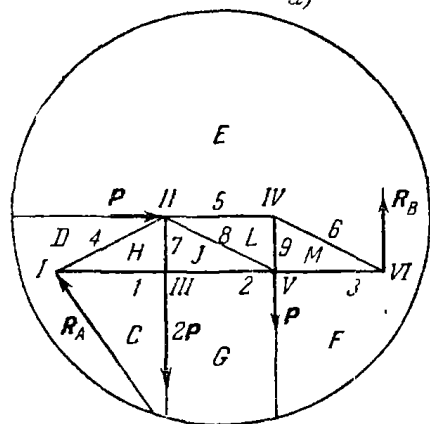
Получив замкнутый многоугольник внешних сил, приступаем к построению многоугольников сил, приложенных к узлам фермы, начиная с того узла, в котором есть только две неизвестные силы, например с узла  $I$ . Многоугольники строим, также обходя узлы по часовой стрелке и обозначая усилия в стержнях двумя малыми буквами, соответствующими тем большим буквам, которыми обозначены две смежные области, разграниченные данным стержнем. Согласно принятым обозначениям многоугольник сил, приложенных к узлу  $I$ ,

должен состоять из векторов  $cd$ ,  $dh$ ,  $hc$ , соответствующих по величине и направлению силе  $R_A$  и усилиям стержней 1, 4.

Поскольку все стержни прямолинейны, соединены между собой шарнирами и внешние силы приложены только к узлам, то усилия в каждом стержне направлены вдоль стержня, так как он находится



а)



б)

К задаче 1.62.

в равновесии под действием только двух сил, реакций шарниров. Стержень при указанных условиях может быть только сжат или растянут.

Вектор  $cd$  на рисунке уже есть; чтобы найти векторы  $dh$  и  $hc$ , достаточно через точку  $c$  провести прямую, параллельную стержню 1, а через точку  $d$  — прямую, параллельную стержню 4, и в точке их пересечения поставить букву  $h$ .

Переходим к узлу III. Многоугольник сил, приложенных к нему, должен состоять из векторов  $gc$ ,  $ch$ ,  $hi$ ,  $ig$ . Векторы  $gc$ ,  $ch$  на рисунке уже есть; чтобы найти векторы  $hi$ ,  $ig$ , достаточно провести через точку  $h$  прямую, параллельную стержню 7, а через точку  $g$  — прямую, параллельную стержню 2, и в точке их пересечения поставить букву  $i$ .

Переходим к узлу II. Многоугольник сил, приложенных к нему, должен состоять из векторов  $ih$ ,  $hd$ ,  $de$ ,  $el$ ,  $li$ . Векторы  $ih$ ,  $hd$ ,  $de$  на рисунке уже есть; чтобы найти векторы  $el$ ,  $li$ , проводим через точку  $e$  прямую, параллельную стержню 5, а через точку  $i$  — прямую, параллельную стержню 8, и в точке их пересечения ставим точку  $l$ .

Переходим к узлу V. Многоугольник сил, приложенных к нему, должен состоять из векторов  $fg$ ,  $gi$ ,  $il$ ,  $lm$ ,  $mf$ . Векторы  $fg$ ,  $gi$ ,  $il$  на рисунке уже есть; чтобы найти векторы  $lm$ ,  $mf$ , проводим через точку  $l$  прямую, параллельную стержню 9, а через точку  $f$  — прямую, параллельную стержню 3, и в точке их пересечения ставим букву  $m$ .

Многоугольник сил, приложенных к узлу IV, должен состоять из векторов  $ml$ ,  $le$ ,  $em$ . Векторы  $ml$ ,  $le$  на рисунке уже есть; чтобы найти вектор  $em$ , соединяем прямой точку  $m$  с точкой  $e$ . Эта прямая должна быть параллельна стержню 6, так как вектор  $em$  соответствует усилию в стержне 6. Таким образом, параллельность этого вектора стержню 6 является проверкой правильности построения диаграммы.

Переходя к узлу VI, видим, что многоугольник сил, приложенных к нему, должен состоять из векторов  $fm$ ,  $me$ ,  $ef$ , которые уже есть на рисунке. Таким образом, усилия всех стержней найдены и осталось только определить, какие стержни растянуты и какие сжаты. Для этого векторы силовых многоугольников каждого узла мысленно переносим на соответствующие стержни и определяем, куда они направлены: если к рассматриваемому узлу, значит, стержень сжат, если от узла — растянут. Силовой треугольник  $cdh$  характеризует равновесие узла I. Силы в этом треугольнике направлены от  $c$  к  $d$ , от  $d$  к  $h$  и от  $h$  к  $c$ . Следовательно, вектор  $dh$  направлен к узлу I, значит, стержень 4 сжат; вектор  $hc$  направлен от узла I, значит, стержень 1 растянут. Силовой четырехугольник  $gchi$  характеризует равновесие узла III. Силы в этом четырехугольнике направлены от  $g$  к  $c$ , от  $c$  к  $h$ , от  $h$  к  $i$ , следовательно, вектор  $hi$  направлен от узла III, значит, стержень 7 растянут; вектор  $ig$  направлен от узла III, следовательно, стержень 2 растянут. Рассуждая таким образом дальше, находим, что стержни 3, 9 также растянуты, а стержни 5, 6, 8 сжаты. Чтобы найти величины усилий стержней, измеряем их на диаграмме и умножаем на масштаб сил.

5°. Определение усилий в стержнях фермы методом сечений. Рассмотренный способ расчета фермы путем построения диаграммы Максвелла — Кремоны является графическим приемом. В отличие от него метод разрезов фермы позволяет определить усилия в стержнях аналитически.

При расчете ферм методом сечений рекомендуется такая последовательность действий:

1) определяем опорные реакции, рассматривая равновесие фермы как твердого тела, находящегося под действием плоской системы сил;

для этого составляем три уравнения равновесия или применяем способ веревочного многоугольника;

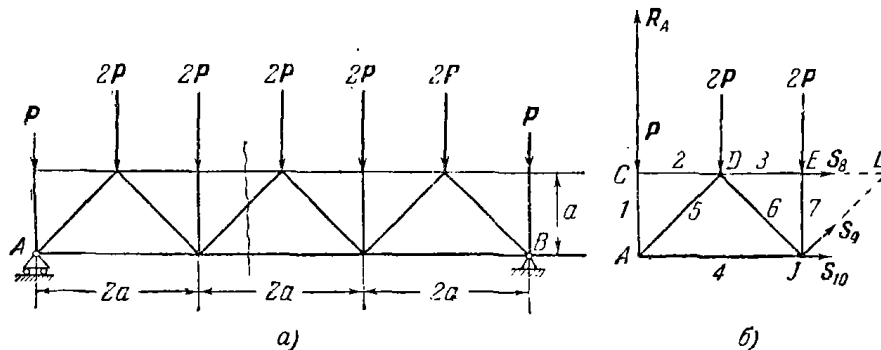
2) разрежем мысленно ферму, к которой приложены все внешние силы, на две части так, чтобы число разрезанных стержней не превышало трех, и заменим действие отброшенной части искомыми усилиями стержней, полагая все стержни растянутыми;

3) составляем уравнения равновесия для части фермы так, чтобы в каждое уравнение входило одно неизвестное усилие; для этого составляем уравнения моментов относительно точек, где пересекаются линии действия двух неизвестных усилий; если два стержня параллельны, то составляем уравнение проекций на ось, перпендикулярную к этим стержням, и которое также войдет одно неизвестное усилие;

4) решая каждое из составленных уравнений, находим искомое усилие в стержнях; если в ответе получится знак минус, то это означает, что стержень сжат, а не растянут.

**Задача 1.63.** Определить усилия в стержнях фермы методом сечений (рис. а).

**Решение.** Для определения усилий в стержнях фермы сначала надо определить реакции опор. Для этого мысленно отбросим опоры и заменим их действие на ферму реакциями  $R_A$  и  $R_B$ . Рассматриваем



К задаче 1.63.

ферму как твердое тело, находящееся в равновесии под действием семи активных сил и двух неизвестных реакций опор. Ввиду симметрии фермы и нагрузки реакции опор равны друг другу и каждая по величине равна  $6P$ .

После того как реакции опор определены, переходим к определению усилий в стержнях фермы. Разрезаем мысленно ферму по стержням, усилия в которых надо определить (рис. б), например по стержням 8, 9, 10, и удаляем правую часть фермы, заменив действие ее реакциями стержней  $S_8$ ,  $S_9$ ,  $S_{10}$ . Направим эти реакции вдоль перерезанных стержней от узлов  $E$  и  $I$ , предположив таким образом, что стержни 8, 9, 10 растянуты. Теперь левая часть фермы (рис. б)

находится в равновесии под действием реакции опоры  $R_A$ , трех активных сил и реакций стержней  $S_8$ ,  $S_9$ ,  $S_{10}$ . Чтобы найти величины этих реакций, составим уравнения равновесия для левой части фермы, приравнявая нулю сумму моментов всех сил относительно точек  $I$  и  $L$ , в которых пересекаются линии действия двух искоемых неизвестных сил. Благодаря этому уравнение моментов будет содержать только одно неизвестное. Так, уравнение моментов относительно точки  $I$  будет:

$$R_A \cdot 2a - P \cdot 2a - 2P \cdot a + S_8 \cdot a = 0,$$

откуда

$$S_8 = -8P.$$

Отрицательное значение величины реакции  $S_8$  говорит о том, что в действительности эта реакция направлена в сторону, противоположную принятой, т. е. к узлу  $E$ , и, следовательно, стержень 8 сжат.

Уравнение моментов относительно точки  $L$  будет:

$$-2P \cdot a - 2P \cdot 2a - P \cdot 3a + R_A \cdot 3a - S_{10} \cdot a = 0,$$

откуда

$$S_{10} = 9P.$$

Стержень 10, как мы и предполагали, растянут.

Так как усилия  $S_8$  и  $S_{10}$  параллельны, то не существует точки их пересечения, поэтому для определения усилия  $S_9$  вместо уравнения моментов составляем уравнение проекций всех сил на вертикальную ось, перпендикулярную к стержням 8 и 10:

$$R_A - P - 2P - 2P + S_9 \cos 45^\circ = 0,$$

откуда

$$S_9 = -\frac{2P}{\sqrt{2}}.$$

Отрицательное значение реакции  $S_9$  говорит о том, что в действительности эта реакция направлена в сторону, противоположную принятой, т. е. к узлу  $I$ , и стержень 9 сжат. Аналогично могут быть определены методом сечений усилия в любых стержнях этой фермы.

Для приобретения навыков в решении задач на расчет усилий в стержнях ферм рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 199, 202, 204, 205, 206, 207.

§ 1. Система сходящихся сил

В § 1 главы I была рассмотрена плоская система сходящихся сил. Пространственная система сходящихся сил, подобно плоской, также приводится к равнодействующей  $R$ .

Равнодействующая  $R$  пространственной системы сходящихся сил приложена в точке пересечения линий действия слагаемых сил и является замыкающей стороной силового многоугольника, построенного на этих силах, т. е.

$$R = \sum_{k=1}^n F_k. \quad (1^*)$$

В отличие от соответствующей плоской задачи силовой многоугольник не является плоским, т. е. он представляет собой ломаную пространственную линию.

Проекция равнодействующей силы  $R$  на оси декартовых координат  $x, y, z$  равны суммам проекций слагаемых сил на соответствующие оси, т. е.

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}. \quad (2^*)$$

Модуль равнодействующей  $R$  равен

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad (3^*)$$

направляющие косинусы даются формулами:

$$\cos(\widehat{x, R}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\widehat{y, R}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\widehat{z, R}) = \frac{R_z}{R}. \quad (4^*)$$

Для равновесия твердого тела, к которому приложена пространственная система сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая равнялась нулю:  $R = 0$ , т. е. чтобы силовой мно-

гоугольник был замкнут. При этом уравнения равновесия имеют вид

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0. \quad (5^*)$$

Задача является статически определенной, если число алгебраических неизвестных не более трех (предполагается, что все силы не лежат на одной прямой или в одной плоскости). Так, если известны направления всех сил, то можно определить модули трех сил.

При решении задач на равновесие твердого тела, находящегося под действием пространственной

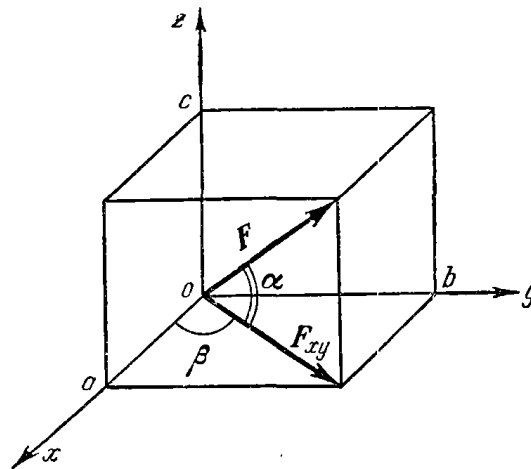


Рис. 2.1.

системы сходящихся сил, надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги, на стр. 15. Затем:

5) убедиться в том, что задача является статически определенной, т. е. что число алгебраических неизвестных величин не более трех;

6) выбрать систему осей декартовых координат  $x, y, z$ ;

7) составить уравнения равновесия (5\*) твердого тела в проекциях на оси декартовых координат;

8) решить полученную систему уравнений, т. е. определить неизвестные величины.

Если требуется найти равнодействующую пространственной системы сходящихся сил, то после выполнения первых шести пунктов следует определить проекции  $R_x, R_y, R_z$  равнодействующей  $R$  по формулам (2\*), затем вычислить модуль равнодействующей  $R$  и направляющие косинусы по формулам (3\*), (4\*).

Начало осей декартовых координат рекомендуется выбрать в точке пересечения линий действия слагаемых сил, а координатные оси направить параллельно либо перпендикулярно к большинству этих сил.

Иногда при определении проекции силы на координатную ось, например силы  $F$  на ось  $x$ , бывает неизвестен угол между осью  $x$  и линией действия силы, но зато задан угол  $\alpha$ , образованный силой  $F$  и координатной плоскостью  $xu$  (рис. 2.1), а также угол  $\beta$  между осью проекций  $x$  и проекцией  $F_{xy}$  силы  $F$  на координатную плоскость  $xu$ . (Не следует забывать, что, в то время как проекция силы

на ось является алгебраической величиной, проекция силы на плоскость есть вектор.) В этом случае для определения проекции  $F_x$  силы  $F$  на ось  $x$  надо, во-первых, найти проекцию  $F_{xy}$  силы  $F$  на координатную плоскость  $xy$ , а затем вычислить проекцию вектора  $F_{xy}$  на ось  $x$ , т. е.

$$F_x = Oa = \text{пр}_x F_{xy} = F_{xy} \cos \beta = F \cos \alpha \cos \beta.$$

Аналогично проекция силы  $F$  на ось  $y$  имеет вид

$$F_y = Ob = \text{пр}_y F_{xy} = F_{xy} \sin \beta = F \cos \alpha \sin \beta.$$

Далее,

$$F_z = Oc = F \sin \alpha.$$

Итак,

$$F_x = F \cos \alpha \cos \beta, \quad F_y = F \cos \alpha \sin \beta, \quad F_z = F \sin \alpha.$$

Не следует смешивать понятия проекции силы на ось и составляющей силы (рис. 2.2). Составляющая силы является вектором, равным произведению соответствующей проекции силы на орг. оси проекций, т. е.

$$F_x = F_x i, \quad F_y = F_y j,$$

$$F_z = F_z k.$$

Разложение силы  $F$  по ортам осей декартовых координат имеет вид

$$F = F_x i + F_y j + F_z k.$$

Если проекция силы на ось отрицательна, то соответствующая составляющая силы направлена в сторону, противоположную положительному направлению этой оси.

**Задача 2.1.** Определить равнодействующую пространственной системы сходящихся сил, изображенной на рисунке.

Силы  $F_2$  и  $F_3$  расположены в плоскости  $xy$ , сила  $F_1$  лежит в плоскости  $yz$ , а сила  $F_4$  — в плоскости  $xz$ ;  $F_1 = 2$  н,  $F_2 = F_3 = 4$  н,  $F_4 = 6$  н.

Решение. Можно определить равнодействующую  $R$  как замыкающую сторону силового многоугольника, построенного на силах  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  и  $F_4$ , т. е.  $R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ . Однако этот многоугольник представляет пространственную ломаную и поэтому непосредственное определение модуля и направления вектора  $R$  требует либо построения модели, либо применения сложных методов начертательной геометрии.

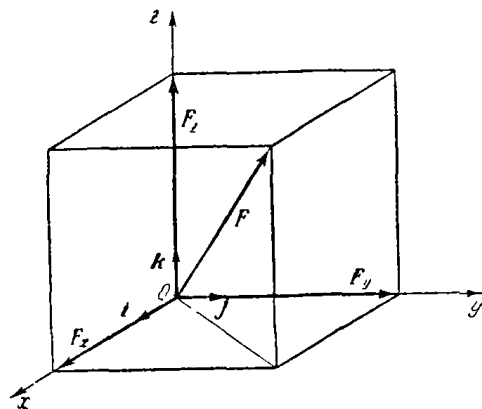


Рис. 2.2.

Эту задачу можно решить значительно проще, воспользовавшись методом проекций. Как известно, проекции равнодействующей  $R$  определяются по формулам (2\*).

В данном случае эти формулы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} \\ R_z &= F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + F_{4z} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Вычислим проекции сил  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  и  $F_4$  на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\begin{aligned} F_{1x} &= 0, & F_{1y} &= F_1 \cos 60^\circ, & F_{1z} &= F_1 \cos 30^\circ; \\ F_{2x} &= F_2 \cos 30^\circ, & F_{2y} &= -F_2 \cos 60^\circ, & F_{2z} &= 0; \\ F_{3x} &= F_3 \cos 45^\circ, & F_{3y} &= F_3 \cos 45^\circ, & F_{3z} &= 0; \\ F_{4x} &= F_4 \cos 45^\circ, & F_{4y} &= 0, & F_{4z} &= F_4 \cos 45^\circ. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в формулы (1), получим:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= F_2 \cos 30^\circ + F_3 \cos 45^\circ + F_4 \cos 45^\circ, \\ R_y &= F_1 \cos 60^\circ - F_2 \cos 60^\circ + F_3 \cos 45^\circ, \\ R_z &= F_1 \cos 30^\circ + F_4 \cos 45^\circ, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

откуда, используя заданные в условии числовые значения, находим:

$$R_x = 10,5 \text{ н}, \quad R_y = 1,82 \text{ н}, \quad R_z = 5,96 \text{ н}.$$

Теперь легко найти модуль равнодействующей  $R$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 12,3 \text{ н}$$

и ее направляющие косинусы:

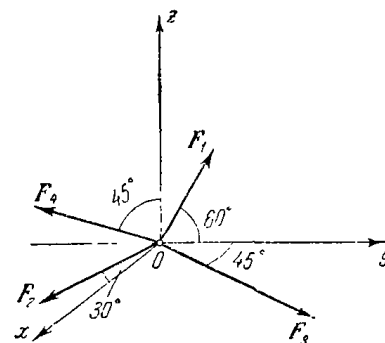
$$\cos(\widehat{x, R}) = \frac{R_x}{R} = 0,86,$$

$$\cos(\widehat{y, R}) = \frac{R_y}{R} = 0,15,$$

$$\cos(\widehat{z, R}) = \frac{R_z}{R} = 0,57,$$

откуда

$$(\widehat{x, R}) = 31^\circ, \quad (\widehat{y, R}) = 82^\circ, \quad (\widehat{z, R}) = 56^\circ.$$



К задаче 2.1.

Зная модуль и направление равнодействующей  $R$ , можно изобразить ее в системе координатных осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

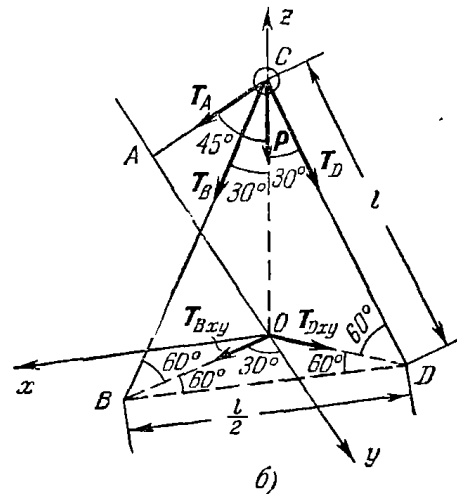
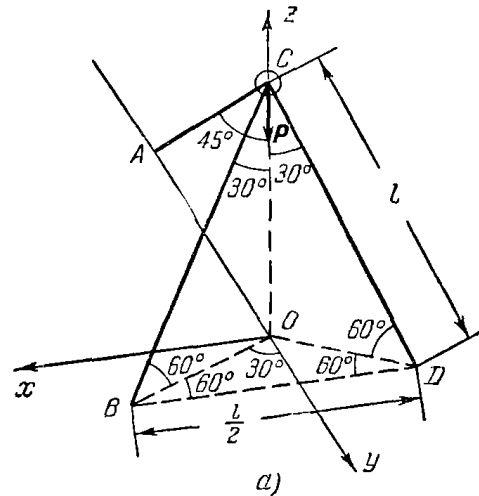
**Задача 2.2.** Измерительный прибор весом  $P$  установлен на tripodе — трех стержнях  $AC$ ,  $BC$  и  $DC$  равной длины  $l$ , соединенных шарниром  $C$  (рис. а). Стержни  $BC$  и  $DC$  образуют с вертикалью угол  $30^\circ$ , а стержень  $AC$  — угол  $45^\circ$ .

Определить реакции стержней  $AC$ ,  $BC$  и  $DC$ . Размерами прибора и весом стержней пренебречь. Опорные точки  $A$ ,  $B$  и  $D$  расположены в горизонтальной плоскости, причем  $BD = \frac{l}{2}$ .

Решение. Для определения искомых реакций стержней рассмотрим равновесие прибора  $C$ . К прибору приложена одна активная сила — его вес  $P$ , изображенный на рис. б. На прибор наложены три связи — стержни  $AC$ ,  $BC$  и  $DC$ . Применяв закон освобождаемости, отбросим мысленно связи и заменим их действие на прибор реакциями. Направим реакции  $T_A$ ,  $T_B$  и  $T_D$  вдоль соответствующих стержней от концов к их серединам, тем самым предполагая, что стержни растягиваются (при направлении сил  $T_A$ ,  $T_B$  и  $T_D$  мы воспользовались седьмым примером направления реакций связей, рассмотренным в начале книги, на стр. 14 и 15).

Теперь мы можем изучить равновесие прибора как равновесие свободного твердого тела, находящегося под действием пространственной системы четырех сходящихся сил:  $P$ ,  $T_A$ ,  $T_B$  и  $T_D$ . При этом следует составить три уравнения проекций на оси декартовых координат. Так как число алгебраических неизвестных также равно трем ( $T_A$ ,  $T_B$  и  $T_D$ ), то задача является статически определенной.

Проведем ось  $x$  вдоль линии действия силы  $P$  и выберем начало координат  $O$  в точке пересечения оси  $z$  с горизонтальной плоскостью, в которой лежат точки  $A$ ,  $B$  и  $D$ . Направим оси  $x$  и  $y$  в этой плоскости соответственно параллельно и перпендикулярно к вспомогательной прямой  $BD$ .



К задаче 2.2.

Составляя уравнения равновесия, мы встретимся с трудностями при проектировании сил  $T_B$  и  $T_D$  на оси  $x$  и  $y$ , так как неизвестны углы между линиями действия этих сил и осями  $x$  и  $y$ . Поэтому предварительно спроектируем силы  $T_B$  и  $T_D$  на плоскость  $xy$ , а затем эти проекции  $T_{Bxy}$  и  $T_{Dxy}$  спроектируем на оси  $x$  и  $y$ . Модули сил  $T_{Bxy}$  и  $T_{Dxy}$  равны

$$T_{Bxy} = T_B \cos 60^\circ, \quad T_{Dxy} = T_D \cos 60^\circ. \quad (1)$$

Для проектирования векторов  $T_{Bxy}$  и  $T_{Dxy}$  на оси  $x$  и  $y$  займемся определением углов между линиями действия этих сил и осями  $x$  и  $y$ . Из прямоугольных треугольников  $OBC$  и  $ODC$  следует, что  $OB = OD = l \cdot \sin 30^\circ = l/2$ , где  $l$  — длина каждого из стержней. Так как по условию  $BD$  также равно  $l/2$ , то треугольник  $OBD$  является равносторонним; значит, угол образованный  $OB$  и осью  $x$ , равен  $60^\circ$ .

Переходим к составлению уравнения проекций сил на ось  $x$ . Проекции сил  $P$  и  $T_A$  на ось  $x$  равны нулю (сила  $P$  перпендикулярна к оси  $x$ , а  $T_A$  лежит в плоскости  $yz$ , перпендикулярной к этой оси). Для вычисления проекций сил  $T_B$  и  $T_D$  надо векторы  $T_{Bxy}$  и  $T_{Dxy}$  спроектировать на ось  $x$ . Эти проекции соответственно равны:  $T_{Bxy} \cos 60^\circ$  и  $-T_{Dxy} \cos 60^\circ$ . Значит, уравнение проекций на ось  $x$  имеет вид

$$\sum F_{kx} = T_{Bxy} \cos 60^\circ - T_{Dxy} \cos 60^\circ = 0.$$

Приняв во внимание равенства (1), запишем:

$$\sum F_{kx} = T_B \cos^2 60^\circ - T_D \cos^2 60^\circ = 0. \quad (2)$$

При проектировании сил на ось  $y$  мы, кроме проекций сил  $T_B$  и  $T_D$ , соответственно равных:  $T_{Bxy} \cos 30^\circ$  и  $T_{Dxy} \cos 30^\circ$ , получим также проекцию силы  $T_A$ , которая равна  $-T_A \cos 45^\circ$  (сила  $P$  перпендикулярна к оси  $y$ ). Значит, уравнение проекций на ось  $y$  запишется в виде

$$\sum F_{ky} = T_{Bxy} \cos 30^\circ + T_{Dxy} \cos 30^\circ - T_A \cos 45^\circ = 0.$$

Учтя равенства (1), получим:

$$\sum F_{ky} = T_B \cos 60^\circ \cos 30^\circ + T_D \cos 60^\circ \cos 30^\circ - T_A \cos 45^\circ = 0. \quad (3)$$

Легко составить уравнение проекций на ось  $z$ , так как нам известны углы, образованные линиями действия каждой из сил и осью  $z$ :

$$\sum F_{kz} = -P - T_A \cos 45^\circ - T_B \cos 45^\circ - T_D \cos 30^\circ = 0. \quad (4)$$

Остается решить систему уравнений (2) — (4). Из уравнения (2) следует  $T_B = T_D$ . Вычтя (4) из (3) и приняв во внимание, что  $T_B = T_D$ , получим  $T_B = T_D = -\frac{2}{9} \sqrt{3} P = -0,38P$ . Подставив полученные значения  $T_B$  и  $T_D$  в уравнение (3), находим  $T_A = -\frac{\sqrt{2}}{3} P = -0,47P$ .



Знаки минус, стоящие в ответах, показывают, что найденные силы направлены не так, как мы их предположительно изобразили на рис. б, а прямо противоположно. Это означает, что стержни  $AC$ ,  $BC$  и  $DC$  подвержены не растяжению, а сжатию.

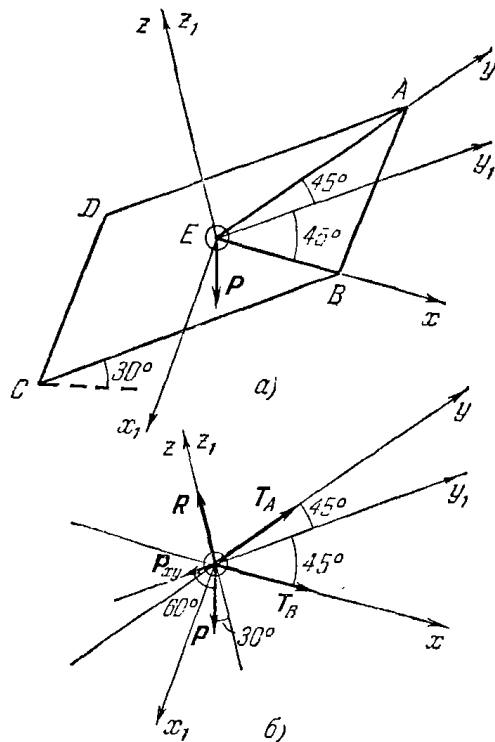
**Задача 2.3.** На гладкой прямоугольной наклонной плоскости  $ABCD$ , расположенной под углом  $30^\circ$  к горизонту, лежит груз  $E$  весом  $P$ . Груз удерживается в равновесии посредством двух взаимно перпендикулярных равных по длине тросов  $AE$  и  $BE$ , лежащих на наклонной плоскости и прикрепленных к ней в точках  $A$  и  $B$ .

Определить реакции тросов и наклонной плоскости. Размеры груза пренебречь.

**Решение.** Для определения неизвестных рассмотрим равновесие груза  $E$ . К грузу приложена одна активная сила — его вес  $P$  (рис. б). На груз  $E$  наложены три связи: гладкая наклонная плоскость и тросы  $AE$  и  $BE$ . Применяя закон освобожденности от связей, отбросим их действие на груз соответствующими реакциями. Так как наклонная плоскость является гладкой, то ее реакция  $R$  направлена перпендикулярно к плоскости. Реакции гибких связей направляются по касательным к ним в точках срыва связей. В данном случае реакции тросов  $T_A$  и  $T_B$  направлены вдоль  $AE$  и  $BE$  (см. рис. б).

Теперь мы можем рассмотреть равновесие груза  $E$  как равновесие свободного твердого тела, находящегося под действием четырех сил:  $P$ ,  $R$ ,  $T_A$  и  $T_B$ , образующих пространственную систему сходящихся сил. Для этой системы мы можем составить три уравнения равновесия. Так как число алгебраических неизвестных также равно трем ( $R$ ,  $T_A$  и  $T_B$ ), то задача является статически определенной.

Учитывая, что тросы  $AE$  и  $BE$  и, следовательно, силы  $T_A$  и  $T_B$  взаимно перпендикулярны, направим оси  $x$  и  $y$  вдоль линий действия этих сил, а ось  $z$  — перпендикулярно к этой плоскости, т. е. вдоль линии действия силы  $R$ . При этом выборе направлений осей



К задаче 2.3.

координат проекции сил  $R$ ,  $T_A$  и  $T_B$  будут либо равны нулю, либо величине соответствующей силы. Некоторые трудности приходится преодолеть лишь при проектировании силы  $P$ , так как нам неизвестны углы, которые образует линия действия силы  $P$  с осями  $x$  и  $y$ . Поэтому, предварительно спроектировав силу  $P$  на плоскость  $xy$ , найдем вектор  $P_{xy}$  (проекция вектора на плоскость также является вектором) и затем уже спроектируем  $P_{xy}$  на оси  $x$  и  $y$ . Модуль вектора  $P_{xy}$  равен

$$P_{xy} = P \cos 60^\circ. \quad (1)$$

Переходим к составлению уравнений равновесия пространственной системы сходящихся сил. Для этого суммы проекций всех сил на оси декартовых координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  надо приравнять нулю. Эти уравнения в данной задаче имеют вид

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= P_x + R_x + T_{Ax} + T_{Bx} = 0, \\ \sum F_{ky} &= P_y + R_y + T_{Ay} + T_{By} = 0, \\ \sum F_{kz} &= P_z + R_z + T_{Az} + T_{Bz} = 0. \end{aligned}$$

После подстановки значений проекций сил:

$$\begin{aligned} P_x &= -P_{xy} \cos 45^\circ, \quad R_x = 0, \quad T_{Ax} = 0, \quad T_{Bx} = T_B, \quad P_y = -P_{xy} \sin 45^\circ, \\ R_y &= 0, \quad T_{Ay} = T_A, \quad T_{By} = 0, \quad P_z = -P \cos 30^\circ, \quad R_z = R, \\ T_{Az} &= 0, \quad T_{Bz} = 0, \end{aligned}$$

эти уравнения примут вид

$$\sum F_{kx} = -P_{xy} \cos 45^\circ + T_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum F_{ky} = -P_{xy} \sin 45^\circ + T_A = 0, \quad (3)$$

$$\sum F_{kz} = -P \cos 30^\circ + R = 0. \quad (4)$$

Для определения неизвестных остается решить систему уравнений (2) — (4), приняв при этом во внимание равенство (1). Получим  $T_A = T_B = \frac{\sqrt{2}}{2} P_{xy} = \frac{\sqrt{2}}{4} P = 0,35P$ ,  $R = \frac{\sqrt{3}}{2} P = 0,87P$ . При составлении уравнений равновесия нам пришлось столкнуться с трудностями при проектировании силы  $P$  на оси  $x$  и  $y$ , так как предварительно пришлось проектировать  $P$  на плоскость  $xy$ . Этих трудностей можно избежать, направив ось  $y_1$  по биссектрисе угла  $AEB$ , ось  $z_1$  — по оси  $z$ , а ось  $x_1$  — так, чтобы вместе с осями  $y_1$  и  $z_1$  она образовала правую систему осей координат. Теперь сила  $P$  оказывается лежащей в плоскости  $y_1z_1$  и, следовательно, ее проекции на оси  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  имеют вид

$$P_{x_1} = 0, \quad P_{y_1} = -P \cos 60^\circ, \quad P_{z_1} = -P \cos 30^\circ.$$

Уравнения равновесия груза в проекциях на оси  $x_1, y_1, z_1$  запишутся так:

$$\sum F_{kx_1} = -T_A \cos 45^\circ + T_B \cos 45^\circ = 0, \quad (5)$$

$$\sum F_{ky_1} = -P \cos 60^\circ + T_A \cos 45^\circ + T_B \cos 45^\circ = 0, \quad (6)$$

$$\sum F_{kz_1} = -P \cos 30^\circ + R = 0. \quad (7)$$

Сравним системы уравнений (2) — (4) и (5) — (7). При тождестве уравнений (4) и (7) составление уравнений (5) и (6) проще и потому предпочтительнее составлению уравнений (2) и (3). Объем же вычислений при решении систем (2) — (4) и (5) — (7) примерно одинаков, поэтому выбор осей координат  $x_1, y_1, z_1$  является более целесообразным.

Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и последующих лет: 212, 216, 217, 220.

## § 2. Произвольная пространственная система сил

1°. Момент силы относительно точки. Момент силы относительно оси. Теория пар в пространстве. В случае плоской системы сил момент силы относительно точки был определен как алгебраическая величина:  $m_O(F) = \pm Fh$ .

При пространственном расположении сил этого определения

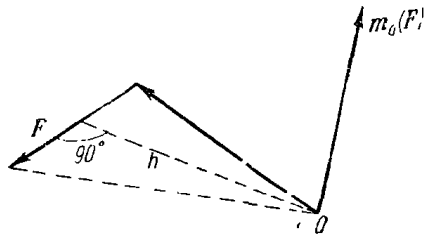


Рис. 2.3

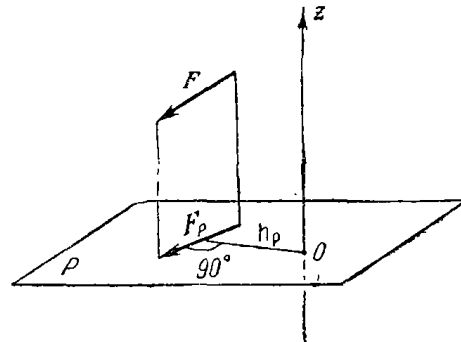


Рис. 2.4.

недостаточно, так как плоскости, проходящие через линии действия сил и точку, относительно которой вычисляются моменты, различны. Поэтому момент  $m_O(F)$  силы  $F$  относительно точки  $O$  в пространстве определяют как векторное произведение  $m_O(F) = r \times F$ , где  $r$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  в точку приложения силы. Таким образом, вектор  $m_O(F)$  направлен перпендикулярно к плоскости, содержащей линию действия силы и точку  $O$ , так что сила с конца его видна направленной вокруг точки против часовой стрелки (рис. 2.3). Модуль вектора  $m_O(F)$  равен произведению мо-

дуля силы на расстояние от точки до линии действия силы (плечо), т. е.

$$|m_O(F)| = Fh.$$

Момент силы относительно оси  $m_z(F)$  (рис. 2.4) определяется как алгебраическая величина, абсолютное значение которой равно произведению модуля проекции силы  $F_P$  на плоскость  $P$ , перпендикулярную к оси  $z$ , на расстояние  $h_P$  от точки  $O$  пересечения оси с этой плоскостью до линии действия проекции силы на плоскость  $F_P$ , т. е.  $|m_z(F)| = F_P h_P$ .

Если с конца оси  $z$  видно, что сила  $F_P$  стремится повернуть тело вокруг точки  $O$  против часовой стрелки, то момент положителен, если по часовой стрелке, то отрицателен, т. е.

$$m_z(F) = \pm F_P h_P.$$

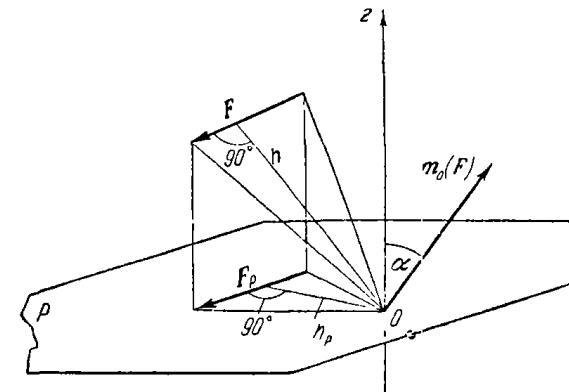


Рис. 2.5.

Момент силы  $F$ , изображенной на рис. 2.4, относительно оси  $z$  положителен.

Итак, момент силы относительно точки — вектор, момент силы относительно оси — алгебраическая величина. Если точка лежит на оси, то момент силы относитель-

но оси равен проекции момента силы относительно точки на эту ось, т. е.  $m_z(F) = \text{пр}_z m_O(F)$  (рис. 2.5).

Зная моменты силы относительно осей декартовых координат  $m_x(F), m_y(F), m_z(F)$ , можно определить величину момента силы  $m_O(F)$  относительно начала координат  $O$  и его направляющие косинусы по формулам:

$$|m_O(F)| = \sqrt{m_x^2(F) + m_y^2(F) + m_z^2(F)}, \quad (1^*)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos [x, \widehat{m}_O(F)] &= \frac{m_x(F)}{|m_O(F)|}, & \cos [y, \widehat{m}_O(F)] &= \frac{m_y(F)}{|m_O(F)|}, \\ \cos [z, \widehat{m}_O(F)] &= \frac{m_z(F)}{|m_O(F)|}, \end{aligned} \right\} \quad (2^*)$$

причем  $m_O(F) = m_x(F) i + m_y(F) j + m_z(F) k$ .

Выражения моментов силы относительно осей декартовых координат через проекции силы на эти оси даются формулами:

$$m_x(F) = yF_z - zF_y, \quad m_y(F) = zF_x - xF_z, \quad m_z(F) = xF_y - yF_x. \quad (3^*)$$

Здесь  $F_x, F_y, F_z$  — проекции силы  $F$  на оси декартовых координат,  $x, y, z$  — координаты точки  $A$  приложения силы (рис. 2.6).

Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы и ось лежат в одной плоскости (рис. 2.7), т. е.:

- а) если сила параллельна оси (при этом проекция  $F_p$  силы  $F$  на перпендикулярную к оси плоскость  $P$  обращается в нуль:  $F_p = 0$ );
- б) если линия действия силы пересекает ось (при этом  $h_p = 0$ ).

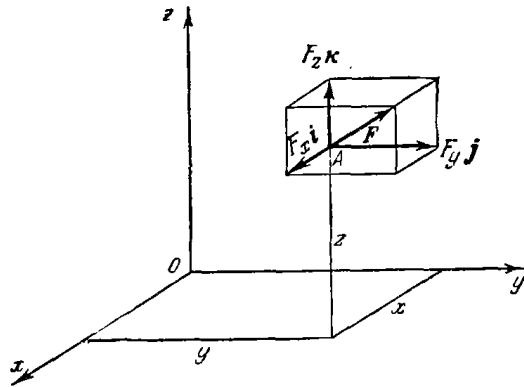


Рис. 2.6.

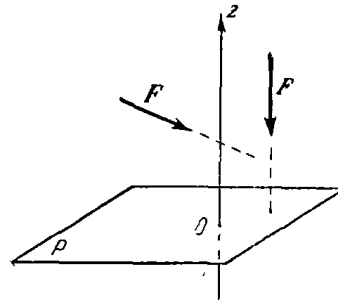


Рис. 2.7.

В случае пространственной системы сил *главным моментом относительно точки* называется векторная сумма моментов всех сил системы относительно той же точки:

$$m_O = \sum_{k=1}^n m_O(F_k) = \sum_{k=1}^n r_k \times F_k. \quad (4^*)$$

*Главным моментом пространственной системы сил относительно оси* называется сумма моментов всех сил системы относительно этой оси:

$$m_x = \sum_{k=1}^n m_x(F_k), \quad m_y = \sum_{k=1}^n m_y(F_k), \quad m_z = \sum_{k=1}^n m_z(F_k), \quad (5^*)$$

т. е.

$$m_x = \sum_{k=1}^n (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}), \quad m_y = \sum_{k=1}^n (z_k F_{kx} - x_k F_{kz}),$$

$$m_z = \sum_{k=1}^n (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}). \quad (6^*)$$

Зная главные моменты системы сил относительно осей декартовых координат, можно определить модуль главного момента относи-

тельно начала координат  $O$  и его направляющие косинусы по формулам:

$$|m_O| = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}, \quad (7^*)$$

$$\cos(\widehat{x, m_O}) = \frac{m_x}{|m_O|}, \quad \cos(\widehat{y, m_O}) = \frac{m_y}{|m_O|}, \quad \cos(\widehat{z, m_O}) = \frac{m_z}{|m_O|}. \quad (8^*)$$

Если пространственная система сил приводится к равнодействующей, то согласно *теореме Вариньона* момент равнодействующей силы относительно точки равен векторной сумме моментов всех сил системы относительно той же точки:

$$m_O(R) = \sum_{k=1}^n m_O(F_k).$$

Та же теорема относительно осей декартовых координат формулируется так: момент равнодействующей силы относительно оси равен сумме моментов составляющих сил относительно той же оси:

$$m_x(R) = \sum_{k=1}^n m_x(F_k), \quad m_y(R) = \sum_{k=1}^n m_y(F_k), \quad m_z(R) = \sum_{k=1}^n m_z(F_k).$$

*Момент пары сил* в пространстве определяется как вектор, перпендикулярный к плоскости пары, причем с конца его пара видна направленной против часовой стрелки (рис. 2.8). Модуль момента

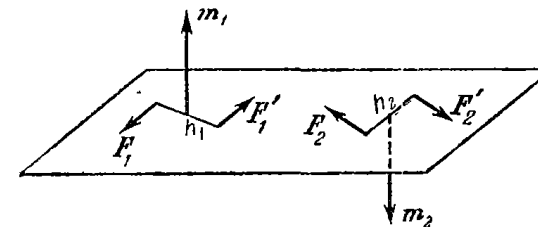


Рис. 2.8.

пары сил равен произведению модуля одной из сил пары на расстояние между линиями действия сил (плечо):  $|m| = Fh$ .

Теория пар в пространстве дается двумя теоремами.

**Теорема 1.** Пары, векторные моменты которых

равны, эквивалентны; следовательно, не нарушая состояния твердого тела, пару сил можно перенести в плоскость, параллельную данной.

**Теорема 2.** Момент равнодействующей пары равен векторной сумме моментов составляющих пар.

Для равновесия твердого тела, находящегося под действием пар сил в пространстве, необходимо и достаточно, чтобы векторная

сумма моментов этих пар была равна нулю ( $\sum_{k=1}^n m_k = 0$ ).

Вычисление моментов сил и главных моментов систем сил относительно осей является важной составной частью решения задач на равновесие твердых тел под действием произвольных пространственных

систем сил, а также задач на приведение этих систем сил к простейшему виду.

Вычисление главных моментов систем сил относительно осей рекомендуется проводить в следующем порядке:

- 1) провести плоскость, перпендикулярную к оси, относительно которой требуется определить главный момент системы сил;
- 2) найти точку пересечения оси с этой плоскостью;
- 3) спроектировать силу на плоскость, перпендикулярную к оси;
- 4) опустить перпендикуляр (плечо) из точки пересечения оси с плоскостью на линию действия проекции силы на плоскость, определенную в предыдущем пункте;
- 5) записать модуль момента силы относительно оси в виде произведения модуля проекции силы на найденное плечо;
- 6) определить знак момента силы относительно оси;
- 7) повторить построения и выкладки, сделанные в третьем, четвертом, пятом и шестом пунктах для каждой из сил системы;
- 8) вычислить главные моменты системы сил относительно осей в виде сумм моментов данных сил относительно этих осей.

Если определение проекции силы на плоскость, перпендикулярную к оси, затруднительно, то следует разложить силу на составляющие. Затем вместо момента силы относительно оси надо, применив теорему Вариньона, вычислить сумму моментов сил составляющих относительно этой оси.

Если этот прием также затруднителен, то надо найти проекции силы  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  на оси, записать координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  точки приложения силы и вычислить моменты силы относительно осей декартовых координат по формулам (3\*).

Если оси декартовых координат в условии задачи не заданы, то целесообразно выбрать эти оси так, чтобы моменты возможно большего числа сил обратились в нуль. Значит, надо направить оси параллельно силам либо так, чтобы оси пересекали линии действия сил.

**Задача 2.4.** Вычислить моменты относительно осей координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  силы  $F$ , направленной по диагонали боковой грани прямоугольного параллелепипеда, изображенного на рисунке, если длина ребра, параллельного оси  $x$ , равна  $a$ .

**Решение.** Линия действия силы  $F$  пересекает ось  $x$ , поэтому момент силы  $F$  относительно оси  $x$  равен нулю:

$$m_x(F) = 0.$$

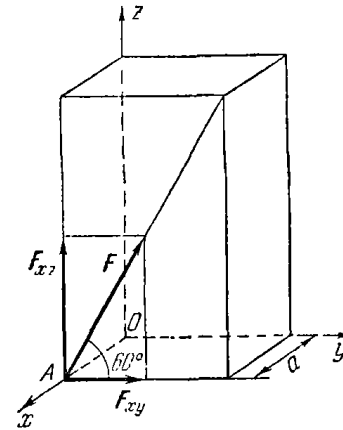
Для определения момента силы  $F$  относительно оси  $y$  спроектируем эту силу на плоскость  $xz$ , перпендикулярную к оси  $y$ , т. е. определим  $F_{xz}$ . Нетрудно видеть, что  $F_{xz} = F \cos 30^\circ$ . Остается взять момент силы  $F_{xz}$  относительно точки пересечения оси  $y$  с перпендикулярной плоскостью  $xz$ , т. е. точки  $O$ . Плечом является ребро

$OA = a$ . С конца оси  $y$  видно, что сила  $F_{xz}$  стремится повернуть тело в плоскости  $xz$  вокруг точки  $O$  по часовой стрелке, следовательно, момент силы отрицателен. Итак,

$$m_y(F) = -F_{xz}a = -Fa \cos 30^\circ = -\frac{Fa\sqrt{3}}{2}.$$

Остается определить момент силы  $F$  относительно оси  $z$ . Для этого найдем величину проекции  $F_{xy}$  силы  $F$  на плоскость  $xy$ , перпендикулярную к оси  $z$ . Легко видеть, что  $F_{xy} = F \cos 60^\circ$ . Теперь вычисляем момент силы  $F_{xy}$  относительно точки  $O$  пересечения оси  $z$  с перпендикулярной плоскостью  $xy$ . Плечом оказывается отрезок  $OA = a$ . Знак момента положителен, так как с конца оси  $z$  видно, что сила  $F_{xy}$  стремится повернуть тело в плоскости  $xy$  вокруг точки  $O$  против часовой стрелки. Значит,

$$m_z(F) = F_{xy}a = \frac{Fa}{2}.$$



К задаче 2.4.

**Задача 2.5.** Определить моменты относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  силы  $F$ , изображенной на рисунке. Сила  $F$ , приложенная в точке  $A$ , лежащей на оси  $y$ , образует с плоскостью  $xy$  угол  $30^\circ$ , причем ее проекция на эту плоскость образует с осью  $y$  угол  $OAC$ , равный  $45^\circ$ ;  $OA = a$ .

**Решение.** Как и в предыдущей задаче, находим без труда моменты силы  $F$  относительно осей  $y$  и  $z$ :  $m_y(F) = 0$  (линия действия силы  $F$  пересекает ось  $y$ ),  $m_z(F) = -F_{xy}h$ , где  $F_{xy} = F \cos 30^\circ = F \frac{\sqrt{3}}{2}$  — модуль проекции силы  $F$  на плоскость  $xy$ , перпендикулярную к оси  $z$ , а  $h = OA \sin 45^\circ = a \sin 45^\circ = a \frac{\sqrt{2}}{2}$  — длина перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  пересечения оси  $z$  с плоскостью  $xy$  на линию действия силы  $F_{xy}$ . (Знак момента отрицателен, так как с конца оси  $z$  видно, что сила  $F_{xy}$  стремится повернуть тело в плоскости  $xy$  вокруг точки  $O$  по часовой стрелке.) Итак,

$$m_y(F) = 0, \quad m_z(F) = -\frac{Fa\sqrt{6}}{4}. \quad (1)$$

Труднее найти момент силы  $F$  относительно оси  $x$ , так как неизвестен угол между силой  $F$  и перпендикулярной к оси  $x$  плоскостью  $yz$ . Здесь целесообразно прибегнуть к приему, упомянутому в обзоре теории, — разложить силу  $F$  на две составляющие. Разло-

жим силу на составляющие  $F_{xy}$  и  $F_z$  (см. рисунок). Таким образом,  $F = F_{xy} + F_z$ , где  $F_{xy} = F \cos 30^\circ$ ,  $F_z = F \cos 60^\circ$ .

Теперь для определения момента силы  $F$  относительно оси  $x$  применим теорему Вариньона, согласно которой момент равнодействующей силы относительно оси равен сумме моментов составляющих сил относительно той же оси. В данном случае

$$m_x(F) = m_x(F_{xy}) + m_x(F_z). \quad (2)$$

Так как линия действия силы  $F_{xy}$  пересекает ось  $x$ , то  $m_x(F_{xy}) = 0$ . Момент силы  $F_z$  относительно оси  $x$  равен  $m_x(F_z) = F_z a$ . Учтя, что  $F_z = F \cos 60^\circ = F/2$ , окончательно получим:

$$m_x(F) = \frac{Fa}{2}. \quad (3)$$

Для вычисления момента силы  $F$  относительно оси  $x$  можно было также воспользоваться формулой

$$m_x(F) = yF_z - zF_y, \quad (4)$$

где  $y$  и  $z$  — координаты точки  $A$  приложения силы  $F$ , а  $F_y$  и  $F_z$  — проекции силы  $F$  на оси  $y$  и  $z$ . В данном случае  $y = a$ ,  $z = 0$ ,

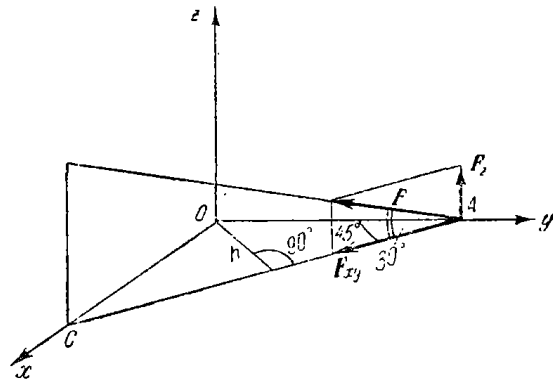
$$F_y = -F_{xy} \cos 45^\circ = -F \cos 30^\circ \cos 45^\circ = -\frac{F\sqrt{6}}{4},$$

$$F_z = F \cos 60^\circ = \frac{F}{2}.$$

Подставив эти значения в формулу (4), получим результат формулы (3), т. е.  $m_x(F) = \frac{Fa}{2}$ .

Как показывает решение этой задачи, в случаях, когда вычисление момента силы относительно оси обычным приемом затруднительно, следует прибегать к разложению силы на составляющие, с последующим применением теоремы Вариньона, либо к выражениям (3\*) моментов силы относительно осей через проекции силы на эти оси.

**Задача 2.6.** Вычислить главные моменты относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  и точки  $O$  пространственной системы сил, изображенной на рисунке. Сила  $F_1$  лежит на ребре куба, а силы  $F_2$  и  $F_3$  — на диагоналях его боковых граней. Ребро куба  $a$  равно 2 м,  $F_1 = 10$  н,  $F_2 = F_3 = 12\sqrt{2}$  н.



К задаче 2.5.

Решение. Главные моменты системы сил относительно осей равны суммам моментов данных сил относительно этих осей, т. е.

$$m_x = \sum_{k=1}^n m_x(F_k), \quad m_y = \sum_{k=1}^n m_y(F_k), \quad m_z = \sum_{k=1}^n m_z(F_k),$$

в данной задаче

$$\left. \begin{aligned} m_x &= m_x(F_1) + m_x(F_2) + m_x(F_3), \\ m_y &= m_y(F_1) + m_y(F_2) + m_y(F_3), \\ m_z &= m_z(F_1) + m_z(F_2) + m_z(F_3). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Моменты сил  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  имеют следующий вид:  $m_x(F_1) = 0$  (линия действия силы  $F_1$  пересекает ось  $x$ ),  $m_y(F_1) = 0$  (сила  $F_1$  параллельна оси  $y$ ),  $m_z(F_1) = F_1 a$ ; далее,

$$m_x(F_2) = F_2 \sin 45^\circ a = \frac{F_2 a \sqrt{2}}{2},$$

$$m_y(F_2) = -F_2 h = -F_2 a \sin 45^\circ = -\frac{F_2 a \sqrt{2}}{2},$$

$$m_z(F_2) = F_2 \cos 45^\circ a = \frac{F_2 a \sqrt{2}}{2},$$

$$m_x(F_3) = m_y(F_3) = m_z(F_3) = 0$$

(линия действия силы  $F_3$  проходит через точку  $O$ , т. е. пересекает оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ ).

Внося эти значения моментов сил в формулы (1), получим:

$$m_x = \frac{F_2 a \sqrt{2}}{2}, \quad m_y = -\frac{F_2 a \sqrt{2}}{2},$$

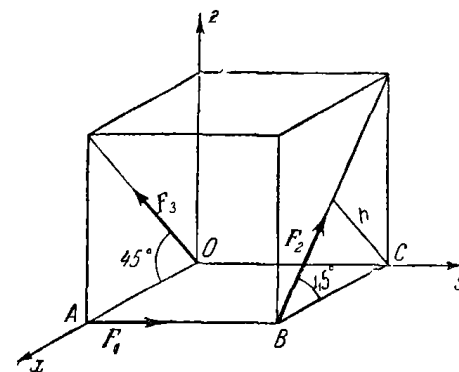
$$m_z = F_1 a + \frac{F_2 a \sqrt{2}}{2},$$

или, подставляя численные значения:

$$m_x = 24 \text{ дж}, \quad m_y = -24 \text{ дж},$$

$$m_z = 44 \text{ дж}.$$

Главные моменты системы сил  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  относительно осей декартовых координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  одновременно являются проекциями



К задаче 2.6.

главного момента  $m_O$  относительно начала координат  $O$  на соответствующие оси, т. е.  $m_O = m_x i + m_y j + m_z k$ . Используя формулы (7\*) и (8\*), найдем теперь модуль главного момента системы сил отно-

сительно точки  $O$  и его направляющие косинусы:

$$m_O = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = 55,5 \text{ джс},$$

$$\cos(x, \widehat{m}_O) = \frac{m_x}{m_O} = 0,43, \quad \cos(y, \widehat{m}_O) = \frac{m_y}{m_O} = -0,43,$$

$$\cos(z, \widehat{m}_O) = \frac{m_z}{m_O} = 0,79,$$

т. е.  $(x, \widehat{m}_O) = 65^\circ$ ,  $(y, \widehat{m}_O) = 115^\circ$ ,  $(z, \widehat{m}_O) = 38^\circ$ . Итак,  $m_O = (24i - 24j + 44k)$ .

2°. Приведение к одному центру сил, произвольно расположенных в пространстве. Главным вектором  $V$  системы сил называется векторная сумма этих сил, т. е.  $V = \sum_{k=1}^n F_k$ .

Проекции  $V_x$ ,  $V_y$  и  $V_z$  главного вектора  $V$  на оси декартовых координат равны суммам проекций сил на соответствующие оси:

$$V_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad V_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad V_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} \quad (9^*)$$

Модуль главного вектора  $V$  и направляющие косинусы определяются по формулам:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (10^*)$$

$$\cos(x, \widehat{V}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(y, \widehat{V}) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos(z, \widehat{V}) = \frac{V_z}{V}. \quad (11^*)$$

Главный момент  $m_O$  пространственной системы сил относительно центра  $O$  равен векторной сумме моментов всех сил относительно этого центра:

$$m_O = \sum_{k=1}^n m_O(F_k).$$

Проекции главного момента  $m_O$  на оси декартовых координат называются главными моментами  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  относительно соответствующих осей, т. е.  $m_O = m_x i + m_y j + m_z k$ .

Главные моменты пространственной системы сил  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  определяются по формулам (5\*), (6\*). Зная  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$ , можно определить модуль и направляющие косинусы  $m_O$  по формулам (7\*) и (8\*).

В результате приведения сил, произвольно расположенных в пространстве, к одному центру система сил оказывается эквивалентной силе, равной главному вектору  $V$ , и паре сил, момент которой векторно равен главному моменту  $m_O$ .

При перемещении центра приведения системы сил главный момент системы, вообще говоря, меняется, причем зависимость главного момента пространственной системы сил от выбора центра приведения выражается так: главный момент  $m_A$  пространственной системы сил относительно нового центра  $A$  равен векторной сумме главного момента  $m_O$  этой системы сил относительно старого центра  $O$  и момента относительно нового центра  $A$  силы  $V$ , приложенной в старом центре  $O$ :  $m_A = m_O + m_A(V_O)$ .

Статическими инвариантами пространственной системы сил называются такие характеристики этой системы, которые остаются неизменными при перемещении центра приведения. Статических инвариантов существует два:

первый статический инвариант — главный вектор  $V$  системы сил; в соответствии с определением величина и направление главного вектора  $V$  не зависят от выбора центра приведения:

$$V = V_x i + V_y j + V_z k,$$

где  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  определяются по формулам (9\*);

второй статический инвариант — скалярное произведение главного вектора  $V$  и главного момента  $m_O$  — не зависит от выбора центра приведения:

$$V \cdot m_O = V_x m_x + V_y m_y + V_z m_z,$$

где  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  и  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  определяются соответственно по формулам (9\*) и (5\*), (6\*).

Не следует отождествлять силу  $V$  с равнодействующей силой  $R$ , так как равнодействующая  $R$  — это одна сила, которая эквивалентна данной пространственной системе сил, а сила  $V$  эквивалентна данной системе сил только в совокупности с парой сил, момент которой равен главному моменту  $m_O$ .

Различные случаи приведения сил, произвольно расположенных в пространстве

а) Главный вектор равен нулю, но главный момент не равен нулю, т. е.  $V = 0$ ,  $m_O \neq 0$ .

Система сил приводится к паре сил, момент которой равен главному моменту  $m_O$ . (В этом случае главный момент системы сил  $m_O$  не зависит от выбора центра приведения.)

б) Главный вектор не равен нулю, но главный момент равен нулю, т. е.  $V \neq 0$ ,  $m_O = 0$ .

Система сил приводится к равнодействующей  $R = V$ , приложенной в центре приведения системы.

в) Главный вектор и главный момент системы не равны нулю и при этом взаимно перпендикулярны, т. е.

$$V \neq 0, \quad m_O \neq 0, \quad (m_O, \widehat{V}) = 90^\circ.$$

Система сил приводится к *равнодействующей*  $R=V$ , линия действия которой параллельна линии действия силы  $V$  и отстоит от нее на расстоянии  $h=m_0/V$ . Положение линии действия равнодействующей должно быть таким, чтобы направление момента равнодействующей  $R$  относительно центра приведения  $O$  совпадало с направлением главного момента системы сил  $m_0$  относительно центра  $O$ .

Сила  $V$  и равнодействующая  $R$  равны по модулю, параллельны и отличаются, вообще говоря, только линиями действия (рис. 2.9).

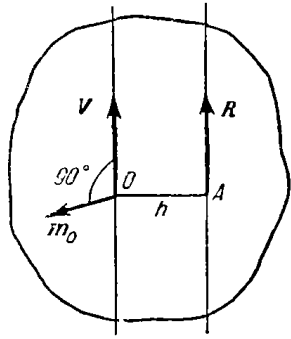


Рис. 2.9.

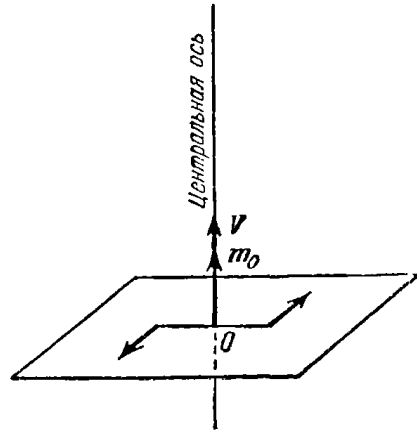


Рис. 2.10.

г) Главный вектор и главный момент системы не равны нулю и притом не взаимно перпендикулярны, т. е.

$$V \neq 0, \quad m \neq 0 \text{ и } (\widehat{V}, m_0) \neq 90^\circ.$$

Система сил приводится к *динаме* (*силовому винту*) — совокупности силы  $V$  и пары сил, лежащей в плоскости, перпендикулярной к этой силе.

Линия действия силы  $V$  называется *центральной осью*. Центральная ось является геометрическим местом центров приведения, для которых главный момент  $m_0$  имеет наименьшее значение и направлен вдоль этой оси (рис. 2.10). Уравнения центральной оси имеют вид

$$\frac{m_x - yV_z + zV_y}{V_x} = \frac{m_y - zV_x + xV_z}{V_y} = \frac{m_z - xV_y + yV_x}{V_z},$$

где  $m_x, m_y, m_z, V_x, V_y, V_z$  имеют прежние значения, а  $x, y, z$  — текущие координаты.

д) Главный вектор и главный момент системы равны нулю, т. е.  $V=0, m_0=0$ .

Твердое тело, к которому приложена данная пространственная система сил, находится в *равновесии*.

Уравнения равновесия твердого тела под действием произвольной пространственной системы сил. Для равновесия твердого тела под действием произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех данных сил на произвольно выбранные оси декартовых координат  $x, y, z$  и суммы моментов всех сил относительно этих осей равнялись нулю:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad (12^*)$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(F_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_y(F_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_z(F_k) = 0. \quad (13^*)$$

Первые три уравнения называются уравнениями проекций; они обеспечивают равенство нулю главного вектора  $V$ . Три последних уравнения называются уравнениями моментов; они обеспечивают равенство нулю главного момента  $m_0$ .

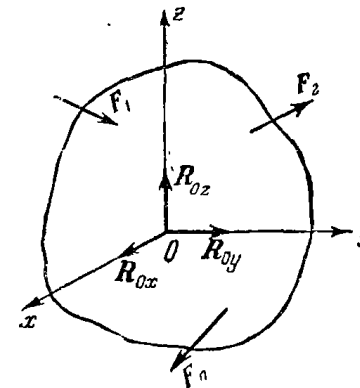


Рис. 2.11.

В случае произвольной пространственной системы сил задача является статически определенной, если число алгебраических неизвестных не более шести.

В случае равновесия твердого тела с одной неподвижной точкой, например со сферическим шарниром (рис. 2.11), система активных сил приводится к равнодействующей, линия действия которой проходит через неподвижную точку. Три проекции реакции неподвижной точки  $R_{Ox}, R_{Oy}, R_{Oz}$  на оси декартовых координат определяются из уравнений (12\*).

Из уравнений моментов (13\*) могут быть определены неизвестные величины трех активных сил (напомним, что активными называются все силы, не являющиеся реакциями связей).

В случае равновесия твердого тела с двумя закрепленными точками, например с двумя сферическими шарнирами или двумя подпятниками (рис. 2.12), можно определить величины четырех составляющих опорных реакций  $R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Bx}, R_{By}$ , перпендикулярных к оси, проходящей через неподвижные точки. Величины составляющих опорных реакций  $R_{Az}$  и  $R_{Bz}$ , направленных вдоль этой оси, не могут быть в отдельности определены. Можно найти только их сумму  $R_{Az} + R_{Bz}$ . Если одна из опор выполнена в виде подпятника  $B$  (рис. 2.13), допускающего перемещение вдоль оси  $z$ , то отсутствует составляющая реакция  $R_{Bz}$ . В этом случае из уравнений равновесия можно определить величины пяти составляющих опорных реакций  $R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, R_{Bx}, R_{By}$ , и величину одной активной силы.

Различные случаи приведения к одному центру параллельных сил в пространстве. Эти силы могут быть приведены:

а) к паре сил, если главный вектор равен нулю, а главный момент не равен нулю:  $V=0$ ,  $m_O \neq 0$ ;

б) к равнодействующей, если главный вектор не равен нулю, а главный момент равен нулю:  $V \neq 0$ ,  $m_O = 0$ ;

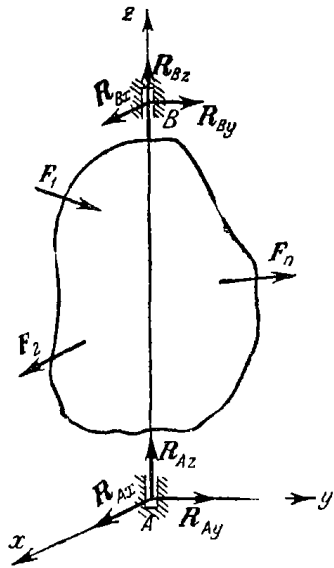


Рис. 2.12.

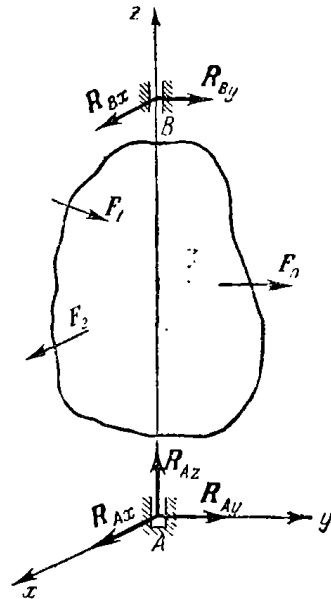


Рис. 2.13.

в) к равнодействующей, если главный вектор и главный момент не равны нулю:  $V \neq 0$ ,  $m_O \neq 0$ ; в случае системы параллельных сил вектор  $V$  и вектор  $m_O$  всегда взаимно перпендикулярны;

г) твердое тело находится в равновесии, если главный вектор и главный момент системы равны нулю:  $V=0$ ,  $m_O=0$ .

Уравнения равновесия системы сил, параллельных оси  $z$ , имеют вид

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_x(F_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_y(F_k) = 0. \quad (14^*)$$

Задача является статически определенной, если число алгебраических неизвестных не более трех.

При решении задач на равновесие твердого тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил, надо выполнить четыре первых пункта, указанных в начале книги, на стр. 15.

Затем:

5) убедиться в том, что данная задача является статически определенной, т. е. что число алгебраических неизвестных не более шести;

6) выбрать систему осей декартовых координат;

7) составить шесть уравнений равновесия твердого тела (12\*) и (13\*).

В случае системы параллельных сил отпадают два уравнения проекций сил на оси, перпендикулярные к силам, и одно уравнение моментов сил относительно оси, параллельной силам. Так, если силы параллельны оси  $x$ , то уравнения равновесия имеют вид

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_y(F_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_z(F_k) = 0;$$

8) решив систему уравнений, составленных в предыдущем пункте, найти неизвестные величины.

Оси декартовых координат рекомендуется выбирать так, чтобы они оказались параллельными либо перпендикулярными к возможно большему числу неизвестных сил, а также чтобы линии действия неизвестных сил пересекали эти оси.

**Задача 2.7.** На рис. а изображена косозубая шестерня радиуса  $r$ , закрепленная на горизонтальном валу. Вал лежит в двух опорах: упорном подшипнике А и цилиндрическом подшипнике В. В точке К, расположенной в вертикальной плоскости симметрии шестерни, к ее зубу приложено давление  $T$  со стороны другой шестерни, находящейся с ней в зацеплении (на рис. а сила  $T$  и вторая шестерня не изображены). Давление  $T$  разложено на три составляющие  $T_x$ ,  $T_y$  и  $T_z$ , которые соответственно параллельны осям координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  (начало координат взято в точке А, ось  $x$  направлена вдоль вала, ось  $z$  — по вертикали вверх, ось  $y$  — так, чтобы вместе с осями  $x$  и  $z$  была образована правая система координат). К валу, вращающемуся равномерно, приложена пара сил с вращающим моментом  $m_{вр}$  так, что ее моменты относительно осей равны:  $m_x = m_{вр}$ ,  $m_y = m_z = 0$ .

Определить реакции опор А и В и вращающий момент  $m_{вр}$ . Даны модули составляющих  $T_x$ ,  $T_y$  и  $T_z$  давления  $T$  на зуб шестерни. Размеры указаны на рисунке. Весом шестерни и вала пренебречь.

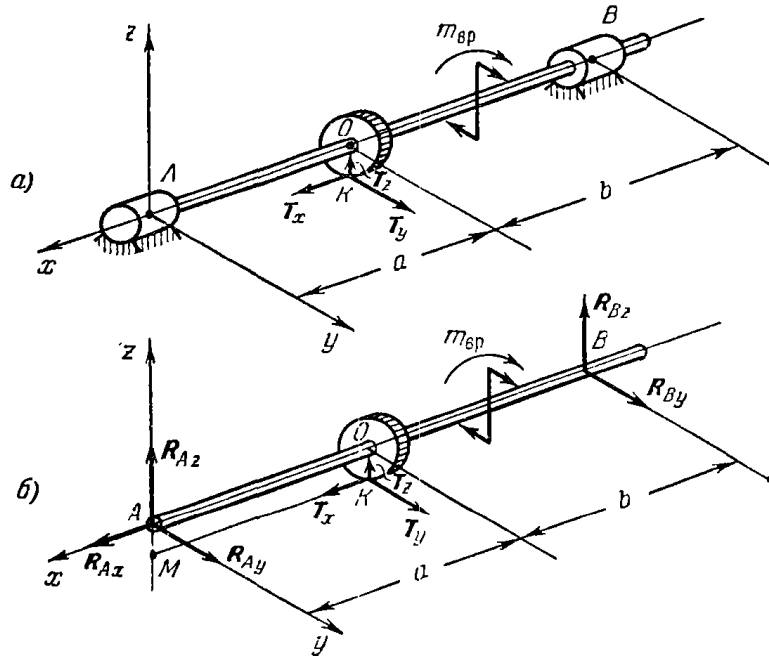
**Решение.** Для определения неизвестных реакций опор А и В и вращающего момента  $m_{вр}$  рассмотрим равновесие вала с сидящей на нем шестерней. (Под равновесием вала мы понимаем не только покой, но и его равномерное вращение, упомянутое в условии задачи.)

К валу и шестерне приложены следующие активные силы, изображенные на рисунке: три составляющие  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$  давления  $T$  и пара сил, момент которой  $m_x = m_{вр}$  требуется определить (в данной задаче момент активной пары сил неизвестен).

Связями, наложенными на вал, являются две опоры: упорный подшипник А и подшипник В. Мысленно отбросим связи и компенсируем их действия на вал реакциями. Подшипник В допускает перемещение



вала вдоль оси  $x$ , поэтому составляющая реакции вдоль оси  $x$  отсутствует, и нам остается изобразить лишь две составляющие  $R_{By}$  и  $R_{Bz}$ , перпендикулярные к оси вала. (Мы направляем на рис. б эти составляющие в сторону возрастания соответствующих координат. Если в действительности направление какой-либо составляющей противоположно, то ответ окажется отрицательным.) Упорный подшипник  $A$ , в отличие от подшипника  $B$ , не допускает перемещения вала вдоль оси  $x$ . Поэтому в точке  $A$  мы изображаем все три составляющие  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$  реакции.



К задаче 2.7.

Итак, нам предстоит рассмотреть равновесие свободного вала с шестерней под действием активных сил  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$  и пары сил с моментом  $m_x = m_{br}$ , а также составляющих реакций  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$ ,  $R_{By}$ ,  $R_{Bz}$ . Все эти силы образуют пространственную систему сил, для которой надо записать шесть уравнений равновесия. Так как число алгебраических неизвестных также равно шести ( $m_{br}$ ,  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$ ,  $R_{By}$  и  $R_{Bz}$ ), то задача является статически определенной.

Составим уравнения проекций сил на оси декартовых координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Все силы либо перпендикулярны, либо параллельны этим осям. Поэтому их проекции равны нулю, или величине соответствующей силы. Так, силы  $T_y$ ,  $T_z$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$ ,  $R_{By}$ ,  $R_{Bz}$  и пара сил перпендикулярны к оси  $x$ , и, следовательно, их проекции на эту ось равны нулю.

Из проекций на ось  $x$  лишь  $R_{Ax}$  и  $T_x$  отличны от нуля, причем обе проекции положительны. Итак,

$$\sum F_{kx} = T_x + R_{Ax} = 0. \quad (1)$$

Аналогично запишем уравнения проекций сил на оси  $y$  и  $z$ :

$$\sum F_{ky} = T_y + R_{Ay} + R_{By} = 0, \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = T_z + R_{Az} + R_{Bz} = 0. \quad (3)$$

(Напомним, что проекция пары сил на любую ось равна нулю, ибо главный вектор пары сил равен нулю.)

Переходим к составлению уравнений моментов сил относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Предварительно заметим, что составление этих уравнений в данной задаче производится достаточно просто. Действительно, линии действия сил параллельны или пересекают оси координат и, значит, имеют моменты, равные нулю, либо силы лежат в плоскостях, перпендикулярных к осям и, следовательно, отпадает необходимость в пресектировании этих сил на плоскости, перпендикулярной к осям.

При составлении уравнения моментов сил относительно оси  $x$  предварительно заметим, что силы  $R_{Ax}$  и  $T_x$  параллельны оси  $x$ , а линии действия сил  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$ ,  $T_z$ ,  $R_{By}$  и  $R_{Bz}$  пересекают ось  $x$ . Следовательно, их моменты равны нулю. Значит, в уравнение моментов войдут лишь моменты силы  $T_y$  и пары сил.

По условию момент пары относительно оси  $x$  равен  $m_{br}$ , т. е.

$$m_x = m_{br}. \quad (4)$$

Сила  $T_y$  лежит в плоскости, перпендикулярной к оси  $x$ . Из точки  $O$  пересечения оси с плоскостью опускаем перпендикуляр  $OK = r$  на линию действия  $T_y$ . Момент положителен, так как с конца оси  $x$  видно, что сила  $T_y$  стремится повернуть тело вокруг точки  $O$  против часовой стрелки. Итак,

$$m_x(T_y) = T_y \cdot r. \quad (5)$$

Используя формулы (4) и (5), запишем уравнение моментов относительно оси  $x$ :

$$\sum m_x(F_k) = m_{br} + T_y \cdot r = 0. \quad (6)$$

При составлении уравнения моментов относительно оси  $y$  заметим, что силы  $T_y$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{By}$  параллельны оси  $y$ , а линии действия сил  $R_{Ax}$  и  $R_{Az}$  пересекают ось  $y$ . Следовательно, моменты их равны нулю. Кроме того, по условию момент пары сил  $m_y$  равен нулю. Значит, отличными от нуля являются только моменты сил  $T_x$ ,  $T_z$  и  $R_{Bz}$ . Все эти силы лежат в плоскости  $xz$ , перпендикулярной к оси  $y$ . Плоскость  $xz$  пересекается с осью  $y$  в точке  $A$ . Поэтому из точки  $A$  опускаем перпендикуляры на линии действия сил  $T_x$ ,  $T_z$  и  $R_{Bz}$ . Соответственно

получим:  $AM = r$ ,  $AO = a$  и  $AB = a + b$ . Момент силы  $T_x$  отрицателен, так как с конца оси  $y$  видно, что сила  $T_x$  стремится повернуть тело вокруг точки  $A$  по часовой стрелке, а моменты сил  $T_z$  и  $R_{Bz}$  положительны, ибо они видны противоположно направленными. Итак,

$$m_y(T_x) = -T_x \cdot r, \quad m_y(T_z) = T_z \cdot a, \quad m_y(R_{Bz}) = R_{Bz}(a + b). \quad (7)$$

Приняв во внимание формулы (7), запишем уравнение моментов относительно оси  $y$  в виде

$$\sum m_y(F_k) = -T_x \cdot r + T_z \cdot a + R_{Bz}(a + b) = 0. \quad (8)$$

При составлении уравнения моментов относительно оси  $z$  надо учесть, что силы  $T_z$ ,  $R_{Az}$ ,  $R_{Bz}$  параллельны оси  $z$ , а линии действия сил  $T_x$ ,  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  пересекают эту ось. Поэтому моменты этих сил относительно оси  $z$  равны нулю. Кроме того, по условию момент пары сил относительно оси  $z$  также равен нулю. Значит, в уравнение войдут только моменты сил  $T_y$  и  $R_{By}$ .

Сила  $T_y$  лежит в горизонтальной плоскости, перпендикулярной к оси  $z$ . Из точки  $M$  пересечения оси  $z$  с этой плоскостью опускаем перпендикуляр  $MK = AO = a$  на линию действия  $T_y$ . Момент силы  $T_y$  относительно оси  $z$  отрицателен, так как с конца оси  $z$  видно, что сила  $T_y$  стремится повернуть тело по часовой стрелке. Значит,

$$m_z(T_y) = -T_y \cdot a. \quad (9)$$

Сила  $R_{By}$  лежит в плоскости  $xy$ , перпендикулярной к оси  $z$ . Из точки  $A$  пересечения этой плоскости с осью  $z$  опускаем перпендикуляр  $AB = a + b$  на линию действия  $R_{By}$ . Момент отрицателен, ибо с конца оси  $z$  видно, что сила  $R_{By}$  стремится повернуть тело вокруг точки  $A$  по часовой стрелке. Итак,

$$m_z(R_{By}) = -R_{By} \cdot (a + b). \quad (10)$$

Приняв во внимание формулы (9) и (10), запишем уравнение моментов сил относительно оси  $z$ :

$$\sum m_z(F_k) = -T_y \cdot a - R_{By} \cdot (a + b) = 0. \quad (11)$$

Итак, уравнения равновесия вала с закрепленной на нем шестерней имеют вид

$$\sum F_{hx} = T_x + R_{Ax} = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = T_y + R_{Ay} + R_{By} = 0, \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = T_z + R_{Az} + R_{Bz} = 0, \quad (3)$$

$$\sum m_x(F_k) = m_{вр} + T_y \cdot r = 0, \quad (6)$$

$$\sum m_y(F_k) = -T_x \cdot r + T_z \cdot a + R_{Bz} \cdot (a + b) = 0, \quad (8)$$

$$\sum m_z(F_k) = -T_y \cdot a - R_{By} \cdot (a + b) = 0. \quad (11)$$

Теперь переходим к решению этой системы шести уравнений с шестью неизвестными ( $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$ ,  $R_{By}$ ,  $R_{Bz}$  и  $m_{вр}$ ). Из уравнения (6) имеем  $m_{вр} = -T_y \cdot r$ . Искомый вращающий момент пары, как и следовало ожидать, оказался отрицательным. Действительно, с конца оси  $x$  вращение пары видно в направлении по часовой стрелке. Из уравнения (8) получим:

$$R_{Bz} = \frac{T_x \cdot r - T_z \cdot a}{a + b}.$$

Из уравнения (11) находим:

$$R_{By} = -\frac{T_y \cdot a}{a + b}.$$

Теперь, подставив значение  $R_{By}$  в уравнение (2), а  $R_{Bz}$  в (3), соответственно имеем:

$$R_{Ay} = -\frac{T_y \cdot b}{a + b}, \quad R_{Az} = -\frac{T_x \cdot r + T_z \cdot b}{a + b}.$$

Наконец, из (1) следует  $R_{Ax} = -T_x$ .

Значения  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$  и  $R_{By}$  оказались отрицательными. Это означает, что направления сил  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$  и  $R_{By}$  противоположны тем, которые предположительно были нами указаны на рисунке. Знак  $R_{Bz}$  может быть выяснен только после подстановки численных значений  $T_x$ ,  $T_z$ ,  $a$  и  $r$ .

**Задача 2.8.** Багажная полка железнодорожного вагона прикреплена к стене вагона двумя петлями (цилиндрическими шарнирами)  $A$  и  $B$  и стержнем  $MS$ . Стержень, присоединенный шарнирами  $M$  и  $S$  к полке и стене, образует угол  $30^\circ$  с горизонтальной плоскостью полки.

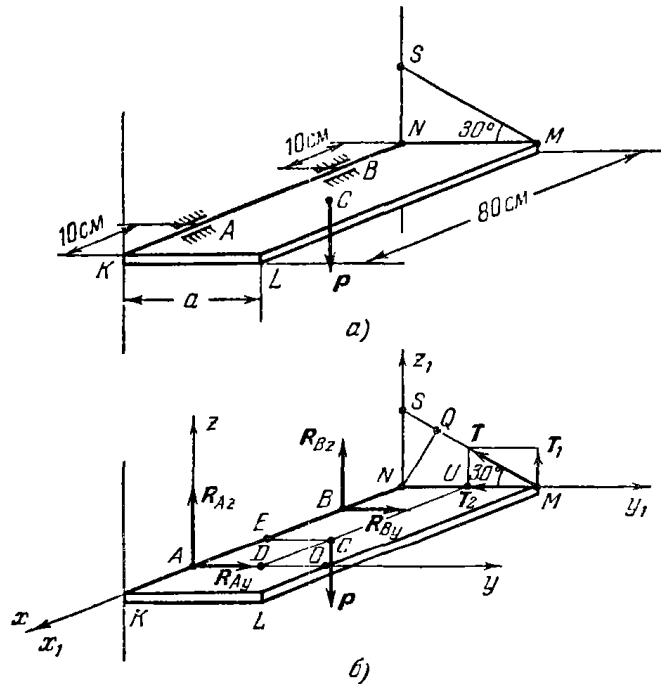
Определить реакции петель  $A$  и  $B$  и стержня  $MS$ , если вес полки  $P = 10$  кг. Размеры указаны на рисунке.

Решение. Для определения искомых реакций петель  $A$  и  $B$  и стержня  $MS$  рассмотрим равновесие полки  $KLMN$ . На полку действует одна активная сила — ее вес  $P = 10$  кг, приложенный в центре тяжести  $C$  полки (в точке пересечения диагоналей прямоугольника  $KLMN$  (рис. б)).

Применив закон освобождаемости, мысленно отбросим связи, т. е. петли  $A$  и  $B$  и стержень  $MS$ , и компенсируем их действие на полку соответствующими реакциями связей. Реакция  $T$  стержня направлена вдоль стержня от  $M$  к  $S$ . Сразу указать направление реакций петель  $A$  и  $B$  мы не можем. Так как, однако, петли — цилиндрические шарниры — не препятствуют перемещению полки вдоль оси  $AB$ , то отсутствуют составляющие реакций вдоль этой оси. Значит, реакции направлены перпендикулярно к оси  $AB$  и каждая из них может быть разложена на две взаимно перпендикулярные составляющие.

Выбрав начало декартовых осей координат в петле  $A$ , изобразим ось  $x$  вдоль  $AB$ , ось  $y$  по горизонтали направо и ось  $z$  по вертикали вверх. В соответствии с выбором осей координат изобразим составляющие реакций  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$  в петле  $A$  и  $R_{By}$ ,  $R_{Bz}$  в петле  $B$  (см. рис. б).

Итак, полка  $KLMN$  находится в равновесии под действием активной силы — веса  $P$  и пяти неизвестных сил:  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$ ,  $R_{By}$ ,  $R_{Bz}$  и  $T$ . Так как все эти силы образуют пространственную систему сил, то число уравнений равновесия равно шести. Значит, задача является



К задаче 2.8.

статически определенной, причем одно из уравнений должно быть зависимым от остальных пяти или тождественно обратиться в нуль.

Займемся составлением уравнений равновесия. Так как все силы лежат в плоскостях, перпендикулярных оси  $x$ , то проекция каждой силы на эту ось равна нулю, и уравнение проекций на ось  $x$  обращается в тождество

$$\sum F_{kx} = 0. \quad (1)$$

Из остальных пяти уравнений равновесия мы сможем определить все пять неизвестных.

При составлении уравнения проекций на ось  $y$  заметим, что силы  $P$ ,  $R_{Az}$  и  $R_{Bz}$  перпендикулярны к оси. Значит, отличными от нуля

являются только проекции сил  $R_{Ay}$ ,  $R_{By}$  и  $T$ . Силы  $R_{Ay}$  и  $R_{By}$  параллельны оси  $y$  и их проекции на эту ось равны  $R_{Ay}$  и  $R_{By}$ , а проекция силы  $T$  равна  $-T \cos 30^\circ$ , поэтому уравнение проекций на ось  $y$  имеет вид

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} + R_{By} - T \cos 30^\circ = 0. \quad (2)$$

Составляя уравнение проекций на ось  $z$ , учтем, что силы  $R_{Ay}$  и  $R_{By}$  перпендикулярны к оси  $z$  и их проекции равны нулю. Силы  $R_{Az}$ ,  $R_{Bz}$  и  $P$  параллельны оси  $z$  и их проекции на эту ось равны  $R_{Az}$ ,  $R_{Bz}$  и  $-P$ . Наконец, проекция силы  $T$  равна  $T \sin 60^\circ$ . Значит, уравнение проекций на ось  $z$  имеет вид

$$\sum F_{kz} = R_{Az} + R_{Bz} - P + T \sin 60^\circ = 0. \quad (3)$$

Переходим к составлению уравнений моментов относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Моменты сил  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$ ,  $R_{By}$  и  $R_{Bz}$  относительно оси  $x$  равны нулю, так как линии действия этих сил пересекают ось  $x$ . Значит, отличными от нуля являются только моменты относительно оси  $x$  сил  $P$  и  $T$ .

Сила  $P$  лежит в плоскости, перпендикулярной к оси  $x$ . Из точки  $E$  пересечения этой плоскости с осью  $x$  опускаем перпендикуляр  $EC$  на линию действия силы  $P$ . Момент силы  $P$  относительно оси  $x$  отрицателен, так как с конца оси  $x$  видно, что сила  $P$  стремится повернуть тело вокруг точки  $E$  по часовой стрелке. Итак,

$$m_x(P) = -P \cdot EC. \quad (4)$$

Сила  $T$  лежит в плоскости, перпендикулярной к оси  $x$ . Из точки  $N$  пересечения этой плоскости с осью  $x$  опускаем перпендикуляр  $NQ$  на линию действия силы  $T$ . Момент силы  $T$  относительно оси  $x$  положителен, ибо с конца оси  $x$  видно, что сила  $T$  стремится повернуть тело вокруг точки  $N$  против часовой стрелки. Значит,

$$m_x(T) = T \cdot NQ. \quad (5)$$

Приняв во внимание формулы (4) и (5), запишем уравнение моментов относительно оси  $x$ :

$$\sum m_x(F_k) = -P \cdot EC + T \cdot NQ = 0. \quad (6)$$

При составлении уравнения моментов относительно оси  $y$  следует учесть, что моменты сил  $R_{Ay}$ ,  $R_{By}$  и  $R_{Az}$  равны нулю (сила  $R_{By}$  параллельна оси  $y$ , а линии действия сил  $R_{Ay}$  и  $R_{Az}$  пересекают эту ось). Значит, отличными от нуля являются только моменты относительно оси  $y$  сил  $P$ ,  $R_{Bz}$  и  $T$ .

Сила  $P$  лежит в плоскости, перпендикулярной к оси  $y$ . Из точки  $D$  пересечения этой плоскости с осью  $y$  опускаем перпендикуляр  $DC$  на линию действия силы  $P$ . Момент силы  $P$  относительно оси  $y$

отрицателен, так как с конца оси  $y$  видно, что сила  $P$  стремится повернуть тело вокруг точки  $D$  по часовой стрелке. Значит,

$$m_y(P) = -P \cdot DC. \quad (7)$$

Столь же просто определяется момент силы  $R_{Bz}$  относительно оси  $y$ . Действительно, сила  $R_{Bz}$  лежит в плоскости  $xz$ , перпендикулярной к оси  $y$ . Из точки  $A$  пересечения этой плоскости с осью  $y$  опускаем перпендикуляр  $AB$  на линию действия силы  $R_{Bz}$ . Момент положителен, ибо с конца оси  $y$  видно, что сила  $R_{Bz}$  стремится повернуть тело вокруг точки  $A$  против часовой стрелки. Итак,

$$m_y(R_{Bz}) = R_{Bz} \cdot AB. \quad (8)$$

Несколько труднее вычислить момент силы  $T$  относительно оси  $y$ , так как сила  $T$  не лежит в плоскости, перпендикулярной к этой оси. Поэтому предварительно спроектируем силу  $T$  на плоскость, проходящую через точку  $M$ , перпендикулярно к оси  $y$ . Проекцией является сила  $T_1$  (напомним, что проекция вектора на плоскость — также вектор). Из точки  $O$  пересечения этой плоскости с осью  $y$  опускаем перпендикуляр  $OM$  на линию действия силы  $T_1$ . Так как с конца оси  $y$  видно, что сила  $T_1$  стремится повернуть тело вокруг точки  $O$  против часовой стрелки, то момент силы  $T$  относительно оси  $y$  положителен, т. е.

$$m_y(T) = T_1 \cdot OM. \quad (9)$$

Теперь, используя выражения (7), (8) и (9), запишем уравнение моментов относительно оси  $y$ :

$$\sum m_y(F_k) = -P \cdot DC + R_{Bz} \cdot AB + T_1 \cdot OM = 0. \quad (10)$$

Остается составить уравнение моментов относительно оси  $z$ . Сразу отметим, что моменты сил  $P$ ,  $R_{Az}$ ,  $R_{Bz}$  и  $R_{Ay}$  относительно оси  $z$  равны нулю (силы  $P$ ,  $R_{Az}$ ,  $R_{Bz}$  параллельны оси  $z$ , а линия действия силы  $R_{Ay}$  пересекает эту ось). Значит, отличными от нуля являются лишь моменты относительно оси  $z$  сил  $R_{By}$  и  $T$ . Сила  $R_{By}$  лежит в плоскости  $xu$ , перпендикулярной к оси  $z$ . Из точки  $A$  пересечения этой плоскости с осью  $z$  опускаем перпендикуляр  $AB$  на линию действия силы  $R_{By}$ . Так как с конца оси  $z$  видно, что сила  $R_{By}$  стремится повернуть тело вокруг точки  $A$  по часовой стрелке, то момент ее отрицателен, т. е.

$$m_z(R_{By}) = -R_{By} \cdot AB. \quad (11)$$

Для вычисления момента силы  $T$  относительно оси  $z$  предварительно найдем проекцию  $T_2$  силы  $T$  на плоскость  $xu$ . Из точки  $A$  пересечения этой плоскости с осью  $z$  опустим перпендикуляр  $AN$  на линию действия силы  $T_2$ . Момент силы  $T$  относительно оси  $z$

положителен, так как с конца оси  $z$  видно, что сила  $T_2$  стремится повернуть тело вокруг точки  $A$  против часовой стрелки. Значит,

$$m_z(T) = T_2 \cdot AN. \quad (12)$$

Теперь, приняв во внимание формулы (11) и (12), запишем уравнение моментов относительно оси  $z$ :

$$\sum m_z(F_k) = -R_{By} \cdot AB + T_2 \cdot AN = 0. \quad (13)$$

Итак, для определения пяти неизвестных  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$ ,  $R_{By}$ ,  $R_{Bz}$  и  $T$  мы составили пять уравнений: (2), (3), (6), (10) и (13). Прежде чем перейти к решению этой системы, вычислим модули сил  $T_1$  и  $T_2$ , а также длины отрезков (плеч)  $EC$ ,  $NQ$ ,  $DC$ ,  $AB$ ,  $OM$ ,  $AN$ , входящих в уравнения (6), (10) и (13). Имеем:  $T_1 = T \sin 30^\circ = \frac{1}{2} T$ ,  $T_2 = T \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} T$ . Обозначим буквой  $a$  ширину полки. Тогда

$$EC = \frac{1}{2} a, \quad NQ = NM \sin 30^\circ = a \sin 30^\circ = \frac{1}{2} a,$$

$$DC = \frac{80 - 2 \cdot 10}{2} = 30 \text{ см},$$

$$AB = 80 - 2 \cdot 10 = 60 \text{ см}, \quad OM = 80 - 10 = 70 \text{ см}, \quad AN = OM = 70 \text{ см}.$$

Кроме того, по условию  $P = 10 \text{ кг}$ .

Теперь система уравнений (2), (3), (6), (10) и (13) примет вид

$$R_{Ay} + R_{By} - \frac{\sqrt{3}}{2} T = 0, \quad (14)$$

$$R_{Az} - R_{Bz} - 10 + \frac{1}{2} T = 0, \quad (15)$$

$$-10 \cdot \frac{1}{2} a + T \cdot \frac{1}{2} a = 0, \quad (16)$$

$$-10 \cdot 30 + R_{Bz} \cdot 60 + \frac{1}{2} T \cdot 70 = 0, \quad (17)$$

$$-R_{By} \cdot 60 + \frac{\sqrt{3}}{2} T \cdot 70 = 0. \quad (18)$$

Остается решить эти уравнения.

Из уравнения (16) имеем  $T = 10 \text{ кг}$ . Подставив это значение  $T$  в уравнения (17) и (18), получим:  $R_{Bz} = -\frac{5}{6} = -0,83 \text{ кг}$ ,  $R_{By} = \frac{35}{6} \sqrt{3} = 10,09 \text{ кг}$ . Теперь из уравнений (14) и (15), подставив в них полученные значения  $R_{By}$  и  $R_{Bz}$ , находим:  $R_{Ay} = -\frac{5}{6} \sqrt{3} = -1,44 \text{ кг}$ ,  $R_{Az} = 5 \cdot \frac{5}{6} = 5,83 \text{ кг}$ . Знаки минус, полученные в от-

ветах для  $R_{Ay}$  и  $R_{Bz}$ , показывают, что направления сил  $R_{Ay}$  и  $R_{Bz}$  противоположны тем, которые указаны на рис. б.

Составляя уравнения моментов, мы столкнулись с некоторыми трудностями при вычислении моментов силы  $T$  относительно осей  $y$  и  $z$ , так как пришлось силу  $T$  проектировать на плоскости, перпендикулярные к этим осям. Этим трудностей можно избежать, направив координатные оси  $y_1$  и  $z_1$  так, чтобы моменты силы  $T$  относительно этих осей равнялись нулю. Для этого возьмем начало координат в точке  $M$ , направим ось  $x_1$  вдоль оси  $x$ , а оси  $y_1$  и  $z_1$  соответственно параллельно осям  $y$  и  $z$  (см. рис. б). Нетрудно видеть, что моменты силы  $T$  относительно осей  $y_1$  и  $z_1$  обратятся в нуль, так как линия действия силы  $T$  пересекает эти оси. Составим уравнения равновесия полки, воспользовавшись осями координат  $x_1, y_1, z_1$ . При неизменности уравнений (14), (15) и (16) уравнения (17) и (18) примут вид

$$\sum m_{y_1}(F_R) = P \cdot CM - R_{Bz} \cdot BN - R_{Az} \cdot AN = 0, \quad (19)$$

$$\sum m_{z_1}(F_R) = R_{Ay} \cdot AN + R_{By} \cdot BN = 0. \quad (20)$$

В уравнения (19) и (20) не входит сила  $T$  и поэтому составить их проще, чем уравнения (17) и (18). Однако решение системы уравнений (14)–(18) легче, чем решение системы (14), (15), (16), (19) и (20). Значит, выбрав оси  $x_1, y_1, z_1$  вместо осей  $x, y, z$ , мы добились упрощения составления уравнений моментов относительно осей  $y_1$  и  $z_1$ , но усложнили решение системы уравнений равновесия. Объем вычислений в обоих случаях примерно одинаков.

**Задача 2.9.** На рис. а изображена квадратная крышка  $ABCD$  грузового люка. Крышка прикреплена посредством сферического шарнира  $A$  и петли (подшипника)  $B$ . Подняв крышку над горизонтом на угол  $30^\circ$ , ее закрепили с помощью оттяжки  $DE$ , образующей угол  $60^\circ$  с плоскостью крышки.

Определить опорные реакции сферического шарнира  $A$  и петли  $B$ , а также реакцию оттяжки  $DE$ . Вес крышки равен  $P$ .

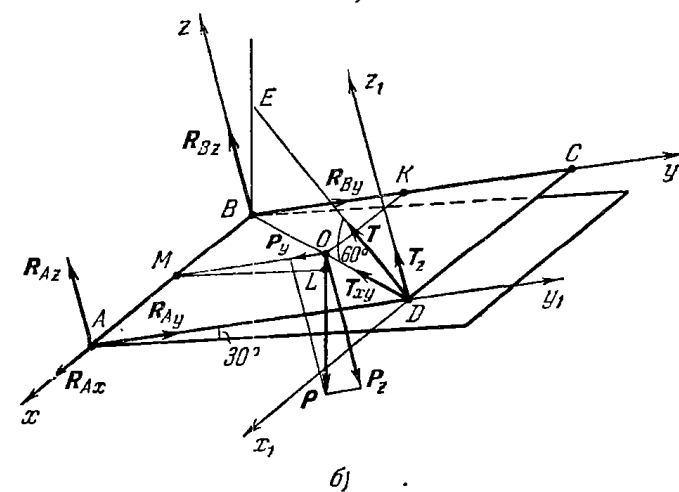
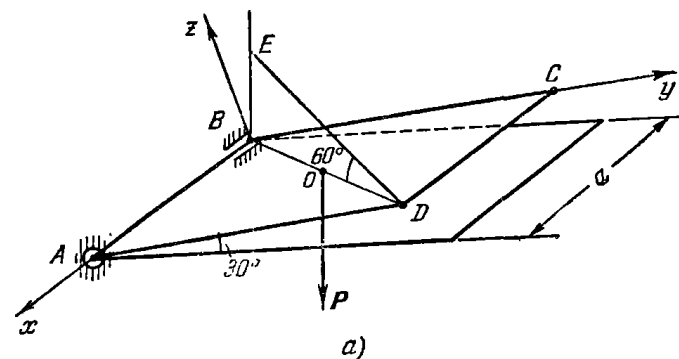
**Решение.** Для определения неизвестных рассмотрим равновесие крышки  $ABCD$ .

К крышке приложена одна активная сила — ее вес  $P$ . Точка  $O$  приложения силы  $P$  расположена в центре квадратной крышки (рис. б).

На крышку наложены три связи: сферический шарнир  $A$ , петля  $B$  и оттяжка  $DE$ . Применяв закон освобождаемости, мысленно отбросим эти связи и заменим их действие на крышку соответствующими реакциями. Оборвав оттяжку  $DE$  в точке  $D$ , направим реакцию  $T$  вдоль нее от  $D$  к  $E$ . Сферический шарнир  $A$  является неподвижной точкой, поэтому сразу указать направление реакции невозможно, и ее следует заменить тремя взаимно перпендикулярными составляющими. Петля  $B$

допускает перемещение вдоль  $AB$ , значит, в этом направлении отсутствует составляющая реакции, т. е. в петле  $B$  имеются только две составляющие, перпендикулярные к  $AB$ .

Выберем начало координат в точке  $B$ , ось  $x$  направим вдоль  $AB$ , ось  $y$  — вдоль  $BC$ , а ось  $z$  — перпендикулярно к плоскости крышки,



К задаче 2.9.

так чтобы она вместе с осями  $x$  и  $y$  образовала правую систему осей координат (см. рис. б). В соответствии с этими осями изобразим три составляющие  $R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}$  реакции сферического шарнира  $A$  и две составляющие  $R_{By}$  и  $R_{Bz}$  реакции петли  $B$ .

Теперь мы можем рассмотреть равновесие крышки как равновесие свободного твердого тела, находящегося под действием активной силы  $P$  и реакций  $T, R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, R_{By}$  и  $R_{Bz}$ . Все эти силы образуют пространственную систему сил, для которой следует составить шесть уравнений равновесия. Так как число алгебраических неизве-

стных также равно шести ( $T, R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, R_{By}$  и  $R_{Bz}$ ), го задача является статически определенной.

Составляя уравнения равновесия, мы столкнемся с трудностями при рассмотрении силы  $T$ , так как нам неизвестны углы, которые образует эта сила с координатными осями  $x$  и  $y$ . Поэтому разложим силу  $T$  на две составляющие  $T_{xy}$  и  $T_z$  так, чтобы сила  $T_{xy}$  лежала в плоскости  $xy$ , а сила  $T_z$  была к ней перпендикулярна (см. рис. б), т. е. параллельна оси  $z$ . Модули этих сил равны

$$T_{xy} = T \cos 60^\circ, \quad T_z = T \cos 30^\circ. \quad (1)$$

Аналогично поступим с силой  $P$ , разложив ее на составляющие силы  $P_y$  и  $P_z$  (сила  $P$  лежит в плоскости, перпендикулярной к оси  $x$ ; поэтому ее проекция на ось  $x$  равна нулю). Для модулей этих сил имеем:

$$P_y = P \sin 30^\circ, \quad P_z = P \cos 30^\circ. \quad (2)$$

Впредь при составлении уравнений равновесия мы вместо проекции силы  $T$  на ось будем вычислять сумму проекций сил  $T_{xy}$  и  $T_z$  на эту ось, а вместо момента силы  $T$  относительно оси будем, на основании теоремы Вариньона, вычислять сумму моментов сил  $T_{xy}$  и  $T_z$  относительно соответствующей оси.

Займемся составлением уравнений проекций сил на оси декартовых координат.

Силы  $P, R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, R_{By}, R_{Bz}$  и  $T_z$  перпендикулярны к оси  $x$  и проекции их на эту ось равны нулю. Значит, отличными от нуля являются только проекции сил  $R_{Ax}$  и  $T_{xy}$ . Итак,

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} - T_{xy} \cos 45^\circ = 0.$$

Подставив значение  $T_{xy}$  из формулы (1), имеем:

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} - T \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ = 0. \quad (3)$$

Силы  $P_z, R_{Ax}, R_{Az}, R_{Bz}$  и  $T_z$  перпендикулярны к оси  $y$  и проекции их на эту ось равны нулю, значит, в уравнение проекций на ось  $y$  войдут только проекции сил  $R_{Ay}, R_{By}, P_y$  и  $T_{xy}$ . Итак,

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} + R_{By} - P \sin 30^\circ - T_{xy} \sin 45^\circ = 0.$$

Подставив значение  $T_{xy}$  из формулы (1), получим:

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} + R_{By} - P \sin 30^\circ - T \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = 0. \quad (4)$$

Силы  $P_y, R_{Ax}, R_{Ay}, R_{By}, T_{xy}$  перпендикулярны к оси  $z$  и, следовательно, их проекции на эту ось равны нулю, поэтому в уравнение проекций на ось  $z$  войдут лишь проекции сил  $P_z, T_z, R_{Az}$  и  $R_{Bz}$ . Итак,

$$\sum F_{kz} = R_{Az} + R_{Bz} - P \cos 30^\circ - T \cos 30^\circ = 0. \quad (5)$$

Переходим к составлению уравнений моментов относительно осей  $x, y$  и  $z$ .

Линии действия сил  $R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, R_{By}, R_{Bz}, P_y$  и  $T_{xy}$  пересекают ось  $x$ , поэтому моменты этих сил относительно оси  $x$  равны нулю. Отличными от нуля являются только моменты сил  $P_z$  и  $T_z$ .

Сила  $P_z$  лежит в плоскости, перпендикулярной к оси  $x$ . Эта плоскость пересекается с осью  $x$  в точке  $M$ . Опускаем из точки  $M$  перпендикуляр  $MO$  на линию действия  $P_z$ . Момент силы отрицателен, так как с конца оси  $x$  видно, что сила  $P_z$  стремится повернуть тело вокруг точки  $M$  по часовой стрелке. Значит,  $m_x(P_z) = -P_z \cdot OM$ . Если длину стороны квадратной крышки мы обозначим буквой  $a$ , то  $OM = a/2$ . Приняв во внимание формулу (2), запишем:

$$m_x(P_z) = -P \cos 30^\circ \cdot \frac{a}{2}. \quad (6)$$

Заметим, что для вычисления момента силы  $P$  относительно оси  $x$  не было нужды в разложении силы  $P$  на составляющие  $P_y$  и  $P_z$ , первая из которых дает момент, равный нулю. Действительно, сила  $P$  лежит в плоскости, перпендикулярной к оси  $x$ . Из точки  $M$  пересечения оси  $x$  с этой плоскостью опускаем перпендикуляр  $ML$  на линию действия силы  $P$ . Тогда  $m_x(P) = -P \cdot ML$ . Из треугольника  $OML$  имеем  $ML = OM \cos 30^\circ = \frac{a}{2} \cos 30^\circ$ . Значит,  $m_x(P) =$

$= -P \frac{a}{2} \cos 30^\circ$ , что соответствует формуле (6). Разложением силы  $P$  на ее составляющие  $P_y$  и  $P_z$  целесообразно будет воспользоваться при вычислении ее моментов относительно осей  $y$  и  $z$ , так как сила  $P$  не лежит в плоскостях, перпендикулярных к этим осям.

Сила  $T_z$  лежит в плоскости, перпендикулярной к оси  $x$ . Из точки  $A$  пересечения этой плоскости с осью  $x$  опускаем перпендикуляр  $AD = a$  на линию действия силы  $T_z$ . Момент положителен, так как с конца оси  $x$  видно, что сила  $T_z$  стремится повернуть тело вокруг точки  $A$  против часовой стрелки. Значит,  $m_x(T_z) = T_z \cdot a$ . Приняв во внимание формулу (1), имеем:

$$m_x(T_z) = T \sin 30^\circ \cdot a. \quad (7)$$

Итак, используя формулы (6) и (7), запишем уравнение моментов относительно оси  $x$ :

$$\sum m_x(F_k) = -P \cos 30^\circ \cdot \frac{a}{2} + T \cos 30^\circ \cdot a = 0. \quad (8)$$

При составлении уравнения моментов относительно оси  $y$  надо учесть, что линии действия сил  $R_{Ax}, R_{By}, R_{Bz}, T_{xy}$  пересекают ось  $y$ , а линии действия сил  $R_{Ay}$  и  $P_y$  параллельны оси  $y$ . Поэтому моменты всех этих сил относительно оси  $y$  равны нулю. Значит, в уравнение моментов относительно оси  $y$  войдут лишь силы:  $R_{Az}, P_z$  и  $T_z$ .

Сила  $R_{Az}$  лежит в плоскости  $xz$ , перпендикулярной к оси  $y$ . Из точки  $B$  пересечения этой плоскости с осью  $y$  опускаем перпендикуляр  $BA = a$  на линию действия  $R_{Az}$ . Момент  $R_{Az}$  отрицателен, ибо с конца оси  $y$  видно, что сила  $R_{Az}$  стремится повернуть тело вокруг точки  $B$  по часовой стрелке. Значит,

$$m_y(R_{Az}) = -R_{Az} \cdot a. \quad (9)$$

Сила  $P_z$  лежит в плоскости, перпендикулярной к оси  $y$ . Из точки  $K$  пересечения этой плоскости с осью  $y$  опускаем перпендикуляр  $KO = \frac{a}{2}$  на линию действия  $P_z$ . Момент положителен, так как с конца оси  $y$  видно, что сила  $P_z$  стремится повернуть тело вокруг точки  $K$  против часовой стрелки. Итак,  $m_y(P_z) = P_z \cdot \frac{a}{2}$ . Приняв во внимание формулу (1), имеем:

$$m_y(P_z) = P \cos 30^\circ \cdot \frac{a}{2}. \quad (10)$$

Сила  $T_z$  лежит в плоскости, перпендикулярной к оси  $y$ . Из точки  $C$  пересечения этой плоскости с осью  $y$  опускаем перпендикуляр  $CD = a$  на линию действия силы  $T_z$ . Момент отрицателен, ибо с конца оси  $y$  видно, что сила  $T_z$  стремится повернуть тело вокруг точки  $C$  по часовой стрелке. Значит,  $m_y(T_z) = -T_z \cdot a$ . Приняв во внимание формулу (1), запишем:

$$m_y(T_z) = -T \cos 30^\circ \cdot a. \quad (11)$$

После использования формул (9), (10) и (11) уравнение моментов относительно оси  $y$  примет вид

$$\sum m_y(F_k) = -R_{Az} \cdot a + P \cos 30^\circ \cdot \frac{a}{2} - T \cos 30^\circ \cdot a = 0. \quad (12)$$

Остается составить уравнение моментов относительно оси  $z$ . Заметим, что линии действия сил  $R_{Ax}$ ,  $R_{By}$ ,  $R_{Bz}$  и  $T_{xy}$  пересекают ось  $z$ , а силы  $R_{Az}$ ,  $P_z$  и  $T_z$  параллельны этой оси. Поэтому моменты этих сил относительно оси  $z$  равны нулю. Значит, в уравнение моментов войдут только моменты двух сил:  $P_y$  и  $R_{Ay}$ .

Силы  $P_y$  и  $R_{Ay}$  лежат в плоскости  $xu$ , перпендикулярной к оси  $z$ . Из точки  $B$  пересечения плоскости  $xu$  с осью  $z$  опускаем перпендикуляр  $BM = a/2$  на линию действия  $P_y$  и перпендикуляр  $BA = a$  на линию действия  $R_{Ay}$ . Момент силы  $P_y$  отрицателен, а  $R_{Ay}$  положителен, так как с конца оси  $z$  видно, что сила  $P_y$  стремится повернуть тело вокруг точки  $B$  по часовой, а сила  $R_{Ay}$  — против часовой стрелки. Значит,

$$m_z(R_{Ay}) = R_{Ay} \cdot a, \quad (13)$$

$$m_z(P_y) = -P_y \cdot \frac{a}{2} = -P \sin 30^\circ \cdot \frac{a}{2}. \quad (14)$$

(В формуле (14) учтен результат (2).)

Запишем уравнение моментов относительно оси  $z$ , используя выражения (13) и (14):

$$\sum m_z(F_k) = R_{Ay} \cdot a - P \sin 30^\circ \cdot \frac{a}{2} = 0. \quad (15)$$

Итак, уравнения равновесия крышки имеют вид

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} - T \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ = 0, \quad (3)$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} + R_{By} - P \sin 30^\circ - T \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = 0, \quad (4)$$

$$\sum F_{kz} = R_{Az} + R_{Bz} - P \cos 30^\circ + T \cos 30^\circ = 0, \quad (5)$$

$$\sum m_x(F_k) = -P \cos 30^\circ \cdot \frac{a}{2} + T \cos 30^\circ \cdot a = 0, \quad (8)$$

$$\sum m_y(F_k) = -R_{Az} \cdot a + P \cos 30^\circ \cdot \frac{a}{2} - T \cos 30^\circ \cdot a = 0, \quad (12)$$

$$\sum m_z(F_k) = R_{Ay} \cdot a - P \sin 30^\circ \cdot \frac{a}{2} = 0. \quad (15)$$

Для определения неизвестных остается решить эту систему шести уравнений с шестью неизвестными.

Из уравнений (8) и (15) непосредственно находим  $T$  и  $R_{Ay}$ . Сложив уравнения (8) и (12), получим  $R_{Az}$ . Далее из (3) вычислим  $R_{Ax}$  из (4) —  $R_{By}$  и из (5) —  $R_{Bz}$ .

$$\text{Приводим ответы: } T = \frac{P}{2}, \quad R_{Ay} = \frac{P}{4}, \quad R_{Az} = 0, \quad R_{Ax} = \frac{\sqrt{2}}{8} P = \\ = 0,18 P, \quad R_{By} = \frac{2 + \sqrt{2}}{8} P = 0,43 P, \quad R_{Bz} = \frac{\sqrt{3}}{4} P = 0,43 P.$$

Если, решая задачу, мы испытываем затруднения при вычислении моментов относительно осей какой-либо силы, то достаточно выбрать начало координат на линии действия этой силы для того, чтобы эта сила в уравнения моментов не вошла. Так, для того чтобы в данной задаче сила  $T$  не вошла в уравнения моментов, достаточно взять начало координат в точке  $D$  приложения силы  $T$ , а оси  $x_1$ ,  $y_1$  и  $z_1$  направить соответственно параллельно осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ . При этом уравнения проекций на оси  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  будут иметь вид, тождественный уравнениям (3), (4) и (5) проекций на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Так как линия действия силы  $T$  пересекает оси  $x_1$ ,  $y_1$  и  $z_1$ , то эта сила не войдет в соответствующие уравнения моментов. Поэтому

$$\sum m_{x_1}(F_k) = -R_{Az} \cdot a - R_{Bz} \cdot a + P \cos 30^\circ \cdot \frac{a}{2} = 0, \quad (16)$$

$$\sum m_{y_1}(F_k) = R_{Bz} \cdot a - P \cos 30^\circ \cdot \frac{a}{2} = 0, \quad (17)$$

$$\sum m_{z_1}(F_k) = P \sin 30^\circ \cdot \frac{a}{2} + R_{Ax} \cdot a - R_{By} \cdot a = 0. \quad (18)$$

Теперь для определения неизвестных надо решить систему уравнений (3), (4), (5), (16), (17) и (18).

Степень трудности составления уравнений моментов (8), (12) и (15) относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и уравнений моментов (16), (17) и (18) относительно осей  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  примерно одинакова. Объем вычислений при решении системы уравнений (3), (4), (5), (8), (12) и (15) и системы (3), (4), (5), (16), (17) и (18) также примерно одинаков.

