

А. А. ЯБЛОНСКИЙ, В. М. НИКИФОРОВА

Рецензенты:

*Кафедра теоретической механики
Московского авиационного института
Профессор И. М. Воронков*

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ЧАСТЬ I

СТАТИКА. КИНЕМАТИКА

*Издание третье,
исправленное*

Допущено

*Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника для студентов
машиностроительных, механических, приборостроительных,
электротехнических и строительных
специальностей высших технических учебных заведений*

2-4-2
109-66



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
МОСКВА — 1966

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник составлен в полном соответствии с программой курса теоретической механики для высших технических учебных заведений и содержит материал, который является основной частью рабочих программ этого курса всех специальностей.

Учебник рассчитан на студентов очной и заочной систем обучения

Наряду с изложением теоретического материала в учебнике имеется подробное решение задач основных типов и даны вопросы для самоконтроля.

Решение всех примеров выполнено в единицах системы МКС.

Первая часть учебника содержит курс статики и кинематики, вторая часть — курс динамики.

При переиздании учебника учтены многие пожелания и замечания читателей, которым авторы выражают признательность.

Отзывы о книге и пожелания, направленные на улучшение этого издания, следует посылать в адрес издательства «Высшая школа».

Авторы

Из истории развития механики

Механика является одной из древнейших наук, которая своим возникновением и развитием обязана потребностям практики.

Энгельс отмечает, что развитие механики тесно связано с развитием земледелия (подниманием воды для орошения в Египте), с ростом городов, возведением крупных построек, развитием ремесла и мореплавания. Известно, например, что при постройке египетских пирамид применялись некоторые простейшие механические приспособления: рычаги, блоки, наклонная плоскость. Таким образом, еще в древние времена человечество обладало некоторыми эмпирическими знаниями по механике, но потребовался длительный период времени для того, чтобы установить основные законы механики и заложить фундамент этой науки.

В древности не существовало деления науки по отраслям знаний, а поэтому механика, наряду с философией, естествознанием и другими естественными науками, являлась составной частью единой науки о природе и обществе.

Лишь после Аристотеля (384—322 гг. до н. э.) начинается процесс выделения отдельных частных наук из общего естествознания.

На первой стадии развития механики, от древнего мира до эпохи Возрождения (14—16 вв.), в результате изучения простейших машин создается учение о силах.

Основоположником механики как науки является знаменитый ученый древности Архимед (287—212 гг. до н. э.) Архимед дал точное решение задачи о равновесии сил, приложенных к рычагу, и создал учение о центре тяжести тел. Кроме этого, Архимед открыл и сформулировал закон о гидростатическом давлении жидкости на погруженное в нее тело, который носит его имя.

Быстрое и успешное развитие механики начинается лишь с эпохи Возрождения, когда создаются условия для развития науки и техники.

В эпоху Возрождения, как отмечает Энгельс, «... были заложены основы для позднейшей мировой торговли и для перехода ремесла

в мануфактуру, которая, в свою очередь, послужила исходным пунктом для современной крупной промышленности. Духовная диктатура церкви была сломлена».

«Это был величайший прогрессивный переворот из всех пережитых до того времени человечеством, эпоха, которая нуждалась в титанах и которая породила титанов по силе мысли, страсти и характеру, по многосторонности и учености»*.

С эпохи Возрождения начинается следующий период развития механики. Для решения практических задач требуются исследования движений тел. На основе накопленного за четыре столетия опыта к концу XVII в. создаются основы динамики — науки об общих законах движения материальных тел.

Блестящим представителем эпохи Возрождения является знаменитый итальянский художник, физик, механик и инженер — Леонардо да Винчи (1451—1519). На основании своих исследований в области механики Леонардо да Винчи установил, что сила трения скольжения не зависит от величины поверхности соприкосновения трущихся тел. Кроме того, Леонардо да Винчи занимался изучением движения падающего тела, движения тела по наклонной плоскости и ввел в механику понятие момента силы.

Зарождение небесной механики — науки о движении небесных тел — связано с великим открытием Николая Коперника (1473—1543) — созданием гелиоцентрической системы мира, сменившей геоцентрическую систему Птолемея.

Это открытие произвело переворот в научном мировоззрении той эпохи — освободило естествознание от теологии. На основании учения Коперника и астрономических наблюдений Кеплер (1571—1630) сформулировал три закона движения планет, которые впоследствии привели к открытию Ньютоном закона всемирного тяготения.

Создание основ динамики принадлежит великим ученым — итальянцу Галилео Галилею (1564—1642) и англичанину Исааку Ньютону (1643—1727).

В своем знаменитом сочинении «Математические начала натуральной философии», изданном в 1687 г., Ньютон в систематическом виде изложил основные законы так называемой классической механики. Эти законы, установленные на основании наблюдений и опытов Ньютона и его предшественников, являются объективными законами природы.

XVIII в. характеризовался разработкой общих принципов классической механики и важнейшими исследованиями по механике твердого тела, гидродинамике и небесной механике.

Наиболее крупными зарубежными учеными XVIII и XIX вв. в области механики являются Иван Бернулли (1667—1748), Даниил Бернулли (1700—1782), Даламбер (1717—1783), Лагранж (1736—1813), Шаль (1793—1880). В работах французских ученых Вариньона (1654—1722)

и Пуансо (1777—1859) наряду с динамикой дальнейшее развитие получила и статика. Вариньон решил задачи сложения сил, приложенных к одной точке, и параллельных сил; он установил условия равновесия этих сил и доказал теорему о моменте равнодействующей. Вариньону принадлежит создание основ графостатики (построение силового и веревочного многоугольников).

Развитие науки в России связано с образованием по инициативе Петра I в 1725 г. в Петербурге Российской Академии наук. Большое влияние на развитие механики оказали труды гениального русского ученого, основателя Московского университета, акад. М. В. Ломоносова (1711—1765) и знаменитого математика, астронома и физика Леонарда Эйлера (1707—1783).

За 30 лет работы в Российской Академии наук Эйлер создал большое количество работ по математике, механике твердого и упругого тела, гидромеханике и небесной механике.

Огромное значение для дальнейшего развития механики имеют работы выдающихся отечественных ученых XIX и XX вв.: М. В. Остроградского (1801—1861), П. Л. Чебышева (1821—1894), С. В. Ковалевской (1850—1891), А. М. Ляпунова (1857—1918), И. В. Мещерского (1859—1935), К. Э. Циолковского (1857—1935), А. Н. Крылова (1863—1945), Н. Е. Жуковского (1847—1921), С. А. Чаплыгина (1869—1942) и ряда других ученых.

Деятельность русских ученых, несмотря на крайне тяжелые условия развития науки в дореволюционной России, значительно способствовала развитию как общей теоретической механики, так и специальных механических дисциплин.

Великая Октябрьская социалистическая революция создала исключительно благоприятные условия для развития науки в нашей стране.

Благодаря этому советские ученые в области механики освоили богатое наследие русской дореволюционной науки и своими работами обогатили сокровищницу мировой науки.

В многочисленных научно-исследовательских институтах и вузах Советского Союза в настоящее время ведется большая работа по дальнейшему развитию механики.

Тесная связь науки и практики в СССР обеспечивает прогресс механики, при помощи которой решаются многочисленные задачи, выдвигаемые практикой социалистического строительства.

* Ф. Энгельс. Диалектика природы. Госполитиздат, 1950, стр. 4.

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Основные понятия статики

Теоретическая механика — это наука, в которой изучаются общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Механическим движением называется перемещение тела по отношению к другому телу, происходящее в пространстве и во времени.

Курс теоретической механики делится на три раздела: статику, кинематику и динамику.

Статикой называется раздел механики, в котором изучаются методы преобразования систем сил в эквивалентные системы и устанавливаются условия равновесия сил, приложенных к твердому телу.

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, вне связи с силами, определяющими это движение.

Динамикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве в зависимости от действующих на них сил.

Приступая к изучению статики, следует определить основные понятия механики, встречающиеся в этом разделе.

Материальное тело, размеры которого в рассматриваемых конкретных условиях можно не учитывать, называют *материальной точкой*. Материальная точка обладает массой и способностью взаимодействовать с другими телами. Например, при изучении движения планет солнечной системы вокруг Солнца их размерами по сравнению с их расстояниями от Солнца пренебрегают и рассматривают эти планеты как материальные точки.

Системой материальных точек, или механической системой, называется такая совокупность материальных точек,

в которой положение и движение каждой точки зависят от положения и движения других точек этой системы.

В теоретической механике часто рассматриваются такие тела, расстояния между любыми точками которых остаются неизменными. Такие тела называются *абсолютно твердыми телами*.

Полагая тела абсолютно твердыми, не учитывают деформаций, которые возникают в реальных телах. Это значительно упрощает изучение действия сил на тело и условий, при которых эти силы уравниваются.

Условия равновесия сил, приложенных к абсолютно твердому телу, используются при изучении действия сил на деформируемое тело.

Твердое тело может находиться в состоянии покоя или некоторого движения. Каждое из этих состояний условимся называть *кинематическим состоянием тела*.

Важнейшим понятием теоретической механики является понятие силы. Взаимодействие двух тел, способное изменить их кинематическое состояние, называется *механическим взаимодействием*.

Сила — это мера механического взаимодействия тел, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия.

Сила определяется тремя элементами: числовым значением (модулем), направлением и точкой приложения. Сила изображается вектором (рис. 1). Прямая, по которой направлена данная сила,

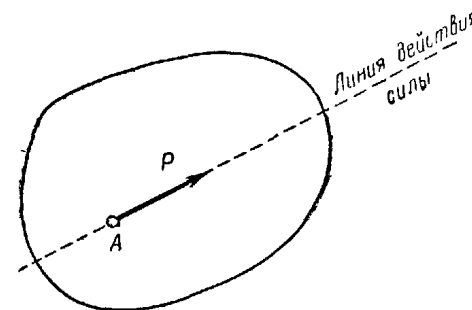


Рис. 1.

называется *линией действия силы*. За единицу силы в Международной системе единиц измерения СИ (в механике система МКС) принимается ньютон (*н*). Совокупность нескольких сил, действующих на данное тело или систему тел, называется *системой сил*.

Системы сил, под действием каждой из которых твердое тело находится в одинаковом кинематическом состоянии, называются *эквивалентными*.

Сила, эквивалентная некоторой системе сил, называется *равнодействующей*.

Система сил, которая, будучи приложена к твердому телу, находящемуся в покое, не выводит его из этого состояния, называется *системой взаимно уравновешивающихся сил*.

Силы, действующие на механическую систему, делят на две группы: внешние и внутренние силы.

Внешними называют силы, действующие на материальные точки (тела) данной системы со стороны материальных точек (тел), не принадлежащих этой системе.

Внутренними называют силы взаимодействия между материальными точками рассматриваемой системы.

Основной задачей статики является исследование условий равновесия внешних сил, приложенных к абсолютно твердому телу.

§ 2. Аксиомы статики

Приступая к изучению курса статики твердого тела, рассмотрим аксиомы, лежащие в основе этого курса. Эти аксиомы сформулированы на основе наблюдений и изучения окружающих нас явлений реального мира. Некоторые основные законы механики Галилея — Ньютона являются одновременно и аксиомами статики.

1. Аксиома инерции

Под действием взаимно уравновешивающихся сил материальная точка (тело) или находится в состоянии покоя, или движется прямолинейно и равномерно.

Аксиома инерции выражает установленный Галилеем закон инерции.

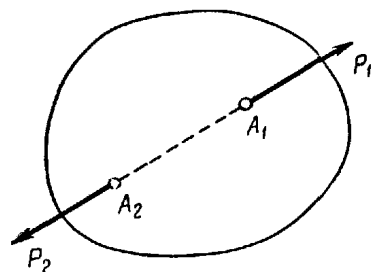


Рис. 2.

2. Аксиома равновесия двух сил

Две силы, приложенные к твердому телу, взаимно уравновешиваются только в том случае, если их модули равны и они направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 2).

3. Аксиома присоединения и исключения уравновешивающихся сил

Если к твердому телу, находящемуся под действием некоторой системы сил, приложить уравновешивающуюся систему или исключить такую систему сил, то получится система сил, эквивалентная заданной системе.

Пусть, например, к твердому телу приложены силы P_1 , P_2 , P_3 и P_4 , под действием которых тело находится в покое или совершает какое-то движение (рис. 3). Приложим к телу две равные

противоположно направленные силы Q_1 и Q_2 , которые взаимно уравновешиваются

Если тело в покое, то оно сохранит его; если тело в движении, то оно будет двигаться под действием новой системы сил Q_1 , Q_2 , P_1 , P_2 , P_3 , P_4 так же, как под действием сил P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , т. е. новая система сил эквивалентна прежней.

Это же произойдет, если из заданной системы сил, приложенных к твердому телу, исключить взаимно уравновешивающиеся силы, входящие в ее состав.

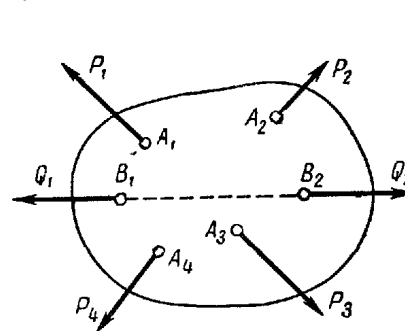


Рис. 3.

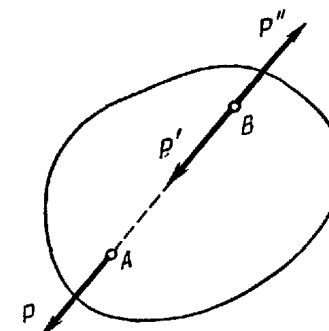


Рис. 4.

Следствие. *Не изменяя кинематического состояния абсолютно твердого тела, силу можно переносить вдоль линии ее действия, сохраняя неизменными ее модуль и направление.*

Предположим, что к твердому телу в точке A приложена сила P (рис. 4). Приложим в точке B две силы P' и P'', равные по модулю силе P и направленные по ее линии действия в противоположные стороны. Затем отбросим силы P и P'' как взаимно уравновешивающиеся. Тогда к телу в точке B будет приложена сила P' = P, эквивалентная силе P в точке A.

Таким образом, силу можно переносить в любую точку по линии действия, не изменяя ее модуля и направления. Поэтому в статике твердого тела сила рассматривается как скользящий вектор.

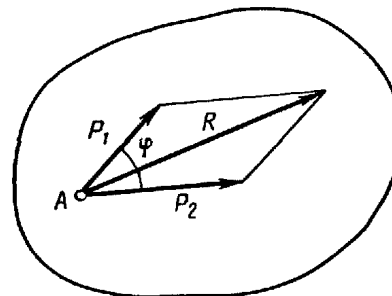


Рис. 5.

4. Аксиома параллелограмма сил

Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 5).

Это положение, хорошо известное из элементарного курса физики, выражается следующим геометрическим равенством:

$$R = P_1 + P_2.$$

Модуль равнодействующей силы определяется по следующей формуле:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \varphi}, \quad (2.1)$$

где φ — угол между направлениями сил P_1 и P_2 .

5. Аксиома равенства действия и противодействия

Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

Эта аксиома утверждает, что силы действия друг на друга двух тел равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Таким образом, в природе не существует одностороннего действия силы.

Аксиома действия и противодействия установлена Ньютоном и известна как один из основных законов классической механики.

6. Аксиома сохранения равновесия сил, приложенных к деформируемому телу, при его затвердевании

Равновесие сил, приложенных к деформируемому телу, сохраняется при его затвердевании.

Из этой аксиомы следует, что условия равновесия сил, приложенных к абсолютно твердому телу, должны выполняться и для сил, приложенных к деформируемому телу. Однако в случае деформирующегося тела эти условия необходимы, но недостаточны. Так, например, условие равновесия двух сил, приложенных к твердому стержню на его концах, состоит в том, что силы равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 6, а и б).

Две уравновешивающиеся силы, приложенные к нити, удовлетворяют этому условию, но при наличии добавочного условия — силы должны только растягивать, а не сжимать нить (рис. 6, а).

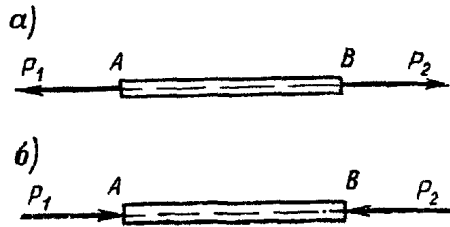


Рис. 6.

§ 3. Несвободное твердое тело. Связи. Реакции связей

Твердое тело называется *свободным*, если оно может перемещаться в пространстве в любом направлении.

Тело, ограничивающее свободу движения данного твердого тела, является по отношению к нему *связью*.

Твердое тело, свобода движения которого ограничена связями, называется *несвободным*.

Все силы, действующие на несвободное твердое тело, наряду с делением на внешние и внутренние силы, можно также разделить на задаваемые силы и реакции связей.

Задаваемые силы выражают действие на твердое тело других тел, вызывающих или способных вызвать изменение его кинематического состояния.

Реакцией связи называется сила или система сил, выражающая механическое действие связи на тело.

Одним из основных положений механики является *принцип освобожденности твердых тел от связей*, согласно которому несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, на которое, кроме задаваемых сил, действуют реакции связей.

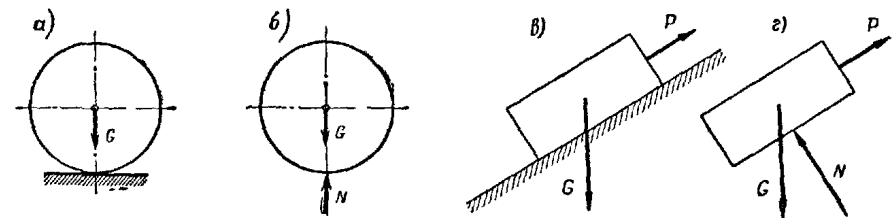


Рис. 7.

Пусть, например, на гладкой неподвижной горизонтальной плоскости покоится шар (рис. 7, а). Плоскость, ограничивая движение шара, является для него связью. Если мысленно освободить шар от связи (рис. 7, б), то для удержания его в покое к нему в точке касания с плоскостью нужно приложить силу N , равную весу шара G по модулю и противоположную ему по направлению. Сила N и будет реакцией плоскости. Тогда шар, освобожденный от связи, будет свободным телом, на которое действует заданная сила G и реакция плоскости N .

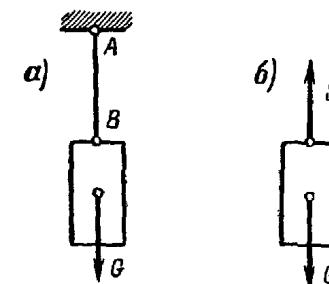


Рис. 8.

Гладкая плоскость не противодействует перемещению тела вдоль плоскости под действием задаваемых сил (рис. 7, в), но не допускает его перемещения в направлении, перпендикулярном к плоскости. Поэтому действие плоскости на тело выражается нормальной реакцией N (рис. 7, г).

Реакция гладкой плоскости направлена перпендикулярно к плоскости.

Если к концу B нити AB , прикрепленной в точке A , подвесить груз весом G (рис. 8, а), то реакция S нити будет приложена

к грузу в точке B , равна по модулю его весу G и направлена вертикально вверх (рис. 8, б). Реакция нити направлена вдоль нити.

Пусть балка весом G в точке B опирается на гладкую поверхность, а в точках A и D — на гладкие горизонтальную и вертикальную плоскости (рис. 9). Тогда реакции опорной поверхности и опорных плоскостей будут иметь указанные на рис. 9 направления.

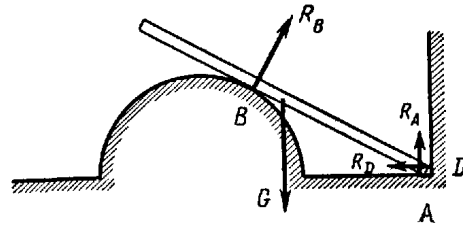


Рис 9

Определение модулей этих реакций показано после установления условий равновесия сил, произвольно расположенных на плоскости (§ 25).

Для определения каждой реакции нужно знать три ее элемента: модуль, направление и точку приложения. Точка приложения реакции, как правило, бывает известна. Направление же реакций известно лишь для некоторых типов связей. Если существуют два взаимно перпендикулярных направления на плоскости, в одном из которых связь препятствует перемещению тела, а в другом нет, то направление ее реакции противоположно первому направлению.

Так, например, гладкая горизонтальная плоскость препятствует перемещению шара вертикально вниз и не препятствует его горизонтальному перемещению. В этом случае реакция плоскости направлена вверх (рис. 7, б). Так же определяется направление реакции нити (рис. 8).

Гладкая поверхность, на которую опирается балка точкой B (рис. 9), препятствует перемещению балки по нормали к поверхности вниз и не препятствует перемещению вдоль оси балки. Поэтому реакция этой поверхности направлена по нормали к поверхности вверх.

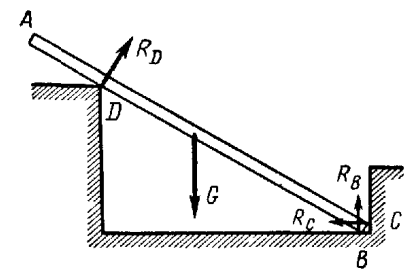


Рис 10

Аналогично, если балка опирается на ребро в точке D (точечная опора), то реакция в точке D направлена перпендикулярно к оси балки (рис. 10)

Рассмотрим два основных типа опор балок и их реакции.

На рис. 11 изображена шарнирно-неподвижная опора, которая препятствует любому поступательному движению балки, но дает ей возможность свободно поворачиваться вокруг оси шарнира. По своей конструкции такая шарнирная опора состоит из двух обойм, из которых одна закреплена на балке, а другая — на неподвижной поверхности. Эти обоймы соединяются при помощи цилиндрического

валика (на рис. 11 показано среднее сечение конструкции). В зависимости от действующих сил, валик может прижиматься к различным точкам обоймы. Реакция R такой опоры проходит через центр шарнира O и точку соприкосновения A (рис. 12а, б). Линия действия реакции этой опоры всегда проходит через центр шарнира, но модуль и направление реакции не известны.

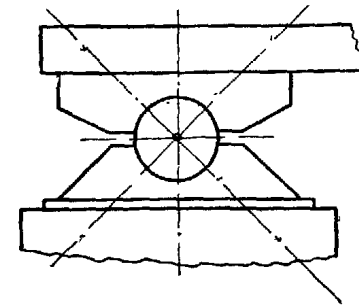


Рис. 11.

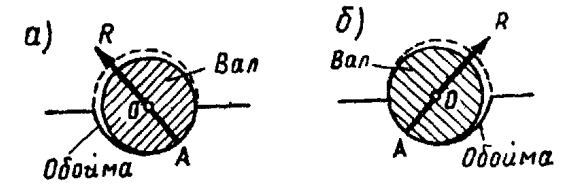


Рис. 12.

Шарнирно-подвижная опора, нижняя обойма которой поставлена на катки, не препятствует перемещению балки параллельно опорной плоскости (рис. 13). Если не учитывать трения катков, то линию действия реакции такой опоры следует считать проходящей через центр шарнира перпендикулярно к опорной плоскости. Таким образом, не известен лишь модуль этой реакции.

В курсе теоретической механики обычно рассматривают только действие внешних сил на абсолютно твердое

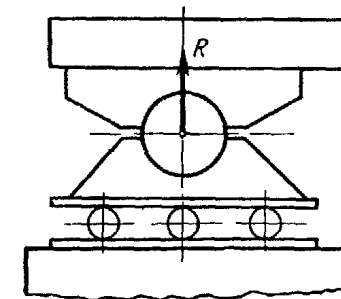


Рис. 13.

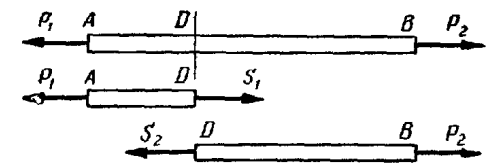


Рис. 14.

тело. Однако при расчете различных конструкций бывает необходимо определять внутренние силы, возникающие в растянутых и сжатых стержнях. Для определения внутренних усилий в стержнях воспользуемся так называемым методом сечений, дающим возможность переводить интересующие нас внутренние силы в разряд внешних сил. Рассмотрим сущность этого метода.

Пусть стержень AB , весом которого пренебрегаем, растягивается двумя равными по модулю силами P_1 и P_2 , приложенными к его концам (рис. 14). Рассечем мысленно стержень, разделив его на две произвольные части AD и DB . На часть AD

действуют две уравнивающие силы: внешняя сила P_1 и внутреннее усилие S_1 , заменяющее действие отброшенной части стержня. Из второй аксиомы следует, что внутреннее усилие S_1 направлено по оси стержня и равно по модулю силе P_1 . Внутреннее усилие S_1 , выражающее действие отброшенной части DB на рассматриваемую AD , является по отношению к рассматриваемой части стержня внешней силой.

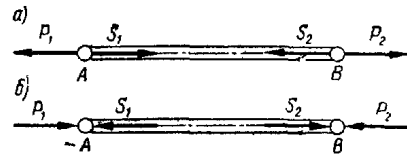


Рис. 15.

Если стержень AB растягивается (рис. 15, а) или сжимается (рис. 15, б) силами P_1 и P_2 , то на тела, вызывающие его растяжение или сжатие, со стороны стержня действуют реакции S_1 и S_2 .

При этом реакции растянутого стержня равны по модулю задаваемым силам и направлены по оси стержня от его концов.

Реакции сжатого стержня равны по модулю заданным силам и направлены по оси стержня к его концам. Так как реакции и внутренние усилия по модулю равны, то для определения усилия в стержне достаточно определить его реакцию.

ГЛАВА II

СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ НА ПЛОСКОСТИ

§ 4. Сложение двух сходящихся сил. Параллелограмм и треугольник сил

Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Если к телу приложены две силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, то, как указывалось в аксиоме параллелограмма сил, их равнодействующая приложена в точке A пересечения линий действия сил; она изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 16). Построение параллелограмма сил можно заменить построением треугольника сил ABD (рис. 17). Направление равнодействующей силы R по контуру силового треугольника противоположно направлению обхода контура треугольника, определяемому слагаемыми силами.

При помощи параллелограмма или треугольника сил можно решить и обратную задачу — разложить силу P на две составляющие P_1 и P_2 , приложенные в той же точке и направленные по заданным линиям действия KL и DE (рис. 18 и 19).

Используя известные формулы тригонометрии (теорему синусов), имеем

$$\frac{P_1}{\sin \beta} = \frac{P_2}{\sin \alpha} = \frac{P}{\sin (180^\circ - \varphi)}.$$

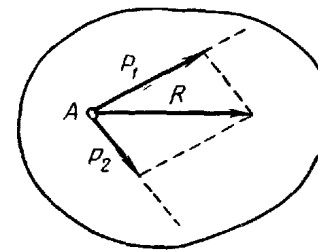


Рис. 16.

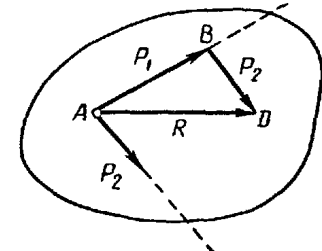


Рис. 17.

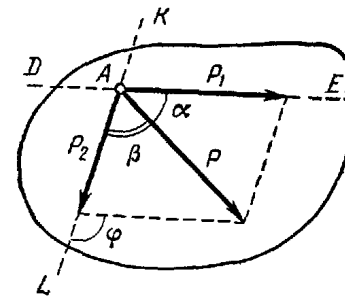


Рис. 18.

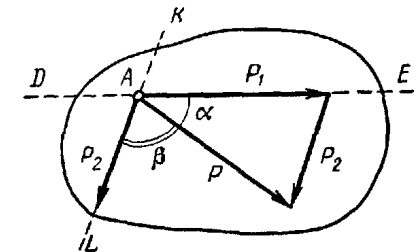


Рис. 19.

Так как $\varphi = \alpha + \beta$, то

$$P_1 = P \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)};$$

$$P_2 = P \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

§ 5. Многоугольник сил. Условие равновесия сходящихся сил

Пусть к твердому телу в точках A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 приложены сходящиеся силы P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5 (рис. 20). Все эти силы можно перенести в точку O пересечения их линий действия и, строя треугольники сил, последовательно сложить. Тогда равнодействующая этих сил изобразится замыкающей стороной многоугольника сил. Таким образом, равнодействующая R сходящихся сил приложена в точке пересечения линий действия сил и равна их геометрической сумме:

$$R = P_1 + P_2 + \dots + P_n.$$

Следует учитывать то, что направление равнодействующей по контуру силового многоугольника противоположно направлению обхода контура этого многоугольника, определяемому направлением первой силы.

Сходящиеся силы уравниваются в том случае, если их равнодействующая равна нулю, т. е. многоугольник сил замкнут (рис. 21):

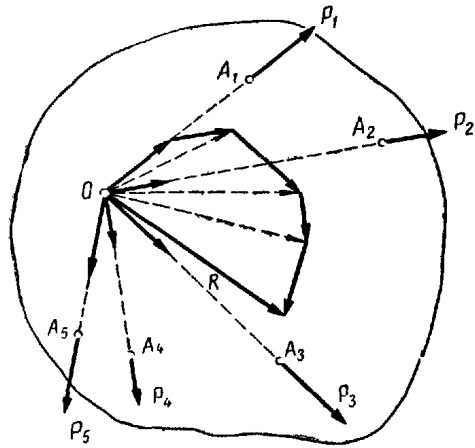


Рис. 20.

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = 0,$$

или

$$\sum P_i = 0.$$

В замкнутом многоугольнике сил все силы

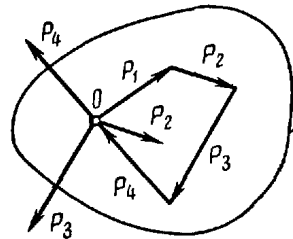


Рис. 21.

направлены по контуру многоугольника в одну сторону.

Частный случай. Три сходящиеся силы уравниваются, если треугольник этих сил замкнут.

Все задачи на равновесие сил, приложенных к некоторому телу (точке) решаем по следующему плану:

1. Показываем действующие на тело задаваемые силы
2. Мысленно освобождаем тело от связей, заменяя их действие соответствующими силами — реакциями связей.
3. К полученной системе сил применяем условия равновесия, соответствующие этой системе.
4. Определяем искомые величины.

§ 6. Примеры на построение замкнутого треугольника сил

Пример 1. На гладкой наклонной плоскости AB , образующей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$, при помощи веревки DE , параллельной плоскости AB , удерживается однородный шар весом $G = 4 \text{ н}$. Определить давление шара на плоскость и на точку E веревки (рис. 22).

Решение. Решаем задачу по изложенному плану, рассматривая равновесие сил, приложенных к шару.

1. Показываем действующую на шар, задаваемую силу — вес шара G , приложенный в центре шара (рис. 22, б).

2. Мысленно освобождаем шар от связей, заменяя действие связей их реакциями. Связями для шара являются наклонная плоскость AB , реакция которой приложена в точке соприкосновения K и направлена перпендикулярно к плоскости, и веревка DE , реакция которой направлена вдоль веревки.

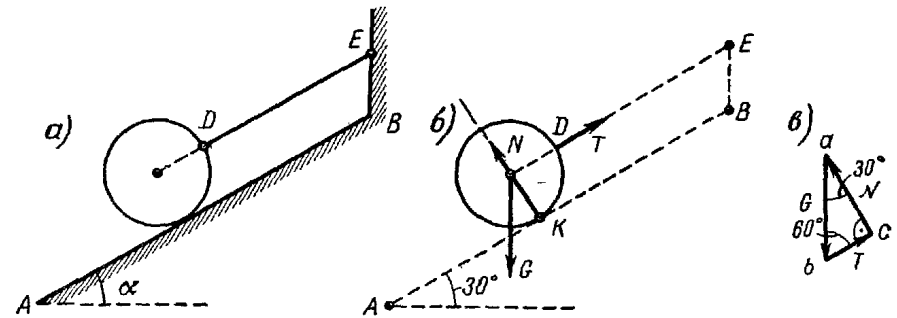


Рис. 22.

3. К шару приложены три сходящиеся силы: вес шара G , реакция N плоскости AB и реакция T веревки DE . К этой системе сил применяем условие равновесия трех сходящихся сил, т. е. строим замкнутый треугольник этих сил. Для этого откладываем заданную силу G (рис. 22, в). Из конца b силы G следует провести прямую, параллельную линии действия либо реакции T , либо реакции N . Проведем из конца b силы G прямую, параллельную реакции T , тогда из начала a силы G должна быть проведена прямая, параллельная другой реакции N (рис. 22, в). Точка пересечения проведенных прямых является третьей вершиной треугольника сил. Стороны треугольника должны иметь такое направление, чтобы все силы G , T и N были направлены в одну сторону по обходу контура треугольника.

4. Из треугольника сил, определив его углы, находим модули искомых реакций:

$$T = G \sin 30^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ н}; \quad N = G \cos 30^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 3,46 \text{ н}.$$

Найденные реакции T и N прикладываем к шару (рис. 22, б). Давление шара на плоскость и сила, растягивающая веревку, по модулям равны найденным реакциям, направлены противоположно им и приложены в точках D и K к плоскости и к веревке (на рисунке эти силы не указаны).

Примечание. Условие равновесия всегда применяется к системе сил, действующей на одно тело. Поэтому всегда определяются не давления тела на опоры, а реакции опор, которые вместе с задаваемыми силами действуют на рассматриваемое тело.

В примере 1 условие равновесия применялось к силам, действующим на шар, а потому определялись приложенные к шару реакции опор, а не давления шара на опоры.

Пример 2. Кран состоит из цепи $AB = 1,2$ м и подкоса $CB = 1,6$ м, прикрепленных к вертикальной стойке в точках A и C , причем $AC = 2,4$ м. В точке B подвешен груз весом $G = 30$ кн. Определить усилия S_1 в цепи и S_2 в подкосе (рис. 23,а).

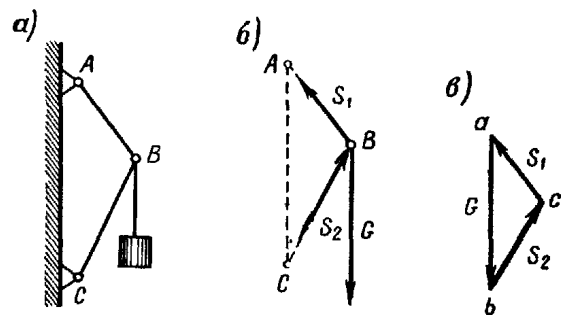


Рис. 23.

Решение. Решаем задачу по общему плану, не выделяя его отдельных пунктов. Рассматриваем равновесие трех сил, приложенных к узлу B : заданной силы G и реакций цепи и подкоса S_1 и S_2 , линии действия которых совпадают с отрезками AB и CB (рис. 23,б). Строим замкнутый треугольник abc этих сил (рис. 23,в). По треугольнику сил определяем направления реакций S_1 и S_2 . Приложив найденные реакции к узлу B (рис. 23,б), устанавливаем, что растянута только цепь, а подкос сжат. Так как стороны треугольника сил и треугольника ABC соответственно параллельны, то эти треугольники подобны. Из подобия следует:

$$\frac{G}{AC} = \frac{S_1}{AB} = \frac{S_2}{CB}.$$

Из этих равенств определяем искомые усилия:

$$S_1 = G \frac{AB}{AC} = 30 \cdot \frac{1,2}{2,4} = 15 \text{ кн}; \quad S_2 = G \frac{CB}{AC} = 30 \cdot \frac{1,6}{2,4} = 20 \text{ кн}.$$

Пример 3. Груз весом $G = 518$ н подвешен в точке D к канату ADE , участок которого AD составляет с горизонталью угол 30° , а участок DE — угол 45° . В точке A канат привязан к вертикальному столбу AB , поддерживаемому подкосом AC , наклоненным к горизонтальной под углом 60° . Определить натяжение каната на участках AD и DE и усилия в столбе и подкосе (рис. 24а).

Решение. В этой задаче следует рассматривать отдельно равновесие сил, приложенных к каждому из узлов D и A . На узел D

действуют заданная сила G и реакции T_1 и T_2 частей каната DE и AD , а на узел A — реакция T_2' каната AD , а также реакции столба и подкоса S_1 и S_2 (рис. 24,б). Прикладываем к узлу D заданную силу G и строим замкнутый треугольник сил G, T_1, T_2 , действующих на этот узел (рис. 24,в). Определив углы треугольника сил, по теореме синусов находим:

$$\frac{G}{\sin 15^\circ} = \frac{T_2}{\sin 45^\circ} = \frac{T_1}{\sin 120^\circ},$$

откуда

$$T_2 = G \frac{\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} = 518 \frac{0,707}{0,259} = 1414 \text{ н},$$

$$T_1 = G \frac{\sin 120^\circ}{\sin 15^\circ} = 518 \frac{0,866}{0,259} = 1732 \text{ н}.$$

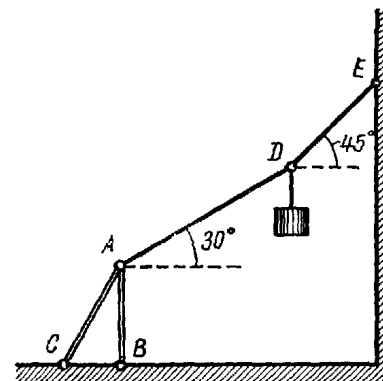


Рис. 24а.

Затем строим треугольник сил T_2', S_1, S_2 , приложенных к узлу A , откладывая прежде всего реакцию T_2' каната AD , которая по модулю

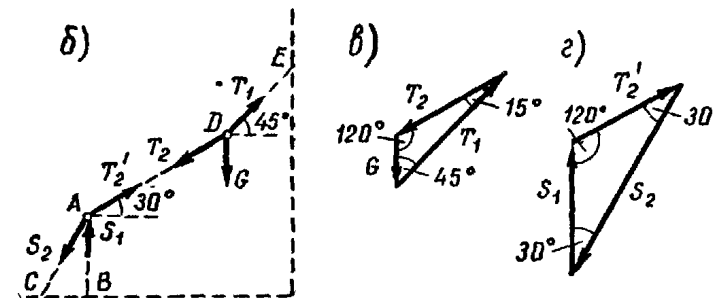


Рис. 24б, в, г.

равна реакции T_2 , приложенной к узлу D , а по направлению противоположна ей (рис. 24,в). Из равнобедренного треугольника сил находим:

$$S_1 = T_2' = 1414 \text{ н},$$

$$\frac{S_2}{\sin 120^\circ} = \frac{T_2'}{\sin 30^\circ},$$

откуда

$$S_2 = T_2' \frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = 1414 \frac{0,866}{0,5} = 2449 \text{ н}.$$

Приложив все найденные силы к узлам D и A (рис. 24,б), устанавливаем, что столб AB сжат, а подкос AC растянут.

§ 7. Теорема о равновесии трех непараллельных сил

Линии действия трех непараллельных, взаимно уравновешивающихся сил пересекаются в одной точке.

Пусть к твердому телу в точках A_1 , A_2 и A_3 приложены три непараллельные взаимно уравновешивающиеся силы P_1 , P_2 , P_3 (рис. 25). Так как силы P_1 и P_2 расположены в одной плоскости, то эти силы можно перенести в точку O пересечения их линий действия и определить их равнодействующую R , которая будет приложена в этой же точке. Так как по условию силы P_1 , P_2 и P_3 уравновешиваются, то силы P_3 и R должны быть равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Следовательно, линия действия силы P_3 проходит через точку O , что и требовалось доказать.

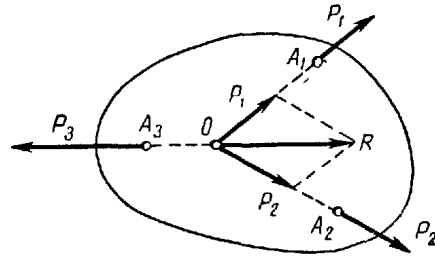


Рис. 25.

Примечание. Если две заданные силы P_1 и P_2 параллельны, то, как известно из элементарного курса физики, линия действия уравновешивающей силы P_3 параллельна линиям действия заданных сил и находится от линий действия этих сил на расстояниях, обратно пропорциональных модулям сил.

§ 8. Примеры на применение теоремы о равновесии трех непараллельных сил

Пример 4. Рама AB весом $G = 1,5$ кН может вращаться вокруг оси шарнира A . Центр тяжести рамы C определяется по условию $AC = 2CB$. Рама удерживается под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонтали веревкой BDE , к концу E которой подвешен груз P . Участок BD горизонтален. Определить вес груза P и реакцию шарнира A при равновесии сил, пренебрегая трением на блоке (рис. 26, а).

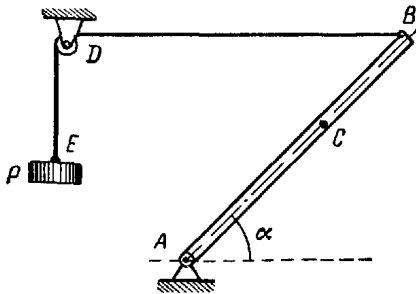


Рис. 26а.

1. Показываем действующую на раму заданную силу — вес рамы G , прикладывая его в центре тяжести C .
2. Мысленно освобождаем раму AB от связей, заменяя их действие соответствующими реакциями. Реакция веревки T приложена

в точке B и направлена по прямой BD , реакция шарнира R_A приложена в точке A , но линия действия ее не известна.

3. К системе трех уравновешивающихся сил G , T , R_A , приложенных к раме, применяем теорему о равновесии трех непараллельных сил.

Линии действия сил G , T , R_A должны пересекаться в одной точке. Находим точку K пересечения линий действия сил G и T ; через эту же точку должна пройти линия действия реакции R_A ; определяем эту линию, соединяя точки A и K . Строим замкнутый треугольник трех сил, сходящихся в точке K (рис. 26, б).

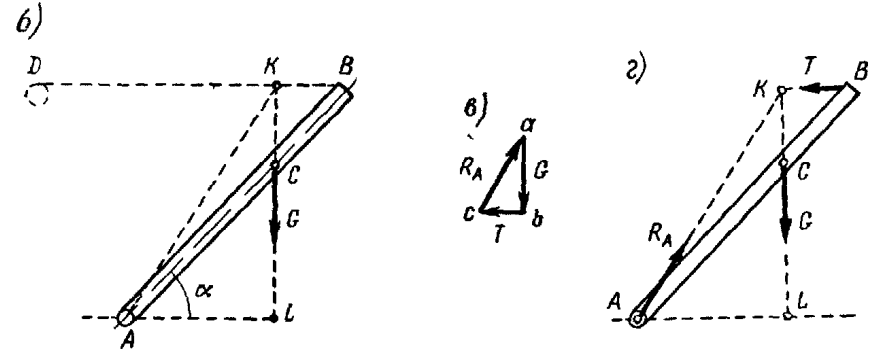


Рис. 26, б, в, г.

4. Определяем искомые величины, т. е. реакции T и R_A следующим образом. На рис. 26, б строим треугольник ALK , стороны которого соответственно параллельны сторонам треугольника сил. Определяем стороны треугольника ALK .

Обозначаем $AL = l$. Так как $\alpha = 45^\circ$, то

$$CL = AL = l; \quad \Delta CKB \sim \Delta CLA;$$

отсюда имеем:

$$\frac{KC}{CL} = \frac{CB}{AC}; \quad \frac{KC}{CL} = \frac{CB}{2CB}; \quad KC = \frac{1}{2} CL = \frac{1}{2} l;$$

$$KL = KC + CL = \frac{1}{2} l + l = \frac{3}{2} l;$$

$$AK = \sqrt{AL^2 + KL^2} = \sqrt{l^2 + \frac{9}{4} l^2} = \frac{\sqrt{13}}{2} l.$$

Треугольник сил abc подобен треугольнику AKL . Стороны треугольников пропорциональны.

$$\frac{T}{AL} = \frac{G}{KL} = \frac{R_A}{AK}; \quad \frac{T}{l} = \frac{G}{\frac{3}{2} l} = \frac{R_A}{\frac{\sqrt{13}}{2} l}.$$

Определяем модули искомых реакций опор:

$$T = \frac{2}{3} G = 1 \text{ кН}; \quad R_A = \frac{\sqrt{13}}{3} G = 0,5 \sqrt{13} \approx 1,8 \text{ кН}.$$

Прикладываем к раме все действующие на нее взаимно уравновешивающиеся силы: заданную силу G , реакцию веревки T и реакцию шарнира R_A (рис. 26г).

При отсутствии трения на блоке D натяжение веревки на участках BD и DE должно быть одинаково и равно весу груза P . Таким образом, вес груза определяется:

$$P = T = 1 \text{ кН}.$$

Пример 5. Определить реакции шарниров A и B трехшарнирной арки ACB , изображенной на рис. 27а, вызванные горизонтальной силой $P = 40 \text{ кН}$.

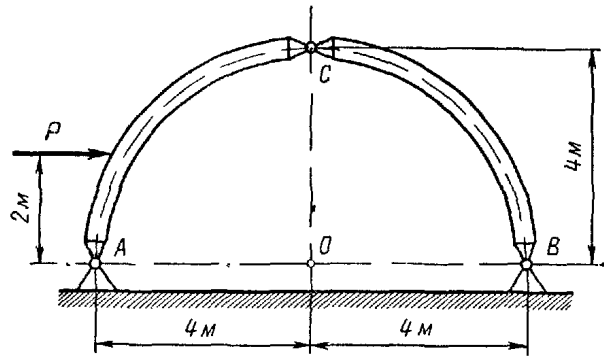


Рис. 27а.

Решение. Трехшарнирная арка представляет собой систему двух тел, соединенных между собой ключевым шарниром C и прикрепленных к земле шарнирами A и B . На арку действуют три уравновешивающиеся внешние силы: заданная сила P и реакции шарниров R_A и R_B , линии действия которых не известны. Так как не известны линии действия двух сил, то определить эти силы по теореме о равновесии трех непараллельных сил P , R_A и R_B невозможно.

Но арка представляет собой систему двух тел. Расчленим ее и рассмотрим равновесие сил, приложенных к каждой части арки.

К правой части арки (рис. 27,в) приложены две силы: давление левой части в точке C и реакция шарнира B . Эти две силы уравновешиваются, следовательно, они направлены по одной прямой в противоположные стороны и равны по модулю. Находим их линии действия, соединяя точки B и C .

К левой части арки (рис. 27,б) приложены три силы: заданная сила P , реакция шарнира A , линия действия которой не известна, и давление правой части в точке C , действующее по прямой BC , так как

согласно аксиоме действия и противодействия взаимное давление частей в точке C равно по модулю и противоположно по направлению. К системе трех сил P , R_C , R_A применяем теорему о равновесии

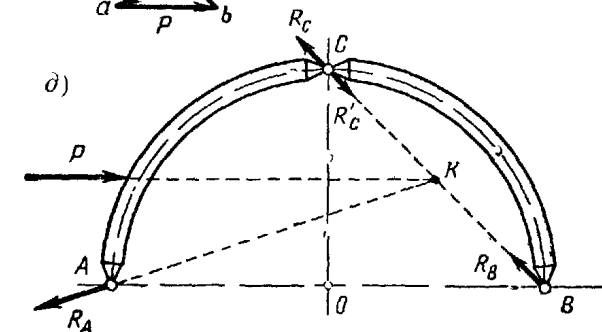
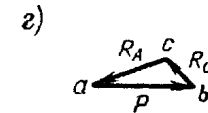
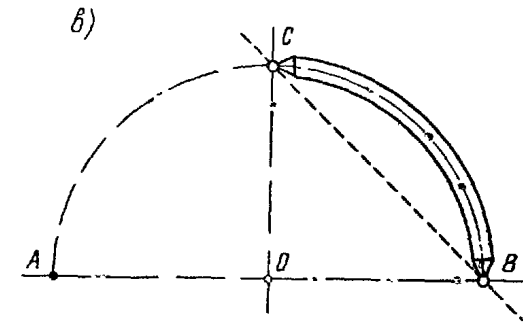
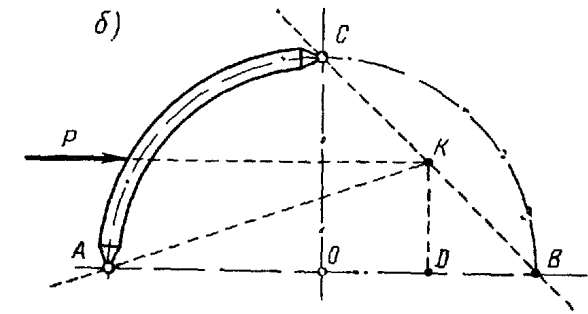


Рис. 27б, в, г, д.

трех непараллельных сил. Находим точку K пересечения линий действия сил P и R_C и через эту точку проводим линию действия реакции R_A (рис. 27,б). Строим замкнутый треугольник этих сил (рис. 27г).

Треугольник сил abc подобен треугольнику AKB . Определяем стороны треугольника AKB . Так как $CO = OB$, то $\angle KBD = 45^\circ$ и $DB = KD = 2$ м.

$$\begin{aligned} AD &= AB - DB = 6 \text{ м}, \\ KB &= \sqrt{KD^2 + DB^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2} \text{ м}; \\ AK &= \sqrt{AD^2 + KD^2} = \sqrt{36 + 4} = 2\sqrt{10} \text{ м}; \\ AB &= 8 \text{ м}. \end{aligned}$$

Определяем модули искомых сил:

$$\begin{aligned} \frac{R_A}{AK} &= \frac{P}{AB} = \frac{R_C}{KB}, \\ R_A &= \frac{P \cdot AK}{AB} = \frac{40 \cdot 2\sqrt{10}}{8} = 10\sqrt{10} = 31,6 \text{ кН}, \\ R_C &= \frac{P \cdot KB}{AB} = \frac{40 \cdot 2\sqrt{2}}{8} = 10\sqrt{2} = 14,1 \text{ кН}. \end{aligned}$$

К левой части арки (рис. 27, д) прикладываем действующие на нее силы P , R_A , R_C . К правой части прикладываем действующие на нее силы R'_C и R_B . При этом по аксиоме равенства действия и противодействия имеем $-R'_C = R_C$, т. е. по модулю $R'_C = R_C = 14,1$ кН, а по направлению R'_C противоположно R_C .

По аксиоме равновесия двух сил имеем $R_B = -R'_C$, т. е. $R_B = R'_C = 14,1$ кН, а направление R_B противоположно направлению R'_C .

§ 9. Проекция силы на две взаимно перпендикулярные оси на плоскости

Взяв две взаимно перпендикулярные оси x и y , силу P можно разложить на две составляющие силы P_x и P_y , направленные параллельно этим осям (рис. 28).

Силы P_x и P_y называются компонентами силы P по осям x и y .

Обозначив i и j — единичные векторы, направленные по осям x и y , а X и Y — проекции силы на эти оси, получим $P = P_x + P_y$, но $P_x = iX$, а $P_y = jY$.

Поэтому

$$P = iX + jY. \quad (9.1)$$

Это равенство представляет собой формулу разложения силы на составляющие по осям координат.

Из прямоугольных треугольников Aad и Abd имеем:

$$X = P \cos(P, i); \quad Y = P \cos(P, j), \quad (9.2)$$

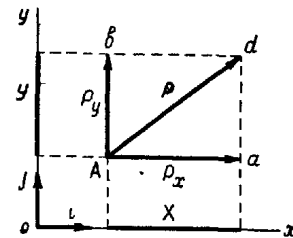


Рис. 28.

где (P, i) и (P, j) — углы, заключенные между направлением силы P и направлениями осей x и y (единичными векторами i и j).

Угол отсчитывается от оси по направлению движения часовой стрелки или против, чтобы величина его не превышала 180° при любом направлении силы.

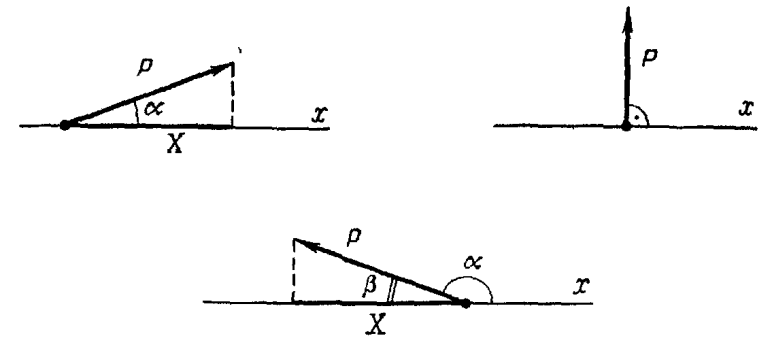


Рис. 29.

Выражения (9.2) показывают, что проекция силы на ось определяется произведением модуля силы на косинус угла между направлениями оси и силы.

При вычислении проекции силы на ось возможны следующие частные случаи (рис. 29):

1. Проекция положительна:

$$\angle \alpha < 90^\circ; \quad X = P \cos \alpha.$$

2. Проекция равна нулю:

$$\angle \alpha = 90^\circ; \quad X = P \cos 90^\circ = 0.$$

3. Проекция отрицательна:

$$\angle \alpha > 90^\circ; \quad X = P \cos \alpha = -P \cos \beta,$$

где β — острый угол между линией действия силы и осью.

При решении задач рекомендуется вычислять абсолютное значение проекции силы как произведение модуля силы на косинус острого угла между линией действия силы и осью, определяя знак проекции непосредственно по чертежу.

Если известны проекции силы на две взаимно перпендикулярные оси x и y , то модуль и направление силы P определяются по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} P &= \sqrt{X^2 + Y^2}, \\ \cos(P, i) &= \frac{X}{P}; \quad \cos(P, j) = \frac{Y}{P}. \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

§ 10. Аналитический способ определения равнодействующей сходящихся сил на плоскости.

Уравнения равновесия сил

Равнодействующая R сходящихся сил P_1, P_2, \dots, P_n равна геометрической сумме сил (рис. 30):

$$R = P_1 + P_2 + \dots + P_n.$$

Из векторной алгебры известно, что проекция геометрической суммы векторов на любую ось равна алгебраической сумме проекций составляющих векторов на ту же ось. Таким образом, проекции X и Y равнодействующей силы R определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \end{aligned} \right\} (10.1)$$

где

$$\begin{aligned} X_1 &= P_1 \cos(P_1, i); \\ X_2 &= P_2 \cos(P_2, i); \\ &\dots \\ X_n &= P_n \cos(P_n, i); \\ Y_1 &= P_1 \cos(P_1, j); \\ Y_2 &= P_2 \cos(P_2, j); \\ &\dots \\ Y_n &= P_n \cos(P_n, j). \end{aligned}$$

Формулам (10.1) можно придать вид

$$X = \sum X_i, \quad Y = \sum Y_i, \quad (10.2)$$

где \sum — знак суммирования, а $i = 1, 2, \dots, n$.

Вычислив проекции равнодействующей X и Y , найдем модуль и направление равнодействующей по формулам (9.3):

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{X^2 + Y^2}; \\ \cos(R, i) &= \frac{X}{R}; \quad \cos(R, j) = \frac{Y}{R}. \end{aligned}$$

Если сходящиеся силы уравновешиваются, то

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 0, \text{ т. е. } X = 0 \text{ и } Y = 0.$$

В этом случае имеем два следующих уравнения равновесия сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i &= 0, \\ \sum Y_i &= 0. \end{aligned} \right\} (10.3)$$

При помощи этих уравнений можно решать задачи на равновесие

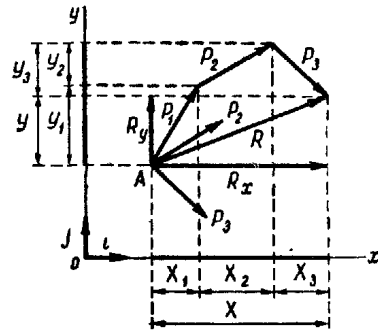


Рис. 30.

сходящихся сил, если число неизвестных величин в задаче равно двум. Такой метод решения этих задач называется аналитическим.

Если в задаче на равновесие сходящихся сил число неизвестных превышает два, то ее нельзя решить методами статики твердого тела. Методы решения таких задач излагаются в курсе сопротивления материалов.

Пример 6. Решить пример 3 (рис. 24а) аналитическим способом [при помощи уравнений равновесия (10.3)].

Решение. Воспользуемся уравнениями равновесия сходящихся сил, приложенных к каждому из узлов D и A . Покажем на схеме (рис. 31) все силы, приложенные к этим узлам, как известные, так и неизвестные. Направления реакций столба AB и подкоса AC не известны. Условимся эти стержни считать растянутыми и направим их реакции

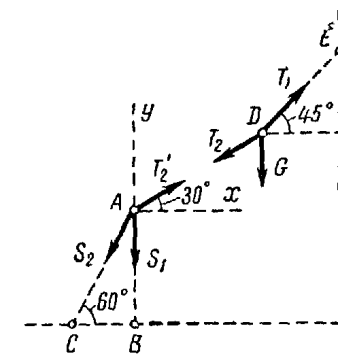


Рис. 31.

S_1 и S_2 от узла. Ответ со знаком минус укажет, что соответствующий стержень не растянут, а сжат.

Проведем оси координат, направив их по горизонтали и вертикали. Составим суммы проекций всех сил, приложенных к узлу D , на оси x и y и приравняем эти суммы нулю:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \quad T_1 \cos 45^\circ - T_2 \cos 30^\circ = 0. \\ \sum Y_i &= 0; \quad T_1 \cos 45^\circ - T_2 \cos 60^\circ - G = 0. \end{aligned}$$

Вычитая второе уравнение из первого, найдем:

$$-T_2 \cos 30^\circ + T_2 \cos 60^\circ + G = 0,$$

откуда

$$T_2 = \frac{G}{\cos 30^\circ - \cos 60^\circ} = \frac{518}{0,866 - 0,5} = 1414 \text{ н.}$$

Из первого уравнения определим T_1 :

$$T_1 = \frac{T_2 \cos 30^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{1414 \cdot 0,866}{0,707} = 1732 \text{ н.}$$

Составим уравнения равновесия сил, приложенных к узлу A , учитывая, что $T_2' = T_2 = 1414$ н:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \quad -S_2 \cos 60^\circ + T_2' \cos 30^\circ = 0. \\ \sum Y_i &= 0; \quad -S_2 \cos 30^\circ - S_1 + T_2' \cos 60^\circ = 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения:

$$S_2 = \frac{T_2' \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{1414 \cdot 0,866}{0,5} = 2449 \text{ н.}$$

Из второго уравнения

$$S_1 = -S_2 \cos 30^\circ + T'_2 \cos 60^\circ =$$

$$= -2449 \cdot 0,866 + 1414 \cdot 0,5 = -1414 \text{ н.}$$

Так как $S_2 = +2449 \text{ н}$, то условно принятое направление силы S_2 совпадает с действительным, т. е. подкос AC растянут. Ответ $S_1 = -1414 \text{ н}$ показывает, что условно принятое направление силы S_1 противоположно действительному, т. е. столб AB не растянут, а сжат.

Примечание. Схема, по которой составлены уравнения равновесия (рис. 31) не изменяется, хотя направления некоторых сил на ней и противоположны действительным (S_1). Числовые значения полученных из уравнений равновесия величин определяют модули сил, а их знаки — их направления. Истинное направление сил определяют по схеме и по знаку ответа.

§ 11. Определение усилий в стержнях плоских ферм по способу вырезания узлов. Леммы о нулевых стержнях

Фермой называется геометрически неизменяемая шарнирно-стержневая конструкция (рис. 32).

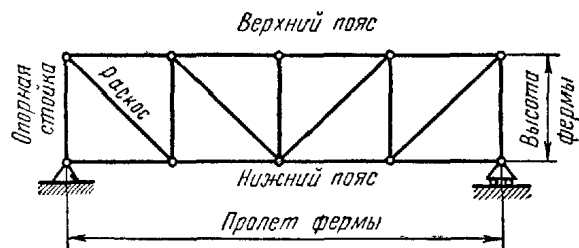


Рис. 32.

Если оси всех стержней фермы лежат в одной плоскости, то ее называют *плоской фермой*. Точки, в которых сходятся оси стержней, называются *узлами фермы*, а те узлы, которыми ферма опирается на основание, называются *опорными узлами*.

Стержни плоской фермы, расположенные по верхнему контуру, образуют *верхний пояс*, а расположенные по нижнему контуру — *нижний пояс* фермы.

Вертикальные стержни называются *стойками*, а наклонные — *раскосами*. На рис. 33, 34 и 35 изображены стержневые опоры фермы. Реакция каждого из опорных стержней, очевидно, направлена по оси этого стержня.

Если шарниры, соединяющие стержни фермы, предполагаются идеальными, т. е. без трения, а все внешние силы — приложенными

к узлам фермы, то все стержни испытывают лишь растяжение или сжатие, так как к каждому стержню приложены силы только на его концах*.

Реальные фермы не имеют идеальных шарниров, однако такое допущение облегчает вычисление усилий в стержнях фермы, а результаты вычислений при этом допущении вполне пригодны для практики.

Рассмотрим определение усилий в стержнях фермы по способу вырезания узлов.

Этот способ состоит в том, что мысленно вырезают узлы фермы, прикладывают к ним соответствующие внешние силы и реакции стержней и составляют по два уравнения равновесия сил, приложенных к каждому узлу.

Так как в начале расчета фермы не известно, какие стержни фермы растянуты и какие сжаты, то условно предполагают, что все стержни растянуты (реакции стержней направлены от узлов).

Если в результате вычислений получают ответ со знаком минус, то соответствующий стержень сжат.

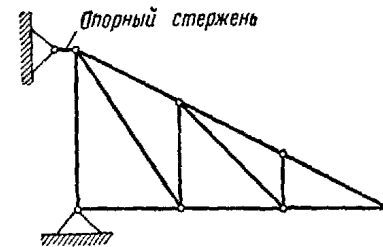


Рис 33

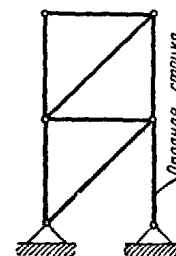


Рис 34



Рис 35

Найденные реакции стержней равны по модулю внутренним усилиям в стержнях (§ 3).

Последовательность рассмотрения узлов определяется обычно тем, чтобы число неизвестных сил, приложенных к узлу, не превышало двух. Тогда эти неизвестные определяются сразу из двух уравнений равновесия сил, действующих на этот узел.

Чтобы убедиться в правильности произведенных вычислений, для сил, приложенных к каждому узлу, можно построить многоугольник, который должен быть замкнут.

Определим по способу вырезания узлов усилия в стержнях фермы, изображенной на рис. 36, а. Если сила $P = 60 \text{ кн}$, приложен-

*) Веса стержней достаточно малы по сравнению с силами, приложенными в узлах фермы, поэтому ими обычно пренебрегают.

ная к узлу E фермы, вертикальна и реакция шарнирно-подвижной опоры B , перпендикулярная к опорной плоскости, тоже вертикальна, то линия действия реакции шарнирно-неподвижной опоры A должна быть им параллельна, т. е. должна быть тоже вертикальна (примечание к § 7).

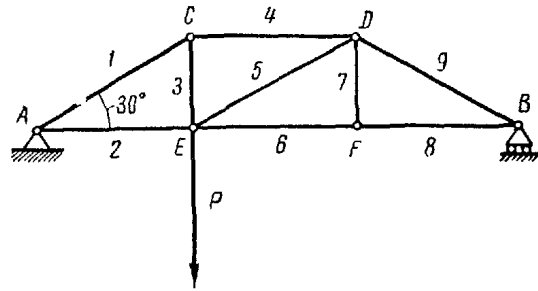


Рис 36а.

Из элементарного курса физики известно, что силу P можно разложить на две, параллельные ей составляющие силы, приложенные в точках A и B . Модули этих составляющих сил обратно пропорциональны расстояниям AE и BE , а сумма их равна модулю силы P . Этим силам, представляющим собой давление фермы на

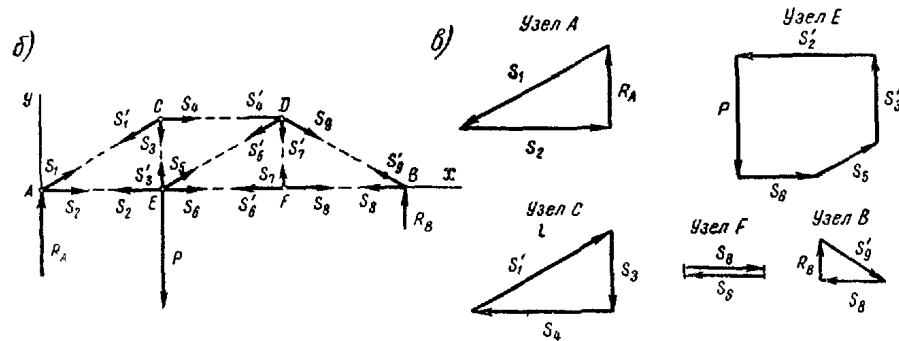


Рис. 36,б, в.

опоры, соответствует равное по модулю противодействие в виде реакций опор, которые определяются по следующим формулам:

$$R_A + R_B = P = 60 \text{ кН}, \quad \frac{R_A}{R_B} = \frac{BE}{AE} = 2,$$

откуда

$$R_A = 40 \text{ кН} \text{ и } R_B = 20 \text{ кН}.$$

Составим по два уравнения равновесия сил, приложенных к каждому из узлов фермы (рис. 36,б) и для проверки правильности произведенных вычислений построим многоугольники сил, которые

должны быть замкнутыми. При построении многоугольников все силы отложим в некотором масштабе по их истинным направлениям, соответствующим растяжению или сжатию, руководствуясь результатами вычислений (рис. 36,в).

Расчет начнем с узла A , к которому приложены лишь две неизвестные силы S_1 и S_2 .

Узел A

$$\sum X_i = 0; \quad S_2 + S_1 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_A + S_1 \cos 60^\circ = 0;$$

$$S_1 = -\frac{R_A}{\cos 60^\circ} = -80 \text{ кН}; \quad S_2 = -S_1 \cos 30^\circ = 69,2 \text{ кН}.$$

Узел C

$$\sum X_i = 0; \quad -S_1' \cos 30^\circ + S_4 = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -S_1' \cos 60^\circ - S_3 = 0;$$

$$S_3 = -S_1' \cos 60^\circ = 40 \text{ кН}; \quad S_4 = S_1' \cos 30^\circ = -69,2 \text{ кН}.$$

Узел E

$$\sum X_i = 0; \quad -S_2' + S_6 + S_5 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad S_3' - P + S_5 \cos 60^\circ = 0;$$

$$S_5 = \frac{P - S_3'}{\cos 60^\circ} = 40 \text{ кН}; \quad S_6 = S_2' - S_5 \cos 30^\circ = 34,6 \text{ кН}.$$

Узел F

$$\sum X_i = 0; \quad -S_6' + S_8 = 0; \quad S_8 = S_6' = 34,6 \text{ кН};$$

$$\sum Y_i = 0; \quad S_7 = 0.$$

Узел B

$$\sum Y_i = 0; \quad R_B + S_9 \cos 60^\circ = 0; \quad S_9 = -\frac{R_B}{\cos 60^\circ} = -40 \text{ кН}.$$

Таблица усилий

Таблица 1

| № стержня | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----------|-----|------|----|-------|----|------|---|------|-----|
| S (кН) | -80 | 69,2 | 40 | -69,2 | 40 | 34,6 | 0 | 34,6 | -40 |

Приведенная таблица показывает, что верхний пояс фермы сжат, нижний — растянут.

Усилия в отдельных стержнях загруженной фермы могут оказаться равными нулю. Такие стержни фермы принято называть *нулевыми стержнями*. Рассмотрим леммы, пользуясь которыми можно определить нулевые стержни, не производя расчета фермы.

Лемма 1. Если в незагруженном узле фермы сходятся два стержня, то усилия в этих стержнях равны нулю (рис. 37).

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & S_2 + S_1 \cos \alpha &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & S_1 \cos(90^\circ - \alpha) &= 0; \\ S_1 &= 0 & \text{и} & S_2 = 0. \end{aligned}$$

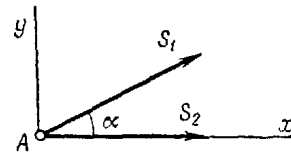


Рис. 37.

Лемма 2. Если в незагруженном узле фермы сходятся три стержня, из которых два расположены на одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю. Усилия в первых двух стержнях равны между собой (рис. 38).

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & -S_1 + S_2 + S_3 \cos \alpha &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & S_3 \cos(90^\circ - \alpha) &= 0; \\ S_3 &= 0 & \text{и} & S_1 = S_2. \end{aligned}$$

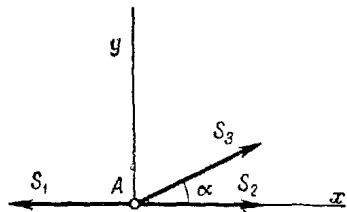


Рис. 38

Лемма 3. Если в узле фермы сходятся два стержня и к узлу приложена внешняя сила, линия действия которой совпадает с осью одного из стержней, то усилие в этом стержне равно по модулю приложенной силе, а усилие в другом стержне равно нулю (рис. 39).

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & S_1 \cos \alpha &= 0; & S_1 &= 0. \\ \sum Y_i &= 0; & -P - S_2 + S_1 \sin \alpha &= 0; & S_2 &= -P. \end{aligned}$$

Пример 7. Применить леммы о нулевых стержнях к определению незагруженных стержней ферм, изображенных вместе с действующими на них внешними силами и реакциями опор (рис. 40—44).

Применяя лемму 2 к узлу I фермы, изображенной на рис. 40, устанавливаем, что $S_3 = 0$. Далее, мысленно отбрасывая стержень 3, применяем эту же лемму к узлу II и находим, что $S_5 = 0$.

Рассматривая ферму, изображенную на рис. 41, применяем лемму 1 к узлу I и заключаем, что $S_1 = 0$ и $S_2 = 0$. Затем применяем лемму 3 к узлу II и устанавливаем, что $S_4 = 0$.

На рис. 42 рассматриваем узлы I, II, III и находим: $S_{11} = 0$, $S_9 = 0$, $S_3 = 0$.

Рассматривая узлы I и II (рис. 43), можно заключить, что $S_{11} = 0$ и $S_9 = 0$.

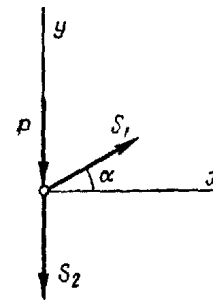


Рис. 39.

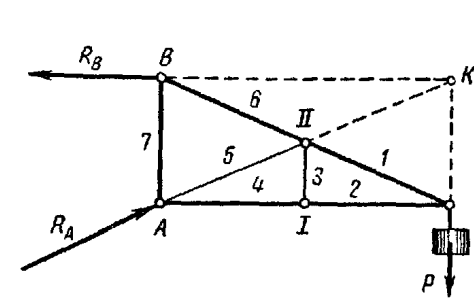


Рис. 40.

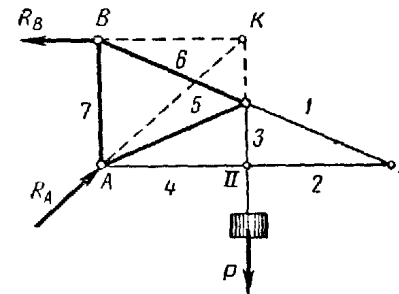


Рис. 41.

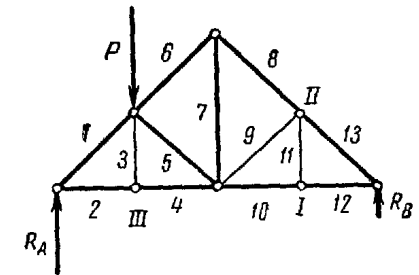


Рис. 42.

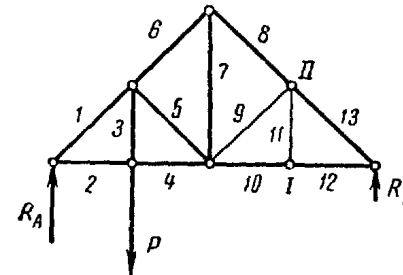


Рис. 43

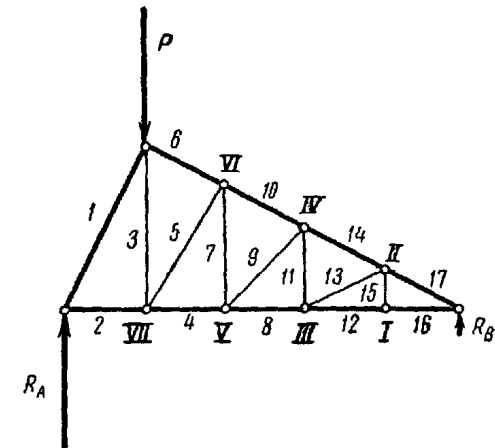


Рис. 44.

Рассматривая последовательно узлы I—VII фермы, изображенной на рис. 44, находим:

$$S_{15} = 0; \quad S_{13} = 0; \quad S_{11} = 0; \quad S_9 = 0; \quad S_7 = 0; \quad S_5 = 0; \quad S_3 = 0.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется связью? В чем заключается принцип освобожденности от связей?
2. Перечислите основные типы опор, для которых линии действия реакций известны.
3. Как направлена реакция опорного шарнира, если твердое тело соединено с опорой при помощи стержня, имеющего на концах шарниры?
4. Как определяется направление равнодействующей системы сходящихся сил при построении силового многоугольника?
5. Каковы условия и уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил?
6. Как формулируется план решения задач статики на равновесие сил?
7. При каком условии три непараллельные силы, приложенные к твердому телу, уравновешиваются?
8. В чем заключается сущность способа вырезания узлов?
9. Каковы леммы о нулевых стержнях?

ГЛАВА III

ТЕОРИЯ ПАР СИЛ, ЛЕЖАЩИХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 12. Момент силы относительно точки на плоскости

Моментом силы относительно некоторой точки на плоскости называется произведение модуля силы на ее плечо относительно этой точки, взятое со знаком плюс или минус (рис. 45):

$$M_O = \pm Pd. \quad (12.1)$$

Плечом силы P относительно точки O называют длину перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы; точка O называется *центром момента*.

Момент силы относительно точки будем считать положительным, если сила P стремится повернуть плоскость чертежа вокруг точки O в сторону, противоположную движению часовой стрелки, и отрицательным — в обратном случае.

Момент силы P относительно точки O численно равен удвоенной площади треугольника AOB

$$M_O = \pm 2\Delta AOB,$$

где A и B — начало и конец силы, а O — центр момента.

Если линия действия силы проходит через точку, т. е. $d = 0$, то момент силы относительно этой точки равен нулю.

Единица момента равна произведению единицы силы на единицу длины.

Если сила выражена в ньютонах, а плечо в метрах, то момент силы выражается в ньютон-метрах (н · м).

В том случае, если к телу приложено несколько сил, лежащих в одной плоскости, можно вычислить сумму моментов этих сил относительно какой-либо точки O в этой же плоскости (рис. 46):

$$M_{1O} = P_1 d_1; \quad M_{2O} = P_2 d_2;$$

$$M_{3O} = -P_3 d_3; \quad M_{4O} = -P_4 d_4$$

и т. д.

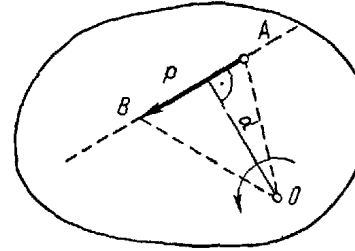


Рис. 45.

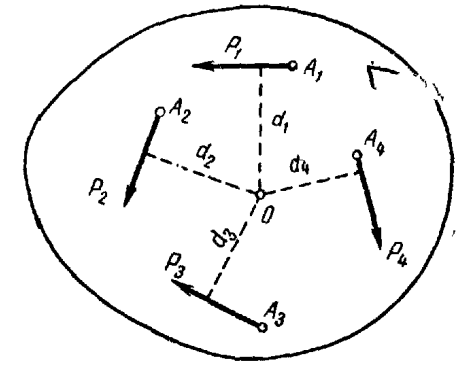


Рис. 46.

Момент M_O , равный алгебраической сумме моментов данной системы сил относительно какой-либо точки в той же плоскости, называют *главным моментом* системы сил относительно этой точки:

$$M_O = M_{1O} + M_{2O} + \dots + M_{nO}$$

§ 13. Пара сил. Теорема о моменте пары

Из элементарного курса физики известно, что равнодействующая R двух параллельных сил P_1 и P_2 одного направления (рис. 47, а) имеет

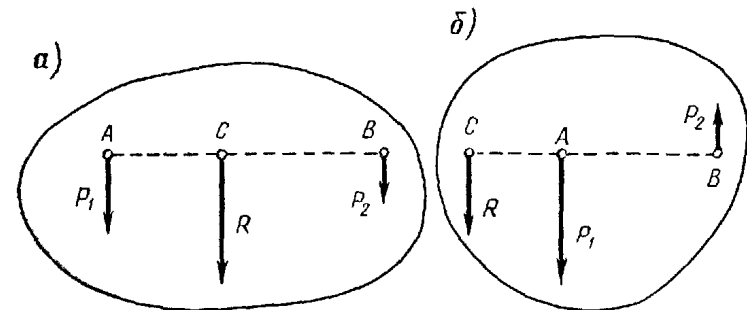


Рис. 47.

такое же направление, а ее модуль равен сумме модулей слагаемых сил.

Точка C приложения равнодействующей делит отрезок между точками приложения сил A и B на части, обратно пропорциональ-

ные модулям сил, т. е.

$$R = P_1 + P_2; \quad \frac{AC}{BC} = \frac{P_2}{P_1}. \quad (13.1)$$

Отсюда по известному свойству пропорции можно получить:

$$\frac{AC}{P_2} = \frac{BC}{P_1} = \frac{AC + BC}{P_2 + P_1}$$

или

$$\frac{AC}{P_2} = \frac{BC}{P_1} = \frac{AB}{R}. \quad (13.2)$$

Равнодействующая R двух параллельных сил P_1 и P_2 противоположного направления (рис. 47, б) имеет направление большей по модулю силы и модуль, равный разности модулей этих сил. Точка C приложения равнодействующей лежит на продолжении отрезка AB за точкой приложения большей силы, на расстояниях от точек A и B , обратно пропорциональных модулям приложенных в них сил, т. е.

$$R = P_1 - P_2; \quad \frac{AC}{BC} = \frac{P_2}{P_1}; \quad \frac{AC}{P_2} = \frac{BC}{P_1} = \frac{AB}{R}. \quad (13.3)$$

Система двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил P_1 и P_2 называется *парой сил*.

Пара сил не имеет равнодействующей, однако силы пары, не лежащие на одной линии, не уравниваются, а стремятся произвести вращение тела, к которому они приложены, в направлении движения часовой стрелки (рис. 48, а) или противоположно ему (рис. 48, б).

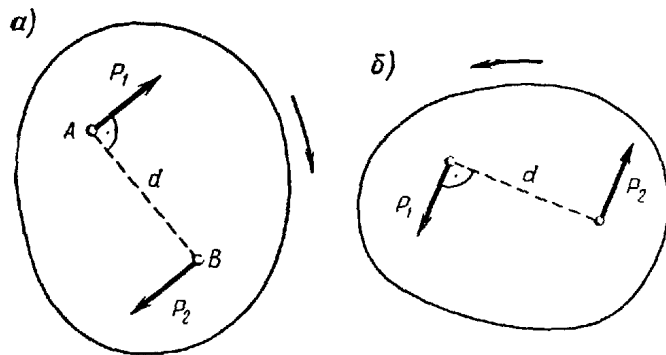


Рис. 48.

Пара сил, не имея равнодействующей, очевидно, не может быть уравновешена силой.

Расстояние d между линиями действия сил, составляющих пару сил, называется *плечом пары*. Понятие пары сил введено в механику Пуансо.

Теорема. Сумма моментов сил, составляющих пару, относительно любого центра в плоскости действия пары не зависит от выбора этого центра и равна взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы на плечо пары.

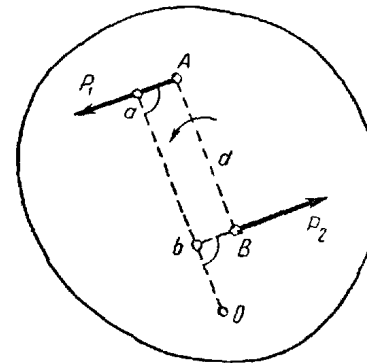


Рис 49

Момент силы P_1 , приложенной в точке A , относительно произвольной точки O (рис. 49)

$$M_{1O} = P_1 Oa = P_1 (Ob + d).$$

Момент силы P_2 , приложенной в точке B , относительно точки O

$$M_{2O} = -P_2 Ob.$$

Сумма моментов сил пары относительно произвольно выбранной на плоскости точки O равна:

$$M_{1O} + M_{2O} = P_1 Ob + P_1 d - P_2 Ob = P_1 d.$$

Эта сумма, не зависящая от положения центра и равная произведению модуля силы на плечо пары, определяет *момент пары сил*.

Момент пары положителен, если пара стремится повернуть плоскость чертежа против движения часовой стрелки, и отрицателен — в обратном случае.

Таким образом, *моментом пары сил называется взятое со знаком плюс или минус произведение модуля силы на плечо пары*

$$M = \pm Pd. \quad (13.4)$$

§ 14. Теорема о возможности перемещения пары сил в плоскости ее действия

Пара сил, полученная путем перемещения заданной пары в любое положение в плоскости ее действия, эквивалентна заданной паре сил

Пусть к твердому телу приложена пара сил P, P' с плечом AB (рис. 50). Покажем, что не изменяя кинематического состояния тела, пару можно перенести в плоскости ее действия, совместив ее плечо с произвольно расположенным отрезком CD , где $CD = AB$

Для этого в точках C и D восставим перпендикуляры к отрезку CD и продолжим их до пересечения с линиями действия сил заданной пары в точках K, E, L, I — вершинах ромба. Перенесем силы пары в вершины K и L и приложим в этих точках по две противоположно направленные силы P_1, P_2, P_3, P_4 , равные по модулю P и направленные по прямым, перпендикулярным к отрезку CD . Построим в точке K на силах P и P_2 и в точке L на силах P' и P_3 параллелограммы равных по модулю сил, т. е. ромбы.

Полученные равнодействующие R_1 и R_2 взаимно уравновешиваются, так как они равны по модулю и направлены до диагонали ромба $KELI$ в противоположные стороны. Перенеся оставшиеся силы P_1 и P_4 по их линиям действия в точки C и D , получим пару

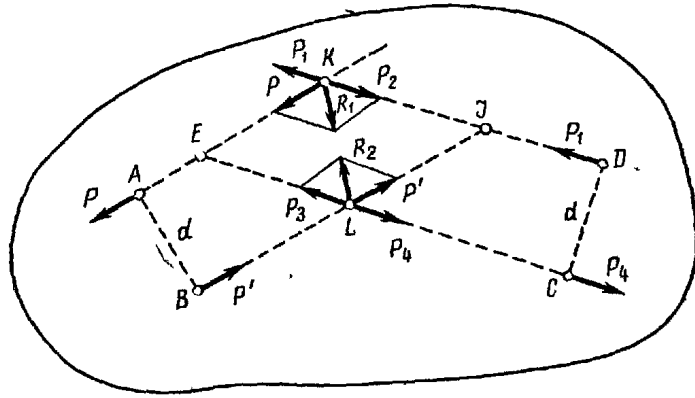


Рис. 50.

сил в требуемом положении. Полученная пара сил эквивалентна заданной, так как при доказательстве теоремы системы сил заменялись только эквивалентными системами.

§ 15. Теорема об условии эквивалентности пар

Пары сил, моменты которых численно равны и одинаковы по знаку, эквивалентны.

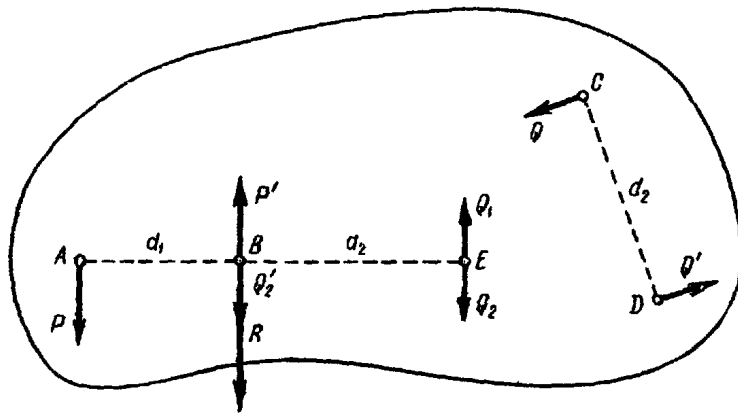


Рис. 51.

Пусть даны пары сил P, P' с плечом AB , равным d_1 , и Q, Q' с плечом CD , равным d_2 , моменты которых численно равны и одинаковы по знаку (рис. 51).

Так как

$$M_1 = Pd_1, \quad M_2 = Qd_2 \quad \text{и} \quad M_1 = M_2,$$

то

$$Pd_1 = Qd_2 \quad \text{или} \quad \frac{P}{Q} = \frac{d_2}{d_1}. \quad (15.1)$$

Продолжим отрезок AB и от точки B отложим отрезок $BE = CD = d_2$. Приложим в точке E взаимно уравновешивающиеся силы Q_1 и Q_2 , по модулю равные Q и направленные перпендикулярно к прямой BE . Сложив силу P , приложенную в точке A , с силой Q_2 , приложенной в точке E , получим параллельную им равнодействующую R (см. § 13), равную по модулю $P + Q_2$, приложенную в точке B , так как по условию (15.1) именно эта точка делит отрезок AE на части, обратно пропорциональные модулям сил P и Q_2 :

$$\frac{BE}{AB} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{P}{Q}.$$

Тогда в точке B будут приложены две силы R и P' , направленные по одной прямой в противоположные стороны. Равнодействующая этих сил Q'_2 по модулю равна их разности и направлена в сторону R . Сила Q'_2 в точке B составит с силой Q_1 в точке E пару сил, которую, согласно § 14, можно перенести, совместив ее плечо с отрезком CD .

Таким образом, рассматриваемая пара P, P' с плечом AB будет заменена эквивалентной ей парой Q, Q' с плечом CD , имеющей момент той же величины и того же знака, как и момент пары P, P' .

Примечание. Основным параметром пары сил является ее момент. Силы пары, приложенной к твердому телу, можно изменить, изменив одновременно ее плечо так, чтобы величина момента не изменилась; полученная пара будет эквивалентна заданной.

§ 16. Теорема о сложении пар на плоскости

Момент пары сил, эквивалентной рассматриваемой системе пар на плоскости, равен алгебраической сумме моментов составляющих пар.

Пусть на твердое тело одновременно действуют несколько пар: $P_1, P'_1; P_2, P'_2; P_3, P'_3$, плечи которых равны d_1, d_2, d_3 .

Возьмем на плоскости произвольный отрезок длиной d (рис. 52) и заменим заданные пары эквивалентными парами $Q_1, Q'_1; Q_2, Q'_2; Q_3, Q'_3$ с общим плечом d . Найдем модули сил эквивалентных пар из соотношений:

$$M_1 = P_1 d_1 = Q_1 d; \quad M_2 = P_2 d_2 = Q_2 d; \quad M_3 = -P_3 d_3 = -Q_3 d.$$

Сложив силы, приложенные к каждому из концов отрезка AB , найдем модуль их равнодействующей:

$$R = Q_1 + Q_2 - Q_3.$$

Равнодействующие R , R' составляют пару сил, эквивалентную системе заданных пар. Вычислим момент этой пары.

$$M = Rd = (Q_1 + Q_2 - Q_3)d = Q_1d + Q_2d - Q_3d = M_1 + M_2 + M_3.$$

Если к твердому телу приложены n пар, то момент эквивалентной им пары определится по формуле

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n \text{ или } M = \sum M_i, \quad (16.1)$$

т. е. момент эквивалентной пары равен алгебраической сумме моментов составляющих пар.

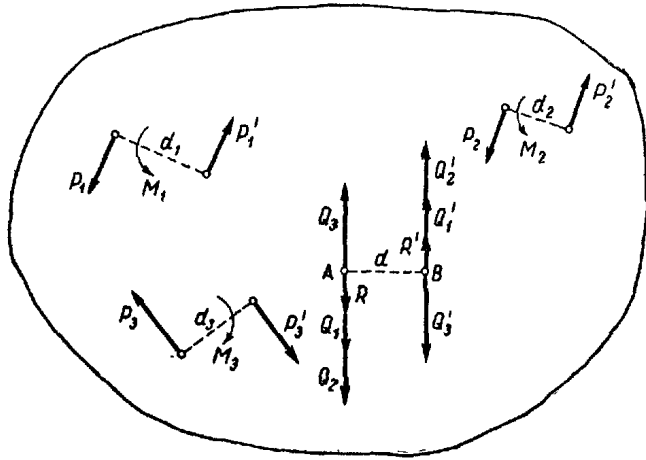


Рис. 52.

В случае равновесия системы пар на плоскости момент равнодействующей пары равняется нулю.

Условие равновесия пар на плоскости формулируется так:

Пары на плоскости уравниваются в том случае, если алгебраическая сумма их моментов равна нулю

$$\sum M_i = 0. \quad (16.2)$$

§ 17. Примеры на применение условия равновесия пар на плоскости

Пример 8. Груз весом $G = 50$ н подвешен к канату, намотанному на барабан радиусом $r = 10$ см. Барабан удерживается парой сил, приложенных к концам рукоятки длиной $l = 1,25$ м, скрепленной

с барабаном и лежащей в одной плоскости с веревкой. Определить реакцию оси O барабана и силы пары P , P' , если они перпендикулярны к рукоятке (рис. 53а).

Решение. Рассмотрим равновесие сил, приложенных к барабану: заданной вертикальной силы веса G , пары, составленной силами P и P' , и реакции R_O цилиндрического шарнира O , модуль и линия действия которой не известны. Так как пару сил может уравновесить только пара, то силы G и R_O должны составлять пару сил, уравновешиваемую парой P , P' . Линия действия силы G известна, реакцию R_O шарнира O направим параллельно силе G в противоположную ей сторону (рис. 53б). Модули сил должны быть равны, т. е.

$$R_O = G = 50 \text{ н.}$$

Алгебраическая сумма моментов двух пар сил, приложенных к барабану, должна быть равна нулю:

$$\sum M_i = 0; \quad -Pl + R_O r = 0,$$

где l — плечо пары P , P' , r — плечо пары G , R_O .

Находим модули сил P и P' :

$$P = P' = \frac{R_O r}{l} = \frac{50 \cdot 0,1}{1,25} = 4 \text{ н.}$$

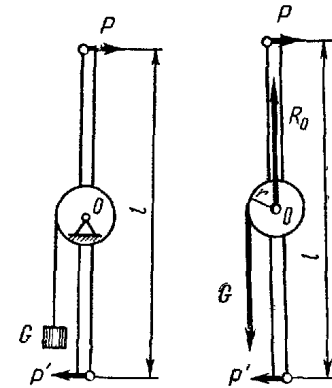


Рис. 53а.

Рис. 53б.

Пример 9. Балка длиной $AB = 10$ м имеет шарнирно-неподвижную опору A и шарнирно-подвижную опору B с наклонной опорной плоскостью, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. На балку действуют три пары сил, абсолютные величины моментов которых равны $|M_1| = 8$ кн·м; $|M_2| = 10$ кн·м; $|M_3| = 7$ кн·м. Определить реакции опор (рис. 54а).

Решение. Рассмотрим равновесие сил, приложенных к балке AB : трех заданных пар сил, реакции опоры R_B , направленной перпендикулярно к опорной плоскости, и реакции опоры R_A , линия действия которой не известна. Так как заданная нагрузка состоит только из пар сил, то реакции опор R_A и R_B должны составить пару сил, уравновешивающую заданные пары. Направим реакцию R_A параллельно реакции R_B , чтобы силы R_A и R_B составили пару, направленную в сторону, обратную движению часовой стрелки (рис. 54б).

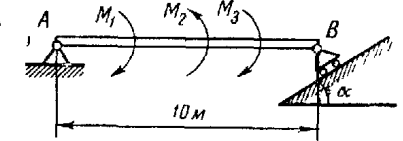


Рис. 54а.

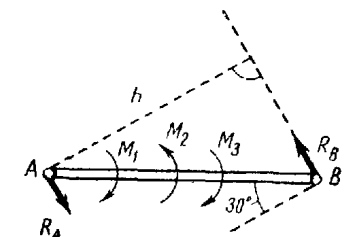


Рис. 54б.

Вспользуемся условием равновесия четырех пар сил, приложенных к балке:

$$\sum M_i = 0; \quad -|M_1| + |M_2| - |M_3| + R_B h = 0, \quad \text{где } h = AB \cos 30^\circ.$$

Отсюда находим:

$$R_B = \frac{|M_1| - |M_2| + |M_3|}{AB \cos 30^\circ} = \frac{8 - 10 + 7}{10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,58 \text{ кН.}$$

Знак плюс в ответе указывает, что принятое направление реакций опор R_A и R_B совпадает с истинным.

$$R_A = R_B = 0,58 \text{ кН.}$$

ГЛАВА IV

СИСТЕМА СИЛ, ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ НА ПЛОСКОСТИ

§ 18. Приведение силы к заданному центру

Для сложения сил, произвольно расположенных на плоскости, следует применять метод, предложенный французским ученым Пуансо, заключающийся в приведении сил к заданному центру. Рассмотрим сущность этого метода.

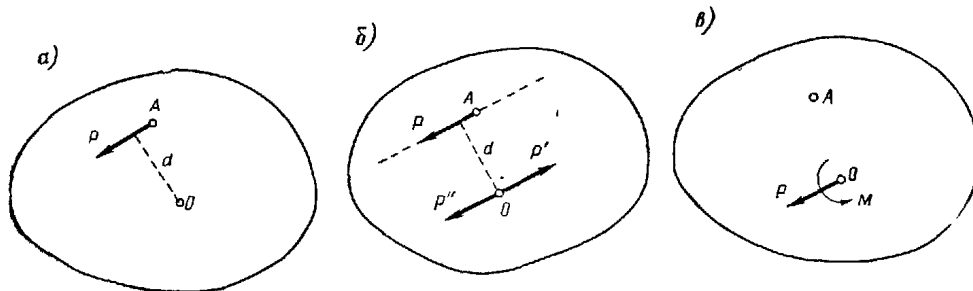


Рис. 55.

Дана сила P , приложенная в точке A (рис. 55, а). Опустим из центра O перпендикуляр на линию действия силы P и определим ее момент относительно этой точки:

$$M_O = Pd.$$

Приложим в точке O взаимно уравновешивающиеся силы P' и P'' , параллельные силе P и равные ей по модулю (рис. 55, б). Тогда получим силу P'' , геометрически равную силе P , приложенную в центре приведения, и пару сил, составленную силами P и P' , момент которой $M = Pd$ равен моменту силы P относительно центра

приведения O . Таким образом, метод Пуансо заключается в замене силы P эквивалентной ей совокупностью — геометрически равной ей силой P'' , приложенной в центре приведения, и парой сил с моментом, равным моменту силы относительно центра приведения (рис. 55, в).

§ 19. Приведение системы сил, произвольно расположенных на плоскости, к силе и паре. Главный вектор и главный момент

Применим метод приведения силы к заданному центру к сложению сил, произвольно расположенных на плоскости (рис. 56). Пусть даны силы P_1 , P_2 и P_3 , приложенные в точках A_1 , A_2 и A_3 . Примем за центр приведения произвольную точку O и приведем все силы

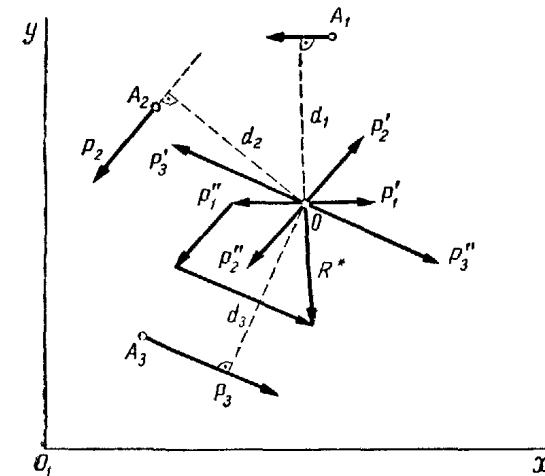


Рис. 56.

к этому центру. Складывая силы P'_1 , P'_2 , P'_3 по правилу многоугольника, получим их равнодействующую R^* , равную геометрической сумме сил P_1 , P_2 , P_3 :

$$R^* = P_1 + P_2 + P_3.$$

Геометрическая сумма всех сил системы называется *главным вектором системы сил*.

Складывая пары сил P_1, P'_1 ; P_2, P'_2 ; P_3, P'_3 , моменты которых равны моментам сил P_1, P_2, P_3 относительно центра приведения O , получим эквивалентную им пару сил. Момент этой пары:

$$M = M_{1O} + M_{2O} + M_{3O},$$

где

$$M_{1O} = P_1 d_1; \quad M_{2O} = P_2 d_2 \quad \text{и} \quad M_{3O} = P_3 d_3.$$

Как видно, момент пары сил, эквивалентной системе пар, появившихся в результате приведения сил к центру O , равен главному моменту рассматриваемой системы сил относительно центра приведения. Распространяя полученные результаты приведения данной системы сил на n сил, имеем:

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_n, \text{ или } \mathbf{R}^* = \sum \mathbf{P}_i;$$

$$M = M_O = M_{1O} + M_{2O} + \dots + M_{nO}, \text{ или } M = \sum M_{iO}.$$

Таким образом, силы, произвольно расположенные на плоскости, можно привести к одной силе, приложенной в центре приведения, равной главному вектору данной системы сил, и к паре сил с моментом, равным главному моменту этой системы сил относительно центра приведения.

Выбор центра приведения не отражается на модуле и направлении главного вектора, но влияет на величину и знак главного момента.

Модуль и направление главного вектора плоской системы сил определяются по способу проекций так же, как определяется модуль и направление равнодействующей сходящихся сил (см. § 10):

$$X = \sum X_i; \quad Y = \sum Y_i,$$

$$R^* = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$\cos(\mathbf{R}^*, \mathbf{i}) = \frac{X}{R^*}; \quad \cos(\mathbf{R}^*, \mathbf{j}) = \frac{Y}{R^*}.$$

§ 20. Возможные случаи приведения сил, произвольно расположенных на плоскости

Рассмотрим возможные случаи приведения сил, произвольно расположенных на плоскости.

Случай I. $\mathbf{R}^* = 0; M = 0$.

В этом случае силы взаимно уравновешиваются.

Случай II. $\mathbf{R}^* = 0; M \neq 0$.

В этом случае заданная система сил приводится к паре сил, момент которой равен главному моменту сил относительно центра приведения. Если система сил приводится к паре сил, то главные моменты данной системы сил относительно всех точек плоскости равны по величине и совпадают по знаку.

Случай III. $\mathbf{R}^* \neq 0; M = 0$.

В этом случае заданная система сил приводится к равнодействующей силе, равной главному вектору сил, линия действия которой проходит через центр приведения. Действительно, если сила \mathbf{R}^* , равная главному вектору, при отсутствии пары эквивалентна данной системе сил, то она является равнодействующей этой системы сил.

Случай IV. $\mathbf{R}^* \neq 0; M \neq 0$.

Покажем, что в этом случае заданная система сил также приводится к одной силе — равнодействующей данной системы сил.

Пусть, например, данная система сил приведена к силе $\mathbf{R}^* = \sum \mathbf{P}_i$, приложенной в центре приведения O и к паре сил с моментом $M = \sum M_{iO}$ (рис. 57,а).

Выберем силы пары \mathbf{R}_1^* , \mathbf{R} равными по модулю \mathbf{R}^* . Тогда плечо этой пары следует взять равным

$$d = \frac{M}{R^*}.$$

Одну из сил пары \mathbf{R}_1^* приложим в точке O , направив ее противоположно главному вектору \mathbf{R}^* (рис. 57,б), тогда как другую силу

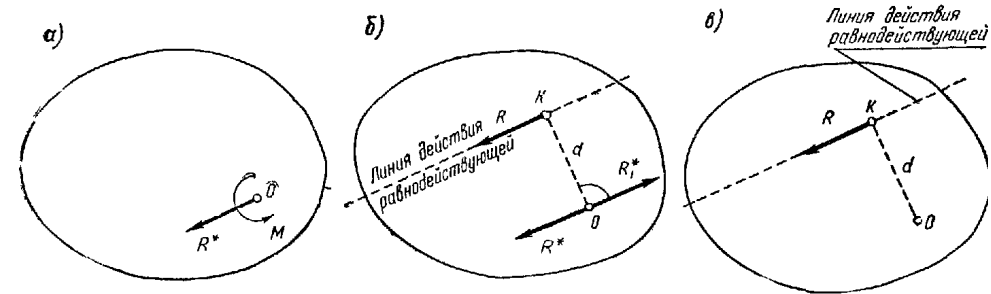


Рис. 57.

пары \mathbf{R} приложим в точке K на отрезке $OK = d$, отложенном перпендикулярно к линии действия силы \mathbf{R}_1^* в ту сторону, чтобы пара \mathbf{R}_1^* , \mathbf{R} стремилась вращать плоскость чертежа против движения часовой стрелки. Силы \mathbf{R}^* и \mathbf{R}_1^* , приложенные в центре приведения O , как равные и противоположно направленные, уравновешиваются, и рассматриваемая система сил приводится к одной силе \mathbf{R} , равной главному вектору сил и приложенной в точке K . Эта сила является равнодействующей данной системы сил (рис. 57,в).

На основе рассмотренных выше случаев приведения можно сделать следующий вывод.

Если силы, произвольно расположенные на плоскости, не уравновешиваются, то их можно привести или к одной силе или к паре сил.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей плоской системы сил. Момент равнодействующей силы относительно любой точки на плоскости равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.

Определим момент равнодействующей силы \mathbf{R} , приложенной в точке K , относительно произвольно выбранного центра приведения O (рис. 57,в).

$$M_O(\mathbf{R}) = Rd,$$

но

$$R = R^* \quad \text{и} \quad d = \frac{M}{R^*}.$$

Тогда

$$M_O(\mathbf{R}) = R^* \frac{M}{R^*} = M = M_{1O} + M_{2O} + \dots + M_{nO},$$

что и требовалось доказать.

§ 21. Уравнения равновесия системы сил, произвольно расположенных на плоскости

Для сил, произвольно расположенных на плоскости, имеются два условия равновесия:

$$\left. \begin{aligned} M = \sum M_{iO} = 0; \\ R^* = \sqrt{X^2 + Y^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21.1)$$

Из второго условия (21.1) следует, что $X = \sum X_i = 0$ и $Y = \sum Y_i = 0$. Таким образом, два условия равновесия сил, произвольно расположенных на плоскости, можно выразить в виде системы трех уравнений:

$$\text{I. } \left. \begin{aligned} \sum M_{iO} = 0; \\ \sum X_i = 0; \\ \sum Y_i = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

Эти уравнения называются *основными уравнениями равновесия* плоской системы сил (I система уравнений). Центр моментов и направление координатных осей для этой системы уравнений можно выбирать произвольно.

Существуют и две другие системы трех уравнений равновесия сил (II и III системы):

$$\text{II. } \left. \begin{aligned} \sum M_{iA} = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum U_i = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21.3) \quad \text{III. } \left. \begin{aligned} \sum M_{iA} = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum M_{iC} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21.4)$$

При этом в системе II ось u не должна быть перпендикулярна прямой, проходящей через точки A и B , а в системе III точки A , B и C не должны лежать на одной прямой. Покажем, что при этих условиях системы II и III являются уравнениями равновесия плоской системы сил.

Пусть дана система сил, произвольно расположенных на плоскости, P_1, P_2, \dots, P_n (рис. 58), удовлетворяющая трем уравнениям (21.3):

$$\left. \begin{aligned} \sum M_{iA} = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum U_i = 0. \end{aligned} \right\}$$

причем ось u не перпендикулярна прямой AB .

Известно, что неуравновешивающиеся силы, произвольно расположенные на плоскости, приводятся или к паре сил или к равнодействующей (см. § 20).

Так как главные моменты системы сил относительно двух центров равны нулю, то рассматриваемая система сил не приводится к паре сил.

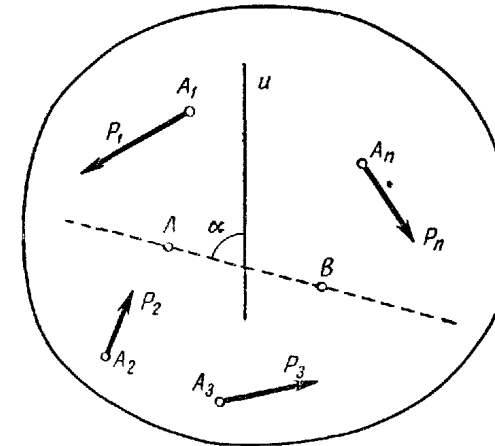


Рис. 58.

При наличии пары главных моменты системы сил относительно всех точек плоскости одинаковы и равны моменту этой пары (см. теорему о моменте пары сил § 13).

Если силы приводятся к равнодействующей силе, то ее линия действия должна проходить через точки A и B , так как на основании теоремы Вариньона

$$\begin{aligned} M_A(\mathbf{R}) = \sum M_{iA} = 0; \\ M_B(\mathbf{R}) = \sum M_{iB} = 0. \end{aligned}$$

Но проекция равнодействующей на любую ось равна

сумме проекций составляющих сил, т. е. $R \cos \alpha = \sum U_i = 0$, где $\cos \alpha \neq 0$, следовательно, предполагаемая равнодействующая $R = 0$.

Таким образом, II система уравнений показывает, что данная система сил не приводится ни к паре, ни к равнодействующей, следовательно, она уравновешивается. В случае, если ось u перпендикулярна прямой AB , то II система уравнений справедлива и при наличии равнодействующей, для которой AB является линией действия.

Пусть плоская система сил удовлетворяет трем уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \sum M_{iA} = 0, \\ \sum M_{iB} = 0, \\ \sum M_{iC} = 0, \end{aligned} \right\}$$

причем точки A , B и C не лежат на одной прямой. В этом случае силы не приводятся к паре сил, так как главные моменты этих сил относительно трех центров равны нулю. Силы не приводятся и к равнодействующей силе, так как если она существует, то линия ее действия не может пройти через три точки, не лежащие на одной прямой. Следовательно, рассматриваемая система сил уравнивается и III система уравнений является системой уравнений равновесия плоской системы сил.

Итак, установлено, что число уравнений равновесия плоской системы сил равно трем. При помощи этих уравнений можно решать задачи статики на плоскости, в которых число неизвестных не превышает трех.

§ 22. Сложение параллельных сил на плоскости. Уравнения равновесия параллельных сил.

Положим, что даны параллельные силы P_1, P_2, \dots, P_n , расположенные на плоскости и приложенные в точках A_1, A_2, \dots, A_n . Приведем силы к произвольному центру O . Получим в этом центре силу R^* , равную главному вектору, и пару сил с моментом M . Вычислим проекции главного вектора на координатные оси x , y , направив ось y параллельно силам:

$$X = \sum X_i = 0; \quad Y = \sum Y_i = \sum \pm P_i,$$

где $Y_i = +P_i$, если направление силы P_i совпадает с направлением оси y , и $Y_i = -P_i$, если направления силы P_i и оси y противоположны. Так как $X = 0$, то главный вектор R направлен по оси y . При $Y = \sum \pm P_i > 0$ направление главного вектора R^* совпадает с направлением оси y , а при $Y = \sum \pm P_i < 0$ направление R^* противоположно направлению оси.

Таким образом, имеем:

$$R^* = |Y| = \left| \sum Y_i \right| = \left| \sum \pm P_i \right|,$$

т. е. главный вектор системы параллельных сил параллелен силам, его модуль равен абсолютному значению алгебраической суммы проекций сил на ось, параллельную силам, а его направление определяется знаком этой суммы.

Момент пары сил, эквивалентной системе пар, появившихся в результате приведения, равен главному моменту параллельных сил относительно центра приведения:

$$M = M_O = M_{1O} + M_{2O} + \dots + M_{nO}$$

или

$$M = \sum M_{iO}.$$

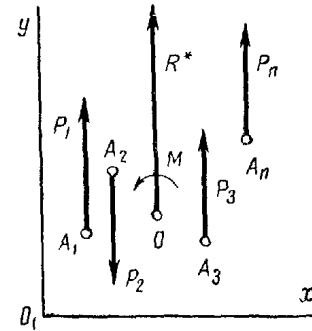


Рис. 59.

Для параллельных сил на плоскости возможны все те же случаи приведения, что и для сил, произвольно расположенных на плоскости (§ 20). Параллельные силы, если они не уравниваются, можно привести или одной силе, или к паре сил.

Для системы параллельных сил на плоскости имеем два условия равновесия:

$$M = 0 \quad \text{и} \quad R^* = 0.$$

Для получения уравнений равновесия одну из осей координат, например ось y , направляют параллельно силам. Тогда все силы проектируются на ось y , а проекция каждой силы на ось x равна нулю. Два условия равновесия системы параллельных сил на плоскости можно выразить в виде двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \text{I.} \quad \sum M_{iO} &= 0; \\ \sum Y_i &= \sum \pm P_i = 0. \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения называются *основными уравнениями равновесия* параллельных сил на плоскости (I система уравнений). Центр моментов для этой системы уравнений можно выбирать произвольно.

Существует и другая система двух уравнений равновесия параллельных сил:

$$\left. \begin{aligned} \text{II.} \quad \sum M_{iA} &= 0; \\ \sum M_{iB} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

При этом прямая AB не должна быть параллельна силам. II система уравнений показывает, что силы не приводятся к паре сил (рис. 60) и к равнодействующей силе, так как линия ее действия, параллельная силам, не может пройти через точки A и B .

§ 23. Статически определенные и статически неопределенные задачи. Определение реакций внешних и внутренних связей системы взаимосвязанных тел

Статически определенными называют задачи, которые можно решать методами статики твердого тела, т. е. задачи, в которых число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия сил.

Статически неопределенными называют задачи с числом неизвестных, превышающим число уравнений равновесия сил, т. е. задачи, которые нельзя решать методами статики твердого тела и для решения которых нужно учитывать деформации тела, обусловленные внешними нагрузками.

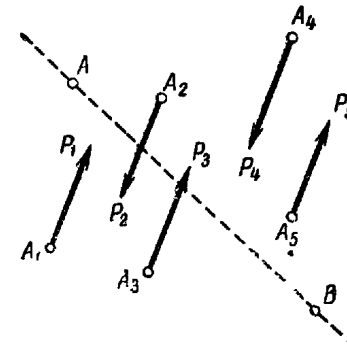


Рис. 60

Для решения задач на равновесие сил, приложенных к твердому телу и лежащих в одной плоскости, можно пользоваться тремя уравнениями равновесия сил. Такая задача статически определена, если число неизвестных не больше трех. Если к телу приложена система параллельных сил, то можно воспользоваться только двумя уравнениями равновесия сил. Эта задача статически определена, если число неизвестных в ней не превышает двух.

Для параллельных сил, приложенных к системе n тел, можно составить по два уравнения равновесия для сил, приложенных к каждому из этих тел, т. е. всего $2n$ уравнений равновесия. Если же на эту систему действуют силы, произвольно расположенные на плоскости, то общее число уравнений равновесия сил, приложенных к системе n тел, равно $3n$.

Рассмотрим некоторые статически определенные и статически неопределенные задачи, в которых по заданным силам требуется определить реакции опор.

На рис. 61а изображена балка на двух опорах, находящаяся под действием двух заданных непараллельных сил P и Q . Так как опора A неподвижна и линия действия ее реакции не известна, то реакция должна быть разложена на две составляющие по осям x и y . Если будут найдены эти составляющие X_A и Y_A , то модуль и направление реакции R_A определятся согласно § 9. Реакция опоры B как шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно к опорной плоскости и необходимо определить лишь ее модуль. Общее число неизвестных величин равно трем, т. е. числу уравнений равновесия сил. Эта задача статически определена.

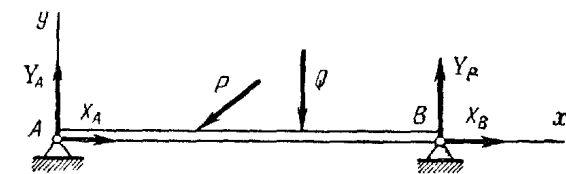


Рис. 61б.

На рис. 61б изображена балка с двумя неподвижными опорами, находящаяся под действием сил P и Q . Реакцию каждой из этих опор можно определить только по двум ее составляющим по осям x и y . В этой задаче имеем 4 неизвестных и 3 уравнения равновесия сил. Следовательно, задача является статически неопределенной.

На рис. 62 изображена двухшарнирная арочная ферма, нагруженная силами P и Q . Пять арок шарнирно прикреплены к неподвижным опорам A и B . Реакции этих опор определяются по двум составляющим по осям x и y . Задача содержит 4 неизвестных,

а число уравнений, в которые входят неизвестные, равно трем, т. е. она статически неопределенна.

Применяются конструкции, представляющие собой систему отдельных твердых тел, связанных между собой. Примером такой конструкции является трехшарнирная арка (рис. 63). В такой конструкции связи, соединяющие ее отдельные части, называются *внутренними* (на рис. 63 шарнир C), а связи, соединяющие ее с телами,

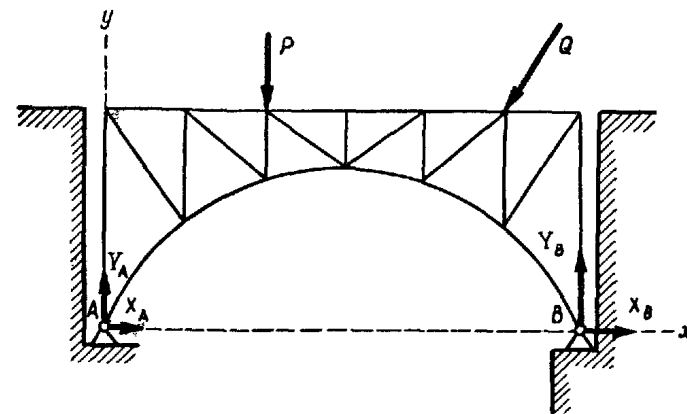


Рис. 62.

в нее не входящими (опорами), называются *внешними* (на рис. 63 шарниры A и B).

Для определения реакций связей такую конструкцию мысленно расчлениают на отдельные тела и каждое тело рассматривают как

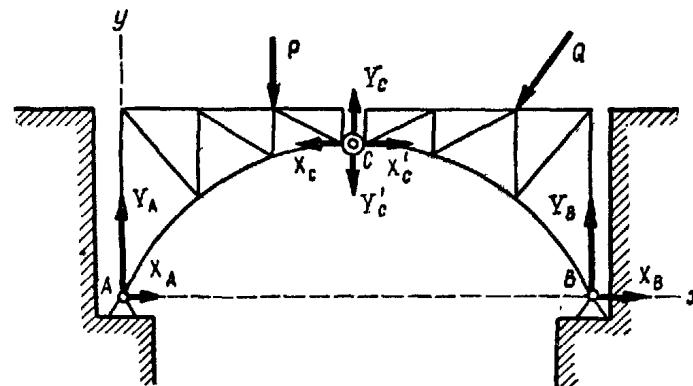


Рис. 63.

свободное, находящееся под действием задаваемых сил и реакций внешних и внутренних связей.

Для сил, приложенных к каждому телу, составляют уравнения равновесия. Если число неизвестных сил не превышает числа уравнений равновесия, то задача статически определена.

Так, на левую полуарку системы, изображенной на рис. 63, действуют: задаваемая сила P , реакция внешней связи — шарнира A в виде составляющих X_A , Y_A и реакция внутренней связи шарнира C в виде составляющих X_C и Y_C . Соответственно на правую полуарку действуют силы Q , X_B , Y_B , X'_C , Y'_C . При этом реакции внутренних связей попарно равны по модулю и противоположны по направлению, т. е. $X_C = X'_C$.

Составив по три уравнения равновесия сил, приложенных к каждой полуарке, получим шесть уравнений, содержащих шесть неизвестных величин X_A , Y_A , X_B , Y_B , X_C , Y_C , т. е. данная задача статически определена. Так решены примеры 12 и 15.

Однако, реакции опор трехшарнирной арки (рис. 63) удобнее определять так, как это сделано в примере 16.

Рассматривая арку как одно твердое тело, составляют три уравнения равновесия действующих на нее задаваемых сил P и Q и реакций внешних связей X_A , Y_A , X_B и Y_B . Затем, расчленив ее, составляют три уравнения равновесия сил, приложенных к одной части, например, левой — P , X_A , Y_A , X_C , Y_C .

В этом случае система уравнений решается проще и реакции внутренних связей определяются в последнюю очередь.

§ 24. Примеры на равновесие параллельных сил на плоскости

Пример 10. Однородная горизонтальная балка AB , весом $G=2$ кн, опирается на стену в точках B и D . Вес подвешенного груза $P=1$ кн. Размеры: $AB=4$ м, $DB=0,5$ м. Определить реакции опор D и B (рис. 64а).

Решение. Руководствуемся изложенным выше планом решения задач статики, рассматривая равновесие сил, приложенных к балке AB .

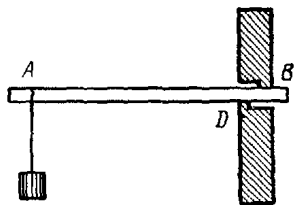


Рис. 64а.

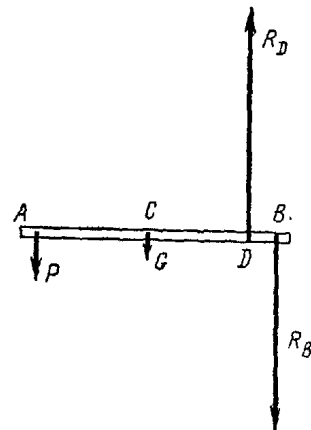


Рис. 64б

1. Показываем действующие на балку заданные силы: вес груза P в точке A и вес балки G в середине балки C (рис. 64б).

2. Освобождаем балку от связей, заменяя их действие реакциями опор R_B и R_D , направленными перпендикулярно к поверхности балки.

3. К полученной системе вертикальных сил P , G , R_D , R_B , действующих на балку AB , применяем условия равновесия сил в виде двух уравнений равновесия параллельных сил на плоскости:

$$\left. \begin{aligned} \sum M_{I_0} &= 0, \\ \sum P_i &= 0. \end{aligned} \right\}$$

При составлении алгебраической суммы моментов сил относительно точки пользуемся правилом знаков, изложенным в § 12. При этом сумму моментов сил составляем относительно точки, в которой приложена одна из неизвестных сил. В этом случае сила, приложенная в этой точке не имеет момента относительно нее и уравнение

содержит только одну неизвестную величину.

Составляем сумму моментов сил относительно точки B :

$$\sum M_{I_B} = 0, \quad P \cdot BA + G \cdot BC - R_D \cdot BD = 0.$$

При составлении алгебраической суммы вертикальных сил условимся силы, направленные вверх, брать со знаком плюс, а направленные вниз — со знаком минус:

$$\sum P_i = 0, \quad -P - G + R_D - R_B = 0.$$

4. Из первого уравнения определяем модуль реакции опоры R_D :

$$R_D = \frac{P \cdot BA + G \cdot BC}{BD} = \frac{10 \cdot 4 + 2 \cdot 2}{0,5} = 88 \text{ кн.}$$

Определив R_D , находим из второго уравнения модуль реакции опоры R_B :

$$R_B = -P - G + R_D = -10 - 2 + 88 = 76 \text{ кн.}$$

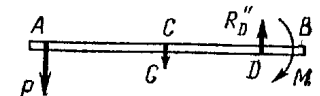


Рис. 64г.

Проведем анализ полученных результатов. Значение обеих реакций получено со знаком плюс потому, что на расчетной схеме (рис. 64б) указано действительное направление этих реакций: вверх для реакции R_D и вниз для реакции R_B . Воздействие двух опор D и B на балку можно представить в следующем виде. Разбиваем реакцию R_D на две силы R'_D и R''_D такого же направления, имеющие модули (рис. 64в):

$$R'_D = R_B = 76 \text{ кн};$$

$$R''_D = R_D - R_B = 12 \text{ кн.}$$

Силы R'_D и R_B составляют пару сил с моментом

$$|M| = R'_D \cdot DB = 76 \cdot 0,5 = 38 \text{ кн} \cdot \text{м.}$$

Кроме пары сил, имеется вертикальная реакция R_D'' ($R_D'' = 12 \text{ кн}$), приложенная в точке D и направленная вверх (рис. 64з).

Пример 11. Горизонтальная балка AB , длиной $l = 1,2 \text{ м}$, поддерживающая баллон, заделана в стену. На балку действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 1,25 \text{ кн/м}$. Определить реакции заделки (рис. 65а).

Решение. Рассматриваем равновесие сил, приложенных к балке AB . Равномерно распределенную нагрузку можно заменить сосредоточенной силой Q — равнодействующей системы равных парал-

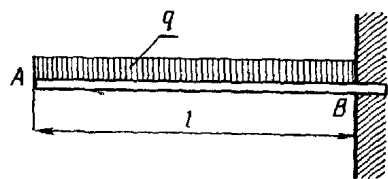


Рис. 65а.

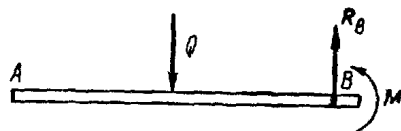


Рис. 65б.

лельных сил, приложенной в середине загруженного участка AB . Модуль этой силы определяется:

$$Q = ql = 1,25 \text{ кн/м} \cdot 1,2 \text{ м} = 1,5 \text{ кн}.$$

Реакции заделки представляют собой силы, распределенные по всей опорной площади, причем на нижнюю поверхность балки действуют силы, направленные вверх, а на верхнюю — силы, направленные вниз. Из этой системы сил образуется вертикальная реакция опоры (если все заданные силы вертикальны) и реактивная пара сил, препятствующая вращению балки вокруг закрепленного конца (см. пример 10). Момент этой пары сил называется опорным моментом. Показываем на схеме (рис. 65б) реакцию заделки R_B и реактивную пару с моментом M . Условимся направлять реакцию опоры вверх, а реактивную пару против движения часовой стрелки. Истинное их направление определим по знаку ответа.

Составляем два уравнения равновесия параллельных сил на плоскости. При этом сумму моментов всех сил составляем относительно точки B , так как в этой точке приложена неизвестная реакция опоры R_B . Сумму моментов сил реактивной пары относительно точки B включаем в уравнение в виде момента пары M , согласно § 13.

$$I. \sum M_{iB} = 0, \quad Q \frac{AB}{2} + M = 0;$$

$$M = -Q \frac{AB}{2} = -1,5 \cdot 0,6 = -0,9 \text{ кн} \cdot \text{м}.$$

Момент получен со знаком минус, следовательно, реактивная пара сил имеет направление, противоположное принятому на рас-

четной схеме, т. е. пара направлена в сторону движения часовой стрелки.

$$II. \sum P_i = 0; \quad -Q + R_B = 0;$$

$$R_B = Q = 1,5 \text{ кн}.$$

Знак плюс показывает, что реакция R_B направлена так, как принято на расчетной схеме, т. е. вверх.

Пример 12. Балка моста состоит из двух частей AD и DC , соединенных между собой шарниром D . Собственный вес погонного метра моста $q_1 = 10 \text{ кн/м}$, вес погонного метра поезда $q_2 = 20 \text{ кн/м}$. Определить реакции опор балки при условии, что поезд находится на участке AE (рис. 66а).

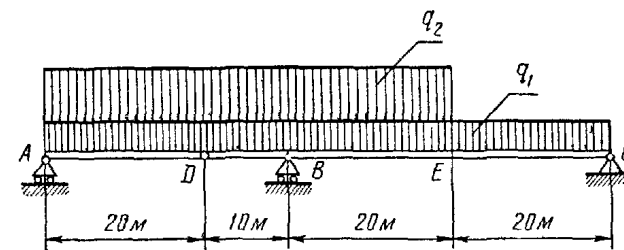


Рис. 66а.

Решение. Рассматриваем равновесие сил, приложенных к балке AC : равномерно распределенной нагрузки от собственного веса балки, веса поезда и реакций опор R_A , R_B и R_C . Так как реакции опор A и B и равномерно распределенная нагрузка вертикальны, то уравновешивающая их реакция неподвижной шарнирной опоры C должна быть тоже вертикальна.

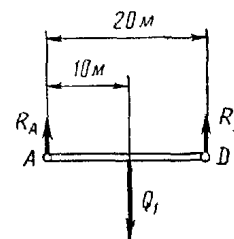


Рис. 66б.

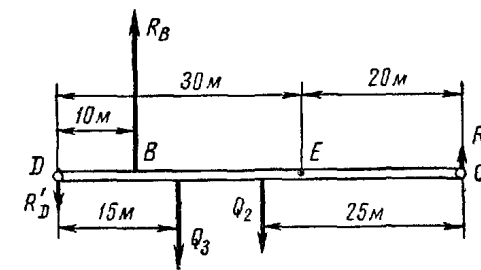


Рис. 66в.

Таким образом, имеются три неизвестные вертикальные реакции опор, R_A , R_B и R_C . Определить их модули из двух уравнений равновесия параллельных сил, приложенных к балке AC , невозможно. Так как балка AC представляет собой систему двух тел, соединенных шарниром D , то расчленим ее на части AD и DC и рассматриваем равновесие сил, приложенных к каждой части (рис. 66 б, в).

Заменяем равномерно распределенную нагрузку сосредоточенными силами. Нагрузка на участке AD

$$Q_1 = (q_1 + q_2) AD = 30 \cdot 20 = 600 \text{ кН.}$$

Нагрузка на участке DC от собственного веса

$$Q_2 = q_1 \cdot DC = 10 \cdot 50 = 500 \text{ кН.}$$

Нагрузка на участке DE от веса поезда

$$Q_3 = q_2 \cdot DE = 20 \cdot 30 = 600 \text{ кН.}$$

Каждая из сил Q_1, Q_2, Q_3 приложена в середине соответствующего участка. На балку AD , кроме заданной силы Q_1 , действуют реакция опоры R_A и реакция R_D правой балки в точке D . Очевидно, что обе реакции направлены вверх. На балку DC , кроме заданных сил Q_2 и Q_3 , действуют реакции R_B и R_C и реакция R'_D левой балки в точке D , которая равна по модулю силе R_D и направлена противоположно ей, т. е. вниз. Реакции R_B и R_C условно направляем вверх.

К балке AD приложены две неизвестные силы R_A и R_D , к балке DC — три неизвестные силы R'_D, R_B, R_C . Поэтому составим сначала два уравнения равновесия параллельных сил, действующих на балку AD :

$$\sum M_{iA} = 0; -Q_1 \cdot 10 + R_D \cdot 20 = 0;$$

$$R_D = \frac{Q_1 \cdot 10}{20} = \frac{Q_1}{2} = \frac{600}{2} = 300 \text{ кН.}$$

$$\sum P_i = 0; R_A - Q_1 + R_D = 0;$$

$$R_A = Q_1 - R_D = 600 - 300 = 300 \text{ кН.}$$

Сила R'_D , приложенная к балке DC в точке D , равна по модулю силе R_D , т. е. $R'_D = R_D = 300 \text{ кН}$.

Таким образом, из сил, приложенных к балке DC , остались неизвестными только реакции опор R_B и R_C . Определяем их модули из двух уравнений равновесия сил, приложенных к балке DC . Центр моментов берем в точке приложения одной из неизвестных сил, например B :

$$\sum M_{iB} = 0; R'_D \cdot 10 - Q_3 \cdot 5 - Q_2 \cdot 15 + R_C \cdot 40 = 0;$$

$$R_C = \frac{-R'_D \cdot 10 + Q_3 \cdot 5 + Q_2 \cdot 15}{40} = \frac{-300 \cdot 10 + 600 \cdot 5 + 500 \cdot 15}{40} = 187,5 \text{ кН.}$$

$$\sum P_i = 0; -R'_D + R_B - Q_3 - Q_2 + R_C = 0;$$

$$R_B = R'_D + Q_3 + Q_2 - R_C = 300 + 600 + 500 - 187,5 = 1212,5 \text{ кН.}$$

Так как величины всех сил получены со знаком плюс, то их направления указанные на схеме (рис. 66б, в), совпадают с действительными.

§ 25. Примеры на равновесие плоской системы сил

Пример 13. Определить реакции опор консольной балки AB , весом $G=15 \text{ кН}$, находящейся под действием сил $P_1=40 \text{ кН}$, $P_2=30 \text{ кН}$, и пары с моментом $|M|=30 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Известны размеры: $AB=9 \text{ м}$, $AC=1,5 \text{ м}$, $CD=6 \text{ м}$, $CE=2 \text{ м}$, (рис. 67а).

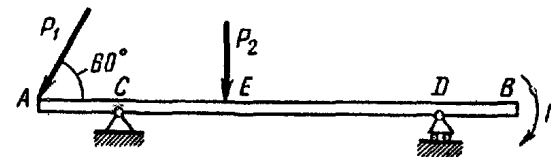


Рис. 67а.

Решение. Решаем задачу согласно общему плану решения задач статики, рассматривая равновесие плоской системы сил, действующей на балку AB .

1. Показываем действующие на балку заданные силы: P_1, P_2 , пару сил M , а также вес балки G , который прикладываем в середине O длины AB , считая балку однородной (рис. 67б).

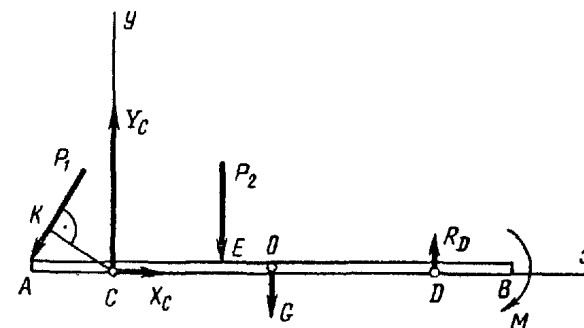


Рис. 67б.

2. Мысленно отбрасываем связи: неподвижную шарнирную опору C и шарнирную опору на катках D , заменяя их действие соответствующими реакциями. Реакция опоры R_D направлена перпендикулярно к опорной плоскости, т. е. вертикально. Линия действия реакции опоры C не известна. Если на рассматриваемое тело действуют силы, произвольно расположенные на плоскости, то необходимо провести оси координат и разложить реакцию неизвестного направления на две составляющие, направленные вдоль осей координат. Оси могут иметь любое направление, выбор их направления обусловлен характером задачи. В рассматриваемой задаче направляем ось x вдоль горизонтальной оси балки вправо, а ось y вертикально вверх. Направления

составляющих X_C и Y_C реакции опоры C принимаем совпадающими с направлениями осей координат. В случае, когда принятое направление не совпадает с действительным, ответ, полученный для соответствующей силы при решении задачи, имеет знак минус. Когда будут найдены величины X_C и Y_C , модуль и направление реакции опоры C определим согласно § 9.

3. Для плоской системы сил P_1 , P_2 , G , X_C , Y_C , R_D и пары сил с моментом M , действующих на балку, составляем три уравнения равновесия:

$$\sum M_{iO} = 0, \quad \sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0.$$

Из трех уравнений можно найти три неизвестные величины X_C , Y_C , R_D . Необходимо помнить, что до составления уравнений равновесия сил на расчетной схеме должны быть показаны все силы, действующие на рассматриваемое тело, как известные, так и неизвестные, как это выполнено на рис. 67б. Эта расчетная схема не изменяется ни в процессе решения задачи, ни после него, так как уравнения равновесия сил составляются именно по этой схеме и только ей соответствуют. При составлении первого уравнения за центр моментов принимается, как правило, точка, относительно которой моменты наибольшего числа неизвестных сил равны нулю, т. е. в данной задаче точка C , в которой приложены две неизвестные силы X_C и Y_C .

