ТМ-9 частина 2

Для заданої механічної системи визначити швидкість v_1 та прискорення a_1 тіла 1, коли його переміщення дорівнюватиме S_1 = 1 м. Відомо, що маса m_1 = 10 кг, m_2 = 20 кг, m_3 = 30 кг, зовнішній радіус тіла 2 R_2 = 1 м, внутрішній радіус тіла 2 r_2 = 0,5 м, радіус тіла 3 R_3 = 0,75 м, радіуси інерції тіл 2 та 3 $i_2 = i_3$ = 0,75 м, коефіцієнт тертя тіла 1 f = 0,1, крутний момент M_2 = 10 Н·м, сила F = 50 Н, кут α = 45°. Механічна система знаходиться у стані спокою у момент часу t_0 = 0, тертям ниток на шківах знехтувати.

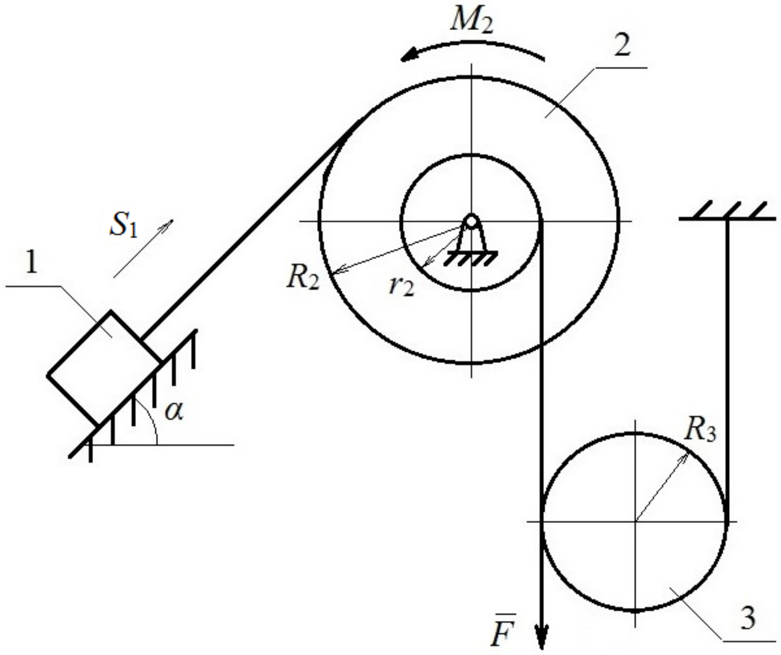

Рисунок 1 – Вихідна схема

Розв'язання

Дано:
S_1 = 1 м
m_1 = 10 кг
m_2 = 20 кг
m_3 = 30 кг
R_2 = 1 м
r_2 = 0,5 м
R_3 = 0,75 м
$i_2 = i_3$ = 0,75 м
f = 0,1
M_2 = 10 Н·м
F = 50 Н
α = 45°
Знайти:
v_1, a_1