Если бы в условии данной задачи петля  $B$  была заменена сферическим шарниром, то в точке  $B$  добавилась бы составляющая реакции  $R_{Bx}$ , алгебраических неизвестных стало бы семь ( $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$ ,  $R_{Bx}$ ,  $R_{By}$ ,  $R_{Bz}$  и  $T$ ) и задача оказалась бы статически неопределенной. Если бы одновременно с введением сферического шарнира  $B$  оттяжка  $DE$  была заменена силой  $T$ , известной по величине и направлению, то, хотя число неизвестных стало бы равным шести ( $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$ ,  $R_{Bx}$ ,  $R_{By}$ ,  $R_{Bz}$ ), задача осталась бы статически неопределенной. Действительно, выбрав прежние направления осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , нетрудно видеть, что  $R_{Ax}$  и  $R_{Bx}$  войдут только в одно из шести уравнений равновесия — в уравнение (3) проекций на ось  $x$ , которое при этом примет вид

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} + R_{Bx} - T \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ = 0.$$

Из этого уравнения можно определить только сумму  $R_{Ax} + R_{Bx}$ , а каждое из этих неизвестных найти невозможно. Тем самым подтверждается указание, сделанное в обзоре теории этого пункта, что задача на равновесие твердого тела с двумя закрепленными точками (в данном случае с двумя сферическими шарнирами) является статически неопределенной.

С учетом того, что в решениях задач 2.7—2.9 дано подробное изложение методики составления уравнений равновесия, в следующих двух задачах эти уравнения составлены без дополнительных пояснений.

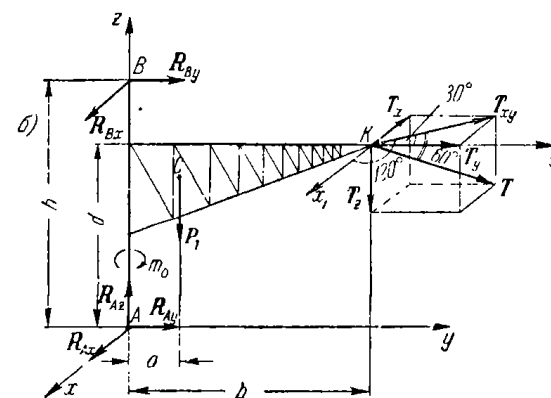
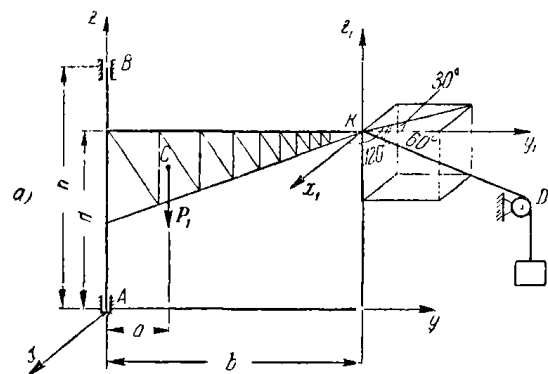
**Задача 2.10.** На рисунке изображен поворотный кран, ось вращения которого имеет две опоры: подпятник  $A$  и подшипник  $B$ . С помощью троса, переброшенного через блок  $D$ , при вращении крана вокруг оси  $AB$  происходит подъем либо опускание груза  $E$ , подвешенного к концу троса. Вес крана, приложенный в его центре тяжести  $C$ , равен  $P_1 = 2T$ . Вес поднимаемого груза  $E$  равен  $P_2 = 4T$ . Конструкция крана совмещена с плоскостью рисунка, т. е. лежит в плоскости  $yz$ . Ось  $x$  направлена на нас. В точке  $K$  крепления троса к крану проведены оси  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ , соответственно параллельные осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Наклонная ветвь троса образует с горизонтальной плоскостью  $x_1y_1$  угол, равный  $60^\circ$ . Проекция этой ветви троса на плоскость  $x_1y_1$  образует с осями  $x_1$  и  $y_1$  соответственно углы  $120^\circ$  и  $30^\circ$  (см. рисунок).

Определить опорные реакции подпятника  $A$  и подшипника  $B$ , а также величину вращающего момента  $m_0$ , который надо приложить

к крану вокруг оси вращения  $z$  для того, чтобы он находился в равновесии;  $a = 1$  м,  $b = 4$  м,  $d = 3$  м,  $h = 4$  м.

**Решение.** Рассмотрим равновесие крана, к которому приложена одна активная сила — его вес  $P_1$ , приложенный в центре тяжести  $C$  крана, а также искомый вращающий момент  $m_0$ . На кран наложены связи: подпятник  $A$ , подшипник  $B$  и трос, прикрепленный к крану



К задаче 2.10.

тросу. Из условия равновесия груза  $E$  находим  $|T| = |P_2| = 4T$ .

Теперь рассмотрим равновесие крана под действием вращающего момента  $m_0$  и сил:  $P_1$ ,  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$ ,  $R_{Bx}$ ,  $R_{By}$  и  $T$ .

Число неизвестных равно шести ( $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$ ,  $R_{Bx}$ ,  $R_{By}$  и  $m_0$ ), и задача является статически определенной.

Составление уравнений равновесия затруднено пространственным положением силы  $T$ , поэтому предварительно разложим силу  $T$  на три составляющие  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$ , параллельные осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Модули их равны

$$\begin{aligned} T_z &= T \cos 30^\circ, & T_x &= T_{xy} \cos 60^\circ = T \cos^2 60^\circ, \\ T_y &= T_{xy} \cos 30^\circ = T \cos 60^\circ \cos 30^\circ. \end{aligned} \quad (1)$$



Используя (1), находим:

$$T_x = 1T, \quad T_y = \sqrt{3}T, \quad T_z = 2\sqrt{3}T. \quad (2)$$

Теперь составим уравнения равновесия крана:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= R_{Ax} + R_{Bx} - T_x = 0, \\ \sum F_{ky} &= R_{Ay} + R_{By} + T_y = 0, \\ \sum F_{kz} &= R_{Az} - P_1 - T_z = 0, \\ \sum m_x(F_k) &= -P_1 a - R_{By} h - T_y d - T_z b = 0, \\ \sum m_y(F_k) &= R_{Bx} h - T_x d = 0, \\ \sum m_z(F_k) &= -m_0 + T_x b = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Учитывая при решении системы значения  $T_x$ ,  $T_y$  и  $T_z$  из (2), а также численные данные, находим:

$$\begin{aligned} m_0 &= 4 \text{ Тм}, & R_{Bx} &= 0,75 \text{ Т}, & R_{By} &= -5,31 \text{ Т}, \\ R_{Ax} &= 0,25 \text{ Т}, & R_{Ay} &= 3,58 \text{ Т}, & R_{Az} &= 5,46 \text{ Т}. \end{aligned}$$

Допустим, что условие этой задачи изменено: искомый вращающий момент  $m_0$  задан, а вместо подшипника  $B$  имеется подпятник. Тогда в точке  $B$  добавляется неизвестная составляющая реакции  $R_{Bz}$ . Видоизмененная задача оказывается статически неопределенной, хотя при этом число алгебраических неизвестных остается равным числу уравнений, т. е. шести ( $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$ ,  $R_{Bx}$ ,  $R_{By}$ ,  $R_{Bz}$ ). Действительно,  $R_{Ax}$  и  $R_{Bz}$  входят только в уравнение проекций на ось  $z$ , которое принимает вид

$$\sum F_{kz} = R_{Az} + R_{Bz} - P_1 - T_z = 0.$$

Из этого уравнения можно определить только сумму  $R_{Az} + R_{Bz}$ , а каждое из этих неизвестных найти невозможно.

Полученный результат подтверждает указание, сделанное в обзоре теории этого пункта, что задача на равновесие твердого тела с двумя закрепленными точками (в данном случае подпятниками  $A$  и  $B$ ), несмотря на соответствие числа неизвестных числу уравнений, является статически неопределенной.

**Задача 2.11.** Однородный стержень  $AB$  весом  $P$ , образующий с полом угол  $45^\circ$ , упирается концом  $A$  в негладкий плинтус комнаты (рис. а), а концом  $B$  в гладкую вертикальную стену. В точке  $B$  к стержню прикреплен горизонтальный трос  $BE$ .

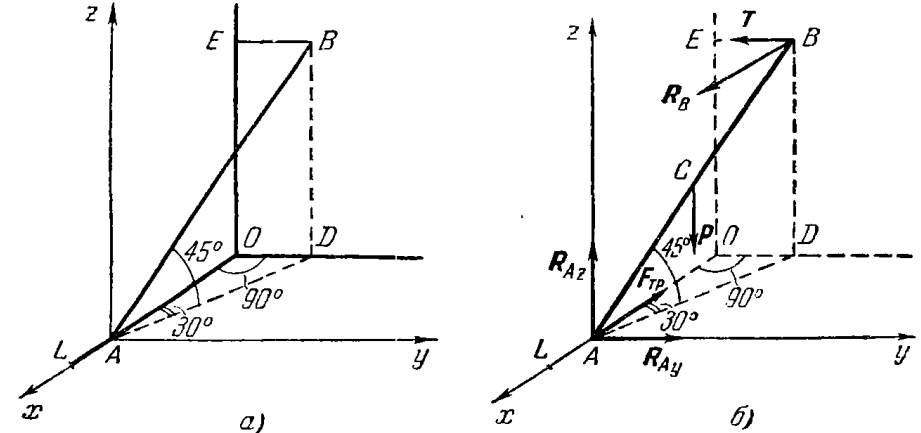
Проверим, может ли стержень оставаться в равновесии, а также определить реакции плинтуса, стены и троса, если коэффициент трения скольжения о плинтус  $f = 0,5$ , а угол  $OAD$  равен  $30^\circ$ . Оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  изображены на рисунке.

Решение. Стержень не мог бы оставаться в равновесии, если бы плинтус был гладким. В этом случае конец стержня  $A$  начал бы

скользить вдоль плинтуса. Равновесие возможно лишь при наличии силы трения  $F_{тр}$ , направленной противоположно возможному движению, т. е. от  $A$  к  $O$ , причем модуль силы трения должен быть меньше или равен его наибольшей величине:

$$F_{тр} \leq fR_A, \quad (1)$$

где  $f$  — коэффициент трения скольжения, а  $R_A$  — модуль нормальной реакции плинтуса. В случае невыполнения условия (1) стержень придет в движение.



К задаче 2.11.

К стержню приложена одна активная сила — его вес  $P$  (рис. б). Так как по условию стена является гладкой, то ее реакция  $R_B$  перпендикулярна к плоскости стены, т. е. параллельна оси  $x$ . Реакция  $T$  троса направлена от  $B$  к  $E$ . О направлении силы трения  $F_{тр}$  было указано выше. Нормальная реакция  $R_A$  плинтуса расположена в плоскости  $yz$ , но направление ее пока неизвестно. Поэтому разложим силу  $R_A$  на две взаимно перпендикулярные составляющие  $R_{Ay}$  и  $R_{Az}$ , т. е.

$$R_A = R_{Ay} + R_{Az}. \quad (2)$$

Задача является статически определенной, ибо число неизвестных равно пяти:  $R_B$ ,  $T$ ,  $F_{тр}$ ,  $R_{Ay}$  и  $R_{Az}$ .

Обозначив длину стержня через  $2l$ , составим пять уравнений равновесия:

$$\sum F_{kx} = R_B - F_{тр} = 0, \quad (3)$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} - T = 0, \quad (4)$$

$$\sum F_{kz} = R_{Az} - P = 0, \quad (5)$$

$$\sum m_x(F_k) = -P \cdot l \cos 45^\circ \sin 30^\circ + T \cdot 2l \sin 45^\circ = 0, \quad (6)$$

$$\sum m_y(F_k) = -P \cdot l \cos 45^\circ \cos 30^\circ + R_B \cdot 2l \sin 45^\circ = 0. \quad (7)$$

Решая систему уравнений (3)—(7), найдем  $R_{Az}$  из (5),  $T$  из (6),  $R_B$  из (7); затем получим  $F_{тр}$  из (3) и  $R_{Ay}$  из (4). Итак, искомые силы по модулю равны

$$R_{Az} = P, \quad R_{Ay} = T = 0,25 P, \quad R_B = F_{тр} = \frac{P\sqrt{3}}{4} = 0,43 P. \quad (8)$$

Остается проверить, может ли стержень оставаться в равновесии. В соответствии с формулой (2) запишем:

$$R_A = \sqrt{R_{Ay}^2 + R_{Az}^2}. \quad (9)$$

Внеся значения  $R_{Ay}$  и  $R_{Az}$  из (8) в формулу (9), найдем:

$$R_A = \frac{P}{4} \sqrt{17} = 1,04 P. \quad (10)$$

Подставив в неравенство (1) значения  $F_{тр}$  и  $R$  из (8) и (10), при  $f = 0,5$  получим:

$$0,43 P < 0,52 P.$$

Так как условие (1) выполнено, то стержень находится в равновесии.

В заключение вычислим наименьшее значение коэффициента трения скольжения  $f$ , при котором стержень будет оставаться в равновесии. Отбросив в формуле (1) знак неравенства, найдем:

$$f = \frac{F_{тр}}{R_A} = \frac{0,43 P}{1,04 P} = 0,41.$$

Если бы по условию коэффициент трения скольжения был меньше чем 0,41, то стержень не мог бы остаться в равновесии и начал бы двигаться.

Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и последующих лет: 246, 254, 257, 262, 264, 265, 267, 268, 271, 272, 276, 277, 278.

3°. Приведение произвольной пространственной системы сил к простейшему виду рекомендуется выполнять в следующем порядке:

- 1) выбрать оси декартовых координат;
- 2) взять центр приведения системы сил в начале координат  $O$ ;
- 3) вычислить проекции  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  главного вектора  $V$  системы сил по формулам (9\*);
- 4) определить модуль главного вектора  $V$  и направляющие косинусы по формулам (10\*) и (11\*), причем

$$V = V_x i + V_y j + V_z k;$$

- 5) найти главные моменты  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  системы сил относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  по формулам (5\*), (6\*);

6) определить модуль главного момента  $m_O$  и его направляющие косинусы по формулам (7\*) и (8\*), причем

$$m_O = m_x i + m_y j + m_z k;$$

7) выяснить, к какому простейшему виду приводится заданная система сил:

а) если  $V = 0$  и  $m_O = 0$ , то твердое тело, к которому приложена данная система сил, находится в равновесии;

б) если  $V = 0$ ,  $m_O \neq 0$ , то система сил приводится к паре сил с моментом  $m_O$ ;

в) если  $V \neq 0$ ,  $m_O = 0$ , то система сил приводится к равнодействующей  $R = V$ . Уравнения линии действия равнодействующей в этом случае будут:

$$\frac{x}{V_x} = \frac{y}{V_y} = \frac{z}{V_z}, \quad (15^*)$$

где  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  — проекции главного вектора  $V$ , определенные в третьем пункте, а  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — текущие координаты линии действия равнодействующей;

г) если  $V \neq 0$ ,  $m_O \neq 0$ , то следует выяснить, не являются ли  $V$  и  $m_O$  взаимно перпендикулярными.

В случае взаимной перпендикулярности  $V$  и  $m_O$  их скалярное произведение  $V m_O$  равно нулю. Поэтому надо проверить, выполняется ли равенство

$$V_x m_x + V_y m_y + V_z m_z = 0.$$

Если равенство имеет место, то система сил приводится к равнодействующей  $R$ . Уравнения линии действия равнодействующей  $R$  в этом случае имеют вид

$$\frac{m_x - yV_z + zV_y}{V_x} = \frac{m_y - zV_x + xV_z}{V_y} = \frac{m_z - xV_y + yV_x}{V_z}. \quad (16^*)$$

Если равенство  $V_x m_x + V_y m_y + V_z m_z = 0$  не имеет места, то главный вектор  $V$  и главный момент  $m_O$  не взаимно перпендикулярны и система сил приводится к динаме. Уравнения центральной оси также определяются по формулам (16\*).

Главный вектор  $V$  динами определен в четвертом пункте. Главный момент  $m$  динами для центров приведения, взятых на центральной оси, лежит на этой оси. Его проекцию на центральную ось (минимальный момент) следует определить по формуле

$$\text{пр}_V m = \frac{V_x m_x + V_y m_y + V_z m_z}{V}. \quad (17^*)$$

При приведении пространственной системы сил к простейшему виду оси декартовых координат следует выбрать так, чтобы возможно большее число сил оказалось параллельно либо перпендикулярно к этим

осям, а также чтобы линии действия сил в возможно большем числе пересекались эти координатные оси.

**Задача 2.12.** Пространственная система сил была приведена к центру  $O$ , взятому в начале координат системы  $xuz$ . В результате приведения были получены: сила  $V=10k$  и пара сил, момент которой векторно равен главному моменту системы  $m_O=12i+20k$ , причем  $|V|=н$ , а  $[m_O]=дж$ .

Определить силу и пару сил, к которым приведет данная система сил, если за центр приведения принять точку  $A$ , лежащую на оси  $y$  и отстоящую от начала координат на расстоянии  $OA=2м$  (рис. а).

Решение. При приведении пространственной системы сил к новому центру сила остается равной главному вектору  $V$ , а главный момент меняется в соответствии с формулой

$$m_A = m_O + m_A(V_O) = m_O + \overline{AO} \times V_O. \quad (1)$$

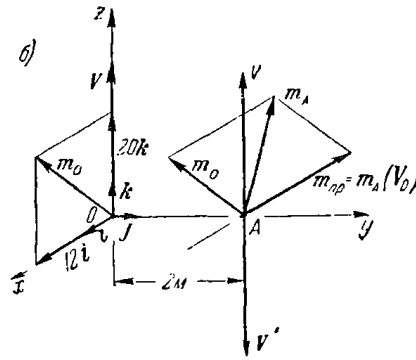
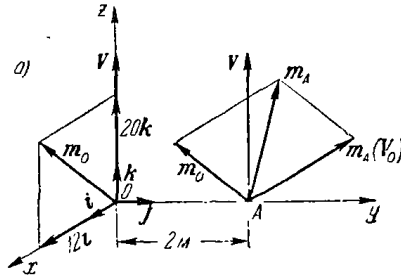
Поэтому строим в точке  $A$  силу  $V$ . Затем переносим  $m_O$  в точку  $A$  и изображаем момент относительно нового центра  $A$  силы  $V$ , приложенной в старом центре  $O$ , т. е.  $m_A(V_O)$ . Так как  $m_A(V_O)$  надо направить перпендикулярно к плоскости, проходящей через  $V_O$  и точку  $A$ , т. е. к плоскости  $uz$ , и притом так, чтобы с конца его сила  $V_O$  была видна направленной вокруг центра  $A$  против часовой стрелки, то вектор  $m_A(V_O)$  параллелен оси  $x$ , но направлен в противоположную сторону (рис. а). При этом  $|m_A(V_O)| = |V| \cdot OA = 20$  дж.

Итак, для определения главного момента  $m_A$  относительно нового центра  $A$  надо, следуя формуле (1), сложить векторы  $m_O$  и  $m_A(V_O)$ , приложенные в точке  $A$ , т. е.

$$m_A = m_O + m_A(V_O) = 12i + 20k - 20i = -8i + 20k.$$

На рис. а вектор  $m_A$  получаем как диагональ параллелограмма, построенного на векторах  $m_O$  и  $m_A(V_O)$ .

Из найденного результата  $m_A = -8i + 20k$  следует, что  $m_{Ax} = -8$  дж,  $m_{Ay} = 0$ ,  $m_{Az} = 20$  дж. Таким образом, главный момент  $m_A$



К задаче 2.12.

по модулю равен  $m_A = \sqrt{m_{Ax}^2 + m_{Ay}^2 + m_{Az}^2} = 4\sqrt{29}$  дж. Направляющие косинусы определяем по формулам:

$$\cos(\widehat{x, m_A}) = \frac{m_{Ax}}{m_A} = -\frac{2}{\sqrt{29}} = -0,37;$$

$$\cos(\widehat{y, m_A}) = \frac{m_{Ay}}{m_A} = 0,$$

$$\cos(\widehat{z, m_A}) = \frac{m_{Az}}{m_A} = \frac{5}{\sqrt{29}} = 0,93,$$

откуда

$$(\widehat{x, m_A}) = 111^\circ 40', \quad (\widehat{y, m_A}) = 90^\circ, \quad (\widehat{z, m_A}) = 21^\circ 40'.$$

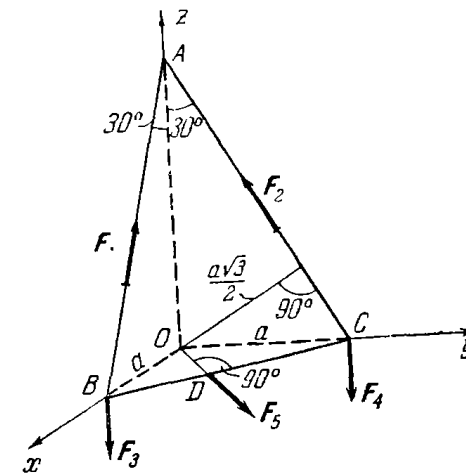
Эту задачу можно решить, не прибегая к формуле (1) — зависимости между главными моментами пространственной системы сил, определенными относительно двух центров.

Можно построить в центре  $A$  две уравновешивающиеся силы  $V$  и  $V'$  (рис. б). Тогда сила  $V$  оказывается приведенной к центру  $A$ , но при этом добавляется присоединенная пара в составе сил:  $V$ , приложенной в точке  $O$ , и  $V'$ , приложенной в точке  $A$ . Момент этой присоединенной пары  $m_{пр}$  перпендикулярен к плоскости пары, т. е. к плоскости  $uz$ , причем с его конца приложенная пара видна направленной против часовой стрелки, т. е. параллельно оси  $x$ , но в сторону, противоположную положительному направлению этой

оси. По модулю  $|m_{пр}| = |V| \cdot OA = 20$  дж. Нетрудно заметить, что  $m_{пр}$  и  $m_A(V_O)$  (из первого варианта решения задачи) векторно равны, т. е.  $m_{пр} = m_A(V_O)$ . Для определения главного момента относительно центра  $A$  остается сложить  $m_O$  и  $m_{пр}$ , т. е.  $m_A = m_O + m_{пр} = m_O + m_A(V)$ , откуда находим значение  $m_O$ , полученное в первом варианте решения задачи.

Оба метода решения задачи по объему вычислений примерно равноценны.

**Задача 2.13.** На рисунке изображена пирамида  $AOBC$ , две боковые грани которой расположены



К задаче 2.13.

в координатных плоскостях  $xz$  и  $uz$ , а основание лежит в плоскости  $xu$ . Ребра  $AB$  и  $AC$  образуют с ребром — высотой  $AO$  — углы  $30^\circ$ . К пирамиде приложена система пяти сил. Силы  $F_1$  и  $F_2$  направ-

лены по ребрам  $AB$  и  $AC$ , силы  $F_3$  и  $F_4$  — вертикальны, а линия действия силы  $F_8$  совмещена с высотой  $OD$  основания  $BOC$ .

Определить модули сил  $F_3$ ,  $F_4$  и  $F_8$ , если пирамида находится в равновесии. Дано:  $F_1 = F_2 = F$ .

Решение. Примем за центр приведения начало координат  $O$ . При равновесии пирамиды главный вектор  $V$  и главный момент  $m_O$  системы сил, приложенных к пирамиде, равны нулю:  $V = 0$ ,  $m_O = 0$ . Так как по модулю

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \quad m_O = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2},$$

то

$$V_x = V_y = V_z = 0, \quad m_x = m_y = m_z = 0. \quad (1)$$

Вычислим проекции  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  главного вектора  $V$  по формулам:

$$V_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad V_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad V_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}.$$

В данном случае получим:

$$V_x = -F_1 \cos 60^\circ + F_8 \cos 45^\circ, \quad (2)$$

$$V_y = -F_2 \cos 60^\circ + F_8 \cos 45^\circ, \quad (3)$$

$$V_z = F_1 \cos 30^\circ + F_2 \cos 30^\circ - F_3 - F_4. \quad (4)$$

Вычислим главные моменты  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  по формулам:

$$m_x = \sum_{k=1}^n m_x(F_k), \quad m_y = \sum_{k=1}^n m_y(F_k), \quad m_z = \sum_{k=1}^n m_z(F_k).$$

Введя обозначения:  $OB = OC = a$ , для данной системы сил имеем:

$$m_x = -F_4 \cdot a + F_2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad (5)$$

$$m_y = F_3 \cdot a - F_1 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad (6)$$

$$m_z = 0. \quad (7)$$

Приняв во внимание условия (1), запишем (2) — (6) в виде

$$-F_1 \cos 60^\circ + F_8 \cos 45^\circ = 0, \quad (8)$$

$$-F_2 \cos 60^\circ + F_8 \cos 45^\circ = 0, \quad (9)$$

$$F_1 \cos 30^\circ + F_2 \cos 30^\circ - F_3 - F_4 = 0, \quad (10)$$

$$-F_4 \cdot a + F_2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0, \quad (11)$$

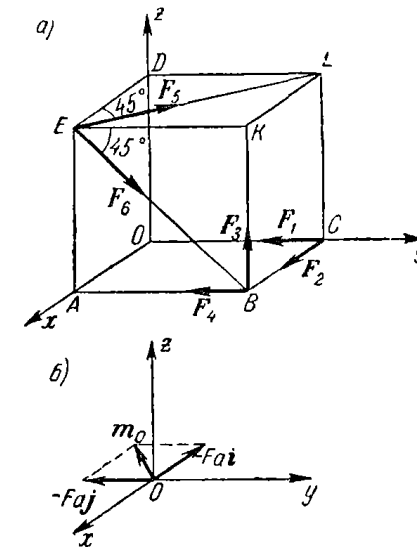
$$F_3 \cdot a - F_1 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0. \quad (12)$$

Так как по условию  $F_1 = F_2 = F$ , то из уравнений (11) и (12) находим  $F_3 = F_4 = F \frac{\sqrt{3}}{2}$ , а из уравнения (8) получим  $F_8 = F \frac{\sqrt{2}}{2}$ . При этих значениях  $F_3$ ,  $F_4$  и  $F_8$  уравнения (9) и (10) тождественно обращаются в нуль.

Итак, пирамида  $AOBC$  находится в равновесии под действием данной системы пяти сил при условии:

$$F_3 = F_4 = F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad F_8 = F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Задача 2.14.** Привести к простейшему виду систему сил  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$ ,  $F_8$  и  $F_6$ , приложенных к вершинам  $C$ ,  $B$  и  $E$  куба, ребро которого равно  $a$ ;  $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F$ ;  $F_8 = F_6 = F\sqrt{2}$ . Направления сил указаны на рис. а.



К задаче 2.14.

Решение. Принимаем за центр приведения точку  $O$ . Направляем оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  вдоль ребер куба (рис. а). Определим проекции  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  главного вектора  $V$  на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$V_x = \sum F_{kx} = F_2 - F_8 \cos 45^\circ,$$

$$V_y = \sum F_{ky} = -F_1 - F_4 + F_8 \cos 45^\circ + F_6 \cos 45^\circ,$$

$$V_z = \sum F_{kz} = F_3 - F_6 \cos 45^\circ.$$

Подставив значения модулей данных сил, имеем:

$$V_x = V_y = V_z = 0.$$

Следовательно, главный вектор  $V$  системы сил равен нулю.

Переходим к определению главного момента  $m_O$ . Находим сначала главные моменты  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  системы сил относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$m_x = \sum m_x(F_k) = F_3 a - F_8 a \cos 45^\circ - F_6 a \sin 45^\circ,$$

$$m_y = \sum m_y(F_k) = -F_3 a - F_8 a \cos 45^\circ + F_6 a \cos 45^\circ,$$

$$m_z = \sum m_z(F_k) = -F_2 a - F_4 a + F_6 a \cos 45^\circ + F_8 a \sin 45^\circ.$$

Подставив значения модулей данных сил, имеем:

$$m_x = -Fa, \quad m_y = -Fa, \quad m_z = 0.$$

Таким образом, главный момент  $m_O = -Fai - Faj$ , а его модуль  $m_O = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = Fa\sqrt{2}$ .

Итак, данная система сил оказалась приведенной к силе  $V=0$  и паре сил с моментом  $m_O = -Fai - Faj$ , изображенным на рис. 6 (пара сил расположена в плоскости, перпендикулярной к  $m_O$ , так что пара с конца  $m_O$  видна направленной против часовой стрелки).

**Задача 2.15.** Привести к простейшему виду систему сил  $F_1, F_2, F_3, F_4$  и  $F_5$ , приложенных в вершинах  $A, K$  и  $C$  прямоугольного параллелепипеда  $OABCDEKL$ ;

$$F_1 = F_3 = F_4 = F_5 = F, \\ F_2 = 2F, \quad OC = a, \quad OA = a/2.$$

**Решение.** Принимаем за центр приведения точку  $O$ . Определяем проекции  $V_x, V_y, V_z$  главного вектора  $V$  на оси  $x, y, z$ :

$$V_x = \sum F_{kx} = F_5, \quad V_y = \sum F_{ky} = F_2, \quad V_z = \sum F_{kz} = F_1 - F_3 + F_4.$$

Подставив значения модулей сил, получим:

$$V_x = F, \quad V_y = 2F, \quad V_z = F. \quad (1)$$

Таким образом, главный вектор  $V = Fi + 2Fj + Fk$ , а его модуль  $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{6}F$ .

Найдем теперь главные моменты  $m_x, m_y, m_z$  данной системы сил относительно осей  $x, y, z$ :

$$m_x = -F_3a + F_4a, \quad m_y = F_3 \frac{a}{2} - F_1 \frac{a}{2}, \quad m_z = F_3 \frac{a}{2} - F_5a,$$

или, подставив значения модулей сил, имеем:

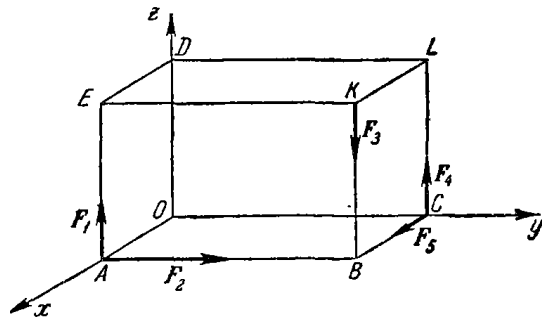
$$m_x = 0, \quad m_y = 0, \quad m_z = 0.$$

Следовательно, главный момент  $m_O$  относительно центра  $O$  равен нулю.

Так как главный момент системы оказался равным нулю, то сила  $V$  является равнодействующей  $R$ , т. е. система сил приводится к равнодействующей, линия действия которой проходит через точку  $O$ , причем  $R = V = \sqrt{6}F$ .

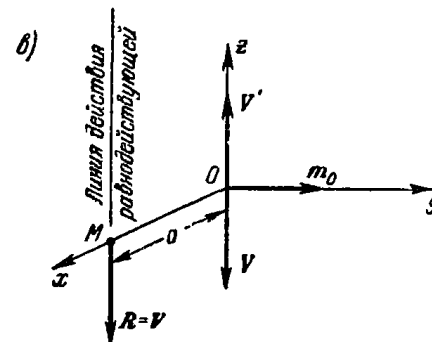
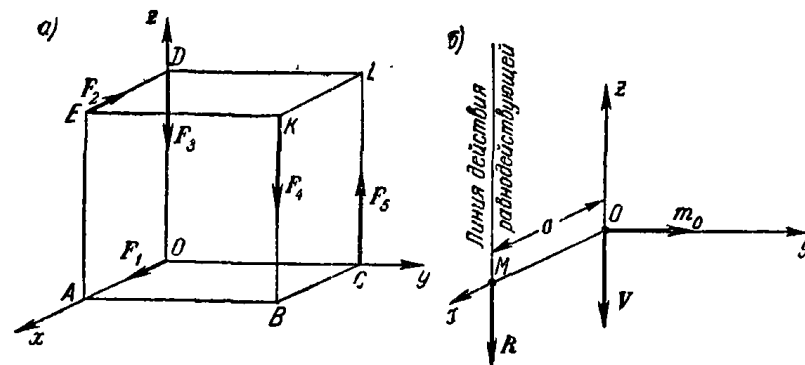
Теперь найдем уравнения линии действия равнодействующей по формуле (15\*). Воспользовавшись формулами (1), получим уравнение линии действия равнодействующей в виде

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}.$$



К задаче 2.15.

**Задача 2.16.** Привести к простейшему виду систему сил, изображенных на рис. а. Силы приложены к вершинам куба, ребро которого равно  $a$ ;  $F_1 = F_2 = F_3 = F$ ,  $F_4 = F_5 = 2F$ .



К задаче 2.16.

**Решение.** Принимаем за центр приведения точку  $O$ . Оси декартовых координат  $x, y, z$  изображены на рис. а. Определяем проекции  $V_x, V_y, V_z$  главного вектора  $V$  на оси  $x, y, z$ :

$$V_x = \sum F_{kx} = F_1 - F_2, \quad V_y = \sum F_{ky} = 0, \quad V_z = \sum F_{kz} = \\ = -F_3 - F_4 + F_5.$$

Подставив значения модулей данных сил, имеем:

$$V_x = 0, \quad V_y = 0, \quad V_z = -F, \quad (1)$$

откуда главный вектор

$$V = -Fk, \quad (2)$$

а его модуль

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = F. \quad (3)$$

Определяем главные моменты  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  системы сил относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$m_x = \sum m_x(F_k) = -F_1 a + F_2 a, \\ m_y = \sum m_y(F_k) = -F_2 a + F_1 a, \quad m_z = \sum m_z(F_k) = 0.$$

Подставив значения модулей данных сил, получим:

$$m_x = 0, \quad m_y = Fa, \quad m_z = 0. \quad (4)$$

Следовательно, главный момент относительно центра  $O$

$$m_O = Faj, \quad (5)$$

а его модуль

$$m_O = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = Fa. \quad (6)$$

В соответствии с формулами (2) и (5) на рис. б изображены сила  $V$  и главный момент  $m_O$  системы сил.

Так как  $V$  и  $m_O$  оказались взаимно перпендикулярными, то систему сил можно привести к равнодействующей  $R$ , причем  $R = V$ . Найдем уравнения линии действия равнодействующей по формулам (16\*). Воспользовавшись формулами (1) и (4), запишем (16\*) в виде

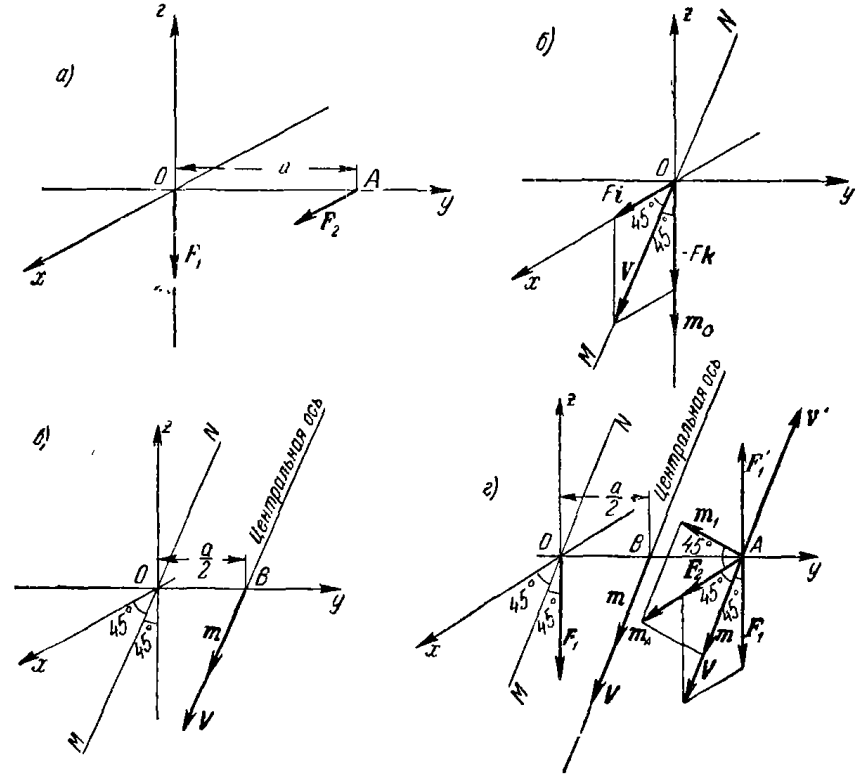
$$\frac{y}{0} = \frac{a-x}{0} = \frac{0}{F}, \quad (7)$$

откуда  $x = a$ ,  $y = 0$ , т. е. линия действия равнодействующей  $R = -Fk$  лежит в плоскости  $xz$ , параллельна оси  $z$  и отстоит от нее на расстоянии  $x = a$  (рис. б).

Положение линии действия равнодействующей  $R$  можно было определить, не пользуясь уравнением (7). На рис. в изображены сила  $V$  и главный момент  $m_O$ , приложенные в точке  $O$ . Так как главный момент  $m_O$  лежит на оси  $y$ , то пара сил, соответствующая главному моменту  $m_O$ , расположена в плоскости, перпендикулярной к  $m_O$ , т. е. в плоскости  $xz$  так, что с конца  $m_O$  пара видна направленной против часовой стрелки. Одну из сил  $V'$ , входящих в состав пары, изображаем противоположно  $V$ , причем  $V' = -V$ . Тогда линия действия второй силы  $V$ , входящей в состав пары сил, должна отстоять от линии действия первой силы на расстоянии  $OM = \frac{m_O}{V}$ . Так как  $m_O = Fa$ , а  $V = F$ , то  $OM = a$ . Итак, система сил оказалась приведенной к трем силам: силам  $V$  и  $V'$ , приложенным в точке  $O$ , и силе  $V$ , приложенной в точке  $M$ . Первые две силы уравновешиваются, и их можно отбросить. Поэтому система сил приводится к одной силе  $V$ , приложенной в точке  $M$ , которая, следовательно, является равнодействующей  $R$ . Линия действия равнодействующей  $R$  параллельна оси  $z$  и отстоит от нее на расстоянии  $OM = a$  (рис. в).

Следует иметь в виду, что общим приемом определения уравнений линии действия равнодействующей  $R$  является применение формулы (7).

**Задача 2.17.** Привести к простейшему виду систему, состоящую из двух скрещивающихся сил  $F_1$  и  $F_2$ , изображенных на рис. а;  $F_1 = F_2 = F$ ,  $OA = a$ . Сила  $F_2$  параллельна оси  $Ox$ .



К задаче 2.17.

**Решение.** Принимаем за центр приведения точку  $O$ . Подобно решению предыдущих задач, определяем проекции  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  главного вектора  $V$  на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$V_x = \sum F_{kx} = F_2, \quad V_y = \sum F_{ky} = 0, \quad V_z = \sum F_{kz} = -F_1. \quad (1)$$

Учитывая, что  $|F_1| = |F_2| = |F|$ , имеем:

$$V_x = F, \quad V_y = 0, \quad V_z = -F. \quad (2)$$

Таким образом, главный вектор

$$V = Fi - Fk, \quad (3)$$

а его модуль

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = F\sqrt{2}. \quad (4)$$

Найдем теперь главные моменты  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  системы сил относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$m_x = \sum m_x(\mathbf{F}_k) = 0, \quad m_y = \sum m_y(\mathbf{F}_k) = 0, \\ m_z = \sum m_z(\mathbf{F}_k) = -F_2 a. \quad (5)$$

Так как  $|\mathbf{F}_3| = F$ , то

$$m_x = 0, \quad m_y = 0, \quad m_z = -Fa. \quad (6)$$

Таким образом, главный момент

$$\mathbf{m}_O = -Fak, \quad (7)$$

а его модуль

$$m_O = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = Fa. \quad (8)$$

Итак, система скрещивающихся сил приведена к изображенным на рис. 6 силе  $\mathbf{V} = F\mathbf{i} - F\mathbf{k}$  и паре сил, момент которой равен главному моменту относительно центра  $O$ , т. е.  $\mathbf{m}_O = -Fak$ .

В данном случае отсутствие перпендикулярности векторов  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{m}_O$  очевидно. В более сложных задачах можно воспользоваться скалярным произведением  $\mathbf{V}\mathbf{m}_O = V_x m_x + V_y m_y + V_z m_z$ , которое в случае взаимной перпендикулярности векторов  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{m}_O$  должно обратиться в нуль. В нашей задаче, воспользовавшись формулами (2) и (6), получим  $\mathbf{V}\mathbf{m}_O = F^2 a$ . Итак, векторы  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{m}_O$  не взаимно перпендикулярны. Это значит, что система сил приводится к динаме.

Найдем уравнения центральной оси по формуле (16\*). Эти уравнения в данном случае, если принять во внимание формулы (2) и (6), имеют вид

$$\frac{y}{1} = \frac{-z-x}{0} = \frac{a-y}{1}, \quad \text{или} \quad y = \frac{a}{2} \quad \text{и} \quad z = -x. \quad (9)$$

Таким образом, центральная ось лежит в плоскости, параллельной координатной плоскости  $xz$ , отстоит от нее на расстоянии  $a/2$  и параллельна биссектрисе  $MN$ .

Остается определить главный момент  $m$  относительно центров приведения, лежащих на центральной оси. Как известно, вектор  $\mathbf{m}$  лежит на центральной оси. Его проекция на направление главного вектора определяется по формуле (17\*).

Используя равенства (2), (4) и (6), получим:

$$\text{пр}_V \mathbf{m} = \frac{Fa\sqrt{2}}{2}. \quad (10)$$

Главный момент  $m$  изображен на рис. 6.

Итак, данная система скрещивающихся сил оказалась приведенной к динаме, т. е. к силе  $\mathbf{V} = F\mathbf{i} - F\mathbf{k}$  и паре сил, расположенной в плоскости, перпендикулярной к  $\mathbf{V}$ . Проекция момента  $\mathbf{m}$  этой пары

на направление главного вектора  $\mathbf{V}$  (минимальный момент) определяется формулой (10).

Эту задачу можно было решить с помощью простых построений, минуя метод проекций. Изобразив на рис. 2 заданные силы  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ , приведем их к одному центру. Выбрав за центр приведения точку  $A$  приложения силы  $\mathbf{F}_2$ , построим в точке  $A$  две уравнивающиеся силы  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}'_1$ . Находим силу  $\mathbf{V}$  как сумму сил  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ , приложенных в точке  $A$ . Так как  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  взаимно перпендикулярны и по модулю равны, то модуль силы  $\mathbf{V}$  равен  $V = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = F\sqrt{2}$  (в данном случае параллелограмм сил превратился в квадрат, параллельный плоскости  $xz$ , а сила  $\mathbf{V}$  параллельна биссектрисе  $MN$ ).

При приведении силы  $\mathbf{F}_1$  к центру  $A$  добавилась присоединенная пара в составе силы  $\mathbf{F}_1$ , приложенной в точке  $O$ , и силы  $\mathbf{F}'_1$ , приложенной в точке  $A$ . Плечо пары  $OA$  равно  $a$  (рис. 2). Так как присоединенная пара сил лежит в плоскости  $yz$ , то момент этой пары, являющийся главным моментом  $\mathbf{m}_A$ , направлен перпендикулярно к плоскости  $yz$ , т. е. параллелен оси  $x$ . По модулю:  $m_A = Fa$ .

Разложим главный момент  $\mathbf{m}_A$  на две составляющие:  $\mathbf{m}_A = \mathbf{m} + \mathbf{m}_1$ , где вектор  $\mathbf{m}$  совпадает с направлением главного вектора  $\mathbf{V}$ , а  $\mathbf{m}_1$  перпендикулярен к главному вектору. Нетрудно видеть, что параллелограмм моментов, являющийся в данном случае квадратом, также лежит в плоскости, параллельной плоскости  $xz$ . Находим:

$$m_1 = m = m_A \frac{\sqrt{2}}{2} = Fa \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Вектор  $\mathbf{m}$  от выбора центра приведения не зависит. От вектора  $\mathbf{m}_1$ , перпендикулярного к силе  $\mathbf{V}$ , можно избавиться посредством перехода к новому центру приведения. Для этого построим пару сил, соответствующую моменту  $\mathbf{m}_1$ . Одну из сил, входящих в пару, обозначим  $\mathbf{V}'$  и направим так, чтобы она уравнивалась с силой  $\mathbf{V}$ . Тогда плечо  $AB$  пары расположится по оси  $y$  и в точке  $B$  окажется приложенной вторая сила  $\mathbf{V}$ , входящая в состав пары с моментом  $\mathbf{m}_1$  (напоминаем, что эта пара сил должна лежать в плоскости, перпендикулярной к  $\mathbf{m}_1$ , и притом ее следует изобразить так, чтобы с конца  $\mathbf{m}_1$  эта пара была видна направленной против часовой стрелки). Плечо пары  $AB$  вычисляется без труда:  $m_1 = V \cdot AB$ , откуда  $AB = \frac{m_1}{V}$ . Так как  $m_1 = Fa \frac{\sqrt{2}}{2}$ , а  $V = F\sqrt{2}$ , то  $AB = \frac{a}{2}$ .

Силы  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{V}'$ , приложенные в точке  $A$ , уравниваются, и их можно отбросить. Теперь система сил оказалась приведенной к силе  $\mathbf{V}$ , приложенной в точке  $B$ , и паре сил с моментом  $\mathbf{m}$ , который можно параллельно перенести и направить вдоль силы  $\mathbf{V}$ . Линия действия силы  $\mathbf{V}$ , приложенной в точке  $B$ , является центральной осью, парал-

лельной биссектрисе  $MN$ . Так как  $AB = \frac{a}{2}$ , а  $OA = a$ , то  $OB = \frac{a}{2}$ .

Окончательно  $V = F\sqrt{2}$ ,  $m = Fa \frac{\sqrt{2}}{2}$ , что совпадает с результатами, полученными в первом варианте решения задачи.

Следует иметь в виду, что метод непосредственных построений, примененный во втором варианте решения этой задачи, может быть успешно использован только в простейших случаях. Так, при равных по модулю силах  $F_1$  и  $F_2$  все углы, получившиеся при построениях, оказались равными  $45^\circ$ . Если бы мы несколько усложнили задачу, взяв не равные по модулю силы  $F_1$  и  $F_2$ , то определение положения центральной оси оказалось бы довольно затруднительным.

В этом случае целесообразно пользоваться уравнениями центральной оси (16\*).

Применив формулы (1) и (6), мы бы получили:

$$\frac{yF_1}{F_2} = \frac{-zF_2 - xF_1}{0} = \frac{(a-y)F_2}{F_1},$$

откуда  $z = -\frac{F_1}{F_2}x$ ,  $y = \frac{aF_2^2}{F_1^2 + F_2^2}$  (отсюда при условии данной задачи

$|F_1| = |F_2| = F$  имеем  $z = -x$ ,  $y = \frac{a}{2}$ ), т. е. центральная ось ле-

жит в плоскости, параллельной координатной плоскости  $xz$ , и отстоит

от нее на расстоянии  $y = \frac{aF_2^2}{F_1^2 + F_2^2}$ .

Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и последующих лет: 232, 234, 236, 237, 240, 241.

### § 3. Центр тяжести

Дана система параллельных сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , которые приводятся к равнодействующей. Будем считать точки приложения сил фиксированными.

*Центром параллельных сил* называется точка приложения равнодействующей силы, обладающая тем свойством, что при повороте всех параллельных сил на один угол, с сохранением их параллельности, равнодействующая поворачивается вокруг центра параллельных сил  $C$  на тот же угол.

Координаты центра параллельных сил даются формулами:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n (\pm F_k x_k)}{\sum_{k=1}^n (\pm F_k)}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n (\pm F_k y_k)}{\sum_{k=1}^n (\pm F_k)}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n (\pm F_k z_k)}{\sum_{k=1}^n (\pm F_k)},$$

здесь  $x_k, y_k, z_k$  — координаты точки приложения силы  $F_k$ , где  $k=1, 2, \dots, n$ . В этих формулах  $F_k$  — величина силы, а  $\pm F_k$  — проекция силы  $F_k$  на ось, параллельную силам. При этом проекция силы считается положительной, если направления силы  $F_k$  и параллельной оси совпадают, и отрицательной, если направления силы  $F_k$  и параллельной оси противоположны.

Если твердое тело находится вблизи поверхности земли, то к каждой материальной частице этого тела приложена сила тяжести (считаем, что материальные частицы распределены в твердом теле непрерывно). Эти силы тяжести приблизительно образуют систему параллельных сил (линии действия сил тяжести двух материальных частиц, лежащих на земной поверхности и отстоящих друг от друга на расстоянии 31 м, образуют угол, равный одной секунде).

Центр параллельных сил тяжести  $P_1, P_2, \dots, P_n$  называется *центром тяжести*  $C$  твердого тела, а сумма сил тяжести всех его материальных частиц называется *весом*  $P$  твердого тела:

$$P = \sum_{k=1}^n P_k.$$

Координаты  $x_C, y_C, z_C$  центра тяжести  $C$  твердого тела даются приближенными формулами:

$$x_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^n P_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^n P_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^n P_k z_k.$$

Эти формулы являются приближенными, так как координаты  $x_k, y_k, z_k$  точки приложения веса  $P_k$   $k$ -й материальной частицы определяются с точностью до размеров этой частицы.

Положение центра тяжести  $C$  твердого тела по отношению к его материальным частицам не зависит от состояния твердого тела.

Впредь будут рассматриваться однородные твердые тела, для которых удельный вес всех их материальных частиц постоянен.

Координаты  $x_C, y_C, z_C$  центра тяжести  $C$  однородного тела приближенно имеют вид

$$x_C = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n x_k \Delta v_k, \quad y_C = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n y_k \Delta v_k, \quad z_C = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n z_k \Delta v_k. \quad (1^*)$$

Здесь  $\Delta v_k$  — объем  $k$ -й материальной частицы,  $x_k, y_k, z_k$  — координаты точки приложения силы тяжести этой частицы,  $V$  — объем

твердого тела:  $V = \sum_{k=1}^n \Delta v_k$ . Для повышения точности результата

подсчета следует разбивать твердое тело на материальные частицы возможно меньшего объема.



Координаты  $x_C, y_C, z_C$  центра тяжести  $C$  однородной поверхности приближенно даются формулами:

$$x_C = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^n x_k \Delta S_k, \quad y_C = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^n y_k \Delta S_k, \quad z_C = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^n z_k \Delta S_k. \quad (2^*)$$

Здесь  $\Delta S_k$  — площадь поверхности  $k$ -й материальной частицы,  $x_k, y_k, z_k$  — координаты точки приложения силы тяжести этой частицы,  $S$  — площадь поверхности твердого тела:

$$S = \sum_{k=1}^n \Delta S_k.$$

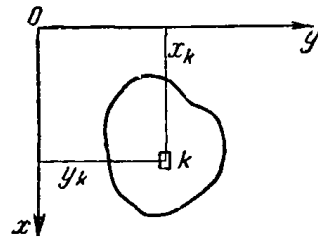


Рис. 2.14.

В случае однородной пластинки, расположенной в плоскости  $xu$  (рис. 2.14) формулы (2\*) принимают вид

$$x_C = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^n x_k \Delta S_k, \quad y_C = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^n y_k \Delta S_k, \quad z_C = 0. \quad (3^*)$$

Здесь суммы  $\sum_{k=1}^n x_k \Delta S_k$  и  $\sum_{k=1}^n y_k \Delta S_k$  называются *статическими моментами площади*:  $\sum_{k=1}^n x_k \Delta S_k = Ms_y$  — статический момент площади однородной плоской фигуры относительно оси  $y$ ,  $\sum_{k=1}^n y_k \Delta S_k = Ms_x$  — статический момент площади однородной плоской фигуры относительно оси  $x$ .

Если центр тяжести  $C$  однородной плоской фигуры лежит на некоторой оси, то статический момент площади относительно этой оси равен нулю. Например, если центр тяжести  $C$  лежит на оси  $x$ , то

$$Ms_x = \sum_{k=1}^n y_k \Delta S_k = 0.$$

Координаты  $x_C, y_C, z_C$  центра тяжести  $C$  однородной линии приближенно имеют вид

$$x_C = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n x_k \Delta l_k, \quad y_C = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n y_k \Delta l_k, \quad z_C = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n z_k \Delta l_k. \quad (4^*)$$

Здесь  $\Delta l_k$  — длина  $k$ -й материальной частицы,  $x_k, y_k, z_k$  — координаты точки приложения силы тяжести этой частицы,  $L$  — длина тела (например, проволоки):  $L = \sum_{k=1}^n \Delta l_k$ . В случае плоской кривой, лежащей в плоскости  $xu$ , координата  $z_C = 0$ .

В тех случаях, когда объемы, площади или длины каждой частицы, а также их центры тяжести могут быть определены точно, формулы (1\*), (2\*), (3\*) дают не приближенные, а точные значения координат центра тяжести всего тела. Если же упомянутые выше величины не могут быть определены точно, то читатель, владеющий методами интегрального исчисления, может вместо приближенных формул (1\*), (2\*), (3\*) и (4\*) пользоваться точными формулами:

а) в случае однородного твердого тела

$$x_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dv, \quad y_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dv, \quad z_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dv, \quad (5^*)$$

где  $V = \int_{(V)} dv$  (интегрирование распространено по всему объему твердого тела);

б) в случае однородной поверхности

$$x_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} x ds, \quad y_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} y ds, \quad z_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} z ds, \quad (6^*)$$

где  $S = \int_{(S)} ds$  (интегрирование распространено по всей поверхности твердого тела);

в) в случае однородной плоской фигуры, лежащей в плоскости  $xu$ :

$$x_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} x ds, \quad y_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} y ds, \quad z_C = 0; \quad (7^*)$$

г) в случае однородной линии

$$x_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl, \quad y_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} y dl, \quad z_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} z dl, \quad (8^*)$$

где  $L = \int_{(L)} dl$  (интегрирование распространено по всей длине тела).

Если линия является плоской и лежит в плоскости  $xu$ , то  $z_C = 0$ .

Если в однородном твердом теле имеется плоскость симметрии, то центр тяжести  $C$  лежит в этой плоскости. Если же в теле имеется ось симметрии, то центр тяжести  $C$  лежит на этой оси.

Иногда для определения положений центров тяжести линий и площадей плоских фигур пользуются *теоремами Гульдина*.

**Первая теорема Гульдина.** Площадь боковой поверхности тела вращения (рис. 2.15), описанной плоской кривой (AB), вращающейся вокруг оси (y), расположенной в плоскости кривой и ее не пересекающей, равна произведению длины дуги L на длину окружности  $2\pi x_C$ , описываемой центром тяжести C дуги:  $S = 2\pi x_C L$ .

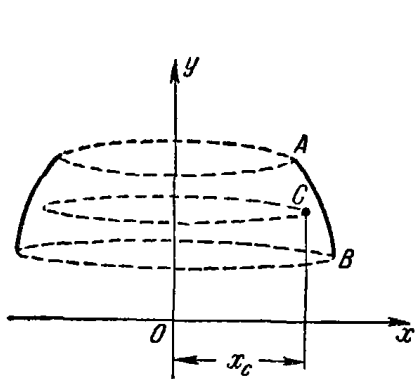


Рис. 2.15.

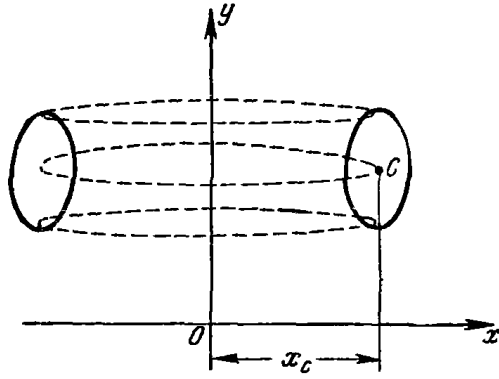


Рис. 2.16.

**Вторая теорема Гульдина.** Объем тела вращения (рис. 2.16), описанного плоской фигурой, вращающейся вокруг оси (y), расположенной в плоскости этой фигуры и не пересекающей ее контура, равен произведению площади фигуры S на длину окружности  $2\pi x_C$ , описанной ее центром тяжести C, т. е.  $V = 2\pi x_C S$ .

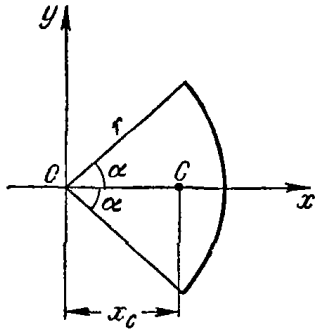


Рис. 2.17.

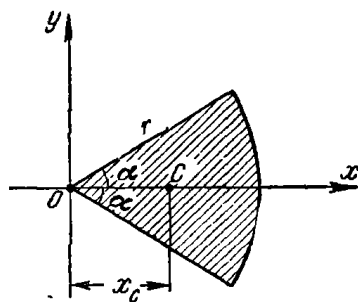


Рис. 2.18.

Положения центров тяжести некоторых твердых тел простейшей геометрической формы:

- а) центр тяжести площади однородного прямоугольника расположен в точке пересечения его диагоналей;
- б) центр тяжести площади однородного треугольника находится в точке пересечения его медиан;
- в) центр тяжести дуги однородной окружности (рис. 2.17) находится на оси симметрии, и его положение определяется координатами:

$x_C = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ ,  $y_C = 0$ , где  $r$  — радиус окружности,  $\alpha$  — половина центрального угла;

г) центр тяжести площади однородного кругового сектора (рис. 2.18) расположен на оси симметрии и имеет координаты:  $x_C = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ ,  $y_C = 0$ , где  $r$  — радиус окружности,  $\alpha$  — половина центрального угла;

д) центр тяжести C однородной призмы находится в середине отрезка, соединяющего центры тяжести  $C_1$  и  $C_2$  верхнего и нижнего оснований этой призмы (рис. 2.19), т. е.  $C_1C = CC_2$ ;

е) центр тяжести однородной пирамиды лежит на отрезке, соединяющем вершину O пирамиды с центром тяжести  $C_1$  ее основания,

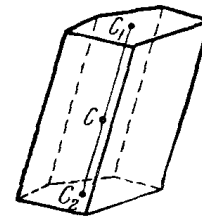


Рис. 2.19.

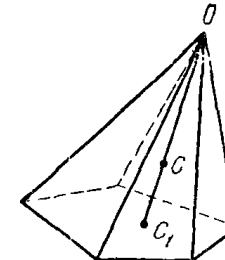


Рис. 2.20.

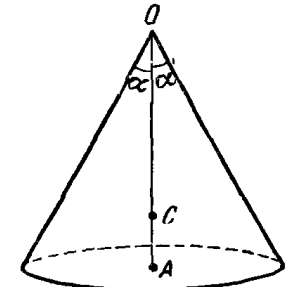


Рис. 2.21.

на расстоянии  $\frac{1}{4}$  этого отрезка  $OC_1$  от центра тяжести  $C_1$  основания пирамиды (рис. 2.20), т. е.  $CC_1 = \frac{1}{4} OC_1$ ;

ж) центр тяжести однородного кругового конуса лежит на его высоте и отстоит на расстоянии  $1/4$  высоты от основания конуса (рис. 2.21), т. е.  $AC = \frac{1}{4} OA$ .

При решении задач на определение положения центра тяжести однородного твердого тела существенную роль играет удачный выбор осей координат.

Если в твердом теле имеется плоскость симметрии, то одну из осей координат, например  $z$ , следует направить перпендикулярно к этой плоскости. Так как центр тяжести лежит в плоскости симметрии, т. е. в плоскости  $xu$ , то  $z_C = 0$  и остается определить только две координаты:  $x_C$  и  $y_C$ .

Если в твердом теле имеется ось симметрии, то одну из координатных осей, например  $x$ , следует совместить с осью симметрии. Так как центр тяжести лежит на оси симметрии, т. е. на оси  $x$ , то  $y_C = z_C = 0$  и остается определить только одну координату  $x_C$ .

Наиболее распространенным приемом использования формул (1\*), (2\*), (3\*) или (4\*) является мысленная разбивка однородного

твердого тела на такие части, положение центра тяжести каждой из которых известно, либо легко может быть определено.

Так, например, при разбивке площади однородной плоской фигуры, изображенной на рис. 2.22, на три части положение ее центра тяжести  $C$  ( $x_C, y_C, z_C$ ) определяется по формулам (3\*):

$$x_C = \frac{x_1 \Delta s_1 + x_2 \Delta s_2 + x_3 \Delta s_3}{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3}, \quad y_C = \frac{y_1 \Delta s_1 + y_2 \Delta s_2 + y_3 \Delta s_3}{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3}, \quad z_C = 0;$$

здесь  $x_1, y_1, z_1$  — координаты центра тяжести  $C_1$  первой части плоской фигуры;  $\Delta s_1$  — площадь первой части и т. д.

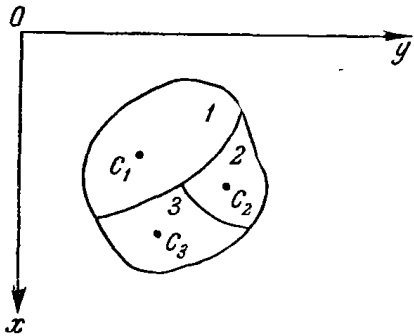


Рис. 2.22.

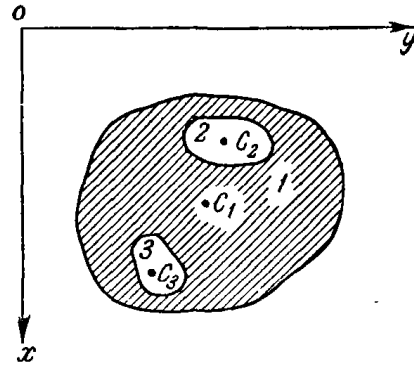


Рис. 2.23.

В некоторых случаях целесообразно заменить твердое тело не суммой, а разностью отдельных его частей. Так, например, в случае пластинки с двумя вырезами, изображенной на рис. 2.23, ее площадь можно записать в виде разности площадей сплошной плоской фигуры  $I$  и двух вырезов  $2$  и  $3$ , т. е.  $S = \Delta s_1 - \Delta s_2 - \Delta s_3$ . В этом случае положение центра тяжести  $C(x_C, y_C, z_C)$  однородной плоской фигуры определяется по формулам

$$x_C = \frac{x_1 \Delta s_1 - x_2 \Delta s_2 - x_3 \Delta s_3}{\Delta s_1 - \Delta s_2 - \Delta s_3}, \quad y_C = \frac{y_1 \Delta s_1 - y_2 \Delta s_2 - y_3 \Delta s_3}{\Delta s_1 - \Delta s_2 - \Delta s_3}, \quad z_C = 0;$$

здесь  $x_1, y_1, z_1$  — координаты центра тяжести  $C_1$  сплошной плоской фигуры  $I$ , площадь которой равна  $\Delta s_1$ ;  $x_2, y_2, z_2$  — координаты центра тяжести  $C_2$  выреза  $2$ , площадь которого равна  $\Delta s_2$ , и т. д.

Следует иметь в виду, что прием разбивки однородного твердого тела на отдельные части приводит при использовании формул (1\*), (2\*), (3\*) или (4\*) к точному результату только в том случае, когда координаты центров тяжести отдельных частей, а также их площади (либо объемы, либо длины) могут быть точно определены. Поэтому в случаях твердых фигур с криволинейными контурами или твердых тел с поверхностями сложной формы точность результатов оказы-

вается недостаточной (для повышения точности результата приходится разбивать тело на большее число частей, что усложняет решение задачи) и рекомендуется применять точные формулы (5\*), (6\*), (7\*) или (8\*).

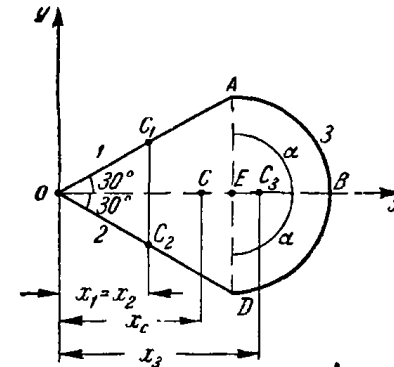
Теоремами Гульдина удобно пользоваться в тех случаях, когда в число данных и неизвестных входят:

а) длина вращаемой дуги, расстояние от центра тяжести этой дуги до оси вращения и площадь поверхности вращения, описанной дугой (первая теорема Гульдина);

б) площадь вращаемой плоской фигуры, расстояние от центра тяжести плоской фигуры до оси вращения и объем тела вращения, описанного этой плоской фигурой (вторая теорема Гульдина).

**Задача 2.18.** Определить положение центра тяжести  $C$  однородного проволочного контура  $OABD$ , состоящего из двух прямолинейных отрезков  $OA = OD = a$ , расположенных под углом  $60^\circ$  друг к другу ( $\angle AOD = 60^\circ$ ), и полуокружности  $ABD$  диаметра  $AD$  (рис. а).

**Решение.** Проволочный контур имеет ось симметрии, вдоль которой мы проводим ось  $x$ . Взяв начало координат в точке  $O$ , направляем ось  $y$  по вертикали вверх.



К задаче 2.18.

Так как центр тяжести  $C$  контура лежит на оси симметрии  $x$ , то  $y_C = 0$ . Для определения координаты  $x_C$  воспользуемся формулой (4\*):

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \Delta l_k}{L}. \tag{1}$$

В данном случае целесообразно разбить весь проволочный контур на три части: два прямолинейных отрезка  $OA$  и  $OD$  длиной  $a$  каждый и полуокружность  $ABD$  радиуса  $a/2$ . Такая разбивка является удобной, так как положения центров тяжести каждой из этих частей нетрудно определить. Обозначим отрезок  $OA$  номером  $1$ , отрезок  $OD$  — номером  $2$ , полуокружность  $ABD$  — номером  $3$ . Тогда формулу (1) можно записать в виде

$$x_C = \frac{x_1 \Delta l_1 + x_2 \Delta l_2 + x_3 \Delta l_3}{\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3}, \tag{2}$$

где  $x_1, x_2$  — абсциссы центров тяжести  $C_1$  и  $C_2$  отрезков  $OA$  и  $OD$ ,  $x_3$  — абсцисса центра тяжести  $C_3$  полуокружности  $ABD$ , а  $\Delta l_1, \Delta l_2,$

$\Delta l_3$  — длины этих частей проволочного контура. Как видно из рисунка,

$$x_1 = x_2 = \frac{OA}{2} \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \quad (3)$$

Для определения  $x_3$  воспользуемся тем, что расстояние  $EC_3$  от центра окружности до центра тяжести дуги  $C_3$  определяется формулой

$$EC_3 = r \frac{\sin a}{a}.$$

В данном случае  $a = \pi/2$  и, следовательно, так как  $r = a/2$ , имеем  $EC_3 = a/\pi$ . Поэтому

$$x_3 = OE + EC_3 = OA \cos 30^\circ + \frac{a}{\pi} = \frac{2 + \pi\sqrt{3}}{2\pi} a. \quad (4)$$

Кроме того, имеем:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = a, \quad \Delta l_3 = \frac{\pi a}{2}. \quad (5)$$

Подставив (3), (4) и (5) в формулу (2), получим:

$$x_C = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4} a + \frac{a\sqrt{3}}{4} a + \frac{2 + \pi\sqrt{3}}{2\pi} a \frac{\pi a}{2}}{a + a + \frac{\pi a}{2}} = \frac{2\sqrt{3} + 2 + \pi\sqrt{3}}{2(4 + \pi)} a = 0,76a.$$

Итак, центр тяжести проволочного контура  $OABD$  находится в точке  $C$  с координатами:  $x_C = 0,76a$ ,  $y_C = 0$ .

**Задача 2.19.** Определить положение центра тяжести  $C$  площади поперечного сечения однородного штампа, изображенного на рис. а.

**Решение.** Заметив, что сечение имеет ось симметрии, проведем вдоль оси симметрии ось  $x$  и перпендикулярно к ней, по вертикали вверх, ось  $y$ . Так как центр тяжести  $C$  сечения лежит на оси симметрии, т. е. на оси  $x$ , то необходимо определить лишь координату  $x_C$ .

Проведя вспомогательные линии  $MP$  и  $NS$ , разобьем площадь сечения на сумму площадей трех прямоугольников. Обозначим прямоугольник  $MDBA$  номером 1, прямоугольник  $ENLK$  — номером 2 и прямоугольник  $NMPS$  — номером 3. Тогда формулу (3\*) можно записать в виде

$$x_C = \frac{x_1 \Delta s_1 + x_2 \Delta s_2 + x_3 \Delta s_3}{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3}. \quad (1)$$

Так как центры тяжести  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  прямоугольников лежат в точках пересечения их диагоналей, то имеем:

$$x_1 = x_2 = 15 \text{ см}, \quad x_3 = 5 \text{ см}. \quad (2)$$

Площади прямоугольников равны

$$\Delta s_1 = \Delta s_2 = 300 \text{ см}^2, \quad \Delta s_3 = 200 \text{ см}^2. \quad (3)$$

Воспользовавшись (2) и (3), запишем формулу (1) в виде

$$x_C = \frac{15 \cdot 300 + 15 \cdot 300 + 5 \cdot 200}{300 + 300 + 200} \text{ см}, \quad \text{т. е. } x_C = 12,5 \text{ см}.$$

Итак, центр тяжести площади сечения штампа находится в точке  $C$  с координатами:  $x_C = 12,5 \text{ см}$ ,  $y_C = 0$ .

Эту задачу можно решить несколько иначе, проведя вспомогательную прямую  $AL$  (рис. б) и представив площадь данного сечения в виде разности площадей прямоугольников  $EDBK$  и  $SPAL$ . Обозначив прямоугольник  $EDBK$  номером 1, а прямоугольник  $SPAL$  номером 2, запишем формулу (3\*) в виде

$$x_C = \frac{x_1 \Delta s_1 - x_2 \Delta s_2}{\Delta s_1 - \Delta s_2}, \quad (4)$$

где  $x_1$  — абсцисса центра тяжести  $C_1$  прямоугольника  $EDBK$ ,  $x_2$  — абсцисса центра тяжести  $C_2$  прямоугольника  $SPAL$ , а  $\Delta s_1$  и  $\Delta s_2$  — соответственно площади этих прямоугольников. Найдим:

$$\begin{aligned} x_1 &= 15 \text{ см}, & x_2 &= 20 \text{ см}, \\ \Delta s_1 &= 1200 \text{ см}^2, \\ \Delta s_2 &= 400 \text{ см}^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив (5) в формулу (4), получим:

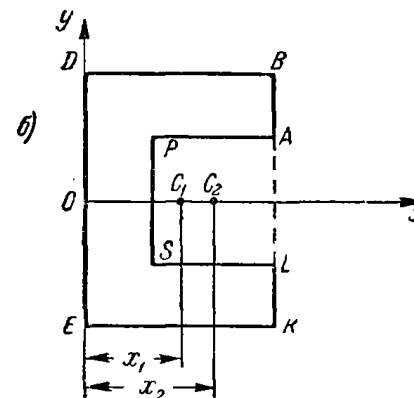
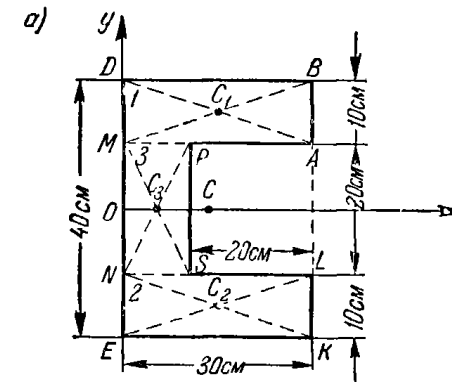
$$x_C = \frac{15 \cdot 1200 - 20 \cdot 400}{1200 - 400} \text{ см},$$

откуда  $x_C = 12,5 \text{ см}$ .

Второй прием решения задачи оказался более коротким. Этот

прием замены площади данной плоской фигуры разностью двух площадей удобно также применить при решении следующей задачи.

**Задача 2.20.** Определить положение центра тяжести однородного кругового сегмента  $AMB$ , если радиус окружности равен  $r$ , а центральный угол равен  $2\alpha$ .



К задаче 2.19.

Решение. Выберем оси координат: направим ось  $x$  вдоль оси симметрии, начало координат возьмем в центре окружности  $O$ , а ось  $y$  направим по вертикали вверх. Так как центр тяжести кругового сегмента  $AMB$  лежит на его оси симметрии, т. е. на оси  $x$ , то  $y_C = 0$ . Остается определить абсциссу  $x_C$  центра тяжести  $C$ . Для этого представим площадь  $S$  сегмента  $AMB$  как разность двух площадей: площади  $\Delta s_1$  кругового сектора  $OAMB$  и площади  $\Delta s_2$  равнобедренного треугольника  $OAB$ , т. е.  $S = \Delta s_1 - \Delta s_2$ .

Теперь формулу (3\*) можно записать в виде

$$x_C = \frac{x_1 \Delta s_1 - x_2 \Delta s_2}{\Delta s_1 - \Delta s_2}, \quad (1)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — соответственно абсциссы центров тяжести  $C_1$  и  $C_2$  кругового сектора  $OAMB$  и треугольника  $OAB$ . Находим:

$$\Delta s_1 = r^2 \alpha, \quad \Delta s_2 = r^2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad x_1 = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad x_2 = \frac{2}{3} r \cos \alpha \quad (2)$$

(положения центров тяжести треугольника и кругового сектора указаны выше, в обзоре теории). Подставив (2) в формулу (1), получим:

$$x_C = \frac{\frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha} r^2 \alpha - \frac{2}{3} r \cos \alpha r^2 \sin \alpha \cos \alpha}{r^2 \alpha - r^2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{3} r \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Итак, координаты центра тяжести  $C$  кругового сегмента имеют вид

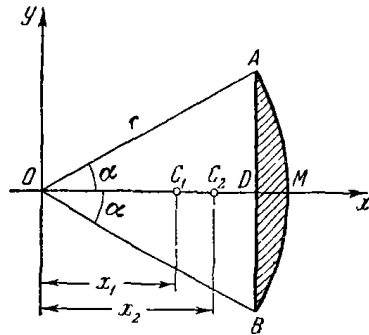
$$x_C = \frac{2}{3} r \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}, \quad y_C = 0. \quad (3)$$

**Задача 2.21.** Определить положение центра тяжести однородного полукольца, если его внешний и внутренний радиусы соответственно равны  $R$  и  $r$ .

Решение. Направив ось  $x$  вдоль оси симметрии полукольца (рис. а), имеем  $y_C = 0$ . Начало координат взято в центре  $O$  полукольца, ось  $y$  направлена по вертикали вверх.

Для определения абсциссы  $x_C$  центра тяжести  $C$  представим площадь полукольца в виде разности двух площадей полукругов радиусов  $R$  и  $r$ , т. е.  $S = \Delta s_1 - \Delta s_2$ , где  $\Delta s_1$  — площадь полукруга радиуса  $R$ , а  $\Delta s_2$  — площадь полукруга радиуса  $r$ . Теперь формулу (3\*) можно записать в виде

$$x_C = \frac{x_1 \Delta s_1 - x_2 \Delta s_2}{\Delta s_1 - \Delta s_2}, \quad (1)$$



К задаче 2.20.

где  $x_1$  и  $x_2$  — соответственно абсциссы центров тяжести  $C_1$  и  $C_2$  полу- кругов радиусов  $R$  и  $r$ .

Можно определить  $x_1$  как абсциссу центра тяжести кругового сектора (рис. б) при  $\alpha = \pi/2$ . Так как  $x_C = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$  (см. обзор теории), то при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  имеем  $x_1 = \frac{4}{3\pi} R$ . Аналогично  $x_2 = \frac{4}{3\pi} r$ .

Итак,

$$x_1 = \frac{4}{3\pi} R, \quad x_2 = \frac{4}{3\pi} r. \quad (2)$$

Значения  $x_1$  и  $x_2$  можно было также получить из формулы (3) предыдущей задачи, считая полукруг круговым сегментом при  $\alpha = \pi/2$ .

Действительно,  $x_C = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$ . При  $\alpha = \pi/2$  имеем  $x_1 = \frac{4}{3\pi} R$ . Аналогично  $x_2 = \frac{4}{3\pi} r$ .

Записав значения площадей  $\Delta s_1$  и  $\Delta s_2$  полукругов радиусов  $R$  и  $r$ :

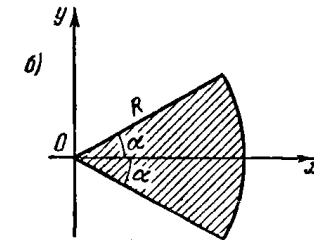
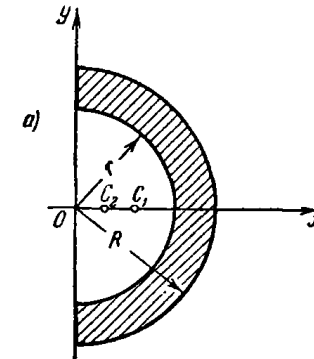
$$\Delta s_1 = \frac{\pi R^2}{2}, \quad \Delta s_2 = \frac{\pi r^2}{2}, \quad (3)$$

подставляем (2) и (3) в формулу (1). Имеем:

$$x_C = \frac{\frac{4}{3\pi} R \frac{\pi R^2}{2} - \frac{4}{3\pi} r \frac{\pi r^2}{2}}{\frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4}{3\pi} \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r}. \quad (4)$$

Итак, искомые координаты центра тяжести  $C$  полукольца имеют вид

$$x_C = \frac{4}{3\pi} \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r}, \quad y_C = 0.$$



К задаче 2.21.

Эту задачу можно было решить иначе, применив вторую теорему Гульдина:  $V = 2\pi x_C S$ , где  $S$  — площадь полукольца,  $x_C$  — искомая абсцисса его центра тяжести  $C$ ,  $V$  — объем тела вращения, описанного полукольцом вокруг оси  $y$ , т. е. объем полого шара, у которого внешний радиус равен  $R$ , а внутренний  $r$ . Следовательно,

$$x_C = \frac{V}{2\pi S}. \quad (5)$$

Учитывая, что  $S = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2} (R^2 - r^2)$ , а  $V = \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3)$ , подставляем эти значения  $S$  и  $V$  в формулу (5)

и получаем:

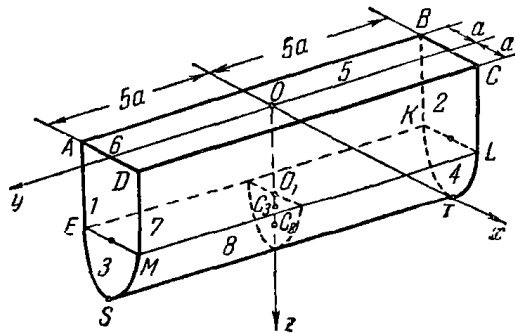
$$x_C = \frac{\frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3)}{2\pi \frac{\pi}{2} (R^2 - r^2)} = \frac{4}{3\pi} \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r}.$$

Сопоставляя оба способа решения задачи, следует отдать предпочтение второму. Решение оказалось короче, кроме того, не было необходимости пользоваться формулой, определяющей абсциссу  $x_C$  центра тяжести  $S$  кругового сектора  $x_C = \frac{4}{3\pi} R$ .

Однако следует заметить, что применение второй теоремы Гульдина оказалось эффективным потому, что вычисление площади плоской фигуры — полукольца и объема тела вращения — полого шара не представило затруднений. Если вычисление объема тела вращения оказывается громоздким, то применение второй теоремы Гульдина нецелесообразно.

Вместе с тем, если по условию задачи площадь плоской фигуры и положение ее центра тяжести известны, то применение второй теоремы Гульдина является удобным приемом для вычисления объема тела вращения (см. задачу 2.24).

**Задача 2.22.** На рисунке изображена схема корпуса баржи. Определить положение центра тяжести площади однородной поверхности, ограниченной снизу боковой поверхностью полуцилиндра, с торцов — плоскостями  $ADMSE$  и  $BCLTK$ , с боков — плоскостями  $ABKE$



К задаче 2.22.

и  $DCLM$  и сверху — плоскостью  $ABCD$ . Дано:  $ADME$  и  $BCLK$  — равные квадраты со стороной  $2a$ ,  $ABCD$  — прямоугольник со стороной  $AB$ , равной  $10a$ . Оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  изображены на рис. а.

**Решение.** Нетрудно видеть, что данная поверхность имеет ось симметрии, совмещенную с осью  $z$ . Значит, центр тяжести  $S$  площади этой поверхности лежит на оси  $z$  и две его координаты  $x_C$  и  $y_C$  равны нулю. Таким образом, нам остается определить лишь координату  $z_C$ .

Для этого мысленно разобьем данную поверхность на несколько поверхностей, так чтобы положение центра тяжести площади каждой из них можно было легко определить: 1 и 2 — поверхности квадратов  $ADME$  и  $BCLK$ , 3 и 4 — поверхности полукругов  $EMS$  и  $KLT$ ,

5 — поверхность прямоугольника  $ABCD$ , 6 и 7 — поверхности прямоугольников  $ABKE$  и  $DCLM$ , 8 — боковая поверхность полуцилиндра  $EMSKLT$ .

Координата центра тяжести  $z_C$  площади данной поверхности, опре-

деляемая по формуле (2\*):  $z_C = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta s_k z_k}{\sum_{k=1}^n \Delta s_k}$ , в данном случае, при

$n = 8$ , имеет вид

$$z_C = \frac{\sum_{k=1}^8 \Delta s_k z_k}{\sum_{k=1}^8 \Delta s_k}. \quad (1)$$

Вычислим площади поверхностей  $\Delta s_k$  при  $k = 1, 2, \dots, 8$ . Получим:  $\Delta s_1 = \Delta s_2 = 4a^2$ ,  $\Delta s_3 = \Delta s_4 = \frac{\pi a^2}{2}$ ,  $\Delta s_5 = \Delta s_6 = \Delta s_7 = 20a^2$ ,  $\Delta s_8 = 10\pi a^2$ .

Затем определим значения координат  $z_k$  центров тяжести площади поверхностей при  $k = 1, 2, \dots, 8$ .

Центры тяжести площадей квадратов 1 и 2 расположены в их центрах, т. е.  $z_1 = z_2 = a$ .

В справочных данных о положении центров тяжести некоторых однородных тел был рассмотрен случай г): центр тяжести площади кругового сектора расположен на его оси симметрии и отстоит от центра окружности на расстоянии, равном  $\frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ , где  $r$  — радиус окружности, а  $\alpha$  — половина центрального угла. В случае полуокруга 3

$r = a$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Значит,  $O_1 C_3 = \frac{2}{3} a \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi} a$ , а координата  $z_3$

центра тяжести  $C_3$  полуокруга 3 равна  $z_3 = OC_3 = OO_1 + O_1 C_3 = 2a + \frac{4}{3\pi} a = 2a \left( 1 + \frac{2}{3\pi} \right)$ . Итак,  $z_3 = z_4 = 2a \left( 1 + \frac{2}{3\pi} \right)$ .

Центры тяжести площадей прямоугольников 5, 6, 7 находятся в их центрах, т. е.  $z_5 = 0$ ,  $z_6 = z_7 = a$ .

Для определения координаты  $z_8$  центра тяжести площади боковой поверхности полуцилиндра используем случай в), рассмотренный для дуги однородной окружности. Ее центр тяжести отстоит от центра окружности на расстоянии  $x_C = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ , где  $r$  — радиус окружности, а  $\alpha$  — половина центрального угла. В данном случае  $r = a$ , а

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Значит,  $O_1C_8 = a \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} a$ , а искомая координата  $z_8$

равна  $z_8 = OC_8 = OO_1 + O_1C_8 = 2a + \frac{2}{\pi} a = 2a \left(1 + \frac{1}{\pi}\right)$ .

Итак, подсчеты площадей и координат центров тяжести площадей отдельных частей данной поверхности дали следующие результаты:

$$\Delta S_1 = \Delta S_3 = 4a^2, \quad \Delta S_3 = \Delta S_4 = \frac{\pi a^2}{2}, \quad \Delta S_5 = \Delta S_6 = \Delta S_7 = 20a^2;$$

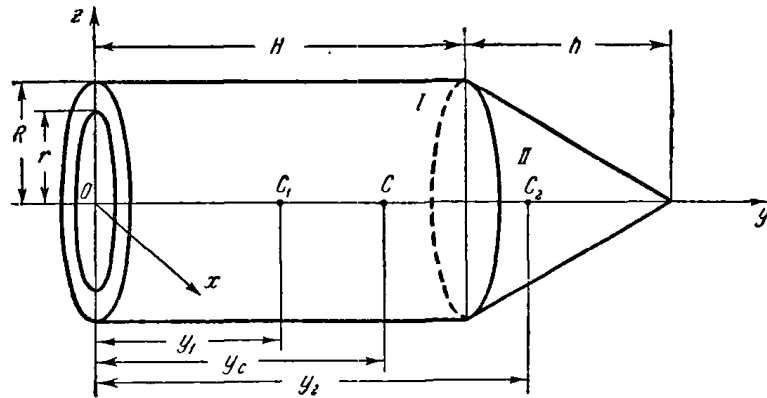
$$\Delta S_8 = 10\pi a^2, \quad z_1 = z_2 = a, \quad z_3 = z_4 = 2a \left(1 + \frac{2}{3\pi}\right), \quad z_5 = 0,$$

$$z_6 = z_7 = a, \quad z_8 = 2a \left(1 + \frac{1}{\pi}\right).$$

Подставив эти значения в формулу (1), получим  $z = 1,35a$ .

Значит, положение центра тяжести  $S$  площади данной однородной поверхности определяется координатами:  $x_C = y_C = 0, z_C = 1,35a$ .

**Задача 2.23.** Твердое тело состоит из однородного полого цилиндра  $I$  высотой  $H$  с внешним и внутренним радиусами оснований, равными  $R$  и  $r$ , и однородного сплошного конуса  $II$  с основанием радиуса  $R$  и высотой  $h$ .



К задаче 2.23.

Определить положение центра тяжести твердого тела, если  $r = \frac{3}{4} R$  и  $h = \frac{1}{2} H$ . Система осей  $xuz$  изображена на рисунке.

Решение. Так как ось симметрии твердого тела совмещена с осью  $y$ , то  $x_C = z_C = 0$ .

Остается определить ординату  $y_C$  центра тяжести  $S$ . Обозначим центр тяжести цилиндра через  $C_1$  и через  $C_2$  — центр тяжести конуса.

Для вычисления  $y_C$  воспользуемся формулой (1\*), которая в данном случае имеет вид

$$y_C = \frac{y_1 \Delta v_1 + y_2 \Delta v_2}{\Delta v_1 + \Delta v_2}, \quad (1)$$

где  $y_1$  и  $y_2$  — ординаты центров тяжести цилиндра  $A$  и конуса  $B$ , а  $\Delta v_1$  и  $\Delta v_2$  — соответственно объемы этих тел. Находим:

$$\Delta v_1 = \pi(R^2 - r^2)H, \quad \Delta v_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 h, \quad y_1 = \frac{H}{2}, \quad y_2 = H + \frac{1}{4}h \quad (2)$$

(напомним, что центр тяжести  $C_2$  конуса отстоит на расстоянии одной четверти высоты от основания конуса).

Воспользовавшись соотношениями (2), запишем формулу (1) в виде

$$y_C = \frac{\frac{H}{2}\pi(R^2 - r^2)H + \left(H + \frac{1}{4}h\right)\frac{1}{3}\pi R^2 h}{\pi(R^2 - r^2)H + \frac{1}{3}\pi R^2 h}.$$

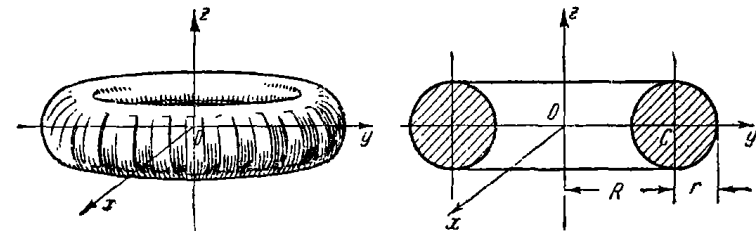
Учитывая, что по условию  $r = \frac{3}{4}R$  и  $h = \frac{1}{2}H$ , окончательно имеем:

$$y_C = \frac{39}{58}H.$$

Итак, положение центра тяжести  $S$  данного твердого тела определяется координатами:

$$x_C = 0, \quad y_C = \frac{39}{58}H, \quad z_C = 0.$$

**Задача 2.24.** Однородный тор образован вращением круга радиуса  $r$  около оси, лежащей в плоскости этого круга. Расстояние от центра тяжести круга до оси вращения равно  $R$ .



К задаче 2.24.

Определить площадь поверхности и объем тора.

Решение. Направим ось  $z$  вдоль оси вращения и, следовательно, оси симметрии тора.

Так как расстояние  $R$  от центра тяжести  $S$  круга до оси вращения дано, а также известны длина окружности и площадь круга

радиуса  $r$ , то, применив обе теоремы Гульдина, можно легко разделить площадь поверхности и объем тора.

Действительно, согласно первой теореме Гульдина  $S = 2\pi y_C L$ , где  $y_C$  — расстояние от центра тяжести  $C$  линии, описывающей данную поверхность, до оси вращения,  $L$  — длина этой линии,  $S$  — площадь поверхности тела вращения.

В данном случае  $y_C = R$ ,  $L = 2\pi r$  и, следовательно, искомая площадь  $S$  поверхности тора равна

$$S = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr.$$

Для определения объема тела вращения применим вторую теорему Гульдина:  $V = 2\pi y_C S$ , где  $y_C$  — расстояние от центра тяжести  $C$  плоской фигуры, описывающей данный объем, до оси вращения,  $S$  — площадь этой плоской фигуры,  $V$  — объем тела вращения.

В данном случае  $y_C = R$ ,  $S = \pi r^2$  и, следовательно, искомый объем  $V$  тора равен

$$V = 2\pi R \pi r^2 = 2\pi^2 Rr^2.$$

Применение обеих теорем Гульдина оказалось весьма эффективным.

Использование других приемов решения этой задачи, например формул интегрального исчисления, является более громоздким.

Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и последующих лет: 286, 287, 289, 292, 293, 295, 296, 300, 302.

Кинематика является разделом теоретической механики, в котором изучаются движения тела безотносительно к причинам, их вызывающим.

При движении тел относительно друг друга расстояния между точками этих тел могут изменяться. Эти изменения обычно определяются по отношению к некоторой системе отсчета, системе координат, которая и заменяет при изучении движений одно из тел. Если выбранная система координат условно принята за неподвижную, то движение других тел по отношению к этой системе отсчета называют абсолютным движением.

В классической механике время считают одинаковым для любых систем отсчета, что является приближением к истине, достаточно точным, если скорости рассматриваемых движений малы по сравнению со скоростью света.

За единицу времени принята секунда. Начало отсчета времени выбирается произвольно.

### ГЛАВА III

#### ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

##### § 1. Траектория и уравнения движения точки

1°. Основные определения. *Траекторией* точки называется линия, описываемая движущейся точкой в пространстве. Траектория может быть плоской или пространственной кривой. Движение точки определяется заданием *закона движения*. Закон (уравнение) движения точки устанавливает зависимость положения точки в пространстве от времени.

Движение точки  $M$  в неподвижной системе координат  $xuz$  определяется заданием трех функций (рис. 3.1)

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \quad (1^*)$$

которые называются уравнениями движения точки. Подставив в уравнения (1\*) значение времени  $t = t_1$ , можно определить координаты



и, следовательно, положение точки в пространстве в этот момент времени. Уравнения (1\*) представляют *параметрические уравнения траектории точки*. Для нахождения уравнений траектории точки в координатной форме необходимо из уравнений (1\*) исключить время и получить зависимости вида

$$\varphi_1(x, y) = 0, \quad \varphi_2(y, z) = 0.$$

Совокупность этих двух уравнений определяет кривую, по которой движется точка.

Существуют и другие способы задания движения точки. При *векторном способе* задания закона движения радиус-вектор  $\mathbf{r}$  движущейся точки  $M$  (рис. 3.1) дается как функция времени  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ . Связь между радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  и декартовыми координатами точки выражается равенством

$$\mathbf{r} = xi + yj + zk. \quad (2^*)$$

Здесь  $i, j, k$  — орты (единичные векторы) осей координат. Если в (2\*) принять за  $x, y, z$  текущие координаты точки  $M$ , определяемые уравнениями (1\*), то (2\*) дает закон движения точки в векторной форме.

Третий способ задания движения точки называется *естественным*. В этом случае движение точки определяется уравнением

$$\sigma = f(t), \quad (3^*)$$

где  $\sigma$  — криволинейная координата, отсчитываемая вдоль дуги от некоторой начальной точки  $O$  на траектории (рис. 3.2). При этом способе предполагается, что траектория движущейся точки  $M$  известна. *Криволинейная координата* — это длина дуги, отсчитываемая в одну сторону от начальной точки положительной, а в другую — отрицательной (направление положительного отсчета должно быть задано). Уравнение (3\*) называется естественным уравнением движения точки.

При естественном способе задания движения также имеется три уравнения: первое уравнение — это закон движения точки (3\*), два

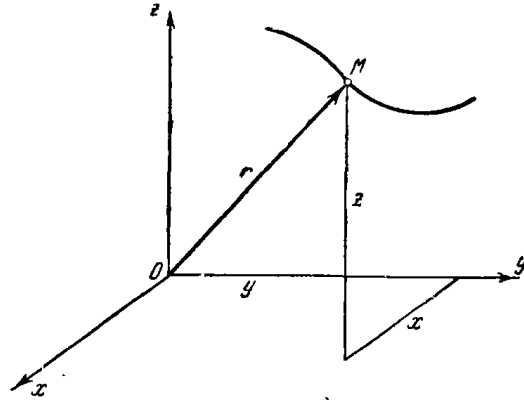


Рис. 3.1.



Рис. 3.2.

других уравнения определяют траекторию точки, ибо кривая в пространстве выражается уравнениями двух поверхностей, пересечение которых и является траекторией точки. Среди других систем координат, применяемых при изучении движений, отметим полярную систему координат, широко используемую при описании движений, происходящих в плоскости. В *полярной системе* координат (рис. 3.3) положение точки в плоскости определяется радиусом  $\rho$  — длиной отрезка, соединяющего неподвижный центр  $O$  с движущейся точкой  $M$ , и углом  $\varphi$  между неподвижной прямой  $Ox$  (полярной осью) и отрезком  $\overline{OM}$ . В этом случае уравнения плоского движения точки  $M$  будут:

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (4^*)$$

При исследовании движения точки в пространстве часто пользуются сферическими и цилиндрическими координатами.

*Сферическими* координатами точки  $M$  (рис. 3.4) являются: расстояние  $r$  точки  $M$  от неподвижного центра  $O$ , угол  $\psi$  (угол поворота плоскости  $zOM$  по отношению к фиксированной плоскости  $xOz$ ) и угол  $\varphi$ , образованный прямой  $OM$  с неподвижной плоскостью  $xOy$ .

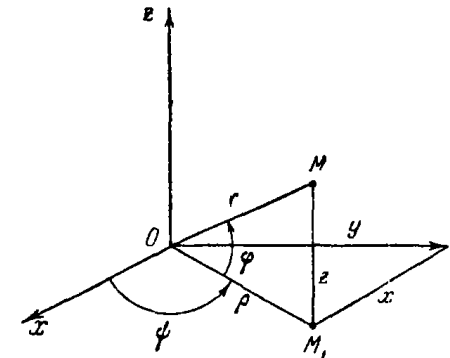


Рис. 3.4.

*Цилиндрическими* координатами точки  $M$  называются: полярные координаты  $\rho$  и  $\psi$  проекции точки  $M$  на неподвижную плоскость  $xOy$  и высота  $z$  точки  $M$  над этой плоскостью.

Уравнения движения точки в сферических координатах:

$$r = r(t), \quad \psi = \psi(t), \\ \varphi = \varphi(t). \quad (5^*)$$

Уравнения движения точки в цилиндрических координатах:

$$\rho = \rho(t), \quad \psi = \psi(t), \quad z = z(t). \quad (6^*)$$

Для перехода от сферических координат к прямоугольным декартовым координатам служат формулы:

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, \quad y = r \cos \varphi \sin \psi, \quad z = r \sin \varphi.$$

Формулы перехода от цилиндрических координат к прямоугольным декартовым координатам:

$$x = \rho \cos \psi, \quad y = \rho \sin \psi, \quad z = z.$$

Полярные, сферические, цилиндрические системы координат в отличие от декартовых называются криволинейными координатными системами.

Уравнения движения точки могут быть представлены графиками. Если по оси абсцисс откладывать независимую переменную  $t$  (время), а по оси ординат — координату движущейся точки, то на графике получим кривую зависимости координаты от времени, т. е. уравнение движения. Такие графики должны быть построены для каждой из трех координат, определяющих движение точки в пространстве. Графики движения могут быть построены и при задании закона движения в виде (3\*), (4\*) или другим способом. Уравнения движения точки могут быть заданы таблицей, в которой каждому дискретному значению времени соответствуют определенные значения координат.

Решение задач на определение закона движения и уравнения траектории производится в такой последовательности:

1) выбирается система неподвижных координат — прямоугольная, полярная или какая-либо иная; начало координат и та или иная система выбираются, исходя из условий задачи, так, чтобы дальнейшее решение было возможно более простым;

2) на основании условий задачи для избранной системы координат составляются уравнения движения точки, т. е. находится зависимость координат точки от времени;

3) имея уравнения движения точки, можно определить ее положение в любой момент времени, установить направление ее движения, найти траекторию и ответить на различные вопросы, касающиеся движения точки.

**Задача 3.1.** Точка  $M$  совершает плоское движение согласно уравнениям

$$x = 6 + 3t, \quad (1)$$

$$y = 4t. \quad (2)$$

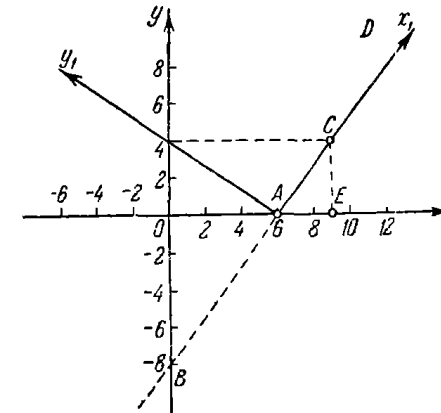
Определить траекторию точки  $M$ .

**Решение.** Уравнение траектории в координатной форме находим, исключив из обоих уравнений движения время. Из второго уравнения имеем  $t = y/4$ . Подставляя это значение в первое уравнение движения, получаем уравнение траектории

$$x = 6 + 0,75y.$$

Это — уравнение прямой линии. Для построения этой прямой замечаем, что при  $y = 0$   $x = 6$  и при  $x = 0$   $y = -8$ .

На чертеже находим точку  $A(6,0)$  и точку  $B(0, -8)$ , через которые и проходит указанная прямая. Однако отнюдь не вся эта бесконечная прямая будет являться траекторией точки  $M$ . Определим положение точки  $M$  в начальный момент времени  $t = 0$ . Подставляя это значение времени в уравнения движения (1) и (2), находим начальное



К задаче 3.1.

положение точки:  $x_0 = 6$ ,  $y_0 = 0$ . Следовательно, точка  $M$  начинает движение из точки  $A$ . Из уравнений движения следует, что с увеличением времени координаты точки  $M$  будут расти, оставаясь положительными. Так, при  $t = 1$  координаты точки  $M$  будут:  $x = 9$ ,  $y = 4$ . Находим эту точку на траектории и обозначаем ее буквой  $C$ . Таким образом, траекторией точки  $M$  будет полупрямая  $ACD$ . Другая половина прямой  $AB$  не будет являться траекторией точки  $M$ .

При прямолинейном движении точки уравнения движения упрощаются, если совместить ось координат с траекторией. Найдем уравнения движения точки  $M$ , если начало координат выбрать в точке  $A$ , начальном положении движущейся точки  $M$ , и ось  $x_1$  направить по полупрямой  $ACD$ , а ось  $y_1$  перпендикулярно к ней. Тогда из треугольника  $ACE$ , пользуясь уравнениями движения (1), (2), находим:

$$x_1^2 = (x - 6)^2 + y^2 = 9t^2 + 16t^2 = 25t^2,$$

а следовательно,

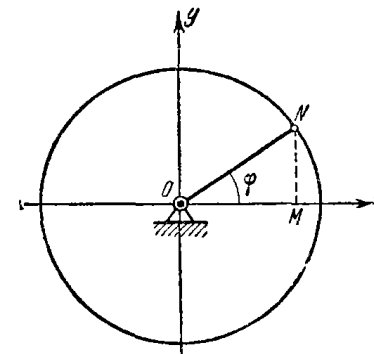
$$x_1 = \pm 5t. \quad (3)$$

Так как точка  $M$  движется в положительном направлении оси  $x_1$ , то знак минус в (3) следует отбросить. Таким образом, уравнения движения точки  $M$  в новой системе координат будут:

$$x_1 = 5t,$$

$$y_1 = 0.$$

Для прямолинейного движения точки мы, по существу, получили одно уравнение движения.



К задачам 3.2, 3.3.

**Задача 3.2.** Кривошип  $ON$  длиной  $a$  вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости рисунка и проходящей через точку  $O$ . Угол  $\varphi$  между неподвижной осью  $Ox$  и кривошипом изменяется пропорционально времени:  $\varphi = kt$ .

Составить уравнения движения точки  $N$  в декартовой системе координат. Найти уравнение ее траектории. Определить время одного полного оборота точки  $N$  и момент времени, когда обе координаты точки равны между собой.

**Решение.** Для составления уравнений движения точки  $N$  надо выразить ее координаты как функции времени. Из рисунка находим координаты  $x, y$  точки  $N$ :

$$x = ON \cos \varphi,$$

$$y = ON \sin \varphi,$$

или

$$x = a \cos kt, \quad (1)$$

$$y = a \sin kt. \quad (2)$$

Это и будут искомые уравнения движения точки  $N$ .

Чтобы найти уравнение траектории точки в явной форме, надо исключить из уравнений движения время. Для этого возведем каждое уравнение движения в квадрат:

$$x^2 = a^2 \cos^2 kt, \quad (3)$$

$$y^2 = a^2 \sin^2 kt, \quad (4)$$

и сложим уравнения (3) и (4):

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Это уравнение траектории точки  $N$  определяет окружность радиуса  $a$  с центром в начале координат.

Определим время одного полного оборота точки  $N$ . Это время  $T$ , в течение которого угол  $\varphi$  изменится на  $2\pi$  радиан:

$$\varphi = kT = 2\pi,$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Найдем начальное положение движущейся точки. Для этого надо в уравнения движения (1) и (2) подставить значение  $t = 0$ . Тогда

$$x_0 = a, \quad y_0 = 0.$$

Определим момент времени, когда обе координаты точки  $N$  равны между собой:

$$x = y = a \cos kt_1 = a \sin kt_1,$$

т. е.

$$\operatorname{tg} kt_1 = 1.$$

Это равенство возможно при

$$kt_1 = \pi n + \frac{\pi}{4}, \quad (5)$$

где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Из (5) определяются моменты времени, когда координаты точки равны между собой

$$t_1 = \frac{\pi}{k} n + \frac{\pi}{4k}.$$

**Задача 3.3.** Положив в предыдущей задаче угол  $\varphi$  равным  $kt + \beta$ , где  $k$  и  $\beta$  — постоянные величины, определить движение точки  $M$ , являющейся проекцией точки  $N$  на ось  $Ox$ .

**Решение.** Точка  $M$  движется прямолинейно по оси  $Ox$ , следовательно, ее движение определяется одним уравнением

$$x = ON \cos \varphi = a \cos (kt + \beta).$$

Это есть уравнение прямолинейного гармонического колебательного движения. Из него следует, что наибольшее отклонение точки  $M$  от центра колебаний  $O$  определяется координатами

$$x_1 = +a, \quad x_2 = -a.$$

Величина  $a$  называется амплитудой колебания,  $kt + \beta$  называется фазой колебания, а  $\beta$  — начальной фазой колебания.

Определим период колебаний — промежуток времени, в течение которого точка совершает одно полное колебание, т. е. возвращается в исходное положение с той же по величине и направлению скоростью. Обозначая период буквой  $T$ , находим его величину из условия того, что приращение фазы колебаний за это время равно  $2\pi$ :

$$k(t + T) + \beta = kt + \beta + 2\pi,$$

т. е.

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

**Задача 3.4.** Точка движется согласно уравнениям:

$$x = a \cos (kt - \epsilon), \quad (1)$$

$$y = b \cos kt. \quad (2)$$

Определить уравнение траектории точки. Как меняется траектория точки при увеличении разности фаз  $\epsilon$  от 0 до  $2\pi$ ?

**Решение.** Чтобы найти уравнение траектории точки в явной форме, надо из уравнений движения исключить время. Для этого преобразуем первое уравнение движения:

$$x = a \cos (kt - \epsilon) = a [\cos kt \cos \epsilon + \sin kt \sin \epsilon]. \quad (3)$$

Решая уравнения (2) и (3) относительно  $\cos kt$  и  $\sin kt$ , находим:

$$\cos kt = \frac{y}{b}, \quad \sin kt = \frac{\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon}.$$

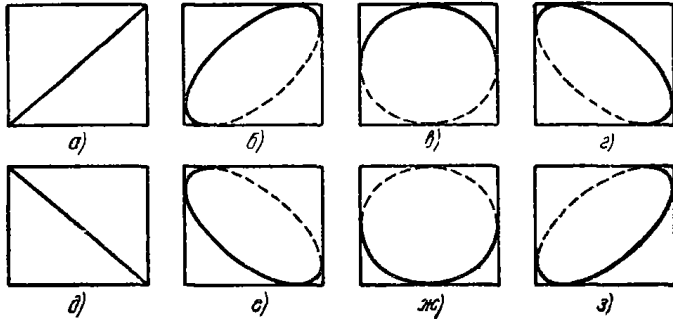
Возведем эти равенства в квадрат и сложим их:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \cos \varepsilon\right)^2}{\sin^2 \varepsilon} = 1$$

или окончательно:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2\frac{x \cdot y}{a \cdot b} \cos \varepsilon = \sin^2 \varepsilon. \quad (4)$$

Уравнение (4) при произвольном значении  $\varepsilon$  есть уравнение эллипса. Из этого уравнения видно, что наибольшие и наименьшие значения



К задаче 3.4.

переменных соответственно будут  $\pm a$  для  $x$  и  $\pm b$  для  $y$ . Таким образом, во всех случаях эллипс вписывается в прямоугольник со сторонами  $2a$  и  $2b$ .

Будем теперь менять значения  $\varepsilon$  от 0 до  $2\pi$ . При  $\varepsilon = 0$  уравнение (4) принимает следующий вид:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0.$$

Следовательно, когда фазы обеих составляющих взаимно перпендикулярных колебаний одинаковы, эллипс вырождается в две совпадающие прямые линии, являющиеся диагональю прямоугольника (рис. а).

При увеличении  $\varepsilon$  от 0 до  $\pi/2$  эллипс, одна из осей которого совпадает по направлению с диагональю прямоугольника, постепенно расширяется (рис. б). При  $\varepsilon = \pi/2$  уравнение (4) примет вид (рис. в)

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

т. е. уравнение эллипса принимает каноническую форму. При дальнейшем увеличении  $\varepsilon$  эллипс снова сужается (рис. г) до тех пор, пока при  $\varepsilon = \pi$  не выродится в другую диагональ прямоугольника (рис. д). При этом уравнение (4) принимает вид

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0.$$

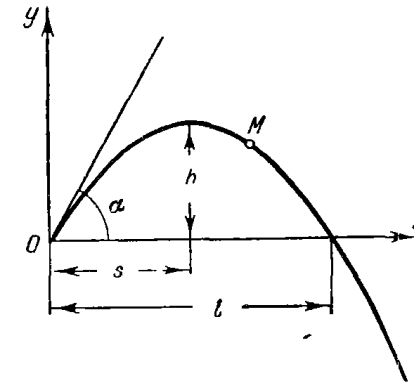
Далее, с увеличением  $\varepsilon$  от  $\pi$  до  $2\pi$  процесс повторяется, являясь зеркальным отображением первой половины процесса (рис. е, ж, з).

Если, как в разобранный примере, частоты обоих взаимно перпендикулярных колебаний равны, то разность фаз  $\varepsilon$  остается постоянной и эллиптическая траектория точки неизменна. Если же, как это бывает в большинстве технических приложений, между частотами обоих колебаний существует малая разница, то траектория колеблющейся точки может быть представлена с достаточной точностью одним эллипсом лишь для нескольких периодов. Затем этот эллипс меняется в соответствии с изменением величины  $\varepsilon$  со временем, проходя разобранные выше стадии.

**Задача 3.5.** Точка  $M$ , брошенная под углом  $\alpha$  к горизонту, если пренебречь сопротивлением воздуха, движется согласно уравнениям:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad (1)$$

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \quad (2)$$



К задаче 3.5.

В этих уравнениях  $v_0$ ,  $\alpha$ ,  $g$  — постоянные величины.

Определить уравнение траектории точки, наибольшую высоту  $h$  ее подъема над уровнем начального положения, расстояние  $s$  по горизонтالي, при котором точка достигнет наивысшего положения, а также дальность полета точки по горизонтали.

Решение. Для определения уравнения траектории точки в явной форме надо исключить из уравнений движения время. Получив из первого уравнения

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad (3)$$

и подставив это выражение в уравнение (2), найдем искомое уравнение траектории

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (4)$$

Из аналитической геометрии известно, что это есть уравнение параболы с осью симметрии, параллельной оси  $y$ . Действительно, каждому значению  $y$  соответствуют два значения  $x$ . Эта парабола проходит через начало координат, так как значения координат  $x=0$ ,  $y=0$  удовлетворяют ее уравнению.

Чтобы определить наибольшую высоту подъема точки  $h$ , надо найти по правилам дифференциального исчисления экстремальные значения  $y$ . Для этого вычислим производную от  $y$  по координате  $x$  и приравняем ее нулю; так как  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$ , а  $\frac{dx}{dt} \neq 0$ , то можно ограничиться приравниванием к нулю производной

$$y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt_1 = 0. \quad (5)$$

Следовательно,  $y$  достигает экстремального значения при

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (6)$$

Подставляя это значение времени в уравнение (2), находим наибольшую высоту подъема

$$h = y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{g v_0^2 \sin^2 \alpha}{2 \cdot g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}.$$

Это экстремальное значение  $y$  будет, действительно, максимумом, а не минимумом, так как вторая производная от  $y$  при  $t=t_1$  отрицательна:

$$\ddot{y}|_{t=t_1} = -g.$$

Для определения абсциссы  $s$ , при которой точка достигает наивысшего положения, надо значение времени, соответствующее этому моменту (6), подставить в уравнение (1):

$$s = x_1 = v_0 \cos \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

Дальность полета по горизонтали  $l$  определится из уравнения траектории (4), если положить в нем  $y=0$ :

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0.$$

Отсюда находятся два значения  $x$ :

$$x_0 = 0, \quad x_2 = l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

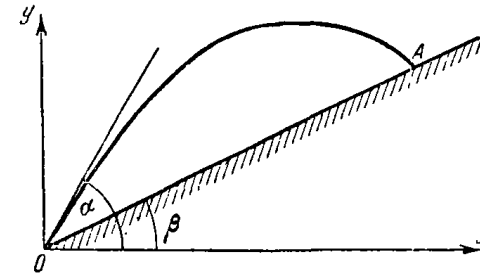
Первое значение соответствует начальному моменту (моменту вылета точки), второе значение определяет дальность по горизонтали. Сопоставляя значения  $l$  и  $s$ , заключаем, что  $l=2s$ , т. е. наивысшего положения точка достигает на половине горизонтальной дальности.

Заметим, что искомые величины дальности и высоты полета можно было найти и не прибегая к дифференцированию. Достаточно было учесть, что траекторией служит парабола, ось которой параллельна оси ординат, причем парабола проходит через начало координат. Действительно, положив в уравнении (4)  $y$  равным нулю, находим два значения  $x$ , из которых первое равно нулю, а второе определяет дальность полета по горизонтали. Внося в уравнение (4) вместо  $x$  величину, равную половине дальности полета, находим максимальную высоту подъема  $h$ .

**Задача 3.6.** Снаряд, вылетающий из ствола орудия, стоящего у подножья возвышенности, поверхность которой наклонена под постоянным углом  $\beta$  к горизонту, движется согласно уравнениям (сопротивлением воздуха пренебрегаем):

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad (1)$$

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \quad (2)$$



К задаче 3.6.

где  $\alpha$  — угол между горизонтом и направлением вылета снаряда.

Определить, под каким углом  $\alpha$  следует выстрелить, чтобы получить наибольшую дальность полета вдоль линии  $OA$ .

**Решение.** Исключив время  $t$  из уравнений (1) и (2), находим уравнение траектории в явной форме:

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (3)$$

Уравнение прямой  $OA$ , являющейся проекцией поверхности возвышенности на вертикальную плоскость  $xu$ , будет:

$$y = x \operatorname{tg} \beta. \quad (4)$$

Снаряд упадет на землю в точке  $A$ , при этом ординаты, определяемые уравнениями (3) и (4), станут равными, следовательно,

$$x \operatorname{tg} \beta = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

откуда

$$x = (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \frac{2v_0^2}{g} \cos^2 \alpha = \frac{v_0^2}{g} (\sin 2\alpha - 2 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta).$$

Для определения наибольшей дальности в зависимости от угла вылета  $\alpha$  вычисляем производную от  $x$  по  $\alpha$  и приравниваем ее нулю:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g} (2 \cos 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta) = 0,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = -\operatorname{tg} \beta,$$

или

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta,$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \beta \right).$$

Таким образом, наибольшая дальность будет при угле бросания, равном половине угла между вертикалью (отрицательной осью  $y$ ) и откосом  $OA$ .

**Задача 3.7.** Точка, брошенная наклонно к горизонту, движется в воздухе, сопротивление которого пропорционально скорости, согласно уравнениям:

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{kg} (1 - e^{-kgt}), \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{kg} \left( v_0 \sin \alpha + \frac{1}{k} \right) (1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k}. \quad (2)$$

В этих уравнениях  $v_0$ ,  $\alpha$ ,  $k$ ,  $g$  — постоянные положительные величины.

Определить уравнение траектории точки, наибольшую высоту  $h$  над уровнем начального положения, а также абсциссу, при которой точка достигнет наивысшего положения.