Составим уравнения равновесия:

$$\sum M_{iC} = 0; \quad P_1 \cdot CK - P_2 \cdot CE - G \cdot CO + R_D \cdot CD - |M| = 0;$$

$$\sum X_i = 0; \quad -P_1 \cos 60^\circ + X_C = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -P_1 \cos 30^\circ + Y_C - P_2 - G + R_D = 0.$$

Здесь CK — перпендикуляр, опущенный из центра моментов C на линию действия силы P_1 , длина которого равна плечу силы P_1 относительно C

$$CK = AC \sin 60^\circ = 1,5 \cdot 0,866 = 1,3 \text{ м.}$$

4. Из трех уравнений равновесия сил определяем искомые реакции. Так как неизвестные силы X_C и Y_C не имеют момента относительно точки C , то из первого уравнения определяется R_D :

$$R_D = \frac{-P_1 \cdot CK + P_2 \cdot CE + G \cdot CO + |M|}{6} = \frac{-40 \cdot 1,3 + 30 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 30}{6} = \frac{83}{6} = 13,8 \text{ кН.}$$

Из второго уравнения находим

$$X_C = P \cos 60^\circ = 40 \cdot 0,5 = 20 \text{ кН.}$$

Из третьего уравнения получаем

$$Y_C = P_1 \cos 30^\circ + P_2 + G - R_D = 40 \cdot 0,866 + 30 + 15 - 13,8 = 65,8 \text{ кН.}$$

Все три ответа имеют знак плюс, следовательно, принятые направления сил X_C , Y_C и R_D совпадают с действительными.

Найдем модуль и направление реакции опоры C (рис. 67в):

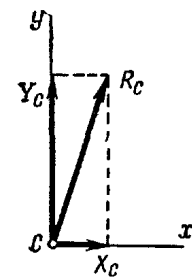


Рис. 67в.

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = \sqrt{20^2 + 65,8^2} = 68,8 \text{ кН;}$$

$$\cos(R_C, i) = \frac{X_C}{R_C} = \frac{20}{68,8} = 0,291;$$

$$\cos(R_C, j) = \frac{Y_C}{R_C} = \frac{65,8}{68,8} = 0,956;$$

$$\angle(R_C, i) \approx 73^\circ, \quad \angle(R_C, j) \approx 17^\circ.$$

В дальнейшем условимся заканчивать решение задачи определением модулей и направлений составляющих X и Y реакции опоры.

Примечание. Если в рассматриваемую систему сил входит пара сил, то при составлении уравнений проекций следует помнить, что сумма проекций сил, составляющих пару, на любую ось равна нулю (рис. 68).

Пример 14. Однородный брусок AB весом $G = 16 \text{ кН}$ опирается концом A на гладкий горизонтальный пол и промежуточной точ-

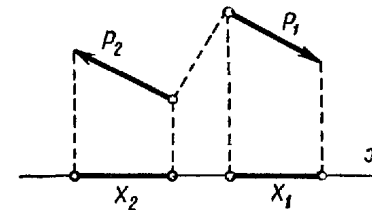


Рис. 68.

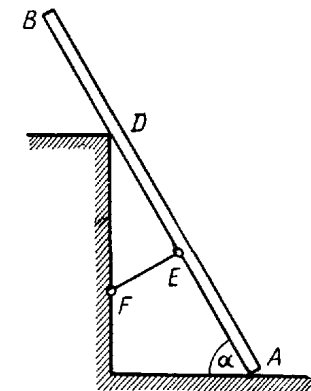


Рис. 69а.

кой D — на ребро. Брусок удерживается под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонтали веревкой EF , перпендикулярной к оси бруска, причем $BD = DE = EA$.

Определить натяжение веревки EF и реакции опор A и D (рис. 69а).

Решение. Рассматриваем равновесие сил, приложенных к бруску AB . Прикладываем к бруску в середине его длины O заданную силу — вес бруска G (рис. 69б). Освобождая брусок от трех связей, прикладываем к бруску их реакции: реакцию пола R_A , реакцию S нити EF и реакцию ребра R_D . Направления всех трех

реакций известны, а их модули можно определить из трех уравнений равновесия плоской системы сил, действующей на брусок.

В двух первых примерах сумма моментов сил составлена относительно точки приложения двух неизвестных сил. Из каждого уравнения равновесия определена одна из неизвестных сил и не требуется совместного решения системы уравнений с несколькими неизвестными. В рассматриваемом примере такой точки нет, так как три неизвестные реакции приложены к бруску в различных точках. Найдем точку пересечения линий действия двух неизвестных сил, например S и R_A и примем ее за центр моментов. Тогда силы S и R_A не будут иметь моментов относительно этой точки K . Плечи силы R_D и силы G найдем, опустив перпендикуляры из точки K на линии действия этих сил. Обозначим длину бруска l , тогда:

$$BD = DE = EA = \frac{l}{3}; \quad AO = \frac{l}{2}.$$

Оси координат проведем, как указано на рис. 69б.

Уравнения равновесия сил имеют вид:

$$1. \sum M_{iK} = 0; \quad G \frac{l}{2} \cos 60^\circ - R_D \frac{l}{3} = 0.$$

Сокращая обе части уравнения на l , определяем R_D :

$$R_D = 3G \frac{1}{2} \cos 60^\circ = 3 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 12 \text{ н.}$$

$$2. \sum X_i = 0; \quad -R_A \cos 30^\circ + G \cos 30^\circ = 0.$$

Отсюда

$$R_A = G = 16 \text{ н.}$$

$$3. \sum Y_i = 0; \quad R_A \cos 60^\circ - S - G \cos 60^\circ + R_D = 0.$$

Так как $R_A = G$, то $-S + R_D = 0$ и $S = R_D = 12 \text{ н.}$

Проанализировав результаты, увидим, что силы G и R_A составляют пару сил, а силы R_D и S — другую пару. Нетрудно убедиться в том, что моменты этих пар равны по величине и противоположны по знаку.

Примечание. Иногда трудно определить моменты сил относительно точки пересечения линий действия двух неизвестных сил. Тогда за центр моментов принимают точку приложения одной неизвестной силы и уравнение моментов, содержащее две неизвестные величины, решается совместно с уравнениями проекций.

Пример 15. Груз весом $G = 280 \text{ н}$ подвешен в точке E к горизонтальной балке AB весом $G_1 = 160 \text{ н}$. Балка AB укрепена при помощи шарнира A и свободно опирается концом B на балку CD весом $G_2 = 120 \text{ н}$. Балка CD имеет шарнир C и концом D опирается

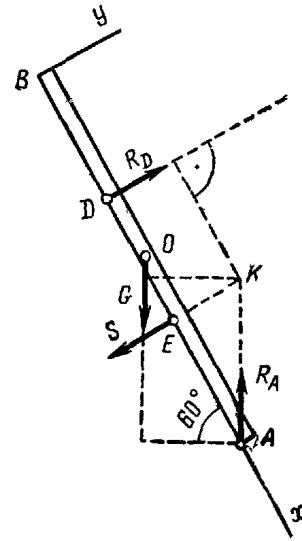


Рис. 69б.

на гладкую вертикальную стену; балки однородные, поверхность их гладкая. Расстояния $AE = \frac{1}{4} AB$, $CB = \frac{1}{3} CD$. Определить реакции опор A , C и D (рис. 70а).

Решение. Неизвестные по направлению реакции шарниров A и C разложим на составляющие X_A, Y_A, X_C, Y_C . Реакция стены R_D направлена перпендикулярно к стене. Пять неизвестных величин X_A, Y_A, X_C, Y_C и R_D нельзя определить из трех уравнений равновесия сил, приложенных к системе двух балок. Произведем расчленение балок, т. е. рассмотрим отдельно равновесие сил, приложенных к каждой из балок.

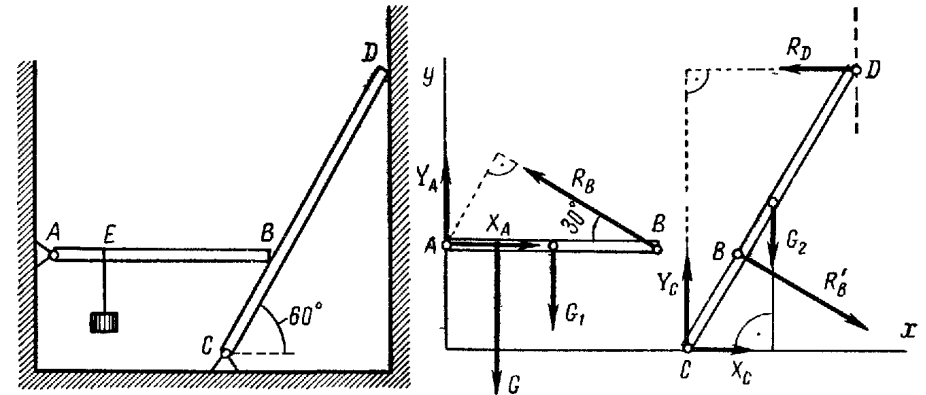


Рис. 70а.

Рис. 70б.

На балку AB действуют заданные силы G и G_1 , составляющие X_A, Y_A реакции шарнира A и реакция R_B балки CD , направленная по нормали к ее поверхности (рис. 70б).

На балку CD действуют вес балки G_2 , приложенный в середине CD , реакция R'_B балки AB , равная по модулю реакции R_B и направленная противоположно ей, составляющие X_C, Y_C реакции шарнира C и реакция стены R_D (рис. 70б). В число внешних сил, приложенных к каждой балке, входят силы $R_B = -R'_B$, выражающие взаимодействие балок. Эти силы для системы балок являются внутренними.

Составим по три уравнения равновесия сил, действующих на каждую балку, и определим шесть неизвестных величин $X_A, Y_A, X_C, Y_C, R_D, R_B$.

Для сил, приложенных к балке AB , получим:

$$1. \sum M_{iA} = 0; \quad -G \frac{1}{4} AB - G_1 \frac{1}{2} AB + R_B AB \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum X_i = 0; \quad X_A - R_B \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A - G - G_1 + R_B \cos 60^\circ = 0.$$

Для сил, приложенных к балке CD , получим:

$$\text{II. } \sum M_{iC} = 0; \quad -R'_B \frac{1}{3} CD - G_2 \frac{1}{2} CD \cos 60^\circ + R_D CD \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum X_i = 0; \quad X_C + R'_B \cos 30^\circ - R_D = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_C - R'_B \cos 60^\circ - G_2 = 0.$$

Из системы I уравнений найдем:

$$R_B = \frac{\frac{1}{4} G + \frac{1}{2} G_1}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 280 + \frac{1}{2} \cdot 160}{0,5} = 300 \text{ н};$$

$$X_A = R_B \cos 30^\circ = 300 \cdot 0,866 = 260 \text{ н};$$

$$Y_A = G + G_1 - R_B \cos 60^\circ = 280 + 160 - 300 \cdot 0,5 = 290 \text{ н}.$$

Учитывая, что $R'_B = -R_B$, т. е. $R'_B = R_B = 300 \text{ н}$, из системы II уравнений найдем:

$$R_D = \frac{\frac{1}{3} R'_B + \frac{1}{2} G_2 \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 300 + \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 0,5}{0,866} = 150 \text{ н};$$

$$X_C = -R'_B \cos 30^\circ + R_D = -300 \cdot 0,866 + 150 = -110 \text{ н};$$

$$Y_C = R'_B \cos 60^\circ + G_2 = 300 \cdot 0,5 + 120 = 270 \text{ н}.$$

Знаки ответов показывают, что сила X_C направлена влево, а действительные направления остальных сил совпадают с указанными на схеме.

Пример 16. Мост состоит из двух частей, связанных между собой шарниром C и прикрепленных к береговым устоям шарнирами A и B .

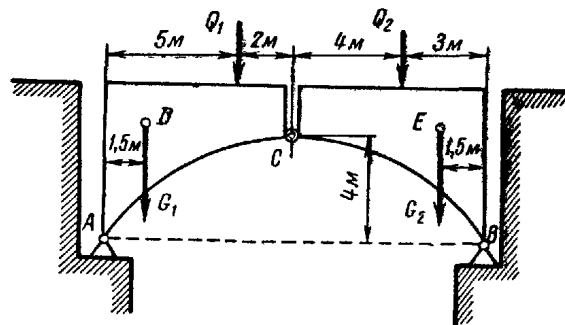


Рис. 71а.

Вес каждой части моста $G_1 = G_2 = 130 \text{ кн}$, их центры тяжести D и E . На мосту находятся два груза $Q_1 = 10 \text{ кн}$ и $Q_2 = 40 \text{ кн}$. Все размеры указаны на рис. 71а. Определить давление в шарнире C и реакции шарниров A и B .

Решение. Так как реакции шарниров A и B не известны по направлению, то они должны быть разложены на составляющие X_A, Y_A, X_B, Y_B . Эти четыре неизвестные силы нельзя определить из трех уравнений равновесия плоской системы сил, приложенной к мосту, рассматриваемому как одно тело (рис. 71б). Так как мост представляет собой совокупность двух тел, соединенных шарниром C , то можно произвести его расчленение и рассмотреть равновесие сил,

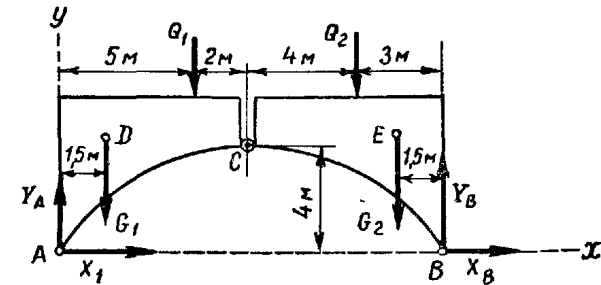


Рис. 71б.

приложенных к каждой части моста. В число внешних сил, действующих на каждую часть моста, войдут реакции отброшенной части $X_C = -X'_C$ и $Y_C = -Y'_C$, приложенные в точке C , которые для всего моста являются внутренними силами (рис. 71в).

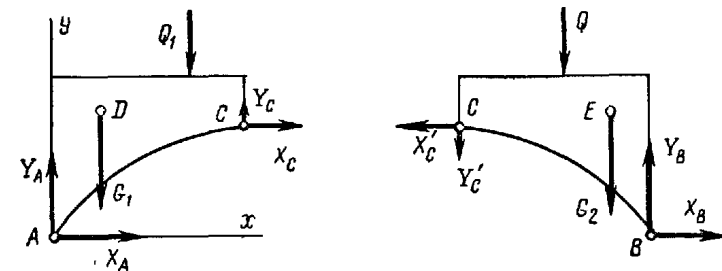


Рис. 71в.

Для плоских систем сил, приложенных к каждой части моста, можно составить по три уравнения равновесия и из шести уравнений определить шесть неизвестных величин: $X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C$. Однако в этой задаче система шести уравнений получается проще, если составить сначала три уравнения равновесия сил, приложенных ко всему мосту, рассматриваемому как одно тело, а потом — три уравнения равновесия сил, приложенных к одной части.

Рассматриваем равновесие сил, приложенных к мосту, как к одному телу. Прикладываем к мосту заданные силы G_1, G_2, Q_1 и Q_2 (рис. 71б). Заменяем действие связей — шарниров A и B — соответствующими

реакциями X_A, Y_A, X_B, Y_B . Составляем три уравнения равновесия плоской системы сил, приложенной к мосту:

$$\sum M_{i_A} = 0; \quad -G_1 \cdot 1,5 - Q_1 \cdot 5 - Q_2 \cdot 11 - G_2 \cdot 12,5 + Y_B \cdot 14 = 0;$$

$$Y_B = \frac{G_1 \cdot 1,5 + Q_1 \cdot 5 + Q_2 \cdot 11 + G_2 \cdot 12,5}{14} =$$

$$= \frac{130 \cdot 1,5 + 10 \cdot 5 + 40 \cdot 11 + 130 \cdot 12,5}{14} = \frac{2310}{14} = 165 \text{ кн.}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A - G_1 - Q_1 - Q_2 - G_2 + Y_B = 0;$$

$$Y_A = G_1 + Q_1 + Q_2 + G_2 - Y_B = 145 \text{ кн.}$$

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + X_B = 0.$$

Третье уравнение содержит две неизвестные и на этом этапе решения не используется.

Рассматриваем равновесие сил, приложенных к левой части моста. Прикладываем к левой части моста заданные силы G_1 и Q_1 и реакции связей X_A, Y_A, X_C и Y_C , где X_C, Y_C — реакции отброшенной правой части моста. К правой части будут приложены силы $G_2, Q_2, X_B, Y_B, X'_C, Y'_C$, где X'_C, Y'_C — реакции левой части моста (рис. 71 в).

Составляем три уравнения равновесия сил, приложенных к левой части моста:

$$\sum M_{i_C} = 0; \quad Q_1 \cdot 2 + G_1 \cdot 5,5 + X_A \cdot 4 - Y_A \cdot 7 = 0;$$

$$X_A = \frac{Y_A \cdot 7 - Q_1 \cdot 2 - G_1 \cdot 5,5}{4} = \frac{145 \cdot 7 - 10 \cdot 2 - 130 \cdot 5,5}{4} = \frac{280}{4} = 70 \text{ кн.}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A - G_1 - Q_1 + Y_C = 0;$$

$$Y_C = G_1 + Q_1 - Y_A = 130 + 10 - 145 = -5 \text{ кн.}$$

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + X_C = 0;$$

$$X_C = -X_A = -70 \text{ кн.}$$

Знаки минус при величинах X_C и Y_C показывают, что истинные направления сил X_C и Y_C , приложенных в точке C к левой части моста, противоположны показанным на схеме. Следовательно, истинные направления сил X'_C и Y'_C , приложенных к правой части, тоже противоположны направлениям, показанным на схеме.

Из третьего уравнения первой системы находим

$$X_B = -X_A = -70 \text{ кн.}$$

Таким образом, горизонтальная составляющая X_B реакции шарнира B направлена не вправо, а влево.

§ 26. Определение усилий в стержнях ферм по способу Риттера

Применим метод сечений к определению усилий в стержнях плоских ферм. Рассмотрим ферму, изображенную на рис. 72 а. На ферму действуют вертикальные внешние силы: заданная сила $P = 60 \text{ кн}$ и реакции опор $R_A = 40 \text{ кн}$ и $R_B = 20 \text{ кн}$.

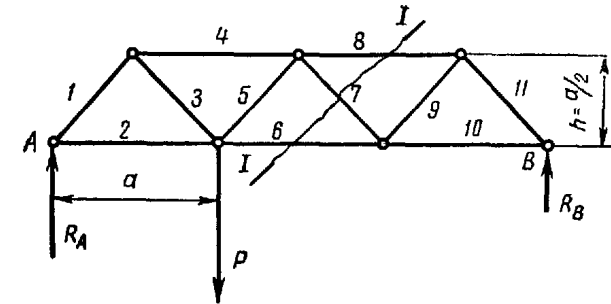


Рис. 72а.

При определении усилий все стержни фермы условимся считать растянутыми, знак минус в ответе будет означать то, что стержень сжат. Пусть требуется определить усилие в стержне 6 фермы. Для этого проводим сечение $I-I$, рассекая не более трех стержней, в том числе стержень 6, усилие в котором определяется. Мысленно отбрасываем левую часть фермы, заменяя ее действие на оставшуюся правую часть усилиями S_6, S_7 и S_8 , приложенными в соответствующих сечениях стержней и направленными в сторону отброшенной части (рис. 72б).

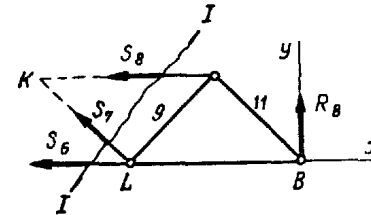


Рис. 72б.

Чтобы определить усилие S_6 независимо от усилий S_7 и S_8 , составляем уравнение моментов сил, действующих на правую часть фермы, относительно точки K , в которой пересекаются линии действия сил S_7 и S_8 . Эту точку называют точкой Риттера:

$$\sum M_{i_K} = 0; \quad -S_6 h + R_B \cdot 1,5a = 0.$$

Так как $h = 0,5a$, то

$$S_6 = R_B \frac{1,5a}{0,5a} = 60 \text{ кн.}$$

Воспользуемся тем же сечением $I-I$ для определения усилия S_7 независимо от усилий S_6 и S_8 . Спроектируем все силы, действующие на правую часть фермы, на вертикальную ось y , так

как проекции сил S_6 и S_8 на эту ось равны нулю:

$$\sum Y_i = 0; \quad R_B + S_7 \cos 45^\circ = 0;$$

$$S_7 = -\frac{R_B}{\cos 45^\circ} = -28,3 \text{ кн.}$$

Для определения усилия S_8 составим уравнение моментов этих же сил относительно точки Риттера L , в которой пересекаются линии действия сил S_6 и S_7 :

$$\sum M_{iL} = 0; \quad S_8 h + R_B a = 0;$$

$$S_8 = -R_B \frac{a}{h} = -40 \text{ кн.}$$

Знаки полученных ответов показывают, что стержень 6 растянут, а стержни 7 и 8 сжаты.

Изложенный способ определения усилий в стержнях фермы предложен Риттером и носит название способа Риттера.

Для определения усилий в стержнях рассмотренной фермы по способу Риттера использована II система уравнений равновесия плоской системы сил.

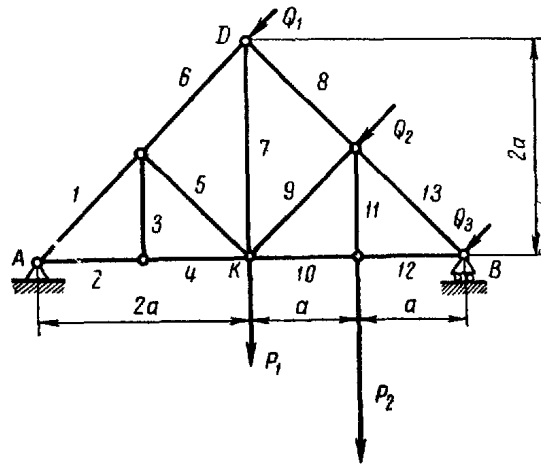


Рис. 73а.

Пример 17. Определить усилия в стержнях 8, 9 и 10 фермы, изображенной на рис. 73а, если $P_1 = 40 \text{ кн}$, $P_2 = 80 \text{ кн}$, $Q_1 = Q_3 = 10 \text{ кн}$, $Q_2 = 20 \text{ кн}$, $AB = 4a$; $KD = 2a$.

Решение. Прежде всего определим реакции опор фермы X_A , Y_A , R_B (рис. 73б). Для этого составим три уравнения равновесия

сил, действующих на ферму:

$$\sum M_{iA} = 0; \quad -P_1 2a - P_2 3a + R_B 4a - Q_2 a \sqrt{2} - Q_3 2a \sqrt{2} = 0;$$

$$R_B = \frac{P_1 2 + P_2 3 + Q_2 \sqrt{2} + Q_3 2 \sqrt{2}}{4} = 94,1 \text{ кн.}$$

$$\sum X_i = 0; \quad X_A - Q_1 \cos 45^\circ - Q_2 \cos 45^\circ - Q_3 \cos 45^\circ = 0;$$

$$X_A = (Q_1 + Q_2 + Q_3) \cos 45^\circ = 40 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 28,3 \text{ кн.}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A - P_1 - P_2 + R_B - Q_1 \cos 45^\circ - Q_2 \cos 45^\circ - Q_3 \cos 45^\circ = 0;$$

$$Y_A = P_1 + P_2 + (Q_1 + Q_2 + Q_3) \cos 45^\circ - R_B = 54,2 \text{ кн.}$$

Для определения усилий в стержнях 8, 9 и 10 проведем сечение $I-I$. Мысленно отбросим левую часть фермы, заменив ее действие на оставшуюся часть реакциями разрезанных стержней S_8 , S_9 и S_{10} , направив эти силы в сторону отброшенной части (рис. 73в).

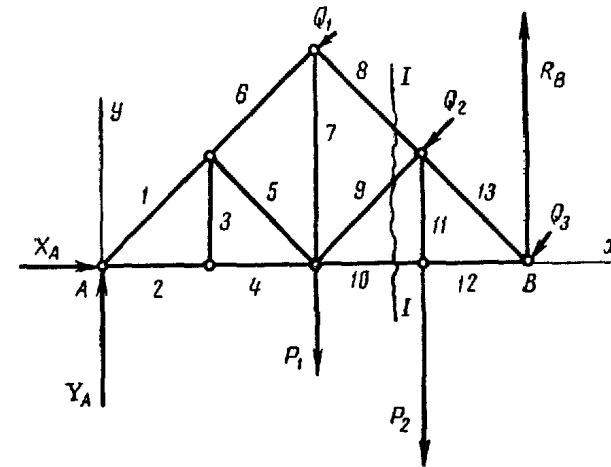


Рис. 73б.

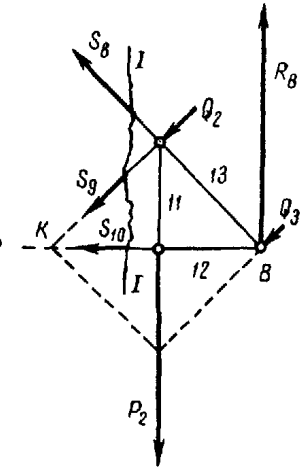


Рис. 73в.

Чтобы определить каждое усилие независимо от двух других, применим III систему уравнений равновесия (§ 21).

Составим уравнения моментов сил, действующих на правую часть фермы, относительно точек Риттера K , B и L , в которых пересекаются по две линии действия усилий:

$$\sum M_{iK} = 0; \quad S_8 a \sqrt{2} - P_2 a + R_B 2a - Q_3 a \sqrt{2} = 0;$$

$$S_8 = \frac{P_2}{\sqrt{2}} - R_B \frac{2}{\sqrt{2}} + Q_3 = -66,5 \text{ кн.}$$

$$\sum M_{iB} = 0; \quad S_9 a \sqrt{2} + Q_2 a \sqrt{2} + P_2 a = 0;$$

$$S_9 = -\left(Q_2 + \frac{P_2}{\sqrt{2}}\right) = -76,6 \text{ кн.}$$

$$\sum M_{iL} = 0; \quad -S_{10} a + R_B a - Q_3 a \sqrt{2} = 0;$$

$$S_{10} = R_B - Q_3 \sqrt{2} = 80 \text{ кн.}$$

§ 27. Условие равновесия сил, приложенных к рычагу. Устойчивость при опрокидывании. Коэффициент устойчивости

Рычагом называется твердое тело, имеющее неподвижную ось вращения и находящееся под действием сил, лежащих в плоскости, перпендикулярной к этой оси.

Положим, что к рычагу в точках A_1, A_2, \dots, A_n приложены задаваемые силы P_1, P_2, \dots, P_n , лежащие в плоскости чертежа, а ось рычага пересекает эту плоскость в точке O , которую назовем опорной точкой (рис. 74).

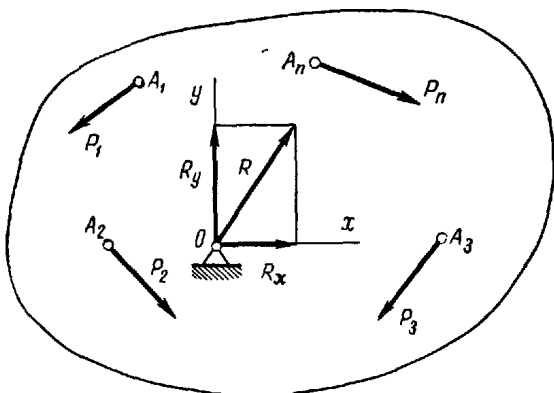


Рис. 74

Реакция R оси рычага, уравнивающая задаваемые силы, лежит в их плоскости, но направление ее не известно.

Разложим реакцию оси на две составляющие R_x и R_y и выведем уравнения равновесия сил, действующих на рычаг. На основании уравнений равновесия плоской системы сил имеем:

$$R_x + \sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad (27.1)$$

$$R_y + \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad (27.2)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iO} = 0. \quad (27.3)$$

Здесь $\sum_{i=1}^n X_i$ и $\sum_{i=1}^n Y_i$ — суммы проекций задаваемых сил, приложенных к рычагу, на оси x и y ; R_x и R_y — проекции реакции оси рычага на эти оси; $\sum_{i=1}^n M_{iO}$ — сумма моментов задаваемых сил относительно опорной точки.

Третье уравнение, не содержащее реакции оси рычага, и выражает условие, которому удовлетворяют задаваемые силы, уравниваемые реакцией оси рычага.

Это условие формулируется так: при равновесии сил, приложенных к рычагу, алгебраическая сумма моментов всех задаваемых сил, действующих на рычаг, относительно опорной точки равна нулю

$$\sum_{i=1}^n M_{iO} = 0.$$

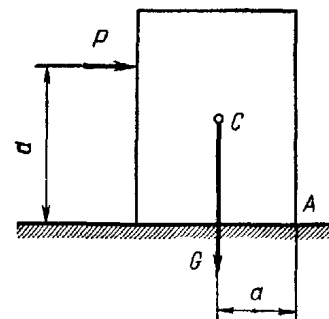


Рис. 75

Из уравнений (27.1) и (27.2) определяется реакция оси рычага.

Из условия равновесия сил действующих на рычаг, получим условие устойчивости тел при опрокидывании. Положим, что к прямоугольному параллелепипеду (рис. 75) весом G на высоте d приложена горизонтальная сила P ,

которая может не только сдвинуть тело, но и опрокинуть его вращением вокруг ребра A . Считая, что сила P недостаточно велика, чтобы сдвинуть тело, рассмотрим ее опрокидывающее действие (см. § 29). Обозначим a расстояние от точки A , изображающей на чертеже ось вращения рычага, до линии действия силы G , которая препятствует опрокидыванию.

Составим сумму моментов задаваемых сил P и G относительно опорной точки A :

$$\sum M_{iA} = 0; \quad Ga - Pd = 0, \text{ откуда } Ga = Pd.$$

Назовем абсолютные величины моментов сил G и P относительно точки A *удерживающим и опрокидывающим моментами*:

$$Ga = M_{уд}; \quad Pd = M_{опр}.$$

Тогда на границе устойчивости получим:

$$M_{уд} = M_{опр}.$$

При устойчивом состоянии тела:

$$M_{уд} > M_{опр}.$$

Устойчивость при опрокидывании в технике принято определять отношением величины удерживающего момента к величине опрокидывающего момента:

$$k = \frac{M_{уд}}{M_{опр}}.$$

Это отношение называют *коэффициентом устойчивости*.

Очевидно, что в случае предельной устойчивости коэффициент устойчивости равен единице, а в случае устойчивого состояния $k > 1$.

Определить, опрокинется ли тело под действием силы P или будет находиться в устойчивом состоянии, можно и графическим путем. Для этого продолжим линии действия сил G и P до их пересечения в точке K , перенесем силы в эту точку и найдем их равнодействующую R (рис. 76).

Продолжая линию действия равнодействующей силы, найдем точку ее пересечения с опорной плоскостью.

В рассмотренном примере возможны три случая:

1. Если эта точка лежит слева от ребра A , то состояние тела устойчиво.
2. Если линия действия равнодействующей пересекает ребро A , то состояние тела предельно устойчиво.
3. Если эта точка лежит справа от ребра A , то тело опрокинется.

§ 28. Примеры на применение условия равновесия сил, приложенных к рычагу

Пример 18. Определить вес противовеса G_1 , обеспечивающий коэффициент устойчивости нагруженного крана при опрокидывании.

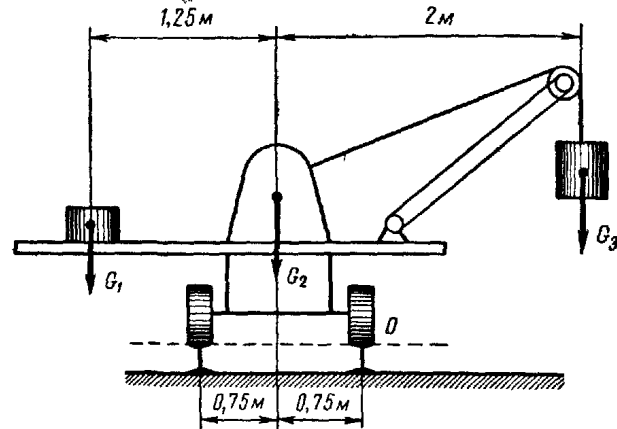


Рис. 77.

равный 1,5, если вес крана $G_2 = 50$ кн, вес груза $G_3 = 40$ кн. Размеры указаны на рис. 77.

Решение. Предполагаемое опрокидывание крана под действием веса груза G_3 является вращением вокруг оси O , совпадающей с пра-

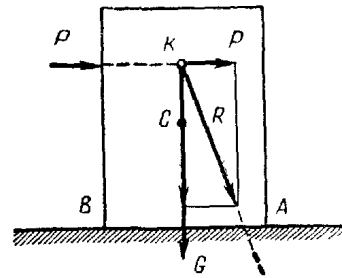


Рис. 76.

вым рельсом. Силами, препятствующими опрокидыванию, являются вес крана G_2 и вес противовеса G_1 . Определим опрокидывающий момент как абсолютную величину момента силы G_3 относительно точки O :

$$M_{\text{опр}} = G_3 \cdot 1,25 = 40 \cdot 1,25 = 50 \text{ кн} \cdot \text{м}.$$

Определим удерживающий момент как сумму абсолютных величин моментов сил G_1 и G_2 относительно точки O :

$$M_{\text{уд}} = G_1 \cdot 2 + G_2 \cdot 0,75 = G_1 \cdot 2 + 50 \cdot 0,75 = (2G_1 + 37,5) \text{ кн} \cdot \text{м}.$$

Воспользуемся коэффициентом устойчивости тела при опрокидывании

$$k = \frac{M_{\text{уд}}}{M_{\text{опр}}}.$$

Отсюда

$$M_{\text{уд}} = k M_{\text{опр}},$$

$$2G_1 + 37,5 = 1,5 \cdot 50;$$

$$G_1 = 18,75 \text{ кн}.$$

Пример 19. Определить минимальную ширину a бетонной плиты прямоугольного сечения по условию устойчивости при опроки-

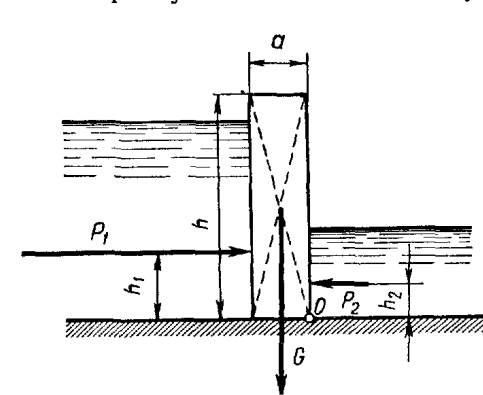


Рис. 78.

дыванию, если высота плотины $h = 3,5$ м, вес 1 м^3 бетона $\gamma = 22,5 \text{ кн/м}^3$, горизонтальное давление воды на 1 м длины плотины со стороны верхнего бьефа $P_1 = 45$ кн, со стороны нижнего бьефа $P_2 = 11,25$ кн. Расстояния от точек приложения сил P_1 и P_2 до основания: $h_1 = 1$ м, $h_2 = 0,5$ м (рис. 78).

Решение. Рассмотрим бетонный массив в форме прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны h , a и 1 м в направлении длины плотины.

Вследствие того, что $P_1 > P_2$ и $h_1 > h_2$, возможным опрокидыванием плотины будет ее вращение вокруг ребра O .

Силой, вызывающей опрокидывание, является сила P_1 , направленная относительно точки O в сторону движения часовой стрелки.

Силами, препятствующими опрокидыванию, являются G и P_2 , направленные относительно точки O в сторону, обратную движению часовой стрелки.

Определим опрокидывающий момент:

$$M_{\text{опр}} = P_1 h_1 = 45 \cdot 1 = 45 \text{ кн} \cdot \text{м}.$$

Определим удерживающий момент:

$$M_{уд} = G \frac{a}{2} + P_2 h_2.$$

Вес массива, т. е. одного метра длины плотины определяется:

$$G = \gamma h a \cdot 1,$$

где $h a \cdot 1$ — объем массива.

Тогда

$$\begin{aligned} M_{уд} &= \gamma h a \cdot 1 \frac{a}{2} + P_2 h_2 = \\ &= \frac{22,5 \cdot 3,5 a^2}{2} + 11,25 \cdot 0,5 = (39,4 a^2 + 5,6) \text{ кн} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Минимальной ширине плотины соответствует коэффициент устойчивости $k = 1$.

Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} k &= \frac{M_{уд}}{M_{опр}} = 1; \quad M_{уд} = M_{опр}; \\ 39,4 a^2 + 5,6 &= 45; \quad a = 1 \text{ м}. \end{aligned}$$

§ 29. Сцепление и трение скольжения

Исследованием явления трения впервые занимался Леонардо да Винчи. В конце XVII в. французский физик Амонтон (1663—1705) обнаружил независимость силы трения от величины поверхности соприкосновения тел. Законы трения были сформулированы французским физиком Кулоном (1736—1806).

Если к твердому телу, покоящемуся на шероховатой горизонтальной плоскости (рис. 79а), приложить горизонтальную силу S , то действие этой силы вызовет появление силы сцепления $F_{сц} = -S$, представляющей собой силу противодействия плоскости смещению тела. Благодаря сцеплению, тело остается в покое при изменении модуля силы S от нуля до некоторого значения S_{\max} . Это значит, что модуль силы сцепления тоже изменяется от $F_{сц} = 0$ до $F_{сц} = F_{сц}^{\max}$ в момент начала движения.

Модуль максимальной силы сцепления, как показывает опыт, пропорционален нормальному давлению N тела на плоскость. В рассматриваемом случае $N = G$.

$$F_{сц}^{\max} = f_{сц} N. \quad (29.1)$$

Коэффициент пропорциональности $f_{сц} = \frac{F_{сц}^{\max}}{N}$ является отвлеченным числом и называется *коэффициентом сцепления*.

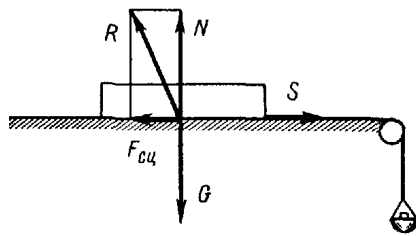


Рис. 79а.

Коэффициент сцепления зависит от материала и физического состояния соприкасающихся тел и определяется экспериментально. Его величина для материалов, используемых в технике, обычно меньше единицы. Так как максимальное значение силы сцепления равно $f_{сц} N$, то модуль силы сцепления всегда удовлетворяет условию

$$F_{сц} \leq f_{сц} N. \quad (29.2)$$

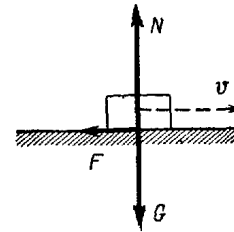


Рис. 79б.

Направление силы сцепления противоположно направлению того движения, которое возникло бы под действием приложенных к телу сил при отсутствии сцепления.

При скольжении тела по шероховатой поверхности к нему приложена сила трения скольжения. Направление этой силы, противодействующей скольжению, противоположно направлению скорости тела (рис. 79, б).

Модуль силы трения скольжения пропорционален нормальному давлению N :

$$F = f N. \quad (29.3)$$

Коэффициент пропорциональности f называется *коэффициентом трения скольжения* и определяется опытным путем.

Коэффициент трения скольжения является отвлеченной величиной и зависит от материала и физического состояния трущихся поверхностей, а также от скорости движения тела и удельного давления.

Однако, в элементарных расчетах зависимость коэффициента трения скольжения от скорости и удельного давления часто не учитывается.

Экспериментально установлено, что

$$f < f_{сц}.$$

Реакция R реальной (шероховатой) поверхности, в отличие от реакции идеальной (гладкой) поверхности, имеет две составляющие: нормальную реакцию N и силу сцепления $F_{сц}$. (или силу трения F при движении тела).

Угол $\varphi_{сц}$, образованный реакцией шероховатой поверхности с нормалью к поверхности в предельном состоянии покоя при $F_{сц} = F_{сц}^{\max}$, называется *углом сцепления* (рис. 80).

Тангенс угла сцепления равен коэффициенту сцепления:

$$\operatorname{tg} \varphi_{сц} = \frac{F_{сц}^{\max}}{N} = f_{сц},$$

или

$$\varphi_{сц} = \operatorname{arctg} f_{сц}. \quad (29.4)$$

Угол, тангенс которого равен коэффициенту трения скольжения, называется *углом трения*.

Угол сцепления можно определить опытным путем. Прибор для определения угла сцепления очень прост. Он представляет собой наклонную плоскость, угол наклона которой α можно изменять (рис. 81, а).

Зафиксируем угол наклона α плоскости OA , при котором помещенное на ней тело находится в предельном состоянии покоя и сила сцепления достигает максимального значения. Построим замкнутый треугольник сил, действующих на тело, и определим угол α (рис. 81, б):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{\text{сц}}^{\max}}{N} = \operatorname{tg} \varphi_{\text{сц}},$$

$$\alpha = \varphi_{\text{сц}},$$

т. е. угол наклона плоскости α , при котором тело находится в предельном состоянии покоя, равен углу сцепления $\varphi_{\text{сц}}$.

Величину коэффициента сцепления для соответствующих материалов (тело — плоскость) можно определить по таблице тангенсов углов, так как $f_{\text{сц}} = \operatorname{tg} \varphi_{\text{сц}}$.

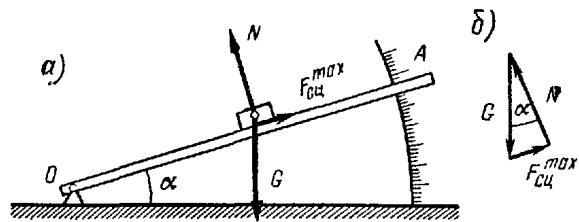


Рис. 81.

Конус с вершиной в точке касания тел, образующая которого составляет угол сцепления с нормалью к поверхностям тел, называется *конусом сцепления* (рис. 82). Поверхность конуса сцепления представляет собой геометрическое место максимальных реакций опорной поверхности. Действительно, максимальная реакция поверхности может занимать различные положения на поверхности этого конуса, зависящие от направления силы S , стремящейся сдвинуть тело (рис. 80). Пространство внутри конуса представляет собой совокупность возможных положений реакций опорной поверхности в состоянии покоя.

Пусть к покоящемуся телу приложены силы (в том числе вес тела), линия действия равнодействующей P которых лежит внутри

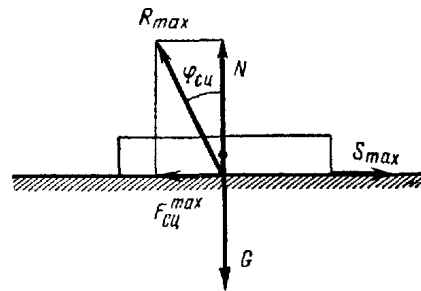


Рис. 80.

конуса сцепления (рис. 82). Эти силы не приведут тело в движение, так как сила P будет уравновешена реакцией поверхности.

Рассмотрим равновесие сил, действующих на тяжелый брусок, опирающийся на две шероховатые плоскости (рис. 83). В точках

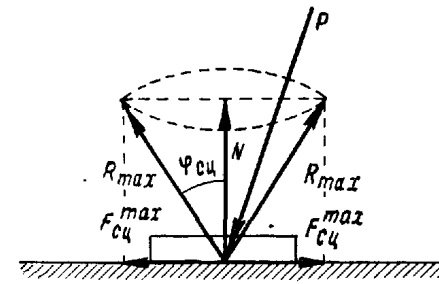


Рис. 82.

A и B возникают реакции опор, линии действия которых не выходят за пределы конусов сцепления. Проведя линии $A-I$, $A-II$, $B-III$ и $B-IV$, составляющие углы сцепления $\varphi_{1\text{сц}}$ и $\varphi_{2\text{сц}}$ с перпендикулярами к опорным плоскостям, восставленным в точках A и B , получаем границы конусов сцепления. Четырехугольник $klmn$, образованный этими линиями, внутри которого могут

пересекаться линии действия реакций опор A и B , называется *областью равновесия*.

Брусок AB находится под действием трех сил: его веса G и двух реакций опор R_A и R_B . При равновесии линии действия этих трех сил пересекутся в одной точке.

Так как любая точка площадки $klmn$ может являться точкой пересечения линий действия реакций опор A и B , то брусок находится в состоянии покоя, если линия действия силы веса бруска пересекает область равновесия.

В случае, если линия действия силы веса проходит через точку k области равновесия, брусок находится в предельном состоянии покоя.

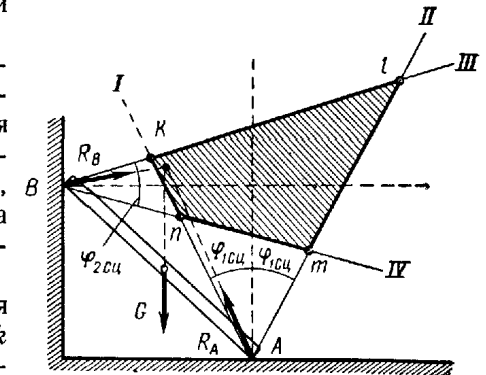


Рис. 83.

Брусок не может удержаться в указанном на рисунке положении, если линия действия силы веса проходит вне области равновесия.

Если на брусок действует несколько задаваемых сил и они приводятся к равнодействующей силе, установленным условиям должна удовлетворять эта равнодействующая.

§ 30. Примеры на равновесие сил, приложенных к твердому телу при наличии сил сцепления

Пример 20. Определить величину груза P , удерживающего тело весом G на шероховатой наклонной плоскости с углом наклона α , который больше угла сцепления $\varphi_{\text{сц}}$ (рис. 84а).

Решение. Необходимо иметь в виду, что направление силы сцепления $F_{\text{сц}}$ зависит от величины груза P . При максимальной возможной величине этого груза P_{max} сила сцепления направлена вниз по наклонной плоскости, так как под действием реакции нити груз стремится перемещаться вверх по наклонной плоскости (рис. 84б). При минимальной величине груза P_{min} сила сцепления направлена вверх по наклонной плоскости (рис. 84в).

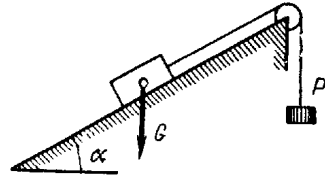


Рис. 84а.

Составим уравнения равновесия сходящихся сил, действующих на тело, когда оно удерживается в предельном состоянии покоя максимальным грузом P_{max} (рис. 84б):

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & P_{\text{max}} - F_{\text{сц}}^{\text{max}} - G \sin \alpha &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & N - G \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда $N = G \cos \alpha$.

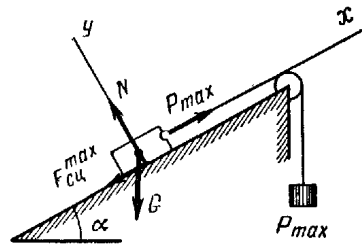


Рис. 84б.

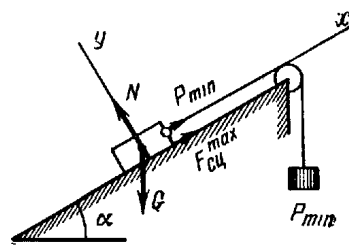


Рис. 84в.

Так как $F_{\text{сц}}^{\text{max}} = f_{\text{сц}} N$, из первого уравнения получаем

$$P_{\text{max}} = f_{\text{сц}} N + G \sin \alpha = f_{\text{сц}} G \cos \alpha + G \sin \alpha.$$

Так как

$$f_{\text{сц}} = \operatorname{tg} \varphi_{\text{сц}} = \frac{\sin \varphi_{\text{сц}}}{\cos \varphi_{\text{сц}}},$$

то имеем

$$P_{\text{max}} = G \frac{\cos \alpha \sin \varphi_{\text{сц}} + \sin \alpha \cos \varphi_{\text{сц}}}{\cos \varphi_{\text{сц}}} = G \frac{\sin(\alpha + \varphi_{\text{сц}})}{\cos \varphi_{\text{сц}}}.$$

Аналогично определяем P_{min} (рис. 84в):

$$P_{\text{min}} = G \frac{\sin(\alpha - \varphi_{\text{сц}})}{\cos \varphi_{\text{сц}}}.$$

Таким образом, условие равновесия сил, приложенных к телу, покоящемуся на шероховатой наклонной плоскости, имеет вид:

$$G \frac{\sin(\alpha - \varphi_{\text{сц}})}{\cos \varphi_{\text{сц}}} \leq P \leq G \frac{\sin(\alpha + \varphi_{\text{сц}})}{\cos \varphi_{\text{сц}}}$$

Это неравенство показывает, что величина груза P , который удерживает тело на наклонной плоскости, изменяется в пределах от P_{min} до P_{max} . Эти пределы соответствуют изменению модуля и направления силы сцепления от $F_{\text{сц}}^{\text{max}}$, направленной вверх по плоскости, до $F_{\text{сц}}^{\text{max}}$, направленной вниз.

Таким образом, задачи на равновесие сил при наличии сил сцепления имеют совокупность решений, границами которых служат решения, полученные в условиях предельного состояния покоя.

Пример 21. Однородный брус AB весом $G = 10 \text{ гн}$ удерживается веревкой BD под углом α к шероховатой вертикальной стене, причем $AD = AB$.

Определить в предельном состоянии покоя угол α , натяжение веревки и нормальную реакцию стены, если коэффициент сцепления между бруском и стеной $f_{\text{сц}} = 0,5$ (рис. 85а).

Решение. Рассмотрим равновесие трех сил, приложенных к брусу: заданной силы G , реакции S веревки BD и реакции R_A

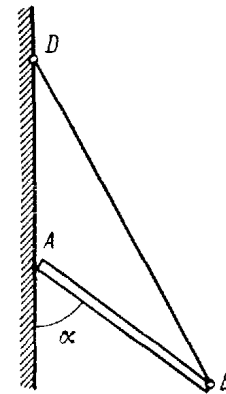


Рис. 85а.

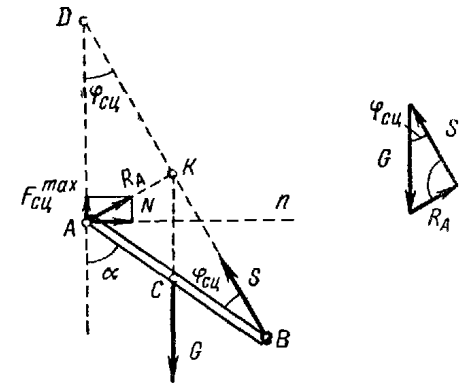


Рис. 85б.

шероховатой стены в точке A (рис. 85б). Линии действия трех взаимно уравновешивающихся сил пересекаются в одной точке (см. § 7). Найдем точку K пересечения линий действия сил G и S ; соединив эту точку с точкой A , получим линию действия реакции R_A . Построим замкнутый треугольник этих сил. Рассмотрим $\triangle ABD$. Отрезок CK , проходящий через середину стороны AB параллельно стороне AD , является средней линией $\triangle ABD$, т. е. точка K делит сторону BD пополам. В равнобедренном треугольнике ABD (по условию задачи $AD = AB$) медиана AK является и высотой, т. е.

$$AK \perp BD.$$

Угол KAn , составленный реакцией R_A с перпендикуляром An к стене, в предельном состоянии покоя, равен углу сцепления, т. е.

$$\angle KAn = \varphi_{\text{сц}}.$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{сц}} = f_{\text{сц}} = 0,5; \quad \varphi_{\text{сц}} = \operatorname{arctg} 0,5 = 26^\circ 34'.$$

Но $\angle KAn = \angle KDA$, так как стороны этих углов взаимно перпендикулярны.

Таким образом,

$$\angle KDA = \angle KBA = \varphi_{\text{сц}}.$$

Из $\triangle ABD$ определяем угол α :

$$\alpha = \angle KDA + \angle KBA = 2\varphi_{\text{сц}} = 2 \cdot 26^\circ 34' = 53^\circ 08'.$$

Модули сил S и R_A найдем из треугольника сил, определив его углы:

$$S = G \cos \varphi_{\text{сц}},$$

где

$$\cos \varphi_{\text{сц}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_{\text{сц}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,5^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$S = 10 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5} = 4 \cdot 2,236 = 8,94 \text{ гн.}$$

$$R_A = S \operatorname{tg} \varphi_{\text{сц}} = 4\sqrt{5} \cdot 0,5 = 2\sqrt{5} = 4,47 \text{ гн.}$$

Разложив реакцию R_A на нормальную реакцию N и силу сцепления $F_{\text{сц}}^{\max}$, определим N :

$$N = R_A \cos \varphi_{\text{сц}} = 2\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 4 \text{ гн.}$$

Пример 22. Однородный тонкий брусок AB весом G опирается концом A на вертикальную стену и точкой D на ребро. На конце B подвешен груз весом $G_1 = \frac{G}{2}$. Известны расстояния по горизонтали и вертикали: $AE = 2a$ и $DE = a$, а также коэффициенты сцепления между бруском и стеной $f_{\text{сц}(A)} = 0,3$ и между бруском и ребром $f_{\text{сц}(D)} = 0,2$.

Определить наименьшую длину бруска AB , при которой конец A не скользит вниз, а также нормальные реакции опор A и D (рис. 86а).

Решение. Рассмотрим систему сил, приложенных к бруску AB , находящемуся в предельном состоянии покоя. На брусок действуют заданные силы G и G_1 , нормальные реакции N_A и N_D в точках A и D и максимальные силы сцепления в этих же точках $F_{\text{сц}(A)}^{\max}$ и $F_{\text{сц}(D)}^{\max}$, направленные противоположно направлению возможного скольжения этих точек бруска (рис. 86б).

Модули этих сил сцепления выражаются:

$$F_{\text{сц}(A)}^{\max} = f_{\text{сц}(A)} N_A, \quad F_{\text{сц}(D)}^{\max} = f_{\text{сц}(D)} N_D.$$

Обозначим длину бруска: $AB = l$.

Определим расстояние AD , $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$:

$$AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = a\sqrt{5};$$

$$\cos \alpha = \frac{AE}{AD} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \sin \alpha = \frac{ED}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Составим три уравнения равновесия плоской системы сил, приложенных к бруску:

$$\sum M_{iA} = 0; \quad -G \frac{1}{2} \cos \alpha + N_D a \sqrt{5} - G_1 l \cos \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum X_i = 0; \quad N_A - N_D \cos (90^\circ - \alpha) + F_{\text{сц}(D)}^{\max} \cos \alpha = 0; \quad (2)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad F_{\text{сц}(A)}^{\max} - G + N_D \cos \alpha + F_{\text{сц}(D)}^{\max} \cos (90^\circ - \alpha) - G_1 = 0. \quad (3)$$

Эти уравнения содержат три неизвестные величины: l , N_A и N_D , так как зависимость сил сцепления от нормальных реакций известна.

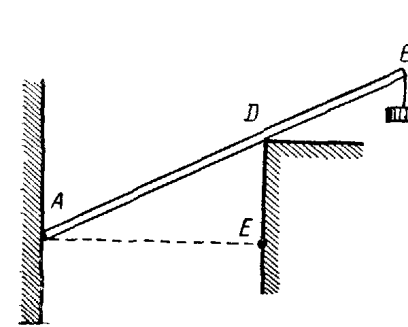


Рис. 86а.

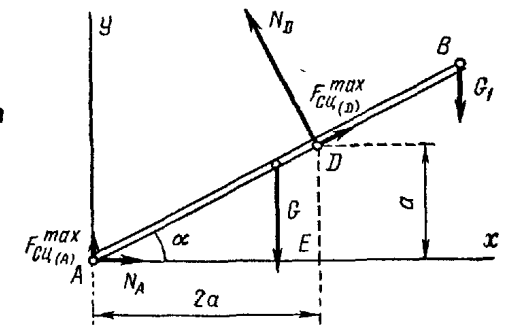


Рис. 86б.

Выразим в уравнениях проекций силы сцепления через нормальные реакции:

$$\left. \begin{aligned} N_A - N_D \sin \alpha + f_{\text{сц}(D)} N_D \cos \alpha &= 0, \\ f_{\text{сц}(A)} N_A - G + N_D \cos \alpha + f_{\text{сц}(D)} N_D \sin \alpha - \frac{G}{2} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Определим из этих уравнений N_A и N_D . Из первого уравнения:

$$N_A = N_D (\sin \alpha - f_{\text{сц}(D)} \cos \alpha).$$

Подставив это выражение во второе уравнение, найдем N_D :

$$f_{\text{сц}(A)} N_D (\sin \alpha - f_{\text{сц}(D)} \cos \alpha) - G + N_D \cos \alpha + f_{\text{сц}(D)} N_D \sin \alpha - \frac{G}{2} = 0,$$

$$N_D = \frac{\frac{3}{2} G}{(f_{\text{сц}(A)} + f_{\text{сц}(D)}) \sin \alpha + (1 - f_{\text{сц}(A)} f_{\text{сц}(D)}) \cos \alpha}.$$

Подставив значения коэффициентов сцепления и функций угла α , получим

$$N_D = \frac{\frac{3}{2}G}{(0,3 + 0,2) \frac{1}{\sqrt{5}} + (1 - 0,3 \cdot 0,2) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{3\sqrt{5}}{2 \cdot 2,38} G = 0,63 \sqrt{5} G.$$

Определим N_A :

$$N_A = 0,63 \sqrt{5} G \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - 0,2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = 0,38G.$$

Подставив найденное значение N_D и $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ в уравнение моментов (1), определим искомую длину бруска:

$$-G \frac{l}{2} \frac{2}{\sqrt{5}} + 0,63 \sqrt{5} G a \sqrt{5} - \frac{G}{2} l \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,$$

откуда $l = 1,575 a \sqrt{5}$, т. е. $AB = 1,575AD$.

Найдем длину участка DB :

$$DB = AB - AD = 0,575AD.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Относительно каких точек плоскости момент данной силы имеет одно и то же значение?
2. Сформулируйте теоремы о парах сил на плоскости.
3. Чем можно уравновесить пару сил?
4. Как направлены реакции опор балки, нагруженной парой сил и лежащей на двух опорах, из которых одна — шарнирно-неподвижная, а другая — на катках?
5. Зависит ли главный вектор и главный момент заданной системы сил от выбора центра приведения?
6. Каковы возможные случаи приведения сил, расположенных произвольно на плоскости?
7. К какому простейшему виду можно привести систему сил, если известно, что главный момент этих сил относительно различных точек на плоскости:
 - а) имеет различную величину;
 - б) имеет постоянное значение, не равное нулю;
 - в) равен нулю.
8. При каком условии сила, равная главному вектору плоской системы сил, является равнодействующей этой системы?
9. Перечислите системы уравнений равновесия сил, произвольно расположенных на плоскости?
10. Какие задачи статики называют статически определенными и какие — статически неопределенными?
11. В чем состоит условие равновесия сил, приложенных к рычагу?
12. Что называют коэффициентом устойчивости?
13. В чем заключается сущность способа Риттера?
14. В чем заключается разница между силой сцепления и силой трения?
15. Что называют конусом сцепления?
16. Каковы возможные направления реакции шероховатой поверхности?
17. Что представляет собой область равновесия и каковы условия равновесия сил, приложенных к бруску, опирающемуся на две шероховатые плоскости?

§ 31. Многоугольник сил и веревочный многоугольник. Графическое определение равнодействующей плоской системы сил

Рассмотрим графический прием сложения сил, произвольно расположенных на плоскости, называемый *способом веревочного многоугольника*.

Как известно из § 20, в результате приведения плоской системы сил к любому центру можно получить либо равнодействующую, либо пару сил или установить, что силы уравниваются. Каждому из

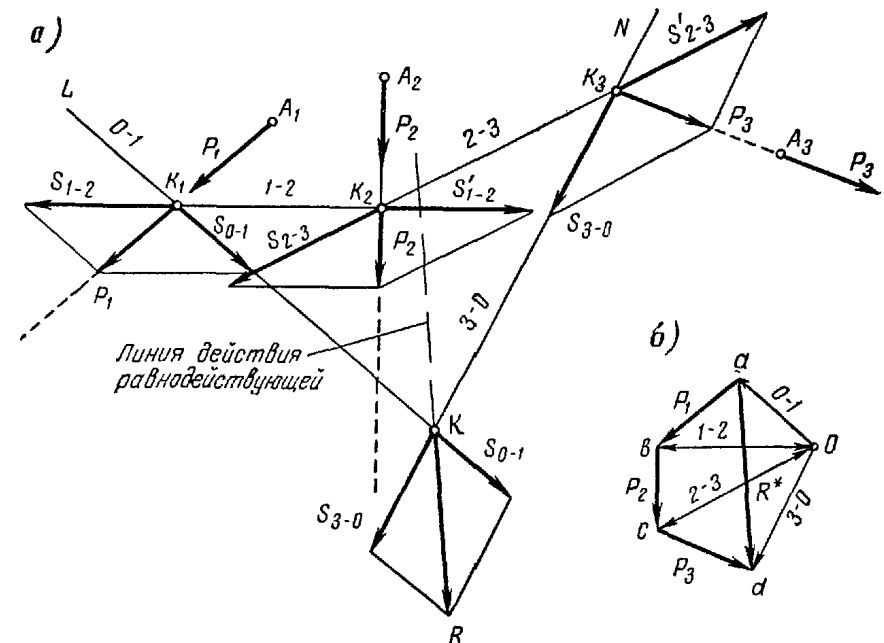


Рис. 87.

этих трех случаев приведения сил соответствует определенный вид веревочного многоугольника.

Рассмотрим сначала случай, когда многоугольник данных сил P_1 , P_2 и P_3 , приложенных в точках A_1 , A_2 и A_3 (рис. 87, а), не замкнут, т. е. главный вектор сил не равен нулю. В этом случае силы приводятся к равнодействующей силе.

Построив в любом месте плоскости многоугольник данных сил, найдем главный вектор этих сил R^* , который определит модуль и направление равнодействующей силы (рис. 87, б). Остается определить лишь одну из точек линии действия равнодействующей силы. Для этого и производят построение веревочного многоугольника.

Возьмем произвольную точку O — полюс — и соединим ее с вершинами многоугольника сил лучами, число которых всегда на единицу больше числа сил. Так, например, при сложении трех сил число лучей равно четырем. Очень удобно давать лучам двойные обозначения. Так, луч, проведенный из точки O к вершине многоугольника сил, в которой сходятся силы P_1 и P_2 , обозначим $1-2$ (или P_1-P_2), луч, проведенный из точки O к вершине многоугольника сил, в которой сходятся силы P_2 и P_3 , обозначим $2-3$ (или P_2-P_3) и т. д. Первый луч обозначим $0-1$ (или $0-P_1$), а последний $3-0$ (или P_3-0). Проведем из произвольной точки L плоскости прямую (рис. 87, а), параллельную лучу $0-1$, до пересечения с линией действия силы P_1 в точке K_1 . Из точки K_1 проведем прямую, параллельную лучу $1-2$ до пересечения с линией действия силы P_2 в точке K_2 и т. д. Из точки K_3 проведем прямую K_3N , параллельную лучу $3-0$.

Ломаная линия $LK_1K_2K_3N$, стороны которой параллельны соответствующим лучам, а вершины лежат на линиях действия сил, называется *веревочным многоугольником*.

Обозначения сторон веревочного многоугольника соответствуют обозначениям сил, между линиями действия которых расположены эти стороны.

Продолжим первую и последнюю стороны веревочного многоугольника до их пересечения в точке K и покажем, что эта точка принадлежит линии действия равнодействующей силы. Для этого перенесем все силы по линиям их действия в вершины веревочного многоугольника K_1, K_2, K_3 и разложим их на составляющие, направленные по соответствующим сторонам веревочного многоугольника. Так, сила P_1 разложится на составляющие S_{0-1} и S_{1-2} , сила P_2 — на S'_{1-2} и S_{2-3} и сила P_3 — на S'_{2-3} и S_{3-0} .

Сопоставляя параллелограммы сил, построенные в точках K_1, K_2 и K_3 , с треугольниками aOb, bOc и cOd , устанавливаем:

$$\begin{aligned} \overline{aO} &= S_{0-1}; & \overline{Ob} &= S_{1-2}; & \overline{bO} &= S'_{1-2}; \\ \overline{Oc} &= S_{2-3}; & \overline{cO} &= S'_{2-3}; & \overline{Od} &= S_{3-0}. \end{aligned}$$

Силы S_{1-2} и S'_{1-2} , приложенные в точках K_1 и K_2 , равны по модулю длине одного и того же луча Ob и противоположно направлены, а потому они взаимно уравновешиваются. Аналогично уравновешиваются силы S_{2-3} и S'_{2-3} , приложенные в точках K_2 и K_3 . Остающиеся в действии силы S_{0-1} и S_{3-0} переносим в точку их пересечения K и, построив на этих силах параллелограмм, находим их равнодействующую R , т. е. равнодействующую данных сил P_1, P_2 и P_3 . Сравнивая построенный параллелограмм и ΔaOd , видим, что $R = R^*$. Таким образом, точка пересечения первой и последней сторон веревочного многоугольника представляет собой одну из точек линии действия равнодействующей силы. Выбор полюса O и точки L — начала построения веревочного многоугольника — не отражается

на результатах построения. При изменении положения точек O и L пересечение первой и последней сторон веревочного многоугольника произойдет в другой точке, также принадлежащей линии действия равнодействующей силы.

§ 32. Случай замкнутого многоугольника сил. Графическое определение момента резльтирующей пары сил

Пусть дана система сил P_1, P_2 и P_3 , приложенных в точках A_1, A_2 и A_3 , треугольник которых замкнут, а линии действия не пересекаются в одной точке (рис. 88, а). Эти силы не приводятся к равнодействующей, так как их главный вектор равен нулю, и не уравновешиваются, так как их линии действия не пересекаются в одной

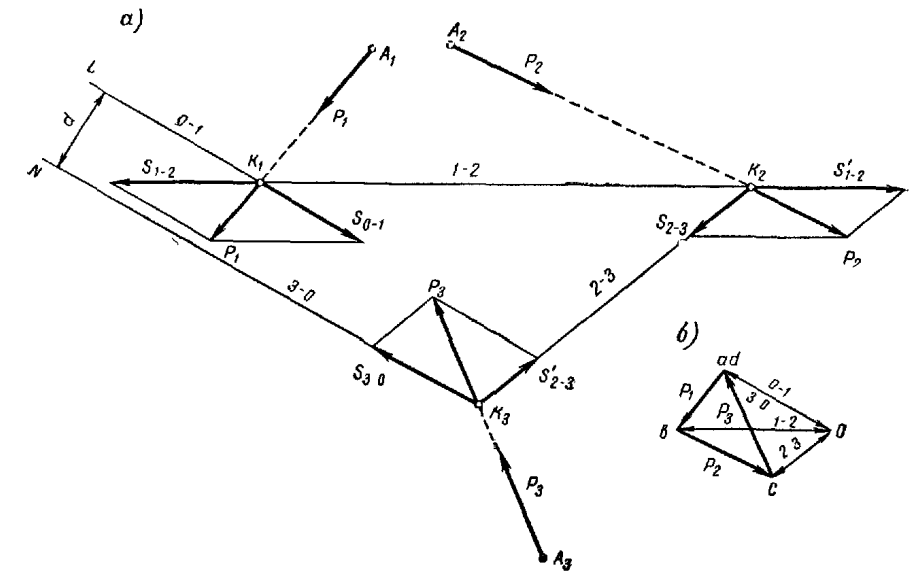


Рис. 88.

точке. Следовательно, они приводятся к паре сил. Определим момент этой пары построением веревочного многоугольника. Выбрав полюс O , проводим лучи к вершинам многоугольника сил и заключаем, что первый луч $0-1$ и последний $3-0$ совпадают (рис. 88, б).

Построим веревочный многоугольник $LK_1K_2K_3N$; его параллельные крайние стороны $0-1$ и $3-0$ не совпадают, т. е. веревочный многоугольник является не замкнутым. Перенесем заданные силы в точки K_1, K_2 и K_3 . Разложив силы P_1, P_2 и P_3 на составляющие, направленные по сторонам веревочного многоугольника, устанавливаем, что силы S_{1-2} и S'_{1-2} , приложенные в точках K_1 и K_2 , а также силы S_{2-3} и S'_{2-3} , приложенные в точках K_2 и K_3 , взаимно уравновешиваются.

ваются. Остающиеся в действии силы $S_{0-1} = \overline{aO}$ и $S_{3-0} = \overline{Oa}$, приложенные в точках K_1 и K_3 , равны и параллельны, но направлены в противоположные стороны, т. е. образуют пару сил. Момент этой пары определяется: $M = -S_{0-1}d$, где S_{0-1} — длина отрезка, соответствующего совпавшим лучам, определенная по масштабу сил, d — расстояние между крайними сторонами веревочного многоугольника, определенное по масштабу длин. Момент пары в данном случае имеет знак минус, так как пара сил S_{0-1} , S_{3-0} стремится вращать плоскость чертежа по движению часовой стрелки.

§ 33. Графические условия равновесия плоской системы сил

Рассмотрим систему сил P_1 , P_2 и P_3 , приложенных в точках A_1 , A_2 и A_3 , треугольник которых замкнут и линии действия которых пересекаются в одной точке (рис. 89, а). Такие силы взаимно уравниваются.

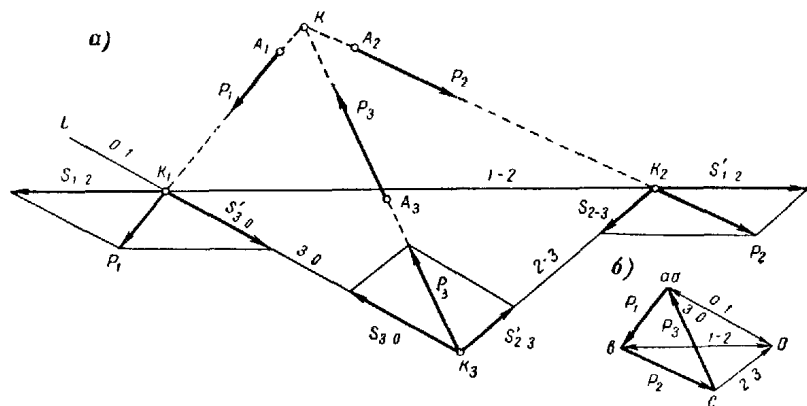


Рис. 89.

Покажем, что веревочный многоугольник этих сил также будет замкнут, т. е. его крайние стороны будут лежать на одной прямой.

Выбрав за полюс точку O , проведем из этой точки лучи $0-1$, $1-2$, $2-3$ и $3-0$, причем луч $3-0$ совпадет с лучом $0-1$ (рис. 89, б). Построив веревочный многоугольник, перенесем все силы по их линиям действия в вершины веревочного многоугольника K_1 , K_2 и K_3 и разложим эти силы на составляющие по направлениям сторон веревочного многоугольника. Из треугольников aOb , bOc и cOd установим:

$$S'_{1-2} = -S_{1-2}; \quad S'_{2-3} = -S_{2-3}; \quad S_{3-0} = -S_{0-1}.$$

Действительно, последняя сторона веревочного многоугольника $3-0$ должна совпасть с первой стороной $0-1$, так как только в этом случае силы, направленные по сторонам веревочного много-

угольника, уравниваются. Замкнутость веревочного многоугольника, т. е. совпадение последней и первой его сторон, имеется и при равновесии любого числа сил на плоскости.

Основываясь на полученных результатах, сформулируем графические условия равновесия системы сил, произвольно расположенных на плоскости: *силы, произвольно расположенные на плоскости, находятся в равновесии, если силовой и веревочный многоугольники замкнуты.*

§ 34. Примеры применения веревочного многоугольника

Пример 23. Определить путем построения веревочного многоугольника равнодействующую вертикальных нагрузок $P_1 = 60$ кн, $P_2 = 80$ кн и $P_3 = 40$ кн, приложенных к балке AB в точках D , E и F . Известно, что $AB = 8$ м, $AD = 2$ м, $DE = 3$ м и $BF = 2$ м.

Решение. Решая задачи при помощи веревочного многоугольника, необходимо выбрать масштабы длин и сил. В выбранном масштабе длин вычерчивается схема с изображением точек прило-

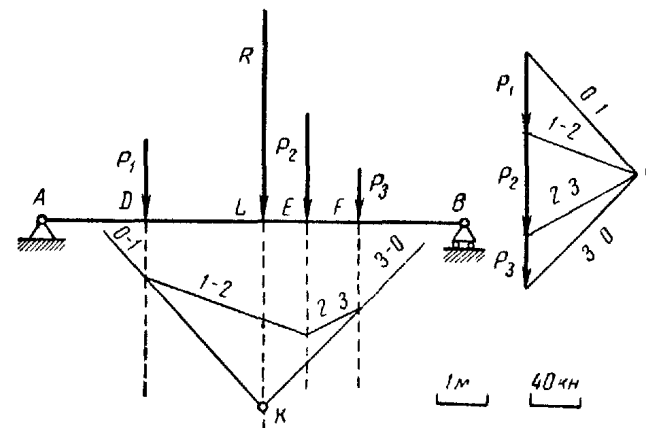


Рис. 90.

жения и линий действия сил. В выбранном масштабе сил строят многоугольник сил.

В рассматриваемом примере балка AB с точками D , E и F изображена в масштабе длин, показанном на рис. 90. Равнодействующая данных параллельных сил ($R = P_1 + P_2 + P_3 = 180$ кн) направлена вниз по вертикали. Для определения линии действия равнодействующей силы строим многоугольник сил и веревочный многоугольник. Находим точку пересечения первой и последней сторон веревочного многоугольника K , которая принадлежит линии действия равнодействующей силы. Проведя через точку K вертикаль, определяем линию действия равнодействующей силы, а, следовательно, и точку ее приложения L к балке AB . По масштабу длин определяем $AL = 4,2$ м.

Пример 24. К балке AB , лежащей на двух опорах A и B , в точках D и E приложены вертикальные силы $P_1 = 60$ кН и $P_2 = 40$ кН. Опора A — шарнирно-неподвижная, опора B — на катках. Определить построением веревочного многоугольника реакции опор балки, если известно, что $AB = 10$ м, $AD = 3$ м, $BE = 2$ м.

Решение. На балку AB действуют четыре взаимно уравновешивающиеся силы: заданные силы P_1 , P_2 и реакции опор A и B . Линия действия реакции R_B шарнирной опоры на катках направлена вертикально, силы P_1 и P_2 также вертикальны. Из этого следует, что и реакция неподвижной шарнирной опоры R_A направлена по вертикали.

Изобразим балку AB в некотором масштабе длин, приложим к ней заданные силы P_1 и P_2 и проведем вертикальные линии действия неизвестных реакций опор R_A и R_B (рис. 91).

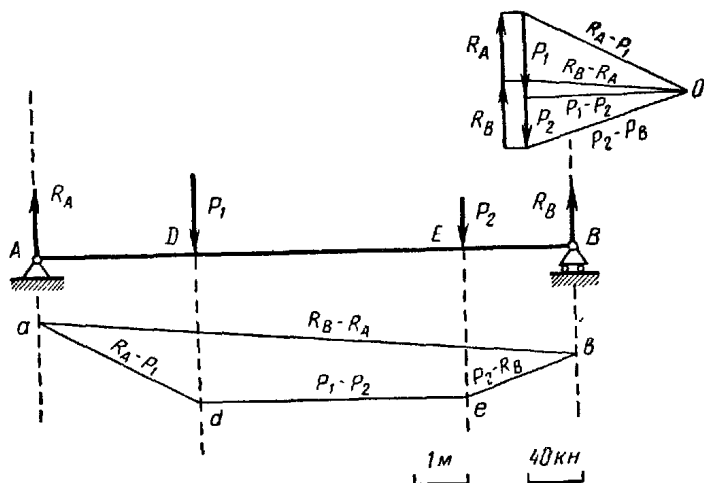


Рис. 91.

Многоугольник сил и веревочный многоугольник взаимно уравновешивающихся сил P_1 , P_2 , R_A и R_B должны быть замкнуты. Выбрав масштаб сил, построим часть замкнутого многоугольника сил, отложив две заданные силы P_1 и P_2 . Выберем полюс и проведем три луча. Условимся, что в замкнутом многоугольнике четырех сил P_1 , P_2 , R_B и R_A с концом силы P_2 совпадает начало реакции R_B , а с концом R_B совпадает начало реакции R_A , конец которой совпадает с началом отложенной силы P_1 . Три проведенных луча обозначим: $R_A - P_1$, $P_1 - P_2$ и $P_2 - R_B$.

Чтобы определить модули неизвестных реакций опор R_A и R_B , построим веревочный многоугольник из любой точки a линии действия реакции опоры R_A . Из этой точки проведем сторону, параллельную первому лучу $R_A - P_1$ (между линиями действия сил R_A и P_1), далее из точки d — сторону, параллельную второму лучу

$P_1 - P_2$, и из точки e — сторону, параллельную третьему лучу $P_2 - R_B$ до пересечения с линией действия реакции R_B в точке b . Соединив точки a и b отрезком прямой, получим четвертую сторону замкнутого веревочного многоугольника $R_B - R_A$. Этой стороне веревочного многоугольника соответствует параллельный ей луч $R_B - R_A$, который проводится из полюса O . На этом луче должна лежать вершина многоугольника сил, соответствующая концу реакции R_B и началу реакции R_A . Таким образом, из конца силы P_2 проводим вертикальную реакцию R_B до луча $R_B - R_A$. Из полученной точки проводим реакцию R_A до начала силы P_1 . Получаем замкнутый многоугольник четырех сил P_1 , P_2 , R_B и R_A , все стороны которого вертикальны. Пользуясь масштабом сил, находим числовые значения реакций опор $R_A = R_B = 50$ кН. Найденные реакции опор прикладываем к балке в точках A и B .

Пример 25. Определить построением веревочного многоугольника реакции шарнирно-неподвижной опоры A и шарнирной опоры на катках B балки AB . В точке D на балку действует вертикальная сила $P = 40$ кН, а в точке E — сила $Q = 60$ кН, направление которой составляет с направлением BA угол 45° . Известно, что $AB = 10$ м, $AD = 3$ м и $EB = 4$ м.

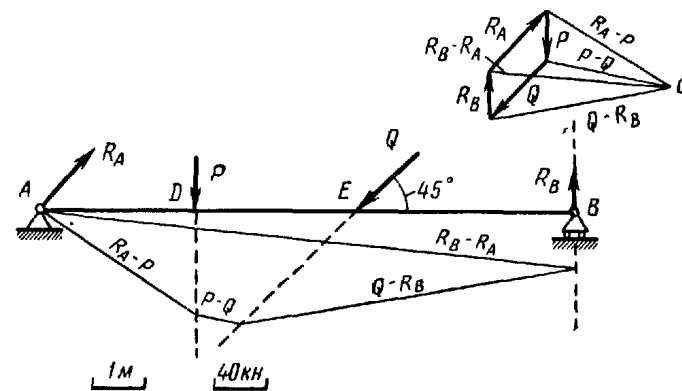


Рис. 92.

Решение. Изобразим балку в масштабе длин (рис. 92). Приложим к балке в точках D и E заданные силы P и Q и проведем линию действия реакции R_B шарнирной опоры на катках. Выберем масштаб сил и построим часть замкнутого многоугольника четырех сил P , Q , R_B , R_A , отложив заданные силы P и Q .

Если известна линия действия только одной из двух реакций опор, то в многоугольнике сил реакцию с известной линией действия удобно помещать за последней отложенной заданной силой. В этом примере из конца силы Q проведем прямую, параллельную линии действия реакции опоры R_B . Затем, проведем три луча, обозначив их $R_A - P$, $P - Q$ и $Q - R_B$.

Реакция неподвижной шарнирной опоры A , линия действия которой не известна, приложена в центре шарнира A . Так как сторону $R_A - P$ веревочного многоугольника нужно провести между линиями действия реакции опоры R_A и силы P , то построение веревочного многоугольника следует начать в центре шарнира A , единственной известной точке линии действия реакции R_A .

Построив веревочный многоугольник и определив положение его стороны $R_B - R_A$, проведем из полюса O луч $R_B - R_A$, параллельный этой стороне веревочного многоугольника. Тогда точка пересечения этого луча с прямой, проведенной из конца Q параллельно R_B , будет концом реакции R_B и началом реакции R_A . Соединив эту точку с началом силы P_1 , получим реакцию опоры R_A . При этом направление реакций определяется направлением сил в замкнутом многоугольнике. Измерив соответствующие стороны многоугольника сил, получим:

$$R_B = 37 \text{ кн}; \quad R_A = 62 \text{ кн}.$$

Кроме модулей реакций опор, определено также и направление реакции R_A неподвижной шарнирной опоры A . Приложим к балке в точках A и B найденные реакции опор R_A и R_B . Установим следующее правило построения веревочного многоугольника.

Если линия действия одной из двух реакций опор не известна, то построение веревочного многоугольника для определения реакций опор следует начинать в точке приложения реакции с неизвестной линией действия.

Пример 26. Определить построением веревочного многоугольника реакции опор навесной фермы, изображенной на рис. 93а, если известно, что $Q_1 = Q_5 = 10 \text{ кн}$; $Q_2 = Q_3 = Q_4 = 20 \text{ кн}$.

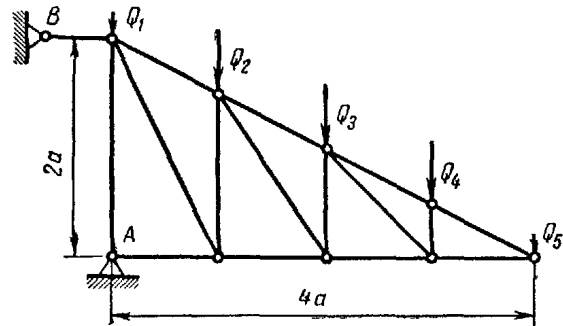


Рис. 93а.

Решение. Линия действия реакции шарнирно-стержневой опоры B направлена по оси стержня. Линия действия реакции неподвижной шарнирной опоры A проходит через центр шарнира, но направление ее не известно. Поэтому построение веревочного многоугольника

начинаем в центре неподвижной опоры A (рис. 93б). Так как линия действия силы Q_1 проходит через центр шарнира A , то сторона веревочного многоугольника $R_A - Q_1$ обращается в точку, а поэтому построение веревочного многоугольника начинаем в точке A , проведя через эту точку прямую, параллельную лучу $Q_1 - Q_2$ до пересечения с линией действия силы Q_2 . Затем проводим стороны веревочного многоугольника $Q_2 - Q_3$, $Q_3 - Q_4$, $Q_4 - Q_5$ и $Q_5 - R_B$. Сторону $Q_5 - R_B$ проводим до пересечения с линией действия реакции опоры B в точке b и, соединяя эту точку с точкой A — началом построения веревочного многоугольника, получаем его сторону $R_B - R_A$.

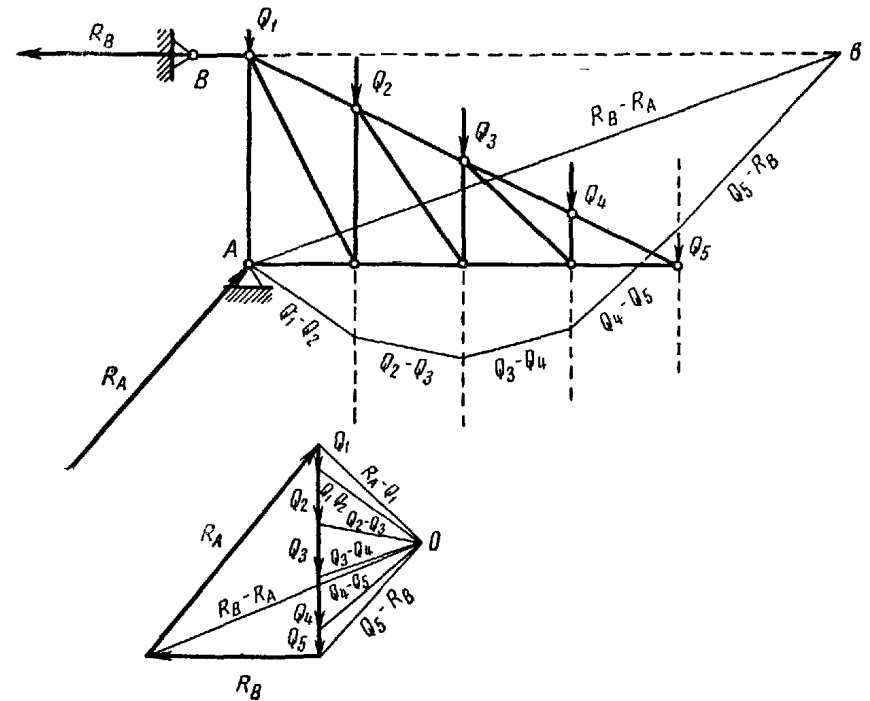


Рис. 93б.

Проводим из полюса O луч, параллельный стороне $R_B - R_A$, до пересечения с прямой, параллельной линии действия реакции опоры R_B , проведенной из конца силы Q_5 . Реакция опоры R_B заключена между лучами $Q_5 - R_B$ и $R_B - R_A$ и направлена по обходу контура многоугольника сил в одну сторону с силами Q_1, Q_2, \dots, Q_5 . Реакция опоры R_A , заключенная между лучами $R_B - R_A$ и $R_A - Q_1$, замыкает многоугольник сил, т. е. имеет по обходу контура многоугольника такое же направление, как и остальные силы. Определив реакции опор, прикладываем их к ферме в точках A и B .

§ 35. Диаграмма Максвелла — Кретоны и примеры ее построения

В 1864 г. известный английский физик Дж. Максвелл (1831—1879) и независимо от него в 1872 г. итальянский математик Л. Кретоны (1830—1903) предложили графический метод определения усилий в стержнях фермы, получивший название диаграммы Максвелла — Кретоны.

Порядок построения диаграммы Максвелла — Кретоны

Для построения диаграммы Максвелла — Кретоны необходимо знать модули и направления реакций опор, которые определяются аналитически или путем построения веревочного многоугольника.

При построении диаграммы Максвелла — Кретоны необходимо придерживаться следующего порядка:

а) начертить схему фермы в выбранном масштабе длин с указанием приложенных к узлам заданных сил и реакций опор, располагая их вне контура фермы;

б) обозначить буквами внешние области, ограниченные внешним контуром фермы и линиями действия внешних сил, и внутренние области, ограниченные только стержнями фермы;

в) построить многоугольник внешних сил в выбранном масштабе сил, откладывая силы в такой последовательности, в какой они расположены по контуру фермы в направлении, обратном движению часовой стрелки;

г) на базе многоугольника внешних сил построить для каждого узла фермы замкнутый многоугольник сил, откладывая силы в такой последовательности, в какой они встречаются при обходе узла в направлении, обратном движению часовой стрелки. Узлы выбирать так, чтобы в них было не известно не более двух сил;

д) установить, какие стержни фермы растянуты и какие сжаты, определяя направления реакций стержней по диаграмме;

е) определить модули усилий измерением отрезков диаграммы.

Рассмотрим построение диаграммы Максвелла — Кретоны для стропильной фермы, изображенной на рис. 94, а вместе с действующими на нее заданной вертикальной силой и соответствующими реакциями шарнирно-неподвижной опоры и опоры на катках с наклонной опорной плоскостью.

Обозначим A, B, C внешние области — части плоскости, ограниченные внешним контуром фермы и линиями действия внешних сил, а F, E, D — внутренние области — части плоскости, ограниченные только стержнями фермы. Это даст возможность каждую внешнюю силу и усилие в стержне обозначить двумя буквами, соответствующими названиям прилегающих областей. Буквы будем ставить в таком порядке, в каком эти области расположены по контуру фермы или узла фермы в направлении, обратном движению часовой стрелки. Например, согласно обходу контура фермы в указанном

направлении, силу, приложенную к верхнему узлу фермы, обозначим AB , реакцию левой опоры — BC , а реакцию правой опоры — CA .

Построим в масштабе сил замкнутый треугольник внешних сил $ABCA$, откладывая силы в такой последовательности, в которой они расположены по контуру фермы в направлении, обратном движению часовой стрелки, а затем перейдем к построению замкнутых многоугольников сил, действующих на каждый из узлов фермы (рис. 94, б). Построение многоугольников сил, действующих на узлы фермы, следует начинать с того узла, к которому приложены две неизвестные силы.

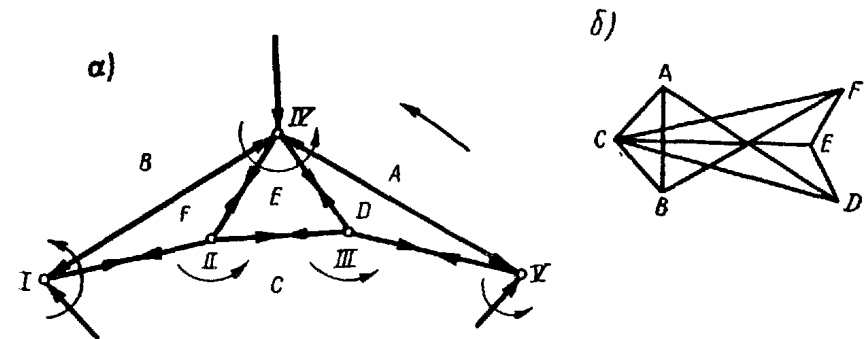


Рис. 94.

Начнем построение с левого опорного узла I , на который действуют известная реакция опоры BC и две неизвестные реакции стержней CF и FB .

Проводим из точки C диаграммы прямую, параллельную стержню CF , а из точки B диаграммы — прямую, параллельную стержню FB . Точка F пересечения этих прямых определит третью вершину замкнутого треугольника $BCFB$ сил, действующих на узел I . Отрезки CF и FB , изображают в принятом масштабе сил реакции стержней CF и FB , приложенные к рассматриваемому узлу I . Согласно § 3, модули этих реакций равны модулям усилий в этих стержнях. При этом, если реакция стержня направлена от узла, то стержень растянут, а если реакция направлена к узлу — стержень сжат.

В замкнутом треугольнике сил $BCFB$ реакция опоры BC направлена от B к C (B — начало силы, C — конец). В ту же сторону по контуру треугольника должны быть направлены реакции стержней, т. е. реакция CF направлена от C к F (C — начало силы, F — конец), а реакция FB направлена от F к B (F — начало силы, B — конец).

Приложив силы указанного направления к узлу I , установим, что реакция CF направлена от узла, а реакция FB — к узлу. Из этого следует, что стержень CF растянут, а стержень FB сжат.

Приложим реакцию растянутого стержня FC к узлу II (для узла II : F — начало силы, C — конец) и реакцию сжатого стержня BF к узлу IV (B — начало силы, F — конец). Тогда из сил, действующих на узел II , будут не известны только две: реакция стержня CE и реакция стержня EF .

Построим замкнутый треугольник $FCEF$ сил, действующих на узел II , проведя из точки C диаграммы прямую, параллельную стержню CE , а из точки F — прямую, параллельную стержню EF , до взаимного пересечения в точке E .

Приложив к узлу II найденные на диаграмме реакции стержней CE и EF , установим, что оба эти стержня растянуты. Реакции этих же стержней приложим к узлам III и IV . Далее рассмотрим узел III и, зная реакцию стержня EC , построим замкнутый треугольник $ECDE$, из которого определим модули и направления реакций CD и DE . После этого остается неизвестным лишь усилие в стержне DA . Так как в построенной диаграмме уже имеются точки A и D , то, соединяя эти точки отрезком прямой, получаем усилие AD . Этот стержень сжат, так как его реакции — DA , действующая на узел IV , и AD , действующая на узел V , — направлены к узлам.

Параллельность отрезка, соединяющего в данном примере точки A и D диаграммы, оси стержня AD служит критерием качества построения диаграммы. Если отрезок AD параллелен оси стержня AD , построение диаграммы выполнено правильно, если же он не параллелен, то в построении диаграммы допущена ошибка. Только точное построение диаграммы Максвелла — Кремоны при помощи чертежных инструментов обеспечивает параллельность последнего отрезка диаграммы оси соответствующего стержня, а следовательно, точность графического определения усилий в стержнях фермы. Модули усилий во всех стержнях фермы определяются измерением соответствующих отрезков диаграммы. Значения усилий заносятся в таблицу, причем усилие в растянутом стержне считается положительным, а в сжатом — отрицательным.

Пример 27. Построить диаграмму Максвелла — Кремоны для фермы, изображенной на рис. 95, *а*, вместе с действующими на нее вертикальными заданными силами: $DA = 40$ кн, $BC = 120$ кн и вертикальными реакциями опор $AB = 100$ кн и $CD = 60$ кн.

Решение. Построение диаграммы начинаем с построения замкнутого многоугольника внешних сил $DABCD$. Затем последовательно рассматриваем узлы I, II, III, IV, V и строим многоугольники сил, действующих на эти узлы: $ABEA, AEFA, FEBCKF, DAFKLD, LKCMML$, т. е. получаем последовательно точки E, F, K, L, M (рис. 95, *б*).

Правильность построения диаграммы Максвелла — Кремоны подтверждается параллельностью отрезка диаграммы DM оси стержня DM . Направления реакций стержней фермы определены по диаграмме (рис. 95, *б*) и показаны на рис. 95, *а*.

Пример 28. Построить диаграмму Максвелла — Кремоны для фермы, изображенной на рис. 96, *а* в масштабе длин вместе с дей-

ствующими на нее вертикальными заданными силами $DA = 40$ кн, $BC = 80$ кн и вертикальными реакциями опор $AB = 70$ кн и $CD = 50$ кн.

Решение. Прежде всего строим замкнутый многоугольник внешних сил, который в рассматриваемом случае представляет собой

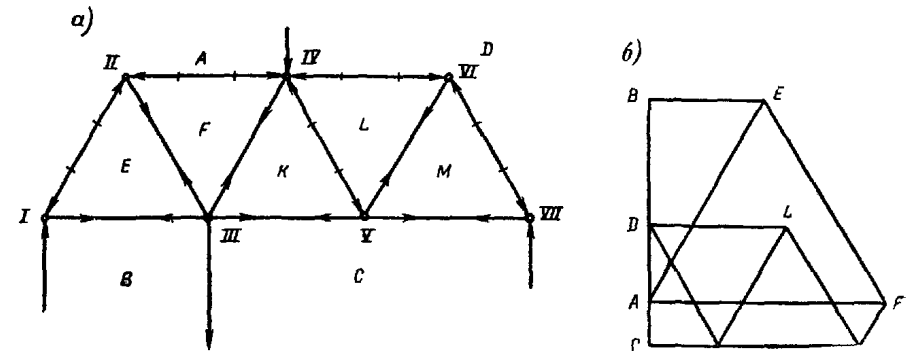


Рис. 95.

вертикальный отрезок $DABCD$. Затем, рассматривая последовательно узлы I, II, \dots, VI , строим многоугольники действующих на них сил $ABEA, EBCFE, AEFKA, AKLA, LKFCML, MCNM$, т. е. получаем последовательно точки E, F, K, L, M, N (рис. 96, *б*).

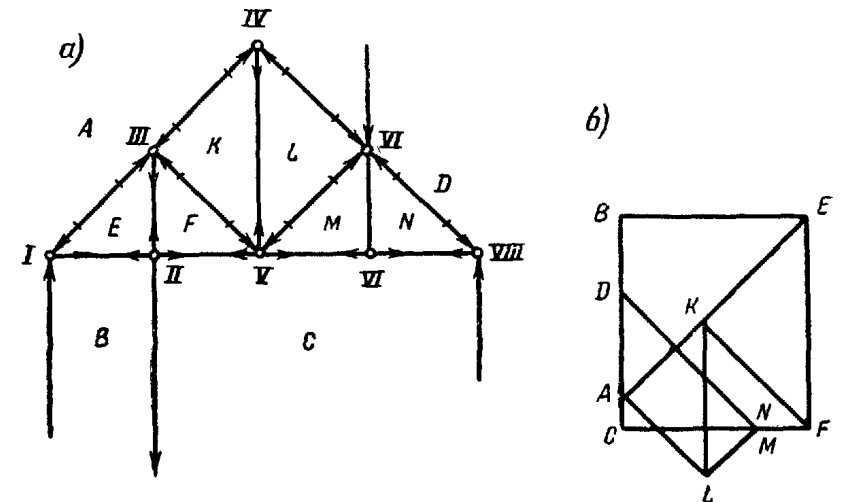


Рис. 96.

Построение диаграммы Максвелла — Кремоны заканчивается соединением точек D и N диаграммы.

Так как отрезок DN диаграммы параллелен оси стержня DN , то диаграмма Максвелла — Кремоны построена правильно. Точки M

и N диаграммы совпали, следовательно, усилие в стержне NM равно нулю. Направления реакций стержней фермы определены по диаграмме (рис. 96, б) и показаны на рис. 96, а.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие виды многоугольника сил и веревочного многоугольника соответствуют каждому случаю приведения плоской системы сил?
2. Каковы графические и аналитические условия равновесия системы сил, произвольно расположенных на плоскости?
3. Из какой точки следует начинать построение веревочного многоугольника при определении реакций опор в случае, если известна линия действия лишь одной из реакций опор?
4. Сформулируйте правило построения диаграммы Максвелла — Кретоны.

ГЛАВА VI

СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 36. Многоугольник сил. Параллелепипед сил

Положим, что к твердому телу приложены силы P_1, P_2, P_3 , и P_4 , линии действия которых не лежат в одной плоскости, но пересекаются в одной точке O .

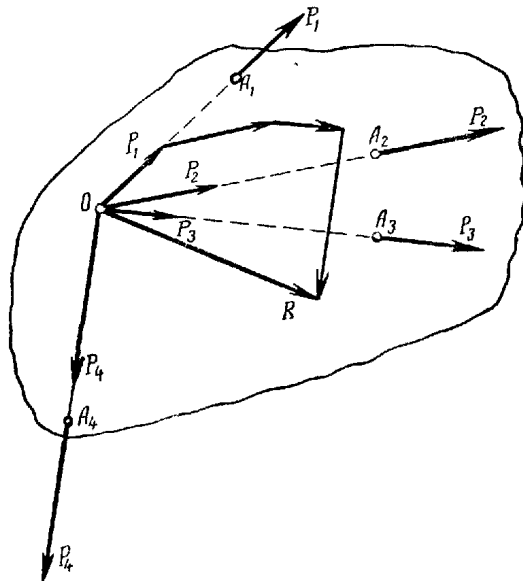


Рис. 97.

Переносим силы по их линиям действия в точку O , строим пространственный многоугольник этих сил. Замыкающая сторона многоугольника сил определяет равнодействующую силу (рис. 97). При этом направление равнодействующей по контуру многоугольника обратно направлению составляющих сил.

Таким образом, *равнодействующая пространственной системы сходящихся сил приложена в точке пересечения линий действия сил и равна геометрической сумме данных сил*

$$R = P_1 + P_2 + \dots + P_n.$$

Таким же способом определяется равнодействующая плоской системы сходящихся сил.

Если к телу приложены три сходящиеся силы, не лежащие в одной плоскости, то их равнодействующая приложена в точке пересечения линий действия сил и изображается диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах (рис. 98).

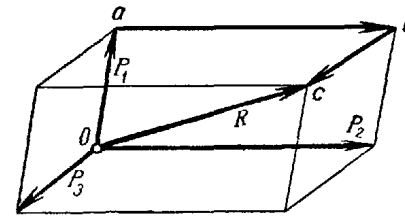


Рис. 98.

Действительно, диагональ параллелепипеда Oc является замыкающей стороной многоугольника сил $Oabc$, т. е.

$$R = P_1 + P_2 + P_3.$$

Изложенное правило сложения трех сходящихся сил в пространстве называется *правилом параллелепипеда сил*.

Сходящиеся силы в пространстве взаимно уравниваются, если многоугольник этих сил замкнут, т. е. их геометрическая сумма равна нулю

$$\sum P_i = 0.$$

Как видно, условие равновесия сходящихся сил на плоскости и в пространстве одно и то же.

Однако, решение задач на равновесие сходящихся сил в пространстве путем построения замкнутого многоугольника сил весьма сложно, так как стороны этого многоугольника не лежат в одной плоскости. Поэтому для решения этих задач графический метод не применяют, а пользуются аналитическим методом, т. е. составляют уравнения равновесия этих сил.

§ 37. Проекции силы на оси декартовых координат

Взяв правую систему неподвижных осей декартовых координат x , y и z , разложим силу P по правилу параллелепипеда на три составляющие силы P_x, P_y и P_z , направленные параллельно этим осям (рис. 99).

Силы P_x, P_y , и P_z называются *компонентами* силы по осям x , y и z .

Алгебраические значения длин направленных отрезков Aa, Ab и Ac называются проекциями силы на оси x, y и z .

Обозначив i, j и k — единичные векторы, направленные по осям x, y и z , а X, Y и Z — проекции силы на эти оси, получим

$$\mathbf{P} = P_x + P_y + P_z,$$

но

$$P_x = iX; \quad P_y = jY; \quad P_z = kZ;$$

поэтому

$$\mathbf{P} = iX + jY + kZ. \quad (37.1)$$

Равенство (37.1) представляет собой формулу разложения силы на составляющие по осям координат.

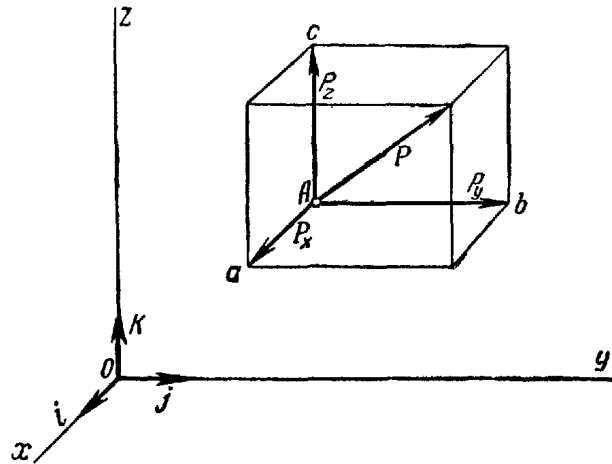


Рис. 99.

Проекция силы на каждую координатную ось определяется произведением модуля силы на косинус угла между направлениями оси и силы:

$$X = P \cos(P, i); \quad Y = P \cos(P, j); \quad Z = P \cos(P, k),$$

где $(P, i), (P, j)$ и (P, k) — углы, заключенные между направлением силы \mathbf{P} и направлениями осей x, y и z .

Если известны проекции силы на три взаимно перпендикулярные оси x, y и z , то модуль и направление силы определяются по следующим формулам:

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (37.2)$$

$$\cos(P, i) = \frac{X}{P}; \quad \cos(P, j) = \frac{Y}{P}; \quad \cos(P, k) = \frac{Z}{P}. \quad (37.3)$$

§ 38. Аналитический способ определения равнодействующей системы сходящихся сил в пространстве.

Уравнения равновесия сил

Равнодействующая сходящихся сил P_1, P_2, \dots, P_n (рис. 100) равна геометрической сумме этих сил:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_n.$$

Проекция равнодействующей на каждую из координатных осей равна алгебраической сумме проекций всех составляющих:

$$\left. \begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \\ Z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n, \end{aligned} \right\} \quad (38.1)$$

где проекции сил вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} X_1 &= P_1 \cos(P_1, i); & X_2 &= P_2 \cos(P_2, i); & \dots; & X_n &= P_n \cos(P_n, i); \\ Y_1 &= P_1 \cos(P_1, j); & Y_2 &= P_2 \cos(P_2, j); & \dots; & Y_n &= P_n \cos(P_n, j); \\ Z_1 &= P_1 \cos(P_1, k); & Z_2 &= P_2 \cos(P_2, k); & \dots; & Z_n &= P_n \cos(P_n, k). \end{aligned}$$

Формулам (38.1) можно придать вид:

$$X = \sum X_i; \quad Y = \sum Y_i; \quad Z = \sum Z_i, \quad (38.2)$$

причем $i = 1, 2, \dots, n$.

Вычислив проекции равнодействующей X, Y и Z , найдем модуль и направление равнодействующей по формулам (37.2) и (37.3):

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\cos(R, i) = \frac{X}{R}; \quad \cos(R, j) = \frac{Y}{R}; \quad \cos(R, k) = \frac{Z}{R}.$$

В случае, если силы взаимно уравниваются, их равнодействующая R равна нулю.

Так как $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, то $X = 0; Y = 0$ и $Z = 0$.

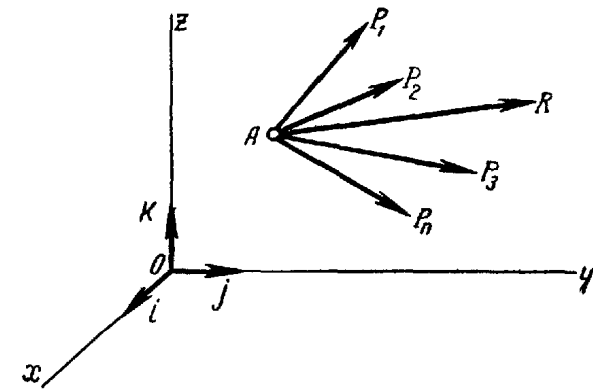


Рис. 100.

Таким образом, для сходящихся сил в пространстве имеем следующие три уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} X_1 + X_2 + \dots + X_n &= 0 \quad \text{или} \quad \sum X_i = 0, \\ Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n &= 0 \quad \text{или} \quad \sum Y_i = 0, \\ Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n &= 0 \quad \text{или} \quad \sum Z_i = 0. \end{aligned} \right\} \quad (38.5)$$

При помощи уравнений (38.3) можно решать задачи на равновесие сходящихся сил, если число неизвестных величин в задаче не превышает трех.

§ 39. Примеры на равновесие сходящихся сил

Пример 29. Груз A весом $G = 20$ н привязан к веревке, закрепленной в точке B , и удерживается на шероховатой наклонной плоскости $BCDE$ силой Q , направленной по линии наибольшего ската этой плоскости. Определить наименьшее значение этой силы, если коэффициент сцепления между телом и плоскостью $f_{\text{сц}} = 0,2$, угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 45^\circ$ и угол, составленный веревкой AB и горизонтальной прямой BC , $\beta = 30^\circ$ (рис. 101а).

Решение. Рассматриваем равновесие сил, приложенных к грузу A : заданных сил — веса G , силы Q , а также реакций связей — реакции веревки S , нормальной реакции плоскости N и максимальной силы сцепления $F_{\text{сц}}^{\text{max}}$, направленной противоположно направлению возможного скольжения груза. Возможное

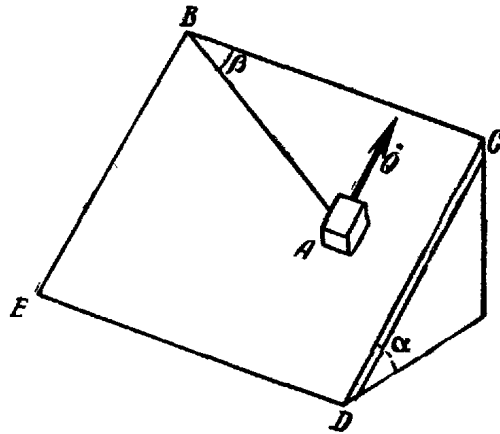


Рис. 101а.

движение груза при недостаточной величине силы Q должно происходить по дуге окружности с центром в точке B , а сила сцепления

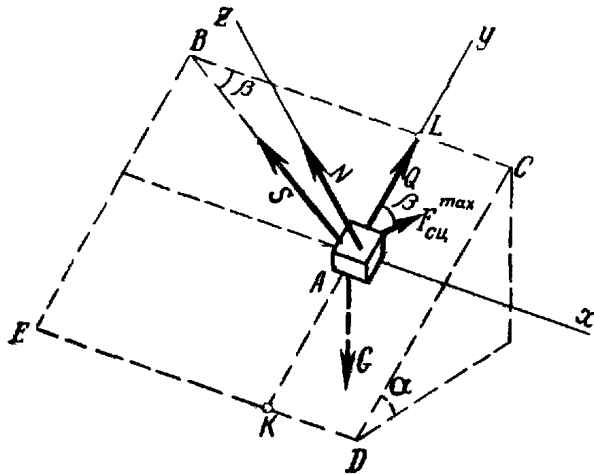


Рис. 101б.

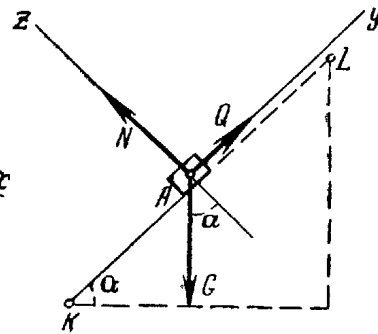


Рис. 101в.

должна быть направлена по касательной к этой окружности, т. е. перпендикулярно к радиусу BA (рис. 101б).

В момент предельного состояния покоя $F_{\text{сц}}^{\text{max}} = f_{\text{сц}}N$. Три неизвестные величины Q , N и S можно определить из трех уравнений равновесия сходящихся сил (38.5).

Проводим оси координат, как показано на рис. 101б, в и составляем уравнения равновесия сил:

$$\sum X_i = 0; \quad F_{\text{сц}}^{\text{max}} \sin \beta - S \cos \beta = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad F_{\text{сц}}^{\text{max}} \cos \beta + Q + S \sin \beta - G \sin \alpha = 0; \quad (2)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad N - G \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (3) определяем N :

$$N = G \cos \alpha = 20 \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} = 14,14 \text{ н.}$$

Из уравнения (1) находим S :

$$S = \frac{F_{\text{сц}}^{\text{max}} \sin \beta}{\cos \beta} = f_{\text{сц}} N \operatorname{tg} \beta = 0,2 \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} = 1,63 \text{ н.}$$

Из уравнения (2) определяем Q :

$$Q = -f_{\text{сц}} N \cos \beta - S \sin \beta + G \sin \alpha = \\ = -0,2 \cdot 10\sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} + 20 \frac{\sqrt{2}}{2} = 10,87 \text{ н.}$$

Пример 30. Горизонтальный провод AE , натяжение которого равно 300 н, подвешен к вертикальному столбу AB , укрепленному оттяжками AC и AD , расположенными симметрично относительно плоскости BAE . Известно: $AB = 6$ м, $BC = BD = 4,5$ м, $\angle CBD = 120^\circ$.

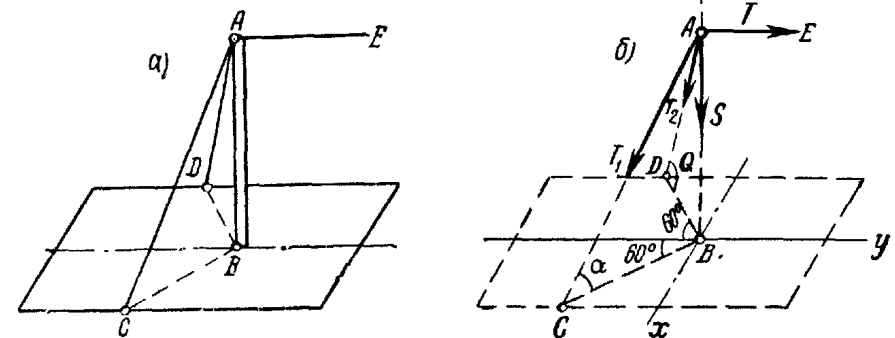


Рис. 102.

Определить натяжение оттяжек и усилие в столбе (рис. 102, а).

Решение. Рассмотрим равновесие сил, приложенных к узлу A : заданной силы — реакции T провода AE , реакции S столба AB и реакций T_1 и T_2 оттяжек AC и AD . Три неизвестные силы S , T_1

и T_2 определим из трех уравнений равновесия этой системы сходящихся сил:

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0.$$

Для этого проведем оси координат из точки B , направив ось z вдоль BA , ось y — параллельно AE и ось x — перпендикулярно к осям y и z (рис. 102, б). Приложим к узлу A все действующие на него силы, направив их от узла, т. е. предположив, что все элементы растянуты. При проектировании сил T_1 и T_2 на оси x и y применим двойное проектирование, так как углы, составленные этими силами с осями x и y , не даны. Спроектируем сначала каждую из этих сил на плоскость xBy и полученную проекцию спроектируем на соответствующую ось.

Вычислим предварительно:

$$\cos \alpha = \frac{CB}{CA} = \frac{4,5}{\sqrt{6^2 + 4,5^2}} = 0,6,$$

$$\sin \alpha = \frac{BA}{CA} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 4,5^2}} = 0,8.$$

Составим уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad T_1 \cos \alpha \cos 30^\circ - T_2 \cos \alpha \cos 30^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -T_1 \cos \alpha \cos 60^\circ - T_2 \cos \alpha \cos 60^\circ + T = 0; \quad (2)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad -T_1 \cos(90^\circ - \alpha) - T_2 \cos(90^\circ - \alpha) - S = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (1) получим

$$T_1 = T_2.$$

Из уравнения (2) найдем эти силы:

$$-2T_1 \cos \alpha \cos 60^\circ + T = 0,$$

$$T_1 = \frac{T}{2 \cos \alpha \cos 60^\circ} = \frac{300}{2 \cdot 0,6 \cdot 0,5} = 500 \text{ н.}$$

$T_2 = T_1 = 500 \text{ н}$ (натяжение симметричных оттяжек одинаково).

Из уравнения (3) определим S :

$$-2T_1 \sin \alpha - S = 0,$$

$$S = -2T_1 \sin \alpha = -2 \cdot 500 \cdot 0,8 = -800 \text{ н.}$$

Вертикальный столб AB сжат.

Пример 31. Определить усилия в стержнях фермы, изображенной на рис. 103а, если на узел B фермы действует вертикальная сила $P_1 = 40 \text{ кн}$, на узел C — горизонтальная сила $P_2 = 20 \text{ кн}$, направленная вдоль стержня CD . Размеры указаны на рисунке.

Решение. Для определения усилий в стержнях фермы воспользуемся способом вырезания узлов. Так как силы, действующие на каждый из узлов фермы, взаимно уравновешиваются то, вырезая отдельные узлы фермы, составляем по три уравнения равновесия сил, действующих на каждый узел.

Узлы фермы вырезаем в такой последовательности, чтобы число неизвестных сил в рассматриваемом узле не превышало трех. Так же, как и при определении усилий в стержнях плоских ферм, все стержни фермы условимся считать растянутыми; знак минус у вычисленной реакции стержня означает то, что стержень сжат.

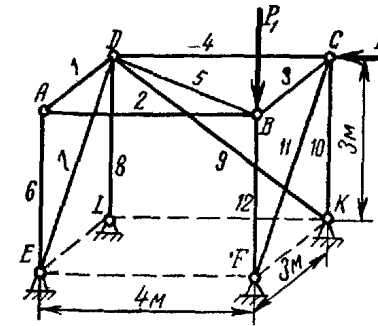


Рис. 103а.

Для определения усилий в стержнях рассматриваемой фермы будем вырезать последовательно узлы A , B , C и D (рис. 103б). В точках E , F , K , L показаны составляющие реакции опор R_{E1} , R_{E2} , R_L , R_{F1} , R_{F2} , R_{K1} , R_{K2} , уравновешивающие реакции стержней. Как показано ниже, усилия во многих стержнях рассматриваемой фермы равны нулю. Поэтому не будем определять предварительно всех косинусов углов, составленных силами с осями координат, и проекции некоторых сил запишем в уравнения равновесия в общем виде, не определяя по чертежу знака проекций.

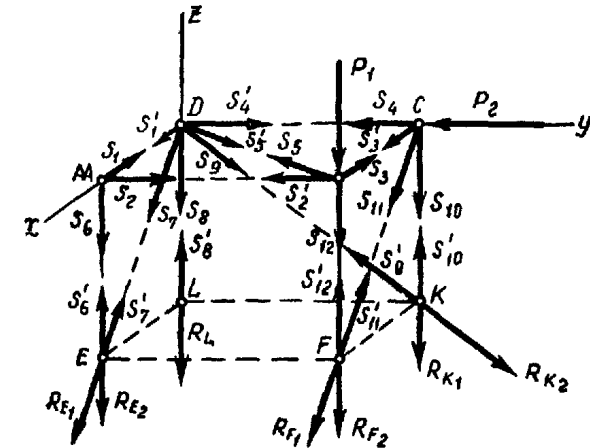


Рис. 103б.

Очевидно, что и составляющие реакций опор, направленные вдоль стержней с нулевыми усилиями, будут равны нулю.

Узел A

$$\sum X_i = 0; \quad -S_1 = 0; \quad S_1 = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad S_2 = 0;$$

$$\sum Z_i = 0; \quad -S_6 = 0; \quad S_6 = 0.$$

Так как узел A не загружен внешней силой, а силы S_1 , S_2 и S_6 не лежащие в одной плоскости, не могут уравновешиваться, то они равны нулю.

Узел B

$$\sum X_i = 0; \quad -S_3 + S_5 \cos(\mathbf{S}_5, \mathbf{i}) = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -S'_2 + S_5 \cos(\mathbf{S}_5, \mathbf{j}) = 0; \quad (2)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad -P_1 - S_{12} = 0; \quad S_{12} = -P_1 = -40 \text{ кн.} \quad (3)$$

Из уравнения (2) находим

$$S_5 \cos(\mathbf{S}_5, \mathbf{j}) = S'_2 = 0; \quad S_5 = 0.$$

Из уравнения (1) находим

$$S_3 = S_5 \cos(\mathbf{S}_5, \mathbf{i}) = 0, \quad S_3 = 0.$$

Узел C

$$\sum X_i = 0; \quad S'_3 + S_{11} \cos(\mathbf{S}_{11}, \mathbf{i}) = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -S_4 - P_2 = 0; \quad S_4 = -P_2 = -20 \text{ кн}; \quad (2)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad -S_{10} + S_{11} \cos(\mathbf{S}_{11}, \mathbf{k}) = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (1) находим:

$$S_{11} \cos(\mathbf{S}_{11}, \mathbf{i}) = -S'_3 = 0; \quad S_{11} = 0.$$

Из уравнения (3) находим:

$$S_{10} = S_{11} \cos(\mathbf{S}_{11}, \mathbf{k}) = 0; \quad S_{10} = 0.$$

Узел D

$$\sum X_i = 0; \quad S'_1 + S'_5 \cos(\mathbf{S}'_5, \mathbf{i}) + S_7 \cos(\mathbf{S}_7, \mathbf{i}) = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad S'_4 + S'_5 \cos(\mathbf{S}'_5, \mathbf{j}) + S_9 \cos(\mathbf{S}_9, \mathbf{j}) = 0; \quad (2)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad -S_8 + S_7 \cos(\mathbf{S}_7, \mathbf{k}) + S_9 \cos(\mathbf{S}_9, \mathbf{k}) = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (1) находим:

$$S_7 \cos(\mathbf{S}_7, \mathbf{i}) = -S'_1 - S'_5 \cos(\mathbf{S}'_5, \mathbf{i}) = 0; \quad S_7 = 0.$$

Из уравнения (2) находим:

$$S_9 = \frac{-S'_4 - S'_5 \cos(\mathbf{S}'_5, \mathbf{j})}{\cos(\mathbf{S}_9, \mathbf{j})}.$$

Так как

$$S_5 = 0 \text{ и } S_4 = -20 \text{ кн,}$$

а

$$\cos(\mathbf{S}_9, \mathbf{j}) = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,8,$$

то

$$S_9 = -\frac{S'_4}{\cos(\mathbf{S}_9, \mathbf{j})} = \frac{20}{0,8} = 25 \text{ кн.}$$

Из уравнения (3) находим

$$S_8 = S_7 \cos(\mathbf{S}_7, \mathbf{k}) + S_9 \cos(\mathbf{S}_9, \mathbf{k}).$$

Так как

$$S_7 = 0,$$

а

$$\cos(\mathbf{S}_9, \mathbf{k}) = -\frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -0,6;$$

то

$$S_8 = S_9 \cos(\mathbf{S}_9, \mathbf{k}) = -25 \cdot 0,6 = -15 \text{ кн.}$$

Таблица 2

Таблица усилий

| Стержни | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-----------------|---|---|---|-----|---|---|---|-----|----|----|----|-----|
| Усилие S , кн | 0 | 0 | 0 | -20 | 0 | 0 | 0 | -15 | 25 | 0 | 0 | -40 |

Основываясь на результатах расчета, можно установить следующее:

1. Если в незагруженном узле фермы сходятся три стержня, не лежащих в одной плоскости, то усилия в каждом из этих стержней равны нулю (узел A , стержни 1, 2 и 6).

2. Если в некотором узле фермы все внешние силы и все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости, то усилие в стержне, не лежащем в этой плоскости, равно нулю (узел C , стержень 11 при $S'_3 = 0$).

Эти соображения, дающие возможность определить без вычислений стержни с нулевыми усилиями, значительно упрощают определение усилий в стержнях пространственных ферм.

ГЛАВА VII

ТЕОРИЯ ПАР СИЛ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 40. Момент пары сил

Числовое значение момента пары сил на плоскости равно произведению одной из сил пары на ее плечо, а знак момента определяется направлением, в котором пара сил стремится вращать плоскость.

В пространстве направление вращения, вызываемого парой сил в плоскости ее действия, не характеризуется знаком ее момента, так как смотря на плоскость действия пары сил с различных ее сторон, можно видеть одну и ту же пару стремящейся вращать плоскость в различных направлениях. Момент пары сил в пространстве рассматривают как вектор (рис. 104а и б), направленный по перпендикуляру к плоскости заданной пары сил в такую сторону, чтобы, смотря

навстречу этому вектору, видеть пару стремящейся вращать плоскость против движения часовой стрелки. Этот вектор может быть приложен в любой точке плоскости действия пары, так как пару в этой плоскости можно переносить.

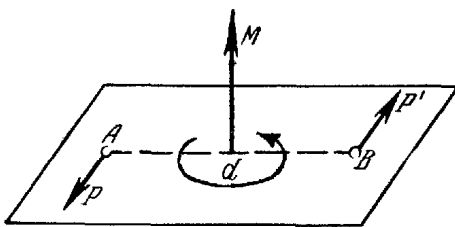


Рис. 104а.

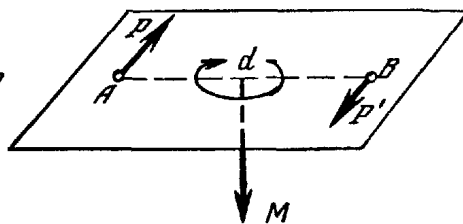


Рис. 104б.

Модуль вектора момента равен произведению одной из сил пары на ее плечо:

$$M = Pd.$$

Таким образом, вектор момента определяет не только числовое значение момента, а также плоскость действия пары сил и направление, в котором пара стремится вращать эту плоскость.

§ 41. Теорема о возможности переноса пары сил в любую плоскость, параллельную плоскости действия пары

Заданную пару сил, не изменяя ее действия на твердое тело, можно перенести в любую плоскость, параллельную плоскости действия этой пары.

Положим, что к некоторому твердому телу приложена пара сил P, P' с плечом AB , расположенная в плоскости I .

Проведем плоскость II , параллельную плоскости I , и возьмем в этой плоскости отрезок DC , равный и параллельный отрезку AB , и приложим к концам этого отрезка по две взаимно уравновешивающиеся силы, равные по модулю и параллельные силам рассматриваемой пары (рис. 105а):

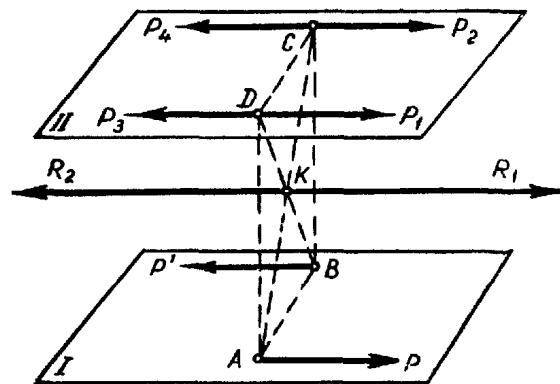


Рис. 105а.

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P.$$

Сложим силу P , приложенную в точке A , с силой P_2 , приложенной в точке C . Их равнодействующая $R_1 = P + P_2$, приложена в точке K , делящей отрезок AC пополам, т. е. в точке пересечения

диагоналей параллелограмма $ABCD$. Сложив силу P' , приложенную в точке B , с силой P_3 , приложенной в точке D , получим их равнодействующую $R_2 = P' + P_3$, которая также приложена в точке K .

Силы R_1 и R_2 , как равные по модулю и направленные по одной прямой в противоположные стороны, взаимно уравновешиваются. Остаются силы P_1 и P_4 , составляющие пару сил с плечом DC , расположенную в плоскости II , параллельную плоскости I . Эта пара сил, эквивалентная заданной паре сил, стремится вращать плоскость II в том же направлении, в котором стремится вращать плоскость I заданная пара сил, а момент эквивалентной пары сил численно равен моменту заданной пары сил:

$$M_2 = M_1 = Pd.$$

Таким образом, пару сил можно переносить из одной плоскости в другую, параллельную ей плоскость.

§ 42. Теорема об эквивалентных парах

Пары сил эквивалентны, если их моменты геометрически равны.

Положим, что даны две пары сил, лежащие в различных плоскостях и имеющие геометрические равные моменты $M_1 = M_2$. Докажем, что эти пары эквивалентны.

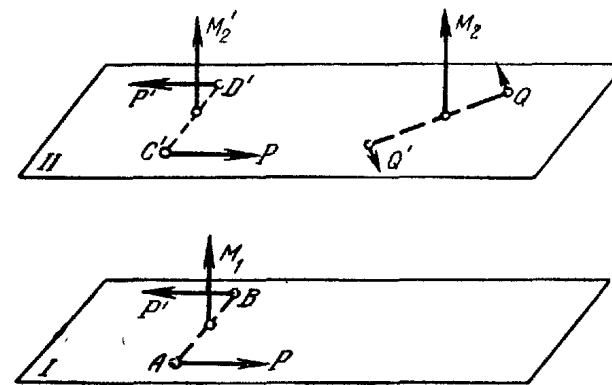


Рис. 105б.

Так как моменты M_1 и M_2 пар P, P' и Q, Q' геометрически равны, т. е. не только равны по модулю, но и совпадают по направлению, то плоскость I действия пары P, P' и плоскость II действия пары Q, Q' параллельны, и направления, в которых пары сил стремятся вращать эти плоскости, совпадают (рис. 105б). Согласно предыдущей теореме, пару сил P, P' с плечом AB в плоскости I

можно заменить эквивалентной ей такой же парой сил P, P' с плечом $C'D' = AB$ в плоскости II с моментом

$$M'_2 = M_1.$$

Согласно § 15, полученная пара сил эквивалентна паре Q, Q' в той же плоскости II , так как

$$M'_2 = M_1 = M_2.$$

Таким образом, пара сил P, P' в плоскости I эквивалентна паре Q, Q' в плоскости II .

Из доказанной теоремы следует, что *момент пары сил является свободным вектором*, т. е. его можно переносить в любую точку пространства, не изменяя его модуля и направления.

§ 43. Сложение пар сил в пространстве. Условие равновесия пар

Рассмотрим сложение двух пар, расположенных в пересекающихся плоскостях и докажем следующую теорему:

Геометрическая сумма моментов составляющих пар равна моменту эквивалентной им пары сил.

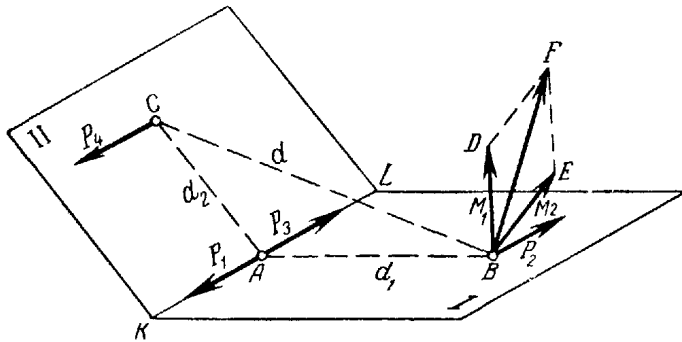


Рис. 106.

Пусть требуется сложить две пары сил, расположенные в пересекающихся плоскостях I и II , имеющие моменты M_1 и M_2 (рис. 106).

Выбрав силы этих пар равными по модулю

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P,$$

определим плечи этих пар:

$$d_1 = \frac{M_1}{P} \quad \text{и} \quad d_2 = \frac{M_2}{P}.$$

Расположим эти пары таким образом, чтобы силы P_1 и P_3 были направлены по линии пересечения плоскостей KL в противоположные стороны и уравнивались.

Оставшиеся силы P_2 и P_4 образуют пару сил, эквивалентную данным двум парам. Эта пара сил имеет плечо $BC = d$ и момент, перпендикулярный к плоскости пары, равный по модулю $M = Pd$.

Покажем, что геометрическая сумма моментов составляющих пар равна моменту эквивалентной пары. Так как момент пары сил является свободным вектором, перенесем моменты составляющих пар M_1 и M_2 в точку B и сложим их, построив на этих моментах параллелограмм.

Докажем, что его диагональ $\overline{BF} = M_1 + M_2$ представляет собой момент эквивалентной пары сил P_2, P_4 . Для этого необходимо доказать, что:

1) $BF = Pd$;

2) отрезок BF перпендикулярен к плоскости действия эквивалентной пары P_2, P_4 ;

3) смотря навстречу вектору \overline{BF} , можно видеть пару P_2, P_4 , стремящейся вращать плоскость, в которой она расположена, в сторону, противоположную движению часовой стрелки.

Доказательство

1. Треугольники BAC и BDF подобны, так как

$$M_1 = Pd_1; \quad M_2 = Pd_2;$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{d_1}{d_2}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{BD}{DF} = \frac{BA}{AC}$$

и $\angle BDF = \angle BAC$, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{BF}{BD} = \frac{BC}{BA}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{BF}{M_1} = \frac{d}{d_1},$$

откуда

$$BF = M_1 \frac{d}{d_1} = Pd_1 \frac{d}{d_1} = Pd.$$

2. Так как вектор момента каждой пары сил перпендикулярен к плоскости действия этой пары, то:

$$M_1 \perp P_2 \quad \text{и} \quad M_2 \perp P_2,$$

а потому плоскость параллелограмма $BDFE$ перпендикулярна к силе пары P_2 и $\overline{BF} \perp P_2$.

Кроме того, $\angle DBA = 90^\circ$ и $\angle CBA = \angle FBD$, откуда $\angle CBF = 90^\circ$, т. е. $\overline{BF} \perp BC$.

Так как диагональ параллелограмма BF перпендикулярна к силе пары P_2 и к плечу пары BC , то можно утверждать, что она перпендикулярна к плоскости действия эквивалентной пары P_2, P_4 .

3. Выполнение третьего условия показано на рисунке 106. Смотри навстречу вектору \overline{BF} , можно видеть пару P_2, P_4 стремящейся вращать плоскость, в которой она расположена, против движения часовой стрелки.

Из вышеизложенного следует, что вектор $\overline{BF} = \mathbf{M}$, т. е. геометрическая сумма моментов составляющих пар равна моменту эквивалентной пары:

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}.$$

Установленное правило сложения моментов пар называется *правилом параллелограмма моментов*.

Построение параллелограмма моментов можно заменить построением треугольника моментов. Применяя построение параллелограмма или треугольника моментов, можно решить и обратную задачу, т. е. разложить любую пару сил на две составляющие пары.

Пусть требуется сложить несколько пар, расположенных произвольно в пространстве (рис. 107). Определив моменты этих пар,

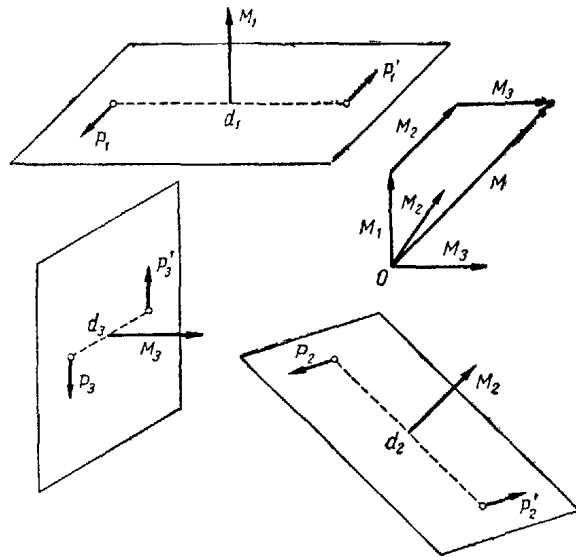


Рис. 107.