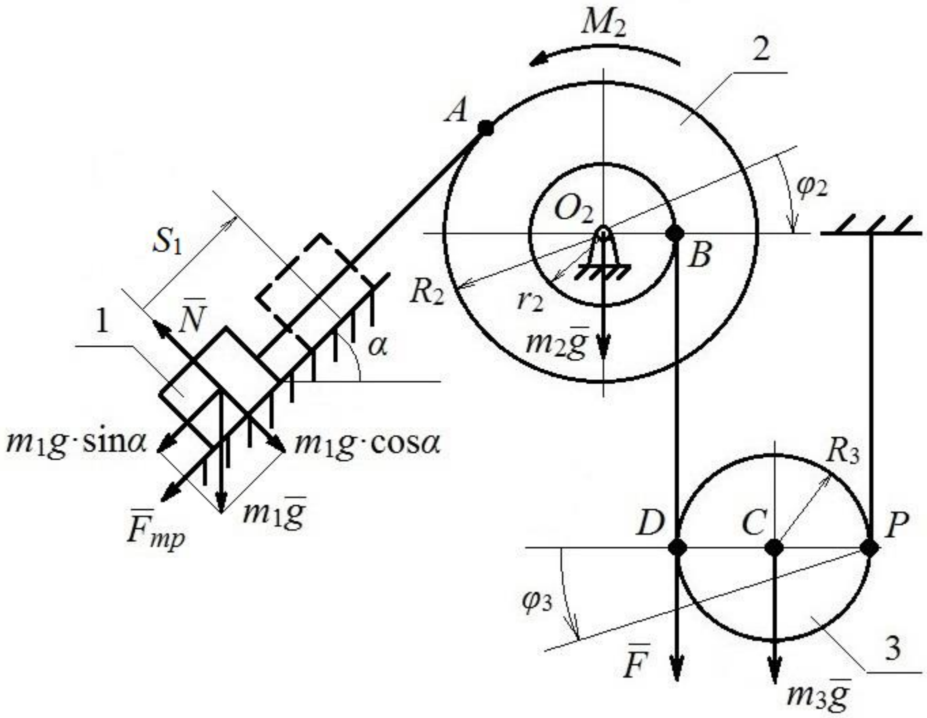

Рисунок 2 – Розрахункова схема

Скористаємося теоремою про зміну кінетичної енергії системи (1).

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^I, \quad (1)$$

де T та T_0 – кінетичні енергії системи у поточному та початковому положеннях, відповідно, $\sum A_i^E$ та $\sum A_i^I$ – суми робіт зовнішніх та внутрішніх сил, що прикладені до системи, на переміщенні із початкового положення у поточне, відповідно.

Для даної системи, що складається із абсолютно твердих тіл (АТТ), що з'єднані нитками, що не розтягуються, сума робіт внутрішніх сил $\sum A_i^I = 0$.

Також з вихідних даних відомо, що у початковому положенні система знаходиться у стані спокою, тобто $T_0 = 0$. Тоді формулу (1) можна представити у наступному вигляді

$$T = \sum A_i^E. \quad (2)$$

Для того, щоб визначити кінетичну енергію T та суму робіт зовнішніх сил $\sum A_i^E$, складемо розрахункову схему (рис. 2) та позначимо на ній дану систему у поточному положенні штриховою лінією. На схемі позначимо допоміжні точки A, B, C, D, P, O_2 та напрямки руху тіл 2 та 3. Також позначимо всі зовнішні сили, що діють на систему, тобто сили тяжіння тіл m_1g, m_2g, m_3g, силу тертя тіла 1 по поверхні $F_{тр}$, нормальну реакцію опори N.

Складемо кінематичні співвідношення між швидкостями та переміщеннями точок системи, тобто рівняння в'язей. В рівняннях виразимо швидкості та переміщення точок системи через параметри тіла 1 (S_1, v_1).

$$S_1 = \varphi_2 \cdot R_2,$$
$$\varphi_2 \cdot r_2 = \varphi_3 \cdot 2R_3,$$

звідки отримаємо

$$\varphi_2 = \frac{S_1}{R_2}, \quad (3)$$

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 \cdot r_2}{2R_3} = \frac{S_1 \cdot r_2}{2R_2 \cdot R_3}, \quad (4)$$

$$S_C = \varphi_3 \cdot R_3 = \frac{S_1 \cdot r_2}{2R_2}, \quad (5)$$

$$S_D = \varphi_3 \cdot 2R_3 = \frac{S_1 \cdot r_2}{R_2}. \quad (6)$$

Відповідно

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{dS_1}{dt} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{v_1}{R_2}, \quad (7)$$