**Решение.** Для определения уравнения траектории точки в явной форме надо исключить из уравнений движения время. Из (1) находим:

$$(1 - e^{-kgt}) = \frac{kg}{v_0 \cos \alpha} x \quad (3)$$

и, далее, после несложных преобразований

$$t = -\frac{1}{kg} \ln \left( 1 - \frac{kg}{v_0 \cos \alpha} x \right). \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в уравнение (2), получаем уравнение траектории точки в явной форме

$$y = \frac{kv_0 \sin \alpha + 1}{kv_0 \cos \alpha} x + \frac{1}{k^2g} \ln \left( 1 - \frac{kg}{v_0 \cos \alpha} x \right). \quad (5)$$

Для определения наибольшей высоты  $h$  над уровнем начального положения надо найти максимум величины  $y$ , рассматриваемой как функция координаты  $x$ . Для этого, по правилам дифференциального исчисления, необходимо вычислить первую производную от  $y$  по координате  $x$  и приравнять ее нулю. Так как  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$ , а  $\frac{dx}{dt} \neq 0$ , то можно ограничиться приравниванием нулю производной от координаты  $y$  по времени. Найденное из этого уравнения значение независимой переменной — времени  $t_1$  подставляется в уравнение (2), и тем

самым находится максимальное или минимальное значение  $y$ . Если вторая производная от  $y$  по времени в этот момент отрицательна, то найденное экстремальное значение  $y$  является максимумом, в противном случае — минимумом.

Вычисляем, пользуясь уравнением (2), производную от  $y$  по времени и приравняем ее нулю:

$$\dot{y} = \left( v_0 \sin \alpha + \frac{1}{k} \right) e^{-kgt_1} - \frac{1}{k} = 0.$$

Тогда

$$e^{-kgt_1} = \frac{1}{kv_0 \sin \alpha + 1},$$

или

$$t_1 = \frac{1}{kg} \ln (kv_0 \sin \alpha + 1).$$

Подставляя эти значения в уравнение (2), после несложных преобразований находим экстремальное значение

$$y_{\max} = h = \frac{v_0 \sin \alpha}{kg} - \frac{1}{k^2g} \ln (kv_0 \sin \alpha + 1).$$

Для того чтобы убедиться в том, что найденное значение, действительно, является максимальным, вычисляем вторую производную от  $y$  по времени

$$\ddot{y} = -kg \left( v_0 \sin \alpha + \frac{1}{k} \right) e^{-kgt}.$$

Вторая производная отрицательна, так как  $k$ ,  $g$ ,  $v_0$  — положительные числа, а угол  $\alpha$  лежит в первой четверти.

Определим, далее, абсциссу, при которой точка достигнет наивысшего положения. Для этого достаточно в уравнение (1) подставить значение времени  $t_1$ , соответствующее наивысшему положению точки. Тогда имеем:

$$x_1 = \frac{v_0 \cos \alpha}{kg} \left( 1 - \frac{1}{kv_0 \sin \alpha + 1} \right) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g (kv_0 \sin \alpha + 1)}.$$

Пользуясь уравнением траектории точки (5), можно получить равенство, определяющее горизонтальную дальность полета. Если положить в уравнении (5) координату  $y=0$ , то одно из значений  $x$ , удовлетворяющее трансцендентному уравнению

$$\frac{kv_0 \sin \alpha + 1}{v_0 \cos \alpha} x + \frac{1}{kg} \ln \left( 1 - \frac{kg}{v_0 \cos \alpha} x \right) = 0, \quad (6)$$

будет  $x_1=0$ ; это значение соответствует вылету точки из начала координат в начальный момент времени. Второе значение  $x_2$ , являющееся корнем уравнения (6), определяет горизонтальную дальность полета. Это значение может быть, в частности, получено путем гра-

фического решения уравнения (6). Для этого при известных численных значениях коэффициентов  $k$ ,  $g$ ,  $v_0$ ,  $\alpha$  следует построить функцию

$$f(x) = \frac{kv_0 \sin \alpha + 1}{v_0 \cos \alpha} x + \frac{1}{kg} \ln \left( 1 - \frac{kg}{v_0 \cos \alpha} x \right),$$

откладывая по оси абсцисс значения  $x$ , а по оси ординат соответствующие им значения  $f(x)$ . Пересечение этой кривой с осью абсцисс и дает второй корень уравнения (6) — дальность полета по горизонтали.

2°. Переход от уравнений движения в декартовых координатах к естественному уравнению движения. Если уравнения движения точки даны в декартовых координатах

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \quad (1^*)$$

и требуется найти уравнение движения в естественной форме, то необходимо сначала определить траекторию точки, а затем найти закон движения этой точки по траектории.

Нахождение уравнений траектории точки производится путем исключения времени из уравнений движения (1\*). Для нахождения закона движения  $\sigma = f(t)$  необходимо воспользоваться известным выражением для дифференциала дуги

$$\pm ds = ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + f_3'^2(t)} dt. \quad (2^*)$$

Интегрируя, находим:

$$\sigma = \pm \int \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + f_3'^2(t)} dt + C. \quad (3^*)$$

Произвольная постоянная интегрирования  $C$  находится из начальных условий: так, например, если отсчет пути начинается от начального положения точки, то при  $t=0$   $\sigma=0$ . Подставив эти начальные условия в уравнение (3\*), определяем  $C$ .

**Задача 3.8.** Точка совершает плоское движение согласно уравнениям:

$$x = a \cos kt, \quad (1)$$

$$y = \frac{g}{k^2} (1 - \cos kt). \quad (2)$$

Определить уравнение траектории точки и закон ее движения, отсчитывая расстояние от начального положения.

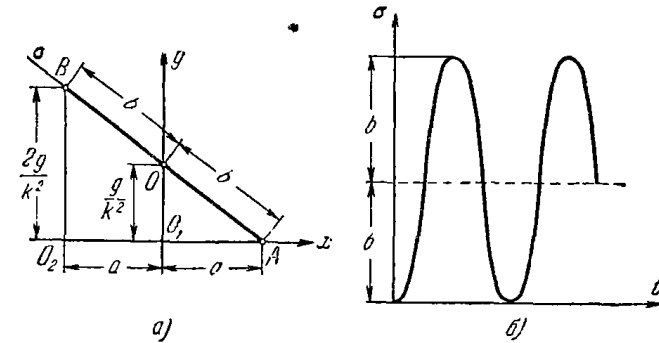
**Решение.** Для получения уравнения траектории точки находим из уравнения (1)

$$\cos kt = \frac{x}{a} \quad (3)$$

и подставляем (3) в уравнение (2):

$$y = \frac{g}{k^2} \left( 1 - \frac{x}{a} \right). \quad (4)$$

Таким образом, траекторией точки является отрезок прямой линии, определяемой уравнением (4) и дополнительным условием  $|x| \leq a$ , вытекающим из (1).



К задаче 3.8.

Для нахождения закона движения точки по траектории имеем:

$$dx = -ak \sin kt \cdot dt,$$

$$dy = \frac{g}{k^2} k \sin kt \cdot dt.$$

Тогда

$$d\sigma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{a^2 k^3 + \frac{g^2}{k^2}} \sin kt \cdot dt.$$

Интегрируя это уравнение, получаем:

$$\sigma = - \sqrt{a^2 k^3 + \frac{g^2}{k^2}} \cdot \frac{1}{k} \cos kt + C. \quad (5)$$

Так как координата  $\sigma$  отсчитывается, по условию задачи, от начального положения точки, то при  $t=0$   $\sigma=0$ . Подставляя эти значения в (5), имеем:

$$0 = - \sqrt{a^2 k^3 + \frac{g^2}{k^2}} \cdot \frac{1}{k} + C,$$

откуда

$$C = \frac{1}{k} \sqrt{a^2 k^3 + \frac{g^2}{k^2}}.$$

Внося найденное значение произвольной постоянной  $C$  в уравнение (5), находим закон движения точки по траектории

$$\sigma = \frac{1}{k} \sqrt{a^2 k^3 + \frac{g^2}{k^2}} (1 - \cos kt).$$

Это — уравнение гармонического колебательного движения точки.

Точка  $O$ , около которой совершаются колебания (*центр колебаний*), находится на расстоянии

$$\sigma_1 = \frac{1}{k} \sqrt{a^2 k^2 + \frac{g^2}{k^2}}$$

от начального положения. Амплитуда колебаний равна

$$\frac{1}{k} \sqrt{a^2 k^2 + \frac{g^2}{k^2}} = b.$$

В момент времени  $t=0$  точка находится в крайнем положении  $A$ . В момент времени  $t=\pi/2k$ , когда  $\cos kt=0$ , точка находится в центре колебаний, в  $O$ . В момент времени  $t=\pi/k$ , когда  $\cos kt=-1$ , точка находится во втором крайнем положении, в точке  $B$ .

Графически движение точки представлено на рисунке. На рис. *a* построена траектория  $AOB$ . На рис. *б* представлена зависимость  $\sigma$  от времени.

**Задача 3.9.** Точка  $M$  движется согласно уравнениям:

$$x = a \cos kt, \quad (1)$$

$$y = a \sin kt, \quad (2)$$

$$z = bt, \quad (3)$$

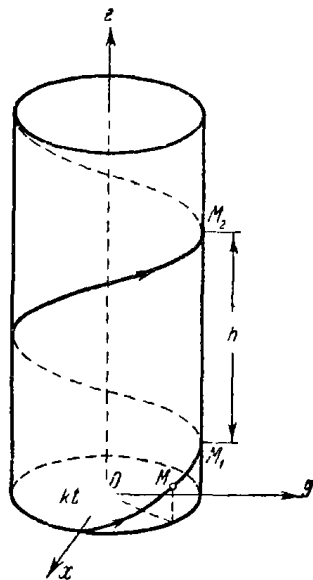
где  $a$ ,  $k$ ,  $b$  — постоянные.

Определить уравнения траектории точки и закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки.

**Решение.** Для определения уравнений траектории точки находим из уравнения (3) время и вносим это значение в (1) и (2). Тогда

$$x = a \cos \frac{k}{b} z,$$

$$y = a \sin \frac{k}{b} z.$$



К задаче 3.9.

Это — уравнение винтовой линии. Из уравнений (1), (2) видно, что проекция точки на плоскость  $xy$  описывает окружность за время  $2\pi/k$ . За это время проекция точки на ось  $z$  переместится на величину

$$h = \frac{2\pi}{k} \cdot b,$$

называемую *шагом* винтовой линии. Винтовая линия навивается на поверхность цилиндра радиуса  $a$ .

Для нахождения закона движения точки по траектории находим:

$$dx = -ak \sin kt \cdot dt,$$

$$dy = ak \cos kt \cdot dt,$$

$$dz = bdt.$$

Тогда дифференциал дуги будет:

$$d\sigma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{a^2 k^2 + b^2} dt.$$

Интегрируя это равенство, имеем:

$$\sigma = \sqrt{a^2 k^2 + b^2} t + C. \quad (4)$$

Для определения произвольной постоянной интегрирования воспользуемся начальными условиями. При  $t=0$   $\sigma=0$ , так как отсчет дуги начинается одновременно с отсчетом времени. Подставляя эти начальные условия в уравнение (4), находим:

$$0 = 0 + C.$$

Таким образом, закон движения точки по винтовой линии запишется в виде

$$\sigma = \sqrt{a^2 k^2 + b^2} t,$$

если отсчитывать положительные значения дуги против часовой стрелки. Движение начинается из точки  $x_0=a$ ,  $y_0=0$ ,  $z_0=0$  и происходит по винтовой линии против часовой стрелки.

Для приобретения навыков в решении задач на составление и исследование уравнений движения и определения траекторий точки рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 311, 312, 314, 315, 317, 318, 320, 321.

## § 2. Скорость и ускорение точки

*Скорость точки* есть производная по времени от радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , определяющего ее положение в пространстве. Скорость точки характеризует изменение ее положения во времени

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}, \quad (1^*)$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — орты осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Проекции скорости на оси неподвижных декартовых координат равны

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (2^*)$$



Модуль скорости дается формулой

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (3^*)$$

Направление скорости определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\widehat{v, x}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\widehat{v, y}) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\widehat{v, z}) = \frac{v_z}{v}. \quad (4^*)$$

Скорость направлена по касательной к траектории.

Ускорение точки есть производная от скорости по времени или вторая производная от радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  по времени. Ускорение точки является мерой, характеризующей быстроту изменения скорости:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = w_x\mathbf{i} + w_y\mathbf{j} + w_z\mathbf{k}. \quad (5^*)$$

Проекция ускорения на неподвижные декартовы оси координат равны

$$w_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad w_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad w_z = \dot{v}_z = \ddot{z}. \quad (6^*)$$

Модуль ускорения вычисляется по формуле

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}. \quad (7^*)$$

Направление ускорения определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\widehat{w, x}) = \frac{w_x}{w}, \quad \cos(\widehat{w, y}) = \frac{w_y}{w}, \quad \cos(\widehat{w, z}) = \frac{w_z}{w}. \quad (8^*)$$

Если уравнение движения задано в естественной форме, то скорость точки равна

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \boldsymbol{\tau} = v_\tau \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (9^*)$$

где  $\boldsymbol{\tau}$  — орт касательной, направленный в сторону увеличения  $s$ ;  $v_\tau$  — проекция скорости на касательную, равная

$$v_\tau = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \quad (10^*)$$

Если  $v_\tau > 0$ , то точка движется в сторону увеличивающихся значений  $s$ . Если  $v_\tau < 0$ , то точка движется в противоположную сторону, в направлении уменьшающихся значений  $s$ .

Ускорение в этом случае определяется через проекции на естественные оси координат. Естественными осями координат, или натуральным триэдром траектории, называется ортогональная (прямоугольная) система координат, состоящая из осей: а) касательной, направленной в сторону возрастания дуговой координаты, б) главной нормали, направленной в сторону вогнутости траектории, и в) бинормали, направленной так, чтобы три оси составляли правую систему координат (рис. 3.5).

Плоскость, в которой расположены касательная и главная нормаль, называется соприкасающейся, или плоскостью кривизны в данной точке кривой. Плоскость, в которой лежат главная нормаль и бинормаль, называется нормальной плоскостью. Нормальная плоскость перпендикулярна к соприкасающейся плоскости. Плоскость, перпендикулярная к главной нормали, называется спрямляющей плоскостью. Если кривая плоская, то соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью кривой.

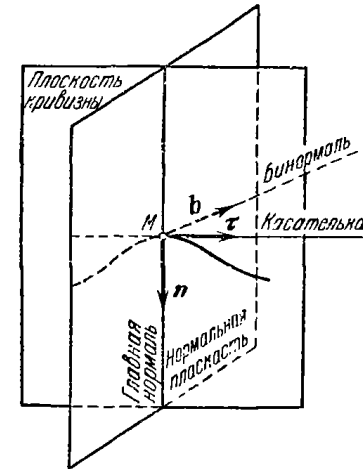


Рис. 3.5.

При переходе от одной точки траектории к другой естественные оси, оставаясь между собой ортогональными, непрерывно поворачиваются, сопровождая движущуюся точку.

Ускорение точки лежит в соприкасающейся плоскости и определяется как векторная сумма касательного и нормального ускорений точки:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_\tau + \mathbf{w}_n. \quad (11^*)$$

Проекция ускорения на касательную дается формулой

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}. \quad (12^*)$$

Касательное ускорение характеризует изменение скорости по величине. Оно равно нулю, когда величина скорости остается неизменной. Кроме того, оно обращается в нуль в те моменты времени, когда скорость достигает экстремальных значений.

Величина нормального ускорения определяется формулой

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad (13^*)$$

где  $\rho$  — радиус кривизны траектории. Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению. Оно равно нулю при прямолинейном движении точки, а также в точках перегиба траектории, так как в обоих случаях радиус кривизны обращается в бесконечность. Кроме того, нормальное ускорение обращается в нуль в точках, где  $v = 0$ . Модуль ускорения вычисляется при помощи формулы

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\dot{v}_\tau^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \quad (14^*)$$

Направление ускорения определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\widehat{w, \boldsymbol{\tau}}) = \frac{\dot{v}_\tau}{w}, \quad \cos(\widehat{w, \mathbf{n}}) = \frac{v^2}{\rho w}. \quad (15^*)$$

Важными частными случаями движения являются равномерное и равнопеременное движения. При равномерном движении величина скорости постоянна. Уравнение равномерного движения

$$\sigma = \sigma_0 + v_\tau t, \quad (16^*)$$

где  $\sigma$  — дуговая координата точки, отсчитываемая от начала координат, а  $\sigma_0$  — значение дуговой координаты при  $t=0$ . При равнопеременном движении касательное ускорение точки постоянно по величине. Уравнение равнопеременного движения будет:

$$\sigma = \sigma_0 + v_0 t + \frac{\omega_\tau t^2}{2}. \quad (17^*)$$

Зависимость скорости от времени в равнопеременном движении определяется уравнением

$$v_\tau = v_0 + \omega_\tau t. \quad (18^*)$$

Если  $\omega_\tau > 0$ , то движение, определяемое уравнениями (17\*) и (18\*), является равноускоренным, если же  $\omega_\tau < 0$ , то это движение равнозамедленное (при  $v_\tau > 0$ ). Вообще при ускоренном движении касательное ускорение совпадает по знаку с проекцией скорости на касательную. При замедленном движении касательное ускорение и проекция скорости на касательную имеют противоположные знаки.

Зависимость между скоростью и пройденным путем при равнопеременном движении определяется формулой Галилея

$$v_\tau^2 = v_0^2 + 2\omega_\tau (\sigma - \sigma_0).$$

Часто в задачах требуется найти радиус кривизны траектории. Радиус кривизны траектории может быть определен из формулы (13\*)

$$\rho = \frac{v^3}{\omega_n}. \quad (19^*)$$

Если уравнения движения заданы в декартовых координатах, то при помощи формул (3\*) и (7\*) следует найти величину скорости и ускорения точки, затем найти значение касательного ускорения по формуле (12\*). Тогда из соотношения (14\*) определяются нормальное ускорение и, далее, при помощи (19\*) радиус кривизны траектории.

При движении точки по плоской кривой радиус кривизны траектории и нормальное ускорение точки могут быть определены другим способом, нашедшим в последнее время широкое применение в инженерной практике.

Обозначим угол, составленный касательной к траектории (или, что то же, скоростью) с некоторым неизменным направлением, буквой  $\psi$  (рис. 3.6). Тогда радиус кривизны равен

$$\rho = \frac{v}{|\dot{\psi}|}, \quad (20^*)$$

где  $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{ds} \frac{ds}{dt}$  и, следовательно, величина нормального ускорения равна

$$\omega_n = \frac{v^2}{\rho} = v |\dot{\psi}|. \quad (21^*)$$

В этом параграфе решаются задачи на определение скорости, ускорения точки, нахождение радиуса кривизны траектории по известным уравнениям движения точки. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям движения сводится к дифференцированию уравнений движения и может быть всегда выполнено как при аналитическом, так и при графическом задании движения точки. Одновременно могут быть получены другие данные, характеризующие движение точки: ее положение в любой момент времени, наибольшее и наименьшее значения скорости и ускорения и т. д.

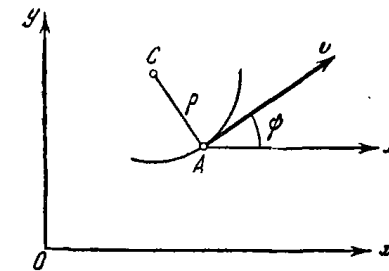


Рис. 3.6.

При решении задач на определение скоростей и ускорений полезно придерживаться следующего порядка:

- 1) выбрать систему координат;
- 2) составить уравнения движения точки в избранной системе координат;
- 3) по уравнениям движения точки определить проекции скорости на оси координат и скорость по величине и направлению;
- 4) зная проекции скорости, определить проекции ускорения на оси координат и ускорение по величине и направлению.

Если траектория точки задана по условию задачи, то целесообразно применить естественную форму уравнений движения и искать ускорение точки через проекции на оси натурального триэдра.

В этом параграфе решаются также задачи на определение уравнений движения точки и ее траектории, если известно ее ускорение.

При решении задач на определение уравнений движения точки и ее траектории рекомендуется такая последовательность действий:

- 1) выбрать систему координат;
- 2) составить проекции ускорения на эти оси;
- 3) проинтегрировать полученные зависимости и найти проекции скорости;
- 4) в найденных выражениях определить произвольные постоянные интегрирования, пользуясь известными значениями проекций скорости в некоторый момент времени;
- 5) проинтегрировать полученные зависимости для проекций скорости и получить уравнения движения точки;

б) определить произвольные постоянные интегрирования, пользуясь значениями координат точки в некоторый момент времени;

7) исключив из уравнений движения время, получить уравнение траектории в координатной форме.

**Задача 3.10.** Первый искусственный спутник, запущенный 4 октября 1957 г. в СССР, имел скорость  $v$ , равную 8 км/сек, и период обращения  $T$ , равный 1 ч 36 мин, или 5760 сек.

Определить высоту полета спутника над поверхностью Земли, полагая его орбиту круговой, а движения равномерным. Радиус Земли принять равным  $R = 6370$  км.

Решение. Обозначим буквой  $r$  радиус орбиты спутника, проведенный из центра Земли, буквой  $h$  — искомую высоту спутника над поверхностью Земли.

Путь  $s$ , проходимый спутником за один период обращения, равен произведению времени  $T$ , затраченного на один оборот, на скорость движения спутника  $v$ . С другой стороны, этот же путь равен длине окружности радиуса  $r$ . Таким образом,

$$vT = 2\pi r,$$

откуда

$$r = \frac{vT}{2\pi} = 7340 \text{ км.}$$

Далее находим искомую высоту полета:

$$h = r - R = 7340 - 6370 = 970 \text{ км.}$$

**Задача 3.11.** Две точки движутся равномерно одна за другой по одной прямой линии со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , причем расстояние между их начальными положениями было равно  $\sigma_0$ . Обе точки начали двигаться одновременно.

Определить время  $T$ , по истечении которого одна точка догонит другую.

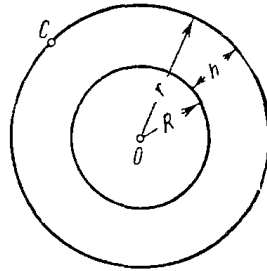
Решение. Пусть прямая  $Os$  есть траектория движения. Тогда уравнение движения первой точки, вышедшей из  $O$ , будет:

$$\sigma_1 = v_1 t.$$

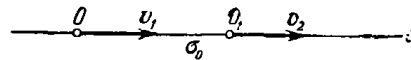
Уравнение движения второй точки, вышедшей из  $O_1$ , будет:

$$\sigma_2 = v_2 t + \sigma_0,$$

ибо отсчет координаты следует по-прежнему вести от начальной точки  $O$ . Столкновение произойдет в момент времени  $T$ , когда



К задаче 3.10.



К задачам 3.11, 3.12.

$$\sigma_1 = \sigma_2, \text{ или}$$

$$v_1 T = v_2 T + \sigma_0,$$

откуда

$$T = \frac{\sigma_0}{v_1 - v_2}.$$

**Задача 3.12.** Решить предыдущую задачу при условии, что вторая точка начинает движение через промежуток времени  $\tau$  после начала движения первой точки.

Решение. Уравнение движения первой точки останется неизменным:

$$\sigma_1 = v_1 t.$$

Уравнение движения второй точки изменится, так как время движения второй точки равно  $(t - \tau)$ , и, следовательно,

$$\sigma_2 = v_2 (t - \tau) + \sigma_0.$$

Приравняв пути, пройденные обеими точками, находим время, прошедшее от начала движения первой точки до столкновения:

$$v_1 T = v_2 (T - \tau) + \sigma_0,$$

откуда

$$T = \frac{\sigma_0 - v_2 \tau}{v_1 - v_2}.$$

**Задача 3.13.** Судно для достройки на плаву спускается на воду по смазанным полозьям с постоянным ускорением. Первый метр пути судно прошло за 1 сек.

Сколько времени потребовалось для спуска судна, если длина полозьев 400 м?

Решение. Уравнение движения судна по полозьям

$$s = \frac{at^2}{2},$$

где  $s$  — пройденный путь,  $a$  — ускорение,  $t$  — время.

Применим эту формулу к первому участку пути, когда судно прошло 1 м за 1 сек

$$s_1 = \frac{at_1^2}{2};$$

здесь  $s_1 = 1$  м, а  $t_1 = 1$  сек. Аналогично для остального пути по полозьям

$$s_2 = \frac{at_2^2}{2},$$

где  $s_2 = 400$  м,  $t_2$  — искомое время.

Для определения  $t_2$  составим отношение

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{t_2^2}{t_1^2},$$

откуда

$$t_2 = t_1 \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} = 1 \cdot \sqrt{\frac{400}{1}} = 20 \text{ сек.}$$

**Задача 3.14.** Подводная лодка, не имевшая хода, погружается на глубину согласно уравнению

$$x = \frac{p}{ks} \left[ t - \frac{m}{ks} (1 - e^{-\frac{ks}{m}t}) \right],$$

где  $p$ ,  $k$ ,  $s$ ,  $m$  — постоянные коэффициенты,  $s$  — площадь горизонтальной проекции лодки. Ось  $x$  направлена по вертикали вниз.

Определить скорость лодки, а также начальное и предельное значения скорости при неограниченном возрастании времени.

**Решение.** Для определения модуля скорости вычисляем производную от  $x$  по времени:

$$v = \left| \frac{dx}{dt} \right| = \frac{p}{ks} (1 - e^{-\frac{ks}{m}t}). \quad (1)$$

Начальное значение модуля скорости находим, подставляя в уравнение (1) значение  $t=0$ . Тогда

$$v_0 = 0.$$

Предельное значение модуля скорости лодки при неограниченном возрастании времени будет:

$$v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v = \frac{p}{ks}.$$

**Задача 3.15.** Корабль движется согласно уравнению

$$s = \left( 1272,7 \ln \frac{1 + 6e^{0,055t}}{7} - 50t \right) \text{ м.} \quad (1)$$

Определить величину начальной скорости судна.

**Решение.** Для определения модуля скорости вычисляем абсолютное значение производной дуговой координаты по времени:

$$\begin{aligned} v = \left| \frac{ds}{dt} \right| &= 1272,7 \frac{7}{1 + 6e^{0,055t}} \cdot \frac{6}{7} 0,055 e^{0,055t} - 50 = \\ &= \frac{420}{1 + 6e^{0,055t}} e^{0,055t} - 50. \quad (2) \end{aligned}$$

Модуль начальной скорости судна определится из (2) при подстановке  $t=0$ , откуда

$$v_0 = 10 \text{ м/сек.}$$

**Задача 3.16.** Частица, несущая электрический заряд  $e$ , движется в однородном электрическом поле с переменной напряженностью  $E = A \sin kt$ , где  $A$  и  $k$  — постоянные коэффициенты. Уравнение движения частицы имеет вид

$$x = \frac{eA}{mk} \left( t - \frac{\sin kt}{k} \right),$$

где  $m$  — постоянная величина.

Определить величину скорости точки, ее начальное значение, а также наибольшее и наименьшее значения скорости.

**Решение.** Для нахождения модуля скорости вычисляем производную от  $x$  по времени

$$v = \left| \frac{dx}{dt} \right| = \frac{eA}{mk} (1 - \cos kt). \quad (1)$$

Подставляя в уравнение (1) начальное значение времени  $t=0$ , получим, что

$$v_0 = 0.$$

Для определения экстремальных значений модуля скорости находим первую производную от величины скорости по времени и, приравнявая ее значение нулю, определяем моменты времени, когда скорость достигает наибольших и наименьших значений:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{eA}{m} \sin kt_1 = 0.$$

Следовательно,  $kt_1 = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots$ , откуда

$$t_1 = \frac{\pi n}{k},$$

где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Подставляя найденное значение  $t_1$  в уравнение (1), находим: при  $n=0$

$$v_{\min} = \frac{eA}{mk} (1 - \cos 0^\circ) = 0; \quad (2)$$

при  $n=1$

$$v_{\max} = \frac{eA}{mk} (1 - \cos \pi) = \frac{2eA}{mk}. \quad (3)$$

При последующих значениях  $n$  величины скорости (2) и (3) будут периодически повторяться.

**Задача 3.17.** Точка  $M$  движется по окружности радиуса  $r$  с касательным ускорением  $w$ , величина которого неизменна. В начальный момент точка находилась в  $M_0$  и ее скорость равнялась нулю.

Определить, в какой момент времени величина нормального ускорения станет равной величине касательного ускорения, и вычислить длину дуги, пройденную точкой к этому моменту.

Решение. Интегрируя равенство

$$\omega_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt}, \quad (1)$$

при  $\omega_{\tau} = \text{const}$  имеем:

$$v_{\tau} = \omega_{\tau} t + C, \quad (2)$$

где  $C$  — произвольная постоянная интегрирования, определяемая из начального условия: при  $t=0$   $v_{\tau} = 0$ . Подставляя эти значения в (2), находим  $C=0$  и, следовательно,

$$v_{\tau} = \omega_{\tau} t. \quad (3)$$

Нормальное ускорение точки определяется формулой

$$\omega_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega_{\tau}^2 t^2}{r}.$$

Для нахождения момента времени, когда касательное и нормальное ускорения по величине равны, приравниваем их значения

$$\frac{\omega_{\tau}^2 t_1^2}{r} = \omega_{\tau}$$

и определяем искомый момент времени

$$t_1 = \sqrt{\frac{r}{\omega_{\tau}}}.$$

Скорость точки (3) можно представить в виде

$$v_{\tau} = \frac{d\sigma}{dt} = \omega_{\tau} t.$$

Интегрируя, находим:

$$\sigma = \omega_{\tau} \frac{t^2}{2} + C.$$

Постоянная  $C_2$  определяется по начальному условию: при  $t=0$   $\sigma=0$ .

Тогда

$$\sigma = \omega_{\tau} \frac{t^2}{2}.$$

Полагая в этом уравнении  $t=t_1$ , находим искомую величину дуги:

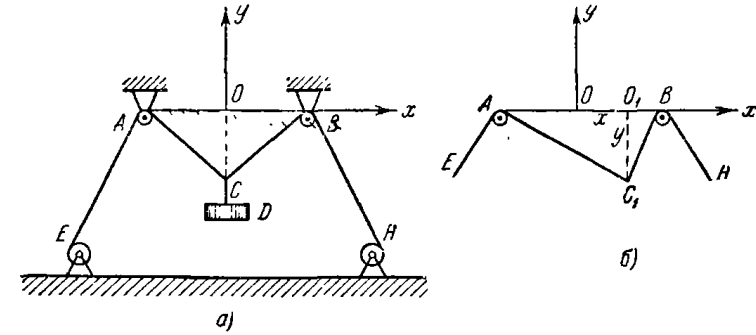
$$\sigma_1 = \frac{\omega_{\tau}}{2} t_1^2 = \frac{\omega_{\tau}}{2} \frac{r}{\omega_{\tau}} = \frac{r}{2}.$$

**Задача 3.18.** Груз  $D$  подвешен на двух тросах  $EAC$  и  $HBC$ , перекинутых через блоки  $A$  и  $B$ . В начальном положении стрела прогиба  $OC = c = 10\sqrt{3}$  м и  $AC = BC$ . Расстояние между блоками

$AB = 2a = 20$  м. Трос  $HBC$  наматывается на барабан лебедки с постоянной скоростью  $v = 1$  м/сек. Трос  $EAC$  разматывается с барабана лебедки с такой же скоростью.

Определить траекторию точки  $C$ , к которой подвешен груз, а также скорость этой точки.

Решение. Выбираем оси координат: начало координат в точке  $O$ , ось  $x$  направляем по  $AB$  вправо, ось  $y$  перпендикулярно к  $AB$  вверх



К задаче 3.18.

(рис. а). Определяем из треугольника  $AOC$  начальную длину тросов:  $AC = BC = b$ ,

$$b^2 = AO^2 + OC^2 = a^2 + c^2 = 10^2 + 10^2 \cdot 3 = 400,$$

откуда  $b = 20$  м.

Рассмотрим произвольное положение груза (рис. б). Длина троса  $AC_1 = b + vt$ , длина троса  $BC_1 = b - vt$ . Обозначив координаты точки  $C_1(x, y)$ , находим зависимость этих координат от времени:

$$(a+x)^2 + y^2 = (b+vt)^2, \quad (1)$$

$$(a-x)^2 + y^2 = (b-vt)^2. \quad (2)$$

Вычитая из (1) равенство (2), имеем:

$$x = \frac{b}{a} vt = 2t \text{ м.} \quad (3)$$

Проекция скорости точки  $C_1$  на ось  $x$  будет:

$$v_x = \dot{x} = \frac{b}{a} v = 2 \text{ м/сек.}$$

Внося в уравнение (1) найденное значение координаты  $x$ , определяем зависимость координаты  $y$  от времени:

$$y = -\sqrt{b^2 - a^2 + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)v^2 t^2} = -\sqrt{300 - 3t^2}. \quad (4)$$

Проекция скорости на ось  $y$  равна производной от координаты  $y$  по времени

$$v_y = \dot{y} = \frac{3t}{\sqrt{300 - 3t^2}}.$$

Скорость точки определится формулой

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} = 2\mathbf{i} + \frac{3t}{\sqrt{300 - 3t^2}} \mathbf{j}.$$

Модуль скорости

$$v = \sqrt{4 + \frac{9t^2}{300 - 3t^2}}.$$

Для нахождения уравнения траектории груза следует совместно решить уравнения (1) и (3), исключив из них время. После несложных преобразований находим уравнение траектории

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2 - a^2} = 1.$$

Таким образом, груз движется по дуге эллипса.

Решение этой задачи показывает многообразие приемов составления уравнений движения точки. В данной задаче уравнения (1) и (2) являются системой уравнений, определяющей зависимость координат от времени, разрешая которую относительно каждой из координат, мы находим уравнения движения груза (3) и (4).

**Задача 3.19.** Точка  $M$  совершает колебательное движение согласно уравнениям:

$$x = a \cos(2kt - \epsilon), \quad (1)$$

$$y = b \cos kt. \quad (2)$$

Определить траекторию точки  $M$ . При каких значениях  $\epsilon$  траектория точки обращается в параболу? Найти скорость точки в начальный момент времени.

**Решение.** Для определения траектории точки надо исключить из уравнений движения время. Для этого преобразуем первое уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= a[\cos 2kt \cos \epsilon - \sin 2kt \sin \epsilon] = \\ &= a[\cos^2 kt \cos \epsilon - \sin^2 kt \cos \epsilon + 2 \sin kt \cos kt \sin \epsilon]. \end{aligned} \quad (3)$$

Из второго уравнения находим:

$$\cos kt = \frac{y}{b}, \quad \sin kt = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (3), получаем уравнение траектории точки  $M$

$$\frac{x}{a} = \left(2 \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \cos \epsilon + 2 \frac{y}{b} \sin \epsilon \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}. \quad (4)$$

Из уравнений (1), (2) следует, что при любых значениях  $\epsilon$  координаты  $x$  и  $y$  не превышают соответственно значений  $\pm a$  и  $\pm b$ . Таким образом, траектории точки  $M$  вписываются в прямоугольник со сторонами  $2a$  и  $2b$ . Уравнение (4) обращается в уравнение параболы при  $\epsilon_1 = 0$  и  $\epsilon_2 = \pi$ :

$$y^2 = \frac{b^2}{2} \left(1 \pm \frac{x}{a}\right).$$

Переходим к определению скорости точки  $M$ . Проекции этой скорости равны первым производным от координат по времени

$$v_x = \dot{x} = -2ak \sin(2kt - \epsilon),$$

$$v_y = \dot{y} = -bk \sin kt.$$

Находим значение этих проекций в начальный момент времени, полагая  $t = 0$ ,

$$v_{x0} = -2ak \sin \epsilon, \quad (5)$$

$$v_{y0} = 0.$$

Таким образом, в начальный момент времени скорость точки направлена по оси  $x$ , а ее величина определяется по формуле (5).

**Задача 3.20.** Точка движется прямолинейно согласно уравнению

$$x = 3 \sin 2\pi t - 4 \cos 2\pi t. \quad (1)$$

Доказать, что движение точки является гармоническим колебательным движением. Определить амплитуду и период колебаний. Найти скорость и ускорение точки

**Решение.** Гармоническое колебательное движение определяется уравнением

$$x = a \sin(kt - \beta), \quad (2)$$

или

$$x = a \sin kt \cos \beta - a \cos kt \sin \beta. \quad (3)$$

Сопоставляя уравнения (1) и (3), замечаем, что они совпадают, если положить

$$k = 2\pi, \quad a \cos \beta = 3, \quad a \sin \beta = 4. \quad (4)$$

Из уравнений (4) находим:

$$a^2 = 25, \quad \text{или} \quad a = 5;$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3} = 1,33, \quad \text{или} \quad \beta = 0,925.$$

Подставляя найденные значения  $a$  и  $\beta$  в уравнение (2), имеем:

$$x = 5 \sin(2\pi t - 0,925).$$

Период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = 1 \text{ сек.}$$

Находим, далее, проекцию скорости точки на направление движения

$$v_x = \dot{x} = 10\pi \cos(2\pi t - 0,925).$$

Проекция ускорения точки равна

$$\omega_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -20\pi^2 \sin(2\pi t - 0,925) = -4\pi^2 x.$$

**Задача 3.21.** Дано уравнение движения точки

$$x = 2 \sin^2\left(3\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Доказать, что точка совершает гармоническое колебательное движение. Определить амплитуду, период колебаний, а также скорость и ускорение точки.

Решение. Используя формулу тригонометрии

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha),$$

представим уравнение движения точки в виде

$$x = 1 - \cos(6\pi t + \pi) = 1 + \sin\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Из этой формулы видно, что точка совершает гармоническое колебательное движение около положения  $A$ , определяемого абсциссой  $x_1 = 1$ .

Если перенести начало координат в точку  $A$ , то уравнение движения точки будет:

$$x = \sin\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right),$$

где  $x$  — координата, отсчитываемая от точки  $A$ . Амплитуда колебаний равна единице, период

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{3} \text{ сек.}$$

Проекция скорости точки на направление движения определится по формуле

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 6\pi \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Проекция ускорения точки равна

$$\omega_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -36\pi^2 \sin\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right),$$

или

$$\omega_x = 36\pi^2 - 36\pi^2 x.$$

**Задача 3.22.** Точка движется согласно уравнению  $s = 48t - 4t^3$ , где координата  $s$  измеряется в метрах, а время — в секундах.

Определить величину скорости точки в моменты времени  $t_1 = 1 \text{ сек}$ ,  $t_2 = 2 \text{ сек}$ ,  $t_3 = 3 \text{ сек}$ ,  $t_4 = 4 \text{ сек}$ . Найти среднюю скорость точки за первую, вторую, третью и четвертую секунды. Найти среднюю скорость точки за четыре секунды. Определить момент времени и расстояние от начала отсчета пути, когда точка остановится.

Решение. Величина скорости определится как производная от пути по времени

$$v_s = \frac{ds}{dt} = 48 - 12t^2. \quad (1)$$

Внося в это выражение значения моментов времени, находим скорости:

$$v_{s1} = 48 - 12 = 36 \text{ м/сек},$$

$$v_{s2} = 48 - 12 \cdot 2^2 = 0,$$

$$v_{s3} = 48 - 12 \cdot 3^2 = -60 \text{ м/сек},$$

$$v_{s4} = 48 - 12 \cdot 4^2 = -144 \text{ м/сек}.$$

Эти значения определяют величины скорости в заданные моменты времени. Для определения среднего значения скорости необходимо разделить пройденный путь на промежуток времени, в течение которого этот отрезок пути пройден. Таким образом, скорость точки за первую секунду будет:

$$v_{1 \text{ ср}} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{44 - 0}{1} = 44 \text{ м/сек},$$

где координата точки в момент  $t = 1 \text{ сек}$ ,  $s_1 = 48 \cdot 1 - 4 \cdot 1^3 = 44 \text{ м}$ , начальная координата  $s_0 = 0$ . Аналогично определяются величины средних скоростей точки за следующие секунды:

$$v_{2 \text{ ср}} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{64 - 44}{1} = 20 \text{ м/сек},$$

$$v_{3 \text{ ср}} = \frac{s_3 - s_2}{t_3 - t_2} = \frac{36 - 64}{1} = -28 \text{ м/сек},$$

$$v_{4 \text{ ср}} = \frac{s_4 - s_3}{t_4 - t_3} = \frac{-64 - 36}{1} = -100 \text{ м/сек}.$$

Знак минус указывает, что скорость направлена в сторону отрицательных  $s$ .

Находим, далее, момент времени, когда точка остановилась, приравняв нулю выражение для скорости (1)

$$48 - 12t^2 = 0,$$

откуда

$$t_* = \pm 2 \text{ сек.}$$

В этот момент скорость точки равна нулю и направление движения изменяется на противоположное. При значении  $t_* = 2$  сек координата точки равнялась

$$s_2 = 48 \cdot 2 - 4 \cdot 2^3 = 64 \text{ м.}$$

Второй отрицательный корень следует отбросить, как лишенный физического смысла, ибо время растет монотонно.

Переходим к определению средней величины скорости за четыре секунды. Путь, пройденный точкой за четыре секунды, складывается из пути  $s_2 = 64$  м, пройденного за первые две секунды, и пути, пройденного за третью и четвертую секунды, когда точка двигалась в сторону отрицательных  $s$ . Найдим этот путь следующим образом. При  $t = 4$  сек координата точки была:

$$s_4 = 48 \cdot 4 - 4 \cdot 4^3 = -64 \text{ м.}$$

Следовательно, за третью и четвертую секунды точка прошла путь

$$|s_4 - s_2| = 128 \text{ м.}$$

За все четыре секунды точка прошла путь

$$64 + 128 = 192 \text{ м.}$$

Величина средней скорости точки равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{192}{4} = 48 \text{ м/сек.}$$

Следует заметить, что точка двигалась вначале в сторону положительной оси  $s$  и прошла в этом направлении путь  $s_2 = 64$  м. Ее средняя скорость при этом была положительна. Далее точка двигалась в противоположном направлении 128 м. Ее средняя скорость, оставаясь по величине постоянной, была на этом участке пути отрицательной. Как видно из решения этой задачи, при определении средней скорости точки следует учитывать тот факт, что при перемене направления движения точки перемещение складывается из всех пройденных участков пути и может быть не равно разности координат конечного и начального положений точки.

**Задача 3.23.** Точка  $M_1$  брошена вертикально вверх. Уравнение движения точки при отсутствии сопротивления воздуха имеет вид

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \quad (1)$$

где  $v_0$  и  $g$  — постоянные коэффициенты.

Определить скорость и ускорение точки, максимальную высоту подъема точки и время, когда точка достигнет наивысшего положения.

**Решение.** Проекция скорости точки находится как производная от координаты по времени

$$v_x = v_0 - gt. \quad (2)$$

Проекция ускорения точки при прямолинейном движении равна производной от проекции скорости по времени или второй производной от координаты по времени

$$w_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -g,$$

т. е. ускорение точки — постоянная величина. Из уравнения (2) видно, что при  $t = 0$   $v_x = v_0$ . Следовательно, постоянная  $v_0$  является значением проекции скорости точки в начальный момент времени.

Чтобы определить момент времени, когда точка достигнет максимальной высоты, воспользуемся тем, что скорость точки в этом положении равна нулю. Обозначая время подъема через  $T$ , из (2) находим:

$$0 = v_0 - gT.$$

Таким образом, время, в течение которого точка достигнет наивысшего положения, равно

$$T = \frac{v_0}{g}. \quad (3)$$

Наибольшую высоту подъема  $h$  найдем, подставив значение времени (3) в уравнение движения (1):

$$h = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2} \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

**Задача 3.24.** Точка  $M_1$  брошена вертикально вверх с начальной скоростью  $v_0$ .

Через сколько секунд  $T$  надо бросить вертикально вверх из того же места с начальной скоростью  $v_1 < v_0$  вторую точку  $M_2$ , чтобы обе точки встретились в кратчайшее время от начала движения первой точки?

Уравнение движения точки, брошенной вертикально вверх, при отсутствии сопротивления воздуха

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где  $v_0$  — начальная скорость точки,  $g$  — ускорение свободного падения.

**Решение.** На первый взгляд может показаться, что вторую точку следует бросить вверх одновременно с первой. Однако скорость второй точки может оказаться достаточно малой и она поднимется на небольшую высоту и упадет на Землю раньше, чем первая точка успеет ее догнать. Поэтому выбор момента времени бросания второй точки играет существенную роль.

Так как вторая точка  $M_2$ , брошенная вверх через  $T$  секунд после первой, имеет меньшую начальную скорость, то встреча возможна только при возвратном движении первой точки вниз. Обозначим буквой  $t_1$



время движения первой точки от ее наивысшего положения до встречи со второй точкой. Тогда путь, пройденный первой точкой вниз за время  $t_1$ , будет:

$$s_1 = \frac{gt_1^2}{2}.$$

Обозначим буквой  $\tau$  время, отсчитываемое от момента, когда первая точка находилась в наивысшем положении, до момента начала движения второй точки. Тогда путь, пройденный второй точкой до встречи с первой, равен

$$s_2 = v_1(t_1 - \tau) - \frac{g(t_1 - \tau)^2}{2}.$$

Так как в момент времени  $t_1$  точки встретились, то, следовательно,

$$s_1 + s_2 = h, \quad (1)$$

где  $h$  — наибольшая высота подъема первой точки, равная  $v_0^2/2g$  (смотри предыдущую задачу). Тогда, подставляя в (1) значение всех величин, находим:

$$g\frac{t_1^2}{2} + v_1(t_1 - \tau) - \frac{g(t_1 - \tau)^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (2)$$

Рассматривая это уравнение как неявную зависимость  $t_1 = f(\tau)$ , находим производную от  $t_1$  по  $\tau$  и приравниваем ее нулю:

$$\frac{dt_1}{d\tau} = 1 - \frac{gt_1}{v_1 + g\tau} = 0,$$

откуда

$$\frac{v_1}{g} = t_1 - \tau. \quad (3)$$

Но  $v_1/g$  равно времени подъема второй точки на наибольшую высоту (см. задачу 3.23). Следовательно, в момент встречи вторая точка будет находиться в наивысшем положении.

Подставим найденное значение  $t_1 - \tau$  из (3) в уравнение (2). Тогда, после приведения подобных членов, находим:

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{gt_1^2}{2} + \frac{v_1^2}{2g},$$

откуда определяется время

$$t_1 = \frac{1}{g} \sqrt{v_0^2 - v_1^2}.$$

Далее, из уравнения (3) находим:

$$\tau = t_1 - \frac{v_1}{g} = \frac{-v_1 + \sqrt{v_0^2 - v_1^2}}{g}. \quad (4)$$

Чтобы найти искомое время  $T$ , по истечении которого с момента бросания первой точки следует бросить вверх вторую точку, необходимо к  $\tau$  прибавить время  $t_0$ , в течение которого первая точка достигла наивысшего положения:

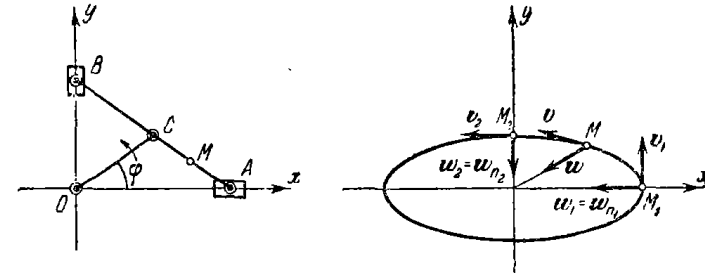
$$T = \tau + t_0 = \frac{-v_1 + \sqrt{v_0^2 - v_1^2}}{g} + \frac{v_0}{g}.$$

Из формулы (4) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \tau > 0 & \text{ при } v_0^2 > 2v_1^2, \\ \tau = 0 & \text{ при } v_0^2 = 2v_1^2, \\ \tau < 0 & \text{ при } v_0^2 < 2v_1^2. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, при  $\tau > 0$  бросание второй точки происходит после того, как первая точка достигла наивысшего положения; при  $\tau < 0$  бросание второй точки происходит до того, как первая точка оказалась в наивысшем положении; а при  $\tau = 0$  бросание второй точки происходит в тот момент, когда первая точка находится в наивысшем положении.

**Задача 3.25.** Линейка эллипсографа  $AB = l$  скользит концом  $A$  по оси абсцисс и концом  $B$  по оси ординат. Линейка приводится



К задаче 3.25.

в движение кривошипом  $OC = 0,5l$ , шарнирно прикрепленным в ее середине. Расстояния  $AM = a$ ,  $BM = b$  известны. Угол  $\varphi$  между осью абсцисс и кривошипом изменяется пропорционально времени  $\varphi = kt$ .

Найти уравнения движения точки  $M$  эллипсографа и уравнение ее траектории. Определить также радиус кривизны траектории точки  $M$ , ее скорость, касательное, нормальное и полное ускорения при произвольном положении механизма и, в частности, в моменты времени  $t_1 = 0$  и  $t_2 = \pi/2k$ .

**Решение.** Для составления уравнений движения точки  $M$  рассмотрим треугольник  $OAC$ . Он равнобедренный:  $OC = AC = 0,5l$ , следовательно,  $\angle COA = \angle CAO = \varphi = kt$ . Тогда координаты точки  $M$  будут:

$$x = BM \cos \varphi = b \cos kt, \quad (1)$$

$$y = AM \sin \varphi = a \sin kt, \quad (2)$$

или в векторном виде

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = b \cos kt \cdot \mathbf{i} + a \sin kt \cdot \mathbf{j},$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  — орты осей координат  $x, y$ . Этими равенствами определяются уравнения движения точки  $M$ .

Для нахождения траектории точки представим уравнения движения в виде

$$\frac{x}{b} = \cos kt, \quad \frac{y}{a} = \sin kt,$$

возведем эти равенства в квадрат и сложим их:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Таким образом, траектория точки  $M$  — эллипс с полуосями  $b, a$ .

Для определения скорости точки  $M$  вычисляем первые производные от координат по времени, равные проекциям скорости точки на соответствующие оси координат:

$$v_x = \dot{x} = -bk \sin kt, \quad v_y = \dot{y} = ak \cos kt.$$

Величина скорости определяется формулой

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = k \sqrt{b^2 \sin^2 kt + a^2 \cos^2 kt}. \quad (3)$$

Направляющие косинусы вектора скорости будут:

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}}, x) = \frac{v_x}{v} = \frac{-b \sin kt}{\sqrt{b^2 \sin^2 kt + a^2 \cos^2 kt}},$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}}, y) = \frac{v_y}{v} = \frac{a \cos kt}{\sqrt{b^2 \sin^2 kt + a^2 \cos^2 kt}}.$$

В векторном виде скорость может быть представлена так:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} = -bk \sin kt \cdot \mathbf{i} + ak \cos kt \cdot \mathbf{j}.$$

Находим проекции ускорения на оси координат, вычисляя первые производные по времени от проекций скорости или вторые производные по времени от координат точки:

$$w_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -bk^2 \cos kt, \quad w_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = -ak^2 \sin kt. \quad (4)$$

Величина ускорения определится по формуле

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = k^2 \sqrt{b^2 \cos^2 kt + a^2 \sin^2 kt}.$$

Направление ускорения может быть найдено путем сопоставления уравнений движения точки (1), (2) и формул, определяющих проекции ускорения на оси координат (4). Последние могут быть представлены в виде

$$w_x = -k^2 x, \quad w_y = -k^2 y;$$

таким образом,

$$\mathbf{w} = w_x \mathbf{i} + w_y \mathbf{j} = -k^2 (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = -k^2 \mathbf{r}.$$

Следовательно, ускорение точки  $M$  направлено по радиусу-вектору, проведенному из  $M$  в  $O$ , и по величине прямо пропорционально расстоянию точки  $M$  от начала координат. Проекция ускорения на касательную определится как производная от проекции скорости на касательную по времени (в данном случае  $v_\tau = v$ )

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{k^2 (b^2 - a^2) \sin kt \cos kt}{\sqrt{b^2 \sin^2 kt + a^2 \cos^2 kt}}.$$

Но величина полного ускорения связана с касательным и нормальным ускорениями зависимостью

$$w^2 = w_\tau^2 + w_n^2.$$

Теперь, после несложных преобразований, найдется величина нормального ускорения точки  $M$ :

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \frac{k^2 ab}{\sqrt{a^2 \cos^2 kt + b^2 \sin^2 kt}}. \quad (5)$$

Зная модуль нормального ускорения точки (5) и ее скорость (3), находим радиус кривизны траектории:

$$\rho = \frac{v^3}{w_n} = \frac{(a^2 \cos^2 kt + b^2 \sin^2 kt)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Пользуясь полученными формулами, определяющими основные кинематические величины в любой момент времени, находим их значения:

	$kt_1 = 0$	$kt_2 = \frac{\pi}{2}$
$x$	$b$	$0$
$y$	$0$	$a$
$v$	$akj$	$-bki$
$w_\tau$	$0$	$0$
$w_n$	$k^2 b$	$k^2 a$
$w$	$-k^2 bi$	$-k^2 aj$
$\rho$	$\frac{a^2}{b}$	$\frac{b^2}{a}$

**Задача 3.26.** Кривошип  $OA = r$  вращается равномерно вокруг точки  $O$  в плоскости чертежа; угол  $\varphi = kt$ . Шатун  $AB$  шарнирно соединен с концом кривошипа в точке  $A$  и проходит через цилиндрический шарнир, который может поворачиваться вокруг неподвижного центра  $N$ . Длина  $AB = l > 2r$ .

Определить уравнения движения точки  $B$ , проекции ее скорости и ускорения на оси координат, касательное, нормальное и полное ускорения, а также радиус кривизны траектории при произвольном положении механизма. Определить координаты, скорость, ускорение точки  $B$  и радиус кривизны ее траектории при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ .

**Решение.** Треугольник  $OAN$  равнобедренный, так как  $OA = ON = r$ . Следовательно,  $\angle OAN = \angle ONA = 90^\circ - \varphi/2$ . Тогда координаты точки  $B$  равны

$$x = r \cos kt + l \sin \frac{kt}{2}, \quad (1)$$

$$y = r \sin kt - l \cos \frac{kt}{2}. \quad (2)$$

Выражения (1) и (2) являются уравнениями движения точки  $B$ . Они получены проектированием ломаной линии  $OAB$  соответственно на оси абсцисс и ординат.

Проекция скорости на неподвижные декартовы оси координат находятся как производные от координат по времени:

$$v_x = \dot{x} = -rk \sin kt + l \frac{k}{2} \cos \frac{kt}{2},$$

$$v_y = \dot{y} = rk \cos kt + l \frac{k}{2} \sin \frac{kt}{2}.$$

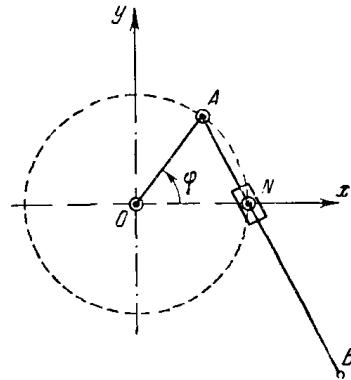
Величина скорости определится по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = k \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4} - rl \sin \frac{kt}{2}}.$$

Проекцию ускорения на касательную найдем как производную от проекции скорости на касательную по времени ( $v_\tau = v$ ):

$$\omega_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{-k^2 rl \cos \frac{kt}{2}}{4 \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4} - rl \sin \frac{kt}{2}}}.$$

Если касательное ускорение  $\omega_\tau$  и проекция скорости на касательную  $v_\tau$  одного знака, то точка  $B$  движется ускоренно. Если же  $\omega_\tau$  и  $v_\tau$  противоположных знаков, то точка  $B$  движется замедленно.



К задаче 3.26.

Проекция ускорения точки на неподвижные декартовы оси координат равны первым производным по времени от проекций скорости на соответствующие оси или вторым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$\omega_x = \ddot{x} = -rk^2 \cos kt - l \frac{k^2}{4} \sin \frac{kt}{2}, \quad (3)$$

$$\omega_y = \ddot{y} = -rk^2 \sin kt + l \frac{k^2}{4} \cos \frac{kt}{2}. \quad (4)$$

Пользуясь уравнениями (3) и (4), определяем величину полного ускорения точки  $B$ :

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} = k^2 \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4} - rl \sin \frac{kt}{2}}.$$

Зная величины полного и касательного ускорений точки, вычисляем модуль нормального ускорения по формуле

$$\omega_n = \sqrt{\omega^2 - \omega_\tau^2} = k^2 \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4} - rl \sin \frac{kt}{2} - \frac{r^2 l^2 \cos^2 \frac{kt}{2}}{16 \left( r^2 + \frac{l^2}{4} - rl \sin \frac{kt}{2} \right)}}.$$

С другой стороны, величина нормального ускорения равна

$$\omega_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Отсюда можно определить радиус кривизны, так как скорость точки и нормальное ускорение известны:

$$\rho = \frac{v^2}{\omega_n} = \frac{\left( 4r^2 + l^2 - 4rl \sin \frac{kt}{2} \right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{64r^4 + 16r^2 l^2 + l^4 - 96r^2 l \sin \frac{kt}{2} - 12rl^3 \sin \frac{kt}{2} + 36r^2 l^2 \sin^2 \frac{kt}{2}}}.$$

Перейдем к вычислению координат точки  $B$ , ее скорости и ускорения при угле  $\varphi_0 = 0$ . Из уравнений движения (1) и (2) находим координаты точки  $B$  при рассматриваемом положении механизма:

$$x_0 = r, \quad y_0 = -l.$$

При этом модуль скорости точки

$$v_0 = k \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}},$$

а касательное ускорение точки будет равно

$$\omega_{\tau 0} = \frac{-k^2 rl}{4 \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}.$$

Величина нормального ускорения

$$\omega_{n0} = k^2 \frac{8r^2 + l^2}{4\sqrt{4r^2 + l^2}}.$$

Величина полного ускорения выразится так:

$$\omega_0 = k^2 \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{16}}.$$

Радиус кривизны траектории при  $\varphi_0 = 0$  будет:

$$\rho_0 = \frac{(4r^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}{8r^2 + l^2}.$$

Соответственно при угле  $\varphi_1 = \pi$  эти величины равны

$$x_1 = -r + l, \quad y_1 = 0,$$

$$v_1 = k \left( r - \frac{l}{2} \right),$$

$$\omega_{n1} = 0,$$

$$\omega_1 = \omega_{n1} = k^2 \left( r - \frac{l}{4} \right),$$

$$\rho_1 = \frac{(2r - l)^3}{4r - l}.$$

**Задача 3.27.** Точка  $M$ , движущаяся с постоянной по величине скоростью  $v$ , описывает цепную линию, уравнение которой имеет вид

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}). \quad (1)$$

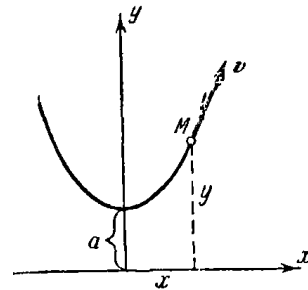
Определить проекции скорости и ускорения, а также полное ускорение точки как функции ее координат. Определить радиус кривизны цепной линии.

**Примечание.** Использовать выражения гиперболических функций через показательные:

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}),$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}),$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}.$$



К задаче 3.27.

**Решение.** Рассматривая  $x$  и  $y$ , входящие в уравнение цепной линии, как функции времени и дифференцируя уравнение цепной линии по времени, имеем:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left( a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \right) = \dot{x} \operatorname{sh} \frac{x}{a}. \quad (2)$$

Далее, так как сумма квадратов проекций скорости равна квадрату скорости точки, то

$$\dot{y}^2 = v^2 - \dot{x}^2. \quad (3)$$

Возводя уравнение (2) в квадрат и подставляя вместо левой части ее значение (3), находим:

$$v^2 - \dot{x}^2 = \dot{x}^2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a} \quad (4)$$

или

$$\dot{x}^2 = \frac{v^2}{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} = \frac{v^2}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}} = \frac{v^2 a^2}{y^2}. \quad (5)$$

Извлекая из обеих частей равенства (5) квадратный корень, легко находим, что

$$\dot{x} = \frac{va}{y}. \quad (6)$$

Это равенство определяет проекцию скорости на ось абсцисс как функцию координат точки.

Чтобы определить проекцию скорости на ось  $y$ , подставим найденное значение (6) в уравнение (2). Тогда

$$\dot{y} = \frac{va}{y} \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \quad (7)$$

или, внося в это равенство значение  $y$  из (1), находим:

$$\dot{y} = v \operatorname{th} \frac{x}{a}. \quad (8)$$

Для вычисления проекции ускорения на ось абсцисс продифференцируем по времени соотношение (6), помня, что  $v = \text{const}$ ,

$$\ddot{x} = -\frac{va}{y^2} \dot{y} = -\frac{va}{y^2} \cdot \frac{va}{y} \operatorname{sh} \frac{x}{a} = -\frac{v^2 a^2}{y^3} \operatorname{sh} \frac{x}{a}. \quad (9)$$

Для определения проекции ускорения на ось ординат вычислим, пользуясь (8), вторую производную от ординаты по времени:

$$\ddot{y} = \frac{v}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}} \cdot \frac{\dot{x}}{a}. \quad (10)$$

Учитывая (6), находим:

$$\ddot{y} = \frac{v}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}} \cdot \frac{va}{ya} = \frac{v^2 a^2}{y^3}. \quad (11)$$

Для нахождения величины ускорения точки воспользуемся формулой

$$\omega^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2, \quad (12)$$

подставляя в которую (9) и (11), имеем, после несложных преобразований:

$$\omega^2 = \left(\frac{v^2 a^2}{y^3}\right)^2 \left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}\right) = \frac{v^4 a^4}{y^6} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}. \quad (13)$$

Используя вновь равенство (1) и извлекая из (13) квадратный корень, находим величину ускорения точки

$$\omega = \frac{v^2 a}{y^3}. \quad (14)$$

Так как точка по условию движется с постоянной скоростью, то ее полное ускорение будет одновременно являться и ее нормальным ускорением:

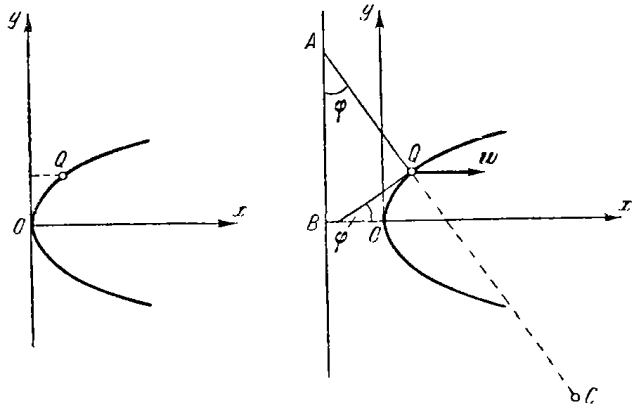
$$\omega = \omega_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (15)$$

Сопоставляя равенства (14) и (15), определяем радиус кривизны цепной линии

$$\rho = \frac{y^2}{a}. \quad (16)$$

Задачу можно решить непосредственным дифференцированием уравнения цепной линии, не переходя к гиперболическим функциям. Однако такой путь решения является более длинным.

**Задача 3.28.** Точка  $Q$  движется по параболе  $y^2 = 2px$  так, что положение ее проекции на ось ординат дается формулой  $y = ct$ .



К задаче 3.28.

Определить скорость и ускорение точки  $Q$ , а также радиус кривизны параболы.

**Решение.** Координаты  $x$ ,  $y$  движущейся точки  $Q$ , входящие в уравнение параболы, являются функциями времени. Вычисляя

производную по времени от обеих частей уравнения параболы, имеем:

$$2y\dot{y} = 2p\dot{x},$$

или

$$yv_y = pv_x. \quad (1)$$

С другой стороны, дифференцируя по времени  $y = ct$ , находим:

$$\dot{y} = v_y = c.$$

Тогда из (1) имеем:

$$v_x = \frac{yc}{\rho},$$

и, следовательно, скорость точки определится соотношением

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} = \frac{yc}{\rho} \mathbf{i} + c \mathbf{j}.$$

Величина скорости равна

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = c \sqrt{\frac{2x}{\rho} + 1}. \quad (2)$$

Проекция ускорения на оси координат находим по формулам:

$$\omega_x = \dot{v}_x = \frac{c}{\rho} \dot{y} = \frac{c^2}{\rho} = \text{const},$$

$$\omega_y = \dot{v}_y = 0.$$

Таким образом, модуль полного ускорения точки равен

$$\omega = |\omega_x| = \frac{c^2}{\rho}.$$

Обозначая угол между касательной к параболы и осью  $x$  буквой  $\varphi$ , находим величину нормального ускорения точки  $Q$

$$\omega_n = \omega |\cos(90^\circ - \varphi)| = \omega |\sin \varphi|.$$

С другой стороны,

$$\omega_n = \frac{v^2}{\rho},$$

откуда

$$\rho = \frac{v^2}{\omega_n} = \frac{v^2}{\omega |\sin \varphi|} = \frac{v^2 \rho}{c^2 |\sin \varphi|},$$

или, учитывая (2), получаем:

$$\rho = \frac{2x + p}{|\sin \varphi|}. \quad (3)$$

Восстанавливая в точке  $B$ , находящейся на расстоянии  $OB = p/2$  от точки  $O$ , перпендикуляр к оси абсцисс (директрису параболы),

находим точку  $A$ , в которой этот перпендикуляр пересекается с нормалью к траектории точки. Тогда

$$|\overline{QA}| = \frac{\frac{p}{2} + x}{|\sin \varphi|}. \quad (4)$$

Сопоставляя равенства (3) и (4), находим:

$$\rho = |\overline{QC}| = 2 |\overline{QA}|,$$

где точка  $C$  — центр кривизны.

**Задача 3.29.** Точка  $M$  движется согласно уравнению  $\sigma = ae^{kt}$ , причем угол, образуемый полным ускорением с касательной, остается неизменным и равным  $60^\circ$ .

Определить скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки, а также радиус кривизны траектории как функции дуги  $\sigma$ .

Решение. Проекцию скорости на касательную находим как производную от дуги по времени

$$v_\tau = \dot{\sigma} = ake^{kt} = k\sigma.$$

Проекция ускорения точки на касательную равна

$$w_\tau = \dot{v}_\tau = ak^2e^{kt} = k^2\sigma.$$

Так как угол между полным ускорением и касательной известен по условию, то модуль полного ускорения определится из равенства

$$w \cos \alpha = w_\tau,$$

откуда

$$w = \frac{w_\tau}{\cos 60^\circ} = 2k^2\sigma.$$

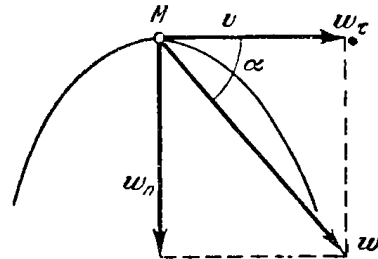
Величина нормального ускорения точки будет:

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \sqrt{3}k^2\sigma.$$

Радиус кривизны траектории определяется по формуле

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{k^2\sigma^2}{\sqrt{3}k^2\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma = \frac{\sqrt{3}}{3}ae^{kt}.$$

Радиус кривизны с течением времени неограниченно возрастает. Траектория точки — расходящаяся спираль.



К задаче 3.29.

**Задача 3.30.** Движение точки задано уравнениями в декартовых координатах

$$\begin{aligned} x &= e^t \cos t, \\ y &= e^t \sin t, \\ z &= e^t. \end{aligned}$$

Определить радиус кривизны траектории.

Решение. Для нахождения радиуса кривизны траектории воспользуемся формулой нормального ускорения

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (1)$$

Вычислим скорость точки. Проекции скорости на неподвижные декартовы оси равны

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= e^t (\cos t - \sin t), \\ v_y = \dot{y} &= e^t (\cos t + \sin t), \\ v_z = \dot{z} &= e^t. \end{aligned}$$

Тогда

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = e^t \sqrt{3}.$$

Переходим к определению проекций ускорения точки:

$$\begin{aligned} w_x = \ddot{x} &= -2e^t \sin t, \\ w_y = \ddot{y} &= 2e^t \cos t, \\ w_z = \ddot{z} &= e^t. \end{aligned}$$

Абсолютная величина ускорения будет

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = e^t \sqrt{5}.$$

Касательное ускорение находим как производную от скорости по времени:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = e^t \sqrt{3}.$$

Зная величины полного и касательного ускорений точки, находим ее нормальное ускорение

$$w_n^2 = w^2 - w_\tau^2,$$

откуда

$$w_n^2 = w^2 - w_\tau^2 = 5e^{2t} - 3e^{2t} = 2e^{2t}$$

и, следовательно,

$$w_n = e^t \sqrt{2}. \quad (2)$$

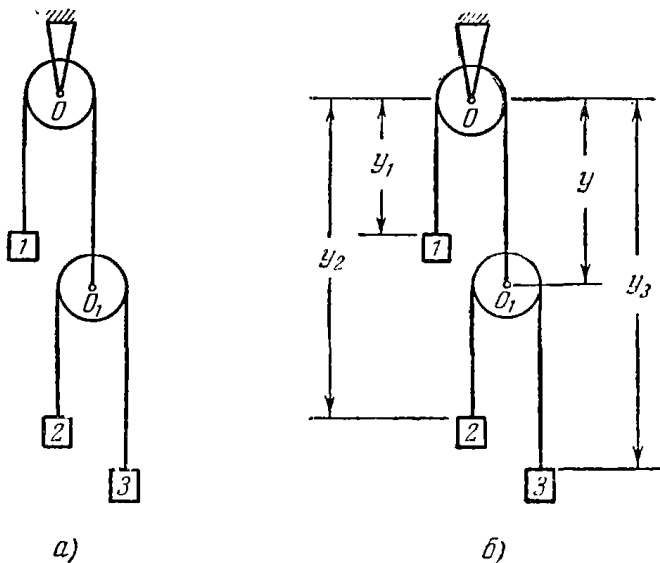
Внося значения скорости и нормального ускорения в формулу (1), находим радиус кривизны траектории

$$\rho = \frac{v^2}{\omega_n} = \frac{3e^{2t}}{e^t \sqrt{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{2} e^t. \quad (3)$$

Радиус кривизны и нормальное ускорение являются важными характеристиками движения точки.

В данной задаче из уравнения (3) следует, что при неограниченном возрастании времени радиус кривизны неограниченно возрастает. Однако нормальное ускорение не стремится к нулю при неограниченном возрастании времени, как это видно из (2), а, наоборот, неограниченно возрастает. Траектория точки, заданная параметрическими уравнениями движения, представляет логарифмическую спираль, радиус кривизны которой неограниченно возрастает с течением времени.

**Задача 3.31.** Система состоит из двух блоков (рис. а), один из которых может вращаться вокруг неподвижной оси  $O$ , второй может



К задаче 3.31.

вращаться вокруг подвижной оси  $O_1$ . Через первый блок перекинут трос, прикрепленный одним концом к подвижной оси  $O_1$ . Груз 1, прикрепленный ко второму концу троса, движется в данный момент вверх со скоростью  $6 \text{ м/сек}$  и с замедлением  $2 \text{ м/сек}^2$ . Груз 3, прикрепленный к тросу, перекинутому через подвижный блок, движется вверх с замедлением  $4 \text{ м/сек}^2$ , имея в данный момент скорость  $3 \text{ м/сек}$ .

Найти скорость и ускорение центра подвижного блока, точки  $O_1$  и груза 2 в данный момент времени.

Решение. Обозначим ординаты грузов соответственно через  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  и ординату точки  $O_1$  буквой  $y$  (рис. б). Так как длина троса между грузом 1 и центром блока  $O_1$  неизменна, то

$$y_1 + y + \pi r = \text{const},$$

где буквой  $r$  обозначен радиус блока. Точно так же неизменна и длина троса, соединяющего грузы 2 и 3. Выражаем длину этого троса

$$y_2 - y - y_3 - y + \pi r = \text{const}.$$

Дифференцируя оба равенства по времени, находим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 + \dot{y} &= 0, \\ \dot{y}_2 + \dot{y}_3 - 2\dot{y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Подставляя заданные значения скоростей  $\dot{y}_1$  и  $\dot{y}_3$ , имеем:

$$\dot{y} = -6 \text{ м/сек},$$

$$\dot{y}_2 = 2\dot{y} - \dot{y}_3 = -15 \text{ м/сек}.$$

Дифференцируя уравнения (1) по времени, получим:

$$\ddot{y}_1 + \ddot{y} = 0,$$

$$\ddot{y}_2 + \ddot{y}_3 - 2\ddot{y} = 0.$$

Внося в эти уравнения известные значения ускорений  $\ddot{y}_1$  и  $\ddot{y}_3$ , находим:

$$\ddot{y} = 2 \text{ м/сек}^2,$$

$$\ddot{y}_2 = 2\ddot{y} - \ddot{y}_3 = 8 \text{ м/сек}^2.$$

Таким образом, скорость  $\dot{y}$  и ускорение  $\ddot{y}$  точки  $O_1$  равны скорости и ускорению груза 1, но направлены в противоположную сторону. Скорость  $\dot{y}_2$  груза 2 направлена вниз и равна  $15 \text{ м/сек}$ , ускорение этого груза  $\ddot{y}_2$  направлено вверх и равно  $8 \text{ м/сек}^2$ .

**Задача 3.32.** Ускорение точки равно  $12t \text{ м/сек}^2$  и направлено по оси  $x$  в отрицательном направлении. При  $t=2 \text{ сек}$  скорость точки равнялась  $6 \text{ м/сек}$  и была направлена по оси  $x$  в положительном направлении. При  $t=3 \text{ сек}$  точка находилась на оси  $x$  на расстоянии  $50 \text{ м}$  от своего начального положения.

Определить уравнение движения точки.

Решение. Точка движется прямолинейно по оси  $x$ , следовательно, ее ускорение в проекции на ось  $x$  равно

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -12t.$$

Представим это уравнение в виде

$$d\dot{x} = -12t \cdot dt, \quad (1)$$

умножив обе его части на  $dt$  и заметив, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\dot{x}}{dt}.$$

Уравнение (1) интегрируем:

$$\dot{x} = -6t^2 + C_1. \quad (2)$$

Для определения произвольной постоянной интегрирования  $C_1$  воспользуемся условием, что при  $t=2$  сек  $\dot{x}=6$  м/сек. Внося эти значения переменных в уравнение (2), находим:

$$6 = -6 \cdot 2^2 + C_1$$

или

$$C_1 = 30.$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -6t^2 + 30.$$

Умножая обе части этого уравнения на  $dt$ , находим:

$$dx = -6t^2 dt + 30 dt.$$

Интегрируя, получаем:

$$x = -2t^3 + 30t + C_2. \quad (3)$$

Чтобы определить произвольную постоянную интегрирования  $C_2$ , внесем в уравнение (3) соответственно условию  $x=50$  м при  $t=3$  сек:

$$50 = -2 \cdot 27 + 30 \cdot 3 + C_2,$$

отсюда

$$C_2 = 14.$$

Внося это значение в уравнение (3), находим уравнение движения точки

$$x = -2t^3 + 30t + 14.$$

**Задача 3.33.** В течение 20 сек скорость корабля, совершающего движение (циркуляцию) по дуге окружности радиуса 200 м, падает с 15 до 12 м/сек.

Предполагая, что величина касательного ускорения пропорциональна квадрату скорости, определить путь, пройденный за первые десять секунд, и угол циркуляции.

Решение. Касательное ускорение корабля пропорционально квадрату скорости, следовательно,

$$\frac{dv}{dt} = kv^2, \quad (1)$$

где  $k$  — неизвестный по величине коэффициент пропорциональности. Отделяя переменные, находим:

$$\frac{dv}{v^2} = k dt.$$

Воспользуемся для нахождения коэффициента  $k$  условием, что в течение 20 сек скорость корабля падает с 15 до 12 м/сек. Интегрируя в этих пределах уравнение (1), имеем:

$$\int_{15}^{12} \frac{dv}{v^2} = k \int_0^{20} dt$$

или

$$-\frac{1}{v} \Big|_{15}^{12} = 20k,$$

откуда

$$-\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15}\right) = 20k$$

и

$$k = -1/1200.$$

Переходим, далее, к определению пути, пройденного кораблем за первые десять секунд. Для этого вначале находим интегрированием из (1) скорость как функцию времени. Имеем:

$$-\frac{1}{v} - C = kt. \quad (2)$$

Для определения произвольной постоянной интегрирования надо воспользоваться начальными условиями движения: при  $t=0$  скорость  $v=v_0$ . Внося эти значения переменных в (2), находим:

$$C = \frac{1}{v_0}.$$

Подставляя это значение в (2), определяем величину скорости

$$v = \frac{v_0}{1 - v_0 kt}.$$

Для нахождения длины пути, пройденного кораблем за первые десять секунд, воспользуемся зависимостью

$$\frac{ds}{dt} = v = \frac{v_0}{1 - v_0 kt}.$$



Отделяя переменные и интегрируя, находим:

$$ds = \frac{v_0 dt}{1 - kv_0 t},$$

откуда

$$s = \int_0^{10} \frac{dv_0 t}{1 - kv_0 t} = -\frac{1}{k} \int_0^{10} \frac{d(1 - kv_0 t)}{1 - kv_0 t}.$$

Следовательно,

$$s = -\frac{1}{k} \ln(1 - kv_0 t) \Big|_0^{10}.$$

Подставляя значения всех величин, получим:

$$s = 1200 \ln(1 + 1/1200 \cdot 15 \cdot 10) = 1200 \ln 9/8 \approx 150 \text{ м.}$$

Тогда угол циркуляции в радианах будет равен

$$\varphi = s/R = 150/200 = 0,75.$$

**Задача 3.34.** Точка движется прямолинейно с ускорением

$$\omega = 6 \sqrt[3]{x} \text{ м/сек}^2,$$

где  $x$  — координата точки. В момент времени  $t_1 = 2$  сек координата точки была  $x_1 = 27$  м, а скорость равнялась  $v_1 = 27$  м/сек.

Определить уравнение движения точки, а также зависимость скорости и ускорения от времени.

Решение. Чтобы найти уравнение движения точки, представим заданную зависимость ускорения от пути в виде

$$\frac{dv}{dt} = 6 \sqrt[3]{x}$$

и умножим обе части уравнения на  $dx$ , чтобы отделить переменные

$$\frac{dx \cdot dv}{dt} = 6 \sqrt[3]{x} dx,$$

откуда

$$v dv = 6x^{1/3} dx.$$

Интегрируя, находим:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{9}{2} x^{4/3} + C_1, \quad (1)$$

где  $C_1$  — произвольная постоянная интегрирования. Для ее определения подставим в уравнение (1) значения  $v_1 = 27$  м/сек при  $x_1 = 27$  м. Тогда из уравнения (1) получаем  $C_1 = 0$  и, следовательно,

$$v = 3x^{2/3}. \quad (2)$$

Используя зависимость  $v = dx/dt$  и умножая уравнение (2) на  $dt$ , отделим переменные

$$\frac{dx}{x^{2/3}} = 3dt.$$

Интегрируя, находим:

$$3x^{1/3} = 3t + C_2. \quad (3)$$

Произвольную постоянную интегрирования определяем, используя условие задачи: при  $t_1 = 2$  сек  $x_1 = 27$  м. Подставляя эти значения в уравнение (3), находим  $C_2 = 3$ . Уравнение движения точки получим, подставив значение произвольной постоянной в (3):

$$x = (t + 1)^3.$$

Зависимость скорости от времени найдем, вычисляя производную по времени от  $x$ :

$$v = 3(t + 1)^2.$$

Ускорение как функция времени определится как производная от скорости по времени:

$$\omega = 6(t + 1).$$

**Задача 3.35.** Зависимость пройденного пути от времени определяется трапецией, представленной на графике.

Начертить график, представляющий зависимость величины скорости от времени ( $s_2 = s_1$ ).

Решение. В течение времени от 0 до  $t_1$  точка движется равномерно со скоростью, равной по модулю

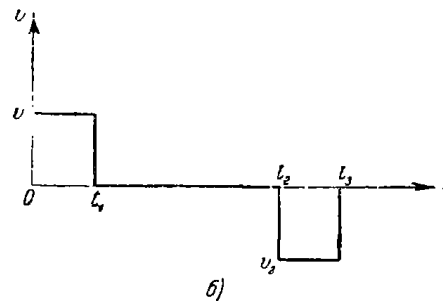
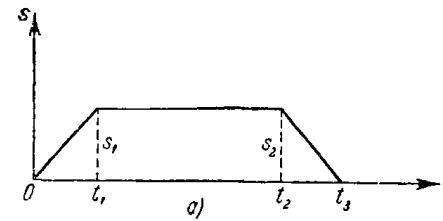
$$v_1 = \frac{s_1}{t_1}.$$

Начиная с момента  $t_1$  до  $t_2$  точка неподвижна, ее расстояние от начала отсчета пути остается неизменным. Далее, от момента  $t_2$  до момента  $t_3$  точка движется равномерно в обратном направлении со скоростью, равной по модулю

$$v_2 = \frac{s_1}{t_3 - t_2}.$$

Искомая зависимость скорости от времени представлена на рис. б.

**Задача 3.36.** Зависимость величины скорости первой точки от времени изображается дугой полуокружности  $AMB$ . Начальное и



К задаче 3.35.

конечное значения величины скорости равны  $v_0$ . Время движения  $t_1$ .

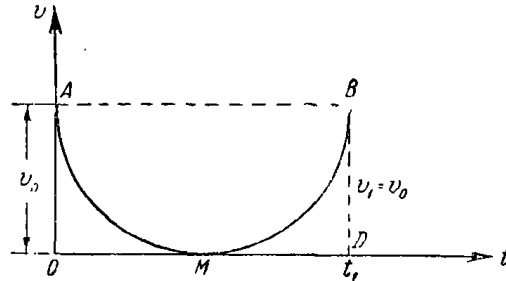
Определить *постоянную* скорость  $c$ , которую надо сообщить второй точке, чтобы она прошла тот же путь в то же время.

Решение. Первая точка прошла за время  $t_1$  путь, равный площади, заключенной между полуокружностью  $AMB$  и отрезком  $OD$ , так как

$$v = \frac{ds}{dt},$$

и, следовательно,

$$s = \int_0^{t_1} v dt,$$



К задаче 3.36.

а этот определенный интеграл и равен указанной площади.

Вычислим искомую площадь как площадь прямоугольника  $OABD$  без площади полукруга:

$$s = v_0 t_1 - \frac{\pi R^2}{2} = v_0 t_1 - \frac{\pi}{2} v_0 \frac{t_1^2}{2}, \quad (1)$$

так как численные значения  $v_0$  и  $t_1/2$  равны радиусу окружности.

С другой стороны, этот же путь вторая точка должна пройти за то же время, следовательно,

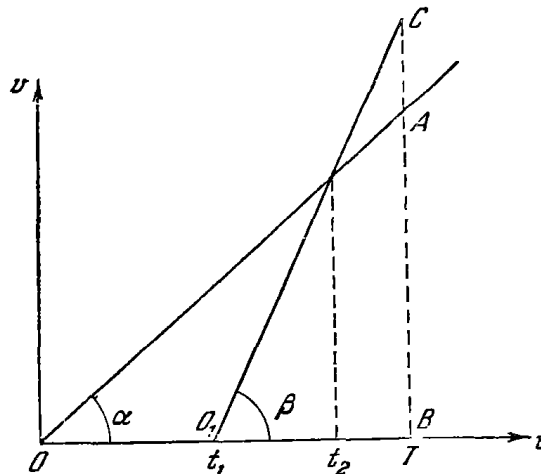
$$s = ct_1. \quad (2)$$

Приравняв оба значения пути (1) и (2), находим:

$$v_0 t_1 - \frac{\pi}{2} v_0 \frac{t_1^2}{2} = ct_1,$$

откуда величина скорости второй точки равна

$$c = v_0 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$



К задаче 3.37.

**Задача 3.37.** Две точки движутся по одной прямой из одного и того же начального положения. Зависимость скорости каждой точки от времени представлена на графике. Известны моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  (см. рисунок).

Определить время  $T$  от начала движения первой точки, по истечении которого обе точки встретятся.

Решение. Площадь треугольника  $OAB$ , численно равная пути, пройденному первой точкой за время  $t$ , дается выражением

$$\frac{1}{2} OB \cdot AB = \frac{1}{2} t \cdot t \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

где через  $\alpha$  обозначен угол наклона прямой  $OA$  к оси абсцисс. Площадь треугольника  $O_1CB$ , численно равная пути, пройденному второй точкой за это же время  $t$ , выражается так:

$$\frac{1}{2} O_1B \cdot CB = \frac{1}{2} (t - t_1)(t - t_1) \operatorname{tg} \beta,$$

где через  $\beta$  обозначен угол наклона прямой  $O_1C$  к оси абсцисс.

Точки встретятся в момент  $T$ , когда их пути будут равны. Следовательно, приравняв площади треугольников, равные численно пройденным путям, получаем:

$$\frac{1}{2} T^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} (T - t_1)^2 \operatorname{tg} \beta. \quad (1)$$

С другой стороны, из графика следует равенство

$$t_2 \operatorname{tg} \alpha = (t_2 - t_1) \operatorname{tg} \beta. \quad (2)$$

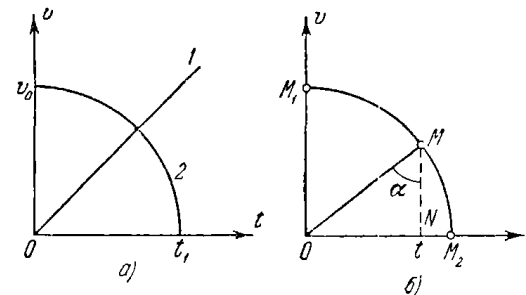
Решаем совместно систему уравнений (1) и (2). Из уравнения (2) имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{t_2 - t_1}{t_2} \operatorname{tg} \beta.$$

Подставляя это значение в уравнение (1) и сокращая обе части равенства на  $\operatorname{tg} \beta$ , после несложных преобразований находим:

$$T = t_2 - \sqrt{t_2(t_2 - t_1)}.$$

**Задача 3.38.** На рис. а представлены зависимости величины скорости от времени для двух прямолинейно движущихся точек, вышедших одновременно из одного



К задаче 3.38.

и того же места. Зависимость модуля скорости от времени изображается на графике для первой точки прямой, проходящей через начало координат, для второй точки — четвертью окружности.

Определить: 1) ускорение второй точки как функцию времени; 2) ускорение

первой точки, если известно, что первая точка догоняет вторую точку в тот момент, когда последняя останавливается; 3) вычислить время от

начала движения до момента, когда величины скоростей обеих точек равны.

Считать известными  $v_0$  и  $t_1$ .

Решение. Рассмотрим произвольное положение второй точки  $M$ , которое она занимает в некоторый момент времени  $t$  (рис. б).

1. Отрезок  $MN$  равен модулю скорости второй точки  $v_2$ , отрезок  $ON$  соответствует времени  $t$ ; радиус  $OM$  равен, с одной стороны, величине начальной скорости второй точки  $v_0$ , а с другой — времени  $t_1$ , когда вторая точка останавливается. Тогда

$$\cos \alpha = \frac{v_2}{v_0}, \quad \sin \alpha = \frac{t}{t_1}.$$

Возводя эти два равенства в квадрат и складывая, находим:

$$\left(\frac{v_2}{v_0}\right)^2 + \left(\frac{t}{t_1}\right)^2 = 1,$$

откуда модуль скорости второй точки в любой момент времени равен

$$v_2 = \frac{v_0}{t_1} \sqrt{t_1^2 - t^2}.$$

Проекция ускорения второй точки, движущейся прямолинейно, на направление движения будет:

$$\omega_2 = \dot{v}_2 = -\frac{v_0 t}{t_1 \sqrt{t_1^2 - t^2}}.$$

2. Вторая точка останавливается при  $v_2 = 0$ , т. е. при  $t = t_1$ .

Путь, пройденный второй точкой, измеряется площадью четверти круга

$$s_2 = \frac{\pi}{4} OM_1 \cdot OM_2 = \frac{\pi}{4} v_0 t_1.$$

Путь, пройденный за это же время первой точкой, движущейся равноускоренно, равен

$$s_1 = \frac{1}{2} \omega_1 t_1^2,$$

где  $\omega_1$  — искомая величина ускорения первой точки. По условию, пути, пройденные обеими точками к этому моменту  $t_1$ , равны, так как первая точка догоняет в этот момент вторую точку. Следовательно,  $s_1 = s_2$  и

$$\frac{\pi}{4} v_0 t_1 = \frac{1}{2} \omega_1 t_1^2.$$

Отсюда определяется модуль ускорения первой точки

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2} \frac{v_0}{t_1}.$$

3. Величина скорости первой точки в любой момент времени  $t$  равна

$$v_1 = \omega_1 t = \frac{\pi}{2} \frac{v_0}{t_1} t.$$

Величина скорости второй точки была найдена выше:

$$v_2 = \frac{v_0}{t_1} \sqrt{t_1^2 - t^2}.$$

Приравнявая эти два значения модуля скорости, определяем тот момент времени  $T$ , когда величины скоростей обеих точек одинаковы:

$$\frac{\pi}{2} \frac{v_0}{t_1} T = \frac{v_0}{t_1} \sqrt{t_1^2 - T^2}.$$

После несложных преобразований имеем окончательно:

$$T = \frac{2t_1}{\sqrt{4 + \pi^2}}.$$

Для приобретения навыков в решении задач на определение скорости и ускорения точки рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 322, 323, 325, 330, 341, 346, 352, 353, 363, 367, 370, 371, 372, 373, 374.

ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Простейшими движениями твердого тела являются *поступательное движение и вращение твердого тела вокруг неподвижной оси*.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается во все время движения параллельной своему первоначальному направлению. Траектории точек при этом движении представляют собой одинаковые кривые, которые могут быть получены одна из другой путем параллельного смещения. При поступательном движении скорости и ускорения всех точек твердого тела в данный момент геометрически равны. Следовательно, при исследовании поступательного движения твердого тела достаточно определить движение одной какой-либо точки тела. Таким образом, задача о поступательном движении твердого тела сводится к задаче кинематики точки.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси точки, лежащие на оси вращения, неподвижны, остальные точки описывают окружности с центрами, находящимися на оси вращения и с радиусами, равными длине перпендикуляра, опущенного из точки на ось вращения. Эти окружности расположены в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения.

В данной главе мы рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси и преобразование простейших движений твердых тел. При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси криволинейная координата любой точки, движущейся по окружности, являющейся ее траекторией, определяется формулой

$$\sigma = \sigma_0 + h\varphi, \tag{1*}$$

где  $\sigma$  — дуговая координата движущейся точки,  $\sigma_0$  — начальное значение дуговой координаты,  $h$  — кратчайшее расстояние от точки до оси вращения,  $\varphi$  — угол поворота твердого тела вокруг оси. Угол поворота связан со временем зависимостью

$$\varphi = f(t), \tag{2*}$$

называемой *уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси*. Угол  $\varphi$  называется *угловым перемещением твердого тела*, вращающегося вокруг неподвижной оси за данный промежуток времени. Измеряется угол  $\varphi$  следующим образом: проводим неподвижную плоскость  $N$  через ось вращения  $Oz$  и неподвижную прямую  $Ox$ , подвижную плоскость  $M$ , жестко связанную с вращающимся телом, проводим через ось вращения  $Oz$  и какую-либо точку твердого тела. Тогда двугранный угол между этими плоскостями определяет полностью положение твердого тела (рис. 4.1). Линейный угол поворота  $\varphi$  измеряется в радианах или в оборотах. Один оборот соответствует  $2\pi$  радианам.

*Угловая скорость твердого тела* характеризует быстроту изменения угла поворота твердого тела. Угловая скорость — вектор, на-

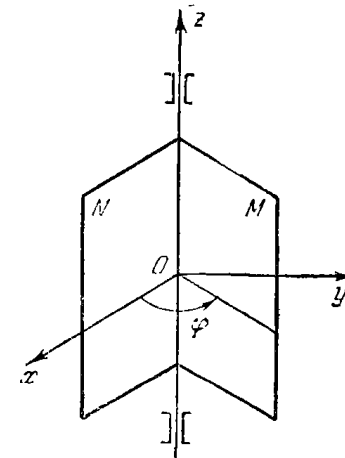


Рис. 4.1.

правленный по оси вращения в ту сторону, с которой вращение видно происходящим против часовой стрелки (для правой системы осей). Так, на рис. 4.1 вектор угловой скорости должен быть направлен в положительном направлении оси  $z$ , если угол  $\varphi$  увеличивается, и в отрицательном направлении оси  $z$ , если угол  $\varphi$  уменьшается. Проекция угловой скорости на ось вращения  $z$  равна производной от угла поворота по времени

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{3*}$$

При отсчете угла поворота в радианах и измерении времени в секундах угловая скорость измеряется в  $\text{сек}^{-1}$ . В технике угловую скорость часто определяют числом оборотов в минуту ( $n \text{ об/мин}$ ). Связь между этими единицами измерения дается формулой

$$\omega = n \frac{2\pi}{60} \text{ сек}^{-1} = \frac{n\pi}{30} \text{ сек}^{-1}. \tag{4*}$$

Для характеристики быстроты изменения угловой скорости во времени служит угловое ускорение. *Угловое ускорение* — вектор, совпадающий по направлению с вектором угловой скорости, если вращение ускоренное, и направленный прямо противоположно угловой скорости, если вращение замедленное. Проекция углового ускорения на ось вращения равна производной от проекции угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота по времени:

$$\epsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{5*}$$

При отсчете угла поворота в радианах и измерении времени в секундах угловое ускорение измеряется в  $\text{сек}^{-2}$ .

Если угловая скорость  $\omega_z$  постоянна, то вращение называется равномерным и происходит по закону

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_z t. \quad (6^*)$$

Если угловое ускорение  $\epsilon_z$  — величина постоянная, то вращение называется равнопеременным (равноускоренным или равнозамедленным) и происходит согласно уравнениям:

$$\omega_z = \omega_{0z} + \epsilon_z t, \quad (7^*)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_{0z} t + \frac{\epsilon_z t^2}{2}. \quad (8^*)$$

Если знаки  $\omega_z$  и  $\epsilon_z$  совпадают, то вращение равноускоренное, в противном случае — равнозамедленное.

Проекция скорости точки твердого тела на касательную к окружности, направленную в сторону возрастания дуговой координаты  $s$ , дается выражением

$$v_\tau = \frac{ds}{dt} = \omega_z h. \quad (9^*)$$

Скорость точки твердого тела определяется векторной формулой

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (10^*)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из любой точки, лежащей на оси вращения, к рассматриваемой точке твердого тела.

Ускорение точки твердого тела складывается из нормального ускорения и касательного ускорения. Нормальное ускорение направлено от точки по перпендикуляру к оси вращения, в сторону этой оси, а его модуль равен

$$\omega_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 h. \quad (11^*)$$

Касательное ускорение направлено по касательной к траектории, а его проекция на касательную равна

$$\omega_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \epsilon_z h. \quad (12^*)$$

Модуль полного ускорения точки

$$\omega = \sqrt{\omega_n^2 + \omega_\tau^2} = h \sqrt{\omega^4 + \epsilon^2}. \quad (13^*)$$

Здесь знак проекции у  $\omega_z$  и  $\epsilon_z$  можно опустить, так как  $\omega_z = \pm \omega$ ,  $\epsilon_z = \pm \epsilon$  и, следовательно,  $\omega_z^4 = \omega^4$ ,  $\epsilon_z^2 = \epsilon^2$ .

Полное ускорение составляет угол  $\alpha$  с перпендикуляром, опущенным из точки на ось вращения, причем угол  $\alpha$  отсчитывается от ускорения точки к перпендикуляру ( $-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ). При этом

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_\tau}{\omega_n} = \frac{\epsilon_z}{\omega^2}. \quad (14^*)$$

Часто показывают направление вращения и направление углового ускорения дугowymi стрелками  $\omega$  и  $\epsilon$  (рис. 4.2). Направление дуговой стрелки  $\omega$  показывает направление вращения и определяет направление скоростей всех точек твердого тела (рис. 4.2).

Если дуговые стрелки  $\omega$  и  $\epsilon$  одного направления, то вращение ускоренное, угловая скорость твердого тела возрастает. Если дуговые стрелки  $\omega$  и  $\epsilon$  противоположно направлены, то вращение замедленное, угловая скорость твердого тела уменьшается. Направление  $\epsilon$  определяет направление касательного ускорения точек твердого тела (рис. 4.2).

В этом параграфе решаются задачи на определение проекций угловой скорости и углового ускорения твердого тела на ось вращения по заданному уравнению движения.

Эта задача сводится к дифференцированию угла поворота по времени. Обратная задача — определение закона вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, если известно его угловое ускорение или угловая скорость. Эта задача решается интегрированием и последующим определением произвольных постоянных интегрирования по начальным условиям движения.

Зная угловую скорость и угловое ускорение твердого тела, можно определять скорости и ускорения отдельных точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

При решении задач на вращение твердого тела вокруг неподвижной оси рекомендуется придерживаться такой последовательности действий.

Первый тип задач — дано уравнение вращения твердого тела, требуется определить угловую скорость, угловое ускорение, скорость и ускорение точки твердого тела:

- 1) выбираем систему координат так, чтобы одна из осей (для определенности ось  $z$ ) совпала с осью вращения;
- 2) составляем уравнение вращения твердого тела (зависимость угла поворота от времени);
- 3) дифференцируя по времени угол поворота, определяем проекцию угловой скорости на ось вращения;
- 4) вычисляя вторую производную от угла поворота по времени, находим проекцию углового ускорения на ось вращения;
- 5) пользуясь выражением проекции угловой скорости на ось вращения, вычисляем линейную скорость точки и ее нормальное ускорение;
- 6) пользуясь выражением проекции углового ускорения на ось вращения, определяем касательное ускорение точки;

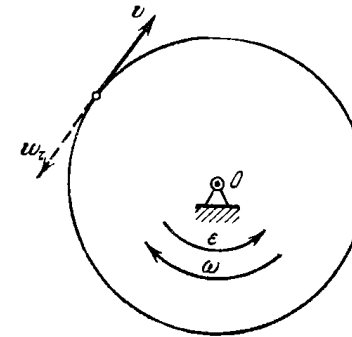


Рис. 4.2.

7) по найденным нормальному и касательному ускорениям найдем полное ускорение точек по величине и направлению.

Второй тип задач — задано угловое ускорение или угловая скорость твердого тела; требуется найти уравнение вращения, скорость и ускорение точки твердого тела:

1) интегрируя дифференциальное уравнение, определяющее проекцию углового ускорения на ось вращения; находим проекцию угловой скорости; произвольную постоянную интегрирования определяем по начальным данным;

2) интегрируя дифференциальное уравнение, определяющее проекцию угловой скорости на ось вращения, находим уравнение вращения твердого тела; произвольная постоянная интегрирования определяется по начальным данным;

3) пользуясь выражением проекции угловой скорости на ось вращения, вычисляем величину скорости и нормального ускорения точки;

4) определяем величину касательного ускорения точки, зная проекцию углового ускорения на ось вращения, и далее находим полное ускорение точки.

**Задача 4.1.** Искусственный спутник Земли, запущенный в СССР 4 октября 1957 г., имел вначале период обращения 1 ч 36 мин.

Определить его среднюю частоту обращения. Во сколько раз частота обращения спутника больше величины угловой скорости Земли (при вращении ее вокруг собственной оси)?

**Решение.** Период обращения спутника — это время, за которое он совершает один полный оборот по орбите. Это время равно 1 ч 36 мин, или 96 мин.

Следовательно, радиус-вектор спутника делает

$$n = \frac{1}{96} \text{ об/мин.}$$

Выражаем величину этой частоты обращения в  $\text{сек}^{-1}$ :

$$\omega = \frac{1 \cdot 2\pi}{96 \cdot 60} \text{ сек}^{-1} = \frac{\pi}{2880} \text{ сек}^{-1} = 0,00109 \text{ сек}^{-1}.$$

Величина угловой скорости Земли при вращении вокруг собственной оси соответствует 1 обороту за 24 часа, или

$$n_1 = \frac{1}{24} \text{ об/час} = \frac{1}{24 \cdot 60} \text{ об/мин} = \frac{1}{1440} \text{ об/мин.}$$

Находим, далее, отношение величины частоты обращения спутника к угловой скорости Земли

$$\frac{n}{n_1} = \frac{24 \cdot 60}{96} = 15.$$

Спутник делает 15 оборотов за сутки, в течение которых Земля делает один оборот вокруг своей оси.

**Задача 4.2.** Сохраняя условия предыдущей задачи, определить скорость и ускорение искусственного спутника, считая его орбиту круговой, высоту полета над поверхностью Земли  $h = 970 \text{ км}$ . Радиус Земли  $R = 6370 \text{ км}$ .

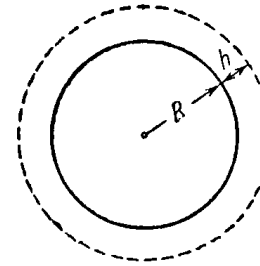
**Решение.** Величина скорости спутника определится по формуле

$$v = (h + R) \omega,$$

где  $h + R$  — радиус описываемой спутником окружности.

Итак,

$$v = (970 + 6370) \frac{\pi}{2880} \text{ км/сек} = 8 \text{ км/сек.}$$



К задаче 4.2.

Так как касательное ускорение спутника равно нулю ( $\omega = \text{const}$ ), то величина ускорения

$$\omega = \omega_n = (h + R) \omega^2 = (970 + 6370) \frac{\pi^2}{2880^2} = 0,00874 \text{ км/сек}^2 = 8,74 \text{ м/сек}^2.$$

Ускорение направлено к центру Земли.

**Задача 4.3.** При пуске в ход трамвая вожатый выключает постепенно реостат, вследствие чего угловое ускорение ротора мотора увеличивается пропорционально времени и его угловая скорость через 6 сек достигает величины  $36\pi \text{ сек}^{-1}$ .

Найти число оборотов, которое совершил ротор за это время.

**Решение.** Модуль углового ускорения  $\epsilon$  растет пропорционально времени. Следовательно, обозначая неизвестный коэффициент пропорциональности буквой  $k$ , имеем:

$$\epsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = kt.$$

Умножая обе части равенства на  $dt$  и интегрируя, находим проекцию угловой скорости ротора на ось вращения

$$\omega_z = k \frac{t^2}{2} + C. \quad (1)$$

В начальный момент при  $t = 0$   $\omega_{0z} = 0$ , так как ротор был неподвижен. Подставляя эти значения в уравнение (1), находим, что  $C = 0$  и, следовательно,

$$\omega_z = \frac{kt^2}{2}. \quad (2)$$

С другой стороны, согласно условию при  $t = 6 \text{ сек}$  угловая скорость достигла величины  $\omega_1 = 36\pi \text{ сек}^{-1}$ . Используя это, из уравнения (2)

определяем коэффициент  $k$ :

$$36\pi = \frac{k \cdot 6^2}{2},$$

или

$$k = 2\pi.$$

Внося это значение в уравнение (2), получаем, что

$$\omega_z = \pi t^2. \quad (3)$$

Учитывая, что  $\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}$ , и интегрируя, находим:

$$\varphi = \pi \frac{t^3}{3} + C_1.$$

Но при  $t=0$  угол поворота неподвижного ротора был равен нулю ( $\varphi=0$ ). Следовательно,  $C_1=0$  и окончательно

$$\varphi = \frac{\pi t^3}{3}. \quad (4)$$

Для определения числа оборотов ротора за 6 сек полагаем в (4)  $t=6$  сек. Угол поворота в радианах

$$\varphi_1 = \frac{\pi \cdot 6^3}{3} = 72\pi;$$

следовательно, ротор за 6 сек сделал:

$$N_1 = \frac{\varphi_1}{2\pi} = 36 \text{ оборотов.}$$

**Задача 4.4.** В условиях предыдущей задачи определить скорость и ускорение точки  $M$  обода ротора в момент времени  $t_1=3$  сек. Диаметр ротора  $d=20$  см.

Решение. Величину угловой скорости ротора в момент времени  $t_1=3$  сек находим, пользуясь формулой (3) предыдущей задачи:

$$\omega_z = \pi t^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ сек}^{-1}.$$

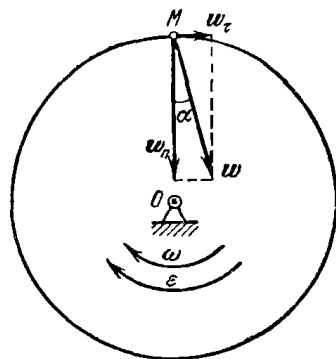
Далее, модуль скорости точки обода будет:

$$v = |v_z| = |\omega_z| \cdot \frac{d}{2} = 9\pi \cdot 10 = 90\pi \text{ см/сек.}$$

Скорость точки обода направлена перпендикулярно к радиусу, в сторону вращения.

Величина нормального ускорения точки обода в этот момент равна

$$w_n = \omega^2 \frac{d}{2} = 81\pi^2 \cdot 10 = 810\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$



К задаче 4.4.

Проекция ускорения этой точки на касательную будет:

$$w_\tau = \varepsilon_z \frac{d}{2} = 2\pi t \frac{d}{2} = 20\pi \cdot 3 = 60\pi \text{ см/сек}^2.$$

Величина полного ускорения точки определяется формулой

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = 30\pi \sqrt{729\pi^2 + 4} \text{ см/сек}^2.$$

Угол, составляемый полным ускорением точки с радиусом, находится из уравнения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w_\tau}{w_n} = \frac{\varepsilon_z}{\omega^2} = \frac{2\pi t}{(\pi t^2)^2} = \frac{2}{\pi t^3} = \frac{2}{27\pi} = 0,0236.$$

Эта задача может быть решена и другим способом. В предыдущей задаче было найдено уравнение вращения ротора (4)

$$\varphi = \frac{\pi t^3}{3}.$$

Пользуясь формулой (1\*) обзора теории, составляем уравнение движения точки обода ротора в естественной форме:

$$\sigma = \frac{d}{2} \varphi = \frac{10\pi}{3} t^3 \text{ см.}$$

Находим, далее, проекцию скорости точки обода на касательную к траектории, вычисляя производную от  $\sigma$  по времени

$$v_\tau = \dot{\sigma} = 10\pi t^2 \text{ см/сек.}$$

Величина скорости в момент времени  $t_1=3$  сек будет:

$$v_\tau = 10\pi \cdot 9 = 90\pi \text{ см/сек.}$$

Определяем величину нормального ускорения в этот момент времени

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{90^2\pi^2}{0,5d} = 810\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Проекция ускорения на касательную равна производной от  $v_\tau$  по времени

$$w_\tau = \dot{v}_\tau = 20\pi t.$$

Следовательно, в момент времени  $t_1=3$  сек

$$w_\tau = 60\pi \text{ см/сек}^2.$$

Величина полного ускорения определяется формулой

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = 30\pi \sqrt{729\pi^2 + 4} \text{ см/сек}^2.$$

Угол наклона полного ускорения к радиусу, соединяющему точку с осью вращения, находится из уравнения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w_\tau}{w_n} = \frac{60\pi}{810\pi^2} = \frac{2}{27\pi} = 0,0236.$$

Первый способ решения является более удобным, так как определяет скорость и ускорение точки через угловую скорость и угловое ускорение, общие для всех точек тела.

**Задача 4.5.** При пуске в ход машины для кручения капроновой нити шпindel перетена приобретает рабочую скорость, соответствующую 15 000 об/мин за 30 сек.

Считая угловое ускорение шпинделя во время пуска постоянным, определить число оборотов шпинделя за время пуска. Найти скорость и ускорение точки на поверхности блочка шпинделя при дальнейшем равномерном вращении, если его диаметр равен 40 мм.

Решение. Величина угловой скорости шпинделя во время пуска растет пропорционально времени

$$\omega = \varepsilon t$$

и достигает значения 15 000 об/мин через 30 сек. Определяем величину углового ускорения шпинделя

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{15\,000 \cdot 2\pi}{60 \cdot 30} = \frac{50}{3} \pi = 52,4 \text{ сек}^{-2}.$$

Угол поворота шпинделя за время пуска определится по формуле (8\*) при  $\omega_0 = 0$  и  $\varphi_0 = 0$ :

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{50\pi \cdot 30^2}{2 \cdot 3} = 7500\pi \text{ радиан.}$$

Число оборотов за время пуска будет:

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{7500\pi}{2\pi} = 3750 \text{ оборотов.}$$

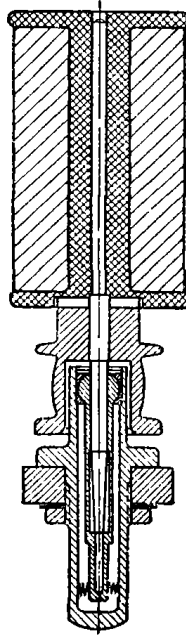
Модуль скорости точки на ободке блочка шпинделя (после достижения рабочей скорости) равен

$$v = \omega r = 15\,000 \frac{\pi}{30} \cdot 20 = 10\,000\pi \text{ мм/сек} = 10\pi \text{ м/сек} = 31,4 \text{ м/сек.}$$

Ускорение этой точки при дальнейшем равномерном вращении будет состоять только из нормального ускорения, величина которого найдется по формуле

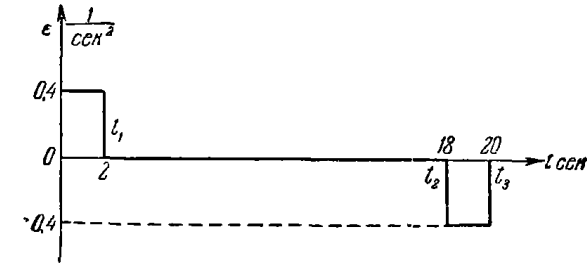
$$\omega = \omega_n = \omega^2 r = \left( \frac{15\,000 \cdot 2\pi}{60} \right)^2 \frac{20}{1000} \text{ м/сек}^2 = 5000\pi^2 \text{ м/сек}^2.$$

Это ускорение направлено по перпендикуляру, опущенному из точки на ось вращения.



К задаче 4.5.

**Задача 4.6.** При подъеме лифта угловое ускорение барабана диаметром  $d = 0,8$  м, на который наматывается канат, поднимающий клеть, изменяется согласно показанному на рисунке графику.



К задаче 4.6.

Определить наибольшую скорость подъема лифта, а также высоту подъема за 20 сек.

Решение. Движение лифта распадается на три этапа. В течение первых двух секунд барабан, начиная движение из состояния покоя, вращается с постоянным угловым ускорением. Следовательно, величина его угловой скорости равна

$$\omega = \varepsilon t,$$

а угол поворота определяется по формуле

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (1)$$

Полагая  $t = 2$  сек, находим модуль угловой скорости в конце первого этапа движения

$$\omega_1 = 0,4 \cdot 2 = 0,8 \text{ сек}^{-1}$$

и величину скорости точки на поверхности барабана, равную модулю скорости, с которой наматывается канат и поднимается лифт в этот момент времени,

$$v_1 = \omega_1 r = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32 \text{ м/сек.} \quad (2)$$

Это и будет наибольшая скорость подъема, так как на втором, следующем, этапе угловое ускорение равно нулю, угловая скорость барабана остается неизменной и, следовательно, скорость подъема лифта сохраняет свою величину.

Определим путь, пройденный лифтом в течение первых двух секунд. Для этого находим из (1) угол поворота барабана за это время

$$\varphi_1 = \frac{0,4 \cdot 2^2}{2} = 0,8 \text{ рад}$$

и высоту подъема

$$h_1 = \varphi_1 \frac{d}{2} = 0,32 \text{ м.}$$

На втором этапе величина скорости лифта постоянна и определяется равенством (2). Следовательно, высота подъема за этот этап будет:

$$h_2 = v_1 (t_2 - t_1) = 0,32 \cdot 16 = 5,12 \text{ м.}$$



На третьем этапе вращение барабана происходит с постоянным угловым замедлением. Следовательно, угол поворота будет равен

$$\varphi_3 = \omega_1(t_3 - t_2) - \frac{\varepsilon(t_3 - t_2)^2}{2} = 0,8 \cdot 2 - \frac{0,4 \cdot 2^2}{2} = 0,8 \text{ рад.}$$

Теперь легко найти высоту подъема лифта на этом этапе:

$$h_3 = \varphi_3 \frac{d}{2} = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32 \text{ м.}$$

Таким образом, полная высота подъема лифта

$$h = h_1 + h_2 + h_3 = 5,76 \text{ м.}$$

**Задача 4.7.** Вал с присоединенными к нему пластинами вращается в подшипниках согласно уравнению

$$\varphi = a \ln \left( 1 + \frac{\omega_0 t}{a} \right),$$

где  $\varphi$  — угол поворота вала,  $a$  и  $\omega_0$  — постоянные коэффициенты.

Определить угловую скорость и угловое ускорение вала. Найти скорость и ускорение центра пластины  $A$ , отстоящего на расстоянии  $R$  от оси вращения.

**Решение.** Проекция угловой скорости вала на ось вращения равна первой производной от угла поворота по времени

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\omega_0 t}{a}}. \quad (1)$$

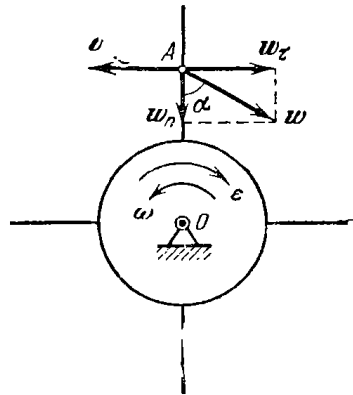
Из этого равенства видно, что в начальный момент при  $t=0$  величина угловой скорости вала равнялась  $\omega_0$ . Определяем проекцию углового ускорения вала на ось вращения как производную от угловой скорости по времени

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = - \frac{\omega_0^2}{\left(1 + \frac{\omega_0 t}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a}, \quad (2)$$

или, сопоставляя (2) и (1),

$$\varepsilon_z = - \frac{\omega_z^2}{a}.$$

Проекция углового ускорения отрицательна, проекция угловой скорости вала с течением времени неограниченно уменьшается.