согласно § 42, их можно перенести в любую точку O пространства. Складывая последовательно моменты этих пар, можно построить многоугольник моментов пар, замыкающая сторона которого определит момент эквивалентной им пары сил.

На рис. 107 показано построение многоугольника моментов при сложении трех пар.

Момент пары сил, эквивалентной данной системе пар в пространстве, равен геометрической сумме моментов составляющих пар.

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_n \quad \text{или} \quad \mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i. \quad (43.1)$$

Если момент эквивалентной пары сил равен нулю, то пары уравновешиваются

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i = 0. \quad (43.2)$$

Таким образом, условие равновесия пар сил, расположенных произвольно в пространстве, можно сформулировать так:

Пары сил, расположенные произвольно в пространстве, уравновешиваются в том случае, если геометрическая сумма их моментов равна нулю.

ГЛАВА VIII

МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ И ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

§ 44. Момент силы относительно точки как векторное произведение

Момент силы относительно точки в пространстве изображается вектором, модуль которого равен произведению модуля силы на ее плечо относительно этой точки (центра момента):

$$M_O = Pd.$$

Вектор момента силы направляется перпендикулярно к плоскости, проходящей через точку O и силу \mathbf{P} , в такую сторону, чтобы, смотря навстречу этому вектору, видеть силу \mathbf{P} , стремящейся вращать эту плоскость вокруг точки O против движения часовой стрелки (рис. 108).

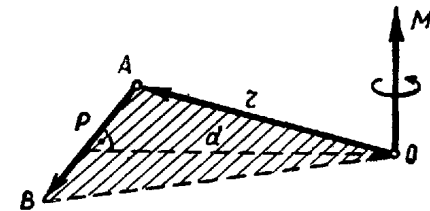


Рис. 108.

Модуль момента силы относительно точки может быть также выражен удвоенной площадью треугольника AOB :

$$M_O = 2 \Delta AOB.$$

Момент силы относительно точки равен нулю в том случае, если линия действия силы проходит через эту точку, т. е. $d = 0$.

Если из центра O в точку приложения силы провести радиус-вектор \mathbf{r} (рис. 107), то вектор момента силы можно выразить следующим векторным произведением: $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$.

Как известно из векторной алгебры, вектор, равный векторному произведению $\mathbf{r} \times \mathbf{P}$, направлен по перпендикуляру к плоскости векторов — сомножителей, т. е. к плоскости ΔAOB , в такую сторону, чтобы, смотря ему навстречу, видеть совмещение первого множителя \mathbf{r} со вторым множителем \mathbf{P} (отложенным из той же точки O) в виде поворота на угол, меньший 180° , против движения часовой стрелки, т. е. направление векторного произведения $\mathbf{r} \times \mathbf{P}$ совпадает с направлением момента \mathbf{M}_O .

Покажем, что и модуль этого векторного произведения равен модулю момента силы \mathbf{P} относительно точки O . Как известно из векторной алгебры, модуль векторного произведения равен:

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{P}| = rP \sin(\angle \mathbf{r}, \mathbf{P}),$$

но

$$r \sin(\angle \mathbf{r}, \mathbf{P}) = d,$$

а потому

$$rP \sin(\angle \mathbf{r}, \mathbf{P}) = Pd = M_O.$$

Таким образом, вектор момента силы \mathbf{M}_O относительно точки можно рассматривать как векторное произведение радиуса вектора \mathbf{r} , проведенного из центра моментов в точку приложения силы, на вектор силы \mathbf{P} .

§ 45. Момент силы относительно оси

Кроме момента силы относительно точки, при операциях с силами в пространстве широко применяют момент силы относительно оси. Чтобы вычислить момент силы \mathbf{P} относительно оси z , следует спроектировать эту силу на плоскость I , перпендикулярную к оси, а затем вычислить момент этой проекции \mathbf{P}_1 относительно точки O пересечения оси с плоскостью (рис. 109).

Таким образом, моментом силы \mathbf{P} относительно оси z называется взятое со знаком плюс или минус произведение модуля проекции \mathbf{P}_1 силы \mathbf{P} на плоскость, перпендикулярную к оси, на ее плечо d_1 относительно точки O пересечения оси с плоскостью:

$$M_z = \pm P_1 d_1.$$

Момент силы относительно оси считается положительным, если, смотря навстречу оси z , можно видеть проекцию силы \mathbf{P} , стремящейся вращать плоскость I вокруг оси z против движения часовой стрелки.

Момент силы относительно оси изображается отрезком, отложенным по оси z от точки O в положительном направлении, если $M_z > 0$, и в отрицательном, если $M_z < 0$.

Значение момента силы относительно оси может быть также выражено удвоенной площадью треугольника A_1OB_1 :

$$M_z = \pm 2 \triangle A_1OB_1.$$

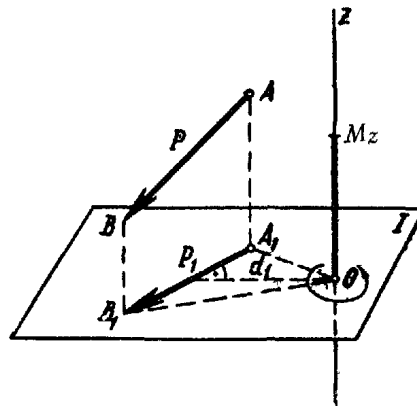


Рис. 109.

Момент силы относительно оси равен нулю в двух случаях:
1) если $P_1 = 0$, т. е. линия действия силы параллельна оси;
2) если $d_1 = 0$, т. е. линия действия силы пересекает ось.

§ 46. Зависимость между моментом силы относительно точки и моментом силы относительно оси, проходящей через эту точку

Установим зависимость между моментом силы относительно точки и моментом силы относительно оси, проходящей через эту точку (рис. 110).

В § 44 и 45 установлено:

$$M_O = 2 \triangle AOB$$

и

$$M_z = 2 \triangle A_1OB_1.$$

Так как треугольник A_1OB_1 является проекцией треугольника AOB на плоскость I , перпендикулярную к оси z , то его площадь равна

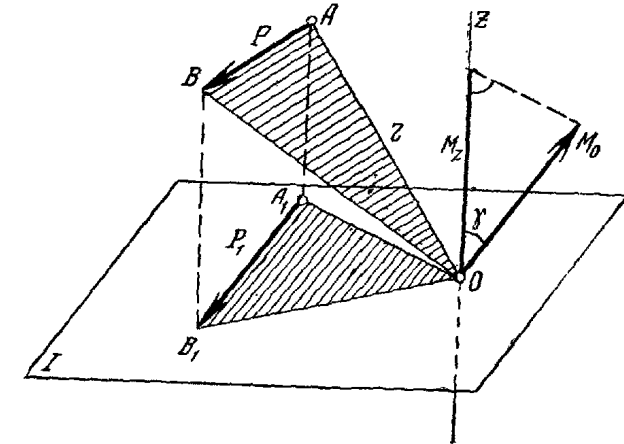


Рис. 110.

площади треугольника AOB , умноженной на косинус угла между этими плоскостями.

Известно, что угол между плоскостью треугольника AOB и плоскостью I равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям, т. е. углу между моментом \mathbf{M}_O и осью z .

Поэтому

$$\triangle A_1OB_1 = \triangle AOB \cos \gamma.$$

Умножив обе части этого равенства на два, получим

$$2 \triangle A_1OB_1 = 2 \triangle AOB \cos \gamma$$

или

$$M_z = M_O \cos \gamma = M_O \cos(\angle \mathbf{M}_O, \mathbf{k}). \quad (45.1)$$

Проекция момента силы относительно точки на ось, проходящую через эту точку, равна моменту силы относительно оси.

Если сила расположена в плоскости, перпендикулярной к оси, то

$$\cos \gamma = \pm 1 \quad \text{и} \quad M_z = \pm M_0.$$

§ 47. Аналитические выражения моментов силы относительно координатных осей

Возьмем три взаимно перпендикулярные координатные оси x , y , z , которым соответствуют орты i , j , k .

Момент M_0 силы P относительно начала координат, как известно из § 44, выражается формулой:

$$M_0 = r \times P,$$

где r — радиус-вектор точки A приложения силы относительно начала координат (рис. 111).

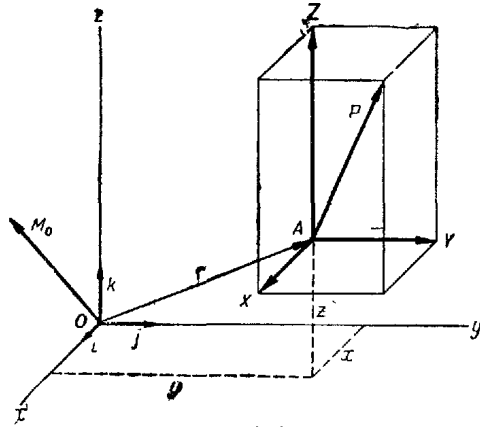


Рис. 111.

Разложим вектор M_0 на составляющие по осям координат:

$$M_0 = iM_x + jM_y + kM_z,$$

где M_x , M_y , M_z — проекции M_0 на оси координат.

Из векторной алгебры известно, что векторное произведение $r \times P$ можно представить определителем:

$$r \times P = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix},$$

где x , y , z — проекции вектора r , а X , Y , Z — проекции вектора P на оси координат.

Приравнявая значения M_0 и определителя, разложенного по элементам первой строки, получим

$$iM_x + jM_y + kM_z = i(yZ - zY) + j(zX - xZ) + k(xY - yX).$$

Сопоставляя левые и правые части этого равенства, находим проекции момента M_0 на оси координат, равные, согласно § 46, моментам силы P относительно этих осей.

$$\left. \begin{aligned} M_x &= yZ - zY, \\ M_y &= zX - xZ, \\ M_z &= xY - yX. \end{aligned} \right\} \quad (47.1)$$

Формулы (47.1) называются *аналитическими выражениями моментов силы относительно координатных осей*.

§ 48. Главные моменты системы сил относительно точки и относительно оси

Если имеется система сил P_1, P_2, \dots, P_n , произвольно расположенных в пространстве, то можно определить моменты всех сил относительно произвольной точки O :

$$M_{10} = r_1 \times P_1; \quad M_{20} = r_2 \times P_2; \quad \dots; \quad M_{n0} = r_n \times P_n.$$

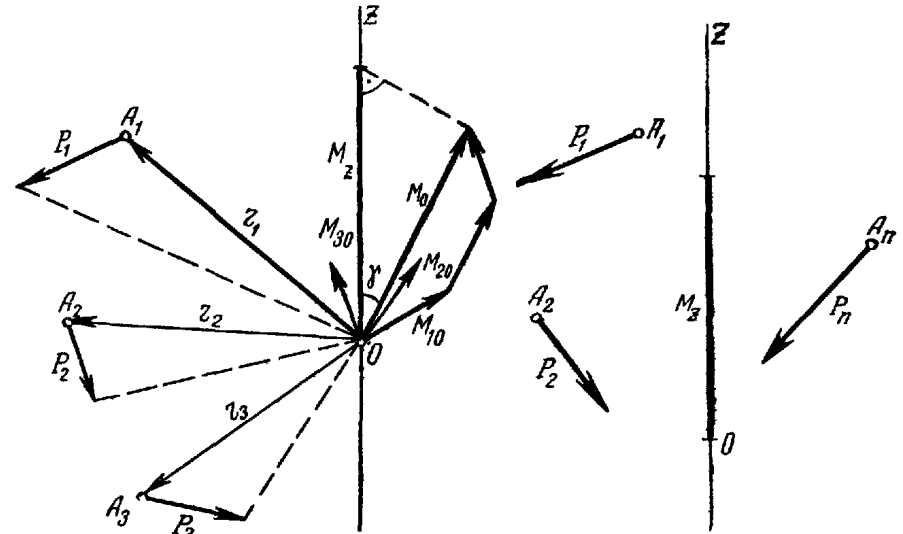


Рис. 112.

Рис. 113.

Построив в точке O многоугольник этих моментов, можно найти их геометрическую сумму.

Момент, равный геометрической сумме моментов всех заданных сил относительно точки O , называется *главным мо-*

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{1O} + \mathbf{M}_{2O} + \dots + \mathbf{M}_{nO}. \quad (48.1)$$

На рис. 112 показано определение главного момента трех сил \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 и \mathbf{P}_3 относительно точки O .

Если заданы силы \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , ..., \mathbf{P}_n , произвольно расположенные в пространстве (рис. 113), то можно определить моменты всех этих сил относительно произвольной оси z :

$$M_{1z}, M_{2z}, \dots, M_{nz}.$$

Момент, равный алгебраической сумме моментов всех заданных сил относительно оси z , называется главным моментом системы сил относительно оси z :

$$M_z = M_{1z} + M_{2z} + \dots + M_{nz}. \quad (48.2)$$

Главный момент системы сил относительно оси изображается отрезком, отложенным по оси z от любой ее точки O в положительном направлении, если $M_z > 0$, и в отрицательном, если $M_z < 0$.

§ 49. Зависимость между главными моментами системы сил относительно точки и оси, проходящей через эту точку

На рис. 112 изображен многоугольник моментов сил \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 и \mathbf{P}_3 относительно точки O .

Проведем через эту точку произвольную ось z и спроектируем на эту ось главный момент \mathbf{M}_O , а также моменты \mathbf{M}_{1O} , \mathbf{M}_{2O} , \mathbf{M}_{3O} ; получим

$$M_O \cos(\mathbf{M}_O, z) = M_{1O} \cos(\mathbf{M}_{1O}, z) + M_{2O} \cos(\mathbf{M}_{2O}, z) + M_{3O} \cos(\mathbf{M}_{3O}, z).$$

Согласно § 46

$$M_{1O} \cos(\mathbf{M}_{1O}, z) = M_{1z}; \quad M_{2O} \cos(\mathbf{M}_{2O}, z) = M_{2z};$$

$$M_{3O} \cos(\mathbf{M}_{3O}, z) = M_{3z}.$$

Тогда

$$M_O \cos(\mathbf{M}_O, z) = M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} = M_z.$$

Распространяя эту зависимость на любое число сил, получаем

$$M_O \cos(\mathbf{M}_O, z) = \sum M_{iz} = M_z. \quad (49.1)$$

Таким образом, проекция главного момента системы сил относительно некоторой точки на ось, проходящую через эту точку, равна главному моменту заданной системы сил относительно этой оси.

1. Возможно ли равновесие трех сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости?
2. Перечислите теоремы о парах сил в пространстве.
3. Каким свойством обладает момент пары сил в пространстве?
4. Чем различаются условия равновесия пар сил на плоскости и в пространстве?
5. Какой третьей парой сил можно уравновесить две пары сил, лежащих в пересекающихся плоскостях?
6. Покажите, что момент силы относительно точки можно рассматривать как векторное произведение радиуса-вектора точки приложения силы на вектор силы.
7. Как вычисляется момент силы относительно оси и в каких случаях он равен нулю?
8. Выразите моменты силы относительно координатных осей через проекции силы на эти оси.
9. Какая зависимость существует между моментами силы относительно точки и оси, проходящей через эту точку?
10. При каких условиях модуль момента силы относительно точки равен моменту силы относительно оси, проходящей через эту точку?
11. Как должна быть направлена сила, приложенная в заданной точке пространства, чтобы величина ее момента относительно заданной оси была наибольшей?
12. Чему равна проекция главного момента системы сил относительно точки на ось, проходящую через эту точку?

ГЛАВА IX

СИСТЕМА СИЛ, ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 50. Приведение силы к заданному центру

При сложении сил, произвольно расположенных в пространстве, так же как и в плоскости, пользуются методом приведения сил к заданному центру, предложенным Пуансо.

Пусть задана сила \mathbf{P} , приложенная в точке A , и произвольная точка O , принятая за центр приведения (рис. 114).

Приложим в точке O две уравновешивающиеся силы \mathbf{P}' и \mathbf{P}'' , равные и параллельные силе \mathbf{P} , не изменяющие кинематического состояния тела. Полученную систему трех сил можно рассматривать как совокупность силы \mathbf{P}'' , приложенной в центре приведения O , и присоединенной пары сил \mathbf{P} , \mathbf{P}' .

Опустив из точки O перпендикуляр на линию действия силы \mathbf{P} , получим плечо этой пары и найдем модуль ее момента

$$M = Pd.$$

Вектор момента присоединенной пары направлен перпендикулярно к плоскости пары \mathbf{P} , \mathbf{P}' , проходящей через точку O и заданную силу \mathbf{P} , в ту сторону, с которой пара представляется стремящейся вращать плоскость против движения часовой стрелки.

Момент пары сил является свободным вектором и может быть приложен в любой точке пространства. Приложив его в центре приведения O , убедимся в том, что вектор момента присоединенной пары сил совпадает по направлению с вектором момента силы P относительно центра приведения и равен ему по модулю, т. е.

$$M = M_0 = r \times P.$$

Из изложенного следует, что при приведении силы P к некоторому центру O получаем в этом центре силу P'' , геометрически равную заданной силе P , и присоединенную пару сил с моментом, геометрически равным моменту этой силы относительно центра приведения.

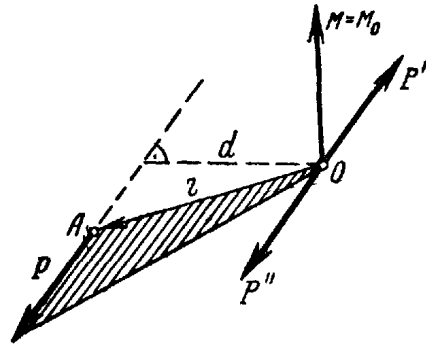


Рис. 114.

§ 51. Сложение сил, произвольно расположенных в пространстве

Для сложения системы сил P_1, P_2 и P_3 , произвольно расположенных в пространстве, воспользуемся методом приведения сил к заданному центру.

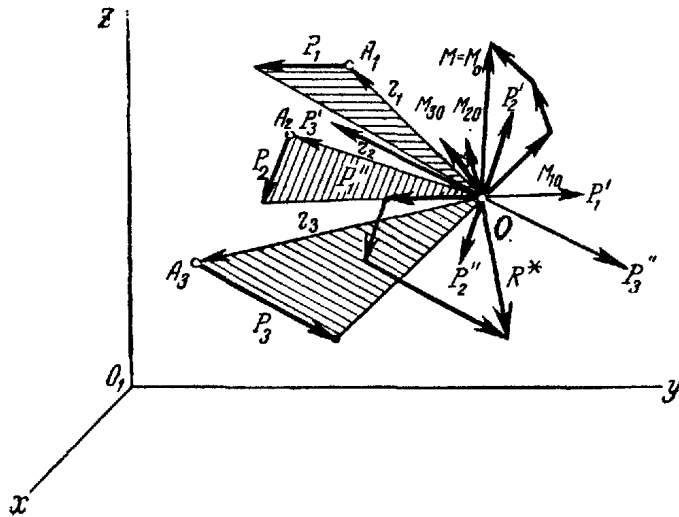


Рис. 115а.

Приведя все силы к некоторому центру O , получим три силы P_1'', P_2'' и P_3'' , приложенные в точке O , и три присоединенные пары P_1, P_1', P_2, P_2' и P_3, P_3' (рис. 115а).

Складывая силы P_1'', P_2'' и P_3'' , приложенные к точке O , получаем их равнодействующую R^* , которая приложена в точке O и равна главному вектору заданной системы сил:

$$R^* = P_1 + P_2 + P_3.$$

Складывая присоединенные пары, находим эквивалентную пару сил.

Момент каждой присоединенной пары равен моменту соответствующей силы относительно центра приведения, т. е.

$$M_1 = M_{1O} = r_1 \times P_1; \quad M_2 = M_{2O} = r_2 \times P_2; \quad M_3 = M_{3O} = r_3 \times P_3.$$

Момент пары сил, эквивалентной трем присоединенным парам, равен геометрической сумме моментов этих пар:

$$M = M_1 + M_2 + M_3 = M_{1O} + M_{2O} + M_{3O} = M_0,$$

т. е. момент полученной пары равен главному моменту трех заданных сил относительно центра приведения. Распространяя полученные результаты на любое число сил, произвольно расположенных в пространстве, получим:

$$R^* = \sum P_i; \quad M = M_0 = \sum M_{iO}.$$

Полученный результат можно сформулировать следующим образом: *силы, произвольно расположенные в пространстве, всегда могут быть приведены к одной силе, равной их главному вектору, приложенной в центре приведения, и к паре сил с моментом, равным главному моменту всех сил относительно центра приведения.*

§ 52. Вычисление главного вектора и главного момента

Для вычисления главного вектора R^* и главного момента M_0 воспользуемся методом проекций (рис. 115б).

Известно, что $R^* = P_1 + P_2 + \dots + P_n$.

Обозначив X, Y и Z , проекции главного вектора на оси координат, получим:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \\ Z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n, \end{aligned}$$

где $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n, Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ — проекции сил P_1, P_2, \dots, P_n соответственно на оси x, y, z .

Модуль и направление главного вектора R^* определяются по формулам:

$$R^* = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

$$\cos(R^*, \mathbf{i}) = \frac{X}{R^*}; \quad \cos(R^*, \mathbf{j}) = \frac{Y}{R^*}; \quad \cos(R^*, \mathbf{k}) = \frac{Z}{R^*}. \quad (52.1)$$

Главный момент системы сил:

$$M_O = M_{1O} + M_{2O} + \dots + M_{nO}.$$

Его проекции M_x, M_y, M_z на оси x, y, z , проведенные через точку O , равны главным моментам системы сил относительно этих осей (§ 49):

$$M_x = M_{1x} + M_{2x} + \dots + M_{nx},$$

$$M_y = M_{1y} + M_{2y} + \dots + M_{ny},$$

$$M_z = M_{1z} + M_{2z} + \dots + M_{nz}.$$

Модуль и направление главного момента M_O определяются по формулам:

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2};$$

$$\cos(M_O, \mathbf{i}) = \frac{M_x}{M_O};$$

$$\cos(M_O, \mathbf{j}) = \frac{M_y}{M_O}; \quad (52.2)$$

$$\cos(M_O, \mathbf{k}) = \frac{M_z}{M_O}.$$

Момент каждой силы P_i можно вычислить непосредственно или по формулам § 47:

$$M_{ix} = y_i z_i - z_i y_i,$$

$$M_{iy} = z_i x_i - x_i z_i,$$

$$M_{iz} = x_i y_i - y_i x_i.$$

Аналогично главные моменты M_x, M_y, M_z можно определить по формулам:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum (y_i z_i - z_i y_i), \\ M_y &= \sum (z_i x_i - x_i z_i), \\ M_z &= \sum (x_i y_i - y_i x_i). \end{aligned} \right\} \quad (52.3)$$

§ 53. Условия и уравнения равновесия сил, произвольно расположенных в пространстве

Случаю равновесия сил, произвольно расположенных в пространстве, соответствуют два условия равновесия:

$$M = M_O = 0 \text{ и } R^* = 0.$$

Модули главного момента M_O и главного вектора R^* рассматриваемой системы сил определяются по формулам (52.1) и (52.2):

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}; \quad R^* = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Они обращаются в нуль только при следующих условиях:

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0, \quad X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

которым соответствуют шесть уравнений равновесия сил, расположенных произвольно в пространстве:

$$\left. \begin{aligned} M_{1x} + M_{2x} + \dots + M_{nx} &= 0 \text{ или } \sum M_{ix} = 0, \\ M_{1y} + M_{2y} + \dots + M_{ny} &= 0 \text{ или } \sum M_{iy} = 0, \\ M_{1z} + M_{2z} + \dots + M_{nz} &= 0 \text{ или } \sum M_{iz} = 0, \\ X_1 + X_2 + \dots + X_n &= 0 \text{ или } \sum X_i = 0, \\ Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n &= 0 \text{ или } \sum Y_i = 0, \\ Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n &= 0 \text{ или } \sum Z_i = 0. \end{aligned} \right\} \quad (53.1)$$

Первые три уравнения называются уравнениями моментов сил относительно осей координат, а последние — уравнениями проекций сил на оси.

При помощи формул (52.3) можно представить уравнения моментов в виде:

$$\sum (y_i z_i - z_i y_i) = 0; \quad \sum (z_i x_i - x_i z_i) = 0; \quad \sum (x_i y_i - y_i x_i) = 0, \quad (53.2)$$

где x_i, y_i, z_i — координаты точки приложения силы P_i , а X_i, Y_i, Z_i — проекции этой силы на оси координат. Оси координат могут иметь любое направление. Их направления выбирают обычно так, чтобы каждая конкретная задача имела наиболее рациональное решение.

Таким образом, задача на равновесие сил, произвольно расположенных в пространстве и приложенных к одному телу, статически определена, если число неизвестных в ней не больше шести. Для системы сил, приложенных к совокупности двух тел, задача статически определена при числе неизвестных не больше двенадцати и т. д.

§ 54. Приведение системы сил к паре сил

В том случае, когда главный вектор R^* системы сил оказывается равным нулю, а главный момент M_O не равен нулю, силы приводятся к паре сил.

Момент этой пары сил равен главному моменту заданных сил относительно центра приведения:

$$M = M_O = M_{1O} + M_{2O} + \dots + M_{nO}.$$

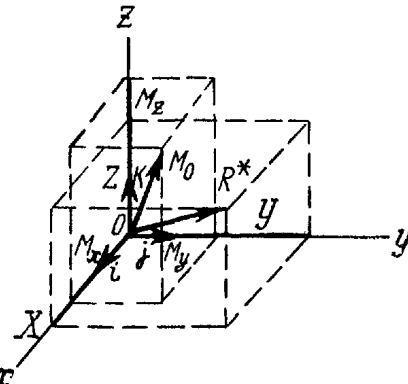


Рис. 1156.

Следует учесть, что если силы приводятся к паре сил, то главный момент заданной системы сил относительно любой точки пространства будет неизменным как по модулю, так и по направлению.

Постоянство значения главного момента некоторой системы сил относительно произвольно выбранных точек пространства является признаком того, что эта система сил приводится к паре сил*.

§ 55. Приведение системы сил к равнодействующей силе

В том случае, если главный вектор системы сил R^* не равен нулю, а главный момент M_O или равен нулю, или направлен перпендикулярно к главному вектору, заданная система сил приводится к равнодействующей силе.

Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

В первом случае, когда $R^* \neq 0$, а $M_O = 0$, силы приводятся к равнодействующей силе, линия действия которой проходит через центр приведения O .

Действительно, в этом случае сила R^* заменяет собой заданную систему сил, т. е. является ее равнодействующей.

Рассмотрим второй случай, когда $R^* \neq 0$, $M_O \neq 0$ и $M_O \perp R^*$ (рис. 116). Пусть после приведения системы сил к центру O получена сила R^* , приложенная в этом центре и равная главному вектору сил, и пара сил, момент которой M равен главному моменту M_O всех сил относительно центра приведения, причем $M_O \perp R^*$.

Выберем силы этой пары R' и R равными по модулю главному вектору R^* , т. е. $R = R' = R^*$. Тогда плечо этой пары следует взять равным $OK = \frac{M}{R^*}$.

Проведем через точку O плоскость I , перпендикулярную к моменту пары сил M . Пара сил R' , R должна находиться в этой плоскости. Расположим эту пару так, чтобы одна из сил пары R' была приложена в точке O и направлена противоположно силе R^* . Восставим в плоскости I в точке O перпендикуляр к линии действия силы R^* , и в точке K на расстоянии $OK = \frac{M}{R^*}$ от точки O приложим вторую силу пары R .

Отрезок OK откладываем в такую сторону от точки O , чтобы, смотря навстречу вектору момента M , видеть пару стремящуюся

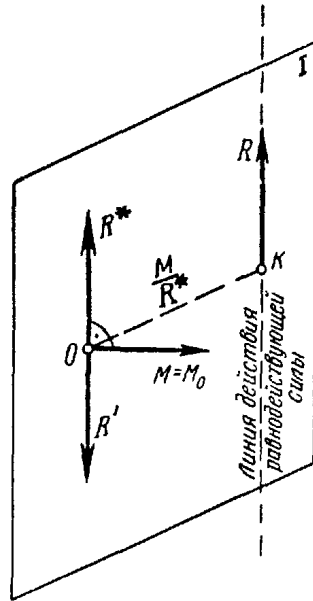


Рис. 116.

вращать свою плоскость против движения часовой стрелки. Тогда силы R^* и R' , приложенные в точке O , уравниваются, а сила R пары, приложенная в точке K , заменит собой заданную систему сил, т. е. будет ее равнодействующей.

Прямая, совпадающая с линией действия этой силы, является линией действия равнодействующей силы.

Рис. 116 показывает различие между равнодействующей силой R и силой R^* , полученной при приведении сил к центру O .

Равнодействующая R системы сил, приложенная в точке K , имеющая определенную линию действия, эквивалентна заданной системе сил, т. е. заменяет собой эту систему.

Сила же R^* в точке O заменяет заданную систему сил только в совокупности с парой сил с моментом $M = M_O$.

Силу R^* можно приложить в любой точке тела, к которой приведены силы. От положения этой точки зависит только модуль и направление главного момента M_O .

§ 56. Теорема о моменте равнодействующей силы (теорема Вариньона)

Зависимость между моментами равнодействующей и составляющих сил устанавливается следующей теоремой:

Момент равнодействующей относительно любой точки равен геометрической сумме моментов составляющих сил относительно этой точки, а момент равнодействующей силы относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно этой оси.

Установим сначала зависимость между моментом равнодействующей и моментами составляющих сил относительно какой-либо точки. Определим модуль момента $M_O(R)$ равнодействующей силы, приложенной в точке K и расположенной в плоскости I , относительно центра приведения O (рис. 117), который является произвольной точкой.

Учитывая, что $OK = \frac{M}{R^*}$ и $R = R^*$, имеем:

$$M_O(R) = R \cdot OK = R^* \cdot \frac{M}{R^*} = M = M_O,$$

т. е. момент равнодействующей равен по модулю главному моменту системы сил.

Направление момента равнодействующей $M_O(R)$, перпендикулярное к плоскости I , очевидно, совпадает с направлением главного момента сил M_O относительно центра приведения O .

Следовательно, момент равнодействующей силы $M_O(R)$ геометрически равен главному моменту M_O , а поэтому

$$M_O(R) = M_O = M_{1O} + M_{2O} + \dots + M_{nO}, \quad (56.1)$$

* Это следует из формулы (58.2), § 58.

т. е. момент равнодействующей относительно произвольного центра приведения равен геометрической сумме моментов составляющих сил относительно этого же центра.

Установим теперь зависимость между моментом равнодействующей силы и моментами составляющих сил относительно некоторой оси.

Проведем через центр приведения O произвольную ось z и определим момент равнодействующей силы $M_z(\mathbf{R})$ относительно оси z как проекцию ее момента $\mathbf{M}_O(\mathbf{R})$ относительно точки O на эту ось (рис. 117).

Согласно § 46, получим:

$$M_z(\mathbf{R}) = M_O(\mathbf{R}) \cos \gamma,$$

где γ — угол между осью z и направлением вектора $\mathbf{M}_O(\mathbf{R})$.

В этом выражении $\mathbf{M}_O(\mathbf{R})$ заменим геометрически равным ему главным моментом \mathbf{M}_O , проекция которого на ось z , проходящую через точку O , равна главному моменту сил относительно этой оси (§ 49); тогда получим:

$$M_z(\mathbf{R}) = M_O \cos \gamma = M_z.$$

Известно, что главный момент системы сил M_z относительно оси z равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно этой оси, а поэтому

$$M_z(\mathbf{R}) = M_z = M_{1z} + M_{2z} + \dots + M_{nz}, \quad (56.2)$$

т. е. момент равнодействующей силы относительно произвольной оси z равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно этой оси.

§ 57. Приведение произвольной системы сил к двум скрещивающимся силам или к силовому винту (динаме)

В том случае, если главный вектор системы сил \mathbf{R}^* и ее главный момент \mathbf{M}_O относительно центра приведения O не равны нулю и не перпендикулярны между собой, т. е. $\mathbf{R}^* \neq 0$, $\mathbf{M}_O \neq 0$ и \mathbf{R}^* не перпендикулярно \mathbf{M}_O , заданную систему сил можно привести или к двум скрещивающимся силам или к силовому винту (динаме).

Рассмотрим сначала приведение системы сил к двум скрещивающимся силам (рис. 118). Пусть после приведения системы сил к некоторому центру O получена сила \mathbf{R}^* , равная главному вектору,

приложенная в этом центре, и пара сил, момент которой $\mathbf{M} = \mathbf{M}_O$ не перпендикулярен \mathbf{R}^* .

Проведем плоскость II , перпендикулярную к моменту пары сил \mathbf{M} , и выбрав плечо пары d , а силы пары $Q = Q' = \frac{M}{d}$, расположим

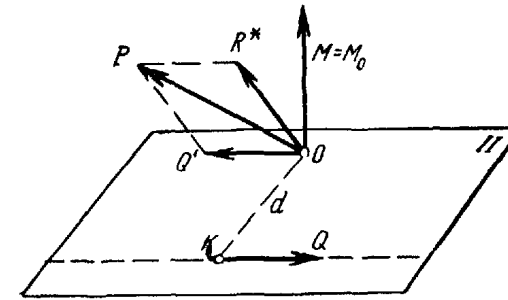


Рис. 118.

в этой плоскости пару сил Q, Q' , эквивалентную системе присоединенных пар. Приложим одну из сил пары Q' в точке O , а другую силу Q — на конце отрезка OK , проведенного из точки O перпендикулярно к силе Q' . Сложив приложенные в точке O силы \mathbf{R}^* и Q' , получим новую силу \mathbf{P} , которая вместе с силой Q , приложенной в точке K , представляет собой совокупность двух скрещивающихся сил. Покажем, что в этом случае рассматриваемую систему сил можно также привести к силовому винту — динаме, представляющей собой совокупность силы и пары сил, расположенной в плоскости, перпендикулярной к линии действия этой силы.

Допустим, что в результате приведения заданной системы сил к центру O , получена в этом центре сила \mathbf{R}^* и пара сил, момент которой \mathbf{M} , равный главному моменту системы сил \mathbf{M}_O , не перпендикулярен \mathbf{R}^* (рис. 119).

Известно, что пару сил можно заменить двумя парами. Для этого разложим момент пары сил \mathbf{M} на два составляющих момента: \mathbf{M}^* , направленный по \mathbf{R}^* , и \mathbf{M}' , направленный перпендикулярно к \mathbf{R}^* :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^* + \mathbf{M}'. \quad (57.1)$$

Изобразим в плоскости I пару сил, имеющую момент \mathbf{M}' . Силы этой пары возьмем равными по модулю \mathbf{R}^* и одну из сил пары \mathbf{R}' приложим в точке O и направим противоположно главному вектору. Плечо этой пары сил

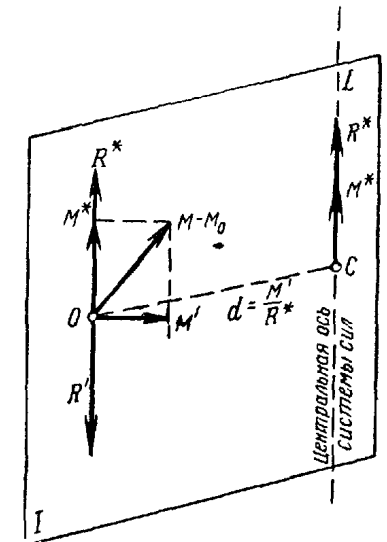


Рис. 119.

$$d = \frac{M'}{R^*}. \quad (57.2)$$

Отложим плечо $d = OC$ в плоскости I от точки O по направлению, перпендикулярному векторам R^* и M' в такую сторону, чтобы, смотря навстречу вектору момента пары M' , видеть пару сил стремящейся вращать плоскость I против движения часовой стрелки.

Две силы R^* и R' , приложенные в точке O , взаимно уравновешиваются. Остается сила R^* , приложенная в точке C , и пара сил с моментом M^* , параллельным R^* , который как свободный вектор переносим из точки O в точку C .

Прямая CL , вдоль которой направлены R^* и M^* , называется *центральной осью системы сил*.

Совокупность силы R^* и пары сил P, P' с моментом M^* , расположенной в плоскости, перпендикулярной линии действия этой силы, называют *силовым винтом*, или *динамой* (рис. 120).

Полученную совокупность силы R^* в точке C и пары сил с моментом M^* можно рассматривать как результат приведения заданной системы сил к центру C , лежащему на центральной оси. Следовательно, момент пары сил M^* равен главному моменту M_C заданной системы сил относительно точки C , лежащей на центральной оси. Совокупность силы R^* и момента пары M^* можно перенести в любую точку центральной оси, так как эта ось является линией действия силы R^* , а момент пары M^* является свободным вектором.

Отсюда следует, что главные моменты системы сил относительно *всех точек центральной оси равны M^** .

Рассмотрим изменение главного момента M_O системы сил относительно произвольной точки O при изменении положения этой точки по отношению к центральной оси.

Согласно формуле (57.1), имеем (рис. 119):

$$M = M_O = M^* + M',$$

где, согласно формуле (57.2), $M' = R^*d$.

Модуль главного момента M_O определится:

$$M_O = \sqrt{M^{*2} + M'^2} = \sqrt{M^{*2} + R^{*2}d^2}, \quad (57.3)$$

где d — расстояние от точки O до центральной оси.

Направление M_O определится углом, образованным M_O и главным вектором R^* :

$$\cos(M_O, R^*) = \frac{M^*}{M_O} = \frac{M^*}{\sqrt{M^{*2} + R^{*2}d^2}}. \quad (57.4)$$

Очевидно, что $\cos(M_O, R^*) > 0$ при $M^* > 0$, тогда $\angle(M_O, R^*) < 90^\circ$ и направление M^* совпадает с направлением R^* (рис. 119). При $\cos(M_O, R^*) < 0$: имеем $M^* < 0$ тогда $\angle(M_O, R^*) > 90^\circ$, т. е. направления M^* и R^* противоположны. В формулах (57.3) и (57.4) переменной величиной для заданной системы сил является только расстояние d .

Эти формулы показывают, что при увеличении расстояния d от точки O до центральной оси модуль главного момента M_O увеличивается, а $\angle(M_O, R^*)$ приближается к прямому углу (рис. 121). Для любой точки C , лежащей на центральной оси, $d = 0$, а потому

$$\cos(M_C, R^*) = \pm 1 \text{ и} \\ M_C = |M^*| = M_{\min}.$$

т. е. $\angle(M_C, R^*) = 0$ или π .

Полученные результаты показывают, что главный

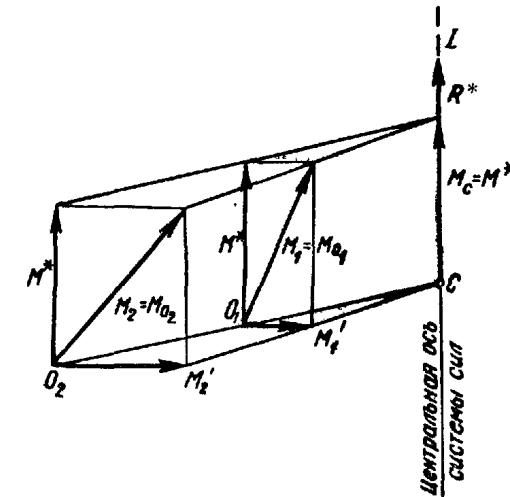


Рис. 121.

момент рассматриваемой системы сил относительно любой точки центральной оси направлен вдоль этой оси в ту или другую сторону и имеет наименьший для этой системы сил модуль, равный M^* . Таким образом, *центральная ось системы сил представляет собой геометрическое место точек пространства, относительно которых главные моменты заданной системы сил имеют наименьший модуль $M_{\min} = |M^*|$ и направлены вдоль этой оси*.

Рассмотрим точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от центральной оси, т. е. лежащие на поверхности кругового цилиндра, осью которого является центральная ось системы сил.

Согласно формулам (57.3) и (57.4), главные моменты системы сил относительно этих точек равны по модулю и составляют с образующей цилиндра одинаковый угол α (рис. 122).

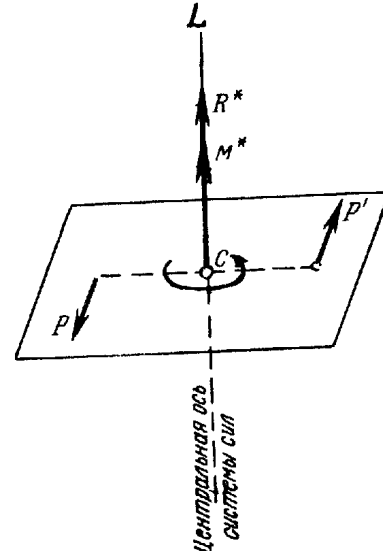


Рис. 120.

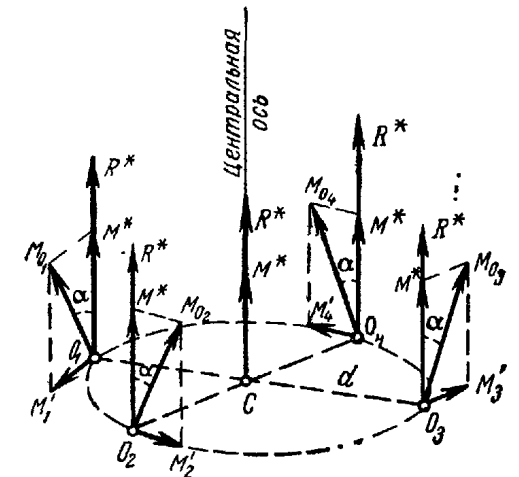


Рис. 122.

Установим формулу для вычисления алгебраического значения наименьшего главного момента заданной системы сил.

Наименьший главный момент системы сил \mathbf{M}^* равен проекции главного момента рассматриваемой системы сил \mathbf{M}_O на направление главного вектора \mathbf{R}^* (рис. 119):

$$M^* = M_O \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{R}^*). \quad (57.5)$$

Умножив обе части равенства (57.5) на R^* , получим

$$R^* M^* = R^* M_O \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{R}^*). \quad (57.6)$$

Правая часть равенства (57.6) представляет собой величину скалярного произведения \mathbf{R}^* и \mathbf{M}_O , т. е.

$$R^* M_O \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{R}^*) = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{M}_O. \quad (57.7)$$

Выражая скалярное произведение (57.7) через проекции векторов сомножителей на координатные оси, из формулы (57.6) получим

$$\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{M}^* = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{M}_O = X M_x + Y M_y + Z M_z,$$

откуда

$$M^* = \frac{X M_x + Y M_y + Z M_z}{R^*}. \quad (57.8)$$

Формула (57.8) выражает алгебраическое значение наименьшего главного момента \mathbf{M}^* через проекции \mathbf{R}^* и \mathbf{M}_O на координатные оси.

Установим при помощи формулы (57.8) аналитическое условие, при котором пространственная система сил приводится к равнодействующей.

Заданную систему сил можно привести к равнодействующей в двух случаях (§ 54): а) если $\mathbf{R}^* \neq 0$, а $M_O = 0$ и б) если $\mathbf{R}^* \neq 0$, $M_O \neq 0$ и $\mathbf{M}_O \perp \mathbf{R}^*$.

В обоих случаях $M^* = M_O \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{R}^*) = 0$. Поэтому, если система сил приводится к равнодействующей, то выполняются условия:

$$\left. \begin{array}{l} 1) X^2 + Y^2 + Z^2 \neq 0; \\ 2) X M_x + Y M_y + Z M_z = 0. \end{array} \right\} \quad (57.9)$$

Соотношения (57.9) являются аналитическими условиями приведения системы сил к равнодействующей силе.

§ 58. Влияние положения центра на результаты приведения к этому центру системы сил в пространстве.

Инварианты системы сил

Положим, что задана система сил $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$, произвольно расположенных в пространстве. Выберем в пространстве два различных центра приведения O_1 и O_2 (рис. 123).

Полученные при приведении к этим центрам силы \mathbf{R}_1^* и \mathbf{R}_2^* равны главному вектору заданных сил:

$$\mathbf{R}_1^* = \sum \mathbf{P}_i; \quad \mathbf{R}_2^* = \sum \mathbf{P}_i, \quad \text{т. е.} \quad \mathbf{R}_1^* = \mathbf{R}_2^* = \mathbf{R}^*.$$

или

$$\mathbf{R}^* = \text{const.} \quad (58.1)$$

Модуль и направление силы, равной главному вектору заданных сил \mathbf{R}^* и получаемой при приведении системы сил к некоторому центру, не зависят от положения этого центра, т. е. *главный вектор данной системы сил инвариантен по отношению к центру приведения.*

Установим зависимость между главными моментами системы сил относительно центров приведения O_1 и O_2 .

Найдем эти главные моменты (см. § 48):

$$\mathbf{M}_{O_1} = \sum \mathbf{r}_{i_1} \times \mathbf{P}_i;$$

$$\mathbf{M}_{O_2} = \sum \mathbf{r}_{i_2} \times \mathbf{P}_i,$$

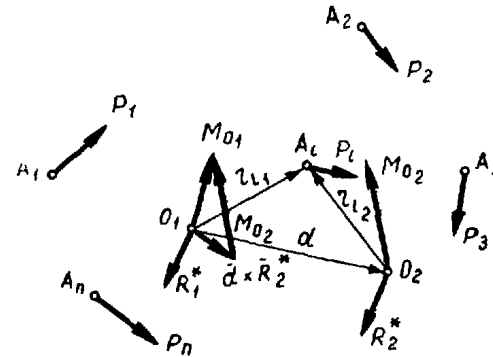


Рис. 123.

здесь \mathbf{r}_{i_1} — радиус-вектор точки приложения силы \mathbf{P}_i относительно центра приведения O_1 ;

\mathbf{r}_{i_2} — радиус-вектор точки приложения силы \mathbf{P}_i относительно центра приведения O_2 .

Проведем из центра приведения O_1 в центр O_2 радиус-вектор \mathbf{d} . Тогда

$$\mathbf{r}_{i_1} = \mathbf{d} + \mathbf{r}_{i_2},$$

$$\mathbf{r}_{i_2} = \mathbf{r}_{i_1} - \mathbf{d}.$$

Подставив значение \mathbf{r}_{i_2} в выражение, определяющее \mathbf{M}_{O_2} , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{O_2} &= \sum \mathbf{r}_{i_2} \times \mathbf{P}_i = \sum (\mathbf{r}_{i_1} - \mathbf{d}) \times \mathbf{P}_i = \sum \mathbf{r}_{i_1} \times \mathbf{P}_i - \sum \mathbf{d} \times \mathbf{P}_i = \\ &= \sum \mathbf{r}_{i_1} \times \mathbf{P}_i - \mathbf{d} \times \sum \mathbf{P}_i, \end{aligned}$$

откуда

$$\mathbf{M}_{O_2} = \mathbf{M}_{O_1} - \mathbf{d} \times \mathbf{R}^*. \quad (58.2)$$

Согласно зависимости (58.2), на рис. 123 главный момент системы сил относительно первого центра \mathbf{M}_{O_1} , представлен как сумма векторов $\mathbf{d} \times \mathbf{R}_2^*$ и \mathbf{M}_{O_2} . При этом вектор $\mathbf{d} \times \mathbf{R}_2^*$ представляет собой момент силы \mathbf{R}_2^* , приложенной в центре O_2 , относительно центра O_1 . Этот вектор направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы \mathbf{d} и \mathbf{R}_2^* , в такую сторону, чтобы, смотря навстречу

этому вектору, видеть силу R_2^* , направленной по отношению к центру O_1 против движения часовой стрелки.

Зависимость (58.2) можно сформулировать следующим образом:

Главный момент системы сил относительно второго центра приведения O_2 равен разности главного момента этих сил относительно первого центра приведения O_1 и момента силы, равной главному вектору этой системы сил, приложенной во втором центре приведения, относительно первого центра.

Из формулы (58.2) следует, что при перемещении центра приведения по прямой, имеющей направление главного вектора, главный момент заданной системы сил остается неизменным как по модулю, так и по направлению.

Действительно, если центры O_1 и O_2 лежат на прямой, параллельной главному вектору, то $\overline{O_1O_2} = \mathbf{d}$ и R^* являются параллельными векторами, а потому

$$\mathbf{d} \times R^* = 0 \quad \text{и} \quad M_{O_1} = M_{O_2}.$$

В случае, если главные моменты заданной системы сил относительно произвольно выбранных центров приведения геометрически равны между собой, то рассматриваемая система сил приводится к паре сил.

Действительно, при $M_{O_1} = M_{O_2} = \dots = M_{O_n}$ имеем $\mathbf{d} \times R^* = 0$. Так как векторное произведение $\mathbf{d} \times R^*$ равно нулю при любых значениях \mathbf{d} , то $R^* = 0$ при $M_O \neq 0$, т. е. силы приводятся к паре сил (§ 54).

Умножив скалярно обе части равенства (58.2) на главный вектор $R^* = R_1^* = R_2^*$, получим:

$$R_2^* \cdot M_{O_2} = R_1^* \cdot M_{O_1} - R_2^* \cdot (\mathbf{d} \times R_2^*).$$

Но

$$R_2^* \cdot (\mathbf{d} \times R_2^*) = 0, \quad \text{так как } R_2^* \perp (\mathbf{d} \times R_2^*),$$

поэтому $R_2^* \cdot M_{O_2} = R_1^* \cdot M_{O_1}$, т. е.

$$R^* \cdot M_O = \text{const.} \quad (58.3)$$

Полученный результат показывает, что скалярное произведение главного вектора на главный момент данной системы сил инвариантно по отношению к центру приведения.

Выразив скалярное произведение (58.3) через проекции перемножаемых векторов на координатные оси, получим

$$XM_x + YM_y + ZM_z = \text{const.}$$

Итак, для любой системы сил имеются два основных инварианта, т. е. две величины, не зависящие от положения центра приведения.

Первым (векторным) инвариантом системы сил является главный вектор системы сил, а вторым (скалярным) инвариантом является скалярное произведение главного вектора на главный момент этой системы.

Выше получена формула (57.8) для вычисления наименьшего главного момента:

$$M^* = \frac{XM_x + YM_y + ZM_z}{R^*}.$$

Так как числитель и знаменатель этой дроби инвариантны по отношению к центру приведения, то *наименьший главный момент системы сил M^* тоже инвариантен по отношению к центру приведения.* Это означает, что проекция главного момента рассматриваемой системы сил относительно любого центра на направление главного вектора есть величина постоянная, не зависящая от положения этого центра (рис. 121).

При приведении системы сил к одной из точек центральной оси получаются две инвариантные величины R^* и M^* , совокупность которых представляет собой динаму.

§ 59. Уравнения центральной оси системы сил и линии действия равнодействующей

Через произвольный центр O , после приведения к которому получены сила R^* и пара сил с моментом $M = M_O$, проведем оси координат x, y, z (рис. 124).

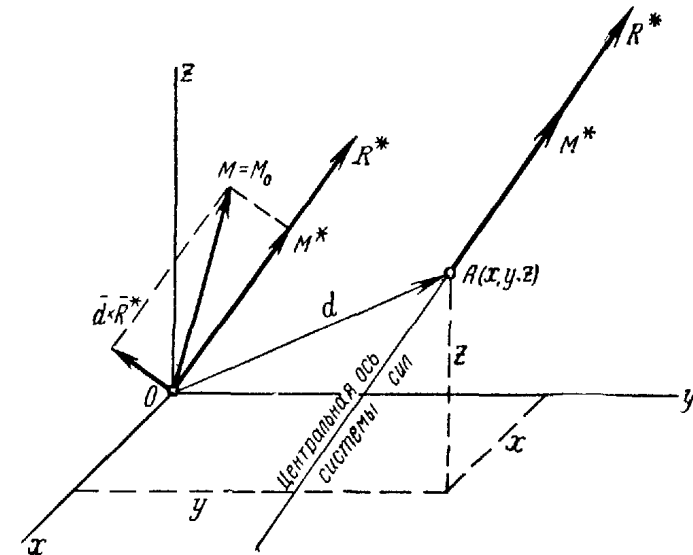


Рис. 124.

Возьмем какую-либо точку $A(x, y, z)$ на центральной оси системы сил. Как известно, главный момент относительно этой точки $M_A = M^*$ направлен по линии действия силы R^* , равной главному вектору заданных сил.

Положение центральной оси (прямой линии) в пространстве определяется двумя уравнениями с тремя переменными координатами x , y , z .

Для получения этих уравнений воспользуемся результатами, полученными в § 58.

Примем за первый центр начало координат O , а за второй центр — точку A , принадлежащую центральной оси; тогда по формуле (58.2):

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M}_O - \mathbf{d} \times \mathbf{R}^*.$$

Спроектируем векторы обеих частей этого равенства на координатные оси x , y , z .

Так как произведение $\mathbf{d} \times \mathbf{R}^*$ представляет собой момент силы \mathbf{R}^* , приложенной в точке A , относительно точки O , то проекции его на оси координат представляют собой моменты этой же силы относительно координатных осей, которые можно выразить аналитически, согласно § 47. Спроектировав, получим:

$$M_x^* = M_x - (yZ - zY),$$

$$M_y^* = M_y - (zX - xZ),$$

$$M_z^* = M_z - (xY - yX).$$

Так как \mathbf{M}^* и \mathbf{R}^* направлены по одной прямой, то одноименные их проекции пропорциональны:

$$\frac{M_x^*}{X} = \frac{M_y^*}{Y} = \frac{M_z^*}{Z} = \frac{M^*}{R^*}$$

или

$$\frac{M_x - (yZ - zY)}{X} = \frac{M_y - (zX - xZ)}{Y} = \frac{M_z - (xY - yX)}{Z} = \frac{M^*}{R^*}. \quad (59.1)$$

Здесь постоянными величинами являются: главный вектор \mathbf{R}^* заданной системы сил и его проекции на оси X , Y , Z , проекции M_x , M_y , M_z главного момента \mathbf{M}_O относительно начала координат, а также наименьший главный момент \mathbf{M}^* . Переменными величинами являются текущие координаты точек центральной оси x , y , z . Два уравнения центральной оси можно получить, приравняв друг другу любые два отношения из четырех.

Уравнения имеют более простой вид, если приравнивается одно из первых трех отношений последнему, не содержащему переменных координат.

Координаты точек пересечения центральной оси с координатными плоскостями получаются путем приравнивания нулю соответствующих координат. Так, в точке A_1 пересечения центральной оси с плоскостью yOz имеем $x_1 = 0$, в точке A_2 $z_2 = 0$, а в точке A_3 $y_3 = 0$ (рис. 125).

Если силы приводятся к равнодействующей, то $M^* = 0$ и сила \mathbf{R}^* является равнодействующей силой \mathbf{R} . В этом случае центральная

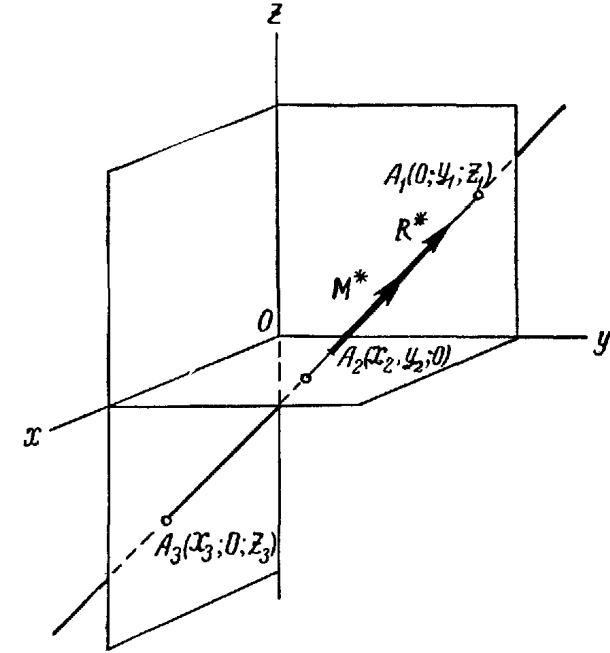


Рис. 125.

ось системы сил становится линией действия равнодействующей силы, уравнения которой будут:

$$\frac{M_x - (yZ - zY)}{X} = \frac{M_y - (zX - xZ)}{Y} = \frac{M_z - (xY - yX)}{Z} = 0$$

или

$$\left. \begin{aligned} M_x &= yZ - zY, \\ M_y &= zX - xZ, \\ M_z &= xY - yX. \end{aligned} \right\} \quad (59.2)$$

Здесь X , Y , Z — проекции равнодействующей силы на координатные оси;

M_x , M_y , M_z — главные моменты заданной системы сил относительно координатных осей.

Из трех уравнений (59.2) независимыми будут только два.

§ 60. Сложение параллельных сил в пространстве. Условия и уравнения равновесия параллельных сил

Для сложения параллельных сил $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$, приложенных в точках A_1, A_2, \dots, A_n выберем произвольный центр приведения O .

После приведения системы сил к этому центру получим силу, приложенную в центре приведения и равную главному вектору заданных сил \mathbf{R}^* , и пару сил с моментом \mathbf{M} , равным главному моменту \mathbf{M}_O всех сил относительно центра приведения O .

Проведем через центр приведения O три взаимно перпендикулярные оси x, y, z , направив ось z параллельно рассматриваемым силам (рис. 126).

Вычислим проекции главного вектора сил на оси координат:

$$X = \sum X_i = 0; \quad Y = \sum Y_i = 0; \quad Z = \sum Z_i = \sum \pm P_i,$$

где $Z_i = +P_i$, если направление силы P_i совпадает с направлением оси z ; $Z_i = -P_i$, если направления силы P_i и оси z противоположны.

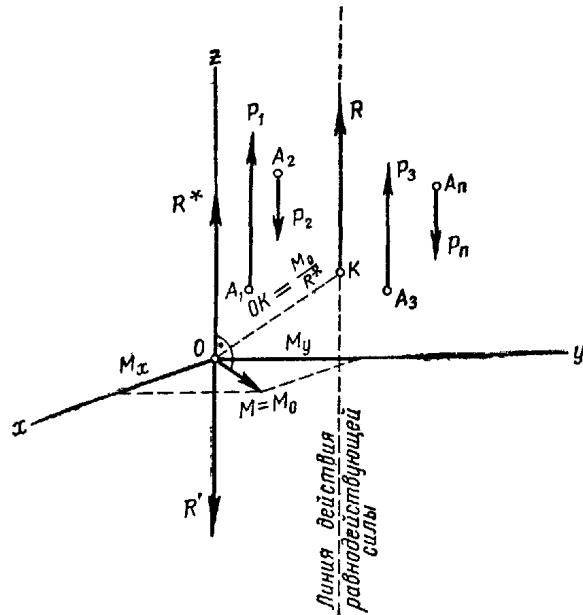


Рис. 126.

ложны. Так как $X=0$ и $Y=0$, то главный вектор \mathbf{R}^* направлен по оси z , а его модуль равен абсолютному значению его проекции Z :

$$R^* = |Z| = \left| \sum \pm P_i \right|. \quad (60.1)$$

При $Z = \sum \pm P_i > 0$ направление главного вектора \mathbf{R}^* совпадает с направлением оси z , а при $Z = \sum \pm P_i < 0$ направление \mathbf{R}^* противоположно направлению оси.

Вычислим проекции главного момента \mathbf{M}_O относительно начала координат на оси x, y, z как главные моменты сил относительно этих осей:

$$M_x = \sum M_{ix}; \quad M_y = \sum M_{iy}; \quad M_z = \sum M_{iz}.$$

Так как заданные силы параллельны оси z , то $M_z = 0$ и главный момент \mathbf{M}_O рассматриваемой системы сил лежит в плоскости xOy , т. е. направлен перпендикулярно главному вектору \mathbf{R}^* .

Модуль главного момента \mathbf{M}_O равен:

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

При приведении системы параллельных сил в пространстве возможны следующие случаи:

1. Главный вектор \mathbf{R}^* и главный момент \mathbf{M}_O равны нулю. В этом случае силы взаимно уравниваются.

2. Главный вектор \mathbf{R}^* равен нулю, а главный момент \mathbf{M}_O не равен нулю. В этом случае силы приводятся к паре сил с моментом \mathbf{M} , равным главному моменту \mathbf{M}_O этих сил относительно центра приведения.

3. Главный вектор \mathbf{R}^* не равен нулю, а главный момент \mathbf{M}_O или равен нулю или не равен нулю.

Если $M_O = 0$, то силы приводятся к равнодействующей силе \mathbf{R} , линия действия которой проходит через центр приведения O .

Если $M_O \neq 0$, то, как указывалось выше, $\mathbf{M}_O \perp \mathbf{R}^*$. В этом случае силы приводятся к равнодействующей силе \mathbf{R} , линия действия которой проходит через точку K (рис. 126).

Из рассмотренных случаев следует, что параллельные силы не приводятся к динаме.

Для системы параллельных сил в пространстве имеются два условия равновесия сил:

$$\mathbf{M}_O = 0;$$

$$\mathbf{R}^* = 0.$$

Если взаимно уравнивающиеся силы параллельны оси z , то получим

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = 0,$$

т. е.

$$M_x = \sum M_{ix} = 0 \quad \text{и} \quad M_y = \sum M_{iy} = 0,$$

а также

$$\mathbf{R}^* = \sum Z_i = 0.$$

Таким образом, для системы сил, параллельных оси z , имеем три уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \sum M_{ix} &= 0, \\ \sum M_{iy} &= 0, \\ \sum Z_i &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (60.2)$$

Задача на равновесие параллельных сил, не лежащих в одной плоскости и приложенных к одному твердому телу, статически опре-

деленна в том случае, если количество неизвестных в ней не превышает трех.

Для системы параллельных сил, приложенной к совокупности двух тел, задача статически определена при числе неизвестных не больше шести и т. д.

§ 61. Примеры на приведение системы сил к простейшему виду

Пример 32. К вершинам прямоугольного параллелепипеда, ребра которого имеют длину $a=20$ см, $b=40$ см и $c=30$ см, приложены указанные на рис. 127 силы $P_1=5$ н, $P_2=8$ н, $P_3=2$ н,

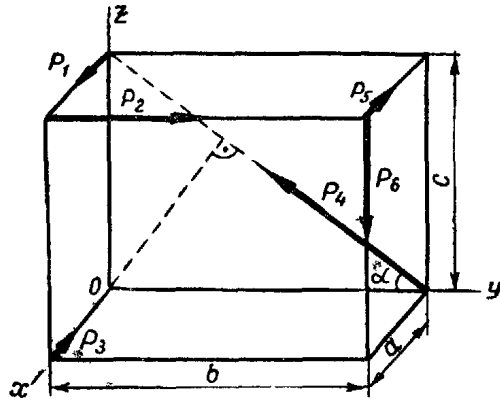


Рис. 127.

$P_4=10$ н, $P_5=3$ н, $P_6=6$ н (рис. 127). Требуется привести эту систему сил к простейшему виду.

Решение. Предварительно находим:

$$\sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{30}{50} = 0,6,$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{40}{50} = 0,8.$$

Определяем модуль и направление главного вектора системы сил по его проекциям на координатные оси:

$$X = P_1 - P_3 - P_5 = 5 - 2 - 3 = 0,$$

$$Y = P_2 - P_4 \cos \alpha = 8 - 10 \cdot 0,8 = 0,$$

$$Z = P_4 \sin \alpha - P_6 = 10 \cdot 0,6 - 6 = 0,$$

$$R^* = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 0.$$

Определяем модуль и направление главного момента системы сил относительно начала координат по его проекциям на координатные

оси, равным главным моментам сил относительно этих осей:

$$M_x = -P_2 c + P_4 b \sin \alpha - P_6 b = \\ = -8 \cdot 30 + 10 \cdot 40 \cdot 0,6 - 6 \cdot 40 = -240 \text{ н} \cdot \text{см};$$

$$M_y = P_1 c - P_5 c + P_6 a = 5 \cdot 30 - 3 \cdot 30 + 6 \cdot 20 = 180 \text{ н} \cdot \text{см},$$

$$M_z = P_2 a + P_5 b = 8 \cdot 20 + 3 \cdot 40 = 280 \text{ н} \cdot \text{см};$$

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-240)^2 + 180^2 + 280^2} = 410 \text{ н} \cdot \text{см};$$

$$\cos(\mathbf{M}_0, \mathbf{i}) = \frac{M_x}{M_0} = -\frac{240}{410} = -0,585;$$

$$\cos(\mathbf{M}_0, \mathbf{j}) = \frac{M_y}{M_0} = \frac{180}{410} = 0,439;$$

$$\cos(\mathbf{M}_0, \mathbf{k}) = \frac{M_z}{M_0} = \frac{280}{410} = 0,683.$$

Полученные результаты показывают, что заданная система сил приводится к паре сил. Модуль момента пары $M = M_0 = 410$ н·см.

Направление момента составляет с координатными осями углы, определяемые найденными косинусами.

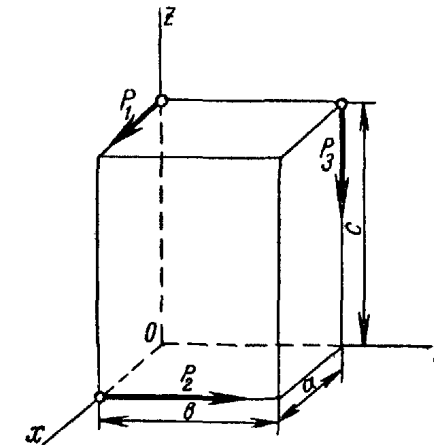


Рис. 128.

Пример 33. К вершинам прямоугольного параллелепипеда, ребра которого имеют длину $a=20$ см, $b=30$ см, $c=40$ см, приложены указанные на рис. 128 силы $P_1=4$ н, $P_2=10$ н, и $P_3=5$ н. Требуется привести эту систему сил к простейшему виду.

Решение. Определяем модуль и направление главного вектора системы сил по его проекциям на координатные оси:

$$X = P_1 = 4 \text{ н},$$

$$Y = P_2 = 10 \text{ н},$$

$$Z = -P_3 = -5 \text{ н},$$

$$R^* = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{141} = 11,87 \text{ н}.$$

$$\cos(\mathbf{R}^*, \mathbf{i}) = \frac{X}{R^*} = 0,337, \quad \cos(\mathbf{R}^*, \mathbf{j}) = \frac{Y}{R^*} = 0,842,$$

$$\cos(\mathbf{R}^*, \mathbf{k}) = \frac{Z}{R^*} = -0,421.$$

Вычисляем главные моменты данной системы сил относительно координатных осей

$$M_x = -P_3 b = -150 \text{ н} \cdot \text{см}, \quad M_y = P_1 c = 160 \text{ н} \cdot \text{см}, \\ M_z = P_2 a = 200 \text{ н} \cdot \text{см}$$

Очевидно, главный момент системы сил относительно начала координат $M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$ не равен нулю. Чтобы установить, к чему приводится система сил — к равнодействующей или к динаме, определяем наименьший главный момент системы сил

$$M^* = \frac{XM_x + YM_y + ZM_z}{R^*} = \frac{-4 \cdot 150 + 10 \cdot 160 - 5 \cdot 200}{11,87} = 0.$$

Равенство числителя нулю есть аналитическое условие существования равнодействующей.

Поэтому рассматриваемая система сил приводится к равнодействующей силе: $R = R^* = 11,87 \text{ н}$. Определяем ее линию действия по уравнениям (59 2), пользуясь найденными проекциями равнодействующей X , Y , Z и главными моментами системы сил относительно осей координат M_x , M_y , M_z :

$$M_x = yZ - zY, \quad -150 = -5y - 10z; \quad y + 2z = 30; \quad (1)$$

$$M_y = zX - xZ, \quad 160 = 4z + 5x; \quad 5x + 4z = 160, \quad (2)$$

$$M_z = xY - yX; \quad 200 = 10x - 4y; \quad 5x - 2y = 100. \quad (3)$$

Так как линии в пространстве соответствуют два уравнения с тремя переменными координатами, то из трех уравнений независимыми являются только два

Действительно, вычитая уравнение (3) из уравнения (2) и деля полученное уравнение на два, получаем уравнение (1).

Координаты точки A_1 , пересечения линии действия равнодействующей с плоскостью zOx , определяем из уравнений (3) и (1) при $y_1 = 0$:

$$y_1 = 0, \quad x_1 = 20 \text{ см}, \quad z_1 = 15 \text{ см}.$$

Координаты точки A_2 , пересечения линии действия равнодействующей с плоскостью xOy , определяем из уравнений (2) и (1) при $z_2 = 0$.

$$z_2 = 0, \quad x_2 = 32 \text{ см}, \quad y_2 = 30 \text{ см}.$$

Линия действия равнодействующей силы показана на рис. 129.

Сила R направлена по этой линии соответственно найденным выше косинусам углов.

Пример 34. В вершинах пирамиды, ребра которой $OA = 63 \text{ см}$, $OB = 45 \text{ см}$ и $OD = 60 \text{ см}$ взаимно перпендикулярны, приложены силы $P_1 = 21 \text{ н}$, $P_2 = 29 \text{ н}$, $P_3 = 25 \text{ н}$ и $P_4 = 15 \text{ н}$ (рис. 130). Требуется привести эту систему сил к простейшему виду.

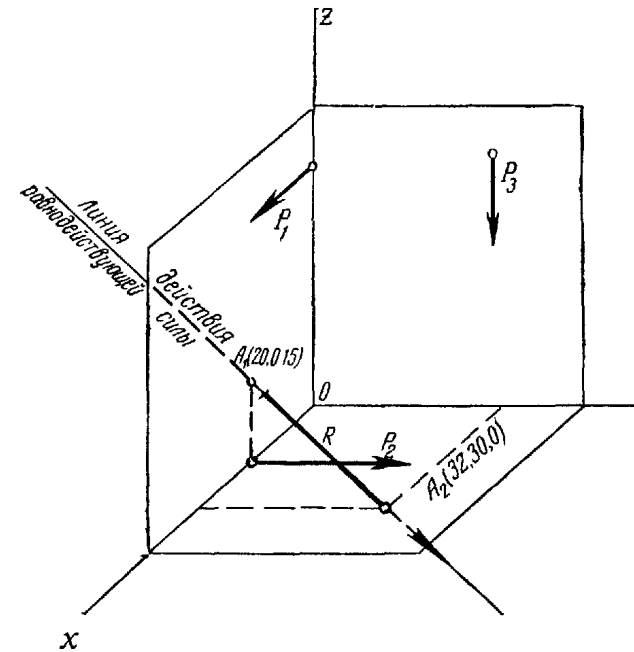


Рис. 129.

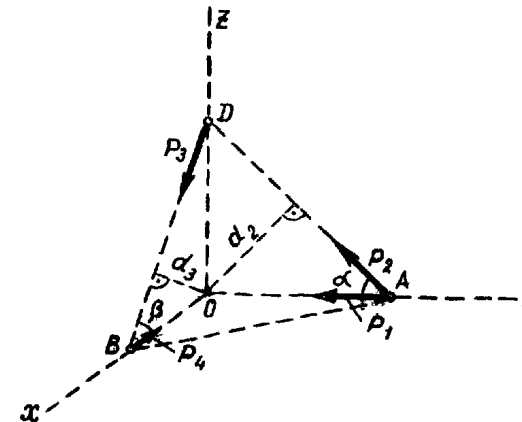


Рис. 130.

Решение. Предварительно находим:

$$\cos \alpha = \frac{OA}{DA} = \frac{63}{\sqrt{60^2 + 63^2}} = \frac{63}{87} = \frac{21}{29}; \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{20}{29};$$

$$\cos \beta = \frac{OB}{DB} = \frac{45}{\sqrt{60^2 + 45^2}} = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}; \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{4}{5}.$$

Определяем модуль и направление главного вектора системы сил по его проекциям на координатные оси:

$$X = P_3 \cos \beta - P_4 = 25 \cdot \frac{3}{5} - 15 = 0,$$

$$Y = -P_1 - P_2 \cos \alpha = -21 - 29 \cdot \frac{21}{29} = -42 \text{ н.}$$

$$Z = P_2 \sin \alpha - P_3 \sin \beta = 29 \cdot \frac{20}{29} - 25 \cdot \frac{4}{5} = 0,$$

откуда $R^* = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 42 \text{ н.}$

$$\cos(R^*, i) = 0; \quad \cos(R^*, j) = -1; \quad \cos(R^*, k) = 0.$$

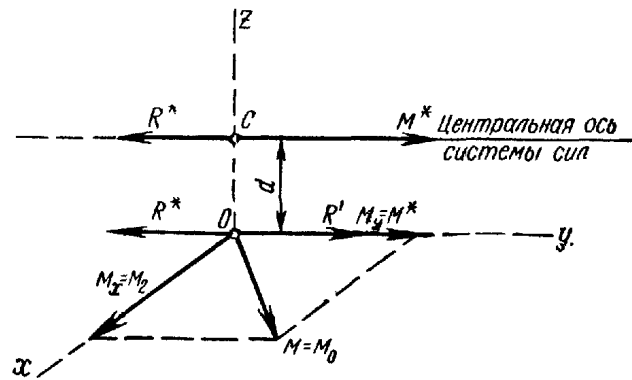


Рис. 131.

Прикладываем к точке O главный вектор R^* , направляя его противоположно оси y (рис. 131). Определяем главные моменты заданной системы сил относительно координатных осей:

$$M_x = P_2 d_2 = P_2 \cdot OA \sin \alpha = 29 \cdot 63 \cdot \frac{20}{29} = 1260 \text{ н} \cdot \text{см.}$$

$$M_y = P_3 d_3 = P_3 \cdot OB \sin \beta = 25 \cdot 45 \cdot \frac{4}{5} = 900 \text{ н} \cdot \text{см.}$$

$$M_z = 0.$$

Так как $M_z = 0$, то главный момент M_O заданных сил относительно начала координат лежит в плоскости xOy и не перпендикулярен главному вектору R^* , лежащему на оси y . Следовательно, заданные силы приводятся к динаме.

Откладывая на осях x и y проекции M_x и M_y главного момента M_O , получаем его компоненты M^* и M' по направлениям главного вектора и перпендикуляра к нему (§ 57). Модули этих компонентов равны:

$$|M^*| = |M_y| = 900 \text{ н} \cdot \text{см.}$$

$$|M'| = |M_x| = 1260 \text{ н} \cdot \text{см.}$$

Находим плечо пары R^*, R' с моментом M' :

$$d = OC = \frac{M'}{R^*} = \frac{1260}{42} = 30 \text{ см.}$$

Прикладываем силы пары R^* и R' в точках O и C плоскости yOz . Исключая уравновешивающиеся силы R^* и R' в точке O и перенося M^* из точки O в точку C , получаем R^* и M^* , т. е. динаму, в точке C .

Пример 35. Привести к простейшему виду систему сил, изображенных на рис. 132, если $P_1 = 2 \text{ н.}$, $P_2 = 5 \text{ н.}$, $P_3 = 14 \text{ н.}$, а размеры прямоугольного параллелепипеда $a = 2 \text{ см.}$, $b = 4 \text{ см.}$, $c = 3 \text{ см.}$

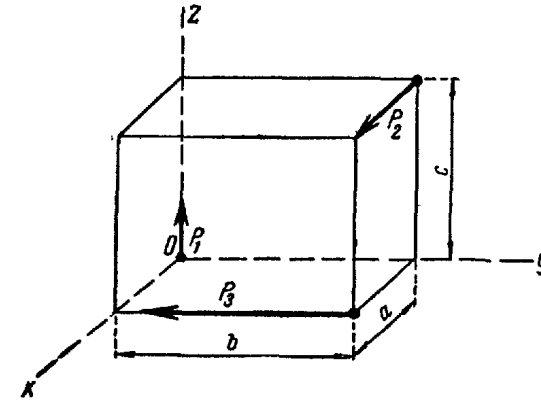


Рис. 132.

Если силы приводятся к динаме, то найти уравнения центральной оси и координаты точек пересечения ее с плоскостями zOx и xOy .

Решение. Определяем модуль и направление главного вектора системы сил по его проекциям на координатные оси:

$$X = P_2 = 5 \text{ н.}; \quad Y = -P_3 = -14 \text{ н.}; \quad Z = P_1 = 2 \text{ н.};$$

$$R^* = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{5^2 + 14^2 + 2^2} = 15 \text{ н.};$$

$$\cos(R^*, i) = \frac{X}{R^*} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}; \quad \cos(R^*, j) = \frac{Y}{R^*} = -\frac{14}{15};$$

$$\cos(R^*, k) = \frac{Z}{R^*} = \frac{2}{15}.$$

Так как $R^* \neq 0$, то силы приводятся к равнодействующей или к динаме.

Вычисляем главные моменты сил относительно координатных осей:

$$M_x = 0;$$

$$M_y = P_2 c = 5 \cdot 3 = 15 \text{ н} \cdot \text{см};$$

$$M_z = -P_2 b - P_3 a = -5 \cdot 4 - 14 \cdot 2 = -48 \text{ н} \cdot \text{см}.$$

Чтобы узнать, к чему приводятся силы, находим наименьший главный момент:

$$M^* = \frac{XM_x + YM_y + ZM_z}{R^*} = \frac{-14 \cdot 15 - 2 \cdot 48}{15} = -\frac{306}{15} = -20,4 \text{ н} \cdot \text{см}.$$

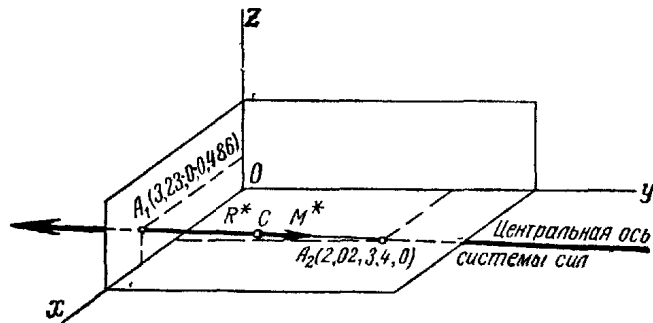


Рис. 133.

Так как $M^* \neq 0$, то силы приводятся к динаме.

Определяем положение центральной оси в пространстве двумя уравнениями (59.1):

$$1) \frac{M_x - (yZ - zY)}{X} = \frac{M^*}{R^*}; \quad \frac{-2y - 14z}{5} = -\frac{20,4}{15},$$

откуда

$$2y + 14z = 6,8.$$

$$2) \frac{M_y - (zX - xZ)}{Y} = \frac{M^*}{R^*}; \quad \frac{15 - 5z + 2x}{-14} = \frac{-20,4}{15},$$

откуда

$$2x - 5z = 4,04.$$

Координаты точки A_1 пересечения центральной осью плоскости zOx находим при $y_1 = 0$ из этих уравнений:

$$y_1 = 0; \quad x_1 = 3,23 \text{ см}; \quad z_1 = 0,486 \text{ см}.$$

Координаты точки A_2 пересечения центральной осью плоскости xOy находим из этих уравнений при $z_2 = 0$:

$$z_2 = 0; \quad x_2 = 2,02 \text{ см}; \quad y_2 = 3,4 \text{ см}.$$

Так как $M^* < 0$, то наименьший главный момент рассматриваемой системы сил M^* направлен по центральной оси противоположно главному вектору R^* (рис. 133), направление которого установлено найденными выше косинусами углов.

§ 62. Условия равновесия сил, приложенных к несвободному твердому телу. Определение реакций опор

Согласно принципу освобожденности от связей, несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, находящееся под действием задаваемых сил и реакций связей.

Для системы взаимно уравновешивающихся задаваемых сил и реакций связей, приложенных к твердому телу и произвольно расположенных в пространстве, можно составить шесть уравнений равновесия. Из этих уравнений определяются реакции опор и устанавливаются условия равновесия задаваемых сил, приложенных к несвободному твердому телу.

Так как оси координат могут иметь любые направления, то следует проводить их так, чтобы они пересекали возможно большее число неизвестных сил или были перпендикулярны к ним, т. е. чтобы каждое из уравнений равновесия содержало возможно меньшее число неизвестных величин.

1. Твердое тело с одной закрепленной точкой

Допустим, что на твердое тело с неподвижно закрепленной точкой A действует система задаваемых сил P_1, P_2, \dots, P_n (рис. 134). Заменим действие связи в точке A (сферического шарнира) реакцией R_A , направление которой неизвестно. Проведем оси координат x, y, z из точки A и разложим эту реакцию на три составляющие X_A, Y_A, Z_A , направленные по осям координат.

Если силы, приложенные к твердому телу, уравновешиваются, то для этих сил можно составить шесть уравнений равновесия.

Составляющие реакции связи не имеют моментов относительно осей координат и не входят в уравнения моментов.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iy} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iz} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n X_i + X_A = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i + Y_A = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Z_i + Z_A = 0.$$

Здесь X_i, Y_i, Z_i — проекции задаваемой силы P_i на оси x, y, z .
 M_{ix}, M_{iy}, M_{iz} — моменты силы P_i относительно тех же осей.
 Три уравнения моментов, не содержащие реакций опор, и выражают те условия, которым удовлетворяют задаваемые силы, действующие на это тело, при равновесии приложенных к нему сил.

Таким образом, если силы, приложенные к твердому телу с одной закрепленной точкой, уравновешиваются, то суммы моментов всех действующих на тело задаваемых сил относительно трех координатных осей, проведенных через закрепленную точку, равны нулю.

Из этих трех условий следует, что главный момент M_A системы задаваемых сил относительно закрепленной точки равен нулю, т. е. система задаваемых сил приводится к равнодействующей R , линия действия которой проходит через точку A .

Из трех уравнений проекций определяются величины составляющих реакций связи:

$$X_A = -\sum_{i=1}^n X_i; \quad Y_A = -\sum_{i=1}^n Y_i; \quad Z_A = -\sum_{i=1}^n Z_i,$$

откуда

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$$

$$\cos(\mathbf{R}_A, \mathbf{i}) = \frac{X_A}{R_A}; \quad \cos(\mathbf{R}_A, \mathbf{j}) = \frac{Y_A}{R_A}; \quad \cos(\mathbf{R}_A, \mathbf{k}) = \frac{Z_A}{R_A}.$$

Реакция связи R_A уравновешивает равнодействующую задаваемых сил R , т. е. эти силы равны по модулю и противоположно направлены; $R_A = -R$.

2. Твердое тело с двумя закрепленными точками

Рассмотрим твердое тело с двумя неподвижно закрепленными точками A и B . Допустим, что на это тело действует система задаваемых сил P_1, P_2, \dots, P_n (рис. 135).

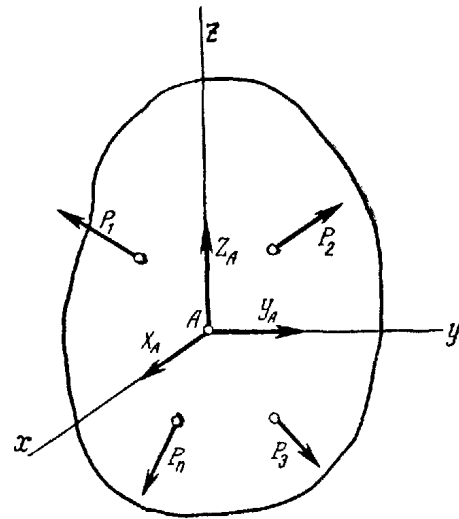


Рис. 134.

Расстояние между точками A и B обозначим l . Заменяем действие связей в точках A и B реакциями R_A и R_B , направления которых не известны. Начало координат поместим в одну из закрепленных точек, например A , и одну из осей проведем через вторую закрепленную точку B .

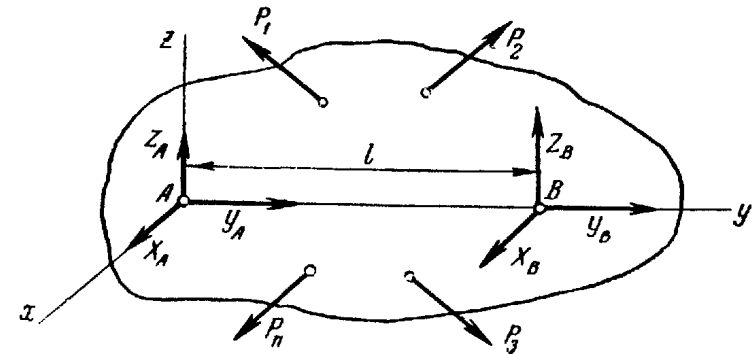


Рис. 135.

Разложим каждую из реакций R_A и R_B на три составляющие по осям координат: $X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, Z_B$.

Составим шесть уравнений равновесия для сил, действующих на тело:

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} + Z_B \cdot l = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iy} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iz} - X_B \cdot l = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n X_i + X_A + X_B = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i + Y_A + Y_B = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Z_i + Z_A + Z_B = 0,$$

Здесь X_i, Y_i, Z_i — проекции задаваемой силы P_i на оси x, y, z , а M_{ix}, M_{iy}, M_{iz} — моменты силы P_i относительно тех же осей.

Из шести составленных уравнений равновесия только одно уравнение $\sum_{i=1}^n M_{iy} = 0$ не содержит реакций опор. Это уравнение и

выражает то условие, которому удовлетворяют задаваемые силы, действующие на это тело при равновесии приложенных к нему сил.

Таким образом, если силы, приложенные к твердому телу с двумя закрепленными точками, уравниваются, то сумма моментов всех действующих на тело задаваемых сил относительно оси, проходящей через точки закрепления, равна нулю.

Остальные пять уравнений равновесия используются для определения составляющих реакций связей:

$$X_B = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n M_{iz};$$

$$Z_B = -\frac{1}{l} \sum_{i=1}^n M_{ix};$$

$$X_A = -\frac{1}{l} \sum_{i=1}^n M_{iz} - \sum_{i=1}^n X_i;$$

$$Z_A = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n M_{ix} - \sum_{i=1}^n Z_i;$$

$$Y_A + Y_B = -\sum_{i=1}^n Y_i.$$

Последнее уравнение показывает, что величины составляющих реакций Y_A и Y_B вдоль оси, проходящей через точки закрепления, определить невозможно. Поэтому для Y_A и Y_B рассматриваемая задача статически неопределенна.

Если предположить, что точка A закреплена неподвижно, а в точке B имеется подшипник, тогда продольная реакция $Y_B = 0$,

а $Y_A = -\sum_{i=1}^n Y_i$ (см. пример 36).

При этом условии задача становится статически определенной.

§ 63. Примеры на равновесие сил, произвольно расположенных в пространстве

Пример 36. Дверь $ABDE$ весом $G = 240$ н удерживается открытой на угол $FBD = 120^\circ$ двумя веревками. К веревке DFK , перекинутой через блок F , подвешен груз весом $Q = 60$ н; веревка EL , протянутая перпендикулярно двери, закреплена в точке L пола. Размеры двери: $AB = 2$ м, $AE = 0,8$ м.

Определить реакции подпятника A и подшипника B и натяжение веревки EL (рис. 136а).

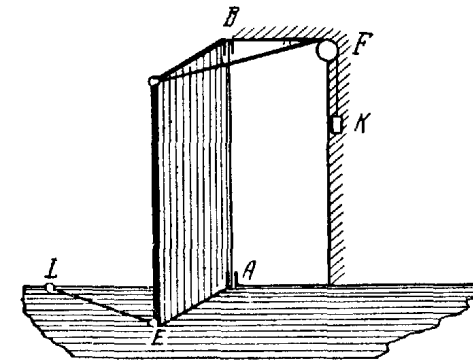


Рис. 136а.

Решение. Рассматриваем равновесие сил, приложенных к двери. Для этой системы составляем шесть уравнений равновесия сил, расположенных как угодно в пространстве. Проводим оси координат, как показано на рис. 136б. Дверь имеет одну закрепленную точку — подпятник A и другую точку — подшипник B .

Для упрощения уравнений равновесия, начало координат помещаем в одну из этих точек (A) и одну из осей координат (z) проводим через обе точки. Прикладываем к двери задаваемые силы: ее вес G , действующий по вертикальной оси симметрии, и реакцию T_1 веревки DF , равную по модулю весу груза Q . Освобождая дверь от связей, прикладываем их реакции. Реакция T_2 веревки EL направлена вдоль

веревки. Подшипник B схематически представляет собой кольцо, сквозь которое проходит ось, скрепленная с дверью. Подшипник не препятствует перемещению двери вдоль его оси, т. е. вдоль оси z , а препятствует перемещению в плоскости, перпендикулярной к этой оси. Согласно § 3, реакция подшипника не имеет составляющей по оси z . Разложим эту реакцию на составляющие X_B и Y_B , направив их по осям x и y .

Подпятник A схематически представляет собой совокупность такого же кольца и опорной плоскости. Благодаря наличию кольца, реакция подпятника имеет составляющие X_A и Y_A , а благодаря опорной плоскости — составляющую Z_A . Направим и эти силы по осям координат.

Шесть неизвестных сил $X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, T_2$, определятся из шести уравнений равновесия сил.

Обозначим размеры двери: $AB = h, AE = a$.

При определении реакций опор тела, имеющего две опорные точки, в первую очередь составляются уравнения моментов, так как они содержат меньше неизвестных сил. При составлении уравнений

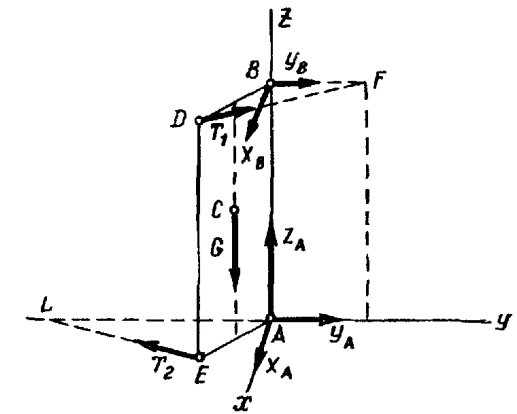


Рис. 136б.

моментов следует учитывать, что если линия действия силы параллельна оси или пересекает ось, то момент этой силы относительно оси равен нулю.

Если же момент не равен нулю, то силу следует спроектировать на плоскость, перпендикулярную к оси, и вычислить момент полученной проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью. Чтобы облегчить вычисление моментов сил относительно осей координат, проектируем систему сил на три плоскости, каждая из которых перпендикулярна одной из координатных осей (рис. 136в, г, д).

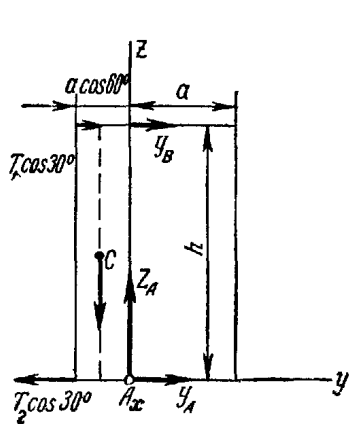


Рис. 136в.

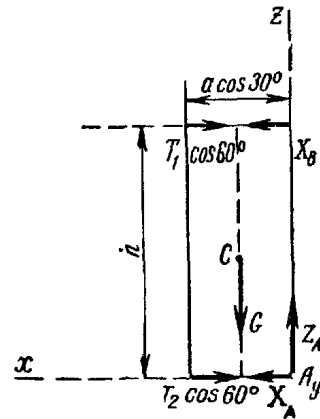


Рис. 136г.

По рис. 136в, г, д вычисляем моменты полученных проекций сил относительно точки А, в которой оси координат пересекают плоскости проекций.

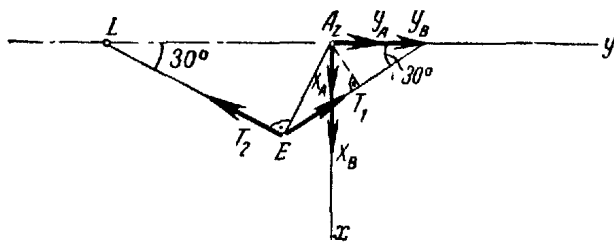


Рис. 136д.

Сначала составляем уравнение $\sum M_{iz} = 0$, так как ось z проходит через точки A и B и моменты неизвестных реакций в этих точках относительно оси z равны нулю.

1. $\sum M_{iz} = 0$ (рис. 136д); $T_1 a \sin 30^\circ - T_2 a = 0$, откуда имеем:

$$T_2 = T_1 \sin 30^\circ = 60 \cdot 0,5 = 30 \text{ н.}$$

2. $\sum M_{ix} = 0$ (рис. 136в); $-Y_B h - T_1 \cos 30^\circ h + G \frac{a \cos 60^\circ}{2} = 0$, откуда находим Y_B :

$$Y_B = -T_1 \cos 30^\circ + G \frac{a \cos 60^\circ}{2h} = -60 \cdot 0,866 + 240 \frac{0,8 \cdot 0,5}{2 \cdot 2} = -28 \text{ н.}$$

3. $\sum M_{iy} = 0$ (рис. 136г); $X_B h - T_1 \cos 60^\circ h + G \frac{a \cos 30^\circ}{2} = 0$, откуда определяем X_B :

$$X_B = T_1 \cos 60^\circ - G \frac{a \cos 30^\circ}{2h} = 60 \cdot 0,5 - 240 \frac{0,8 \cdot 0,866}{2 \cdot 2} = -11,6 \text{ н.}$$

Для определения проекций сил X_A, Y_A, Z_A , не вошедших в уравнения моментов, составляем три уравнения проекций, пользуясь рис. 136б.

4. $\sum X_i = 0$; $X_A + X_B - T_1 \cos 60^\circ - T_2 \cos 60^\circ = 0$, откуда $X_A = -X_B + (T_1 + T_2) \cos 60^\circ = 11,6 + (60 + 30) \cdot 0,5 = 56,6 \text{ н.}$

5. $\sum Y_i = 0$; $Y_A + Y_B + T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 30^\circ = 0$, откуда: $Y_A = -Y_B - (T_1 - T_2) \cos 30^\circ = 28 - (60 - 30) \cdot 0,866 = 2 \text{ н.}$

6. $\sum Z_i = 0$; $Z_A - G = 0$, откуда $Z_A = G = 240 \text{ н.}$

Знаки ответов показывают, что силы X_A, Y_A, Z_A направлены так, как показано на схемах, т. е. в сторону осей координат, а направления сил X_B, Y_B противоположны указанным, т. е. противоположны направлениям осей x и y .

Принятая последовательность составления уравнений равновесия сил позволила определить из каждого уравнения одну неизвестную величину, не решая системы уравнений.

Пример 37. На рис. 137а и б изображен коленчатый вал двигателя. При вертикальном положении средней плоскости колена давление шатуна на середину шейки вала составляет $P = 12 \text{ кн}$ и направлено в плоскости, перпендикулярной оси вала, под углом 15° к горизонтали.

На оси вала в точке C закреплен маховик весом $G = 12 \text{ кн}$. В точке E укреплен шкив диаметром $D = 80 \text{ см}$ с ремнем, передающим момент на вал рабочей машины. Ветви ремня лежат в плоскости шкива и составляют с горизонталью угол, равный 30° . Отношение натяжений ведущей и ведомой ветвей

$$\frac{T}{t} = 2.$$

Расстояние от оси шейки колена до оси вала $r = 15 \text{ см}$. Расстояния по оси вала указаны на рис. 137а в сантиметрах. Определить величины натяжения ветвей ремня T и t и реакции подшипников A и B при равномерном вращении вала и при заданном его

положении. (Весом шкива и вала по сравнению с весом маховика можно пренебречь.)

Решение. При равномерном вращении правильно сконструированного вала приложенные к нему силы должны удовлетворять условиям их равновесия.

Прикладываем к валу задаваемые силы: вес маховика G , давление шатуна на шейку вала P и реакции ветвей ремня T и t , направленные по касательной к окружности обода шкива. Отбрасывая связи (подшипники), прикладываем к валу их реакции, разложенные на составляющие Y_A, Z_A, Y_B, Z_B (рис. 137в).

Выбрав оси координат, как показано на рис. 137в, составляем уравнения равновесия

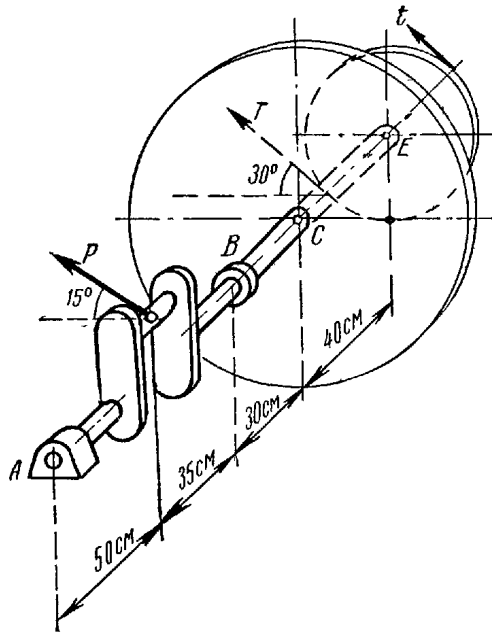


Рис. 137а.

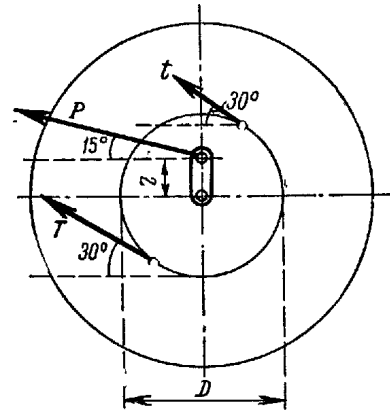


Рис. 137б.

сил, произвольно расположенных в пространстве. Вал имеет две точки опоры A и B ; первым составляем уравнение моментов относительно оси x , проходящей через эти точки. Пользуемся, рис. 137г, так как на нем изображены только силы, моменты которых относительно оси x не равны нулю.

$$1. \sum M_{Lx} = 0; \quad t \frac{D}{2} - T \frac{D}{2} + Pr \cos 15^\circ = 0.$$

Так как $T = 2t$, то модули сил t и T можно определить:

$$t \frac{D}{2} - 2t \frac{D}{2} + Pr \cos 15^\circ = 0,$$

откуда

$$t = \frac{2Pr \cos 15^\circ}{D} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 0,966}{80} = 4,347 \text{ кН}, \quad T = 2t = 8,694 \text{ кН}.$$

Затем составляем следующие уравнения моментов по рис. 137в. При вычислении моментов сил T, t и P относительно оси y проектируем

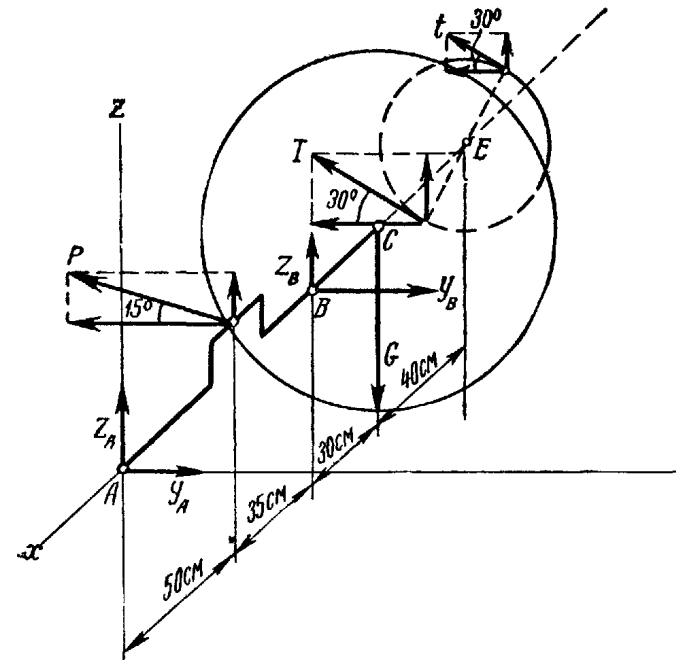


Рис. 137в.

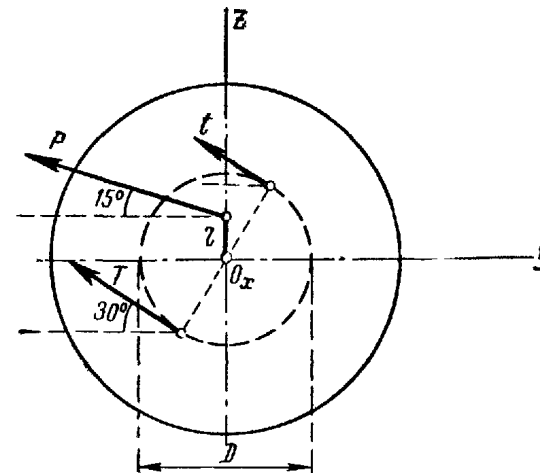


Рис. 137г.

каждую из этих сил на плоскость, проходящую через точку приложения силы перпендикулярно оси y .

Полученные проекции $T \sin 30^\circ$, $t \sin 30^\circ$, $P \sin 15^\circ$ параллельны оси z .

2. $\sum M_{iy} = 0$; $P \sin 15^\circ \cdot 50 + Z_B \cdot 85 - G \cdot 115 + T \sin 30^\circ \cdot 155 + t \sin 30^\circ \cdot 155 = 0$, откуда находим Z_B :

$$Z_B = \frac{-P \sin 15^\circ \cdot 50 + G \cdot 115 - (T + t) \sin 30^\circ \cdot 155}{85} = \frac{-12 \cdot 0,259 \cdot 50 + 12 \cdot 115 - 13,04 \cdot 0,5 \cdot 155}{85} = \frac{214}{85} = 2,52 \text{ кн.}$$

Аналогично при составлении уравнения $\sum M_{iz} = 0$ находим проекции сил T , t и P на плоскости, перпендикулярные оси z . Эти проекции параллельны оси y и соответственно имеют абсолютные величины: $T \cos 30^\circ$, $t \cos 30^\circ$, $P \cos 15^\circ$.

3. $\sum M_{iz} = 0$, $P \cos 15^\circ \cdot 50 - Y_B \cdot 85 + T \cos 30^\circ \cdot 155 + t \cos 30^\circ \cdot 155 = 0$.

Определяем Y_B :

$$Y_B = \frac{P \cos 15^\circ \cdot 50 + (T + t) \cos 30^\circ \cdot 155}{85} = \frac{12 \cdot 0,966 \cdot 50 + 13,04 \cdot 0,866 \cdot 155}{85} = \frac{2330}{85} = 27,41 \text{ кн.}$$

Составляем уравнения проекций на оси y и z (все действующие силы перпендикулярны оси x и уравнение $\sum X_i = 0$ обращается в тождество $0 = 0$).

4. $\sum Y_i = 0$; $Y_A - P \cos 15^\circ + Y_B - T \cos 30^\circ - t \cos 30^\circ = 0$.

Находим Y_A :

$$Y_A = P \cos 15^\circ - Y_B + (T + t) \cos 30^\circ = 12 \cdot 0,966 - 27,41 + 13,04 \cdot 0,866 = -4,53 \text{ кн.}$$

5. $\sum Z_i = 0$; $Z_A + P \sin 15^\circ + Z_B - G + T \sin 30^\circ + t \sin 30^\circ = 0$.

Определяем Z_A :

$$Z_A = -P \sin 15^\circ - Z_B + G - (T + t) \sin 30^\circ = -12 \cdot 0,259 - 2,52 + 12 - 13,04 \cdot 0,5 = -0,15 \text{ кн.}$$

Пример 38. Тонкая горизонтальная плита $ABDE$ весом $G = 2,4 \text{ кн}$ поддерживается шестью стержнями, расположенными вдоль диагоналей граней или вдоль ребер прямоугольного параллелепипеда.

Определить усилия в стержнях, если $a = 1 \text{ м}$, $b = 1,8 \text{ м}$, $c = 2,4 \text{ м}$ (рис. 138а).

Решение. Рассматриваем равновесие сил, приложенных к плите. Прикладываем к плите в центре симметрии прямоугольника $ABDE$

задаваемую силу — вес плиты G . Заменяем действие связей, т. е. шести стержней, их реакциями. Считаем стержни, как это принято, растянутыми и направляем их реакции от узлов (рис. 138б). Для сил, действующих на плиту, составляем шесть уравнений равновесия сил, расположенных как угодно в пространстве. Начало координат

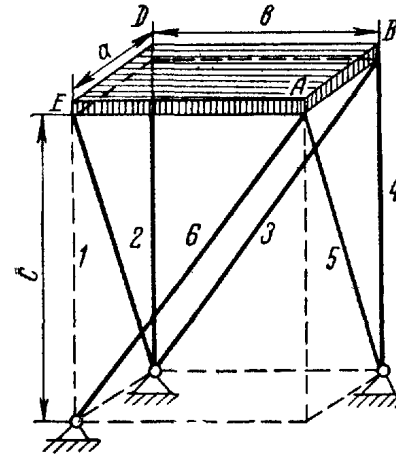


Рис. 138а.

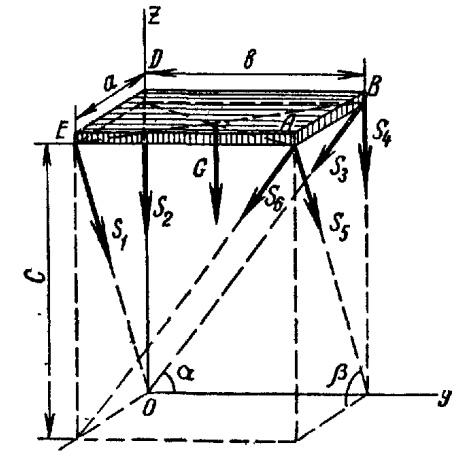


Рис. 138б.

помещаем в точку O пересечения линий действия трех неизвестных реакций S_1 , S_2 , S_3 , чтобы исключить эти реакции из уравнений моментов:

$$\sum M_{ix} = 0; \quad -G \frac{b}{2} - S_4 b - S_5 \sin \beta \cdot b = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_{iy} = 0; \quad G \frac{a}{2} + S_6 \sin \alpha \cdot a = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_{iz} = 0; \quad S_5 \cos \beta \cdot b - S_6 \cos \alpha \cdot a = 0; \quad (3)$$

$$\sum X_i = 0; \quad -S_1 \cos \beta - S_5 \cos \beta = 0; \quad (4)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -S_3 \cos \alpha - S_6 \cos \alpha = 0; \quad (5)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad -G - S_1 \sin \beta - S_2 - S_3 \sin \alpha - S_4 - S_5 \sin \beta - S_6 \sin \alpha = 0. \quad (6)$$

По заданным размерам вычисляем синусы и косинусы углов α и β ;

$$\sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{2,4}{\sqrt{1,8^2 + 2,4^2}} = \frac{4}{5}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{3}{5};$$

$$\sin \beta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + a^2}} = \frac{2,4}{\sqrt{2,4^2 + 1^2}} = \frac{12}{13}; \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{5}{13}.$$

Из уравнения (2) находим

$$S_6 = -\frac{G}{2 \sin \alpha} = -\frac{2,4}{2 \cdot \frac{4}{5}} = -1,5 \text{ кН.}$$

Из уравнения (3)

$$S_5 = S_6 \frac{a \cos \alpha}{b \cos \beta} = -1,5 \frac{1 \cdot \frac{3}{5}}{1,8 \cdot \frac{5}{13}} = -1,3 \text{ кН.}$$

Из уравнения (1)

$$S_4 = -\frac{G}{2} - S_5 \sin \beta = -\frac{2,4}{2} + 1,3 \cdot \frac{12}{13} = 0.$$

Из уравнения (4)

$$S_1 = -S_5 = 1,3 \text{ кН.}$$

Из уравнения (5)

$$S_3 = -S_6 = 1,5 \text{ кН.}$$

Из уравнения (6)

$$S_2 = -G - S_1 \sin \beta - S_3 \sin \alpha - S_4 - S_5 \sin \beta - S_6 \sin \alpha = \\ = -2,4 - 1,3 \cdot \frac{12}{13} - 1,5 \cdot \frac{4}{5} - 0 + 1,3 \cdot \frac{12}{13} + 1,5 \cdot \frac{4}{5} = -2,4 \text{ кН.}$$

Величины сил, приложенных к плите, помещаем в табл. 3.

Таблица 3

| Силы | G | S_1 | S_2 | S_3 | S_4 | S_5 | S_6 |
|-------------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Величина силы, кН | 2,4 | 1,3 | -2,4 | 1,5 | 0 | -1,3 | -1,5 |

Из табл. 3 следует, что стержни 1, 3 растянуты, стержни 2, 5, 6 сжаты, а стержень 4 не работает.

Силы, приложенные к плите, образуют три взаимно уравновешивающиеся пары сил, лежащие в различных плоскостях:

- 1) G , S_2 ;
- 2) S_1 , S_5 ;
- 3) S_3 , S_6 .

Пример 39. При повреждении одной из двух петель прямоугольной парниковой рамы $ABDE$ ее удерживают в горизонтальном положении двумя вертикальными стержнями FJ и KL .

Вес рамы $G = 180 \text{ н}$.

Расстояния: $BF = \frac{1}{4} BD$; $ND = \frac{1}{5} BD$; $KN = \frac{1}{2} ED$.

Определить реакцию шарового шарнира (петли) A и усилия в стержнях FJ и KL (рис. 139а).

Решение. Рассматриваем равновесие сил, приложенных к раме. Прикладываем к раме в центре тяжести C задаваемую силу — вес рамы G (рис. 139б). Отбрасывая связи, прикладываем к раме их

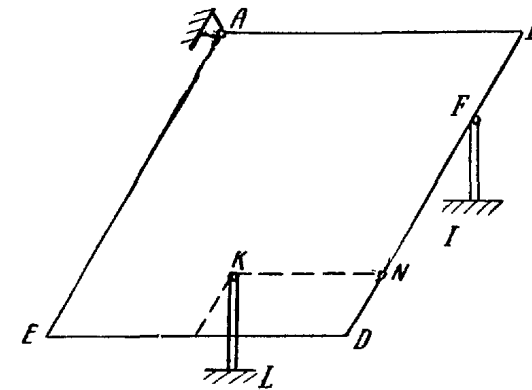


Рис. 139а.

реакции. Реакции сжатых стержней R_F и R_K , равные усилиям в стержнях, направляем вертикально вверх. Реакция шарового шарнира R_A может иметь любое направление, но при условии, что

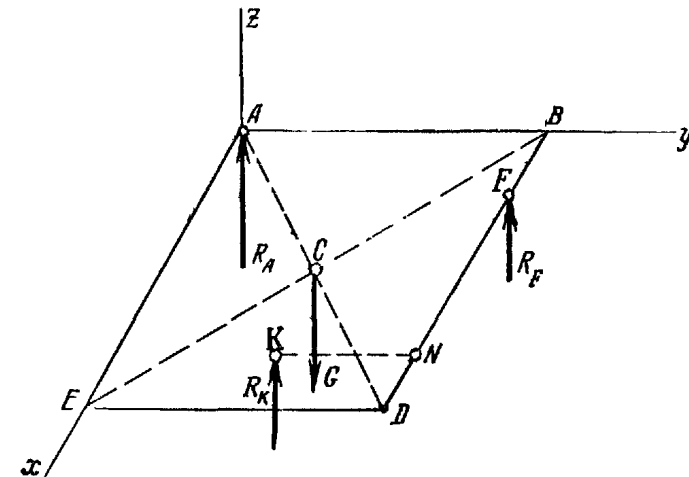


Рис. 139б.

остальные силы G , R_F и R_K , приложенные к раме, вертикальны, реакция R_A тоже имеет вертикальное направление.

Для полученной системы вертикальных сил, из которых три силы не известны, составляем три уравнения равновесия параллельных сил в пространстве. Начало координат помещаем в одну из опорных

точек A , ось z направляем параллельно силам, оси x и y проводим по краям рамы.

Уравнения равновесия сил имеют вид:

$$\sum M_{ix} = 0; \quad -G \frac{ED}{2} + R_K \frac{ED}{2} + R_F ED = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_{iy} = 0; \quad G \frac{BD}{2} - R_K BN - R_F BF = 0; \quad (2)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad -G + R_K + R_F + R_A = 0. \quad (3)$$

В уравнение (2) подставляем $BN = \frac{4}{5} BD$, $BF = \frac{1}{4} BD$ и, сокращая, получаем:

$$-G \frac{1}{2} + R_K \frac{1}{2} + R_F = 0; \quad (1)$$

$$G \frac{1}{2} - R_K \frac{4}{5} - R_F \frac{1}{4} = 0; \quad (2)$$

$$-G + R_K + R_F + R_A = 0. \quad (3)$$

Подставив значение $G = 180$ н, решаем систему двух первых уравнений и находим R_K и R_F :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} R_K + R_F &= 90, \\ \frac{4}{5} R_K + \frac{1}{4} R_F &= 90, \end{aligned} \right\} \text{или} \left. \begin{aligned} \frac{1}{2} R_K + R_F &= 90, \\ \frac{16}{5} R_K + R_F &= 360. \end{aligned} \right\}$$

Вычитая из одного уравнения другое, находим:

$$\frac{27}{10} R_K = 270; \quad R_K = 100 \text{ н}; \quad R_F = 40 \text{ н}.$$

Из уравнения (3) определяем R_A :

$$R_A = G - R_K - R_F = 180 - 100 - 40 = 40 \text{ н}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Каковы возможные случаи приведения произвольно расположенных и параллельных сил в пространстве?

2. К какому простейшему виду можно привести систему сил, если известно, что главный момент этих сил относительно различных точек пространства:

- имеет одно и то же значение, не равное нулю;
- равен нулю;
- имеет различные значения и перпендикулярен к главному вектору;
- имеет различные значения и не перпендикулярен к главному вектору?

3. Каковы условия и уравнения равновесия пространственной системы сходящихся, параллельных и произвольно расположенных сил и чем они отличаются от условий и уравнений равновесия такого же вида сил на плоскости?

4. Каковы геометрическое и аналитическое условия приведения пространственной системы сил к равнодействующей?

5. Сформулируйте теорему о моменте равнодействующей пространственной системы сил относительно точки и оси.

6. Составьте уравнения линии действия равнодействующей.

7. Какую прямую в пространстве называют центральной осью системы сил?

8. Выведите уравнения центральной оси системы сил.

9. Покажите, что две скрещивающиеся силы можно привести к силовому винту.

10. По какой формуле вычисляют наименьший главный момент заданной системы сил?

11. Какова зависимость главного момента системы сил в пространстве от расположения центра приведения до центральной оси этой системы сил?

12. Относительно каких точек пространства главные моменты заданной системы сил имеют один и тот же модуль и составляют с главным вектором один и тот же угол?

13. Относительно каких точек пространства главные моменты системы сил геометрически равны между собой?

14. Каковы инварианты системы сил?

15. В чем состоит особенность условий равновесия сил, приложенных к твердому телу, имеющему одну или две закрепленные точки?

ГЛАВА X

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

§ 64. Последовательное сложение параллельных сил. Центр параллельных сил

Допустим, что к твердому телу в точках A_1, A_2, \dots, A_5 приложены параллельные силы P_1, P_2, \dots, P_5 , из которых силы P_1, P_2, P_3 направлены в одну сторону, а силы P_4, P_5 — в противоположную сторону (рис. 140).

Складывая силы P_1 и P_2 по правилу сложения двух параллельных сил, направленных в одну сторону, получаем

$$R_1 = P_1 + P_2, \\ \frac{A_1 B_1}{A_2 B_1} = \frac{P_2}{P_1}.$$

Определив модуль равнодействующей силы R_1 и точку приложения ее B_1 , складываем R_1 с силой P_3 и получаем:

$$R_2 = R_1 + P_3, \\ \frac{A_3 B_2}{B_1 B_2} = \frac{R_1}{P_3}.$$

Аналогично определяем равнодействующую сил P_4 и P_5 :

$$R_3 = P_4 + P_5 \text{ и } \frac{A_4 B_3}{A_5 B_3} = \frac{P_5}{P_4}.$$

В результате последовательного сложения заданных параллельных сил получены две противоположно направленные параллельные силы R_2 и R_3 в точках B_2 и B_3 .

В зависимости от модулей и точек приложения этих сил возможны следующие случаи:

1. Силы R_2 и R_3 не равны по модулю. Предположим, что в рассматриваемом случае (рис. 140) $R_2 > R_3$. Тогда равнодействующая R заданных сил имеет модуль $R = R_2 - R_3$ и направлена в сторону большей силы R_2 .

Точка C , в которой приложена равнодействующая сила R , находится на продолжении отрезка B_2B_3 , за точкой приложения большей силы, причем

$$\frac{B_2C}{B_3C} = \frac{R_3}{R_2}.$$

Точка C называется *центром параллельных сил*.

Через эту точку обязательно проходит линия действия равнодействующей заданной системы параллельных сил, если, не изменяя модулей сил, поворачивать линии действия сил вокруг точек их приложения на один и тот же угол в одну и ту же сторону (рис. 140).

Действительно, все приведенные равенства, определяющие модули и точки приложения равнодействующих сил R_1, R_2, R_3, R , при повороте сил остаются справедливыми.

2. Силы R_2 и R_3 равны по модулю, но их линии действия не совпадают.

В этом случае заданные силы приводятся к паре сил.

3. Силы R_2 и R_3 равны по модулю и их линии действия совпадают.

В этом случае заданные силы взаимно уравниваются.

Система параллельных сил, направленных в одну сторону, не может уравниваться или приводиться к паре сил. Эта система всегда имеет равнодействующую.

§ 65. Формулы радиуса вектора и координат центра параллельных сил

Рассмотрим систему параллельных сил P_1, P_2, \dots, P_n , приложенных в точках A_1, A_2, \dots, A_n , приводящуюся к равнодействующей R , приложенной в точке C (рис. 141).

Положение центра параллельных сил C определится его радиусом-вектором r_C относительно начала координат O или тремя координатами x_C, y_C, z_C .

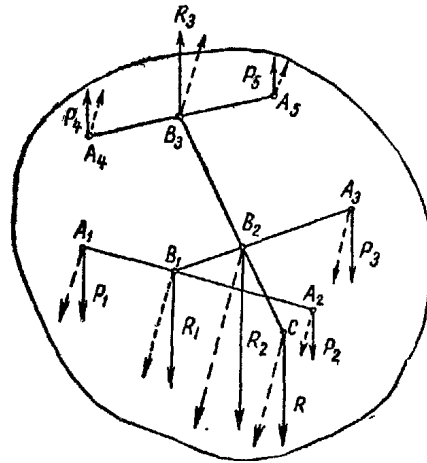


Рис. 140.

Положение точки приложения каждой силы P_i определяется радиусом-вектором r_i или координатами x_i, y_i, z_i , где $i = 1, 2, \dots, n$.

На основании теоремы Вариньона о моменте равнодействующей относительно любого центра (§ 56) приравняем момент равнодействующей относительно центра O геометрической сумме моментов составляющих сил относительно этого центра:

$$M_O(R) = \Sigma M_{iO}$$

или согласно § 44

$$r_C \times R = \Sigma r_i \times P_i.$$

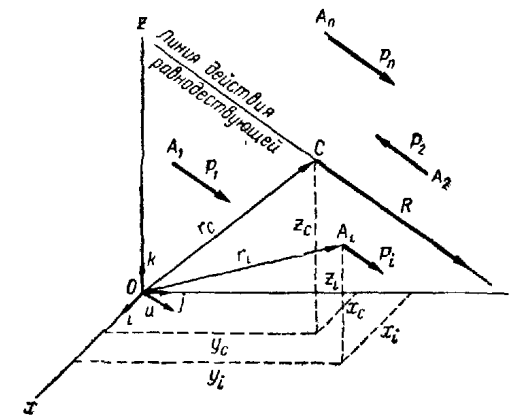


Рис. 141.

Введем единичный вектор u , параллельный линиям действия сил. Тогда получим

$$P_i = uP_i,$$

где P_i — алгебраическое значение силы.

$$R = \Sigma P_i = u \Sigma P_i.$$

Подставив значения P_i и R в выражения моментов, будем иметь

$$r_C \times u \Sigma P_i = \Sigma r_i \times u P_i.$$

Переместим скалярные множители в векторных произведениях:

$$r_C \Sigma P_i \times u = \Sigma r_i P_i \times u,$$

или

$$(r_C \Sigma P_i - \Sigma r_i P_i) \times u = 0.$$

Вектор u может иметь любое направление, так как, согласно свойству центра параллельных сил, линии действия сил можно поворачивать. Следовательно,

$$r_C \Sigma P_i - \Sigma r_i P_i = 0.$$

Из этого равенства получим формулу, определяющую радиус-вектор центра параллельных сил:

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum \mathbf{r}_i P_i}{\sum P_i}. \quad (65.1)$$

Спроектировав векторы левой и правой частей равенства (65.1) на оси координат, получим формулы для вычисления координат центра параллельных сил:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum x_i P_i}{\sum P_i}; \\ y_c &= \frac{\sum y_i P_i}{\sum P_i}; \\ z_c &= \frac{\sum z_i P_i}{\sum P_i}. \end{aligned} \right\} \quad (65.2)$$

В формулах (65.2) числителем и знаменателем каждой дроби является алгебраическая сумма. Координаты точки приложения каждой силы имеют тот или другой знак, и параллельные силы, направленные в одну сторону, считаются положительными, а направленные противоположно — отрицательными. Таким образом, координаты x_i, y_i, z_i и значения сил P_i в этих формулах являются алгебраическими величинами.

Выбор направления, вдоль которого параллельные силы считаются положительными, произволен и на результатах вычисления координат по формулам (65.2) не отражается.

§ 66. Центр тяжести твердого тела

Силы притяжения отдельных частиц тела к Земле направлены приблизительно к центру Земли. Так как размеры рассматриваемых тел малы по сравнению с радиусом Земли, то эти силы можно считать параллельными. Равнодействующая этих параллельных сил, равная их сумме, есть вес тела, а центр этой системы параллельных сил, в котором приложен вес тела, называется *центром тяжести тела*.

В твердом теле центр тяжести занимает вполне определенное положение, которое не зависит от расположения рассматриваемого тела в пространстве.

Обозначим силы притяжения отдельных элементарных частиц тела к Земле $\Delta G_1, \Delta G_2, \dots, \Delta G_n$, вес тела G , координаты его центра тяжести x_c, y_c, z_c , а координаты любой частицы твердого тела — x_i, y_i, z_i (рис. 142). Координаты центра тяжести твердого тела можно определить как координаты центра параллельных сил.

Для центра тяжести формулы (65.1) примут вид:

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta G_i}{G}, \quad y_c = \frac{\sum y_i \Delta G_i}{G}, \quad z_c = \frac{\sum z_i \Delta G_i}{G}, \quad (66.1)$$

где суммирования распространены на все частицы твердого тела. В этих формулах алгебраическими величинами являются только координаты точек, а значения ΔG_i всегда положительны, так как все силы направлены в одну сторону.

По формулам (66.1) можно также вычислять координаты центра тяжести тела, разбивая его не на элементарные частицы, а на от-

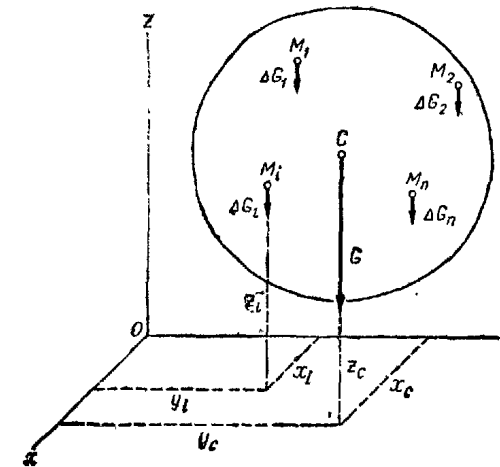


Рис. 142.

дельные части веса G_i , координаты x_i, y_i, z_i центров тяжести которых известны.

Определим положение центра тяжести однородного тела.

Вес однородного тела определяется формулой $G = \gamma V$, где V — объем тела, γ — вес единицы объема.

Аналогично вес каждой частицы определяется по формуле $\Delta G_i = \gamma \Delta v_i$, где Δv_i — объем элементарной частицы M_i тела.

Обозначим x_i, y_i, z_i координаты центра тяжести этой частицы. Подставив эти значения, получим

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta G_i}{G} = \frac{\sum x_i \gamma \Delta v_i}{\gamma V} = \frac{\gamma \sum x_i \Delta v_i}{\gamma V},$$

или

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta v_i}{V},$$

аналогично получим

$$y_c = \frac{\sum y_i \Delta v_i}{V}; \quad z_c = \frac{\sum z_i \Delta v_i}{V} \quad (66.2)$$

Центр тяжести однородного тела, заполняющего некоторый объем, называется центром тяжести этого объема.

§ 67. Центр тяжести плоской фигуры. Статический момент площади плоской фигуры относительно оси

Однородное тело, имеющее форму тонкой пластинки, можно рассматривать как материальную плоскую фигуру. Положение центра тяжести плоской фигуры определяется двумя координатами x_C и y_C (рис. 143).

Вес однородной пластинки выразим формулой $G = \omega F$, где F — площадь плоской фигуры, ω — вес единицы ее площади.

Разобьем площадь фигуры на элементарные площадки. Вес каждой площадки M_i определится по формуле $\Delta G_i = \omega \Delta F_i$, где ΔF_i — ее площадь. Обозначим x_i, y_i координаты центра тяжести элементарной площадки M_i . Тогда координаты центра тяжести фигуры определяются при помощи формулы (66.1)

$$x_C = \frac{\sum x_i \Delta G_i}{G} = \frac{\sum x_i \omega \Delta F_i}{\omega F} = \frac{\sum x_i \Delta F_i}{F}$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum x_i \Delta F_i}{F}, \\ y_C &= \frac{\sum y_i \Delta F_i}{F}, \end{aligned} \right\} (67.1)$$

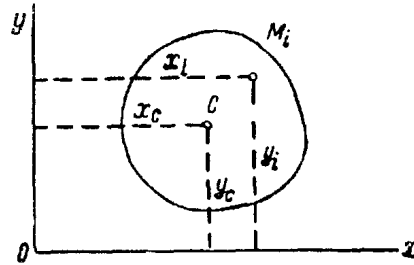


Рис. 143.

где суммирование распространены на все элементы площади.

Эти формулы показывают, что координаты x_C и y_C центра тяжести однородной пластинки не зависят от постоянной ω , характеризующей вещество пластинки.

Центр тяжести однородной пластинки называют центром тяжести площади этой пластинки.

Сумма произведений элементарных площадей, входящих в состав площади фигуры, на алгебраические значения их расстояний до некоторой оси, называется *статическим моментом площади плоской фигуры относительно этой оси*.

Обозначая S_x и S_y статические моменты площади плоской фигуры относительно осей x и y , на основании (67.1) имеем

$$S_x = \sum y_i \Delta F_i = F y_C; \quad S_y = \sum x_i \Delta F_i = F x_C. \quad (67.2)$$

Таким образом, статический момент площади плоской фигуры относительно оси равен произведению площади фигуры на алгебраическое значение расстояния от центра тяжести до этой оси.

Статический момент площади плоской фигуры относительно оси измеряется в $см^3$.

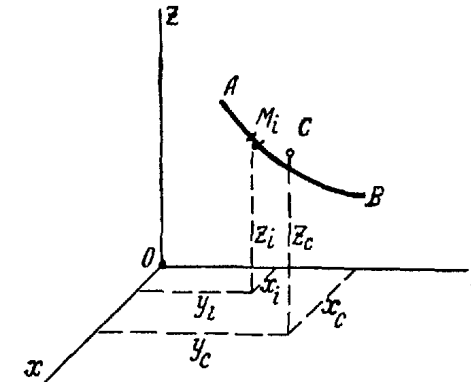
Если известны статические моменты площади плоской фигуры относительно координатных осей, то координаты ее центра тяжести можно определить по формулам:

$$x_C = \frac{S_y}{F} \quad \text{и} \quad y_C = \frac{S_x}{F}. \quad (67.3)$$

Очевидно, что статический момент площади плоской фигуры относительно оси, проходящей через центр тяжести фигуры, равен нулю.

§ 68. Центр тяжести линии

Определим положение центров тяжести однородных тел, имеющих большую протяженность при сравнительно малой площади поперечного сечения. Рассмотрим, например, кусок однородной тонкой проволоки постоянного сечения, ось которой расположена по дуге кривой AB (рис. 144). Вес проволоки выразим формулой $G = \rho L$, где L — длина линии AB , ρ — вес единицы длины проволоки.



Разобьем линию AB на элементарные участки M_i длиной Δl_i . Вес каждого участка определится по формуле:

$$\Delta G_i = \rho \Delta l_i.$$

Рис. 144.

Координаты центра тяжести элементарного участка обозначим x_i, y_i, z_i . Тогда координаты центра тяжести C рассматриваемого куска проволоки определяются по формулам (66.1):

$$x_C = \frac{\sum x_i \Delta G_i}{G} = \frac{\sum x_i \rho \Delta l_i}{\rho L}$$

или

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum x_i \Delta l_i}{L}, \\ y_C &= \frac{\sum y_i \Delta l_i}{L}, \\ z_C &= \frac{\sum z_i \Delta l_i}{L}, \end{aligned} \right\} (68.1)$$

где суммирование распространены на все элементы проволоки.

Формулы (68.1) показывают, что координаты центра тяжести не зависят от постоянной ρ , характеризующей вещество проволоки.

Центр тяжести однородной тонкой проволоки постоянного сечения, ось которой совпадает с некоторой линией, называется центром тяжести этой линии.

§ 69. Вспомогательные теоремы для определения положения центра тяжести

При вычислении координат центров тяжести пользуются различными приемами, позволяющими упростить вычисления. Рассмотрим четыре вспомогательные теоремы, упрощающие в некоторых случаях нахождение центров тяжести.

Теорема 1. Если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела находится на этой оси.

Рассмотрим однородное тело, имеющее ось симметрии (рис. 145). Совместим с осью симметрии одну из осей координат, например ось z , и определим две координаты центра тяжести однородного тела по формулам (66.2):

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta v_i}{V},$$

$$y_c = \frac{\sum y_i \Delta v_i}{V}.$$

Возьмем в этом теле любые две точки M_i и M'_i , расположенные симметрично относительно оси z . Выделим около них равные элементарные объемы Δv_i . Точки M_i и M'_i лежат на одном перпендикуляре к оси z , на равных расстояниях от этой оси, т. е. $M_i N_i = M'_i N_i$ (рис. 145). Следовательно, координаты x_i и y_i этих точек равны по величине и противоположны по знаку.

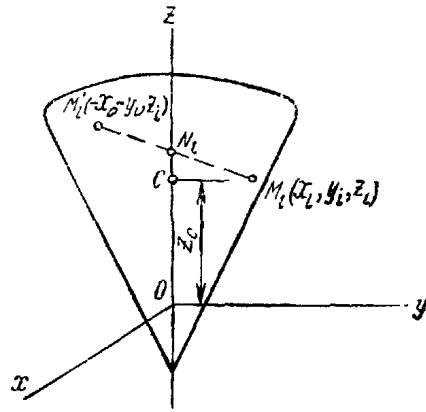


Рис. 145.

Разбив все тело на пары симметрично расположенных и равных элементарных объемов, составим произведения $x_i \Delta v_i$ и суммируем их. Сумма слагаемых, относящихся к одной паре, равна нулю, так как объемы Δv_i равны, а координаты x_i равны по величине, но имеют противоположные знаки.

Из этого следует, что равна нулю и сумма, содержащая все элементарные объемы тела, т. е. $\sum x_i \Delta v_i = 0$ и аналогично $\sum y_i \Delta v_i = 0$.

Подставив эти значения в формулы (66.2), получим:

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta v_i}{V} = 0; \quad y_c = \frac{\sum y_i \Delta v_i}{V} = 0.$$

Так как $x_c = 0$ и $y_c = 0$, то центр тяжести тела лежит на оси z , являющейся осью симметрии тела, и его положение на этой оси определяется лишь одной координатой:

$$z_c = \frac{\sum z_i \Delta v_i}{V}.$$

Применяя эту теорему к плоской фигуре или линии, легко установить, что если плоская фигура или линия имеет ось симметрии, то ее центр тяжести лежит на этой оси.

Теорема 2. Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то его центр тяжести находится в этой плоскости.