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{v_1 \cdot r_2}{2R_2 \cdot R_3}, \quad (8)$$

$$v_C = \frac{dS_C}{dt} = \frac{v_1 \cdot r_2}{2R_2}. \quad (9)$$

Кінетична енергія системи

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (10)$$

Тоді кінетичні енергії тіл з урахуванням залежностей (7-9)

$$T_1 = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2}, \quad (11)$$

$$T_2 = \frac{I_2 \cdot \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 \cdot i_2^2 \cdot \left(\frac{v_1}{R_2}\right)^2}{2}, \quad (12)$$

$$T_3 = \frac{m_3 \cdot v_C^2}{2} + \frac{I_3 \cdot \omega_3^2}{2} = \frac{m_3 \cdot \left(\frac{v_1 \cdot r_2}{2R_2}\right)^2}{2} + \frac{\frac{m_3 \cdot i_3^2}{2} \cdot \left(\frac{v_1 \cdot r_2}{2R_2 \cdot R_3}\right)^2}{2}, \quad (13)$$

де моменти інерції тіл 2 та 3 дорівнюють відповідно

$$I_2 = m_2 \cdot i_2^2 = 20 \cdot 0{,}75^2 = 11{,}25 \text{ (кг} \cdot \text{м}^2),$$

$$I_3 = \frac{m_3 \cdot i_3^2}{2} = \frac{30 \cdot 0{,}75^2}{2} = 8{,}438 \text{ (кг} \cdot \text{м}^2).$$

Підставимо (11-13) у (10)

$$T = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot i_2^2 \cdot \left(\frac{v_1}{R_2}\right)^2}{2} + \frac{m_3 \cdot \left(\frac{v_1 \cdot r_2}{2R_2}\right)^2}{2} + \frac{\frac{m_3 \cdot i_3^2}{2} \cdot \left(\frac{v_1 \cdot r_2}{2R_2 \cdot R_3}\right)^2}{2}$$

та винесемо $\frac{v_1^2}{2}$ за скобку

$$T = \frac{v_1^2}{2}\left[m_1 + m_2 \cdot i_2^2 \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right)^2 + \ m_3 \cdot \left(\frac{r_2}{2R_2}\right)^2 + \frac{m_3 \cdot i_3^2}{2} \cdot \left(\frac{r_2}{2R_2 \cdot R_3}\right)^2\right] = \frac{v_1^2}{2} \cdot M_{\text{пр}} \quad (14)$$

де величина у дужках $M_{\text{пр}} = 24{,}06$ – приведена маса, кг.

Визначимо роботу всіх зовнішніх сил

$$\sum A_i^E = A(m_1 g) + A(F_{fr}) + A(N) + A(m_2 g) + A(M_2) + A(m_3 g) + A(F). \quad (15)$$

Роботу сили тяжіння тіла 1 визначаємо як добуток модуля сили тяжіння, переміщення точки, до якої вона прикладена (тобто переміщення тіла 1) та косинуса кута між переміщенням тіла 1 та вектором сили тяжіння. За аналогією визначаємо роботи інших сил та моментів з урахуванням залежностей (3-6).

$$A(m_1 g) = m_1 g \cdot S_1 \cdot \cos(m_1 g;\ S_1) = m_1 g \cdot S_1 \cdot \cos(90° + \alpha) =$$

$$= 10 \cdot 9{,}8 \cdot S_1 \cdot (-0{,}707) = -69{,}29 \cdot S_1 \text{ (Дж)}.$$

Робота сили тертя

$$A(F_{\text{тр}}) = F_{\text{тр}} \cdot S_1 \cdot \cos(F_{\text{тр}};\ S_1) = F_{\text{тр}} \cdot S_1 \cdot \cos 180° =$$

$$= 6{,}93 \cdot S_1 \cdot (-1) = -\ 6{,}93 \cdot S_1 \text{ (Дж)},$$

де $F_{\text{тр}} = N \cdot f = m_1 g \cdot \cos\alpha \cdot f = 10 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}707 \cdot 0{,}1 = 6{,}93$ (Н),

та з рівняння рівноваги на вісь, перпендикулярну поверхні $N = m_1 g \cdot \cos\alpha$.