К задаче 4.7.

Переходим к определению скорости и ускорения центра  $A$  пластины. Модуль скорости этой точки равен

$$v = R\omega = \frac{R\omega_0}{1 + \frac{\omega_0 t}{a}}.$$

Ускорение этой точки складывается из нормального и касательного ускорений. Величина нормального ускорения

$$\omega_n = R\omega^2 = \frac{R\omega_0^2}{\left(1 + \frac{\omega_0 t}{a}\right)^2}.$$

Проекция ускорения на касательную определяется формулой

$$\omega_\tau = R\varepsilon_z = -R \frac{\omega^2}{a} = -\frac{R}{a} \frac{\omega_0^2}{\left(1 + \frac{\omega_0 t}{a}\right)^2}.$$

Модуль полного ускорения

$$\omega = \sqrt{\omega_n^2 + \omega_\tau^2} = \frac{R\omega^2}{a} \sqrt{1 + a^2} = \frac{R}{a} \frac{\omega_0^2}{\left(1 + \frac{\omega_0 t}{a}\right)^2} \sqrt{1 + a^2}.$$

Угол  $\alpha$ , составляемый ускорением точки с радиусом, соединяющим ее с осью вращения, находится из уравнения

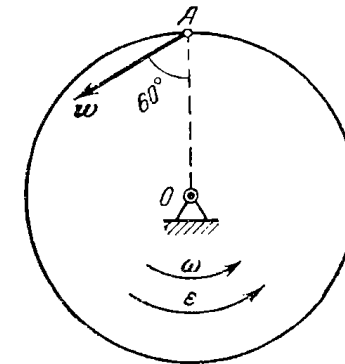
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon_z}{\omega^2} = -\frac{1}{a}.$$

Направления скорости и ускорения центра пластины изображены на рисунке. Отрицательное значение  $\operatorname{tg} \alpha$  указывает на то, что угол  $\alpha$  откладывается в сторону, противоположную направлению вращения твердого тела.

**Задача 4.8.** Ускорение любой точки вала, вращающегося в подшипниках, составляет постоянный угол  $60^\circ$  с перпендикуляром, опущенным из этой точки на ось вала. Начальное значение проекции угловой скорости на ось  $z$ , направленной по оси вала, равно  $-\omega_0$ , начальный угол поворота вала равен нулю.

Определить касательное, нормальное и полное ускорения точки вала, расстояние которой от оси вращения  $r$ . Найти уравнение вращения вала вокруг неподвижной оси, а также зависимость величины угловой скорости от угла поворота вала.

**Решение.** Угол  $\alpha$  между ускорением точки и перпендикуляром, опущенным из точки на ось вала, связан с проекцией углового



К задаче 4.8.

ускорения и величиной угловой скорости соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_\tau}{\omega_n} = \frac{\varepsilon_z}{\omega_z^2}. \quad (1)$$

Подставляя значение  $\operatorname{tg} \alpha$  и учитывая, что  $\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}$ , имеем:

$$\sqrt{3} dt = \frac{d\omega_z}{\omega_z^2}. \quad (2)$$

Переменные отделены. Интегрируя, находим:

$$\sqrt{3}t = -\frac{1}{\omega_z} + C, \quad (3)$$

где  $C$  — произвольная постоянная интегрирования. Определяем ее, подставляя в равенство (3) начальные условия:  $\omega_z = -\omega_0$  при  $t = 0$ , откуда  $C = -\frac{1}{\omega_0}$  и, следовательно,

$$-\sqrt{3}t = \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_z},$$

или

$$\omega_z = -\frac{\omega_0}{1 + \omega_0 \sqrt{3}t}. \quad (4)$$

Далее, из (1) и (4) определяем проекцию углового ускорения вала на ось вращения

$$\varepsilon_z = \operatorname{tg} \alpha \omega_z^2 = \sqrt{3} \frac{\omega_0^3}{(1 + \omega_0 \sqrt{3}t)^2}.$$

Проекция ускорения точки, радиус вращения которой  $r$ , на направление касательной определяется формулой

$$\omega_\tau = r\varepsilon_z = \frac{\sqrt{3} r \omega_0^3}{(1 + \omega_0 \sqrt{3}t)^2}.$$

Модуль нормального ускорения этой точки

$$\omega_n = r\omega_z^2 = \frac{r\omega_0^2}{(1 + \omega_0 \sqrt{3}t)^2}.$$

Тогда величина полного ускорения точки

$$\omega = \sqrt{\omega_\tau^2 + \omega_n^2} = 2r\omega_z^2 = \frac{2r\omega_0^2}{(1 + \omega_0 \sqrt{3}t)^2}.$$

Для нахождения уравнения движения вала воспользуемся равенством (4), записав его так:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{-\omega_0}{1 + \omega_0 \sqrt{3}t}. \quad (5)$$

Умножая обе части равенства (5) на  $dt$ , отделяем переменные:

$$d\varphi = \frac{-\omega_0 dt}{1 + \omega_0 \sqrt{3}t}.$$

Интегрируя, имеем:

$$\varphi + C_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ln(1 + \omega_0 \sqrt{3}t). \quad (6)$$

Произвольная постоянная интегрирования  $C_1$  определяется путем подстановки в уравнение (6) начальных данных: при  $t = 0$   $\varphi = 0$ . Это дает  $C_1 = 0$ . Следовательно,

$$\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \frac{1}{1 + \omega_0 \sqrt{3}t}.$$

Это и есть уравнение вращения вала.

Переходим к определению зависимости проекции угловой скорости на ось вращения от угла поворота. Для этого умножим обе части равенства (2) на  $d\varphi$ . Находим:

$$\sqrt{3} d\varphi = \frac{d\omega_z}{\omega_z^2} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega_z}{\omega_z^2} \omega_z = \frac{d\omega_z}{\omega_z}.$$

Интегрируя, имеем:

$$\sqrt{3} \varphi = \ln C_2 \omega_z,$$

или

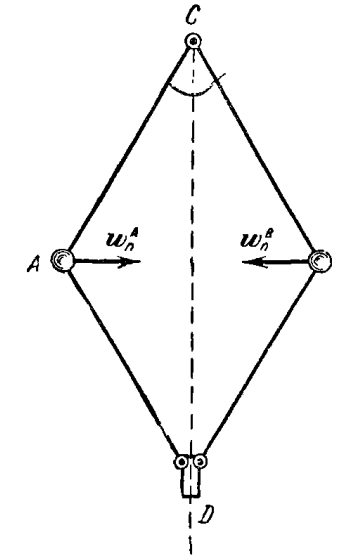
$$C_2 \omega_z = e^{\sqrt{3} \varphi}.$$

Произвольную постоянную интегрирования  $C_2$  определяем, подставляя начальные данные: при  $t = 0$   $\varphi = 0$  и  $\omega_z = -\omega_0$ .

Тогда  $C_2 = -\frac{1}{\omega_0}$  и окончательно находим:

$$\omega_z = -\omega_0 e^{\sqrt{3} \varphi}.$$

**Задача 4.9.** Регулятор Уатта вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси. Угол  $ACB$  при этом оказался равен  $60^\circ$ , а ускорение шаров  $A$  и  $B$  равно по величине  $100g$ , где  $g = 980 \text{ см/сек}^2$ . Стержни  $AC$ ,  $BC$ ,  $AD$  и  $BD$  одинаковой длины  $l = 10 \text{ см}$ .



К задаче 4.9.

Сколько оборотов в минуту делает регулятор?

**Решение.** Для того чтобы найти величину угловой скорости регулятора, напишем зависимость ускорения шаров от параметров регулятора. Так как регулятор вращается с постоянной угловой скоростью, то ускорение шара будет нормальным ускорением, модуль

которого определяется формулой

$$\omega_n = r\omega^2 = l \sin 30^\circ \omega^2,$$

где  $r$  — кратчайшее расстояние шара до оси вращения.

С другой стороны, согласно условию

$$\omega_n = 100g.$$

Приравнявая эти два выражения нормального ускорения шара, находим:

$$\omega = \sqrt{\frac{100g}{l \sin 30^\circ}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 980}{10 \cdot 0,5}} = 140 \text{ сек}^{-1}.$$

В технической системе единиц угловая скорость регулятора будет равна

$$n = \omega \cdot \frac{30}{\pi} \text{ об/мин} = \frac{140 \cdot 30}{3,14} = 1340 \text{ об/мин}.$$

Для приобретения навыков в решении задач на вращение твердого тела вокруг неподвижной оси рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 375, 376, 382, 385, 386, 388, 390, 393.

## § 2. Преобразование простейших движений

Под преобразованием простейших движений следует понимать: а) преобразование вращательного движения в поступательное (и обратное преобразование), б) преобразование вращения вокруг одной неподвижной оси во вращение вокруг другой неподвижной оси и в) преобразование одного поступательного движения в другое поступательное движение. При решении задач о движении механизмов, преобразующих простейшие движения, следует пользоваться совместно формулами кинематики точки и формулами кинематики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Преобразование вращения одного твердого тела вокруг неподвижной оси во вращение второго твердого тела вокруг другой неподвижной оси осуществляется посредством зубчатого или фрикционного зацепления двух колес (рис. 4.3, а, б) или при помощи ременной передачи (рис. 4.4, 4.5).

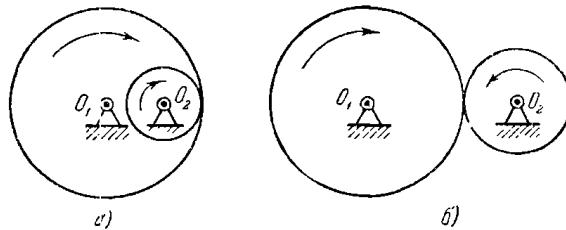


Рис. 4.3.

При внутреннем зацеплении (рис. 4.3, а) и нескрепляющей ременной передаче (рис. 4.4) направление вращений обоих колес совпадает. При внешнем зацеплении (рис. 4.3, б) и скрепляющей ременной передаче (рис. 4.5) направление вращения колес противоположно. Величины скоростей на ободе зубчатых колес, находящихся в зацеплении, равны. Также равны по модулю скорости на ободе шкивов ременной передачи, если нет скольжения ремня по шкиву. Угловые скорости колес обратно пропорциональны числам зубцов или радиусам, или диаметрам

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1}. \quad (1^*)$$

В этой формуле  $\omega_1, \omega_2$  — модули угловых скоростей,  $r_1, r_2$  — радиусы начальных окружностей,  $d_1, d_2$  — диаметры начальных окружностей,  $z_1, z_2$  — числа зубцов первого и соответственно второго колеса.

Зубчатые колеса и ременные передачи, изображенные на рис. 4.3—4.5, представляют

примеры последовательного соединения колес и шкивов. При последовательном соединении каждое из колес вращается вокруг своей неподвижной оси.

Часто применяется параллельное соединение колес, когда два колеса вращаются вокруг одной неподвижной оси. Если при этом они жестко соединены друг с другом, то их угловые скорости равны.

При решении задач на преобразование простейших движений рекомендуется такая последовательность действий:

1) исходя из условия задачи, выписать уравнение движения или другие кинематические соотношения для того твердого тела, движение которого известно;

2) пользуясь формулами кинематики точки и кинематики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, найти уравнение движения другого твердого тела, которому передается движение, а также найти скорости и ускорения различных точек этого твердого тела.

**Задача 4.10.** Зубчатое колесо  $I$  находится во внешнем зацеплении с зубчатым колесом  $II$ . Первое колесо имеет диаметр  $D_1 = 400 \text{ мм}$  и вращается с угловой скоростью  $\omega_1 = \pi \text{ сек}^{-1}$  вокруг неподвижной оси  $O_1$ .

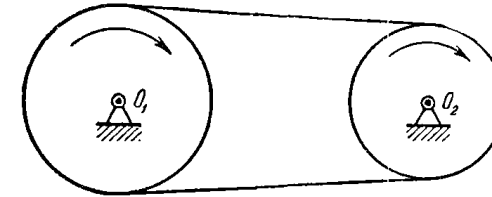


Рис. 4.4.

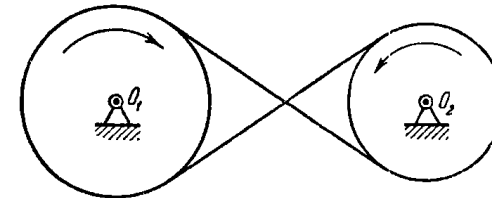


Рис. 4.5.

Определить угловую скорость второго колеса, если его диаметр равен  $D_2 = 320$  мм и оно вращается вокруг неподвижной оси  $O_2$ .

**Решение.** В месте соприкосновения зубцов обоих колес скорости точек первого и второго колес одинаковы. Обозначая величину этой скорости  $v$ , имеем:

$$v = \omega_1 \frac{D_1}{2} = \omega_2 \frac{D_2}{2}$$

и, следовательно,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{D_2}{D_1}.$$

Пользуясь формулой (1), находим:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 D_1}{D_2} = \frac{\pi \cdot 400}{320} = \frac{5}{4} \pi \text{ сек}^{-1}.$$

Так как колеса находятся во внешнем зацеплении, то их угловые скорости направлены в противоположные стороны. Если колесо  $I$  вращается против часовой стрелки, то колесо  $II$  вращается по часовой стрелке.

**Задача 4.11.** Зубчатое колесо  $I$  находится во внутреннем зацеплении с зубчатым колесом  $II$ . Радиус первого колеса  $r_1 = 150$  мм и оно делает  $n_1 = 1500$  об/мин, вращаясь вокруг неподвижной оси  $O_1$ .

Определить радиус второго колеса, если оно должно вращаться вокруг неподвижной оси  $O_2$ , делая  $n_2 = 4500$  об/мин.

**Решение.** В месте соприкосновения зубчатых колес скорости точек первого и второго колес должны быть равны. Величина скорости точки обода колеса  $I$  равна

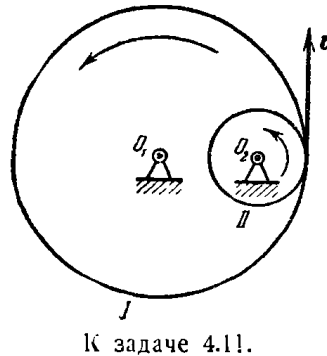
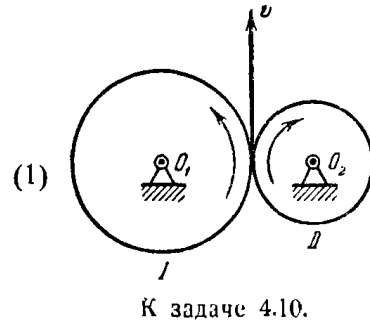
$$v = r_1 \omega_1 = r_1 \frac{\pi n_1}{30}. \quad (1)$$

Модуль скорости точки обода колеса  $II$  равен

$$v = r_2 \omega_2 = r_2 \frac{\pi n_2}{30}. \quad (2)$$

Составляя равенства (1) и (2), находим:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1}.$$



Так как величины угловых скоростей пропорциональны числам оборотов в минуту, имеем:

$$r_2 = r_1 \frac{n_1}{n_2} = 150 \frac{1500}{4500} = 50 \text{ мм}.$$

В рассматриваемом случае внутреннего зацепления оба зубчатых колеса вращаются в одну сторону.

**Задача 4.12.** Зубчатое колесо  $I$ , радиус которого равен  $r_1$ , находится во внешнем зацеплении с зубчатым колесом  $II$  радиуса  $r_2$ .

Первое колесо вращается в данный момент с угловой скоростью  $\omega_1$  и угловым ускорением  $\epsilon_1$ .

Определить угловую скорость и угловое ускорение второго колеса, а также нормальное ускорение находящихся в соприкосновении точек колес.

**Решение.** При вращении зубчатых колес, находящихся в зацеплении, скорости точек соприкосновения обоих колес должны быть равны в любой момент

времени. Для этого необходимо, чтобы были равны не только скорости этих точек, но и их касательные ускорения, ибо если в данный момент скорости этих точек равны, а касательные ускорения не равны, то в следующий момент времени нарушится и равенство скоростей точек соприкосновения. Из равенства модулей скоростей вытекает соотношение

$$v = r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2,$$

откуда

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2}. \quad (1)$$

Угловая скорость второго колеса  $\omega_2$  при внешнем зацеплении направлена в сторону, противоположную угловой скорости  $\omega_1$  первого колеса. Величины касательных ускорений точек соприкосновения обоих колес будут:

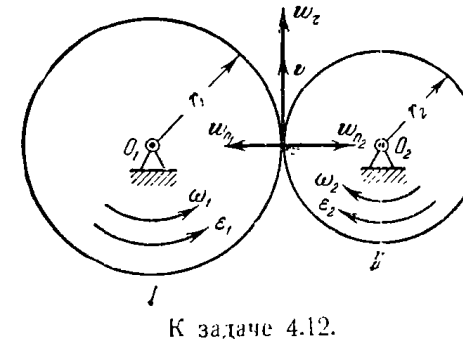
$$|\omega_{z1}| = r_1 \epsilon_1, \quad |\omega_{z2}| = r_2 \epsilon_2.$$

Приравнявая эти значения, получаем:

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 \frac{r_1}{r_2},$$

что легко найти также непосредственно путем дифференцирования соотношения (1).

Угловое ускорение второго колеса  $\epsilon_2$  направлено в сторону, противоположную угловому ускорению  $\epsilon_1$  первого колеса.



Модули нормальных ускорений точек соприкосновения обоих колес определяются формулами:

$$\omega_{n1} = r_1 \omega_1^2, \quad \omega_{n2} = r_2 \omega_2^2 = \frac{r_1^2}{r_2} \omega_1^2.$$

Нормальные ускорения этих точек не равны друг другу по величине и направлены по одной прямой в разные стороны.

**Задача 4.13.** Для спуска груза  $M$ , привязанного к концу троса, намотанного на барабан  $III$ , вытягивают со скоростью  $v$  канат  $A$ , намотанный на барабан  $I$ . На одной оси с барабаном  $I$  радиуса  $r_1$  насажено зубчатое колесо  $I$  радиуса  $R_1$ , жестко скрепленное с ним. Зубчатое колесо  $I$  сцеплено с зубчатым колесом  $2$  радиуса  $r_2$ , которое вращается как одно целое вместе с зубчатым колесом  $II$  радиуса  $R_2$ . Последнее сцеплено с зубчатым колесом  $3$  радиуса  $r_3$ , вращающимся как одно целое с барабаном  $III$  радиуса  $R_3$ .

Определить скорость, с которой спускается груз  $M$ , если оси всех зубчатых колес неподвижны.

**Решение.** Модуль скорости точки на ободе барабана  $I$  радиуса  $r_1$  равен величине скорости точек каната  $v$ . Определим скорость точки на ободе зубчатого колеса  $I$  радиуса  $R_1$ . Модуль угловой скорости барабана  $I$  и зубчатого колеса  $I$  равен

$$\omega_1 = \frac{v}{r_1}.$$

Величина скорости точки на ободе зубчатого колеса  $I$

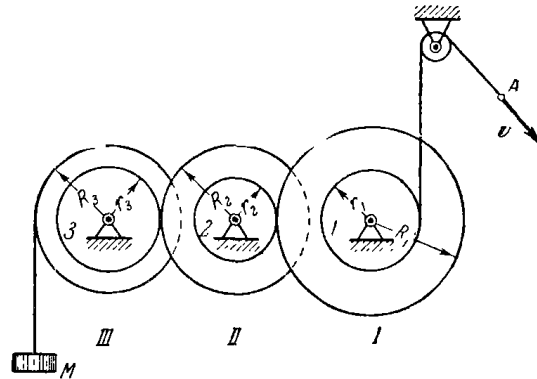
$$v_1 = \omega_1 R_1 = \frac{v}{r_1} R_1.$$

Зубчатое колесо  $I$  находится в сцеплении с зубчатым колесом  $2$  радиуса  $r_2$ , следовательно, скорости точек на ободе этих колес равны. Определяем модуль угловой скорости зубчатых колес  $2$  и  $II$

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2} = \frac{v R_1}{r_1 r_2}$$

и, далее, находим величину скорости точки на ободе зубчатого колеса  $II$  радиуса  $R_2$

$$v_2 = \omega_2 R_2 = \frac{v R_1 R_2}{r_1 r_2}.$$



К задаче 4.13.

Это и есть одновременно модуль скорости точки на ободе зубчатого колеса  $3$  радиуса  $r_3$ , сцепленного с зубчатым колесом  $II$ .

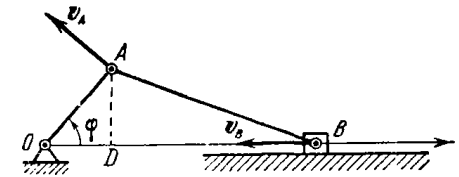
Следовательно, величина угловой скорости зубчатого колеса  $3$  и барабана  $III$  равна

$$\omega_3 = \frac{v_2}{r_3} = \frac{v R_1 R_2}{r_1 r_2 r_3}.$$

Модуль скорости точки на ободе барабана  $III$  радиуса  $R_3$ , равный искомой величине скорости груза  $M$ , дается формулой

$$v_3 = \omega_3 R_3 = \frac{v R_1 R_2 R_3}{r_1 r_2 r_3}.$$

**Задача 4.14.** Для преобразования периодического возвратно-посупательного прямолинейного движения во вращательное движение



К задачам 4.14, 4.15.

в двигателях внутреннего сгорания применяют плоский шатуно-кривошипный механизм, состоящий из кривошипа  $OA = r$ , вращающегося вокруг неподвижной точки  $O$  в плоскости рисунка, шатуна  $AB = l$ , шарнирно соединенного с кривошипом, и поршня  $B$ , двигающегося по горизонтальному направляющему цилиндра, совпадающим с прямой  $OB$ , и шарнирно соединенного с шатуном  $AB$ .

Полагая угловую скорость кривошипа  $OA$  постоянной и равной  $\omega_0$ , определить уравнение движения и скорость поршня  $B$ . Найти скорость поршня при  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi/2$ ,  $\varphi_3 = \pi$ .

**Решение.** Угол поворота кривошипа, вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$ , равен

$$\varphi = \omega_0 t.$$

Опуская перпендикуляр из точки  $A$  на линию  $OB$ , находим уравнение движения поршня  $B$

$$x = OD + DB = OA \cos \varphi + \sqrt{l^2 - AD^2} = r \cos \omega_0 t + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t}.$$

Для определения проекции скорости поршня  $B$  на ось  $x$  необходимо вычислить производную от координаты поршня  $x$  по времени:

$$\begin{aligned} v_{Bx} = \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = -r \omega_0 \sin \omega_0 t - \frac{r^2 \omega_0 \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t}} = \\ &= -r \omega_0 \left[ 1 + \frac{r \cos \omega_0 t}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t}} \right] \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (1)$$

Значение проекции скорости поршня при различных значениях угла поворота кривошипа получаем, подставляя в (1) соответствующие

величины:

$$\begin{aligned} \text{при } \varphi_1 = 0 \text{ и } \varphi_3 = \pi \quad v_B = 0, \\ \text{при } \varphi_2 = \pi/2 \quad \dot{x} = v_{Bx} = -r\omega_0, \end{aligned}$$

т. е. при  $\varphi_2 = \pi/2$  скорость точки  $B$  равна по величине скорости точки  $A$ ; направления скоростей этих точек также совпадают.

**Задача 4.15.** В условиях предыдущей задачи определить ускорение поршня  $B$  как функцию времени, а также величину этого ускорения в моменты, когда  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi/2$ ,  $\varphi_3 = \pi$ .

Решение. Поршень  $B$  движется прямолинейно, следовательно, проекция его ускорения равна первой производной от проекции скорости по времени

$$\begin{aligned} \omega_{Bx} = \ddot{x} &= -r\omega_0 \frac{d}{dt} \left[ \sin \omega_0 t + \frac{r \sin 2\omega_0 t}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t}} \right] = \\ &= -r\omega_0^2 \cos \omega_0 t - \frac{r^2 \omega_0^2}{2} \left[ \frac{2 \cos 2\omega_0 t}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t}} + \frac{r^2 \sin^2 2\omega_0 t}{2(l^2 - r^2 \sin^2 \omega_0 t)^{3/2}} \right]. \end{aligned}$$

Тогда значения ускорения поршня при различных значениях угла поворота кривошипа будут:

$$\begin{aligned} \text{при } \varphi_1 = 0 \quad \omega_{Bx} &= -r\omega_0^2 \left[ 1 + \frac{r}{l} \right]; \\ \text{при } \varphi_2 = \pi/2 \quad \omega_{Bx} &= \frac{r\omega_0^2}{\sqrt{l^2 - r^2}}; \\ \text{при } \varphi_3 = \pi \quad \omega_{Bx} &= r\omega_0^2 \left[ 1 - \frac{r}{l} \right]. \end{aligned}$$

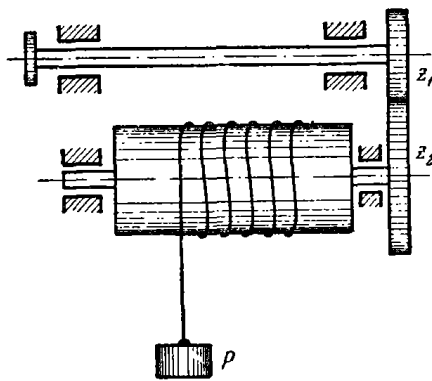
**Задача 4.16.** Для подъема груза  $P$  служит электрическая лебедка, состоящая из ведущего вала с насаженной на нем шестеренкой с числом зубцов  $z_1$ . Груз поднимается при вращении ведомого вала с шестеренкой. Число зубцов шестеренки  $z_2$ . При этом канат, на котором подвешен груз  $P$ , наматывается на барабан радиусом  $R$ . Уравнение вращения ведущего вала имеет вид

$$\varphi_1 = 2\pi t^3.$$

Определить уравнение движения, скорость и ускорение груза  $P$ .

Решение. Пути, проходимые точками, расположенными на ободах сцепленных зубчатых колес, равны, т. е.

$$s_1 = \varphi_1 r_1 = \varphi_2 r_2. \quad (1)$$



К задаче 4.16.

Здесь через  $r_1$ ,  $r_2$  обозначены радиусы  $I$  и  $II$  зубчатых колес,  $\varphi_2$  — угол поворота ведомого вала. Из (1) находим:

$$\varphi_2 = \varphi_1 \frac{r_1}{r_2} = \varphi_1 \frac{z_1}{z_2} = 2\pi t^3 \frac{z_1}{z_2},$$

ибо радиусы колес пропорциональны длинам окружностей и, следовательно, пропорциональны числам зубцов. Далее, найдем зависимость пути, пройденного грузом, от времени (уравнение движения груза)

$$s_2 = R\varphi_2 = 2\pi R t^3 \frac{z_1}{z_2}.$$

Проекция скорости груза на вертикаль определится как производная от координаты  $s_2$  по времени

$$v_2 = \dot{s}_2 = 4\pi R t^2 \frac{z_1}{z_2}.$$

Проекция ускорения груза, движущегося прямолинейно, на направление движения равна производной от проекции скорости по времени

$$\omega_2 = \dot{v}_2 = 4\pi R \frac{z_1}{z_2} t.$$

Второй способ решения. Определяем проекцию угловой скорости ведущего вала на ось вращения как производную от угла поворота по времени

$$\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1 = 4\pi t.$$

Далее, находим величину угловой скорости ведомого вала, исходя из равенства скоростей точек соприкосновения обоих колес

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

откуда

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{z_1}{z_2} = 4\pi t \frac{z_1}{z_2}.$$

Скорость груза равна по величине скорости точки на поверхности барабана

$$v_2 = R\omega_2 = 4\pi R t \frac{z_1}{z_2}. \quad (2)$$

Ускорение груза, движущегося прямолинейно, равно по величине касательному ускорению точки на поверхности барабана

$$\omega_2 = R\varepsilon = R \frac{d\omega_2}{dt} = R \cdot 4\pi \frac{z_1}{z_2}.$$

Для определения уравнения движения груза напишем уравнение (2) в виде

$$v_2 = \frac{ds_2}{dt} = 4\pi R \frac{z_1}{z_2} t.$$

Умножая обе части равенства на  $dt$ , имеем:

$$ds_2 = 4\pi R \frac{z_1}{z_2} t dt.$$

Интегрируя в пределах от 0 до  $s_2$  и от 0 до  $t$ , находим уравнение движения груза  $M$

$$s_2 = 2\pi R \frac{z_1}{z_2} t^2.$$

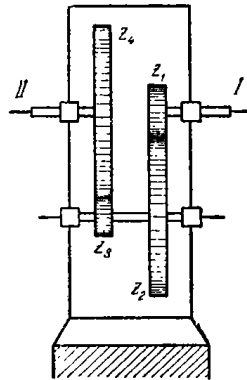
При втором способе решения определяются величина угловой скорости ведомого вала и значение его углового ускорения. Эти величины характеризуют движение ведомого вала и, как частный случай, движение груза  $P$ . Поэтому второй способ решения предпочтителен.

**Задача 4.17.** Редуктор скорости, предназначенный для изменения величины угловой скорости при передаче вращения от вала  $I$  к валу  $II$ , состоит из четырех зубчатых колес, вращающихся вокруг неподвижных осей. Зубчатые колеса имеют следующее число зубцов:  $z_1 = 12$ ,  $z_2 = 72$ ,  $z_3 = 10$ . Вал  $II$  делает 100 об/мин, а вал  $I$  должен делать 5400 об/мин.

Найти число зубцов четвертого зубчатого колеса.

Решение. Величины угловых скоростей первой пары зубчатых колес, сцепленных друг с другом, относятся обратно пропорционально числам зубцов:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (1)$$



К задаче 4.17.

Аналогичное равенство можно написать и для второй пары колес, находящихся в зацеплении:

$$\frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_3}. \quad (2)$$

Колеса 2 и 3 жестко закреплены на общем валу, следовательно, их угловые скорости равны  $\omega_2 = \omega_3$ . Перемножая равенства (1) и (2), находим:

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}. \quad (3)$$

Отношение модулей угловых скоростей равно отношению чисел оборотов в минуту. Подставляя известные данные в (3), получаем:

$$\frac{5400}{100} = \frac{72 z_4}{12 \cdot 10};$$

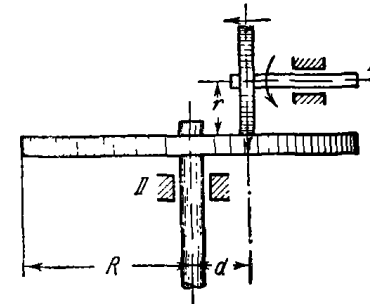
отсюда следует, что четвертая шестерня имеет 90 зубцов.

**Задача 4.18.** Ведущий вал фрикционной передачи  $I$  вращается с постоянной угловой скоростью, делая 300 об/мин, и одновременно передвигается в направлении стрелки и обратно согласно уравнению

$$d = (4 + 3 \cos 2\pi t) \text{ см},$$

где время дано в секундах. Радиусы колес:  $r = 5$  см,  $R = 20$  см.

Определить: 1) угловое ускорение вала  $II$  как функцию времени и 2) ускорение точки на ободе колеса  $II$  в моменты времени  $t_1 = 0$ ;  $t_2 = 0,25$  сек;  $t_3 = 0,5$  сек.



К задаче 4.18.

Решение. Скорости точек соприкосновения обоих колес равны между собой, так как колесо  $I$  фрикционной передачи катится без скольжения по колесу  $II$ . Так как величина угловой скорости ведущего вала

равна

$$\omega_0 = 300 \frac{\pi}{30} = 10\pi \text{ сек}^{-1}, \quad (1)$$

то модуль скорости точки обода колеса  $I$ , соприкасающейся с колесом  $II$ ,

$$v = r\omega_0 = 5 \cdot 10\pi = 50\pi \text{ см/сек}. \quad (2)$$

Величина скорости такой же точки, но принадлежащей колесу  $II$ , равна

$$v = \omega d, \quad (3)$$

где  $\omega$  — модуль угловой скорости колеса  $II$ . Приравнявая значения (2) и (3), находим величину угловой скорости колеса  $II$

$$\omega = \frac{50\pi}{d} = \frac{50\pi}{4 + 3 \cos 2\pi t} \text{ сек}^{-1}. \quad (4)$$

Проекция углового ускорения колеса  $II$  равна производной от проекции угловой скорости по времени (считаем, что ось  $z$  направлена в сторону  $\omega$ )

$$\epsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{300\pi^2 \sin 2\pi t}{d^2} = \frac{300\pi^2 \sin 2\pi t}{(4 + 3 \cos 2\pi t)^2} \text{ сек}^{-2}. \quad (5)$$

Переходим к определению ускорения точки на ободе второго колеса в различные моменты времени. Сначала находим для каждого момента времени величины:  $\omega$ ,  $\epsilon$ . Пользуясь формулами (1), (4), (5), имеем:

$$\text{при } t_1 = 0 \quad \omega_1 = \frac{50\pi}{7} \text{ сек}^{-1}, \quad \epsilon_1 = 0,$$

$$\text{при } t_2 = 0,25 \text{ сек} \quad \omega_2 = \frac{50\pi}{4} \text{ сек}^{-1}, \quad \epsilon_2 = \frac{75\pi^2}{4} \text{ сек}^{-2},$$

$$\text{при } t_3 = 0,5 \text{ сек} \quad \omega_3 = 50\pi \text{ сек}^{-1}, \quad \epsilon_3 = 0.$$

Далее, определяем величину ускорения точки на ободе колеса II по формуле

$$\omega = R \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}.$$

Подставляя значения  $R$ ,  $\epsilon$ ,  $\omega$  для каждого момента времени, находим:

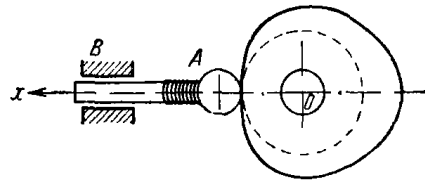
$$\text{при } t_1 = 0 \quad \omega_1 = \frac{50\,000}{49} \pi^2 \approx 10\,000 \text{ см/сек}^2 = 100 \text{ м/сек}^2,$$

$$\text{при } t_2 = 0,25 \text{ сек} \quad \omega_2 = 5\pi^2 \sqrt{75^2 + 625^2} \text{ см/сек}^2 = 308 \text{ м/сек}^2,$$

$$\text{при } t_3 = 0,5 \text{ сек} \quad \omega_3 = 50\,000\pi^2 \approx 495\,000 \text{ см/сек}^2 = 4950 \text{ м/сек}^2.$$

**Задача 4.19.** При пуске в ход кулачок начинает вращаться из состояния покоя вокруг неподвижной оси  $O$  с постоянным угловым ускорением  $\epsilon = 0,1\pi \text{ сек}^{-2}$ . Достигнув угловой скорости, соответствующей  $40 \text{ об/мин}$ , кулачок далее вращается равномерно. Уравнение контура кулачка имеет вид

$$r = \left( \frac{30}{\pi} \varphi + 20 \right) \text{ см} \quad (1)$$



К задаче 4.19.

(архимедова спираль). Стержень  $A$  кулачкового механизма движется в неподвижных направляющих  $B$ , как показано на рисунке, удерживаясь в соприкосновении с контуром кулачка при помощи пружины.

Определить скорость стержня и время, в течение которого продолжался пуск в ход. Найти ускорение стержня.

Решение. Угол поворота кулачка при пуске равен

$$\varphi = \frac{\epsilon t^2}{2} = 0,05\pi t^2. \quad (2)$$

Расстояние между центром кулачка и стержнем равно

$$r = \left( \frac{30}{\pi} \cdot 0,05\pi t^2 + 20 \right) \text{ см}. \quad (3)$$

Стержень движется прямолинейно, следовательно, проекция его скорости на ось  $x$  равна производной от координаты  $r$  по времени

$$v_x = \dot{r} = 2 \cdot 1,5t = 3t \text{ см/сек}. \quad (4)$$

Проекция ускорения стержня, движущегося прямолинейно, равна производной от проекции скорости по времени

$$\omega_x = \dot{v}_x = 3 \text{ см/сек}^2. \quad (5)$$

По условию, достигнув угловой скорости, соответствующей  $40 \text{ об/мин}$ , кулачок далее вращается равномерно. Модуль угловой скорости последующего равномерного вращения кулачка

$$\omega_1 = 40 \frac{2\pi}{60} = \frac{4}{3} \pi \text{ сек}^{-1}. \quad (6)$$

Дифференцируя по времени (1), находим проекцию скорости движения стержня на ось  $x$

$$v_{x1} = \dot{r} = \frac{30}{\pi} \dot{\varphi} = \frac{30}{\pi} \omega_1 = \frac{30}{\pi} \frac{4}{3} \pi = 40 \text{ см/сек}. \quad (7)$$

Пуск в ход продолжается до тех пор, пока скорость (4) не станет равной  $v_{x1}$ . Приравнявая эти два значения скорости, определяем время пуска в ход  $T$

$$3T = 40 \quad \text{или} \quad T = 13,33 \text{ сек}. \quad (8)$$

Время пуска в ход можно определить и другим способом. Проекция угловой скорости кулачка при пуске в ход определяется как производная от угла поворота (2) по времени

$$\omega_2 = \dot{\varphi} = 0,1\pi t. \quad (9)$$

Для определения времени пуска  $T$  приравняем значение проекции угловой скорости (9) ее значению (6). Тогда

$$0,1\pi T = \frac{4}{3} \pi \quad \text{или} \quad T = 13,33 \text{ сек}.$$

**Задача 4.20.** Круговой поступательно движущийся кулачок передвигается согласно уравнению (рис. а)

$$x = a \cos \omega t,$$

где координата  $x$  отсчитывается по горизонтали от точки  $O_1$  (рис. б),  $a$ ,  $\omega$  — постоянные коэффициенты,  $t$  — время.

Определить уравнение движения и скорость стержня.

Решение. Вводя угол  $\varphi$ , как указано на рис. б, находим координату нижней точки стержня (рис. б)

$$y = r \sin \varphi. \quad (1)$$



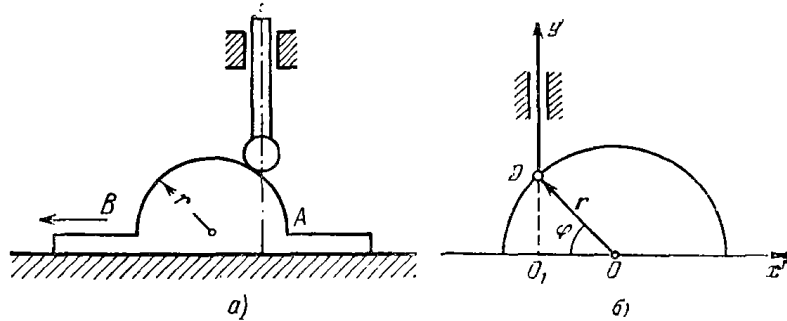
С другой стороны, расстояние от центра кулачка до начала координат  $O_1$  равно

$$x = r \cos \varphi = a \cos \omega t,$$

откуда

$$\cos \varphi = \frac{a}{r} \cos \omega t,$$

и, следовательно,  $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos^2 \omega t}$ .



К задаче 4.20.

Подставляя это значение в уравнение (1), находим искомое уравнение движения стержня:

$$y = r \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos^2 \omega t}.$$

Проекция скорости стержня определится как производная от координаты  $y$  по времени

$$v_y = \dot{y} = -\frac{a^2 \omega \sin 2\omega t}{2r \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos^2 \omega t}}.$$

**Задача 4.21.** При подъеме груза  $A$  лебедкой закон движения груза определяется формулой

$$y = \frac{h}{2} (1 - \cos \varphi), \quad (1)$$

где  $h$  — полная высота подъема, угол  $\varphi$  изменяется пропорционально времени

$$\varphi = \sqrt{\frac{2a_0}{h}} t. \quad (2)$$

При подъеме груза канат наматывается на барабан  $B$ , вращающийся вокруг неподвижной оси  $O$ .

Определить скорость и ускорение точки на ободе барабана (радиуса  $R$ ), смысл постоянной  $a_0$ , полное время подъема груза, а также

моменты времени, когда угловая скорость и угловое ускорение барабана достигают наибольших и наименьших значений.

Решение. Величина скорости точки на ободе барабана равна модулю скорости подъема груза. Проекция скорости груза равна производной от координаты  $y$  по времени

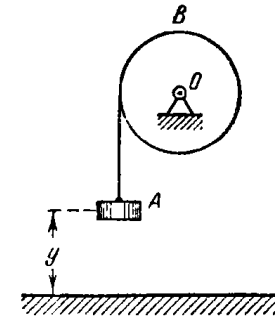
$$v_y = \dot{y} = \frac{h}{2} \sin \varphi \dot{\varphi}$$

или, с учетом (2),

$$v_y = \dot{y} = \sqrt{\frac{a_0 h}{2}} \sin \varphi.$$

Проекция угловой скорости барабана равна

$$\omega_z = \frac{v_y}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{a_0 h}{2}} \sin \varphi. \quad (3)$$



К задаче 4.21.

Переходим к определению углового ускорения барабана. Имеем:

$$e_z = \dot{\omega}_z = \frac{a_0}{R} \cos \varphi.$$

Модуль угловой скорости, как это следует из формулы (4), достигает наибольшей величины, когда

$$\sin \varphi_1 = \pm 1,$$

и, следовательно,

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad (4)$$

где  $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ . Подставляя в (4) значение  $\varphi$  из (2), находим моменты времени, соответствующие наибольшим значениям модуля угловой скорости,

$$t_1 = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \sqrt{\frac{h}{2a_0}}.$$

Эти же моменты времени соответствуют обращению углового ускорения барабана в нуль, т. е. наименьшим значениям модуля углового ускорения.

Наименьшее значение модуль угловой скорости получает при

$$\sin \varphi_2 = 0$$

и, следовательно, при

$$\varphi_2 = n\pi, \quad (5)$$

где  $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ . Подставляя в (5) значение угла (2), находим моменты времени, соответствующие наименьшим значениям модуля

угловой скорости,

$$t_2 = n\pi \sqrt{\frac{h}{2a_0}}.$$

Эти же моменты времени отвечают наибольшим значениям модуля углового ускорения.

Величина нормального ускорения точки на ободе барабана равна

$$\omega_n = \omega^2 R = \frac{a_0 h}{2R} \sin^2 \varphi.$$

Проекция ускорения этой точки на касательную равна

$$\omega_\tau = \varepsilon_2 R = a_0 \cos \varphi.$$

Эта формула определяет одновременно и проекцию ускорения груза на ось  $y$ . Следовательно, постоянная  $a_0$  есть наибольшее значение ускорения груза. Полное ускорение точки на ободе равно по величине

$$\omega = \sqrt{\omega_n^2 + \omega_\tau^2} = a_0 \sqrt{\frac{h^2}{4R^2} \sin^4 \varphi + \cos^2 \varphi}.$$

Направление ускорения составляет с радиусом угол  $\alpha$ , определяемый уравнением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_\tau}{\omega_n} = \frac{\varepsilon_2}{\omega^2} = \frac{2R \cos \varphi}{h \sin^2 \varphi}.$$

Полное время подъема  $T$  определится из равенства (1), если вместо  $y$  подставить  $h$ , а вместо  $\varphi$  его значение (2):

$$h = \frac{h}{2} \left[ 1 - \cos \sqrt{\frac{2a_0}{h}} T \right],$$

откуда

$$T = \pi \sqrt{\frac{h}{2a_0}}.$$

Для приобретения навыков в решении задач на преобразование простейших движений рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 397, 399, 401, 403, 407, 408, 409, 411, 415.

## СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

### § 1. Абсолютное, переносное и относительное движения точки

Рассмотрим движение точки по отношению к системе подвижных осей координат  $x_1, y_1, z_1$  (рис. 5.1), которые в свою очередь движутся относительно осей  $x, y, z$ . Систему осей  $x, y, z$  условно будем считать неподвижной.

Движение точки относительно неподвижных осей координат называется *абсолютным движением*. Движение точки по отношению к подвижным осям координат  $x_1, y_1, z_1$  называется *относительным движением*. *Переносным* называется движение относительно неподвижной системы осей  $x, y, z$  той точки подвижной системы осей  $x_1, y_1, z_1$ , с которой в данный момент совпадает движущаяся точка.

Наблюдатель, связанный с системой подвижных осей  $x_1, y_1, z_1$ , видит относительное движение точки. Наблюдатель, связанный с системой неподвижных осей  $x, y, z$ , видит абсолютное движение точки.

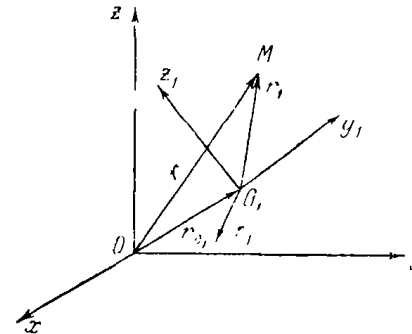


Рис. 5.1.

Величины, относящиеся к абсолютному движению точки, будем

снабжать индексом  $a$ , к относительному — индексом  $r$ , к переносному — индексом  $e$  (например,  $v_r$  — скорость точки в относительном движении,  $\omega_e$  — ускорение в переносном движении и т. д.).

Поясним понятия абсолютного, относительного и переносного движений на примере. Диск вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр  $O$ . По диаметру  $AB$  диска с постоянной по величине скоростью движется точка  $M$  (рис. 5.2).

Выберем неподвижную, абсолютную систему координат с центром в неподвижной точке  $O$  и обозначим ее  $Oxy$ . Подвижную, относи-

тельную систему координат выбираем с центром в неподвижной точке диска  $O$ , ось  $Ox_1$  направляем по диаметру  $AB$ , ось  $Oy_1$  в плоскости диска — перпендикулярно к оси  $Ox_1$ . Система координат  $Ox_1y_1$  жестко связана с диском и, следовательно, вращается вместе с ним против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

Относительным движением точки  $M$  в данном примере является прямолинейное и равномерное движение этой точки по диаметру  $AB$ , т. е. по оси  $Ox_1$ . Переносным движением точки  $M$  является вращение вместе с диском той точки диска, с которой в данный момент совпадает точка  $M$ . Абсолютное движение точки  $M$  есть движение по отношению к неподвижной системе координат  $Oxy$ . Оно складывается из относительного движения вдоль оси  $Ox_1$  и из вращения точки  $M$  вместе с диском.

В рассматриваемом примере и в других аналогичных случаях мы, кроме представления о переносном движении точки, встречаемся с понятием переносного движения твердого тела, в данном случае диска, по отношению к которому точка  $M$  совершает относительное движение.

Пользуясь определением переносного и относительного движений, а также рассмотренным выше примером, можно указать на следующий метод изучения этих движений. Желая изучить относительное движение точки, следует мысленно остановить переносное движение и изучать движение далее по законам и правилам абсолютного движения точки. Если необходимо изучить переносное движение точки, то следует мысленно остановить относительное движение и рассматривать далее движение точки по формулам кинематики точки в абсолютном движении. Если точка участвует одновременно в относительном и переносном движениях, то ее абсолютное движение называют сложным движением точки, а ее относительное и переносное движения называются составляющими движениями.

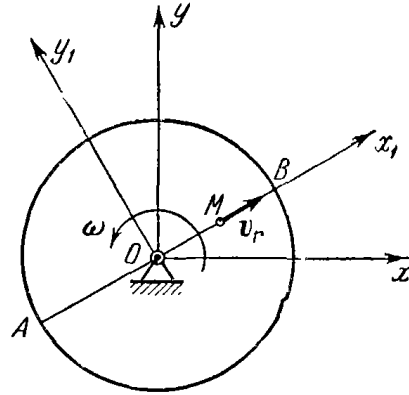


Рис. 5.2.

## § 2. Сложение движений. Определение траекторий и уравнений движения в относительном и абсолютном движениях точки

Уравнения движения точки  $M$  в относительном движении определяются формулами

$$x_1 = f_1(t), \quad y_1 = f_2(t), \quad z_1 = f_3(t), \quad (1^*)$$

где  $x_1, y_1, z_1$  — координаты движущейся точки  $M$  в относительной системе координат  $O_1x_1y_1z_1$  (рис. 5.1).

Зависимость между  $r$  — радиусом-вектором точки  $M$  (рис. 5.1) в абсолютной системе координат,  $r_1$  — радиусом-вектором той же точки в относительной системе координат и  $r_{O_1}$  — радиусом-вектором начала подвижной, относительной системы координат дается формулами

$$r = r_{O_1} + r_1, \quad (2^*)$$

где

$$r = xi + yj + zk, \quad (3^*)$$

$$r_{O_1} = x_{O_1}i + y_{O_1}j + z_{O_1}k, \quad (4^*)$$

$$r_1 = x_1i_1 + y_1j_1 + z_1k_1. \quad (5^*)$$

В этих формулах  $x, y, z$  — абсолютные координаты точки  $M$ ;  $x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}$  — координаты точки  $O_1$  начала относительной системы координат по отношению к системе  $Oxy$ .

Формулы (2\*) или (3\*) определяют уравнения абсолютного движения точки  $M$  в векторном виде.

Формула (5\*) дает векторное уравнение движения точки в относительном движении.

Уравнения абсолютного движения точки находятся из (2\*) с учетом (3\*), (4\*) и (5\*) проектированием на оси  $Oxyz$  или по формулам аналитической геометрии, связывающим координаты точки  $M$  в двух системах координат — абсолютной и относительной:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_{O_1} + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 z_1, \\ y &= y_{O_1} + \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_3 z_1, \\ z &= z_{O_1} + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_3 z_1. \end{aligned} \right\} \quad (6^*)$$

В этих формулах  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  — соответственно косинусы углов между осями абсолютной и относительной систем координат; так, например,  $\alpha_2 = \cos(\widehat{x, y_1})$ ,  $\gamma_3 = \cos(\widehat{z, z_1})$  и т. д.

В формулах (6\*) координаты  $x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}$ , а также углы между осями абсолютной и относительной систем координат известны как функции времени, если задано переносное движение; относительные координаты  $x_1, y_1, z_1$  определяются как функции времени уравнениями (1\*).

Уравнения переносного движения имеют тот же вид, что и равенства (6\*), только под  $x_1, y_1, z_1$  в этом случае следует подразумевать три числа, определяющих фиксированные координаты точки  $M$  в данный момент времени. В конкретных задачах уравнения абсолютного и относительного движений точки могут быть получены и из более простых, геометрических соображений.

Уравнения (1\*) определяют относительную траекторию точки  $M$  в параметрическом виде. Для определения относительной траектории

точки  $M$  в координатной форме необходимо исключить время из системы уравнений (1\*).

Уравнения (6\*) определяют абсолютную траекторию точки в параметрическом виде, так как координаты  $x_{01}, y_{01}, z_{01}$  и  $x_1, y_1, z_1$ , так же как и направляющие косинусы  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ , являются функциями независимого параметра — времени. Для определения абсолютной траектории точки  $M$  в координатной форме надо исключить из уравнений (6\*) время.

Уравнения абсолютного движения точки (6\*) упрощаются, если переносное движение является плоским и относительное движение происходит в той же плоскости. Обозначая через  $\alpha$  угол между положительными направлениями осей  $x$  и  $x_1$ , можно записать уравнения (6\*), выражающие зависимость между абсолютными и относительными координатами точки, в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= x_{01} + x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y &= y_{01} + x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (7^*)$$

Если, кроме того, переносное плоское движение является поступательным, то можно выбрать относительную систему координат так, чтобы оси  $x$  и  $x_1$ ,  $y$  и  $y_1$  были параллельны. Тогда уравнения (7\*) принимают вид

$$x = x_{01} + x_1, \quad y = y_{01} + y_1. \quad (8^*)$$

Если переносное движение является вращением вокруг неподвижной оси и относительное движение точки происходит в плоскости перпендикулярной к оси вращения, то, совмещая начало относительной системы координат с осью вращения и ось  $z$  с осью  $z_1$ , находим уравнения абсолютного движения из (7\*)

$$x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \quad y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha. \quad (9^*)$$

В некоторых задачах более простые решения получаются при пользовании другими системами координат: полярными, сферическими, цилиндрическими и т. д.

Задачи, относящиеся к данному параграфу, делятся на два типа.

1. Известны относительное и переносное движения точки. Требуется определить уравнения абсолютного движения и абсолютную траекторию точки.

2. Известны абсолютное и переносное движения точки. Требуется определить уравнение относительного движения и относительную траекторию точки.

Первая задача сводится к сложению двух составляющих движений точки. Вторая задача заключается в разложении известного

абсолютного движения на заданное переносное движение и неизвестное, подлежащее определению, относительное движение.

Рекомендуется такая последовательность действий при решении задач.

А. Заданы относительное и переносное движения; требуется определить абсолютное движение:

1) раскладываем абсолютное движение точки на два составных движения, переносное и относительное;

2) выбираем две системы координат, абсолютную, условно принимаемую неподвижной, и относительную;

3) составляем уравнения относительного движения точки;

4) пользуясь одним из видов уравнений (6\*) — (9\*), составляем уравнения абсолютного движения точки;

5) исключая время из уравнений абсолютного движения точки, находим уравнения абсолютной траектории точки в явном виде.

Б. Заданы абсолютное и переносное движения; требуется определить относительное движение:

1) раскладываем абсолютное движение точки на два движения, переносное и относительное;

2) выбираем абсолютную, условно неподвижную систему координат и относительную систему осей;

3) составляем уравнения абсолютного движения точки;

4) пользуясь одним из видов уравнений (6\*) — (9\*), находим уравнения относительного движения точки;

5) исключая время из уравнений относительного движения точки, находим уравнения относительной траектории точки в явном виде.

**Задача 5.1.** Судно плывет вниз по течению реки. Скорость течения реки  $2 \text{ м/сек}$ . Скорость судна по отношению к неподвижной воде  $10 \text{ м/сек}$ .

Составить уравнения относительного и абсолютного движений судна.

**Решение.** Выберем начало относительной и абсолютной систем координат в той точке, где находилось судно в начальный момент времени. Течение воды примем за переносное движение. Относительная система координат составляет одно целое с движущейся водой, следовательно, она участвует в переносном движении со скоростью  $2 \text{ м/сек}$ . Чтобы составить уравнение относительного движения судна, остановим мысленно течение реки. Тогда легко получить уравнение относительного движения

$$x_1 = 10t.$$

Абсолютное движение судна — это движение по отношению к берегу, к системе координат, жестко связанной с землей. Уравнение абсолютного движения в данном случае будет:

$$x = x_1 + x_2,$$

где  $x_2$  — абсцисса начала относительной системы координат по отношению к неподвижному берегу. Зависимость абсциссы  $x_2$  от времени определяется равенством

$$x_2 = 2t,$$

следовательно, уравнение абсолютного движения судна имеет вид

$$x = 10t + 2t = 12t.$$

**Задача 5.2.** Кривошип  $OA$  вращается равномерно в плоскости рисунка вокруг неподвижной точки  $O$  согласно уравнению  $\varphi = kt$ . Длины кривошипа и шатуна равны:  $OA = AB = r$ . Ползун  $B$  движется в направляющих вдоль оси  $Ox$ . К ползуну жестко прикреплен паз, движущийся вместе с ползуном поступательно, как одно твердое тело. Внутри паза движется точка  $M$  так, что расстояние  $O_1M = r \sin kt$ . Расстояние  $O_1B = a$ .

Полагая движение точки  $M$  по отношению к пазу относительным, определить уравнения относительного и абсолютного движений точки  $M$ , а также ее абсолютную траекторию.

**Решение.** Выбрав относительные оси координат  $O_1x_1y_1$  с центром в точке  $O_1$  так, как это показано на рисунке, находим уравнения относительного движения точки  $M$ :

$$x_1 = 0, \quad y_1 = r \sin kt.$$

Переносным движением будет являться поступательное перемещение точки вместе с пазом. Уравнения абсолютного движения можно получить из системы (8\*), так как переносное движение является плоским, поступательным движением. Следовательно, уравнения абсолютного движения имеют вид

$$x = x_0 + x_1, \quad y = y_0 + y_1,$$

где  $x_0, y_0$  — текущие координаты системы координат.

Определим координаты так как  $OA = AB$ . След

$$x_0 = OA \cos$$

Таким образом,

Для определения траектории абсолютного движения из этих уравнений исключаем время. Имеем:

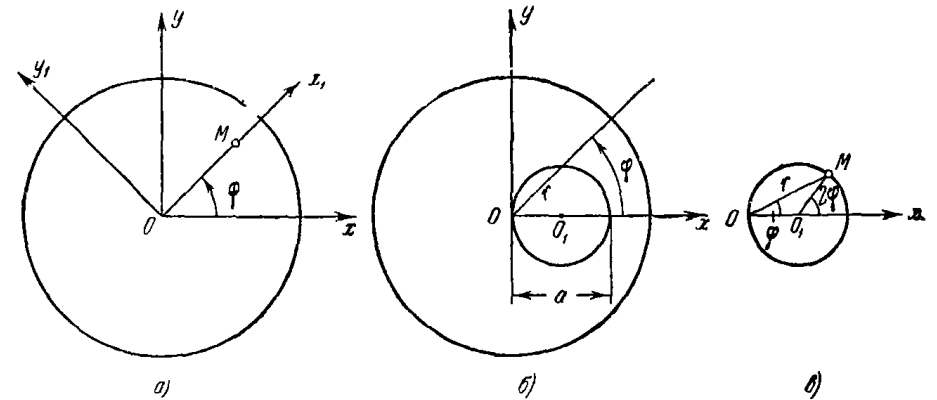
$$\frac{x-a}{2} = r \cos kt, \quad y = r \sin kt.$$

Возводим каждое из этих уравнений в квадрат и, складывая, находим уравнение траектории

$$\left(\frac{x-a}{2r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1.$$

Это — уравнение эллипса, ось симметрии которого параллельна оси  $Oy$  и находится на расстоянии  $a$  от начала координат  $O$ .

**Задача 5.3.** Поворотный кран вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости рисунка и проходящей через точку  $O$



К задаче 5.3.

с постоянной угловой скоростью:  $\varphi = kt$ . По стреле крана, совпадая с осью  $Ox_1$ , передвигается тележка  $M$  с грузом согласно уравнениям  $x_1 = a \cos kt, y_1 = 0$  (рис. а).

Уравнения абсолютного движения тележки  $M$  и ее

траектория в абсолютной системе координат  $Ox_1y_1$  определяется формулой

В нашей задаче

$$\begin{aligned}x_1 &= a \cos kt, \\y_1 &= 0, \quad \varphi = kt.\end{aligned}$$

Подставляя эти значения в уравнения (1), находим уравнения абсолютного движения точки  $M$  в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned}x &= a \cos^2 kt, \\y &= a \cos kt \sin kt.\end{aligned}$$

Уравнение траектории абсолютного движения точки проще всего получить в полярной системе координат:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} = a \cos kt, \\ \varphi &= kt,\end{aligned}$$

откуда

$$r = a \cos \varphi.$$

Это — уравнение окружности диаметра  $a$ , проходящей через начало координат  $O$  (рис. б).

Время, в течение которого точка  $M$  совершает полное колебание по стреле  $Ox_1$ , как видно из условия задачи, равно

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

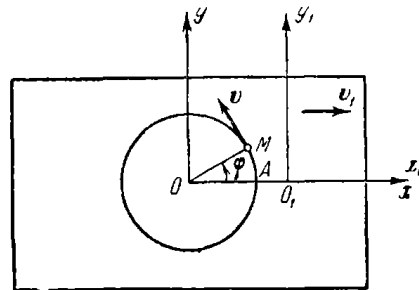
Найдем время  $T_1$ , в течение которого точка  $M$  опишет в абсолютном движении окружность диаметра  $a$  (рис. в). Так как  $\angle MO_1x = 2\varphi = 2kt$ , как внешний угол треугольника  $OO_1M$ , равный сумме двух углов треугольника, не смежных с ним, то угол поворота радиуса  $O_1M$  равен  $2kt$  и, следовательно, искомое время

$$T_1 = \frac{\pi}{k}.$$

Таким образом, за время одного полного колебания груза по стреле он опишет в абсолютном движении дважды окружность диаметра  $a$ .

**Задача 5.4.** Лента для записи показаний пера самописца  $M$  движется поступательно, параллельно оси  $x$ , с постоянной скоростью  $v_1$ . Перо самописца  $M$  вращается вокруг точки  $O$  на расстоянии  $OM = r$ , описывая окружность. Скорость пера постоянна по величине и равна  $v$ .

Определить траекторию, вычерчиваемую пером на ленте.



К задаче 5.4.

Решение. Выберем оси координат с началом в центре окружности  $O$  и направим ось  $x$  в сторону движения ленты, ось  $y$  перпендикулярно к ее скорости.

Абсолютное движение пера самописца  $M$  является движением по окружности радиуса  $r$  с постоянной по величине скоростью  $v$ . Разложим это движение на два составных движения: переносное поступательное прямолинейное движение вместе с лентой и относительное движение пера по отношению к ленте. Обозначим относительные координаты пера через  $x_1, y_1$  и абсолютные координаты через  $x, y$ . Координаты начала относительной системы координат точки  $O_1$  назовем  $x_{O_1}, y_{O_1}$ . Согласно уравнениям (8\*) зависимость между этими координатами имеет вид

$$x = x_{O_1} + x_1, \quad y = y_{O_1} + y_1. \quad (1)$$

Обозначая угол, составленный радиусом  $OM$  с осью  $x$ , буквой  $\varphi$ , находим:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Так как дуга  $AM = r\varphi = vt$ , то угол  $\varphi$  определяется по формуле

$$\varphi = \frac{v}{r} t.$$

Далее, находим координаты начала относительной системы координат

$$x_{O_1} = v_1 t = v_1 \frac{r}{v} \varphi, \quad y_{O_1} = 0.$$

Подставляя найденные значения координат в уравнения (1), имеем:

$$r \cos \varphi = v_1 \frac{r}{v} \varphi + x_1, \quad r \sin \varphi = y_1.$$

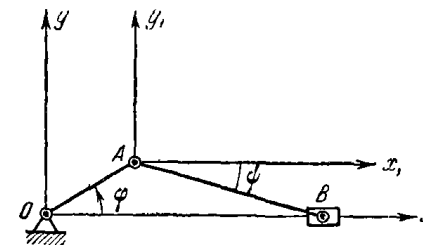
Таким образом, параметрическое уравнение относительной траектории пера самописца, т. е. уравнение кривой, которая вычерчивается на ленте, является уравнением циклоиды:

$$x_1 = r \cos \varphi - v_1 \frac{r}{v} \varphi, \quad y_1 = r \sin \varphi.$$

**Задача 5.5.** Кривошип  $OA$  шатуно-кривошипного механизма вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости рисунка и проходящей через точку  $O$ , с постоянной угловой скоростью; угол  $\varphi = \omega t$ .

Длина кривошипа  $r$ , длина шатуна  $AB = l$ . Ползун  $B$  движется в направляющих по прямой, проходящей через точку  $O$ .

Определить уравнение относительного движения ползуна  $B$  по отношению к системе координат  $x_1 y_1$ , начало которой совпадает



К задаче 5.5.

с точкой соединения кривошипа и шатуна и когорая перемещается поступательно.

Решение. Относительное движение шатуна  $AB$  является вращением вокруг оси, перпендикулярной к плоскости рисунка и проходящей через точку  $A$ . Положение шатуна в этом движении определяется углом  $\psi = \angle x_1AB = \angle ABO$ . По теореме синусов имеем:

$$\frac{r}{\sin \psi} = \frac{l}{\sin \varphi},$$

откуда

$$\psi = \arcsin \left( \frac{r}{l} \sin \omega_0 t \right).$$

Это — уравнение относительного движения шатуна  $AB$ .

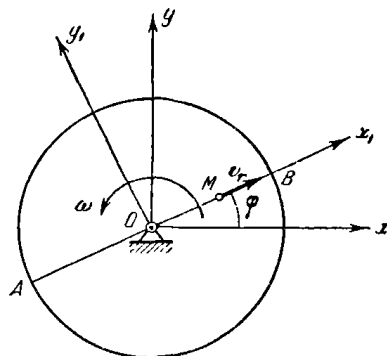
Чтобы получить уравнения относительного движения ползуна  $B$ , достаточно выразить его относительные координаты  $x_1, y_1$  через найденный угол  $\psi$ :

$$x_1 = l \cos \psi = l \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \omega_0 t},$$

$$y_1 = -l \sin \psi = -r \sin \omega_0 t.$$

Таким образом, в данной задаче сложное движение шатуна  $AB$  разложено на два простых вращательных движения: переносное движение — вращение с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$  вокруг центра  $O$  неподвижных осей  $Oxy$  и относительное движение — неравномерное вращение шатуна вокруг центра  $A$  подвижной системы координат  $x_1y_1$ .

**Задача 5.6.** Точка  $M$  движется с постоянной скоростью  $v_r$  вдоль диаметра  $AB$  диска, причем в начальный момент точка находилась в центре диска  $O$ . Диск одновременно вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, перпендикулярной к рисунку и проходящей через центр диска. В начальный момент диаметр  $AB$  совпадал с осью  $Ox$ .



К задаче 5.6.

Определить абсолютную траекторию точки  $M$ .

Решение. Вращение диска с постоянной угловой скоростью принимаем за переносное движение. Движение точки  $M$  по диаметру диска  $AB$  рассматриваем как относительное движение. Эту задачу проще всего решить, применив полярную систему координат: радиус-вектор  $OM = r$ , определяющий расстояние точки  $M$  от полюса  $O$ , и

угол  $\varphi = \angle xOx_1$ , определяющий угол поворота радиуса-вектора вокруг точки  $O$ . Имеем:

$$x_1 = r = v_r t, \quad \varphi = \omega t.$$

Для нахождения искомой траектории определяем из последнего уравнения время

$$t = \frac{\varphi}{\omega}$$

и подставляем это значение в первое уравнение

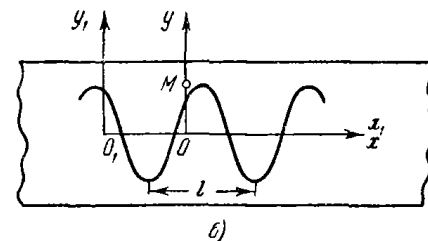
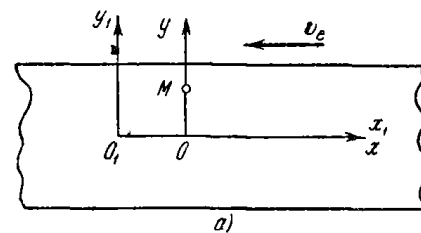
$$r = \frac{v_r}{\omega} \varphi.$$

Это есть уравнение архимедовой спирали в полярной системе координат.

**Задача 5.7.** Точка  $M$  совершает гармоническое колебательное движение согласно уравнениям

$$x = 0, \quad y = a \cos(kt + \beta). \quad (1)$$

Экран осциллографа, на котором записывается движение точки  $M$ , перемещается влево с постоянной скоростью  $v_e$ .



К задаче 5.7.

Определить траекторию, описываемую точкой  $M$  на экране (рис. *a*).

Решение. Точка  $M$  участвует в сложном движении. Абсолютным или результирующим движением будет прямолинейное гармоническое колебательное движение точки  $M$  по отношению к неподвижной системе координат  $Oxy$ , определяемое уравнениями (1). С другой стороны, разложим мысленно абсолютное движение точки  $M$  на относительное движение по отношению к экрану и переносное движение вместе

с экраном. Зависимость между координатами точки  $M$  в абсолютном и относительном движениях будет:

$$x = x_{O_1} + x_1, \quad y = y_{O_1} + y_1, \quad (2)$$

где  $x_{O_1}, y_{O_1}$  — координаты точки  $O_1$ , начала относительной системы координат,  $x_1, y_1$  — искомые координаты точки  $M$  в относительном движении. Далее,

$$x_{O_1} = -v_e t, \quad y_{O_1} = 0,$$

Из (1) и (2) находим:

$$0 = -v_e t + x_1, \quad a \cos(kt + \beta) = 0 + y_1$$

и, далее,

$$x_1 = v_e t, \quad y_1 = a \cos(kt + \beta).$$

Исключив из этой системы уравнений время, получим уравнение относительной траектории точки  $M$

$$y_1 = a \cos\left(\frac{kx_1}{v_e} + \beta\right).$$

Это уравнение синусоиды. Обозначим длину волны этой синусоиды (рис. б) через  $l$ . Тогда время одного полного колебания (период) будет:

$$T_1 = \frac{l}{v_e} = \frac{2\pi}{k}.$$

Таким образом, частота колебаний  $k$  точки  $M$  связана с длиной волны на экране соотношением

$$k = \frac{2\pi v_e}{l}.$$

Для приобретения навыков в решении задач на определение траекторий и уравнений движения в относительном и абсолютном движениях точки рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 417, 418, 419, 422, 423, 425.

### § 3. Сложение скоростей. Определение скорости точки в относительном, переносном и абсолютном движениях

Зависимость между абсолютной, относительной и переносной скоростями точки, совершающей сложное (составное) движение, определяется *теоремой сложения скоростей*, согласно которой абсолютная скорость равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r. \quad (1^*)$$

Для определения относительной скорости точки следует мысленно остановить переносное движение и вычислить относительную скорость по правилам кинематики точки.

Для определения переносной скорости точки достаточно мысленно остановить относительное движение и искать переносную скорость по правилам кинематики точки как скорость той точки перемещающейся

системы координат, с которой совпадает в данный момент движущаяся точка.

Теорема сложения скоростей (рис. 5.3) позволяет решать задачи такого рода:

1. Известны две стороны треугольника скоростей по величине и направлению, соответствующие, например, абсолютной и переносной скоростям точки; требуется определить третью сторону треугольника, соответствующую относительной скорости точки.

2. Известна одна сторона треугольника по величине и направлению, соответствующая, например, абсолютной скорости точки, а также направления двух других сторон. Определить величины переносной и относительной скоростей.

Решение этих задач может быть получено графически, построением замкнутого треугольника скоростей (рис. 5.3, а) или параллелограмма скоростей (рис. 5.3, б). При обходе треугольника скоростей стрелки, определяющие направление относительной и переносной скоростей, идут в одном направлении, стрелка, определяющая направление абсолютной скорости, — в противоположном.

Решение задач, таким образом, сводится к построению треугольника или параллелограмма скоростей и определению элементов, сторон и углов этих геометрических фигур. Это определение может быть сделано или тригонометрическим путем, или проектированием геометрического равенства (1\*) на декартовы оси координат.

При применении метода проекций надлежит выбрать оси координат и спроектировать равенство (1\*) на эти оси. Тогда зависимости между проекциями абсолютной, относительной и переносной скоростей определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} v_{ax} &= v_{ex} + v_{rx} \\ v_{ay} &= v_{ey} + v_{ry} \end{aligned} \right\} \quad (2^*)$$

Величина абсолютной скорости находится по ее проекциям

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2}. \quad (3^*)$$

Направление абсолютной скорости определяется направляющими косинусами

$$\cos(\widehat{v_a, x}) = \frac{v_{ax}}{v}, \quad \cos(\widehat{v_a, y}) = \frac{v_{ay}}{v}. \quad (4^*)$$

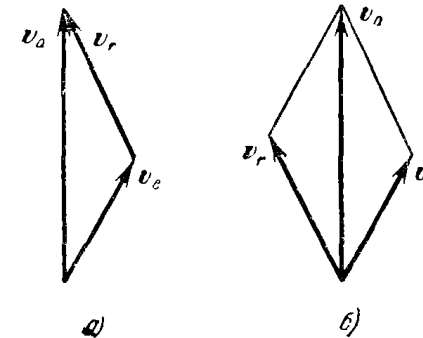


Рис. 5.3.

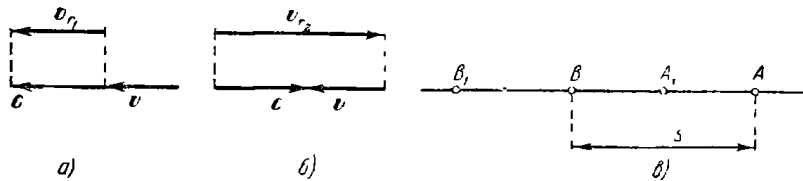


При решении задач рекомендуется такая последовательность действий:

- 1) разложить движение на составляющие, определив абсолютное, относительное и переносное движения;
- 2) выбрать две системы координат: абсолютную и подвижную;
- 3) мысленно остановив переносное движение, найти скорость относительного движения точки;
- 4) мысленно отвлекаясь от относительного движения, найти скорость переносного движения точки;
- 5) применив теорему сложения скоростей, определить искомую абсолютную скорость точки.

Если абсолютная скорость известна, то можно, пользуясь теоремой сложения скоростей, найти искомую относительную или переносную скорость точки.

**Задача 5.8.** Две подводные лодки плывут друг за другом на расстоянии  $s$  одна от другой с одинаковой скоростью  $v$ . Звук локаатора, установленного на задней лодке  $A$ , настигает впереди плывущую лодку в точке  $B_1$  и, отразившись, возвращается на экран локаатора в точке  $A_1$ .



К задаче 5.8.

Определить время от выхода звука из  $A$  до возвращения его в  $A_1$ , если скорость распространения звука в воде  $c$ .

**Решение.** Первый способ. Разложим абсолютное движение звука со скоростью  $c$  на переносное движение вместе с передней лодкой и на относительное движение по отношению к передней лодке. Переносная скорость равна скорости первой лодки  $v$ , так как подвижная система координат связана с первой лодкой и движется поступательно.

При распространении звука от задней лодки к передней относительная скорость звука (рис. *a*)

$$v_{r1} = c - v.$$

С этой относительной скоростью звук проходит относительное расстояние  $s$ , отделяющее лодки, за некоторое время  $t_1$ . Следовательно,

$$(c - v)t_1 = s. \quad (1)$$

В обратном направлении, от передней лодки к задней, звук имеет относительную скорость (рис. *б*)

$$v_{r2} = c + v,$$

так как в этом случае абсолютная скорость звука  $c$  направлена вправо, а переносная скорость задней лодки  $v$  — влево. Звук проходит относительное расстояние  $s$  между лодками за некоторое время  $t_2$ . Следовательно,

$$(c + v)t_2 = s. \quad (2)$$

Определяя из (1) время  $t_1$  и из (2) время  $t_2$ , складываем их и находим искомое время от выхода звука до его возвращения

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s}{c - v} + \frac{s}{c + v} = \frac{2sc}{c^2 - v^2}.$$

**Второй способ.** Обозначим через  $t_1$  время, в течение которого звук проходит расстояние  $AB_1$  (рис. *в*). Тогда расстояние

$$AB_1 = ct_1, \quad (3)$$

так как звук проходит этот путь с постоянной скоростью  $c$ . С другой стороны, это же расстояние равно начальному расстоянию между лодками  $AB$  плюс расстояние  $BB_1$ , которое прошла передняя лодка за время  $t_1$  со скоростью  $v$ , т. е.

$$AB_1 = s + vt_1. \quad (4)$$

Приравняв (3) и (4), находим:

$$t_1 = \frac{s + vt_1}{c}. \quad (5)$$

Обозначим через  $t_2$  время, в течение которого звук проходит расстояние  $B_1A_1$ , отразившись от передней лодки. Это расстояние

$$B_1A_1 = ct_2, \quad (6)$$

так как звук прошел это расстояние с постоянной скоростью  $c$  за время  $t_2$ . С другой стороны, это расстояние

$$B_1A_1 = AB_1 - AA_1 = s + vt_1 - v(t_1 + t_2), \quad (7)$$

ибо  $AA_1$  — это путь, пройденный задней лодкой с постоянной скоростью  $v$  за время  $(t_1 + t_2)$ . Сопоставляя равенства (6) и (7), получаем, что

$$t_2 = \frac{s + vt_1 - v(t_1 + t_2)}{c}.$$

Искомое время от выхода звука из  $A$  до возвращения его в  $A_1$  равно сумме времен  $t_1$  и  $t_2$

$$t = t_1 + t_2 = 2 \frac{s + vt_1}{c} - \frac{vt_1}{c}. \quad (8)$$

Подставляя в это уравнение значение  $t_1$ , определяемое из (5),

$$t_1 = \frac{s}{c - v},$$

и решая затем (8) относительно искомой неизвестной  $t$ , после несложных преобразований находим, что

$$t = \frac{2sc}{c^2 - v^2}.$$

Как видно, первый способ, основанный на теореме сложения скоростей, проще и быстрее ведет к цели.

**Задача 5.9.** При запуске искусственного спутника Земли ему необходимо сообщить вблизи поверхности Земли абсолютную горизонтальную скорость  $8 \text{ км/сек}$ .

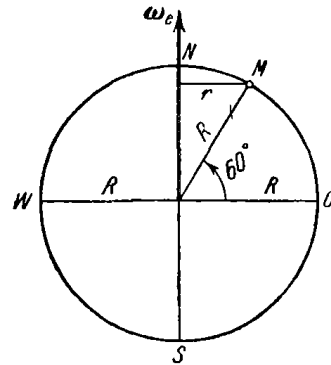
Определить наименьшую и наибольшую относительные горизонтальные скорости, которые необходимо сообщить спутнику, если запуск производится на экваторе; на широте  $60^\circ$ ; на Северном полюсе. Радиус Земли  $R = 6400 \text{ км}$ .

**Решение.** Спутник до начала полета вращается вместе с Землей как одно тело. Движение спутника вместе с Землей принимаем за переносное движение.

Движение спутника по отношению к Земле рассматриваем как относительное движение.

Тогда абсолютная скорость спутника будет:

$$v = v_e + v_r.$$



К задаче 5.9.

Обозначая широту места запуска углом  $\varphi$ , получим для определения наибольшей относительной скорости равенство

$$v = v_r - v_e,$$

где

$$v_e = R \cos \varphi \omega_e. \quad (1)$$

Запуск спутника в этом случае производится в направлении с востока на запад, в сторону, противоположную вращению Земли.

Наименьшая относительная скорость спутника найдется из равенства

$$v = v_r + v_e,$$

где  $v_e$  также определяется формулой (1). В этом случае запуск производится в направлении с запада на восток, в сторону вращения Земли.

При запуске спутника у поверхности Земли на экваторе угол  $\varphi = 0$  и, следовательно,

$$v_e = 6400 \cdot 1/24 \cdot 2\pi/3600 = 0,465 \text{ км/сек}.$$

Наибольшая и наименьшая относительные скорости спутника определяются из равенства

$$v = v_r \pm v_e$$

или

$$8 = v_r \pm 0,465,$$

откуда максимальная относительная скорость

$$v_r = 8,465 \text{ км/сек},$$

а минимальная относительная скорость

$$v_r = 7,535 \text{ км/сек}.$$

При запуске спутника на широте  $60^\circ$  переносная скорость спутника, равная скорости точки, находящейся у поверхности Земли, будет:

$$v_{e2} = R \cos 60^\circ \omega_e = 0,233 \text{ км/сек},$$

и, следовательно, наибольшая и наименьшая относительные скорости спутника определяются из равенства

$$8 = v_r \pm 0,233,$$

откуда

$$v_{r \max} = 8,233 \text{ км/сек},$$

$$v_{r \min} = 7,767 \text{ км/сек}.$$

При запуске спутника на Северном или Южном полюсах переносная скорость равна нулю, так как эти точки земной поверхности расположены на оси вращения, и, следовательно,

$$v = v_r = 8 \text{ км/сек}.$$

**Задача 5.10.** Кривошип  $OA = r$  вращается в плоскости чертежа вокруг неподвижной точки  $O$  согласно уравнению  $\varphi = kt$ . Ползун  $A$  при этом перемещается в наклонной кулисе  $B$ , которая может передвигаться поступательно вдоль оси  $Ox$ . Угол наклона кулисы к оси  $Ox$  равен  $\alpha$ .

Составить уравнения абсолютного и относительного движений точки  $A$ , а также найти абсолютную, относительную и переносную скорости точки.

**Решение.** Первый способ. Абсолютное движение ползуна  $A$  — вращение вокруг неподвижного центра  $O$ . Относительное движение — прямолинейное движение ползуна вдоль кулисы, определяемое

переменным расстоянием  $O_1A = \eta$ . Переносное движение — поступательное перемещение точки  $A$  вместе с кулисой.

Уравнения абсолютного движения точки  $A$  имеют вид

$$x = r \cos kt, \quad y = r \sin kt. \quad (1)$$

С другой стороны, обозначая расстояние  $OO_1 = x_e$ , имеем:

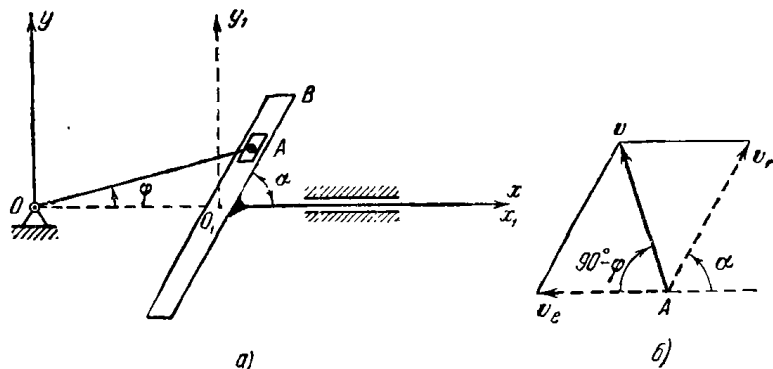
$$x = x_e + \eta \cos \alpha, \quad y = \eta \sin \alpha. \quad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), после несложных преобразований находим:

$$\eta = r \frac{\sin kt}{\sin \alpha}, \quad (3)$$

$$x_e = r \cos kt - r \sin kt \operatorname{ctg} \alpha. \quad (4)$$

Уравнение (3) является уравнением относительного движения точки  $A$ . Уравнение (4), с точностью до постоянной величины, является уравнением переносного движения, так как последнее является поступательным движением.



К задаче 5.10.

Определим, далее, абсолютную скорость точки  $A$ . Так как проекции скорости

$$v_x = \dot{x} = -rk \sin kt, \quad v_y = \dot{y} = rk \cos kt,$$

то модуль абсолютной скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = rk,$$

а направляющие косинусы имеют вид

$$\cos(\widehat{v, x}) = \frac{\dot{x}}{v} = -\sin kt, \quad \cos(\widehat{v, y}) = \frac{\dot{y}}{v} = \cos kt. \quad (5)$$

Из (5) видно, что абсолютная скорость точки  $A$  перпендикулярна к кривошипу  $OA$ .

Проекция относительной скорости точки  $A$  на направление  $O_1A$  равна производной от относительной координаты по времени

$$v_{r\eta} = \dot{\eta} = rk \frac{\cos kt}{\sin \alpha},$$

так как относительное движение является прямолинейным. Проекция переносной скорости точки  $A$  на ось  $x$

$$v_{ex} = \dot{x}_e = -rk \sin kt - rk \cos kt \operatorname{ctg} \alpha,$$

так как переносное движение является поступательным и, следовательно, скорости всех точек кулисы одинаковы.

Второй способ. Находим величину угловой скорости кривошипа  $OA$

$$\omega = \dot{\phi} = k.$$

Величина абсолютной скорости точки  $A$  как конца кривошипа, вращающегося вокруг неподвижного центра  $O$ ,

$$v = r\omega = rk.$$

Направлена эта скорость перпендикулярно к кривошипу. Относительная скорость точки  $A$  направлена вдоль прямой  $O_1A$ . Переносная скорость точки  $A$  параллельна оси  $Ox$ . Строим параллелограмм скоростей (рис. б). Откладываем вектор, равный абсолютной скорости точки  $A$ . На этом отрезке, как на диагонали, строим параллелограмм скоростей, проводя линии, параллельные относительной и переносной скоростям, величины которых неизвестны. Эти величины определяются как стороны параллелограмма.

По теореме синусов имеем:

$$\frac{v}{\sin \alpha} = \frac{v_r}{\cos kt} = \frac{v_e}{\cos(kt - \alpha)}.$$

Отсюда находим модуль относительной скорости

$$v_r = rk \frac{\cos kt}{\sin \alpha}.$$

Проекция переносной скорости на ось  $x$  будет:

$$v_{ex} = -rk(\sin kt + \cos kt \operatorname{ctg} \alpha).$$

Второй способ решения быстрее и проще ведет к цели, если требуется определить только скорости в абсолютном, переносном и относительном движениях. Если же необходимо, кроме этих скоростей, найти и уравнения абсолютного, переносного и относительного движений, то целесообразно применить первый способ решения.

**Задача 5.11.** Точка  $M$  скользит по наклонной плоскости  $AB$  призмы с относительной скоростью, модуль которой равен

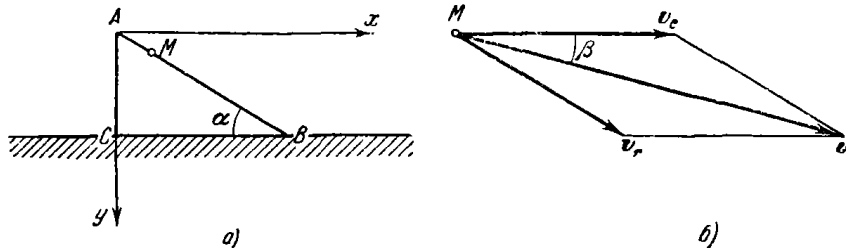
$$v_r = \sqrt{2gy},$$

где  $g$  — постоянный коэффициент,  $y$  — ордината точки, отсчитываемая по вертикали вниз от высшей точки призмы. В начальный момент точка  $M$  находилась в  $A$  (рис. а). Призма перемещается по горизонтальному полу с постоянной скоростью  $v_e$  вправо.

Определить абсолютную траекторию точки  $M$ , ее абсолютную скорость в момент касания пола, если  $AC = h$ .

Решение. Выбираем абсолютные оси координат с началом в точке  $A$ , ось  $Ax$  горизонтальна, ось  $Ay$  направим по вертикали вниз.

Движение призмы  $ABC$  принимаем за переносное движение. Движение точки  $M$  по отношению к призме — за относительное движение. Строим на заданных переносной и относительной скоростях



К задаче 5.11.

точки  $M$  параллелограмм, диагональ которого является абсолютной скоростью точки  $M$  (рис. б). Используя чертеж, найдем проекции абсолютной скорости на декартовы оси координат:

$$v_x = v_e + v_r \cos \alpha, \quad v_y = v_r \sin \alpha.$$

Подставив в эти уравнения значения  $v_r$ ,  $v_x = dx/dt$  и  $v_y = dy/dt$ , перепишем их так:

$$\frac{dx}{dt} = v_e + \sqrt{2gy} \cos \alpha, \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2gy} \sin \alpha. \quad (2)$$

Разделив (1) на (2), получим:

$$dx = \frac{v_e}{\sqrt{2g} \sin \alpha} \frac{dy}{\sqrt{y}} + \operatorname{ctg} \alpha dy. \quad (3)$$

Интегрируя (3) в пределах от 0 до  $x$  слева и от 0 до  $y$  справа (так как движение начинается из начала координат), будем иметь:

$$x = \frac{v_e \cdot 2\sqrt{y}}{\sqrt{2g} \sin \alpha} + y \operatorname{ctg} \alpha$$

или

$$(x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2 = \frac{2v_e^2}{g} y.$$

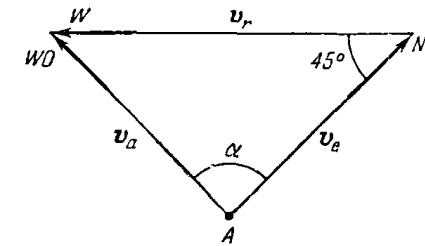
Это и есть уравнение траектории. Траектория — парабола с вертикальной осью симметрии и с вершиной в точке  $A$ , так как касательная к ней в точке  $A$  горизонтальна ( $v_y$  в начале движения равнялась нулю). Величину абсолютной скорости в момент, когда точка касается пола, находим из (1) и (2), учитывая, что в этот момент  $y = h$ :

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_e^2 + 2gh + 2v_e \sqrt{2gh} \cos \alpha.$$

Направление скорости определится в этот момент углом  $\beta$ , который она составляет с горизонталью

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{v_x}{v_y} = \operatorname{ctg} \alpha + \frac{v_e}{\sqrt{2gh} \sin \alpha}.$$

**Задача 5.12.** Штурман, находящийся на мостике морского грузового транспорта, идущего на северо-восток со скоростью 16 узлов, определил величину и направление относительной скорости другого судна. Эта относительная скорость оказалась равной  $16\sqrt{2}$  узлам и направлена на запад.



К задаче 5.12.

Определить величину и направление абсолютной скорости второго судна, т. е. его скорость относительно Земли.

Узел — единица скорости, равная одной морской миле в час, а морская миля равна 1852 м. Суда рассматривать как точки.

Решение. Движение второго судна будем рассматривать как сложное. Примем за абсолютное движение второго судна его движение по отношению к Земле. Относительным движением второго судна будем считать его движение по отношению к грузовому транспорту. За переносное движение второго судна примем движение той точки подвижной среды, жестко связанной с грузовым транспортом, через которую в данный момент проходит второе судно. Заметим, что переносное движение является при этом поступательным движением вместе с грузовым транспортом.

По условию задачи известны: относительная скорость второго судна, направленная на запад:  $v_r = 16\sqrt{2}$  узлов, переносная скорость при поступательном движении, равная скорости грузового транспорта  $v_e = 16$  узлам, направленная на северо-восток. Согласно теореме сложения скоростей

$$v_a = v_e + v_r.$$

Для графического нахождения абсолютной скорости второго судна построим треугольник скоростей (см. рисунок). Для этого отложим из произвольной точки  $A$  переносную скорость  $v_e$ , направленную

на северо-восток, а из конца переносной скорости под углом в  $45^\circ$  на запад откладываем отрезок, равный  $v_r$ . Замыкающая сторона треугольника будет абсолютной скоростью.

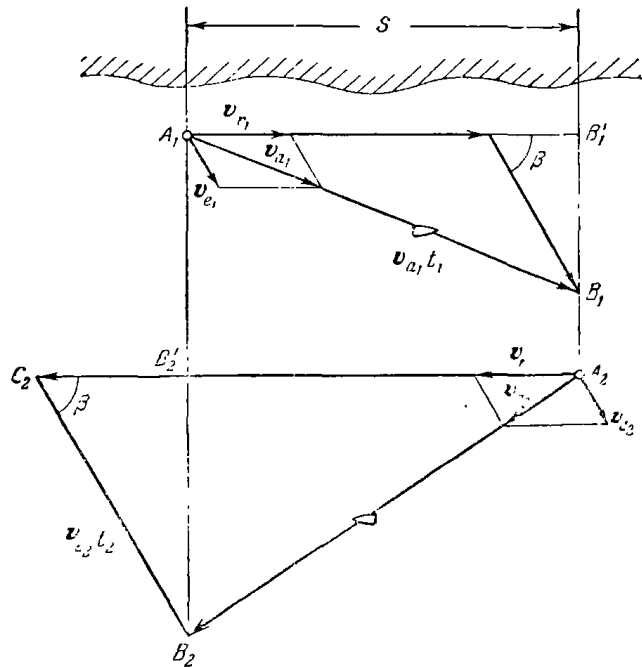
Модуль абсолютной скорости определится по теореме косинусов

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 - 2v_e v_r \cos(\widehat{v_e, v_r})} = 16 \text{ узлов.}$$

Чтобы найти угол  $\alpha$ , определяющий направление абсолютной скорости, замечаем, что  $v_a = v_e$ , следовательно, треугольник скоростей равнобедренный и угол  $\alpha = 90^\circ$ .

Таким образом, абсолютная скорость направлена на северо-запад.

**Задача 5.13.** При определении скорости судна относительно воды производят пробег судна вдоль специально оборудованной мерной



К задаче 5.13.

прямой линии в двух взаимно противоположных направлениях. При этом время пробега в одном направлении оказалось равным 9 мин 20 сек, а время пробега в обратном направлении 11 мин 10 сек. Длина мерной линии  $S = 3$  морские мили.

Определить величину скорости судна относительно воды  $v_r$ , полагая, что в районе испытаний имеется неизвестное, но постоянное по величине и направлению течение.

Решение. Будем рассматривать движение судна как сложное: За абсолютное движение судна примем его движение по отношению к Земле. Скорость  $v_a$  этого движения не известна ни по величине, ни по направлению. За относительное движение судна примем его движение по отношению к воде. Относительная скорость  $v_r$  известна по направлению (она направлена по мерной линии), неизвестна по величине, но при обоих пробегах величина относительной скорости неизменна. За переносное движение судна примем движение судна по течению вместе с водной массой. Переносная скорость  $v_e$  будет равна скорости течения, величина и направление которого постоянны, но неизвестны.

Запишем теорему сложения скоростей

$$v_a = v_e + v_r \quad (1)$$

Умножим это векторное равенство на  $t_1$ , время первого пробега, получим

$$v_{a1} t_1 = v_{r1} t_1 + v_{e1} t_1.$$

Проектируя последнее равенство на направление мерной линии  $s$ , получим (см. рис.):

$$S = v_{r1} t_1 + v_{e1} t_1 \cos \beta, \quad (2)$$

где неизвестный угол между течением и мерной линией обозначен буквой  $\beta$ .

Применим аналогичный прием ко второму пробегу. Умножая векторное равенство (1) на  $t_2$ , время второго пробега, получим:

$$v_{a2} t_2 = v_{r2} t_2 + v_{e2} t_2.$$

Проектируя это векторное равенство на направление мерной линии  $s$ , найдем:

$$S = v_{r2} t_2 - v_{e2} t_2 \cos \beta. \quad (3)$$

Учитывая, что  $v_{r1} = v_{r2}$  и  $v_{e1} = v_{e2}$  по условию, перепишем уравнения (2) и (3) в виде

$$S = v_r t_1 + v_e t_1 \cos \beta,$$

$$S = v_r t_2 - v_e t_2 \cos \beta.$$

Решив эту систему уравнений, исключим  $v_e \cos \beta$  и найдем искомую величину скорости судна по отношению к воде

$$v_r = \frac{S(t_1 + t_2)}{2t_1 t_2}. \quad (4)$$

Если в этой формуле расстояние  $S$  дано в милях, а время  $t$  в секундах, то размерность  $v_r$  будет *миля/сек*. Так как скорость судна принято измерять в узлах, т. е. в морских милях в час, то для

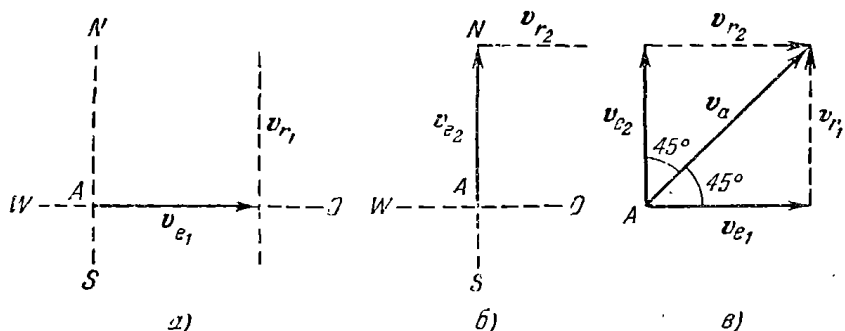
перевода в узлы надо умножить правую часть (4) на 3600, т. е. на количество секунд в часе. Итак,

$$v_r = \frac{S(t_1 + t_2)}{2t_1 t_2} \cdot 3600 \text{ узлов.}$$

Подставляя числовые данные  $t_1 = 9 \text{ мин } 20 \text{ сек} = 560 \text{ сек}$ ,  $t_2 = 11 \text{ мин } 10 \text{ сек} = 670 \text{ сек}$ , находим:

$$v_r = \frac{3(560 + 670)}{2 \cdot 560 \cdot 670} \cdot 3600 = 17,7 \text{ узла.}$$

**Задача 5.14.** Судно идет на восток со скоростью 12 узлов, при этом флюгер на мачте показывает южный ветер. Судно изменило курс и идет на север с прежней по величине скоростью, флюгер теперь показывает западный ветер.



К задаче 5.14.

Определить величину и направление скорости ветра по отношению к Земле, считая скорость ветра постоянной.

**Примечание.** Наименование курса указывает, куда идет судно, наименование ветра указывает, откуда ветер дует.

**Решение.** Рассмотрим движение ветра как сложное движение. За абсолютное движение ветра примем его движение по отношению к Земле. Относительным движением ветра будем считать его движение по отношению к движущемуся судну. За переносное движение ветра примем его движение вместе с движущимся судном. Абсолютная скорость ветра не известна ни по величине, ни по направлению. Относительная скорость  $v_r$  ветра известна только по направлению для двух моментов времени. Переносная скорость  $v_e$  ветра, равная скорости движущегося судна, известна по величине и направлению для тех же моментов времени.

Согласно теореме сложения скоростей имеем:

$$v_a = v_e + v_r.$$

Следовательно, при первом курсе судна теорема сложения скоростей для ветра запишется так:

$$v_{a1} = v_{e1} + v_{r1}. \quad (1)$$

Выполним построение, соответствующее правой части уравнения (1). Отложим известный вектор  $v_{e1}$  и из его конца проведем направление вектора  $v_{r1}$  (рис. а).

Напишем теорему сложения скоростей для ветра при втором курсе судна:

$$v_{a2} = v_{e2} + v_{r2}.$$

Построение правой части этого равенства дано на рис. б. Совместим, далее, оба рисунка. Другими словами, выполним оба построения сразу из одной точки А.

Тогда начало вектора  $v_a$  совпадает с точкой А, а пересечение направлений  $v_{r1}$  и  $v_{r2}$  определит конец вектора  $v_a$  (рис. в). Согласно условию абсолютная скорость ветра постоянна, т. е.  $v_{a1} \equiv v_{a2}$ . Это учтено при построении рис. в. Из построения находим, что ветер юго-западный. Его скорость равна

$$v_a = 12 \sqrt{2} \text{ узлов} = 12 \sqrt{2} \frac{1852}{3600} \text{ м/сек} \approx 8,73 \text{ м/сек.}$$

Для приобретения навыков в решении задач на сложение скоростей рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 427, 428, 429, 431, 435, 436, 441.

#### § 4. Сложение ускорений

1°. Определение ускорений точки при переносном поступательном и произвольном переносном движениях. Зависимость между ускорениями точки в абсолютном, относительном и переносном движениях определяется *теоремой сложения ускорений*, иначе называемой *теоремой Кориолиса*,

$$w_a = w_e + w_r + w_c. \quad (1^*)$$

Согласно этой теореме абсолютное ускорение точки  $w_a$  равно геометрической сумме переносного ускорения  $w_e$ , относительного ускорения  $w_r$  и кориолисова ускорения  $w_c$ .

Для определения относительного ускорения точки следует мысленно отвлечься от переносного движения и вычислить относительное ускорение по правилам кинематики точки. Для определения переносного ускорения следует мысленно остановить относительное движение точки и вычислить переносное ускорение по правилам кинематики точки

как ускорение той точки подвижной системы координат, с которой совпадает в данный момент движущаяся точка.

Кориолисово (или поворотное) ускорение вычисляется по формуле

$$\omega_c = 2\omega_e \times v_r \quad (2^*)$$

где  $\omega_e$  — вектор угловой скорости переносного движения,  $v_r$  — вектор относительной скорости точки. Величина кориолисова ускорения равна

$$\omega_c = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\omega_e, v_r}). \quad (3^*)$$

Направление кориолисова ускорения определяется по правилу векторного произведения: кориолисово ускорение  $\omega_c$  направлено перпендикулярно к плоскости, в которой лежат  $\omega_e$  и  $v_r$ , в ту сторону, чтобы наблюдатель, стоящий по вектору  $\omega_c$ , видел поворот от вектора  $\omega_e$  к вектору  $v_r$  на наименьший угол против часовой стрелки. Наряду с определением направления ускорения Кориолиса как векторного произведения  $\omega_e \times v_r$  существует и применяется для нахождения направления этого ускорения правило Н. Е. Жуковского: спроектируем относительную скорость  $v_r$  на плоскость, перпендикулярную к угловой скорости  $\omega_e$ , и повернем проекцию в этой плоскости на угол  $90^\circ$  в сторону вращения определяемого  $\omega_e$  — это и будет направление ускорения Кориолиса.

Если траектории точек подвижной системы координат не прямолинейны и относительное движение точки также является криволинейным, то целесообразно вычислять переносное ускорение как геометрическую сумму нормального и касательного переносных ускорений, относительное ускорение как геометрическую сумму нормального и касательного относительных ускорений. При этом формула (1\*) записывается в следующем виде:

$$\omega_a = \omega_{en} + \omega_{en} + \omega_{rn} + \omega_{rn} + \omega_c \quad (4^*)$$

где  $\omega_{en}$ ,  $\omega_{rn}$  — соответственно нормальные ускорения в переносном и относительном движениях,  $\omega_{en}$ ,  $\omega_{rn}$  — соответственно касательные ускорения в переносном и относительном движениях.

При пользовании теоремой сложения ускорений может быть применен метод проекций. Выбирая неподвижную систему координат  $x, y, z$  и проектируя равенство (4\*) на каждую из этих осей, находим:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{ax} &= \omega_{enx} + \omega_{enx} + \omega_{rnx} + \omega_{rnx} + \omega_{cx} \\ \omega_{ay} &= \omega_{eny} + \omega_{eny} + \omega_{rny} + \omega_{rny} + \omega_{cy} \\ \omega_{az} &= \omega_{enz} + \omega_{enz} + \omega_{rnz} + \omega_{rnz} + \omega_{cz} \end{aligned} \right\} \quad (5^*)$$

При этом модуль абсолютного ускорения определяется по формуле

$$\omega_a = \sqrt{\omega_{ax}^2 + \omega_{ay}^2 + \omega_{az}^2} \quad (6^*)$$

а направляющие косинусы равны

$$\cos(\widehat{\omega_a, x}) = \frac{\omega_{ax}}{\omega_a}, \quad \cos(\widehat{\omega_a, y}) = \frac{\omega_{ay}}{\omega_a}, \quad \cos(\widehat{\omega_a, z}) = \frac{\omega_{az}}{\omega_a}. \quad (7^*)$$

Необходимо заметить, что в случае переносного поступательного движения угловая скорость этого движения  $\omega_e$  равна нулю и согласно формуле (2\*) обращается в нуль и кориолисово ускорение. Теорема сложения ускорений при переносном поступательном движении упрощается:

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r \quad (8^*)$$

Из формул (2\*) и (3\*) следует, что ускорение Кориолиса обращается также в нуль, если угловая скорость переносного движения параллельна относительной скорости.

Кориолисово ускорение обращается в нуль и в те моменты, когда  $\omega_e$  или  $v_r$  равны нулю.

Пользуясь теоремой сложения ускорений, можно решать следующие типы задач:

1. Известно относительное и переносное движения точки. Необходимо определить абсолютное ускорение точки.

2. Известно абсолютное и переносное движения точки. Необходимо определить относительное ускорение точки.

В первом случае, пользуясь уравнениями относительного движения, следует определить по правилам кинематики точки относительную скорость и относительное ускорение точки. Независимо от этого, исходя из уравнений переносного движения, следует найти переносную скорость и переносное ускорение точки. Далее, зная угловую скорость переносного движения и относительную скорость точки, можно вычислить кориолисово ускорение по величине и направлению.

После этого абсолютное ускорение может быть определено геометрически, как замыкающая сторона многоугольника, построенного на векторах переносного, относительного и кориолисова ускорений. Можно поступить и иначе, используя упомянутый метод проекций. Для этого достаточно спроектировать геометрическое равенство (1\*) на три взаимно перпендикулярные оси координат, найдя тем самым проекции абсолютного ускорения на эти оси, согласно формулам (5\*), и, далее, определить величину и направление абсолютного ускорения по формулам (6\*) и (7\*).

При решении задач рекомендуется такая последовательность действий. Необходимо:

- 1) разложить движение на составляющие, определив абсолютное, относительное и переносное движения;
- 2) выбрать две системы координат: абсолютную и подвижную;
- 3) мысленно остановив переносное движение, определить скорость и ускорение точки в относительном движении;

4) мысленно отвлекаясь от относительного движения, найти угловую скорость переносного движения и ускорение точки в переносном движении;

5) по известным угловой скорости переносного движения и скорости точки в относительном движении найти кориолисово ускорение точки;

6) пользуясь методом проекций, определить проекции абсолютного ускорения на оси координат;

7) по найденным проекциям абсолютного ускорения найти искомого абсолютное ускорение по величине и направлению.

**Задача 5.15.** Цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_e$ . По поверхности цилиндра движется точка  $M$  согласно уравнениям

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \cos 2\pi t, & y_1 &= 3 \sin 2\pi t, \\ z_1 &= 3t. \end{aligned} \quad (1)$$

Оси координат  $x_1, y_1, z_1$  жестко связаны с цилиндром и, следовательно, вращаются вместе с ним с угловой скоростью  $\omega_e$ . Ось  $z_1$  совпадает с осью симметрии. Проекция переносной угловой скорости на ось  $z_1$  равна  $\omega_{ez_1} = 2 \text{ сек}^{-1}$ .

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки  $M$ . Как изменятся абсолютная скорость и ускорение точки  $M$ , если направление вращения цилиндра изменить на обратное, т. е. если  $\omega_{ez_1} = -2 \text{ сек}^{-1}$ ?

**Решение.** Вращение цилиндра принимаем за переносное движение. Движение точки  $M$  по поверхности цилиндра будет относительным движением. На рисунке показана винтовая линия — относительная траектория точки  $M$ . Она определяется уравнениями (1).

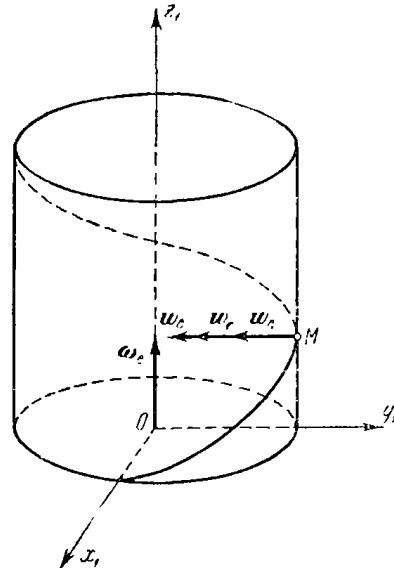
Расстояние точки  $M$  от оси вращения  $z_1$  равно

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 3 \text{ м.}$$

Переносная скорость точки  $M$  есть скорость той точки цилиндра, с которой совпадает в данный момент точка  $M$ . Ее величина равна

$$v_e = r\omega_e = 3 \cdot 2 = 6 \text{ м/сек.}$$

Эта скорость лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения  $z_1$ , и направлена по касательной к поверхности цилиндра. Переносное



К задаче 5.15.

ускорение точки  $M$  есть ускорение той точки цилиндра, с которой совпадает в данный момент точка  $M$ . Вращение цилиндра равномерное, следовательно, переносное ускорение точки будет переносным нормальным ускорением, равным по величине

$$w_e = w_{en} = r\omega_e^2 = 3 \cdot 4 = 12 \text{ м/сек}^2.$$

Оно направлено по перпендикуляру, восстановленному к оси вращения  $z_1$  из точки  $M$ . Относительная скорость точки  $M$  определится, исходя из системы уравнений относительного движения (1). Проекции относительной скорости на оси  $x_1, y_1, z_1$  равны первым производным относительных координат по времени:

$$v_{rx_1} = \dot{x}_1 = -6\pi \sin 2\pi t, \quad (2)$$

$$v_{ry_1} = \dot{y}_1 = 6\pi \cos 2\pi t, \quad (3)$$

$$v_{rz_1} = \dot{z}_1 = 3.$$

Величина относительной скорости

$$v_r = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2} = \sqrt{36\pi^2 + 9} \approx 19,1 \text{ м/сек.}$$

Абсолютная скорость точки  $M$  является геометрической суммой переносной и относительной скоростей. Если сложить геометрически две составляющие относительной скорости  $v_{rx}$  и  $v_{ry}$ , то из уравнений (2) и (3) следует, что результирующая будет равна по модулю  $6\pi$  и направлена в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, по касательной к поверхности цилиндра. Следовательно, эта результирующая  $v_{rxy}$  совпадает по направлению с переносной скоростью  $v_e$ . Итак, абсолютная скорость точки  $M$  равна по величине

$$v = \sqrt{(v_{rxy} + v_e)^2 + v_{rz}^2} = \sqrt{(6\pi + 6)^2 + 3^2} \approx 25,5 \text{ м/сек.} \quad (4)$$

Абсолютная скорость лежит в касательной плоскости к цилиндру и составляет угол  $\alpha$  с образующей цилиндра, причем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{xy}}{v_z} = \frac{6\pi + 6}{3} \approx 2 \cdot 4,14 = 8,28. \quad (5)$$

Определяем проекции относительного ускорения на оси  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$  как производные от относительных координат по времени

$$w_{rx} = \ddot{x}_1 = -12\pi^2 \cos 2\pi t = -4\pi^2 x_1,$$

$$w_{ry} = \ddot{y}_1 = -12\pi^2 \sin 2\pi t = -4\pi^2 y_1,$$

$$w_{rz} = \ddot{z}_1 = 0.$$

Величина относительного ускорения равна

$$w_r = \sqrt{\ddot{x}_1^2 + \ddot{y}_1^2 + \ddot{z}_1^2} = 12\pi^2 \text{ м/сек}^2.$$



Направлено это ускорение по перпендикуляру, восстановленному из точки  $M$  к оси вращения, и, следовательно, совпадает по направлению с переносным ускорением (см. рисунок).

Ускорение Кориолиса равно

$$\omega_c = 2\omega_e \times v_r.$$

Величина кориолисова ускорения определится по формуле

$$\omega_c = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\omega_e v_r}) = 2\omega_e v_{r,xy} = 2\omega_e \cdot 6\pi = 24\pi \text{ м/сек}^2.$$

Направление кориолисова ускорения находим по правилу векторного произведения или по правилу Н. Е. Жуковского. Для этого спроектируем вектор относительной скорости на плоскость  $xu$ , перпендикулярную к вектору угловой переносной скорости, и повернем эту проекцию в плоскости  $xu$  на  $90^\circ$  в сторону вращения  $\omega_e$ . Это и будет направление ускорения Кориолиса. Следовательно, кориолисово ускорение направлено по перпендикуляру, восстановленному из точки  $M$  к оси вращения, и совпадает по направлению с переносным и относительным ускорениями. Итак, абсолютное ускорение равно по величине арифметической сумме переносного относительного и кориолисова ускорений

$$\omega = \omega_e + \omega_r + \omega_c = 12 + 12\pi^2 + 24\pi \approx 206,5 \text{ м/сек}^2. \quad (6)$$

Оно направлено по перпендикуляру, восстановленному из точки  $M$  к оси вращения (см. рисунок).

Рассмотрим теперь случай  $\omega_{ez} = -2 \text{ сек}^{-1}$ . По сравнению с предыдущим в данном случае произойдут только следующие изменения. Проекция относительной скорости на горизонтальную плоскость  $v_{r,xy}$  и переносная скорость будут направлены по одной прямой, но в разные стороны. Следовательно, формулы (4) и (5) примут вид

$$v = \sqrt{(v_{r,xy} - v_e)^2 + v_{r,z}^2} = \sqrt{(6\pi - 6)^2 + 3^2} \approx 13,2 \text{ м/сек}, \quad (4')$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{xy}}{v_z} = \frac{6\pi - 6}{3} = 2 \cdot 2,14 = 4,28. \quad (5')$$

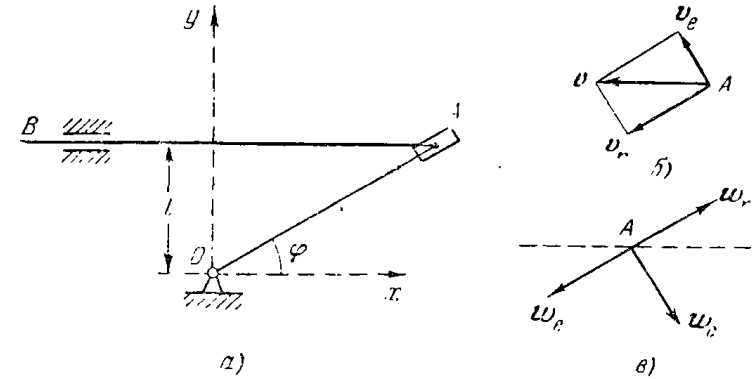
Ускорение Кориолиса, сохраняя свою величину, будет направлено по тому же перпендикуляру, восстановленному из точки  $M$  к оси вращения, но в противоположную сторону, так как  $\omega_e$  направлено в противоположную сторону. Следовательно, абсолютное ускорение равно по величине

$$\omega = \omega_e + \omega_r - \omega_c = 12 + 12\pi^2 - 24\pi = 55,5 \text{ м/сек}^2. \quad (6')$$

В этой задаче переносное, относительное и кориолисово ускорения оказались направленными по одной прямой и определение абсолютного ускорения свелось к алгебраическому сложению этих величин. Следует помнить, что такое совпадение направлений всех трех составляющих полного ускорения не является характерным. В подавляющем

большинстве случаев составляющие абсолютного ускорения направлены по разным прямым и их сложение производится векторно.

**Задача 5.16.** Для сообщения поступательного движения в станках применяют механизм (рис. а), состоящий из прямолинейного стержня, вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг точки  $O$  так, что угол  $\varphi = \omega t$ . Дойдя до упора, стержень начинает вращаться с той же угловой скоростью в противоположном направлении. Ползун  $A$  вращается вместе со стержнем и одновременно может перемещаться вдоль стержня. Прямая  $AB$ , шарнирно соединенная с ползуном, движется в горизонтальных направляющих, осуществляя возвратно-поступательное движение.



К задаче 5.16.

Зная расстояние  $l$  от шарнира  $O$  до прямой  $AB$ , определить ее скорость и ускорение в поступательном движении.