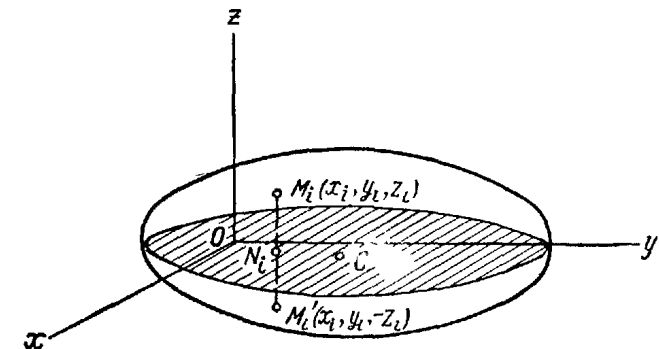


Рис. 146.

На рис. 146 изображено тело, имеющее плоскость симметрии; сечение тела этой плоскостью заштриховано. Расположим оси x и y в плоскости симметрии, а ось z перпендикулярно к ней. Возьмем в этом теле две точки M_i и M'_i , симметрично расположенные относительно плоскости xOy . Выделим около них равные элементарные объемы Δv_i . Точки M_i и M'_i лежат на одном перпендикуляре к плоскости xOy , на равных расстояниях от этой плоскости, т. е. $M_i N_i = M'_i N_i$ (рис. 146). Следовательно, координаты z_i этих точек равны по величине и противоположны по знаку.

Суммируя произведения $z_i \Delta v_i$, получим $\sum z_i \Delta v_i = 0$, где суммирование распространено на все элементарные объемы.

Вычислим координату z_c центра тяжести рассматриваемого однородного тела по формуле (66.2):

$$z_c = \frac{\sum z_i \Delta v_i}{V} = 0$$

Полученный результат показывает, что центр тяжести рассматриваемого тела находится в плоскости симметрии.

На основе рассмотренных теорем можно определить положения центров тяжести некоторых симметричных линий, фигур и тел:

- 1) центр тяжести отрезка прямой лежит в его середине;
- 2) центры тяжести окружности, площади круга, поверхности и объема шара находятся в их геометрических центрах;
- 3) центры тяжести периметра и площади параллелограмма, ромба, прямоугольника и квадрата лежат в точках пересечения их диагоналей;
- 4) центр тяжести периметра и площади правильного многоугольника находится в центре вписанного (или описанного) круга.

Теорема 3. Объем тела вращения, полученного вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости фигуры, но не пересекающей ее, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описанной ее центром тяжести*.

Пусть плоская фигура площадью F вращается вокруг оси u , лежащей в плоскости фигуры и не пересекающей ее. При вращении вокруг оси u контур этой фигуры описывает некоторую замкнутую поверхность, называемую поверхностью вращения. Тело, ограниченное этой поверхностью, называется *телом вращения* (рис. 147).

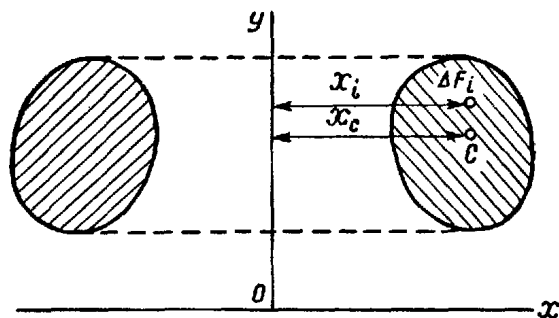


Рис. 147.

Объем этого тела вращения определим, как сумму бесконечно большого числа объемов элементарных круговых колец, образованных вращением вокруг оси u бесконечно малых площадок ΔF_i . Радиус каждого кольца равен расстоянию этой площадки от оси u , т. е. координате x_i .

Объем элементарного кольца

$$\Delta v_i = 2\pi x_i \Delta F_i.$$

Объем тела вращения

$$V = \sum \Delta v_i = 2\pi \sum x_i \Delta F_i.$$

Здесь суммирование распространено на все площадки, входящие в состав данной площади F .

* Эта и последующая теоремы выведены математиком IV столетия Паппом, а в XVII столетии они вновь были применены в работах Гюльдена о центре тяжести.

Сумму $\sum x_i \Delta F_i$ можно определить из формулы (67.1):

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta F_i}{F}, \quad \sum x_i \Delta F_i = x_c F.$$

Подставив это значение в выражение, определяющее объем тела вращения, получим:

$$V = 2\pi x_c F, \quad (69.1)$$

где $2\pi x_c$ — длина окружности, описанной центром тяжести фигуры.

Теорема 4. Площадь поверхности вращения, полученной вращением плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости этой кривой, но ее не пересекающей, равна произведению длины этой кривой на длину окружности, описанной ее центром тяжести.

Пусть кривая AB длиной L вращается вокруг оси u , лежащей в плоскости этой кривой, но не пересекающей ее. При вращении вокруг оси u эта кривая опишет некоторую поверхность вращения (рис. 148).

Разобьем кривую на бесчисленное множество бесконечно малых элементов длиной Δl_i . Поверхность, описанную каждым элементом, можно принять за поверхность усеченного конуса.

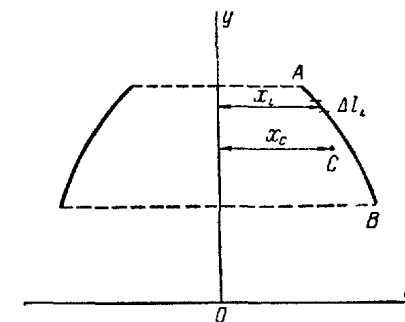


Рис. 148.

Как известно из геометрии, площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению длины окружности среднего сечения на длину образующей. Поэтому площадь поверхности, образованной вращением элемента кривой Δl_i можно определить по формуле

$$\Delta F_i = 2\pi x_i \Delta l_i,$$

где x_i — радиус окружности, равный расстоянию середины элемента от оси u .

Площадь поверхности вращения

$$F = \sum \Delta F_i = 2\pi \sum x_i \Delta l_i;$$

здесь суммирование распространено на все элементы Δl_i кривой AB .

Сумму $\sum x_i \Delta l_i$ определим из формулы (68.1):

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta l_i}{L}; \quad \sum x_i \Delta l_i = x_c L.$$

Подставив это значение в выражение, определяющее площадь поверхности вращения, получим

$$F = 2\pi x_c L. \quad (69.2)$$

§ 70. Определение положения центра тяжести плоской фигуры по центрам тяжести ее частей. Способ отрицательных площадей

Пусть требуется определить положение центра тяжести некоторой плоской фигуры, состоящей из трех частей, положение центров тяжести которых известно (рис. 149).

Положим, что площади частей фигуры соответственно равны F_1, F_2, F_3 , а координаты их центров тяжести C_1, C_2 и C_3 будут x_1, y_1, x_2, y_2 и x_3, y_3 .

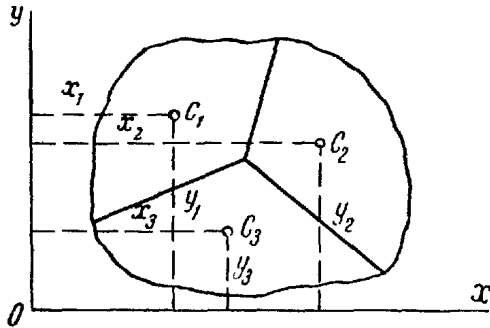


Рис. 149.

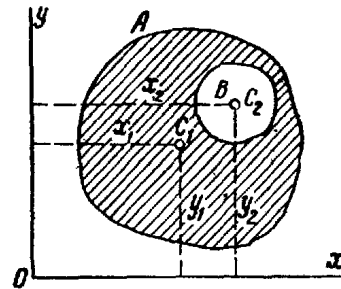


Рис. 150.

y_1, x_2, y_2 и x_3, y_3 . Статические моменты площади плоской фигуры относительно осей координат равны суммам статических моментов площадей отдельных ее частей, которые можно определить по формулам (67.2):

$$S_y = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3,$$

$$S_x = F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3.$$

Определив статические моменты S_y и S_x плоской фигуры, можно найти координаты ее центра тяжести C по формулам (67.3):

$$x_C = \frac{S_y}{F} \quad \text{и} \quad y_C = \frac{S_x}{F}.$$

Подставив значения статических моментов, получаем:

$$x_C = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3}{F}, \quad y_C = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3}{F}. \quad (70.1)$$

Этот способ удобно применять и при определении положения центра тяжести плоской фигуры, из которой вырезана некоторая часть (рис. 150).

Зная величину F_1 площади фигуры с контуром A и координаты x_1 и y_1 ее центра тяжести C_1 , а также площадь F_2 части, вырезанной по контуру B , и координаты x_2 и y_2 ее центра тяжести C_2 , можно вычислить координаты центра тяжести оставшейся части фигуры по формулам, аналогичным формулам (70.1). При этом площадь оставшейся части должна быть равна разности площадей

F_1 и F_2 , а ее статические моменты — разности статических моментов площадей фигур A и B . Тогда

$$x_C = \frac{F_1 x_1 - F_2 x_2}{F_1 - F_2}, \quad y_C = \frac{F_1 y_1 - F_2 y_2}{F_1 - F_2}. \quad (70.2)$$

Этот способ определения центра тяжести плоской фигуры, из которой вырезана некоторая часть, называется *способом отрицательных площадей*.

Аналогичный прием, называемый *способом отрицательных объемов*, применяется при вычислении координат центра тяжести однородного тела, полученного вырезанием из тела объемом v_1 , с центром тяжести $C_1(x_1, y_1, z_1)$, части объемом v_2 , с центром тяжести $C_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда

$$x_C = \frac{v_1 x_1 - v_2 x_2}{v_1 - v_2}; \quad y_C = \frac{v_1 y_1 - v_2 y_2}{v_1 - v_2}; \quad z_C = \frac{v_1 z_1 - v_2 z_2}{v_1 - v_2}. \quad (70.3)$$

§ 71. Определение положения центра тяжести плоской фигуры путем применения веревочного многоугольника

Если плоскую фигуру можно разбить на несколько частей, положения центров тяжести которых известны, то положение центра

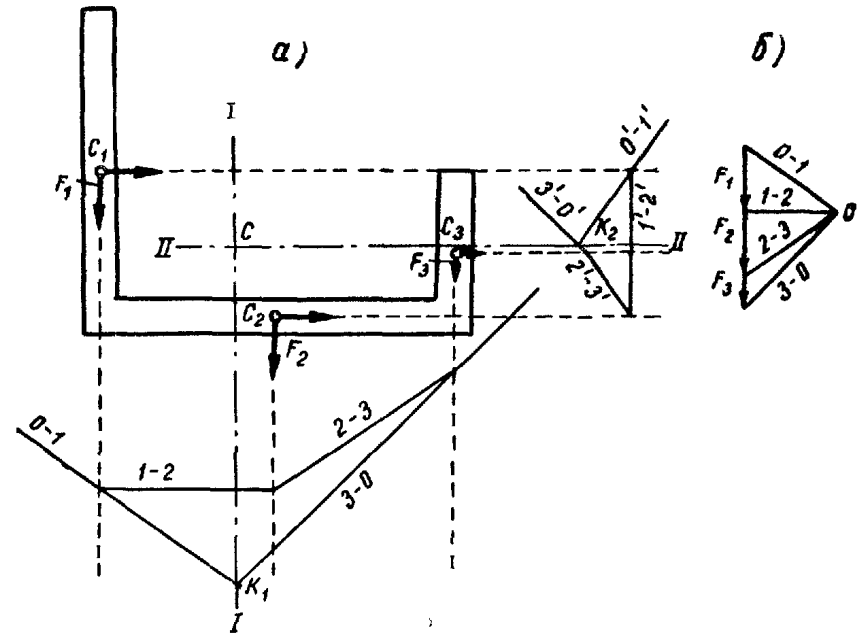


Рис. 151.

тяжести этой фигуры можно найти графически, по методу веревочного многоугольника.

На рис. 151, *а* показана плоская фигура, которую можно разбить на три прямоугольника с центрами тяжести C_1, C_2 и C_3 . В центрах

тяжести прямоугольников приложим параллельные силы F_1 , F_2 и F_3 , модули которых пропорциональны соответствующим площадям. Определим центр этих параллельных сил. Этот центр лежит на линии действия равнодействующих заданных сил.

Построим линию действия $I-I$ равнодействующей сил F_1 , F_2 и F_3 при помощи веревочного многоугольника. Воспользуемся тем, что положение центра параллельных сил не изменяется при повороте всех сил на один и тот же угол. Повернем все силы на угол 90° . Многоугольник сил, соответствующий новому положению сил F_1 , F_2 и F_3 , строить не будем. Проведем стороны веревочного многоугольника $0'-1'$, $1'-2'$, $2'-3'$, $3'-0'$ не параллельно, а перпендикулярно лучам $0-1$, $1-2$, $2-3$, $3-0$ (рис. 151, а, б) и найдем линию действия равнодействующей повернутых сил $II-II$. Точка C пересечения линий $I-I$ и $II-II$ является искомым центром тяжести заданной плоской фигуры.

§ 72. Центры тяжести некоторых линий, плоских фигур и тел

1. Центр тяжести площади треугольника

Разбивая площадь треугольника на ряд узких полосок, параллельных одной из сторон треугольника, убеждаемся, что центры тяжести всех этих полосок лежат на медиане треугольника (рис. 152). Из этого следует, что центр тяжести C площади треугольника находится на этой медиане, а следовательно, и на других медианах, т. е. в точке пересечения его медиан и $CK = \frac{1}{3} BK$.

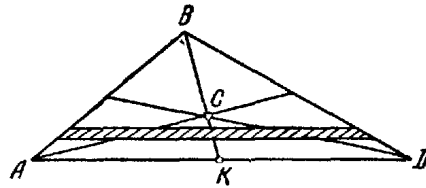


Рис. 152.

2. Центр тяжести площади трапеции

Обозначим параллельные стороны трапеции $AE = a$, $BD = b$, а высоту трапеции h (рис. 153). Центр тяжести площади трапеции должен лежать на прямой FK , соединяющей середины параллельных сторон трапеции. Эта прямая является линией центров тяжести полосок бесконечно малой ширины, параллельных основаниям трапеции, на которые можно разбить площадь трапеции.

Для определения координаты центра тяжести площади трапеции разобьем трапецию на два треугольника ABE и EBD , площади и координаты центров тяжести которых соответственно равны:

$$F_1 = \frac{ah}{2} \quad \text{и} \quad F_2 = \frac{bh}{2}; \quad y_1 = \frac{h}{3} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{2}{3}h.$$

Центр тяжести площади трапеции должен находиться на прямой C_1C_2 , соединяющей центры тяжести рассматриваемых треугольников. Из

этого следует, что центр тяжести площади трапеции находится в точке пересечения прямых FK и C_1C_2 .

Координату центра тяжести площади трапеции определяем по формуле (70.1):

$$y_c = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2} = \frac{\frac{ah}{2} \cdot \frac{h}{3} + \frac{bh}{2} \cdot \frac{2}{3}h}{\frac{ah}{2} + \frac{bh}{2}} = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}. \quad (72.1)$$

Центр тяжести площади трапеции можно построить и графическим способом. Для этого отложим на продолжении стороны BD

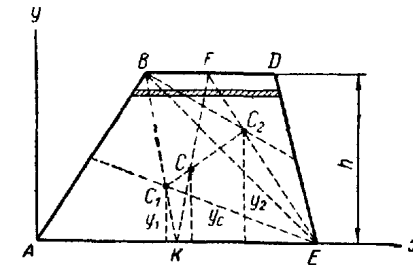


Рис. 153.

отрезок $DL = a$ и на продолжении стороны AE отрезок $AN = b$ (рис. 154). Соединим точки N и L прямой. Покажем, что точка C

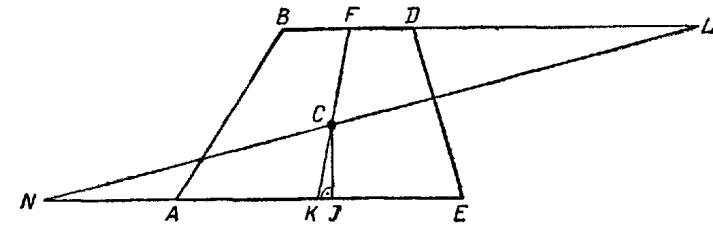


Рис. 154.

пересечения прямых NL и FK является центром тяжести площади трапеции. Опустим из точки C на прямую AE перпендикуляр CJ и определим его длину.

Действительно,

$$\frac{CJ}{h} = \frac{CK}{FK},$$

откуда

$$CJ = h \frac{CK}{FK}.$$

Из подобия треугольников NCK и LCF имеем

$$\frac{CK}{\frac{a}{2} + b} = \frac{CF}{a + \frac{b}{2}}.$$

По свойству пропорции:

$$\frac{CK}{\frac{a}{2} + b} = \frac{CK + CF}{\frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b},$$

откуда

$$CK = (CK + CF) \frac{\frac{a}{2} + b}{\frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b}$$

или

$$CK = FK \frac{a + 2b}{3(a + b)}, \quad CJ = h \frac{CK}{FK} = \frac{h(a + 2b)}{3(a + b)} = y_C.$$

Полученный результат показывает, что точка C действительно является центром тяжести площади трапеции.

3. Центр тяжести дуги окружности

Возьмем дугу AB окружности радиусом R с центральным углом 2α (рис. 155). Так как ось x является осью симметрии этой дуги, то центр тяжести дуги лежит на этой оси и положение его определяется только координатой x_C .

$$x_C = \frac{\sum x_i \Delta l_i}{L}.$$

Длина дуги $L = R2\alpha$, где 2α — центральный угол в радианах.

Разбиваем всю дугу на бесконечно малые элементы длиной Δl_i и вычисляем координату x_C :

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{L} \sum x_i \Delta l_i = \frac{1}{L} \sum \frac{x_i}{\cos \varphi_i} \Delta l_i \cos \varphi_i = \\ &= \frac{1}{L} \sum R \Delta y_i = \frac{R}{L} \sum \Delta y_i = \frac{R}{L} AB = R \frac{2R \sin \alpha}{2R\alpha}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$x_C = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (72.2)$$

где α — половина центрального угла в радианах.

Так как $\sin \alpha < \alpha$, то центр тяжести дуги лежит внутри сектора AOB .

4. Центр тяжести площади сектора круга

Разбиваем сектор круга, соответствующий центральному углу 2α , на бесчисленное множество элементарных секторов (рис. 156).

Каждый элементарный сектор можно рассматривать как треугольник высотой R и основанием $R\Delta\varphi$, центр тяжести которого находится на расстоянии $\frac{2}{3}R$ от центра круга.

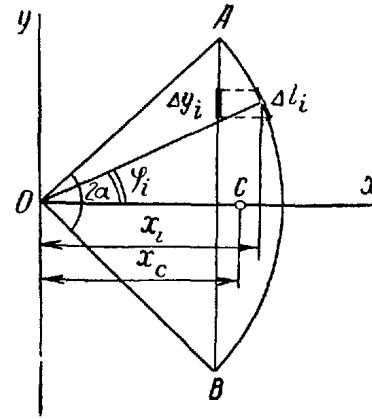


Рис. 155.

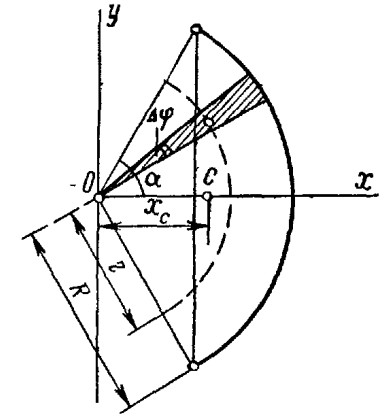


Рис. 156.

Очевидно, что центр тяжести площади сектора AOB совпадает с центром тяжести дуги окружности радиусом $r = \frac{2}{3}R$.

По формуле (72.2), получим

$$x_C = r \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad \text{или} \quad x_C = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (72.3)$$

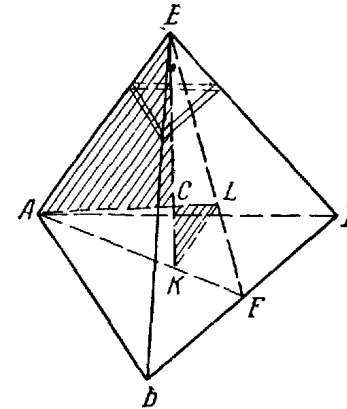


Рис. 157.

5. Центр тяжести объема четырехгранной пирамиды

Разобьем пирамиду плоскостями, параллельными основанию ABD , на бесчисленное множество тонких треугольных пластинок (рис. 157). Центры тяжести этих пластинок лежат на прямой EK , соединяющей вершину E пирамиды с центром тяжести K ее основания. Очевидно, что центр тяжести объема пирамиды должен лежать на этой же прямой.

Аналогично, центр тяжести объема пирамиды должен лежать и на прямой AL , соединяющей вершину A пирамиды с центром тяжести L грани BED .

Следовательно, центр тяжести объема пирамиды находится в точке C пересечения прямых EK и AL .

Так как $KF = \frac{1}{3}AF$ и $LF = \frac{1}{3}EF$, то $KL \parallel AE$ и $KL = \frac{1}{3}AE$.

Из этого следует, что $\triangle ACE \sim \triangle KCL$, а потому

$$\frac{CK}{EC} = \frac{KL}{AE} = \frac{1}{3}, \quad EC = 3CK, \quad EK = EC + CK = 4CK,$$

откуда

$$CK = \frac{1}{4}EK.$$

Таким образом, центр тяжести объема четырехгранной пирамиды лежит на отрезке, соединяющем вершину пирамиды с центром тяжести основания, на расстоянии одной четверти длины этого отрезка от центра тяжести основания.

Если из центра тяжести объема пирамиды опустить перпендикуляр на основание, то длина его составит одну четверть высоты пирамиды.

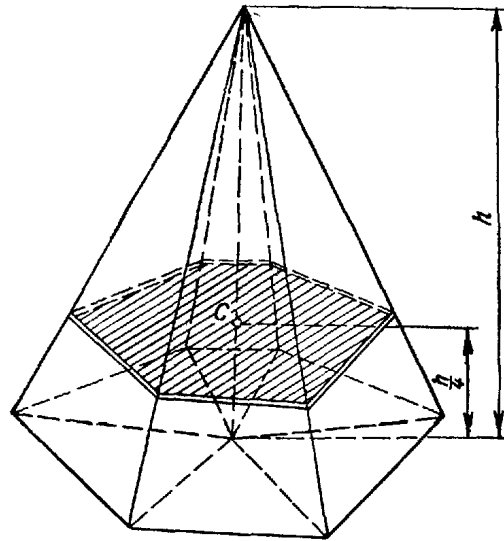


Рис. 158.

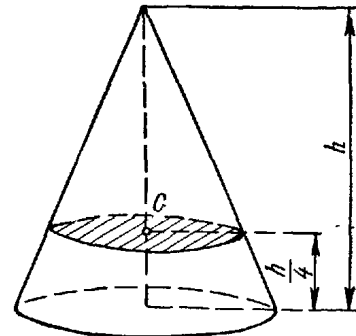


Рис. 159.

Полученный результат можно применить и к многогранной пирамиде (рис. 158), так как ее можно разбить на четырехгранные пирамиды, разбив многоугольник ее основания на треугольники.

Так как конус представляет собой предел многогранной пирамиды, то расстояние от центра тяжести его объема до основания составляет одну четверть его высоты (рис. 159).

§ 73. Примеры на определение положения центра тяжести

Пример 40. Навес представляет собой жесткую прямоугольную плиту $ABDE$, поддерживаемую шестью брусками постоянного сечения, расположенными вдоль ребер и диагоналей граней прямоугольного параллелепипеда.

Вес плиты $G_7 = 4$ кн; веса брусков: $G_1 = G_5 = 0,5$ кн; $G_3 = 0,3$ кн; $G_2 = G_6 = 0,4$ кн; $G_4 = 0,6$ кн.

Расстояния: $a = 6$ м; $b = 4$ м; $c = 3$ м.

Определить положение центра тяжести всей конструкции (рис. 160а).

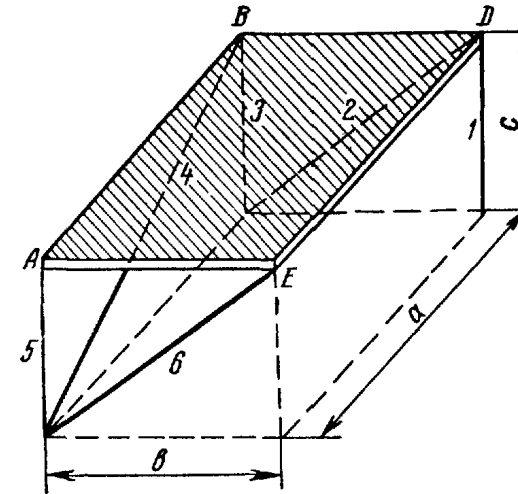


Рис. 160а.

Решение. Определяем координаты центра тяжести конструкции по формулам (66.1):

$$x_c = \frac{\sum G_i x_i}{G}, \quad y_c = \frac{\sum G_i y_i}{G}, \quad z_c = \frac{\sum G_i z_i}{G}.$$

Проводим оси координат и указываем на схеме (рис. 160б) заданную систему сил тяжести, прикладывая веса брусков постоянного сечения в их серединах, а вес плиты, конструкция которой предполагается симметричной, в точке пересечения диагоналей прямоугольника $ABDE$. Выписываем значения каждой силы тяжести и координат ее точки приложения (G_i выражены в кн; x_i, y_i, z_i — в м):

$$\begin{aligned} G_1 &= 0,5, & x_1 &= 0, & y_1 &= b = 4, & z_1 &= \frac{c}{2} = 1,5; \\ G_2 &= 0,4, & x_2 &= 0, & y_2 &= \frac{b}{2} = 2, & z_2 &= \frac{c}{2} = 1,5; \\ G_3 &= 0,3, & x_3 &= 0, & y_3 &= 0, & z_3 &= \frac{c}{2} = 1,5; \\ G_4 &= 0,6, & x_4 &= \frac{a}{2} = 3, & y_4 &= 0, & z_4 &= \frac{c}{2} = 1,5; \\ G_5 &= 0,5, & x_5 &= a = 6, & y_5 &= 0, & z_5 &= \frac{c}{2} = 1,5; \\ G_6 &= 0,4, & x_6 &= a = 6, & y_6 &= \frac{b}{2} = 2, & z_6 &= \frac{c}{2} = 1,5; \\ G_7 &= 4, & x_7 &= \frac{a}{2} = 3, & y_7 &= \frac{b}{2} = 2, & z_7 &= c = 3. \end{aligned}$$

Для вычисления координат центра тяжести конструкции составляем таблицу (табл. 4).

Вписываем в таблицу веса элементов G_i и координаты x_i, y_i, z_i точек приложения этих сил, а затем вычисляем произведения $G_i x_i, G_i y_i$ и $G_i z_i$.

Таблица 4

| Номер элемента i | Вес элемента, кН G_i | Координаты центра тяжести элемента, м | | | Произведения веса элемента на координаты, кН·м | | |
|--------------------|------------------------|---------------------------------------|-------|-------|--|-----------|-----------|
| | | x_i | y_i | z_i | $G_i x_i$ | $G_i y_i$ | $G_i z_i$ |
| 1 | 0,5 | 0 | 4 | 1,5 | 0 | 2 | 0,75 |
| 2 | 0,4 | 0 | 2 | 1,5 | 0 | 0,80 | 0,60 |
| 3 | 0,3 | 0 | 0 | 1,5 | 0 | 0 | 0,45 |
| 4 | 0,6 | 3 | 0 | 1,5 | 1,8 | 0 | 0,90 |
| 5 | 0,5 | 6 | 0 | 1,5 | 3 | 0 | 0,75 |
| 6 | 0,4 | 6 | 2 | 1,5 | 2,4 | 0,80 | 0,60 |
| 7 | 4 | 3 | 2 | 3 | 12 | 8 | 12 |
| Σ | 6,7 | — | — | — | 19,2 | 11,6 | 16,05 |

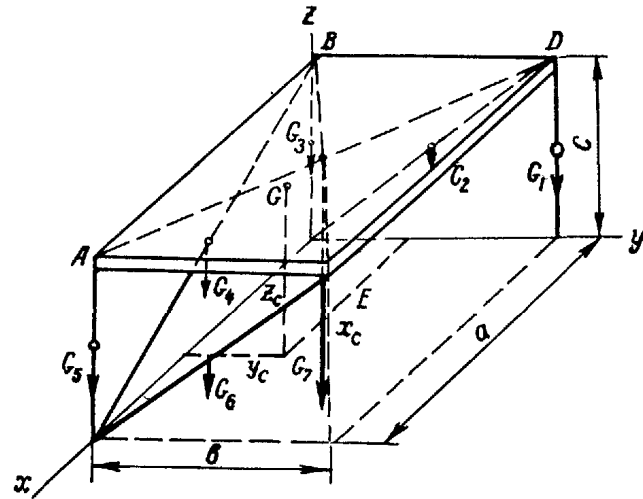


Рис. 1606.

Суммируя числа соответствующих столбцов таблицы, находим числитель и знаменатель выражений, определяющих координаты

центра тяжести системы:

$$\begin{aligned} \Sigma G_i &= 6,7 \text{ кН}, & \Sigma G_i x_i &= 19,2 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ \Sigma G_i y_i &= 11,6 \text{ кН} \cdot \text{м}, & \Sigma G_i z_i &= 16,05 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Вычисляем координаты центра тяжести системы:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{19,2}{6,7} = 2,87 \text{ м}; \\ y_c &= \frac{11,6}{6,7} = 1,73 \text{ м}; \\ z_c &= \frac{16,05}{6,7} = 2,40 \text{ м}. \end{aligned}$$

По найденным координатам строим центр тяжести конструкции на рис. 1606.

Пример 41. Определить положение центра тяжести тела, состоящего из колонны и фундамента с общей осью симметрии, изготовленных из одного материала. Высота колонны $H = 4 \text{ м}$, глубина фундамента $h = 2 \text{ м}$. Диаметр колонны $D = 0,5 \text{ м}$, ширина квадратного в плане фундамента $a = 1 \text{ м}$ (рис. 161а).

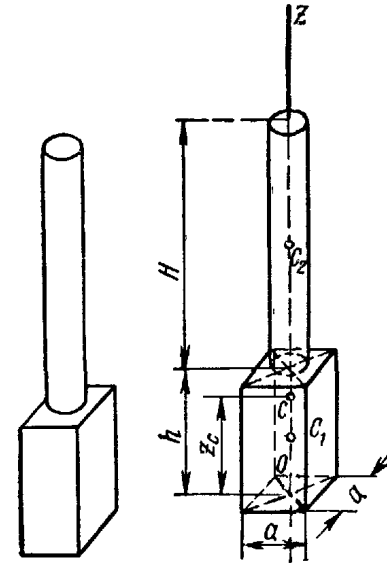


Рис. 161а.

Рис. 161б.

Решение. Центр тяжести однородного тела, имеющего ось симметрии, лежит на этой оси. Принимаем эту ось за ось z , начало координат выбираем в точке пересечения диагоналей основания (рис. 161б). Разбиваем тело на две части: прямоугольный параллелепипед и цилиндр. Центры тяжести этих частей C_1 и C_2 совпадают с серединами высот этих тел. Определяем координату центра тяжести однородного тела по формуле (66.2):

$$z_c = \frac{v_1 z_1 + v_2 z_2}{v_1 + v_2}.$$

Объем прямоугольного параллелепипеда $v_1 = a^2 h$; координата его центра тяжести $z_1 = \frac{h}{2}$.

Объем цилиндра $v_2 = \frac{\pi D^2}{4} H$; координата его центра тяжести $z_2 = h + \frac{H}{2}$.

Вычисляем координату z_C :

$$z_C = \frac{a^2 h \frac{h}{2} + \frac{\pi D^2}{4} H \left(h + \frac{H}{2} \right)}{a^2 h + \frac{\pi D^2}{4} H} = \frac{1^2 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{3,14 \cdot 0,5^2}{4} \cdot 4 (2 + 2)}{1^2 \cdot 2 + \frac{3,14 \cdot 0,5^2}{4} \cdot 4} = 1,85 \text{ м.}$$

По найденной координате строим центр тяжести тела C , находящийся внутри объема параллелепипеда.

Пример 42. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, изображенной на рис. 162, если известны размеры: $AB = 20 \text{ см}$; $BD = 24 \text{ см}$; $ED = 10 \text{ см}$; $AN = 2 \text{ см}$; $NL = 18 \text{ см}$; $LK = 20 \text{ см}$; $FK = 8 \text{ см}$.

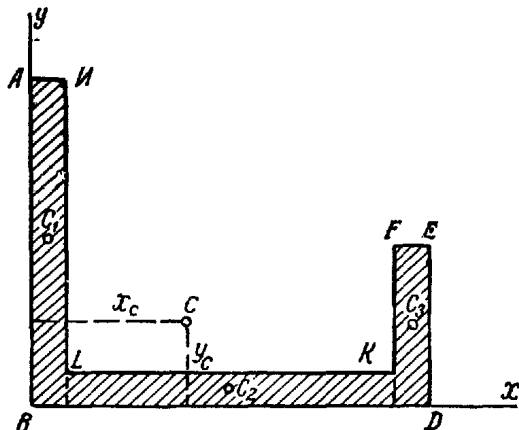


Рис. 162.

Решение. Для нахождения центра тяжести площади пластинки разбиваем ее на три прямоугольника и отмечаем центры тяжести каждого из них C_1 , C_2 и C_3 . Все результаты вычисления помещаем в таблицу (табл. 5), пользуясь формулами (70.1).

Таблица 5

| Номер элемента i | F_i , см^2 | x_i , см | y_i , см | $S_{iy} = F_i x_i$, см^3 | $S_{ix} = F_i y_i$, см^3 |
|--------------------|-----------------------|---------------------|---------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1 | 40 | 1 | 10 | 40 | 400 |
| 2 | 40 | 12 | 1 | 480 | 40 |
| 3 | 20 | 23 | 5 | 460 | 100 |
| Σ | 100 | — | — | 980 | 540 |

Каждому прямоугольнику соответствует одна строка таблицы. В эту строку помещаем значения его площади F_i и координат его центра тяжести x_i и y_i . Умножая F_i на x_i и F_i на y_i , находим его статические моменты относительно осей координат S_{iy} и S_{ix} .

Суммированием определяем площадь и статические моменты всей заданной фигуры.

Площадь заданной фигуры: $F = 100 \text{ см}^2$. Ее статические моменты:

$$S_y = 980 \text{ см}^3; \quad S_x = 540 \text{ см}^3.$$

Координаты центра тяжести пластинки:

$$x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{980}{100} = 9,8 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{540}{100} = 5,4 \text{ см}.$$

По вычисленным координатам центра тяжести пластинки строим центр ее тяжести C (рис. 162).

Пример 43. Определить положение центра тяжести однородного диска радиусом r_1 с круглым отверстием радиусом $r_2 = \frac{r_1}{2}$ (рис. 163).

Решение. Решаем задачу по способу отрицательных площадей (§ 70). Принимаем за ось x ось симметрии рассматриваемой плоской фигуры. Центр тяжести фигуры находится на этой оси, т. е. $y_C = 0$. Координату x_C определяем по формуле (70.2):

$$x_C = \frac{F_1 x_1 - F_2 x_2}{F_1 - F_2}.$$

Здесь

$$F_1 = \pi r_1^2 = 4\pi r_2^2, \quad F_2 = \pi r_2^2,$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = r_2.$$

Тогда

$$x_C = -\frac{\pi r_2^2 r_2}{4\pi r_2^2 - \pi r_2^2} = -\frac{r_2}{3} = -\frac{r_1}{6}.$$

Строим центр тяжести $C \left(-\frac{r_1}{6}, 0 \right)$ (рис. 163).

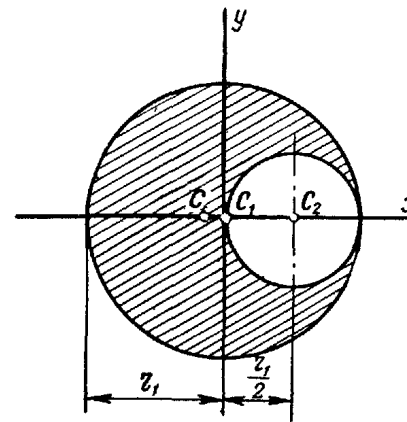


Рис. 163.

Пример 44. Определить положение центра тяжести C площади сегмента круга ADB радиусом $AO = 50 \text{ см}$, если угол $AOB = 90^\circ$ (рис. 164).

Решение. Воспользуемся способом отрицательных площадей. Площадь сегмента круга представляет собой разность площадей сектора круга AOB и треугольника AOB . Примем за ось x биссектрису угла AOB , т. е. ось симметрии сегмента. Положение центра

тяжести площади сегмента круга на этой оси определится формулой (70.2):

$$x_C = \frac{F_1 x_1 - F_2 x_2}{F_1 - F_2}.$$

Площадь сектора круга AOB : $F_1 = R^2 \alpha$; площадь треугольника AOB : $F_2 = R^2 \sin \alpha \cos \alpha$. Координаты центров тяжести сектора и треугольника:

$$x_1 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad x_2 = \frac{2}{3} R \cos \alpha.$$

Подставив эти значения в формулу (70.2), получим:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin \alpha - \frac{2}{3} R^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{R^2 \alpha - R^2 \sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{2}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}. \end{aligned}$$

При $R = 50$ см и $\alpha = 45^\circ$ найдем

$$x_C = \frac{2}{3} 50 \frac{\sqrt{2}}{4(0,785 - 0,5)} = 41,3 \text{ см.}$$

Пример 45. Определить положение центров тяжести полукруга и полуокружности.

Решение. Положение центра тяжести полукруга определим по теореме Паппа — Гюльдена об объеме тела вращения, пользуясь формулой (69.1):

$$V = 2\pi x_C F.$$

Совместим ось y с диаметром полукруга, а ось x — с его осью симметрии (рис. 165). При вращении полукруга вокруг оси y получится шар, объем которого известен:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Зная площадь полукруга $F = \frac{1}{2} \pi r^2$, можно определить координату x_C его центра тяжести, лежащего на оси x :

$$x_C = \frac{V}{2\pi F} = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{2\pi \frac{1}{2} \pi r^2} = \frac{4}{3\pi} r \approx 0,4244r.$$

Положение центра тяжести полуокружности определим по теореме Паппа — Гюльдена о поверхности вращения, пользуясь формулой (69.2):

$$F = 2\pi x_C L.$$

Совместим ось y с диаметром, соединяющим концы полуокружности, а ось x — с ее осью симметрии (рис. 166). Центр тяжести C полуокружности лежит на оси x .

При вращении полуокружности вокруг оси y получится поверхность шара, площадь которой известна: $F = 4\pi r^2$.

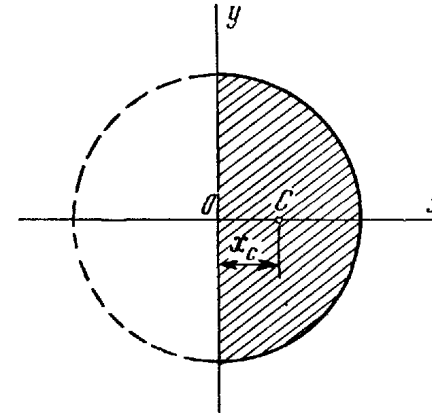


Рис. 165.

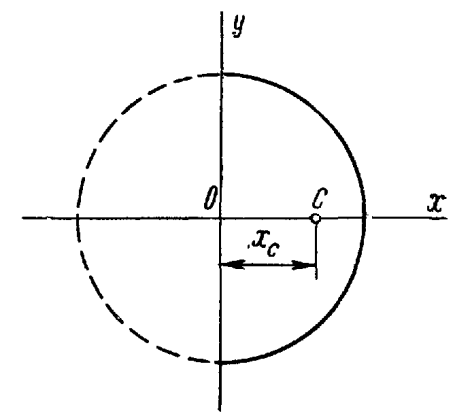


Рис. 166.

Зная длину полуокружности $L = \pi R$, можно определить координату x_C ее центра тяжести:

$$x_C = \frac{F}{2\pi L} = \frac{4\pi r^2}{2\pi \pi r} = \frac{2}{\pi} r \approx 0,6366r.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Каким свойством обладает центр параллельных сил?
2. По каким формулам вычисляются координаты центра параллельных сил?
3. По каким формулам вычисляются координаты центров тяжести однородных тел, плоских фигур и линий?
4. Что называется статическим моментом площади плоской фигуры относительно оси, как он вычисляется и какую размерность имеет?
5. Какими способами можно определить положение центра тяжести площади в случае, если известны положения центров тяжести отдельных ее частей?
6. Какими вспомогательными теоремами пользуются при определении положения центра тяжести?

ГЛАВА XI

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

§ 74. Введение в кинематику

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, вне связи с силами, определяющими это движение.

Слово кинематика происходит от греческого слова «кинема», что значит движение.

«Движение, рассматриваемое в самом общем смысле слова, т. е. понимаемое как форма бытия материи, как внутренне присущий материи атрибут, обнимает собою все происходящие во вселенной изменения и процессы, начиная от простого перемещения и кончая мышлением»¹.

«Материя без движения так же немыслима, как движение без материи»².

«В мире нет ничего, кроме движущейся материи, и движущаяся материя не может двигаться иначе, как в пространстве и во времени»³.

Таким образом, всякое движение происходит в пространстве и во времени, т. е. пространство и время представляют собой формы существования материи. Они так же объективно реальны, как и материя.

Движение и материя существуют вечно и не могут быть ни созданы, ни уничтожены.

В теоретической механике изучается простейшая форма движения материи — механическое движение, т. е. происходящее во

временн изменение положения одного тела относительно другого тела, с которым связана система координат, называемая *системой отсчета*. Систему отсчета можно связать с любым телом. Эта система может быть как движущейся, так и условно неподвижной.

При изучении движений на Земле за условно неподвижную систему отсчета обычно принимают систему осей, неизменно связанных с Землей.

Тело, положение которого по отношению к выбранной системе отсчета не изменяется, находится в состоянии относительного покоя (по отношению к этой системе).

Время в классической механике предполагается во всех системах отсчета одинаковым и не зависящим от движения одной системы по отношению к другой. Оно рассматривается как непрерывно изменяющаяся величина и обозначается буквой t . За единицу времени принимается 1 сек, равная $\frac{1}{24 \cdot 3600}$ средних солнечных суток*.

Представления древнего мира о движении ограничивались равномерным движением и его скоростью как отношением пути, пройденного телом, ко времени, в течение которого пройден этот путь.

Понятие ускорения введено Галилеем (1564—1642) и обобщено для случая криволинейного движения голландским физиком Гюйгенсом (1629—1695). Гюйгенс первый применил разложение ускорения на касательную и нормальную составляющие.

Развитие кинематики в XVIII в. связано с работами Леонарда Эйлера (1707—1783). Эйлер заложил основы кинематики твердого тела, создал аналитические методы решения задач механики.

Быстрое развитие техники в начале XIX в., в частности машиностроения, потребовало исследования геометрических свойств движения тел. Кинематика выделилась в самостоятельный раздел, причем особое значение приобрела кинематика механизмов.

Крупные исследования в области кинематики механизмов и машин принадлежат французским ученым Понселе (1788—1876), Шалю (1793—1880), Кориолису (1792—1843) и русским ученым: основоположнику русской школы теории механизмов и машин акад. П. Л. Чебышеву (1821—1894), проф. Л. В. Ассур (1878—1920), Н. И. Мерцалову (1866—1948), А. П. Котельникову (1865—1944) и др.

В разделе «Кинематика» изучается движение материальных или геометрических точек какого-либо тела. Описание движения тех и других точек одинаково, поэтому будем употреблять термин «точка», без пояснения «материальная» или «геометрическая».

§ 75. Естественный способ задания движения точки

Движущаяся точка описывает в пространстве некоторую линию. Эта линия, представляющая собой геометрическое место последова-

¹ Энгельс. Диалектика природы, 1952, стр. 44.

² Энгельс. Анти-Дюринг, 1951, стр. 57.

³ В. И. Ленин. Материализм и эмпириокритицизм, 1948, стр. 158.

* Точнее, согласно ГОСТу, 1 сек = 1/31556925,9747 части тропического года, т. е. времени между двумя последовательными прохождением Солнца через одну и ту же точку на небесной сфере.

тельных положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета, называется *траекторией точки*.

По виду траектории все движения точки делятся на прямые и криволинейные.

Изучение движения точки заключается в определении основных характеристик этого движения: положения точки в выбранной системе отсчета, а также ее скорости и ускорения в любой момент времени. Эта задача решается различными способами.

Существуют три способа задания движения точки: естественный, векторный и координатный.

Рассмотрим естественный способ задания движения точки, применяемый в случае, когда траектория точки заранее известна. Траекторией может быть как прямая, так и кривая линия (рис. 167).

Выберем на траектории неподвижную точку O , которую назовем началом отсчета дуговой координаты. Положение движущейся точки M на траектории будем определять дуговой координатой, т. е. расстоянием $OM = s$, отложенным по траектории от начала отсчета O .

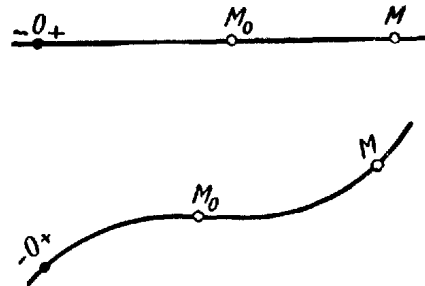


Рис. 167.

Расстояния, отложенные в одну сторону от точки O , будем считать положительными, а в противоположную — отрицательными, т. е. установим направление отсчета дуговой координаты.

При движении точки M расстояние s от этой точки до неподвижной точки O изменяется с течением времени, т. е. дуговая координата s является функцией времени:

$$s = f(t). \quad (75.1)$$

Эта зависимость называется *уравнением движения точки*.

Если вид функции $f(t)$ известен, то для каждого значения t можно найти значение s , отложить соответствующее расстояние по траектории и указать, где находится движущаяся точка M в этот момент времени.

Таким образом, движение точки определено, если известны следующие элементы: траектория точки, начало и направление отсчета дуговой координаты и уравнение движения $s = f(t)$.

Дуговую координату точки не следует смешивать с длиной пути σ , пройденного движущейся точкой. Дуговая координата s точки M в некоторый момент времени t может равняться пути σ , пройденному точкой за промежуток времени $[0, t]$ только в том случае, если движение точки начинается из точки O и совершается в положительном направлении.

Если в начальный момент времени t_0 точка занимала положение M_0 , а в момент времени t занимает положение M (рис. 167), то пройденный ею путь за промежуток $[0, t]$ при движении точки в одном направлении определяется по формуле

$$\sigma = M_0M = OM - OM_0 = s - s_0. \quad (75.2)$$

Изменение дуговой координаты s за элементарный промежуток времени dt равно дифференциалу дуги

$$ds = f'(t) dt;$$

при движении точки в сторону возрастания дуг $ds > 0$; при движении точки в противоположную сторону $ds < 0$.

Приращение пути $d\sigma$ (элементарное перемещение точки) всегда положительно, т. е. $d\sigma = |ds| = |f'(t)| dt$.

Путь, пройденный точкой за некоторый промежуток времени $[0, t]$, определяется как предел суммы элементарных перемещений точки за этот промежуток времени:

$$\sigma_{0,t} = \int_0^t |f'(t)| dt. \quad (75.3)$$

Расстояние s и путь σ выражаются в метрах.

§ 76. Векторный способ задания движения точки

Положение точки в пространстве однозначно определяется заданием радиуса вектора \mathbf{r} , проведенного из некоторого неподвижного центра O в данную точку M (рис. 168).

Для определения движения точки нужно знать, как изменяется с течением времени радиус-вектор \mathbf{r} , т. е. должна быть задана вектор-функция \mathbf{r} аргумента t :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (76.1)$$

Траектория точки является геометрическим местом концов радиуса-вектора \mathbf{r} движущейся точки.

Линия, образованная концами переменного вектора, начало которого находится в определенной точке пространства, называется *годографом* этого вектора.

Следовательно, *траектория точки M является годографом ее радиуса-вектора \mathbf{r}* .

Векторный способ определения движения материальной точки или системы материальных точек широко используется и в кинематике,

и в динамике, так как он значительно упрощает многие выводы и иногда подчеркивает физическую сущность явлений.

От векторных формул легко перейти к аналитическим выражениям, обычно более удобным для вычислений.

§ 77. Координатный способ задания движения точки. Уравнения движения точки в декартовых координатах

Положение точки M в системе отсчета $Oxyz$ определяется тремя декартовыми координатами точки x , y , z (рис. 169). При движении точки M ее координаты изменяются с течением времени. Следовательно, координаты x , y , z движущейся точки M являются функциями времени t :

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (77.1)$$

Эти уравнения называются *уравнениями движения точки в декартовых координатах*.

Уравнениями (77.1) определяется движение точки.

Действительно, имея эти уравнения, можно для каждого момента времени t найти соответствующие координаты x , y , z и по ним определить положение точки в пространстве в этот момент времени.

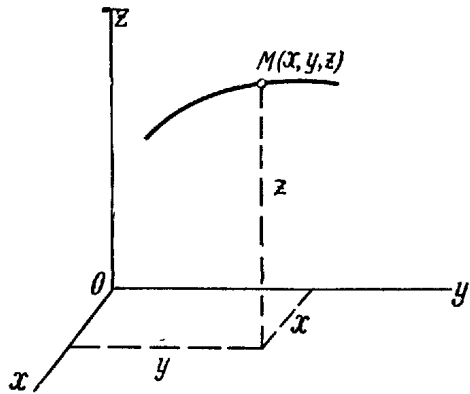


Рис. 169.

Движение точки M в одной плоскости определяется двумя уравнениями движения (рис. 170):

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t). \quad (77.2)$$

Прямолинейное движение точки M (рис. 171) определяется одним уравнением движения:

$$x = f(t). \quad (77.3)$$

В этом случае координатный способ задания движения точки сводится к естественному.

Уравнения движения, определяющие координаты точки в любой момент времени, можно рассматривать как *параметрические уравнения траектории точки*. При исключении параметра t из уравнений движения

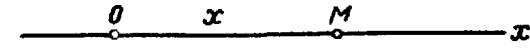


Рис. 171.

получаются *уравнения траектории точки в координатной форме*.

Пусть уравнения движения точки M имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t); \\ y &= f_2(t); \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \right\}$$

Решив первое уравнение относительно t , получим

$$t = \varphi(x).$$

Подставив полученное для t выражение в два других уравнения, найдем уравнения траектории точки в координатной форме

$$\left. \begin{aligned} y &= f_2[\varphi(x)]; \\ z &= f_3[\varphi(x)]. \end{aligned} \right\} \quad (77.4)$$

Как известно из аналитической геометрии, линии в пространстве соответствуют два уравнения с тремя координатами.

Пусть движение точки M в плоскости задано уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t); \\ y &= f_2(t). \end{aligned} \right\}$$

Исключив параметр t , получим уравнение траектории точки в координатной форме:

$$y = f_2[\varphi(x)]. \quad (77.5)$$

Помимо декартовых координат для определения положения точки на плоскости и в пространстве, применяют и другие системы координат (полярные, цилиндрические, сферические и др.).

Пример 46. Концы линейки AB движутся по двум взаимно перпендикулярным прямым $L'L$ и $N'N$, причем угол $OBA = \varphi$ изме-

няется пропорционально времени, т. е. $\varphi = \omega t$. Составить уравнения движения точки M , находящейся от концов линейки на расстояниях $AM = a$ и $BM = b$, и определить ее траекторию (рис. 172а).

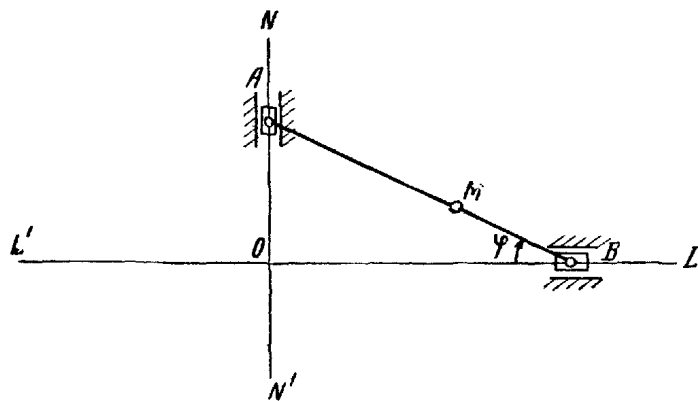


Рис. 172а.

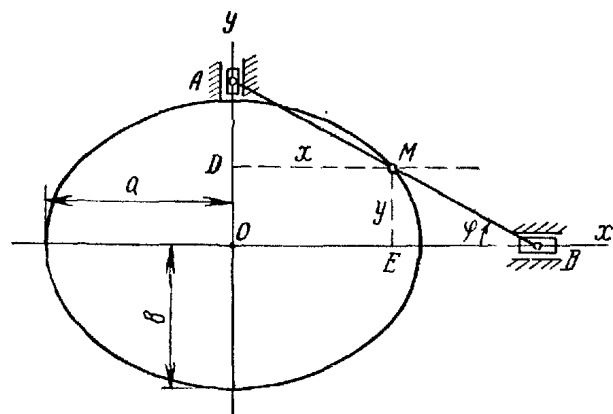


Рис. 172б.

Решение. Прямые $L'L$ и $N'N$ примем за оси координат (рис. 172б). Из точки M опустим на оси перпендикуляры MD и ME . Тогда из треугольников AMD и MBE получим:

$$x = DM = AM \cos \varphi,$$

$$y = EM = BM \sin \varphi.$$

Подставляя значения $AM = a$, $BM = b$, $\varphi = \omega t$, получаем уравнения движения точки M :

$$x = a \cos \omega t,$$

$$y = b \sin \omega t.$$

Для определения траектории точки M исключаем из этих уравнений время t :

$$\frac{x}{a} = \cos \omega t; \quad \frac{y}{b} = \sin \omega t;$$

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 \omega t; \quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \omega t;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Полученное уравнение траектории точки M является уравнением эллипса с полуосями a и b и с центром в начале координат (рис. 172б).

При изменении положения точки M на линейке изменится форма эллипса. На этом принципе основано устройство эллипсографа — прибора для вычерчивания эллипсов.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие кинематические способы задания движения точки существуют и в чем состоит каждый из этих способов?
2. При каких условиях значение дуговой координаты точки в некоторый момент времени равно пути, пройденному точкой за промежуток времени от начального до данного момента времени?
3. Чем является траектория точки при векторном способе задания движения точки?
4. Как по уравнениям движения точки в координатной форме определить ее траекторию?

ГЛАВА XII

СКОРОСТЬ ТОЧКИ

§ 78. Определение скорости точки при задании ее движения векторным способом. Вектор скорости точки

Скорость — это векторная величина, характеризующая быстроту и направление движения точки в данной системе отсчета.

При векторном способе задания движения положение движущейся точки в каждый момент времени определяется радиусом-вектором \mathbf{r} , который является функцией времени $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Пусть в момент времени t точка занимает положение M , определяемое радиусом-вектором \mathbf{r} , а в момент $t_1 = t + \Delta t$ — положение M_1 , определяемое радиусом-вектором \mathbf{r}_1 (рис. 173).

Из треугольника OMM_1 имеем:

$$\overline{OM_1} = \overline{OM} + \overline{MM_1}.$$

При перемещении точки ее радиус-вектор получает приращение, т. е.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}.$$

Из двух последних равенств следует, что вектор перемещения точки \overline{MM}_1 является приращением радиуса-вектора точки $\Delta \mathbf{r}$ за промежуток времени Δt .

Отношение вектора перемещения $\Delta \mathbf{r}$ к промежутку времени Δt , в течение которого произошло это перемещение, представляет собой

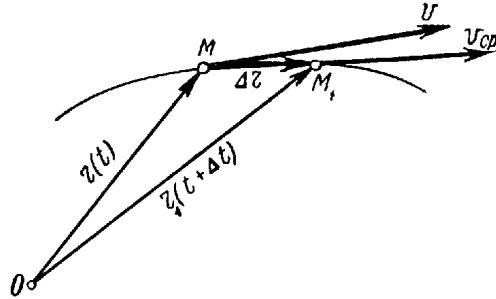


Рис. 173.

вектор средней скорости $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ воображаемого движения точки по хорде MM_1

$$\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (78.1)$$

Направление вектора $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ совпадает с направлением $\Delta \mathbf{r}$. При уменьшении промежутка времени Δt и приближении его к нулю вектор $\Delta \mathbf{r}$ также стремится к нулю, а вектор $\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ — к некоторому пределу. Этот предел является вектором скорости точки в момент t :

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (78.2)$$

Так как Δt — приращение скалярного аргумента t , а $\Delta \mathbf{r}$ — приращение вектора-функции \mathbf{r} , то предел отношения $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \rightarrow 0$ является векторной производной от \mathbf{r} по t :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (78.3)$$

Из равенств (78.2) и (78.3) получаем

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (78.4)$$

Таким образом, вектор скорости точки в данный момент равен производной от радиуса-вектора точки по времени.

Вектор $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ направлен по хорде MM_1 в сторону движения точки. Когда Δt стремится к нулю, точка M_1 стремится к точке M , т. е. предельным положением секущей MM_1 является касательная.

Из этого следует, что вектор скорости точки \mathbf{v} направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

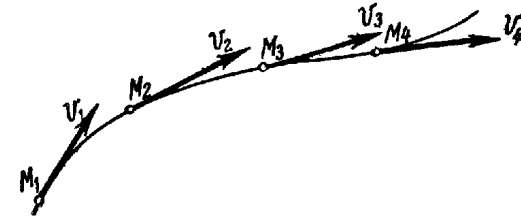


Рис. 174.

При движении точки по криволинейной траектории направление вектора скорости непрерывно изменяется (рис. 174).

Установив, что скорость точки является вектором, условимся вместо термина „вектор скорости“ употреблять термин „скорость“.

Примечание. Из векторного исчисления известно, что векторная производная от некоторого вектора по любому скалярному аргументу представляет собой вектор, направленный по касательной к годографу дифференцируемого вектора. Так, вектор скорости $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ направлен по касательной к траектории, т. е. по касательной к годографу радиуса-вектора \mathbf{r} .

Модуль векторной производной определяется обычно способами, изложенными в § 79 и 80.

§ 79. Определение скорости точки при задании ее движения естественным способом. Проекция скорости на касательную к траектории

Определим скорость точки в случае, когда ее движение задано естественным способом, т. е. известны: ее траектория AB , начало и направление отсчета дуговой координаты и уравнение движения точки $s = f(t)$ (рис. 175).

Пусть в момент времени t точка занимает положение M , а в момент $t_1 = t + \Delta t$ — положение M_1 . Дуговые координаты этих точек имеют следующие значения:

$$s = OM; \quad s_1 = OM_1 = OM + MM_1 = s + \Delta s.$$

Приращение дуговой координаты

$$\Delta s = \overset{\frown}{MM_1}.$$

Проведем из произвольного центра O' в точку M радиус-вектор \mathbf{r} и определим скорость точки в момент t по формуле (78.4):

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Введем в качестве промежуточной переменной дуговую координату s , от которой зависит радиус-вектор \mathbf{r} движущейся точки. Действительно, каждому значению s соответствует определенное значение \mathbf{r} , т. е. \mathbf{r} можно рассматривать не только как функцию t , но и как функцию s , полагая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ (рис. 176); тогда получим

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Здесь

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}.$$

Вектор $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}$ направлен так же, как вектор $\Delta \mathbf{r}$ (рис. 176). При $\Delta s \rightarrow 0$ его направление стремится к направлению касательной, проведенной в точке M в сторону увеличения дуговой координаты s . Модуль этого вектора стремится к единице:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right| = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{MM_1}{\overset{\circ}{MM_1}} = 1.$$

Таким образом, вектор $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ имеет модуль, равный единице и направлен по касательной к кривой в сторону увеличения дуговой

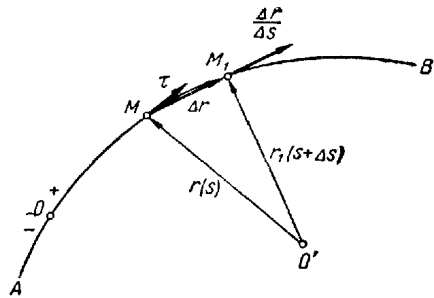


Рис. 176.

координаты (см. примечание § 78). Вектор $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ является ортом этого направления. Обозначим этот орт $\boldsymbol{\tau}$:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (79.1)$$

Пользуясь (79.1), получаем вектор скорости в виде

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\tau} \frac{ds}{dt}. \quad (79.2)$$

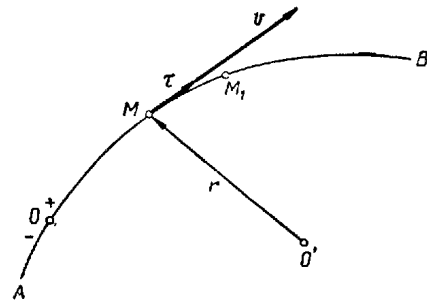


Рис. 175.

Производная $\frac{ds}{dt}$ в выражении (79.2) представляет собой проекцию скорости \mathbf{v} на касательную, т. е. определяет алгебраическую величину скорости.

Условимся алгебраическую величину скорости обозначать символом \tilde{v} , а модуль скорости буквой v .

Тогда:

$$\tilde{v} = \frac{ds}{dt}, \quad (79.3)$$

а

$$v = |\tilde{v}| = \left| \frac{ds}{dt} \right|, \quad (79.4)$$

т. е. модуль скорости равен абсолютному значению производной от дуговой координаты точки по времени.

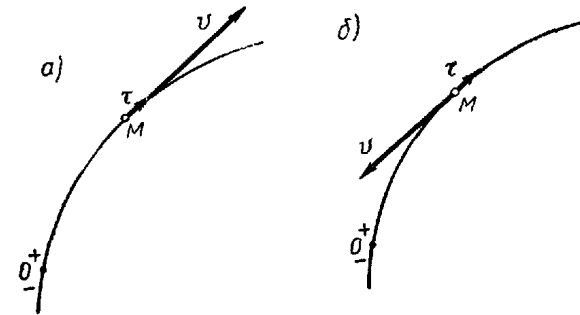


Рис. 177.

Орт касательной $\boldsymbol{\tau}$ всегда направлен в сторону увеличения дуговой координаты.

Если в некоторый момент времени $\frac{ds}{dt} > 0$, то в этот момент функция s возрастает, т. е. точка движения в сторону

увеличения s и направление скорости \mathbf{v} совпадает с направлением орта $\boldsymbol{\tau}$ (рис. 177, а).

Если $\frac{ds}{dt} < 0$, то в этот момент функция s убывает и направление скорости \mathbf{v} противоположно направлению орта $\boldsymbol{\tau}$ (рис. 177, б).

Если в некоторый момент времени $\frac{ds}{dt} = 0$ и изменяет знак, то дуговая координата s в этот момент достигает максимального или минимального значения, а точка изменяет направление движения.

Таким образом, знак $\tilde{v} = \frac{ds}{dt}$ указывает направление движения точки по траектории.

При движении точки только в сторону возрастания дуговой координаты во все моменты времени $\frac{ds}{dt} > 0$, т. е. $\left| \frac{ds}{dt} \right| = \frac{ds}{dt}$.

В этом случае формуле (79.4), определяющей модуль скорости, можно придать вид

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (79.5)$$

Пример 47. Точка движется по окружности радиусом $R = 150$ см согласно уравнению

$$s = 50 + 6t + \frac{1}{12}t^3,$$

где t выражено в *сек*, s — в *см*.

Определить:

1) среднюю скорость точки за первые шесть секунд и вторые шесть секунд, отсчитанные от начального момента;

2) скорость точки в конце шестой и в конце двенадцатой секунды;

3) дуговую координату точки, при которой скорость точки равна 10 см/сек.

Решение 1. Определяем среднюю скорость точки. Для определения средней скорости точки за промежутки времени (0—6) и (6—12) сек требуется найти пути, пройденные точкой за эти промежутки времени.

Из уравнения движения видно, что при увеличении t дуговая координата s монотонно возрастает, т. е. точка движется, удаляясь от начала отсчета в положительном направлении. В этом случае пройденные точкой пути можно найти как приращения дуговой координаты. По уравнению движения находим значения дуговой координаты, соответствующие моментам времени $t = 0, 6, 12$ сек.

При $t = 0$ $s_0 = 50$ см;

при $t = 6$ сек $s_6 = 50 + 6 \cdot 6 + \frac{1}{12} \cdot 6^3 = 104$ см;

при $t = 12$ сек $s_{12} = 50 + 6 \cdot 12 + \frac{1}{12} \cdot 12^3 = 266$ см.

Пройденные пути определяются (рис. 178):

$$\sigma_{0,6} = M_0M_6 = s_6 - s_0 = 104 - 50 = 54 \text{ см},$$

$$\sigma_{6,12} = M_6M_{12} = s_{12} - s_6 = 266 - 104 = 162 \text{ см}.$$

Средние скорости за эти промежутки времени по шесть секунд находим делением пути на величину промежутка времени:

$$v_{\text{ср},0,6} = \frac{\sigma_{0,6}}{6} = \frac{54}{6} = 9 \text{ см/сек},$$

$$v_{\text{ср},6,12} = \frac{\sigma_{6,12}}{6} = \frac{162}{6} = 27 \text{ см/сек}.$$

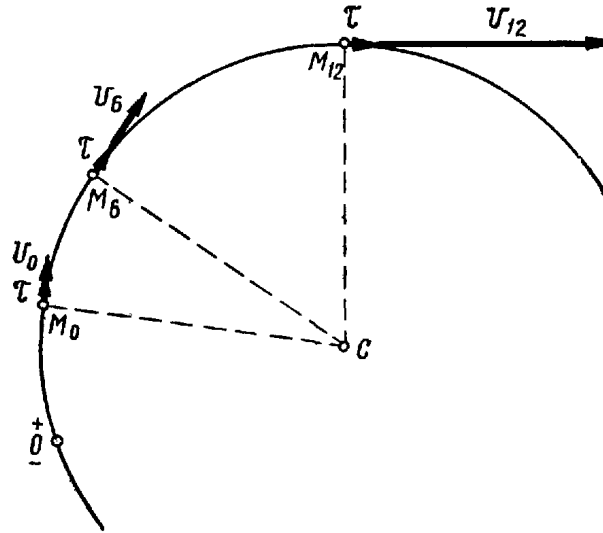


Рис. 178.

2. Определяем скорость точки в данный момент. Прежде всего по формуле (79.5) определим модуль скорости точки в любой момент времени:

$$v = \frac{ds}{dt} = 6 + \frac{1}{4}t^2. \quad (79.6)$$

По формуле (79.6) вычислим модули скорости точки в моменты времени 6 и 12 сек:

а) при $t = 6$ сек

$$v_6 = 6 + \frac{1}{4} \cdot 36 = 15 \text{ см/сек};$$

б) при $t = 12$ сек

$$v_{12} = 6 + \frac{1}{4} \cdot 144 = 42 \text{ см/сек}.$$

Как указано выше, точка движется в положительном направлении отсчета дуговой координаты, поэтому скорости точки v_6 и v_{12} направлены так же, как орты τ .

Примечание. Средняя скорость точки $v_{\text{ср},6-12} = 27$ см/сек за промежуток времени от 6 до 12 сек не совпадает с полусуммой модулей начальной и конечной скоростей этого промежутка $\frac{v_6 + v_{12}}{2} = \frac{15 + 42}{2} = 28,5$ см/сек, так как движение точки не является равнопеременным.

3. Определяем дуговую координату точки, соответствующую заданной скорости. По формуле (79.6) можно определить момент времени, когда точка обладает скоростью 10 см/сек:

$$v = 6 + \frac{1}{4}t^2;$$

$$10 = 6 + \frac{1}{4}t^2; \quad t^2 = 16; \quad t = 4 \text{ сек}.$$

По уравнению движения определится значение дуговой координаты в этот момент времени:

$$\text{при } t = 4 \text{ сек} \quad s_4 = 50 + 6 \cdot 4 + \frac{1}{12} \cdot 4^3 = 79,3 \text{ см}.$$

§ 80. Определение скорости точки при задании ее движения координатным способом. Проекция скорости точки на неподвижные оси декартовых координат

Определим модуль и направление скорости точки по уравнениям ее движения в декартовых координатах.

Пусть заданы уравнения движения точки (рис. 179):

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \right\}$$

Обозначим орты осей координат \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} . Проведем из начала координат O в движущуюся точку M радиус-вектор \mathbf{r} . Согласно рис. 179 имеем:

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BM}$$

или

$$\mathbf{r} = ix + jy + kz.$$

Скорость точки равна производной от радиуса-вектора по времени (78.4). Найдем эту производную, учитывая, что орты \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} имеют неизменные модули и направления, т. е. постоянны и могут быть вынесены за знак производной:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dx}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy}{dt} + \mathbf{k} \frac{dz}{dt}.$$

Построив прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны осям координат, а диагональ совпадает со скоростью \mathbf{v} , получим проекции скорости \mathbf{v} на оси координат v_x , v_y , v_z , равные алгебраическим величинам отрезков Ma , Mb , Mc .

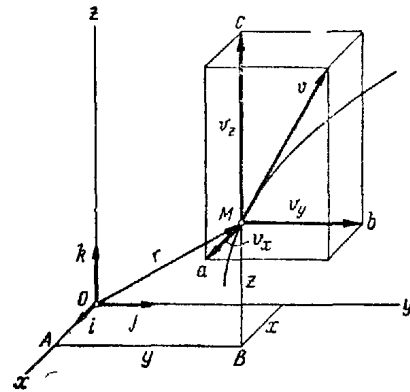


Рис. 179.

Тогда разложение скорости на компоненты по осям координат примет вид

$$\mathbf{v} = iv_x + jv_y + kv_z.$$

Сопоставляя обе формулы, определяющие скорость, находим

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (80.1)$$

Следовательно, проекции скорости точки на неподвижные оси декартовых координат равны первым производным от соответствующих координат точки по времени.

Пользуясь принятым обозначением производных по времени, можно написать

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v_z = \dot{z}.$$

Вычислив проекции скорости на оси декартовых координат, можно определить модуль и направление скорости точки по следующим формулам:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2};$$

$$\cos(\mathbf{v}, \mathbf{i}) = \frac{v_x}{v}; \quad \cos(\mathbf{v}, \mathbf{j}) = \frac{v_y}{v}; \quad \cos(\mathbf{v}, \mathbf{k}) = \frac{v_z}{v}. \quad (80.2)$$

Движение точки в плоскости xOy (рис. 180) задается двумя уравнениями движения:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t). \end{aligned} \right\}$$

Модуль и направление скорости точки в этом случае определяются

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

$$\cos(\mathbf{v}, \mathbf{i}) = \frac{v_x}{v}; \quad \cos(\mathbf{v}, \mathbf{j}) = \frac{v_y}{v}. \quad (80.3)$$

Прямолинейное движение точки задается одним уравнением:

$$x = f(t).$$

В этом случае модуль скорости точки равен абсолютной величине проекции скорости на ось x :

$$v = |v_x| = \left| \frac{dx}{dt} \right|. \quad (80.4)$$

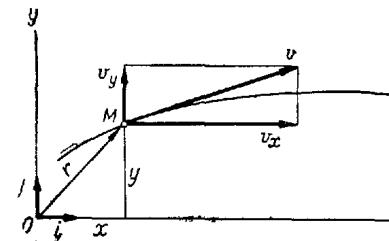


Рис. 180.



Рис. 181.

При $v_x > 0$ точка движется по направлению оси x (рис. 181), при $v_x < 0$ — противоположно направлению оси.

§ 81. Годограф скорости точки и его уравнения

Скорость точки при неравномерном криволинейном движении изменяется как по модулю, так и по направлению.

Отметим ряд положений движущейся точки на траектории M_1 , M_2 , M_3 , M_4 и покажем скорости точки в этих положениях v_1 , v_2 , v_3 , v_4 (рис. 182, а).

Выбрав в пространстве некоторую неподвижную точку O_1 , отложим от этой точки векторы, геометрически равные скоростям v_1 , v_2 , v_3 , v_4 (рис. 182, б).

Если от точки O_1 отложить скорости, соответствующие всем положениям точки M на кривой AB и соединить концы этих векторов, то получится линия CD , являющаяся годографом скорости.

Таким образом, годограф скорости представляет собой геометрическое место концов векторов скорости движущейся точки, отложенных от одной и той же произвольной точки пространства.

Изобразим на рис. 183,а траекторию точки AB и ее скорость v в произвольный момент времени t , а на рис. 183,б — годограф скорости CD этой точки.

Проведем через точку O_1 оси координат X, Y, Z , параллельные основным осям x, y, z .

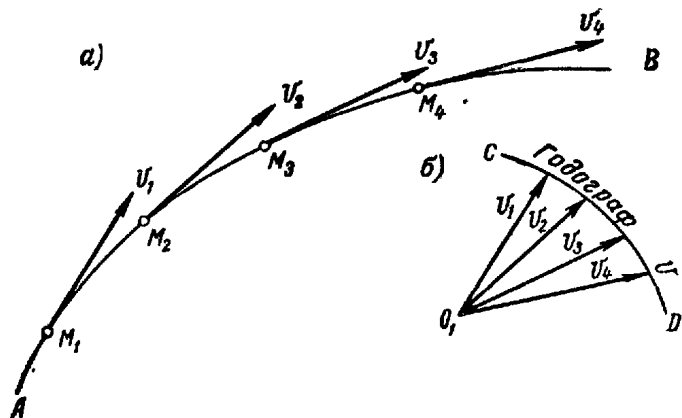


Рис. 182.

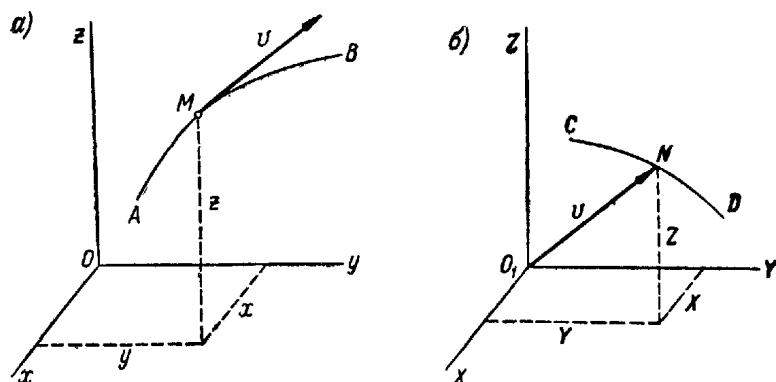


Рис. 183.

Тогда радиусом-вектором любой точки N годографа скорости CD будет скорость v , а координаты точек годографа X, Y, Z будут равны проекциям скорости на оси координат, т. е.

$$\left. \begin{aligned} X &= v_x = \dot{x}, \\ Y &= v_y = \dot{y}, \\ Z &= v_z = \dot{z}. \end{aligned} \right\} \quad (81.1)$$

Эти уравнения являются *параметрическими уравнениями годографа скорости*.

Пример 48. Построить годограф скорости точки M линейки эллипсографа, рассмотренной в примере 46.

Решение. Уравнения движения точки M линейки имеют вид (см. пример 46. рис. 172а, б):

$$\begin{aligned} x &= a \cos \omega t, \\ y &= b \sin \omega t. \end{aligned}$$

Траекторией точки M является эллипс, имеющий уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Эллипс построен на рис. 184а. Находим параметри-

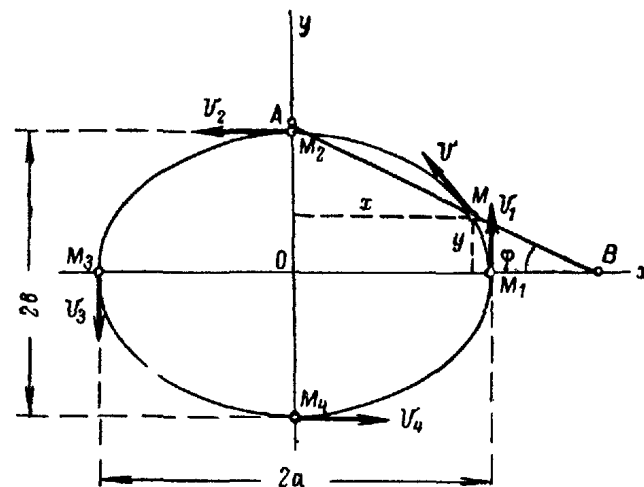


Рис. 184а.

ческие уравнения годографа скорости точки по формулам (81.1), т. е. дифференцируя уравнения движения точки:

$$\begin{aligned} X &= v_x = \dot{x} = -\omega a \sin \omega t, \\ Y &= v_y = \dot{y} = \omega b \cos \omega t. \end{aligned}$$

Исключая время t из этих уравнений, получаем уравнение годографа скорости

$$\frac{X^2}{\omega^2 a^2} + \frac{Y^2}{\omega^2 b^2} = 1.$$

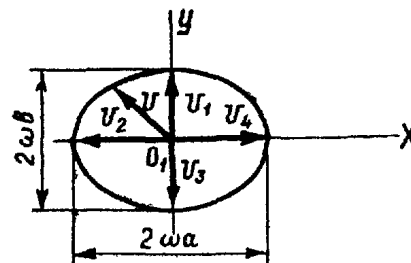


Рис. 184б.

Годограф скорости является эллипсом с полуосями ωa и ωb , пропорциональными полуосями эллиптической траектории (рис. 184б), при этом длины этих полуосей выражены в единицах скорости

Так, если скорости движущейся точки в положениях M_1, M, M_2, M_3, M_4 (рис. 184а) изобразим на рис. 184б, то получим векторы v_1, v_2, v_3, v_4 .

v, v_2, v_3, v_4 , начала которых находятся в начале координат, а концы на эллипсе — годографе скорости.

Очевидно, что при движении точки из M_1 в M_2 скорость ее возрастает по модулю от v_1 до v_2 и наибольшие значения скорости соответствуют нахождению точки на концах малой оси, а наименьшие — на концах большой оси.

Вопросы для самоконтроля

1. Чему равен вектор скорости точки в данный момент и какое направление он имеет?
2. Как связан орт касательной к кривой с радиусом-вектором движущейся точки?
3. Чему равна проекция скорости точки на касательную к ее траектории и модуль ее скорости?
4. Как определяются проекции скорости точки на неподвижные оси декартовых координат?
5. Что представляет собой годограф скорости и каковы его параметрические уравнения?
6. Какой вид имеет годограф скорости прямолинейного неравномерного движения и равномерного движения по кривой, не лежащей в одной плоскости?

ГЛАВА XIII

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

§ 82. Определение ускорения точки при задании ее движения векторным способом. Вектор ускорения точки

При неравномерном криволинейном движении точки изменяются модуль и направление ее скорости. Ускорение точки характеризует быстроту изменения модуля и направления скорости точки.

Допустим, что в момент времени t точка занимает положение M и имеет скорость v , а в момент времени $t_1 = t + \Delta t$ она занимает положение M_1 и имеет скорость v_1 (рис. 185,а)

Найдем приращение скорости за промежуток времени Δt .

Для этого отложим от точки M скорость v_1 и построим при этой точке параллелограмм, одной из сторон которого будет скорость v , а диагональю — скорость v_1 . Тогда вторая сторона параллелограмма будет приращением скорости Δv , так как

$$v_1 = v + \Delta v.$$

Разделив приращение скорости Δv на промежуток времени Δt , получим вектор среднего ускорения точки за этот промежуток:

$$w_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Этот вектор имеет направление Δv и, следовательно, направлен в сторону вогнутости кривой.

Построив годограф скорости CD (рис. 185,б), отложим там же скорости v и v_1 , приращение скорости Δv , а также вектор среднего ускорения $w_{\text{ср}}$, направленный по хорде NN_1 годографа скорости.

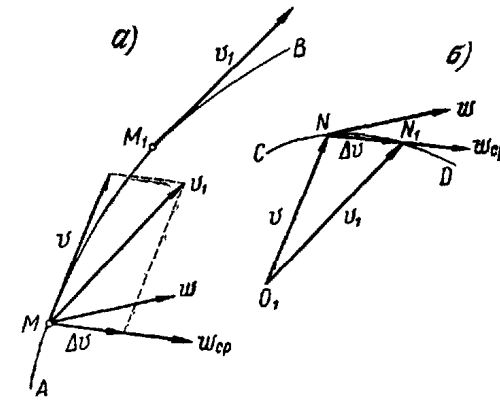


Рис. 185.

Предел, к которому стремится вектор среднего ускорения $w_{\text{ср}}$, когда Δt стремится к нулю, является вектором ускорения точки w в данный момент времени t :

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Учитывая, что скорость является вектором-функцией от времени, т. е. $v = v(t)$ и что $v = \frac{dr}{dt}$, имеем

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}. \quad (82.1)$$

Следовательно, вектор ускорения точки равен первой производной от скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени.

Установим направление вектора ускорения.

Вектор среднего ускорения $w_{\text{ср}}$ направлен по хорде NN_1 годографа скорости. Когда Δt стремится к нулю, точка N_1 стремится к точке N и секущая NN_1 в пределе превращается в касательную к годографу скорости. Из этого следует, что вектор ускорения точки имеет направление касательной к годографу скорости (см. примечание § 78).

Выясним расположение вектора ускорения точки по отношению к ее траектории, если траектория не является плоской кривой. Вектор $w_{\text{ср}}$ находится в плоскости, проходящей через касательную к траектории в точке M и прямую, параллельную касательной в точке M_1 (рис. 185,а). Предельное положение этой пло-

скости при стремлении точки M_1 к точке M называется *соприкасающейся плоскостью*.

Из этого следует, что *вектор ускорения точки w расположен в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости кривой*.

Если кривая плоская, то соприкасающейся плоскостью является плоскость кривой и вектор ускорения лежит в этой плоскости.

Установив, что *ускорение точки является вектором*, условимся вместо термина «вектор ускорения» употреблять термин «ускорение».

§ 83. Определение ускорения точки при задании ее движения координатным способом. Проекция ускорения точки на неподвижные оси декартовых координат

Определим модуль и направление ускорения точки по уравнениям ее движения в декартовых координатах.

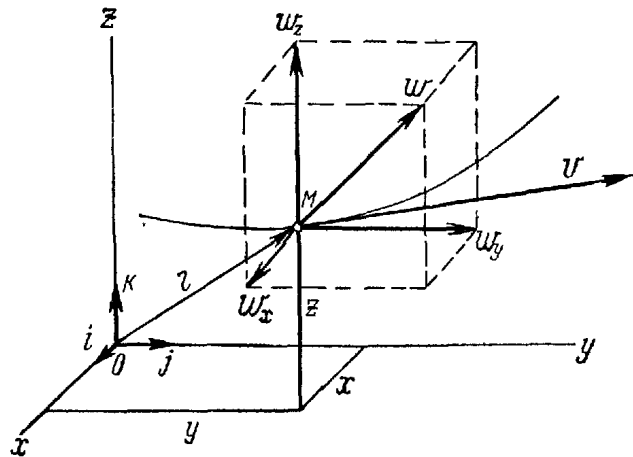


Рис. 186.

Пусть заданы уравнения движения точки (рис. 186):

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \right\}$$

Радиус-вектор r движущейся точки M представим в виде:

$$r = ix + jy + kz,$$

Так как ускорение точки равно второй производной от радиус-вектора по времени, а векторы i, j, k постоянны, то имеем:

$$w = \frac{d^2r}{dt^2} = i \frac{d^2x}{dt^2} + j \frac{d^2y}{dt^2} + k \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Разлагаем ускорение w на составляющие по осям координат:

$$w = iw_x + jw_y + kw_z,$$

где w_x, w_y, w_z — проекции ускорения w на оси x, y, z .

Сопоставляя обе формулы, определяющие ускорение, получаем:

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \quad w_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \quad (83.1)$$

Так как первые производные от координат точки по времени равны проекциям скорости на соответствующие оси, т. е. $\frac{dx}{dt} = v_x$,

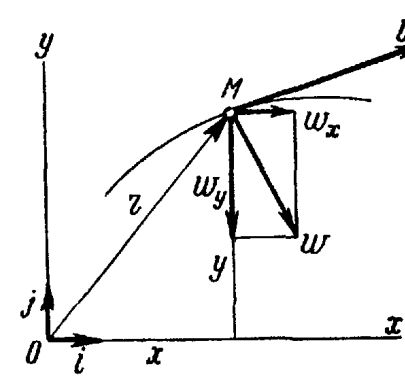


Рис. 187.

$\frac{dy}{dt} = v_y, \frac{dz}{dt} = v_z$, то проекции ускорения точки можно представить еще так:

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \frac{dv_x}{dt}; & w_y &= \frac{dv_y}{dt}; \\ w_z &= \frac{dv_z}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (83.2)$$

Таким образом, *проекция ускорения точки на неподвижные оси декартовых координат равны вторым производным от соответствующих координат точки по времени или первым производным по времени от проекций скорости на соответствующие оси*.

Вычислив проекции ускорения на координатные оси, можно определить модуль и направление ускорения точки по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} w &= \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}; \\ \cos(w, i) &= \frac{w_x}{w}; & \cos(w, j) &= \frac{w_y}{w}; & \cos(w, k) &= \frac{w_z}{w}. \end{aligned} \right\} \quad (83.3)$$

Движение точки в плоскости xOy задается двумя уравнениями движения:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t). \end{aligned} \right\}$$

Модуль и направление ускорения точки в этом случае (рис. 187) определяются:

$$\left. \begin{aligned} w &= \sqrt{w_x^2 + w_y^2}; \\ \cos(w, i) &= \frac{w_x}{w}; & \cos(w, j) &= \frac{w_y}{w}. \end{aligned} \right\} \quad (83.4)$$

Прямолинейное движение точки задается одним уравнением

$$x = f(t).$$

В этом случае модуль ускорения w равен абсолютному значению его проекции на ось x , т. е.

$$w = |w_x| = |\ddot{x}|. \quad (83.5)$$

Ускорение w направлено в сторону оси x , если $w_x > 0$ (рис. 188) и противоположно оси x , если $w_x < 0$.

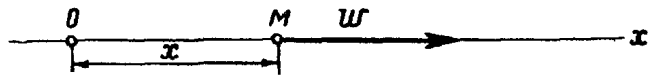


Рис. 188.

Пример 49. Определить ускорения точки M линейки эллипсографа AB , рассмотренной в примере 46, в моменты нахождения точки M на осях координат.

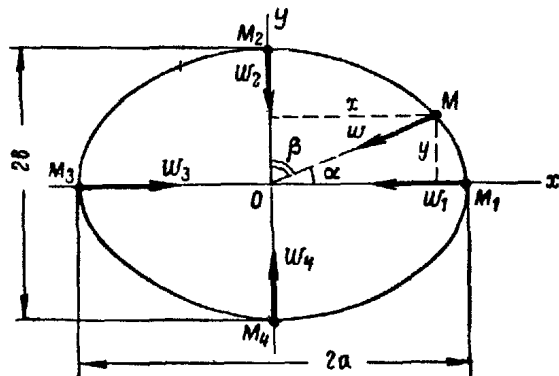


Рис. 189.

Решение. Уравнения движения точки M имеют вид (см. пример 46, рис. 172а, б):

$$x = a \cos \omega t,$$

$$y = b \sin \omega t.$$

Траекторией точки M является эллипс, имеющий уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 189).

Модуль и направление ускорения точки M определим по формулам (83.4), определив предварительно его проекции на оси коор-

динат по формулам (83.1):

$$w_x = \ddot{x} = -\omega^2 a \cos \omega t = -\omega^2 x;$$

$$w_y = \ddot{y} = -\omega^2 b \sin \omega t = -\omega^2 y;$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2}.$$

(83.6)

$$\cos(w, i) = \frac{w_x}{w} = \frac{-\omega^2 x}{\omega^2 \sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\cos \alpha;$$

$$\cos(w, j) = \frac{w_y}{w} = \frac{-\omega^2 y}{\omega^2 \sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\cos \beta.$$

Полученные выражения показывают, что модуль ускорения w пропорционален расстоянию $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ от точки M до начала координат O , а направление w составляет с осями Ox и Oy углы $180^\circ - \alpha$ и $180^\circ - \beta$, т. е. вектор ускорения w направлен к началу координат.

Модули ускорений в положениях $M_1(a, 0)$, $M_2(0, b)$, $M_3(-a, 0)$, $M_4(0, -b)$ определяются по формуле (83.6) путем подстановки значений соответствующих координат:

$$w_1 = \omega^2 a; \quad w_2 = \omega^2 b; \quad w_3 = \omega^2 a; \quad w_4 = \omega^2 b.$$

§ 84. Естественные координатные оси. Вектор кривизны

Проведем в точке M кривой AB соприкасающуюся плоскость, нормальную плоскость, перпендикулярную к касательной, и спря-

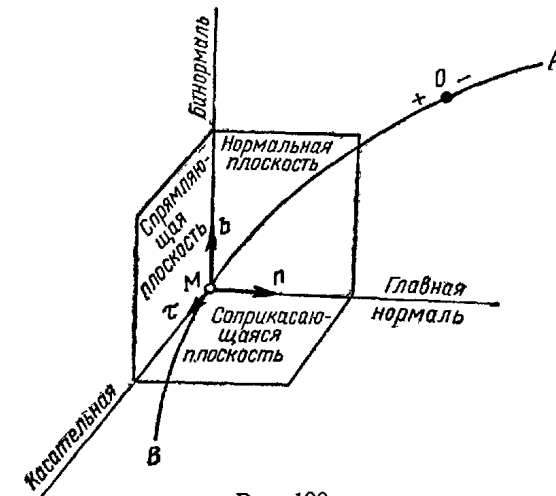


Рис. 190.

мяющую плоскость, перпендикулярную соприкасающейся и нормальной плоскостям, образующую с этими плоскостями естественный трехгранник (рис. 190).

Линия пересечения соприкасающейся и нормальной плоскостей называется главной нормалью кривой.

Линия пересечения нормальной и спрямляющей плоскостей называется *бинормалью* кривой.

Естественными координатными осями называются три взаимно перпендикулярные оси: *касательная*, направленная в сторону возрастания дуговой координаты, *главная нормаль*, направленная в сторону вогнутости кривой и *бинормаль*, направленная по отношению к касательной и главной нормали так же, как ось Oz направлена по отношению к осям Ox и Oy в правой системе координатных осей. Единичные векторы-орты этих осей обозначаются соответственно τ , \mathbf{n} и \mathbf{b} .

Естественные координатные оси имеют начало в точке M кривой и при движении точки M по этой кривой перемещаются вместе с ней, оставаясь взаимно перпендикулярными, но изменяя свое направление в пространстве.

Возьмем на кривой AB две точки M и M_1 , соответствующие дуговым координатам $OM = s$ и $OM_1 = s + \Delta s$. Покажем орты касательной τ и τ_1 в этих точках (рис. 191). Модуль орта τ , равный единице, постоянен, но направление орта изменяется при перемещении точки по кривой, т. е. *орт τ является переменным вектором*.

Определим приращение орта τ на участке $MM_1 = \Delta s$. Для этого отложим от точки M орт τ_1 и построим при этой точке параллелограмм, одной из сторон которого будет орт τ , а диагональю — орт τ_1 . Тогда другая сторона параллелограмма будет приращением орта $\Delta\tau$, так как $\tau_1 = \tau + \Delta\tau$.

Разделим приращение орта $\Delta\tau$ на приращение дуговой координаты Δs . Вектор $K_{ср} = \frac{\Delta\tau}{\Delta s}$, характеризующий поворот касательной к кривой на участке MM_1 , называется вектором средней кривизны кривой на участке MM_1 . Этот вектор имеет направление вектора $\Delta\tau$, т. е. направлен в сторону вогнутости кривой.

Предел K , к которому стремится вектор средней кривизны кривой $K_{ср}$, когда Δs стремится к нулю, называется *вектором кривизны кривой* в данной точке:

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta s}.$$

Орт касательной к кривой является вектором-функцией дуговой координаты s , так как его направление зависит от положения точки на кривой, т. е.

$$\tau = \tau(s).$$

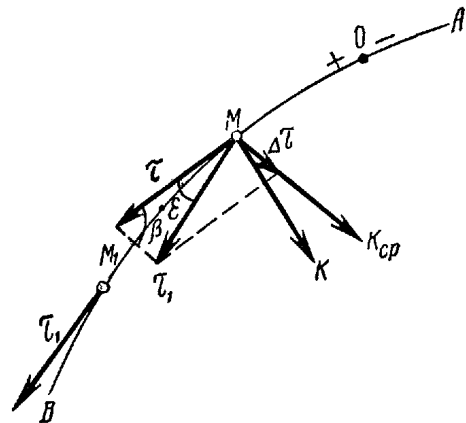


Рис. 191.

Тогда

$$K = \frac{d\tau}{ds}. \quad (84.1)$$

Следовательно, *вектор кривизны кривой в данной точке равен производной от орта касательной к кривой по дуговой координате*.

Для определения модуля этого вектора рассмотрим равнобедренный треугольник, образованный τ , τ_1 и $\Delta\tau$ (рис. 191).

Угол ϵ между направлениями касательных в двух точках кривой M и M_1 называется *углом смежности*. При малом расстоянии Δs угол смежности тоже мал.

Модуль $|\Delta\tau|$ найдем как длину основания равнобедренного треугольника с малым углом ϵ при вершине и боковыми сторонами, равными единице.

Тогда

$$|\Delta\tau| = 2\tau \sin \frac{\epsilon}{2} \approx 2 \cdot 1 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Модуль вектора кривизны K определяется по формуле

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\tau}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\Delta s}.$$

Из дифференциальной геометрии известно, что предел отношения угла смежности ϵ к приращению дуговой координаты Δs , при стремлении Δs к нулю, равен кривизне кривой $\frac{1}{\rho}$, где ρ — радиус кривизны кривой в точке M .

Таким образом, получим модуль вектора кривизны

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}.$$

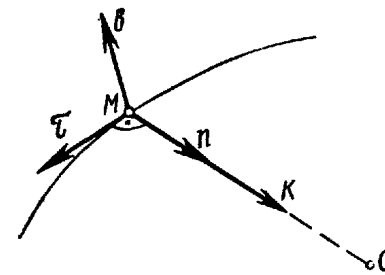


Рис. 192.

Установим также направление вектора кривизны.

Вектор средней кривизны $K_{ср}$ находится в плоскости треугольника, составленного векторами τ , τ_1 и $\Delta\tau$, предельным положением которого является соприкасающаяся плоскость. Следовательно, вектор кривизны K расположен в соприкасающейся плоскости.

Рассмотрим угол β , составленный вектором $K_{ср}$ с касательной в точке M (рис. 191).

$$2\beta = 180^\circ - \epsilon; \quad \beta = 90^\circ - \frac{\epsilon}{2}.$$

При приближении точки M_1 к M угол смежности ϵ стремится к нулю, а потому

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \beta = 90^\circ.$$

Так как вектор кривизны \mathbf{K} расположен в соприкасающейся плоскости и перпендикулярен орту $\boldsymbol{\tau}$, то он направлен по главной нормали к центру кривизны кривой (рис. 192).

Представим вектор \mathbf{K} в виде произведения орта на модуль этого вектора

$$\mathbf{K} = \mathbf{n} \frac{1}{\rho}, \quad (84.2)$$

где $\rho = MC$ — радиус кривизны кривой в данной точке M .

§ 85. Определение ускорения точки при задании ее движения естественным способом. Касательное и нормальное ускорения точки

Определим проекции ускорения точки на естественные координатные оси. Для этого представим вектор скорости точки по формуле (79.2):

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\tau} \frac{ds}{dt}.$$

Определим ускорение точки по формуле (82.1), продифференцировав по t произведение двух переменных величин:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \frac{ds}{dt} + \boldsymbol{\tau} \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} + \boldsymbol{\tau} \frac{d^2s}{dt^2}.$$

По формулам (84.1) и (84.2) получим

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \mathbf{K} = \mathbf{n} \frac{1}{\rho}.$$

Так как проекция скорости на касательную $\tilde{v} = \frac{ds}{dt}$ может отличаться от модуля скорости v только знаком, то

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2.$$

Подставив эти выражения, получим вектор ускорения в виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{n} \frac{v^2}{\rho} + \boldsymbol{\tau} \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (85.1)$$

Ускорение точки равно геометрической сумме двух векторов, один из которых направлен по главной нормали и называется *нормальным ускорением*, а другой направлен по касательной и называется *касательным ускорением точки* (рис. 193):

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_n + \mathbf{w}_\tau, \quad (85.2)$$

где нормальное ускорение точки

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{n} \frac{v^2}{\rho}, \quad (85.3)$$

а касательное ускорение точки на основании формул (85.1) и (79.3):

$$\mathbf{w}_\tau = \boldsymbol{\tau} \frac{d^2s}{dt^2} = \boldsymbol{\tau} \frac{d\tilde{v}}{dt}. \quad (85.4)$$

Скалярные множители $\frac{v^2}{\rho}$ и $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\tilde{v}}{dt}$ в выражениях (85.3) и (85.4), определяющих нормальное и касательное ускорения точки, представляют собой проекции ускорения точки на главную нормаль и касательную.

Проекция ускорения точки на бинормаль оказалась равной нулю, так как вектор ускорения расположен в соприкасающейся плоскости (см. § 82).

Согласно формуле (85.3) имеем:

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad (85.5)$$

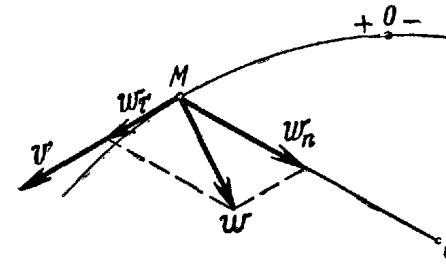


Рис. 193.

т. е. проекция ускорения точки на главную нормаль равна квадрату модуля скорости точки, деленному на радиус кривизны траектории в соответствующей точке. Эта проекция всегда положительна.

Из этого следует, что нормальное ускорение точки всегда направлено к центру кривизны траектории и равно по модулю этой проекции.

Условимся алгебраическую величину касательного ускорения обозначать \tilde{w}_τ , а его модуль w_τ .

Согласно формуле (85.4) имеем:

$$\tilde{w}_\tau = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\tilde{v}}{dt}, \quad (85.6)$$

т. е. проекция ускорения точки на касательную равна второй производной от дуговой координаты точки по времени или первой производной от алгебраической величины скорости точки по времени.

Эта проекция имеет знак плюс, если направления касательного ускорения точки \mathbf{w}_τ и орта $\boldsymbol{\tau}$ совпадают, и знак минус, если они противоположны.

$$\text{Очевидно, что } w_\tau = |\tilde{w}_\tau| = \left| \frac{d^2s}{dt^2} \right| = \left| \frac{d\tilde{v}}{dt} \right|.$$

Таким образом, в случае естественного способа задания движения, когда известны траектория точки, а следовательно, ее радиус кри-

визны ρ в любой точке и уравнение движения $s = f(t)$, можно найти проекции ускорения точки на естественные оси и по ним определить модуль и направление ускорения точки:

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}, \quad (85.7)$$

$$\cos(w, \tau) = \frac{\tilde{w}_\tau}{w}; \quad \cos(w, n) = \frac{w_n}{w},$$

где (w, τ) и (w, n) — углы, образованные направлением ускорения с принятыми направлениями касательной и главной нормали в данной точке.

Если проекции скорости v и касательного ускорения w_τ на касательную $\tilde{v} = \frac{ds}{dt}$ и $\tilde{w}_\tau = \frac{d^2s}{dt^2}$ имеют одинаковые знаки, то и направления этих векторов совпадают, т. е. точка движется ускоренно.

Если же их проекции $\tilde{v} = \frac{ds}{dt}$ и $\tilde{w}_\tau = \frac{d^2s}{dt^2}$ имеют различные знаки, то и направления v и w_τ противоположны, т. е. точка движется замедленно.

При движении точки только в сторону возрастания дуговой координаты, согласно формулам (79.5) и (85.6), имеем:

$$v = \frac{ds}{dt} \\ w_\tau = \left| \frac{dv}{dt} \right|, \quad (85.8)$$

где v — модуль скорости точки.

При этом, если $\frac{dv}{dt} > 0$, т. е. модуль скорости возрастает, точка движется ускоренно, а если $\frac{dv}{dt} < 0$ — замедленно.

При прямолинейном движении точки радиус кривизны траектории $\rho = \infty$ и, следовательно,

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = 0.$$

Нормальное ускорение существует лишь при криволинейном движении точки и характеризует изменение направления скорости.

При равномерном движении точки $v = \text{const}$ и, следовательно,

$$w_\tau = \left| \frac{dv}{dt} \right| = 0.$$

Касательное ускорение точки существует лишь при неравномерном движении точки и характеризует изменение модуля скорости.

Пример 50. По условию примера 47 определить ускорение точки в моменты времени 6 и 12 сек.

Решение. В примере 47 получена формула (79.6) для определения скорости точки в любой момент времени:

$$v = 6 + \frac{1}{4} t^2$$

и также значения $v_6 = 15$ см/сек и $v_{12} = 42$ см/сек. Радиус окружности — траектории точки $R = 150$ см. Определим касательное и нормальное ускорения точки по формулам (85.5) и (85.8) и полное ускорение точки по формуле (85.7):

$$w_\tau = \left| \frac{dv}{dt} \right| = \frac{1}{2} t, \\ w_n = \frac{v^2}{R},$$

где R — радиус окружности,

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}.$$

Вычислим w_τ , w_n и w в заданные моменты времени:

а) $t = 6$ сек:

$$w_{\tau_6} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ см/сек}^2, \\ w_{n_6} = \frac{15^2}{150} = 1,5 \text{ см/сек}^2, \\ w_6 = \sqrt{3^2 + 1,5^2} = 3,35 \text{ см/сек}^2;$$

б) $t = 12$ сек:

$$w_{\tau_{12}} = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ см/сек}^2, \\ w_{n_{12}} = \frac{42^2}{150} = 11,76 \text{ см/сек}^2, \\ w_{12} = \sqrt{6^2 + 11,76^2} = \\ = 13,2 \text{ см/сек}^2.$$

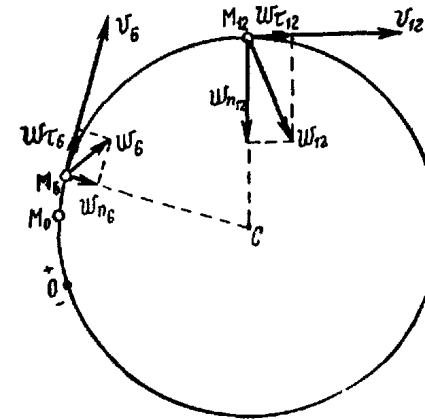


Рис. 194.

Так как $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} t > 0$ при всех значениях t , то точка движется ускоренно и направление ее касательного ускорения w_τ во всех точках совпадает с направлением v .

Нормальное ускорение w_n в каждой точке направлено к центру окружности (рис. 194).

§ 86. Классификация движений точки по ускорениям ее движения

Выясним зависимость характера движения точки от значений ее нормального и касательного ускорений.

Случай I: $w_n = 0$; $w_\tau = 0$. Если в течение некоторого промежутка времени нормальное и касательное ускорения точки равны

нулю, то в течение этого промежутка не изменяется ни направление, ни модуль скорости, т. е. точка движется прямолинейно, равномерно и ее ускорение $\mathbf{w} = 0$.

Случай II: $\mathbf{w}_n \neq 0$; $\mathbf{w}_\tau = 0$. Если в течение некоторого промежутка времени не равно нулю нормальное ускорение и равно нулю касательное ускорение, то происходит изменение направления скорости без изменения ее модуля, т. е. точка движется криволинейно равномерно и модуль ее ускорения $w = w_n = \frac{v^2}{\rho}$ (рис. 195).

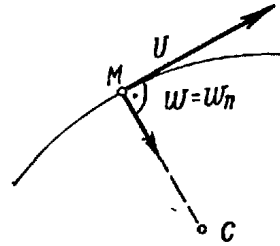


Рис. 195.

Если $w_\tau = \left| \frac{dv}{dt} \right| = 0$ в отдельный момент времени, то точка не движется равномерно, а в этот момент времени модуль ее скорости имеет максимум, минимум или наименьшую быстроту монотонного изменения.

Случай III: $\mathbf{w}_n = 0$; $\mathbf{w}_\tau \neq 0$. Если в течение некоторого промежутка времени равно нулю нормальное ускорение точки и не равно нулю касательное, то не изменяется направление скорости, а изме-

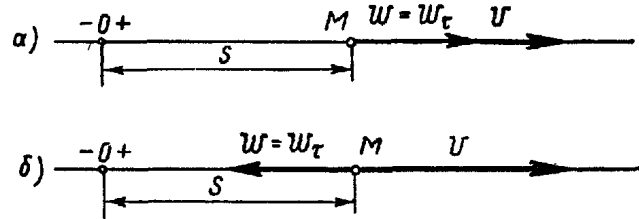


Рис. 196а, б.

няется ее модуль, т. е. точка движется по прямой неравномерно. Модуль ускорения точки в этом случае

$$w = w_\tau = \left| \frac{d^2s}{dt^2} \right|.$$

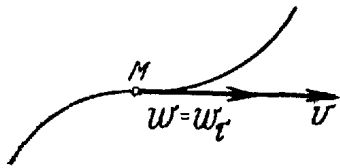


Рис. 196в.

При этом, если направления векторов \mathbf{v} и $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\tau$ совпадают, то движение точки ускоренное (рис. 196,а). Если направления векторов \mathbf{v} и $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\tau$ противоположны, то движение точки замедленное

(рис. 196,б). Если $w_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ в некоторый момент времени, то точка не движется прямолинейно, а проходит точку перегиба траектории ($\rho = \infty$) (рис. 196в) или модуль ее скорости обращается в нуль (например, при изменении направления движения точки $v = 0$).

Случай IV: $\mathbf{w}_n \neq 0$, $\mathbf{w}_\tau \neq 0$. Если в течение некоторого промежутка времени ни нормальное, ни касательное ускорения точки не

равны нулю, то изменяется как направление, так и модуль ее скорости, т. е. точка совершает криволинейное неравномерное движение. Модуль ускорения точки

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}.$$

При этом, если направления векторов \mathbf{v} и \mathbf{w}_τ совпадают, то движение ускоренное (рис. 197а), а если они противоположны, то движение замедленное (рис. 197б).

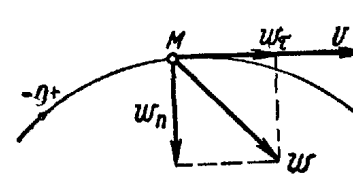


Рис. 197а.

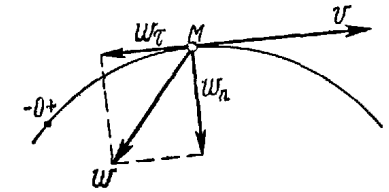


Рис. 197б.

Если модуль касательного ускорения постоянен, т. е. $w_\tau = \text{const}$, то модуль скорости точки изменяется пропорционально времени, т. е. точка совершает равнопеременное движение.

Составим уравнение равнопеременного движения точки, полагая, что в начальный момент $t_0 = 0$, начальная скорость точки равна v_0 , а начальное значение дуговой координаты $OM_0 = s_0$ (рис. 198).

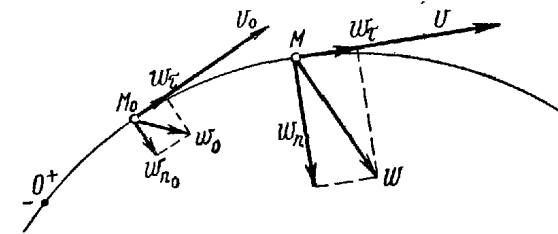


Рис. 198.

Воспользовавшись формулой (85.6) получим:

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = \tilde{w}_\tau = \text{const}; \quad d\tilde{v} = \tilde{w}_\tau dt.$$

Проинтегрируем уравнение в пределах, соответствующих точкам M_0 и M :

$$\int_{\tilde{v}_0}^{\tilde{v}} d\tilde{v} = \tilde{w}_\tau \int_0^t dt, \quad \tilde{v} - \tilde{v}_0 = \tilde{w}_\tau t, \\ \tilde{v} = \tilde{v}_0 + \tilde{w}_\tau t. \quad (86.1)$$

Выражение (86.1) является формулой скорости равнопеременного движения точки.

Воспользовавшись формулой (79.3), получим

$$\frac{ds}{dt} = \tilde{v} = \tilde{v}_0 + \tilde{\omega}_\tau t,$$

$$ds = \tilde{v}_0 dt + \tilde{\omega}_\tau t dt.$$

Проинтегрируем уравнение в пределах, соответствующих точкам M_0 и M :

$$\int_{s_0}^s ds = \tilde{v}_0 \int_0^t dt + \tilde{\omega}_\tau \int_0^t t dt,$$

$$s - s_0 = \tilde{v}_0 t + \frac{\tilde{\omega}_\tau t^2}{2}.$$

$$s = s_0 + \tilde{v}_0 t + \frac{\tilde{\omega}_\tau t^2}{2}. \quad (86.2)$$

Выражение (86.2) является уравнением равнопеременного движения точки.

Если $\tilde{v}_0 > 0$, то при ускоренном движении $\tilde{\omega}_\tau > 0$ (рис. 198), а при замедленном движении $\tilde{\omega}_\tau < 0$.

§ 87. Примеры определения скорости и ускорения точки при задании ее движения естественным способом

Пример 51. Поезд движется равнозамедленно по закруглению радиусом $R = 1$ км. В начале участка длиной 560 м поезд имеет скорость $v_0 = 36$ км/час и ускорение $\omega_0 = 0,125$ м/сек². Определить скорость и ускорение поезда в конце участка.

Решение. Рассмотрим движение одной из точек поезда, например его центра тяжести. Чтобы написать уравнение движения точки, необходимо выбрать начало отсчета дуговой координаты. Совместим начало отсчета O с начальным положением точки M_0 и направление движения примем за положительное направление (рис. 199). Тогда $s_0 = 0$.

При равнозамедленном движении точки уравнение движения и формула скорости точки, полученные в § 86, будут иметь вид

$$s = v_0 t - \frac{\omega_\tau t^2}{2}, \quad (1)$$

$$v = v_0 - \omega_\tau t, \quad (2)$$

где ω_τ — модуль касательного ускорения.

По условию задачи известны: дуговая координата движущейся точки M в конце участка, равная длине участка, т. е. $s = 560$ м,

скорость и ускорение точки в начале участка $v_0 = 36$ км/час $= 10$ м/сек и $\omega_0 = 0,125$ м/сек², а также радиус кривизны траектории во всех ее точках $R = 1000$ м.

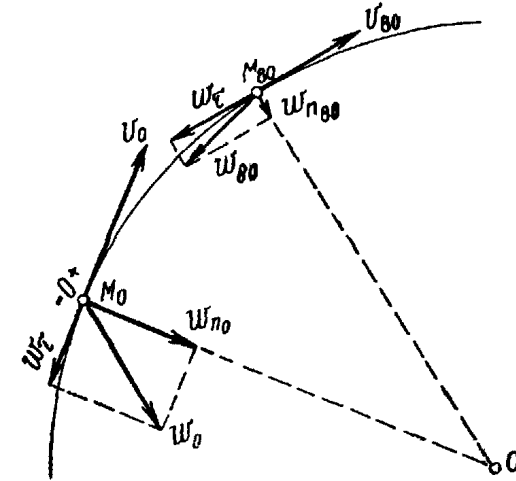


Рис. 199.

Модуль нормального ускорения точки M в начале участка определим по формуле (85.5):

$$\omega_{n_0} = \frac{v_0^2}{R} = \frac{100}{1000} = 0,1 \text{ м/сек}^2.$$

Зная модуль полного ускорения точки M в начале участка ω_0 , определяем модуль касательного ускорения точки ω_τ , являющегося ускорением ее равнопеременного движения:

$$\omega_0^2 = \omega_{n_0}^2 + \omega_\tau^2; \quad \omega_\tau = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_{n_0}^2} = \sqrt{0,125^2 - 0,1^2} = 0,075 \text{ м/сек}^2.$$

Подставляем в уравнения (1) и (2) все известные величины:

$$560 = 10t - \frac{0,075t^2}{2},$$

$$v = 10 - 0,075t.$$

Из этих уравнений находим время движения t :

$$0,075t^2 - 20t + 1120 = 0,$$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 1120 \cdot 0,075}}{0,075} = \frac{10 \pm 4}{0,075}.$$

Значение большего корня превышает момент остановки $t = \frac{10}{0,075}$ сек, который определяется из уравнения (2) при $v = 0$. По-

этому берем меньший корень:

$$t = \frac{6}{0,075} = 80 \text{ сек.}$$

Из уравнения (2) находим скорость в конце участка:

$$v_{80} = 10 - 0,075 \cdot 80 = 4 \text{ м/сек.}$$

Модуль нормального ускорения точки M в конце участка:

$$\omega_{n_{80}} = \frac{v_{80}^2}{R} = \frac{4^2}{1000} = 0,016 \text{ м/сек}^2.$$

Модуль полного ускорения точки M в конце участка:

$$\omega_{80} = \sqrt{\omega_{n_{80}}^2 + \omega_{\tau}^2} = \sqrt{0,016^2 + 0,075^2} = 0,0767 \text{ м/сек}^2.$$

При равнозамедленном движении точки по окружности модуль касательного ускорения не изменяется, а модуль полного ускорения убывает за счет уменьшения модуля нормального ускорения (см. рис. 199).

Пример 52. Уравнение движения шарика математического маятника имеет вид

$$s = 5 \sin 7t,$$

где t выражено в *сек*, s — в *см*. Длина нити маятника $l = 20 \text{ см}$.

Определить закон изменения полного ускорения шарика, а также его скорость и ускорение в среднем и в крайних положениях.

Решение. 1. Определяем моменты времени, соответствующие крайним и среднему положениям шарика. Крайним положениям шарика M_1 и M_3 (рис. 200, а) соответствуют наибольшие значения дуговой координаты $|s|_{\max} = 5 \text{ см}$.

Для положения M_1 принято: $s_1 = 5 \text{ см}$ при $\sin 7t = 1$, т. е. при $7t = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, где k — целое число.

Наименьшее значение t , соответствующее положению M_1 , имеет место при $k = 0$, т. е.

$$7t_1 = \frac{\pi}{2}; \quad t_1 = \frac{\pi}{2 \cdot 7} = \frac{3,14}{14} = 0,225 \text{ сек.}$$

Для положения M_3 принято: $s_3 = -5 \text{ см}$ при $\sin 7t = -1$, т. е. при $7t = 2k\pi + \frac{3}{2}\pi$. Наименьшее значение t при $k = 0$:

$$7t_3 = \frac{3}{2}\pi; \quad t_3 = \frac{3\pi}{14} = 0,675 \text{ сек.}$$

В среднем положении: $s = 0$; $\sin 7t = 0$; $7t = k\pi$. В этом положении находится точка при $t = 0$. Момент прохождения шариком

среднего положения t_2 , следующий за начальным, будет при $k = 1$, т. е. $7t_2 = \pi$ или

$$t_2 = \frac{\pi}{7} = \frac{3,14}{7} = 0,45 \text{ сек.}$$

Следующий момент t_4 будет при $k = 2$, т. е.

$$7t_4 = 2\pi; \quad t_4 = \frac{2\pi}{7} = 0,9 \text{ сек.}$$

Проследим движение точки в промежутке времени $[0; 0,9] \text{ сек}$ (рис. 200, а). При $t = 0$ точка находится в начале отсчета O ; при

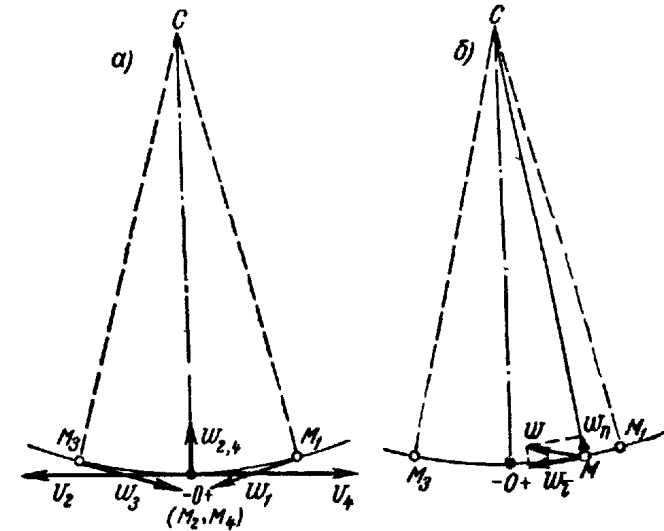


Рис. 200.

$t_1 = 0,225 \text{ сек}$ она занимает положение M_1 , при $t_2 = 0,45 \text{ сек}$ — положение $M_2(0)$, при $t_3 = 0,675 \text{ сек}$ — положение M_3 , при $t_4 = 0,9 \text{ сек}$ — положение $M_4(0)$. Затем этот цикл повторяется, т. е. точка совершает периодическое колебательное движение с периодом $T = 0,9 \text{ сек}$. 2. Модуль и направление скорости определяем, пользуясь формулой (79.3):

$$\tilde{v} = \frac{ds}{dt} = 35 \cos 7t \text{ (см/сек)}.$$

В крайних положениях M_1 и M_3 имеем:

$$\sin 7t_{1,3} = \pm 1; \quad \cos 7t_{1,3} = 0; \quad \tilde{v}_{1,3} = 0.$$

В среднем положении $O (M_2, M_4)$ имеем $7t_2 = \pi$ и $7t_4 = 2\pi$.

При $7t_2 = \pi$

$$\cos \pi = -1; \quad \tilde{v}_2 = -35 \text{ см/сек.}$$

Знак минус у проекции скорости на касательную показывает, что точка движется в сторону отрицательных координат (влево).

При $7t_4 = 2\pi$,

$$\cos 2\pi = 1; \quad \tilde{v}_4 = 35 \text{ см/сек},$$

т. е. точка движется в положительном направлении (вправо).

3. Определяем ускорение шарика. Алгебраическую величину касательного ускорения получаем по формуле (85.6):

$$\tilde{w}_\tau = \frac{d^2s}{dt^2} = -245 \sin 7t \text{ (см/сек}^2\text{)}.$$

Модуль нормального ускорения получаем на основании формулы (85.5):

$$w_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(35 \cos 7t)^2}{20} = 61,25 \cos^2 7t \text{ (см/сек}^2\text{)}.$$

Составляем требуемую по условию задачи формулу, определяющую модуль полного ускорения шарика в любой момент времени (рис. 200,б):

$$w = \sqrt{\tilde{w}_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{(-245 \sin 7t)^2 + (61,25 \cos^2 7t)^2} \text{ (см/сек}^2\text{)}.$$

Определяем конкретные значения ускорения в заданных положениях шарика (рис. 200,а).

Для положения M_1 :

$$t_1 = \frac{\pi}{14}; \quad 7t_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1; \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\tilde{w}_\tau = -245 \text{ см/сек}^2,$$

знак минус у проекции ускорения на касательную указывает, что вектор w_τ направлен в сторону уменьшения дуговых координат s , т. е. влево:

$$w_{n_1} = 0; \quad w_1 = w_\tau = 245 \text{ см/сек}^2.$$

Для положения M_3 :

$$t_3 = \frac{3\pi}{14}; \quad 7t_3 = \frac{3}{2}\pi; \quad \sin \frac{3}{2}\pi = -1; \quad \cos \frac{3}{2}\pi = 0; \quad \tilde{w}_\tau = 245 \text{ см/сек}^2;$$

знак плюс указывает, что вектор w_τ направлен в сторону увеличения дуговых координат s , т. е. вправо;

$$w_{n_3} = 0; \quad w_3 = w_\tau = 245 \text{ см/сек}^2.$$

Для положения $M_2, M_4(0)$:

$$t_2 = \frac{\pi}{7}; \quad 7t_2 = \pi; \quad \sin \pi = 0; \quad \cos \pi = -1;$$

$$t_4 = \frac{2\pi}{7}; \quad 7t_4 = 2\pi; \quad \sin 2\pi = 0; \quad \cos 2\pi = 1;$$

$$w_{\tau_{2,4}} = 0; \quad w_{n_{2,4}} = 61,25 \text{ см/сек}^2.$$

Вектор w_n направлен всегда к центру кривизны траектории:

$$w_{2,4} = w_{n_{2,4}} = 61,25 \text{ см/сек}^2.$$

§ 88. Примеры определения траектории, скорости и ускорения точки при задании ее движения координатным способом

Пример 53. Составить уравнение движения ползуна B кривошипного механизма, изображенного на рис. 201а, если известно, что кривошип OA длиной r вращается равномерно, т. е. угол φ , образованный кривошипом с осью цилиндра, изменяется пропорционально времени $\varphi = \omega t$, а длина шатуна $AB = l$. Определить также скорость и ускорение ползуна.

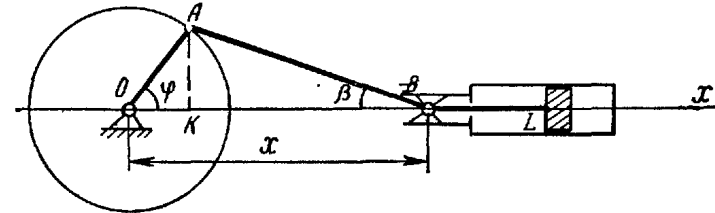


Рис. 201а.

Решение. 1. Составление уравнения движения. Примем за ось x ось цилиндра и поместим начало координат в точке O , тогда $OB = x$. Чтобы получить уравнение движения ползуна B , следует выразить x как функцию времени t .

Опустив из точки A перпендикуляр AK на ось x , получаем:

$$x = OK + KB,$$

$$OK = OA \cos \varphi = r \cos \varphi,$$

$$KB = AB \cos \beta = l \cos \beta.$$

Подставляя значения OK и KB , получаем

$$x = r \cos \varphi + l \cos \beta.$$

Чтобы представить координату x как функцию времени t , следует выразить $\cos \beta$ через функцию угла φ .

Из треугольника OAB имеем

$$\frac{r}{l} = \frac{\sin \beta}{\sin \varphi}, \quad \sin \beta = \frac{r}{l} \sin \varphi.$$

Обозначая $\frac{r}{l} = \lambda$, имеем:

$$\sin \beta = \lambda \sin \varphi; \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}.$$

Применяя к выражению $\cos \beta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$ формулу биннома Ньютона, получаем

$$\cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2} \right) \lambda^4 \sin^4 \varphi + \dots$$

Отбрасывая третьи и последующие слагаемые как малые величины высших порядков ($\lambda = \frac{1}{5}$; $\frac{1}{8}\lambda^4 = \frac{1}{5000}$), приближенно получаем

$$\cos \beta = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \sin^2 \varphi = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} = 1 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} \cos 2\varphi.$$

Подставляем значение $\cos \beta$ в выражение, определяющее x и учитывая, что $\lambda = \frac{r}{l}$, находим

$$x = r \left(\cos \varphi + \frac{\lambda}{4} \cos 2\varphi \right) + l - \frac{\lambda r}{4}.$$

Так как $\varphi = \omega t$, окончательно получаем следующее уравнение движения ползуна B

$$x = r \left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right) + l - \frac{\lambda r}{4}.$$

По этому уравнению можно вычислить значение x , соответствующее заданному моменту времени t и указать, где находится ползун.

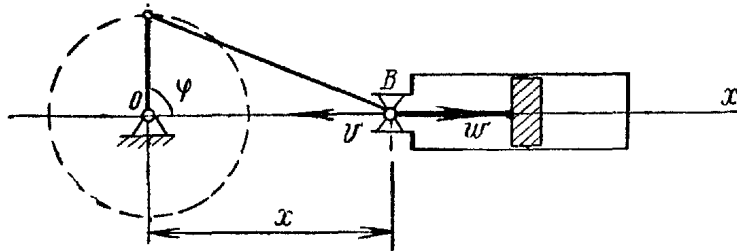


Рис. 201б.

2. Определение скорости ползуна.

Проекцию скорости прямолинейного движения ползуна получаем согласно § 80, дифференцируя уравнение движения:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -r\omega \left(\sin \omega t + \frac{\lambda}{2} \sin 2\omega t \right).$$

По этой формуле можно вычислить проекцию скорости для любого момента времени. Например, при $\varphi = \omega t = \frac{\pi}{2}$, т. е. при $t = \frac{\pi}{2\omega}$, получаем

$$v_x = -r\omega \left(\sin \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda}{2} \sin \pi \right) = -r\omega < 0.$$

Вектор v направлен противоположно оси x (рис. 201б).

3. Определение ускорения ползуна.

Ускорение ползуна B получим, согласно § 83, по его проекции на ось x :

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = -r\omega^2 (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t).$$

По этой формуле можно вычислить проекцию ускорения на ось x для любого момента времени. Например, при $\varphi = \omega t = \frac{\pi}{2}$ получаем

$$w_x = -r\omega^2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + \lambda \cos \pi \right) = -r\omega^2 (-\lambda) = r\omega^2 \frac{r}{l} = \frac{r^2}{l} \omega^2.$$

Так как

$$w_x = \frac{r^2}{l} \omega^2 > 0, \text{ то } w = w_x = \frac{r^2}{l} \omega^2.$$

Направление вектора w совпадает с направлением оси x (рис. 201б). Направления w и v противоположны; в данный момент ползун движется замедленно.

Пример 54. Движение точки определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= r \cos kt, \\ y &= r \sin kt. \end{aligned}$$

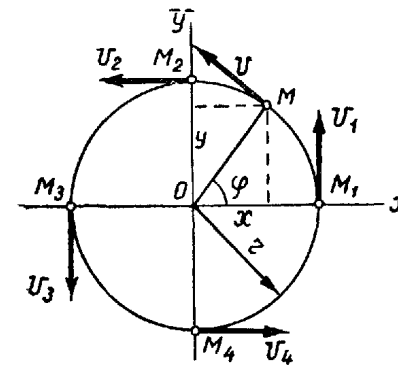


Рис. 202а.

1. Найти уравнение траектории точки и построить траекторию.

2. Найти уравнение годографа скорости точки и построить годограф.

3. Определить ускорение точки.

4. Получить закон изменения дуговой координаты, отсчитываемой по траектории от начального положения точки.

Решение. 1. Определение траектории. Чтобы найти уравне-

ние траектории точки, исключаем из заданных уравнений движения точки параметр t (см. § 77):

$$\begin{aligned} x^2 &= r^2 \cos^2 kt, \\ y^2 &= r^2 \sin^2 kt, \\ x^2 + y^2 &= r^2 (\cos^2 kt + \sin^2 kt). \end{aligned}$$

Траектория точки определяется по уравнению $x^2 + y^2 = r^2$, т. е. точка движется по окружности радиусом r , центр которой совпадает с началом координат (рис. 202а).

2. Определение годографа скорости. Найдем параметрические уравнения годографа скорости (см. § 81):

$$\begin{aligned} X = v_x &= \dot{x} = -kr \sin kt, \\ Y = v_y &= \dot{y} = kr \cos kt. \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений параметр t , получаем:

$$X^2 = k^2 r^2 \sin^2 kt,$$

$$Y^2 = k^2 r^2 \cos^2 kt,$$

$$X^2 + Y^2 = k^2 r^2 (\sin^2 kt + \cos^2 kt), \text{ т. е. } X^2 + Y^2 = k^2 r^2.$$

Полученное уравнение показывает, что годограф скорости также представляет собой окружность с центром в начале координат и радиусом, равным kr (рис. 202б). Отсюда следует, что модуль скорости точки не изменяется при ее движении, т. е. точка движется равномерно.

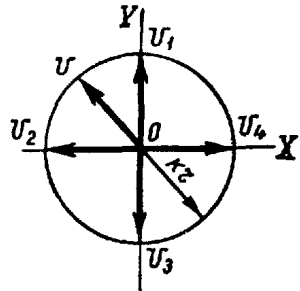


Рис. 202б.

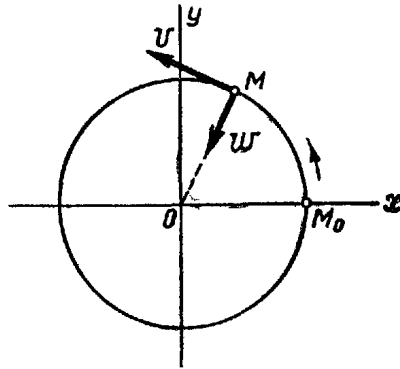


Рис. 202в.

Модуль скорости точки определяем по проекциям скорости на оси координат (§ 80):

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(kr \sin kt)^2 + (kr \cos kt)^2} = \\ &= kr \sqrt{\sin^2 kt + \cos^2 kt} = kr = \text{const.} \end{aligned}$$

3. Определение ускорения. Модуль полного ускорения точки находим по проекциям ускорения на оси координат (§ 83):

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = -k^2 r \cos kt,$$

$$w_y = \frac{dv_y}{dt} = -k^2 r \sin kt,$$

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{(-k^2 r \cos kt)^2 + (-k^2 r \sin kt)^2} = \\ &= k^2 r \sqrt{\sin^2 kt + \cos^2 kt} = k^2 r = \text{const.} \end{aligned}$$

Так как модуль скорости постоянен, то касательное ускорение точки равно нулю:

$$w_\tau = \left| \frac{dv}{dt} \right| = 0.$$

Таким образом, полное ускорение точки является нормальным ускорением и направлено к центру окружности (рис. 202в).

4. Определение закона изменения дуговой координаты. По уравнениям движения

$$x = r \cos kt, \quad y = r \sin kt$$

определяем начальное положение точки. При $t=0$ имеем

$$x_0 = r, \quad y_0 = 0.$$

Начальное положение точки $M_0(r, 0)$ принимаем за начало отсчета дуговой координаты, тогда $s_0 = 0$.

Из уравнений движения следует, что при увеличении t от нуля координата x уменьшается, а y увеличивается, т. е. точка движется по окружности из M_0 противоположно движению часовой стрелки. Это направление принимаем за положительное (рис. 202в).

Представим дуговую координату $s = M_0M$ как функцию времени.

Так как точка движется по окружности в одном направлении (положительном), то пользуемся формулой (79.5):

$$v = \frac{ds}{dt},$$

откуда

$$ds = v dt.$$

При модуле скорости $v = kr$ имеем

$$ds = kr dt.$$

Проинтегрируем это уравнение в пределах, соответствующих начальному моменту $t_0 = 0$, когда $s_0 = 0$, и произвольному моменту t , когда дуговая координата равна s :

$$\begin{aligned} \int_0^s ds &= \int_0^t kr dt, \\ s &= krt. \end{aligned}$$

Полученное выражение есть уравнение равномерного движения точки со скоростью $v = kr$.

Пример 55. Уравнения движения груза, сброшенного с самолета на высоте $h = 320$ м, имеют вид

$$x = 60t,$$

$$y = 5t^2,$$

где x, y выражены в м, t — в сек и направления осей координат указаны на рис. 203а.

Определить:

- 1) траекторию груза,
- 2) расстояние по горизонтали между точками сброса и падения,
- 3) годограф скорости груза,

4) скорость и ускорение груза в точке падения,

5) радиус кривизны траектории в точке падения груза.

Решение. 1. Определяем траекторию. Из двух уравнений движения груза исключаем время t подстановкой во второе уравнение значения t , полученного из первого уравнения

$$t = \frac{x}{60},$$

$$y = 5 \left(\frac{x}{60} \right)^2 \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{720} x^2.$$

Полученное уравнение является уравнением параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси y .

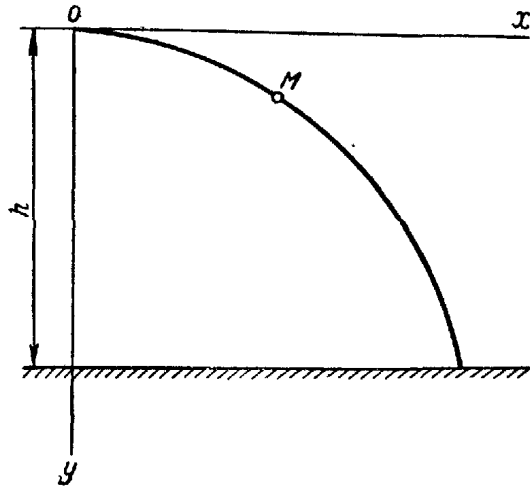


Рис. 203а.