Робота нормальної реакції опори

$$A(N) = N \cdot S_1 \cdot \cos(N;\ S_1) = N \cdot S_1 \cdot \cos 90° = 0.$$

Робота сили тяжіння тіла 2 дорівнює 0 через відсутність переміщень точки O_2.

$$A(m_2 g) = m_2 g \cdot S_{O_2} \cdot \cos(m_2 g;\ S_{O_2}) = 0.$$

Робота моменту M_2

$$A(M_2) = M_2 \cdot \varphi_2 \cdot \cos(M_2;\ \varphi_2) = M_2 \cdot \frac{S_1}{R_2} \cdot \cos 180° =$$

$$= 10 \cdot \frac{S_1}{1} \cdot (-1) = -10 \cdot S_1 \text{ (Дж)}.$$

Робота сили тяжіння тіла 3

$$A(m_3 g) = m_3 g \cdot S_C \cdot \cos(m_3 g;\ S_C) = m_3 g \cdot \frac{S_1 \cdot r_2}{2R_2} \cdot \cos 0° =$$

$$= 30 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{S_1 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 1} \cdot 1 = 73{,}5 \cdot S_1 \text{ (Дж)}.$$

Робота сили F

$$A(F) = F \cdot S_D \cdot \cos(F;\ S_D) = F \cdot \frac{S_1 \cdot r_2}{R_2} \cdot \cos 0° =$$

$$= 50 \cdot \frac{S_1 \cdot 0{,}5}{1} \cdot 1 = 25 \cdot S_1 \text{ (Дж)}.$$

Підставимо роботи усіх сил в (15)

$$\sum A_i^E = m_1 g \cdot S_1 \cdot \cos(90° + \alpha) + F_{\text{тр}} \cdot S_1 \cdot \cos 180° +$$

$$+ M_2 \cdot \frac{S_1}{R_2} \cdot \cos 180° + m_3 g \cdot \frac{S_1 \cdot r_2}{2R_2} \cdot \cos 0° + F \cdot \frac{S_1 \cdot r_2}{R_2} \cdot \cos 0°,$$

винесемо S_1 за скобку

$$\sum A_i^E = S_1 \cdot [m_1 g \cdot \cos(90° + \alpha) + F_{\text{тр}} \cdot \cos 180° +$$

$$+ M_2 \cdot \frac{1}{R_2} \cdot \cos 180° + m_3 g \cdot \frac{r_2}{2R_2} \cdot \cos 0° + F \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \cos 0°] =$$

$$= S_1 \cdot [-69{,}29 - 6{,}93 - 10 + 73{,}5 + 25] = S_1 \cdot F_{\text{пр}}, \qquad (16)$$

де $F_{\text{пр}} = 12{,}28$ – приведена сила, Н.

Прирівняємо (14) та (16), що фактично є виразом (2)

$$\frac{v_1^2}{2} \cdot M_{\text{пр}} = S_1 \cdot F_{\text{пр}}, \qquad (17)$$

звідки отримаємо

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot S_1 \cdot F_{\text{пр}}}{M_{\text{пр}}}},$$

куди підставимо з вихідних даних $S_1 = 1$ м і отримаємо

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 12{,}28}{24{,}06}} = 1{,}01 \text{ (м/с)}.$$

Диференціюємо (17) за параметром часу

$$\frac{d\left(\frac{v_1^2}{2} \cdot M_{\text{пр}}\right)}{dt} = \frac{d(S_1 \cdot F_{\text{пр}})}{dt},$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2v_1 \cdot a_1 \cdot M_{\text{пр}} = v_1 \cdot F_{\text{пр}},$$

$$a_1 = \frac{F_{\text{пр}}}{M_{\text{пр}}} = \frac{12{,}28}{24{,}06} = 0{,}51 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Відповідь: $v_1 = 1{,}01$ м/с, $a_1 = 0{,}51$ м/с^2.