**Решение.** Первый способ. Проведем неподвижные оси координат с началом в шарнире  $O$ . Тогда координаты точки  $A$  определяются уравнениями

$$x = l \operatorname{ctg} \omega t, \quad y = l.$$

Величина скорости точки  $A$  тогда будет:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{l\omega}{\sin^2 \omega t}, \quad (1)$$

так как точка  $A$  движется прямолинейно. Величина ускорения точки  $A$  определится как производная от скорости по времени

$$\omega = \frac{dv}{dt} = \frac{2l\omega^2 \cos \omega t}{\sin^3 \omega t}. \quad (2)$$

**Второй способ.** Рассмотрим абсолютное движение точки  $A$  ползуна как составное: переносное — вращение вместе со стержнем  $OA$

и относительное — прямолинейное движение вдоль стержня  $OA$ . Тогда модуль переносной скорости точки  $A$  будет:

$$v_e = OA \cdot \omega = \frac{l\omega}{\sin \varphi}.$$

Направлена переносная скорость перпендикулярно к стержню  $OA$ , следовательно, она образует со стержнем  $AB$  угол  $90^\circ - \varphi$ . Относительная скорость (в прямолинейном движении по  $OA$ ) равна производной от  $OA$  по времени и направлена по  $OA$ .

$$v_r = \frac{d}{dt} \left( \frac{l}{\sin \omega t} \right) = - \frac{l\omega \cos \omega t}{\sin^2 \omega t}.$$

Проектируя векторное равенство (рис. б)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r,$$

определяющее абсолютную скорость точки  $A$ , на направление  $AB$ , находим.

$$v = -v_e \sin \omega t + v_r \cos \omega t = -l\omega \left( 1 - \frac{\cos^2 \omega t}{\sin^2 \omega t} \right) = - \frac{l\omega}{\sin^2 \omega t},$$

что совпадает с (1).

Переходим к определению абсолютного ускорения точки  $A$ .

Согласно теореме сложения ускорений

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_c. \quad (3)$$

Так как  $\omega = \text{const}$ , то величина переносного ускорения будет:

$$\omega_e = (OA) \omega^2 = \frac{l\omega^2}{\sin \omega t}.$$

Оно направлено от  $A$  к центру  $O$  (рис. в). Значение относительного ускорения в прямолинейном движении равно

$$\omega_r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{l\omega^2 (1 + \cos^2 \omega t)}{\sin^3 \omega t}.$$

Оно направлено по прямой  $OA$ . Ускорение Кориолиса равно по величине

$$\omega_c = 2\omega v_r \sin 90^\circ = \frac{2l\omega^2 \cos \omega t}{\sin^2 \omega t}.$$

Направление ускорения определится поворотом вектора относительной скорости на  $90^\circ$  в сторону переносного вращения, так как в рассматриваемом случае  $v_r$  перпендикулярно к  $\omega$ . Проектируя, далее, векторное равенство (3) на направление абсолютного ускорения, совпадающего с осью  $x$ , находим

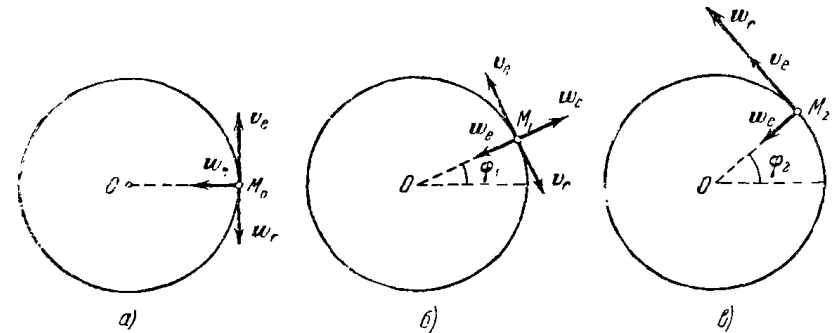
$$\omega = (-\omega_e + \omega_r) \cos \omega t + \omega_c \sin \omega t = \frac{2l\omega^2 \cos \omega t}{\sin^3 \omega t},$$

что совпадает с (2).

**Задача 5.17.** Самолет описывает на вираже дугу окружности радиуса  $R = 800$  м с постоянной по величине скоростью  $160$  м/сек. Касательная к траектории самолета при движении совпадает с продольной осью самолета. Поршень двигателя движется в направлении продольной оси согласно уравнению

$$x_1 = 5 \cos 2\pi t,$$

причем ось  $x_1$  направлена к носу самолета.



К задаче 5.17.

Определить относительную, переносную и абсолютную скорости и ускорение поршня в моменты времени

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0,25 \text{ сек}, \quad t_2 = 0,5 \text{ сек}.$$

**Примечание.** Расстояние от поршня до центра окружности считать неизменным и равным  $800$  м, пренебрегая малыми изменениями этого расстояния в связи с ходом поршня.

**Решение.** Движение самолета принимаем за переносное движение. Движение поршня по отношению к самолету рассматриваем как относительное движение. Движение поршня по отношению к Земле, складывающееся из движений по отношению к самолету и вместе с самолетом, является абсолютным движением поршня.

Переносная скорость поршня есть скорость той точки самолета, с которой совпадает в данный момент поршень. Модуль переносной скорости равен

$$v_e = 160 \text{ м/сек}.$$

Величина угловой скорости переносного движения находится по формуле

$$\omega_e = \frac{v_e}{R} = \frac{160}{800} = 0,2 \text{ сек}^{-1}.$$

Переносное ускорение поршня есть ускорение той точки самолета, с которой совпадает в данный момент поршень. Так как в перенос-

ном движении самолет движется с постоянной по величине скоростью, то переносное ускорение является нормальным переносным ускорением, величина которого

$$\omega_e = \omega_{en} = \frac{v_e^2}{R} = \frac{160^2}{800} = 32 \text{ м/сек}^2.$$

Это ускорение направлено к центру окружности, описываемой самолетом.

Определим положение самолета в моменты времени  $t_0, t_1, t_2$ . Самолет вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_e = \dot{\varphi}$  вокруг центра  $O$ , следовательно, угол поворота прямой, соединяющей центр  $O$  с самолетом, равен

$$\varphi = \omega_e t,$$

а для соответствующих моментов времени (угол измеряется в радианах)

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 0,2 \cdot 0,25 = 0,05, \quad \varphi_2 = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1.$$

Откладываем на рис. *а, б, в* значения этих углов, а также переносную скорость и переносное ускорение точки.

Проекция относительной скорости на касательную к траектории самолета определится как производная от относительной координаты по времени, так как относительное движение поршня является прямолинейным:

$$v_{r\tau} = \dot{x}_1 = -10\pi \sin 2\pi t.$$

Проекция относительного ускорения поршня равна второй производной от относительной координаты по времени

$$\omega_{r\tau} = \ddot{x}_1 = \dot{v}_{r\tau} = -20\pi^2 \cos 2\pi t.$$

Для заданных моментов времени значения относительной скорости и относительного ускорения даются таблицей

	$t_0 = 0$	$t_1 = 0,25$	$t_2 = 0,5$
$v_{r\tau}$	0	$-10\pi$	0
$\omega_{r\tau}$	$-20\pi^2$	0	$20\pi^2$

Откладываем на рисунках относительную скорость и относительное ускорение. Относительная скорость и относительное ускорение направлены по касательной к траектории. Их положительные направления совпадают с переносной скоростью.

Кориолисово ускорение, равное

$$\omega_c = 2\omega_e \times v_r,$$

отлично от нуля в момент времени  $t_1 = 0,25$  и равно нулю при  $t_0 = 0$  и  $t_2 = 0,5$  сек (так как относительная скорость в эти моменты времени обращается в нуль). Величина кориолисова ускорения в момент  $t_1 = 0,25$  равна

$$\omega_c = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\omega_e, v_r}).$$

Так как вектор угловой скорости  $\omega_e$  направлен перпендикулярно к плоскости полета (плоскости рисунка) на читателя, а вектор относительной скорости лежит в этой плоскости, то угол между ними прямой и синус этого угла равен единице. Следовательно, модуль кориолисова ускорения

$$\omega_c = 2\omega_e v_r = 2 \cdot 0,2 \cdot 10\pi = 4\pi \text{ м/сек}^2.$$

Для определения направления кориолисова ускорения пользуемся правилом Жуковского. Относительная скорость  $v_r$  уже лежит в плоскости, перпендикулярной к вектору угловой переносной скорости. Поэтому для нахождения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть  $v_r$  в плоскости рисунка на  $90^\circ$  в сторону вращения  $\omega_e$ .

Откладываем вектор кориолисова ускорения (на рис. *б*) по радиусу от центра. Находим для каждого момента времени абсолютную скорость и абсолютное ускорение поршня по величине, а также направления этих векторов:

при  $t_0 = 0$

$$v = v_e,$$

$$\omega = \sqrt{\omega_e^2 + \omega_r^2} = \sqrt{32^2 + 400\pi^4} \approx 201 \text{ м/сек}^2,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{20\pi^2}{32} = 6,25;$$

при  $t_1 = 0,25$

$$v = v_e - v_r = 160 - 10\pi \approx 128,6 \text{ м/сек},$$

$$\omega = \omega_e - \omega_c = 32 - 4\pi \approx 19,44 \text{ м/сек}^2;$$

при  $t_2 = 0,5$

$$v = v_e,$$

$$\omega = \sqrt{\omega_e^2 + \omega_r^2} = \sqrt{32^2 + 400\pi^4} \approx 201 \text{ м/сек}^2,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{20\pi^2}{32} = 6,25.$$

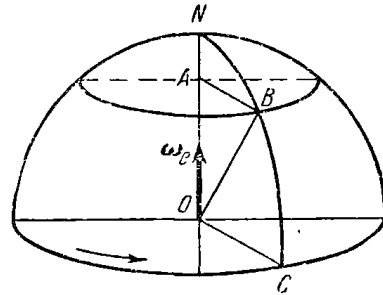
Углы  $\alpha$  и  $\alpha_1$  измеряются между направлением абсолютного ускорения и радиусом, соединяющим центр вращающегося тела  $O$  с самолетом  $M$ .

**Задача 5.18.** Корабль плывет вдоль меридиана  $СВН$  с юга на север. Его скорость по отношению ко дну равна  $36 \text{ км/час}$ .

Определить составляющие абсолютной скорости и абсолютного ускорения корабля, учитывая вращение Земли вокруг своей оси. Широта места  $\varphi = 60^\circ$ . Радиус Земли  $R = 64 \cdot 10^5$  м.

Решить эту же задачу, если корабль плывет вдоль параллели  $60^\circ$  северной широты с запада на восток.

Решение. Корабль, находящийся в точке  $B$ , участвует одновременно в двух движениях. В первом движении он вращается вместе с Землей вокруг оси  $ON$ , где  $N$  — Северный полюс,  $O$  — центр Земли; это вращение, происходящее с запада на восток, примем за переносное движение. В переносном движении точка  $B$  земной поверхности описывает окружность параллели  $60^\circ$  северной широты с центром в точке  $A$  и радиусом  $AB$ . Во втором движении корабль движется вдоль меридиана  $CBN$ . Это движение примем за относительное движение. В относительном движении корабль описывает дугу окружности  $CBN$  радиуса  $R$  с центром в точке  $O$ .



К задаче 5.18.

Абсолютная скорость корабля складывается из переносной и относительной скоростей:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

Переносная скорость по величине равна произведению радиуса вращения  $AB$  на угловую скорость Земли, совершающей один оборот за 24 часа:

$$\begin{aligned} v_e &= AB \cdot \omega_e = R \cos 60^\circ \omega_e = \\ &= 64 \cdot 10^5 \cdot 0,5 \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \text{ м/сек} = 232 \text{ м/сек}. \end{aligned} \quad (1)$$

Эта скорость направлена по касательной к параллели  $60^\circ$  северной широты с запада на восток. Относительная скорость равна по величине

$$v_r = 36 \text{ км/час} = 10 \text{ м/сек} \quad (2)$$

и направлена по касательной к меридиану  $CBN$  с юга на север.

Переходим к определению составляющих абсолютного ускорения корабля. Согласно теореме сложения ускорений абсолютное ускорение равно

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c$$

Переносное движение — равномерное вращение вокруг оси, следовательно, переносное ускорение является переносным нормальным

ускорением, величина которого

$$w_e = AB \cdot \omega_e^2 = R \cos 60^\circ \omega_e^2 = 64 \cdot 10^5 \cdot 0,5 \left( \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \right)^2 = 0,017 \text{ м/сек}^2.$$

Это ускорение направлено от  $B$  к  $A$ .

Относительное движение происходит с постоянной по величине скоростью по дуге окружности радиуса  $R$ . Следовательно, относительное ускорение будет нормальным относительным ускорением, значение которого равно

$$w_r = \frac{v_r^2}{R} = \frac{10^2}{64 \cdot 10^5} \text{ м/сек}^2 = 1,56 \cdot 10^{-5} \text{ м/сек}^2.$$

Это ускорение направлено от точки  $B$  к точке  $O$ .

Кориолисово ускорение определяется по формуле

$$\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r$$

Величина кориолисова ускорения будет:

$$w_c = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\boldsymbol{\omega}_e, \mathbf{v}_r}) = 2 \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} 10 \sin 60^\circ = 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ м/сек}^2.$$

При вычислении угла  $\widehat{\boldsymbol{\omega}_e, \mathbf{v}_r}$  мы учли, что угловая скорость Земли направлена по оси вращения к Северному полюсу и, следовательно, составляет угол в  $60^\circ$  с  $\mathbf{v}_r$ . Кориолисово ускорение направлено по касательной к параллели  $60^\circ$  северной широты с востока на запад.

Рассмотрим, далее, случай, когда корабль плывет вдоль параллели  $60^\circ$  северной широты с запада на восток. Полагая по-прежнему вращение Земли переносным движением, а перемещение корабля по отношению к Земле относительным движением, замечаем, что величины переносной и относительной скоростей соответствуют ранее вычисленным (1) и (2). Только в отличие от предыдущего случая относительная скорость на этот раз направлена по касательной к параллели  $60^\circ$  северной широты, т. е. совпадает по направлению с переносной скоростью.

Переносное ускорение по величине и направлению совпадает с найденным в предыдущем случае.

Относительное движение на этот раз происходит по дуге окружности радиуса  $R \cos 60^\circ = AB$ . Следовательно, относительное ускорение будет нормальным и равно по величине

$$w_r = \frac{v_r^2}{R \cos 60^\circ} = 3,12 \cdot 10^{-5} \text{ м/сек}^2.$$

Оно направлено от  $B$  к  $A$ , т. е. совпадает по направлению с переносным ускорением.

Ускорение Кориолиса равно

$$\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r$$

Величина его

$$\omega_c = 2\omega_r \sin 90^\circ = 1,46 \cdot 10^{-3} \text{ м/сек}^3,$$

так как  $\omega_r$  и  $\nu_r$  взаимно перпендикулярны.\* Кориолисово ускорение на этот раз направлено от точки  $B$  к  $A$ ; таким образом, все три составляющие абсолютного ускорения:  $\omega_c$ ,  $\omega_r$ ,  $\omega_c$  — направлены в этом случае по одной прямой.

**Задача 5.19.** В переходном режиме при пуске в ход главного судового двигателя шары центробежного регулятора Уатта (рис. а) расходятся так, что угол  $\alpha$  изменяется согласно уравнению

$$\alpha = \omega_{01}t + \frac{\varepsilon_1 t^2}{2}, \quad (1)$$

где

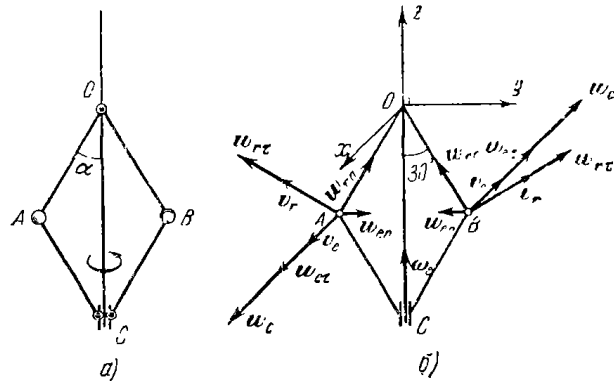
$$\omega_{01} = \frac{\pi}{90} \text{ сек}^{-1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\pi}{900} \text{ сек}^{-2}.$$

Угол поворота регулятора вокруг вертикальной оси является заданной функцией времени:

$$\varphi = kt^3, \quad (2)$$

где постоянный коэффициент  $k = 0,3 \text{ сек}^{-3}$ . Длина стержней  $OA = OB = AC = BC = l = 90 \text{ см}$ .

Определить в момент  $t_1 = 10 \text{ сек}$  абсолютную скорость и абсолютное ускорение шаров регулятора, рассматриваемых как точки.



К задаче 5.19.

**Решение.** Абсолютное движение шаров раскладываем на два движения: переносное движение — вращение вокруг вертикальной оси, происходящее согласно уравнению (2), и относительное движение — вращение вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$  и перпендикулярной к плоскости  $OABC$ , происходящее по закону (1).

Неподвижную систему координат  $xuz$  выбираем с началом в точке  $O$ : ось  $x$  направляем перпендикулярно к плоскости  $OABC$

(в момент  $t_1 = 10 \text{ сек}$ ) на читателя, ось  $y$  — в плоскости  $OABC$  по горизонтали вправо, ось  $z$  — по вертикальной оси вращения вверх.

Находим, пользуясь уравнением (1), значение угла  $\alpha$  в момент  $t_1 = 10 \text{ сек}$

$$\alpha = \frac{\pi}{90} \cdot 10 + \frac{\pi}{900} \cdot \frac{100}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Далее, определяем проекцию относительной угловой скорости на ось  $x$ , т. е. на ось, вокруг которой происходит относительное вращение. Эта проекция равна производной от угла  $\alpha$  по времени

$$\omega_{rx} = \dot{\alpha} = \omega_{01} + \varepsilon_1 t.$$

В момент  $t_1 = 10 \text{ сек}$  проекция относительной угловой скорости

$$\omega_{rx} = \frac{\pi}{45} \text{ сек}^{-1}.$$

Проекция относительного углового ускорения на ту же ось  $x$  равна производной от  $\omega_{rx}$  по времени

$$\varepsilon_{rx} = \dot{\omega}_{rx} = \dot{\alpha} = \varepsilon_1 = \frac{\pi}{900} \text{ сек}^{-2}.$$

Для того чтобы найти относительную скорость и относительное ускорение шаров, остановим мысленно переносное движение. Величина относительной скорости шаров

$$v_r = l\omega_{rx} = 90 \frac{\pi}{45} = 2\pi \text{ см/сек} = 0,02\pi \text{ м/сек}.$$

Относительная скорость направлена соответственно перпендикулярно к стержням  $OA$  и  $OB$  (рис. б).

Переходим к определению относительного ускорения шаров. Так как относительное движение есть вращение вокруг оси, то целесообразно вычислить отдельно относительные нормальное и относительное касательное ускорения. Первое из них равно по величине

$$\omega_{rn} = l\omega_r^2 = 90 \frac{\pi^2}{45^2} = \frac{2\pi^2}{45} \text{ см/сек}^2 \approx 0,0043 \text{ м/сек}^2$$

и направлено от шара к точке  $O$ . Значение относительного касательного ускорения определится по формуле

$$\omega_{rt} = l\varepsilon_r = 90 \frac{\pi}{900} = \frac{\pi}{10} \text{ см/сек}^2 = \pi \cdot 10^{-3} \text{ м/сек}^2.$$

Это ускорение совпадает по направлению с относительной скоростью каждого шара (рис. б).

Переходим к определению переносной скорости и переносного ускорения шаров. Переносное движение — вращение регулятора вокруг вертикальной оси согласно уравнению (2). Чтобы вычислить

скорость и ускорение шаров в переносном движении, остановим мысленно относительное движение. Проекция угловой скорости переносного движения на ось вращения равна производной от угла  $\varphi$  по времени

$$\omega_{ez} = \dot{\varphi} = 3kt^2.$$

При  $t_1 = 10$  сек эта проекция равна

$$\omega_{ez} = 3 \cdot 0,3 \cdot 10^2 = 90 \text{ сек}^{-1}.$$

Проекция углового ускорения в переносном движении на ось вращения определяется как производная от  $\omega_{ez}$  по времени

$$\epsilon_{ez} = \dot{\omega}_{ez} = \ddot{\varphi} = 6kt.$$

В момент  $t_1 = 10$  сек

$$\epsilon_{ez} = 6 \cdot 0,3 \cdot 10 = 18 \text{ сек}^{-2}.$$

Переносная скорость есть скорость шара при вращении регулятора вокруг вертикальной оси  $OC$ . Она равна по величине произведению радиуса вращения на переносную угловую скорость. В момент  $t_1 = 10$  сек

$$v_e = l \sin \alpha \omega_e = 90 \sin 30^\circ \cdot 90 = 40,5 \text{ м/сек}.$$

Переносная скорость шаров направлена параллельно оси  $x$ ; для шара  $A$  она совпадает с положительным направлением, для шара  $B$  — с отрицательным направлением оси (при  $t = t_1$ ).

Переносное ускорение складывается из нормального и касательного ускорений. При  $t = 10$  сек величина нормального переносного ускорения

$$\omega_{en} = l \sin \alpha \omega_e^2 = 90 \sin 30^\circ \cdot 90^2 \text{ см/сек}^2 \approx 3645 \text{ м/сек}^2.$$

Это ускорение направлено перпендикулярно к оси вращения  $OC$ .

Величина переносного касательного ускорения равна произведению радиуса вращения на значение углового ускорения

$$\omega_{ec} = l \sin \alpha \epsilon_e = 90 \sin 30^\circ \cdot 18 \text{ см/сек}^2 = 8,1 \text{ м/сек}^2.$$

Оно направлено параллельно оси  $x$  и совпадает с направлением переносной скорости каждого шара (рис. б).

Переходим к определению кориолисова ускорения

$$\omega_c = 2\omega_e \times v_r$$

Величина кориолисова ускорения будет:

$$\omega_c = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\omega_e, v_r}).$$

Замечая, что угол между  $\omega_e$  и  $v_r$  равен  $60^\circ$ , находим значение  $\omega_c$  в момент  $t_1 = 10$  сек:

$$\omega_c = 2 \cdot 90 \cdot 2\pi \sin 60^\circ \text{ см/сек} = 1,8 \sqrt{3}\pi \text{ м/сек}^2.$$

Направление кориолисова ускорения определяется по правилу векторного произведения. Кориолисово ускорение направлено перпендикулярно к плоскости, определенной векторами  $\omega_e$  и  $v_r$ , в ту сторону, с которой поворот от вектора  $\omega_e$  к  $v_r$  на наименьший угол виден против часовой стрелки. В нашем случае ускорение Кориолиса направлено по переносной скорости (рис. б).

Найдем теперь абсолютную скорость и абсолютное ускорение шара, пользуясь методом проекций. Проекция абсолютной скорости на оси находим, пресекая на них векторное равенство

$$v_a = v_e + v_r$$

Имеем для шара  $A$ :

$$v_{ax} = v_e = 40,5 \text{ м/сек},$$

$$v_{ay} = -v_r \cos 30^\circ = -0,01 \sqrt{3}\pi \text{ м/сек},$$

$$v_{az} = v_r \cos 60^\circ = 0,01\pi \text{ м/сек}.$$

Величина абсолютной скорости равна

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2} \approx 40,51 \text{ м/сек},$$

а ее направление определяется значениями направляющих косинусов:

$$\cos(\widehat{v_a, x}) = \frac{v_{ax}}{v_a} = 0,999,$$

$$\cos(\widehat{v_a, y}) = \frac{v_{ay}}{v_a} = -0,00134,$$

$$\cos(\widehat{v_a, z}) = \frac{v_{az}}{v_a} = 0,000775.$$

Согласно теореме сложения ускорений абсолютное ускорение

$$\omega_a = \omega_{en} + \omega_{ec} + \omega_{rn} + \omega_{rc} + \omega_c.$$

Проектируя это векторное равенство на оси координат, находим проекции абсолютного ускорения шара  $A$ :

$$\omega_{ax} = \omega_{ec} + \omega_c \approx 17,9 \text{ м/сек}^2,$$

$$\omega_{ay} = \omega_{en} + \omega_{rn} \sin 30^\circ - \omega_{rc} \cos 30^\circ \approx 3645 \text{ м/сек}^2,$$

$$\omega_{az} = \omega_{rn} \cos 30^\circ + \omega_{rc} \sin 30^\circ \approx 0,0055 \text{ м/сек}^2.$$

Величина и направление абсолютного ускорения определяются по обычным формулам:

$$\omega_a = \sqrt{\omega_{ax}^2 + \omega_{ay}^2 + \omega_{az}^2} \approx 3646 \text{ м/сек}^2,$$

$$\cos(\widehat{\omega_a, x}) = \frac{\omega_{ax}}{\omega_a} \approx 0,005,$$

$$\cos(\widehat{\omega_a, y}) = \frac{\omega_{ay}}{\omega_a} \approx 0,999,$$

$$\cos(\widehat{\omega_a, z}) = \frac{\omega_{az}}{\omega_a} \approx 1,37 \cdot 10^{-6}.$$

2°. Скорость и ускорение точки в полярных, сферических и цилиндрических координатах. Многие задачи кинематики сложного движения точки целесообразно решать в полярных, сферических и цилиндрических координатах. Одним из способов решения задач в криволинейных координатах является разложение абсолютного движения точки на переносное и относительное движения.

При решении задач в этом параграфе рекомендуется такая последовательность действий.

Заданы относительное и переносное движения, требуется определить абсолютное движение:

- 1) выбрать подвижную и неподвижную системы координат;
- 2) составить уравнения относительного движения точки;
- 3) составить уравнения переносного движения;
- 4) получить уравнения абсолютного движения и найти абсолютную траекторию точки;

5) определить скорость точки в относительном движении и ее переносную скорость;

6) пользуясь теоремой сложения скоростей и теоремой Корiolиса, найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки.

**Задача 5.20.** Определить проекции скорости точки  $M$  на оси полярной системы координат.

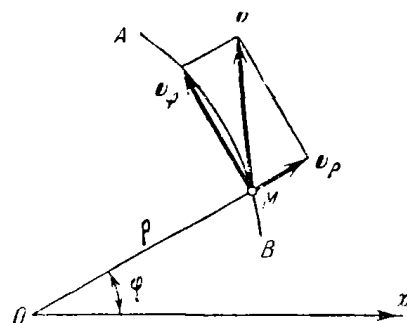
**Решение.** Рассмотрим движение точки  $M$  по плоской траектории  $AB$  как составное, сложное движение. Относительным движением назовем прямолинейное движение точки  $M$  вдоль радиуса-вектора  $\rho$ . Переносным движением тогда будет движение точки  $M$  вместе с радиусом-вектором вокруг точки  $O$ . Находим проекцию относительной скорости точки  $M$  на направление радиуса-вектора как производную от радиуса-вектора по времени. Ее называют радиальной скоростью и обозначают буквой  $v_\rho$ :

$$v_\rho = \dot{\rho}.$$

Переносная скорость — это скорость точки  $M$ , жестко связанной с радиусом-вектором. Эта скорость, перпендикулярная к радиусу-вектору, называется тангенциальной скоростью и равна по величине

$$v_\varphi = \rho \dot{\varphi}.$$

Абсолютная скорость точки  $M$  определится как геометрическая сумма относительной и переносной скоростей. Так как эти скорости

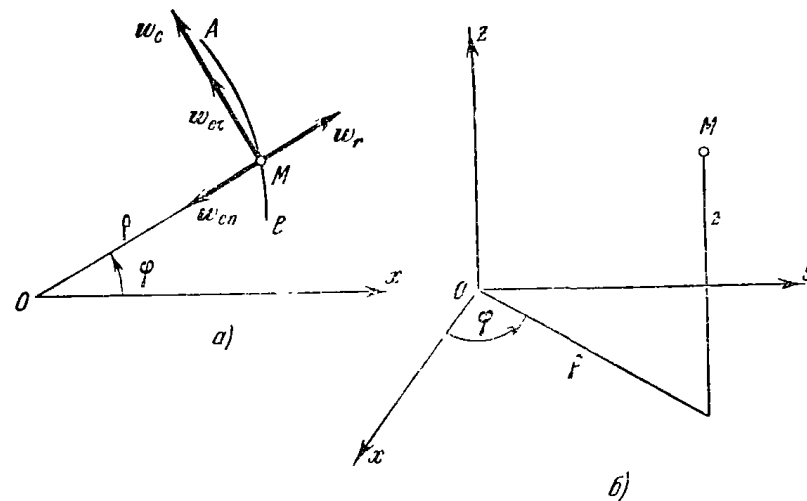


К задаче 5.20.

взаимно перпендикулярны, то величина абсолютной скорости равна

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2}.$$

**Задача 5.21.** Определить проекции ускорения точки  $M$  на оси полярной системы координат и оси цилиндрической системы координат.



К задаче 5.21.

**Решение.** а) Полярная система координат. Рассматривая, как и в предыдущем случае, движение точки как составное, применим для определения ускорения точки теорему Корiolиса

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c.$$

Проекция относительного ускорения на направление радиуса-вектора равна

$$w_r = \ddot{\rho},$$

так как относительное движение прямолинейное. Это ускорение направлено по радиусу-вектору.

Переносное ускорение складывается из двух составляющих: переносного касательного ускорения

$$w_{e\tau} = \rho \ddot{\varphi}$$

и переносного нормального ускорения

$$w_{en} = \rho \dot{\varphi}^2.$$

$w_{e\tau}$  направлено перпендикулярно к радиусу-вектору, а  $w_{en}$  направлено от точки  $M$  к центру вращения  $O$  (рис. а). Величина корiolисова ускорения

$$w_c = 2\dot{\varphi}v_\rho = 2\dot{\varphi}\dot{\rho}$$

(так как вектор  $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{v}_r$ ), а направление кориолисова ускорения

$$\boldsymbol{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$$

совпадает с переносным касательным ускорением.

Далее, находим проекции ускорения точки на оси полярных координат. Проекция ускорения на радиальное направление

$$w_\rho = w_r - w_{en} = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2.$$

Проекция ускорения на трансверсальное направление

$$w_\varphi = w_{e\tau} - w_c = \rho\ddot{\varphi} - 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2\dot{\varphi}).$$

Таковы проекции ускорения точки на оси полярных координат.

б) Цилиндрическая система координат. При пространственных движениях точки иногда удобно использовать цилиндрические координаты. В этой системе координат положение точки  $M$  определяется двумя полярными координатами  $\rho$  и  $\varphi$  и аппликатой  $z$  (рис. б). В этом случае проекция скорости точки находится по формулам:

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Величина скорости

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2},$$

а ее направление дается значениями направляющих косинусов

$$\cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{\dot{\rho}}{v}, \quad \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{\rho\dot{\varphi}}{v}, \quad \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) = \frac{\dot{z}}{v}.$$

Проекция ускорения на цилиндрические оси запишутся так:

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \quad w_z = \ddot{z}.$$

Величина ускорения

$$w = \sqrt{w_\rho^2 + w_\varphi^2 + w_z^2},$$

а направляющие косинусы вычисляются по формулам:

$$\cos(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2}{w}, \quad \cos(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}}{w}, \quad \cos(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}) = \frac{\ddot{z}}{w}.$$

**Задача 5.22.** Точка движется по поверхности конуса с углом раствора при вершине  $2\alpha = 90^\circ$  согласно уравнениям:

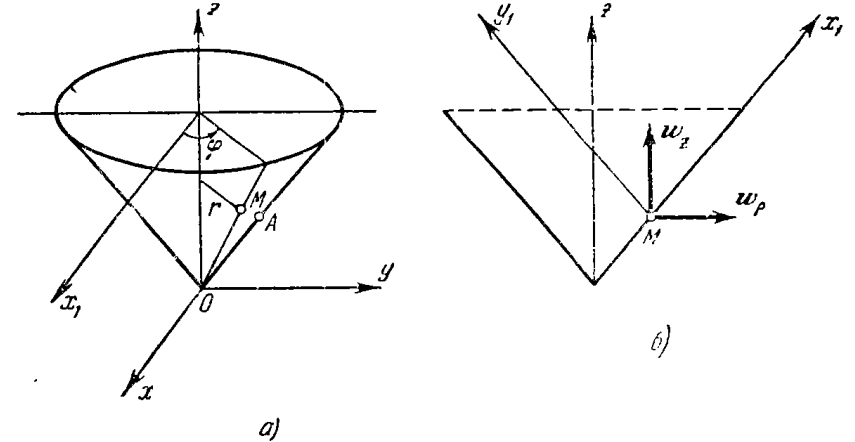
$$r^2 = a^2 (e^{2t} + e^{-2t}), \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right) = e^{2t}, \quad (2)$$

где время измеряется в секундах, а  $r$  и  $a$  — в метрах.

Положение точки  $M$  определяется координатой  $z$  и полярными координатами  $r$  и  $\varphi$  в плоскости, перпендикулярной к оси  $Oz$ .

Определить траекторию точки, а также ее скорость и ускорение в проекциях на цилиндрические оси координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ . Найти начальные координаты и начальную скорость точки, а также проекции ускорения на образующую и на нормаль к поверхности конуса.



К задаче 5.22.

**Решение.** Для определения траектории составим уравнение поверхности конуса

$$r^2 - z^2 = 0. \quad (3)$$

Исключая из системы уравнений (1) и (2) время, находим:

$$\left( \frac{r}{a} \right)^2 = \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{ctg} \left( \frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (4)$$

Совокупность двух уравнений (3) и (4) определяет пространственную траекторию точки  $M$ . Начальные координаты точки  $M$  находим, подставляя в (1) и (2) значение  $t=0$ . Тогда  $r_0 = a\sqrt{2}$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $z_0 = a\sqrt{2}$ .

Для определения скорости находим проекции ее на оси цилиндрических координат:

$$v_\rho = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Кроме того, из (3) следует, что  $r = z$  и, следовательно,  $v_\rho = v_z$ . Далее, получаем из (1), дифференцируя по времени,  $v_\rho$ :

$$v_\rho = \dot{r} = a^2 \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{r}. \quad (5)$$



Для определения значения трансверсальной составляющей скорости находим из (2), дифференцируя это уравнение по времени:

$$\frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{2} \cos^2 \left( \frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right)} = 2e^{2t},$$

откуда

$$\dot{\varphi} = 2\sqrt{2} e^{2t} \cos^2 \left( \frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{2\sqrt{2} e^{2t}}{1 + \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{2\sqrt{2} e^{2t}}{1 + e^{4t}}.$$

Следовательно, значение трансверсальной составляющей скорости

$$v_{\varphi} = r\dot{\varphi} = 2\sqrt{2} \frac{ae^{2t}}{1 + e^{4t}} \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}.$$

Определяем величину абсолютной скорости точки

$$v = \sqrt{v_{\rho}^2 + v_{\varphi}^2 + v_z^2} = a \sqrt{2 \frac{e^{4t} + e^{-4t} + 6}{e^{2t} + e^{-2t}} - \frac{8e^{4t} \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}{(1 + e^{4t})^2}}.$$

Отсюда начальная скорость точки

$$v_0 = 2a.$$

Для определения ускорения находим его проекции на цилиндрические оси по формулам:

$$\omega_{\rho} = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad (6)$$

$$\omega_{\varphi} = r\ddot{\varphi} - 2\dot{r}\dot{\varphi}, \quad (7)$$

$$\omega_z = \ddot{z} = \ddot{r}. \quad (8)$$

Далее, дифференцируя (5), получим:

$$\ddot{r} = \omega_z = a \frac{e^{4t} + e^{-4t} + 6}{(e^{2t} + e^{-2t})^{3/2}}. \quad (9)$$

Тогда

$$r\dot{\varphi}^2 = \frac{8ar^{4t}}{(1 + e^{4t})^2} \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}. \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (6), определяем проекцию ускорения на радиальную ось

$$\frac{\omega_{\rho}}{a} = \frac{e^{4t} + e^{-4t} + 6}{(e^{2t} + e^{-2t})^{3/2}} - \frac{8e^{4t} \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}{(1 + e^{4t})^2}.$$

Переходим к определению проекции ускорения на трансверсальную ось. После несложных преобразований находим, что

$$\frac{r}{a} \ddot{\varphi} = -\frac{4\sqrt{2} e^{2t}}{1 + e^{4t}} \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}} \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{e^{2t} + e^{-2t}},$$

$$\frac{2}{a} \dot{r}\dot{\varphi} = \frac{4\sqrt{2} e^{2t}}{1 + e^{4t}} \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}} \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{e^{2t} + e^{-2t}}.$$

Подставляя эти значения в (7), получаем:

$$\omega_{\varphi} = 0.$$

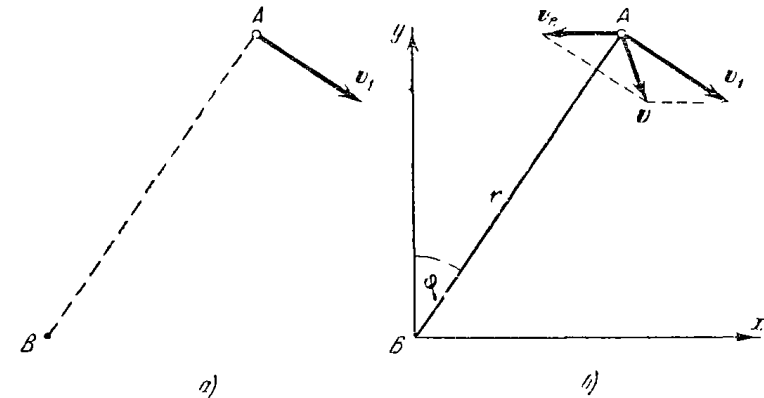
Отсюда видно, что ускорение точки лежит в вертикальной плоскости, проходящей через ось симметрии конуса и рассматриваемую точку. Эта плоскость показана на рис. б. Выберем оси  $Mx_1$  и  $Mu_1$ , первую по образующей конуса, вторую по нормали к его поверхности. Найдем проекции полного ускорения точки  $M$  на эти оси. После несложных преобразований получим:

$$\omega_{x_1} = \omega_{\rho} \cos 45^{\circ} + \omega_z \cos 45^{\circ} = a\sqrt{2} \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}} = \sqrt{2}r = OM.$$

Таким образом, проекция ускорения на образующую численно равна расстоянию точки от вершины конуса. Далее,

$$\omega_{y_1} = -\omega_{\rho} \sin 45^{\circ} + \omega_z \sin 45^{\circ} = \frac{4\sqrt{2}a}{(e^{2t} + e^{-2t})^{3/2}} = \frac{4\sqrt{2}}{r^3} a^2.$$

**Задача 5.23.** Скорость  $v_1$  корабля  $A$  относительно воды постоянна по величине и всегда направлена по перпендикуляру к линии визирования на неподвижную точку  $B$ .



К задаче 5.23.

Какую кривую (относительно неподвижного берега) опишет корабль, если это движение происходит при течении воды с постоянной по величине и направлению скоростью  $v_p$ . В начальный момент времени  $\varphi = 0$  и  $r = r_0$  (рис. б). Корабль рассматривать как точку.

Решение. Течение воды является переносным движением. Циркуляция корабля со скоростью  $v_1$  будет относительным движением. Абсолютная скорость корабля определится как геометрическая сумма переносной и относительной скоростей.

Выберем декартовы оси координат: ось  $Bx$  параллельна скорости течения, ось  $Bu$  перпендикулярна к скорости течения. Полярные ко-

ординаты корабля будут определяться радиусом-вектором  $BA=r$  и углом  $\angle BVA=\varphi$ . Проектируя абсолютную скорость точки на направление радиуса-вектора и на перпендикуляр к нему, имеем:

$$\dot{r} = -v_e \sin \varphi, \quad (1)$$

$$r\dot{\varphi} = v_1 - v_e \cos \varphi. \quad (2)$$

Разделив уравнение (1) на уравнение (2), получим:

$$\frac{dr}{r} = -\frac{v_e \sin \varphi}{v_1 - v_e \cos \varphi} d\varphi.$$

Проинтегрировав это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, найдем:

$$\ln Cr = -\ln \left( \cos \varphi - \frac{v_1}{v_e} \right)$$

или

$$Cr = \frac{1}{\cos \varphi - \frac{v_1}{v_e}}. \quad (3)$$

Определим из (3) произвольную постоянную  $C$ , подставив начальные данные  $\varphi=0$ ,  $r=r_0$ ; в результате имеем:

$$C = \frac{1}{r_0} \frac{v_e}{v_e - v_1}.$$

Внося это значение произвольной постоянной в (3), получим уравнение абсолютной траектории корабля

$$r = r_0 \frac{1 - \frac{v_e}{v_1}}{1 - \frac{v_e}{v_1} \cos \varphi}.$$

Это — полярное уравнение кривых второго порядка; эксцентриситет кривой  $e = \frac{v_e}{v_1}$  равен коэффициенту при  $\cos \varphi$ .

Если  $\frac{v_e}{v_1} < 1$ , то найденная траектория — эллипс с фокусом в точке  $B$ . Параметр эллипса  $p = r_0 \left( 1 - \frac{v_e}{v_1} \right)$ , с другой стороны, параметр эллипса определяется через эксцентриситет и большую полуось  $a$  формулой  $p = a(1 - e^2)$ . Приравняв эти два значения параметра, найдем длину большой полуоси, перпендикулярной к скорости течения,

$$a = \frac{r_0}{1 + \frac{v_e}{v_1}}.$$

При  $\frac{v_e}{v_1} > 1$  траектория — гипербола.

В силу принятых в задаче начальных условий ( $\varphi=0$ ) случай  $v_e=v_1$  приводит к равенству нулю абсолютной скорости корабля в начальный момент. Следовательно, корабль останется в этом случае неподвижным. Однако можно показать, что при других начальных данных случай  $\frac{v_e}{v_1} = 1$  соответствует параболической траектории движения корабля.

**Задача 5.24.** Прямая  $d$  вращается вокруг точки  $F$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$  и движет по эллипсу кольцо  $M$ . Полуоси эллипса  $a$  и  $b$ ; фокус эллипса  $F$ , расстояние от центра до фокуса равно  $c$ .

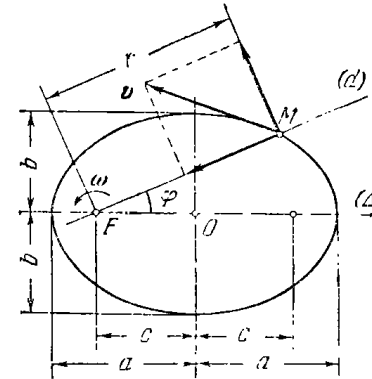
Определить модуль скорости точки  $M$ .

Решение. Полярное уравнение эллипса имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}.$$

Здесь  $p = b^2/a$  — параметр эллипса,  $e = c/a$  — эксцентриситет эллипса.

Полярная ось направлена из фокуса  $F$  вдоль большей оси эллипса (на рисунке вправо). Модуль скорости



К задаче 5.24.

точки в полярных координатах равен

$$v = \sqrt{\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2}. \quad (1)$$

Из уравнения эллипса, дифференцируя, находим:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\omega p e \sin \varphi}{(1 - e \cos \varphi)^2}. \quad (2)$$

С другой стороны, из полярного уравнения эллипса имеем:

$$\frac{r d\varphi}{dt} = \frac{\omega p}{1 - e \cos \varphi}. \quad (3)$$

Здесь

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Подставляя значения (2) и (3) в формулу (1), получаем:

$$v = \frac{\omega p}{(1 - e \cos \varphi)^2} \sqrt{1 - e^2 - 2e \cos \varphi}. \quad (4)$$

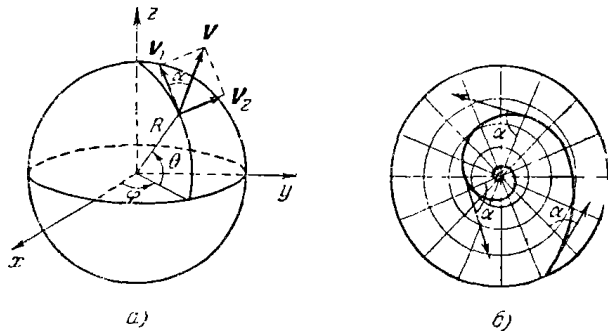
Внося значение параметра  $p$  и эксцентриситета  $e$  в равенство (4), окончательно получаем:

$$v = \frac{\omega r}{b} \sqrt{(2a - r)r}.$$

Скорость направлена по касательной к эллипсу.

**Задача 5.25.** Точка движется по поверхности Земли со скоростью  $v$ . Угол между скоростью и меридианом в каждой точке траектории постоянен и равен  $\alpha$ .

Определить траекторию точки.



К задаче 5.25.

Решение. Декартовы координаты точки, движущейся по сфере радиуса  $R$ , могут быть выражены через сферические координаты по формулам (рис. а):

$$x = R \cos \theta \cos \varphi, \quad y = R \cos \theta \sin \varphi, \quad z = R \sin \theta,$$

где  $\theta$  — широта,  $\varphi$  — долгота местоположения точки на сфере. Найдем выражение скорости при постоянном радиусе  $R$ . Производные от декартовых координат по времени равны

$$\begin{aligned} \dot{x} &= R(-\sin \theta \cos \varphi \dot{\theta} - \sin \varphi \cos \theta \dot{\varphi}), \\ \dot{y} &= R(-\sin \theta \sin \varphi \dot{\theta} + \cos \varphi \cos \theta \dot{\varphi}), \\ \dot{z} &= R \cos \theta \dot{\theta}. \end{aligned}$$

Отсюда определяется модуль скорости

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = R \sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta}.$$

Скорость  $v$  можно разложить на две составляющие:

$$v_1 = R \dot{\theta},$$

направленную по касательной к меридиану, и

$$v_2 = R \cos \theta \dot{\varphi},$$

направленную по касательной к параллели.

В общем случае движения точки по сфере модуль скорости будет:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

По условию задачи угол  $\alpha$ , образованный скоростью с меридианом, постоянен. Этот угол связан с составляющими скорости точки соотношением

$$\frac{v_1}{v_2} = \operatorname{ctg} \alpha$$

или, после подстановки значений  $v_1$  и  $v_2$ ,

$$\frac{R \dot{\theta}}{R \cos \theta \dot{\varphi}} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Отделяя переменные, имеем:

$$\frac{d\theta}{\cos \theta} = d\varphi \operatorname{ctg} \alpha.$$

Это — дифференциальное уравнение искомой траектории. Предположив, что точка начала движение из положения  $\varphi_0 = 0$ ,  $\theta_0 = 0$ , интегрируя, находим:

$$\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\cos \theta} = \operatorname{ctg} \alpha \int_0^{\varphi} d\varphi$$

или

$$\ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) = \operatorname{ctg} \alpha \varphi,$$

откуда получаем уравнение траектории

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) = e^{\varphi \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Кривая на поверхности сферы, описываемая этим уравнением, называется локсодромией. Такова траектория судна, курс которого не меняется по отношению к меридиану.

Если  $\operatorname{ctg} \alpha > 0$ , то при неограниченном возрастании угла  $\varphi$  предельное значение угла  $\theta$  определится из равенства

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) = \infty$$

и, следовательно,

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}$$

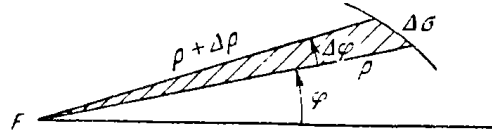
или

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, в этом случае локсодромия будет сферической спиралью, закручивающейся вокруг Северного полюса.

Если же  $\operatorname{ctg} \alpha < 0$ , то, рассуждая аналогично предыдущему, найдем, что  $\theta = -\pi/2$ , и траектория будет сферической спиралью, закручивающейся вокруг Южного полюса.

На рис. 6 представлена локсодромия в проекции на плоскость, перпендикулярную к оси  $z$ .



К задаче 5.26.

**Задача 5.26.** Определить ускорение точки, движущейся в плоскости, если ее трансверсальное ускорение относительно центра  $O$  равно нулю (такое движение точки называется центральным движением).

**Решение.** Воспользуемся проекциями ускорения на радиальное и трансверсальное направления, полученные в задаче 5.21,

$$w_r = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \quad (1)$$

$$w_\varphi = \rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}). \quad (2)$$

Согласно условию трансверсальное ускорение равно нулю

$$w_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}) = 0 \quad (3)$$

и, следовательно, произведение  $\rho^2 \dot{\varphi}$  остается неизменным

$$\rho^2 \dot{\varphi} = c. \quad (4)$$

Величина  $\rho^2 \dot{\varphi}$  равна удвоенному значению секториальной скорости. Действительно, приращение площади сектора, описанного радиусом-вектором точки за время  $\Delta t$  (см. рисунок), с точностью до величин первого порядка малости равно

$$\Delta S = \frac{1}{2} \rho \Delta \sigma = \frac{1}{2} \rho \rho \Delta \varphi = \frac{1}{2} \rho^2 \Delta \varphi, \quad (5)$$

где  $\Delta \sigma$  — приращение дуги за промежуток времени  $\Delta t$ .

Предел отношения приращения площади к приращению времени

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} \quad (6)$$

и есть секториальная скорость.

Перейдем, далее, к преобразованию радиального ускорения точки, которое в случае центрального движения, рассматриваемого в задаче,

является полным ускорением точки. Уравнение траектории точки в полярных координатах может быть представлено зависимостью

$$\rho = \rho(\varphi), \quad (7)$$

и, следовательно, можно считать, что радиус-вектор зависит от времени через промежуточную переменную  $\varphi$ . Тогда

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi} \dot{\varphi} \quad (8)$$

или, исключив отсюда  $\dot{\varphi}$  посредством (4), найдем:

$$\dot{\rho} = \frac{c}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi} = -c \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{\rho} = -c \frac{du}{d\varphi}, \quad (9)$$

где введена новая переменная

$$u = \frac{1}{\rho}. \quad (10)$$

Дифференцируя (9) еще раз по  $t$  и учитывая, что радиус-вектор зависит от времени через  $\varphi$ , имеем:

$$\ddot{\rho} = -c \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \dot{\varphi} = -\frac{c^2}{\rho^3} \frac{d^2 u}{d\varphi^2}. \quad (11)$$

Здесь производная  $\dot{\varphi}$  заменена ее значением из (4). Внося это значение второй производной радиуса-вектора по времени (11) в формулу (1), а также исключая  $\dot{\varphi}$  согласно (4), получим:

$$w_r = -c^2 u^2 \left( u + \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right). \quad (12)$$

Это равенство определяет ускорение точки при центральном движении. Оно дает выражение для ускорения через элементы траектории в полярных координатах (7) и постоянную секториальную скорость. Формула (12) носит название формулы Бине, по впервые ее получил И. Ньютон.

**Задача 5.27.** Определить ускорение планеты, движущейся согласно трем законам Кеплера.

1. Планеты обращаются вокруг Солнца по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

2. Площади, описываемые радиусом-вектором, идущим от Солнца к планете, пропорциональны временам, в течение которых они были пройдены.

3. Квадраты периодов обращения планет относятся, как кубы больших полуосей их орбит.

Планету и Солнце рассматривать как точки.

**Решение.** Задачу об ускорении небесного тела в кеплеровом движении будем решать в полярных координатах. Полярную ось на-

правим из фокуса, где находится Солнце, вдоль большой оси эллипса. Уравнение эллипса в полярных координатах имеет вид

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad (1)$$

где  $p = b^2/a$  — параметр эллипса,  $e = c_1/a$  — эксцентриситет эллипса,  $a$  и  $b$  — большая и малая полуоси эллипса,  $c_1$  — половина фокусного расстояния.

Второй закон Кеплера устанавливает постоянство секториальной скорости

$$\rho^2 \dot{\varphi} = c,$$

где  $c$  — постоянная, равная удвоенной секториальной скорости.

Переходим непосредственно к вычислению ускорения планеты. В силу второго закона Кеплера движение любой планеты является центральным. Действительно, секториальная скорость относительно Солнца постоянна и, следовательно, тангенциальная составляющая ускорения планеты равна нулю. Поэтому полное ускорение направлено по радиусу.

Таким образом, в силу второго закона Кеплера движение планет является центральным движением. Для нахождения ускорения планеты применим формулу Бине (см. предыдущую задачу):

$$\omega_p = -c^2 u^2 \left( u + \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right).$$

Из уравнения эллипса (1) находим:

$$u = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos \varphi.$$

Тогда

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -\frac{e}{p} \cos \varphi$$

и, следовательно,

$$u + \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = \frac{1}{p}.$$

Внося эти значения в формулу Бине, получим:

$$\omega = \omega_p = -\frac{c^2}{\rho^2} \left( u + \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right) = -\frac{c^2}{p^2}. \quad (2)$$

Итак, ускорение планеты, движущейся по законам Кеплера, направлено по радиусу-вектору точки к фокусу, т. е. к Солнцу, и по величине обратно пропорционально квадрату расстояния до Солнца.

Этот вывод можно было получить из выражения для радиального ускорения (см. формулу (1) предыдущей задачи), не пользуясь формулой Бине, непосредственным дифференцированием уравнения эллипса (1) по времени. Однако этот путь более длинный.

Параметр  $p = b^2/a$  в формуле (2) можно заменить, пользуясь третьим законом Кеплера, следующим образом. Третий закон Кеплера может быть записан так:

$$\frac{a^3}{T^2} = k, \quad (3)$$

где  $a$  — большая полуось,  $T$  — период обращения планеты. Через  $k$  обозначена постоянная величина отношения куба большой полуоси к квадрату периода обращения. Период обращения при постоянной секториальной скорости можно вычислить, разделив площадь эллипса на эту скорость:

$$T = \frac{2\pi ab}{c}.$$

Подставляя значение периода в формулу (3), имеем:

$$\frac{ac^2}{4\pi^2 b^2} = k,$$

или

$$\frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{4\pi^2 k}.$$

Внося это значение в формулу (2), получим:

$$\omega = -\frac{4\pi^2 k}{\rho^2}.$$

Заметим, что в этом выражении постоянная  $k$  одинакова для всех планет солнечной системы.

Для приобретения навыков в решении задач на сложение ускорений рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 447, 450, 455, 458, 461, 462, 467, 473, 479, 481, 483, 488, 490.

## § 5. Кинематика колебаний

1°. Гармонические колебания. *Колебаниями*, или колебательным процессом, называется такое изменение некоторой величины, при котором она последовательно возрастает и убывает. Простейшим и в то же время важнейшим типом колебаний является *гармоническое* колебательное движение.

Рассмотрим окружность радиуса  $a$  (рис. 5.4). Проведем через центр окружности точки  $O$  два взаимно перпендикулярных диаметра. Направление горизонтального диаметра примем за ось  $x$ , а ось  $y$  направим по вертикальному диаметру. Пусть радиус  $OA$  вращается равномерно вокруг центра  $O$  с угловой скоростью  $k$ . Положение

радиуса  $OA_0$  в начальный момент времени  $t=0$  определяется углом  $\beta$ . Тогда угол поворота радиуса  $OA$  определяется формулой

$$\varphi = kt + \beta. \quad (1^*)$$

Опустим из точки  $A$  перпендикуляр на ось  $x$  и напишем уравнение движения точки  $B$

$$x = a \sin(kt + \beta). \quad (2^*)$$

Это — уравнение гармонических колебаний. Здесь  $a$  — амплитуда, наибольшее удаление точки от ее среднего положения. Расстояние между крайними положениями точки называется *размахом* колебаний. Угол  $\varphi$ , определяемый формулой (1\*), называется *фазой* колебания, а угол  $\beta$  — *начальной фазой*. Период колебания — промежуток времени, в течение которого точка совершает одно полное колебание, равен

$$T = \frac{2\pi}{k}. \quad (3^*)$$

Обратная величина

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi} \quad (4^*)$$

называется *частотой* колебаний и измеряется числом колебаний в единицу времени. Если за единицу времени принять секунду, то частота колебаний измеряется в *герцах* (в честь Г. Герца, первого исследователя электрических колебаний). Величина  $k$  называется *круговой* или *циклической частотой*. Как видно из (4\*), величина  $k$  равна числу колебаний в  $2\pi$  единиц времени (например, в  $2\pi$  секунд).

Если рассматривать  $OA$  как вектор, вращающийся с угловой скоростью  $k$ , то гармоническое колебание изображается его горизонтальной проекцией. Скорость точки при гармоническом колебании будет:

$$v_x = \dot{x} = ak \cos(kt + \beta) \quad (5^*)$$

и ее ускорение

$$w_x = \ddot{x} = -ak^2 \sin(kt + \beta). \quad (6^*)$$

Тогда перемещение, скорость и ускорение точки, совершающей гармонические колебания, может быть представлена простой векторной диаграммой (рис. 5.5), где проекция  $v_x$  скорости движения представляется

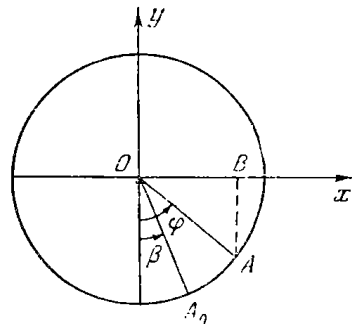


Рис. 5.4.

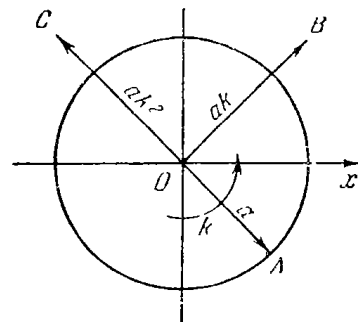


Рис. 5.5.

горизонтальной проекцией вектора  $\vec{OB}$  длины  $ak$ , повернутого на  $90^\circ$  по отношению к вектору  $\vec{OA}$  длины  $a$  в ту же сторону, что и направление вращения; проекция  $w_x$  ускорения точки представлена горизонтальной проекцией вектора  $\vec{OC}$  длины  $ak^2$ , повернутого на  $180^\circ$  по отношению к вектору  $\vec{OA}$ . Все эти три вектора вращаются с угловой скоростью  $k$  вокруг центра  $O$ . Таким образом, дифференцирование уравнения движения точки можно трактовать как поворот изображающего вектора на  $90^\circ$  в сторону вращения с одновременным его умножением на  $k$ .

При решении задач на кинематику гармонического колебательного движения рекомендуется такая последовательность действий:

- 1) выбрать систему координат;
- 2) составить уравнения гармонического колебательного движения;
- 3) сложив гармонические колебательные движения, получить уравнение результирующего движения;
- 4) определить скорость и ускорение точки при гармонических колебаниях;
- 5) определить траекторию точки при сложении гармонических колебаний, не направленных по одной прямой.

**Задача 5.28.** Точка совершает гармонические колебания вдоль горизонтальной оси  $x$ . Размах колебаний равен 20 см. Продолжительность десяти размахов равна 5 сек. Полагая, что точка в начальный момент  $t=0$  находилась в крайнем правом положении, составить уравнение движения точки.

Определить скорость и ускорение точки.

Решение. Уравнение гармонических колебаний точки имеет вид

$$x = a \sin(kt + \beta). \quad (1)$$

Найдем значения постоянных  $a$ ,  $k$ ,  $\beta$ , исходя из условий задачи. Амплитуда гармонических колебаний равна половине размаха колебаний. Следовательно,

$$a = 10 \text{ см.}$$

Период колебаний определится из условия, что продолжительность десяти размахов, т. е. пяти полных колебаний, равна 5 сек. Следовательно, продолжительность одного полного колебания или период колебаний будет:

$$T = 1 \text{ сек.}$$

Коэффициент  $k$  определится из формулы (3\*) для периода колебаний

$$k = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \text{ сек}^{-1}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в (1), находим:

$$x = 10 \sin(2\pi t - \frac{\pi}{2}). \quad (2)$$

Для определения начальной фазы  $\beta$  воспользуемся начальным условием: при  $t=0$  точка находилась в крайнем правом положении. Следовательно, при  $t=0$  координата  $x=a=10$  см. Внося эти значения в (2), получим:

$$10 = 10 \sin \beta,$$

откуда  $\sin \beta = 1$  и  $\beta = \frac{\pi}{2}$ .

Теперь уравнение гармонического колебательного движения примет вид

$$x = 10 \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

или, окончательно,

$$x = 10 \cos 2\pi t.$$

При прямолинейном движении проекция скорости точки на ось равна первой производной от координаты по времени

$$v_x = \dot{x} = -20\pi \sin 2\pi t.$$

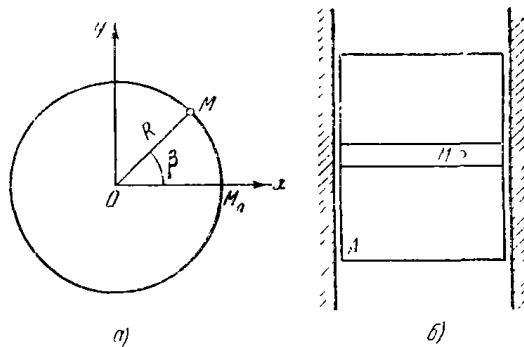
Проекция ускорения точки на ось  $x$  равна второй производной от координаты по времени

$$\omega_x = \ddot{x} = -40\pi^2 \cos 2\pi t = -4\pi^2 x. \quad (3)$$

Из (3) следует, что ускорение точки при гармонических колебаниях всегда пропорционально отклонению и направлено к центру колебаний

**Задача 5.29.** Точка  $M$  движется по окружности радиуса  $R=10$  см согласно уравнению  $s=5t$  см, где  $s$  — путь, пройденный по дуге.

В начальный момент точка  $M$  находилась в  $M_0$  (рис. а). Описанное равномерное движение точки  $M$  по окружности может быть осуществлено при помощи механизма, представленного на рис. б. Механизм состоит из ползуна  $A$ , который может перемещаться в направляющих по вертикали. В ползуне имеется горизонтальный паз, в котором движется точка  $M$ , участвующая при одновременном движении ползуна и точки по пазу в сложном абсолютном движении.



К задаче 5.29.

Определять уравнения относительного и переносного движений, которые надо сообщить: первое относительное — точке  $M$  вдоль горизонтального паза, а второе поступательное — ползуну  $A$  в вертикальных направляющих, чтобы осуществить заданное абсолютное движение точки.

**Решение.** Определяем угол  $M_0OM = \beta$ , который составляет радиус  $OM$  с осью  $Ox$ :

$$\beta = \frac{\overset{\frown}{M_0M}}{R} = \frac{s}{R} = \frac{5t}{10} = 0,5t.$$

Зная угол  $\beta$ , находим уравнения относительного движения точки

$$x_1 = R \cos \beta = 10 \cos 0,5t, \quad y_1 = 0.$$

Уравнения переносного движения основания механизма будут:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = R \sin \beta = 10 \sin 0,5t.$$

Таким образом, равномерное движение точки по окружности всегда может быть разложено на два взаимно перпендикулярных, прямолинейных гармонических колебательных движения.

**Задача 5.30.** Точка  $M$  движется прямолинейно в направляющих, прикрепленных жестко к доске  $A$ , по закону

$$x_1 = a_1 \cos(kt - \beta_1),$$

совершая гармонические колебания около точки  $O_1$  (рис. а). Доска движется в направлении, параллельном  $O_1x_1$ , совершая гармонические колебания той же частоты около неподвижной точки  $O$ .

Определить абсолютное движение точки  $M$ , если закон колебаний доски  $A$  определяется уравнением

$$x_0 = a_2 \cos(kt + \beta_2),$$

где  $x_0 = OO_1$ .

**Решение.** Выберем абсолютную систему координат  $xu$  с началом в неподвижной точке  $O$  так, чтобы ось  $x$  совпала с относительной осью  $x_1$ . Тогда абсолютное движение точки определится координатой

$$x = OM = x_0 + x_1 = a_1 \cos(kt + \beta_1) + a_2 \cos(kt + \beta_2). \quad (1)$$

Таким образом, задача сводится к сложению двух гармонических колебаний одинаковой частоты и, следовательно, одинакового периода, отличающихся амплитудами и начальными фазами. Раскрывая в правой части (1) косинусы суммы двух углов, находим:

$$x = (a_1 \cos \beta_1 + a_2 \cos \beta_2) \cos kt - (a_1 \sin \beta_1 + a_2 \sin \beta_2) \sin kt. \quad (2)$$

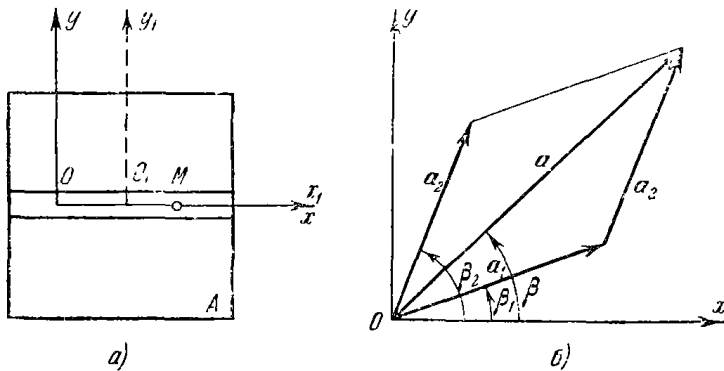
Введем новые постоянные  $a$  и  $\beta$ , связанные с исходными величинами следующими равенствами:

$$\left. \begin{aligned} a \cos \beta &= a_1 \cos \beta_1 + a_2 \cos \beta_2, \\ a \sin \beta &= a_1 \sin \beta_1 + a_2 \sin \beta_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$x = a \cos \beta \cos kt - a \sin \beta \sin kt = a \cos (kt - \beta). \quad (4)$$

Таким образом, при сложении двух гармонических колебаний одинаковой частоты получается гармоническое колебание той же частоты. Амплитуда этого колебания  $a$  и начальная фаза  $\beta$  определяются



К задаче 5.30.

из уравнений (3). Возводя эти уравнения в квадрат и складывая, находим амплитуду результирующего колебания

$$\begin{aligned} a^2 &= a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2(\cos \beta_1 \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \sin \beta_2) = \\ &= a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\beta_1 - \beta_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Начальную фазу колебания находим, разделив второе из уравнений (3) на первое:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_1 \sin \beta_1 + a_2 \sin \beta_2}{a_1 \cos \beta_1 + a_2 \cos \beta_2}. \quad (6)$$

Из формул (5) и (6) вытекает следующий простой геометрический способ определения результирующего колебания. Отложим из начала координат  $O$  (рис. б) под углом  $\beta_1$  к оси  $x$  вектор длиной  $a_1$  и под углом  $\beta_2$  к оси  $x$  вектор длиной  $a_2$ . Найдём сумму этих двух векторов как диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах. Длина диагонали соответствует амплитуде результирующего колебания, а угол ее наклона к оси  $x$  определяет начальную фазу этого колебания.

Этот прием геометрического сложения двух гармонических колебаний *одинаковой частоты*, направленных по одной прямой, может быть легко распространен на сложение любого числа таких колебаний. Достаточно из некоторого произвольного полюса отложить векторы, пропорциональные амплитудам составляющих колебаний под углами наклона, равными их начальным фазам. Сумма этих векторов определит амплитуду результирующего колебания, а ее угол наклона — начальную

фазу. Отсюда следует, что точка будет неподвижна, если сумма этих векторов равна нулю.

**Задача 5.31.** Точка  $M$  совершает прямолинейное гармоническое колебательное движение около центра  $O_1$  согласно уравнению

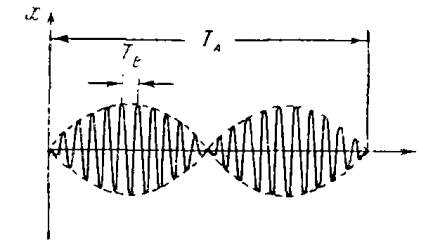
$$x_1 = a_1 \cos(mt - \varepsilon_1).$$

При этом основание механизма вместе с точкой  $O_1$  совершает также прямолинейное, поступательное гармоническое колебательное движение около неподвижного центра  $O$  согласно уравнению

$$x_{O_1} = a_0 \cos(nt - \varepsilon_0).$$

Оба колебания совпадают по направлению, а разность частот этих колебаний  $m - n$  весьма мала по сравнению с самими частотами.

Определить уравнение абсолютного движения точки  $M$ .



К задаче 5.31.

**Решение.** Уравнение абсолютного движения точки находится по формуле

$$x = x_1 + x_{O_1} = a_1 \cos(mt - \varepsilon_1) + a_0 \cos(nt - \varepsilon_0). \quad (1)$$

Пресобразуем этот результат следующим образом. Заменим тождественно

$$\cos(nt - \varepsilon_0) = \cos[(m - n)t - \varepsilon_0], \quad (2)$$

тогда

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos(mt - \varepsilon_1) + a_0 \cos[(m - n)t - \varepsilon_0] = \\ &= \{a_1 \cos \varepsilon_1 + a_0 \cos[(m - n)t - \varepsilon_0]\} \cos mt + \\ &\quad + \{a_1 \sin \varepsilon_1 + a_0 \sin[(m - n)t - \varepsilon_0]\} \sin mt. \end{aligned} \quad (3)$$

Введём новые переменные  $r$  и  $\theta$ , удовлетворяющие равенствам:

$$\left. \begin{aligned} r \cos \theta &= a_1 \cos \varepsilon_1 + a_0 \cos[(m - n)t - \varepsilon_0], \\ r \sin \theta &= a_1 \sin \varepsilon_1 + a_0 \sin[(m - n)t - \varepsilon_0]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Тогда уравнение абсолютного движения точки (3) может быть представлено в виде

$$x = r \cos(mt - \theta), \quad (5)$$

где  $r$  и  $\theta$  определяются из (4). Возводим оба равенства в квадрат и складываем:

$$r^2 = a_1^2 + a_0^2 + 2a_1a_0 \cos[(m - n)t - \varepsilon_0 - \varepsilon_1]. \quad (6)$$



Деля равенства (4) одно на другое, находим:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a_1 \sin \varepsilon_1 + a_0 \sin [(m-n)t + \varepsilon_0]}{a_1 \cos \varepsilon_1 + a_0 \cos [(m-n)t + \varepsilon_0]}.$$

Из формулы (5) следует, что результирующее колебание можно приближенно рассматривать как гармоническое, у которого амплитуда  $r$  и начальная фаза  $\theta$  являются не постоянными величинами, а медленно меняющимися функциями времени. Частота изменения этих величин  $m-n$  по условию весьма мала по сравнению с частотами составляющих колебаний. Из уравнения (6) следует, что амплитуда абсолютных колебаний изменяется в пределах  $r_{\max} = a_1 + a_0$ ,  $r_{\min} = a_1 - a_0$ . Этот вид движения, часто встречающегося в различных областях техники, называется бием. На рисунке буквами  $T_B$  обозначен период биеция, а буквами  $T_A$  — период нарастания колебаний.

Для приобретения навыков в решении задач на гармонические колебания рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 310, 315, 325, 326, 329, 350.

2<sup>c</sup>. Негармонические колебания. При сложении двух или нескольких гармонических колебаний разной частоты, происходящих по одной прямой, получается периодическое, но не гармоническое движение, если частоты слагаемых движений соизмеримы. Наряду с этим в природе и технике часто встречаются колебания непериодические. Следует напомнить, что периодическим движением называется такое движение, которое полностью повторяется через некоторый промежуток времени. Кинематика некоторых таких движений рассматривается в настоящем параграфе.

При решении задач в этом параграфе рекомендуется такая последовательность действий:

- 1) выбрать оси координат;
- 2) составить уравнения колебательного движения;
- 3) сложив колебательные движения, получить уравнения результирующего движения;
- 4) определить скорость и ускорение точки.

**Задача 5.32.** Точка движется согласно уравнению

$$x = a_1 \sin (k_1 t + \beta_1) + a_2 \sin (k_2 t + \beta_2), \quad (1)$$

причем периоды слагаемых гармонических колебаний соизмеримы, т. е. их отношение является рациональным числом:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (2)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — целые числа, а дробь (2) несократима.

Определить период результирующего колебания.

Решение. Движение точки складывается согласно (1) из двух гармоник. Из равенства (2) следует, что

$$n_2 T_1 = n_1 T_2. \quad (3)$$

Обозначая эти равные произведения буквой  $T$ , получим период результирующего колебания, так как за время  $T$  оба слагаемых в (1) вернутся к своим первоначальным значениям и за этот промежуток времени повторится наименьшее целое число периодов обеих гармоник.

Заметим, что если периоды слагаемых колебаний несоизмеримы, то не существует периода результирующего движения и движение в этом случае будет непериодическим.

**Задача 5.33.** Точка движется согласно уравнению

$$x = ae^{-nt} \sin (\sqrt{k^2 - n^2} t + \beta).$$

Определить период колебаний, закон убывания амплитуды колебаний с течением времени, скорость и ускорение точки.

Решение. Прежде всего заметим, что это движение является колебательным, но не периодическим, так как не существует такого числа  $T$ , при котором будет выполняться равенство

$$x(t + T) = x(t).$$

Будем понимать под периодом колебаний промежуток времени, в течение которого происходит полное колебание, т. е. переменная  $x$  изменяется от одного максимума до другого.

Для нахождения периода найдем, прежде всего, моменты времени, когда переменная  $x$  принимает экстремальные значения. Для этого приравняем производную от  $x$  по времени нулю

$$\dot{x} = ae^{-nt} [-n \sin (k_1 t + \beta) + k_1 \cos (k_1 t + \beta)] = 0,$$

где обозначим для краткости  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ . Отсюда находим:

$$\operatorname{tg} (k_1 t + \beta) = \frac{k_1}{n}. \quad (1)$$

Обозначая последовательные значения времени, удовлетворяющие уравнению (1), через  $t_i$  и учитывая, что периодичность тангенса соответствует изменению аргумента на величину  $\pi$ , получим:

$$k_1 t_{i+1} + \beta - (k_1 t_i + \beta) = \pi. \quad (2)$$

Так как  $t_i$  и  $t_{i+1}$  отвечают максимуму и следующему за ним минимуму, то их разность равна половине периода. Тогда из (2) находим:

$$\frac{T_1}{2} = t_{i+1} - t_i = \frac{\pi}{k_1}$$

или

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1}.$$

Переходим к определению закона убывания амплитуды колебаний с течением времени. Находим из (1) значение

$$\sin(k_1 t_i + \beta) = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + n^2}}.$$

Тогда соседние экстремальные значения переменной (амплитуды колебаний) будут:

$$a_i = |x(t_i)| = ae^{-nt_i} \left| \sin(k_1 t_i + \beta) \right| = ae^{-nt_i} \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + n^2}},$$

$$a_{i+1} = |x(t_{i+1})| = ae^{-nt_{i+1}} \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + n^2}}.$$

Отношение двух последовательных амплитуд равно

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = e^{-n(t_{i+1} - t_i)} = e^{-\frac{nT_1}{2}}.$$

Логарифм обратной величины  $nT_1/2$  называется логарифмическим декрементом, характеризующим быстроту убывания амплитуды.

Найдем скорость точки

$$v_x = \dot{x} = ae^{-nt} [k_1 \cos(k_1 t + \beta) - n \sin(k_1 t + \beta)].$$

Ускорение точки определится как вторая производная от координаты по времени

$$w_x = \ddot{x} = ae^{-nt} [-2nk_1 \cos(k_1 t + \beta) - (n^2 - k_1^2) \sin(k_1 t + \beta)].$$

После несложных преобразований находим:

$$w_x = -k^2 x - 2n\dot{x},$$

где обозначено, как и прежде,

$$k^2 = k_1^2 + n^2.$$

Таким образом, ускорение точки складывается из двух частей: ускорения, пропорционального отклонению точки от центра колебаний, и ускорения (замедления), пропорционального скорости.

**Задача 5.34.** Точка движется согласно уравнениям:

$$x = a \sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y = a \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Определить траекторию, скорость и ускорение точки.

Решение. Запишем уравнения движения точки так:

$$x = -a \cos 2\omega t, \quad (1)$$

$$y = -a \cos \omega t. \quad (2)$$

Для исключения времени из этой системы уравнений преобразуем уравнение (1) следующим образом:

$$x = a(\sin^2 \omega t - \cos^2 \omega t) = a(1 - 2 \cos^2 \omega t).$$

Подставляя в это уравнение значение

$$\cos \omega t = -y/a,$$

получим:

$$x = a\left(1 - 2\frac{y^2}{a^2}\right)$$

или

$$y^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right). \quad (3)$$

Это уравнение параболы с вершиной в точке  $(a, 0)$ , у которой ось  $x$  является осью симметрии. Траекторией точки является отрезок этой параболы, заключенный в квадрате со стороной  $2a$ , как это следует из уравнений (1) и (2).

Проекция скорости точки найдем, дифференцируя уравнения движения (1) и (2),

$$v_x = \dot{x} = 2a\omega \sin 2\omega t, \quad (4)$$

$$v_y = \dot{y} = a\omega \sin \omega t. \quad (5)$$

Отсюда находим скорость точки

$$v = a\omega \sin \omega t (4 \cos \omega t \mathbf{i} - \mathbf{j}).$$

Проекция ускорения точки будут:

$$w_x = \ddot{x} = 4a\omega^2 \cos 2\omega t = -4\omega^2 x,$$

$$w_y = \ddot{y} = a\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 y.$$

Следовательно,

$$\mathbf{w} = -\omega^2 (4x\mathbf{i} - y\mathbf{j}). \quad (6)$$

Как видно из уравнения (3), точка колеблется по дуге параболы  $ACB$  (см. рисунок), причем координаты точек равны:  $A(-a, a)$ ,  $C(a, 0)$ ,  $B(-a, -a)$ . Парабола пересекает ось ординат в точках  $D, E$  с координатами:  $0, \pm a\sqrt{2}/2$ .

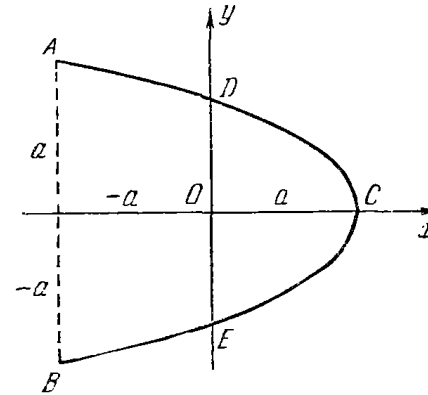
Найдем скорость и ускорение точки в те моменты времени, когда она проходит через  $A, C, B$ .

Подставляя в уравнения (1) и (2) координаты этих точек, находим:

для точки  $A$ :  $\cos 2\omega t = 1, \quad \cos \omega t = -1;$

для точки  $B$ :  $\cos 2\omega t = 1, \quad \cos \omega t = 1;$

для точки  $C$ :  $\cos 2\omega t = -1, \quad \cos \omega t = 0.$



К задаче 5.34.

Тогда из уравнений (4) и (5) имеем: скорости точки в  $A$  и  $B$  равны нулю, а в точке  $C$

$$v_{Cx} = 0, \quad v_{Cy} = \pm a\omega,$$

причем знак зависит от того, в каком направлении движется точка — от  $A$  к  $B$  или наоборот.

Ускорения точки в указанных трех положениях находятся подстановкой координат в (6):

$$\boldsymbol{w}_A = -\omega^2 a (-4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}),$$

$$\boldsymbol{w}_B = \omega^2 a (4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}),$$

$$\boldsymbol{w}_C = -4\omega^2 a \boldsymbol{i}.$$

Для приобретения навыков в решении задач на негармонические колебания рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 314, 328, 357.

-----

## ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### § 1. Уравнения плоского движения твердого тела. Уравнения движения точки плоской фигуры

1°. Определение уравнений плоского движения твердого тела и уравнений движения точки плоской фигуры. *Плоским (плоско-параллельным)* называется движение твердого тела, при котором траектории всех его точек лежат в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. При таком движении все точки твердого тела, лежащие на перпендикуляре, восстановленном к этой плоскости, имеют одинаковые траектории, скорости и ускорения. Следовательно, при изучении плоского движения твердого тела достаточно исследовать движение плоской фигуры, являющейся сечением твердого тела плоскостью, параллельной неподвижной.

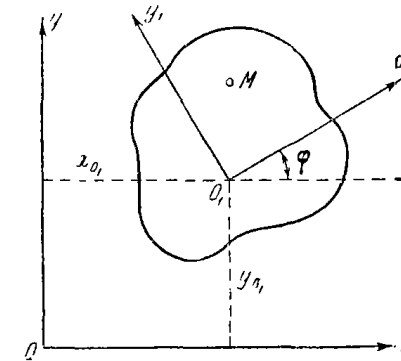


Рис. 6.1.

Всякое перемещение плоской фигуры можно разложить на поступательное движение вместе с произвольно выбранной точкой  $O_1$ , называемой *полюсом*, и на вращение фигуры вокруг этой точки (рис. 6.1).

Выбирая неподвижную систему координат  $xu$  и систему координат  $x_1y_1$ , жестко связанную с плоской фигурой, имеем *уравнения плоского движения твердого тела*:

$$\left. \begin{aligned} x_{O_1} &= f_1(t), \\ y_{O_1} &= f_2(t), \\ \varphi &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (1^*)$$

В этих уравнениях  $x_{O_1}$ ,  $y_{O_1}$  — координаты полюса — начала подвижной системы осей; угол  $\varphi$  — угол поворота подвижных осей координат

относительно неподвижных. Полая система координат правой, т. е. ось  $z$  направленной перпендикулярно к плоскости  $xu$  на читателя, имеем положительное направление отсчета угла  $\varphi$  против часовой стрелки.

Если выбрать за полюс не точку  $O_1$ , а какую-либо другую точку плоской фигуры  $K$ , то уравнения движения полюса

$$\left. \begin{aligned} x_K &= f_4(t), \\ y_K &= f_5(t), \end{aligned} \right\} \quad (1^{**})$$

характеризующие поступательное движение фигуры вместе с полюсом, будут отличаться от аналогичных первых двух уравнений в  $(1^*)$ . Угол поворота плоской фигуры не зависит от выбора полюса. Поэтому третье уравнение, определяющее вращение плоской фигуры, может отличаться для различных полюсов только на постоянное слагаемое. Если же для всех полюсов начальные значения угла поворота выбрать одинаковыми, то уравнения вращающейся плоской фигуры будут тождественны.

Система уравнений  $(1^*)$  полностью определяет положение плоской фигуры в любой момент времени.

Уравнения движения произвольной точки  $M$  плоской фигуры имеют вид

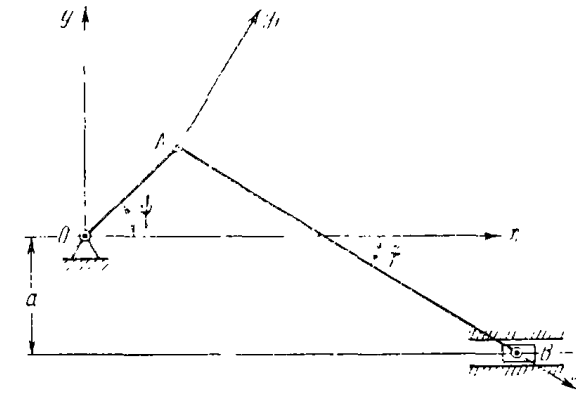
$$\left. \begin{aligned} x &= x_{O_1} + x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi, \\ y &= y_{O_1} + x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2^*)$$

В этих уравнениях:  $x, y$  — координаты точки  $M$  в неподвижной системе координат;  $x_{O_1}, y_{O_1}$  — координаты полюса  $O_1$ ;  $x_1, y_1$  — координаты точки  $M$  в системе координат  $x_1 y_1$ , жестко связанной с плоской фигурой;  $\varphi$  — угол поворота неподвижной системы координат. Координаты  $x_1, y_1$  — это два постоянных, неизменных по времени движения числа, определяющих рассматриваемую точку плоской фигуры. Остальные величины, входящие в уравнения  $(2^*)$ , являются функциями времени, которые определяются посредством уравнений  $(1^*)$ . Исключая из уравнений  $(2^*)$  время, находим траекторию точки  $M$ .

При решении задач на определение уравнений плоского движения твердого тела, уравнений движения и траекторий точек плоской фигуры рекомендуется такая последовательность действий:

- 1) выбираем две системы координат, неподвижную и подвижную, жестко связанную с плоской фигурой;
- 2) составляем уравнения движения плоской фигуры;
- 3) находим уравнения движения точки твердого тела;
- 4) исключая из уравнений движения точки время, определяем уравнение траектории точки.

**Задача 6.1.** В шатуно-кривошипном механизме центр вращения кривошипа  $O$  находится на расстоянии  $a$  от горизонтальной траектории ползуна  $B$ . Угол поворота кривошипа изменяется согласно закону  $\psi = kt$ , где  $k$  — постоянный коэффициент. Длина кривошипа  $OA = r$ , шатуна  $AB = l$ .



К задаче 6.1.

Определить уравнения плоского движения шатуна  $AB$ .

**Решение.** Выбираем неподвижную систему координат с началом в точке  $O$ . Ось  $x$  направим вправо по горизонтали, ось  $y$  — по вертикали вверх. Подвижную систему координат берем

с началом в точке  $A$ , принадлежащей и кривошипу и шатуну. Ось  $x_1$  проводим по шатуну  $AB$ , ось  $y_1$  — перпендикулярно к нему. Таким образом, точка  $A$  шатуна (начало подвижной системы координат) является полюсом. Уравнения движения полюса имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x_A &= OA \cos \psi = r \cos kt, \\ y_A &= OA \sin \psi = r \sin kt. \end{aligned} \right\}$$

Для нахождения третьего уравнения движения, зависимости угла поворота шатуна от времени, спроектируем отрезок  $AB$  на ось  $y$ . Обозначая через  $\varphi$  угол между осями  $x_1$  и  $x$ , находим:

$$AB \sin \varphi = OA \sin \psi - a,$$

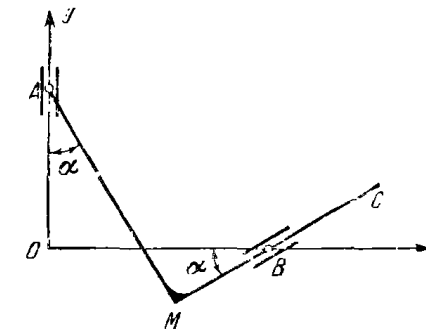
или, так как  $AB = l$ ,  $OA = r$ ,  $\psi = kt$ , имеем:

$$\sin \varphi = \frac{r}{l} \sin kt - \frac{a}{l}.$$

Отсюда находится угол  $\varphi$  как функция времени.

**Задача 6.2.** Жесткий прямой угол  $AMC$  движется так, что точка  $A$  остается все время на оси  $y$ , тогда как другая сторона угла  $MC$  проходит через неподвижную точку  $B$ . Зная, что  $AM = OB = a$ , определить траекторию точки  $M$ .

**Решение.** Для определения траектории точки  $M$  выберем полярную систему координат с началом в точке  $B$ . Обозначая радиус-



К задаче 6.2.

вектор  $\overline{BM}$  через  $r$  и угол  $OBM$  через  $\alpha$ , находим:

$$AM \sin \alpha + BM \cos \alpha = OB,$$

или

$$a \sin \alpha + r \cos \alpha = a. \quad (1)$$

Из (1) имеем:

$$\frac{r}{a} = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

или

$$\frac{a-r}{r} = \frac{\cos \alpha - 1}{1 - \sin \alpha},$$

$$\frac{a+r}{r} = \frac{\cos \alpha + 1}{1 - \sin \alpha}.$$

Отсюда после несложных преобразований получим:

$$\frac{a-r}{a+r} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Это и есть уравнение траектории точки  $M$  — полярное уравнение строфонды.

2°. Определение положения центра конечного вращения плоской фигуры. Любое непрерывное перемещение плоской фигуры может быть осуществлено поворотом вокруг некоторой точки, называемой центром конечного вращения.

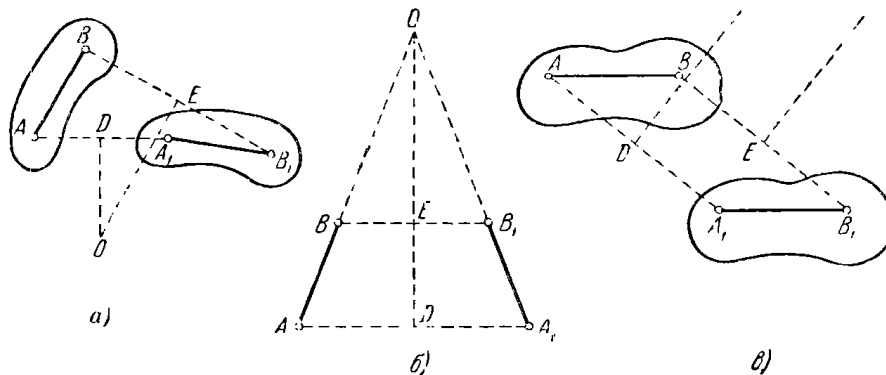


Рис. 6.2.

Для построения положения центра конечного вращения необходимо выбрать две произвольные точки плоской фигуры  $A$  и  $B$  (рис. 6.2, а). Пусть после перемещения эти точки оказались в  $A_1$  и  $B_1$ . Соединяя точки  $A$  и  $A_1$ ,  $B$  и  $B_1$  прямыми линиями, найдем точки  $D$  и  $E$ , делящие отрезки  $AA_1$  и  $BB_1$  пополам. В этих точках восстанавливаем перпендикуляры соответственно к прямым  $AA_1$  и  $BB_1$ . Точка пересечения этих перпендикуляров  $O$  и является положением конечного центра вращения плоской фигуры.

Это построение не приводит к цели только в том случае, если второе положение плоской фигуры является зеркальным отображением первого (рис. 6.2, б), так как при этом перпендикуляры, восстановленные в серединах отрезков  $AA_1$  и  $BB_1$ , сливаются в одну прямую линию.

В этом случае для нахождения положения центра конечного вращения плоской фигуры необходимо продолжить прямые  $AB$  и  $A_1B_1$ . Точка их пересечения и будет искомым центром вращения.

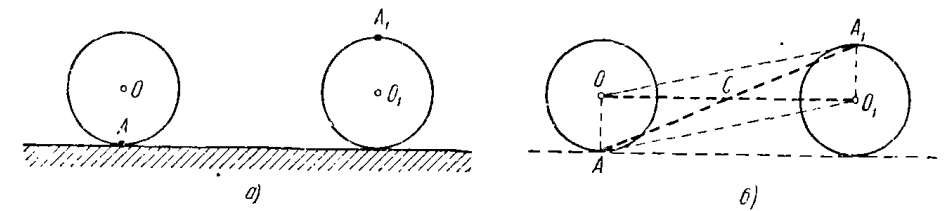
Если же (рис. 6.2, в) перпендикуляры, восстановленные к прямым, соединяющим точки  $A$  и  $A_1$ ,  $B$  и  $B_1$ , в их серединах  $D$  и  $E$ , параллельны, то центра конечного вращения нет.

При решении задач на определение положения центра конечного вращения рекомендуется такая последовательность действий:

- 1) выбираем две точки в начальном положении плоской фигуры;
- 2) находим положение этих же точек после конечного перемещения фигуры;
- 3) соединяем прямыми линиями начальное и конечное положения каждой из двух точек фигуры;
- 4) восстанавливаем в середине этих отрезков перпендикуляры к этим прямым и в точке пересечения этих перпендикуляров находим искомым центр конечного вращения плоской фигуры.

**Задача 6.3.** Колесо катится без скольжения по прямолинейному рельсу.

Найти положение центра конечного вращения, если колесо совершило такое перемещение, что точка соприкосновения колеса с рельсом стала наиболее удаленной от рельса точкой (рис. а).



К задаче 6.3.

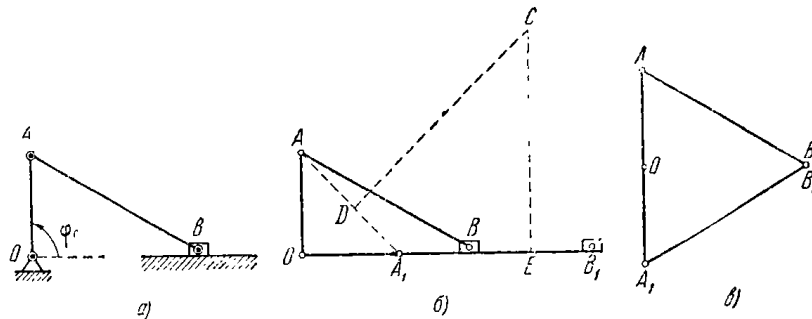
Решение. Соединим начальное и конечное положения центра колеса  $O$  и  $O_1$  прямой (рис. б). Проведем прямую между точками  $A$  и  $A_1$ . Эти прямые пересекутся в точке, которую обозначим через  $C$ . Проводя прямые  $OA$ ,  $OA_1$ ,  $O_1A_1$ ,  $O_1A$  (рис. б), замечаем, что  $OA_1A_1$  — параллелограмм. Прямые  $OO_1$  и  $AA_1$  являются диагоналями этого параллелограмма. Следовательно, точка их пересечения  $C$  делит отрезки  $OO_1$  и  $AA_1$  пополам. Если восстановить в точке  $C$  перпендикуляры к  $OO_1$  и  $AA_1$ , то единственной точкой их пересечения и будет  $C$ .

Значит,  $C$  и является центром конечного вращения при перемещении колеса из первого положения во второе.

**Задача 6.4.** Движение звеньев кривошипно-шатунного механизма определяется углом  $\varphi$ , который образует кривошип  $OA$  с траекторией  $OB$  движения ползуна. В начальном положении угол  $\varphi_0 = \pi/2$  (рис. а).

Определить положение центра конечного вращения шатуна  $AB$  при перемещении кривошипа  $OA$  из начального положения в положение, когда угол  $\varphi_1 = 0$ ; в положение, когда угол  $\varphi_2 = 3\pi/2$ .

**Решение.** Для нахождения положения центра конечного вращения шатуна  $AB$  при перемещении из положения  $\varphi_0 = \pi/2$  в положение  $\varphi_1 = 0$  изображаем (рис. б) оба положения шатуна. Соединяем начальное и конечное положения точек  $A$  и  $B$ , т. е. проводим прямые  $AA_1$



К задаче 6.4.

и  $BB_1$ . Далее, находим середины этих отрезков, точки  $D$  и  $E$ . В этих точках восстанавливаем перпендикуляры к рассматриваемым отрезкам. Пересечение перпендикуляров, точка  $C$ , и является центром конечного вращения шатуна.

Переходим к определению положения центра конечного вращения при перемещении шатуна из положения  $\varphi_0 = \pi/2$  в положение  $\varphi_2 = 3\pi/2$  (рис. в). Как видно из построения, точки  $B$  и  $B_1$  в этом случае совпадают. Точка  $O$  является серединой отрезка  $AA_1$ . Если восстановить в точке  $O$  перпендикуляр к отрезку  $AA_1$ , то на нем должен находиться центр конечного вращения. Ввиду того, что конечное положение шатуна является зеркальным отображением его начального положения, конечным центром вращения является точка  $B$ , где пересекаются прямые  $AB$  и  $A_1B_1$ .

Для приобретения навыков в решении задач на составление уравнения движения плоской фигуры и ее точек рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 492, 493, 495, 498, 500.

## § 2. Скорости точек плоской фигуры

Скорости точек плоской фигуры могут быть определены аналитическими, графическими или же графоаналитическими методами. В этом параграфе рассмотрим нахождение скоростей точек плоской фигуры аналитическим и графоаналитическим способами. Графический метод определения скоростей точек, заключающийся в построении плана скоростей, будет рассмотрен отдельно.

**Аналитический метод.** При аналитическом методе должны быть заданы уравнения движения плоской фигуры (рис. 6.3)

$$x_{O_1} = f_1(t), \quad y_{O_1} = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (1^*)$$

Проекция скорости точки  $M$  на неподвижные оси координат определяются равенствами:

$$v_x = v_{O_1x} - \omega_z(y - y_{O_1}), \quad (2^*)$$

$$v_y = v_{O_1y} + \omega_z(x - x_{O_1}). \quad (3^*)$$

В этих формулах  $v_x, v_y$  — искомые проекции скорости точки  $M$  на неподвижные оси координат;  $v_{O_1x} = \dot{x}_{O_1}, v_{O_1y} = \dot{y}_{O_1}$  — проекции скорости полюса, начала подвижной системы координат  $x_1, y_1$  на неподвижные оси координат;

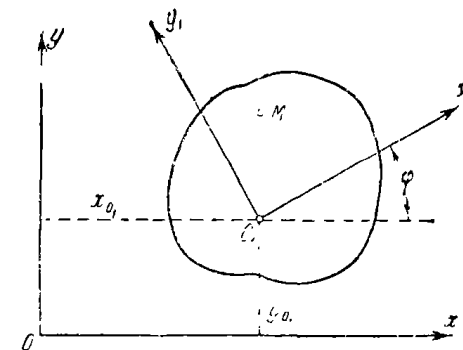


Рис. 6.3.

$\omega_z = \dot{\varphi}$  — проекция угловой скорости на ось  $z$ , перпендикулярную к плоскости движения;  $x, y$  — координаты точки  $M$  в неподвижной системе координат;  $x_{O_1}, y_{O_1}$  — координаты полюса  $O_1$  в неподвижной системе осей. Определение координат  $x, y$  точки  $M$  по заданным уравнениям движения плоской фигуры (1<sup>\*</sup>) производится по формулам (2<sup>\*</sup>)

§ 1 этой главы. Проекция скорости точки  $M$  на подвижные оси координат находятся по формулам:

$$v_{x_1} = v_{O_1x} \cos \varphi + v_{O_1y} \sin \varphi - \omega_z y_1, \quad (4^*)$$

$$v_{y_1} = -v_{O_1x} \sin \varphi + v_{O_1y} \cos \varphi + \omega_z x_1. \quad (5^*)$$

В этих формулах  $v_{x_1}, v_{y_1}$  — искомые проекции скорости точки  $M$  на оси  $x_1, y_1$  подвижной системы координат, жестко связанной с плоской фигурой;  $x_1, y_1$  — координаты точки  $M$  в подвижной системе осей; остальные величины имеют то же значение, что и в уравнениях (2<sup>\*</sup>), (3<sup>\*</sup>).

Величина скорости точки  $M$  по известным проекциям определяется формулой

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2}. \quad (6^*)$$

Направляющие косинусы даются равенствами:

$$\cos(\widehat{v, x}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\widehat{v, y}) = \frac{v_y}{v}, \quad (7^*)$$

$$\cos(\widehat{v, x_1}) = \frac{v_{x1}}{v}, \quad \cos(\widehat{v, y_1}) = \frac{v_{y1}}{v}. \quad (8^*)$$

Графоаналитические методы. Первый графоаналитический способ определения скорости точек плоской фигуры основан на формуле распределения скоростей (рис. 6.4)

$$v = v_{O_1} + \omega \times r_1. \quad (9^*)$$

В этой формуле  $v$  — искомая скорость точки  $M$ ;  $v_{O_1}$  — скорость полюса  $O_1$ ,  $\omega$  — угловая скорость плоской фигуры;  $r_1$  — радиус-вектор, проведенный из полюса  $O_1$  в точку  $M$ .

Таким образом, зная скорость какой-либо точки плоской фигуры, выбираем эту точку за полюс. Далее, откладываем от точки  $M$ , скорость которой подлежит определению, вектор, равный скорости полюса, и вектор  $\omega \times r_1$ , направленный перпендикулярно к  $r_1$  и равный по величине  $\omega r_1$ . Векторная сумма этих слагаемых и дает искомую скорость точки  $M$ . Если скорость точки  $M$  известна по направлению, то можно не знать величины вращательной скорости  $\omega \times r_1$ , так как и эта скорость, и искомая скорость точки  $M$  определяются пересечением прямой, совпадающей с направлением скорости точки  $M$ , проведенной из  $M$ , и прямой, перпендикулярной к линии  $O_1M$ , проведенной из конца вектора  $v_{O_1}$ , отложенного из точки  $M$ .

После того как треугольник или параллелограмм скоростей, выражающий равенство (9<sup>\*</sup>), построен, задача может считаться решенной. Величина и направление скорости точки  $M$  могут быть найдены по рисунку (рис. 6.4) или получены из решения этого треугольника.

Формула распределения скоростей (9<sup>\*</sup>) записывается часто в другом виде:

$$v_B = v_A + v_{BA} \quad (9^{*b})$$

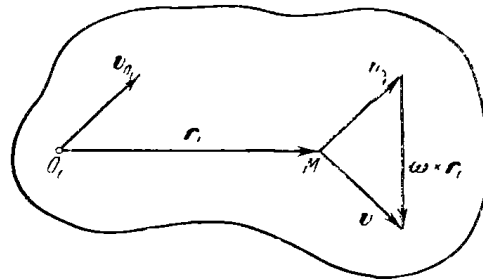


Рис. 6.4.

где  $v_B$  — искомая скорость точки  $B$ ;  $v_A$  — известная скорость точки  $A$ , избранной за полюс, а

$$v_{BA} = \omega \times \overline{AB}, \quad v_{BA} = \omega BA \quad (9^{***})$$

— вращательная скорость точки  $B$  вокруг точки  $A$ , равная по модулю произведению мгновенной угловой скорости плоской фигуры на расстояние от точки до полюса и направленная перпендикулярно к отрезку прямой  $BA$  в сторону мгновенного вращения фигуры.

Многие задачи могут быть решены при помощи теоремы о равенстве проекций скоростей концов отрезка плоской фигуры на направление отрезка (рис. 6.4).

Второй графоаналитический метод определения скоростей точек плоской фигуры основан на использовании мгновенного центра скоростей этой фигуры. При поступательном движении плоской фигуры ( $\omega \neq 0$ ) в каждый данный момент существует точка тела, скорость которой равна нулю. Эта точка называется мгновенным центром скоростей и обычно обозначается через  $P$ . Единственным исключением является случай так называемого мгновенно-поступательного движения ( $\omega = 0$ ), который будет рассмотрен отдельно. Выбирая мгновенный центр за полюс, имеем закон распределения скоростей в плоской фигуре:

$$v = \omega \times r_1, \quad v = v_{MP}, \quad (10^*)$$

где  $v$  — искомая скорость произвольной точки  $M$ ;  $\omega$  — угловая скорость плоской фигуры;  $r_1$  — радиус-вектор, проведенный из мгновенного центра скоростей в точку  $M$ , называемый *мгновенным радиусом*. Таким образом, скорости всех точек плоской фигуры являются в данный момент вращательными скоростями вокруг мгновенного центра скоростей. Их величины равны произведению величины угловой скорости на модуль мгновенного радиуса, а направлены они перпендикулярно к мгновенному радиусу. Таким образом, величины скоростей точек плоской фигуры пропорциональны величинам мгновенных радиусов:

$$\frac{v_B}{BP} = \frac{v_A}{AP} = \dots = \omega. \quad (11^*)$$

Методы нахождения положения мгновенного центра скоростей:

а) известны скорость одной точки  $O$  и угловая скорость плоской фигуры (рис. 6.5); мгновенный центр скоростей находится на

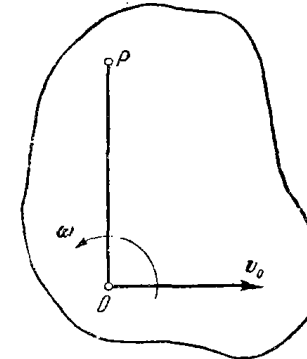


Рис. 6.5.

перпендикуляре, восстановленном к скорости точки  $O$ , на расстоянии

$$OP = \frac{v_O}{\omega}; \quad (12^*)$$

направление перпендикуляра находим, поворачивая  $\tau_O$  на угол  $\pi/2$  в сторону вращения;

б) известны направления скоростей двух точек плоской фигуры  $A$  и  $B$  (рис. 6.6); мгновенный центр скоростей находится в точке

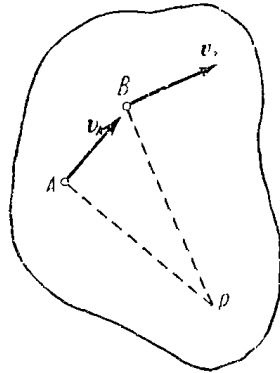


Рис. 6.6.

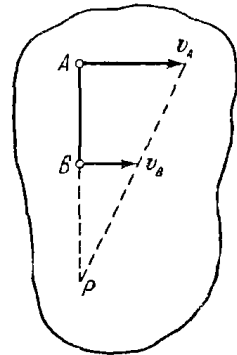


Рис. 6.7.

пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках  $A$  и  $B$  к скоростям этих точек;

в) скорости двух точек  $A$  и  $B$  плоской фигуры параллельны друг другу, перпендикулярны к отрезку  $AB$ , направлены в одну сторону и не равны; мгновенный центр находится на продолжении  $AB$  со стороны той точки, чья скорость меньше; расстояния от точек до мгновенного центра скоростей пропорциональны скоростям точек; для определения мгновенного центра скоростей необходимо знать не только направления, но и величины скоростей точек  $A$  и  $B$  (рис. 6.7);

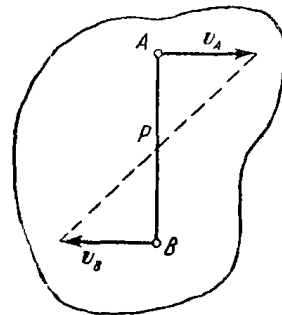


Рис. 6.8.

г) скорости двух точек  $A$  и  $B$  плоской фигуры параллельны друг другу, перпендикулярны к отрезку  $AB$  и направлены в разные стороны; мгновенный центр скоростей лежит на отрезке  $AB$  и делит этот отрезок на части, пропорциональные скоростям; для нахождения мгновенного центра скоростей необходимо знать и величины и направления скоростей обеих точек (рис. 6.8);

д) плоская фигура катится без скольжения по неподвижной кривой (рис. 6.9); мгновенный центр скоростей  $P$  находится в точке соприкосновения фигуры с кривой.

Если скорости двух точек плоской фигуры параллельны друг другу и не перпендикулярны к отрезку, соединяющему обе точки (рис. 6.10), или скорости двух точек фигуры параллельны, равны друг другу и перпендикулярны к отрезку, соединяющему обе точки (рис. 6.11), то мгновенного центра скоростей в данный момент не существует или можно сказать, что он находится в бесконечности. Угловая скорость плоской фигуры в данный момент равна нулю, движение называется *мгновенно-поступательным*, скорости всех точек плоской фигуры в этот момент равны.

При мгновенно-поступательном движении ускорения точек плоской фигуры, вообще говоря, не равны друг другу и траектории точек плоской фигуры также неодинаковы.

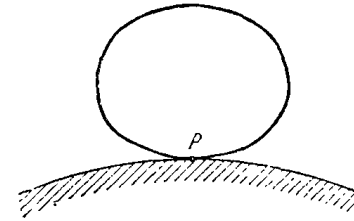


Рис. 6.9.

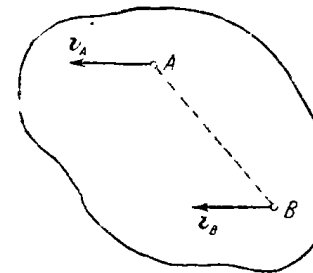


Рис. 6.10.

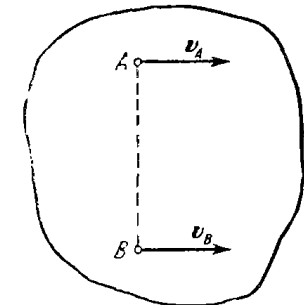


Рис. 6.11.

Положение мгновенного центра скоростей может быть также определено аналитически. В *неподвижной системе* осей координаты *мгновенного центра* определяются формулами:

$$x_P = x_{O_1} - \frac{v_{O_1y}}{\omega_z}, \quad y_P = y_{O_1} + \frac{v_{O_1x}}{\omega_z}. \quad (13^*)$$

В этих формулах  $x_P, y_P$  — координаты мгновенного центра скоростей в неподвижной системе координат;  $x_{O_1}, y_{O_1}$  — координаты полюса, начала подвижной системы осей;  $v_{O_1x}, v_{O_1y}$  — проекции скорости полюса на неподвижные оси координат;  $\omega_z$  — проекция угловой скорости фигуры на ось, перпендикулярную к плоскости, в которой происходит движение. В *подвижной системе* осей, жестко связанной



с плоской фигурой, координаты мгновенного центра скоростей определяются так:

$$x_{1P} = \frac{v_{O_1x} \sin \varphi - v_{O_1y} \cos \varphi}{\omega_z}, \quad (14^*)$$

$$y_{1P} = \frac{v_{O_1x} \cos \varphi + v_{O_1y} \sin \varphi}{\omega_z}. \quad (15^*)$$

Здесь  $x_{1P}$ ,  $y_{1P}$  — координаты мгновенного центра скоростей в подвижной системе осей;  $\varphi$  — угол поворота подвижной системы координат по отношению к неподвижной. Остальные величины те же, что и в (13\*).

Формулами (13\*), (14\*), (15\*) целесообразно пользоваться, когда заданы уравнения движения плоской фигуры (1\*).

Аналитический метод определения скоростей целесообразно применять, если известны по условию или могут быть без особых затруднений составлены уравнения движения плоской фигуры (1\*). Аналитический метод позволяет, вообще говоря, найти скорость точки плоской фигуры как функцию времени. Однако получить такое решение в обозримом виде не всегда возможно.

При аналитическом методе решение задач рекомендуется вести в следующем порядке:

1) выбрать неподвижную и подвижную системы координат; начало подвижной системы осей взять в такой точке, уравнения движения которой известны или могут быть составлены без особых затруднений;

2) составить уравнения движения плоской фигуры: два уравнения движения полюса и уравнение вращения фигуры вокруг полюса;

3) пользуясь уравнениями движения плоской фигуры, получить уравнения движения точки, скорость которой требуется найти;

4) определить проекции скорости на неподвижные или подвижные оси координат и найти величину и направление искомой скорости.

Графоаналитические способы нахождения скоростей точек плоской фигуры целесообразно применять в тех случаях, когда требуется найти скорости различных точек плоской фигуры в данный момент времени при определенном положении плоской фигуры.

Решение задач при помощи мгновенного центра скоростей при этом эффективнее других графоаналитических методов, если требуется определить скорости нескольких точек, причем вычисление мгновенных радиусов может быть произведено без сложных выкладок. Если же согласно условию задачи необходимо найти скорость какой-либо одной точки плоской фигуры, то обычно быстрее к цели ведет применение теоремы о распределении скоростей (9\*) или теоремы о равенстве проекций скоростей концов отрезка плоской фигуры на направление самого отрезка.

При графоаналитических методах решения задач рекомендуется такая последовательность действий:

1) выбрать за полюс ту точку плоской фигуры, скорость которой известна или легко определяется из условия задачи;

2) найти другую точку плоской фигуры, направление скорости которой известно;

3) пользуясь формулой распределения скоростей, найти скорость этой точки плоской фигуры;

4) исходя из формулы распределения скоростей, определить значение угловой скорости плоской фигуры в данный момент времени;

5) зная угловую скорость фигуры и скорость полюса, найти с помощью формулы распределения скоростей искомые скорости других точек фигуры.

При графоаналитическом методе решения задач может быть применен и метод проекций. В этом случае может быть рекомендован следующий порядок решения задач:

1) выбрать за полюс точку плоской фигуры, скорость которой известна;

2) пользуясь формулой распределения скоростей, построить скорость другой точки плоской фигуры, у которой известно направление ее скорости;

3) спроектировать полученный треугольник скоростей на направление прямой, соединяющей обе точки, и найти скорость второй точки;

4) спроектировать треугольник скоростей на направление, перпендикулярное к прямой, соединяющей обе точки, и найти вращательную скорость второй точки по отношению к полюсу;

5) разделив вращательную скорость на расстояние от точки до полюса, найти мгновенную угловую скорость плоской фигуры;

6) зная мгновенную угловую скорость фигуры, можно найти скорости любых точек плоской фигуры, пользуясь формулой распределения скоростей.

Если же задача решается при помощи мгновенного центра скоростей, то рекомендуется такая последовательность действий:

1) определить положение мгновенного центра плоской фигуры одним из вышеуказанных способов;

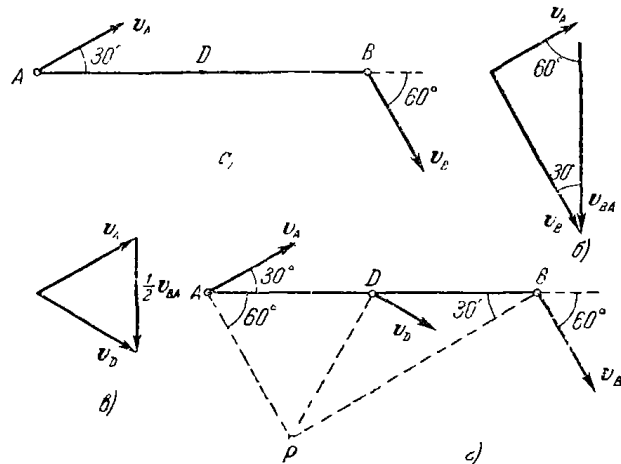
2) найти величину мгновенного радиуса той точки плоской фигуры, скорость которой известна, и определить угловую скорость плоской фигуры, разделив величину скорости точки на величину мгновенного радиуса;

3) найти искомые величины скоростей точек плоской фигуры, умножая угловую скорость на мгновенный радиус соответствующей точки или используя формулу (11\*).

**Задача 6.5.** Стержень  $AB$  совершает плоское движение. Скорость точки  $A$  образует угол  $30^\circ$  со стержнем и равна в данный момент

по величине  $5 \text{ м/сек}$ . Скорость точки  $B$  в этот же момент составляет угол  $60^\circ$  с продолжением стержня (рис. а).

Определить величину скорости точки  $B$ , положение мгновенного центра скоростей, а также угловую скорость стержня, если его длина  $AB = 2 \text{ м}$ . Найти также скорость точки  $D$ , середины стержня.



К задаче 65.

Решение. Эту задачу следует решать графоаналитически. Согласно формуле распределения скоростей

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA} \quad (1)$$

строим треугольник скоростей, соответствующий уравнению (1). Из произвольной точки откладываем в избранном масштабе скорость  $\mathbf{v}_A$ , известную по величине и направлению. Из конца  $\mathbf{v}_A$  проводим прямую, параллельную  $\mathbf{v}_{BA}$ , т. е. перпендикулярную к стержню  $AB$ . Величина вектора  $\mathbf{v}_{BA}$  неизвестна. Воспользуемся тем, что известно направление скорости  $\mathbf{v}_B$ . Из начала вектора  $\mathbf{v}_A$  проводим прямую, параллельную направлению  $\mathbf{v}_B$ , до пересечения с прямой  $\mathbf{v}_{BA}$ . Таким образом, получен замкнутый треугольник скоростей, стороны которого в избранном масштабе определяют скорость точки  $B$  и вращательную скорость точки  $B$  вокруг полюса  $A$ . В этом треугольнике известны одна сторона  $\mathbf{v}_A$  и все три угла (рис. б).