Часть этой параболы, являющаяся траекторией груза, изображена на рис. 203а.

2. Определяем расстояние по горизонтали между точками сброса и падения. В точке падения M_1 известна координата $y_1 = h$. Требуется найти координату $x_1 = l$ (рис. 202,б).

Вспользуемся не уравнением траектории, а уравнениями движения, чтобы одновременно найти момент падения:

$$y = 5t^2, \quad t_1 = \sqrt{\frac{y_1}{5}} = \sqrt{\frac{h}{5}} = \sqrt{\frac{320}{5}} = 8 \text{ сек.}$$

$$x = 60t, \quad l = x_1 = 60t_1 = 60 \cdot 8 = 480 \text{ м.}$$

3. Определяем годограф скорости согласно § 81:

$$X = v_x = \dot{x} = 60,$$

$$Y = v_y = \dot{y} = 10t.$$

Первое уравнение, не содержащее t , соответствует прямой, параллельной оси Y и отсекающей на оси X отрезок 60 м/сек (рис. 203,в). Отрезок этой прямой, заключенный между концами начальной скорости v_0 и конечной скорости v_1 , является годографом скорости груза.

Годограф скорости показывает, что при падении груза горизонтальная составляющая его скорости остается равной начальной скорости $v_0 = 60 \text{ м/сек}$, а вертикальная составляющая возрастает.

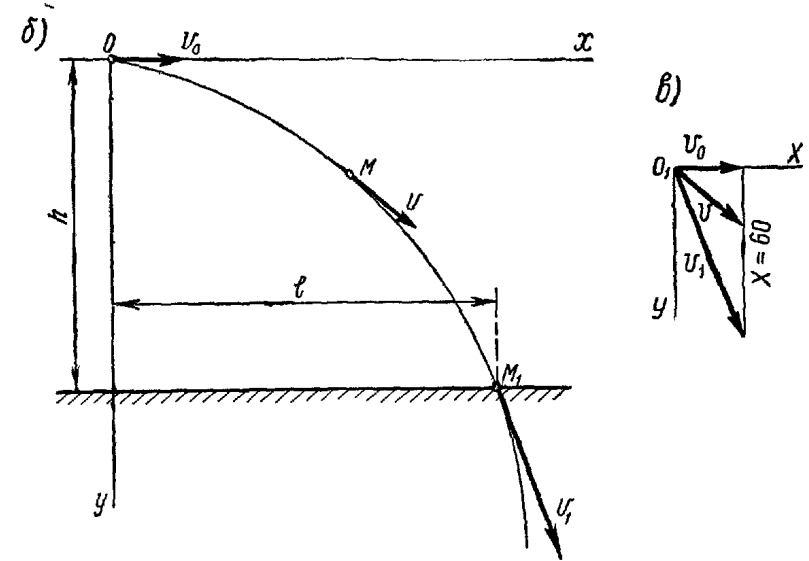


Рис. 203б, в.

4. Определяем скорость и ускорение груза в точке падения. При движении точки по траектории в одном направлении это направление принимается за положительное, а модуль скорости точки определяется по найденным выше проекциям ее скорости на оси координат (80.3):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{60^2 + (10t)^2} = 10 \sqrt{36 + t^2}.$$

В точке падения имеем

$$t_1 = 8 \text{ сек.}; \quad v_1 = 10 \sqrt{36 + 64} = 100 \text{ м/сек.}$$

Модуль и направление ускорения точки определяем по его проекциям на оси координат (§ 83):

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = 0, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt} = 10,$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = 10 \text{ м/сек}^2.$$

Проекция ускорения груза не зависят от времени, т. е. модуль и направление ускорения груза постоянны. Так как $w_x = 0$, а $w_y > 0$, то вектор ускорения w направлен параллельно оси y по направлению этой оси во всех точках траектории. Это ускорение является ускорением свободного падения $g = 9,8 \text{ м/сек}^2 \approx 10 \text{ м/сек}^2$ (рис. 203г).

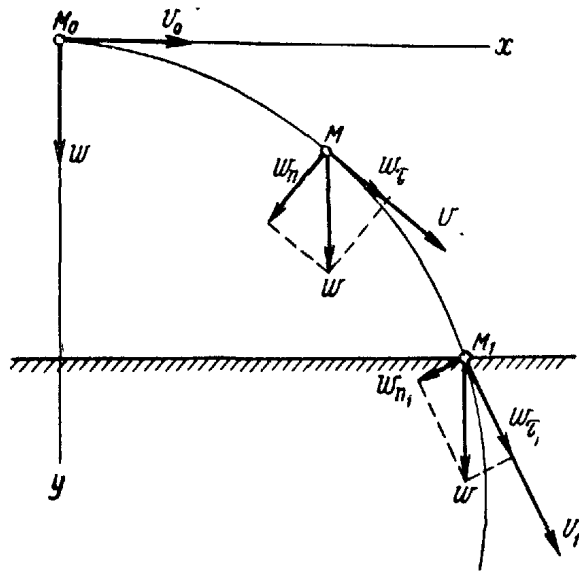


Рис. 203г.

5. Определяем касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны траектории. В зависимости от радиуса кривизны траектории ρ по формуле (85.5) определяется нормальное ускорение точки

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Отсюда можно определить ρ , зная v и w_n . Формула скорости получена выше: $v = 10 \sqrt{36 + t^2}$.

Для определения нормального ускорения по формуле (85.8) найдем касательное ускорение:

$$w_\tau = \left| \frac{dv}{dt} \right| = \left| 10 \frac{2t}{2\sqrt{36 + t^2}} \right| = \left| \frac{10t}{\sqrt{36 + t^2}} \right|.$$

По полному ускорению $w = 10 \text{ м/сек}^2$ и касательному ускорению w_τ найдем нормальное ускорение:

$$w^2 = w_n^2 + w_\tau^2, \\ w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \sqrt{100 - \frac{100t^2}{36 + t^2}} = \frac{60}{\sqrt{36 + t^2}}.$$

Нормальное и касательное ускорения зависят от времени, т. е. движение груза не является равнопеременным, при котором $w_\tau = \text{const}$. Разложение постоянного полного ускорения на касательное и нормальное в различных точках траектории показано на рис. 203г.

Определяем радиус кривизны в любой точке траектории:

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{100(36 + t^2)}{\left(\frac{60}{\sqrt{36 + t^2}}\right)} = \frac{5}{3}(36 + t^2)^{\frac{3}{2}}$$

В точке падения M_1 имеем

$$t_1 = 8 \text{ сек}; \rho_1 = \frac{5}{3}(36 + 64)^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3} \cdot 1000 = 1667 \text{ м}.$$

Пример 56. Уравнения движения точки имеют вид

$$x = r \cos t^2, \\ y = r \sin t^2, \\ z = at^2.$$

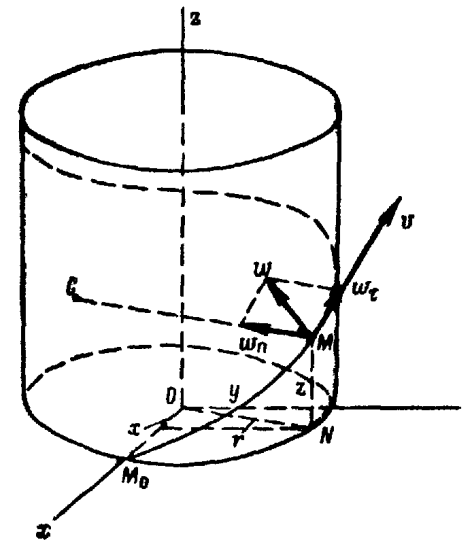


Рис. 204.

Определить касательное и нормальное ускорения точки и радиус кривизны траектории в любой момент времени.

Решение. 1. Определяем траекторию. Исключая время t из двух первых уравнений движения точки, получаем

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

т. е. уравнение окружности в плоскости xOy , по которой движется проекция N точки M на эту плоскость. Следовательно, точка M движется по поверхности круглого цилиндра с образующей, параллельной оси z . Если обозначить $t^2 = \varphi$, то получим (рис. 204):

$$x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = a\varphi.$$

Так как координата z точки M пропорциональна углу поворота φ радиуса, проведенного в точку N , то траекторией точки M является винтовая линия.

2. Определяем скорость. Скорость точки определяем по ее проекциям на оси координат (§ 80):

$$\begin{aligned}v_x &= \dot{x} = -r \sin t^2 \cdot 2t, \\v_y &= \dot{y} = r \cos t^2 \cdot 2t, \\v_z &= \dot{z} = 2at,\end{aligned}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{4r^2 t^2 \sin^2 t^2 + 4r^2 t^2 \cos^2 t^2 + 4a^2 t^2} = 2t \sqrt{r^2 + a^2}.$$

3. Определяем ускорение. Полное ускорение точки определяем по его проекциям на оси координат, дифференцируя проекции скорости как произведения функций t (§ 83):

$$\begin{aligned}w_x &= \frac{dv_x}{dt} = -r (\cos t^2 \cdot 2t \cdot 2t + \sin t^2 \cdot 2) = -2r (2t^2 \cos t^2 + \sin t^2), \\w_y &= \frac{dv_y}{dt} = r (-\sin t^2 \cdot 2t \cdot 2t + \cos t^2 \cdot 2) = 2r (-2t^2 \sin t^2 + \cos t^2), \\w_z &= \frac{dv_z}{dt} = 2a,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w &= \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \\&= \sqrt{4r^2 (4t^4 \cos^2 t^2 + 4t^2 \cos t^2 \cdot \sin t^2 + \sin^2 t^2) + \\&+ 4r^2 (4t^4 \sin^2 t^2 - 4t^2 \sin t^2 \cos t^2 + \cos^2 t^2) + 4a^2} = \sqrt{4r^2 (4t^4 + 1) + 4a^2}.\end{aligned}$$

4. Определяем касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны траектории. Касательное ускорение определяем по формуле (85.8):

$$w_\tau = \left| \frac{dv}{dt} \right| = 2 \sqrt{r^2 + a^2}.$$

Точка движется равноускоренно, так как $w_\tau = \text{const}$ и $\frac{dv}{dt} > 0$.

Нормальное ускорение точки определяем по полному и касательному ускорениям:

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \sqrt{4r^2 (4t^4 + 1) + 4a^2 - 4(r^2 + a^2)} = \sqrt{16r^2 t^4} = 4rt^2.$$

Это ускорение совпадает с нормальным ускорением движения проекции N по окружности, вычисляемым по формуле

$$w_{n_N} = \frac{v_N^2}{r} = \frac{v_x^2 + v_y^2}{r} = \frac{4t^2 r^2 \sin^2 t^2 + 4t^2 r^2 \cos^2 t^2}{r} = 4rt^2.$$

Радиус кривизны траектории точки M определяем из формулы $w_n = \frac{v^2}{\rho}$:

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{4t^2 (r^2 + a^2)}{4rt^2} = \frac{r^2 + a^2}{r} = r + \frac{a^2}{r}; \quad \rho > r.$$

Величина ρ не зависит от времени, так как кривизна винтовой линии во всех точках одинакова.

Известно, что главная нормаль, вдоль которой направлен вектор w_n , в каждой точке M винтовой линии параллельна радиусу ON (рис. 204).

Откладывая по этому направлению $MC = \rho$, получаем центр кривизны. Параллелограмм ускорений расположен, как известно, в соприкасающейся плоскости.

Вопросы для самоконтроля

1. Чему равен вектор ускорения точки и как он направлен по отношению к годографу скорости?
2. Как направлены естественные координатные оси в каждой точке кривой?
3. Каковы величина и направление вектора кривизны кривой в данной точке?
4. В какой плоскости расположено ускорение точки и чему равны его проекции на естественные координатные оси?
5. Что характеризуют собой касательное и нормальное ускорения точки?
6. При каком движении точки равно нулю касательное ускорение и при каком — нормальное ускорение?
7. Как классифицируются движения точки по ускорениям?
8. В какие моменты времени нормальное ускорение в криволинейном движении может обратиться в нуль?
9. В какие моменты времени касательное ускорение в неравномерном движении может обратиться в нуль?

§ 89. Графики движения, пути, скорости и касательного ускорения точки

При движении точки по заданной траектории ее дуговая координата $s = OM$, пройденный ею путь σ , а также скорость v и ускорение w изменяются с течением времени, т. е. являются функциями времени (рис. 205). Наглядное представление о характере движения точки дают графики зависимости этих величин от времени.

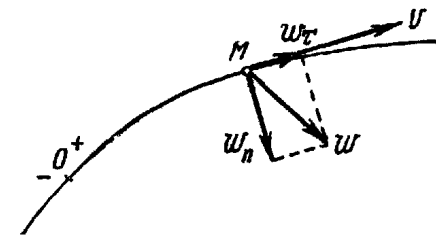


Рис. 205.

Для построения таких графиков по оси абсцисс откладывают последовательные значения времени t , а по оси ординат — соответствующие им

значения дуговой координаты, пути, алгебраических величин скорости и касательного ускорения, в определенном масштабе.

Графиком движения точки называется график зависимости ее дуговой координаты s от времени t .

График движения, изображенный на рис. 206, показывает, что в течение промежутка времени $[0, t_1]$ дуговая координата s возрастала от 0 до s_1 , т. е. точка двигалась от начала отсчета O в положительном направлении до точки с координатой s_1 , а затем в течение про-

межутка времени $[t_1, t_2]$ дуговая координата убывала до нуля, т. е. точка двигалась в обратном направлении до начала отсчета.

График пути можно построить по графику движения.

Путь, пройденный точкой за некоторый промежуток времени, представляет собой сумму абсолютных значений элементарных перемещений точки за данный промежуток времени, т. е. линия этого графика непрерывно поднимается вверх независимо от направления движения точки, и только при остановках точки превращается в прямую, параллельную оси времени t .

На рис. 207 изображен график пути, построенный по графику

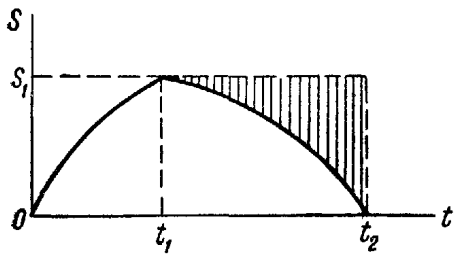


Рис. 206.

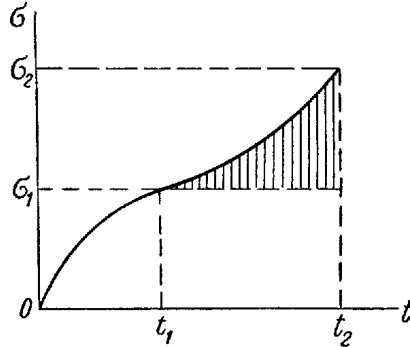


Рис. 207.

движения, показанному на рис. 206. На рис. 207 расстояния, пройденные точкой в промежуток времени $[t_1, t_2]$, суммируются с путем $\sigma_1 = s_1$, пройденным к моменту времени t_1 .

Путь, пройденный точкой к моменту времени t_2

$$\sigma_2 = 2s_1.$$

Графики движения и пути изображаются одной и той же линией лишь при условии движения точки из начала отсчета в положительном направлении, т. е. в промежутке времени $[0, t_1]$ (рис. 206 и 207).

Положим, что известен график движения точки (рис. 208).

Определим алгебраическую величину средней скорости движущейся точки за промежуток времени $[t_1, t_2]$ как отношение приращения дуговой координаты к промежутку времени (рис. 208):

$$\tilde{v}_{cp} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}, \quad \text{но} \quad \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Следовательно, $\tilde{v}_{cp} = \operatorname{tg} \alpha_1$, т. е. средняя скорость точки за этот промежуток времени равна тангенсу угла наклона секущей A_1A_2 графика движения к оси времени t .

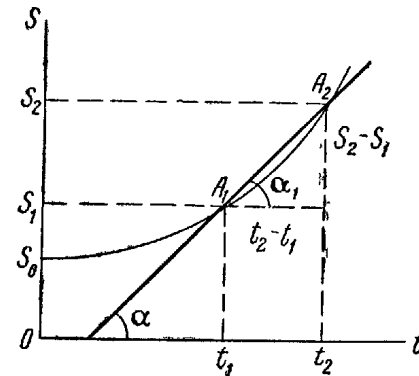


Рис. 208.

Определим по этому же графику (рис. 209) алгебраическую величину скорости точки в некоторый момент времени t :

$$\tilde{v} = \frac{ds}{dt} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (89.1)$$

Таким образом, для определения скорости точки в любой момент времени следует провести касательную к графику движения в соответствующей точке A и определить угол α наклона этой касательной к оси t .

Тангенс угла α равен алгебраической величине скорости точки в этот момент времени.

График скорости изображает зависимость алгебраической величины скорости точки \tilde{v} от времени t (рис. 210).

По графику скорости определяется алгебраическая величина касательного ускорения точки:

$$\tilde{w}_\tau = \frac{d\tilde{v}}{dt} = \operatorname{tg} \beta. \quad (89.2)$$

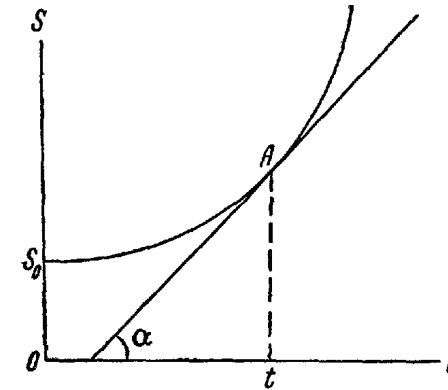


Рис. 209.

Для определения касательного ускорения точки следует провести касательную к графику скорости в соответствующей точке B и найти угол β наклона этой касательной к оси t . Тангенс угла β определяет алгебраическую величину касательного ускорения точки в этот момент.

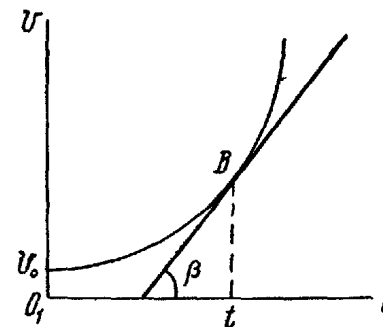


Рис. 210.

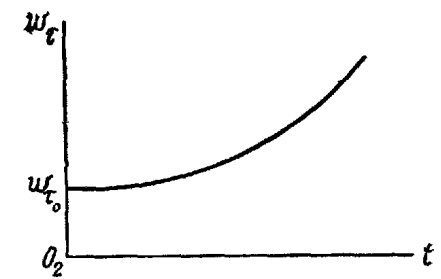


Рис. 211.

График касательного ускорения изображает зависимость алгебраической величины касательного ускорения \tilde{w}_τ от времени (рис. 211). В случае неравномерного криволинейного движения точки для построения графиков нормального и полного ускорений точки числовые значения w_n и w для различных моментов времени определяют расчетом по соответствующим формулам, пользуясь значениями v и w_τ .

определенными по соответствующим графикам; значения же радиуса кривизны ρ определяются по заданной траектории точки.

На осях графиков скорости и касательного ускорения алгебраические значения этих величин обозначены не \tilde{v} и $\tilde{\omega}_\tau$, а v и ω_τ , как это принято при построении графиков.

1. Графики равномерного движения и его скорости

Уравнение равномерного движения точки имеет вид

$$s = s_0 + vt.$$

Линейной зависимости s от t соответствует график движения в виде прямой линии (рис. 212, а). Постоянную скорость равномерного движения точки можно определить из уравнения движения

$$v = \frac{s - s_0}{t},$$

по $\frac{s - s_0}{t} = \operatorname{tg} \alpha$, следовательно, $v = \operatorname{tg} \alpha$. Графиком постоянной скорости $v = \tilde{v}$ является прямая, параллельная оси t (рис. 212, б).

2. Графики равнопеременного движения, его скорости и касательного ускорения

Уравнение равнопеременного движения точки имеет вид

$$s = s_0 + \tilde{v}_0 t + \frac{\tilde{\omega}_\tau t^2}{2}.$$

Этой зависимости s от t соответствует график движения в виде параболы (рис. 213, а, рис. 214, а).

Скорость этого движения определяется по формуле

$$\tilde{v} = \tilde{v}_0 + \tilde{\omega}_\tau t.$$

Графиком скорости является прямая (рис. 213, б и рис. 214, б).

При равнопеременном движении алгебраическая величина касательного ускорения остается постоянной:

$$\tilde{\omega}_\tau = \operatorname{const}.$$

Графиком ее является прямая, параллельная оси t (рис. 213, в, и 214, в). Графики на рис. 213 соответствуют равноускоренному движению точки, когда $\tilde{\omega}_\tau > 0$. Графики на рис. 214 соответствуют

случаю $\tilde{\omega}_\tau < 0$, т. е. равнозамедленному движению точки, кончающемуся остановкой в момент времени T .

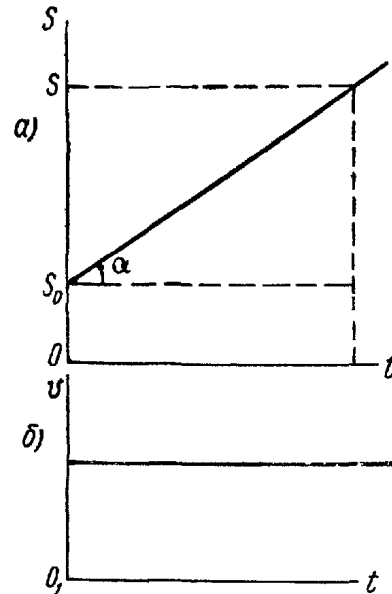


Рис. 212.

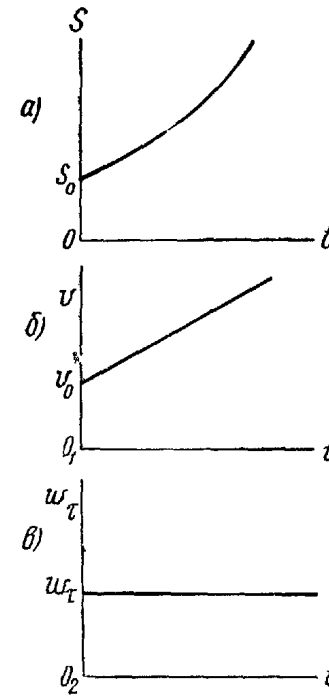


Рис. 213.

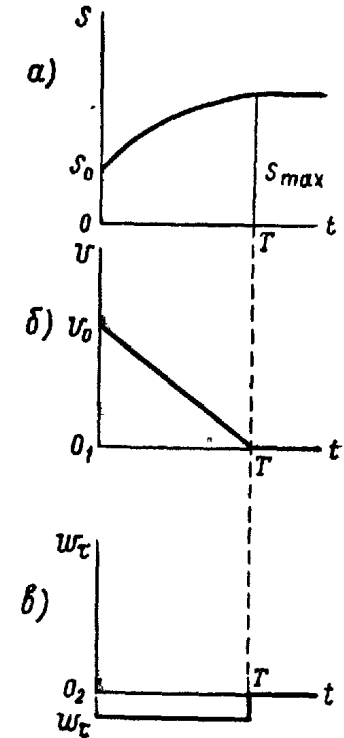


Рис. 214.

В этом случае при $t > T$ дуговая координата точки s больше не изменяется, скорость $v = 0$, касательное ускорение $\omega_\tau = 0$.

3. Графики гармонического колебательного движения точки, его скорости и ускорения

Прямолинейное движение точки, заданное уравнением

$$x = a \sin(kt + \beta), \quad (89.3)$$

называется *гармоническим колебательным движением*. Такое движение является основным типом колебательного движения точки.

Так как синус является периодической функцией, принимающей все значения промежутка $[-1, 1]$, то координата x движущейся точки изменяется периодически, принимая значения промежутка $[-a, a]$, т. е. точка M отклоняется последовательно в ту и другую сторону на величину a от начала координат O (рис. 215).

Периодом колебаний T называется промежуток времени между двумя последовательными прохождениями точки через одно и то же положение в одном и том же направлении.

Постоянная a , равная величине наибольшего отклонения колеблющейся точки от ее среднего положения, называется *амплитудой колебаний точки*.

Расстояние между крайними положениями точки, равное удвоенной амплитуде, называется *размахом колебаний*.

Аргумент синуса $kt + \beta$ называют *фазой колебаний* точки, а величину β — *начальной фазой*.

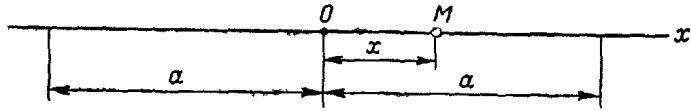


Рис. 215.

Постоянная k называется *круговой или циклической частотой колебаний*.

Так как период синуса равен 2π , то увеличение аргумента синуса на 2π должно произойти за промежуток времени, равный периоду колебаний точки, т. е.

$$kt + \beta + 2\pi = k(t + T) + \beta,$$

откуда

$$2\pi = kT$$

или

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Число колебаний точки в одну секунду или частота колебаний определяется как величина, обратная периоду колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}.$$

За единицу частоты колебаний принимается один герц (гц), т. е. частота, равная одному периоду в секунду.

Из последней формулы находим: $k = 2\pi\nu$, т. е. циклическая частота k равна по величине числу колебаний в 2π секунд.

Определим алгебраические значения скорости и ускорения точки, совершающей гармоническое колебательное движение согласно уравнению (89.3) $x = a \sin(kt + \beta)$:

$$\tilde{v} = v_x = \dot{x} = ak \cos(kt + \beta), \quad (89.4)$$

$$\tilde{w} = w_x = \ddot{x} = -ak^2 \sin(kt + \beta) = -k^2x. \quad (89.5)$$

Последнее выражение показывает, что при гармоническом колебательном движении точки модуль ускорения точки пропорционален отклонению точки от среднего положения O , а знак противоположен знаку координаты.

Наибольший модуль ускорения соответствует крайним положениям точки: $w_{\max} = k^2a$. В среднем положении $w = 0$.

Вектор ускорения точки направлен всегда к началу координат O , т. е. к среднему положению точки, так как при $x > 0$ алгебраическая величина ускорения $\tilde{w} < 0$ и вектор w направлен противоположно оси x , а при $x < 0$ величина $\tilde{w} > 0$ и вектор w направлен в сторону оси (рис. 216).

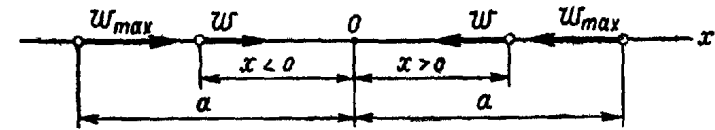


Рис. 216.

Из этого следует, что при движении точки к центру O направление ее ускорения совпадает с направлением скорости, а при движении ее от центра направление ускорения противоположно направлению скорости, т. е. приближение к центру происходит ускоренно,

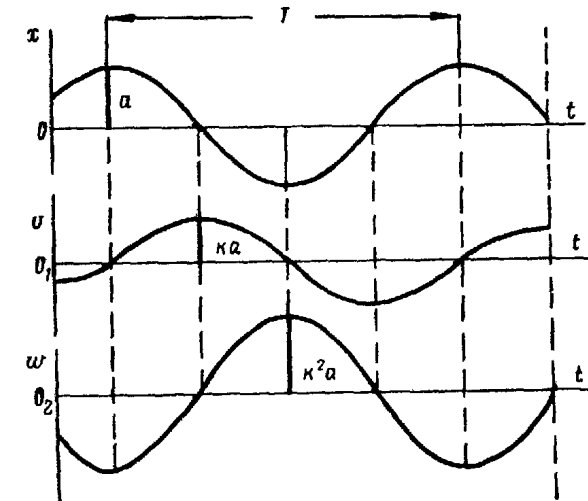


Рис. 217.

а удаление от него — замедленно. Наибольший модуль скорости v соответствует среднему положению точки ($x = 0$); в крайних положениях $v = 0$.

Изменение скорости и ускорения точки можно проследить по графикам движения, скорости и ускорения, построенным согласно уравнениям:

$$x = a \sin(kt + \beta),$$

$$\tilde{v} = ka \cos(kt + \beta),$$

$$\tilde{w} = -k^2a \sin(kt + \beta)$$

(рис. 217).

4. Построение графиков скорости и касательного ускорения по графику движения точки

В ряде практических задач не удается найти аналитическую зависимость $s = f(t)$ для некоторых точек механизма, но по данным автоматов-самописцев, связанных с соответствующей частью механизма, можно получить график движения точки (рис. 218,а).

График скорости точки в этом случае строят следующим образом.

Откладывают от начала осей координат vO_1t (рис. 218,б) отрезок O_1K_1 , равный единице времени в принятом масштабе, и из точки K_1 проводят прямые, параллельные касательным к графику движения в точках O, A_1, A_2, \dots . Отрезки, отсекаемые этими прямыми на оси O_1v , дадут в соответствующем масштабе алгебраические величины скоростей точки в моменты O, t_1, t_2, \dots . Действительно, на рис. 218,а имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \tilde{v}_0, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \tilde{v}_1, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \tilde{v}_2, \dots$$

При $O_1K_1 = 1$ получаем (рис. 218,б)

$$O_1v_0 = O_1K_1 \operatorname{tg} \alpha_0 = \operatorname{tg} \alpha_0, \quad O_1v_1 = \operatorname{tg} \alpha_1, \quad O_1v_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 \dots$$

Восставив перпендикуляры к оси t в точках t_1, t_2, t_3, \dots и к оси v — в точках $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \dots$, получим точки B_1, B_2, B_3, \dots графика скорости.

График касательного ускорения строят аналогично.

Отложив от начала осей $w_\tau O_2t$ отрезок O_2K_2 , равный единице времени в принятом масштабе (рис. 218,в), проводим из точки K_2 прямые, параллельные касательным к графику скорости в точках B_1, B_2, B_3, \dots .

Отрезки, отсекаемые этими прямыми на оси O_2w_τ , определяют в соответствующем масштабе алгебраические величины касательных ускорений точки в моменты O, t_1, t_2, t_3, \dots .

Восставив перпендикуляры к оси t в точках t_1, t_2, t_3, \dots и к оси w_τ — в точках $\tilde{w}_\tau, \tilde{w}_\tau, \tilde{w}_\tau, \dots$, получим точки C_1, C_2, C_3, \dots графика касательного ускорения.

Построение графиков скорости и касательного ускорения по заданному графику движения, основанное на зависимостях $\tilde{v} = \frac{ds}{dt}$ и $\tilde{w}_\tau = \frac{d\tilde{v}}{dt}$, является методом графического дифференцирования.

Вопросы для самоконтроля

1. Чем отличается график пути от графика движения точки?
2. Как по графику движения определить алгебраическую величину скорости точки в любой момент времени?
3. В каком направлении и с какой скоростью движется точка, график движения которой изображен на рис. 219?
4. Как по графику скорости прямолинейного движения точки определить алгебраическую величину ускорения точки в любой момент времени?

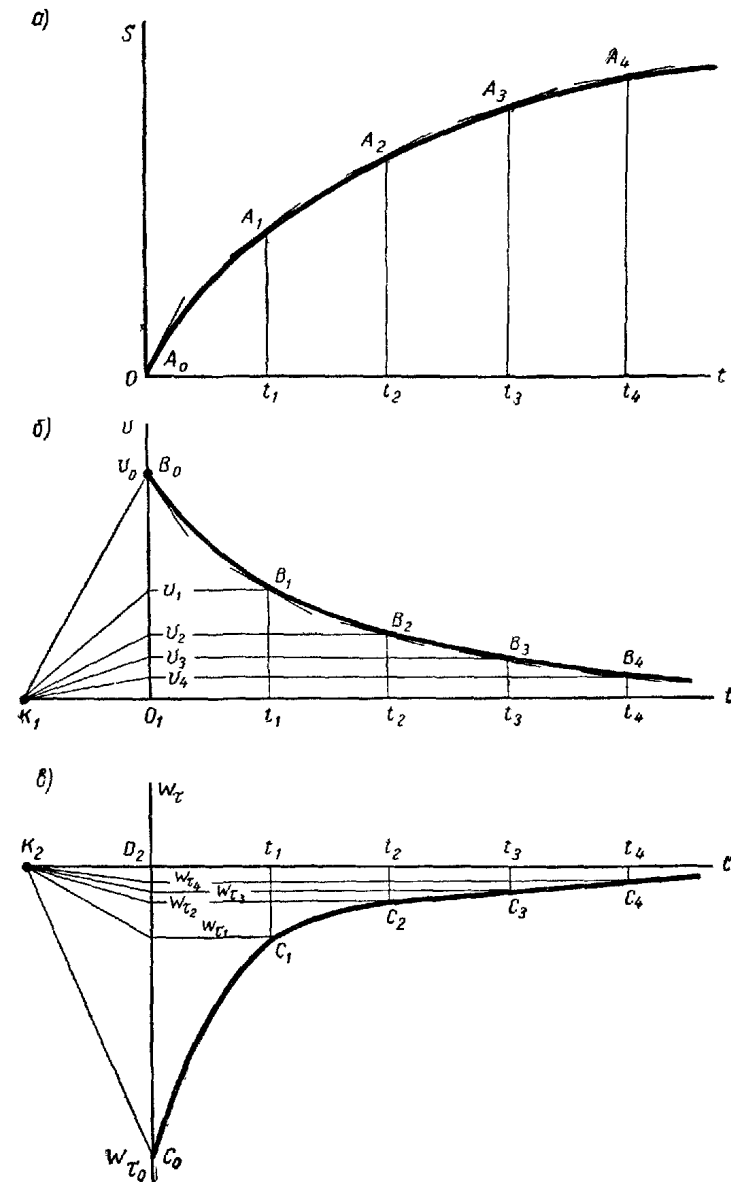


Рис. 218.

5. Какое движение точки называется гармоническим колебательным движением и какие величины характеризуют это движение?

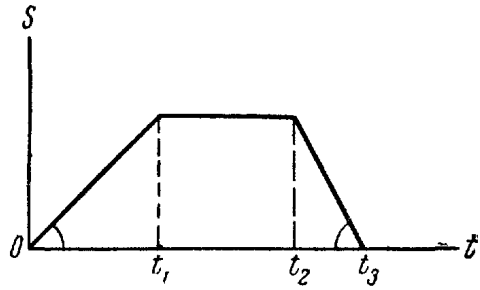


Рис. 219.

6. Как направлено ускорение гармонического колебательного движения? В какие промежутки времени это движение происходит ускоренно и в какие замедленно?

ГЛАВА XIV

ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 90. Поступательное движение твердого тела

Различают пять видов движения твердого тела:

- 1) *поступательное движение;*
- 2) *вращательное движение;*
- 3) *плоское или плоскопараллельное движение;*
- 4) *сферическое движение;*
- 5) *общий случай движения твердого тела.*

Приступая к изучению движения твердого тела, нужно прежде всего установить, к какому из указанных выше видов движения оно относится.

Поступательное и вращательное движения являются простейшими движениями твердого тела.

Рассмотрим в первую очередь поступательное движение твердого тела.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, соединяющая две точки тела, движется параллельно самой себе.

Теорема. *Все точки твердого тела, движущегося поступательно, описывают тождественные и параллельные между собой траектории и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения.*

Для доказательства теоремы выберем две произвольные точки твердого тела A и B и проведем из точки A в точку B радиус-вектор r_{AB} (рис. 220).

Так как тело движется поступательно, то во время его движения отрезок AB остается параллельным своему начальному положению, а потому значения радиуса-вектора r_{AB} в любые моменты времени t и t_1 геометрически равны, т. е.

$$r_{AB} = r_{A_1B_1} = \text{const.}$$

Проведем из произвольного неподвижного полюса O в точки A , B , A_1 , B_1 радиусы-векторы r_A , r_B , r_{A_1} , r_{B_1} .

Из $\triangle OAB$ устанавливаем равенство

$$r_B = r_A + r_{AB},$$

которое будет справедливым во все время движения.

Это равенство показывает, что любому положению точки A соответствует определенное положение точки B , отстоящее от A по направлению r_{AB} на расстоянии AB .

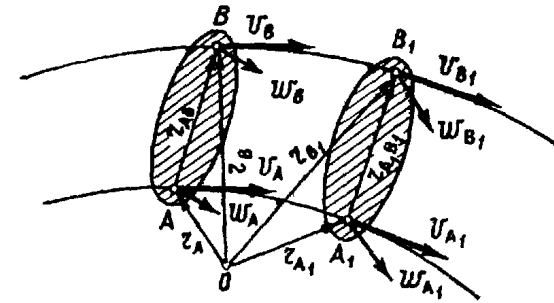


Рис. 220.

Поэтому, если траекторию точки A переместить по направлению r_{AB} на расстояние AB , то она совпадет с траекторией точки B , т. е. траектории точек A и B тождественны и параллельны.

Определим вектор скорости точки B как производную от радиуса-вектора этой точки по времени по формуле (78.4):

$$v_B = \frac{dr_B}{dt} = \frac{dr_A}{dt} + \frac{dr_{AB}}{dt}, \text{ но } \frac{dr_B}{dt} = v_B, \text{ а } \frac{dr_{AB}}{dt} = 0.$$

Поэтому $v_B = v_A$, т. е. скорости точек A и B геометрически равны.

Определив ускорения точек A и B тела согласно (82.1), получим

$$w_B = \frac{dv_B}{dt} = \frac{dv_A}{dt} = w_A, \quad w_B = w_A,$$

т. е. ускорения точек A и B геометрически равны.

Так как точки A и B произвольны, то полученные соотношения относятся ко всем точкам тела.

Установленные свойства поступательного движения позволяют свести изучение поступательного движения твердого тела к изучению

движения отдельной точки этого тела, т. е. к задаче кинематики точки.

Общие для всех точек твердого тела, движущегося поступательно, скорость v и ускорение w называют *скоростью и ускорением поступательного движения твердого тела*.

При любом другом движении твердого тела точки тела движутся с различными скоростями и ускорениями.

Уравнениями поступательного движения твердого тела являются уравнения движений любой точки этого тела — обычно уравнения движения его центра тяжести C :

$$\left. \begin{aligned} x_C &= f_1(t), \\ y_C &= f_2(t), \\ z_C &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (90.1)$$

Точки твердого тела, движущегося поступательно, могут описывать любые траектории, в том числе и прямые.

Примером поступательного движения твердого тела является движение спарника AB , соединяющего пальцы равных кривошипов O_1A

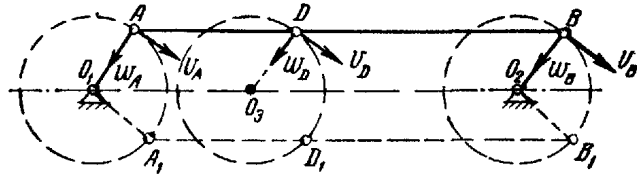


Рис. 221

и O_2B (рис. 221). Все точки спарника описывают окружности радиусом, равным длине кривошипа, и имеют геометрически равные скорости и ускорения.

§ 91. Вращательное движение твердого тела.

Уравнение вращательного движения.

Угловая скорость и угловое ускорение тела

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором остаются неподвижными все его точки, лежащие на некоторой прямой, называемой осью вращения.

При этом движении все остальные точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и описывают окружности, центры которых лежат на этой оси.

Для осуществления этого движения следует неподвижно закрепить две некоторые точки твердого тела A и B . Тогда прямая AB будет осью вращения тела и все точки, лежащие на этой прямой во все время движения будут оставаться неподвижными (рис. 222).

Определим положение вращающегося тела следующим образом. Заданым направлением оси вращения z . Проведем через эту ось две полуплоскости: неподвижную полуплоскость P и подвижную полуплоскость Q , связанную с твердым телом и вращающуюся вместе с ним.

Двугранный угол φ между этими полуплоскостями, отсчитываемый от неподвижной полуплоскости P к подвижной полуплоскости Q , называется *углом поворота тела*.

Условимся считать угол поворота положительным, если, смотря навстречу оси вращения, можно увидеть его отложенным против движения часовой стрелки. Числовые значения угла поворота выражаются в радианах.

Радианом, как известно из геометрии, называется центральный угол, длина дуги которого равна радиусу. Числовое значение угла в радианах равно отношению длины дуги к радиусу, т. е. оно — отвлеченное число. Угол, равный 360° , содержит 2π радиан. Один радиан составляет

$$\frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ 17' 44,8''.$$

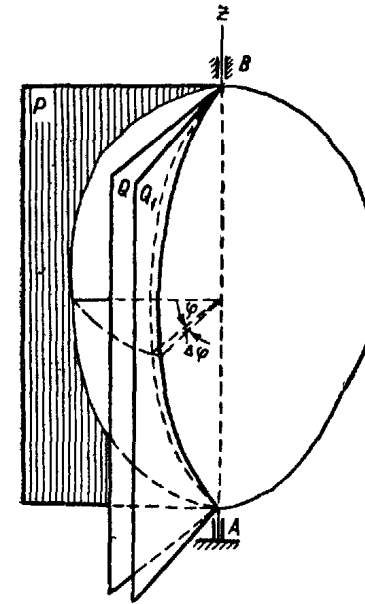


Рис. 222

Угол поворота часто выражают числом оборотов N . Тогда угол φ в радианах, соответствующий N оборотам, определяется:

$$\varphi = 2\pi N. \quad (91.1)$$

Угол φ , определяя положение подвижной полуплоскости, определяет также положение всего вращающегося тела. Поэтому его можно рассматривать как угловую координату тела.

При вращении тела угол поворота φ изменяется в зависимости от времени, т. е. является функцией времени t :

$$\varphi = f(t). \quad (91.2)$$

Уравнение (91.2) называется *уравнением вращательного движения тела*. Оно полностью определяет положение тела в любой момент времени,

Угловая скорость и угловое ускорение тела

Величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота φ с течением времени, называется *угловой скоростью тела*.

Условимся абсолютное значение угловой скорости обозначать ω , а алгебраическую величину угловой скорости символом $\tilde{\omega}$. Очевидно, что $|\tilde{\omega}| = \omega$.

Если в моменты времени t и $t + \Delta t$ вращающаяся полуплоскость занимает положения Q и Q_1 , т. е. угол поворота φ за время Δt получает приращение $\Delta\varphi$, то отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ определяет алгебраическую величину средней угловой скорости вращающегося тела за время Δt :

$$\tilde{\omega}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

При стремлении Δt к нулю получаем алгебраическую величину угловой скорости тела в момент t :

$$\tilde{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \tilde{\omega}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt},$$

т. е.

$$\tilde{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (91.3)$$

Если $\frac{d\varphi}{dt} > 0$, то угол поворота φ увеличивается, т. е. вращение тела происходит в положительном направлении отсчета угла поворота.

Если $\frac{d\varphi}{dt} < 0$, то угол поворота φ уменьшается, т. е. тело вращается в обратную сторону.

Если в некоторый момент времени $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ и изменяет знак, то угол поворота φ в этот момент достигает максимального или минимального значения, а тело изменяет направление вращения.

Таким образом, знак производной $\frac{d\varphi}{dt}$ указывает направление вращения тела, а ее абсолютное значение равно угловой скорости тела, т. е.

$$\omega = |\tilde{\omega}| = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \quad (91.4)$$

Если вращение тела происходит в одном направлении, которое принимается за положительное, то $\tilde{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} > 0$, т. е. $\left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = \frac{d\varphi}{dt}$ и формула (91.4) принимает вид

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (91.5)$$

Величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости с течением времени, называется *угловым ускорением тела*.

Условимся абсолютное значение углового ускорения обозначать ϵ , а алгебраическую величину углового ускорения $\tilde{\epsilon}$.

Очевидно, что $|\tilde{\epsilon}| = \epsilon$.

Если за промежуток времени Δt приращение угловой скорости равно $\Delta\tilde{\omega}$, то отношение $\frac{\Delta\tilde{\omega}}{\Delta t}$ определяет алгебраическую величину среднего углового ускорения вращающегося тела за время Δt :

$$\tilde{\epsilon}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\tilde{\omega}}{\Delta t}.$$

При стремлении Δt к нулю получаем алгебраическую величину углового ускорения в момент t

$$\tilde{\epsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \tilde{\epsilon}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\tilde{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \ddot{\varphi},$$

т. е.

$$\tilde{\epsilon} = \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \ddot{\varphi}, \quad (91.6)$$

Из формулы (91.3) следует:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (91.7)$$

Знак $\tilde{\epsilon} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ также дает возможность установить, является ли вращение тела в данный момент ускоренным или замедленным.

Если знаки $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\epsilon}$ одинаковы, тело вращается ускоренно, а если их знаки различны — замедленно.

Абсолютное значение углового ускорения

$$\epsilon = |\tilde{\epsilon}| = \left| \frac{d\tilde{\omega}}{dt} \right| = \left| \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right|.$$

При вращении тела в одном направлении, когда $\omega = \tilde{\omega}$, имеем

$$\epsilon = \left| \frac{d\omega}{dt} \right| = \dot{\omega}. \quad (91.8)$$

Если $\frac{d\omega}{dt} > 0$, то угловая скорость ω увеличивается, т. е. тело вращается ускоренно. Если $\frac{d\omega}{dt} < 0$, то ω уменьшается, т. е. вращение происходит замедленно.

Уравнение равномерного вращения тела

Вращение тела с постоянной угловой скоростью называется *равномерным*. Составим уравнение равномерного вращения тела с угловой скоростью ω , принимая направление этого вращения за положительное направление отсчета угла поворота φ .

Положим, что в начальный момент $t_0 = 0$ угол поворота имеет значение φ_0 . По формуле (91.5) получим $\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \text{const}$; $d\varphi = \omega dt$.

Проинтегрируем уравнение в пределах, соответствующих начальному моменту $t_0 = 0$ и произвольному моменту времени t :

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt; \quad \varphi - \varphi_0 = \omega t,$$

откуда
$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (91.9)$$

Выражение (91.9) является *уравнением равномерного вращения тела*.

Если в начальный момент времени подвижная полуплоскость Q совпадает с неподвижной полуплоскостью P , т. е. $\varphi_0 = 0$, то уравнение равномерного вращения тела (91.9) принимает вид

$$\varphi = \omega t.$$

Из уравнения равномерного вращения тела при $\varphi_0 \neq 0$ находим

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t},$$

т. е. *угловая скорость равномерного вращения тела равна отношению приращения угла поворота за некоторый промежуток времени к величине этого промежутка времени*.

Если за единицу угла принять 1 радиан, а за единицу времени — 1 секунду, то единицей угловой скорости будет 1 сек⁻¹.

Обычно угловая скорость измеряется числом оборотов в минуту и обозначается n . Так как один оборот равен 2π рад, то зависимость между угловой скоростью ω сек⁻¹ и n об/мин имеет вид

$$\omega = n \frac{2\pi}{60} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{\pi n}{30} \quad (91.10)$$

и

$$n = \frac{30}{\pi} \omega. \quad (91.11)$$

Например, угловая скорость турбины, совершающей 4000 об/мин, выраженная в сек⁻¹, равна:

$$\omega = \frac{4000\pi}{30} = 418,88 \text{ сек}^{-1}.$$

Угловая скорость вращения Земли вокруг ее оси, выраженная в сек⁻¹,

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60^2} = 0,0000727 \text{ сек}^{-1}.$$

Уравнение равнопеременного вращения тела * *

Вращение тела, при котором угловое ускорение постоянно, называют *равнопеременным вращением*. При этом, если абсолютная величина угловой скорости увеличивается, вращение называют *равноускоренным*, а если уменьшается — *равнозамедленным*.

Составим уравнение равнопеременного вращения, полагая, что в начальный момент $t_0 = 0$ начальная угловая скорость равна $\tilde{\omega}_0$, начальное значение угла поворота равно φ_0 :

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \tilde{\varepsilon} = \text{const}; \quad d\tilde{\omega} = \tilde{\varepsilon} dt.$$

Проинтегрируем уравнение в пределах, соответствующих начальному моменту $t_0 = 0$ и произвольному моменту времени t :

$$\int_{\tilde{\omega}_0}^{\tilde{\omega}} d\tilde{\omega} = \tilde{\varepsilon} \int_0^t dt, \quad \tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0 = \tilde{\varepsilon} t,$$

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\varepsilon} t, \quad (91.12)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\varepsilon} t, \quad d\varphi = (\tilde{\omega}_0 + \tilde{\varepsilon} t) dt.$$

Проинтегрировав это уравнение в соответствующих пределах, получим

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \tilde{\omega}_0 \int_0^t dt + \tilde{\varepsilon} \int_0^t t dt,$$

$$\varphi - \varphi_0 = \tilde{\omega}_0 t + \frac{\tilde{\varepsilon} t^2}{2}, \quad \varphi = \varphi_0 + \tilde{\omega}_0 t + \frac{\tilde{\varepsilon} t^2}{2}. \quad (91.13)$$

Уравнение (91.13) является *уравнением равнопеременного вращения тела*.

Так как равнопеременное вращение происходит обычно в одном направлении, то $\tilde{\omega} = \omega$, а $\tilde{\varepsilon} = \pm \varepsilon$, где знак плюс соответствует ускоренному вращению, а знак минус — замедленному. Учитывая это, формулам (91.12) и (91.13) можно придать более удобный для решения задач вид:

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \quad (91.12^*)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (91.13^*)$$

Из формулы угловой скорости находим $\varepsilon = \frac{|\omega - \omega_0|}{t}$, т. е. *при равнопеременном вращении абсолютное значение углового ускорения тела равно отношению изменения угловой скорости тела за некоторый промежуток времени к величине этого промежутка*.

Если за единицу угла принять 1 радиан, а за единицу времени — 1 секунду, то единицей углового ускорения будет 1 сек⁻². Если за единицу угла принять 1 оборот, а за единицу времени 1 минуту, то единицей углового ускорения будет 1 об/мин².

Покажем на примерах переход от одних единиц углового ускорения к другим. Выразим, например, в сек⁻² угловое ускорение $\varepsilon = 15$ об/мин²:

$$\varepsilon = 15 \text{ об/мин}^2 = 15 \frac{2\pi}{60^2} \text{ сек}^{-2} = \frac{\pi}{120} \text{ сек}^{-2}.$$

Рассмотрим и обратный переход. Выразим угловое ускорение $\varepsilon = 5\pi$ сек⁻² в об/мин²:

$$\varepsilon = 5\pi \text{ сек}^{-2} = 5\pi \frac{60^2}{2\pi} \text{ об/мин}^2 = 9000 \text{ об/мин}^2.$$

Пример 57. Вал начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя; в первые 20 сек он совершает 100 оборотов. Каковы его угловые скорость и ускорение по истечении 20 сек?

Решение. Так как вал начинает вращаться из состояния покоя, то $\omega_0 = 0$. В этом случае уравнения (91.12) и (91.13) при $\varphi_0 = 0$ имеют вид

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (a)$$

$$\omega = \varepsilon t. \quad (б)$$

Из уравнения (а) находим $\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2}$, где

$$\varphi = 2\pi N.$$

Подставляя числовые значения, находим:

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot 2\pi \cdot 100}{20^2} = \pi \text{ сек}^{-2}, \quad \omega_{20} = \varepsilon \cdot 20 = 20\pi \text{ сек}^{-1}.$$

§ 92. Скорости и ускорения точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

На рис. 223 изображена окружность, представляющая собой траекторию произвольной точки M тела; расстояние точки M от оси вращения, равное радиусу этой окружности, обозначим R .

Если OC — радиус, лежащий в неподвижной полуплоскости P , а NC — радиус, лежащий в подвижной полуплоскости Q и вращающийся вместе с ней, то $\angle OCN = \varphi = f(t)$.

Величина угла $NCM = \alpha$ при вращении его сторон NC и MC вместе с телом не изменяется, т. е.

$$\alpha = \text{const.}$$

Неподвижную точку O примем за начало отсчета дуговой координаты s точки M , направление движения точки за — положительное. Тогда получим

$$s = \cup OM = R(\varphi + \alpha),$$

где углы φ и α выражены в радианах.

Определим модуль скорости точки M , называемой *вращательной*, или *окружной*, скоростью этой точки:

$$v = \left| \frac{ds}{dt} \right| = R \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = R\omega. \quad (92.1)$$

Модуль вращательной скорости точки твердого тела равен произведению расстояния от точки до оси вращения на угловую скорость тела.

Так как угол φ выражается в радианах, то угловая скорость ω в этой формуле должна выражаться в сек^{-1} .

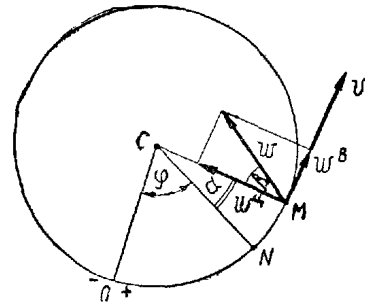


Рис. 223.

Из формулы (92.1) следует, что модули вращательных скоростей различных точек вращающегося тела пропорциональны расстояниям от этих точек до оси вращения (рис. 224).

Если соединить отрезком прямой конец скорости, например, точки A вращающегося диска, с центром вращения C , то концы скоростей точек B , D и E диска будут лежать на этой прямой. Это очевидно из подобия образовавшихся треугольников, высоты которых v_E , v_D , v_B , v_A пропорциональны их основаниям CE , CD , CB , CA .

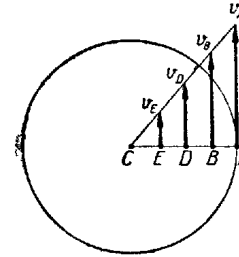


Рис. 224.

Ускорение точки M определим по его составляющим: касательному ускорению, направленному по касательной к окружности, и нормальному ускорению, направленному к центру C .

Эти ускорения точек вращающегося тела называют вращательным и центростремительным ускорениями и обозначают $w^в$ и $w^ц$ (рис. 223):

$$w^в = w_\tau = \left| \frac{dv}{dt} \right| = R \left| \frac{d\omega}{dt} \right| = R\varepsilon. \quad (92.2)$$

Модуль вращательного ускорения точки тела равен произведению расстояния от точки до оси вращения на абсолютное значение углового ускорения тела.

По формуле (85.5) найдем:

$$w^ц = w_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2. \quad (92.3)$$

Модуль центростремительного ускорения точки равен произведению расстояния от точки до оси вращения на квадрат угловой скорости тела.

Модуль полного ускорения точки определяется по формуле

$$w = \sqrt{(w^в)^2 + (w^ц)^2} = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (92.4)$$

Тангенс угла β , составленного ускорением w с радиусом окружности CM , определится по формуле

$$\text{tg } \beta = \frac{w^в}{w^ц} = \frac{R\varepsilon}{R\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (92.5)$$

Эта формула показывает, что угол, составленный ускорением точки вращающегося тела с отрезком, соединяющим точку с центром окружности, не зависит от положения точки в теле.

В формулах для вычисления $w^в$, $w^ц$ и w угловая скорость ω и угловое ускорение ε должны быть выражены в сек^{-1} и сек^{-2} .

Из формул (92.2), (92.3) и (92.4) следует, что модули вращательных, центростремительных и полных ускорений точек

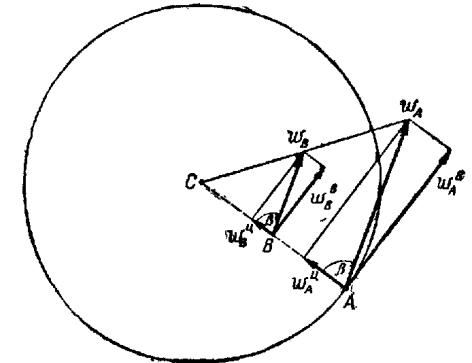


Рис. 225.

вращающегося тела пропорциональны расстояниям от этих точек до оси вращения. Поэтому по ускорению какой-либо точки A вращающегося диска (рис. 225) можно определить графически ускорение любой другой точки B этого диска, лежащей на радиусе AC .

При равномерном вращении тела

$$\omega = \text{const}, \quad \epsilon = \left| \frac{d\omega}{dt} \right| = 0,$$

а поэтому $w^B = R\epsilon = 0$.

Таким образом, при равномерном вращении ускорение точки является центростремительным, а его модуль равен:

$$w = w^u = R\omega^2.$$

В этом случае ускорение w точки M направлено к центру C окружности, описываемой этой точкой.

§ 93. Примеры на вращательное движение

Пример 58. Вращение маховика в период пуска машины определяется уравнением

$$\varphi = \frac{1}{3} t^3,$$

где t — в сек, φ — в рад. Определить модуль и направление ускорения точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии 50 см, в тот момент, когда ее скорость равна 8 м/сек.

Решение. По уравнению вращения маховика находим его угловую скорость и ускорение согласно формулам (91.5) и (91.8):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = t^2, \quad (a)$$

$$\epsilon = \left| \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right| = 2t. \quad (б)$$

Пользуясь формулой (92.1), находим момент времени t_1 , когда скорость точки M равна 8 м/сек:

$$v = R\omega, \quad \omega_1 = \frac{v_1}{R} = \frac{8}{0,5} = 16 \text{ сек}^{-1}.$$

По этому значению ω из (а) находим t_1 :

$$t_1 = \sqrt{\omega_1} = \sqrt{16} = 4 \text{ сек}.$$

По уравнению (б) вычисляем ϵ , а затем по формулам (92.2), (92.3) и (92.4) — модули вращательного, центростремительного и полного ускорений точки M в этот момент времени:

$$\epsilon_1 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ сек}^{-2};$$

$$w_1^B = R\epsilon_1 = 0,5 \cdot 8 = 4 \text{ м/сек}^2;$$

$$w_1^u = R\omega_1^2 = 0,5 \cdot 16^2 = 128 \text{ м/сек}^2;$$

$$w_1 = \sqrt{(w_1^B)^2 + (w_1^u)^2} = \sqrt{4^2 + 128^2} = 128,06 \text{ м/сек}^2.$$

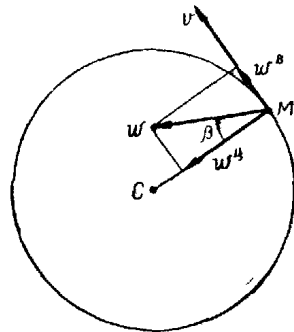


Рис. 226.

Как видно, модуль полного ускорения точки весьма мало отличается от модуля центростремительного ускорения точки (рис. 226).

Направление ускорения точки определяется углом β , образованным ускорением и радиусом CM :

$$\text{tg } \beta_1 = \frac{\epsilon_1}{\omega_1^2} = \frac{8}{16^2} = \frac{1}{32}; \quad \beta_1 = 1^\circ 48'.$$

Пример 59. Груз A , подвешенный к нити AB , намотанной на барабан, опускается равноускоренно из состояния покоя, приводя во вращение барабан. За первые 3 сек барабан совершает 9 оборотов. Определить в конце 5-й сек скорость и ускорение точки обода барабана, а также груза A , если диаметр барабана $D = 30$ см (рис. 227а).

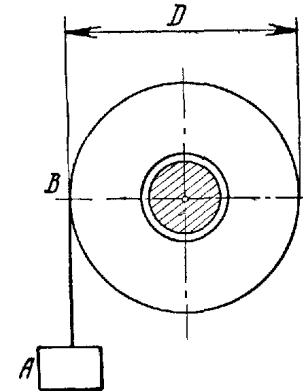


Рис. 227а.

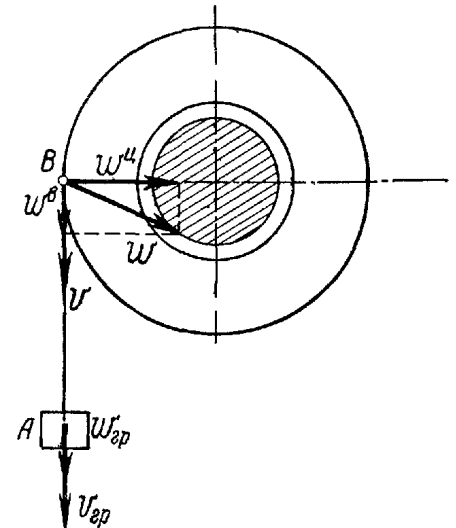


Рис. 227б.

Решение. Барабан вращается равноускоренно согласно уравнению (91.13*):

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\epsilon t^2}{2}.$$

Формула угловой скорости имеет вид (91.12*):

$$\omega = \omega_0 + \epsilon t.$$

Для того, чтобы начальное значение угла поворота φ_0 обратилось в нуль, следует неподвижную полуплоскость поместить в начальном положении подвижной полуплоскости, вращающейся с барабаном (см. § 91). Выполним это и получим $\varphi_0 = 0$. При вращении из состояния покоя начальная угловая скорость барабана равна нулю $\omega_0 = 0$. При этих условиях формулы (91.12*) и (91.13*) принимают вид

$$\varphi = \frac{\epsilon t^2}{2}, \quad (a)$$

$$\omega = \epsilon t. \quad (б)$$

Так как $\varphi = 9$ оборотов при $t = 3$ сек, то из уравнения (а) определим одинаковое для всех моментов времени угловое ускорение ϵ :

$$\epsilon = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{2 \cdot 9}{3^2} = 2 \text{ об/сек}^2 = 4\pi \text{ сек}^{-2}.$$

Из уравнения (б) найдем угловую скорость барабана в конце 5-й сек:

$$t = 5 \text{ сек}, \quad \omega_5 = 4\pi \cdot 5 = 20\pi \text{ сек}^{-1}.$$

Определим в точке B обода барабана (рис. 227б) модули вращательной скорости, вращательного и центростремительного ускорений в этот же момент времени по формулам (92.1), (92.2), (92.3):

$$v_5 = R\omega_5 = 0,15 \cdot 20\pi = 3 \cdot 3,14 = 9,42 \text{ м/сек},$$

$$\omega_5^B = \omega^B = R\epsilon = 0,15 \cdot 4\pi = 0,6 \cdot 3,14 = 1,88 \text{ м/сек}^2$$

(модуль вращательного ускорения точки тела при равнопеременном вращении одинаков для всех моментов времени),

$$\omega_5^M = R\omega_5^2 = 0,15 \cdot 400\pi^2 = 60 \cdot 9,86 = 591,6 \text{ м/сек}^2.$$

Модуль полного ускорения точки обода барабана определяется по формуле (92.4):

$$\omega_5 = \sqrt{(\omega_5^B)^2 + (\omega_5^M)^2} = \sqrt{1,88^2 + 591,6^2} \approx 591,6 \text{ м/сек}^2.$$

Вследствие незначительной величины модуля вращательного ускорения по сравнению с модулем центростремительного ускорения, полное ускорение приближенно равно центростремительному.

Скорость груза равна скорости точки обода барабана:

$$v_{гp} = v_5 = 9,42 \text{ м/сек}.$$

Ускорение груза (рис. 227б) равно вращательному ускорению точки обода, т. е.

$$\omega_{гp} = \omega^B = 1,88 \text{ м/сек}^2.$$

§ 94. Векторные выражения вращательной скорости, вращательного и центростремительного ускорений

Введем понятия векторов угловой скорости ω и углового ускорения ϵ .

Условимся откладывать вектор угловой скорости тела ω от любой точки оси вращения, направляя его по этой оси так, чтобы смотря навстречу этому вектору, видеть вращение тела происходящим против движения часовой стрелки (рис. 228, а и б). Модуль этого вектора должен равняться абсолютному значению угловой скорости, $\omega = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|$.

Принятое правило обусловлено применением правой системы осей координат, которой соответствует положительное направление вращения, противоположное направлению движения часовой стрелки. При пользовании левой системой вектор ω следует направить так, чтобы, смотря ему навстречу, видеть вращение тела происходящим в направлении движения часовой стрелки.

Векторы, направления которых зависят от принятой системы координат, называются *псевдовекторами*. Примерами псевдовекторов, кроме угловой скорости, могут служить также момент силы относительно точки и момент пары сил. При сложении псевдовекторов действительны правила параллелограмма и многоугольника (§ 129).

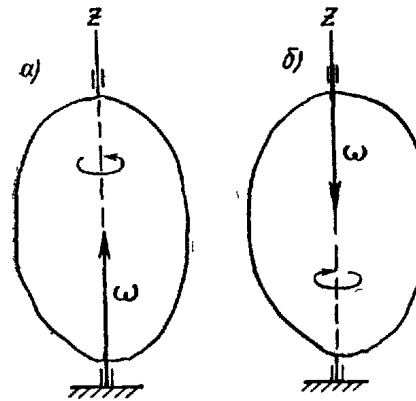


Рис. 228.

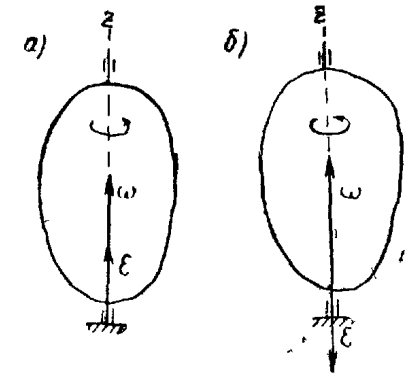


Рис. 229.

Вектор углового ускорения ϵ характеризует изменение вектора угловой скорости ω в зависимости от времени, т. е. он должен быть равен производной от вектора угловой скорости по времени

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt}. \quad (94.1)$$

Направление векторной производной совпадает с предельным направлением приращения дифференцируемого вектора (см. примечание, § 78, стр. 190).

Так как вектор ω имеет постоянное направление, то направление его приращения $\Delta\omega$ совпадает с направлением самого вектора ω при ускоренном вращении и противоположно ему — при замедленном.

Таким образом, направление вектора $\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$ совпадает с направлением вектора ω при ускоренном вращении и противоположно ему при замедленном (рис. 229, а и б).

Модуль вектора ϵ равен абсолютному значению углового ускорения, $\epsilon = \left| \frac{d\omega}{dt} \right|$.

Так как точкой приложения векторов ω и ϵ может быть любая точка оси вращения, то векторы ω и ϵ являются *скользящими*.

Пользуясь понятием вектора угловой скорости ω , легко получить векторное выражение вращательной скорости.

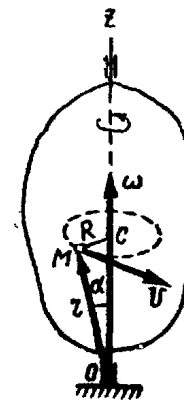


Рис. 230.

Изобразим (рис. 230) вектор угловой скорости ω , радиус-вектор \mathbf{r} точки M тела относительно произвольной точки O оси вращения и вращательную скорость этой точки \mathbf{v} . Модуль вращательной скорости: $v = R\omega = \omega r \sin \alpha$, где α — угол между радиусом-вектором \mathbf{r} и вектором угловой скорости ω .

Модуль векторного произведения $\omega \times \mathbf{r}$:

$$|\omega \times \mathbf{r}| = \omega r \cdot \sin \alpha.$$

Сопоставляя значения v и $|\omega \times \mathbf{r}|$, устанавливаем, что модуль вращательной скорости v равен модулю векторного произведения $\omega \times \mathbf{r}$.

Вращательная скорость \mathbf{v} направлена перпендикулярно к плоскости треугольника COM , т. е. плоскости векторов сомножителей ω и \mathbf{r} ; если смотреть навстречу \mathbf{v} , можно видеть поворот вектора ω к вектору \mathbf{r} на угол α , совершающимся против движения часовой стрелки, т. е. направление вращательной скорости \mathbf{v} совпадает с направлением векторного произведения $\omega \times \mathbf{r}$.

Следовательно, векторы \mathbf{v} и $\omega \times \mathbf{r}$ имеют равные модули и одинаковое направление, т. е. они равны между собой:

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}. \quad (94.2)$$

Таким образом, вращательная скорость точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки относительно любой точки оси вращения.

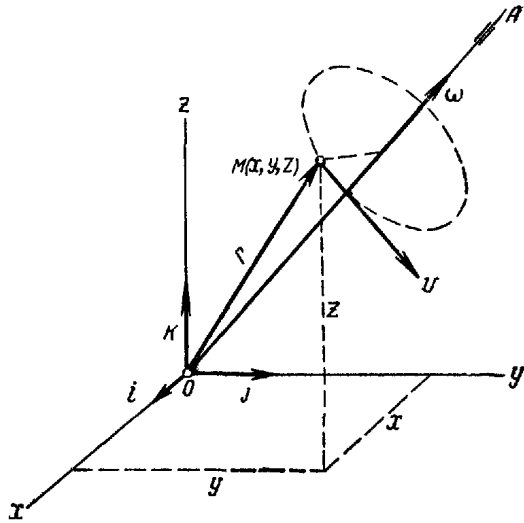


Рис. 231.

Выражение (94.2) является одним из основных соотношений кинематики твердого тела.

Если известны проекции $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ вектора угловой скорости, направленного по оси вращения тела OA , на оси координат (рис. 231) и координаты некоторой точки M тела x, y, z , то вращательную скорость этой точки можно найти при помощи определителя векторного произведения:

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \mathbf{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \mathbf{k}(\omega_x y - \omega_y x).$$

Отсюда определяются проекции вращательной скорости точки на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \right\} \quad (94.3)$$

Эти формулы получены Эйлером в 1765 г. и называются *формулами Эйлера*.

В случае, если ось вращения тела совпадает с одной из осей координат, например, с осью z , имеем: $\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = \omega$, откуда $v_x = -\omega y, v_y = \omega x, v_z = 0$.

Для получения векторных формул вращательного и центростремительного ускорений продифференцируем по времени выражение

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r};$$

тогда получим

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} + \omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Здесь $\frac{d\omega}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}$ и $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$.

Подставляя эти значения, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \omega \times \mathbf{v} \\ \text{или} \quad \mathbf{w} &= \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}). \end{aligned}$$

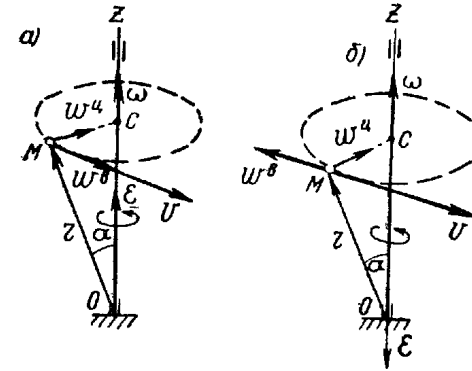


Рис. 232.

Покажем, что первое слагаемое $\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$ есть вращательное ускорение, а второе слагаемое $\omega \times \mathbf{v}$ — центростремительное ускорение.

На рис. 232, а показаны направления вращательного ускорения \mathbf{w}^t и центростремительного ускорения \mathbf{w}^c для случая ускоренного вращения, а на рис. 232, б — направления тех же ускорений для случая замедленного вращения.

Модуль вращательного ускорения (рис. 232, а)

$$w^t = \varepsilon R = \varepsilon r \sin \alpha,$$

где α — угол между радиусом-вектором \mathbf{r} и вектором углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Модуль векторного произведения $\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$:

$$|\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}| = \varepsilon r \sin \alpha.$$

Сопоставляя значения модулей w^t и $|\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}|$, устанавливаем:

$$w^t = |\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}|.$$

Вращательное ускорение w^B направлено перпендикулярно плоскости треугольника COM , т. е. плоскости векторов сомножителей ε и r ; если смотреть навстречу w^B , то можно видеть поворот вектора ε к вектору r на угол α (рис. 232, а) или на угол $180 - \alpha$ (рис. 232, б), совершающимся против движения часовой стрелки, т. е. направление вращательного ускорения w^B совпадает с направлением векторного произведения $\varepsilon \times r$.

Следовательно,

$$w^B = \varepsilon \times r. \quad (94.4)$$

Таким образом, *вращательное ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно векторному произведению вектора углового ускорения тела на радиус-вектор этой точки относительно любой точки оси вращения.*

Модуль центростремительного ускорения

$$w^u = \omega^2 R = \omega v.$$

Модуль векторного произведения $\omega \times v$

$$|\omega \times v| = \omega v \sin(\omega, v) = \omega v,$$

так как $\sin(\omega, v) = 1$ при $(v \perp \omega)$.

Сопоставляя значения модулей w^u и $|\omega \times v|$, устанавливаем:

$$w^u = |\omega \times v|.$$

Если мысленно перенести вектор угловой скорости в точку M (рис. 232), то, смотря навстречу центростремительному ускорению w^u , перпендикулярному плоскости векторов сомножителей ω и v , можно видеть поворот вектора ω к вектору v на угол 90° , совершающимся против движения часовой стрелки, т. е. направление центростремительного ускорения w^u совпадает с направлением векторного произведения $\omega \times v$. Следовательно,

$$w^u = \omega \times v. \quad (94.5)$$

Таким образом, *центростремительное ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно векторному произведению вектора угловой скорости тела на вращательную скорость этой точки.*

§ 95. Передаточные механизмы

Передаточные механизмы предназначены для передачи вращения от одного вала, называемого *ведущим*, к другому, называемому *ведомым*.

Если оси ведущего и ведомого валов параллельны или пересекаются, то вращение можно передать при помощи фрикционной или зубчатой передач (рис. 233а, б, в).

Во фрикционной передаче вращение передается вследствие действия силы сцепления на поверхности соприкасающихся колес, в зубчатой передаче — от зацепления зубьев.

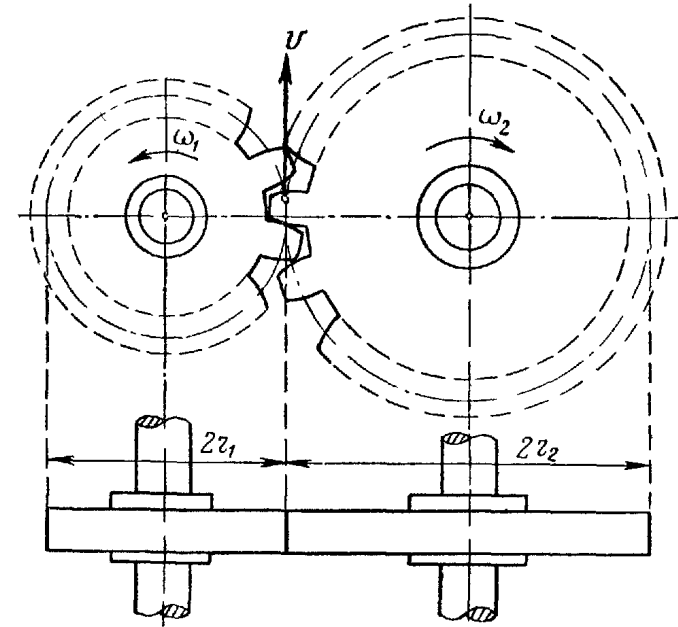


Рис. 233а.

Вращательная скорость v в точке соприкасания колес относится к точкам обоих колес, т. е. ее модуль определяется

$$v = r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2,$$

откуда

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (95.1)$$

Таким образом, угловые скорости колес фрикционной или зубчатой передачи обратно пропорциональны радиусам колес.

Отношение угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости ведомого колеса называется *передаточным числом*.

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (95.2)$$

Передаточное число можно вычислить как обратное отношение радиусов колес

$$i = \frac{r_2}{r_1}. \quad (95.3)$$

Так как числа зубьев пропорциональны длинам окружностей и, следовательно, радиусам, то передаточное число определяется и по числу зубьев:

$$i = \frac{z_2}{z_1}, \quad (95.4)$$

При внешнем зацеплении (рис. 233а) направление вращения ведущего и ведомого колес противоположное, а при внутреннем (рис. 233б) — одинаковое.

Кроме фрикционной и зубчатой передач, существует передача на расстоянии при помощи гибкой связи (ремня, троса, цепи) (рис. 234).

Так как скорости всех точек ремня одинаковы и ремень не скользит по поверхности шкива, то к ременной передаче относятся те же соотношения:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Применяются также серии колес с неподвижными осями вращения в виде последовательного ряда с паразитными колесами (рис. 235а) и последовательного ряда с кратным зацеплением (рис. 235б), называемые *рядовыми соединениями колес*.

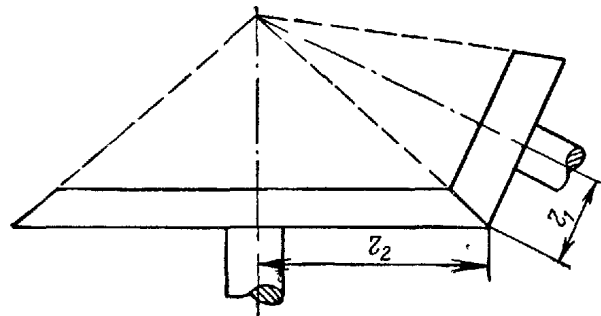


Рис. 233в.

Определим передаточное число фрикционной передачи в виде рядового соединения с паразитными колесами.
Для колес 1—2

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

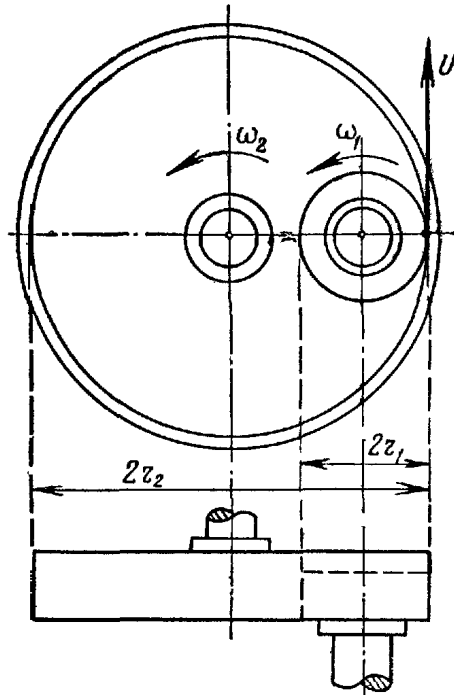


Рис 233б

Для колес 2—3

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_1}.$$

Перемножая левые и правые части, получаем

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_1} = i$$

Для зубчатых колес

$$i = \frac{z_3}{z_1}.$$

Передаточное число рядового соединения с паразитными колесами равно отношению радиусов (чисел зубьев) ведомого и ведущего колес и не зависит от радиусов (чисел зубьев) паразитных колес.

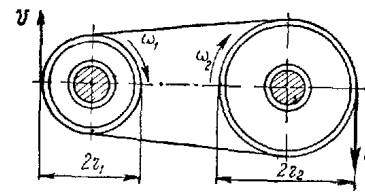


Рис 234.

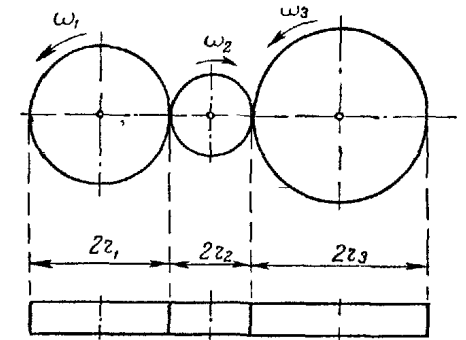


Рис. 235а.

Определим передаточное число рядового соединения с кратным зацеплением.

Частное передаточное число для колес 1—2

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Частное передаточное число для колес 3—4

$$i_{3-4} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{r_4}{r_1}.$$

Так как колеса 2—3 соединены жестко, т. е. $\omega_2 = \omega_3$, то общее передаточное число $i = \frac{\omega_1}{\omega_4}$ равно произведению передаточных чисел:

$$i = i_{1-2} \cdot i_{3-4},$$

или

$$i = \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3}.$$

Для зубчатых колес

$$i = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}. \quad (95.5)$$

Таким образом, *общее передаточное число рядового соединения колес с кратным зацеплением равно произведению чисел*

зубьев ведомых колес, деленному на произведение чисел зубьев ведущих колес.

В рассмотренных выше передачах при равномерном вращении ведущего вала ведомый вал вращается тоже равномерно.

Для получения переменной угловой скорости ведомого вала применяются передачи, в которых расстояние от точки соприкосновения колес до оси одного из валов или обоих валов изменяется.

Во фрикционной передаче, изображенной на рис. 236, колесо 1 перемещается вдоль его оси и отношение угловых скоростей зависит от переменного расстояния x

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{x}{r_1}. \quad (95.6)$$

На рис. 237 изображены эллиптические колеса, оси вращения которых находятся в фокусах эллипсов. Отношение угловых скоростей

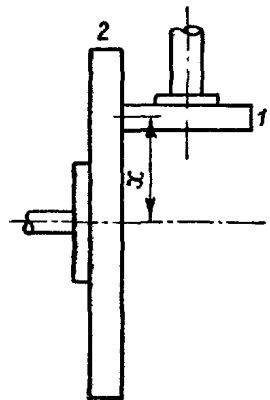


Рис. 236.

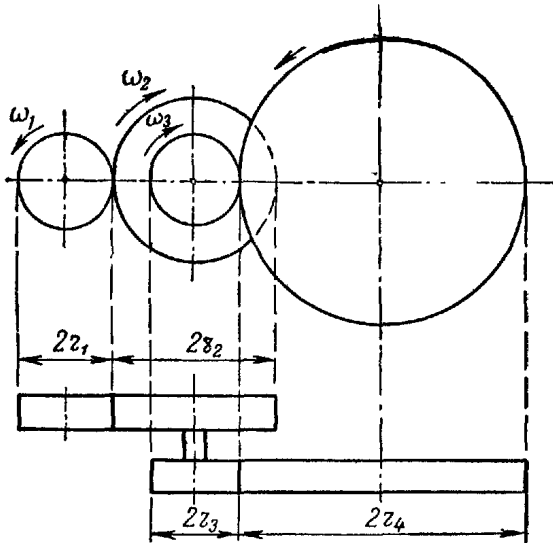


Рис. 235б.

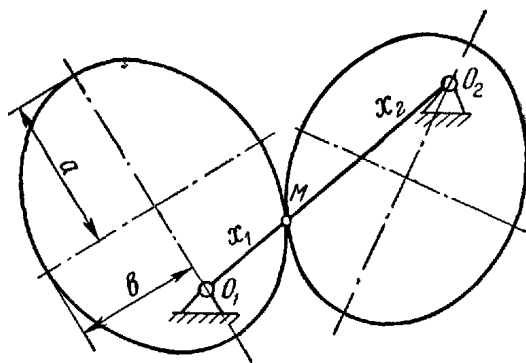


Рис. 237.

стей зависит от переменных расстояний $x_1 = O_1M$ и $x_2 = O_2M$, где

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2a, \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} &= \frac{x_2}{x_1}. \end{aligned} \quad (95.7)$$

§ 96. Примеры на преобразование вращательного движения

Пример 60. Ведущий шкив ременной передачи, обладающий угловой скоростью $n_{I_0} = 60$ об/мин, останавливается через 10 сек. Радиусы шкивов: $r_I = 25$ см, $r_{II} = 50$ см.

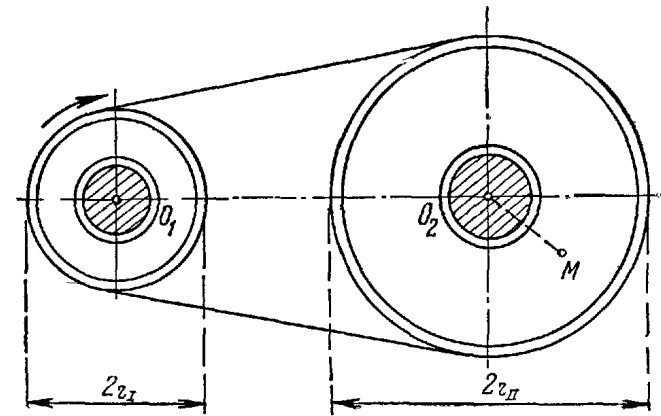


Рис. 238а.

Считая вращение шкивов перед остановкой равнозамедленным, определить число оборотов ведомого шкива до остановки, а также модули скорости, вращательного и центростремительного ускорений его точки M ($O_2M = 20$ см) в конце 5-й сек (рис. 238а).

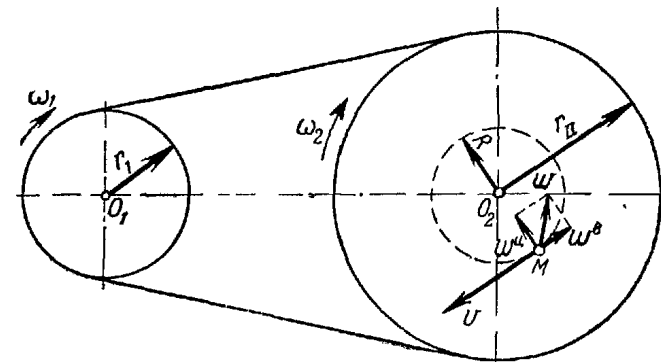


Рис. 238б.

Решение. При решении задач положительным всегда считается направление происходящего вращения (в данном примере направление движения часовой стрелки) (рис. 238 б).

Формула (91.12*), определяющая угловую скорость равнозамедленного вращения шкива I , имеет вид

$$\omega_I = \omega_{I_0} - \epsilon_I t$$

При $t = 10$ сек шкив останавливается, т. е. $\omega_{I_{10}} = 0$.

Начальная угловая скорость шкива в сек^{-1} определяется по формуле

$$\omega_{I_0} = \frac{\pi n_{I_0}}{30} = \frac{\pi \cdot 60}{30} = 2\pi \text{ сек}^{-1}.$$

Подставляя эти значения в формулу, имеем

$$0 = 2\pi - \epsilon_I \cdot 10; \quad \epsilon_I = 0,2\pi \text{ сек}^{-2}.$$

Поэтому

$$\omega_I = 2\pi - 0,2\pi t.$$

Определяем характеристики вращения шкива II . Угловые скорости шкивов передачи обратно пропорциональны их радиусам. По условию (95.1) получаем формулу, определяющую угловую скорость ведомого шкива II :

$$\frac{\omega_{II}}{\omega_I} = \frac{r_I}{r_{II}}; \quad \omega_{II} = \frac{r_I}{r_{II}} \omega_I = \frac{25}{50} (2\pi - 0,2\pi t).$$

$$\omega_{II} = \pi - 0,1\pi t.$$

Отсюда находим уравнение вращения шкива II и его угловое ускорение

$$\frac{d\varphi_{II}}{dt} = \omega_{II} = \pi - 0,1\pi t,$$

$$\int_0^{\varphi_{II}} d\varphi_{II} = \int_0^t (\pi - 0,1\pi t) dt; \quad \varphi_{II} = \pi t - 0,05\pi t^2,$$

$$\epsilon_{II} = \left| \frac{d\omega_{II}}{dt} \right| = \left| -0,1\pi \right| = 0,1\pi \text{ сек}^{-2}.$$

Определяем требуемые условием величины. Угол поворота шкива II в момент остановки при $t = 10$ сек

$$\varphi_{II_{10}} = \pi \cdot 10 - 0,05\pi \cdot 10^2 = 5\pi;$$

соответствующее число оборотов за 10 сек

$$N_{II} = \frac{\varphi_{II_{10}}}{2\pi} = \frac{5\pi}{2\pi} = 2,5 \text{ оборотов}$$

Определив модули угловой скорости, вращательной скорости цен-

тростремительного и вращательного ускорений точки M при $t = 5$ сек (рис. 238б) находим по формулам (92.1), (92.2) и (92.3):

$$\omega_{II_5} = \pi - 0,1\pi \cdot 5 = 0,5\pi \text{ сек}^{-1},$$

$$v_5 = R\omega_{II_5} = 20 \cdot 0,5\pi = 10\pi = 31,4 \text{ см/сек},$$

$$\omega_5^u = R\omega_{II_5}^2 = 20 (0,5\pi)^2 = 5\pi^2 = 49,3 \text{ см/сек}^2,$$

$$\omega^b = R\epsilon_{II} = 20 \cdot 0,1\pi = 2\pi = 6,3 \text{ см/сек}^2.$$

Модуль вращательного ускорения при любом значении t постоянен. Направление ω^b при замедленном вращении противоположно направлению v .

Пример 61. Редуктор скоростей, изображенный на рис. 239, а, б, обеспечивает вращение валов I и II , имеющих общую геометрическую

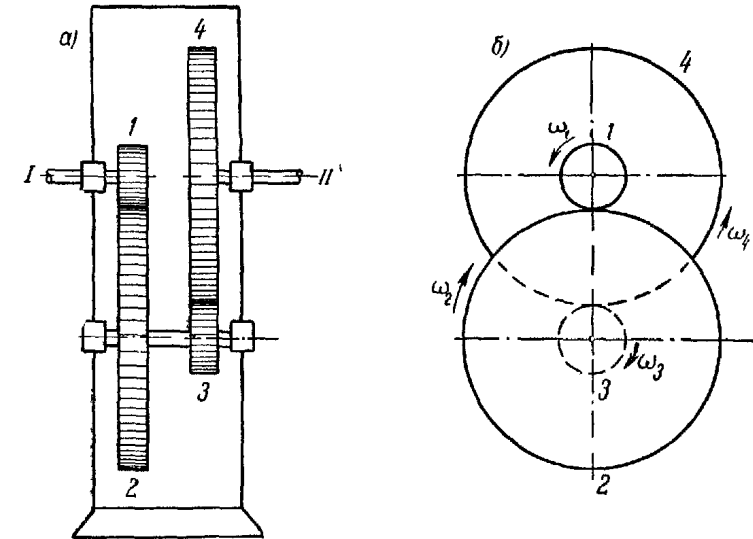


Рис. 239.

ось, с различными угловыми скоростями. Определить угловую скорость вала II , соответствующую угловой скорости вала I $n_I = 800$ об/мин, если числа зубьев шестерен соответственно равны: $z_1 = 12$, $z_2 = 60$, $z_3 = 20$, $z_4 = 80$.

Решение. Передаточное число редуктора равно отношению угловой скорости ведущего вала к угловой скорости ведомого, т. е.

$$\frac{\omega_I}{\omega_{II}} = i.$$

При этом угловые скорости ведущего и ведомого валов равны угловым скоростям жестко соединенных с ними шестерен, т. е.

$$\omega_I = \omega_1, \quad \omega_{II} = \omega_4.$$

Для получения зависимости между угловыми скоростями шестерен 1 и 4 следует определить передаточное число передачи, состоящей из двух пар колес (рис. 239, б):

$$i = i_{1-2} \cdot i_{3-4} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} = \frac{60}{12} \cdot \frac{80}{20} = 20.$$

Пользуясь угловыми скоростями, выраженными в об/мин, будем иметь:

$$\frac{n_I}{n_{II}} = i,$$

откуда

$$n_{II} = \frac{n_I}{i} = \frac{800}{20} = 40 \text{ об/мин.}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите основные виды движений твердого тела.
2. Какое движение твердого тела называется поступательным и какими свойствами оно обладает?
3. Какое движение твердого тела называется вращением вокруг неподвижной оси и как оно осуществляется?
4. По каким формулам определяются модули угловой скорости и углового ускорения вращающегося твердого тела?
5. Как направлены векторы угловой скорости и углового ускорения при вращении тела вокруг неподвижной оси?
6. Выведите формулы модулей скорости и ускорения точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
7. При каких условиях ускорение точки вращающегося тела составляет с отрезком, соединяющим точку с центром описываемой ею окружности, углы 0° , 45° , 90° ?
8. Ускорения каких точек вращающегося тела:
 - а) равны по модулю,
 - б) совпадают по направлению,
 - в) равны по модулю и совпадают по направлению?
9. Каковы векторные выражения вращательной скорости, вращательного и центростремительного ускорений?
10. Выведите формулы Эйлера для проекций вращательной скорости точки на координатные оси.
11. Что представляет собой передаточное число передачи и как определяется передаточное число сложной передачи?

ГЛАВА XV

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 97. Свойства плоского движения твердого тела.

Движение плоской фигуры в ее плоскости

Плоским или плоско-параллельным движением твердого тела называется такое движение, при котором каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости.

Плоская фигура, образованная сечением тела этой неподвижной плоскостью Q , во все время движения остается в этой плоскости (рис. 240).

Рассмотрим движение точек тела, расположенных на одном перпендикуляре к неподвижной плоскости Q . Точка M_1 движется в плоскости Q_1 , а точка M_2 — в плоскости Q_2 ; обе плоскости параллельны неподвижной плоскости Q .

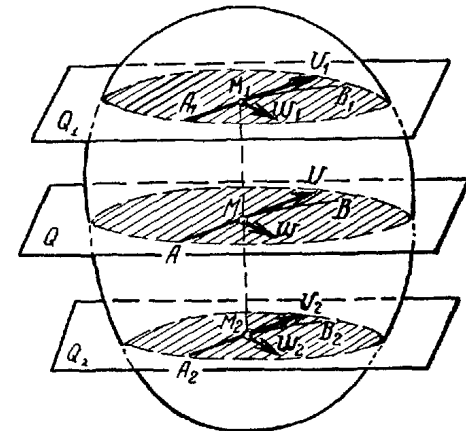


Рис. 240.

При движении тела отрезок M_1M_2 остается перпендикулярным к плоскости Q , т. е. остается параллельным своему начальному положению. Это значит, что все точки этого перпендикуляра аналогично точкам тела, движущегося поступательно, описывают тождественные и параллельные между собой траектории и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения, т. е. траектории

A_1B_1 , A_2B_2 , AB точек тела M_1 , M_2 , M тождественны и параллельны, их скорости равны $v_1 = v_2 = v$ и ускорения также равны $w_1 = w_2 = w$.

Таким образом, движение каждой точки плоской фигуры в неподвижной плоскости Q определяет собой движение всех точек твердого тела, расположенных на перпендикуляре к плоскости Q , восстановленном в этой точке. Это позволяет свести изучение плоского движения твердого тела к изучению движения плоской фигуры в ее плоскости.

Так как положение плоской фигуры на плоскости вполне определяется положением двух ее точек или положением отрезка, соединяющего две точки этой фигуры (рис. 241), то движение плоской

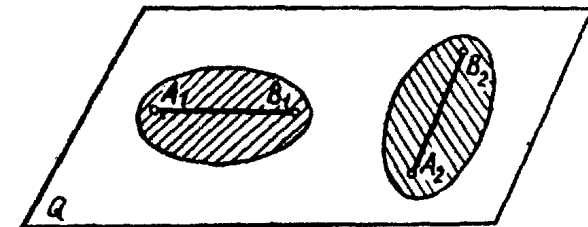


Рис. 241.

фигуры в ее плоскости можно изучать как движение прямолинейного отрезка в этой плоскости.

Будем считать, что движение плоской фигуры происходит в плоскости рисунка и, следовательно, рисунок является натуральным изображением фигуры.

§ 98. Разложение движения плоской фигуры на поступательное движение вместе с полюсом и вращение вокруг полюса. Уравнения движения плоской фигуры

Предположим, что плоская фигура переместилась на плоскости из положения *I* в положение *II* (рис. 242). Отметим два положения отрезка *AB*, принадлежащего фигуре.

Покажем, что перемещение фигуры можно осуществить совокупностью двух перемещений: поступательного перемещения и поворота.

Первый вариант. Переместим фигуру поступательно, из положения *AB* в положение *A₁B'*, т. е. так, чтобы точка *A* переместилась в новое положение *A₁*, а точка *B* описала траекторию, тождественную траектории точки *A*. Затем повернем фигуру вокруг точки *A₁* на угол φ_1 так, чтобы точка *B'* заняла тоже свое положение *B₁*.

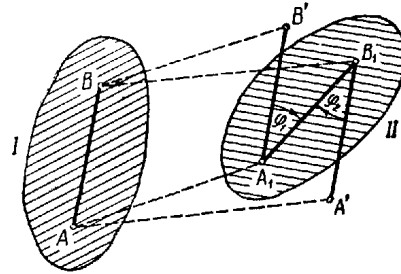


Рис. 242.

Второй вариант. Переместим фигуру поступательно из положения *AB* в положение *A'B₁*, а затем повернем ее вокруг точки *B₁* на угол φ_2 так, чтобы точка *A'* совпала с точкой *A₁*.

Вариантов перемещений может быть столько, сколько точек плоской фигуры, т. е. бесчисленное множество.

Как видно, поступательное перемещение плоской фигуры различно в различных вариантах, а величина угла поворота и направление поворота одинаковы, т. е.

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (98.1)$$

Из этого следует, что *всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в ее плоскости можно рассматривать как совокупность двух перемещений: поступательного перемещения плоской фигуры вместе с произвольной точкой, называемой полюсом, и поворота вокруг полюса.*

При этом поступательное перемещение зависит от выбора полюса, а величина угла поворота и направление поворота от выбора полюса не зависят.

Из вышеизложенного следует, что действительное движение плоской фигуры в ее плоскости в каждый момент времени можно рассматривать как совокупность поступательного движения и вращения.

Поступательная часть движения фигуры зависит от выбора полюса и определяется его движением.

Приняв за полюс некоторую точку *O* и обозначив x_0, y_0 ее координаты в неподвижной системе xOy (рис. 243), можно определить движение полюса *O*, а следовательно, и поступательное движение всей фигуры уравнениями $x_0 = f_1(t)$ и $y_0 = f_2(t)$.

Для получения угла, характеризующего вращательную часть движения плоской фигуры, проведем через полюс *O* две полупрямые *Oa* и *Ob*, из которых *Oa* не принадлежит плоской фигуре и движется поступательно вместе с полюсом *O*, а *Ob* принадлежит этой фигуре и вместе с ней вращается вокруг полюса *O*.

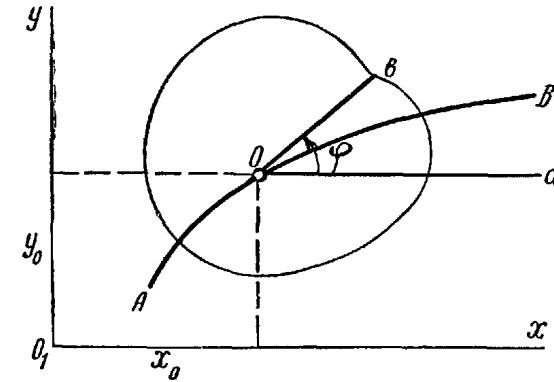


Рис. 243.

Обозначив $\angle aOb = \varphi$, можно определить вращательное движение фигуры уравнением вращения $\varphi = f_3(t)$. Таким образом, движение плоской фигуры в ее плоскости, а следовательно, и движение всего тела определяется тремя уравнениями, называемыми *уравнениями плоского движения твердого тела*:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= f_1(t), \\ y_0 &= f_2(t), \\ \varphi &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (98.2)$$

Покажем, что вид уравнения $\varphi = f_3(t)$ не зависит от выбора полюса.

Рассмотрим плоскую фигуру, движущуюся в плоскости чертежа (рис. 244). Возьмем за полюсы точки *O₁* и *O₂* этой фигуры, описывающие при ее движении траектории *A₁B₁* и *A₂B₂* и укажем соответствующие им углы поворота плоской фигуры φ_1 и φ_2 . Для этого проведем в точках *O₁* и *O₂* две параллельные между собой полупрямые *O₁a₁* и *O₂a₂*, которые предположим движущимися поступательно вместе с полюсами, т. е. остающимися параллельными между собой во все время движения.

Проведем также на плоской фигуре две параллельные между собою полупрямые *O₁b₁* и *O₂b₂*, которые, очевидно, в любом положении этой фигуры останутся параллельными. Тогда угол φ_1 между полупрямыми *O₁a₁* и *O₁b₁* и угол φ_2 между полупрямыми *O₂a₂* и *O₂b₂* во все время движения будут равны между собой, т. е.

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

или

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi = f_3(t).$$

Это равенство показывает, что вид уравнения, определяющего вращательную часть движения плоской фигуры, не зависит от выбора полюса.

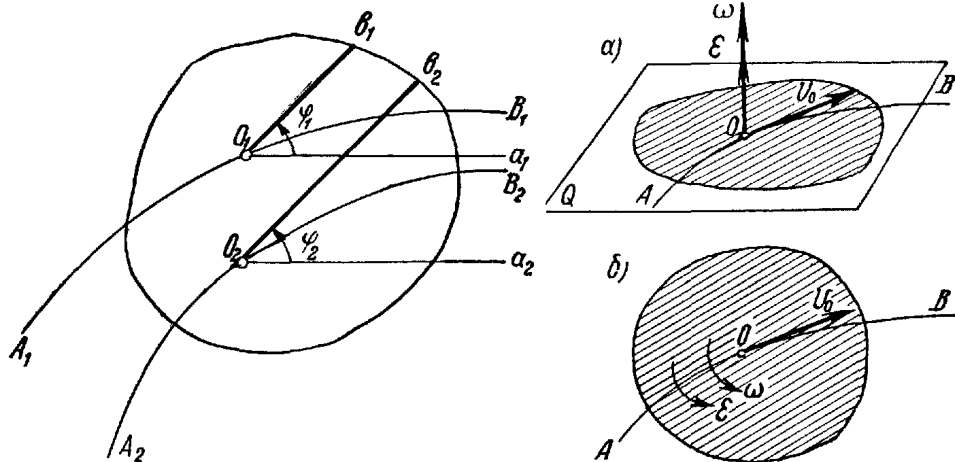


Рис. 244.

Обозначая алгебраические величины угловых скоростей и угловых ускорений плоской фигуры в ее вращении вокруг полюсов O_1 и O_2 соответственно $\tilde{\omega}_1, \tilde{\varepsilon}_1$ и $\tilde{\omega}_2, \tilde{\varepsilon}_2$, имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt} = \tilde{\omega}_2, \\ \tilde{\varepsilon}_1 &= \frac{d\tilde{\omega}_1}{dt} = \frac{d\tilde{\omega}_2}{dt} = \tilde{\varepsilon}_2. \end{aligned}$$

Эти равенства показывают, что угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры в ее вращении вокруг произвольно выбранного полюса также не зависят от выбора полюса. Следовательно, угловая скорость $\tilde{\omega}$ и угловое ускорение $\tilde{\varepsilon}$ являются общими для всех полюсов и называются *угловой скоростью и угловым ускорением плоской фигуры*. Они определяются по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\omega} &= \frac{d\varphi}{dt}, \\ \tilde{\varepsilon} &= \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \end{aligned} \right\} (98.3)$$

Векторы ω и ε , согласно § 91, направлены по оси, проходящей через полюс, перпендикулярно плоскости фигуры.

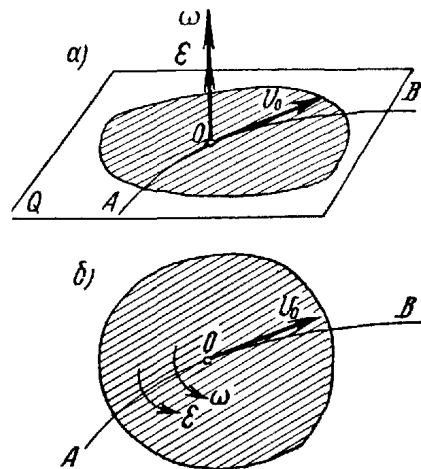


Рис. 245.

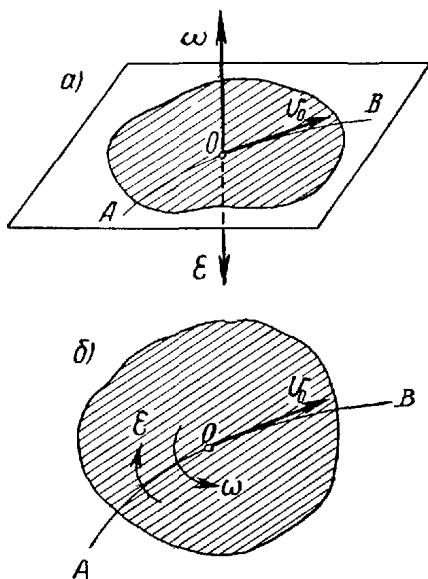


Рис. 246.

Если направления ω и ε совпадают, то вращение плоской фигуры происходит ускоренно (рис. 245, а), а если они противоположны, то замедленно (рис. 246, а).

Так как векторы ω и ε перпендикулярны к плоскости чертежа, то направления угловой скорости и углового ускорения плоской фигуры условимся обозначать так, как показано на рис. 245, б и 246, б, используя эти обозначения для указания направления вращения плоской фигуры (ω) и направления ε .

§ 99. Теорема о скоростях точек плоской фигуры и ее следствия

Зависимость между скоростями точек плоской фигуры устанавливается по следующей теореме:

Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и вращательной скорости этой точки вокруг полюса.

Точку O , скорость которой равна v_O , примем за полюс. Определим скорость любой другой точки плоской фигуры, например, точки A (рис. 247). Для этого проведем из неподвижной точки плоскости O_1 в точки O и A радиусы-векторы ρ_O и ρ_A . Проведем также радиус-вектор r_{OA} из полюса O в точку A .

Так как этот радиус-вектор соединяет две точки плоской фигуры, то за все время движения он вращается вокруг полюса с угловой скоростью плоской фигуры $\tilde{\omega}$, не изменяясь по модулю.

За все время движения между радиусами-векторами сохраняется зависимость

$$\rho_A = \rho_O + r_{OA},$$

где

$$r_{OA} = \text{const.}$$

Определим отсюда скорость точки A :

$$v_A = \frac{d\rho_A}{dt} = \frac{d\rho_O}{dt} + \frac{dr_{OA}}{dt},$$

где $\frac{d\rho_O}{dt} = v_O$ — скорость полюса O .

Так как при движении плоской фигуры модуль радиуса-вектора r_{OA} остается неизменным, а направление его при повороте фигуры изменяется, то производная $\frac{dr_{OA}}{dt}$ представляет собой вращательную скорость точки A вокруг полюса O , которую обозначим v_{OA} :

$$\frac{dr_{OA}}{dt} = v_{OA}.$$

Согласно § 94, вращательную скорость v_{OA} можно представить в виде векторного произведения вектора угловой скорости плоской

фигуры ω на радиус-вектор \mathbf{r}_{OA} :

$$\mathbf{v}_{OA} = \omega \times \mathbf{r}_{OA}.$$

Вращательная скорость \mathbf{v}_{OA} направлена перпендикулярно отрезку OA , в сторону вращения фигуры, и имеет модуль

$$v_{OA} = OA \cdot \omega.$$

После подстановки получаем

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{OA} \quad (99.1)$$

или

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \omega \times \mathbf{r}_{OA}. \quad (99.2)$$

Скорость точки A изображается диагональю параллелограмма, построенного при точке A на скорости полюса O , перенесенной в точку A , и вращательной скорости точки A вокруг полюса O (рис. 247).

Следствие 1. Проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны.

Положим, что в данный момент времени известна скорость \mathbf{v}_A точки A плоской фигуры, направление ее вращения и модуль угловой скорости фигуры ω (рис. 248). Приняв точку A за полюс, оп-

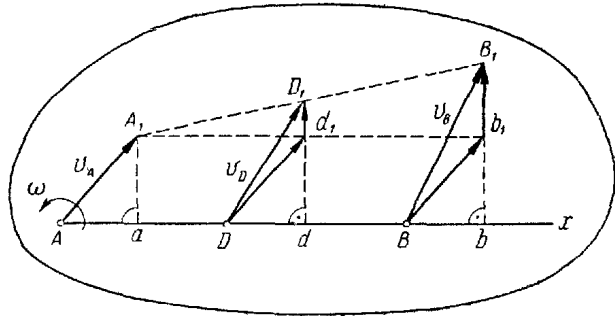


Рис. 248.

ределим скорости точек B и D плоской фигуры, лежащих на одной прямой с точкой A :

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AB},$$

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AD},$$

причем вращательные скорости этих точек вокруг полюса A : $\mathbf{v}_{AB} = b_1 \mathbf{B}_1$ и $\mathbf{v}_{AD} = d_1 \mathbf{D}_1$ направлены перпендикулярно отрезкам AB и AD в сторону вращения фигуры.

Проведем ось x через точки A , D и B и спроектируем скорости этих точек на ось x ; тогда получим

$$v_{Bx} = v_{Ax} + v_{ABx},$$

$$v_{Dx} = v_{Ax} + v_{ADx},$$

но $v_{ABx} = 0$ и $v_{ADx} = 0$, так как векторы \mathbf{v}_{AB} и \mathbf{v}_{AD} перпендикулярны оси x .

Поэтому

$$v_{Bx} = v_{Ax}; \quad Bb = Aa;$$

$$v_{Dx} = v_{Ax}; \quad Dd = Aa$$

или

$$Aa = Dd = Bb,$$

т. е. проекции скоростей всех точек отрезка AB на ось x , направленную вдоль этого отрезка, равны по величине.

Следствие 2. Концы скоростей точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между соответствующими точками отрезка.

Рассматривая рис. 248, устанавливаем, что

$$b_1 B_1 = v_{AB} = AB \cdot \omega; \quad d_1 D_1 = v_{AD} = AD \cdot \omega,$$

откуда

$$\frac{d_1 D_1}{b_1 B_1} = \frac{AD}{AB}.$$

Так как $A_1 d_1 = AD$ и $A_1 b_1 = AB$ как противоположные стороны параллелограммов, то имеем

$$\frac{d_1 D_1}{b_1 B_1} = \frac{A_1 d_1}{A_1 b_1}.$$

Это соотношение показывает, что $A_1 D_1 B_1$ — отрезок прямой. Из подобия треугольников $A_1 d_1 D_1$ и $A_1 b_1 B_1$ имеем

$$\frac{A_1 D_1}{A_1 B_1} = \frac{A_1 d_1}{A_1 b_1} \quad \text{или} \quad \frac{A_1 D_1}{A_1 B_1} = \frac{AD}{AB} \quad \text{и} \quad \frac{A_1 D_1}{D_1 B_1} = \frac{AD}{DB},$$

т. е. расстояния между концами скоростей пропорциональны расстояниям между соответствующими точками.

§ 100. Примеры на применение теоремы о скоростях точек плоской фигуры

При решении примеров с помощью теоремы о скоростях точек плоской фигуры используют следствия этой теоремы. Обычно в таких случаях применяют графический метод, который требует построения схем в масштабе длин, а скоростей — в масштабе скоростей в их истинном направлении.

Пример 62. По заданной скорости одной точки плоской фигуры построить голограф возможных скоростей другой точки этой фигуры.

Решение. Пусть известна скорость точки A , требуется определить возможные скорости точки B плоской фигуры (рис. 249). Про-

ведем через точки A и B ось x и найдем проекцию Aa скорости v_A на эту ось. По первому следствию теоремы о скоростях точек плоской фигуры проекции скоростей точек A и B на эту ось равны. Отложим по оси x от точки B проекцию Bb , равную по величине проекции Aa и совпадающую с ней по направлению.

В точке b восставим перпендикуляр к оси x . Только на этой прямой и может находиться конец скорости v_B точки B . Эта прямая является годографом возможных скоростей точки B .

Пример 63. Зная скорости ползунов A и B , определить скорость шарнира C механизма, изображенного на рис. 250 а, в указанном положении.

Решение. Так как шарнир C соединяет стержни AC и BC механизма, то точка C одновременно принадлежит каждому из этих стержней. Поэтому проекция неизвестной скорости шарнира C на ось стержня AC равна проекции скорости ползуна A на эту ось и имеет такое же направ-

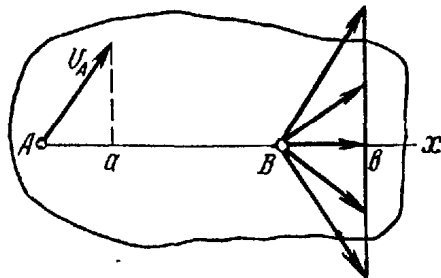


Рис. 249.

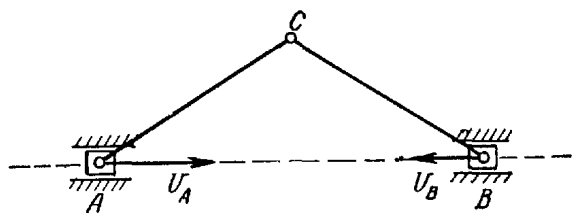


Рис. 250а.

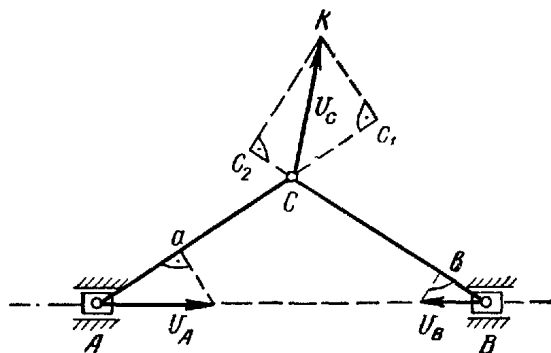


Рис. 250б.

вление, а проекция скорости шарнира C на ось стержня BC равна проекции скорости шарнира B на эту же ось (рис. 250б).

Находим проекцию Aa скорости v_A на ось AC и откладываем по этой оси из точки C отрезок $Cc_1 = Aa$. Аналогично находим проекцию Bb и откладываем отрезок $Cc_2 = Bb$. Затем восставляем в точках c_1 и c_2 перпендикуляры к направлениям этих осей. Точка K пересечения этих перпендикуляров определит собой конец скорости шарнира C , т. е. $v_C = CK$.

Пример 64. Зная модуль и направление скорости v_A одного конца отрезка и прямую, по которой направлена скорость v_B другого конца, определить модуль скорости v_B , а также модуль

и направление скорости середины отрезка C (рис. 251а).

Решение. Находим проекцию Aa заданной скорости v_A на ось, направленную по AB (рис. 251б). Откладываем по этой оси от точки B проекцию $Bb = Aa$ искомой скорости v_B и в точке b восставляем перпендикуляр к AB . Точка B_1 пересечения этого перпендикуляра с прямой, по которой направлена скорость v_B , является концом скорости точки B .

Отрезок BB_1 геометрически равен скорости v_B .

Согласно второму следствию теоремы о скоростях точек плоской фигуры

соединяем концы известных скоростей v_A и v_B и делим отрезок A_1B_1 пополам. Соединяя середину отрезка AB с серединой отрезка A_1B_1 , получаем отрезок CC_1 , геометрически равный скорости v_C середины отрезка C .

Таким образом, для определения скоростей всех точек отрезка необходимо знать модуль и направление скорости одной его точки и прямую, по которой направлена скорость другой точки.

Пример 65. Зная скорости концов неизменяемого отрезка, определить скорость любой точки этого отрезка.

Решение. Соединяя концы заданных скоростей v_A и v_B концов A и B отрезка AB , получаем отрезок A_1B_1 — геометрическое место концов скоростей точек этого отрезка (рис. 252а и б). Находим проекцию скорости какого-либо конца, например A_1 , на направление отрезка AB , т. е. Aa .

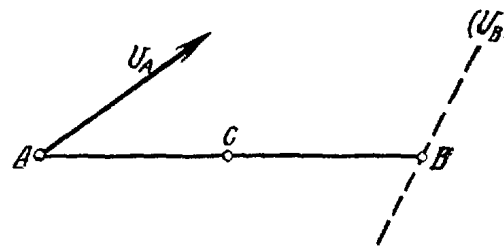


Рис. 251а.

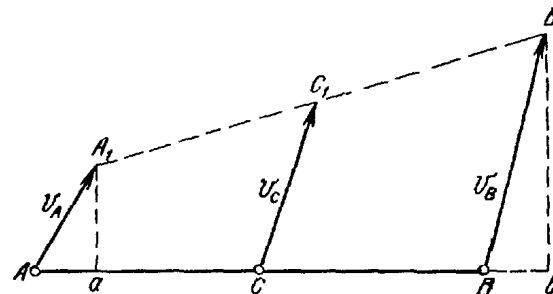


Рис. 251б.

Для графического определения скорости какой-либо точки отрезка, например D , откладываем от точки D вдоль отрезка AB проекцию скорости этой точки $Dd = Aa$.

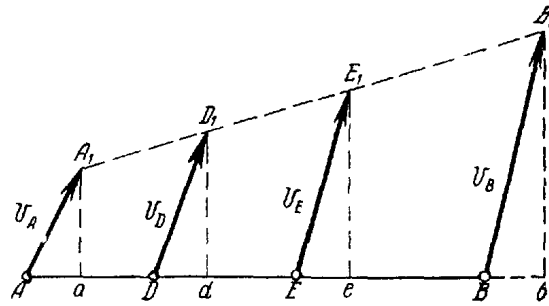


Рис. 252а.

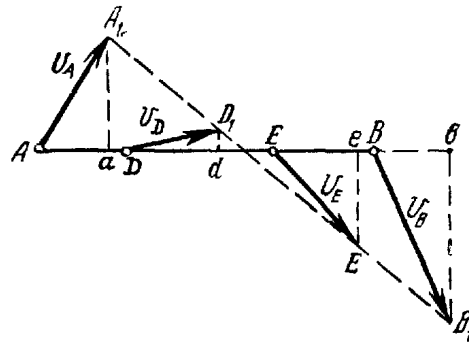


Рис. 252б.

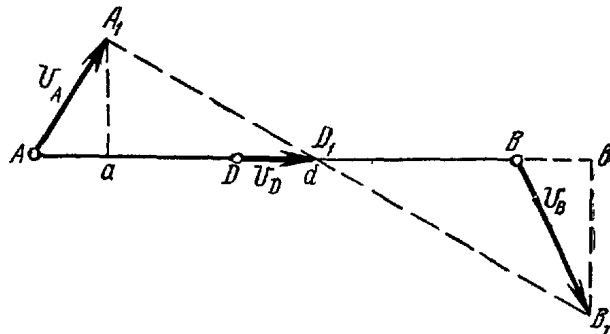


Рис. 253.

В точке d восстанавливаем перпендикуляр к направлению отрезка AB , который продолжаем до пересечения с отрезком A_1B_1 в точке D_1 . Соединяя точки D и D_1 , получаем отрезок DD_1 , геометрически равный искомой скорости точки D , т. е. $\overline{DD_1} = v_D$. Скорость любой

другой точки отрезка, например, точки E , определяем аналогичным построением.

Пример 66. Зная скорости концов отрезка, определить точку этого отрезка, скорость которой в данный момент времени направлена вдоль этого отрезка (рис. 253).

Решение. Соединяя концы заданных скоростей точек A и B отрезка AB , получаем отрезок A_1B_1 — геометрическое место концов скоростей точек этого отрезка.

Конец D_1 скорости искомой точки D , направленной вдоль AB , должен быть в точке d пересечения отрезка A_1B_1 с отрезком AB . Начало скорости, т. е. точку D , определяем из равенства проекций скоростей: $Dd = Aa = Bb$.

§ 101. План скоростей

Зависимость между скоростями точек плоской фигуры (99.1) позволяет определять скорости точек этой фигуры простым и наглядным построением, называемым *планом скоростей*.

Допустим, что нам известны скорости точек A , B , C и D плоской фигуры, изображенной на рис. 254, а. Отложим из произвольной точки O по направлению скоростей точек A , B , C , D отрезки Oa , Ob , Oc , Od , равные скоростям этих точек, и соединим точки a , b , c , d отрезками прямых (рис. 254, б).

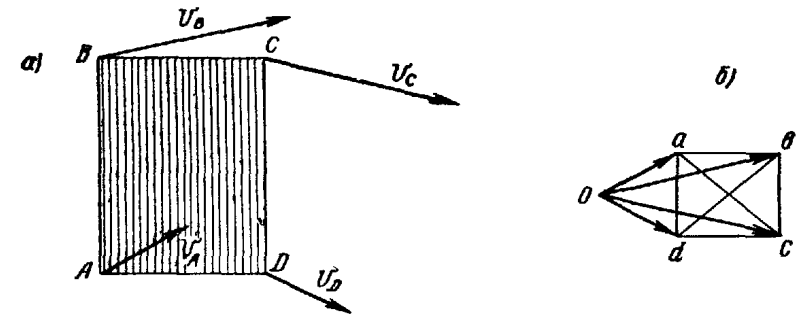


Рис. 254.

Выполненное построение называется *планом скоростей*; отрезки Oa , Ob , Oc , Od называются *лучами*, а точки a , b , c , d — *вершинами плана скоростей*.

Из треугольника aOb имеем

$$\overline{Ob} = \overline{Oa} + \overline{ab}$$

или

$$v_B = v_A + \overline{ab}. \quad (a)$$

По формуле (99.1) имеем

$$v_B = v_A + v_{AB}. \quad (б)$$

Сопоставляя равенства (а) и (б), устанавливаем, что $\overline{ab} = v_{AB}$; аналогично $\overline{bc} = v_{BC}$; $\overline{cd} = v_{CD}$ и т. д.

Следовательно, *каждый из отрезков, соединяющих вершины плана скоростей, геометрически равен вращательной скорости соответствующей точки фигуры вокруг другой точки как вокруг полюса.*

Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} ab &= AB \cdot \omega \text{ и } ab \perp AB, \\ bc &= BC \cdot \omega \text{ и } bc \perp BC, \\ cd &= CD \cdot \omega \text{ и } cd \perp CD \end{aligned}$$

и т. д. Отсюда следует, что многоугольник $abcd$ подобен многоугольнику $ABCD$ и повернут относительно последнего на 90° в сторону вращения движущейся плоской фигуры.

Построение плана скоростей

Для построения плана скоростей точек плоской фигуры необходимо знать модуль и направление скорости одной из точек этой фигуры и прямую, по которой направлена скорость какой-либо другой точки фигуры.

Допустим, что известны модуль и направление скорости точки A треугольной пластинки ABC , движущейся в плоскости чертежа, и прямая, по которой направлена скорость точки B этой пластинки (рис. 255, а). Требуется определить скорости точек B и C путем построения плана скоростей.

Проведем из произвольной точки O отрезок $\overline{Oa} = v_A$ и прямую, параллельную прямой, по которой направлена скорость v_B (рис. 255, б). Известно, что отрезки, соединяющие вершины плана скоростей, перпендикулярны отрезкам, соединяющим соответствующие точки фигуры.

Чтобы определить вершину b плана скоростей, проведем из вершины a прямую, перпендикулярную AB ; точка пересечения ее с прямой, по которой направлена скорость точки B , и будет вершиной b , а отрезок Ob определит скорость точки B , т. е.

$$\overline{Ob} = v_B.$$

Чтобы получить вершину c плана скоростей, следует провести из вершин a и b прямые, перпендикулярные сторонам треугольника AC и BC . Точка пересечения этих прямых будет вершиной c , а отрезок Oc определит скорость точки C .

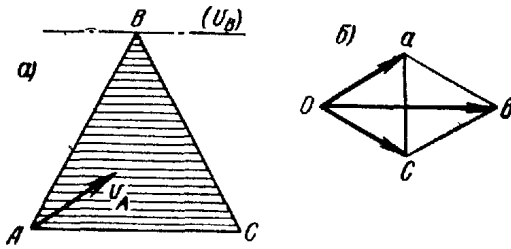


Рис. 255.

Аналогичным построением можно определить скорость любой точки плоской фигуры, соединив ее с двумя точками, скорости которых уже известны.

Рассмотрим, например, построение плана скоростей для точек A , B , C и D механизма, изображенного на рис. 256, а.

Зная модуль и направление скорости v_A точки A и прямую, по которой направлена скорость точки B , строим план скоростей для шатуна AB .

Из произвольной точки O откладываем отрезок Oa , изображающий по модулю и направлению скорость v_A . После этого проводим

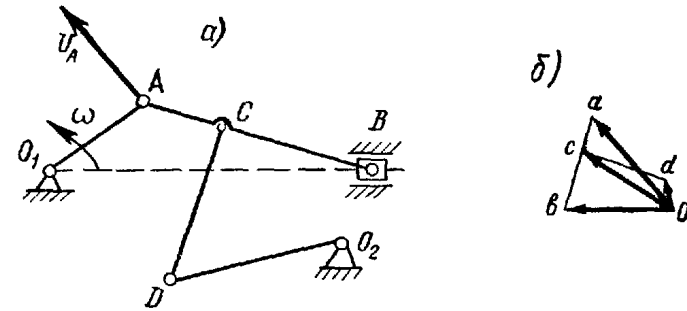


Рис. 256.

из точки O прямую Ob , параллельную O_1B , а из точки a — прямую ab , перпендикулярную AB .

Эти прямые продолжаем до их пересечения в точке b , являющейся вершиной плана скоростей. Отрезок Ob изображает по модулю и направлению скорость v_B .

Для определения модуля и направления скорости точки C шатуна AB делим отрезок ab в отношении $AC:BC$, находим точку c и проводим луч Oc , определяющий собой модуль и направление скорости точки C .

План скоростей для стержня CD строим на основе плана скоростей шатуна AB . Проведем из точки O прямую Od , параллельную прямой, по которой направлена скорость точки D , т. е. прямую, перпендикулярную O_2D , а из точки c прямую cd , перпендикулярную CD . Эти прямые продолжаем до их пересечения в точке d , являющейся вершиной плана скоростей.

Отрезок Od изображает по модулю и направлению скорость v_D . Лучи Oa , Ob , Oc , Od (рис. 256, б) определяют модули и направления скоростей всех заданных точек плоского механизма.

Остановимся на случае, когда заданная скорость точки плоской фигуры параллельна прямой, по которой направлена скорость другой точки этой фигуры. Для построения плана скоростей требуется знать модуль скорости второй точки.

Например, если скорости точек A и B плоской фигуры перпендикулярны отрезку AB (рис. 257, а) и известен только модуль ско-

рости v_A , то определить положение вершины b плана скоростей невозможно, так как на плане скоростей перпендикуляр к AB сливается с прямой, по которой, направлена скорость v_B (рис. 257, б).

Необходимо знать модуль v_B , чтобы, отложив $\overline{Ob} = v_B$, получить точку b плана скоростей.

Определение скоростей остальных точек, например C , производится как и в предыдущих примерах: $ac \perp AC$, $bc \perp BC$.

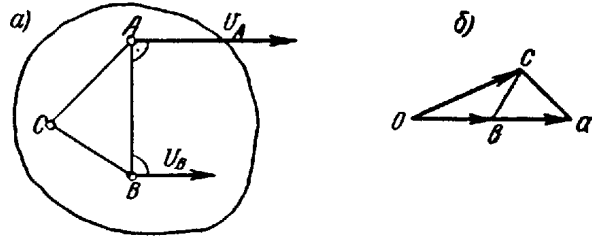


Рис. 257.

Пример 67. Определить путем построения плана скоростей скорости точек механизма, изображенного на рис. 258, а, в положении, когда $\varphi = 135^\circ$, если угловая скорость ведущего кривошипа O_1A равна ω_{O_1A} . Положение неподвижных точек O_1 , O_2 и O_3 определяется расстояниями l_1 , l_2 , l_3 и l_4 .

Решение. Механизм, изображенный на рис. 258, а, состоит из шарнирного четырехзвенника O_1ABO_2 , к шатуну которого в точке C присоединено шарнирно звено CDE , соединяющее шатун AB с балансиром O_3D и шатуном EF . Механизм имеет три звена O_1A , O_2B и O_3D , которые поворачиваются вокруг неподвижных центров O_1 , O_2 и O_3 , три звена AB , CDE и EF , совершающие плоское движение, и ползунок F , движущийся поступательно. Механизм служит для преобразования вращательного движения ведущего кривошипа O_1A в поступательное движение ползунка F . Известны траектории, а следовательно, и прямые, по которым направлены скорости точек A , B , D , движущихся по окружностям, а также точки F , движущейся по оси направляющих.

Изобразим механизм в выбранном масштабе и заданном положении (рис. 258, б). По заданной угловой скорости ведущего кривошипа вычисляем скорость точки A :

$$v_A = \omega_{O_1A} \cdot O_1A.$$

Скорость v_A перпендикулярна отрезку O_1A . Для построения плана скоростей (рис. 258, в) выбираем масштаб скоростей и в этом масштабе откладываем луч $\overline{Oa} = v_A$.

Для определения скорости точки B из точки O плана скоростей проводим прямую, по которой направлена скорость v_B , перпендику-

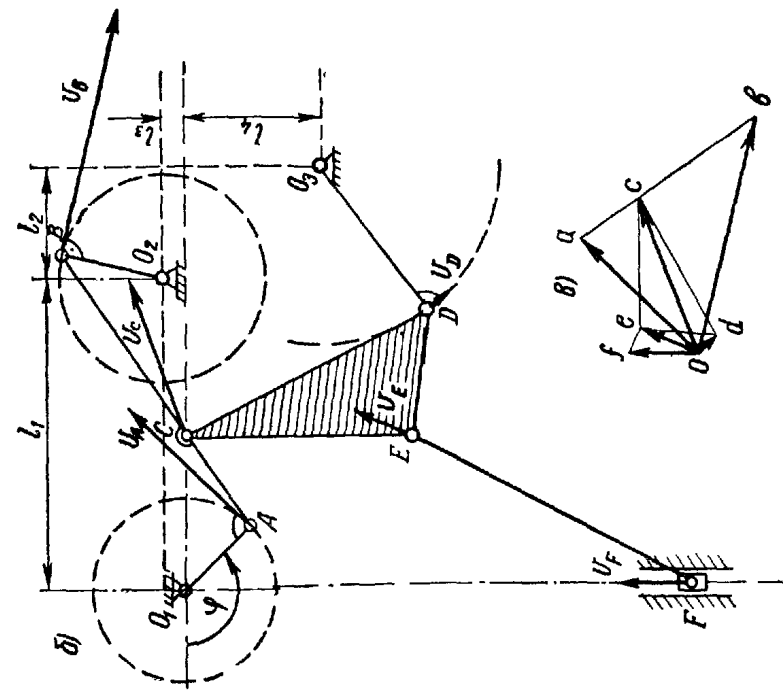
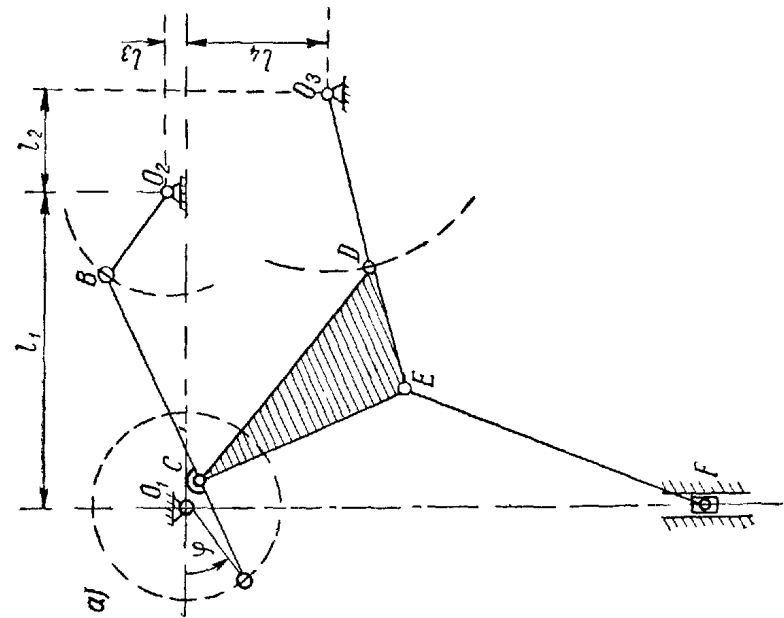


Рис. 258.



лярную O_2B , а из вершины a прямую, перпендикулярную шатуну AB . Получаем луч $\overline{Ob} = v_B$. Для определения скорости точки C делим отрезок ab на части:

$$\frac{ac}{ab} = \frac{AC}{AB}, \quad ac = ab \frac{AC}{AB}.$$

Проведя из точки O в точку c луч, получаем $\overline{Oc} = v_C$.

Для звена CDE известны модуль и направление скорости v_C и прямая, по которой направлена скорость v_D , перпендикулярная O_3D . Проводим из точки O прямую, перпендикулярную O_3D , а из вершины c прямую, перпендикулярную CD . Пересечение этих прямых определяет вершину d и луч $\overline{Od} = v_D$.

Зная скорости v_C и v_D двух точек звена CDE , можно определить скорость точки E , хотя прямая, по которой направлена скорость точки E , не известна. Вершину e плана скоростей определяем как точку пересечения прямых, проведенных из вершин c и d перпендикулярно отрезкам CE и DE . Проведя из точки O в вершину e луч, получаем $\overline{Oe} = v_E$. Для звена EF известны модуль и направление скорости v_E и прямая, по которой направлена скорость v_F .

Для определения скорости точки F из точки O проводим прямую, параллельную траектории точки F , а из вершины e — прямую, перпендикулярную шатуну EF . Пересечение этих прямых определяет вершину f и луч $\overline{Of} = v_F$.

Измеряя в соответствующем масштабе лучи Ob, Oc, Od, Oe и Of , определяем скорости точек B, C, D, E и F , которые изображены на рис. 258, б.

§ 102. Мгновенный центр скоростей

1. Доказательство существования мгновенного центра скоростей

Пользуясь теоремой о скоростях точек плоской фигуры, покажем, что в каждый момент времени существует точка, неизменно связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент равна нулю. Эту точку называют *мгновенным центром скоростей*.

Допустим, что известна скорость некоторой точки O плоской фигуры v_O (рис. 259) и угловая скорость фигуры ω в некоторый момент времени. Примем точку O за полюс. Тогда скорость любой точки фигуры будет равна геометрической сумме скорости полюса v_O и вращательной скорости точки вокруг этого полюса (99.1). Восставим в точке O перпендикуляр к направлению скорости v_O так, чтобы направление поворота скорости v_O к этому перпендикуляру совпадало с направлением вращения фигуры.

Вращательные скорости всех точек этого перпендикуляра вокруг полюса O направлены противоположно скорости полюса.

Найдем такую точку P , вращательная скорость которой v_{OP} равна по модулю скорости полюса v_O , т. е. $v_{OP} = v_O$.

Так как направления этих скоростей противоположны, то имеем

$$v_{OP} = -v_O$$

Скорость точки P :

$$v_P = v_O + v_{OP} = 0.$$

Следовательно, точка P в рассматриваемый момент времени является мгновенным центром скоростей.

Определим положение точки P . Вычислив вращательную скорость точки P вокруг полюса O и приравняв ее скорости полюса, получим

$$v_{OP} = OP \cdot \omega = v_O,$$

откуда

$$OP = \frac{v_O}{\omega}.$$

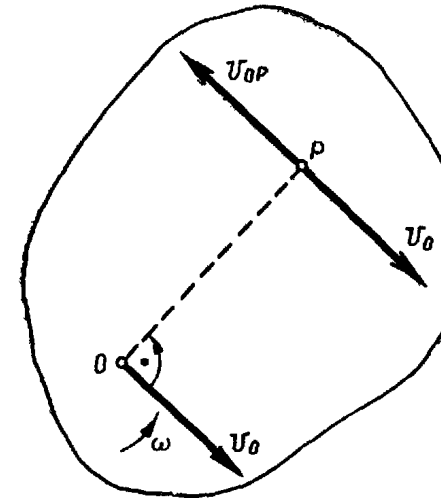


Рис. 259.

Следовательно, мгновенный центр скоростей плоской фигуры находится на перпендикуляре к направлению скорости полюса, на расстоянии от полюса, равном $\frac{v_O}{\omega}$.

2. Определение скоростей точек плоской фигуры при помощи мгновенного центра скоростей

Определим скорости точек A, B и K плоской фигуры (рис. 260), приняв за полюс мгновенный центр скоростей P . По формуле (99.1) получим:

$$v_A = v_P + v_{PA},$$

$$v_B = v_P + v_{PB},$$

$$v_K = v_P + v_{PK}.$$

Но скорость точки P в данный момент равна нулю, т. е. $v_P = 0$. Тогда скорости точек определяются по формулам:

$$v_A = v_{PA},$$

$$v_B = v_{PB},$$

$$v_K = v_{PK},$$

т. е. скорость любой точки плоской фигуры в данный момент времени представляет собой вращательную скорость этой точки вокруг

мгновенного центра скоростей; поэтому

$$\begin{aligned} v_A &= PA \cdot \omega, & v_A &\perp PA; \\ v_B &= PB \cdot \omega, & v_B &\perp PB; \\ v_K &= PK \cdot \omega, & v_K &\perp PK. \end{aligned}$$

т. е. скорость любой точки плоской фигуры в каждый момент времени имеет модуль, равный произведению угловой скорости фигуры на длину отрезка, соединяющего точку с мгновенным центром скоростей, и направлена перпендикулярно этому отрезку в сторону вращения фигуры.

Найдем зависимость между скоростями точек плоской фигуры в рассматриваемый момент времени:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{PB}{PA}, \quad \frac{v_K}{v_A} = \frac{PK}{PA} \text{ и т. д.},$$

т. е. модули скоростей точек плоской фигуры в каждый момент времени пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра скоростей.

Чтобы определить скорости точек плоской фигуры при помощи мгновенного центра скоростей, необходимо знать положение мгновенного центра скоростей и угловую скорость фигуры.

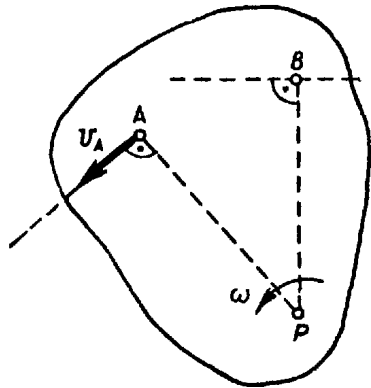


Рис. 261.

точки от мгновенного центра скорости плоской фигуры

$$\omega = \frac{v_A}{PA}.$$

Модуль скорости точки B можно определить из пропорциональности скоростей точек их расстояниям от мгновенного центра

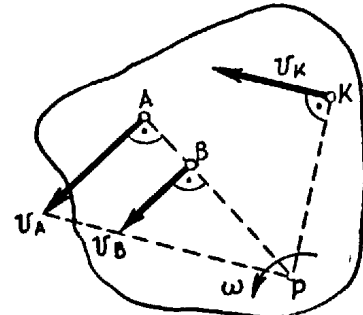


Рис. 260.

3. Различные случаи определения положения мгновенного центра скоростей

1. Допустим, что известны прямые, по которым направлены скорости двух точек плоской фигуры A и B (рис. 261). Тогда мгновенный центр скоростей фигуры определится как точка пересечения перпендикуляров к этим прямым, восставленных в точках A и B . Зная модуль скорости точки A и определив расстояние этой скорости PA , находим угловую скорость

скоростей:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{PB}{PA},$$

откуда

$$v_B = v_A \frac{PB}{PA}$$

или при помощи угловой скорости фигуры

$$v_B = PB \cdot \omega.$$

Скорость любой другой точки плоской фигуры определяется аналогично.

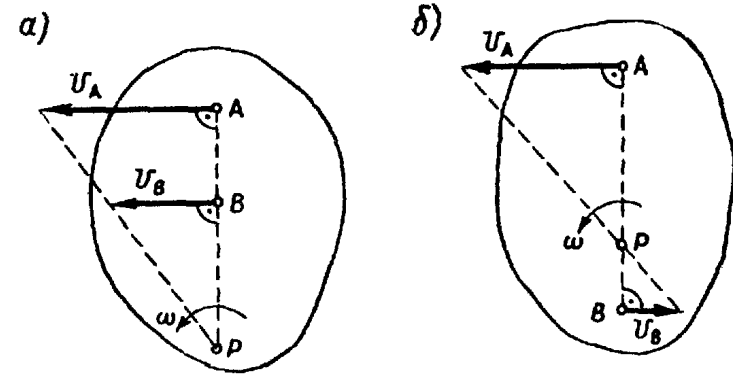


Рис. 262а, б.

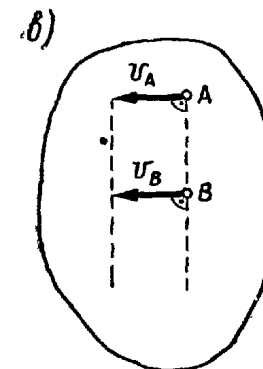


Рис. 262в.

2. Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны между собой и перпендикулярны AB , то для определения положения мгновенного центра скоростей должны быть известны модули скоростей обеих точек A и B (рис. 262, а, б).

Известно, что модули скоростей точек фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей, т. е.

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{PB}{PA}.$$

Следовательно, концы скоростей точек A и B лежат на прямой, проходящей через мгновенный центр скоростей. Пересечение этой прямой с прямой AB определяет мгновенный центр скоростей фигуры.

Если скорости точек A и B плоской фигуры равны, параллельны между собой и перпендикулярны AB (рис. 262в), то

мгновенный центр скоростей находится в бесконечности ($AP = \infty$), а угловая скорость вращения фигуры

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{\infty} = 0.$$

3. Если известно, что скорости двух точек A и B плоской фигуры параллельны и они не перпендикулярны AB (рис. 263), то мгновенный центр скоростей находится в бесконечности ($AP = \infty$). Очевидно, что и в этом случае

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{\infty} = 0.$$

Расстояния от всех точек плоской фигуры до мгновенного центра скоростей в этом случае равны между собой, т. е.

$$AP = BP = \dots = \infty.$$

Поэтому скорости точек плоской фигуры в рассматриваемый момент геометрически равны:

$$v_A = v_B = v_C = \dots$$

Следует учесть то, что при поступательном движении плоской фигуры скорости всех ее точек в каждый момент также геометрически равны и мгновенный центр скоростей этой фигуры находится в бесконечности.

Если условие $v_A = v_B$ остается справедливым в течение некоторого промежутка времени, а не только в отдельный момент, то движение плоской фигуры является поступательным.

Если же $v_A = v_B$ только в некоторый момент времени, то утверждать, что плоская фигура движется поступательно, нельзя (рис. 268г).

4. На практике часто происходит движение плоской фигуры, при котором она катится без скольжения по некоторой неподвижной кривой (рис. 264). В этом случае мгновенный центр скоростей плоской фигуры находится в точке ее соприкосновения с кривой. Действительно, при отсутствии скольжения скорость точки соприкосновения плоской фигуры по отношению к неподвижной кривой равна нулю, т. е. эта точка в данный момент является мгновенным центром скоростей.

Рис. 264.

§ 103. Примеры на применение мгновенного центра скоростей

Пример 68. Колесо радиусом R катится без скольжения по прямому рельсу. Скорость центра колеса в рассматриваемый момент времени $v_C = 2$ м/сек.

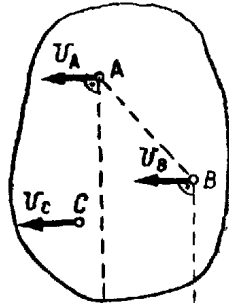


Рис. 263.

Определить скорости точек A , B , D и E колеса, расположенных на концах взаимно перпендикулярных диаметров (рис. 265, а).

Решение. 1-й вариант. Примем за полюс центр колеса C (рис. 265, б). Тогда скорость любой точки колеса будет равна геометрической сумме скорости полюса и скорости вращения этой точки вокруг полюса (99.1). Так как колесо катится без скольжения, то скорость точки A касания колеса с рельсом равна нулю $v_A = 0$.

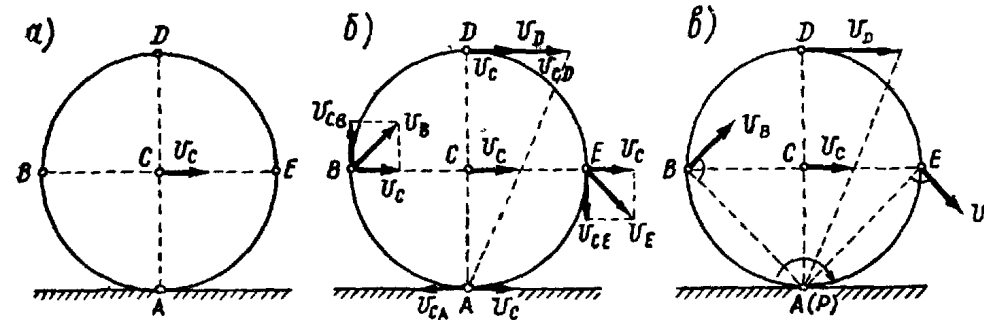


Рис. 265.

Точка A является мгновенным центром скоростей. В этой точке скорость вращения вокруг полюса v_{CA} и скорость полюса v_C равны по модулю и противоположны по направлению, т. е.

$$v_{CA} = -v_C.$$

Расстояния от точек A , B , D , E до полюса C равны. Следовательно, и вращательные скорости точек вокруг полюса тоже равны, т. е.

$$v_{CB} = v_{CD} = v_{CE} = v_{CA} = v_C.$$

Откладывая в каждой точке скорость полюса v_C и вращательную скорость, перпендикулярную соответствующему радиусу колеса, находим:

$$v_B = \sqrt{v_C^2 + v_{CB}^2} = \sqrt{v_C^2 + v_C^2} = v_C \sqrt{2} = 2 \sqrt{2} = 2,82 \text{ м/сек};$$

$$v_D = v_C + v_{CD} = v_C + v_C = 2v_C = 4 \text{ м/сек};$$

$$v_E = \sqrt{v_C^2 + v_{CE}^2} = \sqrt{v_C^2 + v_C^2} = v_C \sqrt{2} = 2 \sqrt{2} = 2,82 \text{ м/сек}.$$

2-й вариант. Примем мгновенный центр скоростей колеса за полюс. Тогда скорости всех точек колеса определяются как вращательные скорости вокруг мгновенного центра скоростей. Модули скоростей всех точек найдутся по пропорциональности скоростей их расстояниям от мгновенного центра скоростей:

$$v_D = v_C \frac{PD}{PC} = v_C \cdot 2 = 4 \text{ м/сек}.$$

Так как $PB = PE = R\sqrt{2}$, то

$$v_B = v_C \frac{PB}{PC} = v_C \sqrt{2} = 2,82 \text{ м/сек};$$

$$v_E = v_C \frac{PE}{PC} = v_C \sqrt{2} = 2,82 \text{ м/сек}.$$

Найденные скорости точек направлены перпендикулярно соответствующим отрезкам в сторону вращения колеса (рис. 265, в).

Аналогичное распределение скоростей имеет место при качении колеса без скольжения по любой поверхности.

Пример 69. Кривошип OC вращается вокруг оси O с угловой скоростью $\omega_{OC} = 5 \text{ сек}^{-1}$ и приводит в движение подвижную шестеренку радиусом $r_2 = 8 \text{ см}$, насаженную свободно на его конце C . Подвижная шестеренка катится без скольжения внутри неподвижной

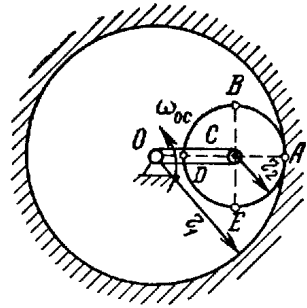


Рис. 266а.

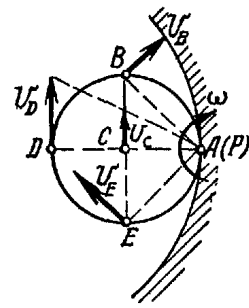


Рис. 266б.

шестеренки радиусом $r_1 = 24 \text{ см}$. Определить модули и направления скоростей точек A , B , D и E подвижной шестеренки, если $BE \perp AD$, а также ее угловую скорость (рис. 266а).

Решение. Вторая шестеренка катится по внутренней поверхности первой неподвижной шестеренки без скольжения и мгновенный центр скоростей второй шестеренки находится в точке их соприкосновения. Поэтому $v_A = 0$ (рис. 266б).

Зная угловую скорость кривошипа OC , определим скорость центра второй шестеренки:

$$v_C = OC \cdot \omega_{OC} = (r_1 - r_2) \omega_{OC} = 16 \cdot 5 = 80 \text{ см/сек}.$$

Соединяя точки B и E с мгновенным центром скоростей, находим

$$PB = PE = r_2 \sqrt{2}.$$

Зная скорость центра второй шестеренки $v_C = 80 \text{ см/сек}$ и расстояния от точек B , D и E до мгновенного центра скоростей, опреде-

ляем их скорости:

$$v_B = v_C \frac{PB}{PC} = v_C \sqrt{2} = 113,12 \text{ см/сек};$$

$$v_D = v_C \frac{PD}{PC} = v_C \cdot 2 = 160 \text{ см/сек};$$

$$v_E = v_C \frac{PE}{PC} = v_C \sqrt{2} = 113,12 \text{ см/сек}.$$

Найденные скорости точек направлены перпендикулярно соответствующим отрезкам PB , PD , PE в сторону вращения шестеренки вокруг ее мгновенного центра.

Скорость любой точки фигуры равна произведению угловой скорости фигуры на ее расстояние от мгновенного центра скоростей, например,

$$v_C = PC \cdot \omega.$$

Отсюда определяем угловую скорость второй шестеренки:

$$\omega = \frac{v_C}{PC} = \frac{v_C}{r_2} = \frac{80}{8} = 10 \text{ сек}^{-1}.$$

Пример 70. Две параллельные рейки движутся в противоположные стороны с постоянными скоростями v_1 и v_2 . Между рейками зажат диск радиусом R , катящийся по рейкам без скольжения (рис. 267, а). Найти угловую скорость диска и скорость его центра.

Решение. Так как диск катится по рейкам без скольжения, то скорости точек диска M_1 и M_2 равны скоростям движения реек.

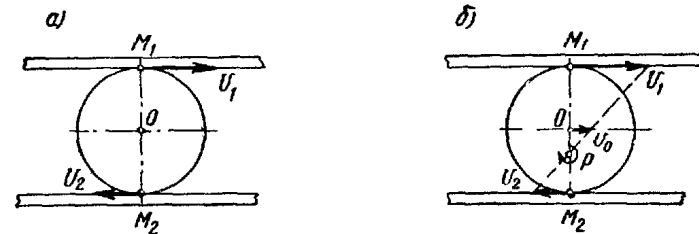


Рис. 267.

Для определения положения мгновенного центра скоростей диска соединяем концы скоростей точек M_1 и M_2 (рис. 267, б). Точка пересечения этого отрезка с диаметром диска M_1M_2 является мгновенным центром скоростей диска в рассматриваемый момент.

Определим расстояние от мгновенного центра скоростей P до центра диска O .

Полагая $OP = x$, имеем:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{PM_1}{PM_2} = \frac{R+x}{R-x}; \quad v_1(R-x) = v_2(R+x);$$

$$x(v_1 + v_2) = R(v_1 - v_2),$$

откуда

$$x = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} R.$$

Вычисляем угловую скорость диска:

$$\omega = \frac{v_1}{PM_1} = \frac{v_1}{R+x}; \quad R+x = R \left(1 + \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right) = 2R \frac{v_1}{v_1 + v_2}.$$

Подставляя значение $R+x$, получаем

$$\omega = \frac{v_1 + v_2}{2R}.$$

Скорость центра диска определяем по формуле

$$v_O = OP \cdot \omega = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} R \frac{v_1 + v_2}{2R} = \frac{v_1 - v_2}{2}.$$

При $v_1 = v_2$ центр диска остается неподвижным и диск вращается вокруг него.

Пример 71. Кривошип OA кривошипного механизма вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} . Принимая $OA = r$ и $AB = l$,

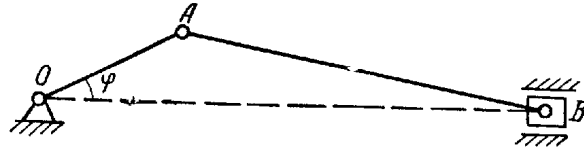


Рис. 268а.

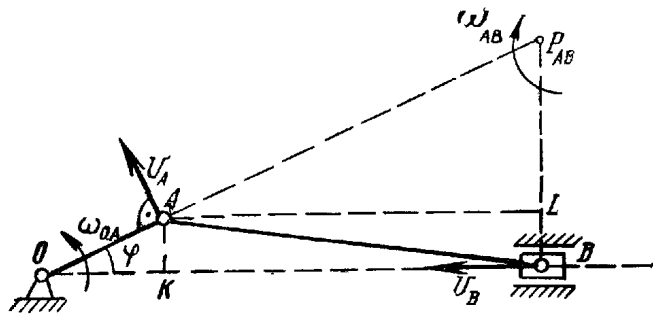


Рис. 268б.

определить угловую скорость шатуна AB и скорость ползуна B механизма в тот момент, когда кривошип OA составляет с осью направляющих ползунка угол φ (рис. 268а).

Решение. Зная угловую скорость кривошипа и его длину, определим скорость пальца кривошипа A :

$$v_A = OA \cdot \omega_{OA} = r\omega_{OA}.$$

Скорость пальца кривошипа A направлена перпендикулярно OA , а скорость ползунка B — по прямой OB (рис. 268, б).

Восстанавливаем в точках A и B перпендикуляры к направлениям их скоростей. Точка пересечения этих перпендикуляров определяет положение мгновенного центра скоростей шатуна P_{AB} .

Вычислим расстояние от точки A до мгновенного центра скоростей.

$$P_{AB}A = \frac{AL}{\cos \varphi},$$

но

$$AL = KB = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}.$$

Подставляя значение AL , получаем

$$P_{AB}A = \frac{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}.$$

Угловая скорость шатуна AB

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{P_{AB}A} = \frac{r\omega_{OA} \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Для определения скорости ползуна B найдем $P_{AB}B$:

$$P_{AB}B = P_{AB}L + LB = P_{AB}A \sin \varphi + AK = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \operatorname{tg} \varphi + r \sin \varphi.$$

Тогда скорость ползуна B будет равна:

$$v_B = P_{AB}B \cdot \omega_{AB} = (\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \operatorname{tg} \varphi + r \sin \varphi) \frac{r\omega_{OA} \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} = \left(r \sin \varphi + \frac{r^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right) \omega_{OA}.$$

Скорость любой точки шатуна AB можно определить как вращательную скорость вокруг мгновенного центра скоростей P_{AB} . Однако вычисление расстояний от точек до мгновенного центра скоростей приводит к громоздким вычислениям.

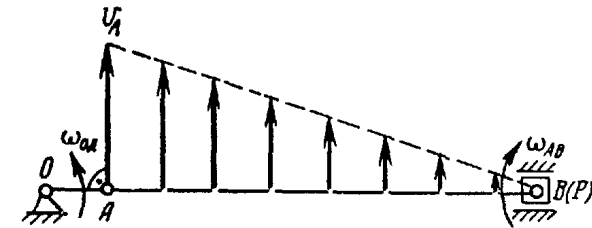


Рис. 268в.

Поэтому в практических расчетах расстояния от точек до мгновенного центра скоростей обычно определяют графически по чертежу механизма, выполненному в масштабе.

При $\varphi = 0$ мгновенный центр скоростей шатуна совпадает с точкой B и скорости всех точек шатуна являются вращательными вокруг точки B (рис. 268в).

Угловая скорость шатуна

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA} = \frac{r}{l} \omega_{OA}$$

Скорость точки B

$$v_B = 0.$$

При $\varphi = 90^\circ$ скорости пальца кривошипа A и ползунка B параллельны, поэтому мгновенный центр скоростей шатуна AB находится в бесконечности (рис. 268г). В этот момент все точки шатуна AB имеют одинаковые скорости, равные v_A , а $\omega_{AB} = 0$.

Пример 72. Кривошип OA вращается вокруг оси O равномерно с угловой скоростью $n = 60$ об/мин и приводит в движение шатун AB , соединенный жестко с колесом II .

Колесо II приводит во вращение колесо I , не соединенное с кривошипом, но вращающееся вокруг той же оси O .

Радиусы колес: $r_I = 50$ см, $r_{II} = 20$ см.

Длина шатуна: $AB = 130$ см.

Определить скорость ползунка B , угловую скорость шатуна AB и угловую скорость колеса I в моменты времени, когда кривошип параллелен и перпендикулярен траектории ползунка B (рис. 269а).

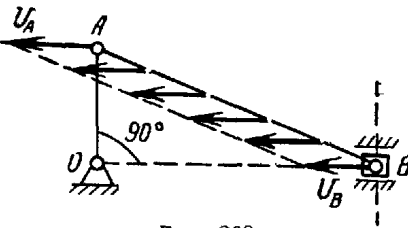


Рис. 268г.

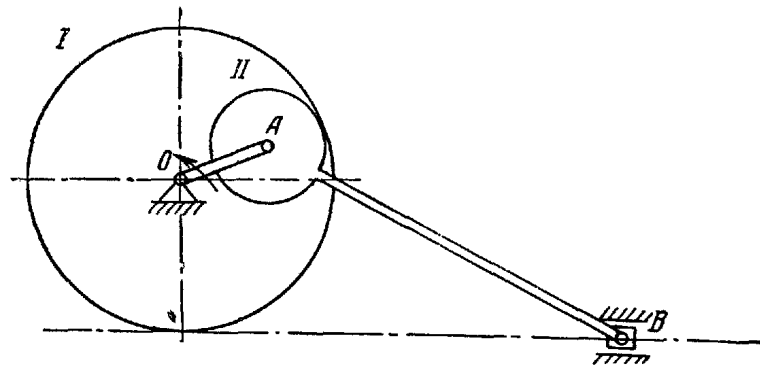


Рис. 269а.

Решение. Механизм имеет четыре звена, совершающих различные движения. Кривошип OA и колесо I вращаются вокруг центра O с различными угловыми скоростями; ползунки B движется поступательно, а шатун AB вместе с колесом II совершают плоское движение.

а) Кривошип OA параллелен траектории ползунка B (рис. 269, б). Вычисляем вращательную скорость пальца кривошипа v_A

по угловой скорости кривошипа и направляем ее перпендикулярно к кривошипу OA в сторону его вращения:

$$\omega_{OA} = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi 60}{30} = 2\pi \text{ сек}^{-1},$$

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2\pi \cdot 30 = 60\pi \text{ см/сек} = 188,5 \text{ см/сек}.$$

Находим мгновенный центр скоростей шатуна AB как точку пересечения перпендикуляра к скорости ползунка B и перпендикуляра к скорости точки A , являющегося продолжением отрезка OA .

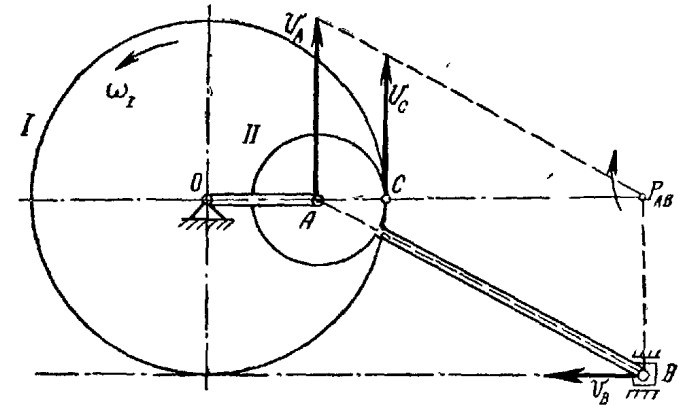


Рис. 269б.

Определяем расстояния от точек A , B и C до мгновенного центра скоростей P_{AB} :

$$P_{AB}B = r_I = 50 \text{ см};$$

$$P_{AB}A = \sqrt{AB^2 - P_{AB}B^2} = \sqrt{130^2 - 50^2} = 120 \text{ см};$$

$$P_{AB}C = P_{AB}A - AC = 120 - 20 = 100 \text{ см}.$$

Скорости всех точек шатуна являются вращательными вокруг мгновенного центра скоростей. Скорость каждой точки равна произведению угловой скорости шатуна на ее расстояние от мгновенного центра скоростей:

$$v_A = \omega_{AB} \cdot P_{AB}A;$$

$$v_B = \omega_{AB} \cdot P_{AB}B;$$

$$v_C = \omega_{AB} \cdot P_{AB}C.$$

Определяем угловую скорость шатуна AB по известной скорости точки A :

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{P_{AB}A} = \frac{60\pi}{120} = \frac{\pi}{2} \text{ сек}^{-1}.$$

Тогда скорости точек B и C определяются:

$$v_B = \frac{\pi}{2} \cdot 50 = 25\pi \text{ см/сек} = 78,55 \text{ см/сек};$$

$$v_C = \frac{\pi}{2} \cdot 100 = 50\pi \text{ см/сек} = 157,1 \text{ см/сек}.$$

Скорость v_C является не только скоростью точки C шатуна, но и вращательной скоростью точки обода колеса I , т. е.

$$v_C = \omega_I r_I,$$

откуда

$$\omega_I = \frac{v_C}{r_I} = \frac{50\pi}{50} = \pi \text{ сек}^{-1}.$$

б) Кривошип OA перпендикулярен траектории ползунка B (рис. 269в).

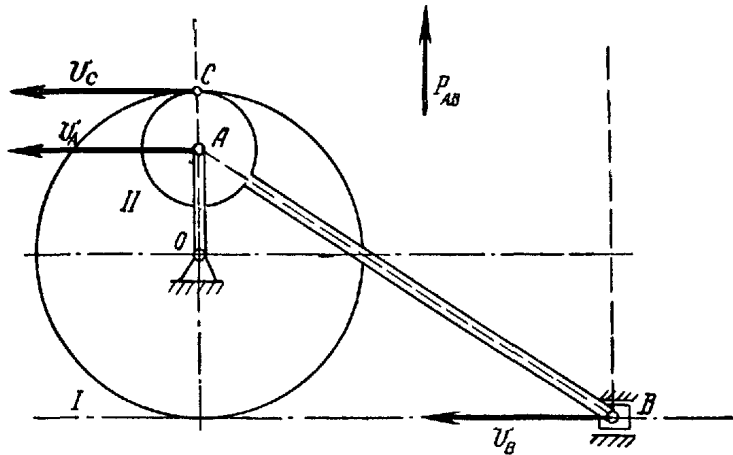


Рис. 269в.

Перпендикуляры в точках A и B к скоростям этих точек параллельны. Следовательно, мгновенный центр скоростей шатуна находится в бесконечности, угловая скорость шатуна равна нулю, а скорости всех точек геометрически равны:

$$\omega_{AB} = 0,$$

$$v_C = v_B = v_A = 60\pi \text{ см/сек} = 188,5 \text{ см/сек}.$$

Угловая скорость колеса I

$$\omega_I = \frac{v_C}{r_I} = \frac{60\pi}{50} = \frac{6}{5} \pi \text{ сек}^{-1}.$$

§ 104. Теорема о центре поворота для конечного перемещения плоской фигуры (теорема Шаля). Мгновенный центр вращения фигуры

Мгновенный центр скоростей характеризует распределение скоростей точек плоской фигуры в данный момент времени.

Докажем теорему, предложенную французским геометром Шалем (1793—1880), о конечном перемещении плоской фигуры:

Плоскую фигуру можно переместить из одного положения в любое другое положение на плоскости одним поворотом этой фигуры вокруг некоторого неподвижного центра.

Положим, что отрезок, соединяющий точки A и B плоской фигуры, занимает на плоскости в два различных момента времени положения AB и A_1B_1 (рис. 270).

Соединим точки A и A_1 , B и B_1 и разделим отрезки AA_1 и BB_1 пополам. Из середин этих отрезков D и E восставим перпендикуляры к отрезкам и продолжим их до пересечения в точке C . Покажем, что эта точка неподвижной плоскости является центром поворота для данного конечного перемещения плоской фигуры.

Соединяя точку C с концами отрезков AB и A_1B_1 , получаем два треугольника ACB и A_1CB_1 . Эти треугольники равны согласно равенству трех сторон: $A_1B_1 = AB$ как отрезки, соединяющие две точки неизменяемой фигуры; $A_1C = AC$ и $B_1C = BC$ как расстояния от точек перпендикуляров, восставленных в серединах отрезков до концов этих отрезков.

Из равенства треугольников следует, что

$$\angle ACB = \angle A_1CB_1.$$

Отняв от обеих частей этого равенства $\angle A_1CB$, получим

$$\angle ACB - \angle A_1CB = \angle A_1CB_1 - \angle A_1CB$$

или

$$\angle ACA_1 = \angle BCB_1 = \varphi,$$

где φ — абсолютная величина рассматриваемого угла.

Таким образом, перемещения двух точек фигуры, а следовательно, и всей плоской фигуры из первого положения во второе, можно осуществить поворотом на угол φ вокруг центра поворота C .

Очевидно, что поворот плоской фигуры вокруг найденного центра не отображает действительного движения плоской фигуры, а лишь

позволяет переместить эту фигуру из первого положения во второе.

Если перпендикуляры, восстановленные в серединах отрезков AA_1 и BB_1 , сливаются (рис. 271), то центр поворота лежит на пересечении продолжений отрезков AB и A_1B_1 .

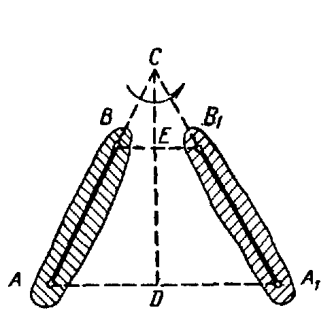


Рис. 271.

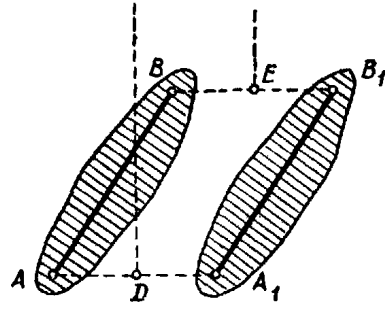


Рис. 272.

На рис. 272 изображено поступательное перемещение плоской фигуры. В этом случае перпендикуляры к отрезкам AA_1 и BB_1 параллельны и центр поворота находится в бесконечности.

Каждым двум положениям плоской фигуры на плоскости соответствует свой центр поворота.

Покажем, что *предельным положением центра поворота при стремлении времени перемещения плоской фигуры Δt к нулю является точка неподвижной плоскости, с которой в данный момент времени совпадает мгновенный центр скоростей плоской фигуры.*

Для этого рассмотрим какое-либо перемещение точки A плоской фигуры (рис. 273).

Отметим на траектории этой точки положения A и A_1 , занимаемые точкой в моменты времени t и $t + \Delta t$. Соединив точки A и A_1 с центром поворота C , получим равнобедренный треугольник ACA_1 с углом при вершине C , равным $\Delta\varphi$. Длина хорды $AA_1 = 2AC \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$.

Найдем модуль скорости v'_{cp} воображаемого равномерного движения точки A по хорде AA_1 :

$$v'_{cp} = \frac{AA_1}{\Delta t} = \frac{2CA \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} = CA \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

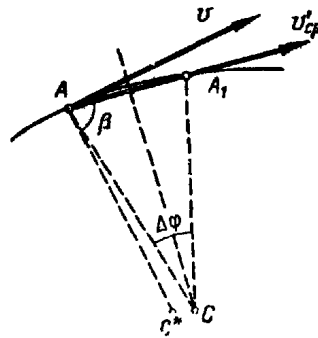


Рис. 273.

Для определения истинной скорости точки находим предел v'_{cp} при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v'_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(CA \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right).$$

Обозначим C^* предельное положение центра поворота C при $\Delta t \rightarrow 0$. Имеем

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} = 1$$

и

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega.$$

Модуль скорости точки A в момент t

$$v = C^*A \cdot \omega.$$

Определим также угол, составленный скоростью v'_{cp} с отрезком CA , и его предельное значение

$$\angle \beta = \angle A_1AC = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

При $\Delta\varphi \rightarrow 0$ и $C \rightarrow C^*$ получим

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Этот результат показывает, что скорость v точки A , направленная по касательной к траектории, образует с направлением C^*A прямой угол.

Кроме того, модуль скорости v точки A равен:

$$v = C^*A \cdot \omega,$$

т. е. она является вращательной скоростью этой точки вокруг точки C^* .

Из этого следует, что точка C^* есть точка неподвижной плоскости, с которой в данный момент времени совпадает мгновенный центр скоростей P . Эту точку называют *мгновенным центром вращения фигуры*.

§ 105. Неподвижная и подвижная центры. Теорема о качении подвижной центроиды по неподвижной

Отметим на неподвижной плоскости положения A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , ... отрезка AB , определяющего положение плоской фигуры в моменты времени t , $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$, $t + 3\Delta t$, ... и т. д. (рис. 274).

Определим путем построения, указанного в § 104, точки неподвижной плоскости C_1, C_2, C_3 и т. д., поворотом вокруг которых можно переместить отрезок AB из одного положения в другое.

Так, из первого положения во второе отрезок AB можно переместить поворотом на угол $\Delta\varphi_1$ вокруг точки C_1 , из второго положения в третье — поворотом на угол $\Delta\varphi_2$ вокруг точки C_2 , из третьего положения в четвертое — поворотом на угол $\Delta\varphi_3$ вокруг точки C_3 и т. д.

Соединив последовательно точки C_1, C_2, C_3, C_4 и т. д. отрезками, получим ломаную линию $C_1C_2C_3C_4 \dots$ — линию центров поворота на неподвижной плоскости. Определим путем построения точки движущейся плоской фигуры, которые при последовательных ее поворотах совпадают с точками C_1, C_2, C_3, \dots неподвижной плоскости (на рис. 274 рассматриваемая плоская фигура с принадлежащим ей отрезком A_1B_1 заштрихована).

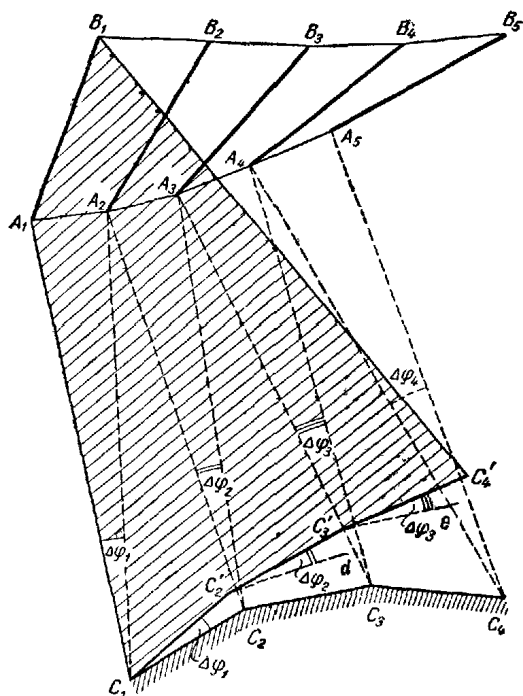


Рис. 274

Для определения точки плоской фигуры C'_2 , которая после первого поворота вокруг C_1 совпадает с центром следующего поворота C_2 неподвижной плоскости, построим отрезок $C_1C'_2 = C_1C_2$ под углом $\Delta\varphi_1$ к отрезку C_1C_2 , отложенным от отрезка C_1C_2 в направлении, обратном направлению поворота фигуры вокруг центра C_1 .

Для определения точки плоской фигуры C'_3 , которая после второго поворота вокруг центра C_2 совпадает с центром следующего

поворота C_3 на неподвижной плоскости, отложим $\angle C_1C'_2d = \angle C_1C_2C_3$ и построим отрезок $C'_2C'_3 = C_2C_3$ под углом $\Delta\varphi_2$ к прямой C'_2d , отложенным от прямой C_2d в направлении, обратном направлению поворота фигуры вокруг центра C_3 .

Путем аналогичного построения найдем точки C'_4, C'_5, \dots на движущейся плоской фигуре, которые после третьего, четвертого и т. д. поворотов совпадут с точками C_4, C_5, \dots неподвижной плоскости.

Ломаная линия $C_1C'_2C'_3C'_4 \dots$ является линией центров поворота на движущейся плоской фигуре. Эта линия, как показано на рис. 274, неизменно связана с отрезком AB и движется вместе с ним. Ее вершины последовательно являются центрами поворота при перемещениях отрезка из одного положения в другое. Движение плоской фигуры в виде ряда последовательных поворотов этой фигуры вокруг соответствующих центров поворота $C_1, C_2, C_3, C_4 \dots$ сопровождается качением линии $C_1C'_2C'_3C'_4$ по неподвижной линии $C_1C_2C_3C_4$. Так как длины линий $C_1C'_2C'_3C'_4$ и $C_1C_2C_3C_4$ равны, то это качение происходит без скольжения.

Предельными положениями центров поворота C_1, C_2, C_3, \dots

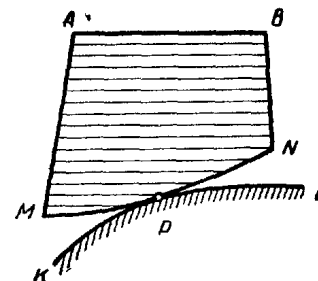


Рис. 275.

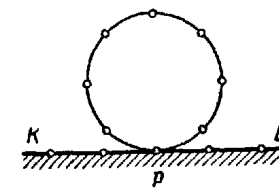


Рис. 276.

являются мгновенные центры вращения плоской фигуры. Поэтому в пределе ломаная линия $C_1C_2C_3C_4 \dots$ обращается в кривую. Эта кривая представляет собой геометрическое место мгновенных центров вращения на неподвижной плоскости и называется *неподвижной центроидой*.

Линия $C_1C'_2C'_3C'_4$ также обращается в кривую, представляющую собой геометрическое место мгновенных центров скоростей на движущейся фигуре. Эта кривая неизменно связана с плоской фигурой (с отрезком AB) и движется вместе с ней. Она называется *подвижной центроидой*.

Таким образом, при движении плоской фигуры в ее плоскости подвижная центроида MN катится без скольжения по неподвижной центроиде KL (рис. 275). Точка соприкосновения подвижной центроида с неподвижной центроидой является в данный момент времени мгновенным центром скоростей. Это положение представляет собой теорему Пуансо о качении подвижной центроида по неподвижной, которая имеет следующую формулировку:

При действительном движении плоской фигуры подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной центроиде.

Теорема Пуансо иллюстрируется качением колеса по рельсу без скольжения (рис. 276). В этом случае мгновенный центр скоростей находится в точке соприкосновения колеса и рельса; неподвижной центроидой является прямая KL , а подвижной — окружность.

Рассмотрим диск радиусом R , катящийся без скольжения между двумя параллельными рейками, которые движутся в противоположные стороны со скоростями v_1 и v_2 (рис. 277, а). Неподвижной центроидой диска является прямая KL , параллельная рейкам и отстоящая от центра диска на расстоянии $OP = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} R$ (пример 70), а подвижной центроидой является окружность такого же радиуса.

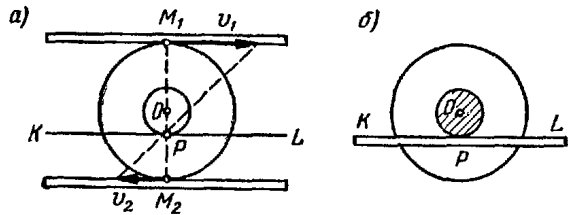


Рис. 277.

Заданное движение диска можно осуществить качением без скольжения валика радиусом OP по неподвижной горизонтальной линейке KL (рис. 277, б).

Теорию центроид можно использовать для получения эквивалентного движения плоской фигуры при другом устройстве механизма, практически более удобном.

§ 106. Уравнения неподвижной и подвижной центроид

Неподвижная центроид является геометрическим местом мгновенных центров вращения на неподвижной плоскости. Поэтому для получения уравнений неподвижной центроиды в неподвижной системе осей $\xi O\eta$ следует найти выражения проекций скорости точки плоской фигуры на оси ξ и η и приравнять их нулю (рис. 278).

Скорость любой точки M плоской фигуры определяется выражением (99.2)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

где \mathbf{v}_O — скорость полюса O ;

$\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость плоской фигуры;

\mathbf{r} — радиус-вектор точки M относительно полюса O .

Проведем через полюс O систему подвижных осей x и y , неизменно связанных с движущейся плоской фигурой. Обозначим

координаты точки M плоской фигуры в неподвижной системе осей ξ и η , а в подвижной системе — x и y .

Угол, характеризующий вращательную часть движения плоской фигуры, обозначим φ , а координаты полюса O в неподвижной системе осей ξ_0 и η_0 .

Проекция радиуса-вектора \mathbf{r} на оси ξ и η соответственно равны $\xi - \xi_0$ и $\eta - \eta_0$. Вектор угловой скорости вращения плоской фигуры $\boldsymbol{\omega}$ перпендикулярен плоскости этой фигуры; поэтому определитель векторного произведения $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, выраженный через проек-

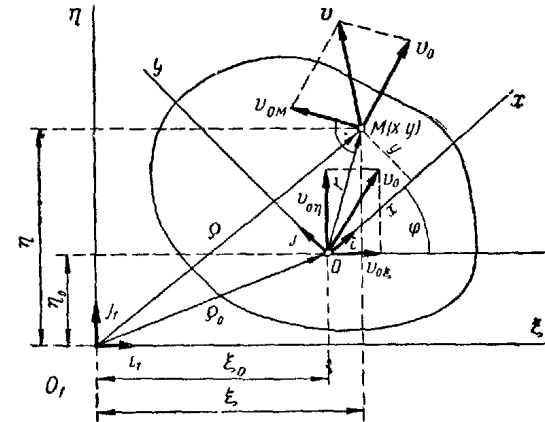


Рис. 278.

ции векторов сомножителей на неподвижные оси, имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & \tilde{\omega} \\ \xi - \xi_0 & \eta - \eta_0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}_1 [-\tilde{\omega}(\eta - \eta_0)] + \mathbf{j}_1 [\tilde{\omega}(\xi - \xi_0)], \quad (106.1)$$

где $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$ — орты неподвижной системы осей ξ, η, ζ , а $\tilde{\omega}$ — алгебраическая величина угловой скорости плоской фигуры.

Проекция скорости любой точки M плоской фигуры на неподвижные оси на основании (99.2) и (106.1) определяются так:

$$\left. \begin{aligned} v_\xi &= v_{O\xi} - (\eta - \eta_0) \tilde{\omega} = \frac{d\xi_0}{dt} - (\eta - \eta_0) \tilde{\omega}, \\ v_\eta &= v_{O\eta} + (\xi - \xi_0) \tilde{\omega} = \frac{d\eta_0}{dt} + (\xi - \xi_0) \tilde{\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (106.2)$$

Обозначив ξ_P и η_P координаты мгновенного центра скоростей в неподвижной системе осей, являющиеся в то же время координатами мгновенного центра вращения плоской фигуры, определим проекции его скорости на оси ξ и η и приравняем их нулю:

$$v_{P\xi} = 0 \quad \text{и} \quad v_{P\eta} = 0.$$

На основании (106.2) получим

$$\frac{d\xi_O}{dt} - (\eta_P - \eta_O) \tilde{\omega} = 0, \quad \frac{d\eta_O}{dt} + (\xi_P - \xi_O) \tilde{\omega} = 0,$$

откуда найдем

$$\left. \begin{aligned} \xi_P &= \xi_O - \frac{1}{\tilde{\omega}} \cdot \frac{d\eta_O}{dt}, \\ \eta_P &= \eta_O + \frac{1}{\tilde{\omega}} \cdot \frac{d\xi_O}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (106.3)$$

Уравнения (106.3) являются *уравнениями неподвижной центроиды в параметрической форме в неподвижной системе осей координат*.

Для получения уравнений подвижной центроиды в подвижной системе осей xOy следует найти выражение проекций скорости точки плоской фигуры на оси x и y и приравнять их нулю.

Разложив вектор скорости полюса \mathbf{v}_O по направлениям неподвижных осей на две составляющие $\mathbf{v}_{O\xi}$ и $\mathbf{v}_{O\eta}$, представим вектор скорости точки M в следующем виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O\xi} + \mathbf{v}_{O\eta} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (106.4)$$

Так как проекции радиуса-вектора \mathbf{r} на оси x и y соответственно равны x и y , а вектор угловой скорости вращения плоской фигуры перпендикулярен плоскости этой фигуры, то определитель векторного произведения $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, выраженный через проекции векторов сомножителей на неподвижные оси, имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \tilde{\omega} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-\tilde{\omega}y) + \mathbf{j}\tilde{\omega}x, \quad (106.5)$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты подвижной системы осей x, y, z .

Тогда проекции скорости точки M на подвижные оси на основании (106.4) и (106.5) определяются так:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{O\xi} \cos \varphi + v_{O\eta} \sin \varphi - \tilde{\omega}y, \\ v_y &= -v_{O\xi} \sin \varphi + v_{O\eta} \cos \varphi + \tilde{\omega}x, \end{aligned} \right\} \quad (106.6)$$

где

$$v_{O\xi} = \frac{d\xi_O}{dt} \quad \text{и} \quad v_{O\eta} = \frac{d\eta_O}{dt}.$$

Обозначив координаты мгновенного центра скоростей в подвижной системе осей x_P и y_P , определим проекции скорости мгновенного центра скоростей на оси x и y и приравняем их нулю:

$$v_{Px} = 0 \quad \text{и} \quad v_{Py} = 0.$$

На основании (106.6) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_O}{dt} \cos \varphi + \frac{d\eta_O}{dt} \sin \varphi - \tilde{\omega}y_P &= 0; \\ -\frac{d\xi_O}{dt} \sin \varphi + \frac{d\eta_O}{dt} \cos \varphi + \tilde{\omega}x_P &= 0, \end{aligned}$$

откуда найдем:

$$\left. \begin{aligned} x_P &= \frac{1}{\tilde{\omega}} \left(\frac{d\xi_O}{dt} \sin \varphi - \frac{d\eta_O}{dt} \cos \varphi \right), \\ y_P &= \frac{1}{\tilde{\omega}} \left(\frac{d\xi_O}{dt} \cos \varphi + \frac{d\eta_O}{dt} \sin \varphi \right). \end{aligned} \right\} \quad (106.7)$$

Уравнения (106.7) являются *уравнениями подвижной центроиды в параметрической форме в подвижной системе осей*, неизменно связанной с движущейся плоской фигурой.

§ 107. Примеры нахождения центроид

Пример 73. Рассмотрим центроиды линейки эллипсографа (рис. 279).

Линейка AB скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым EF и KN . Мгновенный центр скоростей этой линейки находится в точке P пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках A и B к направлениям скоростей этих точек, т. е. к направлениям прямых EF и KN .

Так как $OP = AB$ при всех положениях линейки, т. е. расстояние от мгновенного центра скоростей до точки O постоянно, то неподвижной центроидой является окружность, описанная из точки O , радиусом, равным длине линейки.

По отношению к подвижной плоскости точка P всегда будет в вершине прямого угла APB , опирающегося на линейку AB . Так как геометрическим местом вершин прямых углов, опирающихся на отрезок, является окружность, построенная на этом отрезке как на диаметре, то подвижной центроидой линейки AB является окружность, диаметром которой является отрезок AB .

Таким образом, радиус окружности, представляющей подвижную центроиду, вдвое меньше радиуса окружности, представляющей неподвижную центроиду.

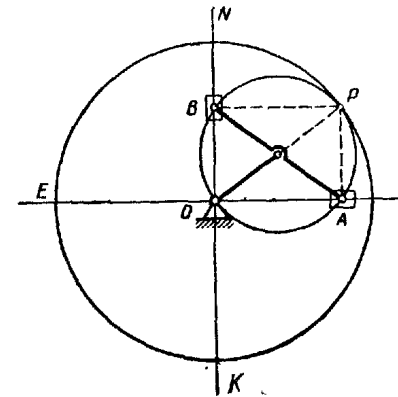


Рис. 279.

Центроиды линейки эллипсографа были установлены итальянским математиком Карданом, по имени которого они называются кардановыми окружностями.

Следовательно, движение линейки эллипсографа можно получить как движение диаметра круга, катящегося без скольжения внутри другого круга, радиус которого в два раза больше (рис. 280).

При этом точки A и B малой кардановой окружности движутся по диаметрам большой кардановой окружности, т. е. так же, как двигались точки линейки AB .

Любая другая точка, лежащая на малой кардановой окружности, например точка D , также движется по соответствующему диаметру большой кардановой окружности. Любая точка M катящегося круга описывает эллипс с полуосями $a = BM$ и $b = AM$, а точка C описывает окружность радиусом OC .

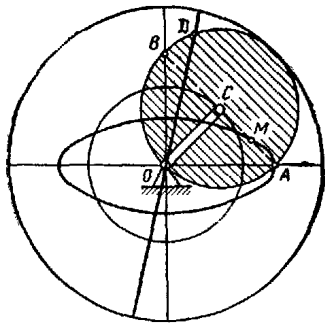


Рис. 280.

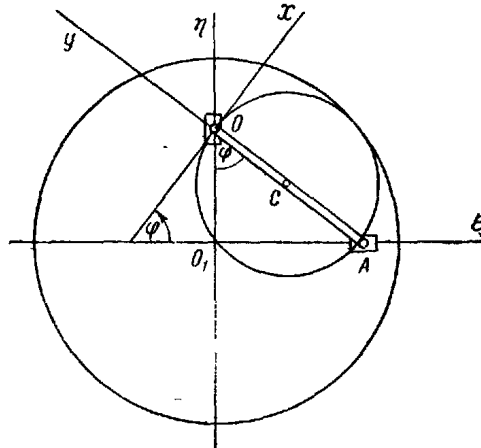


Рис. 281.

Это движение можно осуществить при помощи рукоятки OC , соединенной шарнирно с центром катящегося колеса.

Найдем уравнения неподвижной и подвижной центроид эллипсографа. За неподвижные оси примем оси ξ и η , по которым скользят концы отрезка $OA = 2l$. Приняв точку O за начало координат подвижной системы, направим ось x перпендикулярно отрезку AO , а ось y — вдоль него (рис. 281).

Уравнения неподвижной центроиды в неподвижной системе осей имеют вид (106.3):

$$\xi_P = \xi_O - \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\eta_O}{dt};$$

$$\eta_P = \eta_O + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\xi_O}{dt}.$$

В рассматриваемом примере имеем:

$$\xi_O = 0; \quad \eta_O = OA \cos \varphi = 2l \cos \varphi.$$

$$\frac{d\xi_O}{dt} = 0; \quad \frac{d\eta_O}{dt} = -2l \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -2l \sin \varphi \cdot \tilde{\omega}.$$

Подставляя эти значения в уравнения (106.3), находим:

$$\xi_P = 2l \sin \varphi,$$

$$\eta_P = 2l \cos \varphi.$$

Исключая φ , получаем выражение

$$\xi_P^2 + \eta_P^2 = 4l^2,$$

которое является уравнением окружности радиусом $R = 2l$ с центром в начале координат, т. е. в точке O_1 . Уравнения подвижной центроиды (106.7) имеют вид

$$x_P = \frac{1}{\tilde{\omega}} \left(\frac{d\xi_O}{dt} \sin \varphi - \frac{d\eta_O}{dt} \cos \varphi \right),$$

$$y_P = \frac{1}{\tilde{\omega}} \left(\frac{d\xi_O}{dt} \cos \varphi + \frac{d\eta_O}{dt} \sin \varphi \right).$$

Подставляя в эти уравнения значения $\frac{d\xi_O}{dt}$ и $\frac{d\eta_O}{dt}$, получаем:

$$x_P = 2l \sin \varphi \cos \varphi = l \sin 2\varphi,$$

$$y_P = -2l \sin^2 \varphi = -l(1 - \cos 2\varphi)$$

или

$$x_P = l \sin 2\varphi,$$

$$y_P + l = l \cos 2\varphi.$$

Исключая из этих уравнений φ , получаем

$$x_P^2 + (y_P + l)^2 = l^2.$$

Это выражение есть уравнение окружности радиусом $r = l$ с центром в точке C , координаты которой

$$x_C = 0,$$

$$y_C = -l.$$

Пример 74. Найти неподвижную и подвижную центроиды звена BC антипараллелограмма, поставленного на меньшее звено AD , полагая $AB = DC = 2a$, $BC = AD = 2c$ и $a > c$ (рис. 282, а).

Решение. Звено AB вращается вокруг точки A , скорость v_B точки B перпендикулярна AB . Звено DC вращается вокруг точки D , скорость v_C точки C перпендикулярна к DC (рис. 282, б). Мгновенный центр скоростей звена BC лежит на пересечении перпендикуляров к скоростям точек B и C , т. е. в точке P .

Соединяя точки A и C , устанавливаем, что

$$\triangle ABC = \triangle ADC,$$

а следовательно,

$$\angle ABC = \angle ADC.$$

Кроме того, имеем: $\angle APD = \angle BPC$ (вертикальные углы) и $AD = BC$ (по условию).

Поэтому

$$\triangle APD = \triangle BPC,$$

откуда следует, что

$$AP = PC \text{ и } PD = PB,$$

следовательно,

$$AP + PD = AP + PB = 2a, \quad (1)$$

$$CP + PB = CP + PD = 2a. \quad (2)$$

Равенство (1) показывает, что сумма расстояний до мгновенного центра P от двух неподвижных точек A и D есть постоянная величина.

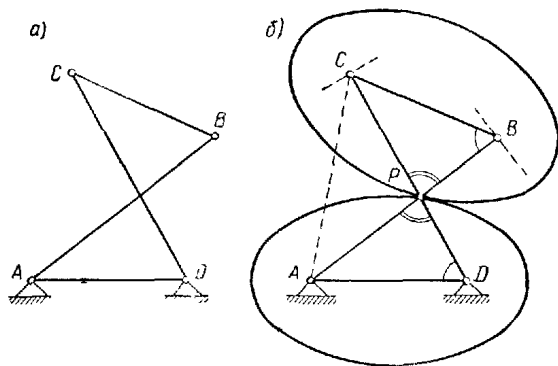


Рис. 282.

Это означает, что неподвижной центроидой звена BC антипараллелограмма является эллипс с фокусами в точках A и D , с большой полуосью a и малой $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Сумма расстояний до мгновенного центра скоростей от двух точек плоской фигуры (звена BC), как видно из равенства (2) есть тоже постоянная величина. Поэтому подвижной центроидой является также эллипс с полуосями той же величины и фокусами в точках B и C .

§ 108. Теорема об ускорениях точек плоской фигуры и ее следствия

В § 98 показано, что движение плоской фигуры в ее плоскости можно рассматривать как совокупность двух движений: поступательного движения фигуры вместе с полюсом и ее вращения вокруг полюса.

Ускорения точек плоской фигуры определяются следующей теоремой:

Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки во вращательном движении вокруг полюса.

Для установления этой зависимости допустим, что известно ускорение w_0 некоторой точки O плоской фигуры и алгебраические величины угловой скорости и углового ускорения плоской фигуры ω и ϵ , т. е. кроме модулей ω и ϵ известны направление вращения плоской фигуры в данный момент времени и характер ее вращения (ускоренное вращение или замедленное).

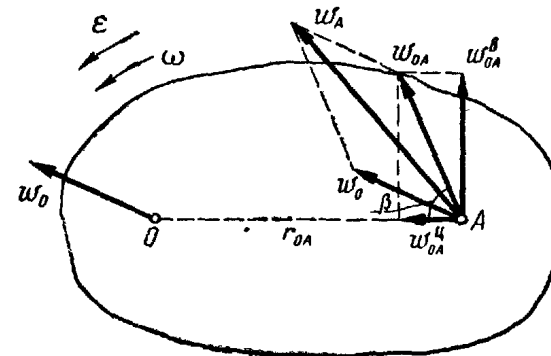


Рис. 283.

Положим, что в данный момент времени фигура вращается ускоренно в сторону, противоположную движению часовой стрелки (рис. 283). Так как вращение фигуры ускоренное, то направим ϵ в сторону ω (рис. 245).

Определим ускорение любой точки A фигуры, приняв точку O за полюс.

Воспользуемся теоремой о скоростях точек плоской фигуры; на основании (99.2) имеем

$$v_A = v_O + \omega \times r_{OA}.$$

Ускорение точки A найдем как векторную производную по времени от скорости этой точки:

$$w_A = \frac{dv_A}{dt} = \frac{dv_O}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times r_{OA} + \omega \times \frac{dr_{OA}}{dt}.$$

Так как

$$\frac{d\omega}{dt} = \epsilon$$

и

$$\frac{dr_{OA}}{dt} = v_{OA} = \omega \times r_{OA},$$

имеем

$$w_A = w_O + \epsilon \times r_{OA} + \omega \times v_{OA}.$$

Из следствия вытекает, что алгебраическая величина проекции w_{Ax} меньше w_{Ox} , а абсолютное значение $|w_{Ax}|$ может и превышать $|w_{Ox}|$ при большой величине центростремительного ускорения w_{OA}^u . Проекции ускорений точки A и полюса O на ось x равны в том случае, если $w_{OA}^u = OA \cdot \omega^2 = 0$, т. е. при $\omega = 0$.

Проведем через конец ускорения полюса w_O , отложенного в точке A , прямую, перпендикулярную оси x . Эта прямая представляет собой годограф возможных ускорений точек плоской фигуры при $w_{OA}^u = 0$, т. е. при $\omega = 0$ и является границей, за которую не могут выходить концы возможных ускорений точки A . Действительно, если $w_{OA}^u = 0$, то конец ускорения w_A обязательно находится на этой прямой, а если $w_{OA}^u \neq 0$, то конец ускорения w_A находится с той стороны этой прямой, где расположен полюс.

Следствие 2. Концы ускорений точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между этими точками.

Зная ускорение w_A точки A отрезка AB , алгебраические величины угловой скорости $\tilde{\omega}$ и углового ускорения $\tilde{\epsilon}$, определим ускорение точки B отрезка, приняв точку A за полюс:

$$w_B = w_A + w_{AB}.$$

Построим в точке B ускорение полюса w_A (рис. 285).

Положим, что отрезок вращается ускоренно в направлении обратном направлению движения часовой стрелки. Из конца ускорения w_A отложим ускорение w_{AB} под углом $\beta = \arctg \frac{\epsilon}{\omega^2}$ к отрезку A_1b , равному и параллельному отрезку AB . Соединив точку B с концом w_{AB} , получаем ускорение точки B .

Для определения ускорения какой-либо другой точки отрезка, например точки D , выполним аналогичное построение.

Очевидно, что ускорение w_{AD} составляет с отрезком A_1d тот же угол β .

Ускорения точек B и D отрезка в их вращательном движении вокруг полюса A пропорциональны расстояниям этих точек от полюса:

$$dD_1 = w_{AD} = AD \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4},$$

$$bB_1 = w_{AB} = AB \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}.$$

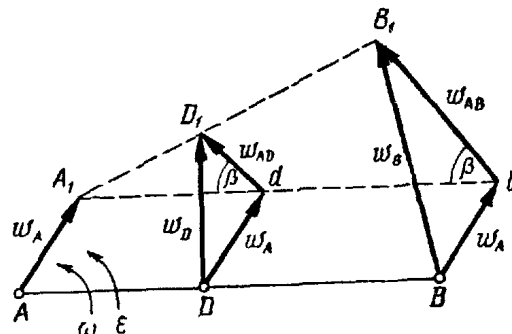


Рис. 285.

Поэтому $\frac{dD_1}{bB_1} = \frac{AD}{AB}$, но $AD = A_1d$ и $AB = A_1b$ как противоположные стороны параллелограммов. Тогда

$$\frac{dD_1}{bB_1} = \frac{A_1d}{A_1b}.$$

Таким образом, $\triangle A_1D_1d \sim \triangle A_1B_1b$. Из подобия треугольников следует, что:

1) концы ускорений — точки A_1 , D_1 и B_1 лежат на одной прямой;

$$2) \frac{A_1D_1}{A_1B_1} = \frac{A_1d}{A_1b} \text{ или } \frac{A_1D_1}{A_1B_1} = \frac{AD}{AB} \text{ и } \frac{A_1D_1}{D_1B_1} = \frac{AD}{DB}.$$

Последнее соотношение показывает, что концы ускорений точек неизменяемого отрезка делят прямую, соединяющую эти концы, на части, пропорциональные расстояниям между соответствующими точками.

Поэтому, зная ускорения w_A и w_B концов отрезка AB , можно определить графически ускорение любой точки этого отрезка.

Допустим, что требуется определить ускорения точек D , C и E , делящих отрезок на четыре равные части (рис. 286). Соединяем концы ускорений точек A и B , отложенных в масштабе, отрезком прямой A_1B_1 и делим

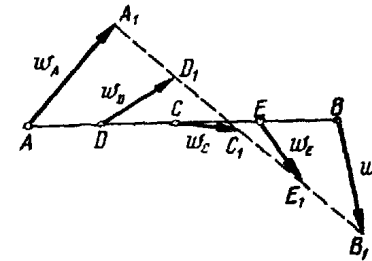


Рис. 286.

этот отрезок точками D_1 , C_1 и E_1 на четыре равные части. Соединяя точки D и D_1 , C и C_1 , E и E_1 , получаем ускорения этих точек w_D , w_C и w_E . Пользуясь масштабом, находим их модули и по чертежу определяем их направления.

Пример 75. Концы бруска AB длиной $l = 1$ м, движущегося в вертикальной плоскости, скользят по горизонтальной и наклонной плоскостям, образующим угол, равный 120° . В момент, когда ось бруска образует с горизонталью угол $\varphi = 30^\circ$, конец B имеет скорость $v_B = 50$ см/сек и ускорение $w_B = 20$ см/сек², направленные по наклонной плоскости вверх.

Определить в этот момент скорость и ускорение конца A , а также угловое ускорение ϵ бруска AB (рис. 287, а).

Решение. Конец A бруска движется по прямой, следовательно, его ускорение направлено по этой прямой. Таким образом, в задаче известны:

- 1) модуль и направление ускорения одной точки отрезка B ;
- 2) прямая, по которой направлено ускорение другой его точки A . Кроме того, по заданной скорости точки B можно определить угловую скорость ω отрезка, найдя его мгновенный центр скоростей.

Находим мгновенный центр скоростей P отрезка, восставляя в точках A и B перпендикуляры к направлениям скоростей этих

точек (рис. 287, б); получаем равносторонний треугольник APB , где

$$PA = PB = AB = 100 \text{ см.}$$

Так как $PA = PB$, то $v_A = v_B = 50 \text{ см/сек.}$
 Определим угловую скорость отрезка:

$$\omega = \frac{v_B}{PB} = \frac{50}{100} = 0,5 \text{ сек}^{-1}.$$

Точку B , ускорение которой известно, следует принять за полюс, и ускорение точки A определить по формуле (108.1):

$$\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_B + \mathbf{w}_{BA}^u + \mathbf{w}_{BA}^b.$$

Модуль центростремительного ускорения точки A во вращении вокруг полюса B можно вычислить, зная угловую скорость ω :

$$\omega_{BA}^u = \omega^2 \cdot BA = 0,5^2 \cdot 100 = 25 \text{ см/сек}^2.$$

Для вращательного ускорения \mathbf{w}_{BA}^b точки A во вращении вокруг полюса B известна лишь прямая, по которой направлено это ускорение, перпендикулярная BA . Модуль ускорения не известен, так как не известен модуль углового ускорения отрезка ϵ .

Для построения многоугольника ускорений, определяющего \mathbf{w}_A , можно воспользоваться тем, что прямая, по которой направлено ускорение \mathbf{w}_A , известна. Отложим из точки A ускорение полюса \mathbf{w}_B по его направлению; из его конца отложим центростремительное ускорение \mathbf{w}_{BA}^u во вращении точки A вокруг полюса B , направленное параллельно оси стержня BA от точки A к полюсу B , а из его конца проведем прямую, перпендикулярную BA , т. е. параллельную неизвестному вращательному ускорению \mathbf{w}_{BA}^b , до пересечения с прямой, по которой направлено ускорение \mathbf{w}_A . Чтобы вычислить при помощи построенного многоугольника ускорение \mathbf{w}_A , следует спроектировать левую и правую части

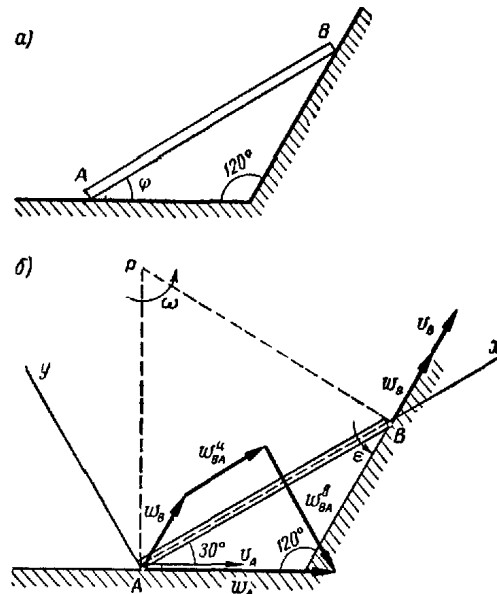


Рис. 287.

векторного равенства $\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_B + \mathbf{w}_{BA}^u + \mathbf{w}_{BA}^b$ на ось x , проходящую через точки A и B .

Проектируя, получаем:

$$\begin{aligned} w_{Ax} &= w_{Bx} + w_{BAx}^u + w_{BAx}^b, \\ w_A \cos 30^\circ &= w_B \cos 30^\circ + w_{BA}^u, \\ w_A \frac{\sqrt{3}}{2} &= 20 \frac{\sqrt{3}}{2} + 25, \end{aligned}$$

откуда

$$w_A = 49 \text{ см/сек}^2.$$

Проектируя эти векторы на ось y , можно определить w_{BA}^b и затем найти угловое ускорение ϵ бруска AB :

$$\begin{aligned} w_{Ay} &= w_{By} + w_{BAy}^u + w_{BAy}^b, \\ -w_A \cos 60^\circ &= w_B \cos 60^\circ - w_{BA}^b, \end{aligned}$$

откуда

$$w_{BA}^b = (w_A + w_B) \cos 60^\circ = (49 + 20) \cdot 0,5 = 34,5 \text{ см/сек}^2.$$

$w_{BA}^b = \epsilon \cdot BA$; отсюда определяется ϵ :

$$\epsilon = \frac{w_{BA}^b}{BA} = \frac{34,5}{100} = 0,345 \text{ сек}^{-2}.$$

Направление ϵ определяется по направлению ускорения \mathbf{w}_{BA}^b , приложенного в точке A , по отношению к полюсу B . В решенном примере угловое ускорение ϵ направлено противоположно направлению движения часовой стрелки, т. е. в сторону вращения бруска. Следовательно, брусок в данный момент вращается ускоренно.

§ 109. Мгновенный центр ускорений

Ускорение любой точки плоской фигуры определяется как геометрическая сумма ускорения полюса и ускорения точки во вращательном движении вокруг полюса. Покажем, что в каждый момент времени существует точка плоской фигуры, ускорение которой в этот момент равно нулю.

Положим, что в данный момент времени ускорение некоторой точки O плоской фигуры равно w_O , фигура вращается ускоренно в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки, а модули угловой скорости и углового ускорения плоской фигуры равны ω и ϵ .

Определим угол α :

$$\alpha = \text{arctg} \frac{\epsilon}{\omega^2}. \quad (109.1)$$

где ϵ — модуль вектора ϵ .

Тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\epsilon}{\omega^2} > 0$. Соответствующий этому тангенсу угол находится в пределах от 0 до 90°. Отложим угол α от ускорения w_0 по направлению углового ускорения ϵ (в данном случае по направлению движения часовой стрелки).

На проведенной полупрямой отложим отрезок

$$OQ = \frac{w_0}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}}. \quad (109.2)$$

Определим ускорение построенной точки Q , приняв точку O за полюс, по формуле (108.2):

$$w_Q = w_0 + w_{OQ}.$$

Ускорение точки Q во вращательном движении вокруг полюса O состоит из центростремительного ускорения и вращательного, которое направлено по отношению к полюсу в сторону углового ускорения ϵ :

$$w_{OQ} = \sqrt{(w_{OQ}^n)^2 + (w_{OQ}^t)^2} = OQ \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} = \frac{w_0}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}} \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} = w_0.$$

Ускорение w_{OQ} образует с отрезком OQ угол β , который определяется из следующего равенства:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{w_{OQ}^t}{w_{OQ}^n} = \frac{OQ \cdot \epsilon}{OQ \cdot \omega^2} = \frac{\epsilon}{\omega^2} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Так как углы α и β лежат в пределах от 0 до 90°, то

$$\beta = \alpha.$$

Из этого следует, что ускорения w_{OQ} и w_0 равны по модулю, но противоположны по направлению:

$$w_{OQ} = -w_0 \text{ и } w_Q = 0.$$

Точка Q , ускорение которой в данный момент равно нулю, называется *мгновенным центром ускорений*.

Таким образом, установлено, что мгновенный центр ускорений находится на отрезке, составляющем с ускорением полюса w_0 угол $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\epsilon}{\omega^2}$, который откладывается от ускорения полюса в сторону углового ускорения ϵ , на расстоянии от полюса, равном

$$OQ = \frac{w_0}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}}.$$

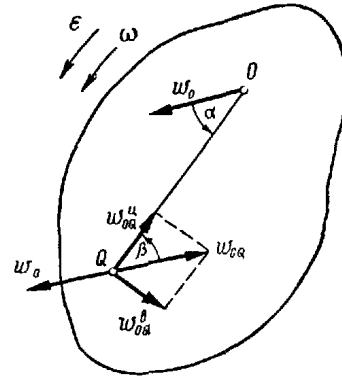


Рис. 288.

Если мгновенный центр ускорений принять за полюс, то ускорение любой точки плоской фигуры в данный момент определится как ускорение этой точки во вращательном движении вокруг мгновенного центра ускорений.

Действительно, приняв за полюс мгновенный центр ускорений Q (рис. 289), получим

$$w_A = w_Q + w_{QA}.$$

Так как

$$w_Q = 0,$$

то

$$w_A = w_{QA}.$$

Аналогично

$$w_B = w_{QB},$$

$$w_K = w_{QK}.$$

Из этих соотношений следует, что

$$\left. \begin{aligned} w_A = w_{QA} = QA \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}, \\ w_B = w_{QB} = QB \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}, \\ w_K = w_{QK} = QK \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}. \end{aligned} \right\} \quad (109.3)$$

Поэтому

$$\frac{w_B}{w_A} = \frac{QB}{QA}; \quad \frac{w_K}{w_A} = \frac{QK}{QA}. \quad (109.4)$$

Таким образом, модули ускорений точек плоской фигуры в каждый момент времени пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра ускорений, а векторы ускорений составляют с отрезками, соединяющими эти точки с мгновенным центром ускорений, один и тот же угол $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\epsilon}{\omega^2}$.

Если угол α отсчитывать от ускорения точки к отрезку, соединяющему ее с мгновенным центром ускорений, то направление отсчета угла совпадает с направлением углового ускорения ϵ .

Иначе, в каждый момент ускорения точек плоской фигуры таковы, как будто плоская фигура совершает вращение вокруг неподвижной точки — мгновенного центра ускорений Q , различным моментам времени соответствуют различные положения мгновенного центра ускорений.

Мгновенный центр скоростей P и мгновенный центр ускорений Q являются различными точками плоской фигуры (рис. 290).

Соединим точку M плоской фигуры с мгновенным центром скоростей P и мгновенным центром ускорений Q отрезками PM и QM , а затем разложим ускорение точки w на составляющие: один раз на касательное ускорение w_t и нормальное ускорение w_n , а другой раз на вращательное ускорение w_{QM}^v и центростремительное ускорение w_{QM}^u во вращении точки вокруг мгновенного центра ускорений Q .

Касательное ускорение w_τ и нормальное ускорение w_n направлены по касательной и главной нормали к траектории точки M , т. е. перпендикулярно отрезку PM и вдоль этого отрезка.

Вращательное ускорение w_{QM}^B и центростремительное ускорение w_{QM}^H

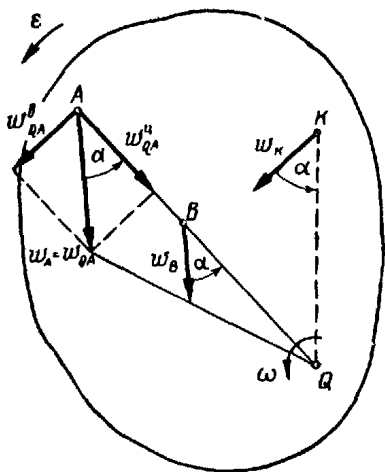


Рис. 289.

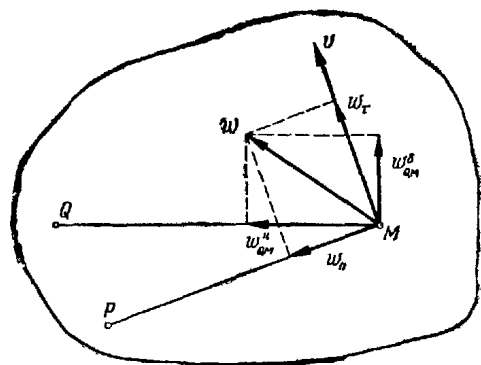


Рис. 290.

направлены перпендикулярно отрезку QM , соединяющему точку M с мгновенным центром ускорений и вдоль этого отрезка.

Таким образом, w_{QM}^B и w_{QM}^H не следует смешивать с истинными касательным и нормальным ускорениями точки w_τ и w_n .

§ 110. Способы определения положения мгновенного центра ускорений

Все задачи на определение положения мгновенного центра ускорений плоской фигуры можно свести к трем указанным ниже основным случаям, каждому из которых, очевидно, соответствует ряд частных случаев, зависящих от характера движения плоской фигуры.

Случай I. По условию задачи известна точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент равно нулю. Эта точка и является мгновенным центром ускорений.

Рассмотрим, например, качение без скольжения колеса по прямолинейному рельсу с постоянной скоростью центра v_C (рис. 291).

Мгновенный центр скоростей P находится в точке соприкосновения колеса с рельсом. Поэтому

$$v_C = PC \cdot \omega = R\omega,$$

где R — радиус колеса.

$$\text{Угловая скорость вращения колеса } \omega = \frac{v_C}{R} = \text{const.}$$

Центр колеса движется равномерно по прямой, следовательно, его ускорение равно нулю:

$$w_C = 0,$$

т. е. центр колеса является мгновенным центром ускорений.

Так как колесо вращается равномерно, то ускорения всех точек колеса равны центростремительным ускорениям этих точек в их вращательном движении вокруг мгновенного центра ускорений. Например, ускорения точек обода определяются:

$$\begin{aligned} w_A = w_B = w_D = \dots = \\ = w_P = R\omega^2 = \frac{v_C^2}{R}. \end{aligned}$$

Ускорение каждой точки колеса направлено к мгновенному центру ускорений.

В рассмотренном примере наглядно видно, что мгновенный центр скоростей P и мгновенный центр ускорений Q являются различными точками плоской фигуры.

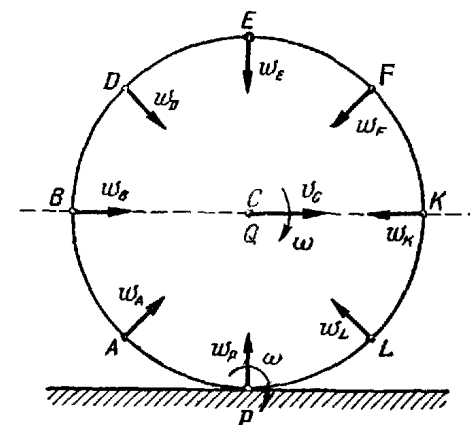


Рис. 291.

Мгновенный центр скоростей, не имея в данный момент скорости, имеет ускорение w_P , а мгновенный центр ускорений, не имея в данный момент ускорения, имеет скорость v_C .

Случай II. Известны модуль и направление ускорения какой-либо точки плоской фигуры, алгебраическая величина угловой скорости $\tilde{\omega}$ и алгебраическая величина углового ускорения $\tilde{\epsilon}$.

Пусть, например, задано ускорение точки A плоской фигуры w_A .

Рассмотрим частные случаи определения положения мгновенного центра ускорений, зависящие от $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\epsilon}$

1. Неравномерное вращение: $\omega \neq 0$, $\epsilon \neq 0$. В этом случае мгновенный центр ускорений находится на отрезке, составляющем с направлением ускорения w_A угол $\alpha = \text{arctg} \frac{\epsilon}{\omega^2}$, который отложен от ускорения точки в сторону ϵ , на расстоянии от точки A , равном

$$AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}}.$$

На рис. 292 показан случай ускоренного вращения плоской фигуры, а на рис. 293 — случай замедленного вращения.

Ускорение любой другой точки плоской фигуры можно определить по формулам (109.3) или (109.4). Как видно, направление

вращения на построение угла α не влияет и угол α всегда откладывается от направления ускорения в сторону ϵ (§ 109).

2. Равномерное вращение: $\omega \neq 0, \epsilon = 0$ (также момент обращения ϵ в нуль при неравномерном вращении) (рис. 294).

В этом случае

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\epsilon}{\omega^2} = 0 \quad \text{и} \quad \alpha = 0,$$

т. е. ускорения всех точек направлены к мгновенному центру ускорений.

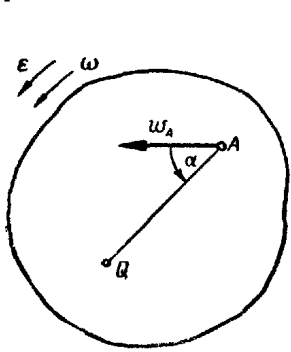


Рис. 292.

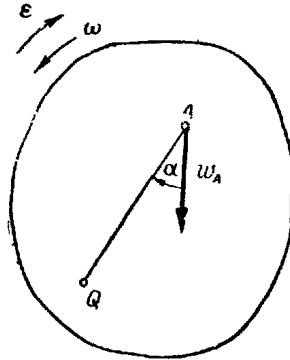


Рис. 293.

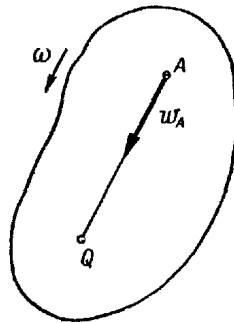


Рис. 294.

Расстояние от точки до мгновенного центра ускорений определяется по формуле

$$AQ = \frac{w_A}{\omega^2}.$$

3. Момент обращения угловой скорости в нуль: $\omega = 0, \epsilon \neq 0$. В этом случае

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\epsilon}{\omega^2} = \infty,$$

$$\alpha = 90^\circ,$$

т. е. ускорения всех точек направлены перпендикулярно отрезкам, соединяющим эти точки с мгновенным центром ускорений (рис. 295).

Расстояние от точки до мгновенного центра ускорений определяется по формуле

$$AQ = \frac{w_A}{\epsilon}.$$

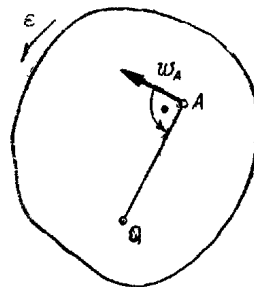


Рис. 295.

Угловая скорость фигуры обычно обращается в нуль при изменении направления вращения фигуры.

4. Момент обращения угловой скорости и углового ускорения в нуль при непоступательном движении $\omega = 0, \epsilon = 0$.

В этом случае ускорения всех точек плоской фигуры в данный момент геометрически равны, так как ускорение любой точки равно ускорению полюса (рис. 296):

$$w_A = w_B = w_D = \dots$$

$$AQ = \frac{w_A}{0} = \infty.$$

Случай III. Известны модули и направления ускорений двух точек плоской фигуры. Допустим, что известны ускорения точек A и B плоской фигуры w_A и w_B (рис. 297).

Примем точку A за полюс, тогда на основании (108.2)

$$w_B = w_A + w_{AB}.$$

Построим при точке B параллелограмм ускорений по заданной диагонали w_B и одной из сторон w_A . Другая сторона параллело-

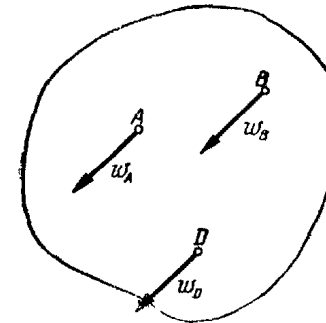


Рис. 296

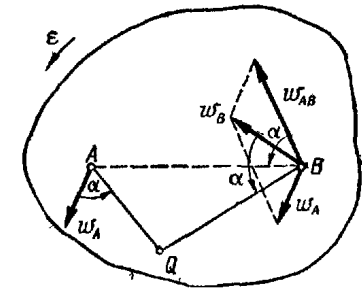


Рис. 297.

грамм определит ускорение w_{AB} во вращении точки B вокруг полюса A .

Ускорение w_{AB} составляет угол $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\epsilon}{\omega^2}$ с отрезком AB , соединяющим точку B с полюсом A .

Отсчитывая полученный угол α от ускорения w_{AB} к отрезку AB , получаем направление ϵ , в данном случае противоположное направлению движения часовой стрелки. Определив угол α и направление ϵ , отложим этот угол от ускорений точек A и B по направлению ϵ . Две полученные полупрямые продолжим до пересечения в точке Q , которая и будет мгновенным центром ускорений.

Этот способ определения положения мгновенного центра ускорений не требует определения угла α путем вычислений. Если положение мгновенного центра ускорений по этому способу определяется графически, то ускорения точек должны быть отложены в масштабе по их истинным направлениям

Рассмотрим случаи, когда ускорения точек плоской фигуры параллельны. Положение мгновенного центра ускорений в этом случае определяется на основании того, что:

1) модули ускорений точек пропорциональны длинам отрезков, соединяющих точки с мгновенным центром ускорений, т. е.

$$\frac{w_A}{w_B} = \frac{QA}{QB};$$

2) ускорения точек составляют с отрезками, соединяющими точки с мгновенным центром ускорений, один и тот же угол (§ 109)

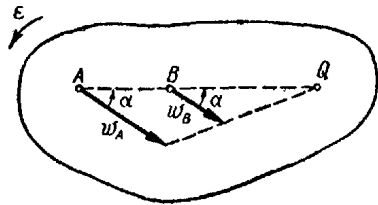
$$\alpha = \arctg \frac{\epsilon}{\omega^2}.$$


Рис. 298.

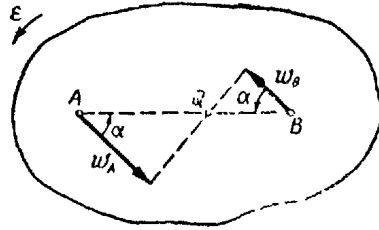


Рис. 299.

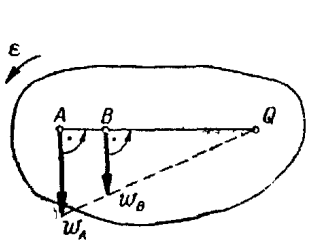


Рис. 300.

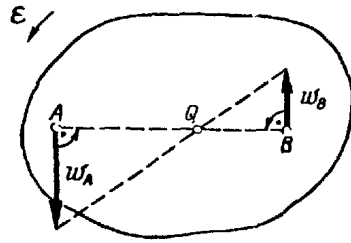


Рис. 301.

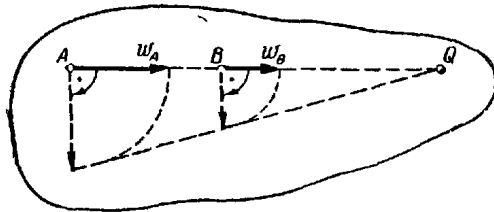


Рис. 302.

На рис. 298 и 299 выполнено построение для случая $0 < \alpha < 90^\circ$, т. е. $\omega \neq 0$, $\epsilon \neq 0$.

Рис. 300 и рис. 301 соответствуют случаю $\alpha = 90^\circ$,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\epsilon}{\omega^2} = \infty, \quad \omega = 0, \quad \epsilon \neq 0.$$

На рис. 302 и рис. 303 построен мгновенный центр ускорений для случая:

$$\alpha = 0, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\epsilon}{\omega^2} = 0, \quad \epsilon = 0, \quad \omega \neq 0.$$

В случае $w_A = w_B$ (рис. 304) мгновенный центр ускорений находится в бесконечности, а ускорения всех точек плоской фигуры геометрически равны.

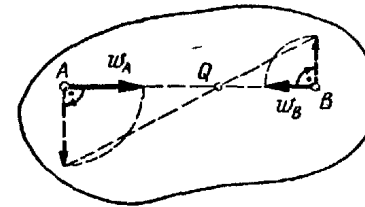


Рис. 303.

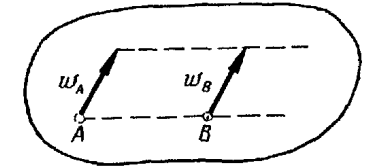


Рис. 304.

Действительно: $w_B = w_A + w_{AB}$, но $w_B = w_A$, а потому

$$w_{AB} = AB \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} = 0.$$

При $AB \neq 0$; $\epsilon = 0$; $\omega = 0$ и $AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}} = \infty$.

§ 111. Примеры на применение теоремы об ускорениях точек плоской фигуры и на определении положения мгновенного центра ускорений

Пример 76. Цилиндр радиусом $r = 40$ см катится по плоскости без скольжения. Скорость и ускорение точек его оси в данный момент:

$$v_C = 0,4 \text{ м/сек}, \quad w_C = 0,2 \text{ м/сек}^2.$$

Диск радиусом $R = 50$ см жестко соединен с цилиндром в сечении, где плоскость не препятствует его движению. Определить в данный момент времени ускорения концов двух диаметров диска: параллельного неподвижной плоскости и перпендикулярного к ней. Определить также положение мгновенного центра ускорения диска (рис. 305а).

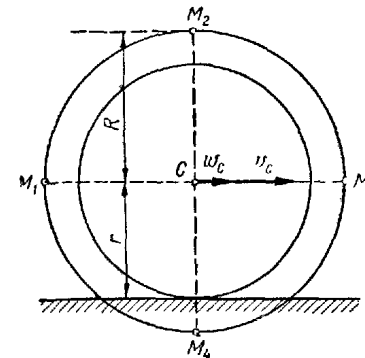


Рис. 305а

Решение. По условию данной задачи можно определить угловую скорость ω и угловое ускорение ϵ диска. Тогда ускорения точек M_1 , M_2 , M_3 , M_4 диска определяются согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры (§ 108) по ускорению центра w_C , угловой скорости ω и угловому ускорению ϵ диска.

а) Определяем ω и ϵ . Мгновенный центр скоростей диска P находится в точке соприкосновения поперечного сечения цилиндра с неподвижной плоскостью (рис. 305б).

Угловую скорость диска определяем согласно § 102:

$$\omega = \frac{v_C}{PC} = \frac{v_C}{r} = \frac{0,4}{0,4} = 1 \text{ сек}^{-1}.$$

Расстояние от центра диска C до P при движении не изменяется, а потому по формуле (91.8) получим

$$\varepsilon = \left| \frac{d\omega}{dt} \right| = \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{v_C}{r} \right) \right| = \left| \frac{1}{r} \frac{dv_C}{dt} \right| = \frac{1}{r} \omega_C.$$

Подставляя числовые значения, находим

$$\varepsilon = \frac{\omega_C}{r} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5 \text{ сек}^{-2}.$$

Так как вращение диска ускоренное, то ε имеет такое же направление как и ω .

б) Определяем ускорения точек. Принимаем за полюс центр диска C , ускорение которого известно, и определяем ускорение каждой из четырех точек M по формуле (108.2):

$$\mathbf{w}_M = \mathbf{w}_C + \mathbf{w}_{CM}^B + \mathbf{w}_{CM}^U.$$

Модуль вращательного ускорения точек M во вращении вокруг полюса C определяется по формуле:

$$\begin{aligned} \omega_{CM}^B &= \varepsilon \cdot CM = \varepsilon R = \\ &= 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 \text{ м/сек}^2. \end{aligned}$$

Модуль центростремительного ускорения точек M во вращении вокруг полюса C

$$\begin{aligned} \omega_{CM}^U &= \omega^2 \cdot CM = \omega^2 \cdot R = \\ &= 1^2 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м/сек}^2. \end{aligned}$$

Откладываем (рис. 305б) в каждой точке M векторы \mathbf{w}_C , \mathbf{w}_{CM}^B , \mathbf{w}_{CM}^U , складывая одновременно векторы, направленные по одной прямой. Вектор \mathbf{w}_C откладываем в каждой точке по его направлению; \mathbf{w}_{CM}^B направляем перпендикулярно отрезкам CM в сторону ε , т. е. по направлению движения часовой стрелки; \mathbf{w}_{CM}^U направляем к полюсу C .

Ускорение каждой точки определяется диагональю прямоугольника, сторонами которого являются сумма двух векторов, оказавшихся на одной прямой, и третий вектор, перпендикулярный к ним:

$$\omega_1 = \sqrt{(\omega_C + \omega_{CM}^U)^2 + \omega_{CM}^B} = \sqrt{(0,2 + 0,5)^2 + 0,25^2} = 0,74 \text{ м/сек}^2;$$

$$\omega_2 = \sqrt{(\omega_C + \omega_{CM}^B)^2 + \omega_{CM}^U} = \sqrt{(0,2 + 0,25)^2 + 0,5^2} = 0,67 \text{ м/сек}^2;$$

$$\omega_3 = \sqrt{(\omega_{CM}^U - \omega_C)^2 + \omega_{CM}^B} = \sqrt{(0,5 - 0,2)^2 + 0,25^2} = 0,39 \text{ м/сек}^2;$$

$$\omega_4 = \sqrt{(\omega_{CM}^B - \omega_C)^2 + \omega_{CM}^U} = \sqrt{(0,25 - 0,2)^2 + 0,5^2} \approx 0,50 \text{ м/сек}^2.$$

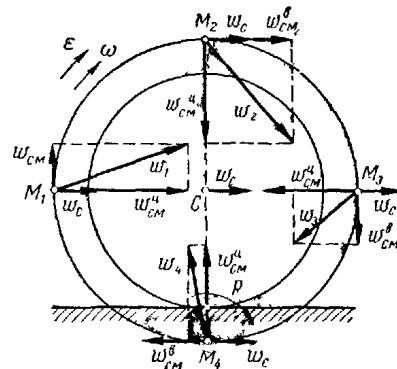


Рис. 305б.

в) Определяем положение мгновенного центра ускорений. Приняв точку C за полюс, находим согласно § 109 угол α и расстояние CQ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{0,5}{1^2} = 0,5;$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = 26^\circ 34';$$

$$CQ = \frac{\omega_C}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{0,2}{\sqrt{0,5^2 + 1^4}} = 0,179 \text{ м}.$$

Откладываем угол α от ускорения \mathbf{w}_C по направлению ε , т. е. по направлению движения часовой стрелки. На построенной полупрямой откладываем отрезок CQ и получаем мгновенный центр ускорений Q (рис. 305в).

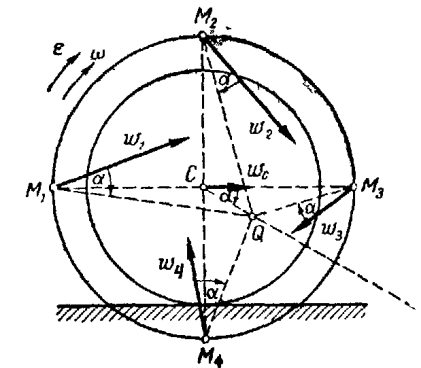


Рис. 305в.

Если соединить точки M_1 , M_2 , M_3 и M_4 с точкой Q , то ускорения этих точек составят с отрезками QM один и тот же угол $\alpha = 26^\circ 34'$. Направление отсчета угла α от ускорения \mathbf{w} к отрезку QM совпадает с направлением ε . Ускорения точек пропорциональны расстояниям QM , что видно по рис. 305в, на котором ускорения точек M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , C отложены в масштабе по их истинным направлениям. Определив

отрезки QM , можно было бы вычислить ускорения точек по формулам § 109, но в рассмотренном примере этот способ решения требует больших вычислений, чем выполненное решение.

Необходимо отметить, что при определении ускорений точек плоской фигуры пользоваться мгновенным центром ускорений целесообразно только в том случае, когда положение мгновенного центра ускорений находится легко, т. е. тогда, когда его применение приводит к упрощению (рис. 291), а не к усложнению вычислений.

Пример 77. Кривошип OA вращается вокруг оси O и приводит в движение колесо II , соединенное с ним в точке A шарнирно. Колесо II катится без скольжения внутри неподвижного колеса I . Радиусы колес: $r_I = 50 \text{ см}$, $r_{II} = 20 \text{ см}$. Модули угловой скорости и углового ускорения кривошипа в некоторый момент времени равны:

$$\omega_{OA} = 1 \text{ сек}^{-1},$$

$$\varepsilon_{OA} = 0,5 \text{ сек}^{-2}.$$

Определить ускорения точек M_1 , M_2 , M_3 , M_4 колеса II в этот момент (рис. 306а).

Решение. Так как заданы ω_{OA} и ϵ_{OA} кривошипа, то можно определить скорость и ускорение точки A и при нахождении ускорений точек M_1, M_2, M_3, M_4 принять точку A колеса II за полюс.

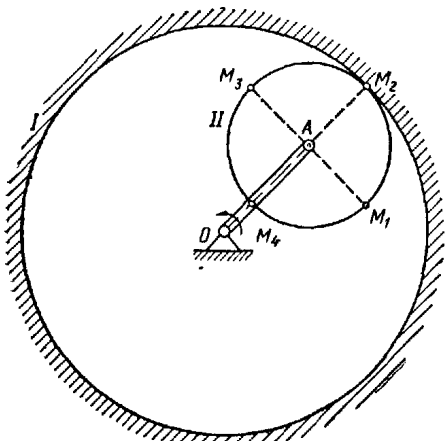


Рис. 306а.

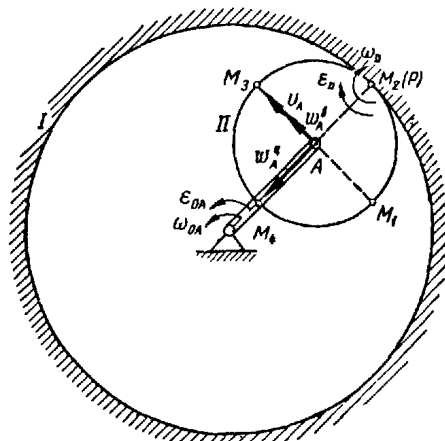


Рис. 306б.

а) Определение скорости и ускорения точки A и угловой скорости и углового ускорения колеса II . Точка A движется ускоренно по окружности с центром O и радиусом $r_I - r_{II}$. Модуль ее вращательной скорости

$$v_A = \omega_{OA}(r_I - r_{II}) = 1 \cdot 30 = 30 \text{ см/сек};$$

ее ускорение (рис. 306б)

$$w_A = w_A^b + w_A^u,$$

$$w_A^b = \epsilon_{OA}(r_I - r_{II}) = 0,5 \cdot 30 = 15 \text{ см/сек}^2,$$

$$w_A^u = \omega_{OA}^2(r_I - r_{II}) = 1^2 \cdot 30 = 30 \text{ см/сек}^2.$$

Зная, что мгновенный центр скоростей колеса II находится в точке M_2 ($AP = AM_2$), определяем его угловую скорость в рассматриваемый момент времени:

$$\omega_{II} = \frac{v_A}{AP} = \frac{\omega_{OA}(r_I - r_{II})}{r_{II}} = \frac{1 \cdot 30}{20} = 1,5 \text{ сек}^{-1}.$$

Получаем формулу для вычисления ϵ_{II} , пользуясь формулой (91.8):

$$\epsilon_{II} = \left| \frac{d\omega_{II}}{dt} \right| = \left| \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega_{OA}(r_I - r_{II})}{r_{II}} \right] \right| = \frac{r_I - r_{II}}{r_{II}} \cdot \left| \frac{d\omega_{OA}}{dt} \right| = \frac{r_I - r_{II}}{r_{II}} \cdot \epsilon_{OA}.$$

Модуль углового ускорения колеса II в рассматриваемый момент времени

$$\epsilon_{II} = \frac{r_I - r_{II}}{r_{II}} \cdot \epsilon_{OA} = \frac{30}{20} \cdot 0,5 = 0,75 \text{ сек}^{-2}.$$

Направление ϵ_{II} совпадает с направлением ω_{II} , так как вращение ускоренное.

б) Определение ускорений точек M_1, M_2, M_3, M_4 . Согласно (108.1), приняв точку A за полюс, получим

$$w_M = w_A + w_{AM}^b + w_{AM}^u.$$

Здесь ускорение полюса имеет две следующие составляющие:

$$w_A = w_A^b + w_A^u.$$

Тогда ускорение точек M

$$w_M = w_A^b + w_A^u + w_{AM}^b + w_{AM}^u.$$

Определим вращательное и центростремительное ускорения точек M во вращении вокруг полюса A :

$$w_{AM}^b = \epsilon_{II} r_{II} = 0,75 \cdot 20 = 15 \text{ см/сек}^2;$$

$$w_{AM}^u = \omega_{II}^2 r_{II} = 1,5^2 \cdot 20 = 45 \text{ см/сек}^2.$$

Откладываем в каждой из точек M_1, M_2, M_3, M_4 все составляющие ускорения (рис. 306в). В каждой точке прежде всего откладываем составляющие ускорения полюса w_A^b и w_A^u .

Вращательные ускорения w_{AM}^b точек во вращении вокруг полюса A направляем перпендикулярно радиусам AM в сторону углового ускорения ϵ_{II} .

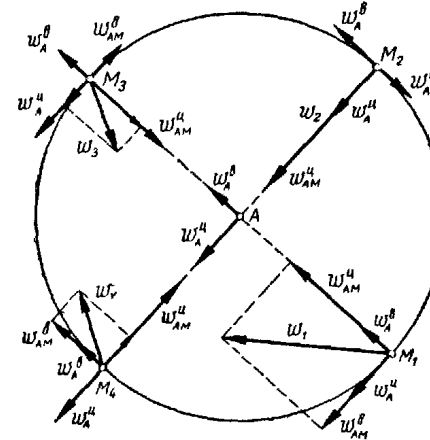


Рис. 306в.

Центростремительные ускорения w_{AM}^u точек во вращении вокруг полюса направляем к полюсу A .

Ускорения точек M_1, M_3, M_4 определяем как диагонали прямоугольников:

$$w_1 = \sqrt{(w_A^u + w_{AM}^b)^2 + (w_A^b + w_{AM}^u)^2} = \sqrt{(30 + 15)^2 + (15 + 45)^2} = 75 \text{ см/сек}^2,$$

$$w_3 = \sqrt{(w_A^u - w_{AM}^b)^2 + (w_A^b - w_{AM}^u)^2} = \sqrt{(30 - 15)^2 + (45 - 15)^2} = 33,5 \text{ см/сек}^2;$$

$$w_4 = \sqrt{(w_A^b + w_{AM}^b)^2 + (w_A^u - w_{AM}^u)^2} = \sqrt{(15 + 15)^2 + (45 - 30)^2} = 33,5 \text{ см/сек}^2;$$

Так как в точке M_2 $w_{AM}^b = -w_A^b$, то сумма этих векторов равна нулю:

$$w_2 = w_A^u + w_{AM}^u = 30 + 45 = 75 \text{ см/сек}^2.$$

Пример 78. Модули ускорений точек A и B — концов отрезка AB в данный момент времени равны $w_A = w_B = 10 \text{ см/сек}^2$, а их направления указаны на рис. 307, а. Определить положение мгновенного центра ускорений, а также модули угловой скорости ω и углового ускорения ϵ отрезка, если длина отрезка $AB = 20 \text{ см}$.

Решение. Построим мгновенный центр ускорений согласно случаю III (§ 110), приняв за полюс точку A .

Построив при точке B параллелограмм, соответствующий равенству $w_B = w_A + w_{AB}$, определим его углы (рис. 307, б). Так как $w_B = w_A$, то параллелограмм состоит из двух равносторонних треугольников.

Известно, что угол α отсчитывается от ускорения w_{AB} в направлении к отрезку AB .

В рассматриваемом примере $\alpha = 60^\circ$ и откладывается в направлении, обратном направлению движения часовой стрелки.

Откладывая по этому же направлению углы $\alpha = 60^\circ$ от ускорений w_A и w_B , получаем мгновенный центр ускорений отрезка Q в вершине равностороннего треугольника ABQ .

Чтобы найти ω и ϵ , разложим ускорение w_{AB} во вращении точки B вокруг полюса A на вращательное и центростремительное ускорения (рис. 307, в):

$$w_{AB} = w_{AB}^B + w_{AB}^H,$$

где

$$w_{AB}^B = AB \cdot \epsilon; \quad w_{AB}^H = AB \cdot \omega^2.$$

Из прямоугольника ускорений находим:

$$w_{AB}^B = w_{AB} \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8,66 \text{ см/сек}^2;$$

$$w_{AB}^H = w_{AB} \cos 60^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ см/сек}^2.$$

Определим ω и ϵ :

$$\epsilon = \frac{w_{AB}^B}{AB} = \frac{8,66}{20} = 0,43 \text{ сек}^{-2};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{w_{AB}^H}{AB}} = \sqrt{\frac{5}{20}} = 0,5 \text{ сек}^{-1}.$$

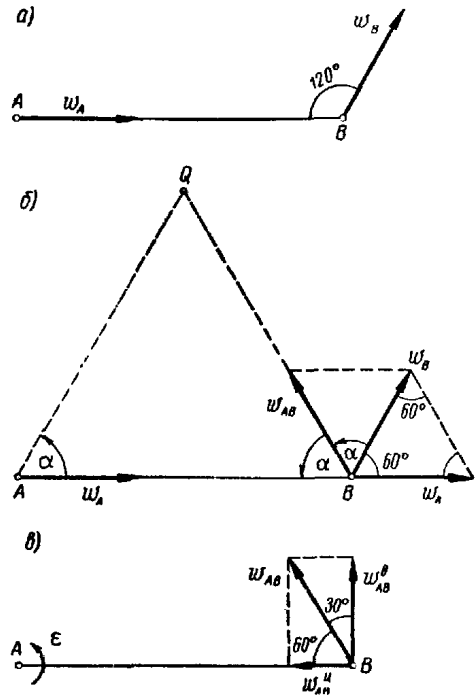


Рис. 307.

Направление углового ускорения ϵ совпадает с направлением угла α , направление ω определить невозможно.

Пример 79. Кривошип OA нецентрального кривошипно-шатунного механизма, изображенного на рис. 308, а, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{OA} = 10 \text{ сек}^{-1}$. Определить ускорения пальца кривошипа A , ползунка B , середины шатуна C и угловое ускорение шатуна AB в тот момент, когда кривошип OA перпендикулярен траектории движения ползунка, если $OA = 25 \text{ см}$, $OD = 5 \text{ см}$, $AB = 50 \text{ см}$ (рис. 308, а).

Решение. Кривошип OA вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_{OA} = 10 \text{ сек}^{-1}$, а потому (рис. 308, б, в):

$$v_A = OA \cdot \omega_{OA} = 25 \cdot 10 = 250 \text{ см/сек}^2;$$

$$w_A = w_A^H = OA \cdot \omega_{OA}^2 = 25 \cdot 100 = 2500 \text{ см/сек}^2.$$

В заданном положении механизма мгновенный центр скоростей шатуна AB находится в бесконечности, а потому скорости всех точек шатуна AB в этот момент геометрически равны (рис. 308, б): $v_A = v_B = v_C$.

Угловая скорость шатуна AB равна нулю:

$$\omega_{AB} = 0.$$

Ускорения точек B и C шатуна определим при помощи мгновенного центра ускорений шатуна Q_{AB} .

Для определения положения мгновенного центра ускорений находим величину угла α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\epsilon_{AB}}{\omega_{AB}^2} = \infty \quad \text{и} \quad \alpha = 90^\circ.$$

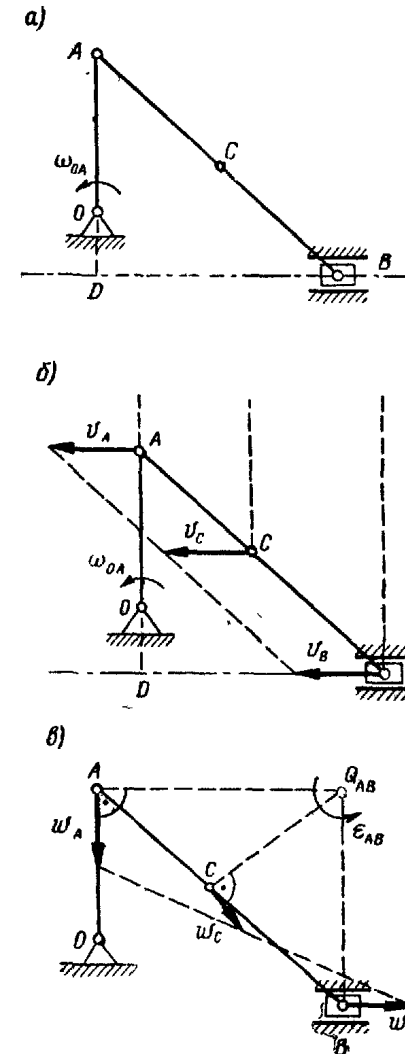


Рис. 308.

Так как ползунок B движется по прямой, то ускорение точки B направлено по этой прямой, а центростремительное ускорение пальца кривошипа A направлено по AO (рис. 308, в).

Точка пересечения перпендикуляров к направлениям ускорений точек A и B шатуна будет мгновенным центром ускорений Q_{AB} .

Модули ускорений точек B и C определяются из соотношений:

$$\frac{w_B}{w_A} = \frac{Q_{AB}^B}{Q_{AB}^A}; \quad w_B = w_A \cdot \frac{Q_{AB}^B}{Q_{AB}^A} = 2500 \cdot \frac{30}{40} = 1875 \text{ см/сек}^2;$$

$$\frac{w_C}{w_A} = \frac{Q_{AB}^C}{Q_{AB}^A}; \quad w_C = w_A \cdot \frac{Q_{AB}^C}{Q_{AB}^A} = 2500 \cdot \frac{25}{40} = 1562 \text{ см/сек}^2.$$

Модуль углового ускорения шатуна

$$\epsilon_{AB} = \frac{w_A}{Q_{AB}^A} = \frac{2500}{40} = 62,5 \text{ сек}^{-2}.$$

Направление ϵ указано на рис. 308, в.

§ 112. Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев плоского механизма

Для определения ускорений точек и угловых ускорений звеньев плоского механизма применяется теорема об ускорениях точек плоской фигуры и ее следствия. Имеются два основных случая определения

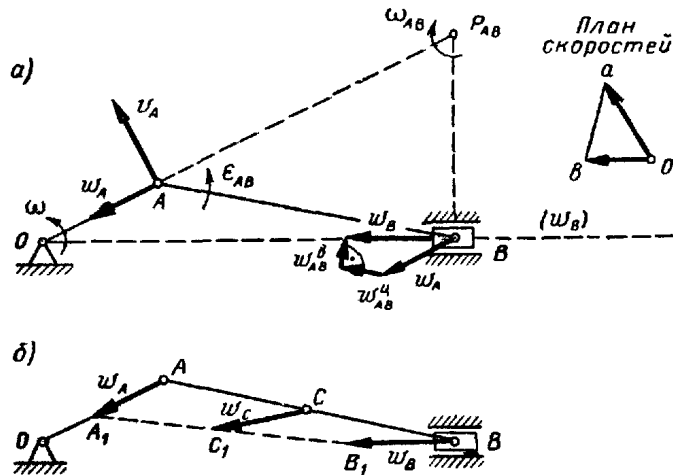


Рис. 309а, б.

ускорения точки звена механизма по ускорению другой точки этого звена, принимаемой за полюс.

Случай I. Пусть, например, требуется найти ускорение ползунка B кривошипно-шатунного механизма и угловое ускорение шатуна AB этого механизма (рис. 309, а), если известно, что кривошип OA вращается равномерно с угловой скоростью ω в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки.

Для решения этой задачи используются следующие данные:

1) модуль и направление ускорения w_A пальца кривошипа A

$$w_A = w_A^u = OA \cdot \omega^2;$$

2) прямая, по которой направлено ускорение ползунка B , движущегося прямолинейно;

3) угловая скорость ω_{AB} шатуна AB , которую легко определить по плану скоростей или применением мгновенного центра скоростей.

Зная скорость пальца A кривошипа v_A , модуль которой равен

$$v_A = OA \cdot \omega,$$

определим скорость v_B ползунка B по плану скоростей или при помощи мгновенного центра скоростей. После этого вычислим модуль угловой скорости шатуна AB :

$$\omega_{AB} = \frac{ab}{AB} \quad \text{или} \quad \omega_{AB} = \frac{v_A}{P_{AB}^A} = \frac{OA \cdot \omega}{P_{AB}^A}.$$

Приняв точку A шатуна за полюс, определим ускорение точки B по формуле (108.1):

$$w_B = w_A + w_{AB}^u + w_{AB}^b.$$

Центростремительное ускорение точки B , в ее вращательном движении вокруг полюса A , направлено по оси шатуна от точки B к точке A , а его модуль равен

$$w_{AB}^b = AB \cdot \omega_{AB}^2$$

или

$$w_{AB}^b = AB \cdot \left(\frac{ab}{AB}\right)^2 = \frac{(ab)^2}{AB}.$$

Отложив в точке B в соответствующем масштабе ускорение полюса w_A и приложив к его концу центростремительное ускорение точки B во вращательном движении вокруг полюса A , направленное параллельно BA от B к A , проведем из конца w_{AB}^b прямую, перпендикулярную BA , т. е. прямую, параллельную вращательному ускорению w_{AB}^b .

Точка пересечения этой прямой с прямой, по которой направлено ускорение ползунка B , определит недостающую вершину многоугольника ускорений. Это позволит определить графически модули ускорений w_B и w_{AB}^u .

Так как $w_{AB}^b = AB \cdot \epsilon_{AB}$, то, определив w_{AB}^b , найдем модуль углового ускорения звена AB по формуле:

$$\epsilon_{AB} = \frac{w_{AB}^b}{AB}.$$

Если отложить найденное ускорение w_{AB}^b из точки B , то его направление по отношению к полюсу A укажет направление углового ускорения шатуна ϵ_{AB} . На рис. 309, а направления ϵ_{AB} и ω_{AB} противоположны, т. е. шатун в данный момент вращается замедленно. Зная ускорения концов шатуна AB (рис. 309, б), можно определить графически ускорение любой точки шатуна.

Так, например, для определения ускорения точки C , середины шатуна, соединим концы ускорений точек A и B отрезком A_1B_1 и разделим его пополам точкой C_1 . Соединив точки C и C_1 , получим ускорение середины шатуна w_C .

Когда кривошип и шатун находятся на одной прямой (рис. 309в), то мгновенный центр скоростей шатуна P_{AB} совпадает с точкой B .

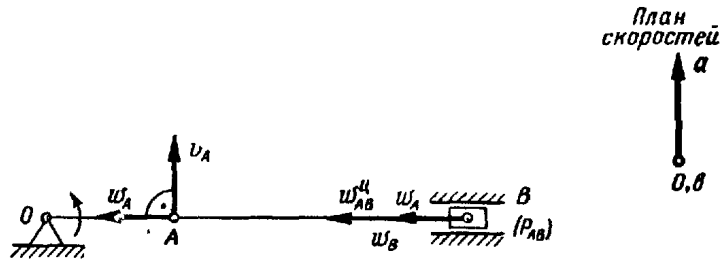


Рис. 309в.

план скоростей шатуна AB получает вид отрезка прямой и многоугольник ускорений в точке B обращается в отрезок прямой, так как направления ускорений w_A и w_{AB}^u совпадают.

В этом случае

$$\begin{aligned} w_{AB}^B &= 0; \quad \epsilon_{AB} = 0; \\ w_B &= w_A + w_{AB}^u. \end{aligned}$$

Случай II. Пусть, например, требуется определить ускорение точки B шатуна AB шарнирного четырехзвенника O_1ABO_2 , если известно, что кривошип O_1A вращается с постоянной угловой скоростью ω в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки (рис. 310, а). В этом случае прямая, по которой направлено ускорение точки B , не известна.

Для решения этой задачи используются следующие данные:

1) модуль и направление ускорения w_A точки A

$$w_A = w_A^u = OA \cdot \omega^2;$$

2) угловая скорость ω_{AB} шатуна AB ;

3) угловая скорость ω_{O_2B} балансира O_2B ;

4) траектория точки B .

Угловые скорости ω_{AB} и ω_{O_2B} определяются по плану скоростей или при помощи мгновенного центра скоростей. Их модули равны:

$$\omega_{AB} = \frac{ab}{AB} \quad \text{или} \quad \omega_{AB} = \frac{v_A}{P_{BA}A} = \frac{OA \cdot \omega}{P_{AB}A};$$

$$\omega_{O_2B} = \frac{ob}{O_2B} \quad \text{или} \quad \omega_{O_2B} = \frac{v_B}{O_2B}.$$

Так как точка B одновременно принадлежит шатуну AB и балансиру O_2B , то ускорение этой точки можно определить совокупностью двух построений.

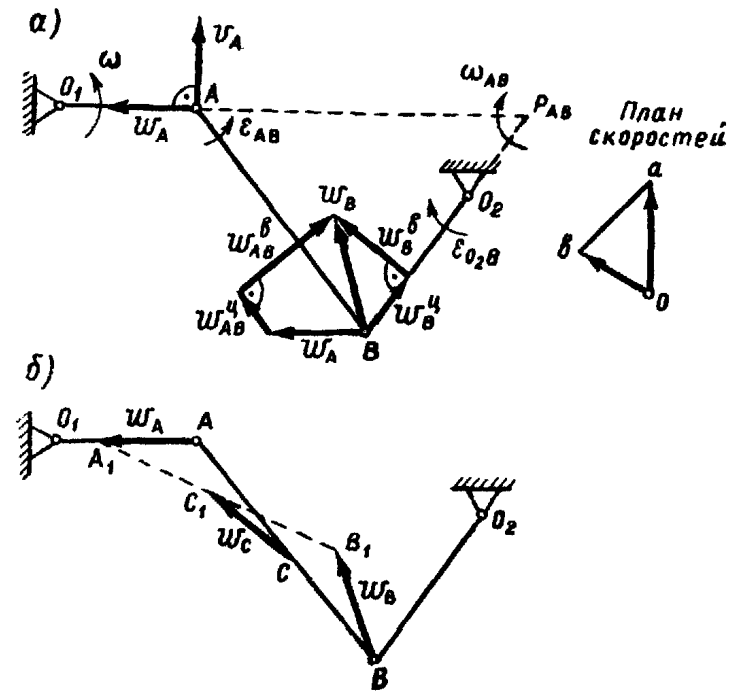


Рис. 310.

Рассматривая точку B как точку шатуна AB и принимая точку A за полюс, на основании (108.1) имеем:

$$w_B = w_A + w_{AB}^u + w_{AB}^B.$$

Центростремительное ускорение точки B в ее вращательном движении вокруг полюса A направлено по оси шатуна от точки B к точке A , а его модуль равен

$$w_{AB}^B = AB \cdot \omega_{AB}^2$$

или

$$w_{AB}^B = AB \left(\frac{ab}{AB} \right)^2 = \frac{(ab)^2}{AB}.$$

Отложив в точке B в соответствующем масштабе ускорение полюса w_A и приложив к его концу центростремительное ускорение точки B во вращательном движении вокруг полюса A , направленное

параллельно BA от B к A , проводим из конца w_{AB}^u прямую, перпендикулярную BA , т. е. прямую, параллельную вращательному ускорению w_{AB}^B . Определить модули вращательного ускорения w_{AB}^B и ускорения w_B точки B из этого построения невозможно, так как направление ускорения точки B не известно.

Чтобы определить ускорение точки B , выполняем дополнительное построение, рассматривая точку B как точку балансира O_2B , вращающегося вокруг оси O_2 . Тогда

$$w_B = w_B^u + w_B^B.$$

Модуль центростремительного ускорения точки B в ее вращательном движении с балансиром O_2B вокруг оси O_2 равен:

$$w_B^u = O_2B \cdot \omega_{O_2B}^2 \quad \text{или} \quad w_B^u = \frac{(ob)^2}{O_2B}.$$

Отложив в точке B в том же масштабе центростремительное ускорение точки B в ее вращательном движении вокруг оси O_2 по направлению BO_2 от B к O_2 , проводим из конца w_B^u прямую, перпендикулярную к O_2B , т. е. прямую, параллельную вращательному ускорению w_B^B .

Точка пересечения этой прямой с прямой, проведенной из конца w_{AB}^u перпендикулярно направлению BA , определит конец ускорения w_B , а также позволит определить w_{AB}^B и w_B^B графически.

Так как $w_{AB}^B = AB \cdot \epsilon_{AB}$, а $w_B^B = O_2B \cdot \epsilon_{O_2B}$, то, определив графически w_{AB}^B и w_B^B , находим модули угловых ускорений шатуна AB и балансира O_2B по следующим формулам:

$$\epsilon_{AB} = \frac{w_{AB}^B}{AB} \quad \text{и} \quad \epsilon_{O_2B} = \frac{w_B^B}{O_2B}.$$

Направления ускорения w_{AB}^B по отношению к точке A и ускорения w_B^B по отношению к центру O_2 указывают направления ϵ_{AB} и ϵ_{O_2B} . Ускорение середины шатуна определяется по ускорениям концов A и B согласно § 108: если $AC = CB$, то $A_1C_1 = C_1B_1$ (рис. 310, б).

При наличии большого числа звеньев механизма последовательное определение ускорений его точек и угловых ускорений звеньев графоаналитическим методом производится на основе двух рассмотренных случаев.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение твердого тела называется плоским?
2. Зависят ли поступательное перемещение плоской фигуры и ее поворот от выбора полюса?
3. Как определяется скорость любой точки плоской фигуры?
4. Покажите, что проекции скоростей точек неизменяемого отрезка на ось, совпадающую с этим отрезком, равны между собой.
5. Что представляет собой отрезок, соединяющий две вершины плана скоростей?

6. Какие минимальные данные необходимы для построения плана скоростей?

7. Какую точку плоской фигуры называют мгновенным центром скоростей и каковы основные случаи определения его положения?

8. Что представляет собой распределение скоростей точек плоской фигуры в данный момент?

9. Как построить центр поворота плоской фигуры, зная ее начальное и конечное положения?

10. Что представляют собой неподвижная и подвижная центронды и что происходит с центрондами при действительном движении плоской фигуры?

11. Как определяется ускорение любой точки плоской фигуры?

12. Почему проекция ускорения любой точки плоской фигуры на ось, проходящую через эту точку и полюс, не может быть больше проекции ускорения полюса на эту ось?

13. Какую точку плоской фигуры называют мгновенным центром ускорений и может ли мгновенный центр ускорений совпадать с мгновенным центром скоростей?

14. Перечислите известные Вам способы определения положения мгновенного центра ускорений.

15. Что представляет собой картина распределения ускорений точек плоской фигуры в данный момент времени в трех случаях:

$$1) \omega \neq 0, \quad \epsilon \neq 0,$$

$$2) \omega \neq 0, \quad \epsilon = 0,$$

$$3) \omega = 0, \quad \epsilon \neq 0?$$

16. Как производят определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев плоского механизма?

ГЛАВА XVI

СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 113. Эйлеравы углы. Уравнения сферического движения твердого тела.

Рассмотрим движение твердого тела, одна из точек которого во все время движения остается неподвижной. При таком движении все остальные точки тела движутся по сферическим поверхностям, центры которых совпадают с неподвижной точкой. По этой причине рассматриваемое движение тела называют *сферическим движением твердого тела*.

Примером сферического движения твердого тела может служить движение волчка, имеющего неподвижную точку O (рис. 311).

Для определения положения тела в каждый момент времени воспользуемся двумя системами осей координат: неподвижной системой $Oxuz$ с началом в неподвижной точке O и подвижной системой $O\xi\eta\zeta$, неизменно связанной с твердым телом, с началом в той же неподвижной точке O .

Обозначим OJ линию пересечения неподвижной плоскости xOy и подвижной плоскости $\xi O\eta$, называемую *линией узлов*.

Отметим углы:

$$\angle(x, J) = \psi, \quad \angle(z, \zeta) = \theta, \quad \angle(J, \xi) = \varphi.$$

Угол ψ лежит в плоскости xOy , перпендикулярной оси z . Плоскость угла θ перпендикулярна оси OJ , которая перпендикулярна одновременно осям z и ζ . Плоскость угла φ перпендикулярна оси ζ . Условимся считать углы ψ , θ , φ положительными в случае, если, смотря навстречу осям z , J , ζ , перпендикулярным плоскостям этих углов, можно видеть эти углы отложенными от осей x , z , J в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки.

Заданием углов ψ , θ , φ однозначно определяется положение подвижной системы осей ξ , η , ζ , неизменно связанной с твердым телом, а потому и положение самого тела.

Действительно, зная углы ψ , θ , φ , положение подвижной системы $O\xi\eta\zeta$ получаем следующим образом. Отложив от оси x угол ψ , найдем линию узлов. Отложим в перпендикулярной к ней плоскости от оси z угол θ , получаем ось ζ . В плоскости, проходящей через линию узлов перпендикулярно оси ζ , откладываем от линии узлов OJ угол φ и находим ось ξ .

Ось η строим под прямым углом к оси ξ , отложенным в сторону, противоположную движению часовой стрелки, если смотреть навстречу оси ζ .

Углы ψ , θ , φ называются *эйлеровыми углами*; угол ψ — *угол прецессии*, угол θ — *угол нутации*, угол φ — *угол собственного вращения*. Названия этих углов заимствованы из астрономии.

Так как положение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, определяется тремя эйлеровыми углами, т. е. тремя параметрами, то оно имеет три степени свободы.

При движении твердого тела, одна из точек которого остается неподвижной, углы ψ , θ , φ непрерывно изменяются во времени, являясь функциями времени t :

$$\left. \begin{aligned} \psi &= f_1(t), \\ \theta &= f_2(t), \\ \varphi &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (113.1)$$

Эти уравнения, однозначно определяющие сферическое движение тела, называются *уравнениями сферического движения твердого тела*.

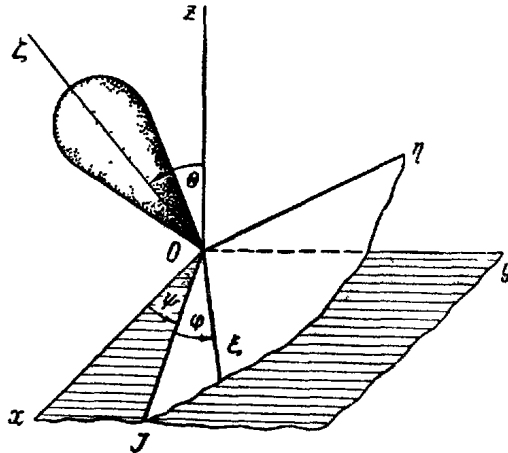


Рис. 311.

§ 114. Теорема о перемещении твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Угловая скорость тела

Положение твердого тела в пространстве определяется положением трех его точек, не лежащих на одной прямой. Действительно, две точки определяют некоторую ось, а третья точка — положение тела по отношению к этой оси. Следовательно, положение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, можно определить положением двух его точек, не лежащих на одной прямой с неподвижной точкой.

Докажем следующую теорему Эйлера — Даламбера:

Твердое тело, имеющее одну неподвижную точку, можно переместить из одного положения в любое другое поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку.

Для доказательства теоремы проведем сферическую поверхность с центром в неподвижной точке O (рис. 312).

Отметим положения двух точек тела A_1 и B_1 на этой поверхности, которые после перемещения тела займут положения A_2 и B_2 на той же поверхности. Выполним на проведенной поверхности ряд построений.

Проведем через эти точки дуги больших кругов A_1B_1 и A_2B_2 (дуги окружностей, полученных пересечением сферической поверхности плоскостями, проходящими через ее центр). Тогда положение тела в некоторый момент t_1 определится точками A_1 и B_1 , т. е. дугой A_1B_1 , а его положение в момент t_2 той же дугой в новом положении A_2B_2 .

Проведем далее дуги больших кругов A_1A_2 и B_1B_2 . Разделим эти дуги точками D и E пополам и проведем из этих точек дуги больших кругов, перпендикулярные дугам A_1A_2 и B_1B_2 , продолжив их до их пересечения в точке C . Соединяем точку C поверхности с ее центром O . Покажем, что тело можно переместить из первого положения во второе поворотом вокруг этой прямой. Соединим точку C с точками A_1 , B_1 , A_2 и B_2 дугами больших кругов A_1C , B_1C , A_2C , B_2C . Получившиеся сферические треугольники A_1CB_1 и A_2CB_2 равны по равенству трех сторон: $A_1C = A_2C$ и $B_1C = B_2C$, как стороны равнобедренных сферических треугольников A_1CA_2 и B_1CB_2 , а $A_1B_1 = A_2B_2$, как два положения одной и той же дуги.

Из равенства этих треугольников имеем

$$\angle A_2CB_2 = \angle A_1CB_1. \quad (114.1)$$

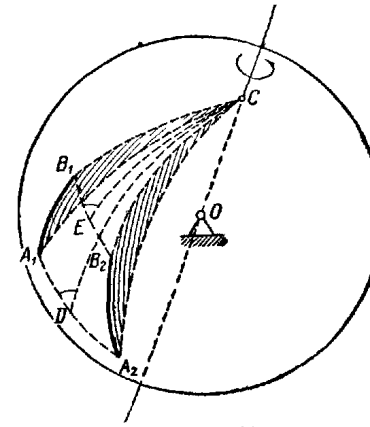


Рис. 312.

Следует отметить, что угол сферического треугольника определяется углом между касательными, проведенными в вершине угла к дугам, образующим этот угол (рис. 313).

Прибавляя к обеим частям равенства (114 1) $\angle A_1CB_2$, получаем:

$$\angle A_2CB_2 + \angle A_1CB_2 = \angle A_1CB_1 + \angle A_1CB_2$$

или

$$\angle A_1CA_2 = \angle B_1CB_2 = \alpha.$$

Этот результат показывает, что сферический отрезок A_1B_1 можно переместить в положение A_2B_2 поворотом вокруг неподвижной оси OC , т. е. что перемещение тела из первого положения во второе можно осуществить одним поворотом вокруг этой оси.

Рассмотрим малый промежуток времени $t_2 - t_1 = \Delta t$, которому соответствует поворот тела на угол $\Delta\alpha$. Уменьшая величину промежутка времени Δt , т. е. приближая дугу A_2B_2 к дуге A_1B_1 , получим ряд положений оси OC . Предельное положение этой оси Ω

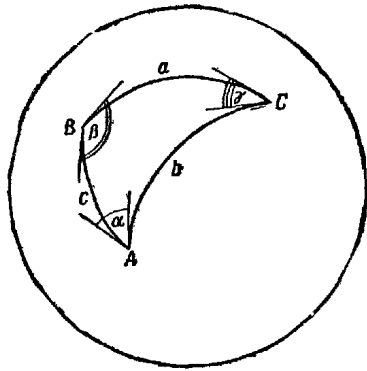


Рис. 313

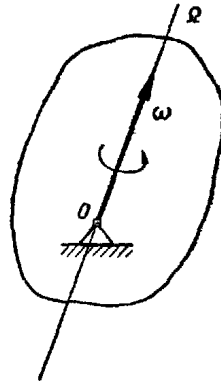


Рис. 314

при $\Delta t \rightarrow 0$ называется мгновенной осью вращения тела для данного момента t (рис. 314).

Предел, к которому стремится отношение $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$, когда Δt стремится к нулю, называется угловой скоростью твердого тела в момент t :

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}.$$

В случае сферического движения вектор угловой скорости тела в данный момент ω откладывается от неподвижной точки O по мгновенной оси в такую сторону, чтобы, смотря навстречу этому

вектору, видеть вращение тела происходящим против движения часовой стрелки.

Мгновенная ось представляет собой геометрическое место точек тела, скорости которых в данный момент равны нулю.

§ 115. Угловое ускорение тела при сферическом движении

При сферическом движении тела положение мгновенной оси вращения со временем изменяется, а следовательно, изменяется не только модуль, но и направление вектора угловой скорости тела.

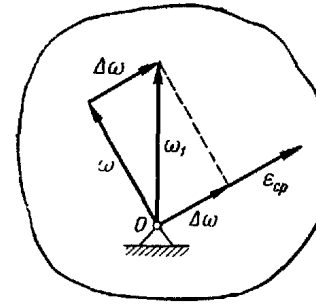


Рис. 315.

Допустим, что моменту времени t соответствует вектор угловой скорости ω , а моменту $t + \Delta t$ — вектор угловой скорости ω_1 (рис. 315). Тогда вектор $\Delta\omega$ представит собой приращение вектора угловой скорости за время Δt .

Отношение приращения вектора угловой скорости $\Delta\omega$ к времени Δt определяет вектор среднего углового ускорения:

$$\epsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Направление вектора $\epsilon_{\text{ср}}$ совпадает с направлением $\Delta\omega$.

Предел этого отношения при $\Delta t \rightarrow 0$ называется угловым ускорением тела в момент t :

$$\epsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Предел отношения приращения переменного вектора к соответствующему приращению скалярного аргумента есть векторная производная от этого вектора:

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt}, \quad (115.1)$$

т. е. вектор углового ускорения равен производной от вектора угловой скорости по времени.