Решая этот треугольник, находим:

$$v_{BA} = \frac{v_A}{\sin 30^\circ} = \frac{5}{0,5} = 10 \text{ м/сек}, \quad (2)$$

$$v_B = v_A \operatorname{tg} 60^\circ = 5\sqrt{3} \approx 8,65 \text{ м/сек};$$

замечая, что

$$v_{BA} = \omega BA = \omega \cdot 2, \quad (3)$$

из (2) и (3) определяем величину угловой скорости:

$$\omega \cdot 2 = 10 \quad \text{или} \quad \omega = 5 \text{ сек}^{-1}.$$

Скорость точки  $D$ , середины стержня  $AB$ , может быть найдена при помощи формулы распределения скоростей

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{BA}.$$

Для построения треугольника скоростей (рис. в) из произвольной точки откладываем скорость  $\mathbf{v}_A$ . Из конца  $\mathbf{v}_A$  откладываем вектор, равный  $\frac{1}{2} \mathbf{v}_{BA}$ . Соединяя начало вектора  $\mathbf{v}_A$  с концом вектора  $\frac{1}{2} \mathbf{v}_{BA}$ , находим искомую скорость точки  $D$ .

Величина скорости точки  $D$  легко определяется из треугольника скоростей. Две стороны этого треугольника равны по величине  $v_A = \frac{1}{2} v_{BA} = 5 \text{ м/сек}$ , а угол между этими сторонами равен  $60^\circ$ . Следовательно, этот треугольник равносторонний. Величина скорости точки  $D$  равна также  $5 \text{ м/сек}$ .

Эту задачу можно решить и при помощи мгновенного центра скоростей. Для нахождения мгновенного центра скоростей стержня  $AB$  восстановим перпендикуляры к скоростям точек  $A$  и  $B$  (рис. г). Пересечение этих прямых определяет положение мгновенного центра скоростей  $P$ . В прямоугольном треугольнике  $ABP$  известны сторона  $AB$  и два прилежающих угла:  $\angle BAP = 60^\circ$ ,  $\angle ABP = 30^\circ$ . Находим мгновенные радиусы  $AP$  и  $BP$ :

$$AP = AB \sin 30^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м},$$

$$BP = AB \cos 30^\circ = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,73 \text{ м}.$$

Величина угловой скорости стержня

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{5}{1} = 5 \text{ сек}^{-1},$$

и, следовательно, величина скорости точки  $B$

$$v_B = \omega BP \approx 5 \cdot 1,73 = 8,65 \text{ м/сек}.$$

Для определения скорости середины стержня, точки  $D$ , проведем мгновенный радиус  $PD$ . Из треугольника  $ADP$  следует, что  $AP = AD = 1 \text{ м}$ . Следовательно, треугольник равносторонний и  $DP = 1 \text{ м}$ . Тогда

$$v_D = DP \cdot \omega = 5 \text{ м/сек}.$$

Скорость точки  $D$  направлена перпендикулярно к мгновенному радиусу  $DP$ .

В этой задаче оба метода решения равноценны. Они одинаково быстро позволяют получить ответ на все вопросы, поставленные в задаче.

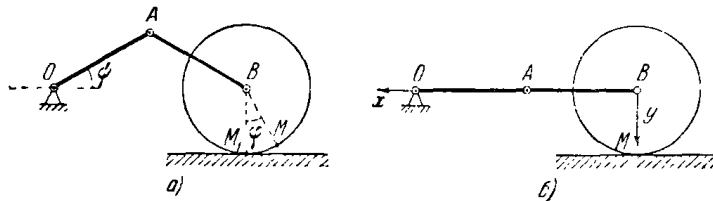
Если бы требовалось найти лишь величину скорости точки  $B$ , то проще всего было бы применить теорему о равенстве проекций скоростей двух точек плоской фигуры на направление отрезка, соединяющего эти точки:

$$v_A \cos 30^\circ = v_B \cos 60^\circ,$$

откуда

$$v_B = \frac{v_A \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 0,5} \approx 8,65 \text{ м/сек.}$$

**Задача 6.6.** Кривошипно-шатунный механизм состоит из кривошипа  $OA$  и шатуна  $AB$  с одинаковой длиной  $r$ . Кривошип вращается вокруг неподвижного центра  $O$ . Угол  $\psi$  (рис. а) изменяется согласно



К задаче 6.6.

уравнению  $\psi = kt$ . Концы шатуна  $E$  шарнирно прикреплен к центру колеса. Колесо радиуса  $a$  катится без скольжения по горизонтальной плоскости, параллельной прямой  $OB$  и отстоящей от нее на расстоянии  $a$ .

Найти уравнения плоского движения колеса, а также уравнения движения той точки обода  $M$ , которая соприкасается с плоскостью, когда точка  $B$  находится в крайнем правом положении. Определить скорость точки  $M$  и мгновенную угловую скорость колеса.

**Решение.** Первый способ. Выберем начало неподвижной системы координат в крайнем правом положении точки  $B$  (рис. б). Ось  $x$  направим по горизонтали влево, ось  $y$  — по вертикали вниз. В качестве полюса выберем точку  $B$ . Составим уравнения движения полюса:

$$x_B = 2r - 2r \cos kt = 2r(1 - \cos kt), \quad (1)$$

$$y_B = 0. \quad (2)$$

Для получения третьего уравнения движения, зависимости угла поворота от времени, замечаем, что так как колесо катится без скольжения, то перемещение центра колеса точки  $B$  может быть представлено как произведение угла поворота колеса  $\varphi$  на радиус вращения  $a$ :

$$x_B = \overset{\frown}{M_1 M} = a\varphi. \quad (3)$$

Сопоставляя уравнения (1) и (3), находим третье уравнение движения колеса

$$\varphi = \frac{2r(1 - \cos kt)}{a}.$$

Переходим к определению уравнений движения точки  $M$ . Рассмотрим произвольное положение точки  $M$ , когда радиус  $BM$  повернулся на угол  $\varphi$  от своего начального положения (рис. а). Тогда координаты точки  $M$  могут быть определены следующими уравнениями (2\*):

$$x_M = x_B - a \sin \varphi,$$

$$y_M = a \cos \varphi$$

или, если внести в эти уравнения значения  $x_B$  и  $\varphi$ :

$$x_M = 2r(1 - \cos kt) - a \sin \left[ \frac{2r}{a}(1 - \cos kt) \right],$$

$$y_M = a \cos \left[ \frac{2r}{a}(1 - \cos kt) \right].$$

Таковы уравнения движения точки  $M$ . Эти уравнения являются параметрическими уравнениями траектории точки  $M$ , дуги циклоиды. Скорость точки  $M$  определяется по ее проекциям на неподвижные оси координат:

$$v_{xM} = \dot{x}_M = 2rk \sin kt - 2rk \sin kt \cos \left[ \frac{2r}{a}(1 - \cos kt) \right],$$

$$v_{yM} = \dot{y}_M = -2rk \sin kt \cdot \sin \left[ \frac{2r}{a}(1 - \cos kt) \right].$$

Возводя в квадрат и складывая, получаем:

$$v_M = 4rk \sin kt \sin \frac{r}{a}(1 - \cos kt).$$

Проекция мгновенной угловой скорости колеса на ось  $z$  равна

$$\omega_z = \dot{\varphi} = \frac{2rk}{a} \sin kt.$$

**Второй способ.** Покажем другой способ решения. Уравнение движения точки имеет вид

$$x_B = 2r(1 - \cos kt).$$

Так как точка  $B$  движется прямолинейно, то ее скорость равна

$$v_B = \dot{x}_B = 2rk \sin kt.$$

Точка  $M_1$  — мгновенный центр скоростей колеса, следовательно, мгновенная угловая скорость будет:

$$\omega = \frac{v_B}{a} = \frac{2rk}{a} \sin kt. \quad (4)$$

Тогда модуль скорости точки  $M$  равен

$$v_M = M_1 M \cdot \omega = 2a \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{2rk}{a} \sin kt. \quad (5)$$

Угол  $\varphi$  находится из (4):

$$\varphi = \int \omega dt = -\frac{2r}{a} \cos kt + C. \quad (6)$$

Полагая  $\varphi = 0$  при  $t = 0$  и подставляя эти значения переменных в (6), находим:

$$C = \frac{2r}{a}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \frac{2r}{a} (1 - \cos kt).$$

Внося это значение в (5), получим:

$$v_M = 4rk \sin kt \sin \frac{r}{a} (1 - \cos kt).$$

**Задача 6.7.** Круглый цилиндр  $A$  обмотан тонкой нитью, конец которой  $B$  закреплен неподвижно. Цилиндр падает без начальной скорости, разматывая нить. Величина скорости оси цилиндра определяется формулой

$$v = \frac{2}{3} \sqrt{3gy},$$

где  $g$  — постоянный коэффициент;  $y$  — расстояние, пройденное центром цилиндра, отсчитываемое от начального положения. Радиус цилиндра равен  $r$ .

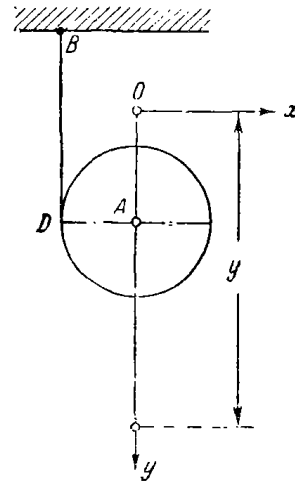
Определить уравнения плоского движения цилиндра.

**Решение.** Выбираем неподвижную систему координат с началом в точке  $O$ , где центр цилиндра находился в начале движения. Ось  $y$  направляем по вертикали вниз, ось  $x$  — по горизонтали вправо. Тогда проекция скорости центра цилиндра на вертикальную ось, равная производной от координаты  $y$  по времени, будет равна

$$v_y = \dot{y} = \frac{2}{3} \sqrt{3gy}.$$

Отделяя переменные, имеем:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{2}{3} \sqrt{3g} dt;$$



К задаче 6.7.

интегрируя это дифференциальное уравнение, получаем:

$$2\sqrt{y} = \frac{2}{3} \sqrt{3gt} + C_1.$$

В начальный момент, при  $t = 0$ , координата  $y = 0$ . Используя это, находим, что произвольная постоянная интегрирования  $C_1 = 0$ , следовательно, уравнение движения центра цилиндра принимает вид

$$y = \frac{g}{3} t^2. \quad (1)$$

Для определения второго уравнения движения (зависимости угла поворота цилиндра от времени) находим угловую скорость цилиндра. Мгновенный центр скоростей цилиндра находится в точке  $D$ , точке, где нить отходит от цилиндра, следовательно,

$$\omega_z = \frac{v_D}{r} = \frac{2}{3r} \sqrt{3gy}. \quad (2)$$

Подставляя в уравнение (2) значение  $y$  из (1), имеем:

$$\omega_z = \frac{2}{3} \cdot \frac{g}{r} t.$$

Так как  $\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}$ , то

$$d\varphi = \frac{2}{3} \cdot \frac{g}{r} t dt,$$

интегрируя, находим:

$$\varphi = \frac{2}{3} \cdot \frac{g}{r} \frac{t^2}{2} + C_2. \quad (3)$$

Произвольную постоянную  $C_2$  определяем, полагая, что в начальный момент, при  $t = 0$ , угол поворота цилиндра был равен нулю:  $\varphi = 0$ . Подставляя эти начальные условия в уравнение (3), находим, что  $C_2 = 0$ . Таким образом, второе уравнение движения цилиндра имеет вид

$$\varphi = \frac{g}{3r} t^2.$$

**Задача 6.8.** Круглый цилиндр  $A$  обмотан тонкой нитью, конец которой  $B$  закреплен неподвижно. Цилиндр падает без начальной скорости, разматывая нить (рис.  $a$ ). Значение скорости оси цилиндра определяется формулой

$$v = \frac{2}{3} \sqrt{3gy}, \quad (1)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести;  $y$  — расстояние, пройденное центром цилиндра, отсчитываемое от начального положения. Радиус цилиндра равен  $r$ .

Определить скорости четырех точек на обode цилиндра, расположенных на концах взаимно перпендикулярных диаметров, изображенных на чертеже.

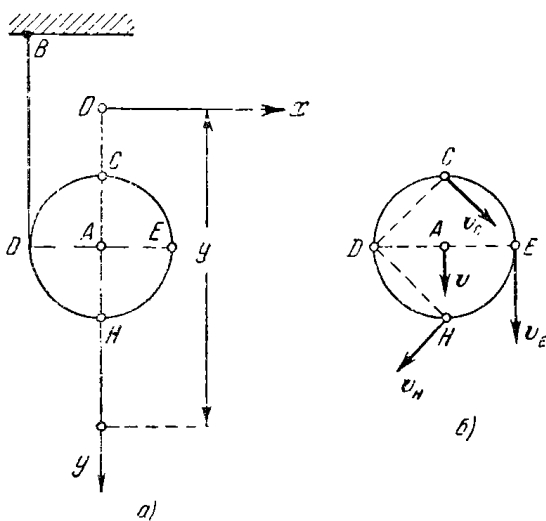
Решение. Мгновенный центр скоростей цилиндра находится в точке  $D$ , где неподвижная часть нити  $BD$  соприкасается с цилиндром. В этом месте скорости точек нити и цилиндра, находящиеся в соприкосновении, равны между собой и, следовательно, равны нулю. Скорости остальных точек пропорциональны расстояниям до мгновенного центра скоростей и перпендикулярны к мгновенным радиусам. Величина скорости точки  $E$  определится из пропорции

$$\frac{v}{r} = \frac{v_E}{2r},$$

откуда, учитывая (1), найдем, что

$$v_E = \frac{4}{3} \sqrt{3gy}. \quad (2)$$

Направление скорости точки  $E$  перпендикулярно к мгновенному радиусу  $DE$ , т. е. параллельно скорости точки  $A$ . Скорости точек  $C$  и  $H$  равны по величине, так как они отстоят от мгновенного центра скоростей, точки  $D$ , на одинаковых расстояниях  $DC = DH = r\sqrt{2}$ . Величины этих скоростей определяются из пропорции



К задаче 6.8.

$$\frac{v}{r} = \frac{v_C}{r\sqrt{2}},$$

откуда

$$v_C = v_H = \frac{2}{3} \sqrt{6gy}; \quad (3)$$

направлены эти скорости перпендикулярно к мгновенным радиусам  $CD$  и  $HD$  (рис. б).

Формулы (2) и (3) определяют величину скоростей точек  $C$ ,  $E$ ,  $H$  как функции пройденного центром диска расстояния  $y$ . Найдем величину этих скоростей как функцию времени.

В задаче 6.7, исходя из уравнения (1), было выведено уравнение движения центра диска

$$y = \frac{g}{3} t^2.$$

Подставляя это значение расстояния  $y$  в формулы (2) и (3), получаем:

$$v_E = \frac{4}{3} gt,$$

$$v_C = v_H = \frac{2\sqrt{2}}{3} gt.$$

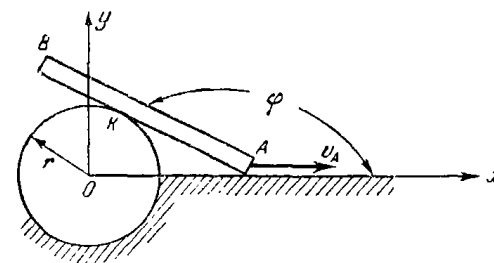
Величину скорости точек  $C$  и  $H$  можно также найти на основании теоремы о равенстве проекций скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки. Скорости точек  $C$  и  $H$  составляют углы  $45^\circ$  с линией  $CAH$ , а скорость точки  $A$  направлена по этой прямой. Следовательно,

$$v_C \cos 45^\circ = v_H \cos 45^\circ = v,$$

откуда

$$v_C = v_H = \frac{v}{\cos 45^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{3gy} = \frac{2}{3} \sqrt{6gy} = \frac{2\sqrt{2}}{3} gt.$$

**Задача 6.9.** Стержень  $AB$  скользит точкой  $A$  по горизонтальному полу вдоль оси  $x$  и касается



К задаче 6.9.

полу вдоль оси  $x$  и касается все время круга радиуса  $r$ .

Определить угловую скорость стержня  $AB$ , если скорость точки  $A$  равна  $v_A$ .

Решение. Обозначив угол между стержнем  $AB$  и осью  $x$  буквой  $\varphi$ , получим:

$$\frac{r}{x} = \sin(180^\circ - \varphi) = \sin \varphi, \quad (1)$$

где  $x$  — координата точки  $A$ . Продифференцировав (1) по времени, получим:

$$\cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{r}{x^2} \frac{dx}{dt},$$

или, учитывая, что  $\frac{dx}{dt} = v_A$ , найдем:

$$\omega_z = -\frac{rv_A}{x^2 \cos(180^\circ - \varphi)} = \frac{rv_A}{x^2} \cdot \frac{OA}{AK} = \frac{rv_A}{x \sqrt{x^2 - r^2}}.$$

Эту же задачу можно решить другим способом. Скорость точки  $K$  направлена по касательной к окружности, т. е. по стержню  $AB$ . Скорость точки  $A$  равна сумме скорости полюса, за который примем точку  $K$ , и вращательной скорости вокруг полюса:

$$v_A = v_K + v_{AK}, \quad (2)$$

где

$$v_{AK} = AK \cdot |\omega| = \sqrt{x^2 - r^2} |\omega|.$$

Спроектируем геометрическое равенство (2) на перпендикуляр к  $AB$ :

$$v_A \sin \varphi = \omega \cdot AK,$$

откуда, учитывая, что угол  $\varphi$  увеличивается,

$$\omega_z = \frac{v_A \sin \varphi}{AK} = \frac{v_A r}{x \sqrt{x^2 - r^2}}.$$

**Задача 6.10.** Шарнирный четырехугольник  $ABED$  (рис. а), в котором  $AB = ED = a$ ,  $AD = BE = b$ , имеет неподвижное звено  $AB$ . Скорость точки  $D$  известна и равна  $v$ .

Определить скорость точки  $E$  и мгновенную угловую скорость звена  $ED$ , если в данный момент угол  $DAB = 60^\circ$ .

Решение. Мгновенный центр скоростей звена  $ED$  находится в точке пересечения стержней  $BE$  и  $AD$ , в точке  $P$  (рис. б), так как скорость точки  $D$  перпендикулярна к  $AD$ , а скорость точки  $E$  перпендикулярна к  $BE$ .

Обозначая длину отрезка  $PD$  через  $x$ , можно выразить величину скорости точки  $D$  как произведение длины мгновенного радиуса  $PD$  на величину мгновенной угловой скорости стержня  $ED$ :

$$v = x \cdot \omega. \quad (1)$$

Проведя прямую  $BD$ , заметим, что треугольники  $BED$  и  $ABD$  равны (по двум равным сторонам при третьей общей стороне), и, следовательно,  $\angle DAB = \angle BED = 60^\circ$ . Треугольники  $APB$  и  $EPD$  также равны, следовательно,  $AP = EP = b - x$  и величина скорости точки  $E$  может быть представлена формулой

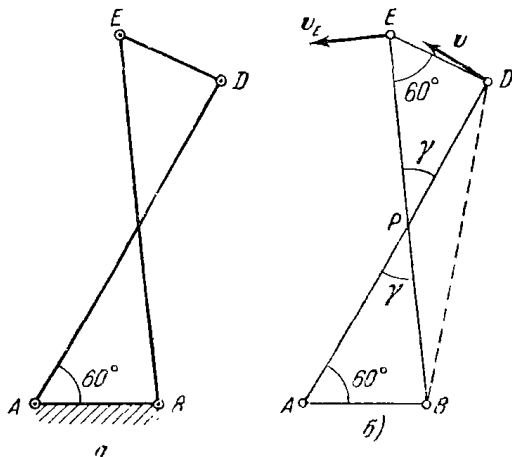
$$v_E = (b - x) \omega = b\omega - x\omega = b\omega - v. \quad (2)$$

Рассмотрим треугольник  $EPD$ ; по теореме косинусов имеем:

$$x^2 = (b - x)^2 + a^2 - 2a(b - x) \cos 60^\circ.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, найдем  $x$ :

$$x = \frac{a^2 + b^2 - ab}{2b - a}.$$



К задаче 6.10.

Теперь из уравнения (1) можно определить значение мгновенной угловой скорости стержня  $ED$ :

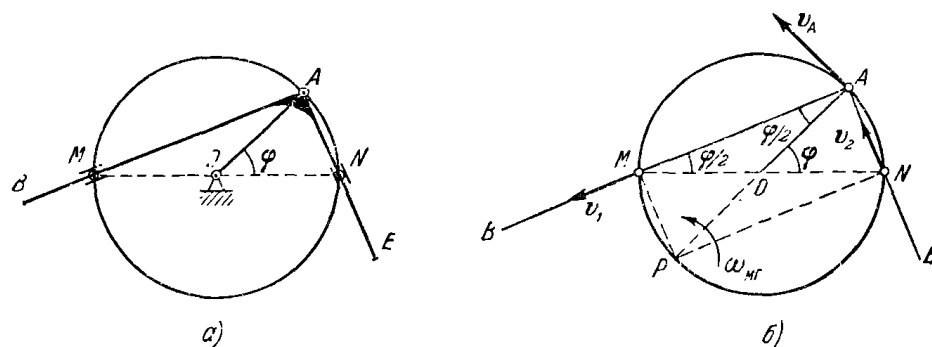
$$\omega = \frac{v}{x} = v \frac{2b - a}{a^2 + b^2 - ab}.$$

Подставляя это значение в уравнение (2), имеем:

$$v_E = \left( \frac{2b^2 - ab}{a^2 + b^2 - ab} - 1 \right) v = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2 - ab} v;$$

это и есть искомая величина скорости точки  $E$  при данном положении механизма.

**Задача 6.11.** Вершина  $A$  жесткого прямого угла  $BAE$  (рис. а) соединена кривошипом  $OA = r$  с неподвижным центром  $O$ . Кривошип  $OA$  вращается равномерно:  $\varphi = kt$ . Сторона прямого угла  $AB$



К задаче 6.11.

проходит непрерывно через неподвижную точку  $M$ , а стержень  $AE$  — через неподвижную точку  $N$ . Тогда  $M$  и  $N$  лежат на окружности, описываемой вершиной прямого угла  $A$ .

Определить угловую скорость жесткого прямого угла  $BAE$ , а также скорости тех его точек, которые совпадают в данный момент с шарнирами  $M$  и  $N$ .

Решение. Плоское движение стержня  $AB$  можно разложить на два простых движения: поступательное движение вдоль  $AB$  и вращение стержня вокруг шарнира  $M$ . Соответственно скорость любой точки стержня складывается из двух составляющих: одной, направленной вдоль стержня, и второй, вращательной скорости, перпендикулярной к стержню  $AB$ ; величина вращательной скорости пропорциональна расстоянию от точки до шарнира  $M$ . Следовательно, для точки стержня, которая в данный момент совпадает с шарниром  $M$ , вращательная составляющая скорости равна нулю и ее скорость направлена вдоль стержня  $AB$ . Аналогично приходим к выводу, что скорость точки стержня  $AE$ , совпадающей в данный момент с точкой  $N$ , направлена вдоль стержня  $AE$ .

Восставим перпендикуляры к направлениям скоростей точек стержня, совпадающих с  $M$  и  $N$ . Точка пересечения этих перпендикуляров  $P$  лежит на окружности  $AMN$  и является мгновенным центром скоростей прямого угла  $BAE$ . Точка  $P$  лежит на окружности, так как она является вершиной прямого угла  $MPN$ , опиравшегося на диаметр окружности. Значение модуля скорости точки  $A$ , как принадлежащей кривошипу  $OA$ , равно

$$v_A = OA \cdot \dot{\varphi}_1 = rk. \quad (1)$$

Величина скорости этой же точки  $A$ , как принадлежащей прямому углу  $BAE$ , равна произведению мгновенной угловой скорости этого угла на мгновенный радиус  $AP$ :

$$v_A = AP \cdot \omega_{\text{мг}} = 2r\omega_{\text{мг}}. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) находится величина мгновенной угловой скорости плоской фигуры  $ABE$ :

$$\omega_{\text{мг}} = \frac{k}{2} = \text{const.}$$

Скорость точки стержня  $AB$ , совпадающей с шарниром  $M$ , равна по величине произведению мгновенной угловой скорости на мгновенный радиус  $MP$ :

$$v_1 = MP \cdot \omega_{\text{мг}} = 2r \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{k}{2} = rk \sin \frac{\varphi}{2}$$

(в равнобедренном треугольнике  $AOM$  углы при основании  $AM$  равны  $\varphi/2$ , так как их сумма должна быть равна внешнему углу  $\varphi$ ).

Скорость точки стержня  $AE$ , совпадающей с шарниром  $N$ , равна

$$v_2 = NP \cdot \omega_{\text{мг}} = 2r \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{k}{2} = rk \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Направление скорости точки  $A$  и точек, проходящих в данный момент через  $M$  и  $N$ , показаны на рис. б.

**Задача 6.12.** Шарнирный четырехзвеновик (рис. а) состоит из неподвижного звена  $AB = l$ , кривошипов  $AD = a$ ,  $BE = b$  и стержня  $DE = d$ , соединенных шарнирно. Кривошип  $BE$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . При этом точка  $D$  движется по дуге окружности между двумя крайними положениями (рис. в и г).

Определить углы  $\alpha_{01}$ ,  $\alpha_{02}$ ,  $\varphi_{01}$ ,  $\varphi_{02}$ , которые образуют кривошипы с прямой  $AB$  в крайних положениях. Найти угловую скорость кривошипа  $AD$ .

**Решение.** В первом положении углы  $\varphi_{01}$  и  $\alpha_{01}$  определяются из уравнений (см. рис. в):

$$(d + b) \cos \varphi_{01} = -a \cos \alpha_{01} - l,$$

$$(d - b) \sin \varphi_{01} = a \sin \alpha_{01},$$

которые получаются проектированием сторон треугольника  $ABD$  на горизонталь и вертикаль. Из этих уравнений находим:

$$\cos \varphi_{01} = \frac{(d + b)^2 - a^2 + l^2}{2l(d + b)},$$

$$\cos \alpha_{01} = \frac{(d + b)^2 - a^2 - l^2}{2la}.$$

Во втором положении углы  $\varphi_{02}$  и  $\alpha_{02}$  определяются аналогично из системы уравнений (см. рис. г):

$$-(d - b) \cos \varphi_{02} = l - a \cos \alpha_{02},$$

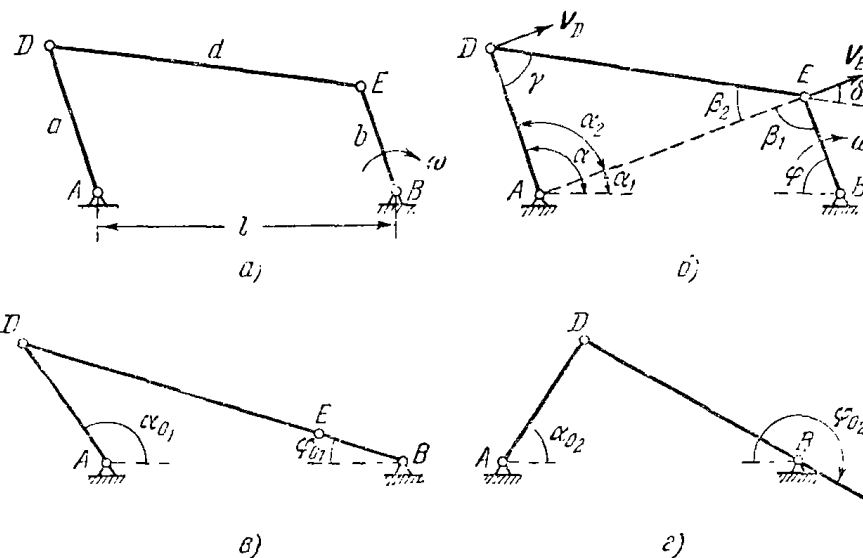
$$-(d - b) \sin \varphi_{02} = a \sin \alpha_{02},$$

откуда получаем:

$$\cos \varphi_{02} = -\frac{l^2 + (d - b)^2 - a^2}{2l(d - b)},$$

$$\cos \alpha_{02} = \frac{l^2 - (d - b)^2 + a^2}{2la}.$$

Переходим, далее, к определению угловой скорости кривошипа  $AD$



К задаче 6.12.

(рис. б). Проведем прямую  $AE$ , обозначив ее длину через  $k$ . Прямая  $AE$  делит угол  $\alpha$  на составляющие

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Эта же прямая образует угол  $\beta_1$  с кривошипом  $BE$  и угол  $\beta_2$  со звеном  $DE$ . Обозначим через  $\gamma$  угол  $ADE$  и буквой  $\delta$  угол между направлением скорости точки  $E$  и продолжением прямой  $DE$ .

Тогда скорости точек  $D$  и  $E$  будут:

$$\begin{aligned} V_D &= \omega_1 a, \\ V_E &= \omega b, \end{aligned}$$

где  $\omega_1$  — искомая угловая скорость кривошипа  $AD$ . Спроектируем скорости точек  $D$  и  $E$  на направление прямой  $DE$  и приравняем эти проекции

$$\omega_1 a \sin \gamma = \omega b \cos \delta,$$

откуда искомая угловая скорость будет:

$$\omega_1 = \frac{b \cos \delta}{a \sin \gamma} \omega. \quad (1)$$

Для нахождения углов  $\delta$  и  $\gamma$ , входящих в уравнение (1), воспользуемся, прежде всего, теоремой косинусов для треугольника  $ABE$ :

$$k = \sqrt{l^2 + b^2 - 2lb \cos \varphi}. \quad (2)$$

Зная величину  $k$ , находим, пользуясь теоремой косинусов, из треугольника  $ADE$

$$\cos \beta_2 = \frac{k^2 + l^2 - a^2}{2kl}. \quad (3)$$

Далее, по теореме синусов для треугольника  $ABE$  имеем:

$$\frac{\sin \beta_1}{l} = \frac{\sin \alpha_1}{b} = \frac{\sin \varphi}{k},$$

откуда

$$\sin \beta_1 = \frac{l}{k} \sin \varphi. \quad (4)$$

Теорема синусов для треугольника  $ADI$  приводит к равенству

$$\frac{\sin \gamma}{k} = \frac{\sin \beta_2}{a},$$

откуда

$$\sin \gamma = \frac{k}{a} \sin \beta_2. \quad (5)$$

Далее, находим

$$\delta = \beta_1 + \beta_2 - 90^\circ$$

и, следовательно,

$$\cos \delta = \sin (\beta_1 + \beta_2). \quad (6)$$

Внося значения (6) и (5) в уравнение (1), получим:

$$\omega_1 = \frac{bk \sin (\beta_1 + \beta_2)}{a^2 \sin \beta_2} \omega.$$

Зависимость углов  $\beta_1$  и  $\beta_2$  от угла  $\varphi$  определяется ранее полученными равенствами (2), (3) и (4).

Для приобретения навыков в решении задач на определение скоростей точек плоской фигуры рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 502, 503, 504, 508, 510, 511, 513, 517, 521, 530, 539.

### § 3. Подвижная и неподвижная центры

Геометрическое место мгновенных центров скоростей плоской фигуры, отмеченных на неподвижной плоскости, называется *неподвижной центроидой*.

Геометрическое место мгновенных центров скоростей плоской фигуры, отмеченных на движущемся теле, называется *подвижной центроидой*.

При плоском движении твердого тела подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной. Точка соприкосновения подвижной и неподвижной центроид является в данный момент мгновенным центром скоростей. Центроиды можно определить геометрическим построением или аналитически.

Геометрический способ нахождения подвижной и неподвижной центроид заключается в следующем. Для произвольного положения плоской фигуры или механизма построением находится мгновенный центр скоростей. Далее, из построения определяется геометрическое место мгновенных центров при заданном движении плоской фигуры как по отношению к неподвижной системе координат, так и по отношению к осям, жестко связанным с движущейся фигурой.

Аналитическое определение подвижной и неподвижной центроид производится при помощи формул, дающих значение координат мгновенного центра скоростей. Координаты мгновенного центра скоростей в неподвижной системе осей выражаются так:

$$x_P = x_O - \frac{y_O}{\omega_2}, \quad (1^*)$$

$$y_P = y_O + \frac{x_O}{\omega_2}. \quad (2^*)$$

Координаты мгновенного центра скоростей в системе координат, жестко связанных с плоской фигурой, определяются формулами:

$$x_{1P} = \frac{x_O \sin \varphi - y_O \cos \varphi}{\omega_2}, \quad (3^*)$$

$$y_{1P} = \frac{x_O \cos \varphi + y_O \sin \varphi}{\omega_2}. \quad (4^*)$$

В этих формулах:  $x_O, y_O$  — координаты полюса, начала подвижной системы координат;  $\dot{x}_O, \dot{y}_O$  — проекции скорости полюса на непод-



вижные оси;  $\varphi$  — угол поворота подвижной системы координат по отношению к неподвижной;  $\omega_z$  — проекция угловой скорости плоской фигуры на ось  $z$ , перпендикулярную к плоскости, в которой происходит движение.

Переменные, находящиеся в правой части этих формул, являются явными функциями времени или выражаются через параметры, зависящие от времени. Решая совместно уравнения (1\*), (2\*) и исключая время, находим уравнение неподвижной centroиды. Решая систему уравнений (3\*), (4\*), исключая время, определяем зависимость между координатами  $x_{1P}$  и  $y_{1P}$ , т. е. уравнение подвижной centroиды в явной форме.

В некоторых задачах для нахождения уравнений неподвижной и подвижной centroид удобнее пользоваться полярной системой координат.

При решении задач на определение подвижной и неподвижной centroид рекомендуется такая последовательность действий:

- 1) выделить плоскую фигуру, для которой требуется найти подвижную и неподвижную centroиды;
- 2) выбрать две системы координат, неподвижную и подвижную, жестко связанную с движущейся плоской фигурой;
- 3) найти построением или с помощью формул (1\*), (2\*) мгновенный центр скоростей для произвольного положения плоской фигуры;
- 4) составить зависимость координат мгновенного центра скоростей в неподвижной системе осей от какого-либо переменного параметра движения;

5) решив совместно уравнения для координат мгновенного центра, исключить переменный параметр и найти уравнение неподвижной centroиды в явном виде;

6) пользуясь формулами (3\*), (4\*) или геометрическим построением мгновенного центра скоростей, составить зависимость координат мгновенного центра скоростей в подвижной системе координат от какого-либо переменного параметра движения;

7) решив совместно эти уравнения и исключив переменный параметр, определить уравнение подвижной centroиды в явном виде.

**Задача 6.13.** Кривошипно-шатунный механизм (рис. а) состоит из кривошипа  $OA = r$ , вращающегося вокруг неподвижной точки  $O$ , шатуна  $AB = l$  и ползуна  $B$ , перемещающегося по горизонтальной прямой  $Ox$ . Угол поворота кривошипа  $\varphi = kt$ , где  $k$  — постоянный коэффициент.

Найти уравнение неподвижной и подвижной centroид шатуна  $AB$  в параметрическом виде.

**Решение.** Выбираем неподвижную систему координат  $xu$  с началом в точке  $O$  и подвижную систему осей  $x_1y_1$  с началом в точке  $A$ , принадлежащей шатуну, причем ось  $x_1$  направляем вдоль шатуна  $AB$  (рис. б).

Находим координаты точки  $A$ :

$$x_A = r \cos \varphi = r \cos kt,$$

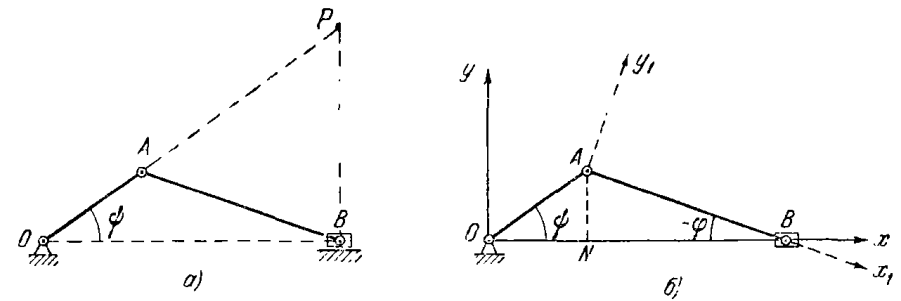
$$y_A = r \sin \varphi = r \sin kt.$$

Вычисляя производные от координат точки  $A$ , определяем проекции ее скорости на неподвижные оси координат:

$$\dot{x}_A = -rk \sin kt,$$

$$\dot{y}_A = rk \cos kt.$$

Для нахождения мгновенной угловой скорости шатуна выразим ординату точки  $A$  через угол поворота шатуна  $\varphi$  (угол  $\varphi$  взят со



К задаче 6.13.

знаком минус, так как он отсчитывается от оси  $x$  по часовой стрелке):

$$y_A = r \sin kt = -l \sin \varphi.$$

Вычисляя от обеих частей этой формулы производные по времени, получим:

$$rk \cos kt = -l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi},$$

откуда

$$\dot{\varphi} = -\frac{r}{l} k \frac{\cos kt}{\cos \varphi}. \quad (1)$$

Опуская из  $A$  перпендикуляр  $AN$  на прямую  $OB$ , находим из треугольника  $NAB$

$$\cos \varphi = \frac{NB}{AB} = \frac{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 kt}}{l}.$$

Внося это значение в уравнение (1), получаем:

$$\omega_z = \dot{\varphi} = -rk \frac{\cos kt}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 kt}}.$$

Теперь, пользуясь равенствами (1\*), (2\*), находим уравнение неподвижной центроиды в параметрической форме:

$$x_P = x_A - \frac{\dot{y}_A}{\omega_z} = r \cos kt + \sqrt{l^2 - r^2} \sin^2 kt, \quad (2)$$

$$y_P = y_A + \frac{\dot{x}_A}{\omega_z} = r \sin kt - \operatorname{tg} kt \sqrt{l^2 - r^2} \sin^2 kt. \quad (3)$$

Если построить мгновенный центр скоростей  $P$  стержня  $AB$  (рис. а), находящийся на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям точек  $A$  и  $B$ , то уравнения неподвижной центроиды (2) и (3) могут быть получены и непосредственно из треугольника  $OPB$ .

При  $r = l$  уравнения неподвижной центроиды упрощаются:

$$x_P = 2r \cos kt,$$

$$y_P = 2r \sin kt.$$

Исключая время, найдем:

$$x_P^2 + y_P^2 = 4r^2,$$

т. е. неподвижная центроида представляет собой окружность с центром в точке  $O$  и радиуса  $2r$ .

Переходим к определению уравнения подвижной центроиды. Из уравнений (3\*) и (4\*) для нашей задачи имеем:

$$x_{1P} = \frac{-rk \sin kt \cdot \frac{r}{l} \sin kt + rk \cos kt \cdot \frac{\sqrt{l^2 - r^2} \sin^2 kt}{l}}{rk \cos kt} \sqrt{l^2 - r^2} \sin^2 kt,$$

$$y_{1P} = \frac{rk \sin kt \cdot \frac{\sqrt{l^2 - r^2} \sin^2 kt}{l} - rk \cos kt \cdot \frac{r}{l} \sin kt}{rk \cos kt} \sqrt{l^2 - r^2} \sin^2 kt,$$

или, после несложных упрощений,

$$x_{1P} = l - \frac{r}{l} \sin^2 kt \left( r + \frac{\sqrt{l^2 - r^2} \sin^2 kt}{\cos kt} \right),$$

$$y_{1P} = \operatorname{tg} kt \left( l - \frac{r^2}{l} \sin^2 kt \right) + \frac{r}{l} \sin kt \sqrt{l^2 - r^2} \sin^2 kt.$$

Эти равенства и являются уравнениями подвижной центроиды в параметрическом виде.

При  $r = l$  уравнения подвижной центроиды упрощаются:

$$x_{1P} = r(1 - 2 \sin^2 kt) = r \cos 2kt,$$

$$y_{1P} = 2r \sin kt \cos kt = r \sin 2kt,$$

или, исключая время,

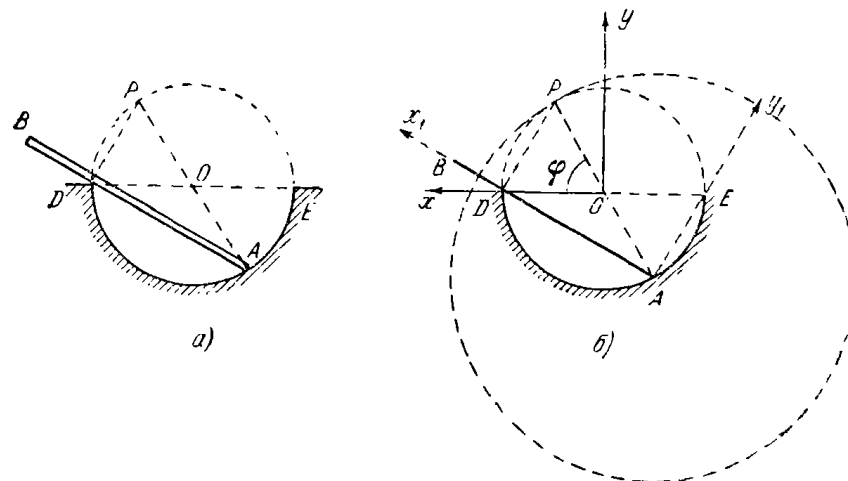
$$x_{1P}^2 + y_{1P}^2 = r^2.$$

Следовательно, неподвижная центроида представляет окружность с центром в точке  $A$  и радиуса  $r$ .

**Задача 6.14.** Стержень  $AB$  движется в плоскости чертежа так, что его конец  $A$  непрерывно скользит по полуокружности  $EAD$ , а сам стержень все время проходит через неподвижную точку  $D$  диаметра  $ED$ .

Определить неподвижную и подвижную центроиды стержня  $AB$  (рис. а).

Решение. Скорость точки  $A$ , описывающей дугу окружности, направлена по касательной к данной окружности. Мгновенный центр скоростей стержня  $AB$  лежит на перпендикуляре, восстановленном



К задаче 6.14.

в точке  $A$  к направлению ее скорости, т. е. на радиусе  $OA$  или его продолжении. Так как стержень  $AB$  скользит по углу  $D$ , не отрываясь от него, то скорость точки стержня, совпадающей в данный момент с точкой  $D$ , направлена вдоль стержня. Восстанавливая перпендикуляр к стержню в точке  $D$ , находим мгновенный центр скоростей стержня  $AB$  в пересечении перпендикуляров к скоростям точек  $A$  и  $D$ , т. е. в точке  $P$ . Эта точка лежит на окружности  $EAD$ , так как прямой угол  $ADP$  опирается на диаметр окружности  $AP$ . Следовательно, мгновенный центр скоростей  $P$  при движении стержня  $AB$  перемещается по окружности  $PDAE$ .

Геометрическое место мгновенных центров, отмеченных в неподвижном пространстве, таким образом, есть окружность с центром  $O$  и радиуса  $OA$ . Это — неподвижная центроида стержня.

Подвижная центроида является геометрическим местом мгновенных центров, отмеченных на движущейся плоской фигуре. Точка  $P$  находится от точки стержня  $A$  на постоянном расстоянии  $AP = 2 \cdot OA$ ,

следовательно, точка  $P$  описывает вокруг движущейся точки  $A$  окружность радиуса вдвое большего, чем радиус полуокружности  $EAD$ . Это — подвижная центроида стержня.

Найдем уравнения центроид  $C$  этой целью выбираем две системы координат: неподвижные оси с началом в точке  $O$ , ось  $x$  направляем влево по диаметру  $AB$ , ось  $y$  — вертикально вверх, и подвижную систему координат с началом в точке  $A$ , ось  $x_1$  направляем по стержню  $AB$ , ось  $y_1$  — перпендикулярно к стержню по прямой  $AE$  (рис. 6). Тогда уравнение неподвижной центроиды будет:

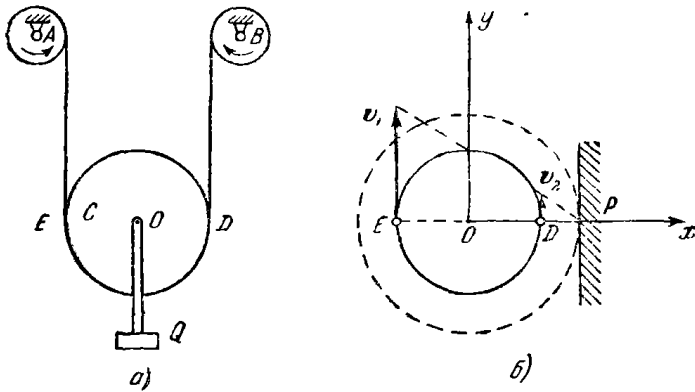
$$x_P^2 + y_P^2 = r^2,$$

а уравнение подвижной центроиды

$$x_{1P}^2 + y_{1P}^2 = 4r^2.$$

**Задача 6.15.** Груз  $Q$  подвешен на блоке  $C$  с подвижной осью  $O$  (рис. а). Груз поднимается при помощи троса, перекинутого через два блока,  $A$  и  $B$ , с неподвижными осями. Радиусы неподвижных блоков одинаковы и равны  $r = 20$  см. Блок  $A$  делает  $n_1 = 60$  об/мин, блок  $B$  делает  $n_2 = 15$  об/мин. Диаметр блока  $O$  равен  $d = 75$  см.

Определить подвижную и неподвижную центроиды блока  $C$ .



К задаче 6.15.

**Решение.** Найдем скорость  $v_1$ , с которой движутся точки обода блока  $A$  и точки троса, расположенные на вертикали, являющейся касательной к блоку  $A$ . Величина искомой скорости

$$v_1 = r\omega_1 = 20 \cdot 60 \cdot \frac{2\pi}{60} = 40\pi \text{ см/сек.}$$

Величина скорости  $v_2$ , с которой движутся точки обода блока  $B$  и точки троса, расположенные на вертикали, касательной к блоку  $B$ ,

$$v_2 = r\omega_2 = 20 \cdot 15 \cdot \frac{2\pi}{60} = 10\pi \text{ см/сек.}$$

Эти скорости являются скоростями точек  $E$ ,  $D$  блока  $C$ , где трос сходит по касательной с обода (рис. б). Таким образом, известны скорости двух точек плоской фигуры,  $E$  и  $D$ . Эти скорости параллельны между собой и перпендикулярны к линии  $ED$ , соединяющей обе точки. Мгновенный центр скоростей блока должен находиться на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям  $E$  и  $D$ . В данном случае эти перпендикуляры совпадают. Положение мгновенного центра тем не менее может быть определено, так как скорости точек  $E$  и  $D$  известны по величине. Эти скорости пропорциональны расстояниям точек  $E$  и  $D$  до мгновенного центра скоростей. Следовательно, обозначив неизвестное расстояние от точки  $D$  до мгновенного центра скоростей  $P$  через  $l$  (рис. б), получим:

$$v_1 = (d + l)\omega, \quad v_2 = l\omega.$$

Решая совместно эти два уравнения, находим, что

$$l = \frac{dv_2}{v_1 - v_2} = 25 \text{ см.} \quad (1)$$

Положение мгновенного центра скоростей  $P$  можно определить и другим способом, путем геометрического построения. Для этого необходимо, отложив в избранном масштабе скорости  $v_1$  и  $v_2$ , соединить их концы прямыми. Эти прямые пересекаются в точке  $P$  — мгновенном центре скоростей. Из подобия треугольников, образованных скоростями  $v_2$ ,  $v_1$  и этими прямыми, следует, что

$$\frac{DP}{EP} = \frac{v_2}{v_1}, \quad \text{или} \quad \frac{l}{d + l} = \frac{v_2}{v_1},$$

что совпадает с (1).

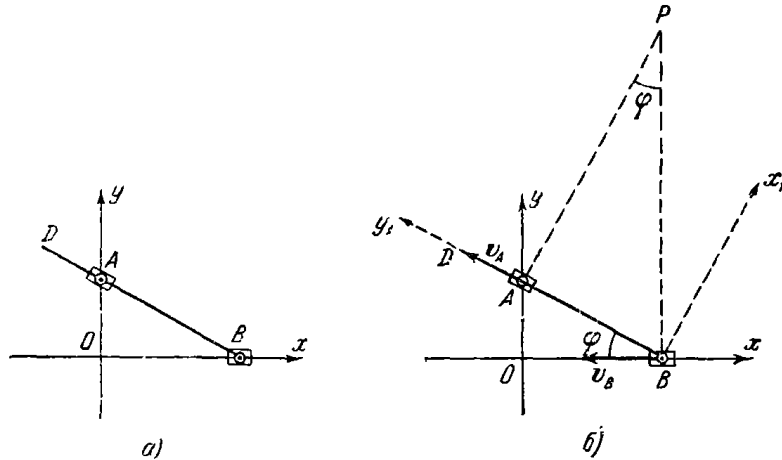
После того как определено место мгновенного центра скоростей для произвольного положения блока, находим неподвижную и подвижную центроиды. Выбираем неподвижные оси координат: ось  $x$  направим по горизонтали вправо, ось  $y$  направим по вертикали вверх, вдоль прямой, по которой перемещается ось подвижного блока. При подъеме груза мгновенный центр скоростей  $P$  будет перемещаться в неподвижном пространстве по прямой, параллельной оси ординат, отстоящей от последней на расстоянии  $l + \frac{d}{2}$ . Эта прямая и является неподвижной центроидой.

Для нахождения подвижной центроиды увеличим мысленно размеры блока, описав окружность радиуса  $l + \frac{d}{2}$  с центром  $O$ . Все точки, лежащие на обode блока радиуса  $l + \frac{d}{2}$ , с течением времени будут становиться мгновенными центрами скоростей. Следовательно, окружность радиуса  $l + \frac{d}{2}$  с центром  $O$  и будет подвижной центро-

идей — геометрическим местом мгновенных центров, отмеченных на движущейся плоской фигуре.

Движение блока  $O$  можно рассматривать как качение без скольжения подвижной центроиды, окружности радиуса  $l + \frac{d}{2}$ , по неподвижной центроиде, вертикали, проходящей через точку  $P$ .

**Задача 6.16.** Концы стержня  $BD$  шарнирно прикреплены к ползуну  $B$ , передвигающемуся по горизонтальным направляющим. Стержень проходит непрерывно через цилиндрический шарнир  $A$ , который



К задаче 6.16.

может вращаться вокруг оси, перпендикулярной к плоскости рисунка. Расстояние  $OA = a$  (рис. а).

Найти уравнения неподвижной и подвижной центроид стержня.

**Примечание.** Механизм, рассмотренный в этой задаче, называется конхоидографом. Он вычерчивает конхоиду прямой линии, т. е. геометрическое место радиусов-векторов прямой линии, увеличенных или уменьшенных на один и тот же отрезок.

**Решение.** Выбираем неподвижную систему координат с центром в точке  $O$ . Ось  $x$  направляем по горизонтали вправо. Она совпадает с направлением движения ползуна  $B$ . Ось  $y$  проводим по вертикали вверх (рис. б).

При произвольном положении стержня  $BD$ , определяемом углом  $\varphi$  (рис. б), находим построением точку  $P$  — мгновенный центр скоростей. Для этого восставим перпендикуляр к направлению скорости точки  $B$ . Точка  $B$  движется прямолинейно по оси  $x$ , следовательно, и ее скорость направлена по этой оси. Перпендикуляр  $BP$  параллелен оси  $y$ . Вторая точка стержня, направление скорости которой известно, — это та точка, которая в данный момент проходит через цилиндрический шарнир  $A$ . Скорость точки стержня, проходящей через

неподвижную точку  $A$ , направлена вдоль стержня (рис. б). Восставим к ней перпендикуляр. Точка  $P$ , находящаяся на пересечении этих перпендикуляров, и является мгновенным центром скоростей.

Для определения неподвижной центроиды, геометрического места мгновенных центров, отмеченных в неподвижной плоскости, найдем координаты точки  $P$ :

$$x_P = \frac{a}{\operatorname{tg} \varphi}, \quad (1)$$

$$y_P = \frac{AB}{\sin \varphi} = \frac{AO}{\sin^2 \varphi} = \frac{a}{\sin^2 \varphi}, \quad (2)$$

так как угол  $APB = \varphi$ . Решим совместно эту систему, исключив угол  $\varphi$ . Из первого уравнения

$$x_P^2 = a^2 \frac{1 - \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi},$$

из второго уравнения

$$\sin^2 \varphi = \frac{a}{y_P}$$

и, следовательно,

$$x_P^2 = a(y_P - a).$$

Это и есть уравнение неподвижной центроиды. Неподвижная центроида — парабола с осью, параллельной оси  $y$ .

Переходим к определению уравнения подвижной центроиды. Подвижную систему координат, жестко связавшую со стержнем  $BD$ , выберем с началом в точке  $B$ . Ось  $y_1$  направляем по стержню  $BD$ , ось  $x_1$  — перпендикулярно к стержню (рис. б).

Находим координаты мгновенного центра скоростей в подвижной системе координат:

$$x_1 = BP \cdot \cos \varphi = \frac{a}{\sin^2 \varphi} \cos \varphi, \quad (3)$$

$$y_1 = AB = \frac{a}{\sin \varphi}. \quad (4)$$

Из уравнения (4) находим  $\sin \varphi = \frac{a}{y_1}$  и вносим это значение угла в равенство (3). Получаем:

$$x_1 = \frac{ay_1^2}{a^2} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{y_1^2}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{y_1^2}},$$

откуда находим уравнение подвижной центроиды

$$a^2 x_1^2 = y_1^2 (y_1^2 - a^2).$$

При решении этой задачи координаты мгновенного центра скоростей в неподвижной и подвижной системах осей выражались через параметр  $\varphi$ . Этот угол при движении стержня  $BD$  является функцией

времени. Из условий задачи нельзя найти зависимость угла  $\varphi$  от времени, так как неизвестна величина скорости точки  $B$  или какой-либо другой точки стержня  $BD$ . Однако в этом и нет необходимости. Какова бы ни была зависимость угла  $\varphi$  от времени, это не может повлиять на вид уравнений подвижной и неподвижной центроид, так как они находятся путем исключения из системы уравнений параметра  $\varphi$ .

**Задача 6.17.** В шарнирном четырехугольнике  $ABCD$  стороны парно равны:  $AB = AD = a$ ,  $BC = DC = b$ . Стержень  $AD$  закреплен неподвижно.

Определить уравнение подвижной и неподвижной центроид стержня  $BC$ , если кривошип  $AB$  вращается вокруг неподвижной точки  $A$  (рис. а).

Решение. Определим положение мгновенного центра скоростей стержня  $BC$ . Скорость точки  $B$  перпендикулярна к  $AB$ . Скорость точки  $C$  перпендикулярна к  $DC$ . Следовательно, мгновенный центр скоростей стержня  $BC$  лежит на пересечении продолжений сторон  $AB$  и  $DC$  в точке  $P$  (рис. б).

Уравнение неподвижной и подвижной центроид будем искать в полярной системе координат. Для определения неподвижной центроиды выберем неподвижную точку  $A$  за полюс и обозначим расстояние  $AP$  от полюса до мгновенного центра скоростей через  $r$ , а угол  $DAP$ , образованный радиусом-вектором  $AP$  с неподвижной стороной  $AD$ , через  $\varphi$ . Обозначим, кроме того, угол  $BDC$  через  $2\alpha$  и расстояние  $DP$  через  $y$ . Тогда в треугольнике  $ACP$  угол  $ACP$  равен  $\alpha$ , а

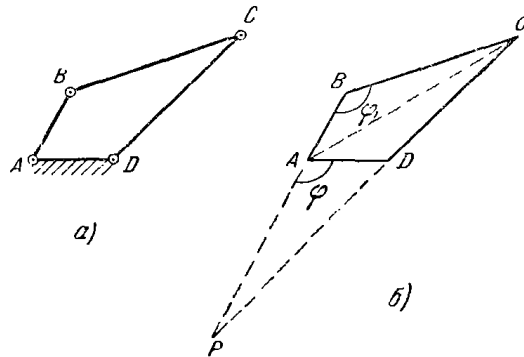
$$\angle CAP = \varphi + \frac{180^\circ - \varphi}{2} = 90^\circ + \frac{\varphi}{2}.$$

По теореме синусов имеем из треугольника  $APC$

$$\frac{y + b}{r} = \frac{\sin\left(90^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin \alpha} = \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \alpha}. \quad (1)$$

Из треугольника  $ABC$  на основании той же теоремы следует, что

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\left(90^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin \alpha} = \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \alpha}, \quad (2)$$



К задачам 6.17 и 6.18.

так как угол  $BAC$  равен углу  $CAD$ . Сопоставляя равенства (1) и (2), получим:

$$\frac{y + b}{r} = \frac{b}{a},$$

или

$$y = \frac{b}{a}(r - a); \quad (3)$$

с другой стороны, из треугольника  $APD$  на основании теоремы косинусов находим, что

$$y^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi. \quad (4)$$

Возведем равенство (3) в квадрат и подставим это значение в уравнение (4); тогда получим:

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{a^2}(r - a)^2 &= r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi = r^2 + a^2 - 2ar \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) = \\ &= r^2 + a^2 - 2ar \left(1 - 2\sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) = (r - a)^2 + 4ar \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Собирая члены, содержащие радиус-вектор  $r$ , в левую часть, имеем:

$$\frac{(r - a)^2}{r} = \frac{4a^3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{b^2 - a^2}.$$

Это и есть уравнение неподвижной центроиды в полярной системе координат.

Для определения уравнения подвижной центроиды стержня  $BC$  в полярной системе координат выберем за полюс точку  $B$  стержня  $BC$ . Радиус-вектор мгновенного центра скоростей обозначим через  $r_1 = r - a$ , угол поворота радиуса-вектора ( $\angle CBP = \varphi_1$ ) будем отсчитывать от прямой  $BC$ .

Тогда, прибавляя к обеим частям равенства (3) по  $b$  и заменяя  $r$  через  $r_1 + a$ , получим:

$$y + b = \frac{b}{a}(r - a) + b = \frac{b}{a}(r_1 - 2a) + b = \frac{b}{a}(r_1 - a). \quad (5)$$

С другой стороны, из треугольника  $PBC$  находим:

$$(y + b)^2 = r_1^2 + b^2 - 2br_1 \cos \varphi_1. \quad (6)$$

Возводим равенство (5) в квадрат и подставляем значение  $(y + b)^2$  в уравнение (6). Имеем:

$$\frac{b^2}{a^2}(r_1 - a)^2 = r_1^2 + b^2 - 2r_1 b \cos \varphi_1,$$

или, после несложных преобразований,

$$r_1 = \frac{2ab(b - a \cos \varphi_1)}{b^2 - a^2}.$$

Это и есть уравнение подвижной центроиды в полярной системе координат, центр которой совпадает с движущейся точкой  $B$ , а угол поворота радиуса-вектора отсчитывается от движущейся прямой  $BC$ .

**Задача 6.18.** В шарнирном четырехугольнике предыдущей задачи, стороны которого попарно равны, угловая скорость кривошипа  $AB$  равна  $\omega_0$ .

Определить угловую скорость кривошипа  $DC$  и скорость точки  $C$  в тот момент, когда все четыре стержня вытянутся в одну прямую.

Решение. В предыдущей задаче было получено уравнение подвижной центроиды стержня  $BC$

$$r_1 = \frac{2ab}{b^2 - a^2} (b - a \cos \varphi_1),$$

где  $r_1 = BO$  — расстояние от точки  $B$  до мгновенного центра скоростей.

Когда все стержни вытянутся в одну прямую, угол  $\varphi_1$  принимает значение  $\pi$  и расстояние от точки  $B$  до мгновенного центра скоростей в этот момент станет равным

$$r_1 = \frac{2ab}{b - a}.$$

Расстояние от мгновенного центра скоростей до точки  $C$

$$r_2 = r_1 + b = b \frac{b + a}{b - a}.$$

Величина скорости точки  $B$ , как принадлежащей кривошипу  $AB$ , равна

$$v_B = a\omega_0.$$

Эта же скорость точки  $B$ , как принадлежащей стержню  $BC$ , равна

$$v_B = r_1 \omega_{\text{мг}}.$$

Приравняв эти значения скорости точки  $B$ , находим мгновенную угловую скорость стержня  $BC$

$$\omega_{\text{мг}} = \frac{a\omega_0}{r_1} = \frac{\omega_0 (b - a)}{2b}.$$

Находим теперь модуль скорости точки  $C$  как произведение мгновенной угловой скорости стержня  $BC$  на мгновенный радиус

$$v_C = r_2 \omega_{\text{мг}} = b \frac{b + a}{b - a} \cdot \frac{\omega_0 (b - a)}{2b} = \frac{\omega_0}{2} (b + a).$$

Величина угловой скорости кривошипа  $DC$  равна отношению скорости точки  $C$  к длине кривошипа  $b$

$$\omega_{CD} = \frac{v_C}{CD} = \frac{\omega_0 (b + a)}{2b}.$$

По направлению угловая скорость  $\omega_{CD}$  совпадает с  $\omega_0$ .

Для приобретения навыков в решении задач на определенне центроид плоской фигуры рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 543, 546, 548, 550, 552, 553.

#### § 4. Ускорения точек плоской фигуры

Ускорения точек плоской фигуры могут быть определены аналитическими, графоаналитическими и графическими методами. В этом параграфе рассматриваются аналитические и графоаналитические способы определения ускорения точек плоской фигуры. Графический метод нахождения ускорений точек плоской фигуры, заключающийся в построении плана ускорений, будет рассмотрен отдельно.

Аналитический метод. Проекции ускорения любой точки плоской фигуры на неподвижные декартовы оси координат выражаются уравнениями:

$$w_x = w_{O_1x} - \varepsilon_z (y - y_{O_1}) - \omega_z^2 (x - x_{O_1}), \quad (1^*)$$

$$w_y = w_{O_1y} + \varepsilon_z (x - x_{O_1}) - \omega_z^2 (y - y_{O_1}). \quad (2^*)$$

В этих формулах  $w_x, w_y$  — искомые проекции ускорения точки  $M$  на неподвижные оси координат  $x, y$ ;  $w_{O_1x} = \ddot{x}_{O_1}, w_{O_1y} = \ddot{y}_{O_1}$  — проекции ускорения полюса (начала неподвижной системы координат) на неподвижные оси координат;  $\omega_z = \dot{\varphi}$  и  $\varepsilon_z = \ddot{\varphi}$  — проекции угловой скорости и углового ускорения на ось  $z$ , перпендикулярную к плоскости движения;  $x, y$  — координаты точки  $M$ ;  $x_{O_1}, y_{O_1}$  — координаты полюса  $O_1$  в неподвижной системе осей (рис. 6.12). Все величины правой части уравнений (1\*) и (2\*) легко находятся, если заданы уравнения движения плоской фигуры.

Проекция ускорения точки  $M$  на подвижные оси координат определяются формулами:

$$w_{x_1} = w_{O_1x_1} - \varepsilon_z y_1 - \omega_z^2 x_1, \quad (3^*)$$

$$w_{y_1} = w_{O_1y_1} + \varepsilon_z x_1 - \omega_z^2 y_1. \quad (4^*)$$

В этих уравнениях  $w_{x_1}, w_{y_1}$  — проекции ускорения точки  $M$  на подвижные оси  $x_1, y_1$ ;  $w_{O_1x_1}, w_{O_1y_1}$  — проекции ускорения полюса  $O_1$  на подвижные оси  $x_1, y_1$ ;  $x_1, y_1$  — координаты точки  $M$  в подвижных осях;  $\omega_z, \varepsilon_z$  — те же, что и в уравнениях (1\*), (2\*).

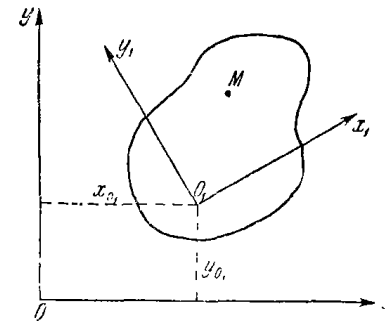


Рис. 6.12.

Величина ускорения точки  $M$  по известным проекциям определяется формулой

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} = \sqrt{\omega_{x_1}^2 + \omega_{y_1}^2}. \quad (5^*)$$

Направляющие косинусы находятся по равенствам:

$$\cos(\widehat{\omega, x}) = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \cos(\widehat{\omega, y}) = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad (6^*)$$

$$\cos(\widehat{\omega, x_1}) = \frac{\omega_{x_1}}{\omega}, \quad \cos(\widehat{\omega, y_1}) = \frac{\omega_{y_1}}{\omega}. \quad (7^*)$$

Графоаналитические методы. Первый графоаналитический способ нахождения ускорений точек плоской фигуры основан на формуле распределения ускорений (рис. 6.13)

$$\omega_M = \omega_O + \omega_{MO}^{np} + \omega_{MO}^t. \quad (8^*)$$

В этой формуле  $\omega_M$  — полное ускорение произвольной точки  $M$  плоской фигуры;  $\omega_O$  — ускорение полюса  $O$ ;  $\omega_{MO}^t$  — центростремительное

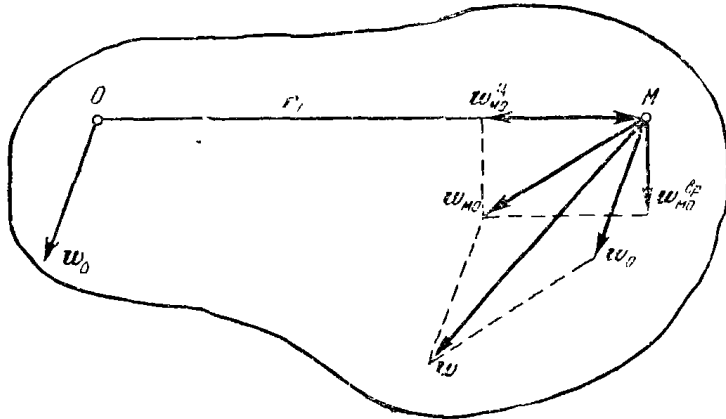


Рис. 6.13.

ускорение при вращении фигуры вокруг полюса, а  $\omega_{MO}^{np}$  — вращательное ускорение вокруг полюса. При этом

$$\omega_{MO}^t = -\omega^2 r_1, \quad \omega_{MO}^t = \omega^2 \cdot OM; \quad (9^*)$$

$$\omega_{MO}^{np} = \varepsilon \times r_1, \quad \omega_{MO}^{np} = \varepsilon \cdot OM, \quad (10^*)$$

где  $r_1$  — радиус-вектор точки  $M$ , проведенный из полюса  $O$ .

Относительное ускорение

$$\omega_{MO} = \omega_{MO}^t + \omega_{MO}^{np}, \quad (11^*)$$

т. е. равно векторной сумме центростремительного и вращательного ускорений. Центростремительное ускорение  $\omega_{MO}^t$  направлено от точки  $M$

к полюсу  $O$ . Вращательное ускорение  $\omega_{MO}^{np}$  направлено перпендикулярно к радиусу-вектору  $r_1$  в сторону вращения плоской фигуры, если вращение ускоренное, и в обратную сторону, если вращение замедленное.

Таким образом, для определения ускорения произвольной точки  $M$  необходимо знать ускорение какой-либо точки плоской фигуры, принимаемой за полюс, мгновенную угловую скорость  $\omega$  плоской фигуры и, наконец,  $\varepsilon$  — ее мгновенное угловое ускорение. Тогда, складывая три вектора  $\omega_O$ ,  $\omega_{MO}^t$ ,  $\omega_{MO}^{np}$  (рис. 6.13), находим искомое ускорение точки  $M$  как сумму этих векторов.

Такой способ решения может быть применен, если угол поворота плоской фигуры  $\varphi$  является известной функцией времени, так как тогда, вычисляя первую и вторую производные от угла поворота по времени, можно определить  $\omega$  и  $\varepsilon$ .

Во многих задачах зависимость угловой скорости от времени неизвестна. Тогда мгновенная угловая скорость  $\omega$  может быть найдена только для данного момента, для данного положения плоской фигуры. В этом случае  $\varepsilon$  — мгновенное угловое ускорение — не может быть найдено непосредственно. Задачи на определение ускорений точек плоской фигуры тем не менее могут быть решены, если известно направление ускорения какой-либо точки плоской фигуры. Проектируя в этом случае равенство (8\*) на направление  $r_1$ , получаем уравнение с одним неизвестным  $\omega_M$  так как  $\omega_{MO}^{np}$  перпендикулярно к  $r_1$  и его проекция на  $r_1$  равна нулю. После того как значение  $\omega_M$  определено из уравнения проекций на  $r_1$ , составляем второе уравнение проекций на направление  $\omega_{MO}^{np}$ , перпендикулярное к  $r_1$ . В этом уравнении единственным неизвестным будет  $\omega_{MO}^{np}$ , после определения которого находится угловое ускорение плоской фигуры  $\varepsilon$  в данный момент. Нахождение ускорений других точек плоской фигуры может далее производиться по формуле (8\*).

Одна из точек плоской фигуры, направление ускорения которой может быть определено, совпадает с мгновенным центром скоростей. Ускорение этой точки является касательным ускорением, так как ее нормальное ускорение  $\omega_n = \frac{v^2}{\rho}$  равно нулю, ибо  $v = 0$ . Это ускорение направлено по общей нормали к неподвижной и подвижной центроидам, так как подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной.

Рассмотрим пример. Пусть изображенное на рис. 6.14 колесо катится без скольжения по рельсу. В этом случае обод колеса является подвижной центроидой, рельс — неподвижной. Ускорение точки колеса  $C$  направлено по нормали к центроидам, т. е. к центру колеса  $O$ . На рисунке показаны отрезки циклоиды, являющиеся траекторией точки  $C$ . Ускорение  $\omega_C$ , естественно, направлено по касатель-

ной к этим кривым. Пользуясь тем, что направление ускорения точки тела, совпадающей в данный момент с мгновенным центром скоростей, известно, можно решать многие задачи.

Не следует смешивать нормальное ускорение точки с центростремительным ускорением вокруг полюса, а касательное ускорение с вращательным ускорением вокруг полюса. Действительно, нормальное ускорение любой точки плоской фигуры не зависит от выбора полюса; оно направлено перпендикулярно к скорости точки, т. е. по мгновенному радиусу к мгновенному центру скоростей. Центростремительное ускорение при вращении фигуры вокруг полюса зависит от выбора полюса и направлено всегда к полюсу. Касательное ускорение направлено по скорости точки или прямо противоположно скорости, т. е. перпендикулярно к мгновенному радиусу, и не зависит также от выбора полюса. Вращательное ускорение вокруг полюса зависит от выбора полюса и направлено перпендикулярно к прямой, соединяющей точку с полюсом.

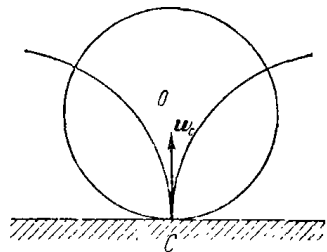


Рис. 6.14.

Если ускорение какой-либо точки находится по формуле распределения ускорений, то для определения нормального ускорения надо спроектировать все составляющие ускорения на направление мгновенного радиуса и вычислить их алгебраическую сумму. Для нахождения касательного ускорения точки следует вычислить алгебраическую сумму проекций составляющих ускорений на направление, перпендикулярное к мгновенному радиусу.

Решение некоторых задач по определению ускорений точек плоской фигуры облегчается тем, что иногда известно нормальное ускорение какой-либо точки плоской фигуры. Тогда задача ставится в таком виде: даны ускорение одной точки плоской фигуры — полюса  $O$ , значение мгновенной угловой скорости фигуры  $\omega$  и, кроме того, нормальное ускорение какой-либо точки  $M$ . Проектируя векторное равенство (8\*) на направление *нормального* ускорения точки  $M$ , получаем уравнение с одним неизвестным  $\omega_{MO}^{np}$ , которое из него и определяется. Зная  $\omega_{MO}^{np}$ , вычисляем мгновенное угловое ускорение  $\epsilon$  и, далее, пользуясь формулой распределения ускорений (8\*), находим ускорение любой точки плоской фигуры.

Одним из графоаналитических методов, нашедшим широкое применение при определении ускорений точек плоской фигуры, является метод, использующий понятие мгновенного центра ускорений.

Мгновенным центром ускорений называется точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент равно нулю. Положение

мгновенного центра ускорений  $Q$  определяется формулами:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\epsilon}{\omega^2}, \tag{12*}$$

$$AQ = \frac{\omega_A}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}}. \tag{13*}$$

Таким образом, откладывая угол  $\alpha$  от ускорения (в сторону мгновенного вращения, если оно ускоренное, и в противоположную сторону,

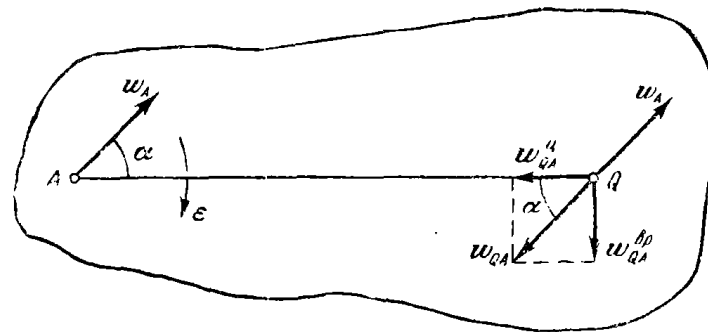


Рис. 6.15.

если оно замедленное), получаем полупрямую, на которой на расстоянии  $AQ$  лежит мгновенный центр ускорений  $Q$  (рис. 6.15). При этом если за полюс принять мгновенный центр ускорений, то ускорение любой точки плоской фигуры находится по формуле

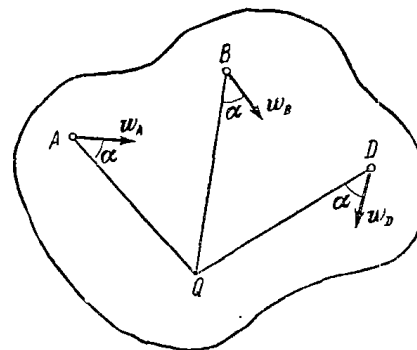


Рис. 6.16.

$$\begin{aligned} \omega_M &= \omega_{MQ}^{np} + \omega_{MQ}^{tp} = \\ &= -\omega^2 r_1 + \epsilon \times r_1. \end{aligned} \tag{14*}$$

Ускорение любой точки составляет с радиусом-вектором, проведенным из мгновенного центра ускорений, один и тот же угол  $\alpha$  (12\*). Модули ускорений точек плоской фигуры пропорциональны расстояниям до мгновенного центра ускорений (рис. 6.16). Величина ускорения определяется формулой

$$\omega_A = AQ \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}. \tag{15*}$$

Положение мгновенного центра ускорений, мгновенная угловая скорость и мгновенное угловое ускорение могут быть найдены, если

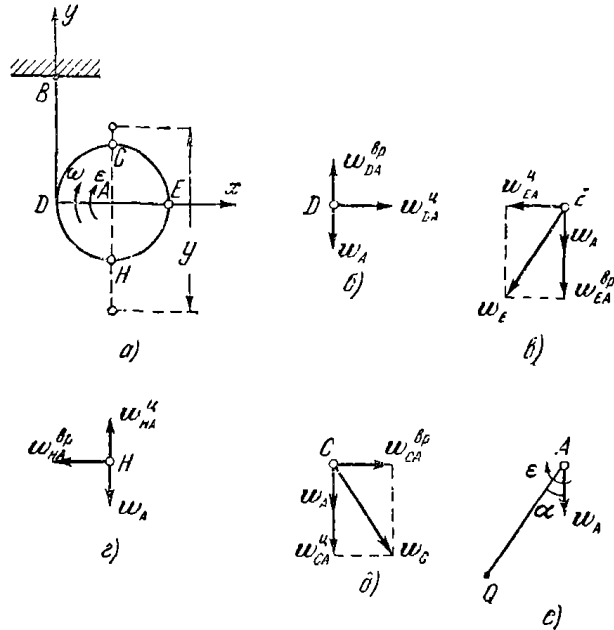




Решение. В задаче 6.7 было получено значение угловой скорости цилиндра

$$\omega_z = \frac{v_A}{r} = \frac{2}{3} \frac{g}{r} t, \quad (1)$$

исходя из того, что мгновенный центр скоростей цилиндра находится в точке  $D$ . Находим, далее, проекцию углового ускорения цилиндра



К задаче 6.19.

как производную от проекции угловой скорости по времени

$$\epsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{2}{3} \frac{g}{r}.$$

Переходим к определению ускорения точки  $A$ . Из формулы (1) имеем:

$$v_A = \frac{2}{3} gt.$$

Точка  $A$  движется прямолинейно по вертикали, следовательно,

$$w_A = \frac{dv_A}{dt},$$

или

$$w_A = \frac{2}{3} g. \quad (2)$$

Таким образом, ускорение точки  $A$  найдено. Это — единственная точка цилиндра, ускорение которой известно, и, следовательно, ее и надо принять за полюс.

Переходим к определению ускорения мгновенного центра скоростей цилиндра — точки  $D$ . Ускорение точки  $D$  складывается геометрически из трех ускорений: ускорения полюса, центростремительного и вращательного ускорения при вращении фигуры вокруг полюса (рис. б):

$$w_D = w_A + w_{DA}^u + w_{DA}^{sp}.$$

Ускорение полюса  $w_A$  направлено по вертикали вниз. Откладываем этот вектор от точки  $D$ . Находим, далее, величину вращательного ускорения точки  $D$  вокруг полюса

$$w_{DA}^{sp} = \epsilon r = \frac{2}{3} g. \quad (3)$$

Дуговые стрелки угловой скорости и углового ускорения цилиндра направлены по часовой стрелке. Это следует из рассмотрения скорости точки  $A$  как вращательной скорости вокруг мгновенного центра скоростей  $D$ . Следовательно, вращательное ускорение направлено от точки  $D$  по вертикали вверх, в сторону, противоположную  $w_A$ . Сопоставляя равенства (3) и (2), находим, что по величине  $w_A = w_{DA}^{sp}$  и, следовательно, эти две составляющие ускорения точки  $D$  взаимно уничтожаются.

Центростремительное ускорение точки  $D$  вокруг  $A$  по величине равно

$$w_{DA}^u = \omega^2 r = \frac{4}{9} \frac{g^2}{r} t^2. \quad (4)$$

Это ускорение направлено от точки  $D$  к полюсу  $A$ . Таким образом, абсолютное ускорение точки  $D$  равно по модулю центростремительному ускорению

$$w_D = \frac{4}{9} \frac{g^2}{r} t^2.$$

Неподвижной центроидой цилиндра является прямая  $BD$ , точка которой становится с течением времени мгновенными центрами скоростей, отмеченными на неподвижной плоскости. Подвижная центроида цилиндра — окружность  $CEHD$ . Таким образом, ускорение мгновенного центра скоростей точки  $D$  направлено по нормали к неподвижной и подвижной центроидам.

Переходим к определению ускорения точки  $E$ . Приняв точку  $A$ , как и ранее, за полюс, имеем (рис. в):

$$w_E = w_A + w_{EA}^u + w_{EA}^{sp}.$$

Величина ускорения  $\omega_{EA}^u$  равна величине  $\omega_{DA}^u$  (4); это ускорение направлено в этом случае от точки  $E$  к полюсу  $A$ . Величина  $\omega_{EA}^{np}$  равна величине  $\omega_{DA}^{np}$ . Направлено  $\omega_{EA}^{np}$  так же, как и  $\omega_A$ , по вертикали вниз. Таким образом, величина ускорения точки  $E$

$$\omega_E = \sqrt{(\omega_A - \omega_{EA}^{np})^2 + (\omega_{EA}^u)^2} = \frac{4}{3} g \sqrt{1 + \frac{g^2 t^4}{9r^2}}.$$

Направление  $\omega_E$  определится по формулам:

$$\cos(\widehat{\omega_E, x}) = \frac{\omega_x}{\omega_E} = -\frac{\omega_{EA}^u}{\omega_E} = -\frac{gt^2}{3r \sqrt{1 + \frac{g^2 t^4}{9r^2}}},$$

$$\cos(\widehat{\omega_E, y}) = \frac{\omega_y}{\omega_E} = \frac{\omega_A - \omega_{EA}^{np}}{\omega_E} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{g^2 t^4}{9r^2}}}.$$

Переходим к определению ускорения точки  $H$  (рис. 2):

$$\omega_H = \omega_A + \omega_{HA}^u + \omega_{HA}^{np}.$$

Направления составляющих ускорения точки  $H$  представлены на рис. 2, величины их известны. Они подсчитываются по формулам, аналогичным (2), (3), (4). Величина ускорения точки  $H$

$$\omega_H = \sqrt{(\omega_{HA}^u - \omega_A)^2 + (\omega_{HA}^{np})^2} = \frac{2}{3} g \sqrt{\left(1 - \frac{2}{3} \frac{gt^2}{r}\right)^2 + 1}.$$

Направление ускорения определится формулами:

$$\cos(\widehat{\omega_H, x}) = \frac{\omega_x}{\omega_H} = -\frac{\omega_{HA}^{np}}{\omega_H} = -\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2}{3} \frac{gt^2}{r}\right)^2 + 1}},$$

$$\cos(\widehat{\omega_H, y}) = \frac{\omega_y}{\omega_H} = \frac{\omega_{HA}^u - \omega_A}{\omega_H} = \frac{\frac{2}{3} \frac{gt^2}{r} - 1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2}{3} \frac{gt^2}{r}\right)^2 + 1}}.$$

Аналогично (рис. 2)

$$\omega_C = \sqrt{(\omega_A - \omega_{CA}^u)^2 + (\omega_{CA}^{np})^2} = \frac{2}{3} g \sqrt{\left(1 - \frac{2}{3} \frac{gt^2}{r}\right)^2 + 1},$$

$$\cos(\widehat{\omega_C, x}) = \frac{\omega_x}{\omega_C} = -\frac{\omega_{CA}^{np}}{\omega_C} = -\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2}{3} \frac{gt^2}{r}\right)^2 + 1}},$$

$$\cos(\widehat{\omega_C, y}) = \frac{\omega_y}{\omega_C} = \frac{\omega_A - \omega_{CA}^u}{\omega_C} = \frac{1 - \frac{2}{3} \frac{gt^2}{r}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2}{3} \frac{gt^2}{r}\right)^2 + 1}}.$$

Переходим к определению положения мгновенного центра ускорений. Угол, составляемый направлением на мгновенный центр ускорений с ускорением любой точки плоской фигуры, определяется из формулы

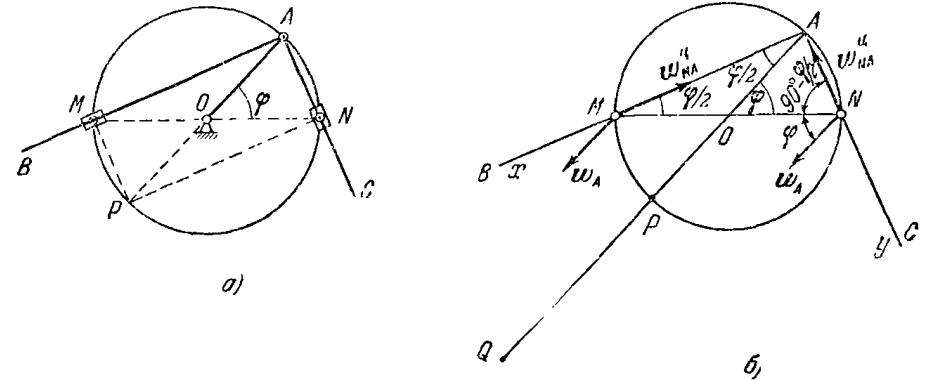
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{3r}{2gt^2}.$$

Расстояние от точки  $A$  до мгновенного центра ускорений  $Q$

$$AQ = \frac{\omega_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{r}{\sqrt{1 + \frac{4}{9} \frac{g^2 t^4}{r^2}}}.$$

Откладываем угол  $\alpha$  от направления ускорения точки  $A$  в сторону дуговой стрелки  $\varepsilon$ , т. е. по часовой стрелке. В этом направлении откладываем от точки  $A$  отрезок  $AQ$ , конец которого и будет являться мгновенным центром ускорений.

**Задача 6.20.** Жесткий прямой угол  $BAC$  (рис. а) движется так, что стержни  $AB$  и  $AC$  проходят через неподвижные точки  $M$  и  $N$ , лежащие на окружности, по которой с постоянной по величине скоростью  $v$  движется вершина, приводимая во вращение кривошипом  $OA$ . Радиус окружности  $OA = r$ .



К задаче 6.20.

Определить ускорения точек стержня  $AB$  и  $AC$ , совпадающих в данный момент с шарнирами  $M$  и  $N$ . Найти мгновенный центр ускорений прямого угла  $BAC$ .

**Решение.** Мгновенный центр скоростей прямого угла лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям точки  $A$ , и точек стержней, совпадающих в данный момент с шарнирами  $M$  и  $N$ . Так как скорость точки стержня  $AB$ , совпадающей в данный момент с шарниром  $M$ , направлена по  $AB$ , а скорость точки стержня  $AC$ , совпадающей в данный момент с шарниром  $N$ , направлена по

АС, то мгновенный центр скоростей находится в точке Р, следовательно, величина мгновенной угловой скорости прямого угла

$$\omega_{\text{мг}} = \frac{v}{AP} = \frac{v}{2r} = \text{const.}$$

Отсюда следует, что мгновенное угловое ускорение прямого угла равно нулю.

Ускорение  $w_M$  точки стержня, совпадающей в данный момент с шарниром М, складывается из трех ускорений:

$$w_M = w_A + w_{MA}^u + w_{MA}^{pp},$$

где  $w_A$  — ускорение полюса точки А — единственной точки прямого угла, ускорение которой известно;  $w_{MA}^u$  — центростремительное ускорение;  $w_{MA}^{pp}$  — вращательное ускорение точки М вокруг полюса. Находим эти ускорения: величина ускорения полюса

$$w_A = \frac{v^2}{r}; \quad (1)$$

это ускорение направлено от точки А к точке О. Центростремительное ускорение по величине равно

$$w_{MA}^u = AM \cdot \omega_{\text{мг}}^2 = 2r \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{v^2}{4r^2} = \frac{v^2}{2r} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}$$

и направлено от точки М к полюсу, к точке А.

Вращательное ускорение

$$w_{MA}^{pp} = AM \cdot \varepsilon_{\text{мг}} = 0.$$

Откладываем эти составляющие ускорения от точки М. Выберем ось координат (рис. б) по сторонам прямого угла и находим проекции ускорения точки М на эти оси:

$$w_{Mx} = w_A \cos \frac{\varphi}{2} - w_{MA}^u = \frac{v^2}{r} \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{v^2}{2r} \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{v^2}{2r} \cos \frac{\varphi}{2},$$

$$w_{My} = w_A \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{v^2}{r} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Отсюда модуль ускорения точки М равен

$$w_M = \frac{v^2}{2r} \sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} + 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{v^2}{2r} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Направление ускорения определится по формулам:

$$\cos(\widehat{w_M, x}) = \frac{w_{Mx}}{w_M} = \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}},$$

$$\cos(\widehat{w_M, y}) = \frac{w_{My}}{w_M} = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

Переходим к определению ускорения точки стержня, совпадающей с шарниром N:

$$w_N = w_A + w_{NA}^u + w_{NA}^{pp}.$$

Ускорение полюса  $w_A$  определено формулой (1). Откладываем его от точки N (рис. б). Вращательное ускорение равно нулю, так как  $\varepsilon_{\text{мг}} = 0$ . Находим величину центростремительного ускорения, направленного от точки N к полюсу, к точке А:

$$w_{NA}^u = AN \cdot \omega_{\text{мг}}^2 = 2r \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{v^2}{(2r)^2} = \frac{v^2}{2r} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Теперь определяем проекции ускорения  $w_N$  на оси координат:

$$w_{Nx} = w_A \cos \frac{\varphi}{2} - w_{NA}^u = \frac{v^2}{r} \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{v^2}{2r} \sin \frac{\varphi}{2},$$

$$w_{Ny} = w_A \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{v^2}{r} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

При помощи этих формул определяем модуль и направление ускорения  $w_N$ :

$$w_N = \sqrt{w_{Nx}^2 + w_{Ny}^2} = \frac{v^2}{2r} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \frac{\varphi}{2}},$$

$$\cos(\widehat{w_N, x}) = \frac{w_{Nx}}{w_N} = \frac{2 \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}},$$

$$\cos(\widehat{w_N, y}) = \frac{w_{Ny}}{w_N} = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

Переходим к нахождению положения мгновенного центра ускорений Q. Угол  $\alpha$  между ускорением точки А и направлением на мгновенный центр ускорений дается формулой

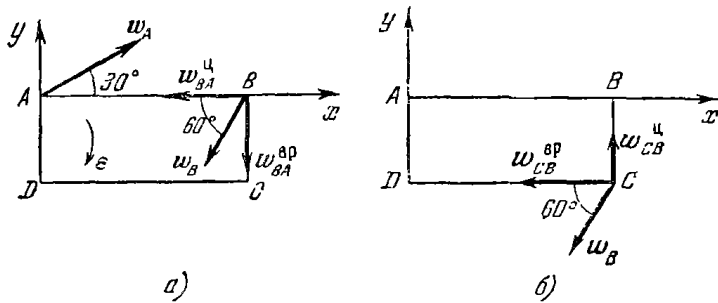
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon_{\text{мг}}}{\omega_{\text{мг}}^2} = 0,$$

откуда следует, что мгновенный центр ускорений  $Q$  лежит на прямой, проходящей через точки  $O$  и  $A$ . Расстояние от точки  $A$  до мгновенного центра ускорений  $Q$

$$AQ = \frac{\omega_A}{\sqrt{\frac{\omega_A^2}{r^2} - \omega_{\text{мг}}^2}} = \frac{\omega_A}{\omega_{\text{мг}}^2} = 4r.$$

Таким образом, мгновенный центр ускорений находится на расстоянии двух диаметров от точки  $A$ , или на расстоянии одного диаметра от мгновенного центра скоростей  $P$ .

**Задача 6.21.** Прямоугольник  $ABCD$  совершает плоское движение. Ускорение точки  $A$  в данный момент равно  $\omega_A = 2 \text{ см/сек}^2$  и



К задаче 6.21.

составляет угол  $30^\circ$  с прямой  $AB$ . Ускорение точки  $B$  равно  $\omega_B = 6 \text{ см/сек}^2$  и образует угол  $60^\circ$  с прямой  $BA$ . Длины сторон:  $AB = 10 \text{ см}$ ,  $BC = 5 \text{ см}$ .

Определить мгновенную угловую скорость и мгновенное угловое ускорение прямоугольника, а также ускорение точки  $C$ .

**Решение.** Выбираем точку  $A$  за полюс. Тогда ускорение точки  $B$

$$\omega_B = \omega_A - \omega_{BA}^u - \omega_{BA}^{np}. \quad (1)$$

Проектируем векторное равенство (1) на оси  $x$  и  $y$  (см. чертеж). В проекции на ось  $x$  имеем:

$$-\omega_B \cos 60^\circ = \omega_A \cos 30^\circ - \omega_{BA}^u,$$

откуда

$$\omega_{BA}^u = \omega_A \cos 30^\circ + \omega_B \cos 60^\circ \approx 4,73 \text{ см/сек}^2.$$

Теперь найдем величину мгновенной угловой скорости фигуры

$$\omega_{\text{мг}} = \sqrt{\frac{\omega_{BA}^u}{AB}} \approx 0,69 \text{ сек}^{-1}.$$

Проектируя векторное равенство (1) на ось  $y$ , получаем:

$$-\omega_B \sin 30^\circ = \omega_A \sin 30^\circ - \omega_{BA}^{np}.$$

Отсюда определяется вращательное ускорение точки  $B$ :

$$\omega_B^{np} = \omega_{BA} \cos 30^\circ + \omega_A \sin 30^\circ \approx 6,19 \text{ см/сек}^2.$$

Далее, находим величину мгновенного углового ускорения фигуры

$$\epsilon_{\text{мг}} = \frac{\omega_B^{np}}{AB} \approx 0,619 \text{ сек}^{-2}.$$

Угловое ускорение фигуры направлено по оси  $z$  в отрицательную сторону.

Переходим к определению ускорения точки  $C$ . Согласно формуле распределения ускорений, выбирая точку  $B$  за полюс, имеем (рис. б):

$$\omega_C = \omega_B + \omega_{BC}^u + \omega_{BC}^{np}.$$

Проектируя это равенство на оси  $x$  и  $y$ , находим:

$$\omega_{Cx} = -\omega_B \cos 60^\circ - \omega_{BC}^{np} \approx -6,095 \text{ см/сек}^2,$$

$$\omega_{Cy} = -\omega_B \cos 30^\circ + \omega_{BC}^u \approx -2,825 \text{ см/сек}^2.$$

Теперь легко найдется величина ускорения точки  $C$ :

$$\omega_C = \sqrt{\omega_{Cx}^2 + \omega_{Cy}^2} = \sqrt{45} \approx 6,7 \text{ см/сек}^2.$$

Направление  $\omega_C$  определяется формулами:

$$\cos(\widehat{\omega_C, x}) = \frac{\omega_{Cx}}{\omega_C} = -0,906,$$

$$\cos(\widehat{\omega_C, y}) = \frac{\omega_{Cy}}{\omega_C} = -0,422.$$

**Задача 6.22.** Антипараллелограмм образован стержнями:

$$AD = BE = 10 \text{ см} \text{ и } AB = ED = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ см},$$

соединенными шарнирами (рис. а). Звено  $AB$  неподвижно. Угловая скорость стержня  $BE$  постоянна и равна по величине  $\omega_0 = 2 \text{ сек}^{-1}$ . В положении механизма, когда угол  $\angle ABE = 0,5\pi$ , определить угловое ускорение стержня  $ED$ , а также угловую скорость и угловое ускорение стержня  $AD$ .

Найти положение мгновенного центра ускорений стержня  $ED$ .

**Решение.** Ускорение точки  $E$  по величине равно

$$\omega_E = \omega_0^2 \cdot BE = 4 \cdot 10 = 40 \text{ см/сек}^2 \quad (1)$$

и направлено от точки  $E$  к точке  $B$ . Мгновенный центр скоростей стержня  $ED$  находится в точке  $P$ , так как скорость точки  $D$  перпендикулярна к стержню  $AD$ , а скорость точки  $E$  перпендикулярна к стержню  $BE$ . Возьмем точку  $E$ , ускорение которой известно по величине и по направлению, за полюс. Рассмотрим ускорение точки  $P$ , считая, что она принадлежит плоской фигуре, жестко связанной со стержнем  $ED$ . Направление ускорения точки  $P$  известно, так как оно всегда направлено по нормали к центруде.

Если мысленно соединить точки  $B$  и  $D$  прямой, то треугольники  $ADB$  и  $BDE$  равны по трем равным сторонам. Вследствие этого,  $\angle DAB = \angle BED$  и  $\angle ABE = \angle EDA$ . Тогда треугольники  $APB$  и  $EPD$  равны, имея равные стороны  $AB = ED$  и равные углы. Отсюда следует, что

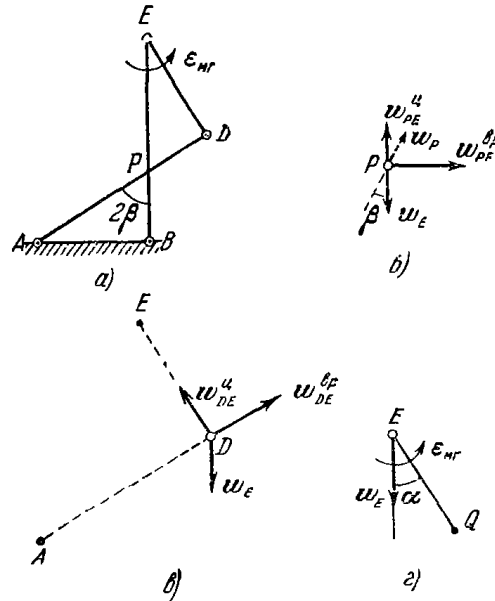
$$PB = PD \text{ и } AP + PB = AD = 10 \text{ см};$$

таким образом, в условиях данной задачи сумма расстояний от мгновенного центра скоростей стержня  $ED$  до двух неподвижных точек  $A$  и  $B$  есть величина постоянная. Следовательно, точка  $P$  описывает на неподвижной плоскости эллипс, фокусами которого являются точки  $A$  и  $B$ . Этот эллипс является неподвижной центрондой. По свойству эллипса нормаль к нему в какой-либо точке является биссектрисой внутреннего угла между фокальными радиусами, т. е. биссектрисой угла  $APB$ . Таким образом, ускорение точки  $P$  направлено по биссектрисе угла  $APB$ . Не следует при этом смешивать мгновенный центр скоростей стержня  $ED$  с точкой  $P$ , принадлежащей стержню  $BE$ .

Ускорение этой точки складывается из трех ускорений: ускорения полюса, центростремительного и вращательного ускорений вокруг полюса:

$$\omega_P = \omega_E + \omega_{PE}^n + \omega_{PE}^{vp} \quad (2)$$

Строим (рис. б) эти ускорения. Ускорение  $\omega_P$ , равное  $40 \text{ см/сек}^2$ , откладываем от точки  $P$  по стержню  $EB$ . Для определения  $\omega_{PE}^n$



К задаче 6.22.

найдем вначале мгновенную угловую скорость стержня  $ED$ . Рассматривая точку  $E$  как принадлежащую стержню  $BE$  и стержню  $ED$ , имеем:

$$v_E = \omega_0 \cdot BE = \omega_{мг} \cdot EP,$$

откуда

$$\omega_{мг} = \omega_0 \cdot \frac{BE}{EP} = 2 \cdot \frac{10}{20} \cdot 3 = 3 \text{ сек}^{-1}.$$

В этой формуле

$$AP = EP = \frac{(AD)^2 + (AB)^2}{2AD} = \frac{20}{3} \text{ см},$$

что вытекает из условия

$$EP + PD = AP + PB = AD = 10 \text{ см}$$

и из равенства (треугольник  $EDP$  прямоугольный)

$$EP^2 = PD^2 + ED^2.$$

Теперь определяем центростремительное ускорение точки  $P$ :

$$\omega_{PE}^n = EP \cdot \omega_{мг}^2 = \frac{20}{3} \cdot 9 = 60 \text{ см/сек}^2.$$

Это ускорение направлено от точки  $P$  к полюсу, к точке  $E$ . Вращательное ускорение  $\omega_{PE}^{vp}$  направлено перпендикулярно к  $\omega_{PE}^n$ ; величина этого ускорения неизвестна.

Так как угол  $APB$ , как легко показать из рассмотрения треугольника  $APB$ , равен  $60^\circ$ , то ускорение точки  $P$  составляет угол  $\beta = 30^\circ$  с линией  $PB$ . Проектируя векторное равенство (2) на направление, перпендикулярное к  $\omega_P$ , находим:

$$0 = 40 \cos 60^\circ - 60 \cos 60^\circ + \omega_{PE}^{vp} \cos 30^\circ,$$

откуда

$$\omega_{PE}^{vp} = \frac{20 \cdot 0,5 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ см/сек}^2.$$

Следовательно,

$$\epsilon_{мг} = \frac{\omega_{PE}^{vp}}{PE} = \frac{20}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{20} = \sqrt{3} \text{ сек}^{-2}.$$

Переходим к определению угловой скорости и углового ускорения стержня  $AD$ . Для этого определим ускорение точки  $D$ , принадлежащей одновременно стержням  $ED$  и  $AD$  (рис. в). Ускорение точки  $D$ , как принадлежащей стержню  $ED$ , выражается так:

$$\omega_D = \omega_E + \omega_{DE}^n + \omega_{DE}^{vp} \quad (3)$$

Ускорение  $\omega_{DE}^n$  направлено от точки  $D$  к точке  $E$  и его модуль

$$\omega_{DE}^n = DE \cdot \omega_{мг}^2 = \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot 9 = 30\sqrt{3} \text{ см/сек}^2.$$

Ускорение  $\omega_{DE}^{np}$  направлено перпендикулярно к  $\omega_{DE}^t$  и его модуль

$$\omega_{DE}^{np} = DE \cdot \epsilon_{мг} = \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 10 \text{ см/сек}^2.$$

Ускорение  $\omega_E$  известно по величине (1) и направлению. Таким образом, определены все три составляющие ускорения точки  $D$ .

С другой стороны, при вращении стержня вокруг неподвижного центра  $A$  точка  $D$  описывает окружность. Проектируя (3) на нормаль  $AD$ , находим абсолютное нормальное ускорение точки  $D$

$$\omega_D^n = \omega_E \cos 60^\circ - \omega_{DE}^{np} = 40 \cdot 0,5 - 10 = 10 \text{ см/сек}^2.$$

Так как

$$\omega_D^n = \omega_1^2 \cdot AD,$$

где  $\omega_1$  — искомая угловая скорость стержня  $AD$ , то

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\omega_D^n}{AD}} = \sqrt{\frac{10}{10}} = 1 \text{ сек}^{-1}.$$

Проектируя равенство (3) на касательную к траектории точки  $D$ , т. е. на линию  $ED$ , находим абсолютное касательное ускорение точки  $D$

$$\omega_D^t = \omega_{DE}^t - \omega_E \cos 30^\circ = 30\sqrt{3} - \frac{40\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ см/сек}^2.$$

Так как

$$\omega_D^t = \epsilon_1 \cdot AD,$$

где  $\epsilon_1$  — искомое угловое ускорение стержня  $AD$ , то

$$\epsilon_1 = \frac{\omega_D^t}{AD} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3} \text{ сек}^{-2}.$$

Таким образом, найдены угловая скорость и угловое ускорение всех звеньев антипараллелограмма, зная которые, можно определить скорости и ускорения любой точки механизма.

Переходим к определению положения мгновенного центра ускорений стержня  $ED$ . Вычисляем угол между ускорением любой точки стержня  $ED$  и направлением на мгновенный центр ускорений  $Q$ :

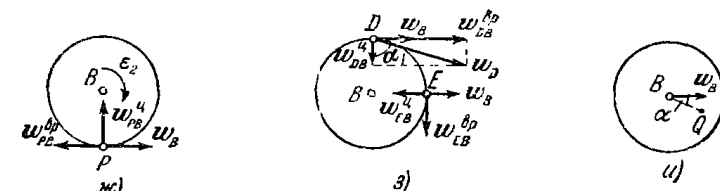
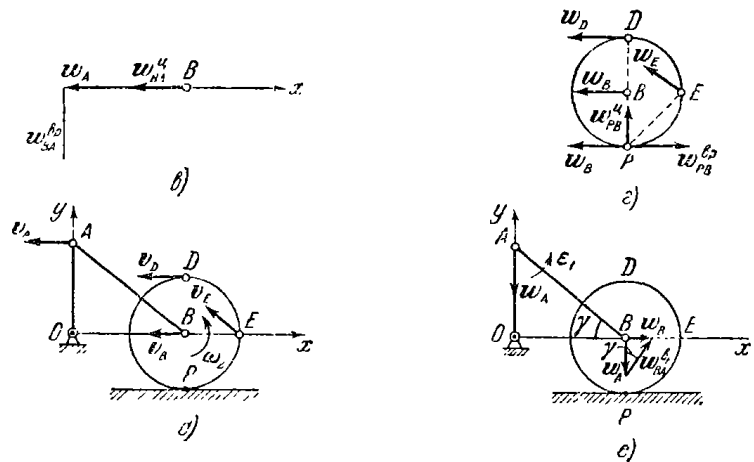
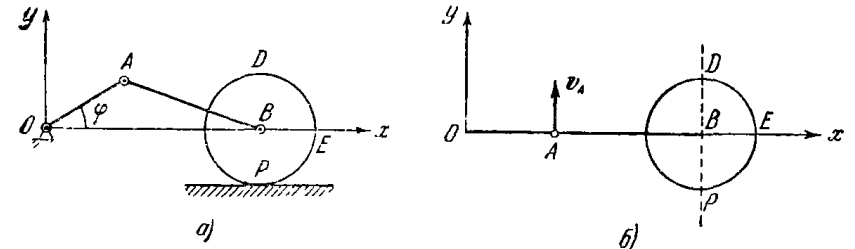
$$\text{tg } \alpha = \frac{\epsilon_{мг}}{\omega_{мг}^2} = \frac{\sqrt{3}}{9} = 0,1925;$$

находим расстояние от точки  $E$  до мгновенного центра ускорений

$$EQ = \frac{\omega_E}{\sqrt{\epsilon_{мг}^2 + \omega_{мг}^4}} = \frac{40}{\sqrt{3 + 81}} = 4,37 \text{ см}.$$

Строим мгновенный центр ускорений, откладывая от направления  $ED$ , совпадающего с ускорением точки  $E$ , угол  $\alpha$  в сторону вращения дуговой стрелки  $\epsilon_{мг}$  (рис. 2) и проводя отрезок  $EQ$  длиной 4,37 см.

**Задача 6.23.** Кривошип  $OA = r = 10 \text{ см}$  вращается вокруг неподвижной точки  $O$  согласно уравнению  $\varphi = \pi t$ . Конек шатуна  $B$



К задаче 6.23.

прикреплен шарнирно к центру колеса радиуса  $R = 12 \text{ см}$ , которое катится без скольжения по прямой, параллельной  $OB$  (рис. а). Длина шатуна  $AB = l = 50 \text{ см}$ .

Определить при  $\varphi_1 = 0$ : а) мгновенную угловую скорость и мгновенное угловое ускорение колеса, б) скорость и ускорение точек  $E$  и  $D$ , в) положение мгновенного центра ускорений колеса.

**Решение.** Рассмотрим первое положение механизма, когда угол  $\varphi = 0$  (рис. б). Выберем неподвижную систему координат с началом в точке  $O$ , ось  $x$  направим по  $OB$  вправо, ось  $y$  — перпендикулярно к  $x$  в плоскости движения вверх, ось  $z$  — перпендикулярно к плоскости движения. Проекция угловой скорости кривошипа на ось  $z$

$$\omega_z = \dot{\varphi} = \pi \text{ сек}^{-1}.$$

Величина скорости точки  $A$

$$v_A = OA \cdot |\omega_z| = 10\pi \text{ см/сек}, \quad (1)$$

причем эта скорость направлена перпендикулярно к кривошипу  $OA$  (рис. б).

Для нахождения мгновенного центра скоростей шатуна необходимо знать направление скоростей двух его точек. Первая точка, скорость которой известна, — это  $A$ , принадлежащая кривошипу и шатуну. Вторая точка шатуна, направление скорости которой известно, — это точка  $B$ . Действительно, точка  $B$  движется прямолинейно по оси  $x$  и ее скорость, следовательно, также направлена по этой прямой. Мгновенный центр скоростей шатуна  $AB$  находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям точек  $A$  и  $B$ . Перпендикуляр к  $v_A$  есть  $AB$ , перпендикуляром к  $v_B$  является прямая  $DP$  (рис. б). Эти перпендикуляры пересекаются в точке  $B$ . Значит, точка  $B$  в данном положении механизма является мгновенным центром скоростей шатуна  $AB$ ; скорость в точке  $B$  равна нулю.

Переходим к определению мгновенной угловой скорости колеса. Точка  $B$  принадлежит колесу, и ее скорость равна нулю. Точка  $P$  является мгновенным центром скоростей колеса, катящегося без скольжения по горизонтальной прямой. Следовательно, и скорость точки  $P$  равна нулю. Отсюда заключаем, что в данный момент мгновенная угловая скорость колеса равна нулю и скорости всех точек колеса также равны нулю. Действительно,

$$v_B = \omega_2 \times r_1, \quad (2)$$

где  $\omega_2$  — искомая мгновенная угловая скорость колеса;  $r_1$  — радиус-вектор, проведенный из мгновенного центра скоростей  $P$  в точку  $B$ . Раз  $v_B$  равно нулю, то равна нулю и мгновенная угловая скорость  $\omega_2$ .

Переходим к определению мгновенного углового ускорения колеса. Значение скорости точки  $A$ , как принадлежащей шатуну, равно произведению величины мгновенной угловой скорости шатуна  $\omega_1$  на длину мгновенного радиуса  $AB$ :

$$v_A = AB \cdot \omega_1.$$

Сопоставляя это значение  $v_A$  с (1), определяем величину мгновенной угловой скорости шатуна

$$\omega_1 = \frac{10\pi}{AB} = \frac{10\pi}{50} = \frac{\pi}{5} \text{ сек}^{-1}.$$

Теперь можно найти ускорение точки  $B$ . Выбираем точку  $A$  за полюс, так как она принадлежит, как и точка  $B$ , шатуну и ускорение ее легко определяется. По величине оно равно

$$\omega_A = \omega_A^2 = AO \cdot \omega_1^2 = 10\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Направлено  $\omega_A$  от точки  $A$  к точке  $O$ , так как оно является нормальным ускорением. Тогда

$$\omega_B = \omega_A + \omega_{BA}^n + \omega_{BA}^{np}, \quad (3)$$

где

$$\omega_{BA}^n = BA \cdot \omega_1^2 = 50 \cdot \frac{\pi^2}{5^2} = 2\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Ускорение  $\omega_{BA}^n$  направлено от точки  $B$  к полюсу, к точке  $A$ . Откладываем в избранном масштабе составляющие  $\omega_A$  и  $\omega_{BA}^n$  ускорения точки  $B$  (рис. в). Третья составляющая  $\omega_{BA}^{np}$  направлена перпендикулярно к  $\omega_{BA}^n$  и неизвестна по величине. Сумма трех векторов согласно (3) должна равняться  $\omega_B$ . Но точка  $B$  движется прямолинейно по оси  $x$ , следовательно, ее ускорение должно быть направлено по этой оси. Проектируя равенство (3) на ось  $y$ , находим, что  $\omega_{BA}^{np} = 0$  и, следовательно,  $\epsilon_1 = 0$  и ускорение точки  $B$  направлено от  $B$  к точке  $A$ .

Проектируя равенство (3) на ось  $x$ , имеем:

$$\omega_{Bx} = -\omega_A - \omega_{BA}^n = -10\pi^2 - 2\pi^2 = -12\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Точка  $B$  принадлежит одновременно колесу и должна быть выбрана за полюс как единственная точка колеса, ускорение которой известно. Так как мгновенное угловое ускорение колеса неизвестно, то следует вначале искать ускорение такой точки, ускорение которой известно по направлению. Единственной такой точкой является точка  $P$ . Ее ускорение является касательным ускорением и направлено по нормали к центроидам, т. е. от точки  $P$  к центру колеса  $B$  (рис. г).

Ищем ускорение точки  $P$  по формуле распределения ускорений:

$$\omega_P = \omega_B + \omega_{PB}^n + \omega_{PB}^{np}, \quad (4)$$

Откладываем от точки  $P$  направления этих трех составляющих полного ускорения:  $\omega_B$  и  $\omega_{PB}^{np}$  направлены по касательной к центроидам,  $\omega_{PB}^n$  — по нормали, полное ускорение  $\omega_P$  направлено по  $PB$ . Проектируя равенство (4) на ось  $x$ , находим:

$$0 = \omega_B - \omega_{PB}^{np}. \quad (5)$$

Отсюда следует, что составляющие  $\omega_B$  и  $\omega_{PB}^{np}$  направлены в разные стороны и равны по величине. Подставляя в (5) их значения, имеем:

$$12\pi^2 = BP \cdot \epsilon_2,$$



откуда

$$\varepsilon_2 = \frac{12\pi^2}{12} = \pi^2 \text{ сек}^{-2}$$

( $\varepsilon_2$ , как видно из направления  $\omega_{PB}^{np}$ , направлено против часовой стрелки).

С другой стороны, проецируя (4) на ось  $y$ , находим:

$$\omega_P = \omega_{PB}^x = BP \cdot \omega_2^2 = 0,$$

так как мгновенная угловая скорость колеса  $\omega_2$  в данный момент равна нулю(2). Следовательно, мгновенный центр скоростей и мгновенный центр ускорений колеса в данном положении механизма совпадают и находятся в точке  $P$ .

Осталось определить ускорение точек  $E$  и  $D$ . Они равны

$$\omega_E = \varepsilon_2 \times r_E$$

$$\omega_D = \varepsilon_2 \times r_D$$

где  $r_E$  — радиус-вектор точки  $E$ , проведенный из мгновенного центра ускорений  $P$ ;  $r_D$  — аналогичный радиус-вектор точки  $D$ . Модули этих ускорений будут:

$$\omega_E = \varepsilon_2 R \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot 12\pi^2 \text{ см/сек}^2,$$

$$\omega_D = \varepsilon_2 \cdot 2R = 24\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Направления этих ускорений определяются по правилу векторного произведения и показаны на рис. 2.

**Задача 6.24.** Решить предыдущую задачу для положения механизма при угле  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ .

Решение. Скорость точки  $A$  равна по величине (см. рис. 2)

$$v_A = AO \cdot |\omega_2| = 10\pi \text{ см/сек}$$

и направлена перпендикулярно к  $AO$ . Скорость точки  $B$  параллельна скорости точки  $A$ , так как точка  $B$  движется по оси  $x$ . Восстанавливая перпендикуляры к  $v_A$  и  $v_B$ , заключаем, что они не пересекаются. Таким образом, шатун в данный момент совершает мгновенное поступательное движение, скорости всех его точек равны между собой, в частности

$$v_B = v_A,$$

а его мгновенная угловая скорость  $\omega_1$  равна нулю. С другой стороны, точка  $B$  принадлежит колесу, мгновенный центр скоростей которого находится в  $P$ . Следовательно,

$$v_B = BP \cdot \omega_2,$$

где  $\omega_2$  — величина мгновенной угловой скорости колеса; отсюда

$$\omega_2 = \frac{v_B}{BP} = \frac{10\pi}{12} \text{ сек}^{-1}.$$

Находим скорости точек  $E$  и  $D$

$$v_E = \omega_2 \times r_E$$

$$v_D = \omega_2 \times r_D$$

и, следовательно,

$$v_E = \omega_2 \cdot R \sqrt{2} = 14,1\pi \text{ см/сек},$$

$$v_D = \omega_2 \cdot 2R = 20\pi \text{ см/сек}.$$

Направления этих скоростей определяются по правилу векторного произведения и показаны на рис. 2.