Откладывая от неподвижной точки O векторы угловой скорости, соответствующие ряду последовательных моментов времени, и соединяя концы этих векторов, получим в пределе кривую, представляющую собой годограф вектора угловой скорости (рис. 316).

Определим скорость u движения точки A — конца вектора угловой скорости ω — по годографу в момент времени t . Радиусом-векто-

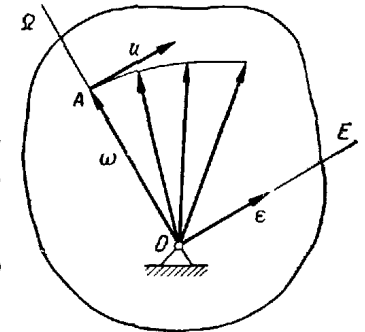


Рис. 316.

ром этой точки является вектор ω , а скорость точки равна производной от радиуса-вектора по времени:

$$\mathbf{u} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

Так как векторы $\boldsymbol{\varepsilon}$ и \mathbf{u} геометрически равны одной и той же величине, то они равны между собой:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{u}, \quad (115.2)$$

т. е. *угловое ускорение тела геометрически равно линейной скорости конца вектора угловой скорости.*

Вектор углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$, геометрически равный скорости \mathbf{u} , откладывается от неподвижной точки.

Прямая, по которой направлен вектор углового ускорения, называется *осью углового ускорения* и обозначается E .

Правило определения направления $\boldsymbol{\varepsilon}$ при вращении тела вокруг неподвижной оси (§ 94) является частным случаем общего правила, соответствующего сферическому движению. При вращении тела вокруг неподвижной оси годографом угловой скорости является прямая, совпадающая с осью вращения. При ускоренном вращении линейная скорость \mathbf{u} конца вектора $\boldsymbol{\omega}$ направлена по этой оси так же, как и вектор $\boldsymbol{\omega}$, при замедленном — противоположно $\boldsymbol{\omega}$. Направление вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ совпадает с направлением скорости \mathbf{u} .

§ 116. Скорости точек твердого тела при сферическом движении. Проекция скорости точки тела на оси декартовых координат

Скорости точек твердого тела, совершающего сферическое движение, в каждый момент времени определяются как их вращательные скорости при вращении вокруг мгновенной оси $O\Omega$ (рис. 317).

Мгновенная ось вращения представляет собой геометрическое место точек тела, скорости которых в данный момент равны нулю. Для определения мгновенной оси достаточно найти какую-либо точку C твердого тела, скорость которой в данный момент равна нулю. Тогда прямая, проходящая через точку C и неподвижную точку O , будет мгновенной осью вращения тела Ω , а угловая скорость вращения $\boldsymbol{\omega}$ будет направлена вдоль этой оси.

Зная положение мгновенной оси вращения и угловую скорость тела, можно определить скорость любой точки тела M как скорость этой точки во вращательном движении вокруг мгновенной оси по известной

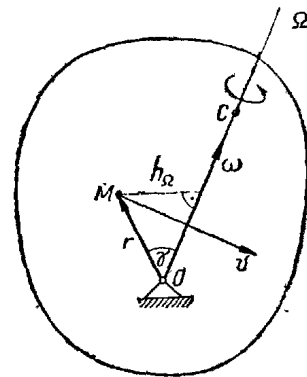


Рис. 317.

формуле (94.2):

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки, проведенный из неподвижной точки O . Модуль скорости точки определяется:

$$v = \omega r \cdot \sin \gamma = \omega h_{\Omega},$$

где h_{Ω} — расстояние точки от мгновенной оси вращения.

Таким образом, распределение скоростей точек тела в данный момент времени t при сферическом движении по отношению к мгновенной оси вращения не отличается от распределения скоростей при вращении тела вокруг неподвижной оси.

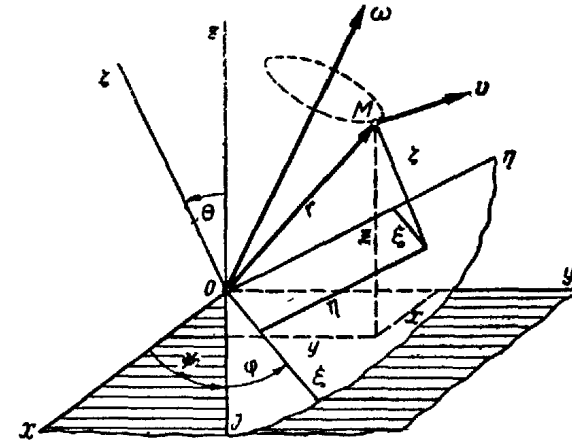


Рис. 318.

Проекция скорости точки на неподвижные оси декартовых координат определяются по формулам Эйлера (94.3):

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \right\}$$

Проекция скорости на подвижные оси декартовых координат определяются по аналогичным формулам (рис. 318):

$$\left. \begin{aligned} v_{\xi} &= \omega_{\eta} \zeta - \omega_{\zeta} \eta, \\ v_{\eta} &= \omega_{\zeta} \xi - \omega_{\xi} \zeta, \\ v_{\zeta} &= \omega_{\xi} \eta - \omega_{\eta} \xi. \end{aligned} \right\}$$

Рис. 319.

Формулы для вычисления проекций угловой скорости тела на неподвижные и подвижные оси декартовых координат по уравнениям сферического движения твердого тела получены в § 130.

Если положение мгновенной оси Ω уже установлено, то для нахождения угловой скорости ω достаточно знать скорость v_A какой-либо точки A , не лежащей на мгновенной оси (рис. 319).

Тогда, опустив из этой точки перпендикуляр AK на мгновенную ось Ω , получим $v_A = AK \cdot \omega$, откуда

$$\omega = \frac{v_A}{AK},$$

т. е. для определения модуля угловой скорости тела ω следует модуль скорости точки v_A разделить на расстояние от точки A до мгновенной оси вращения.

Пример 80. Угловая скорость вращения тела, совершающего сферическое движение, равна 14 сек^{-1} , а мгновенная ось в этот момент времени составляет с неподвижными осями декартовых координат следующие углы: $\alpha = \arccos \frac{3}{7}$; $\beta = \arccos \frac{6}{7}$; $\gamma = \arccos \frac{2}{7}$.

Для точки с координатами $x = 10 \text{ см}$; $y = 0$; $z = 20 \text{ см}$ найти модуль скорости v и ее проекции на оси v_x , v_y , v_z , а также расстояние h_2 от этой точки до мгновенной оси.

Решение. Проекции угловой скорости тела ω на неподвижные оси равны:

$$\omega_x = \omega \cos \alpha = 14 \cdot \frac{3}{7} = 6 \text{ сек}^{-1};$$

$$\omega_y = \omega \cos \beta = 14 \cdot \frac{6}{7} = 12 \text{ сек}^{-1};$$

$$\omega_z = \omega \cos \gamma = 14 \cdot \frac{2}{7} = 4 \text{ сек}^{-1}.$$

Проекция скорости точки M на неподвижные оси вычисляем по формулам Эйлера (94.3):

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y = 12 \cdot 20 = 240 \text{ см/сек};$$

$$v_y = \omega_z x - \omega_x z = 4 \cdot 10 - 6 \cdot 20 = -80 \text{ см/сек};$$

$$v_z = \omega_x y - \omega_y x = -12 \cdot 10 = -120 \text{ см/сек}.$$

Модуль скорости точки

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{240^2 + 80^2 + 120^2} = 280 \text{ см/сек}.$$

Расстояние от точки M до мгновенной оси:

$$h_2 = \frac{v}{\omega} = \frac{280}{14} = 20 \text{ см}.$$

§ 117. Аксоиды мгновенных осей

При сферическом движении твердого тела положение мгновенной оси со временем непрерывно изменяется и процесс движения тела можно рассматривать как непрерывный ряд вращений тела вокруг последовательно перемещающейся мгновенной оси, проходящей через

неподвижную точку O . Перемещаясь в неподвижном пространстве, мгновенная ось описывает некоторую коническую поверхность с вершиной в неподвижной точке O . Коническая поверхность I с вершиной в неподвижной точке, представляющая собой геометрическое место мгновенных осей в неподвижном пространстве, называется *неподвижным аксоидом* (рис. 320).

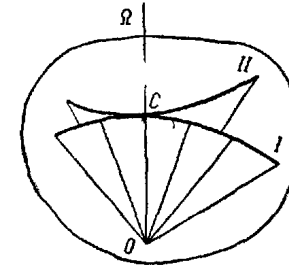


Рис. 320.

В движущемся теле можно установить геометрическое место тех прямых, которые будут последовательно совпадать с мгновенными осями вращения. Коническая поверхность II с вершиной в точке O , представляющая собой геометрическое место мгновенных осей в движущемся теле, называется *подвижным аксоидом*.

Подвижной и неподвижный аксоиды в любой момент времени касаются друг друга по прямой, которая является мгновенной осью вращения тела в этот момент.

При сферическом движении тела подвижной аксоид катится без скольжения по неподвижному аксоиду. Например, при качении конуса по неподвижной плоскости без скольжения его вершина O остается неподвижной, следовательно, конус совершает сферическое движение (рис. 321). Мгновенная ось совпадает с образующей $O\Omega$,

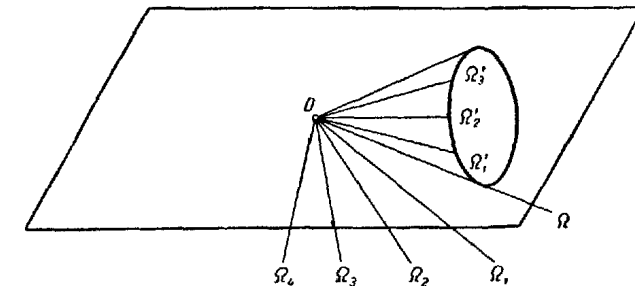


Рис. 321.

по которой конус соприкасается с плоскостью, так как скорости точек этой образующей в данный момент равны скоростям точек плоскости, т. е. равны нулю. При движении конуса мгновенная ось перемещается по неподвижной плоскости, т. е. эта плоскость является неподвижным аксоидом.

С мгновенными осями последовательно совпадают все образующие конуса, например $O\Omega'_1$ совпадает с $O\Omega_1$, $O\Omega'_2$ с $O\Omega_2$ и т. д., т. е. боковая поверхность катящегося конуса является его подвижным аксоидом.

Приравняв нулю проекции скорости точки на неподвижные и подвижные оси декартовых координат (§ 116), получаем уравнения

мгновенной оси, отнесенные к неподвижной системе осей $Oxyz$ и к подвижной системе $O\xi\eta\zeta$.

Уравнения мгновенной оси в неподвижной системе осей:

$$\left. \begin{aligned} \omega_y z - \omega_z y &= 0, \\ \omega_z x - \omega_x z &= 0, \\ \omega_x y - \omega_y x &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ или } \frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \quad (117.1)$$

Здесь x, y, z — координаты точек мгновенной оси.

Уравнения мгновенной оси в подвижной системе осей:

$$\left. \begin{aligned} \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta &= 0, \\ \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta &= 0, \\ \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ или } \frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta}. \quad (117.2)$$

Здесь ξ, η, ζ — координаты точек мгновенной оси.

Исключая время из уравнения (117.1), получаем уравнение неподвижного аксоида, а исключая время из уравнения (117.2), получаем уравнение подвижного аксоида.

§ 118. Ускорения точек твердого тела при сферическом движении

Для вычисления ускорения какой-либо точки тела при сферическом движении воспользуемся векторным выражением скорости этой точки (§ 116):

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Тогда

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

но

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{а} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Подставляя эти значения, получаем

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \quad (118.1)$$

или

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (118.2)$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} = \mathbf{w}_E^B$ — вращательное ускорение точки.

$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}_2^{oc}$ — осеостремительное (центроостремительное) ускорение точки.

Таким образом,

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_E^B + \mathbf{w}_2^{oc}. \quad (118.3)$$

Это равенство выражает теорему Ривальса об ускорении точки тела, совершающего сферическое движение, которая формулируется так:

Ускорение любой точки твердого тела при сферическом движении определяется как геометрическая сумма ее вращательного и осеостремительного ускорений (рис. 322).

Вектор вращательного ускорения точки $\mathbf{w}_E^B = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через вектор углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ и радиус-вектор точки \mathbf{r} , в ту сторону, откуда поворот вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ к вектору \mathbf{r} на наименьший угол виден происходящим против движения часовой стрелки.

Модуль вращательного ускорения

$$w_E^B = \varepsilon r \sin(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}) = h_E \varepsilon, \quad (118.4)$$

где $h_E = MK_1$ — расстояние от точки M до оси углового ускорения E .

Вектор осеостремительного ускорения $\mathbf{w}_2^{oc} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ направлен перпендикулярно векторам угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и линейной скорости точки \mathbf{v} , т. е. по перпендикуляру, опущенному из точки M на мгновенную ось Ω , в ту сторону, откуда

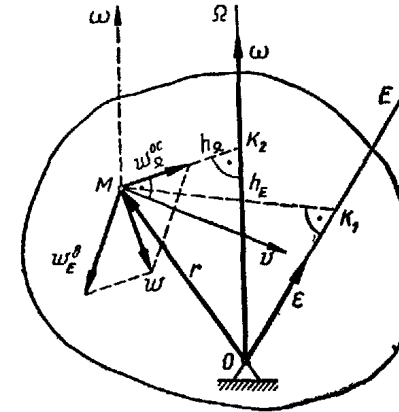


Рис. 322.

поворот вектора $\boldsymbol{\omega}$, условно отложенного в точке M к вектору \mathbf{v} на наименьший угол, виден происходящим против движения часовой стрелки.

Модуль осеостремительного ускорения

$$w_2^{oc} = \omega v \sin(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) = \omega v = h_2 \omega^2, \quad (118.5)$$

где $h_2 = MK_2$ — расстояние от точки M до мгновенной оси Ω .

Модуль ускорения точки как диагонали параллелограмма ускорений можно определить по формуле:

$$w = \sqrt{(w_E^B)^2 + (w_2^{oc})^2 + 2w_E^B w_2^{oc} \cos(\mathbf{w}_E^B, \mathbf{w}_2^{oc})}$$

или

$$w = \sqrt{h_E^2 \varepsilon^2 + h_2^2 \omega^4 + 2h_E h_2 \varepsilon \omega^2 \cos(\mathbf{w}_E^B, \mathbf{w}_2^{oc})}. \quad (118.6)$$

Из этого выражения можно получить формулу ускорения точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (92.4).

При вращении тела вокруг неподвижной оси векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ направлены вдоль оси вращения, а потому $h_E = h_2 = R$; $\mathbf{w}_E^B \perp \mathbf{w}_2^{oc}$; тогда

$$w = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

При сферическом движении тела, так же как и при вращении вокруг неподвижной оси, осеостремительное ускорение точки w_{Ω}^{oc} направлено по перпендикуляру, опущенному из точки на ось вращения (мгновенную ось Ω).

Вращательное ускорение точки при сферическом движении тела w_E^B определяется относительно оси углового ускорения E и направлено перпендикулярно плоскости, проходящей через вектор углового ускорения ε и радиус-вектор r (перпендикулярно h_E), т. е. $w_E^B \perp \varepsilon$ и $w_E^B \perp h_E$. Следовательно, направление w_E^B не совпадает с направлением скорости точки v .

Вращательное и осеостремительное ускорения точки w_E^B и w_{Ω}^{oc} при сферическом движении не следует смешивать с ее касательным и нормальным ускорениями w_{τ} и w_n .

Пример 81. Конус с углом при вершине $2\alpha = 60^\circ$ и радиусом основания $r = 20$ см катится по неподвижной горизонтальной плоскости без скольжения. Скорость центра основания $v_C = 60$ см/сек постоянна.

Определить:

- 1) угловую скорость конуса ω ;
- 2) угловое ускорение конуса ε ;
- 3) скорости наименьшей и наибольшей точек основания v_A и v_B ;
- 4) ускорения этих же точек w_A и w_B (рис. 323, а).

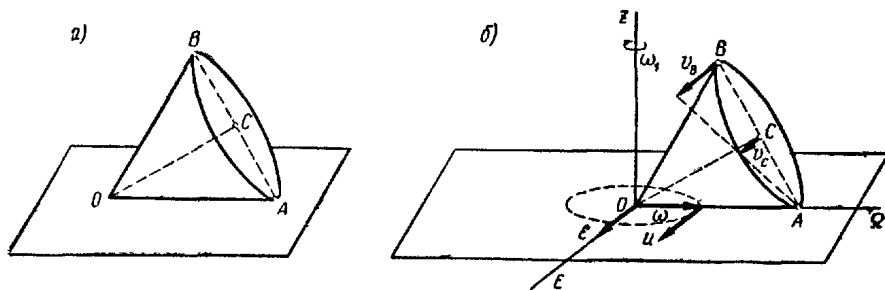


Рис. 323а, б.

Решение. 1. Определение угловой скорости тела. Движение катящегося конуса является сферическим, так как его вершина O остается неподвижной. Это движение в каждый момент времени представляет собой вращение вокруг мгновенной оси.

Мгновенная ось конуса Ω совпадает с образующей OA , по которой конус соприкасается с неподвижной плоскостью, так как скорости точек этой образующей равны нулю (рис. 323, б и в).

Модуль угловой скорости вращения конуса вокруг мгновенной оси определяем по заданной скорости точки C . Находим расстояние от точки C до мгновенной оси (рис. 323в):

$$CK = CA \cos 30^\circ = r \cos 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 17,32 \text{ см.}$$

Вычисляем угловую скорость:

$$\omega = \frac{v_C}{CK} = \frac{60}{10\sqrt{3}} = 3,46 \text{ сек}^{-1}.$$

Руководствуясь направлением скорости v_C , откладываем от точки O по мгновенной оси Ω вектор угловой скорости ω так, чтобы смотря ему навстречу, видеть вращение конуса вокруг этой оси происходящим против движения часовой стрелки.

2. Определение углового ускорения тела. Для определения углового ускорения ε необходимо построить годограф угловой скорости ω . При качении конуса по горизонтальной плоскости вектор ω перемещается в этой плоскости, поворачиваясь вокруг вертикальной оси z . Так как модуль его не изменяется, то конец вектора ω описывает окружность в горизонтальной плоскости.

Вектор ε геометрически равен скорости u конца вектора ω (115.2). В данном случае скорость u является вращательной вокруг оси z . Угловая скорость этого вращения ω_1 определяется как угловая скорость вращения оси конуса OC вокруг оси z . Чтобы определить ее модуль, находим расстояние от точки C до оси z :

$$CL = OC \cos 30^\circ = OA \cos 30^\circ \cos 30^\circ = 2r \cos^2 30^\circ = 40 \cdot \frac{3}{4} = 30 \text{ см.}$$

Определяем ω_1 :

$$\omega_1 = \frac{v_C}{CL} = \frac{60}{30} = 2 \text{ сек}^{-1}.$$

Скорость u находим как вращательную скорость точки — конца вектора угловой скорости ω , при вращении вокруг оси Oz :

$$u = \omega_1 \omega = 2 \cdot 2 \sqrt{3} = 6,93 \text{ сек}^{-2}.$$

Скорость u направлена по касательной к годографу ω в точке, совпадающей с концом ω в рассматриваемый момент времени.

Угловое ускорение $\varepsilon = u$. Его модуль $\varepsilon = u = 6,93 \text{ сек}^{-2}$.

Вектор ε отложен от неподвижной точки по направлению скорости u , т. е. он лежит в горизонтальной плоскости и перпендикулярен ω (рис. 323, б).

3. Определение скоростей точек тела. Скорость точки A , лежащей на мгновенной оси вращения, равна нулю:

$$v_A = 0.$$

Скорость точки B определяем как вращательную вокруг мгновенной оси (§ 116):

$$BK_1 = 2CK = 20\sqrt{3} \text{ см.}$$

$$v_B = \omega \cdot BK_1 = 2\sqrt{3} \cdot 20\sqrt{3} = 120 \text{ см/сек} \left(\frac{v_B}{v_C} = \frac{BK_1}{CK} = 2 \right).$$

Скорость v_B , так же как и v_C , направлена перпендикулярно плоскости ΩOz .

4. Определение ускорений точек тела. Ускорение точки тела определяем как геометрическую сумму осестремительного ускорения $w_{\Omega B}^{oc}$ во вращении тела вокруг мгновенной оси Ω и вращательного ускорения w_{EB}^B относительно оси углового ускорения E по формуле (118.3):

$$w_B = w_{\Omega B}^{oc} + w_{EB}^B;$$

$$w_{\Omega B}^{oc} = \omega^2 \cdot BK_1 = (2\sqrt{3})^2 \cdot 20\sqrt{3} = 415,7 \text{ см/сек}^2,$$

$w_{\Omega B}^{oc}$ направлено по перпендикуляру BK_1 , опущенному из точки на мгновенную ось Ω (рис. 323в).

Для определения w_{EB}^B опускаем из точки B перпендикуляр на ось E углового ускорения, который совпадает с отрезком $BO = 2r$.

$$w_{EB}^B = \varepsilon \cdot BO = \\ = 4\sqrt{3} \cdot 40 = 277,1 \text{ см/сек}^2.$$

Направляем w_{EB}^B перпендикулярно OB в плоскости, перпендикулярной ε (ΩOz) так, чтобы, смотря навстречу ε , видеть w_{EB}^B , направленным противоположно движению часовой стрелки (рис. 323в).

Определяем модуль w_B как длину диагонали параллелограмма:

$$w_B = \sqrt{(w_{EB}^B)^2 + (w_{\Omega B}^{oc})^2 + 2w_{EB}^B w_{\Omega B}^{oc} \cos 120^\circ} = \\ = \sqrt{160^2 \cdot 3 + 240^2 \cdot 3 - 2 \cdot 160 \cdot 240 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}} = 80\sqrt{3 \cdot 7} = 366 \text{ см/сек}^2.$$

В точке A , лежащей на мгновенной оси вращения, осестремительное ускорение равно нулю: $w_{\Omega A}^{oc} = 0$. Определяем модуль вращательного ускорения точки A :

$$w_{EA}^B = \varepsilon \cdot AO = 4\sqrt{3} \cdot 40 = 277,1 \text{ см/сек}^2.$$

Направляем w_{EA}^B перпендикулярно OA в плоскости ΩOz в соответствующую сторону (рис. 323в):

$$w_A = w_{EA}^B = 277,1 \text{ см/сек}^2.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какими параметрами определяется положение твердого тела, одна из точек которого неподвижна?

2. Как формулируется теорема Эйлера-Даламбера о перемещении твердого тела, имеющего одну неподвижную точку?

3. Что называют мгновенной осью вращения твердого тела с одной неподвижной точкой и каковы уравнения мгновенной оси в неподвижной и подвижной системах осей декартовых координат?

4. Что представляют собой неподвижный и подвижный аксоиды мгновенных осей при сферическом движении и что происходит с аксоидами при действительном движении тела?

5. Как определяются модуль и направление углового ускорения тела при сферическом движении?

6. Почему направления векторов углового ускорения и угловой скорости тела при сферическом движении не совпадают?

7. Как определяются скорости точек тела при сферическом движении?

8. Какие модули и направления имеют составляющие ускорения точки тела при сферическом движении?

9. Почему направления векторов вращательной скорости и вращательного ускорения при сферическом движении тела не совпадают?

ГЛАВА XVII

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 119. Разложение движения свободного твердого тела на поступательное движение вместе с полюсом и сферическое движение вокруг полюса. Уравнения движения свободного твердого тела

Положение свободного твердого тела в пространстве однозначно определяется положением трех его точек, не лежащих на одной прямой. Соединяя эти точки между собой прямыми, получаем треугольник.

Движение твердого тела в пространстве можно изучить как движение треугольника, определяющего его положение

Предположим, что треугольник ABC определяет положение некоторого тела. Рассмотрим перемещение треугольника ABC в новое положение $A_1B_1C_1$.

Осуществим это перемещение как совокупность двух перемещений. Для этого соединим одну из вершин, например A , с ее новым положением A_1 . Затем проведем отрезки BB' и CC' , равные и параллельные отрезку AA_1 (рис. 324, а).

Соединив между собой прямыми точки A_1, B', C' , получим треугольник $A_1B'C'$, стороны которого равны и параллельны сторонам треугольника ABC как противоположные стороны параллелограммов. Треугольник $A_1B'C'$ представляет собой новое положение треугольника ABC после его поступательного перемещения вместе с точкой A , принятой за полюс.

Согласно теореме Эйлера — Даламбера для перемещения треугольника из положения $A_1B'C'$ в положение $A_1B_1C_1$ произведем поворот треугольника на некоторый угол вокруг оси, проходящей через точку A_1 , которая не участвует в перемещении.

Таким образом, установлено, что всякое перемещение свободного твердого тела из одного положения в другое можно осуществить

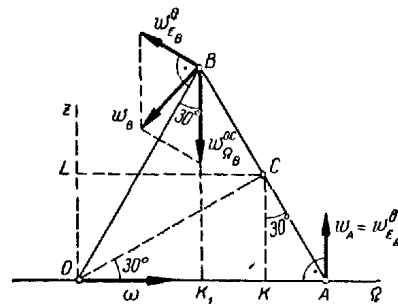


Рис 323в.

совокупностью двух перемещений: поступательного вместе с точкой, принятой за полюс, и поворота тела вокруг некоторой оси, проходящей через полюс.

На рис. 324, а и б показано, что результирующее перемещение тела не зависит от последовательности, в которой осуществляются составляющие перемещения. Перемещение треугольника из положения ABC в положение $A_1B_1C_1$ (рис. 324, б) можно осуществить путем

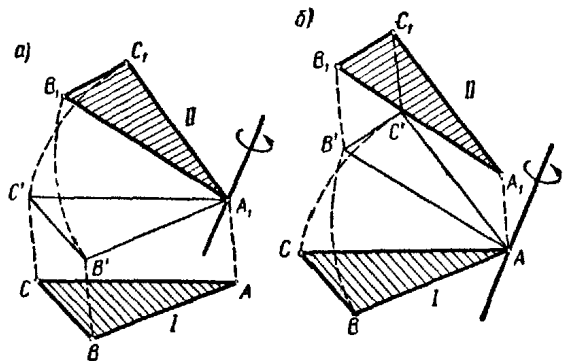


Рис. 324.

поворота его вокруг оси, проходящей через точку A , до положения $AB'C'$, в первую очередь, и поступательного перемещения вместе с полюсом A из положения $AB'C'$ в положение $A_1B_1C_1$ — во вторую очередь.

Очевидно, что совокупность этих двух перемещений не отображает действительного движения твердого тела, а позволяет лишь осуществить перемещение твердого тела из первого положения во второе.

При действительном движении свободного твердого тела составляющие движения этого тела совершаются одновременно, т. е. движение свободного твердого тела можно рассматривать как сложное, состоящее из поступательного движения вместе с некоторой точкой тела, принятой за полюс, и сферического движения вокруг этого полюса.

Выберем произвольную точку O за полюс и покажем траекторию полюса AB (рис. 325). Поступательная часть движения твердого тела определяется движением полюса O .

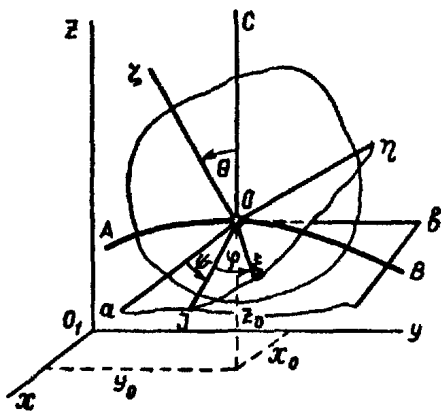


Рис. 325.

Обозначив координаты полюса O в неподвижной системе осей декартовых координат x_0, y_0, z_0 , напишем уравнения движения полюса O :

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= f_1(t), \\ y_0 &= f_2(t), \\ z_0 &= f_3(t). \end{aligned} \right\}$$

Сферическое движение твердого тела можно определить заданием эйлеровых углов как функций времени. Для определения эйлеровых углов проведем три взаимно перпендикулярные оси a, b, c , движущиеся поступательно вместе с точкой O и остающиеся параллельными неподвижным осям x, y, z , а также взаимно перпендикулярные оси ξ, η, ζ , связанные с телом.

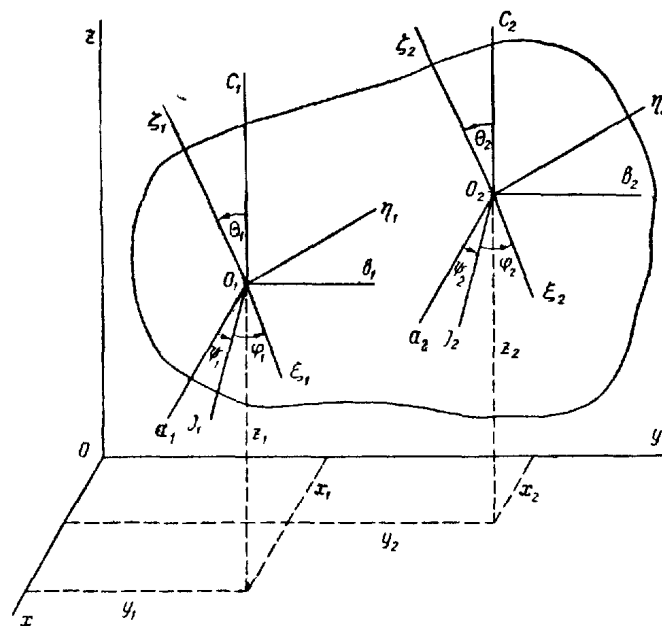


Рис. 326.

Определив при помощи этих осей эйлеровы углы ψ, θ и φ , напишем три уравнения сферического движения тела вокруг полюса O :

$$\left. \begin{aligned} \psi &= f_4(t), \\ \theta &= f_5(t), \\ \varphi &= f_6(t). \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, движение свободного твердого тела определяется шестью уравнениями, называемыми уравнениями движения свобод-

ного твердого тела:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= f_1(t), & \psi &= f_4(t), \\ y_0 &= f_2(t), & \theta &= f_5(t), \\ z_0 &= f_3(t), & \varphi &= f_6(t). \end{aligned} \right\} \quad (119.1)$$

Положение свободного твердого тела определяется заданием шести независимых величин $x_0, y_0, z_0, \psi, \theta, \varphi$; следовательно, свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы.

Вид первых трех уравнений, определяющих поступательную часть движения твердого тела, зависит от выбора полюса, так как координаты различных точек тела различны (рис. 326).

Вид остальных трех уравнений, определяющих сферическое движение твердого тела вокруг полюса, от выбора полюса не зависит.

Действительно, если связать с телом две системы $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $O_2\xi_2\eta_2\zeta_2$, оси которых соответственно параллельны, то эта параллельность сохранится при движении тела и эйлеровы углы при полюсах O_1 и O_2 будут одинаковы.

§ 120. Теорема о скоростях точек свободного твердого тела и ее следствия

Движение свободного твердого тела в общем случае представляет собой сложное движение, которое можно рассматривать как состоящее из поступательного движения вместе с полюсом и сферического движения вокруг полюса.

Докажем теорему о скоростях точек свободного тела.

Скорость любой точки свободного твердого тела равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки в ее сферическом движении вокруг полюса.

Для доказательства теоремы определим скорость точки M , приняв за полюс точку O , скорость которой v_0 известна.

Проведем радиус-векторы ρ_0 и ρ в точки O и M из начала неподвижной системы осей, а также радиус-вектор r из полюса O в точку M (рис. 327).

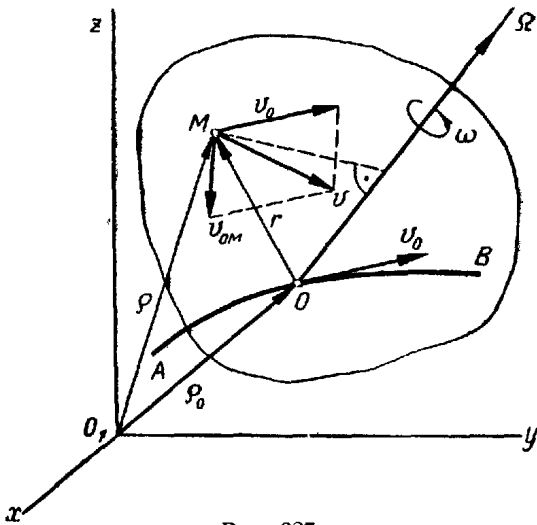


Рис. 327.

Во все время движения тела между этими радиусами-векторами сохраняется зависимость:

$$\rho = \rho_0 + r,$$

где $r = \text{const}$, как расстояние между точками, принадлежащими твердому телу.

Определим скорость точки M как векторную производную по времени от радиуса-вектора ρ :

$$v = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho_0}{dt} + \frac{dr}{dt},$$

где $\frac{d\rho_0}{dt} = v_0$ — скорость полюса O .

Так как при движении твердого тела модуль радиуса-вектора r остается неизменным, а направление его при вращении тела вокруг полюса O изменяется, то производная $\frac{dr}{dt}$ представляет собой вращательную скорость точки M в ее сферическом движении вокруг полюса O , т. е. вращательную скорость точки вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс.

Тогда

$$\frac{dr}{dt} = v_{OM} = \omega \times r.$$

Поэтому

$$v = v_0 + v_{OM}. \quad (120.1)$$

или

$$v = v_0 + \omega \times r. \quad (120.2)$$

Следствие 1. *Проекция скоростей точек свободного твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны.*

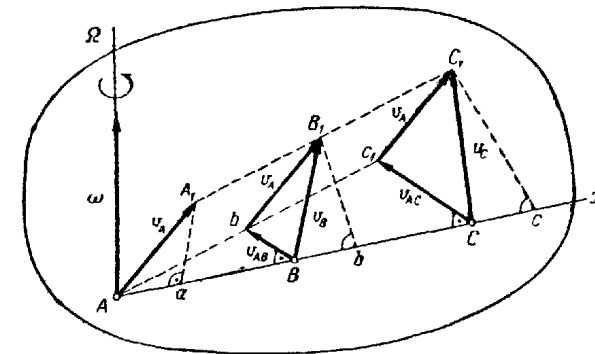


Рис. 328.

Приняв за полюс точку A , определим скорости точек B и C , лежащих на прямой, проходящей через точку A (рис. 328):

$$v_B = v_A + v_{AB};$$

$$v_C = v_A + v_{AC}.$$

Спроектируем эти скорости на ось x , проходящую через точки A , B и C :

$$v_{Bx} = v_{Ax} + v_{ABx};$$

$$v_{Cx} = v_{Ax} + v_{ACx}.$$

Вращательные скорости точек v_{AB} и v_{AC} направлены перпендикулярно отрезку AC , вдоль которого направлена ось x .

Следовательно,

$$v_{ABx} = 0 \text{ и } v_{ACx} = 0.$$

Поэтому

$$v_{Bx} = v_{Cx} = v_{Ax} \text{ или } Bb = Cc = Aa.$$

Следствие 2. Концы скоростей точек свободного твердого тела, расположенных на отрезке прямой, лежат на одной прямой и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между этими точками.

Так как вращательные скорости v_{AB} и v_{AC} пропорциональны расстояниям точек B и C от мгновенной оси вращения Ω , а следовательно, и отрезкам AB и AC , то точки A , b_1 , c_1 расположены на прямой.

Кроме того, по построению $AA_1 = b_1B_1 = c_1C_1$ и $AA_1 \parallel b_1B_1 \parallel c_1C_1$.

Следовательно,

$$A_1B_1 = Ab_1 \text{ и } A_1B_1 \parallel Ab_1;$$

$$A_1C_1 = Ac_1 \text{ и } A_1C_1 \parallel Ac_1.$$

Поэтому точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Из подобия треугольников ACc_1 и ABb_1 имеем

$$\frac{Ac_1}{Ab_1} = \frac{AC}{AB} \text{ или } \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \frac{AC}{AB} \text{ и } \frac{B_1C_1}{A_1B_1} = \frac{BC}{AB},$$

т. е. точка B_1 делит отрезок A_1C_1 на части, пропорциональные расстояниям между соответствующими точками тела.

Следствие 3. Скорости точек свободного твердого тела, расположенных на прямой, параллельной мгновенной оси, геометрически равны.

Проведем прямую, параллельную мгновенной оси вращения тела, проходящей через полюс O , и определим скорости точек A и B тела, лежащих на этой прямой (рис. 329):

$$v_A = v_O + v_{OA};$$

$$v_B = v_O + v_{OB}.$$

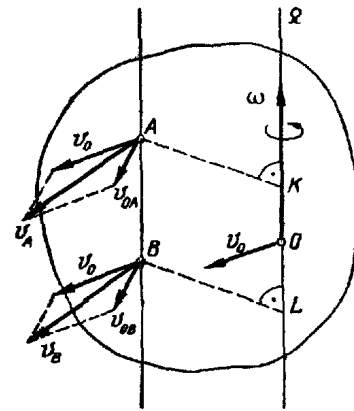


Рис. 329.

Вращательные скорости v_{OA} и v_{OB} равны и параллельны, так как равны и параллельны перпендикуляры AK и BL , опущенные из точек A и B на мгновенную ось.

Стороны параллелограммов, определяющих скорости точек A и B , соответственно равны и параллельны, следовательно, скорости точек A и B геометрически равны, т. е. $v_B = v_A$.

§ 121. Независимость векторов угловой скорости и углового ускорения тела от выбора полюса

Для того, чтобы установить независимость вектора угловой скорости твердого тела от выбора полюса, примем за полюсы две различные точки тела O_1 и O_2 .

Обозначим ω_1 и ω_2 векторы угловых скоростей вращения тела вокруг мгновенных осей, проходящих через эти полюсы.

Проведем радиусы-векторы r_1 и r_2 в произвольную точку M тела из этих полюсов (рис. 330). Определим скорость точки M в зависимости от скорости каждого полюса:

$$v = v_{O_1} + \omega_1 \times r_1; \quad (a)$$

$$v = v_{O_2} + \omega_2 \times r_2. \quad (б)$$

Выразим скорость второго полюса v_{O_2} через скорость первого полюса:

$$v_{O_2} = v_{O_1} + \omega_1 \times r_{O_1O_2}.$$

Здесь $r_{O_1O_2}$ — радиус-вектор полюса O_2 относительно полюса O_1 .

Используя эту зависимость и приравнявая два выражения (a) и (б) скорости v , получаем

$$v_{O_1} + \omega_1 \times r_1 = v_{O_1} + \omega_1 \times r_{O_1O_2} + \omega_2 \times r_2$$

или

$$\omega_1 \times (r_1 - r_{O_1O_2}) = \omega_2 \times r_2.$$

Так как $r_1 - r_{O_1O_2} = r_2$, то имеем

$$\omega_1 \times r_2 = \omega_2 \times r_2$$

или

$$(\omega_1 - \omega_2) \times r_2 = 0.$$

Это равенство имеет место при любом значении r_2 , т. е. для любой точки тела, а потому

$$\omega_1 - \omega_2 = 0, \text{ т. е. } \omega_1 = \omega_2. \quad (121.1)$$

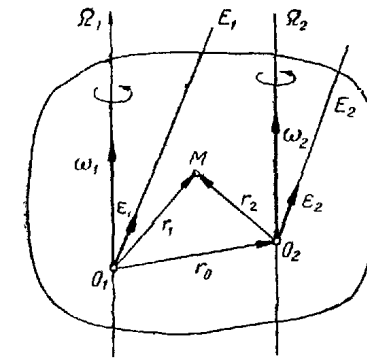


Рис. 330.

Таким образом, вектор угловой скорости твердого тела не зависит от выбора полюса.

Дифференцируя по времени равенство (121.1), получаем

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} \text{ или } \varepsilon_1 = \varepsilon_2. \quad (121.2)$$

т. е. вектор углового ускорения твердого тела не зависит от выбора полюса.

Общие для всех полюсов угловую скорость ω и угловое ускорение ε называют *угловой скоростью и угловым ускорением тела*.

Направление мгновенной оси вращения тела в данный момент времени вполне определено и одинаково для всех полюсов.

При перемене полюса изменяется только скорость составляющего поступательного движения.

§ 122. Теорема об ускорениях точек свободного твердого тела

Докажем теорему об ускорениях точек свободного твердого тела.

Ускорение точки свободного твердого тела равно геометрической сумме ускорения полюса, осеостремительного ускорения точки и ее вращательного ускорения, определенных относительно мгновенной оси и оси углового ускорения, проходящих через полюс.

Пусть известны ускорение w_0 точки O , которую примем за полюс, угловая скорость ω тела вокруг мгновенной оси и его угловое ускорение ε (рис. 331).

Чтобы доказать теорему, называемую теоремой Ривальса для свободного твердого тела, определим ускорение произвольной точки M тела. Для этого воспользуемся выражением скорости точки M свободного тела (120.2):

$$v = v_0 + \omega \times r.$$

Определим ускорение точки M как производную по времени от скорости v :

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_0}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times r + \omega \times \frac{dr}{dt}.$$

Здесь $\frac{dv_0}{dt} = w_0$ — ускорение полюса O ;

$\frac{d\omega}{dt} \times r = \varepsilon \times r = w_E^B$ — вращательное ускорение точки M относительно оси углового ускорения E , проходящей через полюс O ;

$\omega \times \frac{dr}{dt} = \omega \times v_{OM} = \omega \times (\omega \times r) = w_2^{oc}$ — осеостремительное ускорение точки M относительно мгновенной оси вращения Ω , проходящей через полюс O .

Поэтому

$$w = w_0 + w_E^B + w_2^{oc}. \quad (122.1)$$

Таким образом, ускорение любой точки свободного твердого тела определяется построением многоугольника ускорений.

Вращательное ускорение точки тела w_E^B направлено перпендикулярно плоскости, проходящей через ось углового ускорения E и данную точку M тела в такую сторону, чтобы, смотря навстречу ускорению w_E^B , видеть поворот углового ускорения ε к радиусу-вектору r на наименьший угол против движения часовой стрелки.

Модуль вращательного ускорения точки тела равен произведению модуля углового ускорения тела ε на $h_E = MK_1$ — расстояние точки от оси углового ускорения E :

$$w_E^B = h_E \cdot \varepsilon.$$

Осеостремительное ускорение точки тела w_2^{oc} направлено по перпендикуляру MK_2 , опущенному из точки M на мгновенную ось вращения Ω .

Модуль осеостремительного ускорения точки тела равен произведению квадрата модуля угловой скорости тела на $h_2 = MK_2$ — расстояние от точки до мгновенной оси вращения Ω , проходящей через полюс:

$$w_2^{oc} = h_2 \omega^2.$$

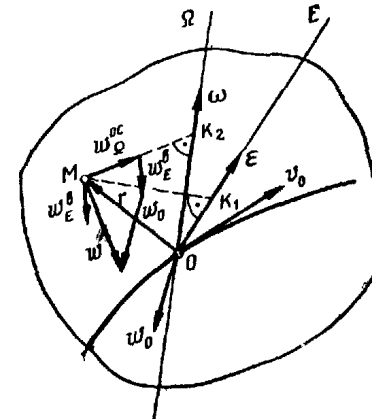


Рис. 331.

Вопросы для самоконтроля

1. На какие составляющие движения можно разложить движение свободного твердого тела в общем случае и как они зависят от выбора полюса?
2. Как определяют скорости точек свободного твердого тела?
3. Как связаны между собой скорости точек свободного тела, расположенных на отрезке произвольного направления, и на отрезке, параллельном мгновенной оси?
4. Покажите, что векторы угловой скорости и углового ускорения свободного тела не зависят от выбора полюса.
5. Как определяют ускорения точек свободного твердого тела?

§ 123. Относительное, переносное и абсолютное движения точки

Составное движение точки (тела)—это такое движение, при котором точка (тело) одновременно участвует в двух или нескольких движениях. Например, составное движение совершает лодка, переплывающая реку, пассажир, перемещающийся в вагоне движущегося поезда или по палубе плывущего парохода, а также человек, перемещающийся по лестнице движущегося эскалатора. Составным является и движение шаров C и D центробежного регулятора Уатта (рис. 332), вращающегося вокруг вертикальной оси, когда при изменении нагрузки машины шары удаляются от этой оси или приближаются к ней, вращаясь со стержнями AC и BD вокруг шарниров A и B .

Рассмотрим движущееся тело A (рис. 333) и точку M , не принадлежащую этому телу, а совершающую по отношению к нему

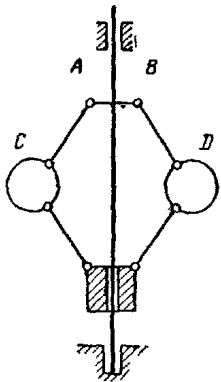


Рис. 332.

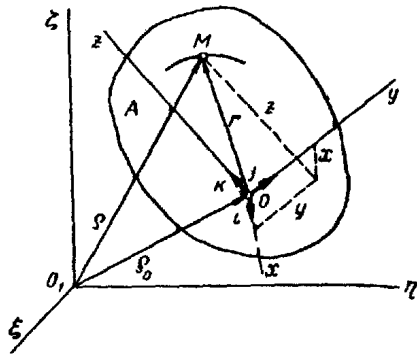


Рис. 333.

некоторое движение. Через произвольную точку O движущегося тела проведем неизменно связанные с этим телом оси x, y, z . Систему осей $Oxuz$ называют *подвижной системой отсчета*.

Неподвижной системой отсчета называют систему осей $O_1\xi\eta\zeta$, связанную с некоторым условно неподвижным телом, обычно с Землей*.

Движение точки M по отношению к неподвижной системе отсчета называют *абсолютным движением точки*.

* При выводе формул скорости и ускорения составного движения точки пользуются координатами точки в подвижной системе отсчета. В связи с этим в отличие от принятого в § 113 и 119 обозначения осей, здесь удобнее неподвижные оси обозначать ξ, η, ζ , а подвижные оси x, y, z .

Скорость и ускорение точки в абсолютном движении называют *абсолютной скоростью и абсолютным ускорением* точки и обозначают v и w .

Движение точки M по отношению к подвижной системе отсчета называют *относительным движением точки*.

Скорость и ускорение точки в относительном движении называют *относительной скоростью и относительным ускорением* точки и обозначают v_r и w_r .

Движение подвижной системы отсчета $Oxuz$ и неизменно связанного с ней тела A по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1\xi\eta\zeta$ является для точки M *переносным движением*. Точки тела A , совершая различные движения, имеют в данный момент различные скорости и ускорения.

Скорость и ускорение точки тела A , связанного с подвижной системой отсчета, совпадающей в данный момент с движущейся точкой, называют *переносной скоростью и переносным ускорением* точки M и обозначают v_e и w_e .

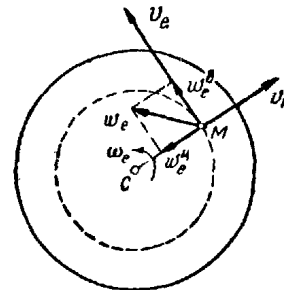


Рис. 334.

Например, если человек идет вдоль радиуса вращающейся платформы (рис. 334), то с платформой можно связать подвижную систему отсчета, а с поверхностью Земли — неподвижную. Тогда движение платформы является переносным, движение человека по отношению к ней — относительным, а движение человека по отношению к Земле — абсолютным. Переносной скоростью человека v_e и его переносным ускорением w_e являются скорость и ускорение той точки платформы, где находится в данный момент человек.

Движение точки M (рис. 333) по отношению к неподвижной системе отсчета, которое названо абсолютным движением, является составным, состоящим из относительного и переносного движений точки.

Основная задача изучения составного движения состоит в установлении зависимостей между скоростями и ускорениями относительного, переносного и абсолютного движений точки.

Положение точки M относительно неподвижной системы отсчета определяется радиусом-вектором ρ , проведенным в точку M из начала этой системы O_1 . Изменение радиуса-вектора ρ характеризует абсолютное движение точки. Положение точки M относительно подвижной системы отсчета определяется радиусом-вектором r , проведенным в точку M из начала этой системы O , или тремя координатами x, y, z в этой системе.

Согласно § 80, имеем

$$r = ix + jy + kz.$$

Изменение радиуса-вектора \mathbf{r} или координат x, y, z точки M характеризует относительное движение точки. Таким образом, уравнения относительного движения точки имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (123.1)$$

Изменение радиуса-вектора ρ_O , проведенного из начала неподвижной системы координат O_1 в полюс O , характеризует абсолютное движение полюса.

§ 124. Теорема о сложении скоростей

Докажем теорему о сложении скоростей для составного движения точки, состоящего из относительного движения по отношению к подвижной системе отсчета $Oxyz$ и переносного движения вместе с этой системой в случае, когда подвижная система отсчета связана с твердым телом, совершающим произвольное движение в пространстве (рис. 335).

Согласно § 119, движение свободного твердого тела в общем случае состоит из поступательного движения вместе с некоторым полюсом и сферического движения вокруг этого полюса.

Таким образом, само переносное движение является сложным, представляющим собой совокупность поступательного движения подвижной системы вместе с точкой O (полюсом) и сферического движения вокруг этого полюса. Это сферическое движение в каждый момент можно рассматривать как вращение подвижной системы с угловой скоростью ω_e вокруг мгновенной оси Ω_e , проходящей через полюс O .

Во все время движения точки радиусы-векторы ρ, ρ_O и \mathbf{r} связаны зависимостью

$$\rho = \rho_O + \mathbf{r} = \rho_O + (ix + jy + kz). \quad (124.1)$$

Вектор абсолютной скорости точки M

$$\mathbf{v} = \frac{d\rho}{dt}.$$

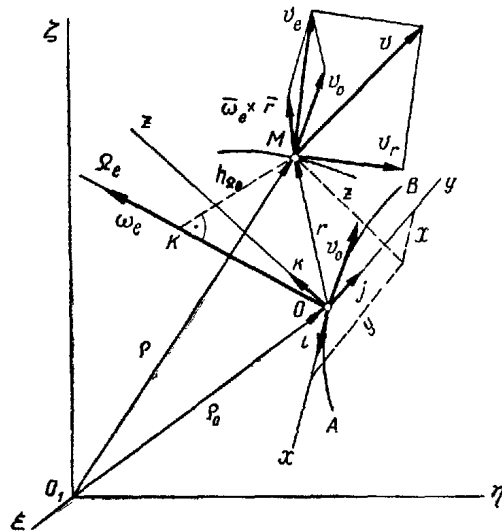


Рис. 335.

Дифференцируя выражение (124.1) и учитывая, что орты i, j, k подвижной системы $Oxyz$, оставаясь неизменными по модулю, вращаются вокруг мгновенной оси с угловой скоростью ω_e , получаем

$$\mathbf{v} = \frac{d\rho_O}{dt} + \left(\frac{di}{dt}x + \frac{dj}{dt}y + \frac{dk}{dt}z \right) + \left(i \frac{dx}{dt} + j \frac{dy}{dt} + k \frac{dz}{dt} \right). \quad (124.2)$$

Производная от каждого орта по времени представляет собой линейную скорость точки, для которой этот орт является радиусом-вектором (рис. 336)

$$\frac{dk}{dt} = u_A.$$

Рис. 336.

Но каждый орт вращается вокруг мгновенной оси Ω_e , и вращательная скорость его конца определяется согласно (94.2) векторным произведением, т. е.

$$u_A = \omega_e \times k.$$

Следовательно,

$$u_A = \frac{dk}{dt} = \omega_e \times k.$$

Таким образом, будем иметь

$$\frac{di}{dt} = \omega_e \times i, \quad \frac{dj}{dt} = \omega_e \times j, \quad \frac{dk}{dt} = \omega_e \times k. \quad (124.3)$$

Подставляя (124.3) в (124.2), получаем

$$\mathbf{v} = \frac{d\rho_O}{dt} + \omega_e \times (ix + jy + kz) + \left(i \frac{dx}{dt} + j \frac{dy}{dt} + k \frac{dz}{dt} \right).$$

Здесь $\frac{d\rho_O}{dt} = \mathbf{v}_O$ — скорость полюса O ;

$$ix + jy + kz = \mathbf{r};$$

$i \frac{dx}{dt} + j \frac{dy}{dt} + k \frac{dz}{dt} = i v_{rx} + j v_{ry} + k v_{rz} = \mathbf{v}_r$ — относительная скорость точки M .

Поэтому

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \omega_e \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r. \quad (124.4)$$

Переносная скорость точки, как указывалось в § 123, представляет собой скорость точки, связанной с подвижной системой отсчета и совпадающей в данный момент с движущейся точкой M . В рассматриваемом случае такой точкой является точка M свободного твердого тела. Скорость этой точки на основании (120.2) состоит из

скорости полюса O и вращательной скорости точки вокруг мгновенной оси Ω_e , т. е.

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}. \quad (124.5)$$

На этом основании формула (124.4) принимает вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r. \quad (124.6)$$

Это равенство выражает *теорему о сложении скоростей*, которая формулируется так:

Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме ее переносной и относительной скоростей.

Эту теорему называют *правилом параллелограмма или треугольника скоростей*.

Как видно, в рассматриваемом случае составного переносного движения переносная скорость точки \mathbf{v}_e сама определяется как диагональ параллелограмма, построенного на скорости полюса \mathbf{v}_O и вращательной скорости точки $\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}$ вокруг мгновенной оси Ω_e (рис. 335).

В случае поступательного переносного движения скорости всех точек, неизменно связанных с подвижной системой отсчета, в каждый момент геометрически равны. Поэтому переносная скорость точки M равна скорости полюса \mathbf{v}_O и формула (124.5) принимает вид

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_O.$$

Очевидно, что в этом случае абсолютная скорость точки M также определяется по формуле (124.6).

Так как абсолютная скорость точки \mathbf{v} определяется диагональю параллелограмма, построенного на переносной скорости \mathbf{v}_e и относительной скорости \mathbf{v}_r , то ее модуль можно вычислить по формуле:

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos(\mathbf{v}_e, \mathbf{v}_r)}. \quad (124.7)$$

§ 125. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)

Для определения абсолютного ускорения точки в случае непоступательного переносного движения, описанного в § 124, воспользуемся выражением абсолютной скорости точки в этом движении (124.2):

$$\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\rho}_O}{dt} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt} x + \frac{d\mathbf{j}}{dt} y + \frac{d\mathbf{k}}{dt} z \right) + \left(\mathbf{i} \frac{dx}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy}{dt} + \mathbf{k} \frac{dz}{dt} \right).$$

Абсолютное ускорение точки M

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Дифференцируя выражение, определяющее \mathbf{v} , и приводя подобные члены, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{\rho}_O}{dt^2} + \left(\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} x + \frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2} y + \frac{d^2\mathbf{k}}{dt^2} z \right) + \\ + \left(\mathbf{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \mathbf{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \mathbf{k} \frac{d^2z}{dt^2} \right) + 2 \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \frac{dz}{dt} \right). \end{aligned} \quad (125.1)$$

На основании (124.3) имеем

$$\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{i}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt} \times \mathbf{i} + \boldsymbol{\omega}_e \times \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\epsilon}_e \times \mathbf{i} + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{i}).$$

Аналогично

$$\frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2} = \boldsymbol{\epsilon}_e \times \mathbf{j} + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{j}),$$

$$\frac{d^2\mathbf{k}}{dt^2} = \boldsymbol{\epsilon}_e \times \mathbf{k} + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{k}).$$

Рассмотрим отдельные слагаемые выражения, определяющего \mathbf{w} :

$$1) \frac{d^2\boldsymbol{\rho}_O}{dt^2} = \mathbf{w}_O \text{ — ускорение полюса } O;$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} x + \frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2} y + \frac{d^2\mathbf{k}}{dt^2} z = [\boldsymbol{\epsilon}_e \times \mathbf{i} + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{i})] x + \\ + [\boldsymbol{\epsilon}_e \times \mathbf{j} + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{j})] y + [\boldsymbol{\epsilon}_e \times \mathbf{k} + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{k})] z = \\ = \boldsymbol{\epsilon}_e \times (ix + jy + kz) + \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_e \times (ix + jy + kz) = \\ = \boldsymbol{\epsilon}_e \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}); \end{aligned}$$

$$3) \mathbf{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \mathbf{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \mathbf{k} \frac{d^2z}{dt^2} = \mathbf{i} w_{rx} + \mathbf{j} w_{ry} + \mathbf{k} w_{rz} = \mathbf{w}_r \text{ — относительное ускорение точки};$$

$$\begin{aligned} 4) \frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \frac{dz}{dt} = \boldsymbol{\omega}_e \times \left(\mathbf{i} \frac{dx}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy}{dt} + \mathbf{k} \frac{dz}{dt} \right) = \\ = \boldsymbol{\omega}_e \times (i v_{rx} + j v_{ry} + k v_{rz}) = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулу (125.1), получаем

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\epsilon}_e \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}) + \mathbf{w}_r + 2(\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r). \quad (125.2)$$

Переносное ускорение точки, как указывалось в § 123, представляет собой ускорение точки, связанной с подвижной системой отсчета и совпадающей в данный момент с движущейся точкой M . В рассматриваемом случае такой точкой является точка M свободного твердого тела, ускорение которой состоит из ускорения полюса \mathbf{w}_O , вращательного ускорения $\mathbf{w}_E^3 = \boldsymbol{\epsilon}_e \times \mathbf{r}$ и ее осестремительного ускорения $\mathbf{w}_E^{oc} = \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r})$, определенных относительно осей E_e и Ω_e , проходящих через полюс O :

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\epsilon}_e \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}). \quad (125.2)$$

Таким образом, первые три слагаемых выражения, определяющего \mathbf{w} , представляют собой переносное ускорение точки. Учитывая это, окончательно получаем

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + 2(\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r).$$

Здесь $2(\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r) = \mathbf{w}_c$ — поворотное ускорение точки (ускорение Кориолиса).

Следовательно, установлено, что

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c. \quad (125.3)$$

Это равенство выражает теорему Кориолиса (1792—1843) о сложении ускорений в случае непоступательного переносного движения, которая формулируется так:

В случае непоступательного переносного движения абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и поворотного ускорений.

Таким образом, абсолютное ускорение определяется замыкающей стороной многоугольника ускорений.

В случае поступательного переносного движения $\boldsymbol{\omega}_e = 0$, $\boldsymbol{\epsilon}_e = 0$, а ускорения всех точек, неизменно связанных с подвижной системой отсчета, в каждый момент геометрически равны.

Поэтому переносное ускорение точки M равно ускорению полюса, т. е. $\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_O$. Так как в этом случае $\mathbf{w}_c = 2(\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r) = 0$, то в случае поступательного переносного движения формула (125.3) принимает вид

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r. \quad (125.4)$$

Полученный результат является следствием теоремы Кориолиса и формулируется так:

В случае поступательного переносного движения абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме ее переносного и относительного ускорений.

Таким образом, в случае поступательного переносного движения абсолютное ускорение точки \mathbf{w} определяется диагональю параллелограмма, построенного на двух составляющих ускорениях: переносном \mathbf{w}_e и относительном \mathbf{w}_r .

Модуль абсолютного ускорения точки в этом случае можно вычислить по формуле

$$w = \sqrt{w_e^2 + w_r^2 + 2w_e w_r \cos(\boldsymbol{\omega}_e, \mathbf{w}_r)}. \quad (125.5)$$

Относительное ускорение \mathbf{w}_r расположено в соприкасающейся плоскости траектории относительного движения; переносное ускорение \mathbf{w}_e — в плоскости, которая параллельна соприкасающейся плоскости траектории полюса O .

§ 126. Модуль и направление поворотного ускорения (ускорения Кориолиса)

Поворотным ускорением (ускорением Кориолиса) называется составляющая абсолютного ускорения точки в составном движении, равная удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного вращения на относительную скорость точки:

$$\mathbf{w}_c = 2(\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r). \quad (126.1)$$

Появление поворотного ускорения обусловливается двумя причинами:

1) вследствие относительного движения точки, перемещающейся по отношению к подвижной системе отсчета, изменяется переносная скорость точки;

2) вследствие вращательного переносного движения дополнительно изменяется направление относительной скорости по отношению к неподвижной системе отсчета.

Например, если человек идет равномерно вдоль радиуса равномерно вращающейся платформы, то его относительной скоростью является скорость его движения вдоль радиуса, а переносной — скорость той точки платформы, где он находится в данный момент (рис. 337).

Пусть в момент времени t человек занимает положение M , а в момент $t + \Delta t$ — положение M_1 .

Так как относительное движение равномерное и прямолинейное, то относительное ускорение человека $\mathbf{w}_r = 0$. Однако за время Δt относительная скорость изменяется по направлению от \mathbf{v}_r до \mathbf{v}'_r благодаря вращению подвижной системы (платформы).

За время Δt происходит изменение модуля переносной скорости от $v_e = \boldsymbol{\omega}_e \cdot OM$ до $v'_e = \boldsymbol{\omega}_e \cdot OM_1$, благодаря относительному перемещению человека из точки M в точку M_1 .

Указанные изменения \mathbf{v}_r и \mathbf{v}_e вызывают появление поворотного ускорения.

Модуль поворотного ускорения определяется как модуль векторного произведения (126.1):

$$w_c = 2\omega_e v_r \sin(\boldsymbol{\omega}_e, \mathbf{v}_r). \quad (126.2)$$

Поворотное ускорение равно нулю в трех случаях:

1) если $\boldsymbol{\omega}_e = 0$, т. е. в случае поступательного переносного движения или в моменты обращения в нуль угловой скорости непоступательного переносного движения,

2) если $\mathbf{v}_r = 0$, т. е. в случае относительного покоя точки или в моменты обращения в нуль относительной скорости движущейся точки;

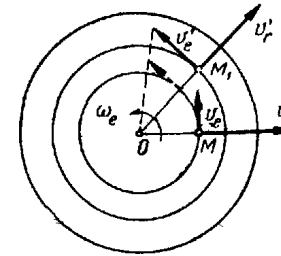


Рис. 337.

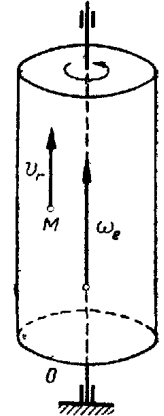


Рис. 338.

3) если $\sin(\omega_e, v_r) = 0$, т. е. в случае, когда $\angle(\omega_e, v_r) = 0$ или $\angle(\omega_e, v_r) = \pi$ и относительная скорость точки параллельна оси переносного вращения, как например, при движении точки M вдоль образующей цилиндра, вращающегося вокруг своей оси (рис. 338).

Направление поворотного ускорения определяется по правилу векторного произведения.

Пусть точка M движется со скоростью v_r по отношению к телу, вращающемуся вокруг оси Ω_e с угловой скоростью ω_e (рис. 339).

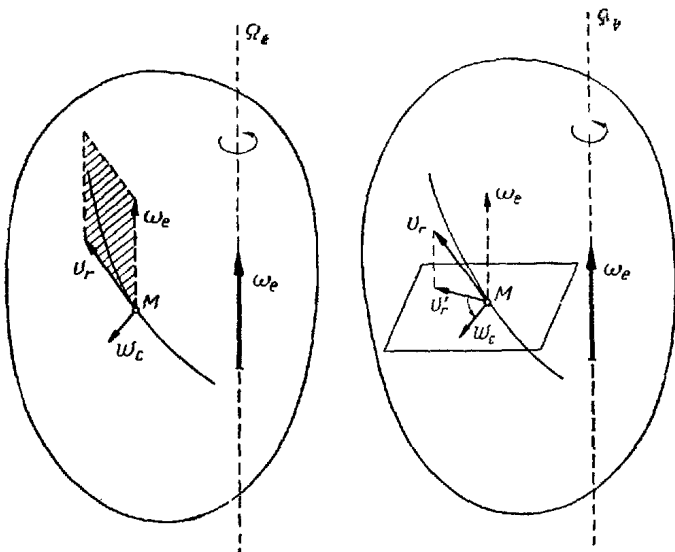


Рис. 339.

Рис. 340.

Построив условно вектор ω_e в точке M , направляем поворотное ускорение w_c по перпендикуляру к плоскости векторов ω_e и v_r в ту сторону, откуда поворот вектора ω_e к скорости v_r на наименьший угол виден происходящим против движения часовой стрелки.

Для определения направления поворотного ускорения удобно пользоваться правилом Жуковского:

Чтобы найти направление поворотного ускорения, следует спроектировать относительную скорость точки на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения, и повернуть эту проекцию в той же плоскости на 90° , в сторону переносного вращения (рис. 340).

Действительно, полученное направление w_c (рис. 340) перпендикулярно плоскости треугольника, образованного скоростью v_r и ее проекцией v'_r , а эта плоскость совпадает с плоскостью векторов ω_e и v_r (рис. 339).

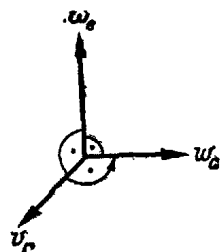


Рис. 341.

Если $\omega_e \perp v_r$, то $\sin(\omega_e, v_r) = 1$, тогда $w_c = 2\omega_e v_r$.

В этом случае три вектора v_r , ω_e и w_c взаимно перпендикулярны (рис. 341).

Этот случай определения направления поворотного ускорения возможен при относительном движении точки в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения.

Для иллюстрации правила Жуковского рассмотрим несколько примеров определения модуля и направления поворотного ускорения.

Предположим, например, что диск вращается вокруг оси, перпендикулярной его плоскости, против движения часовой стрелки с угловой скоростью ω_e , а по хорде диска KL движется точка M (рис. 342).

Определим модуль и направление поворотного ускорения точки M в положении, указанном на рисунке, если относительная скорость точки в этот момент равна v_r .

Так как точка движется в плоскости диска, перпендикулярной его оси вращения, то $\sin(\omega_e, v_r) = 1$ и модуль поворотного ускорения равен

$$w_c = 2\omega_e v_r.$$

Рис. 342.

Направление поворотного ускорения w_c получаем, повернув в плоскости диска вектор v_r против движения часовой стрелки на угол 90° .

Определим теперь модуль и направление поворотного ускорения точки M , движущейся с относительной скоростью v_r по образующей кругового конуса под углом $\angle MOA = \alpha$ от его вершины к основанию (рис. 343). Конус вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω_e в направлении, указанном на рисунке.

Отложив вектор угловой скорости ω_e переносного вращения по оси этого вращения, находим:

$$\angle(\omega_e, v_r) = 180^\circ - \alpha.$$

Определяем модуль поворотного ускорения точки M :

$$w_c = 2\omega_e v_r \sin(180^\circ - \alpha) = 2\omega_e v_r \sin \alpha.$$

Чтобы найти направление поворотного ускорения, проектируем относительную скорость точки на плоскость, перпендикулярную оси вращения конуса. Проекция относительной скорости v'_r направлена по прямой CK , совпадающей с радиусом CM . Повернув эту проекцию на угол 90° по направлению вращения конуса, установим, что поворотное уско-

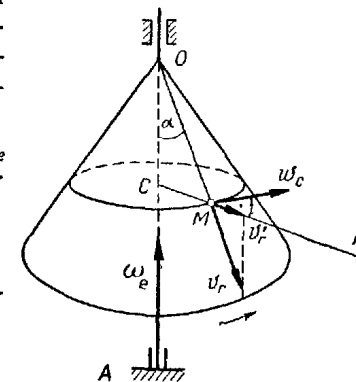


Рис. 343.

рение w_c направлено по касательной к окружности радиусом CM в сторону вращения конуса.

Поворотным ускорением обладают точки (тела), движущиеся по поверхности Земли, например, частицы воды в реках, поезда, автомобили и т. д.

Для тел, движущихся по поверхности Земли, ее вращение вокруг оси является переносным движением.

Определим, пользуясь правилом Жуковского, поворотные ускорения точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 , движущихся по поверхности Земли в направлениях, указанных на рис. 344.

Так как точки M_1 и M_2 движутся в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения Земли, то модули их поворотных ускорений определяем по формулам:

$$w_{1c} = 2\omega_e v_{1r}$$

и

$$w_{2c} = 2\omega_e v_{2r}.$$

Направления этих ускорений получаем путем поворота относительных скоростей этих точек в сторону вращения Земли. Относительная скорость точки M_3 , движущейся по меридиану, в момент прохождения через экватор, параллельна оси вращения Земли. В этот момент $\sin(\omega_e, v_{3r}) = 0$, а потому $w_{3c} = 0$. Модули поворотных ускорений точек M_4 и M_5 , движущихся по меридианам, находим по формулам:

$$w_{4c} = 2\omega_e v_{4r} \sin(\omega_e, v_{4r}) \quad \text{и} \quad w_{5c} = 2\omega_e v_{5r} \sin(\omega_e, v_{5r}).$$

Здесь $\sin(\omega_e, v_r) = \sin \varphi$, где φ — широта точки Земли. Направления этих ускорений определяем по правилу Жуковского.

§ 127. Примеры на применение теорем о сложении скоростей и о сложении ускорений при поступательном переносном движении

Пример 82. Вертикальный подъем вертолета происходит согласно уравнению $z = 0,25t^2$, где t выражено в *сек*, z — в *м*. При этом уравнение вращения винта имеет вид $\varphi = 3t^2$, где t — в *сек*, φ — в *рад*. Определить абсолютные скорость и ускорение точки винта, отстоя-

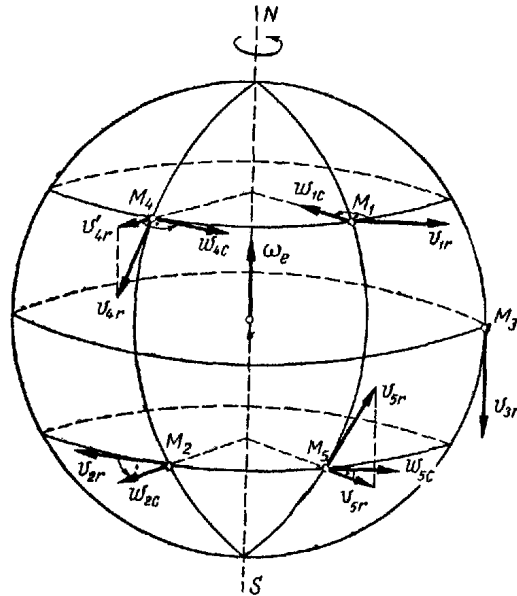


Рис. 344.

щей на расстоянии $R = 0,5$ м от вертикальной оси вращения, в конце 5-й *сек*.

Решение. Свяжем подвижную систему отсчета с корпусом вертолета, неподвижную — с Землей.

Абсолютное движение точки винта вертолета составное: оно состоит из движения с винтом, вращающимся вокруг вертикальной оси, и движения в вертикальном направлении вместе с корпусом вертолета.

Вращение винта вокруг его оси является относительным движением (это движение наблюдает пассажир вертолета, связанный с подвижной системой отсчета).

Переносным движением является поступательное движение корпуса вертолета вертикально вверх.

Применяем теорему о сложении скоростей (рис. 345, а):

$$v = v_e + v_r.$$

Переносная скорость точки M винта равна скорости той точки корпуса, которая совпадает в данный момент с точкой винта. При

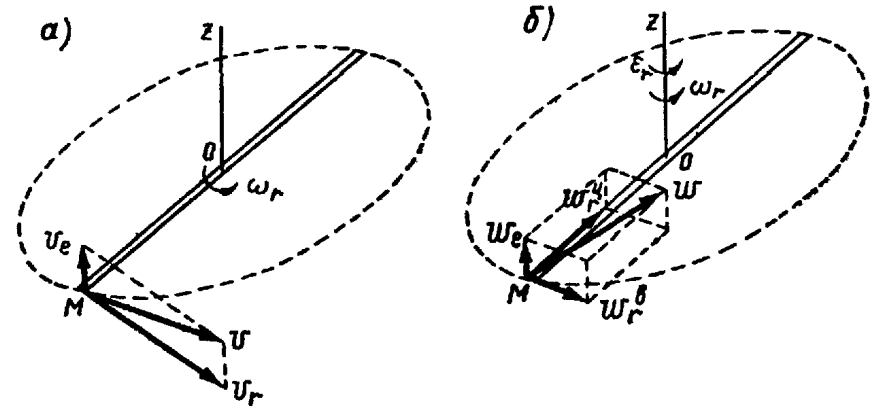


Рис. 345.

поступательном движении корпуса скорости всех его точек одинаковы. Их модули определяются по уравнению его вертикального поступательного движения $z = 0,25t^2$; — по формуле (79.5), соответствующей движению точки по траектории в одном и том же направлении:

$$v_e = \dot{z} = 0,5t.$$

При $t = 5$ *сек*

$$v_e = 0,5 \cdot 5 = 2,5 \text{ м/сек.}$$

Для определения относительной скорости точки находим угловую скорость винта по формуле (91.5), соответствующей также вращению тела в одном и том же направлении.

$$\omega_r = \dot{\varphi} = 6t.$$

При $t = 5 \text{ сек}$ $\omega_r = 6 \cdot 5 = 30 \text{ сек}^{-1}$.

Относительная скорость точки определяется как вращательная скорость (92.1); ее модуль равен:

$$v_r = R\omega_r = 0,5 \cdot 30 = 15 \text{ м/сек.}$$

Так как переносная и относительная скорости взаимно перпендикулярны, то абсолютная скорость точки изображается диагональю построенного на них прямоугольника. Ее модуль равен:

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{2,5^2 + 15^2} = 15,21 \text{ м/сек.}$$

Применяем теорему о сложении ускорений (рис. 345, б):

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r.$$

Переносное ускорение точки M винта равно ускорению точки корпуса, совпадающей в данный момент с точкой винта. Ускорения всех точек корпуса одинаковы и определяются по уравнению его движения. Модуль переносного ускорения любой точки корпуса согласно формуле (85.8) равен:

$$w_e = \left| \frac{dv_e}{dt} \right| = 0,5 \text{ м/сек}^2.$$

Относительное ускорение точки M винта определяется как ускорение точки вращающегося тела по формулам (92.2) и (92.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_r &= \mathbf{w}_r^u + \mathbf{w}_r^b; \\ \omega_r^u &= R\omega_r^2 = 0,5 \cdot 30^2 = 450 \text{ м/сек}^2; \\ \omega_r^b &= R\epsilon_r; \\ \epsilon_r &= \left| \frac{d\omega_r}{dt} \right| = 6 \text{ сек}^{-2}; \\ \omega_r^b &= 0,5 \cdot 6 = 3 \text{ м/сек}^2. \end{aligned}$$

Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: переносного ускорения \mathbf{w}_e , вращательного ускорения в относительном движении \mathbf{w}_r^b и центростремительного ускорения в относительном движении \mathbf{w}_r^u .

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r^b + \mathbf{w}_r^u.$$

Так как эти векторы взаимно перпендикулярны, то абсолютное ускорение изображается диагональю прямоугольного параллелепипеда, построенного на этих векторах. Его модуль определяется:

$$w = \sqrt{w_e^2 + w_r^b^2 + w_r^u^2} = \sqrt{0,5^2 + 3^2 + 450^2} = 450,01 \text{ м/сек}^2.$$

Как видно, модуль абсолютного ускорения точки мало отличается от модуля ее центростремительного ускорения в относительном движении w_r^u .

Пример 83. Решить пример 82 для горизонтального поступательного движения вертолета с постоянной скоростью 40 м/сек при равномерном вращении винта с угловой скоростью 60 сек⁻¹.

Решение. Переносная скорость точки M винта, равная скорости горизонтального движения вертолета, постоянна:

$$v_e = 40 \text{ м/сек (const).}$$

Относительная скорость точки M винта тоже постоянна:

$$v_r = R\omega_r = 0,5 \cdot 60 = 30 \frac{\text{м}}{\text{сек}} \text{ (const).}$$

В те моменты времени, когда относительная скорость перпендикулярна переносной (на рис. 346 положения M_2 и M_4), модуль абсолютной скорости определяется по формуле

$$v_2 = v_4 = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ м/сек.}$$

В моменты времени, когда направления переносной и относительной скоростей совпадают, модуль абсолютной скорости равен сумме

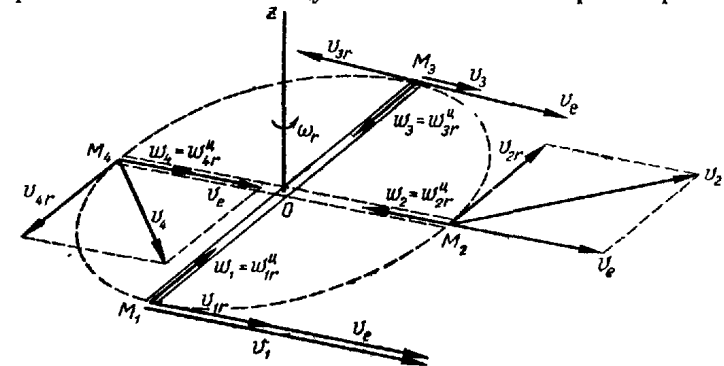


Рис. 346.

модулей составляющих скоростей, а направление совпадает с их направлением (положение M_1):

$$v_1 = v_e + v_r = 40 + 30 = 70 \text{ м/сек.}$$

В моменты времени, когда направления переносной и относительной скоростей противоположны, модуль абсолютной скорости равен разности модулей составляющих скоростей, а направление совпадает с направлением большей скорости (положение M_3)

$$v_3 = v_e - v_r = 40 - 30 = 10 \text{ м/сек.}$$

Переносное ускорение $w_e = 0$, так как все точки корпуса вертолета движутся равномерно и прямолинейно.

В равномерном относительном движении отсутствует вращательное ускорение, т. е.

$$\omega_r^b = R\epsilon_r = 0$$

и

$$\omega_r^u = \omega_r^u = R\omega_r^2 = 0,5 \cdot 60^2 = 1800 \text{ м/сек}^2.$$

Таким образом, в любой момент времени абсолютное ускорение точки M винта равно центростремительному ускорению в относительном движении и направлено по радиусу окружности от точки M винта к центру окружности O .

Пример 84. Центр тяжести однородного стержня длиной $2l = 50$ см, сброшенного с некоторой высоты, движется в вертикальной плоскости согласно уравнениям:

$$x_C = 15t, \quad y_C = 5t^2,$$

где t — в сек, x_C и y_C — в м (направление осей указано на рис. 347, а). При падении стержень равномерно вращается вокруг центра тяжести

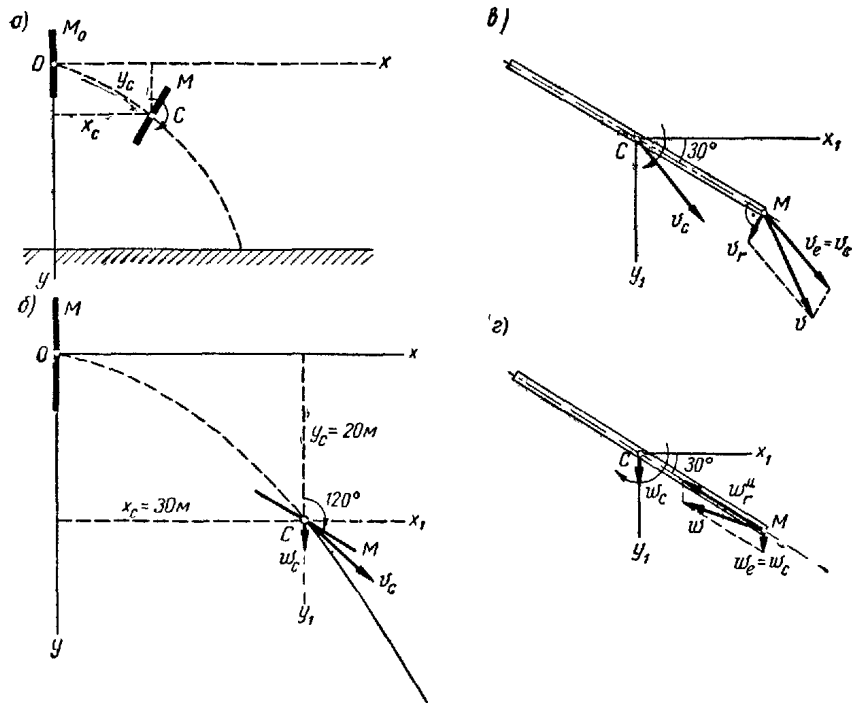


Рис. 347.

в плоскости xOy с угловой скоростью $\omega = \frac{11}{3}$ об/сек. В начальный момент стержень находился в вертикальном положении.

Определить в момент $t = 2$ сек скорость и ускорение конца M , находившегося в начальный момент наверху.

Решение 1. Разложение движения точки M на составляющие движения. Определим положение стержня в заданный момент времени.

При $t = 2$ сек $x_C = 15 \cdot 2 = 30$ м, $y_C = 5 \cdot 2^2 = 20$ м.

Угловое перемещение за 2 сек $\varphi = \omega t = \frac{11}{3} \cdot 2 = 7 \frac{1}{3}$ об. Положение стержня указано на рис. 347, б. В качестве подвижной системы отсчета возьмем систему осей Cx_1 и Cy_1 , проведенных через точку C параллельно неподвижным осям Ox и Oy , и пусть эта система движется поступательно, т. е. направление осей не изменяется. По отношению к этой системе движение стержня является равномерным вращением вокруг точки C .

Относительная скорость точки M представляет собой вращательную скорость, перпендикулярную к радиусу окружности CM (рис. 347, в), имеющую модуль

$$v_r = R\omega = l\omega = 0,25 \cdot \frac{22\pi}{3} = 5,76 \text{ м/сек.}$$

Относительное ускорение точки M представляет собой центростремительное ускорение, направленное к центру вращения (рис. 347, г), а его модуль равен:

$$\omega_r = \omega_r^n = l\omega^2 = 0,25 \left(\frac{22\pi}{3}\right)^2 = 132,56 \text{ м/сек}^2,$$

так как при равномерном вращении $\dot{\omega}_r^n = 0$.

Переносное движение стержня является поступательным движением вместе с подвижной системой отсчета. В этом движении скорости и ускорения всех точек стержня одинаковы и равны скорости и ускорению центра тяжести, уравнения которого заданы.

2. Определение абсолютной скорости точки. По теореме о сложении скоростей абсолютная скорость точки равна геометрической сумме ее переносной и относительной скоростей:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

Следовательно, проекция абсолютной скорости на любую ось равна алгебраической сумме проекций переносной и относительной скоростей на ту же ось:

$$v_x = v_{ex} + v_{rx}; \quad v_y = v_{ey} + v_{ry}.$$

Находим v_{ex} и v_{ey} по уравнениям движения точки C :

$$v_{ex} = v_{Cx} = \dot{x}_C = 15 \text{ м/сек};$$

$v_{ey} = v_{Cy} = \dot{y}_C = 10t$; при $t = 2$ сек $v_{ey} = 10 \cdot 2 = 20$ м/сек; v_{rx} и v_{ry} находим непосредственно по рис. 347, в, так как модуль и направление v_r известны:

$$v_{rx} = -v_r \cos 60^\circ = -5,76 \cdot 0,5 = -2,88 \text{ м/сек};$$

$$v_{ry} = v_r \cos 30^\circ = 5,76 \cdot 0,866 = 4,99 \text{ м/сек},$$

Проекция абсолютной скорости:

$$v_x = 15 - 2,88 = 12,12 \text{ м/сек};$$

$$v_y = 20 + 4,99 = 24,99 \text{ м/сек}.$$

Модуль абсолютной скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{12,12^2 + 24,99^2} = 27,77 \text{ м/сек.}$$

Абсолютная скорость изображается диагональю параллелограмма, построенного на v_e и v_r .

3. Определение абсолютного ускорения точки. По теореме о сложении ускорений

$$w = w_e + w_r.$$

Отсюда следует, что проекция абсолютного ускорения точки на любую ось равна алгебраической сумме проекций переносного и относительного ускорений на эту же ось:

$$w_x = w_{ex} + w_{rx}; \quad w_y = w_{ey} + w_{ry}.$$

Находим w_{ex} и w_{ey} по найденным выше проекциям переносной скорости:

$$w_{ex} = \frac{dv_{ex}}{dt} = 0; \quad w_{ey} = \frac{dv_{ey}}{dt} = 10 \text{ м/сек}^2.$$

Так как $w_{ex} = 0$, а $w_{ey} > 0$, то переносное ускорение w_e направлено параллельно оси y по этой оси (рис. 347, з).

Проекция относительного ускорения w_r находим непосредственно по рис. 347, з, учитывая, что $w_r = w^u$:

$$w_{rx} = -w_r^u \cos 30^\circ = -132,56 \cdot 0,866 = -114,80 \text{ м/сек}^2;$$

$$w_{ry} = -w_r^u \cos 60^\circ = -132,56 \cdot 0,5 = -66,28 \text{ м/сек}^2.$$

Проекция абсолютного ускорения

$$w_x = -114,80 \text{ м/сек}^2;$$

$$w_y = 10 - 66,28 = -56,28 \text{ м/сек}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{(-114,80)^2 + (-56,28)^2} = 127,9 \text{ м/сек}^2.$$

Абсолютное ускорение изображается диагональю параллелограмма, построенного на w_e и w_r (рис. 347, з).

Пример 85. Кривошип OA кривошипно-кулисного механизма вращается вокруг оси O , перпендикулярной плоскости механизма. Концы A кривошипа соединен шарнирно с ползунком, который перемещается в прорези кулисы BC и сообщает кулисе поступательное движение. Определить скорость и ускорение поступательного движения кулисы, а также скорость и ускорение движения ползунка по отношению к кулисе и их максимальные значения, если кривошип

вращается с постоянной угловой скоростью $n = 120 \text{ об/мин}$ и имеет длину $OA = l = 30 \text{ см}$ (рис. 348, а).

Решение 1. Определение скорости и ускорения ползунка A . Угловая скорость кривошипа в сек^{-1}

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 120}{30} = 4\pi \text{ сек}^{-1} (\text{const}).$$

Положение механизма определяется углом поворота кривошипа

$$\varphi = \omega t = 4\pi t.$$

Условимся отсчитывать угол φ от оси кулисы DE (рис. 348, б). Концы A кривошипа движется по окружности равномерно. Его ско-

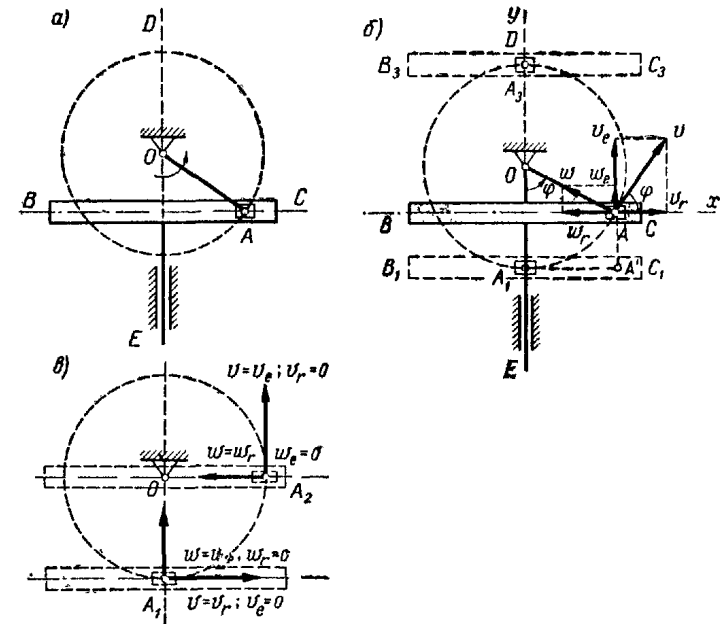


Рис. 348.

рость v направлена по касательной к окружности, т. е. перпендикулярно радиусу OA , а ее модуль равен:

$$v = \omega R = \omega l = 4\pi \cdot 30 = 120\pi \approx 377 \text{ см/сек} = 3,77 \text{ м/сек.}$$

Вращательное ускорение $w^B = 0$, так как вращение кривошипа равномерное. Поэтому модуль ускорения w точки A равен:

$$w = w^u = \omega^2 l = 16\pi^2 \cdot 30 \approx 4733 \text{ см/сек}^2 = 47,33 \text{ м/сек}^2.$$

Ускорение точки A , равное центростремительному ускорению, направлено к центру окружности O .

2. Разложение движения ползунка A на составляющие движения. Сравнивая крайнее положение кулисы B_1C_1 с рассматриваемым положением BC , видим, что перемещение A_1A точки A можно рассматривать как совокупность перемещения ползунка A вдоль кулисы A_1A' и перемещения его вместе с кулисой $A'A$.

Таким образом, движение точки A можно разложить на два прямолинейных составляющих движения: движение по отношению к кулисе (по прямой BC) и движение с кулисой (перпендикулярно BC). Если подвижную систему отсчета (оси x и y) связать с кулисой, то первое движение будет относительным, а второе — переносным, при этом переносное движение будет поступательным.

Применяем теорему о сложении скоростей:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

Раскладываем абсолютную скорость \mathbf{v} точки A на переносную и относительную скорости, направленные по соответствующим прямолинейным траекториям этих движений.

Определяем модуль переносной скорости v_e точки A , т. е. скорости точки кулисы, совпадающей с ползунком A в любой момент времени:

$$v_e = |v \sin \varphi| = |3,77 \sin 4\pi t| \text{ (м/сек)}.$$

Определяем модуль относительной скорости v_r точки A , т. е. скорости движения ползунка вдоль кулисы:

$$v_r = |v \cos \varphi| = |3,77 \cos 4\pi t| \text{ (м/сек)}.$$

Применяем теорему о сложении ускорений:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r.$$

Раскладываем абсолютное ускорение точки A на переносное и относительное ускорения, направленные по тем же прямолинейным траекториям, и определяем модули этих ускорений:

$$w_e = |w \cos \varphi| = |47,33 \cos 4\pi t| \text{ (м/сек}^2\text{)},$$

$$w_r = |w \sin \varphi| = |47,33 \sin 4\pi t| \text{ (м/сек}^2\text{)}.$$

В рассматриваемом положении кулиса движется ускоренно, так как направления \mathbf{v}_e и \mathbf{w}_e совпадают, а ползунок движется вдоль кулисы замедленно, так как направления \mathbf{v}_r и \mathbf{w}_r противоположны.

При $\varphi_1 = 4\pi t = 0$ имеем (рис. 348, в):

$$v_e = 0; \quad v_r = 3,77 \text{ м/сек};$$

$$w_e = 47,33 \text{ м/сек}^2; \quad w_r = 0.$$

При $\varphi = 4\pi t = \frac{\pi}{2}$ имеем:

$$v_e = 3,77 \text{ м/сек}; \quad v_r = 0;$$

$$w_e = 0; \quad w_r = 47,33 \text{ м/сек}^2.$$

Нетрудно установить, что движение кулисы и относительное движение ползунка являются гармоническими колебательными движениями, а следовательно, изменение скорости и ускорения каждого движения происходит в соответствии с § 89.

§ 128. Примеры на применение теорем о сложении скоростей и о сложении ускорений в случае, когда переносное движение — вращение вокруг неподвижной оси

Абсолютное ускорение точки в составном движении определяется как геометрическая сумма трех ее ускорений: переносного w_e относительного w_r и поворотного w_c , т. е.

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c.$$

Если точка движется по свободному твердому телу, совершающему сложное движение, то ее переносное ускорение w_e определяется по формуле (125.2):

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon}_e \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r})$$

или

$$w_e = w_O + w_E^B + w_O^{OC}.$$

При неравномерном криволинейном относительном движении относительное ускорение точки w_r состоит из касательного и нормального ускорений:

$$w_r = w_{rt} + w_{rn}.$$

Таким образом, абсолютное ускорение точки можно представить в виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_O + \mathbf{w}_E^B + \mathbf{w}_O^{OC} + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_{rn} + \mathbf{w}_c. \quad (128.1)$$

Таким выражением абсолютного ускорения удобно пользоваться при решении задач.

В каждой конкретной задаче следует вычислить все составляющие абсолютного ускорения и установить их направления. Вид формул, по которым производят это вычисление, зависит от того, как заданы составляющие движения. Затем определяют модуль и направление абсолютного ускорения точки по способу проекций или другим путем, в зависимости от того, сколько составляющих требуется сложить и как они расположены по отношению друг к другу.

Наибольший практический интерес представляет случай, когда переносное движение является вращением вокруг неподвижной оси. В этом случае переносное ускорение точки состоит из вращательного и центростремительного ускорений во вращении вокруг этой оси, а ускорение полюса равно нулю, т. е.

$$w_e = w_e^B + w_e^C.$$

Тогда выражение, определяющее абсолютное ускорение, приобретает вид

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e^B + \mathbf{w}_e^U + \mathbf{w}_{rc} + \mathbf{w}_{rn} + \mathbf{w}_c. \quad (128.2)$$

Модули составляющих переносного ускорения в этом случае определяют обычно по формулам (92.2) и (92.3):

$$\omega_e^B = \varepsilon_e R;$$

$$\omega_e^U = \omega_e^2 R.$$

Модули составляющих относительного ускорения определяют обычно по формулам кинематики точки (85.6) или (85.8) и (85.5):

$$\omega_{rt} = \left| \frac{d^2 s_r}{dt^2} \right| \text{ или } \omega_{rt} = \left| \frac{dv_r}{dt} \right|;$$

$$\omega_{rn} = \frac{v_r^2}{\rho},$$

где ρ — радиус кривизны траектории относительного движения в соответствующей точке.

Если же относительное движение совершает точка вращающегося тела, находящаяся от оси вращения на расстоянии r , то модули составляющих относительного ускорения можно вычислять как модули вращательного и центростремительного ускорений:

$$\omega_r^B = \varepsilon_r r;$$

$$\omega_r^U = \omega_r^2 r.$$

Модуль поворотного ускорения вычисляют по формуле (126.2):

$$\omega_c = 2\omega_e v_r \sin(\omega_e, \mathbf{v}_r).$$

Пример. 86. Диск радиусом $CM = R = 50$ см вращается из состояния покоя с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0,2$ сек⁻² в направлении, обратном направлению движения часовой стрелки. По ободу диска в направлении, обратном его вращению, движется точка M с постоянной относительной скоростью $v_r = 50$ см/сек (рис. 349,а). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в конце 5-й секунды.

Решение. Свяжем подвижную систему отсчета с вращающимся диском, а неподвижную — с Землей; движение точки M вместе с диском будет переносным движением, а ее движение по отношению к диску — относительным.

Абсолютное движение точки M состоит из этих двух движений. Так как диск вращается равноускоренно, его угловая скорость определяется выражением (91.12*):

$$\omega_e = \omega_{e0} + \varepsilon_e t,$$

где $\varepsilon_e = \varepsilon$.

Учитывая, что диск вращается из состояния покоя, т. е. $\omega_{e0} = 0$, находим его угловую скорость в конце 5-й сек:

$$\omega_{e5} = 0,2 \cdot 5 = 1 \text{ сек}^{-1}.$$

1. Определение абсолютной скорости точки M . Абсолютная скорость точки M определяется как геометрическая сумма двух скоростей: переносной скорости точки, равной скорости точки обода диска и относительной скорости точки (124.6):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

Вычислим модуль переносной скорости точки в конце 5-й сек:

$$v_e = R\omega_{e5} = 50 \cdot 1 = 50 \text{ см/сек}.$$

Эта скорость направлена по касательной к окружности обода в сторону вращения диска, т. е. противоположно относительной скорости \mathbf{v}_r (рис. 349,б).

В конце 5-й сек:

$$v_{e5} = 50 \text{ см/сек} = v_r;$$

$$v_{e5} = -v_r; \quad \mathbf{v}_5 = \mathbf{v}_{e5} + \mathbf{v}_r = 0.$$

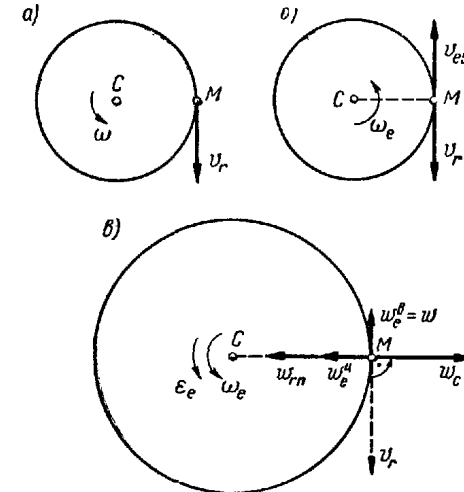


Рис. 349.

Модуль относительной скорости постоянен, а модуль переносной скорости возрастает равномерно от нуля. Следовательно, при $t < 5$ сек $v_e < v_r$, направление \mathbf{v} совпадает с направлением \mathbf{v}_r ; при $t = 5$ сек $v_e = v_r$, $\mathbf{v} = 0$; при $t > 5$ сек $v_e > v_r$, направление \mathbf{v} совпадает с направлением \mathbf{v}_e .

2. Определение абсолютного ускорения точки M . Абсолютное ускорение точки при вращательном переносном движении определяется по формуле (128.2):

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e^B + \mathbf{w}_e^U + \mathbf{w}_{rc} + \mathbf{w}_{rn} + \mathbf{w}_c.$$

Условимся называть траекторией переносного движения точки для данного момента времени траекторию точки, неизменно связанной с подвижной системой отсчета и совпадающей в данный момент с движущейся точкой.

В рассматриваемой задаче траекторией переносного движения является траектория точки обода диска, т. е. траектория переносного движения совпадает с траекторией относительного движения точки. Следовательно, эта же окружность является и траекторией абсолютного движения точки.

Вычислим модули пяти составляющих абсолютного ускорения точки M и изобразим эти ускорения на схеме (рис. 349, в).

Переносное вращательное ускорение точки w_e^B направлено по касательной к траектории переносного движения, а его модуль равен:

$$w_e^B = \epsilon_e \cdot R = 0,2 \cdot 50 = 10 \text{ см/сек}^2.$$

Переносное центростремительное ускорение точки w_e^H направлено по радиусу MC к центру C окружности — траектории переносного движения точки, а его модуль равен:

$$w_e^H = \omega_e^2 \cdot R = 1 \cdot 50 = 50 \text{ см/сек}^2.$$

Так как относительное движение точки — движение равномерное, то относительное касательное ускорение равно нулю:

$$w_{rc} = \left| \frac{dv_r}{dt} \right| = 0.$$

Относительное нормальное ускорение точки w_{rn} направлено по радиусу MC к центру кривизны траектории относительного движения, а его модуль равен:

$$w_{rn} = \frac{v_r^2}{R} = \frac{50^2}{50} = 50 \text{ см/сек}^2.$$

Модуль поворотного ускорения точки M вычисляем по формуле (126.2):

$$w_c = 2\omega_e v_r \sin(\omega_e, v_r) = 2 \cdot 1 \cdot 50 \cdot 1 = 100 \text{ см/сек}^2.$$

Так как относительное движение происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, то направление поворотного ускорения w_c определяется поворотом относительной скорости точки v_r на угол 90° в сторону вращения диска.

Из четырех составляющих ускорений три направлены по одной прямой.

При этом $w_c = 100 \text{ см/сек}^2$ и $w_e^H + w_{rn} = 100 \text{ см/сек}^2$, т. е. $w_e^H + w_{rn} + w_c = 0$.

Поэтому $w = w_e^B$, т. е. абсолютное ускорение точки M совпадает по направлению с переносным вращательным ускорением и имеет одинаковый с ним модуль, т. е. $w = 10 \text{ см/сек}^2$.

Пример 87. Кривошип OA вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω_0 ; на палец A свободно надето колесо II радиусом r , катящееся без скольжения по неподвижному колесу того же радиуса и с центром в точке O (рис. 350, а). Найти скорости и ускорения точек K и L колеса II , лежащих на концах взаимно перпендикулярных диаметров, один из которых совпадает с кривошипом.

Решение. Если подвижную систему отсчета связать с кривошипом, то движение точек колеса II будет состоять из переносного

вращения вместе с кривошипом вокруг оси O с постоянной угловой скоростью $\omega_e = \omega_0$ и относительного движения — вращения вокруг оси A этого колеса. Угловую скорость относительного вращения ω_r следует определить.

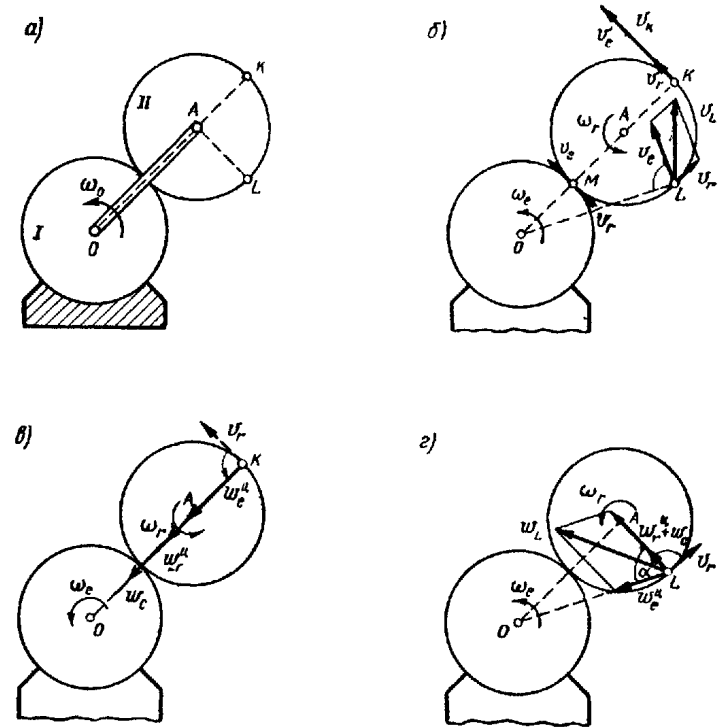


Рис. 350.

Так как колесо II катится по колесу I без скольжения, то точка M их соприкосновения является мгновенным центром скоростей (рис. 350, б). Поэтому

$$v_M = v_e + v_r = 0; \quad v_e = -v_r,$$

здесь v_e — переносная вращательная скорость точки M колеса II вокруг оси O ;

v_r — относительная вращательная скорость этой точки колеса вокруг его оси A .

$$v_e = OM \cdot \omega_e, \quad v_r = AM \cdot \omega_r, \quad OM \cdot \omega_e = AM \cdot \omega_r$$

или $r\omega_e = r\omega_r$, откуда $\omega_r = \omega_e = \omega_0 = \text{const}$. Так как $\epsilon_e = \left| \frac{d\omega_e}{dt} \right| = 0$, то и $\epsilon_r = 0$.

Направление скорости v_r указывает, что относительное вращение происходит против движения часовой стрелки.

1. Определение абсолютных скоростей точек K и L . Абсолютная скорость каждой точки определяется как геометрическая сумма ее переносной и относительной скоростей:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

Переносные скорости точек колеса II являются вращательными вокруг оси O , относительные скорости — вращательными вокруг оси A (рис. 350, б).

В точке K

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e &= OK \cdot \omega_e = 3r\omega_0; & \mathbf{v}_e &\perp OK; \\ \mathbf{v}_r &= AK \cdot \omega_r = r\omega_0; & \mathbf{v}_r &\perp AK. \end{aligned}$$

Направления \mathbf{v}_e и \mathbf{v}_r совпадают:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = 3r\omega_0 + r\omega_0 = 4r\omega_0.$$

В точке L

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e &= OL \cdot \omega_e = r\sqrt{5}\omega_0; & \mathbf{v}_e &\perp OL; \\ \mathbf{v}_r &= AL \cdot \omega_r = r\omega_0; & \mathbf{v}_r &\perp AL; \\ \cos(\mathbf{v}_e, \mathbf{v}_r) &= \cos \angle ALO = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Абсолютная скорость точки L определится диагональю параллелограмма, а потому ее модуль (124.7)

$$\begin{aligned} v_L &= \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos(\mathbf{v}_e, \mathbf{v}_r)} = \\ &= \sqrt{5r^2\omega_0^2 + r^2\omega_0^2 + 2\sqrt{5}r^2\omega_0^2 \frac{1}{\sqrt{5}}} = \\ &= \sqrt{8r^2\omega_0^2} = 2\sqrt{2}r\omega_0 = 2,82r\omega_0. \end{aligned}$$

2. Определение абсолютных ускорений точек K и L . Так как переносное и относительное движения являются вращательными движениями, то ускорение каждой точки колеса II равно:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e^a + \mathbf{w}_e^u + \mathbf{w}_r^a + \mathbf{w}_r^u + \mathbf{w}_c.$$

Но оба составляющих движения происходят равномерно, а потому вращательные ускорения точек в этих движениях равны нулю. Поэтому

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e^u + \mathbf{w}_r^u + \mathbf{w}_c.$$

Траектории переносного движения точек колеса II представляют собой окружности с центром O , траектории относительного движения — окружности с центром A .

В точке K (рис. 350 а):

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_e^u &= OK \cdot \omega_e^2 = 3r\omega_0^2 & (\mathbf{w}_e^u \text{ направлено к центру } O); \\ \mathbf{w}_r^u &= AK \cdot \omega_r^2 = r\omega_0^2 & (\mathbf{w}_r^u \text{ направлено к центру } A); \end{aligned}$$

$$\mathbf{w}_c = 2\omega_e v_r \sin(\omega_e, \mathbf{v}_r) = 2\omega_e v_r = 2\omega_0^2 r,$$

так как $\sin(\omega_e, \mathbf{v}_r) = 1$.

Направление \mathbf{w}_c получаем поворотом \mathbf{v}_r на 90° в сторону переносного вращения.

Так как направления переносного, относительного и поворотного ускорений совпадают, то ускорение точки \mathbf{w}_K направлено к точке O , а его модуль равен:

$$w_K = \omega_e^u + \omega_r^u + w_c = 3r\omega_0^2 + r\omega_0^2 + 2r\omega_0^2 = 6r\omega_0^2.$$

В точке L (рис. 350, з):

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_e^u &= OL \cdot \omega_e^2 = r\sqrt{5}\omega_0^2 & (\mathbf{w}_e^u \text{ — направлено к центру } O); \\ \mathbf{w}_r^u &= AL \cdot \omega_r^2 = r\omega_0^2 & (\mathbf{w}_r^u \text{ — направлено к центру } A); \\ \mathbf{w}_c &= 2\omega_e v_r \sin(\omega_e, \mathbf{v}_r) = 2\omega_e v_r = 2\omega_0^2 r. \end{aligned}$$

Направление \mathbf{w}_c получаем путем поворота \mathbf{v}_r на 90° .

Абсолютное ускорение точки L определяется как диагональ параллелограмма со сторонами $(\mathbf{w}_r^u + \mathbf{w}_c)$ и \mathbf{w}_e^u , т. е. его модуль равен:

$$w_L = \sqrt{(\mathbf{w}_r^u + \mathbf{w}_c)^2 + (\mathbf{w}_e^u)^2 + 2(\mathbf{w}_r^u + \mathbf{w}_c)\mathbf{w}_e^u \cos \alpha},$$

$$\text{где } \cos \alpha = \frac{AL}{OL} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Подставляя значения всех величин, получаем

$$\begin{aligned} w_L &= \sqrt{9\omega_0^4 r^2 + 5\omega_0^4 r^2 + 6\sqrt{5}\omega_0^4 r^2 \frac{1}{\sqrt{5}}} = \\ &= \sqrt{20}\omega_0^2 r = 2\sqrt{5}\omega_0^2 r = 4,47\omega_0^2 r. \end{aligned}$$

Примечание. Ускорения точек колеса II можно определять и как ускорения точек плоской фигуры (§ 108), разлагая движение колеса на поступательное движение вместе с полюсом и вращение вокруг полюса. В таком случае переносное движение является поступательным, а относительное — вращением с угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей ω_e и ω_r .

Выполненное в примере 87 решение основано на разложении движения колеса II на два составляющих вращения.

Пример 88. Определить скорость и ускорение точки M , для которой известны уравнения движения в полярных координатах: $r = f_1(t)$; $\varphi = f_2(t)$ (рис. 351, а).

Решение. Если движение точки M задано в полярных координатах, то для определения скорости и ускорения этой точки можно воспользоваться теоремами о сложении скоростей и ускорений. Продолжим полярный радиус точки M в сторону возрастания r и проведем через эту точку прямую, перпендикулярную полярному радиусу r , которую направим в сторону возрастания φ (рис. 351, б).

Проведенные в точке M оси Mr и $M\varphi$ называют *осями полярных координат*; при движении точки M направления этих осей изменяются.

Разложим абсолютное движение точки M на два движения: относительное движение вдоль полярного радиуса, т. е. вдоль оси Or , и переносное вращение вместе с осью Or вокруг центра O . Относительная скорость точки v_r , направленная вдоль полярного радиуса, называется *радиальной скоростью*; она равна скорости прямолинейного движения вдоль этого радиуса.

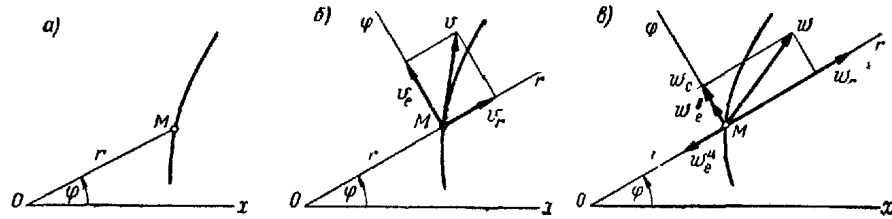


Рис. 351.

Поэтому ее алгебраическая величина

$$\tilde{v}_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}.$$

Переносная скорость v_e , называемая *трансверсальной скоростью*, как вращательная скорость точки M оси Or направлена перпендикулярно оси Or и имеет алгебраическую величину:

$$\tilde{v}_e = r\tilde{\omega} = r\dot{\varphi}$$

Тогда модуль абсолютной скорости точки

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}.$$

Абсолютное ускорение точки определяется по четырем составляющим, указанным на рис. 351,в:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e^b + \mathbf{w}_e^u + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c.$$

Алгебраические величины составляющих ускорений:

$$\tilde{\omega}_e^b = r\ddot{\varepsilon} = r\ddot{\varphi};$$

$$\omega_e^u = r\omega^2 = r\dot{\varphi}^2;$$

$$\tilde{\omega}_r = \tilde{\omega}_{rr} = \frac{d^2r}{dt^2} = \ddot{r},$$

так как при прямолинейном относительном движении $\omega_{rn} = 0$.

Здесь формула (126.2) принимает вид

$$\tilde{\omega}_c = 2\dot{\varphi}\dot{r}.$$

Для определения модуля абсолютного ускорения найдем его проекции на оси полярных координат:

$$\omega_1 = \omega_r - \omega_e^u = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2;$$

$$\omega_2 = \omega_e^b + \omega_c = r\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{r}.$$

Тогда

$$w = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2};$$

$$\cos(w, r) = \frac{\omega_1}{w}; \quad \cos(w, \varphi) = \frac{\omega_2}{w}.$$

Пример 89. Точка M , находящаяся в начальный момент в вершине кругового конуса, движется равномерно по образующей конуса к основанию, с относительной скоростью $v_r = 24$ см/сек. Конус вращается вокруг своей оси в указанном на рис. 352,а направлении, согласно уравнению $\varphi = 0,125t^2$. Определить абсолютную скорость и ускорение точки в конце 4-й сек, если $\angle AOM = \alpha = 30^\circ$.

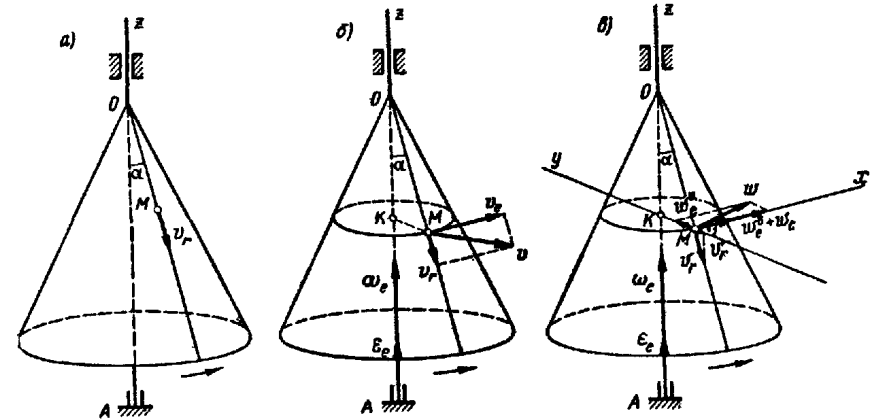


Рис. 352.

Решение. Подвижную систему отсчета свяжем с вращающимся конусом. Движение точки M по отношению к конусу вдоль его образующей является относительным, а движение точки M вместе с конусом, вращающимся вокруг оси Az , — переносным.

Траектория относительного движения точки M — образующая конуса, по которой движется эта точка. Траектория переносного движения точки M в данный момент — окружность, которую описывает точка конуса, совпадающая в этот момент с точкой M (рис. 352,б).

Определим положение точки M в конце 4-й сек:

$$OM = v_r t = 24 \cdot 4 = 96 \text{ см};$$

$$MK = OM \sin 30^\circ = 96 \cdot 0,5 = 48 \text{ см}.$$

Определим переносную угловую скорость и переносное угловое ускорение по формулам (91.2) и (91.3)

$$\omega_e = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = 0,25t;$$

при $t = 4$ сек,

$$\omega_e = 0,25 \cdot 4 = 1 \text{ сек}^{-1};$$

$$\varepsilon_e = \left| \frac{d\omega_e}{dt} \right| = 0,25 \text{ сек}^{-2}.$$

Векторы ω_e и ε_e направлены по оси вращения конуса вверх (§ 94).

1. Определение абсолютной скорости точки M . Абсолютная скорость точки M в конце 4-й сек определяется как геометрическая сумма двух скоростей:

$$v = v_e + v_r.$$

Переносная скорость v_e направлена по касательной к траектории переносного движения, а ее модуль равен:

$$v_e = MK \cdot \omega_e = 48 \cdot 1 = 48 \text{ см/сек.}$$

Относительная скорость v_r направлена вдоль прямолинейной траектории относительного движения, т. е. вдоль образующей конуса, а ее модуль $v_r = 24 \text{ см/сек.}$

Так как составляющие скорости взаимно перпендикулярны, то имеем (рис. 352,б)

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{48^2 + 24^2} = 53,64 \text{ см/сек.}$$

2. Определение абсолютного ускорения точки M .

Абсолютное ускорение точек M при вращательном переносном движении определяется:

$$w = w_e^B + w_e^H + w_{rc} + w_{rn} + w_c.$$

Определим составляющие абсолютного ускорения точки M (рис. 352,в).

Переносное вращательное ускорение w_e^B направлено по касательной к траектории переносного движения точки в соответствии с направлением углового ускорения ε_e , а его модуль равен:

$$w_e^B = MK \cdot \varepsilon_e = 48 \cdot 0,25 = 12 \text{ см/сек}^2.$$

Переносное центростремительное ускорение w_e^H направлено к центру кривизны K траектории переносного движения, а его модуль равен:

$$w_e^H = MK \cdot \omega_e^2 = 48 \cdot 1 = 48 \text{ см/сек}^2.$$

Относительное движение точки равномерное, а потому

$$w_{rc} = \left| \frac{dv_r}{dt} \right| = 0.$$

Так как относительное движение точки — движение прямолинейное, то

$$w_{rn} = \frac{v_r^2}{\rho} = \frac{v_r^2}{\infty} = 0.$$

Направление поворотного ускорения w_c определяем по правилу Жуковского; оно совпадает с направлением w_e^B , а его модуль равен:

$$w_c = 2 \cdot \omega_e \cdot v_r \cdot \sin \alpha = 2 \cdot 1 \cdot 24 \cdot 0,5 = 24 \text{ см/сек}^2.$$

Проектируя все составляющие абсолютного ускорения на оси x и y , направленные по касательной и нормали траектории переносного

движения, получаем:

$$w_x = w_e^B + w_c = 12 + 24 = 36 \text{ см/сек}^2;$$

$$w_y = w_e^H = 48 \text{ см/сек}^2;$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{36^2 + 48^2} = 60 \text{ см/сек}^2.$$

Направление абсолютного ускорения точки M определяем по косинусам углов:

$$\cos(w, i) = \frac{w_x}{w} = 0,6;$$

$$\cos(w, j) = \frac{w_y}{w} = 0,8.$$

Пример 90. Диск вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 3 \text{ сек}^{-1}$ вокруг оси, совпадающей с его вертикальным диаметром. По диаметру диска, перпендикулярному оси его вращения, движется точка согласно уравнению $x = 20 \sin \frac{\pi}{2} t$. Определить абсолютные скорость и ускорение точки в конце 3-й и 4-й сек (рис. 353,а).

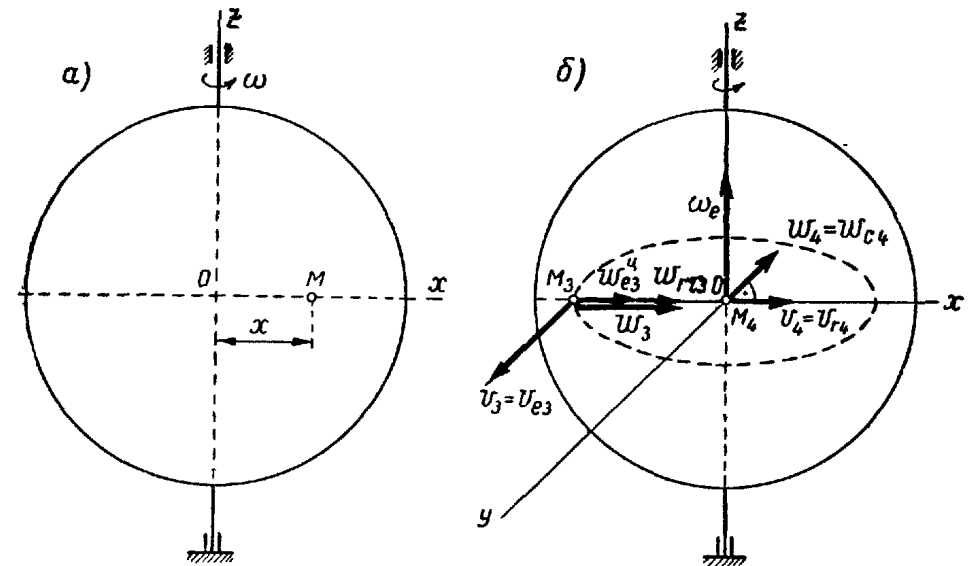


Рис. 353.

Решение. Переносным движением точки M является движение точки вместе с диском, т. е. вращение с угловой скоростью $\omega_e = \omega = 3 \text{ сек}^{-1}$, а относительным — колебательное движение точки вдоль оси x . Траекторией переносного движения точки в рассматриваемый момент времени является окружность в плоскости, перпендикулярной оси вращения Oz , с центром O и радиусом, равным абсолютной величине координаты x (рис. 353,б).

Траектория относительного движения точки совпадает с осью x .
 1. Определение абсолютной скорости точки. По теореме о сложении скоростей

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

Переносная вращательная скорость \mathbf{v}_e точки M в любой момент времени направлена перпендикулярно плоскости диска, а ее модуль равен:

$$v_e = R\omega_e.$$

Относительная скорость \mathbf{v}_r точки M является скоростью ее колебательного движения по диаметру диска, перпендикулярному оси его вращения.

При колебательном движении определяется обычно алгебраическая величина скорости:

$$\tilde{v}_r = v_{rx} = \frac{dx}{dt} = 10\pi \cos \frac{\pi}{2} t \text{ (см/сек)}.$$

При $t = 3$ сек

$$\begin{aligned} x_3 &= 20 \sin \frac{\pi}{2} \cdot 3 = 20(-1) = -20 \text{ см}; \\ R_3 &= |x_3| = 20 \text{ см}; \quad v_{e3} = 20 \cdot 3 = 60 \text{ см/сек}; \\ \tilde{v}_{r3} &= 10\pi \cos \frac{\pi}{2} 3 = 0, \text{ так как } \cos \frac{3}{2}\pi = 0; \\ v_3 &= v_{e3} = 60 \text{ см/сек}. \end{aligned}$$

Направление абсолютной скорости точки \mathbf{v}_3 совпадает с направлением ее переносной скорости \mathbf{v}_{e3} , которая направлена по касательной к траектории переносного движения в сторону вращения диска.

При $t = 4$ сек

$$\begin{aligned} x_4 &= 20 \sin \frac{\pi}{2} \cdot 4 = 0, \text{ так как } \sin 2\pi = 0; \\ R_4 &= 0; \quad v_{e4} = 0; \\ \tilde{v}_{r4} &= 10\pi \cos \frac{\pi}{2} \cdot 4 = 10\pi = 31,4 \text{ см/сек}. \end{aligned}$$

Относительная скорость \mathbf{v}_{r4} направлена по направлению оси x , так как ее проекция на ось x , найденная по уравнению движения, в этот момент положительна. Очевидно, что

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_{r4} \text{ и } v_4 = v_{r4} = 31,4 \text{ см/сек},$$

т. е. направление абсолютной скорости совпадает с направлением относительной скорости, и их модули равны.

2. Определение абсолютного ускорения точки. По теореме о сложении ускорений при вращательном переносном движении:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e^b + \mathbf{w}_e^n + \mathbf{w}_{r\tau} + \mathbf{w}_{rn} + \mathbf{w}_c.$$

Переносное движение является равномерным вращением. Поэтому в любой момент времени $\omega_e^b = 0$.

Относительное движение точки — прямолинейное, колебательное движение, поэтому $\omega_{rn} = 0$, а алгебраическую величину касательного ускорения находим по формуле (85.6);

$$\tilde{w}_{r\tau} = \frac{d^2x}{dt^2} = -5\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t \text{ (см/сек}^2\text{)}.$$

Определим модули и направления составляющих абсолютного ускорения в заданные моменты времени (рис. 353,б).

При $t = 3$ сек. Переносное центростремительное ускорение \mathbf{w}_{e3}^n направлено к центру O траектории переносного движения точки, а его модуль равен

$$w_{e3}^n = R_3 \cdot \omega_e^2 = 20 \cdot 3^2 = 180 \text{ см/сек}^2.$$

Относительное касательное ускорение $\mathbf{w}_{r\tau}$ направлено по прямолинейной траектории относительного движения точки и его алгебраическая величина равна:

$$\tilde{w}_{r\tau} = -5\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} \cdot 3 = 49,3 \text{ см/сек}^2 > 0.$$

Так как $\tilde{w}_{r\tau} > 0$, то ускорение $\mathbf{w}_{r\tau 3}$ имеет направление оси x .

Поворотное ускорение \mathbf{w}_{e3} точки M в этот момент равно нулю, так как $v_{r3} = 0$.

Таким образом, при $t = 3$ сек только два составляющих абсолютного ускорения \mathbf{w}_{e3}^n и $\mathbf{w}_{r\tau 3}$ не равны нулю и направлены по одной прямой в одну сторону.

Направление абсолютного ускорения \mathbf{w}_3 точки M в конце 3 сек совпадает с направлением этих составляющих, а его модуль равен:

$$w_3 = w_{e3}^n + w_{r\tau 3} = 180 + 49,3 = 229,3 \text{ см/сек}^2.$$

При $t = 4$ сек. В этот момент $R_4 = 0$, а потому $\mathbf{w}_{e4}^n = 0$.

Относительное касательное ускорение в этот момент

$$\tilde{w}_{r\tau 4} = -5\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} \cdot 4 = 0.$$

Направление поворотное ускорение \mathbf{w}_{c4} получается поворотом скорости \mathbf{v}_{r4} на 90° в сторону переносного вращения

$$w_{c4} = 2\omega_e v_r \sin \frac{\pi}{2} = 2 \cdot 3 \cdot 31,4 \cdot 1 = 188,4 \text{ см/сек}^2.$$

Таким образом, при $t = 4$ сек только одно составляющее ускорение \mathbf{w}_{c4} не равно нулю. Поэтому $\mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_{c4}$, т. е. направление абсолютного ускорения точки M в конце 4 сек совпадает с направлением поворотного ускорения, а его модуль равен модулю поворотного ускорения:

$$w_4 = w_{c4} = 188,4 \text{ см/сек}^2.$$

Пример 91. Шары центробежного регулятора Уатта, вращающегося вокруг вертикальной оси, благодаря изменению нагрузки машины, отходят от этой оси. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение центров этих шаров, если в рассматриваемый момент регулятор вращается с угловой скоростью $\omega = 4 \text{ сек}^{-1}$ и угловым ускорением $\epsilon = 0,8 \text{ сек}^{-2}$, а угловая скорость расхождения шаров $\omega_1 = 2 \text{ сек}^{-1}$ и угловое ускорение $\epsilon_1 = 0,2 \text{ сек}^{-2}$. Длина стержней $l = 40 \text{ см}$, расстояние между осями их привеса $2e = 10 \text{ см}$, а углы, образованные стержнями с осью регулятора $\alpha = 30^\circ$ (рис. 354,а).

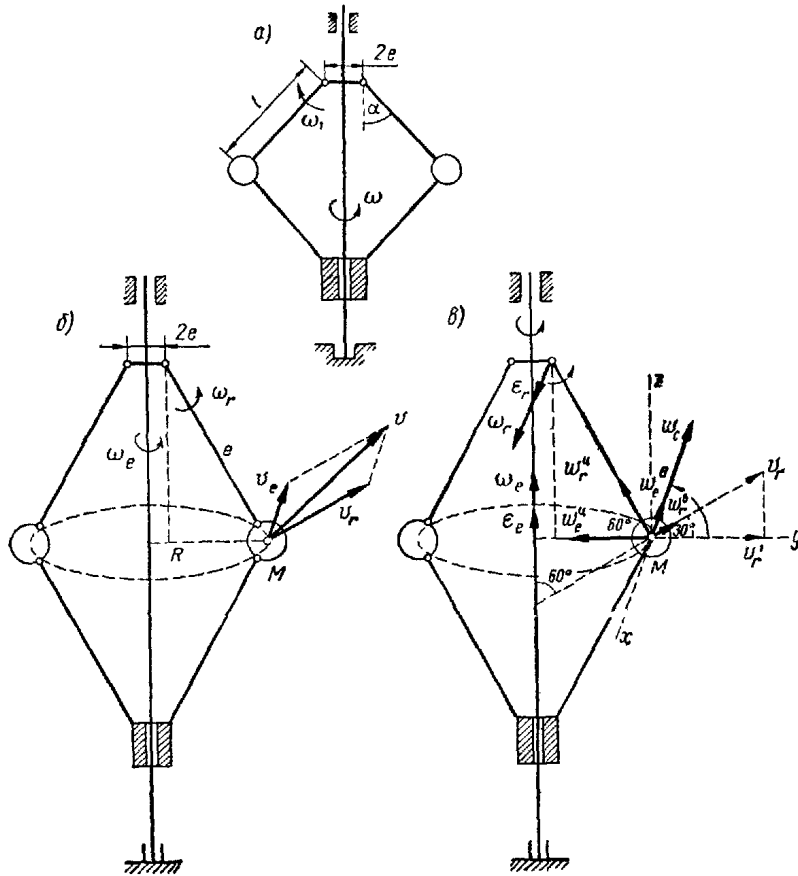


Рис. 354.

Решение. Подвижную систему отсчета связываем с частями регулятора, вращающимися вокруг его оси.

Переносным движением шаров является их вращение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega_e = \omega = 4 \text{ сек}^{-1}$ и угловым ускорением $\epsilon_e = \epsilon = 0,8 \text{ сек}^{-2}$, а относительным — вращение стержней с шарами вокруг осей их привеса с угловой скоростью

$\omega_r = \omega_1 = 2 \text{ сек}^{-1}$ и угловым ускорением $\epsilon_r = \epsilon_1 = 0,2 \text{ сек}^{-2}$. Векторы $\omega_e, \epsilon_e, \omega_r, \epsilon_r$ изображены на рис. 354,в.

Траекторией переносного движения центра каждого шара является горизонтальная окружность с центром на оси регулятора, проходящая через центр шара. Траектория относительного движения — это дуга окружности радиусом l , лежащей в плоскости регулятора, с центром на оси привеса стержня.

Радиус окружности, являющейся в рассматриваемый момент времени траекторией переносного движения шара

$$R = e + l \sin 30^\circ = 5 + 40 \cdot 0,5 = 25 \text{ см.}$$

1. Определение абсолютной скорости центра шара.

Абсолютная скорость центра каждого из шаров определяется как геометрическая сумма его переносной и относительной скоростей (рис. 354,б):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

Переносная скорость центра шара \mathbf{v}_e направлена по касательной к траектории переносного движения, а её модуль равен:

$$v_e = R \cdot \omega_e = 25 \cdot 4 = 100 \text{ см/сек.}$$

Относительная скорость центра шара \mathbf{v}_r направлена по касательной к траектории относительного движения, т. е. перпендикулярно к стержню, а её модуль равен:

$$v_r = l \cdot \omega_r = 40 \cdot 2 = 80 \text{ см/сек.}$$

Скорости \mathbf{v}_e и \mathbf{v}_r взаимно перпендикулярны.

Модуль абсолютной скорости

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{100^2 + 80^2} = 128 \text{ см/сек.}$$

2. Определение абсолютного ускорения центра шара.

Абсолютное ускорение центра каждого шара при вращательных составляющих движениях равно:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e^{\text{в}} + \mathbf{w}_e^{\text{и}} + \mathbf{w}_r^{\text{в}} + \mathbf{w}_r^{\text{и}} + \mathbf{w}_c.$$

Найдем модули и направления составляющих ускорений (рис. 354,г).

Переносное вращательное ускорение $\mathbf{w}_e^{\text{в}}$ направлено по касательной к траектории переносного движения в соответствии с направлением ϵ_e , а его модуль равен:

$$w_e^{\text{в}} = R \cdot \epsilon_e = 25 \cdot 0,8 = 20 \text{ см/сек}^2.$$

Переносное центростремительное ускорение $\mathbf{w}_e^{\text{и}}$ направлено к центру окружности, являющейся траекторией переносного движения центра шара, а его модуль равен:

$$w_e^{\text{и}} = R \cdot \omega_e^2 = 25 \cdot 16 = 400 \text{ см/сек}^2.$$

§ 129. Сложение вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей. Параллелограмм и многоугольник угловых скоростей

Угловая скорость вращения твердого тела вокруг неподвижной оси согласно § 94 рассматривается как скользящий вектор, направленный вдоль оси вращения в такую сторону, чтобы, смотря ему навстречу, видеть вращение тела, происходящим противоположно движению часовой стрелки.

Ось вращения, положение которой в пространстве изменяется со временем, называют *мгновенной осью вращения тела*.

Как указывалось выше, мгновенная ось вращения представляет собой геометрическое место точек тела, скорости которых в данный момент равны нулю.

Вектор угловой скорости тела в этом случае рассматривается так же, как скользящий вектор, направленный вдоль мгновенной оси вращения тела.

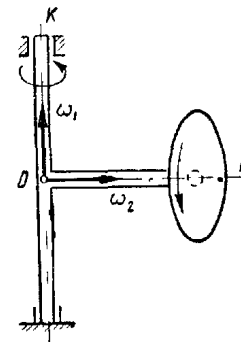


Рис. 355.

Рассмотрим составное движение тела, представляющее собой совокупность двух вращательных движений тела вокруг осей, пересекающихся в одной точке. Примером такого движения является совокупность вращения диска вокруг оси OL с угловой скоростью ω_2 и его вращения вместе с осью OL вокруг неподвижной оси OK с угловой скоростью ω_1 (рис. 355).

Вращение диска вместе с осью OL вокруг оси OK представляет собой переносное вращение, а его вращение вокруг оси OL — его относительное вращение.

Определим абсолютное движение тела, получающееся при сложении двух вращательных движений вокруг пересекающихся осей. Пусть твердое тело одновременно вращается вокруг двух мгновенных осей, пересекающихся в точке O (рис. 356), причем его вращение вокруг оси OK является переносным, а вокруг оси OL — относительным вращением. Предположим, что угловая скорость переносного вращения тела равна ω_e , а относительного вращения — ω_r .

Скользящие векторы угловых скоростей ω_e и ω_r перенесем в точку O пересечения мгновенных осей и построим на этих векторах параллелограмм OACB.