Переходим к определению ускорений. Величина ускорения точки  $A$  определена; направлено это ускорение от  $A$  к  $O$  (рис. 2). Ускорение точки  $B$  находим по формуле распределения ускорений, взяв точку  $A$ , принадлежащую шатуну, за полюс:

$$\omega_B = \omega_A + \omega_{BA}^u + \omega_{BA}^{np}. \quad (1)$$

Откладываем  $\omega_A$  из точки  $B$  и проводим прямую по направлению  $\omega_{BA}^{np}$  перпендикулярно к шатуну  $AB$ , соединяющему полюс  $A$  с точкой  $B$ . Составляющая  $\omega_{BA}^u = \omega_1 \times \overline{AB} = 0$ , так как угловая скорость  $\omega_1$  в данном положении равна нулю. С другой стороны,  $\omega_B$  направлено по  $OB$ . Проводя из  $B$  прямую по направлению  $OB$ , находим пересечение этой линии с направлением  $\omega_{BA}^{np}$ . Таким образом, найдены  $\omega_B$  и  $\omega_{BA}^{np}$ .

Обозначая угол  $OBA$  через  $\gamma$  и замечая, что угол между  $\omega_A$  и  $\omega_{BA}^{np}$  равен этому углу, находим:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{OA}{OB} = \frac{10}{\sqrt{50^2 - 10^2}} = 0,204.$$

Проектируя равенство (1) на оси координат, имеем:

$$\omega_B = \omega_{BA}^{np} \sin \gamma,$$

$$0 = \omega_{BA}^{np} \cos \gamma - \omega_A.$$

Решая совместно эти уравнения, находим:

$$\omega_B = \omega_A \operatorname{tg} \gamma = 10\pi^2 \cdot 0,204 = 2,04\pi^2 \text{ см/сек}^2,$$

$$\omega_{BA}^{np} = \sqrt{\omega_A^2 + \omega_B^2} = \pi^2 \sqrt{10^2 + 2,04^2} = 10,2\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Величина углового ускорения шатуна  $AB$  в данном положении будет равна

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega_{BA}^{np}}{AB} = \frac{10,2\pi^2}{50} = 0,204 \pi^2 \text{ сек}^{-2}.$$

Вращение шатуна ускоренное, так как мгновенная угловая скорость шатуна в данный момент равна нулю.

Переходим к определению ускорений точек колеса. Точка  $B$  должна быть выбрана за полюс, так как это единственная точка колеса, ускорение которой известно. Далее следует найти ускорение точки  $P$ , мгновенного центра скоростей, так как это единственная точка колеса (кроме  $B$ , взятой за полюс), направление ускорения которой известно. Согласно теореме о распределении ускорений

$$\omega_P = \omega_B + \omega_{PB}^u + \omega_{PB}^{np} \quad (2)$$

Ускорение точки  $P$ , совпадающей с мгновенным центром скоростей, направлено по нормали к центроидам. Неподвижной центроидой в данном случае является прямая, по которой катится колесо, подвижной центроидой — обод колеса. Следовательно,  $\omega_P$  направлено по  $PB$ . Откладываем  $\omega_B$  от точки  $P$  (рис. *ж*);  $\omega_{PB}^{np}$  направлено по той же прямой и неизвестно по величине;  $\omega_{PB}^u$  направлено от  $P$  к  $B$ . Проектируя равенство (2) на направление  $BP$ , имеем:

$$\omega_P = \omega_{PB}^u = R \cdot \omega_2^2 = 12 \cdot \frac{10,2\pi^2}{12^2} = 8,33\pi^2 \text{ см/сек}^2. \quad (3)$$

Проектируя равенство (2) на направление, перпендикулярное к  $BP$ , находим:

$$\omega_B = \omega_{PB}^{np} = 2,04 \pi^2 \text{ см/сек}^2. \quad (4)$$

Далее находим величину углового ускорения колеса

$$\varepsilon_2 = \frac{\omega_{PB}^{np}}{R} = \frac{2,04}{12} \pi^2 = 0,17\pi^2 \text{ сек}^{-2}.$$

Дуговую стрелку  $\varepsilon_2$  (рис. *ж*) следует направить по часовой стрелке. Следовательно, вращение колеса замедленное.

Ускорения точек  $D$  и  $E$  находятся теперь по формулам распределения ускорений (рис. *з*):

$$\omega_D = \omega_B + \omega_{DB}^u + \omega_{DB}^{np}$$

$$\omega_E = \omega_B + \omega_{EB}^u + \omega_{EB}^{np}$$

Центростремительные ускорения  $\omega_{DB}^u$  и  $\omega_{EB}^u$ , как всегда, направлены к полюсу  $B$ , вращательные ускорения  $\omega_{DB}^{np}$  и  $\omega_{EB}^{np}$  перпендикулярны

к  $\omega_{DB}^u$  и  $\omega_{EB}^u$  соответственно. Как легко видеть из формул (3) и (4), величины их равны  $\omega_{PB}^u$  и  $\omega_{PB}^{np}$ .

Находим значения ускорений  $\omega_D$  и  $\omega_E$ :

$$\omega_D = \sqrt{(\omega_B + \omega_{DB}^u)^2 + (\omega_{DB}^{np})^2} = \sqrt{(4,08\pi^2)^2 + (8,33\pi^2)^2} = 9,25\pi^2 \text{ см/сек}^2,$$

$$\omega_E = \sqrt{(\omega_{EB}^u - \omega_B)^2 + (\omega_{EB}^{np})^2} = \sqrt{(8,33\pi^2 - 2,04\pi^2)^2 + (2,04\pi^2)^2} = 6,6\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Определяем угол  $\alpha$ , составляемый ускорением точки с направлением на полюс  $B$ . Для точки  $D$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\omega_B + \omega_{DB}^{np}}{\omega_{DB}^u} = \frac{4,08\pi^2}{8,33\pi^2} = 0,49.$$

Для точки  $E$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\omega_{EB}^{np}}{\omega_{EB}^u - \omega_B} = \frac{2,04\pi^2}{6,29\pi^2} = 0,325.$$

Таким образом, найдены ускорения точек  $D$  и  $E$  по величине и направлению.

Переходим к определению положения мгновенного центра ускорений колеса. Находим угол  $\alpha$ , определяемый равенством

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon_2}{\omega_2^2} = \frac{0,17 \cdot \pi^2 \cdot 12^2}{10 \cdot \pi^2} = 0,244,$$

откуда

$$\alpha \approx 13^\circ 45'.$$

Откладываем от ускорения точки  $B$  (рис. *и*) в направлении дуговой стрелки  $\varepsilon_2$  (рис. *ж*) угол  $\alpha$  и под этим углом проводим прямую, на которой лежит мгновенный центр ускорений. Находим расстояние до мгновенного центра ускорений

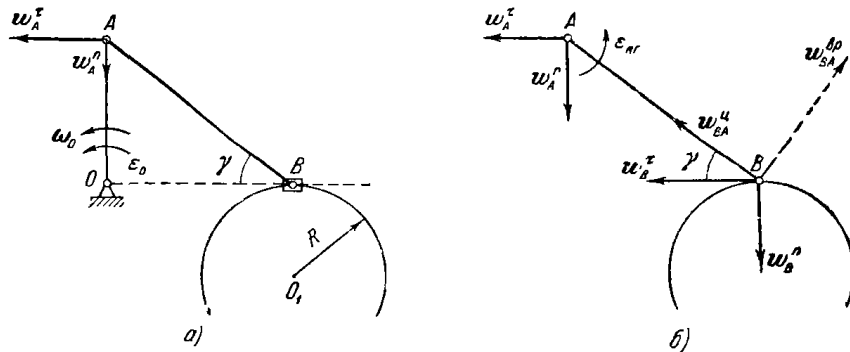
$$BQ = \frac{\omega_B}{\sqrt{\varepsilon_2^2 + \omega_2^4}} = \frac{2,04\pi^2}{\pi^2 \sqrt{0,17^2 + \left(\frac{10}{12}\right)^4}} = 2,86 \text{ см.}$$

Откладывая это расстояние от точки  $B$  под углом  $\alpha$  к ускорению  $\omega_B$  (рис. *и*), находим мгновенный центр ускорений.

**Задача 6.25.** В кривошипно-шатунном механизме угол  $BOA$  равен в данный момент  $0,5\pi$ . Угловая скорость и угловое ускорение кривошипа длиной  $OA = r = 20 \text{ см}$  известны:  $\omega_0 = \pi \text{ сек}^{-1}$ ,  $\varepsilon_0 = 0,2\pi \text{ сек}^{-2}$ . Ползун  $B$ , описывающий дугу окружности радиуса  $R = 30 \text{ см}$ , в данном положении находится на горизонтальной прямой. Длина шатуна  $AB = l = 40 \text{ см}$ .

Найти ускорение точки  $B$  и мгновенное угловое ускорение шатуна  $AB$ .

Решение. Скорости точек  $A$  и  $B$  шатуна параллельны друг другу и не перпендикулярны к отрезку  $AB$ . Следовательно, мгновенный центр скоростей шатуна находится в бесконечности, шатун совершает мгновенно-поступательное движение, скорости всех его



К задаче 6.25.

точек равны ( $\omega_{мг} = 0$ ). Величина скорости точки  $A$  и, следовательно, любой точки шатуна равна

$$v_A = OA \cdot \omega_0 = 20\pi \text{ см/сек.}$$

Ускорение точки  $A$  складывается из нормального и касательного ускорений, величины которых равны

$$\omega_A^n = AO \cdot \omega_0^2 = 20\pi^2 \text{ см/сек}^2,$$

$$\omega_A^{\tau} = AO \cdot \varepsilon_0 = 20 \cdot 0,2\pi = 4\pi \text{ см/сек}^2.$$

Выбирая точку  $A$  за полюс как единственную точку шатуна, ускорение которой известно, применяем формулу распределения ускорений для точки  $B$

$$\omega_B = \omega_A + \omega_{BA}^n + \omega_{BA}^{\tau}. \quad (1)$$

В данном случае  $\omega_B$  неизвестно по величине и направлению,  $\omega_{BA}^n$  неизвестно по величине. Следовательно, непосредственно найти искомые величины из уравнения (1) нельзя. Воспользуемся тем, что может быть определено нормальное ускорение точки  $B$

$$\omega_B^n = \frac{v_B^2}{R} = \frac{(20\pi)^2}{30} = \frac{40}{3}\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Проектируя равенство (1) на нормаль к траектории точки  $B$ , т. е. на вертикальную ось, получаем:

$$\omega_B^n = \omega_A^n - \omega_{BA}^n \sin \gamma - \omega_{BA}^{\tau} \cos \gamma, \quad (2)$$

где  $\sin \gamma = \frac{OA}{AB} = 0,5$ ;  $\gamma = 30^\circ$ . Из формулы (2) находим величину вращательного ускорения

$$\omega_{BA}^{\tau} = \frac{\omega_A^n - \omega_B^n - \omega_{BA}^n \sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{2 \left( 20\pi^2 - \frac{40}{3}\pi^2 \right)}{\sqrt{3}} = \frac{40}{3\sqrt{3}}\pi^2 \text{ см/сек}^2,$$

так как  $\omega_{BA}^n = AB \cdot \omega_{мг}^2 = 0$  (рис. б). Отсюда найдется значение углового ускорения

$$\varepsilon_{мг} = \frac{\omega_{BA}^{\tau}}{AB} = 0,192\pi^2 \text{ сек}^{-2}.$$

В соответствии со знаком  $\omega_{BA}^{\tau}$ ,  $\varepsilon_{мг}$  направлено против часовой стрелки.

Находим касательное ускорение точки  $B$ , проектируя равенство (1) на  $OB$ :

$$\omega_B^{\tau} = \omega_A^{\tau} - \omega_{BA}^{\tau} \sin \gamma = 4\pi - \frac{40}{3\sqrt{3}}\pi^2 \cdot 0,5 = -25,4 \text{ см/сек}^2.$$

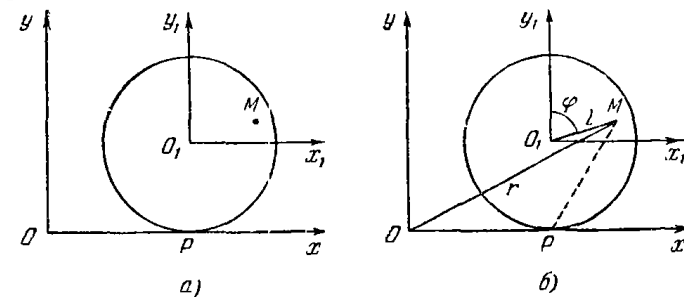
Величина ускорения точки  $B$

$$\omega_B = \sqrt{(\omega_B^n)^2 + (\omega_B^{\tau})^2} = 135 \text{ см/сек}^2.$$

Угол, составленный этим ускорением с линией  $O_1B$ , определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega_B^{\tau}}{\omega_B^n} \approx -\frac{25,4}{135} = 0,188.$$

**Задача 6.26.** Колесо радиуса  $a$  катится без скольжения по прямолинейному рельсу (рис. а). Скорость центра колеса постоянная и равна  $v_{O_1}$ .



К задаче 6.26.

Определить уравнения движения, скорость и ускорение точки  $M$ , жестко связанной с колесом и находящейся на расстоянии  $O_1M = l$  от центра колеса.

Решение. Выбираем неподвижную систему координат  $xu$  и подвижную систему координат  $x_1y_1$ . Подвижная система координат перемещается поступательно вместе с центром колеса, а ее оси остаются параллельными осям неподвижной системы. Величина угловой скорости колеса определится из равенства (рис. б):

$$v_{O_1} = PO_1 \cdot \omega = a\omega,$$

так как мгновенный центр скоростей находится в точке  $P$  соприкосновения колеса с неподвижным рельсом. Следовательно,

$$\omega = \frac{v_{O_1}}{a}. \quad (1)$$

Умножая (1) на  $dt$  и учитывая, что  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ , имеем:

$$d\varphi = \frac{v_{O_1}}{a} dt.$$

Интегрируя, находим:

$$\varphi = \frac{v_{O_1}}{a} t + C_1. \quad (2)$$

Полагая  $\varphi = 0$ , при  $t = 0$ , находим из (2), что произвольная постоянная интегрирования  $C_1 = 0$  и, окончательно,

$$\varphi = \frac{v_{O_1}}{a} t.$$

Координаты точки  $M$  в подвижной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= l \sin \varphi = l \sin \frac{v_{O_1}}{a} t, \\ y_1 &= l \cos \varphi = l \cos \frac{v_{O_1}}{a} t. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Координаты точки  $M$  в неподвижной системе координат складываются из координат точки  $O_1$ , начала подвижной системы, и координат (3):

$$\begin{aligned} x &= x_{O_1} + x_1 = v_{O_1} t + l \sin \frac{v_{O_1}}{a} t, \\ y &= y_{O_1} + y_1 = a + l \cos \frac{v_{O_1}}{a} t, \end{aligned}$$

тогда радиус-вектор точки  $M$  в неподвижной системе координат будет:

$$\mathbf{r} = \left( v_{O_1} t + l \sin \frac{v_{O_1}}{a} t \right) \mathbf{i} + \left( a + l \cos \frac{v_{O_1}}{a} t \right) \mathbf{j},$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  — орты осей координат.

Скорость точки  $M$  определится как производная радиуса-вектора по времени

$$\mathbf{v} = \left( v_{O_1} + \frac{lv_{O_1}}{a} \cos \frac{v_{O_1}}{a} t \right) \mathbf{i} - \frac{lv_{O_1}}{a} \sin \frac{v_{O_1}}{a} t \cdot \mathbf{j}.$$

Скорость точки  $M$  направлена перпендикулярно мгновенному радиусу  $PM$ .

Ускорение точки  $M$  есть производная от скорости по времени

$$\mathbf{w} = -\frac{lv_{O_1}^2}{a^2} \left( \sin \frac{v_{O_1}}{a} t \mathbf{i} + \cos \frac{v_{O_1}}{a} t \mathbf{j} \right). \quad (4)$$

Замечая, с учетом (3), что радиус-вектор  $O_1M$  равен

$$\mathbf{r}_1 = O_1M = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} = l \left( \sin \frac{v_{O_1}}{a} t \mathbf{i} + \cos \frac{v_{O_1}}{a} t \mathbf{j} \right),$$

представим ускорение (4) в виде

$$\mathbf{w} = -\frac{v_{O_1}^2}{a^2} \mathbf{r}_1.$$

Таким образом, ускорение точки  $M$  постоянно по величине и направлению от точки  $M$  к центру колеса.

**Задача 6.27.** Прямолинейный стержень  $AB$  совершает плоское движение.

Зная ускорение точек  $A$  и  $B$ , определить точку  $C$  прямой  $AB$ , ускорение которой является наименьшим, а также величину и направление ее ускорения.

Решение. Графоаналитический метод. Рассматривая точку  $A$  как полюс, найдем, пользуясь формулой (8\*):

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{BA}^u + \mathbf{w}_{BA}^{np} = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{BA},$$

величину и направление

$$\mathbf{w}_{BA} = \mathbf{w}_{BA}^u + \mathbf{w}_{BA}^{np}.$$

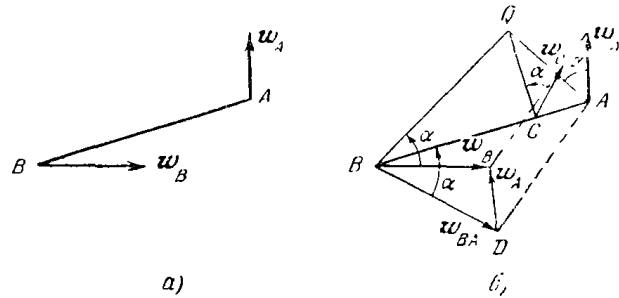
Для этого откладываем из точки  $B$  ускорение  $\mathbf{w}_B$  и равную ему сумму  $\mathbf{w}_{BA} + \mathbf{w}_A$  (рис. б). Ускорение  $\mathbf{w}_{BA}$  образует с прямой  $BA$  угол  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w_{BA}^{np}}{w_{BA}^u} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Зная угол  $\alpha$ , находим мгновенный центр ускорений стержня. Для этого откладываем угол  $\alpha$  от ускорений  $\mathbf{w}_A$  и  $\mathbf{w}_B$  в том же направлении, в котором прямая  $BA$  отложена от  $\mathbf{w}_{BA}$ . Пересечение прямых  $BQ$  и  $AQ$  и определяет положение мгновенного центра ускорений  $Q$ . Зная положение мгновенного центра ускорений, можно легко найти точку  $C$

стержня, ускорение которой является наименьшим. Действительно, ускорения точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра ускорений. Следовательно, для нахождения точки  $C$  достаточно опустить из мгновенного центра ускорений  $Q$  перпендикуляр на стержень  $AB$ . Точка  $C$ , находящаяся в пересечении перпендикуляра со стержнем, будет иметь наименьшее ускорение.

Для нахождения величины и направления ускорения точки  $C$  построим на двух векторах  $\omega_A$  параллелограмм. Направление ускорения точки  $C$  определится углом  $\alpha$ , отложенным от прямой  $QC$ . Величина ускорения точки  $C$  равна длине вектора с началом в точке  $C$  и с концом на стороне параллелограмма, соединяющей концы векторов  $\omega_A$  (рис. б). Это следует из того, что ускорение любой точки стержня  $BA$



К задаче 6.27.

складывается из относительного ускорения, параллельного  $\omega_{BA}$  и пропорционального расстоянию точки до полюса  $A$ , и ускорения полюса  $\omega_A$ . Конец относительного ускорения любой точки стержня лежит на прямой  $DA$ . Прибавляя к нему ускорение полюса  $\omega_A$ , находим, что конец ускорения любой точки стержня  $AB$  лежит на стороне параллелограмма, соединяющего концы векторов  $\omega_A$ .

Величину ускорения  $\omega_C$  можно найти и другим путем. Замечая, что

$$\frac{\omega_C}{QC} = \frac{\omega_{BA}}{BA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

имеем:

$$\omega_C = \frac{QC}{BA} \omega_{BA}.$$

Для приобретения навыков в решении задач на определение ускорений точек плоской фигуры рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 557, 564, 565, 568, 569, 572, 575, 578.

§ 5. План скоростей и план ускорений

План скоростей — это диаграмма, позволяющая графически определить скорости любой точки рассматриваемой плоской фигуры. План скоростей может быть построен, если: а) известна скорость точки  $A$  плоской фигуры и направление скорости другой точки  $B$  фигуры или б) известна скорость точки  $A$  плоской фигуры и мгновенная угловая скорость фигуры. План скоростей может быть построен и для совокупности плоских фигур, образующих плоский механизм.

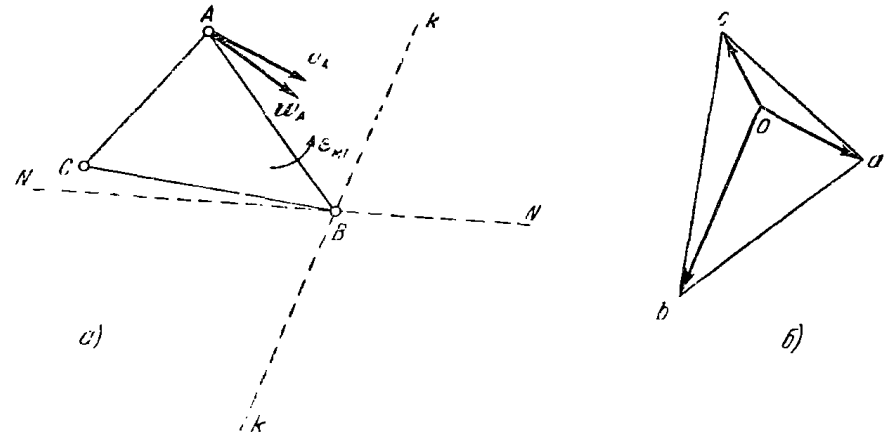


Рис. 6.18.

Для иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Пусть фигура  $ABC$  (рис. 6.18, а) совершает плоское движение. В данный момент скорость точки  $A$  равна  $v_A$ , направление скорости точки  $B$  задано пунктирной линией  $kk$ . Для построения плана скоростей откладываем из произвольного полюса  $o$  (рис. 6.18, б) отрезок  $oa$ , равный  $v_A$ . Из точки  $o$  проводим прямую, параллельную направлению скорости точки  $B$ , а из точки  $a$  — прямую, перпендикулярную отрезку  $AB$ , соединяющему точки  $A$  и  $B$ . Пересечение этих прямых определяет точку  $b$  на плане скоростей. Вектор  $ob$  соответствует скорости точки  $B$

$$\vec{ob} = v_B, \tag{1*}$$

а вектор  $\vec{ab}$  — вращательной скорости точки  $B$  вокруг  $A$ , т. е.

$$\vec{ab} = v_{BA} = \omega \times r_{BA}, \tag{2*}$$

где  $r_1 = \overline{AB}$ . Полученный на рис. 6.18, б векторный треугольник

$$\overline{ob} = \overline{oa} + \overline{ab}$$

соответствует формуле распределения скоростей

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}. \quad (3^*)$$

Из плана скоростей находится непосредственно величина мгновенной угловой скорости плоской фигуры

$$\omega_{\text{мг}} = \frac{v_{AB}}{AB} = \frac{ab}{AB}. \quad (4^*)$$

Для нахождения скорости точки  $C$  достаточно провести из точки  $a$  прямую, перпендикулярную к  $AC$ , а из точки  $b$  (рис. 6.18, б) прямую, перпендикулярную к  $BC$ . Пересечение этих прямых определит точку  $c$  плана скоростей. Отрезок  $oc$  будет изображать скорость точки  $C$ . Скорости точек плоской фигуры, обозначенных прописными буквами, изображаются на плане скоростей векторами, проведенными из полюса  $o$  в соответствующую точку, обозначенную малой буквой;  $\overline{ob}$  означает скорость точки  $B$  и т. д.

Фигура  $abc$  на плане скоростей подобна плоской фигуре  $ABC$  (рис. 6.18, а), так как любая прямая, обозначенная малыми буквами на плане скоростей ( $ab$ , например), перпендикулярна к соответствующей прямой ( $AB$ ) на плоской фигуре. Таким образом, фигура  $abc$  подобна  $ABC$  и повернута на угол  $90^\circ$  в направлении вращения.

План ускорений — это диаграмма, позволяющая графически определить ускорение любой точки рассматриваемой плоской фигуры. План ускорений может быть построен, если имеется план скоростей, известно ускорение какой-либо точки  $A$  плоской фигуры и направление ускорения другой точки  $B$  фигуры. План ускорений может быть также построен, если, кроме плана скоростей и ускорения точки  $A$  плоской фигуры, известно положение центра кривизны траектории какой-либо точки  $B$  фигуры. Для построения плана ускорений удобно пользоваться формулой распределения ускорений при плоско-параллельном движении:

$$\boldsymbol{\omega}_B = \boldsymbol{\omega}_A + \boldsymbol{\omega}_{BA}^n + \boldsymbol{\omega}_{BA}^{sp}. \quad (5^*)$$

Построение плана ускорений произведем для той же плоской фигуры, полагая известными ускорение точки  $A$  и направление ускорения точки  $B$  (прямая  $NN$ ). Откладываем из произвольной точки  $o_1$  (полюса) ускорение  $\boldsymbol{\omega}_A = \overline{o_1a_1}$ . Далее, определяем величину центростремительного ускорения точки  $B$  при вращении вокруг точки  $A$

$$\boldsymbol{\omega}_{BA}^n = \omega_{\text{мг}}^2 \cdot AB = \left(\frac{v_{BA}}{AB}\right)^2 \cdot AB = \frac{(ab)^2}{AB}, \quad (6^*)$$

где  $ab$  находится непосредственно из плана скоростей (рис. 6.18, б). Откладываем найденное по величине центростремительное ускорение  $\boldsymbol{\omega}_{BA}^n$  из точки  $a_1$  (рис. 6.18, в) в направлении, параллельном  $\overline{BA}$ . Обозначим этот вектор  $a_1n_1$ .

Вращательное ускорение  $\boldsymbol{\omega}_{BA}^{sp}$  направлено перпендикулярно к  $\boldsymbol{\omega}_{BA}^n$ , но неизвестно по величине. Из конца  $\boldsymbol{\omega}_{BA}^n = \overline{a_1n_1}$  проводим прямую, перпендикулярную к  $\overline{a_1n_1}$ ; на ней должен находиться конец вектора  $\boldsymbol{\omega}_B$ , отложенного из полюса  $o_1$ . С другой стороны, проводя из  $o_1$  прямую, параллельную направлению ( $NN$ ) ускорения  $\boldsymbol{\omega}_B$ , замечаем, что конец вектора  $\boldsymbol{\omega}_B$  должен находиться и на этой прямой. Следовательно, он находится в точке  $b_1$ , где эти прямые пересекаются.

Далее, находим величину мгновенного углового ускорения плоской фигуры

$$\epsilon_{\text{мг}} = \frac{\boldsymbol{\omega}_{BA}^{sp}}{AB} = \frac{n_1b_1}{AB}. \quad (7^*)$$

Направление  $\epsilon_{\text{мг}}$  можно изображать при помощи дуговой стрелки  $\epsilon_{\text{мг}}$ , которая в данном примере направлена против часовой стрелки. Зная  $\epsilon_{\text{мг}}$  можем, пользуясь формулой распределения ускорений (5\*), найти ускорение любой точки плоской фигуры.

Второй вариант построения плана ускорений получается, если вместо направления ускорения второй точки (точки  $B$ ) известно положение центра кривизны траектории точки  $B$  в данном положении плоской фигуры —  $C_1$ . Построение в этом случае отличается от предыдущего следующим. После того как отложены векторы  $\overline{o_1a_1}$  и  $\overline{a_1n_1}$  и проведено направление  $\boldsymbol{\omega}_{BA}^{sp}$  перпендикулярно к  $\overline{a_1n_1}$ , находим нормальное ускорение точки  $B$

$$\boldsymbol{\omega}_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(ob)^2}{BC_1} \quad (8^*)$$

и откладываем этот вектор от полюса  $o_1$  в направлении  $BC_1$ . Далее, из конца  $\boldsymbol{\omega}_n$  проводим перпендикулярно к  $\boldsymbol{\omega}_n$  прямую  $\boldsymbol{\omega}_\tau$  (направление касательного ускорения). На пересечении этой прямой и ранее проведенного направления  $\boldsymbol{\omega}_{BA}^{sp}$  и находится точка  $b_1$ , конец вектора ускорения  $\boldsymbol{\omega}_B$ .

При построении плана скоростей и плана ускорений плоской фигуры рекомендуется такая последовательность действий:

1) изображаем на чертеже в избранном масштабе плоскую фигуру, скорость и ускорение одной точки  $A$ , выбранной за полюс, направление скорости и ускорения другой точки  $B$ ;

2) строим план скоростей, откладывая из произвольной точки  $o$  известную скорость точки  $A$  и направление скорости второй точки  $B$ ,

затем проводим из конца  $v_A$  прямую, перпендикулярную к  $AB$ , до пересечения с направлением скорости точки  $B$ ;

3) находим, далее, мгновенную угловую скорость фигуры, после чего можем построить скорость любой точки фигуры, или строим скорости других точек плоской фигуры, откладывая их вращательные скорости перпендикулярно к прямым, соединяющим точки с полюсом  $A$ ; величины вращательных скоростей берем пропорциональными расстояниям точек до полюса  $A$ ;

4) строим план ускорений, откладывая из произвольной точки  $o_1$  известное ускорение точки  $A$ , из его конца — центробежное ускорение  $\omega_{BA}^u$  и проводя через конец  $\omega_{BA}^u$  направление вращательного ускорения; пересечение направления ускорения точки  $B$  с направлением  $\omega_{BA}^{np}$  определяет искомое ускорение точки  $B$ ;

5) находим мгновенное угловое ускорение плоской фигуры, после чего можно построить ускорение любой точки.

**Задача 6.28.** Кривошип  $O_1A$  плоского механизма вращается равномерно, делая 300 оборотов в минуту.

Для положения механизма, когда  $\varphi = 0, \pi/6, \pi/2$ , определить графически скорости точек  $A, B, C, D$ , построив план скоростей. Размеры звеньев:  $O_1A = 20$  см,  $AB = 100$  см,  $AD = 50$  см,  $BC = 30$  см,  $O_2C = 50$  см. Координаты точки  $O_2$ : 60 см и 40 см (рис. а).

**Решение.** Для определения скоростей точек плоского механизма для положения, когда  $\varphi = \pi/6$ , вычерчиваем схему механизма в избранном масштабе в этом положении (рис. а) и строим план скоростей.

Скорость точки  $A$  кривошипа направлена перпендикулярно к кривошипу  $O_1A$ . Ее модуль равен произведению угловой скорости кривошипа на его длину

$$v_A = \omega \cdot O_1A = \frac{\pi \cdot n}{30} \cdot O_1A = \frac{\pi \cdot 300}{30} \cdot 20 = 200\pi \text{ см/сек.}$$

Из произвольной точки  $O$  (рис. б) откладываем в масштабе отрезок  $oa$ , изображающий скорость  $v_A$ .

Скорость точки  $B$  направлена вдоль прямой  $O_1B$ . Она определяется формулой

$$v_B = v_A + v_{BA} \quad (1)$$

Для построения скорости точки  $B$  из точки  $o$  (рис. б) проводим прямую, параллельную направлению скорости  $v_B$ , а из точки  $a$  — прямую, перпендикулярную к  $AB$ , до их пересечения в точке  $b$ . Полученный таким образом отрезок  $ob$  определяет скорость точки  $B$ , а отрезок  $ab$  определяет вращательную скорость точки  $B$  вокруг точки  $A$ , величина которой равна

$$v_{BA} = BA \cdot \omega_{BA}^{мг}$$

где  $\omega_{BA}^{мг}$  — мгновенная угловая скорость звена  $AB$ . Измерив длины отрезков  $oa$  и  $ab$  и умножив их на масштаб, имеем:

$$v_B = 115\pi \text{ см/сек.}$$

$$v_{BA} = 170\pi \text{ см/сек.}$$

Скорость точки  $D$  определяется формулой

$$v_D = v_A + v_{DA}$$

Скорость  $v_A$  уже имеется на плане скоростей. Чтобы найти вращательную скорость точки  $D$  вокруг  $A$ , воспользуемся свойством плана скоростей, т. е. находим место точки  $d$  на прямой  $ab$  (рис. б) из соотношения

$$\frac{AB}{AD} = \frac{ab}{ad},$$

так как вращательные скорости точек  $B$  и  $D$  вокруг точки  $A$  пропорциональны их расстояниям до полюса  $A$ . Соединив полученную таким образом точку  $d$  с точкой  $o$ , получим отрезок  $od$ , определяющий скорость точки  $D$ . Измерив длину отрезка  $od$  и умножив ее на масштаб, имеем:

$$v_D = 135\pi \text{ см/сек.}$$

Скорость точки  $C$ , как принадлежащей звену  $BC$ , равна

$$v_C = v_B + v_{BC} \quad (2)$$

С другой стороны, скорость точки  $C$ , как принадлежащей звену  $O_2C$ , направлена перпендикулярно к  $O_2C$ . Для построения скорости точки  $C$  из точки  $o$  (рис. б) проводим прямую, перпендикулярную звену  $O_2C$ , а из точки  $b$  — прямую, перпендикулярную звену  $BC$ , до их пересечения в точке  $c$ . Полученный таким образом отрезок  $oc$  определяет скорость точки  $C$ , а отрезок  $bc$  определяет вращательную скорость точки  $C$  вокруг точки  $B$ , величина которой равна

$$v_{CB} = CB \cdot \omega_{CB}^{мг}$$

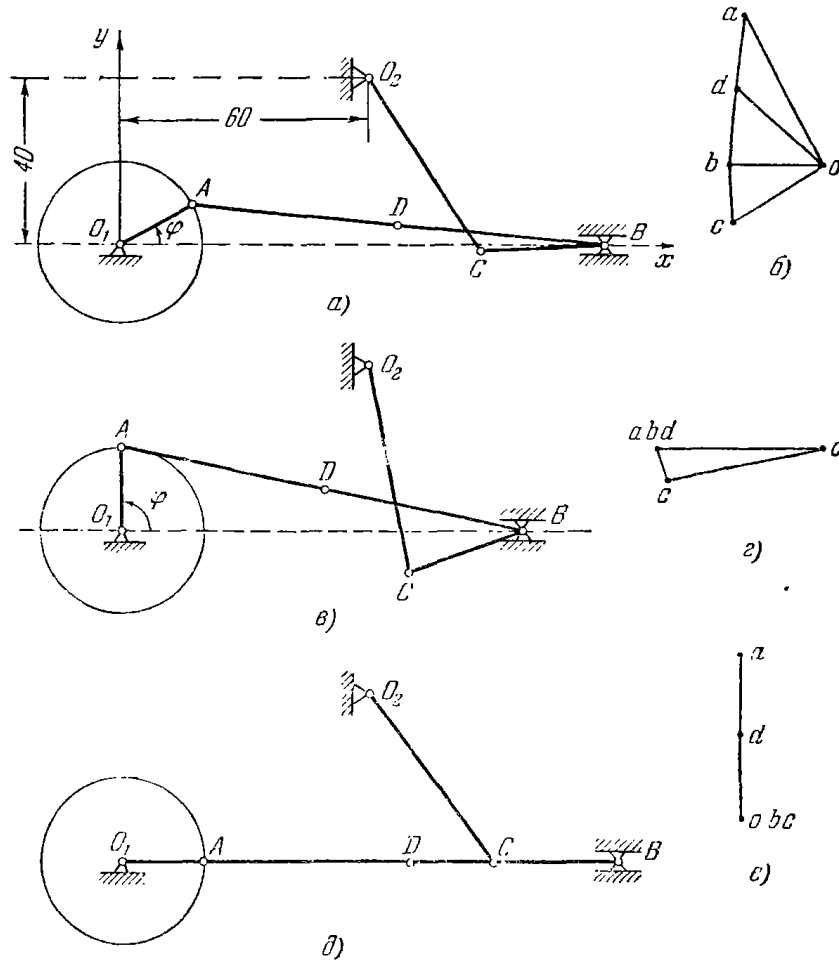
где  $\omega_{CB}^{мг}$  — мгновенная угловая скорость звена  $CB$ . Измерив длины отрезков  $oc$  и  $bc$  и умножив их на масштаб, имеем:

$$v_C = 130\pi \text{ см/сек.}$$

$$v_{CB} = 75\pi \text{ см/сек.}$$

Переходим к построению плана скоростей механизма для положения, когда  $\varphi = \pi/2$ . Вычерчиваем схему механизма в масштабе в этом положении (рис. в) и строим план скоростей. Скорость точки  $A$  кривошипа направлена перпендикулярно к кривошипу  $O_1A$  и ее модуль

равен, как было ранее определено,  $200\pi$  см/сек. Из произвольной точки  $o$  (рис. 2) откладываем в масштабе отрезок  $oa$ , изображающий скорость  $v_A$ . Скорость точки  $B$  направлена вдоль прямой  $O_1B$ . Для построения скорости точки  $B$  из точки  $o$  (рис. 2) проводим прямую,



К задаче 6.28.

параллельную направлению скорости  $v_B$ , а из точки  $a$  — прямую, перпендикулярную к  $AB$ , до их пересечения в точке  $b$ . Сделав это построение, находим, что точка  $b$  совпала с точкой  $a$ . Следовательно, скорость точки  $A$  и скорость точки  $B$  равны по величине и направлению, т. е. шатун  $AB$  в этом положении движется мгновенно поступательно, откуда следует:

$$v_A = v_B = v_D = 200\pi \text{ см/сек.}$$

Скорость точки  $C$  направлена перпендикулярно к звену  $O_2C$ . Для построения скорости точки  $C$  из точки  $o$  (рис. 2) проводим прямую, перпендикулярную к звену  $O_2C$ , а из точки  $b$  — прямую, перпендикулярную к звену  $BC$ , до их пересечения в точке  $c$ . Полученный таким образом отрезок  $oc$  определяет скорость точки  $C$ , а отрезок  $bc$  определяет вращательную скорость точки  $C$  вокруг точки  $B$ :

$$v_{CB} = CB \cdot \omega_{CB}^{mg}$$

где  $\omega_{CB}^{mg}$  — мгновенная угловая скорость звена  $CB$ . Измерив длины отрезков  $oc$  и  $bc$  и умножив их на масштаб, имеем:

$$v_C = 190\pi \text{ см/сек,}$$

$$v_{CB} = 35\pi \text{ см/сек.}$$

Переходим к построению плана скоростей механизма для положения, когда  $\varphi = 0^\circ$ . Вычерчиваем механизм в масштабе в этом положении (рис. 3) и строим план скоростей. Скорость точки  $A$  перпендикулярна к кривошину  $O_1A$  и равна  $200\pi$  см/сек. Из произвольной точки  $o$  (рис. 3) откладываем в масштабе отрезок  $oa$ , изображающий скорость  $v_A$ . Скорость точки  $B$  направлена вдоль прямой  $O_1B$  и определяется формулой (1). Для построения скорости точки  $B$  из точки  $o$  (рис. 3) проводим прямую, параллельную направлению скорости  $v_B$ , а из точки  $a$  — прямую, перпендикулярную к  $AB$ , до их пересечения в точке  $b$ . Сделав это построение, находим, что точка  $b$  совпала с точкой  $o$ . Следовательно, скорость точки  $B$  равна нулю. Это значит, что точка  $B$  является мгновенным центром скоростей точек шатуна  $AB$ . Вращательная скорость точки  $B$  вокруг точки  $A$  равна по модулю  $200\pi$  см/сек. Скорость точки  $D$  в этом случае можно найти, предварительно определив величину мгновенной угловой скорости шатуна  $AB$

$$\omega_{AB}^{mg} = \frac{v_A}{AB} = \frac{200\pi}{100} = 2\pi \text{ сек}^{-1},$$

откуда

$$v_D = BD \cdot \omega_{AB}^{mg} = 50 \cdot 2\pi = 100\pi \text{ см/сек.}$$

Скорость точки  $C$ , как принадлежащей звену  $BC$ , складывается согласно (2) из скорости полюса, точки  $B$ , и вращательной скорости вокруг точки  $B$ .

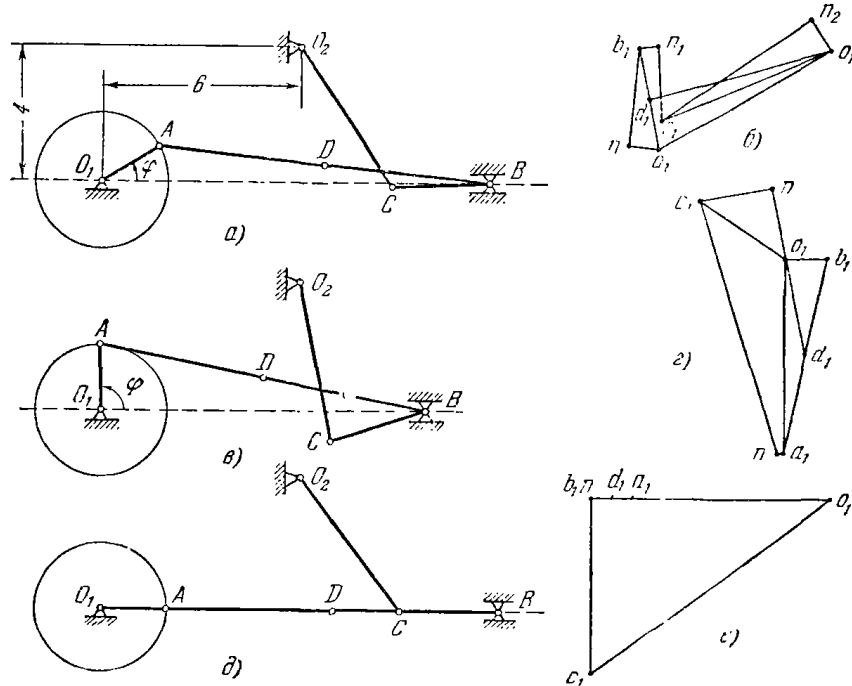
С другой стороны, скорость точки  $C$ , как принадлежащей звену  $O_2C$ , направлена перпендикулярно к  $O_2C$ . Для построения скорости точки  $C$  из точки  $o$  (рис. 3) проводим прямую, перпендикулярную к звену  $O_2C$ , а из точки  $b$  — прямую, перпендикулярную звену  $BC$ , до их пересечения в точке  $c$ .

Сделав это построение, находим, что точка  $c$  совпала с точкой  $o$ , следовательно, скорость точки  $C$  равна нулю.



**Задача 6.29.** Пользуясь условиями предыдущей задачи, найти для точек механизма, скорости которых были определены, ускорения тех же точек, построив план ускорений.

Решение. Строим план ускорений для положения механизма, когда угол  $\varphi = \pi/6$ .



К задаче 6.29.

Так как кривошип  $O_1A$  вращается равномерно, то ускорение точки  $A$  будет нормальным и его модуль равен

$$\omega_A = \omega_A^n = O_1A\omega^2 = 20 \left( \frac{\pi \cdot n}{30} \right)^2 = 2000\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Ускорение  $\omega_A$  направлено от точки  $A$  к точке  $O_1$ . Из произвольной точки  $o_1$  (рис. б) откладываем в выбранном масштабе отрезок  $o_1a_1$ , равный ускорению  $\omega_A$ .

Ускорение точки  $B$  направлено вдоль прямой  $O_1B$ , так как точка  $B$  движется прямолинейно, и равно сумме ускорения полюса, вращательного ускорения и центростремительного ускорения при движении вокруг полюса. Принимая за полюс точку  $A$ , имеем:

$$\omega_B = \omega_A + \omega_{BA}^n + \omega_{BA}^{np}.$$

Вращательное ускорение  $\omega_{BA}^{np}$  направлено перпендикулярно к звену  $AB$ , а центростремительное ускорение  $\omega_{BA}^n$  направлено вдоль звена  $AB$ . Модуль центростремительного ускорения равен

$$\omega_{BA}^n = \frac{(v_{BA})^2}{BA} = \frac{(ba)^2}{BA},$$

где  $ba$  снимается прямо с плана скоростей.

Модуль вращательной скорости  $v_{BA}$  точки  $B$  вокруг точки  $A$ , как определено в предыдущей задаче, для данного положения механизма равен  $170\pi$  см/сек; тогда

$$\omega_{BA}^n = \frac{(170\pi)^2}{100} = 289\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Для построения ускорения точки  $B$  из точки  $o_1$  (рис. б) проводим направление ускорения  $\omega_B$ , а из точки  $a_1$  откладываем вектор ускорения  $\omega_{BA}^n$ , через конец которого, обозначенный буквой  $n$ , проводим направление вращательного ускорения  $\omega_{BA}^{np}$  до пересечения его с направлением ускорения  $\omega_B$  в точке  $b_1$ . Полученный таким образом отрезок  $o_1b_1$  определяет ускорение точки  $B$ . Измерив длину этого отрезка и умножив ее на масштаб, находим:

$$\omega_B = 1917\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Ускорение точки  $D$  найдем, пользуясь свойством плана ускорения. Для этого на отрезке  $a_1b_1$  найдем точку  $d_1$ , удовлетворяющую соотношению

$$\frac{AB}{AD} = \frac{a_1b_1}{a_1d_1}.$$

Найденный таким образом отрезок  $a_1d_1$  будет представлять

$$\omega_{DA} = \omega_{DA}^n + \omega_{DA}^{np}$$

так как  $\omega_{DA}$  и  $\omega_{BA}$  образуют один и тот же угол с ускорением полюса  $\omega_A$  и пропорциональны расстояниям точек  $D$  и  $B$  до полюса  $A$ .

Соединив полученную таким образом точку  $d_1$  с точкой  $o_1$ , получим вектор  $o_1d_1$ , определяющий ускорение точки  $D$ . Измерив длину отрезка  $o_1d_1$  и умножив на масштаб, имеем:

$$\omega_D = 1900\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Переходим к определению ускорения точки  $C$ , которая одновременно принадлежит звену  $BC$  и звену  $O_2C$ . Ускорение точки  $C$  сперва найдем как сумму ускорения полюса, вращательного ускорения и центростремительного ускорения вокруг полюса. Принимая за полюс

точку  $B$ , имеем:

$$\omega_C = \omega_B + \omega_{CB}^n + \omega_{CB}^{np}.$$

Направление ускорения точки  $C$  неизвестно. Вращательное ускорение  $\omega_{CB}^{np}$  направлено перпендикулярно к звену  $BC$ , а центростремительное ускорение  $\omega_{CB}^n$  направлено вдоль звена  $BC$ . Величина центростремительного ускорения

$$\omega_{CB}^n = \frac{(v_{CB})^2}{CB} = \frac{(cb)^2}{CB},$$

где вращательная скорость  $cb$  берется прямо с плана скоростей. Модуль вращательной скорости  $v_{cb}$  точки  $C$  вокруг точки  $B$  для данного положения механизма равен  $75\pi$  см/сек. Тогда

$$\omega_{CB}^n = \frac{(75\pi)^2}{30} = 187,5\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Для построения ускорения точки  $C$  к вектору  $\omega_B$ , который на рис. 6 уже имеется, прибавляем известное по величине и направлению ускорение  $\omega_{CB}^n$ , через конец которого, обозначенный буквой  $n_1$ , проводим направление ускорения  $\omega_{CB}^{np}$ . Где-то на этой линии должен находиться конец вектора  $\omega_C$ , но так как направление ускорения точки  $C$  неизвестно, то многоугольник замкнуть нельзя.

Рассмотрим теперь точку  $C$  как принадлежащую звену  $CO_2$ . Ускорение точки  $C$  найдем, как сумму нормального ускорения, направленного к точке  $O_2$  и касательного ускорения, перпендикулярного к звену  $CO_2$ :

$$\omega_C = \omega_C^n + \omega_C^t.$$

Нормальное ускорение  $\omega_C^n$  направлено от точки  $C$  к точке  $O_2$  и равно по модулю

$$\omega_C^n = \frac{(v_C)^2}{O_2C}.$$

Модуль скорости  $v_C$ , как определено в предыдущей задаче, для данного положения механизма равен  $130\pi$  см/сек. Тогда

$$\omega_C^n = \frac{(130\pi)^2}{50} = 338\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Касательное ускорение  $\omega_C^t$  известно только по направлению; оно перпендикулярно к звену  $O_2C$ .

Для построения ускорения точки  $C$  из точки  $o_1$  плана ускорений проводим вектор нормального ускорения  $\omega_C^n$ , через конец которого, обозначенный буквой  $n_2$ , проводим направление касательного ускорения  $\omega_C^t$ . Где-то на этой прямой должен находиться конец вектора

ускорения  $\omega_C$ . Очевидно, это будет в точке пересечения векторов  $\omega_{CB}^{np}$  и  $\omega_C^t$ , в точке  $c_1$ . Соединив точку  $c_1$  с точкой  $o_1$ , получим вектор  $\overline{o_1c_1}$ , определяющий ускорение точки  $C$ . Измерив длину отрезка и умножив ее на масштаб, находим модуль ускорения

$$\omega_C = 1830\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Переходим к построению плана ускорений механизма для положения, когда угол  $\varphi = \pi/2$  (рис. 6). Так как кривошип  $O_1A$  вращается равномерно, ускорение точки  $A$  будет, как уже определено в предыдущей задаче, нормальным и направленным от точки  $A$  к точке  $O_1$ . Его модуль равен  $2000\pi^2$  см/сек<sup>2</sup>. Из произвольной точки  $o_1$  (рис. 2) откладываем в масштабе отрезок  $\overline{o_1a_1}$ , равный ускорению  $\omega_A$ . Ускорение точки  $B$  направлено вдоль прямой  $O_1B$ , так как точка  $B$  движется прямолинейно, и равно сумме ускорений полюса, вращательного ускорения и центростремительного ускорения вокруг полюса. Принимая за полюс точку  $A$ , имеем:

$$\omega_B = \omega_A + \omega_{BA}^n + \omega_{BA}^{np}.$$

Вращательное ускорение  $\omega_{BA}^{np}$  направлено перпендикулярно к звену  $AB$ , а центростремительное ускорение  $\omega_{BA}^n$  направлено вдоль звена  $AB$ . Величина центростремительного ускорения

$$\omega_{BA}^n = \frac{(v_{BA})^2}{BA} = \frac{(ba)^2}{BA},$$

где  $ba$  берется с плана скоростей.

Модуль вращательной скорости  $v_{BA}$  точки  $B$  вокруг точки  $A$ , как определено в предыдущей задаче, для данного положения механизма равен нулю, следовательно, центростремительное ускорение тоже равно нулю. Для построения ускорения точки  $B$  из конца вектора  $\omega_A$ , который уже имеется на рис. 2, проводим направление вращательного ускорения  $\omega_{BA}^{np}$ , а из точки  $o_1$  проводим направление ускорения  $\omega_B$  до его пересечения с направлением ускорения  $\omega_{BA}^{np}$  в точке  $b_1$ . Соединив точку  $o_1$  с точкой  $b_1$ , получаем вектор  $\overline{o_1b_1}$ , определяющий ускорение точки  $B$ . Измерив его длину и умножив на масштаб, находим модуль ускорения

$$\omega_B = 433\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Ускорение точки  $D$  найдем, пользуясь свойством плана ускорения. Для этого на отрезке  $\overline{a_1b_1}$  найдем точку  $d_1$  из соотношения

$$\frac{AB}{AD} = \frac{a_1b_1}{a_1d_1}.$$

Тогда отрезок  $\overline{a_1 d_1}$  определит

$$\omega_{DA} = \omega_{DA}^u + \omega_{DA}^{np}.$$

Соединив полученную таким образом точку  $d_1$  с точкой  $O_1$ , получим вектор  $\overline{O_1 d_1}$ , определяющий ускорение точки  $D$ . Измерив длину отрезка  $O_1 d_1$  и умножив ее на масштаб, находим модуль ускорения

$$\omega_D = 1000\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Переходим к определению ускорения точки  $C$ , которая одновременно принадлежит звену  $BC$  и звену  $O_2 C$ . Ускорение точки  $C$  сперва найдем как сумму ускорений полюса, вращательного ускорения и центростремительного ускорения вокруг полюса. Принимая за полюс точку  $B$ , имеем:

$$\omega_C = \omega_B + \omega_{CB}^u + \omega_{CB}^{np}.$$

Вращательное ускорение  $\omega_{CB}^{np}$  направлено перпендикулярно к звену  $BC$ , а центростремительное ускорение  $\omega_{CB}^u$  направлено вдоль звена  $BC$ . Модуль центростремительного ускорения равен

$$\omega_{CB}^u = \frac{(v_{CB})^2}{CB} = \frac{(cb)^2}{CB}.$$

Модуль вращательной скорости  $v_{CB}$  точки  $C$  вокруг точки  $B$ , как определено в предыдущей задаче, для данного положения механизма равен  $35\pi$  см/сек. Тогда

$$\omega_{CB}^u = \frac{(35\pi)^2}{30} = 40,8\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Для построения ускорения точки  $C$  к вектору  $\omega_B$ , который на рис. 2 уже имеется, прибавляем вектор известного по величине и направлению ускорения  $\omega_{CB}^u$ , через конец которого, обозначенный точкой  $n_1$ , проводим направление ускорения  $\omega_{CB}^{np}$ . Где-то на этой линии должен находиться конец вектора  $\omega_C$ , но так как направление ускорения точки  $C$  неизвестно, многоугольник замкнуть нельзя.

Рассмотрим теперь точку  $C$  как принадлежащую звену  $CO_2$  и найдем ускорение точки  $C$  как сумму нормального ускорения, направленного к точке  $O_2$ , и касательного ускорения, перпендикулярного к  $O_2 C$ :

$$\omega_C = \omega_C^n + \omega_C^t.$$

Нормальное ускорение направлено от точки  $C$  к точке  $O_2$  и равно по модулю

$$\omega_C^n = \frac{v_C^2}{O_2 C}.$$

Модуль скорости  $v_C$ , как определено в предыдущей задаче, для данного положения механизма равен  $190\pi$  см/сек. Тогда

$$\omega_C^n = \frac{(190\pi)^2}{50} = 722\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Касательное ускорение известно только по направлению; оно перпендикулярно к звену  $O_2 C$ . Для построения ускорения точки  $C$  из точки  $o_1$  плана ускорений проводим вектор  $\omega_C^n$ , через конец которого, обозначенный буквой  $n$ , проводим направление касательного ускорения  $\omega_C^t$ . Где-то на этой прямой должен находиться конец вектора  $\omega_C$ . Очевидно, это будет в точке пересечения направлений векторов  $\omega_{CB}^{np}$  и  $\omega_C^t$ , т. е. в точке  $c_1$ . Соединив точку  $c_1$  с точкой  $o_1$ , получим вектор  $\overline{o_1 c_1}$ , определяющий ускорение точки  $C$ . Измерив его длину и умножив на масштаб, находим модуль ускорения

$$\omega_C = 1300\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Переходим к построению плана ускорений механизма для положения, когда угол  $\varphi = 0^\circ$  (рис. 8). Ускорение точки  $A$  по-прежнему равно  $2000\pi^2$  см/сек<sup>2</sup> и направлено от точки  $A$  к точке  $O_1$ . Из произвольной точки  $o_1$  (рис. 8) откладываем отрезок  $\overline{o_1 a_1}$ , равный ускорению  $\omega_A$ .

Ускорение точки  $B$  направлено вдоль прямой  $O_1 B$ , так как точка движется прямолинейно, и равно сумме ускорений полюса, вращательного ускорения и центростремительного ускорения вокруг полюса. Принимая за полюс точку  $A$ , имеем:

$$\omega_B = \omega_A + \omega_{BA}^u + \omega_{BA}^{np}.$$

Вращательное ускорение  $\omega_{BA}^{np}$  направлено перпендикулярно к звену  $AB$ , а центростремительное ускорение  $\omega_{BA}^u$  направлено вдоль звена  $AB$ .

Величина центростремительного ускорения

$$\omega_{BA}^u = \frac{(v_{BA})^2}{BA} = \frac{(ba)^2}{BA},$$

где  $ba$  берется с плана скоростей.

Модуль вращательной скорости  $v_{BA}$  точки  $B$  вокруг точки  $A$ , как определено в предыдущей задаче, для данного положения механизма равен  $200\pi$  см/сек.

Отсюда

$$\omega_{BA}^u = \frac{(200\pi)^2}{100} = 400\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Для построения ускорения точки  $B$  проводим из точки  $o_1$  (рис. 8) направление ускорения  $\omega_B$ , а из точки  $a_1$  откладываем известное по величине и направлению ускорение  $\omega_{BA}^u$ , через конец которого, обозна-

ченный буквой  $n$ , проводим направление ускорения  $\omega_{BA}^{np}$  до пересечения его с направлением ускорения  $\omega_B$  в точке  $b_1$ .

Как видно из рисунка, точка  $b_1$  совпала с точкой  $n$ , следовательно, вращательное ускорение  $\omega_{BA}^{np}$  равно нулю. Полученный отрезок  $\overline{o_1 b_1}$  определяет ускорение точки  $B$ . Измерив длину этого отрезка и умножив на масштаб, находим модуль ускорения  $\omega_B = 2400\pi^2$  см/сек<sup>2</sup>.

Ускорение точки  $D$  найдем, пользуясь свойством плана ускорений. Для этого на отрезке  $\overline{a_1 b_1}$  (рис. *e*) находим точку  $d_1$  из соотношения

$$\frac{AB}{AD} = \frac{a_1 b_1}{a_1 d_1}.$$

Измерив отрезок  $\overline{o_1 d_1}$  и умножив его длину на масштаб, находим модуль ускорения

$$\omega_D = 2200\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Переходим к определению ускорения точки  $C$ , которая принадлежит одновременно звену  $BC$  и звену  $O_2C$ . Ускорение точки  $C$  сперва найдем как сумму ускорений полюса, вращательного ускорения и центростремительного ускорения при движении вокруг полюса. Приняв за полюс точку  $B$ , имеем:

$$\omega_C = \omega_B + \omega_{CB}^t + \omega_{CB}^{np}.$$

Модуль центростремительного ускорения равен

$$\omega_{CB}^t = \frac{(v_{CB})^2}{CB} = \frac{(cb)^2}{CB},$$

где  $cb$  берется с плана скоростей.

Модуль вращательной скорости  $v_{CB}$  точки  $C$  вокруг точки  $B$ , как определено в предыдущей задаче, для данного положения механизма равен нулю, следовательно, центростремительное ускорение также равно нулю.

Вращательное ускорение  $\omega_{BC}^{np}$  направлено перпендикулярно к звену  $BC$ . Для построения ускорения точки  $C$  проводим через точку  $b_1$  плана ускорений направление ускорения  $\omega_{CB}^{np}$ . Где-то на этом направлении должен находиться конец вектора ускорения  $\omega_C$ , но так как направление вектора  $\omega_C$  неизвестно, построение дальше вести нельзя.

Рассмотрим теперь точку  $C$  как принадлежащую звену  $CO_2$ . Ускорение точки  $C$  найдем как сумму касательного и нормального ускорений

$$\omega_C = \omega_C^t + \omega_C^n.$$

Нормальное ускорение  $\omega_C^n$  направлено от точки  $C$  к точке  $O_2$  и равно

$$\omega_C^n = \frac{v_C^2}{O_2 C}.$$

Скорость  $v_C$ , как определено в предыдущей задаче, для данного положения механизма равна нулю, следовательно, ее нормальное ускорение равно нулю. Касательное ускорение точки  $C$  направлено перпендикулярно к  $O_2C$ . Для построения ускорения точки  $C$  через точку  $o_1$  плана ускорений проводим направление ускорения  $\omega_C^t$ . Где-то на этой прямой должен находиться конец вектора  $\omega_C$ . Очевидно, это будет в точке пересечения направлений ускорений  $\omega_{CB}^{np}$  и  $\omega_C^t$ , т. е. в точке  $e_1$ . Соединив точку  $o_1$  с точкой  $e_1$ , получаем вектор  $\overline{o_1 e_1}$ , определяющий ускорение точки  $C$ . Измерив его длину и умножив на масштаб, находим модуль ускорения

$$\omega_C = 3000\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

**Задача 6.30.** Определить скорости и ускорения точек  $A$ ,  $B$ ,  $D$  кривошипно-шатунного механизма (рис. *a*) построением плана скоростей и ускорений. Кривошип  $O_1A$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = 30$  сек<sup>-1</sup>. Размеры звеньев  $O_1A = 40$  см,  $O_1O_2 = 160$  см,  $AB = 180$  см,  $O_2B = 70$  см,  $DC = 200$  см, угол  $\varphi = \pi/6$ .

Решение. Строим план скоростей. Скорость точки  $A$  направлена перпендикулярно к кривошпну  $O_1A$  и равна по модулю

$$v_A = O_1A \cdot \omega = 40 \cdot 30 = 1200 \text{ см/сек}.$$

Из произвольной точки  $o$  (рис. *б*) откладываем в масштабе отрезок  $\overline{oa}$ , равный скорости  $v_A$ . Скорость точки  $B$  шатуна равна геометрической сумме скорости полюса и вращательной скорости вокруг полюса. Принимая за полюс точку  $A$ , имеем:

$$v_B = v_A + v_{BA}.$$

Скорость  $v_A$  на плане скоростей уже есть. Вращательная скорость  $v_{BA}$  направлена перпендикулярно к шатуну  $AB$ . Скорость  $v_B$  направлена перпендикулярно к  $O_2B$ .

Для построения скорости точки  $B$  проводим через точку  $o$  (рис. *б*) прямую, параллельную скорости  $v_B$ , а из точки  $a$  прямую, перпендикулярную к  $AB$ , до их пересечения в точке  $b$ . Отрезок  $\overline{ob}$  определяет скорость точки  $B$ . Измерив длину отрезка  $\overline{ob}$  и умножив на масштаб, находим:

$$v_B = 460 \text{ см/сек}.$$

Отрезок  $\overline{ab}$  определяет вращательную скорость точки  $A$  вокруг точки  $B$ . Измерив его длину и умножив на масштаб, находим:

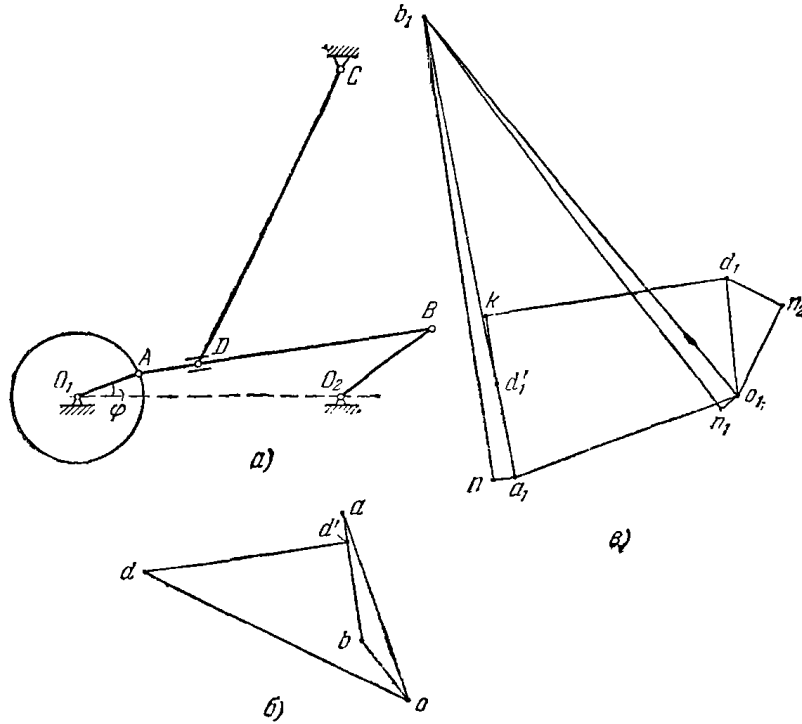
$$v_{BA} = 760 \text{ см/сек}.$$

Скорость ползуна  $D$  направлена перпендикулярно к коромыслу  $CD$ . С другой стороны, рассматривая движение ползуна как составное движение, состоящее из переносного вместе с шатуном  $AB$  и отно-

сительного движения вдоль шатуна, находим, что скорость точки  $D$  равна сумме переносной относительной скоростей

$$v_D = v_D^e + v_D^r.$$

Переносная скорость  $v_D^e$  есть скорость точки  $D'$  шатуна, совпадающей в данный момент с ползуном, а относительная скорость  $v_D^r$



К задаче 6.30.

есть скорость ползуна при его движении вдоль шатуна. Так как переносная скорость  $v_D^e$  есть скорость точки  $D'$  шатуна, совпадающей в данный момент с ползуном, то определяем ее, пользуясь свойством плана скоростей. Для этого делим отрезок  $\overline{ab}$  на отрезки, пропорциональные  $AD$  и  $DB$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{ad'}{d'b}.$$

Тогда отрезок  $\overline{od'}$  представляет переносную скорость ползуна  $D$ . Через найденную таким образом точку  $d'$  проводим направление относительной скорости  $v_D^r$  параллельно шатуну  $AB$ , а из точки  $o$  проводим направление абсолютной скорости точки  $D$ , перпендикулярно

к коромыслу  $CD$  до пересечения с направлением скорости  $v_D^r$  в точке  $d$ . Полученный отрезок  $\overline{od}$  определяет скорость точки  $D$ . Измерив длину этого отрезка и умножив на масштаб, находим:

$$v_D = 1780 \text{ см/сек.}$$

Переходим к построению плана ускорений. Так как кривошип  $O_1A$  вращается равномерно, ускорение точки  $A$  будет нормальным. Направлено оно вдоль кривошипа от точки  $A$  к точке  $O_1$  и равно по модулю

$$\omega_A = O_1A \cdot \omega^2 = 40 \cdot 30^2 = 36\,000 \text{ см/сек}^2.$$

Из произвольной точки  $o_1$  (рис. в) откладываем в масштабе вектор  $o_1a_1$ , равный ускорению  $\omega_A$ .

Переходим к определению ускорения точки  $B$ , которая одновременно принадлежит звену  $AB$  и звену  $O_2B$ .

Ускорение точки  $B$ , как принадлежащей звену  $AB$ , будем искать как геометрическую сумму ускорения полюса, центростремительного ускорения, направленного к полюсу, и вращательного ускорения вокруг полюса. Принимая за полюс точку  $A$ , имеем:

$$\omega_B = \omega_A + \omega_{BA}^u + \omega_{BA}^{vp}.$$

Ускорение  $\omega_A$  на плане ускорений уже есть.

Вращательное ускорение  $\omega_{BA}^{vp}$  направлено перпендикулярно к звену  $AB$ , а центростремительное ускорение  $\omega_{BA}^u$  направлено вдоль звена  $AB$  и равно по модулю

$$\omega_{BA}^u = \frac{(v_{BA})^2}{AB}.$$

Модуль вращательной скорости точки  $B$  вокруг точки  $A$ , как мы уже определили, равен  $760 \text{ см/сек}$ . Тогда

$$\omega_{BA}^u = \frac{760^2}{180} = 3210 \text{ см/сек}^2.$$

Для построения ускорения точки  $B$  к вектору  $\omega_A$  прибавляем вектор  $\omega_{BA}^u$ , через конец которого, обозначенный точкой  $n$ , проводим направление ускорения  $\omega_{BA}^{vp}$ . Где-то на этой прямой должен находиться конец вектора  $\omega_B$ , но так как величина  $\omega_{BA}^{vp}$  и направление ускорения точки неизвестны, многоугольник замкнуть нельзя.

Рассмотрим теперь точку  $B$  как принадлежащую звену  $O_2B$  и найдем ускорение точки  $B$ , как геометрическую сумму нормального и касательного ускорений

$$\omega_B = \omega_B^n + \omega_B^c.$$

Нормальное ускорение  $\omega_B^n$  направлено от точки  $B$  к точке  $O_2$  и равно по модулю

$$\omega_B^n = \frac{v_B^2}{BO_2}.$$

Модуль скорости  $v_B$ , как мы уже определили, равен  $460 \text{ см/сек}$ . Тогда

$$\omega_B^n = \frac{460^2}{70} = 3020 \text{ см/сек}^2.$$

Касательное ускорение  $\omega_B^c$  известно по направлению, оно перпендикулярно к  $O_2B$ . Для построения ускорения точки  $B$  из точки  $o_1$  плана ускорений проводим вектор  $\omega_B^n$ , через конец которого, обозначенный буквой  $n_1$ , проводим направление ускорения  $\omega_B^c$ . Где-то на этой прямой должен находиться конец вектора  $\omega_B$ . Очевидно, это будет в точке пересечения направлений векторов  $\omega_{BA}^{sp}$  и  $\omega_B^c$ , т. е. в точке  $b_1$ . Соединив точку  $o_1$  с точкой  $b_1$ , получаем отрезок  $o_1b_1$ , определяющий ускорение  $\omega_B$ . Измерив его и умножив на масштаб, находим  $\omega_B = 51\,500 \text{ см/сек}^2$ .

Переходим к определению ускорения ползуна  $D$ . Движение ползуна рассмотрим вначале как сложное движение, складывающееся из переносного движения вместе с шатуном  $AB$  и относительного движения по шатуну. Тогда ускорение ползуна  $D$  согласно теореме Кориолиса равно сумме переносного, относительного ускорений и ускорения Кориолиса

$$\omega_D = \omega_D^e + \omega_D^c + \omega_D^k.$$

Переносное ускорение  $\omega_D^e$  — это ускорение точки  $D'$  шатуна, совпадающей в данный момент с ползуном. Определяем его, пользуясь свойством плана ускорений. Для этого достаточно разделить отрезок  $a_1b_1$  на плане ускорений на части, пропорциональные  $AD$  и  $DB$ ,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{a_1d_1'}{d_1'b'}.$$

Соединив найденную таким образом точку  $d_1'$  с точкой  $o_1$ , найдем ускорение точки  $D'$  шатуна, т. е. переносное ускорение  $\omega_D^e$ . Действительно,

$$\omega_D^e = \omega_A + \omega_{DA}^n + \omega_{DA}^{sp},$$

по отрезок  $\overline{o_1a_1}$  соответствует ускорению полюса  $\omega_A$ , а отрезок  $\overline{a_1d_1'}$  равен сумме  $\omega_{DA}^n + \omega_{DA}^{sp}$ .

Таким образом,

$$\omega_D^e = o_1d_1'.$$

Переходим, далее, к определению ускорения Кориолиса, модуль которого равен

$$\omega_D^c = 2 \cdot \omega_e \cdot v_r \sin(\widehat{\omega_e v_r}).$$

Относительная скорость  $v_r$  точки  $D'$  определяется из плана скоростей, ей соответствует отрезок  $d'd$  (рис. б). Ее модуль

$$v_r = 1240 \text{ см/сек}.$$

Переносная угловая скорость  $\omega_e$  есть мгновенная угловая скорость шатуна. Ее модуль

$$\omega_e = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{760}{180} = 4,2 \text{ сек}^{-1}.$$

Следовательно,

$$\omega_D^c = 2 \cdot 4,2 \cdot 1240 = 10\,415 \text{ см/сек}^2,$$

так как

$$\sin(\widehat{\omega_e v_r}) = \sin 90^\circ = 1.$$

Находим направление ускорения Кориолиса. Относительная скорость  $v_r$  точки  $D$  направлена по шатуну от точки  $D$  к точке  $A$ . Вектор  $\omega_e$  направлен от нас перпендикулярно к плоскости рисунка. Следовательно, по правилу Жуковского ускорение Кориолиса точки  $D$  направлено перпендикулярно к  $AB$  вверх. Откладываем его величину из точки  $d_1'$  (рис. в).

Третья составляющая ускорения точки  $D$ , ее относительное ускорение  $\omega_D^k$ , направлена по  $AB$ , но неизвестна по модулю. Поэтому из конца ускорения Кориолиса, точки  $k$ , можно провести только направление  $\omega_D^k$ . Где-то на этой линии должен находиться конец вектора ускорения  $\omega_D$ .

С другой стороны, рассматривая точку  $D$  как точку, принадлежащую звену  $CD$ , найдем ее ускорение как сумму нормального и касательного ускорений

$$\omega_D = \omega_D^n + \omega_D^c.$$

Модуль нормального ускорения  $\omega_D^n$  равен

$$\omega_D^n = \frac{v_D^2}{CD} = \frac{1780^2}{200} = 15\,840 \text{ см/сек}^2.$$

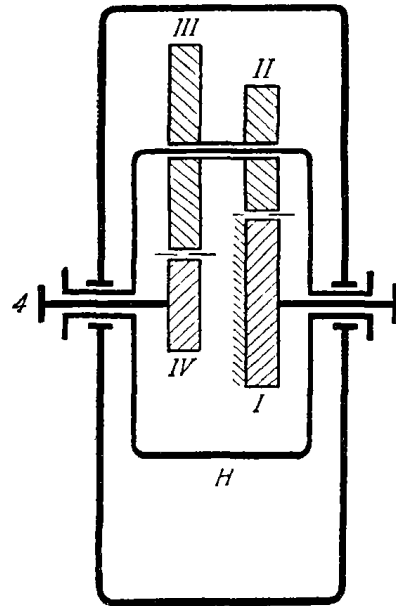
Нормальное ускорение направлено от точки  $D$  к точке  $C$ . Для построения ускорения точки  $D$  из точки  $o_1$  плана ускорений откладываем вектор  $\omega_D^n$ , через конец которого, обозначенный буквой  $n_2$ , проводим направление ускорения  $\omega_D^c$  перпендикулярно к звену  $CD$ . Где-то на этой прямой должен находиться конец вектора  $\omega_D$ . Очевидно, это будет в точке пересечения векторов  $\omega_D^c$  и  $\omega_D^n$ , т. е. в точке  $d_1$ .

Соединив точку  $d_1$  с точкой  $o_1$ , получаем отрезок  $\overline{o_1 d_1}$ , соответствующий ускорению  $\omega_D$ . Измерив его и умножив на масштаб, находим:

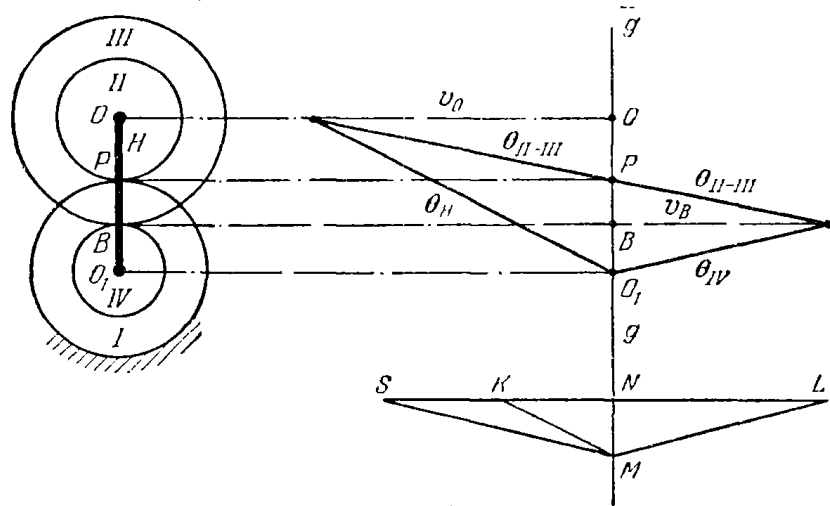
$$\omega_D = 18\,300 \text{ см/сек}^2.$$

**Задача 6.31.** Построить план линейных и угловых скоростей для редуктора, изображенного на рис. а. Редуктор состоит из водила  $H$ , колеса  $I$  радиуса  $r_I = 16 \text{ см}$ , закрепленного неподвижно, сателлитов  $II$  и  $III$  радиусов  $r_{II} = 11 \text{ см}$  и  $r_{III} = 19 \text{ см}$ , жестко скрепленных друг с другом и свободно посаженных на колесе водила  $H$ , и ведомого колеса  $IV$  радиуса  $r_{IV} = 8 \text{ см}$ , заклиненного на валу 4. Угловая скорость водила равна  $\Omega = 40\pi \text{ сек}^{-1}$ .

**Решение.** Вычерчиваем шестерни редуктора (рис. б) в определенном масштабе:  $1 \text{ см} = m \text{ м}$ . Проведем линию  $g-g$ , параллельную



а)



б)

К задаче 6.31.

линии центров  $OO_1$ , и спроектируем на нее точки, скорости которых известны: точку  $O_1$  — центр вращения водила  $H$  и колеса  $IV$ , ее скорость

$v_{O_1} = 0$ , точку  $P$  — мгновенный центр вращения сателлитов  $II$  и  $III$ , ее скорость  $v_P = 0$  и точку  $O$  — конец водила  $H$ , модуль скорости которой равен

$$v_O = \Omega \cdot OO_1 = 40\pi(0,16 + 0,11) = 33,8 \text{ м/сек.}$$

Вектор  $v_O$  направлен перпендикулярно к водилу влево. Построим  $v_O$  на плане скоростей в выбранном масштабе ( $1 \text{ см} = k \text{ м/сек}$ ). Соединим конец вектора  $v_O$  с центром вращения водила, тогда прямая линия  $\theta_H$  даст распределение скоростей на водиле  $H$ . Соединяя конец вектора  $v_O$  с точкой  $P$  прямой линией  $\theta_{II-III}$ , получим распределение скоростей на сателлитах  $II$  и  $III$ . Продолжим линию  $\theta_{II-III}$  до пересечения с направлением скорости точки  $B$ . Точка их пересечения определит скорость  $v_B$ . Зная скорость точки  $B$  и положение центра вращения колеса  $IV$ , проведем прямую  $\theta_{IV}$ , которая покажет распределение скоростей на колесе  $IV$ .

После построения плана линейных скоростей можно определить величины угловых скоростей всех элементов редуктора. Для этого на продолжении линии  $g-g$  выберем произвольную точку  $N$  и отложим от нее отрезок  $NM$  произвольной длины  $c$  (в нашем примере  $c = 1 \text{ см}$ ). Из точки  $M$  проведем линии:  $MS$  параллельно  $\theta_{II-III}$ ,  $ML$  параллельно  $\theta_{IV}$  и  $KM$  параллельно  $\theta_H$ .

Отрезок  $NS = 4,1$  в масштабе  $\frac{30 \cdot k}{\pi m \cdot c}$  даст модуль угловой скорости в об/мин сателлитов  $II-III$

$$n_{II-III} = \frac{4,1 \cdot 30 \cdot k}{\pi \cdot m \cdot 1} = \frac{4,1 \cdot 30 \cdot 6,55}{\pi \cdot 0,1 \cdot 1} = 2560 \text{ об/мин,}$$

или в масштабе  $\frac{k}{m \cdot c}$  модуль угловой скорости в радианах в секунду

$$\omega_{II-III} = \frac{4,1 \cdot k}{m \cdot c} = \frac{4,1 \cdot 6,55}{0,1 \cdot 1} = 270 \text{ сек}^{-1}.$$

Отрезок  $NL = 3,8 \text{ см}$  в соответствующем масштабе дает значение

$$n_{IV} = \frac{3,8 \cdot 30 \cdot 6,55}{\pi \cdot 0,1 \cdot 1} = 2380 \text{ об/мин,}$$

$$\omega_{IV} = \frac{3,8 \cdot 6,55}{0,1 \cdot 1} = 248 \text{ сек}^{-1}.$$

Отрезок  $NK = 1,9 \text{ см}$  даст значение угловой скорости водила  $H$

$$n_H = \frac{1,9 \cdot 30 \cdot 6,55}{\pi \cdot 0,1 \cdot 1} \cong 1200 \text{ об/мин,}$$

$$\omega_H = \frac{1,9 \cdot 6,55}{0,1 \cdot 1} = 126 \text{ сек}^{-1}.$$

Результаты расчетов зависят от точности построения и измерения графических величин. Допускаемая ошибка не превышает  $2\%$ .

**§ 6. Сложение вращений твердого тела вокруг параллельных осей**

При сложении вращений твердого тела, происходящих вокруг параллельных осей, могут встретиться три случая.

1. Переносная  $\omega_e$  и относительная  $\omega_r$  угловые скорости *одного направления* (рис. 6.19, а); в этом случае величина абсолютной угловой скорости равна сумме модулей составляющих угловых скоростей

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r \quad (1^*)$$

и направлена в ту же сторону, а абсолютный мгновенный центр вращения  $P$  делит расстояние между переносным мгновенным центром  $P_e$

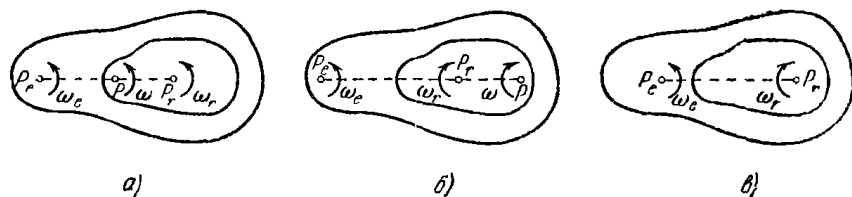


Рис. 6.19.

и относительным мгновенным центром  $P_r$  на части, обратно пропорциональные величинам переносной и относительной угловых скоростей:

$$\frac{P_e P}{P_r P} = \frac{\omega_r}{\omega_e} \quad (2^*)$$

2. Переносная и относительная угловые скорости *противоположных направлений* (рис. б) и не равны друг другу по величине; в этом случае величина абсолютной угловой скорости равна модулю разности составляющих угловых скоростей

$$\omega_a = |\omega_r - \omega_e| \quad (3^*)$$

и направлена в сторону большей из составляющих угловых скоростей (на рис. 6.19, б принято  $\omega_r > \omega_e$ ), а абсолютный мгновенный центр вращения  $P$  делит расстояние между переносным мгновенным центром  $P_e$  и относительным мгновенным центром  $P_r$  внешним образом на части, обратно пропорциональные величинам переносной и относительной угловых скоростей:

$$\frac{P_e P}{P_r P} = \frac{\omega_r}{\omega_e} \quad (4^*)$$

3. Переносная и относительная угловые скорости *противоположных направлений* (рис. 6.19, в) и равны друг другу по величине; в этом случае величина абсолютной угловой скорости равна нулю, твердое тело совершает поступательное движение, скорости всех

точек равны, они направлены перпендикулярно к прямой  $P_e P_r$  и их модуль

$$v = P_e P_r \cdot \omega_e = P_e P_r \cdot \omega_r \quad (5^*)$$

При решении задач на определение угловых скоростей планетарных и дифференциальных зубчатых передач обычно применяются формулы Виллиса.

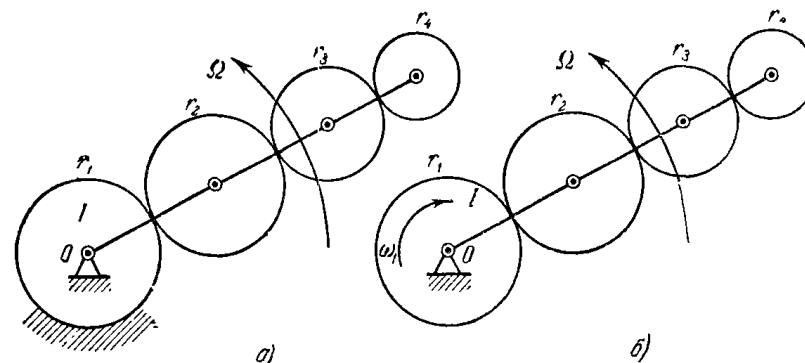


Рис. 6.20.

Планетарной зубчатой передачей называется передача (рис. 6.20, а), у которой одно колесо неподвижно, а остальные колеса приводятся в движение кривошипом, ось вращения которого совпадает с осью неподвижного колеса; оси остальных колес находятся на кривошине.

Зубчатая передача называется *дифференциальной* (рис. 6.20, б), если колесо  $I$  вращается вокруг той же оси, что и кривошип.

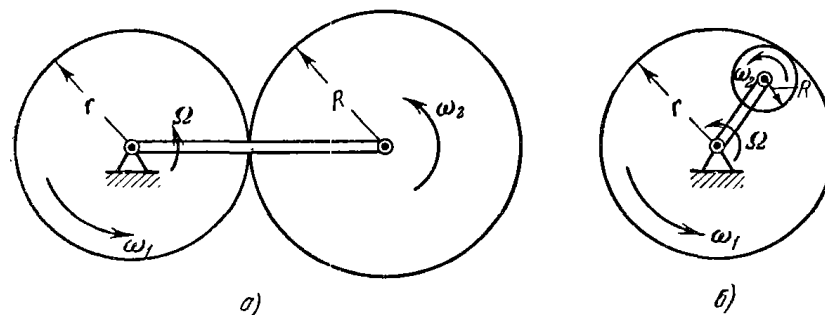


Рис. 6.21.

Формулы Виллиса определяют зависимость между угловыми скоростями зубчатых колес дифференциальной и планетарной передач в случае внешнего и внутреннего зацеплений. В случае внешнего зацепления двух колес (рис. 6.21, а) зависимость между проекциями угловых скоростей колес (полагаем ось  $z$  направленной на читателя) определяется формулой

$$\frac{\omega_{1z} - \Omega_z}{\omega_{2z} - \Omega_z} = -\frac{R}{r} = -\frac{z_2}{z_1}, \quad (6^*)$$



где  $R, r$  — радиусы колес,  $z_1, z_2$  — число зубцов. Знак минус взят потому, что при внешнем зацеплении и неподвижных осях колеса вращаются в противоположных направлениях.

В случае внутреннего зацепления двух колес (рис. 6.21, б) эта зависимость имеет вид

$$\frac{\omega_{1z} - \Omega_z}{\omega_{2z} - \Omega_z} = \frac{R}{r} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (7^*)$$

Для получения формул (6\*) и (7\*) даем мысленно основанию механизма вращение с угловой скоростью, равной по величине угловой скорости кривошипа, но направленной в противоположную сторону. Тогда кривошип становится неподвижным, а угловые скорости всех колес уменьшаются на величину  $\Omega_z$ . После этого, рассматривая каждую пару колес, находящихся в зацеплении, можем написать основные соотношения как для пары зубчатых колес с неподвижными осями.

Способом Виллиса определяются абсолютные угловые скорости всех зубчатых колес. Далее, используя формулы и методы определения скоростей и ускорений точек тела в плоско-параллельном движении, можно найти скорости и ускорения любой точки звеньев механизма. Можно поступить иначе. Сначала определить относительную и переносную угловые скорости и, далее, пользуясь теоремой сложения скоростей и теоремой Кориолиса, найти скорости и ускорения любой точки колеса.

При решении задач на сложение вращений вокруг параллельных осей рекомендуется такая последовательность действий.

А) В задачах на определение передаточных чисел, угловых скоростей, скоростей и ускорений различных точек планетарных и дифференциальных зубчатых передач, решаемых методом плоского движения:

1) даем мысленно основанию механизма вращение с угловой скоростью, равной по модулю угловой скорости кривошипа и направленной в противоположную сторону;

2) составляем для каждой пары колес, находящихся в зацеплении, уравнение (6\*) или (7\*), выражающее зависимость между угловыми скоростями зубчатых колес;

3) для определения угловой скорости крайнего зубчатого колеса перемножаем все уравнения, составленные для каждой пары колес; значения угловых скоростей промежуточных колес (сателлитов) при этом сокращаются и находится угловая скорость крайнего колеса;

4) зная угловую скорость крайнего колеса и скорость его центра как точки, принадлежащей одновременно и колесу и кривошипу, определяем положение мгновенного центра скоростей крайнего колеса;

5) находим, зная мгновенный центр и мгновенную угловую скорость, скорость любой точки колеса;

б) определяем ускорение центра крайнего колеса как точки, принадлежащей кривошипу;

7) принимая центр крайнего колеса за полюс, находим ускорение точки колеса, которое известно по направлению, и далее угловое ускорение крайнего колеса, после чего находим ускорение любой его точки.

Б) В задачах на определение относительной, переносной и абсолютной угловых скоростей, скоростей и ускорений точек, решаемых при помощи теоремы сложения скоростей и теоремы Кориолиса:

1) выбираем одно вращение за относительное и второе вращение за переносное, результирующее движение за абсолютное;

2) по двум известным угловым скоростям определяем третью угловую скорость;

3) пользуясь теоремой сложения скоростей, находим или относительную, или переносную, или абсолютную скорость любой точки твердого тела;

4) пользуясь теоремой Кориолиса, определяем или относительное, или переносное, или абсолютное ускорение любой точки твердого тела.

**Задача 6.32.** Искусственный спутник Земли, двигаясь по круговой орбите, имеет период обращения, вычисленный по отношению к системе координат, движущейся вместе с центром Земли поступательно, равный 1,5 часа.

Определить его относительную угловую скорость по отношению к Земле, вращающейся вокруг своей оси, если орбита спутника совпадает с экваториальной плоскостью Земли и спутник летит: а) с востока на запад, б) с запада на восток.

Решение. Земля вращается с востока на запад, делая 1 оборот за 24 часа. Принимаем вращение Земли за переносное движение. Следовательно, значение переносной угловой скорости

$$\omega_e = \frac{1}{24} \text{ об/час.}$$

Абсолютная угловая скорость обращения спутника задана:

$$\omega_a = \frac{1}{1,5} \text{ об/час.}$$

Эта угловая скорость совпадает по направлению с  $\omega_e$  в случае б) и направлена в противоположную сторону в случае а). Согласно формулам сложения вращений для случая а) имеем:

$$\omega_a = \omega_r - \omega_e$$

откуда

$$\omega_r = \omega_a + \omega_e = \frac{1}{1,5} + \frac{1}{24} = 0,708 \text{ об/час.}$$

С такой угловой скоростью будет двигаться спутник относительно Земли. В случае б) переносная угловая скорость Земли совпадает по

направлению с абсолютной угловой скоростью спутника. Следовательно,

$$\omega_a = \omega_r + \omega_e,$$

откуда

$$\omega_r = \omega_a - \omega_e = \frac{1}{1,5} - \frac{1}{24} = 0,624 \text{ об/час.}$$

**Задача 6.33.** В планетарной передаче кривошип  $O_1O_4$  приводит во вращение колесо  $I$ , вращающееся вокруг неподвижной оси, проходящей через  $O_1$ . Колесо  $I$  должно вращаться с угловой скоростью  $\omega_1$ , соответствующей 10 000 об/мин. Зная радиусы колес:  $r_1 = 10$  см,  $r_2 = 16$  см,  $r_3 = 8$  см,  $r_4 = 6$  см, найти угловую скорость  $\Omega$ , которую надо сообщить кривошипу, чтобы обеспечить требуемую угловую скорость первого колеса.

Решение. Обозначим угловые скорости колес  $I, II, IV, V$  через  $\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5$  соответственно. Колеса  $II$  и  $III$  составляют одно твердое тело и имеют общую угловую скорость  $\omega_2$ . Выбираем ось  $z$  направленной перпендикулярно к плоскости чертежа, на читателя. Напишем уравнение Виллиса для первой пары колес:

$$\frac{\omega_{1z} - \Omega_z}{\omega_{2z} - \Omega_z} = -\frac{r_2}{r_1}. \quad (1)$$

Аналогичное уравнение для колес  $III$  и  $IV$  имеет вид

$$\frac{\omega_{2z} - \Omega_z}{\omega_{4z} - \Omega_z} = -\frac{r_4}{r_3}, \quad (2)$$

так как угловые скорости колес  $II$  и  $III$  одинаковы, а их радиусы различны. Для колес  $IV$  и  $V$ , находящихся во внутреннем зацеплении, имеем:

$$\frac{\omega_{4z} - \Omega_z}{\omega_{5z} - \Omega_z} = \frac{r_5}{r_4}. \quad (3)$$

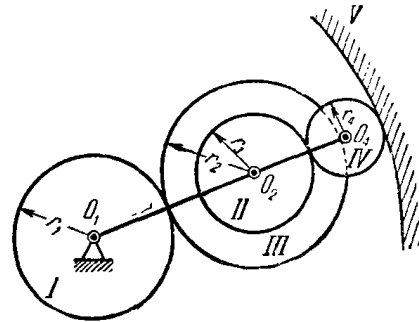
Перемножим равенства (1), (2), (3). Тогда, учитывая, что колесо  $V$  неподвижно и, следовательно,  $\omega_5 = 0$ , находим:

$$\frac{\omega_{1z} - \Omega_z}{0 - \Omega_z} = \frac{r_2 r_5}{r_1 r_3}, \text{ откуда } \Omega_z = \omega_{1z} \frac{r_1 r_3}{r_1 r_3 - r_2 r_5}.$$

Подставляя в это уравнение значения всех величин, находим:

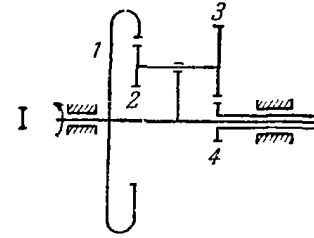
$$\Omega_z = 10\,000 \cdot \frac{10 \cdot 8}{10 \cdot 8 - 16 \cdot 46} = -1220 \text{ об/мин.}$$

Знак минус означает, что направление вращения кривошипа и первого колеса противоположны.



К задаче 6.33.

**Задача 6.34.** Вал газотурбинного двигателя делает 25 000 об/мин. Зубчатое колесо  $I$  с внутренним зацеплением имеет  $z_1 = 120$  зубцов и вращается как одно твердое тело с валом  $I$ . Спаренные между собой передаточные шестерни  $2$  и  $3$  имеют соответственно  $z_2 = 30$  и  $z_3 = 80$  зубцов. Они насажены на общую ось и вращаются с одинаковой угловой скоростью. Зубчатое колесо  $3$  находится в зацеплении с колесом  $4$ , соединенным с валом, на котором насажен воздушный винт, делающий 1200 об/мин. Колесо  $4$  имеет  $z_4 = 20$  зубцов.



К задаче 6.34.

Определить угловую скорость, которую необходимо при этом сообщить кривошипу, вращающему ось шестерен  $2$  и  $3$ .

Решение. Для решения этой задачи применим способ Виллиса. Обозначим через  $n_1$  угловую скорость вала  $I$  и жестко связанного с ним колеса  $I$ , буквой  $n_2$  — угловую скорость шестерен  $2$  и  $3$ , буквой  $n_4$  — угловую скорость колеса  $4$  и жестко связанного с ним вала, на котором насажен воздушный винт. Искомую угловую скорость кривошипа, приводящего во вращение ось, на которой укреплены шестерни  $2$  и  $3$ , назовем  $n_0$ . Дадим мысленно основанию механизма вращение с угловой скоростью —  $n_0$ , тогда кривошип остановится, а угловые скорости колес станут равными:

$$\left. \begin{array}{l} \text{колеса } I \quad n_1 - n_0, \\ \text{колеса } 2 \text{ и } 3 \quad n_2 - n_0, \\ \text{колеса } 4 \quad n_4 - n_0. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Для первой пары колес, находящихся во внутреннем зацеплении, имеем:

$$\frac{n_1 - n_0}{n_2 - n_0} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (2)$$

Для второй пары колес, находящихся во внешнем зацеплении, находим:

$$\frac{n_2 - n_0}{n_4 - n_0} = -\frac{z_4}{z_3}. \quad (3)$$

Перемножая равенства (2) и (3), получаем:

$$\frac{n_1 - n_0}{n_4 - n_0} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}.$$

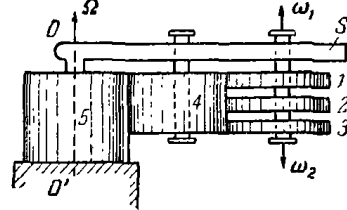
Внося в это уравнение значения известных величин, имеем уравнение с одним неизвестным

$$\frac{25\,000 - n_0}{1200 - n_0} = -\frac{30 \cdot 20}{120 \cdot 80},$$

откуда

$$n_0 = 23\,600 \text{ об/мин.}$$

**Задача 6.35.** Водило  $S$  вращается вокруг вертикальной оси  $OO'$  с угловой скоростью  $\Omega$ . Водило несет на себе две вертикальные оси, на одной из которых свободно насажены три шестерни 1, 2, 3, а на другой, также свободно, насажена шестерня 4. Шестерня 4 находится в зубчатом зацеплении с шестернями 1, 2, 3 и с неподвижной шестерней 5. Числа зубцов шестерен 1, 2, 3 и 5 соответственно равны:  $(z+1)$ ,  $z$ ,  $(z-1)$  и  $z$ .



К задаче 6.35.

Определить угловые скорости  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  шестерен 1, 2, 3.

Решение. Запишем для каждой пары шестерен, находящихся в зацеплении, формулы Виллиса.

Для пары шестерен 5 и 4 имеем:

$$\frac{\omega_4 - \Omega}{0 - \Omega} = -\frac{z}{z_4}, \quad (1)$$

где  $\omega_4$  и  $z_4$  обозначают соответственно угловую скорость и число зубцов шестерни сателлита 4.

Формулы Виллиса для остальных пар шестерен, находящихся в зацеплении, будут:

для пары 1—4

$$\frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_4 - \Omega} = -\frac{z_1}{z+1}; \quad (2)$$

для пары 2—4

$$\frac{\omega_2 - \Omega}{\omega_4 - \Omega} = -\frac{z_2}{z}; \quad (3)$$

для пары 3—4

$$\frac{\omega_3 - \Omega}{\omega_4 - \Omega} = -\frac{z_3}{z-1}. \quad (4)$$

Умножив равенство (1) на каждое из равенств (2), (3), (4), найдем:

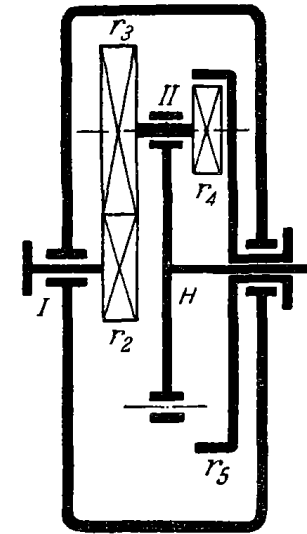
$$\frac{\omega_1 - \Omega}{-\Omega} = \frac{z}{z+1}; \quad \frac{\omega_2 - \Omega}{-\Omega} = \frac{z}{z} = 1; \quad \frac{\omega_3 - \Omega}{-\Omega} = \frac{z}{z-1}.$$

Из этих трех формул определяются три искомые угловые скорости:

$$\omega_1 = \frac{\Omega}{z+1}; \quad \omega_2 = 0; \quad \omega_3 = -\frac{\Omega}{z-1}.$$

Таким образом, шестерня 1 вращается в ту же сторону, что и водило, шестерня 2 перемещается поступательно, а шестерня 3 вращается в сторону, противоположную вращению водила.

**Задача 6.36.** В простой планетарной передаче (рис. а) с тремя соосными валами ведущий вал I приводит во вращение колесо радиуса  $r_2$ , находящееся в зацеплении с сателлитом радиуса  $r_3$ , наглухо закрепленным на валу II. Вал II закреплен в подшипнике водила  $H$ . На общем валу с сателлитом радиуса  $r_3$  закреплен второй сателлит радиуса  $r_4$ , входящий в зацепление с колесом радиуса  $r_5$ . Определить угловую скорость сателлитов радиусов  $r_3$  и  $r_4$  и колеса радиуса  $r_5$ .

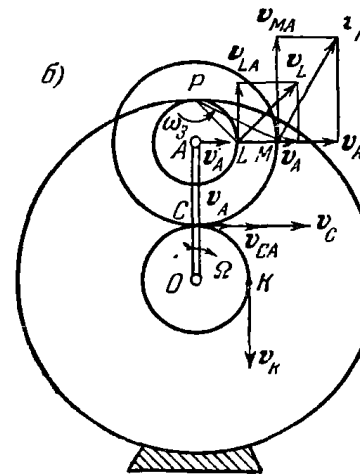


а)

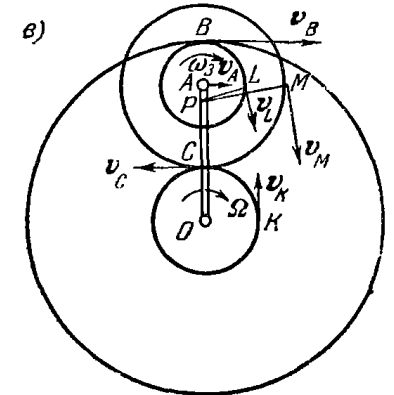
Найти скорости точек  $L$ ,  $M$ ,  $K$  (рис. б), если колесо радиуса  $r_5 = 90$  см неподвижно, радиусы колес  $r_2 = 30$  см,  $r_3 = 40$  см,  $r_4 = 20$  см. Угловая скорость водила  $\Omega = 1200$  об/мин  $= 40\pi$  сек<sup>-1</sup>.

Решение. Метод плоского движения. В планетарной передаче, рассматриваемой в нашей задаче (рис. б), колесо радиуса  $r_2$  и водило  $H$  вращаются вокруг неподвижной оси  $O$ .

Решение. Метод плоского движения. В планетарной передаче, рассматриваемой в нашей задаче (рис. б), колесо радиуса  $r_2$  и водило  $H$  вращаются вокруг неподвижной оси  $O$ .



б)



в)

К задачам 6.36 и 6.37.

Сателлиты с радиусами  $r_3$  и  $r_4$  совершают плоское движение. Так как угловая скорость водила  $\Omega$  задана, то скорость точки  $A$ , принадлежащей водилу, равна

$$v_A = \Omega \cdot OA = \Omega (r_2 + r_3) = 40\pi \cdot 70 = 2800\pi \text{ см/сек.}$$

Точка  $A$  одновременно является центром сателлитов радиусов  $r_3$  и  $r_4$ , совершающих плоское движение. Мгновенный центр скоростей этих сателлитов, образующих одно твердое тело (так как они оба наглухо закреплены на валу), будет в точке  $P$  касания сателлита радиуса  $r_4$  с неподвижным колесом радиуса  $r_8$ . Зная величину скорости точки тела, совершающего плоское движение, и положение мгновенного центра скоростей этого тела, можно определить его угловую скорость

$$\omega_3 = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{r_4} = \frac{2800\pi}{20} = 140\pi \text{ сек}^{-1},$$

где  $AP$  — расстояние от точки  $A$  до мгновенного центра скоростей. Угловая скорость  $\omega_3 = \omega_4$ , так как оба сателлита движутся как одно тело. Для определения угловой скорости колеса радиуса  $r_2$  определим скорость точки  $C$ . Точка  $C$  является общей для сателлита радиуса  $r_3$  и колеса радиуса  $r_2$ . Считая, что точка  $C$  лежит на сателлите, определим ее скорость по формуле:

$$v_C = \omega_3 \cdot CP = \omega_3 (r_3 + r_4) = 140\pi \cdot 60 = 8400\pi \text{ см/сек.}$$

Зная скорость точки  $C$  и считая ее принадлежащей колесу радиуса  $r_2$ , определим угловую скорость этого колеса

$$\omega_2 = \frac{v_C}{CO} = \frac{v_C}{r_2} = \frac{8400\pi}{30} = 280\pi \text{ сек}^{-1}.$$

Скорость точек  $L$  и  $M$ , принадлежащих сателлитам, определим по формулам:

$$v_L = \omega_3 \cdot LP = \omega_3 r_4 \sqrt{2} = 140\pi \cdot 20 \sqrt{2} = 3940\pi \text{ см/сек.},$$

$$v_M = \omega_3 \cdot MP = \omega_3 \sqrt{r_4^2 + r_3^2} = 140\pi \cdot 44,7 = 6260\pi \text{ см/сек.},$$

где  $LP$  и  $MP$  — расстояния от соответствующих точек до мгновенного центра скоростей.

Точка  $K$  лежит на колесе радиуса  $r_2$ , вращающемся вокруг неподвижной оси  $O$  с угловой скоростью  $\omega_2$ , следовательно, ее скорость равна

$$v_K = \omega_2 r_2 = 280\pi \cdot 30 = 8400\pi \text{ см/сек.}$$

Как и следовало ожидать,  $v_K = v_C$ .

*Метод Виллиса.* Даем мысленно основанию механизма вращение с угловой скоростью

$$-\Omega = -40\pi \text{ сек}^{-1},$$

тогда водило  $H$  становится неподвижным, угловые скорости всех колес уменьшаются на эту величину, а колеса, находящиеся в зацеплении, можно рассматривать как колеса с неподвижными осями.

Применяя формулы Виллиса, имеем для первой пары колес

$$\frac{\omega_2 - \Omega}{\omega_3 - \Omega} = -\frac{r_3}{r_2}.$$

Знак минус взят потому, что при внешнем зацеплении колеса с неподвижными осями вращаются в противоположные стороны. Аналогично для второй пары колес находим:

$$\frac{\omega_4 - \Omega}{\omega_5 - \Omega} = \frac{r_5}{r_4}.$$

Здесь взят знак плюс, так как при внутреннем зацеплении оба колеса с неподвижными осями вращаются в одну сторону. Из последнего равенства определим  $\omega_4$ :

$$\frac{\omega_4 - 1200}{-1200} = \frac{90}{20},$$

здесь  $\omega_5 = 0$ , так как согласно условию колесо радиуса  $r_5$  неподвижно.

Отсюда находим:

$$\omega_4 = -4200 \text{ об/мин} = -140\pi \text{ сек}^{-1}.$$

Такова же и угловая скорость колеса радиуса  $r_3$ , составляющего одно тело с колесом  $r_4$ . Знак минус показывает, что вращение сателлитов  $r_3$  и  $r_4$  происходит в сторону, противоположную вращению водила.

Для определения скоростей точек  $L$  и  $M$  воспользуемся формулой распределения скоростей в плоском движении (рис. а). За полюс примем точку  $A$ , так как скорость точки  $A$  известна по величине и направлению. Будем считать, что точки  $M$  и  $L$  движутся вместе с полюсом и вращаются относительно полюса, тогда скорости точек  $L$  и  $M$  соответственно будут:

$$v_L = v_A + v_{LA}, \quad v_M = v_A + v_{MA},$$

где

$$v_{LA} = \omega_3 \cdot LA = \omega_3 \cdot r_4 = 140\pi \cdot 20 = 2800\pi \text{ см/сек.},$$

$$v_{MA} = \omega_3 \cdot MA = \omega_3 \cdot r_3 = 140\pi \cdot 40 = 5600\pi \text{ см/сек.}$$

Направления скоростей  $v_A$ ,  $v_{LA}$  и  $v_{MA}$  указаны на рис. б. Теперь получим:

$$v_L = \sqrt{v_A^2 + v_{LA}^2} = 2800\pi \sqrt{2} = 3940\pi \text{ см/сек.},$$

и аналогично

$$v_M = \sqrt{v_A^2 + v_{MA}^2} = 2800\pi \sqrt{5} = 6260\pi \text{ см/сек.}$$

Скорость точки  $K$  равняется скорости точки  $C$ , а последняя равна

$$v_C = v_A + v_{CA}.$$

Находим, далее,

$$v_{CA} = \omega_3 \cdot CA = \omega_3 \cdot r_3 = 140\pi \cdot 40 = 5600\pi \text{ см/сек.}$$

Для точки  $C$  направления  $v_A$  и  $v_{CA}$  совпадают, поэтому

$$v_C = v_A + v_{CA} = 2800\pi + 5600\pi = 8400\pi \text{ см/сек.}$$

Для точки  $K$  найдем  $v_K = v_C = 8400\pi \text{ см/сек.}$

**Задача 6.37.** Решить предыдущую задачу, если колесо радиуса  $r_5$  соединено с двигателем и имеет угловую скорость  $\omega_5 = 3000 \text{ об/мин} = 100\pi \text{ сек}^{-1}$ . Такая передача называется планетарной передачей с двойным приводом или дифференциальной передачей (рис. в).

Решение. *Метод плоского движения.* В планетарной передаче с двойным приводом, изображенной на рис. а, колесо радиуса  $r_2$ , водило  $H$  и колесо радиуса  $r_3$  вращаются вокруг неподвижной оси  $O$ . Сателлиты радиусов  $r_3$  и  $r_4$  совершают плоское движение. Так как угловая скорость  $\Omega$  задана, то скорость точки  $A$ , принадлежащей водилу, равна

$$v_A = \Omega \cdot OA = \Omega (r_2 + r_3) = 40\pi \cdot 70 = 2800\pi \text{ см/сек.}$$

Скорость точки  $B$ , лежащей на колесе  $r_5$ , которое вращается вокруг точки  $O$  с угловой скоростью  $\omega_5 = 100\pi \text{ сек}^{-1}$ , равна

$$v_B = \omega_5 \cdot r_5 = 100\pi \cdot 90 = 9000\pi \text{ см/сек.}$$

Но точки  $A$  и  $B$  одновременно принадлежат и сателлитам  $r_3$  и  $r_4$ , которые совершают плоское движение как одно твердое тело. Зная величину и направление скоростей этих точек, можно определить положение мгновенного центра скоростей.

Определим расстояние  $AP$  от точки  $A$  до мгновенного центра скоростей. Величины скоростей точек при плоском движении прямо пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей. Тогда

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{AP + r_4}{AP}, \quad \text{или} \quad \frac{9000\pi}{2800\pi} = \frac{AP + 20}{AP},$$

откуда

$$AP = \frac{560}{62} = 9,05 \text{ см.}$$

Определив положение мгновенного центра скоростей и зная величину скоростей  $v_A$  и  $v_B$ , найдем угловую скорость сателлитов  $r_3$  и  $r_4$

$$\omega_3 = \frac{v_A}{AP} = \frac{2800\pi}{9,05} = 310\pi \text{ сек}^{-1}.$$

Для определения угловой скорости  $\omega_2$  найдем скорость точки  $C$ , считая ее принадлежащей сателлиту  $r_3$ .

Имеем:

$$v_C = \omega_3 \cdot CP = \omega_3 (r_3 - AP) = 9560\pi \text{ см/сек.}$$

Зная скорость точки  $C$  и  $r_2$ , находим:

$$\omega_2 = \frac{v_C}{r_2} = \frac{9560\pi}{30} = 319\pi \text{ сек}^{-1}.$$

Скорости точек  $L$ ,  $M$ , принадлежащих сателлитам, определяются по формулам:

$$v_L = \omega_3 \cdot LP = 310\pi \sqrt{r_3^2 + AP^2} = 310\pi \cdot 22 = 6800\pi \text{ см/сек.},$$

$$v_M = \omega_4 \cdot MP = 310\pi \sqrt{r_4^2 + AP^2} = 310\pi \cdot 41 = 12700\pi \text{ см/сек.},$$

где  $LP$  и  $MP$  — расстояния от соответствующих точек до мгновенного центра скоростей. Скорость  $v_K = v_C$ .

Решение. *Метод Виллиса.* Применяя формулу Виллиса для первой пары колес, находящейся во внешнем зацеплении, имеем:

$$\frac{\omega_2 - \Omega}{\omega_3 - \Omega} = -\frac{r_3}{r_2}.$$

Аналогично для второй пары колес, находящейся во внутреннем зацеплении, находим:

$$\frac{\omega_4 - \Omega}{\omega_5 - \Omega} = \frac{r_5}{r_4}.$$

Из последнего равенства определим  $\omega_4$ :

$$\frac{\omega_4 - 1200}{3000 - 1200} = \frac{90}{20},$$

или

$$\omega_4 = \omega_4 = 9300 \text{ об/мин} = 310\pi \text{ сек}^{-1}.$$

Знак плюс показывает, что направление вращения сателлитов совпадает с направлением вращения водила.

Определение скоростей точек  $L$  и  $M$  можно сделать методом плоского движения, как показано выше.

Сравнение показывает, что метод Виллиса проще метода плоского движения.

Для приобретения навыков в решении задач на сложение вращений вокруг параллельных осей рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 585, 587, 588, 589, 592, 595.

**ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ И СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ВОКРУГ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОСЕЙ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

**§ 1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки**

Выберем неподвижную систему осей  $xuz$  с началом в неподвижной точке  $O$  и подвижную систему координат  $x_1y_1z_1$  с тем же центром, жестко связанную с твердым телом. Линия  $ON$ , пересечение неподвижной плоскости  $xu$  и подвижной плоскости  $x_1y_1$ , называется линией узлов.

Угол прецессии  $\psi$  измеряется от неподвижной оси  $x$  до линии узлов  $ON$  и считается положительным, если поворот с оси  $z$  виден против часовой стрелки (рис. 7.1). Угол прецессии лежит в неподвижной плоскости  $xu$ .

Угол чистого, или собственного, вращения  $\varphi$  расположен в подвижной плоскости  $x_1y_1$  и отсчитывается от линии узлов до подвижной оси  $x_1$ . Угол  $\varphi$  положителен, если он виден направленным против часовой стрелки с конца оси  $z_1$  (рис. 7.1).

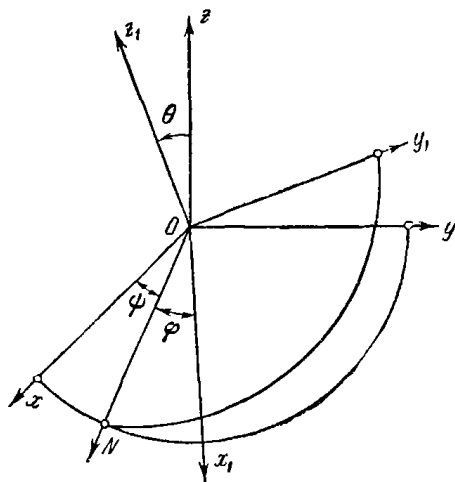


Рис. 7.1.

Угол нутации  $\theta$  отсчитывается от оси  $z$  к оси  $z_1$  и считается положительным, если видеть поворот, смотря с линии узлов  $ON$ , происходящим против часовой стрелки.

Уравнения движения твердого тела при вращении около неподвижного центра определяются заданием углов Эйлера как функций времени:

$$\psi = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t), \quad \theta = f_3(t). \quad (1^*)$$

Распределение скоростей в твердом теле, вращающемся около неподвижной точки, определяется формулой

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (2^*)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость точки,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки, проведенный из неподвижного центра,  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость твердого тела (рис. 7.2). Прямая, по которой направлена угловая скорость тела, называется мгновенной осью. Скорости всех точек твердого тела, лежащих на мгновенной оси, в данный момент равны нулю.