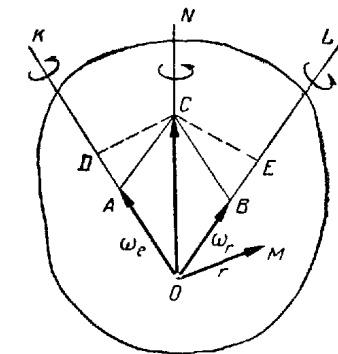


Рис. 356

Относительное вращательное ускорение центра шара w_r^B направлено по касательной к траектории относительного движения, т. е. перпендикулярно стержню, в соответствии с направлением ϵ_r , а его модуль равен:

$$w_r^B = l \cdot \epsilon_r = 40 \cdot 0,2 = 8 \text{ см/сек}^2.$$

Относительное центростремительное ускорение центра шара w_r^H направлено к центру траектории относительного движения, лежащему на оси привеса стержня, а его модуль равен:

$$w_r^H = l \cdot \omega_r^2 = 40 \cdot 4 = 160 \text{ см/сек}^2.$$

Поворотное ускорение центра шара w_c имеет направление, определяемое по правилу Жуковского, а его модуль равен:

$$w_c = 2\omega_e v_r \sin(\omega_e, v_r) = 2 \cdot 4 \cdot 80 \cdot 0,866 = 554 \text{ см/сек}^2.$$

Здесь $\angle(\omega_e, v_r) = 60^\circ$, $\sin(\omega_e, v_r) = 0,866$ (рис. 354, в).

Абсолютное ускорение точки, равное геометрической сумме пяти слагаемых, находим по способу проекций. Проводим оси координат с началом в точке M, направляя ось x по касательной к траектории переносного движения, ось y — вдоль ее радиуса, ось z — параллельно оси регулятора.

Ускорения w_e^H , w_r^H , w_r^B располагаются в плоскости yMz, ускорения w_c^B и w_c — на оси x.

Вычисляем проекции абсолютного ускорения на оси координат как суммы проекций составляющих ускорений на эти оси:

$$w_x = -w_c - w_e^B = -554 - 20 = -574 \text{ см/сек}^2;$$

$$w_y = w_r^B \cos 30^\circ - w_r^H \cos 60^\circ - w_e^H = 8 \cdot 0,866 - 160 \cdot 0,5 - 400 = -473 \text{ см/сек}^2;$$

$$w_z = w_r^B \sin 60^\circ + w_r^H \sin 30^\circ = 8 \cdot 0,5 + 160 \cdot 0,866 = 142 \text{ см/сек}^2.$$

Тогда модуль абсолютного ускорения

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{(-574)^2 + (-473)^2 + (142)^2} = 869 \text{ см/сек}^2.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение относительного, переносного и абсолютного движений точки, а также скоростей и ускорений этих движений.
2. Как определяют абсолютную скорость точки в составном движении?
3. Как определяют абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении и при поступательном переносном движении?
4. Каковы причины появления поворотного ускорения?
5. Каковы модуль и направление поворотного ускорения и при каких условиях поворотное ускорение точки равно нулю?
6. Какой вид имеет выражение абсолютно о ускорения точки в случае, когда переносное движение представляет собой свободное движение твердого тела, и в случае, когда переносное движение является вращением вокруг неподвижной оси?

Покажем, что диагональ OC этого параллелограмма представляет собой угловую скорость результирующего вращения тела, которое происходит вокруг оси ON .

Для этого прежде всего установим, что ось ON является мгновенной осью абсолютного вращения тела, т. е. абсолютные скорости точек тела, расположенных на прямой ON , равны нулю.

Точка O расположена одновременно на двух мгновенных осях вращения OK и OL , поэтому ее абсолютная скорость равна нулю $v_O = 0$.

Покажем, что скорость вершины C параллелограмма $OACB$ также равна нулю.

Точка C принадлежит твердому телу и поэтому она одновременно участвует в его вращениях вокруг осей OK и OL .

Переносная вращательная скорость v_e направлена перпендикулярно плоскости $OACB$ от читателя, а ее модуль равен:

$$v_e = DC \cdot \omega_e = 2 \text{ пл. } \triangle OAC$$

Относительная вращательная скорость v_r направлена перпендикулярно плоскости $OACB$ к читателю, а ее модуль равен:

$$v_r = EC \cdot \omega_r = 2 \text{ пл. } \triangle OBC.$$

Так как $\triangle OAC = \triangle OBC$, то $v_e = -v_r$.

По теореме о сложении скоростей получим

$$v_C = v_e + v_r = 0.$$

Установив, что скорости точек O и C твердого тела в рассматриваемый момент равны нулю, можно утверждать, что прямая ON , проходящая через эти точки, в этот момент является мгновенной осью абсолютного вращения тела.

Покажем теперь, что геометрическая сумма векторов ω_e и ω_r , т. е. вектор \overline{OC} , равен вектору угловой скорости абсолютного вращения тела ω . Для этого проведем из точки O в какую-либо точку M тела радиус-вектор r и определим скорость этой точки:

$$v = v_e + v_r.$$

Абсолютная скорость точки равна произведению неизвестного по модулю вектора ω , направленного по оси ON , на радиус-вектор точки:

$$v = \omega \times r.$$

Вращательные скорости составляющих движений

$$v_e = \omega_e \times r, \quad v_r = \omega_r \times r.$$

Подставляя выражения скоростей, получаем

$$\omega \times r = \omega_e \times r + \omega_r \times r = (\omega_e + \omega_r) \times r,$$

откуда находим, что

$$\omega = \omega_e + \omega_r. \quad (129.1)$$

Таким образом, угловая скорость абсолютного вращения тела равна геометрической сумме угловых скоростей составляющих вращений.

Установленное соотношение называют *правилом параллелограмма угловых скоростей*.

Если твердое тело одновременно совершает вращения вокруг нескольких мгновенных осей, пересекающихся в одной точке, то угловая скорость ω абсолютного вращения тела равна геометрической сумме угловых скоростей $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ составляющих вращений:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n. \quad (129.2)$$

Это соотношение называют *правилом многоугольника угловых скоростей*. Оно показывает, что абсолютную угловую скорость ω можно найти как замыкающую сторону многоугольника угловых скоростей (рис. 361). Рассмотрим несколько примеров на построение параллелограмма угловых скоростей.

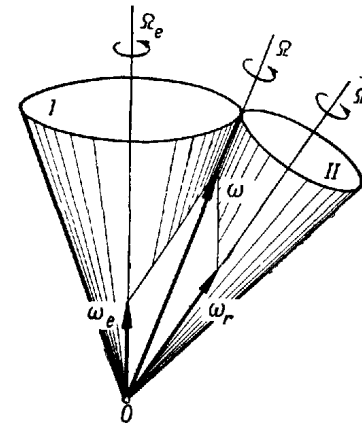


Рис. 357.

Допустим, например, что конус II катится без скольжения по неподвижному конусу I (рис. 357). Так как при отсутствии скольжения точки соприкосновения конуса II с неподвижным конусом I имеют скорости, равные нулю, то линия соприкосновения конусов является мгновенной осью Ω абсолютного вращения конуса II .

При качении конуса II его образующие поочередно становятся линиями касания с неподвижным конусом, т. е. мгновенными осями абсолютного вращения конуса II . Ось конуса II не остается неподвижной, а вращается вокруг оси неподвижного конуса. Следовательно, абсолютное вращение конуса II вокруг мгновенной оси Ω представляет собой совокупность его относительного вращения вокруг оси Ω_r , являющейся его осью, и переносного вращения вокруг оси Ω_e , совпадающей с осью неподвижного конуса. Угловые скорости этих вращений связаны зависимостью

$$\omega = \omega_e + \omega_r.$$

Зная одну из трех угловых скоростей и положение всех трех осей вращения, можно построить параллелограмм угловых скоростей и определить две другие угловые скорости.

На рис. 358 показан параллелограмм угловых скоростей для случая качения без скольжения конуса II по внутренней поверхности неподвижного конуса I , а на рис. 359 — для случая качения без скольжения конуса II по неподвижной плоскости I . По рисунку легко убедиться в том, что смотря навстречу соответствующему вектору

угловой скорости, можно видеть каждое из трех вращений происходящим против движения часовой стрелки.

Покажем применение параллелограмма угловых скоростей на сле-

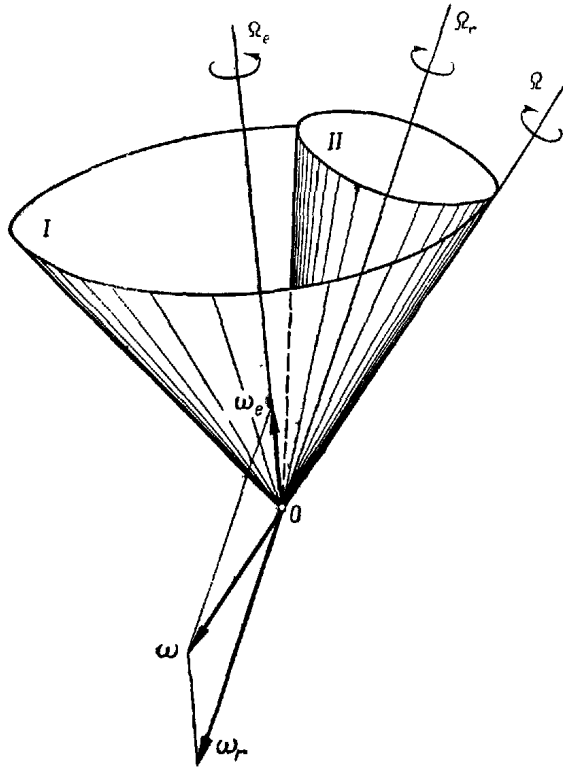


Рис. 358.

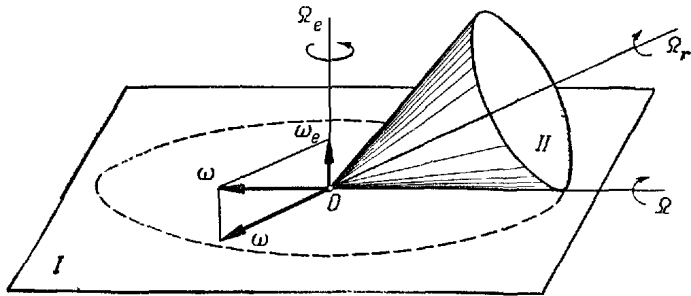


Рис. 359.

дующем примере (рис. 360). Допустим, что конус II обегает неподвижный конус I за минуту 15 раз. Определим угловую скорость вращения конуса II вокруг своей оси, его абсолютную угловую

скорость и его угловое ускорение. Для этого представим абсолютное вращение конуса II вокруг мгновенной оси Omega состоящим из относительного вращения вокруг его оси Omega_r и переносного вращения вместе с этой осью вокруг оси неподвижного конуса Omega_e.

Модуль угловой скорости переносного вращения

$$\omega_e = \frac{2\pi \cdot 15}{60} = 0,5\pi = 1,57 \text{ сек}^{-1}.$$

Задавшись направлением переносного вращения (против движения часовой стрелки, если смотреть сверху), откладываем вектор omega_e и строим параллелограмм угловых скоростей. Из параллелограмма находим модули угловых скоростей абсолютного и относительного вращений конуса II:

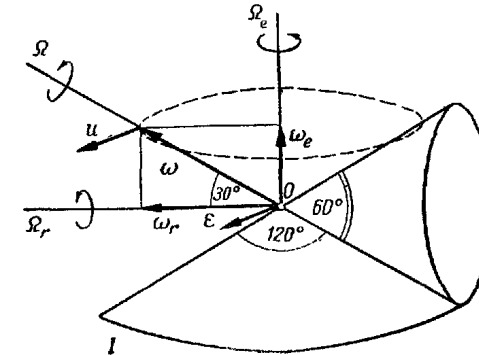


Рис. 360.

$$\omega = \frac{\omega_e}{\sin 30^\circ} = \frac{0,5\pi}{0,5} = \pi = 3,14 \text{ сек}^{-1};$$

$$\omega_r = \omega \operatorname{ctg} 30^\circ = 0,5\pi \sqrt{3} = 2,72 \text{ сек}^{-1}.$$

Движение конуса II является сферическим, так как его вершина O остается неподвижной. Для определения углового ускорения конуса epsilon следует построить годограф угловой скорости omega и определить линейную скорость u конца вектора omega (§ 115).

Годографом omega является окружность, параллельная основанию неподвижного конуса. Зная модули угловой скорости переносного вращения omega_e и относительного вращения omega_r конуса II, определим модуль вращательной скорости u:

$$u = \omega_e \omega_r = 0,5\pi \cdot 0,5\pi \sqrt{3} = 0,25\pi^2 \sqrt{3} = 4,23 \text{ сек}^{-2};$$

$$\epsilon = u; \quad \epsilon = u = 0,25\pi^2 \sqrt{3} = 4,23 \text{ сек}^{-2}.$$

Вектор epsilon перпендикулярен плоскости параллелограмма угловых скоростей.

§ 130. Проекции угловой скорости и углового ускорения твердого тела, совершающего сферическое движение, на неподвижные и подвижные оси декартовых координат

Пусть сферическое движение тела задано уравнениями (113.1):

$$\left. \begin{aligned} \psi &= f_1(t), \\ \theta &= f_2(t), \\ \varphi &= f_3(t). \end{aligned} \right\}$$

Быстроту изменения эйлеровых углов характеризуют алгебраические величины соответствующих угловых скоростей:

$\bar{\omega}_1 = \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}$ — угловой скорости прецессии, т. е. вращения тела вокруг оси z , перпендикулярной плоскости угла ψ ;
 $\bar{\omega}_2 = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ — угловой скорости нутации, т. е. вращения тела вокруг линии узлов, перпендикулярной плоскости угла θ ;
 $\bar{\omega}_3 = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ — угловой скорости собственного вращения, происходящего вокруг оси ζ , которая перпендикулярна плоскости угла φ .

Сферическое движение тела в каждый момент времени может рассматриваться как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через неподвижную точку O .

Разложим это вращение на три составляющих вращения вокруг осей z, J, ζ , проходящих через эту же точку (§ 113).

Тогда вектор ω угловой скорости вращения тела вокруг мгновенной оси Ω будет равен сумме угловых скоростей $\omega_1, \omega_3, \omega_2$, направленных вдоль осей z, J, ζ , т. е. определится как замыкающая сторона многоугольника угловых скоростей:

$$\omega = \omega_1 + \omega_3 + \omega_2.$$

Модуль угловой скорости ω можно определить непосредственно из многоугольника угловых скоростей (рис. 361) и по способу проекций.

Определяя ω при помощи многоугольника угловых скоростей, найдем сначала

ω_1 — сумму двух угловых скоростей ω_1 и ω_3 , как диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах. Учитывая, что угол между ω_1 и ω_3 равен θ , имеем

$$\omega_1^2 = \omega_1^2 + \omega_3^2 + 2\omega_1\omega_3 \cos \theta.$$

Найденный вектор ω_1 расположен в плоскости $zO\zeta$, а вектор ω_2 направлен по линии узлов OJ , перпендикулярной к этой плоскости, т. е. угол между векторами ω_1 и ω_2 равен 90° , а потому

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2.$$

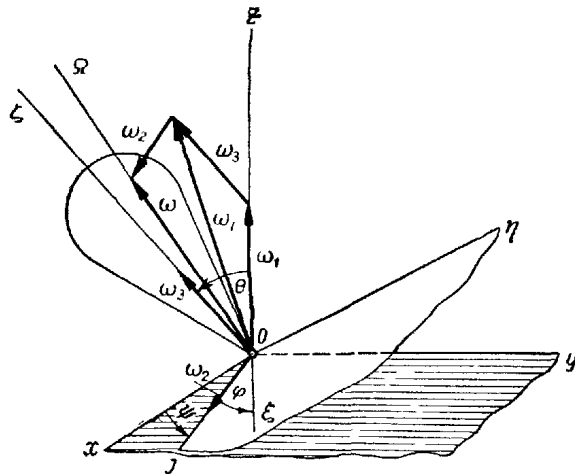


Рис. 361.

Подставляя в это выражение ω_1^2 , получаем

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + 2\omega_1\omega_3 \cos \theta$$

или

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \theta}. \quad (130.1)$$

По этой формуле определяем модуль угловой скорости вращения тела вокруг мгновенной оси.

Модуль и направление угловой скорости ω можно определить также по ее проекциям на неподвижные оси декартовых координат x, y, z или на подвижные оси ξ, η, ζ . Проекция ω на каждую ось определяется как сумма проекций составляющих угловых скоростей ω_1, ω_2 и ω_3 .

Найдем сначала проекции ω на неподвижные координатные оси x, y, z .

Проекция ω_1 и ω_2 находим непосредственно. Чтобы получить проекции ω_3 на все три оси, разложим эту угловую скорость на две составляющие, из которых одна направлена по оси z , а другая лежит в плоскости xOy (рис. 362).

Первая составляющая имеет алгебраическую величину $\omega_3 \cos \theta$, вторая $\omega_3 \sin \theta$. Вторая составляющая направлена по прямой Oj , лежащей в плоскости xOy и перпендикулярной прямой OJ . Прямая Oj образует с осями x и y углы, равные $90^\circ - \psi$ и $180^\circ - \psi$.

Проектируя угловые скорости на неподвижные оси, получаем:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_2 \cos \psi + \omega_3 \sin \theta \sin \psi; \\ \omega_y &= \omega_2 \sin \psi - \omega_3 \sin \theta \cos \psi; \\ \omega_z &= \omega_1 + \omega_3 \cos \theta. \end{aligned}$$

Подставляя значения ω_1, ω_2 и ω_3 , находим:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \\ \omega_y &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (130.2)$$

При вычислении проекций ω на подвижные оси ξ, η, ζ (рис. 363) проекции ω_2 и ω_3 определяем непосредственно.

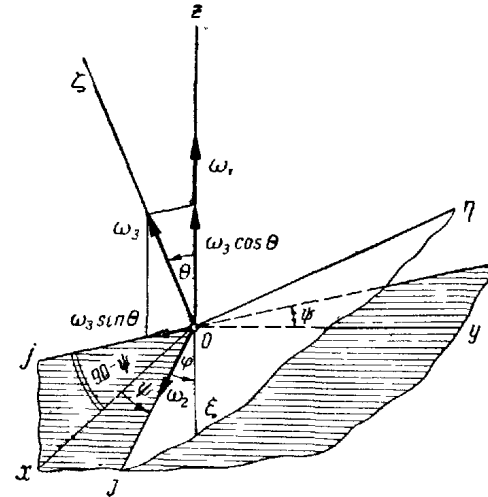


Рис. 362.

Чтобы получить проекции ω_1 на все три оси, разложим эту угловую скорость на две составляющие: направленную по оси ζ и лежащую в плоскости $\xi O\eta$. Их алгебраические величины равны $\omega_1 \cos \theta$ и $\omega_1 \sin \theta$. Вторая составляющая направлена по прямой Ou , лежащей в плоскости $\xi O\eta$ и перпендикулярной прямой OJ . Прямая Ou образует с осями ξ и η углы, равные $90^\circ - \varphi$ и φ .

Проектируя угловые скорости на подвижные оси, получаем:

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= \omega_1 \sin \theta \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi; \\ \omega_\eta &= \omega_1 \sin \theta \cos \varphi - \omega_2 \sin \varphi; \\ \omega_\zeta &= \omega_1 \cos \theta + \omega_3.\end{aligned}$$

Подставляя значения ω_1 , ω_2 и ω_3 , находим:

$$\left. \begin{aligned}\omega_\xi &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}.\end{aligned} \right\} (130.3)$$

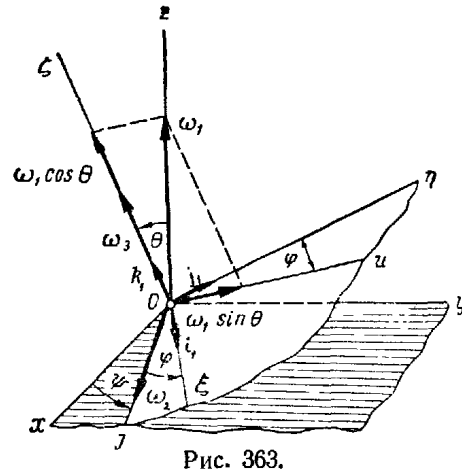


Рис. 363.

Легко убедиться в том, что при вычислении модуля ω по ее проекциям на неподвижные или подвижные оси получается значение, определяемое формулой (130.1), т. е.

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \theta}.$$

Модуль и направление углового ускорения ϵ также можно определить по его проекциям на неподвижные или подвижные оси декартовых координат.

Определим проекции углового ускорения на неподвижные оси координат.

Разлагая векторы угловой скорости ω и углового ускорения ϵ по ортам неподвижных осей, имеем:

$$\omega = i\omega_x + j\omega_y + k\omega_z, \quad (130.4)$$

$$\epsilon = i\epsilon_x + j\epsilon_y + k\epsilon_z. \quad (130.5)$$

Вектор углового ускорения равен производной по времени от вектора угловой скорости (115.1):

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = i \frac{d\omega_x}{dt} + j \frac{d\omega_y}{dt} + k \frac{d\omega_z}{dt}. \quad (130.6)$$

Сопоставляя выражения (130.5) и (130.6), определяющие ϵ , находим

$$\epsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt}, \quad \epsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt}, \quad \epsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}, \quad (130.7)$$

т. е. проекции углового ускорения на неподвижные оси декартовых координат равны производным по времени от проекций угловой скорости на соответствующие оси.

Таким образом, выражения проекций углового ускорения на неподвижные оси содержат эйлеровы углы и их производные.

Определим проекции углового ускорения и на подвижные оси декартовых координат, связанные с твердым телом.

Обозначим единичные векторы подвижных осей i_1, j_1, k_1 . Эти орты, неизменные по модулю, вращаются вместе с телом вокруг мгновенной оси с угловой скоростью ω .

Поэтому производные от этих ортов по времени как вращательные скорости концов этих векторов определяются по формулам (124.3):

$$\frac{di_1}{dt} = \omega \times i_1, \quad \frac{dj_1}{dt} = \omega \times j_1, \quad \frac{dk_1}{dt} = \omega \times k_1. \quad (130.8)$$

Разлагая векторы угловой скорости ω и углового ускорения ϵ по ортам подвижных осей, получаем

$$\omega = i_1\omega_\xi + j_1\omega_\eta + k_1\omega_\zeta, \quad (130.9)$$

$$\epsilon = i_1\epsilon_\xi + j_1\epsilon_\eta + k_1\epsilon_\zeta. \quad (130.10)$$

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{di_1}{dt} \omega_\xi + \frac{dj_1}{dt} \omega_\eta + \frac{dk_1}{dt} \omega_\zeta \right) + \left(i_1 \frac{d\omega_\xi}{dt} + j_1 \frac{d\omega_\eta}{dt} + k_1 \frac{d\omega_\zeta}{dt} \right).$$

Преобразуем первое слагаемое правой части этого равенства, пользуясь значениями производных от ортов:

$$\frac{di_1}{dt} \omega_\xi + \frac{dj_1}{dt} \omega_\eta + \frac{dk_1}{dt} \omega_\zeta = \omega \times (i_1\omega_\xi + j_1\omega_\eta + k_1\omega_\zeta) = \omega \times \omega = 0.$$

Угловое ускорение

$$\epsilon = i_1 \frac{d\omega_\xi}{dt} + j_1 \frac{d\omega_\eta}{dt} + k_1 \frac{d\omega_\zeta}{dt}. \quad (130.11)$$

Сопоставляя выражения (130.10) и (130.11), определяющие ϵ , находим проекции вектора ϵ на оси ξ, η, ζ :

$$\epsilon_\xi = \frac{d\omega_\xi}{dt}, \quad \epsilon_\eta = \frac{d\omega_\eta}{dt}, \quad \epsilon_\zeta = \frac{d\omega_\zeta}{dt}, \quad (130.12)$$

т. е. проекции углового ускорения тела на подвижные оси декартовых координат равны производным по времени от проекций угловой скорости на соответствующие подвижные оси.

§ 131. Проекция ускорения точки твердого тела, совершающего сферическое движение, на неподвижные и подвижные оси декартовых координат

Пользуясь проекциями угловой скорости и углового ускорения тела на оси координат, можно определять проекции ускорения точки тела при сферическом движении на неподвижные или подвижные оси

декартовых координат. Вектор ускорения точки при сферическом движении (118.2)

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Из векторной алгебры известно выражение двойного векторного произведения

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

Преобразуя по этой формуле двойное векторное произведение $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, получаем

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})$$

или

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \omega^2 \mathbf{r}. \quad (131.1)$$

Проектируя левую и правую части этого векторного равенства на неподвижные оси декартовых координат, получаем

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x, \\ \omega_y &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_y(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y, \\ \omega_z &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_z(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z. \end{aligned} \right\} \quad (131.2)$$

В проекциях на подвижные оси декартовых координат получаем

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= \varepsilon_\eta \zeta - \varepsilon_\zeta \eta + \omega_\xi(\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \xi, \\ \omega_\eta &= \varepsilon_\zeta \xi - \varepsilon_\xi \zeta + \omega_\eta(\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \eta, \\ \omega_\zeta &= \varepsilon_\xi \eta - \varepsilon_\eta \xi + \omega_\zeta(\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (131.3)$$

Ускорение точки определяется по его проекциям на оси:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \quad \text{или} \quad \omega = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2}.$$

Применим полученные формулы к определению характеристик сферического движения тела.

Пример 92. Сферическое движение тела задано уравнениями

$$\psi = nt, \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi = 2kt.$$

Определить модуль угловой скорости сферического движения тела, мгновенную ось вращения тела, неподвижный и подвижный аксоиды, а также модуль и направление вектора углового ускорения.

Решение. Проекция угловой скорости на неподвижные оси декартовых координат вычисляем по формулам (130.2):

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi; \\ \omega_y &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi; \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta. \end{aligned}$$

При $\dot{\psi} = n$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\varphi} = 2k$ получаем:

$$\begin{aligned} \omega_x &= 2k \sin \frac{\pi}{6} \sin nt = k \sin nt; \\ \omega_y &= -2k \sin \frac{\pi}{6} \cos nt = -k \cos nt; \\ \omega_z &= n + 2k \cos \frac{\pi}{6} = n + \sqrt{3}k. \end{aligned}$$

Проекция угловой скорости на подвижные оси декартовых координат вычисляем по формулам (130.3):

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Подставляя значения $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$ и $\dot{\theta}$, получаем:

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= n \sin \frac{\pi}{6} \sin 2kt = 0,5n \sin 2kt; \\ \omega_\eta &= n \sin \frac{\pi}{6} \cos 2kt = 0,5n \cos 2kt; \\ \omega_\zeta &= n \cos \frac{\pi}{6} + 2k = \frac{\sqrt{3}}{2}n + 2k. \end{aligned}$$

Модуль угловой скорости ω постоянен и равен:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} = \sqrt{4k^2 + n^2 + 2\sqrt{3}nk}.$$

Так как $\omega_2 = 0$, то направление угловой скорости совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на угловых скоростях ω_1 и ω_3 (рис. 364). Мгновенная ось вращения тела Ω направлена по этой диагонали.

Согласно формулам (117.1) и (117.2), уравнения мгновенной оси имеют вид:

в неподвижной системе координат $Oxyz$

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}$$

или

$$\frac{x}{k \sin nt} = \frac{y}{-k \cos nt} = \frac{z}{n + \sqrt{3}k};$$

в подвижной системе координат $O\xi\eta\zeta$

$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta}$$

или

$$\frac{\xi}{0,5n \sin 2kt} = \frac{\eta}{0,5n \cos 2kt} = \frac{\zeta}{\frac{\sqrt{3}}{2}n + 2k}.$$

В каждой системе координат мгновенную ось, т. е. прямую линию, определяют два уравнения. Исключая из двух уравнений время t , получаем одно уравнение, определяющее геометрическое место мгновенных осей, соответствующих различным моментам времени, т. е. поверхность, называемую *аксоидом*.

Уравнение неподвижного аксоида:

$$\frac{x^2 + y^2}{k^2} - \frac{z^2}{(n + \sqrt{3} k)^2} = 0;$$

уравнение подвижного аксоида:

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{0,25n^2} - \frac{\zeta^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} n + 2k\right)^2} = 0.$$

Полученные уравнения показывают, что аксоиды представляют собой поверхности круговых конусов.

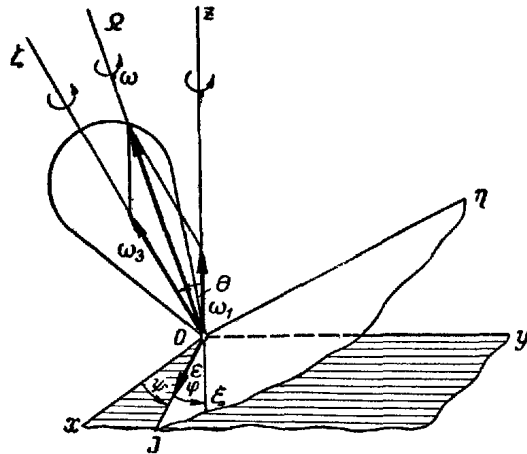


Рис. 364.

При движении тела подвижный аксоид-конус, ось которого совпадает с осью ζ , катится без скольжения по неподвижному аксоиду-конусу с осью, совпадающей с осью z (рис. 365).

Модуль и направление вектора углового ускорения определим по формулам (130.7) и (130.12):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{d\omega_x}{dt} = kn \cos nt, \\ \epsilon_y &= \frac{d\omega_y}{dt} = kn \sin nt, \\ \epsilon_z &= \frac{d\omega_z}{dt} = 0 \end{aligned} \right\} \text{или} \left. \begin{aligned} \epsilon_\xi &= \frac{d\omega_\xi}{dt} = kn \cos 2kt, \\ \epsilon_\eta &= \frac{d\omega_\eta}{dt} = -kn \sin 2kt, \\ \epsilon_\zeta &= \frac{d\omega_\zeta}{dt} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Модуль углового ускорения ϵ постоянен и равен:

$$\epsilon = \sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2} = \sqrt{\epsilon_\xi^2 + \epsilon_\eta^2 + \epsilon_\zeta^2} = kn.$$

Направление вектора углового ускорения определяется косинусами углов, составленных им с направлениями координатных осей:

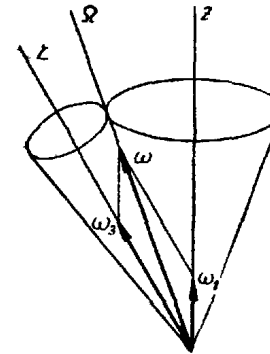


Рис. 365.

$$\cos(\epsilon, i) = \frac{\epsilon_x}{\epsilon} = \cos nt = \cos \psi;$$

$$\cos(\epsilon, j) = \frac{\epsilon_y}{\epsilon} = \sin nt = \sin \psi;$$

$$\cos(\epsilon, k) = \frac{\epsilon_z}{\epsilon} = 0;$$

$$\cos(\epsilon, i_1) = \frac{\epsilon_\xi}{\epsilon} = \cos 2kt = \cos \varphi;$$

$$\cos(\epsilon, j_1) = \frac{\epsilon_\eta}{\epsilon} = -\sin 2kt = -\sin \varphi;$$

$$\cos(\epsilon, k_1) = \frac{\epsilon_\zeta}{\epsilon} = 0.$$

Полученные значения косинусов углов показывают, что вектор углового ускорения ϵ направлен по линии узлов (рис. 364).

Рассмотренное сферическое движение твердого тела представляет собой совокупность двух вращений: вращения с постоянной угловой скоростью $\omega_3 = \dot{\varphi} = 2k$ вокруг оси Oz и вращения вместе с осью ζ вокруг оси z с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = \dot{\psi} = n$.

Такое сферическое движение тела называется *регулярной прецессией*.

§ 132. Сложение вращений твердого тела вокруг параллельных осей

Случай I. *Переносное и относительное вращения направлены в одну сторону.*

Допустим, что плоская фигура II движется в неподвижной плоскости I , а плоская фигура III совершает движение в этой же плоскости по отношению к фигуре II (рис. 366,а). Тогда движение фигуры III по отношению к неподвижной плоскости I , т. е. ее абсолютное движение, является составным. Оно состоит из ее относительного движения по отношению к фигуре II , с которой связана подвижная система отсчета и переносного движения вместе с фигурой II , т. е. вместе с подвижной системой отсчета. Точку P_e плоской фигуры III , переносная скорость которой в данный момент равна нулю, назовем мгновенным центром скоростей ее переносного движения.

Очевидно, переносное движение является вращательным движением вокруг центра P_e , т. е. вокруг оси Ω_e , перпендикулярной рассматриваемым фигурам. Точку P_r плоской фигуры III , относительная скорость которой в данный момент равна нулю, назовем мгновенным центром скоростей ее относительного движения. Относительное движение фигуры III является вращением вокруг центра P_r , т. е. вокруг оси Ω_r .

Предположим, что модули угловых скоростей ω_e и ω_r этих вращений известны. Определим абсолютное движение фигуры III , рассматривая сначала случай, когда переносное и относительное вращения происходят в одном направлении, т. е. когда векторы ω_e и ω_r направлены в одну сторону.

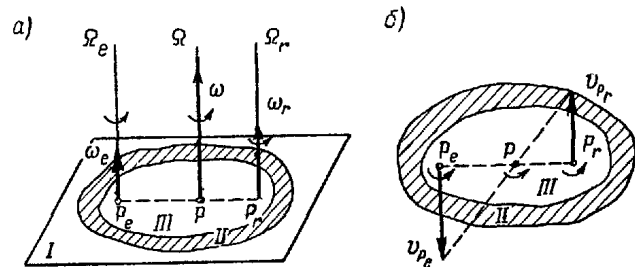


Рис. 366.

Абсолютная скорость любой точки плоской фигуры III , совершающей составное движение, равна геометрической сумме ее относительной и переносной скоростей:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

Так как переносная скорость мгновенного центра скоростей P_e равна нулю, то его абсолютная скорость v_{P_e} равна относительной скорости, которая определяется как вращательная скорость вокруг центра P_r . Скорость v_{P_e} направлена перпендикулярно отрезку P_rP_e в сторону относительного вращения, а ее модуль равен:

$$v_{P_e} = P_rP_e \cdot \omega_r.$$

Так как относительная скорость мгновенного центра скоростей P_r равна нулю, то его абсолютная скорость v_{P_r} равна переносной скорости, представляющей собой вращательную скорость вокруг центра P_e . Скорость v_{P_r} направлена перпендикулярно отрезку P_eP_r в сторону переносного вращения, а ее модуль равен

$$v_{P_r} = P_eP_r \cdot \omega_e.$$

Изобразив абсолютные скорости точек P_e и P_r (рис. 366,б), найдем мгновенный центр скоростей P абсолютного движения

плоской фигуры III как точку пересечения отрезка, соединяющего концы скоростей v_{P_e} и v_{P_r} с отрезком P_eP_r (§ 102).

Пользуясь пропорциональностью скоростей точек их расстояниям от мгновенного центра скоростей P абсолютного движения, определим расстояния от точки P до точек P_e и P_r :

$$\frac{P_eP}{P_rP} = \frac{v_{P_e}}{v_{P_r}} = \frac{P_rP_e \cdot \omega_r}{P_eP_r \cdot \omega_e}; \quad \frac{P_eP}{P_rP} = \frac{\omega_r}{\omega_e}. \quad (132.1)$$

Мгновенная ось абсолютного вращения Ω проходит через мгновенный центр скоростей P .

Таким образом, *мгновенная ось абсолютного вращения плоской фигуры лежит в плоскости, проходящей через оси переносного и относительного вращений, и, будучи параллельной им, делит расстояние между этими осями на части, обратно пропорциональные угловым скоростям.*

Для определения угловой скорости ω абсолютного вращения плоской фигуры III воспользуемся скоростью точки P_r — мгновенного центра скоростей относительного движения.

Так как относительная скорость точки P_r равна нулю, то абсолютная и переносная скорости этой точки равны между собой.

Модуль абсолютной скорости точки P_r , как вращательной вокруг центра P , равен произведению модуля неизвестной угловой скорости ω на расстояние PP_r этой точки от мгновенной оси абсолютного вращения плоской фигуры.

Модуль переносной скорости этой точки равен произведению модуля угловой скорости ω_e на расстояние P_eP_r от точки до мгновенной оси переносного вращения плоской фигуры.

Приравнявая эти значения, получаем

$$PP_r \cdot \omega = P_eP_r \cdot \omega_e = (P_eP + PP_r) \cdot \omega_e = P_eP \cdot \omega_e + PP_r \cdot \omega_e.$$

Из условия (132.1) следует

$$P_eP \cdot \omega_e = P_rP \cdot \omega_r.$$

Подставляя это значение, находим

$$PP_r \cdot \omega = P_rP \cdot \omega_r + PP_r \cdot \omega_e,$$

откуда

$$\omega = \omega_r + \omega_e, \quad (132.2)$$

т. е. модуль абсолютной угловой скорости равен сумме модулей угловых скоростей составляющих вращений.

Рис. 366,б позволяет установить, что абсолютное вращение плоской фигуры направлено против движения часовой стрелки, т. е. в сторону составляющих вращений.

Направляем вектор абсолютной угловой скорости ω по оси Ω (рис. 366,а) так же, как направлены векторы ω_e и ω_r .

Случай II. Переносное и относительное вращения направлены в разные стороны, а модули их угловых скоростей не равны.

Определим абсолютное движение плоской фигуры *III* в случае, когда переносное вращение вокруг оси Ω_e и относительное вращение вокруг оси Ω_r имеют противоположные направления и модули угловых скоростей ω_e и ω_r не равны между собой (рис. 367,а). Условимся при выполнении построений считать, что $\omega_r > \omega_e$.

Так как переносная скорость мгновенного центра скоростей P_e равна нулю, то его абсолютная скорость равна относительной скорости — вращательной скорости вокруг центра P_r :

$$v_{P_e} = P_r P_e \cdot \omega_r; \quad v_{P_e} \perp P_r P_e.$$

Аналогично абсолютная скорость мгновенного центра скоростей P_r равна его переносной скорости — вращательной скорости вокруг центра P_e :

$$v_{P_r} = P_e P_r \cdot \omega_e; \quad v_{P_r} \perp P_e P_r.$$

Показав абсолютные скорости точек P_e и P_r (рис. 367,б), найдем мгновенный центр скоростей P абсолютного движения плоской

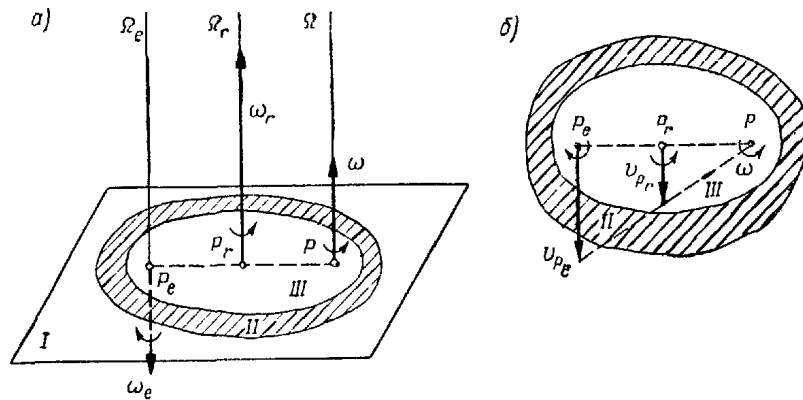


Рис. 367.

фигуры *III* как точку пересечения прямой, проведенной через концы скоростей v_{P_e} и v_{P_r} с продолжением отрезка $P_e P_r$ (§ 102).

Определим расстояния от точки P до точек P_e и P_r :

$$\frac{P_e P}{P_r P} = \frac{v_{P_e}}{v_{P_r}} = \frac{P_r P_e \cdot \omega_r}{P_e P_r \cdot \omega_e}, \quad \frac{P_e P}{P_r P} = \frac{\omega_r}{\omega_e}. \quad (132.3)$$

Мгновенная ось абсолютного вращения Ω проходит через мгновенный центр скоростей P .

Таким образом, мгновенная ось абсолютного вращения плоской фигуры параллельна осям переносного и относительного вращений и лежит в плоскости, проходящей через эти оси, со стороны той оси, угловая скорость вращения вокруг которой больше.

Расстояния между осью абсолютного вращения и осями переносного и относительного вращений обратно пропорциональны угловым скоростям.

Для определения угловой скорости абсолютного вращения плоской фигуры *III* воспользуемся скоростью точки P_r .

Приравниваем модули абсолютной скорости точки P_r — вращательной вокруг центра P и переносной скорости этой точки — вращательной вокруг центра P_e :

$$P P_r \cdot \omega = P_e P_r \cdot \omega_e = (P_e P - P_r P) \cdot \omega_e = P_e P \cdot \omega_e - P_r P \cdot \omega_e.$$

Из условия (132.3) следует, что

$$P_e P \cdot \omega_e = P_r P \cdot \omega_r.$$

Подставляя это значение, находим

$$P P_r \cdot \omega = P_r P \cdot \omega_r - P_r P \cdot \omega_e,$$

откуда

$$\omega = \omega_r - \omega_e, \quad (132.4)$$

т. е. модуль абсолютной угловой скорости равен разности модулей угловых скоростей составляющих вращений.

Рис. 367,б показывает, что абсолютное вращение плоской фигуры направлено против движения часовой стрелки, т. е. в сторону относительного вращения, угловая скорость которого по модулю больше угловой скорости переносного вращения.

Откладываям (рис. 367,а) по оси Ω вектор угловой скорости ω абсолютного вращения, направляя его так же, как направлен вектор ω_r .

Необходимо отметить, что три мгновенных центра скоростей переносного, относительного и абсолютного движений плоской фигуры всегда лежат на одной прямой.

Рассмотренное составное движение плоской фигуры в ее плоскости представляет собой сложение плоских движений твердого тела, происходящих параллельно одной и той же плоскости или сложение вращений твердого тела вокруг параллельных осей.

Результаты рассмотренных случаев показывают, что сложение параллельных векторов угловых скоростей осуществляется по известному правилу сложения параллельных скользящих векторов, т. е. так же, как и сложение параллельных сил.

Случай III. Переносное и относительное вращения направлены в разные стороны, а модули их угловых скоростей равны.

Определим абсолютное движение плоской фигуры *III* в случае, когда переносное вращение вокруг оси Ω_e и относительное вращение вокруг оси Ω_r направлены в разные стороны (рис. 368,а), а модули их угловых скоростей равны, т. е.

$$\omega_e = \omega_r; \quad \omega_e = -\omega_r.$$

Покажем, что в этом случае абсолютные скорости всех точек фигуры *III* геометрически равны. Фигура *III* совершает составное движение, а потому абсолютная скорость любой точки этой фигуры

равна геометрической сумме ее переносной и относительной скоростей:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

Переносная скорость \mathbf{v}_e точки M фигуры III (рис. 386,б) перпендикулярна отрезку P_eM , а ее модуль равен:

$$v_e = P_eM \cdot \omega_e.$$

Относительная скорость \mathbf{v}_r этой точки перпендикулярна отрезку P_rM , а ее модуль равен:

$$v_r = P_rM \cdot \omega_r = P_rM \cdot \omega_e.$$

Строим параллелограмм скоростей и находим абсолютную скорость \mathbf{v} .

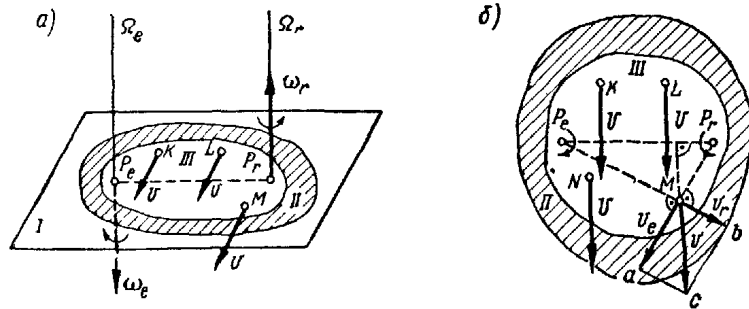


Рис. 368.

Треугольники Mac и P_eMP_r подобны, так как стороны $Ma = v_e$ и $ac = v_r$ пропорциональны сторонам P_eM и P_rM , а $\angle Mac = \angle P_eMP_r$ как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Из подобия этих треугольников находим:

$$\frac{v}{P_eP_r} = \frac{v_e}{P_eM} = \frac{v_r}{P_rM} = \omega_e \quad \text{или} \quad v = P_eP_r \cdot \omega_e.$$

Так как две стороны Ma и ac треугольника Mac перпендикулярны двум сторонам P_eM и P_rM треугольника P_eMP_r , то и третьи стороны этих треугольников должны быть взаимно перпендикулярны, т. е. скорость абсолютного движения точки v направлена перпендикулярно отрезку P_eP_r .

Так как точка M выбрана произвольно, то абсолютная скорость любой точки плоской фигуры III направлена перпендикулярно отрезку P_eP_r , а ее модуль равен произведению расстояния между мгновенными центрами скоростей переносного и относительного движений на модуль угловой скорости одного из составляющих вращений (рис. 368,а и б). Следовательно, скорости всех точек фигуры III геометрически равны, т. е. мгновенный центр скоростей абсолютного движения этой фигуры P находится в бесконечности, а угловая скорость ее абсолютного вращения равна нулю (§ 102, рис. 262,в).

Если за все время движения направления составляющих вращений остаются взаимно противоположными, а угловые скорости равными по модулю, то фигура III совершает поступательное движение. Совокупность двух вращений тела, направленных в противоположные стороны и имеющих равные модули угловых скоростей, называют *парой вращений*.

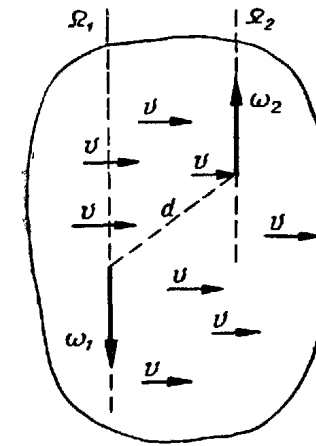


Рис. 369.

Так как фигура III представляет собой сечение некоторого тела плоскостью, можно считать установленным, что в случае, если в течение некоторого промежутка времени тело участвует в двух противоположно направленных вращениях вокруг параллельных осей с равными по модулю угловыми скоростями $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, то его движение поступательное (рис. 369).

Модуль скорости этого движения равен произведению модуля угловой скорости ω на расстояние между осями вращений:

$$v = \omega d.$$

Вектор скорости v направлен перпендикулярно плоскости пары угловых скоростей ω_1, ω_2 в ту же сторону, в какую направлен вектор момента пары сил \mathbf{M} по отношению к паре сил \mathbf{P}, \mathbf{P}' (§ 40).

Следовательно, вектор скорости поступательного движения тела представляет собой момент пары угловых скоростей.

Таким образом, сложение векторов угловых скоростей как пересекающихся, так и параллельных, производится так же, как и сложение сил; это закономерно, так как векторы угловых скоростей и сил являются скользящими векторами. Случай пары угловых скоростей аналогичен случаю пары сил.

Так же, как и момент пары сил, вектор скорости поступательного движения — вектор свободный, так как он относится к любой точке тела.

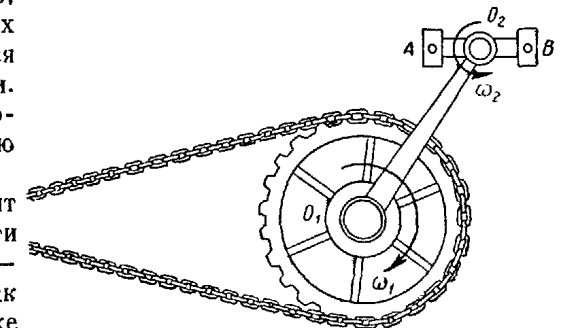


Рис. 370.

Примером пары вращений является движение велосипедной педали AB относительно рамы велосипеда (рис. 370). Это движение представляет собой совокупность переносного вращения вместе с кривошипом O_1O_2 вокруг оси O_1 и относительного вращения педали по отношению к кривошипу вокруг оси O_2 .

Педаля AB за все время движения остается параллельной своему первоначальному положению, т. е. совершает поступательное движение, вследствие того, что угловые скорости составляющих вращений ω_1 и ω_2 равны по модулю и противоположны по направлению.

§ 133. Примеры на сложение вращений твердого тела вокруг параллельных и пересекающихся осей

Пример 93. Кривошип OA эпициклического механизма равномерно вращается с угловой скоростью ω_0 против движения часовой стрелки и приводит в движение колесо II . Зная радиусы колес r_1 и r_2 , вычислить абсолютную угловую скорость ω_2 колеса II и его относительную угловую скорость ω_r по отношению к кривошипу OA (рис. 371, *a*).

Решение. Абсолютное движение колеса II представляет собой вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через мгновенный центр скоростей колеса — точку P соприкосновения колес (рис. 371, *b*). Это вращение можно разложить на два составляющих вращения: переносное вращение вместе с кривошипом с угловой скоростью $\omega_e = \omega_0$ вокруг оси $O(P_e)$ и относительное вращение по отношению к кривошипу вокруг оси, проходящей через ось колеса $A(P_r)$ с угловой скоростью ω_r . Действительно, двигаясь с кривошипом, видим движение колеса II как вращение вокруг оси A .

Так как абсолютный мгновенный центр скоростей P находится между переносным и относительным мгновенными центрами скоростей, то абсолютное вращение направлено в сторону составляющих вращений, т. е. против движения часовой стрелки, а модуль абсолютной угловой скорости равен сумме модулей относительной и переносной угловых скоростей:

$$\omega = \omega_e + \omega_r.$$

Определим ω_r , пользуясь соотношением (132.1):

$$\frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{P_e P}{P_r P} = \frac{r_1}{r_2}; \quad \omega_r = \omega_e \frac{r_1}{r_2} = \omega_0 \frac{r_1}{r_2}.$$

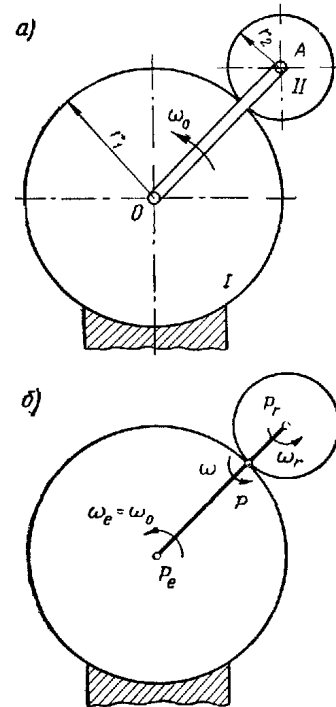


Рис. 371.

Определив ω_r , найдем модуль абсолютной угловой скорости ω_2 колеса II :

$$\omega_2 = \omega_e + \omega_r = \omega_0 + \omega_0 \frac{r_1}{r_2},$$

откуда

$$\omega_2 = \omega_0 \frac{r_1 + r_2}{r_2}.$$

Пример 94. Линейка AB эллипсографа приводится в движение кривошипом OC , который вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг оси O в сторону, обратную движению часовой стрелки.

$$OC = AC = BC.$$

Определить относительную угловую скорость линейки по отношению к кривошипу и ее абсолютную угловую скорость (рис. 372, *a*).

Решение. Построим абсолютный мгновенный центр скоростей линейки как точку пересечения перпендикуляров к траекториям точек A и B (рис. 372, *b*). Разложим абсолютное вращение линейки вокруг точки P на два составляющих вращения: переносное вращение вместе с кривошипом OC вокруг оси $O(P_e)$ с угловой скоростью $\omega_e = \omega_0$ и относительное вращение по отношению к кривошипу с угловой скоростью ω_r . Центром этого вращения P_r является ось шарнира C , так как точка C является общей для линейки и кривошипа и в относительном движении по отношению к кривошипу не участвует. Если двигаться вместе с кривошипом, то можно видеть движение линейки как вращение вокруг точки C .

Так как точка P лежит вне отрезка $P_e P_r$, то направление относительного вращения противоположно направлению переносного и модуль абсолютной угловой скорости равен разности модулей угловых скоростей ω_r и ω_e . При таком положении точки P направление абсолютного вращения совпадает с направлением относительного вращения.

Определяем модули относительной и абсолютной угловых скоростей линейки:

$$\frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{P_e P}{P_r P} = \frac{2OC}{OC} = 2; \quad \omega_r = 2\omega_e = 2\omega_0;$$

$$\omega = \omega_r - \omega_e = 2\omega_0 - \omega_0 = \omega_0.$$

Пример 95. Определить относительную угловую скорость ведомого колеса *II* передачи по отношению к ведущему колесу *I* и абсолютную угловую скорость колеса *II*, если известны радиусы колес r_1 и r_2 и угловая скорость ведущего колеса ω_1 (рис. 373,а).

Решение. Разложим абсолютное вращение колеса *II* вокруг его центра (рис. 373,б) на переносное вращение вместе с колесом *I* вокруг его центра P_e с угловой скоростью $\omega_e = \omega_1$ и относительное вращение по отношению к колесу *I* с угловой скоростью ω_r . Мгновенным центром относительного вращения P_r является точка соприкосновения колес: эта точка колеса *II* не участвует в движении по отношению к колесу *I*. Если двигаться вместе с колесом *I*, то можно увидеть движение колеса *II* как качение по колесу *I*, т. е. как вращение вокруг точки P_r . По расположению точек P_e , P_r , P (второй случай) показываем направление относительного и абсолютного вращений колеса *II* и определяем модули их угловых скоростей:

$$\frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{P_e P}{P_r P}; \quad \frac{\omega_r}{\omega_1} = \frac{r_1 + r_2}{r_2}; \quad \omega_r = \omega_1 \frac{r_1 + r_2}{r_2},$$

$$\omega_2 = \omega_r - \omega_e = \omega_1 \frac{r_1 + r_2}{r_2} - \omega_1 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2}.$$

Пример 96. Кривошип *OA*, вращаясь вокруг оси *O* с угловой скоростью ω_0 по направлению движения часовой стрелки, приводит в движение зубчатое колесо *II*, катящееся внутри неподвижного колеса *III*. Колесо *II* приводит в движение колесо *I*, находящееся с ним в зацеплении и вращающееся вокруг оси *O* (рис. 374,а). Определить угловую скорость колеса *I*, если числа зубьев колес *I* и *II* соответственно равны z_1 и z_2 .

Решение. Разложим абсолютное вращение каждого колеса на два составляющих вращений: переносное вращение вместе с кривошипом вокруг оси *O* с угловой скоростью $\omega_e = \omega_0$ и относительное вращение по отношению к кривошипу с угловой скоростью ω_{ir} .

Двигаясь вместе с кривошипом, видим движение каждого колеса как вращение вокруг его центра. Следовательно, относительное вращение каждого колеса происходит вокруг его центра и относительные угловые скорости колес обратно пропорциональны радиусам колес или их числам зубьев.

В первую очередь устанавливаем относительную угловую скорость неподвижного колеса. Двигаясь вместе с кривошипом, видим неподвижное колесо вращающимся в направлении, обратном направлению вращения кривошипа, причем модуль его угловой скорости $\omega_{3r} = \omega_0$ (рис. 374,б).

Колеса *II* и *III* образуют внутреннее зацепление, а поэтому направления их относительных вращений совпадают. Направления

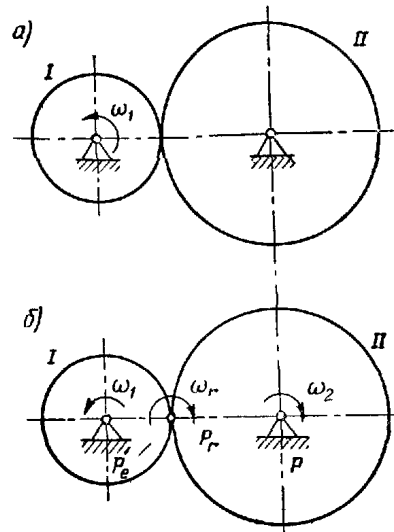


Рис. 373.

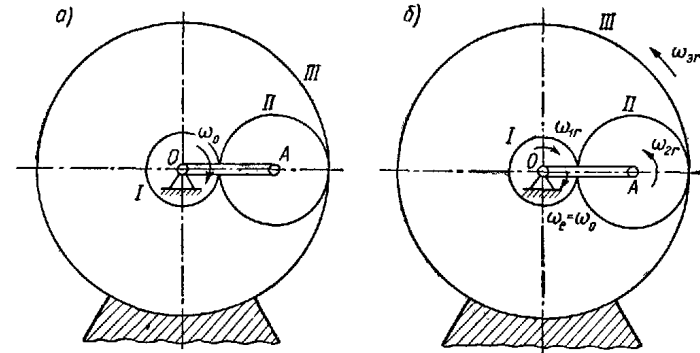


Рис. 374.

относительных вращений колес *I* и *II* противоположны, так как их зацепление внешнее.

Пользуемся зависимостью между модулями относительных угловых скоростей:

$$\frac{\omega_{2r}}{\omega_{3r}} = \frac{z_3}{z_2}; \quad \frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Перемножая части равенств, получаем

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{3r}} = \frac{z_3}{z_1}, \quad \text{откуда} \quad \omega_{1r} = \frac{z_3}{z_1} \omega_{3r} = \frac{z_3}{z_1} \omega_0.$$

Так как направление относительного вращения колеса *I* совпадает с направлением переносного вращения, то модуль его абсолютной угловой скорости равен сумме модулей угловых скоростей переносного и относительного вращений:

$$\omega_1 = \omega_e + \omega_{1r} = \omega_0 + \frac{z_3}{z_1} \omega_0 = \omega_0 \frac{z_1 + z_3}{z_1}.$$

По чертежу (рис. 374,а) находим:

$$r_3 = r_1 + 2r_2.$$

Числа зубьев пропорциональны радиусам колес, т. е.

$$z_3 = z_1 + 2z_2.$$

Тогда имеем

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{z_1 + z_1 + 2z_2}{z_1} = 2\omega_0 \frac{z_1 + z_2}{z_1}.$$

Пример 97. Шестерня 4 планетарного зубчатого механизма, изображенного на рис 375,а, свободно насажена на конце рукоятки ОА, которая вращается вокруг оси О неподвижной шестерни 1 с постоянной угловой скоростью ω_0 против движения часовой стрелки. Ось двойной шестерни 2—3, соединенной с рукояткой ОА, находится в зацеплении с шестернями 1 и 4; числа зубьев шестерен соответственно равны z_1, z_2, z_3, z_4 . Определить угловую скорость шестерни 4.

Решение. Примем вращение рукоятки ОА вокруг оси О за переносное вращение и найдем угловые скорости относительных вращений шестерен по отношению к рукоятке (рис. 375,б). Относительное вращение неподвижной шестерни 1 происходит вокруг оси О навстречу вращению рукоятки с угловой скоростью, модуль которой равен модулю угловой скорости рукоятки:

$$\omega_{1r} = \omega_0.$$

Направление относительных вращений двойной шестерни 2—3 и шестерни 4 показаны на рис. 375,б.

Модули относительных угловых скоростей шестерен обратно пропорциональны числам их зубьев, т. е.

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = \frac{z_2}{z_1} \text{ (а); } \frac{\omega_{3r}}{\omega_{4r}} = \frac{z_4}{z_3} \text{ (б).}$$

Шестерни 2—3 связаны между собой жестко, а поэтому

$$\omega_{2r} = \omega_{3r}.$$

Перемножая (а) и (б), получаем

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{4r}} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3},$$

откуда

$$\omega_{4r} = \omega_{1r} \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} = \omega_0 \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}.$$

Так как переносное и относительное вращения шестерни 4 направлены противоположно, то, полагая $\omega_e > \omega_r$, найдем ω_4 как разность модулей ее переносной и относительной угловых скоростей:

$$\omega_4 = \omega_e - \omega_{4r} = \omega_0 - \omega_0 \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4},$$

откуда

$$\omega_4 = \omega_0 \left(1 - \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} \right).$$

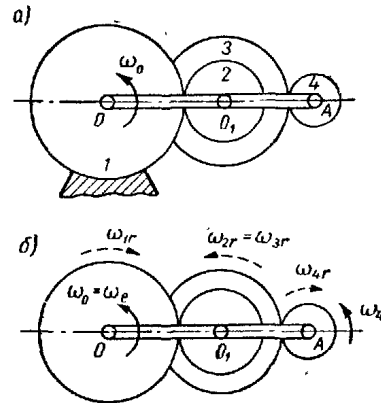


Рис. 375.

На рис. 375,б абсолютное вращение шестерни 4 направлено в сторону переносного вращения, так как положено $\omega_e > \omega_r$, т. е.

$$\omega_0 > \omega_0 \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} \text{ или } 1 > \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}.$$

В случае $1 < \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$ направление абсолютного вращения шестерни 4 противоположно указанному.

Пример 98. Редуктор скоростей, изображенный на рис. 376,а, б, служит для передачи вращения от ведущего вала I ведомому валу II, ось которого совпадает с осью вала I. Редуктор имеет два ведущих элемента: вал I, вращающийся с угловой скоростью $n_1 = 800 \text{ об/мин}$,

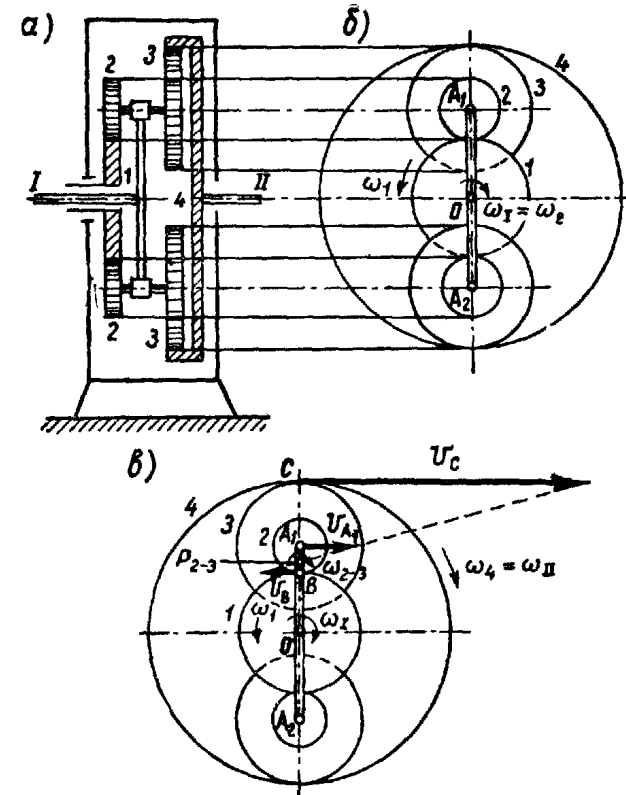


Рис. 376.

и колесо 1, вращающееся в противоположную сторону с угловой скоростью $n_1 = 200 \text{ об/мин}$. Ведущие элементы приводят в движение спаренные между собой шестерни 2—3, свободно насаженные на концах A_1 и A_2 рукоятки, заклиненной на ведущем валу. При этом шестерни 2 находятся в зацеплении с ведущим колесом 1, а шестерни 3—с колесом 4, заклиненным на ведомом валу II. От шестерен 3 получает движение колесо 4, а следовательно, и ведомый вал II.

мый вал II. Радиусы колес соответственно равны: $r_1 = 30$ см; $r_2 = 15$ см; $r_3 = 30$ см; $r_4 = 75$ см. Определить угловую скорость ведомого вала II и шестерен 2—3.

Решение. I способ. Применяем теорию сложения вращений тела вокруг параллельных осей. Предположим, что вращение ведущего вала с угловой скоростью ω_I происходит по движению часовой стрелки, а вращение колеса I с угловой скоростью ω_1 — в противоположную сторону (рис. 376, б). Разложим движение каждого элемента редуктора на два составляющих вращения: переносное вращение с валом, на котором закинена рукоятка, несущая оси шестерен (в данной задаче вместе с ведущим валом I), и относительное вращение по отношению к этому валу.

Вращение, принятое за переносное, происходит вокруг оси O с известной угловой скоростью $\omega_e = \omega_I$. Относительные вращения колес I и 4 происходят вокруг оси O, а колес 2—3 — вокруг осей A_1 и A_2 , т. е. относительные вращения всех колес происходят вокруг осей, проходящих через их центры, и, следовательно, модули их угловых скоростей обратно пропорциональны радиусам или числам зубьев колес (см. § 95). Определим модули угловых скоростей и направления относительных вращений всех колес, пользуясь модулем заданной абсолютной угловой скорости ω_1 колеса I.

Так как колесо I вращается навстречу валу I, то его относительное вращение происходит в ту же сторону и модуль относительной угловой скорости ω_{1r} равен сумме модулей угловых скоростей ω_I и ω_1 , т. е.

$$\omega_{1r} = \omega_I + \omega_1. \quad (a)$$

Относительное вращение шестерни 2, образующей с колесом I внешнее зацепление, направлено противоположно относительному вращению колеса I, т. е. по движению часовой стрелки. Шестерня 3, спаренная с шестерней 2, совершает это же движение. Колесо 4, образующее с шестерней 3 внутреннее зацепление, вращается в сторону вращения шестерни 3, т. е. по движению часовой стрелки. Модули угловых скоростей этих вращений определяются по формулам:

$$\frac{\omega_{2r}}{\omega_{1r}} = \frac{r_1}{r_2}; \quad (б)$$

$$\frac{\omega_{4r}}{\omega_{3r}} = \frac{r_3}{r_4}. \quad (в)$$

Так как $\omega_{2r} = \omega_{3r}$, то, перемножив пропорции (б) и (в), получим

$$\frac{\omega_{4r}}{\omega_{1r}} = \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}, \text{ откуда } \omega_{4r} = \omega_{1r} \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}.$$

Подставив значение ω_{1r} , определяемое формулой (а), получим

$$\omega_{4r} = (\omega_I + \omega_1) \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}.$$

Так как направления относительного и переносного вращений колеса 4 совпадают, то модуль его абсолютной угловой скорости

равен сумме модулей переносной и относительной угловых скоростей:

$$\omega_4 = \omega_e + \omega_{4r} = \omega_I + (\omega_I + \omega_1) \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}. \quad (г)$$

Угловая скорость ведомого вала II равна угловой скорости закиненного на нем колеса 4. Вычислим ее модуль по формуле (г) в об/мин:

$$\begin{aligned} n_{II} = n_4 = n_I + (n_I + n_1) \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} = \\ = 800 + (800 + 200) \frac{30 \cdot 30}{15 \cdot 75} = 1600 \text{ об/мин.} \end{aligned}$$

Абсолютное вращение колеса 4 с ведомым валом II происходит в сторону составляющих вращений, т. е. по движению часовой стрелки.

Для определения движения шестерен 2—3 найдем модуль их относительной угловой скорости из пропорции (б):

$$\omega_{2r} = \omega_{1r} \frac{r_1}{r_2} = (\omega_I + \omega_1) \frac{r_1}{r_2}.$$

Так как направления относительного и переносного вращений шестерен 2—3 совпадают, то модуль их абсолютной угловой скорости равен сумме модулей относительной и переносной угловых скоростей:

$$\omega_2 = \omega_e + \omega_{2r} = \omega_I + (\omega_I + \omega_1) \frac{r_1}{r_2}.$$

Вычисляя в об/мин, получаем

$$n_2 = n_I + (n_I + n_1) \frac{r_1}{r_2} = 800 + (800 + 200) \frac{30}{15} = 2800 \text{ об/мин.}$$

Абсолютное вращение шестерен 2—3 происходит в сторону составляющих вращений, т. е. по движению часовой стрелки.

II способ. Применяем теорию плоского движения твердого тела. По модулям угловых скоростей ведущих элементов найдем модули вращательной скорости точки A_1 оси спаренных шестерен и вращательной скорости точки B касания колес I и 2 (рис. 376, в):

$$\omega_I = \frac{\pi n_I}{30} = \frac{\pi \cdot 800}{30} = \frac{80}{3} \pi \text{ сек}^{-1};$$

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30} = \frac{\pi \cdot 200}{30} = \frac{20}{3} \pi \text{ сек}^{-1};$$

$$v_{A_1} = \omega_I (r_1 + r_2) = \frac{80}{3} \pi \cdot 45 = 1200\pi \text{ см/сек};$$

$$v_B = \omega_1 r_1 = \frac{20}{3} \pi \cdot 30 = 200\pi \text{ см/сек}.$$

Отложим векторы v_{A_1} и v_B по их истинным направлениям.

Зная скорости точек A_1 и B плоской фигуры, построим мгновенный центр скоростей шестерен 2—3 (§ 102) и определим его положение:

$$\frac{P_{2-3} A_1}{P_{2-3} B} = \frac{v_{A_1}}{v_B} = \frac{1200\pi}{200\pi} = 6, \quad P_{2-3} A_1 = 6 P_{2-3} B.$$

Так как

$$P_{2-3}A_1 + P_{2-3}B = r_2 = 15,$$

то

$$P_{2-3}B = \frac{15}{7} \text{ см}; \quad P_{2-3}A_1 = \frac{90}{7} \text{ см}; \quad P_{2-3}C = \frac{300}{7} \text{ см}.$$

Определим модуль скорости точки C :

$$\frac{v_C}{v_{A_1}} = \frac{P_{2-3}C}{P_{2-3}A_1} = \frac{\frac{300}{7}}{\frac{90}{7}} = \frac{10}{3}; \quad v_C = \frac{10}{3} v_{A_1} = \frac{10}{3} 1200\pi = 4000\pi \text{ см/сек}.$$

По модулю скорости одной из точек находим модуль угловой скорости шестерен 2—3:

$$\omega_{2-3} = \frac{v_{A_1}}{P_{2-3}A_1} = \frac{1200\pi}{\frac{90}{7}} = \frac{280}{3} \pi \text{ сек}^{-1};$$

$$\omega_{2-3} = \frac{\pi n_{2-3}}{30}; \quad n_{2-3} = \frac{30\omega_{2-3}}{\pi} = \frac{30 \cdot \frac{280}{3} \pi}{\pi} = 2800 \text{ об/мин}.$$

По модулю скорости точки C , принадлежащей также и колесу 4, находим модуль его угловой скорости:

$$\omega_4 = \frac{v_C}{r_4} = \frac{4000\pi}{75} = \frac{160\pi}{3} \text{ сек}^{-1},$$

$$n_4 = \frac{30\omega_4}{\pi} = \frac{30 \cdot \frac{160}{3} \pi}{\pi} = 1600 \text{ об/мин},$$

$$n_{II} = n_4 = 1600 \text{ об/мин}.$$

На рис. 376,в показаны истинные направления вращений всех элементов редуктора.

Пример 99. Рукоятка OA вращается вокруг оси O неподвижной шестерни радиусом $r = 10$ см в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки, с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 2 \text{ сек}^{-1}$ и соединена с осями трех других шестерен того же радиуса (рис. 377,а). Найти скорость и ускорение точки B шестерни 4, лежащей в данный момент на конце диаметра, перпендикулярного оси рукоятки.

Решение. Определим прежде всего абсолютную угловую скорость ω_4 шестерни 4. Для этого примем вращение рукоятки OA вокруг оси O за переносное вращение и найдем угловые скорости относительных вращений шестерен по отношению к рукоятке (рис. 377,б). Относительное вращение неподвижной шестерни 1 происходит вокруг оси O навстречу вращению рукоятки с угловой скоростью, равной по модулю угловой скорости рукоятки, т. е.

$$\omega_{1r} = \omega_0.$$

Направления относительных вращений шестерен 1, 2, 3, 4, образующих рядовое зацепление, показано на рис. 377,б. Относительная угловая скорость шестерни 4 определяется (см. § 95) по формуле:

$$\frac{\omega_{4r}}{\omega_{1r}} = \frac{r_1}{r_4} = 1; \quad \omega_{4r} = \omega_{1r} = \omega_0.$$

Переносное и относительное вращения шестерни 4 происходят против движения часовой стрелки. Следовательно, ее абсолютное вращение направлено в ту же сторону, а модуль абсолютной угловой скорости равен:

$$\omega_4 = \omega_e + \omega_{4r} = 2\omega_0 = 4 \text{ сек}^{-1}.$$

Для определения скорости и ускорения точки B удобнее разложить плоское движение шестерни 4 не на два составляющих вращения, а на поступательное движение с полюсом A и вращение с угловой скоростью ω_4 вокруг этого полюса.

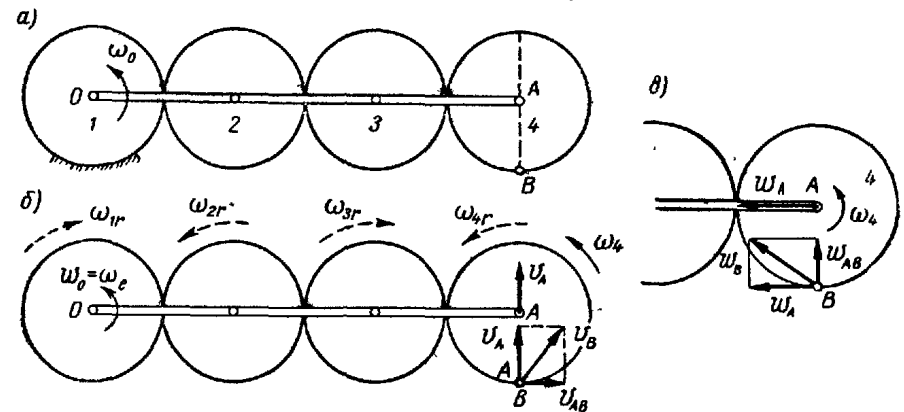


Рис. 377.

Тогда скорость точки B определится как геометрическая сумма скорости полюса A и вращательной скорости точки B вокруг полюса A (рис. 377,б).

Модуль скорости полюса A

$$v_A = OA\omega_0 = 6r\omega_0 = 6 \cdot 10 \cdot 2 = 120 \text{ см/сек}.$$

Модуль вращательной скорости точки B во вращении шестерни 4 вокруг полюса A

$$v_{AB} = AB \cdot \omega_4 = 10 \cdot 4 = 40 \text{ см/сек}.$$

Модуль абсолютной скорости точки B

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{AB}^2} = \sqrt{120^2 + 40^2} \approx 126 \text{ см/сек}.$$

Ускорение точки B определится как геометрическая сумма ускорения полюса A и ускорения точки B во вращении вокруг полюса A

(рис. 377, в). При равномерном вращении рукоятки ускорение полюса вычисляется как центростремительное:

$$\omega_A = \omega_A^u = OA \cdot \omega_0^2 = 6r\omega_0^2 = 60 \cdot 4 = 240 \text{ см/сек}^2.$$

При равномерном вращении рукоятки шестерня 4 вращается равномерно и ускорение точки B во вращении шестерни 4 вокруг полюса A тоже является центростремительным:

$$\omega_{AB} = \omega_{AB}^u = AB \cdot \omega_4^2 = r\omega_4^2 = 10 \cdot 16 = 160 \text{ см/сек}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения точки B

$$\omega_B = \sqrt{\omega_A^2 + \omega_{AB}^2} = \sqrt{240^2 + 160^2} = 288,5 \text{ см/сек}^2.$$

Пример 100. На рис. 378, а изображен механизм, называемый двойным дифференциалом. На кривошип III , вращающийся вокруг неподвижной оси AB , свободно насажен сателлит IV , состоящий

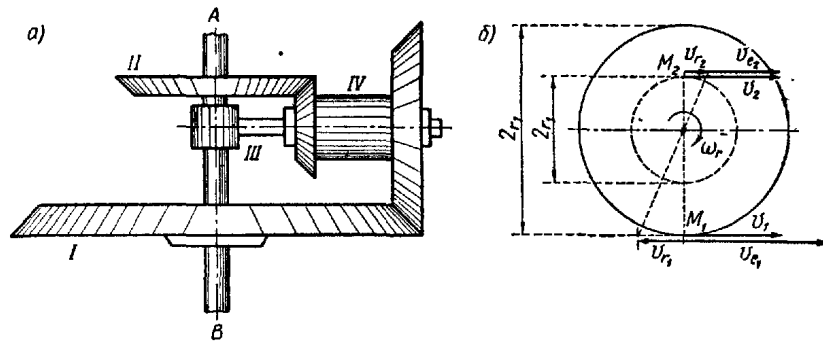


Рис. 378.

из двух наглухо скрепленных между собой конических зубчатых колес радиусами $r_1 = 6 \text{ см}$ и $r_2 = 3 \text{ см}$. Колеса сателлита соприкасаются с двумя коническими зубчатыми колесами I и II радиусами $R_1 = 12 \text{ см}$ и $R_2 = 6 \text{ см}$, вращающимися вокруг оси AB , но с кривошипом не связанными. Модули угловых скоростей колес I и II , вращающихся в одном направлении, соответственно равны:

$$\omega_I = 4 \text{ сек}^{-1} \text{ и } \omega_{II} = 8 \text{ сек}^{-1}.$$

Определить угловую скорость кривошипа III и угловую скорость сателлита IV по отношению к кривошипу.

Решение. Сателлит IV участвует в двух вращениях вокруг пересекающихся осей: в относительном вращении по отношению к кривошипу III , т. е. вокруг своей оси, и в переносном вращении вместе с кривошипом III вокруг оси AB . По условию задачи требуется определить угловые скорости этих вращений ω_r и ω_e .

Так как известны модули угловых скоростей колес I и II , то можно найти модули абсолютных скоростей точек M_1 и M_2 соприкосновения сателлита с этими колесами:

$$v_1 = R_1 \cdot \omega_I = 12 \cdot 4 = 48 \text{ см/сек};$$

$$v_2 = R_2 \cdot \omega_{II} = 6 \cdot 8 = 48 \text{ см/сек}.$$

Пусть колеса I и II вращаются против движения часовой стрелки, если смотреть сверху. Тогда, если смотреть справа, векторы v_1 и v_2 будут направлены так, как показано на рис. 378, б.

Переносные и относительные скорости точек M_1 и M_2 параллельны их абсолютным скоростям. Зададимся такими направлениями переносного и относительного вращений, чтобы в результате сложения переносной и относительной скоростей каждой из точек M_1 и M_2 получились абсолютные скорости v_1 и v_2 .

Предположим, что переносное вращение сателлита IV вокруг оси AB , если смотреть сверху, происходит против направления движения часовой стрелки, а его относительное вращение вокруг своей оси, если смотреть справа, — по направлению движения часовой стрелки.

Тогда переносные и относительные скорости точек M_1 и M_2 будут иметь направления, показанные на рис. 378, б. Уравнения, выражающие теорему о сложении скоростей, примут вид:

$$v_{e1} - v_{r1} = v_1, \quad v_{e2} + v_{r2} = v_2.$$

Здесь

$$v_{e1} = R_1 \omega_e, \quad v_{r1} = r_1 \omega_r, \quad v_{e2} = R_2 \omega_e, \quad v_{r2} = r_2 \omega_r.$$

Подставив эти значения, будем иметь

$$R_1 \omega_e - r_1 \omega_r = v_1, \quad R_2 \omega_e + r_2 \omega_r = v_2.$$

Подставив числовые значения, получим

$$\left. \begin{aligned} 12\omega_e - 6\omega_r &= 48, \\ 6\omega_e + 3\omega_r &= 48, \end{aligned} \right\} \text{или} \left. \begin{aligned} 2\omega_e - \omega_r &= 8, \\ 2\omega_e + \omega_r &= 16. \end{aligned} \right\}$$

Решив систему уравнений, найдем

$$\omega_e = 6 \text{ сек}^{-1}, \quad \omega_r = 4 \text{ сек}^{-1}.$$

Положительные ответы указывают, что принятые направления относительного и переносного вращений сателлита совпадают с действительными.

§ 134. Общий случай сложения движений твердого тела. Аналогии со статикой

В § 129 и 132 рассмотрено сложение вращений твердого тела вокруг пересекающихся и параллельных осей и установлено, что сложение параллельных и пересекающихся векторов угловых ско-

ростей производится по тем же правилам, как сложение векторов сил в статике.

Рассмотрим общий случай сложения движений твердого тела, одновременно участвующего в нескольких вращательных движениях вокруг произвольно расположенных мгновенных осей и в нескольких поступательных движениях. Покажем, что к системе угловых скоростей можно применить метод приведения к произвольно выбранному центру, аналогичный методу Пуансо, применяемому в статике к системе сил.

Вектор угловой скорости, так же как и вектор силы, является скользящим вектором потому, что его можно отложить от любой точки оси вращения тела. Вектор угловой скорости так же как и вектор силы, нельзя просто перенести с одной оси на другую параллельную ей ось; это означало бы замену вращения вокруг одной оси не эквивалентным ему вращением вокруг другой оси.

Применим к вектору угловой скорости приведение к заданному центру, аналогичное приведению силы. Предположим, что дан вектор угловой скорости ω , приложенный в точке A , и требуется привести его к заданному центру O (рис. 379).

Приложим в точке O два вектора $\omega'' = \omega$ и $\omega' = -\omega$.

Вектор ω в точке A и вектор ω' в точке O образуют пару угловых скоростей.

Вектор момента этой пары v , согласно § 132, равен вектору поступательной скорости v_O . Проведем из центра приведения O в точку A радиус-вектор r и определим момент полученной пары угловых скоростей:

$$v = v_O = r \times \omega.$$

Кроме вектора поступательной скорости v_O , имеется вектор угловой скорости ω'' , равный вектору ω , но приложенный в центре приведения O .

Таким образом, вектор угловой скорости можно перенести параллельно его первоначальному положению в любой центр приведения, присоединив вектор поступательной скорости, равный моменту заданной угловой скорости относительно этого центра.

Это означает, что вращению вокруг оси, проходящей через точку A , с угловой скоростью ω , эквивалентно вращение вокруг параллельной оси, проходящей через точку O , с угловой скоростью $\omega'' = \omega$ в совокупности с поступательным движением со скоростью v_O .

Модуль и направление момента v пары угловых скоростей ω , ω' определяются так же, как в статике определялись модуль и направление момента M пары сил P , P' .

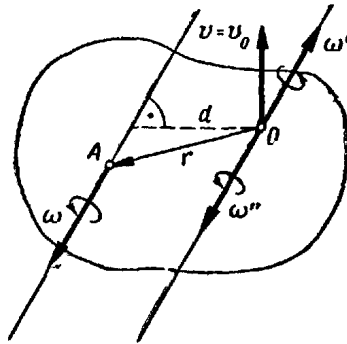


Рис. 379.

При этом

$$v = v_O = r \times \omega$$

и

$$v = v_O = \omega \cdot d,$$

где v_O — скорость поступательного движения, соответствующего приведенной паре угловых скоростей.

Предположим теперь, что в некоторый момент времени дана система угловых скоростей $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, приложенных в точках A_1, A_2, \dots, A_n , и система поступательных скоростей u_1, u_2, \dots, u_n , характеризующих движение твердого тела (рис. 380). Выберем произвольный центр приведения O и приведем все векторы $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ к этому центру.

Приведенные векторы, согласно § 129, можно заменить одним вектором ω , равным их геометрической сумме:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = \sum \omega_i.$$

При переносе векторов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ в точку O образовалось n пар угловых скоростей.

Момент каждой присоединенной пары угловых скоростей равен соответствующей поступательной скорости:

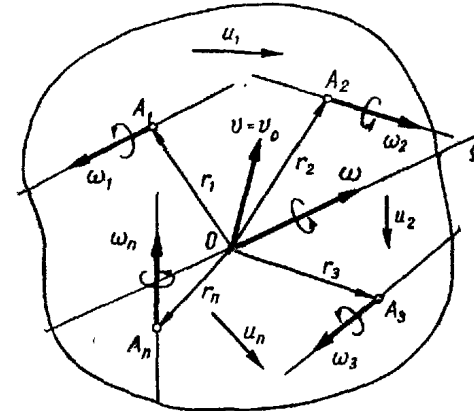


Рис. 380.

$$v_1 = v_{1O} = r_1 \times \omega_1,$$

$$v_2 = v_{2O} = r_2 \times \omega_2,$$

.....

$$v_n = v_{nO} = r_n \times \omega_n,$$

где $r_1 = \overline{OA_1}$, $r_2 = \overline{OA_2}$, ..., $r_n = \overline{OA_n}$.

Так как поступательные скорости являются свободными векторами, то их можно перенести в центр приведения.

Результирующую поступательную скорость v_O найдем как геометрическую сумму по-

ступательных скоростей $v_{1O}, v_{2O}, \dots, v_{nO}$, соответствующих парам угловых скоростей, и скоростей заданных поступательных движений твердого тела u_1, u_2, \dots, u_n :

$$v_O = v_{1O} + v_{2O} + \dots + v_{nO} + u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Таким образом, в результате приведения заданная совокупность движений твердого тела оказалась замененной одним вращением вокруг мгновенной оси Q , проходящей через точку O , с угловой скоростью ω и поступательным движением со скоростью v_O .

Эта замена движений эквивалентными движениями аналогична замене заданной системы сил и пар в статике одной силой, равной

главному вектору R^* , и одной парой с моментом, равным главному моменту сил относительно центра приведения $M = M_O$.

Рассмотрим возможные случаи приведения аналогично тому, как это проводилось в разделе „Статика“.

Случай I: $\omega = 0$ и $v_O = 0$. Тело находится в состоянии покоя*.

В статике аналогичным является случай, когда $R^* = 0$ и $M_O = 0$, при котором силы уравниваются.

Случай II: $\omega = 0$, $v_O \neq 0$. Тело движется поступательно. Скорость этого движения v_O можно рассматривать как момент пары угловых скоростей (рис. 381), модуль которого

$$v_O = v = \omega d.$$

В статике этому случаю соответствует пара сил, момент которой $M = Pd$ (рис. 382).

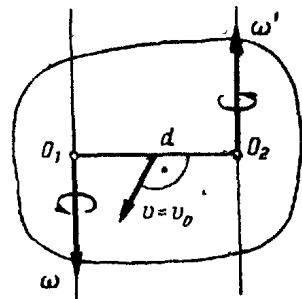


Рис. 381.

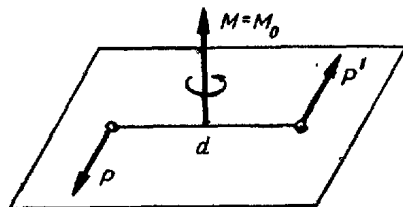


Рис. 382.

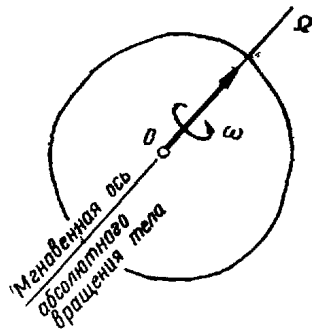


Рис. 383.

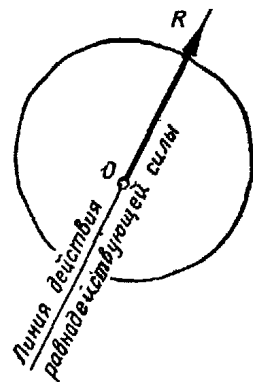


Рис. 384.

Случай III: $\omega \neq 0$, $v_O = 0$. Тело совершает сферическое движение вокруг точки O с угловой скоростью ω (рис. 383), а в случае неизменности направления ω вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O . В статике этому случаю соответствует приведение сил к равнодействующей силе R , линия действия которой проходит через центр приведения (рис. 384).

* Здесь и ниже имеется в виду, что указанные условия в отношении ω и v_O сохраняются в течение некоторого промежутка времени.

Случай IV: $\omega \neq 0$, $v_O \neq 0$ и $v_O \perp \omega$. Тело совершает плоское движение. Пусть после приведения угловых и поступательных скоростей к центру O получен вектор ω и вектор v_O , перпендикулярный ω (рис. 385).

Заменим поступательную скорость v_O парой угловых скоростей с моментом $v = v_O$, лежащей в плоскости, перпендикулярной v , выбрав угловые скорости равными по модулю ω и определив плечо $d = \frac{v_O}{\omega}$. Поместим один из векторов угловой скорости пары

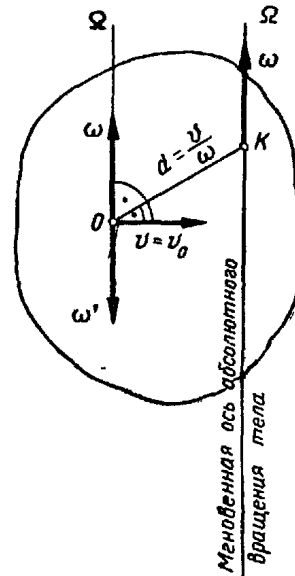


Рис. 385.

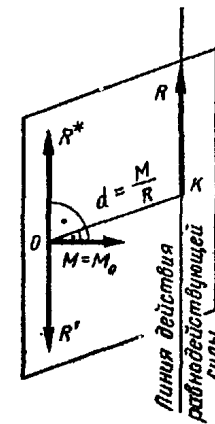


Рис. 386.

вращений ω' в точку O , а другой, равный ω , в точку K на расстоянии $OK = d$, отложенном перпендикулярно ω в такую сторону, чтобы по отношению к паре угловых скоростей вектор скорости поступательного движения v_O был расположен так же, как по отношению к паре сил расположен ее момент M (рис. 385 и 386).

Тогда равные и противоположно направленные векторы ω и ω' в точке O можно отбросить, так как соответствующие им вращения взаимно компенсируются. Остается только вектор ω , приложенный в точке K .

Тело в этом случае вращается с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси Ω , лежащей в плоскости, перпендикулярной поступательной скорости v_O на расстоянии $OK = \frac{v}{\omega}$ от центра приве-

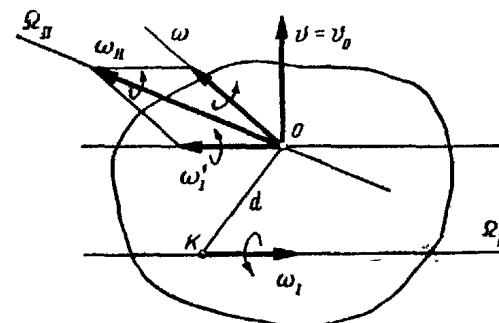


Рис. 387.

дения. В статике этому случаю соответствует приведение сил к равнодействующей силе, линия действия которой находится в плоскости, перпендикулярной главному моменту M_O на расстоянии $OK = \frac{M}{R}$ от центра приведения (рис. 386).

Случай V: $\omega \neq 0$, $v_O \neq 0$ и v_O не $\perp \omega$ — общий случай движения свободного твердого тела. Пусть после приведения угловых и поступательных скоростей к центру O получены векторы ω и v_O (рис. 387). Заменяем поступательную скорость v_O парой угловых скоростей произвольной величины ω'_1 и ω_1 с моментом $v = v_O$ и плечом $OK = d = \frac{v}{\omega_1}$.

Сложив по правилу параллелограмма векторы угловых скоростей ω и ω'_1 в точке O , получим

$$\omega_{II} = \omega + \omega'_1.$$

Движение тела сводится к двум вращениям вокруг скрещивающихся мгновенных осей Ω_{II} и Ω_I , проходящих через точки O и K , с угловыми скоростями ω_{II} и ω_1 .

В статике этому случаю соответствует приведение сил к двум скрещивающимся силам P и Q (рис. 388).

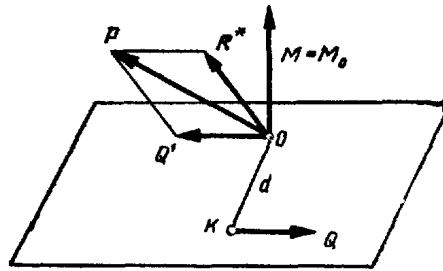


Рис. 388.

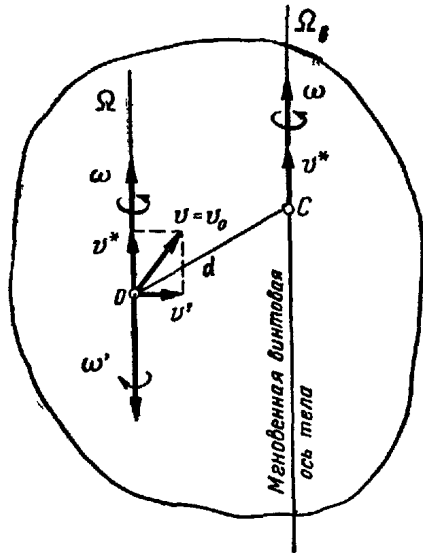


Рис. 389.

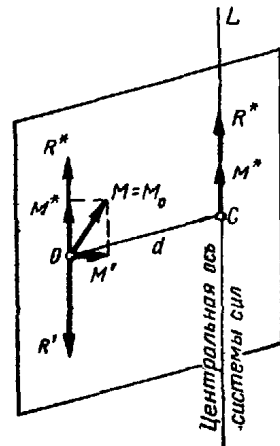


Рис. 390.

Рассмотрим другое представление этого же случая. Пусть после приведения угловых и поступательных скоростей к центру O полу-

чены вектор ω и вектор поступательной скорости $v_O = v$, не перпендикулярный ω (рис. 389). Разложим поступательную скорость на две скорости: v^* , направленную вдоль вектора ω , и v' , перпендикулярную ω . Поступательную скорость v' заменим парой угловых скоростей ω' и ω с плечом $OC = d = \frac{v'}{\omega}$.

Векторы ω и ω' в точке O как равные по модулю и противоположно направленные отбросим, а момент пары вращений v^* как свободный вектор перенесем из точки O в точку C .

Тогда векторы ω и v^* будут направлены вдоль одной прямой, проходящей через точку C .

Таким образом, движение свободного твердого тела можно рассматривать как совокупность его вращения с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси Ω_s и поступательного движения вдоль этой оси со скоростью v^* .

Совокупность этих движений называется *мгновенным винтовым движением*, а мгновенная ось Ω_s называется *мгновенной винтовой осью*. Так как точки мгновенной винтовой оси не участвуют во вращении, то их скорости геометрически равны v^* .

Таким образом, *мгновенная винтовая ось представляет собой геометрическое место точек тела, скорости которых равны по модулю и направлены вдоль этой оси*.

В статике этому случаю соответствует приведение сил к динаме (рис. 390).

Общий случай движения свободного твердого тела можно представить в виде мгновенного винтового движения или в виде двух мгновенных вращений вокруг скрещивающихся осей. Если принять за полюс какую-либо точку C мгновенной винтовой оси, то скорость любой точки тела M определится как диагональ прямоугольника, построенного на скорости полюса v^* и вращательной скорости точки M вокруг мгновенной винтовой оси (рис. 391):

$$v_M = \sqrt{v^{*2} + v'^2}.$$

Здесь $v' = \omega \cdot h_{\Omega_s}$, где h_{Ω_s} — перпендикуляр, опущенный из точки M на мгновенную винтовую ось.

При увеличении расстояния h_{Ω_s} точки от мгновенной винтовой оси увеличивается ее вращательная скорость v' , а следовательно, и абсолютная скорость точки v_M .

Положение мгновенной винтовой оси как в неподвижном пространстве, так и в движущемся теле с течением времени изменяется.

Линейчатая поверхность, представляющая собой геометрическое место мгновенных винтовых осей в неподвижном про-

пространстве, называется неподвижным аксоидом мгновенных винтовых осей.

Линейчатая поверхность, представляющая собой геометрическое место мгновенных винтовых осей в движущемся теле, называется подвижным аксоидом мгновенных винтовых осей.

В каждый момент времени эти аксоиды соприкасаются по общей производящей, являющейся мгновенной винтовой осью для данного момента времени, и одновременно подвижной аксоид перемещается относительно неподвижного со скоростью \mathbf{v}^* , направленной по линии их соприкосновения.

Таким образом, при действительном движении свободного твердого тела подвижной аксоид мгновенных винтовых осей катится по

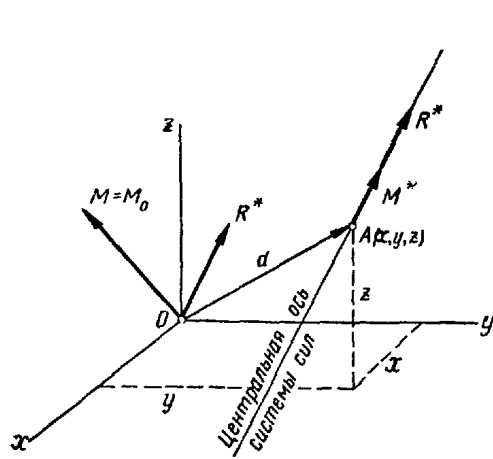


Рис. 392.

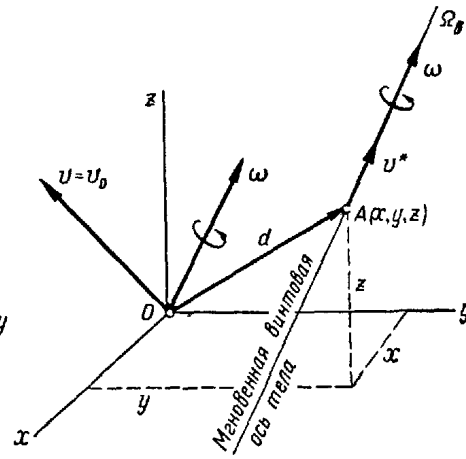


Рис. 393.

неподвижному аксоиду и в то же время скользит вдоль линии их соприкосновения.

В статике установлена следующая зависимость между главным моментом сил относительно центра приведения M_0 , наименьшим главным моментом системы сил M^* и главным вектором R^* :

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M}_0 - \mathbf{d} \times \mathbf{R}^*,$$

где \mathbf{d} — радиус-вектор произвольной точки центральной оси системы сил относительно центра приведения (рис. 392).

В кинематике существует аналогичная зависимость между результирующим вектором поступательных скоростей \mathbf{v}_0 , наименьшей поступательной скоростью \mathbf{v}^* и результирующим вектором угловых скоростей ω :

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_0 - \mathbf{d} \times \omega,$$

где \mathbf{d} — радиус-вектор произвольной точки мгновенной винтовой оси относительно центра приведения (начала координат) (рис. 393).

Выражая эту зависимость в проекциях на неподвижные оси декартовых координат x, y, z , получаем:

$$v_x^* = v_x - (y\omega_z - z\omega_y);$$

$$v_y^* = v_y - (z\omega_x - x\omega_z);$$

$$v_z^* = v_z - (x\omega_y - y\omega_x),$$

где x, y, z — текущие координаты точек мгновенной винтовой оси.

Так как векторы \mathbf{v}^* и ω параллельны, то их одноименные проекции пропорциональны.

Пользуясь этим, получим уравнения мгновенной винтовой оси:

$$\frac{v_x^*}{\omega_x} = \frac{v_y^*}{\omega_y} = \frac{v_z^*}{\omega_z} = \frac{v^*}{\omega}$$

или

$$\frac{v_x - (y\omega_z - z\omega_y)}{\omega_x} = \frac{v_y - (z\omega_x - x\omega_z)}{\omega_y} = \frac{v_z - (x\omega_y - y\omega_x)}{\omega_z} = \frac{v^*}{\omega}.$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям центральной оси системы сил.

В статике установлены два инварианта системы сил:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}^* &= \text{const}, & X^2 + Y^2 + Z^2 &= \text{const}; \\ \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{M}_0 &= XM_x + YM_y + ZM_z = \text{const}. \end{aligned} \right\}$$

В кинематике также имеются два инварианта, т. е. две величины, не зависящие от положения центра приведения:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \text{const}; & \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 &= \text{const}; \\ \omega \cdot \mathbf{v}_0 &= \omega_x v_x + \omega_y v_y + \omega_z v_z = \text{const}. \end{aligned} \right\}$$

Минимальная поступательная скорость $\mathbf{v}_{\min} = \mathbf{v}^*$ направлена вдоль мгновенной винтовой оси и ее алгебраическая величина равна:

$$v_{\min} = v^* = v_0 \cos(\omega, \mathbf{v}_0);$$

$$v_{\min} = \frac{\omega \cdot \mathbf{v}_0}{\omega} = \frac{\omega_x v_x + \omega_y v_y + \omega_z v_z}{\omega}.$$

Отношение минимальной поступательной скорости v_{\min} к угловой скорости результирующего вращения тела ω называется *параметром кинематического винта*

$$p = \frac{v_{\min}}{\omega} = \frac{\omega \cdot \mathbf{v}_0}{\omega^2} = \frac{\omega_x v_x + \omega_y v_y + \omega_z v_z}{\omega^2}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что представляет собой абсолютное движение тела, участвующего в нескольких вращениях вокруг сходящихся мгновенных осей?
2. Как по уравнениям сферического движения твердого тела определяют его угловую скорость?

3. Каковы проекции углового ускорения тела при сферическом движении на неподвижные и подвижные координатные оси?

4. Как определяют угловую скорость твердого тела, вращающегося вокруг двух параллельных осей в одну и в разные стороны?

5. Что называют парой вращений и при каком условии пара вращений эквивалентна поступательному движению? Чему равна скорость этого поступательного движения?

6. Какие понятия статики аналогичны угловой скорости вращения тела и поступательной скорости?

7. В чем заключается правило приведения вектора угловой скорости к заданному центру?

8. Что представляет собой движение твердого тела, участвующего в нескольких вращениях вокруг произвольных осей и в нескольких поступательных движениях?

9. Сравните все возможные случаи приведения угловых и поступательных скоростей к заданному центру с аналогичными случаями приведения системы сил в статике.

10. Что называется мгновенной винтовой осью вращения твердого тела и каковы ее уравнения?

11. В каком виде при помощи мгновенной винтовой оси может быть представлен общий случай движения свободного твердого тела?

12. Что называют подвижным и неподвижным аксоидом мгновенных винтовых осей и как перемещается подвижной аксоид при движении свободного твердого тела?

13. Укажите распределение скоростей точек свободного твердого тела?

14. Скорости каких точек свободного твердого тела являются наименьшими?

15. Скорости каких точек свободного твердого тела равны между собой по модулю?

16. Какие характеристики движения свободного твердого тела не зависят от выбора центра приведения?

17. Что называют параметром кинематического винта?

Механические величины и единицы их измерения

| Физическая величина | | Формулы размерностей | | Система единиц МКС | |
|---|---------------|-----------------------------|-------------------------|---|---|
| название | обозначение | в системе LMT (МКС и СГС) | в системе LPT (МКГСС) | единица измерения | сокращенное обозначение |
| Длина | l | L | | метр | $м$ |
| Масса | m | M | $L^{-1}PT^2$ | килограмм | $кг$ |
| Время | t | T | | секунда | $сек$ |
| Сила | P | LMT^{-2} | P | ньютон (килограмм-метр на секунду в квадрате) | $н$ ($кг \cdot м/сек^2$) |
| Вес | G | | | | |
| Плоский угол | φ | 1 | | радиан | $рад$ |
| Угловая скорость | ω | T^{-1} | | радиан в секунду | $сек^{-1}$ |
| Угловое ускорение | ε | T^{-2} | | радиан на секунду в квадрате | $сек^{-2}$ |
| Скорость | v | LT^{-1} | | метр в секунду | $м/сек$ |
| Ускорение | w | LT^{-2} | | метр на секунду в квадрате | $м/сек^2$ |
| Площадь | F | L^2 | | квадратный метр | $м^2$ |
| Объем | V | L^3 | | кубический метр | $м^3$ |
| Удельный вес | γ | $L^{-2}MT^{-2}$ | $L^{-3}P$ | ньютон на кубический метр | $н/м^3$ ($кг/м^2 \cdot сек^2$) |
| Плотность | ρ | $L^{-3}M$ | $L^{-4}PT^2$ | килограмм на кубический метр | $кг/м^3$ |
| Механическое напряжение, давление | p | $L^{-1}MT^{-2}$ | $L^{-2}P$ | ньютон на квадратный метр | $н/м^2$ ($кг/м \cdot сек^2$) |
| Импульс силы | S | LMT^{-1} | PT | ньютон-секунда | $н \cdot сек$ ($кг \cdot м/сек$) |
| Количество движения | K | | | килограмм-метр в секунду | $кг \cdot м/сек$ |
| Момент силы | M | L^2MT^{-2} | LP | ньютон-метр | $н \cdot м$ ($кг \cdot м^2/сек^2$) |
| Момент инерции (динамический) | J | L^2M | LPT^2 | килограмм-метр в квадрате | $кг \cdot м^2$ |
| Момент количества движения | L | L^2MT^{-1} | LPT | килограмм-метр в квадрате в секунду | $кг \cdot м^2/сек$ |
| Работа | A | L^2MT^{-2} | LP | джоуль | $дж$ ($кг \cdot м^2/сек^2$) |
| Энергия | E | | | | |
| Мощность | N | L^2MT^{-3} | LPT^{-1} | ватт | $вт$ ($кг \cdot м^2/сек^3$) |

Таблица 1

в системах СИ (МКС), СГС и МКГСС

| Система единиц СГС | | Система единиц МКГСС | |
|--|--|---|--------------------------------------|
| единица измерения | сокращенное обозначение | единица измерения | сокращенное обозначение |
| сантиметр | см | метр | м |
| грамм | г | техническая единица массы (килограмм-сила-секунда в квадрате на метр) | т. е. м. (кгс·сек ² /м) |
| секунда | сек | секунда | сек |
| дина (грамм-сантиметр на секунду в квадрате) | дин (г·см/сек ²) | килограмм-сила | кгс |
| радиан | рад | радиан | рад |
| радиан в секунду | сек ⁻¹ | радиан в секунду | сек ⁻¹ |
| радиан на секунду в квадрате | сек ⁻² | радиан на секунду в квадрате | сек ⁻² |
| сантиметр в секунду | см/сек | метр в секунду | м/сек |
| сантиметр на секунду в квадрате | см/сек ² | метр на секунду в квадрате | м/сек ² |
| квадратный сантиметр | см ² | квадратный метр | м ² |
| кубический сантиметр | см ³ | кубический метр | м ³ |
| дина на кубический сантиметр | дин/см ³ (г·см ² /сек ²) | килограмм-сила на кубический метр | кгс/м ³ |
| грамм на кубический сантиметр | г/см ³ | килограмм-сила-секунда в квадрате на метр в четвертой степени | кгс·сек ² /м ⁴ |
| дина на квадратный сантиметр | дин/см ² (г/см·сек ²) | килограмм-сила-на квадратный метр | кгс/м ² |
| дина-секунда | дин·сек (г·см/сек) | килограмм-сила-секунда | кгс·сек |
| грамм-сантиметр в секунду | г·см/сек | т. е. м. -метр в секунду | |
| дина-сантиметр | дин·см (г·см ² /сек ²) | килограмм-сила-метр | кгс·м |
| грамм-сантиметр в квадрате | г·см ² | килограмм-сила-метр-секунда в квадрате | кгс·м·сек ² |
| грамм-сантиметр в квадрате в секунду | г·см ² /сек | килограмм-сила-метр-секунда | кгс·м·сек |
| эрг | эрг (г·см ² /сек ²) | килограмм-сила-метр | кгс·м |
| эрг в секунду | эрг/сек (г·см ² /сек ³) | килограмм-сила-метр в секунду | кгс·м/сек |

Соотношения между единицами механических величин

| Название механической величины | Основные единицы измерения и соотношения между единицами различных систем |
|--------------------------------|---|
| Масса | 1 килограмм (кг) = 0,102 т. е. м. 1 техническая единица массы (т. е. м.) = 9,81 кг |
| Сила | 1 ньютон (н) = 10 ⁵ дин = 0,102 кгс 1 килограмм-сила (кгс) = 9,81 н |
| Работа | 1 джоуль (дж) = 10 ⁷ эргов (эрг) = 0,102 кгс·м 1 килограмм-сила-метр (кгс·м) = 9,81 дж 1 ватт-час (вт·ч) = 3600 вт·сек = 3600 дж 1 киловатт-час (квт·ч) = 36·10 ⁵ дж |
| Мощность | 1 ватт (вт) = 1 дж/сек = 10 ⁷ эрг/сек = 0,102 кгс·м/сек 1 кгс·м/сек = 9,81 вт 1 киловатт (квт) = 10 ³ вт = 102 кгс·м/сек = 1,36 л. с. 1 лошадиная сила (л. с.) = 75 кгс·м/сек = 736 вт = 0,736 квт |

ИМЕННОЙ И ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксиомы статики 9
 Аксиоид
 — винтовых осей неподвижный 422
 — винтовых осей подвижный 423
 — мгновенных осей неподвижный 336
 — мгновенных осей подвижный 336
 Амонтон 73
 Амплитуда колебаний 233
 Аналогия кинематики со статикой 416
 Аристотель 4
 Арка
 — двухшарнирная 52
 — трехшарнирная 23, 52, 63
 Архимед 4
 Ассур 182

Балка 13, 56, 58
 Бернулли Д. 5
 Бернулли И. 5
 Бинормаль кривой 204

Вариант 5, 6
 Вектор
 — главный системы сил 44, 118
 — единичный 25, 95
 — кривизны 205
 — момента пары сил 105
 — момента силы 110
 — свободный 107
 — скользящий 10
 — скорости 189
 — угловой скорости 250
 — углового ускорения 250
 — ускорения 200
 — функция 184

Веревочный многоугольник 82
 Взаимодействие механическое 8
 Вращение
 — равномерное 242
 — равнопеременное 243
 Время 182

Галилей 5, 9
 Годограф
 — радиуса вектора 184
 — скорости 196
 График
 — движения 228
 — касательного ускорения 230
 — пути 229
 — скорости 229
 График гармонического колебательного движения точки 232
 Графическая статика 82
 Гюйгенс 182

Даламбер 330
 Движение
 — абсолютное 351
 — вращательное 239
 — криволинейное 183
 — механическое 7, 181
 — неравномерное 199
 — относительное 352
 — переносное 352
 — плоское 261
 — плоской фигуры 262
 — поступательное 237
 — прямолинейное 183
 — равномерное 211
 — равнопеременное 212
 — составное 351

429

Движение свободного твердого тела 342
 — сферическое 328
 Диаграмма Максвелла — Кретоны 91
 Динама 124
 Динамика 7

Естественные координатные оси 204

Жуковский Н. Е. 6, 359

Задача
 — статически неопределенная 50
 — статически определенная 50
 Заделка жесткая 55
 Зацепление
 — внешнее 255
 — внутреннее 255

Изменение центра приведения 128
 Инварианты статической системы сил 129

Кардан 299
 Кеплер 5
 Кинематика 7
 — твердого тела 237
 — точки 181

Кинематического винта параметр 424
 Кинематическое состояние тела 8
 Классификация движений точки 210
 Ковалевская С. В. 6
 Колеса эллиптические 257
 Компоненты силы 25
 Конус сцепления 70
 Координата
 — угловая вращающегося тела 240
 — дуговая 183
 Координаты полярные 376
 — центра тяжести 160
 Коперник 5
 Кориолис 182, 357
 Коэффициент
 — скольжения 74
 — сцепления 73
 — устойчивости 69
 Кривизна кривой 206
 Кретоны Л. 91
 Крылов А. Н. 6
 Кулон Ш. 73

Лагранж 5
 Леммы о нулевых стержнях 33
 Ленин В. И. 8

430

Леонардо-да-Винчи 5
 Линия
 — действия силы 8
 — узлов 328
 Ломоносов М. В. 6
 Ляпунов А. М. 6

Максвелл Дж. 91
 Масса 7
 Материальная точка 7
 Мгновенное винтовое движение 422
 Мгновенный центр
 — вращения 292
 — скоростей 277
 — ускорений 308
 Мерцалов Н. И. 182
 Метод
 — Пуансо 43, 116
 — сечения 14, 66
 Механика 4
 — теоретическая 7
 Механизм кривошипный 218, 285, 323
 Механическая система 7
 Мещерский И. В. 6
 Многоугольник
 — моментов сил 114
 — моментов пар сил 109
 — силовой 16, 95
 — сил замкнутый 17, 96
 — угловых скоростей 388
 Момент
 — главный системы сил 36, 114
 — главный относительно оси 115
 — пары сил 38, 104
 — силы относительно оси 111
 — силы относительно центра 35, 110
 — статический площади 161
 — эквивалентной пары сил 109

Направление силы 8
 Нормаль главная 204
 Ньютон 5

Область равновесия 76
 Опора
 — шарнирно-неподвижная 13
 — шарнирно-подвижная 14
 Орт
 — касательной 204
 — главной нормали 204
 — бинормали 204
 Орты координатных осей 25, 97
 Оси
 — декартовых координат 96
 — естественные 204
 — полярных координат 376

Остроградский М. В. 6
 Ось
 — вращения 222
 — мгновенная 332
 — мгновенная винтовая 422
 — углового ускорения 333
 — центральная системы сил 125

Паппа — Гульдена теоремы 165, 166
 Пара
 — вращений 404
 — сил 36, 104
 — присоединенная 43, 117
 Пары эквивалентные 39, 106
 Параллелограмм
 — сил 10
 — скоростей 355
 — угловых скоростей 386
 — ускорений 357
 Передаточные механизмы 253
 Передаточное число 254
 Период колебаний 233
 План скоростей 272
 Плечо
 — пары сил 37
 — силы относительно центра (точки) 35, 116
 Плоскость
 — действия пары сил 104
 — нормальная 204
 — соприкасающаяся 204
 — спрямляющая 204
 Покой тела 8, 9
 Понселе 182
 Правило
 — Жуковского 359
 — параллелограмма сил 10
 — параллелепипеда сил 96
 Прецессия регулярная 398
 Приведение системы сил
 — к данному центру 43, 116
 — к простейшему виду 45, 135
 Принцип освобождаемости твердых тел от связей 12
 Производная векторная 189
 Проекция на оси
 — декартовых координат вектора угловой скорости 251
 — главного вектора 45, 49, 118, 133
 — равнодействующей 27, 98
 — силы 25, 96
 — скорости 194
 — ускорения 201
 Проекция ускорения на естественные оси 208
 Птоломей 5
 Пуансо 6, 43, 116, 295

Равнодействующая 8
 — двух параллельных сил 37
 — плоской системы сил 46
 — произвольной системы сил 121
 — системы параллельных сил 157
 — сходящихся сил 16, 96
 Радиан 240
 Разложение силы на составляющие 15
 Размах колебаний 233
 Реакция связи 12
 Риттера способ 66
 Рычаг 69

Связи 11
 Сила 8
 — трения скольжения 74
 — сцепления 73
 Силы
 — внешние 9
 — внутренние 9
 — задаваемые 12, 17, 69, 142, 145
 — параллельные 49, 133
 — скрещивающиеся 124
 — сходящиеся 15, 95
 Силовой винт (динама) 123
 Система
 — материальных точек 7
 — сил 8
 — сил параллельных 49, 133
 — сил произвольно расположенных в пространстве 116
 — сил произвольно расположенных на плоскости 43
 — сил сходящихся 15, 95
 — сил взаимно уравновешивающихся 15, 95
 — сил эквивалентная 8
 Скорость точки 188
 — абсолютная 352
 — относительная 352
 — переносная 352
 — радиальная 377
 — средняя 189, 193
 Скорость 188
 — трансверсальная 377
 — полюса 266, 345
 — тела угловая 241
 Сложение вращений твердого тела
 — вокруг параллельных осей 398
 — вокруг пересекающихся осей 386
 Сложение
 — пар сил 41, 107
 — скоростей 353
 — ускорений 355
 Способ вырезания узлов 30
 Способы определения движения точки 182, 184, 185

Статика 7
 Стержень
 — опорный 30
 — растянутый 15
 — сжатый 15
 Сцепление 73

Тело
 — абсолютно твердое 8
 — несвободное 12
 — свободное 11
 Теорема
 — Вариньона 46, 122
 — Кориолиса 355
 — Пуансо 294
 — Ривальса 338, 349
 — Шаля 290
 — Эйлера — Даламбера 330
 Траектория точки 183
 Трение скольжения 73
 Треугольник сил 15

Угол
 — нутации 329
 — поворота 240
 — прецессии 329
 — собственного вращения 329
 — сцепления 75
 — трения 75
 Узел фермы 29
 Уравнение вращательного движения тела 240
 Уравнения движения точки
 — в векторной форме 184
 — в координатной форме 185
 — в полярных координатах 376
 Уравнения
 — линии действия равнодействующей силы 132
 — плоского движения твердого тела 264
 — поступательного движения твердого тела 239
 — свободного движения твердого тела 345
 — сферического движения твердого тела 329
 — равновесия сил 27, 47, 50, 98, 120, 134

Уравнения
 — траектории точки в координатной форме 186
 — траектории точки в параметрической форме 186
 — центральной оси системы сил 131
 — центроид 295
 Усиление внутреннее 14
 Ускорение 199
 — абсолютное 352
 — вращательное 246
 — касательное 208
 — нормальное 208
 — осестремительное 338
 — относительное 352
 — переносное 352
 — поворотное (кориолисово) 358
 — полюса 302, 350
 — угловое 250
 — центростремительное 246
 Устойчивость при опрокидывании 70

Фаза колебаний 233
 — колебаний начальная 233
 Ферма 29, 66, 67
 Формулы Эйлера 252

Центральная ось системы сил 130
 Центр
 — кривизны кривой 206
 — параллельных сил 157
 — приведения 44, 117
 — тяжести 159, 161, 162
 Центроида
 — неподвижная 294
 — подвижная 294
 Циолковский К. Э. 6

Чаплыгин С. А. 6
 Частота колебаний циклическая 233
 Чебышев П. Л. 6
 Число степеней свободы 345

Шаль 5
 Шарниры идеальные 29

Эйлер 6, 336
 Эйлеровы углы 328
 Энгельс 4, 181

| | |
|--|---|
| Предисловие | 3 |
| Из истории развития механики | 4 |

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Глава I. Введение

| | |
|--|----|
| § 1. Основные понятия статики | 7 |
| § 2. Аксиомы статики | 9 |
| § 3. Несвободное твердое тело. Связи. Реакции связей | 11 |

Глава II. Система сходящихся сил на плоскости

| | |
|---|----|
| § 4. Сложение двух сходящихся сил. Параллелограмм и треугольник сил | 15 |
| § 5. Многоугольник сил. Условие равновесия сходящихся сил | 16 |
| § 6. Примеры на построение замкнутого треугольника сил | 17 |
| § 7. Теорема о равновесии трех непараллельных сил | 21 |
| § 8. Примеры на применение теоремы о равновесии трех непараллельных сил | 21 |
| § 9. Проекция силы на две взаимно перпендикулярные оси на плоскости | 25 |
| § 10. Аналитический способ определения равнодействующей сходящихся сил на плоскости. Уравнения равновесия сил | 27 |
| § 11. Определение усилий в стержнях плоских ферм по способу вырезания узлов. Леммы о нулевых стержнях | 29 |
| Вопросы для самоконтроля | 35 |

Глава III. Теория пар сил, лежащих в одной плоскости

| | |
|--|-----|
| § 12. Момент силы относительно точки на плоскости | 35 |
| § 13. Пара сил. Теорема о моменте пары | 36 |
| § 14. Теорема о возможности перемещения пары сил в плоскости ее действия | 38 |
| | 433 |

| | |
|---|----|
| § 15. Теорема об условии эквивалентности пар | 39 |
| § 16. Теорема о сложении пар на плоскости | 40 |
| § 17. Примеры на применение условия равновесия пар на плоскости | 41 |

Глава IV. Система сил, произвольно расположенных на плоскости

| | |
|---|----|
| § 18. Приведение силы к заданному центру | 43 |
| § 19. Приведение системы сил, произвольно расположенных на плоскости, к силе и паре. Главный вектор и главный момент | 44 |
| § 20. Возможные случаи приведения сил, произвольно расположенных на плоскости | 45 |
| § 21. Уравнения равновесия системы сил, произвольно расположенных на плоскости | 47 |
| § 22. Сложение параллельных сил на плоскости. Уравнения равновесия параллельных сил | 49 |
| § 23. Статически определенные и статически неопределенные задачи. Определение реакций внешних и внутренних связей системы взаимосвязанных тел | 50 |
| § 24. Примеры на равновесие параллельных сил на плоскости | 53 |
| § 25. Примеры на равновесие плоской системы сил | 58 |
| § 26. Определение усилий в стержнях ферм по способу Риттера | 66 |
| § 27. Условие равновесия сил, приложенных к рычагу. Устойчивость при опрокидывании. Коэффициент устойчивости | 69 |
| § 28. Примеры на применение условия равновесия сил, приложенных к рычагу | 71 |
| § 29. Сцепление и трение скольжения | 73 |
| § 30. Примеры на равновесие сил, приложенных к твердому телу при наличии сил сцепления | 76 |
| Вопросы для самоконтроля | 81 |

Глава V. Графическая статика

| | |
|--|----|
| § 31. Многоугольник сил и веревочный многоугольник. Графическое определение равнодействующей плоской системы сил | 82 |
| § 32. Случай замкнутого многоугольника сил. Графическое определение момента результирующей пары сил | 84 |
| § 33. Графические условия равновесия плоской системы сил | 85 |
| § 34. Примеры применения веревочного многоугольника | 86 |
| § 35. Диаграмма Максвелла — Кремоны и примеры ее построения | 91 |
| Вопросы для самоконтроля | 95 |

Глава VI. Система сходящихся сил в пространстве

| | |
|---|----|
| § 36. Многоугольник сил. Параллелепипед сил | 95 |
| § 37. Проекция силы на оси декартовых координат | 96 |
| § 38. Аналитический способ определения равнодействующей системы сходящихся сил в пространстве. Уравнения равновесия сил | 97 |
| § 39. Примеры на равновесие сходящихся сил | 99 |

Глава VII. Теория пар сил в пространстве

| | |
|---|-----|
| § 40. Момент пары сил | 104 |
| § 41. Теорема о возможности переноса пары сил в любую плоскость, параллельную плоскости действия пары | 105 |
| § 42. Теорема об эквивалентных парах | 106 |
| § 43. Сложение пар сил в пространстве. Условие равновесия пар | 107 |

| | <i>Стр.</i> |
|---|-------------|
| <i>Глава VIII. Момент силы относительно точки и относительно оси</i> | |
| § 44. Момент силы относительно точки как векторное произведение | 110 |
| § 45. Момент силы относительно оси | 111 |
| § 46. Зависимость между моментом силы относительно точки и моментом силы относительно оси, проходящей через эту точку | 112 |
| § 47. Аналитические выражения моментов силы относительно координатных осей | 113 |
| § 48. Главные моменты системы сил относительно точки и относительно оси | 114 |
| § 49. Зависимость между главными моментами системы сил относительно точки и оси, проходящей через эту точку | 115 |
| Вопросы для самоконтроля | 116 |
| <i>Глава IX. Система сил, произвольно расположенных в пространстве</i> | |
| § 50. Приведение силы к заданному центру | 116 |
| § 51. Сложение сил, произвольно расположенных в пространстве | 117 |
| § 52. Вычисление главного вектора и главного момента | 118 |
| § 53. Условия и уравнения равновесия сил, произвольно расположенных в пространстве | 119 |
| § 54. Приведение системы сил к паре сил | 120 |
| § 55. Приведение системы сил к равнодействующей силе | 121 |
| § 56. Теорема о моменте равнодействующей силы (теорема Вариньона) | 122 |
| § 57. Приведение произвольной системы сил к двум скрещивающимся силам или к силовому винту (динаме) | 123 |
| § 58. Влияние положения центра на результаты приведения к этому центру системы сил в пространстве. Инварианты системы сил | 127 |
| § 59. Уравнения центральной оси системы сил и линии действия равнодействующей | 130 |
| § 60. Сложение параллельных сил в пространстве. Условия и уравнения равновесия параллельных сил | 132 |
| § 61. Примеры на приведение системы сил к простейшему виду | 135 |
| § 62. Условия равновесия сил, приложенных к несвободному твердому телу. Определение реакций опор | 142 |
| § 63. Примеры на равновесие сил, произвольно расположенных в пространстве | 145 |
| Вопросы для самоконтроля | 155 |
| <i>Глава X. Центр тяжести</i> | |
| § 64. Последовательное сложение параллельных сил. Центр параллельных сил | 156 |
| § 65. Формулы радиуса вектора и координат центра параллельных сил | 157 |
| § 66. Центр тяжести твердого тела | 159 |
| § 67. Центр тяжести плоской фигуры. Статический момент площади плоской фигуры относительно оси | 161 |
| § 68. Центр тяжести линии | 162 |
| § 69. Вспомогательные теоремы для определения положения центра тяжести | 163 |
| § 70. Определение положения центра тяжести плоской фигуры по центрам тяжести ее частей. Способ отрицательных площадей | 167 |
| § 71. Определение положения центра тяжести плоской фигуры путем применения веревочного многоугольника | 168 |

| | <i>Стр.</i> |
|--|-------------|
| § 72. Центр тяжести некоторых линий, плоских фигур и тел | 169 |
| § 73. Примеры на определение положения центра тяжести | 173 |
| Вопросы для самоконтроля | 180 |

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

КИНЕМАТИКА

Глава XI. Кинематические способы задания движения точки

| | |
|---|-----|
| § 74. Введение в кинематику | 181 |
| § 75. Естественный способ задания движения точки | 182 |
| § 76. Векторный способ задания движения точки | 184 |
| § 77. Координатный способ задания движения точки. Уравнения движения точки в декартовых координатах | 185 |
| Вопросы для самоконтроля | 188 |

Глава XII. Скорость точки

| | |
|---|-----|
| § 78. Определение скорости точки при задании ее движения векторным способом. Вектор скорости точки | 188 |
| § 79. Определение скорости точки при задании ее движения естественным способом. Проекция скорости на касательную к траектории | 190 |
| § 80. Определение скорости точки при задании ее движения координатным способом. Проекция скорости точки на неподвижные оси декартовых координат | 194 |
| § 81. Годограф скорости точки и его уравнения | 196 |
| Вопросы для самоконтроля | 199 |

Глава XIII. Ускорение точки

| | |
|---|-----|
| § 82. Определение ускорения точки при задании ее движения векторным способом. Вектор ускорения точки | 199 |
| § 83. Определение ускорения точки при задании ее движения координатным способом. Проекция ускорения точки на неподвижные оси декартовых координат | 201 |
| § 84. Естественные координатные оси. Вектор кривизны | 204 |
| § 85. Определение ускорения точки при задании ее движения естественным способом. Касательное и нормальное ускорения точки | 207 |
| § 86. Классификация движений точки по ускорениям ее движения | 210 |
| § 87. Примеры определения скорости и ускорения точки при задании ее движения естественным способом | 213 |
| § 88. Примеры определения траектории, скорости и ускорения точки при задании ее движения координатным способом | 218 |
| Вопросы для самоконтроля | 228 |
| § 89. Графики движения, пути, скорости и касательного ускорения точки | 228 |
| Вопросы для самоконтроля | 235 |

Глава XIV. Простейшие движения твердого тела

| | |
|--|-----|
| § 90. Поступательное движение твердого тела | 237 |
| § 91. Вращательное движение твердого тела. Уравнение вращательного движения. Угловая скорость и угловое ускорение тела | 239 |
| § 92. Скорости и ускорения точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси | 245 |
| § 93. Примеры на вращательное движение | 247 |

| | <i>Стр.</i> |
|---|-------------|
| § 94. Векторные выражения вращательной скорости, вращательного и центростремительного ускорений | 249 |
| § 95. Передаточные механизмы | 253 |
| § 96. Примеры на преобразование вращательного движения | 258 |
| Вопросы для самоконтроля | 261 |

Глава XV. Плоское движение твердого тела

| | |
|--|-----|
| § 97. Свойства плоского движения твердого тела. Движение плоской фигуры в ее плоскости | 261 |
| § 98. Разложение движения плоской фигуры на поступательное движение вместе с полюсом и вращение вокруг полюса. Уравнения движения плоской фигуры | 263 |
| § 99. Теорема о скоростях точек плоской фигуры и ее следствия | 266 |
| § 100. Примеры на применение теоремы о скоростях точек плоской фигуры | 268 |
| § 101. План скоростей | 272 |
| § 102. Мгновенный центр скоростей | 277 |
| § 103. Примеры на применение мгновенного центра скоростей | 281 |
| § 104. Теорема о центре поворота для конечного перемещения плоской фигуры (теорема Шаля). Мгновенный центр вращения фигуры | 290 |
| § 105. Неподвижная и подвижная центроиды. Теорема о качении подвижной центроиды по неподвижной | 292 |
| § 106. Уравнения неподвижной и подвижной центроид | 295 |
| § 107. Примеры нахождения центроид | 298 |
| § 108. Теорема об ускорениях точек плоской фигуры и ее следствия | 301 |
| § 109. Мгновенный центр ускорений | 308 |
| § 110. Способы определения положения мгновенного центра ускорений | 311 |
| § 111. Примеры на применение теоремы об ускорениях точек плоской фигуры и на определение положения мгновенного центра ускорений | 316 |
| § 112. Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев плоского механизма | 323 |
| Вопросы для самоконтроля | 327 |

Глава XVI. Сферическое движение твердого тела

| | |
|--|-----|
| § 113. Эйлеровы углы. Уравнения сферического движения твердого тела | 328 |
| § 114. Теорема о перемещении твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Угловая скорость тела | 330 |
| § 115. Угловое ускорение тела при сферическом движении | 332 |
| § 116. Скорости точек твердого тела при сферическом движении. Проекция скорости точки тела на оси декартовых координат | 333 |
| § 117. Аксоиды мгновенных осей | 335 |
| § 118. Ускорения точек твердого тела при сферическом движении | 337 |
| Вопросы для самоконтроля | 341 |

Глава XVII. Общий случай движения твердого тела

| | |
|---|-----|
| § 119. Разложение движения свободного твердого тела на поступательное движение вместе с полюсом и сферическое движение вокруг полюса. Уравнения движения свободного твердого тела | 342 |
| § 120. Теорема о скоростях точек свободного твердого тела и ее следствия | 345 |
| | 437 |

| | <i>Стр.</i> |
|---|-------------|
| § 121. Независимость векторов угловой скорости и углового ускорения тела от выбора полюса | 348 |
| § 122. Теорема об ускорениях точек свободного твердого тела | 349 |
| Вопросы для самоконтроля | 350 |

Глава XVIII. Составное движение точки

| | |
|---|-----|
| § 123. Относительное, переносное и абсолютное движения точки | 351 |
| § 124. Теорема о сложении скоростей | 353 |
| § 125. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса) | 355 |
| § 126. Модуль и направление поворотного ускорения (ускорения Кориолиса) | 358 |
| § 127. Примеры на применение теорем о сложении скоростей и о сложении ускорений при поступательном переносном движении | 361 |
| § 128. Примеры на применение теорем о сложении скоростей и о сложении ускорений в случае, когда переносное движение — вращение вокруг неподвижной оси | 370 |
| Вопросы для самоконтроля | 385 |

Глава XIX. Составное движение твердого тела

| | |
|---|-----|
| § 129. Сложение вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей. Параллелограмм и многоугольник угловых скоростей | 386 |
| § 130. Проекция угловой скорости и углового ускорения твердого тела, совершающего сферическое движение, на неподвижные и подвижные оси декартовых координат | 390 |
| § 131. Проекция ускорения точки твердого тела, совершающего сферическое движение, на неподвижные и подвижные оси декартовых координат | 394 |
| § 132. Сложение вращений твердого тела вокруг параллельных осей | 398 |
| § 133. Примеры на сложение вращений твердого тела вокруг параллельных и пересекающихся осей | 405 |
| § 134. Общий случай сложения движений твердого тела. Аналогии со статикой | 416 |
| Вопросы для самоконтроля | 424 |

Приложение

| | |
|--|-----|
| Таблица 1. Механические величины и единицы их измерения в системах СИ (МКС), СГС и МКГСС | 426 |
| Таблица 2. Соотношения между единицами некоторых механических величин | 428 |
| Именной и предметный указатель | 429 |

Александр Александрович Яблонский
Валентина Михайловна Никифорова

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Редактор *Э. Г. Овсянникова*
Технический редактор *С. С. Горохова*
Корректор *И. С. Шмелева*

Т-15816. Печать с матриц. Подписано к печати 2/XII-65 г. Бумага 60×90¹/₁₆. 27,5 печ. л. 25,18 уч.-изд. л. Тираж в пер. № 7 — 10 000 экз., цена 91 коп.; в пер. № 5 — 90 000 экз., цена 84 коп.

Изд. № ОТ — 31/65 г. Заказ 2114.

Тематический план издательства
«Высшая школа» (вузы и техникумы) на 1966 г.
Позиция № 108.

Издательство «Высшая школа»
Москва И-51, Неглинная, 29/14

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров
СССР. Измайловский проспект, 29.