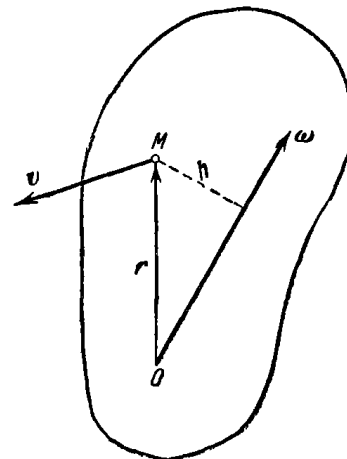


Рис. 7.2.

Из формулы (2\*) следует, что величина скорости любой точки тела

$$v = \omega h, \quad (3^*)$$

где  $h$  — расстояние от точки до мгновенной оси. Проекции скорости на неподвижные оси координат определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x, \end{aligned} \right\} \quad (4^*)$$

где  $x, y, z$  — координаты точки;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — проекции угловой скорости на неподвижные оси  $x, y, z$ .

Проекции скорости на подвижные оси  $x_1, y_1, z_1$  равны

$$v_{x_1} = \omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1, \quad v_{y_1} = \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1, \quad v_{z_1} = \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1. \quad (5^*)$$

В отличие от формул (4\*), где координаты  $x, y, z$  меняются с течением времени, в уравнениях (5\*) величины  $x_1, y_1, z_1$  — координаты точки тела в подвижных осях, связанных с твердым телом. Естественно, эти координаты остаются неизменными.

Входящие в уравнения (4\*) и (5\*) проекции угловой скорости на неподвижные и подвижные оси координат вычисляются по известным углам Эйлера с помощью формул:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{\varphi} \mathbf{k}_1, \quad (6^*)$$

где  $\mathbf{k}, \mathbf{n}, \mathbf{k}_1$  — орты оси  $z$ , линии узлов  $ON$  и оси  $z_1$  (рис. 7.1),

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_y &= -\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}, \end{aligned} \right\} \quad (7^*)$$

где  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — проекции угловой скорости на неподвижные оси координат. Далее,

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_{y_1} &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_{z_1} &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}. \end{aligned} \right\} \quad (8^*)$$

Здесь  $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$  — проекции угловой скорости на подвижные оси координат.

Величина мгновенной угловой скорости

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \theta}. \quad (9^*)$$

Геометрическое место мгновенных осей, отмеченное в неподвижном пространстве, называется *неподвижным аксоидом*. Уравнение неподвижного аксоида

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \quad (10^*)$$

*Подвижным аксоидом* называется геометрическое место мгновенных осей, отмеченное на движущемся теле. Уравнение подвижного аксоида

$$\frac{x_1}{\omega_{x_1}} = \frac{y_1}{\omega_{y_1}} = \frac{z_1}{\omega_{z_1}}. \quad (11^*)$$

Угловое ускорение твердого тела есть производная от вектора угловой скорости по времени

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \quad (12^*)$$

Рассматривая  $\boldsymbol{\omega}$  как радиус-вектор некоторой точки, можно найти  $\boldsymbol{\varepsilon}$  как скорость конца вектора  $\boldsymbol{\omega}$  при движении по его годографу.

Если обозначить через  $\boldsymbol{\omega}_0$  орг мгновенной оси, то угловое ускорение определится формулой

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}_0}{dt},$$

или

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2,$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \boldsymbol{\omega}_0$$

— первая составляющая углового ускорения, направленная по мгновенной оси и характеризующая изменение угловой скорости по

величине. Вторая составляющая углового ускорения равна

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\omega} \frac{d\boldsymbol{\omega}_0}{dt}$$

и характеризует изменение угловой скорости по направлению. Обозначая через  $\boldsymbol{\omega}_1$  угловую скорость вращения вектора  $\boldsymbol{\omega}$ , имеем:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_0}{dt} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_0.$$

Тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}.$$

Наряду с использованием приведенных формул для нахождения углового ускорения применяют и другой способ определения  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , через проекции углового ускорения на неподвижные оси координат или оси, жестко связанные с движущимся твердым телом.

Проекция углового ускорения на неподвижные оси координат даются выражениями:

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt}, \quad \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt}, \quad \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}. \quad (13^*)$$

Проекция углового ускорения на подвижные оси, жестко связанные с телом, равны

$$\varepsilon_{x_1} = \frac{d\omega_{x_1}}{dt}, \quad \varepsilon_{y_1} = \frac{d\omega_{y_1}}{dt}, \quad \varepsilon_{z_1} = \frac{d\omega_{z_1}}{dt}. \quad (14^*)$$

Ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижного центра, равно сумме вращательного и осеостремительного ускорений (теорема Ривальса)

$$\boldsymbol{w}_M = \boldsymbol{w}_M^{oc} + \boldsymbol{w}_M^{pp}, \quad (15^*)$$

где

$$\boldsymbol{w}_M^{oc} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}), \quad (16^*)$$

$$\boldsymbol{w}_M^{pp} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}. \quad (17^*)$$

Если угловое ускорение задано в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2,$$

то вращательное ускорение определяется формулой

$$\boldsymbol{w}_M^{pp} = \boldsymbol{w}_{M_1}^{pp} + \boldsymbol{w}_{M_2}^{pp} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \boldsymbol{r}.$$

Величина осеостремительного ускорения

$$\boldsymbol{w}_M^{oc} = h\boldsymbol{\omega}^2, \quad (18^*)$$

где  $h$  — кратчайшее расстояние точки до мгновенной оси. Это ускорение направлено по перпендикуляру, опущенному из точки на мгновенную ось (рис. 7.3). Величина вращательного ускорения

$$\omega_M^{вр} = h_1 \epsilon, \quad (19^*)$$

где  $h_1$  — кратчайшее расстояние точки до оси вектора углового ускорения (рис. 7.3). Направление вращательного ускорения определяется по правилу векторного произведения. Осестремительное и вращательное ускорения, вообще говоря, не взаимно перпендикулярны; это следует из формул (16\*), (17\*).

Однако существуют такие точки твердого тела, для которых эти ускорения в данный момент взаимно перпендикулярны. Геометрическим местом этих точек является плоскость в твердом теле, проходящая через векторы  $\omega$  и  $\epsilon$ .

Зная осестремительное и вращательное ускорения, можно определить модуль ускорения точки по формуле

$$\omega_M = \sqrt{(\omega_M^{ос})^2 + (\omega_M^{вр})^2 + 2\omega_M^{ос} \cdot \omega_M^{вр} \cos(\widehat{\omega_M^{ос}}, \widehat{\omega_M^{вр}})}. \quad (20^*)$$

Проекция ускорения точки на неподвижные оси равны

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \epsilon_y z - \epsilon_z y + \omega_x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x, \\ \omega_y &= \epsilon_z x - \epsilon_x z + \omega_y(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y, \\ \omega_z &= \epsilon_x y - \epsilon_y x + \omega_z(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z. \end{aligned} \right\} \quad (21^*)$$

Проекция ускорения точки на подвижные оси определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_1} &= \epsilon_{y_1} z_1 - \epsilon_{z_1} y_1 + \omega_{x_1}(\omega_{x_1} x_1 + \omega_{y_1} y_1 + \omega_{z_1} z_1) - \omega^2 x_1, \\ \omega_{y_1} &= \epsilon_{z_1} x_1 - \epsilon_{x_1} z_1 + \omega_{y_1}(\omega_{x_1} x_1 + \omega_{y_1} y_1 + \omega_{z_1} z_1) - \omega^2 y_1, \\ \omega_{z_1} &= \epsilon_{x_1} y_1 - \epsilon_{y_1} x_1 + \omega_{z_1}(\omega_{x_1} x_1 + \omega_{y_1} y_1 + \omega_{z_1} z_1) - \omega^2 z_1. \end{aligned} \right\} \quad (22^*)$$

При решении задач на определение скоростей и ускорений точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижного центра, рекомендуется такая последовательность действий.

А. Заданы уравнения движения в виде углов Эйлера как известных функций времени. Требуется определить угловую скорость и угловое ускорение твердого тела, уравнения подвижного и неподвижного

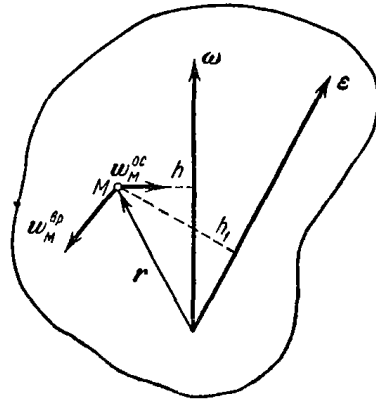


Рис. 7.3.

ного аксоидов, а также скорость и ускорение какой-либо точки  $M(x_1, y_1, z_1)$ :

- 1) определить производные от углов Эйлера по времени;
- 2) найти проекции угловой скорости на оси неподвижной и подвижной систем координат;
- 3) вычислить величину мгновенной угловой скорости;
- 4) определить положение мгновенной оси;
- 5) составить уравнения неподвижного и подвижного аксоидов;
- 6) найти мгновенное угловое ускорение как скорость конца вектора  $\omega$  или через проекции углового ускорения на подвижные и неподвижные оси координат;
- 7) определить скорость точки  $M$  по величине и направлению;
- 8) найти вращательное и осестремительное ускорения точки  $M$  или проекции ускорения точки  $M$  на подвижные и неподвижные оси координат;
- 9) вычислить ускорение точки  $M$  по величине и направлению.

Б. Заданы скорость точки  $M$  и положение мгновенной оси вращения. Требуется определить мгновенную угловую скорость, мгновенное угловое ускорение, неподвижный и подвижный аксоиды, скорости и ускорения любых точек твердого тела:

- 1) выбрать неподвижную и подвижную системы координат;
- 2) найти мгновенную угловую скорость твердого тела;
- 3) определить искомые скорости точек твердого тела;
- 4) найти мгновенное угловое ускорение твердого тела как скорость конца вектора мгновенной угловой скорости;
- 5) вычислить вращательное и осестремительное ускорения точек твердого тела и, далее, их ускорения;
- 6) определить подвижный и неподвижный аксоиды.

**Задача 7.1.** Твердое тело вращается вокруг неподвижной точки согласно уравнениям:

$$\psi = 2t, \quad \varphi = 30t, \quad \theta = \frac{\pi}{6},$$

где углы (рис. а) измеряются в радианах, а время — в секундах.

Определить мгновенную угловую скорость тела, уравнение мгновенной оси, неподвижный и подвижный аксоиды, а также скорость точки тела  $M(x_1, y_1, z_1)$ , координаты которой в подвижной системе координат, жестко связанной с телом, равны

$$x_1 = 2 \text{ см}, \quad y_1 = 3 \text{ см}, \quad z_1 = 5 \text{ см}.$$

Решение. Имеем две системы координат с началом в неподвижной точке  $O$ : подвижную  $x_1, y_1, z_1$ , жестко связанную с твердым телом, и неподвижную систему  $x, y, z$ .

Находим производные по времени от углов Эйлера:

$$\dot{\psi} = 2, \quad \dot{\varphi} = 30, \quad \dot{\theta} = 0,$$



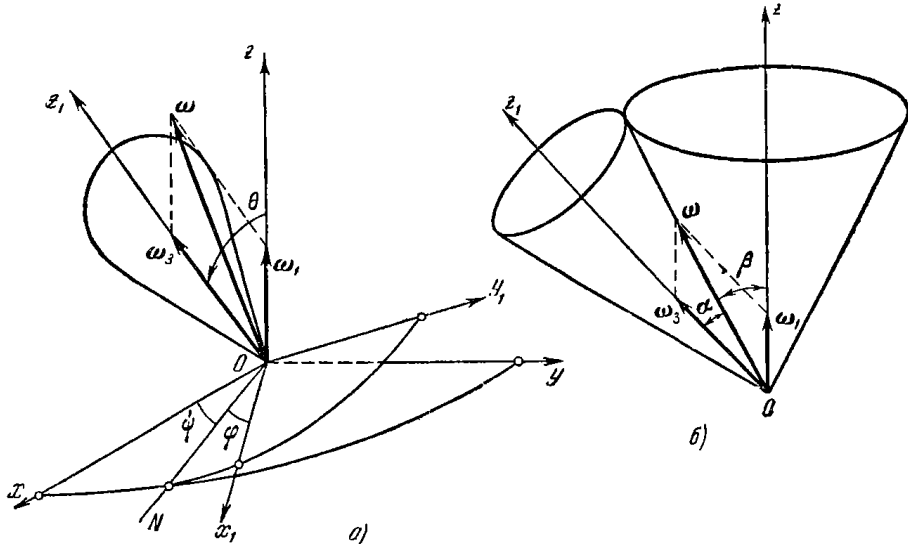
и согласно (6\*) определяем мгновенную угловую скорость тела

$$\omega = \dot{\psi}k + \dot{\phi}k_1 = 2k + 30k_1. \quad (1)$$

Проекция мгновенной угловой скорости на неподвижные оси координат согласно (7\*) будут равны

$$\omega_x = 30 \sin 2t \sin \frac{\pi}{6}, \quad \omega_y = -30 \cos 2t \sin \frac{\pi}{6}, \quad \omega_z = 30 \cos \frac{\pi}{6} + 2.$$

Проекция мгновенной угловой скорости на подвижные оси



К задаче 7.1.

координат согласно формулам (8\*) запишутся так:

$$\omega_{x_1} = 2 \sin \frac{\pi}{6} \sin 30t, \quad \omega_{y_1} = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos 30t, \quad \omega_{z_1} = 2 \cos \frac{\pi}{6} + 30.$$

Величина мгновенной угловой скорости определится по формулам (9\*):

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + \theta^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \theta} = \\ &= \sqrt{4 + 900 + 2 \cdot 30\sqrt{3}} \approx \sqrt{1008} \approx 31,8 \text{ сек}^{-1}. \end{aligned}$$

Проекция скорости точки  $M$  на подвижные оси координат определяются по формулам (5\*):

$$\begin{aligned} v_{x_1} &= \omega_{y_1}z_1 - \omega_{z_1}y_1 = 5 \cos 30t - (\sqrt{3} + 30)3 = 5 \cos 30t - 95,19, \\ v_{y_1} &= \omega_{z_1}x_1 - \omega_{x_1}z_1 = (\sqrt{3} + 20)2 - 5 \sin 30t = 63,46 - 5 \sin 30t, \\ v_{z_1} &= \omega_{x_1}y_1 - \omega_{y_1}x_1 = 3 \sin 30t - 2 \cos 30t. \end{aligned}$$

Скорость точки  $M$  выражается через ее проекции по формуле

$$\begin{aligned} v &= v_{x_1}i_1 + v_{y_1}j_1 + v_{z_1}k_1 = (5 \cos 30t - 95,19)i_1 + \\ &+ (63,46 - 5 \sin 30t)j_1 + (3 \sin 30t - 2 \cos 30t)k_1. \end{aligned}$$

Уравнение мгновенной оси в неподвижной системе координат согласно (10\*) будет:

$$\frac{x}{15 \sin 2t} = \frac{y}{-15 \cos 2t} = \frac{z}{28}. \quad (2)$$

Уравнение мгновенной оси в подвижной системе осей согласно (11\*) имеет вид

$$\frac{x_1}{\sin 30t} = \frac{y_1}{\cos 30t} = \frac{z_1}{31,73}. \quad (3)$$

Из этих равенств находим уравнения неподвижного и подвижного аксоидов, исключая время. Уравнение неподвижного аксоида получаем из (2):

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{15z}{28}\right)^2 = 0.$$

Уравнение подвижного аксоида находим из (3):

$$x_1^2 + y_1^2 - \left(\frac{z_1}{31,73}\right)^2 = 0.$$

Определим (рис. б) половины углов раствора конусов, образующих неподвижный и подвижный аксоиды. Полагая  $y=0$ , находим значение

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{z}{x} = \frac{28}{15} = 1,86.$$

Аналогично, считая  $y_1=0$ , определяем угол раствора для подвижного аксоида

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{z_1}{x_1} = 31,73.$$

Рассмотренное в этой задаче движение твердого тела вокруг неподвижной точки называется регулярной прецессией. При этом движении угол нутации  $\theta$  — постоянная величина, а углы прецессии  $\psi$  и чистого вращения  $\phi$  изменяются пропорционально времени. Прецессия называется *прямой*, если векторы  $\omega_1$  и  $\omega_3$  (рис. б) образуют острый угол. Прецессия называется *обратной*, если этот угол тупой. В случае прямой прецессии направления собственного вращения твердого тела и вращения его мгновенной оси совпадают. При обратной прецессии эти вращения противоположны.

**Задача 7.2.** В условиях предыдущей задачи определить мгновенное угловое ускорение твердого тела, а также ускорение точки  $M(x_1, y_1, z_1)$ .

Решение. Мгновенное угловое ускорение твердого тела равно скорости движения конца вектора мгновенной угловой скорости  $\omega$ . Из решения предыдущей задачи (рис. б) следует, что вектор  $\omega$  описывает конус вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega_1$ . Рассматривая  $\omega$  как радиус-вектор точки твердого тела, вращающегося с угловой скоростью  $\omega_1$  вокруг оси  $z$ , находим скорость этой точки  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \omega_1 \times \omega. \quad (1)$$

Далее, согласно соотношению (1) предыдущей задачи

$$\omega = \omega_1 + \omega_3. \quad (2)$$

Внося это значение  $\omega$  в (1), имеем:

$$\varepsilon = \omega_1 \times (\omega_1 + \omega_3) = \omega_1 \times \omega_3. \quad (3)$$

Из этой формулы следует, что вектор мгновенного углового ускорения направлен перпендикулярно к плоскости  $zz_1$  (рис. а предыдущей задачи), т. е. по линии узлов. Угловое ускорение совпадает с положительным направлением линии узлов, если прецессия прямая. При обратной прецессии вектор  $\varepsilon$  направлен в отрицательную сторону оси  $ON$ . Величина мгновенного ускорения определяется из (3)

$$\varepsilon = \omega_1 \cdot \omega_3 \sin \theta = 2 \cdot 30 \sin \frac{\pi}{6} = 30 \text{ сек}^{-2}.$$

Мгновенное угловое ускорение может быть найдено и другим способом, методом проекций. Согласно формулам (13\*) и (14\*) проекции углового ускорения соответственно на неподвижные и подвижные оси координат определяются как производные по времени от соответствующих проекций мгновенной угловой скорости. Таким образом, находим проекции углового ускорения на неподвижные оси координат:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \dot{\omega}_x = (15 \sin 2t)' = 30 \cos 2t, \\ \varepsilon_y &= \dot{\omega}_y = (-15 \cos 2t)' = 30 \sin 2t, \\ \varepsilon_z &= \dot{\omega}_z = \left(30 \cos \frac{\pi}{6} + 2\right)' = 0. \end{aligned}$$

Проекции углового ускорения на подвижные оси координат будут:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_1} &= \dot{\omega}_{x_1} = (\sin 30t)' = 30 \cos 30t, \\ \varepsilon_{y_1} &= \dot{\omega}_{y_1} = (\cos 30t)' = -30 \sin 30t, \\ \varepsilon_{z_1} &= \dot{\omega}_{z_1} = \left(2 \cos \frac{\pi}{6} + 30\right)' = 0. \end{aligned}$$

Величина углового ускорения равна

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{\varepsilon_{x_1}^2 + \varepsilon_{y_1}^2 + \varepsilon_{z_1}^2} = 30 \text{ сек}^{-2}.$$

Направление углового ускорения определяется косинусами:

$$\begin{aligned} \cos(\varepsilon, x) &= \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon} = \cos 2t, \\ \cos(\varepsilon, y) &= \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon} = \sin 2t, \\ \cos(\varepsilon, z) &= \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} = 0, \\ \cos(\varepsilon, x_1) &= \frac{\varepsilon_{x_1}}{\varepsilon} = \cos 30t, \\ \cos(\varepsilon, y_1) &= \frac{\varepsilon_{y_1}}{\varepsilon} = -\sin 30t, \\ \cos(\varepsilon, z_1) &= \frac{\varepsilon_{z_1}}{\varepsilon} = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что угловое ускорение направлено по линии узлов.

Переходим к определению ускорения точки  $M$ . Находим проекции ускорения точки  $M$  на подвижные оси координат, пользуясь формулами (22\*):

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_1} &= -30 \sin 30t \cdot 5 + \\ &\quad + \sin 30t (\sin 30t \cdot 2 + \cos 30t \cdot 3 + 31,73 \cdot 5) - 1008 \cdot 2, \\ \omega_{y_1} &= -30 \cos 30t \cdot 5 + \\ &\quad + \cos 30t (\sin 30t \cdot 2 + \cos 30t \cdot 3 + 31,73 \cdot 5) - 1008 \cdot 3, \\ \omega_{z_1} &= 30 \cos 30t \cdot 3 + 30 \sin 30t \cdot 2 + \\ &\quad + 31,73 (\sin 30t \cdot 2 + \cos 30t \cdot 3 + 31,73 \cdot 5) - 1008 \cdot 5. \end{aligned} \right\} (4)$$

Ускорение точки  $M$  по найденным проекциям определится формулой

$$\omega = \omega_x i_1 + \omega_{y_1} j_1 + \omega_{z_1} k_1,$$

где  $i_1, j_1, k_1$  — орты осей  $x_1, y_1, z_1$ .

**Задача 7.3.** Конус с углом при вершине  $\angle BOC = \frac{\pi}{2}$  закреплен шарнирно в точке  $O$  и катится без скольжения по плоскости  $xu$ . Точка  $A$ , находящаяся в центре основания конуса, описывает при этом окружность, центр которой расположен на оси  $z$ . Перпендикуляр, опущенный из  $A$  на ось  $z$ , вращается вокруг оси  $z$  согласно уравнению

$$\varphi_1 = kt^2.$$

Радиус основания конуса  $r$ .

Определить угловую скорость и угловое ускорение конуса, а также скорость и ускорение точек  $A, B, C$ .

Решение. Точка  $A$  описывает окружность с центром, лежащим на оси  $z$ . Угловая скорость вращения радиуса  $h$  этой окружности, соединяющего точку  $A$  с центром, равна

$$\omega_1 = \dot{\phi}_1 = 2kt,$$

а длина этого радиуса (рис. б)

$$h = OA \cdot \cos 45^\circ = r \cos 45^\circ.$$

Следовательно, модуль скорости точки  $A$  равен

$$v_A = h\omega_1 = \sqrt{2} rkt.$$

С другой стороны, скорость точки  $A$ , как принадлежащей твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной точки  $O$ , равна по модулю произведению мгновенной угловой скорости на кратчайшее расстояние от точки  $A$  до мгновенной оси. Мгновенная ось конуса направлена по образующей  $OC$ . Следовательно,

$$v_A = h_1\omega,$$

где  $h_1 = h = r \cos 45^\circ$ . Приравняв два полученных значения для скорости точки  $A$ , находим:

$$\omega = \omega_1 = 2kt.$$

Скорость точки  $A$  параллельна оси  $x$ . Пусть для определенности она совпадает с положительным направлением оси. Тогда  $\omega_1$  направлена по оси  $z$  в отрицательную сторону, а вектор  $\omega$  — по оси  $y$  в положительную сторону (рис. б). Переходим к определению углового ускорения. Воспользуемся формулой

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

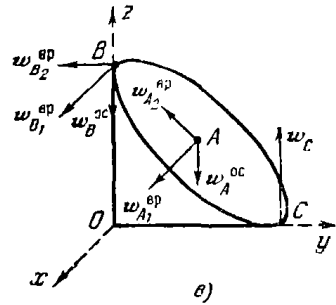
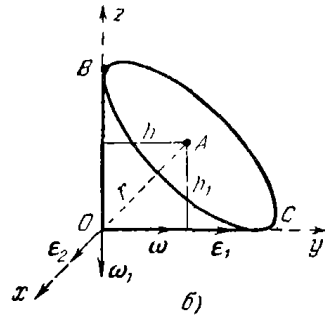
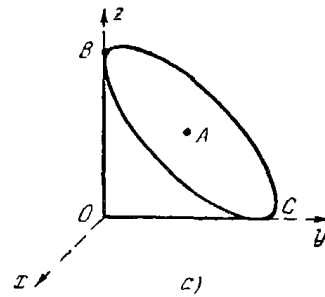
где

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega}{dt} \cdot \omega_0, \quad \varepsilon_2 = \omega_1 \times \omega.$$

Тогда в нашей задаче

$$\varepsilon_1 = 2k \cdot \omega_0,$$

причем орт мгновенной оси  $\omega_0$  указывает на то, что вектор  $\varepsilon_1$  направлен по оси  $y$  в положительном направлении (рис. б).



К задаче 7.3.

Вторая составляющая углового ускорения равна по модулю

$$\varepsilon_2 = \omega_1 \sin 90^\circ = 4k^2t^2$$

и направлена по оси  $x$  в положительном направлении (рис. б).

Скорость точки  $C$  равна нулю, так как эта точка находится на мгновенной оси. Скорость точки  $B$  равна по модулю

$$v_B = 2v_A = 2\sqrt{2} rkt,$$

так как кратчайшее расстояние точки  $B$  до мгновенной оси

$$OB = 2h_1.$$

Вектор  $v_B$  направлен параллельно оси  $x$  в положительную сторону.

Переходим к определению ускорений. Ускорение точки  $C$  определяется по формуле

$$\omega_C = \omega_C^{oc} + \omega_{C_1}^{np} + \omega_{C_2}^{np}.$$

Точка  $C$  лежит на мгновенной оси. Следовательно,

$$\omega_C^{oc} = 0.$$

Точно так же и

$$\omega_{C_1}^{np} = \varepsilon_1 \times r_C = 0$$

(так как  $\varepsilon_1 \parallel r_C$ ). Итак,

$$\omega_C = \omega_{C_2}^{np} = \varepsilon_2 \times r_C.$$

Ускорение точки  $C$  равно по модулю

$$\omega_C = \varepsilon_2 r_C \sin 90^\circ = 4rk^2t^2\sqrt{2}$$

и направлено параллельно оси  $z$  (рис. в).

Ускорение точки  $B$  находится по формуле

$$\omega_B = \omega_B^{oc} + \omega_{B_1}^{np} + \omega_{B_2}^{np}.$$

Осестремительное ускорение точки  $B$  равно по модулю

$$\omega_B^{oc} = OB \cdot \omega^2 = 4\sqrt{2} rk^2t^2$$

и направлено от точки  $B$  к  $O$  (рис. в).

Ускорение  $\omega_{B_1}^{np}$  направлено параллельно оси  $x$  (рис. в) и равно по модулю

$$\omega_{B_1}^{np} = \varepsilon_1 \cdot OB \cdot \sin 90^\circ = 2\sqrt{2} \cdot rk.$$

Ускорение  $\omega_{B_2}^{np}$  направлено параллельно отрицательному направлению оси  $y$  (рис. в) и равно по модулю

$$\omega_{B_2}^{np} = \varepsilon_2 \cdot OB \cdot \sin 90^\circ = 4\sqrt{2} rk^2t^2.$$

Модуль ускорения точки  $B$  равен

$$\omega_B = \sqrt{\omega_B^{oc^2} + \omega_{B_1}^{np^2} + \omega_{B_2}^{np^2}} = 2rk\sqrt{16k^2t^4 + 2}.$$

Ускорение точки  $A$  находится по формуле

$$\boldsymbol{w}_A = \boldsymbol{w}_A^{oc} + \boldsymbol{w}_{A_1}^{bp} + \boldsymbol{w}_{A_2}^{bp},$$

где осстремительное ускорение равно по модулю

$$\omega_A^{oc} = \omega^2 h_1 = 2\sqrt{2} r k^2 t^2$$

и направлено по кратчайшему расстоянию от точки  $A$  к мгновенной оси, т. е. по  $h_1$  (рис. 6); первая составляющая вращательного ускорения равна

$$\boldsymbol{w}_{A_1}^{bp} = |\boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \boldsymbol{r}_A| = \varepsilon_1 r \sin 45^\circ = \sqrt{2} r k$$

и направлена параллельно оси  $x$  (в положительную сторону); вторая составляющая вращательного ускорения равна по модулю

$$\boldsymbol{w}_{A_2}^{bp} = |\boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \boldsymbol{r}_A| = \varepsilon_2 r = 4 r k^2 t^2$$

и направлена от  $A$  к  $B$ .

Заметим, что ускорение точки, движущейся по окружности радиуса  $h$  (рис. 6), может быть найдено по формуле

$$\boldsymbol{w}_A = \boldsymbol{w}_A^n + \boldsymbol{w}_A^\tau,$$

где нормальное ускорение равно

$$\boldsymbol{w}_A^n = \frac{v_A^2}{\rho} = \frac{h^2 \omega_1^2}{h} = h \omega_1^2$$

и направлено от  $A$  по кратчайшему расстоянию к оси  $z$ .

Касательное ускорение равно

$$\boldsymbol{w}_A^\tau = \frac{dv_A}{dt} = \sqrt{2} r k$$

и направлено параллельно оси  $x$ .

Сопоставляя оба решения, замечаем, что

$$\boldsymbol{w}_{A_1}^{bp} = \boldsymbol{w}_A^\tau, \quad \boldsymbol{w}_A^n = \boldsymbol{w}_{A_2}^{bp} \cos 45^\circ$$

и проекция ускорения точки  $A$  на ось  $z$  равна нулю:

$$\omega_z = \boldsymbol{w}_{A_2}^{bp} \cos 45^\circ - \boldsymbol{w}_A^{oc} = 0.$$

Ускорение точки  $A$  расположено в плоскости, параллельной  $xu$ .

Для приобретения навыков в решении задач на вращение твердого тела вокруг неподвижной точки рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 596, 598, 599, 604, 607, 610.

## § 2. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Если твердое тело одновременно участвует в двух вращениях вокруг пересекающихся осей, то одно из этих движений принимается за переносное вращение, а второе — за относительное. Обозначая мгновенные угловые скорости переносного движения через  $\boldsymbol{\omega}_e$  и относительного движения через  $\boldsymbol{\omega}_r$ , можно найти мгновенную угловую скорость абсолютного движения  $\boldsymbol{\omega}_a$  по формуле (рис. 7.4)

$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r \quad (1^*)$$

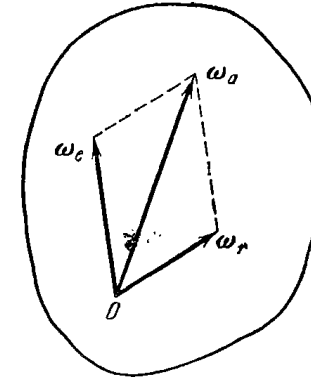


Рис. 7.4.

Таким образом, результирующее движение также является вращением твердого тела вокруг неподвижной точки. Поэтому все сказанное в предыдущем параграфе относительно определения скоростей и ускорений точек твердого тела, нахождения уравнений подвижного и неподвижного аксоидов, углового ускорения может быть применено в данном случае.

Наряду с этим при решении задач в этом параграфе может быть использован и другой способ. Определение скоростей точек твердого тела может быть произведено на основании теоремы сложения скоростей

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r \quad (2^*)$$

где  $\boldsymbol{v}_a$  — абсолютная скорость точки;  $\boldsymbol{v}_e$  и  $\boldsymbol{v}_r$  — соответственно ее переносная и относительная скорости. Для определения ускорений точек может быть применена теорема сложения ускорений (теорема Кориолиса)

$$\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{w}_e + \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{w}_c \quad (3^*)$$

где  $\boldsymbol{w}_a$  — абсолютное ускорение точки;  $\boldsymbol{w}_e$ ,  $\boldsymbol{w}_r$ ,  $\boldsymbol{w}_c$  — соответственно переносное, относительное и корнолисово ускорения.

Кориолисово ускорение определяется формулой

$$\boldsymbol{w}_c = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{v}_r \quad (4^*)$$

При решении задач на сложение вращений вокруг пересекающихся осей могут быть использованы два способа.

Первый способ. По заданным угловым скоростям переносного и относительного вращений определяется абсолютная угловая скорость и, далее, согласно последовательности действий, установленной в § 1 этой главы, находятся все искомые величины.

Второй способ. Рекомендуется такая последовательность действий:

1) выбираются неподвижная система координат так, чтобы ее ось  $z$  совпала с переносной угловой скоростью  $\omega_e$ , и подвижная система координат так, чтобы ее ось  $z_1$  совпала с относительной угловой скоростью  $\omega_r$ ;

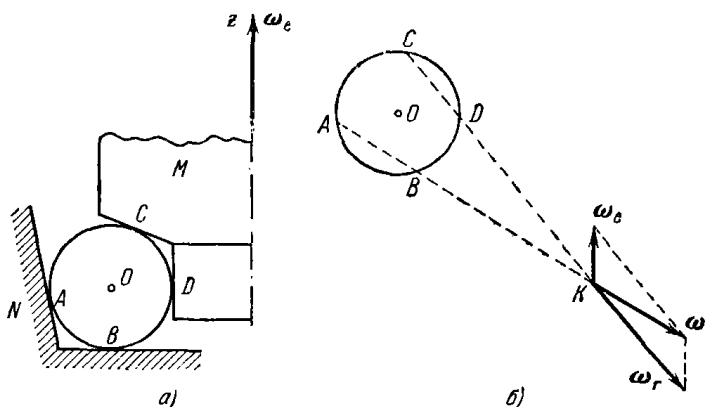
2) по известным переносной и относительной угловым скоростям находится абсолютная угловая скорость;

3) определяются искомые скорости точек в относительном и переносном вращениях и, далее, искомые абсолютные скорости;

4) находятся переносное, относительное и кориолисово ускорения и, далее, искомое абсолютное ускорение точек твердого тела путем векторного сложения или сложением при помощи метода проекций.

**Задача 7.4.** Шарикоподшипник (рис. а) состоит из неподвижной обоймы  $N$ , внутренней обоймы  $M$ , вращающейся вокруг вертикальной оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega_e$  и шарика  $O$ , зажатого между обоймами.

Определить положение оси  $z$ , при котором шарик будет катиться по обоймам  $M$  и  $N$  без скольжения. Пользуясь чертежом к данной



К задаче 7.4.

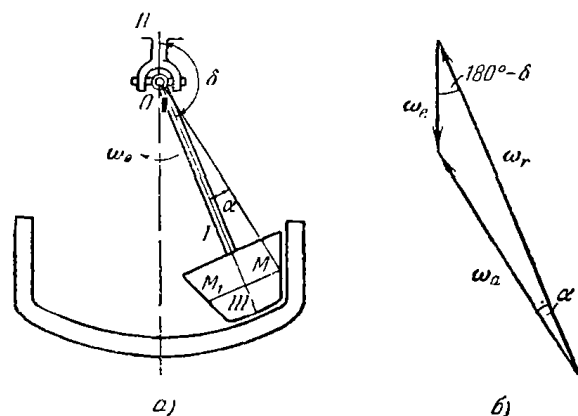
задаче, найти графически абсолютную угловую скорость шарика и его относительную угловую скорость по отношению к вращающейся обойме  $M$ , если  $\omega_e$  задана.

**Решение.** Будем исходить из условия, что шарик  $O$  катится по обоймам  $M$  и  $N$  без скольжения. Следовательно, точки  $A, B$  шарика, находящиеся в соприкосновении с неподвижной обоймой  $N$ , имеют скорости, равные нулю. Абсолютная мгновенная ось шарика должна проходить через эти две точки. Проводим (рис. б) прямую  $\omega$  через эти две точки. Точки шарика  $C, D$ , находящиеся в соприкосновении с вращающейся обоймой  $M$ , должны иметь одинаковые абсолютные

скорости с точками обоймы  $M$ . Значит, относительные скорости точек шарика, соприкасающихся с точками обоймы  $M$ , равны нулю. Следовательно, относительная мгновенная ось шарика проходит через точки соприкосновения с вращающейся обоймой  $M$ . Проводим (рис. б) эту прямую  $\omega_r$ .

Находим точку пересечения  $K$  прямых  $\omega$  и  $\omega_r$ . Движение шарика без скольжения будет достигнуто, если вертикальная ось  $z$  будет проходить через точку  $K$ . Точка  $K$  будет оставаться неподвижной во все время движения.

**Задача 7.5.** В механизме маятниковой мельницы (рис. а) главный вал  $I$  соединен с ведущим валом  $II$  посредством шарнира Гука. На конце главного вала жестко закреплен бегун  $III$ . При достаточно большом числе оборотов ведущего вала бегун прижимается изнутри к стенке цилиндрической чаши так, что сечение бегуна  $M_1M$  катится по чаше без скольжения.



К задаче 7.5.

Радиус этого сечения виден из центра шарнира под углом  $\alpha$ . Угол между главным валом и ведущим валом  $\delta$ .

Найти угловую скорость вращения бегуна вокруг его оси симметрии, если известна угловая скорость ведущего вала.

**Решение.** Движение бегуна рассматриваем как сложное, состоящее из вращения вокруг вертикальной оси и вращения

вокруг оси симметрии. Вращение бегуна вокруг вертикальной оси (вала  $II$ ) принимаем за переносное, вращение вокруг оси симметрии (вала  $I$ ) назовем относительным.

Мгновенная ось абсолютного вращения — это линия, соединяющая две неподвижные точки  $O$  и  $M$ . Вдоль линии  $OM$  направлен вектор абсолютной мгновенной угловой скорости  $\omega_a$ . Вектор переносной угловой скорости  $\omega_e$  направлен по оси ведущего вала. Вектор относительной угловой скорости  $\omega_r$  (это искомая в задаче скорость вращения вокруг оси симметрии) направлен по главному валу  $I$ . Предположим, что для наблюдателя, смотрящего на мельницу сверху, бегун движется по часовой стрелке. Тогда вектор переносной угловой скорости  $\omega_e$  направлен вертикально вниз; основное векторное соотношение

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r$$

представлено на рис. б. Рассматривая треугольник, образованный векторами  $\omega_a$ ,  $\omega_e$  и  $\omega_r$ , имеем по теореме синусов

$$\frac{\omega_e}{\sin \alpha} = \frac{\omega_r}{\sin [180^\circ - \alpha - (180^\circ - \delta)]}$$

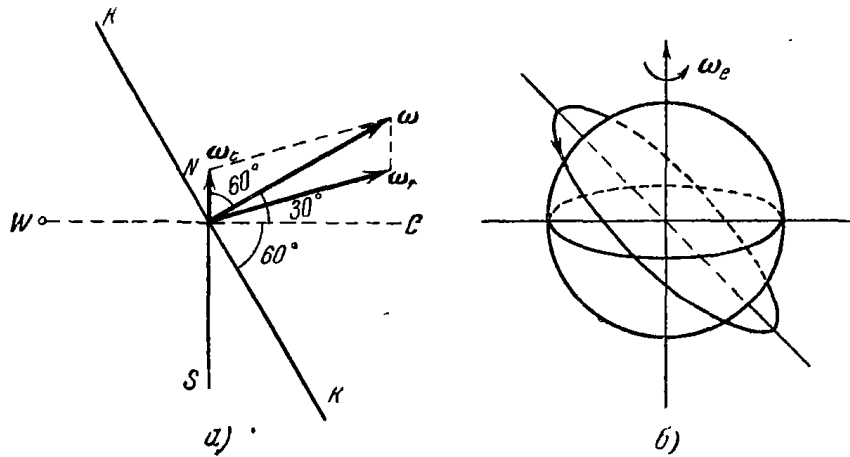
или

$$\frac{\omega_e}{\sin \alpha} = \frac{\omega_r}{\sin (\delta - \alpha)},$$

откуда окончательно находим:

$$\omega_r = \omega_e \frac{\sin (\delta - \alpha)}{\sin \alpha}.$$

**Задача 7.6.** Искусственный спутник Земли, двигаясь по круговой орбите, имеет период обращения, вычисленный по отношению к системе



К задаче 7.6.

координат, движущейся вместе с центром Земли поступательно, равный 1,5 часа. Определить его относительную угловую скорость по отношению к Земле, вращающейся вокруг своей оси, при угле наклона его орбиты к экватору  $\alpha_1 = 60^\circ$ . Вектор его угловой скорости  $\omega$  образует острый угол с осью  $SN$  Земли.

**Решение.** Плоскость орбиты  $KK$  образует с экватором  $WO$  угол  $60^\circ$ . Тогда вектор абсолютной угловой скорости спутника  $\omega$  составляет угол  $60^\circ$  с осью  $SN$ , по которой направлен вектор  $\omega_e$  угловой скорости Земли. Рассматривая вращение спутника как движение, складывающееся из переносного вращение вместе с Землей и искомого относительного вращение по отношению к Земле, имеем:

$$\omega = \omega_e + \omega_r,$$

где  $\omega$  — абсолютная угловая скорость спутника;  $\omega_r$  — его относительная угловая скорость. Величина абсолютной угловой скорости

$$\omega = \frac{2\pi}{90} \text{ мин}^{-1}.$$

Величина переносной угловой скорости

$$\omega_e = \frac{2\pi}{24 \cdot 60} \text{ мин}^{-1}.$$

Таким образом, в треугольнике угловых скоростей известны две стороны  $\omega$  и  $\omega_e$  и угол между ними. Определяем третью сторону треугольника:

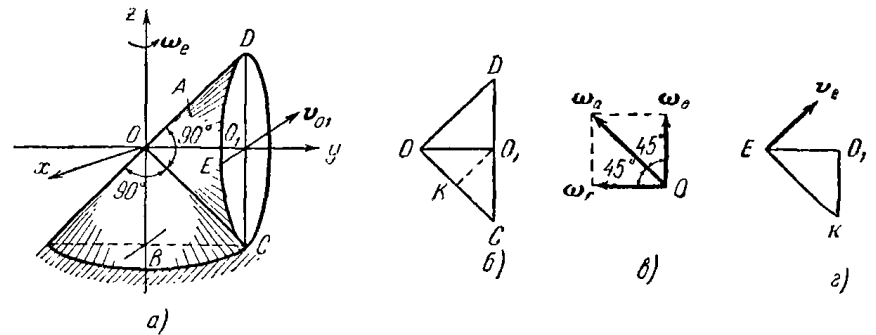
$$\omega_r = \sqrt{\omega^2 + \omega_e^2 - 2\omega\omega_e \cos 60^\circ} = \frac{2\pi}{90} \sqrt{1 + \frac{1}{16^2} - \frac{1}{16}} \approx 0,0675 \text{ мин}^{-1}.$$

Находим угол, образованный  $\omega_r$  с экватором:

$$\cos (\omega_r, \widehat{WO}) = \frac{\omega \cos 30^\circ}{\omega_r} = 0,89.$$

$\omega_r$  — это угловая скорость спутника относительно Земли.

**Задача 7.7.** Конус  $A$  с углом при вершине, равным  $\angle DOC = 90^\circ$ , имеет неподвижную точку  $O$  и катится без скольжения по неподвижному конусу  $B$ , угол которого при вершине также равен  $90^\circ$ . Диаметр



К задаче 7.7.

основания подвижного конуса  $DC = 40$  см. Скорость точки  $O_1$  по величине постоянна и равна  $v_{O_1} = 80$  см/сек.

Найти  $\omega_p$  — переносную угловую скорость конуса (вокруг оси  $z$ ), его относительную угловую скорость  $\omega_r$  (вокруг оси симметрии  $OO_1$ ) и абсолютную угловую скорость  $\omega_a$ . Определить скорости точек  $D$ ,  $E$ ,  $C$  конуса (рис. а).

**Решение.** Точка  $O_1$  лежит на относительной мгновенной оси вращения  $OO_1$  и, следовательно, ее относительная скорость  $v_{O_1}^r$  равна нулю. Согласно теореме сложения скоростей

$$v_{O_1}^a = v_{O_1}^e + v_{O_1}^r,$$

при учете равенства  $v_{O_1}^e = 0$  имеем:

$$v_{O_1}^a = v_{O_1}^e.$$

Величина переносной скорости равна произведению радиуса вращения вокруг переносной мгновенной оси  $z$  на модуль переносной мгновенной угловой скорости:

$$v_{O_1}^e = OO_1 \cdot \omega_e,$$

откуда

$$\omega_e = \frac{v_{O_1}^e}{OO_1} = \frac{v_{O_1}^a}{OO_1} = \frac{80}{20} = 4 \text{ сек}^{-1}.$$

Полагая движение точки  $O_1$  происходящим против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси  $z$ , вектор  $\omega_e$  следует направить по оси  $z$  вверх.

Скорости точек подвижного конуса, находящихся в соприкосновении с поверхностью неподвижного конуса, равны нулю, так как конус  $A$  катится без скольжения по конусу  $B$ . Следовательно, образующая  $OC$  является мгновенной осью абсолютного движения и величина абсолютной скорости точки  $O_1$  равна

$$v_{O_1}^a = O_1K \cdot |\omega_a|,$$

где  $\omega_a$  — абсолютная мгновенная угловая скорость;  $O_1K$  — перпендикуляр, опущенный из точки  $O_1$  на мгновенную ось  $OC$  (рис. б). Тогда

$$O_1K = OO_1 \sin 45^\circ = 20 \frac{\sqrt{2}}{2} = 14,1 \text{ см}$$

и, следовательно,

$$\omega_a = \frac{v_a}{O_1K} = \frac{80}{14,1} = 5,66 \text{ сек}^{-1}.$$

Учитывая направление скорости точки  $O_1$ , проводим  $\omega_a$  от  $C$  к  $O$  (рис. в). Направление относительной мгновенной угловой скорости совпадает с прямой  $OO_1$ . Строим (рис. в) на векторе  $\omega_a$ , как на диагонали, параллелограмм угловых скоростей

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r,$$

откуда следует, что величина  $\omega_r = \omega_e = 4 \text{ сек}^{-1}$ .

Переходим к определению скоростей точек  $D$ ,  $E$ ,  $C$  конуса. Скорость точки  $C$  равна нулю, так как эта точка лежит на мгновенной оси абсолютного движения и соприкасается с боковой поверхностью неподвижного конуса  $B$ .

Найдем величину скорости точки  $D$ . Величина скорости точки  $D$  равна произведению величины абсолютной угловой скорости  $\omega_a$  на

кратчайшее расстояние точки  $D$  до мгновенной оси абсолютного движения  $OC$

$$v_D = OD \cdot \omega_a = 20 \sqrt{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{2}} = 160 \text{ см/сек};$$

$v_D$  направлена перпендикулярно к плоскости  $ODC$  (рис. б) за рисунок.

Скорость точки  $D$  можно найти и другим способом. Действительно, скорость точки  $D$  равна сумме переносной и относительной скоростей

$$v_D = v_D^e + v_D^r,$$

переносная скорость по величине равна

$$v_D^e = OO_1 \cdot \omega_e = 20 \cdot 4 = 80 \text{ см/сек}$$

и направлена перпендикулярно к плоскости  $ODC$  за рисунок; модуль относительной скорости точки  $D$

$$v_D^r = O_1D \cdot \omega_r = 20 \cdot 4 = 80 \text{ см/сек}.$$

Так как относительная скорость совпадает по направлению с переносной скоростью, то

$$v_D = v_D^e + v_D^r = 160 \text{ см/сек}.$$

Переходим к определению скорости точки  $E$ . На рис. г представлена плоскость  $O_1EK$ , перпендикулярная к абсолютной мгновенной оси  $OC$  и проходящая через диаметр основания конуса  $O_1E$ . Из рис. г видно, что кратчайшее расстояние от точки  $E$  до прямой  $OC$  равно

$$EK = \sqrt{(O_1K)^2 + (EO_1)^2} = \sqrt{200 + 400} = 24,5 \text{ см},$$

следовательно, величина скорости точки  $E$  будет:

$$v_E = EK \cdot \omega_a = 24,5 \cdot 5,66 = 138,5 \text{ см/сек}.$$

Эта скорость (рис. г) лежит в плоскости  $O_1EK$  и направлена перпендикулярно к прямой  $EK$ .

**Задача 7.8.** В условиях предыдущей задачи определить абсолютное и относительное угловые ускорения конуса  $A$ . Найти ускорения точек  $O_1$ ,  $D$ ,  $C$ .

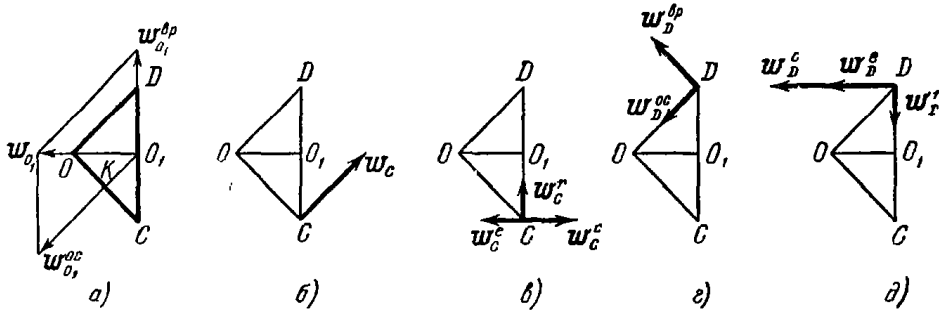
Решение. Угловое ускорение может быть определено как скорость конца вектора угловой скорости. Угловая скорость переносного движения  $\omega_e$  сохраняет без изменения свою величину ( $\omega_e = 4 \text{ сек}^{-1}$ ) и свое направление (по оси  $z$ ). Угловое ускорение в абсолютном движении равно

$$\varepsilon_a = \frac{d\omega_a}{dt} = \omega_e \times \omega_a \quad (1)$$

(так как вектор  $\omega_a$  вращается со скоростью  $\omega_p$ ), или

$$\varepsilon_a = \omega_p \cdot \omega_a \sin(\omega_p, \omega_a) = 4 \frac{80}{10} \frac{\sqrt{2}}{2} = 16 \text{ сек}^{-2}.$$

Оно направлено по оси  $x$  в положительную сторону, перпендикулярно к плоскости  $OO_1C$ .



К задаче 7.8.

Для определения углового ускорения  $\varepsilon_a$  можно воспользоваться теоремой сложения угловых скоростей:

$$\omega_a = \omega_p + \omega_r,$$

где  $\omega_a$ ,  $\omega_p$ ,  $\omega_r$  — соответственно абсолютная, переносная и относительная угловые скорости тела. Вычисляя от обеих частей этого равенства производную по времени, находим:

$$\varepsilon_a = \frac{d\omega_a}{dt} = \frac{d\omega_p}{dt} + \frac{d\omega_r}{dt} = \frac{d\omega_p}{dt} + \frac{d'\omega_r}{dt} + \omega_p \times \omega_r.$$

Так как в данной задаче  $\frac{d\omega_p}{dt} = 0$  и  $\frac{d'\omega_r}{dt} = 0$ , то

$$\varepsilon_a = \omega_p \times \omega_r.$$

Этот же результат получается и из (1), если вычислить непосредственно выражение

$$\varepsilon_a = \omega_p \times \omega_a = \omega_p \times (\omega_p + \omega_r) = \omega_p \times \omega_r,$$

откуда

$$\varepsilon_a = 16 \text{ сек}^{-2}.$$

Переходим к определению ускорений точек  $O_1$ ,  $D$ ,  $C$ . Ускорение точки  $O_1$  может быть определено тремя способами.

Первый способ — точка  $O_1$  описывает окружность радиуса  $OO_1$  с постоянной по величине скоростью  $v_{O_1} = 80 \text{ см/сек}$ ; следовательно,

ускорение точки  $O_1$  будет нормальным ускорением с модулем

$$w_{O_1} = \frac{v_{O_1}^2}{OO_1} = \frac{80^2}{20} = 320 \text{ см/сек}^2,$$

оно направлено от  $O_1$  к точке  $O$ .

Второй способ — ускорение точки  $O_1$ , как принадлежащей твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижного центра  $O$ :

$$w_{O_1} = w_{O_1}^{oc} + w_{O_1}^{np} = \omega_a \times (\omega_a \times r) + \varepsilon_a \times r,$$

причем величина осеостремительного ускорения

$$w_{O_1}^{oc} = h\omega_a^2 = O_1K \cdot \omega_a^2 = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot 32 = 320\sqrt{2} \text{ см/сек}^2.$$

Это ускорение направлено по перпендикуляру к мгновенной оси, т. е. от  $O_1$  к  $K$  (рис. а); модуль вращательного ускорения

$$w_{O_1}^{np} = \varepsilon_a h_1 = \varepsilon_a \cdot OO_1 = 16 \cdot 20 = 320 \text{ см/сек}^2,$$

оно направлено перпендикулярно к  $\varepsilon_a$  и  $r = \overline{OO_1}$ , т. е. по оси  $z$  вверх; замечая, что угол между  $w_{O_1}^{np}$  и  $w_{O_1}^{oc}$  равен  $135^\circ$ , заключаем, что

$$w_{O_1} = w_{O_1}^{np} = 320 \text{ см/сек}^2$$

и направлено по  $OO_1$ , что совпадает с результатом, найденным первым способом.

Третий способ — ускорение точки  $O_1$  определяем по теореме сложения ускорений (теореме Кориолиса), рассматривая ее абсолютное движение как составное из переносного вращения (вокруг оси  $z$ ) и относительного вращения (вокруг оси  $OO_1$ ); тогда

$$w_{O_1} = w_{O_1}^c + w_{O_1}^r + w_{O_1}^c;$$

переносное ускорение направлено от  $O_1$  к  $O$  и равно по величине

$$w_{O_1}^c = OO_1 \cdot \omega_p^2 = 20 \cdot 16 = 320 \text{ см/сек}^2;$$

относительное ускорение точки  $O_1$  равно нулю, так как точка  $O_1$  лежит на оси  $OO_1$ , вокруг которой происходит относительное движение конуса; кориолисово ускорение точки  $O_1$  равно

$$w_{O_1}^c = 2\omega_p \times v_{O_1}^r;$$

оно обращается в нуль, так как нулю равна относительная скорость  $v_r$  точки  $O_1$ ; таким образом, как и при ранее использованных способах, величина ускорения  $O_1$  будет:

$$w_{O_1} = w_{O_1}^c = 320 \text{ см/сек}^2;$$

это ускорение направлено от  $O_1$  к  $O$ .



Найдем теперь ускорение точки  $C$ . Это ускорение также можно определить различными способами.

Первый способ — ускорение точки  $C$  складывается из осе-стремительного и вращательного ускорений

$$\omega_C = \omega_C^{oc} + \omega_C^{np}.$$

Осе-стремительное ускорение точки  $C$  обращается в нуль, так как точка лежит на мгновенной оси; следовательно,

$$\omega_C = \omega_C^{np} = \varepsilon_a \times r.$$

Величина ускорения

$$\omega_C = \omega_C^{np} = \varepsilon_a \cdot OC \cdot \sin 90^\circ = 16 \cdot 20 \sqrt{2} = 320 \sqrt{2} \text{ см/сек}^2.$$

Это ускорение лежит в плоскости  $OO_1C$ , перпендикулярной к  $\varepsilon_a$ , и образует прямой угол с  $OC$  (рис. б).

Второй способ определения ускорения точки  $C$  основан на теореме сложения ускорений

$$\omega_C = \omega_C' + \omega_C^r + \omega_C^c.$$

Переносное ускорение точки  $C$  есть ускорение при вращении вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega_z$ . Величина переносного ускорения равна

$$\omega_C^e = OC \cdot \sin 45^\circ \cdot \omega_z^2 = 20 \cdot 16 = 320 \text{ см/сек}^2.$$

Это ускорение направлено от точки  $C$  по перпендикуляру к оси  $z$ , т. е. параллельно оси  $y$  (рис. в). Относительное ускорение точки  $C$  есть ускорение при вращении вокруг оси  $y$  с угловой скоростью  $\omega_y$ . Его величина

$$\omega_C^r = O_1C \cdot \omega_y^2 = 20 \cdot 16 = 320 \text{ см/сек}^2.$$

Оно направлено от точки  $C$  к  $O_1$  (рис. в). Кориолисово ускорение равно

$$\omega_C^c = 2\omega_e \times v_C^r.$$

Следовательно, его величина (замечаем, что  $v_C^r = O_1C \cdot \omega_y$ )

$$\omega_C^c = 2\omega_e v_C^r \sin 90^\circ = 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 20 = 640 \text{ см/сек}^2;$$

оно направлено согласно правилу векторного произведения параллельно оси  $y$  (рис. в).

Находим теперь сумму ускорений  $\omega_C^e$  и  $\omega_C^c$ , направленных по одной прямой в разные стороны:

$$\omega_C^e - \omega_C^c = 320 \text{ см/сек}^2.$$

Тогда величина полного ускорения точки  $C$

$$\omega_C = \sqrt{(\omega_C^e)^2 + (\omega_C^c - \omega_C^e)^2} = 320 \sqrt{2} \text{ см/сек}^2;$$

оно направлено под прямым углом к  $OC$ .

Переходим к определению ускорения точки  $D$ .

Первый способ. Применим формулу распределения ускорений в твердом теле, вращающемся вокруг неподвижной точки:

$$\omega_D = \omega_D^{oc} + \omega_D^{np}.$$

Осе-стремительное ускорение по величине равно

$$\omega_D^{oc} = OD \cdot \omega_a^2 = 20 \sqrt{2} \left( \frac{8}{\sqrt{2}} \right)^2 = 640 \sqrt{2} \text{ см/сек}^2.$$

Оно направлено от  $D$  к  $O$  (рис. з). Вращательное ускорение определяется формулой

$$\omega_D^{np} = \varepsilon_a \times r,$$

следовательно, модуль вращательного ускорения

$$\omega_D^{np} = \varepsilon_a \cdot OD = 16 \cdot 20 \sqrt{2} = 320 \sqrt{2} \text{ см/сек}^2.$$

Это ускорение направлено перпендикулярно к  $OD$  (рис. з). Величина полного ускорения точки  $D$

$$\omega_D = \sqrt{(\omega_D^{oc})^2 + (\omega_D^{np})^2} = 320 \sqrt{10} \text{ см/сек}^2.$$

Второй способ определения ускорения точки  $D$  основан на использовании теоремы Кориолиса:

$$\omega_D = \omega_D^e + \omega_D^r + \omega_D^c.$$

Переносное ускорение по величине равно

$$\omega_D^e = OD \cdot \sin 45^\circ \cdot \omega_z^2 = 20 \cdot 16 = 320 \text{ см/сек}^2$$

и направлено от  $D$  к оси  $z$  по кратчайшему направлению (рис. д). Модуль относительного ускорения будет:

$$\omega_D^r = O_1D \cdot \omega_y^2 = 20 \cdot 16 = 320 \text{ см/сек}^2.$$

Это ускорение направлено от  $D$  к  $O_1$  (рис. д).

Ускорение Кориолиса дается формулой

$$\omega_D^c = 2\omega_e \times v_D^r,$$

где  $v_D^r = O_1D \cdot \omega_y = 80 \text{ см/сек}$ . Оно направлено перпендикулярно к плоскости  $OCD$  за рисунок. Величина ускорения Кориолиса равна

$$\omega_D^c = 2\omega_e v_D^r \sin 90^\circ = 2 \cdot 4 \cdot 80 = 640 \text{ см/сек}^2.$$

Его направление совпадает с  $\omega_D^e$  (рис. д).

Таким образом, величина ускорения точки  $D$

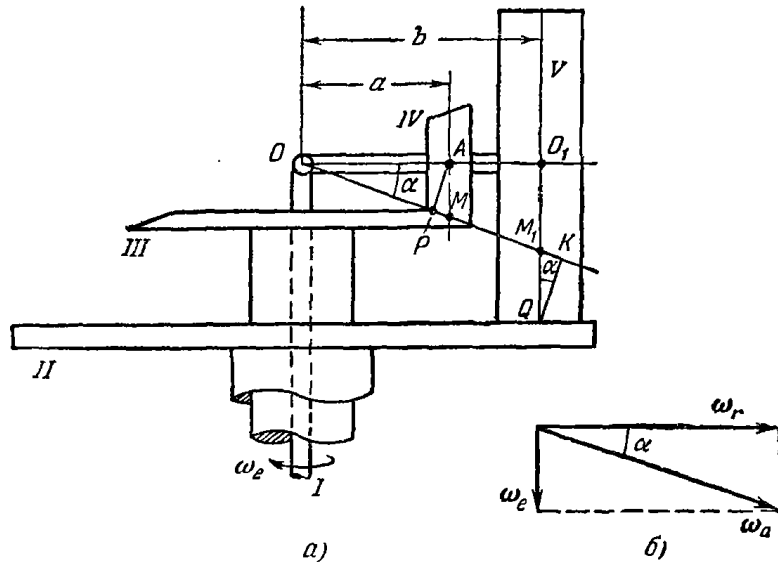
$$\omega_D = \sqrt{(\omega_D^r)^2 + (\omega_D^e + \omega_D^c)^2} = 320 \sqrt{10} \text{ см/сек}^2.$$

Направляющие косинусы определяются формулами:

$$\cos(\omega_D, \hat{y}) = \frac{\omega_{Dy}}{\omega_D} = -\frac{960}{320 \sqrt{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\cos(\omega_D, \hat{z}) = \frac{\omega_{Dz}}{\omega_D} = -\frac{320}{320 \sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

**Задача 7.9.** На рис.  $a$  схематически изображен мельничный бегун с неподжным направляющим диском  $III$ . Ведущий вал  $I$  и опорная



а)  
К задаче 7.9.

плита  $II$  могут вращаться вокруг вертикальной оси независимо друг от друга. На вал  $OO_1$  бегуна  $V$  наглухо насажено коническое колесо  $IV$  радиуса  $r$ , которое катится без скольжения по неподвижному диску  $III$  радиуса  $a$ .

Определить относительную угловую скорость  $\omega_r$  вращения бегуна вокруг его оси  $OO_1$ , а также угловую скорость  $\omega_{II}$ , которую должна иметь опорная плита. Длина вала  $OO_1$  равна  $b$ , радиус бегуна  $R$ . Колесо  $IV$  обегает неподвижный диск за 4 сек.

Решение. Движение бегуна сложное, оно состоит из вращения оси бегуна  $OO_1$  вокруг вертикальной оси, проходящей через точку  $O$ , и вращения бегуна вокруг его собственной оси  $OO_1$ . Первое из этих движений — вращение вокруг вертикали — будем считать переносным

движением, а второе — вращение вокруг оси симметрии бегуна — относительным движением. Угловая скорость переносного вращения бегуна равна

$$\omega_e = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ 1/сек.}$$

Величина скорости центра  $A$  конического колеса  $IV$  равна

$$v_A = \omega_e \cdot OA = \omega_e \cdot a.$$

Мгновенная ось вращения колеса  $IV$  проходит через неподвижный шарнир  $O$  и точку касания колеса с неподвижной плитой  $M$ . Линия  $OM$  составляет с осью  $OA$  угол  $\alpha$ . Из треугольника  $OAM$  находим:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}}, \\ \cos \alpha &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Кратчайшее расстояние от центра колеса  $A$  до мгновенной оси вращения  $OM$  равно

$$AP = OA \cdot \sin \alpha = \frac{ar}{\sqrt{a^2 + r^2}}.$$

Величина мгновенной угловой скорости колеса  $IV$  равна

$$\omega_a = \frac{v_A}{AP} = \frac{\omega_e}{r} \sqrt{a^2 + r^2} = \frac{\pi}{2r} \sqrt{a^2 + r^2}.$$

Если предположить, что скорость точки  $A$  в положении, показанном на рис.  $a$ , направлена перпендикулярно к чертежу, на читателя, то векторное равенство

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r$$

будет иметь вид, изображенный на рис.  $b$ .

Отсюда видно, что

$$\omega_r = \omega_e \operatorname{ctg} \alpha = \omega_a \cos \alpha.$$

Подставляя значения тригонометрических функций из (1), получаем

$$\omega_r = \omega_e \frac{a}{r} = \frac{\pi a}{2r}.$$

Эту же угловую скорость вокруг оси  $OO_1$  имеет и бегун  $V$ , составляющий с коническим колесом  $IV$  одно твердое тело.

Величина скорости центра  $O_1$  бегуна  $V$  будет:

$$v_{O_1} = \omega_e \cdot b.$$

Скорость нижней точки бегуна  $Q$  может быть найдена двумя способами.

Первый способ. Рассмотрим бегун в абсолютном вращении вокруг мгновенной оси  $OM$ . Продолжим эту ось до пересечения с радиусом  $O_1Q$ . Из подобия треугольников  $OAM$  и  $OO_1M_1$  имеем:

$$\frac{a}{r} = \frac{b}{O_1M_1},$$

откуда

$$O_1M_1 = \frac{rb}{a}.$$

Тогда находим:

$$QM_1 = O_1Q - O_1M_1 = R - \frac{rb}{a}.$$

Кратчайшее расстояние точки  $Q$  от мгновенной оси вращения будет:

$$QK = QM_1 \cos \alpha = \left(R - \frac{rb}{a}\right) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}.$$

Тогда

$$v_Q = \omega_a \cdot QK = \omega_e \left(\frac{aR}{r} - b\right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{aR}{r} - b\right).$$

Второй способ. Скорость точки бегуна  $Q$  складывается из переносной скорости вращения вокруг вертикальной оси и относительной скорости вращения вокруг горизонтальной оси бегуна  $OO_1$ . Обе эти скорости в положении, изображенном на рисунке, перпендикулярны плоскости чертежа, но направлены в разные стороны: переносная скорость  $v_r$  — к нам, относительная скорость — от нас, причем  $v_r > v_e$ . Тогда величина скорости точки  $Q$  будет:

$$v_Q = v_r - v_e = \omega_r \cdot R - \omega_e \cdot b = \frac{\pi}{2} \left(\frac{aR}{r} - b\right).$$

Точка касания опорной плиты  $II$  с бегуном имеет такую же скорость:  $v_{II} = v_Q$ . Отсюда вычисляем величину угловой скорости вращения плиты:

$$\omega_{II} = \frac{v_{II}}{b} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{aR}{br} - 1\right).$$

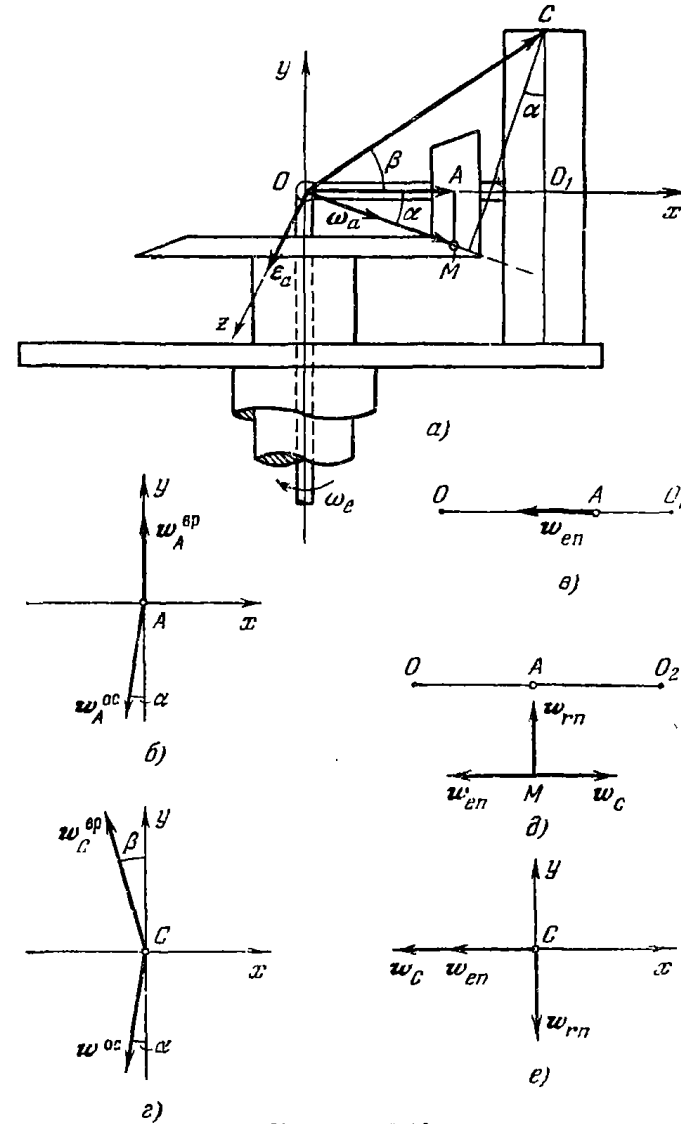
Направление вращения плиты — обратное направлению вращения вала бегуна.

**Задача 7.10.** В условиях предыдущей задачи найти ускорения точек  $A$  и  $M$  конического колеса и верхней точки  $C$  бегуна.

Решение. Предварительно определим абсолютное угловое ускорение бегуна как производную абсолютной угловой скорости по времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega_a}{dt}. \quad (1)$$

По величине  $\omega_a$  не меняется, конец ее вектора описывает окружность радиуса  $\omega$ , с угловой скоростью  $\omega_e$ . Угловое ускорение



К задаче 7.10.

согласно (1) можно рассматривать как скорость движения конца вектора  $\omega_a$ . Вектор углового ускорения  $\varepsilon$  направлен перпендикулярно к чертежу, на читателя, и численно равен (рис. а)

$$\varepsilon = \omega_r \cdot \omega_e = \frac{\omega_e a}{r} \omega_e = \frac{\pi^2 a}{4r}.$$

Ускорения точек могут быть найдены двумя способами: применением теоремы Ривальса или применением теоремы Кориолиса.

Первый способ (теорема Ривальса). Воспользуемся для определения ускорения точек  $A$ ,  $M$  и  $C$  формулой

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^{sp} + \boldsymbol{w}^{oc} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}_a \times (\boldsymbol{\omega}_a \times \boldsymbol{r}),$$

где вместо  $\boldsymbol{r}$  будем подставлять последовательно радиусы-векторы точек  $A$ ,  $M$  и  $C$ .

1) Для ускорения точки  $A$  имеем:

$$\boldsymbol{w}_A = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overline{OA} + \boldsymbol{\omega}_a \times (\boldsymbol{\omega}_a \times \overline{OA}).$$

Вектор  $\boldsymbol{\varepsilon} \times \overline{OA}$  направлен вертикально вверх и равен по модулю

$$\boldsymbol{w}_A^{sp} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot OA = \frac{\omega_e^2 a^2}{r}.$$

Вектор  $\boldsymbol{\omega}_a \times \overline{OA}$  направлен параллельно оси  $z$  к нам и равен по величине

$$\omega_a \cdot OA \cdot \sin \alpha = \omega_a \frac{a \cdot r}{\sqrt{a^2 + r^2}} = \omega_e \cdot a.$$

Вектор  $\boldsymbol{\omega}_a \times (\boldsymbol{\omega}_a \times \overline{OA})$  направлен перпендикулярно к  $\boldsymbol{\omega}_a$  и оси  $z$  (по которой расположен второй сомножитель векторного произведения) вниз (рис. б) и равен по величине

$$\boldsymbol{w}_A^{oc} = \omega_a \cdot \omega_e \cdot a \cdot \sin 90^\circ = \frac{\omega_e^2 a}{r} \sqrt{a^2 + r^2}.$$

Проекции ускорения точки  $A$  на оси координат будут:

$$w_{Ax} = -w_{Ax}^{oc} = -w_A^{oc} \sin \alpha = -\omega_e^2 a;$$

$$w_{Ay} = w_{Ay}^{sp} - w_{Ay}^{oc} = w_A^{sp} - w_A^{oc} \cos \alpha = \frac{\omega_e^2 a^2}{r} - \frac{\omega_e^2 a^2}{r} = 0.$$

Следовательно, ускорение точки  $A$  направлено горизонтально влево по оси  $x$  и равно по модулю

$$w_A = \omega_e^2 a = \frac{\pi^2 a}{4}.$$

Примечание. Точка  $A$ , как и другие точки оси  $OO_1$ , совершает вращение вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega_e$  и имеет поэтому только нормальное ускорение, равное  $w_A = \omega_e^2 \cdot a$ , направленное к оси вращения, т. е. горизонтально влево. Естественно, что применение теоремы Ривальса привело к тому же результату.

2) Для ускорения точки  $M$  имеем:

$$\boldsymbol{w}_M = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overline{OM} + \boldsymbol{\omega}_a \times (\boldsymbol{\omega}_a \times \overline{OM}).$$

Вектор  $\boldsymbol{\varepsilon} \times \overline{OM}$  направлен перпендикулярно к линии  $OM$  вверх и равен по величине

$$\boldsymbol{w}_M^{sp} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot OM = \frac{\omega_e^2 a}{r} \sqrt{a^2 + r^2}.$$

Вектор  $\boldsymbol{\omega}_a \times \overline{OM}$  равен нулю, так как направления сомножителей совпадают, следовательно,

$$\boldsymbol{w}_M^{oc} = 0.$$

Итак, полное ускорение точки  $M$  состоит из ее вращательного ускорения и равно по величине

$$w_M = \frac{\omega_e^2 a}{r} \sqrt{a^2 + r^2} = \frac{\pi^2 a}{4r} \sqrt{a^2 + r^2}.$$

Оно направлено от точки  $M$  перпендикулярно к  $OM$ .

3) Для ускорения точки  $C$  имеем:

$$\boldsymbol{w}_C = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overline{OC} + \boldsymbol{\omega}_a \times (\boldsymbol{\omega}_a \times \overline{OC}).$$

Вектор  $\boldsymbol{\varepsilon} \times \overline{OC}$  направлен в плоскости  $xy$  перпендикулярно к  $OC$  вверх и равен по величине

$$\boldsymbol{w}_C^{sp} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot OC = \frac{\omega_e^2 a}{r} \sqrt{b^2 + R^2}.$$

Таким образом, этот вектор лежит в плоскости  $xy$  и образует угол  $\beta$  с осью  $y$ .

Величина осеостремительного ускорения будет:

$$|\boldsymbol{\omega}_a \times (\boldsymbol{\omega}_a \times \overline{OC})| = \omega_a^2 h,$$

где  $h$  — длина перпендикуляра, опущенного из точки  $C$  на мгновенную ось  $OM$ , равная

$$h = OC \cdot \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{b^2 + R^2} (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta).$$

Внося в это равенство значения функций угла  $\alpha$ , полученные в предыдущей задаче, а также

$$\sin \beta = \frac{R}{\sqrt{b^2 + R^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}},$$

получим величину осеостремительного ускорения

$$w_C^{oc} = \frac{\omega_e^2}{r^2} \sqrt{a^2 + b^2} (rb + aR).$$

Осеостремительное ускорение направлено перпендикулярно к линии  $OM$  от точки  $C$  к мгновенной оси.

Изобразим слагаемые вектора  $\omega_C$  на рис. 2. Для определения величины ускорения точки  $C$  спроектируем составляющие ускорения на оси  $x$  и  $y$ . Получаем:

$$\begin{aligned}\omega_{Cx} &= -\omega_C^{\text{np}} \sin \beta - \omega_C^{\text{oc}} \sin \alpha = -\frac{\omega_e^2 a R}{r} - \frac{\omega_e^2}{r} (rb + aR) = \\ &= -\frac{\omega_e^2}{r} (rb + 2aR), \\ \omega_{Cy} &= \omega_C^{\text{np}} \cos \beta - \omega_C^{\text{oc}} \cos \alpha = \frac{\omega_e^2 ab}{r} - \frac{\omega_e^2 a}{r^2} (rb + aR) = -\frac{\omega_e^2 a^2 R}{r^2},\end{aligned}$$

откуда

$$\omega_C = \sqrt{\omega_{Cx}^2 + \omega_{Cy}^2} = \frac{\omega_e^2}{r^2} \sqrt{r^4 b^2 + 4aRr^3 b + 4a^2 r^3 R^2 + a^4 R^2}.$$

Второй способ. Рассмотрим движение бегуна как сложное и воспользуемся для нахождения ускорения точки  $C$  теоремой Кориолиса, согласно которой

$$\omega = \omega_{e\tau} + \omega_{en} + \omega_{r\tau} + \omega_{rn} + \omega_c.$$

За переносное движение примем вращение вокруг вертикальной оси, а за относительное — вращение вокруг оси  $OO_1$ . Отметим, что для всех точек  $\omega_{e\tau}$  и  $\omega_{r\tau}$  равны нулю, так как угловые скорости  $\omega_e$  и  $\omega_r$  не изменяются ни по величине, ни по направлению.

1) Для ускорения точки  $A$  имеем:

$$\omega_A = \omega_{en} + \omega_{rn} + \omega_c.$$

Нормальное ускорение в переносном движении направлено к оси вращения, т. е. по горизонтали влево, и равно

$$\omega_{en} = \omega_e^2 a.$$

Нормальное ускорение в относительном движении равно нулю, так как точка  $A$  лежит на оси относительного вращения. Ускорение Кориолиса равно нулю, так как относительная скорость точки  $A$  равна нулю. Итак, абсолютное ускорение точки равно (рис. 3)

$$\omega_A = \omega_e^2 a = \frac{\pi^2 a}{4}.$$

2) Для ускорения точки  $M$  имеем:

$$\omega_M = \omega_{en} + \omega_{rn} + \omega_c.$$

Нормальное ускорение точки  $M$  в переносном вращении равно

$$\omega_{en} = \omega_e^2 a$$

и направлено к оси переносного вращения (см. рис. 4). Нормальное ускорение в относительном вращении равно

$$\omega_{rn} = \omega_r^2 \cdot r = \omega_e^2 \frac{a^2}{r}.$$

и направлено к оси относительного вращения (на рисунке вверх). Ускорение Кориолиса направлено вправо и равно

$$\omega_c = 2\omega_e \cdot v_r \sin 90^\circ = 2\omega_e \omega_r \cdot r = 2\omega_e^2 \cdot a.$$

Направив оси  $x$  и  $y$ , как показано на рисунке, проектируем слагаемые ускорения на эти оси:

$$\omega_{Mx} = -\omega_{en} + \omega_c = -\omega_e^2 a + 2\omega_e^2 a = \omega_e^2 a,$$

$$\omega_{My} = \omega_{rn} = \omega_e^2 \frac{a^2}{r}.$$

Абсолютное ускорение точки  $M$  равно

$$\omega_M = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} = \frac{\omega_e^2 a}{r} \sqrt{r^2 + a^2} = \frac{\pi^2 a}{4r} \sqrt{r^2 + a^2}.$$

3) Для ускорения точки  $C$  имеем:

$$\omega = \omega_{en} + \omega_{rn} + \omega_c.$$

Нормальное ускорение в переносном вращении равно

$$\omega_{en} = \omega_e^2 \cdot b$$

и направлено к оси переносного вращения, т. е. влево (рис. 5). Нормальное ускорение точки  $M$  в относительном вращении направлено от  $M$  к оси относительного вращения  $OO_1$ , т. е. вниз, и равно

$$\omega_{rn} = \omega_r^2 R = \frac{\omega_e^2 a^2 R}{r^2}.$$

Ускорение Кориолиса направлено влево и равно

$$\omega_c = 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 2\omega_e \omega_r R = 2\omega_e^2 \frac{aR}{r}.$$

Проектируя составляющие абсолютного ускорения точки  $C$  на оси координат, находим:

$$\omega_{Cx} = -\omega_{en} - \omega_c = -\omega_e^2 b - 2\omega_e^2 \frac{aR}{r}.$$

$$\omega_{Cy} = -\omega_{rn} = -\omega_e^2 \frac{a^2 R}{r^2}.$$

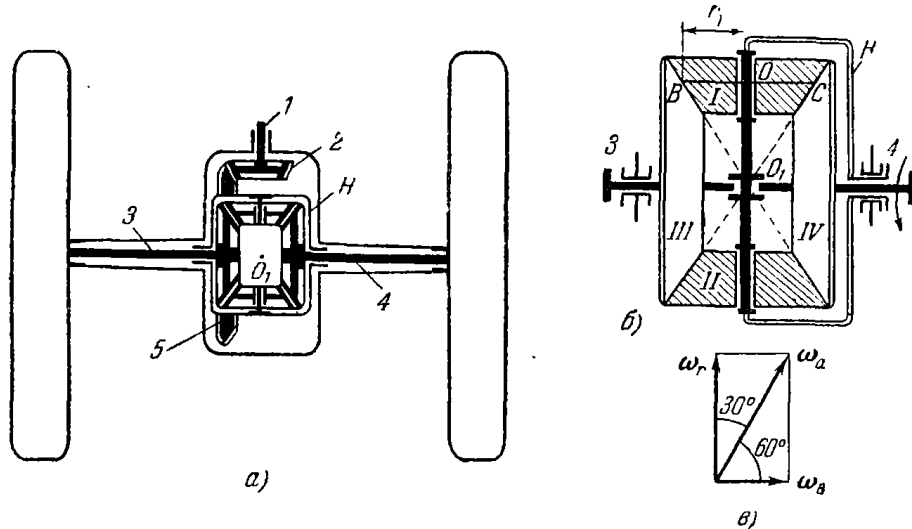
Величина абсолютного ускорения точки  $C$  равна

$$\begin{aligned}\omega_C &= \sqrt{\omega_{Cx}^2 + \omega_{Cy}^2} = \frac{\omega_e^2}{r^2} \sqrt{r^4 b^2 + 4abr^3 R + 4a^2 R^2 r^2 + a^4 R^2} = \\ &= \frac{\pi^2}{4r^2} \sqrt{r^4 b^2 + 4abr^3 R + 4a^2 R^2 r^2 + a^4 R^2}.\end{aligned}$$

**Задача 7.11.** В автомобильном дифференциале (рис. 6) вращение от оси мотора 1 посредством конической передачи 2 и 5 передается

водилу  $H$ . Парные сателлиты  $I$  и  $II$  (рис. б) вращаются вокруг осей, закрепленных на водиле  $H$ , и находятся в сцеплении с колесами  $III$  и  $IV$ , движение которых через полуоси  $3$  и  $4$  передается задним колесам автомобиля.

Для получения кинематической зависимости в передаче достаточно одного сателлита ( $I$  и  $II$ ), помещенного на водиле  $H$ . Однако для разгрузки осей  $3$  и  $4$  вводят второй сателлит, располагая его симметрично на противоположном конце водила  $H$ . Вал  $I$  с шестерней  $2$  делает  $600$  об/мин, передаточное отношение  $\frac{r_5}{r_2} = 5$ .



К задачам 7.11 и 7.12.

Определить абсолютную и относительную угловые скорости сателлитов и угловые скорости шестерен  $III$  и  $IV$ : а) при прямолинейном движении автомобиля, б) в случае, если правое заднее колесо, встретив препятствие, остановилось. Радиусы сателлитов  $I$  и  $II$  равны  $r_1 = 15$  см, радиусы шестерен  $III$  и  $IV$  —  $r_3 = 15\sqrt{3}$  см.

Решение. Обозначим угловую скорость колеса  $5$ , равную угловой скорости водила, через  $\Omega$ . Тогда для конической пары  $2$  и  $5$  имеем:

$$\frac{\omega_2}{\omega_5} = \frac{r_5}{r_2}, \quad (1)$$

откуда

$$\omega_2 = \Omega = 120 \text{ об/мин.}$$

Зная угловую скорость водила, применим к расчету угловых скоростей звеньев автомобильного дифференциала метод Виллиса. Дадим

мысленно основанию механизма (рис. б) вращение, противоположное вращению водила и равное ему по величине. Тогда водило станет неподвижным, а угловые скорости шестерен  $III$  и  $IV$  будут равны

$$\omega_3 = \Omega,$$

$$\omega_4 = \Omega.$$

Угловую скорость сателлита относительно водила обозначим через  $\omega$ . Тогда для каждой пары колес с неподвижными осями можно записать равенства:

$$\frac{\omega_3 - \Omega}{\omega} = \frac{r_1}{r_3}, \quad (2)$$

$$\frac{\omega_4 - \Omega}{\omega} = -\frac{r_1}{r_3}, \quad (3)$$

причем в формуле (3) взят знак минус, так как колеса  $III$  и  $IV$  (при остановленном водиле) вращаются в противоположных направлениях. Решая уравнения (2) и (3) относительно  $\Omega$  и  $\omega$ , находим:

$$\Omega = \frac{1}{2}(\omega_3 + \omega_4), \quad (4)$$

$$\omega = \frac{r_3}{2r_1}(\omega_3 - \omega_4). \quad (5)$$

Пользуясь этими формулами, найдем ответы.

а) При прямолинейном движении угловые скорости колес равны  $\omega_3 = \omega_4$  и, следовательно, из (4) имеем:

$$\omega_3 = \omega_4 = \Omega = 120 \text{ об/мин};$$

из (5) находим:

$$\omega = 0.$$

Сателлиты не вращаются относительно водила  $H$ .

б) В случае остановки правого заднего колеса автомобиля  $\omega_4 = 0$ . Тогда из (4) находим:

$$\omega_3 = 2\Omega = 240 \text{ об/мин.}$$

Относительная угловая скорость сателлита из (5) равна

$$\omega = \frac{15\sqrt{3}}{2 \cdot 15} \omega_3 = 120\sqrt{3} \text{ об/мин.}$$

Абсолютная угловая скорость сателлита определится из рис. в, где  $\omega_r = \omega = 120\sqrt{3}$  об/мин,  $\omega_e = \Omega = 120$  об/мин:

$$\omega_a = \sqrt{\omega^2 + \Omega^2} = 240 \text{ об/мин.}$$

**Задача 7.12.** Для автомобильного дифференциала, рассмотренного в предыдущей задаче, определить угловую скорость водила  $\Omega$  и

относительную угловую скорость сателлитов  $\omega$ , если при повороте задние колеса автомобиля описывают на земле дуги радиусов  $\rho_1 = 20$  м и  $\rho_2 = 18$  м, причем скорость центра тяжести автомобиля  $v = 38$  м/сек. Радиус заднего колеса  $R = 0,6$  м.

Решение. Скорости центров задних колес автомобиля определяются по формулам

$$v_3 = \frac{2v}{\rho_1 + \rho_2} \cdot \rho_1 = 40 \text{ м/сек}, \quad v_4 = \frac{2v}{\rho_1 + \rho_2} \cdot \rho_2 = 36 \text{ м/сек}.$$

Угловые скорости шестерен III и IV (рис. б) будут:

$$\omega_3 = \frac{v_3}{R}, \quad \omega_4 = \frac{v_4}{R}.$$

Тогда из формулы (4) предыдущей задачи находим угловую скорость водила

$$\Omega = \frac{1}{2}(\omega_3 + \omega_4) = \frac{1}{2R}(v_3 + v_4) = \frac{v}{R} = \frac{38}{0,6} = 63,3 \text{ сек}^{-1},$$

а из формулы (5) — относительную угловую скорость сателлитов

$$\omega = \frac{r_3}{2r_1}(\omega_3 - \omega_4) = \frac{15\sqrt{3}(v_3 - v_4)}{2 \cdot 15 \cdot R} = 5,76 \text{ сек}^{-1}.$$

Для приобретения навыков в решении задач на сложение вращений вокруг пересекающихся осей рекомендуется решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, издания 1950 г. и более поздних лет: 611, 612, 614, 615, 617, 618, 622, 627, 630, 632.

### § 3. Общий случай движения твердого тела. Сложение поступательных и вращательных движений

1°. Скорости и ускорения точек твердого тела в общем случае движения. Уравнения движения твердого тела в общем случае движения записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} x_O &= f_1(t), & y_O &= f_2(t), & z_O &= f_3(t), \\ \psi &= f_4(t), & \varphi &= f_5(t), & \theta &= f_6(t). \end{aligned} \right\} \quad (1^1)$$

Здесь  $x_O, y_O, z_O$  — координаты произвольной точки твердого тела, выбранной за полюс;  $\psi, \varphi, \theta$  — углы Эйлера: угол прецессии, угол чистого, или собственного, вращения и угол нутации, определяющие поворот твердого тела вокруг полюса.

Скорость любой точки твердого тела в общем случае движения определяется формулой

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1, \quad (2^1)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость любой точки твердого тела;  $\mathbf{v}_O$  — скорость полюса;  $\boldsymbol{\omega}$  — мгновенная угловая скорость твердого тела;  $\mathbf{r}_1$  — радиус-вектор, проведенный из полюса в точку, скорость которой подлежит определению.

Ускорение любой точки твердого тела в общем случае движения определяется формулой

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1). \quad (3^*)$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega}$  — искомое ускорение точки;  $\boldsymbol{\omega}_O$  — ускорение полюса;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — мгновенное угловое ускорение твердого тела.

**Задача 7.13.** Центр тяжести ракеты движется со скоростью  $\mathbf{v}_0$  и ракета одновременно вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  (рис. а). Две точки А и В расположены на одном диаметре, перпендикулярном к оси, соответственно на расстояниях  $l_1$  и  $l_2$  от последней.

Какому условию должны удовлетворять расстояния  $l_1$  и  $l_2$ , если известно, что скорости точек А и В взаимно перпендикулярны?

Решение. Задача может быть решена двумя способами: аналитически и графически.

Первый способ. Движение ракеты соответствует общему случаю движения твердого тела, причем винтовая ось совпадает с осью ракеты. В общем случае движения твердого тела скорость любой его точки определяется формулой (2\*):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1,$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость любой точки твердого тела;  $\mathbf{v}_O$  — скорость точки выбранной за полюс;  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость твердого тела;  $\mathbf{r}_1$  — радиус-вектор, проведенный из полюса в точку, скорость которой определяется.

Принимая произвольную точку О на оси ракеты за полюс, запишем скорости точек А и В:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1; \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2,$$

где  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — радиусы-векторы точек А и В, проведенные из полюса О. Скорости  $\mathbf{v}_A$  и  $\mathbf{v}_B$  по условию взаимно перпендикулярны. Условие перпендикулярности векторов — равенство нулю их скалярного произведения:

$$\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B = 0.$$

Подставляя в это равенство значения скоростей, получим:

$$(\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2) = 0.$$

Раскрывая скобки, находим:

$$v_0^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_O \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2) = 0. \quad (1)$$

Но

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{v}_O = 0,$$

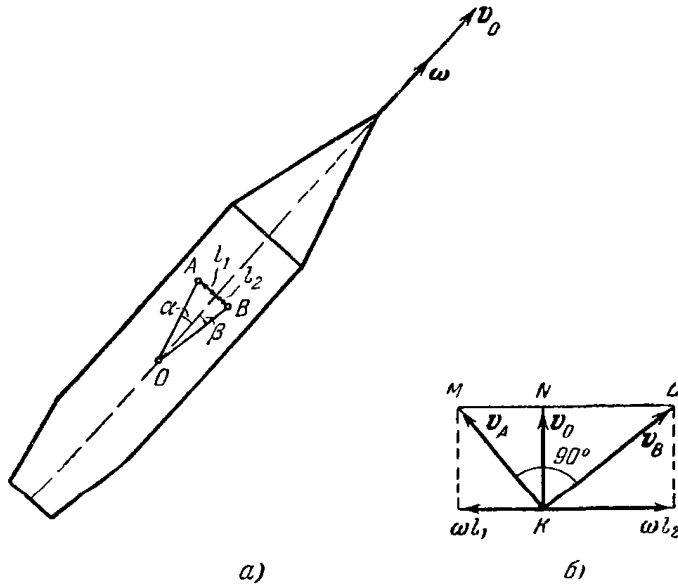
так как первый сомножитель в скобке перпендикулярен к вектору  $\omega$ , а второй сомножитель  $v_0$  по условию параллелен  $\omega$ . Аналогично устанавливаем, что и третье слагаемое

$$v_0 \cdot (\omega \times r_2) = 0.$$

Рассмотрим последнее слагаемое из (1). Имеем

$$(\omega \times r_1) (\omega \times r_2) = (\omega r_1 \sin \alpha) (\omega r_2 \sin \beta) \cos 180^\circ = -\omega^2 l_1 l_2,$$

так как векторные произведения  $(\omega \times r_1)$  и  $(\omega \times r_2)$  параллельны



а)

б)

К задаче 7.13.

и направлены в противоположные стороны. Внося значения слагаемых в равенство (1), находим:

$$v_0^2 - \omega^2 l_1 l_2 = 0,$$

откуда окончательно имеем:

$$l_1 l_2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2.$$

Это и есть условие, которому должны удовлетворять отрезки  $l_1$  и  $l_2$ .

Второй способ. Графическое решение этой задачи представлено на рис. б, где дано сложение скоростей точек  $A$  и  $B$  на плоскости, перпендикулярной к  $AB$ .

Скорость  $v_A$  складывается из взаимно перпендикулярных составляющих, равных по модулю  $v_0$  и  $\omega l_1$ ; скорость  $v_B$  аналогично получается из составляющих, модули которых  $v_0$  и  $\omega l_2$ , причем  $\omega l_1$  и  $\omega l_2$  направлены в противоположные стороны, а скорости  $v_A$  и  $v_B$  взаимно

перпендикулярны. Тогда из прямоугольного треугольника  $MKL$  с высотой  $KN$  находим, что

$$KN^2 = NM \cdot NL \quad \text{или} \quad v_0^2 = \omega l_1 \cdot \omega l_2,$$

откуда

$$l_1 l_2 = \frac{v_0^2}{\omega^2}.$$

2°. Сложение поступательных и вращательных движений твердого тела. Рассмотрим движение твердого тела, участвующего в нескольких вращательных движениях вокруг произвольно расположенных мгновенных осей и одновременно в нескольких поступательных движениях.

Вращательное движение твердого тела характеризуется мгновенной осью и угловой скоростью, направленной по мгновенной оси. Вектор угловой скорости можно переносить в любую точку вдоль мгновенной оси, следовательно, угловая скорость есть скользящий вектор.

Поступательное движение твердого тела можно охарактеризовать скоростью. Скорость поступательного движения твердого тела можно рассматривать как результат действия пары вращений. Скорость поступательного движения твердого тела есть свободный вектор.

При параллельном переносе вектора угловой скорости добавляется в точке приведения поступательная скорость

$$v = r \times \omega, \quad (1^*)$$

где  $r$  — радиус-вектор, проведенный из точки приведения в точку приложения вектора угловой скорости.

Таким образом, выбирая произвольную точку за полюс, можно привести все угловые скорости к этой точке и, сложив, получить результирующую угловую скорость

$$\omega = \sum_{k=1}^n \omega_k. \quad (2^*)$$

Поступательные скорости, как непосредственно заданные, так и возникающие при приведении угловых скоростей к центру приведения, складываются и дают результирующую поступательную скорость

$$v_0 = \sum_{k=1}^m v_k. \quad (3^*)$$

Таким образом, любая совокупность вращательных и поступательных движений твердого тела может быть заменена одним вращением с угловой скоростью  $\omega$  вокруг мгновенной оси, проходящей через центр приведения, и одним поступательным движением со скоростью  $v_0$ .



Частные случаи сложения вращений и поступательных движений твердого тела:

1. Если  $\omega = 0, v_0 = 0$ , то тело находится в мгновенном покое.
2. Если  $\omega \neq 0, v_0 = 0$ , то тело вращается вокруг мгновенной оси.
3. Если  $\omega = 0, v_0 \neq 0$ , то тело движется мгновенно-поступательно.
4. Если  $\omega \neq 0, v_0 \neq 0$  и  $v_0 \perp \omega$ , то тело вращается вокруг мгновенной оси, параллельной и отстоящей на расстоянии  $v_0/\omega$  от мгновенной оси, проходящей через центр приведения. Эта мгновенная ось лежит в плоскости, перпендикулярной к скорости  $v_0$ .

5. Если  $\omega \neq 0, v_0 \neq 0$  и  $v_0$  не перпендикулярна к  $\omega$ , то тело совершает мгновенное винтовое движение. В этом случае существует мгновенная винтовая ось — геометрическое место точек, скорости которых равны между собой и направлены вдоль мгновенной оси. Кинематическим винтом называется совокупность угловой скорости и поступательной скорости, направленных по одной прямой.

Сложение вращений и поступательных движений твердого тела рекомендуется производить в следующем порядке:

- 1) выбрать оси декартовых координат;
- 2) взять в начале координат, точке  $O$ , центр приведения;
- 3) вычислить проекции результирующего вектора угловой скорости;
- 4) определить модуль результирующего вектора угловой скорости и его направляющие косинусы;
- 5) найти проекции результирующей поступательной скорости;
- 6) определить модуль результирующей поступательной скорости и ее направляющие косинусы;
- 7) установить, к какому из пяти частных случаев приводится результирующее движение;
- 8) если движение приводится к вращению вокруг мгновенной оси, то ее уравнение находится по формуле

$$\frac{v_x - y\omega_z + z\omega_y}{\omega_x} = \frac{v_y - z\omega_x + x\omega_z}{\omega_y} = \frac{v_z - x\omega_y + y\omega_x}{\omega_z}, \quad (4^*)$$

где  $x, y, z$  — текущие координаты мгновенной оси;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  и  $v_x, v_y, v_z$  — соответственно проекции результирующих угловой скорости и поступательной скорости на оси координат;

9) если движение приводится к винтовому движению, то уравнение винтовой оси находится по той же формуле (4\*).

Наименьшее значение результирующей поступательной скорости, равное проекции поступательной скорости на мгновенную ось вращения, определяется по формуле

$$v_{\min} = \frac{\omega_x v_x + \omega_y v_y + \omega_z v_z}{\omega}, \quad (5^*)$$

10) определить параметр кинематического винта, равный отношению минимальной поступательной скорости  $v_{\min}$  к результирующей угловой скорости твердого тела, по формуле

$$\rho = \frac{v_{\min}}{\omega} = \frac{\omega_x v_x + \omega_y v_y + \omega_z v_z}{\omega^2}. \quad (6^*)$$

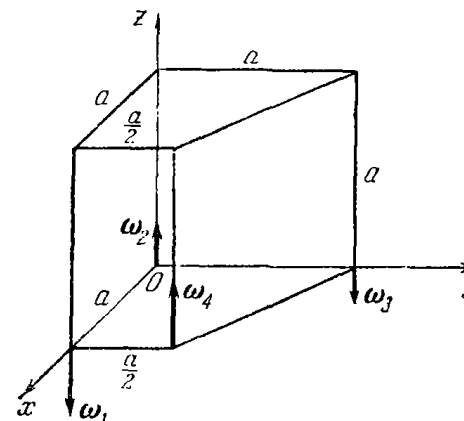
Как следует из вышеизложенного, существует аналогия между приведением пространственной системы сил к простейшему виду и

сложением поступательных и вращательных движений твердого тела. При этом роль сил играют угловые скорости, а роль моментов присоединенных пар — поступательные скорости твердого тела.

**Задача 7.14.** Тело, размеры которого указаны на рисунке, участвует в нескольких вращениях с угловыми скоростями  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  и  $\omega_4$ .

Привести движение тела к простейшему виду, если

$$\omega_1 = \omega_4 = 2\omega, \quad \omega_2 = \omega_3 = \omega.$$



К задаче 7.14.

Решение. Координатные оси изображены на рисунке. Примем за центр приведения точку  $O$ . Совокупность заданных угловых скоростей приводится в общем случае к скорости  $v$  и угловой скорости  $\omega_0$ .

Определим проекции результирующей угловой скорости:

$$\begin{aligned} \omega_x &= 0, \\ \omega_y &= 0, \\ \omega_z &= -\omega_1 - \omega_3 + \omega_2 + \omega_4 = -2\omega - \omega + \omega + 2\omega = 0, \end{aligned}$$

следовательно, вектор  $\omega_0$  равен нулю:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = 0.$$

Проекция результирующей скорости на оси координат  $v_x, v_y, v_z$  найдем аналогично проекциям главных моментов сил, рассматривая  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  и  $\omega_4$  как силы:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_4 \cdot \frac{a}{2} - \omega_3 \cdot a = \frac{2a\omega}{2} - a\omega = 0, \\ v_y &= -\omega_4 \cdot a - \omega_3 \cdot a = -2a\omega - 2a\omega = 0, \end{aligned}$$

следовательно,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = 0.$$

Итак,  $\omega_0 = 0$  и  $v = 0$ , т. е. тело будет находиться в мгновенном покое.

**Задача 7.15.** Твердое тело в форме куба со стороной  $a$  участвует во вращении с угловыми скоростями  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega$  и  $\omega_5 = \omega_6 = \omega \sqrt{2}$ . Размеры тела и направление угловых скоростей указаны на рис. а.

Привести движение тела к простейшему виду.

Решение. Примем за центр приведения точку  $O$ . Направим оси  $x, y, z$  вдоль ребер куба. Определим проекции результирующей угловой скорости:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_2 - \omega_6 \cos 45^\circ, \\ \omega_y &= -\omega_1 - \omega_4 + \omega_5 \cos 45^\circ + \omega_6 \cos 45^\circ, \\ \omega_z &= \omega_3 - \omega_5 \cos 45^\circ. \end{aligned}$$

Подставив величины угловых скоростей, будем иметь:

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0.$$

Следовательно, в результирующем движении вращения не будет.

Определим проекции результирующей поступательной скорости:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_3 a - \omega_5 a \cos 45^\circ - \omega_6 a \sin 45^\circ, \\ v_y &= -\omega_2 a - \omega_4 a \cos 45^\circ + \omega_5 a \cos 45^\circ, \\ v_z &= -\omega_1 a - \omega_3 a + \omega_6 a \cos 45^\circ + \omega_5 a \sin 45^\circ. \end{aligned}$$

Подставив известные значения величин, получим:

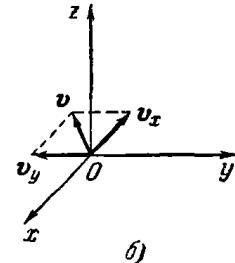
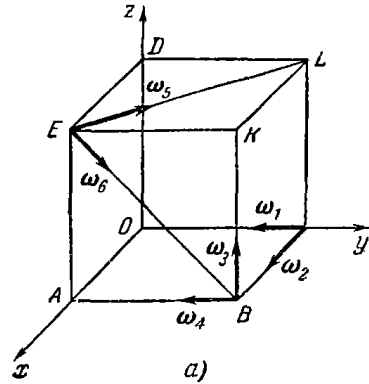
$$v_x = -\omega a, \quad v_y = -\omega a, \quad v_z = 0.$$

Тогда модуль поступательной скорости равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \omega a \sqrt{2}.$$

Таким образом, движение тела будет мгновенно-поступательным со скоростью  $v = \omega a \sqrt{2}$ , направленной, как показано на рис. б.

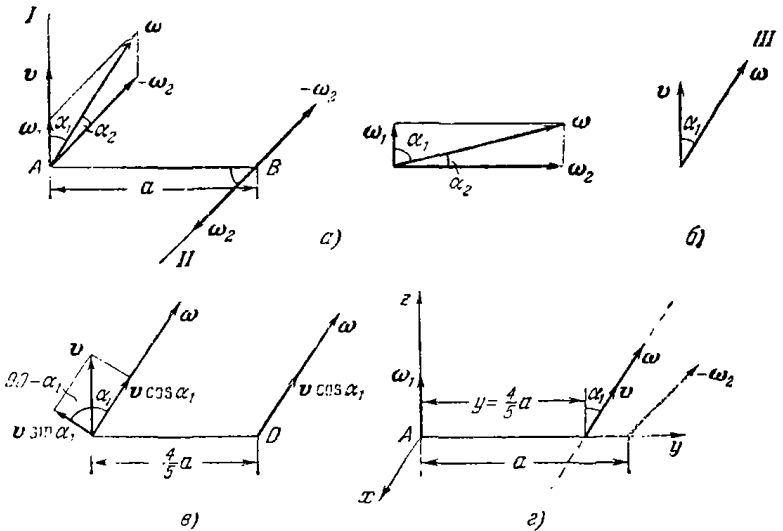
Полезно отметить, что результирующее мгновенно-поступательное движение получается из сложения одних вращений.



К задаче 7.15.

**Задача 7.16.** Тело  $A$  вращается вокруг оси  $I$  с угловой скоростью  $\omega_1$ , тело  $B$  независимо от него вращается вокруг оси  $II$  с угловой скоростью  $\omega_2 = 2\omega_1$ . Ось  $II$  перпендикулярна к оси  $I$  и находится от нее на расстоянии  $a$ . Какое движение совершает тело  $A$  по отношению к телу  $B$ ?

Решение. Графический метод. Дадим телу  $B$  дополнительное вращение с угловой скоростью  $-\omega_2$ , тогда тело  $B$  будет неподвижно. Движение тела  $A$  по отношению к  $B$  будет складываться



К задаче 7.16.

из вращения вокруг оси  $I$  с угловой скоростью  $\omega_1$  и из вращения вокруг оси  $II$  с угловой скоростью  $-\omega_2$ . Приведем вектор  $-\omega_2$  к точке  $A$ , тогда в этой точке, кроме вектора  $-\omega_2$ , следует приложить и скорость

$$v = r \times \omega_2,$$

где  $r = \overline{BA}$ . Этот вектор  $v$  будет направлен по оси  $I$  и равен по модулю

$$v = \omega_2 \cdot a = 2\omega_1 a.$$

Складывая векторные угловые скорости  $\omega_1$  и  $-\omega_2$ , примененные в точке  $A$ , получим суммарный вектор  $\omega$ , направленный под углом  $\alpha_1$  к оси  $I$  и под углом  $\alpha_2$  к оси  $II$ , причем

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{2\omega_1}{\omega_1} = 2, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_1}{2\omega_1} = \frac{1}{2}.$$

Теперь можно сказать, что движение тела  $A$  по отношению к телу  $B$  состоит из вращения вокруг оси  $III$  с угловой скоростью

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

численно равной

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \omega_1 \sqrt{5},$$

и поступательного движения со скоростью  $v$ . Ось  $III$  составляет угол  $\alpha_1$  с направлением поступательной скорости  $v$  (рис. б).

Движение тела  $A$  можно представить более наглядно, если привести движение к винтовому. Разложим скорость  $v$  на две взаимно перпендикулярные составляющие  $v \cos \alpha_1$  и  $v \sin \alpha_1$  (рис. в). Составляющая  $v \cos \alpha_1$  будет направлена по вектору  $\omega$ . Составляющую  $v \sin \alpha_1$ , перпендикулярную к  $\omega$ , можно представить как пару вращения, момент которой равен произведению угловой скорости на плечо  $l$ . Находим длину  $l$  из равенства  $v \sin \alpha_1 = \omega l$ .

Подставляя в это равенство найденное значение  $v$  и выражение

$$\sin \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

будем иметь:

$$2\omega_1 \cdot a \frac{2}{\sqrt{5}} = \omega_1 \sqrt{5} \cdot l,$$

откуда находим:

$$l = \frac{2a \cdot 2}{5} = \frac{4}{5} a.$$

Таким образом, относительное движение тела  $A$  складывается из вращательного движения с угловой скоростью  $\omega$  и поступательного движения со скоростью  $v \cos \alpha_1$ , направленных по винтовой оси (рис. в). Тело  $A$  совершает винтовое движение по отношению к телу  $B$ .

Модуль поступательной скорости равен

$$v \cos \alpha_1 = 2\omega_1 a \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} a\omega_1.$$

Эту задачу можно решить и аналитическим способом, аналогично способу, который применяют в статике при приведении произвольной пространственной системы сил к простейшему виду. Угловые скорости являются скользящими векторами аналогично силам в статике. Поступательные скорости являются свободными векторами, аналогично моментам в статике.

Аналитический метод. Движение тела  $A$  относительно тела  $B$  складывается из двух вращений: с угловой скоростью  $\omega_1$  вокруг оси  $I$  и с угловой скоростью  $-\omega_2$ , направленной в отрицательную сторону оси  $II$ .

Выберем оси координат с началом в точке  $A$ , тогда проекции результирующей угловой скорости на оси координат будут:

$$\omega_x = -\omega_2 = -2\omega_1, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega_1. \quad (1)$$

Модуль результирующей угловой скорости равен

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \omega_1 \sqrt{5}.$$

Найдем проекции поступательной скорости на оси координат:

$$v_x = 0, \quad v_y = 0, \quad v_z = 2a\omega_1. \quad (2)$$

Модуль поступательной скорости равен

$$v = 2a\omega_1.$$

Проверим, образуют ли  $\omega$  и  $v$  прямой угол:

$$\omega \cdot v = \omega_x v_x + \omega_y v_y + \omega_z v_z = 2a\omega_1.$$

Как видно, скалярное произведение этих векторов не равно нулю, следовательно, они не перпендикулярны друг другу. Значит, тело совершает по отношению к телу  $B$  винтовое движение.

Найдем уравнение мгновенной винтовой оси. Воспользуемся формулой

$$\frac{v_x - y\omega_z + z\omega_y}{\omega_x} = \frac{v_y - z\omega_x + x\omega_z}{\omega_y} = \frac{v_z - x\omega_y + y\omega_x}{\omega_z}. \quad (3)$$

Это уравнение, если принять во внимание формулы (1) и (2), принимает вид

$$\frac{y}{2} = \frac{2z\omega_1 + x\omega_1}{0} = \frac{2a - 2y}{1}, \quad (4)$$

или

$$z = -\frac{x}{2}, \quad y = \frac{4}{5} a. \quad (5)$$

Таким образом, ось вращения лежит в плоскости, параллельной координатной плоскости  $xz$ , отстоит от нее на расстоянии  $y = \frac{4}{5} a$  и образует с осью  $z$  угол  $\alpha_1$ , определяемый из равенства  $\operatorname{tg} \alpha_1 = 2$ . Осталось найти поступательную скорость, с которой будет двигаться тело вдоль винтовой оси. Она определится по формуле (5)

$$v_{\min} = \frac{\omega_x v_x + \omega_y v_y + \omega_z v_z}{\omega}; \quad (6)$$

после подстановки всех значений в правую часть (6) имеем:

$$v_{\min} = \frac{2a\omega_1}{\sqrt{5}}.$$

Естественно, результаты в обоих случаях совпадают.

**МЕЖДУНАРОДНАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ (СИ)**

В декабре 1960 г. XI Генеральная конференция по мерам и весам приняла единую Международную систему единиц (СИ).

Процесс введения этой системы в практику (и особенно тех ее единиц, которые еще не получили широкого распространения) будет осуществляться постепенно в течение ряда лет — в переходной период, конечно, будут сохраняться и традиционные единицы систем СГС и МкГС, использованные в настоящей книге.

Приведем для справок выписку из таблиц Международной системы единиц по ГОСТу 9867—61:

Наименование величины	Единица измерения	Сокращенные обозначения единиц	
		русские	латинские или греческие
<i>Основные единицы</i>			
Длина	Метр	<i>м</i>	<i>m</i>
Масса	Килограмм	<i>кг</i>	<i>kg</i>
Время	Секунда	<i>сек</i>	<i>s</i>
Сила электрического тока	Ампер	<i>а</i>	<i>A</i>
<i>Дополнительные единицы</i>			
Плоский угол	Радан	<i>рад</i>	<i>rad</i>
Телесный угол	Стерadian	<i>стер</i>	<i>sr</i>
<i>Производные единицы</i>			
Площадь	Квадратный метр	<i>м<sup>2</sup></i>	<i>m<sup>2</sup></i>
Объем	Кубический метр	<i>м<sup>3</sup></i>	<i>m<sup>3</sup></i>
Частота	Герц (1/сек)	<i>гц</i>	<i>Hz</i>
Объемная масса (плотность)	Килограмм на куб. метр	<i>кг/м<sup>3</sup></i>	<i>kg/m<sup>3</sup></i>
Скорость	Метр в секунду	<i>м/сек</i>	<i>m/s</i>
Угловая скорость	Радан в секунду	<i>рад/сек</i>	<i>rad/s</i>
Ускорение	Метр на секунду в квадрате	<i>м/сек<sup>2</sup></i>	<i>m/s<sup>2</sup></i>
Угловое ускорение	Радан на секунду в квадрате	<i>рад/сек<sup>2</sup></i>	<i>rad/s<sup>2</sup></i>

Продолжение

Наименование величины	Единица измерения	Сокращенные обозначения единиц	
		русские	латинские или греческие
Сила	Ньютон ( <i>кг · м/сек<sup>2</sup></i> )	<i>н</i>	<i>N</i>
Давление (механическое напряжение)	Ньютон на кв. метр	<i>н/м<sup>2</sup></i>	<i>N/m<sup>2</sup></i>
Динамическая вязкость	Ньютон-секунда на метр	<i>н сек/м<sup>2</sup></i>	<i>Ns/m<sup>2</sup></i>
Кинематическая вязкость	Кв. метр на секунду	<i>м<sup>2</sup>/сек</i>	<i>m<sup>2</sup>/s</i>
Работа, энергия, количество теплоты	Джоуль ( <i>н · м</i> )	<i>дж</i>	<i>J</i>
Мощность	Ватт ( <i>дж/сек</i> )	<i>вт</i>	<i>W</i>
Количество электричества	Кулон ( <i>а · сек</i> )	<i>к</i>	<i>C</i>
Электрическое напряжение, разность потенциалов, электродвижущая сила	Вольт ( <i>вт/а</i> )	<i>в</i>	<i>V</i>
Напряженность электрического поля	Вольт на метр	<i>в/м</i>	<i>V/m</i>
Электрическое сопротивление	Ом ( <i>в/а</i> )	<i>ом</i>	$\Omega$
Электрическая емкость	Фарада ( <i>к/в</i> )	<i>ф</i>	<i>F</i>
Поток магнитной индукции	Вебер ( <i>к/ом</i> )	<i>вб</i>	<i>Wb</i>
Индуктивность	Генри ( <i>вб/а</i> )	<i>гн</i>	<i>H</i>
Магнитная индукция	Тесла ( <i>вб/м<sup>2</sup></i> )	<i>тл</i>	<i>T</i>
Напряженность магнитного поля	Ампер на метр	<i>а/м</i>	<i>A/m</i>

**Определения основных единиц**

Метр — длина, равная 1/650 763,73 длин волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями  $2p_{10}$  и  $5d_5$  атома криптона-86.

К и л о г р а м м — единица массы — представлен массой международного прототипа килограмма.

С е к у н д а — 1/31556925,9747 часть тропического года для 1900 г. января 0 в 12 часов эфемеридного времени.

А м п е р — сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызывал бы между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  единиц силы Международной системы на каждый метр длины.

**Некоторые переводные множители**

1 кг = 9,80665 н ≈ 9,81 н	1 кгм = 9,80665 дж ≈ 9,81 дж
1 дина = 10 <sup>-5</sup> н	1 эрг = 10 <sup>-7</sup> дж
1 кг/см <sup>2</sup> = 98066,5 н/м <sup>2</sup>	1 кал = 4,1868 дж
1 дина/см <sup>2</sup> = 0,1 н/м <sup>2</sup>	